ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Οι λυμένες ασκήσεις που ακολουθούν προέρχονται από τις "Περιληπτικές Σημειώσεις του Μαθήματος Θερμικών Στροβιλομηχανών Ι", του Καθ. κ. Κ.Δ. Παπαηλιού. Χρονικοί περιορισμοί δεν επέτρεψαν την προσαρμογή τους στη νέα διάταξη της ύλης. Παρά όμως τις ενδεχόμενες παραπομπές σε σχέσεις του παραπάνω συγγράμματος, οι οποίες στο παρόν σύγγραμμα αριθμούνται διαφορετικά, οι λυμένες αυτές ασκήσεις βοηθούν το φοιτητή στην κατανόηση της διδασκόμενης ύλης.

Η περαιτέρω επεξεργασία τους προγραμματίζεται για την επόμενη έκδοση.

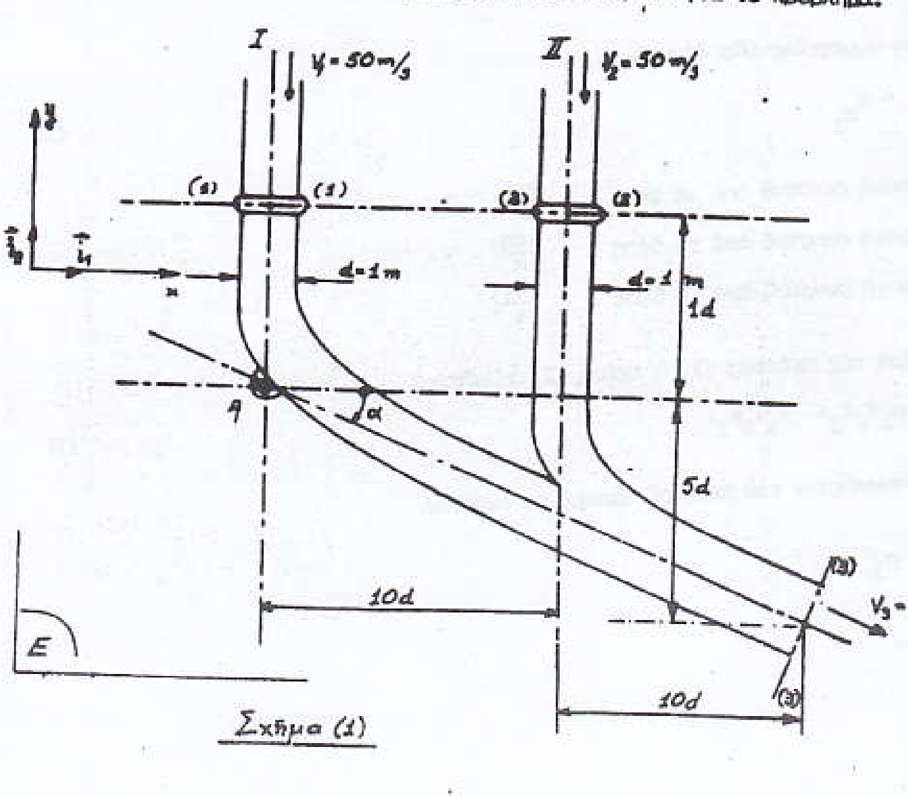
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ Νο 1

Μιά διακλάδωση μέ λεπτά τοιχώματα, όπως τήν παρουσιάζει τό σχήμα (1), παραλαμβάνει τή ροή άπό τούς σωλήνες I καί II καί τή διοχετεύει στήν άτμόσφαιρα. Ή σύνδεση τής διακλάδωσης μέ τούς σωλήνες I καί II γίνεται μέ τή βοήθεια έλαστικών συνδέσμων πού δέν μεταφέρουν ούτε δυνάμεις ούτε ροπές. Στίς διατομές 1,2 καί 3 ή διανομή τών ταχυτήτων καί τών πιέσεων είναι όμοιόμορφη. Έπίσης οί ταχύτητες στήν είσοδο καί στήν έξοδο είναι παράλληλες πρός τό έπίπεδο τού σχήματος (1). Στή θέση 3 τής διακλάδωσης όπου ή ροή έκτονώνεται στήν άτμόσφαιρα, ή στατική πίεση ίσούται μέ τήν άτμοσφαιρική. Ή πυκνότητα τού ρευστού παραμένει σταθερή καί ίσούται μέ $10^3 kg/m^3$ (νερό). Ή διακλάδωση στηρίζεται στό σταθερό σημείο A.

Άγνοώντας τήν έπίδραση τής συνεκτικότητας καί τής βαρύτητας, ζητείται νά προσδιοριστούν οί δυνάμεις κατά μέγεθος καί διεύθυνση πού άσκούνται στό σημείο στήριξης A.

Άς σημειώσουμε ότι ή άπλή αύτή διακλάδωση πού περιγράφει τό πρόβλημα μπορεί ν' άποτελέσει άκροφύσιο ύδραυλικού στροβίλου τύπου Pelton, τροφοδοτουμένου άπό δοχείο-δεξαμενή μέ τή βοήθεια δύο άγωγών-άκροφυσίων.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Στό σχήμα (1) δίδονται συμπληρωματικά δεδομένα γιά τό πρόβλημα.



Σχήμα (1)

ΛΥΣΗ

Οἱ δυνάμεις πού ἀσκοῦνται στή θεωρούμενη διάταξη ὀφείλονται στήν ἀλλαγή τῆς ὁρμῆς τοῦ ρευστοῦ καί στήν ἄνωση (δύναμη 'Αρχιμήδη). Ἡ τελευταία αὐτή ὀφείλεται στό ὅτι ἡ διάταξη περιβάλλεται ἀπό τόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα. Οἱ δυνάμεις ἄνωσης, στήν περίπτωσή μας εἶναι μικρές καί μέ πολύ καλή προσέγγιση μποροῦν νά παραληφθοῦν. Ἔτσι γιά τή λύση τοῦ προβλήματος, εἶναι δυνατόν νά χρησιμοποιήσουμε μανομετρικές πιέσεις (οὐσιαστικά θεωροῦμε ὅτι ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση παραμένει σταθερή στή γειτονιά τοῦ σώματος πού ἐξετάζουμε).

α. Προσδιορισμός διαμέτρου τοῦ ἀκροφυσίου ἐκτόνωσης 3 .

Ἐφαρμόζουμε τήν ἐξίσωση συνεχείας:

Ἡ παροχή μάζας ρευστοῦ ἀπό μιά διατομή S δίνεται ἀπό τήν ἑξῆς σχέση γιά ὁμοιόμορφη ροή:

$$m_s = \rho V S \qquad \left|\frac{kg}{s}\right| \tag{1}$$

ὅπου

ρ = πυκνότητα ρευστοῦ $\left|\frac{kg}{m^3}\right|$

V = ταχύτητα ρευστοῦ κάθετη στήν διατομή $S \left|\frac{m}{s}\right|$

S = ἐμβαδόν διατομῆς $|m^2|$

Ἡ ἐξίσωση συνεχείας μᾶς δίνει:

$$m_{s_1} + m_{s_2} = m_{s_3} \tag{2}$$

m_{s_1} = παροχή ρευστοῦ ἀπό τή θέση 1 $\left|\frac{kg}{s}\right|$.

m_{s_2} = παροχή ρευστοῦ ἀπό τή θέση 2 $\left|\frac{kg}{s}\right|$

m_{s_3} = παροχή ρευστοῦ ἀπό τή θέση 3 $\left|\frac{kg}{s}\right|$

Μέ τή χρήση τῆς σχέσεως (1) ἡ σχέση (2) γίνεται

$$\rho_1 V_1 S_1 + \rho_2 V_2 S_2 = \rho_3 V_3 S_3 \tag{3}$$

Ἐπειδή ἡ πυκνότητα τοῦ ρευστοῦ παραμένει σταθερή

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$$

'Από τά δεδομένα τοῦ προβλήματος πού παρουσιάζονται στό σχῆμα (1)

$$V_1 = V_2 = \frac{V_3}{2} = 50 m/s \qquad (5)$$

ὅπου :

V_1 = ταχύτητα ρευστοῦ στή θέση 1
V_2 = ταχύτητα ρευστοῦ στή θέση 2
V_3 = ταχύτητα ρευστοῦ στή θέση 3

'Επίσης :

$$S_1 = S_2 \qquad (6)$$

ὅπου:

S_1 = διατομή στή θέση 1
S_2 = διατομή στή θέση 2

Οἱ σχέσεις (4), (5) καί (6) μᾶς μετασχηματίζουν τή σχέση (3) σέ

$$V_1S_1 + V_1S_1 = V_3S_3 \qquad (7)$$

ὁπότε:

$$2V_1S_1 = 2V_1S_3$$

καί

$$S_3 = S_2 = S_1 = S$$

'Αρα ἡ διάμετρος τοῦ ἀκροφυσίου ἐξόδου ἰσοῦται μέ τή διάμετρο τῶν δύο ἀγωγῶν, δηλ.

$$d_3 = d_1 = d_2 = d = 1m \qquad (8) \qquad d_3 = 1m$$

'Επίσης ἐφ' ὅσον $V_1 = V_2 = V = 50\, m/s$ καί $S_1 = S_2 = S$ καί $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, ἀπό τήν ἐξίσωση (1) ἔχουμε

$$m_{s_1} = m_{s_2} = \rho_1 V_1 S_1 = 10^3 \frac{kg}{m^3} \times 50\ m/s \times \frac{\pi \times 1^2 m^2/s^2}{4}$$

$$m_{s_1} = m_{s_2} = 3.93 \times 10^4 kg/s$$

β. Προσδιορισμός τῶν συνιστωσῶν τῆς δύναμης πού ἀσκεῖται στό σημεῖο Α.

Σάν σύστημα θά θεωρήσουμε τόν όγκο πού ἀποτελεῖται ἀπό τά ἐσωτερικά τοιχώματα τῆς διακλάδωσης καί τίς ἐπιφάνειες εἰσόδου-ἐξόδου S_1, S_2, S_3.

Στό σύστημα αὐτό θά ἐφαρμόσουμε τό ὁλοκληρωτικό θεώρημα τῆς ὁρμῆς (ἐξίσωση (2.21)).

Ἡ ροή μας εἶναι μόνιμη ἄρα ὁ ὅρος

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_R dm\vec{v}\right] = 0$$

Ἀγνοοῦμε τήν ἐπίδραση τῆς συνεκτικότητας καί ἔτσι ἔχουμε

$$\int_S (-\vec{n}_2 \tau dS) = 0 \qquad (10)$$

Οἱ δυνάμεις βαρύτητας ἀμελοῦνται, ἄρα

$$\vec{G} = 0$$

Στό σύστημα πού εἶναι διατεταγμένο κατά τήν ἐπίπεδη ἐπιφάνεια (Ε), ἡ ἐφαρμογή τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ θεωρήματος τῆς ὁρμῆς (ἐξίσωση (2.21)) μαζί μέ τίς σχέσεις (9), (10) καί (11) τοῦ προβλήματος δίνει

$$m_{s_3}\vec{v}_3 - (m_{s_1}\vec{v}_1 + m_{s_2}\vec{v}_2) = \int_S (-\vec{n}_1 p dS)$$

Ἐάν χωρίσουμε τή δύναμη πίεσης σέ δυό τμήματα, ὅπως κάναμε καί στήν σελίδα (2.10) τῶν σημειώσεων: Τίς ἐπιφάνειες S_1,S_2 καί S_3 ἀπό τίς ὁποῖες εἰσέρχεται καί ἐξέρχεται τό ρευστό καί τίς ἐπιφάνειες S_W ὅπου τό στερεό βρέχεται ἀπό τό ρευστό, τότε

$$m_{s_3}\vec{v}_3 - (m_{s_1}\vec{v}_1 + m_{s_2}\vec{v}_2) = \int_{S_W} -\vec{n}_1 (p_W - p_{atm}) dS_W + \int_{S_1} -\vec{n}_1 (p_1 - p_{atm}) dS_1$$

$$+ \int_{S_2} -\vec{n}_1 (p_2 - p_{atm}) dS_2 + \int_{S_3} -\vec{n}_1 (p_3 - p_{atm})\, dS_3$$

'Η δύναμη πού άσκεῖ τό <u>στήριγμα στό ρευστό</u> εἶναι

$$\vec{F}_A = \int_{S_W} -\vec{n}_1 (p_W - p_{atm}) dS_W$$

'Επομένως ἡ ἀντίδραση πού ζητᾶμε εἶναι ἡ ἀντίθετή της.
'Εφ'ὅσον $p_3 = p_{atm}$, ὁ τελευταῖος ὅρος τῆς παραπάνω ἐξίσωσης εἶναι μηδέν καί ἐπομένως, γιά τό σύστημα συντεταγμένων τοῦ σχήματος (1)

$$\vec{F}_A = m_{s_3}\vec{V}_3 - (m_{s_1}\vec{V}_1 + m_{s_2}\vec{V}_2) + (p_1 - p_{atm})S_1\vec{I}_2 + (p_2 - p_{atm})S_2\vec{I}_2 \qquad (12)$$

'Η γωνία μεταξύ τῆς ταχύτητας V_3 καί τοῦ ἄξονα x δίδεται σύμφωνα μέ τό σχῆμα (1) ὡς ἑξῆς

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-5d}{20d}\right) = -14^o \qquad\qquad \alpha = -14^o$$

'Η ὁλική παροχή m_{s_3} δίδεται ὡς ἑξῆς:

$$m_{s_3} = \rho_3 V_3 S_3 = \rho S V_3 = 10^3 \ \frac{kg}{m^3} \times 100\,\frac{m}{s} \times \frac{\pi}{4}\times 1^2 m^2 =$$

$$= 7.85\times 10^4\,\frac{kg}{s} \qquad\qquad m_{s_3} = 7.85\times 10^4\,\frac{kg}{s}$$

Σύμφωνα μέ τό σχῆμα ἔχουμε

$$\vec{V}_1 = -\vec{I}_2 V_1 = -\vec{I}_2 50 \text{ m/s}$$
$$\vec{V}_2 = -\vec{I}_2 V_2 = -\vec{I}_2 50 \text{ m/s}$$
$$\vec{V}_3 = V_3(\vec{I}_1 \cos a + \vec{I}_2 \sin a) = (97.03\vec{I}_1 - 24.19\vec{I}_2)\,\frac{m}{s}$$

Προβάλλουμε τή σχέση (12) στούς δύο στούς δύο ἄξονες (x) καί (y) τοῦ σχήματος (1) καί ἔχουμε, χρησιμοποιώντας τίς ἐκφράσεις πού γράψαμε παραπάνω:

α) προβολή στόν ἄξονα τῶν (x)

$$F_{A_x} = \vec{I}_1\cdot\vec{F}_A = m_{s_3}\,\vec{I}_1\cdot\vec{V}_3 - (m_{s_1}\vec{V}_1\cdot\vec{I}_1 + m_{s_2}\vec{V}_2\cdot\vec{I}_1) + (p_1 - p_{atm})S\,\vec{I}_2\cdot\vec{I}_1 +$$

$$+ (p_2 - p_{atm})S\,\vec{I}_2\cdot\vec{I}_1 = m_{s_3}\vec{V}_3\cdot\vec{I}_1 = 7.85\times 10^4\,\frac{kg}{s}\times 97.03\frac{m}{s} = 7.62\times 10^6 Nt$$

$$F_{A_x} = 7.62\times 10^6 Nt$$

(β) προβολή στόν άξονα τών (y)

$$F_{A_y} = \vec{I}_2\cdot\vec{F}_A = m_{s_3}\ \vec{I}_2\cdot\vec{V}_3-(m_{s_1}\vec{V}_1\cdot\vec{I}_2+ m_{s_2}\vec{V}_2\cdot\vec{I}_2)+(p_1- p_{atm})S\ \vec{I}_2\cdot\vec{I}_2+$$

$$+(p_2- p_{atm})S\ \vec{I}_2\cdot\vec{I}_2 = m_{s_3}V_3\sin a +(m_{s_1}V_1+ m_{s_2}V_2)+$$

$$+(p_1- p_{atm})S-(p_2- p_{atm})S \qquad (13)$$

Γιά νά υπολογίσουμε τήν F_{A_y} άπό τήν έξίσωση (13) χρειάζεται νά ξέρουμε τίς στατικές πιέσεις (p_1-p_{atm}) καί (p_3-p_{atm}). Γιά νά βροῦμε αὐτές τίς πιέσεις έφαρμόζουμε τήν έξίσωση διατήρησης τῆς ένεργείας (έξίσωση 2.20c). Γιά μόνιμη ροή χωρίς τριβές ($\vec{f}= 0$), ή (2.20c) γράφεται:

$$d^{-}\left(\frac{p_t}{\rho}\right) = 0 \qquad (15)$$

καί έπομένως

$$p_t = p + \rho\frac{V^2}{2} + \rho gz = \text{σταθερό έπάνω σέ μιά γραμμή ροῆς.} \qquad (16)$$

Στήν άσκησή μας οί δυνάμεις βαρύτητας δέν λαμβάνονται ύπ'όψη καί ή (16) δίνει

$$p_t = p+ \rho\frac{V^2}{2} = \text{σταθερό έπάνω σέ μιά γραμμή ροῆς.} \qquad (17)$$

Έφαρμόζουμε τήν σχέση (17) μεταξύ τών θέσεων 2 καί 3 καί 1 καί 3 όπότε λαμβάνουμε

$$p_{t_1} = p_{t_3} \qquad (18)$$

$$p_{t_2} = p_{t_3} \qquad (19)$$

ή

$$(p_1- p_{atm})+ \frac{1}{2}\rho V_1^{\,2}= (p_3- p_{atm})+ \frac{1}{2}\rho V_3^{\,2} \qquad (20)$$

$$(p_2- p_{atm})+ \frac{1}{2}\rho V_2^{\,2} =(p_3- p_{atm})+ \frac{1}{2}\rho V_3^{\,2} \qquad (21)$$

Δίνεται ὅτι

$$V_1 = V_2 \qquad (22)$$

Χρησιμοποιώντας τήν (22) οἱ (20) καί (21) γίνονται

$$(p_1 - p_{atm}) = (p_2 - p_{atm}) = (p_3 - p_{atm}) + \frac{1}{2}\rho(V_3^2 - V_1^2) \qquad (23)$$

Ἐφ᾽ ὅσον $p_3 = p_{atm}$ ἔχουμε τελικά ὅτι

$$p_1 - p_{atm} = p_2 - p_{atm} = \frac{1}{2}\rho(V_3^2 - V_1^2) = \qquad (24)$$

$$= \frac{1}{2} \times IO^3 \left(\frac{kg}{m^3}\right) \times [IOO^2 - 50^2] \left(\frac{m}{s}\right)^2 =$$

$$= 3.75 \times IO^6 \left(\frac{kg}{ms^2} = \frac{Nt}{m^2}\right)$$

$$p_1 - p_{atm} = p_2 - p_{atm} = 3.75 \times IO^6 \ \frac{Nt}{m^2}$$

Ἐπομένως ἀπό τήν ἐξίσωση (13) μέ τή βοήθεια τῆς (24) ἔχουμε

$$F_{A_y} = m_{s_3} V_3 \sin a + (V_1 m_{s_1} + V_2 m_{s_2}) + 2(p_1 - p_{atm})S$$

$$= 7.85 \times IO^4 \ \frac{kg}{s} \times IOO \ \frac{m}{s} \times \sin(-14^o) + (50 \ \frac{m}{s} \times 3.925 \ IO^4 kg/s)$$

$$+ 2 \times 3.75 \times IO^6 \ \frac{Nt}{m^2} \times \frac{\pi 1^2 m^2}{4} = +5.95 \times IO^6 Nt$$

$$F_{A_y} = +5.95 \times IO^6 Nt$$

Ἡ δύναμη πού προσδιορίστηκε εἶναι ἡ ἀσκούμενη ἀπό τό στήριγμα στό ρευστό. Ἡ δύναμη πού ἀσκεῖ τό ρευστό στό στήριγμα εἶναι ἡ ἀντίθετή της δηλ. ἡ $\vec{F} = -7.62 \times IO^6 \vec{i}_1 + 5.95 \times IO^6 \vec{i}_2$

$$\vec{F} = (-7.62 \ IO^6 \vec{i}_1 + 5.95 \times IO^6 \vec{i}_2) Nt$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ Νο 2

Ένα δοχεῖο (Α), ὅπως παρουσιάζεται στό σχῆμα(2.1) συνδέεται μέ τόν τροφοδοτικό σωλῆνα (Β) μέ τή βοήθεια ἐλαστικοῦ συνδέσμου πού δέν μεταφέρει δυνάμεις καί ροπές. Ἡ μανομετρική ὁλική πίεση μέσα στό δοχεῖο (Α) εἶναι $2.8 \times 10^5 \frac{Nt}{m^2}$. Κάθετα στόν ἄξονα I-I τοῦ σχήματος(2.1) τοποθετοῦμε δύο ὅμοια συστήματα σωλήνων σέ σχῆμα γωνίας, ὅπως τά περιγράφει τό σχῆμα. Ἡ ἐσωτερική διάμετρος τῶν σωλήνων εἶναι $d_C = 0.006$ m. Οἱ διατάξεις αὐτές φέρουν στίς ἐξόδους των ἀκροφύσια (D) τελικῆς ἐσωτερικῆς διαμέτρου ἐξόδου $d_D = 0.0045$ m, ἀπό τά ὁποῖα ρέει τό νερό πού περιέχει τό δοχεῖο ($\rho = 10^3 kg/m^3$) στήν ἀτμόσφαιρα.
Οἱ συνολικές ἀπώλειες τριβῆς μέσα στό σύστημα σωλήνων καί στά ἀκροφύσια εἶναι ἴσες πρός τό μισό τῆς δυναμικῆς πίεσης τοῦ νεροῦ μέσα στό σύστημα (C) (ἀντίστοιχη διάμετρος d_C).

Νά προσδιοριστοῦν:

(α) Ἡ παροχή τοῦ νεροῦ πού ρέει ἀπό τά ἀκροφύσια (D) στήν ἀτμόσφαιρα

(β) Ἡ δύναμη καί ἡ ροπή, κατά μέγεθος καί διεύθυνση πού χρειάζεται γιά νά στηρίξουμε τό σύστημα.

Οἱ τριβές μέσα στό σωλῆνα (Β) καί στό δοχεῖο (Α) θεωροῦνται ἀμελητέες. Τέλος ἡ στατική πίεση στήν ἔξοδο τῶν ἀκροφυσίων νά ληφθῆ ἴση πρός τήν ἀτμοσφαιρική.

ΛΥΣΗ

Οἱ ἴδιες γενικές παρατηρήσεις πού κάναμε γιά τό πρῶτο παράδειγμα ὅσον ἀφορᾶ τήν ἀτμοσφαιρική πίεση ἰσχύουν καί ἐδῶ.

