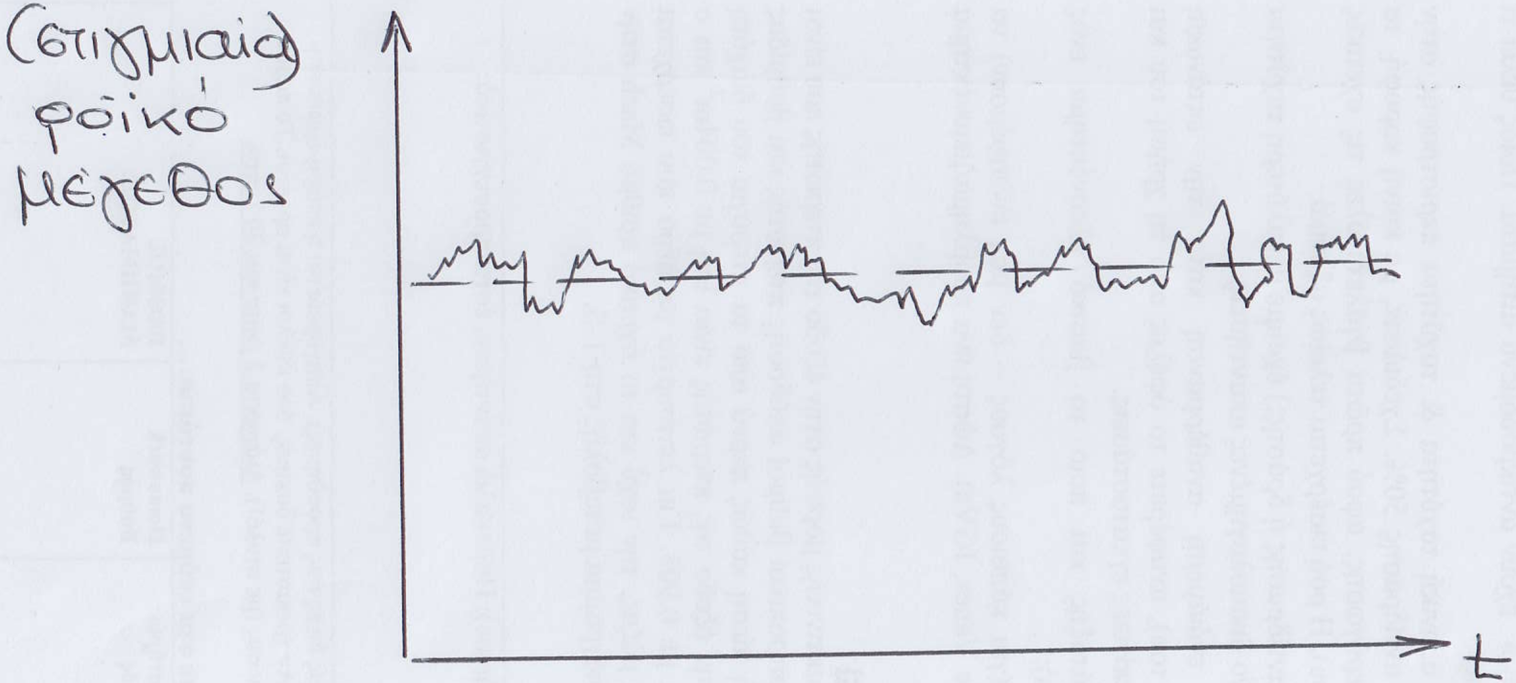
ΤΥΡΒΩΔΗ ΟΡΙΑΚΑ ΣΤΡΩΜΑΤΑ

- Εισαγωγή στην έννοια της τύρβης
  - Τυχαιότητα διαταραχών
  - Ισχυρή ανάμιξη
  - $Re > Re_{κατωφλι}$, μικρές τυχαίες διαταραχές κυριαρχούν της συνεκτικότητας.
  - Ενίσχυση διαταραχών, γίνονται μη-γραμμικές & αλληλοεπιδρούν με τις γύρω
  - Η ροή γίνεται χαοτική & μη-επαναλαμβανόμενη
  - Άρα, μετράται μόνο "στατιστικά"



