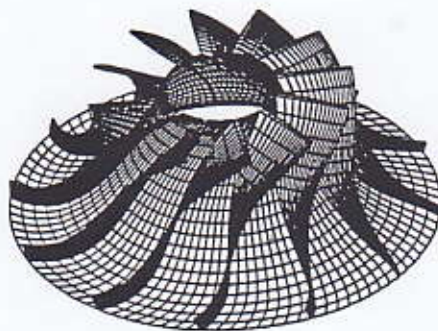




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤ. ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ

"ΣΥΝΕΚΤΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΙΣ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΕΣ"

Πανεπιστημιακές Παραδόσεις



Κ.Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ

Λέκτορας Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ 1997

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΣΥΝΕΚΤΙΚΩΝ ΡΟΩΝ ΣΤΙΣ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΕΣ

Το Μάθημα "Συνεκτικές Ροές στις Στροβιλομηχανές" αποτελεί μάθημα εμβάθυνσης στο γνωστικό αντικείμενο των Θερμικών Στροβιλομηχανών. Διδάσκεται στο 9^ο εξάμηνο των Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ και αποτελεί συνέχεια των Μαθημάτων "Μονοδιάστατη Ανάλυση Θερμικών Στροβιλομηχανών" και "Θερμικές Στροβιλομηχανές σε Τρεις Διαστάσεις", τα οποία διδάσκονται από το Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του Τομέα Ρευστών.

Στο Μάθημα αυτό ο φοιτητής έρχεται σε επαφή με τα ιδιαίτερα προβλήματα ροής που συναντώνται στις στροβιλομηχανές και που κυρίως σχετίζονται με τα συνεκτικά φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα στις πτερυγώσεις τους. Στα πρώτα Κεφάλαια του παρόντος συγγράμματος διατυπώνεται το πρόβλημα ροής που πρέπει να επιλυθεί σε μια πτερύγωση με ένα διαφορικό μοντέλο επίλυσης (λ.χ. την επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes, με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή). Δίνεται έμφαση στη μαθηματική διατύπωση των εξισώσεων ροής, στη μοντελοποίηση των πολύπλοκων χωρίων των στροβιλομηχανών, στη μοντελοποίηση της τύρβης και της μετάβασης από τη στρωτή στην τυρβώδη περιοχή, στις οριακές συνθήκες έτσι όπως πρέπει να επιβάλλονται στις υποηχητικές ή υπερηχητικές πτερυγώσεις κλπ. Οι γνώσεις που αποκτώνται, σε συνδυασμό με ενδεχόμενες γενικότερες γνώσεις Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής, αποτελούν το απαραίτητο υπόβαθρο, σε προπτυχιακό επίπεδο, για τη μοντελοποίηση της ροής στις στροβιλομηχανές, μέσω διαφορικών μεθόδων και ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στα επόμενα Κεφάλαια αναπτύσσονται ειδικά θέματα στροβιλομηχανών που σχετίζονται με τον τριδιάστατο χαρακτήρα της ροής, όπως είναι λ.χ. οι δευτερεύουσες ροές και η ροή από το ακτινικό διάκενο των πτερυγώσεων. Γι'αυτά παρουσιάζονται απλά φυσικά μοντέλα για την προσομοίωσή τους. Τέλος, τὰ τελευταία Κεφάλαια του συγγράμματος αφιερώνονται στις ολοκληρωτικές τεχνικές που επιτρέπουν την ακριβή πρόβλεψη των συνεκτικών φαινομένων στα πτερύγια και τα κελύφη των στροβιλομηχανών, με βάση εμπειρική πληροφορία που έχει συλλεχθεί και κωδικοποιηθεί από μια μεγάλη σειρά σχετικών πειραμάτων.

Παρά το γεγονός ότι σε επιλεγμένα σημεία του παρόντος συγγράμματος η ανάλυση προχωρά σε σημαντικό βάθος, εντούτοις κύριος σκοπός του συγγραφέα παραμένει να δώσει στο φοιτητή ένα περιεκτικό κείμενο που να προκαλεί το ενδιαφέρον του για αναδρομή σε εκτενέστερη βιβλιογραφία. Για το λόγο αυτό, σε διάφορα σημεία της ύλης συνιστώνται σχετικά βιβλία ή σημαντικές δημοσιευμένες εργασίες για περαιτέρω εμβάθυνση.

Η δακτυλογράφηση του κειμένου έγινε από την κ. Ε. Χατζηπαναγιώτου με ιδιαίτερη ταχύτητα και επιμέλεια. Πρώην (Χ. Μαλαματένιος, Β. Μπούρας, Ι. Νικολός) και νυν (Η. Νικολάου, Δ. Κουμπογιάννης, Ε. Πολίτης) μεταπτυχιακοί σπουδαστές του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ συνέβαλαν στη βελτίωση ειδικών θεμάτων που αναπτύσσονται στο σύγγραμμα αυτό. Ο συγγραφέας αισθάνεται την ανάγκη να ευχαριστήσει όλους αυτούς για τη συνεργασία τους.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

* ΠΡΟΛΟΓΟΣ

* ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

| | | |
|-----|---|------|
| 1.1 | Φαινόμενα Ροής στις Στροβιλομηχανές | 1.1 |
| 1.2 | Συνεκτικές Ροές στις Στροβιλομηχανές | 1.1 |
| 1.3 | Ανάπτυξη Οριακών Στρωμάτων σε Στροβιλομηχανές | 1.10 |
| 1.4 | Συνεκτικές Ροές και Υπολογιστική Ρευστομηχανική | 1.14 |
| 1.5 | Το Μοντέλο Ανάλυσης του Wu | 1.16 |
| 1.6 | Οι Μηχανισμοί Απωλειών στις Στροβιλομηχανές | 1.18 |
| 1.7 | Διάταξη της Υλης | 1.20 |

* ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ-ΓΕΝΕΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ

| | | |
|------|--|------|
| 2.1 | Εισαγωγή | 2.1 |
| 2.2 | Θεμελιώδεις Σχέσεις σε ένα κσσ | 2.3 |
| 2.3 | Ανάλυση Τυχαίου Διανύσματος στις Δύο Βάσεις | 2.5 |
| 2.4 | Ο Μετρικός Τανυστής | 2.6 |
| 2.5 | Γένεση Πλεγμάτων στις Στροβιλομηχανές | 2.8 |
| 2.6 | Αριθμητικές Μέθοδοι Γένεσης Πλεγμάτων | 2.11 |
| 2.7 | Γένεση ενός Λαπλασιανού Πλέγματος | 2.12 |
| 2.8 | Εφαρμογή: Γένεση Διδιάστατου Λαπλασιανού Πλέγματος | 2.14 |
| 2.9 | Το Ορθογώνιο Σύστημα Συντεταγμένων Αξονικής Συμμετρίας | 2.16 |
| 2.10 | Τριδιάστατα Καμπυλόγραμμα Συστήματα Συντεταγμένων | 2.21 |

* ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ NAVIER-STOKES

| | | |
|-----|--|------|
| 3.1 | Οι Εξισώσεις Ροής στο Καρτεσιανό Σύστημα | 3.1 |
| 3.2 | Οι Εξισώσεις Ροής στην Επιφάνεια S_1 μιας Πτερύγωσης | 3.5 |
| 3.3 | Επιβολή Οριακών Συνθηκών σε Ροή σε Πτερυγώσεις | 3.8 |
| 3.4 | Βασική Θεωρία από τη Μέθοδο των Χαρακτηριστικών | 3.10 |
| 3.5 | Οριακές Συνθήκες για τις Διδιάστατες Εξισώσεις Euler | 3.13 |

*** ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4**

ΤΑ ΤΥΡΒΩΔΗ ΟΡΙΑΚΑ ΣΤΡΩΜΑΤΑ

| | | |
|-----|---|------|
| 4.1 | Εισαγωγή στην Έννοια της Τύρβης | 4.1 |
| 4.2 | Διαδικασία Λήψης Μέσων Χρονικά Τιμών κατά Reynolds | 4.3 |
| 4.3 | Διαδικασία Λήψης Μέσων Χρονικά Τιμών κατά Favre | 4.4 |
| 4.4 | Η κατά Reynolds Εξίσωση της Συνέχειας | 4.6 |
| 4.5 | Οι κατά Reynolds Εξισώσεις Διατήρησης της Ορμής | 4.7 |
| 4.6 | Οι κατά Reynolds Εξισώσεις Διατήρησης της Ενέργειας | 4.10 |

*** ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5**

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΤΥΡΒΗΣ

| | | |
|------|--|------|
| 5.1 | Εισαγωγή στη Μοντελοποίηση της Τύρβης | 5.1 |
| 5.2 | Η Τυρβώδης Συνεκτικότητα. Υπόθεση Boussinesq | 5.2 |
| 5.3 | Η Έννοια του Μήκους Ανάμιξης | 5.4 |
| 5.4 | Μέσες Κατανομές Ταχύτητας για Ασυμπίεστες Ροές Παράλληλα σε Επίπεδες Πλάκες | 5.7 |
| 5.5 | Το Αλγεβρικό Μοντέλο των Baldwin-Lomax | 5.11 |
| 5.6 | Η Μετάβαση από Στρωτή σε Τυρβώδη Ροή | 5.14 |
| 5.7 | Τα Μοντέλα Τύρβης Δύο Διαφορικών Εξισώσεων | 5.17 |
| 5.8 | Η Εξίσωση του k για Ασυμπίεστες Διδιάστατες Ροές | 5.18 |
| 5.9 | Η Εξίσωση του ϵ για Ασυμπίεστες Διδιάστατες Ροές | 5.21 |
| 5.10 | Οριακές Συνθήκες για τις Εξισώσεις k και ϵ | 5.23 |
| 5.11 | Το Μοντέλο k - ϵ για την Επιφάνεια S_1 μιας Στροβιλομηχανής | 5.26 |

*** ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6**

Η ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΣΤΡΩΤΗ ΣΕ ΤΥΡΒΩΔΗ ΡΟΗ ΣΤΙΣ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΕΣ

| | | |
|-----|--------------------------------------|------|
| 6.1 | Η Μετάβαση στις Στροβιλομηχανές | 6.1 |
| 6.2 | Τρόποι Μετάβασης της Ροής | 6.4 |
| 6.3 | Η Μετάβαση Μέσω Αποκόλλησης | 6.7 |
| 6.4 | Η Μετάβαση σε Πτερυγώσεις Συμπίεστών | 6.12 |
| 6.5 | Η Μετάβαση σε Πτερυγώσεις Στροβίλων | 6.21 |

*** ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7**

ΟΙ ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΥΣΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΙΣ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΕΣ

| | | |
|-----|---|------|
| 7.1 | Εισαγωγή στις Δευτερεύουσες Ροές και στις Απώλειές τους | 7.1 |
| 7.2 | Σχηματισμός των Δευτερευουσών Ροών | 7.2 |
| 7.3 | Ένα Απλό Μοντέλο για το Δευτερεύοντα Στροβιλισμό | 7.5 |
| 7.4 | Οι Δευτερεύουσες Απώλειες | 7.8 |
| 7.5 | Οι Δευτερεύουσες Ροές στο Στρόβιλο | 7.10 |
| 7.6 | Δευτερεύουσες Ροές και Απόδοση των Στροβιλομηχανών | 7.11 |
| 7.7 | Παραδείγματα Δευτερευουσών Ροών σε Στροβιλομηχανές | 7.13 |

* **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8**

Η ΡΟΗ ΣΤΟ ΑΚΤΙΝΙΚΟ ΔΙΑΚΕΝΟ ΤΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ

| | | |
|-----|---|------|
| 8.1 | Η Ροή στο Ακτινικό Διάκενο | 8.1 |
| 8.2 | Ένα Απλό Μοντέλο για τη Ροή στο Διάκενο | 8.3 |
| 8.3 | Ένα Απλό Μοντέλο για τις Απώλειες στο Διάκενο | 8.13 |
| 8.4 | Ο Στρόβιλος του Διακένου | 8.14 |

* **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9**

Ο ΔΕΥΤΕΡΕΥΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΙΣΜΟΣ

| | | |
|-----|---|------|
| 9.1 | Γενικά περί Δευτερεύοντος Στροβιλισμού | 9.1 |
| 9.2 | Βασικές Εξισώσεις και Σύστημα Συντεταγμένων | 9.1 |
| 9.3 | Οι Εξισώσεις Μεταφοράς του Στροβιλισμού στο Σύστημα (s, N, n) | 9.8 |
| 9.4 | Συζήτηση | 9.12 |

* **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10**

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΡΩΜΑΤΩΝ

| | | |
|-------|--|-------|
| 10.1 | Το Διζωνικό Μοντέλο Ροής | 10.1 |
| 10.2 | Η Μετατόπιση της Εξωτερικής Ροής | 10.3 |
| 10.3 | Οι Ολοκληρωτικές Εξισώσεις για τις Χρονικά Μόνιμες Ροές | 10.8 |
| 10.4 | Ολοκληρωτική Εξίσωση της Ορμής | 10.9 |
| 10.5 | Ολοκληρωτική Εξίσωση της Κινητικής Ενέργειας | 10.12 |
| 10.6 | Ένα Απλό Παράδειγμα Εφαρμογής της Ολοκληρωτικής Εξίσωσης της Ορμής | 10.14 |
| 10.7 | Ισορροπημένα Οριακά Στρώματα | 10.18 |
| 10.8 | Λύσεις Ομοιότητας για τα Οριακά Στρώματα | 10.19 |
| 10.9 | Στρωτά Ισορροπημένα Οριακά Στρώματα | 10.26 |
| 10.10 | Η Κατανομή Ταχύτητας του Coles για Τυρβώδη Οριακά Στρώματα | 10.30 |
| 10.11 | Τυρβώδη Ισορροπημένα Οριακά Στρώματα | 10.41 |

* **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11**

Η ΜΕΘΟΔΟΣ LE FOLL ΓΙΑ ΤΑ ΟΡΙΑΚΑ ΣΤΡΩΜΑΤΑ

| | | |
|------|---|-------|
| 11.1 | Η Ιδέα του Le Foll | 11.1 |
| 11.2 | Η Διαμόρφωση του Συστήματος των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων | 11.3 |
| 11.3 | Το Ευθύ και το Αντίστροφο Πρόβλημα | 11.16 |
| 11.4 | Ευθύ Πρόβλημα - Αλγόριθμος Υπολογισμού | 11.17 |
| 11.5 | Αλγόριθμος Υπολογισμού Στρωτού Οριακού Στρώματος | 11.18 |
| 11.6 | Αλγόριθμος Υπολογισμού Τυρβώδους Οριακού Στρώματος | 11.22 |
| 11.7 | Το Επίπεδο Απεικόνισης για Στρωτές Ροές - Σχόλια | 11.24 |

* ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π1

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

| | | |
|------|--|------|
| Π1.1 | Γενικά Περί Πεπερασμένων Διαφορών | Π1.1 |
| Π1.2 | Αναλύοντας σε π.δ. μια μερική διαφορική εξίσωση (μ.δ.ε.) | Π1.4 |
| Π1.3 | Συντηρητική Μορφή και Συντηρητική Ιδιότητα | Π1.7 |

* ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π2

ΟΙ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ EULER

| | | |
|------|---|-------|
| Π2.1 | Διαφορετικές Γραφές των Εξισώσεων Ροής | Π2.1 |
| Π2.2 | Επεξεργασία της Ιακωβιανής Οριζουσας A | Π2.4 |
| Π2.3 | Διαγνοποίηση της Ιακωβιανής Οριζουσας A | Π2.5 |
| Π2.4 | Μετατροπή Συντηρητικών σε Μη-Συντηρητικές Μεταβλητές | Π2.6 |
| Π2.5 | Εξισώσεις Συμβιβαστικότητας για τις Ιδιοτιμές $\lambda^{(i)}$ | Π2.8 |
| Π2.6 | Χαρακτηριστική Γραφή των Μονοδιάστατων Εξισώσεων Ροής | Π2.10 |
| Π2.7 | Οι Μεταβλητές και οι Αμετάβλητες Riemann | Π2.11 |
| Π2.8 | Παρατηρήσεις πάνω στις Εξισώσεις Συμβιβαστικότητας | Π2.12 |

* ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π3

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ FALKNER-SKAN

| | | |
|------|---|------|
| Π3.1 | Η Αριθμητική Λύση του Hartree | Π3.1 |
| Π3.2 | Πίνακες | Π3.2 |

* ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Φαινόμενα Ροής στις Στροβιλομηχανές

Οι ροές μέσα στις στροβιλομηχανές είναι από τις πλέον πολύπλοκες που συναντώνται στη φύση: είναι σχεδόν πάντοτε τριδιάστατες αφού λαμβάνουν χώρα σε πολύπλοκες τριδιάστατες γεωμετρίες και περιλαμβάνουν στρωτές και τυρβώδεις περιοχές καθώς και την πολύ ενδιαφέρουσα μεταβατική περιοχή μεταξύ αυτών. Αποκολλημένες ροές απαντώνται πολύ τακτικά στις στροβιλομηχανές. Οι στρωτές και οι τυρβώδεις ζώνες της ροής χαρακτηρίζονται από πολύπλοκες τάσεις και παραμορφώσεις, οι οποίες διαφέρουν από αυτές που συναντάμε στις απλές διδιάστατες ροές (κατά μήκος μιας ευθείας ή καμπύλης επιφάνειας, βλ. Εισαγωγικά Μαθήματα Ρευστομηχανικής), λόγω του ότι η ροή είναι ισχυρά τριδιάστατη, εμφανίζονται σημαντικές κλίσεις πίεσης σε κάθε κατεύθυνση, υπάρχει η περιστροφή (στις κινητές πτερυγώσεις) και η καμπυλότητα των πτερυγίων. Τα φαινόμενα καταλήγουν να είναι ακόμα περισσότερο πολύπλοκα αν ληφθεί υπόψη ότι αναπτύσσονται αλληλοεπιδρώντα συνεκτικά στρώματα στα περύγια και στα κελύφη των μηχανών, καθώς επίσης υπάρχει πάντοτε το ενδεχόμενο αλληλοεπιδράσεων κρουστικών κυμάτων με τα συνεκτικά στρώματα. Από πλευράς επιπέδου ταχύτητας ή αριθμού Mach, οι ροές στις θερμικές στροβιλομηχανές καλύπτουν όλο το δυνατό εύρος τιμών. Ανάλογα με την περίπτωση, συναντώνται ασυμπίεστες, υποηχητικές και διηχητικές ή υπερηχητικές ροές. Ο στροβιλός χαρακτήρας του πεδίου ροής παίζει ένα σημαντικό ρόλο, είτε οφείλεται στον αναπτυσσόμενο δευτερεύοντα στροβιλισμό, είτε στο στρόβιλο που δημιουργεί το ακτινικό διάκενο κλπ. Τέλος, πρέπει να έχουμε πάντοτε υπόψη ότι η ροή είναι γενικά χρονικά μεταβαλλόμενη, κυρίως αν πρόκειται για πολυβάθμια στροβιλομηχανή, όπου και η απόλυτη και η σχετική ροή είναι χρονικά μεταβαλλόμενες ως προς το σχετικό ή το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων. Τα θερμικά φαινόμενα (μετάδοση θερμότητας, ψύξη πτερυγίων κλπ.) είναι πολύ σημαντικά, αλλά γενικά θα εξαιρεθούν από την ανάλυση που θα ακολουθήσει.

1.2 Συνεκτικές Ροές στις Στροβιλομηχανές

Ο όρος "Συνεκτικές Ροές στις Στροβιλομηχανές", που αποτελεί και τον τίτλο του παρόντος μαθήματος, περιλαμβάνει ένα σύνολο φαινομένων τα οποία λαμβάνουν χώρα στις στροβιλομηχανές και σχετίζονται κυρίως με τις συνεκτικές τάσεις που δημιουργούνται από την τύρβη της ροής. Η φυσική κατανόηση της ανάπτυξης τέτοιων τάσεων, η μοντελοποίησή τους σε διάφορα επίπεδα πολυπλοκότητας και η αριθμητική τους πρόβλεψη με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή αποτελούν τις τρεις πτυχές της ανάπτυξης που θα ακολουθήσει.

Μια πρώτη επαφή με τα φαινόμενα συνεκτικής ροής μπορεί να γίνει εξετάζοντας την περίπτωση του συμπίεστη. Είναι γνωστό το ιδιαίτερο ενδιαφέρον που παρουσιάζει η ροή στο συμπίεστη, λόγω του επιβραδυνόμενου χαρακτήρα της. Στο συμπίεστη, η ανάπτυξη τυρβωδών συνεκτικών τάσεων έχει πολύ βασική σημασία ώστε η ροή να μπορέσει να ξεπεράσει τις κλίσεις πίεσης χωρίς να προκληθεί αποκόλληση. Γενικά, αλλά όχι κατ'ανάγκη πάντοτε, η απόδοση ενός συμπίεστη βελτιώνεται όσο οι τυρβώδεις τάσεις γίνονται ισχυρότερες σε σχέση με τις στρωτές συνεκτικές τάσεις, δηλαδή όσο αυξάνει ο αριθμός Reynolds της ροής. Θα αναφερόμαστε στο τμήμα εκείνο του πεδίου ροής όπου οι συνεκτικές τάσεις είναι ισχυρές με το γενικό όρο "οριακά στρώματα".

Σε πρώτο επίπεδο ταξινόμησης των αποτελεσμάτων τους, μπορούμε να πούμε ότι τα συνεκτικά φαινόμενα επιδρούν στη ροή που αναπτύσσεται μέσα στη βαθμίδα ενός συμπίεστη με τρεις κυρίως τρόπους:

(α) Θέτουν ένα άνω όριο στην αύξηση πίεσης που μπορεί να δώσει ο συμπίεστης. Κάθε προσπάθεια να ξεπεραστεί αυτό το όριο οδηγεί σε αστάθεια της ροής, δηλαδή στα γνωστά φαινόμενα πάλμωσης ή περιστροφικής αποκόλλησης.

(β) Οδηγούν σε στένωση της ροής, δηλαδή, λόγω της παρουσίας των οριακών στρωμάτων, παρουσιάζεται ελάττωση της ενεργού διατομής που "διακινεί" ουσιαστικά τη ροή. Το φαινόμενο της στένωσης (blockage) επηρεάζει τη συναλλαγή ενέργειας μεταξύ ρευστού και πτερυγώσεων (ιδίως στους αξονικούς συμπίεστες).

(γ) Αφού λαμβάνουν χώρα μέσα στα οριακά στρώματα, είναι υπεύθυνα για ένα συντριπτικά μεγάλο ποσοστό των απωλειών μέσα στη μηχανή. Μικρότερες απώλειες συμβαίνουν εάν υπάρχουν κρουστικά κύματα κλπ.

Εστω και αν ο έλεγχος των απωλειών είναι χωρίς αμφιβολία ένας πολύ σημαντικός παράγοντας που σχετίζεται με το μέγιστο λόγο πίεσης που μπορούμε να πετύχουμε, εντούτοις η πρόβλεψη της στένωσης που θα προκαλέσουν τα συνεκτικά φαινόμενα είναι εξίσου σημαντική για το σχεδιαστή της στροβιλομηχανής. Η στένωση εκφράζεται ποσοτικά με το συντελεστή στένωσης B , ο οποίος ορίζεται ως

$$B = 1 - \frac{\text{πραγματική διατομή ροής}}{\text{γεωμετρική διατομή ροής}}$$

Είναι προφανές ότι για τον καθορισμό του αριθμητή του κλάσματος που υπεισέρχεται στον ορισμό του συντελεστή B συμμετέχουν τα πάχη των οριακών στρωμάτων που αναπτύσσονται στα πτερύγια ή/και στα κελύφη της μηχανής.

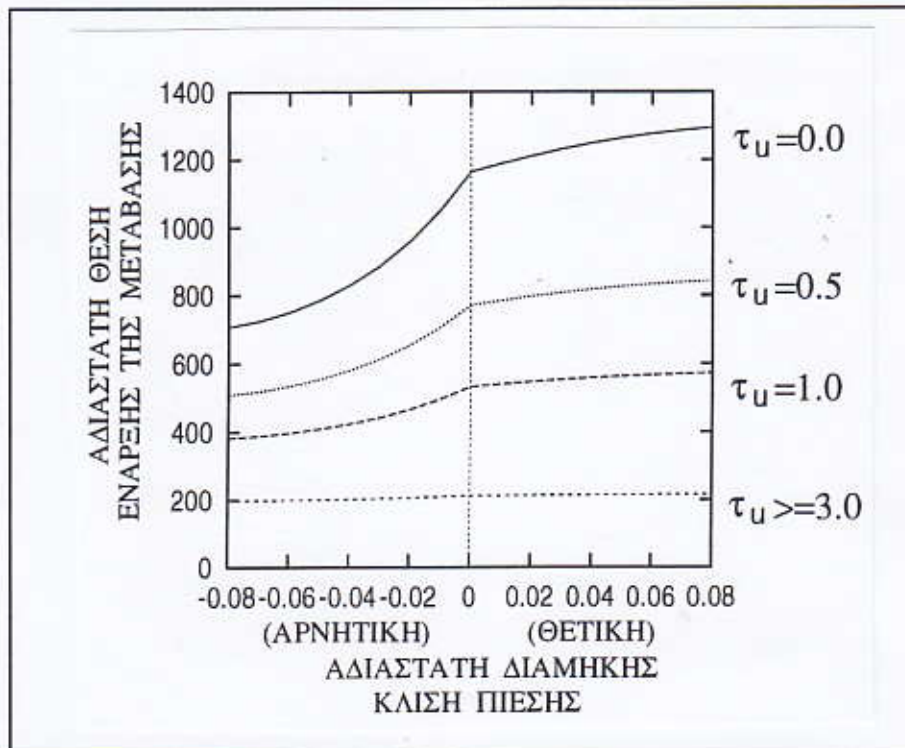
Εχοντας υπόψη μας την παραπάνω ταξινόμηση των επιπτώσεων των συνεκτικών ροών στους συμπίεστες, γίνεται άμεσα αντιληπτή η ανάγκη της ανάπτυξης αξιόπιστων και

γρήγορων μέσων για την πρόβλεψή τους. Πριν ασχοληθούμε με τα μέσα πρόβλεψης θα σχολιασθούν, ενδεικτικά, συγκεκριμένοι λόγοι ώστε να γίνει αντιληπτό το γιατί η ακριβής πρόβλεψη των συνεκτικών ροών στις στροβιλομηχανές παρουσιάζει αυξημένη πολυπλοκότητα. Κατά την παράθεση των λόγων που ακολουθούν, θα αναφερόμαστε επιλεκτικά σε συμπίεστή ή στρόβιλο, ανάλογα με την έμφαση που επιθυμούμε να δώσουμε.

1. Η ροή σε ένα συμπίεστή εμφανίζει αναγκαστικά πολύ απότομες κλίσεις πίεσης στην κατεύθυνση της ροής, σε σχέση με αυτές που μπορούν (θεωρητικά) να υπάρξουν σε ένα διδιάστατο οριακό στρώμα χωρίς να προκληθεί αποκόλληση της ροής. Η ροή στα πτερύγια συνήθως είναι τέτοια ώστε να βρίσκεται πολύ κοντά στο σημείο αποκόλλησης και με τον τρόπο αυτό να έχουμε ισχυρά φορτισμένα πτερύγια. Περισσότερο σοβαρή είναι η κατάσταση κοντά στα κελύφη, όπου, για έναν αξονικό συμπίεστή, το πάχος του εκεί αναπτυσσόμενου οριακού στρώματος είναι γενικά συγκρίσιμο με τη χορδή του πτερυγίου.

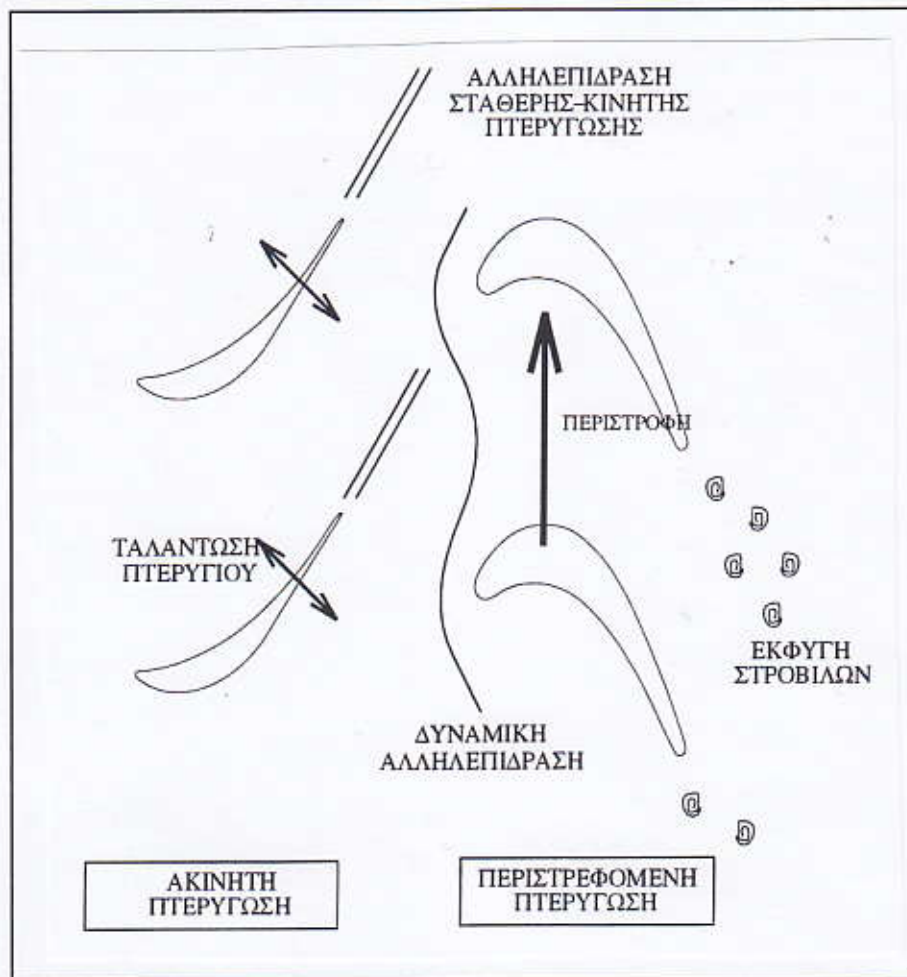
2. Τα επίπεδα της τύρβης στην εξωτερική ροή είναι αρκετά υψηλά κυρίως αν εξετάζουμε βαθμίδες συμπίεστή, άλλες εκτός από την πρώτη. Ο ρόλος του υψηλού επιπέδου τύρβης επιδρά μεταξύ των άλλων και στη γρήγορη μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή. Επιπλέον, στους συμπίεστες, οι αριθμοί Reynolds της ροής είναι τέτοιοι που η περιοχή της μετάβαση συνήθως αντιστοιχεί σε ένα σημαντικό ποσοστό του πτερυγίου (ενδεικτικά, μπορεί να καταλάβει 10-20% της χορδής). Αυξάνοντας τη γωνία πρόσπτωσης στο πτερύγιο το σημείο έναρξης της μετάβασης κινείται προς την ακμή προσβολής, χωρίς όμως να μεταβάλλεται σημαντικά το μήκος της μετάβασης. Ο συνδυασμός επιπέδου τύρβης και κλίσης πίεσης κατά μήκος του οριακού στρώματος του πτερυγίου πρέπει να λαμβάνεται ιδιαίτερα υπόψη στον καθορισμό της θέσης που συμβαίνει η μετάβαση. Το μήκος από την αρχή του οριακού στρώματος μέχρι το σημείο της μετάβασης εξαρτάται πολύ λίγο από την κλίση πίεσης, αν η ροή είναι επιταχυνόμενη. Στην επιβραδυνόμενη όμως ροή, ελαττώνεται αισθητά όσο αυξάνει η κλίση πίεσης. Οι παραπάνω παρατηρήσεις φαίνεται να ισχύουν για χαμηλά επίπεδα τύρβης (ένταση της τύρβης $\tau_u < 2-3\%$), ενώ για μεγαλύτερα επίπεδα η θέση μεταβίβασης (εκφρασμένη σε αδιάστατη μορφή) είναι σταθερή. Με βάση τα παραπάνω, στους συμπίεστες, όπως συνήθως το επίπεδο της τύρβης κυμαίνεται μεταξύ 5-10%, η κλίση πίεσης δεν επιδρά ουσιαστικά στον καθορισμό του σημείου μετάβασης της ροής. Το Σχήμα 1.1. παρουσιάζει τη συνδυασμένη επίδραση επιπέδου τύρβης και κλίσης πίεσης στον καθορισμό της θέσης μετάβασης πάνω στο πτερύγιο.

3. Η ροή σε κάθε πτερύγωση είναι χρονικά μεταβαλλόμενη καθώς υπάρχει η αλληλουχία σταθερών και κινητών πτερυγώσεων. Γενικά, μπορούμε να αναγνωρίσουμε 4 αιτίες που δημιουργούν τη χρονική μη-μονιμότητα της ροής σε μία βαθμίδα (έστω και απλά μονοβάθμιας στροβιλομηχανής), όπου υπάρχει η σταθερή και η κινητή πτερύγωση. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2, ο ομόρρους που δημιουργούν τα πτερύγια του στάτορα αλληλεπιδρά με την κινητή πτερύγωση. Η περίπου χρονικά μόνιμη ροή της σταθερής πτερύγωσης γίνεται αντιληπτή από την κινητή πτερύγωση ως χρονικά μη-μόνιμη ροή,



Σχήμα 1.1

προκαλώντας χρονικά μεταβαλλόμενες δυνάμεις στα κινητά πτερύγια καθώς και χρονικά μη-μόνιμα κύματα πίεσης. Πρέπει να γίνει κατανοητό ότι, ενώ ο ομόρρους σχηματίζεται αποκλειστικά λόγω συνεκτικών φαινομένων στη σταθερή πτερύγωση, η αλληλεπίδραση με την κινητή πτερύγωση είναι ουσιαστικά ένα φαινόμενο μη-συνεκτικής ροής. Δεύτερη πηγή χρονικής μη-μονιμότητας της ροής είναι η λεγόμενη δυναμική αλληλεπίδραση ακίνητης και κινητής πτερύγωσης. Το πεδίο πίεσης στον ενδιάμεσο χώρο των δύο πτερυγώσεων γίνεται αντιληπτό ως η υπερθέση ενός χρονικά μόνιμου τμήματος με ομοιόμορφη τιμή, ενός δευτέρου τμήματος το οποίο είναι χρονικά μόνιμο αλλά με ανομοιόμορφη χωρική κατανομή για την κινητή πτερύγωση (λόγω της άνωσης στα κινητά πτερύγια) και ενός τρίτου τμήματος το οποίο είναι χρονικά μόνιμο αλλά με ανομοιόμορφη χωρική κατανομή για τη σταθερή πτερύγωση (λόγω της άνωσης στα σταθερά πτερύγια). Καθώς κινούνται τα κινητά πτερύγια, η ακμή εκφυγής κάθε σταθερού πτερυγίου δέχεται μία χρονικά μη-μόνιμη πίεση ως αποτέλεσμα της χωρικά ανομοιόμορφης κατανομής πίεσης που συνδέεται με τα κινητά πτερύγια. Αντιστοίχη χρονικά μη-μόνιμη ροή αντιλαμβάνεται η ακμή προσβολής των πτερυγίων της κινητής πτερύγωσης λόγω της χωρικής ανομοιομορφίας του πεδίου πίεσης που συνδέεται με τη σταθερή πτερύγωση. Η δυναμική αλληλεπίδραση είναι καθαρά μη-συνεκτικό φαινόμενο ροής και γι αυτό μοντελοποιείται χρησιμοποιώντας μεθόδους ατρίβους ροής (π.χ. εξισώσεις Euler). Οι άλλες δύο αιτίες χρονικής μη-μονιμότητας της ροής παύουν να σχετίζονται αποκλειστικά με τη σχετική κίνηση μίας σταθερής και μίας κινητής πτερύγωσης. Η συνεκτική ροή που δημιουργείται γύρω από την ακμή εκφυγής ενός



Σχήμα 1.2

πτερυγίου στροβίλου, που έχει σημαντικό πάχος και στρογγυλεμένη μορφή, οδηγεί σε σχηματισμό στροβίλων που απομακρύνονται από αυτό, ομοίων με τους στροβίλους Karman που δημιουργούνται πίσω από ένα κύλινδρο. Στην πραγματικότητα, ο ομόρρους αντιστοιχεί σε μία κατάσταση ενδιάμεση των δύο ακραίων καταστάσεων, δηλαδή του σχηματισμού οδού εκφυγής στροβίλων Karman και του σχηματισμού τυρβώδους ομόρρου με χρονικά μόνιμη μέση τιμή ταχύτητας. Το κρίσιμο σημείο της εκφυγής στροβίλων από την στρογγυλεμένη ακμή εκφυγής ενός πτερυγίου στροβίλου εντοπίζεται στη δυνατότητα υπολογισμού μίας μέσης πίεσης στην περιοχή της ακμής εκφυγής που να καθορίζει με ακρίβεια την επαγόμενη πτώση ολικής πίεσης, που είναι ένα σημαντικό ποσοστό των συνολικών απωλειών. Τέλος, χρονική μη-μονιμότητα της ροής μπορεί να δημιουργηθεί από ταλαντώσεις των σταθερών ή /και κινητών πτερυγίων. Το φαινόμενο είναι γνωστό με τον όρο flutter. Κατ' αυτό, μικρές ταλαντώσεις σε ένα πτερύγιο προκαλούν την ανάπτυξη χρονικά μη-μόνιμης δύναμης και ροπής σ' αυτό, που κάτω από ορισμένες συνθήκες μπορούν να ενισχύσουν τη χρονικά μη-μόνιμη κίνηση του πτερυγίου και να οδηγήσουν ενδεχόμενα και σε αστοχία-θραύση.

4. Η πίεση και η θερμοκρασία ανακοπής είναι γενικά ανομοιόμορφες στην εξωτερική ροή δηλαδή στην περιοχή της ροής που βρίσκεται έξω από τα οριακά στρώματα. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό όταν η τριδιάστατη ροή αναλύεται με τρόπο ψευδοτριδιάστατο, σύμφωνα με το μοντέλο που πρότεινε ο Wu (για όσους δεν το γνωρίζουν συνιστάται η ανάγνωση της ενότητας 1.4). Για την περίπτωση της ροής που υπολογίζεται στο μεσημβρινό επίπεδο, όπου γενικά δεν υπάρχει ευκρινώς ορισμένη εξωτερική ροή λόγω της καθ' ύψος ανάμιξης των οριακών στρωμάτων, το πρόβλημα επιτείνεται. Για να είναι αξιόπιστος ένας τέτοιος υπολογισμός της ροής στο μεσημβρινό επίπεδο, πρέπει να ληφθεί υπόψη η λεγόμενη ακτινική ανάμιξη της ροής (spanwise mixing), μιάς επιπλέον δηλαδή διάχυσης στην κατεύθυνση που συνδέει τα δύο κελύφη της μηχανής. Διάφορα ιδιαίτερα φαινόμενα ροής (όπως είναι χωρικά ανομοιόμορφες συνθήκες ανακοπής στο πεδίο, οι δευτερεύουσες ροές που θα γνωρίσουμε παρακάτω, ή η ροή που εκφεύγει από το ακτινικό διάκενο της μηχανής), σε συνδυασμό με την τυρβώδη ανάμιξη δημιουργούν το φαινόμενο της ακτινικής ανάμιξης. Με την συνδυασμένη δράση των παραπάνω φαινομένων, γίνονται δυσδιάκριτα τα άκρα των οριακών στρωμάτων που αναπτύσσονται στα κελύφη (κατ'αναλογία προς τη θεωρία του οριακού στρώματος).

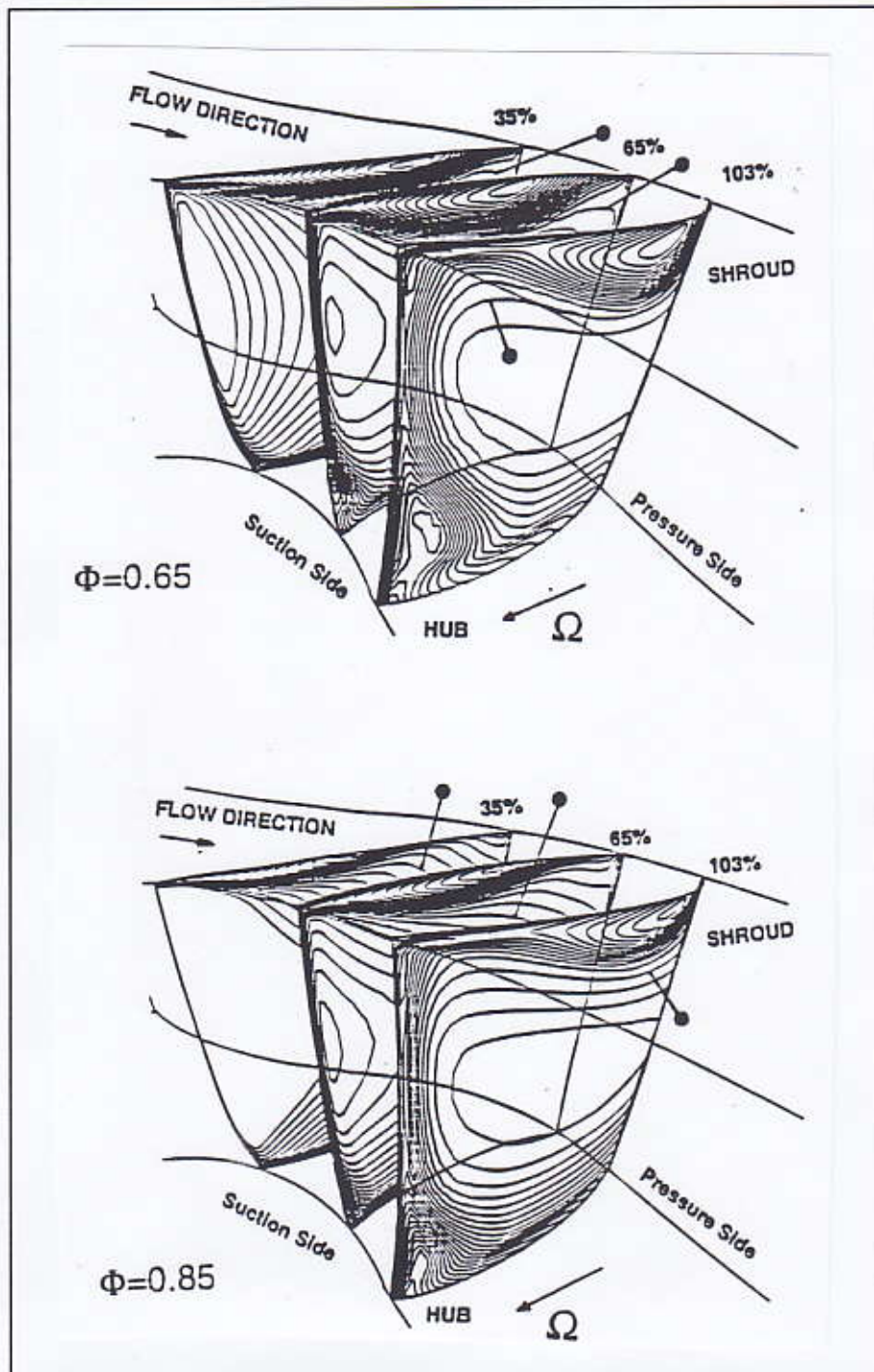
5. Υπάρχουν μεγάλες κλίσεις όλων των μεγεθών της ροής σε κάθε κατεύθυνση μέσα στο πεδίο ροής, ακόμα και καθ' ύψος των πτερυγίων. Η ποικιλία τέτοιων χωρικών κλίσεων κάνει συχνά ανεπαρκείς και αναξιόπιστους τους διδιάστατους υπολογισμούς και αναγκαστικά οδηγεί στη χρησιμοποίηση τριδιάστατων (ή έστω ψευδο-τριδιάστατων) τεχνικών επίλυσης. Ένα δεύτερο αποτέλεσμα είναι ότι η στατική πίεση δεν παραμένει σταθερή μέσα στις συνεκτικές περιοχές. Η οικονομία σε χρόνο υπολογισμού είναι πάντοτε επιθυμητή κατά το σχεδιασμό μιάς στροβιλομηχανής και για το λόγο αυτό, η δυνατότητα γρήγορων διδιάστατων υπολογισμών, ικανών να δίνουν πληροφορία για τον τύπο της ροής που αναπτύσσεται στο μεγαλύτερο μέρος του χώρου μεταξύ κελύφων και πτερυγίων, είναι ιδιαίτερα ευπρόσδεκτη. Είναι πραγματικά χρήσιμο να μπορούμε με έναν υπολογισμό στην επιφάνεια απο-περύγιο-σε-περύγιο που αντιστοιχεί στο μέσο ύψος των πτερυγίων, να αποκτούμε σωστές πληροφορίες για όλη την περιοχή πλὴν των οριακών στρωμάτων στο πόδι και την κεφαλή της μηχανής. Οι παράγοντες που επιτρέπουν ή δεν επιτρέπουν κάτι τέτοιο είναι πολλοί. Σε έναν αξονικό συμπιεστή λ.χ., αν τα πτερύγια είναι "μεγάλα" σε ύψος σε σχέση με ένα χαρακτηριστικό πάχος του οριακού στρώματος που αναπτύσσεται στα κελύφη, είναι δυνατό να υπολογιστεί η ροή ως διδιάστατη στο μέσο του πτερυγίου, όπου εκ κατασκευής η μορφή του πτερυγίου δεν αλλάζει σημαντικά καθ' ύψος. Σε αντίθεση, κοντά στα κελύφη και ιδίως για πτερύγια όχι τόσο μεγάλου ύψους δεν υπάρχει περιοχή όπου μια διδιάστατη προσέγγιση θα μπορούσε να δώσει ρεαλιστικά αποτελέσματα. Καθώς αυξάνει ο λόγος πίεσης, η επίδραση των οριακών στρωμάτων των κελύφων εκτείνεται όλο και περισσότερο καθ' ύψος του πτερυγίου, οπότε μειώνεται σημαντικά η περιοχή κοντά στο μέσο του πτερυγίου όπου η διδιάστατη προσέγγιση είναι ακριβής.

6. Υπάρχει αυστηρή αλληλεπίδραση συνεκτικών και ατριβών περιοχών της ροής. Τα

συνήθη μοντέλα οριακών στρωμάτων και η ίδια η θεωρία των οριακών στρωμάτων έχουν ως γνωστόν αναπτυχθεί για πολύ λεπτά οριακά στρώματα και προϋποθέτουν εξωτερική ροή η οποία δεν επηρεάζεται από την ύπαρξη του οριακού στρώματος. Στους διαχύτες και τους συμπιεστές που αποτελούν τυπικά παραδείγματα επιβραδυνόμενης εσωτερικής ροής, οι παραπάνω παραδοχές δεν είναι ρεαλιστικές. Στις περιπτώσεις αυτές, η στένωση αυξάνει σε τρόπο ώστε η εξωτερική ταχύτητα να αλλάζει σημαντικά και ενδεχόμενα να εμφανιστούν και αστάθειες κυρίως στην ηχητική περιοχή της ροής, αν υπάρχει.

7. Η πιο σημαντική περιοχή η οποία περιορίζει τη συνολική αύξηση πίεσης που μπορεί να δώσει ο συμπιεστής, δημιουργώντας στένωση και απώλειες, είναι οι διεδρες γωνίες που σχηματίζουν τα πτερύγια με τα κελύφη. Ιδιαίτερη σημασία έχει η γωνία που σχηματίζει η πλευρά υποπίεσης του πτερυγίου με το εσωτερικό κέλυφος (πλήμνη) της μηχανής. Στις γωνίες αυτές η ροή είναι συνήθως ισχυρά τριδιάστατη και συχνά συμβαίνει και αποκόλληση. Η σημασία της περιοχής αυτής της ροής μπορεί να φανεί σε ένα τυπικό παράδειγμα περιστρεφόμενης πτερύγωσης αξονικού συμπιεστή μικρής ταχύτητας. Η περιστρεφόμενη αυτή πτερύγωση μελετήθηκε πειραματικά στο δοκιμαστήριο μεγάλης κλίμακας του United Research Center, στο Connecticut, USA και αναλύθηκε με κώδικες επίλυσης των τριδιάστατων εξισώσεων Navier-Stokes στο Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, του ΕΜΠ. Η πτερύγωση είχε εξωτερική διάμετρο περίπου 1.5 m, λόγο διαμέτρων ποδιού-κεφαλής 0.80, χορδή πτερυγίου περί τα 15 cm, είχε 28 πτερύγια και περιστρέφονταν με 510 RPM. Η αριθμητική μελέτη της πτερύγωσης έγινε για διάφορες τιμές του συντελεστή παροχής Φ , μεγαλύτερες και μικρότερες της τιμής σχεδίασης $\Phi_d=0.85$. Στις σημειώσεις αυτές θα χρησιμοποιήσουμε αντιπροσωπευτικά σχήματα από τη μελέτη αυτή, που σε πλήρη μορφή βρίσκονται στη δημοσίευση "Study of Radial Tip Clearance Effects in a Low-Speed Axial Compressor Rotor", (I. Nikolaou, K. Giannakoglou and K. Papailiou, ASME Paper 96-GT-37). Έτσι, στο Σχήμα 1.3 παρουσιάζουμε τις γραμμές σταθερού μέτρου σχετικής ταχύτητας σε τρεις εγκάρσιες επιφάνειες. Η πρώτη επιφάνεια είναι στο 35% της χορδής, η δεύτερη στο 65% και η τρίτη ελάχιστα μετά την ακμή εκφυγής. Στο σχήμα παρουσιάζονται αποτελέσματα για δύο συντελεστές παροχής, τον ονομαστικό ($\Phi=\Phi_d=0.85$) και έναν αρκετά μικρότερο ($\Phi=0.65$), οριακά κοντά στη γραμμή πάλμωσης. Κοντά στην έξοδο του πτερυγίου (ουσιαστικά στην τρίτη επιφάνεια που σχεδιάζουμε) φαίνεται η περιοχή χαμηλής ταχύτητας στη διεδρη γωνία μεταξύ εσωτερικού κελύφους και πλευράς υποπίεσης. Στην περίπτωση $\Phi=0.65$ η περιοχή αυτή έχει αυξηθεί σε σχέση με τις συνθήκες σχεδίασης (είναι ήδη ορατή από τη δεύτερη σχεδιαζόμενη επιφάνεια). Κοντά στην ακμή εκφυγής έχει φθάσει σε ύψος περίπου το 40% του πτερυγίου. Η στένωση που προκαλεί αυτή η περιοχή χαμηλής ταχύτητας είναι σημαντική.

8. Η ύπαρξη ακτινικού διακένου στις κινητές και σταθερές πτερυγώσεις ενισχύει την πολυπλοκότητα της ροής, δημιουργώντας έντονα τοπικά φαινόμενα. Το ακτινικό διάκενο από κατασκευαστικής πλευράς, συνιστάται να είναι όσο το δυνατό μεγαλύτερο αλλά λόγοι καλής αεροδυναμικής συμπεριφοράς των πτερυγίων επιβάλλουν την ελαχιστοποίησή του. Ο

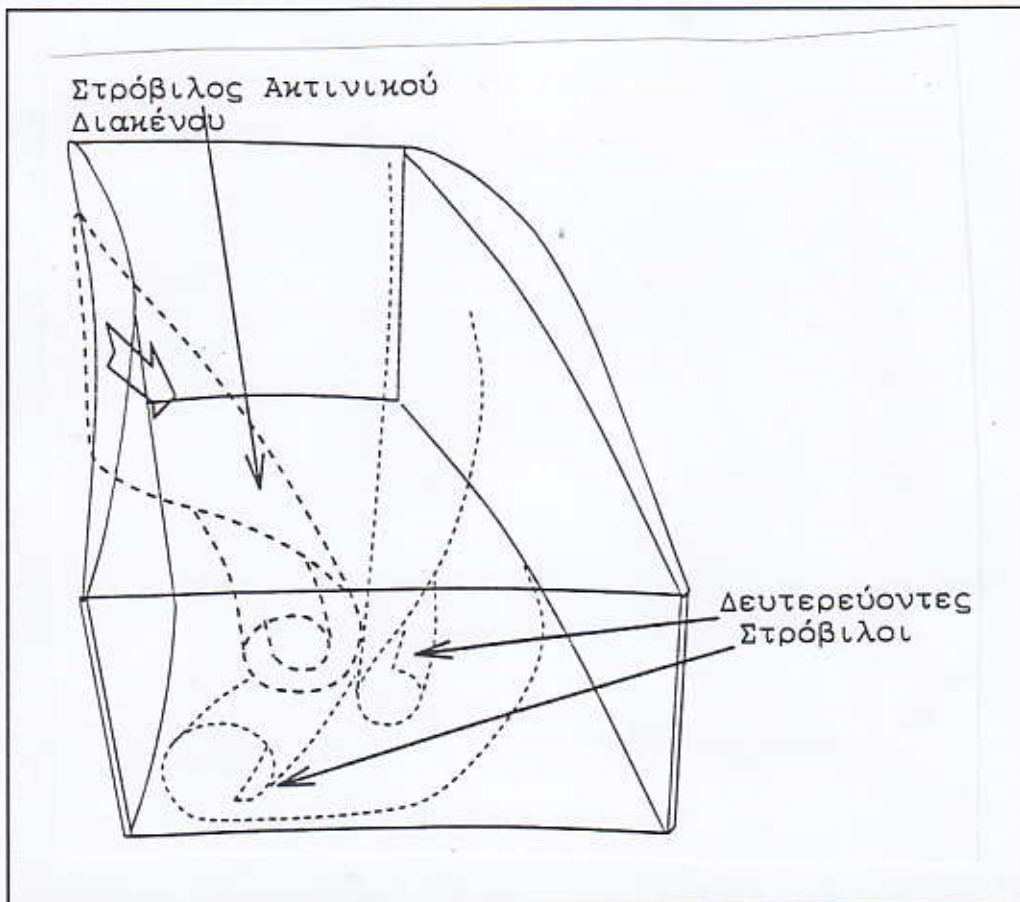


Σχήμα 1.3

σχεδιαστής μίας στροβιλομηχανής καλείται να γεφυρώσει τις δύο αντίθετες επιδιώξεις. Η ύπαρξη ακτινικού διακένου δημιουργεί πρόσθετες απώλειες που οφείλονται στην ανάμιξη της ροής που διέρχεται από το διάκενο, με την κύρια ροή. Συγχρόνως ελαττώνεται η δύναμη στο πτερύγιο, αφού ένα ποσοστό της ροής διαρρέει το διάκενο χωρίς να υπόκειται στην επιθυμητή στροφή. Τα συνεκτικά φαινόμενα που συνδέονται με την ροή που διασχίζει το

διάκενο προκαλούν αύξηση της εντροπίας. Η επίδραση του ακτινικού διακένου φαίνεται να είναι μεγαλύτερη στους στροβίλους από ότι στους συμπιεστές, κυρίως επειδή ο συντελεστής άνωσης στα πτερύγια ενός στροβίλου είναι μεγαλύτερος αυτού του συμπιεστή.

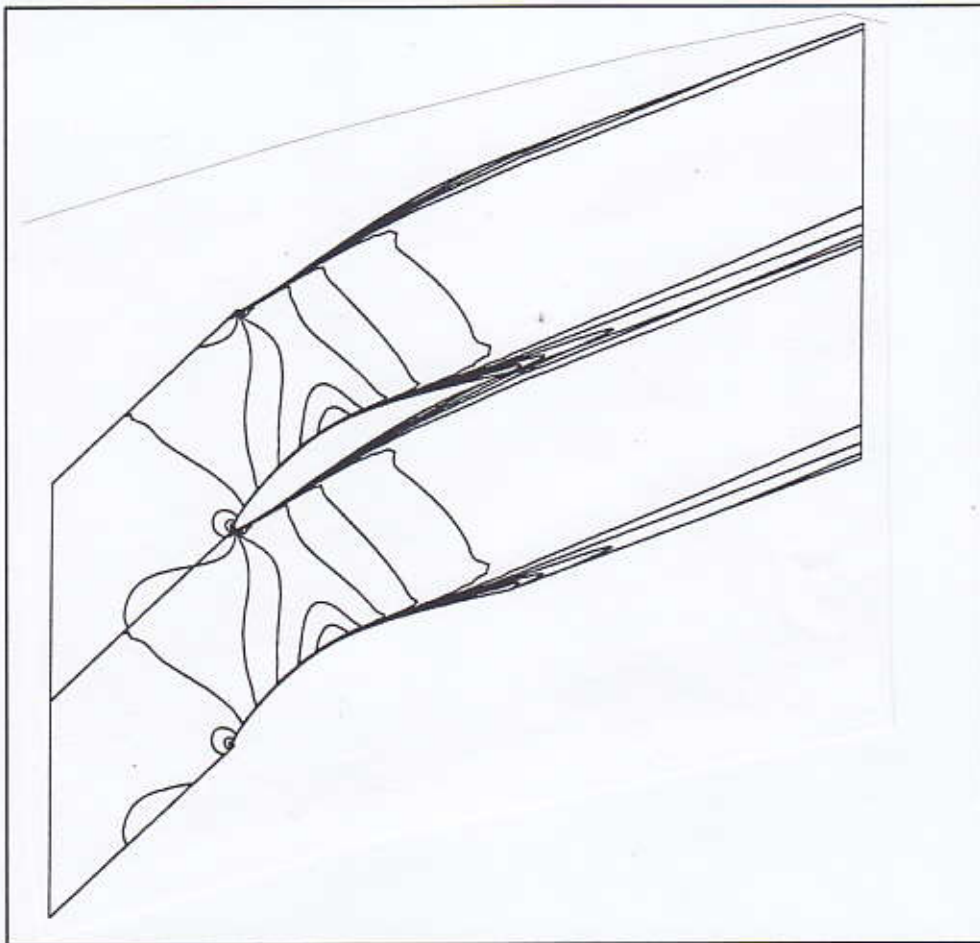
Η δέσμη ρευστού η οποία εξέρχεται από το διάκενο στην πλευρά υποπίεσης του πτερυγίου, με γωνία ως προς την κύρια ροή του καναλιού αλληλεπιδρά στη συνέχεια τόσο με την κύρια όσο και με τη δευτερεύουσα ροή, η οποία έχει διεύθυνση από την πλευρά υπερπίεσης προς την πλευρά υποπίεσης του καναλιού. Ο στροβιλισμός που συνδέεται με τη ροή του διακένου αναγκάζει τη δέσμη να απομακρυνθεί από το τοίχωμα κατά μήκος μιας γραμμής διαχωρισμού και να περιστραφεί, σχηματίζοντας το στρόβιλο του ακτινικού διακένου, που παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.4. Η επιπλέον ροή που εξέρχεται από το διάκενο σε διάφορες αξονικές θέσεις του πτερυγίου, εισέρχεται στο στρόβιλο, αυξάνοντας την έντασή του και την ακτίνα του. Η περιστροφή της ροής μέσα στο στρόβιλο του διακένου προκαλεί σημαντική μείωση της στατικής πίεσης στην περιοχή του πυρήνα του, επιδρώντας επίσης και στη διανομή της στατικής πίεσης στην πλευρά υποπίεσης του πτερυγίου, κοντά στο ακροπτερύγιο. Η μείωση αυτή της στατικής πίεσης αυξάνει τη διαφορά πίεσης μεταξύ των δύο πλευρών του διακένου και ενισχύει τη ροή μέσα από το διάκενο, καθώς αυτή η διαφορά πίεσης αποτελεί την κινητήρια δύναμη για τη ροή μέσα από το διάκενο.



Σχήμα 1.4

1.3 Ανάπτυξη Οριακών Στρωμάτων σε Στροβιλομηχανές

Σε σύγκριση με τις άλλες συνεκτικές περιοχές που υπάρχουν μέσα στην περύγωση ενός συμπίεστη η κατανόηση των οριακών στρωμάτων που αναπτύσσονται πάνω στα περύγια αξονικής διάταξης είναι σημαντική και ευτυχώς προβλέπεται πολύ ικανοποιητικά με τις υπάρχουσες μεθόδους. Το περισσότερο ενδιαφέρον βρίσκεται προφανώς στην πλευρά υποπίεσης του περυγίου. Εκεί, η στρωτή περιοχή της ροής δεν παρουσιάζει κανένα πρόβλημα και περισσότερο ή λιγότερο προσεγγιστικές μέθοδοι μπορούν να δώσουν πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα. Κοντά στην ακμή προσβολής ο υπολογισμός δίνει συνήθως μία έντονη υπερακόντιση στην κατανομή της ταχύτητας με αντίστοιχη έντονη βύθιση στην κατανομή της πίεσης, όταν το σημείο ανακοπής δε σχηματίζεται στη γεωμετρική αιχμή του περυγίου. Ευτυχώς, το μήκος της διαταραχής αυτής είναι πολύ μικρό (1% της χορδής του περυγίου) και δεν προκαλεί σοβαρές διαταραχές στη συνολική απόδοση του περυγίου, εκτός ίσως από το γεγονός ότι μπορεί να οδηγήσει σε άμεση μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή.

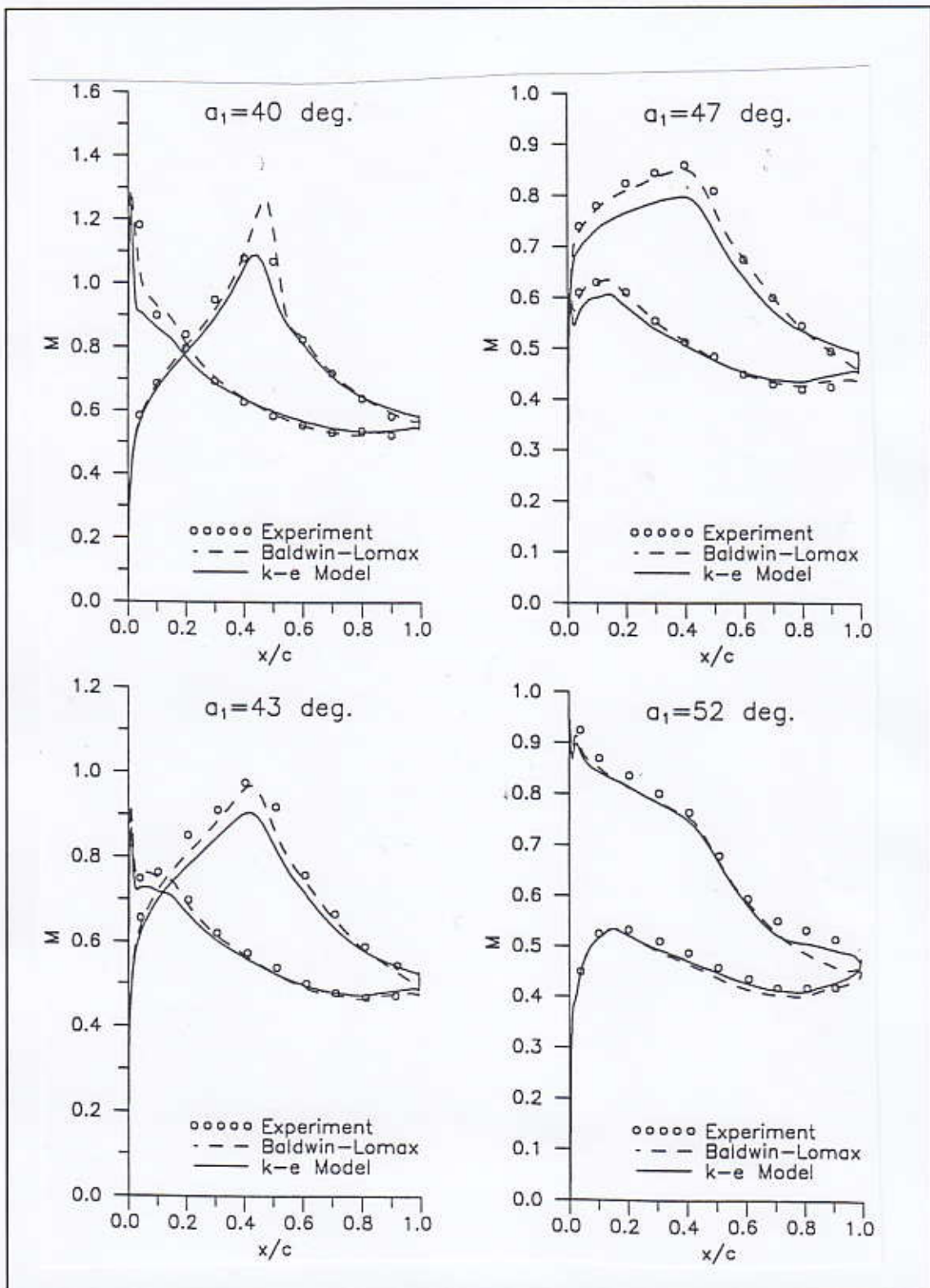


Σχήμα 1.5

Στο Σχήμα 1.5 παρουσιάζεται μια τυπική διδιάστατη περύγωση βιομηχανικού συμπιεστή, που αποτελείται από περύγια ελεγχόμενης διάχυσης. Η μελέτη της ροής έγινε με λογισμικό του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ (η μελέτη αυτή σε πλήρη μορφή δίνεται στη δημοσίευση "Losses Prediction in Axial Flow Compressor Cascades Using an Explicit k-ε Navier-Stokes Solver", C. Vassilopoulos, G. Simandirakis, K. Giannakoglou and K. Papailiou, AGARD 85th Symposium on Loss Mechanisms and Unsteady Flows in Turbomachines, 1995). Η περύγωση μελετήθηκε με δυο μοντέλα τύρβης (το μοντέλο k-ε και το μοντέλο των Baldwin-Lomax που θα εξετασθούν στη συνέχεια) σε διάφορες γωνίες εισόδου της ροής ($\alpha_1 = 40^\circ, 43^\circ, 47^\circ, 52^\circ$). Η περίπτωση $\alpha_1 = 47^\circ$ αντιστοιχεί στις συνθήκες σχεδίασης της περύγωσης. Στο Σχήμα 1.5 παρουσιάζονται οι γραμμές σταθερού αριθμού Mach για την περίπτωση $\alpha_1 = 40^\circ$. Στο Σχήμα 1.6 παρουσιάζεται η κατανομή του ισεντροπικού αριθμού Mach (ισοδυναμεί με τον αδιάστατο συντελεστή πίεσης) πάνω στα στερεά τοιχώματα. Στο ίδιο σχήμα παρουσιάζονται και πειραματικά αποτελέσματα. Συγκρίνοντας προσεκτικά τα σχήματα αυτά, ο αναγνώστης αντιλαμβάνεται τη μορφή που έχουν τέτοιες κατανομές ανάλογα με τη (θετική ή αρνητική) γωνία πρόσπτωσης. Για παράδειγμα, στη θετική γωνία πρόσπτωσης ($\alpha_1 = 52^\circ$ ή $i = +7^\circ$) το μέγιστο της ταχύτητας (ή του αριθμού Mach) παρουσιάζεται πολύ κοντά στην ακμή προσβολής, όπου εντοπίζεται επίσης και το σημείο μετάβασης. Αντίθετα, στις αρνητικές γωνίες πρόσπτωσης, το μέγιστο της ταχύτητας κινείται προς τα κατάντι της ροής πάνω στην πλευρά υποπίεσης του περυγίου.

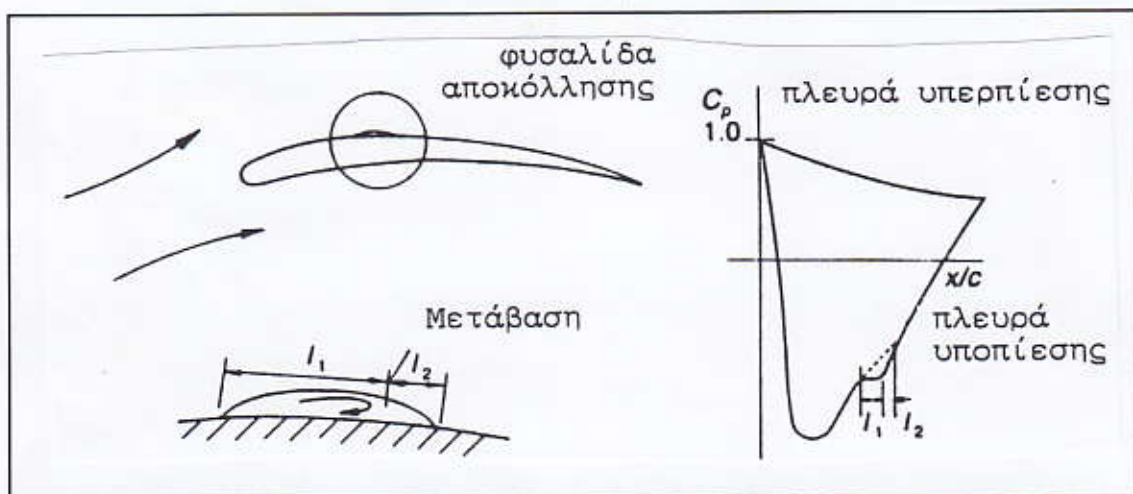
Η μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή εισάγει ένα βαθμό αβεβαιότητας στις προβλέψεις αφού η υπάρχουσα πληροφορία είναι ελλιπής για περυγώσεις μονοβάθμιου συμπιεστή και σχεδόν ανύπαρκτη για περυγώσεις πολυβάθμιου συμπιεστή. Όπως ειπώθηκε και προηγούμενα, το επίπεδο της τύρβης μέσα στο συμπιεστή είναι τόσο υψηλό ώστε η μετάβαση ξεκινά πάντοτε από την ίδια (αδιάστατη) απόσταση από την ακμή προσβολής. Η μετάβαση στην τυρβώδη ροή επηρεάζεται σημαντικά και από την ταχύτητα της επιφάνειας. Πρέπει να σημειωθεί ότι η τραχύτητα λόγω ξένων σωμάτων που επικάθονται στα περύγια είναι φαινόμενο που συναντάται τακτικά σε κάθε αεριοστρόβιλο. Το σημείο μετάβασης κινείται προς τα ανάντι της ροής καθώς αυξάνει η τραχύτητα του περυγίου και, συγχρόνως, αυξάνει και ο συντελεστής τριβής της επιφάνειας. Η πληθώρα διαθέσιμων πειραμάτων που μελέτησαν και μοντελοποίησαν την ανάπτυξη συνεκτικών ροών σε τραχεία τοιχώματα σωλήνων είναι χρήσιμα και τις στροβιλομηχανές. Τα μοντέλα που αναπτύχθηκαν σε σωλήνες χρησιμοποιούνται και στις στροβιλομηχανές, δίνοντας ποιοτικά σωστά αποτελέσματα. Βέβαια, απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή σε περιοχές μεγάλης καμπυλότητας του περυγίου, αν υπάρχει περιστροφή ή έντονες κλίσεις πίεσης.

Η ροή θερμότητας από τα τοιχώματα προς το ρέον ρευστό επιταχύνει τη μετάβαση, αφού η συνεκτικότητα αυξάνει τη θερμοκρασία του αερίου. Κοντά στα στερεά τοιχώματα αυτό δρᾶ αποσταθεροποιητικά στα αναπτυσσόμενα οριακά στρώματα.



Σχήμα 1.6

Γενικά η μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή μπορεί να συμβεί με δύο τρόπους. Ο πρώτος τρόπος είναι το προσκολλημένο στρωτό οριακό στρώμα να υποστεί άμεση μετάβαση σε τυρβώδη ροή ενώ ο δεύτερος είναι αρχικά να αποκολληθεί. Όταν αποκολληθεί το στρωτό οριακό στρώμα, ακολουθεί μετάβαση, έτσι ώστε η ροή να επανακολληθεί στη μορφή τυρβώδους οριακού στρώματος. Μέσα στην αποκολλημένη περιοχή, η μετάβαση γίνεται πιο εύκολα από ότι αν η ροή παρέμενε στρωτή και προσκολλημένη. Η αποκολλημένη περιοχή μεταξύ του σημείου αποκόλλησης και του σημείου επανακόλλησης είναι μικρού μήκους (μέχρι 10% της χορδής) και ονομάζεται φυσαλίδα αποκόλλησης (separation bubble). Το μήκος της εξαρτάται από το επίπεδο τύρβης της εξωτερικής ροής, τον αριθμό Reynolds και την κατανομή πίεσης. Η φυσαλίδα αποκόλλησης αναγνωρίζεται σχεδιάζοντας την κατανομή πίεσης γύρω από το περύγιο ως μια μικρή διαταραχή κατά μήκος της επιφάνειας υποπίεσης κατά την οποία η πίεση είναι σταθερή (παύει να αυξάνει). Στο Σχήμα 1.7 παρουσιάζεται σχηματικά η δημιουργία της φυσαλίδας αποκόλλησης στην πλευρά υποπίεσης ενός περυγίου συμπιεστή. Συγχρόνως, δίνεται μία ενδεικτική κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής που αναγνωρίζεται η ύπαρξη φυσαλίδας αποκόλλησης, σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε προηγούμενα. Μέσα στη φυσαλίδα μπορούμε να αναγνωρίσουμε δύο περιοχές συνεκτικής ροής. Στην πρώτη, μήκους l_1 , το συνεκτικό στρώμα είναι στρωτό και σε αυτό η στατική πίεση παραμένει σχεδόν σταθερή. Η δεύτερη μήκους l_2 είναι αυτή στην οποία η ροή γίνεται τυρβώδης με διάθεση να επανακολληθεί. Η πίεση στην περιοχή αυτή αυξάνει ώστε να ξανασυναντήσει την κατανομή πίεσης που θα είχαμε σε μη αποκολλημένη περίπτωση ροής. Το μικρό μήκος της φυσαλίδας αποκόλλησης φαίνεται να μην επηρεάζει την εξέλιξη της κατανομής πίεσης πάνω στο περύγιο (διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα).



Σχήμα 1.7

Οι φυσαλίδες αποκόλλησης, με στρωτή αποκόλληση και τυρβώδη επανακόλληση συμβαίνουν όταν το επίπεδο τύρβης είναι χαμηλό και φαίνεται να εξαφανίζονται σε υψηλά επίπεδα τύρβης, όπως ενδεικτικά συμβαίνει μετά την πρώτη βαθμίδα του συμπιεστή. Είναι

ενδεικτικό ότι πειράματα που έγιναν σε γραμμικές πτερυγώσεις έχουν δώσει γενικά παραπλανητικές απόψεις του προβλήματος αυτού. Η μετάβαση στην τυρβώδη ροή είναι γενικά λιγότερη προβλέψιμη όταν το επίπεδο της τύρβης είναι χαμηλό.

Τα τυρβώδη οριακά στρώματα μπορούν να υπολογισθούν με μία ποικιλία μεθόδων κάθε μία από τις οποίες εμπεριέχει διαφορετική ποσότητα και ποιότητα εμπειρικών πληροφοριών και οι οποίες μπορούν να δώσουν ακριβείς προβλέψεις για την εξέλιξη του οριακού στρώματος. Δυστυχώς, χωρίς ιδιαίτερες τροποποιήσεις, καμία από αυτές δεν είναι ιδιαίτερα αξιόπιστη κοντά στην αποκόλληση όπου η ροή είναι τριδιάστατης μορφής και η διδιάστατη βάση στην οποία στηρίζεται κάθε μοντέλο τίθεται σε αμφισβήτηση.

Είναι γνωστό ότι η θεωρία των τυρβωδών οριακών στρωμάτων και οι σχετικές υπολογιστικές μέθοδοι (διαφορικής ή ολοκληρωτικής μορφής) μπορούν να προβλέψουν το τυρβώδες οριακό στρώμα μέχρι το σημείο της αποκόλλησης, όταν βέβαια είναι γνωστά η εξωτερική ταχύτητα και η γεωμετρία του πτερυγίου. Στην πράξη πολλά πτερύγια συμπίεστη έχουν περιοχές αποκολλημένης ροής. Για υποηχητικούς συμπίεστες την αποκόλληση μπορεί να προκαλέσει η γενική φόρτιση του πτερυγίου, ενώ για διηχητικούς συμπίεστες προφανής λόγος αποκόλλησης είναι η αλληλεπίδραση κρουστικού κύματος και οριακού στρώματος. Είναι φανερό ότι μια χρήσιμη μέθοδος υπολογισμού οριακών στρωμάτων πρέπει να ξεπερνά την ιδιομορφία που συνεπάγεται η αποκόλληση.

Σε πλήρως προσκολλημένες ροές κάθε αλλαγή στην εξωτερική ταχύτητα προκαλεί μικρές μόνο μεταβολές στα οριακά στρώματα και πιο συγκεκριμένα στην κατανομή του πάχους μετατόπισής τους. Αυτό δεν ισχύει όταν η ροή είναι αποκολλημένη. Στην περίπτωση αυτή ακόμα και μικρές αλλαγές στην εξωτερική ταχύτητα μπορούν να προκαλέσουν σημαντικές μεταβολές στο πάχος μετατόπισης, να αλλάξουν σημαντικά την κατανομή πίεσης γύρω από το πτερύγιο και ενδεχόμενα να οδηγήσουν σε αστάθεια. Το φαινόμενο αυτό που περιγράφουμε για τους συμπίεστες συμβαίνει, ως γνωστό, και σε μεμονωμένες αεροτομές ή διαχύτες. Σε διηχητικές συνθήκες ροής οι μεγάλες αλλαγές στην εξωτερική ταχύτητα μπορούν να προκαλέσουν μικρές αλλαγές στη στένωση (δηλαδή στο πάχος μετατόπισης του οριακού στρώματος) και για το λόγο αυτό μπορούν να οδηγήσουν σε αστάθεια ακόμα και αν η ροή είναι πλήρως προσκολλημένη.

1.4 Συνεκτικές Ροές και Υπολογιστική Ρευστομηχανική

Η Υπολογιστική Ρευστομηχανική, η οποία θα αποτελέσει βασικό εργαλείο σε σημαντικό τμήμα του μαθήματος, συνδυάζει γνώσεις από την επιστήμη της Μηχανικής των Ρευστών με υπολογιστικά εργαλεία για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων, από την επιστήμη των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, ώστε να προβλέπει επιτυχώς τη συμπεριφορά ροϊκών πεδίων, με τη χρήση των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών. Η Υπολογιστική Ρευστομηχανική

στηρίζεται, ανεξάρτητα από το πρόβλημα που καλείται να επιλύσει (εσωτερικής ή εξωτερικής αεροδυναμικής, ροή γύρω από πτέρυγες, ροή μέσα σε πτερυγώσεις ή άλλες συνιστώσες στροβιλομηχανών κλπ.), στις γνωστές εξισώσεις Navier-Stokes, σε συνδυασμό με κατάλληλες καταστατικές εξισώσεις και ένα σύνολο παραδοχών. Οι παραδοχές αυτές, είτε γίνονται για την απλοποίηση του προβλήματος ώστε να συντομευθεί ο χρόνος επίλυσης, είτε καλύπτουν φαινόμενα για τα οποία η γνώση είναι ακόμα αμφίβολη, περιορισμένη ή ελλιπής. Μετά το 1970 περίπου, η Υπολογιστική Ρευστομηχανική έχει πραγματοποιήσει αλματώδη πρόοδο, βοηθούμενη σημαντικά και από την τεράστια εξέλιξη των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών. Έτσι, μπορούμε πλέον άφοβα να διατυπώσουμε ότι σε πρακτικό επίπεδο οι εξισώσεις Navier-Stokes μπορούν σήμερα να επιλύονται σε γενικά παραδεκτούς υπολογιστικούς χρόνους, η δε ακρίβεια και πιστότητα των αποτελεσμάτων εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από την εμπειρία του Μηχανικού που χρησιμοποιεί τα Υπολογιστικά Εργαλεία και κυρίως από τις παραδοχές και τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται. Η αριθμητική επίλυση των μοντέλων ροής (π.χ. των εξισώσεων Navier-Stokes) αναπτύχθηκε κατ'αρχήν ως συμπλήρωμα των πειραματικών μετρήσεων σε υπάρχουσες ή νεοσχεδιαζόμενες μηχανές. Ειδικά όμως για τις Στροβιλομηχανές που μας απασχολούν, η αριθμητική προσομοίωση των πεδίων ροής καταλήγει τακτικά να είναι το μοναδικό "εργαλείο" για την πρόλεξη της συμπεριφοράς ενός ροϊκού πεδίου, αφού η εκτέλεση μετρήσεων σε πραγματικές στροβιλομηχανές (κυρίως μέσα στα περιστρεφόμενα τμήματα της μηχανής) είναι επίπονη και κοστίζει ακριβά, ενώ σε ορισμένες περιπτώσεις είναι πρακτικά αδύνατη.

Η φύση του μαθήματος, που πραγματεύεται "Συνεκτικές Ροές στις Στροβιλομηχανές", μας αναγκάζει να μην ασχοληθούμε με τα απλούστερα και οικονομικότερα μοντέλα υπολογισμού της ροής αλλά να σταθούμε σε αυτά τα οποία μπορούν να προλέξουν με ακρίβεια τα συνεκτικά φαινόμενα τα οποία λαμβάνουν χώρα στις Στροβιλομηχανές. Τέτοια απλούστερα μοντέλα είναι κυρίως αυτά που βασίζονται στην επίλυση:

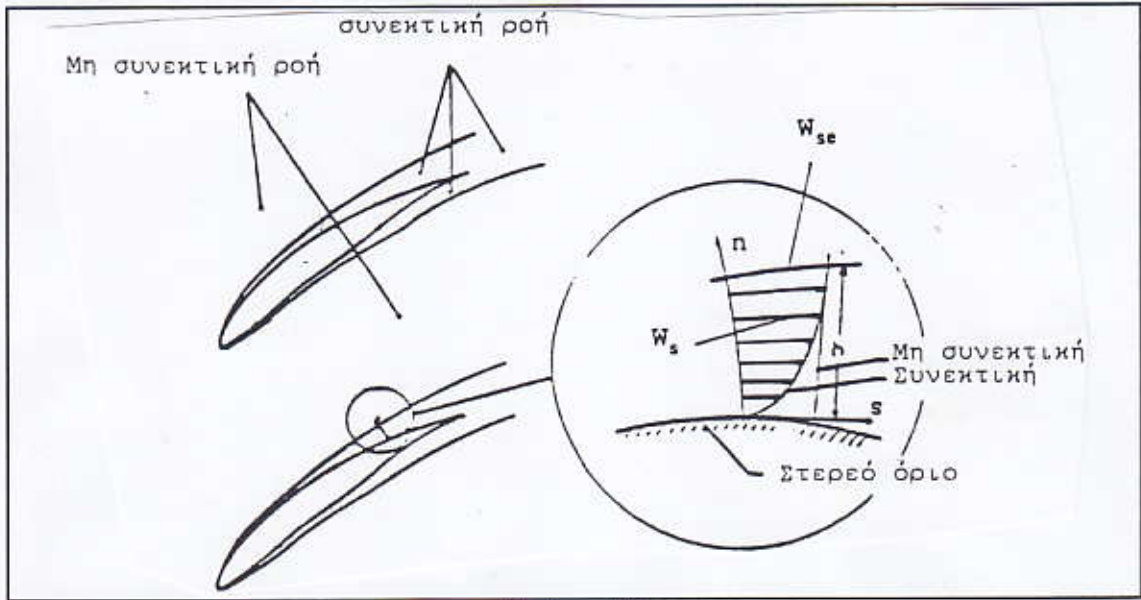
- (α) της εξίσωσης δυναμικής ροής. Πρόκειται για το πτωχότερο επίπεδο προσέγγισης το οποίο, λόγω των παραδοχών που χρησιμοποιεί, είναι χρήσιμο μόνο για αστρόβιλες ροές, μέχρι περίπου την περιοχή αριθμών Mach 1.2. Προφανώς το μοντέλο δίνει μια γενική εικόνα του πεδίου ροής, αλλά έχει το πλεονέκτημα του να είναι πάρα πολύ γρήγορο, ακόμα και σε τριδιάστατες εφαρμογές, αφού επιλύεται μια μόνο διαφορική εξίσωση. Για τέτοιου είδους ελλειπτικές διαφορικές εξισώσεις έχουν αναπτυχθεί ταχύτεροι αλγόριθμοι επίλυσης.
- (β) των εξισώσεων Euler. Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν όταν από τις εξισώσεις Navier-Stokes αμεληθούν όλοι οι όροι που περιγράφουν τη συνεκτικότητα του πεδίου ροής. Για την επίλυση των εξισώσεων Euler χρησιμοποιούνται, σε γενικές γραμμές, ίδια υπολογιστικά εργαλεία με αυτά που επιλύουν τις εξισώσεις Navier-Stokes, αλλά επιτυγχάνεται ταχύτερη επίλυση, αφού παραλείπεται η διαχείριση ενός "υπολογιστικά χρονοβόρου" τμήματος των εξισώσεων Navier-Stokes.

Ετσι, το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται σε μεθόδους που χρησιμοποιούν:

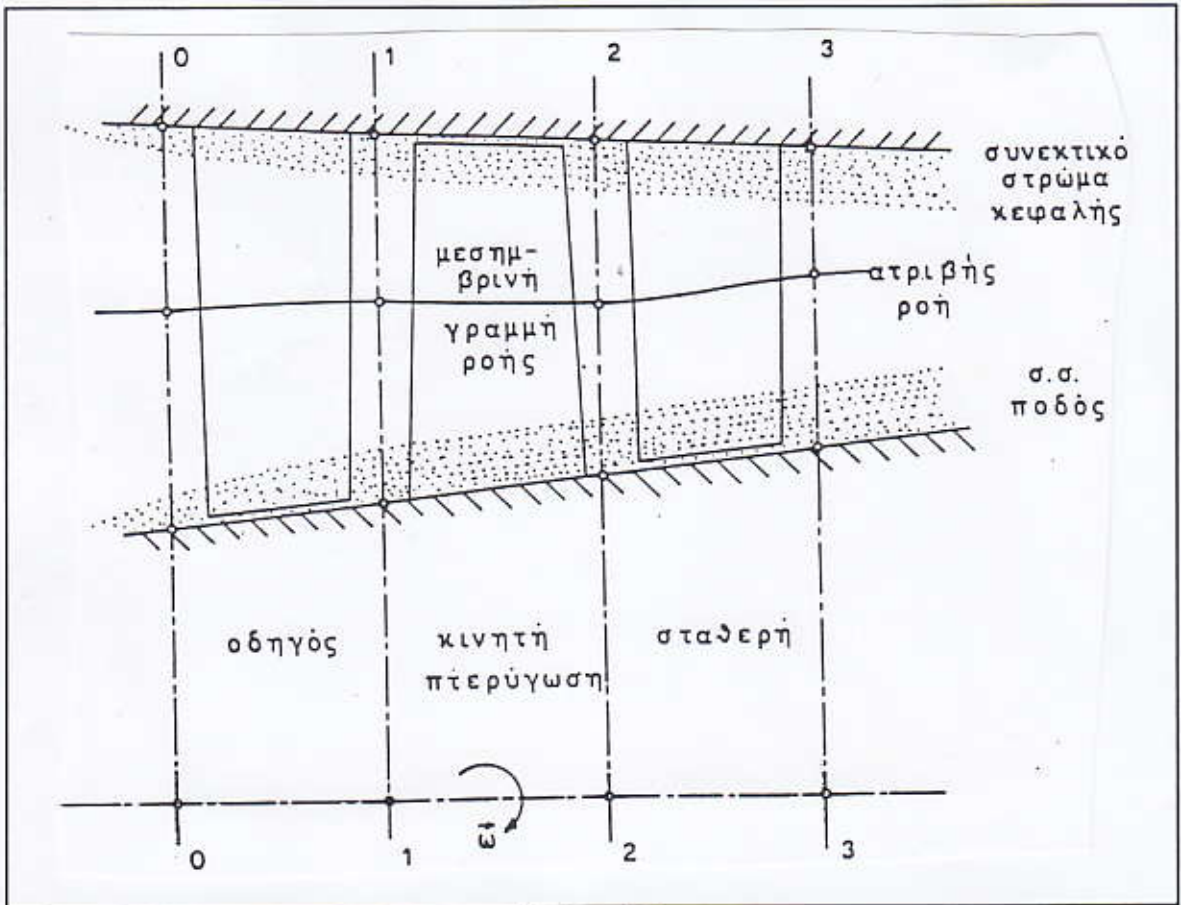
- (α) την απευθείας επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes, σε διδιάστατα ή τριδιάστατα πεδία Στροβιλομηχανών. Οι μέθοδοι στις οποίες θα αναφερθούμε στηρίζονται σε σχήματα και διακριτοποιήσεις πεπερασμένων διαφορών, ρητούς και πεπλεγμένους αλγόριθμους επίλυσης και μοντέλα τύρβης μηδενικής και δεύτερης τάξης. Η ανάπτυξη των προαναφερθέντων θεμάτων θα γίνει σε εισαγωγικό επίπεδο και θα εντοπίζεται στα ιδιαίτερα στοιχεία των μεθόδων που αφορούν στις στροβιλομηχανές και στα συνεκτικά φαινόμενα ροής μέσα σ'αυτές. Γνώσεις Βασικής Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής θα θεωρούνται δεδομένες ή θα παρουσιάζονται συνοπτικά σε παραρτήματα των σημειώσεων αυτών.
- (β) ολοκληρωτικές τεχνικές επίλυσης των συνεκτικών στρωμάτων, κάτω από την παραδοχή του διζωνικού μοντέλου ροής. Το διζωνικό μοντέλο, που εισήγαγε ο Prandtl, διακρίνει το συνολικό πεδίο ροής σε μια συνεκτική ζώνη κοντά στα τοιχώματα και τον ομόρροου καθώς και μια δεύτερη ατριβή ζώνη, όπου η συνεκτικότητα μπορεί να αμεληθεί. Η ατριβής ζώνη επιλύεται με κάποιο από τα δύο απλούστερα μοντέλα ροής που αναφέρθηκαν προηγούμενα, ενώ η συνεκτική ζώνη με μια ολοκληρωτική μέθοδο και με τεχνικές προέλασης στο χώρο. Η τελευταία μέθοδος είναι γρήγορη, κατάλληλη για βιομηχανικούς υπολογισμούς σε καθημερινή βάση και το ενδιαφέρον συνοψίζεται στην "πληροφορία" που έχει ενσωματωθεί σ'αυτή και που προέρχεται από την επεξεργασία πολλών πειραματικών δεδομένων. Μια απλοποιητική παρουσίαση της ιδέας του διζωνικού μοντέλου για τα οριακά στρώματα που αναπτύσσονται πάνω στα πτερύγια δίνεται στο Σχήμα 1.8. Στο Σχήμα 1.9 παρουσιάζεται μια εικόνα των συνεκτικών στρωμάτων που αναπτύσσονται στο πόδι και στην κεφαλή μιας στροβιλομηχανής.

1.5 Το Μοντέλο Ανάλυσης του Wu

Ανεξάρτητα από το μοντέλο που θα επιλεγεί για την προσομοίωση της ροής μέσα στις πτερυγώσεις των στροβιλομηχανών, υπάρχει πάντοτε η δυνατότητα το μοντέλο αυτό να εφαρμοστεί σε διδιάστατη ή τριδιάστατη βάση. Όπως γνωρίζουμε, η ροή στις στροβιλομηχανές είναι ισχυρά τριδιάστατη, αλλά η επίλυση των τριδιάστατων εξισώσεων ροής είναι εξαιρετικά χρονοβόρα ακόμα και με τους σημερινούς υπολογιστές. Για το λόγο αυτό, το 1952, ο Wu εισήγαγε το δικό του μοντέλο, με το οποίο αποφεύγεται η επίλυση των τριδιάστατων πεδίων ροής και αντ'αυτής εισάγεται η συνδυασμένη επίλυση διδιάστατων πεδίων ροής σε δύο οικογένειες επιφανειών μέσα στην πτερύγωση. Η πρώτη οικογένεια αποτελείται από επιφάνειες από-πτερύγιο-σε-πτερύγιο, ή επιφάνειες τύπου S_1 , ενώ η δεύτερη οικογένεια αποτελείται από μεσημβρινές επιφάνειες ή επιφάνειες S_2 , όπως φαίνονται στο Σχήμα 1.10. Ας σημειωθεί ότι ο Wu παρουσίασε το μοντέλο του για μη-συνεκτικές ροές και αργότερα, το 1974, ο Vanra το επέκτεινε ώστε να ληφθούν υπόψη τα συνεκτικά φαινόμενα.

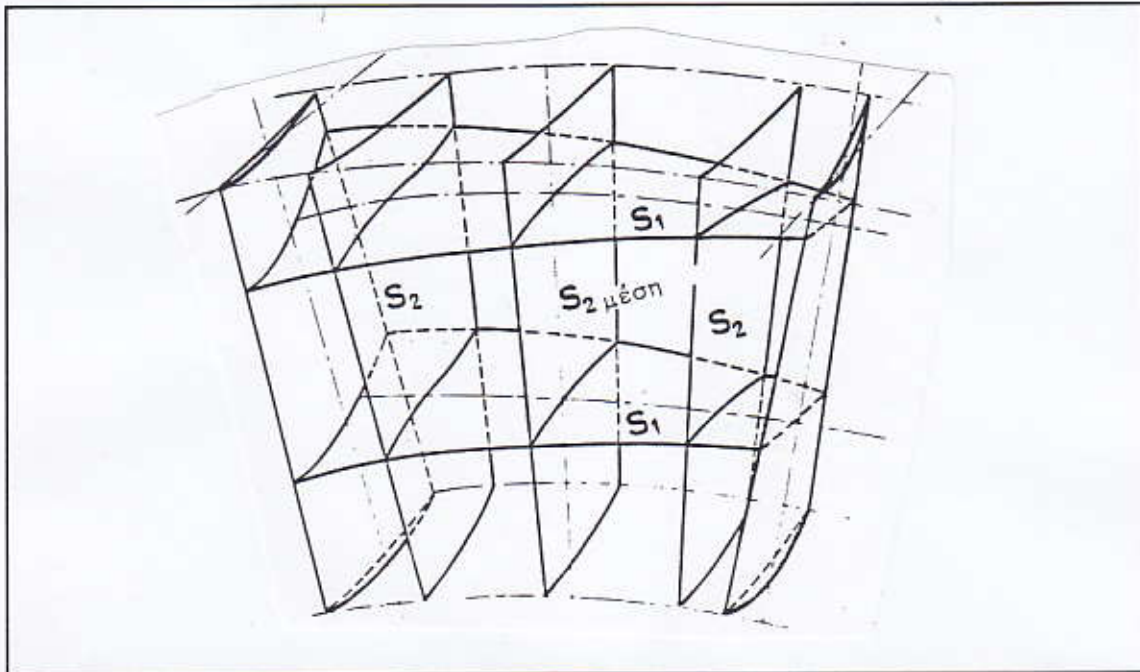


Σχήμα 1.8



Σχήμα 1.9

Οι ψευδο-τριδιάστατες μέθοδοι επίλυσης, όπως ονομάζονται, επιτρέπουν το συνδυασμό διαφορετικών τύπων επιλυτών ανά οικογένεια επιφανειών και συντομεύουν σημαντικά το χρόνο επίλυσης.



Σχήμα 1.10

Η αναφορά στο μοντέλο του Wu γίνεται γιατί αποτελεί ένα βολικό υπολογιστικό εργαλείο ιδίως στις περιπτώσεις εκείνες όπου η χρήση πλήρως τριδιάστατων υπολογισμών είναι πρακτικά αδύνατη. Η λύση στις επιφάνειες από-πτερύγιο-σε-πτερύγιο απαιτεί την εξέλιξη των μεθοδολογιών επίλυσης των εξισώσεων Navier-Stokes για διδιάστατες επίπεδες πτερυγώσεις, ώστε να ληφθούν υπόψη αφ'ενός μεν η μορφή που έχουν οι επιφάνειες ροής (με την απλοποιητική παραδοχή της αξονικής συμμετρίας), αφ'ετέρου δε το μεταβλητό πάχος των σωλήνων ροής. Τα φυσικά φαινόμενα που σχετίζονται με την τύρβη του πεδίου ροής, αντιμετωπίζονται μέσω μοντέλων τύρβης κατά τρόπο αντιστοιχο αυτού που έχει χρησιμοποιηθεί και πιστοποιηθεί για τις επίπεδες ροές.

1.6 Οι Μηχανισμοί Απωλειών στις Στροβιλομηχανές

Η απόδοση μιας στροβιλομηχανής είναι η πιο σημαντική παράμετρος της. Η σημασία του συντελεστή απόδοσης είναι πολύ εμφανής στους επίγειους και αεροπορικούς αεριοστροβίλους όπου η καθαρή ισχύς που αποδίδεται στον άξονα της μηχανής είναι απλά η διαφορά του έργου του στροβίλου και του έργου του συμπιεστή στη μονάδα του χρόνου. Στους αεριοστροβίλους αυτούς, μια μικρή αλλαγή στο βαθμό απόδοσης οποιασδήποτε από τις δύο συνιστώσες προκαλεί μια αναλογικά σημαντική μεταβολή στην απόδοση του

συστήματος. Για μεγάλο χρονικό διάστημα οι προσπάθειες αυτών που ασχολούνταν με τις στροβιλομηχανές γίνονταν στην κατεύθυνση της βελτίωσης της απόδοσης των διαφόρων τύπων στροβιλομηχανών. Έτσι σήμερα υπάρχουν αρκετές στροβιλομηχανές με βαθμό απόδοσης ολικών προς ολικές συνθήκες της τάξης του 90%. Ένας τόσο υψηλός βαθμός απόδοσης κάνει ακόμη δυσκολότερη κάθε νέα προσπάθεια για επιπλέον βελτίωσή του. Την πορεία μέχρι να φθάσουμε στα σημερινά επίπεδα απόδοσης των στροβιλομηχανών βοήθησε σημαντικά η εμπάθυση των φαινομένων ροής και της θερμοδυναμικής μέσα σ'αυτές. Η εμπάθυση αυτή επιτεύχθηκε από το συνδυασμό προηγμένων πειραματικών και υπολογιστικών μεθόδων που εφαρμόστηκαν τόσο στο σύνολο κάθε μηχανής, όσο και σε διακεκριμένες συνιστώσες της. Η σημαντική εξέλιξη των αριθμητικών μεθόδων υπολογισμού της ροής, σε συνδυασμό με την ανάπτυξη των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, διεκδικεί ένα σημαντικό μερίδιο στην παραπάνω πρόοδο.

Οι παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν την απόδοση της στροβιλομηχανής είναι εξαιρετικά πολύπλοκοι. Η μελέτη τους προχώρησε σημαντικά μαζί με την εξέλιξη των αεροπορικών αεριοστροβίλων, αφού η μελέτη των αντλιών, ατμοστροβίλων ή ανεμιστήρων στηριζόνταν σε σημαντικό ποσοστό σε διαδικασίες δοκιμής και σφάλματος. Τη δεκαετία 1940-1950 η πρόοδος στην κατανόηση και μοντελοποίηση των απωλειών ήταν σημαντική και απέδωσε μοντέλα που ακόμα και σήμερα χρησιμοποιούνται στη βιομηχανία. Οι προβλέψεις στηριζόνταν κυρίως σε εμπειρικούς-πειραματικούς συσχετισμούς δεδομένων που προέρχονταν από δοκιμές σε γραμμικές πτερυγώσεις ή από τη λειτουργία των αληθινών στροβιλομηχανών. Στις επόμενες δυο-τρεις δεκαετίες έγινε ευρύτατη χρήση των μοντέλων αυτών, χωρίς ιδιαίτερη περαιτέρω ανάπτυξή τους. Εστω και αν η χρήση αυτών των γενικευμένων μοντέλων έδινε προβλέψεις περιορισμένης ακρίβειας, κάθε κατασκευαστής προσάρμοζε το μοντέλο που υιοθετούσε στις δικές του μηχανές, το βαθμονομούσε και το βελτίωνε πάνω σ'αυτές και το χρησιμοποιούσε από ανάγκη στους νέους σχεδιασμούς του ελπίζοντας σε σφάλματα πρόβλεψης της τάξης του $\pm 2\%$.

Στο τέλος της δεκαετίας του 1970 και κυρίως στη δεκαετία του 1980, η εξέλιξη των μεθόδων πειραματικών μετρήσεων (laser, hot-wire, κλπ.) βοήθησε συμπληρωματικά την κατανόηση των φαινομένων ροής. Ακριβέστερες υπολογιστικές μέθοδοι που χρησιμοποιούσαν αρκετά καλή διακριτοποίηση των υπολογιστικών χωρίων (αφού οι νέοι υπολογιστές επέτρεπαν υπολογισμούς Navier-Stokes με 500.000 ως 1.000.000 κόμβους) έδωσαν επιπλέον πληροφορίες για τα συνεκτικά φαινόμενα ροής, ιδίως σε τριδιάστατες τοπολογίες. Οι νέες γνώσεις για τα πολύπλοκα φαινόμενα ροής και τους συνεπαγόμενους μηχανισμούς απωλειών είναι πλέον πολύ πολύπλοκες για να ενσωματωθούν στα απλοποιημένα μοντέλα ροής. Και αυτή η επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes παύει να δίνει ποσοτικά σωστές προβλέψεις για ιδιαίτερα πολύπλοκες ροές, όπως λ.χ. είναι οι χρονικά-μεταβαλλόμενες τυρβώδεις ροές.

Η ιστορική διάκριση των απωλειών σε "απώλειες αεροτομής", "απώλειες κελύφων",

"απώλειες δευτερευουσών ροών" και "απώλειες ακτινικών διακένων" συνεχίζει να χρησιμοποιείται, έστω και αν πλέον έχει αποδειχθεί ότι οι μηχανισμοί αυτοί απωλειών δεν είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους.

1.7 Διάταξη της Υλης

Σκοπός του μαθήματος "Συνεκτικές Ροές στις Στροβιλομηχανές" και συνεπώς σκοπός και του παρόντος συγγράμματος είναι να παρουσιάσει και να αναλύσει, θεωρητικά ή/και υπολογιστικά, τα συνεκτικά φαινόμενα ροής στις Στροβιλομηχανές.

Οι Διαφορικές Μέθοδοι για τον υπολογισμό των ροών στις στροβιλομηχανές σχετίζονται με την επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes συνδυασμένων με τα απαραίτητα μοντέλα τύρβης. Οι γνώσεις που θα αποκτηθούν από τα πρώτα έξι κεφάλαια, αν συνδυασθούν με βασικές γνώσεις θεωρίας Στροβιλομηχανών και ενδεχόμενες γνώσεις Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής, επιτρέπουν την ανάλυση και κατανόηση κωδίκων που επιλύουν τις εξισώσεις Navier-Stokes σε πτερυγώσεις στροβιλομηχανών, λ.χ. με την τεχνική των πεπερασμένων διαφορών. Για λόγους πληρότητας, το Παράρτημα Π1, παρέχει μια πολύ σύντομη εισαγωγή στην Τεχνική των Πεπερασμένων Διαφορών.

Η πολυπλοκότητα των χωρίων ροής στις στροβιλομηχανές απαιτούν προσεκτική χωρική διακριτοποίησή του με τη βοήθεια καμπυλόγραμμων συστημάτων συντεταγμένων. Η εξοικείωση με τα καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων βοηθά στη γένεση υπολογιστικών πλεγμάτων δομημένης μορφής σε διδιάστατα χωρία επίπεδων ή περιφερειακών πτερυγώσεων ή τριδιάστατα χωρία στροβιλομηχανών, αλλά συγχρόνως ενισχύει την ευελιξία για το χειρισμό των ισχυουσών εξισώσεων σε τέτοια πλέγματα. Τα καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων αναλύονται στο Κεφάλαιο 2.

Το Κεφάλαιο 3 παρουσιάζει τις εξισώσεις ροής όπως αυτές γράφονται είτε για πλήρως τριδιάστατη ανάλυση, είτε για την επιφάνεια από-περύγιο-σε-περύγιο μιας πτερυγώσης, δηλαδή τη γνωστή ως επιφάνεια S_1 . Στο ίδιο κεφάλαιο, έχοντας ήδη εξοικειωθεί με τα καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων, οι εξισώσεις ροής διατυπώνονται με κατάλληλο για επίλυση τρόπο στα οριόδετα συστήματα συντεταγμένων που προαναφέραμε. Το Κεφάλαιο 3 ολοκληρώνεται με τη διατύπωση των φυσικών και υπολογιστικών οριακών συνθηκών που επιβάλλονται που παρουσιάζεται στο Παράρτημα Π2.

Στα Κεφάλαια 4 και 5 παρουσιάζονται χρήσιμα στοιχεία από τη θεωρία του οριακού στρώματος και γίνεται εισαγωγή στην ανάγκη και την έννοια της μοντελοποίησης της τύρβης. Αναπτύσσονται τα μοντέλα τύρβης, αλγεβρικά ή διαφορικά δύο εξισώσεων, που κυρίως χρησιμοποιούνται στις Στροβιλομηχανές. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στο μοντέλο k-ε που σήμερα χρησιμοποιείται ευρύτατα για την ανάλυση της ροής σε πτερυγώσεις

στροβιλομηχανών.

Το Κεφάλαιο 6 ασχολείται με τη φυσική της μετάβασης από τη στρωτή στην τυρβώδη ροή, όπως αυτή συμβαίνει σε περυγία συμπιεστών και στροβίλων. Παρουσιάζονται και αναλύονται εμπειρικοί νόμοι για την πρόβλεψη της μετάβασης, οι πιθανοί τρόποι μετάβασης και εμπειρικά κριτήρια σχετικά με αυτή. Ο φοιτητής αποκτά εξοικείωση με την κατανομή πίεσης που προκύπτει στα τοιχώματα ενός περυγίου στροβίλου ή συμπιεστή και μαθαίνει να τη συσχετίζει με τα συνεκτικά φαινόμενα ροής που λαμβάνουν χώρα στην περυγωση.

Το Κεφάλαιο 7 αναλύει το θέμα των δευτερευουσών ροών και των σχετικών δευτερευουσών απωλειών σε περυγώσεις στροβιλομηχανών. Εξηγείται ο τρόπος σχηματισμού των δευτερευουσών ροών και παρουσιάζονται χαρακτηριστικά πεδία ροής σε περυγώσεις συμπιεστών και στροβίλων όπου αναγνωρίζονται οι δευτερεύουσες ροές. Η μεταφορά του δευτερεύοντος στροβιλισμού, με ένα κλασικό ατριβές μοντέλο ροής αποτελεί αντικείμενο του Κεφαλαίου 9. Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσονται οι εξισώσεις μεταφοράς του δευτερεύοντος στροβιλισμού, ακολουθώντας σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί τις γραμμές ροής ενός τριδιάστατου πεδίου ροής σε μια περυγωση. Συγχρόνως, στο Κεφάλαιο 8 παρουσιάζεται η ροή στο ακτινικό διάκενο περυγώσεων στροβιλομηχανών, τονίζεται η επίδραση που η ροή αυτή έχει στις απώλειες της περυγώσης, η αλληλεπίδραση δευτερευουσών ροών και ροής του ακτινικού διακένου και παρουσιάζεται ένα μοντέλο για την προσομοίωση των κατανομών ταχύτητας στο χώρο του διακένου.

Στα Κεφάλαια 10 και 11 δίνεται το υπόβαθρο διατύπωσης ολοκληρωτικών τεχνικών για τον υπολογισμό της συμπεριφοράς συνεκτικών στρωμάτων που αναπτύσσονται κατά μήκος στερεών τοιχωμάτων, όπως λ.χ. περυγίων στροβιλομηχανών. Συζητείται το θεωρητικό υπόβαθρο το οποίο καλύπτει τα ισορροπημένα, στρωτά ή τυρβώδη, οριακά στρώματα και προτείνονται εμπειρικές κατανομές ταχύτητας για τη μοντελοποίησή τους. Τέλος διατυπώνονται οι ολοκληρωτικές εξισώσεις διατήρησης της διαμήκουσ ορμής και της κινητικής ενέργειας, η επίλυση των οποίων, σε συνδυασμό με τις σωστές πληροφορίες από την ανάλυση σειράς μετρήσεων, προβλέπει με επιτυχία τη συμπεριφορά ενός οριακού στρώματος. Στο Κεφάλαιο 11, ο φοιτητής μπορεί να γνωρίσει βασικά στοιχεία μιας ολοκληρωτικής τεχνικής για οριακά στρώματα, όπως είναι η μέθοδος του Le Foll, που έχει χρησιμοποιηθεί ευρύτατα για υπολογισμούς στο Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ-ΓΕΝΕΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ

2.1 Εισαγωγή

Στη δεκαετία του 1970, η αριθμητική γένεση συστημάτων καμπυλόγραμμων συντεταγμένων (curvilinear coordinates) προσαρμοσμένων στα όρια του χωρίου υπολογισμού έδωσε πολύ σημαντική ώθηση στη χρήση των πεπερασμένων διαφορών για την αριθμητική επίλυση φυσικών προβλημάτων που μπορούσαν να μοντελοποιηθούν με τη βοήθεια μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η ώθηση αυτή ήταν πολύ έντονη ειδικά στις περιπτώσεις όπου το πρόβλημα απαιτούσε τη λύση των εξισώσεων αυτών σε διδιάστατες ή τριδιάστατες περιοχές, των οποίων τα όρια παρουσίαζαν ακανόνιστη μορφή. Η Υπολογιστική Ρευστομηχανική, ή Μετάδοση θερμότητας και ο Ηλεκτρομαγνητισμός είναι τρεις τομείς που μπορούμε πρόχειρα να αναφέρουμε ότι ωφελήθηκαν άμεσα από την ευρεία χρήση καμπυλόγραμμων συντεταγμένων σε συνδυασμό με μεθοδολογίες πεπερασμένων διαφορών. Η μελέτη της ροής σε συνιστώσες Στροβιλομηχανών, όπου τα χωρία ροής είναι συνήθως εξαιρετικά πολύπλοκα, είναι ένας τέταρτος τομέας που επίσης επωφελήθηκε σημαντικά.

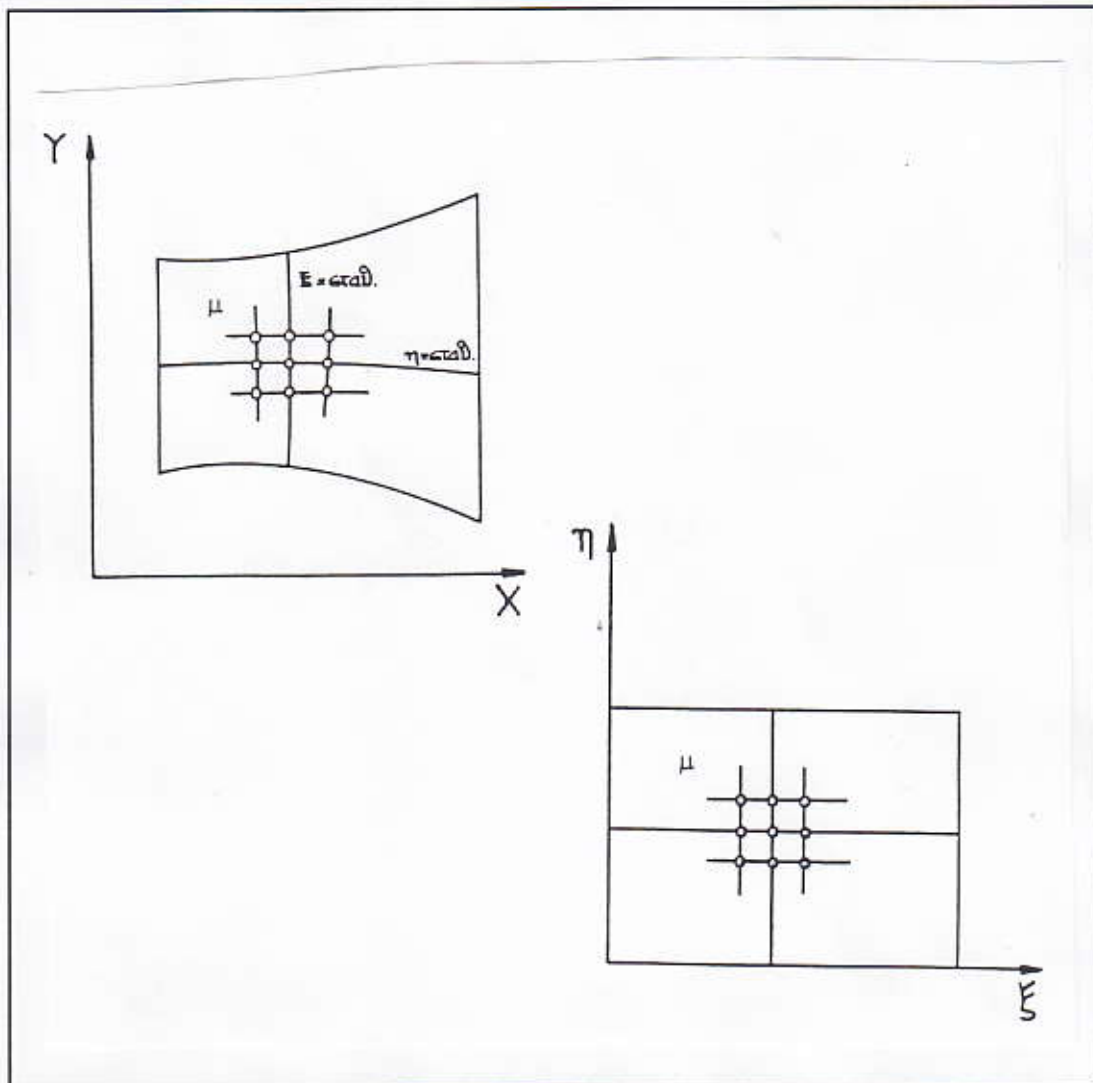
Η χρήση καμπυλόγραμμων συστημάτων συντεταγμένων (κσσ), όπου τα όρια του χωρίου ροής ταυτίζονται με πλεγματικές γραμμές, διευκολύνει τη χρήση της μεθοδολογίας πεπερασμένων διαφορών, κυρίως λόγω της αρκετά εύκολης εφαρμογής των οριακών συνθηκών, χωρίς την ανάγκη ενσωμάτωσης σχημάτων αριθμητικής παρεμβολής. Ακόμα και για τη μελέτη της μή-μόνιμης ροής σε χωρίο με κινούμενα τοιχώματα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κσσ και να μετασχηματίσουμε το πρόβλημα σε κάποιο αντίστοιχο πρόβλημα που θα λυθεί στο μετασχηματισμένο χωρίο που αποτελείται από τετραγωνικές (για δύο διαστάσεις) ή κυβικές (για τρεις διαστάσεις) κυψέλες με μοναδιαία πλευρά.

Η ανάλυση σχημάτων διαφόρισης σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες σχηματίζεται από τον κατ'αρχήν μετασχηματισμό κάθε παραγώγου ως προς τις καρτεσιανές συντεταγμένες σε ισοδύναμες εκφράσεις που περιλαμβάνουν παραγώγους ως προς τις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες καθώς και παραγώγους των καρτεσιανών ως προς τις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες. Οι τελευταίες θα φέρονται με το γενικό όνομα "μετρικές". Στη συνέχεια, οι παράγωγοι ως προς τις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες διακριτοποιούνται εύκολα με τη βοήθεια των σχημάτων πεπερασμένων διαφορών πάνω στο ομοιόμορφο πλέγμα του μετασχηματισμένου χωρίου, όπου οι αποστάσεις μεταξύ διαδοχικών κόμβων είναι μοναδιαίες. Με τον τρόπο αυτό, όλοι οι υπολογισμοί ανάγονται σε ένα απλουστευμένο και βολικό υπολογιστικό πλέγμα.

Γενικά η δημιουργία αριθμητικών (υπολογιστικών) πλεγμάτων είναι η διαδικασία με την οποία διατάσσεται, μέσα στο προς επίλυση χωρίο, ένας συγκεκριμένος αριθμός "παρατηρητών των φυσικών φαινομένων". Οι διακριτοποιημένες εξισώσεις αποτελούν το μέσο επικοινωνίας μεταξύ των "παρατηρητών" αυτών, δηλαδή των κόμβων του υπολογιστικού

πλέγματος. Ο αριθμός των "παρατηρητών" ή κόμβων πρέπει να είναι τέτοιος ώστε η συλλογή των πληροφοριών από το πεπερασμένο σύνολό τους να εξασφαλίζει την πρόβλεψη των φυσικών φαινομένων με ικανοποιητική ακρίβεια. Ας ληφθεί υπ'όψη ότι η τελική ακρίβεια με την οποία προβλέπονται τα φυσικά φαινόμενα εξαρτάται και από τις παραδοχές του μοντέλου που εκφράζουν οι διαφορικές εξισώσεις που επιλύονται.

Στο Σχήμα 2.1 δίνεται σχηματικά ο γεωμετρικός μετασχηματισμός ενός τυχαίου διδιάστατου χωρίου ροής από το καρτεσιανό επίπεδο (x,y) , στο μετασχηματισμένο ή υπολογιστικό επίπεδο (ξ,η) , όπως αυτός προκύπτει από την εισαγωγή ενός κσσ.



Σχήμα 2.1

Αντίστοιχο σχήμα θα μπορούσε εύκολα να δοθεί για ένα τριδιάστατο χωρίο που μετασχηματίζεται από το καρτεσιανό (x,y,z) στο μετασχηματισμένο χωρίο (ξ,η,ζ) . Πρέπει δε να γίνει σαφές ότι ο μετασχηματισμός αυτός μπορεί να λειτουργήσει άσχετα από τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάστηκε το πλέγμα στο αληθινό χωρίο ροής. Οι τρόποι γένεσης αποτελούν το αντικείμενο των παρακάτω ενοτήτων.

2.2 Θεμελιώδεις Σχέσεις σε ένα κσσ

Ας θεωρήσουμε ότι για το υπολογιστικό χωρίο που παρουσιάζει το Σχήμα 2.1 κατασκευάστηκε (με οποιοδήποτε τρόπο) ένα πλέγμα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων. Με το γεωμετρικό μετασχηματισμό που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, ο κόμβος M του πραγματικού ροϊκού χωρίου απεικονίζεται στον κόμβο (M') του μετασχηματισμένου χωρίου. Ας φανταστούμε στη συνέχεια ότι, αντί ενός διδιάστατου, έχουμε ένα τριδιάστατο χωρίο ροής, δηλαδή από τον κόμβο M διέρχονται καμπύλες πλεγματικές γραμμές από τρεις οικογένειες τέτοιων γραμμών : μιά γραμμή ξ =μεταβλητό, μιά γραμμή η =μεταβλητό και μιά τρίτη γραμμή ζ =μεταβλητό. Για τις τρεις αυτές γραμμές μπορούμε να ορίσουμε τα εφαπτομενικά τους διανύσματα στον κόμβο M , τα οποία αντίστοιχα δίνονται από τις σχέσεις

$$\bar{g}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}, \quad \bar{g}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}, \quad \bar{g}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} \quad (2.1)$$

Αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, δεν είναι αναγκαστικά μοναδιαία και αποτελούν τη λεγόμενη συναλλοίωτη (covariant) βάση διανυσμάτων για το σημείο (M). Στη σχέση (2.1), με (r) συμβολίσαμε το διάνυσμα θέσης του σημείου (M).

Από το ίδιο σημείο (M) διέρχονται προφανώς τρεις επιφάνειες, η επιφάνεια ξ =σταθερό, η επιφάνεια η =σταθερό και η επιφάνεια ζ =σταθερό. Τα κάθετα σ'αυτές τις τρεις επιφάνειες στο σημείο (M), μη-μοναδιαία διανύσματα δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις :

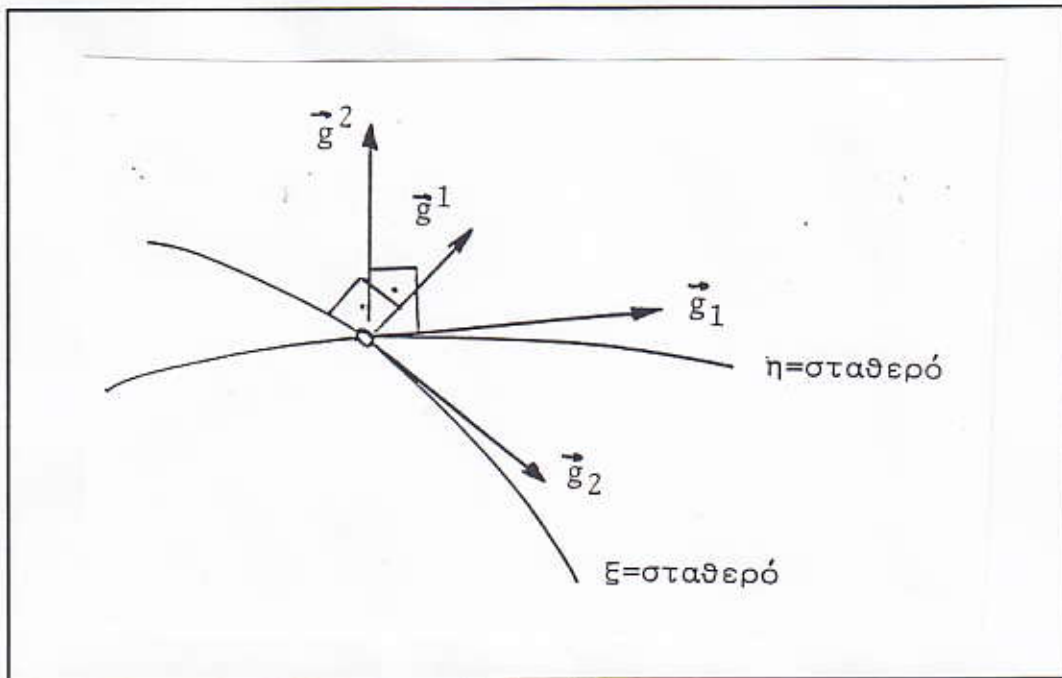
$$\bar{g}^1 = \nabla \xi, \quad \bar{g}^2 = \nabla \eta, \quad \bar{g}^3 = \nabla \zeta \quad (2.2)$$

που είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και αποτελούν τη λεγόμενη ανταλλοίωτη (contravariant) διανυσματική βάση για το σημείο (M).

Για την παρακάτω ανάλυση ο αναγνώστης καλείται να συνηθίσει στον τανυστικό συμβολισμό των δύο βάσεων ως

$$\bar{g}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} \quad \text{και} \quad \bar{g}^i = \nabla \xi^i$$

όπου $i=1, 2$ και 3 και τα (ξ^1, ξ^2, ξ^3) συμβολίζουν τις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες (ξ, η, ζ) αντίστοιχα. Στις παρακάτω σχέσεις ο κανόνας είναι ότι επαναλαμβανόμενος δείκτης (i, j κλπ) στο ίδιο μέλος μιάς σχέσης παριστά άθροιση για τις τιμές 1 και 2 για το διδιάστατο πρόβλημα ή για τις τιμές $1, 2$ και 3 για το τριδιάστατο. Όταν δεν επιθυμείται η άθροιση θα δηλώνεται ρητά. Για την καλύτερη εποπτεία σχετικά με τις δύο διανυσματικές βάσεις παραθέτουμε το Σχήμα 2.2 όπου παριστάνονται συμβολικά οι δύο βάσεις στο σημείο (M) ενός διδιάστατου χωρίου.



