ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

ΘΕΡΜΙΚΕΣ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΕΣ

(5ο Εξάμηνο Σχολής Μηχ.Μηχ. ΕΜΠ)

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ ΑΡΧΩΝ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου
Καθηγητής ΕΜΠ

kgianna@mail.ntua.gr

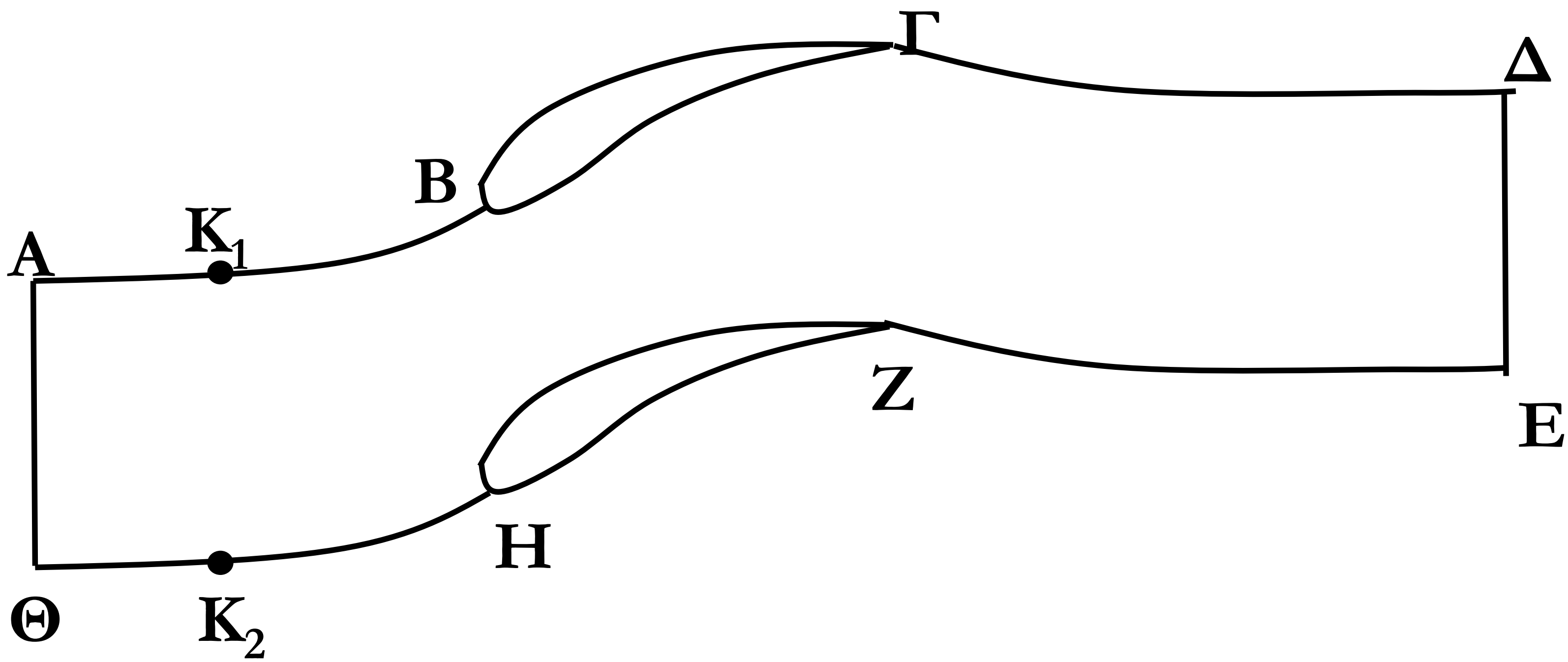
http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/research/

Εισαγωγή

Η (μέσα σε ένα δίωρο) επανάληψη θεωρίας από τη Μηχανική των Ρευστών δεν υποκαθιστά ή αντικαθιστά ύλη που κανονικά οφείλετε να γνωρίζετε από τα σχετικά μαθήματα προηγούμενων εξαμήνων.

Έχει στόχο να θυμίσει κάποια πράγματα και να προσαρμόσει την ορολογία σε αυτήν του μαθήματος των Θερμικών Στροβιλομηχανών.

Εξισώσεις Διατήρησης της Μάζας – Εξίσωση Συνέχειας



► **Συμπιεστό ρευστό (χρονικά μη-μόνιμη ροή)**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

► **Ασυμπίεστο ρευστό (μόνιμη/μη-μόνιμη ροή)**

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Φυσική σημασία της συντηρητικής γραφής! Θεώρημα Green-Gauss

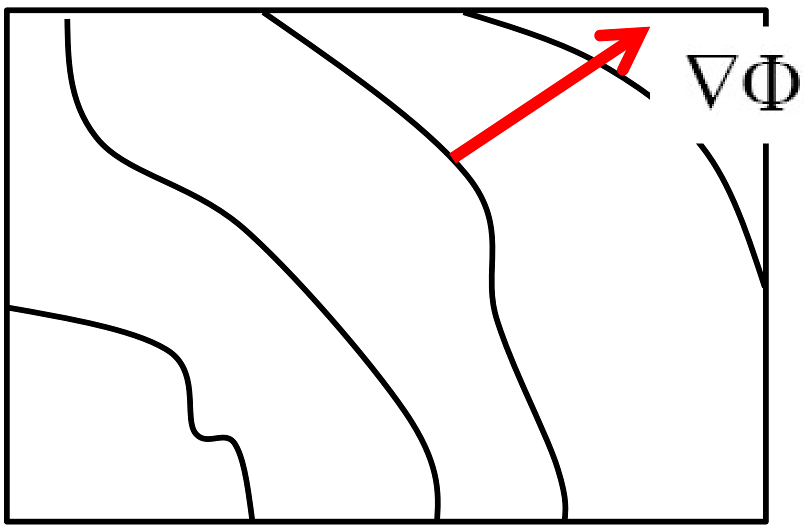
Υπενθύμιση γνώσεων από τα Μαθηματικά

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}$$

Div: Βαθμωτό!

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{i}_y$$

Grad: Διάνυσμα!



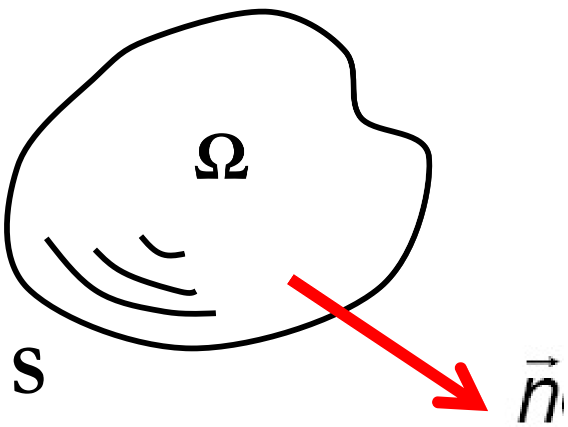
Ισο-Φ(μεγάλο Φ)

Το gradΦ είναι πάντα <u>κάθετο</u> στις γραμμές σταθερού Φ, δείχνοντας προς την κατεύθυνση που αυξάνει το Φ.

Ισο-Φ(μικρό Φ)