— ΤΥΡΒΗ : ιδιότητα της ροής, όχι του ρευστού

— Τριδιαστότητα , μη-προβλεψιμότητα

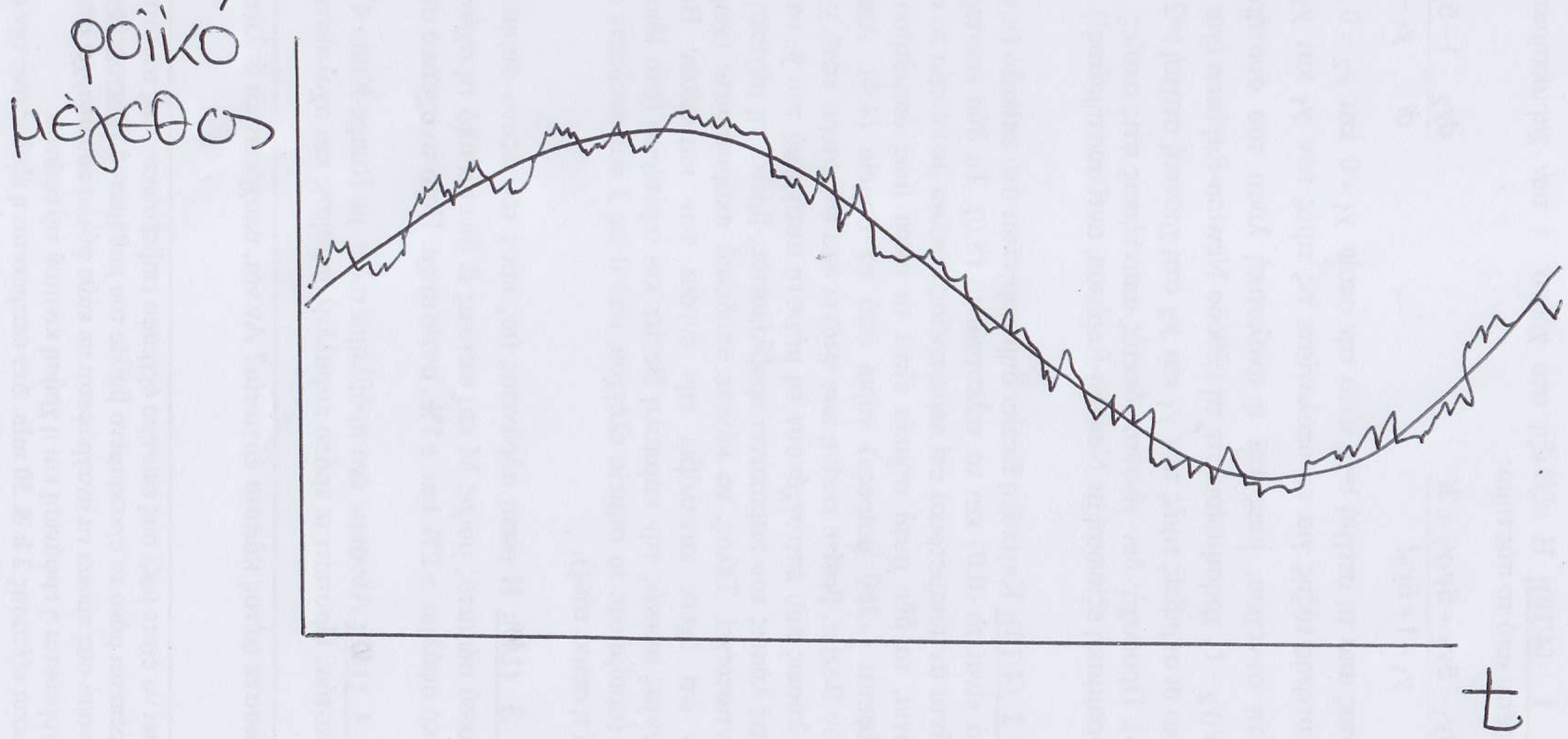
— Μικροί στροβιλισμοί / στρόβιλοι (eddies)

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΡΟΗΣ

(έναντι της στρωτής)

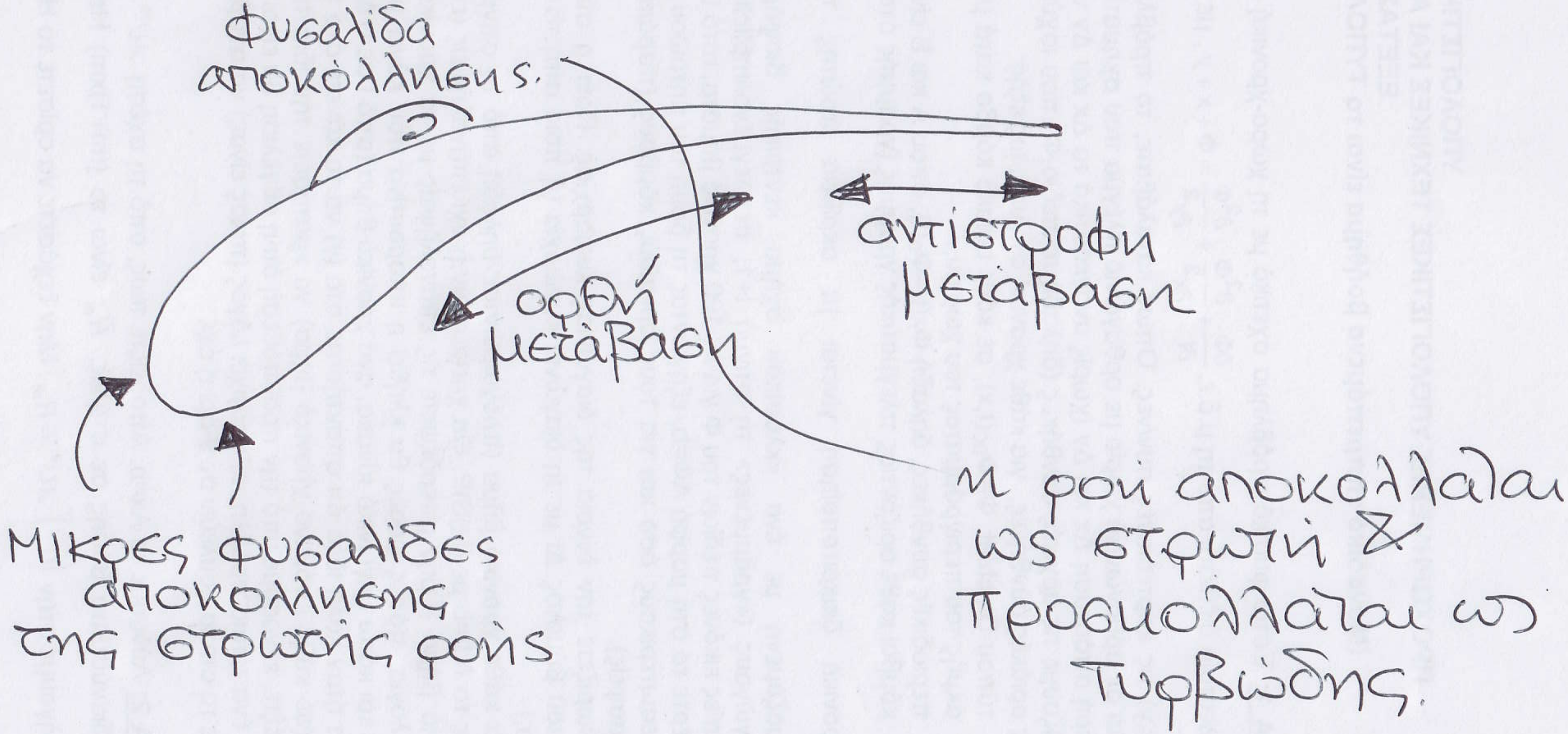
- αυξημένη αντίσταση
- αυξημένη ανάμιξη
- αυξημένη ομογενοποίηση
- αυξημένη συναλλαγή θερμότητας στα στερεά τοιχώματα
- δυσκολότερη αποκόλληση (αντέχει μεγαλύτερο ∇p)

