



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής &  
Βελτιστοποίησης

ΣΥΝΕΚΤΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΙΣ  
ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΕΣ  
(9<sup>ο</sup> Εξάμηνο Σχολής Μηχ.Μηχ. ΕΜΠ)

*ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ  
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΥΝΕΚΤΙΚΩΝ  
ΣΤΡΩΜΑΤΩΝ*

Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου  
Καθηγητής ΕΜΠ

kgianna@central.ntua.gr

<http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/research/>

# Λύσεις Ομοιότητας για Στρωτά Οριακά Στρώματα



**PRANDTL ~1904:** Η έννοια του οριακού στρώματος.

**BLASIUS ~ 1908:** όμοιες λύσεις, flat plate,  $dp/dx=0$

**POLHAUSEN ~1921:** όμοιες λύσεις για κάθε  $dp/dx$

**FALKNER-SKAN ~1930:** Επέκταση λύσεων Blasius για κάθε  $dp/dx$  – Λύσεις ομοιότητας, κατανομές ταχύτητας

**HARTREE ~1937:** Λεπτομερής διερεύνηση των εξ. Falkner-Skan

κλπ



# Η έννοια της Ομοιότητας στα Οριακά Στρώματα

Δύο θέσεις  $x_1$  και  $x_2$ :

$$\frac{u(x_1, y/g(x_1))}{u_e(x_1)} = \frac{u(x_2, y/g(x_2))}{u_e(x_2)}$$

Προσοχή με το τι αδιαστατοποιείται κάθε ποσότητα!

Εφαρμογή σε Flat Plate, ρευστό ασυμπιεστο:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

με οριακές συνθήκες:

$$u=0, \quad v=0, \quad \text{για } y=0$$

$$u=u_e, \quad \text{για } y=\infty$$



# Λύσεις Ομοιότητας για Στρωτά Οριακά Στρώματα

Με χρήση ροϊκής συνάρτησης:

$$(u, v) = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}$$

με οριακές συνθήκες:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \quad \text{για } y=0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = u_e, \quad \text{για } y=\infty$$



# Λύσεις Ομοιότητας για Στρωτά Οριακά Στρώματα

Αδιαστατοποιήσεις:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{g(x)} \sqrt{\frac{u_\infty}{Lv}} = \frac{y\sqrt{Re}}{Lg(x)}$$

$$Re = \frac{u_\infty L}{\nu}$$

$$f(\xi, \eta) = \frac{\Psi(x, y)\sqrt{Re}}{Lu_\infty g(x)}$$

όπου  $u_\infty$  κατάλληλη ταχύτητα αδιαστατοποίησης.

Οι ταχύτητες γράφονται:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u_\infty \frac{\partial f}{\partial \eta} = u_\infty f'$$

$$v = -\frac{Lf}{\sqrt{Re}} \frac{d}{dx}(u_\infty g(x)) - \frac{u_\infty g(x)}{\sqrt{Re}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{L}{g(x)} \eta \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right\}$$

Για να υπάρξουν λύσεις ομοιότητας πρέπει το  $f$  να εξαρτάται  
**ΜΟΝΟ** από το  $\eta$ .

# Λύσεις Ομοιότητας για Στρωτά Οριακά Στρώματα



Γραφή της εξίσωσης διαμήκους ορμής:

$$f'''' + \alpha f f'' + \beta (1 - f'^2) = \frac{u_e}{u_\infty} g^2 \left( f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)$$

$$f' = \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad , \quad f'' = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \quad , \quad f''' = \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}$$

$$\alpha = \frac{Lg}{u_\infty} \frac{d}{dx} (u_e g) \quad , \quad \beta = \frac{L}{u_\infty} g^2 \frac{du_e}{dx}$$