Συντηρητική Γραφή (div) των Εξισώσεων

Η αξία της χρήσης του Θεωρήματος Green-Gauss



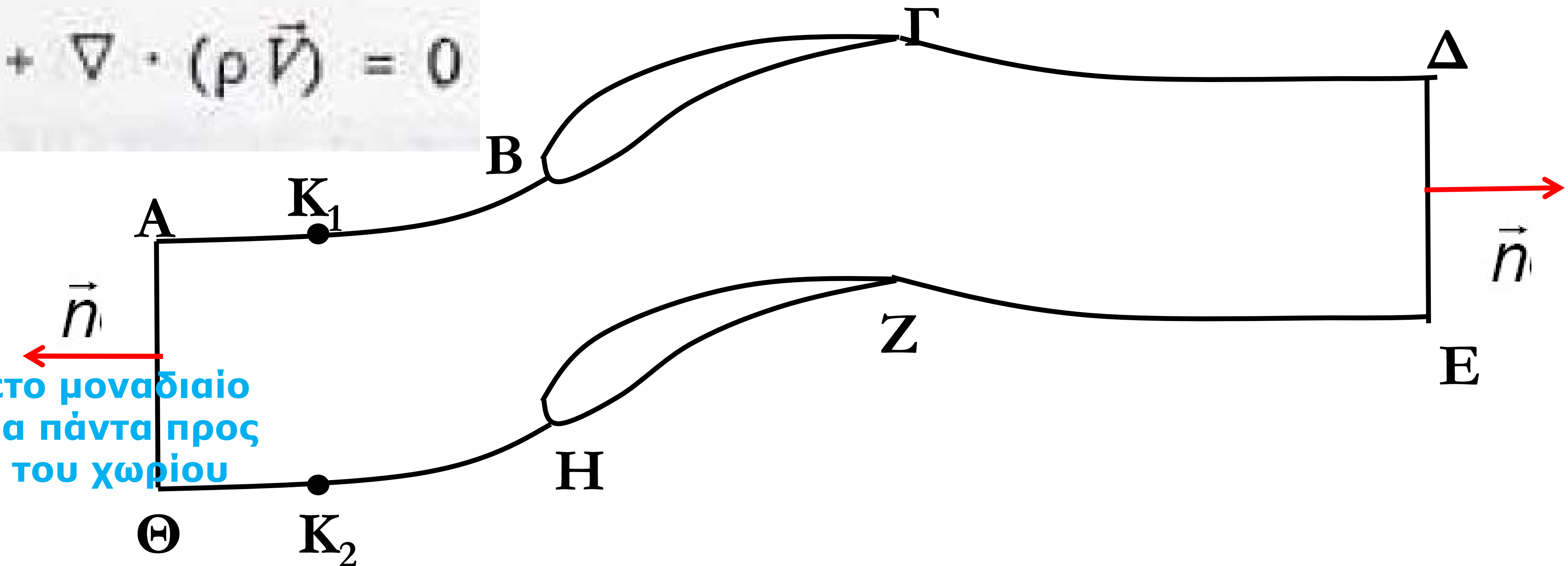
$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{A} d\Omega = \int_{S} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int_{S} A_n dS$$

Πληροφορία από τα όρια του χωρίου!

Οι νόμοι διατήρησης διατυπώνονται σε μορφή div, δηλαδή σε συντηρητική (conservative) γραφή, με συγκεκριμένα πλεονεκτήματα στη χρήση και κατανόησή τους.

Το θεώρημα του Green-Gauss είναι αναπόσπαστα συνδεδεμένο με νόμους διατήρησς σε συντηρητική γραφή.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$



Το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα πάντα προς τα έξω του χωρίου

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\rho \vec{V}\right) d\Omega = 0 \Rightarrow \int_{S} \rho V_n dS = 0 \Rightarrow \int_{S_{INLET}} \rho V_n dS + \int_{S_{OUTLET}} \rho V_n dS = 0$$

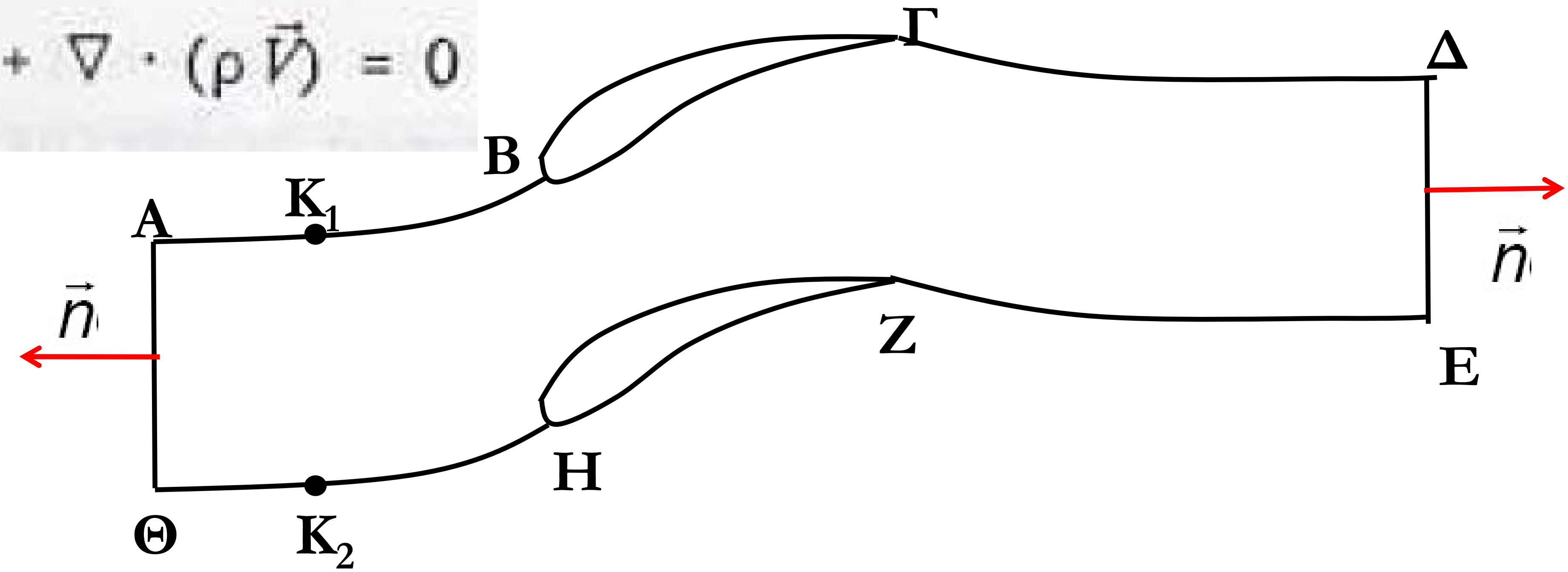
$$\rho V_n\Big|_{INLET} + \rho V_n\Big|_{OUTLET} = 0$$

$$\rho V_a\Big|_{INLET} = \rho V_a\Big|_{OUTLET}$$

Προσέξτε, τα V_n είναι προσημασμένα, τα V_a πάντα θετικά!

Εξισώσεις Διατήρησης της Μάζας – Εξίσωση Συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$



Περιοδικά όρια : ουδέτερη συνεισφορά στους νόμους διατήρησης!

Στα στερεά τοιχώματα δεν διεισδύει μάζα ρευστού είτε θεωρούμε συνεκτικό ρευστό (εξ. Navier-Stokes, συνθήκη μη ολίσθησης της ροής-no slip condition) είτε μη-συνεκτικό (ατριβές) ρευστό (εξ. Euler, συνθήκη μη διείσδυσης της ροής-no penetration condition)

Εξισώσεις Διατήρησης της Ορμής – Εξίσωση Lamb

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\nabla p + \nabla \cdot \breve{\tau}$$

Μη-συντηρητική γραφή:

$$\frac{\partial \left(\rho \vec{V} \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \vec{V} \vec{V} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \breve{\tau}$$

Συντηρητική γραφή:

Όμως:

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \times \left(\nabla \times \vec{V} \right)$$

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) = \rho \vec{V} \times \vec{\Omega} - \nabla p + \nabla \cdot \breve{\tau}$$

(Εξίσωση LAMB)

$$TdS = du + pdv = dh - \frac{1}{\rho} dp$$

$$T \nabla S = \nabla u + p \nabla v = \nabla h - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla h_t = \vec{V} \times \vec{\Omega} + T \nabla S + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \breve{\tau}}$$

(Εξίσωση LAMB)

Ειδικά για Ασυμπίεστη ροή:

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\rho\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)=\rho\vec{V}\times\vec{\Omega}-\nabla p+\nabla\cdot\breve{\tau}$$

$$\boxed{\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{p_t}{\rho}\right)=\vec{V}\times\vec{\Omega}+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\breve{\tau}}$$

(Εξίσωση LAMB)

Συγκρίνετε με το τι ισχύει για Συμπιεστή ροή:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla h_t=\vec{V}\times\vec{\Omega}+T\nabla S+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\breve{\tau}$$

$$\int_{R} \frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t}dv + \int_{R} \nabla\cdot(\rho\vec{V}\vec{V})dv = -\int_{R} \nabla p\,dv + \int_{R} \nabla\cdot\bar{\bar{\tau}}\,dv$$

(T1) **(T2)** **(T3)** **(T4)**

(T1) **ποτέ επικαμπύλιο!**

(T2)

$$\int_{R} \nabla\cdot(\rho\vec{V}\vec{V})\,dv = \int_{S} \vec{n}\cdot(\rho\vec{V}\vec{V})\,dS$$

$$\vec{n}\cdot(\rho\vec{V}\vec{V})\,dS = \rho V\cos\alpha\,dS\,\vec{V} = dm_S\,\vec{V}$$

$$dm_S = \rho V\cos\alpha\;dS$$

$$\int_{R} \nabla\cdot(\rho\vec{V}\vec{V})dv = \int_{S_2} dm_{S_2}\vec{V}_2 - \int_{S_1} dm_{S_1}\vec{V}_1$$

