

ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΤΥΡΒΗΣ

TURBULENCE MODELS

- ① Μ.Τ. Βασιζμένα στην παραδοχή του Boussinesq.
ή
Μοντέλα τυρβώδους συνεκτικότητας.
Turbulent/Eddy Viscosity Models.
- ② Reynolds Stress Turbulence Models (RSM)
Μ.Τ. χωρίς την παραδοχή του Boussinesq.
- ③ LES Models - LARGE EDDY SIMULATION.
Μ.Τ. Προσομοίωσης Μεγάλων Δινών

ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗ Μ.Τ.

ανάλογα με το ποσες εξισώσεις* λύνονται.
(* επιπλέον μ.δ.ε.)

- από Μηδέν μ.δ.ε. (Αλγεβρικά Μ.Τ.).
Μηδενικής Ταξης - Zero-Order/Equation T.M.
Algebraic Turbulence T.M.



- 12 μ.δ.ε στο RSM μοντέλο των
Donaldson & Rosenbaum, 1968

Πολύ συνηθισμένα: T.M. $\emptyset, 1, 2$ μ.δ.ε!

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΡΒΗΣ

Prandtl (1925)

$$\nu_t = C \ell^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$$

Μήκος Αναμίξης / Mixing Length

Απλή
Διατύπωση:
(ροές στη γειτονία
στερεού τοιχώματος)

Εσωτ. Περ. Ορ. Ζ. (inner zone)

$$\ell_i = \kappa y \left(1 - \frac{e^{-y^+}}{A^+} \right)$$

→ 26

Εξωτ. Περ. Ορ. Ζ. (outer zone)

$$\ell_o = C \delta$$

↓
0.089

οπου $y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{|\tau_w|}{\rho}}$$

Ταχύτητα τριβής
friction velocity

Ανάγκη υπολογισμού του πάχους δ του οριακού στρ.!!

• Cebeci-Smith model, 1974 (δ)

• Baldwin-Lomax model, 1975 (~~δ~~)

Μοντέλο k-ε , Αδυσπίεστο Ρευστό

Harlow-Nakayama (1968)

Jones-Launder (1972)

Launder-Spalding (1974).

k : τυρβώδης κινητική ενέργεια (μέση)
(κινητική ενέργεια της τυρβής)
turbulent kinetic energy (**TKE**)

ε : ρυθμός καταστροφής της τυρβής
turbulence dissipation rate
turbulent energy dissipation (**TED**)

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_j'}$$

στιχμαία εξίσωση 2-ορφής:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

οπου $u_i = u_i(t)$, $p = p(t)$, $\rho = \text{σταθ.}$

Time-averaged:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right]$$

Εξίσωση διαταραχής u'_i :

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) - u'_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Επι u'_j

$$u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial t} + u'_j \bar{u}_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} u'_j + \dots$$

επιματινά :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \dots = \emptyset \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \dots = \emptyset \end{aligned} \right\} \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \dots = \emptyset \Rightarrow u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \dots = \emptyset$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial t} + \dots = \emptyset \\ \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \dots = \emptyset \end{aligned} \right\} \frac{\partial u'_j}{\partial t} + \dots = \emptyset \Rightarrow u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial t} + \dots = \emptyset$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \dots = \emptyset \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \dots = \emptyset \end{aligned} \right\} \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \dots = \emptyset \Rightarrow u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \dots = \emptyset$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial t} + \dots = \emptyset \\ \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \dots = \emptyset \end{aligned} \right\} \frac{\partial u'_j}{\partial t} + \dots = \emptyset \Rightarrow u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial t} + \dots = \emptyset$$

$\oplus \Rightarrow$

$$\oplus \Rightarrow u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial t} + u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial t} + \dots = \emptyset$$

$$\text{ή} \frac{\partial (u'_i u'_j)}{\partial t} + \dots = \emptyset$$

averaging \rightsquigarrow

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \dots = \emptyset$$

(επι δ_i^j)

ή

$$2 \frac{\partial k}{\partial t} + \dots = \emptyset$$

⚠

$$\bullet \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u'_i u'_j}) + \overline{u_k} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j}) = - \left\{ \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} \right\} +$$

$$+ \nu \left\{ \overline{u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right)} + \overline{u'_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right)} \right\} -$$

$$- \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - \overline{u'_k u'_j} \frac{\partial \overline{u_l}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j u'_k})$$

Τριπλό γινόμενο διαταραχών!