Σχήμα 2.2

Η συναλλοίωτη και η ανταλλοίωτη διανυσματική βάση είναι αντίστροφα συστήματα διανυσμάτων για τα οποία ισχύει :

$$\vec{g}_i \cdot \vec{g}^j = \delta_i^j \quad (2.3)$$

όπου (δ_i^j) είναι το γνωστό σύμβολο του Kronecker που παίρνει την τιμή της μονάδας αν $i=j$ ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση παίρνει μηδενική τιμή.

Αν συμβολίσουμε με $[]$ και $()$ το εξωτερικό και το μεικτό γινόμενο δύο και τριών αντίστοιχα διανυσμάτων αντίστοιχα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις μετατροπής-υπολογισμού των βάσεων

$$(\vec{g}_1 \vec{g}_2 \vec{g}_3) (\vec{g}^1 \vec{g}^2 \vec{g}^3) = 1 \quad (2.4)$$

$$\vec{g}_i = \frac{[\vec{g}^j \vec{g}^k]}{(\vec{g}^i \vec{g}^j \vec{g}^k)} \quad (2.5)$$

όχι άθροιση στα j, k , $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$

Τέλος για ένα τριδιάστατο πρόβλημα παραθέτουμε τις εκφράσεις για τις καρτεσιανές συνιστώσες των βάσεων αυτών, όπως αυτές προκύπτουν από την ανάπτυξη των σχέσεων (2.1) και (2.2). Αυτές είναι

$$\begin{aligned}
\vec{g}_1 &= (x_\xi, y_\xi, z_\xi) = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \\
\vec{g}_2 &= (x_\eta, y_\eta, z_\eta) \\
\vec{g}_3 &= (x_\zeta, y_\zeta, z_\zeta) \\
\vec{g}^1 &= (\xi_x, \xi_y, \xi_z) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \\
\vec{g}^2 &= (\eta_x, \eta_y, \eta_z) \\
\vec{g}^3 &= (\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

2.3 Ανάλυση Τυχαίου Διανύσματος στις Δύο Βάσεις

Εστω \vec{A} ένα οποιοδήποτε διάνυσμα στις θέσεις (M) του τριδιάστατου χωρίου ροής, που θα μπορούσε για παράδειγμα να είναι το διάνυσμα της ταχύτητας \vec{V} . Η ανάλυσή τους στις δύο προηγούμενα ορισθείσες διανυσματικές βάσεις μπορεί να γίνει με τους εξής δύο τρόπους :

- (α) Κάνοντας χρήση της συναλλοίωτης διανυσματικής βάσης g_i , ($i=1,2,3$) οπότε θα έχουμε

$$\vec{A} = A^i \vec{g}_i = A^1 \vec{g}_1 + A^2 \vec{g}_2 + A^3 \vec{g}_3 \tag{2.7}$$

Οι συνιστώσες (A^i) του διανύσματος \vec{A} ονομάζονται ανταλλοίωτες συνιστώσες του στο σημείο (M).

- (β) Κάνοντας χρήση της ανταλλοίωτης διανυσματικής βάσης g^i , ($i=1,2,3$) οπότε θα έχουμε

$$\vec{A} = A_i \vec{g}^i = A_1 \vec{g}^1 + A_2 \vec{g}^2 + A_3 \vec{g}^3 \tag{2.8}$$

Με τη νέα ανάλυση (2.8) ορίζονται τώρα οι συναλλοίωτες συνιστώσες (A_i) του διανύσματος \vec{A} για το σημείο (M).

Είναι αρκετά απλό, κάνοντας χρήση της ταυτότητας (2.3) να δείξουμε ότι :

$$A_i = \vec{A} \cdot \vec{g}_i \quad (i=1,2,3) \tag{2.9}$$

$$A^i = \vec{A} \cdot \vec{g}^i \quad (i=1,2,3)$$

Εκμεταλλευόμενοι τη σχέση (2.9) μπορούμε να υπολογίσουμε τις ανταλλοιώτες και συναλλοιώτες συνιστώσες του διανύσματος (\vec{A}) . Ετσι, για παράδειγμα, υπολογίζουμε τη δεύτερη ανταλλοιώτη συνιστώσα (A^2) του διανύσματος (\vec{A}) από τη σχέση

$$A^2 = \vec{A} \cdot \vec{g}^2 = (A_x, A_y, A_z) \cdot (\eta_x, \eta_y, \eta_z) = A_x \eta_x + A_y \eta_y + A_z \eta_z$$

όπου (A_x, A_y, A_z) είναι οι καρτεσιανές συνιστώσες του (\vec{A}) .

2.4 Ο μετρικός τανυστής

Ο συναλλοίωτος μετρικός τανυστής (g_{ij}) ορίζεται από τη σχέση

$$g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j \quad (2.10)$$

ενώ ο ανταλλοίωτος μετρικός τανυστής (g^{ij}) από τη σχέση

$$g^{ij} = \vec{g}^i \cdot \vec{g}^j \quad (2.11)$$

Η ποσότητα (g_{ij}) είναι ανάλογη του συνημιτόνου της γωνίας που σχηματίζεται μεταξύ μίας γραμμής κατά μήκος της οποίας η καμπυλόγραμμη συντεταγμένη (ξ^i) μεταβάλλεται (ενώ οι άλλες δύο παραμένουν σταθερές) και μίας γραμμής κατά μήκος της οποίας μεταβάλλεται η καμπυλόγραμμη συντεταγμένη (ξ^j). Ετσι, οι μή-διαγώνιοι όροι του συμμετρικού τανυστή (g_{ij}) μηδενίζονται για ορθογώνιο πλέγμα. Δηλαδή για ένα ορθογώνιο τριδιάστατο πλέγμα ισχύουν:

$$\begin{aligned} g_{12} = g_{21} &= 0 \\ g_{31} = g_{13} &= 0 \\ g_{23} = g_{32} &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Η ποσότητα (g_{ij}), χωρίς άθροιση στο (i), είναι ανάλογη του μήκους τόξου κατά μήκος μίας γραμμής στην οποία μεταβάλλεται η (ξ^i) καμπυλόγραμμη συντεταγμένη. Ετσι το μήκος τόξου κατά μήκος μίας οποιασδήποτε καμπύλης γραμμής, που μπορεί και να μην είναι πλεγματική γραμμή, δίνεται από τη σχέση

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} d\xi^i d\xi^j \quad (2.13)$$

Αποδεικνύεται ότι

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \quad (2.14)$$

και συμβολίζουμε με (J) και (G) τις Ιακωβιανές ορίζουσες του μετασχηματισμού οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις

$$J = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{vmatrix}, \quad G = \begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{vmatrix} \quad (2.15)$$

Ορίζοντας επιπλέον ότι

$$g = \det(g_{ij}) \quad (2.16)$$

αποδεικνύονται οι παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} (\vec{g}_1 \vec{g}_2 \vec{g}_3)^2 &= |\det(g_{ij})| \quad \text{ή} \quad J^2 = |g| \\ (\vec{g}^1 \vec{g}^2 \vec{g}^3)^2 &= |\det(g^{ij})| \quad \text{ή} \quad G^2 = \frac{1}{|g|} \end{aligned} \quad (2.17)$$

και προφανώς μπορούμε να γράψουμε ότι

$$GJ = 1 \quad (2.18)$$

Η οριζουσα (\sqrt{g}) ή (J) έχει μια πολύ κατανοητή φυσική σημασία, αφού αποτελεί το μέτρο του εμβαδού μιάς κυψέλης για ένα διδιάστατο πλέγμα ή του όγκου της κυψέλης για ένα τριδιάστατο πλέγμα.

Θα δώσουμε τέλος μια σειρά από χρήσιμες σχέσεις που αφορούν στο μετρικό τανυστή, χωρίς ωστόσο να δίνουμε ιδιαίτερη βαρύτητα στο μαθηματικό τρόπο θεμελίωσής τους για να μην κουράσουμε τον αναγνώστη. Ετσι, το στοιχειώδες διάνυσμα μετατόπισης ($d\vec{r}$) σε κάθε σημείο του πεδίου ορίζεται ως

$$d\vec{r} = d\xi^i \vec{g}_i \quad (2.19)$$

Ενώ το διαφορικό της συναλλοίωτης διανυσματικής βάσης είναι

$$d\vec{g}_i = \Gamma_{ij}^k d\xi^j \vec{g}_k \quad (2.20)$$

Η ποσότητα (Γ_{ij}^k) παριστά το σύμβολο του Kronecker που ορίζεται συναρτήσει των παραγώγων του μετρικού τανυστή

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ik} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^l} \right) \quad (2.21)$$

και για το οποίο ισχύει η προφανής, λόγω του τρόπου που ορίστηκε, ιδιότητα

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad (2.22)$$

Διαφορίζοντας τη σχέση (2.20) ως προς το ξ^j λαμβάνουμε

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial \xi^i \partial \xi^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^r}{\partial \xi^k} = 0 \quad (2.23)$$

και η σχέση αυτή ισχύει για το $x^1 = x$, το $x^2 = y$ και το $x^3 = z$. Οι όροι του αριστερού μέλους της σχέσης (2.23) αποτελούν τις συνιστώσες ενός συμμετρικού, δεύτερης τάξης συναλλοίωτου τανυστή ο οποίος ονομάζεται δεύτερη θεμελιώδης μορφή της απεικόνισης $x^i = f^i(\xi^j)$. Η προβολή του τανυστή αυτού που προκύπτει με εσωτερικό πολλαπλασιασμό με το (g_{ij}) αποτελεί το τασικό πεδίο του μετασχηματισμού (f) και αποτελείται από ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης

$$g^{ij} \frac{\partial^2 x^r}{\partial x^i \partial x^j} - g^{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^r}{\partial x^k} = 0 \quad (2.24)$$

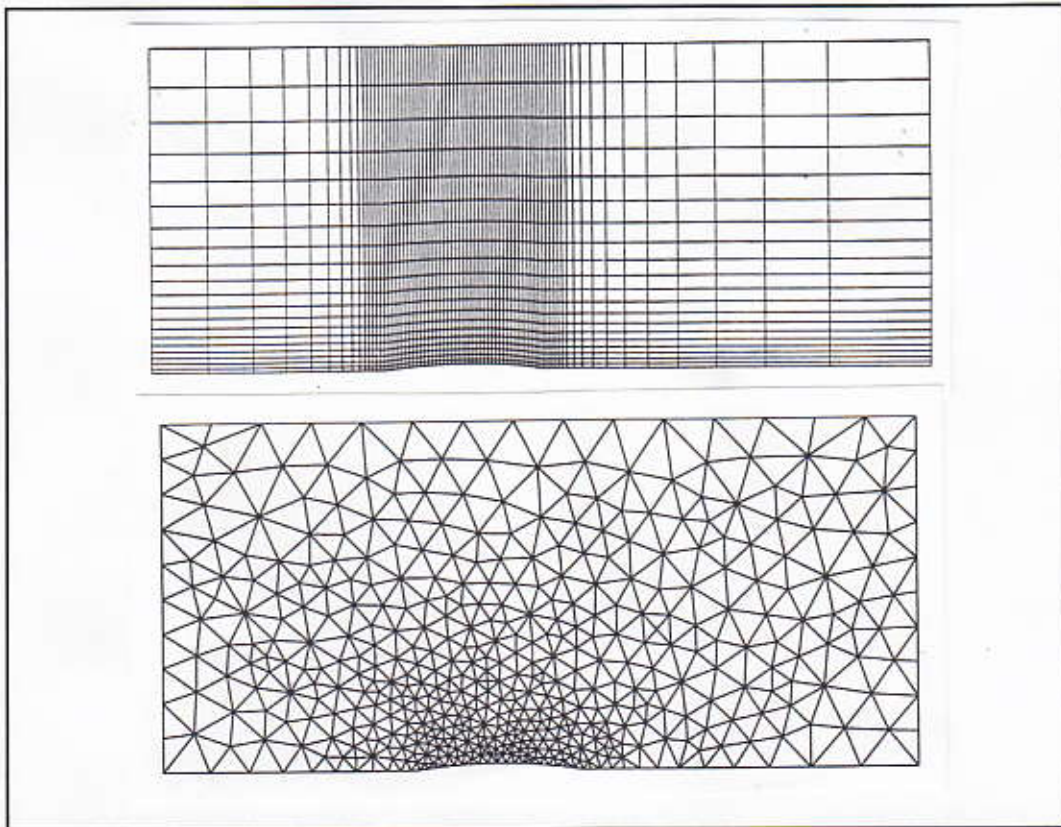
Ας συγκρατήσουμε τη διαφορική εξίσωση (2.24), όπως αυτή διατυπώνεται για τις καρτεσιανές συντεταγμένες ($x^1 = x$), ($x^2 = y$) και ($x^3 = z$) αφού αποτελεί το πιο διαδεδομένο "υπολογιστικό εργαλείο" για τη γένεση αριθμητικών πλεγμάτων. Πριν όμως προχωρήσουμε στην παράθεση των μεθόδων γένεσης αριθμητικών πλεγμάτων ας δούμε τα είδη πλεγμάτων που θα μας απασχολήσουν στο πεδίο των Στροβιλομηχανών.

2.5 Γένεση πλεγμάτων στις Στροβιλομηχανές

Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρείται απλά μιά εξοικείωση του αναγνώστη με ειδικότερα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε στο κεφάλαιο "γένεση πλέγματος" για το πεδίο των Στροβιλομηχανών. Η σύντομη αυτή παρουσίαση αφορά σε πλέγματα κατάλληλα για αριθμητικές μεθόδους πεπερασμένων διαφορών-πεπερασμένων όγκων. Εντοπίζουμε δε το ενδιαφέρον μόνο στην περίπτωση κατασκευής πλέγματος για μιά επίπεδη (ατέρμονα) πτερύγωση, αφού τα σχήματα που θα παρουσιάσουμε γίνονται πιο εύκολα αντιληπτά και η γενίκευση στις τρεις διαστάσεις απαιτεί απλά λίγη "φαντασία".

Τα πλέγματα που θα μας απασχολήσουν είναι "δομημένου" τύπου (structured grids) σε αντίθεση με πλέγματα "μη-δομημένου" τύπου (unstructured grids) που βρίσκουν τελευταία αρκετή εφαρμογή. Με το όρο δομημένο πλέγμα είναι εκείνο το οποίο μετασχηματίζεται σε ένα κανονικό σχήμα στο μετασχηματισμένο επίπεδο και μπορεί να παραστεί με μία αρίθμηση "τύπου (i,j,k)". Τα μη-δομημένα πλέγματα, αντίθετα, δεν παριστάνονται με τον κανονικό τρόπο (i,j,k) αλλά με κατάλληλα μητρώα συσχέτισης γειτονικών κυψελών. Το παράδειγμα ενός δομημένου και ενός μη-δομημένου πλέγματος για τον καθορισμό της ροής σε έναν αγωγό που φέρει κάποιο κοίλωμα στην κάτω πλευρά του είναι χρήσιμο για τη κατανόηση των

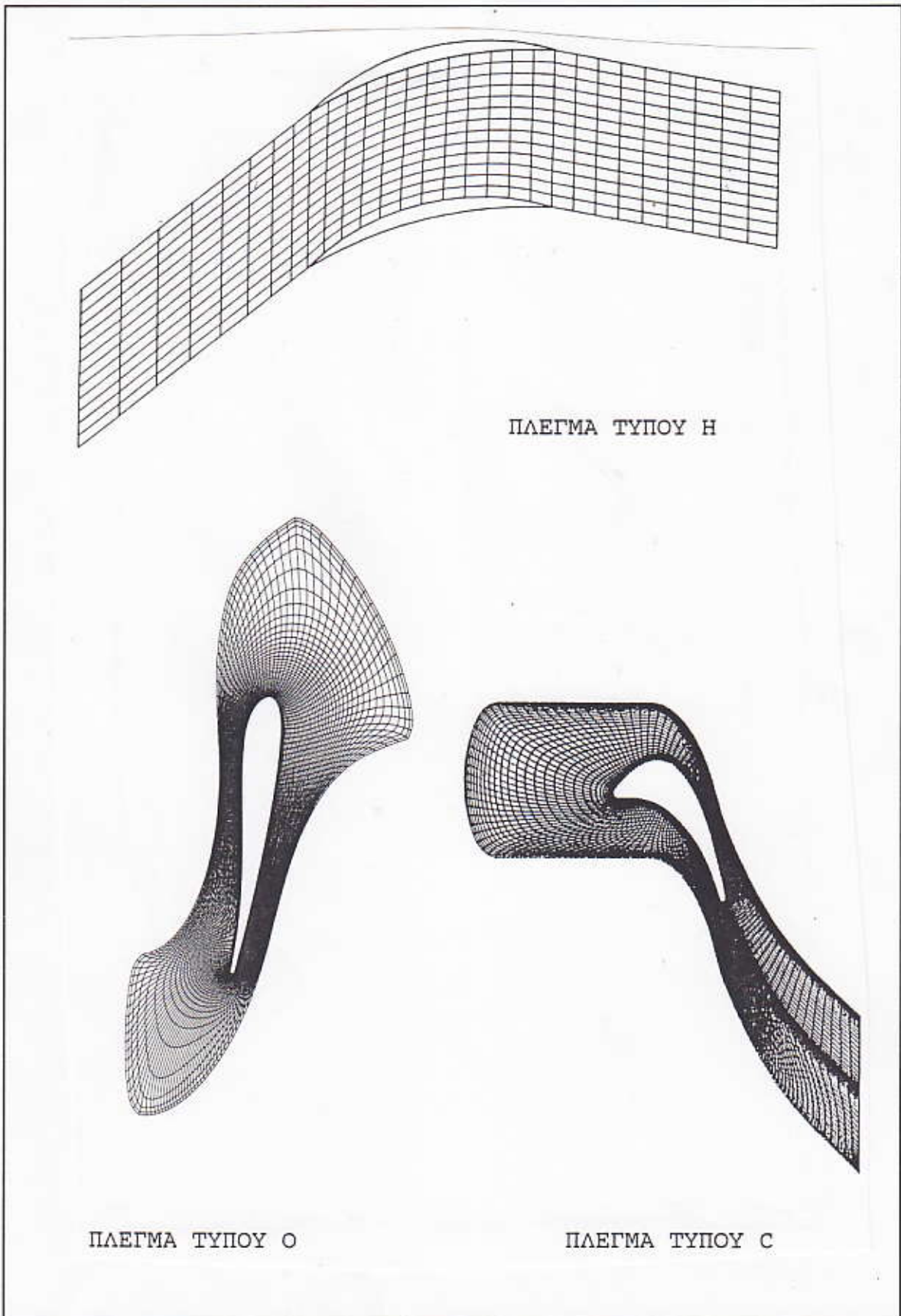
διαφορών των δύο κατηγοριών πλεγμάτων και δίνεται στο Σχήμα 2.3



Σχήμα 2.3

Εστω και με αυτό το απλό παράδειγμα του Σχήματος 2.3 γίνεται εμφανές το πλεονέκτημα των μη δομημένων πλεγμάτων για πολύπλοκες γεωμετρίες. Η σημαντική όμως δυσκολία που παρουσιάζουν στον προγραμματισμό και η κατανάλωση υπολογιστικού χρόνου για το χειρισμό των κυψελών δικαιολογεί την ευρύτερη χρησιμοποίηση των δομημένων πλεγμάτων. Γενικά και οι δύο τύποι πλεγμάτων παρουσιάζουν συγκεκριμένα πλεονεκτήματα αλλά και μειονεκτήματα. Πρέπει δε να έχουμε υπόψη ότι η τελική επιλογή δε γίνεται μόνο με κριτήριο την ευκολία ή δυσκολία γένεσης του πλέγματος αλλά λαμβάνονται υπόψη η μεθοδολογία που στη συνέχεια θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυση των εξισώσεων ροής.

Για επίπεδες περυγώσεις Στροβιλομηχανών χρησιμοποιούνται κυρίως τρεις τύποι πλεγμάτων : πλέγματα τύπου H, τύπου C και τύπου O. Η διάκριση μεταξύ τους φαίνεται κατά την αντιστοίχισή τους με το μετασχηματισμένο χωρίο και τα κριτήρια επιλογής κυρίως στηρίζονται στο αν το περύγιο που μας απασχολεί έχει λεπτές ή παχιές τις ακμές προσβολής ή εκφυγής. Ο αναγνώστης καλείται να συγκρίνει τους τρεις τρόπους πλεγμάτων στο Σχήμα 2.4



Σχήμα 2.4

2.6 Αριθμητικές μέθοδοι γένεσης πλεγμάτων

Για τη γένεση υπολογιστικών πλεγμάτων που είναι προσαρμοσμένα στα όρια του χωρίου ροής χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι, οι περισσότερες από τις οποίες μπορούν να καταταχθούν στις παρακάτω τρεις κατηγορίες:

- (α) Μέθοδοι που στηρίζονται στο Σύμμορφο Μετασχηματισμό
- (β) Αλγεβρικές Μέθοδοι
- (γ) Μέθοδοι που στηρίζονται στην επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων

(α) Η κατασκευή διδιάστατων πλεγμάτων προσαρμοσμένων στο όριο με τη Μέθοδο του Σύμμορφου Μετασχηματισμού (Conformal Mapping) αποτελεί ενδεδειγμένη λύση για εκείνες τις περιπτώσεις που δεν επιβάλλεται αυστηρά η διατήρηση μιάς δεδομένης κατανομής οριακών σημείων, αλλά διατηρούμε τη δυνατότητα να τα τοποθετήσουμε σχετικά αυθαίρετα πάνω στο όριο.

Μαθηματικά η μέθοδος συνίσταται στην εύρεση εκείνης της μιγαδικής συνάρτησης που απεικονίζει σύμμορφα το όριο του πραγματικού χωρίου στο ευθύγραμμο όριο ενός ορθογωνικού πολυγώνου. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση της απεικόνισης που υπολογίστηκε, υπολογίζονται τα εσωτερικά σημεία του πραγματικού χωρίου που αντιστοιχούν στους κόμβους του ορθογωνικού πλέγματος.

Οι πολύπλοκες διδιάστατες γεωμετρίες συνηθίζεται να αντιμετωπίζονται με την αλληλουχία απλών σύμμορφων μετασχηματισμών. Επιλεκτική συγκέντρωση πλεγματικών γραμμών σε κάποιες περιοχές του πεδίου ροής επιτυγχάνεται με τη διαδοχή του σύμμορφου μετασχηματισμού από έναν παραμορφωτικό (stretching) μηχανισμό που διατηρεί την ορθογωνιότητα του πλέγματος, όχι όμως το σύμμορφο της απεικόνισης.

(β) Η γένεση προσαρμοσμένων στο όριο αριθμητικών πλεγμάτων με χρήση Αλγεβρικών Μεθόδων στηρίζεται ουσιαστικά στην παρεμβολή σημείων στο εσωτερικό του χωρίου με βάση μία δεδομένη κατανομή σημείων στην οριακή γραμμή. Πλεονέκτημα είναι η μεγάλη ταχύτητα με την οποία γενάται το πλέγμα. Μειονέκτημα αποτελεί η έλλειψη εξομαλυντικών μηχανισμών για να εμποδίσουν τη μεταφορά στο εσωτερικό του χωρίου πιθανόν ανωμαλιών από την κατανομή σημείων στο όριο. Απλές αλγεβρικές μέθοδοι, όπως για παράδειγμα η γραμμική παρεμβολή, χρησιμοποιούνται για την κατασκευή του εναρκτήριου πλέγματος από το οποίο ξεκινά η λύση των μερικών διαφορικών εξισώσεων που θα υπολογίσουν την τελική μορφή του πλέγματος.

(γ) Η γένεση διδιάστατων ή τριδιάστατων προσαρμοσμένων στο όριο πλεγμάτων με την επίλυση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων ελλειπτικού τύπου είναι σήμερα η περισσότερο δημοφιλής μέθοδος.

Στηρίζεται στην κατασκευή ενός πλέγματος καμπυλόγραμμων συντεταγμένων από την επίλυση ελλειπτικών διαφορικών εξισώσεων οι οποίες συνδυάζονται συνήθως από οριακές, συνθήκες τύπου Dirichlet που καθορίζουν τη θέση των σημείων στο όριο. Τα κριτήρια για την κατάλληλη εκλογή του τύπου της διαφορικής εξίσωσης που επιλύουμε σχετίζονται με την παραγωγή πλεγμάτων που αποτελούνται από λείες καμπύλες με "ομαλή" κατανομή κυψελών σε όλη την έκταση του πεδίου. Συνήθως οι εξισώσεις είναι τύπου Laplace ή Poisson στις οποίες αναγνωρίζουμε την ιδιότητα του να μη μεταφέρουν στο εσωτερικό του χωρίου ασυνέχειες ή ανωμαλίες του ορίου. Ένα πρόσθετο πλεονέκτημά τους είναι το ότι με την προσθήκη κατάλληλων όρων πηγής μπορεί κανείς να αυξήσει τη συγκέντρωση των πλεγματικών γραμμών σε προεπιλεγμένες περιοχές.

Τελειώνοντας το κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε πολύ σύντομα να δώσουμε στον αναγνώστη λίγα στοιχεία γύρω από τις δύο σπουδαιότερες απαιτήσεις που έχουμε κατά την κατασκευή πλεγμάτων:

(α) Η ορθογωνιότητα είναι γενικά στοιχείο αν όχι απαραίτητο, τουλάχιστο πολύ επιθυμητό. Θα αναφέρουμε τρεις λόγους που συνηγορούν σ' αυτό. Κατ' αρχή οι μετασχηματισμένες εξισώσεις απλοποιούνται σημαντικά όταν, λόγω της ορθογωνιότητας, μηδενίσουμε τους μη διαγώνιους όρους του μετρικού τανυστή (g^{ij}). Δεύτερο, όταν για την επίλυση χρησιμοποιούνται αριθμητικά σχήματα που στηρίζονται σε προσεγγιστικές παραγοντοποιήσεις, τότε τα ορθογώνια πλέγματα συνήθως επιταχύνουν τη σύγκλιση, αφού οι όροι που παραλήφθησαν κατά την παραγοντοποίηση είναι όντως μηδενικοί. Τέλος, η χρήση περιοδικών ορίων (όπου η καθετότητα εξασφαλίζει και τη συνέχεια από χωρίου εις χωρίο) ή η χρήση αλγεβρικών μοντέλων τύρβης (το μοντέλο Baldwin-Lomax, που είναι ένα από τα περισσότερο χρησιμοποιούμενα, στηρίζεται κυρίως στην κάθετη απόσταση από τα τοιχώματα) διευκολύνονται πάρα πολύ από την κατασκευή και χρήση ορθογώνιων πλεγμάτων.

(β) Η δυνατότητα συγκέντρωσης πλεγματικών γραμμών σε περιοχές υψηλών κλίσεων των μεγεθών ροής (κοντά στα κρουστικά κύματα ή κοντά στα τοιχώματα αν επιλύουμε προβλήματα συνεκτικών ροών) αποτελεί αναγκαίο στοιχείο κάθε καλού κώδικα γένεσης αριθμητικού πλέγματος.

2.7 Γένεση ενός Λαπλασιανού Πλέγματος

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να δώσει τις βασικές θεωρητικές γραμμές σχετικά με τη γένεση αριθμητικών πλεγμάτων που διέπονται από εξισώσεις τύπου Laplace ή Poisson. Μια αριθμητική εφαρμογή της θεωρίας αυτής για διδιάστατα πλέγματα δίνεται στην επόμενη ενότητα.

Για τη θεμελίωση αυτή θα χρειαστούμε την έκφραση των βασικών διαφορικών

τελεστών στο κσσ που δίνεται αμέσως παρακάτω. Αν (Φ) είναι μία βαθμωτή συνάρτηση, (A_j) ένα συναλλοίωτο διάνυσμα και (A^i) το αντίστοιχο ανταλλοίωτο διάνυσμα, όπου προφανώς

$$\vec{A}^i = g^{ij} \vec{A}_j \quad (2.25)$$

τότε η κλίση (gradient), η απόκλιση (divergence) και ο Λαπλασιανός τελεστής εκφράζονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^i} \nabla \xi^i = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^i} \vec{g}^i \quad (2.26)$$

$$\nabla \times (A_j) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial \xi^r} (\sqrt{|g|} g^{ri} A_i) = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (J A^i) \quad (2.27)$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\sqrt{|g|} \nabla \xi^i \nabla \xi^i) = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(J \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^i} g^{ij} \right) \quad (2.28)$$

Εστω λοιπόν ένα τριδιάστατο χωρίο απλής συνοχής στον Καρτεσιανό χώρο (x,y,z) του οποίου οι οριακοί κόμβοι είναι γνωστοί με έναν τρόπο συμβατό με το δομημένο πλέγμα που σκοπεύουμε να κατασκευάσουμε. Οι εικόνες όλων των κόμβων (x,y,z) του πραγματικού χωρίου ροής θα είναι κόμβοι (ξ,η,ζ) στο μετασχηματισμένο χωρίο που επιλέγεται να προσδιορισθούν από το ακόλουθο σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \nabla^2 \xi &= f^1(\xi, \eta, \zeta) \\ \nabla^2 \eta &= f^2(\xi, \eta, \zeta) \\ \nabla^2 \zeta &= f^3(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Το σύστημα αυτό των εξισώσεων "κλείνει" με ένα κατάλληλο σύνολο οριακών συνθηκών τύπου Dirichlet που προσδιορίζεται από την κατανομή των κόμβων στο όριο. Σε ταυστική γραφή το σεί των εξισώσεων (2.29) μπορεί να συμβολιστεί ως

$$\nabla^2 \xi^\lambda = f_\lambda \quad , \quad \lambda = 1, 2, 3 \quad (2.30)$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (2.28), η σχέση (2.30) γράφεται

$$\begin{aligned} f_\lambda = \nabla^2 (\xi^\lambda) &= \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (J g^{ik}) \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial \xi^k} + g^{ik} \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial \xi^i \partial \xi^k} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (J g^{ik}) \delta_\lambda^k + 0 \\ &\rightarrow \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (J g^{ik}) = f_\lambda \end{aligned} \quad (2.31)$$

Για τις καρτεσιανές συντεταγμένες ισχύει ταυτοτικά ότι

$$\nabla^2(x^j)=0 \quad (2.32)$$

Η σχέση (2.32) δίνει ότι

$$g^{ik} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \xi^i \partial \xi^k} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (J g^{ik}) \frac{\partial x^j}{\partial \xi^k} = 0$$

και με τη βοήθεια της σχέσης (2.31) τελικά παίρνουμε ότι

$$g^{ik} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \xi^i \partial \xi^k} + f_k \frac{\partial x^j}{\partial \xi^k} = 0, \quad j=1,2,3 \quad (2.33)$$

Η σχέση (2.33) που είναι μία μη-γραμμική μερική διαφορική εξίσωση (ας μη ξεχνάμε ότι οι συντελεστές g^{ik} είναι συναρτήσεις των αγνώστων x^j , μπορεί να λυθεί στο μετασχηματισμένο χωρίο με κατάλληλες οριακές συνθήκες. Αυτό παρουσιάζεται αναλυτικότερα στο επόμενο κεφάλαιο.

2.8 Εφαρμογή : Γένεση διδιάστατου Λαπλασιανού πλέγματος

Εφαρμόζοντας την εξίσωση (2.33) για ένα διδιάστατο πεδίο ροής, αυτή παίρνει την "πιο κατανοητή" μορφή :

$$Ax_{\xi\xi} + 2Bx_{\xi\eta} + \Gamma x_{\eta\eta} = -J^2(f_1 x_\xi + f_2 x_\eta) \quad (2.34)$$

$$Ay_{\xi\xi} + 2By_{\xi\eta} + \Gamma y_{\eta\eta} = -J^2(f_1 y_\xi + f_2 y_\eta)$$

όπου οι συντελεστές (A,B,Γ) δίνονται από τις σχέσεις

$$A = g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2$$

$$B = -g_{12} = -x_\xi x_\eta - y_\xi y_\eta \quad (2.35)$$

$$\Gamma = g_{11} = x_\xi^2 + y_\xi^2$$

Οι εκφράσεις (2.34) και (2.35) πήραν τη μορφή αυτή μετά την αντικατάσταση των ανταλλοίωτων μετρικών (g^{ij}) με τις συναλλοίωτες μετρικές (g_{ij}). Με την ευκαιρία παραθέτουμε τις σχέσεις μετατροπής για το διδιάστατο πρόβλημα

$$\xi_x = \frac{y_\eta}{J}, \quad \xi_y = -\frac{x_\eta}{J}, \quad \eta_x = -\frac{y_\xi}{J}, \quad \eta_y = \frac{x_\xi}{J} \quad (2.36)$$

Ας ξαναγυρίσουμε στις εξισώσεις (2.29) ή (2.34) για να σχολιάσουμε τη φυσική σημασία των όρων πηγής (f_j). Η έννοια αυτών των όρων είναι να "επεμβαίνουν" στη λύση, επιβάλλοντας (ανάλογα με τη μορφή που εμείς θα τους δώσουμε) επιπλέον ιδιότητες στο δημιουργούμενο πλέγμα, όπως λ.χ. να είναι ορθογώνιο ή περίπου-ορθογώνιο, να έχει επιθυμητή πυκνότητα

πλεγματικών κόμβων ή γραμμών σε περιοχές του χωρίου όπου χρειαζόμαστε μεγαλύτερη ακρίβεια στη λύση κλπ. Παιζουν ένα πολύ κρίσιμο ρόλο, αφού οι εξισώσεις (2.29) με μηδενικό δεύτερο μέλος στερούνται οποιουδήποτε μηχανισμού που θα επέτρεπε τη μεταφορά στο εσωτερικό του πεδίου εκείνων των ιδιοτήτων που επιβλήθηκαν με την κατάλληλη κατανομή των οριακών κόμβων.

Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να σκιαγραφήσουμε το διάγραμμα ροής ενός προγράμματος που θα κατασκευάζει διδιάστατα λαπλασιανά πλέγματα (και έστω για απλοποίηση ότι $f_1=f_2=0$) όταν σε όλο το όριο του χωρίου είναι δεδομένη η κατανομή των κόμβων του πλέγματος. Οι κάτω δείχτες (i,j) αριθμούν τη θέση του κόμβου στο πλέγμα και ο άνω δείκτης (n) ή $(n+1)$ αντιστοιχεί στην προηγούμενη και την επόμενη επανάληψη ενός επαναληπτικού σχήματος που χρησιμοποιούμε για τη λύση. Στο παράδειγμά μας θα χρησιμοποιηθεί η απλούστατη ρητή (explicit) μέθοδος, η Point-Jacobi.

Εστω λοιπόν ότι έχουμε ολοκληρώσει τη n -ιστή επανάληψη στο επαναληπτικό μας σχήμα και συνεπώς γνωρίζουμε τις συντεταγμένες (x_{ij}^n) και (y_{ij}^n) σε όλο το χωρίο. Ας ξαναθυμίσουμε ότι εφόσον οι οριακές συνθήκες είναι τύπου Dirichlet, συνεπώς

$$x_{ij}^n = x_{ij}^0$$

$$y_{ij}^n = y_{ij}^0$$

για τους οριακούς κόμβους του πλέγματος. Είναι δυνατό να υπολογίσουμε τους συντελεστές A, B, Γ της n -ιστής επανάληψης σαν

$$A_{ij}^n = (x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2)_{ij}^n = \frac{1}{4}(x_{i,j+1}^n - x_{i,j-1}^n)^2 + \frac{1}{4}(y_{i,j+1}^n - y_{i,j-1}^n)^2$$

$$B_{ij}^n = -(x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta})_{ij}^n = -\frac{1}{4}(x_{i+1,j}^n - x_{i-1,j}^n)(x_{i,j+1}^n - x_{i,j-1}^n) + (y_{i+1,j}^n - y_{i-1,j}^n)(y_{i,j+1}^n - y_{i,j-1}^n) \quad (2.37)$$

$$G_{ij}^n = (x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2)_{ij}^n = \frac{1}{4}(x_{i+1,j}^n - x_{i-1,j}^n)^2 + \frac{1}{4}(y_{i+1,j}^n - y_{i-1,j}^n)^2$$

και να διατυπώσουμε το γραμμικοποιημένο πλέον αριθμητικό σχήμα point-Jacobi ως εξής:

$$A_{ij}^n(x_{i+1,j}^n - 2x_{ij}^{n+1} + x_{i-1,j}^n) + \frac{1}{2}B_{ij}^n(x_{i+1,j+1}^n - x_{i-1,j-1}^n - x_{i+1,j-1}^n - x_{i-1,j+1}^n) + \Gamma_{ij}^n(x_{i,j+1}^n - 2x_{ij}^{n+1} + x_{i,j-1}^n) = 0 \quad (2.38)$$

και μιιά όμοια εξίσωση για τη συντεταγμένη (y) . Ας σημειώσουμε ότι στα σχήματα πεπερασμένων διαφορών δεύτερης τάξης που χρησιμοποιήθηκαν, έχει ληφθεί ότι $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$.

Οι εξισώσεις (2.38) σχηματικά παριστούν τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} x_{ij}^{n+1} &= X(x_{\gamma\epsilon\iota\tau\omicron\nu}^n, A_{ij}^n, B_{ij}^n, \Gamma_{ij}^n) \\ y_{ij}^{n+1} &= Y(y_{\gamma\epsilon\iota\tau\omicron\nu}^n, A_{ij}^n, B_{ij}^n, \Gamma_{ij}^n) \end{aligned} \quad (2.39)$$

που επιτρέπουν τον υπολογισμό των συντεταγμένων (x) και (y) όλων των κόμβων για την επανάληψη (n+1).

Συνοψίζοντας το παραπάνω σχήμα, βήμα-προς-βήμα έχουμε :

ΒΗΜΑ 1 : Χρησιμοποιούμε την κατανομή των οριακών κόμβων και απλή γραμμική παρεμβολή για να αποκτήσουμε μία πρώτη κατανομή κόμβων (x_{ij}^0, y_{ij}^0) στο εσωτερικό του χωρίου.

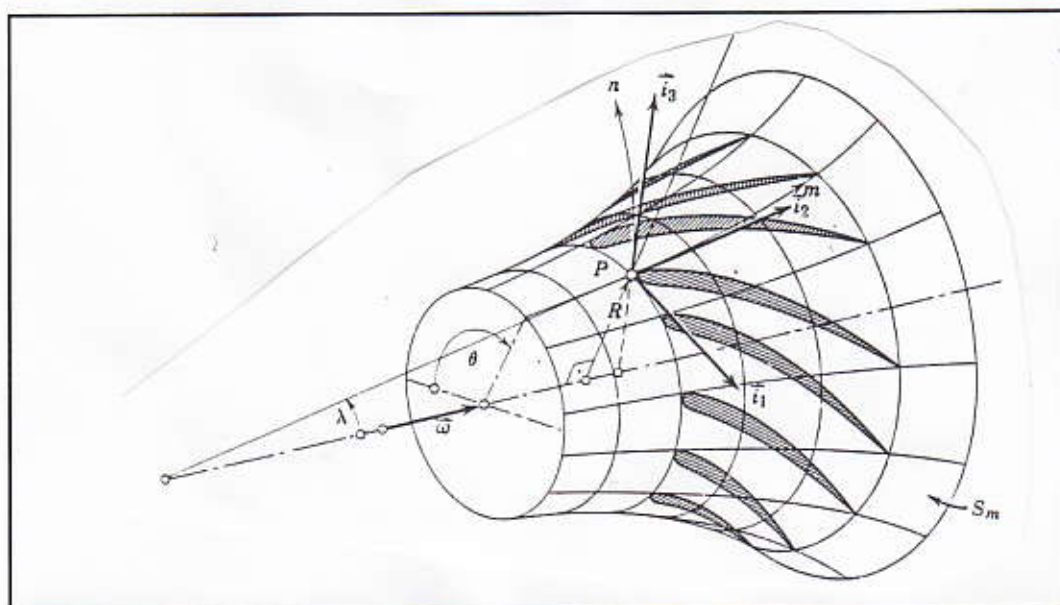
ΒΗΜΑ 2 : Αν (n) η επανάληψη που μόλις ολοκληρώθηκε, υπολογίζουμε τους συντελεστές ($A_{ij}^n, B_{ij}^n, \Gamma_{ij}^n$) σε όλους του εσωτερικούς κόμβους με βάση τη σχέση (2.37).

ΒΗΜΑ 3 : Πραγματοποιούμε μία πλήρη σάρωση για όλους τους εσωτερικούς κόμβους του χωρίου, με το σχήμα Point-Jacobi (2.39) και υπολογίζουμε τις συντεταγμένες της νέας επανάληψης ($x_{ij}^{n+1}, y_{ij}^{n+1}$)

ΒΗΜΑ 4 : Ελέγχουμε τη σύγκλιση της μεθόδου και σε αντίθετη περίπτωση επιστρέφουμε στο Βήμα (2) και συνεχίζουμε τις επαναλήψεις με ανανεωμένες τιμές.

2.9 Το Ορθογώνιο Σύστημα Συντεταγμένων Αξονικής Συμμετρίας

Η ψευδοτριδιάστατη προσέγγιση του προβλήματος ροής σε πτερυγώσεις στροβιλομηχανών, μέσω των διαδοχικών επιλύσεων σε επιφάνειες από-πτερυγίου-σε πτερύγιο (S_1) και σε μεσημβρινές επιφάνειες (S_2), σύμφωνα με τις αρχικές ιδέες του Wu, απαιτεί την εξοικείωση με το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων αξονικής συμμετρίας (u^1, u^2, u^3). Το Σχήμα 2.5 απεικονίζει το σύστημα αυτό. Σε ένα τέτοιο σύστημα οι επιφάνειες $u^1 = \theta = \text{σταθερό}$ είναι μεσημβρινά επίπεδα, με θ τη γωνία που τα επίπεδα αυτά σχηματίζουν ως προς ένα μεσημβρινό επίπεδο αναφοράς (επίπεδο $\theta = 0$). Οι επιφάνειες $u^2 = \text{σταθερό}$ προκύπτουν από την περιστροφή περί τον άξονα της μηχανής της γραμμής (n), ενώ οι επιφάνειες $u^3 = \text{σταθερό}$ σχηματίζονται από την περί άξονα περιστροφή της γραμμής (m). Το σύστημα συντεταγμένων είναι ορθογώνιο και οι γραμμές (u^3) τέμνουν πάντοτε κάθετα όλες τις καμπύλες (u^2), πάνω σε οποιοδήποτε μεσημβρινό επίπεδο. Αυτό, σύμφωνα με το Σχήμα 2.6, σημαίνει ότι όταν στο σημείο P του εικονιζόμενου μεσημβρινού επιπέδου οι γραμμές (u^2) και (u^3) τέμνονται ορθογώνια, τότε και στο σημείο Q_1 , το οποίο βρίσκεται σε απειροστή απόσταση από το P, οι γραμμές ($u^2 + du^2$) και ($u^3 + du^3$) τέμνονται επίσης ορθογώνια. Αν υποθέσουμε ότι το σημείο Q προκύπτει από την περιστροφή κατά την απειροστή γωνία $d\theta$



Σχήμα 2.5

του σημείου Q_1 , τότε η διανυσματική μεταβολή του διανύσματος θέσης r μεταξύ των P και Q θα δίνεται από τη σχέση

$$d\vec{r} = \vec{i}_1 R d\theta + \vec{i}_2 dm + \vec{i}_3 dn \quad (2.40)$$

όπου R είναι η ακτίνα που αντιστοιχεί στο σημείο P και $(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά τις διευθύνσεις (θ, m, n) για το σημείο P . Δύο από αυτά παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.6, ενώ το διάνυσμα \vec{i}_1 κατευθύνεται προς τον αναγνώστη. Η σχέση (2.40) προσδιορίζει και τους συντελεστές μορφής h_1, h_2 και h_3 του συστήματος συντεταγμένων, συνδυαζόμενη με την παρακάτω σχέση

$$d\vec{r} = \vec{i}_1 h_1 du^1 + \vec{i}_2 h_2 du^2 + \vec{i}_3 h_3 du^3 \quad (2.41)$$

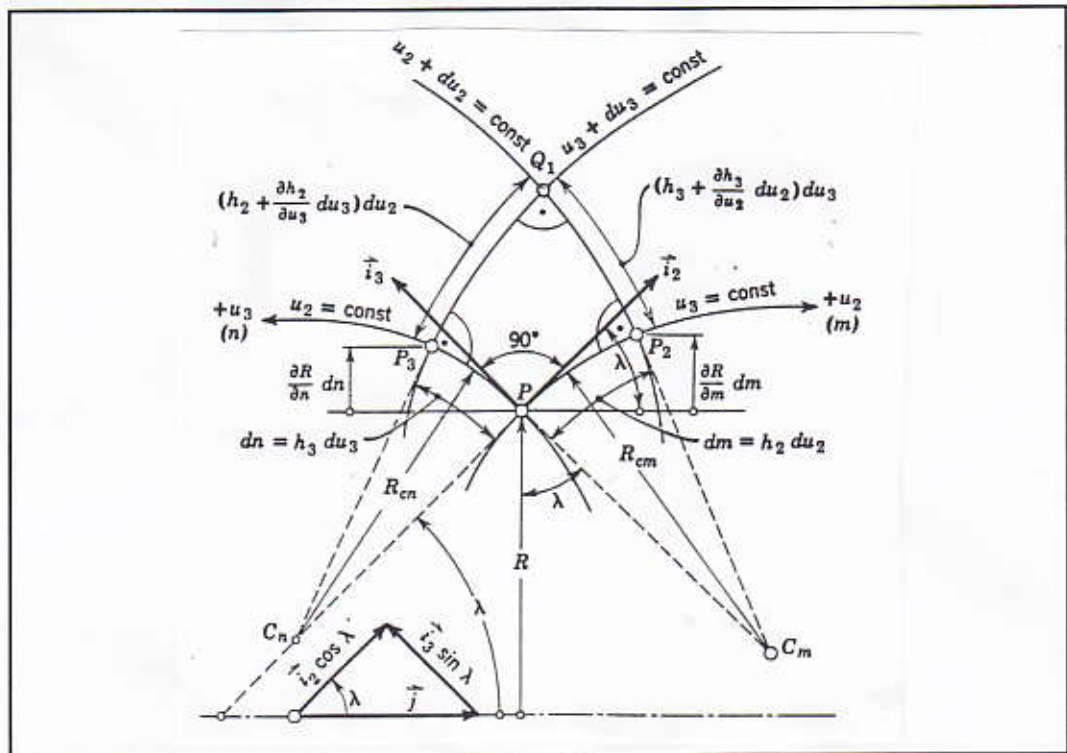
Με τη βοήθεια του Σχήματος 2.6 μπορεί να γίνει υπενθύμιση του ορισμού αλλά και της φυσικής σημασίας των συντελεστών μορφής. Ως παράδειγμα χρησιμοποιούμε την έκφραση της απόστασης (PP_2) που εισάγει το συντελεστή μορφής h_2 στο σημείο P , δηλαδή

$$(PP_2) = h_2 du^2$$

ενώ η απόσταση (P_3Q_1) θα ισούται με

$$P_3Q_1 = \left(h_2 + \frac{\partial h_2}{\partial n} du^3 \right) du^2$$

Αντίστοιχες σχέσεις μπορούν εύκολα να διατυπωθούν και για τους συντελεστές μορφής h_1 και h_3 . Υπενθυμίζεται ότι οι κατευθύνσεις των μοναδιαίων διανυσμάτων αλλάζουν από



Σχήμα 2.6

σημείου σε σημείο του υπολογιστικού χωρίου. Μόνο στο καρτεσιανό σύστημα τα μοναδιαία διανύσματα παραμένουν σταθερά σε ολόκληρο το πεδίο και γι'αυτό εκεί οι συντελεστές μορφής έχουν τη σταθερή τιμή

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1$$

Οι επιφάνειες (S_1) πάνω στις οποίες λύνονται οι ισχύουσες εξισώσεις αντιστοιχούν σε επιφάνειες ροής, που προκύπτουν από τον υπολογισμό της ροής στο μεσημβρινό επίπεδο (S_2). Εκτός από τη μορφή αυτών των εκ περιστροφής επιφανειών, δηλαδή από τη μορφή των γραμμών (m) του Σχήματος 2.5, σε κάθε σημείο αντιστοιχεί και ένα πάχος του υπολογιζόμενου σωλήνα ροής. Το πάχος αυτό θεωρείται κατά τη (n) κατεύθυνση και θα συμβολίζεται με Δn . Στη γενική περίπτωση το πάχος του σωλήνα ροής μεταβάλλεται κατά μήκος της γραμμής (m), είναι δηλαδή $\Delta n = \Delta n(m)$. Οι προηγούμενες σχέσεις και παραδοχές επιτρέπουν τον καθορισμό των συντελεστών μορφής για την περίπτωση του ορθογώνιου συστήματος αξονικής συμμετρίας, που είναι

$$h_1 = R \quad h_2 = \frac{dm}{du^2} = 1 \quad h_3 = \frac{dn}{du^3} = \Delta n \quad (2.42)$$

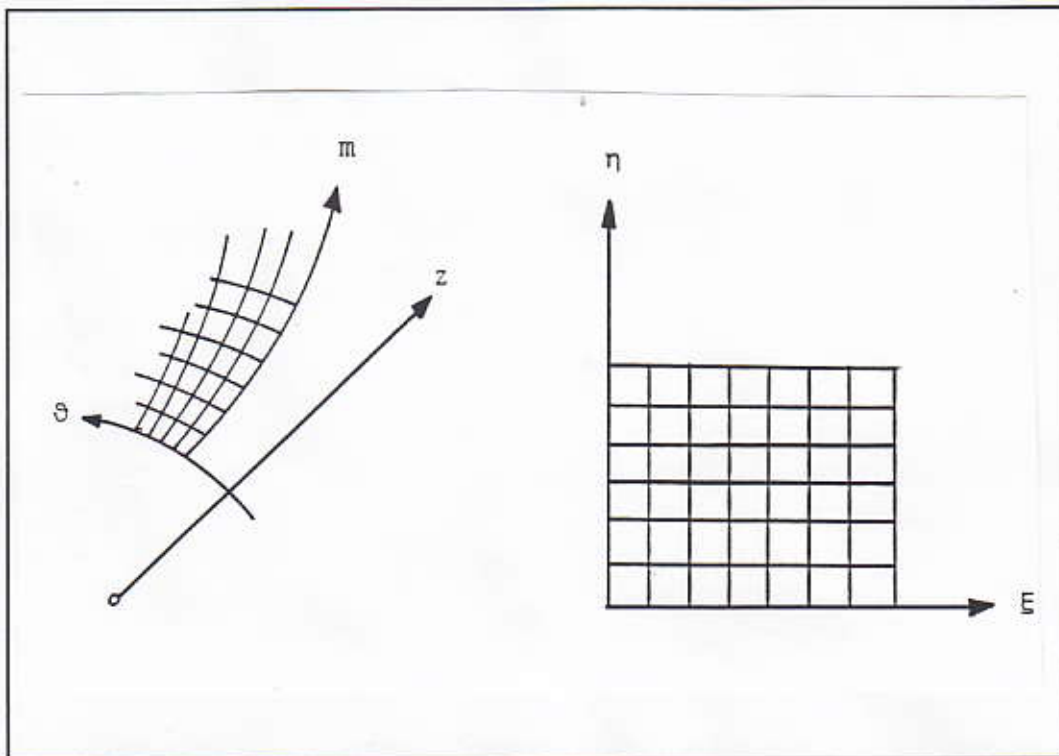
Έτσι ο τελεστής της κλίσης (grad) ενός βαθμωτού μεγέθους, ο οποίος σε οποιοδήποτε γενικευμένο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων γράφεται

$$\nabla = \frac{\vec{i}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{\vec{i}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial u^2} + \frac{\vec{i}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial u^3} \quad (2.43)$$

στο συγκεκριμένο σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\nabla = \frac{\vec{i}_1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{i}_2 \frac{\partial}{\partial m} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial n} \quad (2.44)$$

Οι εξισώσεις ροής, έτσι όπως διατυπώνονται στο σύστημα (θ, m, n) έχουν δοθεί σε άλλο συναφές μάθημα του κύκλου σπουδών Μηχανολόγου Μηχανικού και εδώ θα παρατεθούν συνοπτικά σε επόμενο κεφάλαιο. Στην παρούσα ενότητα, θα δοθεί ο τρόπος μετασχηματισμού κάθε εξίσωσης που γράφεται στο επίπεδο των συντεταγμένων (m) και (θ) στο μετασχηματισμένο υπολογιστικό χωρίο (ξ, η) όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.7. Η ανάλυση αυτή γίνεται σε τρόπο ακριβώς αντίστοιχου εκείνου που παρουσιάστηκε στα Κεφάλαια 2.2, 2.3 και 2.4, έτσι ώστε ο αναγνώστης να μπορεί να συσχετίσει άμεσα το μετασχηματισμό $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ και το μετασχηματισμό $(m, \theta) \rightarrow (\xi, \eta)$. Για λόγους ομοιομορφίας στον τελευταίο μετασχηματισμό έχει γίνει αντιστροφή της σειράς των μεταβλητών (m) και (θ) , σε σχέση με το δεξιόστροφο σύστημα (θ, m, n) που αρχικά παρουσιάστηκε. Η αλλαγή αυτή γίνεται μόνο για λόγους ομοιομορφίας και δεν προκαλεί καμιά άλλη μεταβολή· απλώς απαιτεί μια προσεκτική αντίληψη και χρησιμοποίηση της ταχύτητας περιστροφής της μηχανής (δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη) σε σχέση με το σύστημα που χρησιμοποιείται τελικά.



Σχήμα 2.7

Ο μετασχηματισμός $(m, \theta) \rightarrow (\xi, \eta)$ εισάγει κατά τα γνωστά

- τη συναλλοίωτη διανυσματική βάση

$$\vec{g}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial m}{\partial \xi}, R \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) = (m_\xi, R\theta_\xi)$$
(2.45)

$$\vec{g}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial m}{\partial \eta}, R \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) = (m_\eta, R\theta_\eta)$$

- την ανταλλοίωτη διανυσματική βάση

$$\vec{g}^1 = \nabla \xi = \left(\xi_m, \frac{1}{R} \xi_\theta \right)$$
(2.46)

$$\vec{g}^2 = \nabla \eta = \left(\eta_m, \frac{1}{R} \eta_\theta \right)$$

- τα στοιχεία του συναλλοίωτου μετρικού τανυστή

$$g_{11} = \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_1 = m_\xi^2 + R^2 \theta_\xi^2$$

$$g_{22} = \vec{g}_2 \cdot \vec{g}_2 = m_\eta^2 + R^2 \theta_\eta^2$$
(2.47)

$$g_{12} = \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 = m_\xi m_\eta + R^2 \theta_\xi \theta_\eta$$

- τα στοιχεία του ανταλλοίωτου μετρικού τανυστή

$$g^{11} = \vec{g}^1 \cdot \vec{g}^1 = \xi_m^2 + \frac{1}{R^2} \xi_\theta^2$$

$$g^{22} = \vec{g}^2 \cdot \vec{g}^2 = \eta_m^2 + \frac{1}{R^2} \eta_\theta^2$$
(2.48)

$$g^{12} = \vec{g}^1 \cdot \vec{g}^2 = \xi_m \eta_m + \frac{1}{R^2} \xi_\theta \eta_\theta$$

- την Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού

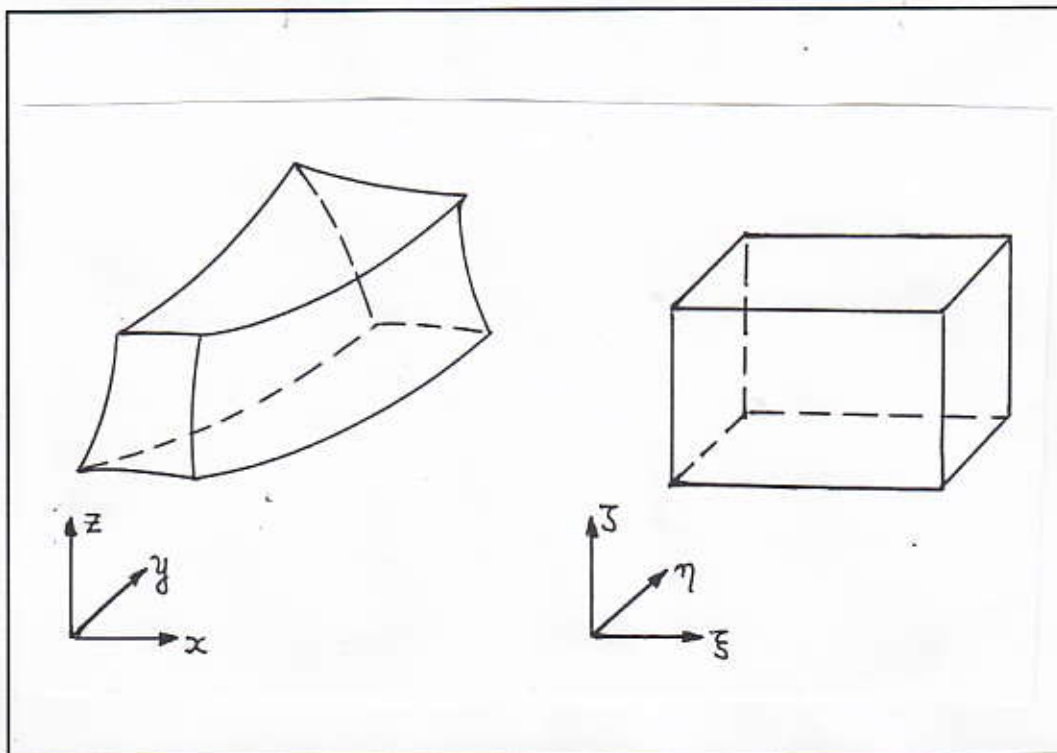
$$J = \frac{\partial(m, \theta)}{\partial(\xi, \eta)} = m_\xi \theta_\eta - m_\eta \theta_\xi$$
(2.49)

- και τις σχέσεις μετατροπής μεταξύ των μετρικών

$$\xi_m = \frac{\theta_\eta}{J}, \quad \xi_\theta = -\frac{m_\eta}{J}, \quad \eta_m = -\frac{\theta_\xi}{J}, \quad \eta_\theta = \frac{m_\xi}{J}$$
(2.50)

2.10 Τριδιάστατα Καμπυλόγραμμα Συστήματα Συντεταγμένων

Το Κεφάλαιο 2 ολοκληρώνεται με την παρούσα ενότητα, όπου για ένα τριδιάστατο πλέγμα στο χώρο (x,y,z) και το αντίστοιχο μετασχηματισμένο χωρίο (ξ,η,ζ) (βλέπε Σχήμα 2.8) παρατίθενται, στη μορφή τυπολόγιου, οι σχέσεις μετασχηματισμού.



Σχήμα 2.8

Οι ορισμοί των Ιακωβιανών οριζουσών που δίνονται στη σχέση (2.15), μαζί με τη σχέση (2.18) που συνδέει τις δυο οριζουσες J και G , οδηγούν στις παρακάτω σχέσεις μετασχηματισμού των μετρικών

$$J\xi_x = y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta$$

$$J\eta_x = y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta$$

$$J\zeta_x = y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi$$

$$J\xi_y = x_\zeta z_\eta - x_\eta z_\zeta$$

$$J\eta_y = x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi$$

$$J\zeta_y = x_\eta z_\xi - x_\xi z_\eta$$

$$J\xi_z = x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta$$

$$J\eta_z = x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta$$

$$J\zeta_z = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$$

(2.51)

Εφαρμόζοντας τη σχέση (2.14) για το μετασχηματισμό των ανταλλοιώτων και αναλλοιώτων μετρικών παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 J^2 g^{11} &= g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32} \\
 J^2 g^{22} &= g_{11}g_{33} - g_{13}g_{31} \\
 J^2 g^{33} &= g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \\
 J^2 g^{12} &= g_{13}g_{32} - g_{12}g_{33} \\
 J^2 g^{23} &= g_{21}g_{13} - g_{11}g_{23} \\
 J^2 g^{31} &= g_{22}g_{31} - g_{21}g_{32}
 \end{aligned}
 \tag{2.52}$$

Για περαιτέρω εμβάθυνση στη γένεση και το χειρισμό καμπυλόγραμμων συστημάτων συντεταγμένων συνιστάται η παρακάτω εργασία-ανασκόπησης:

J.F. Thompson and Z.U.A. Warsi, "Boundary-Fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Partial Differential Equations - A Review", J. of Computational Physics, Vol. 47, pp. 1-108, 1982.

Χαρακτηριστικές μέθοδοι γένεσης πλεγμάτων μπορούν να βρεθούν στις παρακάτω εργασίες:

J.F. Thompson "Grid Generation Techniques in Computational Fluid Dynamics", AIAA Journal Vol. 22, No 11, 1505-1523, November 1984.

P.D. Thomas and J.F. Middlecoff, "Direct Control of the Grid Point Distribution in Meshes Generated by Elliptic Equations", AIAA Journal, Vol. 18, No 6, pp. 652-656, June 1980.

R.L. Sorenson, "A Computer Program to Generate Two-Dimensional Grids About Airfoils and Other Shapes by the Use of Poisson's Equations", NASA TM-81198, 1980.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ NAVIER-STOKES

3.1 Οι Εξισώσεις Ροής στο Καρτεσιανό Σύστημα

Οι χρονικά μη-μόνιμες εξισώσεις Navier-Stokes, για ροή συμπιεστού ρευστού, είναι ένα μεικτό σύστημα υπερβολικών και παραβολικών εξισώσεων. Οι χρονικά μη-μόνιμες εξισώσεις Navier-Stokes, για ροή ασυμπίεστου ρευστού, είναι ένα μεικτό σύστημα ελλειπτικών και παραβολικών εξισώσεων. Επειδή η φύση των εξισώσεων που λύνουμε καθορίζει και την αριθμητική μέθοδο που θα χρησιμοποιηθεί, είναι προφανές ότι διαφορετικές τεχνικές επίλυσης εφαρμόζονται για τις συμπιεστές και τις ασυμπίεστες ροές. Η παράθεση των εξισώσεων που ακολουθεί γίνεται για τις συμπιεστές ροές που μας ενδιαφέρουν στο Μάθημα αυτό. Έτσι για μια διδιάστατη ροή χωρίς εξωτερικές δυνάμεις ή πρόσδοση θερμότητας από εξωτερικές πηγές, οι εξισώσεις Navier-Stokes σε καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y) γράφονται

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

όπου οι τέσσερις ισχύουσες διαφορικές εξισώσεις (συνέχεια, διατήρηση της ορμής κατά τη x-κατεύθυνση, διατήρηση της ορμής κατά την y-κατεύθυνση και διατήρηση της ενέργειας) έχουν συνοψισθεί στη λεγόμενη διανυσματική γραφή τους. Ο αναγνώστης που έρχεται για πρώτη φορά σε επαφή με το διανυσματικό τρόπο γραφής των εξισώσεων Navier-Stokes, πρέπει να διακρίνει σαφώς τις διανυσματικές ποσότητες \vec{U} , \vec{F} , \vec{G} από τα διανύσματα \vec{V} κλπ. του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Το διάνυσμα \vec{U} , σε κάθε θέση του πεδίου ροής αποτελείται από τις εξαρτημένες μεταβλητές του προβλήματος το οποίο για τη συντηρητική γραφή των εξισώσεων γράφεται

$$\vec{U} = (\rho, \rho u, \rho v, E_t)^T \quad (3.2)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα, (u,v) οι δύο συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας στο καρτεσιανό σύστημα και E_t είναι η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου. Η τελευταία δίνεται από τη σχέση

$$E_t = \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \quad (3.3)$$

όπου e είναι η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας και V το μέτρο της ταχύτητας. Η εσωτερική ενέργεια e συνδέεται με τη θερμοκρασία μέσω του ειδικού συντελεστή θερμοχωρητικότητας υπό σταθερό όγκο, σύμφωνα με τη σχέση

$$e = c_v T = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} \quad (3.4)$$

Η ποσότητα E_t , αποδεικνύεται εύκολα ότι συνδέεται με το πεδίο στατικής πίεσης μέσω της σχέσης

$$E_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (3.5)$$

Η ολική ενθαλπία h_t , που δίνεται από τη σχέση

$$h_t = h + \frac{1}{2} V^2$$

και αποτελεί χαρακτηριστικό ενεργειακό μέγεθος του πεδίου ροής, συνδέεται με την ολική ενέργεια E_t μέσω της σχέσης

$$E_t = \rho h_t - p \quad (3.6)$$

Τα διανύσματα \vec{F} και \vec{G} δίνονται από τις σχέσεις

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (E_t + p)u - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} + q_x \end{bmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (E_t + p)v - u\tau_{xy} - v\tau_{yy} + q_y \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων απορρέουν από τη γενική έκφραση

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right], \quad i, j = 1, 2 \quad (3.8)$$

και είναι αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \tau_{yy} &= \frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

ενώ, το διάνυσμα ροής θερμότητας

$$\vec{q} = -k \nabla T \quad (3.10)$$

έχει συνιστώσες

$$\begin{aligned} q_x &= -k \frac{\partial T}{\partial x} \\ q_y &= -k \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.11)$$

όπου k είναι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας.

Το παραπάνω σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων πρέπει να κλείσει με συμπληρωματικές σχέσεις οι οποίες εκφράζουν αφ'ενός μεν τη σύνδεση μεταξύ των θερμοδυναμικών μεταβλητών (p, ρ, T, e κλπ.), αφ'ετέρου δε τις ιδιότητες (μ, k) συναρτήσεων των θερμοδυναμικών χαρακτηριστικών της ροής. Η καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων αποτελεί μία αλγεβρική σχέση κατάστασης, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη γνωστή της μορφή

$$p = \rho R_g T \quad (3.12)$$

όπου R_g είναι η σταθερά του αερίου, ή ακόμα σε άλλες βολικές μορφές, όπως είναι η γραφή (3.4) που ήδη παρουσιάστηκε.

Οι συντελεστές δυναμικής συνεκτικότητας και θερμικής αγωγιμότητας συνδέονται με τις θερμοδυναμικές μεταβλητές μέσω της κινητικής θεωρίας των αερίων. Συνήθως η συνεκτικότητα υπολογίζεται από τον τύπο του Sutherland, ως

$$\mu = C_1 \frac{T^{3/2}}{T + C_2} \quad (3.13)$$

όπου για τον αέρα σε κανονικές συνθήκες οι εμπλεκόμενες σταθερές είναι

$$C_1 = 1.458 \times 10^{-6} \text{ kg/(ms}\sqrt{\text{K}}) \quad , \quad C_2 = 110.4 \text{ K}$$

Ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας προκύπτει συνήθως από την παραδοχή σταθερού αριθμού Prandtl (για αέρα $Pr = 0.72$) ως

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k} \quad (3.14)$$

Η διανυσματική γραφή των εξισώσεων ροής (3.1), μαζί με τους ορισμούς (3.2) και (3.7) αποτελεί ένα συντηρητικό τρόπο γραφής των εξισώσεων. Η συντηρητική γραφή προϋποθέτει ότι οι συντελεστές των παραγωγών είναι είτε σταθερές είτε μεταβλητές, οι οποίες όμως δεν εμφανίζονται αλλού μέσα στην εξίσωση. Για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις που μοντελοποιούν τις εξισώσεις διατήρησης μεγεθών μέσα στο πεδίο ροής, η συντηρητική γραφή σημαίνει το να μπορεί η εξίσωση να δοθεί στη μορφή της απόκλισης

(div) μιας φυσικής ποσότητας. Έτσι, στις εξισώσεις (3.1), η πρώτη εξίσωση, δηλ. η εξίσωση της συνέχειας δόθηκε στη συντηρητική μορφή

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

αντί της μη-συντηρητικής μορφής

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων $(x,y) \rightarrow (\xi,\eta)$ που αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 2, επιτρέπει πλέον να εκφράσουμε τις εξισώσεις (3.1) στο γενικευμένο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων. Έτσι, από τη μορφή (3.1) προκύπτει διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} \eta_x + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \eta} \eta_y &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow J \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + y_\eta \frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi} - x_\eta \frac{\partial \bar{G}}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} + x_\xi \frac{\partial \bar{G}}{\partial \eta} &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (J \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial \xi} [J(\xi_x \bar{F} + \xi_y \bar{G})] + \frac{\partial}{\partial \eta} [J(\eta_x \bar{F} + \eta_y \bar{G})] &= 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς η εξίσωση (3.1) στο γενικευμένο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων διατηρεί την ίδια μορφή, δηλαδή γράφεται ως

$$\frac{\partial \bar{U}^*}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{G}^*}{\partial \eta} = 0 \quad (3.15)$$

όπου

$$\bar{U}^* = J \bar{U}$$

$$\bar{F}^* = J(\xi_x \bar{F} + \xi_y \bar{G}) \quad (3.16)$$

$$\bar{G}^* = J(\eta_x \bar{F} + \eta_y \bar{G})$$

Οι εκφράσεις (3.15) και (3.16) προέκυψαν χρησιμοποιώντας το νόμο της αλυσιδωτής παραγωγής και τις σχέσεις μετασχηματισμού (2.36) μεταξύ των ανταλλοίωτων και των αναλλοίωτων μετρικών του προηγούμενου κεφαλαίου. Ένας δεύτερος τρόπος για να προκύψει η γραφή (3.15) είναι να χρησιμοποιηθεί η συντηρητική ιδιότητα και η έκφραση

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (J A^i)$$

μετασχηματισμού της απόκλισης ενός διανυσματικού μεγέθους, από το καρτεσιανό στο γενικευμένο σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων.

3.2 Οι Εξισώσεις Ροής στην Επιφάνεια S_1 μιας Πτερύγωσης

Το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων αξονικής συμμετρίας το οποίο χρησιμοποιείται για την έκφραση των εξισώσεων διατήρησης στις επιφάνειες από-πτερύγιο-σε-πτερύγιο ή επιφάνειες S_1 , των πτερυγώσεων στροβιλομηχανών, παρουσιάστηκε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 2.9. Στη συνέχεια δίνονται οι εξισώσεις διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας, σε διανυσματική γραφή, ως

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial m} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial \theta} = \vec{H} \quad (3.17)$$

όπου το διάνυσμα \vec{U} των εξαρτημένων μεταβλητών έχει τη μορφή

$$\vec{U} = (Rh\rho, Rh\rho W_m, Rh\rho W_\theta, RhE_{iR}) \quad (3.18)$$

Οι εξισώσεις παρουσιάζονται στο σχετικό σύστημα αναφοράς το οποίο περιστρέφεται με τη σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω της μηχανής. Με (W_m, W_θ) συμβολίζονται οι κατά m και θ συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας και h είναι το πάχος του σωλήνα ροής που γενικά μπορεί να μεταβάλλεται κατά τη μεσημβρινή κατεύθυνση m . Η ποσότητα E_{iR} εκφράζει τη σχετική ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου που δίνεται από τη σχέση

$$E_{iR} = \rho \left(e + \frac{W^2}{2} - \frac{\omega^2 R^2}{2} \right) \quad (3.19)$$

Τα διανύσματα \vec{F} και \vec{G} δίνονται από τις σχέσεις

$$\vec{F} = Rh \begin{bmatrix} \rho W_m \\ \rho W_m^2 + p - \tau_{mm} \\ \rho W_m W_\theta - \tau_{m\theta} \\ (E_{iR} + p) W_m - W_m \tau_{mm} - W_\theta \tau_{m\theta} + q_m \end{bmatrix}$$

$$\vec{G} = h \begin{bmatrix} \rho W_\theta \\ \rho W_m W_\theta - \tau_{m\theta} \\ \rho W_\theta^2 + p - \tau_{\theta\theta} \\ (E_{\mu R} + p)W_\theta - W_m \tau_{m\theta} - W_\theta \tau_{\theta\theta} + q_\theta \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Το διάνυσμα H , στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (3.17) συνοψίζει όρους που οφείλονται στην περιστροφή της μηχανής και έχει τη μορφή

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ h\rho(W_\theta + \omega R)^2 \frac{\partial R}{\partial m} + p \frac{\partial}{\partial m}(Rh) - h\tau_{\theta\theta} \frac{\partial R}{\partial m} - R\tau_{nn} \frac{\partial h}{\partial m} \\ -h\rho W_m(W_\theta + 2\omega R) \frac{\partial R}{\partial m} + h\tau_{m\theta} \frac{\partial R}{\partial m} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων που εμπλέκονται στις παραπάνω εκφράσεις υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \tau_{mm} &= \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial W_m}{\partial m} - \frac{2}{3R} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{3} \frac{W_m}{R} \frac{\partial R}{\partial m} - \frac{2}{3} \frac{W_m}{h} \frac{\partial h}{\partial m} \right) \\ \tau_{\theta\theta} &= \mu \left(\frac{4}{3} \frac{1}{R} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{3} \frac{W_m}{R} \frac{\partial R}{\partial m} - \frac{2}{3} \frac{W_m}{h} \frac{\partial h}{\partial m} - \frac{2}{3} \frac{\partial W_m}{\partial m} \right) \\ \tau_{nn} &= \mu \left(\frac{4}{3} \frac{W_m}{h} \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial m} - \frac{2}{3R} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} - \frac{2W_m}{3R} \frac{\partial R}{\partial m} - \frac{2}{3} \frac{\partial W_m}{\partial m} \right) \\ \tau_{m\theta} &= \mu \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial m} + \frac{1}{R} \frac{\partial W_m}{\partial \theta} - \frac{W_\theta}{R} \frac{\partial R}{\partial m} \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ορίζοντας με δ την απόκλιση της ταχύτητας W

$$\delta = \nabla \cdot \vec{W} = \frac{1}{Rh} \left[\frac{\partial}{\partial m}(RhW_m) + \frac{\partial}{\partial \theta}(hW_\theta) \right]$$

ή

$$\delta = \frac{\partial W_m}{\partial m} + \frac{1}{R} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + W_m \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial m} + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial m} \right) \quad (3.23)$$

προκύπτει και η επόμενη βολική γραφή για τις ορθές συνιστώσες του τανυστή των τάσεων

$$\tau_{mm} = 2\mu \frac{\partial W_m}{\partial m} - \frac{2}{3}\mu\delta$$

$$\tau_{\theta\theta} = 2\mu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + \frac{W_m}{R} \frac{\partial R}{\partial m} \right) - \frac{2}{3}\mu\delta \quad (3.24)$$

$$\tau_{nn} = 2\mu \frac{W_m}{h} \frac{\partial h}{\partial m} - \frac{2}{3}\mu\delta$$

Ο τρόπος γραφής (3.24) είναι ιδιαίτερα βολικός αν ο υπολογισμός γίνεται για ασυμπίεστες ροές, γιατί τότε $\delta=0$ και οι εκφράσεις για τις ορθές συνιστώσες της τάσης απλοποιούνται σημαντικά. Γενικά και σε υποηχητικές ροές χαμηλού αριθμού Mach, οι όροι οι οποίοι περιέχουν την ποσότητα δ μπορούν να αμεληθούν χωρίς ιδιαίτερη ζημιά στην ακρίβεια υπολογισμού.

Ο μετασχηματισμός $(m,\theta) \rightarrow (\xi,\eta)$ που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2, υλοποιείται με το μετασχηματισμό της εξίσωσης (3.17) στη μορφή

$$\frac{\partial \bar{U}^*}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{G}^*}{\partial \eta} = \bar{H}^* \quad (3.25)$$

όπου

$$\bar{U}^* = J\bar{U}$$

$$\bar{F}^* = J(\xi_m \bar{F} + \xi_\theta \bar{G}) \quad (3.26)$$

$$\bar{G}^* = J(\eta_m \bar{F} + \eta_\theta \bar{G})$$

$$\bar{H}^* = J\bar{H}$$

Οι σχέσεις (3.25) και (3.26) περικλείουν όλη την απαραίτητη πληροφορία ώστε να χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός και να γίνει ο προγραμματισμός της επίλυσης των εξισώσεων στο μετασχηματισμένο χωρίο. Συμπληρωματικά, μπορούν πάντοτε να εκτελεσθούν οι πράξεις στις σχέσεις (3.26), οπότε να προκύψουν περισσότερο σύντομες εκφράσεις των εξισώσεων στο μετασχηματισμένο επίπεδο. Ενδεικτικά δίνεται αμέσως παρακάτω μια βολική γραφή για την εξίσωση της συνέχειας στο μετασχηματισμένο επίπεδο (ξ,η)

$$\frac{\partial}{\partial t}(JRh\rho) + \frac{\partial}{\partial \xi}(JRh\rho W^1) + \frac{\partial}{\partial \eta}(JRh\rho W^2) = 0 \quad (3.27)$$

εμπλέκοντας τις ανταλλοιώτες συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας. Με τον ίδιο τρόπο, το διάνυσμα ροής F^* μπορεί να συνοψισθεί ως εξής

$$\vec{F}^* = JRh \begin{bmatrix} \rho W^1 \\ \rho W_m W^1 + p \xi_m - \xi_m \tau_{mm} - \frac{1}{R} \xi_\theta \tau_{m\theta} \\ \rho W_\theta W^1 + p \frac{1}{R} \xi_\theta - \xi_m \tau_{m\theta} - \frac{1}{R} \xi_\theta \tau_{\theta\theta} \\ (E_{tR} + p) W^1 - \xi_m (\tau_{mm} W_m + \tau_{m\theta} W_\theta) - \frac{1}{R} \xi_\theta (\tau_{m\theta} W_m + \tau_{\theta\theta} W_\theta) + \xi_m q_m + \frac{\xi_\theta}{R} q_\theta \end{bmatrix}$$

ενώ αντίστοιχη έκφραση προκύπτει εύκολα για το διάνυσμα ροής G^* .

Οι εξισώσεις Navier-Stokes βρίσκονται σε όλα τα βιβλία Μηχανικής των Ρευστών. Ενδεικτικά δίνονται δύο πιθανά βοηθήματα:

D.A Anderson, J.K. Tannehill and R.H. Pletcher, "Computation Fluid Mechanics and Heat Transfer", Hemisphere Publishing Co., 1984.

G.K. Batchelor, "An Introduction to Fluid Dynamics", Cambridge Univ. Press, 1967.

Για τη ροή στις Στροβιλομηχανές κατάλληλο βοήθημα κρίνεται το παρακάτω βιβλίο:

M.H. Vavra, "Aero-Thermodynamics and Flow in Turbomachines", R.E. Krieger Publ. Company, New York, 1974.

3.3 Επιβολή Οριακών Συνθηκών σε Ροή σε Πτερυγώσεις

Οι διαφορικές εξισώσεις που μαζί με την καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων (αν το εργαζόμενο μέσο υποθεθεί ότι συμπεριφέρεται ως τέτοιο) διέπουν τη ροή σε συνιστώσες των στροβιλομηχανών παρουσιάσθηκαν στην Ενότητα 3.1 για τις επίπεδες (και κατ'επέκταση τις τριδιάστατες ροές) και στην Ενότητα 3.2 για τις διδιάστατες ροές πάνω στην από-περύγιο-σε-περύγιο επιφάνεια μιας στροβιλομηχανής όπου υπάρχει η δυνατότητα μεταβλητής ακτίνας και μεταβλητού πάχους σωλήνα ροής. Στις ενότητες που ακολουθούν θα παρουσιασθούν οι τρόποι εκείνοι με τους οποίους επιβάλλονται οι οριακές συνθήκες. Η παρουσίαση θα γίνει για επίπεδες ροές σε πτερυγώσεις και με γενικό τρόπο· βέβαια, η πρακτική εφαρμογή των οριακών συνθηκών, έτσι όπως παρατίθεται στις επόμενες ενότητες, πλησιάζει περισσότερο τις τεχνικές των πεπερασμένων διαφορών-πεπερασμένων όγκων, στις οποίες εξάλλου έχει νόημα και ο μετασχηματισμός στο υπολογιστικό χωρίο (ξ, η) .

Η παρουσίαση των οριακών συνθηκών, για την είσοδο και την έξοδο των πεδίων ροής, βασίζεται στον υπερβολικό χαρακτήρα των προς επίλυση εξισώσεων στο χωρο-χρόνο.

Η ανάγνωση του Παραρτήματος Π2 κρίνεται απαραίτητη ώστε να μπορέσει ο αναγνώστης να παρακολουθήσει την ανάπτυξη που ακολουθεί. Σημειώνουμε ότι, ιδίως για συμπιεστές ροές που περιέχουν επίσης διηχητικές και υπερηχητικές ζώνες ροής, η διατήρηση των όρων χρονικής μεταβολής διαμορφώνει την περισσότερο συνηθισμένη τεχνική επίλυσης χρονικά μόνιμων πεδίων ροής. Πρόκειται για την **τεχνική της χρονοπροέλασης** (time-marching), όπου η χρονικά μόνιμη λύση αναζητείται ως η ασυμπτωτική λύση του προβλήματος ροής στο χρόνο. Η ασυμπτωτική λύση πρέπει να γίνει κατανοητή ως μια λύση που, μετά από ένα μεταβατικό στάδιο (στάδιο προσαρμογής στη χρονικά μόνιμη κατάσταση), παρουσιάζεται αναλλοίωτη με το χρόνο.

Περαιτέρω αναφορά στην τεχνική της χρονοπροέλασης ξεφεύγει από τα πλαίσια και τους στόχους του παρόντος συγγράμματος και εμπίπτει στα γενικότερα πλαίσια της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής. Για τους ίδιους λόγους, η επίσης συχνά χρησιμοποιούμενη **τεχνική διόρθωσης πίεσης** (pressure-correction method) για (κυρίως ασυμπίεστες ή χαμηλού αριθμού Mach) ροές σε περυγώσεις στροβιλομηχανών απλά θα αναφερθεί. Περισσότερες πληροφορίες για τέτοιες μεθόδους ο αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει σε συγγράμματα Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής, με ή χωρίς έμφαση στις στροβιλομηχανές. Πρέπει όμως πάντοτε να έχουμε υπόψη ότι η προσαρμογή επιλυτών "γενικών ροών" στις στροβιλομηχανές απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή σε σχέση με θέματα όπως είναι η περιστροφή και η επίδρασή της στη μοντελοποίηση της τύρβης, οι συνθήκες περιοδικότητας κλπ. Θέματα που σχετίζονται με τα μοντέλα τύρβης θα αναλυθούν σε επόμενα Κεφάλαια και δε θα σχολιασθούν εδώ.

Στην περίπτωση που το πρόβλημα που επιλύουμε αφορά τη συνεκτική ροή σε μια περύγωση, το θεωρητικό μοντέλο ροής διέπεται από τις εξισώσεις Navier-Stokes. Αν η εξεταζόμενη ροή είναι τυρβώδης, τότε το σύστημα των εξισώσεων Navier-Stokes, συνοδεύεται από τις αλγεβρικές ή διαφορικές εξισώσεις που αποτελούν το μοντέλο τύρβης.

Επειδή η είσοδος και η έξοδος του υπολογιστικού πλέγματος της περύγωσης τοποθετούνται τουλάχιστον σε απόσταση μιας χορδής ανάντι και κατόντι των ακμών του περυγίου, γίνεται συνήθως η υπόθεση ότι τα συνεκτικά φαινόμενα σε μια τέτοια απόσταση από τα στερεά τοιχώματα των περυγίων μπορούν να αμεληθούν και οι οριακές συνθήκες επιβάλλονται με τον ίδιο τρόπο όπως και για τις εξισώσεις Euler. Αν επιλύεται το μοντέλο τύρβης k-ε, η συζήτηση των αναγκαίων οριακών συνθηκών για τις μεταβλητές του μοντέλου αυτού αναλύεται στο Κεφάλαιο 5.

Για τα στερεά τοιχώματα, αν μεν επιλύονται οι εξισώσεις Euler, τότε ισχύει η συνθήκη μη διείσδυσης για τις συνιστώσες της ταχύτητας, ενώ οι συνθήκες μη-ολίσθησης της ταχύτητας επιβάλλονται στην περίπτωση συνεκτικών ροών. Η οριακή συνθήκη για την πίεση στον τοίχο είναι τύπου Neumann και προκύπτει από την κάθετη συνιστώσα της εξίσωσης της ορμής. Τέλος, για τη θερμοκρασία υπάρχουν γενικά δυο επιλογές. Όταν η θερμοκρασία του

τοιχώματος είναι γνωστή και ίση με T_w , τότε η οριακή συνθήκη της θερμοκρασίας είναι τύπου Dirichlet, ήτοι

$$T = T_w \quad (3.28\alpha)$$

ενώ αν η ροή κοντά στο τοίχωμα είναι αδιαβατική, τότε επιβάλλεται οριακή συνθήκη τύπου Neumann, δηλαδή

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_w = 0 \quad (3.28\beta)$$

όπου n η κάθετη κατεύθυνση στον τοίχο, ενώ με w συμβολίζεται το στερεό τοίχωμα.

Στις επόμενες ενότητες θα ασχοληθούμε θεωρητικά και πρακτικά με τη μέθοδο εφαρμογής οριακών συνθηκών στην είσοδο και την έξοδο του υπολογιστικού χωρίου μιας διδιάστατης περύγωσης, με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών.

3.4 Βασική Θεωρία από τη Μέθοδο των Χαρακτηριστικών

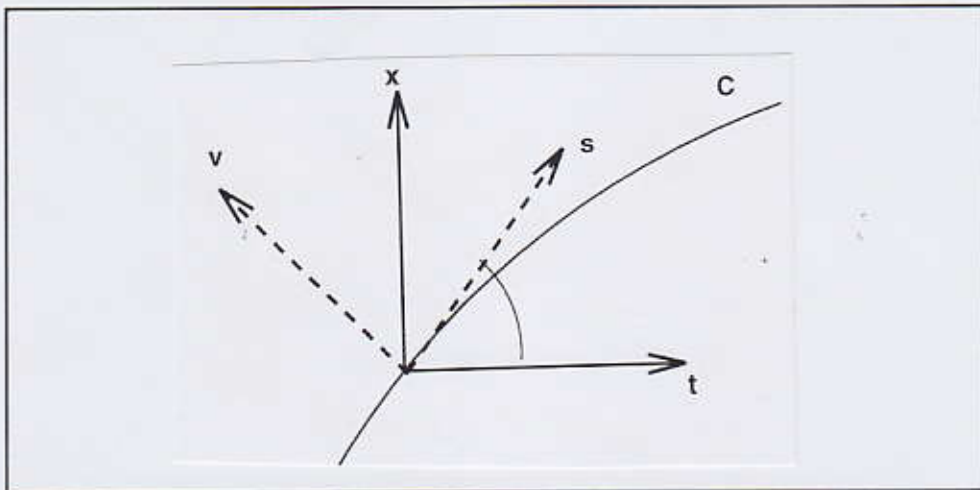
Εξετάζουμε αρχικά το μονοδιάστατο πρόβλημα ροής, όπως διατυπώνεται στη μορφή ενός συστήματος γραμμικοποιημένων μερικών διαφορικών εξισώσεων, δηλαδή

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{H} \quad (3.29)$$

όπου το διάνυσμα \vec{U} έχει n συνιστώσες, A είναι μια τετραγωνική μήτρα ($n \times n$) που τα στοιχεία της είναι εκφράσεις των συνιστωσών του διανύσματος \vec{U} , του t και του x ενώ το διάνυσμα $\vec{H}(t,x)$ έχει επίσης n συνιστώσες.

Αποδεικνύεται ότι το σύστημα αυτό είναι **Υπερβολικού Τύπου** αν έχει n πραγματικές ιδιοτιμές και n -ιδιοδιανύσματα που είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Η θεωρία των υπερβολικών συστημάτων παρουσιάσθηκε διεξοδικά στο Παράρτημα Π2.

Οι **Χαρακτηριστικές** ενός συστήματος ορίζονται ως οι καμπύλες εκείνες του επιπέδου (x,t) πάνω στις οποίες η παράγωγος του U κατά την κάθετη στην καμπύλη κατεύθυνση είναι απροσδιόριστη. Ο ορισμός αυτός αντιστοιχεί σε μονοδιάστατη ροή και γενικεύεται εύκολα για πολυδιάστατες ροές.



Σχήμα 3.1

Αν C η χαρακτηριστική καμπύλη του Σχήματος 3.1 και ds , dv είναι τα στοιχειώδη μήκη τόξου εφαπτομενικά και κάθετα σ'αυτή, οι τύποι αλλαγής συστήματος συντεταγμένων δίνουν

$$\begin{aligned}
 dt &= ds \sin\phi + dv \cos\phi \\
 dx &= ds \cos\phi - dv \sin\phi \\
 ds &= dt \sin\phi + dx \cos\phi \\
 dv &= dt \cos\phi - dx \sin\phi
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

Σχετίζοντας τις σχέσεις (3.30) με τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
 dt &= \frac{\partial t}{\partial s} ds + \frac{\partial t}{\partial v} dv \\
 dx &= \frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial v} dv \\
 ds &= \frac{\partial s}{\partial x} dx + \frac{\partial s}{\partial t} dt \\
 dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dt
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial s}{\partial x}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial t}{\partial s} = \frac{\partial s}{\partial t}, \quad \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{\partial v}{\partial t}
 \tag{3.32}$$

και συνεπώς

$$\frac{\partial O}{\partial x} = \frac{\partial O}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial O}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial O}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial O}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial O}{\partial t} = \frac{\partial O}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial O}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial O}{\partial s} \frac{\partial t}{\partial s} + \frac{\partial O}{\partial v} \frac{\partial t}{\partial v}$$

Το σύστημα (3.29) στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$\left(I \frac{\partial t}{\partial v} + A \frac{\partial x}{\partial v} \right) \frac{\partial O}{\partial v} + \left(I \frac{\partial t}{\partial s} + A \frac{\partial x}{\partial s} \right) \frac{\partial O}{\partial s} = R \quad (3.34)$$

Το απροσδιόριστο της παραγώγου $\partial O / \partial v$ κατά μήκος μιας χαρακτηριστικής κατεύθυνσης ισοδυναμεί με το να απαιτήσουμε το μηδενισμό της οριζουσας

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (3.35)$$

όπου

$$\lambda = \frac{\frac{\partial t}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial v}} = - \frac{\frac{\partial x}{\partial s}}{\frac{\partial t}{\partial s}} = \tan \phi \quad (3.36)$$

Οι n χαρακτηριστικές του συστήματος (3.29) είναι λοιπόν καμπύλες που ορίζονται από τις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_k = \tan \phi_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (3.37)$$

όπου τα λ_k είναι οι n ιδιοτιμές της μήτρας A . Πρέπει λοιπόν να είναι οι n ιδιοτιμές πραγματικές έτσι ώστε οι n χαρακτηριστικές να είναι κι αυτές πραγματικές.

Αν σε κάθε ιδιοτιμή λ του A αντιστοιχίσουμε το αριστερό ιδιοδιάνυσμα γραμμής T που ορίζει η

$$T (A - \lambda I) = 0 \quad (3.38)$$

τότε, πολλαπλασιάζοντας το σύστημα (3.34) αριστερά με T , προκύπτει η βαθμωτή εξίσωση

$$T \left(I \frac{\partial t}{\partial s} + A \frac{\partial x}{\partial s} \right) \frac{\partial O}{\partial s} = T \cdot R \quad (3.39)$$

η οποία δεν περιέχει πλέον παραγώγους κατά την κάθετη κατεύθυνση της χαρακτηριστικής

καμπύλης ($dx/dt=\lambda$) αλλά μόνο κατά την εφαπτομενική της διεύθυνση. Η εξίσωση αυτή εκφράζει τη μεταβολή του διανύσματος \mathcal{O} των αγνώστων πάνω στη χαρακτηριστική καμπύλη C .

Έτσι, αν η μήτρα A έχει n πραγματικές ιδιοτιμές και ένα πλήρες σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων I_k , $k=1,2,\dots,n$, τότε προκύπτει ένα σύστημα n βαθμωτών συναρτήσεων της μορφής

$$I_k \left[I \left(\frac{\partial t}{\partial s} \right)_k + A \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)_k \right] \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial s_k} = I_k \cdot A \quad (3.40)$$

όπου κάθε μία από τις εξισώσεις αυτές περιέχει παραγώγους αποκλειστικά κατά μία χαρακτηριστική κατεύθυνση. Δηλαδή, το αρχικό σύστημα (3.30) μετασχηματίστηκε σε ένα **κανονικό σύστημα** (3.40) κατά μήκος των χαρακτηριστικών διευθύνσεων (βλέπε Παράρτημα Π2).

Μια επίσης χρήσιμη γραφή της σχέσης (3.40) είναι η παρακάτω

$$I_k \left(\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x} \right) = I_k \cdot A \quad (3.41)$$

Έχοντας δώσει όλες τις σχέσεις που αφορούν τη θεωρία των χαρακτηριστικών θα προχωρήσουμε αρχικά σε απλούστερα παραδείγματα εφαρμογής τους, ώστε να γίνουν περισσότερο κατανοητές, πριν αυτές εφαρμοστούν σε πραγματικά διδιάστατα προβλήματα ροών σε πτερυγώσεις.

3.5 Οριακές Συνθήκες για τις Διδιάστατες Εξισώσεις Euler

Λύνουμε τις διδιάστατες εξισώσεις ατρίβους συμπιεστού ρευστού (εξισώσεις Euler), για μια διδιάστατη περύγωση με πλέγμα τύπου H , στο μετασχηματισμένο επίπεδο (ξ, η) όπου οι υπολογιστικές κυψέλες είναι τετραγωνικές και με μοναδιαίες πλευρές. Θεωρούμε ότι η ροή είναι παντού υποηχητική. Για την είσοδο και την έξοδο του χωρίου επιβάλλουμε οριακές συνθήκες, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των χαρακτηριστικών για να επικοινωνήσουν οι οριακοί (εισόδου-εξόδου) κόμβοι με το υπόλοιπο πεδίο. Κατ'αρχήν αποφασίζουμε για το ποιές οριακές συνθήκες πρέπει να επιβάλουμε στην είσοδο και ποιές στην έξοδο του υπολογιστικού χωρίου. Συγχρόνως επιλέγουμε εκείνες τις χαρακτηριστικές εξισώσεις οι οποίες θα δώσουν πληροφορία στην είσοδο και εκείνες που θα εφαρμοστούν στην έξοδο.

Γράφουμε στο Καρτεσιανό σύστημα τις εξισώσεις Euler στη μορφή

$$\frac{\partial O}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (3.42)$$

όπου

$$O = [\rho \ u \ v \ p]^T$$

Ο μετασχηματισμός της (3.42) στο επίπεδο (ξ, η) είναι γνωστός από τα προηγούμενα και δίνει

$$\frac{\partial O^*}{\partial t} + \frac{\partial F^*}{\partial \xi} + \frac{\partial G^*}{\partial \eta} = 0$$

ή όμοια

$$\frac{\partial O^*}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial O^*}{\partial \xi} + \tilde{B} \frac{\partial O^*}{\partial \eta} = 0 \quad (3.43)$$

Οι αστερισκοί στη συνέχεια θα παραλείπονται για ευκολία. Η οριζούσα A είναι η

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} V^1 & \rho \xi_x & \rho \xi_y & 0 \\ 0 & V^1 & 0 & \frac{1}{\rho} \xi_x \\ 0 & 0 & V^1 & \frac{1}{\rho} \xi_y \\ 0 & \rho c^2 \xi_x & \rho c^2 \xi_y & V^1 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

ενώ η οριζούσα B μπορεί να προκύψει από την (3.44) με προσεκτική αλλαγή των ξ -μετρικών με η -μετρικές και της ανταλλοίωτης συνιστώσας V^1 με την αντίστοιχη V^2 .

Υποθέτοντας ότι το πλέγμα που εξετάζεται είναι τύπου H, η οικογένεια γραμμών σταθερού η , δηλαδή οι πλεγματικές γραμμές ξ , κατευθύνονται από την είσοδο προς την έξοδο ενώ οι γραμμές η από την πλευρά υποπίεσης προς την πλευρά υπερπίεσης του περυγίου. Γίνεται επιπλέον η υπόθεση ότι οι γραμμές ξ έχουν περίπου την κατεύθυνση της ροής. Η εξίσωση (3.43) μπορεί να γραφεί στην ψευδο-μονοδιάστατη γραφή

$$\frac{\partial O}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial O}{\partial \xi} = A \quad (3.45)$$

με

$$A = -\tilde{B} \frac{\partial O}{\partial \eta}$$

αφού γίνεται η παραδοχή ότι για την είσοδο και την έξοδο, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι

η μετάδοση πληροφορίας κατά την ξ -κατεύθυνση ενώ μπορούμε να θεωρήσουμε δευτερεύουσα κάθε μετάδοση πληροφορίας κατά την η -κατεύθυνση, ειδικά για την τοπολογία που επιλέχθηκε. Έτσι, για το διάνυσμα H έχουμε ότι

$$A = - \begin{bmatrix} V^2 \frac{\partial p}{\partial \eta} + \rho \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} + \rho \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ V^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho} \eta_x \frac{\partial p}{\partial \eta} \\ V^2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho} \eta_y \frac{\partial p}{\partial \eta} \\ \rho c^2 \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} + \rho c^2 \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} + V^2 \frac{\partial p}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Οι 4 πραγματικές ιδιοτιμές της οριζουσας (A) είναι οι

$$\lambda_1 = V^1, \quad \lambda_2 = V^1, \quad \lambda_3 = V^1 - \alpha \sqrt{\rho^{11}}, \quad \lambda_4 = V^1 + \alpha \sqrt{g^{11}} \quad (3.47)$$

και για το πλήρως υποηχητικό πρόβλημα ροής, τρεις ιδιοτιμές, οι $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4$ είναι θετικές και μία, η (λ_3), αρνητική. Οι τρεις θετικές ιδιοτιμές αναλαμβάνουν να μεταφέρουν πληροφορία προς τα κατάντι της ροής. Μπορούν δηλαδή να χρησιμοποιηθούν για να μεταφέρουν από την είσοδο προς το εσωτερικό του χωρίου εκείνη την πληροφορία που εισάγουν οι οριακές συνθήκες εισόδου. Για προφανείς λόγους, στην υποηχητική ροή, μόνο τρία μεγέθη ροής επιβάλλονται στην είσοδο. Αυτά συνήθως είναι η ολική θερμοκρασία T_t , η ολική πίεση P_t και η γωνία της ροής α . Η πληροφορία που τα τρία αυτά μεγέθη προσδίδουν, μεταφέρεται στο εσωτερικό του πεδίου από τις χαρακτηριστικές εξισώσεις που αντιστοιχούν στις "θετικές" ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4$. Το τέταρτο μέγεθος στην είσοδο του πεδίου λαμβάνει τιμή από τη χαρακτηριστική εξίσωση της ιδιοτιμής λ_3 , η οποία επιλύεται στην είσοδο του πεδίου. Με τον τρόπο αυτό, η είσοδος αντιλαμβάνεται το πεδίο ροής που διαμορφώνεται στο εσωτερικό του χωρίου. Για τοπικά υποηχητικές ροές, στην έξοδο του χωρίου επιβάλλεται μόνο ένα μέγεθος, συνήθως η στατική πίεση. Τα υπόλοιπα τρία υπολογίζονται από τις πληροφορίες που εκεί μεταφέρουν οι χαρακτηριστικές που αντιστοιχούν στις $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4$. Η πληροφορία για την επιβληθείσα πίεση εξόδου μεταφέρεται στο εσωτερικό μέσω της χαρακτηριστικής λ_3 . Ενδεικτικά παραθέτονται τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις παραπάνω ιδιοτιμές

$$\begin{aligned} T_1 &= [-c^2 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \\ T_2 &= [0 \quad -\frac{\xi_y}{\xi_x} \quad 1 \quad 0] \\ T_3 &= [0 \quad -\rho c \xi_x \quad -\rho c \xi_y \quad \sqrt{g^{11}}] \\ T_4 &= [0 \quad \rho c \xi_x \quad \rho c \xi_y \quad \sqrt{g^{11}}] \end{aligned} \quad (3.48)$$

Η σχέση (3.41) μπορεί εναλλακτικά να γραφεί και ως

$$T_k \frac{\partial D}{\partial s_k} = \cos \phi_k T_k \cdot H \quad (3.49)$$

και χρησιμεύει ώστε να προκύψουν εύκολα οι 4 χαρακτηριστικές εξισώσεις. Με την εκτέλεση των απαραίτητων αριθμητικών πράξεων αυτές γίνονται

$$-c^2 \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial t} = V^1 \left(c^2 \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) + \{ \dots \} \quad (3.49)$$

$$-\xi_y \frac{\partial u}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial v}{\partial t} = V^1 \left(\xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} - \xi_x \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \{ \dots \} \quad (3.50)$$

$$\sqrt{g^{11}} \frac{\partial p}{\partial t} - \rho c \xi_x \frac{\partial u}{\partial t} - \rho c \xi_y \frac{\partial v}{\partial t} = -(V^1 - \alpha \sqrt{g^{11}}) \left\{ \sqrt{g^{11}} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \rho c \xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} - \rho c \xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\} + \{ \dots \} \quad (3.51)$$

$$\sqrt{g^{11}} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c \xi_x \frac{\partial u}{\partial t} + \rho c \xi_y \frac{\partial v}{\partial t} = -(V^1 + \alpha \sqrt{g^{11}}) \cdot \left\{ \sqrt{g^{11}} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \rho c \xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \rho c \xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\} + \{ \dots \} \quad (3.52)$$

όπου οι όροι $\{ \dots \}$ περιέχουν η-παραγώγους, που γενικά αμελούνται θεωρώντας ομοιομορφία της ροής στην είσοδο και την έξοδο κατά την η-κατεύθυνση.

Στην υποηχητική ροή, οι εξισώσεις (3.49), (3.50) και (3.52) λύνονται στη διατομή εξόδου και υπολογίζουν τα άλλα τρία, πλην της γνωστής πίεσης εξόδου, μεγέθη ροής. Στην είσοδο επιλύεται η εξίσωση (3.51).

Όταν η ροή είναι υπερηχητική, τότε στην είσοδο επιβάλλονται όλα τα μεγέθη της ροής, αφού το σύστημα διαθέτει όλες τις ιδιοτιμές του θετικές και η είσοδος παύει να επηρεάζεται από το υπόλοιπο πεδίο ροής. Στην έξοδο, δεν επιβάλλεται κανένα μέγεθος της ροής, και οι εξισώσεις (3.49) ως (3.52) ανανεώνουν τοπικά τα μεγέθη της ροής στην έξοδο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΤΑ ΤΥΡΒΩΔΗ ΟΡΙΑΚΑ ΣΤΡΩΜΑΤΑ

4.1 Εισαγωγή στην έννοια της Τύρβης

Η παρατήρηση της ροής του καπνού ο οποίος εξέρχεται από την καπνοδόχο ενός εργοστασίου ή από την εξάτμιση ενός αυτοκινήτου, καθώς και η ροή του ύδατος σε έναν ποταμό αποτελούν καθημερινά απλά παραδείγματα για την εισαγωγή του φοιτητή στην έννοια της τύρβης. Στα παραπάνω παραδείγματα, η ροή σπάνια διαθέτει χαρακτηριστικά στρωτής ροής και σχεδόν ολοκληρωτικά χαρακτηρίζεται από την εμφάνιση (τυχαίων) διαταραχών, οι οποίες αντιστοιχούν σε τυρβώδη συμπεριφορά. Τέτοια τυρβώδη συμπεριφορά, κατά μεγάλο ποσοστό εμφανίζουν τα οριακά στρώματα που αναπτύσσονται στις πτέρυγες και τις ατράκτους αεροσκαφών και κυρίως στα πτερύγια και κελύφη των στροβιλομηχανών.

Οι διαταραχές, οι οποίες χαρακτηρίζουν την τυρβώδη συμπεριφορά, υπερτίθενται στη βασική ροή και οδηγούν σε ένα πολύπλοκο ροϊκό φαινόμενο, το οποίο φαίνεται ότι είναι απρόσιτο σε κάθε "ακριβή" μαθηματική διατύπωση. Συγχρόνως οι διαταραχές αυτές οδηγούν σε ισχυρή ανάμιξη της ροής, καθορίζουν την εξέλιξή της και επεμβαίνουν στη γενικότερη ισορροπία δυνάμεων. Το αποτέλεσμα των διαταραχών μοιάζει να είναι ισοδύναμο με το πεδίο ροής που θα είχαμε αν η συνεκτικότητα αυξάνονταν κατά μερικές τάξεις μεγέθους. Η προαναφερθείσα ανάμιξη είναι υπεύθυνη για την αυξημένη αντίσταση που εμφανίζουν οι τυρβώδεις ροές μέσα σε αγωγούς κυκλικής διατομής αλλά και για τις απώλειες μέσα στους στροβίλους και τους στροβιλοσυμπιεστές. Λόγω της ανάμιξης αυτής, ρευστοστοιχεία διαφορετικής ορμής και θερμοκρασίας έρχονται σε τυχαία επαφή και το αποτέλεσμα είναι μια ομογενοποίηση της ροής. Οι πρακτικές συνέπειες αυτού είναι σημαντικές. Στο εσωτερικό της ροής, οι διαφορές ταχυτήτων ή θερμοκρασιών εξομαλύνονται και κοντά στα στερεά τοιχώματα παρατηρείται αυξημένη συναλλαγή θερμότητας σε σχέση με τη στρωτή ροή. Η ίδια αύξηση παρατηρείται και στο συντελεστή διάτμησης, ενώ η κινητική ενέργεια μέσα στα τυρβώδη οριακά στρώματα είναι επίσης αυξημένη. Κατά συνέπεια, ένα τυρβώδες οριακό στρώμα αποκολλάται σε μεγαλύτερες κλίσεις πίεσης από ότι ένα στρωτό οριακό στρώμα. Η ροή λ.χ. στα πτερύγια συμπιεστών θα εμφάνιζε ευκολότερα αποκόλληση αν η ροή παρέμενε στρωτή και χωρίς τύρβη και τα πτερύγια θα λειτουργούσαν με μη ικανοποιητικό τρόπο.

Μια τυρβώδης περιοχή της ροής χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο ιδιοτήτων. Υπογραμμίζεται το ότι, ενώ η συνεκτικότητα και η θερμική αγωγιμότητα είναι ιδιότητες του ίδιου του ρευστού, η τύρβη συνδέεται με την κίνηση του ρευστού και όχι το ίδιο το ρευστό. Ο τυχαίος χαρακτήρας των χωρικών και χρονικών μεταβολών της ταχύτητας, οι έντονοι στροβιλισμοί μέσα στο πεδίο και η αυξημένη ανάμιξη σε σχέση με τη στρωτή ροή, είναι ορισμένα από τα κύρια χαρακτηριστικά της τυρβώδους ροής.

Στην πράξη, οι τυρβώδεις ροές έχουν έναν έντονα τριδιάστατο χαρακτήρα, δηλαδή υπάρχουν διαταραχές της ταχύτητας και στις τρεις κατευθύνσεις. Εν τούτοις, πολλά προβλήματα αντιμετωπίζονται με την επίλυση των διδιάστατων εξισώσεων Navier-Stokes, αφού μια τέτοια επίλυση είναι αρκετές φορές επαρκής και σαφώς πιο οικονομική. Στην περίπτωση αυτή, όταν η ροή είναι τυρβώδης, η ροή θεωρείται ως στατιστικά διδιάστατη. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν μη-μηδενικές διαταραχές της ταχύτητας κατά την τρίτη κατεύθυνση, αλλά αυτές εξελίσσονται γύρω από μηδενική μέση τιμή. Γενικά, οι διαταραχές και στις τρεις κατευθύνσεις έχουν την ίδια τάξη μεγέθους. Ο τριδιάστατος χαρακτήρας των διαταραχών σχετίζεται άμεσα και με την ιδιότητα του ισχυρά στροβιλού πεδίου, που αποδώσαμε στην τύρβη. Γνωρίζουμε ότι η δυναμική των στροβιλισμών είναι σημαντικά διαφορετική στα διδιάστατα και τα τριδιάστατα πεδία. Στην πλήρως διδιάστατη ροή, ο στροβιλισμός του πεδίου εξελίσσεται μόνο κάτω από την επίδραση των φαινομένων μεταφοράς και διάχυσης της ροής. Αντίθετα, όταν το πεδίο της ροής είναι τριδιάστατο, υπάρχει επιπλέον δημιουργία ή καταστροφή στροβιλισμού που οφείλεται στη δράση της παραμόρφωσης του πεδίου ταχυτήτων. Ας συγκρατήσουμε, τέλος, ότι η χαρακτηριστική ιδιότητα της τύρβης δεν είναι τόσο το ισχυρά στροβιλό πεδίο, όσο κυρίως η εμφάνιση ισχυρότατων διαταραχών στο μέγεθος του στροβιλισμού.

Οι τυρβώδεις ροές είναι, με την ακριβή έννοια του όρου, μη προβλέψιμες. Έχει αποδειχθεί ότι έστω και αν μπορούσαμε με ακρίβεια να λύσουμε τις εξισώσεις Navier-Stokes, ένα μικρό λάθος ή η εισαγωγή μιας μικρής διαταραχής, σε τυχαίο σημείο της ροής, θα επιδρούσε εντός κάποιου χρονικού διαστήματος, στο σύνολο του πεδίου ροής. Αυτό δείχνει ότι η προσπάθεια πρόγνωσης του πεδίου ταχυτήτων συναρτήσει του χρόνου είναι μάταιη. Αυτός είναι και ο λόγος που στη μετεωρολογία δε διακινδυνεύονται μακροχρόνιες προβλέψεις. Για τον ίδιο λόγο είναι μάταιη η πρόβλεψη του "αληθινού" πεδίου ροής στις πτέρυγες αεροσκαφών ή στις πτερυγώσεις στροβιλομηχανών. Έτσι ενδιαφερόμαστε, αντί των στιγμιαίων μεγεθών του πεδίου ροής, για τα μέσα χρονικά μεγέθη αυτής, τα οποία δεν είναι ευαίσθητα στη λεπτομερή συμπεριφορά της τύρβης. Η μελέτη της τυρβώδους ροής, κάνοντας χρήση μέσων χρονικών μεγεθών της ροής, αποτελεί αντικείμενο επόμενων κεφαλαίων.

Οι εξισώσεις Navier-Stokes τις οποίες παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 3 για επίπεδες ροές και ροές στην επιφάνεια S_1 μιας στροβιλομηχανής ισχύουν εξίσου για στρωτές και για τυρβώδεις ροές. Ειδικά πάντως για τις τυρβώδεις ροές, οι τιμές των εξαρτημένων μεταβλητών που εμπλέκονται στις εξισώσεις Navier-Stokes είναι στιγμιαίες. Μια άμεση αντιμετώπιση του προβλήματος της τύρβης θα μπορούσε να στηριχθεί στην επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes για ένα δεδομένο σύνολο οριακών και αρχικών συνθηκών και στη συνέχεια την παρουσίαση των μέσων χρονικά τιμών για το σύνολο των λύσεων. Το εγχείρημα αυτό όμως είναι σχεδόν αδύνατο να πραγματοποιηθεί, ακόμα και για το απλούστερο φυσικό πρόβλημα, έστω και με τη βοήθεια του ισχυρότερου ηλεκτρονικού υπολογιστή. Έτσι η τεχνική που πρακτικά υιοθετείται είναι να χρησιμοποιούνται μέσες χρονικά τιμές των εξισώσεων

Navier-Stokes, αντί των μέσων χρονικά τιμών των λύσεων που θα προέκυπταν από την επίλυση στιγμιαίων εξισώσεων. Η διαδικασία λήψης μέσων χρονικά εκφράσεων για τις εξισώσεις Navier-Stokes συζητείται σε επόμενη ενότητα.

4.2 Διαδικασία Λήψης Μέσων χρονικά τιμών κατά Reynolds

Εστω ότι η ποσότητα f αποτελεί ένα χαρακτηριστικό μέγεθος ενός τυρβώδους πεδίου ροής, όπως λ.χ. μια συνιστώσα της ταχύτητας, ή πίεση, ή θερμοκρασία κλπ. Όπως εξηγήθηκε στην προηγούμενη ενότητα, το μέγεθος αυτό χαρακτηρίζεται από έντονη χωροχρονική διακύμανση, λόγω του τυρβώδους χαρακτήρα της ροής. Οι χωρικές και χρονικές κλίμακες της τυρβώδους συμπεριφοράς της συνάρτησης f είναι πολύ μικρές και αυτός είναι ο λόγος που η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes θα απαιτούσε ένα υπερβολικά πυκνό πλέγμα διακριτοποίησης (υπερβολικά μεγάλο αριθμό σημείων, άρα ιδιαίτερες απαιτήσεις μνήμης στον Ηλεκτρονικό Υπολογιστή) και ένα ιδιαίτερα μικρό χρονικό βήμα, για να μπορεί να περιγραφεί με ακρίβεια το πεδίο της ποσότητας f . Η αδυναμία να πραγματοποιηθεί αυτός ο υπολογισμός, μας οδηγεί στον ορισμό της μέσης χρονικά τιμής \bar{f} της συνάρτησης f , που κατά Reynolds είναι

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0 - \Delta t/2}^{t_0 + \Delta t/2} f dt \quad (4.1)$$

Ο χρόνος Δt για τον οποίο λαμβάνεται η μέση χρονικά τιμή πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερος της χρονικής περιόδου των τυχαίων διαταραχών που σχετίζονται με την τύρβη, αλλά συγχρόνως και πολύ μικρότερος από την κλίμακα χρόνου που χαρακτηρίζει την τυπική χρονικά μεταβαλλόμενη συμπεριφορά του πεδίου ροής.

Ο ορισμός (4.1) μας επιτρέπει να αναλύσουμε τη στιγμιαία τιμή της συνάρτησης f ως το άθροισμα της μέσης χρονικά τιμής της \bar{f} και μιας διαταραχής f' γύρω από αυτή τη μέση τιμή, σύμφωνα με τη σχέση

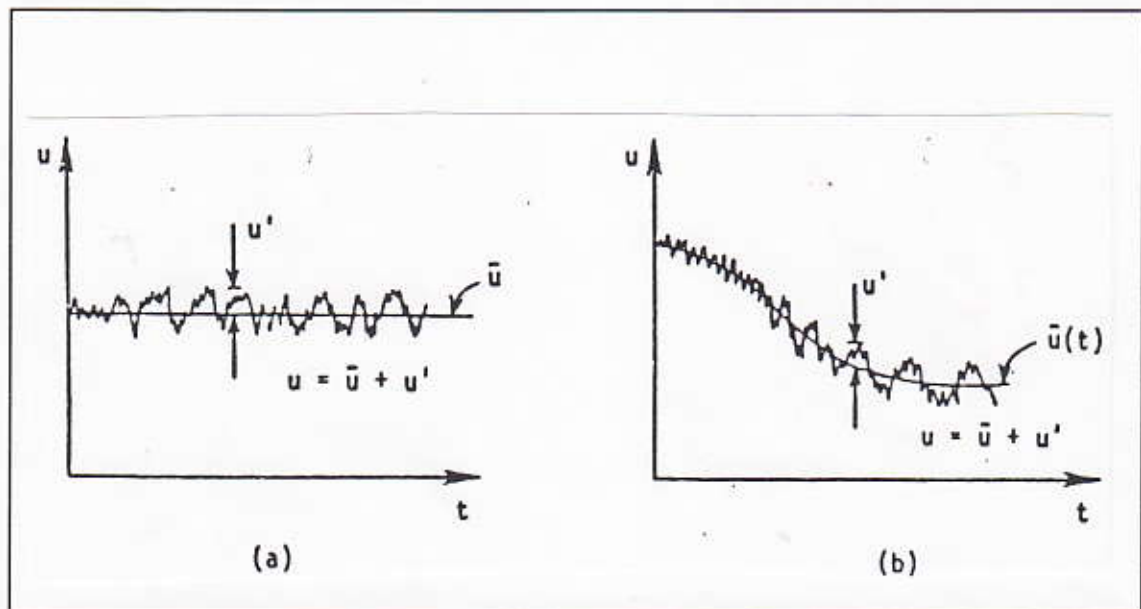
$$f = \bar{f} + f' \quad (4.2)$$

Εξ ορισμού, η μέση χρονικά τιμή της διαταραχής στο ίδιο διάστημα $(t_0 - \Delta t/2, t_0 + \Delta t/2)$ είναι μηδενική, δηλαδή

$$\bar{f}' = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0 - \Delta t/2}^{t_0 + \Delta t/2} f' dt = 0 \quad (4.3)$$

Το Σχήμα 4.1 παρουσιάζει την ανάλυση (4.2), αφ'ενός για μια χρονικά μόνιμη ροή και αφ'ετέρου για μια χρονικά μη-μόνιμη ροή. Στην τελευταία περίπτωση, το Σχήμα 4.1 δίνει ξεκάθαρα τη διαφορά χρονικής κλίμακας μεταξύ των χρονικά μη-μόνιμων φαινομένων

(μεγάλη κλίμακα) και των τυρβωδών διαταραχών (μικρή κλίμακα).



Σχήμα 4.1

Οι σχέσεις (4.1) ως (4.3) μας επιτρέπουν να διατυπώσουμε μερικές πολύ χρήσιμες σχέσεις που αφορούν τις μέσες χρονικά τιμές του αθροίσματος και του γινόμενου δυο ποσοτήτων f και g . Είναι

$$\overline{fg'} = 0 \quad , \quad \overline{fg} = \overline{f}\overline{g} \quad , \quad \overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g} \quad (4.4)$$

Πρακτικά, η παραπάνω ανάλυση κατά Reynolds μπορεί να γραφεί για οποιοδήποτε μέγεθος του πεδίου ροής, όπως ταχύτητες, θερμοκρασία, πίεση, πυκνότητα κλπ. και να έχουμε ότι

$$u = \bar{u} + u' \quad , \quad v = \bar{v} + v' \quad , \quad p = \bar{p} + p' \quad , \quad \rho = \bar{\rho} + \rho' \quad , \quad T = \bar{T} + T'$$

Οι διαταραχές ιδιοτήτων του ρευστού, όπως είναι η συνεκτικότητα και η θερμική αγωγιμότητα θεωρούνται πολύ μικρές και συνήθως αμελούνται. Όπως θα φανεί στη συνέχεια, η διαδικασία λήψης μέσων χρονικά τιμών κατά Reynolds είναι πολύ βολική για τη μελέτη των μέσων χρονικά εξισώσεων της ροής, στην περίπτωση του ασυμπίεστου ρευστού. Για την περίπτωση του συμπιεστού ρευστού χρησιμοποιείται συνήθως η διαδικασία μέσων μαζικά τιμών των εξαρτημένων μεταβλητών, που είναι επίσης γνωστή ως διαδικασία μέσων τιμών κατά Favre.

4.3 Διαδικασία Λήψης Μέσων Μαζικά Τιμών κατά Favre

Για την αντιμετώπιση τυρβωδών ροών συμπιεστού ρευστού προτάθηκε από τον Favre

και υιοθετήθηκε μια διαδικασία λήψης μέσων μαζικά τιμών. Σύμφωνα με τη διαδικασία αυτή, η μέση μαζικά τιμή ενός μεγέθους f της ροής, θα συμβολίζεται με \bar{f} και θα δίνεται από τη σχέση

$$\bar{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}} \quad (4.5)$$

Με τη βοήθεια του ορισμού (4.5), η στιγμιαία τιμή του μεγέθους f θα ισούται με το άθροισμα της μέσης μαζικά τιμής του \bar{f} και μιας διαταραχής f'' , σύμφωνα με τη σχέση

$$f = \bar{f} + f'' \quad (4.6)$$

Η μέση μαζικά ανάλυση (4.5) ισχύει για τις συνιστώσες της ταχύτητας και τις ενεργειακές μεταβλητές (θερμότητα, ενθαλπία), ενώ η πίεση και η πυκνότητα συνεχίζουν να αντιμετωπίζονται με τον προηγούμενο τρόπο λήψης μέσων χρονικά τιμών.

Επειδή μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\overline{\rho f} = \overline{\rho(\bar{f} + f'')} = \bar{\rho}\bar{f} + \overline{\rho f''}$$

αποδεικνύεται, με τη βοήθεια και του ορισμού (4.5), ότι

$$\overline{\rho f''} = 0 \quad (4.7)$$

που είναι η ισοδύναμη σχέση της (4.3) για τη διαδικασία μέσων τιμών κατά Favre. Ας ληφθεί υπόψη ότι η μέση χρονικά τιμή των διαταραχών f'' , δηλαδή η ποσότητα \bar{f}'' , δεν είναι γενικά ίση με το μηδέν.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που παρουσιάσαμε παραπάνω, μπορούμε να εκφράσουμε τη μέση χρονικά τιμή της ροής μιας στιγμιαίας ποσότητας f που μεταφέρεται από το πεδίο ταχυτήτων με συνιστώσες u_k , με τους δυο τρόπους ανάλυσης που παρουσιάσαμε. Έτσι, η μέση κατά Reynolds χρονική τιμή της ροής $\rho u_k f$ θα ισούται με

$$\overline{\rho u_k f} = \overline{(\bar{\rho} + \rho')(\bar{u}_k + u'_k)(\bar{f} + f')} = \bar{\rho}\bar{u}_k\bar{f} + \overline{\rho u'_k f'} + \overline{u_k \rho' f'} + \overline{f \rho' u'_k} + \overline{\rho' u'_k f'} \quad (4.8)$$

ενώ η αντίστοιχη διαδικασία κατά Favre δίνει

$$\overline{\rho u_k f} = \overline{\rho(\bar{u}_k + u''_k)(\bar{f} + f'')} = \bar{\rho}\bar{u}_k\bar{f} + \overline{u''_k \rho f''} + \overline{f \rho u''_k} + \overline{\rho u''_k f''}$$

Ο δεύτερος και ο τρίτος όρος του τελευταίου μέλους είναι μηδενικοί, λόγω της (4.7), ενώ ο τελευταίος όρος μπορεί να γραφεί και ως

$$\widetilde{u_k''f''} = \frac{\overline{\rho u_k''f''}}{\bar{\rho}} \rightarrow \overline{\rho u_k''f''} = \bar{\rho} \widetilde{u_k''f''} \quad (4.9)$$

οπότε τελικά παίρνουμε ότι

$$\overline{\rho u_k f} = \bar{\rho} \widetilde{u_k f} + \bar{\rho} \widetilde{u_k''f''} \quad (4.10)$$

Η σύγκριση των σχέσεων (4.8) και (4.10) οδηγεί στα προαναφερθέντα συμπεράσματα σχετικά με τη χρήση της κατά Reynolds ανάλυσης για ασυμπίεστες ροές κατά προτίμηση, ενώ της κατά Favre ανάλυσης για συμπίεστες ροές. Η ακαταλληλότητα της κατά Reynolds ανάλυσης για τις συμπίεστες ροές φαίνεται από τους αρκετούς επιπλέον όρους που θα εισήγαγε κατά τη λήψη της μέσης χρονικά τιμής μιας οποιασδήποτε ροής του τύπου $\rho u_k f$, βλέπε εξίσωση (4.8). Στην ασυμπιεστή ροή, προφανώς, η σχέση (4.8) εκφυλίζεται στην απλή μορφή της

$$\overline{\rho u_k f} = \bar{\rho} \overline{u_k f} + \overline{\rho u_k''f''} \quad (4.11)$$

που μπορεί να συγκριθεί με τη σχέση (4.10) που δίνει η κατά Favre ανάλυση για συμπίεστες ροές.