με οριακές συνθήκες:

$$f=0 \quad , \quad f'=0 \quad , \quad \text{για} \quad \eta=0$$

$$f'=1 \quad , \quad \text{για} \quad \eta=\infty$$



# Λύσεις Ομοιότητας για Στρωτά Οριακά Στρώματα

Αν ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ, αν δηλαδή  $f=f(\eta)$ , τότε (εξ. Falkner-Skan):

$$f''' + \alpha f f'' + \beta (1 - f'^2) = 0$$

Διερεύνηση: Πότε (για ποια  $u_e$  και  $g(x)$ ) τα  $\alpha$  και  $\beta$  είναι σταθερά;

- (α)  $u_e = (\text{σταθερά}) x^m$ , όπου  $m$  είναι μια σταθερά, ή
- (β)  $u_e = (\text{σταθερά}) \exp(ax)$ , όπου  $a$  είναι μη-μηδενική σταθερά.

Μας ενδιαφέρει η λύση (α), όπου σταθερά είναι η  $u_e$  στο  $x=1$  ενώ το  $m$  εξαρτάται από το  $dp/dx$  του εξωτερικού πεδίου ροής.



# Λύσεις Ομοιότητας για Στρωτά Οριακά Στρώματα

Σύγκριση **Falkner-Skan** με **Spalding** (λύσεις ομοιότητας)

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ u_e = kx^m & & \frac{du_e}{dx} = Cu_e^{2(\beta-1)/\beta} \end{array}$$

Τελικά:

$$m = \frac{\beta}{2-\beta} \quad \text{ή} \quad \beta = \frac{2m}{m+1}$$

**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Σε κάθε θέση  $x$  κατά μήκος του στερεού τοιχώματος, η ταχύτητα διατηρεί **ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ** με νόμο του τύπου:

$$\frac{u}{u_e} = \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}$$

Για στρωτό οριακό στρώμα που αναπτύσσεται με νόμο εξ. ταχύτητας:

$$u_e = kx^m$$





# Λύσεις Ομοιότητας για Στρωτά Οριακά Στρώματα

Σύγκριση **Falkner-Skan** με **Spalding** (λύσεις ομοιότητας)

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ u_e = kx^m & & \frac{du_e}{dx} = Cu_e^{2(\beta-1)/\beta} \end{array}$$

Τελικά:

$$m = \frac{\beta}{2-\beta} \quad \text{ή} \quad \beta = \frac{2m}{m+1}$$

**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Σε κάθε θέση  $x$  κατά μήκος του στερεού τοιχώματος, η ταχύτητα διατηρεί **ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ** με νόμο του τύπου:

$$\frac{u}{u_e} = \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}$$

Για στρωτό οριακό στρώμα που αναπτύσσεται με νόμο εξ. ταχύτητας:

$$u_e = kx^m$$

# Λύσεις Ομοιότητας για Στρωτά Οριακά Στρώματα



Αριθμητικές λύσεις **HARTREE** των εξ. **FALKNER-SKAN**

$$f''' + \alpha f f'' + \beta(1 - f'^2) = 0$$

με οριακές συνθήκες τις

$$f=0 \quad , \quad f'=0 \quad , \quad \text{για} \quad \eta=0$$

$$f'=1 \quad , \quad \text{για} \quad \eta=\infty$$

για

$$u_e = kx^m$$

τύπου

$$\frac{u}{u_e} = \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}$$

Λύσεις στο διάστημα:  $-0.1988 < \beta < 2.00$  ή  $-0.0904 < m < \infty$ .

Επιταχυνόμενη εξ. ροή:  $\beta > 0, m > 0$

Επιβραδυνόμενη εξ. ροή:  $\beta < 0, m < 0$

Η περίπτωση  $\beta = -0.1988$  ή  $m = -0.0904$  δίνει  $f''(0) = 0$ , που είναι σημαντικό για την έναρξη της αποκόλλησης.