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \overline{u'_i p'} + \frac{1}{2} \overline{u'_k{}^2 u'_i} \right) + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_k^2} - \nu \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)^2} - \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u_l}}{\partial x_k}$$

(T1) (T2) (T3) (T4)

T1: Διάχυση λόγω τυρβυλίας (diffusion by turbulence)

T2: Μοριακή διάχυση του k λόγω ν (diffusion due to ν)

T3: Όρος καταστροφής (dissipation)

T4: Όρος παραγωγής/γένεσης τυρβυλίας (turbulent production/generation)

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΟΡΩΝ T1, T3, T4

$$(T4) \quad -\overline{u'_k u'_l} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \right) - \frac{2}{3} k \delta_l^k \quad (\text{Boussinesq υπόθεση})$$

$$\Rightarrow -\overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} = \underbrace{\nu_t \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \right)}_{P \text{ or } G} - \frac{2}{3} k \delta_l^k \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k}$$

$$(T1) \quad -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \overline{u'_l p'} + \frac{1}{2} \overline{u'_k u'_l} \right) \approx \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right)$$

Pr_k = τυρβώδης αριθμός Prandtl (ή Schmidt), $Pr_k = 1,0$

$$(T3) \quad -\nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)^2 = - \underbrace{C_D}_{D} \frac{k^{3/2}}{l} \quad (C_D \approx 0,164)$$

Τα παραπάνω ισχύουν «μακριά από το ελεύθερο τοίχωμα»
(επει που δεν ισχύουν τα φαινόμενα απόσβεσης/damping)
αρα στην ΠΛΗΡΩΣ ΤΥΡΒΩΔΗ ΠΕΡΙΟΧΗ

Η εξίσωση του k

για την περιοχή υψηλών αριθμών Reynolds τύπου
(High-Re k-equation)

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] + P - D$$

$$P - C_D \frac{k^{3/2}}{l}$$

?

όπου: $P = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) \right)$

Μονάδες της εξίσωσης: $\frac{m^2}{s^3}$

αφού $k \rightarrow \frac{m^2}{s^2}$

ΣΧΟΛΙΑ

- Μήκος Ανάμιξης
Prandtl Mixing Length

$$v_t = C_l \rho \quad \rightarrow \quad v_t = C_k \ell \sqrt{k}$$

↑
χαρακτηριστική
ταχύτητα τυρβώσης

$$v_t = C_k \ell \sqrt{k} \quad *$$

* Prandtl & Kolmogorov (1940)

- Εκφραση του ρυθμού καταστροφής της τυρβώσης:

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{\ell} \quad *$$

αρα, η εξίσωση του k:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(v + \frac{v_t}{Pr_k}) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] + P - \varepsilon$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \quad \ell = \frac{v_t}{C_k \sqrt{k}} \\ 2 \quad \ell = \frac{C_D k^{3/2}}{\varepsilon} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{v_t}{C_k \sqrt{k}} = \frac{C_D k^{3/2}}{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad C_\mu = 0,09$$

Η ΕΞΙΣΩΣΗ (μδς) ΤΟΥ Ε

$$\text{αφού: } \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] + P - \varepsilon$$

"κατ' αναλογία":

High-Re Model

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] + \underbrace{C_2 \frac{\varepsilon}{k} P - C_3 \frac{\varepsilon}{k} \varepsilon}_{+ C_2 \frac{\varepsilon P}{k} - C_3 \frac{\varepsilon^2}{k}}$$

$$\mu\varepsilon \quad \boxed{\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}}$$

Τυπικές Τιμές:

$$\boxed{C_\mu = 0,09 \quad Pr_k = 1 \quad Pr_\varepsilon = 1,3 \quad C_2 = 1,44 \quad C_3 = 1,92}$$

RANS με το k-ε Μοντέλο (Ασυμπίεστο)

ΧΡΟΝΙΚΑ ΜΟΝΙΜΗ ΡΟΗ
(STEADY FLOW)

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right\}$$

$$\bar{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right\} + P - \varepsilon$$

$$\bar{u}_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right\} + C_2 \frac{\varepsilon P}{k} - C_3 \frac{\varepsilon^2}{k}$$

$$\text{όπου } P = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right] \right)$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