Γιά νά λύσουμε τό πρόβλημά μας θ'ἀκολουθήσουμε μιά γραμμή ροῆς πού ἀρχίζει στήν εἴσοδο τῆς διάταξης (C), ὅπου ξέρουμε ὅτι ἡ ὁλική μανομετρική πίεση εἶναι $P_{t_A} - P_{atm} = 2.8 \times 10^5 \frac{Nt}{m^2}$. Στή γραμμή αὐτή ροῆς, θά ἐφαρμόσουμε τό θεώρημα τῆς ἐνεργείας καί τήν ἐξίσωση τῆς συνέχειας. Ἐφ'ὅσον σέ κάθε διατομή θεωροῦμε ὅτι ἡ διανομή τοῦ κάθε μεγέθους εἶναι ὁμοιόμορφη, οὐσιαστικά ὁ ὑπολογισμός μας εἶναι μονοδιάστατος. Ἀπό τήν ἐξίσωση ἐνεργείας γιά μόνιμη ἀσυμπίεστη ροή (ἐξίσωση (2.20c)) ἔχουμε ὁλοκληρώνοντας:

$$P_{t_A} = P_{t_D} + \frac{\rho V_C^2}{4} \qquad (1)$$

ἐφ'ὅσον

$$P_{t_D} = P_D + \frac{1}{2} \rho V_D^2$$

ὅπου ἀπό τά δεδομένα $P_D = P_{atm}$, ἔχουμε:

$$P_{t_A} - P_{atm} = \frac{1}{2} \rho V_D^2 + \frac{1}{4} \rho V_C^2 = 2.8 \times 10^5 \frac{Nt}{m^2} \qquad (2)$$

Ἐφαρμόζουμε τώρα τήν ἐξίσωση συνεχείας:

(1) ἀπό τό (C) στό (D) (βλέπε σχῆμα (2))

$$\rho V_C A_C = \rho V_D A_D$$

ὁπότε

$$V_C = V_D \frac{d_D^2}{d_C^2} = V_D \frac{0.0045^2 m^2}{0.006^2 m^2} = 0.5625 V_D \qquad (3)$$

(2) ἀπό τό (A) στό (D)

$$\rho V_A A_A = 2\rho V_D A_D$$

ὁπότε

$$V_A = V_D\, 2\, \frac{d_D^{\,2}}{d_A^{\,2}} = V_D \times 2 \times \frac{0.0045^2 m^2}{0.05^2 m^2} = 0.0162 V_D \qquad (4)$$

(3) ἀπό τό (B) στό (D)

$$\rho V_B A_B = 2\rho V_D A_D$$

ὁπότε

$$V_B = 2V_D \frac{d_D^{\,2}}{d_B^{\,2}} = V_D \times 2 \times \frac{0.0045^2 m^2}{0.006^2 m^2} = 1.125 V_D \qquad (5)$$

Συνδυάζοντας τήν ἐξίσωση (2) μέ τήν (3) ἔχουμε

$$V_D^{\,2} + \frac{1}{2} \times (0.5625 \times V_D)^2 = \frac{2 \times 2.8 \times 10^5}{10^3 kg/m^3} \frac{Nt}{m^2} = 5.6 \times 10^2 \frac{m^2}{s^2}$$

ἀπό ὅπου

$V_D = 21.99$ m/s $\qquad V_D = 21.99 m/s$

Στή συνέχεια, ἀπό τήν ἐξίσωση (3)

$V_C = 0.5625 V_D = 0.5625 \times 21.99 m/s = 12.37 m/s$ $\qquad V_C = 12.37 m/s$

καί ἀπό τήν ἐξίσωση (4)

$V_A = 0.0162 V_D = 0.0162 \times 21.99 m/s = 0.356 m/s$ $\qquad V_A = 0.356 m/s$

Τέλος ἀπό τήν ἐξίσωση (5)

$V_B = 1.125 V_D = 24.74 m/s$ $\qquad V_B = 24.74 m/s$

Ἔπειτα ἀπό τούς ὑπολογισμούς αὐτούς εἶναι εὔκολο νά ὑπολογίσουμε τήν παροχή m_{s_D}, ὅπου:

$m_{s_D} = \rho A_D V_D = 10^3 kg/m^3 \cdot \frac{\pi}{4}\, 0.0045^2 m^2 \times 21.99 m/s = 0.34974 kg/s$ $\qquad m_{s_D} = 0.34974 kg/s$

Ἡ ὁλική παροχή εἶναι:

$$m_s = m_{s_B} = 2m_{s_D} = 2\times 0.34974 kg/s = 0.69947 kg/s$$

$m_s = 0.69947 kg/s$

Γιά νά ὑπολογίσουμε τίς δυνάμεις καί ροπές πού ζητᾶμε θά πρέπει πρῶτα νά βροῦμε τίς στατικές πιέσεις.
Ἔχουμε ἀπό τά δεδομένα ὅτι:

$$P_D - P_{atm} = 0$$

Ἐπίσης ἐφ'ὅσον οἱ τριβές εἶναι ἀμελητέες στόν ἀγωγό (B) καί στήν εἴσοδο (A), ἔχουμε:

$$P_{t_B} - P_{atm} = P_{t_A} - P_{atm} = 2.8\times IO^5 \frac{Nt}{m^2}$$

Ἔτσι:

$$P_{t_B} - P_{atm} = P_B - P_{atm} + \frac{1}{2}\rho V_B^2 = 2.8\times IO^5 \frac{Nt}{m^2}$$

Ἀπό τήν τελευταία ἐξίσωση ἔχουμε:

$$P_B - P_{atm} = 2.8\times IO^5 \frac{Nt}{m^2} - \frac{1}{2}\rho V_B^2 =$$

$$= 2.8\times IO^5 \frac{Nt}{m^2} - \frac{1}{2}\times IO^3 kg/m^3 \times (24.74 m/s)^2 =$$

$$= -0.26034\times IO^5 \frac{Nt}{m^2}$$

$P_B - P_{atm} = -0.26034\times IO^5 \frac{Nt}{m^2}$

Ἐφαρμόζουμε τώρα τό ὁλοκληρωτικό θεώρημα τῆς ὁρμῆς γιά νά βροῦμε τίς δυνάμεις. Τό θεώρημα αὐτό ἐφαρμόζεται μέ τή μορφή τῆς σχέσης (2.40) γιά μόνιμη ροή. Ἐφ'ὅσον στίς ἐξεταζόμενες διατομές ἀπό ὅπου εἰσέρχεται καί ἐξέρχεται τό ρευστό, ἡ κατανομή τῶν διαφόρων μεγεθῶν εἶναι ὁμοιόμορφη, τά ὁλοκληρώματα πού περιέχουν τίς τάσεις τριβῶν εἶναι μηδέν.

Έτσι έχουμε:

$$\vec{F}_W = \int_{(S_1)} dm_{s_1}\vec{V}_1 - \int_{(S_2)} dm_{s_2}\vec{V}_2 + \int_{(S_1)}(-\vec{n}_1 p_1 dS_1) + \int_{(S_2)}(-\vec{n}_1 p_2 dS_2) \qquad (6)$$

Λαμβάνοντας τήν προβολή κατά τόν άξονα I-I (μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{j}$), έχουμε, χρησιμοποιώντας τά μοναδιαία διανύσματα τοῦ σχήματος (2.1)

$$F_{I-I} = \vec{j}\cdot\vec{F}_W = \vec{j}\cdot\vec{j}\ V_B\ m_{s_B} - 2\vec{j}\cdot\vec{I}_2 V_D\ m_{s_D}$$

$$+ \vec{j}\cdot(-\vec{I}_1)(p_B - p_{atm})A_B + 2\vec{j}\cdot(-\vec{I}_2)(p_D - p_{atm})S_D$$

Έφ'ὅσον τό ἐσωτερικό γινόμενο $\vec{j}\cdot\vec{I}_2 = \sin(-30^o) = -\sin 30^o$ ἔχουμε

$$F_{I-I} = m_{s_B}\ V_B + 2m_{s_D}V_D \sin\ 30^o + (p_B - p_{atm})A_B =$$

$$= 0.69947\text{kg/s}\times 24.74\text{m/s} + 2\times 0.34974\ \text{kg/s}\times 21.99\text{m/s}\times 0.5$$

$$- 0.2603\times 10^5\ \frac{Nt}{m^2}\times 2\times\frac{\pi}{4}\times 0.0045^2 m^2 = 24.168Nt \qquad F_{I-I} = 24.168Nt$$

Τέλος ἐφαρμόζουμε τό ἀντίστοιχο θεώρημα τῆς ροπῆς τῆς ὁρμῆς (ἐξίσωση (2.46)) γιά μόνιμη ροή.
Τά ὁλοκληρώματα πού περιέχουν τίς τάσεις τριβῶν εἶναι πάλι μηδέν γιά τόν ἴδιο λόγο, ὅπως καί γιά τήν περίπτωση τοῦ θεωρήματος τῆς ὁρμῆς πού ἐξετάσαμε. Ἔτσι, ἄν O εἶναι κάποιο σημεῖο τοῦ ἄξονα I-I καί $\vec{r}$ εἶναι ἡ διανυσματική ἀπόσταση τυχόντος σημείου ἀπό τό O, τότε

$$M_{I-I} = \vec{j}\cdot\vec{M}_O = \vec{j}\cdot\int_{(S_1)}(\vec{r}_1\times dm_{s_1}\vec{V}_1) - \vec{j}\int_{(S_2)}(\vec{r}_2\times dm_{s_2}\vec{V}_2) +$$

$$+ \vec{j}\cdot\int_{(S_1)}\vec{r}_1\times(-\vec{n}_1 p_1 dS_1) + \vec{j}\cdot\int_{(S_2)}\vec{r}_2\times(-\vec{n}_1 p_2 dS_2)$$

καί σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμε στήν ἀρχή τῆς λύσης:

$$M_{I-I}=\vec{j}\cdot\int_{(S_B)}(\vec{r}_B\times dm_{s_B}\vec{V}_B)-2\vec{j}\cdot\int_{(S_D)}(\vec{r}_D\times dm_{s_D}\vec{V}_D)+\vec{j}\cdot\int_{(S_B)}\vec{r}_B\times[-\vec{i}_1(p_B-p_{atm})]dS_B$$
$$+2\vec{j}\cdot\int_{(S_D)}\vec{r}_D\times[-\vec{i}_2(p_D-p_{atm})]dS_D \qquad (7)$$

Στήν περίπτωσή μας

$$\vec{r}_1\times\vec{V}_1=\vec{r}_B\times\vec{V}_B=0$$

$$\vec{r}_1\times(-\vec{n}_1)=\vec{r}_B\times(-\vec{i}_1)=\vec{r}_B\times\vec{j}=0$$

Ἐπομένως τό πρῶτο καί τό τρίτο ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέρους τῆς ἐξίσωσης (7) δέν συνεισφέρουν στή ροπή. Τό τελευταῖο ὁλοκλήρωμα εἶναι μηδέν διότι $p_D-p_{atm}=0$, καί ἐπομένως:

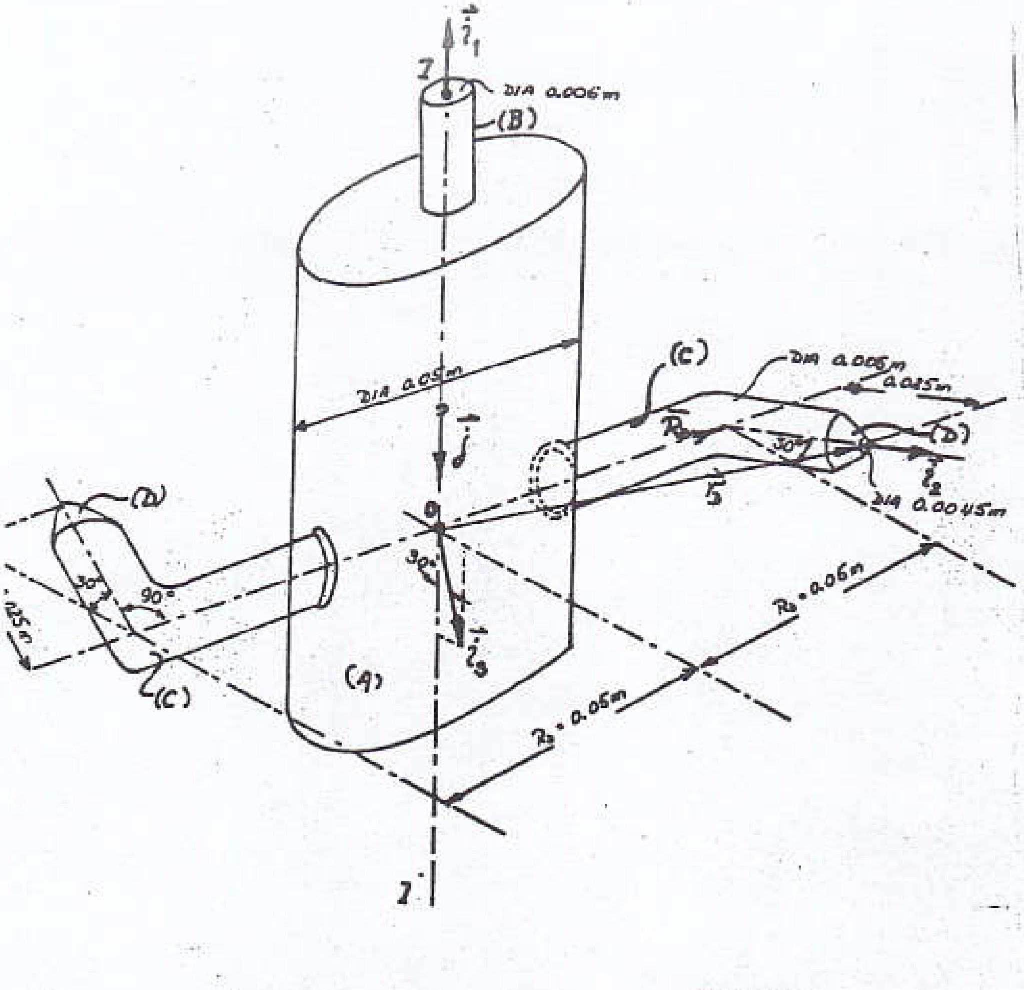
$$M_{I-I}=-2\vec{j}\cdot\int_{(S_D)}(\vec{r}_D\times dm_{s_D}\vec{V}_D)=-2\vec{j}\cdot\vec{r}_D\times V_D\,m_{s_D}$$
$$-2m_{s_D}V_D\,\vec{j}\cdot\vec{r}_D\times\vec{i}_2$$

Ἔχουμε ἀκόμα (βλέπε σχῆμα (2.1)) ὅτι

$$\vec{j}\cdot\vec{r}_D\times\vec{i}_2=\vec{j}\cdot\vec{i}_3R_D=R_D\cos30^o$$

καί ἐπομένως:

$M_{I-I}=-2\times0.34974kg/s\times21.99m/s\times0.05m\times\cos30^o=-0.66604Ntm$ $\qquad M_{I-I}=-0.6604Ntm$



$d_B = 0.006m$
$d_A = 0.05m$
$d_C = 0.006m$
$d_D = 0.0045m$

Σχημα 2.1 Διάταξη δοχείου μέ δύο ακροφύσια έκφυ-
γής νερού πρός τήν ατμόσφαιρα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ Νο 3

Στό σχῆμα(3.1)ἕνα δοχεῖο Β συνδέεται μέ ἕνα ἀγωγό Α,μέ τή βοήθεια ἑνός ἐλαστικο σύνδεσμου πού δέν μπορεῖ νά μεταφέρει δυνάμεις καί ροπές. Στή διατομή 1-1 ὑπάρχ ὁμοιόμορφη διανομή τῆς ταχύτητας καί τῆς στατικῆς πίεσης. Τό ρευστό εἶναι μή συνεκτικό μέ σταθερή πυκνότητα $\rho = 1.03\ 10^3 kg/m^3$. Τό μῆκος L τοῦ δοχείου Β εἶναι πολύ μεγάλο σέ σχέση μέ τό πλάτος του. Στή διατομή 2-2 σχηματίζεται ἕνα τετράγωνο ἀκροφύσιο ἀπ'ὅπου τό ρευστό βγαίνει στήν ἀτμόσφαιρα μέ τή μορφή δέσμης. Στή θέση αὐτή ἡ ταχύτητα τοῦ ρευστοῦ εἶναι ὁμοιόμορφη καί ἴση μέ V_2 = 15m/s. Ἡ στατική πίεση στή δέσμη εἶναι παντοῦ ἴση μέ τήν ἀτμοσφαιρική. Ἄν ἀμελήσουμε τήν βαρύτητα τότε ὁ ἄξονας τῆς δέσμης εἶναι παράλληλος μέ τόν ἄξονα τοῦ δοχείου. Ἀνάμεσα σέ κατάλληλα διαμορφωμένες παράλληλες ὁδηγητικές πλάκες Γ, ὑπάρχει ἕνα στερεό σῶμα Δ. Τό σύστημα τῶν δύο παραλλήλων πλακῶν καί τοῦ σώματος Δ εἶναι σταθερά στηριγμένο μέ τή βοήθεια ἑνός βραχίονα στή θέση Ε.

Προσδιορίστε:

α) Τή δύναμη πού πρέπει νά ἀσκηθῆ γιά νά μείνει τό δοχεῖο Β ἀκίνητο.

β) Τήν ἀντίδραση (φορά, μέγεθος) στή θέση στήριξης Ε πού προέρχεται ἀπό τό σύστημα πλακῶν καί σώματος Δ, σάν συνάρτηση τῆς γωνίας α, ἄν ἀμελήσουμε τή συνεκτικότητα τοῦ ρευστοῦ. (Στίς διατομές 3-3, ἡ ταχύτητα εἶναι ὁμοιόμορφη καί σχηματίζει γωνία α μέ τόν ἄξονα).

γ) Τήν ἀντίδραση (φορά, μέγεθος) στή θέση στήριξης Ε πού προέρχεται ἀπό τό σύστημα πλακῶν καί σώματος Δ ἄν ἡ ταχύτητα στίς διατομές 3-3 εἶναι ἴση μέ τό 90% ἀπό αὐτή τῆς προηγουμένης ἐρώτησης, ἐπειδή ὑπάρχουν τριβές στό σῶμα Δ. Οἱ ταχύτητες V, θεωροῦνται πάλι ὁμοιόμορφες καί ἡ συνεκτικότητα θεωρεῖται ἀμελητέα γιά τή ροή μέσα ἀπό τό δοχεῖο.

Δίδεται d = 0.1m

ΛΥΣΗ

α) Γιά άδιαβατική ροή άσυμπίεστου ρευστοῦ ἔχουμε ἀπό τήν ἐξίσωση (2.20c), πάνω σέ μιά γραμμή ροῆς.

$$d^{-}\left(\frac{p_t}{\rho}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{V^2}{2}\right)dt + \vec{V}\cdot\vec{f}dt$$

Ἐπειδή ἡ ροή εἶναι άτριβής καί μόνιμη καταλήγουμε πώς:

$$d^{-}\left(\frac{p_t}{\rho}\right) = 0 \quad \text{δηλ.} \quad \frac{p_t}{\rho} = ct$$

καί ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ p_t:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz = ct$$

Ἐφ'ὅσον ἀμελεῖται ἡ βαρύτητα:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 = p_t/\rho = ct \qquad (1)$$

πάνω σέ μιά γραμμή ροῆς.

Στίς διατομές (1-1) καί (2-2) ἔχουμε σταθερή ταχύτητα καί στατική πίεση. Ἄρα ἡ κατάσταση τοῦ ρευστοῦ στή διατομή (1-1) συνδέεται μέ τή κατάσταση τοῦ ρευστοῦ στή διατομή (2-2) μέ τή σχέση:

$$p_{t_1} = p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1{}^2 = p_{t_2} = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2{}^2 \qquad (2)$$

Ἐφαρμόζοντας τή σχέση (1) στή διατομή (2-2):

$$p_{t_2} = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2{}^2$$

$$p_2 = p_{atm}$$
$$\rho = 1.03\times10^3 kg/m^3$$
$$V_2 = 15 m/s$$
$$(p_{t_2} - p_{atm}) = 1.16\times10^5 N/m^2$$

$$(p_{t_2} - p_2) = \frac{1}{2}\rho V_2{}^2 \text{ καί } (p_{t_2} - p_{atm}) = \frac{1}{2}\times1.03\times10^3 kg/m^3\times15^2\times m^2/s^2 =$$

$$= 1.16\times10^5 N/m^2$$

Ἡ ἐξίσωση τῆς συνέχειας γιά μιά κλειστή ἐπιφάνεια πού περικλείει κάποιο ὄγκο, πού μέσα του δέν ὑπάρχουν πηγές καί καταβόθρες, δίνει

$$\int_S \rho\vec{V}d\vec{S} = ct \qquad (3)$$

'Εφαρμόζοντας τήν (3) ἀνάμεσα στίς διατομές 1-1 καί 2-2 μέ βάση τήν ὑπόθεση τῆς ὁμοιόμορφης διανομῆς τῆς ταχύτητας καί τῆς σταθερῆς πυκνότητας παίρνουμε:

$$V_1S_1 = V_2S_2$$

ὁπότε παίρνοντας τίς διαστάσεις ἀπό τό σχῆμα:

$$V_1 = \frac{S_2}{S_1} \times V_2 = \frac{(2d)^2}{\pi \frac{d^2}{4}} \times 15m/s = 16/\pi \times 15m/s = 76.39m/s \qquad V_1 = 76.39m/s$$

'Εφαρμόζοντας τήν ἐξίσωση (2) ἀνάμεσα στίς διατομές 1-1 καί 2-2 ἀφαιρώντας καί ἀπό τά δύο μέλη τήν p_{atm}:

$$(p_1 - p_{atm}) + \rho\frac{V_1^2}{2} = (p_{t_1} - p_{atm}) = (p_{t_2} - p_{atm})$$

$$p_1 - p_{atm} = (p_{t_2} - p_{atm}) - \frac{1}{2}\rho V_1^2 = 1.16\times 10^5 \times N/m^2 - \frac{1}{2}\times 1.03\times 10^3 kg/m^3 \times 76.39m/s = -28.9\times 10^6 N/m^2$$

$$(p_1 - p_{atm}) = -28.9\times 10^6 N/m^2$$

'Εφαρμόζουμε τώρα τό θεώρημα τῆς ὁρμῆς ἀνάμεσα στίς διατομές 1-1 2-2. 'Από τή σχέση (2.40) ἔχουμε τήν ὁλοκληρωτική μορφή τῆς ἐξίσωσης τῆς διατήρησης τῆς ὁρμῆς γιά σταθερή ροή καί ἀμελώντας τήν βαρύτητα:

$$\vec{F}_W = \int dm_{s_1}\vec{V}_1 - \int dm_{s_2}\vec{V}_2 + \int(-\vec{n}_1)p_1 dS_1 + \int(-\vec{n}_1)p_2 dS_2 + \int(-\vec{n}_2)\tau_1 dS_1 + \int(-\vec{n}_2)\tau_2 dS_2$$

'Αμελώντας τήν τριβή καταλήγουμε:

$$\vec{F}_W = \int dm_{s_1}\vec{V}_1 - \int dm_{s_2}\vec{V}_2 + \int(-\vec{n}_1)p_1 dS_1 + \int(-\vec{n}_1)p_2 dS_2 \qquad (4)$$

καί προβάλλοντας στήν ἀξονική διεύθυνση, παίρνοντας ὑπ'ὄψη τήν ὁμοιόμορφη διανομή ταχύτητας (καί συνεπῶς καί στατικῆς πίεσης), καί τή σταθερή πυκνότητα.

$$(F_{W_{\alpha}})_{B} = m_s V_1 - m_s V_2 + (p_1 - p_{atm})S_1 - (p_2 - p_{atm})S_2 \qquad (4\alpha)$$

Προσδιορίζουμε τή παροχή μάζας μέ βάση τήν έξίσωση συνεχείας γιά $d = 0.10m$, όπότε:

$d = 0.10m$

$$m_s = \rho V_1 S_1 = 1.03\times10^3 kg/m^3 \times 76.39m/s \times \frac{\pi\times(0.1)^2}{4} m^2 = 617.96kg/s$$

$m_s = 617.96kg/s$

Μέ άντικατάσταση στήν (4α)

$$(F_{W_{\alpha}})_{B} = 617.96kg/s(76.39-15) + \frac{\pi\times(0.1)^2}{4} m^2 \times (-2.89\times10^6 N/m^2) =$$

$$=15238.56Nt$$

$(F_{W_{\alpha}})_{B} = 15.238.56$ +

(β) Στή συνέχεια έφαρμόζουμε τό θεώρημα τής όρμής (έξίσωση (4)) άνάμεσα στίς διατομές 2-2 καί 3-3. Παρατηρούμε άμέσως πώς κατά τήν κάθετη πρός τόν άξονα διεύθυνση (t) ή δύναμη πού έφαρμόζεται στά τοιχώματα τοῦ (Δ) είναι ίση πρός τό μηδέν $(F_{W_t})_{\Delta} = 0$.

Αύτό φαίνεται άπό τήν έφαρμογή τής έξίσωσης (4) μέ τίς παρατηρήσεις πού κάναμε γιά τήν άτμοσφαιρική πίεση στήν άρχή τής πρώτης άσκησης. Άντικαθιστώντας έχουμε:

$$(F_{W_t})_{\Delta} = -m_s(V_3\sin\alpha + V_3\sin(-\alpha)) - (p_3 - p_{atm})S_3\sin\alpha - (p_3 - p_{atm})S_3\sin(-\alpha) = 0$$

$(F_{W_t})_{\Delta} = 0$

Άς παρατηρήσουμε ότι στήν περίπτωσή μας, ούτως ή άλλως οί δύο τελευταίοι όροι είναι μηδέν, έπειδή άπό τά δεδομένα έχουμε ότι $p_3 = p_2 = p_{atm}$.

Έφαρμόζοντας τήν (4) γιά τήν άξονική διεύθυνση άνάμεσα στή διατομή (2-2) καί (3-3) έχουμε:

$$(F_{W_{\alpha}})_{\Delta} = m_s V_2 - m_s V_{\alpha_3} = m_s V_2 - m_s V_3\cos\alpha \qquad (5)$$

Στή διατομή (3-3) έχουμε όμοιόμορφη ταχύτητα καί στατική πίεση καί ή ροή άπό (2-2) ώς (3-3) είναι άτριβής, άρα ίσχύει:

$$p_3 + \frac{1}{2}\rho V_3^2 = p_{t_3} = p_{t_2} \qquad (6)$$

καί έχοντας ύπ'όψη πώς $p_3 = p_{atm}$ ή (6) δίνει:

$$V_3=\sqrt{(p_{t_2}-p_{atm})\,\frac{2}{\rho}}=\sqrt{I.I6\times IO^5 N/m^2\times\frac{2}{I.03\times IO^3}\,\frac{m^3}{kg}}=I5m/s \qquad V_3=I5m/s$$

Άρα μέ άντικατάσταση στήν (5)

$$(F_{W_{\alpha}})_{\Delta}=617.96\times I5\,(1-\cos\alpha)=9269.4\,(1-\cos\alpha)\,Nt \qquad (F_{W_{\alpha}})_{\Delta}=9269.4\,(1-\cos\alpha)\ Nt$$

Στή θέση στήριξης Ε έφαρμόζεται φυσικά ή δύναμη $(F_{W_{\alpha}})_{\Delta}$. Έπειδή ό άξονας έφαρμογής τής δύναμης δέν διέρχεται άπό τό Ε, έχουμε σάν άποτέλεσμα μιά ροπή πού άσκεῖται στό Ε καί πού προκύπτει έκφράζοντας τή σχέση ίσορροπίας τῶν ροπῶν γιά τή θέση αύτή. Έχουμε λοιπόν:

$$M_E=(F_{W_{\alpha}})_{\Delta}\cdot 5\cdot d=9269.4\times(1-\cos\alpha)\times 5\times 0.I=4634.7\,(1-\cos\alpha)\,Ntm \qquad M_E=4634.7\,(1-\cos\alpha)\,N$$

γ. Έφαρμόζοντας τό θεώρημα τής όρμής μέ τά νέα δεδομένα, έχουμε καί πάλι $(F_{W_t})_{\Delta}=0$. Γιά τήν άξονική διεύθυνση, έφαρμογή τής (4) άνάμεσα στή (2-2) καί (3-3), δίνει:

$$(F_{W_{\alpha}})_{\Delta}=617.96kg/m^3\times I5m/s-617.96kg/m^3\times I5m/s\times 0.90\cos\alpha=$$

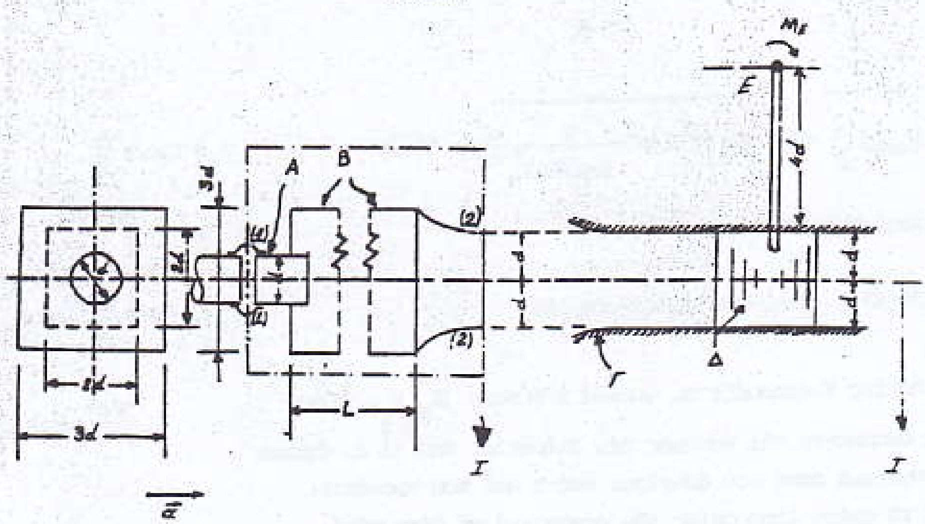
$$=9269.4\,(1-0.9\cos\alpha)\,Nt \qquad (F_{W_{\alpha}})_{\Delta}=9269.4\,(I-0.9\cos\alpha)\,Nt$$

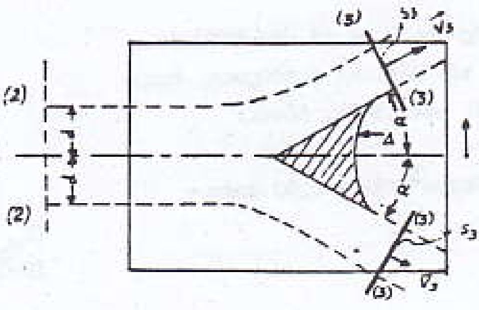
καί ή ροπή

$$M_E=4634.7\,(I-0.9\cos\alpha)\,Ntm \qquad M_E=4634.7\,(1-0.9\cos\alpha)\ Ntm$$

ΣΗΜ.: Οί έπιφάνειες S_3 στήν (γ) περίπτωση διαφέρουν άπό αύτές στήν (β) γιά νά ίκανοποιεῖται ή συνέχεια σύμφωνα μέ τίς ύποθέσεις μας.