Ορισμός για την αδιάστατη απόσταση  $\eta$ :

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{u_e}{x\nu}}$$

$$\eta = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{Re_x}$$

$$Re_x = \frac{u_e x}{\nu}$$

$$H_{32k} = \frac{\int_0^{\delta} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u^2}{u_e^2}\right) dy}{\int_0^{\delta} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy} = \frac{\delta_{3k}}{\delta_{2k}}$$

# Αριθμητικές λύσεις HARTREE των εξ. FALKNER-SKAN



$\beta$	-0.1988	-0.19	-0.18	-0.16	-0.14	-0.10	0
$m$	-0.0904	-0.0867	-0.0826	-0.0741	-0.0654	-0.0476	0.0000
$H_{32k}$	1.5150	1.5200	1.5250	1.5333	1.5400	1.5517	1.5720
$\eta$	$f' = u/u_e$						
0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.0010	0.0095	0.0137 <sub>5</sub>	0.0198 <sub>5</sub>	0.0246 <sub>5</sub>	0.0324	0.0469 <sub>5</sub>
0.2	0.0040	0.0209	0.0293	0.0413	0.0507	0.0659	0.0939
0.3	0.0089	0.0343	0.0467	0.0643	0.0781	0.1003	0.1408
0.4	0.0158	0.0495	0.0659	0.0889	0.1069	0.1356	0.1876
0.5	0.0248	0.0665	0.0868	0.1151	0.1370	0.1718	0.2342
0.6	0.0358	0.0855	0.1094	0.1427	0.1684	0.2088	0.2806
0.7	0.0487	0.1063	0.1338	0.1719	0.2010	0.2466	0.3266
0.8	0.0636	0.1289	0.1598	0.2023	0.2347	0.2849	0.3720
0.9	0.0803	0.1533	0.1874	0.2341	0.2694	0.3237	0.4167
4.2	0.9598	0.9822	0.9870	0.9924	0.9940	0.9983	0.9988
4.4	0.9741	0.9893	0.9927	0.9957	0.9970	0.9983	0.9994
4.6	0.9839	0.9938	0.9959	0.9977	0.9984	0.9991	0.9997
4.8	0.9904	0.9965	0.9978	0.9988	0.9992	0.9996	0.9999
5.0	0.9945	0.9981 <sub>5</sub>	0.9988 <sub>5</sub>	0.9994	0.9996	0.9998	0.9999 <sub>5</sub>
5.2	0.9969	0.9990	0.9994	0.9997	0.9998	0.9999	1.0000
5.4	0.9984	0.9995	0.9997	0.9999	0.9999 <sub>5</sub>	1.0000	—
5.6	0.9992	0.9997	0.9999	0.9999 <sub>5</sub>	1.0000	—	—
5.8	0.9996 <sub>5</sub>	0.9999	0.9999 <sub>5</sub>	1.0000	—	—	—
6.0	0.9998 <sub>5</sub>	0.9999 <sub>5</sub>	1.0000	—	—	—	—
6.2	0.9999 <sub>5</sub>	1.0000	—	—	—	—	—
6.4	1.0000	—	—	—	—	—	—

(α) το κινηματικό πάχος μετατόπισης

$$\delta_{1k} = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$$

(β) το κινηματικό πάχος ορμής

$$\delta_{2k} = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$$

(γ) το κινηματικό πάχος ενέργειας

$$\delta_{3k} = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u^2}{u_e^2}\right) dy$$



$$\delta_{1k} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \int_0^{\infty} (1-F(\eta, m)) d\eta = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \frac{x}{\sqrt{Re_x}} f_1(m)$$

$$\delta_{2k} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \int_0^{\infty} F(\eta, m)(1-F(\eta, m)) d\eta = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \frac{x}{\sqrt{Re_x}} f_2(m)$$

$$\delta_{3k} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \int_0^{\infty} F(\eta, m)(1-F^2(\eta, m)) d\eta = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \frac{x}{\sqrt{Re_x}} f_3(m)$$