- Πεπλεγμένη ή μη-πεπλεγμένη επίλυση των εξισώσεων της μέσης ροής (mean-flow equations) και αυτών του μοντέλου τύρβης (turbulence model)

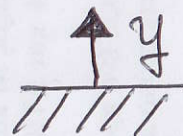
ΓΙΑ ΤΟ ε

για την ομογενή τύρβη:

$$(T3) \rightsquigarrow \nu \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\right)^2} = \varepsilon = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}$$

λ.χ. 3D ροή κοντά σε τοίχο

$$\varepsilon \approx \nu \overline{\left(\frac{\partial u'_x}{\partial y}\right)^2} + \nu \overline{\left(\frac{\partial u'_y}{\partial y}\right)^2} + \nu \overline{\left(\frac{\partial u'_z}{\partial y}\right)^2}$$



Διάσταση $\varepsilon \rightsquigarrow \frac{m^2}{s^3}$

ελεύθερη έκφραση του ε :

$$\varepsilon = \nu \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial u'_i}{\partial x_i}}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \nu \underbrace{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} + \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}$$

Ισότροπο (που εμφανίζεται στην εξίσωση του k)

ΟΙ ΔΥΟ ΕΚΔΟΧΕΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ $k-\epsilon$

• ΥΨΗΛΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ Re (ΤΗΣ ΤΥΡΒΗΣ).

High- Re Number $k-\epsilon$ model

Έχει ερεί που μπορεί να αμεληθεί η μοριακή συνεκτικότητα (ν ή μ) δηλαδή "μαυριά" από το στερεό τοίχωμα.

Πρώτοι κόμβοι στη λογαριθμική περιοχή του ορ. στρώματος.
Συναρτήσεις τοίχου (Wall Functions).

Πλεονεκτήματα - Αδυναμίες.

• ΧΑΜΗΛΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ Re (ΤΗΣ ΤΥΡΒΗΣ).

Low- Re Number $k-\epsilon$ model.

Ολοκλήρωση μέχρι το στερεό τοίχωμα.

Σμπλουτισμός των εξισώσεων του k & ϵ με όρους απόβρασης.

Low-Re k - ε Μοντέλο

$$\bar{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right\} + P - \varepsilon - \underbrace{2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2}_{\text{Ενδεικτικά!}}$$

$$\bar{u}_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right\} + C_2 f_1 \frac{\varepsilon P}{k} - C_3 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + \underbrace{2\nu \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y^2} \right)}_{\text{LRT}}$$

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

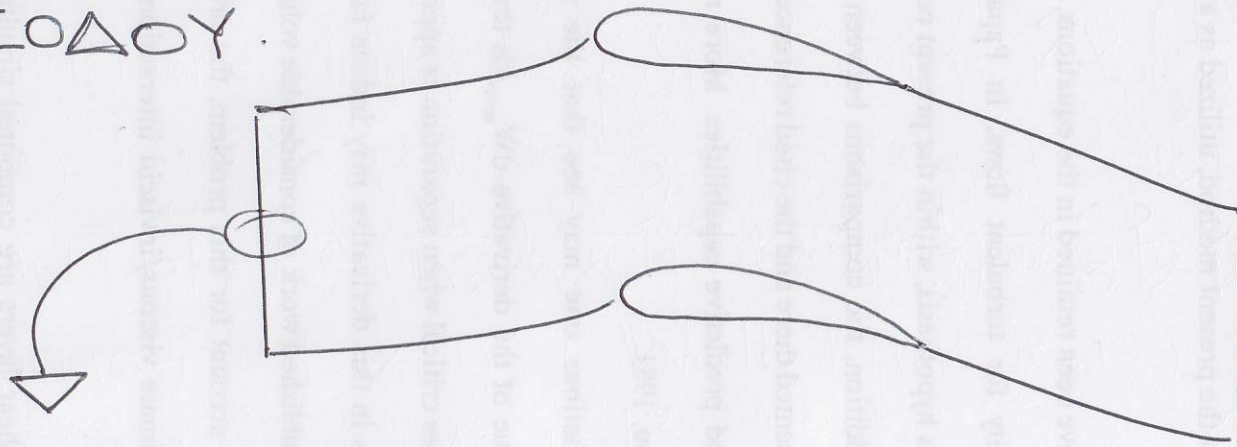
LRT = Low-Re Terms

$$f_1, f_2, f_3 = F \left(\frac{k^2}{\nu \varepsilon} = Re_t \right)$$

Reynolds Number
of Turbulence

ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ k-ε

οριακές συνθήκες
ΕΙΣΟΔΟΥ.