Διάκριση χρονικής μη-μονιμότητας (unsteadiness) & τύρβης (turbulence)



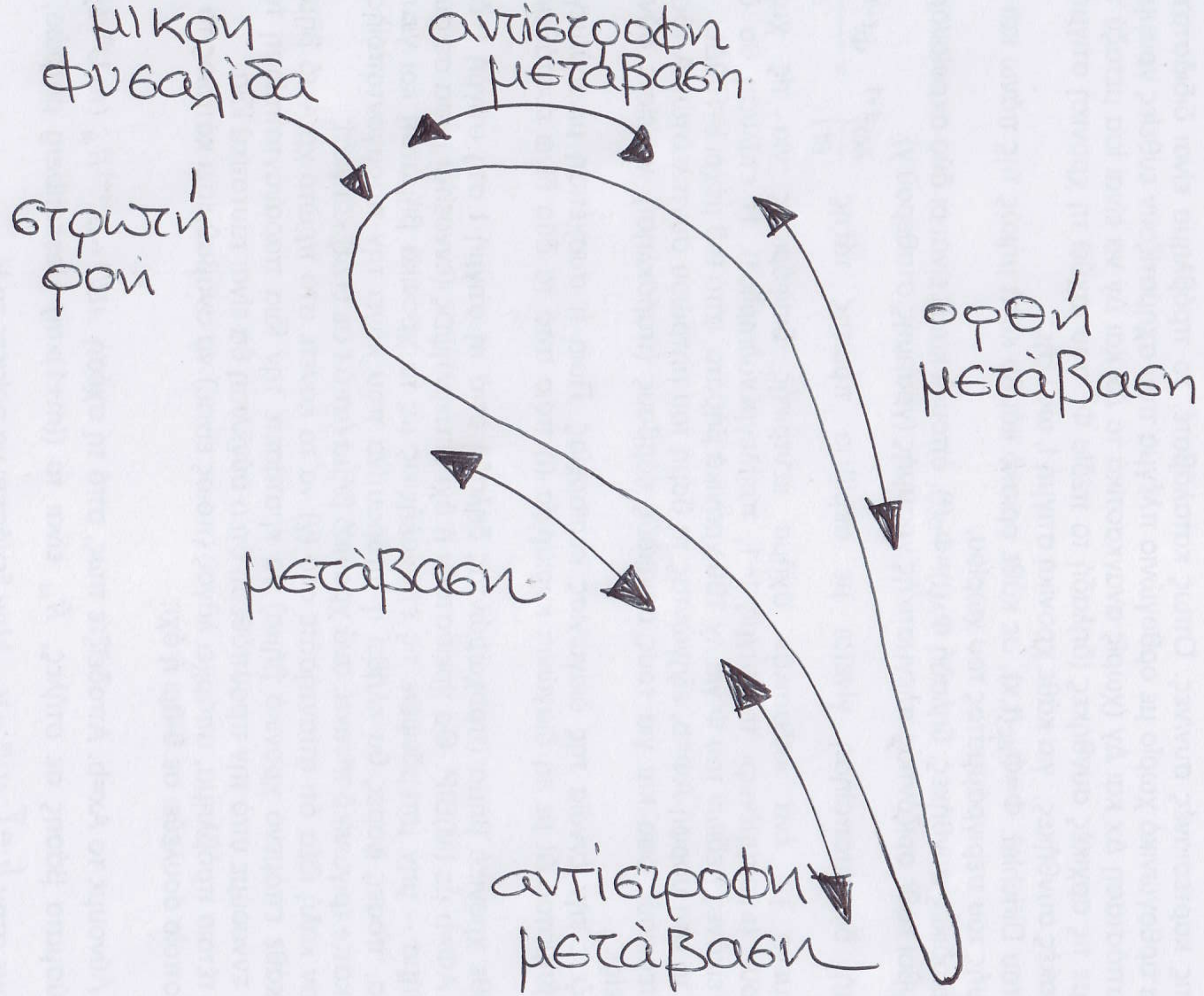
ΜΕΤΑΒΑΣΗ* (TRANSITION)