Στις επόμενες ενότητες θα παρουσιασθούν οι μέσες χρονικά εκφράσεις των εξισώσεων Navier-Stokes που γενικά αναφέρονται και ως εξισώσεις Reynolds της ροής. Η διαδικασία λήψης μέσων τιμών των όρων που εμπλέκονται στις εξισώσεις ροής, είτε αυτή ακολουθεί την τυπική κατά Reynolds ή τη μαζική κατά Favre διαδικασία, γεννά νέους όρους που αποτελούν τις κλίσεις των φαινομενικών τάσεων και ροών θερμότητας που συνδέονται με την τυρβώδη κίνηση. Αφού παρουσιασθούν και συζητηθούν οι κατά Reynolds εξισώσεις ροής, είτε για το επίπεδο πρόβλημα ροής είτε για τη ροή στην επιφάνεια S_1 μιας πτερύγωσης στροβιλομηχανής, θα έχει αναπτυχθεί το απαραίτητο υπόβαθρο για τη μοντελοποίηση των όρων αυτών, που φέρεται υπό τον ευρύ τίτλο "Μοντελοποίηση της Τύρβης" και αποτελεί αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου.

4.4 Η κατά Reynolds εξίσωση της συνέχειας

Για τη γενική περίπτωση του χρονικά μεταβαλλόμενου, συμπίεστου πεδίου ροής, η εξίσωση της συνέχειας προκύπτει από την πρώτη εξίσωση του συστήματος (3.7) για τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y) και από την πρώτη εξίσωση του συστήματος (3.17) για την επιφάνεια ροής (S_1), δηλαδή είναι αντίστοιχα

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (4.12\alpha)$$

$$\frac{\partial(Rh\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(Rh\rho W_m)}{\partial m} + \frac{\partial(h\rho W_\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (4.12\beta)$$

Οι εξισώσεις (4.12) εμπλέκουν τις στιγμιαίες τιμές των μεγεθών $u, v, W_m, W_\theta, \rho$ κλπ.

Η μορφή Reynolds της εξίσωσης της συνέχειας, χρησιμοποιώντας τη μέση χρονική ανάλυση δίνει αντίστοιχα

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\bar{u} + \rho'u') + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}\bar{v} + \rho'v') = 0 \quad (4.13\alpha)$$

$$\frac{\partial(Rh\bar{\rho})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial m}[Rh(\bar{\rho}\bar{W}_m + \rho'W_m')] + \frac{\partial}{\partial \theta}[h(\bar{\rho}\bar{W}_\theta + \rho'W_\theta')] = 0 \quad (4.13\beta)$$

Η μορφή Reynolds των ίδιων εξισώσεων, χρησιμοποιώντας τη μέση μαζικά (Favre) ανάλυση δίνει, μετά από τις σχετικές πράξεις ότι

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v})}{\partial y} = 0 \quad (4.14\alpha)$$

$$\frac{\partial(Rh\bar{\rho})}{\partial t} + \frac{\partial(Rh\bar{\rho}\bar{W}_m)}{\partial m} + \frac{\partial(h\bar{\rho}\bar{W}_\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (4.14\beta)$$

Όπως συζητήθηκε και προηγούμενα, η ανάλυση (4.13) είναι μη βολική για συμπιεστές ροές αφού εισάγει επιπλέον όρους από αυτούς που περιέχει η εξίσωση στιγμιαίων μεταβλητών (4.12), ενώ αντίθετα οι εξισώσεις (4.14) είναι πιστά αντίγραφα των (4.12) με εμπλεκόμενες ποσότητες τις μέσες τιμές των ποσοτήτων. Για ασυμπίεστη ροή, οι εξισώσεις (4.13) θα εκφυλισθούν στη μορφή

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (4.15\alpha)$$

$$\frac{\partial(Rh\bar{W}_m)}{\partial m} + \frac{\partial(h\bar{W}_\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (4.15\beta)$$

4.5 Οι κατά Reynolds εξισώσεις διατήρησης της ορμής

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x, y) , οι εξισώσεις της ορμής μπορούν να γραφούν τανυστικά ως

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j + \delta_{ij} p - \tau_{ij}) = 0 \quad (4.16)$$

όπου ο τανυστής των τάσεων δίνεται από τη σχέση

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \quad (4.17)$$

Λαμβάνοντας τη μέση χρονικά τιμή της εξίσωσης (4.16) και με τη βοήθεια της κατά Favre ανάλυσης των μεγεθών που συμμετέχουν σ' αυτή, προκύπτει η μορφή Reynolds της εξίσωσης της ροής. Αναλυτικά, οι μέσες τιμές των επιμέρους ποσοτήτων της (4.16) δίνουν

$$(a) \quad \overline{\rho u_i u_j} = \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{\rho u_i'' u_j''} \quad , \quad (\text{σχέση 4.9})$$

$$(b) \quad \overline{\delta_{ij} p} = \delta_{ij} \bar{p}$$

$$(γ) \quad \bar{\tau}_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right] + \mu \left[\left(\frac{\partial \overline{u_i''}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j''}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \overline{u_k''}}{\partial x_k} \right] \quad (4.18)$$

και η τελική κατά Reynolds μορφή των εξισώσεων ορμής σε μέσες μαζικά μεταβλητές είναι

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j + \delta_{ij} \bar{p} - \bar{\tau}_{ij} + \overline{\rho u_i'' u_j''}) = 0 \quad (4.19)$$

όπου έχουν αμεληθεί οι χρονικές μεταβολές της συνεκτικότητας μ . Η εξίσωση (4.19) έχει τον επιπλέον όρο $\overline{\rho u_i'' u_j''}$, συγκρινόμενη με τη στιγμιαία μορφή της εξίσωσης (4.16), αλλά και μια περισσότερο πολύπλοκη έκφραση για τη μέση τιμή του τανυστή τάσεων τ_{ij} , σχέση (4.18). Στην πράξη, οι όροι της δεύτερης αγκύλης της σχέσης (4.18) έχουν μικρή συνεισφορά και μπορούν να αμεληθούν. Οι νέοι όροι $\overline{\rho u_i'' u_j''}$ αποτελούν συνιστώσες του τανυστή των τάσεων Reynolds και λόγω αυτών η εξίσωση (4.19) παραμένει "ανοιχτή" αφού το σύστημα των προς επίλυση εξισώσεων δεν προβλέπει (ακόμα) μηχανισμούς για τον υπολογισμό των τάσεων Reynolds.

Αντίστοιχη ανάλυση μπορεί να γίνει και για το καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων αξονικής συμμετρίας (m,θ), που χρησιμοποιείται για την ανάλυση του πεδίου ροής στην από-πτερύγιο-σε-πτερύγιο επιφάνεια μιας στροβιλομηχανής. Εκεί οι τελικές εκφράσεις των κατά Reynolds εξισώσεων της ορμής, σε μέσες μαζικά μεταβλητές, δίνονται από τις σχέσεις

- η κατά (m) συνιστώσα της ορμής:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(Rh\bar{\rho}\bar{W}_m) + \frac{\partial}{\partial m}[Rh(\bar{\rho}\bar{W}_m\bar{W}_m + \overline{\rho W_m''W_m''} + \bar{p} - \bar{\tau}_{mm})] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta}[h(\bar{\rho}\bar{W}_m\bar{W}_\theta + \overline{\rho W_m''W_\theta''} + \overline{\rho W_m''W_\theta''} - \bar{\tau}_{m\theta})] = \\ & = h(\bar{\rho}\bar{W}_\theta\bar{W}_\theta + \overline{\rho W_\theta''W_\theta''} + 2\bar{\rho}\bar{W}_\theta\omega^2R^2)\frac{\partial R}{\partial m} + \bar{p}\frac{\partial}{\partial m}(Rh) - h\bar{\tau}_{\theta\theta}\frac{\partial R}{\partial m} - R\bar{\tau}_{mn}\frac{\partial h}{\partial m} \end{aligned} \quad (4.20)$$

- η κατά (θ) συνιστώσα της ορμής:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(Rh\bar{\rho}\bar{W}_\theta) + \frac{\partial}{\partial m}[Rh(\bar{\rho}\bar{W}_m\bar{W}_\theta + \overline{\rho W_m''W_\theta''} - \bar{\tau}_{m\theta})] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta}[h(\bar{\rho}\bar{W}_\theta\bar{W}_\theta + \overline{\rho W_\theta''W_\theta''} + \bar{p} - \bar{\tau}_{\theta\theta})] = \\ & = -h(\bar{\rho}\bar{W}_m\bar{W}_\theta + \overline{\rho W_m''W_\theta''} + 2\bar{\rho}\bar{W}_m\omega R)\frac{\partial R}{\partial m} + h\bar{\tau}_{m\theta}\frac{\partial R}{\partial m} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Οι εξισώσεις (4.20) και (4.21) προκύπτουν από τις στιγμιαίες εκφράσεις των εξισώσεων ορμής (3.17) ως (3.21) και με τις ίδιες παραδοχές που έγιναν και προηγούμενα σχετικά με τις εκφράσεις του τανυστή των τάσεων τ_{ij} . Ετσι και εδώ οι συνιστώσες των τάσεων τ_{mm} , $\tau_{\theta\theta}$, τ_{nn} , $\tau_{m\theta}$ υπολογίζονται από τις εξισώσεις (3.22), αν στο δεύτερο μέλος τους χρησιμοποιηθούν οι μέσες μαζικά συνιστώσες ταχύτητας W_m και W_θ .

Από την εξίσωση (4.16) προκύπτουν εύκολα και οι Reynolds εκφράσεις των εξισώσεων διατήρησης της ορμής, με τη χρήση των συμβατικών μέσων χρονικά τιμών. Ετσι για το καρτεσιανό σύστημα αυτές γράφονται στη μορφή

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\bar{u}_i + \overline{\rho'u_i'}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\bar{u}_i\bar{u}_j + \overline{\rho'u_i'u_j'} + \overline{u_j\rho'u_i'} + \overline{\rho'u_i'u_j'} + \overline{\rho'u_i'u_j'} + \delta_{ij}\bar{p} - \bar{\tau}_{ij}) = 0 \quad (4.22)$$

η οποία, για συμπίεστες ροές είναι αισθητά πιο πολύπλοκη της μορφής (4.19), έστω και αν ο τελεστής των τάσεων τ_{ij} έχει πλέον την ακριβή μορφή

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right] \quad (4.23)$$

Για ασυμπίεστες ροές, η έκφραση (4.22) παίρνει την παρακάτω μορφή

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{u}_i \bar{u}_j - \rho \overline{u_i' u_j'}) + \delta_{ij} \bar{p} - \bar{\tau}_{ij} = 0$$

ή, ομαδοποιώντας χρονικούς όρους, όρους μεταφοράς, όρους πίεσης και όρους διάχυσης

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{u_i' u_j'}) \quad (4.24)$$

ενώ ο τανυστής των τάσεων απλοποιείται περαιτέρω, λόγω της εξίσωσης της συνέχειας, στη μορφή

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.25)$$

Αντίστοιχες εκφράσεις των (4.22)-(4.25) μπορούν εύκολα να προκύψουν για την ανάλυση των εξισώσεων στο επίπεδο (m,θ).

4.6 Οι κατά Reynolds εξισώσεις διατήρησης της ενέργειας

Σύμφωνα με τη σχέση (3.1), η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας μπορεί να γραφεί στην τανυστική μορφή

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_j}[(\rho E + p)u_j - u_i \tau_{ij} + q_j] = 0 \quad (4.26)$$

όπου η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου E_i , γράφηκε ως γινόμενο της στατικής πυκνότητας ρ και της ολικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας E , δηλαδή (βλ. σχέση (3.3))

$$E_i = \rho E = \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \Rightarrow E = e + \frac{V^2}{2} \quad (4.27)$$

για λόγους που εξυπηρετούν τη διαδικασία λήψης μέσων τιμών.

Λαμβάνοντας τη μέση χρονικά τιμή της εξίσωσης (4.26), κάνοντας χρήση των μέσων μαζικά τιμών των εμπλεκόμενων μεταβλητών, προκύπτει για κάθε όρο χωριστά ότι

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad & \overline{\rho E} = \bar{\rho} \bar{E} \\
 (\beta) \quad & \overline{\rho E u_j} = \bar{\rho} \bar{E} \bar{u}_j + \overline{\rho E'' u_j''} \\
 (\gamma) \quad & \overline{\rho u_j} = \bar{\rho} \bar{u}_j + \overline{\rho u_j''} = \bar{\rho} \bar{u}_j + (\gamma - 1) c_v \overline{\rho u_j'' T''} \\
 (\delta) \quad & \overline{u_i \tau_{ij}} = \bar{u}_i \bar{\tau}_{ij} + \overline{u_i'' \tau_{ij}''} + \overline{u_i'' \tau_{ij}''} + \overline{u_i'' \tau_{ij}''} \\
 (\epsilon) \quad & \bar{q}_j = -k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}
 \end{aligned}$$

όπου στον όρο (ε) αμελήθηκε η παράγωγος που περιέχει τις διαταραχές της θερμοκρασίας.

Συνοψίζοντας τις πιο πάνω εκφράσεις, λαμβάνουμε την κατά Reynolds μορφή της εξίσωσης διατήρησης της ορμής, με τη χρήση των μέσων μαζικά τιμών των μεταβλητών

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{E}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{\rho} \bar{u}_j \bar{E} + \overline{\rho u_j'' E''} + \bar{\rho} \bar{u}_j + (\gamma - 1) c_v \overline{\rho u_j'' T''} + \bar{u}_i \bar{\tau}_{ij} + \overline{u_i'' \tau_{ij}''} + \overline{u_i'' \tau_{ij}''} + \overline{u_i'' \tau_{ij}''} - k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right] = 0 \quad (4.28)$$

Μια περισσότερο βολική μορφή της εξίσωσης (4.28) προκύπτει με την αντικατάσταση της ενέργειας E από τη θερμοκρασία T. Τότε προκύπτει ότι

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} c_p \bar{T}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} c_p \bar{T} \bar{u}_j) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \overline{u_j'' \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - c_p \overline{\rho T'' u_j''} \right) + \bar{\Phi} \quad (4.29)$$

όπου η ποσότητα Φ συνδέεται με την ενεργειακή καταστροφή και εκφράζεται ως

$$\bar{\Phi} = \overline{\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{\tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}} + \overline{\tau_{ij} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} \quad (4.30)$$

Για τις ασυμπίεστες ροές, η εξίσωση (4.29) γράφεται

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c_p \bar{T}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho c_p \bar{T} \bar{u}_j) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \overline{u_j'' \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \rho c_p \overline{T'' u_j''} \right) + \bar{\Phi} \quad (4.31)$$

όπου η έκφραση (4.30) για την καταστροφή Φ μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω.

Αντιστοιχες των (4.29) και (4.31) εξισώσεις μπορούν να γραφούν και για το σύστημα συντεταγμένων (m,θ), πάνω στην επιφάνεια S₁ μιας πτερύγωσης.

Ως περαιτέρω βοηθήματα για τα θέματα που αναλύονται στο Κεφάλαιο 4, συνιστώνται τα βιβλία:

J.O. Hinze, "Turbulence", McGraw-Hill, 1959.

T. Cebeci and A.M.O. Smith, "Analysis of Turbulent Boundary Layers", Academic Press, 1974.

F.S. Sherman, "Viscous Flow", McGraw-Hill, 1990.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΤΥΡΒΗΣ

5.1 Εισαγωγή στη Μοντελοποίηση της Τύρβης

Στο προηγούμενο κεφάλαιο δόθηκε μια κατατοπιστική εισαγωγή στην έννοια της τύρβης και αναφέρθηκαν οι πρακτικοί εκείνοι λόγοι που καθιστούν επιτακτική (τουλάχιστον σε βιομηχανικά περιβάλλοντα και με τους υπάρχοντες υπολογιστές) την υιοθέτηση μιας διαδικασίας λήψης μέσω χρονικά τιμών των στιγμιαίων εξισώσεων Navier-Stokes. Παρουσιάστηκαν και σχολιάστηκαν οι δύο ευρύτατα χρησιμοποιούμενες διαδικασίες λήψης μέσω τιμών, αυτή κατά Reynolds που παρουσιάζει πλεονεκτήματα για τις ασυμπίεστες ροές και αυτή κατά Favre που αναπτύχθηκε για ροές μεταβλητής πυκνότητας. Τέλος, παράχθηκαν οι μέσες χρονικά εξισώσεις συνέχειας, ορμής και ενέργειας, ακολουθώντας τη διαδικασία κατά Reynolds και εντοπίστηκαν οι νεοεμφανιζόμενοι όροι που εμπλέκουν τις τάσεις Reynolds. Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι να παρουσιαστεί η τεχνική με την οποία μοντελοποιούνται οι όροι που εμπλέκουν τις τάσεις Reynolds, έτσι ώστε να συσχετισθούν με τις μέσες ποσότητες της ροής, οι οποίες αποτελούν τις εξαρτημένες μεταβλητές του προβλήματος που διατυπώνουμε.

Η ευρύτατα χρησιμοποιούμενη κατηγορία των μοντέλων μήκους ανάμιξης ή αλγεβρικών μοντέλων τυρβώδους συνεκτικότητας (mixing length ή eddy viscosity models) θα μας απασχολήσει σχεδόν αποκλειστικά στα πλαίσια του Μαθήματος αυτού. Η εισαγωγή της έννοιας της τυρβώδους συνεκτικότητας μπορεί να στοιχειοθετηθεί από τον παρακάτω συλλογισμό. Οι όροι που περιέχουν τις τάσεις Reynolds, που εμφανίζονται κατά τη διαδικασία λήψης μέσω χρονικά τιμών των εξισώσεων Navier-Stokes, συνοψίζουν τους ρυθμούς μεταφοράς ορμής μέσω των τυρβωδών στροβιλισμών, σε πλήρη αναλογία με τους συνεκτικούς όρους της εξίσωσης που εκφράζουν τους ρυθμούς μεταφοράς ορμής από τη μοριακή κίνηση. Προφανώς βέβαια, δεν υφίσταται φυσική συσχέτιση μεταξύ των προαναφερθέντων τυρβωδών και μοριακών διαδικασιών. Εντούτοις είναι λογικό να επιχειρηθεί μια ποσοτική συσχέτιση μεταξύ των τάσεων Reynolds και του ρυθμού παραμόρφωσης, σε κάθε θέση του πεδίου ροής. Αυτό μπορεί να γίνει κατά το πρότυπο των στρωτών ροών όπου ο τανυστής των τάσεων συνδέεται με τον τανυστή των παραμορφώσεων μέσω ενός συντελεστή συνεκτικότητας μ . Έτσι, στις τυρβώδεις ροές, είναι βολικό να εισαχθεί μια νέα ποσότητα που θα λέγεται τυρβώδης συνεκτικότητα (eddy viscosity) και θα εκφράζει το λόγο μιας δεδομένης τάσης Reynolds προς εκείνο το ρυθμό παραμόρφωσης, ο οποίος θα προκαλούσε τον ίδιο "τύπο" τάσης στην περίπτωση της στρωτής ροής.

Καλύτερη κατανόηση της έννοιας της τυρβώδους συνεκτικότητας μπορεί να γίνει εξετάζοντας το απλό παράδειγμα ενός λεπτού, ασυμπίεστου τυρβώδους οριακού στρώματος που αναπτύσσεται κατά μήκος μιας οριζόντιας επίπεδης πλάκας. Ας είναι x η κατεύθυνση της ροής και y η κάθετη στον τοίχο διεύθυνση. Στο Καρτεσιανό αυτό σύστημα αναφοράς,

η μοναδική τάση Reynolds που ουσιαστικά επιδρά στη διαμόρφωση του ροϊκού πεδίου είναι η $-\rho u'v'$. Συγχρόνως, η αντίστοιχη παραμόρφωση είναι η $\partial u/\partial y$ και κατά συνέπεια, η τυρβώδης συνεκτικότητα μ_t ορίζεται ως

$$\mu_t = \frac{-\overline{\rho u'v'}}{\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}} \quad (5.1)$$

Δεν υπάρχει κανένας φυσικός λόγος που να μας ωθεί να υποθέσουμε ότι οι υπόλοιπες τυρβώδεις συνεκτικότητες, που θα προκύψουν για τις υπόλοιπες τάσεις Reynolds, πρέπει να ταυτίζονται με τη συνεκτικότητα μ_t της σχέσης (5.1). Η τελευταία παρατήρηση έχει ως αποτέλεσμα τον ορισμό ενός τανυστή τυρβωδών συνεκτικοτήτων σε κάθε θέση του πεδίου ροής, κατ'αντιστοιχία προς τους τοπικούς τανυστές τάσης και παραμόρφωσης. Μια τέτοια αντιμετώπιση αυξάνει σημαντικά την πολυπλοκότητα του προβλήματος, αλλά και των παραδοχών που το συνοδεύουν. Επιπλέον, πολλές από τις συνιστώσες του τανυστή μ_t έχουν σχεδόν αμεληταία τιμή, τουλάχιστον για το παράδειγμα που αναφέρθηκε. Η υιοθέτηση μιας βαθμωτής τυρβώδους συνεκτικότητας απλοποιεί σημαντικά το πρόβλημα, δίνει πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα για ένα μεγάλο εύρος προβλημάτων ροής και αποτελεί τη βασική παραδοχή των αλγεβρικών μοντέλων τυρβώδους συνεκτικότητας που θα εξετάσουμε.

5.2 Η τυρβώδης συνεκτικότητα. Υπόθεση Boussinesq

Στην προηγούμενη ενότητα δόθηκε το σκεπτικό με το οποίο οι επιστήμονες που προσπαθούσαν να μοντελοποιήσουν την τύρβη κατέληξαν στην εισαγωγή του συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας μ_t . Στις τυρβώδεις ροές, τα αποτελέσματα που έχει η τύρβη πάνω στη μέση ροή είναι κυρίως η απορρόφηση κινητικής ενέργειας από αυτή και η μετατροπή της σε θερμική ενέργεια (καταστροφή ενέργειας), καθώς και η αύξηση του ρυθμού μεταφοράς μάζας, ορμής και ενέργειας στην κατεύθυνση που είναι κάθετη στις τροχιές των ρευστοστοιχείων (διάχυση). Τα ίδια φαινόμενα, της ενεργειακής καταστροφής και της διάχυσης, προκαλεί η συνεκτικότητα στις στρωτές ροές. Έτσι ο συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας μ_t έρχεται να υπερτεθεί στο συντελεστή μοριακής συνεκτικότητας μ , οδηγώντας σε αυξημένα φαινόμενα καταστροφής ενέργειας και διάχυσης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας.

Οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων έχουν δοθεί στη σχέση (3.8) και επαναλαμβάνονται εδώ για λόγους πληρότητας

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]$$

Κατ'αναλογία, και με τη βοήθεια του συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας που προηγουμένα ορίσαμε, οι τάσεις Reynolds εκφράζονται συναρτήσει των κλίσεων ταχύτητας του μέσου πεδίου ροής ως

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left(\mu_t \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} + \rho k \right) \quad (5.2)$$

Στις ασυμπίεστες ροές ο όρος $\partial \bar{u}_k / \partial x_k$ είναι μηδενικός, λόγω της εξίσωσης της συνέχειας. Η ποσότητα k που εμφανίζεται στο δεύτερο μέλος είναι η τυρβώδης κινητική ενέργεια, η οποία ορίζεται ως

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_k' u_k'} \quad (5.3)$$

και περιέχεται στη σχέση (5.2) για λόγους συμβατότητας. Δηλαδή, αν για ένα τριδιάστατο ασυμπίεστο πεδίο ροής, αθροισθούν κατά μέλη οι τρεις εκφράσεις (5.2) που δίνουν τις ορθές τάσεις Reynolds και χρησιμοποιηθεί η εξίσωση της συνέχειας, τότε θα προκύψει η σχέση (5.3).

Με την παρουσίαση της σχέσης (5.2) πραγματοποιείται το πρώτο ουσιαστικό βήμα προς τη μοντελοποίηση της τύρβης. Το βήμα αυτό συνοδεύεται από συγκεκριμένες φυσικές παραδοχές, που πρέπει να έχουμε πάντοτε υπόψη, ιδίως όταν ερμηνεύουμε αποτελέσματα υπολογισμών που πραγματοποιήθηκαν με τη χρήση του συγκεκριμένου μοντέλου. Η ιδέα της εισαγωγής του συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας μ_t οφείλεται στο Boussinesq και παρουσιάστηκε στα τέλη του περασμένου αιώνα! Προς τιμή του, η παραδοχή της χρήσης του συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας λέγεται και "υπόθεση Boussinesq".

Το επόμενο και τελικό βήμα για την ολοκλήρωση της διαδικασίας μοντελοποίησης της τύρβης, συνίσταται στην έκφραση του συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας μ_t συναρτήσει κατάλληλων φυσικών ποσοτήτων, οι οποίες μπορούν να υποτεθούν γνωστές κατά την επίλυση του ροϊκού πεδίου. Αφού ο συντελεστής μ_t ορίστηκε κατ'αναλογία προς το συντελεστή μοριακής συνεκτικότητας μ , μπορούμε να υποθέσουμε ότι και αυτός είναι ανάλογος στη μέση πυκνότητα του ρευστού, σε μια χαρακτηριστική ταχύτητα και σε ένα χαρακτηριστικό μήκος, για κάθε θέση μέσα στο πεδίο ροής. Για το συντελεστή μ_t , οι κλίμακες ταχύτητας και μήκους καθορίζονται από την τυρβώδη ροή και συνεπώς η χαρακτηριστική ταχύτητα και το χαρακτηριστικό μήκος είναι αυτά των τυρβωδών χαρακτηριστικών. Φυσικά η επιλογή των κατάλληλων χαρακτηριστικών ταχυτήτων και μηκών, για την επιτυχή έκφραση της τυρβώδους συνεκτικότητας είναι ένα δύσκολο πρόβλημα. Το

πρόβλημα γίνεται ακόμη δυσκολότερο όταν η εξεταζόμενη ροή είναι πολύπλοκη.

Με την εισαγωγή της εξίσωσης (5.2) στις εξισώσεις Navier-Stokes, στις οποίες προηγούμενα έχει ληφθεί η μέση χρονικά τιμή τους κατά Reynolds ή Favre (Κεφάλαιο 4), απαλείφονται οι όροι που περιέχουν τις τάσεις Reynolds και απομένουν οι ίδιες εξισώσεις που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 3 για στρωτές ροές, με τις προϋποθέσεις ότι (α) η συνεκτικότητα μ αντικαθίσταται παντού με το άθροισμα $(\mu + \mu_t)$ που συνήθως ονομάζεται φαινόμενη συνεκτικότητα μ_{eff} και (β) τα εμπλεκόμενα φυσικά μεγέθη είναι πλέον οι μέσες χρονικές τιμές των μεγεθών αυτών.

5.3 Η έννοια του Μήκους Ανάμιξης

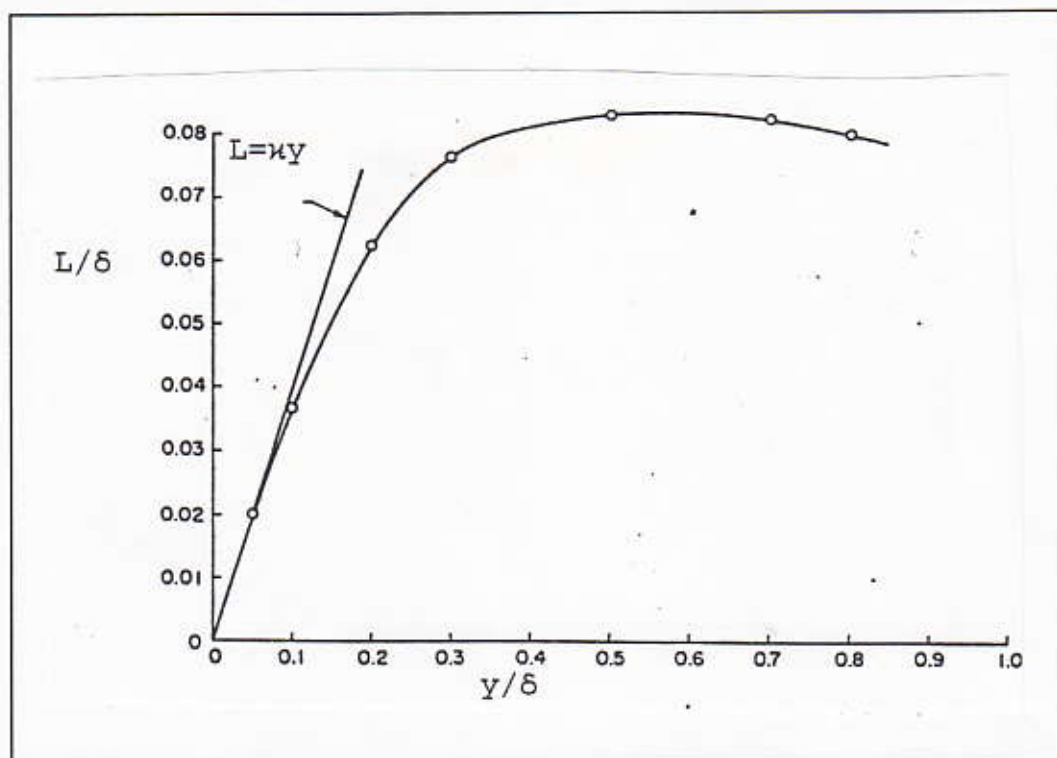
Η υπόθεση ότι ο συντελεστής μ_t είναι ανάλογος προς τη μέση πυκνότητα του ρευστού ρ , προς μια χαρακτηριστική ταχύτητα q και προς ένα χαρακτηριστικό μήκος L , διατυπώνεται η γενική έκφραση

$$\mu_t = C_1 \bar{\rho} q L \quad (5.4)$$

όπου C_1 είναι κατάλληλος συντελεστής αναλογίας.

Για τον καθορισμό του χαρακτηριστικού μήκους L , χρησιμοποιούμε εκ νέου το παράδειγμα της ροής παράλληλα σε μια επίπεδη πλάκα. Στη διατμητική αυτή ροή, τα πειράματα δείχνουν ότι, μακριά από τα στερεά τοιχώματα, το χαρακτηριστικό μήκος της τυρβώδους κίνησης είναι ένα ποσοστό του πάχους δ του οριακού στρώματος. Έτσι το πάχος δ μπορεί να θεωρηθεί ότι παίζει το ρόλο του χαρακτηριστικού μήκους L . Αντίθετα, πολύ κοντά στο στερεό τοίχωμα, η απόσταση κάθε σημείου από αυτό περιορίζει το μέγεθος των τυρβωδών στροβιλισμών και έτσι η απόσταση αυτή παίζει το ρόλο του χαρακτηριστικού μήκους L . Το Σχήμα 5.1 παρουσιάζει μια τυπική κατανομή του χαρακτηριστικού μήκους ή μήκους ανάμιξης L για τη ροή που εξετάσαμε προηγούμενα. Στο Σχήμα 5.1, τόσο το μήκος ανάμιξης L , όσο και η απόσταση y από το στερεό τοίχωμα έχουν αδιαστατοποιηθεί με το πάχος δ του οριακού στρώματος. Στη βάση της προηγούμενης ανάλυσης, η καμπύλη έχει κατ'αρχή σταθερή κλίση και καθώς απομακρυνόμαστε αρκετά από τον τοίχο, αποκτά σταθερή ασυμπτωτική τιμή. Το Σχήμα 5.1 οφείλεται στα πειράματα του Klebanoff, λίγο μετά το 1950.

Για τον καθορισμό της χαρακτηριστικής ταχύτητας q , μια επιτυχής έκφρασή παρουσιάστηκε περίπου το 1925 από τον Prandtl, ο οποίος υπέθεσε ότι η χαρακτηριστική ταχύτητα είναι ανάλογη του μήκους ανάμιξης και του διατμητικού ρυθμού παραμόρφωσης, δηλαδή



Σχήμα 5.1

$$q = C_2 L \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (5.5)$$

όπου C_2 κατάλληλη σταθερά. Η σχέση (5.5) μπορεί να γενικευθεί αντικαθιστώντας το ρυθμό παραμόρφωσης $\partial \bar{u} / \partial y$ με το RMS των ρυθμών παραμόρφωσης της μέσης ροής. Το σκεπτικό που ακολούθησε ο Prandtl για να φθάσει στη σχέση (5.5) είναι δύσκολο να κατανοηθεί με τις υπάρχουσες γνώσεις και γι' αυτό παραλείπεται.

Συνοψίζοντας τις σχέσεις (5.4) και (5.5) μπορούμε να εκφράσουμε το συντελεστή της τυρβώδους συνεκτικότητας μ_t ως συνάρτηση του μήκους ανάμιξης L και των κλίσεων των μέσων ταχυτήτων της ροής, σύμφωνα με τη σχέση

$$\mu_t = C_p L^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (5.6)$$

Τα μοντέλα μήκους ανάμιξης, τα οποία χρησιμοποιούν ένα συντελεστή μ_t που υπολογίζεται από τη σχέση (5.6) και κατάλληλες υποθέσεις για τον καθορισμό του μήκους L , αποδείχθηκαν επιτυχή για τη μοντελοποίηση απλών τυρβωδών ροών. Η μεγάλη τους απλότητα επιτρέπει εύκολες τροποποιήσεις και συμπληρώσεις, ώστε να επεκτείνονται και σε περισσότερο πολύπλοκες ροές, παίρνοντας υπόψη ενδεχόμενες κλίσεις πίεσης, καμπυλότητα, περιστροφή κλπ. Το μεγάλο τους μειονέκτημα είναι ότι ο αλγεβρικός τους

χαρακτήρας δεν επιτρέπει το να ληφθεί υπόψη η ιστορία της τύρβης. Σήμερα, τα δύο πιο συχνά χρησιμοποιούμενα αλγεβρικά μοντέλα τύρβης που χρησιμοποιούν την ιδέα του μήκους ανάμιξης είναι το μοντέλο των Cebeci-Smith και το μοντέλο των Baldwin-Lomax. Το τελευταίο μοντέλο αποφεύγει να εμπλέξει στον υπολογισμό το πάχος δ του οριακού στρώματος, το οποίο είναι δύσκολο ή και μερικές φορές αδύνατο να υπολογισθεί με ακρίβεια, και έχει βρει ευρύτερη αποδοχή στους επιστήμονες που αναπτύσσουν ή χρησιμοποιούν κώδικες επίλυσης των εξισώσεων Navier-Stokes, με αλγεβρικά μοντέλα τύρβης.

Το 1930, ο von Karman έδωσε μια πρώτη επιτυχή έκφραση για το μήκος ανάμιξης L . Χρησιμοποιώντας την ανάπτυξη Taylor της ταχύτητας κατά την κάθετη στον τοίχο απόσταση y και συγκεκριμένες φυσικές παραδοχές κατέληξε στο παρακάτω μοντέλο για τον υπολογισμό του μήκους ανάμιξης

$$L = \kappa \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)^{-1} \quad (5.7)$$

όπου $\kappa = 0.41$ είναι μια εμπειρική σταθερά, που ονομάζεται παγκόσμια σταθερά του von Karman. Το μοντέλο (5.7) του von Karman ισχύει μόνο για τυρβώδεις ροές που περιορίζονται από στερεά τοιχώματα. Όταν το μοντέλο του von Karman εισαχθεί στη σχέση (5.6) θα προκύψει η τελική έκφραση για το συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας μ_t , που είναι

$$\mu_t = C \rho \kappa^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|^3 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)^{-2} \quad (5.8)$$

Βάσει της σχέσης (5.1), η τάση Reynolds που μας ενδιαφέρει στο συγκεκριμένο παράδειγμα της ροής παράλληλα σε επίπεδη πλάκα, θα γραφεί

$$\overline{\rho u'v'} = -C \rho \kappa^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^4 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)^{-2} \quad (5.9)$$

Ποσοτικές εκφράσεις για το μήκος ανάμιξης L μπορούν να προκύψουν επίσης χρησιμοποιώντας πειραματική πληροφορία, όπως αυτή που δίνει το Σχήμα 5.1. Η ερμηνεία του Σχήματος 5.1 δίνει ότι στην περιοχή $0 < y/\delta < 0.15-0.20$ το μήκος ανάμιξης μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση y από τον τοίχο, όπως αναφέραμε και προηγουμένα. Η προαναφερθείσα περιοχή λέγεται Εσωτερική Περιοχή του οριακού στρώματος και γι'αυτήν ισχύει

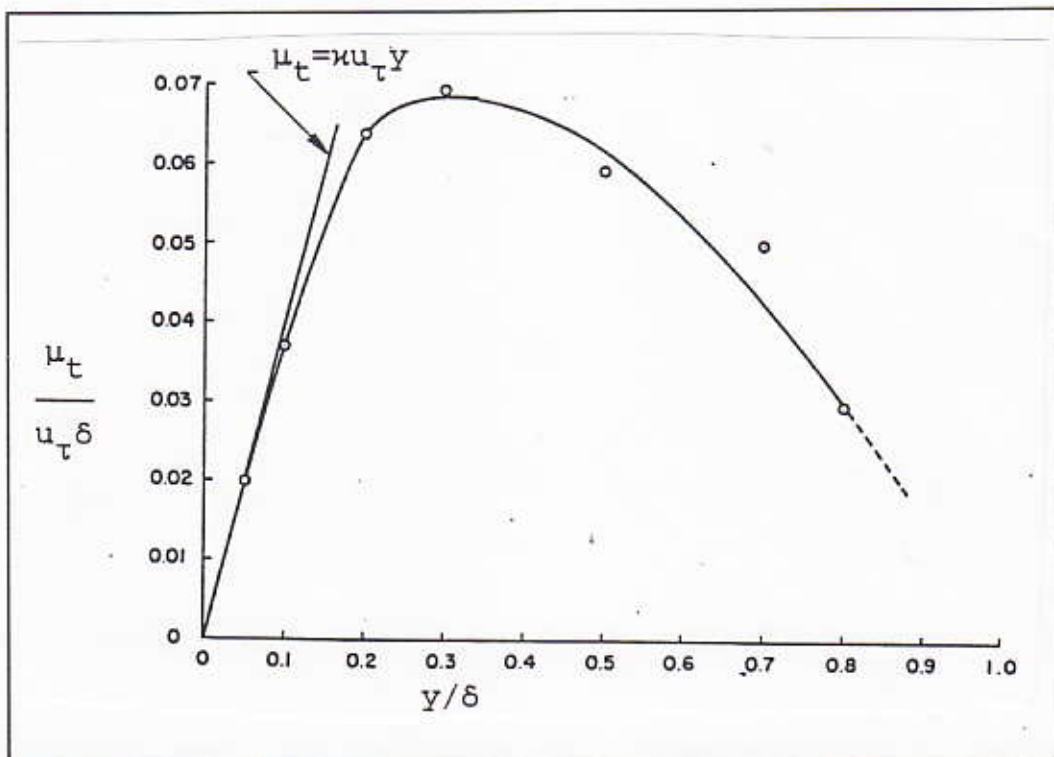
$$L = \kappa y \quad (5.10)$$

όπου κ είναι η σταθερά του von-Karman που προαναφέραμε. Σύμφωνα με το ίδιο σχήμα, η μέγιστη τιμή του μήκους ανάμιξης εντοπίζεται στην περιοχή $0.20 < y/\delta < 0.30$ περίπου. Η

ασυμπτωτική τιμή του μήκους ανάμιξης, σύμφωνα με το πείραμα του Klebanoff, λαμβάνει χώρα για μεγαλύτερες τιμές του λόγου y/δ και είναι περίπου

$$\frac{L}{\delta} = 0.075 + 0.090 \quad (5.11)$$

Στην ίδια περιοχή που το μήκος ανάμιξης παραμένει σταθερό, ο συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας φθίνει διαρκώς. Αυτό φαίνεται και στο Σχήμα 5.2 που παρουσιάζει, κατ'αναλογία προς το Σχήμα 5.1, την κατανομή του αδιάστατου συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας μέσα στο οριακό στρώμα. Η αδιαστατοποίηση που χρησιμοποιείται θα εξηγηθεί σε επόμενη ενότητα.



Σχήμα 5.2

Τέλος, καθώς πλησιάζουμε την περιοχή του αδιατάρακτου ρεύματος, η τύρβη αποκτά διακοπτόμενο χαρακτήρα, δηλαδή η ροή είναι τυρβώδης μόνο για ένα κλάσμα του χρόνου.

5.4 Μέσες Κατανομές Ταχύτητας για Ασυμπίεστες Ροές παράλληλα σε Επίπεδες Πλάκες

Στο Κεφάλαιο αυτό δίνεται μια σύντομη ανακεφαλαίωση ήδη γνωστών θεωριών για την κατανομή ταχύτητας που συναντάμε σε οριακά στρώματα που εξελίσσονται παράλληλα σε επίπεδες πλάκες, σε ασυμπίεστες ροές, υπό την επίδραση μηδενικής κλίσης πίεσης. Η

υπενθύμιση των θεωριών αυτών και η βαθύτερη κατανόησή τους, βοηθά στην κατανόηση των μοντέλων τύρβης που θα παρουσιασθούν στη συνέχεια.

Ετσι, για το παράδειγμα της διδιάστατης ασυμπίεστης ροής σε μηδενική κλίση πίεσης, που εξελίσσεται παράλληλα σε μια επίπεδη πλάκα, μπορούμε να γράψουμε τη διαμήκη εξίσωση της ορμής ως

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{o\lambda}}{\partial y} \quad (5.12)$$

όπου x η κατεύθυνση της ροής και y η απόσταση κάθετα στην επίπεδη πλάκα. Με $\tau_{o\lambda}$ συμβολίσαμε την ολική διατμητική τάση που συνοψίζει την επίδραση της μοριακής και της τυρβώδους συνεκτικότητας, δηλαδή

$$\tau_{o\lambda} = \tau + \tau_t = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{\rho u'v'} \quad (5.13)$$

Ακριβώς πάνω στον τοίχο, οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας είναι μηδενικές και κατά συνέπεια

$$\left(\frac{\partial \tau_{o\lambda}}{\partial y} \right)_w = 0 \quad (5.14)$$

όπου ο δείκτης w συμβολίζει το στερεό τοίχωμα.

Λαμβάνοντας την κατά y παράγωγο της εξίσωσης (5.12) και με κατάλληλες απαλοφές όρων λόγω της εξίσωσης της συνέχειας, καταλήγουμε εύκολα στο ότι, πάνω στο στερεό τοίχωμα ισχύει ότι

$$\left(\frac{\partial^2 \tau_{o\lambda}}{\partial y^2} \right)_w = 0 \quad (5.15)$$

Ο συνδυασμός των σχέσεων (5.14) και (5.15) μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι, σε μικρή απόσταση από το στερεό τοίχωμα, η ολική διατμητική τάση παραμένει σταθερή, δηλαδή

$$\frac{\partial \tau_{o\lambda}}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{y}{\delta} < \quad (5.16)$$

Συγχρόνως, τα πειράματα του Klebanoff έδειξαν ότι, πιο κοντά στον τοίχο από την απόσταση $y/\delta = 0.1-0.2$, όπου η τυρβώδης διατμητική τάση παραμένει σταθερή, η τελευταία μειώνεται συνεχώς και τείνει προς τη μηδενική τιμή ακριβώς πάνω στον τοίχο. Στην ίδια περιοχή που η τυρβώδης διατμητική τάση τ_t μειώνεται, η στρωτή διατμητική τάση τ αυξάνει, σε τρόπο ώστε η ολική διατμητική τάση $\tau_{o\lambda}$ να παραμένει σταθερή. Το συμπέρασμα αυτό, που προέκυψε από πειράματα, συμφωνεί απόλυτα με τη σχέση (5.16) που προέκυψε αναλυτικά.

Ακριβώς πάνω στον τοίχο, υφίσταται μόνο η στρωτή διατμητική τάση τ , που θα συμβολίζεται με τ_w . Ο συντελεστής τριβής δίνεται τότε από τη σχέση

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho u_e^2} \quad (5.17)$$

όπου u_e η ταχύτητα στο εξωτερικό ή αδιατάρακτο ρεύμα. Ορίζεται επίσης η ταχύτητα τριβής u_τ ως

$$u_\tau^2 = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (5.18)$$

που χρησιμοποιείται τακτικά για αδιαστατοποίηση των εξισώσεων (βλέπε λ.χ. την αδιαστατοποίηση των μεγεθών των αξόνων του Σχήματος 5.2). Στη συνέχεια θα δώσουμε τις περιοχές που διακρίνουμε στην Εσωτερική Περιοχή του οριακού στρώματος.

Το στρωτό οριακό υπόστρωμα είναι η πρώτη περιοχή του οριακού στρώματος, που γενικά καταλαμβάνει την απόσταση $0 < y/\delta < 0.0001-0.01$. Στην περιοχή αυτή η τυρβώδης διατμητική τάση μπορεί να αμεληθεί και με τη βοήθεια των παραπάνω εξισώσεων να προκύψει εύκολα ότι

$$u^+ = y^+ \quad (5.19)$$

όπου u^+ , y^+ χαρακτηριστικές αδιάστατες εκφράσεις ταχύτητας και μήκους για το οριακό στρώμα, οι οποίες ορίζονται συναρτήσει της ταχύτητας τριβής ως

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad (5.20)$$

$$y^+ = \frac{y u_\tau \rho}{\mu} \quad (5.21)$$

Η σχέση (5.19), που παριστάνει μια γραμμική αδιάστατη κατανομή ταχύτητας μέσα στο στρωτό υπόστρωμα, ισχύει μέχρι περίπου $y^+ < 5$.

Η πλήρως τυρβώδης περιοχή είναι εκείνη που ξεκινά περίπου στο $y^+ = 30$ και φθάνει μέχρι το άκρο της Εσωτερικής Περιοχής του οριακού στρώματος. Στην περιοχή αυτή, όπως φαίνεται και από την ονομασία της, η στρωτή διατμητική τάση αμελείται και βάσει των σχέσεων (5.13) και (5.16) ισχύει ότι

$$\frac{\tau_t}{\rho} = -\overline{u'v'} = u_\tau^2 \quad (5.22)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (5.1), κάνοντας την παραδοχή της τυρβώδους συνεκτικότητας

γράφουμε ότι

$$\frac{\mu_t}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = u_\tau^2$$

Στην Εσωτερική Περιοχή του οριακού στρώματος δείχθηκε προηγουμένα ότι το μήκος ανάπτυξης L ακολουθεί τη γραμμική κατανομή της σχέσης (5.10). Σύμφωνα με αυτή τη σχέση, ο συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας μπορεί να γραφεί ως

$$\mu_t = \rho \kappa u_\tau y \quad (5.23)$$

και κατά συνέπεια η σχέση (5.22) να γραφεί τελικά ως

$$\kappa u_\tau y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = u_\tau^2$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση, προκύπτει η λογαριθμική κατανομή της αδιάστατης ταχύτητας u^+ , συναρτήσει της αδιάστατης απόστασης y^+ , που δίνει η παρακάτω σχέση

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + c \quad (5.24)$$

όπου η σταθερά c έχει τιμή μεταξύ 4.9 και 5.5.

Η μεταβατική περιοχή της εσωτερικής περιοχής του οριακού στρώματος συνδέει το στρώτο υπόστρωμα, όπου ισχύει η κατανομή (5.19) και την πλήρως τυρβώδη περιοχή, όπου ισχύει η κατανομή (5.24). Στη μεταβατική περιοχή, το μήκος ανάμιξης δίνεται από τη σχέση του Van Driest, ως

$$L = \kappa y \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{A}\right) \right] \quad (5.25)$$

όπου A είναι ένας συντελεστής απόσβεσης που ορίζεται ως

$$A = A^+ \cdot \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right)^{-1/2} \quad (5.26)$$

με $A^+ = 26$.

Στη μεταβατική περιοχή, η κατανομή της αδιάστατης ταχύτητας είναι

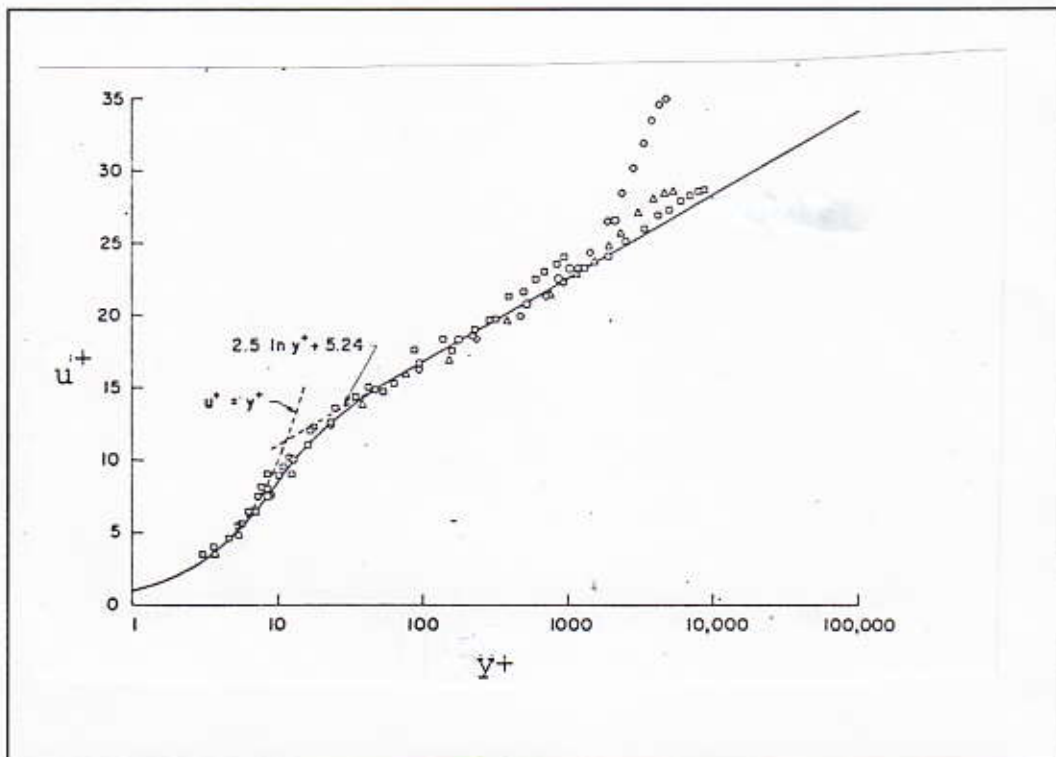
$$u^+(y^+) = \int_0^{y^+} \frac{2}{b + [b^2 + 4a(y^+)]^{1/2}} dy^+ \quad (5.27)$$

όπου $b=1$ και

$$a(y^+) = (\kappa y^+)^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right]^2$$

Η ολοκλήρωση της σχέσης (5.27) γίνεται με αρχική τιμή $u^+ = 0$ στο $y^+ = 0$.

Το Σχήμα 5.3 δίνει την κατανομή της μέσης ταχύτητας στην εσωτερική περιοχή του οριακού στρώματος, όπως αυτή εκφράσθηκε από τις σχέσεις (5.19), (5.24) και (5.27) κατά περιοχή.



Σχήμα 5.3

5.5 Το Αλγεβρικό Μοντέλο των Baldwin-Lomax

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, ανάμεσα στα αλγεβρικά μοντέλα τύρβης που χρησιμοποιούν την υπόθεση του Boussinesq, εισάγοντας το συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας μ_t για την έκφραση των τάσεων Reynolds, το μοντέλο των Baldwin και Lomax βρίσκει ίσως την ευρύτερη εφαρμογή. Σε αντίθεση με το μοντέλο των Cebeci-Smith, που επίσης χρησιμοποιήθηκε αρκετά και από το οποίο ουσιαστικά προέρχεται, έχει το πλεονέκτημα του να αποφεύγει την ανάγκη υπολογισμού του πάχους δ του οριακού στρώματος. Αυτό είναι σημαντικό πλεονέκτημα, αφού ο υπολογισμός του δ κρύβει δυσκολίες.

Το μοντέλο των Baldwin και Lomax παρουσιάστηκε το 1978, ως εξέλιξη του μοντέλου των Cebeci-Smith και στηρίζεται στο χωρισμό του οριακού στρώματος σε δύο ζώνες, την εσωτερική και την εξωτερική, όπου η κάθε μία χρησιμοποιεί διαφορετικές εκφράσεις για τον υπολογισμό του συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας. Οι δύο ζώνες χωρίζονται στην απόσταση y_c από τον τοίχο. Στην εσωτερική ζώνη, ο συντελεστής μ_t υπολογίζεται ως

$$(\mu_t)_{in} = \rho L^2 |\omega| \quad , \quad y < y_c \quad (5.28)$$

όπου ω ο στροβιλισμός του πεδίου ταχύτητας και το μήκος ανάμιξης δίνεται από τη σχέση

$$L = \kappa y [1 - \exp(-y^+ / A^+)] \quad (5.29)$$

σύμφωνα με την πρόταση του Van Driest, που ήδη παρουσιάσαμε (σχέση (5.25)).

Στην εξωτερική ζώνη, ο συντελεστής μ_t υπολογίζεται ως

$$(\mu_t)_{out} = K C_{cp} \rho F_{WAKE} F_{KLEB} \quad , \quad y_c < y < \delta \quad (5.30)$$

όπου η συνάρτηση του ομόρρου, F_{WAKE} , δίνεται από τη σχέση

$$F_{WAKE} = \min \left\{ \begin{array}{l} y_{max} F_{max} \\ C_{wk} y_{max} \frac{u_{diff}^2}{F_{max}} \end{array} \right\} \quad (5.31)$$

Οι χρησιμοποιούμενες σταθερές είναι

$$K = 0.0168 \quad , \quad C_{cp} = 1.6 \quad , \quad C_{wk} = 0.25$$

Η συνάρτηση $F(y)$ βοηθά στον καθορισμό της χαρακτηριστικής ταχύτητας και είναι

$$F(y) = y |\omega| \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right] \quad (5.32)$$

Ο δείκτης max στις ποσότητες F και y καθορίζει τη θέση εκείνη, σε απόσταση y_{max} από κάθε συγκεκριμένο σημείο του στερεού τοιχώματος στην οποία η συνάρτηση $F(y)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της F_{max} . Η ποσότητα u_{diff} συμβολίζει τη διαφορά

$$u_{diff} = |u|_{max} - |u|_{min} \quad (5.33)$$

του μέγιστου και του ελάχιστου μέτρου ταχύτητας σε κάθε "κάθετη" κατεύθυνση στον τοίχο. Αν το οριακό στρώμα αναπτύσσεται πάνω σε στερεό τοίχωμα τότε προφανώς $|u|_{min} = 0$. Αν αντίθετα υπολογίζουμε το οριακό στρώμα που συνεχίζει να αναπτύσσεται μετά την ακμή εκφυγής ενός πτερυγίου, δηλαδή στον ομόρρου του, τότε η ποσότητα $|u|_{min}$ έχει σαφώς μη-μηδενική τιμή.

Τέλος, η συνάρτηση του Klebanoff, F_{KLEB} , ορίζεται ως

$$F_{KLEB}(y) = \left[1 + 5.5 \left(\frac{y C_{KLEB}}{y_{max}} \right)^6 \right]^{-1} \quad (5.34)$$

όπου $C_{KLEB} = 0.3$. Η διάκριση της εσωτερικής από την εξωτερική ζώνη γίνεται στην απόσταση εκείνη y_c όπου για πρώτη φορά ο συντελεστής $(\mu_r)_{out}$ παίρνει μεγαλύτερη τιμή από το συντελεστή $(\mu_r)_{in}$.

Το μοντέλο των Baldwin και Lomax φαίνεται, εκ πρώτης όψεως, πολύ απλό στην εφαρμογή του. Παρόλα αυτά χρειάζονται ορισμένες επιπλέον διευκρινίσεις, ιδίως αν πρόκειται να εφαρμοστεί σε περισσότερο πολύπλοκες ροές, όπως αυτές που συναντάμε στις πτερυγώσεις των στροβιλομηχανών

- (α) Όταν επιλύουμε πραγματικές ροές γύρω από πτερυγώσεις στροβιλομηχανών, η πρώτη δυσκολία συνίσταται στο χειρισμό της κάθετης απόστασης y από το στερεό τοίχο που παίζει πρωτεύοντα ρόλο στο μοντέλο Baldwin-Lomax. Οι δυσκολίες εύρεσης της αληθινής απόστασης κάθε κόμβου από τον τοίχο, αλλά και τα σαρώματα στην κάθετη κατεύθυνση που θα απαιτηθούν ώστε να βρεθούν οι ποσότητες F_{max} , u_{max} και y_{max} παραμερίζονται υποθέτοντας ότι η απόσταση y μετράται πάνω στις πλεγματικές γραμμές που συναντούν τους κόμβους του στερού ορίου. Για το λόγο αυτό, έχει μεγάλη σημασία να κατασκευάζονται πλέγματα με όσο το δυνατό περισσότερη ορθογωνιότητα κοντά στα στερεά τοιχώματα.
- (β) Όταν η ροή που μελετάμε είναι αποκολλημένη, τότε στη γειτονιά της αποκόλλησης της ροής η συνάρτηση $F(y)$ έχει παρατηρηθεί ότι παρουσιάζει περισσότερα του ενός τοπικά μέγιστα, στην "κάθετη" προς τον τοίχο απόσταση. Αριθμητικά πειράματα έδειξαν ότι η επιλογή του σωστού y_{max} στην περιοχή αυτή, είναι κρίσιμη για την ορθότητα των υπολογισμών. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται στη βιβλιογραφία με διάφορους τρόπους. Προτείνεται λ.χ. να επιλέγεται το ακρότατο μέγιστο της συνάρτησης F , αν όντως αυτή έχει περισσότερα από ένα τοπικά μέγιστα. Μια άλλη πρόταση συνίσταται στην αντικατάσταση της συνάρτησης F της σχέσης (5.32) με κάποια άλλη που παρουσιάζει αυστηρά ένα και μοναδικό μέγιστο. Στην τελευταία περίπτωση απαιτούνται και επιπλέον αλλαγές στο αρχικό μοντέλο και δεν θα επεκταθούμε περισσότερο.
- (γ) Το αρχικό μοντέλο των Baldwin-Lomax, όπως το βρίσκει κανείς δημοσιευμένο στην πρωτότυπη εργασία έχει υποστεί έκτοτε αρκετές τροποποιήσεις ώστε να μπορεί να

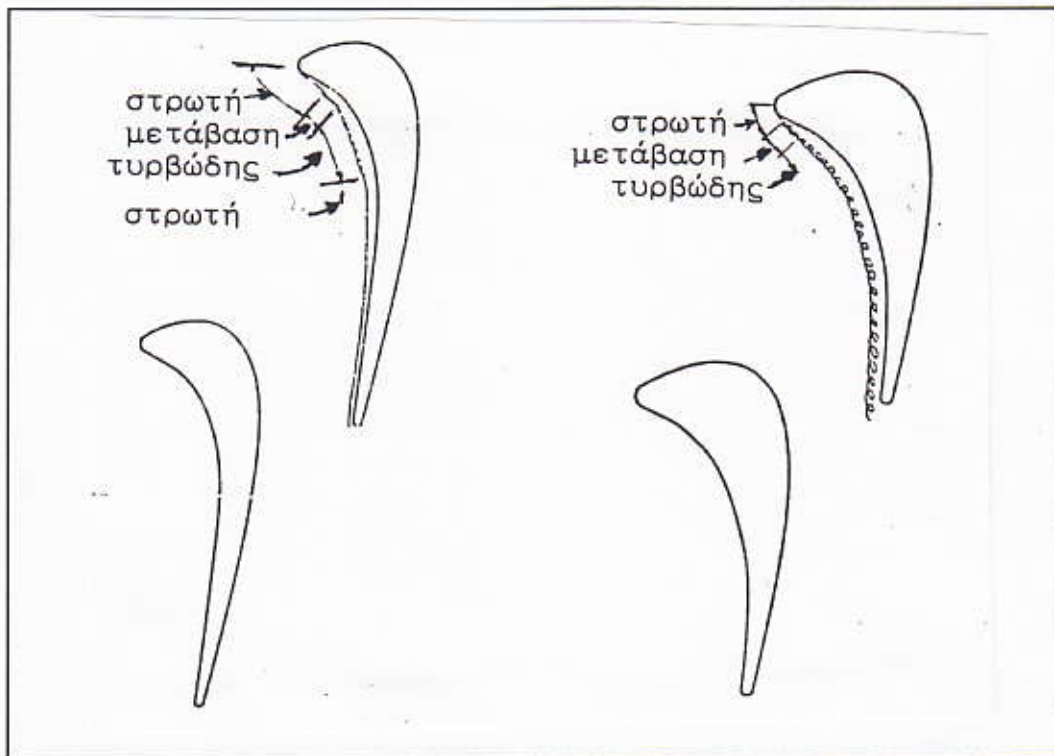
λειτουργεί σωστά και σε άλλες περιοχές ροής, τις οποίες δεν κάλυπταν οι αρχικές παραδοχές των Baldwin και Lomax. Έτσι από διάφορους ερευνητές έχουν προταθεί τροποποιήσεις ώστε να μπορεί να ληφθεί υπόψη το ότι η εξωτερική ροή μεταφέρει μη-μηδενική τύρβη, το ότι πιθανόν να υπάρχουν σημαντικές κλίσεις πίεσης κλπ.

- (δ) Από καθαρά υπολογιστικής πλευράς το μοντέλο των Baldwin και Lomax είναι ένα "μαθηματικό εργαλείο" που σε κάθε θέση του πεδίου μπορεί να υπολογίσει μια τιμή για το συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας μ_t . Αυτό το "εργαλείο" αγνοεί από τη φύση του το σημαντικό φυσικό πρόβλημα της μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη περιοχή, που έχει πολύ μεγάλη σημασία στις ροές στις στροβιλομηχανές. Το θέμα εξετάζεται με περισσότερες λεπτομέρειες στην επόμενη ενότητα.

5.6 Η Μετάβαση από Στρωτή σε Τυρβώδη Ροή

Στη ροή μέσα στις στροβιλομηχανές, ένα αρχικό τμήμα του οριακού στρώματος πάνω στα πτερύγια είναι σχεδόν πάντοτε σε στρωτή περιοχή. Τη στρωτή περιοχή ακολουθεί μια ενδιάμεση ζώνη μετάβασης, ώστε να αποκατασταθεί ο τυρβώδης χαρακτήρας της ροής. Η μετάβαση από τη στρωτή στην τυρβώδη περιοχή είναι ένα φαινόμενο που δεν έχει ερμηνευθεί επαρκώς από φυσική άποψη, ούτε ίσως σε απλούστατες περιπτώσεις ροής. Έτσι, τα μοντέλα που θα συναντήσουμε στη βιβλιογραφία για την περιγραφή της μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή είναι εμπειρικά και γενικά αμφίβολης γενικότητας.

Η κατανόηση και η σωστή αριθμητική μοντελοποίηση του τρόπου ανάπτυξης ενός οριακού στρώματος στο πτερύγιο μιας θερμικής στροβιλομηχανής είναι πολύ σημαντικές. Για παράδειγμα, το να γνωρίζουμε ακριβώς πώς αναπτύσσεται ένα οριακό στρώμα στις πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης ενός πτερυγίου αεριοστροβίλου και να μπορούμε να αναπαράγουμε το οριακό στρώμα με υπολογιστικά μοντέλα, είναι απολύτως απαραίτητα για το σχεδιαστή τέτοιων πτερυγίων, αφού αυτά καθορίζουν πλήρως τη μετάδοση θερμότητας προς το πτερύγιο. Το οριακό στρώμα πάνω στο πτερύγιο μπορούμε να το δούμε σαν ένα "μονωτικό κάλυμα" γύρω από το πτερύγιο, το οποίο καθώς παχύνει εμποδίζει περισσότερο τη μετάδοση θερμότητας από το υπερρέον θερμό αέριο ρεύμα στο πτερύγιο. Ας έχουμε υπόψη ότι η μετάδοση θερμότητας προς το πτερύγιο είναι υψηλότερη μέσα από ένα τυρβώδες οριακό στρώμα, από ότι μέσα από ένα στρωτό οριακό στρώμα. Ο σχεδιαστής πτερυγίων καλείται να σχεδιάσει ένα πτερύγιο με ελεγχόμενο το οριακό στρώμα που αναπτύσσεται σ' αυτό, ώστε να ελαχιστοποιήσει τη μετάδοση θερμότητας προς το πτερύγιο, με τελικό στόχο να αποφύγει να προσθέσει μηχανισμούς ψύξης του πτερυγίου. Το Σχήμα 5.4 δείχνει δύο πτερύγια στροβίλου, σχεδιασμένα από τη Rolls-Royce, όπου στην πλευρά υπερπίεσης συμβαίνουν διαφορετικά φυσικά φαινόμενα.



Σχήμα 5.4

Τα δύο πτερύγια διαφέρουν ως προς τη γωνία κλίσης του πτερυγίου και προέρχονται από ένα διβάθμιο στρόβιλο υψηλής πίεσης, από τον κινητήρα γνωστού αεροσκάφους της πολιτικής αεροπορίας. Στην περίπτωση (α), της υψηλής γωνίας κλίσης, η μετάβαση από τη στρωτή στην τυρβώδη ροή γίνεται περίπου στο 10-20% της πλευράς υπερπίεσης. Μόλις όμως το οριακό στρώμα γίνει τυρβώδες, η ισχυρή επιτάχυνση της ροής που ακολουθεί, πολύ σύντομα αναγκάζει το οριακό στρώμα να ξαναγίνει στρωτό και να παραμείνει τέτοιο στο τελευταίο περίπου 50% της πλευράς υπερπίεσης, που έχει σχεδόν επίπεδη μορφή. Αντίθετα στο πτερύγιο χαμηλής γωνίας κλίσης, περίπτωση (β), η επιτάχυνση της ροής παραμένει σε χαμηλά επίπεδα σε όλη την έκταση της πλευράς υπερπίεσης και γι'αυτό η ροή παραμένει τυρβώδης. Η συζήτηση που προηγήθηκε επιτρέπει στον αναγνώστη να καταλάβει σε ποιά από τις δύο περιπτώσεις που αναφέραμε, αναμένονται εντονότερα προβλήματα υπερθέρμανσης του μεταλλικού πτερυγίου.

Όταν το 1978 οι Baldwin και Lomax δημοσίευσαν το μοντέλο τύρβης τους, πρότειναν ένα απλό κριτήριο μετάβασης από τη στρωτή στην τυρβώδη περιοχή. Κατ'αυτούς, η ροή μπορούσε να θεωρηθεί τυρβώδης, όταν ο λόγος του συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας που υπολόγιζε το διζωνικό μοντέλο τους προς το λόγο μοριακής συνεκτικότητας, γίνονταν μεγαλύτερος μιας σταθερής τιμής. Σύμφωνα με το μοντέλο τους, αρκούσε ο μηδενισμός του μ_t , στις θέσεις του πεδίου ροής που ίσχυε

$$\frac{\mu_r}{\mu} < 14 \quad (5.35)$$

Το κριτήριο των Baldwin και Lomax ήταν βεβαίως πολύ απλό για να μπορεί να γενικευθεί σε πολύπλοκες ροές.

Το 1980 οι Abu Ghannam και Shaw παρουσίασαν ένα πιο σύνθετο κριτήριο "φυσικής" μετάβασης από τη στρωτή στην τυρβώδη περιοχή. Στο κριτήριο αυτό η κύρια παράμετρος είναι ο αριθμός Reynolds Re_θ που βασίζεται στο πάχος ορμής θ του οριακού στρώματος, που ορίζεται ως

$$Re_\theta = \frac{u_e \theta \rho}{\mu} \quad (5.36)$$

Βεβαίως εντοπίζεται αμέσως μια αριθμητική δυσκολία, σχετική με τον υπολογισμό του πάχους ορμής θ , σε περιπτώσεις πολύπλοκων ροών. Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, η μετάβαση αρχίζει όταν

$$Re_\theta > (Re_\theta)_{tr} \quad (5.37)$$

Η κρίσιμη τιμή $(Re_\theta)_{tr}$ της μετάβασης ορίζεται ως

$$(Re_\theta)_{tr} = 163 + \exp \left[F_\lambda(\lambda_\theta) - \frac{F_\lambda(\lambda_\theta) \bar{\tau}_u}{6.91} \right] \quad (5.38)$$

όπου

$$\lambda_\theta = \frac{\rho \theta^2}{\mu} \frac{\partial u_e}{\partial x} \quad (5.39)$$

και $\bar{\tau}_u$ είναι μια "μέση τιμή" της έντασης της τύρβης στο αδιατάρακτο ρεύμα.

Η συνάρτηση $F_\lambda(\lambda_\theta)$ είναι

$$F_\lambda(\lambda_\theta) = \begin{cases} 6.91 + 12.75\lambda_\theta + 63.64\lambda_\theta^2 & , \lambda_\theta < 0 \\ 6.91 + 2.48\lambda_\theta - 12.27\lambda_\theta^2 & , \lambda_\theta > 0 \end{cases} \quad (5.40)$$

Το ολικό μήκος μετάβασης, που ξεκινά με αφετηρία το σημείο εκείνο στο οποίο ισχύει για πρώτη φορά η ανισότητα (5.37), υπολογίζεται στη μορφή ενός αντιστοιχού αριθμού Reynolds Re_L , ως

$$Re_L = 211.46 (Re_\theta)_{tr}^{1.25} \quad (5.41)$$

όπου

$$Re_L = \frac{u_e L_{tr} \rho}{\mu} \quad (5.42)$$

Η γνώση του σημείου έναρξης της μετάβασης x_{tr} και του συνολικού μήκους μετάβασης L_{tr} επιτρέπει τη μετάβαση του συντελεστή τριβής από την τιμή μ της μοριακής συνεκτικότητας στην ολική τιμή $\mu + \mu_t$, μέσω ενός συντελεστή γ που εκφράζει το διακοπτόμενο χαρακτήρα που έχει το οριακό στρώμα κατά τη μετάβαση. Έτσι η φαινόμενη συνεκτικότητα μ_{eff} που εμφανίζεται στις μοντελοποιημένες εξισώσεις θα είναι

$$\mu_{eff} = \mu + \gamma \mu_t \quad (5.43)$$

όπου $\gamma = 0$ για τη στρωτή περιοχή ($x < x_{tr}$), $\gamma = 1$ για την πλήρως τυρβώδη περιοχή ($x > x_{tr} + L_{tr}$) ενώ στην ενδιάμεση μεταβατική ζώνη το γ βρίσκεται από εμπειρικές σχέσεις, όπου

$$\gamma = 1 - \exp(-5\zeta^3) \quad , \quad \zeta = \frac{x - x_{tr}}{L_{tr}} \quad (5.44)$$

ή εναλλακτικά, σύμφωνα με κάποιο αντίστοιχο μοντέλο

$$\gamma = 1 - \exp(-0.412\zeta^2) \quad (5.45)$$

5.7 Τα Μοντέλα Τύρβης δύο Διαφορικών Εξισώσεων

Η ιδέα των αλγεβρικών μοντέλων τυρβώδους συνεκτικότητας και μήκους ανάμιξης που παρουσιάστηκαν στην παραπάνω ενότητα βασίστηκαν στις παρακάτω παραδοχές:

- (α) την παραδοχή του Boussinesq ότι οι τάσεις Reynolds μπορούν να γραφούν κατ'αναλογία προς τις στρωτές τάσεις με τη χρήση του συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας μ_t και των κλίσεων των ταχυτήτων του πεδίου ροής (σχέση (5.2)).
- (β) την παραδοχή ότι ο συντελεστής μ_t , σε κάθε θέση του πεδίου ροής, είναι ανάλογος μιας χαρακτηριστικής ταχύτητας και ενός χαρακτηριστικού μήκους (σχέση (5.4)).
- (γ) την παραδοχή του Prandtl, ότι η χαρακτηριστική ταχύτητα είναι ανάλογη της κλίσης του πεδίου ταχύτητας και του χαρακτηριστικού μήκους ανάμιξης L (σχέση (5.5)).
- (δ) την παραδοχή μιας κατανομής για το μήκος ανάμιξης L , που δίνεται από τοπικές αλγεβρικές σχέσεις συναρτήσει των μέσων ποσοτήτων της ροής και της περιοχής της ροής (στρωτό οριακό υπόστρωμα, ενδιάμεση περιοχή, πλήρως τυρβώδης περιοχή).

εξωτερική περιοχή κλπ.).

Τα μοντέλα που παρουσιάσαμε μέχρι τώρα λέγονται αλγεβρικά (ή μηδενικής-τάξης) μοντέλα μήκους ανάμιξης. Ο όρος "αλγεβρικά" δηλώνει ότι ο συντελεστής μ_t βρίσκεται σε κάθε θέση με αλγεβρικές εκφράσεις, συναρτήσεσι μέσωσν ποσοτήτων της ροής, χωρίς να χρειάζεται να επιλυθούν διαφορικές εξισώσεις για τον υπολογισμό του. Ένας λογικός τρόπος να επεκταθούν τα μοντέλα μήκους ανάμιξης σε ροές που μεταβάλλονται περισσότερο γρήγορα είναι να διατηρηθεί η παραδοχή ότι ο συντελεστής μ_t είναι ανάλογος μιας χαρακτηριστικής ταχύτητας και ενός χαρακτηριστικού μήκους, αλλά να διατυπωθούν διαφορικές εξισώσεις για τον υπολογισμό των τελευταίων. Τα μοντέλα αυτά λέγονται μοντέλα μήκους ανάμιξης δυο-εξισώσεων, με κυριότερο αντιπρόσωπο το μοντέλο τύρβης k-ε.

Στο μοντέλο τύρβης k-ε, ως χαρακτηριστική ταχύτητα για τον υπολογισμό της τυρβώδους συνεκτικότητας λαμβάνεται αυτή η ταχύτητα που αντιστοιχεί στην κινητική ενέργεια k της τύρβης. Ο ορισμός της ποσότητας k δίνεται στη σχέση (5.3) και προφανώς η χαρακτηριστική ταχύτητα q ισούται με

$$q = k^{1/2} \quad (5.46)$$

Συγχρόνως, το χαρακτηριστικό μήκος L υπολογίζεται χρησιμοποιώντας αφ'ενός μεν την τυρβώδη κινητική ενέργεια k και αφ'ετέρου την ποσότητα ε που ισούται με την καταστροφή της τυρβώδους ενέργειας, σύμφωνα με τη σχέση

$$L = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad (5.47)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (5.46) και (5.47) εκφράζουμε τελικά το συντελεστή μ_t της τυρβώδους συνεκτικότητας ως συνάρτηση των ποσοτήτων k και ε

$$\mu_t = c_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5.48)$$

όπου $c_\mu = 0.09$. Η σχέση (5.48) ισχύει για κάθε θέση του πεδίου ροής και υπολογίζει το συντελεστή μ_t από τις τιμές των μεταβλητών k και ε που πρέπει να έχουν ήδη υπολογιστεί διατυπώνοντας και επιλύοντας δύο διαφορικές εξισώσεις ως προς k και ε, με κατάλληλες οριακές συνθήκες. Οι επόμενες ενότητες ασχολούνται με τη διατύπωση των εξισώσεων για τα k και ε, τη μοντελοποίησή τους και τη διατύπωση κατάλληλων οριακών συνθηκών γ' αυτές.

5.8 Η Εξίσωση του k για Ασυμπίεστες Διδιάστατες Ροές

Παράγουμε κατ'αρχήν τη διαφορική εξίσωση που διέπει την τυρβώδη κινητική ενέργεια k για ασυμπίεστες και διδιάστατες ροές, αφού για την περίπτωση αυτή η ανάπτυξη

είναι πιο απλή και κατανοητή γι'αυτούς που γνωρίζουν για πρώτη φορά το αντικείμενο. Για την ανάπτυξη θα χρησιμοποιηθεί τανυστικός συμβολισμός, όπου κάθε επαναλαμβανόμενος δείκτης σημαίνει άθροιση.

Γράφουμε την εξίσωση διατήρησης της ορμής κατά την i -κατεύθυνση, στη χρονικά στιγμιαία μορφή της

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] \quad (5.49)$$

και την ίδια εξίσωση μετά τη λήψη μέσων χρονικά τιμών κατά Reynolds

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u_i' u_k'} \right] \quad (5.50)$$

Αφαιρούμε την εξίσωση (5.50) από την εξίσωση (5.49) και προκύπτει

$$\rho \frac{\partial u_i'}{\partial t} + \rho \bar{u}_k \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k'}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \overline{u_i' u_k'}) - \rho u_k' \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (5.50)$$

Την τελευταία εξίσωση πολλαπλασιάζουμε με u_j' και παίρνουμε

$$\begin{aligned} \rho u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial t} + \rho u_j' \bar{u}_k \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} = & -u_j' \frac{\partial p'}{\partial x_i} + u_j' \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k'}{\partial x_i} \right) \right] + \\ & + u_j' \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \overline{u_i' u_k'}) - \rho u_j' u_k' \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Η εξίσωση προστίθεται κατά μέλη με την ισοδύναμη εξίσωση η οποία προκύπτει αν αντιμετατεθούν οι δείκτες i και j και εκτελώντας τις αναγκαίες πράξεις παίρνουμε τελικά ότι

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} (u_i' u_j') + \rho \bar{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i' u_j') = & - \left(u_j' \frac{\partial p'}{\partial x_i} + u_i' \frac{\partial p'}{\partial x_j} \right) + \\ & + \mu \left\{ u_i' \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k'}{\partial x_j} \right) + u_j' \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k'}{\partial x_i} \right) \right\} + \\ & + u_j' \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \overline{u_i' u_k'}) + u_i' \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \overline{u_j' u_k'}) - \rho u_k' u_i' \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \rho u_k' u_j' \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (5.51)$$

Όπως παρατηρούμε, έχει ήδη γίνει η παραδοχή ότι αμελούνται όροι που περιέχουν την κλίση της συνεκτικότητας μ . Για την εξίσωση (5.51) λαμβάνουμε τις μέσες χρονικές τιμές και μετά από αριθμητικές πράξεις προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u'_i u'_j}) + \rho \bar{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j}) = & - \left\{ \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} \right\} + \\ & + \mu \left\{ \overline{u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right)} + \overline{u'_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right)} \right\} - \\ & - \rho \overline{u'_k u'_i} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \rho \overline{u'_k u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j u'_k}) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Η εξίσωση (5.52) αναγνωρίζεται ως μια εξίσωση μεταφοράς των τάσεων Reynolds. Αποτελεί το βασικό εργαλείο για τα εξελιγμένα μοντέλα τάσεων Reynolds, για μοντέλα δηλαδή που δεν χρησιμοποιούν την παραδοχή της ύπαρξης της τυρβώδους συνεκτικότητας, αλλά λύνουν διαφορικές εξισώσεις για κάθε τάση Reynolds χωριστά. Τα μοντέλα αυτά έχουν βρει ανάπτυξη την τελευταία δεκαετία, αφού απαιτούν σημαντική υπολογιστική ισχύ. Δυστυχώς τέτοια μοντέλα υιοθετούνται δύσκολα από τη βιομηχανία, λόγω της πολυπλοκότητάς τους και των μεγάλων απαιτήσεων για υπολογιστική ισχύ και ευτυχώς υπάρχουν μοντέλα, σαν το k - ϵ ή το Baldwin-Lomax που στις γενικές περιπτώσεις δίνουν εξίσου ακριβείς υπολογισμούς.

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (5.52) με το δέλτα του Kronecker δ_i^j , ή αλλιώς αθροίζοντας τις επιμέρους εξισώσεις που αφορούν τις κύριες ($i=j$) τάσεις Reynolds, και αντικαθιστώντας την τυρβώδη κινητική ενέργεια k , από τον ορισμό της (5.3) προκύπτει τελικά ότι

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = - \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u'_i p'} + \frac{\rho}{2} \overline{u'_k u'_k u'_i}) + \mu \frac{\partial^2 k}{\partial x_k^2} - \mu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)^2 - \rho \overline{u'_k u'_i} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \quad (5.53)$$

Στο αριστερό μέλος της εξίσωσης διακρίνουμε τους όρους χρονικής μεταβολής και μεταφοράς του k . Στο δεξιό μέλος συμμετέχουν τέσσερις όροι που κατά σειρά εκφράζουν την τυρβώδη διάχυση του k , τη μοριακή διάχυση του k , την καταστροφή και την παραγωγή τύρβης. Εκτός από τον όρο μοριακής διάχυσης του k , οι υπόλοιποι όροι του δεξιού μέλους απαιτούν μοντελοποίηση.

Ο όρος της παραγωγής της τύρβης μοντελοποιείται άμεσα χρησιμοποιώντας την παραδοχή του Boussinesq, δηλαδή τη σχέση (5.2) και δίνει

$$-\overline{\rho u_k' u_i'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \left\{ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right\} = \rho G \quad (5.54)$$

Ο όρος τυρβώδους διάχυσης μοντελοποιείται υποθέτοντας ότι

$$\overline{u_i' p' + \frac{\rho}{2} u_k' u_k' u_i'} = - \frac{\mu_t}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \quad (5.55)$$

όπου Pr_k είναι ο τυρβώδης αριθμός Prandtl ή αριθμός Schmidt, που ισούται με $Pr_k = 1$.

Τέλος ο όρος της καταστροφής της τυρβώδους κινητικής ενέργειας εμπλέκει άμεσα τη δεύτερη από τις εξαρτημένες μεταβλητές του προβλήματος της τύρβης, δηλαδή την ποσότητα ϵ ως

$$\mu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right)^2 = \rho \epsilon \quad (5.56)$$

Η εξίσωση (5.53), με τις μοντελοποιήσεις που εισάγουν οι σχέσεις (5.54) ως (5.56) παίρνει την τελική μορφή

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right\} + \mu_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \left\{ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right\} - \rho \epsilon \quad (5.57)$$

όπου στο δεξιό μέρος αναγνωρίζονται κατά σειρά ο όρος της ολικής διάχυσης του k , ο όρος παραγωγής και ο όρος καταστροφής της τυρβώδους κινητικής ενέργειας.

5.9 Η Εξίσωση του ϵ για Ασυμπίεστες Διδιάστατες Ροές

Η ποσότητα ϵ , για την οποία λύνουμε στο μοντέλο τύρβης k - ϵ , περιλαμβάνει μόνο το ισότροπο τμήμα της καταστροφής της τυρβώδους ενέργειας και δίνεται από τη σχέση

$$\epsilon = \frac{\mu}{\rho} \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} \quad (5.58)$$

και όχι ολόκληρη την ενεργειακή καταστροφή της τύρβης που είναι

$$\epsilon_{\sigma\lambda} = \frac{1}{4} \frac{\mu}{\rho} \left[\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right]^2 \quad (5.59)$$

Η απόδειξη της εξίσωσης της τυρβώδους καταστροφής ϵ είναι αρκετά περισσότερο πολύπλοκη και μόνο βασικά της σημεία και η τελική μορφή της θα δοθούν εδώ. Παραγωγίζουμε την εξίσωση (5.50) ως προς x_j , στη συνέχεια την πολλαπλασιάζουμε με την ποσότητα

$$2 \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}$$

και λαμβάνουμε τη μέση χρονικά τιμή της προκύπτουσας εξίσωσης. Μετά την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ισότροπης καταστροφής (5.58) προκύπτει τελικά ότι

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho \bar{u}_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = & -2\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\} - 2\mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial p'}{\partial x_j} \right\} + \mu \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_k^2} - \\ & - 2 \frac{\mu^2}{\rho} \left\{ \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_j} \right\}^2 - 2\mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} - \rho \bar{u}_k \frac{\partial \epsilon'}{\partial x_k} - 2\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (5.60)$$

Ο πρώτος όρος του δεύτερου μέλους είναι ο όρος παραγωγής του ϵ . Μπορεί να μοντελοποιηθεί στη βάση της αντίστοιχης μοντελοποίησης που έγινε για την εξίσωση του k , υποθέτοντας ότι

$$-2\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\} = c_1 \frac{\epsilon}{k} \rho G \quad (5.61)$$

όπου η ποσότητα ρG ορίστηκε στη σχέση (5.54). Η σταθερά c_1 έχει την τιμή $c_1 = 1.44$.

Η καταστροφή της τυρβώδους καταστροφής εκφράζεται από το άθροισμα του τέταρτου και του τελευταίου όρου της (5.60) και μοντελοποιείται κατ'αναλογία επίσης προς τον αντίστοιχο όρο της εξίσωσης του k ως

$$-2 \frac{\mu^2}{\rho} \left\{ \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_j} \right\}^2 - 2\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} = -c_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (5.62)$$

όπου συνήθως $c_2 = 1.92$.

Ο προτελευταίος όρος του δεξιού μέλους της (5.60) παριστάνει τη διάχυση του ε λόγω των διαταραχών της ταχύτητας και μοντελοποιείται ως εξής

$$-\rho \overline{\mu_k' \frac{\partial \varepsilon'}{\partial x_k}} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\mu_t}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] \quad (5.63)$$

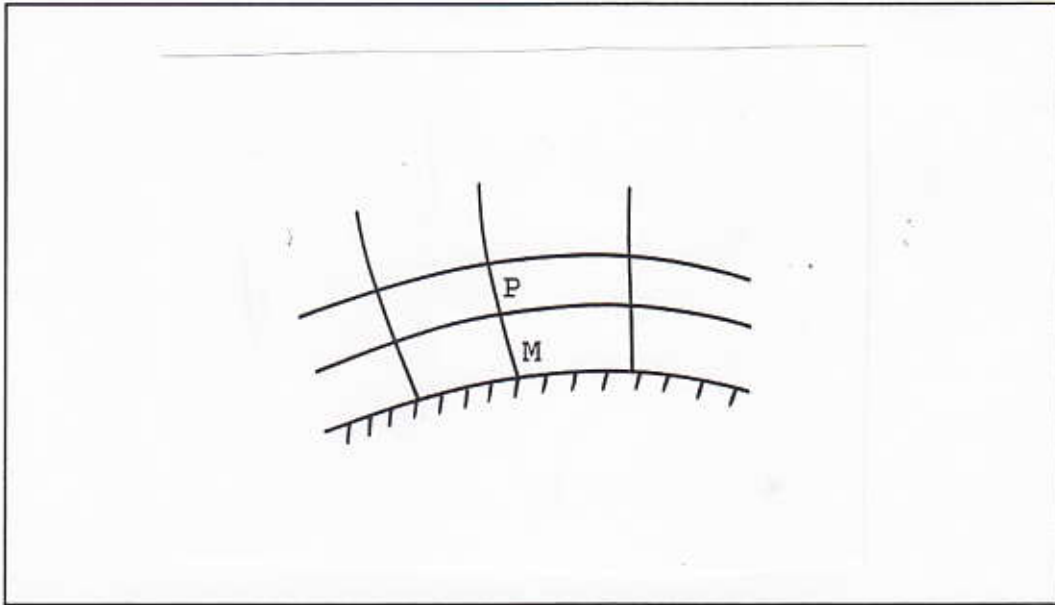
όπου ο αριθμός Prandtl για την εξίσωση του ε ισούται με $Pr_\varepsilon = 1.3$. Συνήθως ο δεύτερος όρος του δεύτερου μέλους της (5.60), που είναι η διάχυση του ε από τις διαταραχές της πίεσης και ο πέμπτος όρος της (5.60) αμελούνται και η τελική εξίσωση που επιλύεται για την καταστροφή της τυρβώδους συνεκτικότητας ε είναι

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \overline{u_k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right\} + c_1 \frac{\varepsilon}{k} \mu_t \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_i} \right] - c_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (5.64)$$

5.10 Οριακές συνθήκες για τις εξισώσεις k και ε

Το σύστημα των εξισώσεων (5.48), (5.57) και (5.64) μπορεί να λυθεί, σε συνδυασμό με τις εξισώσεις που διέπουν τις μέσες ποσότητες της ροής (συνέχεια, ορμή και ενέργεια) αν εφοδιασθεί με κατάλληλες οριακές συνθήκες. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι οριακές συνθήκες των k και ε στα στερεά τοιχώματα του πεδίου ροής και με αυτές θα ασχοληθούμε στην παρούσα ενότητα.

Το σύστημα (5.48), (5.57) και (5.64) ισχύει μέχρι και την περιοχή της λογαριθμικής κατανομής της ταχύτητας και για το λόγο αυτό ονομάζεται και μοντέλο k-ε υψηλών αριθμών Reynolds. Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται το σύστημα των εξισώσεων αυτών, υπάρχει αδυναμία μοντελοποίησης της περιοχής πολύ κοντά στο στερεό τοίχωμα, αφού οι εξισώσεις (5.48), (5.57) και (5.64) είναι ανεπαρκείς για την περιοχή αυτή. Έτσι, η επόμενη σειρά υπολογιστικών κόμβων μετά τους οριακούς κόμβους πρέπει να τοποθετηθεί μέσα στη λογαριθμική περιοχή και να καλυφθεί η απόσταση μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου μοντέλου με ένα τοπικό μοντέλο, που φέρεται με το όνομα "συναρτήσεις τοίχου". Με τη χρήση των συναρτήσεων τοίχου, γίνεται οικονομία στο χρησιμοποιούμενο αριθμό κόμβων αφού δεν καλύπτεται με πολύ πυκνό πλέγμα η περιοχή κοντά στο στερεό τοίχωμα. Η τεχνική των συναρτήσεων τοίχου, σημαίνει ουσιαστικά την επιβολή οριακών συνθηκών στο γειτονικό του στερεού ορίου κόμβο P, βλ. Σχήμα 5.5, κάτω από φυσικές παραδοχές



Σχήμα 5.5

που πηγάζουν από τη θεωρία των οριακών στρωμάτων και που συνοψίζονται παρακάτω

- (α) Ανάμεσα στον οριακό κόμβο M και στον κόμβο P που κείται μέσα στη λογαριθμική ζώνη ταχύτητας, η ταχύτητα τριβής u_τ είναι σταθερή. Η παραδοχή αυτή είναι γνωστή από το Κεφάλαιο 5.4.
- (β) Στον κόμβο P, η παραγωγή και η καταστροφή τυρβώδους κινητικής ενέργειας είναι ίσες. Η παραδοχή αυτή είναι φυσικά παραδεκτή, αφού στην περιοχή αυτή οι όροι μεταφοράς και διάχυσης μπορούν να αμεληθούν. Για το απλό παράδειγμα ροής που εξετάσαμε και στο Κεφάλαιο 5.4, η παραδοχή αυτή διατυπώνεται ως

$$\mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = \rho \epsilon = \rho^2 c_\mu \frac{k^2}{\mu_t} \quad (5.65)$$

- (γ) Στον κόμβο P, η διατμητική τάση τ_w (βλέπε και παραδοχή (α)) ισούται με τη διατμητική τάση Reynolds, δηλαδή

$$\rho \mu_t^2 = \tau_w = -\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

που γράφεται ισοδύναμα και ως

$$\mu_t = \kappa y^+ \mu \quad (5.66)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.65) και (5.66) των παραδοχών (β) και (γ) προκύπτει ότι

$$k = \frac{u_T^2}{\sqrt{c_\mu}} \quad \text{ή} \quad \tau_w = \rho k \sqrt{c_\mu} \quad (5.67)$$

και αντίστοιχα για την ποσότητα ϵ ότι

$$\epsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \quad \text{ή} \quad \epsilon = \frac{c_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y} \quad (5.68)$$

Οι σχέσεις (5.67) και (5.68) εφαρμόζονται στον κόμβο P και επιτρέπουν τον υπολογισμό των τιμών των k και ϵ στον κόμβο αυτό, αν γνωρίζουμε την ταχύτητα τριβής. Η τελευταία, βάσει της παραδοχής (a) είναι ίδια με αυτήν του κόμβου M. Επειδή το σημείο P ανήκει στη λογαριθμική ζώνη του οριακού στρώματος ισχύει ότι

$$\frac{\bar{u}_P}{u_T} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y_P \bar{u}_T \rho}{\mu} \right) + c \quad (5.69)$$

όπου y_P είναι η απόσταση των κόμβων P και M. Στα πλαίσια της επαναληπτικής διαδικασίας που θα ακολουθηθεί για την επίλυση του συνολικού προβλήματος, η σχέση (5.69) μπορεί να λυθεί στον κόμβο P, χρησιμοποιώντας την πιο πρόσφατη τιμή της ταχύτητας \bar{u}_P στον κόμβο P. Η επίλυση της (5.69) γίνεται εύκολα με τη χρήση λ.χ. της μεθόδου Newton-Raphson. Έτσι υπολογίζεται το u_T στο P και για τον ίδιο κόμβο υπολογίζονται οι "οριακές τιμές" των k, ϵ από τις σχέσεις (5.67) και (5.68), χωρίς να αναμιχθεί ο οριακός κόμβος M!

Το σύστημα (5.48), (5.57) και (5.64) έχει ήδη επεκταθεί, με κατάλληλες τροποποιήσεις, ώστε να μπορεί να καλύψει και την περιοχή κοντά στο στερεό τοίχωμα, δηλαδή τη λεγόμενη περιοχή των χαμηλών αριθμών Reynolds. Το τροποποιημένο σύστημα εξισώσεων λέγεται μοντέλο τύρβης k- ϵ χαμηλών αριθμών Reynolds και οφείλεται στους Jones και Launder. Σ' αυτό οι εξισώσεις (5.48), (5.57) και (5.64) αντικαθίστανται κατά σειρά από τις

$$\mu_t = c_\mu f_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon} \quad (5.70)$$

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right\} + \rho G - \rho \epsilon - 2\mu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 \quad (5.71)$$

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho \bar{u}_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} \right\} + c_{f1} \frac{\epsilon}{k} G - c_{f2} \rho \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{2\mu \mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_t}{\partial y^2} \right)^2 \quad (5.72)$$

όπου u_t είναι η εφαπτομενική ταχύτητα ως προς το πλησιέστερο στερεό τοίχωμα. Οι σταθερές που εμπλέκονται είναι

$$f_1=1 \quad , \quad f_2=1-0.3 \exp(-Re_t^2) \quad , \quad f_\mu = \exp\left[\frac{-2.5}{1+\frac{Re_t}{50}}\right]$$

και ο αριθμός Reynolds της τύρβης ισούται με

$$Re_t = \frac{\rho k^2}{\mu \varepsilon} \quad (5.73)$$

Όταν χρησιμοποιείται το μοντέλο χαμηλών αριθμών Reynolds (5.70) ως (5.72), η επίλυση φθάνει μέχρι το στερεό τοίχωμα όπου επιβάλλονται οι οριακές συνθήκες

$$k=0 \quad , \quad \varepsilon=0 \quad (5.74)$$

Για την είσοδο του πεδίου ροής, απαιτούνται προφανώς οριακές συνθήκες για τα k και ε . Συνήθως για τα πειράματα γνωρίζουμε την ένταση της τύρβης τ_u στην είσοδο του πεδίου, από την οποία προκύπτει άμεσα η συνθήκη εισόδου για το k , ως

$$k_{in} = \frac{3}{2} (\tau_u V_{in})^2 \quad (5.75)$$

όπου V_{in} είναι το μέτρο της ταχύτητας στην είσοδο. Η συνθήκη εισόδου για την τυρβώδη καταστροφή ε είναι περισσότερο δύσκολο να καθορισθεί. Συνήθως υποτίθεται στην είσοδο ένας λόγος τυρβώδους προς μοριακή συνεκτικότητα $(\mu_t/\mu)_{in}$, οπότε η τιμή του ε στην είσοδο είναι

$$\varepsilon_{in} = c_\mu \rho_{in} \frac{k_{in}^2}{\mu_{in}} \left(\frac{\mu}{\mu_t} \right)_{in} \quad (5.76)$$

5.11 Το Μοντέλο k-ε για την Επιφάνεια S_1 μιας Στροβιλομηχανής

Έχοντας ως τελικό στόχο την εφαρμογή του μοντέλου k-ε στην από-περύγιο-σε-περύγιο μιας πτερύγωσης στροβιλομηχανής, θα παρουσιάσουμε το τελικό προς επίλυση σύστημα εξισώσεων τόσο για τη μέση ροή όσο και για τις τυρβώδεις ποσότητες k και ε . Για λόγους συντομίας παραλείπουμε τα σύμβολα μέσων τιμών. Οι εξισώσεις στη φάση αυτή θα δοθούν για ασυμπιεστή ροή με μεταβολή της ακτίνας R και του πάχους του σωλήνα ροής h , διατηρώντας τους όρους χρονικής μεταβολής:

(α) Η Εξίσωση της Συνέχειας:

$$\frac{\partial}{\partial m}(RhW_m) + \frac{\partial}{\partial \theta}(hW_\theta) = 0 \quad (5.77)$$

(β) Η κατά την κατεύθυνση- m Εξίσωση της Ορμής:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(Rh\rho W_m) + \frac{\partial}{\partial m} \left[Rh \left\{ \rho W_m^2 + p_{eff} - 2(\mu + \mu_r) \frac{\partial W_m}{\partial m} \right\} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[h \left\{ \rho W_m W_\theta - (\mu + \mu_r) \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial m} + \frac{1}{R} \frac{\partial W_m}{\partial \theta} - \frac{W_\theta}{R} \frac{\partial R}{\partial m} \right) \right\} \right] = \\ & = h\rho(W_\theta + \omega R)^2 \frac{\partial R}{\partial m} + p_{eff} \frac{\partial}{\partial m}(Rh) - 2h(\mu + \mu_r) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + \frac{W_m}{R} \frac{\partial R}{\partial m} \right) \frac{\partial R}{\partial m} - \\ & - 2R(\mu + \mu_r) \frac{W_m}{h} \frac{\partial h}{\partial m} \frac{\partial h}{\partial m} \end{aligned} \quad (5.78)$$

(γ) Η κατά την κατεύθυνση- θ Εξίσωση της ορμής:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(Rh\rho W_\theta) + \frac{\partial}{\partial m} \left[Rh \left\{ \rho W_m W_\theta - (\mu + \mu_r) \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial m} + \frac{1}{R} \frac{\partial W_m}{\partial \theta} - \frac{W_\theta}{R} \frac{\partial R}{\partial m} \right) \right\} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[h \left\{ \rho W_\theta^2 + p_{eff} - 2(\mu + \mu_r) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial W_m}{R} + \frac{\partial R}{\partial m} \right) \right\} \right] = \\ & = -h\rho W_m(W_\theta + 2\omega R) \frac{\partial R}{\partial m} + h(\mu + \mu_r) \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial m} + \frac{1}{R} \frac{\partial W_m}{\partial \theta} - \frac{W_\theta}{R} \frac{\partial R}{\partial m} \right) \frac{\partial R}{\partial m} \end{aligned} \quad (5.79)$$

όπου η φαινόμενη πίεση p_{eff} συνοψίζει τους όρους

$$p_{eff} = p + \frac{2}{3} \rho k \quad (5.80)$$

(δ) Η Εξίσωση της Ενέργειας:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(RhE_{tR}) + \frac{\partial}{\partial m} \left[Rh \left\{ (E_{tR} + p_{eff})W_m - 2W_m(\mu + \mu_t) \frac{\partial W_m}{\partial m} - \right. \right. \\ & \left. \left. - W_\theta(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial m} + \frac{1}{R} \frac{\partial W_m}{\partial \theta} - \frac{W_\theta}{R} \frac{\partial R}{\partial m} \right) + q_m \right\} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[h \left\{ (E_{tR} + p_{eff})W_\theta - W_m(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial m} + \frac{1}{R} \frac{\partial W_m}{\partial \theta} - \frac{W_\theta}{R} \frac{\partial R}{\partial m} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2W_\theta(\mu + \mu_t) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + \frac{W_m}{R} \frac{\partial R}{\partial m} \right) + q_\theta \right\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.81)$$

(ε) Η Εξίσωση του k , για υψηλούς αριθμούς Reynolds:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(Rh\rho k) + \frac{\partial}{\partial m} \left[Rh\rho W_m k - Rh \left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial m} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[h\rho W_\theta k - \frac{h}{R} \left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial \theta} \right] = G - \rho R h \epsilon \end{aligned} \quad (5.82)$$

(ζ) Η Εξίσωση του ϵ , για υψηλούς αριθμούς Reynolds:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(Rh\rho\epsilon) + \frac{\partial}{\partial m} \left[Rh\rho W_m \epsilon - Rh \left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial m} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[h\rho W_\theta \epsilon - \frac{h}{R} \left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta} \right] = c_1 \frac{\epsilon}{k} G - c_2 \rho R h \frac{\epsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (5.83)$$

Η τυρβώδης συνεκτικότητα δίνεται, κατά τα γνωστά από τη σχέση (5.48) ενώ ο όρος της παραγωγής τυρβώδους κινητικής ενέργειας είναι

$$\begin{aligned} G = & h\mu_t \left[\frac{2}{3} \left(\frac{2}{R} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{W_m}{R} \frac{\partial R}{\partial m} - \frac{W_m}{h} \frac{\partial h}{\partial m} - \frac{\partial W_m}{\partial m} \right) \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + W_m \frac{\partial R}{\partial m} \right) - \right. \\ & - \frac{2}{3} R \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + \frac{W_m}{R} \frac{\partial R}{\partial m} + \frac{W_m}{h} \frac{\partial h}{\partial m} - 2 \frac{\partial W_m}{\partial m} \right) \frac{\partial W_m}{\partial m} + \\ & \left. + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta} + R \frac{\partial W_\theta}{\partial m} - \frac{\partial R}{\partial m} W_\theta \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.84)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Η ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΣΤΡΩΤΗ ΣΕ ΤΥΡΒΩΔΗ ΡΟΗ ΣΤΙΣ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΕΣ

Μια πρώτη γνωριμία με το φαινόμενο της μετάβασης από τη στρωτή στην τυρβώδη περιοχή της ροής στις στροβιλομηχανές έγινε στο Κεφάλαιο 1 (όπου παρουσιάσθηκε κυρίως η φυσική της μετάβασης) και στο Κεφάλαιο 5 (όπου παρουσιάσθηκαν συγκεκριμένα μοντέλα μετάβασης που χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό με τα συνήθη μοντέλα τύρβης για τον υπολογισμό της ροής στις στροβιλομηχανές). Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιασθεί η φυσική της μετάβασης, ο ρόλος της στις ροές στις στροβιλομηχανές καθώς και βασικές θεωρίες που τη διέπουν.

6.1 Η Μετάβαση στις Στροβιλομηχανές

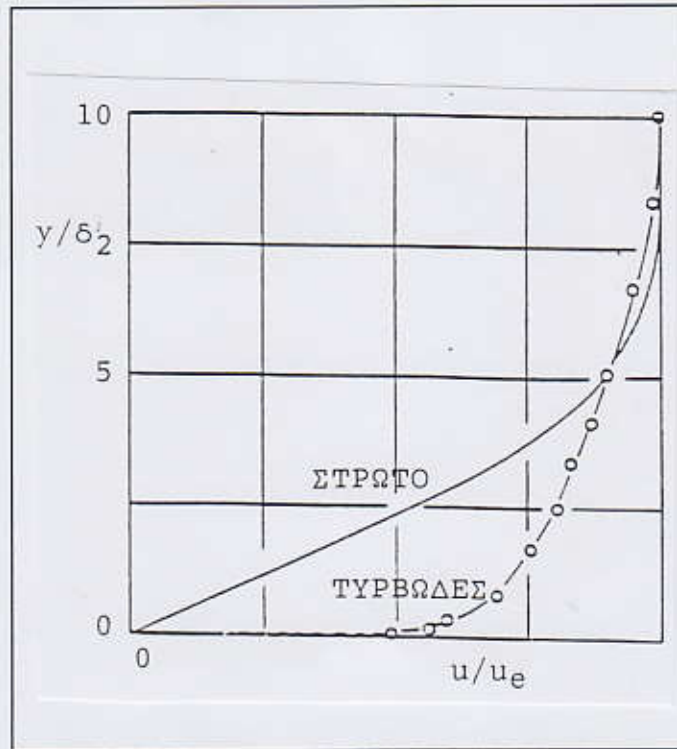
Η απόδοση μιας περύγωσης στροβιλομηχανής εξαρτάται σημαντικά από το αν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης. Επειδή βέβαια σε μια περύγωση συναντώνται κατά περιοχές και οι δύο τύποι ροής, ιδιαίτερη σημασία έχει το σημείο ή τα σημεία μετάβασης αλλά και ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η μετάβαση στην τυρβώδη κατάσταση.

Αν συγκρίνουμε τις αδιάστατες κατανομές ταχύτητας που αντιστοιχούν σε ένα τυπικό στρωτό και ένα τυπικό τυρβώδες οριακό στρώμα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.1, θα παρατηρήσουμε ότι το στρωτό οριακό στρώμα είναι χαρακτηριστικά "πιο άδειο" από το τυρβώδες. Μεταφέρει δηλαδή, μέσα στο πάχος του, πολύ λιγότερη παροχή ρευστού από ότι το τυρβώδες οριακό στρώμα. Στο Κεφάλαιο 11 θα ορίσουμε το πάχος μετατόπισης δ_1 και το πάχος ορμής δ_2 , από ελλειμματικές σχέσεις της μορφής

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad , \quad \delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (6.1)$$

(y είναι η κάθετη απόσταση από το στερεό τοίχωμα, δηλαδή ένα περύγιο ή το κέλυφος της στροβιλομηχανής, u_e είναι η εξωτερική ταχύτητα που μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει την ταχύτητα στο άκρο του οριακού στρώματος, η ολοκλήρωση ως το ∞ ουσιαστικά υποθέτει ολοκλήρωση μέσα στο πάχος του οριακού στρώματος, ενώ έχει υποθεθεί ότι για λόγους απλότητας η ροή είναι ασυμπίεστη). Στο Κεφάλαιο 11, οι ποσότητες δ_1 και δ_2 θα συμβολίζονται με δ_{1k} και δ_{2k} για να γίνει η διάκριση συμπίεστης και ασυμπίεστης ροής, η οποία όμως εδώ παραλείπεται. Ο λόγος των δυο αυτών παχών είναι ο παράγοντας μορφής H_{12} (σε επόμενα κεφάλαια θα αναφερθεί και ως H_{12k}), ο οποίος ορίζεται ως

$$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (6.2)$$



Σχήμα 6.1

Κάνοντας συγκριτικούς υπολογισμούς του παράγοντα μορφής H_{12} για στρωτή και τυρβώδη κατανομή ταχύτητας, σύμφωνα με τις ενδεικτικές κατανομές ταχύτητας που δόθηκαν στο Σχήμα 6.1, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το H_{12} πρέπει να έχει σημαντικά υψηλότερες τιμές για την περίπτωση στρωτής ροής σε σχέση με την τυρβώδη. Ενδεικτικά, για ροή παράλληλα σε επίπεδη πλάκα, στη στρωτή ροή $H_{12} = 2.6$, ενώ στην τυρβώδη ροή είναι $H_{12} = 1.4$.

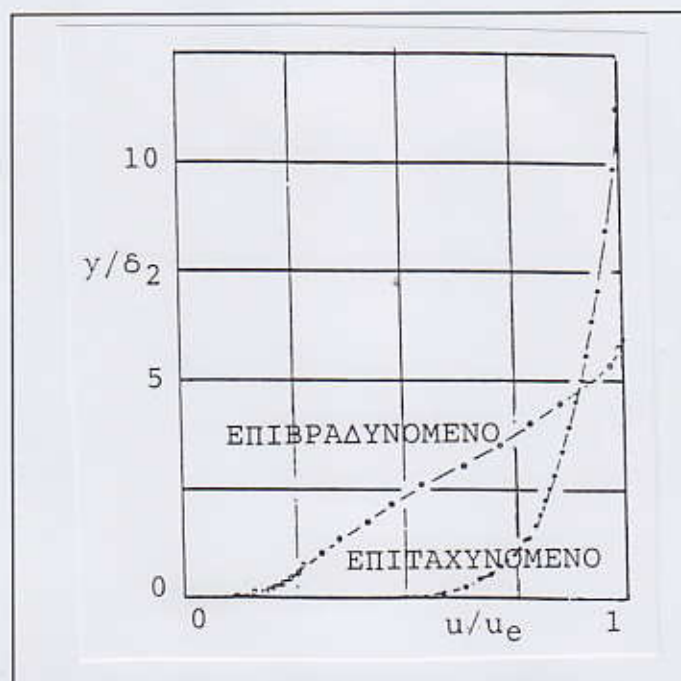
Η μειωμένη παροχή που μεταφέρει το στρωτό οριακό στρώμα αναγκάζει την εξωτερική περιοχή να διακινεί μεγαλύτερη παροχή. Αυτό σημαίνει μια περισσότερη έντονη στένωση της εξωτερικής ροής, που ουσιαστικά μπορεί να θεωρηθεί ως τάση για περιορισμό της ροής μάζας που διακινεί η στροβιλομηχανή.

Από το Σχήμα 6.1 είναι επίσης εμφανές ότι η κλίση της ταχύτητας κατά την κάθετη στο στερεό όριο κατεύθυνση είναι ισχυρότερη στην περίπτωση της τυρβώδους ροής. Αφού η κλίση της ταχύτητας του ρευστού στη γειτονιά του στερεού τοιχώματος είναι ανάλογη της τάσης (με παράγοντα αναλογίας το συντελεστή συνεκτικότητας), άρα οι τάσεις που θα δέχεται ένα πτερύγιο στροβιλομηχανής που βρίσκεται σε τυρβώδη ροή θα είναι μεγαλύτερες των τάσεων που θα προκαλούσε μια στρωτή ροή. Το επίπεδο των τάσεων είναι ανάλογο του επιπέδου των απωλειών και κατά συνέπεια οι απώλειες θα είναι μεγαλύτερες στην τυρβώδη ροή.

6.3

Οι παραπάνω συγκρίσεις έχουν ωστόσο θεωρητικό χαρακτήρα, αφού στην πράξη είναι αδύνατο να συντηρήσουμε στρωτή ροή σε όλη την έκταση του πτερυγίου της στροβιλομηχανής, χωρίς να συμβεί αποκόλληση της ροής. Ετσι, σε αντίθεση με την πραγματικά απλοϊκή σύγκριση που έγινε προηγούμενα, στην πράξη οι απώλειες σε ένα πτερύγιο στροβιλομηχανής που βρίσκεται ολοκληρωτικά σε συνθήκες στρωτής ροής είναι πολύ μεγαλύτερες από το αν ήταν σε τυρβώδη ροή, αφού τότε πρέπει να συνυπολογισθούν και εξαιρετικά υψηλές απώλειες λόγω της σχεδόν βέβαιης αποκόλλησης.

Για την περίπτωση των τυρβωδών ροών, είναι ενδιαφέρον να συγκρίνουμε ποιοτικά τις κατανομές ταχύτητας που αντιστοιχούν στα επιβραδυνόμενα και τα επιταχυνόμενα οριακά στρώματα. Μια ενδεικτική σύγκριση δίνεται στο Σχήμα 6.2. Από το σχήμα αυτό φαίνεται ότι η δημιουργούμενη στένωση της ροής είναι αισθητά μεγαλύτερη στην περίπτωση της επιβραδυνόμενης ροής, όπως συνήθως είναι η ροή σε πτερυγώσεις συμπιεστή. Αντίθετα, η τάση τριβής στο στερεό τοίχωμα-πτερύγιο είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση της επιταχυνόμενης ροής, όπως συνήθως είναι η ροή σε πτερυγώσεις στροβίλων.



Σχήμα 6.2

Όπως σχολιάσθηκε και στην Ενότητα 5.6, η μετάδοση θερμότητας επηρεάζεται επίσης από τον τύπο της ροής. Σε ένα μη-αδιαβατικό τοίχωμα στροβιλομηχανής (π.χ. σε ένα πτερύγιο στροβίλου το οποίο ψύχεται με την κυκλοφορία ψυχρού ρεύματος μέσα σ' αυτό), η μεταφορά θερμότητας στην επιφάνεια του στερεού σώματος συνδέεται άμεσα με την κάθετη συνιστώσα της κλίσης της θερμοκρασίας ($\partial T/\partial y$, αν y είναι η κάθετη κατεύθυνση στο στερεό τοίχωμα). Γενικά, η κλίση αυτή είναι υψηλότερη στην τυρβώδη περιοχή.

Η προηγούμενη συζήτηση για τη διαφορετική συμπεριφορά στρωτών και τυρβωδών οριακών στρωμάτων σε περυγία στροβιλομηχανών δείχνει τη σημασία που έχει η σωστή πρόλεξή τους. Ο μηχανισμός της μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή εξαρτάται φυσικά από πολλούς παράγοντες, ένας δε από αυτούς είναι και ο αριθμός Reynolds. Ένας εμπειρικός νόμος, αρκετά βέβαια προσεγγιστικός, είναι ότι η μετάβαση αρχίζει σε αριθμούς Reynolds (βασισμένους στην αξονική χορδή του περυγίου της στροβιλομηχανής, Re_c) της τάξης των 350000. Οι "μικρές" στροβιλομηχανές λειτουργούν σε μικρότερους αριθμούς Reynolds από τις μεγαλύτερες και για το λόγο αυτό είναι αρκετά κοντά στη ζώνη μετάβασης. Υπενθυμίζουμε ότι ο αριθμός Reynolds που χαρακτηρίζει τις περυγώσεις ενός αεριοστροβίλου μειώνεται με το υψόμετρο (δηλαδή σε συνθήκες πτήσης), σε σχέση με την τιμή που θα είχε αν λειτουργούσε στο επίπεδο της θάλασσας.

Σε ένα συμπίεστη, η κλίση της πίεσης αντιτίθεται στη ροή. Έχει παρατηρηθεί ότι η μετάβαση εντοπίζεται γενικά στην αρχή της επιβράδυνσης της ροής κατά μήκος των τοιχωμάτων των περυγίων και ολοκληρώνεται συνήθως ταχύτατα, σε ένα πολύ μικρό ποσοστό του μήκους του περυγίου. Σε ένα στρόβιλο, η ύπαρξη περιοχών όπου η ροή είναι επιταχυνόμενη μετατοπίζει το σημείο που ξεκινά η μετάβαση στην τυρβώδη ροή προς τα κατάντι (κοντά στην ακμή εκφυγής του περυγίου). Συχνόνως, η μετάβαση διαρκεί αισθητά μεγαλύτερο μήκος πάνω στο τοίχωμα του περυγίου ενός στροβίλου, από ότι θα συνέβαινε σε ένα συμπίεστη.

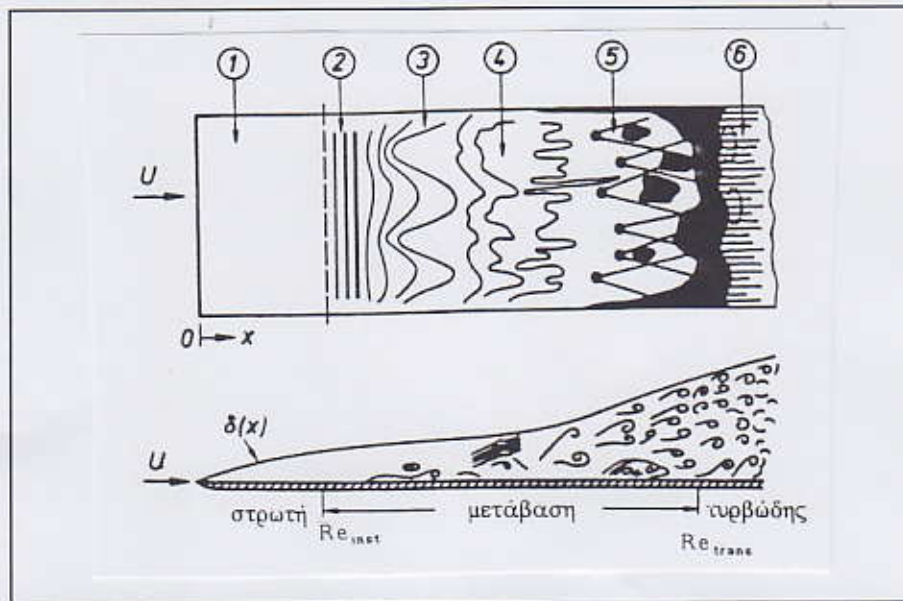
6.2 Τρόποι Μετάβασης της Ροής

Η μετάβαση από τη στρωτή στην τυρβώδη περιοχή μπορεί να γίνει γενικά με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Μια πρώτη συζήτηση επί του θέματος έχει γίνει στο Κεφάλαιο 1. Ο πρώτος τρόπος φέρεται ως "φυσική μετάβαση" (natural transition) και ξεκινά με μια ασθενή διαταραχή του στρωτού οριακού στρώματος που εξελίσσεται στην πλήρως τυρβώδη περιοχή μέσα από τη συνεχή ενίσχυση αυτών των διαταραχών. Μέσα στο οριακό στρώμα ενισχύονται τα κύματα Tollmien-Schlichting, ενώ η ροή από το σημείο που πρωτοεμφανίζονται διαταραχές με τάση ενίσχυσης μέχρι την τελική εμφάνιση της τύρβης περνά από διάφορα στάδια κατά μήκος του τοιχώματος. Τα στάδια αυτά παρουσιάζονται στο Σχήμα 6.3 (αφορά την απλούστερη περίπτωση ροής σε επίπεδη πλάκα, βλ. H. Schlichting, "Boundary Layer Theory", McGraw-Hill, 1960 και Σ. Τσαγγάρης, "Μηχανική των Ρευστών", Εκδόσεις Συμεών, 1995), όπου οι έξι αναγραφόμενες διαδοχικές φάσεις εξηγούνται στη συνέχεια.

1. Ευσταθής στρωτή ροή κοντά στην ακμή πρόσπτωσης.
2. Ασταθή διδιάστατα κύματα Tollmien-Schlichting.
3. Σχηματισμός τριδιάστατων ασταθών κυμάτων και μικροδινών τύπου φουρκέτας.
- 4α. Εκκλυση στροβίλων σε περιοχές υψηλών τοπικών διατμήσεων.
- 4β. Κλιμακωτή (τύπου καταρράκτη) έκκλυση στροβίλων σε πλήρως τριδιάστατες

διακυμάνσεις.

5. Σχηματισμός κηλίδων τύρβης σε τοπικά έντονες διακυμάνσεις.
6. Συγχώνευση των κηλίδων σε πλήρως τυρβώδη ροή.



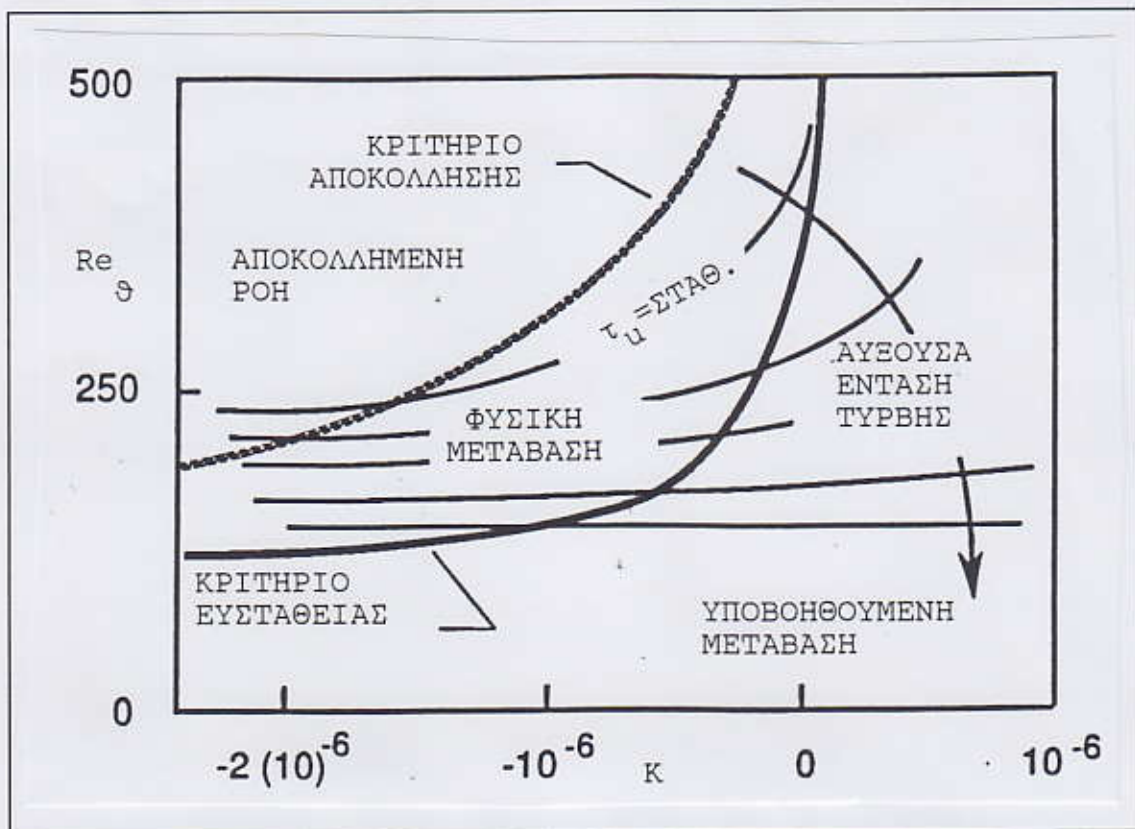
Σχήμα 6.3

Ο δεύτερος τρόπος μετάβασης συνήθως "υποβοηθούμενη μετάβαση" (bypass transition) και προκαλείται από ισχυρές διαταράξεις της εξωτερικής ροής (λόγω ενδεχόμενα της έντασης της τύρβης που αυτή έχει) ενώ παρακάμπτει πλήρως τα φαινόμενα που σχετίζονται με αστάθειες Tollmien-Schlichting. Ο τρόπος της υποβοηθούμενης (από την εξωτερική ροή) μετάβασης είναι τυπική περίπτωση που λαμβάνει χώρα στους αεροστροβίλους. Εξετάζοντας έναν αεροστρόβιλο, εκτός ίσως από την πρώτη βαθμίδα του συμπιεστή, η ένταση της τύρβης τ_u είναι σε υψηλά επίπεδα. Γενικά, μέσα στις πτερυγώσεις μπορεί να έχουμε επίπεδα τύρβης με $\tau_u = 5-10\%$ και στον ομόρρου οι τιμές να αυξάνονται σε επίπεδα 15-20%. Τα υψηλά επίπεδα τ_u δικαιολογούν ακριβώς την παρατήρηση ότι η μετάβαση στον αεροστρόβιλο γίνεται συνήθως "υποβοηθούμενη" από την εξωτερική ροή.