Π3.6





Τομή Ι-Ι

Σχ. 3.1

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ Νο 4</u>

Τό σχῆμα (4.2) παρουσιάζει τήν περίπτωση ἐπίπεδης πτερύγωσης μέ ἄπειρο πλῆθος ἰσαπεχόντων πτερυγίων τῆς ἰδίας μορφῆς καί τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ (ἀτέρμων πτερύγωση). Ὁ ἀγωγός μέσα στόν ὁποῖο εἶναι τοποθετημένη ἡ πτερύγωση (βλέπε σχῆμα (4.1)) εἶναι συμμετρικός ὡς πρός τόν ἄξονα I-I. Ἡ ροή στίς θέσεις (1) καί (2) λαμβάνεται ὁμοιόμορφη. Ἡ ταχύτητα εἰσόδου στή θέση 1 εἶναι κάθετη στό μέτωπο τῆς πτερύγωσης (ἄξονας II-II). Ἡ πτερύγωση εἶναι σχεδιασμένη κατά τέτοιο τρόπο ὥστε ἡ ταχύτητα στή θέση (2) νά παρεκλίνει κατά 30^{o}. Θεωρώντας τό ρευστό ἀσυμπίεστο καί ἀμελώντας τίς τριβές ζητεῖται νά ὑπολογισθοῦν:

1. Οἱ συνιστῶσες κατά τούς ἄξονες I-I καί II-II τῆς δύναμης πού ἀσκεῖται πάνω σέ ἕνα πτερύγιο γιά τίς τρεῖς τιμές τοῦ ὕψους h_2 πού δίνονται στό σχῆμα (4.2).

2. Ἡ διαφορά στίς στατικές πιέσεις μεταξύ τῶν θέσεων (1) καί (2) γιά τίς τρεῖς τιμές τοῦ h_2.

3. Ἐάν ἡ πτερύγωση μέ ὅλα τά ὑπολογισμένα μεγέθη της θεωρηθῆ ἀντιπροσωπευτική τῆς μέσης κατάστασης πού ἐπικρατεῖ στό σχετικό σύστημα στή μέση ἀκτίνα μιᾶς ἀξονικῆς στροβιλομηχανῆς, νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἰσχύς πού μεταφέρεται ἀπό τό ρευστό στόν ἄξονα. Δίδεται ἡ ταχύτητα περιστροφῆς τῆς μηχανῆς $N = 300$ rpm καί ἡ μέση ἀκτίνα $R_m = 0.127m$.

4. Στό σχῆμα (4.3) παρουσιάζεται ἡ περίπτωση μιᾶς πτερύγωσης ὅμοιας μέ τήν προηγούμενη ὅπου ὅμως στή θέση 1 ἡ ὁμοιόμορφη ταχύτητα σχηματίζει γωνία 60^{o} μέ τόν ἄξονα II-II καί στή θέση 2 εἶναι κάθετη στόν ἴδιο ἄξονα.

Ζητεῖται νά ὑπολογισθοῦν στή νέα αὐτή περίπτωση τά μεγέθη τῶν τριῶν πρώτων ἐρωτημάτων.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:</u> Πολλά ἀπό τά δεδομένα τοῦ παραδείγματος δίνονται μαζί μέ τά σχήματα.

ΛΥΣΗ

1. Ἐπειδὴ ἡ ροή στίς θέσεις (1) καί (2) εἶναι ὁμοιόμορφη καί οἱ τριβές παραλείπονται, οἱ συνιστῶσες τῆς δύναμης κατά τούς ἄξονες I-I καί II-II δίνονται ἀντίστοιχα (σχέσεις (2.81α)) καί (2.82α)).

$$F_{\alpha} = m_s(V_{\alpha_1} - V_{\alpha_2}) + p_1S_1 - p_2S_2 = m_s(V_{\alpha_1} - V_{\alpha_2}) + p_1sh_1 - p_2sh_2 \quad (1)$$

$$F_u = m_s(V_{u_1} - V_{u_2}) \quad (2)$$

Ἐπίσης:

$$m_s = \rho S_1V_{\alpha_1} = \rho sh_1V_{\alpha_1} = \text{IOOOkg/m}^3\times 0.0798\text{m}\times 0.1524\text{m}\times 9.14\text{m/sec} =$$

$$= \text{III.20 kg/sec}$$

m_s= III.20kg/sec

Ἡ ταχύτητα V_{α_2} ὑπολογίζεται ἀπό τήν ἐξίσωση τῆς συνέχειας:

$$V_{\alpha_2} = \frac{m_s}{\rho sh_2} = \frac{\text{III.20kg/sec}}{\text{IOOOkg/m}^3\times 0.0798\text{m}\times h_2}$$

Θέτοντας τίς τρεῖς τιμές τοῦ h_2, ἔχουμε:

$(V_{\alpha_2})_{(h_2)_1}$ =IO.9 m/sec

$(V_{\alpha_2})_{(h_2)_2}$ = 9.14 m/sec

$(V_{\alpha_2})_{(h_2)_3}$ = 7.8 m/sec

$(V_{\alpha_2})_{(h_2)_1}$ = IO.9m/sec

$(V_{\alpha_2})_{(h_2)_2}$ = 9.14m/sec

$(V_{\alpha_2})_{(h_2)_3}$ = 7.8m/sec

Ἡ περιφερειακή συνιστῶσα V_{u_2} :

$$V_{u_2} = V_{\alpha_2}\times\tan 30^{o}$$

Ἄρα:

$(V_{u_2})_{(h_2)_1}$ = 6.3m/sec

$(V_{u_2})_{(h_2)_1}$ =6.3m/sec

$(V_{u_2})_{(h_2)_2} = 5.3$ m/sec

$(V_{u_2})_{(h_2)_2} = 5.3$m/sec

$(V_{u_2})_{(h_2)_3} = 4.5$ m/sec

$(V_{u_2})_{(h_2)_3} = 4.5$m/sec

'Η ταχύτητα V_2 δίδεται άπό τή σχέση:

$$V_2 = \frac{V_{a_2}}{\cos 30^o}$$

'Επομένως:

$(V_2)_{(h_2)_1} = 12.58$ m/sec

$(V_2)_{(h_2)_1} = 12.58$m/sec

$(V_2)_{(h_2)_2} = 10.51$ m/sec

$(V_2)_{(h_2)_2} = 10.51$m/sec

$(V_2)_{(h_2)_3} = 9.00$ m/sec

$(V_2)_{(h_2)_3} = 9.00$m/sec

'Επειδή έχουμε μόνιμη άσυμπίεστη ροή χωρίς τριβές, ή έξίσωση διατήρησης τής ένεργείας δίνει:

$$P_{t_1} = P_{t_2} = P_1 + \frac{\rho}{2} V_1^{\,2} = P_2 + \frac{\rho}{2} V_2^{\,2} \qquad (3)$$

'Επομένως ή στατική πίεση στή θέση (1), ύπολογίζεται ώς έξής:

$$P_1 = P_{t_1} - \frac{1}{2}\rho V_1^{\,2} = 1\times10^5 \mathrm{Nt/m^2} - \frac{1}{2}\times 1000\mathrm{kg/m^3}\times 9.14^2 \mathrm{m^2/sec^2} =$$
$$= 0.582\times10^5 \mathrm{Nt/m^2}$$

$P_1 = 0.582\times10^5 \mathrm{Nt/m^2}$

Καθ'όμοιο τρόπο ύπολογίζεται ή στατική πίεση στή θέση (2):

$$P_2 = P_{t_1} - \frac{1}{2}\rho V_2^{\,2} = 1\times10^5 \mathrm{Nt/m^2} - \frac{1}{2}\times 1000\mathrm{kg/m^3}\times V_2^{\,2}$$

"Αρα:

$(P_2)_{(h_2)_1} = 0.208\times10^5 \mathrm{Nt/m^2}$

$(P_2)_{(h_2)_1} = 0.208\times10^5$ $\mathrm{Nt/m^2}$

$(p_2)_{(h_2)_2} = 0.448\times 10^5 Nt/m^2$

$(p_2)_{(h_2)_2} = 0.448\times 10^5 Nt/m^2$

$(p_2)_{(h_2)_3} = 0.595\times 10^5 Nt/m^2$

$(p_2)_{(h_2)_3} = 0.595\times 10^5 Nt/m^2$

Βάσει τῶν ἀρχικῶν σχέσεων πού γράψαμε γιά τίς συνιστῶσες F_α καί F_u, βρίσκουμε ὅτι:

$(F_\alpha)_{(h_2)_1} = 301.74$ Nt

$(F_\alpha)_{(h_2)_1} = 301.74$Nt

$(F_\alpha)_{(h_2)_2} = 162.96$ Nt

$(F_\alpha)_{(h_2)_2} = 162.96$Nt

$(F_\alpha)_{(h_2)_3} = 12.60$ Nt

$(F_\alpha)_{(h_2)_3} = 12.60$Nt

$(F_u)_{(h_2)_1} = -700.56$Nt

$(F_u)_{(h_2)_1} = -700.56$Nt

$(F_u)_{(h_2)_2} = -589.36$Nt

$(F_u)_{(h_2)_2} = -589.36$Nt

$(F_u)_{(h_2)_3} = -500.40$Nt

$(F_u)_{(h_2)_3} = -500.40$Nt

Τό ἀρνητικό πρόσημο τῶν F_u δηλώνει ὅτι αὐτές ἔχουν ἀντίθετη φορά τοῦ μοναδιαίου διανύσματος $\vec{i}$ τοῦ σχήματος (4.2). Ὑπενθυμίζουμε ὅτι F_α, F_u εἶναι οἱ συνιστῶσες τῆς δύναμης πού ἀσκοῦνται ἀπό τό ρευστό στά τοιχώματα.

(2) Ἡ διαφορά στίς στατικές πιέσεις $p_2 - p_1$ ὑπολογίζεται γιά τίς τρεῖς τιμές τοῦ h_2 :

$(p_2 - p_1)_{(h_2)_1} = -0.374\times 10^5 Nt/m^2$

$(p_2 - p_1)_{(h_2)_1} = -0.374\times 10^5 Nt/m^2$

$(p_2 - p_1)_{(h_2)_2} = -0.134\times 10^5 Nt/m^2$

$(p_2 - p_1)_{(h_2)_2} = -0.134\times 10^5 Nt/m^2$

$(p_2 - p_1)_{(h_2)_3} = +0.013\times 10^5 Nt/m^2$

$(p_2 - p_1)_{(h_2)_3} = +0.013\times 10^5 Nt/m^2$

(3) Οὐσιαστικά θεωροῦμε τίς ἀπόλυτες ταχύτητες πού ὑπολογίσαμε στά προηγούμενα ἐρωτήματα, ἴσες πρός τίς σχετικές ταχύτητες τῆς θεωρούμενης περιστρεφόμενης πτερύγωσης.

Ἡ ροπή πού ἐξασκεῖται σέ κάθε πτερύγιο ἀπό τό ρευστό δίδεται ἀπό τή σχέση:

$$M_{\alpha} = F_u R_m \tag{4}$$

Ἡ περιφερειακή συνιστώσα F_u εἶναι αὐτή πού ὑπολογίσαμε προηγουμένως. Αὐτό συνάγεται ἀπό τά παρακάτω:

Ἡ περιφερειακή συνιστώσα τῆς δύναμης γιά τήν σταθερή πτερύγωση δίδεται ἀπό τή σχέση (2.81α) πού ξαναγράφουμε:

$$F_u = m_s (V_{u_1} - V_{u_2})$$

Ἡ ἀξονική ροπή M_{α} γιά τήν περιστρεφόμενη πτερύγωση δίδεται ἀπό τή σχέση (2.94α) πού ξαναγράφουμε:

$$M_{\alpha_R} = m_s \left[R_1 V_{u_1} - R_3 V_{u_2}\right]$$

Ἐφ' ὅσον στήν περίπτωσή μας $R_1 = R_2$ καί $M_{\alpha_R} = R.F_{u_R}$ ἔχουμε

$$F_{u_R} = \frac{M_{\alpha_R}}{R} = m_s (V_{u_1} - V_{u_2})$$

Ἑπομένως γιά τήν ἴδια παροχή m_s ἔχουμε στήν περίπτωσή μας:

$$F_{u_R} = F_u$$

Ὁ ἀριθμός τῶν πτερυγίων εἶναι:

$$z_B = \frac{2\pi R_m}{s} = \frac{2\pi \times 0.127m}{0.0798m} = IO \qquad z_B = IO$$

Ἡ γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς ω δίδεται ἀπό τή σχέση:

$$\omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{2\pi \times 300}{60} = 31.4 \text{ rad/sec} \qquad \omega = 31.4 \text{ rad/sec}$$

Ἡ ἰσχύς πού μεταφέρεται ἀπό τό ρευστό στόν ἄξονα δίδεται ἀπό τή σχέση:

$$P_u = \omega M_{\alpha} z_B = \omega F_u R_m z_B = 31.4 \text{rad/sec} \times F_u \text{Nt} \times R_m (\text{m}) \times IO \tag{5}$$

Θέτοντας τίς τιμές τῆς P_u στήν παραπάνω σχέση έχουμε:

$(P_u)_{(h_2)_1}$ = 27936 Watt

$(P_u)_{(h_2)_2}$ = 23502 Watt

$(P_u)_{(h_2)_3}$ = I9954 Watt

$(P_u)_{(h_2)_1}$ = 27936 Watt

$(P_u)_{(h_2)_2}$ = 23502 Watt

$(P_u)_{(h_2)_3}$ = I9954 Watt

(4) Ἡ ἀξονική ταχύτητα στή θέση 1 δίδεται ἀπό τή σχέση

$V_{a_1} = V_1 \times \cos 60^{o} = 9.14\,(m/sec) \times \cos 60^{o} = 4.57\,(m/sec)$

$V_{a_1} = 4.57 m/sec$

Ἡ παροχή μάζας εἶναι:

$m_s = \rho s h_1 V_{a_1} = 1000 kg/m^3 \times 0.0798 m \times 0.1524 m \times 4.57 m/sec =$

55.58 kg/sec

$m_s = 55.58 kg/sec$

Ἡ περιφερειακή συνιστώσα τῆς ταχύτητας στή θέση 1:

$V_{u_1} = V_1 \sin 60^{o} = 9.14 \times \sin 60^{o} = 7.92 m/sec$

Ἡ ἀξονική συνιστώσα τῆς ταχύτητας στή θέση 2 εἶναι:

$$V_{a_2} = \frac{m_s}{\rho s h_2} = \frac{55.58 kg/sec}{1000 kg/m^3 \times 0.0798\,(m) \times h_2\,(m)}$$

Ἐπομένως γιά τίς τρεῖς τιμές τοῦ h_2:

$(V_{a_2})_{(h_2)_1}$ = 5.48 m/sec

$(V_{a_2})_{(h_2)_2}$ = 4.57 m/sec

$(V_{a_2})_{(h_2)_3}$ = 3.92 m/sec

$(V_{a_2})_{(h_2)_1}$ = 5.48m/sec

$(V_{a_2})_{(h_2)_2}$ = 4.57m/sec

$(V_{a_2})_{(h_2)_3}$ = 3.92m/sec

Ἡ στατική πίεση στή θέση 1:

$$p_1 = p_{t_1} - \frac{\rho}{2} V_1^{\,2} = 1\times 10^5 Nt/m^2 - \frac{1000}{2} \times 9.14^2 Nt/m^2 = 0.582\times 10^5 Nt/m^2$$

$p_1 = 0.582\times 10^5 Nt/m^2$

Η στατική πίεση στή θέση 2:

$$p_2 = p_{t_1} - \frac{\rho}{2} V_2^{\,2} = 1\times 10^5 Nt/m^2 - \frac{1000}{2}\, kg/m^3 \times V_2^{\,2}$$

Γιά τίς τρεῖς τιμές τοῦ h_2:

$$(p_2)_{(h_2)_1} = 0.852\times 10^5 Nt/m^2$$

$$(p_2)_{(h_2)_2} = 0.891\times 10^5 Nt/m^2$$

$$(p_2)_{(h_2)_3} = 0.923\times 10^5 Nt/m^2$$

Οἱ συνιστῶσες F_α καί F_u ὑπολογίζονται πάλι σύμφωνα μέ τίς σχέσεις (1) καί (2):

$$F_u = m_s V_{u_1} = 55.58 kg/sec \times 7.92 m/sec = 440.19 Nt$$

$F_u = 440.19 Nt$

$$(F_\alpha)_{(h_2)_1} = -204.22 Nt$$

$(F_\alpha)_{(h_2)_1} = -204.22 Nt$

$$(F_\alpha)_{(h_2)_2} = -374.57 Nt$$

$(F_\alpha)_{(h_2)_2} = -374.57 Nt$

$$(F_\alpha)_{(h_2)_3} = -561.51 Nt$$

$(F_\alpha)_{(h_2)_3} = -561.51 Nt$

Τό ἀρνητικό πρόσημο στήν F_α σημαίνει ὅτι αὐτή ἔχει κατεύθυνση τήν ἀντίθετη τοῦ διανύσματος $\vec{j}$.

Ἡ διαφορά τῶν στατικῶν πιέσεων $p_2 - p_1$ ὑπολογίζεται σύμφωνα μέ τίς ἤδη ὑπολογισμένες τιμές τῶν p_1 καί p_2:

$$(p_2 - p_1)_{(h_2)_1} = 0.268\times 10^5 Nt/m^2$$

$(p_2 - p_1)_{(h_2)_1} = 0.268\times 10^5 Nt/m^2$

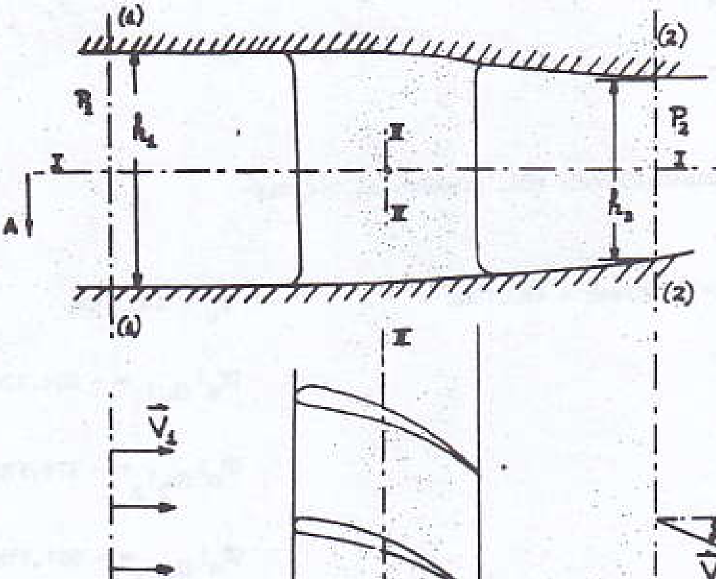
$$(p_2 - p_1)_{(h_2)_2} = 0.308\times 10^5 Nt/m^2$$

$(p_2 - p_1)_{(h_2)_2} = 0.308\times 10^5 Nt/m^2$

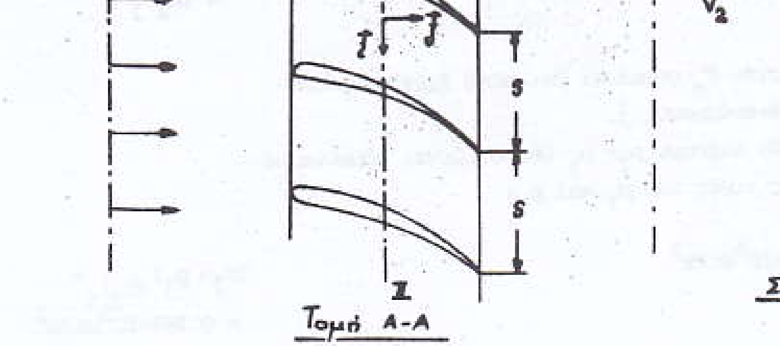
$(p_2 - p_1)_{(h_2)_3} = 0.338 \times 10^5 Nt/m^2$ $(p_2 - p_1)_{(h_2)_3} = 0.338 \times 10^5 Nt/m^2$

Ἡ ἰσχύς πού μεταφέρεται ἀπό τό ρευστό στόν ἄξονα ὑπολογίζεται πάλι σύμφωνα μέ τή σχέση (5):

$P_u = \omega F_u R_m z_B = 31.4 rad/sec \times 440.19 Nt \times 0.127 m \times 10 = 17552 Watt$ $P_u = 17552$ Watt

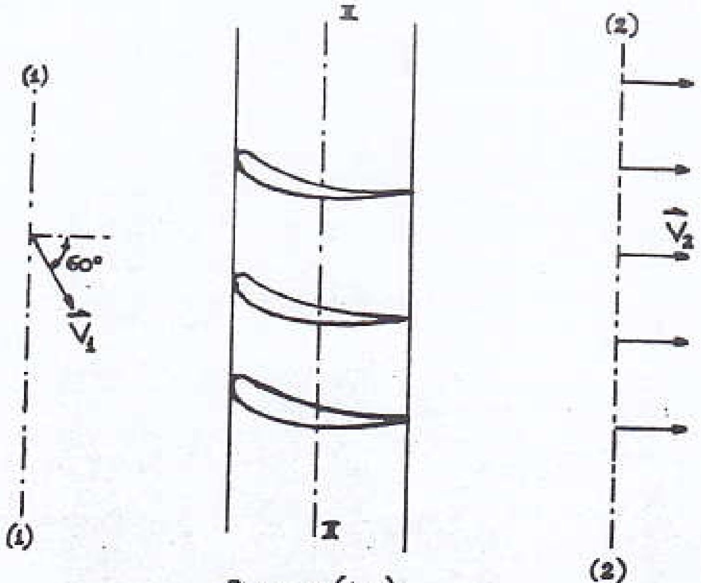


ΣΧΗΜΑ (4.1)



Τομή Α-Α

ΣΧΗΜΑ (4.2.)



ΣΧΗΜΑ (4.3)

ΔΕΔΟΜΕΝΑ

h_1 = 15.24 cm
h_2 = 12.70 cm/15.24 cm/17.78 cm
V_1 = 9.14 m/sec
ρ = 1000kg/m^3
b = 15.24 cm
a_2 = 30^o
s = 7.98 cm
P_{t_1} = 1×10^{5}Nt/m^2

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ Νο 5

Θεωροῦμε τήν ἀξονική ἀντλία τοῦ σχήματος (5.1), στό ὁποῖο φαίνονται καί οἱ δια-στάσεις της. Οἱ γωνίες ροῆς παριστάνονται στό ἴδιο σχῆμα γιά τή μέση ἀκτίνα. Τό ρευστό εἶναι νερό πυκνότητας $10^3 kg/m^3$ καί παροχῆς $10.194\ m^3/min$. Ἡ ταχύ-τα περιστροφῆς τῆς ἀντλίας εἶναι 504 RPM.

1. Νά προσδιοριστοῦν τά τρίγωνα ταχυτήτων στή μέση διάμετρο (D_m) κατά μέγεθος καί διεύθυνση.

Ἄς σημειωθεῖ ὅτι κατά τόν ὑπολογισμό τῆς ἀξονικῆς συνιστώσας τῆς ταχύτητας θά ἐφαρμοστεῖ ἡ ἐξίσωση τῆς συνέχειας χωρίς νά ληφθοῦν ὑπ᾽ὄψη μεταβολές κατά τήν ἀκτίνα.

2. Θεωροῦμε ὅτι οἱ ἀπώλειες στά ὁδηγά πτερύγια εἰσόδου χαρακτηρίζονται ἀπό τόν συντελεστή $\zeta_S = \dfrac{p_{t_o} - p_{t_1}}{\frac{\rho}{2} v_1^2}$ πού ἰσοῦται μέ 0.08. Ἐπίσης οἱ ἀπώλειες τῆς κινητῆς πτερύγωσης χαρακτηρίζονται ἀπό τόν συντελεστή $\zeta_R = \dfrac{p_{t_{R_1}} - p_{t_{R_2}}}{\frac{\rho}{2} W_2^2}$ πού ἰσοῦται μέ 0.15.