* από στρωτή σε τυρβώδη ροή

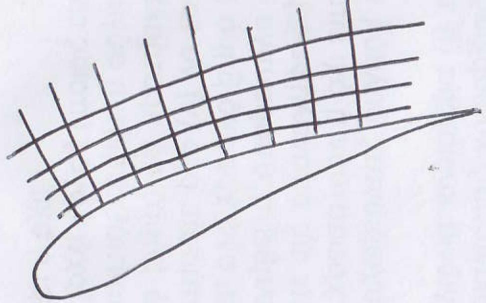


πτερύγιο συμπιεστή

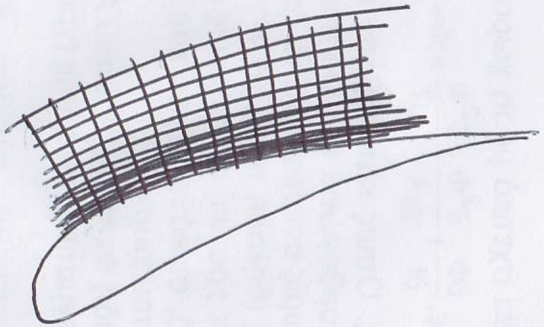
ΜΕΤΑΒΑΣΗ σε ΠΤΕΡΥΓΙΑ ΣΤΡΟΒΙΛΩΝ



- η πολύ μικρή κλίμακα των τυρβωδών χαρακτηριστικών απαιτεί πυκνό πλέγμα κυρίως κοντά στα στερεά όρια.
  - Μνήμη
  - Χρόνος Υπολογισμού



πλέγμα για στρωτή ροή



πλέγμα για τυρβώδη ροή

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΛΗΨΗΣ ΜΕΣΩΝ ΧΡΟΝΙΚΑ ΤΙΜΩΝ (AVERAGING)

ΚΑΤΑ REYNOLDS (REYNOLDS AVERAGING)

$$f = \overline{f} + f'$$

$$\overline{f} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt.$$

$$f, f' \longrightarrow f(t), f'(t).$$

T: μεγάλο επαρκώς σε σχέση με το μέγεθος των διαταραχών.

$$u(t) = \overline{u} + u'(t) \qquad p(t) = \overline{p} + p'(t) \qquad \rho(t) = \overline{\rho} + \rho'(t)$$

$$v(t) = \overline{v} + v'(t) \qquad T(t) = \overline{T} + T'(t)$$

$$\overline{f'} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f'(t)\,dt \equiv \emptyset \Rightarrow \boxed{\overline{f'} \equiv \emptyset}$$

$$\overline{\overline{f}g'} = \emptyset$$

$$\overline{\overline{f}g} = \overline{f}\,\overline{g}$$

$$\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$$

αλλά

$$\overline{f'g'} \neq \emptyset$$

$$\overline{f'f'} \neq \emptyset$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΟ ΡΕΥΣΤΟ

- εξ. συνέχειας:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \rightarrow \frac{\partial u(t)}{\partial x}+\frac{\partial v(t)}{\partial y}=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial(\bar{u}+u'(t))}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{v}+v'(t))}{\partial y}=0$$ στιγμιαία!

Averaging:

$$\frac{\overline{\partial(\bar{u}+u'(t))}}{\partial x}+\frac{\overline{\partial(\bar{v}+v'(t))}}{\partial y}=0$$

$$\rightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\cancel{\frac{\partial \overline{u'}}{\partial x}}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\cancel{\frac{\partial \overline{v'}}{\partial y}}=0$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}=0}$$

Averaged εξ. συνεχειας. (ολόϊδια !!!)

• εξ. ορμής κατά x

$$\ldots \frac{\partial (uv)}{\partial y} \ldots \longrightarrow \frac{\partial\big((\bar{u}+u')(\bar{v}+v')\big)}{\partial y}$$

averaging : $\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\overline{\bar{u}\bar{v}+\bar{u}v'+\bar{v}u'+u'v'}\right]$

$$\longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\Big[\underbrace{\overline{\bar{u}\bar{v}}}_{\bar{u}\bar{v}} + \cancel{\overline{\bar{u}v'}}_{\emptyset} + \cancel{\overline{\bar{v}u'}}_{\emptyset} + \overline{u'v'}\Big]$$

$$\longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left[\bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'}\right]$$

Νέος όρος

"averaged" γινόμενο

διαταραχών

ΣΥΜΠΙΕΣΤΟ ΡΕΥΣΤΟ.

λ.χ. ορμή κατά x :

$$\ldots \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(\rho u v)}_{\text{Τριπλό γινόμενο.}} \ldots$$

averaging:

$$\overline{\rho u v} = \overline{(\bar{\rho}+\rho')(\bar{u}+u')(\bar{v}+v')} =$$

$$= \bar{\rho}\,\bar{u}\,\bar{v} + \underbrace{\bar{\rho}\,\overline{u'v'} + \bar{u}\,\overline{\rho'v'} + \bar{v}\,\overline{\rho'u'}}_{\text{Averaged διπλά γινόμενα διαταραχών}} + \overline{\rho'u'v'}$$

ΝΕΟ!