① ένταση της τύρβης
Turbulence Intensity

$$Tu = \dots$$

$$k_{in} = \frac{3}{2} (Tu V_{in}^2)$$

π.χ. $Tu = 0.01 \dots 0.06$
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ.

Δεύτερη συνθήκη?

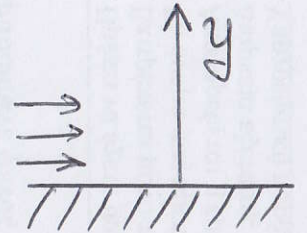
$$V_{tin} \cong (10 \dots 20) V$$

$$V_{tin} = C \frac{k_{in}^2}{\mu \varepsilon_{in}} \rightsquigarrow \varepsilon_{in} = \dots$$

LOW-Re k - ϵ : ΣΤΕΡΕΑ ΤΟΙΧΩΜΑΤΑ

$$u' = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots$$

$$v' = \beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \dots$$



• αλλά $u'|_{y=0} = v'|_{y=0} = 0 \Rightarrow \underline{a_0 = \beta_0 = 0}$

• $\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v'}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow \underline{\beta_1 = 0}$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u' = a_1 y + a_2 y^2 + \dots \\ v' = \beta_2 y^2 + \dots \end{array} \right.$$

• $k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2}) \propto y^2$

$$\boxed{k \Big|_{y=0} = 0 \quad \eta \quad \frac{\partial k}{\partial n} \Big|_{y=0} = 0}$$

ΣΧΟΛΙΑ!

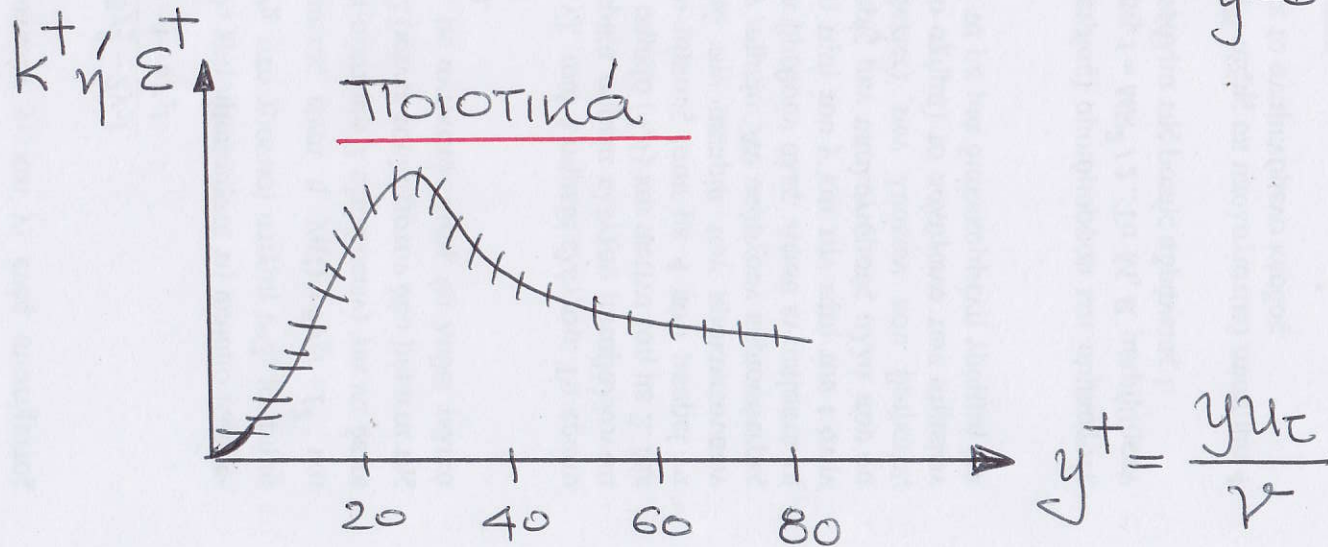
• $\underbrace{-\overline{u'v'}}_{\propto y^3} = \nu_t \frac{du}{dy} = \nu_t \underbrace{\frac{\partial u'}{\partial y}}_{\propto \sigma \alpha \theta} \Rightarrow \boxed{\nu_t \propto y^3}_{y=0}$