α. Νά βρεθοῦν οἱ ὁλικές καί στατικές πιέσεις στήν εἴσοδο καί στήν ἔξοδο τῆς κινητῆς πτερύγωσης γιά τήν μέση διάμετρο D_m ὅταν ληφθεῖ σάν πίεση ἀναφορᾶς ἡ ὁλική πίεση p_{t_o} στήν εἴσοδο τῆς ἀντλίας.

β. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ἰσχύς πού ἀπορροφᾶ ἡ ἀντλία καί ὁ βαθμός ἀπόδοσης ὁλικῶν πρός ὁλικές συνθῆκες η_{t-t}.

<u>ΛΥΣΗ</u>

1. Ἡ περιφερειακή ταχύτητα γιά τή μέση ἀκτίνα εἶναι:

$$U_m = \omega \cdot R_m = \frac{2\pi N}{60} \cdot \frac{D_m}{2} = \frac{\pi \times 504 RPM \times 0.254m}{60 sec/min} = 6.70m/s \quad (1) \qquad U_m = 6.70m/s$$

Οἱ ἀξονικές συνιστῶσες τῶν ταχυτήτων ὑπολογίζονται ἀπό τό θεώρημα τῆς συνεχείας

$$Q_s = V_{a_1} S_1 = V_{a_2} S_2 \quad (2)$$

ὅπου

Q_s = παροχή ὄγκου τῆς ἀντλίας (m^3/s)
V_a = ἀξονική συνιστῶσα (m/s)
S = διατομή (m^2)

καί

$S_1 = \pi D_m h_1$

ὅπου

h_1 = ὕψος τοῦ καναλιοῦ στή θέση (1) (m)

καί

$S_2 = \pi D_m h_2$

μέ

h_2 = ὕψος τοῦ καναλιοῦ στή θέση (2) (m).

Λύνουμε τήν σχέση (2) ὡς πρός τίς ἀξονικές συνιστῶσες καί ἔχουμε:

$$V_{a_1} = \frac{Q_s}{\pi D_m h_1} = \frac{10.194m^3/min}{\pi \times 0.254m \times 0.051m \times 60sec/min} = 4.17m/s \quad (5) \qquad V_{a_1} = 4.17m/s$$

$$V_{a_2} = \frac{Q_s}{\pi D_m h_2} = \frac{10.194m^3/min}{\pi \times 0.254m \times 0.056m \times 60sec/min} = 3.80m/s \quad (6) \qquad V_{a_2} = 3.80m/s$$

Μέ τή βοήθεια τῶν τιμῶν τῶν V_{a_1} καί V_{a_2} καί τῶν γωνιῶν πού δίνονται στό σχῆμα (5.1) κατασκευάζονται τά τρίγωνα ταχυτήτων γιά τά ὁποῖα ἔχουμε:

$V_{u_1} = V_{a_1} \tan a_1 = 4.17\text{m/s} \times \tan(-27^\circ) = -2.12\text{m/s}$ $\qquad V_{u_1} = -2.12\text{m/s}$

$W_{u_2} = V_{a_2} \tan a_2 = 3.80\text{m/s} \times \tan(-58^\circ) = 6.08\text{m/s}$ $\qquad W_{u_2} = -6.08\text{m/s}$

$V_{u_2} = U_m + W_{u_2} = 6.70\text{m/s} - 6.08\text{m/s} = 0.62\text{m/s}$ $\qquad V_{u_2} = 0.62\text{m/s}$

$-W_{u_1} = U_m - V_{u_1} = 6.7\text{m/s} + 2.12\text{m/s} = 8.82\text{m/s}$ $\qquad W_{u_1} = -8.82\text{m/s}$

Ἀπό τά τρίγωνα ταχυτήτων ἔχουμε:

$V_1 = \sqrt{V_{a_1}^2 + V_{u_1}^2} = \sqrt{(4.17\text{m/s})^2 + (2.12\text{m/s})^2} = 4.68\text{m/s}$ $\qquad V_1 = 4.68\text{m/s}$

$W_1 = \sqrt{V_{a_1}^2 + W_{u_1}^2} = \sqrt{(4.13\text{m/s})^2 + (8.82\text{m/s})^2} = 9.76\text{m/s}$ $\qquad W_1 = 9.76\text{m/s}$

Ἀπό τό τρίγωνο ταχυτήτων τῆς εἰσόδου προσδιορίζονται
$a_1 = -27^\circ$ (βλ. σχῆμα 5.2) $\qquad a_1 = -27^\circ$

$\beta_1 = \tan^{-1} \frac{W_{u_1}}{V_{a_1}} = \tan^{-1}(-\frac{8.82}{4.17}) = -64.7^\circ$ $\qquad \beta_1 = -64.7^\circ$

Ἐπίσης:

$V_2 = (V_{a_2}^2 + V_{u_2}^2)^{1/2} = [(3.8\text{m/s})^2 + (0.62\text{m/s})^2]^{1/2} = 3.85\text{m/s}$ $\qquad V_2 = 3.85\text{m/s}$

$a_2 = \tan^{-1} \frac{V_{u_2}}{V_{a_2}} = \tan^{-1} \frac{0.62}{3.8} = 9.3^\circ$ $\qquad a_2 = 9.3^\circ$

$W_2 = (V_{a_2}^2 + W_{u_2}^2)^{1/2} = [(3.8\text{m/s})^2 + (6.08\text{m/s})^2]^{1/2} = 7.17\text{m/s}$ $\qquad W_2 = 7.17\text{m/s}$

$\beta_2 = \tan^{-1} \frac{W_{u_2}}{V_2} = \tan^{-1}(-\frac{6.08}{3.8}) = -58^\circ$ $\qquad \beta_2 = -58^\circ$

Τά δύο τρίγωνα εἰσόδου καί ἐξόδου στή κινητή πτερύγωση τά παριστάνουμε στό σχῆμα (5.2)

2. Ὁ ὑπολογισμός μας εἶναι μονοδιάστατος καί γίνεται στή μέση διάμετρο ἡ ὁποία θεωρεῖται καί γραμμή ροῆς.

α. Δίνεται ὅτι

$$\zeta_s = 0.08 = \frac{P_{t_o} - P_{t_1}}{\frac{\rho}{2} V_1^2}$$

ὁπότε

$$P_{t_o} - P_{t_1} = 0.08 \times \frac{1000}{2} \text{ kg/m}^3 \times (4.68\text{m/s})^2 = 876.1 \frac{\text{kgm/s}^2}{\text{m}^2} \quad (= \frac{\text{Nt}}{\text{m}^2})$$

Ἄρα ἔχουμε τήν ὁλική πίεση στήν εἴσοδο τῆς κινητῆς πτερύγωσης ὡς πρός τήν ὁλική πίεση στήν εἴσοδο τῆς ἀντλίας

$$P_{t_1} - P_{t_o} = -876.1\text{Nt/m}^2 \qquad (7) \qquad P_{t_1} - P_{t_o} = -876.1\text{Nt/m}^2$$

Ἀλλά

$$P_{t_1} = P_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2$$

ὁπότε

$$P_1 = P_{t_1} - \frac{1}{2} \rho V_1^2 \qquad (8)$$

Συνδυάζοντας τίς ἐξισώσεις (7) καί (8)

$$P_1 = P_{t_o} - 876.1\text{Nt/m}^2 - \frac{1}{2} \times 1000\text{kg/m}^3 \times (4.68\text{m/s})^2 =$$

$$= P_{t_o} - 11827.3\text{Nt/m}^2$$

Ἐπομένως ἡ στατική πίεση στή θέση 1 εἶναι:

$$P_1 - P_{t_o} = -11827.3\text{Nt/m}^2 \qquad (9) \qquad P_1 - P_{t_o} = -11827.3\text{Nt/m}^2$$

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς σχετικῆς ὁλικῆς πίεσης, σχέση (2.33) τῶν σημειώσεων τοῦ μαθήματος Θερμικῶν Στροβιλομηχανῶν Ι ἔχουμε:

$$P_{t_{R_1}} = P_1 + \rho \frac{W_1^2}{2} - \rho \frac{U_2^2}{2} \qquad (10)$$

καί

$$P_{t_{R_2}} = P_2 + \rho \frac{W_2^{\,2}}{2} - \frac{\rho}{2} u^2 \qquad (11)$$

Από τόν συνδυασμό τῶν (10) καί (11) ἔχουμε:

$$P_{t_{R_1}} - P_{t_{R_2}} = P_1 - P_2 + \frac{\rho}{2}(W_1^{\,2} - W_2^{\,2}) \qquad (12)$$

Δίδεται ὅμως ὅτι:

$$\zeta_R = 0.15 = \frac{P_{t_{R_1}} - P_{t_{R_2}}}{\frac{\rho}{2} W_2^{\,2}}$$

ὁπότε:

$$P_{t_{R_1}} - P_{t_{R_2}} = 0.15 \frac{\rho}{2} W_2^{\,2} \qquad (13)$$

Ἀντικαθιστοῦμε τήν (13) στήν (12) καί παίρνουμε:

$$0.15 \frac{\rho}{2} W_2^{\,2} = P_1 - P_2 + \frac{\rho}{2}(W_1^{\,2} - W_2^{\,2})$$

ἤ

$$P_1 - P_{t_o} + \frac{\rho}{2}(W_1^{\,2} - W_2^{\,2}) - 0.15 \frac{\rho}{2} W_2^{\,2} = P_2 - P_{t_o}$$

ὁπότε:

$$P_2 - P_{t_o} = -11827.3\mathrm{Nt/m^2} + \frac{1000}{2}\left[(9.76\mathrm{m/s})^2 - (7.17\mathrm{m/s})^2\right] - 0.15\frac{1000}{2}(7.17\mathrm{m/s})^2 = 6241.4\mathrm{Nt/m^2}$$

$$P_2 - P_{t_o} = 6241.4\mathrm{Nt/m^2}$$

Επίσης ἡ ὁλική πίεση στήν ἔξοδο κινητῆς πτερύγωσης εἶναι:

$$P_{t_2} = P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^{\,2}$$

ἤ

$$P_{t_2} - P_{t_o} = P_2 - P_{t_o} + \frac{1}{2}\rho V_2^{\,2} = 6241.4\mathrm{Nt/m^2} + \frac{1}{2} \times 1000\mathrm{kg/m^3} \times (3.85\mathrm{m/s})^2 = 13652.65\mathrm{Nt/m^2}$$

$$P_{t_2} - P_{t_o} = 13652.65\mathrm{Nt/m^2}$$

β. Ἡ ἰσχὺς τῆς ἀντλίας θά βρεθεῖ ἀπό τή σχέση (2.96α)

$$P = m_s \left[U_2 V_{u_2} - U_1 V_{u_1}\right] \tag{14}$$

Ἡ παροχή μάζας εἶναι:

$$m_s = Q_s\rho = 10.194 m^3/min \times 1000 kg/m^3 \times \frac{1}{60 sec/min} = 169.9 kg/s \qquad m_s = 169.9 kg/s$$

Ἀντικαθιστοῦμε στήν (14) τά ὑπολογισθέντα μεγέθη καί ἔχουμε:

$$P = 169.9 kg/s \left[6.70 m/s \times (-2.12 m/s) + 6.70 m/s \times 0.62 m/s\right] =$$

$$= +3119.02 kgm^2/s^3 = +3119.02 W \qquad P = 3119 KW$$

Ἡ ἰσχύς αὐτή ἀπορροφᾶται ἀπό τήν ἀντλία.

Ὁ βαθμός ἀπόδοσης πού ζητεῖται θά προσδιοριστεῖ ἀπό τό λόγο

$$\eta_{t-t_c} = \frac{h_{t_{2s}} - h_{t_1}}{h_{t_2} - h_{t_1}} = \frac{P_{t_2} - P_{t_1}}{\rho} \times \frac{1}{h_{t_2} - h_{t_1}} \tag{15}$$

$P_{t_2} - P_{t_1}$ = Ἡ διαφορά ὁλικῶν πιέσεων μέ ἀπώλειες.

Ἀλλά ἀπό τή σχέση (2.98)

$$\Delta h_t = U_2 V_{u_2} - U_1 V_{u_1} = 6.7 m/s \times (0.62 m/s) - 6.7 m/s \times (-2.12 m/s) =$$

$$= 18358 m^2/s^2 = 18.358 kJ/kg \qquad \Delta h_t = 18.358 kJ/kg$$

Ἐπίσης:

$$P_{t_2} - P_{t_1} = (P_{t_2} - P_{t_o}) - (P_{t_1} - P_{t_o}) = 13652.65 Nt/m^2 -$$

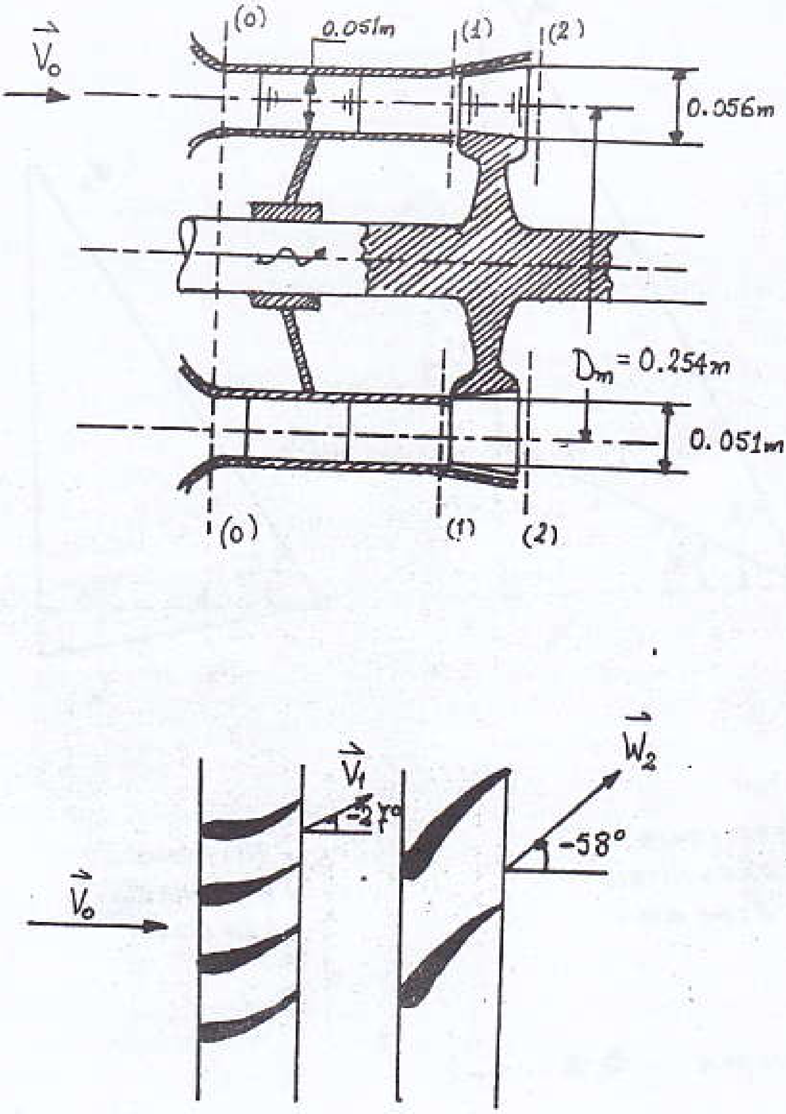
$$- (-876.1 Nt/m^2) = 14528.75 Nt/m^2$$

καί

$$\rho = 1000 kg/m^3$$

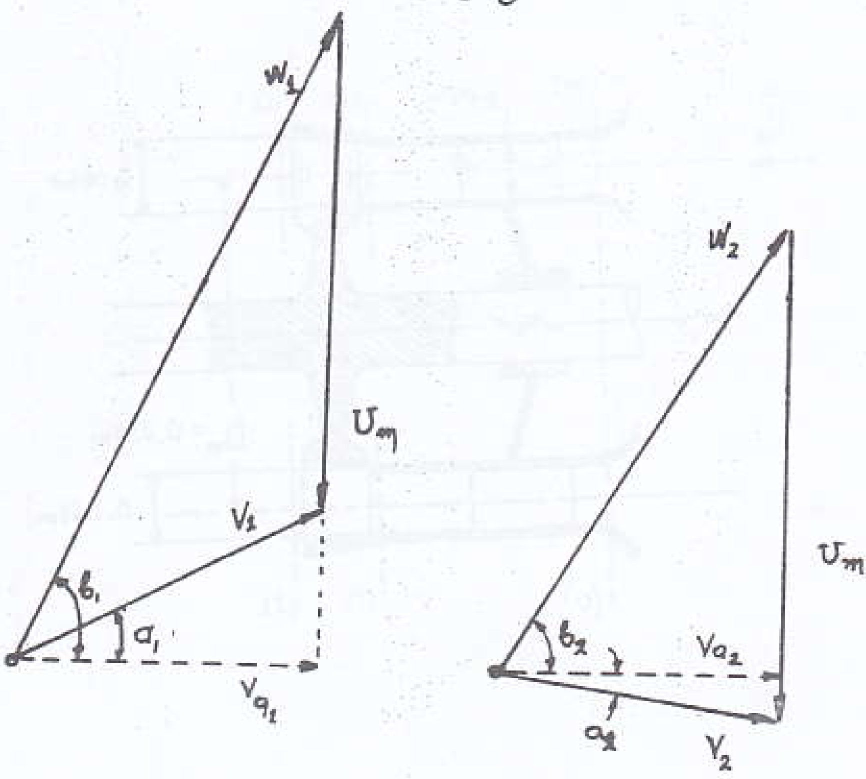
Ἄρα ἡ (15) γίνεται:

$$\eta_{t-t_c} = \frac{14528.75 Nt/m^2}{1000 kg/m^3} \times \frac{1}{18358 m^2/s^2} = 79.14\% \qquad \eta_{t-t_c} = 79.14\%$$



ΠΤΕΡΥΓΩΣΗ ΚΑΙ ΓΩΝΙΕΣ ΡΟΗΣ
ΣΤΗ ΜΕΣΗ ΔΙΑΜΕΤΡΟ

Σχημα 5.1 Διάταξη Αξονικής Αντλίας.



ΤΡΙΓΩΝΟ
ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ
ΕΙΣΟΔΟΥ

ΤΡΙΓΩΝΟ
ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ
ΕΞΟΔΟΥ

ΣΧΗΜΑ 5.2

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ Νο 6

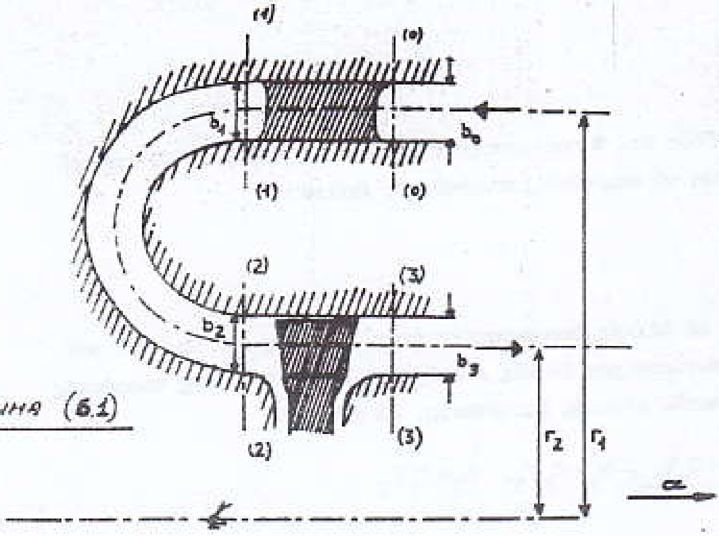
Τό σύστημα ἀξονικοῦ στροβίλου τό ὁποῖο δίδεται στό ΣΧΗΜΑ (6.1) δέχεται παροχ μάζας ἴση πρός 1.46 Kg/s μέ ἀξονική ταχύτητα εἰσόδου (διατομή (ο)) ἴση πρός 125m/ Ἡ ὁλική θερμοκρασία εἰσόδου εἶναι 800^{o}K. Ὁ διανομέας ἀποκλίνει τή ροή κατά 60^o καί ἡ διαμόρφωση τῶν τοιχωμάτων μεταξύ τῶν διατομῶν (ο) καί (1) εἶναι τέτοια, ὥστε $V_{a_1} = V_{a_o}$. Τό αὐτό συμβαίνει μεταξύ τῶν διατομῶν (2) καί (3) ($V_{a_2} = V_{a_3}$).

Ἐάν ὑποθέσουμε ὅτι ἡ μεταβολή κατάστασης μεταξύ διατομῶν (1) καί (2) εἶναι ἰσεντροπική (οἱ ἀπώλειες εἶναι ἀμεληταῖες),

α) Νά ὑπολογιστοῦν οἱ λόγοι $\frac{b_1}{b_2}$ καί $\frac{r_1}{r_2}$ οὕτως, ὥστε στή διατομή (2) νά ἔχουμε ταχύτητα V_2 = 488 m/s, πού νά σχηματίζει γωνία μέ τήν ἀξονική κατεύθυνση ἴση πρός 60^o.

β) Νά καθοριστεῖ ἡ ἀπόλυτη ταχύτητα σέ τιμή καί κατεύθυνση στήν διατομή (3), ἐάν ἡ ἀκτίνα r_2 = 0.102 m, ἡ ταχύτητα περιστροφῆς εἶναι 20000 rpm καί ἡ ἰσχύς πού παίρνουμε στόν ἄξονα εἶναι 140 KW. Ὁ ὑπολογισμός νά γίνη σέ μονοδιάστατη βάση.

Ἐργαζόμενο μέσο νά ληφθεῖ ἀέρας σταθερῶν συντελεστῶν εἰδικῶν θερμοτήτων (R_g = 287 m^2/s^2,^{o}K, γ = 1.4)



Σχημα (6.1)

ΛΥΣΗ Π6-2

Κατ' ἀρχήν παριστάνουμε στό διάγραμμα T-S τήν μεταβολή τοῦ ἐργαζόμενου μέσου. Τό σχῆμα (6.2) παριστάνει τήν μεταβολή αὐτή.

Ἀπό τά δεδομένα τοῦ προβλήματος ἔχουμε:

$V_o = V_{a_o} = 125\ m/s$ (ἀξονική εἴσοδος)

$V_{a_1} = V_{a_o} = 125\ m/s$

$V_1 = V_{a_1}/\cos 60^o = \frac{125\ m/s}{0.50} = 250\ m/s$ $V_1 = 250 m/s$

$V_{a_2} = V_2 \cos 60^o = 488\ m/s \times 0.50 = 244\ m/s$ $V_{a_2} = 244 m/s$

Ἐφαρμόζοντας τήν ἀρχή τῆς συνεχείας στίς διατομές (1) καί (2) (σέ μονοδιάστατη βάση) ἔχουμε:

$\rho_1 V_{a_1} S_1 = \rho_2 V_{a_2} S_2$

Ἀλλά γιά τίς διατομές S_1 καί S_2 ἔχουμε:

$S_1 = 2\pi r_1 b_1$, $S_2 = 2\pi r_2 b_2$

Ἐπομένως:

$$\frac{b_1 r_1}{b_2 r_2} = \frac{V_{a_2}}{V_{a_1}} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Λαμβανομένου ὑπ' ὄψη ὅτι ἡ ροή μεταξύ τῶν διατομῶν (1) καί (2) μπορεῖ κατά τήν ἐκτόνωση νά θεωρηθεῖ ἰσεντροπική, ἔχουμε:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Ἐάν T_{t_1} καί T_{t_2} οἱ ὁλικές θερμοκρασίες στίς διατομές (1) καί (2) καί h_{t_1} καί h_{t_2} οἱ ἀντίστοιχες ὁλικές ἐνθαλπίες, τότε, λόγω τῆς παραδοχῆς σταθερῶν συντελεστῶν εἰδικῆς θερμότητας, θά εἶναι:

$h_{t_1} = C_p T_{t_1}$, $h_{t_2} = C_p T_{t_2}$, $h_1 = C_p T_1$, $h_2 = C_p T_2$

εξ άλλου είναι:

$$h_{t_1} = h_1 + \frac{V_1^2}{2} \quad \text{καί} \quad h_{t_2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

όπότε:

$$T_{t_1} = T_1 + \frac{V_1^2}{2C_p} \quad \text{καί} \quad T_{t_2} = T_2 + \frac{V_2^2}{2C_p}$$

Έπειδή μεταξύ τῶν διατομῶν (ο), (1) καί (2) δέν έχουμε παραγωγή έργου, θά είναι:

$$T_{t_o} = T_{t_1} = T_{t_2} = 800^oK$$

όπότε:

$$T_1 = T_{t_1} - \frac{V_1^2}{2C_p} = 800^oK - \frac{250^2 m^2/s^2}{2 \times 1004 m^2/s^2, {}^oK} =$$

$$= 800^o - 31.125^o = 768.8745^oK$$

$T_1 = 768.874^oK$

$$T_2 = T_{t_2} - \frac{V_2^2}{2C_p} = 800^oK - \frac{488^2 m^2/s^2}{2 \times 1004 m^2/s^2, {}^oK}$$

$$= 800^o - 118.598^o = 681.402^oK$$

$T_2 = 681.402^oK$

Τελικά καταλήγουμε στή σχέση:

$$\frac{b_1 r_1}{b_2 r_2} = \frac{V_{a_2}}{V_{a_1}} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{a_2}}{V_{a_1}} \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} =$$

$$= \frac{244}{125} \cdot \left(\frac{681.402}{768.874}\right)^{\frac{1}{0.4}} = 1.443279$$

Έφαρμόζοντας τό θεώρημα διατήρησης τῆς ροπῆς τῆς όρμῆς γιά τό σύστημα μεταξύ τῶν διατομῶν (1) καί (2), μέ τήν μορφή τῆς έξίσωσης (2.54) τῶν σημειώσεων μαθήματος καί λαμβανόμενου ύπ'όψη ότι στό ρευστό δέν άσκεῖται ροπή λόγω μή ύπαρξης μέσα στή ροή στερεῶν σωμάτων (πτερυγίων), καταλήγουμε στή σχέση:

$$M_a = \int_{(S_1)} dm_{s_1} r_1 V_{u_1} - \int_{(S_2)} dm_{s_2} r_2 V_{u_2} = 0$$

ἀπό τήν ὁποία τελικά παίρνουμε:

$$r_1 V_{u_1} = r_2 V_{u_2}$$

διότι λόγω μονοδιάστατου ὑπολογισμοῦ V_{u_1} καί V_{u_2} λαμβάνονται σταθερά στίς διατομές (1) καί (2), ἐνῶ εἶναι $m_{s_1} = m_{s_2}$

Ἐξ ἄλλου εἶναι:

$$V_{u_1} = V_{a_1} \tan 60^o = 125 m/s \times 1.732 = 216.506\ m/s \qquad V_{u_1} = 216.506 m/s$$

$$V_{u_2} = V_{a_2} \tan 60^o = 244 m/s \times 1.732 = 422.620\ m/s \qquad V_{u_2} = 422.620 m/s$$

Ἄρα:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{V_{u_2}}{V_{u_1}} = \frac{422.620}{216.506} = 1.952$$

καί ἑπομένως:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{r_2}{r_1} \times 1.443 = \frac{1.443}{1.952} = 0.739 \qquad \frac{b_1}{b_2} = 0.739$$

β. Ἡ ἔκφραση τῆς ἰσχύος πού ἀποδίδει ὁ μονοβάθμιος στρόβιλος τοῦ παραδείγματος εἶναι (ἐξίσωση 2.96α):

$$P_T = m_s \omega \left[r_2 V_{u_2} - r_3 V_{u_3} \right]$$

Ἡ ἰσχύς P_T εἶναι θετική διότι πρόκειται γιά στρόβιλο (παραγωγή ἔργου).