Ο τρίτος τρόπος μετάβασης είναι η "μετάβαση μέσω αποκόλλησης" (separated flow transition). Το στρωτό οριακό στρώμα αποκολλάται αρχικά και η μετάβαση γίνεται σε αποκολλημένη κατάσταση. Η μετάβαση μπορεί να συνοδεύεται ή όχι από αστάθειες ροής του τύπου Tollmien-Schlichting. Η αποκολλημένη ροή που έγινε τυρβώδης προσκολλάται στη συνέχεια. Η μετάβαση μέσω αποκόλλησης συμβαίνει επίσης στις συνιστώσες αεροστροβίλων, κυρίως στο συμπιεστή και στο στρόβιλο χαμηλής πίεσης. Γενικά, η μετάβαση μέσω αποκόλλησης αναμένεται να συμβεί σε περιπτώσεις όπου η ροή είναι ισχυρά επιβραδυνόμενη ή προφανώς ήδη αποκολλημένη. Στις περιπτώσεις αυτές είναι πάντως πιθανό να συμβεί και ο φυσικός τρόπος μετάβασης.

Όπως ήδη αναφέρθηκε στην Ενότητα 5.6, η μετάβαση μπορεί πρακτικά να συσχετισθεί με τον αριθμό Reynolds της ροής που βασίζεται στο πάχος ορμής του οριακού στρώματος (Re_θ ή Re_2). Το Σχήμα 6.4 παρουσιάζει ένα "χάρτη μετάβασης" με άξονες τον παραπάνω αριθμό Reynolds και την παράμετρο επιτάχυνσης K (acceleration parameter). Η τελευταία ποσότητα ορίζεται ως

$$K = \frac{\nu}{u^2} \frac{du}{dx} \quad (6.3)$$



Σχήμα 6.4

όπου x είναι η διαμήκης συντεταγμένη πάνω στο τοίχωμα του πτερυγίου και u η συνιστώσα κατά την κατεύθυνση x . Στο Σχήμα 6.4 διακρίνουμε τις περιοχές όπου συμβαίνει κάθε ένας από τους τρεις τρόπους μετάβασης που συζητήθηκαν προηγούμενα. Σημειώνεται ότι και οι δύο ποσότητες Re_θ και K που απεικονίζονται στο σχήμα αυτό αντιστοιχούν στην αρχή της μετάβασης. Η ποσότητα K εκφράζει φυσικά την επίδραση της επιτάχυνσης της εξωτερικής ροής στην εξέλιξη του οριακού στρώματος. Στο σχήμα παρουσιάζονται και ενδεικτικές γραμμές σταθερής έντασης της τύρβης της εξωτερικής ροής (γραμμές $\tau_u = \text{σταθερό}$) και δείχνεται η κατεύθυνση αύξουσας τ_u . Με δεδομένα τα χαρακτηριστικά της εξωτερικής ροής (K και τ_u), από το Σχήμα 6.4 εκτιμούμε την τιμή του Re_θ όπου θα συμβεί η μετάβαση.

Τοποθετώντας ένα τέτοιο "σημείο μετάβασης" πάνω στο χάρτη του Σχήματος 6.4 εκτιμούμε παράλληλα και τον τύπο της μετάβασης που ενδεχόμενα θα λάβει χώρα. Στο διάγραμμα υπάρχει η καμπύλη με την ένδειξη "Κριτήριο Ευστάθειας" που χωρίζει το διάγραμμα σε δύο περιοχές. Πάνω από την καμπύλη αυτή μπορεί να συμβεί αστάθεια που να συνοδεύεται από ενίσχυση κυμάτων Tollmien-Schlichting. Στο διάγραμμα παρουσιάζεται επίσης η καμπύλη με την ένδειξη **Κριτήριο Αποκόλλησης**. Πρόκειται για καμπύλη που δίνεται από την εμπειρική εξίσωση

$$(Re_{\theta}^2 K)_s = \lambda_{\theta s} = -0.082 \quad (6.4)$$

θα (έχει προταθεί από τον Thwaites, το 1949) πάνω από την οποία θα αποκολληθεί το στρωτό οριακό στρώμα και συνεπώς στην περίπτωση αυτή ενδεχόμενα θα λάβει χώρα μετάβαση μέσω αποκόλλησης. Η καμπύλη παρουσιάζεται με διακεκομμένη γραμμή για να δείξει ότι, μέχρι σήμερα, δεν είναι εξακριβωμένη η επίδραση που έχουν σ'αυτή διαφορετικές τιμές της έντασης της τύρβης τ_u .

Μέχρι τώρα η μετάβαση στις πτερυγώσεις του συμπιεστή ή του στροβίλου παρουσιάσθηκε ως ένα χρονικά μόνιμο φαινόμενο, διδιάστατου χαρακτήρα. Στην πράξη το φαινόμενο είναι πολύ περισσότερο πολύπλοκο. Είναι ένα στοχαστικό, τριδιάστατο και χρονικά μεταβαλλόμενο φαινόμενο το οποίο πρακτικά μπορεί να συμβεί είτε κατά την ορθή (από στρωτό σε τυρβώδες, αναφέρεται στη βιβλιογραφία και ως forward transition) είτε κατά την αντίστροφη φορά (από τυρβώδες σε στρωτό, relaminarization ή reverse transition). Λόγω του περιοδικού (χρονικά μη μόνιμου) χαρακτήρα της ροής στις πτερυγώσεις ενός αεριοστροβίλου, η λεγόμενη "περιοδική μετάβαση" (periodic transition) είναι ένας τέταρτος πιθανός τρόπος μετάβασης. Στην περίπτωση αυτή σημαντικό ρόλο στη μετάβαση παίζει ο ομόρρους που συναντά μια πτερύγωση και προέρχεται από την ανάντι πτερύγωση που φυσικά κινείται σε σχέση με την τρέχουσα. Μέχρι σήμερα γνωρίζουμε πολύ λίγα για τον τύπο αυτό μετάβασης (που μπορεί εκτός από τον ομόρρου να οφείλεται και στα κύματα κρούσης που προκλήθηκαν από την προηγούμενη πτερύγωση), εκτός ίσως από το γεγονός ότι φαίνεται να παρακάμπτει τις πρώτες φάσεις που διακρίναμε στη φυσική μετάβαση.

6.3 Η Μετάβαση Μέσω Αποκόλλησης

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μετάβαση από τη στρωτή στην τυρβώδη ροή η οποία λαμβάνει χώρα μέσω αποκόλλησης της ροής. Άμεσα συνυφασμένη με αυτή είναι η εμφάνιση της φυσαλίδας αποκόλλησης (separation bubble). Ο τρόπος αυτός της αποκόλλησης συναντάται συνήθως στους συμπιεστές και στους στροβίλους με χαμηλό λόγο πίεσης. Η πρόβλεψη και κυρίως ο έλεγχος αυτού του τρόπου της αποκόλλησης βοηθά το σχεδιαστή της στροβιλομηχανής να αυξήσει το βαθμό απόδοσής της. Επειδή τα πτερύγια των συμπιεστών συνήθως λειτουργούν με αποκόλληση της ροής σε κάποιο τμήμα τους και επειδή τα χαρακτηριστικά λειτουργίας τους σε συνθήκες διαφορετικές από αυτές για τις

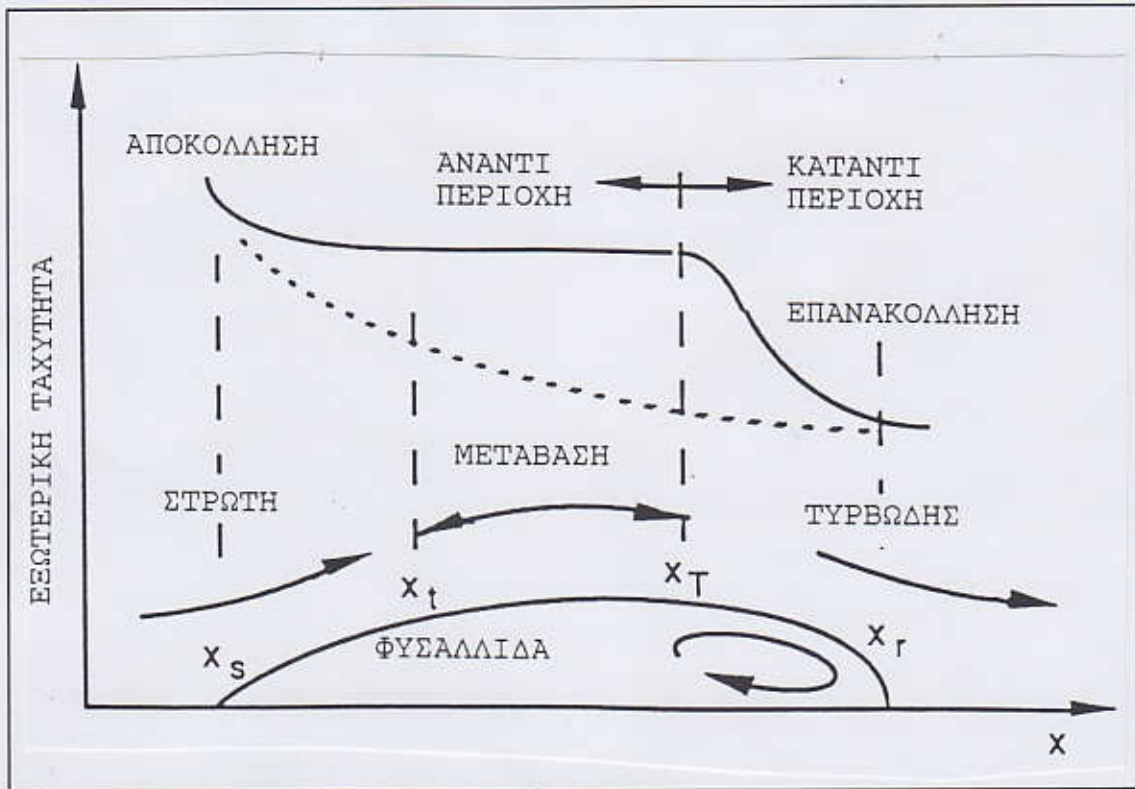
οποίες σχεδιάσθηκαν (off-design) εξαρτώνται κυρίως από το αποκολλημένο τμήμα του πεδίου ροής, γίνεται αντιληπτό ότι η σχεδίαση ενός πτερυγίου που θα έχει ελεγχόμενη μετάβαση μέσω φουσαλλίδας αποκόλλησης συντελεί στη βελτίωση του βαθμού απόδοσης.

Οι φουσαλλίδες αποκόλλησης (που ήδη αναφέρθηκαν ενδεικτικά στο Κεφάλαιο 1) διακρίνονται κυρίως ως μικρού και μεγάλου μήκους. Η διάκριση γίνεται κυρίως σε σχέση με την επίδραση που έχουν στη συνολική κατανομή πίεσης. Οι φουσαλλίδες μικρού μήκους διαταράσσουν τοπικά μόνο την κατανομή πίεσης κατά μήκος του πτερυγίου. Πρόκειται για φουσαλλίδες όπως αυτές που παρουσιάσθηκαν στο Σχήμα 1.7, όπου η κατανομή πίεσης πριν και μετά τη φουσαλίδα δεν αντιλαμβάνεται ουσιαστικά την ύπαρξή της. Οι φουσαλλίδες μεγάλου μήκους αλληλεπιδρούν με την εξωτερική ροή και κατά συνέπεια αλλοιώνουν την κατανομή πίεσης πριν και μετά την περιοχή εμφάνισής τους. Μικρές αλλαγές στη γωνία πρόσπτωσης ή στον αριθμό Reynolds της ροής σε ένα πτερύγιο μπορούν να μετατρέψουν μια φουσαλίδα μικρού μήκους σε μεγάλου μήκους ή το αντίστροφο. Το να μετατραπεί μια φουσαλίδα αποκόλλησης σε μεγάλου μήκους (άνοιγμα της φουσαλλίδας ή bursting) μπορεί να προκαλέσει δραματική μείωση στην άνωση του πτερυγίου και πιθανό να οδηγήσει σε απώλεια στήριξης (stall).

Τα βασικά χαρακτηριστικά μιας φουσαλλίδας στρωτής αποκόλλησης παρουσιάζονται στο Σχήμα 6.5. Η ροή αποκολλάται ως στρωτή και επανακολλάται ως τυρβώδης. Στην πράξη, πάνω σε ένα πτερύγιο στροβιλομηχανής η ροή είναι τριδιάστατη και χρονικά μη μόνιμη, αλλά εδώ θα μελετηθεί με συγκεκριμένες απλουστεύσεις. Το σημείο της αποκόλλησης (συμβολίζεται στο σχήμα με x_g) έχει διαμήκη κλίση πίεσης (ή αντίστοιχα διαμήκη κλίση της εξωτερικής ταχύτητας) που καθορίζεται κατά Thwaites από την εξίσωση (6.4). Μετά την αποκόλληση της ροής, η ροή χωρίζεται σε δύο τμήματα με διαφορετική κατανομή πίεσης σε κάθε ένα από αυτά. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.5, το πρώτο τμήμα έχει σταθερή εξωτερική ταχύτητα (άρα και πίεση), ενώ το δεύτερο τμήμα συνοδεύεται από πτώση της εξωτερικής ταχύτητας και ταυτόχρονα έντονη ανάκτηση της πίεσης. Η διάκριση αυτή είναι σε απόλυτη συμφωνία με τα όσα παρουσιάσθηκαν στο Σχήμα 1.7. Σύγχρονες θεωρίες περί της φουσαλλίδας αποκόλλησης υιοθετούν την ύπαρξη μιας ασταθούς στρωτής ροής μέχρι τη θέση x_f (Σχήμα 6.5) και την εμφάνιση τυρβωδών κηλίδων (spot) που βοηθούν στη μετάβαση. Η τελευταία λαμβάνει χώρα μεταξύ x_f και x_r . Μετά τη θέση x_r η ροή είναι πλέον τυρβώδης και ως τέτοια επανακολλάται.

Το Σχήμα 6.6 παρουσιάζει μια προσεκτική συλλογή από αντίστοιχα πειράματα. Στον οριζόντιο άξονα σχεδιάζεται ο αριθμός Reynolds της ροής που βασίζεται στο πάχος ορμής στο σημείο της αποκόλλησης (σημείο s και γι' αυτό θα συμβολίζεται με Re_{θ_s}). Στον κατακόρυφο άξονα παρουσιάζεται ένας αριθμός Reynolds που βασίζεται στην απόσταση ($x_T - x_g$) και θα συμβολίζεται με Re_{sT} . Από τα πέντε πειράματα που παρουσιάζονται, μόνο το τελευταίο είναι σε υψηλή τιμή της έντασης της τύρβης ($\tau_u = 2.8\%$). Όλα τα υπόλοιπα είναι σε πολύ μικρότερα επίπεδα τύρβης ($\tau_u = 0.2-0.5\%$). Παρόλα αυτά, έστω και αν καταρχή δεν

ταιριάζουν με τα επίπεδα τύρβης που συναντάμε σε βιομηχανικούς συμπιεστές και στροβίλους, τα συμπεράσματα που πηγάζουν από το Σχήμα 6.6 είναι αρκετά χρήσιμα.



Σχήμα 6.5

Τα περισσότερα από τα πειράματα που παρουσιάζονται στο Σχήμα 6.6 μπορούν να προσεγγισθούν με την ευθεία

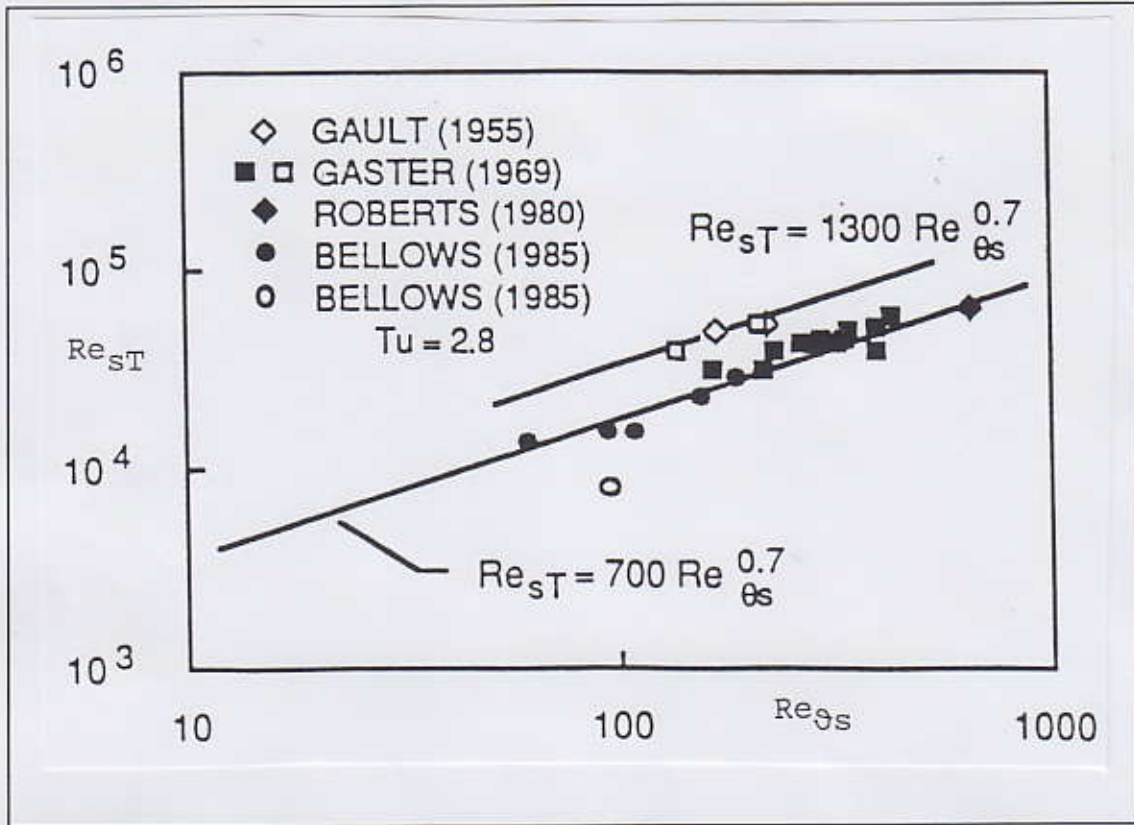
$$Re_{sT} = Re_T - Re_s = 700 Re_{\theta_s}^{0.7} \quad (6.5)$$

Όλα δε τα πειράματα που προσεγγίσθηκαν από την εξίσωση (6.5) χαρακτηρίζονται από φυσαλλίδες μικρού μήκους. Τα τέσσερα πειραματικά σημεία που κείνται υψηλότερα και τα οποία μπορούν να προσεγγισθούν με την ευθεία

$$Re_{sT} = Re_T - Re_s = 1300 Re_{\theta_s}^{0.7} \quad (6.6)$$

είναι αυτά που χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη φυσαλλίδας αποκόλλησης μεγάλου μήκους.

Σε συμφωνία με τα προηγούμενα, ο αριθμός Reynolds που αντιστοιχεί στο μήκος μεταξύ αποκόλλησης και αρχής της μετάβασης ($Re_{st} = Re_t - Re_s$) προσεγγίζεται και πάλι από ευθείες. Έτσι για φυσαλλίδες μικρού μήκους είναι



Σχήμα 6.6

$$Re_{st} = Re_t - Re_s = 300 Re_{\theta s}^{0.7} \quad (6.7)$$

ενώ για φουσαλλίδες μεγάλου μήκους είναι

$$Re_{st} = Re_t - Re_s = 1000 Re_{\theta s}^{0.7} \quad (6.8)$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις (6.4) ως (6.7) κατάλληλα μπορεί να προκύψει ο αριθμός Reynolds που χαρακτηρίζει το μήκος μετάβασης $x_T - x_i$, δηλαδή ο $Re_{iT} = Re_T - Re_i$. Τα πειράματα είναι αρκετά διασκορπισμένα αλλά γενικά μπορούμε να πούμε ότι το μήκος μετάβασης είναι σταθερό και ανεξάρτητο του μήκους της φουσαλλίδας. Ενδεικτικά

$$Re_{iT} = Re_t - Re_T = 400 Re_{\theta s}^{0.7} \quad (6.9)$$

Η σχέση (6.9) και η σχετική ανάλυση δείχνει ότι η διαφορά μεταξύ μικρού και μεγάλου μήκους φουσαλλίδων αποκόλλησης δε σχετίζεται με το μήκος μετάβασης αλλά αποκλειστικά με την έκταση που καταλαμβάνει το ασταθές στρωτό αποκολλημένο οριακό στρώμα.

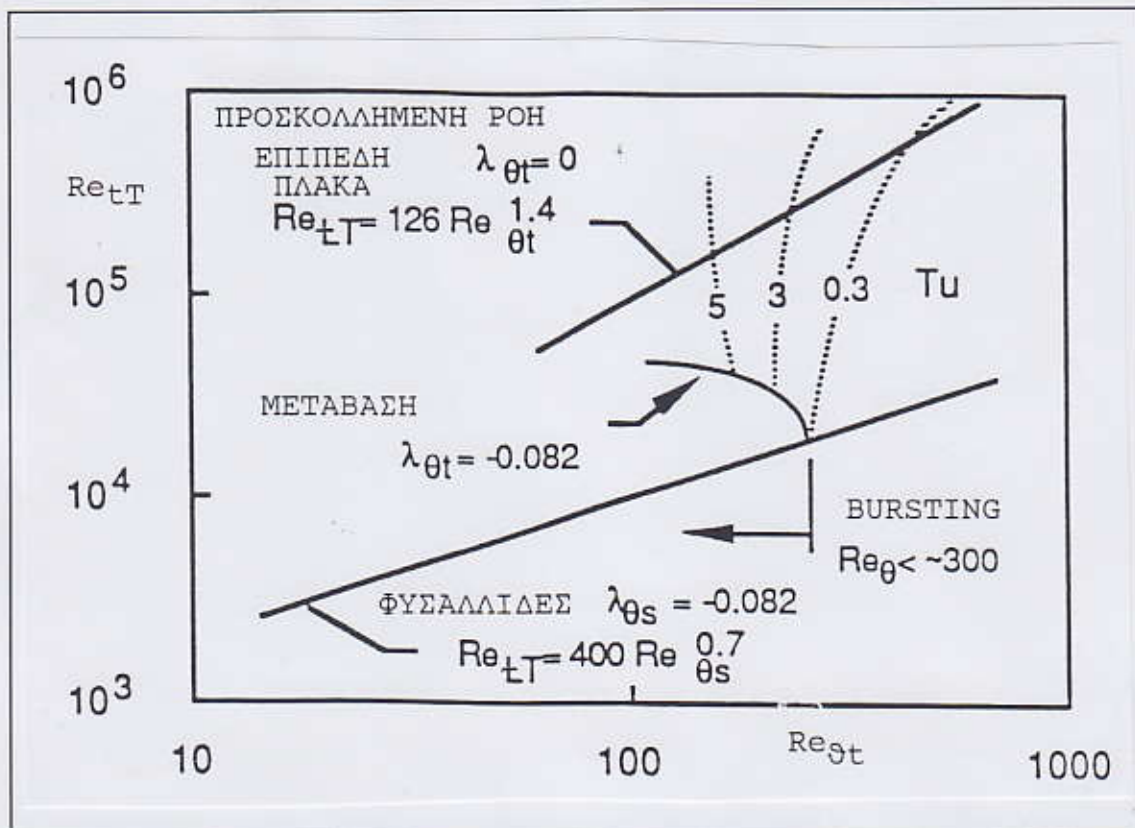
Η ανάλυση που προηγήθηκε βασίσθηκε σε μια περιορισμένη σειρά πειραμάτων και επομένως τα συμπεράσματά της πρέπει να αντιμετωπίζονται ως ενδεικτικά και όχι απόλυτα.

Για παράδειγμα, οι απλές σχέσεις (6.5) ως (6.9) που παρουσιάστηκαν δε φαίνονται να εξαρτώνται παραμετρικά από την τιμή της έντασης της τύρβης T_u .

Παρά την αβεβαιότητα που η προηγούμενη μαθηματική ανάλυση παρουσιάζει, είναι ενδιαφέρον να επιχειρήσουμε την απεικόνιση της μετάβασης (ανεξάρτητα του αν αυτή συνοδεύεται με αποκόλληση της ροής ή όχι) σε ενιαίο διάγραμμα. Ένα τέτοιο διάγραμμα δίνεται στο Σχήμα 6.7, όπου σχεδιάζεται ο αριθμός Reynolds Re_{tT} του μήκους μετάβασης ως συνάρτηση του αριθμού Reynolds του πάχους ορμής στη θέση που ξεκινά η μετάβαση. Η πληροφορία που παρουσιάζει το σχήμα αναλύεται στη συνέχεια. Χρησιμοποιείται ως παράμετρος η ποσότητα $\lambda_{\theta s}$ που έχει ορισθεί στη σχέση του Thwaites ως $Re_{\theta}^2 K$ στο σημείο αποκόλλησης της ροής. Θα αναγράφεται όμως ως $\lambda_{\theta t}$ και θα αντιστοιχεί στο σημείο έναρξης της μετάβασης αντί στην αποκόλληση, κάνοντας την παραδοχή ότι

$$Re_{\theta t} = Re_{\theta s}$$

Η παραδοχή αυτή είναι πειραματικά ελεγμένη, αφού το πάχος ορμής αλλάζει ελάχιστα μεταξύ του σημείου που αποκολλάται η ροή και του σημείου που ξεκινά η μετάβαση.



Σχήμα 6.7

Στο Σχήμα 6.7 απεικονίζεται αρχικά μια ευθεία γραμμή (στην πάνω περιοχή του σχήματος) που αντιστοιχεί στη μετάβαση για προσκολλημένη ροή σε επίπεδη πλάκα. Η περίπτωση αυτή χαρακτηρίζεται και από την τιμή $\lambda_{\theta t} = 0$ αφού η εξωτερική ροή είναι σταθερή και συνεπώς (βλέπε σχέση (6.3)) ισχύει $K=0$. Η εξίσωση της ευθείας αυτής έχει βρεθεί ότι είναι η

$$Re_{IT} = 126 Re_{\theta t}^{1.4} \quad (6.10)$$

Μετάβαση με θετική διαμήκη κλίση πίεσης ($dp/dx > 0$) συμβαίνει σε σημεία του διαγράμματος κάτω της ευθείας αυτής γραμμής. Αντίθετα, αν η διαμήκης κλίση πίεσης είναι αρνητική ($dp/dx < 0$) τότε η μετάβαση λαμβάνει χώρα σε σημεία του διαγράμματος πάνω από την ευθεία αυτή.

Η μετάβαση μέσω φουσαλλίδας αποκόλλησης (όταν η ένταση της τύρβης της εξωτερικής ροής είναι χαμηλή) διέπεται από την εξίσωση (6.9). Είναι η περίπτωση που αντιστοιχεί επίσης στο κριτήριο αποκόλλησης του Thwaites ($\lambda_{\theta s} = -0.082$, βλέπε εξίσωση (6.4)). Συγχρόνως σχεδιάζεται και μια καμπύλη που αντιστοιχεί στο μήκος μετάβασης για προσκολλημένες ροές, σε διάφορα επίπεδα έντασης της τύρβης, αλλά σε συνθήκες $\lambda_{\theta s} = -0.082$. Η καμπύλη αυτή διαφέρει από τη μετάβαση μέσω φουσαλλίδας αποκόλλησης και δείχνει ότι το μήκος μετάβασης είναι μικρότερο όταν δημιουργείται φουσαλλίδα αποκόλλησης από ότι αν η ροή είναι προσκολλημένη, έστω και αν οι παράμετροι $\lambda_{\theta t}$ και $\lambda_{\theta s}$ είναι ίδιες. Το σημείο τομής των δύο γραμμών (με ή χωρίς αποκόλληση) είναι γύρω στο $Re_{\theta t} = 300$. Αυτή είναι η μέγιστη τιμή που αντιστοιχεί στο άνοιγμα (bursting) της φουσαλλίδας. Κάτω από αυτή, μπορεί να υπάρχουν φουσαλλίδες μικρού ή μεγάλου μήκους.

Τέλος παρουσιάζεται και ένα σύνολο καμπυλών (παρουσιάζονται με διακεκομμένη γραμμή) που αντιστοιχούν στα μήκη μετάβασης προσκολλημένης ροής σε διάφορες τιμές της διαμήκης κλίσης πίεσης και διάφορες εντάσεις της τύρβης.

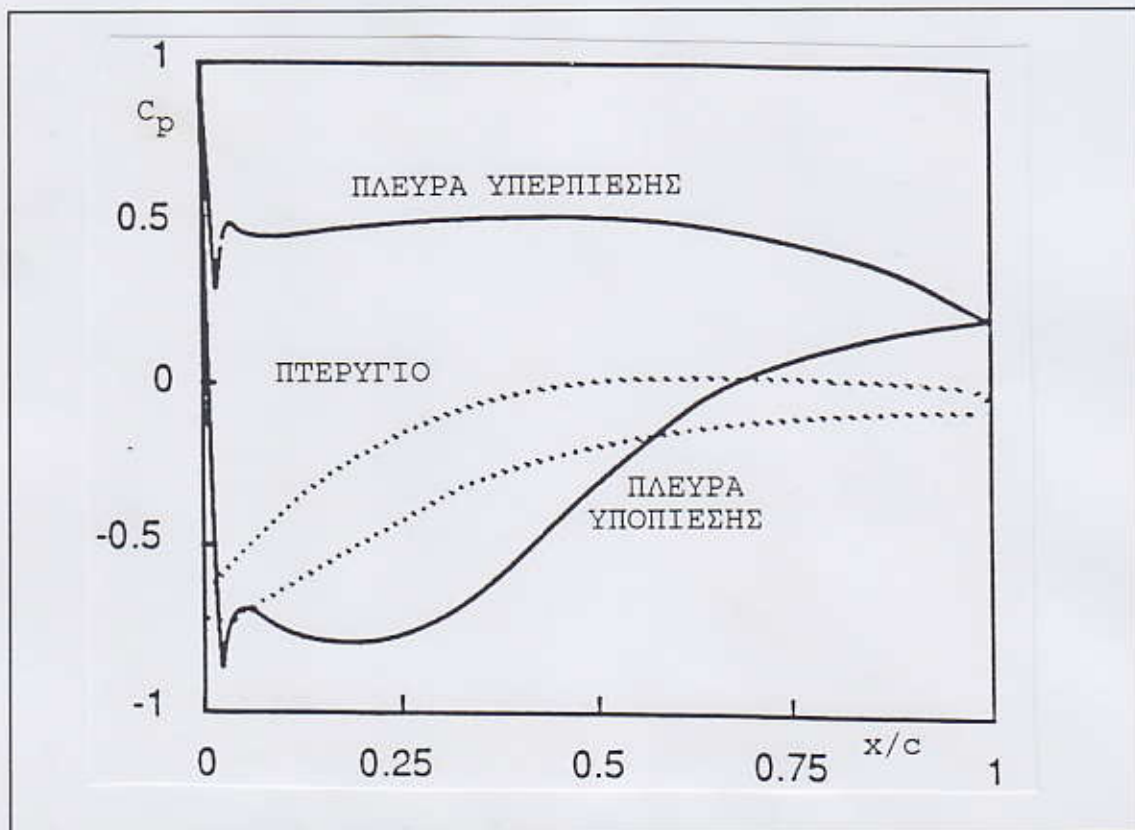
6.4 Η Μετάβαση σε Πτερυγώσεις Συμπιεστών

Η ροή σε μια πτερύγωση συμπιεστή είναι πολύπλοκη και περιέχει περιοχές όπου η ροή είναι έντονα τριδιάστατη λόγω της επίδρασης των τοιχωμάτων των κελυφών (endwall effects) αλλά και της ανάμιξης της ροής που διαρρέει το ακτινικό διάκενο με την κύρια ροή. Οι προαναφερθείσες δύο περιοχές συνοδεύονται με έντονες απώλειες. Παρόλα ταύτα, ακόμα και για πτερύγωση που λειτουργεί σε συνθήκες σχεδίασης, οι απώλειες που προκαλεί η τριβή στα πτερύγια μπορεί να είναι αρκετά σημαντική και να συμμετέχει μέχρι και κατά 50% στις συνολικές απώλειες της βαθμίδας. Εάν βέβαια η πτερύγωση λειτουργεί σε άλλες συνθήκες από αυτές για τις οποίες σχεδιάσθηκε (off-design) οι απώλειες αυτές γίνονται ακόμα πιο σημαντικές, κυρίως λόγω της μαζικής αποκόλλησης της ροής στα πτερύγια. Στους συμπιεστές (όπως και στα τμήματα χαμηλής πίεσης στροβίλων) η αποκόλληση

σχετίζεται με τη μετάβαση στην τυρβώδη ροή και για το λόγο αυτό η σχέση τους πρέπει να γίνει κατανοητή.

Ο βασικός ρόλος της μετάβασης σε ένα συμπίεστή δεν είναι μόνο για να ελεγχθούν οι απώλειες που προκαλούνται κατά τη λειτουργία σε συνθήκες σχεδίασης, αλλά και για να βελτιωθεί η συμπεριφορά του όταν λειτουργεί εκτός συνθηκών σχεδίασης.

Οι πτερυγώσεις των σύγχρονων συμπίεστών γίνονται έχοντας προδιαγράψει την κατανομή της ταχύτητας που θα δώσουν. Για να μπορέσει ο σχεδιαστής να προδιαγράψει την κατανομή αυτή (ας υποθέσουμε ότι ο σχεδιαστής διαθέτει τα μέσα υπολογισμού που από την κατανομή αυτή θα του δώσουν τη μορφή που πρέπει να έχει το πτερύγιο, ώστε πραγματικά να δίνει την επιθυμητή κατανομή ταχύτητας) πρέπει να έχει μια πολύ καλή γνώση της εξέλιξης του οριακού στρώματος πάνω στο πτερύγιο που θα προκληθεί με την κατανομή αυτή. Αφού μάλιστα ένας σύγχρονος συμπίεστής πρέπει να μπορεί να λειτουργεί σε ένα μεγάλο εύρος συνθηκών ροής (μικρούς ή μεγάλους αριθμούς Reynolds της ροής, διαφορετικούς αριθμούς Mach, θετικές ή αρνητικές γωνίες πρόσπτωσης της ροής και ίσως μεγάλης απόλυτης τιμής) ο σχεδιασμός του είναι μια λεπτή εργασία.



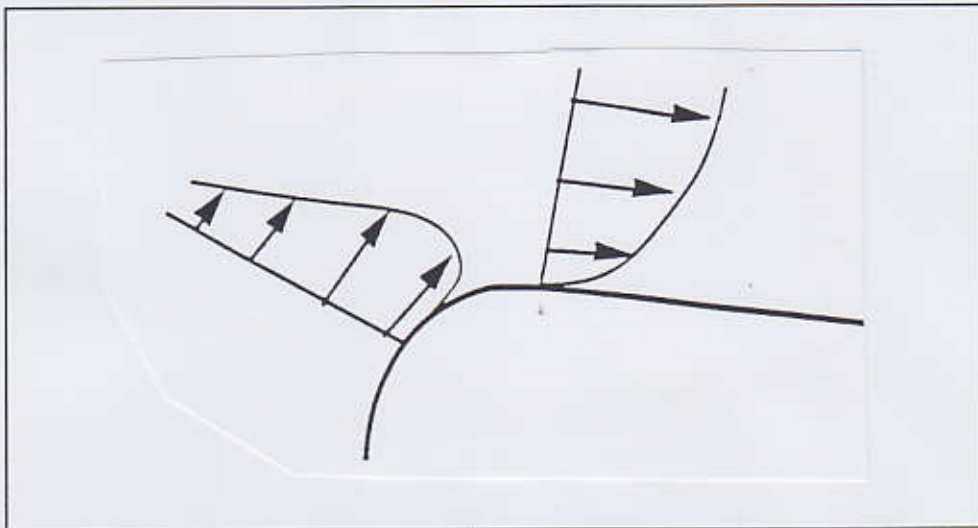
Σχήμα 6.8

Γενικά, η κατανομή πίεσης στο πτερύγιο ενός σύγχρονου συμπίεστή μοιάζει με αυτή

που παρουσιάζει το Σχήμα 6.8. Στο Σχήμα αυτό σχεδιάζεται η κατανομή του αδιάστατου συντελεστή πίεσης C_p που συνήθως ορίζεται από τη σχέση

$$C_p = \frac{P - P_{inlet}}{\frac{1}{2}(\rho V^2)_{inlet}} \quad (6.11)$$

ως συνάρτηση της αδιάστατης απόστασης κατά μήκος της χορδής (x/c). Ποσότητες που φέρουν το δείκτη "inlet" αναφέρονται προφανώς στην είσοδο της περύγωσης. Με τη βοήθεια του σχήματος αυτού θα γίνουν ορισμένες παρατηρήσεις που θα επιτρέπουν την εύκολη κατανόηση αντίστοιχων κατανομών. Έτσι, στην αρχή των δύο καμπυλών (που αντιστοιχούν η μιν πάνω στην πλευρά υπερπίεσης, η δε κάτω στην πλευρά υποπίεσης) παρατηρούνται δύο υπερακοντίσεις της πίεσης, πολύ περιορισμένου τοπικού χαρακτήρα. Αυτές οφείλονται στην απότομη αλλαγή της καμπυλότητας του περυγίου, πολύ κοντά στην ακμή προσβολής. Αυτό παρουσιάζεται ενδεικτικά στο Σχήμα 6.9.

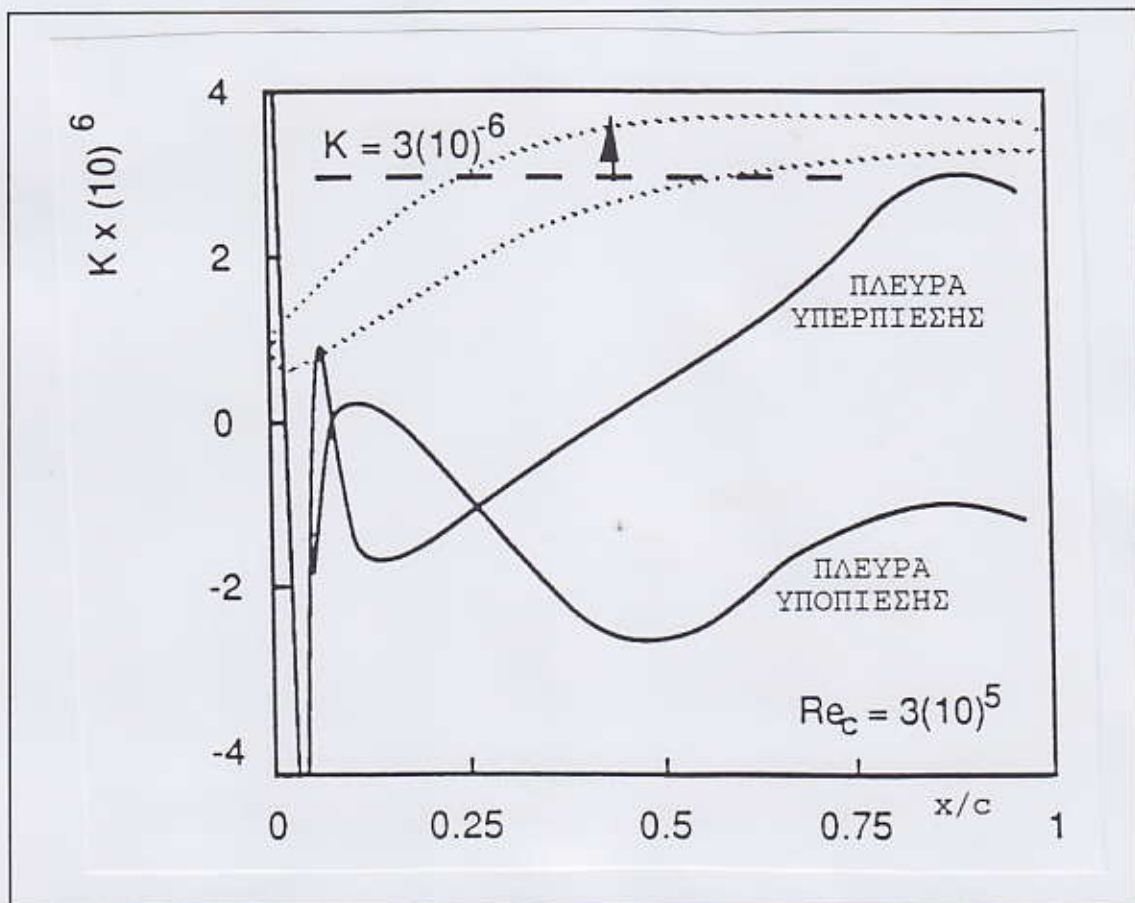


Σχήμα 6.9

Στην πλευρά υπερπίεσης και μετά την προαναφερθείσα υπερακόντιση, η πίεση αυξάνει μέχρι περίπου το μέσο του περυγίου. Στο υπόλοιπο μισό περίπου περύγιο, η πίεση βαίνει ελαττούμενη.

Στην πλευρά υποπίεσης και μετά την αντίστοιχη υπερακόντιση η πίεση ελαττώνεται μέχρι μια ελάχιστη τιμή και μετά αυξάνει εντονότατα. Στο τελευταίο τμήμα της πλευράς υποπίεσης η αύξηση της πίεσης είναι πολύ λιγότερο έντονη. Σχεδιάζοντας τη μορφή της πλευράς υποπίεσης έτσι ώστε να αντιστοιχεί σε μια τέτοια κατανομή πίεσης επιτυγχάνουμε τη μέγιστη δυνατή στροφή της ροής (ισοδύναμα, τη μέγιστη δυνατή αύξηση της πίεσης στη βαθμίδα) με τις μικρότερες δυνατές απώλειες που εξασφαλίζονται με ένα στρωτό οριακό στρώμα στο πρώτο τμήμα της πλευράς υποπίεσης και μετάβαση στην τυρβώδη ροή κοντά

στο σημείο της ελάχιστης πίεσης. Με τον τρόπο αυτό, η περιοχή της απότομης αύξησης της πίεσης (δηλαδή της απότομης επιβράδυνσης) ενεργεί σε ένα οριακό στρώμα που μόλις έγινε τυρβώδες και κατά συνέπεια είναι πολύ λεπτού πάχους και άρα αρκετά δύσκολο να αποκολληθεί. Επειδή όμως η επιβράδυνση είναι έντονη, προκαλείται γρήγορη αύξηση του πάχους του τυρβώδους οριακού στρώματος και για την αποφυγή μιας αποκόλλησης κοντά στην ακμή εκφυγής η διαμήκης κλίση πίεσης γίνεται περισσότερο ήπια στο τελευταίο τμήμα της πλευράς υποπίεσης. Από την ανάλυση αυτή γίνεται κατανοητή η σημασία της σωστής πρόβλεψης της θέσης μετάβασης ώστε το οριακό στρώμα να είναι ήδη τυρβώδες στην περιοχή της έντονης επιβράδυνσης.



Σχήμα 6.10

Στη συνέχεια σχεδιάζουμε την κατανομή της παραμέτρου επιτάχυνσης που αντιστοιχεί στο περυσίο και την κατανομή πίεσης του Σχήματος 6.8. Αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.10 και αντιστοιχεί σε αριθμό Reynolds με βάση της χορδής ίσο με $Re_c = 3 \times 10^5$. Οι πολύ έντονες μεταβολές στην κατανομή του K κοντά στην ακμή προσβολής (που, όπως εξηγήσαμε προηγούμενα, οφείλονται στις αλλαγές της καμπυλότητας) συνήθως προκαλούν μικρές φουσαλλίδες στρωτής αποκόλλησης στην ακμή προσβολής. Γενικά τέτοιες φουσαλλίδες δεν έχουν επίπτωση στις απώλειες του περυσίου και καθόλου ως μικρή επίδραση στην

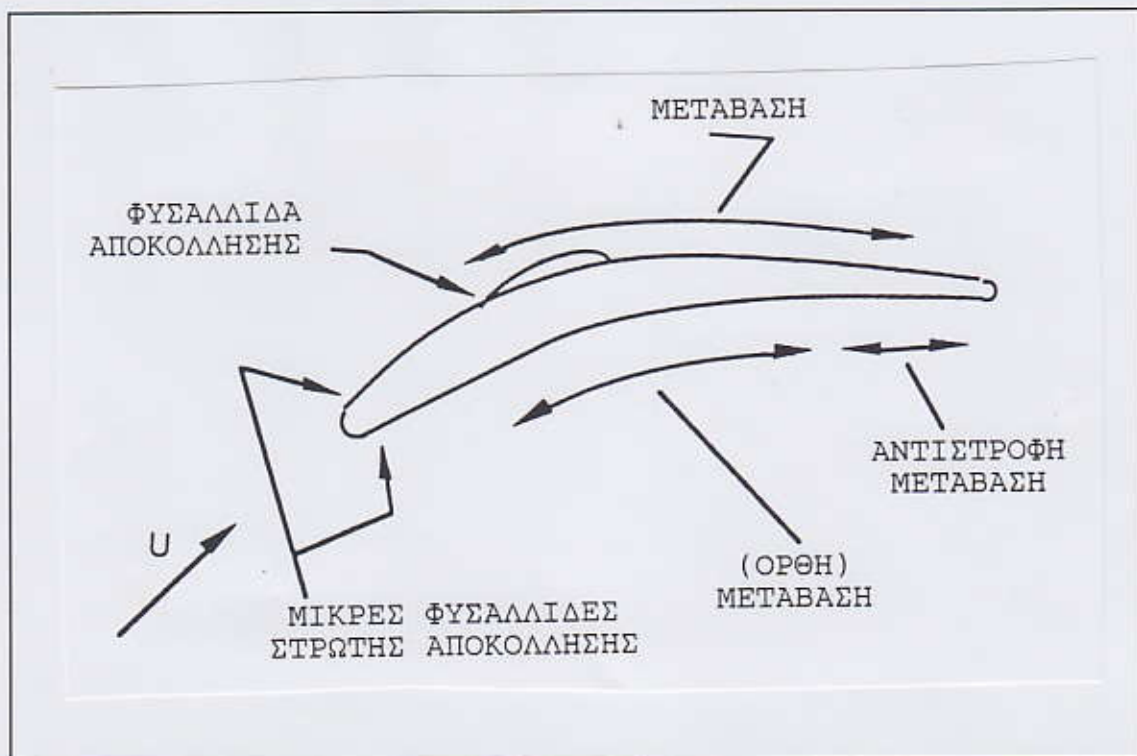
εξέλιξη του οριακού στρώματος που ακολουθεί. Βεβαίως, η τελευταία παρατήρηση παύει να ισχύει αν η πτερύγωση λειτουργεί αρκετά εκτός σημείου σχεδίασης. Στο ίδιο σχήμα παρουσιάζεται και το όριο τιμής του K πάνω από το οποίο μπορεί να συμβεί η **αντίστροφη μετάβαση** (reverse transition ή relaminarization), δηλαδή η ροή να ξαναγίνει στρωτή. Το όριο αυτό δίνεται ως

$$K = 3 \times 10^{-6} \quad (6.12)$$

Το όριο που δίνει η σχέση (6.12) είναι εμπειρικό, οφείλεται στους Schraub και Kline (1965) και πρέπει να γίνει κατανοητό ως:

- (α) αν η ροή είναι τυρβώδης και το K μεγαλύτερο της τιμής της σχέσης (6.12), τότε ενδεχόμενα η ροή να μεταβεί σε στρωτή κατάσταση και
- (β) αν η ροή είναι στρωτή και το K μεγαλύτερο της τιμής της σχέσης (6.12) τότε είναι αδύνατο να συμβεί μετάβαση σε τυρβώδη κατάσταση.

Επειδή, εξ ορισμού, η παράμετρος K είναι αντιστρόφως ανάλογη του αριθμού Re_c , τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να προσαρμοσθούν εύκολα όταν αλλάξει ο αριθμός Reynolds της ροής.



Σχήμα 6.11

Οι περιοχές όπου η ροή συνήθως υφίσταται μετάβαση σε τυρβώδη, σε ένα πτερύγιο συμπίεστη, σκιαγραφούνται στο Σχήμα 6.11. Στην πλευρά υπερπίεσης, η μετάβαση ξεκινά συνήθως πριν από το σημείο της μέγιστης πίεσης. Στην ίδια πλευρά και κοντά στην ακμή

εκφυγής, η παράμετρος επιτάχυνσης K μπορεί να λάβει πολύ υψηλές τιμές και ενδεχόμενα να συμβεί και αντίστροφη μετάβαση σε στρωτή ροή. Στην περίπτωση που συμβεί η αντίστροφη μετάβαση, τότε το μεγαλύτερο τμήμα της πλευράς υπερπίεσης θα βρίσκεται σε μεταβατική κατάσταση, από ή προς τη στρωτή ροή. Πρέπει όμως να τονισθεί ότι τα παραπάνω δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερη σημασία για το σχεδιαστή της στροβιλομηχανής αφού οι απώλειες που οφείλονται στη ροή όπως διαμορφώνεται στην πλευρά υπερπίεσης είναι συγκριτικά πολύ μικρότερες από αυτές της πλευράς υποπίεσης. Είναι δε η πλευρά υποπίεσης του πτερυγίου αυτή στην οποία πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή κατά τη φάση σχεδίασης.

Στην πλευρά υποπίεσης, η μετάβαση ξεκινά κοντά στο σημείο της ελάχιστης πίεσης και συμβαίνει υποβοηθούμενη από την τύρβη της εξωτερικής ροής ή μέσω αποκόλλησης. Ποιός τρόπος αποκόλλησης θα συμβεί εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds. Όπως προαναφέρθηκε, η σχεδίαση είναι επιτυχής αν η μετάβαση ολοκληρωθεί πριν την απότομη ανάκτηση πίεσης. Μετά τη μετάβαση, το τυρβώδες οριακό στρώμα συντηρείται συνήθως σε κατάσταση **ελεγχόμενης διάχυσης** (controlled diffusion) που πρακτικά σημαίνει ότι

$$KRe_\theta = \text{σταθερό}$$

Μια πρώτη γνωριμία με τη συμπεριφορά πτερυγίων συμπιεστή ελεγχόμενης διάχυσης έγινε στην Ενότητα 1.3. Ένα πτερύγιο ελεγχόμενης διάχυσης παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.5, ενώ η προκύπτουσα κατανομή του ισεντροπικού αριθμού Mach πάνω στα πτερύγια, για διάφορες θετικές και αρνητικές γωνίες πρόσπτωσης δίνονται στο Σχήμα 1.6. Η συνθήκη (6.13) της ελεγχόμενης διάχυσης εξασφαλίζει την ανάπτυξη του οριακού στρώματος με σταθερό παράγοντα μορφής και συντελεστή τριβής. Κατά τους παλαιότερους σχεδιασμούς πτερυγίων, η θετική διαμήκης κλίση πίεσης που ακολουθούσε ήταν πολύ πιο έντονη. Αυτή προκαλούσε μετάβαση που καταλάμβανε σημαντικό μήκος και πολλές φορές οδηγούσε σε αποκόλληση του τυρβώδους οριακού στρώματος κοντά στην ακμή εκφυγής. Σε αντίθεση με τη λειτουργία πτερυγίων ελεγχόμενης διάχυσης σε συνθήκες εκτός σχεδίασης, πτερυγίωσις σχεδιασμένες με τον παλαιότερο τρόπο που αναφέρθηκε χαρακτηρίζονται με βαθμιαία αύξηση απωλειών καθώς αυξάνει η γωνία πρόσπτωσης, μέχρι το σημείο κατά το οποίο η αποκόλληση θα συμβεί πριν από τη μετάβαση.

Στην πλευρά υποπίεσης μπορεί να συμβεί μετάβαση υποβοηθούμενη από την εξωτερική ροή ή με αποκόλληση. Θα διατυπώσουμε στη συνέχεια ένα εμπειρικό κριτήριο για την εύρεση του τρόπου μετάβασης που μπορεί να συμβεί σε μια πτερυγίωση. Γνωρίζουμε από τη σχέση (6.4) του Thwaites ότι η στρωτή ροή θα αποκολληθεί όταν οριακά (ως ισότητα) ικανοποιηθεί η ανισότητα

$$Re_\theta^2 K \leq -0.082$$

δηλαδή ότι

$$\lambda_{\theta s} = Re_{\theta s}^2 K_s = -0.082$$

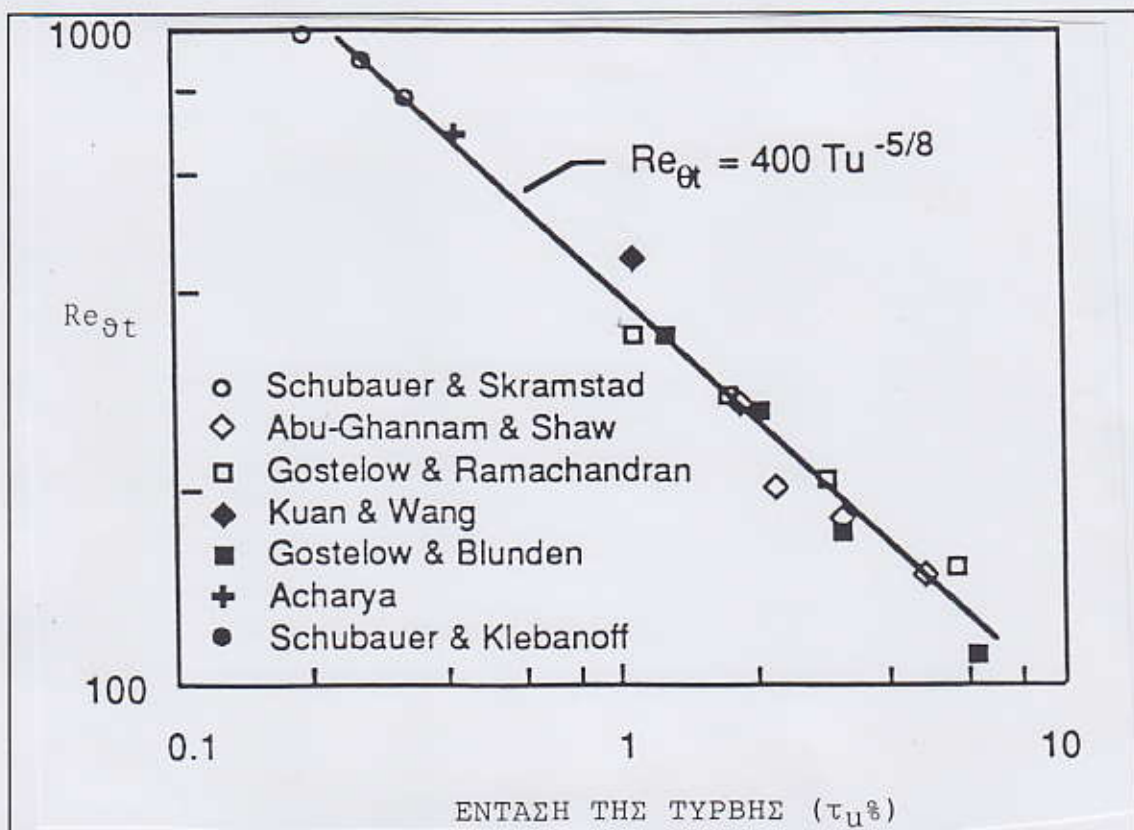
Επίσης, έχει γίνει και προηγούμενα η παραδοχή ότι

$$Re_{\theta t} = Re_{\theta s}$$

Συνδυάζοντας τις δυο αυτές σχέσεις καταλήγουμε ότι, για μια στρωτή ροή, η μετάβαση θα ξεκινά πριν την αποκόλληση της ροής (και συνεπώς θα είναι υποβοηθούμενη μετάβαση) όταν

$$K > K_{crit} = \frac{-0.082}{Re_{\theta t}^2} \quad (6.13)$$

όπου $Re_{\theta t}$ είναι ο αριθμός Reynolds του πάχους ορμής στη θέση που ξεκινά η μετάβαση.



Σχήμα 6.12

Η μελέτη πολλών πειραμάτων μετάβασης σε τυρβώδη ροή από την επίδραση της εξωτερικής τύρβης παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.12. Στο σχήμα αυτό φαίνεται ότι ο αριθμός Reynolds του πάχους ορμής στο σημείο έναρξης της μετάβασης ($Re_{\theta t}$) είναι υψηλότερος όσο ελαττώνεται η ένταση της τύρβης της εξωτερικής ροής. Η συσχέτιση των πειραματικών δεδομένων γράφεται στη μορφή

$$Re_{\theta_r} = 400 \tau_u^{-5/8} \quad (6.14)$$

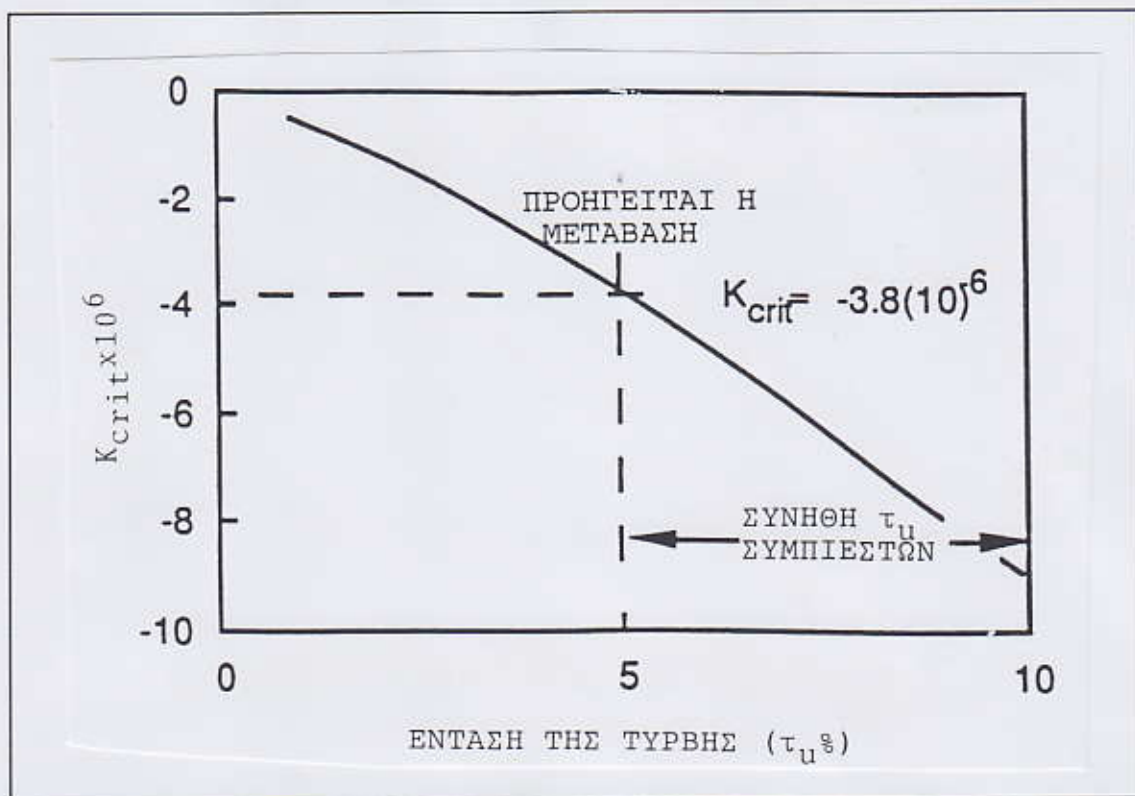
Τονίζεται ότι η ένταση τ_u χρησιμοποιείται στις σχέσεις αυτές ως ποσοστό (π.χ. $\tau_u=5$) και όχι ως απόλυτος αριθμός (π.χ. όχι ως $\tau_u=0.05$, για ένταση ίση με 5%).

Οι σχέσεις (6.13) και (6.14) συνδυάζονται και διατυπώνεται ότι η μετάβαση μπορεί να λάβει χώρα πριν την αποκόλληση της ροής αν

$$K > K_{crit} = -5.13 \times 10^{-7} \tau_u^{5/4} \quad (6.15)$$

Η σχέση (6.15) παριστάνεται γραφικά στο Σχήμα 6.13, για ένταση της τύρβης της εξωτερικής ροής στην περιοχή $0 \leq \tau_u \leq 10\%$. Πάνω από τη γραμμή που σχεδιάζεται στο σχήμα αυτό, η μετάβαση προηγείται της αποκόλλησης. Κάτω από αυτή, η αποκόλληση προηγείται της μετάβασης. Συνήθως, σε ένα συμπίεστη η ένταση της τύρβης είναι μεγαλύτερη του 5%, από το σχήμα αυτό φαίνεται ότι (με βάση την τιμή $\tau_u=5\%$)

$$K_{crit} < -3.8 \times 10^{-6}$$

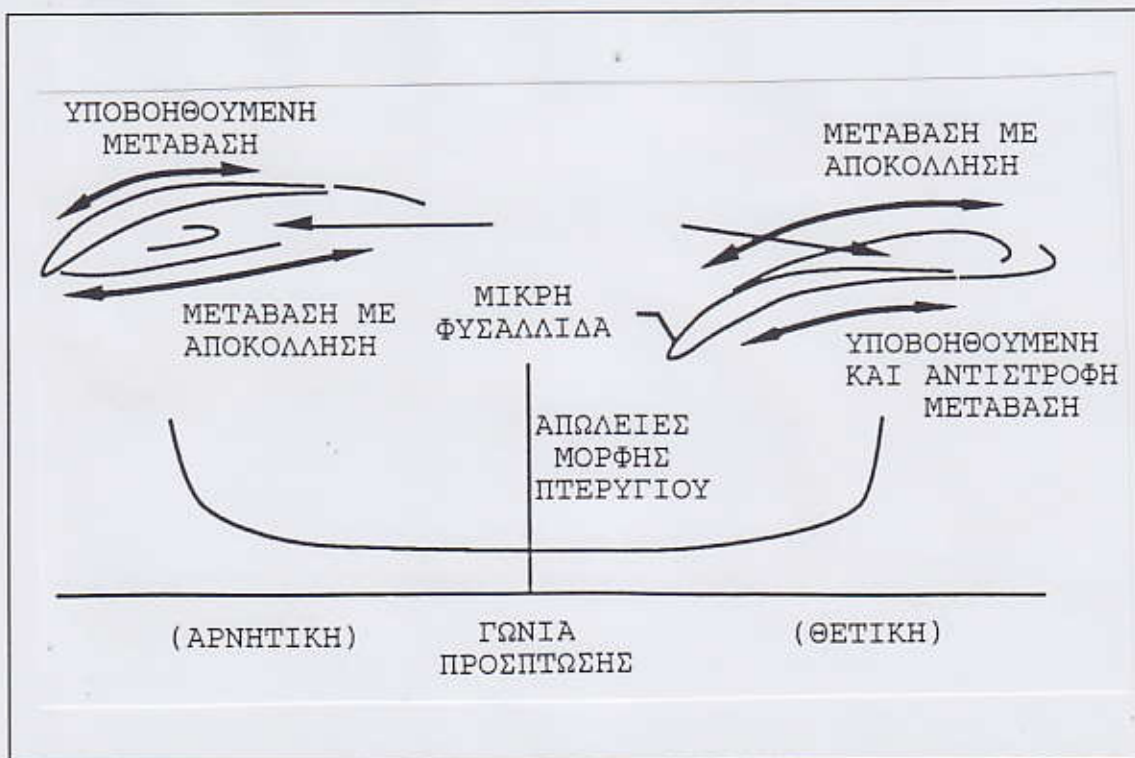


Σχήμα 6.13

Εξετάζοντας ξανά το Σχήμα 6.10 που αναλύσαμε προηγουμένα, προκύπτει ότι για την περύγωση αυτή, στην πλευρά υποπίεσης, η μετάβαση θα προηγείται της αποκόλλησης αφού

παντού $K > -3.8 \times 10^{-6} > K_{crit}$. Εξαιρέση αποτελεί η περιοχή της ακμής προσβολής όπου μπορεί να λάβει χώρα φουσαλλίδα στρωτής αποκόλλησης, όπως άλλωστε προαναφέρθηκε. Εάν βέβαια τα ίδια πειράματα είχαν γίνει με πολύ μικρότερη ένταση τύρβης (λ.χ. $\tau_u = 1\%$), θα προέκυπτε η κρίσιμη τιμή $K_{crit} = -5.1 \times 10^{-7}$, οπότε το μεγαλύτερο μέρος της πλευράς υποπίεσης θα είχε $K < K_{crit}$ και η αποκόλληση θα προηγείτο της μετάβασης. Για το λόγο αυτό, πειράματα για πτερυγώσεις συμπίεστων που έχουν κατά καιρούς γίνει με εξαιρετικά χαμηλή ένταση της τύρβης, μπορούν να οδηγήσουν σε εσφαλμένα συμπεράσματα.

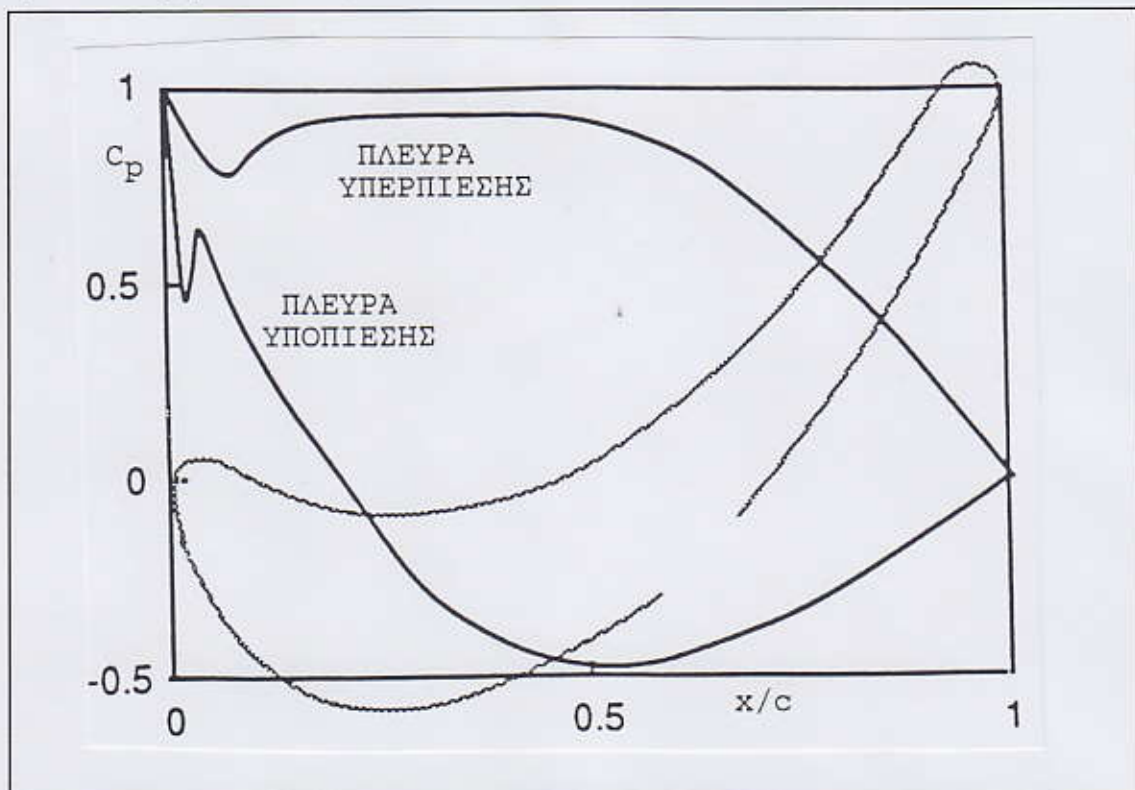
Μεταξύ λειτουργίας σε συνθήκες σχεδίασης και εκτός αυτών, οι περιοχές μετάβασης και αποκολλημένης ροής μεγαλώνουν σημαντικά. Σε συνθήκες αρκετά μακριά από το σημείο σχεδίασης αναμένονται ιδιαίτερα μεγάλες περιοχές αποκόλλησης της ροής. Αυτό φαίνεται ποιοτικά στο Σχήμα 6.14. Στις συνθήκες αυτές, η παράμετρος επιτάχυνσης γίνεται πολύ μικρότερη της κρίσιμης τιμής της ($K < K_{crit}$) και η αποκόλληση συμβαίνει πριν τη μετάβαση. Όπως φαίνεται και από το σχήμα, σε μεγάλες αρνητικές τιμές της γωνίας πρόσπτωσης η μαζική αποκόλληση θα παρουσιασθεί στην πλευρά υπερπίεσης. Το αντίθετο συμβαίνει σε μεγάλες θετικές τιμές της γωνίας πρόσπτωσης. Στις μεγάλες θετικές γωνίες πρόσπτωσης θα εμφανισθεί συνήθως μια μικρή φουσαλλίδα στρωτής αποκόλλησης στην περιοχή της ακμής προσβολής, η οποία συνήθως παύει να υπάρχει στις μεγάλες αρνητικές γωνίες πρόσπτωσης. Εστω και αν στο Σχήμα 6.14 σχεδιάζονται δυο ακραίες καταστάσεις, πρέπει να έχουμε υπόψη ότι σε ενδιάμεσες γωνίες πρόσπτωσης, η αποκολλημένη ροή μπορεί να επανακολληθεί ως τυρβώδης, μετά από μια εκτεταμένη περιοχή μετάβασης και αποκόλλησης.



Σχήμα 6.14

6.5 Η Μετάβαση σε Πτερυγώσεις Στροβίλων

Η μελέτη της μετάβασης σε πτερυγώσεις στροβίλων έχει προχωρήσει σε σημαντικό βαθμό αφού δεν αντιμετωπίσε προβλήματα που σχετίζονται λ.χ. με εκτεταμένες αποκολλημένες περιοχές της ροής, όπως στους συμπιεστές. Παίρνοντας υπόψη ότι ο ρυθμός μεταφοράς της θερμότητας είναι τρεις με πέντε φορές υψηλότερος στην τυρβώδη περιοχή, φαίνεται καθαρά η σημασία της θέσης μετάβασης. Στα τμήματα υψηλής πίεσης (ΥΠ) ενός στροβίλου η θέση της μετάβασης επηρεάζει τα θερμικά φορτία στα πτερύγια, με εξαίρεση τις σύγχρονες πτερυγώσεις που ψύχονται με τη ροή λεπτών στρωμάτων ψυχρού ρεύματος (film-cooled-turbines) οι οποίες δεν επηρεάζονται τόσο πολύ από τη θέση μετάβασης. Στα τμήματα χαμηλής πίεσης (ΧΠ) των στροβίλων, η ροή είναι μάλλον διδιάστατη και σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds, οπότε η σημασία της μετάβασης στην τυρβώδη ροή είναι μεγάλη. Γενικά, για τους στροβίλους ΧΠ, ισχύουν τα περισσότερα από αυτά που αναφέρθηκαν προηγούμενα για τους συμπιεστές. Η ανάλυση που θα ακολουθήσει να αντιμετωπίσει χωριστά το στρόβιλο ΥΠ και το στρόβιλο ΧΠ.

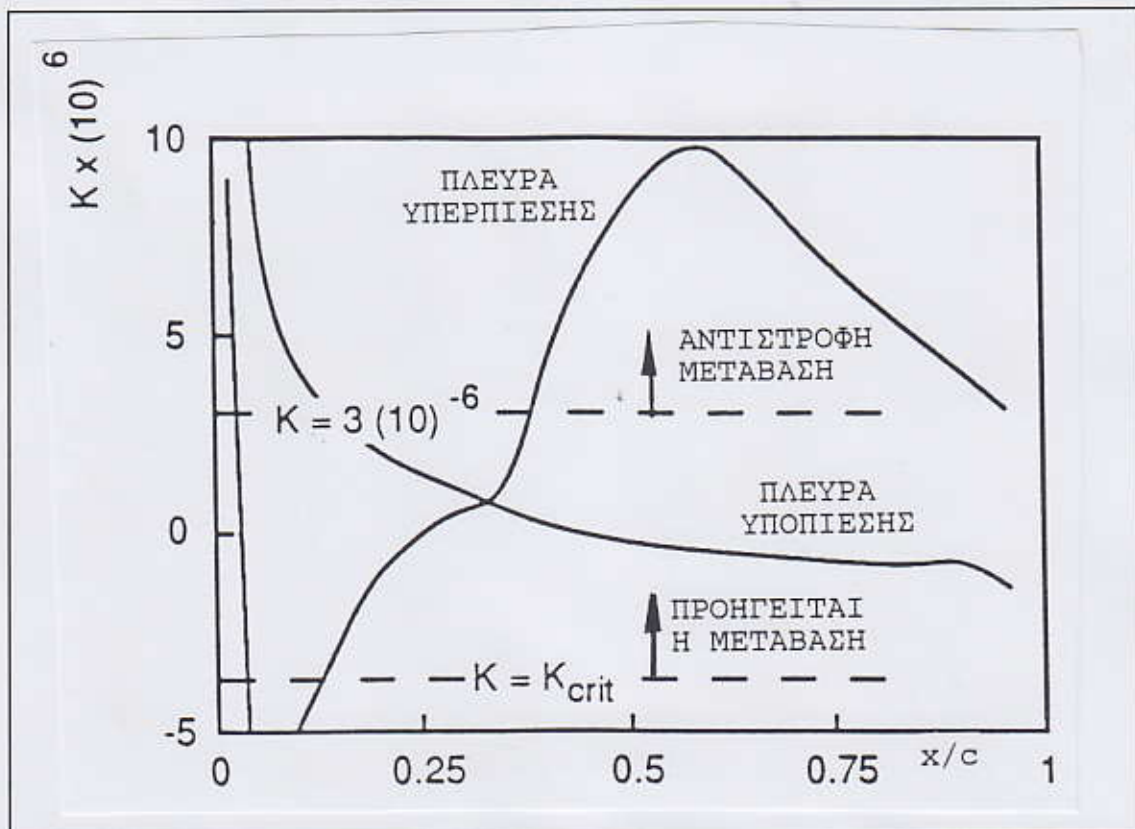


Σχήμα 6.15

Το Σχήμα 6.15 δείχνει την κατανομή του συντελεστή πίεσης στο μέσο ενός τυπικού πτερυγίου στροβίλου ΥΠ. Συγκεκριμένα, το πτερύγιο που σχεδιάζεται στο σχήμα είναι από την ακίνητη πτερυγώση στροβίλου, της δεύτερης βαθμίδας. Στην πλευρά υπερπίεσης μετά μια αρχική τοπική μεταβολή, η πίεση παραμένει σταθερή μέχρι περίπου το μέσο της χορδής και μετά ελαττώνεται. Στην πλευρά υποπίεσης, από την αρχή έχουμε ελάττωση της πίεσης

(favorable pressure gradient, δηλ. επιταχυνόμενη ροή), μέχρι περίπου το μέσο της χορδής. Στη συνέχεια ακολουθεί μια ήπια ανάκτηση της πίεσης (adverse pressure gradient). Ένα πρώτο ενδιαφέρον σημείο για το σχεδιαστή του στροβίλου είναι τα σχετικά μήκη της χορδής για τη θετική και την αρνητική διαμήκη κλίση της πίεσης.

Όπως παρατηρούμε και από το Σχήμα 6.15, υπερακοντίσεις στην κατανομή πίεσης συμβαίνουν στην πλευρά υπερπίεσης και στην πλευρά υποπίεσης. Οφείλονται στην αλλαγή καμπυλότητας της επιφάνειας (όπως και στο συμπιεστή), αλλά αυτή στο στρόβιλο ΥΠ είναι πιο μεγάλης έκτασης αφού τα πτερύγια έχουν σημαντικό πάχος κοντά στην ακμή προσβολής για να δεχθούν έντονα θερμικά φορτία ή/και να χωρέσουν εσωτερικά συστήματα ψύξης. Όπως και στο συμπιεστή, έτσι και εδώ είναι πιθανό να εμφανισθούν μικρής σημασίας φουσαλλίδες στρωτής αποκόλλησης κοντά στην ακμή προσβολής, εκτός βέβαια αν υπάρχει ψύξη με περιρρέον λεπτό υγρό στρώμα (film).



Σχήμα 6.16

Το Σχήμα 6.16 παρουσιάζει την αντίστοιχη κατανομή της παραμέτρου επιτάχυνσης. Στην περίπτωση αυτή, ο αριθμός Reynolds που βασίζεται στη χορδή είναι $Re_c = 6 \times 10^5$. Ένας πρακτικός τρόπος να γενικεύσουμε τα συμπεράσματα που θα βγουν από το σχήμα αυτό για άλλους αριθμούς Reynolds, είναι να πολλαπλασιάσουμε τις ενδείξεις του σχήματος με τον αντίστροφο του λόγου των αριθμών Reynolds (βλέπε εξήγηση στην προηγούμενη ενότητα). Στο Σχήμα 6.16 παρουσιάζονται δυο χαρακτηριστικά κατώφλια που μπορούν να ορισθούν για την παράμετρο επιτάχυνσης K . Σε αντιστοιχία με τα όσα αναφέρθηκαν για τους

συμπιεστές, αυτά είναι:

(α) το κατώφλι της αντίστροφης μετάβασης, η οποία μπορεί να συμβεί αν

$$K > 3 \times 10^{-6} \quad (6.16)$$

(β) το κατώφλι K_{crit} , το οποίο επιτρέπει την αποκόλληση να συμβεί πριν από τη μετάβαση όταν

$$K < K_{crit} = -3.8 \times 10^{-6} \quad (6.17)$$

όπως αυτό υπολογίσθηκε για τ_u περίπου ίσο με 5%.

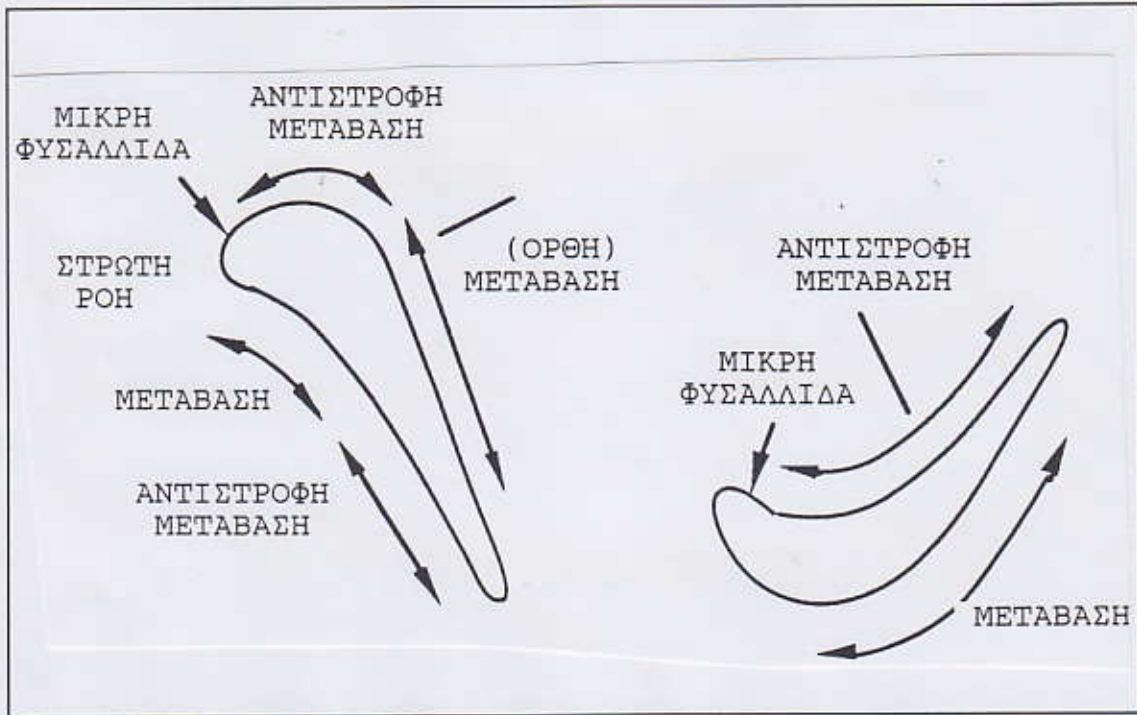
Η παράμετρος επιτάχυνσης είναι μεγαλύτερη του κατωφλίου (6.16) κοντά στην ακμή προσβολής στην πλευρά υποπίεσης και στο τελευταίο ήμισυ της πλευράς υπερπίεσης. Η ίδια παράμετρος είναι μικρότερη του κριτηρίου που ορίζει η (6.17) κοντά στην ακμή προσβολής, πάνω στην πλευρά υπερπίεσης. Αν η ροή αποκολληθεί στην περιοχή αυτή και προσκολληθεί σε επόμενη θέση της πλευράς υπερπίεσης, είναι σχεδόν σίγουρο ότι αργότερα θα ξαναγίνει στρωτή, μέσω της αντίστροφης μετάβασης. Τα στοιχεία αυτά είναι τυπικά για τις περισσότερες πτερυγώσεις στροβίλων ΥΠ.

Στην πλευρά υποπίεσης, η θετική διαμήκης κλίση πίεσης που ακολουθεί το σημείο ελάχιστης τιμής της πίεσης είναι ήπια και επειδή $K > K_{crit}$, η μετάβαση αναμένεται να λάβει χώρα πριν την αποκόλληση. Το μήκος μετάβασης εξαρτάται από το από πού θα ξεκινήσει η μετάβαση. Για το σημείο έναρξης της μετάβασης μπορεί να χρησιμοποιηθεί το εμπειρικό κριτήριο που απορρέει από τη σχέση (6.14) για μια τυπική τιμή $\tau_u = 5\%$, δηλαδή

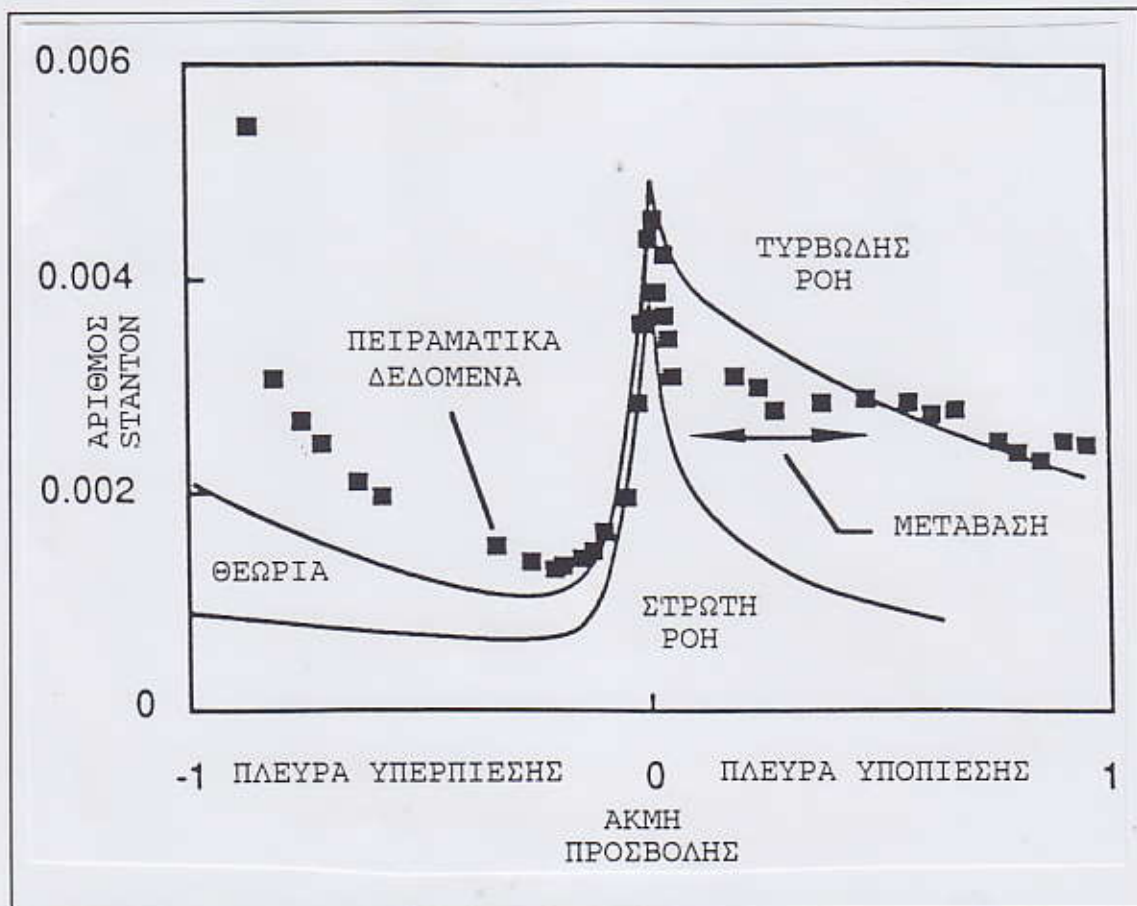
$$Re_{\theta r} \sim 150 \quad (6.18)$$

Αν η μετάβαση αρχίσει πριν το σημείο ελάχιστης πίεσης το μήκος της θα είναι μεγαλύτερο από το αν συμβεί μετά το σημείο αυτό.

Οι δυο τυπικές περιπτώσεις εξέλιξης του οριακού στρώματος σε μια πτερύγωση στροβίλου ΥΠ φαίνονται στο Σχήμα 6.17. Οι δυο περιπτώσεις ξεχωρίζουν από τη θέση της φυσαλλίδας αποκόλλησης. Στην πρώτη περίπτωση αυτή εμφανίζεται στην πλευρά υποπίεσης και η ροή προσκολλάται ως τυρβώδης. Στη δεύτερη περίπτωση η φυσαλλίδα στρωτής αποκόλλησης εμφανίζεται στην πλευρά υπερπίεσης και η τυρβώδης ροή μετά που προσκολληθεί υφίσταται αντίστροφη μετάβαση. Και στις δυο περιπτώσεις το κριτήριο για να ξεκινήσει η αντίστροφη μετάβαση είναι όταν $K > 3 \times 10^{-6}$. Επειδή στο στρόβιλο η μετάδοση θερμότητας είναι πρωτεύουσας σημασίας, το Σχήμα 6.18 παρουσιάζει την κατανομή του αριθμού Stanton στις πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης. Από το σχήμα αυτό φαίνεται η υπερακόντιση του αριθμού Stanton κοντά στην ακμή προσβολής και τα θεωρητικά όρια για τυρβώδη ή στρωτή ροή σε κάθε πλευρά. Υπενθυμίζεται ότι ο αριθμός Stanton είναι μια αδιάστατη έκφραση της μετάδοσης θερμότητας στην επιφάνεια των πτερυγίων.

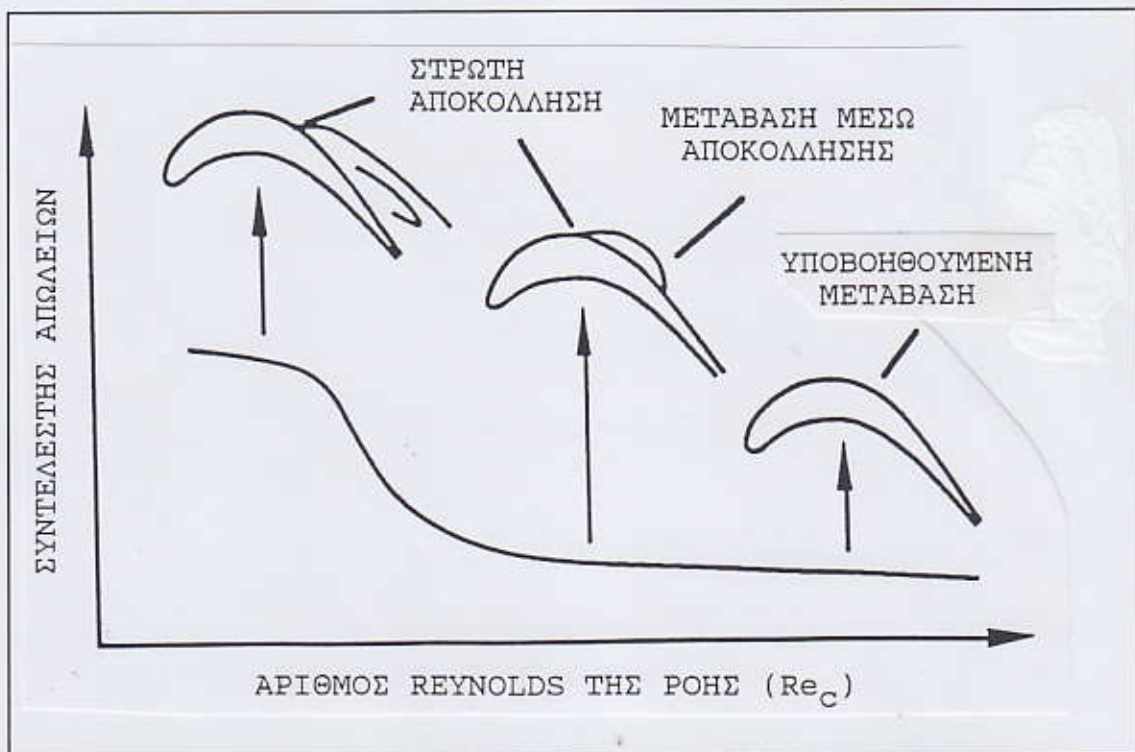


Σχήμα 6.17



Σχήμα 6.18

μεγαλύτερες. Για ακόμα μικρότερους αριθμούς Reynolds της ροής, το στρωτό τμήμα του οριακού στρώματος είναι σημαντικό και συνήθως συμβαίνει στρωτή αποκόλληση. Αυτή προφανώς συνοδεύεται με αυξημένες απώλειες αφού συνήθως η ροή δεν προσκολλάται πριν από την ακμή εκφυγής.



Σχήμα 6.20

Με βάση την προηγούμενη συζήτηση, ο σχεδιαστής μιας πτερυγώσης στροβίλου ΧΠ συνήθως επιδιώκει μια σύντομη μετάβαση μέσω αποκόλλησης αλλάζοντας την καμπυλότητα της επιφάνειας του πτερυγίου (προκαλώντας συνεπώς τοπική μεταβολή στο K), έτσι ώστε να κρατηθούν οι απώλειες σε χαμηλά επίπεδα.

Για εμβάθυνση στην ύλη του Κεφαλαίου αυτού συνιστάται η εργασία:

R.E. Mayle, "The Role of Laminar-Turbulent Transition in Gas Turbine Engines",
ASME Paper 91-GT-261.

και ορισμένες από τις εργασίες στις οποίες κάνει αναφορά η παραπάνω δημοσίευση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΟΙ ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΥΣΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΙΣ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΕΣ

7.1 Εισαγωγή στις Δευτερεύουσες Ροές και στις Απώλειές τους

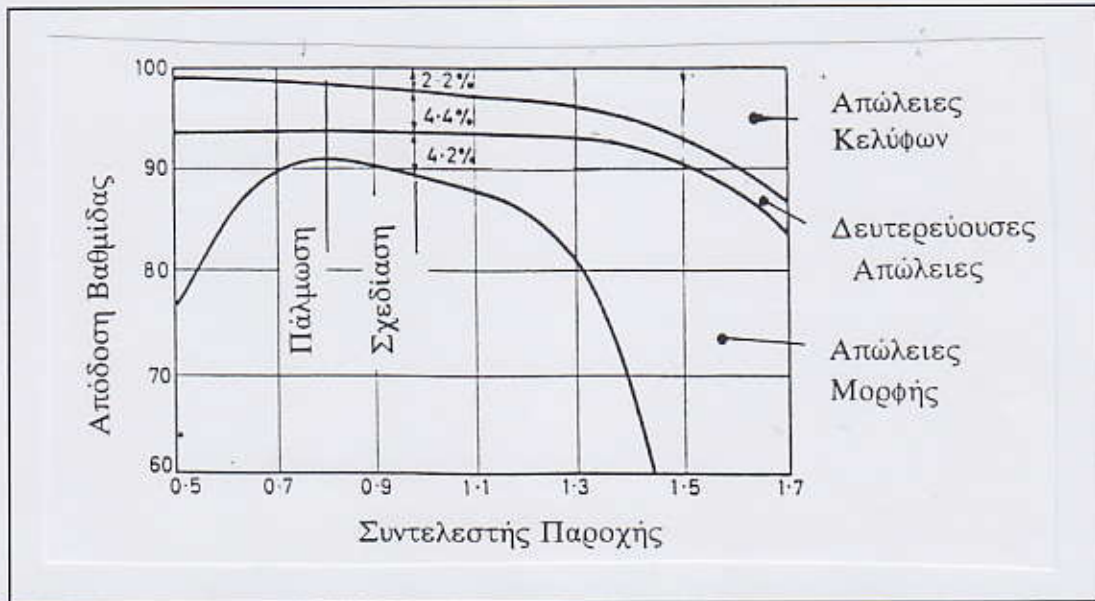
Οι διαφορικές μέθοδοι που επιλύουν τις εξισώσεις Navier-Stokes μπορούν να προβλέψουν, εκτός από τη μορφή του ροϊκού πεδίου που δημιουργείται μέσα σε μια πτερύγωση στροβιλομηχανής, και τις απώλειες της πτερύγωσης αυτής. Βεβαίως, η σωστή πρόβλεψη των απωλειών προϋποθέτει ένα χωρικά σωστά μοντέλο (λ.χ. την πλήρως τριδιάστατη επίλυση του πεδίου ροής ή την υπό σωστές προϋποθέσεις διαδοχική επίλυση διδιάστατων προβλημάτων στις από-πτερύγιο-σε-πτερύγιο επιφάνειες και στις μεσημβρινές επιφάνειες) και ένα επαρκές μοντέλο τύρβης. Η γνώση των συνολικών απωλειών σε ένα συμπιεστή είναι πρωτεύουσας σημασίας και μπορεί να αντιμετωπισθεί ευκολότερα αν οι απώλειες ή η απόδοση όλων των εμπλεκόμενων βαθμίδων είναι γνωστή. Οι απώλειες, στη μορφή κυρίως απωλειών ολικής πίεσης, οφείλονται σε τρία κυρίως αίτια μέσα σε μια πτερύγωση.

- (1) από τις απώλειες μορφής, οι οποίες δημιουργούνται πάνω στα τοιχώματα του πτερυγίου
- (2) από τις απώλειες στα δύο κελύφη της μηχανής και
- (3) από τις δευτερεύουσες απώλειες, στις οποίες μπορούμε να ενσωματώσουμε κάθε απώλεια που δεν ανήκει στις δύο προηγούμενες κατηγορίες.

Οι δευτερεύουσες απώλειες είναι ουσιαστικά συνυφασμένες με τον τριδιάστατο χαρακτήρα της ροής μέσα σε μια πτερύγωση. Για τους συμπιεστές λ.χ., αυτές σχετίζονται με ένα σημαντικό τμήμα των απωλειών που συμβαίνουν σε αυτούς. Ενδεικτικό είναι λ.χ. το Σχήμα 7.1 που οφείλεται στον Howell και δίνει την ποσοστιαία συμμετοχή των τριών λόγων που συνεισφέρουν στις απώλειες, όπως αυτές περιγράφηκαν στην αρχή της παρούσας ενότητας, για ένα αξονικό συμπιεστή. Από το σχήμα αυτό φαίνεται ενδεικτικά ότι οι δευτερεύουσες απώλειες είναι αντίστοιχες των απωλειών μορφής και διπλάσιες περίπου των απωλειών από τα οριακά στρώματα στα κελύφη, στο σημείο σχεδίασης ενός τυπικού αξονικού συμπιεστή.

Οι δευτερεύουσες απώλειες είναι συνυφασμένες με τον τριδιάστατο χαρακτήρα της ροής μέσα σε μια πτερύγωση. Δημιουργούνται κατά τη στροφή που υφίσταται (λόγω της ύπαρξης πτερυγίων) η ροή η οποία εισέρχεται στην πτερύγωση έχοντας ανομοιομορφή καθ' ύψος κατανομή λόγω των οριακών στρωμάτων που αναπτύσσονται στο εσωτερικό και το εξωτερικό κέλυφος της στροβιλομηχανής, δηλαδή των γνωστών ως οριακά στρώματα του ποδός και της κεφαλής. Επιπλέον της ανομοιομορφίας που συνεπάγονται τα συνεκτικά φαινόμενα στην περιοχή των κελυφών, στη γενική περίπτωση είναι πιθανό να υπάρχει ακόμα και καθ' ύψος ανομοιομορφία της ταχύτητας της εξωτερικής ροής, λόγω λ.χ. των προηγούμενων πτερυγώσεων. Αν πρόκειται για στρόβιλο που ακολουθεί το θάλαμο καύσης

τότε ενδεχόμενα υπάρχει και ανομοιόμορφη καθ' ύψος κατανομή της θερμοκρασίας. Επισημαίνεται ότι χρησιμοποιείται ο όρος "καθ' ύψος κατανομή" για να καλύψει περιπτώσεις γραμμικών αλλά και περιφερειακών περυγώσεων. Στις τελευταίες, ο όρος "ακτινική κατανομή" θα ήταν ίσως περισσότερο δόκιμος.

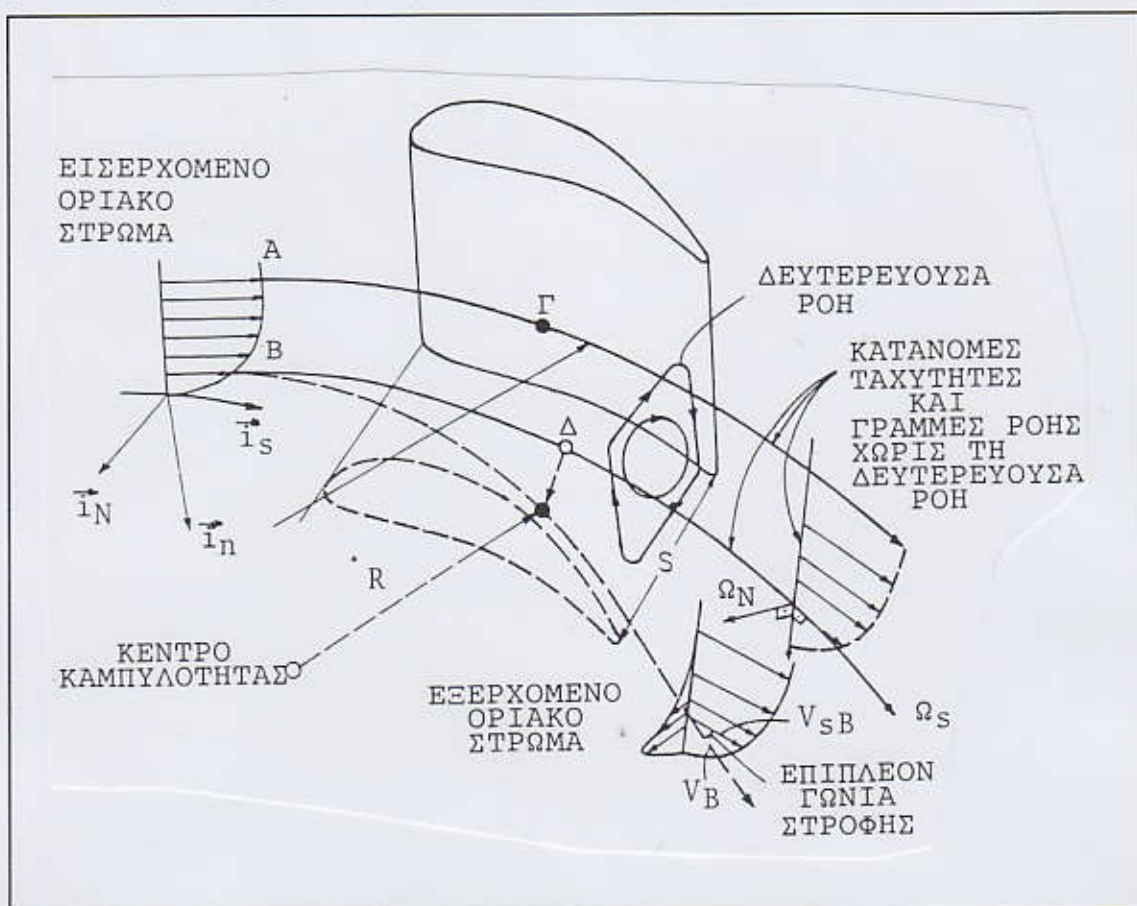


Σχήμα 7.1

7.2 Σχηματισμός των Δευτερευουσών Ροών

Για την κατανόηση του τρόπου σχηματισμού των δευτερευουσών ροών θα εξετάσουμε την περίπτωση μιας γραμμικής περύγωσης που σχηματίζεται χρησιμοποιώντας την ίδια αεροτομή σε σταθερή γωνία κλίσης σε οποιαδήποτε καθ' ύψος θέση μεταξύ του ποδός και της κεφαλής των περυγίων. Σύμφωνα με το Σχήμα 7.2 θα μελετηθούν οι γραμμές ροής του μόνιμου πεδίου που ξεκινούν από δύο θέσεις A και B στην είσοδο του πεδίου. Η θέση A ανήκει στην εξωτερική ροή ενώ η θέση B βρίσκεται μέσα στο συνεκτικό στρώμα του ποδός της περύγωσης. Κάθε γραμμή ροής που ξεκινά από οποιοδήποτε σημείο της εισόδου (το A ή το B) αποκτά μια καμπύλη μορφή αφού αναγκάζεται να δεχθεί τη στροφή που επιβάλλει η γωνία κυρτότητας των αεροτομών. Συνδεδεμένο με κάθε σημείο οποιασδήποτε γραμμής ροής είναι ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων με μοναδιαία διανύσματα \vec{i}_s κατά την κατεύθυνση της ροής (δηλαδή εφαπτόμενο στη γραμμή ροής), \vec{i}_n κατά την περιφερειακή κατεύθυνση (δηλαδή την κατεύθυνση από περύγιο σε περύγιο και συγκεκριμένα με φορά προς την πλευρά υποπίεσης του περυγίου) και \vec{i}_n κατά την κάθετη προς τα άλλα δύο μοναδιαία διανύσματα κατεύθυνση. Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 7.2,

τα τρία διανύσματα $\vec{i}_s, \vec{i}_N, \vec{i}_n$ σχηματίζουν ένα δεξιόστροφο σύστημα. Στο Κεφάλαιο 9 το σύστημα αυτό θα ορισθεί με αυστηρά μαθηματικό τρόπο, ως ένα τοπικό τριεδρο Frenet ώστε να προκύψει ένα θεωρητικό μοντέλο για τη μεταφορά του στροβιλισμού. Στο παρόν όμως κεφάλαιο ένας τέτοιος αυστηρός ορισμός είναι περιττός.



Σχήμα 7.2

Για τη γραμμή ροής που έχει ως αφετηρία το σημείο A γράφουμε το ισοζύγιο δυνάμεων κατά την κατεύθυνση N του μοναδιαίου διανύσματος \vec{i}_N σε κάποια τυχαία θέση Γ μεταξύ των πτερυγίων. Η ροή υποτίθεται ασυμπίεστη και χρονικά μόνιμη, ενώ αμελούμε συνεκτικούς όρους και μεταβολές της ταχύτητας κατά την κατεύθυνση N. Για το σημείο Γ ισχύει ότι

$$\left(\frac{\partial p}{\partial N}\right)_\Gamma = \frac{\rho V_\Gamma^2}{R_\Gamma} \quad (7.1)$$

όπου R_Γ είναι η ακτίνα καμπυλότητας της υπόψη γραμμής ροής ενώ V_Γ είναι η ταχύτητα στο σημείο Γ. Η σχέση (7.1) δείχνει την ισορροπία που υπάρχει μεταξύ της κλίσης της πίεσης

7.4

στην κατεύθυνση από πτερύγιο σε πτερύγιο και της κεντρομόλου δύναμης. Για την αποφυγή σύγχυσης, η τελευταία κατευθύνεται προς το κέντρο καμπυλότητας της γραμμής ροής και δεν πρέπει να συγχέεται με την κεντρομόλο δύναμη περιφερειακής πτερύγωσης.

Εστω ένα σημείο Δ επί της γραμμής ροής που είχε ως αφετηρία τη θέση Β και η οποία ορίζεται μέσα στο συνεκτικό στρώμα. Τα σημεία Δ και Γ θεωρούνται ότι βρίσκονται σε αντίστοιχες διαμήκειες θέσεις. Η μεταβολή της ταχύτητας μεταξύ της πλευράς υποπίεσης και της πλευράς υπερπίεσης του πτερυγίου δημιουργεί την κλίση πίεσης $\partial p/\partial N$. Με τις γνωστές παραδοχές για την πίεση σε ένα οριακό στρώμα, ισχύει ότι

$$\left(\frac{\partial p}{\partial N}\right)_{\Gamma} = \left(\frac{\partial p}{\partial N}\right)_{\Delta} \quad (7.2)$$

Συγχρόνως για τη θέση Δ ισχύει και η αντίστοιχη της σχέσης (7.1), είναι δηλαδή

$$\left(\frac{\partial p}{\partial N}\right)_{\Gamma} = \left(\frac{\partial p}{\partial N}\right)_{\Delta} = \frac{\rho V_{\Delta}^2}{R_{\Delta}} \quad (7.3)$$

όπου R_{Δ} η ακτίνα καμπυλότητας της γραμμής ροής στη θέση Δ . Επειδή το σημείο Δ βρίσκεται μέσα στο οριακό στρώμα, θα έχει μικρότερη ταχύτητα, οπότε

$$V_{\Delta} < V_{\Gamma}$$

Κατά συνέπεια, για να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις (7.1) και (7.3) πρέπει

$$R_{\Delta} < R_{\Gamma} \quad (7.4)$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι κάθε γραμμή ροής που εξελίσσεται μέσα στα συνεκτικά στρώματα του ποδός ή της κεφαλής πρέπει να διαγράφει τροχιά με μικρότερη ακτίνα καμπυλότητας σε σχέση με κάθε γραμμή ροής που βρίσκεται στην εξωτερική ροή. Η μικρότερη ακτίνα καμπυλότητας ουσιαστικά σημαίνει παρέκκλιση της ροής προς την πλευρά υποπίεσης του πτερυγίου. Το πεδίο ταχύτητας που όταν υπερτεθεί στο (πρωτεύον) πεδίο της εξωτερικής ροής δίνει την τελική εικόνα του πεδίου ροής λόγω των προαναφερθέντων λόγων ονομάζεται δευτερεύον πεδίο. Η επιπλέον στροφή προς την κυρτή πλευρά (πλευρά υποπίεσης) των πτερυγίων συνδέεται με τη δημιουργία συνιστώσας ταχύτητας κατά τη Ν κατεύθυνση του Σχήματος 7.2. Λόγω του θεωρήματος της συνέχειας, στις ίδιες περιοχές θα εμφανισθεί και καθ' ύψος συνιστώσα της ταχύτητας, δηλαδή ταχύτητα κατά την κατεύθυνση n.

Η δημιουργία των δύο αυτών συνιστωσών της ταχύτητας, οι οποίες στη συνέχεια θα συμβολίζονται με V_N και V_n και η χωρική τους ανομοιομορφία δημιουργεί στροβιλισμό. Σημειώνεται ότι οι κατευθύνσεις s, N και n συνεχίζουν να λαμβάνονται σε σχέση με την κατεύθυνση των γραμμών ροής της εξωτερικής ροής (δε λαμβάνουν υπόψη το ότι η ροή παρέκκλιने προς την πλευρά υποπίεσης). Για να γίνει διάκριση, η ταχύτητα πλέον συντίθεται

από τις τρεις συνιστώσες

$$\vec{V} = V_s \vec{i}_s + V_N \vec{i}_N + V_n \vec{i}_n \quad (7.5)$$

Υποθέτοντας ότι αμελείται η διαμήκης κλίση πίεσης, θα ισχύει ότι

$$\frac{\partial V_s}{\partial s} = 0$$

και το θεώρημα διατήρησης της παροχής για ασυμπίεστη ροή θα δίνει ότι

$$\frac{\partial V_N}{\partial N} + \frac{\partial V_n}{\partial n} = 0 \quad (7.6)$$

Με βάση την ανάλυση (7.5) προκύπτει ο **δευτερεύων στροβιλισμός** ως

$$\Omega_s = \frac{\partial V_n}{\partial N} - \frac{\partial V_N}{\partial n} \quad (7.7)$$

Στην έξοδο του πεδίου ροής, ο δευτερεύων στροβιλισμός έχει φορά αντίθετη του διανύσματος \vec{i}_s . Για λόγους πληρότητας τονίζεται ότι ο **πρωτεύων στροβιλισμός**

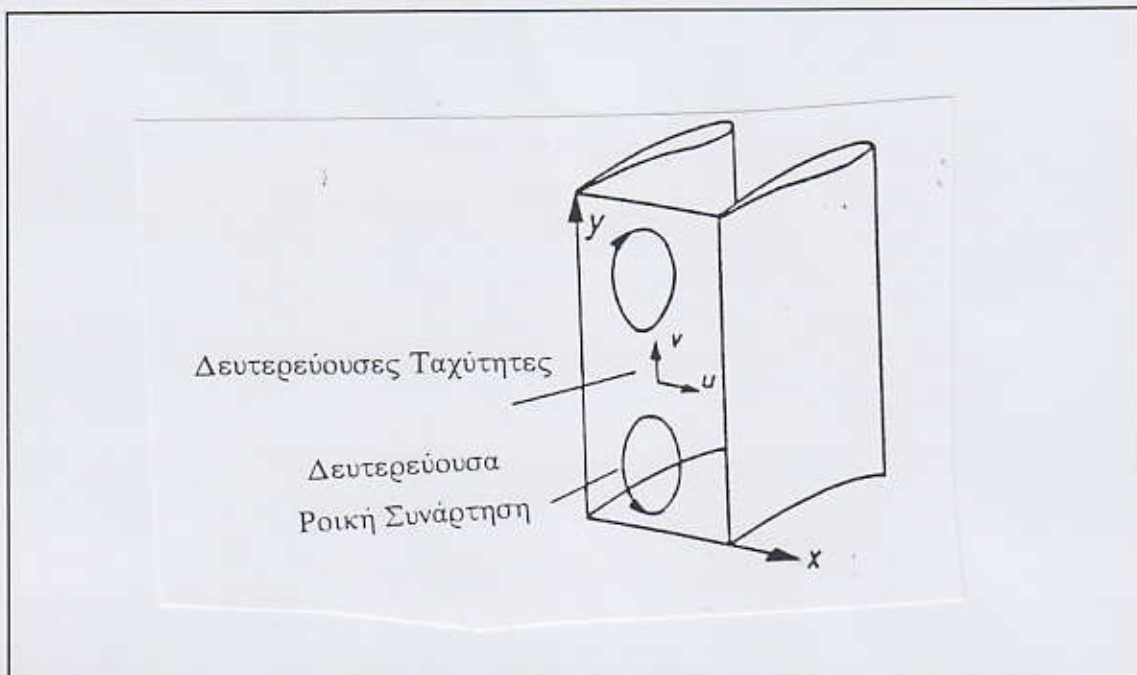
(primary vorticity) στην είσοδο του πεδίου (όπου υπάρχει μόνο η συνιστώσα V_s της ταχύτητας η οποία μεταβάλλεται κατά την κατεύθυνση η λόγω των οριακών στρωμάτων του ποδός και της κεφαλής) δίνεται από τη σχέση

$$\Omega_N = \frac{\partial V_s}{\partial n} \quad (7.8)$$

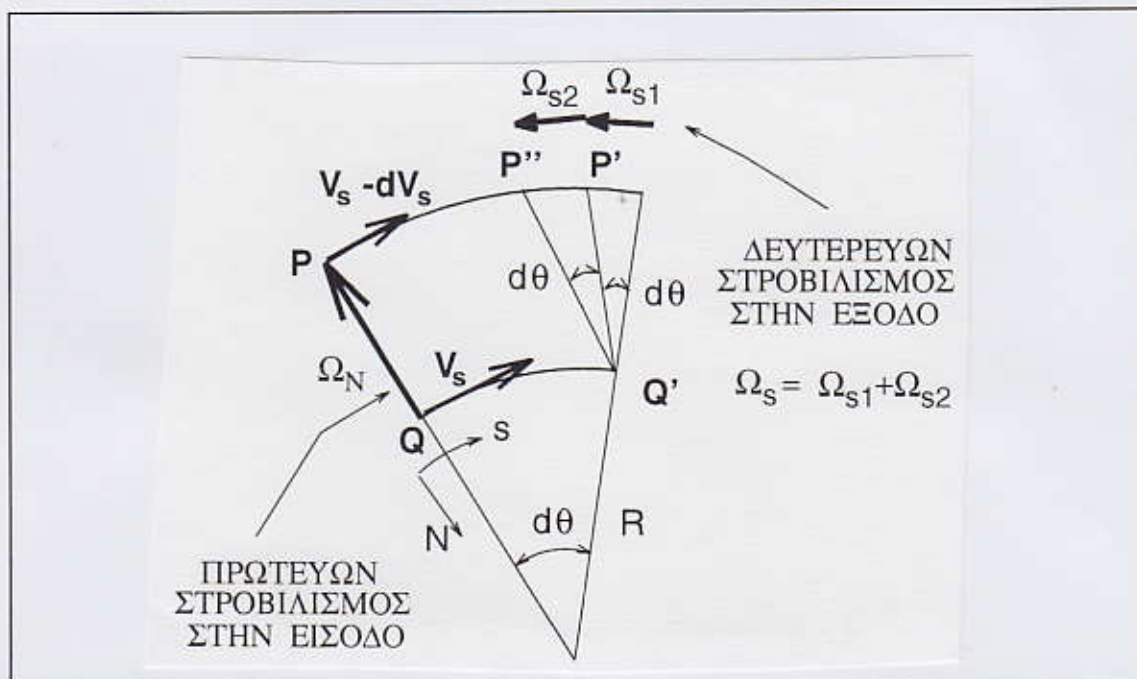
Δευτερεύουσα ροή θα σχηματίζεται κάθε φορά που μια κατανομή ταχύτητας τύπου οριακού στρώματος, ή ισοδύναμα ένας πρωτεύων στροβιλισμός, υφίσταται στροφή μέσα από μια περρύγωση ή έναν αγωγό. Αυτό παρουσιάζεται ποιοτικά στο Σχήμα 7.3.

7.3 Ένα Απλό Μοντέλο για το Δευτερεύοντα Στροβιλισμό

Ένα απλό μοντέλο το οποίο επιτρέπει την ποιοτική έκφραση του δευτερεύοντος στροβιλισμού μπορεί να προκύψει από καθαρά κινηματικές σχέσεις. Το μοντέλο θα παρουσιασθεί σε έναν αγωγό που στρίβει τη ροή, ενώ διατηρεί σταθερή διατομή. Η ροή σε έναν τέτοιο αγωγό αναλύεται στο Σχήμα 7.4. Κατά τα γνωστά από τις προηγούμενες ενότητες, το οριακό στρώμα στην είσοδο του αγωγού έχει δημιουργήσει πρωτεύοντα στροβιλισμό Ω_N που δίνεται από τη σχέση (7.8). Θεωρώντας ότι ακολουθούμε την τοπολογία του Σχήματος 7.2 και μελετώντας τον πρωτεύοντα στροβιλισμό στο κάτω τοίχωμα, η κατεύθυνση του Ω_N για ένα τυχαίο σημείο Q θα είναι αυτή που απεικονίζεται στο Σχήμα 7.4.



Σχήμα 7.3



Σχήμα 7.4

Λόγω της μορφής που έχει ο καμπύλος αγωγός, η γραμμή ροής που ξεκινά από το σημείο P και βρίσκεται σε μεγαλύτερη ακτίνα από τη γραμμή ροής που ξεκινά από το σημείο Q θα χαρακτηρίζεται από μικρότερη διαμήκη ταχύτητα V_s . Ας είναι V_s η ταχύτητα στο Q και $V_s - dV_s$, $dV_s > 0$, η ταχύτητα στο P. Θα δείξουμε παρακάτω ότι αυτή η διαφορά στη διαμήκη ταχύτητα συμμετέχει στη γένεση ενός τμήματος του δευτερεύοντος στροβιλισμού. Το τμήμα αυτό, το οποίο θα συμβολίζεται με Ω_{s2} , υπερτίθεται στο δευτερεύοντα στροβιλισμό

Ω_{s1} που δημιουργεί η στροφή του πρωτεύοντος στροβιλισμού άσχετα από τη διαφορά ταχύτητας μεταξύ P και Q.

Για να υπολογίσουμε το τμήμα Ω_{s1} του δευτερεύοντος στροβιλισμού θεωρούμε προς στιγμή ότι οι διαμήκεις ταχύτητες στα P και Q είναι ίσες. Τότε, σε χρονικό διάστημα dt, δυο στοιχεία ρευστού μετακινήθηκαν από το P στο P' και από το Q στο Q', αντίστοιχα έτσι ώστε $PP' = QQ'$. Αφού η διαμήκης ταχύτητα παραμένει αναλλοίωτη, ο πρωτεύων στροβιλισμός στη θέση Q' θα έχει την κατεύθυνση Q'P'. Θεωρώντας ότι τα τόξα PP' και QQ' ανήκουν σε ομόκεντρους κύκλους διαφορετικής ακτίνας και ότι το QQ' αντιστοιχεί σε μια στοιχειώδη (θετική) γωνιακή μετατόπιση dθ, θα ισχύει

$$\Omega_{s1} = -\Omega_N d\theta \quad (7.9)$$

όπου στο Q' το Ω_N διατηρεί την τιμή που είχε στο Q.

Στην πραγματικότητα όμως, το στοιχείο ρευστού που είχε ως αφετηρία το σημείο P βρέθηκε, μετά από χρονικό διάστημα dt, στη θέση P'', όπου $PP'' < QQ'$, λόγω της μικρότερης ταχύτητας που αυτό έχει. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα θεωρήσουμε ότι η συνιστώσα του στροβιλισμού κατά την κατεύθυνση \vec{i}_n (κάθετα στο χαρτί) είναι μηδενική. Αυτή

γράφεται, στο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων, στην παρακάτω απλουστευτική μορφή

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(RV_s)}{\partial R} = 0 \rightarrow \frac{V_s}{R} + \frac{\partial V_s}{\partial R} = 0$$

όπου R η ακτίνα καμπυλότητας της γραμμής ροής.

Από την τελευταία σχέση είναι εύκολο να προκύψει ότι

$$dV_s = -\frac{V_s}{R} dR = -\frac{V_s}{R} dN$$

Συγχρόνως το στοιχειώδες χρονικό διάστημα θα είναι

$$dt = \frac{Rd\theta}{V_s}$$

εξ αυτών προκύπτει εύκολα ότι

$$(P''P') = dV_s dt = -\frac{V_s}{R} dN \frac{Rd\theta}{V_s} = -dNd\theta$$

Η τελευταία σχέση σημαίνει, με προφανείς γεωμετρικές παραδοχές, ότι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ Q'P' και Q'P'' είναι ίση με dθ και, χρησιμοποιώντας τη σχέση (7.9) προκύπτει συνολικά ότι

$$\Omega_s = \Omega_{s1} + \Omega_{s2} = -2\Omega_N d\theta \quad (7.10)$$

Ο παραπάνω απλουστευτικός τρόπος ανάλυσης δείχνει ότι ο δευτερεύων στροβιλισμός που αναπτύσσεται λόγω της στροφής της ροής οφείλεται κατά το ήμισυ στη διαφορά ταχύτητας μεταξύ δυο διαδοχικών γραμμών ροής και κατά το υπόλοιπο ήμισυ στη μεταφορά του πρωτεύοντος στροβιλισμού που υπάρχει στην είσοδο του πεδίου. Το απλό μοντέλο για το δευτερεύοντα στροβιλισμό που εκφράζεται από τη σχέση (7.10) πρωτοπαρουσιάστηκε από τους Squire και Winter και φέρεται στη βιβλιογραφία με το όνομά τους.

7.4 Οι Δευτερεύουσες Απώλειες

Οι δευτερεύουσες απώλειες στις στροβιλομηχανές συνδέονται αποκλειστικά με τον τριδιάστατο χαρακτήρα της ροής. Καθώς οι δευτερεύουσες απώλειες δημιουργούνται από τα οριακά στρώματα που αναπτύσσονται στο εσωτερικό και το εξωτερικό κέλυφος μιας στροβιλομηχανής, συχνά είναι αρκετά δύσκολη η διάκριση μεταξύ (α) των απωλειών που συνεπάγεται η εξέλιξη των ίδιων των οριακών στρωμάτων και (β) των απωλειών που συνεπάγονται οι δευτερεύουσες ροές. Συνήθως οι δύο τύποι απωλειών αθροίζονται και χαρακτηρίζονται με το γενικό όρο **απώλειες κελυφών** (endwall effects).

Θα θεωρήσουμε ότι οι δευτερεύουσες ροές αναπτύχθηκαν σύμφωνα με το απλό μοντέλο της Ενότητας 7.3. Έτσι, στην έξοδο μιας πτερύγωσης ο δευτερεύων στροβιλισμός μπορεί να προκύψει με την ολοκλήρωση της σχέσης (7.10) μεταξύ εισόδου και εξόδου της πτερύγωσης. Θα δεχθούμε επίσης ότι στην είσοδο η στατική πίεση είναι σταθερή και η καθ' ύψος ανομοιομορφία της κατανομής ταχύτητας σημαίνει και αντίστοιχη ανομοιομορφία της ολικής πίεσης, που δημιουργεί το δευτερεύοντα στροβιλισμό. Θα ασχοληθούμε σχεδόν αποκλειστικά με αξονικές πτερυγώσεις, αφού οι δευτερεύουσες ροές σε στροβιλομηχανές μικτής ή ακτινικής ροής παρουσιάζουν αυξημένη πολυπλοκότητα.

Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς του Σχήματος 7.2, το πεδίο ταχύτητας που επάγει η δευτερεύουσα ροή στην πτερύγωση μπορεί να θεωρηθεί ως μια διαταραχή του πεδίου ταχύτητας που (χωρίς τις δευτερεύουσες ροές) θα έβγαινε από την πτερύγωση σε σταθερή γωνία για όλο το ύψος. Εστω V_N και V_n οι δύο συνιστώσες του επαγόμενου πεδίου ταχύτητας από τη δευτερεύουσα ροή κατά τις κατευθύνσεις \vec{i}_N και \vec{i}_n αντίστοιχα. Οι απώλειες που προκαλεί η δευτερεύουσα ροή είναι ανάλογες με την κινητική ενέργεια του επαγόμενου πεδίου (αλλά όχι ίσες με αυτή, αφού δε χάνεται ολόκληρη η κινητική ενέργεια του δευτερεύοντος πεδίου). Ο συντελεστής απωλειών των δευτερευουσών ροών ζ_s είναι ανάλογος με το λόγο της κινητικής ενέργειας της δευτερεύουσας ροής προς την κινητική ενέργεια της ροής στην είσοδο της πτερύγωσης. Ο λόγος αυτός μπορεί να υπολογισθεί στο

μισό μόνο του ύψους της περύγωσης (αν πρόκειται για διδιάστατη περύγωση), είτε από το πόδι μέχρι το μέσο είτε από το μέσο μέχρι την κεφαλή της περύγωσης. Το ύψος του περυγίου θα συμβολίζεται με h και το βήμα της περύγωσης με s . Η ροή εισέρχεται με γωνία α_1 και εξέρχεται με γωνία α_2 , οπότε είναι

$$\zeta_s = \frac{\iint \frac{1}{2} \rho (V_N^2 + V_n^2) dN dn_i}{\frac{1}{2} \rho_1 V_1^2 \frac{h}{2} s \cos \alpha_1} \quad (7.11)$$

όπου το διπλό ολοκλήρωμα στον αριθμητή αναφέρεται σε ύψος $h/2$ και πλάτος $s \cos \alpha_2$. Για να αναπτυχθεί περαιτέρω η σχέση (7.11) χρειάζεται να βρεθούν εκφράσεις για τις συνιστώσες V_N και V_n . Θεωρώντας το δευτερεύον πεδίο ως ένα διορθωτικό πεδίο ταχύτητας που συμπληρώνει εκείνο που θα προέκυπτε χωρίς την επίδραση των δευτερευουσών ροών μπορούμε να το εκφράσουμε ως συνάρτηση της δευτερεύουσας ροϊκής συνάρτησης Ψ_s την οποία ορίζουμε στο επίπεδο N-n. Τότε οι δύο αυτές συνιστώσες γράφονται

$$V_n = -\frac{\partial \Psi_s}{\partial N}, \quad V_N = \frac{\partial \Psi_s}{\partial n} \quad (7.12)$$

και μπορούν να προκύψουν από την επίλυση της εξίσωσης Poisson

$$\nabla^2 \Psi_s = -\Omega_s \quad (7.13)$$

που έχει ως δεύτερο μέλος το δευτερεύοντα στροβιλισμό. Η εξίσωση (7.13) μπορεί να λυθεί αριθμητικά ή αναλυτικά αν έχουν βρεθεί εκφράσεις για το δευτερεύοντα στροβιλισμό. Για ασυμπίεστες ροές, ο Hawthorne παρουσίασε αναλυτική λύση της (7.13), κάνοντας χρήση της σχέσης (7.10) των Squire και Winter. Η μαθηματική της παρουσίαση είναι επίπονη και για το λόγο αυτό παραλείπεται. Η αναλυτική αυτή λύση δίνεται με λεπτομέρειες στην εργασία: W.R. Hawthorne, "Some Formulae for the Calculation of Secondary Flows in Cascades", British Aeronautical Research Council Report 17,519.

Χρησιμοποιώντας την ανάλυση αυτή, η εξίσωση (7.11) ξαναγράφεται συμβολικά ως

$$\zeta_s \sim \frac{\epsilon^2 s^2 \cos^2 \alpha_2}{\delta_1 h/2} \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} f\left(\frac{\delta}{s \cos \alpha_2}\right) \quad (7.14)$$

όπου δ_1 είναι το πάχος του οριακού στρώματος στην είσοδο της περύγωσης ενώ ϵ είναι η γωνία στροφής της ροής.

Ο Dunham πρότεινε την παρακάτω εναλλακτική έκφραση για το μέσο συντελεστή απωλειών μιας περύγωσης λόγω δευτερευουσών ροών

$$\bar{\zeta}_s = \left[0.0055 + 0.078 \sqrt{\frac{\delta_1}{c}} \right] C_L^2 \frac{\cos^3 \alpha_2}{\cos^3 \alpha_m} \frac{c}{h} \left(\frac{c}{s} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 \alpha'_1} \quad (7.15)$$

όπου

$$\tan \alpha_m = \frac{1}{2} (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2) \quad (7.16)$$

και C_L είναι ο συντελεστής άνωσης του πτερυγίου ενώ α'_1 είναι η γωνία εισόδου της

αεροτομής της πτερύγωσης. Το $\bar{\zeta}_s$ είναι μέσος συντελεστής απωλειών για ολόκληρο το

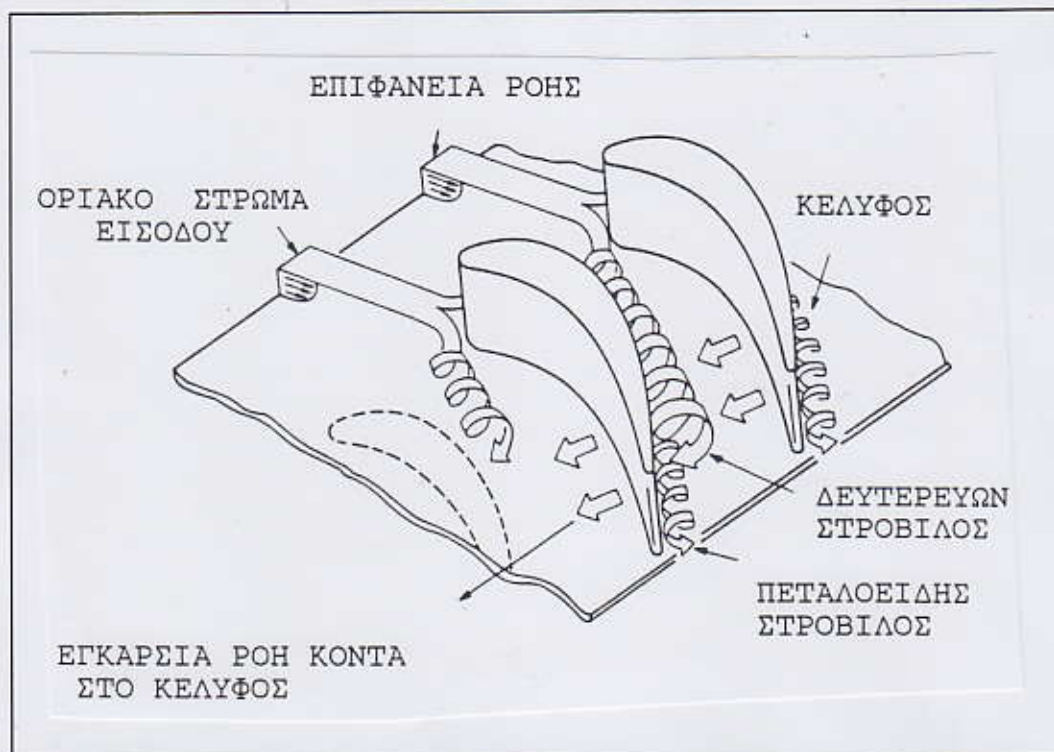
ύψος της πτερύγωσης. Αν πρόκειται να εφαρμοσθεί η (7.16) σε μια κινητή πτερύγωση πρέπει να αντικατασταθούν οι απόλυτες με τις σχετικές γωνίες. Η συσχέτιση του Dumpham ισχύει για αξονικές στροβιλομηχανές, μικρές γωνίες στροφής της ροής και δε λαμβάνει υπόψη φαινόμενα που σχετίζονται με την περιστροφή, ούτε τη συμπιεστότητα του ρευστού.

7.5 Οι Δευτερεύουσες Ροές στο Στρόβιλο

Οι δευτερεύουσες ροές στο στρόβιλο είναι γενικά περισσότερο πολύπλοκες από αυτές σε ένα συμπιεστή ή μια αντλία. Ο λόγος είναι κυρίως η μεγάλη στροφή που υφίσταται η ροή από τα πτερύγια του στροβίλου αλλά και το μεγάλο πάχος των πτερυγίων κοντά στην ακμή προσβολής. Στο στρόβιλο έχει ιδιαίτερη σημασία η εμφάνιση του **πεταλοειδούς στροβίλου** (horseshoe vortex) τον οποίο θα αναλύσουμε περιγραφικά στη συνέχεια.

Η γένεση του πεταλοειδούς στροβίλου μπορεί να εξηγηθεί στη βάση της ανάπτυξης των δευτερευουσών ροών που προηγήθηκε και να γίνει κατανοητή με τη βοήθεια του Σχήματος 7.5. Εξετάζοντας τη ροή που προσεγγίζει την ακμή προσβολής του πτερυγίου του στροβίλου, κοντά στο κάτω τοίχωμα (εσωτερικό κέλυφος), τα οριακά στρώματα υφίστανται έντονη στροφή στα ανάντι της ακμής προσβολής. Δημιουργούνται συνιστώσες της ταχύτητας κατά την ακτινική και την από-πτερύγιο-σε-πτερύγιο κατεύθυνση, οι οποίες παράγουν τοπικά στροβιλισμό. Ο στροβιλισμός αυτός έχει φορά αντίθετη από τους δείκτες του ωρολογίου (κατά την άποψη παρατηρητή που παρατηρεί τη ροή της πτερύγωσης του Σχήματος 7.5 από την έξοδο) και αναπτύσσεται στη γωνία μεταξύ πλευράς υποπίεσης και τοιχώματος. Ο στρόβιλος αυτός επιδρά στα οριακά στρώματα της γωνίας αντλώντας παροχή μάζας από αυτά που τη συντηρεί μέσα του για όλο το μήκος που διαρκεί. Το πόσο ισχυρός θα είναι ο πεταλοειδής στρόβιλος και κατά συνέπεια το πόσο μήκος θα διαρκέσει εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως είναι ο αριθμός Reynolds της ροής, η ακτίνα της ακμής προσβολής του πτερυγίου, το πάχος του αρχικού οριακού στρώματος και η στροφή που

υφίσταται η ροή. Εστω και αν ο σχηματισμός του πεταλοειδούς στρόβιλου μπορεί να εξηγηθεί χρησιμοποιώντας θεωρία για τις ατριβείς δευτερεύουσες ροές, εντούτοις είναι ένα καθαρά συνεκτικό φαινόμενο και πρέπει να αντιμετωπίζεται ως τέτοιο.



Σχήμα 7.5

Ο πεταλοειδής και ο δευτερεύων στρόβιλος αναπτύσσονται διακριτά στο χώρο μεταξύ των πτερυγίων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.5. Η γένεσή τους οφείλεται σε ανάλογα φυσικά φαινόμενα αλλά ο καθένας αναπτύσσεται δημιουργώντας το δικό του πυρήνα. Κατά την εξέλιξη τους μπορούν να αναμειχθούν, να αλληλεπιδράσουν ή να παραμείνουν χωριστά. Τα παραπάνω όλα συμβαίνουν συνήθως πολύ κοντά στην πλευρά υποπίεσης του πτερυγίου.

7.6 Δευτερεύουσες Ροές και Απόδοση των Στροβιλομηχανών

Οι δευτερεύουσες ροές και ο δευτερεύων στρόβιλος εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τη στροφή που τα πτερύγια προκαλούν στη ροή. Κατά συνέπεια εξαρτώνται από τη μορφή που έχουν τα πτερύγια. Ο λόγος χορδής προς βήμα μιας πτερύγωσης, δηλαδή η στερεότητά της, επιδρούν στη φόρτιση που δέχονται τα πτερύγια και έτσι είναι προφανές ότι επηρεάζουν τις δευτερεύουσες ροές. Οι δευτερεύουσες ροές εντοπίζονται κυρίως στις δύο ακραίες περιοχές καθ' ύψος μιας πτερύγωσης και συνεπώς αναμένεται να μην επηρεάζουν σημαντικά τη ροή σε πτερυγώσεις όπου ο λόγος του ύψους του πτερυγίου προς το βήμα της πτερύγωσης είναι μεγάλος (λ.χ. μεγαλύτερος του 3). Οι δευτερεύουσες ροές φαίνεται

επίσης να μειώνονται με την αύξηση του αριθμού Mach της ροής. Αυξάνοντας τον αριθμό Mach δημιουργείται μια έντονα αρνητική διαμήκης κλίση της πίεσης που τείνει να περιορίσει την ανάπτυξη των οριακών στρωμάτων από τα οποία προκαλείται ο δευτερεύων στροβιλισμός. Τέλος είναι προφανές ότι τα πάχη των οριακών στρωμάτων στην είσοδο μιας πτερύγωσης καθορίζουν σε σημαντικό βαθμό τη δευτερεύουσα ροή που θα σχηματισθεί.

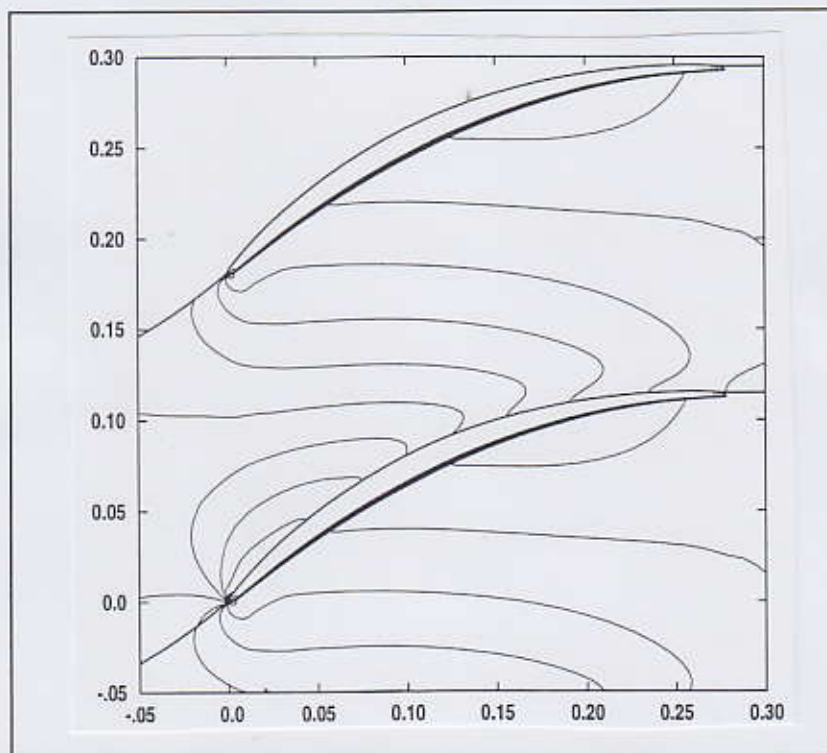
Οι δευτερεύουσες ροές έχουν σημαντική επίδραση στη συμπεριφορά και την απόδοση μιας στροβιλομηχανής. Στη συνέχεια συνοψίζουμε τις περισσότερο σημαντικές επιδράσεις που προκαλούν:

- (α) Οι δευτερεύουσες ροές δημιουργούν ένα εγκάρσιο πεδίο ταχυτήτων σε κάθε διατομή της στροβιλομηχανής. Αποτέλεσμα αυτού είναι η δημιουργία τριδιάστατων φαινομένων ροής και η αδυναμία ακριβούς πρόβλεψης του πεδίου ροής χρησιμοποιώντας αποκλειστικά διδιάστατες μεθοδολογίες, αν οι δευτερεύουσες ροές είναι σημαντικές.
- (β) Οι δευτερεύουσες ροές δημιουργούν το δευτερεύοντα στρόβιλο ο οποίος μπορεί ενδεχόμενα να προκαλέσει αποκόλληση της ροής κοντά στην πλευρά υποπίεσης. Μια τέτοια αποκόλληση μπορεί να έχει αρνητική επίδραση στο βαθμό απόδοσης της στροβιλομηχανής.
- (γ) Οι δευτερεύουσες ροές επηρεάζουν σημαντικά τη στροφή της ροής. Με βάση τα όσα αναλύθηκαν στην Ενότητα 7.1, η εξωτερική ροή τείνει να υποστεί μειωμένη στροφή (underturning) σε σχέση με το τμήμα της ροής μέσα στα οριακά στρώματα που υπόκειται σε εντονότερη στροφή (overturning). Υπενθυμίζεται ότι η στροφή της ροής σε μια στροβιλομηχανή σχετίζεται με το λόγο πίεσης που αυτή επιτυγχάνει.
- (δ) Όπως αναφέρθηκε και στη συζήτηση του Σχήματος 7.1, οι δευτερεύουσες ροές συμμετέχουν στις συνολικές απώλειες μιας πτερύγωσης δημιουργώντας πτώση του βαθμού απόδοσης κατά 2-4 περίπου ποσοστιαίες μονάδες.
- (ε) Η δημιουργία ισχυρού δευτερεύοντος πεδίου ροής σε μια πτερύγωση πολυβάθμιου συμπιεστή είναι ενδεχόμενο να προκαλέσει τη λειτουργία των επόμενων βαθμίδων σε συνθήκες εκτός του σημείου σχεδίασής τους (off-design), αφού αλλοιώνει τη γωνία πρόσπτωσης των επόμενων βαθμίδων. Πρακτικά, εκτός από μείωση του συνολικού βαθμού απόδοσης της στροβιλομηχανής, αυτό σημαίνει ενδεχόμενα φαινόμενα θορύβου ή/και πτερυγισμού.
- (στ) Οι δευτερεύουσες ροές επιδρούν και στο πεδίο θερμοκρασίας αν πρόκειται για στρόβιλο και κατά συνέπεια τροποποιούν τις απαιτήσεις ψύξης αυτού.

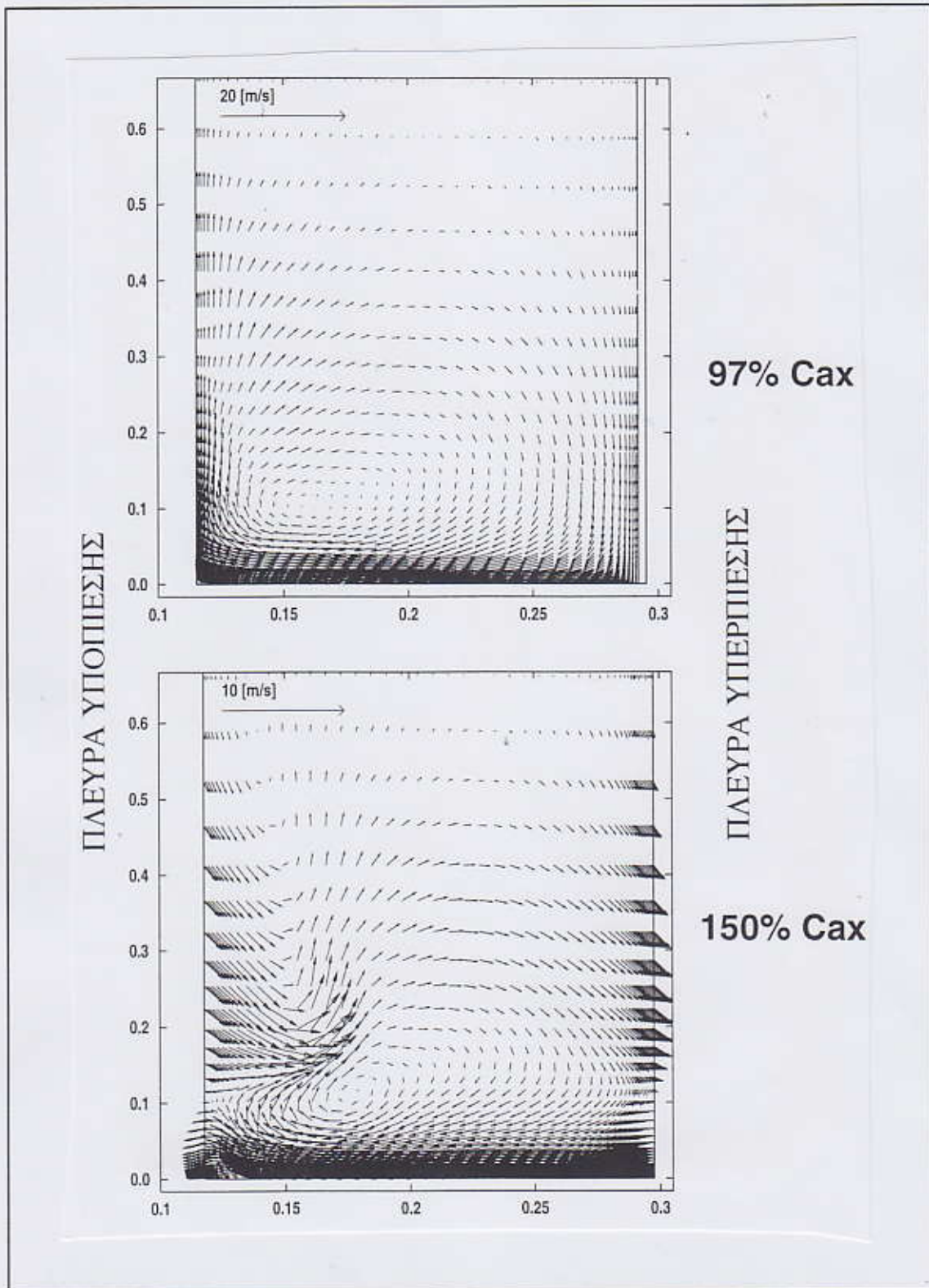
- (ζ) Σε υδραυλικές στροβιλομηχανές είναι ενδεχόμενο να προκληθεί σπηλαιώση λόγω των έντονων δευτερευουσών ροών.

7.7 Παραδείγματα Δευτερευουσών Ροών σε Στροβιλομηχανές

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται δύο ενδεικτικές περιπτώσεις προσομοίωσης δευτερευουσών ροών σε περυγώσεις στροβιλομηχανών. Η πρώτη αφορά μια γραμμική περύγωση συμπίεστη ενώ η δεύτερη μια γραμμική περύγωση στροβίλου. Και στις δύο περιπτώσεις το εργαζόμενο μέσο ήταν αέρας σε πολύ χαμηλές ταχύτητες, ώστε το ρευστό να θεωρείται ασυμπίεστο και να μοντελοποιείται ως τέτοιο. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης που θα παρουσιασθούν προέρχονται από κώδικα επίλυσης των τριδιάστατων εξισώσεων Navier-Stokes που αναπτύχθηκε στο Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών. Θα παρουσιασθεί μόνο ένα αντιπροσωπευτικό τμήμα των αποτελεσμάτων, αυτό που αφορά τις δευτερεύουσες ροές. Τα αποτελέσματα έχουν συγκριθεί με πειραματικά δεδομένα και η σύγκριση είναι πολύ ικανοποιητική. Επιλέχθηκε να παρουσιασθούν αριθμητικά αποτελέσματα και όχι σχήματα από μετρήσεις, αφού με το σύγχρονο υλικό και λογισμικό μπορούμε να έχουμε ευκολότερη διαχείρισή τους.



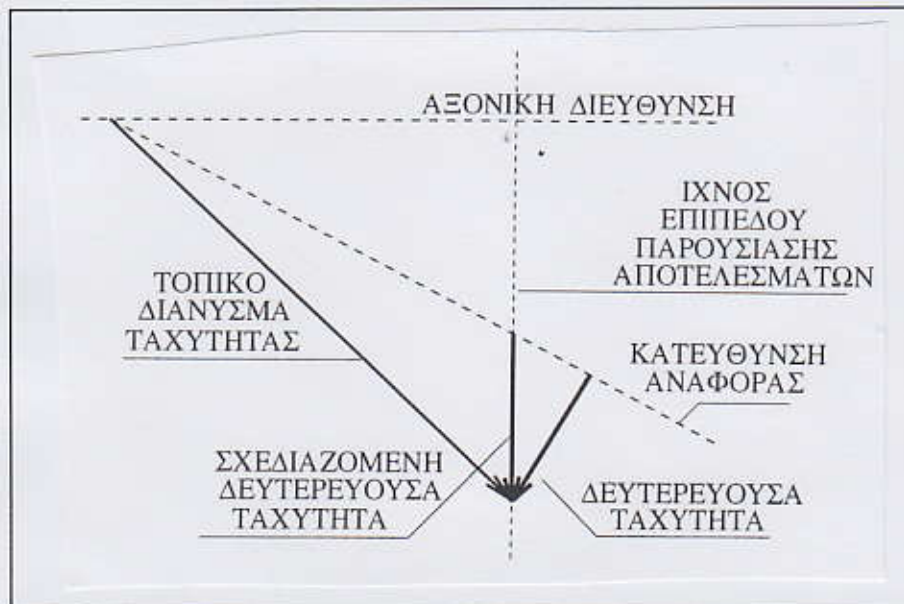
Σχήμα 7.6



Σχήμα 7.7

Η πρώτη περίπτωση αφορά μια γραμμική πτερύγωση συμπίεστη. Το Σχήμα 7.6 παρουσιάζει μια διδιάστατη τομή των πτερυγίων για να φανεί η γεωμετρία τους καθώς και η γωνία κλίσης τους (22.2°). Η γωνία εισόδου της ροής είναι $\alpha_1 = 45^\circ$ και η κατανομή ταχύτητας στην είσοδο είναι ομοιόμορφη κατά την κατεύθυνση από-πτερύγιο-σε-πτερύγιο. Έτσι οι δευτερεύουσες ροές θα σχηματισθούν από τη στροφή των οριακών στρωμάτων του ποδός και της κεφαλής. Αφού η τριδιάστατη πτερύγωση σχηματίζεται υψώνοντας στην τρίτη κατεύθυνση την ίδια μορφή του πτερυγίου, θα ασχοληθούμε μόνο με το κάτω ήμισυ της πτερύγωσης. Στο Σχήμα 7.6 παρουσιάζεται η κατανομή του συντελεστή πίεσης στο κάτω τοίχωμα (κέλυφος) της πτερύγωσης.

Οι δευτερεύουσες ροές και η εξέλιξή τους παρουσιάζονται στο Σχήμα 7.7. Σ' αυτό σχεδιάζεται το δευτερεύον πεδίο ταχύτητας σε δύο επίπεδα κάθετα στην αξονική κατεύθυνση. Το πρώτο επίπεδο βρίσκεται στο 97% της χορδής, λίγο πριν την ακμή εκφυγής του πτερυγίου. Εδώ φαίνεται η δημιουργία του δευτερεύοντος στρόβιλου και η σχετική του θέση μέσα στο πέρασμα, κοντά στη γωνία που σχηματίζει η πλευρά υποπίεσης με το κέλυφος. Το δεύτερο επίπεδο βρίσκεται σε απόσταση ίση με το 50% της αξονικής χορδής στα κατάντι της ακμής εκφυγής, δηλαδή σε μια περιοχή όπου ήδη έχει λάβει χώρα (και συνεχίζει να υπάρχει) η ανάμιξη του ομόρρου με τις δευτερεύουσες ροές. Η αλληλεπίδραση είναι ορατή στην περιοχή που βρίσκεται πάνω από το δευτερεύοντα στρόβιλο.

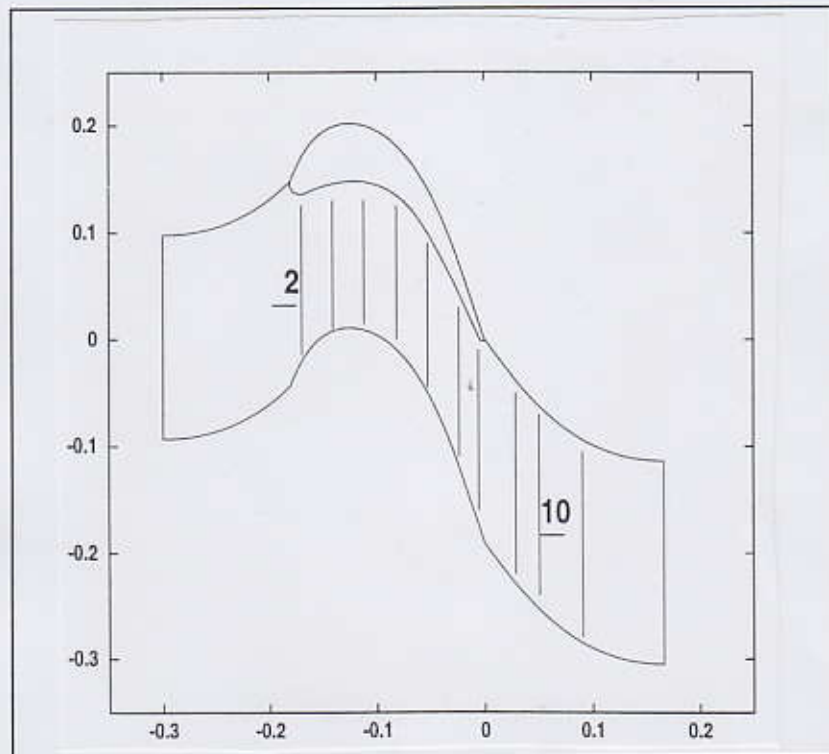


Σχήμα 7.8

Είναι σημαντικό να γίνει κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο απεικονίζεται το πεδίο των δευτερευουσών ροών. Το πεδίο αυτό υπολογίζεται σε κάθε θέση χρησιμοποιώντας το διάνυσμα της τοπικής ταχύτητας \vec{v} και μια κατεύθυνση αναφοράς. Η τελευταία λαμβάνεται είτε ως η κατεύθυνση της ροής στο αντίστοιχο σημείο που βρίσκεται στο μέσο ύψος του πτερυγίου, είτε ως μια μέση γωνία με την οποία εξέρχεται η ροή. Το Σχήμα 7.8

εξηγεί το τι αντιπροσωπεύουν τα διανύσματα ταχύτητας που σχεδιάζουμε.

Στη δεύτερη περίπτωση αναλύεται μια γραμμική πτερύγωση στροβίλου με κάτοψη αυτή του Σχήματος 7.9, όπου υποδεικνύονται και οι εγκάρσιες διατομές 2 και 10 όπου θα παρουσιασθούν τα πεδία των δευτερευουσών ροών, όπως έγινε προηγούμενα και με την πτερύγωση του συμπιεστή. Η ροή εισέρχεται με γωνία $\alpha_1 = 42.5^\circ$. Τα διανυσματικά πεδία των δευτερευουσών ροών παρουσιάζονται στο Σχήμα 7.10 έτσι όπως τα αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής της ροής από την έξοδο της πτερύγωσης. Στη θέση 02 μπορούμε να διακρίνουμε την αρχή σχηματισμού του δευτερεύοντος και του πεταλοειδούς στροβίλου. Ο πρώτος βρίσκεται κοντά στην πλευρά υπερπίεσης και ο δεύτερος κοντά στην πλευρά υποπίεσης. Στη θέση 10, που βρίσκεται λίγο μετά την ακμή εκφυγής, παρουσιάζονται δύο συνεχόμενες διατομές (διπλό βήμα) ώστε να φανεί καθαρά ο δευτερεύων στροβίλος που σχηματίζεται.



Σχήμα 7.9

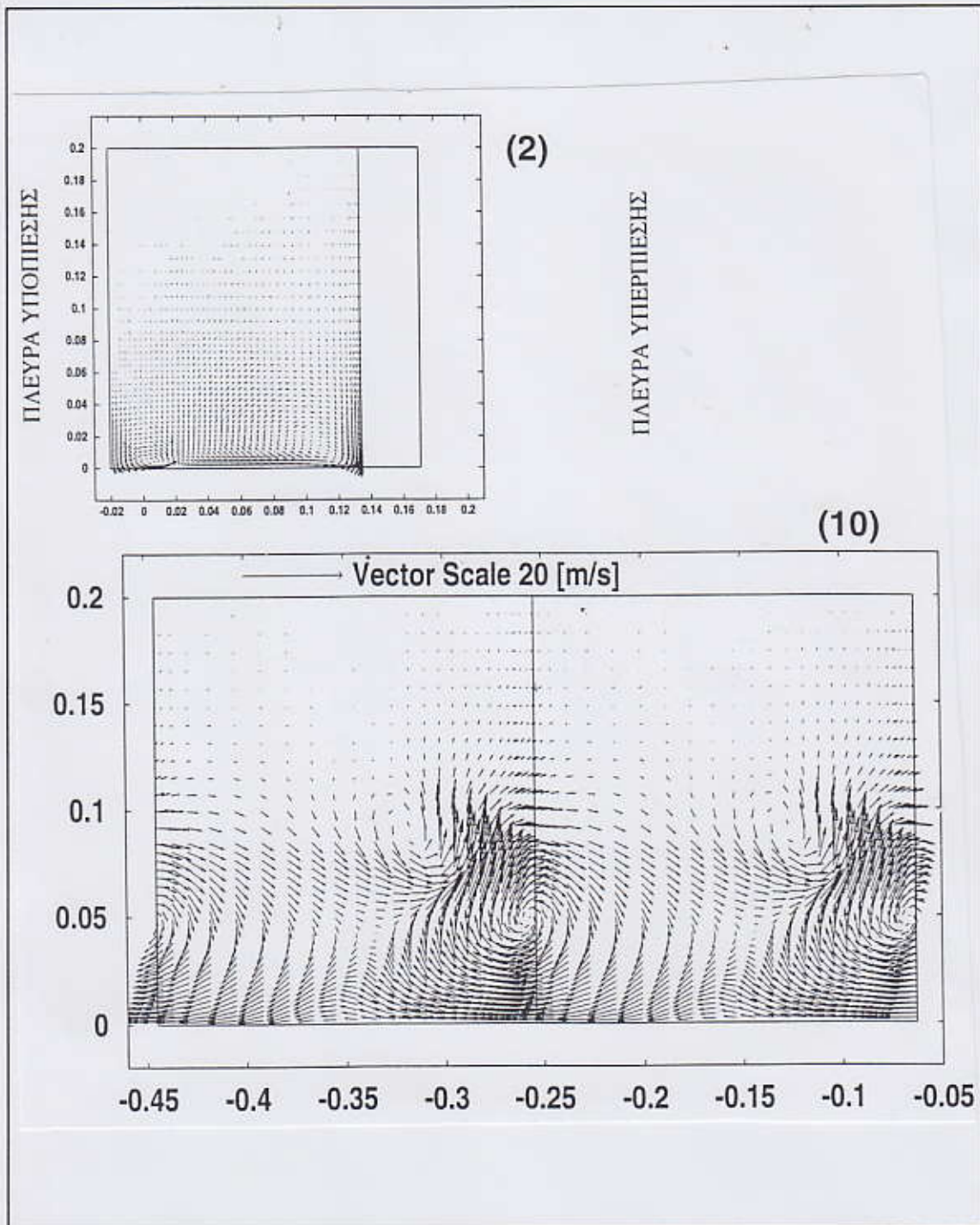
Πλήρης ανάλυση των παραπάνω πτερυγώσεων παρουσιάζεται στην εργασία του Η. Νικολάου "Υπολογισμός της Ροής στο Ακτινικό Διάκενο Συμπιεστών Χρησιμοποιώντας Επιλύτη των Εξισώσεων Navier-Stokes", Διδακτορική Διατριβή, ΕΜΠ.

Για εμβάθυνση στο θέμα των Δευτερευουσών Ροών συνιστώνται τα βιβλία:

M.H. Vavra, "Aero-Thermodynamics and Flow in Turbomachines", R.E. Krieger Publishing Company, New York, 1974.

J.H. Horlock, "Axial Flow Compressors", Butterworths Scientific Publications, London, 1958.

B. Lakshminarayana, "Fluid Dynamics and Heat Transfer of Turbomachinery", John Wiley and Sons, Inc., 1996.



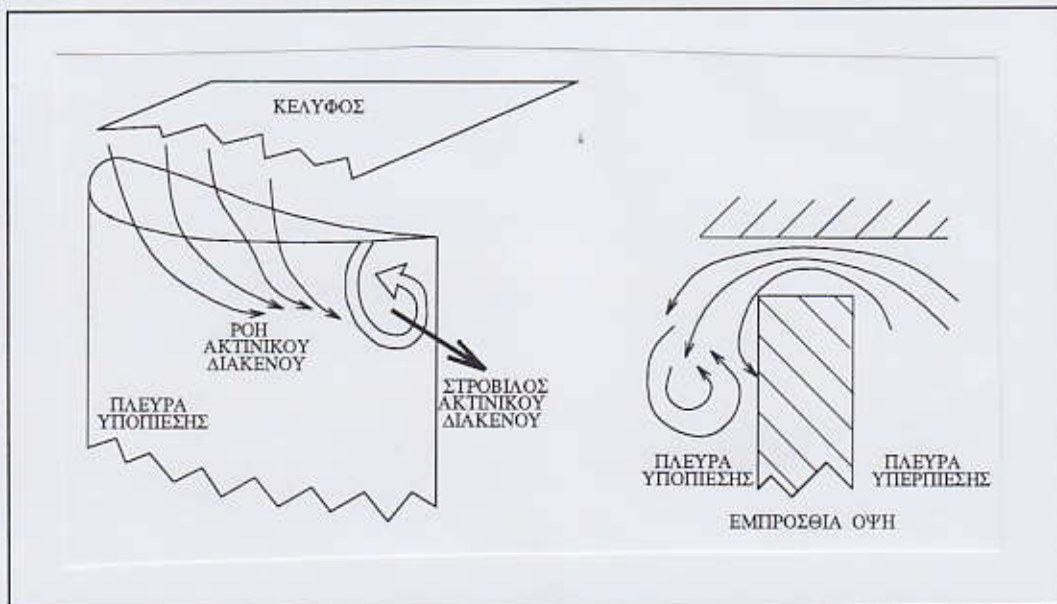
Σχήμα 7.10

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Η ΡΟΗ ΣΤΟ ΑΚΤΙΝΙΚΟ ΔΙΑΚΕΝΟ ΤΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ

8.1 Η Ροή στο Ακτινικό Διάκενο

Με τον όρο ακτινικό διάκενο (tip clearance) σε μια στροβιλομηχανή χαρακτηρίζουμε τον κενό χώρο που σχηματίζεται μεταξύ του (κινητού ή ακίνητου) πτερυγίου και του (ακίνητου ή κινητού, αντίστοιχα) κελύφους της μηχανής. Ο χώρος του ακτινικού διακένου έχει σημαντική επίδραση στη φόρτιση και τις απώλειες της στροβιλομηχανής και σχετίζεται με τις αντικρουόμενες επιθυμίες του σχεδιαστή μιας στροβιλομηχανής να έχει αφενός μεν μεγάλο ακτινικό διάκενο (για κατασκευαστικούς λόγους) και αφετέρου μικρό διάκενο (για λόγους που σχετίζονται με την αεροδυναμική του πτερυγίου). Στις περιστρεφόμενες πτερυγώσεις, το ακτινικό διάκενο σχηματίζεται μεταξύ του άκρου του πτερυγίου που περιστρέφεται και του ακίνητου εξωτερικού κελύφους της μηχανής. Στις σταθερές πτερυγώσεις, το ακτινικό διάκενο σχηματίζεται μεταξύ του άκρου του πτερυγίου που παραμένει ακίνητο και της περιστρεφόμενης ατράκτου η οποία φέρει τα πτερύγια. Συνυφασμένος με τη συμπεριφορά της ροής που διασχίζει το ακτινικό διάκενο είναι ο σχηματισμός του στροβίλου του ακτινικού διακένου που συγκεντρώνει τη ροή που εξέρχεται από αυτό. Η ροή στο ακτινικό διάκενο παρουσιάζεται ποιοτικά στο Σχήμα 8.1.



Σχήμα 8.1

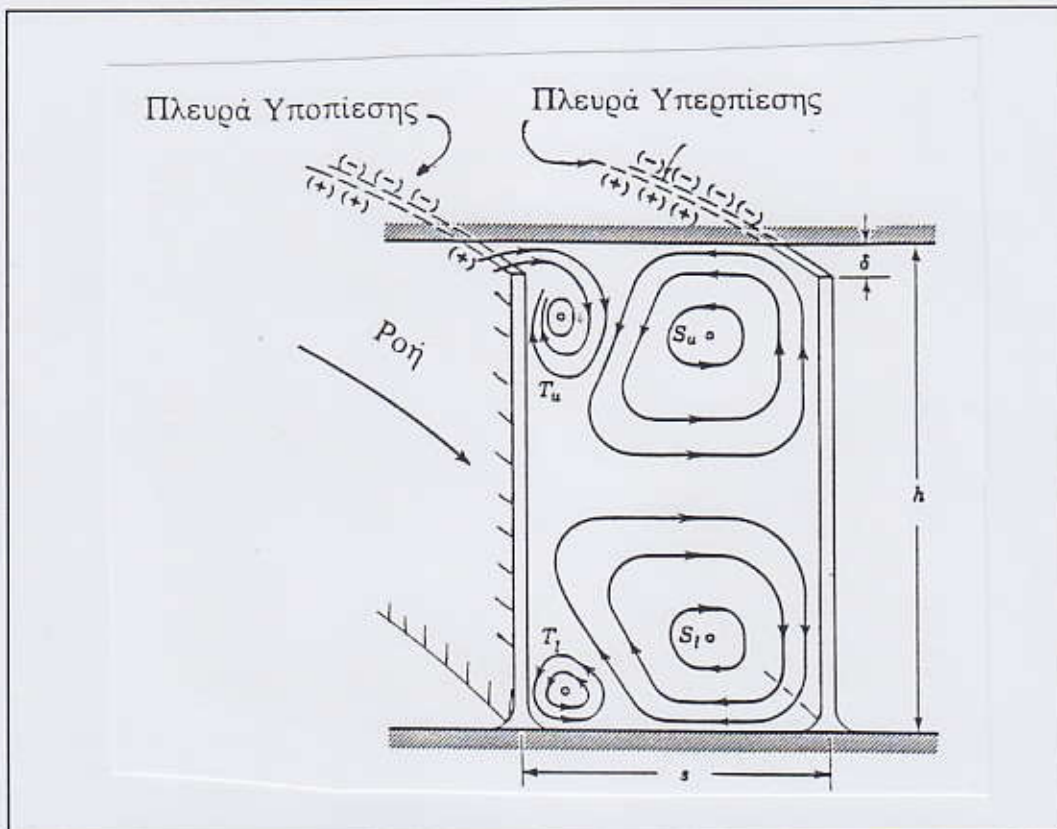
Μια πρώτη θεωρητική ποσοτική μοντελοποίηση της ροής στο ακτινικό διάκενο γίνεται χρησιμοποιώντας τη διαφορά πίεσης που υπάρχει μεταξύ της πλευράς υπερπίεσης p_p και της πλευράς υποπίεσης p_s . Είναι η διαφορά πίεσης $p_p - p_s$ που καθορίζει τη ροή μέσα

8.2

από το ακτινικό διάκενο. Ετσι με παραδοχές ατριοβούς ρευστού και ασυμπίεστης ροής, η ταχύτητα που επάγει τη ροή μέσα από το διάκενο δίνεται από τη σχέση

$$|V_{\alpha\delta}| = \sqrt{\frac{2(p_P - p_S)}{\rho}} \quad (8.1)$$

Η τοπική ταχύτητα μέσα από το ακτινικό διάκενο που καθορίζει θεωρητικά η σχέση (8.1) εξαρτάται από την τοπική διαφορά πίεσης μεταξύ των δύο πλευρών του πτερυγίου και συνεπώς από τη φόρτιση του πτερυγίου. Η φόρτιση λοιπόν του πτερυγίου, στην περιοχή του ακροπτερυγίου, επηρεάζει σημαντικά τη ροή που θα διασχίσει το ακτινικό διάκενο. Από την άλλη πλευρά, το ποσοστό της παροχής που θα διασχίσει το ακτινικό διάκενο δε συμμετέχει στην ενεργειακή συναλλαγή μεταξύ ρευστού και πτερυγίων. Η παροχή μέσα από το ακτινικό διάκενο εξαρτάται βέβαια όχι μόνο από την ταχύτητα $V_{\alpha\delta}$ αλλά επίσης και από το ύψος τ του διακένου. Αυτές οι δύο είναι οι σημαντικότερες παράμετροι που καθορίζουν την ένταση της ροής στο ακτινικό διάκενο.



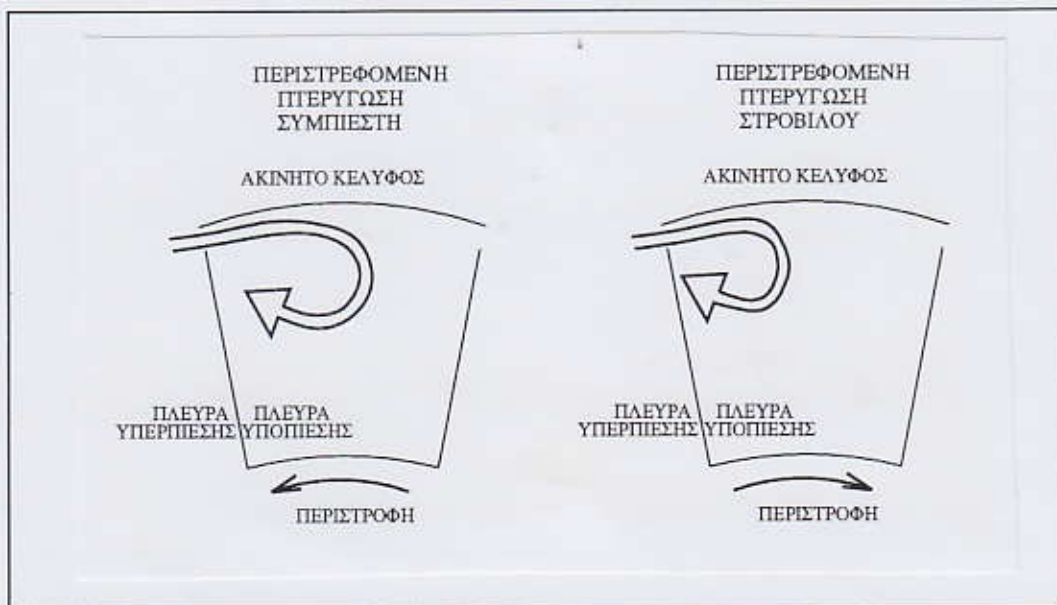
Σχήμα 8.2

Η συνολική ταχύτητα την οποία έχει το ρευστό στην περιοχή του διακένου, μετρούμενο στο σχετικό ως προς το πτερύγιο σύστημα συντεταγμένων σχηματίζεται από την υπέρθεση της πρωτεύουσας ή ατριοβούς ταχύτητας \bar{v}_π κοντά στο πτερύγιο για την

8.3

περίπτωση που δεν υφίσταται το διάκενο και της ταχύτητας $\vec{V}_{\alpha\delta}$. Εξερχόμενη η ροή από το διάκενο προς την πλευρά υποπίεσης του πτερυγίου σχηματίζει (στη γενική περίπτωση) το στρόβιλο του ακτινικού διακένου (tip vortex). Ο στρόβιλος εξελίσσεται μαζί με την κύρια ροή, απομακρυνόμενος ενδεχόμενα από την πλευρά υποπίεσης κατά την περιφερειακή ή/και την ακτινική κατεύθυνση και αλληλοεπιδρώντας με τα υπόλοιπα ροϊκά φαινόμενα. Ο στρόβιλος του ακτινικού διακένου αλληλοεπιδρά με το δευτερεύοντα στρόβιλο, ο οποίος περιγράφεται στο Κεφάλαιο 7 και που έχει ανάποδη φορά από τη δική του, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.2.

Η περιστροφή και η αναφορά στο σχετικό σύστημα επιδρά σημαντικά στην ένταση της ροής του ακτινικού διακένου, με διαφορετικό τρόπο για το συμπιεστή και το στρόβιλο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.3. Στο συμπιεστή, κατά την περιστροφή, η πλευρά υπερπίεσης προηγείται της πλευράς υποπίεσης του ίδιου πτερυγίου και έτσι η δέσμη που εξέρχεται από το διάκενο κινείται περισσότερο προς το εσωτερικό, εγκαταλείποντας την πλευρά υποπίεσης και πλησιάζοντας την πλευρά υπερπίεσης. Συγχρόνως αυξάνει η ένταση του στρόβιλου του ακτινικού διακένου. Το αντίθετο συμβαίνει στο στρόβιλο όπου η πλευρά υποπίεσης από όπου εξέρχεται η δέσμη ροής του διακένου προηγείται και η δέσμη παραμένει κοντά στην πλευρά αυτή. Σημειώνεται ότι, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η φόρτιση του πτερυγίου είναι εντονότερη στους στρόβιλους, σ' αυτούς η ροή του ακτινικού διακένου αναμένεται εντονότερη.



Σχήμα 8.3

Διάφορα άλλα φαινόμενα μπορούν να συμβούν σε πραγματικές πτερυγώσεις συμπιεστών ή στρόβιλων λόγω της ροής του ακτινικού διακένου. Έτσι, στην περίπτωση ροής σε πτερύγωση που αν δεν υπήρχε το ακτινικό διάκενο θα εμφάνιζε τοπική αποκόλληση της ροής στη γωνία μεταξύ πλευράς υποπίεσης και κελύφους, η παρουσία του ακτινικού

8.4

διακένου και η ροή που αυτό δημιουργεί αρκετά συχνά εξαλείφουν την περιοχή της αποκολλημένης ροής. Είναι η περίπτωση που, ενώ η ροή του ακτινικού διακένου συνοδεύεται γενικά από απώλειες, εντούτοις συνεισφέρει στη μείωση των συνολικών απωλειών, αφού αποφεύγεται η αποκόλληση της ροής.

Στην περίπτωση που έχουμε παχέα οριακά στρώματα στο γειτονικό κέλυφος, τα δημιουργούμενα συνεκτικά φαινόμενα εξασθενίζουν σημαντικά τη ροή στο ακτινικό διάκενο. Σε στροβίλους που ψύχονται εσωτερικά και το ρεύμα ψύξης που διαρρέει το περύγιο εκβάλλει στο ακτινικό διάκενο, αυτό συντελεί στη μείωση της ροής που αλλιώς θα έδινε το τελευταίο και στην εξασθένιση ή εξαλείφιση του σχετικού στροβίλου. Από την άλλη πλευρά, διάφοροι λόγοι, όπως είναι λ.χ. η ένταση της τύρβης της εξωτερικής ροής, μπορούν να προκαλέσουν διάχυση της δέσμης ροής που εξέρχεται από το ακτινικό διάκενο.

Η ροή που δημιουργεί το ακτινικό διάκενο είναι ισχυρά τριδιάστατη και ως τέτοια πρέπει να μοντελοποιείται. Όπως φαίνεται στα προηγούμενα σχήματα, δεν περιορίζεται στην περιοχή του διακένου αλλά επεκτείνεται περιφερειακά (προς την πλευρά υπερπίεσης του γειτονικού περυγίου) και ακτινικά ή καθ' ύψος προς το άλλο κέλυφος της μηχανής. Η καθ' ύψος απομάκρυνσή του μπορεί να φθάσει και το 30% του συνολικού ύψους του περυγίου.

Η δημιουργία της δέσμης ροής στο ακτινικό διάκενο και η διάχυσή της στη συνέχεια συνεπάγονται απώλειες που πρακτικά εκτιμώνται περίπου στο 2-4% των συνολικών. Το ποσοστό αυτό εξαρτάται από τον τύπο της στροβιλομηχανής.

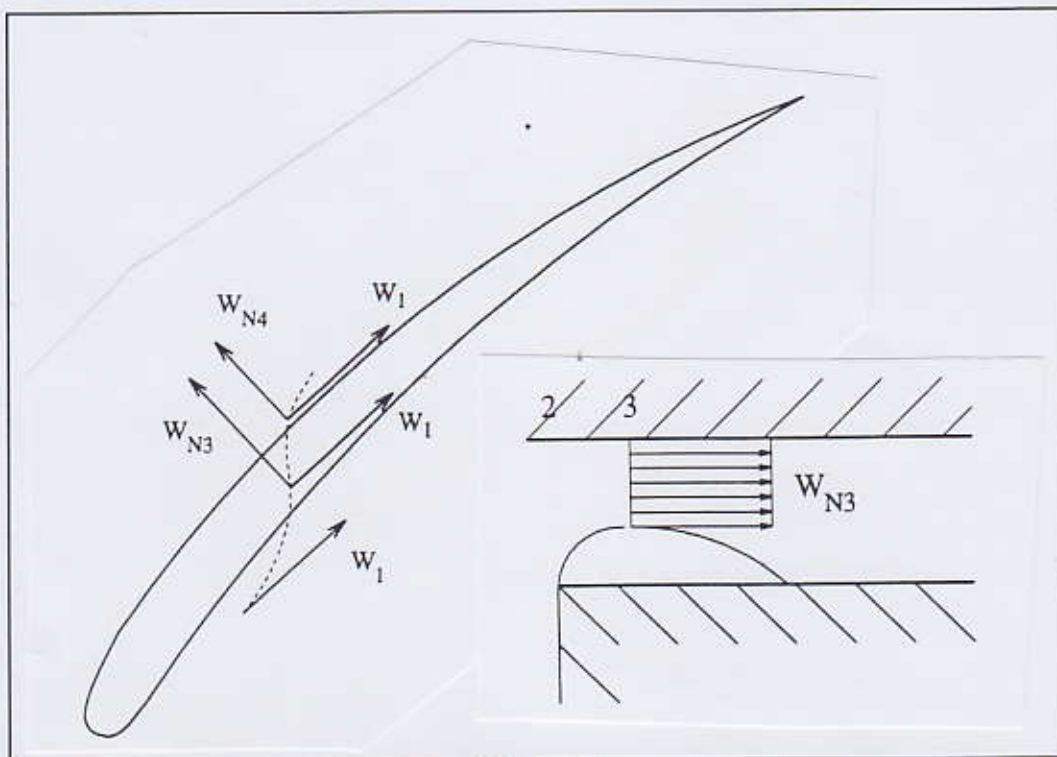
Τέλος θα σημειώσουμε ότι το ίδιο το διάκενο και η ροή που επιτρέπεται να διαφύγει διά μέσου του προκαλούν αποφόρτιση του περυγίου στην περιοχή του αντίστοιχου άκρου του, σε σχέση με τη φόρτιση που θα είχαμε στην περιοχή αυτή αν το περύγιο κατέληγε στο κέλυφος χωρίς κενό χώρο ανάμεσα. Η τοπική αποφόρτιση του περυγίου συνδυάζεται με μικρότερη στροφή της ροής (αφού εκεί τα περύγια αδυνατούν να οδηγήσουν τη ροή όπως πρέπει) και με μείωση του "τοπικού" λόγου πίεσης. Για αντίστοιχους λόγους επηρεάζει την περιοχή ευσταθούς λειτουργίας ενός συμπιεστή. Η επίδραση της ροής του ακτινικού διακένου εξακολουθεί να επιδρά και στις επόμενες περυγώσεις, με επακόλουθο ταλαντώσεις των περυγίων τους, δηλαδή περυγιισμό. Αν πρόκειται για στρόβιλο, η ροή του ακτινικού διακένου τροποποιεί τοπικά το ρυθμό μετάδοσης της θερμότητας και αλλάζει κατά συνέπεια τις απαιτήσεις ψύξης.

8.2 Ένα Απλό Μοντέλο για τη Ροή στο Διάκενο

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιασθεί ένα απλό μοντέλο που προσομοιώνει την ταχύτητα, τη γωνία και τις απώλειες ολικής πίεσης της ροής μέσα στο ακτινικό διάκενο μιας στροβιλομηχανής. Το απλό μοντέλο αυτό έχει παρουσιασθεί από το Rains και συνήθως φέρει

το όνομά του. Έχει βέβαια υποστεί διάφορες βελτιώσεις από διάφορους ερευνητές, αλλά παρόλα ταύτα η φυσική του μοντέλου του Rains είναι αυτή που διέπει όλα τα μεταγενέστερα μοντέλα.

Το μοντέλο στηρίζεται στην παραδοχή, που ήδη αναφέρθηκε, ότι η ροή μέσα στο διάκενο καθορίζεται από τη διαφορά πίεσης μεταξύ της πλευράς υπερπίεσης και υποπίεσης του πτερυγίου που σχηματίζεται στο ύψος του ακροπτερυγίου. Επιτρέπει τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας της δέσμης που εξέρχεται από το διάκενο στην πλευρά υποπίεσης και τις απώλειες ολικής πίεσης που αυτή δημιουργεί. Στο ύψος του ακροπτερυγίου, βασική κατεύθυνση της ροής είναι αυτή που ορίζει η μέση γραμμή του πτερυγίου σε εκείνο το ύψος, ενώ η ύπαρξη του διακένου επάγει πρόσθετη ροή που μπορεί να θεωρηθεί διδιάστατη σε επίπεδα κάθετα στη μέση γραμμή του πτερυγίου. Το μοντέλο χρησιμοποιεί παραδοχές ασυμπίεστου ρευστού.



Σχήμα 8.4

Στο Σχήμα 8.4 παρουσιάζεται η μορφή της ροής σε ένα τέτοιο επίπεδο. Στην αρχή σχηματίζεται μια φουσαλλίδα αποκόλλησης (vena contracta), όπως έχει διαπιστωθεί από πολλά πειράματα. Το σημείο επανακόλλησης της ροής, δηλαδή το τέλος της φουσαλλίδας είναι συνάρτηση του ύψους του διακένου. Η ροή πάνω από τη φουσαλλίδα αποκόλλησης και μέχρι το μέγιστο ύψος της (θέση 3 στο Σχήμα 8.4, όπου το ύψος που διαρρέεται από ρευστό πάνω από τη φουσαλλίδα είναι στ, με τ το συνολικό ύψος του διακένου) θεωρείται ότι δε συμμετέχει στις απώλειες και για το λόγο αυτό μπορεί να προσεγγισθεί με ένα απλό μοντέλο ατρίβους

8.6

ροής, όπου λ.χ. το μοντέλο της δυναμικής ροής. Η κρίσιμη περιοχή της ροής είναι αυτή που ακολουθεί τη θέση 3 και στην οποία λαμβάνει χώρα ισχυρή ανάμιξη της ροής και συνεπώς απώλειες ολικής πίεσης. Ο βαθμός ανάμιξης εξαρτάται, μεταξύ των άλλων, από το λόγο L/t όπου L είναι η απόσταση μεταξύ του τέλους της φουσαλλίδας και της εξόδου του διακένου. Αρα, καθώς το περύγιο έχει διαφορετικό πάχος στις διαφορετικές θέσεις κατά μήκος της χορδής του, εμφανίζεται και διαφορετικός βαθμός ανάμιξης από θέση σε θέση.

Η παραδοχή δυναμικής ροής στην περιοχή 1 έως 3 επιτρέπει τον υπολογισμό του βαθμού στένωσης σ . Η σχετική ανάλυση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι

$$\sigma = \frac{\pi}{\pi + 2} = 0.611 \quad (8.2)$$

που γενικά έχει επιβεβαιωθεί από πειράματα.

Η ανάλυση που θα ακολουθήσει θα χρησιμοποιήσει το ακίνητο σύστημα συντεταγμένων και μπορεί εύκολα να μετατραπεί για περιστρεφόμενη περύγωση αν η σχετική ταχύτητα W χρησιμοποιηθεί αντί της απόλυτης V . Ο δείκτης s δείχνει συνιστώσες κατά την κατεύθυνση της μέσης γραμμής του περυγίου ενώ ο δείκτης n συμβολίζει την κάθετη στην s κατεύθυνση.

Αφού η ροή μεταξύ 1 και 3 στερείται απωλειών, ισχύει

$$p_{t_1} = p_{t_3} \quad (8.3)$$

όπου

$$p_{t_1} = p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 \quad , \quad p_{t_3} = p_3 + \frac{1}{2} \rho (V_{s3}^2 + V_{n3}^2) \quad (8.4)$$

Υποθέτουμε ότι διατηρείται η ορμή κατά την κατεύθυνση της μέσης γραμμής του περυγίου, οπότε

$$V_1 = V_{s3} = V_{s4} \quad (8.5)$$

Η συσχέτιση των σχέσεων (8.3) ως (8.5) δίνει

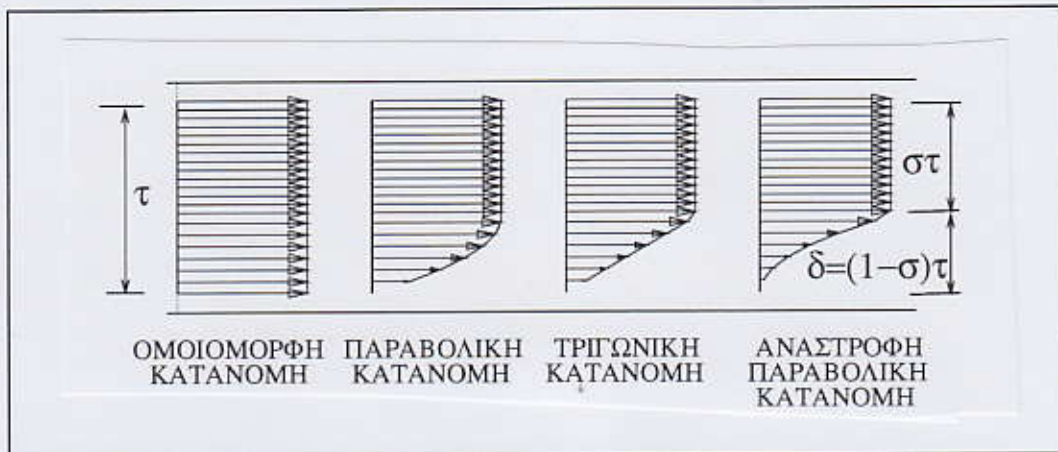
$$p_1 = p_3 + \frac{1}{2} \rho V_{n3}^2 \quad (8.6)$$

Η διατήρηση της παροχής κατά την n κατεύθυνση μεταξύ της θέσης 3 και της θέσης 4 δίνει

$$\int_0^{\tau} V_{n3} dy = \int_0^{\tau} V_{n4} dy$$

Θα θεωρήσουμε ότι το ύψος τ του διακένου είναι σταθερό σε όλο το μήκος του πτερυγίου και ότι πάνω από τη φουσαλλίδα αποκόλλησης υπάρχει μια ομοιόμορφη κατανομή της V_{n3} που αντιστοιχεί σε ύψος ροής $\sigma\tau$. Τότε, η τελευταία σχέση γράφεται

$$V_{n3} \sigma\tau = \int_0^{\tau} V_{n4} dy \quad (8.7)$$



Σχήμα 8.5

Κάθε επιπλέον επεξεργασία της σχέσης (8.7) απαιτεί παραδοχή για την καθ' ύψος κατανομή της V_{n4} . Γενικά, θα επιτρέψουμε στη V_{n4} να διέπεται από ομοιόμορφη, τριγωνική, παραβολική ή ανάστροφη παραβολική κατανομή (βλέπε Σχήμα 8.5), ανάλογα με την τιμή του λόγου L/τ . Ένας ποιοτικός οδηγός για την επιλογή της σωστής κατανομής ταχύτητας στη θέση 4 δίνεται παρακάτω

| | | | | | | |
|-----|---|----------|---|-----|---------------------|-------------------------------|
| 6 | < | L/τ | | → | ομοιόμορφη κατανομή | |
| 2 | < | L/τ | < | 6 | → | παραβολική κατανομή |
| 0.8 | < | L/τ | < | 2 | → | τριγωνική κατανομή |
| | | L/τ | < | 0.8 | → | ανάστροφη παραβολική κατανομή |

Θα χειριστούμε γενικά τη σχέση (8.7) αναλύοντας το δεξιό μέλος ως συνάρτηση της μέγιστης τιμής της ταχύτητας V_{n4}^* , έτσι ώστε

$$V_{n3} = \frac{V_{n4}^* I_1}{\sigma} \quad (8.8)$$

όπου

$$\int_0^{\tau} V_{n4} dy = V_{n4}^* I_1 \tau \quad (8.9)$$

όπου I_1 είναι κατάλληλος συντελεστής, όπως προκύπτει από την ανάλυση του ολοκληρώματος για τις τέσσερις κατανομές.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την εξίσωση διατήρησης της ορμής στην κάθετη στη μέση γραμμή του περυγίου διεύθυνση, μεταξύ των θέσεων 3 και 4. Αυτή δίνει

$$p_3 \tau + \rho V_{n3}^2 \sigma \tau = p_4 \tau + \rho \int_0^{\tau} V_{n4}^2 dy \quad (8.10)$$

ή, με τη βοήθεια της σχέσης (8.6), ότι

$$(p_4 - p_1) \tau = \rho V_{n3}^2 \tau \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) - \rho \int_0^{\tau} V_{n4}^2 dy$$

Σε αντιστοιχία με τη σχέση (8.9) γράφουμε ότι

$$\int_0^{\tau} V_{n4}^2 dy = V_{n4}^{*2} I_2 \tau \quad (8.11)$$

ενώ αντικαθιστώντας την έκφραση του V_{n3} που δίνει η σχέση (8.8), η διατήρηση της ορμής στη διεύθυνση η δίνει τελικά ότι

$$p_4 - p_1 = \rho V_{n4}^{*2} \left[\frac{I_1^2}{\sigma^2} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) - I_2 \right] \quad (8.12)$$

Διαιρώντας κατάλληλα τα δύο μέλη της (8.12) εμφανίζεται ο αδιάστατος συντελεστής πτώσης πίεσης μεταξύ των θέσεων 1 και 4

$$C_{p14} = \frac{P_4 - P_1}{\frac{1}{2} \rho V_1^2} \quad (8.13)$$

και η εξίσωση (8.12) γράφεται ως

$$C_{p14} = \left(\frac{V_{n4}^*}{V_1} \right)^2 \left[\frac{I_1^2}{\sigma^2} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) - I_2 \right] \quad (8.14)$$

Ανάλογα με τη μορφή που θα έχει η κατανομή ταχύτητας V_{n4} στη θέση 4 εξόδου από το ακτινικό διάκενο. Έχουμε:

(α) **Ομοιόμορφη Κατανομή:** Είναι η περίπτωση κατά την οποία ισχύει ότι

$$I_1 = I_2 = 1 \quad (8.15)$$

και με την τιμή της σχέσης (8.2) για το βαθμό στένωσης σ , η σχέση (8.14) παίρνει τη μορφή

$$\left(\frac{V_{n4}^*}{V_1} \right)^2 = -0.7116 C_{p14} \quad (8.16)$$

(β) **Παραβολική Κατανομή:** Αν είναι δ το πάχος του ομόρρου που σχηματίζεται πίσω από τη φουσαλλίδα

$$\delta = (1 - \sigma) \tau = 0.389 \tau \quad (8.17)$$

τότε η παραβολική κατανομή έχει τη γενική μορφή

$$V_{n4}(y) = ay^2 + by, \quad 0 \leq y \leq \delta \quad (8.18)$$

ενώ για $y > \delta$ έχει τη σταθερή τιμή $V_{n4} = V_{n4}^*$. Οι συντελεστές a και b υπολογίζονται εύκολα απαιτώντας συνέχεια τιμής και παραγώγου στο ύψος δ και βρίσκονται ίσοι με

$$a = -\frac{V_{n4}^*}{\delta^2}, \quad b = \frac{2V_{n4}^*}{\delta} \quad (8.19)$$

Τότε η σχέση (8.9) υπολογίζεται ως η υπέρθεση δύο επιμέρους ολοκληρωμάτων, είναι δηλαδή

$$\int_0^{\tau} V_{n4} dy = \int_0^{\delta} V_{n4}(y) dy + \int_{\delta}^{\tau} V_{n4}^* dy \quad (8.20)$$

Αντικαθιστώντας την κατανομή (8.18), με τους συντελεστές (8.19), στη σχέση (8.20) και εκτελώντας την ολοκλήρωση προκύπτει ότι

$$\int_0^{\tau} V_{n4} dy = V_{n4}^* \tau \left(\frac{2+\sigma}{3} \right)$$

οπότε, με βάση τη σχέση (8.9) ισχύει ότι

$$I_1 = \frac{2+\sigma}{3} = 0.8703 \quad (8.21)$$

Η σχέση (8.11) υπολογίζεται ως μια αντιστοιχη υπέρθεση

$$\int_0^{\tau} V_{n4}^2 dy = \int_0^{\delta} V_{n4}^2(y) dy + \int_{\delta}^{\tau} V_{n4}^{*2} dy \quad (8.22)$$

και μετά τις απαραίτητες πράξεις προκύπτει ότι

$$\int_0^{\tau} V_{n4}^2 dy = V_{n4}^{*2} \tau \left[\frac{8}{15} + \frac{7}{15} \sigma \right]$$

δηλαδή

$$I_2 = \frac{8}{15} + \frac{7}{15} \sigma = 0.8185 \quad (8.23)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των I_1 και I_2 από τις σχέσεις (8.21) και (8.23) στη σχέση (8.14) προκύπτει ότι

$$\left(\frac{V_{n4}^*}{V_1} \right)^2 = -0.8428 C_{p14} \quad (8.24)$$

(γ) **Τριγωνική Κατανομή:** Η τριγωνική κατανομή αποτελείται από τη γραμμική διανομή

$$V_{n4}(y) = \frac{V_{n4}^*}{\delta} y, \quad 0 \leq y \leq \delta$$

η οποία συνεχίζει μετά με τη σταθερή τιμή V_{n4}^* . Είναι αρκετά απλό να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{\tau} V_{n4} dy = V_{n4}^* \tau \left(\frac{1+\sigma}{2} \right)$$

$$\int_0^{\tau} V_{n4}^2 dy = V_{n4}^{*2} \tau \left(\frac{2\sigma+1}{3} \right)$$

δηλαδή ότι

$$I_1 = \frac{1+\sigma}{2} = 0.8055 \quad (8.25)$$

$$I_2 = \frac{2\sigma+1}{3} = 0.7407 \quad (8.26)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των I_1 και I_2 από τις σχέσεις (8.25) και (8.26) στη σχέση (8.14) προκύπτει ότι

$$\left(\frac{V_{n4}^*}{V_1} \right)^2 = -0.9128 C_{p14} \quad (8.27)$$

(δ) **Ανάστροφη Παραβολική Κατανομή:** Αυτή δίνεται από τη σχέση

$$V_{n4}(y) = V_{n4}^* \frac{y^2}{\delta^2}, \quad 0 \leq y \leq \delta \quad (8.28)$$

που συμπληρώνεται με την ομοιόμορφη κατανομή μετά το ύψος δ . Με την εκτέλεση των σχετικών ολοκληρώσεων προκύπτει ότι

$$\int_0^{\tau} V_{n4} dy = V_{n4}^* \tau \left(\frac{2\sigma+1}{3} \right)$$

$$\int_0^{\tau} V_{n4}^2 dy = V_{n4}^{*2} \tau \left(\frac{4\sigma+1}{5} \right)$$

δηλαδή ότι

$$I_1 = \frac{2\sigma+1}{3} = 0.7407 \quad (8.29)$$

$$I_2 = \frac{4\sigma+1}{5} = 0.6888 \quad (8.30)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των I_1 και I_2 από τις σχέσεις (8.29) και (8.30) στη σχέση (8.14) προκύπτει ότι

$$\left(\frac{V_{nd}^*}{V_1} \right)^2 = -0.9512 C_{p14} \quad (8.31)$$

Συνοψίζοντας τις σχέσεις που προέκυψαν για τις τέσσερις απλουστευτικές κατανομές που εξετάστηκαν, έχουμε ότι γενικά ισχύει

$$\frac{V_{nd}^*}{V_1} = C_d \sqrt{-C_{p14}} \quad (8.32)$$

όπου C_d ο συντελεστής εκκροής με τιμές:

- $C_d = 0.8436$, για ομοιόμορφη κατανομή
- $C_d = 0.9180$, για παραβολική κατανομή
- $C_d = 0.9554$, για τριγωνική κατανομή
- $C_d = 0.9753$, για ανάστροφη παραβολική κατανομή

Αντί της μέγιστης ταχύτητας V_{nd}^* εξόδου από το διάκενο μπορεί να χρησιμοποιηθεί

η αντίστοιχη μέση ταχύτητα \bar{V}_{nd} για την οποία ισχύει ότι

$$\bar{V}_{nd} = I_1 V_{nd}^* \quad (8.33)$$

Η αντίστοιχη της (8.32) σχέση γράφεται

$$\frac{\bar{V}_{nd}}{V_1} = I_1 C_d \sqrt{-C_{p14}} \quad (8.34)$$

όπου ο νέος συντελεστής εκκροής $I_1 C_d$ παίρνει τις τιμές

- $I_1 C_d = 0.8436$, για ομοιόμορφη κατανομή
- $I_1 C_d = 0.7989$, για παραβολική κατανομή
- $I_1 C_d = 0.7696$, για τριγωνική κατανομή
- $I_1 C_d = 0.7224$, για ανάστροφη παραβολική κατανομή

Αξιζει να παρατηρηθει η αύξουσα μορφή του συντελεστή εκκροής C_d , σε αντίθεση με τη φθίνουσα μορφή του $I_1 C_d$.

Για την εύρεση της γωνίας με την οποία εξέρχεται η δέσμη του διακένου από την πλευρά υποπίεσης του πτερυγίου συνδυάζεται η μέση κάθετη συνιστώσα της \bar{V}_{n4} με τη συνιστώσα V_{s4} κατά μήκος της μέσης γραμμής του πτερυγίου.

8.3 Ένα Απλό Μοντέλο για τις Απώλειες στο Διάκενο

Οι απώλειες που συνεπάγεται η ροή μέσα από το διάκενο υπολογίζονται σε κάθε στοιχειώδες μήκος ds της μέσης γραμμής ως

$$A = \left\{ \int_0^{\tau} V_{n4} p_{t4} dy - \int_0^{\tau} V_{n3} p_{t3} dy \right\} ds \quad (8.35)$$

Για ασυμπίεστο ρευστό, εφαρμόζεται το θεώρημα του Βερνούλλι και έχουμε για τις θέσεις 3 και 4 ότι

$$\int_0^{\tau} V_{n3} p_{t3} dy = \int_0^{\tau} V_{n3} p_3 dy + \frac{1}{2} \rho \int_0^{\tau} (V_{n3}^3 + V_{n3} V_{s3}^2) dy$$

$$\int_0^{\tau} V_{n4} p_{t4} dy = \int_0^{\tau} V_{n4} p_4 dy + \frac{1}{2} \rho \int_0^{\tau} (V_{n4} V_4^2) dy$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (8.5), (8.6) και (8.8) και την παραδοχή ότι η διανομή ταχύτητας είναι ομοιόμορφη στη διατομή 3 έχουμε ότι

$$\int_0^{\tau} V_{n3} p_{t3} dy = V_{n3} \sigma \tau \left(p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 \right) \quad (8.36)$$

ενώ για τη διατομή 4 με τη βοήθεια της (8.9), γράφουμε ότι

$$\int_0^{\tau} V_{n4} p_{t4} dy = p_4 V_{n4}^* I_1 \tau + \frac{1}{2} \rho V_{n4}^{*3} I_3 \tau + \frac{1}{2} \rho V_1^2 V_{n4}^* I_1 \tau \quad (8.37)$$

όπου ορίσαμε ότι

$$\int_0^{\tau} V_{nd}^3 dy = V_{nd}^{*3} I_3 \tau \quad (8.38)$$

Ο υπολογισμός του συντελεστή I_3 μπορεί να γίνει με τον ίδιο τρόπο που υπολογίσθηκαν οι συντελεστές I_1 και I_2 στην προηγούμενη ενότητα. Αποφεύγουμε να παρουσιάσουμε ολόκληρο τον υπολογισμό του I_3 ανά περίπτωση και συνοψίζουμε τις σχέσεις (8.35) ως (8.38), οπότε για τις απώλειες έχουμε ότι

$$A = \frac{1}{2} ds \tau W_1^3 C_A (-C_{p14})^{3/2} \quad (8.39)$$

όπου C_A είναι ένας αδιάστατος συντελεστής απωλειών με τιμές

| | | |
|---------------|---|-----------------------------------|
| $C_A = -0.24$ | , | για ομοιόμορφη κατανομή |
| $C_A = -0.19$ | , | για παραβολική κατανομή |
| $C_A = -0.15$ | , | για τριγωνική κατανομή |
| $C_A = -0.11$ | , | για ανάστροφη παραβολική κατανομή |

Το αρνητικό πρόσημο σε όλες τις εκφράσεις του συντελεστή C_A δείχνει το ότι πρόκειται για απώλεια ολικής πίεσης. Η σύγκριση επίσης των τιμών του C_A οδηγεί σε χρήσιμα αποτελέσματα. Παρατηρούμε λ.χ. ότι οι απώλειες για ομοιόμορφη κατανομή ταχύτητας στην έξοδο είναι υπερδιπλάσιες αυτών που αντιστοιχούν στην ανάστροφη παραβολική κατανομή στην ίδια θέση. Η ομοιόμορφη κατανομή στην έξοδο συμβαίνει όταν $L/\tau > 6$, δηλαδή όταν έχουμε μεγάλο πάχος πτερυγίου. Η ανάστροφη παραβολική κατανομή στην έξοδο συμβαίνει όταν $L/\tau < 0.8$, δηλαδή όταν έχουμε πολύ μικρό πάχος πτερυγίου. Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί γενικά σε πτερύγια στροβίλου ενώ η τελευταία σε πτερύγια συμπιεστή. Γίνεται συνεπώς αντιληπτό το γιατί στα ακτινικά διάκενα των στροβίλων έχουμε πολύ μεγαλύτερες απώλειες από αυτές που συμβαίνουν στα διάκενα των πτερυγώσεων συμπιεστών.

8.4 Ο Στρόβιλος του Διακένου

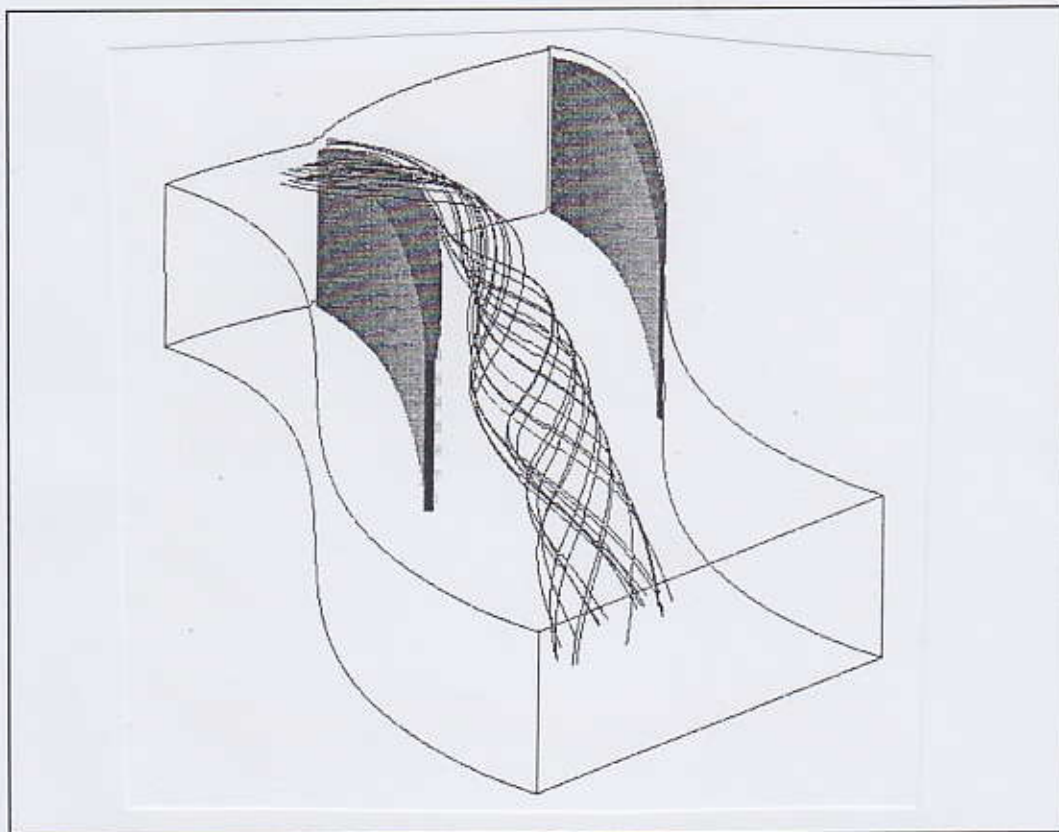
Η μελέτη πολλών πειραμάτων σε συμπιεστές και στροβίλους έχει δείξει ότι για τη μελέτη του στροβίλου που εκφεύγει από το διάκενο μπορεί να γίνει η παραδοχή ότι το σύνολο της παροχής που εξέρχεται από αυτό στην πλευρά υποπίεσης ενισχύει το στρόβιλο του διακένου, αυξάνοντας την ακτίνα και τη στροφορμή του στην κατεύθυνση του άξονά του. Ένα από τα πρώτα θεωρητικά συμπεράσματα για την κυκλοφορία του στροβίλου του διακένου είναι ότι αυτή παραμένει ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας του ύψους τ του διακένου.

Ετσι λοιπόν γίνεται αντιληπτό ότι η ένταση του στροβίλου του διακένου αυξάνεται

όταν αυξάνεται το πάχος του ακτινικού διακένου, δηλαδή όταν αυξάνεται η παροχή μάζας που το διαρρέει. Όπως ήδη συζητήθηκε στην Ενότητα 8.1, η σχετική κίνηση τοιχώματος και πτερυγίου επιδρά στην ένταση του στροβίλου του διακένου. Σε πτερύγωση συμπιεστή, η σχετική κίνηση τοιχώματος και πτερυγίου αυξάνει την ένταση του στροβίλου. Το αντίθετο συμβαίνει σε πτερυγώσεις στροβίλου με κινούμενα πτερύγια ή κελύφη.

Θα τονίσουμε ότι η γένεση του στροβίλου είναι μια μη-συνεκτική διεργασία. Η συνεκτικότητα όμως παίζει σημαντικό ρόλο στην αναδιανομή του στροβιλισμού μετά τη γένεσή του.

Στο Σχήμα 8.6 φαίνεται η δημιουργία και χωρική εξέλιξη του στροβίλου του ακτινικού διακένου έτσι όπως υπολογίσθηκε εφαρμόζοντας έναν κώδικα επίλυσης των τριδιάστατων εξισώσεων Navier-Stokes για μια πτερύγωση στροβίλου. Η απεικόνιση του στροβίλου έγινε χρησιμοποιώντας κατάλληλο λογισμικό με υποστήριξη γραφικών που μπορεί να σχεδιάσει γραμμές ροής σε ένα τριδιάστατο πεδίο ταχυτήτων. Χρησιμοποιήθηκε η τεχνική διόρθωσης πίεσης, σχήμα πεπερασμένων όγκων και το μοντέλο τύρβης k-ε.



Σχήμα 8.6

Τα απλά μοντέλα για τη ροή στο ακτινικό διάκενο έχουν πρωτοπαρουσιασθεί από το Rains και περιγράφονται στην εργασία

R.A. Rains, "Tip-Clearance Flow in Axial Flow Compressors and Pumps", California Institute of Technology, Hydrodynamics and Mechanical Engineering Laboratories, Report No.5, 1954.

ενώ ανακεφαλαίωση τέτοιων μοντέλων βρίσκει κανείς σε κλασικά συγγράμματα στροβιλομηχανών και στην εργασία

I.K. Νικολός, "Συμβολή στον Υπολογισμό των Δευτερευουσών Απωλειών Συμπιεστών με Έμφαση στην Επίδραση του Ακτινικού Διακένου", Διδακτορική Διατριβή ΕΜΠ, 1996.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Ο ΔΕΥΤΕΡΕΥΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΙΣΜΟΣ

9.1 Γενικά περί Μοντέλων Δευτερεύοντος Στροβιλισμού

Ο όρος "δευτερεύουσες ροές" ή "δευτερεύον πεδίο ροής" στις στροβιλομηχανές χρησιμοποιείται για να ενσωματώσει τη διαφορά μεταξύ του πραγματικού πεδίου ροής και του λεγόμενου "πρωτεύοντος" πεδίου ροής, όπως αναλύθηκε διεξοδικά στο Κεφάλαιο 7.

Το δευτερεύον πεδίο ροής έχει θεωρητικά μοντελοποιηθεί από πολλούς ερευνητές, χρησιμοποιώντας διάφορα μοντέλα και με διαφορετική πολυπλοκότητα στην προσέγγισή τους. Η δευτερεύουσα ροϊκή συνάρτηση που αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 7 είναι μια τυπική τεχνική. Εναλλακτικά ως προς την απλή σχέση των Squire και Winter, για τον υπολογισμό του δευτερεύοντος στροβιλισμού ο οποίος υπεισέρχεται στο δεξιό μέλος, άλλες μέθοδοι προσέγγισης είναι αυτές που χρησιμοποιούν τις εξισώσεις μεταφοράς του στροβιλισμού, με παραδοχές ατριβούς πεδίου ροής. Με τις παραδοχές αυτές, η συνεκτικότητα ουσιαστικά συμμετέχει στη δημιουργία του ανομοιομορφου πεδίου ταχύτητας της εισόδου δηλαδή των αρχικών οριακών στρώματων στα δυο κελύφη της μηχανής. Η χρήση εξισώσεων ατριβούς ροής στο μοντέλο υπολογισμού της εξέλιξης του δευτερεύοντος στροβιλισμού, αδυνατεί βέβαια να λάβει υπόψη της την εξέλιξη του οριακού στρώματος, λόγω συνεκτικών φαινομένων.

Στην ενότητα που θα ακολουθήσουν θα αναπτύξουμε τις εξισώσεις μεταφοράς του δευτερεύοντος στροβιλισμού, δηλαδή της συνιστώσας του διανύσματος του στροβιλισμού $\bar{\Omega}$ στην κατεύθυνση του τοπικού διανύσματος της ταχύτητας \bar{V} ή \bar{W} . Θα χρησιμοποιηθεί ένα σύστημα αναφοράς που ακολουθεί τις γραμμές ροής μέσα σε μια περιστρεφόμενη περύγωση. Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να παράγει τις αντίστοιχες εξισώσεις για μια ακίνητη περύγωση, αρκεί στη θέση της σχετικής ταχύτητας \bar{W} να χρησιμοποιήσει την απόλυτη \bar{V} , μηδενίζοντας συγχρόνως της ταχύτητα περιστροφής ω . Συνεκτικοί όροι δεν θα ληφθούν, προς το παρόν, υπόψη. Στο τέλος του κεφαλαίου, έχοντας στη διάθεσή μας τις απλές εξισώσεις μεταφοράς του στροβιλισμού που θα παράγουμε, θα σχολιασθούν οι τρόποι δημιουργίας και οι τεχνικές εξέλιξης του δευτερεύοντος στροβιλισμού στις στροβιλομηχανές.

9.2 Βασικές Εξισώσεις και Σύστημα Συντεταγμένων

Για να παρουσιάσουμε τις εξισώσεις μεταφοράς στροβιλισμού θα χρειαστούμε αφενός μεν τις εξισώσεις της ορμής σε κατάλληλη μορφή η οποία να εμπλέκει το διάνυσμα του στροβιλισμού $\bar{\Omega}$, αφετέρου δε ένα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων που θα ακολουθεί τις γραμμές ροής του σχετικού πεδίου αναφοράς.

Για τη μόνιμη ατριβή ροή, η εξίσωση της ορμής μπορεί να γραφεί στη μορφή (βλ. Κ.Δ. Παπαηλιού, Κ.Μ. Μαθιουδάκης, Κ.Χ. Γιαννάκογλου, "Εισαγωγή στις Θερμικές Στροβιλομηχανές")

$$\vec{W} \times \vec{\Omega}_R = 2\vec{\omega} \times \vec{W} + \nabla_R \left(\frac{W^2}{2} - \frac{\omega^2 R^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla_R p \quad (9.1)$$

όπου $\vec{\Omega}_R$ είναι το διάνυσμα του στροβιλισμού στο σχετικό σύστημα το οποίο περιστρέφεται με τη σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ της μηχανής, δηλαδή

$$\vec{\Omega}_R = \nabla_R \times \vec{W} \quad (9.2)$$

ενώ είναι ∇_R είναι ο τελεστής κλίσης γραμμένος στο σχετικό σύστημα αναφοράς. Στην εξίσωση (9.1) έχουν αμεληθεί, πλην των συνεκτικών όρων, οι όροι εκείνοι που περιέχουν την επιτάχυνση της βαρύτητας \vec{g} .

Συγχρόνως ισχύει η εξίσωση του Gibbs, η οποία εμπλέκει τα τρία θερμοδυναμικά μεγέθη της πίεσης p , της στατικής ενθαλπίας h (ή ισοδύναμα της στατικής θερμοκρασίας T) και της εντροπίας S . Η εξίσωση του Gibbs για το σχετικό σύστημα γράφεται

$$\frac{1}{\rho} \nabla_R p = \nabla_R h - T \nabla_R S \quad (9.3)$$

Αντικαθιστώντας τον όρο κλίσης πίεσης στην (9.1) με την εξίσωση του Gibbs, προκύπτει ότι

$$\vec{W} \times \vec{\Omega}_R = 2\vec{\omega} \times \vec{W} + \nabla_R \left(\frac{W^2}{2} - \frac{\omega^2 R^2}{2} + h \right) - T \nabla_R S$$

Στην παραπάνω εξίσωση αναγνωρίζουμε το μέγεθος της σχετικής ολικής ενθαλπίας

$$h_{t_r} = h + \frac{W^2}{2} - \frac{\omega^2 R^2}{2} \quad (9.4)$$

οπότε με αναδιάταξη των όρων της γράφεται και ως

$$\nabla_R h_{t_r} = \vec{W} \times (\vec{\Omega}_R + 2\vec{\omega}) + T \nabla_R S \quad (9.5)$$

Στην εξίσωση (9.5) εφαρμόζουμε τον τελεστή περιστροφής (rot) στο σχετικό σύστημα και προκύπτει

$$\nabla_R \times \nabla_R h_{t_r} = \nabla_R \times [\vec{W} \times (\vec{\Omega}_R + 2\vec{\omega})] + \nabla_R \times (T \nabla_R S) = 0$$

αφού, από το διανυσματικό λογισμό γνωρίζουμε ότι

$$\nabla_R \times \nabla_R h_{t_R} = 0$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή περιστροφής και στην εξίσωση (9.1) παίρνουμε

$$\nabla_R \times (\vec{W} \times \vec{\Omega}_R) = 2 \nabla_R \times (\vec{\omega} \times \vec{W}) + \nabla_R \times \nabla_R \left(\frac{W^2}{2} - \frac{\omega^2 R^2}{2} \right) + \nabla_R \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla_R p \right)$$

όπου, για τον ίδιο λόγο, ισχύει ότι

$$\nabla_R \times \nabla_R \left(\frac{W^2}{2} - \frac{\omega^2 R^2}{2} \right) = 0$$

Οι παραπάνω αντικαταστάσεις μας παρέχουν δύο εναλλακτικές γραφές της διανυσματικής εξίσωσης από την οποία θα προκύψει η εξίσωση μεταφοράς του στροβιλισμού. Οι δύο εναλλακτικές γραφές συνοψίζονται στην παρακάτω εξίσωση

$$\nabla_R \times [\vec{W} \times (\vec{\Omega}_R + 2\vec{\omega})] + \vec{F} = 0 \quad (9.6)$$

όπου

$$\vec{F} = -\nabla_R \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla_R p \right) = \nabla_R \times (T \nabla_R S) \quad (9.7a)$$

Προκειμένου να αναπτύξουμε περαιτέρω τη διανυσματική εξίσωση (9.6) θα χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω βασικές σχέσεις από το διανυσματικό λογισμό:

(α) αν \vec{A} και \vec{B} δυο τυχαίες διανυσματικές συναρτήσεις, τότε ισχύει

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \vec{B} + \vec{A} \nabla \cdot \vec{B} - \vec{B} \nabla \cdot \vec{A} \quad (9.8a)$$

(β) αν \vec{A} μια διανυσματική συνάρτηση και \vec{C} μια διανυσματική σταθερά, τότε ισχύει

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot \nabla \vec{A} - \vec{C} \nabla \cdot \vec{A} \quad (9.8b)$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω ιδιοτήτων αναπτύσσουμε τον όρο εκείνο της εξίσωσης (9.6) που αντιστοιχεί στην επιτάχυνση Coriolis. Είναι

$$2 \nabla_R \times (\vec{W} \times \vec{\omega}) = 2 \vec{\omega} \cdot \nabla_R \vec{W} - 2 \vec{\omega} \nabla_R \cdot \vec{W} \quad (9.9a)$$

Συγχρόνως αναπτύσσουμε και τον πρώτο όρο της (9.6) και παίρνουμε

$$\nabla_R \times (\vec{W} \times \vec{\Omega}_R) = \vec{\Omega}_R \cdot \nabla_R \vec{W} - \vec{W} \cdot \nabla_R \vec{\Omega}_R - \vec{\Omega}_R \nabla_R \cdot \vec{W} \quad (9.9b)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ότι

$$\vec{W} \nabla_R \cdot \vec{\Omega}_R = \vec{W} \nabla_R \cdot (\nabla_R \times \vec{\Omega}_R) = 0$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (9.9α) και (9.9β), η εξίσωση (9.6) γράφεται

$$-\vec{\Omega}_R \cdot \nabla_R \vec{W} + \vec{W} \cdot \nabla_R \vec{\Omega}_R + \vec{\Omega}_R \nabla_R \cdot \vec{W} = 2\vec{\omega} \cdot \nabla_R \vec{W} - 2\vec{\omega} \nabla_R \cdot \vec{W} + \vec{F} \quad (9.10)$$

Τέλος, επειδή από το διανυσματικό λογισμό γνωρίζουμε ότι αν \vec{A} είναι μια διανυσματική συνάρτηση και Φ μια βαθμωτή συνάρτηση, ισχύει

$$\nabla \times (\Phi \vec{A}) = \Phi \nabla \times \vec{A} + \nabla \Phi \times \vec{A} = -\vec{A} \times \nabla \Phi + \Phi \nabla \times \vec{A} \quad (9.8\gamma)$$

οι εκφράσεις (9.7α) για τον όρο \vec{F} της (9.10) μπορούν να γραφούν και στη μορφή

$$\vec{F} = \nabla_R p \times \nabla_R \frac{1}{\rho} = -\nabla_R S \times \nabla_R T \quad (9.7\beta)$$

Το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο είναι βολικό να αναπτύξουμε τη διανυσματική εξίσωση μεταφοράς του στροβιλισμού ορίζεται από τα συνοδεύοντα τις σχετικές γραμμές του πεδίου ροής τριέδρα Frenet. Αν συμβολίσουμε με \vec{r} το διάνυσμα θέσης που χαρακτηρίζει ένα σημείο M της γραμμής ροής στο σχετικό σύστημα και με s το μήκος τόξου, μετρούμενο πάνω σε μια σχετική γραμμή ροής, τότε (Σχήμα 9.1) το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα της γραμμής ροής στο M είναι το

$$\vec{i}_s = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (9.11\alpha)$$

Από την προφανή διανυσματική ιδιότητα

$$\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = 0$$

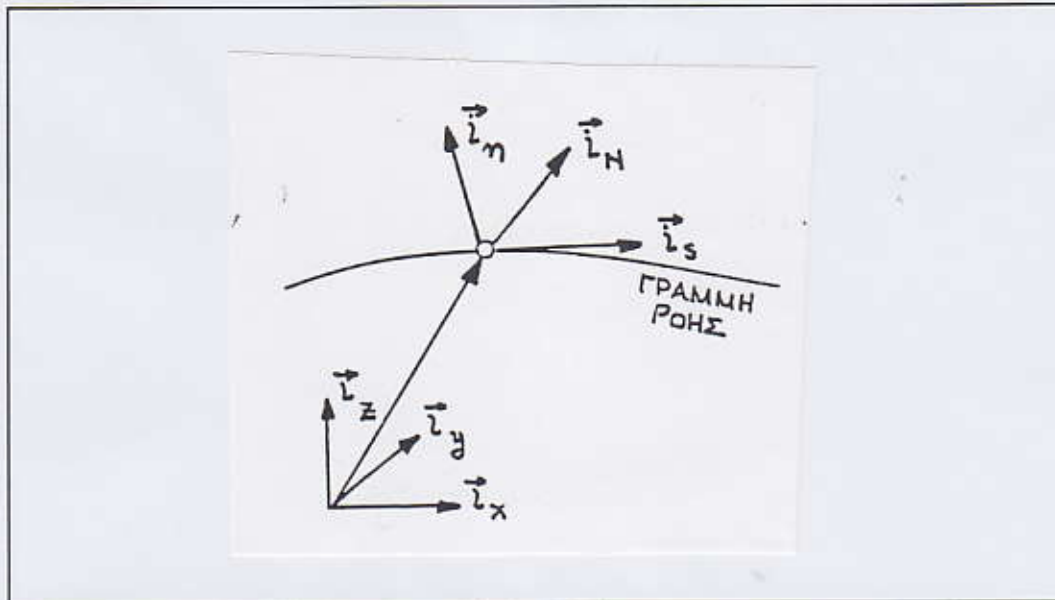
ορίζεται μια νέα κατεύθυνση η οποία είναι κάθετη στο διάνυσμα \vec{i}_s . Η κατεύθυνση αυτή λέγεται πρωτοκάθετος (θα συμβολίζεται με N) και το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα ονομάζεται πρωτοκάθετο διάνυσμα \vec{i}_N . Για το τελευταίο ισχύει

$$\vec{i}_N = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \Big/ \left| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right| \quad (9.11\beta)$$

Το τριέδρο Frenet που ακολουθεί τη γραμμή ροής συμπληρώνεται από τη δευτεροκάθετο διεύθυνση n και το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα \vec{i}_n που ορίζεται ως

$$\vec{i}_n = \vec{i}_s \times \vec{i}_N \quad (9.11\gamma)$$

Από τον ορισμό (9.11γ) συνεπάγεται ότι το τριέδρο Frenet είναι ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων (Σχήμα 9.1).



Σχήμα 9.1

Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει, θα χρειαστεί να ορίσουμε δυο ακόμη ποσότητες που είναι η καμπυλότητα k της γραμμής ροής στο σημείο M και η στρέψη της σ στο ίδιο σημείο. Η φυσική σημασία της καμπυλότητας k , η οποία ορίζεται ως

$$k = \left| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right| \quad (9.12)$$

είναι ότι αντιστοιχεί στη γωνία απόκλισης (μετρούμενη σε ακτίνια) του διανύσματος \vec{i}_s καθώς μετακινούμαστε από το σημείο M σε ένα γειτονικό του επί της ίδιας γραμμής ροής, σε στοιχειώδη απόσταση ds . Στον τριδιάστατο χώρο, η καμπυλότητα είναι πάντοτε θετική, ενώ το ίδιο δεν ισχύει για καμπύλη που κείται σε ένα επίπεδο.

Παραγωγίζουμε τη σχέση (9.11γ) ως προς το μήκος τόξου s (αυτό θα συμβολίζει στη συνέχεια ο τόνος σε ένα μέγεθος) και παίρνουμε

$$\vec{i}_n' = k \vec{i}_N \quad (9.13a)$$

οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\vec{i}_n' = \vec{i}_s \times \vec{i}_N'$$

Επειδή το \vec{i}_N είναι μοναδιαίο διάνυσμα, ισχύει και πάλι ότι τα \vec{i}_N' και \vec{i}_N είναι κάθετα μεταξύ τους διανύσματα. Το ότι το \vec{i}_N' είναι κάθετο στο \vec{i}_N σημαίνει ότι θα ανήκει στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα \vec{i}_n και \vec{i}_s και συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{i}'_N = \mu(s)\vec{i} + \sigma(s)\vec{i}_n$$

Ο συνδυασμός των δύο τελευταίων σχέσεων δίνει ότι

$$\vec{i}'_n = \mu(s)\vec{i}_s \times \vec{i}_s + \sigma(s)\vec{i}_s \times \vec{i}_n$$

ή

$$\vec{i}'_n = -\sigma\vec{i}_N \quad (9.13\beta)$$

όπου η ποσότητα σ θα ονομάζεται στρέψη της γραμμής ροής στο σημείο M. Η στρέψη εκφράζει την απόκλιση του διανύσματος \vec{i}_n όταν μετακινούμεθα κατά ds από το σημείο M, πάνω στη γραμμή ροής.

Τέλος η παράγωγος κατά s του πρωτοκάθετου διανύσματος \vec{i}_N θα προκύψει αν παραγωγίσουμε τη σχέση

$$\vec{i}_N = \vec{i}_n \times \vec{i}_s$$

οπότε έχουμε

$$\vec{i}'_N = \vec{i}'_n \times \vec{i}_s + \vec{i}_n \times \vec{i}'_s$$

Με τη βοήθεια των εξισώσεων (9.13α) και (9.13β) καταλήγουμε στην έκφραση

$$\vec{i}'_N = -\sigma\vec{i}_N \times \vec{i}_s + k\vec{i}_n \times \vec{i}_N$$

ή τελικά

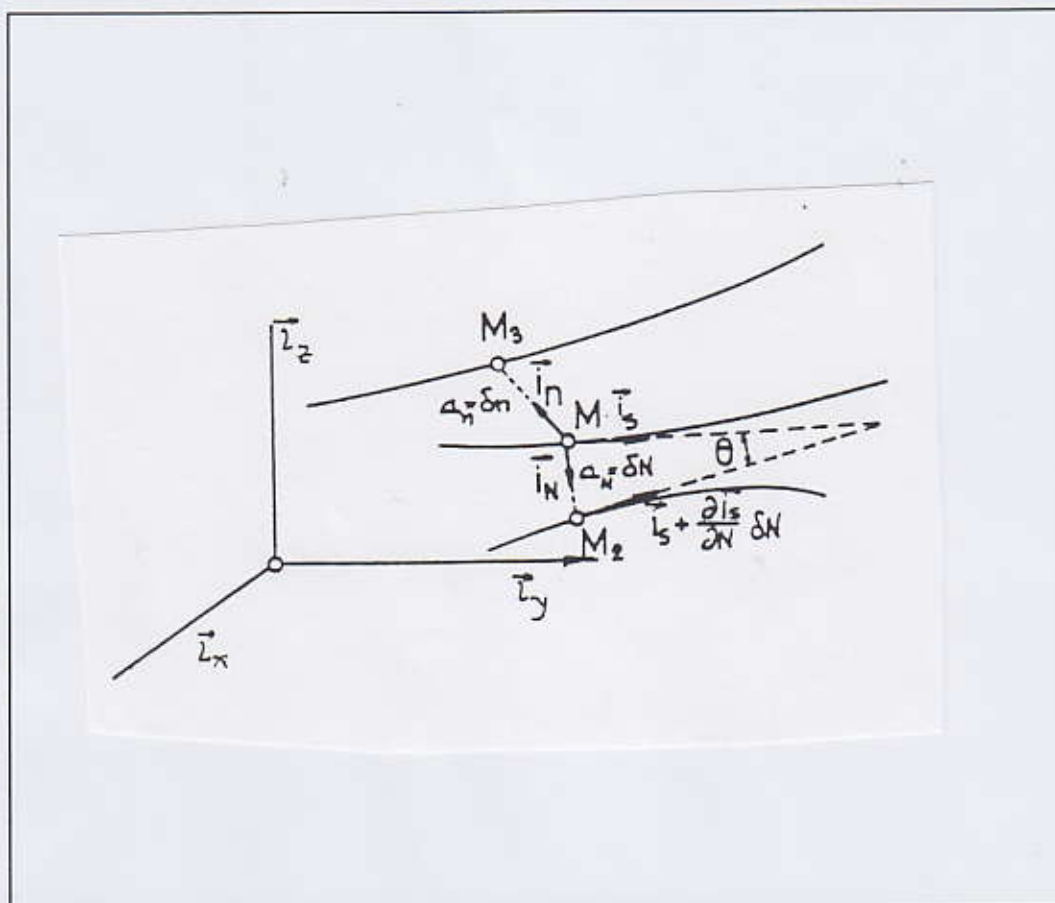
$$\vec{i}'_N = \sigma\vec{i}_n - k\vec{i}_s \quad (9.13\gamma)$$

Για λόγους πληρότητας δίνεται και η σχέση ορισμού της στρέψης που είναι

$$\sigma = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{|\vec{r}''|^2} \quad (9.14)$$

όπου $(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')$ συμβολίζει το μικτό γινόμενο των διανυσμάτων αυτών.

Το τριεδρο Frenet που ορίσαμε παραπάνω θα χρησιμοποιηθεί για να αναλυθούν σε αυτό οι εξισώσεις μεταφοράς του στροβιλισμού. Στο Σχήμα 9.2 παριστάνονται τρεις γραμμές ροής στο σχετικό σύστημα αναφοράς. Στην πρώτη από αυτές ορίζουμε το τυχαίο σημείο M_1 . Στο σημείο αυτό, η σχετική ταχύτητα θα είναι



Σχήμα 9.2

$$\vec{W}(M_1) = W(M_1) \vec{i}_s(M_1) \quad (9.15)$$

Αν M_2 και M_3 δυο άλλα σημεία τα οποία ανήκουν στις άλλες δυο γραμμές ροής που σχεδιάσαμε. Τα σημεία αυτά είναι τέτοια ώστε το M_2 να βρίσκεται σε μια στοιχειώδη απόσταση $\delta N = a_N$ από το σημείο M_1 , στη διεύθυνση της πρωτοκαθέτου του, ενώ το σημείο M_3 να βρίσκεται σε στοιχειώδη απόσταση $\delta n = a_n$ από το M_1 , στη διεύθυνση της δευτεροκαθέτου του. Ορίζουμε ότι στη γειτονιά του σημείου M_1 τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}_s, \vec{i}_N, \vec{i}_n$ είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων (s, N, n) ενός "τοπικού" ορθογώνιου συστήματος, δηλαδή

$$\vec{i}_s = \vec{i}_s(s, N, n)$$

$$\vec{i}_N = \vec{i}_N(s, N, n)$$

$$\vec{i}_n = \vec{i}_n(s, N, n)$$

Σ' αυτό το "τοπικό" σύστημα συντεταγμένων μπορούμε να εκφράσουμε προσεγγιστικά τις παραγώγους του μοναδιαίου διανύσματος \vec{i}_s κατά τις διευθύνσεις της πρωτοκαθέτου και της δευτεροκαθέτου. Με απλή γεωμετρία προκύπτει ότι

$$\frac{\partial \vec{i}_s}{\partial N} = \frac{1}{\alpha_N} \frac{\partial \alpha_N}{\partial s} \vec{i}_N \quad (9.16a)$$

$$\frac{\partial \vec{i}_s}{\partial N} = \frac{1}{\alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial s} \vec{i}_n \quad (9.16b)$$

Οι τρεις σχέσεις (9.13) και οι δύο σχέσεις (9.16) αποτελούν τα βασικά μαθηματικά εργαλεία με τα οποία, στην επόμενη ενότητα, θα καταστρώσουμε τις εξισώσεις μεταφοράς του στροβιλισμού στο "τοπικό" σύστημα (s,N,n) που ορίζει το τρίεδρο Frenet.

9.3 Οι Εξισώσεις Μεταφοράς του Στροβιλισμού στο Σύστημα (s,N,n)

Ο τελεστής κλίσης στο "τοπικό" σύστημα (s,N,n) που συνοδεύει μια γραμμή ροής στο σχετικό σύστημα γράφεται

$$\nabla_R() = \vec{i}_s \frac{\partial}{\partial s}() + \vec{i}_N \frac{\partial}{\partial N}() + \vec{i}_n \frac{\partial}{\partial n}() \quad (9.17)$$

Εχοντας υπόψη τους όρους της εξίσωσης (9.10) που πρόκειται να αναλύσουμε, εκφράζουμε αρχικά τον τελεστή μεταφοράς, που θα είναι

$$\vec{W} \cdot \nabla_R() = W \vec{i}_s \cdot \nabla_R() = W \frac{\partial}{\partial s}() \quad (9.18)$$

Στη συνέχεια εκφράζουμε το ίδιο το διάνυσμα του στροβιλισμού $\vec{\Omega}_R$ στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων. Χρησιμοποιούμε ως βάση την ιδιότητα που γνωρίζουμε από το διανυσματικό λογισμό, ότι

$$\vec{W} \times (\nabla_R \times \vec{W}) = \vec{W} \times \vec{\Omega}_R = \nabla_R \left(\frac{W^2}{2} \right) - \vec{W} \cdot \nabla \vec{W}$$

και με τη βοήθεια των σχέσεων (9.17) και (9.18) καταλήγουμε στη σχέση

$$\vec{W} \times \vec{\Omega}_R = W \left(\frac{\partial W}{\partial s} \vec{i}_s + \frac{\partial W}{\partial N} \vec{i}_N + \frac{\partial W}{\partial n} \vec{i}_n \right) - W \frac{\partial W}{\partial s} \vec{i}_s - W^2 \frac{\partial \vec{i}_s}{\partial s}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (9.13a) για να εκφράσουμε τον τελευταίο όρο, παίρνουμε

$$\vec{W} \times \vec{\Omega}_R = \left(W \frac{\partial W}{\partial N} - kW^2 \right) \vec{i}_N + W \frac{\partial W}{\partial n} \vec{i}_n \quad (9.19)$$

Η (9.19) πολλαπλασιάζεται εξωτερικά με \vec{i}_s και, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που συνδέουν τα μοναδιαία διανύσματα στο τριεδρο Frenet, παίρνουμε ότι

$$(\vec{W} \times \vec{\Omega}_R) \times \vec{i}_s = - \left(W \frac{\partial W}{\partial N} - kW^2 \right) \vec{i}_n + W \frac{\partial W}{\partial n} \vec{i}_N \quad (9.20a)$$

Το αριστερό μέλος της σχέσης αυτής γράφεται, αν χρησιμοποιηθούν ιδιότητες του τριπλού γινομένου, στη μορφή

$$W(\vec{i}_s \times \vec{\Omega}_R) \times \vec{i}_s = W \vec{\Omega}_R (\vec{i}_s \cdot \vec{i}_s) - W(\vec{i}_s \cdot \vec{\Omega}_R) \vec{i}_s$$

και

$$\vec{i}_s \cdot \vec{\Omega}_R = \vec{i}_s \cdot \nabla \times (W \vec{i}_s) = W \vec{i}_s \cdot \nabla \times \vec{i}_s + (\nabla W \times \vec{i}_s) \cdot \vec{i}_s$$

με τον τελευταίο όρο να είναι προφανώς μηδενικός. Αν επιπλέον ορίσουμε τη συστροφή ξ της σχετικής γραμμής ροής ως

$$\xi = \vec{i}_s \cdot \nabla \times \vec{i}_s \quad (9.21)$$

τότε η σχέση (9.20a) γράφεται

$$W \vec{\Omega}_R - W^2 \xi \vec{i}_s = \left(kW^2 - W \frac{\partial W}{\partial N} \right) \vec{i}_n + W \frac{\partial W}{\partial n} \vec{i}_N$$

ή τελικά

$$\vec{\Omega}_R = W \xi \vec{i}_s + \frac{\partial W}{\partial n} \vec{i}_N + \left(kW - \frac{\partial W}{\partial N} \right) \vec{i}_n \quad (9.20b)$$

Από την προβολή της σχέσης (9.20b) στις τρεις κατευθύνσεις του τριεδρου Frenet, λαμβάνουμε τις τρεις συνιστώσες του σχετικού στροβιλισμού $\vec{\Omega}_R$, που είναι

$$\begin{aligned} \Omega_s &= W \xi \\ \Omega_N &= \frac{\partial W}{\partial n} \end{aligned} \quad (9.22)$$

$$\Omega_n = kW - \frac{\partial W}{\partial N}$$

όπου παραλείπεται πλέον ο δείκτης R στις συνιστώσες του σχετικού στροβιλισμού για λόγους απλότητας. Η συνιστώσα Ω_s του σχετικού στροβιλισμού κατά την κατεύθυνση \vec{i}_s είναι ο δευτερεύων στροβιλισμός (secondary ή streamwise vorticity).

Έχοντας πλέον το υπόβαθρο των σχέσεων (9.22) μπορούμε να αναπτύξουμε τους επιμέρους όρους της διανυσματικής εξίσωσης μεταφοράς του στροβιλισμού (9.10). Αυτό γίνεται με την προβολή της (9.22) στις τρεις κατευθύνσεις (s, N, n). Κατά όρο έχουμε:

(α) Ο πρώτος όρος της (9.10) γράφεται

$$-\vec{\Omega}_R \cdot \nabla_R \vec{W} = -\Omega_s \frac{\partial}{\partial s} (W \vec{i}_s) - \Omega_N \frac{\partial}{\partial N} (W \vec{i}_s) - \Omega_n \frac{\partial}{\partial n} (W \vec{i}_n)$$

και χρησιμοποιώντας τις (9.13α), (9.16α) και (9.16β) παίρνουμε

$$\begin{aligned} -\vec{i}_s \cdot (\vec{\Omega}_R \cdot \nabla_R \vec{W}) &= -\Omega_s \frac{\partial W}{\partial s} - kW\Omega_N \\ -\vec{i}_N \cdot (\vec{\Omega}_R \cdot \nabla_R \vec{W}) &= -\Omega_s kW - W\Omega_N \frac{1}{\alpha_N} \frac{\partial \alpha_N}{\partial s} \\ -\vec{i}_n \cdot (\vec{\Omega}_R \cdot \nabla_R \vec{W}) &= -\Omega_n \frac{W}{\alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial s} \end{aligned} \quad (9.23)$$

(β) Ο δεύτερος όρος της (9.10), χρησιμοποιώντας την (9.18) δίνει

$$\begin{aligned} \vec{i}_s \cdot (\vec{W} \cdot \nabla_R \vec{\Omega}_R) &= W \frac{\partial \Omega_s}{\partial s} - kW\Omega_N \\ \vec{i}_N \cdot (\vec{W} \cdot \nabla_R \vec{\Omega}_R) &= kW\Omega_s + W \frac{\partial \Omega_N}{\partial s} - \sigma W\Omega_n \\ \vec{i}_n \cdot (\vec{W} \cdot \nabla_R \vec{\Omega}_R) &= \sigma W\Omega_N + W \frac{\partial \Omega_n}{\partial s} \end{aligned} \quad (9.24)$$

(γ) Για την ανάπτυξη του τρίτου όρου της (9.10), από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε

$$\nabla \cdot \vec{W} = -\frac{1}{\rho} \nabla \rho \cdot \vec{W}$$

οπότε εύκολα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \vec{i}_s \cdot \vec{\Omega}_R \nabla_R \vec{W} &= -\frac{\Omega_s}{\rho} W \frac{\partial \rho}{\partial s} \\ \vec{i}_N \cdot \vec{\Omega}_R \nabla_R \vec{W} &= -\frac{\Omega_N}{\rho} W \frac{\partial \rho}{\partial s} \\ \vec{i}_n \cdot \vec{\Omega}_R \nabla_R \vec{W} &= -\frac{\Omega_n}{\rho} W \frac{\partial \rho}{\partial s} \end{aligned} \quad (9.25)$$

(δ) Ο τέταρτος όρος που αντιστοιχεί στην επιτάχυνση Coriolis δίνει

$$\begin{aligned}\vec{i}_s \cdot (2\vec{\omega} \cdot \nabla_R \vec{W}) &= 2 \left(\omega_s \frac{\partial W}{\partial s} + \omega_N \frac{\partial W}{\partial N} + \omega_n \frac{\partial W}{\partial n} \right) \\ \vec{i}_N \cdot (2\vec{\omega} \cdot \nabla_R \vec{W}) &= 2W \left(k\omega_s + \omega_N \frac{1}{\alpha_N} \frac{\partial \alpha_N}{\partial s} \right) \\ \vec{i}_n \cdot (2\vec{\omega} \cdot \nabla_R \vec{W}) &= 2\omega_N \frac{W}{\alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial s}\end{aligned}\tag{9.26}$$

(ε) Ο πέμπτος όρος της (9.10) δίνει

$$\begin{aligned}-2\vec{i}_s \cdot (\vec{\omega} \cdot \nabla_R \vec{W}) &= 2\omega_s \frac{W}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} \\ -2\vec{i}_N \cdot (\vec{\omega} \cdot \nabla_R \vec{W}) &= 2\omega_N \frac{W}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} \\ -2\vec{i}_n \cdot (\vec{\omega} \cdot \nabla_R \vec{W}) &= 2\omega_n \frac{W}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s}\end{aligned}\tag{9.27}$$

(στ) Ο τελευταίος όρος της (9.10), όταν γραφεί συναρτήσει της πίεσης, σύμφωνα με τη σχέση (9.7β) δίνει

$$\begin{aligned}F_s = \vec{i}_s \cdot \vec{F} = \vec{i}_s \cdot \left(\nabla_R p \times \nabla_R \frac{1}{\rho} \right) &= -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial \rho}{\partial N} - \frac{\partial p}{\partial N} \frac{\partial \rho}{\partial n} \right) \\ F_N = \vec{i}_N \cdot \vec{F} = \vec{i}_N \cdot \left(\nabla_R p \times \nabla_R \frac{1}{\rho} \right) &= -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial \rho}{\partial n} - \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial \rho}{\partial s} \right) \\ F_n = \vec{i}_n \cdot \vec{F} = \vec{i}_n \cdot \left(\nabla_R p \times \nabla_R \frac{1}{\rho} \right) &= -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial N} \frac{\partial \rho}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial \rho}{\partial N} \right)\end{aligned}\tag{9.28}$$

(ζ) Ο ίδιος όρος συναρτήσει των μεγεθών της θερμοκρασίας και της εντροπίας γράφεται

$$\begin{aligned}F_s = \vec{i}_s \cdot \vec{F} = \vec{i}_s \cdot (\nabla_R T \times \nabla_R S) &= \frac{\partial T}{\partial N} \frac{\partial S}{\partial n} - \frac{\partial T}{\partial n} \frac{\partial S}{\partial N} \\ F_N = \vec{i}_N \cdot \vec{F} = \vec{i}_N \cdot (\nabla_R T \times \nabla_R S) &= \frac{\partial T}{\partial n} \frac{\partial S}{\partial s} - \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial S}{\partial n} \\ F_n = \vec{i}_n \cdot \vec{F} = \vec{i}_n \cdot (\nabla_R T \times \nabla_R S) &= \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial S}{\partial N} - \frac{\partial T}{\partial N} \frac{\partial S}{\partial s}\end{aligned}\tag{9.29}$$

Με τη βοήθεια των εξισώσεων (9.23) ως (9.29) μπορούμε να γράψουμε τις συνιστώσες της εξίσωσης μεταφοράς του στροβιλισμού. Έτσι έχουμε

(α) Εξίσωση μεταφοράς της συνιστώσας Ω_s (δευτερεύων στροβιλισμός):

$$-\Omega_s \frac{\partial W}{\partial s} - kW\Omega_N + W \frac{\partial \Omega_s}{\partial s} - Wk\Omega_N - \frac{\Omega_s}{\rho} W \frac{\partial \rho}{\partial s} = 2\omega_s \frac{\partial W}{\partial s} + 2\omega_N \frac{\partial W}{\partial N} + 2\omega_n \frac{\partial W}{\partial n} + 2\omega_s \frac{W}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} + F_s$$

ή

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\Omega_s}{\rho W} \right) = \frac{2k\Omega_N}{\rho W} + \frac{2}{\rho W^2} \left\{ \omega_s \frac{\partial W}{\partial s} + \omega_N \frac{\partial W}{\partial N} + \omega_n \frac{\partial W}{\partial n} \right\} + \frac{2\omega_s}{\rho^2 W} \frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{F_s}{\rho W^2} \quad (9.30)$$

(β) Εξίσωση μεταφοράς της συνιστώσας Ω_N του στροβιλισμού:

$$-\Omega_s kW - W\Omega_N \frac{1}{\alpha_N} \frac{\partial \alpha_N}{\partial s} + kW\Omega_s + W \frac{\partial \Omega_N}{\partial s} - \sigma W\Omega_n - \frac{\Omega_N}{\rho} W \frac{\partial \rho}{\partial s} = 2W \left(k\omega_s + \omega_N \frac{1}{\alpha_N} \frac{\partial \alpha_N}{\partial s} \right) + 2\omega_N \frac{W}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} + F_N$$

ή

$$\rho W \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\Omega_N}{\rho} \right) = \Omega_N W \frac{1}{\alpha_N} \frac{\partial \alpha_N}{\partial s} + \sigma W\Omega_n + 2W \left(k\omega_s + \omega_N \frac{1}{\alpha_N} \frac{\partial \alpha_N}{\partial s} \right) + 2\omega_N \frac{W}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} + F_N \quad (9.31)$$

(γ) Εξίσωση μεταφοράς της συνιστώσας Ω_n του στροβιλισμού:

$$-\Omega_n \frac{W}{\alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial s} + \sigma W\Omega_N + W \frac{\partial \Omega_n}{\partial s} - \frac{\Omega_n}{\rho} W \frac{\partial \rho}{\partial s} = 2\omega_N \frac{W}{\alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial s} + 2\omega_n \frac{W}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} + F_n$$

ή

$$\rho W \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\Omega_n}{\rho} \right) = \Omega_n \frac{W}{\alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial s} - \sigma W\Omega_N + 2\omega_N \frac{W}{\alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial s} + 2\omega_n \frac{W}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} + F_n \quad (9.32)$$

όπου, ανάλογα με τη διατύπωση που υιοθετούμε, οι όροι F_s, F_N και F_n δίνονται από τις σχέσεις (9.28) ή (9.29).

9.4 Συζήτηση

1. Διαθέτοντας πλέον τις εξισώσεις (9.30), (9.31) και (9.32) για να περιγράψουμε την εξέλιξη των τριών συνιστωσών του στροβιλισμού, ας ασχοληθούμε αρχικά με το πώς

μπορεί να σχηματιστεί μια κατανομή στροβιλισμού (π.χ. στην είσοδο ενός πεδίου ροής). Για τη μόνιμη αδιαβατική ροή ενός αληθινού ρευστού, φυσική πηγή δημιουργίας του αρχικού πεδίου στροβιλισμού είναι η κλίση της αρχικής κατανομής ταχύτητας στα οριακά στρώματα στην είσοδο του πεδίου. Μέσα στα οριακά στρώματα αντιστοιχεί στροβιλισμός Ω_N , ο οποίος θα προκαλέσει γένεση και εξέλιξη του δευτερεύοντος στροβιλισμού Ω_s , λόγω τουλάχιστον του μη-μηδενικού πρώτου όρου του δεύτερου μέλους της (9.30). Εναλλακτικά, βέβαια, η κατάλληλη επιλογή των ποσοτήτων που διαμορφώνουν το δεξιό μέλος της (9.30) μπορεί να οδηγήσει στην ελάττωση του δευτερεύοντος στροβιλισμού.