Ολοκληρωματικές Εξισώσεις Διατήρησης της Ορμής

$$\int_R \frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t}dv + \int_R \nabla\cdot(\rho\vec{V}\vec{V})dv = -\int_R \nabla p\,dv + \int_R \nabla\cdot\bar{\bar{\tau}}\,dv$$

(T1) (T2) (T3) (T4)

(T3)

$$\int_R \nabla p\; dv = \int_S p\;\vec{n}\;dS$$

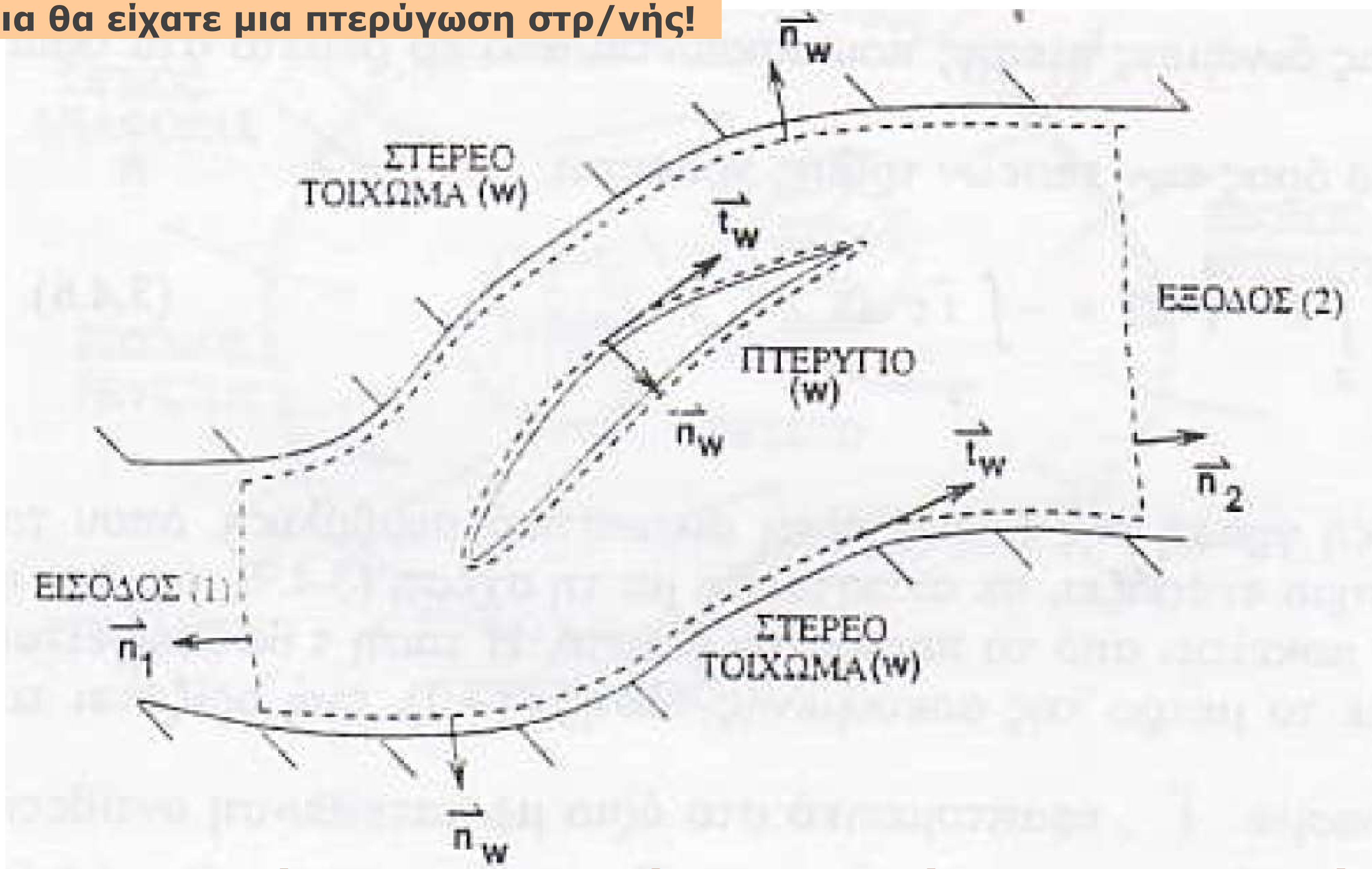
(T4)

$$\int_R \nabla\cdot\bar{\bar{\tau}}\;dv = \int_S \vec{n}\cdot\bar{\bar{\tau}}\;dS = -\int \vec{t}\,\tau\;dS$$

Προσοχή: Μας ενδιαφέρουν πάντα οι δυνάμεις που ασκούνται στο ρευστό (από τα στερεά τοιχώματα, λ.χ. τα πτερύγια)

Πως χρησιμοποιείται:

Αν αλλάξετε τα πλευρικά στερεά τοιχώματα με περιοδικά όρια θα είχατε μια πτερύγωση στρ/νής!



<u>Ζητούμενο</u>: Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύνολο των στερεών τοιχωμάτων (πτερύγια & πλευρικά τοιχώματα).

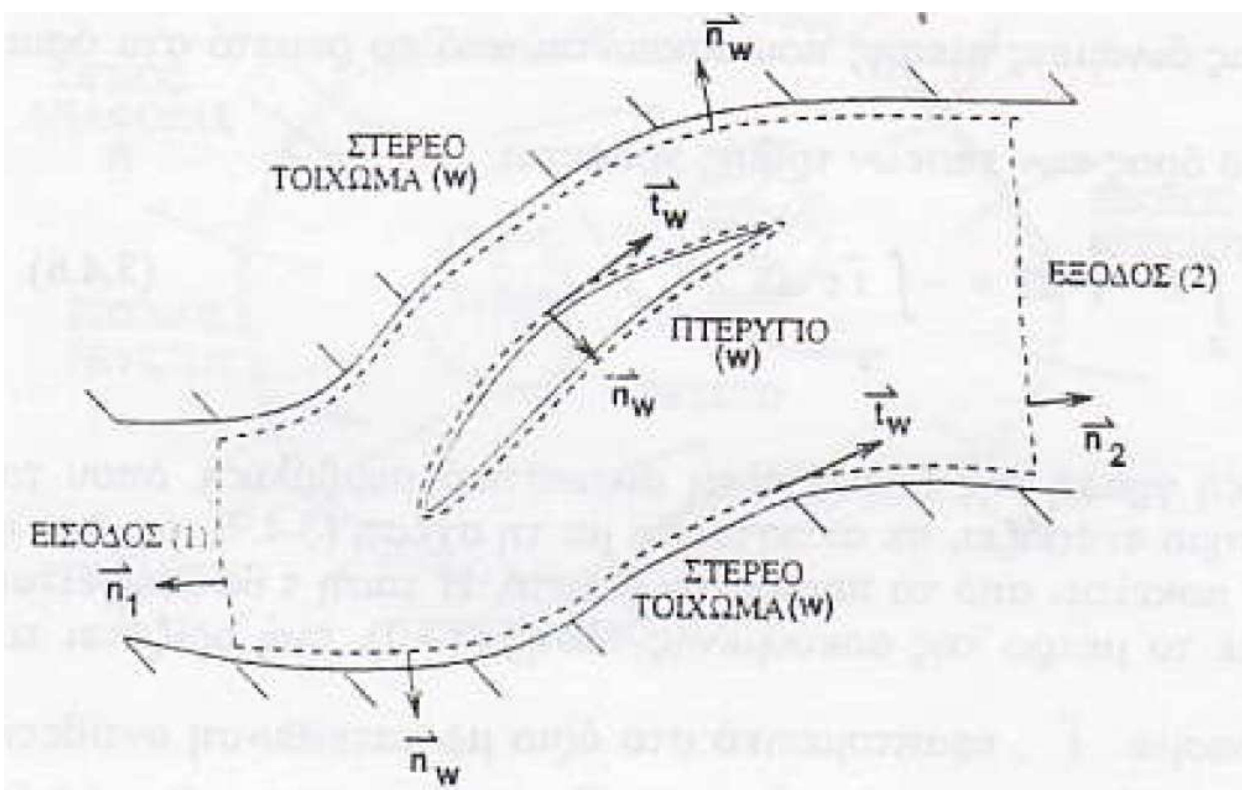
Πως χρησιμοποιείται:

$$(PO) = \int_S dm_S \, \vec{V}$$

$$(\Delta\Pi) = \int_S -\vec{n} \, p \, dS$$

$$(\Delta T) = \int -\vec{t} \, \tau \, dS$$

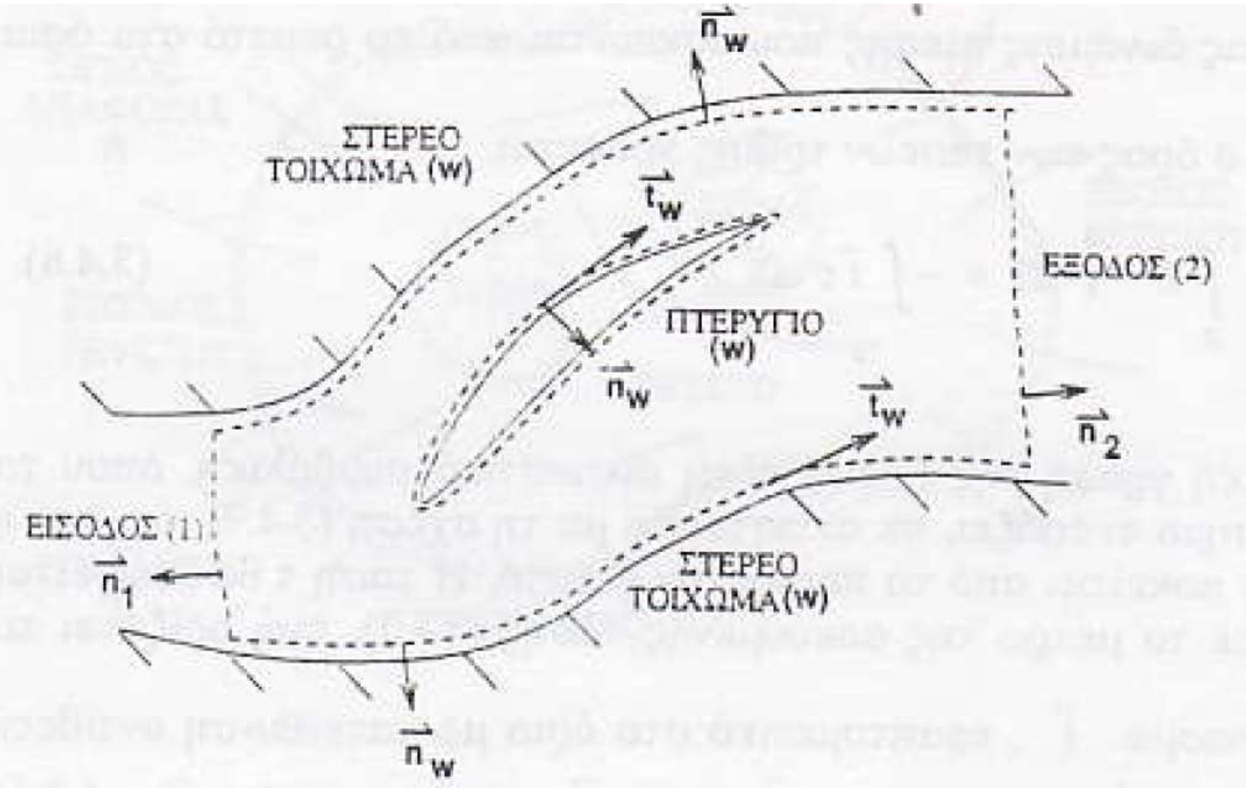
$$(PO)_2 - (PO)_1 = (\Delta\Pi)_1 + (\Delta\Pi)_2 + (\Delta\Pi)_w + (\Delta T)_1 + (\Delta T)_2 + (\Delta T)_w$$



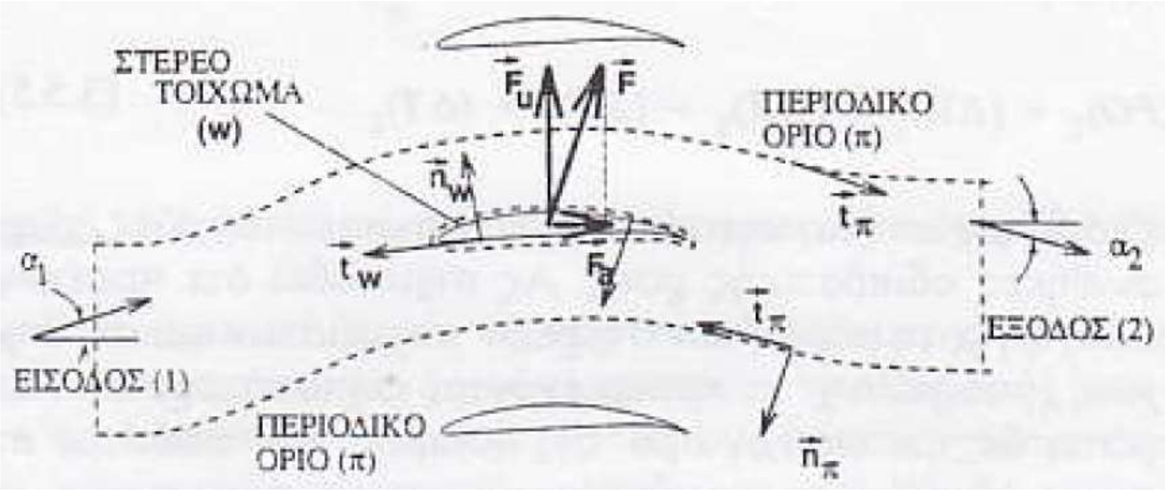
Δυνάμεις που ασκούνται στα στερεά τοιχώματα (πτερύγια & πλευρικά τοιχώματα).

$$\vec{F}_w = -(\Delta\Pi)_w - (\Delta T)_w$$

$$\vec{F}_w = (PO)_1 - (PO)_2 + (\Delta\Pi)_1 + (\Delta\Pi)_2 + (\Delta T)_1 + (\Delta T)_2$$



Πως χρησιμοποιείται (σε Γραμμική Πτερύγωση):



$$\vec{F} = -(\Delta\Pi)_w - (\Delta T)_w$$

$$\vec{F} = (PO)_1 - (PO)_2 + (\Delta\Pi)_1 + (\Delta\Pi)_2 + (\Delta T)_1 + (\Delta T)_2$$

$$(PO)_1 = m_{S_1} \vec{V}_1$$

$$(PO)_2 = m_{S_2} \vec{V}_2$$

$$(\Delta\Pi)_1 = -\vec{n}_1 \, p_1 \, S_1$$

$$(\Delta\Pi)_2 = -\vec{n}_2 \, p_2 \, S_2$$

Αν Vα=σταθ.

$$\boxed{\begin{gathered} F_a = \cancel{m_s (V_{a1} - V_{a2})} + (p_1 - p_2) S \\ F_u = m_s (V_{u1} - V_{u2}) \end{gathered}}$$

Όλη η ουσία των δυνάμεων που ασκούνται σε πτερυγώσεις!

$$\vec{V}dt \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}dt \cdot \nabla \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) = \vec{V}dt \cdot [\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})] - \frac{1}{\rho} \vec{V}dt \cdot \nabla p + \vec{V}dt \cdot \vec{f}_v$$