Ἀπό τήν παραπάνω σχέση παίρνουμε ($r_2 = r_3$):

$$V_{u_3} = V_{u_2} - \frac{P_T}{m_s \omega r_2}$$

Ἀλλά

$$\omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{2\pi \times 20000 rpm}{60} = 2094.4 s^{-1}$$

καί ἄρα:

$$V_{u_3} = 422.62 m/s - \frac{140000 W}{1.46 kg/s\ 2094.4 s^{-1}\ 0.102 m} =$$

$= 422.62 m/s - 448.86 m/s = - 26.245 m/s$

$V_{u_3} = - 26.245 m/s$

Έξ άλλου είναι

$V_{a_3} = V_{a_2} = 244 m/s$

$V_{a_3} = 244 m/s$

Άρα

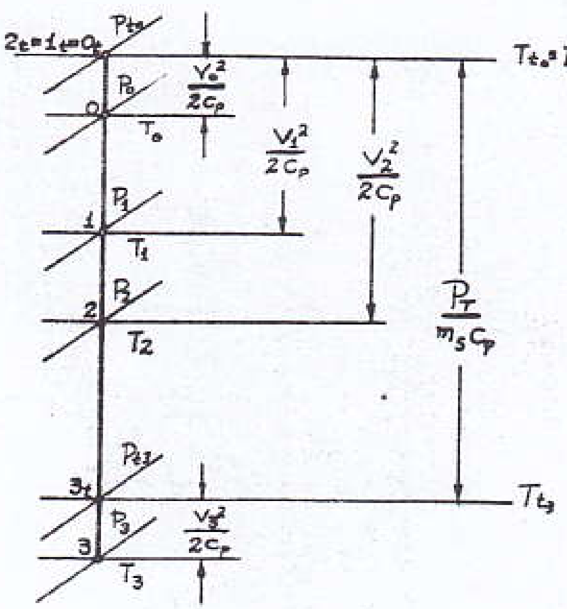
$V_3 = (V_{u_3}^2 + V_{a_3}^2)^{1/2} = (26.245^2 + 244^2)^{1/2} = 245.407 m/s$

$V_3 = 245.407 m/s$

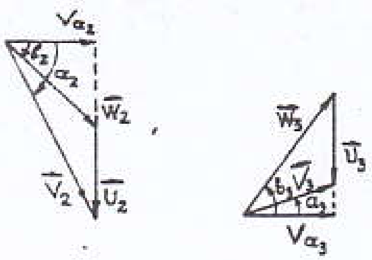
$$a_3 = \tan^{-1} \frac{V_{u_3}}{V_{a_3}} = \tan^{-1} \frac{-26.245}{244} = -6.14^o$$

$a_3 = -6.14^o$

Τέλος τά τρίγωνα ταχυτήτων έχουν τήν μορφή τοῦ σχήματος (6.3) ($U_2 = U_3 = \omega r_2 = 213.629 m/s$)



ΣΧΗΜΑ (6.2)



ΣΧΗΜΑ (6.3)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ Νο 7

Τό σχῆμα (7.1) δίνει ἕνα εἰδικό μονοβάθμιο στρόβιλο ὁ ὁποῖος ἐκτονώνει ξηρό ἀέρα ($\gamma = 1.4, R_g = 287 m^2/sec^2\ ^oK$) πού παραλαμβάνει μέ ἀρχικές συνθῆκες ($p_{t_1} = 1.033 \times 10^5 \frac{Nt}{m^2}$, $T_{t_1} = 544.31^oK$).

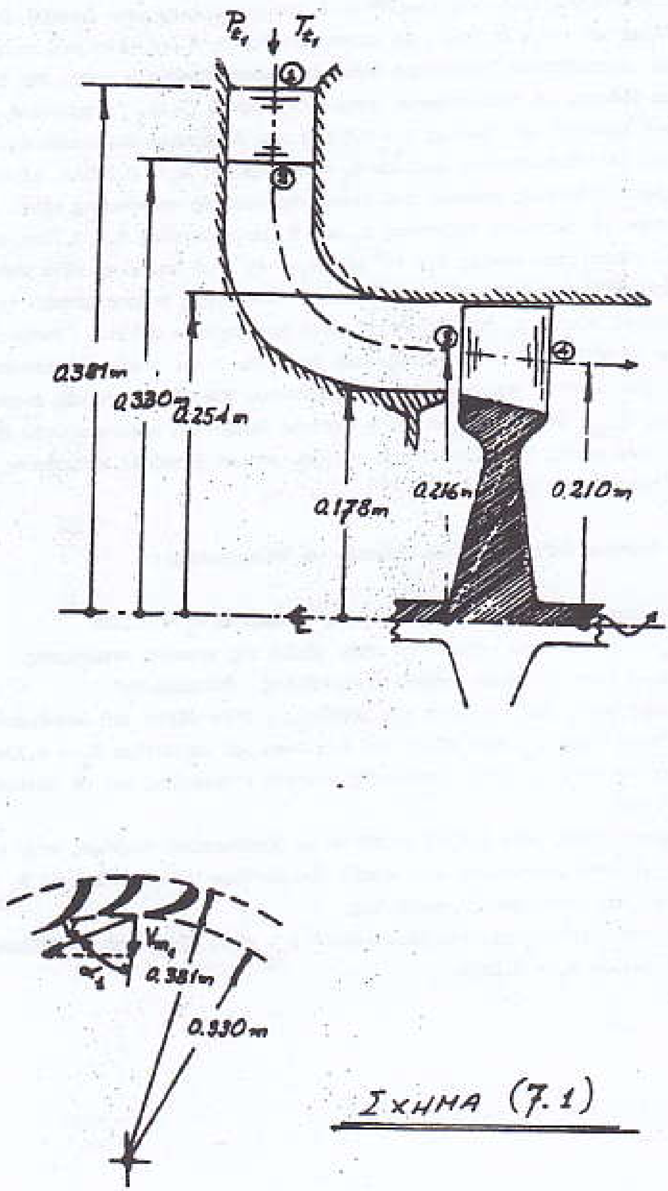
Τά σταθερά πτερύγια (πτερύγωση τοῦ διανομέα) εὑρίσκονται μεταξύ τῶν ἀκτίνων $R_1 = 0.381m$ καί $R_2 = 0.330m$. Σέ πρώτη προσέγγιση ἡ ροή μέσα στό στρόβιλο ἀναλύεται μέ μονοδιάστατο ὑπολογισμό ἐπάνω στή μέση ἐπιφάνεια ροῆς, τῆς ὁποίας ἡ γενέτειρα δίδεται μέ διακοπτόμενη γραμμή στό σχῆμα (7.1). Ἡ ἀκτινική συνιστώσα V_{m_2} στή διατομή (2) (ἀκτίνα $R_2 = 0.330m$) καί ἡ ἀξονική συνιστώσα στίς διατομές (3) καί (4) (ἀντιστοίχων ἀκτίνων $R_3 = 0.216m$ καί $R_4 = 0.210m$), εἶναι ἴσες πρός 122 m/sec. Ὁ ἀριθμός στροφῶν ἀνά λεπτό τῆς κινητῆς πτερύγωσης εἶναι ἴσος πρός 15000 rpm. Οἱ σχετικές ταχύτητες W_3 καί W_4 στίς ἀκτίνες $R_3 = 0.216m$ καί $R_4 = 0.210m$ σχηματίζουν γωνίες $\beta_3 = 45^o$ καί $\beta_4 = -45^o$. Οἱ ἀπώλειες μέσα στόν διανομέα ἀντιπροσωπεύουν τά 10% τῆς ἰσεντροπικῆς ἐνθαλπικῆς πτώσης μεταξύ (p_{t_1} , T_{t_1}) καί τῆς στατικῆς πίεσης p_2 πού ἐπικρατεῖ στήν ἀκτίνα $R_2 = 0.33m$. Ὑποθέτουμε ὅτι οἱ ἀπώλειες μέσα στόν ἀγωγό μεταξύ τῶν διατομῶν 2 καί 3 εἶναι ἀμελητέες. Οἱ ἀπώλειες τῆς κινητῆς πτερύγωσης ἀντιπροσωπεύουν 20% τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τῆς ταχύτητας W_{4th}, ὅπου ἡ W_{4th} εἶναι ἡ σχετική θεωρητική ταχύτητα στήν ἔξοδο τῆς κινητῆς πτερύγωσης, ἡ ἀντιστοιχοῦσα σέ ἰσεντροπική μεταβολή κατάστασης μέσα στήν κινητή πτερύγωση.

Μέ τά ἀνωτέρω δεδομένα εἶναι δυνατόν νά ὑπολογίσουμε:

(1) Τίς ταχύτητες καί τίς γωνίες τῆς ροῆς σέ ἀκτίνα $R_3 = 0.216m$ καί $R_4 = 0.210m$ στήν εἴσοδο καί στήν ἔξοδο τῆς κινητῆς πτερύγωσης.
(2) Τό εἰδικό ἔργο τό ὁποῖο παράγει ὁ στρόβιλος (KJoules/kg).
(3) Τήν ταχύτητα V_2 καί τή γωνία τῆς ροῆς α_2 στήν ἔξοδο τοῦ διανομέα καί σέ ἀκτίνα $R_2 = 0.33m$
(4) Τή στατική πίεση p_2 στήν ἔξοδο τοῦ διανομέα καί σέ ἀκτίνα $R_2 = 0.33m$.
(5) Τή στατική πίεση p_3 στήν εἴσοδο τῆς κινητῆς πτερύγωσης καί σέ ἀκτίνα $R_3 = 0.216m$.
(6) Τήν παροχή μάζας μέσα ἀπό τό στρόβιλο μέ ὁμοιόμορφες συνθῆκες στήν εἴσοδο τῆς κινητῆς πτερύγωσης καί μεταξύ τῶν ἀκτίνων $R_{3_i} = 0.178m$ καί $R_{3_o} = 0.254m$.
(7) Τήν ἰσχύ πού ἀναπτύσσει ὁ στρόβιλος.
(8) Τή στατική πίεση p_4 καί τήν ὁλική πίεση p_{t_4} στήν ἔξοδο τοῦ στροβίλου καί σέ ἀκτίνα $R_2 = 0.210m$.

(9) Τούς βαθμούς ἀπόδοσης "ὁλικῶν πρός ὁλικές συνθῆκες" καί "ὁλικῶν πρ: στατικές συνθῆκες" τῆς βαθμίδας.

Γιά νά πραγματοποιήσουμε τόν ὑπολογισμό, θά πρέπει νά καταρτίσουμε θερμοδυναμικό διάγραμμα τῆς βαθμίδας.



ΣΧΗΜΑ (7.1)

ΛΥΣΗ

῾Ο μονοδιάστατος ὑπολογισμός τῆς βαθμίδας αὐτῆς στροβίλου θά γίνει σύμφωνα μέ ὅσα λέχτηκαν γιά τή "μονοδιάστατη ροή" στήν ἀρχή τοῦ τρίτου κεφαλαίου τῶν σημειώσεων τῶν Θερμικῶν Στροβιλομηχανῶν Ι. Πρίν προχωρήσουμε στόν ὑπολογισμό κατασκευάζουμε σχηματικά τό θερμοδυναμικό διάγραμμα (T-S) πού παρουσιάζει τίς μεταβολές κατάστασης πού λαμβάνουν χώρα μέσα στή βαθμίδα. Τό διάγραμμα αὐτό παρουσιάζει τό σχῆμα (7.2). Τό σημεῖο 1 πού ἀντιπροσωπεύει τίς στατικές συνθῆκες πρίν ἀπό τόν διανομέα δέν προσδιορίζεται στό σχῆμα (7.2) διότι δέν δίδεται στήν ἐκφώνηση καμμιά πληροφορία πού νά τό ἀφορᾶ. Στό ἴδιο σχῆμα γίνεται σαφές ὅτι ἡ ἀδιαβατική μεταβολή κατάστασης (1-2) λαμβάνει χώρα μέ ἀπώλειες ὁλικῆς πίεσης. ᾿Αντίθετα, σύμφωνα μέ τήν ἐκφώνηση, ἡ μεταβολή κατάστασης τοῦ ρευστοῦ μέσα στόν, χωρίς πτερύγια ἀγωγό (2)-(3) εἶναι ἰσεντροπική. Τέλος τό σχῆμα (7.2) παρουσιάζει τήν ἀδιαβατική ἐκτόνωση (3-4) στήν ὁποία ἔχουμε ἀπώλειες καί σημειώνει τήν πτώση ὁλικῆς θερμοκρασίας ΔT_t πού ἀντιστοιχεῖ στό ἔργο πού δίνει τό ρευστό στήν ἄτρακτο.

$T_{t_1} = T_{t_2} = T_{t_3}$

(1) ῾Η ἀνάλυση τῶν τριγώνων ταχυτήτων πού ζητᾶ τό ἐρώτημα (1) θά πραγματοποιηθεῖ σύμφωνα μέ τό σχῆμα (7.3) πού δίνει τά τρίγωνα ταχυτήτων εἰσόδου/ἐξόδου τῆς κινητῆς πτερύγωσης. Συγχρόνως θά ὑπολογιστοῦν οἱ ταχύτητες στήν ἔξοδο.

᾿Από τά δεδομένα ἔχουμε:

$V_{a_3} = 122$ m/s $\qquad V_{a_3} = 122$ m/s

ὁπότε:

$W_{u_3} = V_{a_3} \tan\beta_3 = 122\text{m/s}\times\tan(45^o) = 122$ m/s $\qquad W_{u_3} = 122$m/s

῾Η γωνιακή ταχύτητα εἶναι:

$\omega = \frac{\pi N}{30} = \frac{\pi \times 15000}{30} = 1570.8$rad/s $\qquad \omega = 1570.8$rad/s

καί ἡ περιφερειακή ταχύτητα στό σημεῖο (3) εἶναι:

$U_3 = \omega R_3 = 1570.8\text{rad/s}\times 0.216\text{m} = 339.29$m/s $\qquad U_3 = 339.29$m/s

Ἀπό τή σχέση πού συνδέει τίς ταχύτητες ἔχουμε:

$V_{u_3} = U_3 + W_{u_3} = 339.29\text{m/s} + 122\text{m/s} = 461.3\text{m/s}$ $\qquad V_{u_3} = 461.3 \text{ m/s}$

Ἐπομένως ἐφ' ὅσον ἡ μεσημβρινή συνιστῶσα τῆς ταχύτητας στό σημεῖο (3) εἶναι ἴση μέ τήν ἀξονική ($V_{m_3} = V_{a_3}$) ἔχουμε:

$V_3 = (V_{a_3}{}^2 + V_{u_3}{}^2)^{1/2} = \left[(122\text{m/s})^2 + (461.3\text{m/s})^2\right]^{1/2} = 477.16 \text{ m/s}$ $\qquad V_3 = 477.16\text{m/s}$

$W_3 = (V_{a_3}{}^2 + W_{u_3}{}^2)^{1/2} = \left[(122\text{m/s})^2 + (122\text{m/s})^2\right]^{1/2} = 172.53\text{m/s}$ $\qquad W_3 = 172.53\text{m/s}$

Ἡ ἀντίστοιχη γωνία a_3 δίδεται ἀπό τόν τύπο:

$a_3 = \tan^{-1}\dfrac{V_{u_3}}{V_{a_3}} = \tan^{-1}\dfrac{461.3\text{m/s}}{122\text{m/s}} = 75.19^o$ $\qquad a_3 = 75.19^o$

Ἀνάλογη ἀνάλυση κάνουμε καί γιά τό σημεῖο (4), ὁπότε:

$U_4 = \omega R_4 = 1570.8 \text{ rad/s} \times 0.210\text{m} = 329.87\text{m/s}$ $\qquad U_4 = 329.87 \text{ m/s}$

$W_{u_4} = V_{a_4}\tan\beta_4 = 122\text{m/}\times\tan(-45^o) = -122\text{m/s}$ $\qquad W_{u_4} = -122\text{m/s}$

$V_{u_4} = U_4 + W_{u_4} = 329.87\text{m/s} - 122\text{m/s} = 207.87\text{m/s}$ $\qquad V_{u_4} = 207.87\text{m/s}$

$W_4 = (V_{a_4}{}^2 + W_{u_4}{}^2)^{1/2} = \left[(122\text{m/s})^2 + (-122\text{m/s})^2\right]^{1/2} = 172.53\text{m/s}$ $\qquad W_4 = 172.53\text{m/s}$

$V_4 = (V_{a_4}{}^2 + V_{u_4}{}^2)^{1/2} = \left[(122\text{m/s})^2 + (207.87\text{m/s})^2\right]^{1/2} = 241.03\text{m/s}$ $\qquad V_4 = 241.03 \text{ m/s}$

$a_4 = \tan^{-1}\dfrac{V_{u_4}}{V_{a_4}} = \dfrac{207.87\text{m/s}}{122\text{m/s}} = 59.59^o$ $\qquad a_4 = 59.59^o$

(2) Τό εἰδικό ἔργο πού παράγει ὁ στρόβιλος δίδεται ἀπό τήν ἐξίσωση (2.98). (Ἄς ἐξεταστεῖ πρίν ἀπό τήν ἐφαρμογή ὁ τρόπος πού καταλήγουμε σ' αὐτή τήν ἐξίσωση). Ἐπομένως:

$$(W_T)_{3\to4} = -\frac{\omega M_{a_R}}{m_s} = h_{t_4} - h_{t_3} = U_4 V_{u_4} - U_3 V_{u_3} =$$

$$= 329.87 m/s \times 207.87 m/s - 339.29 m/s \times 461.3 m/s =$$

$$= -87944.4 m^2/s^2 = -87944.4 \frac{Joules}{kg} \qquad (W_T)_{3\to4} = -87944.4 \frac{Joules}{kg}$$

Τό άρνητικό πρόσημο σημαίνει ὅτι τό είδικό ἔργο ἀποδίδεται στό περιβάλλον. (Ἡ ἐνέργεια πού παίρνει τό σύστημά μας εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ θετική).

(3) Θά ἐφαρμόσουμε τό θεώρημα τῆς ροπῆς τῆς ὁρμῆς (ἐξίσωση (2.54)) στή περίπτωση ἀγωγοῦ, στόν ὁποῖο δέν ὑπάρχουν πτερύγια καί ἐπομένως δέν ἀσκοῦνται στό ρειστό οὔτε δυνάμεις οὔτε ροπές. Ἔτσι γιά μονοδιάστατη ροή ἔχουμε:

$$M_a = m_s (R_3 V_{u_3} - R_2 V_{u_2}) = 0$$

$$V_{u_2} = \frac{R_3 V_{u_3}}{R_2} = \frac{0.216m \times 461.3m/s}{0.330m} = 301.94 m/s \qquad V_{u_2} = 301.94 m/s$$

καί ἐπομένως:

$$a_2 = \tan^{-1}\left(\frac{V_{u_2}}{V_{m_2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{301.94 m/s}{122 m/s}\right) = 68^o \qquad a_2 = 68^o$$

$$V_2 = (V_{m_2}^2 + V_{u_2}^2)^{1/2} = \left[(122 m/s)^2 + (301.94 m/s)^2\right]^{1/2} = 325.67 m/s \qquad V_2 = 325.67 m/s$$

(4) Ἡ στατική πίεση στήν ἔξοδο τοῦ διανομέα ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς: Ἀπό τό σχῆμα (7.2) ἔχουμε ὅτι:

$$\Delta T_{V_2} = \frac{V_2^2}{2C_p} = \frac{(325.67 m/s)^2}{2 \times 1004 m^2/s^2\,{}^oK} = 52.82^o K \qquad \Delta T_{V_2} = 52.82\,^oK$$

καί ἐπομένως:

$$T_2 = T_{t_2} - \Delta T_{V_2} = 544.31^o - 52.82^o = 491.49^o K \qquad T_2 = 491.49^o K$$

Σύμφωνα μέ τήν εκφώνηση, άν θεωρούσαμε ισεντροπική εκτόνωση χωρίς έργο άπό τίς ολικές συνθήκες (T_{t_1} - p_{t_1}) μέχρι τή στατική πίεση p_2, τότε ή άντίστοιχη ένθαλπική πτώση $\Delta T_{V_{2_{is}}}$ θά πρέπει νά είναι:

$$\Delta T_{V_{2_{is}}} = \frac{V_{2_{is}}^2}{2C_p} = \frac{V_2^2}{2C_p} \times \frac{1}{0.9} = T_{t_2} - T_{2_{is}} = \frac{\Delta T_{V_2}}{0.9}$$

έπομένως:

$$\Delta T_{V_{2_{is}}} = \frac{\Delta T_{V_2}}{0.9} = \frac{52.82^o K}{0.9} = 58.69^o K \qquad \Delta T_{V_{2_{is}}} = 58.69^o K$$

καί :

$$T_{2_{is}} = T_{t_2} - \Delta T_{V_{2_{is}}} = 544.31^o - 58.69^o = 485.62^o K \qquad T_{2_{is}} = 485.62^o K$$

'Επίσης :

$$V_{2_{is}} = (2C_p\ \Delta T_{V_{2_{is}}})^{1/2} = (2\times 1004 m^2/s^2, {}^oK \times 58.69^o K)^{1/2} = 343.29 m/s \qquad V_{2_{is}} = 343.29 m/s$$

'Ακολουθώντας τήν άντίστοιχη ισεντροπική μεταβολή έχουμε:

$$\frac{p_2}{p_{t_1}} = \left(\frac{T_{2_{is}}}{T_{t_1}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{485.62^o K}{544.31^o K}\right)^{3.5} = 0.67077$$

καί έπομένως:

$$p_2 = p_{t_1} \times \frac{p_2}{p_{t_1}} = 1.033\times 10^5\ \frac{Nt}{m^2} \times 0.67077 = 0.6929\times 10^5\ \frac{Nt}{m^2} \qquad p_2 = 0.6929\times 10^5\ \frac{Nt}{m^2}$$

(5) 'Ακολουθώντας ισεντροπική μεταβολή έχουμε ότι:

$$\frac{p_{t_2}}{p_2} = \left(\frac{T_{t_2}}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

καί έτσι μπορούμε νά υπολογίσουμε τήν ολική πίεση p_{t_2}:

$$p_{t_2} = p_2 \left(\frac{T_{t_2}}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.6929\times 10^5\ \frac{Nt}{m^2} \times \left(\frac{544.31^o k}{491.49^o k}\right)^{3.5} = 0.99045\times 10^5\ \frac{Nt}{m^2}$$

$$p_{t_2} = 0.99045\times 10^5\ \frac{Nt}{m^2}$$

Οἱ ἀπώλειες ὁλικῆς πίεσης μέσα στό διανομέα δίνονται ἀπό τή διαφορά $p_{t_1} - p_{t_2}$.