όπου:

$$f_1(m) = \int_0^{\infty} (1-F) d\eta$$

$$f_2(m) = \int_0^{\infty} F(1-F) d\eta$$

$$f_3(m) = \int_0^{\infty} F(1-F^2) d\eta$$

# Αριθμητικές λύσεις HARTREE των εξ. FALKNER-SKAN



Παράγοντας καταστροφής σε στρωτό ισορροπημένο οριακό στρώμα:

$$\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu u_e \frac{\partial F(\eta, m)}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dy} \Big|_{y=0} = \mu u_e \frac{\partial F(\eta, m)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \frac{\sqrt{Re_x}}{x} \sqrt{\frac{m+1}{2}}$$

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho u_e^2} = \frac{2}{\sqrt{Re_x}} \sqrt{\frac{m+1}{2}} \frac{\partial F(\eta, m)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{2}{\sqrt{Re_x}} \sqrt{\frac{m+1}{2}} \alpha_2(m)$$

$$c_D = \frac{1}{\rho_e u_e^3} \int_0^{\infty} \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu u_e \frac{\partial F(\eta, m)}{\partial \eta} \frac{\sqrt{Re_x}}{x} \sqrt{\frac{m+1}{2}}$$

$$c_D = \frac{1}{\sqrt{Re_x}} \sqrt{\frac{m+1}{2}} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\partial F(\eta, m)}{\partial \eta} \right\}^2 d\eta$$

# Αριθμητικές λύσεις HARTREE των εξ. FALKNER-SKAN



Παράγοντας καταστροφής σε στρωτό ισορροπημένο οριακό στρώμα:

$$c_D = \frac{1}{\sqrt{Re_x}} \sqrt{\frac{m+1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\partial F(\eta, m)}{\partial \eta} \right\}^2 d\eta}$$

$$\alpha_D(m) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\partial F(\eta, m)}{\partial \eta} \right\}^2 d\eta$$

$\beta$	$m$	$f_1(m)$	$\alpha_D(m)$
-0.1988	-0.0904	2.3587	0.2672
-0.19	-0.0867	2.0070	0.2717
-0.18	-0.0826	1.8713	0.2773
-0.16	-0.0741	1.7076	0.2880
-0.14	-0.0654	1.5967	0.2988
-0.10	-0.0476	1.4436	0.3197
0.00	0.00	1.2167	0.3692
0.1	0.0526	1.0803	0.4141
0.2	0.1111	0.9838	0.4557
0.3	0.1765	0.9109	0.4943
0.4	0.2500	0.8526	0.5304
0.5	0.3333	0.8044	0.5646
0.6	0.4286	0.7638	0.5969
0.8	0.6666	0.6987	0.6572
1.0	1.0	0.6478	0.7128
1.2	1.5	0.6068	0.7646
1.6	4.0	0.5439	0.8593
2.0	$\infty$	0.4974	0.9447





# Ισορροπημένες Ροές – Λύσεις Ομοιότητας

Οι ροές που δέχονται λύσεις ομοιότητας λέγονται ισορροπημένες

Ολ. Εξίσωση Διαμήκους Ορμής:

$$\frac{1}{\tau_w} \frac{d}{dx} (\rho_e u_e^2 \delta_2) - \frac{\delta_1}{\tau_w} \frac{dp}{dx} = 1$$

**Παράμετρος Ισορροπίας:**

$$\Pi = \frac{\delta_1}{\tau_w} \frac{dp}{dx}$$

ή

$$\Pi = -\frac{\delta_1}{\tau_w} \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} = -\frac{2\delta_1}{c_f \mu_e} \frac{du_e}{dx}$$

$$\Pi = -\frac{2 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \sqrt{\frac{2}{m+1}} f_1(m)}{\frac{2}{\sqrt{Re_x}} \sqrt{\frac{m+1}{2}} \alpha_2(m) x^m} m x^{m-1}$$

**$\Pi$  = σταθερό για ισορροπημένο ο.σ.**

**Η έννοια του αντίστοιχου ισορροπημένου ο.σ.**



# Ισορροπημένες Ροές – Λύσεις Ομοιότητας

$$\Pi = -\frac{mf_1(m)}{\alpha_2(m)} \cdot \frac{2}{m+1} = \Pi(m)$$

**Π=σταθερό για ισορροπημένο ο.σ.**

**Μονοπαραμετρικό!!!**

$$H_{12k} = \frac{\delta_{1k}}{\delta_{2k}}$$

$$H_{32k} = \frac{\delta_{3k}}{\delta_{2k}}$$

Για μια κατανομή εξωτερικής ταχύτητας που ορίζει ένα  $m$ , η λύση Hartree δίνει αδιάστατες κατανομές ταχύτητας  $F(\eta, m)$ .