Παράγωγος κατά μήκος τροχιάς ρευστοστοιχείου: $d'() = \vec{V}dt \cdot \nabla()$

Μέσω της εξίσωσης του Gibbs:

$$\frac{1}{\rho} d'p = d'h - T\,d'S$$

$$d'q = d'q_c + d'q_v$$

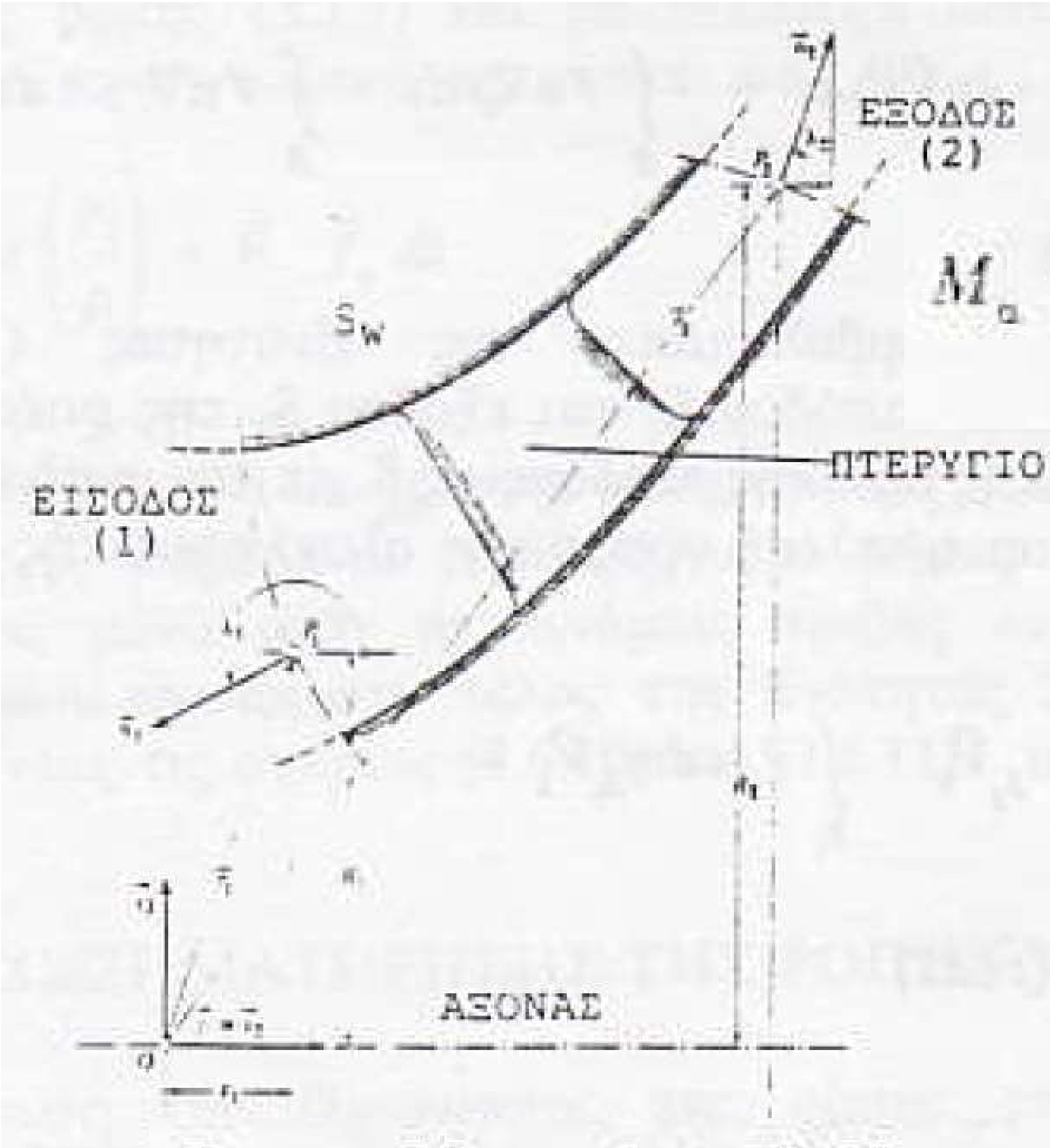
$$d'q_v = -dt\,\vec{V} \cdot \vec{f}_v$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{V^2}{2} \right) dt + d'h_t = d'q_c}$$

Ειδικά για <u>Ασυμπίεστη ροή</u>:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{V^2}{2} \right) dt + d'\left(\frac{p_t}{\rho} \right) = \vec{V} \cdot \vec{f}_v\, dt}$$

Διατήρηση Ροπής της Ορμής



$$M_a = \int_{S_1} dm_{S_1} R_1 V_{u_1} - \int_{S_2} dm_{S_2} R_2 V_{u_2}$$

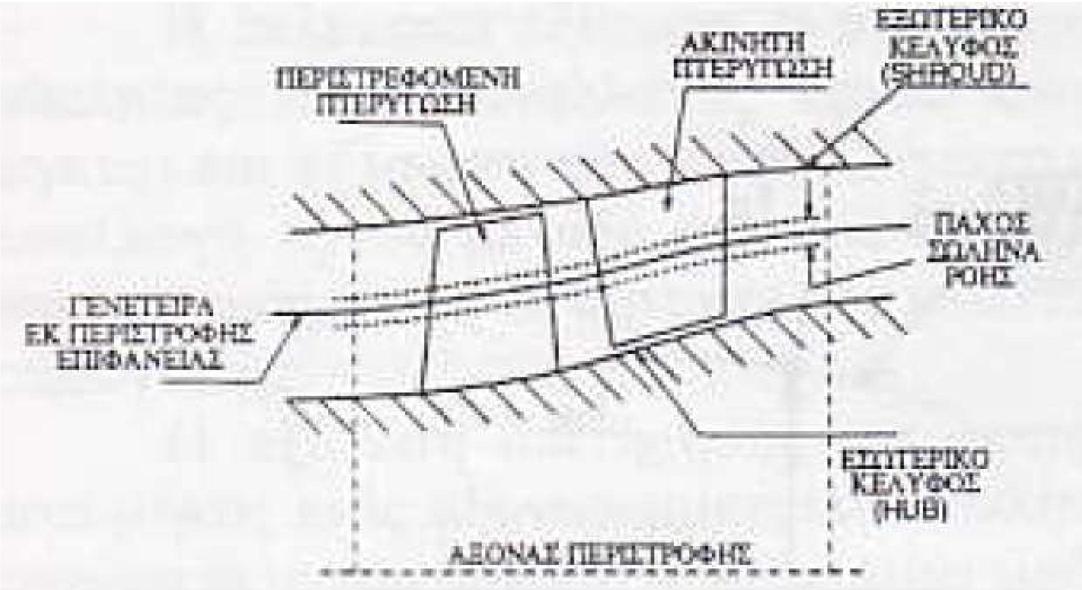
Θεώρημα του Euler:

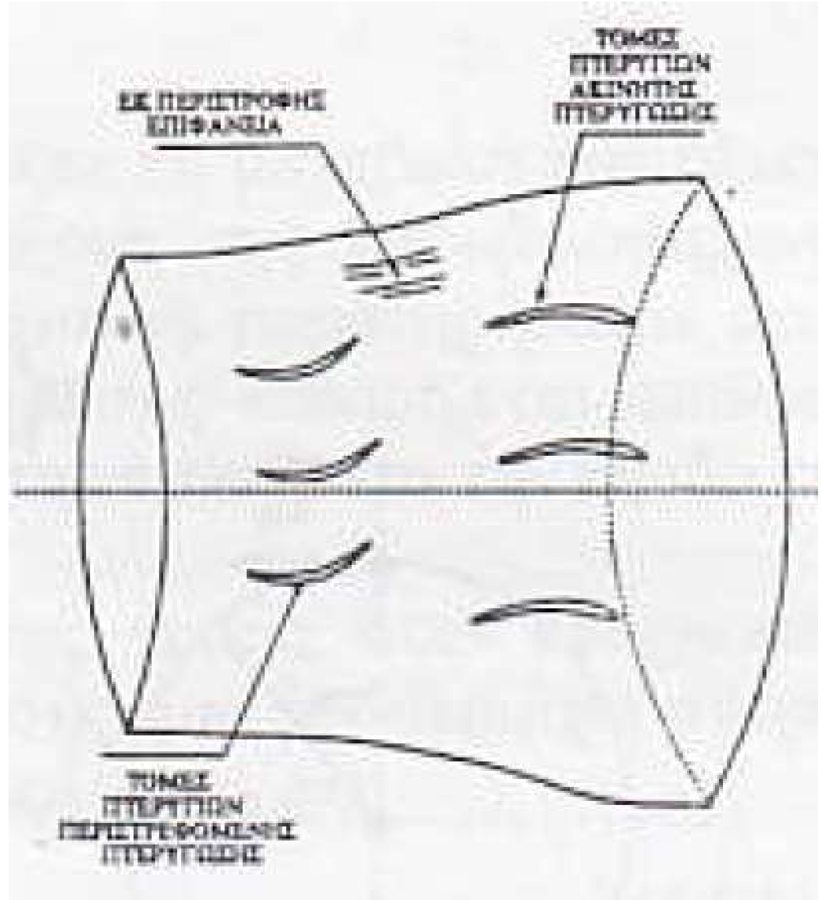
$$M_a = \dot{m}\,(R_1 V_{u_1} - R_2 V_{u_2})$$

$$h_{t_2} - h_{t_1} = U_2 V_{u_2} - U_1 V_{u_1}$$

$$P = \omega M_a = \dot{m}\,(\omega R_1 V_{u_1} - \omega R_2 V_{u_2}) = \dot{m}\,(U_1 V_{u_1} - U_2 V_{u_2})$$