Τό μέγεθος ΔT_{V_3} δίδεται ἀπό τή σχέση:

$$\Delta T_{V_3} = \frac{V_3^2}{2C_p} = \frac{(477.16\,m/s)^2}{2\times 1004\,m^2/s^2\,{}^oK} = 113.38\,{}^oK \qquad \Delta T_{V_3} = 113.38\,{}^oK$$

καί ἔτσι εἶναι δυνατό νά ὑπολογίσουμε τή στατική θερμοκρασία T_3 τοῦ σημείου (3):

$$T_3 = T_{t_2} - \frac{V_3^2}{2C_p} = T_{t_3} - \Delta T_{V_3} = 544.31\,{}^oK - 113.38\,{}^oK = 430.93\,{}^oK \qquad T_3 = 430.93\,{}^oK$$

Ἑπομένως ἡ στατική πίεση p_3 ὑπολογίζεται θεωρώντας τήν ἀντίστοιχη ἰσεντροπική μεταβολή:

$$p_3 = p_{t_3}\times\left(\frac{T_3}{T_{t_3}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.99045\times 10^5\,\frac{Nt}{m^2}\times\left(\frac{430.93\,{}^oK}{544.31\,{}^oK}\right)^{3.5} =$$

$$= 0.4373\times 10^5\,\frac{Nt}{m^2} \qquad p_3 = 0.4373\times 10^5\,\frac{Nt}{m^2}$$

(6) Ἡ παροχή μάζας ὑπολογίζεται σέ μονοδιάστατη βάση καί ἀφοῦ ὑπολογισθεῖ ἡ πυκνότητα ἀπό τήν καταστατική ἐξίσωση :

$$\rho_3 = \frac{p_3}{R_g\,T_3} = \frac{0.4373\times 10^5\,Nt/m^2}{287\,\frac{m^2}{s^2\,{}^oK}\times 430.93\,{}^oK} = 0.3536\,kg/m^3 \qquad \rho_3 = 0.3536\,kg/m^3$$

Ἑπομένως:

$$m_s = \rho_3 V_{a_3} S_3 = 0.3536\,\frac{kg}{m^3}\times 122\,\frac{m}{sec}\times\pi\times\left[(0.254m)^2 - (0.178m)^2\right] =$$

$$= 4.449\,kg/s \qquad m_s = 4.449\,kg/sec$$

(7) Ἡ ἰσχύς πού παρέχει ὁ στρόβιλος εἶναι:

$$P_T = m_s\times\Delta h_t = 4.449\,kg/sec\times\left(87944.4\,\frac{joules}{kg}\right) = 391.26\,KW \qquad P_T = 391.26\,KW$$

(8) Ὁ προσδιορισμός τοῦ σημείου (4) καί τῶν ἀντίστοιχων συνθηκῶν πού ἐπικρατοῦν στό σημεῖο αὐτό, γίνεται λαμβάνοντας ὑπ'ὄψη τίς ἀπώλειες τῆς κινητῆς πτερύγωσης. Ἡ γνώση τῶν συνθηκῶν στό σημεῖο (3) μᾶς ἐπιτρέπει τόν ὑπολογισμό τῆς ὁλικῆς σχετικῆς θερμοκρασίας $T_{t_{3_R}}$ πού εἶναι

$$T_{t_{3_R}} = T_3 + \frac{W_3^2}{2C_p} - \frac{U_3^2}{2C_p} = 430.93^{\circ}K + \frac{(172.53m/s)^2}{2\times 1004m^2/s^2\,{}^{\circ}K} - \frac{(339.29m/s)^2}{2\times 1004m^2/s^2\,{}^{\circ}K} = 388.42^{\circ}K$$

$$T_{t_{3_R}} = 388.42^{\circ}K$$

Τό θεώρημα διατήρησης τῆς ἐνεργείας στό σχετικό σύστημα (ἐξίσωση (2.34)) γιά μόνιμη ροή δίδει:

$$h_{t_{4_R}} = h_{t_{3_R}}$$

καί γιά τέλειο ἀέριο ὅπου C_p = const.:

$$T_{t_{4_R}} = T_{t_{3_R}} = T_3 + \frac{W_3^2}{2C_p} - \frac{U_3^2}{2C_p} = 388.42^{\circ}K$$

$$T_{t_{4_R}} = 388.42^{\circ}K$$

Ἡ ὁλική σχετική θερμοκρασία $T_{t_{4_R}}$ (βλέπε ἐπίσης σχῆμα (7.2)) δίδεται ὡς ἑξῆς:

$$T_{t_{4_R}} = T_{4_{is}} + \frac{W_{4_{th}}^2}{2C_p} - \frac{U_4^2}{2C_p} = T_4 + \frac{W_4^2}{2C_p} - \frac{U_4^2}{2C_p}$$

ὅπου ἡ $W_{4_{th}}$ ἀντιπροσωπεύει τήν θεωρητική ταχύτητα στήν ἔξοδο τῆς κινητῆς πτερύγωσης πού θά παίρναμε ἀπό μιά ἰσεντροπική ἐκτόνωση μέχρι τή στατική πίεση p_4. Ἐξ'ἄλλου, σύμφωνα μέ τά δεδομένα τοῦ προβλήματος:

$$\Delta T_{W_{4th}} = \frac{W_{4_{th}}^2}{2C_p} = \frac{\Delta T_{W_4}}{0.8} = \frac{W_4^2}{2C_p\,0.8}$$

καί ἐπομένως:

$$\Delta T_{W_4} = \frac{W_4^{\,2}}{2C_p} = \frac{(172.53m/s)^2}{2\times 1004m^2/s^2, {}^oK} = 14.824^oK \qquad \Delta T_{W_4} = 14.82^oK$$

$$\Delta T_{W_{4_{th}}} = \frac{\Delta T_{W_4}}{0.8} = \frac{14.824^oK}{0.8} = 18.53^oK \qquad \Delta T_{W_{4_{th}}} = 18.53^oK$$

$$T_{4_{is}} = T_{t_{4_R}} - \Delta T_{W_{4_{th}}} + \frac{U_4^{\,2}}{2C_p} = 388.42^oK - 18.53^oK + \frac{(329.84m/s)^2}{2\times 1004m^2/s^2\ {}^oK} = 424.08^oK \qquad T_{4_{is}} = 424.08^oK$$

$$T_4 = T_{t_{4_R}} - \Delta T_{W_4} + \frac{U_4^{\,2}}{2C_p} = 388.42^oK - 14824^oK + \frac{(329.84m/s)^2}{2\times 1004m^2/s^2, {}^oK} = 427.79^oK \qquad T_4 = 427.79^oK$$

'Ακολουθώντας τήν άντίστοιχη ίσεντροπική μεταβολή έχουμε:

$$\frac{P_4}{P_{t_2}} = \left(\frac{T_{4_{is}}}{T_{t_2}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{424.08^oK}{544.31^oK}\right)^{3.5} = 0.417$$

καί ἐπομένως:

$$P_4 = 0.417\times p_{t_2} = 0.417\times 0.99045\times 10^5\ \frac{Nt}{m^2} = 0.4135\times 10^5\ \frac{Nt}{m^2} \qquad P_4 = 0.4135\times 10^5\ \frac{Nt}{m^2}$$

Από τόν ύπολογισμό τῆς ένθαλπικῆς πτώσης μέσα στήν κινητή πτερύγωση έχουμε (έφ'όσον $T_{t_1} = T_{t_2} = T_{t_3}$):

$$T_{t_4} - T_{t_3} = \frac{\Delta h_t}{C_p}$$

$$T_{t_4} = T_{t_3} + \frac{\Delta h_t}{C_p} = 544.31^oK + \frac{-87944.4m^2/s^2}{1004m^2/s^2, {}^oK} = 456.71^oK \qquad T_{t_4} = 456.71^oK$$

$$\Delta T_{V_4} = \frac{V_4^{\,2}}{2C_p} = \frac{(241.03m/s)^2}{2\times 1004m^2/s^2\ {}^oK} = 28.93^oK \qquad T_{V_4} = 28.93^oK$$

$$T_4 = T_{t_4} - \Delta T_{V_4} = 456.71^oK - 28.93^oK = 427.8^oK \qquad T_4 = 427.8^oK$$

Γιά τόν ύπολογισμό τῆς όλικῆς πίεσης p_{t_4}, άκολουθώντας τήν άντίστοιχη ίσεντροπική μεταβολή, έχουμε:

$$p_{t_4} = p_4\left(\frac{T_{t_4}}{T_4}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.413\times 10^5\ \frac{Nt}{m^2}\times\left(\frac{456.71^oK}{427.8^oK}\right) = 0.5192\times 10^5\ \frac{Nt}{m^2} \qquad p_{t_4} = 0.5192\times 10^5\ \frac{Nt}{m^2}$$

(9) Στή συνέχεια θά ὑπολογίσουμε τούς βαθμούς ἀπόδοσης τῆς βαθμίδας σύμφωνα μέ τούς ὁρισμούς (3.36) καί (3.38). Γιά τούς ὑπολογισμούς αὐτούς χρειάζεται ἡ γνώση τῶν θερμοκρασιῶν $T_{t_{4^-_{is}}}$ καί $T_{4^-_{is}}$ ὅπως αὐτές παρουσιάζονται στό σχῆμα (7.2).

Ἔχουμε λοιπόν:

$$T_{t_{4^-_{is}}} = T_{t_1}\left(\frac{P_{t_4}}{P_{t_1}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 544.31^\circ K \times \left(\frac{0.51922\times IO^5 Nt/m^2}{IO33\times IO^5 Nt/m^2}\right)^{0.28571} = 447.19^\circ K \qquad T_{t_{4^-_{is}}} = 447.19^\circ K$$

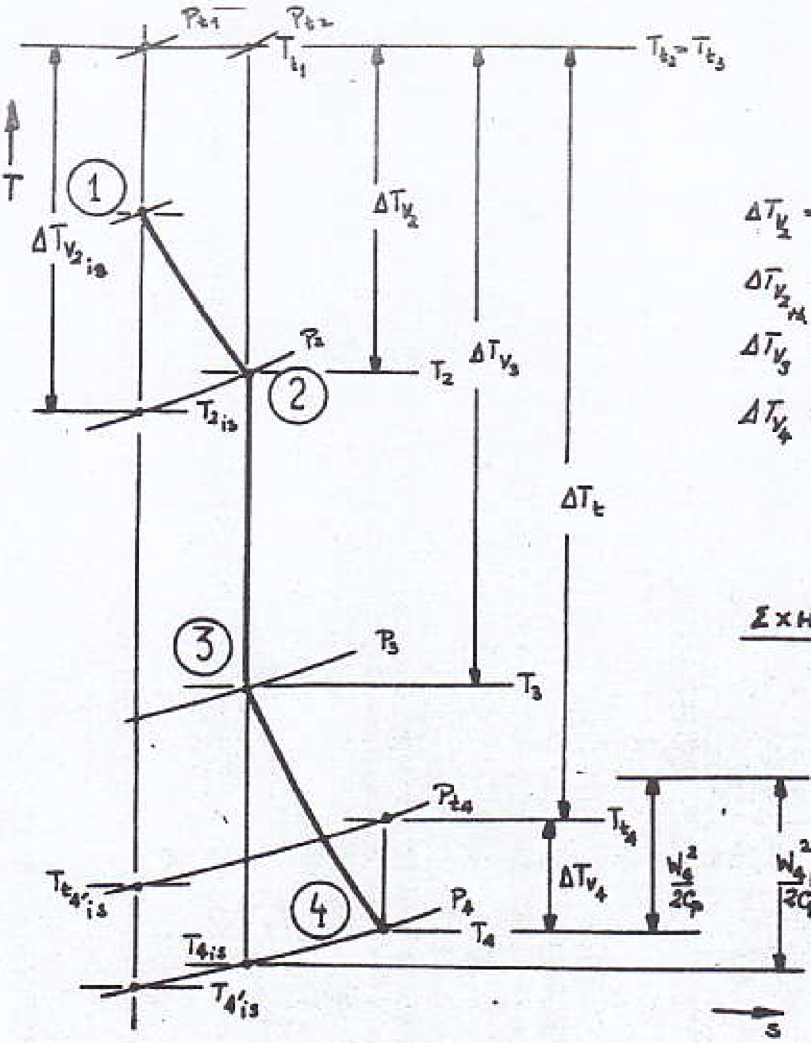
$$T_{4^-_{is}} = T_{t_1}\left(\frac{P_4}{P_{t_1}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 544.31^\circ K \times \left(\frac{0.413\times IO^5 Nt/m^2}{IO33\times IO^5 Nt/m^2}\right)^{0.28571} = 418.88^\circ K \qquad T_{4^-_{is}} = 418.88^\circ K$$

Ἑπομένως ὁ ἰσεντροπικός βαθμός ἀπόδοσης "ὁλικῶν πρός ὁλικές συνθῆκες" τῆς βαθμίδας εἶναι:

$$(\eta_{t-t})_T = \frac{T_{t_1} - T_{t_4}}{T_{t_1} - T_{t_{4^-_{is}}}} = \frac{544.31^\circ K - 456.71^\circ K}{544.31^\circ K - 447.19^\circ K} = 0.902 \qquad (\eta_{t-t})_T = 0.902$$

καί ὁ ἰσεντροπικός βαθμός ἀπόδοσης "ὁλικῶν πρός στατικές συνθῆκες" εἶναι:

$$(\eta_{t-s})_T = \frac{T_{t_1} - T_{t_4}}{T_{t_1} - T_{4^-_{is}}} = \frac{544.31^\circ K - 456.71^\circ K}{544.31^\circ K - 418.88^\circ K} = 0.698 \qquad (\eta_{t-s})_T = 0.698$$



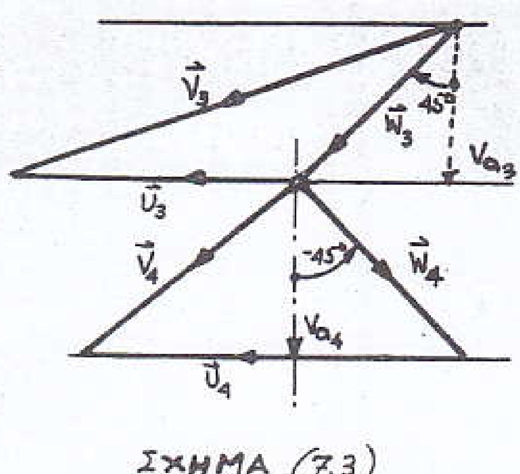
$$\Delta T_{V_2} = \frac{V_2^2}{2C_p}$$

$$\Delta T_{V_{2M}} = \frac{V_{2M}^2}{2C_p}$$

$$\Delta T_{V_3} = \frac{V_3^2}{2C_p}$$

$$\Delta T_{V_4} = \frac{V_4^2}{2C_p}$$

ΣΧΗΜΑ (7.2)



ΣΧΗΜΑ (7.3)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ Νο 8

Τό σχῆμα (8.2) παρουσιάζει τά τρίγωνα ταχυτήτων τοῦ μονοβάθμιου στροβίλου τοῦ σχήματος (8.1). Τά τρίγωνα αὐτά ἀντιστοιχοῦν στή μέση διάμετρο πού ὑποτίθεται ὅτι, ἀντιπροσωπεύει τίς "μέσες" συνθῆκες σέ κάθε διατομή τῆς βαθμίδας. Οἱ ἀξονικές συνιστῶσες V_{a_1} καί V_{a_2} εἶναι ἴσες.
Δίνονται τά παρακάτω στοιχεῖα γιά τήν ἀνάλυση τῆς βαθμίδας:
῾Η περιφερειακή ταχύτητα U_m τῆς κινητῆς στεφάνης πού ἀντιστοιχεῖ στή μέση διάμετρο D_m εἶναι ἴση πρός 305 m/s.
῾Ο λόγος ταχυτήτων $\varphi = \frac{V_1}{V_{1is}}$ πού χαρακτηρίζει τίς ἀπώλειες τοῦ διανομέα εἶναι ἴσος πρός 0.95.
῾Ο λόγος ταχυτήτων $\psi = \frac{W_2}{W_{2is}}$ πού χαρακτηρίζει τίς ἀπώλειες τῆς κινητῆς στεφάνης εἶναι ἴσος πρός 0.85.

Οἱ ἀπώλειες στόν κενό χῶρο μεταξύ τῆς ἐξόδου τοῦ διανομέα καί τῆς εἰσόδου τῆς κινητῆς πτερύγωσης θεωροῦνται ἀμεληταῖες. ῾Η ὁλική θερμοκρασία στήν εἴσοδο τοῦ στροβίλου εἶναι 922^oK. ῾Η παροχή μάζας τοῦ στροβίλου εἶναι ἴση πρός 4.54kg/s. Τό ἐργαζόμενο μέσο θεωρεῖται τέλειο ἀέριο μέ σταθερές $R_g = 287J/kg^oK$, $\gamma = 1.4$.

Μέ τά δεδομένα αὐτά νά ὑπολογιστοῦν τά ἑξῆς:

1. Τό ἔργο πού παρέχει ἡ βαθμίδα
2. Οἱ ἀριθμοί Mach πού ἀντιστοιχοῦν στίς ταχύτητες V_1 καί W_1
3. Οἱ ἀριθμοί Mach πού ἀντιστοιχοῦν στίς ταχύτητες V_2 καί W_2
4. ῾Ο λόγος πιέσεων P_{t_o}/P_1
5. ῾Ο λόγος πιέσεων P_{t_o}/P_2
6. ῾Ο λόγος πιέσεων P_{t_o}/P_{t_2}
7. ῾Ο βαθμός ἀπόδοσης "ἀπό ὁλικές σέ ὁλικές συνθῆκες" τοῦ στροβίλου

ΛΥΣΗ

1. Ἡ ἰσχύς τοῦ στροβίλου δίνεται ἀπό τόν τύπο (2.96α)

$$P_T = \dot{m}_s(U_1V_{u_1} - U_2V_{u_2}) \qquad (1)$$

Ἀπό τά δεδομένα ἔχουμε:

$U_1 = U_2 = U = 305m/s$ $\qquad U = 305m/s$

Ἀπό τά τρίγωνα ταχυτήτων στήν εἴσοδο τῆς κινητῆς πτερύγωσης (διατομή (1)) προκύπτει:

$$V_{u_1} = V_{a_1}\tan a_1 \qquad (2)$$

μέ $a_1 = 70^o$

Ἀκόμα ἔχουμε ὅτι:

$\vec{V} = \vec{U} + \vec{W}$

Προβάλλοντας αὐτή τή σχέση στή περιφερειακή κατεύθυνση παίρνουμε:

$$U = V_u - W_u = V_{a_1}\tan a_1 - V_{a_1}\tan\beta_1 = V_{a_1}(\tan a_1 - \tan\beta_1) \qquad (3)$$

ὁπότε:

$$V_{a_1} = \frac{U}{\tan a_1 - \tan\beta_1} = \frac{305m/s}{\tan 70^o - \tan 30^o} = 140.54m/s \qquad V_{a_1} = 140.54m/s$$

Ἀντίστοιχα ἀπό τό τρίγωνο ταχυτήτων στήν ἔξοδο τῆς κινητῆς πτερύγωσης (διατομή (2)), ἀφοῦ λάβουμε ὑπ' ὄψη ὅτι $V_{a_2} = V_{a_1}$, ἔχουμε: $\qquad V_{a_2} = 140.54m/s$

$$V_{u_2} = V_{a_2}\tan a_2 = 140.54m/s\times\tan(-15^o) = -37.66m/s \qquad V_{u_2} = -37.66m/s$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Ὑπενθυμίζεται πώς οἱ συνιστῶσες τῆς ταχύτητας καί οἱ γωνίες εἶναι προσημασμένες (λαμβάνονται ἀλγεβρικά).

Ἡ ἔκφραση $U_1V_{u_1} - U_2V_{u_2}$ πού δίνει τή μεταβολή τῆς ὁλικῆς ἐνθαλπίας μέσα στή κινητή πτερύγωση σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (2.98) εἶναι τώρα δυνατό νά ὑπολογιστεῖ:

$$h_{t_1} - h_{t_2} = U_1V_{u_1} - U_2V_{u_2} = U(V_{u_1} - V_{u_2}) = 305m/s\times(386.14m/s - (-37.66m/s)) =$$

$$= 129259\ m^2/s^2. \qquad (4) \qquad h_{t_1} - h_{t_2} = 129259m^2/s^2$$

Ἄρα ἀπό τήν (1) μέ $m_s = 4.54kg/s$ ἡ ἰσχύς εἶναι:

$$P_T = 4.54kg/s \times 129259m^2/s^2 = 586.84KW \qquad P_T = 586.84KW$$

2. Ἐξ ὁρισμοῦ ὁ ἀριθμός Mach παρέχεται ἀπό τόν λόγο

$$M = \frac{V}{a} \qquad (5)$$

ὅπου a εἶναι ἡ ταχύτητα τοῦ ἤχου πού ἀντιστοιχεῖ στίς στατικές συνθῆκες τῆς θεωρούμενης θέσης καί δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$a = \sqrt{\gamma R_g T} \qquad (6)$$

ὅπου T ἡ στατική θερμοκρασία.

Ἀπό τό τρίγωνο ταχυτήτων στή διατομή (1), ἔχουμε ὅτι:

$$V_1 = \frac{V_{a_1}}{\cos a_1} = \frac{140.54m/s}{\cos 70^o} = 410.90m/s \qquad V_1 = 410.90m/s$$

Ὁ προσδιορισμός τῆς T_1 γίνεται χρησιμοποιώντας τήν ἐξίσωση τῆς ἐνέργειας, πού γιά τό διανομέα δίνει:

$$h_{t_o} = h_{t_1} \quad \text{καί γιά τέλειο ἀέριο} \quad T_{t_o} = T_{t_1} \qquad (7)$$

καί ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ὁλικῆς ἐνθαλπίας ($h_t = h + \frac{V^2}{2}$) καί τό γεγονός ὅτι τό ἐργαζόμενο μέσο εἶναι τέλειο ἀέριο (ὁπότε $h = C_p \cdot T$), καταλήγουμε:

$$C_p T_1 = C_p T_{t_1} - \frac{V_1^2}{2} \qquad (8)$$

Ἡ εἰδική θερμότητα C_p ὑπολογίζεται μέ αὐτά πού ἰσχύουν γιά τό τέλειο ἀέριο ἀπό τή σχέση:

$$C_p = R_g \frac{\gamma}{\gamma-1} = 287m^2/s^2\,^oK \frac{1.4}{1.4-1} = 1004m^2/s^2\,^oK \qquad C_p = 1004m^2/s^2\,^oK$$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> Ὑπενθυμίζεται πώς $m^2/s^2\,^oK \equiv J/kg^oK$

Ἔτσι ἀπό τήν ἐξίσωση (8) καταλήγουμε:

$$T_1 = T_{t_1} - \frac{V_1^2}{2C_p} = 922^oK - \frac{(410.9m/s)^2}{2\times 1004m^2/s^2\,^o} = 837.92^oK \qquad T_1 = 837.92^oK$$

'Αντικαθιστώντας τώρα στήν (6), γιά τήν διατομή (1):

$$a_1 = \sqrt{1.4 \times 287 m^2/s^2\,{}^oK \cdot 837.92^oK} = 580.24 m/s \qquad a_1 = 580.24 m/s$$

καί μέ άντικατάσταση στή (5) προκύπτει:

$$M_{V_1} = \frac{410.90 m/s}{580.24 m/s} = 0.708 \qquad M_{V_1} = 0.708$$

β. Ή σχέση (5) ίσχύει καί γιά τόν σχετικό άριθμό Mach

$$M_W = \frac{W}{a} \qquad (9)$$

όπου α είναι $a = \sqrt{\gamma R_g T}$, μέ T τήν στατική θερμοκρασία τῆς διατομῆς, άφοῦ οί στατικές συνθῆκες σ'ένα σημεῖο είναι άνεξάρτητες άπό τό χρησιμοποιούμενο σύστημα άναφορᾶς.
Πάλι άπό τό τρίγωνο ταχυτήτων στή διατομή (1):

$$W_1 = \frac{V_{a_1}}{\cos\beta_1} = \frac{140.54}{\cos 30^o} = 162.44 m/s \qquad W_1 = 162.44 m/s$$

καί μέ άντικατάσταση στήν (9) προκύπτει:

$$M_{W_1} = \frac{162.44 m/s}{580.24 m/s} = 0.280 \qquad M_{W_1} = 0.280$$

3. α. Οί σχέσεις (5),(6) ίσχύουν καί γιά τή διατομή (2). 'Από τό τρίγωνο ταχυτήτων στή διατομή αύτή καί τό γεγονός πώς $V_{a_1} = V_{a_2}$, έχουμε:

$$V_2 = \frac{V_{a_2}}{\cos\beta_2} = \frac{140.54}{\cos(-15^o)} = 145.5 m/s \qquad V_2 = 145.5 m/s$$

'Από τήν (4) καί μέ τήν ύπόθεση τοῦ τελείου άερίου:

$$T_{t_2} = T_{t_1} - \frac{U_1 V_{u_1} - U_2 V_{u_2}}{C_p} = 922^oK - \frac{129259 m^2/s^2}{1004 m^2/s^2\,{}^o} = 793.23^oK \qquad T_{t_2} = 793.23^oK$$

καί άρα άπό τόν όρισμό:

$$T_2 = T_{t_2} - \frac{V_2^2}{2C_p} = 793.26^oK - \frac{(145.5 m/s)^2}{2 \cdot 1004 m^2/s^2\,{}^o} = 782.72^oK \qquad T_2 = 782.72^oK$$

καί άπό τήν (6) προσδιορίζουμε τήν ταχύτητα τοῦ ἦχου στή διατομή (2):

$$a_2 = \sqrt{1.4\times 287 m^2/s^2\ {}^oK \times 782.72 {}^oK} = 560.80 m/s \qquad a_2 = 560.80 m/s$$

καί τελικά άπό τήν (5), ἔχουμε:

$$M_{V_2} = \frac{145.50}{560.80} = 0.2594 \qquad M_{V_2} = 0.2594$$

β. Ἔχουμε πάλι τήν σχέση ὁρισμοῦ

$$M_{W_2} = \frac{W_2}{a_2} \tag{IO}$$

Ἀπό τό τρίγωνο ἐξόδου τῆς κινητῆς πτερύγωσης (διατομή (2)) προκύπτει:

$$W_2 = \sqrt{V_{a_2}^{\ 2} + (U - V_{u_2})^2} = \sqrt{(140.54 m/s)^2 + (305 m/s + 37.66 m/s)^2} =$$

$$= 370.36 m/s \qquad W_2 = 370.36 m/s$$

καί ἄρα άπό τήν (IO) καταλήγουμε:

$$M_{W_2} = \frac{370.36 m/s}{560.80 m/s} = 0.6604 \qquad M_{W_2} = 0.6604$$

4. Γιά νά προσδιοριστεῖ ὁ λόγος p_{t_o}/p_1, θεωροῦμε τήν ἰσεντροπική μεταβολή $(0 \to 1_{is})$ άπό όλικές σέ στατικές συνθῆκες, καί ἔχουμε:

$$\frac{p_{t_o}}{p_1} = \left(\frac{T_{t_o}}{T_{1_{is}}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{11}$$

καί μέ βάση τόν ὁρισμό τῆς όλικῆς ἐνθαλπίας καί τήν ὑπόθεση τοῦ τελείου ἀερίου:

$$T_{t_o} = T_{1_{is}} + \frac{V_{1_{is}}^{\ 2}}{2C_p} \tag{12}$$

Ἡ ταχύτητα ὅμως $V_{1_{is}}$ προσδιορίζεται μέ τήν βοήθεια τοῦ λόγου ἀπωλειῶν, $\varphi = \frac{V_1}{V_{1_{is}}}$, μέσα στή σταθερή πτερύγωση ἄρα:

$$V_{1_{is}} = \frac{V_1}{\varphi} = \frac{410.40m/s}{0.95} = 432.53m/s \qquad V_{1_{is}} = 432.53m/s$$