Για ροή όμως η οποία υποτίθεται μη-συνεκτική πρέπει να αναφερθούν επιπλέον λόγοι που οφείλονται στα θερμοδυναμικά μεγέθη της ροής. Ετσι, για το απόλυτο σύστημα αναφοράς, η εξίσωση της ορμής κατά Lamb δίνει

$$\vec{V} \times \vec{\Omega} = T \nabla S - \nabla h_t \quad (9.33)$$

Όταν στη ροή υπάρχει σταθερή εντροπία και ολική ενθαλπία, τότε από την (9.33) προκύπτει ότι

$$\vec{V} \times \vec{\Omega} = 0$$

που σημαίνει ή ότι το πεδίο είναι αστρόβιλο ($\vec{\Omega} = 0$) ή ότι τα διανύσματα \vec{V} και $\vec{\Omega}$ είναι παράλληλα. Η τελευταία περίπτωση παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και μπορούμε να την εξετάσουμε χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (9.30), (9.31) και (9.32) γραμμένες στο απόλυτο σύστημα. Επειδή υπάρχει μόνο δευτερεύων στροβιλισμός

$$\vec{\Omega} = \Omega_s \vec{t}_s$$

τότε

$$\Omega_N = \Omega_n = 0$$

και η εξίσωση (9.30) δίνει για τη μεταφορά του δευτερεύοντος στροβιλισμού (στο απόλυτο σύστημα) ότι

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\Omega_s}{\rho V} \right) = 0 \quad (9.34)$$

Η εξίσωση (9.34) σημαίνει ότι για το μη-συνεκτικό και μόνιμο πεδίο ροής, αρκεί η ομοιομορφία της κατανομής ενέργειας (π.χ. στη μορφή h_t) στην είσοδο και μηδενική τιμή στροβιλισμού εκεί, ώστε όλο το πεδίο να παραμένει αστρόβιλο.

2. Παρά το γεγονός ότι οι σημαντικοί για την περίπτωσή μας συνεκτικοί όροι έχουν αμεληθεί, εντούτοις η εξίσωση (9.30) έχει μεγάλη σημασία για τις στροβιλομηχανές. Όπως συζητήσαμε και στο Κεφάλαιο 8, η συνιστώσα Ω_s του δευτερεύοντος στροβιλισμού

συνδέεται με το εγκάρσιο πεδίο ταχύτητας, δηλαδή με το πεδίο ταχύτητας σε κάθε διατομή εγκάρσια στην κύρια κατεύθυνση της ροής (το πεδίο αυτό συνήθως φέρεται με τον όρο δευτερεύουσες ροές). Η ύπαρξη των εξισώσεων (9.30), (9.31) και (9.32) δείχνει ότι τα ψευδοτριδιάστατα μοντέλα επίλυσης της ροής στις στροβιλομηχανές στερούνται ενός σημαντικού μηχανισμού, αυτού της μοντελοποίησης των συνεκτικών ροών. Μελετώντας τους εμπλεκόμενους όρους στις παραπάνω εξισώσεις, φαίνεται ο σημαντικός ρόλος της μορφής των γραμμών ροής (που εισέρχεται μέσω της καμπυλότητας k και στην στρέψης σ , ή των παραγώγων των αποστάσεων α_N και α_n). Επίσης οι εξισώσεις (9.31) και (9.32) κανονίζουν τη μεταφορά των συνιστωσών Ω_N και Ω_n του στροβιλισμού, η πρώτη από τις οποίες εμπλέκεται άμεσα στην εξέλιξη του δευτερεύοντος στροβιλισμού, μέσω του πρώτου όρου του δεύτερου μέλους της (9.30).

Για εμβάθυνση στην ύλη του Κεφαλαίου αυτού συνιστώνται οι εργασίες:

B. Lakshminarayana and J.H. Horlock, "Generalized Expressions for Secondary Vorticity Using Intrinsic Co-ordinates", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 59, Part 1, 1973.

H. Marsh, "Secondary Flow in Cascades: The Effect of Axial Velocity Ratio", *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 16, No 6, 1974.

Επιπλέον συνιστάται το βοήθημα:

M.M. Lipschutz, "Differential Geometry", Schaum's Outline Series, McGraw Hill

για την εξοικείωση του αναγνώστη με τις ιδιότητες του τριεδρου Frenet.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΡΩΜΑΤΩΝ

10.1 Το Διζωνικό Μοντέλο Ροής

Τη γένεση και καθιέρωση των ολοκληρωτικών μεθόδων για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών των οριακών στρωμάτων που αναπτύσσονται κατά μήκος των στερεών τοιχωμάτων μιας μηχανής προώθησε η αρχική ιδέα του Prandtl για τα Διζωνικά Μοντέλα Ροής. Το 1904, ο Prandtl διετύπωσε την παραπάνω θεωρία, σύμφωνα με την οποία μια ροή εσωτερικής αεροδυναμικής μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από δύο ζώνες με διακριτά χαρακτηριστικά. Η πρώτη ζώνη είναι αυτή που σχηματίζεται κοντά στα στερεά τοιχώματα και στην οποία τα συνεκτικά φαινόμενα παίζουν πρωτεύοντα ρόλο. Η ζώνη αυτή φέρεται συνήθως με το όνομα οριακό ή συνεκτικό στρώμα. Η δεύτερη ζώνη είναι εκείνη στην οποία τα συνεκτικά φαινόμενα έχουν πάρα πολύ μικρή σημασία και για το λόγο αυτό μπορούν να αμεληθούν χωρίς ιδιαίτερα σφάλματα στην τελική λύση. Η ζώνη αυτή συνήθως καλείται ατρίβης ή μη-συνεκτική ή εξωτερική ζώνη. Η ιδέα του διζωνικού μοντέλου ροής έχει παρουσιασθεί σε δύο σχήματα του Κεφαλαίου 1' στο Σχήμα 1.1 φαίνεται η γενική μορφή των συνεκτικών ζωνών στις πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης των πτερυγίων μιας Στροβιλομηχανής, ενώ στο Σχήμα 1.2 παρουσιάζονται τα δύο συνεκτικά στρώματα που αναπτύσσονται στο εσωτερικό και το εξωτερικό κέλυφος μιας Στροβιλομηχανής καθώς και η ενδιάμεσή τους ατρίβης ζώνη. Είναι εμφανές, ότι τουλάχιστον για υποηχητικές ροές, οι απώλειες του πεδίου ροής εντοπίζονται σχεδόν αποκλειστικά μέσα στις συνεκτικές ζώνες.

Η διάκριση της ροής σε δύο ζώνες επιτρέπει τη χρήση διαφορετικών υπολογιστικών μεθόδων για κάθε μία από αυτές. Οι ολοκληρωτικές μέθοδοι υπολογισμού των οριακών στρωμάτων επιτρέπουν, στη βάση ενός όγκου εμπειρικής πληροφορίας που προέρχεται από σειρά πειραμάτων και έχει ενσωματωθεί κατάλληλα σ'αυτές, να δώσουν ταχύτατες απαντήσεις για τη συμπεριφορά του οριακού στρώματος. Οι ολοκληρωτικές τεχνικές αναπτύχθηκαν πολύ την εποχή που τα υπολογιστικά μέσα δεν επέτρεπαν την επίλυση των εξισώσεων ροής σε διαφορική μορφή, σε καθημερινή βάση, στα τμήματα έρευνας των βιομηχανιών. Όταν η συνεκτική ζώνη επιλύεται με μια ολοκληρωτική μέθοδο, για την επίλυση της εξωτερικής ροής χρησιμοποιείται ένα απλούστερο μοντέλο ροής από αυτό των εξισώσεων Navier-Stokes. Συνήθως η εξωτερική ροή επιλύεται με τη χρήση της υπόθεσης της δυναμικής ροής (όποτε η εξωτερική ροή υποτίθεται αστρόβιλη) είτε με την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων ατρίβους ροής (εξισώσεις Euler). Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι οι ολοκληρωτικές εξισώσεις για τα οριακά στρώματα είναι παραβολικού τύπου και αδυνατούν συνεπώς να μεταφέρουν πληροφορία στα ανάντι της ροής. Τέτοια πληροφορία μεταφέρεται μόνο από το μοντέλο επίλυσης της ατρίβους ροής και για το λόγο αυτό είναι σημαντική η σωστή επικοινωνία πληροφορίας μεταξύ των δύο ζωνών, σύμφωνα με τον αλγόριθμο που παρατίθεται στη συνέχεια.

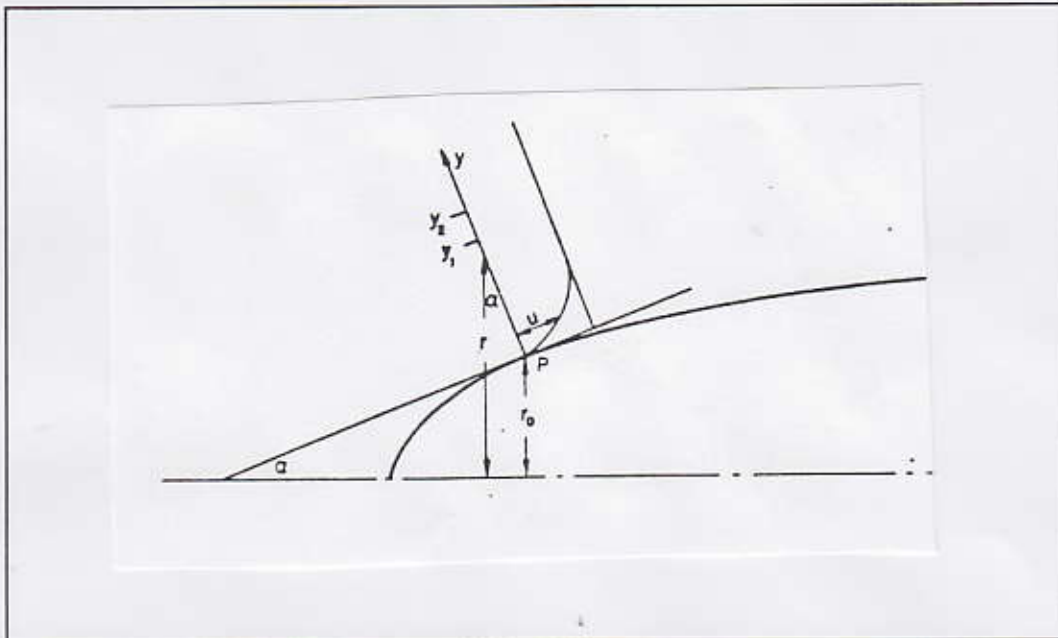
Στη γενική περίπτωση, έχοντας στη διάθεσή μας μία ολοκληρωτική μέθοδο για το οριακό στρώμα και μία διαφορική μέθοδο για την επίλυση της εξωτερικής ροής, απαιτείται η διατύπωση ενός γενικού επαναληπτικού αλγόριθμου σαν αυτόν που δίνεται αμέσως παρακάτω:

- (α) Επίλυση των ολοκληρωτικών εξισώσεων, με οριακές συνθήκες που ορίστηκαν στο τελευταίο βήμα της προηγούμενης επανάληψης, και εύρεση των χαρακτηριστικών του οριακού στρώματος.
- (β) Χρησιμοποίηση των χαρακτηριστικών του οριακού στρώματος ώστε να διατυπωθούν οι οριακές συνθήκες για την επίλυση της ατρίβους ζώνης.
- (γ) Επίλυση της ατρίβους ζώνης. Χρησιμοποιούνται "εσωτερικές" επαναλήψεις για τη σύγκλιση των διακριτοποιημένων διαφορικών εξισώσεων.
- (δ) Ελέγχεται η σύγκλιση του γενικού επαναληπτικού αλγόριθμου και, εάν χρειάζεται, επαναλαμβάνονται τα βήματα (α) ως (δ) αφού πρώτα διατυπωθούν νέες οριακές συνθήκες για την ολοκληρωτική μέθοδο.

Στα πλαίσια του παραπάνω αλγόριθμου αλληλεπίδρασης μη-συνεκτικής και συνεκτικής ροής, οι υπάρχουσες μέθοδοι διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με τον τρόπο που διατυπώνεται το πρόβλημα για την εξωτερική ροή. Η διαφορά μεταξύ των δύο μεθόδων εντοπίζεται στον τρόπο που η ατρίβης ροής "αισθάνεται" την παρουσία των οριακών στρωμάτων. Στην πρώτη κατηγορία, χαράζονται τα όρια μεταξύ των δύο ζωνών και ο ατρίβης υπολογισμός γίνεται σε χωρίο που δεν εφάπτεται των στερεών τοιχωμάτων. Λόγω του επαναληπτικού αλγόριθμου που περιγράψαμε παραπάνω, σε κάθε εξωτερική επανάληψη και πριν αρχίσει ο υπολογισμός της ατρίβους ροής, απαιτείται ο ακριβής καθορισμός των (νέων) ορίων της και η γένεση ενός (νέου) πλέγματος. Το κόστος της διαδικασίας αυτής και οι ενδεχόμενες ανακρίβειες στον καθορισμό του χωρίου της εξωτερικής ροής αποτελούν εμφανή μειονεκτήματα της κατηγορίας αυτής. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν μέθοδοι στις οποίες κάθε υπολογισμός της εξωτερικής ροής γίνεται πάντοτε στο ίδιο υπολογιστικό πλέγμα. Η παρουσία του οριακού στρώματος γίνεται αισθητή με την επιβολή μη-μηδενικής οριακής συνθήκης για την κάθετη ταχύτητα στους κόμβους του στερεού ορίου. Η μη-μηδενική αυτή ταχύτητα, που ονομάζεται ταχύτητα αναπνοής (transpiration velocity), υπολογίζεται από τα μεγέθη του οριακού στρώματος και σκοπός της είναι να προσθέτει ελεγχόμενα μάζα ρευστού στο πεδίο ροής σε τρόπο ώστε να μετατοπιστεί η εξωτερική ροή κατά το υπολογισθέν πάχος του οριακού στρώματος. Στη δεύτερη αυτή κατηγορία, το βήμα (β) του προηγούμενου επαναληπτικού αλγόριθμου απλουστεύεται σημαντικά σε σχέση με την προηγούμενη κατηγορία μεθόδων.

10.2 Η Μετατόπιση της Εξωτερικής Ροής

Όπως συζητήθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο, η εξωτερική ροή αντιλαμβάνεται την παρουσία του οριακού στρώματος από τη μετατόπιση που η παρουσία του προκαλεί σε αυτή. Για να γίνει περισσότερο κατανοητό το φαινόμενο, θα θεωρήσουμε το οριακό στρώμα που αναπτύσσεται πάνω σε μια αξονικά συμμετρική επιφάνεια, όπως αυτή που παρουσιάζεται στο Σχήμα 10.1. Το στερεό σώμα στο σημείο P έχει ακτίνα r_0 και κλίση α ως προς τον άξονα.



Σχήμα 10.1

Στην περίπτωση που δεν υπήρχε το οριακό στρώμα και η ατρίβης ροής συνέχιζε μέχρι το στερεό τοίχωμα χωρίς αλλαγές στην ταχύτητα ή την πυκνότητα, τότε ας είναι y_1 η απόσταση (μετρημένη από το σημείο P) όπου μια συγκεκριμένη γραμμή ροής διασχίζει την εγκάρσια τομή στο σημείο P. Η παρουσία του οριακού στρώματος, μέσα στο οποίο οι ταχύτητες είναι μικρότερες της εξωτερικής ροής, μεταθέτει την ίδια γραμμή ροής στο σημείο y_2 , που είναι εμφανώς περισσότερο απομακρυσμένο από το y_1 . Παρακάτω, θα ασχοληθούμε με την εκτίμηση της μετατόπισης ($y_2 - y_1$) της γραμμής ροής, λόγω του οριακού στρώματος.

Αν η ροή θεωρηθεί συμμετρική ως προς τον άξονα, θεωρούμε μια οποιαδήποτε δακτυλιοειδή διατομή πάχους dy σε ακτίνα r , που έχει εμβαδόν

$$dA = 2\pi r dy = 2\pi (r_0 + y \cos \alpha) dy$$

Χωρίς την παρουσία του οριακού στρώματος και υποθέτοντας αμετάβλητα

χαρακτηριστικά της εξωτερικής ροής μέχρι τον τοίχο, η παροχή μάζας που διαρρέει το χώρο μεταξύ τοίχου και της μελετούμενης γραμμής ροής που περνά σε απόσταση y_1 από τον τοίχο, θα είναι

$$m_1 = 2\pi \rho_e u_e \int_0^{y_1} (r_o + y \cos \alpha) dy = 2\pi \rho_e u_e \left[r_o y_1 + \frac{1}{2} y_1^2 \cos \alpha \right] \quad (10.1)$$

Τα μεγέθη με δείκτη e αντιστοιχούν στην εξωτερική ροή και u_e είναι η ταχύτητα της εξωτερικής ροής παράλληλα στην κλίση του τοίχου, στο σημείο P .

Η παρουσία του οριακού στρώματος μεταφέρει την ίδια γραμμή ροής στο σημείο y_2 ώστε να συνεχίζει να περνά η ίδια παροχή μάζας m_1 , που δίνεται τώρα από την έκφραση

$$m_1 = 2\pi \int_0^{y_2} \rho u (r_o + y \cos \alpha) dy \quad (10.2)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\rho u = \rho_e u_e - (\rho_e u_e - \rho u)$$

στην εξίσωση (10.2) και εξισώνοντας τις (10.1) και (10.2) προκύπτει ότι

$$\rho_e u_e \left[r_o y_1 + \frac{1}{2} y_1^2 \cos \alpha \right] = \rho_e u_e \left[r_o y_2 + \frac{1}{2} y_2^2 \cos \alpha \right] - \int_0^{y_2} (\rho_e u_e - \rho u) (r_o + y \cos \alpha) dy \quad (10.3)$$

η οποία τροποποιείται περαιτέρω ώστε να εμφανιστεί η μετατόπιση $y_2 - y_1$ και έχουμε

$$(y_2 - y_1) \left[1 + \frac{y_1 + y_2}{2r_o} \cos \alpha \right] = \int_0^{y_2} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) \left(1 + \frac{y}{r_o} \cos \alpha \right) dy \quad (10.4)$$

Θα συμβολίσουμε τη μετατόπιση της γραμμής ροής με δ_1 , δηλαδή

$$\delta_1 = y_2 - y_1 \quad (10.5)$$

οπότε, τελικά, μπορούμε να γράψουμε την ακριβή σχέση υπολογισμού του δ_1 ως

$$\delta_1 \left[1 + \frac{2y_1 + \delta_1}{2r_o} \cos \alpha \right] = \int_0^{y_2} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) \left(1 + \frac{y}{r_o} \cos \alpha \right) dy \quad (10.6)$$

Το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (10.6) μπορεί να θεωρηθεί ότι επεκτείνεται ως το ∞ , αφού ο πρώτος παράγοντας του προς ολοκλήρωση γινομένου είναι μηδενικός για αποστάσεις μεγαλύτερες του πάχους δ του οριακού στρώματος. Αυτό είναι σε συμφωνία με την

παρούσα μελέτη, όπου ουσιαστικά μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την αντιστοιχία μεταξύ y_1 και y_2 όταν το y_2 ταυτίζεται με τη γραμμή ροής που διαχωρίζει τη συνεκτική και τη μη-συνεκτική ζώνη, δηλαδή όταν το y_2 ταυτίζεται με το πάχος δ του οριακού στρώματος.

Για τις περιπτώσεις που τα y_1 και δ_1 είναι μικρά σε σχέση με την ακτίνα του αξονοσυμμετρικού σώματος, μια προσεγγιστική γραφή της (10.6) είναι και η

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) \left(1 + \frac{y}{r_o} \cos \alpha \right) dy \quad (10.7)$$

Η προσεγγιστική σχέση (10.7) γίνεται απόλυτα ακριβής μόνο για επίπεδες ροές: για τις επίπεδες (διδιάστατες) ροές η ακτίνα r_o θεωρείται ότι όντως απειρίζεται και συνεπώς η (10.7) προκύπτει με ακρίβεια από την (10.6).

Ενας διαφορετικός τρόπος να εξετάσουμε το ίδιο πρόβλημα είναι να θεωρήσουμε το "έλλειμμα" σε παροχή μάζας που συνεπάγεται η ύπαρξη του οριακού στρώματος. Αυτό το έλλειμμα μάζας ορίζεται ως

$$\delta m = 2\pi \int_0^{\infty} (\rho_e u_e - \rho u) (r_o + y \cos \alpha) dy \quad (10.8)$$

με την υπόθεση ότι αν ήταν μόνη της η εξωτερική ροή αυτή θα είχε σταθερά χαρακτηριστικά ρ_e και u_e σε όλη τη διατομή.

Αν θεωρήσουμε τώρα μια δακτυλιειδή διατομή που ξεκινά από το στερεό τοίχωμα και έχει πάχος δ_1 , η οποία θα μπορούσε να μεταφέρει το έλλειμμα μάζας δm υπό σταθερές συνθήκες εξωτερικής ροής. Τότε, για τη διατομή αυτή θα είχαμε παροχή μάζας ίση με

$$\delta m = 2\pi \rho_e u_e \int_0^{\delta_1} (r_o + y \cos \alpha) dy = 2\pi \rho_e u_e \left[r_o \delta_1 + \frac{1}{2} \delta_1^2 \cos \alpha \right] \quad (10.9)$$

Εξισώνοντας τις (10.8) και (10.9) και λύνοντας ως προς το πάχος μετατόπισης δ_1 , προκύπτει η σχέση

$$\delta_1 + \frac{\delta_1^2}{2r_o} \cos \alpha = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) \left(1 + \frac{y}{r_o} \cos \alpha \right) dy \quad (10.10)$$

η οποία ταυτίζεται με τη σχέση (10.6) που διατυπώσαμε προηγουμένα, όταν η τελευταία γραφεί για $y_1 = 0$. Η σχέση (10.10) έχει σημασία όταν ενδιαφερόμαστε για τη μετατόπιση των γραμμών ροής, πολύ κοντά στα στερεά τοιχώματα. Επειδή δε, σύμφωνα με το Σχήμα (10.1) ισχύει ότι

$$1 + \frac{y}{r_o} \cos \alpha = \frac{r}{r_o}$$

διατυπώνεται και μια περισσότερο απλή έκφραση της (10.10) που είναι η

$$\delta_1 + \frac{\delta_1^2}{2r_o} \cos \alpha = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) \frac{r}{r_o} dy \quad (10.11)$$

Η σχέση (10.11) δείχνει ότι το πάχος μετατόπισης είναι μια θετική ποσότητα, τουλάχιστον στη γενική περίπτωση. Αρνητικά πάχη μετατόπισης μπορούν να προκύψουν μόνο όταν αυξηθεί σημαντικά η στατική πυκνότητα κοντά στα στερεά τοιχώματα, στην περίπτωση λ.χ. που αυτά ψύχονται ισχυρά. Για επίπεδες ροές, η (10.11) γράφεται ως

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) dy \quad (10.12)$$

και αν η ροή θεωρείται επιπλέον ασυμπίεστη

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy \quad (10.13)$$

Ανάλογο σκεπτικό με αυτό που παρουσιάστηκε παραπάνω μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον υπολογισμό του πάχους ορμής δ_2 , που εκφράζει ποσοτικά το έλλειμμα της μεταφερόμενης ορμής μέσα στο οριακό στρώμα. Από κάθε δακτυλιοειδή διατομή, θεωρούμενη μέσα στη συνεκτική ζώνη (βλέπε πάλι Σχήμα 10.1), η ροή ορμής γράφεται

$$M = u \delta m = 2\pi \rho u^2 (r_o + y \cos \alpha) dy \quad (10.14)$$

Αν η ροή δεν επιβραδύνονταν λόγω του οριακού στρώματος τότε η αντίστοιχη ροή ορμής θα ήταν

$$M = u_e \delta m = 2\pi \rho u_e (r_o + y \cos \alpha) dy \quad (10.15)$$

οπότε το συνολικό έλλειμμα σε ροής ορμής μέσα από ολόκληρη τη διατομή θα ήταν

$$\delta M = 2\pi \rho_e u_e^2 \left[r_o \delta_2 + \frac{\delta_2^2}{2} \cos \alpha \right] \quad (10.16)$$

ή, κατ'αναλογία με όσα αναλυτικά παρουσιάστηκαν για το πάχος μετατόπισης δ_1 ,

$$\delta_2 + \frac{\delta_2^2}{2r_o} \cos \alpha = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) \left(1 + \frac{y}{r_o} \cos \alpha\right) dy \quad (10.17)$$

Για επίπεδες ροές, η (10.17) γράφεται στη μορφή

$$\delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (10.18)$$

και για ασυμπίεστες ροές ως

$$\delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (10.19)$$

Με όμοιο τρόπο μπορεί να διατυπωθεί το έλλειμμα στη ροή κινητικής ενέργειας που συνεπάγεται η παρουσία του οριακού στρώματος. Αν η ροή κινητικής ενέργειας συμβολιστεί με K , τότε κατ'αναλογία προς την (10.17) θα έχουμε για το έλλειμμά της ότι

$$\delta K = \frac{1}{2} \left\{ 2\pi \rho_e u_e^3 \left[r_o \delta_2 + \frac{1}{2} \delta_2^2 \cos \alpha \right] \right\} \quad (10.20)$$

όπου δ_3 είναι το πάχος κινητικής ενέργειας. Για το δ_2 ισχύει ότι

$$\delta_3 + \frac{\delta_3^2}{2r_o} \cos \alpha = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u^2}{u_e^2}\right) \left(1 + \frac{y}{r_o} \cos \alpha\right) dy \quad (10.21)$$

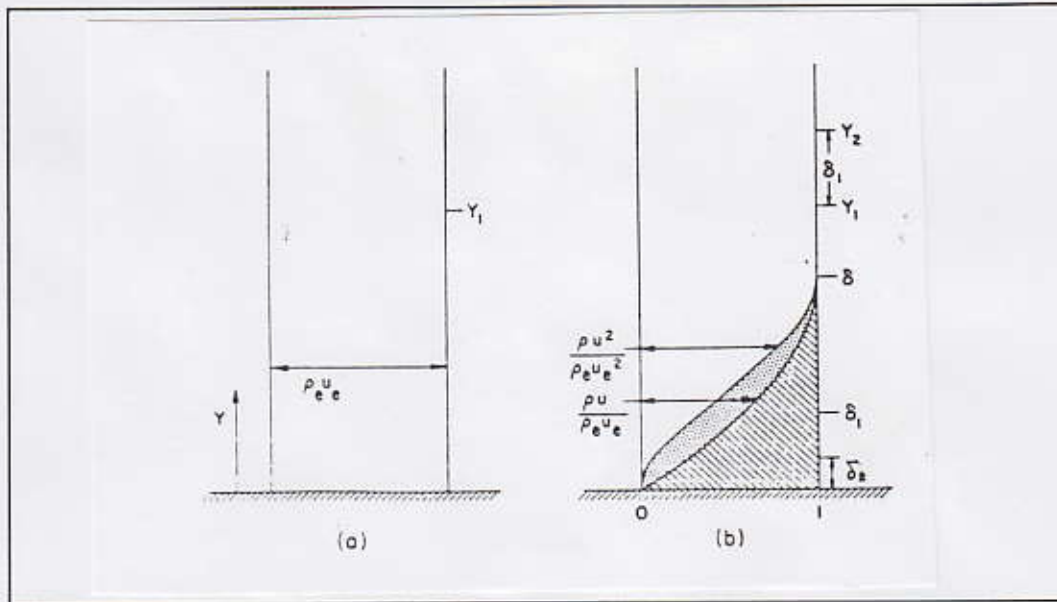
Για επίπεδες ροές ισχύει

$$\delta_3 = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u^2}{u_e^2}\right) dy \quad (10.22)$$

και όταν επιπλέον το ρευστό θεωρείται ασυμπίεστο

$$\delta_3 = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u^2}{u_e^2}\right) dy \quad (10.23)$$

Το Σχήμα 10.2 δείχνει ενδεικτικά τα τρία πάχη (μετατόπισης, ορμής και κινητικής ενέργειας) μαζί με το πάχος του οριακού στρώματος που ορίσαμε προηγουμένα.



Σχήμα 10.2

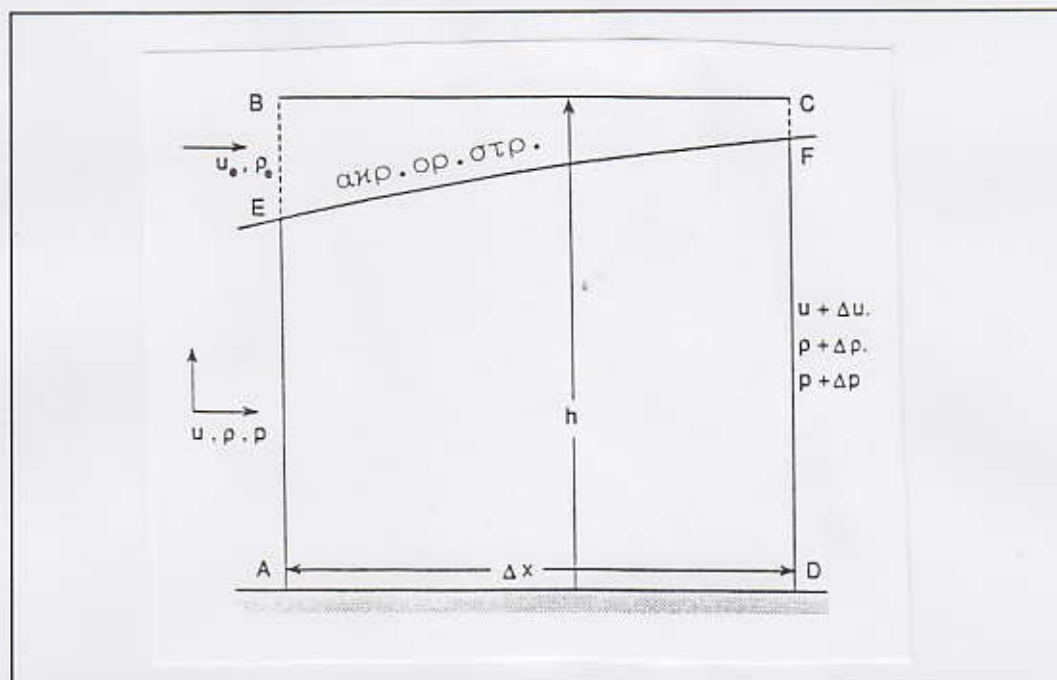
10.3 Οι Ολοκληρωτικές Εξισώσεις για τις Χρονικά Μόνιμες Ροές

Ολοκληρώνοντας τη διαμήκη εξίσωση της ορμής κατά την κάθετη σε κάθε θέση του στερεού τοιχώματος διεύθυνση, από τη θέση $y=0$ που αντιστοιχεί στο στερεό τοίχωμα ως την απόσταση $y=\delta$ του άκρου του οριακού στρώματος, προκύπτει μια κανονική διαφορική εξίσωση που συσχετίζει το συνολικό ρυθμό ροής της ορμής διαμέσου κάθε διατομής του οριακού στρώματος με την τοπική διαμήκη κλίση της στατικής πίεσης και την τάση τριβής στο στερεό τοίχωμα. Η ολοκληρωτική εξίσωση που προκύπτει με τον τρόπο αυτό λέγεται ολοκληρωτική εξίσωση της ορμής και έχει διατυπωθεί αρχικά από τον von Karman. Η εξίσωση αυτή παρέχει μια μέση περιγραφή της εξίσωσης κίνησης όπως αυτή διατυπώνεται σε ολόκληρο το πάχος του οριακού στρώματος. Δυστυχώς μια τέτοια ολοκλήρωση συντελεί στην απώλεια πληροφορίας και για το λόγο αυτό απαιτείται η παράλληλη διαχείριση εμπειρικής πληροφορίας που προέρχεται από διαθέσιμα πειράματα σε οριακά στρώματα, ώστε να κλείσει μαθηματικά το πρόβλημα. Τέτοια εμπειρική πληροφορία μπορεί, στην πιο απλή περίπτωση, να δίνεται στη μορφή δεδομένων κατανομών ταχύτητας ή/και θερμοκρασίας, που απαιτούν ένα συγκεκριμένο αριθμό παραμέτρων για τον ακριβή καθορισμό τους. Αυτό που καταρχή αποφασίζεται είναι το πλήθος των παραμέτρων που θα χρησιμοποιηθούν για τον ακριβή καθορισμό της κατανομής ταχύτητας ή της θερμοκρασίας σε κάθε θέση και στη συνέχεια διατυπώνεται ίσος αριθμός κατάλληλων κανονικών διαφορικών εξισώσεων, ώστε να υπολογιστούν αυτές οι ποσότητες. Ας σημειωθεί ότι στις ολοκληρωτικές μεθόδους για τα οριακά στρώματα οι μερικές διαφορικές εξισώσεις ροής δίνουν τη θέση τους σε κανονικές διαφορικές εξισώσεις.

Εκτός από την τυπική ολοκληρωτική εξίσωση που προκύπτει από τη διαμήκη εξίσωση της ορμής, διάφορες άλλες ολοκληρωτικές εξισώσεις μπορούν να προκύψουν αν, πριν την ολοκλήρωσή της, η διαμήκης εξίσωση της ορμής πολλαπλασιαστεί με $u^m y^n$, όπου y είναι η κάθετη στον τοίχο απόσταση και m, n ακέραιοι εκθέτες. Όταν $m=1$ και $n=0$, λ.χ., προκύπτει η λεγόμενη ολοκληρωτική εξίσωση για την κινητική ενέργεια. Η τελευταία αυτή εξίσωση μπορεί, είτε να αντικαταστήσει την ολοκληρωτική εξίσωση της ορμής ή να λυθεί μαζί με αυτήν, ανάλογα με τον τύπο της εμπειρικής πληροφορίας που θα "κλείσει" μαθηματικά το πρόβλημα. Ολοκληρωτικές εξισώσεις μπορούν να διατυπωθούν και για την ενέργεια του οριακού στρώματος, μέσω κατάλληλης ολοκλήρωσης της ενεργειακής εξίσωσης.

10.4 Ολοκληρωτική Εξίσωση της Ορμής

Στο Σχήμα 10.3 παρουσιάζεται μια τοπική εικόνα του οριακού στρώματος έτσι όπως αυτό εξελίσσεται μεταξύ δύο θέσεων A και D σε πολύ μικρή απόσταση μεταξύ τους. Στη θέση A το πάχος του οριακού στρώματος είναι AE, ενώ στη θέση D έχει γίνει ίσο με DF.



Σχήμα 10.3

Εστω ότι εμείς εξετάζουμε το στοιχείο ABCD, που είναι παραλληλόγραμμο ύψους $AB=DC=h$, με το h μεγαλύτερο από το πάχος του οριακού στρώματος και για τις δύο θέσεις. Για μοναδιαίο βάθος του πεδίου ροής στην τρίτη διεύθυνση, η διαφορά παροχής μάζας μεταξύ των διατομών DC και AB δίνεται από τη σχέση

$$m_{DC} - m_{AB} = \frac{d}{dx} \left[\int_0^h \rho u dy \right] \Delta x + O(\Delta x^2)$$

όπου Δx είναι η απόσταση AD και ο όρος $O(\Delta x^2)$ συμβολίζει ποσότητες ανάλογες του Δx^2 . Από το άνω όριο του όγκου ελέγχου, δηλαδή από την πλευρά BC, περνά παροχή ίση με

$$m_{BC} = \rho_e v_h \Delta x$$

όπου v_h είναι η κατά y ταχύτητα στο ύψος h. Το θεώρημα διατήρησης της παροχής επιβάλλει ότι

$$\rho_e v_h = - \frac{d}{dx} \left[\int_0^h \rho u dy \right] + O(\Delta x) \quad (10.29)$$

Ομοια, η διαφορά ροής ορμής κατά τη x κατεύθυνση από τις διατομές DC και AB δίνει

$$M_{DC} - M_{AB} = \frac{d}{dx} \left[\int_0^h \rho u^2 dy \right] \Delta x + O(\Delta x^2)$$

ενώ η ροή ορμής κατά τη x κατεύθυνση που περνά τη διατομή BC είναι

$$M_{BC} = \rho_e v_h u_e \Delta x$$

και ισχύει ότι

$$\rho_e v_h u_e = - u_e \frac{d}{dx} \left[\int_0^h \rho u dz \right] + O(\Delta x)$$

Λόγω της διαφοράς πίεσης μεταξύ των διατομών DC και AB ασκείται δύναμη ίση με

$$-h \Delta p = -h \left(\frac{dp}{dx} \right) \Delta x + O(\Delta x^2)$$

ενώ πάνω στο ρευστοστοιχείο του όγκου ελέγχου η τάση τριβής στον τοίχο ασκεί δύναμη ίση με $-\tau_w \Delta x$. Συνδυάζοντας τους τελευταίους όρους, προκύπτει η ολοκληρωτική εξίσωση διατήρησης της διαμήκουσ ορμής, που όταν $\Delta x \rightarrow 0$, γράφεται ως

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^h \rho u^2 dy \right) - u_e \frac{d}{dx} \left(\int_0^h \rho u dy \right) = -h \frac{dp}{dx} - \tau_w \quad (10.30)$$

Ο όρος που παριστά τη διαμήκη κλίση στατικής πίεσης θεωρείται γνωστός αφού εκφράζεται συναρτήσει της ταχύτητας της εξωτερικής ατριβούς ροής ως

$$-\frac{dp}{dx} = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} \quad (10.31)$$

(η εξωτερική ροή θεωρείται πάντα γνωστή όταν υπολογίζεται το οριακό στρώμα) και έτσι η (10.30) μπορεί να γραφεί και στις παρακάτω μορφές

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^h \rho u(u - u_e) dy \right] + \frac{du_e}{dx} \left[\int_0^h \rho u dy \right] = h \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} - \tau_w$$

ή

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^h \rho u(u_e - u) dy \right] + \frac{du_e}{dx} \left[\int_0^h (\rho_e u_e - \rho u) dy \right] = \tau_w$$

ή τελικά

$$\frac{d}{dx} (\rho_e u_e^2 \delta_2) + \frac{du_e}{dx} \rho_e u_e \delta_1 = \tau_w \quad (10.32)$$

εισάγοντας το πάχος μετατόπισης δ_1 και το πάχος ορμής δ_2 , σύμφωνα με τους ορισμούς που δόθηκαν στις σχέσεις (10.12) και (10.18) αντίστοιχα. Ορίζεται, επίσης, ο συντελεστής μορφής H_{12} από τη σχέση

$$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (10.33)$$

ώστε η (10.32) να γραφεται επίσης στη μορφή

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} \delta_2 (H_{12} + 2) + \frac{\delta_2}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_e u_e^2} \quad (10.34)$$

Ο συντελεστής μορφής οφείλει το όνομά του στο ότι, όπως θα δούμε παρακάτω, η τιμή του σχετίζεται με την κατανομή ταχύτητας που βρίσκεται σε κάθε θέση. Η σχέση (10.34) γράφεται για ασυμπίεστες ροές ως

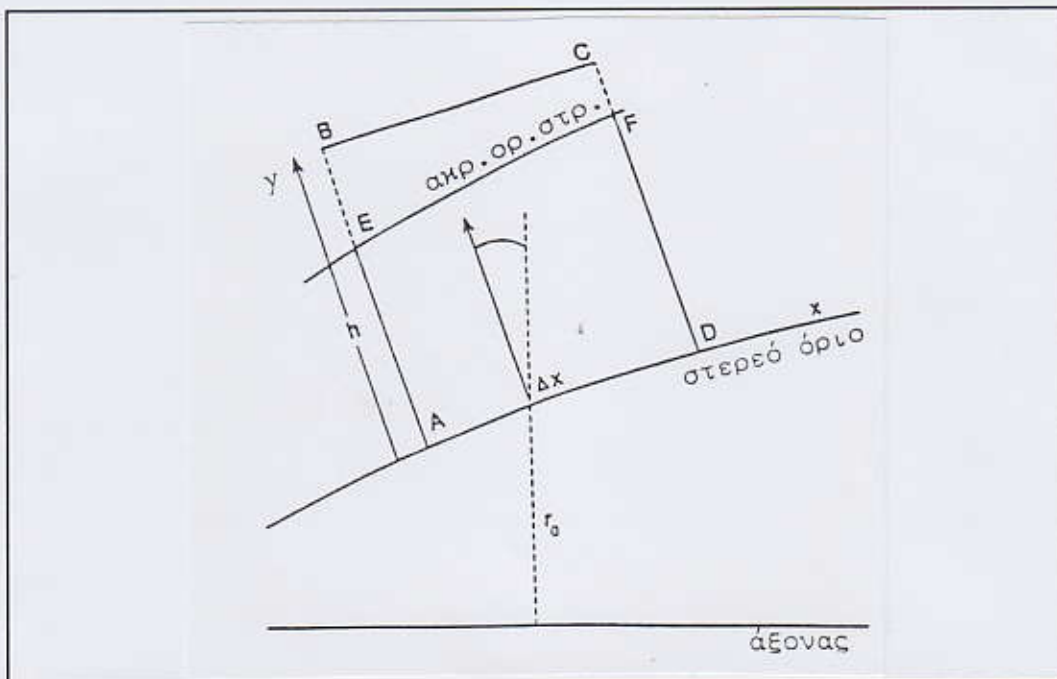
$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} \delta_2 (H_{12} + 2) = \frac{\tau_w}{\rho_e u_e^2} \quad (10.35)$$

Η σχέση (10.34) για τις αξονοσυμμετρικές ροές που αναφέραμε προηγούμενα και για συμπίεστη ροή γράφεται

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\delta_2}{u_e} \left[(H_{12} + 2) \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} + \frac{1}{r_o} \frac{dr_o}{dx} \right] = \frac{\tau_w}{\rho_e u_e^2} \quad (10.36)$$

όπου το x μετρά πλέον κατά μήκος του στερεού τοιχώματος και το y παριστάνει την κάθετη στον τοίχο διεύθυνση, όπως στο Σχήμα 10.4.

Οι εξισώσεις (10.34) ως (10.36) ισχύουν για στρωτές και για τυρβώδεις ροές αρκεί στη δεύτερη περίπτωση να μοντελοποιηθεί κατάλληλα ο όρος τ_w .



Σχήμα 10.4

10.5 Ολοκληρωτική Εξίσωση της Κινητικής Ενέργειας

Η ολοκληρωτική εξίσωση για την κινητική ενέργεια προκύπτει όταν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση της διατήρησης της ορμής στη x -κατεύθυνση με u και στη συνέχεια την ολοκληρώσουμε από 0 ως h . Για μόνιμη ροή, η ολοκλήρωση αυτή δίνει

$$\int_0^h \rho u^2 \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^h \rho u v \frac{\partial u}{\partial y} dy = - \int_0^h u \frac{dp}{dx} dy + \int_0^h u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \quad (10.37)$$

Με τη βοήθεια της εξίσωσης της συνέχειας (4.14a), αμελώντας τους χρονικούς όρους, προκύπτει ότι

$$\rho_e v_e = - \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dy$$

Εχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^h \rho u v \frac{\partial u}{\partial y} dy &= [\rho u^2 v]_0^h - \int_0^h u \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) dy = \\ &= [\rho u^2 v]_0^h - \int_0^h u^2 \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dy - \int_0^h u \rho v \frac{\partial u}{\partial y} dy \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\int_0^h \rho u v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{1}{2} \rho_e u_e^2 v_e - \int_0^h \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dy = \int_0^h \frac{1}{2} (u^2 - u_e^2) \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dy$$

Η τελευταία σχέση αντικαθιστά το δεύτερο όρο της (10.37) και με τη βοήθεια της σχέσης (10.31) για τη διαμήκη κλίση της στατικής πίεσης, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_0^h \left[\rho u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{1}{2} (u^2 - u_e^2) \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \right] dy - \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} \int_0^h u dy = \\ = \left[\mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right]_0^h - \int_0^h \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy \end{aligned}$$

ή

$$\frac{d}{dx} \int_0^h \rho u \frac{1}{2} (u_e^2 - u^2) dy + u_e \frac{du_e}{dx} \int_0^h u (\rho_e - \rho) dy = \int_0^h \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2 dy$$

Χρησιμοποιώντας το πάχος κινητικής ενέργειας δ_3 , όπως ορίστηκε στη σχέση (10.22), η τελευταία σχέση μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\frac{d}{dx} \left[\rho_e \frac{1}{2} u_e^3 \delta_3 \right] + \rho_e u_e^2 \frac{du_e}{dx} \int_0^h \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_e} \right) dy = \int_0^h \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy \quad (10.38)$$

Για τη συμπιεστή ροή ορίζουμε επιπλέον το κινηματικό πάχος μετατόπισης ως

$$\delta_{1k} = \int_0^h \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (10.39)$$

που ισοδυναμεί με το πάχος μετατόπισης που θα είχαμε αν η ροή ήταν ασυμπίεστη, οπότε αποδεικνύεται εύκολα ότι το ολοκλήρωμα του δεύτερου όρου της εξίσωσης (10.38) γράφεται και ως

$$\int_0^h \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_e}\right) dy = \int_0^h \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy - \int_0^h \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$$

ή απλούστερα ως

$$\int_0^h \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_e}\right) dy = \delta_1 - \delta_{1k} \quad (10.40)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (10.38) και (10.40) γράφουμε την τελική έκφραση της ολοκληρωτικής εξίσωσης για την κινητική ενέργεια που είναι

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \rho_e u_e^3 \delta_3 \right) + \rho_e u_e^2 \frac{du_e}{dx} [\delta_1 - \delta_{1k}] = \int_0^h \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy = \int_0^h \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (10.41)$$

Όταν το δεύτερο μέλος εκφράζεται με τον τελευταίο τρόπο, μέσω της τάσης τ_{xy} , τότε η σχέση (10.41) μπορεί αυτόματα να εφαρμοστεί για στρωτές αλλά και τυρβώδεις ροές.

Η σχέση (10.41) για ασυμπίεστο ρευστό γράφεται

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} u_e^3 \delta_3 \right) = \nu \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy = \frac{1}{\rho} \int_0^h \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (10.42)$$

10.6 Ένα Απλό Παράδειγμα Εφαρμογής της Ολοκληρωτικής Εξίσωσης της Ορμής

Ως πρώτη εφαρμογή των ολοκληρωτικών μεθόδων επίλυσης για τον υπολογισμό των οριακών στρωμάτων θα εξετασθεί μια απλή μέθοδος υπολογισμού μόνιμων στρωτών ασυμπίεστων οριακών στρωμάτων πάνω σε επίπεδη πλάκα, με την εξωτερική ροή να είναι παράλληλη προς την πλάκα. Θα υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει διαμήκης κλίση του πεδίου πίεσης, δηλαδή ότι τα p και ρ είναι σταθερά σε όλο το πεδίο, και έχουμε μηδενική μεταβολή της ταχύτητας u_e της εξωτερικής ροής στη x κατεύθυνση. Τότε η ολοκληρωτική εξίσωση της διαμήκουσ ορμής, δηλαδή η εξίσωση (10.35) παίρνει την απλουστευμένη μορφή

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_e u_e^2} \quad (10.43)$$

Υποθέτουμε ότι, σε κάθε θέση x , η κατανομή της ταχύτητας μέσα στο οριακό στρώμα είναι μια μονοπαραμετρική συνάρτηση, εξαρτάται δηλαδή μόνο από μια μεταβλητή και ως τέτοια επιλέγουμε την αδιάστατη απόσταση

$$\eta = \frac{y}{\delta}$$

από το στερεό τοίχωμα. Μια τέτοια υπόθεση σημαίνει ότι υπάρχει ομοιότητα στις κατανομές ταχύτητας για κάθε θέση x , δηλαδή όλες οι κατανομές ταχύτητας προκύπτουν από την ίδια μαθηματική σχέση, σε κλίμακα που καθορίζει το τοπικό πάχος του οριακού στρώματος. Όταν γνωρίζουμε το πάχος του οριακού στρώματος δ σε κάθε θέση (και αυτό μπορεί έμμεσα να προκύψει από την επίλυση της (10.43)), μπορούμε να υπολογίσουμε την κατανομή ταχύτητας σε κάθε θέση x . Μια μαθηματική παρουσίαση του κλεισίματος που επιχειρείται στο πρόβλημα θα μπορούσε να είναι η

$$\frac{u}{u_e} = f(\eta)$$

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

όπου η επιλογή της συνάρτησης f εξαρτάται από το μοντέλο ροής που εμείς θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε. Μια τυπική κατανομή $f(\eta)$ είναι αυτή της παρακάτω σχέσης

$$\frac{u}{u_e} = \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) \quad (10.44)$$

η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω οριακές συνθήκες στα δύο άκρα του οριακού στρώματος

$$\text{για } y=0 \quad : \quad u=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{για } y=\delta \quad : \quad u=u_e \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Βάσει της σχέσης (10.44) η διατμητική τάση στον τοίχο υπολογίζεται αναλυτικά και εξαρτάται από το τοπικό πάχος του οριακού στρώματος, σύμφωνα με τη σχέση

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu u_e \frac{\pi}{2} \frac{1}{\delta} \quad (10.45)$$

ενώ τα πάχη μετατόπισης και ορμής για κάθε θέση θα δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy = \delta \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \quad (10.46)$$

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy = \frac{\delta(4-\pi)}{2\pi} \quad (10.47)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (10.45) και (10.47) στη διαφορική εξίσωση (10.43) παίρνουμε

$$(4-\pi) \frac{d\delta}{dx} = \frac{2\pi^2\nu}{2u_e\delta} \quad (10.48\alpha)$$

ή ακόμα ότι

$$\frac{d\delta^2}{dx} = \frac{2\pi^2\nu}{(4-\pi)u_e} \quad (10.48\beta)$$

Με τον τρόπο αυτό μετατρέπουμε μια διαφορική εξίσωση που ήταν διατυπωμένη με εξαρτημένη μεταβλητή το πάχος δ_2 , σε μια νέα μορφή με εξαρτημένη μεταβλητή το πάχος δ , από το οποίο άμεσα εξαρτάται η κατανομή ταχύτητας, σύμφωνα με τη σχέση (10.44).

Θεωρώντας ότι στην αρχή του πεδίου ροής

$$\delta = 0 \quad \text{για} \quad x = 0$$

η αναλυτική λύση της εξίσωσης (10.48β) δίνει για κάθε θέση x , ότι

$$\frac{\delta}{x} = \left(\frac{2\pi^2}{(4-\pi)}\right)^{1/2} Re_x^{-1/2} = \frac{4.795}{Re_x^{1/2}} \quad (10.49)$$

όπου Re_x είναι ο αριθμός Reynolds βασισμένος στην ταχύτητα της εξωτερικής ροής

$$Re_x = \frac{xu_e}{\nu} \quad (10.50)$$

Εκτός από τη σχέση (10.49) μπορεί να προκύψει και αντίστοιχη λύση για το συντελεστή τριβής c_f σε κάθε θέση που είναι

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho u_e^2} = \left(\frac{4-\pi}{2Re_x}\right)^{1/2} = \frac{0.6551}{Re_x^{1/2}} \quad (10.51)$$

καθώς και αναλυτικές λύσεις για τα πάχη μετατόπισης δ_1 και ορμής δ_2 , ως και για το συντελεστή μορφής H_{12} , οι οποίες είναι

$$\frac{\delta_1}{x} = \frac{1.702}{Re_x^{1/2}} \quad (10.52)$$

$$\frac{\delta_2}{x} = \frac{0.655}{Re_x^{1/2}} \quad (10.53)$$

$$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2} = 2.660 \quad (10.54)$$

Είναι ενδιαφέρον, αφ'ενός μεν να παρατηρήσουμε ότι ο συντελεστής μορφής σε κάθε θέση είναι ανεξάρτητος της συντεταγμένης της θέσης, αφ'ετέρου δε να συγκρίνουμε τις εκφράσεις (10.51) ως (10.54) με τις ίδιες εκφράσεις που δίνει η γνωστή λύση Blasius που είναι

$$c_f = \frac{0.664}{Re_x^{1/2}}, \quad \frac{\delta_1}{x} = \frac{1.721}{Re_x^{1/2}},$$

$$\frac{\delta_2}{x} = \frac{0.664}{Re_x^{1/2}}, \quad H_{12} = 2.59$$

Βεβαίως, η επιλογή της σχέσης (10.44) για το "κλείσιμο" της ολοκληρωτικής μας εξίσωσης δεν είναι μοναδική. Μια εναλλακτική λύση θα ήταν η χρήση της κατανομής ταχύτητας του Pohlhausen, με το τέταρτου βαθμού πολυώνυμο

$$\frac{u}{u_e} = 2\eta - 2\eta^2 + \eta^4 \quad (10.55)$$

η οποία, αν εκτελεστεί η ίδια σειρά πράξεων με προηγούμενο δίνει, αντίστοιχα προς τις αναλυτικές λύσεις (10.51) ως (10.54), ότι

$$c_f = \frac{0.557}{Re_x^{1/2}}, \quad \frac{\delta_1}{x} = \frac{1.732}{Re_x^{1/2}},$$

$$\frac{\delta_2}{x} = \frac{0.557}{Re_x^{1/2}}, \quad H_{12} = 2.55 \quad (10.56)$$

Ας σημειωθεί ότι η σχέση

$$\frac{\delta_2}{x} = c_f \quad (10.57)$$

έχει γενικότερη ισχύ για ασυμπέστα οριακά στρώματα που αναπτύσσονται κατά μήκος επίπεδης πλάκας σε μηδενική κλίση της διαμήκου πίεσης.

10.7 Ισορροπημένα Οριακά Στρώματα

Για την περίπτωση που η ροή θεωρείται στρωτή και ασυμπίεστη, για απλές γεωμετρίες όπως είναι αυτή της επίπεδης πλάκας, βρέθηκαν από πολύ νωρίς ακριβείς λύσεις στο πρόβλημα της εξέλιξης ενός οριακού στρώματος. Η γνωστή κατανομή των Falkner-Skan είναι μία από αυτές. Η βασική τους φιλοσοφία στηρίζονταν στην ομοιότητα η οποία εμφανίζεται μεταξύ των κατανομών ταχύτητας του οριακού στρώματος στις διαδοχικές διαμήκεις θέσεις της ροής. Για το λόγο αυτό, οι λύσεις αυτές ονομάζονται λύσεις ομοιότητας, ενώ οι αντίστοιχες ροές λέγονται "ισορροπημένες" ροές.

Η έννοια της ομοιότητας σε ένα οριακό στρώμα εκφράζει την ιδιότητα οι κατανομές ταχύτητας $u=u(x,y)$ σε δύο τυχαίες θέσεις x_1 και x_2 κατά την εξέλιξη του οριακού στρώματος να διαφέρουν μόνο κατά ένα παράγοντα ως προς την ταχύτητα u και ένα παράγοντα ως προς την απόσταση y . Μια τέτοια ομοιότητα οδηγεί στην υιοθέτηση συγκεκριμένων αδιάστατων εκφράσεων για την ταχύτητα u και την απόσταση y , ώστε να μπορεί το σύνολο των διαδοχικών κατανομών ταχύτητας να παρασταθεί με μία μόνο συνάρτηση και συνεπώς με ένα μόνο γράφημα.

Η έννοια της ισορροπίας σε ένα οριακό στρώμα μπορεί να γίνει κατανοητή χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική εξίσωση της ορμής (10.32), την οποία ξαναγράψουμε στην παρακάτω αδιάστατη μορφή

$$\frac{1}{\tau_w} \frac{d}{dx} (\rho_e \mu_e^2 \delta_2) - \frac{\delta_1}{\tau_w} \frac{dp}{dx} = 1 \quad (10.58)$$

Η εξίσωση (10.58) προκύπτει εύκολα αν ληφθεί υπόψη και η εξίσωση (10.31) και εκφράζει την ισορροπία η οποία υφίσταται μεταξύ του αδρανειακού όρου και του όρου κλίσης πίεσης ως προς τις ασκούμενες συνεκτικές δυνάμεις. Η γραφή (10.58) μας οδηγεί εύκολα στο συμπέρασμα ότι αν σε μια ροή οριακού στρώματος η ποσότητα

$$\Pi = \frac{\delta_1}{\tau_w} \frac{dp}{dx} \quad (10.59)$$

παραμένει σταθερή, σε όλο το μήκος ανάπτυξής του, τότε και η ποσότητα

$$\frac{1}{\tau_w} \frac{d}{dx} (\rho_e \mu_e^2 \delta_2)$$

θα παραμένει σταθερή. Η ποσότητα Π , την οποία ορίζουμε με τη σχέση (10.59) ονομάζεται παράμετρος ισορροπίας του οριακού στρώματος και εκφράζει τον αδιάστατο λόγο δυνάμεων λόγω κλίσης πίεσης και συνεκτικών δυνάμεων σε κάθε θέση του οριακού στρώματος. Η διατήρηση σταθερής τιμής για την ποσότητα Π σε όλο το μήκος ανάπτυξης του οριακού στρώματος, οδηγεί στα λεγόμενα "ισορροπημένα" οριακά στρώματα. Ας επισημάνουμε τέλος, ότι στρωτά ή τυρβώδη οριακά στρώματα μπορούν να βρίσκονται σε

κατάσταση ισορροπίας. Τα ισορροπημένα οριακά στρώματα, στρωτά ή τυρβώδη, θα αποτελέσουν το αντικείμενο μελέτης των ενοτήτων που ακολουθούν. Η κατάσταση "ομοιότητας" που τα διέπει δε σημαίνει βέβαια ότι ένα οριακό στρώμα παύει να εξελίσσεται (αφού το πάχος δ είναι πάντα συνάρτηση της απόστασης x) αλλά ότι εξελίσσεται κάτω από συγκεκριμένους νόμους.

10.8 Λύσεις Ομοιότητας για τα Οριακά Στρώματα

Την έννοια της ομοιότητας στα οριακά στρώματα την περιγράψαμε προηγούμενα. Εδώ θα δώσουμε την ποσοτική της έκφραση. Υποθέτοντας δύο διαδοχικές θέσεις x_1 και x_2 κατά την εξέλιξη του οριακού στρώματος, η έννοια της ομοιότητας διατυπώνεται στη μορφή

$$\frac{u(x_1, y/g(x_1))}{u_\epsilon(x_1)} = \frac{u(x_2, y/g(x_2))}{u_\epsilon(x_2)} \quad (10.60)$$

Η σχέση (10.60) προέκυψε θεωρώντας τις παρακάτω δύο παραδοχές:

- (α) η αδιαστατοποίηση της ταχύτητας γίνεται με την τοπική εξωτερική ταχύτητα $u_\epsilon(x)$, η οποία φυσικά μπορεί να μεταβάλλεται από θέση σε θέση και
- (β) η αδιαστατοποίηση της απόστασης y γίνεται με "κατάλληλη" συνάρτηση $g(x)$ και όχι με μια ποσότητα που είναι αναγκαστικά ανεξάρτητη του x .

Σκοπός της παρούσας ενότητας είναι, μεταξύ άλλων, να εξηγήσει και τις παραδοχές που έγιναν στην ενότητα 10.6 σχετικά με τη χρησιμοποίηση μιας μονοπαραμετρικής κατανομής ταχύτητας στο οριακό στρώμα.

Για επίπεδες στρωτές ροές, αφετηρία για τις εξισώσεις που θα παράγουμε αποτελούν οι εξισώσεις της συνέχειας και της διατήρησης της διαμήκουσ ορμής, οι οποίες για ασυμπίεστο ρευστό γράφονται ως

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_\epsilon \frac{du_\epsilon}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (10.61)$$

όπου η προηγηθείσα διαστατική ανάλυση μας επέτρεψε να κρατήσουμε μόνο τους σημαντικούς όρους από τη δεύτερη εξίσωση (η μορφή αυτή συχνά φέρεται ως εξίσωση Prandtl για το οριακό στρώμα). Το σύστημα (10.61) κλείνει με κατάλληλες οριακές συνθήκες στα άκρα του οριακού στρώματος, που είναι

$$\begin{aligned} u=0, \quad v=0, \quad \text{για } y=0 \\ u=u_\epsilon, \quad \text{για } y=\infty \end{aligned} \quad (10.62)$$

Η έννοια του άπειρου που χρησιμοποιείται ως ανώτατη τιμή της παραμέτρου y είναι συμβολική, αφού η τελευταία σχέση της (10.62) ισχύει προφανώς και για τη θέση $y=\delta$ στο άκρο του πάχους του οριακού στρώματος.

Με την εισαγωγή της ροϊκής συνάρτησης Ψ , σύμφωνα με το διανυσματικό ορισμό

$$(u, v) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (10.63)$$

αφενός μεν ικανοποιείται ταυτοτικά η εξίσωση της συνέχειας, αφετέρου δε η εξίσωση της ορμής γράφεται στη μορφή

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = u_\epsilon \frac{du_\epsilon}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} \quad (10.64)$$

που, σύμφωνα με τη (10.62), διέπεται από τις οριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \quad \text{για } y=0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u_\epsilon, \quad \text{για } y=\infty \end{aligned} \quad (10.65)$$

Με τελικό στόχο να δημιουργήσουμε εξισώσεις που να πιστοποιούν την ομοιότητα των οριακών στρωμάτων, εισάγουμε τις παρακάτω δύο αδιάστατες αποστάσεις

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{g(x)} \sqrt{\frac{u_\infty}{Lv}} = \frac{y\sqrt{Re}}{Lg(x)} \quad (10.66)$$

όπου L είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος της ροής και Re είναι ο αριθμός Reynolds που ορίζεται ως

$$Re = \frac{u_\infty L}{\nu}$$

ενώ u_∞ είναι μια κατάλληλη ταχύτητα αδιαστατοποίησης.

Η ροϊκή συνάρτηση $\Psi = \Psi(x, y)$ αδιαστατοποιείται και αυτή και στη θέση της εισάγεται η αδιάστατη ροϊκή συνάρτηση $f = f(\xi, \eta)$ που δίνεται από τη σχέση

$$f(\xi, \eta) = \frac{\Psi(x, y) \sqrt{Re}}{Lu_e g(x)} \quad (10.67)$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων, οι συνιστώσες της ταχύτητας γράφονται

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} = u_e f' \quad (10.68)$$

$$v = -\frac{L f}{\sqrt{Re}} \frac{d}{dx} (u_e g(x)) - \frac{u_e g(x)}{\sqrt{Re}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{L}{g(x)} \eta \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right\}$$

όπου για την απόδειξη της τελευταίας σχέσης συνιστάται να ληφθεί υπόψη ότι

$$\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

με

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{L}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\sqrt{Re} y}{L(g(x))^2} \frac{\partial g}{\partial x}$$

Από τις εξισώσεις (10.68) μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η κατανομή της συνιστώσας $u = u(x, y)$ της ταχύτητας μπορεί να υπακούει σε κανόνες ομοιότητας (με τον τρόπο που αυτοί ορίστηκαν προηγουμένως) όταν και μόνο όταν η μετασχηματισμένη ροϊκή συνάρτηση f εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από τη μεταβλητή η . Στην περίπτωση αυτή, η μερική διαφορική εξίσωση (10.64) μετασχηματίζεται σε μια κανονική διαφορική εξίσωση με εξαρτημένη μεταβλητή την ποσότητα $f(\eta)$. Ετσι, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις μετασχηματισμού (10.66) και (10.67), και μετά την εκτέλεση των απαραίτητων πράξεων προκύπτει ότι

$$f''' + \alpha f f'' + \beta (1 - f'^2) = \frac{u_e}{u_\infty} g^2 \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (10.69)$$

όπου

$$f' = \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad f'' = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}, \quad f''' = \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}$$

και

$$\alpha = \frac{Lg}{u_\infty} \frac{d}{dx}(u_\infty g) \quad , \quad \beta = \frac{L}{u_\infty} g^2 \frac{du_\infty}{dx} \quad (10.70)$$

Οι οριακές συνθήκες για την επίλυση της (10.69) είναι

$$\begin{aligned} f=0 \quad , \quad f'=0 \quad , \quad \text{για} \quad \eta=0 \\ f'=1 \quad , \quad \text{για} \quad \eta=\infty \end{aligned} \quad (10.71)$$

λύσεις ομοιότητας μπορούν να υπάρξουν μόνο όταν τα f και f' δεν εξαρτώνται από το ξ , δηλαδή όταν το δεξιό μέλος της (10.69) ισούται με μηδέν και συγχρόνως οι συντελεστές α και β του αριστερού μέλους είναι σταθεροί. Ετσι, αποδεικνύεται ότι για να υπάρξουν λύσεις ομοιότητας για τις κατανομές ταχύτητας στο οριακό στρώμα, η ροϊκή συνάρτηση $f(\eta)$ πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτω κανονική διαφορική εξίσωση

$$f''' + \alpha f f'' + \beta(1-f'^2) = 0 \quad (10.72)$$

με οριακές συνθήκες αυτές των σχέσεων (10.71). Η εξίσωση (10.72) παρουσιάστηκε πρώτα από τους Falkner και Skan και γι'αυτό συχνά φέρει το όνομά τους.

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια των σχέσεων (10.70), μπορούμε να διερευνήσουμε τις συνθήκες εκείνες τις οποίες πρέπει να ικανοποιούν τα $u_\infty(x)$ και $g(x)$ ώστε οι συντελεστές α και β να παραμένουν σταθεροί. Δε θα παρατεθεί η μαθηματική διερεύνηση, αλλά μόνο τα συμπεράσματά της. Ετσι αποδεικνύεται ότι για περιπτώσεις ροής ασυμπίεστου ρευστού με μη-μηδενική διαμήκη κλίση της πίεσης, η ομοιότητα στις κατανομές ταχύτητας του οριακού στρώματος, προκύπτει όταν

- (α) $u_\infty = (\text{σταθερά}) x^m$, όπου m είναι μια σταθερά, ή
 (β) $u_\infty = (\text{σταθερά}) \exp(ax)$, όπου a είναι μη-μηδενική σταθερά.

Η περίπτωση (α) παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και γι'αυτή μπορούμε να γράψουμε

$$u_\infty = u_\infty \left(\frac{x}{L} \right)^m \quad (10.73)$$

όπου η ταχύτητα αναφοράς u_∞ δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτει με αυτήν που αναφέραμε και προηγούμενα. Η σχετική μαθηματική ανάλυση μπορεί επίσης να δείξει ότι επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις

$$m = \frac{\beta}{2-\beta} \quad \text{ή} \quad \beta = \frac{2m}{m+1} \quad (10.74)$$

Συμπερασματικά, σε κάθε θέση κατά μήκος του στερεού τοιχώματος πάνω στο οποίο αναπτύσσεται το οριακό στρώμα, η ταχύτητα διατηρεί ομοιότητα με νόμο του τύπου

$$\frac{u}{u_e} = \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \quad (10.75)$$

που περιγράφει την κατανομή ταχύτητας σε κάθε διαμήκη θέση x , σε ένα στρωτό οριακό στρώμα που αναπτύσσεται με νόμο εξωτερικής ταχύτητας του τύπου

$$u_e = kx^m \quad (10.76)$$

Για κάθε διαφορετική τιμή του εκθέτη m (συνεπώς και για την αντίστοιχη τιμή της παραμέτρου β) υπάρχει ένα ισορροπημένο οριακό στρώμα που αναπτύσσεται κάτω από μια συγκεκριμένη κατανομή της εξωτερικής ταχύτητας, της μορφής της σχέσης (10.76), που έχει "όμοια" κατανομή ταχύτητας κάθετα στο τοίχωμα, σε κάθε θέση αυτού. Αυτή η κατανομή ταχύτητας προκύπτει από τη σχέση (10.75) που υποχρεωτικά συνοδεύεται από την επίλυση της εξίσωσης (10.72) για τον υπολογισμό της κατά την κατεύθυνση η κατανομής της συνάρτησης f .

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης $g(x)$ συνδυάζουμε τις εξισώσεις (10.70) και προκύπτει ότι

$$2\alpha - \beta = \frac{L}{u_\infty} \frac{d}{dx} (u_e g^2)$$

Από την τελευταία εξίσωση, για την περίπτωση που $2\alpha - \beta \neq 0$, συνεπάγεται ότι

$$\frac{u_e}{u_\infty} g^2 = \frac{(2\alpha - \beta)x}{L} \quad (10.77)$$

Συνδυάζοντας και πάλι τις εξισώσεις (10.70) προκύπτει επίσης ότι

$$\alpha - \beta = \frac{L}{u_\infty} g g' / u_e$$

και συνεπώς

$$(\alpha - \beta) \frac{u_e'}{u_e} = \frac{L}{u_\infty} g^2 u_e' \frac{g'}{g} = \beta \frac{g'}{g}$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση παίρνουμε

$$\left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^{\alpha-\beta} = \Lambda g^\beta \quad (10.78)$$

όπου Λ είναι μια σταθερά. Με την απαλειφή της ποσότητας g από τις εξισώσεις (10.77) και (10.78) προκύπτει μια έκφραση για την κατανομή της εξωτερικής ταχύτητας που πιστοποιεί τη γραφή (10.73) που ήδη έχουμε παρουσιάσει. Αυτή είναι

$$\frac{u_e}{u_\infty} = \Lambda^{\frac{2}{2\alpha-\beta}} \left[(2\alpha-\beta) \frac{x}{L} \right]^{\frac{\beta}{2\alpha-\beta}} \quad (10.79a)$$

και συγχρόνως

$$g(x) = \sqrt{(2\alpha-\beta) \frac{x}{L} \frac{u_\infty}{u_e}} \quad (10.80a)$$

Από τις εξισώσεις (10.70) φαίνεται ότι η λύση δε μεταβάλλεται αν τα α και β πολλαπλασιασθούν με τον ίδιο παράγοντα. Η τελευταία παρατήρηση μας επιτρέπει να υιοθετήσουμε την τιμή $\alpha=1$, χωρίς βλάβη της γενικότητας. Με την τιμή αυτή για την παράμετρο α και χρησιμοποιώντας τη βοηθητική παράμετρο m η οποία ορίστηκε στη σχέση (10.74) προκύπτουν οι ισοδύναμες των (10.79a) και (10.80a) εξισώσεις

$$\frac{u_e}{u_\infty} = \Lambda^{1+m} \left(\frac{2}{1+m} \frac{x}{L} \right)^m \quad (10.79b)$$

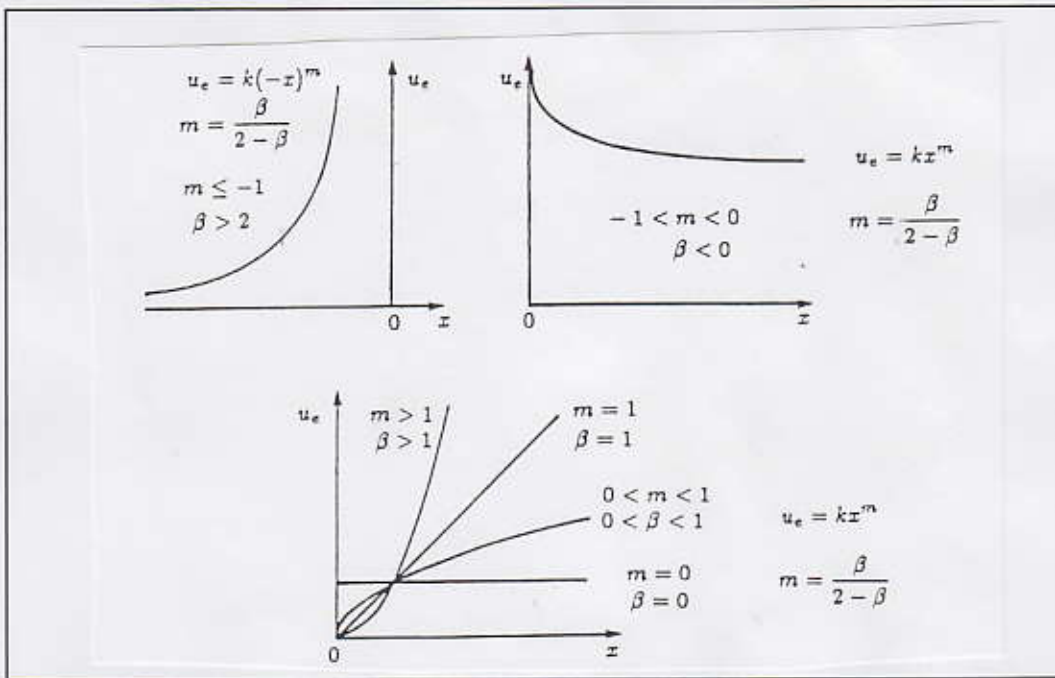
και

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{m+1} \frac{x}{L} \frac{u_\infty}{u_e}} \quad (10.80b)$$

Τέλος, η αδιάστατη απόσταση η , όπως αυτή ορίστηκε στη σχέση (10.66) γράφεται πλέον στη μορφή

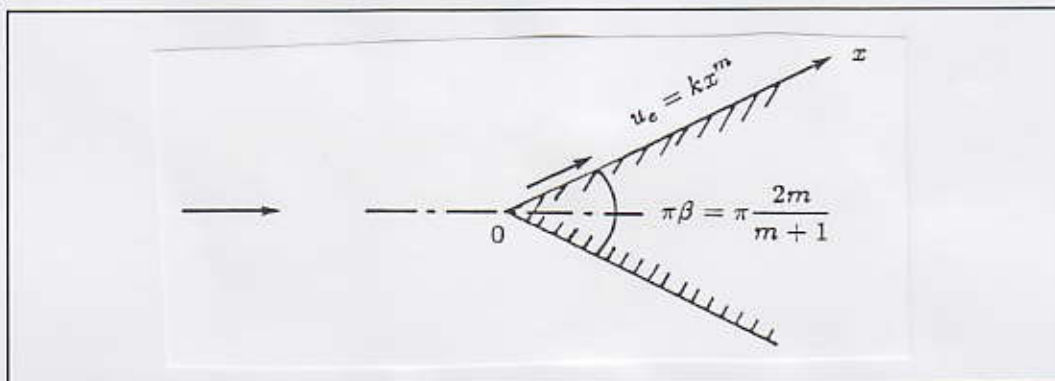
$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{u_e}{xv}} \quad (10.81)$$

Το Σχήμα 10.5 παρουσιάζει σχηματικά ορισμένες πιθανές κατανομές της εξωτερικής ταχύτητας u_e , οι οποίες θα επέτρεπαν λύσεις ομοιότητας σαν αυτές των Falkner και Skan. Μια εξωτερική ταχύτητα που ικανοποιεί το νόμο μεταβολής που δίνει η εξίσωση (10.76), αντιστοιχεί από φυσικής απόψεως, στην ταχύτητα ενός τέλει και ασυμπίεστου αερίου γύρω



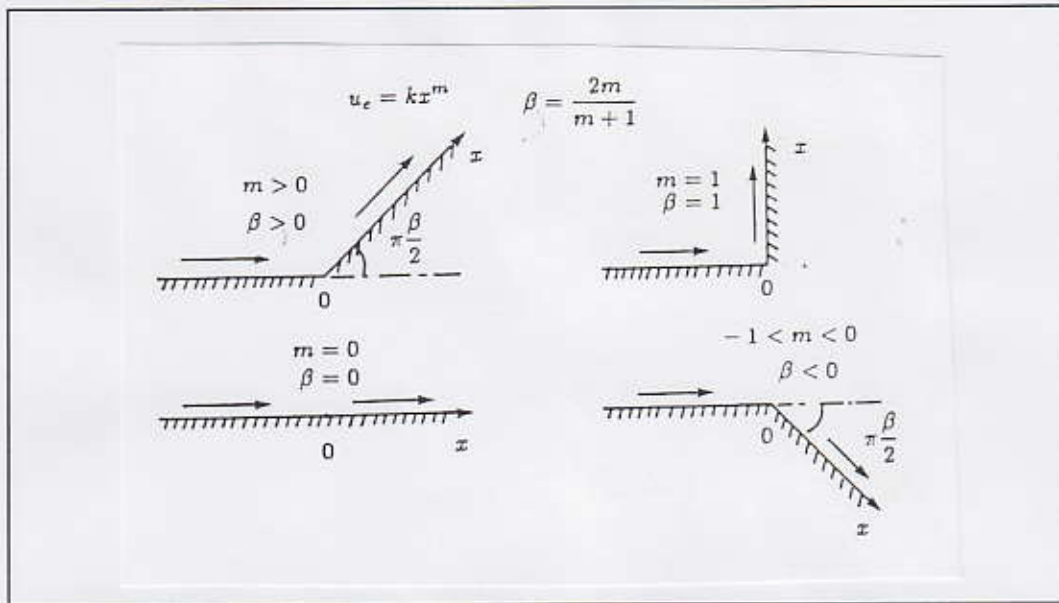
Σχήμα 10.5

από τα τοιχώματα ενός συμμετρικού διεδρου με γωνία $\pi\beta$. Ένα τέτοιο διεδρο φαίνεται στο Σχήμα 10.6. Η γωνία του διεδρου συνδέεται με τον εκθέτη m μεταβολής της εξωτερικής



Σχήμα 10.6

ροής με τη βοήθεια της σχέσης (10.74). Μια τέτοια ροή μπορεί επίσης να προσομοιασθεί με εκείνη που δημιουργεί η απότομη μεταβολή στην κατεύθυνση της ροής λόγω αλλαγής της κλίσης του στερεού τοιχώματος. Τέτοιες ροές απεικονίζονται στο Σχήμα 10.7.



Σχήμα 10.7

Η περίπτωση $m > 0$ ($\beta > 0$) αντιστοιχεί σε επιταχυνόμενη ροή μετά την κορυφή 0, όπου η ταχύτητα είναι μηδενική, ενώ η περίπτωση $-1 < m < 0$ ($\beta < 0$) αντιστοιχεί σε επιβραδυνόμενη ροή μετά την κορυφή 0 όπου η ταχύτητα απειρίζεται σύμφωνα με τη θεώρηση του ατρίβους ρευστού. Στο ίδιο σχήμα παρουσιάζονται και δύο ακόμα ειδικές περιπτώσεις οι οποίες αντιστοιχούν σε $m = \beta = 0$ (ροή σε επίπεδη πλάκα) και $m = \beta = 1$ (ροή σε γωνία 90° , με σημείο ανακοπής).

10.9 Στρωτά Ισορροπημένα Οριακά Στρώματα

Η ανάλυση η οποία παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, μας επιτρέπει πλέον να διατυπώσουμε ότι εάν ένα οριακό στρώμα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, υπό την επίδραση μιας εξωτερικής ροής η οποία υπακούει στο νόμο (10.76) με μια συγκεκριμένη τιμή του εκθέτη m , η κατανομή ταχύτητας σε κάθε θέση κατά μήκος της εξέλιξης του μπορεί συμβολικά να γραφεί στη μορφή

$$\frac{u}{u_e} = F(\eta, m) \quad (10.82)$$

Με τη γραφή (10.82) διατυπώνεται καθαρά η εξάρτηση της μορφής της κατανομής αυτής από δύο παραμέτρους, τις η και m .

Στην ενότητα 10.2 ορίστηκαν τα πάχη μετατόπισης, ορμής και ενέργειας, από τις σχέσεις (10.12), (10.18) και (10.22) εάν η ροή είναι συμπιεστή και από τις σχέσεις (10.13), (10.19) και (10.23) εάν η ροή θεωρείται ασυμπιεστή. Συνήθως ορίζονται και τρία επιπλέον

πάχη οριακού στρώματος, με κοινό τρόπο για ασυμπίεστες και συμπίεστες ροές και αυτά είναι

(α) το κινηματικό πάχος μετατόπισης

$$\delta_{1k} = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (10.83)$$

(β) το κινηματικό πάχος ορμής

$$\delta_{2k} = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (10.84)$$

(γ) το κινηματικό πάχος ενέργειας

$$\delta_{3k} = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u^2}{u_e^2}\right) dy \quad (10.85)$$

Είναι προφανές ότι για ασυμπίεστες ροές τα κινηματικά πάχη συμπίπτουν με τα χαρακτηριστικά πάχη που ορίσαμε στην ενότητα 10.2. Η χρήση των κινηματικών παχών στην ανάλυση που ακολουθεί μας επιτρέπει να γενικεύσουμε τη συζήτηση ώστε, εκτός των ασυμπίεστων, να συμπεριλάβει και τα συμπίεστα οριακά στρώματα σε κατάσταση ισοροπίας.

Με βάση τους ορισμούς των κινηματικών παχών από τις σχέσεις (10.83), (10.84) και (10.85) και με κατάλληλο μετασχηματισμό ώστε να εμπλακεί η αδιάστατη ποσότητα η , όπου με βάση τη σχέση (10.81) ισχύει

$$\eta = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{Re_x} \quad (10.86)$$

με

$$Re_x = \frac{u_e x}{\nu} \quad (10.87)$$

σε ένα ισορροπημένο οριακό στρώμα με κατανομή ταχύτητας αυτή της σχέσης (10.82) έχουμε ότι

$$\delta_{1k} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \int_0^{\infty} (1 - F(\eta, m)) d\eta = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \frac{x}{\sqrt{Re_x}} f_1(m) \quad (10.88a)$$

$$\delta_{2k} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \int_0^{\infty} F(\eta, m)(1-F(\eta, m)) d\eta = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \frac{x}{\sqrt{Re_x}} f_2(m) \quad (10.88\beta)$$

$$\delta_{3k} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \int_0^{\infty} F(\eta, m)(1-F^2(\eta, m)) d\eta = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \frac{x}{\sqrt{Re_x}} f_3(m) \quad (10.88\gamma)$$

όπου ο ορισμός των ποσοτήτων $f_1(m)$, $f_2(m)$ και $f_3(m)$ προκύπτει άμεσα από τις εξισώσεις (10.86), (10.87) και (10.88) ως

$$f_1(m) = \int_0^{\infty} (1-F) d\eta \quad (10.89\alpha)$$

$$f_2(m) = \int_0^{\infty} F(1-F) d\eta \quad (10.89\beta)$$

$$f_3(m) = \int_0^{\infty} F(1-F^2) d\eta \quad (10.89\gamma)$$

Εξετάζοντας τις προηγούμενες εξισώσεις (10.88) φαίνεται εύκολα ότι η γνώση δύο οποιωνδήποτε από τα τρία κινηματικά πάχη μας επιτρέπει εύκολα να υπολογίσουμε το τρίτο. Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να γενικευθεί ακόμα περισσότερο, καταλήγοντας με τον τρόπο αυτό στην αναγνώριση ενός διπαραμετρικού προβλήματος, όπου η γνώση δύο παραμέτρων (η γνώση λ.χ. δύο κινηματικών παχών είναι μια ενδεικτική περίπτωση, όχι όμως και η πιο βολική) επιτρέπει τον υπολογισμό κάθε άλλου στοιχείου του οριακού στρώματος. Η παρατήρηση που μόλις κάναμε έρχεται σε απόλυτη συμφωνία με τη σχέση (10.82), όπου φαίνεται η εξάρτηση της μορφής της κατανομής της εξωτερικής ταχύτητας από δύο παραμέτρους.

Η διατμητική τάση στον τοίχο, σε ένα ισορροπημένο οριακό στρώμα, δίνεται από τη σχέση

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu u_e \frac{\partial F(\eta, m)}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dy} \Big|_{y=0} = \mu u_e \frac{\partial F(\eta, m)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \frac{\sqrt{Re_x}}{x} \sqrt{\frac{m+1}{2}}$$

και συνεπώς ο συντελεστής τριβής από τη σχέση

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho u_e^2} = \frac{2}{\sqrt{Re_x}} \sqrt{\frac{m+1}{2}} \left. \frac{\partial F(\eta, m)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \frac{2}{\sqrt{Re_x}} \sqrt{\frac{m+1}{2}} \alpha_2(m) \quad (10.90)$$

Επειδή το οριακό στρώμα διατηρεί την ομοιότητα από θέση σε θέση, η τελευταία ποσότητα στη σχέση (10.90) μπορεί να προκύψει εξ' αρχής από τη διαφορίση της γνωστής συνάρτησης $F(\eta, m)$ ως προς η . Η παραγωγή αυτή καταλήγει σε μια συνάρτηση $\alpha_2(m)$ που εξαρτάται μόνο από την παράμετρο m . Η έκφραση (10.90) δείχνει επίσης τη διπαραμετρική εξάρτηση του συντελεστή τριβής.

Ο παράγοντας καταστροφής c_D είναι μια αδιάστατη παράμετρος η οποία προκύπτει από την ολοκληρωτική εξίσωση της κινητικής ενέργειας (10.41) και ορίζεται ως

$$c_D = \frac{1}{\rho_e \mu_e^3} \int_0^{\infty} \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (10.91)$$

και εκφράζει το ολοκλήρωμα του έργου παραμόρφωσης των δυνάμεων τριβής, σε αδιάστατη μορφή. Κατ' αναλογία προς τη σχέση (10.90) και επειδή σε κάθε θέση y ισχύει ότι

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu u_e \frac{\partial F(\eta, m)}{\partial \eta} \frac{\sqrt{Re_x}}{x} \sqrt{\frac{m+1}{2}}$$

καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση του παράγοντα καταστροφής για ισορροπημένα οριακά στρώματα

$$c_D = \frac{1}{\sqrt{Re_x}} \sqrt{\frac{m+1}{2}} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\partial F(\eta, m)}{\partial \eta} \right\}^2 d\eta \quad (10.92)$$

για την οποία ισχύουν και πάλι οι προηγούμενες παρατηρήσεις για τη διπαραμετρική εξάρτησή της.

Τέλος, η παράμετρος ισορροπίας Π , η οποία ορίστηκε στη σχέση (10.59) και η οποία με τη βοήθεια της έκφρασης (10.31) για την εξωτερική ροή γράφεται και στη μορφή

$$\Pi = -\frac{\delta_1}{\tau_w} \rho_e \mu_e \frac{du_e}{dx} = -\frac{2\delta_1}{c_f \mu_e} \frac{du_e}{dx} \quad (10.93)$$

μπορεί, με τη βοήθεια των εκφράσεων (10.88a) (για ασυμπίεστες ροές όπου $\delta_{1k} = \delta_1$), (10.76) και (10.90), να γραφεί και ως

$$\Pi = - \frac{2 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \sqrt{\frac{2}{m+1}} f_1(m)}{\frac{2}{\sqrt{Re_x}} \sqrt{\frac{m+1}{2}} \alpha_2(m) x^m} m x^{m-1}$$

ή τελικά

$$\Pi = - \frac{m f_1(m)}{\alpha_2(m)} \cdot \frac{2}{m+1} = \Pi(m) \quad (10.94)$$

Η σχέση (10.94) δείχνει ότι, για στρωτά οριακά στρώματα σε κατάσταση ισορροπίας, η παράμετρος ισορροπίας εξαρτάται μόνο από την παράμετρο m .

Κατά τη μελέτη των οριακών στρωμάτων χρησιμοποιούνται συνήθως οι λόγοι των κινηματικών παχών που ονομάζονται παράγοντες μορφής. Δυο χρήσιμοι παράγοντες μορφής είναι οι

$$H_{12k} = \frac{\delta_{1k}}{\delta_{2k}} \quad (10.95a)$$

$$H_{32k} = \frac{\delta_{3k}}{\delta_{2k}} \quad (10.95b)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (10.88) μπορούμε να δείξουμε ότι οι παράγοντες μορφής εξαρτώνται μόνο από την παράμετρο m , αφού

$$H_{12k} = \frac{f_1(m)}{f_2(m)} = H_{12k}(m) \quad (10.96a)$$

$$H_{32k} = \frac{f_3(m)}{f_2(m)} = H_{32k}(m) \quad (10.96b)$$

Στη βιβλιογραφία αναφέρονται εμπειρικές συσχετίσεις των παραπάνω παραγόντων μορφής για ισορροπημένα οριακά στρώματα, όπως αυτή του Walz, σύμφωνα με την οποία

$$H_{12k} = 4.036 - 4.2845 (H_{32k} - 1.515)^{0.3886} \quad (10.97)$$

10.10 Η Κατανομή Ταχύτητας του Coles για Τυρβώδη Οριακά Στρώματα

Η ύπαρξη τυρβωδών οριακών στρωμάτων σε κατάσταση ισορροπίας πρωτοαναφέρθηκε στα τέλη της δεκαετίας του 1950 και έκτοτε αποτέλεσε θέμα πολλών

εργασιών. Στην Ενότητα 5.4 έχουμε ήδη παρουσιάσει με λεπτομέρειες τις προτεινόμενες μέσες κατανομές ταχύτητας για ασυμπίεστες τυρβώδεις ροές παράλληλα σε επίπεδες πλάκες. Η δυσκολία να παρουσιασθεί με ικανοποιητική ακρίβεια η κατανομή της ταχύτητας σε όλο το πάχος του οριακού στρώματος προέρχεται από την παρουσία του στερεού τοιχώματος, όπου λόγω της συνεκτικότητας, εφαρμόζεται η συνθήκη μη-ολίσθησης της ροής. Λόγω της παρουσίας του τοιχώματος, αναγκαζόμαστε να διακρίνουμε δύο περιοχές του οριακού στρώματος. Η πρώτη είναι η εσωτερική περιοχή (αυτή αναλύθηκε και μοντελοποιήθηκε επαρκώς στην ενότητα 5.4), όπου η συνεκτικότητα παίζει πρωτεύοντα ρόλο. Η δεύτερη είναι η εξωτερική περιοχή όπου κυριαρχεί η επίδραση της τύρβης. Η θεώρηση των δυο αυτών περιοχών απεικονίζεται στην εξίσωση (5.13), όπου η ολική τάση σχηματίζεται από δύο επιμέρους συνιστώσες, μια πρώτη που έχει σχέση με τη συνεκτικότητα και μια δεύτερη η οποία σχετίζεται με την τύρβη. Χωρικά η δράση της συνεκτικότητας περιορίζεται σε μια λεπτή περιοχή κοντά στο στερεό τοίχωμα, όπως εξάλλου αποδεικνύει και η ανάλυση ενός μεγάλου πλήθους υπάρχοντων πειραμάτων.

Συνεπώς, η κατανομή ταχύτητας σε ένα τυρβώδες οριακό στρώμα παρουσιάζει δύο ανεξάρτητες συνιστώσες, μια πρώτη για την εσωτερική περιοχή και μια δεύτερη για την εξωτερική, ενώ μεταξύ τους υπάρχει μια ενδιάμεση ζώνη η οποία μπορεί να ανήκει στη μία ή την άλλη περιοχή. Η ζώνη αυτή ονομάζεται λογαριθμική περιοχή, αφού η κατανομή ταχύτητας εκεί είναι λογαριθμική και συνήθως ενσωματώνεται στην εσωτερική περιοχή του οριακού στρώματος.

Η ανάλυση που παρουσιάστηκε στην ενότητα 5.4 έδωσε την αδιάστατη κατανομή ταχύτητας της εσωτερικής περιοχής

$$u^+ = f(y^+)$$

συναρτήσεως των αδιάστατων ποσοτήτων u^+ και y^+ , που ορίστηκαν στις σχέσεις (5.20), (5.21) αντίστοιχα. Έτσι, για την εσωτερική περιοχή, όπου ισχύει ο νόμος του τοιχώματος, η αδιάστατη ταχύτητα δίνεται από την κατανομή

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + c \quad (10.98)$$

η οποία όμως δεν ισχύει για την περιοχή πολύ κοντά στο στερεό τοίχωμα.

Ο λογαριθμικός νόμος (10.98) είναι μια από τις πιο σημαντικές ιδιότητες των τυρβωδών οριακών στρωμάτων. Πρόσφατα πειράματα τείνουν να αποδείξουν ότι η κατανομή αυτή ισχύει ακόμα και για γενικότερες συνθήκες ροής, οι οποίες στην αρχή δεν είχαν προβλεφθεί. Είναι χαρακτηριστικό ότι η εξίσωση (10.98) διατυπώθηκε αρχικά για οριακά στρώματα με μηδενική κλίση πίεσης. Όμως πειράματα ως αυτά των East και Sawyer δίνουν την ένδειξη ότι η κατανομή αυτή ισχύει και για ροές οριακού στρώματος με θετική κλίση πίεσης, οι οποίες οδηγούν τα οριακά στρώματα στα πρόθυρα της αποκόλλησης.

Στην εξωτερική περιοχή του οριακού στρώματος, όπου ισχύει ο λεγόμενος νόμος των ελλειμματικών ταχυτήτων, η δομή της ροής ελέγχεται αποκλειστικά από τα τυρβώδη φαινόμενα. Στην περιοχή αυτή, ως χαρακτηριστικό μήκος λαμβάνεται το πάχος δ του οριακού στρώματος και ως χαρακτηριστική ταχύτητα συνήθως λαμβάνεται η ταχύτητα τριβής όπως αυτή ορίστηκε στη σχέση (5.18). Συγχρόνως, ως χαρακτηριστικός χρόνος λαμβάνεται αυτός που ορίζει η εγκάρσια κλίση της ταχύτητας $\partial u / \partial y$ για μια δοσμένη θέση x , έχουμε ότι

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_\tau}{\delta} \Phi' \left(\frac{y}{\delta} \right) \quad (10.99)$$

όπου η συνάρτηση Φ' είναι της τάξης της μονάδας για την εξωτερική περιοχή, χωρίς όμως να αποτελεί παγκόσμια συνάρτηση, αφού εξαρτάται από την κλίση πίεσης, τον αριθμό Reynolds και την ιστορία εξέλιξης του οριακού στρώματος πριν τη θέση x . Στη σχέση (10.99) η συνεκτικότητα δεν εμπλέκεται τουλάχιστον άμεσα, όπως άλλωστε αναμένονταν από τον ορισμό της εξωτερικής περιοχής.

Στο σημείο αυτό χρειάζεται να διερευνηθεί η σύνδεση της σχέσης (10.99) με το λογαριθμικό νόμο (10.98). Αναπτύσσοντας τη σχέση (10.98) ως προς τις διαστατικές ποσότητες u και y και παραγωγίζοντας, προκύπτει ότι για την εσωτερική περιοχή ισχύει ότι

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_\tau}{y\kappa}$$

Η τελευταία σχέση μας επιτρέπει να γενικεύσουμε τη σχέση (10.99) ώστε να συμπεριλάβει και την εσωτερική περιοχή, αφού η σχέση (10.99) μπορεί να θεωρηθεί ως επέκταση μέσα στην εξωτερική περιοχή ενός νόμου που ισχύει και για την εσωτερική περιοχή. Στην τελευταία περιοχή μάλιστα ισχύει απλά ότι

$$\Phi' \left(\frac{y}{\delta} \right) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{-1}$$

όπως εύκολα προκύπτει από την προηγούμενη εξίσωση.

Για την εξωτερική περιοχή του οριακού στρώματος, η ολοκλήρωση της (10.99) μεταξύ του τυχαίου ύψους y (που βρίσκεται μέσα στην εξωτερική περιοχή) και της θέσης $y = \delta$ όπου $u = u_e$ δίνει ότι

$$u_e - u(y) = u_\tau \Phi \left(\frac{y}{\delta} \right)$$

ή

$$\frac{u_e - u(y)}{u_\tau} = \Phi(\eta) \quad (10.100)$$

όπου η νέα αδιάστατη απόσταση η ορίζεται ως

$$\eta = \frac{y}{\delta} \quad (10.101)$$

και

$$\Phi = \int_{\infty}^{\eta} \Phi'(\eta) d(\eta)$$

Η σχέση (10.100) εξηγεί γιατί η εξωτερική περιοχή του οριακού στρώματος ονομάζεται και περιοχή του ελλειμματικού νόμου, αφού η έκφραση στην οποία καταλήξαμε για τη μοντελοποίηση της εκφράζει ουσιαστικά το έλλειμμα ταχύτητας από αυτήν της εξωτερικής ροής.

Στην ενδιάμεση περιοχή μεταξύ εσωτερικής και εξωτερικής περιοχής, οι δύο κατανομές (10.98) και (10.100) πρέπει να παρουσιάζουν συνεχή μετάβαση από τη μία στην άλλη. Ουσιαστικά στην περιοχή αυτή, η κατανομή ταχύτητας οφείλει να υπακούει συγχρόνως και στους δύο νόμους, δηλαδή να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις

$$\frac{u}{u_\tau} = f\left(\frac{yu_\tau}{\nu}\right)$$

$$\frac{u_e - u}{u_\tau} = \Phi\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

Με την απαλειφή της ταχύτητας u μεταξύ των δύο παραπάνω εξισώσεων προκύπτει ότι

$$\frac{u_e}{u_\tau} = f\left(\frac{yu_\tau}{\nu}\right) + \Phi\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (10.102)$$

Η τελευταία σχέση μοιάζει παράδοξη αφού το αριστερό μέλος δεν εξαρτάται από την απόσταση y από τον τοίχο, σε αντίθεση με το δεξιό μέλος το οποίο εξ ορισμού εξαρτάται. Στην ίδια περιοχή, εκτός από την ισότητα των ταχυτήτων u πρέπει να ισχύει και η ισότητα των κλίσεων της ταχύτητας $\partial u / \partial y$, δηλαδή συγχρόνως να ισχύουν οι δυο σχέσεις

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_\tau^2}{\nu} \frac{\partial f}{\partial y^*}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{u_\tau}{\delta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$$

Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη των εξισώσεων αυτών προκύπτει ότι

$$-\frac{1}{\delta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{u_\tau}{\nu} \frac{\partial f}{\partial y^+}$$

ή πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με y , ότι

$$-\eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = y^+ \frac{\partial f}{\partial y^+}$$

Σύμφωνα με όσα προαναφέρθηκαν, οι μεταβλητές η και y^+ είναι ανεξάρτητες και συνεπώς πρέπει

$$-\eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = y^+ \frac{\partial f}{\partial y^+} = K_1 \quad (10.103)$$

όπου K_1 είναι μια σταθερά. Ολοκληρώνοντας την (10.103) προκύπτει ότι

$$f = K_1 \ln y^+ + K_2$$

η οποία όταν συγκριθεί με την (10.98) προκύπτει ότι οι σταθερές K_1 και K_2 είναι οι παγκόσμιες σταθερές που ισούνται αντίστοιχα με $1/\kappa$ και c . Φαίνεται συνεπώς από την προηγούμενη ανάλυση ότι ο λογαριθμικός νόμος μπορεί να ισχύει και για $y^+ \rightarrow \infty$.

Η εξίσωση (10.103) μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την εξέταση της συμπεριφοράς του ελλειμματικού νόμου της ταχύτητας όταν η απόσταση η τείνει στο μηδέν. Είναι

$$\frac{u_e - u}{u_\tau} = -\frac{1}{\kappa} \ln \eta + B = \Phi(\eta) \quad (10.104)$$

όπου η σταθερά B δεν έχει παγκόσμιο χαρακτήρα αφού μπορεί λ.χ. να εξαρτάται από την κλίση πίεσης ή άλλες παραμέτρους.

Ας γυρίσουμε πάλι στην εξίσωση (10.103). Με δεδομένες τις κατανομές f και Φ , από τις σχέσεις (10.98) και (10.104), η απαλειφή του όρου u/u_τ μεταξύ αυτών δίνει

$$\frac{u_e}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_\tau \delta}{\nu} + B + c \quad (10.105)$$

Ομως εξ ορισμού, η ταχύτητα τριβής u_τ συνδέεται με το συντελεστή τριβής c_f με τη σχέση

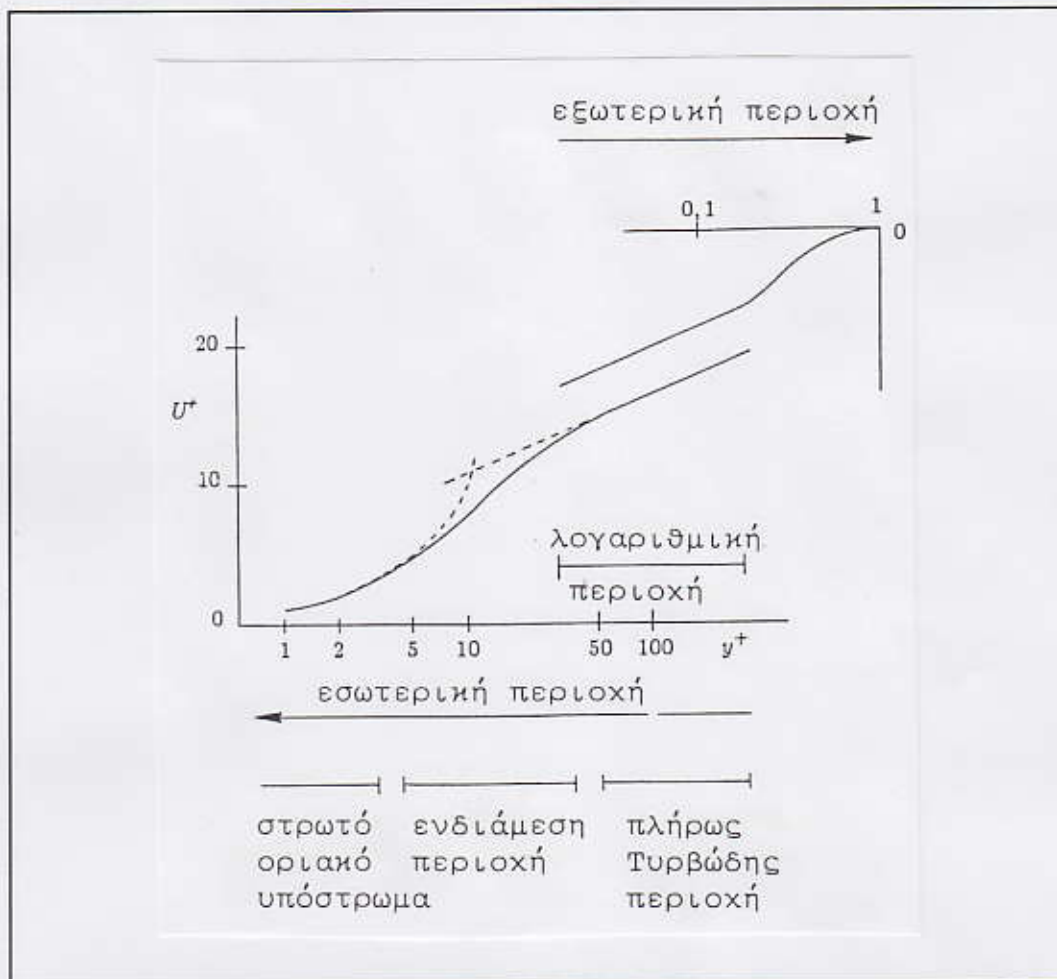
$$\frac{u_\tau}{u_e} = \sqrt{\frac{c_f}{2}}$$

οπότε και

$$\left(\frac{c_f}{2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{c_f}{2}\right)^{1/2} \frac{u_e \delta}{\nu} + B + c \quad (10.106)$$

Η τελευταία σχέση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο ελλειμματικός νόμος της ταχύτητας ισχύει όντως όταν $\eta \rightarrow 0$, αρκεί ο συντελεστής τριβής c_f να ικανοποιεί την εξίσωση (10.106).

Το Σχήμα 10.8 δίνει μια συνολική κατανομή ταχύτητας σε ένα τυρβώδες οριακό στρώμα, για την εσωτερική και την εξωτερική περιοχή του.



Σχήμα 10.8

Στην ανάλυση που προηγήθηκε έχει καταστεί σαφές το ότι η εξωτερική ροή του οριακού στρώματος μπορεί να εκφράζεται με τον ελλειμματικό νόμο (10.100), ο οποίος τείνει προς τη λογαριθμική κατανομή (10.104) όταν $\eta \rightarrow 0$. Τονίζουμε και πάλι ότι η σταθερά B δεν έχει παγκόσμιο χαρακτήρα. Στηριζόμενος στην ύπαρξη της λογαριθμικής περιοχής, ο Coles (1956) πρότεινε την παρακάτω έκφραση για την ελλειμματική κατανομή της ταχύτητας

$$\Phi(\eta) = -\frac{1}{\kappa} \ln \eta + \frac{\pi_1}{\kappa} (2 - w(\eta)) \quad (10.107)$$

Χρησιμοποιώντας υπάρχοντα πειράματα η συνάρτηση $w(\eta)$, η οποία ονομάστηκε και συνάρτηση του ομόρρου προσεγγίστηκε από τη σχέση

$$w(\eta) = 1 - \cos(\pi\eta) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) \quad (10.108)$$

Η συνάρτηση του ομόρρου έλαβε το όνομά της επειδή προσομοιάζει την κατανομή ταχύτητας μέσα στον ομόρρο. Η συνάρτηση $w(\eta)$ ικανοποιεί τη συνθήκη $u = u_\delta$ στο $y = \delta$ αλλά δεν εξασφαλίζει μηδενική κλίση στην ίδια περιοχή. Εντούτοις έχει αποδειχθεί ότι αναπαριστά με μεγάλη επιτυχία ένα σημαντικό πλήθος μετρήσεων σε οριακά στρώματα σε κατάσταση ισορροπίας. Η πλήρης κατανομή ταχύτητας μέσα στο οριακό στρώμα από τη σχέση του Coles γράφεται

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{yu_\tau}{\nu}\right) + c + \frac{\pi_1}{\kappa} w\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (10.109)$$

Παριστάνει μια οικογένεια κατανομών ταχύτητας δύο παραμέτρων. Οι δύο παράμετροι αυτοί είναι το πάχος δ του οριακού στρώματος και η νέα σταθερά π_1 . Η ταχύτητα τριβής u_τ ή ισοδύναμα ο συντελεστής τριβής c_f δεν αποτελεί επιπλέον παράμετρο αφού, όπως θα δείξουμε παρακάτω, συνδέεται άμεσα με τα δ και π_1 . Ακόμα γενικότερα, η κατανομή ταχύτητας του Coles είναι διπαραμετρική με την έννοια ότι οι παράμετροι δ και π_1 μπορούν να αντικατασταθούν από οποιοδήποτε άλλο ζεύγος παραμέτρων. Συνήθως ως ελεύθεροι παράμετροι επιλέγονται οι δ_{1k} (ως πάχος ή αδιαστατοποιημένο στη μορφή κατάλληλου αριθμού Reynolds) και ο παράγοντας μορφής H_{12k} . Η ευκολία υπολογισμού κάθε άλλου μεγέθους του οριακού στρώματος όταν είναι γνωστά δυο μεγέθη θα φανεί στο παράδειγμα υπολογισμού του πάχους μετατόπισης δ_{1k} για ένα οριακό στρώμα που περιγράφεται από το νόμο του Coles.

Εξ ορισμού είναι

$$\delta_{1k} = \int_0^\delta \frac{u_\epsilon - u}{u_\epsilon} dy = \delta \sqrt{\frac{c_f}{2}} \int_0^1 \frac{u_\epsilon - u}{u_\tau} d\eta$$

Κανονικά η συνάρτηση Φ της σχέσης (10.99) δεν παριστά την κατανομή ταχύτητας κοντά στο στερεό τοίχωμα (αφού η συνθήκη μη-ολίσθησης $u=0$ στο $y=0$ δεν ισχύει). Εν τούτοις το σφάλμα που προκαλεί η χρήση της συνάρτησης Φ στην περιοχή αυτή είναι πολύ μικρό και συνεπώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί, ώστε η ολοκλήρωση της προηγούμενης εξίσωσης να δώσει

$$\delta_{1k} = \delta \sqrt{\frac{c_f}{2}} \int_0^1 \Phi d\eta$$

και με τη βοήθεια της σχέσης (10.107) ότι

$$\frac{\delta_{1k}}{\delta} = \sqrt{\frac{c_f}{2}} \Phi_1 \quad (10.110)$$

όπου

$$\Phi_1 = \int_0^1 \Phi d\eta = \frac{1 + \pi_1}{\kappa} \quad (10.111)$$

Είναι επίσης εύκολο να υπολογίσουμε το κινηματικό πάχος ορμής δ_{2k} , που θα δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\delta_{2k}}{\delta} = \sqrt{\frac{c_f}{2}} \left\{ \Phi_1 - \sqrt{\frac{c_f}{2}} \Phi_2 \right\} \quad (10.112)$$

όπου

$$\Phi_2 = \int_0^1 \Phi^2 d\eta$$

ή

$$\Phi_2 = \frac{1}{\kappa^2} \left\{ 2 + \frac{3}{2} \pi_1^2 + 2\pi_1 + \frac{2\pi_1}{\pi} s_i(\pi) \right\} \quad (10.113)$$

με

$$s_i(\pi) = -\pi \int_0^1 \ln \eta \cos(\pi \eta) d\eta = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt = 1.852$$

Συχνά ορίζεται η παράμετρος μορφής του Clauser G για τις ελλειμματικές κατανομές ταχύτητας από τη σχέση

$$G = \int_0^\delta \left(\frac{u_\epsilon - u}{u_\tau} \right)^2 d \left(\frac{y u_\tau}{\delta_{1k} u_\epsilon} \right)$$

ή ισοδύναμα από τη σχέση

$$G = \frac{\int_0^1 \left(\frac{u_\epsilon - u}{u_\tau} \right)^2 d\eta}{\int_0^1 \left(\frac{u_\epsilon - u}{u_\tau} \right) d\eta} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \quad (10.114)$$

Η κατά μέλη διαίρεση των σχέσεων (10.110) και (10.112) δίνει ότι

$$H_{12k} = \frac{\delta_{1k}}{\delta_{2k}} = \frac{\Phi_1}{\Phi_1 - \sqrt{\frac{c_f}{2}} \Phi_2} = \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{c_f}{2}} G}$$

ή ισοδύναμα

$$G = \frac{H_{12k} - 1}{H_{12k} \sqrt{\frac{c_f}{2}}} \quad (10.115a)$$

Ακόμα, αν διαιρεθούν κατά μέλη οι σχέσεις (10.111) και (10.113) παίρνουμε ότι

$$G = \frac{3}{2} \Phi_1 + \frac{0.179}{\kappa} + \frac{0.321}{\kappa^2 \Phi_1} \quad (10.115b)$$

Με την εισαγωγή στην ανάλυσή μας του παράγοντα μορφής του Clauser, σχέση (10.114) μπορούμε να συνοψίσουμε τις εκφράσεις που δίνουν τα κινηματικά πάχη μετατόπισης και ορμής (που παρουσιάσαμε προηγούμενα στις σχέσεις (10.110) και (10.112)) και να υπολογίσουμε επίσης την έκφραση για το κινηματικό πάχος ενέργειας. Οι τρεις αυτές εκφράσεις δίνονται αμέσως παρακάτω και βοηθούν στο να αναγνωριστεί το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών του προβλήματός μας. Έτσι, μετά την εκτέλεση των πράξεων, προκύπτει

$$\frac{\delta_{1k}}{\delta} = \sqrt{\frac{c_f}{2}} \frac{1 + \pi_1}{\kappa} \quad (10.116)$$

$$\frac{\delta_{2k}}{\delta_{1k}} = 1 - \sqrt{\frac{c_f}{2}} G \quad (10.117)$$

$$\frac{\delta_{3k}}{\delta_{1k}} = 2 - 3 \sqrt{\frac{c_f}{2} G + \frac{c_f}{2} G_1} \quad (10.118)$$

όπου η νέα βοηθητική ποσότητα G_1 ορίζεται από τη σχέση

$$G_1 = \frac{G + 11.139\pi_1 + 8.5\pi_1^2 + 2.563\pi_1^3}{\kappa^2(1 + \pi_1)} \quad (10.119)$$

Οι εξισώσεις (10.116), (10.117) και (10.118) εμπλέκουν τα τέσσερα πάχη δ , δ_{1k} , δ_{2k} , δ_{3k} που χαρακτηρίζουν το οριακό στρώμα και τις ποσότητες c_f , π_1 και G . Βεβαίως, η ταχύτητα τριβής u_τ μπορεί πάντοτε να αντικαταστήσει το συντελεστή τριβής c_f , αν αυτό κρίνεται πιο βολικό για τη διατύπωση του προβλήματος. Οι τρεις εξισώσεις που προαναφέραμε συμπληρώνονται από δύο ακόμα σχέσεις, που είναι:

- (α) μια έκφραση για τον παράγοντα μορφής του Clauser που επιτρέπει τη σύνδεσή του με την παράμετρο π_1 και που είναι

$$G = \frac{2 + 3.2\pi_1 + 1.522\pi_1^2}{\kappa(1 + \pi_1)} \quad (10.120)$$

- (β) τη μορφή που παίρνει η κατανομή ταχύτητας του Coles για την οριακή θέση $y = \delta$, όπου ισχύει

$$\frac{u_\epsilon}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{\delta u_\tau}{\nu} \right) + c + \frac{2\pi_1}{\kappa} \quad (10.121)$$

αφού

$$w \left(\frac{\delta}{\delta} \right) = w(1) = 2$$

Ενώ η αντικατάσταση του u_τ με το c_f δίνει την εναλλακτική γραφή

$$\sqrt{\frac{2}{c_f}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u_\epsilon \delta}{\nu} \sqrt{\frac{c_f}{2}} \right) + c + \frac{2\pi_1}{\kappa} \quad (10.122)$$

Με την προσθήκη των (10.120) και (10.122) στις εξισώσεις (10.116), (10.117) και (10.118) δημιουργείται ένα σύνολο πέντε ανεξάρτητων εξισώσεων για τον υπολογισμό των επτά μεταβλητών του προβλήματός μας, οι οποίες είναι οι

$$\delta, \delta_{1k}, \delta_{2k}, \delta_{3k}, c_f, \pi_1, G$$

Με τον τρόπο αυτό δίνεται και πάλι έμφαση στη διπαραμετρικότητα του προβλήματος της μοντελοποίησης της εξέλιξης του οριακού στρώματος, αφού αρκεί ο προσδιορισμός δύο οποιωνδήποτε από τις παραπάνω μεταβλητές σε μια θέση και οι υπόλοιπες πέντε μεταβλητές θα προκύψουν από τις πέντε προαναφερθείσες εξισώσεις "τοπικού χαρακτήρα". Οι δύο ανεξάρτητες μεταβλητές που θα καθορίσουν τη λύση του προβλήματος σε κάθε θέση μπορούν να προκύψουν επιλύοντας κατάλληλα διαμορφωμένο σύστημα δυο εξισώσεων που συνήθως βασίζονται στις ολοκληρωτικές εξισώσεις για το οριακό στρώμα. Οι εξισώσεις αυτές θα εξετασθούν σε επόμενη ενότητα.

Η κατανομή ταχύτητας που πρότείνει ο Coles και την οποία εξετάσαμε διεξοδικά πιο πάνω έχει τη δυνατότητα να επεκταθεί και για αποκολλημένα οριακά στρώματα. Στην περίπτωση της αποκόλλησης η ταχύτητα τριβής ορίζεται ως

$$u_{\tau}^* = \text{sign}(\tau_w) \sqrt{\frac{|\tau_w|}{\rho}} \quad (10.123)$$

όπου η συνάρτηση $\text{sign}()$ έχει μοναδιαίο μέτρο και πρόσημο αυτό της ποσότητας μέσα στην παρένθεση. Στην περίπτωση αυτή, η κατανομή ταχύτητας παίρνει τη μορφή

$$\frac{u}{u_{\tau}^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y |u_{\tau}^*|}{\nu} \right) + c + \frac{\pi_1}{\kappa} w \left(\frac{y}{\delta} \right) \quad (10.124)$$

όπου $w(y/\delta)$ είναι η συνάρτηση του ομόρρου που έχει ήδη δοθεί στη σχέση (10.108).

Από την προφανή συνθήκη ότι $u = u_e$ στην απόσταση $y = \delta$, η σχέση (10.124) δίνει

$$\frac{u_e}{u_{\tau}^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{\delta |u_{\tau}^*|}{\nu} \right) + c + \frac{2\pi_1}{\kappa}$$

και, σε συνδυασμό με την (10.124), καταλήγει στην ελλειμματική γραφή

$$\frac{u_e - u}{u_{\tau}^*} = -\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{\delta} \right) + \frac{\pi_1}{\kappa} (2 - w)$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την έκφραση (10.107), όταν το u_{τ}^* παραμένει θετικό.

Για τις αποκολλημένες ροές, ορίζουμε τη νέα ποσότητα

$$\Phi_1^* = \int_0^1 \frac{u_e - u}{u_\tau^*} d\eta$$

σε αντιστοιχία με τον ορισμό (10.111) για τις προσκολλημένες ροές και προκύπτουν αντίστοιχες σχέσεις για τα πάχη του οριακού στρώματος

$$\frac{\delta_{1k}}{\delta} = \frac{u_\tau^*}{u_e} \Phi_1^* \quad , \quad \Phi_1^* = \frac{1 + \pi_1}{\kappa}$$

$$\frac{\frac{\delta_{1k} - 1}{\delta_{2k}} \frac{u_e}{u_\tau^*}}{\frac{\delta_{1k}}{\delta_{2k}}} = \frac{3}{2} \Phi_1^* + \frac{0.179}{\kappa} + \frac{0.321}{\kappa^2 \Phi_1^*}$$

10.11 Τυρβώδη Ισορροπημένα Οριακά Στρώματα

Η ενότητα αυτή αποτελεί ουσιαστικά επέκταση της ανάλυσης των λύσεων ομοιότητας για στρωτά οριακά στρώματα η οποία παρουσιάσθηκε στην ενότητα 10.8, για τυρβώδη οριακά στρώματα. Με αφετηρία την αρχή διαχωρισμού κάθε οριακού στρώματος στην εσωτερική και την εξωτερική περιοχή και την παραδοχή ότι ο νόμος του τοίχου έχει παγκόσμιο χαρακτήρα, ενδιαφερόμαστε ουσιαστικά για τις ιδιότητες ομοιότητας που μπορούν να χαρακτηρίσουν την εξωτερική περιοχή.

Στην εξωτερική περιοχή, όπου η κατανομή ταχύτητας μπορεί πάντα να διατυπωθεί σε ελλειμματική μορφή, αναζητούμε τις συνθήκες εκείνες για τις οποίες η συνάρτηση $(u_e - u)/u_\tau$ εξαρτάται μόνο από την ανηγμένη απόσταση $\eta = y/\delta$ και όχι χωριστά από τις συντεταγμένες x και y . Γράφουμε

$$\frac{u_e - u}{u_\tau} = F'(\eta) \quad , \quad \eta = \frac{y}{\delta} \quad (10.125)$$

όπου χρησιμοποιείται ο συμβολισμός F' για να συμβολίσει την παράγωγο της συνάρτησης F ως προς τη μεταβλητή η . Η συνάρτηση F θα γίνει κατανοητή παρακάτω. Ας ληφθεί υπόψη ότι η σχέση (10.125) αποτελεί μια υπόθεση ομοιότητας ανάλογη με αυτή των λύσεων Falkner-Skan για τα στρωτά οριακά στρώματα.

Γνωρίζουμε ότι στην εξωτερική περιοχή οι συνεκτικές τάσεις αμελούνται σε σχέση με τις τυρβώδεις τάσεις και γενικά μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\frac{\tau}{\tau_w} = -\frac{\rho u' v'}{\tau_w} = g(\eta) \quad (10.126)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (10.125), για ένα τυρβώδες οριακό στρώμα σε κατάσταση ισορροπίας, δηλαδή για ένα οριακό στρώμα που διέπεται από κανόνες ομοιότητας, μπορούμε να ορίσουμε τις ποσότητες

$$F_1 = \int_0^1 F' d\eta = \text{σταθερά}$$

$$F_2 = \int_0^1 (F')^2 d\eta = \text{σταθερά}$$

σε αναλογία με τις σχέσεις (10.111) και (10.113). Με σταθερές τις παραπάνω δυο ποσότητες, ο παράγοντας μορφής του Clauser παραμένει σταθερός

$$G = \frac{F_2}{F_1} = \text{σταθερά} \quad (10.127)$$

Η διατήρηση ενός σταθερού παράγοντα μορφής του Clauser αποτελεί μια βασική ιδιότητα των ισορροπημένων τυρβωδών οριακών στρωμάτων.

Συγχρόνως, επειδή όταν η ανηγμένη ποσότητα η τείνει στο μηδέν, η συνάρτηση F' πρέπει να παίρνει τη λογαριθμική μορφή

$$\frac{u_e - u}{u_\tau} = F' = -\frac{1}{\kappa} \ln \eta + B$$

(βλέπε και εξίσωση (10.104). Από τον περιορισμό όμως της σχέσης (10.125), ότι η συνάρτηση F' εξαρτάται μόνο από την απόσταση η , καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ποσότητα B πρέπει να είναι σταθερά.

Χρησιμοποιώντας την έκφραση (10.105), προκύπτει εύκολα ο συντελεστής τριβής, που είναι

$$\left(\frac{c_f}{2}\right)^{-1/2} = \frac{u_e}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_\tau \delta}{v} + c + B \quad (10.128)$$

Όπως αποδείξαμε προηγούμενα, στα ισορροπημένα στρώματα, η παράμετρος B παραμένει σταθερά και αυτό πρέπει να λαμβάνεται υπόψη πλέον και κατά τη χρησιμοποίηση της σχέσης (10.128).

Οι συνθήκες κάτω από τις οποίες μπορεί να υπάρξει ομοιότητα στη λύση των τυρβωδών οριακών στρωμάτων προκύπτουν εάν οι συνθήκες (10.125) και (10.126) χρησιμοποιηθούν στις εξισώσεις ροής ενός ασυμπίεστου τυρβώδους οριακού στρώματος. Έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_\epsilon \frac{du_\epsilon}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau}{\rho} \right)$$

με

$$\tau = -\rho \overline{u'v'}$$

Η έκφραση για την κατά-y συνιστώσα της ταχύτητας προκύπτει από την εξίσωση της συνέχειας, ως

$$v = -\gamma u_\epsilon \delta' (\eta F' - F) - \delta u_\epsilon' (\eta - \gamma F) + \delta u_\epsilon \gamma' F \quad (10.129)$$

όπου

$$\gamma = \left(\frac{c_f}{2} \right)^{1/2} \quad \text{ή} \quad u_\tau = \gamma u_\epsilon \quad (10.130)$$

και

$$\delta' = \frac{d\delta}{dx}, \quad u_\epsilon' = \frac{du_\epsilon}{dx}, \quad \gamma' = \frac{d\gamma}{dx} \quad (10.131)$$

Η συνάρτηση F αποτελεί το ολοκλήρωμα της ποσότητας F', οπότε είναι

$$F = \int_0^\eta F' d\eta \quad \mu\epsilon \quad F(0) = 0 \quad (10.132)$$

Η εξίσωση της ορμής παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial}{\partial \eta'} \left(\frac{\tau}{\tau_w} \right) = 2\beta F' - \beta \gamma F'^2 + \beta \frac{u}{u_\epsilon'} \frac{\gamma'}{\gamma} (F' - \gamma F'^2 + \gamma F F'') - \beta \left(1 + \frac{u_\epsilon}{u_\epsilon'} \frac{\delta'}{\delta} \right) (\eta F'' - \gamma F F'') \quad (10.133)$$

όπου

$$F'' = \frac{dF'}{d\eta}$$

και με β συμβολίζεται η παράμετρος κλίσης πίεσης της εξωτερικής ροής

$$\beta = -\frac{\delta}{\gamma} \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} \quad (10.134)$$

Για την ικανοποίηση των συνθηκών ομοιότητας, ώστε δηλαδή οι ποσότητες τ/τ_w και F' να εξαρτώνται μόνο από την απόσταση η , πρέπει οι συντελεστές της εξίσωσης (10.133), που εκ των προτέρων είναι συναρτήσεις του x , να είναι σταθερές. Πρέπει δηλαδή

$$\beta = \text{σταθερά} \quad (10.135\alpha)$$

$$\gamma = \text{σταθερά} \quad (10.135\beta)$$

$$\frac{u_e}{u_e'} \frac{\gamma'}{\gamma} = \text{σταθερά} \quad (10.135\gamma)$$

$$\frac{u_e}{u_e'} \frac{\delta'}{\delta} = \text{σταθερά} \quad (10.135\delta)$$

Από την έκφραση (10.128) για το συντελεστή τριβής και τη σχέση (10.130) γράφουμε

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u_e \delta}{\nu} \gamma \right) + c + B$$

η οποία με την εύλογη υπόθεση ότι ο αριθμός Reynolds που βασίζεται στο πάχος του οριακού στρώματος

$$Re_\delta = \frac{u_e \delta}{\nu} \quad (10.136)$$

είναι πάρα πολύ μεγάλος ($Re_\delta \rightarrow \infty$) δίνει ότι

$$\gamma \rightarrow 0 \quad (10.137)$$

Στην πράξη βέβαια, η τιμή του γ στα ισορροπημένα οριακά στρώματα είναι πολύ μικρή και όχι μηδενική. Χρησιμοποιώντας και πάλι την έκφραση (10.128) καταλήγουμε επίσης στη σχέση

$$\frac{u_e \gamma'}{u_e' \gamma} = \frac{-\gamma}{\kappa} \beta \left(\frac{u_e \delta'}{u_e' \delta} + 1 \right) \quad (10.138)$$

Αν όντως ισχύουν οι σχέσεις (10.135α) και (10.135δ), για πολύ υψηλούς αριθμούς Reynolds Re_δ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\frac{u_e \delta'}{u_e' \delta} \rightarrow 0 \quad (10.139)$$

Αμελώντας την περιοχή του οριακού στρώματος πολύ κοντά στο στερεό τοίχωμα, προκύπτουν εύκολα οι παρακάτω σχέσεις για τα χαρακτηριστικά πάχη του οριακού στρώματος

$$\frac{\delta_{1k}}{\delta} = \gamma F_1 \quad (10.140)$$

$$\frac{\delta_{2k}}{\delta} = \gamma (F_1 - \gamma F_2) \quad (10.141)$$

$$G = \frac{\frac{\delta_{1k} - 1}{\delta_{2k}}}{\gamma \frac{\delta_{1k}}{\delta_{2k}}} \quad (10.142)$$

Οι τελευταίες σχέσεις είναι αντίστοιχες των σχέσεων (10.110), (10.112) και (10.115) που παρουσιάσαμε προηγούμενα.