Averaged Τριπλό γινόμενο διαταραχών

FAVRE Averaging

(λήψη μέσων μαζικά τιμών)
γιὰ συμπιεστὲς ροές

$$\tilde{u} = \frac{\overline{\rho u}}{\bar{\rho}} \quad , \quad \tilde{v} = \frac{\overline{\rho v}}{\bar{\rho}} \quad , \quad \tilde{T} = \frac{\overline{\rho T}}{\bar{\rho}}$$

$$u(t) = \tilde{u} + u''(t) \quad , \quad v(t) = \tilde{v} + v''(t)$$

$$T(t) = \tilde{T} + T''(t).$$

- $\overline{u''} \neq 0$ εκτός αν $\rho' = 0$
- $\overline{u''} = -\frac{\overline{\rho' u''}}{\bar{\rho}}$
- $\boxed{\overline{\rho u''} = 0}$

ΣΥΜΠΙΕΣΤΟ ΡΕΥΣΤΟ : Averaging* Εξίσωσης Συνέχειας

*FAVRE

$$\overline{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial(\overline{\rho u})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho v})}{\partial y} = 0$$

αλλά: $$\overline{\rho u} = \overline{\rho(\tilde{u}+u'')} = \overline{\rho}\,\tilde{u} + \underbrace{\cancel{\overline{\rho u''}}}_{=0} = \overline{\rho}\,\tilde{u}$$

& $$\overline{\rho v} = \overline{\rho}\,\tilde{v}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial(\overline{\rho}\tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho}\tilde{v})}{\partial y} = 0}$$

- όμοια σε μορφή με τη <u>στιγμιαία</u> $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$
- όχι αλλαγές στο λογισμικό επίλυσης!

ΣΥΜΠΙΕΣΤΟ ΡΕΥΣΤΟ : Averaging* Εξίσωσης Ορμής.

FAVRE.

$$\overline{\rho u_\kappa f} = \overline{\rho(\tilde{u}_\kappa + u''_\kappa)(\tilde{f} + f'')} =$$

$$= \bar{\rho}\,\tilde{u}_\kappa \tilde{f} + \tilde{u}_\kappa \underbrace{\overline{\rho f''}}_{\varnothing} + \tilde{f}\,\underbrace{\overline{\rho u''_\kappa}}_{\varnothing} + \underbrace{\overline{\rho u''_\kappa f''}}_{\bar{\rho}\,\widetilde{u''_\kappa f''}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{\rho u_\kappa f} = \bar{\rho}\,\tilde{u}_\kappa \tilde{f} + \bar{\rho}\,\widetilde{u''_\kappa f''}}$$ FAVRE

ενώ κατά Reynolds:

$$\overline{\rho u_\kappa f} = \bar{\rho}\,\bar{u}_\kappa \bar{f} + \bar{\rho}\,\overline{u'_\kappa f'} + \bar{u}_\kappa \overline{\rho' f'} + \bar{f}\,\overline{\rho' u'_\kappa} + \overline{\rho' u'_\kappa f'}$$

REYNOLDS.

ΟΤΙ ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΕΙΝΑΙ ΓΙΑ

ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΟ ΡΕΥΣΤΟ

&

REYNOLDS AVERAGING

μέ $\boxed{\rho' = 0}$

(ΟΜΟΙΑ ΔΟΥΛΕΥΕΤΑΙ ΤΟ ΣΥΜΠΙΕΣΤΟ ΡΕΥΣΤΟ ΜΕ FAVRE AVERAGING)

Εξίσωση ορμής κατά x

$$\frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right)$$

"$1/\rho$"

Averaging:

$$\underbrace{\frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y}}_{\text{Μέση ροή / Mean-Flow}} \underbrace{- \frac{\partial(\overline{u'u'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y}}_{\text{ΤΑΣΕΙΣ REYNOLDS}}$$

Φαινόμενη κλίση τάσεων λόγω μεταφοράς της ορμής από τυρβώδεις διαταραχές

Μοντελοποίηση της Τύρβης

(REYNOLDS STRESSES)

REYNOLDS - AVERAGER NAVIER STOKES (RANS)

ασυμπίεστο ρευστό , ρ = σταθ.
2Δ ροή

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \emptyset$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{-1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\nu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)\right] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'u'}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{u'v'}\right).$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \frac{-1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\nu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\nu\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'v'}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{v'v'}\right).$$

Αγνωστοι : $\bar{p}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\overline{u'u'}$, $\overline{u'v'}$, $\overline{v'v'}$

ΑΝΑΓΚΗ ΚΙ ΑΛΛΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

RANS – Τανυστική Γραφή

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\underbrace{\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{\downarrow\ \text{συντηρητική γραφή}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\overline{u_i' u_j'}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_j \bar{u}_i\right) = \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_i \cancelto{0}{\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j}}$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{ΟΡΟΙ}\\ \text{ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ}\\ \text{convection}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{ΟΡΟΙ}\\ \text{ΠΙΕΣΗΣ}\\ \text{pressure}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{ΟΡΟΙ}\\ \text{ΔΙΑΧΥΣΗΣ}\\ \text{diffusion}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{ΟΡΟΙ ΤΑΣΕΩΝ}\\ \text{REYNOLDS}\\ \text{Re-stresses}\end{matrix}\right\}$$

- αν ξέρουμε .... παραλείπουμε παύλες $\left\{\begin{matrix}\bar{u}_i \longrightarrow u_i\\ \bar{p} \longrightarrow p\end{matrix}\right.$

ΤΑ ΔΥΟ ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΥΡΒΗΣ ΠΑΝΩ ΣΤΗ ΜΕΣΗ ΡΟΗ

- Απορροφά κινητική ενέργεια από τη μέση ροή μετασχηματίζοντάς την σε χαμένη ενέργεια*

  DISSIPATION.