καί ἀπό τή σχέση (12):

$$T_{1_{is}} = 922^oK - \frac{(432.53m/s)^2}{2\times 1004m^2/s^2\,{}^o} = 828.83^oK \qquad T_{1_{is}} = 828.83^oK$$

ὁπότε ἡ (11) δίνει:

$$\frac{p_{t_o}}{p_1} = \left(\frac{922^oK}{828.83^oK}\right)^{\frac{1.4}{1.4-1}} = 1.4519 \qquad p_{t_o}/p_1 = 1.4519$$

5. Γιά νά προσδιορίσουμε τόν λόγο p_{t_o}/p_2, προσδιορίζουμε πρῶτα τόν p_1/p_2, πού προκύπτει μέ τή βοήθεια τῆς ἰσεντροπικῆς μεταβολῆς $1 \to 2_{is}$, ὁπότε:

$$p_1/p_2 = \left(\frac{T_1}{T_{2_{is}}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{13}$$

Ὁ νόμος διατήρησης τῆς ἐνέργειας γιά τό σχετικό σύστημα καί μόνιμη ροή δίνει:

$$h_{t_{R_1}} = h_{t_{R_2}} = h_1 + \frac{W_1^2}{2} - \frac{U_1^2}{2} = h_{2_{is}} + \frac{W_{2_{is}}^2}{2} - \frac{U_2^2}{2} \tag{14}$$

Ἔχοντας $U_1 = U_2 = U$ καί τέλειο ἀέριο ἡ (14) γίνεται:

$$T_{2_{is}} = T_1 + \frac{W_1^2}{2C_p} - \frac{W_{2_{is}}^2}{2C_p} \tag{14'}$$

Μέ τή βοήθεια τοῦ λόγου ἀπωλειῶν $\psi = \frac{W_2}{W_{2_{is}}}$ προσδιορίζουμε:

$$W_{2_{is}} = \frac{W_2}{\psi} = \frac{370.36m/s}{0.85} = 435.72m/s \qquad W_{2_{is}} = 435.72m/s$$

Ἄρα ἀπό τήν (14') προκύπτει:

$$T_{2_{is}} = 837.92 + \frac{(162.44m/s)^2}{2\times 1004m^2/s^2\,{}^oK} - \frac{(435.72m/s)^2}{2\times 1004m^2/s^2\,{}^oK} = 756.51^o \qquad T_{2_{is}} = 756.51^oK$$

καί μέ ἀντικατάσταση στήν (13):

$$P_1/P_2 = \left(\frac{837.92^oK}{756.51^oK}\right)^{\frac{1.4}{0.4}} = 1.430 \qquad\qquad P_1/P_2 = 1.430$$

τελικά λοιπόν,

$$P_{t_o}/P_2 = \frac{P_{t_o}}{P_1} \times \frac{P_1}{P_2} = 1.4519 \times 1.430 = 2.076 \qquad\qquad P_{t_o}/P_2 = 2.076$$

6. Γιά νά προσδιοριστεῖ ὁ λόγος P_{t_o}/P_{t_2}, ἀρκεῖ νά βρεθεῖ ὁ λόγος P_2/P_{t_2}. Αὐτός θά προσδιοριστεῖ θεωρώντας τήν ἰσεντροπική μεταβολή ἀνάμεσα στίς ὁλικές καί στατικές συνθῆκες τῆς διατομῆς (2). Ἔτσι:

$$\frac{P_{t_2}}{P_2} = \left(\frac{T_{t_2}}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{14}$$

Ἡ στατική θερμοκρασία T_2, ὑπολογίζεται ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ὁλικῆς ἐνθαλπίας γιά τέλειο ἀέριο:

$$T_2 = T_{t_2} - \frac{V_2^2}{2C_p} = 793.26^oK - \frac{(145.5m/s)^2}{2\times 1004m^2/s^2} = 782.75^oK \qquad\qquad T_2 = 782.75^oK$$

Ἄρα ἡ (14) παρέχει:

$$P_{t_2}/P_2 = \left(\frac{793.26^oK}{782.75^oK}\right)^{\frac{1.4}{0.4}} = 1.0479 \qquad\qquad P_{t_2}/P_2 = 1.0479$$

Καί τελικά:

$$P_{t_o}/P_{t_2} = \frac{P_{t_o}}{P_2} \times \frac{P_2}{P_{t_2}} = \frac{2.076}{1.0479} = 1.981 \qquad\qquad P_{t_o}/P_{t_2} = 1.981$$

7. Ὁ βαθμός ἀπόδοσης "ὁλικῶν πρός ὁλικές συνθῆκες" εἶναι:

$$(\eta_{t-t})_T = \frac{h_{t_o} - h_{t_2}}{h_{t_o} - h_{t_{2is}}}$$

καί γιά τέλειο ἀέριο:

$$(\eta_{t-t})_T = \frac{T_{t_o} - T_{t_2}}{T_{t_o} - T_{t_{2is}}} \tag{15}$$

Ἡ θερμοκρασία $T_{t_{2is}}$ προσδιορίζεται ἀπό τήν ἰσεντροπική μεταβολή 0 → 2, ἀπό ὁλικές σέ ὁλικές συνθῆκες. Ἔχουμε, λοιπόν:

$$\frac{T_{t_o}}{T_{t_{2is}}} = \left(\frac{P_{t_o}}{P_{t_2}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

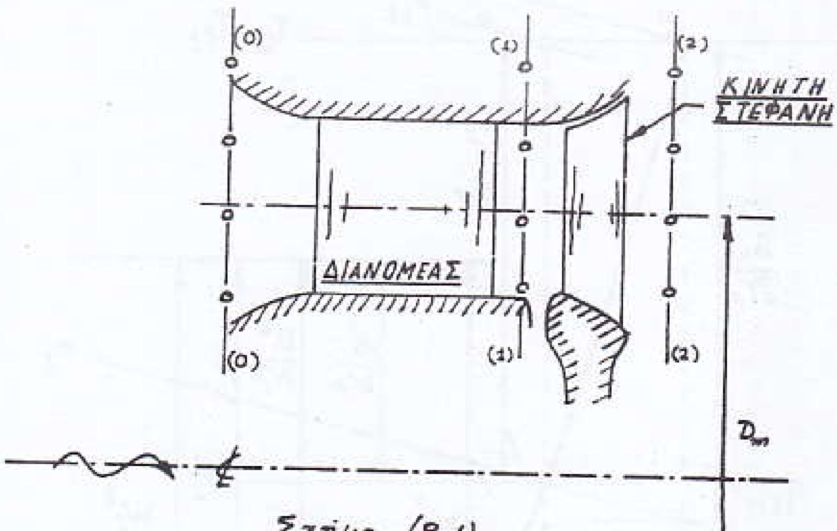
καί ἄρα:

$$T_{t_{2is}} = \frac{T_{t_o}}{\left(\frac{P_{t_o}}{P_{t_2}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \frac{922}{(1.981)^{3.5}} = 758.41^{o}K \qquad T_{t_{2is}} = 758.41^{o}K$$

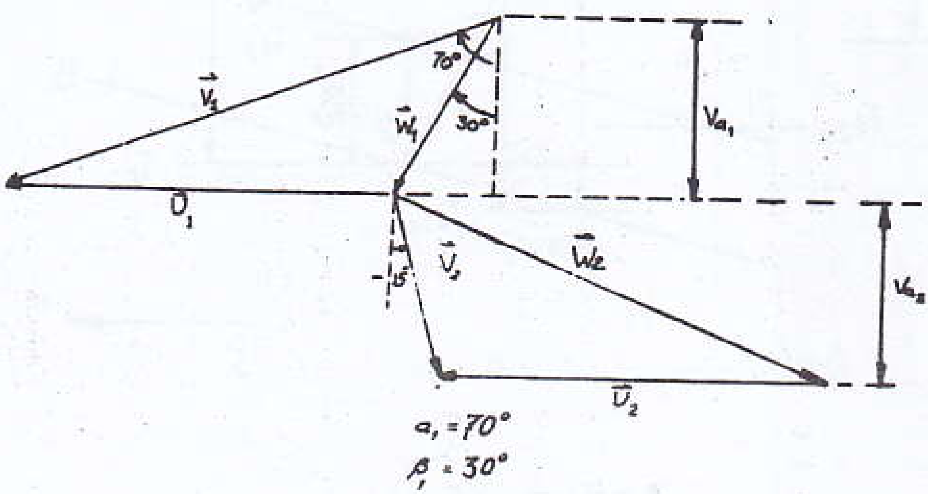
Μέ ἀντικατάσταση στήν (15) ἔχουμε:

$$(\eta_{t-t})_T = \frac{922^{o}K - 793.3^{o}K}{922^{o}K - 758.41^{o}K} = 0.787 \qquad (\eta_{t-t})_T = 0.787$$

Π8-9



Σχήμα (8.1)



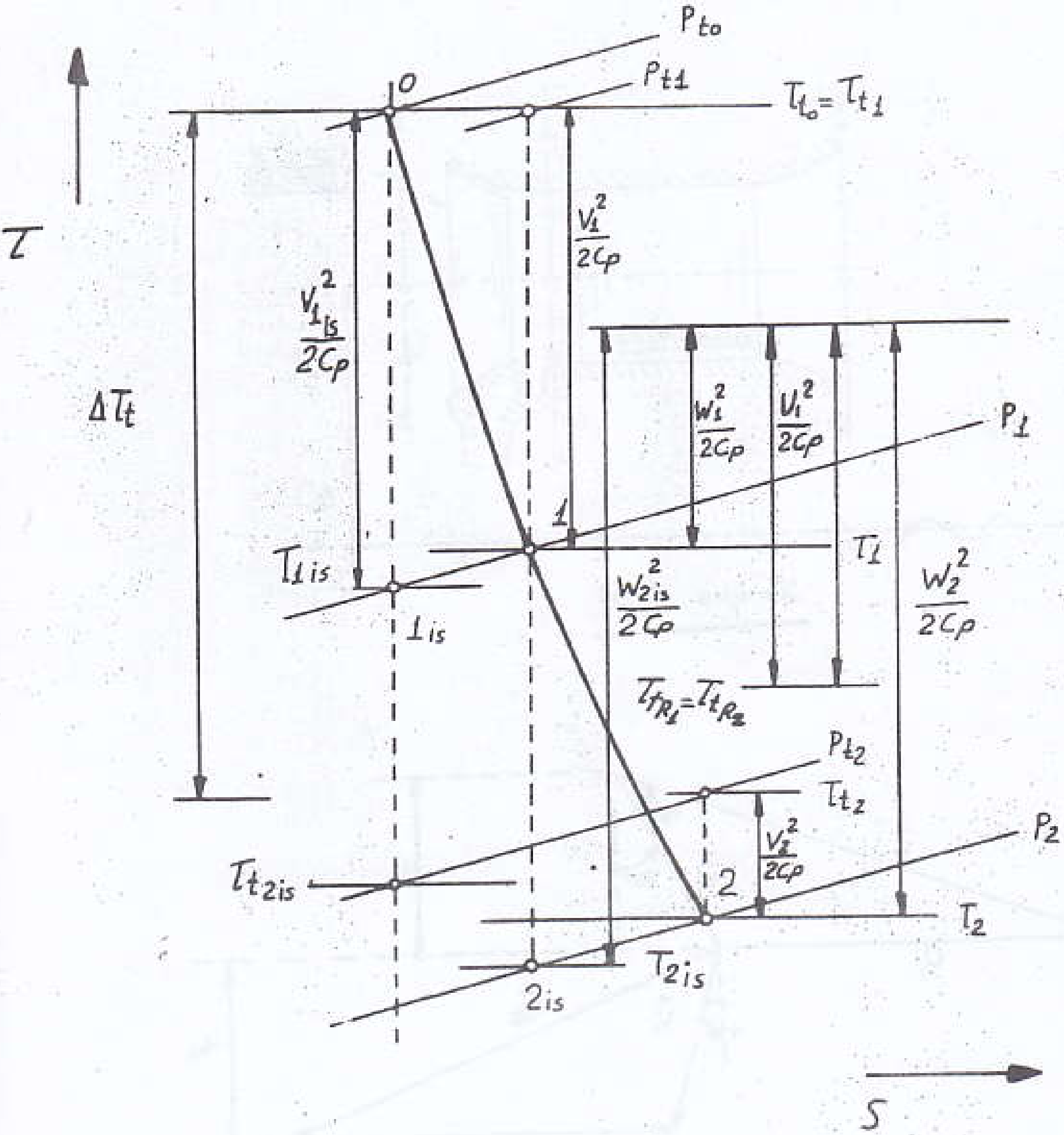
$a_1 = 70°$

$\beta_1 = 30°$

$a_2 = -15°$

$\beta_2 = (-)$

Σχήμα (8.2)



T
S
ΔTt
Pto
Pt1
Tto = Tt1
0
1
2
V1is² / 2Cp
V1² / 2Cp
W1² / 2Cp
U1² / 2Cp
P1
T1is
1is
T1
W2is² / 2Cp
W2² / 2Cp
TtR1 = TtR2
Pt2
Tt2
V2² / 2Cp
P2
Tt2is
T2
T2is
2is

Σχήμα (8.3)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ Νο 9

Σέ μεγάλο δοχεῖο A πρέπει νά διατηρήσουμε κενό πίεσης p_o. Γι'αὐτό τό λόγο χρησιμοποιεῖται ἕνας ἀκτινικός φυσητήρας πού ἐκκενώνει ἀέρα ἀπό τό δοχεῖο στήν ἀτμόσφαιρα, ὅπως φαίνεται στό ΣΧΗΜΑ (9.1). Μιά παροχή μάζας ἴση μέ τήν ἀπομακρυνόμενη ἀπό τόν φυσητήρα εἰσέρχεται στό δοχεῖο A σέ σημεῖο τό ὁποῖο δέν φαίνεται στό σχῆμα. Στή διατομή (2), τό πλάτος τῆς κινητῆς πτερύγωσης τοῦ φυσητήρα εἶναι 0.0127m , καί ἴσο πρός τό ἀντίστοιχο πλάτος τοῦ ἀγωγοῦ μεταξύ τῶν διατομῶν (2) καί (3). Μεταξύ τῶν διατομῶν (3) καί (4) τό πλάτος τοῦ ἀγωγοῦ αὐξάνει σέ 0.0254m καί στή συνέχεια παραμένει σταθερό μέχρι τήν ἔξοδο (διατομή (5)) ὅπου ὁ φυσητήρας ἐκκενώνει τόν ἀέρα στήν ἀτμόσφαιρα.

Μετρήσεις πού ἔγιναν γιά μία ταχύτητα περιστροφῆς 10000RPM ἔδειξαν ὅτι ἡ ταχύτητα στή διατομή (1) εἶναι ἀξονική καί ἴση πρός 61m/s. Μετρήσεις στή διατομή (3) (πού ἔγιναν μέ σωλῆνες pitot) ἔδειξαν ὅτι ἡ ταχύτητα στή διατομή αὐτή εἶναι ὁμοιόμορφη καί σχηματίζει γωνία 60^o μέ τήν ἀκτινική κατεύθυνση (30^o μέ τή περιφερειακή κατεύθυνση). Ἡ πτερύγωση μεταξύ τῶν διατομῶν (4) καί (5) δίδει ὁμοιόμορφη καί ἀκτινική ροή στήν ἔξοδό της (διατομή (5)). Ἡ πυκνότητα τοῦ ἀέρα μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σταθερή καί ἴση πρός $1.2kg/m^3$ γιά ὅλες τίς διατομές.

Ἄν ἀμεληθοῦν οἱ τριβές καί οἱ διαρροές μέσα ἀπό τούς λαβυρίνθους, ζητεῖται νά ὑπολογιστοῦν, μέ τά παραπάνω δεδομένα:

(α) Ἡ ροπή πού ἀσκεῖται ἀπό τή ροή στήν περιστρεφόμενη πτερύγωση τοῦ φυσητήρα

(β) Ἡ θεωρητική ἰσχύς πού χρειάζεται γιά νά κινηθεῖ ὁ φυσητήρας.

(γ) Ἡ ροπή πού ἀσκεῖται στό κέλυφος C τοῦ ΣΧΗΜΑΤΟΣ (3.4), γιά νά βρεθεῖ σέ ποιό φορτίο θά πρέπει νά ὑπολογιστοῦν οἱ κοχλίες τοῦ ὑπόβαθρου στό D.

(δ) Οἱ τιμές τῶν ταχυτήτων καί οἱ κατευθύνσεις τους, καθώς καί οἱ στατικές πιέσεις στίς διατομές (1), (2), (3), (4) καί (5), ἄν ἡ στατική πίεση p_5 εἶναι ἴση πρός τήν ἀτμοσφαιρική πίεση (= $103.300 Nt/m^2$).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Γιά ροή χωρίς τριβές ἡ ἐνέργεια πού προσδίδεται στή ροή μεταξύ τῶν διατομῶν (1) καί (2) εἶναι ἴση πρός τήν ἀποδιδόμενη ἀπό τόν κινητήρα. Ἡ ἐνέργεια πού προστίθεται στή ροή αὐξάνει τήν ὁλική πίεση $p_t = p + \frac{\rho}{2} V^2$. Γιά ἁπλότητα ἔχουμε θεωρήσει ἀσυμπίεστη ροή. Τό πρόβλημα, ὅμως, θά πρέπει ν'ἀντιμετωπιστεῖ στή γενική του μορφή καί νά καταρτιστεῖ θερμοδυναμικό διάγραμμα στό ὁποῖο νά φαίνονται οἱ ἀντίστοιχες μεταβολές κατάστασης.

(ε) Τό κενό p_o πού μπορεῖ νά διατηρεῖται μέσα στό δοχεῖο Α ὅταν ὁ φυσητήρας δουλεύει στό κανονικό σημεῖο λειτουργίας του.

(στ) Τό κενό p_o τό ὁποῖο θά ἔχουμε ἄν τό πλάτος τοῦ ἀγωγοῦ (ἐπιβραδυντῆ) C εἶναι σταθερό καί ἴσο πρός 0.0127m , μεταξύ τῶν διατομῶν (2) καί (5), ἐνῶ οἱ ταχύτητες στίς διατομές (1) καί (3) παραμένουν ἴδιες μέ τήν προηγούμενη περίπτωση.

(ζ) Ἐάν οἱ ροπές πού ὑπολογίστηκαν στά ἐρωτήματα (α) καί (γ) ἀλλάζουν γιά τήν περίπτωση πού τό πλάτος τοῦ ἀγωγοῦ μεταξύ (2) καί (5) παραμένει σταθερό (ὅπως δηλαδή ὁρίστηκε στό ἐρώτημα (στ)).

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u> Ὅλες οἱ μεταβολές νά θεωρηθοῦν ἰσεντροπικές (χωρίς ἀπώλειες). Γιά ἀσυμπίεστη ροή νά ληφθεῖ:

$$\Delta h_t = \frac{\Delta p_t}{\rho}$$

ΛΥΣΗ

Κατ'ἀρχήν παριστάνουμε στό διάγραμμα T-s τήν μεταβολή τοῦ ἐργαζόμενου μέσου. Τό σχῆμα (9.2) παριστάνει τήν μεταβολή αὐτή.

α. Δεδομένου ὅτι ἡ ροή θεωρεῖται χωρίς τριβές καί συνεκτικότητα καί ἐφ'ὅσον στήν διατομή (3) δίνεται ὅτι ἡ διανομή τῆς ταχύτητας εἶναι ὁμοιόμορφη, συνάγεται ὅτι καί στή διατομή (2) ἡ διανομή τῆς ταχύτητας θά εἶναι ὁμοιόμορφη.
Ἐφαρμόζοντας τό θεώρημα τῆς διατήρησης τῆς ροπῆς τῆς ὁρμῆς, μέ τήν μορφή τῆς ἐξίσωσης (2.94α), μεταξύ τῶν διατομῶν (1) καί (2), ἔχουμε γιά τήν ροπή πού ἀσκεῖται ἀπό τό ρευστό στήν πτερύγωση τοῦ φυσητήρα:

$$M_I = m_s(R_1V_{u_1} - R_2V_{u_2})$$

Ἀλλά γιά τόν ἀγωγό C, μέσα στόν ὁποῖο δέν ὑπάρχουν στερεά σώματα καί ἐπομένως δέν ἀσκοῦνται δυνάμεις στό ρευστό, θά ἰσχύει μεταξύ τῶν διατομῶν (2) καί (3):

$$R_2V_{u_2} - R_3V_{u_3} = 0 \qquad ἤ \qquad R_2V_{u_2} = R_3V_{u_3}$$

Λαμβάνοντας ὑπ'ὄψη ὅτι ἡ V_1 εἶναι ἀξονική, ἔχουμε γιά τήν παροχή μάζας:

$$m_s = \rho_1 S_1 V_1 = \rho_1 \frac{\pi D_1^2}{4} V_1 = 1.2\text{kg/m}^3 \times \frac{\pi}{4} \times 0.102^2\text{m}^2 \times 60\text{m/s} = 0.588\text{kg/s} \qquad m_s = 0.588\text{kg/s}$$

Ἐφαρμόζοντας τήν ἐξίσωση συνεχείας μεταξύ τῶν διατομῶν (1) καί (3) παίρνουμε:

$$m_s = \rho S_1 V_1 = \rho S_3 V_{r_3} \qquad ἤ \qquad \frac{\pi D_1^2}{4} V_1 = \pi D_3 b_3 V_{r_3}$$

Προκύπτει ἐπομένως:

$$V_{r_3} = \frac{D_1^2}{4b_3D_3} V_1 = \frac{0.102^2\text{m}^2}{4\times 0.0127\text{m}\times 0.254\text{m}} \times 60\text{m/s} = 48.379\text{m/s} \qquad V_{r_3} = 48.379\text{m/s}$$

Ἀλλά :

$$V_{u_3} = V_{r_3}\tan\alpha_3 = 48.379\text{m/s} \times \tan 60^{\circ} = 83.794\text{m/s} \qquad V_{u_3} = 83.794\text{m/s}$$

$V_{u_1} = 0$ (ἀξονική εἴσοδος)

Τελικά ἔχουμε:

$M_I = - m_s r_3 V_{u_3} = - 0.588kg/s \times 0.127m \times 83.794m/s = -6.261Nt\ m$ $\qquad M_I = - 6.261Nt\ m$

β. Ἡ θεωρητική ἰσχύς πού χρειάζεται γιά νά κινηθεῖ ὁ φυσητήρας εἶναι:

$P = \omega M_I$

ὅπου:

$\omega = \frac{\pi N}{30} = \frac{3.14 \times 10000rpm}{30} = 1047.197s^{-1}$

Ἄρα:

$P = -1047.197s^{-1} \times 6.261Nt/m = - 6556.52W = - 6.6KW$ $\qquad P = - 6556.5W$

γ. Γιά τή ροπή πού ἀσκεῖται στό κέλυφος C ἀρκεῖ νά βροῦμε τήν ροπή πού ἀσκεῖται στήν σταθερή πτερύγωση (μεταξύ τῶν διατομῶν (4) καί (5)). Σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (2.92α), ἡ ροπή αὐτή εἶναι:

$M_C = m_s (R_4 V_{u_4} - R_5 V_{u_5})$

Λαμβανομένου ὅμως ὑπ'ὄψη ὅτι μεταξύ τῶν διατομῶν (3) καί (4) ἰσχύει:

$R_3 V_{u_3} - R_4 V_{u_4} = 0 \quad$ ἤ $\quad R_3 V_{u_3} = R_4 V_{u_4}$

καί ὅτι ἀκόμη ἀπό τά δεδομένα τοῦ προβλήματος ἔχουμε:

$V_{u_5} = 0$

καταλήγουμε στή σχέση:

$M_C = m_s R_3 V_{u_3} = - M_I = 6.261Nt\ m$ $\qquad M_C = 6.261\ Nt\ m$

δ. Γιά τόν ὑπολογισμό τῶν διαφόρων στοιχείων (ταχύτητα, στατική πίεση) στίς διατομές (2), (3) καί (4) καί (5), ἔχουμε τίς σχέσεις:

Γιά τήν περιφερειακή συνιστῶσα:

$$V_{u_2}R_2 = V_{u_3}R_3 = V_{u_4}R_4 \qquad (V_{u_5} = 0)$$

Γιά τήν ἀκτινική συνιστῶσα:

$$V_{r_i} = \frac{m_s}{\rho S_i} = \frac{m_s}{\rho\pi D_i b_i} \qquad (i = 2,3,4,5)$$

Γιά τήν συνολική ταχύτητα:

$$V_i = (V_{u_i}^{\ 2} + V_{r_i}^{\ 2})^{1/2} \qquad (i = 2,3,4,5)$$

Γιά τήν στατική πίεση:

$$P_i = P_{t_i} - \frac{1}{2}\rho V_i^2 \qquad (i = 2,3,4,5)$$

ὅπου:

$$P_{t_2} = P_{t_3} = P_{t_4} = P_{t_5}$$

Γιά τήν διατομή (5) δίδεται:

$$P_5 = P_{atm} = 1.033\times 10^5 Nt/m^2$$

Ἐξ' ἄλλου εἶναι:

$$V_5 = V_{r_5} = \frac{m_s}{\rho\pi D_5 b_5} = \frac{0.588 kg/s}{1.2 kg/m^3 \times\pi\times 0.508 m\times 0.0254 m} = 12.095 m/s \qquad V_5 = 12.095 m/s$$

ὁπότε:

$$P_{t_5} = P_5 + \frac{1}{2}\rho V_5^2 = 1.033\times 10^5 Nt/m^2 + \frac{1}{2}\times 1.2 kg/m^3\times 12.095^2 m^2/s^2 =$$

$$= 1.033\times 10^5 + 0.00088\times 10^5 = 1.03388\times 10^5\ Nt/m^2 \qquad P_{t_5} = 1.03388\times 10^5 Nt/m^2$$