• Γενικά $\boxed{\varepsilon \propto y^N}$
 $N > 1$ γενικά $\rightsquigarrow \boxed{\varepsilon|_{y=0} = 0 \text{ ή } \frac{\partial \varepsilon}{\partial n}|_{y=0} = 0^*}$

* αφού $\varepsilon \approx \nu \underbrace{\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2}_{\propto \sigma \alpha \theta} \rightsquigarrow \varepsilon = \text{σταθερό}$
 $\Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial n}|_{y=0} = 0$

$$k^+ = \frac{k}{u\tau^2}$$

$$\varepsilon^+ = \frac{\nu \varepsilon}{u\tau^4}$$



ΑΣΚΗΣΗ

Αν στη λογαριθμική περιοχή του ο.σ. χνωρίζετε ότι
πραγτικά $P = \varepsilon$ (Production = Dissipation), δείξτε
ότι είναι

$$\varepsilon^+ = \frac{1}{\kappa} \frac{1}{y^+}$$

Λύση:

$$P = \varepsilon \Rightarrow \underbrace{-\overline{u'v'}}_{u_\tau^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^+ = \frac{\nu}{u_\tau^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$
$$\varepsilon^+ = \frac{\nu \varepsilon}{u_\tau^4} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\varepsilon^+ u_\tau^4}{\nu}$$

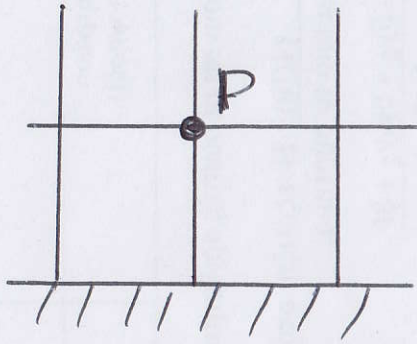
$$\text{Αλλά: } \bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \Rightarrow \frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y u_\tau}{\nu} + C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{u_\tau}{\kappa} \cdot \frac{\nu}{y u_\tau} \cdot \frac{u_\tau}{\nu} = \frac{u_\tau}{\kappa y} = \frac{u_\tau^2}{\kappa \nu} \cdot \frac{\nu}{u_\tau y} = \frac{u_\tau^2}{\kappa \nu y^+}$$

$$\text{Άρα: } \varepsilon^+ = \frac{\nu}{u_\tau^2} \cdot \frac{u_\tau^2}{\kappa \nu y^+} = \frac{1}{\kappa y^+}$$

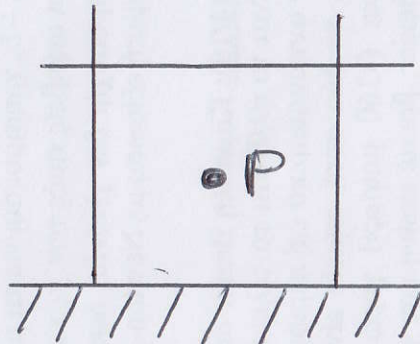
ο.ε.δ.

High-Re $k-\epsilon$: ΣΤΕΡΕΑ ΤΟΙΧΩΜΑΤΑ

Συναρτήσεις Τοίχου (Wall Functions)



Κεντροκομβική
διατύπωση
vertex-centered



Κεντροκυβελική
διατύπωση
cell-centered

$[P] \in$ βση
λογαριθμική
περιοχή
του οριακού
στρώματος

όπου :

• $\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$ ¹ $\leftarrow \frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C$

• $\tau_w = -\overline{u'v'}$ ² (ή $-\rho \overline{u'v'}$ αν...)