  (* θερμική ενέργεια)

- Αυξάνει το ρυθμό μεταφοράς μάζας/ορμής/ενέργειας στην "κάθετη" στη ροή (στις τροχιές) κατεύθυνση μέσω φαινομένων διάχυση

  (extra) DIFFUSION

Η ΥΠΟΘΕΣΗ BOUSSINESQ

αφού: $\overline{\tau_{ij}} = \nu \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)$

εξισώσεις ορμής: $\ldots = \ldots + \underbrace{\frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j}}_{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\tau_{ij}} - \underbrace{\overline{u_i' u_j'}}_{\text{ΤΑΣΕΙΣ REYNOLDS}}\right)}$

(Βολικό) Μοντέλο $\boxed{-\overline{u_i' u_j'} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)}$ (προσωρινό)*

ν_t: Τυρβώδης συνεκτικότητα.
(turbulent viscosity)
(eddy viscosity)

$$\overline{\tau_{ij}} - \overline{u_i' u_j'} = (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)$$

αλλά (έστω 3Δ ροή) – Ασυμπίεστο ρευστό

αν $\quad -\overline{u_i' u_j'} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$

Τότε:

$$\left.\begin{aligned} -\overline{u_1' u_1'} &= 2\nu_t \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} \\ -\overline{u_2' u_2'} &= 2\nu_t \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \\ -\overline{u_3' u_3'} &= 2\nu_t \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \end{aligned}\right\} + \Rightarrow -2k = 2\nu_t \overbrace{\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \right)}^{\text{Εξ. συνέχειας μέσης ροής}} = \varnothing$$

Απαράδεκτο!

k = ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΤΗΣ ΤΥΡΒΗΣ (Turbulent Kinetic Energy, TKE)

ορισμός → $\boxed{k = \frac{1}{2}\overline{u_i' u_i'} = \frac{1}{2}\left(\overline{u_1' u_1'} + \overline{u_2' u_2'} + \overline{u_3' u_3'} \right)}$

(Τελική Γραφή) ΥΠΟΘΕΣΗΣ BOUSSINESQ

$$\boxed{-\overline{u_i' u_j'} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_i^j}$$ BOUSSINESQ

αφού πλέον:

$$\left.\begin{aligned} -\overline{u_1' u_1'} &= 2\nu_t \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_1} - \frac{2}{3}k \\ -\overline{u_2' u_2'} &= 2\nu_t \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x_2} - \frac{2}{3}k \\ -\overline{u_3' u_3'} &= 2\nu_t \frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_3} - \frac{2}{3}k. \end{aligned}\right\} + \Rightarrow -2k = \emptyset - 3 \cdot \frac{2}{3} k \quad \checkmark$$

ο.ε.δ.

RANS μετά την ΥΠΟΘΕΣΗ BOUSSINESQ

ας ξεχάσουμε προσωρινά το $-\frac{2}{3}k\delta_i^j$:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = \emptyset$$

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu+\nu_t)\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\right] = \emptyset$$

Ένας επιπλέον άγνωστος ανά κόμβο
τό ν_t ! EDDY VISCOSITY
TURBULENT VISCOSITY.
(αντί γιά τίς τάσεις Reynolds $-\overline{u_i' u_j'}$)

Μοντέλο Τύρβης !

Μοντέλο γιά τό ν_t :

$$\boxed{\nu_t = C_1 q \ell}$$

q : χαρακτηριστική ταχύτητα της τύρβης
ℓ : χαρακτηριστικό μήκος της τύρβης.