Διατήρηση Ροπής της Ορμής





Μεταξύ ποιών θέσεων εφαρμόζονται οι παρακάτω σχέσεις;

$$h_{t_2} - h_{t_1} = U_2 V_{u_2} - U_1 V_{u_1}$$

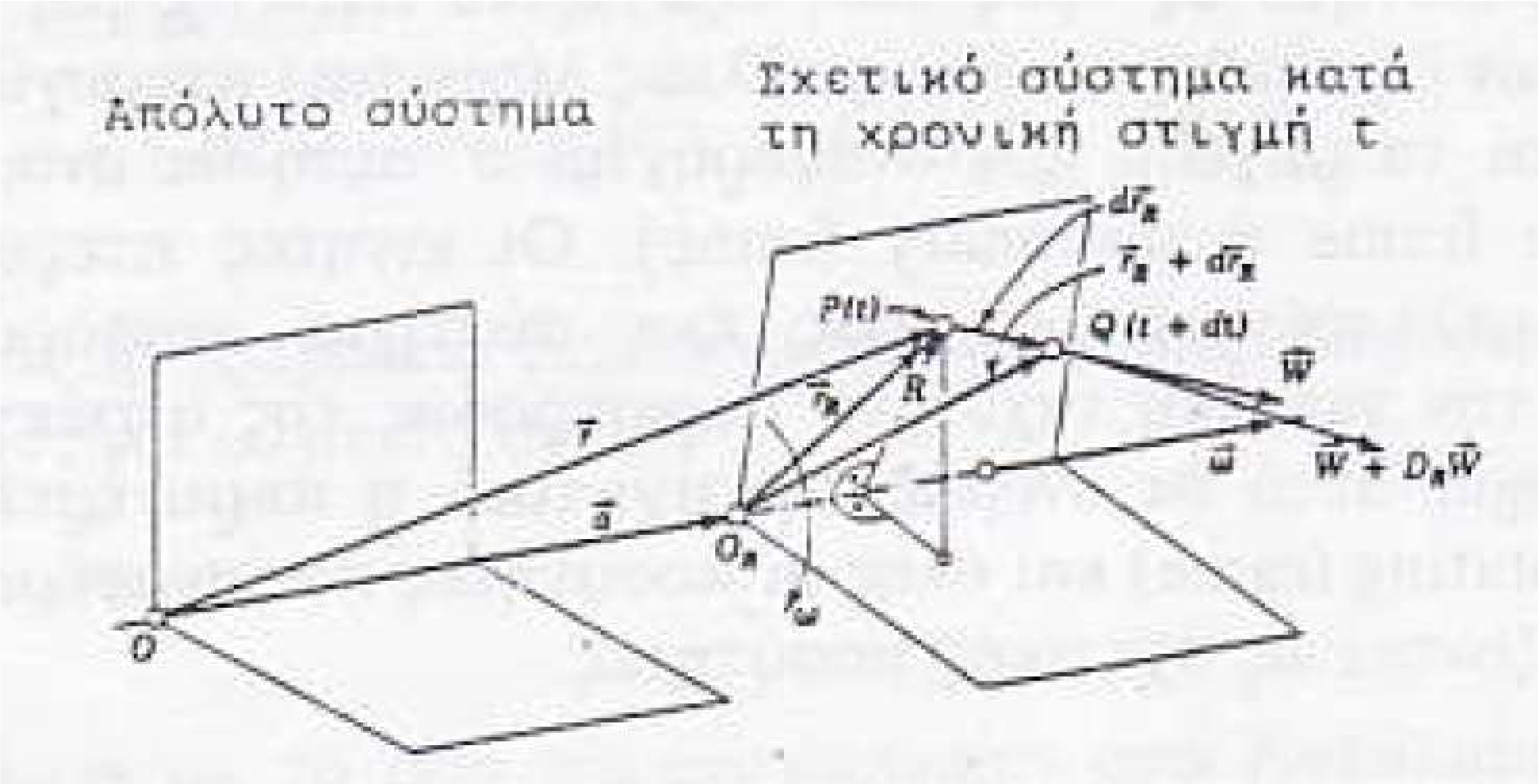
$$R_1 V_{u_1} = R_2 V_{u_2}$$

Σχετικό Σύστημα

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{W} = \frac{d\vec{r}_R}{dt}$$

$$\boxed{\vec{V} = \vec{W} + \vec{\omega} \times \vec{r}_R}$$



Απόλυτη & Σχετική Επιτάχυνση

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \frac{D\vec{V}}{dt}$$

$$\vec{a}_R = \frac{\partial_R \vec{W}}{\partial t} + \vec{W} \cdot \nabla_R \vec{W} = \frac{D_R \vec{W}}{dt}$$

Συσχέτισή τους:

$$\frac{D\vec{V}}{dt} = \frac{D_R \vec{W}}{dt} + 2\vec{\omega} \times \vec{W} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)$$

Coriolis Κεντρομόλος

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 R \nabla R = \nabla\left(-\frac{\omega^2 R^2}{2}\right)$$

Διατήρηση της Ορμής στο Σχετικό Σύστημα

$$\rho\frac{\partial\vec{W}}{\partial t}+\rho\vec{W}\cdot\nabla\vec{W}=-2\rho\vec{\omega}\times\vec{W}-\rho\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)-\nabla p+\nabla\cdot\breve{\tau}$$

$$\vec{W}\cdot\nabla\vec{W}=\nabla\left(\frac{W^2}{2}\right)-\vec{W}\times\left(\nabla\times\vec{W}\right)$$

$$\frac{\partial\vec{W}}{\partial t}+\nabla\left(h+\frac{W^2}{2}-\frac{\omega^2R^2}{2}\right)=-2\vec{\omega}\times\vec{W}+\vec{W}\times\left(\nabla\times\vec{W}\right)+T\nabla S+\frac{\nabla\cdot\breve{\tau}}{\rho}$$

$$TdS=du+pdv=dh-\frac{1}{\rho}dp \qquad T\nabla S=\nabla u+p\nabla v=\nabla h-\frac{1}{\rho}\nabla p$$

$$\boxed{\frac{\partial\vec{W}}{\partial t}+\nabla h_{tR}=\vec{W}\times\left(\nabla\times\vec{W}+2\vec{\omega}\right)+T\nabla S+\frac{\nabla\cdot\breve{\tau}}{\rho}}$$

$$\boxed{h_{tR}=h+\frac{1}{2}W^2-\frac{1}{2}U^2}$$

Σχετική ολική ενθαλπία

Διατήρηση της Ορμής στο Σχετικό Σύστημα

Ειδικά για Ασυμπίεστη ροή:

$$\rho \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \rho \vec{W} \cdot \nabla \vec{W} = -2\rho \vec{\omega} \times \vec{W} - \rho \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right) - \nabla p + \nabla \cdot \breve{\tau}$$

$$\vec{W} \cdot \nabla \vec{W} = \nabla \left(\frac{W^2}{2} \right) - \vec{W} \times \left(\nabla \times \vec{W} \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{p_{tR}}{\rho} \right) = \vec{W} \times \left(\nabla \times \vec{W} + 2\vec{\omega} \right) + \frac{\nabla \cdot \breve{\tau}}{\rho}}$$

$$\boxed{p_{tR} = p + \frac{\rho}{2} W^2 - \frac{\rho}{2} U^2}$$

Σχετική ολική πίεση

Άλλα Ολικά Μεγέθη για το Σχετικό Σύστημα

Προσέξτε τι ισχύει για Συμπιεστή Ροή & τι για Ασυμπίεστη ροή:

Σχετική ολική ενθαλπία
Relative

$$h_{tR} = h + \frac{1}{2}W^2 - \frac{1}{2}U^2$$

Σχετική ολική πίεση
Relative

$$p_{tR} = p + \frac{\rho}{2}W^2 - \frac{\rho}{2}U^2$$

Περιστρεφόμενη ολική ενθαλπία
rotating

$$h_{tr} = h + \frac{1}{2}W^2$$

Περιστρεφόμενη ολική πίεση
rotating

$$p_{tr} = p + \frac{\rho}{2}W^2$$

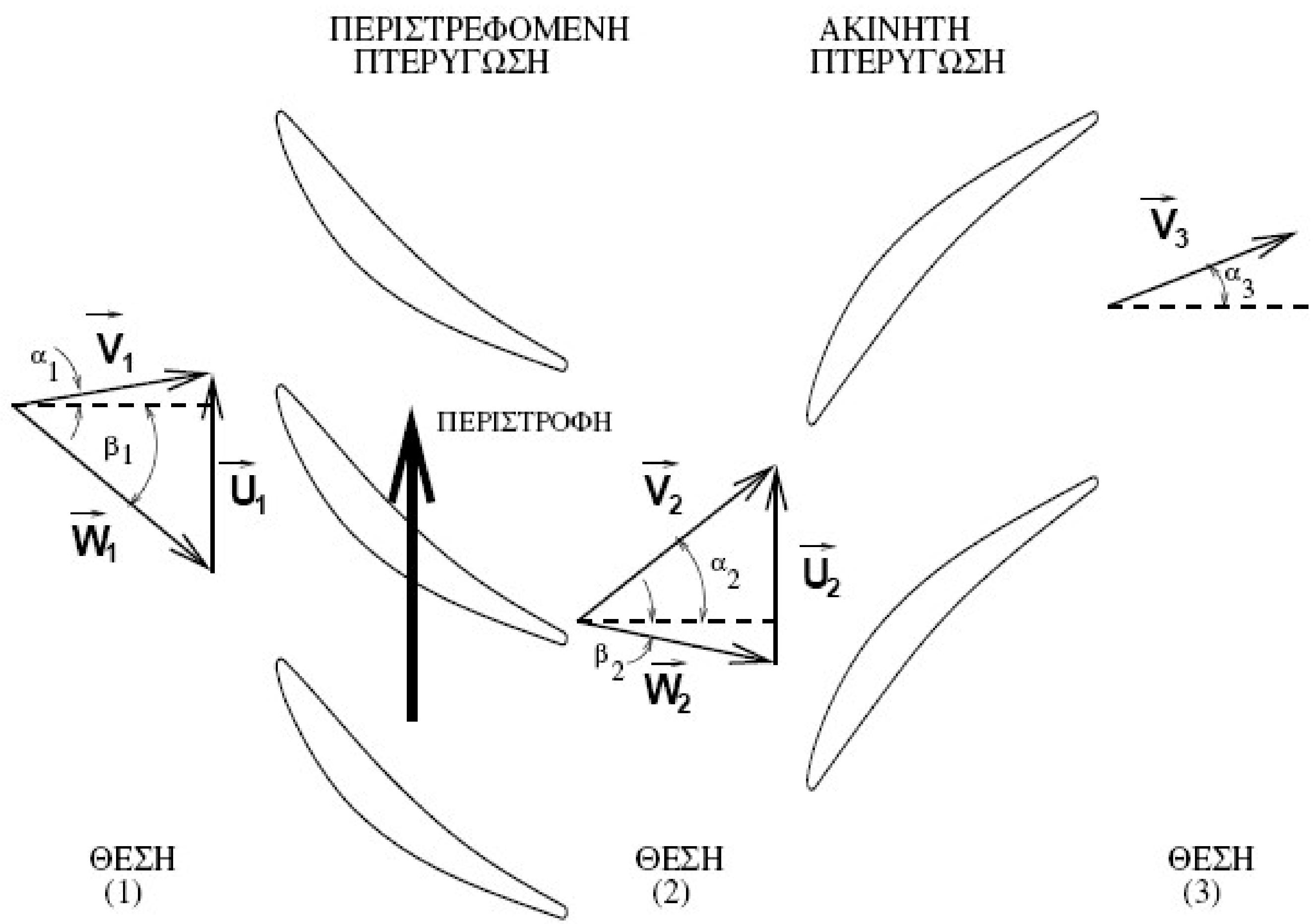
Διατήρηση της Ενέργειας στο Σχετικό Σύστημα

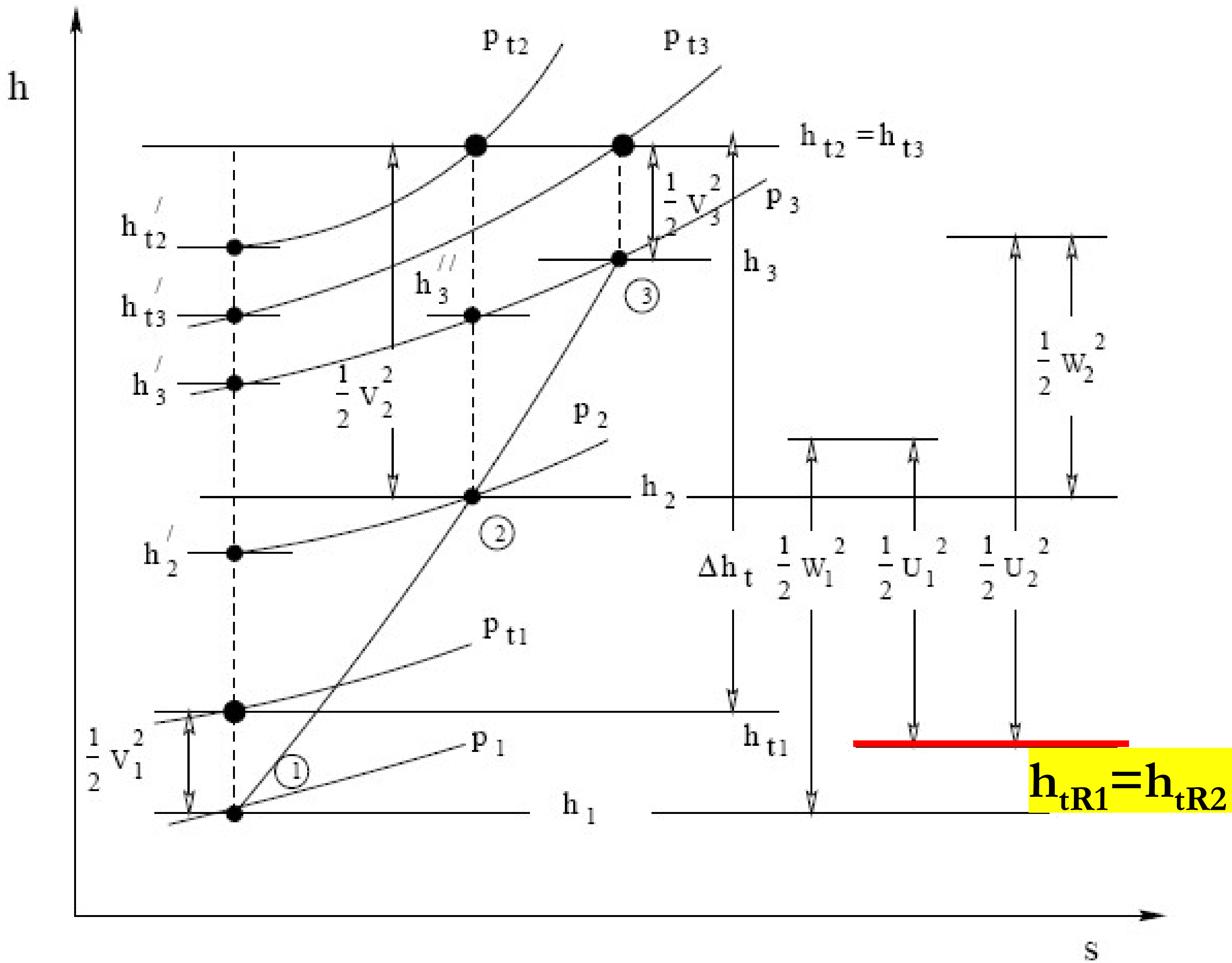
$$\vec{W} \cdot \frac{\partial_R \vec{W}}{\partial t}\, dt + d_R{}' h_{tR} = d_R{}' q_c$$

Ειδικά για Ασυμπίεστη ροή:

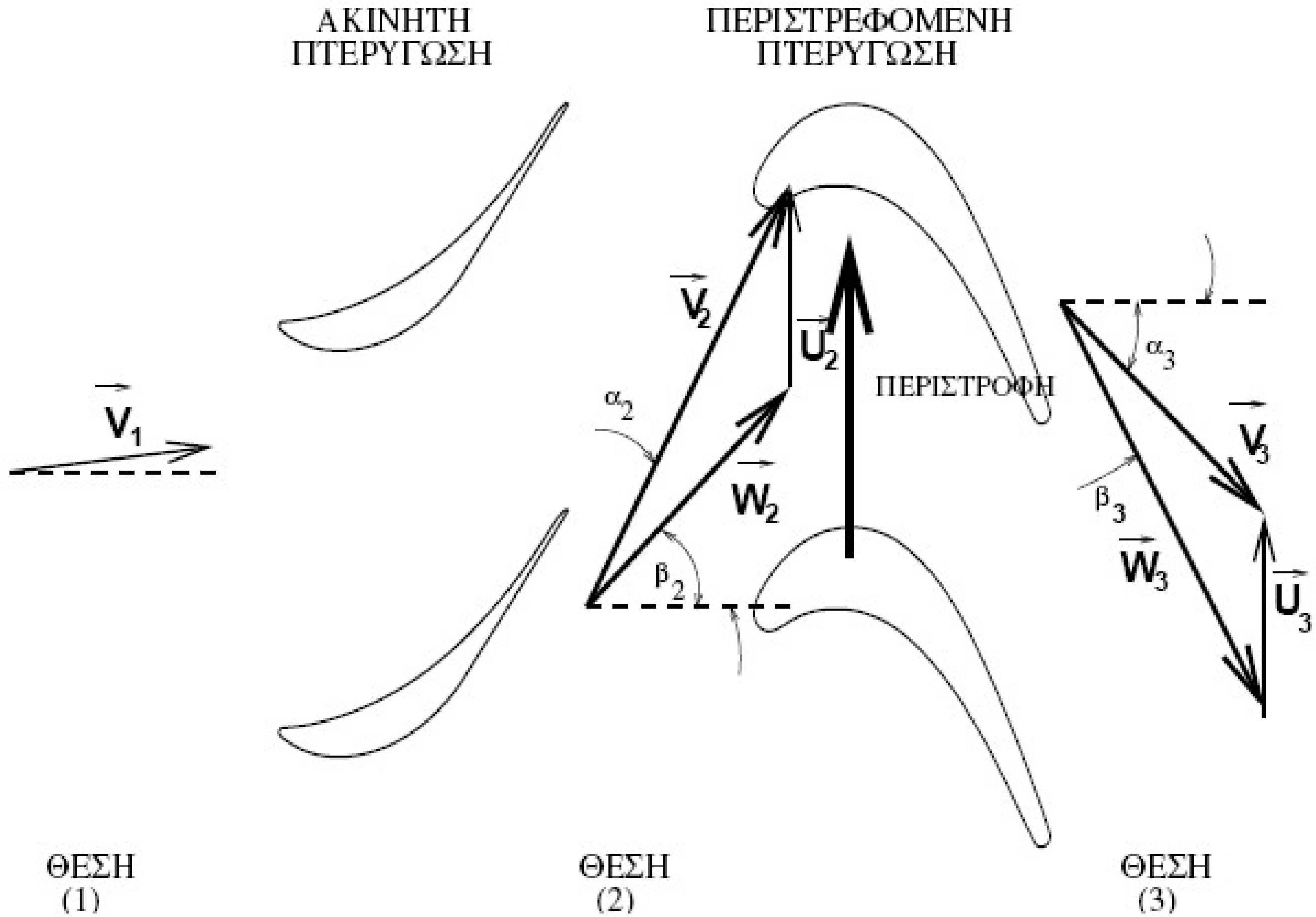
...

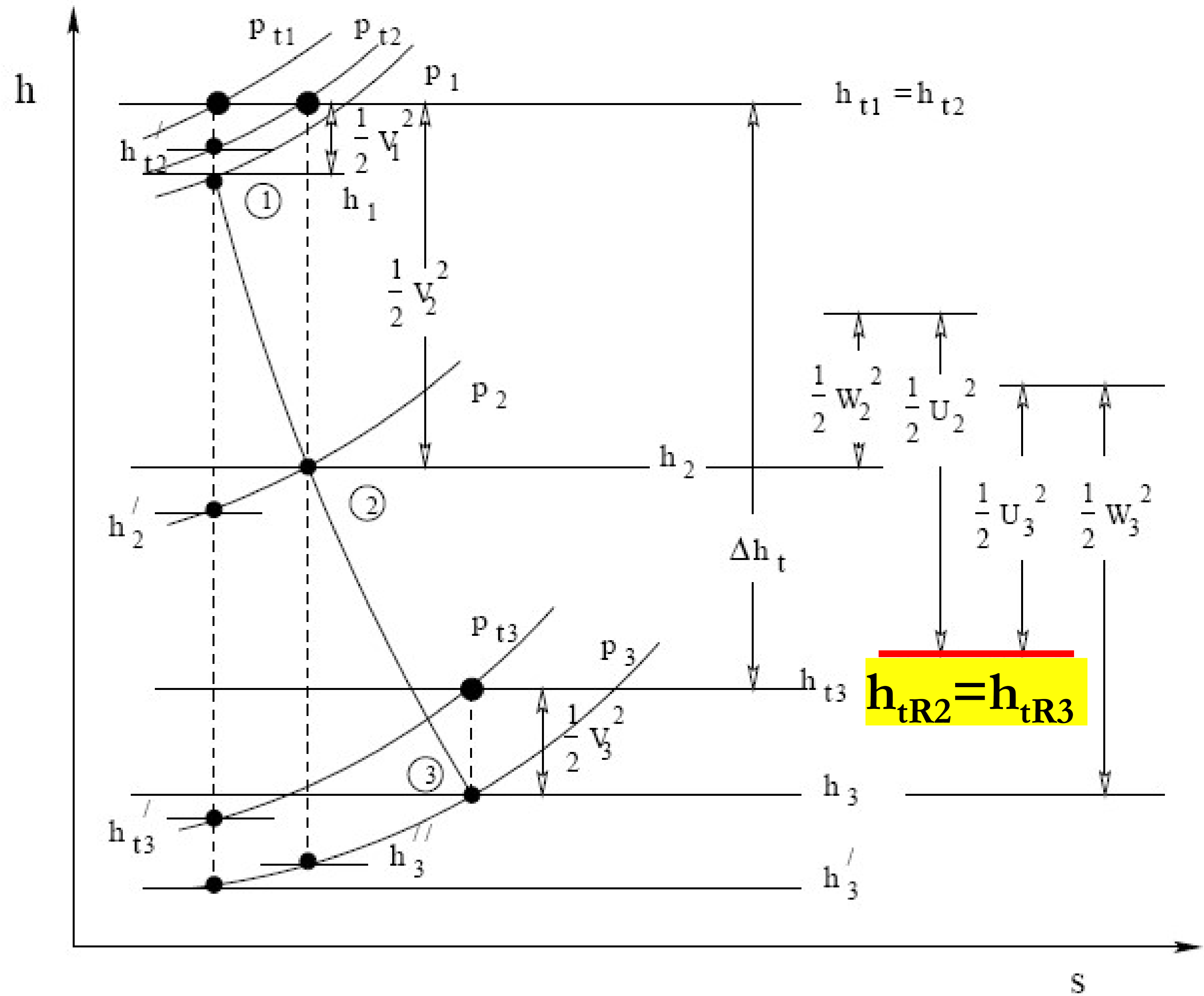
Θερμοδυναμική Μεταβολή σε Βαθμίδα Συμπιεστή




h
s
p_{t2}
p_{t3}
p_3
p_2
p_{t1}
p_1
$h_{t2} = h_{t3}$
h'_{t2}
h'_{t3}
h'_3
h''_3
h_3
h_2
h'_2
h_{t1}
h_1
$\frac{1}{2}V_3^2$
$\frac{1}{2}V_2^2$
$\frac{1}{2}V_1^2$
$\frac{1}{2}W_2^2$
Δh_t
$\frac{1}{2}W_1^2$
$\frac{1}{2}U_1^2$
$\frac{1}{2}U_2^2$
1
2
3
$h_{tR1}=h_{tR2}$

Θερμοδυναμική Μεταβολή σε Βαθμίδα Στροβίλου




h
p t1
p t2
p 1
h t1 =h t2
h t2
h 1
1
2
3
p 2
h 2
Δh t
h t3
p t3
p 3
h 3
h t3
h 3
h 3
s
htR2=htR3

Βασικό!

Αποδείξτε ότι το θεώρημα του Euler σε μια περιστρεφόμενη πτερύγωση:

$$h_{t_2} - h_{t_1} = U_2 V_{u_2} - U_1 V_{u_1}$$

ισοδυναμεί με τη διατήρηση της σχετικής ολικής ενθαλπίας μεταξύ των δύο θέσεων αυτών.

$$h_{tR1} = h_{tR2}$$