Για κάθε τιμή του  $m$ , πινακοποιούμε ποσότητες όπως τα  $f_1(m)$ ,  $f_2(m)$ ,  $f_3(m)$ ,  $\Pi(m)$ ,  $H_{12k}(m)$ ,  $H_{32k}(m)$ .

Αν το οριακό στρώμα είναι **ισορροπημένο**, οι παραπάνω ποσότητες παραμένουν **σταθερές** καθώς εξελίσσεται.

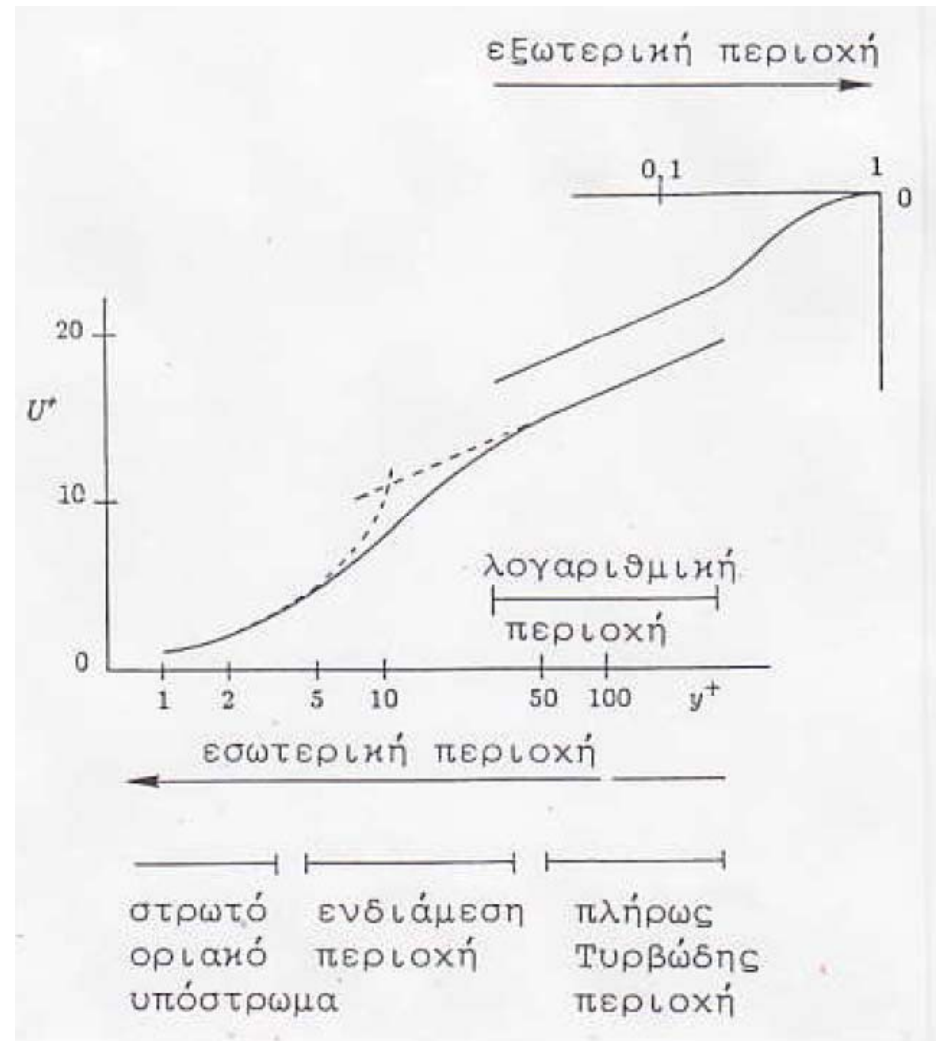
Σχέσεις Walz, Nash etc

$$H_{12k} = 4.036 - 4.2845 (H_{32k} - 1.515)^{0.3886}$$

# Ισορροπημένα Τυρβώδη Οριακά Στρώματα

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + c$$

Γενίκευση του λογαριθμικού νόμου ώστε να καλύπτει και την εξωτερική περιοχή του οριακού στρώματος (χωρίς απόδειξη)





# Ελλειμματική Κατανομή Ταχύτητας του Coles

$$\frac{u_e - u}{u_\tau} = \Phi\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

$$\Phi(\eta) = -\frac{1}{\kappa} \ln \eta + \frac{\pi_1}{\kappa} (2 - w(\eta))$$

Συνάρτηση του Ομόρρου:

$$w(\eta) = 1 - \cos(\pi \eta) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi \eta}{2}\right)$$

Τι κάνει για  $y = \delta$  ή  $\eta = 1$ ;

Εναλλακτική Γραφή:

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{yu_\tau}{\nu}\right) + c + \frac{\pi_1}{\kappa} w\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

Χρήσιμα:

$$\Phi_1 = \int_0^1 \Phi d\eta = \frac{1 + \pi_1}{\kappa}$$

$$\Phi_2 = \int_0^1 \Phi^2 d\eta = \frac{1}{\kappa^2} \left\{ 2 + \frac{3}{2} \pi_1^2 + 2\pi_1 + \frac{2\pi_1}{\pi} s_i(\pi) \right\}$$

$$s_i(\pi) = -\pi \int_0^1 \ln \eta \cos(\pi \eta) d\eta = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt = 1.852$$