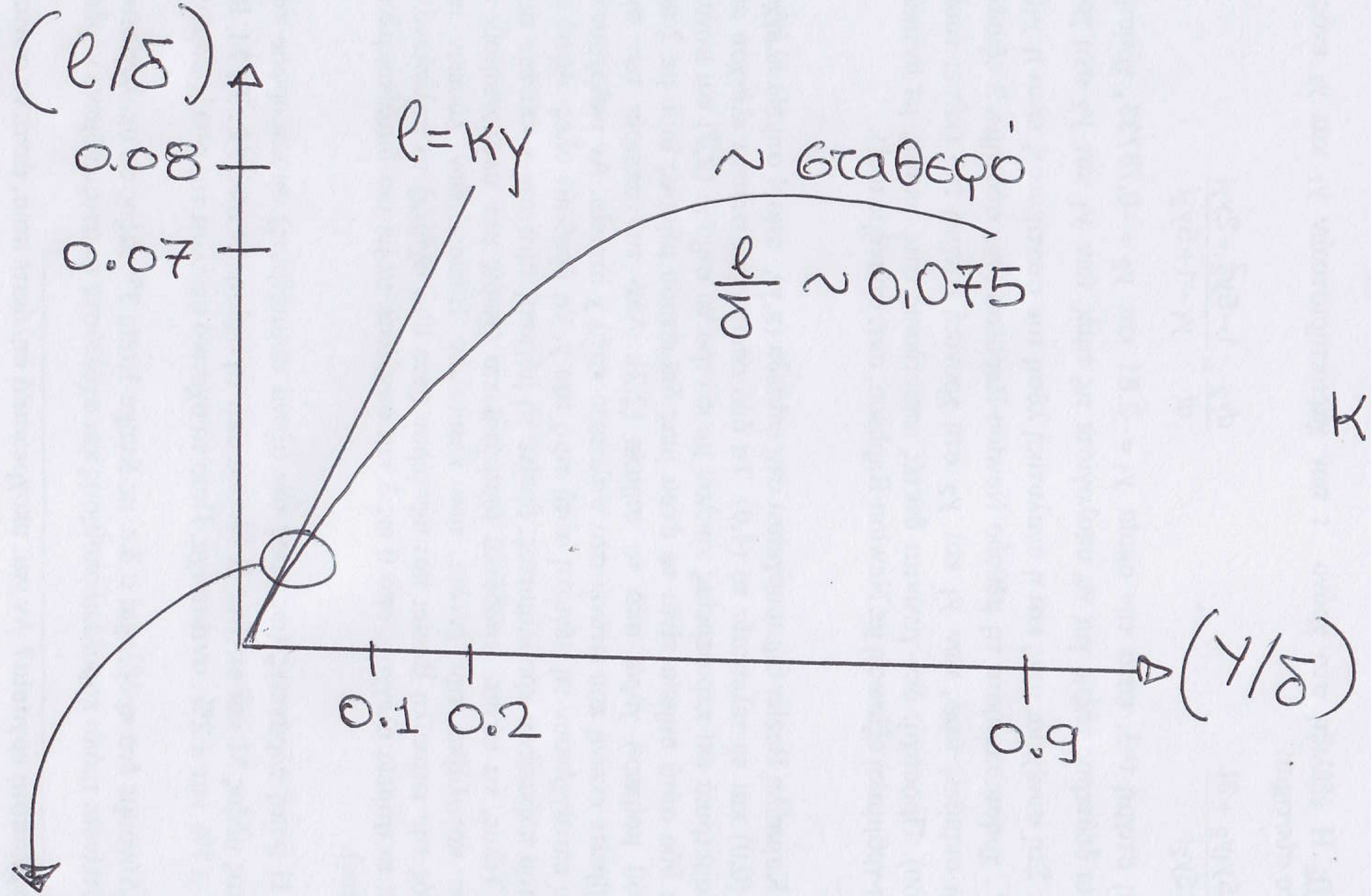
ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΗΚΟΥΣ ΑΝΑΜΙΞΗΣ
(MIXING LENGTH MODELS)

Υιοθέτηση εκφράσεων για τα q και ℓ συναρτήσει του μεσου κινηματικού πεδίου*

* γιά το οποίο έτσι κι αλλιώς θά λύσω !!!

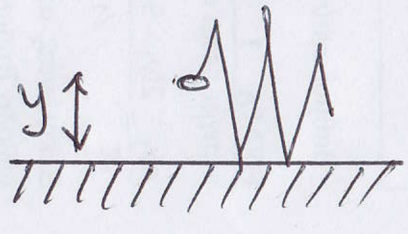
Μοντέλο για το ℓ

(για ροές κοντά σε στερεά τοιχώματα)



από πειράματα του Klebanoff

Ευθεία $\ell = \kappa y$ — εξήγηση! →



$\kappa = 0.40$ ή 0.41

σταθερά του von Karman

Μοντέλο για το q

$$\boxed{q = C_2 \, \ell \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|}$$

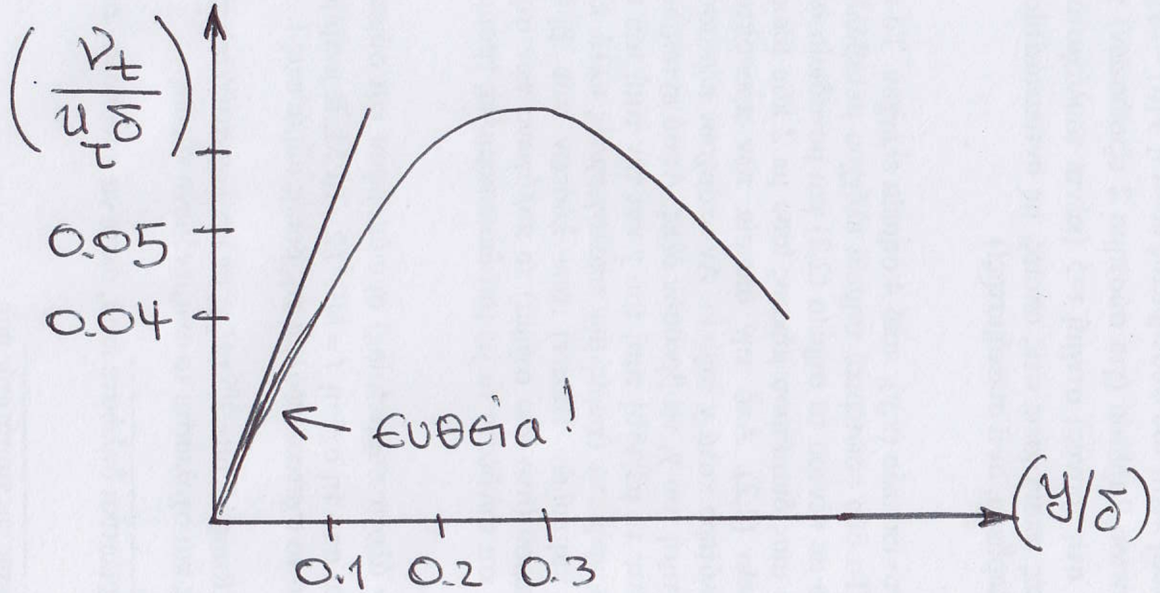
ρυθμός διάτμησης
(rate of shear)