Σε πολύ υψηλούς αριθμούς Reynolds έχουμε

$$\gamma = 0, \quad \frac{\delta_{1k}}{\delta_{2k}} = 1, \quad \frac{\delta_{1k}}{\gamma} = 0, \quad \frac{\delta_{2k}}{\gamma} = 0$$

τα οποία όμως είναι πρακτικά όρια που δεν συναντώνται στην πράξη.

Τα παρακάτω βιβλία μπορούν να βοηθήσουν τον αναγνώστη να αποκτήσει μια βαθύτερη γνώση των θεμάτων που αναλύονται στο Κεφάλαιο 10:

H. Schlichting, "Boundary Layer Theory", McGraw Hill Book Company, INC, 1954.

A.D. Young, "Boundary Layers", BSP Professional Books, 1989.

J. Cousteix, "Couche Limite Laminaire", Cepadues Editions, 1988.

J. Cousteix, "Turbulence et Couche Limite", Cepadues Editions, 1989.

A. Walz, "Boundary Layers of Flow and Temperature", The M.I.T. Press, 1969.

Η επόμενη εργασία/διάλεξη διαπραγματεύεται μια ολοκληρωτική τεχνική για οριακά στρώματα με έμφαση στις Στροβιλομηχανές:

K.D. Papailiou, "Le Foll's Method and the Calculation of Attached and Separated Two Dimensional Boundary Layers", VKI-LS 1981-1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

Η ΜΕΘΟΔΟΣ LE FOLL ΓΙΑ ΤΑ ΟΡΙΑΚΑ ΣΤΡΩΜΑΤΑ

11.1 Η ιδέα του Le Foll

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο συζητήσαμε το διζωνικό μοντέλο ροής με έμφαση στη συνιστώσα του εκείνη που αναλαμβάνει την επίλυση της ροής στη συνεκτική περιοχή. Ετσι αναφερθήκαμε λεπτομερώς στις ολοκληρωτικές τεχνικές, παρουσιάζοντας το μαθηματικό τους υπόβαθρο, ορίζοντας τις απαραίτητες ολοκληρωτικές ποσότητες οι οποίες χαρακτηρίζουν ένα οριακό στρώμα και προτείνοντας ορισμένες δοκιμασμένες κατανομές ταχύτητας. Συγχρόνως, στην προσπάθεια ταξινόμησης τέτοιων κατανομών και καταγραφής των παραμέτρων που τις καθορίζουν, παρουσιάσθηκε η έννοια του ισορροπημένου οριακού στρώματος, μαζί με το σχετικό υπόβαθρο γνώσης, τόσο για στρωτά όσο και για τυρβώδη οριακά στρώματα.

Στο παρόν Κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μια συγκεκριμένη μέθοδο για τον υπολογισμό διδιάστατων, προσκολλημένων ή αποκολλημένων οριακών στρωμάτων. Η μέθοδος αυτή θεμελιώθηκε από το Le Foll, περίπου το 1965 και φέρει το όνομά του. Η συνεισφορά του Le Foll έγκειται στην ιδέα την οποία αυτός θεμελίωσε και με βάση την οποία ένα οριακό στρώμα μπορεί να απεικονισθεί σε ένα διάγραμμα, ως συνάρτηση δύο μεταβλητών. Η ιδέα του Le Foll θυμίζει ανάλογες περιπτώσεις όπου κάποιες φυσικές ιδιότητες έγινε δυνατό να αποτυπωθούν σε ενιαίο διάγραμμα: το γνωστό διάγραμμα του Mollier για τον ατμό αποτελεί ίσως το πιο γνωστό παράδειγμα. Ο "χάρτης" που δημιούργησε ο Le Foll παριστάνει ουσιαστικά ένα επίπεδο (θα ονομάζεται επίπεδο απεικόνισης ή image plane) με άξονες τις ποσότητες L_k και X , τις οποίες θα εξηγήσουμε παρακάτω.

Εδώ, εισαγωγικά, θα αναφερθούμε στη φυσική σημασία που έχουν οι δύο νέες μεταβλητές, τις οποίες χρησιμοποίησε ο Le Foll για να ορίσει το επίπεδο απεικόνισης. Η ποσότητα X είναι ένας αριθμός Reynolds ο οποίος βασίζεται στο πάχος της ενέργειας και συνεπώς εκφράζει ποσοτικά το επίπεδο απωλειών που συμβαίνουν στο οριακό στρώμα κατά την εξέλιξή τους. Η ποσότητα L_k είναι ένας παράγοντας μορφής ο οποίος μπορεί να δώσει πληροφορίες για τον τύπο του οριακού στρώματος, λ.χ. για το αν το οριακό στρώμα είναι προκολλημένο ή αποκολλημένο. Και οι δύο αυτές ποσότητες θα αναλυθούν λεπτομερώς σε επόμενη ενότητα του παρόντος Κεφαλαίου.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η χρήση δύο εξαρτημένων μεταβλητών φέρει την ιδέα του Lefoll σε πλήρη αντιστοιχία με τις διπαραμετρικές κατανομές ταχύτητας, τις οποίες χρησιμοποιήσαμε στο Κεφάλαιο 10 για την περιοχή του οριακού στρώματος.

Στο επίπεδο απεικόνισης που όρισε ο Le Foll μπορούμε να απεικονίσουμε την εξέλιξη ενός συνεκτικού στρώματος το οποίο αναπτύσσεται κατά μήκος ενός στερεού τοιχώματος,

με μια συνεχή καμπύλη. Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται αυτό θα αναπτυχθεί στις επόμενες ενότητες του παρόντος Κεφαλαίου. Με γνωστή τη γεωμετρία του στερεού τοιχώματος και έχοντας χρησιμοποιήσει αρχικά έναν κώδικα υπολογισμού της ατρίβους ροής για τον υπολογισμό της κατανομής των χαρακτηριστικών (πίεση, πυκνότητα, ταχύτητα) της εξωτερικής ροής, αρκεί η συνδυασμένη επίλυση των ολοκληρωτικών εξισώσεων με τις απαραίτητες παραδοχές και εμπειρικά δεδομένα, ώστε να υπολογισθεί η εξέλιξη του οριακού στρώματος. Το πρόβλημα το οποίο μόλις περιγράψαμε ονομάζεται "ορθό πρόβλημα", αφού το ζητούμενο είναι η συμπεριφορά του οριακού στρώματος, ενώ είναι γνωστή η γεωμετρία και τα στοιχεία της εξωτερικής ροής.

Με "εργαλείο" το επίπεδο απεικόνισης του Le Foll μπορούμε να αντιμετωπίσουμε και το γνωστό ως "αντίστροφο πρόβλημα". Στο πρόβλημα αυτό προδιαγράφουμε μια επιθυμητή συμπεριφορά για το οριακό στρώμα, δηλαδή ορίζουμε την επιθυμητή πορεία της εξέλιξης του πάνω στο επίπεδο απεικόνισης. Το ζητούμενο στην περίπτωση αυτή είναι η μορφή του στερεού σώματος που θα μπορούσε να προκαλέσει μια τέτοια συμπεριφορά οριακού στρώματος. Για παράδειγμα, μπορεί να αναζητείται η γεωμετρία ενός πτερυγίου στροβιλομηχανής, το σχήμα των τοιχωμάτων ενός διαχύτη ή η μορφή μιας πτέρυγας. Για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος, χρησιμοποιούνται οι εμπειρικές πληροφορίες και οι μοντελοποιημένες ολοκληρωτικές εξισώσεις και με τον τρόπο αυτό προκύπτει σε πρώτη φάση η αντίστοιχη κατανομή εξωτερικής ταχύτητας, ως συνάρτηση του μήκους τόξου. Σε δεύτερη φάση, μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια ατρίβης αντίστροφη μέθοδος και, με δεδομένη την κατανομή της εξωτερικής ταχύτητας που μόλις υπολογίσθηκε, μπορεί να εκτιμηθεί η αντίστοιχη μορφή της γεωμετρίας.

Όπως ήταν φυσικό, ο Le Foll πρωτοπαρουσίασε τη μέθοδο αυτή για ασυμπίεστες στρωτές προσκολλημένες ροές. Στην εξέλιξή της με τα χρόνια η μέθοδος επεκτάθηκε στα συμπιεστά αλλά και στα τυρβώδη οριακά στρώματα, ενώ αντιμετωπίζει με επιτυχία και αποκολλημένες ροές. Η ανάλυση που θα ακολουθήσει θα περιορισθεί ουσιαστικά στις ασυμπίεστες ροές.

Εστω και χωρίς να έχουν ορισθεί ακόμα οι ποσότητες X και L_k , στο Σχήμα 11.1 παρουσιάζεται η μορφή των καμπυλών στο επίπεδο απεικόνισης για την περίπτωση στρωτών οριακών στρωμάτων. Με το σχήμα αυτό ο αναγνώστης αποκτά μια πρώτη επαφή με το επίπεδο απεικόνισης και με τη δυνατότητα κίνησης σ' αυτό. Στο ίδιο σχήμα φαίνονται οι υποπεριοχές που αντιστοιχούν στην εξέλιξη της πορείας ενός οριακού στρώματος.

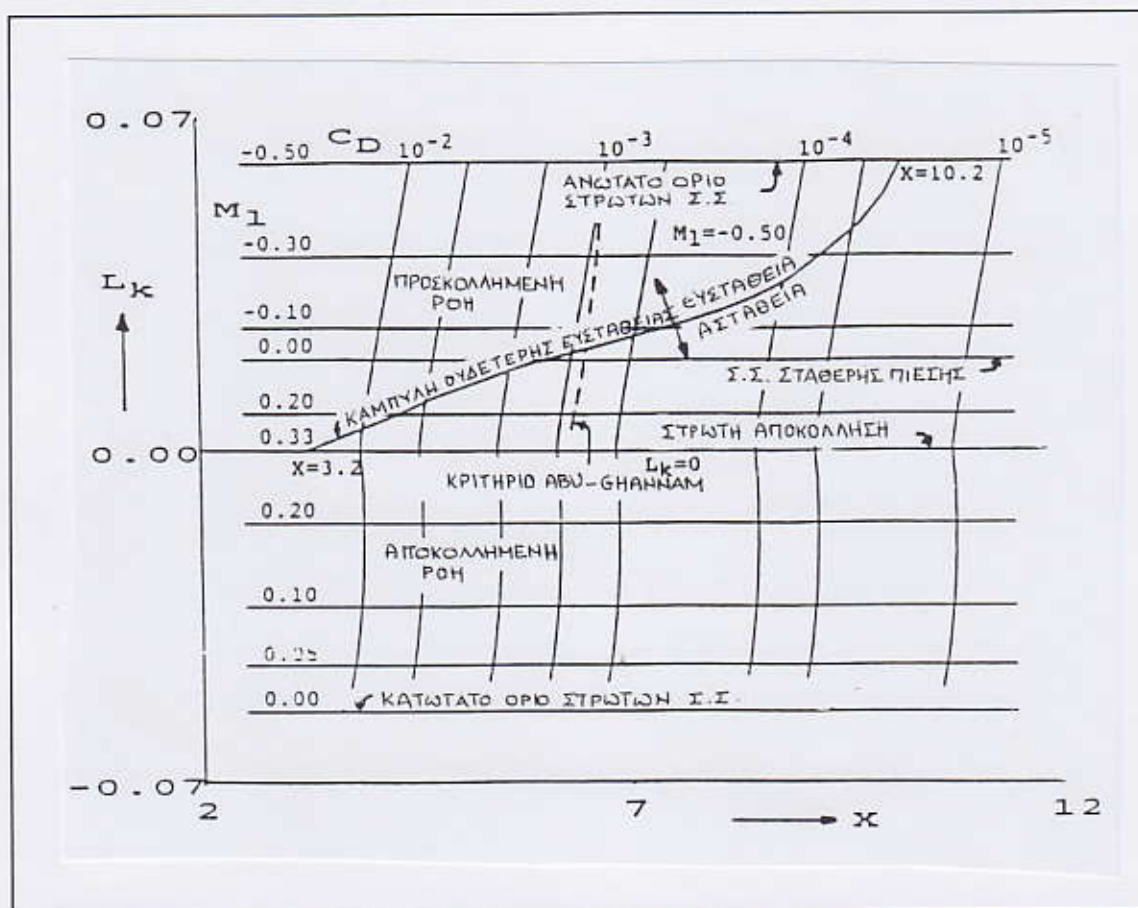
Η ιδέα του Le Foll περιγράφεται στην πρωτότυπη εργασία:

J. Le Foll, "A Theory of Representation of the Properties of Boundary Layers on a plane", Proc. Seminar on Advanced Problems in Turbomachinery, Von Karman Institute, 29-30 March 1965.

και αναλύεται διεξοδικά στα κείμενα:

K.D. Papailiou, "Le Foll's Method and the Calculation of Attached and Separated Two-dimensional Boundary Layers", VKI-LS 1981-1.

B.K. Μπούρας, "Χρήση της Θεωρίας του Συνεκτικού Στρώματος για την Αριστοποίηση Πτερυγώσεων Στροβιλομηχανών", Διδακτορική Διατριβή, ΕΜΠ, 1993.



Σχήμα 11.1

11.2 Διαμόρφωση του Συστήματος των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων

Η ανάλυση που θα ακολουθήσει αφορά ασυμπίεστα οριακά στρώματα τα οποία αναπτύσσονται κατά μήκος μιας επίπεδης επιφάνειας. Έτσι η πυκνότητα θα θεωρηθεί σταθερή και η απόσταση θα μετράται με την καρτεσιανή συντεταγμένη x . Η επέκταση των εξισώσεων που θα προκύψουν, ώστε να καλύψει την περίπτωση καμπύλου τοιχώματος (με μεταβλητή το μήκος τόξου s αντί του x) μπορεί να προκύψει με κατάλληλη αναδιατύπωση των εξισώσεων. Χρησιμοποιώντας το ότι για ασυμπίεστα οριακά στρώματα ισχύει ότι $\delta_1 = \delta_{1k}$

και $\delta_2 = \delta_{2k}$ γράφουμε ξανά την ολοκληρωτική εξίσωση της διαμήκουσ ορμής, με αφετηρία τη σχέση (10.32). Είναι

$$\frac{d}{dx} (u_e^2 \delta_{2k}) + u_e \delta_{1k} \frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_e}$$

ή όμοια

$$\frac{1}{u_e^2} \frac{d}{dx} (u_e^2 \delta_{2k}) + \frac{\delta_{1k}}{u_e} \frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_e u_e^2} \quad (11.1)$$

Η ολοκληρωτική εξίσωση για την κινητική ενέργεια δόθηκε στη σχέση (10.42) και σε συνδυασμό με τον ορισμό για τον παράγοντα καταστροφής c_D της σχέσης (10.91), επαναδιατυπώνεται ως

$$\frac{1}{u_e^3} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} u_e^3 \delta_{3k} \right) = c_D \quad (11.2)$$

Στις εξισώσεις (11.1) και (11.2) θεωρήσαμε ότι η ροή είναι στρωτή, ή αν η ροή είναι τυρβώδης έχουν αμεληθεί όλοι οι όροι που αντιστοιχούν στις διαταραχές της ταχύτητας. Οι τελευταίοι όροι όμως είναι σημαντικοί, κυρίως αν η ροή αποκολλάται, και για το λόγο αυτό χρειάζεται να ληφθούν υπόψη. Ένας τρόπος που επιτρέπει να ληφθούν υπόψη αυτοί οι όροι είναι με τη χρήση τροποποιημένων κινηματικών παχών ορμής και ενέργειας. Με τον τρόπο αυτό, η μορφή των βασικών εξισώσεων παραμένει αναλλοίωτη. Έτσι για τυρβώδη ροή, οι όροι αυτοί μπορούν να ληφθούν υπόψη αν αντί των γνωστών κινηματικών παχών δ_{2k} και δ_{3k} ,

χρησιμοποιήσουμε τα ισοδύναμα πάχη δ_{2k}^* και δ_{3k}^* που για το διδιάστατο πρόβλημα ορίζονται ως

$$\delta_{2k}^* = \delta_{2k} - \int_0^\delta \frac{(\overline{u^2} - \overline{v^2})}{u_e^2} dy \quad (11.3)$$

$$\delta_{3k}^* = \delta_{3k} - \int_0^\delta \frac{u}{u_e^3} (\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}) dy \quad (11.4)$$

Τότε οι εξισώσεις (11.1) και (11.2) ξαναγράφονται ως

$$\frac{1}{u_e^2} \frac{d}{dx} (u_e^2 \delta_{2k}^*) + \frac{\delta_{1k}}{u_e} \frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_e u_e^2} \quad (11.5)$$

$$\frac{1}{u_e^3} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} u_e^3 \delta_{3k}^* \right) = c_D \quad (11.6)$$

Η ανάλυση που ακολουθεί θα βασισθεί στις (11.5) και (11.6), αφού αυτές αυτόματα μεταπίπτουν στις (11.1) και (11.2) αν η ροή είναι στρωτή.

Η (11.5) μπορεί να αναλυθεί επιπλέον και να δώσει ότι

$$\frac{d\delta_{2k}^*}{dx} + \left(\frac{2\delta_{2k}^*}{u_e} + \frac{\delta_{1k}}{u_e} \right) \frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_e u_e^2}$$

ή την τελική έκφραση

$$\frac{d\delta_{2k}^*}{dx} + \frac{\delta_{2k}^*}{u_e} (2 + H_{12k}^*) \frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_e u_e^2} \quad (11.7)$$

αφού οριστεί για τις τυρβώδεις ροές, σε αναλογία με τα γνωστά για τις στρωτές ροές, ο παράγοντας μορφής

$$H_{12k}^* = \frac{\delta_{1k}}{\delta_{2k}^*} \quad (11.8)$$

Ορίζουμε στη συνέχεια την ποσότητα E , η οποία είναι η καταστροφή της κινητικής ενέργειας, από τη σχέση

$$E = \rho_e \delta_{3k}^* \frac{u_e^3}{2} \quad (11.9)$$

Από τον ορισμό της, η ποσότητα E πρέπει να αυξάνει καθώς αυξάνει η απόσταση x , δηλαδή καθώς εξελίσσεται το οριακό στρώμα. Με τη βοήθεια της ποσότητας E , η εξίσωση (11.6) μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$\frac{1}{u_e^3} \frac{d}{dx} \left(\frac{E}{\rho_e} \right) = c_D$$

(για ασυμπίεστη ροή ισχύει ότι $\rho = \rho_\theta$) ή ακόμα ως

$$dE = \rho u_e^3 c_D dx \quad (11.10)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (11.10) και (11.9) προκύπτει ότι

$$\frac{dE}{E} = \frac{2c_D dx}{\delta_{3k}^*} \quad (11.11a)$$

και οριζοντας τον παράγοντα μορφής

$$H_{32k}^* = \frac{\delta_{3k}^*}{\delta_{2k}^*} \quad (11.12)$$

η (11.11a) ξαναγράφεται στη μορφή

$$\frac{dE}{E} = \frac{2c_D dx}{H_{32k}^* \delta_{2k}^*} \quad (11.11b)$$

Μπορούμε ακόμα να διαφορίσουμε την εξίσωση (11.9) και αφού αναδιατάξουμε τους όρους και διαιρέσουμε το αποτέλεσμα κατά μέλη με την (11.9), προκύπτει ότι

$$\frac{dE}{E} = \frac{dH_{32k}^*}{H_{32k}^*} + \frac{du_e}{u_e} + \frac{d(\delta_{2k}^* u_e^2)}{\delta_{2k}^* u_e^2} \quad (11.13)$$

Ο τελευταίος όρος της (11.13) αντιστοιχεί στον πρώτο όρο της (11.5), εάν αυτός διαιρεθεί με δ_{2k}^* . Με την απαλειφή των ίδιων αυτών όρων από τις (11.13) και (11.5), παίρνουμε ότι

$$\frac{dE}{E} - \frac{du_e}{u_e} - \frac{dH_{32k}^*}{H_{32k}^*} = \frac{\tau_w}{\rho_e u_e^2 \delta_{2k}^*} dx - \frac{\delta_{1k}}{\delta_{2k}^*} \frac{du_e}{u_e}$$

Χρησιμοποιώντας την (11.8), η παραπάνω σχέση συνοψίζεται στη μορφή

$$\frac{dE}{E} + (H_{12k}^* - 1) \frac{du_e}{u_e} - \frac{dH_{32k}^*}{H_{32k}^*} = \frac{H_{32k}^*}{\delta_{3k}^*} \frac{\tau_w}{\rho_e u_e^2} dx \quad (11.14)$$

Ξαναγράφοντας την (11.11a) στη μορφή

$$dx = \frac{\delta_{2k}^* H_{32k}^*}{2c_D} \frac{dE}{E}$$

μπορούμε πλέον να απαλείψουμε το διαφορικό dx από την (11.14) και μετά την εκτέλεση των σχετικών πράξεων να καταλήξουμε στην παρακάτω εξίσωση, η οποία προέκυψε συνδυάζοντας τις εξισώσεις διατήρησης ορμής και κινητικής ενέργειας

$$\frac{1}{(H_{12k}^*-1) H_{32k}^*} \frac{dH_{32k}^*}{du_\epsilon} = \frac{du_\epsilon}{u_\epsilon} + \frac{1}{(H_{12k}^*-1)} \left\{ 1 - \frac{H_{32k}^* \tau_w}{2c_D \rho_\epsilon u_\epsilon^2} \right\} \frac{dE}{E} \quad (11.15)$$

Η ανάλυση πολλών πειραμάτων έχει δείξει ότι γενικά

$$H_{32k}^* = H_{32k} \quad (11.16)$$

ενώ ο ρόλος των ορθών διαταραχών ταχύτητας στην ολοκληρωτική εξίσωση της ορμής μπορεί να συνοψισθεί στον παράγοντα K , ο οποίος ορίζεται ως

$$K = \frac{H_{12k} - 1}{H_{12k}^* - 1} \quad (11.17)$$

Για την ποσότητα αυτή, πειράματα έδειξαν ότι μπορούμε να διατηρούμε σταθερή τιμή, ίση με

$$K = 0.85 + 0.89 \quad (11.18)$$

για τις τυρβώδεις ροές. Αν η ροή είναι στρωτή, τα παραπάνω ισχύουν αρκεί να δώσουμε $K=1$. Η σχέση (11.15), αν ληφθεί υπόψη και ο ορισμός του συντελεστή τριβής c_f που δόθηκε στο Κεφάλαιο 10, γράφεται και ως

$$\frac{K}{(H_{12k} - 1) H_{32k}} \frac{dH_{32k}}{du_\epsilon} = \frac{du_\epsilon}{u_\epsilon} + KM \frac{dE}{E} \quad (11.19)$$

όπου, ο συντελεστής M δίνεται από τη σχέση

$$M = \frac{1}{H_{12k} - 1} \left\{ 1 - \frac{H_{32k}}{4c_D} c_f \right\} \quad (11.20)$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να ορίσουμε και να σχολιάσουμε τη μία από τις δύο συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται στον καθορισμό του επιπέδου απεικόνισης. Η ποσότητα L_k είναι ένας παράγοντας μορφής που είχε ορίσει παλαιότερα ο Truckendrodt και δίνεται από τη σχέση

$$dL_k = \frac{dH_{32k}}{(H_{12k} - 1) H_{32k}} \quad (11.21)$$

Παρατηρούμε ότι το L_k είναι συνάρτηση των παραγόντων μορφής H_{12k} και H_{32k} για τα οποία η συζήτηση του Κεφαλαίου 10 περί των ισορροπημένων οριακών στρωμάτων οδηγεί στα παρακάτω συμπεράσματα:

- (α) Στα στρωτά ισορροπημένα οριακά στρώματα ισχύουν οι σχέσεις (10.96α) και (10.96β)

οι οποίες εκφράζουν τα H_{12k} και H_{32k} συναρτήσκει μόνο της ποσότητας m . Απαλείφοντας το m , είναι προφανές ότι υπάρχει η απευθείας συσχέτιση των δύο παραγόντων μορφής, η οποία συμβολικά γράφεται

$$H_{32k} = H_{32k}(H_{12k}) \quad (11.22)$$

Η σχέση του Walz, βλ. εξίσωση (10.97), είναι μια ποσοτική έκφραση της παραπάνω σχέσης. Η σχέση σύνδεσης των H_{12k} , H_{32k} για στρωτές ροές απεικονίζεται στο Σχήμα 11.2.

- (β) Στα τυρβώδη ισορροπημένα οριακά στρώματα η ανάλυση πολλών πειραμάτων έδειξε ότι όταν η παράμετρος $\Pi(x)$ είναι σταθερή και ανεξάρτητη της θέσης x , τότε η κατά Coles κατανομή ταχύτητας (10.109), διατηρώντας το π_1 σταθερό σε κάθε θέση, μπορεί να παραστήσει με πολύ ικανοποιητική ακρίβεια τη μορφή του οριακού στρώματος. Σημειώνεται ότι μπορεί να προκύψει σχέση μεταξύ των Π και π_1 και ότι προφανώς τα c_f και H_{12k} δεν παραμένουν σταθερά κατά την ανάπτυξη του οριακού στρώματος. Στο Κεφάλαιο 10, οι σχέσεις (10.116) ως (10.118) όταν διαιρεθούν κατάλληλα μεταξύ τους οδηγούν και πάλι στο συμπέρασμα ότι ισχύει επίσης μια σχέση της μορφής (11.22). Αν επιθυμούμε να είμαστε περισσότερο συγκεκριμένοι, ο παράγοντας μορφής H_{32k} εξαρτάται όχι μόνο από το H_{12k} αλλά και από μια δεύτερη παράμετρο, υπευθυμίζοντας την παραδοχή μιας διπαραμετρικής κατανομής. Η δεύτερη αυτή παράμετρος είναι συνήθως ένας αριθμός Reynolds βασισμένος στο κινηματικό πάχος της ορμής (πρόκειται για την ποσότητα X που ορίζεται παρακάτω στη σχέση (11.33)). Όπως όμως φαίνεται και στο Σχήμα 11.3, η παράμετρος αυτή ελάχιστα επηρεάζει τη συσχέτιση των H_{32k} και H_{12k} και έτσι μπορούμε γενικά να υποθέσουμε ότι ισχύει, έστω και προσεγγιστικά, μια σχέση της μορφής (11.22). Στο παραπάνω συμπέρασμα καταλήγουμε αν ληφθεί υπόψη ότι σύμφωνα με τη (10.119) είναι

$$G_1 = G_1(G, \pi_1)$$

ενώ για τον παράγοντα μορφής του Clauser G ισχύει η (10.120), είναι δηλαδή

$$G = G(\pi_1)$$

Αρα, η μεν σχέση (10.117) δίνει ότι $H_{12k} = H_{12k}(\pi_1)$, η δε σχέση (10.118) δίνει ότι $H_{32k} = H_{32k}(\pi_1)$ και εύκολα καταλήγουμε, με την απαλειφή του π_1 , στη γραφή (11.22).

Οι αναλύσεις (α) και (β) δείχνουν ότι, είτε για στρωτή είτε για τυρβώδη ροή, μπορούμε υπό προϋποθέσεις να έχουμε μια σχέση της μορφής (11.22), οπότε στην περίπτωση αυτή θα είναι απλά

$$L_k = L_k(H_{12k}) \quad (11.23)$$

και ο ορισμός (11.21) γίνεται πλέον τέλειο διαφορικό. Η σχέση (11.23) σχεδιάζεται στο Σχήμα 11.4 για στρωτές ροές και στο Σχήμα 11.5 για τυρβώδεις ροές, χρησιμοποιώντας την απόλυτη τιμή του L_k . Και στα δύο αυτά σχήματα, η ελάχιστη τιμή του $|L_k|$ αντιστοιχεί στην αποκόλληση. Αυτό αποτελεί δική μας επιλογή, αφού το L_k προκύπτει από την ολοκλήρωση της (11.21) και επομένως υπάρχει η δυνατότητα να ορισθεί ελεύθερα η σταθερά της ολοκλήρωσης.

Με τη σχέση ορισμού (11.21) για το dL_k , μπορούμε να ξαναγράψουμε τη σχέση (11.19), η οποία πλέον διατυπώνεται ως

$$K dL_k = \frac{du_e}{u_e} + KM \frac{dE}{E} \quad (11.24)$$

Για τη συνέχεια, θα ορίσουμε ακόμη δύο βοηθητικές ποσότητες, που είναι ο λογάριθμος της εξωτερικής ταχύτητας (διαιρεμένης με μια τυχαία ταχύτητα αναφοράς u_{ref})

$$q = \ln\left(\frac{u_e}{u_{ref}}\right) \quad (11.25)$$

και το δυναμικό της ταχύτητας στη μορφή ενός αριθμού Reynolds

$$\Phi = \int_0^x \frac{u_e dx}{\nu} \quad (11.26)$$

Η αδιάστατη ποσότητα q θα μπορεί στη συνέχεια να χρησιμοποιείται αντί της εξωτερικής ταχύτητας u_e , ενώ η αδιάστατη ποσότητα Φ χαρακτηρίζει την απόσταση x ή το μήκος τόξου. Άμεση συνέπεια του ορισμού (11.25) είναι και η σχέση

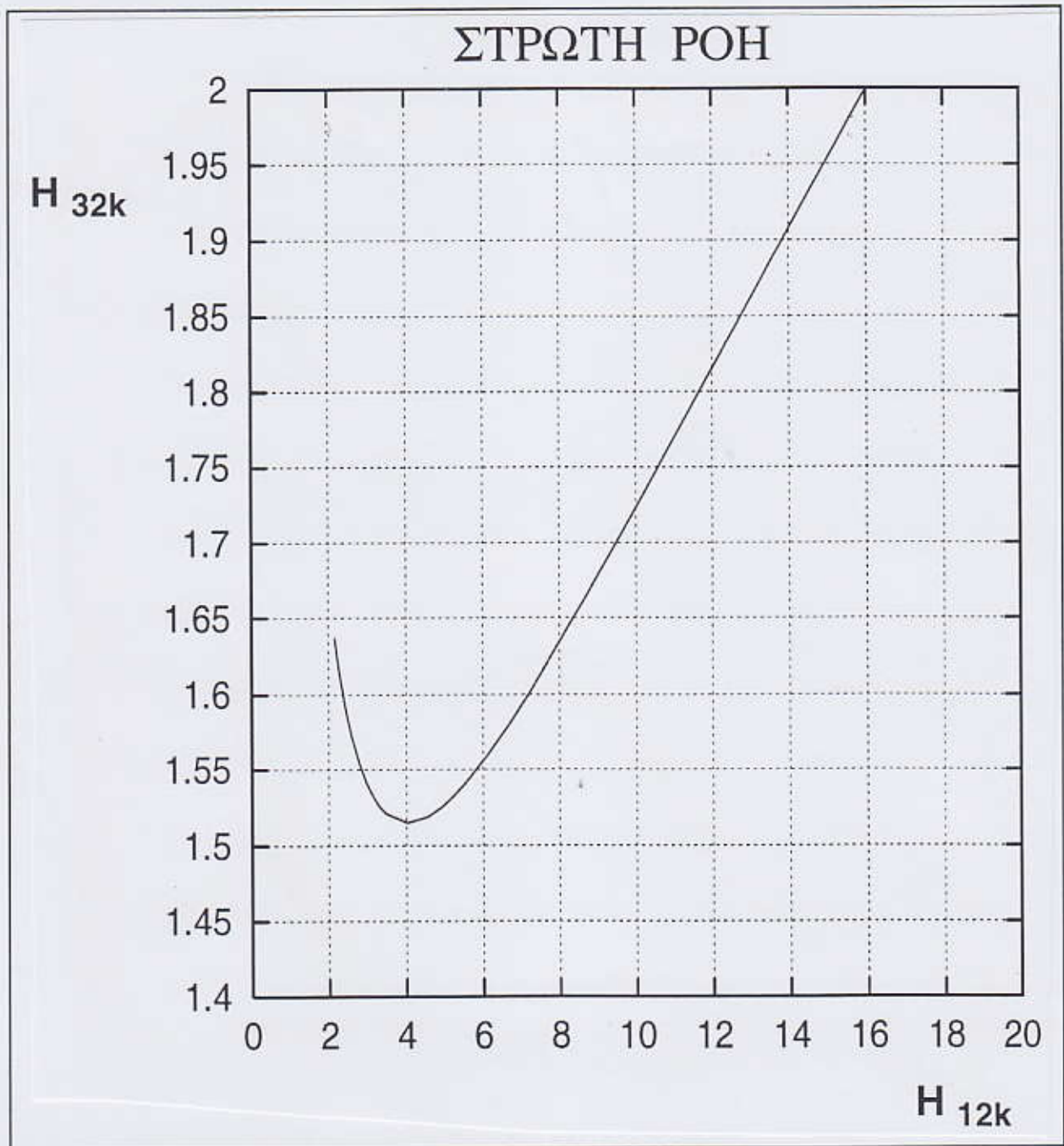
$$dq = \frac{du_e}{u_e} \quad (11.27)$$

Η τελευταία σχέση επιτρέπει τη γραφή της (11.24) ως

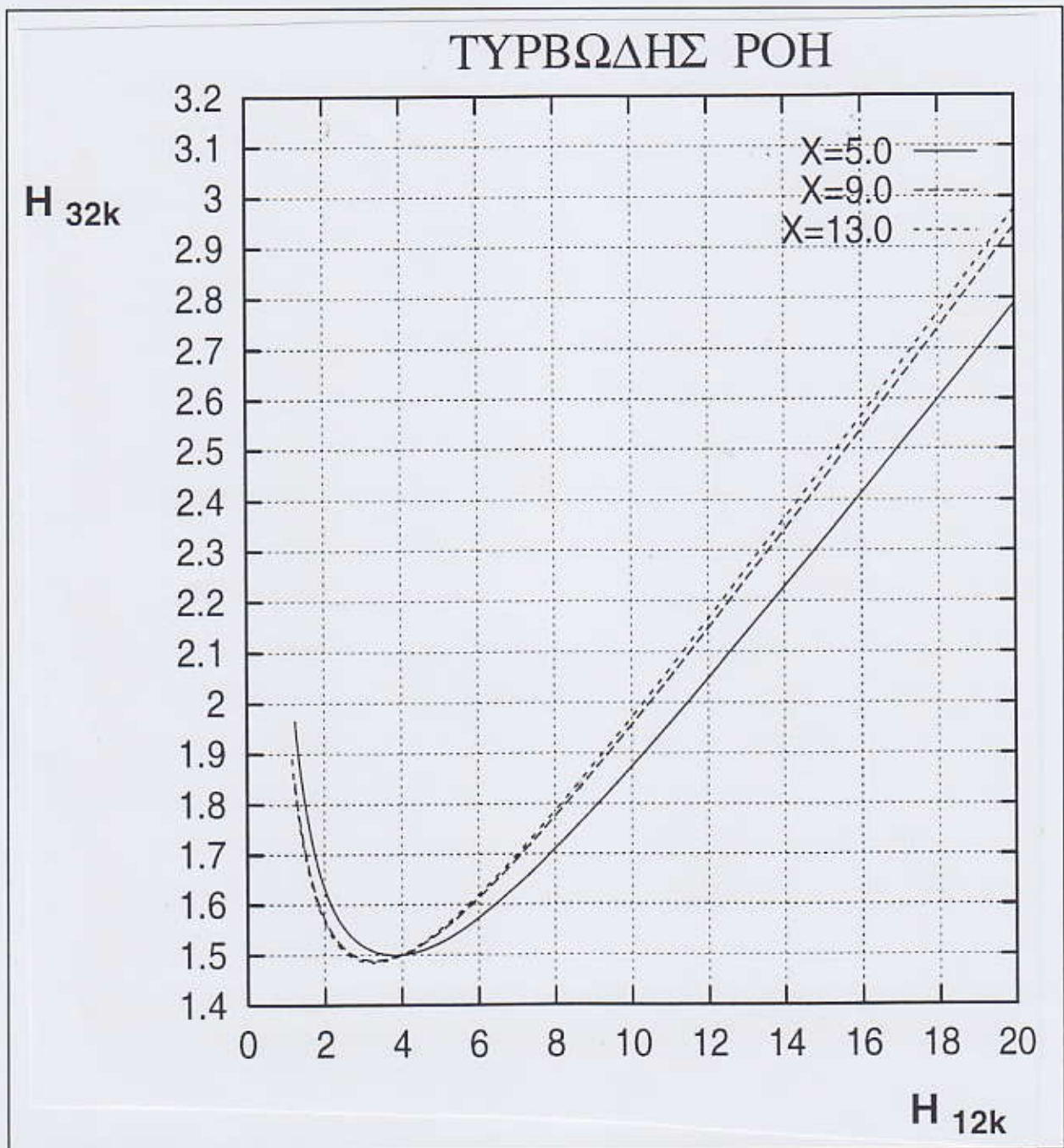
$$K dL_k = dq + KM \frac{dE}{E} \quad (11.28)$$

ενώ η εξίσωση (11.11β) για την κινητική ενέργεια δίνει

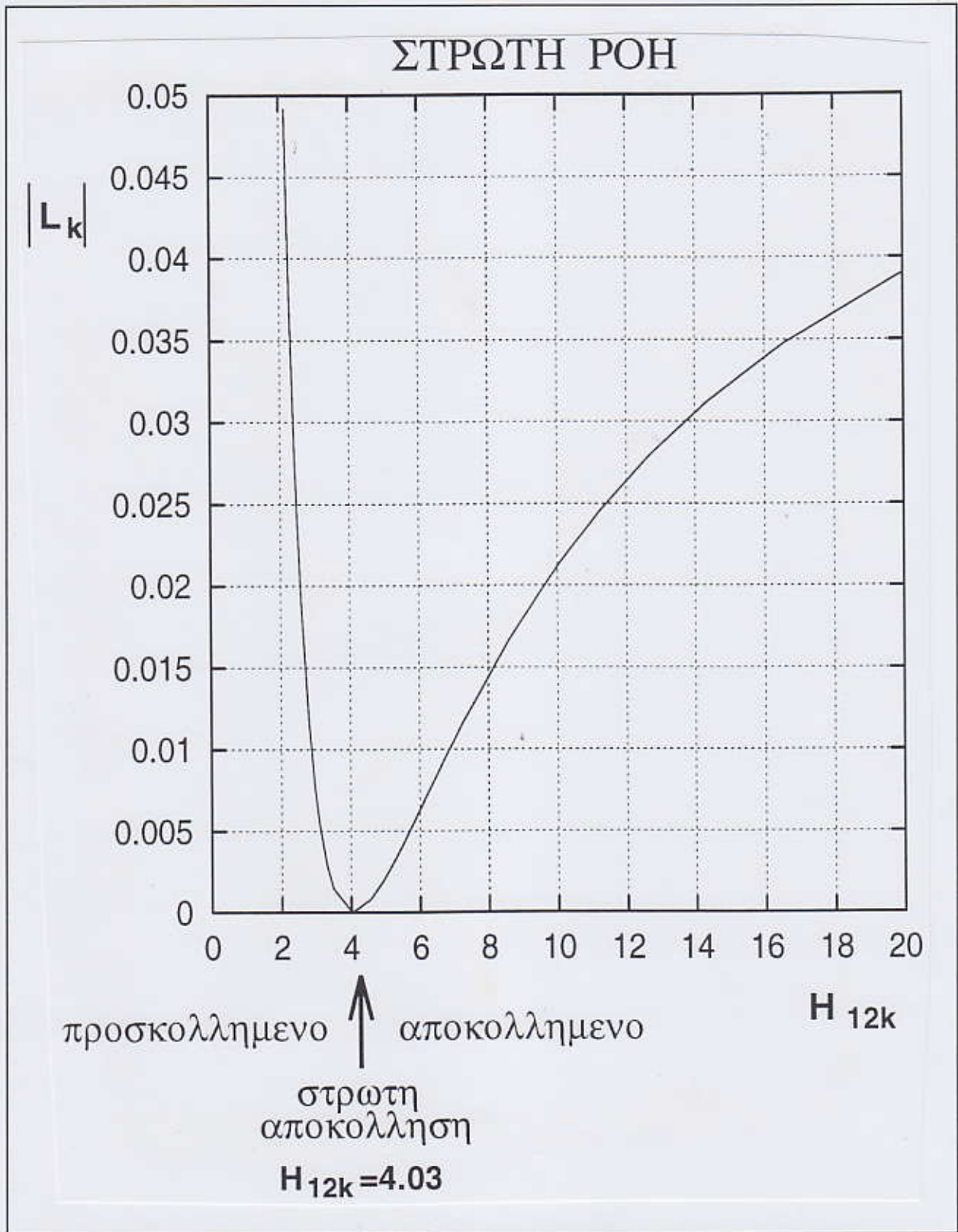
$$\frac{dE}{E} = 2c_D \left(\frac{\nu}{\delta_{3k}^* u_e} \right) \left(\frac{u_e dx}{\nu} \right) \quad (11.29)$$



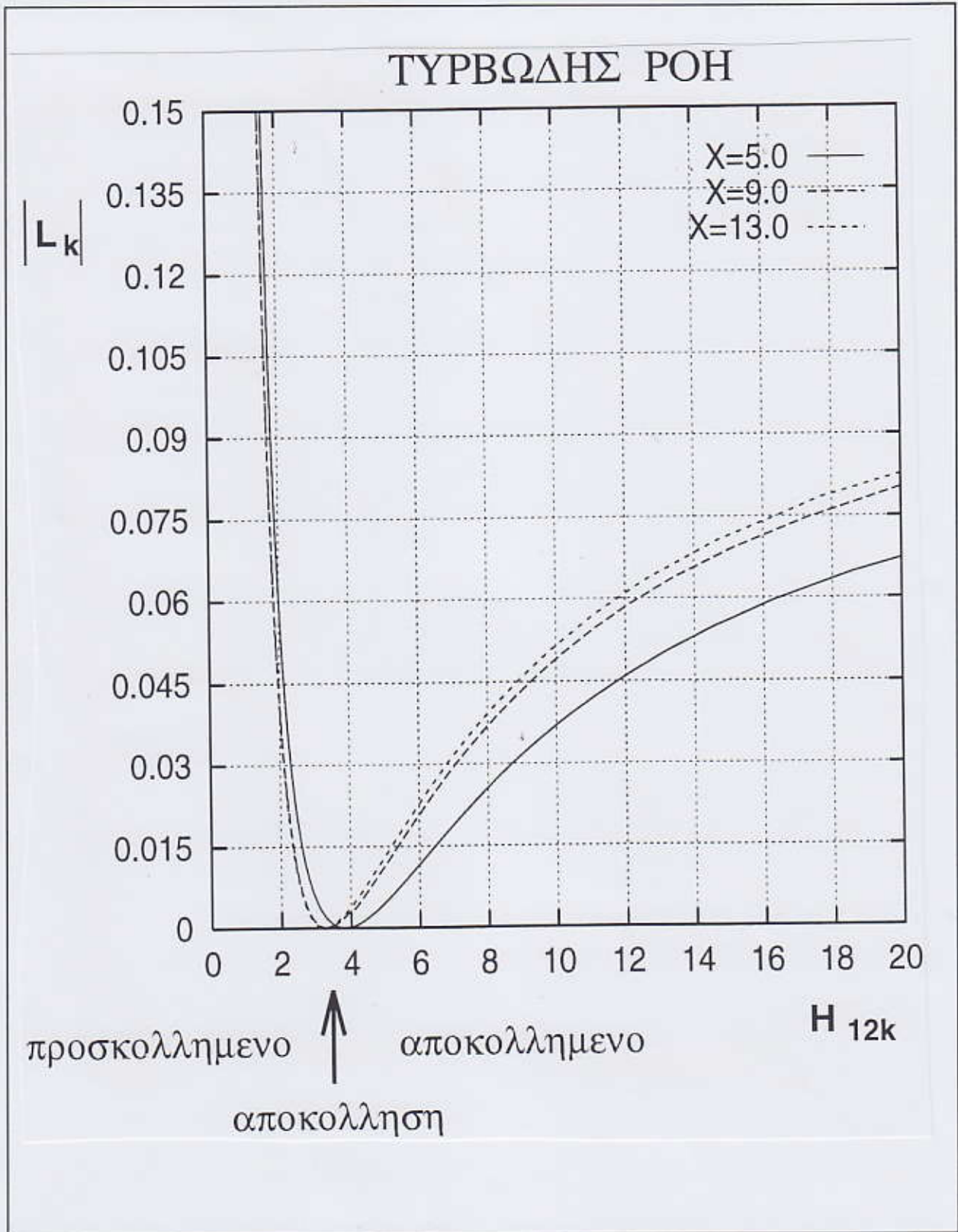
Σχήμα 11.2



Σχήμα 11.3



Σχήμα 11.4



Σχήμα 11.5

ή τελικά

$$\frac{dE}{E} = 2c_D \frac{d\Phi}{Re_{3k}} \quad (11.30)$$

όπου ορίστηκε ο αριθμός Reynolds Re_{3k} ως

$$Re_{3k} = \frac{\delta_{3k}^* \mu_e}{\nu} \quad (11.31)$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να ορίσουμε ένα νέο αριθμό Reynolds, τον Re_{4k} , από τη σχέση

$$Re_{4k} = Re_{3k} e^{2KL_k} \quad (11.32)$$

Ο λογάριθμος του αριθμού αυτού ορίζει τη δεύτερη συντεταγμένη X η οποία χρησιμοποιείται στο επίπεδο απεικόνισης του Le Foll. Είναι λοιπόν

$$X = \ln(Re_{4k}) = \ln(Re_{3k}) + 2KL_k \quad (11.33)$$

Υπολογίζοντας το διαφορικό της (11.33) προκύπτει ότι

$$dX = \frac{dRe_{3k}}{Re_{3k}} + 2KdL_k \quad (11.34)$$

ενώ το διαφορικό της (11.32) δίνει ότι

$$dRe_{4k} = e^{2KL_k} dRe_{3k} + Re_{3k} e^{2KL_k} 2KdL_k$$

Η τελευταία σχέση όταν διαιρεθεί κατά μέλη με την (11.32) δίνει

$$\frac{dRe_{4k}}{Re_{4k}} = \frac{dRe_{3k}}{Re_{3k}} + 2KdL_k \quad (11.35)$$

Τα δεξιά μέλη των εξισώσεων (11.34) και (11.35) είναι ίδια οπότε καταλήγουμε στη σχέση

$$dX = \frac{dRe_{4k}}{Re_{4k}} \quad (11.36a)$$

ή, με τη βοήθεια της (11.32), στην ισοδύναμη σχέση

$$dRe_{4k} = Re_{3k} e^{2KL_k} dX \quad (11.36b)$$

Με τη βοήθεια του ορισμού (11.31) για τον αριθμό Re_{3k} , η σχέση ορισμού (11.9) της καταστροφής της κινητικής ενέργειας γράφεται και ως

$$E = \rho_e v Re_{3k} \frac{u_e^2}{2} \quad (11.37)$$

Διαφορίζοντας την τελευταία σχέση και διαιρώντας το αποτέλεσμα με την ίδια σχέση παίρνουμε

$$\frac{dE}{E} = \frac{dRe_{3k}}{Re_{3k}} + 2 \frac{du_e}{u_e}$$

και με τη σχέση (11.27) γίνεται

$$\frac{dE}{E} = \frac{dRe_{3k}}{Re_{3k}} + 2dq$$

Ο τελευταίος όρος ο οποίος περιέχει το διαφορικό dq απαλείφεται με τη βοήθεια της σχέσης (11.28) και λαμβάνουμε:

$$(1+2KM) \frac{dE}{E} = \frac{dRe_{3k}}{Re_{3k}} + 2KL_k \quad (11.38)$$

Ο όρος που εμφανίζεται στο δεύτερο μέλος της (11.38) είναι ήδη γνωστός από το δεύτερο μέλος της (11.35) και γι'αυτό μπορούμε να γράψουμε ότι

$$(1+2KM) \frac{dE}{E} = dX \quad (11.39)$$

Με τη σειρά του, ο όρος dE/E μπορεί να απαλειφθεί χρησιμοποιώντας τη σχέση (11.28) και έτσι έχουμε ότι

$$dq = KdL_k + \beta_1 dX \quad (11.40)$$

όπου

$$\beta_1 = -\frac{KM}{1+2KM} \quad (11.41)$$

Ο όρος dE/E μπορεί επίσης να απαλειφθεί μεταξύ των σχέσεων (11.30) και (11.39) και να προκύψει ότι

$$d\Phi = \frac{Re_{3k} dX}{2c_D(1+2KM)}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (11.36β), η τελευταία σχέση παίρνει τη μορφή

$$d\Phi = \frac{dRe_{4k}}{2c_D(1+2KM)e^{2KL_k}} \quad (11.42)$$

Η (11.42) γράφεται συνοπτικά και ως

$$d\Phi = \frac{dRe_{4k}}{C_I} \quad (11.43)$$

όπου

$$C_I = 2c_D(1+2KM)e^{2KL_k} \quad (11.44)$$

11.3 Το Ευθύ και το Αντίστροφο Πρόβλημα

Η ανάλυση την οποία αναπτύξαμε προηγούμενα κατέληξε, με το συνδυασμό των ολοκληρωτικών εξισώσεων της διαμήκουσ ορμής και της κινητικής ενέργειας για ένα οριακό στρώμα και την εισαγωγή κατάλληλων αδιάστατων παραμέτρων, στις δύο σχέσεις (11.40) και (11.43), οι οποίες σχετίζουν το λεγόμενο "φυσικό επίπεδο" (q, Φ) με το "επίπεδο απεικόνισης" (L_k, X) . Οι δύο αυτές εξισώσεις συνηθίζεται να ονομάζονται "κανονικές εξισώσεις". Το φυσικό επίπεδο των (q, Φ) , από τον ορισμό των δύο αυτών ποσοτήτων, εκφράζει την ταχύτητα της εξωτερικής ροής και το μήκος τόξου, μετρούμενο πάνω στο στερεό τοίχωμα.

Σύμφωνα με την ιδέα της παραμετρικής κατανομής ταχύτητας που υιοθετήθηκε, όλες οι ιδιότητες που χαρακτηρίζουν το οριακό στρώμα σε μια οποιαδήποτε θέση κατά μήκος του στερεού τοιχώματος όπου αναπτύσσεται μπορούν να υπολογισθούν, αρκεί δυο από αυτές να είναι γνωστές. Ας υιοθετήσουμε ότι οι δύο ποσότητες οι οποίες θα καθορίσουν τις τοπικές ιδιότητες του οριακού στρώματος είναι οι L_k και X και ας γράψουμε τις κανονικές εξισώσεις στη μορφή

$$\begin{aligned} F_1(u_e, x, L_k, X) &= 0 \\ F_2(u_e, x, L_k, X) &= 0 \end{aligned} \quad (11.45)$$

(Το ότι οι εξισώσεις αυτές γράφονται ως συνάρτηση των u_e, x αντί των q, Φ είναι απλά για λόγους καλύτερης εποπτείας).

Ο τυπικός τρόπος να χρησιμοποιηθούν οι εξισώσεις (11.45) είναι να γνωρίζουμε τη συνάρτηση $u_e = u_e(x)$ και να υπολογίσουμε από την επίλυσή τους τις κατανομές $L_k(x)$ και $X(x)$. Αυτό είναι το λεγόμενο ευθύ πρόβλημα. Η λύση του παραπάνω προβλήματος μπορεί πάντοτε να δοθεί και στην πεπλεγμένη μορφή $L_k(X)$. Για το ευθύ πρόβλημα, η κατάσταση στο επίπεδο (q, Φ) είναι δεδομένη, αφού η γεωμετρία είναι δεδομένη και τα στοιχεία της εξωτερικής ροής έχουν προηγούμενα υπολογισθεί, με τη βοήθεια ενός κώδικα ατρίβους ροής.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να καθορίσουμε τη συνάρτηση $L_k(X)$, δηλαδή την επιθυμητή συμπεριφορά του οριακού στρώματος και λύνοντας τις (11.45) να υπολογίσουμε τη συνάρτηση $u_e = u_e(x)$. Δηλαδή, να υπολογίσουμε εκείνη την εξωτερική ροή που, για το δεδομένο τοίχωμα, θα δημιουργούσε το επιθυμητό οριακό στρώμα. Η εναλλακτική αυτή αντιμετώπιση συνιστά το αντίστροφο πρόβλημα.

Τόσο το ευθύ, όσο και το αντίστροφο πρόβλημα πιστοποιούν την ανάγκη το επίπεδο απεικόνισης L_k-X να εμπεριέχει κατά το δυνατό περισσότερες ιδιότητες των οριακών στρωμάτων. Αυτό όντως έχει επιτευχθεί και αρκεί να παρατηρήσουμε το Σχήμα 11.1 στο οποίο αναγράφεται πληθώρα περιπτώσεων που αφορούν στρωτά οριακά στρώματα.

11.4 Ευθύ Πρόβλημα - Αλγόριθμος Υπολογισμού

Στο Κεφάλαιο 10 και στις μέχρι τώρα ενότητες του Κεφαλαίου 11 διατυπώθηκαν οι απαραίτητες εξισώσεις με τις οποίες μπορεί να πραγματοποιηθεί ο υπολογισμός της εξέλιξης του οριακού στρώματος κατά μήκος ενός στερεού τοιχώματος. Για έναν τέτοιο υπολογισμό, γνωρίζουμε τα στοιχεία της εξωτερικής ροής (λ.χ. την ταχύτητα της εξωτερικής ροής u_e ή την πυκνότητά της που ενδεχόμενα είναι σταθερή αν η ροή είναι ασυμπίεστη). Συνήθως αυτά έχουν προκύψει από μια γρήγορη μέθοδο αριθμητικής επίλυσης της ατρίβους ροής, ενδεχόμενα φτωχής ακρίβειας, όπως λ.χ. υποθέτοντας ότι η ροή είναι αστρόβιλη και λύνοντας την απλή εξίσωση τύπου Laplace που διέπει τις δυναμικές ροές. Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει θα υποθεθεί ότι το στερεό τοίχωμα είναι ευθύ ώστε το μήκος τόξου να αντικατασταθεί με την Καρτεσιανή συντεταγμένη x .

Η μέθοδος που προτείνεται για την επίλυση των εξισώσεων (11.40) και (11.43), οι οποίες ξαναγράφονται εδώ για λόγους πληρότητας

$$dq = K dL_k + \beta_1 dx \quad (11.40)$$

$$d\Phi = \frac{dRe_{4k}}{C_r} \quad (11.43)$$

είναι μια τεχνική χωρο-προέλασης (space-marching). Σύμφωνα με αυτή, αρκεί να γνωρίζουμε όλα τα στοιχεία εκκίνησης του οριακού στρώματος. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος στηρίζεται στην ολοκλήρωση των (11.40) και (11.43) μεταξύ δύο διαδοχικών θέσεων, ώστε να υπολογισθούν τα L_k και X στην επόμενη θέση, όταν αυτά είναι γνωστά στην προηγούμενη. Επαγωγικά καλύπτεται με τον τρόπο αυτό ολόκληρο το μήκος του στερεού τοιχώματος. Η διαφορά της απόστασης εκφράζεται αδιάστατα στο διαφορικό $d\Phi$ και η διαφορά στην ταχύτητα της εξωτερικής ροής στο διαφορικό dq . Για λόγους αριθμητικής ακρίβειας, απαιτείται προσοχή κατά την ολοκλήρωση ως προς τον ορισμό και τη χρησιμοποίηση των συντελεστών β_1 (από τη σχέση (11.41) που εμπλέκει το M το οποίο δίνεται από τη σχέση

(11.20), πεπλεγμένα μέσω των άγνωστων ποσοτήτων H_{12k} , H_{32k} , c_f , c_D) και C_t (το οποίο δίνεται από τη σχέση (11.44)). Ο χαρακτήρας χωρο-προέλασης της μεθόδου σημαίνει ότι συνεχίζουμε τον υπολογισμό σε μια επόμενη θέση όταν όλα τα στοιχεία είναι πλέον γνωστά στην τρέχουσα θέση.

Σημαντικό είναι επίσης να κατανοηθεί η διαδικασία με την οποία υπολογίζονται τα χαρακτηριστικά της κατανομής ταχύτητας σε μια θέση του οριακού στρώματος όταν εκεί έχουν ήδη βρεθεί οι ποσότητες L_k και X . Ο υπολογισμός αυτός απαιτεί εμπειρική πληροφορία η οποία λαμβάνεται με ξεχωριστό τρόπο για τις στρωτές και τις τυρβώδεις ροές και θα συζητηθεί αμέσως παρακάτω.

11.5 Αλγόριθμος Υπολογισμού Στρωτού Οριακού Στρώματος

Σύμφωνα με τα όσα έχουν ήδη παρουσιασθεί στο Κεφάλαιο 10.9, ένα στρωτό (ασυμπίεστο) οριακό στρώμα σε κατάσταση ισορροπίας, το οποίο αναπτύσσεται με μια εξωτερική ροή που καθορίζεται από ένα νόμο της μορφής (10.76) για δεδομένη τιμή του εκθέτη m , παρουσιάζει ομοιότητα στην κατανομή ταχύτητας κατά το ύψος του σε κάθε θέση. Η ομοιότητα αυτή διέπεται από μια εξίσωση η οποία συμβολικά γράφεται στη μορφή (10.82).

Με υπολογισμένες τις τιμές των L_k και X σε μια οποιασδήποτε θέση ενός οριακού στρώματος μπορούν να υπολογισθούν όλες οι τοπικές ιδιότητες αυτού κάνοντας την αντιστοίχσή του με ένα ισορροπημένο οριακό στρώμα. Για το αντίστοιχο ισορροπημένο οριακό στρώμα μπορούν να υπολογισθούν τα χαρακτηριστικά του, χρησιμοποιώντας τα όσα παρουσιάστηκαν προηγουμένα, με βάση τον αλγόριθμο που δίνεται στη συνέχεια. Ας σημειωθεί ότι τα τοπικά χαρακτηριστικά του οριακού στρώματος, μεταξύ άλλων, χρειάζονται και για τον υπολογισμό των συντελεστών του συστήματος των εξισώσεων (11.40) και (11.43) ώστε να συνεχίσει ο αλγόριθμος χωρο-προέλασης. Ο αλγόριθμος, αλλά και οι παραδοχές στις οποίες στηρίζεται, παρουσιάζονται στη συνέχεια.

(α) Η σχέση (11.23) και η γραφική της απεικόνιση στο Σχήμα 11.4 επιτρέπουν να υπολογισθεί η ποσότητα H_{12k} μονοσήμαντα από την τρέχουσα τιμή του L_k .

(β) Η σχέση (11.22) και η γραφική της απεικόνιση στο Σχήμα 11.2 επιτρέπουν να υπολογισθεί ο παράγοντας μορφής H_{32k} ως συνάρτηση της τιμής του H_{12k} που υπολογίσθηκε προηγουμένα.

(γ) Η σχέση (11.33) επιτρέπει τον υπολογισμό του αριθμού Reynolds Re_{3k} , ως

$$Re_{3k} = \exp(X - 2KL_k)$$

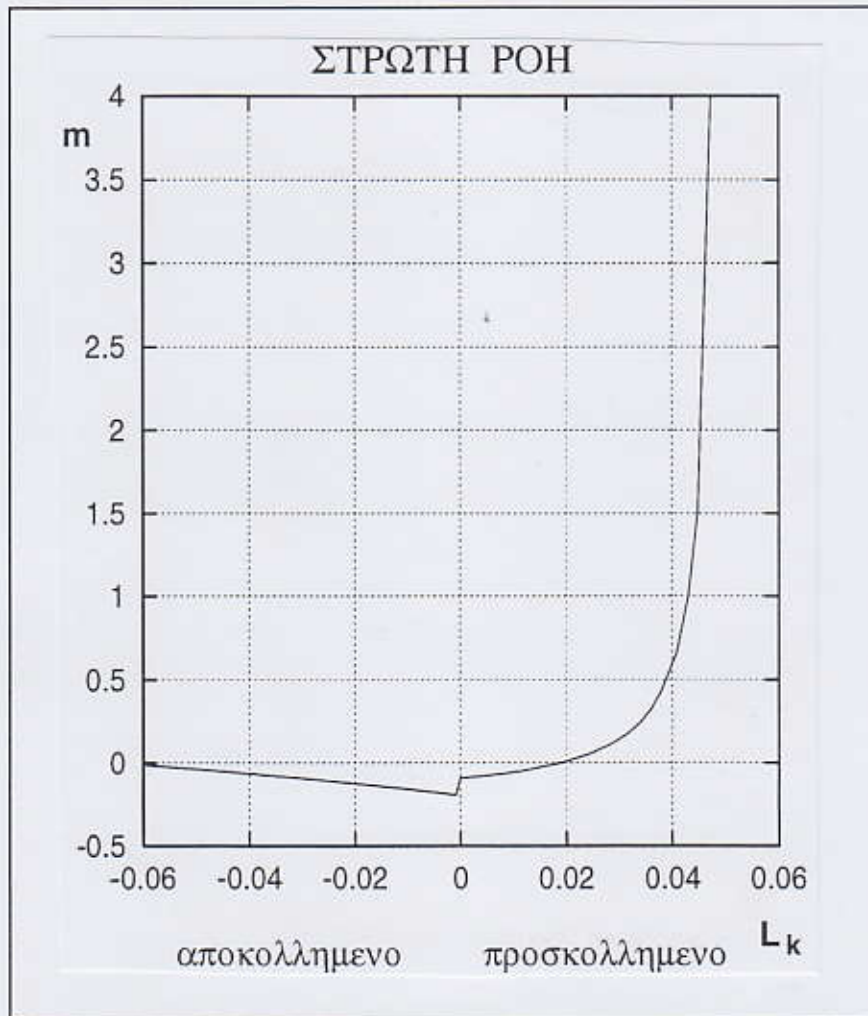
χρησιμοποιώντας το γνωστό ζεύγος τιμών L_k και X και την τιμή $K=1$ για στρωτές ροές.

(δ) Η γνώση των H_{12k} , H_{32k} , Re_{3k} επιτρέπει τον υπολογισμό και των υπόλοιπων αριθμών Reynolds

$$Re_{2k} = \frac{Re_{3k}}{H_{32k}} \quad , \quad Re_{1k} = H_{12k} Re_{2k}$$

(ε) Τα τρία κινηματικά πάχη του οριακού στρώματος δ_{1k} , δ_{2k} , δ_{3k} καθορίζονται πλήρως από τους αριθμούς Reynolds που ήδη υπολογίσθηκαν, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ορισμού τους.

(στ) Μια από τις σχέσεις (10.96α) και (10.96β) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του εκθέτη m . Λόγω της άμεσης συσχέτισης του H_{12k} με το m και του H_{12k} με το L_k , ουσιαστικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια απευθείας συσχέτιση του L_k με το m . Ετσι για στρωτά αποκολλημένα ή προσκολλημένα οριακά στρώματα παρέχεται η γραφική παράσταση του Σχήματος 11.6 για τον απευθείας υπολογισμό του m . Συγχρόνως υπολογίζεται η ποσότητα β από τη σχέση (10.74).



Σχήμα 11.6

(ζ) Υπολογίζεται ο αριθμός Reynolds θέσης (Re_x) ο οποίος αντιστοιχεί στην κατά μήκος θέση x εκείνου του ισορροπημένου οριακού στρώματος που διέπεται από την ίδια (αδιάστατη) κατανομή ταχύτητας όπως και το υπό μελέτη οριακό στρώμα στο συγκεκριμένο σημείο.

Για τον υπολογισμό του Re_x χρησιμοποιείται η σχέση (10.88a), η οποία γράφεται ως

$$Re_{1k} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sqrt{Re_x} f_1(m) \quad (11.46)$$

Για την επίλυση της (11.47) ως προς Re_x απαιτείται η γνώση της ποσότητας $f_1(m)$ για τη συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου m . Η ποσότητα $f_1(m)$ ορίσθηκε στη σχέση (10.89a) και έχει πικανοποιηθεί στο Παράρτημα Π3, ως συνάρτηση των ποσοτήτων m ή β . Οι πίνακες αυτοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη φάση αυτή με κατάλληλες αριθμητικές παρεμβολές.

(η) Η αδιάστατη ποσότητα η , η οποία εμπλέκεται στην κατανομή Falkner-Skan έχει δοθεί στη σχέση (10.81). Για την περίπτωση που η απόσταση y από το στερεό τοίχωμα γίνει ίση με το πάχος δ του οριακού στρώματος, ορίζει η αντίστοιχη αδιάστατη ποσότητα η_δ ως

$$\eta_\delta = \delta \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{u_e}{xv}} \quad (11.47)$$

η οποία, αν τα δ και x εκφραστούν σε αδιάστατη μορφή, ξαναγράφεται ως

$$Re_\delta = \sqrt{Re_x} \eta_\delta \sqrt{\frac{2}{m+1}} \quad (11.48)$$

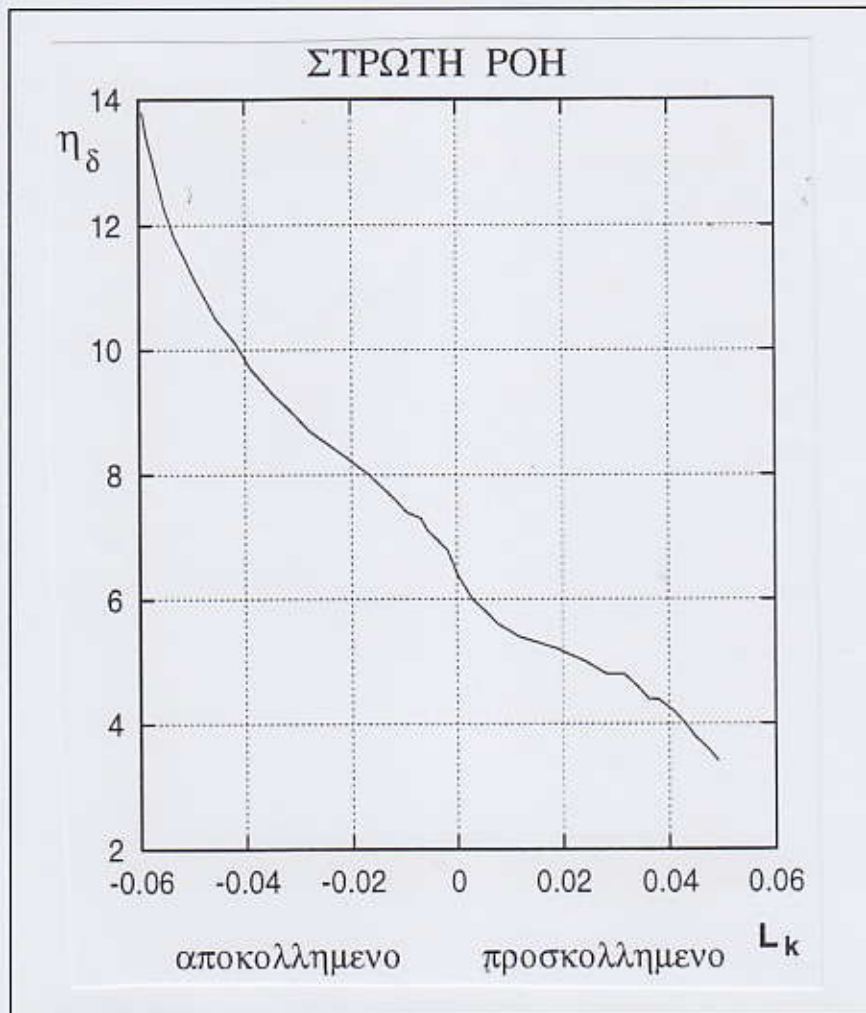
Η ποσότητα η_δ είναι συνάρτηση μόνο της παραμέτρου m , δηλαδή $\eta_\delta = \eta_\delta(m)$ και, αφού το m εξαρτάται μόνο από το L_k , η ποσότητα η_δ πρέπει επίσης να εκφράζεται ως συνάρτηση του L_k . Τη συσχέτιση των η_δ και L_k παρουσιάζει γραφικά το Σχήμα 11.7. Συνέπεια της παραπάνω ανάλυσης είναι να μπορεί πλέον να υπολογισθεί και ο Re_δ από τη σχέση (11.49).

(θ) Για το συντελεστή τριβής c_f ισχύει η σχέση (10.90), είναι δηλαδή

$$c_f = \frac{2}{\sqrt{Re_x}} \sqrt{\frac{m+1}{2}} \alpha_2(m)$$

όπου η συσχέτιση του α_2 με το m ή καλύτερα η συσχέτιση του α_2 με το L_k παρουσιάζεται στο Σχήμα 11.8. Συνεπώς, με γνωστά τα Re_x και m ή L_k υπολογίζεται και ο συντελεστής c_f .

(ι) Ο παράγοντας καταστροφής δίνεται από τη σχέση (10.92) και μπορεί να υπολογισθεί από τη σχέση αυτή αρκεί να είναι γνωστή η ποσότητα



Σχήμα 11.7

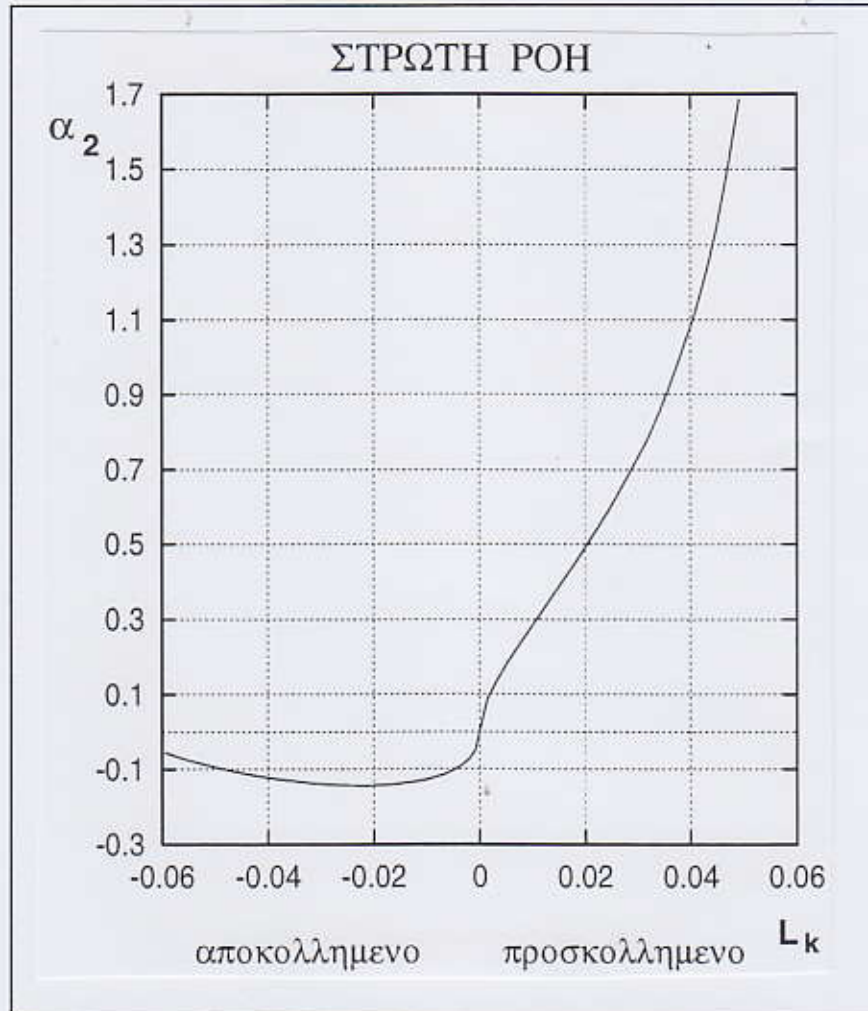
$$\alpha_D(m) = \int_0^\infty \left\{ \frac{\partial F(\eta, m)}{\partial \eta} \right\}^2 d\eta$$

Η τελευταία αυτή ποσότητα πινακοποιείται στο παράρτημα Π3 για συγκεκριμένες τιμές των m ή β .

Τα βήματα (α) ως (ι) υπολόγισαν όλες τις ολοκληρωτικές ποσότητες που χαρακτηρίζουν το οριακό στρώμα στη συγκεκριμένη θέση όπου γνωρίζουμε το L_κ και X . Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται σε κάθε διαδοχική θέση του υπολογισμού με τη διαδικασία της χωρο-προέλασης.

11.6 Αλγόριθμος Υπολογισμού Τυρβώδους Οριακού Στρώματος

Για ένα τυρβώδες οριακό στρώμα, με γνωστά τα L_k και X για κάθε θέση x , ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:



Σχήμα 11.8

(α) Από την υπολογισθείσα τιμή του L_k υπολογίζονται οι τιμές των παραγόντων μορφής H_{12k} και H_{32k} χρησιμοποιώντας τα Σχήματα (11.3) και (11.5), τα οποία ισχύουν για την τυρβώδη περίπτωση που αναλύουμε εδώ.

(β) Από την υπολογισθείσα τιμή της παραμέτρου X και από τη σχέση (11.33) μπορεί να υπολογισθεί ο αριθμός Reynolds Re_{3k} , ως

$$Re_{3k} = \exp(X - 2KL_k) \quad (11.49)$$

και με γνωστή την ταχύτητα u_e να υπολογισθεί άμεσα και το κινηματικό πάχος ενέργειας δ_{3k} .

(γ) Από τα υπολογισθέντα H_{12k} , H_{32k} και δ_{3k} , με απλές πράξεις καταλήγουμε στα τρία κινηματικά πάχη του οριακού στρώματος δ_{1k} , δ_{2k} , δ_{3k} για τη θέση αυτή.

(δ) Απομένουν να υπολογιστούν οι ποσότητες δ , u_τ , π_1 και G οι οποίες διέπονται από τις σχέσεις

$$\frac{u_\epsilon}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{\delta u_\tau}{\nu} \right) + c + \frac{2\pi_1}{\kappa} \quad (11.50)$$

(είναι η σχέση (10.121) γραμμένη για την απόσταση $y = \delta$ και με γνωστές τις σταθερές c και κ)

$$\delta \frac{u_\tau}{u_\epsilon} = \frac{\kappa}{1 + \pi_1} \delta_{1k} \quad (11.51)$$

(είναι η σχέση (10.116), όπου ο συντελεστής τριβής έχει αντικατασταθεί από το λόγο εξωτερικής ταχύτητας και ταχύτητας τριβής)

$$\frac{u_\tau}{u_\epsilon} = \frac{1}{G} \left(1 - \frac{\delta_{2k}}{\delta_{1k}} \right) = \frac{1}{G} \left(1 - \frac{1}{H_{12k}} \right) \quad (11.52)$$

(είναι η σχέση (10.117), με κατάλληλη αναδιάταξη των όρων)

$$G = \frac{2 + 3.2\pi_1 + 1.522\pi_1^2}{\kappa(1 + \pi_1)} \quad (11.53)$$

(είναι η σχέση (10.120) για τον παράγοντα μορφής του Clauser).

Η αντικατάσταση των (11.51), (11.52) και (11.53) στην (11.50) δίνει μια εξίσωση της μορφής

$$\frac{G(\pi_1)}{1 - \frac{1}{H_{12k}}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{\kappa}{1 + \pi_1} \delta_{1k} \frac{u_\epsilon}{\nu} \right) + c + \frac{2\pi_1}{\kappa} \quad (11.54)$$

η οποία επιλυόμενη με μια τεχνική τύπου Newton-Raphson υπολογίζει την ποσότητα π_1 . Αξίζει να τονίσουμε ότι μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε και την ποσότητα δ_{3k} από τη σχέση (10.118), με τη βοήθεια επίσης της σχέσης (10.119), η οποία ορίζει την ποσότητα G_1 , επαληθεύοντας με τον τρόπο αυτό την εμπειρική πληροφορία που χρησιμοποιήσαμε.

(ε) Με γνωστές τις παραπάνω ποσότητες είναι εύκολο πλέον να σχεδιάσουμε την

κατανομή ταχύτητας μέσα στο οριακό στρώμα από τη σχέση του Coles (10.109).

11.7 Το Επίπεδο Απεικόνισης για Στρωτές Ροές - Σχόλια

Το επίπεδο απεικόνισης για στρωτές ασυμπίεστες ροές παρουσιάστηκε ήδη στο Σχήμα 11.1 φαίνονται οι καμπύλες σταθερού M και σταθερού C_D .

Στη στρωτή ροή ισχύει ότι τα M και C_D είναι μόνο συνάρτηση του L_k , δηλαδή

$$M = M(L_k) \quad , \quad C_D = C_D(L_k) \quad (11.52)$$

και, ενδεικτικά, ξαναγράφουμε τις κανονικές εξισώσεις στη μορφή

$$dq = [K + 2\beta(K-1)] dL_k + \beta dX \quad (11.53)$$

$$d\Phi = \frac{1}{C} dRe_4 + \frac{2(K-1)Re_4}{C} dL_k \quad (11.54)$$

με τους συντελεστές

$$\beta = - \frac{KM}{1 + 2KM} \quad (11.55)$$

$$C = C_D (1 + 2M)e^{2L_k} \quad (11.56)$$

Οι συναρτήσεις M και C που εμπλέκονται στις σχέσεις (11.55) και (11.56) για στρωτές ροές, προσκολλημένες ή αποκολλημένες, και ασυμπίεστο ρευστό, δίνονται στο Σχ.2. Οι καμπύλες που παρουσιάζονται στο σχήμα αυτό είναι η γραφική απεικόνιση των σχέσεων (11.52).

Αφού για στρωτές ροές $K=1$, διαβάζοντας από το Σχ.2 τις τιμές του M και C που αντιστοιχούν στο L_k , υπολογίζεται το β από την εξίσωση (11.55) και το C_D από την εξίσωση (11.56).

Οι γραμμές $M=\text{σταθ.}$ του Σχ.1, που λόγω της (11.52) είναι και γραμμές $L_k=\text{σταθ.}$ ορίζουν στρωτά ισορροπημένα οριακά στρώματα. Το ισορροπημένο οριακό στρώμα $L_k=0$ είναι σε κατάσταση "έτοιμης" αποκόλλησης και χωρίζει το επίπεδο απεικόνισης σε δύο τμήματα:

- (α) το πάνω τμήμα ($L_k > 0$) με όλα τα προσκολλημένα οριακά στρώματα
- (β) το κάτω τμήμα ($L_k < 0$) με όλα τα αποκολλημένα οριακά στρώματα.

Στην τελευταία περιοχή, το L_k αυξάνει ξανά με το H_{12k} καθώς η τελευταία ποσότητα τείνει να απειρισθεί.

Για τα στρωτά ισορροπημένα οριακά στρώματα, σε κάθε θέση υπολογισμού, οι κατανομές ταχύτητας είναι όμοιες. Ο συντελεστής τριβής C_f και οι συντελεστές μορφής H_{12k} , H_{32k} και L_k είναι σταθεροί ενώ αυξάνουν οι αριθμοί Reynolds που αντιστοιχούν στα τρία πάχη

$$Re_1 = Re(\delta_1) \quad , \quad Re_2 = Re(\delta_2) \quad , \quad Re_3 = Re(\delta_3)$$

Συνεπώς, σε όλα τα ισορροπημένα στρωτά οριακά στρώματα, το X αυξάνει όσο "προχωρά" το οριακό στρώμα, δηλαδή είναι

$$dX > 0 \tag{11.57}$$

Η μονότονη μορφή που απορρέει από την (11.57) δικαιολογεί την επιλογή του X ως ανεξάρτητης μεταβλητής.

Καθώς $dE/E > 0$, η εξίσωση (11.39) επιβάλλει

$$(1 + 2KM) = (1 + 2M) > 0 \quad \rightarrow \quad M > -\frac{1}{2} \tag{11.58}$$

(Το ίδιο, αλλά με $K \neq 1$, μπορούμε να πούμε και για τα τυρβώδη ισορροπημένα οριακά στρώματα, αφού και εκεί ισχύει η (11.57)).

Η καμπύλη $M = -1/2$ όπου παύουν να υφίστανται τα οριακά στρώματα, παρουσιάζεται στην κορυφή του Σχ.1.

Στο ίδιο σχήμα παρουσιάζεται και η καμπύλη ουδέτερης ευστάθειας (neutral stability) του Schlichting $L_n(X)$. Κάτω από την καμπύλη αυτή, το στρωτό οριακό στρώμα είναι ασταθές. Αυτή η καμπύλη τέμνει την καμπύλη $M = -1/2$ στο $X = 10.2$.

Αρα για $X > 10.2$ δεν μπορούμε να έχουμε ευσταθή στρωτά οριακά στρώματα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π1

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Π1.1 Γενικά περί Πεπερασμένων Διαφορών

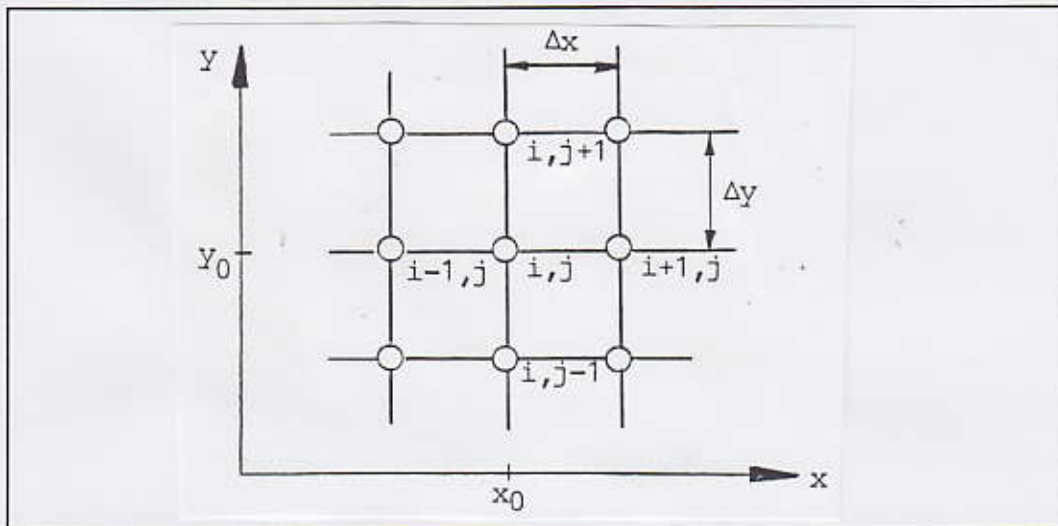
Σκοπός του Παραρτήματος αυτού είναι να δώσει μια σύντομη, αλλά επαρκή εισαγωγή στη Μεθοδολογία των Πεπερασμένων Διαφορών (Π.Δ., Finite-Difference). Αποτελεί μια πρώτη γνωριμία για όσους δεν έχουν παρακολουθήσει αντίστοιχη σειρά μαθημάτων στο Πολυτεχνείο, ενώ είναι μια γενική επανάληψη και σύνοψη σχέσεων για αυτούς που ήδη γνωρίζουν το αντικείμενο.

Τα προβλήματα ροής που θα μας απασχολήσουν διέπονται από μη-γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες πρέπει να επιλυθούν στο χωρίο που μας ενδιαφέρει και το οποίο καθορίζεται από τα φυσικά όρια των συνιστωσών της στροβιλομηχανής που αναλύουμε. Η παρακάτω ανάλυση γίνεται για ένα διδιάστατο χωρίο ροής, χωρίς όμως αυτό να περιορίζει τη γενικότητά της. Η αντικατάσταση του επιλυόμενου συνεχούς χωρίου με ένα άλλο διακριτό, αποτελεί τη φάση της Διακριτοποίησης (discretization), η οποία προηγείται της ανάλυσης των εξισώσεων με σχήματα πεπερασμένων διαφορών. Η Διακριτοποίηση μας εφοδιάζει με ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων, που καλύπτουν το χωρίο ροής και στα οποία η γνώση των εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών θεωρείται ότι είναι πλήρως αντιπροσωπευτική των φαινομένων ροής που λαμβάνουν χώρα στο πεδίο. Η διάταξη των κομβικών σημείων μέσα στο πεδίο γίνεται με δομημένο τρόπο και αυτό αποτελεί χαρακτηριστικό της μεθόδου των Π.Δ. (σε αντίθεση με το μη-δομημένο τρόπο με τον οποίο γίνεται η διακριτοποίηση στη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων). Το σύνολο των δομημένα τοποθετημένων κόμβων ονομάζεται Υπολογιστικό Πλέγμα Πεπερασμένων Διαφορών. Οι μερικές παράγωγοι που περιέχονται στις μερικές διαφορικές εξισώσεις (μ.δ.ε.) που λύνουμε, προσεγγίζονται, για κάθε κομβικό σημείο, από τις διαφορές τιμών της επιλυόμενης συνάρτησης σε γειτονικούς κόμβους και το πρόβλημα επίλυσης της μ.δ.ε. μετασχηματίζεται σε ένα αλγεβρικό πρόβλημα. Βασικά χαρακτηριστικά κάθε ανάπτυξης σε π.δ. είναι:

- * το σφάλμα αποκοπής (truncation error)
- * η συμβιβαστικότητα (consistency)
- * και η ευστάθεια (stability)

Η έννοια των γειτονικών κόμβων: Θεωρούμε το διδιάστατο ορθογώνιο πλέγμα του Σχήματος Π1.1 του οποίου οι κυψέλες είναι ορθογωνικής μορφής με πλευρές (Δx) και (Δy) . Οι γειτονικοί κόμβοι ενός κόμβου (i,j) συμβολίζονται με $(i+1,j)$, $(i-1,j)$, $(i,j+1)$, $(i,j-1)$ και αν (Φ) είναι η εξαρτημένη μεταβλητή, η οποία στον κόμβο (i,j) έχει την τιμή $\Phi_{i,j} = \Phi(x_0, y_0)$ τότε

Π1.2



Σχήμα Π1.1

$$\Phi_{i+1,j} = \Phi(x_0 + \Delta x, y_0)$$

$$\Phi_{i-1,j} = \Phi(x_0 - \Delta x, y_0)$$

$$\Phi_{i,j+1} = \Phi(x_0, y_0 + \Delta y)$$

$$\Phi_{i,j-1} = \Phi(x_0, y_0 - \Delta y)$$

Η έκφραση μιας παραγώγου στο σημείο (x_0, y_0) μπορεί να γίνει, αν θυμηθούμε το βασικό ορισμό της παραγώγου, ως

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} (i, j) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + \Delta x, y_0) - \Phi(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

ή

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} (i, j) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0, y_0 + \Delta y) - \Phi(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Η χρήση της ανάπτυξης σε σειρά Taylor δίνει, για παράδειγμα, ότι

$$\Phi(x_0 + \Delta x, y_0) = \Phi(x_0, y_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots$$

οπότε προφανώς προκύπτει ότι

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} (i, j) = \frac{\Phi(x_0 + \Delta x, y_0) - \Phi(x_0, y_0)}{\Delta x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \frac{\Delta x}{2!} - \dots$$

που μας επιτρέπει να αναγνωρίσουμε το σφάλμα αποκοπής (σ.α.) ως

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(i,j) = \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta x} + (\sigma.α.) \quad (\text{Π1.1})$$

$$(\sigma.α.) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \frac{\Delta x}{2!} + \dots = O(\Delta x)$$

Το σφάλμα αποκοπής είναι ανάλογο του Δx και για το λόγο αυτό το σχήμα (Π1.1) είναι ακρίβειας πρώτης τάξης.

Σχήματα π.δ. για την πρώτη παράγωγο:

$$\text{πρόσω} \quad \text{---} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}(i,j) = \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{Π1.1})$$

$$\text{πίσω} \quad \text{---} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}(i,j) = \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{Π1.2})$$

$$\text{κεντρική} \quad \text{---} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}(i,j) = \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (\text{Π1.3})$$

Απλά θα σημειώσουμε ότι το $\sigma.α.$, εκφραζόμενο ως $O(\Delta x)$ ή $O(\Delta x)^2$, δεν καθορίζει το ακριβές σφάλμα που εμπεριέχει η προσέγγιση, αλλά δείχνει τη συμπεριφορά του σφάλματος όταν $\Delta x \rightarrow 0$. Όταν $\Delta x \rightarrow 0$, αναμένουμε ότι ένα $\sigma.α.$ δεύτερης τάξης $O(\Delta x)^2$ θα είναι μικρότερο ενός $\sigma.α.$ πρώτης τάξης $O(\Delta x)$.

Σχήματα π.δ. για τη δεύτερη παράγωγο:

$$\text{κεντρική} \quad \text{---} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(i,j) = \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\text{Π1.4})$$

$$\text{πρόσω} \quad \text{---} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(i,j) = \frac{\Phi_{i,j} - 2\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i+2,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x) \quad (\text{Π1.5})$$

$$\text{πίσω} \quad \text{---} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(i,j) = \frac{\Phi_{i,j} - 2\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i-2,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x) \quad (\text{Π1.6})$$

Σχήματα π.δ. για την πρώτη παράγωγο στα όρια:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(i,j) = \frac{-3\Phi_{ij} + 4\Phi_{i+1j} - \Phi_{i+2j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (\text{Π1.7})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(i,j) = \frac{3\Phi_{ij} - 4\Phi_{i-1j} + \Phi_{i-2j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (\text{Π1.8})$$

Τα παραπάνω σχήματα ισχύουν όταν η απόσταση κάθε κόμβου από τους δυο εκατέρωθεν είναι σταθερή, δηλαδή όταν $\Delta x = \text{σταθερό}$.

Π1.2 Αναλύοντας σε π.δ. μια Μερική Διαφορική Εξίσωση (μ.δ.ε.)

Το σφάλμα αποκοπής μπορεί εύκολα να οριστεί από το παράδειγμα της μ.δ.ε. που αντιπροσωπεύει την εξίσωση της θερμότητας

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (\text{Π1.9})$$

Για ένα μονοδιάστατο πρόβλημα η ανάλυση με πρόσω διαφορές στο χρόνο και κεντρικές διαφορές στο χώρο δίνει

$$\frac{\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n}{\Delta t} = a \frac{\Phi_{i+1}^n - 2\Phi_i^n + \Phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (\text{Π1.10})$$

Χρειάζεται ανάλυση όρων σε σειρές Taylor, για να προκύψει το σφάλμα αποκοπής που είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{(\mu.\delta.\epsilon.)} - a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \frac{\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n}{\Delta t} - a \frac{\Phi_{i+1}^n - 2\Phi_i^n + \Phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \\ &+ \left[-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \Big|_i \frac{\Delta t}{2} + a \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} \Big|_i \frac{(\Delta x)^2}{12} + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{Π1.11})$$

όπου οι όροι συμβολίστηκαν με

- (μ.δ.ε.) — μερική διαφορική εξίσωση
- (ε.π.δ.) — εξίσωση πεπερασμένων διαφορών
- (σ.α.) — σφάλμα αποκοπής

Π1.5

Εδώ το σφάλμα αποκοπής είναι $[O(\Delta t)+O(\Delta x)^2]$ ή απλά $O(\Delta t, \Delta x^2)$ και προφανώς μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση

$$(\sigma.α.) = (\mu.δ.ε.) - (\epsilon.π.δ.) \tag{Π1.12}$$

Η ανάλυση (Π1.11) αποτελεί ένα παράδειγμα μη-πεπλεγμένου ή ρητού (explicit) σχήματος: είναι το σχήμα εκείνο που μόνο ένας άγνωστος, εδώ ο (Φ_i^{n+1}) εμφανίζεται και μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει γνωστών ποσοτήτων.

Το συμβιβαστό του σχήματος π.δ. εξασφαλίζει ότι η ε.π.δ. προσεγγίζει την προς επίλυση μ.δ.ε., καθώς η απόσταση μεταξύ των κόμβων τείνει στο μηδέν. Συμβολικά γράφουμε

$$\lim_{\substack{(\mu.δ.ε.) \\ \text{κυφέλη} \rightarrow 0}} - (\epsilon.π.δ.) = \lim_{\substack{(\sigma.α.) \\ \text{κυφέλη} \rightarrow 0}} = 0 \tag{Π1.13}$$

Για παράδειγμα αναφέρουμε τη λύση της (Π1.9) με το σχήμα Dufort-Frankel, δηλαδή

$$\frac{\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^{n-1}}{2\Delta t} = \alpha \frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^{n+1} - \Phi_i^{n-1} + \Phi_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{Π1.14}$$

Ανάλυση σε σειρές Taylor της (Π1.14) αποδεικνύει ότι

$$(\sigma.α.) = \frac{\alpha}{12} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} \Big|_i (\Delta x)^2 - \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \Big|_i \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} \Big|_i (\Delta t)^2 + \dots \tag{Π1.15}$$

Είναι προφανή τα προβλήματα της (Π1.15) όταν $\Delta t \rightarrow 0$ και $\Delta x \rightarrow 0$, αλλά με τον **ίδιο** ρυθμό. Τότε $(\Delta t / \Delta x) \neq 0$ ή $\Delta t / \Delta x = \beta$ οπότε το σχήμα (Π1.14) αντιστοιχεί στη μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \alpha \beta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \tag{Π1.16}$$

που προφανώς δεν είναι συμβιβαστή με την προς επίλυση εξίσωση (Π1.9).

Ευστάθεια ενός σχήματος π.δ. είναι το να μην επιτρέπεται η ενίσχυση (κατά τη διάρκεια της επαναληπτικής επίλυσης ή της διαδικασίας προέλασης-marching) ενός οποιουδήποτε σφάλματος που μπορεί να εμφανιστεί σε οποιοδήποτε σημείο. Η μέθοδος ελέγχου κατά von Neumann είναι η περισσότερο χρησιμοποιούμενη μέθοδος ευστάθειας. Κατ'αυτή γίνεται η ανάλυση

$$\Phi_{ij}^n = e^{\lambda t} e^{i \alpha x} e^{i b y} \tag{Π1.17}$$

Π1.6

όπου $\lambda = \text{μιγαδική σταθερά}$, αντικαθιστούμε στην εξίσωση π.δ. και υπολογίζουμε το συντελεστή ενίσχυσης (amplification factor) από τη σχέση

$$G = \frac{e^{\lambda(t+\Delta t)}}{e^{\lambda t}} = e^{\lambda \Delta t} \quad (\text{Π1.18})$$

Αν $\|G\| \leq 1$ το σχήμα είναι ευσταθές. Αν $\|G\| > 1$ το σχήμα είναι ασταθές. Ευστάθεια υπό όρους μπορούμε να έχουμε όταν η ανισότητα $\|G\| < 1$ πληρείται υπό όρους.

Εφαρμογή: Η μέθοδος ελέγχου της ευστάθειας κατά von Neumann θα εφαρμοστεί ενδεικτικά για την περίπτωση που η point-Jacobi μέθοδος χρησιμοποιείται για την επίλυση της εξίσωσης Laplace

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Π1.19})$$

Το σχήμα είναι:

$$\frac{1}{\Delta x^2} (\Phi_{i+1,j}^n - 2\Phi_{i,j}^{n+1} + \Phi_{i-1,j}^n) + \frac{1}{\Delta y^2} (\Phi_{i,j+1}^n - 2\Phi_{i,j}^{n+1} + \Phi_{i,j-1}^n) = 0 \quad (\text{Π1.20})$$

και αν $(\Delta x = \Delta y)$ αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής ενίσχυσης είναι:

$$G = 1 + \frac{1}{2}(\cos \alpha \Delta x - 1) + \frac{1}{2}(\cos \beta \Delta y - 1) \quad (\text{Π1.21})$$

και το σχήμα είναι ευσταθές αφού

$$-1 \leq G \leq 1$$

Το σφάλμα στρογγυλοποίησης (round-off error) οφείλεται στις στρογγυλεύσεις πραγματικών αριθμών σύμφωνα με την ακρίβεια του υπολογιστή. Σε μερικούς υπολογισμούς η τιμή του σ.σ. είναι ανάλογη του πλήθους των κόμβων του πλέγματος και σ'αυτές τις περιπτώσεις, κάνοντας το πλέγμα πυκνότερο, κερδίζουμε σε μείωση του σ.α. αλλά χάνουμε σε αύξηση του σ.σ.

Το σφάλμα διακεκριμενοποίησης (discretization error) γεννάται από την αντικατάσταση ενός συνεχούς προβλήματος με ένα διακριτό πρόβλημα. Γενικά έχουμε ότι:

$$(\mu.δ.ε.) - (\text{υπολογισθείσα λύση}) = (\sigma.δ.) + (\sigma.σ.) \quad (\text{Π1.22})$$

Το σ.δ. περιέχει το σ.α. και σφάλματα που οφείλονται στον τρόπο που χειριζόμαστε τις οριακές συνθήκες.

Π1.3 Συντηρητική Μορφή και Συντηρητική Ιδιότητα

Η μ.δ.ε. γραμμένη σε **συντηρητική μορφή** (conservative form) χαρακτηρίζεται από το ότι οι συντελεστές των παραγώγων είναι σταθεροί αριθμοί ή, αν δεν είναι, τότε οι παράγωγοί τους δεν εμφανίζονται πουθενά μέσα στην εξίσωση.

Παράδειγμα: Η εξίσωση της συνέχειας σε συντηρητική μορφή

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (\text{Π1.23})$$

Η εξίσωση σε μη-συντηρητική μορφή

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad (\text{Π1.24})$$

Μια μ.δ.ε. σε μη-συντηρητική μορφή οδηγεί συχνά σε αριθμητικά προβλήματα εκεί όπου οι συντελεστές είναι ασυνεχείς ή σε ασυνεχή προβλήματα (κύμα κρούσης).

Η συντηρητική ιδιότητα ενός σχήματος π.δ. σημαίνει την απαλοιφή σε κάθε υπολογιστική κυψέλη των όρων ροής έτσι ώστε σε ολική άποψη οι μόνοι όροι που απομένουν να είναι αυτοί που αντιστοιχούν στο όριο.

Για βαθύτερη γνώση της Μεθοδολογίας των Πεπερασμένων Διαφορών, ο φοιτητής μπορεί να ανατρέξει στα παρακάτω συγγράμματα:

Γ.Χ. Μπεργελέ, "Οι Πεπερασμένες Διαφορές στη Μηχανική των Ρευστών", Αθήνα 1983.

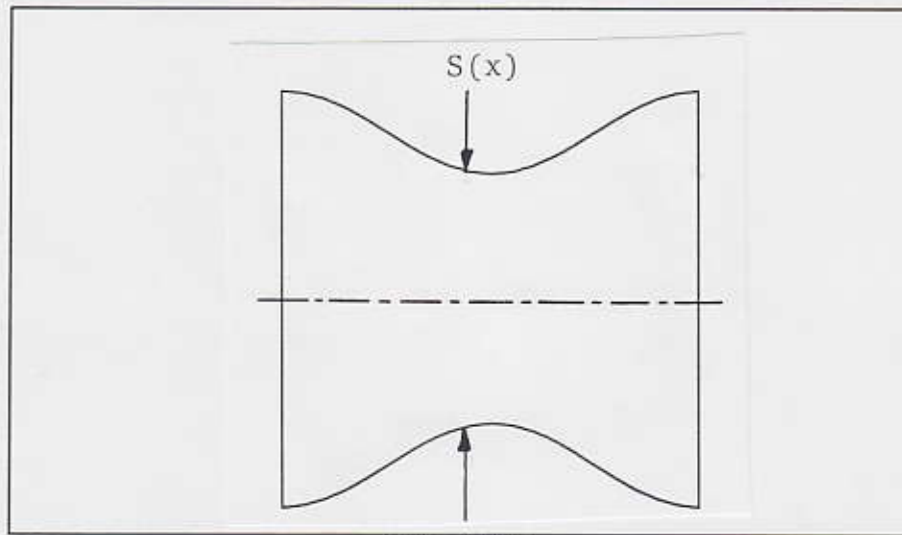
D.A. Anderson, J.K. Tannehill and R.H. Pletcher, "Computation Fluid Mechanics and Heat Transfer", Hemisphere Publishing Co., 1984.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π2

ΟΙ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ EULER

Π2.1 Διαφορετικές Γραφές των Εξισώσεων Ροής

Στο Παράρτημα αυτό θα αναπτυχθούν λεπτομερώς οι μονοδιάστατες εξισώσεις ροής μέσα σε έναν αγωγό, σαν αυτόν του Σχήματος Π2.1 που έχει διατομή $S=S(x)$, μεταβαλλόμενη με την απόσταση x . Οι εξισώσεις ροής, που εκφράζουν τη διατήρηση της παροχής μάζας, της ορμής και της ενέργειας μέσα στον αγωγό, μπορούν να



Σχήμα Π2.1

γραφούν ως εξής:

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u S)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho u S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)S}{\partial x} = p \frac{dS}{dx}$$

(Π2.1)

$$\frac{\partial(\rho E S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u H S)}{\partial x} = 0$$

όπου E είναι η ολική ενέργεια ανά μονάδα μάζας και H είναι η ολική ενθαλπία για τις οποίες ισχύει ότι:

Π2.2

$$E = e + \frac{u^2}{2} = H - \frac{p}{\rho} \quad (\text{Π2.2})$$

$$H = h + \frac{1}{2}u^2 = c_p T + \frac{1}{2}u^2 = \gamma c_v T + \frac{1}{2}u^2 = \gamma e + \frac{1}{2}u^2 = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} \quad (\text{Π2.3})$$

$$\rho H = p + E_t, \quad E_t = \rho E \quad (\text{Π2.4})$$

$$e = c_v T = c_v \frac{p}{R_g \rho} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\gamma - 1} c^2 \quad (\text{Π2.5})$$

όπου c είναι η ταχύτητα του ήχου.

Μια εναλλακτική γραφή των εξισώσεων (Π2.1) μπορεί να προκύψει με την εκτέλεση των παραγωγίσεων και αυτή είναι η

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\rho u}{S} \frac{dS}{dx}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (\text{Π2.6})$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\rho u c^2}{S} \frac{dS}{dx}$$

Συνοψίζοντας τις εξισώσεις (Π2.6), σε μια μορφή όπου το διάνυσμα των εξαρτημένων μεταβλητών είναι αυτό των λεγόμενων μη-συντηρητικών μεταβλητών, το οποίο για τη συνέχεια θα συμβολίζεται με V

$$V = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.7})$$

μπορούμε να γράψουμε σε διανυσματική μορφή τις εξισώσεις ροής ως

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial V}{\partial x} = \tilde{Q} \quad (\text{Π2.8})$$

όπου το δεξιό μέλος της (Π2.8) είναι το

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} -\rho u \\ 0 \\ -\rho c^2 u \end{bmatrix} \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \quad (\text{Π2.9})$$

ενώ το μητρώο \tilde{A} ορίζεται ως

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 & u \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.10})$$

Ενας εναλλακτικός τρόπος γραφής για την εξίσωση (Π2.8) είναι αυτός που χρησιμοποιεί τις λεγόμενες συντηρητικές μεταβλητές του πεδίου ροής. Το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών ορίζεται ως

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E_t \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.11})$$

Οι εξισώσεις (Π2.1) μπορούν να ξαναγραφούν στη συντηρητική μορφή, ως εξής

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \rho u$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \rho u^2 \quad (\text{Π2.12})$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u H)}{\partial x} = -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \rho u H$$

και να συνοψισθούν στη διανυσματική γραφή

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = Q \quad (\text{Π2.13})$$

όπου

$$f = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + p \\ \frac{m}{\rho} (E_t + p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ (\gamma - 1) E_t + \frac{m^2}{\rho} \left(\frac{3 - \gamma}{2} \right) \\ \frac{m}{\rho} \left[\gamma E_t - (\gamma - 1) \frac{m^2}{2\rho} \right] \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.14})$$

Π2.4

ενώ το Q περιέχει τα δεξιά μέλη των εξισώσεων (Π2.12).

Εισάγοντας την Ιακωβιανή οριζουσα A, σύμφωνα με τη σχέση

$$A = \frac{\partial f}{\partial U} = \begin{vmatrix} \varnothing & 1 & \varnothing \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 & (3-\gamma)u & (\gamma-1) \\ -u[\gamma E - (\gamma-1)u^2] & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}3u^2 & \gamma u \end{vmatrix} \quad (\text{Π2.15})$$

η εξίσωση (Π2.13) μπορεί να γραφεί, εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσωτής παραγώγισης και τα γνωστά από τη θεωρία των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, ως

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = Q \quad (\text{Π2.16})$$

Π2.2 Επεξεργασία της Ιακωβιανής Οριζουσας A

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της Ιακωβιανής Οριζουσας \tilde{A} , η οποία προκύπτει από την ανάλυση των εξισώσεων ροής με τη χρήση μη-συντηρητικών μεταβλητών. Για την οριζουσα \tilde{A} , οι ιδιοτιμές προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης

$$\det|\lambda I - \tilde{A}| = 0 \quad (\text{Π2.17})$$

δηλαδή την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} u-\lambda & \rho & \varnothing \\ \varnothing & u-\lambda & \frac{1}{\rho} \\ \varnothing & \rho c^2 & u-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{Π2.18})$$

Το υπερβολικό σύστημα των εξισώσεων ροής διαθέτει τρεις πραγματικές ιδιοτιμές και τρία γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Η επίλυση της (Π2.18) δίνει τις τρεις πραγματικές ιδιοτιμές που είναι

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u \\ \lambda_2 &= u+c \\ \lambda_3 &= u-c \end{aligned} \quad (\text{Π2.19})$$

Η εύρεση των αριστερών ιδιοδιανυσμάτων της Ιακωβιανής οριζουσας προκύπτει από την παρακάτω εξίσωση

$$\tilde{I}^{(j)} \tilde{A} = \lambda_j \tilde{I}^{(j)} \quad (\text{Π2.20})$$

όπου ο δείκτης (j) δεν αθροίζεται. Η τελευταία μπορεί να γραφεί αναλυτικότερα και ως

$$(l_1, l_2, l_3) \begin{vmatrix} u & \rho & \varnothing \\ \varnothing & u & \frac{1}{\rho} \\ \varnothing & \rho c^2 & u \end{vmatrix} = \lambda (l_1, l_2, l_3) \quad (\text{Π2.21})$$

Τα αριστερά ιδιοδιανύσματα τα οποία προκύπτουν είναι τα εξής

$$\tilde{I}^{(1)} = \left(\alpha \quad \varnothing \quad -\frac{\alpha}{c^2} \right)$$

$$\tilde{I}^{(2)} = \left(\varnothing \quad \beta \quad \frac{\beta}{\rho c} \right) \quad (\text{Π2.22})$$

$$\tilde{I}^{(3)} = \left(\varnothing \quad \delta \quad -\frac{\delta}{\rho c} \right)$$

όπου οι ποσότητες α , β και δ είναι αυθαίρετες σταθερές, οι οποίες μπορούν να ορισθούν κατά βούληση. Μια τυπική "αδιάστατη" έκφραση για τα ιδιοδιανύσματα (Π2.22) μπορεί να προκύψει αν $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Τέλος, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι για υποηχητική ροή το σύστημα διαθέτει δύο θετικές ιδιοτιμές (λ_1 και λ_2) και μια αρνητική (λ_3). Για την υπερηχητική ροή υπάρχουν μόνο τρεις θετικές ιδιοτιμές. Η ανάλυση αυτή προφανώς ισχύει με την υπόθεση ροής που κατευθύνεται προς τα θετικά x και έχει ως φυσική συνέπεια τον καθορισμό του πλήθους των οριακών συνθηκών που επιβάλλονται στην είσοδο και την έξοδο του πεδίου ροής.

Π2.3 Διαγωνοποίηση της Ιακωβιανής Οριζουσας \tilde{A}

Από τη θεωρία πινάκων και σύμφωνα με τον τρόπο με τον οποίο υπολογίστηκαν προηγούμενα οι ιδιοτιμές και τα αριστερά ιδιοδιανύσματα, προκύπτει ότι

$$L^{-1} \tilde{A} = \Lambda L^{-1} \quad (\text{Π2.23})$$

ή ακόμα ότι

$$\tilde{A} = L \Lambda L^{-1} \quad (\text{Π2.24})$$

όπου ο πίνακας Λ είναι διαγώνιος με στοιχεία τις υπολογισθείσες ιδιοτιμές του πίνακα \tilde{A} και

Π2.6

ο πίνακας L^{-1} περιέχει τα ιδιοδιανύσματα του \tilde{A} (ένα ιδιοδιάνυσμα ανά σειρά του πίνακα) και είναι

$$L = \begin{bmatrix} u & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & u+c & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & u-c \end{bmatrix} \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \emptyset & -\frac{\alpha}{c^2} \\ \emptyset & \beta & \frac{\beta}{\rho c} \\ \emptyset & \delta & -\frac{\delta}{\rho c} \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.25})$$

Εκλέγοντας αυθαίρετα ότι $\alpha = \beta = \delta = 1$, ο πίνακας L^{-1} γράφεται επίσης ως

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \emptyset & -\frac{1}{c^2} \\ \emptyset & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ \emptyset & 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.26})$$

και ο αντίστροφός του δίνει

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{2c} & -\frac{\rho}{2c} \\ \emptyset & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \emptyset & \frac{\rho c}{2} & -\frac{\rho c}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.27})$$

Ας σημειώσουμε ότι όταν γνωρίζουμε τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του \tilde{A} , αυτά θα αποτελέσουν τις στήλες του πίνακα L , ενώ, όταν γνωρίζουμε τα αριστερά ιδιοδιανύσματα του ίδιου πίνακα, αυτά θα αποτελέσουν τις γραμμές του πίνακα L^{-1} .

Π2.4 Μετατροπή Συντηρητικών σε Μη-Συντηρητικές Μεταβλητές

Η μετατροπή από έναν τρόπο γραφής των εξισώσεων ροής με τη χρήση των συντηρητικών μεταβλητών U , σε έναν άλλο τρόπο γραφής με τη χρήση των μη-συντηρητικών μεταβλητών V , διέπεται από την Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού

$$M = \frac{\partial U}{\partial V} \quad (\text{Π2.28})$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα M ορίζεται, κατά τα γνωστά, ως

$$M = \begin{vmatrix} \frac{\partial(\rho)}{\partial p} & \frac{\partial(\rho)}{\partial u} & \frac{\partial(\rho)}{\partial p} \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial p} & \frac{\partial(\rho u)}{\partial u} & \frac{\partial(\rho u)}{\partial p} \\ \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho u^2 \right] & \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho u^2 \right] & \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho u^2 \right] \end{vmatrix} \quad (\text{Π2.29})$$

και μετά την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων, παίρνει την τελική μορφή

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \\ \frac{1}{2}u^2 & \rho u & \frac{1}{\gamma-1} \end{vmatrix}, \quad \det(M) = \frac{\rho}{\gamma-1} \quad (\text{Π2.30})$$

Ξεκινώντας από την εξίσωση ροής, όπως αυτή γράφεται συναρτήσει των συντηρητικών μεταβλητών U , προκύπτει διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} &= Q \\ \rightarrow \frac{\partial U}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial x} &= Q \\ \rightarrow M \frac{\partial V}{\partial t} + AM \frac{\partial V}{\partial x} &= Q \\ \rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} + (M^{-1}AM) \frac{\partial V}{\partial x} &= M^{-1}Q \end{aligned} \quad (\text{Π2.31})$$

και τελικά η γραφή των εξισώσεων ροής στη μη-συντηρητική μορφή τους, ως

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial V}{\partial x} = \tilde{Q} \quad (\text{Π2.32})$$

όπου προφανώς ισχύει

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= M^{-1}A M \\ A &= M \tilde{A} M^{-1} \\ \tilde{Q} &= M^{-1}Q \end{aligned} \quad (\text{Π2.33})$$

Ο ορισμός των μη-συντηρητικών Ιακωβιανών δεν απαιτεί τον απ'ευθείας ορισμό καταστατικών σχέσεων για το ρευστό και κατά συνέπεια είναι περισσότερο γενικός. Επειδή, τέλος, η συντηρητική A και η μη-συντηρητική οριζουσα \tilde{A} συνδέονται από τους μετασχηματισμούς των δύο πρώτων εξισώσεων της (Π2.33), οι δυο οριζουσες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Αυτό εξάλλου προκύπτει από τη διαγωνοποίηση της οριζουσας \tilde{A} , όπως φαίνεται στις παρακάτω

εξισώσεις

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A} &= L \Lambda L^{-1} \\ A &= M \tilde{A} M^{-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (Π2.34)$$

$$\Rightarrow A = (ML)\Lambda(L^{-1}M^{-1}) = P\Lambda P^{-1}$$

δηλαδή, τελικά

$$A = P\Lambda P^{-1} \quad \begin{aligned} P &= ML \\ P^{-1} &= L^{-1}M^{-1} \end{aligned} \quad (Π2.35)$$

Π2.5 Εξισώσεις Συμβιβαστότητας για τις Ιδιοτιμές $\lambda^{(j)}$

Από την ανάλυση που έγινε για την Ιακωβιανή ορίζουσα A της μη-συντηρητικής γραφής της μονοδιάστατης εξίσωσης ροής, μπορούν να προκύψουν τρεις εξισώσεις, οι οποίες ονομάζονται εξισώσεις συμβιβαστότητας του συστήματος, λόγω της ιδιαίτερης φυσικής σημασίας που αυτές έχουν. Οι εξισώσεις συμβιβαστότητας προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό των εξισώσεων ροής με τα αριστερά ιδιοδιανύσματα του συστήματος $I^{(j)}$, δηλαδή

$$I^{(j)} \frac{\partial V}{\partial t} + I^{(j)} \tilde{A} \frac{\partial V}{\partial x} = I^{(j)} \tilde{Q} \quad , \quad j=1,2,3 \quad (Π2.36)$$

$$\begin{aligned} L^{-1} \frac{\partial V}{\partial t} + L^{-1} \tilde{A} \frac{\partial V}{\partial x} &= L^{-1} \tilde{Q} \\ \Rightarrow L^{-1} \frac{\partial V}{\partial t} + L^{-1} \tilde{A} L L^{-1} \frac{\partial V}{\partial x} &= L^{-1} \tilde{Q} \\ \Rightarrow L^{-1} \frac{\partial V}{\partial t} + \Lambda L^{-1} \frac{\partial V}{\partial x} &= L^{-1} \tilde{Q} \end{aligned} \quad (Π2.37)$$

Η εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων δίνει ότι

Π2.9

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & \emptyset & -\frac{1}{c^2} \\ \emptyset & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ \emptyset & 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} u & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & u+c & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & u-c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \emptyset & -\frac{1}{c^2} \\ \emptyset & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ \emptyset & 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{Bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} 1 & \emptyset & -\frac{1}{c^2} \\ \emptyset & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ \emptyset & 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -\rho u \\ \emptyset \\ -\rho c^2 u \end{Bmatrix} \frac{1}{S} \frac{dS}{dx}
 \end{aligned} \tag{Π2.38}$$

Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό των δυο μητρώων στο συντελεστή της χωρικής παραγώγου, παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} u & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & u+c & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & u-c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \emptyset & -\frac{1}{c^2} \\ \emptyset & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ \emptyset & 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & \emptyset & -\frac{u}{c^2} \\ \emptyset & u+c & \frac{u+c}{\rho c} \\ \emptyset & u-c & -\frac{u-c}{\rho c} \end{bmatrix} \tag{Π2.39}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (Π2.38) και (Π2.39) προκύπτουν οι αναλυτικές εκφράσεις για τις τρεις εξισώσεις συμβιβαστότητας που είναι

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{u}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{Π2.40α}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} + (u+c) \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} \right\} = -\frac{uc}{S} \frac{dS}{dx} \tag{Π2.40β}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} + (u-c) \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} \right\} = -\frac{uc}{S} \frac{dS}{dx} \tag{Π2.40γ}$$

Στο σημείο αυτό εισάγουμε τις χαρακτηριστικές μεταβλητές του συστήματος, οι οποίες ορίζονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\delta W = L^{-1} \delta V \tag{Π2.41}$$

ή αναλυτικότερα ως

$$\begin{pmatrix} \delta w_1 \\ \delta w_2 \\ \delta w_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \emptyset & -\frac{1}{c^2} \\ \emptyset & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ \emptyset & 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta \rho \\ \delta u \\ \delta p \end{pmatrix} \quad (\text{Π2.42})$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \delta w_1 &= \delta \rho - \frac{1}{c^2} \delta p \\ \delta w_2 &= \delta u + \frac{1}{\rho c} \delta p \\ \delta w_3 &= \delta u - \frac{1}{\rho c} \delta p \end{aligned} \quad (\text{Π2.43})$$

Π2.6 Χαρακτηριστική Γραφή των Μονοδιάστατων Εξισώσεων Ροής

Χρησιμοποιώντας την τελική έκφραση της σχέσης (Π2.37) και πολλαπλασιάζοντας αριστερά με το μητρώο L προκύπτει ότι

$$\rightarrow \frac{\partial W}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial W}{\partial x} = L^{-1} \tilde{Q} \quad (\text{Π2.44})$$

Η παραπάνω γραφή είναι ένα μη-πεπλεγμένο σύνολο εξισώσεων ως προς τις χαρακτηριστικές μεταβλητές που παρουσιάσαμε προηγουμένως, αφού αναλυτικότερα γράφεται ως

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} u & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & u+c & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & u-c \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset \\ -uc \\ uc \end{pmatrix} \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \quad (\text{Π2.45})$$

ή ακόμα και ως

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + u \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial w_2}{\partial x} = -\frac{uc}{S} \frac{dS}{dx} \quad (\text{Π2.46})$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial w_3}{\partial x} = \frac{uc}{S} \frac{dS}{dx}$$

Οι εξισώσεις (Π2.46) εκφράζουν τον τρόπο με τον οποίο οι χαρακτηριστικές ποσότητες w_1, w_2, w_3 του συστήματος μεταφέρονται πάνω στις αντίστοιχες χαρακτηριστικές με ταχύτητα $\lambda_{(j)}$.

Π2.7 Οι Μεταβλητές και οι Αμετάβλητες Riemann

Οι εξισώσεις (Π2.46) μας επιτρέπουν να ορίσουμε τις λεγόμενες μεταβλητές και αμετάβλητες ποσότητες κατά Riemann. Ο ορισμός τους προκύπτει από τη φυσική σημασία που αποδίδεται στις εξισώσεις αυτές και είναι

(α) η ποσότητα $\delta w_1 = \delta \rho - \frac{1}{c^2} \delta p$ διατηρείται, μεταφερόμενη με ταχύτητα u πάνω στη

χαρακτηριστική που έχει εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = u$$

και γι' αυτό λέγεται αμετάβλητη ποσότητα Riemann.

(β) η ποσότητα $\delta w_2 = \delta u + \frac{1}{\rho c} \delta p = \delta u + \frac{c \delta \rho}{\rho}$ μεταφέρεται με νόμο που εκφράζει η δεύτερη

εξίσωση (Π2.46), πάνω στη χαρακτηριστική που έχει εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = u + c$$

και γι' αυτό ονομάζεται μεταβλητή ποσότητα Riemann.

(γ) η ποσότητα $\delta w_3 = \delta u - \frac{1}{\rho c} \delta p = \delta u - \frac{c \delta \rho}{\rho}$ μεταφέρεται με νόμο που εκφράζει η τρίτη

Π2.12

εξίσωση (Π2.46), πάνω στη χαρακτηριστική που έχει εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = u - c$$

και γι' αυτό ονομάζεται επίσης μεταβλητή Riemann.

Π2.8 Παρατηρήσεις πάνω στις Εξισώσεις Συμβιβαστότητας

Οι εξισώσεις συμβιβαστότητας μπορούν εναλλακτικά να γραφούν στη μορφή

$$d^{(0)}\rho - \frac{1}{c^2} d^{(0)}p = 0$$

$$d^{(+)}u + \frac{1}{\rho c} d^{(+)}p = -\frac{uc}{S} \frac{dS}{dx} \quad (\text{Π2.47})$$

$$d^{(-)}u - \frac{1}{\rho c} d^{(-)}p = +\frac{uc}{S} \frac{dS}{dx}$$

όπου οι τελεστές $d^{(0)}$, $d^{(+)}$, $d^{(-)}$ αντιστοιχούν στις τρεις ιδιοτιμές του συστήματος $(u, u+c, u-c)$ και ορίζονται ως

$$d^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$$

$$d^{(+)} = \frac{\partial}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{Π2.48})$$

$$d^{(-)} = \frac{\partial}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial}{\partial x}$$

Για εκπαιδευτικούς λόγους θα παρουσιασθεί η φυσική σημασία της πρώτης εξίσωσης συμβιβαστότητας. Γνωρίζουμε ότι η εντροπία, σε κάθε σημείο του πεδίου δίνεται ως

$$S - S_A = c_v \ln \frac{p/p_A}{(\rho/\rho_A)^\gamma}$$

$$\rightarrow S - S_A = c_v \ln p - c_v \ln p_A + \gamma c_v \ln \rho_A - \gamma c_v \ln \rho \quad (\text{Π2.49})$$

$$\rightarrow dS = c_v \frac{dp}{p} - \gamma c_v \frac{d\rho}{\rho}$$

όπου τα μεγέθη με δείκτη (A) αφορούν ένα αυθαίρετο σημείο αναφοράς του πεδίου. Η τελική σχέση της (Π2.49) είναι ουσιαστικά μια βολική γραφή για το διαφορικό της εντροπίας. Παίρνοντας υπ' όψη ότι

$$\frac{\gamma P}{\rho} = c^2$$

προκύπτει τελικά ότι

$$ds = -\frac{\gamma c_v}{\rho} \left(d\rho - \frac{dP}{c^2} \right) \quad (\text{Π2.50})$$

Η σχέση (Π2.50) δείχνει ότι η πρώτη χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος (Π2.47) ισοδυναμεί απλά με τη διατήρηση της εντροπίας

$$d^{(\phi)}S = 0$$

στη χαρακτηριστική $\frac{dx}{dt} = u$. Προφανώς κάτι τέτοιο παύει να ισχύει αν υπάρχουν ασυνέχειες

στο πεδίο ροής.