# Ελλειμματική Κατανομή Ταχύτητας του Coles



Η κατανομή του Coles είναι διπαραμετρική.

Δύο ελεύθεροι παράμετροι είναι τα  $\delta$  και  $\pi_1$ .

Το  $c_f$  ή το  $u_\tau$  συναρτάται των  $\delta$  και  $\pi_1$ .

Το ζεύγος  $(\delta, \pi_1)$  θα μπορούσε να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο.



# Ελλειμματική Κατανομή Ταχύτητας του Coles

Εύρεση παχών:

$$\delta_{1k} = \int_0^{\delta} \frac{u_e - u}{u_e} dy = \delta \sqrt{\frac{c_f}{2}} \int_0^1 \frac{u_e - u}{u_\tau} d\eta \quad \dot{\eta} \quad \delta_{1k} = \delta \sqrt{\frac{c_f}{2}} \int_0^1 \Phi d\eta \quad \dot{\eta} \quad \frac{\delta_{1k}}{\delta} = \sqrt{\frac{c_f}{2}} \Phi_1$$

$$\frac{\delta_{2k}}{\delta} = \sqrt{\frac{c_f}{2}} \left\{ \Phi_1 - \sqrt{\frac{c_f}{2}} \Phi_2 \right\}$$

Παράμετρος μορφής του Clauser:

$$G = \int_0^{\delta} \left( \frac{u_e - u}{u_\tau} \right)^2 d \left( \frac{yu_\tau}{\delta_{1k} u_e} \right) \quad \dot{\eta}$$

$$G = \frac{\int_0^1 \left( \frac{u_e - u}{u_\tau} \right)^2 d\eta}{\int_0^1 \left( \frac{u_e - u}{u_\tau} \right) d\eta} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}$$



# Ελλειμματική Κατανομή Ταχύτητας του Coles

Με διαίρεση κατά μέλη

$$H_{12k} = \frac{\delta_{1k}}{\delta_{2k}} = \frac{\Phi_1}{\Phi_1 - \sqrt{\frac{c_f}{2}} \Phi_2} = \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{c_f}{2}} G}$$