• $P = \epsilon \Rightarrow \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2 = \epsilon$ ³

$$\textcircled{1} \Rightarrow \frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln(Ey^+) \quad , \quad y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{u} = \frac{u_\tau}{k} \ln\left(E \frac{u_\tau}{\nu} y\right) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{u_\tau^2}{ky^+ \nu}}$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \tau_w = -\rho \overline{u'v'} = \rho \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \Rightarrow u_\tau^2 = \nu_t \frac{u_\tau^2}{ky^+ \nu} \Rightarrow \boxed{\nu_t = ky^+ \nu}$$

$\tau_w = \rho u_\tau^2$

$$\textcircled{3} \Rightarrow \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2 = \varepsilon = C_\mu \frac{k^2}{\nu_t} \Rightarrow k^2 = \nu_t^2 \frac{u_\tau^4}{k^2 y^{+2} \nu^2 C_\mu} \Rightarrow \boxed{k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}}$$

οπότε:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon = C_\mu \frac{k^2}{\nu_t} &= \frac{u_\tau^4}{\nu_t} = \frac{u_\tau^4}{ky^+ \nu} = \frac{u_\tau^3}{ky} \\ \text{αλλά } u_\tau^3 &= (u_\tau^2)^{3/2} = (\sqrt{C_\mu} k)^{3/2} = C_\mu^{3/4} k^{3/2} \end{aligned} \right\}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{ky}}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΟΙΧΟΥ : ΕΥΡΕΣΗ u_τ ή τ_w στο P.

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(E \frac{y u_\tau}{\nu} \right) \Rightarrow \frac{u}{\sqrt{\tau_w / \rho}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(E \frac{y \sqrt{\tau_w / \rho}}{\nu} \right)$$

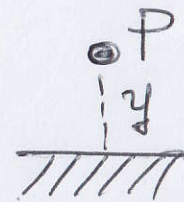
αλλά: $k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \Rightarrow u_\tau^2 = \sqrt{C_\mu} k \Rightarrow \tau_w = \rho k \sqrt{C_\mu} \Rightarrow \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = k^{1/2} C_\mu^{1/4}$

$$\Rightarrow \frac{u}{\frac{\tau_w}{\rho u_\tau}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[E \frac{y k^{1/2} C_\mu^{1/4}}{\nu} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\rho k^{1/2} C_\mu^{1/4}}{\tau_w} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[E \frac{y k^{1/2} C_\mu^{1/4}}{\nu} \right]$$

$$\Rightarrow \tau_w = \frac{\kappa \rho k^{1/2} C_\mu^{1/4}}{\ln \left[E y k^{1/2} C_\mu^{1/4} \frac{1}{\nu} \right]}$$

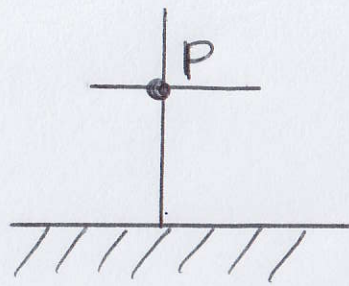
WF1



Εφαρμόζεται στον κόμβο P

WALL FUNCTIONS

ανανέωση του τ_w ή του u_τ
αν το P είναι στη λογαριθμική περιοχή } NEWTON - RAPHSON



αν ο κόμβος P είναι στο στρωτό γραμμικό υπόστρωμα:

$$u^+ = y^+$$

$$\frac{u}{u_z} = \frac{y u_z}{v}$$

$$u_z^2 = \frac{u v}{y} \Rightarrow$$

$$\tau_w = \frac{\rho u v}{y}$$

WF2

Ακύρωση της Buffer Zone.

$$u^+ = y^+$$

$$u^+ = \frac{1}{K} \ln y^+ + C$$

κατωφλι

$$y_0^+ = \dots$$

11.225

$$y_0^+ = \frac{1}{K} \ln y_0^+ + C \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow C = \dots$$

προκύπτει ορίζοντας το y_0^+

5.449

- προβλήματα με το IF !

ΕΝΑ ΕΣΥΠΝΟ ΤΕΧΝΑΣΜΑ

u^+ = αυθουσα συνάρτηση του y^+

$$u^+ y^+ = \frac{u}{u_z} \frac{y u_z}{v} = \frac{u y}{v}, \text{ ανεξάρτητο του } \tau_w!$$

- Στο γραμμικό οριακό υπόστρωμα:

$$u^+ y^+ = y_0^{+2}$$

κριτήριο αν $u^+ y^+ \geq y_0^{+2}$

αν $u^+ y^+ < y_0^{+2}$

$$\tau_w = \frac{\rho u v}{y}$$

σημ. WF2

αν $u^+ y^+ > y_0^{+2}$

εξίσση WF2

επίλυση με Newton-Raphson