Τέλος, οι χαρακτηριστικές εξισώσεις μπορούν ακόμα να γραφούν στη μορφή

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{2c}{\gamma - 1} \right) + (u + c) \frac{\partial}{\partial x} \left(u + \frac{2c}{\gamma - 1} \right) = -cu \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \quad (\text{Π2.51})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u - \frac{2c}{\gamma - 1} \right) + (u - c) \frac{\partial}{\partial x} \left(u - \frac{2c}{\gamma - 1} \right) = cu \frac{1}{S} \frac{dS}{dx}$$

όπου για τη δεύτερη και τρίτη εξίσωση έγιναν κατάλληλες αναδιατάξεις όρων σαν αυτές που χρησιμοποιήθηκαν προηγουμένα για την πρώτη εξίσωση.

Για περαιτέρω εμβάθυνση στην ύλη που παρουσιάστηκε στο παράρτημα αυτό συνιστάται το βιβλίο:

C. Hirsch, "Numerical Computation of Internal and External Flows", Volume 2, John Wiley and sons, 1990.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π3

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ FALKNER-SKAN

Π3.1 Η Αριθμητική Λύση του Hartree

Γύρω στο 1937, ο Hartree παρουσίασε αριθμητικές λύσεις της εξίσωσης Falkner-Skan. Οι αριθμητικές αυτές λύσεις αφορούν τη διαφορική εξίσωση (10.72) που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 10 και που επαναλαμβάνεται εδώ για λόγους πληρότητας

$$f''' + \alpha f f'' + \beta(1-f'^2) = 0 \quad (10.72)$$

με οριακές συνθήκες τις

$$f=0, \quad f'=0, \quad \text{για } \eta=0 \quad (10.71)$$

$$f'=1, \quad \text{για } \eta=\infty$$

Η εξίσωση των Falkner-Skan δίνει την αδιάστατη ροϊκή συνάρτηση $f(\eta)$ που, αν χρησιμοποιηθεί για την έκφραση της κατανομής ταχύτητας στο στρωτό οριακό στρώμα, επιτρέπει την ύπαρξη ομοιότητας. Η αδιάστατη συντεταγμένη η έχει ορισθεί ως

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{u_e}{xv}} \quad (10.81)$$

και η ομοιότητα ισχύει για εξωτερική ταχύτητα του τύπου

$$u_e = kx^m \quad (10.76)$$

όπου επιπλέον ορίζεται και η παράμετρος β ως

$$m = \frac{\beta}{2-\beta} \quad \text{ή} \quad \beta = \frac{2m}{m+1} \quad (10.74)$$

Τέλος, η ύπαρξη ομοιότητας προκύπτει στη μορφή

$$\frac{u}{u_e} = \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \quad (10.75)$$

Οι λύσεις που υπολόγισε ο Hartree αφορούν το διάστημα $-0.1988 < \beta < 2.00$ ή ισοδύναμα $-0.0904 < m < \infty$, με βάση τη μεταξύ των m και β σχέση που αναφέρθηκε προηγουμένα. Σημειώνουμε ότι, σύμφωνα με την εξίσωση (10.76) που καθορίζει τη μορφή της εξωτερικής ταχύτητας, θετικές τιμές του β ή του m αντιστοιχούν σε επιταχυνόμενη εξωτερική ροή, ενώ αρνητικές τιμές τους αντιστοιχούν σε επιβραδυνόμενη εξωτερική ροή. Η τιμή $\beta = -0.1988$ (ή $m = -0.0904$) αντιστοιχεί σε εκείνη την κατανομή ταχύτητας για την οποία στο στερεό τοίχωμα ισχύει ότι $f'(\eta=0) = 0$, έχει δε σημασία για την περίπτωση της αποκολλημένης ροής.

Π3.2 Πίνακες

Στην Ενότητα αυτή δίνονται σε πίνακες οι αριθμητικές λύσεις του Hartree. Εδώ αναδημοσιεύονται από το βιβλίο του A. Walz με τίτλο "Boundary Layers of Flow and Temperature" (The MIT Press, 1969). Για κάθε τιμή της παραμέτρου β ή m παρουσιάζεται επίσης η τιμή της ποσότητας

$$H_{32k} = \frac{\int_0^{\delta} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u^2}{u_e^2} \right) dy}{\int_0^{\delta} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy} = \frac{\delta_{3k}}{\delta_{2k}}$$

П3.3

| β | -0.1988 | -0.19 | -0.18 | -0.16 | -0.14 | -0.10 | 0 |
|-----------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------|---------------------|
| m | -0.0904 | -0.0867 | -0.0826 | -0.0741 | -0.0654 | -0.0476 | 0.0000 |
| H_{32k} | 1.5150 | 1.5200 | 1.5250 | 1.5333 | 1.5400 | 1.5517 | 1.5720 |
| η | $f' = u/u_e$ | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | 0.0010 | 0.0095 | 0.0137 ₅ | 0.0198 ₅ | 0.0246 ₅ | 0.0324 | 0.0469 ₅ |
| 0.2 | 0.0040 | 0.0209 | 0.0293 | 0.0413 | 0.0507 | 0.0659 | 0.0939 |
| 0.3 | 0.0089 | 0.0343 | 0.0467 | 0.0643 | 0.0781 | 0.1003 | 0.1408 |
| 0.4 | 0.0158 | 0.0495 | 0.0659 | 0.0889 | 0.1069 | 0.1356 | 0.1876 |
| 0.5 | 0.0248 | 0.0665 | 0.0868 | 0.1151 | 0.1370 | 0.1718 | 0.2342 |
| 0.6 | 0.0358 | 0.0855 | 0.1094 | 0.1427 | 0.1684 | 0.2088 | 0.2806 |
| 0.7 | 0.0487 | 0.1063 | 0.1338 | 0.1719 | 0.2010 | 0.2466 | 0.3266 |
| 0.8 | 0.0636 | 0.1289 | 0.1598 | 0.2023 | 0.2347 | 0.2849 | 0.3720 |
| 0.9 | 0.0803 | 0.1533 | 0.1874 | 0.2341 | 0.2694 | 0.3237 | 0.4167 |
| 1.0 | 0.0991 | 0.1794 | 0.2166 | 0.2671 | 0.3050 | 0.3628 | 0.4606 |
| 1.2 | 0.1423 | 0.2364 | 0.2791 | 0.3362 | 0.3784 | 0.4415 | 0.5453 |
| 1.4 | 0.1927 | 0.2991 | 0.3463 | 0.4083 | 0.4534 | 0.5194 | 0.6244 |
| 1.6 | 0.2498 | 0.3665 | 0.4170 | 0.4820 | 0.5284 | 0.5948 | 0.6967 |
| 1.8 | 0.3126 | 0.4372 | 0.4896 | 0.5555 | 0.6016 | 0.6660 | 0.7610 |
| 2.0 | 0.3802 | 0.5095 | 0.5621 | 0.6269 | 0.6712 | 0.7314 | 0.8167 |
| 2.2 | 0.4509 | 0.5814 | 0.6327 | 0.6944 | 0.7354 | 0.7896 | 0.8633 |
| 2.4 | 0.5230 | 0.6509 | 0.6995 | 0.7561 | 0.7927 | 0.8398 | 0.9011 |
| 2.6 | 0.5946 | 0.7162 | 0.7605 | 0.8107 | 0.8422 | 0.8817 | 0.9306 |
| 2.8 | 0.6635 | 0.7754 | 0.8146 | 0.8574 | 0.8836 | 0.9153 | 0.9529 |
| 3.0 | 0.7278 | 0.8273 | 0.8607 | 0.8959 | 0.9168 | 0.9413 | 0.9691 |
| 3.2 | 0.7858 | 0.8713 | 0.8986 | 0.9265 | 0.9425 | 0.9607 | 0.9804 |
| 3.4 | 0.8364 | 0.9071 | 0.9286 | 0.9499 | 0.9616 | 0.9746 | 0.9880 |
| 3.6 | 0.8789 | 0.9352 | 0.9515 | 0.9669 | 0.9752 | 0.9841 | 0.9929 |
| 3.8 | 0.9132 | 0.9563 | 0.9681 | 0.9789 | 0.9845 | 0.9904 | 0.9959 |
| 4.0 | 0.9399 | 0.9716 | 0.9798 | 0.9871 | 0.9907 | 0.9944 | 0.9978 |
| 4.2 | 0.9598 | 0.9822 | 0.9876 | 0.9924 | 0.9946 | 0.9969 | 0.9988 |
| 4.4 | 0.9741 | 0.9893 | 0.9927 | 0.9957 | 0.9970 | 0.9983 | 0.9994 |
| 4.6 | 0.9839 | 0.9938 | 0.9959 | 0.9977 | 0.9984 | 0.9991 | 0.9997 |
| 4.8 | 0.9904 | 0.9965 | 0.9978 | 0.9988 | 0.9992 | 0.9996 | 0.9999 |
| 5.0 | 0.9945 | 0.9981 ₅ | 0.9988 ₅ | 0.9994 | 0.9996 | 0.9998 | 0.9999 ₅ |
| 5.2 | 0.9969 | 0.9990 | 0.9994 | 0.9997 | 0.9998 | 0.9999 | 1.0000 |
| 5.4 | 0.9984 | 0.9995 | 0.9997 | 0.9999 | 0.9999 ₅ | 1.0000 | — |
| 5.6 | 0.9992 | 0.9997 | 0.9999 | 0.9999 ₅ | 1.0000 | — | — |
| 5.8 | 0.9996 ₅ | 0.9999 | 0.9999 ₅ | 1.0000 | — | — | — |
| 6.0 | 0.9998 ₅ | 0.9999 ₅ | 1.0000 | — | — | — | — |
| 6.2 | 0.9999 ₅ | 1.0000 | — | — | — | — | — |
| 6.4 | 1.0000 | — | — | — | — | — | — |

П3.4

| β | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.8 |
|-----------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| m | 0.0526 | 0.1111 | 0.1765 | 0.2500 | 0.3333 | 0.4286 | 0.6666 |
| H_{32k} | 1.5857 | 1.5950 | 1.6018 | 1.6070 | 1.6113 | 1.6150 | 1.6207 |
| η | $f' = u/u_e$ | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | 0.0582 | 0.0677 | 0.0760 | 0.0834 | 0.0903 | 0.0966 | 0.1080 |
| 0.2 | 0.1154 | 0.1334 | 0.1490 | 0.1628 | 0.1756 | 0.1872 | 0.2081 |
| 0.3 | 0.1715 | 0.1970 | 0.2189 | 0.2382 | 0.2558 | 0.2719 | 0.3003 |
| 0.4 | 0.2265 | 0.2584 | 0.2858 | 0.3097 | 0.3311 | 0.3506 | 0.3848 |
| 0.5 | 0.2803 | 0.3177 | 0.3495 | 0.3771 | 0.4015 | 0.4235 | 0.4619 |
| 0.6 | 0.3328 | 0.3747 | 0.4100 | 0.4403 | 0.4670 | 0.4907 | 0.5317 |
| 0.7 | 0.3839 | 0.4294 | 0.4672 | 0.4994 | 0.5276 | 0.5524 | 0.5947 |
| 0.8 | 0.4335 | 0.4816 | 0.5212 | 0.5545 | 0.5834 | 0.6086 | 0.6512 |
| 0.9 | 0.4815 | 0.5312 | 0.5718 | 0.6055 | 0.6344 | 0.6596 | 0.7015 |
| 1.0 | 0.5274 | 0.5782 | 0.6190 | 0.6526 | 0.6811 | 0.7056 | 0.7460 |
| 1.2 | 0.6135 | 0.6640 | 0.7033 | 0.7351 | 0.7615 | 0.7837 | 0.8194 |
| 1.4 | 0.6907 | 0.7383 | 0.7743 | 0.8027 | 0.8258 | 0.8449 | 0.8748 |
| 1.6 | 0.7583 | 0.8011 | 0.8326 | 0.8568 | 0.8760 | 0.8917 | 0.9154 |
| 1.8 | 0.8160 | 0.8528 | 0.8791 | 0.8988 | 0.9141 | 0.9264 | 0.9443 |
| 2.0 | 0.8637 | 0.8940 | 0.9151 | 0.9305 | 0.9421 | 0.9514 | 0.9644 |
| 2.2 | 0.9019 | 0.9260 | 0.9421 | 0.9537 | 0.9621 | 0.9689 | 0.9779 |
| 2.4 | 0.9315 | 0.9500 | 0.9617 | 0.9700 | 0.9760 | 0.9807 | 0.9867 |
| 2.6 | 0.9537 | 0.9672 | 0.9754 | 0.9812 | 0.9852 | 0.9884 | 0.9922 |
| 2.8 | 0.9697 | 0.9792 | 0.9847 | 0.9886 | 0.9913 | 0.9933 | 0.9956 |
| 3.0 | 0.9808 | 0.9873 | 0.9908 | 0.9933 | 0.9952 | 0.9962 | 0.9976 |
| 3.2 | 0.9883 | 0.9924 | 0.9946 | 0.9962 | 0.9974 | 0.9979 | 0.9987 |
| 3.4 | 0.9931 | 0.9957 | 0.9970 | 0.9979 | 0.9986 | 0.9989 | 0.9993 |
| 3.6 | 0.9961 | 0.9976 | 0.9984 | 0.9989 | 0.9993 | 0.9995 | 0.9997 |
| 3.8 | 0.9978 | 0.9987 | 0.9991 ₅ | 0.9994 | 0.9997 | 0.9997 ₅ | 0.9998 ₅ |
| 4.0 | 0.9988 ₅ | 0.9993 | 0.9995 ₅ | 0.9997 | 0.9999 | 0.9999 ₅ | 0.9999 ₅ |
| 4.2 | 0.9994 | 0.9996 ₅ | 0.9997 ₅ | 0.9999 | 0.9999 ₅ | 0.9999 ₅ | 1.0000 |
| 4.4 | 0.9997 | 0.9998 ₅ | 0.9999 | 0.9999 ₅ | 1.0000 | 1.0000 | — |
| 4.6 | 0.9998 ₅ | 0.9999 ₅ | 0.9999 ₅ | 1.0000 | — | — | — |
| 4.8 | 0.9999 ₅ | 1.0000 | 1.0000 | — | — | — | — |
| 5.0 | 1.0000 | — | — | — | — | — | — |

П3.5

| β | 1.0 | 1.2 | 1.6 | 2.0 |
|-----------|--------------|---------------------|--------|---------------------|
| m | 1.0 | 1.5 | 4.0000 | ∞ |
| H_{32k} | 1.6250 | 1.6290 | 1.6345 | 1.6380 |
| η | $f' = u/u_e$ | | | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | 0.1183 | 0.1276 | 0.1441 | 0.1588 |
| 0.2 | 0.2266 | 0.2433 | 0.2726 | 0.2980 |
| 0.3 | 0.3252 | 0.3475 | 0.3859 | 0.4186 |
| 0.4 | 0.4144 | 0.4405 | 0.4849 | 0.5219 |
| 0.5 | 0.4946 | 0.5231 | 0.5708 | 0.6096 |
| 0.6 | 0.5662 | 0.5959 | 0.6446 | 0.6834 |
| 0.7 | 0.6298 | 0.6596 | 0.7076 | 0.7449 |
| 0.8 | 0.6859 | 0.7150 | 0.7610 | 0.7958 |
| 0.9 | 0.7350 | 0.7629 | 0.8058 | 0.8376 |
| 1.0 | 0.7778 | 0.8037 | 0.8432 | 0.8717 |
| 1.2 | 0.8467 | 0.8682 | 0.8997 | 0.9214 |
| 1.4 | 0.8968 | 0.9137 | 0.9375 | 0.9530 |
| 1.6 | 0.9324 | 0.9450 | 0.9620 | 0.9726 |
| 1.8 | 0.9569 | 0.9658 | 0.9775 | 0.9845 |
| 2.0 | 0.9732 | 0.9793 | 0.9871 | 0.9914 |
| 2.2 | 0.9841 | 0.9879 | 0.9928 | 0.9954 |
| 2.4 | 0.9905 | 0.9931 | 0.9961 | 0.9976 |
| 2.6 | 0.9946 | 0.9962 | 0.9980 | 0.9989 |
| 2.8 | 0.9971 | 0.9980 | 0.9990 | 0.9994 ₅ |
| 3.0 | 0.9985 | 0.9989 | 0.9995 | 0.9997 |
| 3.2 | 0.9992 | 0.9995 | 0.9998 | 0.9999 |
| 3.4 | 0.9996 | 0.9997 ₅ | 0.9999 | 1.0000 |
| 3.6 | 0.9998 | 0.9999 | 1.0000 | — |
| 3.8 | 0.9999 | 1.0000 | — | — |
| 4.0 | 1.0000 | — | — | — |

Η ποσότητα $f_1(m)$ η οποία έχει ορισθεί στη σχέση (10.89α) ως

$$f_1(m) = \int_0^{\infty} (1-F) dn \quad (10.89\alpha)$$

μπορεί να προκύψει από την ολοκλήρωση των κατανομών που δίνουν οι προηγούμενοι πίνακες, για κάθε τιμή της παραμέτρου m . Η ολοκλήρωση αυτή πραγματοποιήθηκε αριθμητικά και τα αποτελέσματά της πινακοποιούνται στη συνέχεια. Η ακρίβεια με την οποία δίνονται τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης κρίνεται επαρκής για υπολογισμούς στρωτών οριακών στρωμάτων. Για τις ενδιάμεσες τιμές του m από αυτές που δίνει ο πίνακας συνιστάται κατάλληλη αριθμητική παρεμβολή.

Τέλος, επειδή για τον υπολογισμό του παράγοντα καταστροφής θα χρειασθεί η ποσότητα

$$\alpha_D(m) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\partial F(\eta, m)}{\partial \eta} \right\}^2 d\eta$$

η τελευταία έχει επίσης υπολογισθεί και πινακοποιηθεί. Για την ακρίβειά της αλλά και τον τρόπο χρήσης της ισχύουν όσα αναφέρθηκαν προηγουμένα.

П3.7

| β | m | f_1 (m) | a_D (m) |
|---------|----------|-----------|-----------|
| -0.1988 | -0.0904 | 2.3587 | 0.2672 |
| -0.19 | -0.0867 | 2.0070 | 0.2717 |
| -0.18 | -0.0826 | 1.8713 | 0.2773 |
| -0.16 | -0.0741 | 1.7076 | 0.2880 |
| -0.14 | -0.0654 | 1.5967 | 0.2988 |
| -0.10 | -0.0476 | 1.4436 | 0.3197 |
| 0.00 | 0.00 | 1.2167 | 0.3692 |
| 0.1 | 0.0526 | 1.0803 | 0.4141 |
| 0.2 | 0.1111 | 0.9838 | 0.4557 |
| 0.3 | 0.1765 | 0.9109 | 0.4943 |
| 0.4 | 0.2500 | 0.8526 | 0.5304 |
| 0.5 | 0.3333 | 0.8044 | 0.5646 |
| 0.6 | 0.4286 | 0.7638 | 0.5969 |
| 0.8 | 0.6666 | 0.6987 | 0.6572 |
| 1.0 | 1.0 | 0.6478 | 0.7128 |
| 1.2 | 1.5 | 0.6068 | 0.7646 |
| 1.6 | 4.0 | 0.5439 | 0.8593 |
| 2.0 | ∞ | 0.4974 | 0.9447 |

ΣΥΝΕΚΤΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΙΣ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΕΣ

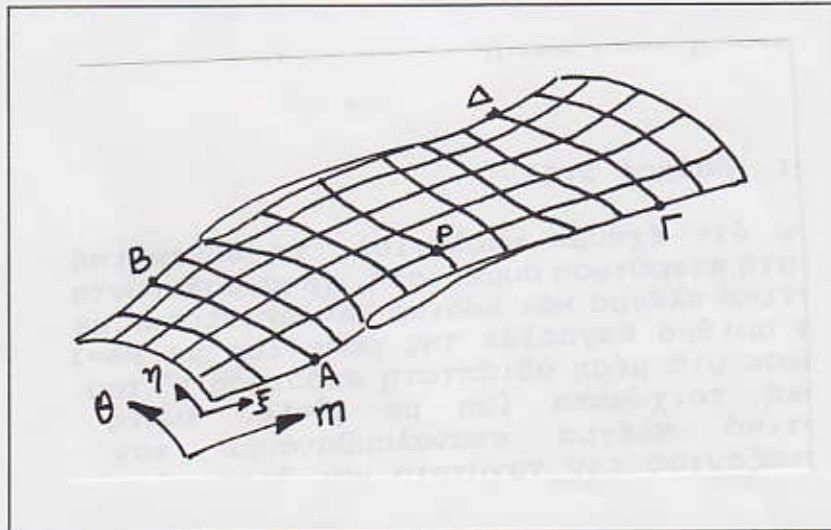
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα σκαρίφημα του υπολογιστικού χωρίου και του πλέγματος τύπου H, που χρησιμοποιήσαμε για να επιλύσουμε τις διδιάστατες εξισώσεις Navier-Stokes στην από-πτερύγιο-σε-πτερύγιο επιφάνεια μιας στροβιλομηχανής. Η επιφάνεια αυτή χαρακτηρίζεται από μεταβλητή ακτίνα $R=R(m)$ και μεταβλητό πάχος σωλήνα ροής $h=h(m)$. Με σκοπό ένα χονδρικό έλεγχο των αποτελεσμάτων που έδωσε ο κώδικας υπολογισμού, αποφασίζουμε να συγκρίνουμε την παροχή μάζας που περνά από τις δύο διατομές (AB) στην είσοδο και (BΓ) στην έξοδο. Αν για την επίλυση χρησιμοποιήθηκε ο τυπικός μετασχηματισμός $(m,\theta) \rightarrow (\xi,\eta)$, δείξτε ότι το ολοκληρωτικό θεώρημα διατήρησης της παροχής μάζας γράφεται:

$$\int_{\eta_A}^{\eta_B} \alpha(\eta) V^1 d\eta = \int_{\eta_C}^{\eta_D} \alpha(\eta) V^1 d\eta$$

και δώστε την έκφραση της ποσότητας $\alpha(\eta)$.



ΛΥΣΗ

Αν συμβολίσουμε με Q την παροχή μάζας η οποία περνά από οποιαδήποτε διατομή που αντιστοιχεί στις πλεγματικές γραμμές $\xi = \text{σταθ.}$ (π.χ. AB ή $\Gamma\Delta$), τότε αυτή θα δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$Q = \int_A^B dQ$$

όπου A και B ας είναι τα άκρα της πλεγματικής γραμμής που μελετάμε. Η στοιχειώδης παροχή μάζας από ένα στοιχειώδες μήκος τόξου ds θα είναι

$$dQ = \rho \vec{V} \cdot \vec{N} h ds$$

όπου N είναι το κάθετο στο ds μοναδιαίο διάνυσμα και h το πάχος του σωλήνα ροής στη θέση του ds . Το ds υπολογίζεται κατά μήκος μιας πλεγματικής γραμμής μεταβλητού η και συνεπώς

$$ds^2 = dm^2 + R^2 d\theta^2$$

με

$$dm = m_\eta d\eta \quad , \quad d\theta = \theta_\eta d\eta$$

άρα

$$ds = \sqrt{m_\eta^2 + R^2 \theta_\eta^2} = \sqrt{g_{22}} d\eta$$

Το κάθετο διάνυσμα \vec{N} αντίστοιχα υπολογίζεται ως

$$\vec{N} = \frac{\nabla \xi}{|\nabla \xi|} = \frac{\vec{g}^1}{\sqrt{g^{11}}}$$

Συνεπώς

$$dQ = \rho \vec{V} \cdot \vec{N} h ds = \rho h \vec{V} \cdot \vec{g}^1 \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g^{11}}} d\eta = \rho h R J V^1 d\eta$$

γιατί, όπως εύκολα αποδεικνύεται,

$$\sqrt{g_{22}} = R J \sqrt{g^{11}}$$

και εξ ορισμού

$$\vec{V} \cdot \vec{g}^1 = V^1$$

Ολοκληρώνοντας προκύπτει η παροχή από ολόκληρη τη διατομή AB ως

$$Q_{AB} = \int_{\eta_A}^{\eta_B} dQ = \int_{\eta_A}^{\eta_B} \rho J R h V^1 d\eta = \int_{\eta_A}^{\eta_B} \alpha(\eta) V^1 d\eta$$

όπου

$$\alpha(\eta) = \rho J R h$$

Η διατήρηση της παροχής μάζας για κάθε διατομή, συνεπάγεται ότι

$$Q_{AB} = Q_{\Gamma\Delta}$$

ή δηλαδή

$$\int_{\eta_A}^{\eta_B} \alpha(\eta) V^1 d\eta = \int_{\eta_\Gamma}^{\eta_\Delta} \alpha(\eta) V^1 d\eta$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Αν κατά την προηγούμενη επίλυση στην επιφάνεια S_1 η εφαρμογή των οριακών συνθηκών στα στερεά τοιχώματα έγινε με τη μέθοδο των συναρτήσεων τοίχου, σταματώντας κατά τα γνωστά την επίλυση στον κόμβο P της πρώτης πλεγματικής γραμμής μετά το στερεό τοίχωμα, αποδείξτε ότι η διατμητική τάση τ_w στον κόμβο P που ανήκει στη λογαριθμική περιοχή του συνεκτικού στρώματος μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$\tau_w = \frac{\kappa \rho k^{1/2} C_\mu^{1/4}}{\ln(E \gamma \rho k^{1/2} C_\mu^{1/4} / \mu)}$$

όπου οι ποσότητες ρ και k αντιστοιχούν στον κόμβο P. Ποια είναι η ποσότητα E;

ΛΥΣΗ

Αν P ο πρώτος πλεγματικός κόμβος μετά το στερεό τοίχωμα, ο οποίος ανήκει στη λογαριθμική περιοχή, έχει αποδειχθεί (σχέση (5.67) των σημειώσεων) ότι η τυρβώδης κινητική ενέργεια στον κόμβο αυτό δίνεται από τη σχέση

$$k = \frac{u_T^2}{\sqrt{c_\mu}} \Rightarrow |u_T| = k^{1/2} c_\mu^{1/4} \quad (1)$$

Η κατανομή ταχύτητας στη λογαριθμική περιοχή του οριακού στρώματος δίνεται από τη σχέση (5.24)

$$\frac{u}{u_T} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y |u_T| \rho}{\mu} \right) + c, \quad c = 5.5, \quad \kappa = 0.41$$

που ισοδύναμα γράφεται και ως

$$\frac{u}{u_T} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(E \frac{y |u_T| \rho}{\mu} \right) \quad (2)$$

όπου η νέα σταθερά E προκύπτει εύκολα ως

$$c = \frac{1}{\kappa} \ln E \Rightarrow E = e^{\kappa c} = 9.53$$

Αντικαθιστώντας την (1) στη (2), προκύπτει ότι

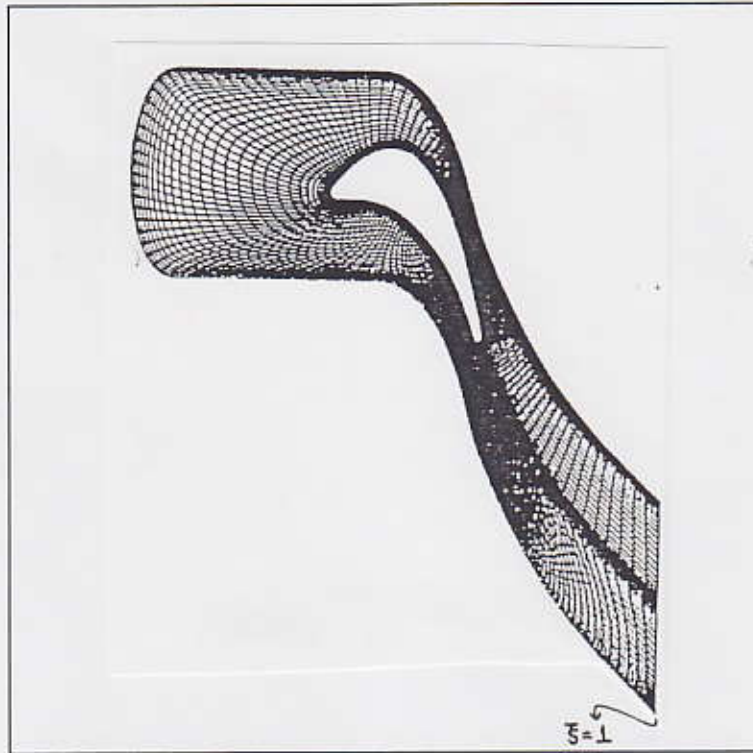
$$u_T = \frac{\kappa u}{\ln \left[E \frac{y k^{1/2} c_\mu^{1/4} \rho}{\mu} \right]} \Rightarrow \rho u_T^2 = \frac{\kappa u \rho k^{1/2} c_\mu^{1/4}}{\ln \left[E \frac{y k^{1/2} c_\mu^{1/4} \rho}{\mu} \right]}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δώστε με ακρίβεια τις οριακές συνθήκες που θα εφαρμοστούν στην έξοδο μιας επίπεδης περύγωσης συμπίεστη, που διακριτοποιείται με ένα πλέγμα τύπου C. Χρησιμοποιείτε τη θεωρία των χαρακτηριστικών, όπως αυτές εφαρμόζονται μόνο πάνω στις πλεγματικές γραμμές που συναντούν το όριο. Η έξοδος θεωρείται υποηχητική και η ανάλυση να παρουσιαστεί στη μια από τις δυο πλευρές εξόδου (π.χ. την πλευρά $\xi = 1$) με σχήματα πεπερασμένων διαφορών 2ης τάξης. Η απάντησή σας πρέπει να είναι λεπτομερής, φθάνοντας "ένα βήμα" πριν τον προγραμματισμό σε H/Y του αλγόριθμου που προτείνετε.

ΛΥΣΗ

Η ανάλυση που ακολουθεί αφορά την πλεγματική γραμμή $\xi = 1$ ενός πλέγματος τύπου C, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



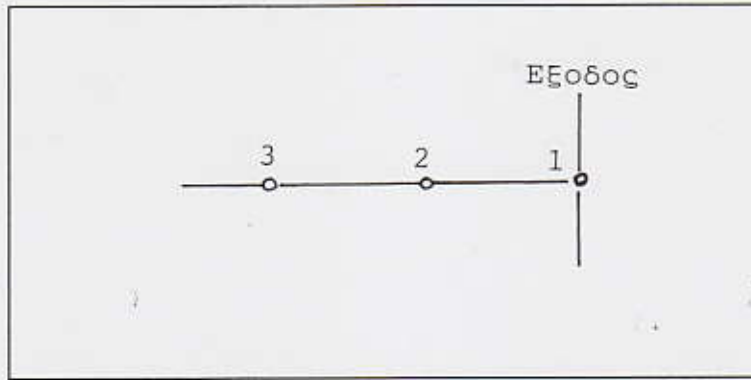
Η ταχύτητα είναι υποηχητική και κατά τα γνωστά υποτίθεται ότι εκεί επιβάλλεται η κατανομή της πίεσης p , ενώ τα υπόλοιπα τρία μεγέθη ροής υπολογίζονται από τις κατάλληλες τρεις χαρακτηριστικές εξισώσεις. Από τις σχέσεις (7.30) ως (7.33) των σημειώσεων, αμελώντας κάθε παράγωγο κατά την η-κατεύθυνση γράφουμε τις 3 χαρακτηριστικές εξισώσεις ως

$$-c^2 \frac{\partial p}{\partial t} = V^1 \left[c^2 \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \right] \quad (1)$$

$$-\xi_y \frac{\partial u}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial v}{\partial t} = V^1 \left(\xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} - \xi_x \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \quad (2)$$

$$\sqrt{g^{11}} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c \xi_x \frac{\partial u}{\partial t} + \rho c \xi_y \frac{\partial v}{\partial t} = -(V^1 + c\sqrt{g^{11}}) \left\{ \sqrt{g^{11}} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \rho c \xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \rho c \xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\} \quad (3)$$

Εστω ότι οι τρεις κόμβοι (1), (2) και (3) του παρακάτω σχήματος, πάνω στο πλέγμαπεπερασμένων διαφορών που θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυση, με τον κόμβο (1) να ανήκει στην οριακή πλεγματική γραμμή $\xi=1$. Εστω επίσης ότι, στα πλαίσια μιας ρητής επαναληπτικής διαδικασίας, έχουμε ανανεώσει τις τιμές των μεταβλητών ρ, p, u, v στο εσωτερικό του χωρίου (άρα γνωρίζουμε τις ποσότητες $u_2^{n+1}, u_3^{n+1}, \rho_2^{n+1}, \rho_3^{n+1}$ κλπ.) και



απομένει η εύρεση των ποσοτήτων ρ_1^{n+1} , u_1^{n+1} , v_1^{n+1} , p_1^{n+1} . Χρησιμοποιώντας σχήματα πεπερασμένων διαφορών ακρίβειας δεύτερης τάξης αναλύουμε τις (1), (2), (3) για τον κόμβο (1). Οι επιμέρους εμπλεκόμενες ποσότητες με χρονική διαφορά γράφονται

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1 = \rho_1^{n+1} - \rho_1^n = \delta \rho_1$$

και όμοια για τα u, v , ενώ το ότι η στατική πίεση είναι γνωστή σημαίνει απλά ότι

$$p_1^n = p_1^{n+1} \rightarrow \delta p_1 = 0$$

Οι κατά-ξ παράγωγοι γράφονται ως

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right)_1 = -\frac{3}{2}\rho_1^{n+1} + 2\rho_2^{n+1} - \frac{1}{2}\rho_3^{n+1} = -\frac{3}{2}\rho_1^n + 2\rho_2^{n+1} - \frac{1}{2}\rho_3^{n+1} - \frac{3}{2}\delta \rho_1$$

και όμοια για τις υπόλοιπες ποσότητες.

Αντικαθιστώντας τις διακριτοποιημένες παραγώγους στις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ένα αλγεβρικό σύστημα τριών εξισώσεων με άγνωστους τις διορθωτικές ποσότητες $\delta \rho_1$, δu_1 , δv_1 . Οι συντελεστές των αγνώστων και το δεξί μέλος αποτελείται από εκφράσεις γνωστών ποσοτήτων, δηλαδή:

- των μετρικών
- του ανανεωμένου $(n+1)$ πεδίου ροής στους κόμβους 2 και 3
- των ποσοτήτων ρ_1^n , u_1^n , v_1^n
- και της γνωστής πίεσης εξόδου $p_1^{n+1} = p_{\text{exit}}$

Το σύστημα αυτό επιλύεται εύκολα στη θέση 1 και προκύπτουν οι διορθώσεις $\delta \rho_1$, δu_1 , δv_1 και από αυτές ανανεώνονται οι ποσότητες ροής στη θέση (1) ως

$$\rho_1^{n+1} = \rho_1^n + \delta \rho_1$$

$$u_1^{n+1} = u_1^n + \delta u_1$$

$$v_1^{n+1} = v_1^n + \delta v_1$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Όταν λύνονται οι εξισώσεις Navier-Stokes στην επιφάνεια S_1 μιας στροβιλομηχανής, εμφανίζεται η τάση τ_{nn} όπως φαίνεται και από τις σημειώσεις σας. Ξεκινώντας από τη γενική έκφραση της τάσης αυτής, δώστε περισσότερο απλοποιημένες εκφράσεις για την τ_{nn} και τις υποθέσεις κάτω από τις οποίες αυτές ισχύουν. Πότε μηδενίζεται η τάση αυτή;

ΛΥΣΗ

Από τη σχέση (3.24) των σημειώσεων είναι

$$\tau_{nn} = 2\mu \frac{W_m}{h} \frac{\partial h}{\partial m} - \frac{2}{3} \mu \delta$$

όπου

$$\delta = \nabla \cdot \vec{W}$$

Αν η ροή είναι ασυμπίεστη τότε $\delta=0$ και η έκφραση του τ_{nn} απλοποιείται σημαντικά

$$\tau_{nn} = 2\mu \frac{W_m}{h} \frac{\partial h}{\partial m}$$

Προφανώς αν το πάχος των σωλήνων ροής h δεν μεταβάλλεται η τάση τ_{nn} , για ασυμπίεστες ροές, είναι μηδενική.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Εστω ότι έχουμε υπολογίσει τη συνεκτική ροή μέσα σε μια τριδιάστατη πτερύγωση συμπίεστη, χρησιμοποιώντας ένα συγκεκριμένο υπολογιστικό πλέγμα και κώδικα Navier-Stokes με το μοντέλο τύρβης $k-\epsilon$, για αριθμό Reynolds της ροής ίσο με $Re=10^5$. Ο υπολογισμός αυτός έδωσε μια μέση αδιάστατη απόσταση y^+ του πρώτου κόμβου από τα στερεά τοιχώματα ίση με $y^+=14$. Χωρίς να αλλάξουμε το υπολογιστικό πλέγμα επαναλαμβάνουμε τον ίδιο υπολογισμό δεκαπλασιάζοντας την ταχύτητα και διατηρώντας ίδια τα υπόλοιπα μεγέθη. Εκτιμήστε το αναμενόμενο νέο μέσο y^+ .

ΛΥΣΗ

Για την αδιάστατη απόσταση

$$y^+ = \frac{yu_T}{\nu}$$

η αλλαγή του αριθμού Reynolds της ροής, μέσω αλλαγής της ταχύτητας σημαίνει τροποποίηση της τιμής τους αφού μεταξύ δύο υπολογισμών (άτονα και τονούμενα μεγέθη), για την ίδια απόσταση y και την ίδια συνεκτικότητα ν ισχύει

$$\frac{(y^+)' }{y^+} = \frac{u_T'}{u_T} = \sqrt{\frac{\tau_w'}{\tau_w}}$$

Δεκαπλασιάζοντας την ταχύτητα ροής, δεκαπλασιάζουμε τον αριθμό Reynolds της ροής

$$Re' = 10Re$$

και συνεπώς

$$\frac{u_T'}{u_T} = \sqrt{\frac{\tau_w'}{\tau_w}} = \sqrt{10}$$

οπότε η νέα αδιάστατη απόσταση $(y^+)'$ αναμένεται (πολύ προσεγγιστικά!) να είναι περίπου

$$y^{+'} = y^+ \sqrt{10} \approx 45$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Εστω αξονοσυμμετρική επιφάνεια ροής σε πτερύγωση στροβιλομηχανής που έχει σταθερό πάχος σωλήνα ροής. Η σχέση που δίνει την ακτίνα συναρτήσει της αξονικής απόστασης z είναι

$$R = R_0 + az^2, \quad 0 < z < L$$

όπου z η αξονική απόσταση και a αυθαίρετη σταθερά. Η αφετηρία μέτρησης $z=0$ αντιστοιχεί στην είσοδο του χωρίου το οποίο επεκτείνεται μέχρι τη θέση $z=L$. Τα πτερύγια είναι επίπεδες επιφάνειες χωρίς πάχος και οι πλεγματικές γραμμές $\eta=\eta_{\min}$ και $\eta=\eta_{\max}$ ανήκουν σε μεσημβρινά επίπεδα στις γωνιακές θέσεις θ_1 και θ_2 αντίστοιχα. Χρησιμοποιείται πλέγμα $(M+1) \times (N+1)$ σημείων στην ξ και την η κατεύθυνση αντίστοιχα. Όλες οι πλεγματικές γραμμές σταθερού η απέχουν ίση γωνιακή απόσταση και όλες οι πλεγματικές σταθερού ξ απέχουν ίση μεσημβρινή απόσταση.

(α) Υπολογίστε την έκφραση του m συναρτήσει του z .

- (β) Για το μετασχηματισμό $(m, \theta) \rightarrow (\xi, \eta)$, υπολογίστε τις εκφράσεις των παρακάτω ποσοτήτων:
- των συνιστωσών της συναλλοίωτης διανυσματικής βάσης
 - των συνιστωσών της ανταλλοίωτης διανυσματικής βάσης
 - των στοιχείων του συναλλοίωτου μετρικού τανυστή
 - των στοιχείων του ανταλλοίωτου μετρικού τανυστή
 - την Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού
- (γ) Σχολιάστε τον τρόπο που οι ποσότητες που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα μεταβάλλονται όταν κινούμαστε πάνω στο πλέγμα κατά ξ και κατά η .

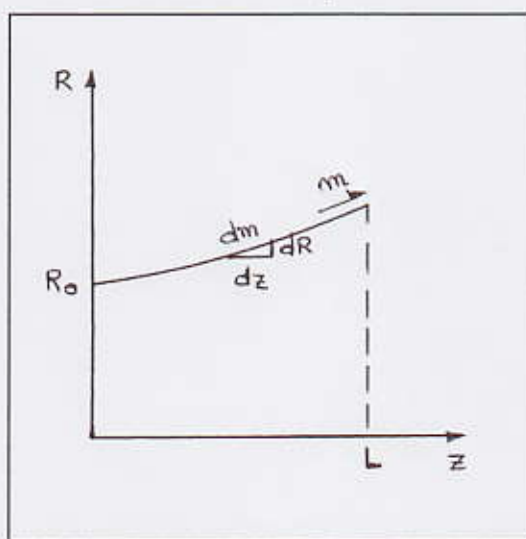
ΛΥΣΗ

- (α) Η μεσημβρινή απόσταση m μπορεί να προκύψει από την παρακάτω ολοκλήρωση

$$m = \int dm = \int \sqrt{(dz)^2 + (dR)^2} = \int \sqrt{1 + (2az)^2} dz$$

δίνοντας, με τον τρόπο αυτό τη μεσημβρινή θέση m ενός σημείου επί της αξονοσυμμετρικής επιφάνειας ροής, το οποίο βρίσκεται σε αξονική απόσταση $z=l$ από την αφετηρία και σε ακτίνα R . Το παρακάτω σχήμα δείχνει ενδεικτικά τη μορφή της γενέτειρας της αξονοσυμμετρικής επιφάνειας και βοηθά στην κατανόηση των παραπάνω. Επειδή ισχύει ότι

$$dR = \frac{\partial R}{\partial z} dz = 2az dz$$



προκύπτει εύκολα ότι

$$m(l) = \int_0^l \sqrt{1 + (2az)^2} dz = \frac{1}{2a} \left[2az \frac{\sqrt{4a^2z^2 + 1}}{2} + \frac{1}{2} \ln(2az + \sqrt{1 + 4a^2z^2}) \right]_0^l$$

ή ισοδύναμα ότι

$$m(L) = \frac{1}{2a} \left[2al \frac{\sqrt{1+4a^2l^2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(2al + \sqrt{1+4a^2l^2}) \right]$$

(β) Θα υπολογίσουμε κατ'αρχήν τις συναλλοίωτες μετρικές. Είναι

$$m_\xi = \frac{\partial m}{\partial \xi} = \frac{m(L)}{M},$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει εύκολα αφού οι M πλεγματικές γραμμές σταθερού ξ καταλαμβάνουν συνολικό μήκος $m(L)$ ενώ απέχουν ίση μεσημβρινή απόσταση. Επίσης

$$m_\eta = \frac{\partial m}{\partial \eta} = 0,$$

αφού όλες οι πλεγματικές γραμμές σταθερού η απέχουν ίση γωνιακή απόσταση και τα περύγια είναι επίπεδες επιφάνειες χωρίς πάχος.

Για τους ίδιους λόγους είναι απλό να δειχθεί ότι

$$\theta_\xi = 0$$

$$\theta_\eta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{N}$$

Στο σημείο αυτό υπολογίζουμε την Ιακωβιανή οριζούσα του μετασχηματισμού, που ισούται με

$$J = \frac{\partial(m, \theta)}{\partial(\xi, \eta)} = m_\xi \theta_\eta - m_\eta \theta_\xi = \frac{m(L)}{M} \cdot \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{N}$$

Η συναλλοίωτη διανυσματική βάση είναι εξ ορισμού

$$\vec{g}_1 = (m_\xi, R\theta_\xi) = \left(\frac{m(L)}{M}, 0 \right)$$

$$\vec{g}_2 = (m_\eta, R\theta_\eta) = \left(0, R \frac{\theta_2 - \theta_1}{N} \right)$$

Με τους γνωστούς τύπους μετασχηματισμού προκύπτει και η ανταλλοίωτη διανυσματική βάση, ως εξής

$$\vec{g}^1 = \left(\xi_m, \frac{1}{R} \xi_\theta \right) = \left(\frac{\theta_\eta}{J}, -\frac{1}{R} \frac{m_\eta}{J} \right) = \left(\frac{M}{m(L)}, 0 \right)$$

$$\vec{g}^2 = \left(\eta_m, \frac{1}{R} \eta_\theta \right) = \left(-\frac{\theta_\xi}{J}, \frac{1}{R} \frac{m_\xi}{J} \right) = \left(0, \frac{1}{R} \frac{N}{\theta_2 - \theta_1} \right)$$

αφού οι συνιστώσες του ανταλλοίωτου μετρικού τανυστή ισούνται με

$$\xi_m = \frac{\theta_\eta}{J} = \frac{M}{m(L)}$$

$$\xi_\theta = -\frac{m_\eta}{J} = 0$$

$$\eta_m = -\frac{\theta_\xi}{J} = 0$$

$$\eta_\theta = \frac{m_\xi}{J} = \frac{N}{\theta_2 - \theta_1}$$

Ακόμη ο συναλλοίωτος μετρικός τανυστής είναι

$$g_{11} = m_\xi^2 + R^2 \theta_\xi^2 = \frac{m^2(L)}{M^2}$$

$$g_{22} = m_\eta^2 + R^2 \theta_\eta^2 = \frac{R^2(\theta_2 - \theta_1)^2}{N^2}$$

$$g_{12} = m_\xi m_\eta + R^2 \theta_\xi \theta_\eta = 0$$

και αντίστοιχα ο ανταλλοίωτος μετρικός τανυστής

$$g^{11} = \xi_m^2 + \frac{1}{R^2} \xi_\theta^2 = \frac{\theta_\eta^2}{J^2} + \frac{1}{R^2} \frac{m_\eta^2}{J^2} = \frac{M^2}{m^2(L)}$$

$$g^{22} = \eta_m^2 + \frac{1}{R^2} \eta_\theta^2 = \frac{\theta_\xi^2}{J^2} + \frac{1}{R^2} \frac{m_\xi^2}{J^2} = \frac{1}{R^2} \frac{N^2}{(\theta_2 - \theta_1)^2}$$

$$g^{12} = \xi_m \eta_m + \frac{1}{R^2} \xi_\theta \eta_\theta = -\frac{\theta_\eta}{J} \cdot \frac{\theta_\xi}{J} + \frac{1}{R^2} \left(-\frac{m_\eta}{J} \right) \left(\frac{m_\xi}{J} \right) = 0$$

(γ) Όλες οι μη-ορθές μετρικές ($m_\eta, \theta_\xi, \eta_m, \xi_\theta, g_{12}, g^{12}$) παραμένουν μηδενικές σε ολόκληρο το χωρίο, αφού το πλέγμα μας είναι παντού ορθογώνιο. Σταθερή παραμένει παντού, εξ ορισμού, και η Ιακωβιανή J του μετασχηματισμού. Οι μετρικές g_{11} (μήκος κυψέλης κατά τη m -κατεύθυνση, όπου οι κόμβοι ισαπέχουν) και g^{11} παραμένουν σταθερές. Αντίστοιχα μεταβάλλονται οι g^{22} όταν κινούμαστε κατά m , αφού μεταβάλλεται η ακτίνα R .

ΑΣΚΗΣΗ 7

Αποδείξτε, με τη βοήθεια της παραδοχής Boussinesq, την έκφραση (5.84) των σημειώσεών σας, που δίνει την παραγωγή τυρβώδους κινητικής ενέργειας G . Ξεκινήστε από το ότι ο όρος G μοντελοποιεί την ποσότητα

$$G = -h \left\{ \bar{\rho} \widetilde{W_\theta'' W_\theta''} \left[\frac{\partial \bar{W}_\theta}{\partial \theta} + \bar{W}_m \frac{dR}{dm} \right] + R \bar{\rho} \widetilde{W_m'' W_m''} \frac{\partial \bar{W}_m}{\partial m} + \right. \\ \left. + \bar{\rho} \widetilde{W_\theta'' W_m''} \left[\frac{\partial \bar{W}_m}{\partial \theta} + R \frac{\partial \bar{W}_\theta}{\partial m} - \frac{dR}{dm} \bar{W}_\theta \right] \right\}$$

Κατά την απόδειξη αμελήστε τους όρους που περιέχουν την τυρβώδη κινητική ενέργεια.

ΛΥΣΗ

Θα χρησιμοποιήσουμε την παραδοχή Boussinesq η οποία επιτρέπει να εκφράσουμε τις τάσεις Reynolds με όμοιο τρόπο με τις συνεκτικές τάσεις, οπότε

$$-\bar{\rho} \widetilde{W_\theta'' W_\theta''} = \mu_t \left(\frac{4}{3} \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{W}_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{3} \frac{\bar{W}_m}{R} \frac{\partial R}{\partial m} - \frac{2}{3} \frac{\bar{W}_m}{h} \frac{\partial h}{\partial m} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{W}_m}{\partial m} \right)$$

$$-\bar{\rho} \widetilde{W_m'' W_m''} = \mu_t \left(\frac{4}{3} \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{W}_m}{\partial m} - \frac{2}{3R} \frac{\partial \bar{W}_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{3} \frac{\bar{W}_m}{R} \frac{\partial R}{\partial m} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{W}_m}{h} \frac{\partial h}{\partial m} \right)$$

$$-\bar{\rho} \widetilde{W_\theta'' W_m''} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{W}_\theta}{\partial m} + \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{W}_m}{\partial \theta} - \frac{\bar{W}_\theta}{R} \frac{\partial R}{\partial m} \right)$$

Οι όροι αυτοί προκύπτουν από την παραδοχή Boussinesq, αμελώντας τους όρους που περιέχουν την τυρβώδη κινητική ενέργεια.

Τότε, με απλή αντικατάσταση, προκύπτει το ζητούμενο αφού παραλείποντας τις \sim των μέσων όρων είναι

$$G = -h \left\{ \bar{\rho} \widetilde{W_\theta'' W_\theta''} \left[\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + W_m \frac{\partial R}{\partial m} \right] + R \bar{\rho} \widetilde{W_m'' W_m''} \frac{\partial W_m}{\partial m} + \right. \\ \left. + \bar{\rho} \widetilde{W_\theta'' W_m''} \left[\frac{\partial W_m}{\partial \theta} + R \frac{\partial W_\theta}{\partial m} - \frac{\partial R}{\partial m} W_\theta \right] \right\} \\ = h \mu_t \left[\frac{2}{3} \left(\frac{2}{R} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + \frac{W_m}{R} \frac{\partial R}{\partial m} - \frac{W_m}{h} \frac{\partial h}{\partial m} - \frac{\partial W_m}{\partial m} \right) \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + W_m \frac{\partial R}{\partial m} \right) \right] \\ - \frac{2}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + \frac{W_m}{R} \frac{\partial R}{\partial m} + \frac{W_m}{h} \frac{\partial h}{\partial m} - 2 \frac{\partial W_m}{\partial m} \right) \frac{\partial W_m}{\partial m} \\ + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta} + R \frac{\partial W_\theta}{\partial m} - \frac{\partial R}{\partial m} W_\theta \right)^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Για την ανάλυση των ασυμπίεστων ισορροπημένων οριακών στρωμάτων, ο Clauser εισήγαγε δύο χρήσιμες παραμέτρους μορφής, τις G και I . Μπορούμε να ορίσουμε τις δύο αυτές παραμέτρους με αντίστοιχο τρόπο, ως

$$G = \frac{\int_0^1 f^2 d\eta}{\int_0^1 f d\eta}, \quad I = \int_0^1 f d\eta$$

όπου η συνάρτηση $f=f(\eta)$ συμβολίζει την ελλειμματική κατανομή ταχύτητας

$$\frac{u_e - u}{u_\tau} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) = f(\eta)$$

όπου $\eta=y/\delta$ και δ είναι το πάχος του οριακού στρώματος.

Ζητούνται:

- (α) Να αποδειχθεί, χωρίς να χρησιμοποιηθούν υπάρχουσες σχέσεις από τις σημειώσεις σας, ότι

$$G = \sqrt{\frac{2}{c_f}} \left(1 - \frac{1}{H_{12}}\right)$$

- (β) Αντίστοιχα να αποδειχθεί η σχέση

$$I = \sqrt{\frac{2}{c_f}} \frac{\delta_1}{\delta}$$

- (γ) Εξηγείστε σύντομα, αλλά με σαφήνεια, γιατί για τα ασυμπίεστα ισορροπημένα οριακά στρώματα συναντώνται στη βιβλιογραφία εμπειρικές σχέσεις που δίνουν τα G και I συναρτήσει μόνο της παραμέτρου ισορροπίας Π . Μια τέτοια σχέση είναι για το G η γνωστή και ως σχέση του Nash, όπου

$$G = 6.1 (\Pi + 1.81)^{1/2} - 1.7$$

η οποία θα χρησιμοποιηθεί στην επόμενη άσκηση.

ΛΥΣΗ

- (α) Για ασυμπίεστη ροή, το πάχος μετατόπισης δ_1 και το πάχος ορμής δ_2 του οριακού στρώματος, γράφονται

$$\delta_1 = \int_0^\delta \frac{u_\epsilon - u}{u_\epsilon} dy = \delta \int_0^1 \frac{u_\epsilon - u}{u_\epsilon} d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \delta \frac{u_\tau}{u_\epsilon} \int_0^1 \frac{u_\epsilon - u}{u_\tau} d\eta = \delta \frac{u_\tau}{u_\epsilon} \int_0^1 f d\eta$$

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \int_0^\delta \frac{u}{u_\epsilon} \left(1 - \frac{u}{u_\epsilon}\right) dy = \int_0^\delta \frac{u}{u_\epsilon} \left(\frac{u_\epsilon - u}{u_\epsilon}\right) dy = \int_0^\delta \left(\frac{u_\epsilon - u}{u_\epsilon}\right) \left\{\frac{u_\epsilon - u}{u_\epsilon} - \frac{u_\epsilon - u}{u_\epsilon}\right\} dy = \\ &= \delta \int_0^1 \left(\frac{u_\epsilon - u}{u_\epsilon}\right) d\eta - \int_0^\delta \left(\frac{u_\epsilon - u}{u_\epsilon}\right)^2 d\eta = \delta \frac{u_\tau}{u_\epsilon} \int_0^1 f d\eta - \delta \frac{u_\tau^2}{u_\epsilon^2} \int_0^1 f^2 d\eta \end{aligned}$$

Συνεπώς το αντίστροφο του παράγοντα μορφής H_{12} , εξ' ορισμού, γράφεται

$$\frac{1}{H_{12}} = \frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{\delta \left(\frac{u_\tau}{u_\epsilon}\right) \int_0^1 f d\eta - \delta \left(\frac{u_\tau}{u_\epsilon}\right)^2 \int_0^1 f^2 d\eta}{\delta \left(\frac{u_\tau}{u_\epsilon}\right) \int_0^1 f d\eta}$$

και εκτελώντας τις πράξεις προκύπτει

$$\frac{1}{H_{12}} = 1 - \left(\frac{u_\tau}{u_\epsilon}\right) \frac{\int_0^1 f^2 d\eta}{\int_0^1 f d\eta} = 1 - \frac{u_\tau}{u_\epsilon} G \quad (1)$$

Ομως για το συντελεστή τριβής c_f γνωρίζουμε ότι

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho u_\epsilon^2}, \quad \tau_w = \rho u_\tau^2$$

και συνεπώς

$$\sqrt{\frac{c_f}{2}} = \frac{u_\tau}{u_\epsilon} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τη (2) στην (1) προκύπτει η ζητούμενη σχέση

$$\frac{1}{H_{12}} = 1 - \sqrt{\frac{c_f}{2}} G \Rightarrow G = \left(1 - \frac{1}{H_{12}}\right) \sqrt{\frac{2}{c_f}}$$

(β) Είναι, βάσει των σχέσεων που αποδείχθηκαν προηγουμένα,

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{u_\tau}{u_\epsilon} \int_0^1 f d\eta \Rightarrow \frac{\delta_1}{\delta} = \sqrt{\frac{c_f}{2}} I$$

και έτσι προκύπτει η ζητούμενη σχέση

$$I = \sqrt{\frac{2}{c_f} \frac{\delta_1}{\delta}}$$

(γ) Η υπόθεση της ισορροπίας των οριακών στρωμάτων σημαίνει την ύπαρξη ομοιότητας (σε κατάλληλη αδιάστατη μορφή) των κατανομών ταχύτητας, όπως αυτές εξελίσσονται στις διαδοχικές θέσεις πάνω σε μια στερεή επιφάνεια. Ένα ισορροπημένο οριακό στρώμα αντιστοιχεί σε μια τιμή της παραμέτρου ισορροπίας Π . Για σταθερή τιμή του Π , τα ισορροπημένα οριακά στρώματα διατηρούν την ομοιότητα

$$\frac{u_z - u}{u_\tau} = f(\eta)$$

όπου f ο αντίστοιχος σταθερός νόμος της ομοιότητας. Οι παράμετροι G και I του Clauser είναι συναρτήσεις του f , εξ' ορισμού, άρα για δεδομένο Π , συνεπώς δεδομένη κατανομή $f(\eta)$, έχουμε συγκεκριμένες τιμές για τις παραμέτρους G και I . Η σχέση του Nash εκφράζει ακριβώς τη μονοσήμαντη εξάρτηση του G από το Π .

ΑΣΚΗΣΗ 9

Χρησιμοποιούμε την ολοκληρωτική μέθοδο Le Foll για να υπολογίσουμε το προσκολλημένο οριακό στρώμα που αναπτύσσεται κατά μήκος ενός πτερυγίου στροβίλου, στην πλευρά υποπίεσης. Η ροή θεωρείται ασυμπίεστη και τυρβώδης. Στο σημείο A του σχήματος, έχουμε υπολογίσει τις τιμές των παραμέτρων L_k και X με το γνωστό αλγόριθμο χωροπροέλασης που αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 11, χρησιμοποιώντας τα ήδη γνωστά στοιχεία της προηγούμενης θέσης B. Έτσι, για το σημείο A υπολογίζουμε τις ποσότητες

$$L_k = 0.1 \quad , \quad X = 8.0$$

Υποθέτουμε ότι η κατανομή ταχύτητας μοντελοποιείται κατά Coles.

- a) Υπολογίστε πλήρως την κατανομή ταχύτητας στη θέση A. Δηλαδή, βρείτε όλες τις εμπλεκόμενες ποσότητες στην έκφραση του Coles και σχεδιάστε, την αδιάστατη κατανομή. Μεταξύ άλλων, υπολογίστε το πάχος του οριακού στρώματος, την ταχύτητα τριβής και το συντελεστή τριβής. Για την εξωτερική ροή γνωρίζουμε την ταχύτητα στη θέση A

$$u_e = 120 \text{ m/s}$$

και τη σταθερή πυκνότητα

$$\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$$

Η κινηματική συνεκτικότητα του αέρα-εργαζόμενου μέσου είναι σταθερή και ίση με

$$v = 12 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Χρησιμοποιείτε κάθε άλλη εμπειρική πληροφορία που μπορείτε να αντλήσετε από τις σημειώσεις σας, ώστε να "κλείσετε" το πρόβλημα.

Για τη βοήθειά σας και επειδή το μη γραμμικό σύστημα που συνήθως προκύπτει δεν είναι σαφές ότι μπορεί να επιλυθεί με αλγόριθμο σταθερού σημείου (δοκιμές), συνιστάται να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της διχοτόμησης, γνωρίζοντας ότι η ποσότητα p_1 πρόκειται να πάρει τιμές μεταξύ 2.0 και 5.0.

- β) Υπολογίστε την κλίση πίεσης του πεδίου εξωτερικής ροής του αντίστοιχου ισορροπημένου οριακού στρώματος, στην περιοχή του σημείου A, αν ισχύει η σχέση του Nash, που δίνεται στην προηγούμενη άσκηση.

ΛΥΣΗ

- (α) Για τη λύση A γνωρίζουμε τις ποσότητες

$$L_k = 0.1 \quad , \quad X = 8.0$$

Υπολογίζουμε τον αριθμό Reynolds. Re_{3k} ο οποίος ισούται με

$$Re_{3k} = \exp(X - 2KL_k) = \exp(8 - 2 \cdot 0.85 \cdot 0.1) = 2515$$

όπου για την ποσότητα K χρησιμοποιήθηκε η τυπική τιμή της για τυρβώδεις ροές

$$K = 0.85$$

Από τον ορισμό του παραπάνω αριθμού Reynolds, υπολογίζεται το πάχος δ_{3k} ως

$$\delta_{3k} = \frac{Re_{3k} \nu_e}{u_e} = \frac{2515 \cdot 12 \cdot 10^{-6}}{120} = 0.2515 \text{ mm}$$

Από το Σχήμα 11.5 των σημειώσεων και με δεδομένη την ποσότητα L_k εκτιμούμε τον παράγοντα μορφής H_{12k} ως ίσο με

$$H_{32k} = 1.9$$

Με το δεδομένο αυτό και με τη βοήθεια του σχήματος 11.3 των σημειώσεων εκτιμούμε και τον παράγοντα μορφής H_{32k} , ως ίσο με

$$H_{32k} = 1.6$$

Στο σχήμα 11.5 εργαζόμαστε προφανώς με το τμήμα της καμπύλης που αντιστοιχεί στα προσκολλημένα οριακά στρώματα, έχοντας υπόψη ότι η κατανομή δεν επηρεάζεται από την τιμή του αριθμού Reynolds Re_δ .

Υπολογίζουμε στη συνέχεια τα (κινητικά) πάχη μετατόπισης και ορμής ως

$$\delta_2 = \delta_{2k} = \frac{\delta_{3k}}{H_{32k}} = \frac{2.515 \cdot 10^{-4}}{1.6} = 1.57 \cdot 10^{-4} m$$

$$\delta_1 = \delta_{1k} = 1.9 \cdot 1.57 \cdot 10^{-4} m = 3.0 \cdot 10^{-4} m$$

Για τον υπολογισμό των αγνώστων ποσοτήτων δ , u_r , π_1 , G , στη θέση B, όπου ισχύει η διπαραμετρική κατανομή ταχύτητας του Coles, χρειάζεται να επιλυθεί το παραπάνω σύστημα εξισώσεων

$$\frac{u_e}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{\delta u_\tau}{\nu} \right) + c + \frac{2\pi_1}{\kappa} \quad (1)$$

$$\delta \frac{u_\tau}{u_e} = \frac{\kappa}{1+\pi_1} \delta_{1k} \quad (2)$$

$$\frac{u_\tau}{u_e} = \frac{1}{G} \left(1 - \frac{1}{H_{12k}} \right) \quad (3)$$

$$G = \frac{2+3.2\pi_1+1.522\pi_1^2}{\kappa(1-\pi_1)} \quad (4)$$

Ο συνδυασμός των παραπάνω εξισώσεων δίνει μια εξίσωση για το π_1 , που γράφεται

$$f(\pi_1) = \frac{2+3.2\pi_1+1.522\pi_1^2}{\kappa(1+\pi_1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{H_{12k}} \right)^{-1} - \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{\kappa}{1+\pi_1} \frac{u_e}{\nu} \delta_{1k} \right) - c - \frac{2\pi_1}{\kappa} \quad (5)$$

Η εξίσωση (5) λύνεται με τη μέθοδο της διχοτόμησης μεταξύ των δοσμένων ακραίων τιμών $\pi_1=2.0$ και $\pi_1=5.0$. Η μέθοδος της διχοτόμησης καταλήγει στη λύση

$$\pi_1 = 3.447455$$

και χρησιμοποιώντας την τιμή αυτή προκύπτουν και οι υπόλοιπες ποσότητες για τη θέση B. Είναι δηλαδή

$$\delta = 0.9964 mm$$

$$u_r = 3.3305 m/s$$

$$G = 17.0669$$

$$c_f = 0.154 \cdot 10^{-2}$$

Ο σχεδιασμός της κατανομής ταχύτητας είναι μια τυπική διαδικασία που γίνεται με αριθμητικές αντικαταστάσεις στη σχέση που δίνει την κατανομή του Coles.

(β) Επιλύουμε τη σχέση του Nash ως προς την παράμετρο ισορροπίας Π και προκύπτει

$$\Pi = \left(\frac{G+1.7}{6.1} \right)^2 - 1.81$$

οπότε για την περίπτωσή μας είναι

$$\Pi = 7.655$$

Η κλίση πίεσης της ισοδύναμης ισορροπημένης κατανομής ταχύτητας της θέσης B προκύπτει από τον ορισμό του Π , ως

$$\frac{dp}{dx} = \Pi \frac{\tau_w}{\delta_1} = \Pi \frac{\rho u_\tau^2}{\delta_1}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση παίρνουμε

$$\frac{dp}{dx} = 7.655 \frac{1.2 \cdot 3.3305^2}{3 \cdot 10^{-4}} = 339,644 \frac{Nt}{m^3} = 3.4 \frac{bar}{m}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Γνωρίζετε την έννοια του μήκους ανάμιξης L και την κατανομή που αυτό, αλλά και ο συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας, έχουν μέσα στο οριακό στρώμα. Τα Σχήματα 5.1 και 5.2 των Σημειώσεων σας δείχνουν τέτοιες τυπικές κατανομές.

Πειράματα σε ασυμπίεστα, τυρβώδη, ισορροπημένα οριακά στρώματα δείχνουν ότι ο συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας για την εσωτερική και την εξωτερική περιοχή του οριακού στρώματος γράφονται ως

$$v_t = L^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad , \quad \text{εσωτερική περιοχή}$$

$$v_t = \alpha u_e \delta_{1k} \quad , \quad \text{εξωτερική περιοχή}$$

όπου, χωρίς σημαντικό λάθος, θεωρούμε ότι $\alpha = 0.016 = \text{σταθερά}$.

Υποθέστε ότι το τυρβώδες ισορροπημένο οριακό στρώμα μοντελοποιείται με τη γνωστή κατανομή του Coles.

Δείξτε ότι, στην εξωτερική περιοχή του οριακού στρώματος, η χρήση της κατανομής του Coles ισοδυναμεί με ένα μοντέλο τύρβης με συντελεστή συνεκτικότητας ίσο με

$$v_t = \alpha v \frac{1 + \pi_1}{\kappa} \exp \left[\kappa \left\{ \sqrt{\frac{2}{c_f}} - c - \frac{2\pi_1}{\kappa} \right\} \right]$$

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι για την κατανομή του Coles ισχύει ότι

$$\delta \frac{u_\tau}{u_\epsilon} = \frac{\kappa}{1 + \pi_1} \delta_{1\kappa}$$

Λύνοντας τη σχέση αυτή προς $u_\epsilon \delta_{1\kappa}$ και αντικαθιστώντας στη συνιστώμενη έκφραση για το v_t , που ισχύει στην εξωτερική περιοχή του οριακού στρώματος, προκύπτει

$$v_t = \alpha \delta u_\tau \frac{1 + \pi_1}{\kappa} \quad (1)$$

Για την κατανομή ταχύτητας του Coles, εφαρμοσμένη στο άκρο του οριακού στρώματος, ισχύει ότι

$$\frac{u_\epsilon}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{\delta u_\tau}{v} \right) + c + \frac{2\pi_1}{\kappa}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\delta u_\tau = v \exp \left[\kappa \left\{ \frac{u_\epsilon}{u_\tau} - c - \frac{2\pi_1}{\kappa} \right\} \right] \quad (2)$$

Χρησιμοποιώντας επιπλέον ότι

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho u_\epsilon^2} = 2 \frac{u_\tau^2}{u_\epsilon^2} \quad (3)$$

η αντικατάσταση των (2) και (3) στην εξίσωση (1) δίνει τελικά ότι

$$v_t = \alpha \frac{1 + \pi_1}{\kappa} v \exp \left[\kappa \left\{ \sqrt{\frac{2}{c_f}} - c - \frac{2\pi_1}{\kappa} \right\} \right]$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Με τη μέθοδο Le Foll και τεχνική χρονοπροέλασης υπολογίζουμε ότι, σε κάποιο σημείο της πλευράς υποπίεσης πτερυγίου στροβίλου, το ζεύγος (L_k, X) έχει τις τιμές

$$L_k = 0.1 \quad X = 7.5$$

Η ροή θεωρείται ασυμπίεση και τυρβώδης και για το σημείο αυτό η εξωτερική ταχύτητα είναι $u_\epsilon = 100 \text{ m/s}$ και η κινηματική συνεκτικότητα του εργαζόμενου μέσου είναι $\nu = 12 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (αέρας).

- (α) Υπολογίστε τα δ_{1k} , δ_{2k} , δ_{3k} στο σημείο αυτό.
- (β) Ας υποκαταστήσουμε την υπορουτίνα που υπολογίζει το τοπικό πάχος δ του οριακού στρώματος και την τοπική τιμή του συντελεστή τριβής c_f , εκτελώντας υπολογισμό με το χέρι. Για το σκοπό αυτό ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία. Καταρχή, γράφετε το σύστημα των 4 εξισώσεων που ισχύει στη θέση αυτή, σύμφωνα με τα γνωστά από το Κεφάλαιο 11 των Σημειώσεων, όπου εμπλέκονται οι 4 άγνωστοι $(\delta, u_\tau, \pi_1, G)$. Σημασία έχει πώς θα μπορέσει να λυθεί το σύστημα με δοκιμές που θα οδηγήσουν σε σύγκλιση. Κάνετε πράξη τον παρακάτω επαναληπτικό αλγόριθμο:

Βήμα 1: Αρχίζει η ν-ιστή επανάληψη. Με το π_1 γνωστό (αρχική εκτίμηση π_1^0 η προσέγγιση π_1^{v-1} από την τελευταία επανάληψη), υπολογίστε το $G^v = G(\pi_1^{v-1})$, μέσω της κατάλληλης εξίσωσης.

Βήμα 2: Υπολογίστε, από την κατάλληλη εξίσωση το γινόμενο $(\delta u_\tau)^v$ ως $(\delta u_\tau)^v = f(\pi_1^v)$. (Βρείτε εκείνη την εξίσωση που εμφανίζει το παραπάνω γινόμενο ως ενιαία ποσότητα).

Βήμα 3: Υπολογίστε το u_τ^v χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\frac{u_e}{u_\tau^v} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{(\delta u_\tau)^v}{\nu} \right] + c + \frac{2\pi_1^v}{\kappa}$$

Βήμα 4: Ελέγξτε το κλείσιμο του συστήματός σας υπολογίζοντας εκ νέου την ποσότητα G από τη μόνη σχέση που δε χρησιμοποιήσατε μέχρι τώρα. Η ποσότητα αυτή θα συμβολίζεται με G^{v*} και θα είναι

$$G^{v*} = G^{v*}(u_\tau^v)$$

Βήμα 5: Επειδή γενικά $G^v \neq G^{v*}$, επαναλαμβάνονται τα παραπάνω βήματα με νέα τιμή για το π_1 που ορίζεται ως εξής

$$\pi_1^v = \pi_1^{v-1} \frac{G^{v*}}{G^v}$$

Ξαναγράψτε τον αλγόριθμο αυτό με τις ακριβείς εξισώσεις που θα χρησιμοποιούσατε.

(γ) Εφαρμόστε τον αλγόριθμο που διατυπώσατε στο ερώτημα (β) για το αριθμητικό παράδειγμα που σας δόθηκε. Ξεκινήστε με την τιμή $\pi_1^0=3.2$ και σταματήστε όταν

$$|\pi_1^y - \pi_1^{y-1}| < 0.02 \text{ . Υπολογίστε } \delta \text{ και } c_r. \text{ Δίνονται } c=5.5, \kappa=0.41.$$

(δ) Εξηγήστε τον τρόπο ανανέωσης της τιμής του π_1 που προτείνει το Βήμα 5. Αν είναι σωστός, πρέπει να υπάρχει συγκεκριμένη ποιοτική συσχέτιση μεταξύ π_1 και G . Ποιά είναι αυτή; Η εξήγησή σας μπορεί να είναι φυσική, αριθμητική, μαθηματική ή γραφική.

ΛΥΣΗ

(α) Είναι

$$Re_{3k} = \exp(X - 2KL_k) = \exp(7.5 - 2 \cdot 0.85 \cdot 0.1) = 1525$$

όπου $K=0.85$ για τυρβώδη ροή. Εξ ορισμού

$$\delta_{3k} = \frac{v_e Re_{3k}}{u_e} = \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 1525}{100} \text{ m} = 18 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0.18 \text{ mm}$$

Από το Σχήμα 11.5, για $L_k=0.1$, διαβάζουμε $H_{12k}=1.9$. Από το Σχήμα 11.3, για $H_{12k}=1.9$, διαβάζουμε $H_{32k}=1.6$. Υπολογίζουμε πλέον εύκολα τα υπόλοιπα δύο πάχη ως

$$\delta_{2k} = \frac{\delta_{3k}}{H_{32k}} = \frac{18 \cdot 10^{-5} \text{ m}}{1.6} = 11.25 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0.113 \text{ mm}$$

$$\delta_{1k} = H_{12k} \delta_{2k} = 1.9 \cdot 11.25 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 21.4 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0.214 \text{ mm}$$

(β) Οι 4 σχέσεις που διαθέτουμε συνοψίζονται παρακάτω:

$$\frac{u_e}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{\delta u_\tau}{v} \right) + c + \frac{2\pi_1}{\kappa} \quad (1)$$

$$\delta \frac{u_\tau}{u_e} = \frac{\kappa}{1 + \pi_1} \delta_{1k} \quad (2)$$

$$\frac{u_\tau}{u_e} = \frac{1}{G} \left(1 - \frac{1}{H_{12k}} \right) \quad (3)$$

$$G = \frac{2 + 3.2\pi_1 + 1.522\pi_1^2}{\kappa(1 + \pi_1)} \quad (4)$$

που πρέπει να λυθεί ως προς τις ποσότητες δ , u_τ , π_1 , G . Υλοποιούμε τον αλγόριθμο που περιγράφεται παραπάνω, για τη ν-ιοστή εξίσωση, ως εξής:

Βήμα 1: Με γνωστό το π_1^{v-1} , χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4) βρίσκω το

$$G^v = \frac{2 + 3.2 \pi_1^{v-1} + 1.522 (\pi_1^{v-1})^2}{\kappa(1 + \pi_1^{v-1})}$$

Βήμα 2: Το γινόμενο (δu_τ) , ως ενιαία ποσότητα βρίσκεται μόνο από τη σχέση (2) και είναι

$$(\delta u_\tau)^v = \frac{u_e \kappa}{1 + \pi_1^v} \delta_{1k}$$

Βήμα 3: Εφαρμόζεται η εξίσωση (1), λύνοντας ως προς το αριστερό της μέλος. Είναι

$$u_\tau^v = u_e \left\{ \frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{(\delta u_\tau)^v}{v} \right] + c + \frac{2\pi_1^{v-1}}{\kappa} \right\}^{-1}$$

Βήμα 4: Η σχέση που δε χρησιμοποιήθηκε μέχρι τώρα είναι η (3). Αυτή δίνει, επιλυόμενη ως προς G , μια νέα τιμή

$$G^{v*} = \frac{u_e}{u_\tau^v} \left(1 - \frac{1}{H_{12k}} \right)$$

Βήμα 5: Ανανεώνουμε την ποσότητα π_1 με τον υποδειχθέντα τρόπο, ως

$$\pi_1^v = \pi_1^{v-1} \frac{G^{v*}}{G^v}$$

Ελέγχουμε το σφάλμα $|\pi_1^v - \pi_1^{v-1}|$ και αν υπερβαίνει ένα ανώτατο επιτρεπτό όριο επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 ως 5.

(γ) Ξεκινώντας με αρχική τιμή $\pi_1^0=3.2$, εκτελούνται τα παρακάτω βήματα

| | $v = 1$ | $v = 2$ | $v = 3$ |
|---------------------------|---------|---------|---------|
| G^v | 16.1587 | 16.0146 | 15.9175 |
| $(\delta u_\tau)^v$ | 0.0021 | 0.0021 | 0.0021 |
| u_τ^v | 2.9679 | 2.9828 | 2.9930 |
| G^{v*} | 15.9603 | 15.8804 | 15.8266 |
| π_1^v | 3.1607 | 3.1342 | 3.1163 |
| $ \pi_1^v - \pi_1^{v-1} $ | 0.0393 | 0.0265 | 0.0179 |

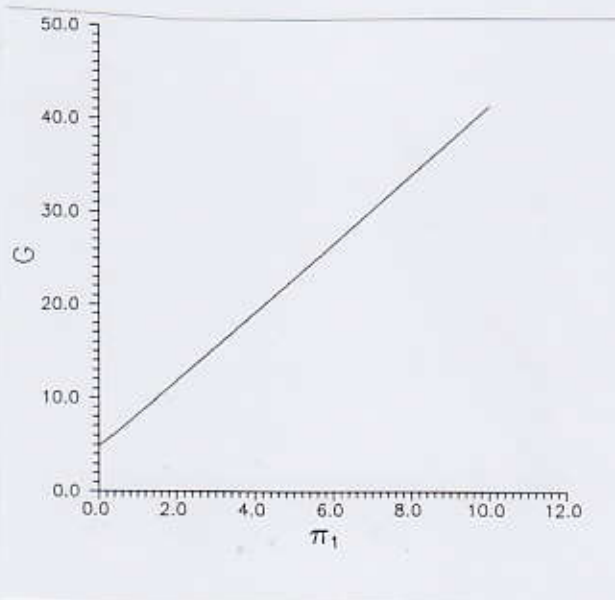
Στην τρίτη επανάληψη, ο αλγόριθμος θεωρείται ότι συνέκλινε, με βάση το κριτήριο που έχει τεθεί. Το τοπικό πάχος δ βρίσκεται ως

$$\delta = \frac{(\delta u_\tau)}{u_\tau} = \frac{0.0021}{2.9930} m = 0.71 \cdot 10^{-3} m = 0.72 mm$$

και ο τοπικός συντελεστής τριβής είναι

$$c_f = 2 \frac{u_\tau^2}{u_e^2} = 2 \frac{2.9930^2}{100^2} = 0.1791 \cdot 10^{-2}$$

(δ) Το Βήμα 5 προτείνει την αναλογική διόρθωση του π_1 με το G . Κάτι τέτοιο προϋποθέτει μια μονότονη (και πιθανόν περίπου γραμμική σχέση) του G με το π_1 . Η γραφική λύση είναι η πιο απλή. Παραθέτουμε παρακάτω το διάγραμμα $G=G(\pi_1)$, με βάση τη σχέση (4).



ΑΣΚΗΣΗ 12

Ορίζουμε δύο επιφάνειες S_1 αξονικής συμμετρίας δύο διαφορετικών τύπων στροβιλομηχανών. Η πρώτη (Π1) έχει R =σταθερό και h =σταθερό (R =ακτίνα, h =πάχος σωλήνα ροής). Η δεύτερη (Π2) έχει μεταβλητά R και h σε τρόπο ώστε το γινόμενο Rh =σταθερό παντού. Αν πρόκειται για ακίνητη πτερύγωση, που προφανώς αναλύεται στο ακίνητο σύστημα αναφοράς. Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα.

- (1) Είναι ή όχι η λύση των εξισώσεων Euler στην πρώτη περίπτωση ίδια με αυτή που θα προέκυπε αν οι διαστάσεις εξισώσεις Euler λύνονταν στο ανάπτυγμα της επιφάνειας στο επίπεδο xy ;
- (2) Αν τα πλέγματα στις περιπτώσεις (Π1) και (Π2) ταυτίζονται στο επίπεδο m - θ , η λύση των εξισώσεων Euler θα είναι ίδια; Για ευκολία, υποθέστε μια απλούστερη περίπτωση τύπου (Π2), αυτή όπου $R=R_0 + \alpha m$, $h = \frac{\beta}{R}$, $\alpha, \beta =$ σταθερές.

ΛΥΣΗ

Οι εξισώσεις Euler (εξίσωση συνέχειας, δυο εξισώσεις διατήρησης της ορμής και η εξίσωση διατήρησης της Ενέργειας) γράφονται, στο σύστημα m - θ , ως εξής

$$\frac{\partial}{\partial t} (Rh\rho) + \frac{\partial}{\partial m} (Rh\rho V_m) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h\rho V_\theta) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (Rh\rho V_m) + \frac{\partial}{\partial m} (Rh\rho V_m^2 + Rh\rho) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h\rho V_m V_\theta) = h\rho V_\theta^2 \frac{dR}{dm} + p \frac{d}{dm} (Rh)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (Rh\rho V_\theta) + \frac{\partial}{\partial m} (Rh\rho V_m V_\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h\rho V_\theta^2 + h\rho) = -h\rho V_m V_\theta \frac{dR}{dm}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (RhE_t) + \frac{\partial}{\partial m} [Rh(E_t + p)V_m + Rhq_m] + \frac{\partial}{\partial \theta} [h(E_t + p)V_\theta + hq_\theta] = 0$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι απόλυτες συνιστώσες της ταχύτητας V_m και V_θ , αφού μελετάμε ακίνητη πτερύγωση.

- (α) Στην περίπτωση (Π1), όπου R =σταθερό, h =σταθερό, οι απλοποιήσεις στις 4 παραπάνω εξισώσεις είναι τέτοιες που προκύπτει το παρακάτω σύστημα

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V_y) = 0$$

$$\frac{\partial (\rho V_x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V_x V_y) = 0$$

$$\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x V_y) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V_y^2 + p) = 0$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(E_t + p) V_x + q_x] + \frac{\partial}{\partial y} [(E_t + p) V_y + q_y] = 0$$

όπου $x=m$, $y=R\theta$ (αφού έτσι ορίζεται το ανάπτυγμα της κυλινδρικής επιφάνειας που μελετάμε. Οι παραπάνω εξισώσεις είναι όντως οι διδιάστατες εξισώσεις Euler στο επίπεδο x - y).

(β) Στην περίπτωση (Π2), στις αρχικές εξισώσεις της ορμής, στο δεξιό μέλος παραμένουν μη μηδενικοί όροι όπως οι $h\rho V_\theta^2 \frac{dR}{dm}$ και $h\rho V_m V_\theta \frac{dR}{dm}$, αφού $\frac{dR}{dm} \neq 0$. Άρα

στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις δεν εκφυλίζονται στις αντίστοιχες του διδιάστατου Καρτεσιανού συστήματος x - y .

ΑΣΚΗΣΗ 13

Στο σημείο A πάνω στην πλευρά ενός πτερυγίου η εξωτερική ταχύτητα έχει τιμή u_{e_A} .

Επιθυμούμε να επιβραδύνουμε τη ροή μέχρι το σημείο B που αυτή θα αποκολληθεί. Η ροή είναι στρωτή και ασυμπίεστη. Αποδείξτε ότι, στη θεωρητική περίπτωση που θα επιτύχουμε την επιβράδυνση αυτή χωρίς απώλειες, η εξωτερική ταχύτητα στο σημείο B έναρξης της αποκόλλησης θα ισούται με

$$u_{e_B} = u_{e_A} e^{-L_{k_A}}$$

όπου L_{k_A} η τιμή του παράγοντα μορφής L_k στη θέση A. Πάρτε, στη συνέχεια, μια-δυο

λογικές τιμές του L_k για μια τέτοια περίπτωση και δείξτε αριθμητικά πόσο μικρή μπορεί να είναι μια τέτοια επιβράδυνση χωρίς απώλειες.

ΛΥΣΗ

Για τη στρωτή και ασυμπίεστη ροή ισχύει ότι

$$dL_k = \frac{du_e}{u_e} + M \frac{dE}{E}$$

όπου M κατάλληλη ποσότητα (ο ορισμός της δεν ενδιαφέρει την παρούσα άσκηση), ενώ χρησιμοποιήθηκε ότι $K=1$. Για μια μεταβολή της ταχύτητας χωρίς απώλειες, η μεταβολή dE της καταστροφής της κινητικής ενέργειας του οριακού στρώματος είναι μηδενική και η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$dL_k = \frac{du_e}{u_e} \tag{1}$$

Στην περίπτωση επιβραδυνόμενης ροής, $du_e < 0$ και κατά συνέπεια το L_k μειώνεται υποχρεωτικά, αν η επιβράδυνση γίνεται χωρίς απώλειες. Καθώς η ροή συνεχίζει επιβραδυνόμενη, η συνεχής μείωση του L_k θα οδηγήσει ενδεχόμενα σε μηδενισμό του L_k σε κάποια θέση, δηλαδή εξ ορισμού σε αποκόλληση της ροής. Η ολοκλήρωση της σχέσης (1) μεταξύ της αρχικής κατάστασης A και της τελικής B δίνει

$$L_{k_B} - L_{k_A} = \ln \left(\frac{u_{e_B}}{u_{e_A}} \right) \tag{2}$$

Αν πρόκειται για επιβράδυνση από το σημείο A στο σημείο B όπου η ροή αποκολλάται, τότε

$$L_{k_B} = 0$$

και η σχέση (2) γράφεται ως

$$-L_{k_A} = \ln \left(\frac{u_{e_B}}{u_{e_A}} \right)$$

ή, ισοδύναμα, ως

$$u_{e_B} = u_{e_A} e^{-L_{k_A}} \quad (3)$$

που είναι και η ζητούμενη σχέση.

Για τρεις ενδεικτικές τιμές του L_{k_A} , υπολογίζουμε τις αντίστοιχες επιβραδύνσεις:

$$L_{k_A} = 0.01 \rightarrow \frac{u_{e_B}}{u_{e_A}} = e^{-0.01} = 0.990 = 99\%$$

$$L_{k_A} = 0.02 \rightarrow \frac{u_{e_B}}{u_{e_A}} = e^{-0.02} = 0.980 = 98\%$$

$$L_{k_A} = 0.05 \rightarrow \frac{u_{e_B}}{u_{e_A}} = e^{-0.05} = 0.951 = 95.1\%$$

που αποδεικνύουν ότι η επιβράδυνση χωρίς απώλειες είναι αναγκαστικά πολύ περιορισμένη. Η τελευταία παρατήρηση σημαίνει ότι είναι πρακτικά αδύνατο να επιβραδύνουμε ένα οριακό στρώμα χωρίς απώλειες.

ΑΣΚΗΣΗ 14

Για στρωτή ασυμπιεστή ροή, η μέθοδος Lefoll χρησιμοποιεί την εξίσωση

$$KdL_k = \frac{du_e}{u_e} + KM \frac{dE}{E}$$

με

$$M = \frac{1}{H_{12k} - 1} \left\{ 1 - \frac{H_{32k} c_f}{4c_D} \right\}$$

Εξηγήστε το γιατί μπορούμε, για ισορροπημένα οριακά στρώματα, να κατασκευάσουμε μια μοναδική καμπύλη $M = M(L_k)$. Δώστε σύντομα, αλλά με σαφήνεια, τα βήματα που θα κάνετε για να την κατασκευάσετε (κάνοντας αναφορά σε τύπους ή σχέσεις ή πίνακες του βιβλίου σας, από όπου θα αντλήσετε πληροφορίες). Δείξτε ότι η παραπάνω καμπύλη είναι ανεξάρτητη της ποσότητας Re_x . Τέλος, υπολογίστε την τιμή του M για $L_k = 0$.

ΛΥΣΗ

Η ύπαρξη μιας μοναδικής καμπύλης που θα παριστάνει την ποσότητα M ως συνάρτηση του L_k προϋποθέτει το να μπορεί η έκφραση

$$M = \frac{1}{H_{12k}-1} \left\{ 1 - \frac{H_{32k}}{4c_D} c_f \right\} \quad (1)$$

να γραφεί ως μονότιμη συνάρτηση του L_k . Για ένα στρωτό ισορροπημένο οριακό στρώμα ισχύει ότι

$$c_f = \frac{2}{\sqrt{Re_x}} \sqrt{\frac{m+1}{2}} a_2(m)$$

$$c_D = \frac{1}{\sqrt{Re_x}} \sqrt{\frac{m+1}{2}} a_D(m)$$

όπου οι ποσότητες a_2 και a_D είναι συναρτήσεις του m (βλ. Σχήμα 11.8 και πίνακα Παραρτήματος Π3), και αφού το m είναι μονότιμη συνάρτηση του L_k (βλ. Σχήμα 11.6), άρα τα a_2 και a_D είναι επίσης μονότιμες συναρτήσεις του L_k . Διαιρώντας κατά μέλη τις δυο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι

$$\frac{c_f}{c_D} = \frac{2a_2(L_k)}{a_D(L_k)}$$

οπότε

$$M = \frac{1}{H_{12k}-1} \left\{ 1 - \frac{H_{32k}}{2} \frac{c_f}{c_D} \right\} \quad (2)$$

Από την ανάπτυξη που προηγήθηκε, η σχέση (2), αποδεικνύεται ανεξάρτητη του Re_x . Τέλος, γνωρίζουμε ότι το H_{12k} είναι συνάρτηση του L_k (βλ. Σχήμα 11.4) αλλά και το H_{32k} είναι συνάρτηση του H_{12k} (βλ. Σχήμα 11.2), οπότε κατά μείζονα λόγο το H_{32k} είναι και συνάρτηση του L_k . Συνεπώς, κάθε ποσότητα που εμπλέκεται στη σχέση (2) είναι μονότιμη συνάρτηση του L_k , άρα και το ίδιο το M είναι επίσης μονότιμη συνάρτηση του L_k . Η κατασκευή ενός τέτοιου διαγράμματος απαιτεί συνδυασμό δεδομένων από τους προαναφερθέντες πίνακες και Σχήματα.

Ειδικά κατά την αποκόλληση είναι $c_f=0$, οπότε

$$M = \frac{1}{H_{12k}-1}$$

Για κατάσταση αποκόλλησης ($L_k=0$), το Σχήμα 11.4 δίνει την τιμή του παράγοντα μορφής

$$H_{12k} = 4.03$$

οπότε το αντίστοιχο M είναι

$$M = \frac{1}{4.03-1} = 0.33$$

ΑΣΚΗΣΗ 15

Με τη μέθοδο Le Foll και τεχνική χρονοπροέλασης υπολογίζουμε σε κάποιο σημείο πτερυγίου στροβιλομηχανής το ζεύγος τιμών $L_k=0.031$ και $X=4.5$. Η ροή θεωρείται ασυμπίεστη και στρωτή στο σημείο αυτό. Αν η εξωτερική ταχύτητα είναι $u_e=100$ m/s και η κινηματική συνεκτικότητα του εργαζόμενου μέσου $\nu=12 \times 10^{-6}$ m²/s, υπολογίστε τα πάχη του οριακού στρώματος, το συντελεστή τριβής και τον παράγοντα καταστροφής στη θέση αυτή.

ΛΥΣΗ

Με τη δεδομένη τιμή του L_k , $L_k=0.031$, υπολογίζουμε τον παράγοντα H_{12k} από το Σχήμα 11.4. Είναι

$$H_{12k} = 2.37$$

Με την τελευταία τιμή, υπολογίζουμε τον παράγοντα H_{32k} από το Σχήμα 11.2. Είναι

$$H_{32k} = 1.6$$

Από τη σχέση (11.33) υπολογίζουμε τον αριθμό Re_{3k} . Είναι ($K=1$, για στρωτή ροή)

$$Re_{3k} = \exp(X-2KL_k) = \exp(4.5-2 \cdot 0.031) = 84.6$$

Τότε

$$Re_{2k} = \frac{Re_{3k}}{H_{32k}} = \frac{84.6}{1.6} = 52.87$$

$$Re_{1k} = H_{12k} Re_{2k} = 2.37 \cdot 52.87 = 125.3$$

Εύκολα υπολογίζονται τα τρία πάχη του οριακού στρώματος από τους ορισμούς τους, ως

$$\delta_{1k} = \frac{\nu Re_{1k}}{u_e} = \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 125.3}{100} \text{ m} = 1.504 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$\delta_{2k} = \frac{\nu Re_{2k}}{u_e} = \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 52.87}{100} \text{ m} = 6.34 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$\delta_{3k} = \frac{\nu Re_{3k}}{u_e} = \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 84.6}{100} m = 1.015 \cdot 10^{-5} m$$

Από το Σχήμα 11.6 και τη γνωστή τιμή του L_k υπολογίζεται η τιμή του m . Είναι

$$m = 0.175$$

Από τον πίνακα του Παραρτήματος Π3 υπολογίζεται η ποσότητα $f_1(m)$

$$f_1(m) = 0.91$$

και από τη σχέση (10.88α) ο αριθμός Reynolds θέσης Re_x του αντίστοιχου ισορροπημένου οριακού στρώματος, ως

$$Re_x = \left(\frac{Re_{1k}}{f_1(m)} \right)^2 \cdot \left(\frac{m+1}{2} \right) = \left(\frac{125.3}{0.91} \right)^2 \cdot \left(\frac{1+0.175}{2} \right) = 11138.5$$

Υπολογίζεται η ποσότητα η_δ από το Σχήμα 11.7 και είναι

$$\eta_\delta = 4.8$$

Ο αριθμός Re_δ υπολογίζεται ως

$$Re_\delta = \sqrt{Re_x} \eta_\delta \sqrt{\frac{2}{m+1}} = \sqrt{11138.5} \cdot 4.8 \cdot \sqrt{\frac{2}{1+0.175}} = 661$$

και το πάχος του οριακού στρώματος στη θέση αυτή είναι

$$\delta = \frac{\nu Re_\delta}{u_e} = \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 661}{100} m = 7.93 \cdot 10^{-5} m$$

Από το Σχήμα 11.8 υπολογίζεται η ποσότητα $a_2(m)$, ως

$$a_2(m) = 0.77$$

και ο τοπικός συντελεστής τριβής ισούται με

$$c_f = \frac{2}{\sqrt{Re_x}} \sqrt{\frac{m+1}{2}} a_2(m) = \frac{2}{\sqrt{11138.5}} \cdot \sqrt{\frac{1+0.175}{2}} \cdot 0.77 = 0.0111$$

Από τον πίνακα του Παραρτήματος Π3 υπολογίζεται η ποσότητα $a_D(m)$ ως

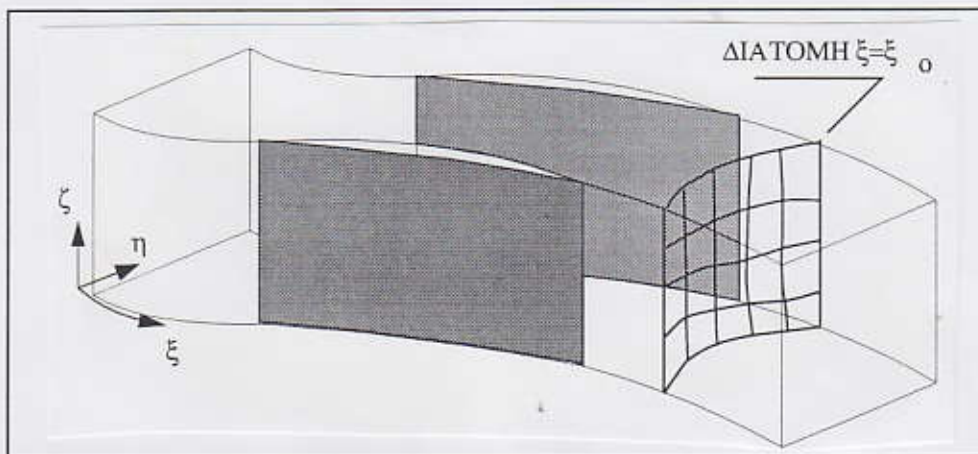
$$a_D(m) = 0.49$$

ενώ ο συντελεστής καταστροφής

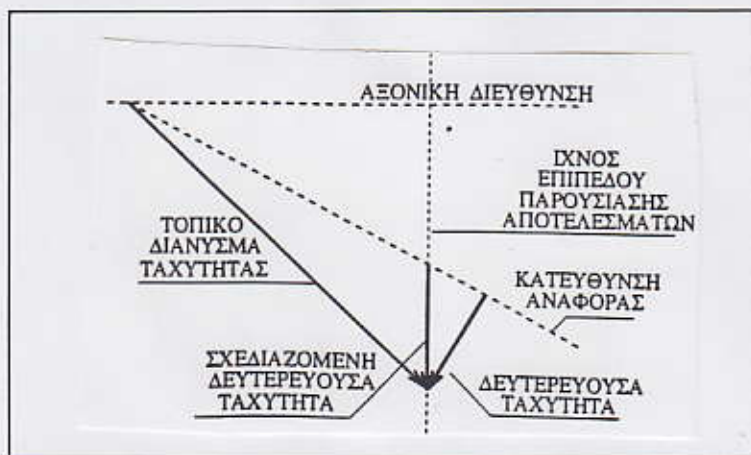
$$c_D = \frac{1}{\sqrt{Re_x}} \sqrt{\frac{m+1}{2}} a_D(m) = \frac{1}{\sqrt{11138.5}} \sqrt{\frac{1+0.175}{2}} \cdot 0.49 = 0.00356$$

ΑΣΚΗΣΗ 16

Εχουμε λύσει τις εξισώσεις Navier-Stokes σε μια τριδιάστατη περύγωση στροβιλομηχανής, χρησιμοποιώντας πλέγμα τύπου H, κώδικα πεπερασμένων διαφορών και κάποιο μοντέλο τύρβης. Το πραγματικό χωρίο (x,y,z) με σημειωμένες τις φορές των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων (ξ,η,ζ) και μια εγκάρσια διατομή (πλεγματική επιφάνεια $\xi=\xi_0$, όχι αναγκαστικά επίπεδη) απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα. Όπως είναι φανερό, (ξ) είναι η διαμήκης κατεύθυνση, (η) η κατεύθυνση από πτερύγιο σε πτερύγιο και (ζ) η κατεύθυνση από το πόδι στην κεφαλή της περύγωσης.



Προσπαθούμε να αναλύσουμε το πεδίο των δευτερευουσών ροών στη διατομή $\xi=\xi_0$, σχεδιάζοντας σε κάθε κόμβο της το διάνυσμα της δευτερεύουσας ταχύτητας. Αυτό θα γίνει όπως εξηγείται στο Σχήμα 7.8 των Σημειώσεων του Μαθήματος, το οποίο επαναλαμβάνεται και εδώ για λόγους πληρότητας.



Εστω ότι οι δείκτες j ($1 \leq j \leq j_{\max}$) και k ($1 \leq k \leq k_{\max}$) που "μετρούν" τους κόμβους στη διατομή αυτή, κατά η και ζ αντίστοιχα. Αφού έχουν λυθεί οι εξισώσεις ροής, γνωρίζουμε το διάνυσμα της ταχύτητας \vec{V} σε κάθε σημείο (j,k) , δηλ. γνωρίζουμε τις τρεις καρτεσιανές συνιστώσες $u_{j,k}$, $v_{j,k}$, $w_{j,k}$ της ταχύτητας.

(α) Αποφασίζουμε να χρησιμοποιήσουμε ως "Κατεύθυνση Αναφοράς" αυτή της μέσης ταχύτητας της διατομής, δηλ. της

$$\vec{V}_{mean} = \int_{(E)} \vec{V} dA / \int_{(E)} dA$$

όπου dA στοιχειώδης διατομή. Δώστε την έκφραση υπολογισμού κάθε συνιστώσας του V_{mean} , χρησιμοποιώντας τις μετρικές και τις ανταλλοιώτες συνιστώσες της ταχύτητας, όπως προκύπτει όταν εργασθούμε στο μετασχηματισμένο επίπεδο (E) .

(β) Δώστε τη διανυσματική έκφραση που θα χρησιμοποιηθεί για να υπολογισθούν οι τρεις συνιστώσες της "Σχεδιαζόμενης Δευτερεύουσας ταχύτητας".

ΛΥΣΗ

(α) Αν (u,v,w) οι τρεις Καρτεσιανές συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας, ο υπολογισμός του διανύσματος της μέσης ταχύτητας \vec{V}_{mean} απαιτεί τον υπολογισμό των παρακάτω ολοκληρωμάτων

$$\int_{(E)} u dA, \quad \int_{(E)} v dA, \quad \int_{(E)} w dA, \quad \int_{(E)} dA$$

στη διατομή $\xi = \xi_0$. Πρέπει, συνεπώς, να μπορούν να υπολογισθούν ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_{(E)} \Phi dA$$

όπου Φ συμβολίζει κάθε Καρτεσιανή συνιστώσα της ταχύτητας.

Για τον κόμβο (j,k) της διατομής $\xi = \xi_0$, το προσημασμένο στοιχειώδες εμβαδόν $d\vec{A}$ της κυψέλης που περιβάλλει τον κόμβο αυτό ισούται με

$$d\vec{A} = \vec{g}_2 \times \vec{g}_3 = J \vec{g}^1$$

όπου J η Ιακωβιανή οριζουσα του μετασχηματισμού. Κατά συνέπεια έχουμε

$$\int_{(E)} dA = \int_{(E)} |d\vec{A}| = \sum_{(E)} J |\vec{g}^1| = \sum_{(E)} J \sqrt{g^{11}}$$

όπου το σύμβολο της άθροισης Σ καλύπτει όλους τους κόμβους της διατομής $\xi = \xi_0$. Η εξαίρεση που αφορά τους οριακούς κόμβους μπορεί να ληφθεί υπόψη με συντελεστές $1/2$ ή $1/4$ ώστε να ληφθούν υπόψη κυψέλες εμβαδού dA που ανήκουν μόνο μερικά μέσα στο χωρίο. Αντίστοιχα, για τη συνιστώσα Φ της ταχύτητας, ισχύει ότι

$$\int_{(E)} \Phi dA = \int_{(E)} \Phi |d\vec{A}| = \sum_{(E)} \Phi J |\vec{g}^1| = \sum_{(E)} \Phi J \sqrt{g^{11}}$$

Αρα, η μέση ταχύτητα στη διατομή αυτή έχει συνιστώσες

$$u_{REF} = \frac{\sum_{(E)} u J \sqrt{g^{11}}}{\sum_{(E)} J \sqrt{g^{11}}}, \quad v_{REF} = \frac{\sum_{(E)} v J \sqrt{g^{11}}}{\sum_{(E)} J \sqrt{g^{11}}}, \quad w_{REF} = \frac{\sum_{(E)} w J \sqrt{g^{11}}}{\sum_{(E)} J \sqrt{g^{11}}}$$

(β) Η "Κατεύθυνση Αναφοράς" ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ με συνιστώσες

$$r_x = \frac{u_{REF}}{\sqrt{u_{REF}^2 + v_{REF}^2 + w_{REF}^2}}, \quad r_y = \frac{v_{REF}}{\sqrt{u_{REF}^2 + v_{REF}^2 + w_{REF}^2}}, \quad r_z = \frac{w_{REF}}{\sqrt{u_{REF}^2 + v_{REF}^2 + w_{REF}^2}}$$

Ξανασχεδιάζουμε το Σχήμα 7.8 με κατάλληλους συμβολισμούς που θα βοηθήσουν την ανάπτυξη που θα ακολουθήσει. Ο κόμβος (j,k) της διατομής $\xi = \xi_0$ εδράζεται στο σημείο A και, για τον κόμβο αυτό επιθυμούμε να σχεδιάσουμε το διάνυσμα $\overline{\Gamma\Delta}$ ως διάνυσμα δευτερεύουσας ταχύτητας. Θα είναι

$$\overline{\Gamma\Delta} = \overline{B\Delta} - \overline{B\Gamma}$$

Τα διανύσματα $\overline{A\Delta}, \overline{A\Gamma}$ και \overline{AB} δεν ανήκουν γενικά στο ίδιο επίπεδο, αφού τα διανύσματα \vec{V}_{jk} (σε κάθε κόμβο), \vec{r} και το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την αξονική κατεύθυνση (έστω \vec{i}_x) δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο. Έχουμε

$$\overline{A\Delta} = \vec{V}_{jk}$$

Το διάνυσμα $\overline{A\Gamma}$ έχει την ίδια αξονική προβολή με την ταχύτητα \vec{V}_{jk} , είναι δηλαδή

$$\overline{A\Gamma} \cdot \vec{i}_x = \overline{A\Delta} \cdot \vec{i}_x$$

και, συνεπώς, για το διάνυσμα $\overline{A\Gamma}$ που είναι συγγραμμικό με το \vec{r} ισχύει

$$\overline{A\Gamma} = \frac{\vec{V}_{jk} \cdot \vec{i}_x}{r_x} \vec{r}$$

Τότε το διάνυσμα $\overline{B\Gamma}$ προβολής του στο κάθετο επίπεδο στην αξονική κατεύθυνση θα είναι

$$\overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma} - \overline{AB}$$

και το ζητούμενο διάνυσμα

$$\overline{\Gamma\Delta} = \overline{B\Delta} - \overline{B\Gamma} = \overline{A\Delta} - \overline{AB} - \overline{A\Gamma} + \overline{AB} = \overline{A\Delta} - \overline{A\Gamma}$$

ή

$$\overline{\Gamma\Delta} = \vec{V}_{jk} - \frac{\vec{V}_{jk} \cdot \vec{i}_x}{r_x} \vec{r}$$

το οποίο πρέπει να σχεδιάσουμε σε κάθε σημείο της διατομής $\xi = \xi_0$.

ΑΣΚΗΣΗ 17

Οι ερωτήσεις που ακολουθούν αφορούν την τεχνική των συναρτήσεων τοίχου, σε σχέση με το μοντέλο τύρβης k-ε.

(α) Αποδείξτε ότι, αν η ροή δεν είναι αποκολλημένη τότε, κοντά στο στερεό τοίχωμα, το γινόμενο $y^+ u^+$ είναι ανεξάρτητο της τάσης τριβής στο στερεό τοίχωμα.

(β) Θα χρησιμοποιήσουμε την ποσότητα $(y^+ u^+)$, με την ιδιότητα που μόλις αποδείξαμε για να διατυπώσουμε έναν αλγόριθμο που να υπολογίζει το αν ο πρώτος γειτονικός κόμβος P του τοιχώματος ανήκει στο γραμμικό υπόστρωμα ή στη λογαριθμική περιοχή του οριακού στρώματος. Θεωρούμε καταρχή ότι το όριο των δύο περιοχών είναι το $y^+ = 4$.

Αποδείξτε ότι η ανισότητα

$$u_P y_P < 16 \nu$$

(ν =κινημ. συνεκτικότητα) καθορίζει έναν κόμβο που ανήκει στο γραμμικό υπόστρωμα. Συμπληρώστε το συλλογισμό, διατυπώστε τον αλγόριθμο διάκρισης της περιοχής που ανήκει ο κόμβος P και εξηγήστε πώς θα υπολογισθεί η τ_w σε κάθε μια από τις δύο περιπτώσεις.

ΛΥΣΗ

(α) Από τους ορισμούς των y^+ και u^+ , για ένα σημείο P

$$y^+ = \frac{y_P u_\tau}{\nu}, \quad u^+ = \frac{u_P}{u_\tau}$$

προκύπτει άμεσα ότι το γινόμενο τους ισούται με

$$y^+ u^+ = \frac{y_P u_P}{\nu}$$

και συνεπώς δεν εξαρτάται από την ταχύτητα τριβής ή την τάση τριβής στο στερεό όριο.

(β) Εστω P το σημείο του πλέγματος που βρίσκεται πλησιέστερα στο στερεό τοίχωμα. Γνωρίζουμε την τυπική κατανομή $u^+ = u^+(y^+)$ η οποία είναι αύξουσα, αν τουλάχιστον η ροή δεν είναι αποκολλημένη. Κατά συνέπεια, το γινόμενο $y^+ u^+$ είναι επίσης αύξουσα συνάρτηση της πραγματικής απόστασης y από το στερεό όριο και για το λόγο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διάκριση της περιοχής του οριακού στρώματος όπου ανήκει το σημείο P. Αν το γραμμικό υπόστρωμα τελειώνει στην τιμή $y^+ = 4$, τότε επειδή σ' αυτό $y^+ = u^+$ άρα

$$y^+ u^+ = 16$$

ή

$$u_P y_P = 16 \nu$$

Ετσι ο αλγόριθμος διάκρισης της περιοχής του P καταλήγει σε δύο περιπτώσεις:

(β₁) Αν

$$u_P y_P \leq 16 \nu$$

τότε το σημείο P ανήκει στο στρωτό οριακό υπόστρωμα και η τάση τριβής υπολογίζεται χρησιμοποιώντας ότι

$$y_P^+ = u_P^+$$

που, με την εκτέλεση των πράξεων δίνει

$$\tau_w = \frac{\rho \nu u_P}{y_P}$$

(β₂) Αν

$$u_P y_P > 16 \nu$$

τότε το σημείο P ανήκει στη λογαριθμική περιοχή του οριακού στρώματος και για τον υπολογισμό της τάσης τριβής απαιτείται η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{yu_\tau}{\nu} \right) + c$$

μέσω λ.χ. της μεθόδου Newton, ενώ

$$\tau_w = \rho u_\tau^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 18

Ο αριθμός Reynolds που αντιστοιχεί στο μήκος L που διαρκεί η μετάβαση από τη στρωτή στην τυρβώδη κατάσταση συσχετίζεται (κατά Dhawan) με τον τοπικό αριθμό Reynolds με τη σχέση

$$Re_L = 5 Re_x^{0.8} \quad , \quad Re_L = \frac{u_\epsilon L}{\nu} \quad , \quad Re_x = \frac{u_\epsilon x}{\nu}$$

Η σχέση αυτή ισχύει για μηδενική κλίση πίεσης.

(α) Αποδείξτε ότι, για ασυμπίεστη ροή με μηδενική διαμήκη κλίση πίεσης, μια απλή έκφραση για την ολοκληρωτική εξίσωση της διαμήκουσ ορμής είναι η

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{c_f}{2}$$

όπου c_f ο τοπικός συντελεστής τριβής.

(β) Αν η κατανομή ταχύτητας στο στρωτό οριακό στρώμα είναι

$$\frac{u}{u_\epsilon} = \sin \left(\frac{\pi \eta}{2} \right) \quad , \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

δείξτε ότι

$$Re_2 = 0.6551 \cdot Re_x^{0.5}$$

Θεωρείστε ότι το οριακό στρώμα ξεκινά στη θέση $x=0$, όπου $\delta = \delta_2 = 0$.

(γ) Δώστε την έκφραση του Re_L συναρτήσει του Re_2 , που είναι συμβατή με το μοντέλο του Dhawan.

ΛΥΣΗ

(α) Η ολοκληρωτική εξίσωση της διαμήκουσ ορμής για ασυμπίεστη ροή γράφεται, σύμφωνα με τη σχέση (10.35), ως

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{u_\epsilon} \frac{du_\epsilon}{dx} \delta_2 (H_{12} + 2) = \frac{\tau_w}{\rho u_\epsilon^2}$$

με

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho u_e^2}$$

Όταν η εξωτερική ροή λαμβάνει χώρα με μηδενική κλίση πίεσης τότε

$$\frac{du_e}{dx} = 0$$

και οι παραπάνω εξισώσεις παίρνουν την απλή μορφή

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{1}{2} c_f \quad (1)$$

(β) Για τη δεδομένη κατανομή ταχύτητας

$$\frac{u}{u_e} = \sin\left(\frac{\pi \eta}{2}\right), \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

έχουμε δείξει (βλ. σχέση (10.51)) ότι

$$c_f = \frac{0.6551}{Re_x^{1/2}} \quad (2)$$

Για ένα οριακό στρώμα που ξεκινά από τη θέση A (όπου $\delta = \delta_2 = 0$) και εξελίσσεται μέχρι τη θέση B (όπου τα τοπικά πάχη συμβολίζονται με δ και δ_2) ολοκληρώνουμε κατά x την εξίσωση (1). Με τη χρήση και της εξίσωσης (2) λαμβάνουμε ότι

$$\delta_2 - 0 = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{0.6551}{Re_x^{1/2}} dx$$

ή ισοδύναμα

$$Re_2 = \frac{1}{2} 0.6551 \int_0^{Re_x} \frac{dRe_x}{Re_x} = 0.6551 Re_x^{1/2} \quad (3)$$

(γ) Ο συνδυασμός του κριτηρίου του Dhawan με τη σχέση (3) που μόλις αποδείξαμε δίνει ότι

$$Re_L = 5 Re_x^{0.8} = 5 \left[\left[\frac{Re_2}{0.6551} \right]^2 \right]^{0.8} = \frac{5}{0.6551^{1.6}} Re_2^{1.6}$$

ή τελικά

$$Re_L = 9.837 Re_2^{1.6}$$

που είναι η ζητούμενη σχέση.

ΑΣΚΗΣΗ 19

Θα διατυπώσουμε μια ολοκληρωτική μέθοδο για τον υπολογισμό στρωτών οριακών στρωμάτων που χρησιμοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση της διαμήκουσ ορμής και την κατανομή ταχύτητας

$$\frac{u}{u_e} = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4 \quad , \quad \eta = \frac{y}{\delta} \quad (1)$$

Γράφουμε την ολοκληρωτική εξίσωση στην κατάλληλη μορφή για ασυμπίεστη ροή και στη συνέχεια ζητείται:

(α) Να σχολιασθεί η φυσική σημασία των οριακών συνθηκών που θα χρησιμοποιηθούν για τον καθορισμό των σταθερών a, b, c, d και οι οποίες δίνονται αμέσως παρακάτω

$$\text{για } y=0 \quad : \quad u=0 \text{ και } v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_w = -u_e \frac{du_e}{dx}$$

$$\text{για } y=\delta \quad : \quad u=u_e \text{ και } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

όπου ο δείκτης (w) δείχνει τη θέση του στερεού τοιχώματος και δ είναι το πάχος του οριακού στρώματος.

(β) Χρησιμοποιείστε τις παραπάνω οριακές συνθήκες για τον υπολογισμό των a, b, c, d ως συνάρτηση της ποσότητας λ που ορίζεται ως

$$\lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{du_e}{dx}$$

Ενδεικτικά δίνονται τα δύο πρώτα από τα αναμενόμενα αποτελέσματα

$$a = 2 + \frac{\lambda}{6} \quad , \quad b = -\frac{\lambda}{2}$$

Αποδείξτε τις παραπάνω σχέσεις και υπολογίστε μόνοι σας τα c και d .

(γ) Αποδείξτε ότι

$$\frac{u}{u_e} = F(\eta) + \lambda G(\eta) \quad (2)$$

με

$$F(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4, \quad G(\eta) = \frac{1}{6}\eta(1-\eta)^3 \quad (3)$$

Τι σημαίνει η γραφή (2), όσον αφορά τον αριθμό των παραμέτρων που εμπλέκονται στο πρόβλημα; Πώς καταλαβαίνετε την εξίσωση (2) σε σχέση με τη μία ολοκληρωτική εξίσωση που θα χρησιμοποιήσετε;

(δ) Αποδείξτε ότι

$$\frac{\tau_w}{\rho u_e^2} = \frac{\nu}{u_e \delta} \left(2 + \frac{\lambda}{6} \right) \quad (4)$$

(ε) Εκτός από τη σχέση (4), σε ποιούς αντίστοιχους υπολογισμούς πρέπει να προβείτε ώστε η ολοκληρωτική εξίσωση της διαμήκουσ εξίσωσης να γραφεί ως μια διαφορική εξίσωση προς μια μεταβλητή. Ποιά είναι αυτή η μεταβλητή;

(στ) Δώστε την τιμή του λ στην οποία θα συμβεί αποκόλληση της ροής.

ΛΥΣΗ

Γράφουμε την ολοκληρωτική εξίσωση της διαμήκουσ ορμής για στρωτές και ασυμπίεστες ροές

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} \delta_2 (H_{12} + 2) = \frac{\tau_w}{\rho_e u_e^2} \quad (5)$$

(α) Οι οριακές συνθήκες

$$u = 0, \quad \text{για } y = 0 \text{ ή } \eta = 0$$

και

$$u = u_e, \quad \text{για } y = \delta \text{ ή } \eta = 1$$

εκφράζουν αφενός μεν τη συνθήκη μη-ολίσθησης στο στερεό τοίχωμα, αφετέρου δε τη συνθήκη ομαλής μετάβασης από την κατανομή ταχύτητας του οριακού στρώματος στην εξωτερική ροή.

Η οριακή συνθήκη

$$v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_w = -u_e \frac{du_e}{dx}$$

προκύπτει από το συνδυασμό, αφενός μεν την εξίσωση της διαμήκουσ ορμής όπως εκφράζεται στο στερεό τοίχωμα

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \frac{\partial p}{\partial x}$$

αφετέρου δε της ίδιας εξίσωσης όπως διατυπώνεται για την εξωτερική ροή

$$-\rho_e u_e \frac{du_e}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

με κοινή τιμή της διαμήκουσ κλίσης πίεσης, που εμφανίζεται στα δεύτερα μέλη και των δύο εξισώσεων.

Τέλος, οι συνθήκες

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \text{για } y=\delta \quad \text{ή} \quad \eta=1$$

εκφράζουν τη συνέχεια παραγώγων στο σημείο ένωσης οριακού στρώματος και εξωτερικής ροής.

(B) Ισχύει ότι

$$\frac{1}{u_e} \frac{\partial u}{\partial \eta} = a + 2b\eta + 3c\eta^2 + 4d\eta^3 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{1}{u_e} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 2b + 6c\eta + 12d\eta^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

οπότε, η μεν πρώτη οριακή συνθήκη ($u=0$ στο $\eta=0$) επαληθεύεται ταυτοτικά, ενώ οι υπόλοιπες τέσσερις οριακές συνθήκες δίνουν αντίστοιχα

$$2bu_e v \frac{1}{\delta^2} = -u_e \frac{du_e}{dx}$$

$$a + b + c + d = 1$$

$$a + 2b + 3c + 4d = 0$$

$$2b + 6c + 12d = 0$$

Η πρώτη από αυτές ξαναγράφεται, χρησιμοποιώντας την παράμετρο λ , στη μορφή

$$b = -\frac{\lambda}{2}$$

και οι ποσότητες a, c, d προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος

$$a + c + d = 1 + \frac{\lambda}{2}$$

$$a + 3c + 4d = \lambda$$

$$6c + 12d = \lambda$$

Το σύστημα επιλύεται εύκολα και προκύπτουν οι ζητούμενες εκφράσεις

$$a = 2 + \frac{\lambda}{6} \quad , \quad c = -2 + \frac{\lambda}{2} \quad , \quad d = 1 - \frac{\lambda}{6}$$

(γ) Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω τιμές, η κατανομή ταχύτητας γράφεται, ως συνάρτηση της ποσότητας λ , στη μορφή

$$\frac{u}{u_e} = \left(2 + \frac{\lambda}{6}\right) \eta - \frac{\lambda}{2} \eta^2 + \left(-2 + \frac{\lambda}{2}\right) \eta^3 + \left(1 - \frac{\lambda}{6}\right) \eta^4 \quad (6)$$

Συγχρόνως, η προς απόδειξη σχέση (2) με τις εκφράσεις (3) για τα $F(\eta)$ και $G(\eta)$ γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_e} &= 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 + \frac{\lambda}{6} \eta (1 - \eta^3) = \\ &= 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 + \frac{\lambda}{6} \eta - \frac{\lambda}{2} \eta^2 + \frac{\lambda}{2} \eta^3 - \frac{\lambda}{6} \eta^4 = \\ &= \left(2 + \frac{\lambda}{6}\right) \eta - \frac{\lambda}{2} \eta^2 + \left(-2 + \frac{\lambda}{2}\right) \eta^3 + \left(1 - \frac{\lambda}{6}\right) \eta^4 \end{aligned}$$

που αναπαράγει ακριβώς την κατανομή της σχέσης (6). Άρα επαληθεύεται η σχέση (2), η οποία εκφράζει τελικά την κατανομή ταχύτητας στο οριακό στρώμα ως συνάρτηση μιας και μόνο μιας μεταβλητής (του λ) και συνεπώς θα συνδυασθεί με μια ολοκληρωτική εξίσωση, αυτή της διαμήκουσ ορμής.

(δ) Είναι

$$\frac{\tau_w}{\rho u_e^2} = \frac{1}{\rho u_e^2} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = \frac{\mu}{\rho u_e \delta} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}$$

Ομως

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = F'(0) + \lambda G'(0)$$

με

$$G'(0) = 2 \quad , \quad F'(0) = \frac{1}{6}$$

οπότε

$$\frac{\tau_w}{\rho u_e^2} = \frac{\nu}{u_e \delta} \left(2 + \frac{\lambda}{6} \right)$$

(ε) Όπως προαναφέρθηκε στο (γ), η ύπαρξη μιας παραμέτρου, της λ , μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε μόνο την ολοκληρωμένη εξίσωση της διαμήκους ορμής (1) για τον υπολογισμό της εξέλιξης του οριακού στρώματος πάνω στο στερεό τοίχωμα. Άρα πρέπει να διατυπωθεί η διαφορική εξίσωση (5) στη μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης ως προς την παράμετρο λ που επιλέξαμε.

Καταρχή παρατηρούμε ότι, αν επιλεγεί το λ ως μεταβλητή του προβλήματος, το πάχος δ του οριακού στρώματος εκφράζεται πάντοτε ως συνάρτηση του λ , από τη σχέση ορισμού του λ , δηλαδή

$$\delta = \sqrt{\frac{\lambda \nu}{du_e/dx}}$$

και δεν πρέπει να θεωρείται ως διαφορετική παράμετρος.

Ως δεύτερο βήμα, πρέπει να εκφραστούν τα πάχη δ_1 και δ_2 (οπότε έχει εκφρασθεί και ο παράγοντας μορφής $H_{12} = \delta_1/\delta_2$) ως συνάρτηση της μεταβλητής λ . Για να γίνει αυτό θα απαιτηθούν οι ολοκληρώσεις

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy$$

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) \frac{u}{u_e} dy$$

χρησιμοποιώντας την κατανομή u/u_e από τη σχέση (1).

Τελευταίο βήμα είναι η αντικατάσταση των εκφράσεων των τ_w, δ_1, H_{12} στην εξίσωση (5) και η αναδιανομή των όρων.

(στ) Το κριτήριο για την αποκόλληση είναι μηδενική τάση τριβής στον τοίχο, άρα από τη σχέση (4) πρέπει

$$2 + \frac{\lambda}{6} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -12$$