ή

$$G = \frac{H_{12k}^{-1} - 1}{H_{12k} \sqrt{\frac{c_f}{2}}}$$

Ακόμη

$$G = \frac{3}{2} \Phi_1 + \frac{0.179}{\kappa} + \frac{0.321}{\kappa^2 \Phi_1}$$



# Ελλειμματική Κατανομή Ταχύτητας του Coles

Σύνοψη για τα πάχη:

(1)

$$\frac{\delta_{1k}}{\delta} = \sqrt{\frac{c_f}{2} \frac{1+\pi_1}{\kappa}}$$

(2)

$$\frac{\delta_{2k}}{\delta_{1k}} = 1 - \sqrt{\frac{c_f}{2} G}$$

(3)

$$\frac{\delta_{3k}}{\delta_{1k}} = 2 - 3 \sqrt{\frac{c_f}{2} G + \frac{c_f}{2} G_1}$$

όπου

$$G = \frac{3}{2} \Phi_1 + \frac{0.179}{\kappa} + \frac{0.321}{\kappa^2 \Phi_1}$$

$$G_1 = \frac{G + 11.139\pi_1 + 8.5\pi_1^2 + 2.563\pi_1^3}{\kappa^2(1+\pi_1)}$$

Οι εξισώσεις (1), (2) και (3) εμπλέκουν 7 ποσότητες:  
 $\delta$ ,  $\delta_{1k}$ ,  $\delta_{2k}$ ,  $\delta_{3k}$ ,  $c_f$ ,  $\pi_1$ ,  $G$ . Δύο είναι ελεύθερες.  
Χρειάζονται άλλες 2 εξισώσεις (σύνολο 5).





# Ελλειμματική Κατανομή Ταχύτητας του Coles

Μια εμπειρική συσχέτιση μεταξύ  $G$  και  $\pi_1$ :

(4)

$$G = \frac{2 + 3.2\pi_1 + 1.522\pi_1^2}{\kappa(1 + \pi_1)}$$

Η τιμή της ταχύτητας κατά Coles στο  $y=\delta$  ή στο  $\eta=1$ :

$$\frac{u_\epsilon}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{\delta u_\tau}{\nu} \right) + c + \frac{2\pi_1}{\kappa}$$

αφού

$$w \left( \frac{\delta}{\delta} \right) = w(1) = 2$$

ή

(5)

$$\sqrt{\frac{2}{c_f}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{u_\epsilon \delta}{\nu} \sqrt{\frac{c_f}{2}} \right) + c + \frac{2\pi_1}{\kappa}$$

Συζήτηση στους τρόπους επίλυσης....



# Ισορροπημένα Τυρβώδη Οριακά Στρώματα

Για να είναι **ισορροπημένο** το τυρβώδες ο.σ., δηλαδή για να υπάρχει **ομοιότητα**, αρκεί:

$$\frac{u_e - u}{u_\tau} = \Phi(\eta) \quad \underline{\text{Μόνο του } \eta!!!}$$

Σε κάθε θέση x:

$$\Phi_1 = \int_0^1 \Phi d\eta = \text{σταθερό}$$

$$\Phi_2 = \int_0^1 \Phi^2 d\eta = \text{σταθερό}$$

Και επειδή:

$$G = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}$$

άρα **G=σταθερό!**

**Η διατήρηση τιμής της παραμέτρου G του Clauser αποτελεί βασική ιδιότητα των τυρβωδών ο.σ. σε κατάσταση ισορροπίας.**



# Ισορροπημένα Τυρβώδη Οριακά Στρώματα

Αλλά:

$$G = \frac{2 + 3.2\pi_1 + 1.522\pi_1^2}{\kappa(1 + \pi_1)}$$

Η διατήρηση τιμής της παραμέτρου  $\pi_1$  αποτελεί βασική ιδιότητα των τυρβωδών ο.σ. σε κατάσταση ισορροπίας.