Υπολογιστικές Μέθοδοι στις Στροβιλομηχανές, 9ο εξάμηνο

Μια άσκηση για το λεγόμενο Αλγεβρικό μοντέλο τάσεων Reynolds (Algebraic Reynolds Stress Model, ARSM) που πρότεινε ο Rodi.

Οι Reynolds Stress Model (RSM) μερικές διαφορικές εξισώσεις γράφονται ως

$$\frac{D\overline{u_i'u_j'}}{Dt} = \underbrace{-\left[\overline{u_j'u_k'}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \overline{u_k'u_i'}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}\right]}_{T_1} \underbrace{- 2\nu\,\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}}_{T_2} + \underbrace{\overline{\frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}}_{T_3} \underbrace{- \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{u_i'u_j'u_k'} - \nu\frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial x_k} + \overline{\frac{p'}{\rho}\left(\delta_j^k u_i' + \delta_i^k u_j'\right)}\right]}_{T_4}$$

(1)

Μετά τη μοντελοποίηση των όρων τους γίνονται:

$$\frac{D\overline{u_i'u_j'}}{Dt} = \mathbb{P}_{ij} - \frac{2}{3}\delta_i^j\varepsilon - c_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_i'u_j'} - \frac{2}{3}\delta_i^j k\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial x_k}\right) - \gamma\left(\mathbb{P}_{ij} - \frac{2}{3}\mathbb{P}\delta_i^j\right) + \underbrace{c_s\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k'u_l'}\frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial x_l}\right)}_{\text{Τυρβώδη διάχυση}}$$

eq.2

(2)

Όπου

$$\mathbb{P}_{ij} = -\left(\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u_j'u_k'}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}\right)$$

(2α)

Και

$$\mathbb{D}_{ij} = -\left(\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} + \overline{u_j'u_k'}\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i}\right)$$

(2β)

Η εξίσωση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας είναι

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_k}\right] + \mathbb{P} - \varepsilon \qquad \text{eq.k} \tag{k}$$

Η κεντρική παραδοχή που στηρίζεται το ARSM είναι ότι

$$\boxed{\left[\mathrm{Conve}-\mathrm{Diff}\right]\left(\overline{u_i' u_j'}\right) = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{k}\left[\mathrm{Conve}-\mathrm{Diff}\right](k)} \qquad \text{eq.4} \tag{4}$$

Που καταλήγει σε μια αλγεβρική σχέση για τις τάσεις Reynolds:

$$\boxed{\overline{u_i' u_j'} = k\left[\frac{2}{3}\delta_i^j + \left(\frac{1-\gamma}{C_1}\right)\cdot\frac{\frac{\mathbb{P}_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3}\delta_i^j\frac{\mathbb{P}}{\varepsilon}}{1 + \frac{1}{C_1}\left(\frac{\mathbb{P}}{\varepsilon} - 1\right)}\right]} \qquad \text{eq.5} \tag{5}$$

Συσχετίζοντας τον με την υπόθεση του Boussinesq, η έκφραση της τυρβώδους συνεκτικότητας είναι

$$\boxed{\nu_t = \frac{2}{3}\left(\frac{1-\gamma}{C}\right)k^2\cdot\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1 - \frac{1}{C_1}\left(1 - \gamma\frac{\mathbb{P}}{\varepsilon}\right)}{\left[1 + \frac{1}{C_1}\left(\frac{\mathbb{P}}{\varepsilon} - 1\right)\right]^2}} \qquad \text{eq.6} \tag{6}$$

Η θεωρία με τις παραδοχές της καταλήγει στην έκφραση του C_μ

$$\boxed{C_\mu = \frac{2}{3}\left(\frac{1-\gamma}{C_1}\right)\frac{1 - \frac{1}{C_1}\left(1 - \gamma\frac{\mathbb{P}}{\varepsilon}\right)}{\left[1 + \frac{1}{C_1}\left(\frac{\mathbb{P}}{\varepsilon} - 1\right)\right]^2}} \qquad \text{eq.7} \tag{7}$$