Άρα: $$\nu_t = C \, \ell^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$$

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \Rightarrow \boxed{-\overline{u'v'} = C \, \ell^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y}}$$

PRANDTL (1925)!

Κατανομή ανηγμένου ν_t σε επίπεδη πλάκα



- Εσωτερική περιοχή του οριακού στρώματος. (inner zone)

  $\emptyset < y/\delta < 0.15$ με 0.20

  $\nu_t = \sigma\tau\alpha\theta.$, $l = \kappa y$, $\nu_t = \kappa u_\tau y$, $\tau_w = \rho u_\tau^2$

- Εξωτερική περιοχή του οριακού στρώματος (outer zone).

  $\nu_t \downarrow$, $l \sim \sigma\tau\alpha\theta.$

ΙΔΕΑ von Karman για το Μήκος Ανάμιξης.

$$\ell = \kappa \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \Big/ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right|$$

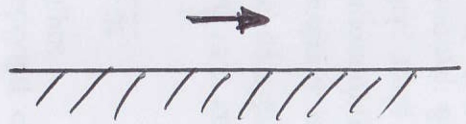
για Τυρβώδεις Περιοχές
κοντά σε στερεά τοιχώματα

$$\nu_t = C \ell^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \Rightarrow \nu_t = C \kappa^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|^3 \Big/ \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)^2$$

$$\overline{u'v'} \cong -\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = C \kappa^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|^4 \Big/ \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)^2$$

Εσωτερική Περιοχή του Ο.Σ.

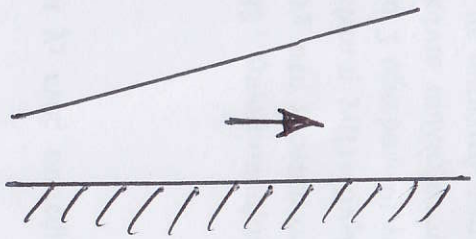
χωρίς κλίση πίεσης (flat plate flow)



$\frac{dp}{dx} = 0$ Zero-pressure-gradient flow

$\frac{dp}{dx} < 0$ favorable pressure gradient flow

επιταχυνόμενη



$\frac{dp}{dx} > 0$ adverse ∇p flow

επιβραδυνόμενη

• $$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}$$

$y=\emptyset$ πάνω στο στερεό τοίχωμα $\left.\begin{matrix} u_w=\emptyset \\ v_w=\emptyset \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{\partial \tau}{\partial y}\right|_w = \emptyset}$ (1)

• $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\underset{x}{\text{ορμή}}\right) = \emptyset \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{(*)}{\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}} + \underbrace{u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}}_{u_w=\emptyset} + \underbrace{v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{v_w=\emptyset} + \underset{(**)}{\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}$$

$$(*+**) = \frac{\partial u}{\partial y}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\text{εξ. συνεχειας } \nabla\cdot\vec{V}=\emptyset} = \emptyset \Longrightarrow \boxed{\left.\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}\right|_w = \emptyset} \; (2)$$

(1) & (2) $\Rightarrow$ για κάποια αποσταση απο τον τοιχο $\boxed{\tau = σταθ = \tau_w}$

Κατανομές ταχύτητας στην Εσωτερική Περιοχή του ο.σ.

στρωτό οριακό υπόστρωμα

$$0 < y/\delta < 10^{-3} \text{ με } 10^{-2} \quad \text{ή} \quad y^+ < 5$$

Μόνο μοριακή διάχυση : $\overline{u'v'} = 0$

$$\tau_{ολ} = \tau_{lam} = \mu \frac{du}{dy}, \text{ όμως } \tau = \rho u_\tau^2 \Rightarrow \nu \cancel{\rho} \frac{du}{dy} = \cancel{\rho} u_\tau^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d(u/u_\tau)}{d\left(\frac{y u_\tau}{\nu}\right)} = 1 \Rightarrow \underbrace{\frac{u}{u_\tau}}_{u^+} = \underbrace{\frac{y u_\tau}{\nu}}_{y^+} \Rightarrow \boxed{u^+ = y^+}$$

VISCOUS SUBLAYER

Πλήρως τυρβώδης περιοχή

$$\tau_{ολ} = \tau_{turb} = -\rho \overline{u'v'} = u_\tau^2$$

$$\ldots \rightsquigarrow \boxed{u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C}, \quad C = 4.9 \text{ ως } 5.5$$

Fully Turbulent Part of the inner zone