Μετά άπό τά παραπάνω καταρτίζουμε τόν άκόλουθο πίνακα, όπου γιά τήν έπιφάνεια S_i λαμβάνουμε:

$S_i = \pi D_i b_i$ (i = 2,3,4,5)

	S_i (m^2)	V_{u_i} (m/s)	V_{r_i} (m/s)	V_i (m/s)	p_i (Nt/m^2)
(2)	0.00818	I04.85	60.530	121.068	94.593.52
(3)	0.0I0I3	83.794	48.400	96.768	97.769.57
(4)	0.02841	59.790	17.257	62.231	I0I.064.38
(5)	0.04054	0	12.094	12.094	I03.300.00

ε. Τό κενό p_o πού μπορεῖ νά διατηρεῖται μέσα στό δοχεῖο Α, όταν ό φυσητήρας δουλεύει στό κανονικό σημεῖο λειτουργίας του, ίσοῦται μέ τήν όλική πίεση p_{t_1} (θεωροῦμε ότι ή ταχύτητα μέσα στό δοχεῖο Α εἶναι πρακτικά μηδενική), Γιά τήν εὕρεση τῆς p_{t_1} έχουμε:

$$p_{t_2} - p_{t_1} = \Delta p_t = \rho\Delta h_t = \rho\frac{P}{m_s} = 1.2\,\frac{kg}{m^3}\times\frac{6556.52W}{0.588kg/s} = 13373Nt/m^2 \qquad \Delta p_t = 13373.15Nt/m^2$$

Έπομένως:

$$p_o = p_{t_1} = p_{t_2} - \Delta p_t = I03388 - 13373.15 = 90014.85Nt/m^2 \qquad p_o = 90014.85Nt/m^2$$

στ. Θά έφαρμόσουμε τίς ίδιες σχέσεις πού έφαρμόσαμε στό έρώτημα δ. Έπειδή ή ταχύτητα V_1 παραμένει σταθερή (ίδια μέ τήν προηγούμενη περίπτωση), έπεται ότι καί ή παροχή m_s θά παραμείνει άναλλοίωτη. Αύτό σημαίνει ότι ή ταχύτητα στήν έξοδο (V_5) θά μεταβληθεῖ (παραμένοντας όμως άκτινική): θά εἶναι:

$$V_5' = \frac{m_s}{\rho\pi D_5 b_5'} = \frac{0.588kg/s}{1.2kg/m^2\times\pi\times0.508m\times0.0127m} = 24.189m/s \qquad V_5' = 24.189m/s$$

Δεδομένου ότι ή στατική πίεση στήν έξοδο (p_5) δέν μπορεῖ παρά νά εἶναι ίση μέ τήν άτμοσφαιρική, θά έχουμε γιά τήν όλική πίεση:

$$p_{t_5}' = p_5 + \frac{1}{2}\rho V_5'^2 = 103300Nt/m^2 + \frac{1}{2}\times1.2kg/m^3\times24.189^2 m^2/s^2 =$$

$$= I03300 + 351.07 = I03651.07Nt/m^2 \qquad p_{t_5}' = I03651.07Nt/m^2$$

θά εἶναι φυσικά:

$$p'_{t_2} = p'_{t_3} = p'_{t_4} = p'_{t_5}$$

Ἐξ ἄλλου ἀμετάβλητη ταχύτητα στή διατομή (3) σημαίνει ἀμετάβλητη ταχύτητα καί στή διατομή (2), διότι:

$$V'_{r_3} = \frac{m_s}{\rho\pi D_3 b_3} = V_{r_3}$$

$$V'_{u_3} = (V_3^2 - V'^2_{r_3})^{1/2} = (V_3^2 - V_{r_3}^2)^{1/2} = V_{u_3}$$

$$V'_{u_2} = \frac{R_3 V'_{u_3}}{R_2} = \frac{R_3 V_{u_3}}{R_2} = V_{u_2}$$

$$V'_{r_2} = \frac{m_s}{\rho\pi D_2 b_2} = V_{r_2}$$

$$V'_2 = (V'^2_{u_2} + V'^2_{r_2})^{1/2} = (V_{u_2}^2 + V_{r_2}^2)^{1/2} = V_2$$

Δεχόμενοι σταθερή ταχύτητα περιστροφῆς τῆς ἀτράκτου, θά ἔχουμε σταθερή παρεχόμενη στόν φυσητήρα ἰσχύ, διότι:

$$P' = \omega M'_I = \omega m_s (R_1 V'_{u_1} - R_2 V_{u_2}) = -\omega m_s R_2 V_{u_2} = P$$

Αὐτό σημαίνει ὅτι θά μείνει σταθερή ἡ διαφορά:

$$\Delta p'_t = p'_{t_2} - p'_{t_1} = \rho \Delta h'_t = \rho \frac{P'}{m_s} = \rho \frac{P}{m_s} = \Delta p_t$$

ὁπότε:

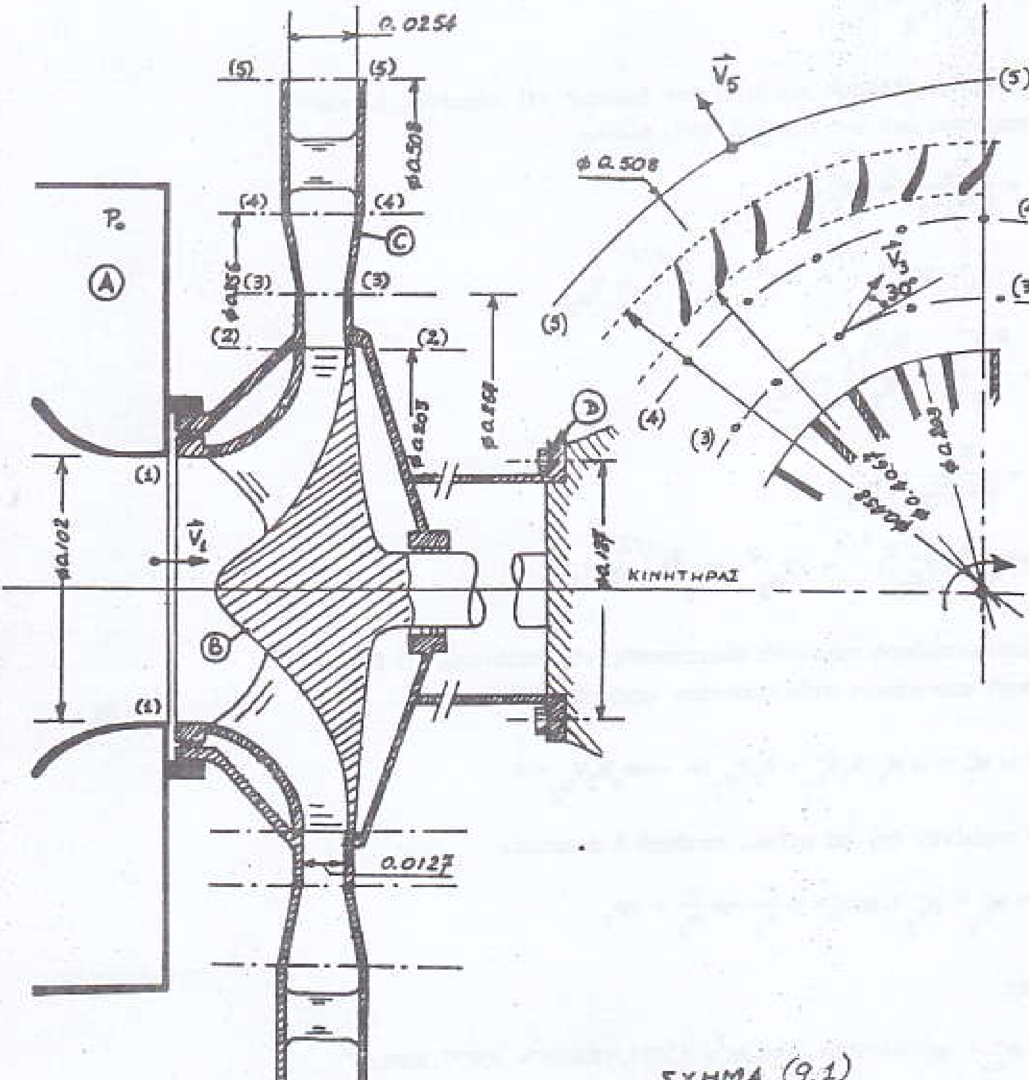
$$p'_{t_1} = p'_{t_2} - \Delta p'_t = 103651.07 Nt/m^2 - 13373.15 Nt/m^2 = 90277.92 Nt/m^2$$

Ἄρα:

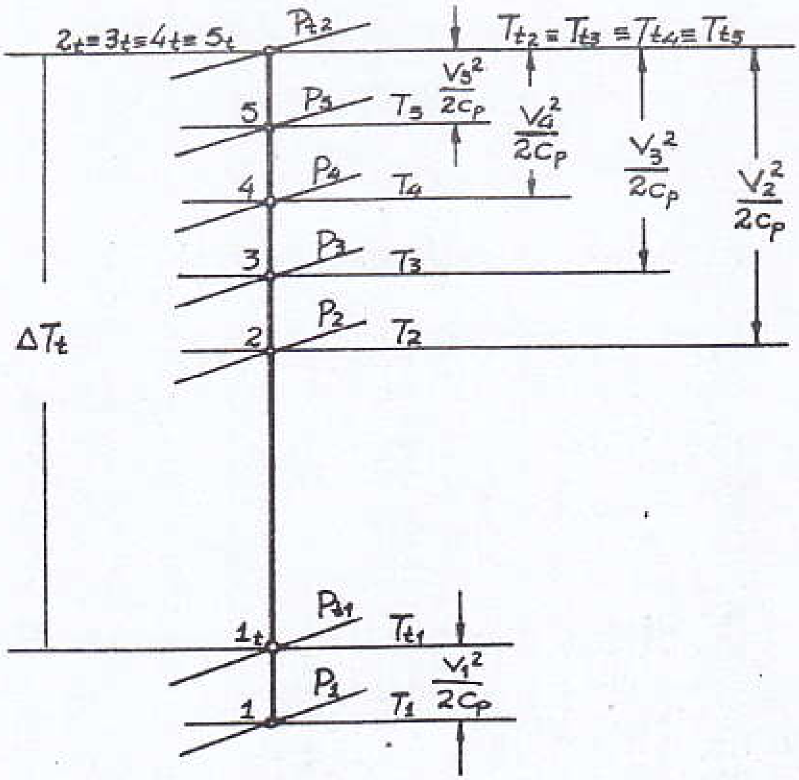
$$p'_o = p'_{t_1} = 90277.92 Nt/m^2$$

$$p'_o = 90277.92 Nt/m^2$$

ζ. Ὅπως εἴπαμε, ἡ ροπή πού μεταφέρεται στόν φυσητήρα (M_I) δέν μεταβάλλεται.
Ἀλλά καί ἡ ροπή πού ἀσκεῖται στό κέλυφος (M_C) παραμένει ἀναλλοίωτη, διότι, ὅπως δείχτηκε, ἰσοῦται μέ τήν προηγούμενη (ἀπόλυτη τιμή).


0.0254
(5)
(4)
(3)
(2)
(1)
φ0.508
$\vec{V}_5$
$\vec{V}_3$
$\vec{V}_1$
30°
A
B
C
D
0.0127
ΚΙΝΗΤΗΡΑΣ

ΣΧΗΜΑ (9.1)


$2_t \equiv 3_t \equiv 4_t \equiv 5_t$
P_{t2}
$T_{t2} \equiv T_{t3} \equiv T_{t4} \equiv T_{t5}$
$\frac{V_5^2}{2c_p}$
$\frac{V_4^2}{2c_p}$
$\frac{V_3^2}{2c_p}$
$\frac{V_2^2}{2c_p}$
5
P_5
T_5
4
P_4
T_4
3
P_3
T_3
2
P_2
T_2
ΔT_t
1_t
P_{t1}
T_{t1}
$\frac{V_1^2}{2c_p}$
1
P_1
T_1

ΣΧΗΜΑ (9.2)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ Νο ΙΟ

Τό σχῆμα (ΙΟ.1) παρουσιάζει τή διάταξη μιᾶς βαθμίδας συμπιεστῆ μικτῆς ροῆς. Γιά μιά πρώτη μελέτη τοῦ συμπιεστῆ ἐπιθυμοῦμε νά κάνουμε ὑπολογισμό σέ μονοδιάστατη βάση λαμβάνοντας σάν ἀντιπροσωπευτική μεσημβρινή γραμμή ροῆς τή σχηματιζόμενη ἀπό τίς μέσες ἀκτίνες τῆς κάθε διατομῆς.

Στό σχῆμα(10.1) παρουσιάζονται τά γεωμετρικά δεδομένα πού ἔχουμε στή διάθεσή μας.

Ἐπί πλέον γνωρίζουμε ὅτι στήν εἴσοδο ἡ ταχύτητα V_1 εἶναι ἀξονική καί ἴση πρός 127 m/s, ὅτι ἡ σχετική γωνία τῆς ροῆς στήν εἴσοδο εἶναι $\beta_1 = -60^{o}$ καί ὅτι τό ἐργαζόμενο μέσο εἶναι ἀέρας σταθερῶν συντελεστῶν εἰδικῆς θερμότητας μέ λόγο συντελεστῶν εἰδικῶν θερμοτήτων $\gamma = 1.4$ καί σταθερά ἀερίου $R_g = 287\ m^2/s^2,{}^{o}K$. Τέλος ἡ ὁλική θερμοκρασία εἰσόδου εἶναι $T_{t_1} = 288^{o}K$ καί ἡ ἀντίστοιχη ὁλική πίεση $P_{t_1} = 1.033\times 10^5 Nt/m^2$.

Μέ αὐτά τά δεδομένα ζητοῦνται:

α. Νά βρεθῆ ἡ κατάλληλη ταχύτητα περιστροφῆς τοῦ συμπιεστῆ γιά τήν προδιαγραφόμενη λειτουργία.

β. Νά ὑπολογισθοῦν ὅλα τά στοιχεῖα τῆς κατάστασης τοῦ ἐργαζόμενου μέσου στήν εἴσοδο τοῦ συμπιεστῆ (ταχύτητα, ἀριθμός Mach, πίεση, θερμοκρασία) στό σχετικό καί τό ἀπόλυτο σύστημα.

γ. Ἄν δεχθοῦμε ὅτι ἡ σχετική γωνία ἐξόδου τοῦ ρευστοῦ ὡς πρός τήν μεσημβρινή κατεύθυνση εἶναι $\beta_2 = -70^{o}$ καί ὅτι ἡ ἐπιτρεπόμενη ἐπιβράδυνση μέσα στήν κινητή πτερύγωση εἶναι $W_2/W_1 = 0.80$, νά ὑπολογιστοῦν ὅλα τά στοιχεῖα τῆς κατάστασης τοῦ ρευστοῦ στήν ἔξοδο. Νά ληφθεῖ ὑπ' ὄψη ὅτι οἱ ἐσωτερικές τριβές ἔχουν σάν ἀποτέλεσμα πτώση τῆς ὁλικῆς πίεσης μέσα στήν κινητή πτερύγωση ἴση μέ $0.1\times 10^5\ Nt/m^2$.

δ. Νά ὑπολογιστεῖ μέ τίς παραπάνω προϋποθέσεις ὁ ἰσεντροπικός βαθμός ἀπόδοσης, ὁλικῶν πρός ὁλικές συνθῆκες, τῆς κινητῆς πτερύγωσης τοῦ συμπιεστῆ.

ε. Ἄν οἱ ἀπώλειες στόν κενό χῶρο μεταξύ τῶν διατομῶν (2) καί (3) καί μέσα στή σταθερή πτερύγωση θεωρηθοῦν ἀμελητέες καί μέ τήν ὑπόθεση ὅτι:

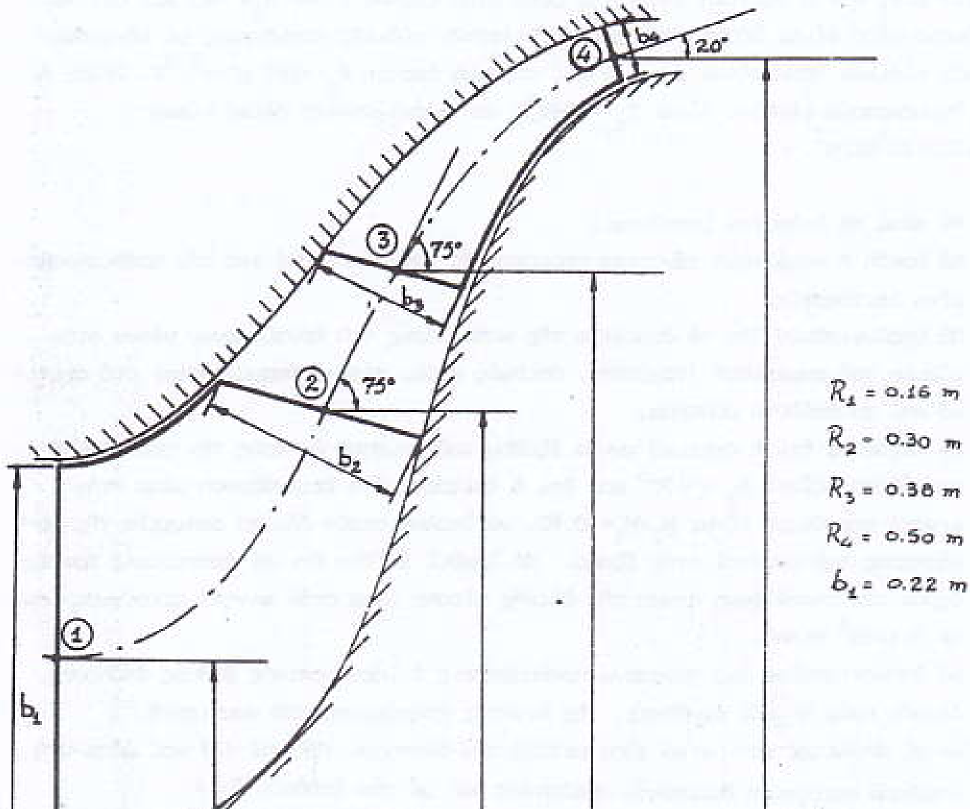
(i) ἡ μεσημβρινή συνιστώσα τῆς ταχύτητας στή διατομή (3) εἶναι ἴση μέ τήν ἀντίστοιχη συνιστώσα στή διατομή (2) $(V_{m_2} = V_{m_3})$.

(ii) ἡ ταχύτητα στήν ἔξοδο τοῦ συμπιεστῆ ἔχει τήν μεσημβρινή κατεύθυνση $(V_4 = V_{m_4})$.

νά ὑπολογιστοῦν τά ὕψη τῶν πτερυγίων b_2, b_3 καί b_4 ἔτσι, ὥστε ἡ ἐπιβράδυνση στή σταθερή πτερύγωση νά εἶναι ἴση μέ 0.70.

στ. Νά ὑπολογιστοῦν ἡ δύναμη καί ἡ ἀξονική ροπή πού ἀσκοῦνται στή σταθερή πτερύγωση.

Νά παρασταθεῖ στό διάγραμμα T-s ἡ μεταβολή τοῦ ἐργαζόμενου μέσου ἀπό τήν εἴσοδο μέχρι τήν ἔξοδο τοῦ συμπιεστῆ.



ΣΧΗΜΑ(10.1)

ΛΥΣΗ ΠΙΟ-3

Κατ'άρχήν παριστάνουμε στό διάγραμμα T-s τήν μεταβολή τοῦ έργαζόμενου μέσου άπό τήν είσοδο στήν έξοδο τοῦ συμπιεστῆ. Τό σχῆμα (IO.2) παριστάνει τήν μεταβολή αύτή.

α. Τό τρίγωνο ταχυτήτων στήν είσοδο θά έχει τήν μορφή τοῦ σχήματος (IO.3). Εἶναι:

$U_1 = V_1 \tan\beta_1 = 127 m/s \times \tan 60^o = 219.97 m/s$ $\qquad U_1 = 219.97 m/s$

$\omega = \frac{U_1}{R_1} = \frac{219.97 m/s}{0.16 m} = 1374.8\ s^{-1}$ $\qquad \omega = 1374.8 s^{-1}$

$N = \frac{\omega \times 30}{\pi} = 13128.5\ rpm$ $\qquad N = 13128.5 rpm$

β. Από τό τρίγωνο ταχυτήτων έχουμε:

$V_1 = 127 m/s$ (δίδεται) $\qquad V_1 = 127 m/s$

$W_1 = V_1/\cos\beta_1 = \frac{127 m/s}{\cos 60^o} = 254 m/s$ $\qquad W_1 = 254 m/s$

$U_1 = 219.97 m/s$ (βρέθηκε) $\qquad U_1 = 219.97 m/s$

$W_{u_1} = -U_1 = -219.97 m/s$ $\qquad W_{u_1} = -219.97 m/s$

Γιά τήν εὕρεση τῆς θερμοκρασίας έχουμε:

$h_{t_1} = h_1 + \frac{1}{2} V_1^2$ ή $\quad C_p T_{t_1} = C_p T_1 + \frac{1}{2} V_1^2$

όπότε:

$$T_1 = T_{t_1} - \frac{V_1^2}{2C_p} = 288^oK - \frac{127^2 m^2/s^2}{2 \cdot 1004 m^2/s^2, ^oK} = 288^o - 8.03^o = \qquad T_1 = 279.97^oK$$

$=279.97^oK$

Γιά τήν εὕρεση τῆς πίεσης έχουμε γιά τήν ίσεντροπική μεταβολή $1 \to 1_t$:

$$P_1 = P_{t_1} \left(\frac{T_1}{T_{t_1}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.033 \times 10^5 Nt/m^2 \times \left(\frac{279.97}{288.00} \right)^{\frac{1.4}{0.4}} = \qquad P_1 = 0.9356 \times 10^5 Nt/m^2$$

$= 1.033 \cdot 10^5 \cdot 0.906 = 0.9356 \times 10^5 Nt/m^2$

Γιά τήν εὕρεση τῆς πυκνότητας ἔχουμε:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R_g T_1} = \frac{0.9356\times IO^5 Nt/m^2}{287m^2/s^2,{}^{o}K\times 279.97^{o}K} = 1.164kg/m^2 \qquad \rho_1 = 1.164kg/m^3$$

Γιά τήν εὕρεση τοῦ ἀριθμοῦ Mach ἔχουμε:

$$M_1 = \frac{V_1}{\sqrt{\gamma R_g T_1}} = \frac{127m/s}{\sqrt{1.4\times 287m^2/s^2,{}^{o}K\times 279.97^{o}K}} = \frac{127m/s}{335.4m/s} = 0.379 \qquad M_1 = 0.379$$

Στό σχετικό σύστημα εἶναι:

$$M_{1_R} = \frac{W_1}{\alpha_1} = \frac{254m/s}{335.4m/s} = 0.757$$

Τέλος γιά τήν παροχή ἔχουμε:

$$m_s = \rho_1 \pi D_1 b_1 V_1 = 1.164kg/m^3\times\pi\times 0.32m\times 0.22m\times 127m/s = 32.695kg/s \qquad m_s = 32.695kg/s$$

γ. Τό τρίγωνο ταχυτήτων στή θέση 2 θά ἔχει τήν μορφή τοῦ σχήματος (IO.3). Εἶναι:

$$U_2 = \omega R_2 = 1374.8s^{-1}\times 0.30m = 412.44m/s \qquad U_2 = 412.44m/s$$

Ἀκόμη, ἐφ᾽ὅσον δεχθήκαμε $W_2/W_1 = 0.80$, εἶναι:

$$W_2 = 0.8\times W_1 = 0.8\times 254m/s = 203.2m/s \qquad W_2 = 203.2m/s$$

Μετά ἀπό αὐτά βρίσκονται εὔκολα καί τά ὑπόλοιπα στοιχεῖα:

$$W_{u_2} = W_2 \sin\beta_2 = 203.2m/s\cdot\sin(-70^{o}) = -190.946m/s \qquad W_{u_2} = -190.946m/s$$

$$V_{u_2} = U + W_{u_2}\ (\text{ἀλγεβρικά}) = 412.44-190.946 = 221.494m/s \qquad V_{u_2} = 221.494m/s$$

$$V_{m_2} = W_{m_2} = W_2\cos\beta_2 = 203.2m/s\times\cos(-70^{o}) = 69.498m/s \qquad V_{m_2} = 69.498m/s$$

$$V_2 = (V_{m_2}{}^2 + V_{u_2}{}^2)^{1/2} = (69.498^2 + 221.494^2)^{1/2} = 232.141m/s \qquad V_2 = 232.141m/s$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}\frac{V_{u_2}}{V_{m_2}} = \tan^{-1}\frac{221.494}{69.498} = 72.58^{o} \qquad \alpha_2 = 72.58^{o}$$

Στή συνέχεια υπολογίζουμε τά θερμοδυναμικά μεγέθη. Ἡ ἐνέργεια πού προσδίνεται στό ἐργαζόμενο μέσο καί πού ἐμφανίζεται σάν αὔξηση τῆς ἐνθαλπίας εἶναι κατά τά γνωστά:

$$\Delta h_t = C_p \Delta T_t = U_2 V_{u_2} - U_1 V_{u_1}$$

ὁπότε

$$\Delta T_t = T_{t_2} - T_{t_1} = \frac{U_2 V_{u_2} - U_1 V_{u_1}}{C_p} = \frac{412.44 m/s \times 221.49 m/s}{1004 m^2/s^2, {}^oK} = 90.99^oK$$

$$T_{t_2} = T_{t_1} + \Delta T_t = 288^o + 90.99^o = 378.99^oK \qquad T_{t_2} = 378.99^oK$$

Ἑπομένως ἔχουμε:

$$T_2 = T_{t_2} - \frac{V_2^2}{2C_p} = 378.99^o - \frac{232.141^2 m^2/s^2}{2 \times 1004 m^2/s^2, {}^oK} =$$

$$= 378.99^o - 26.837^o = 352.153^oK \qquad T_2 = 352.153^oK$$

Στό ἴδιο ἀποτέλεσμα καταλήγουμε ἄν θεωρήσουμε τήν σχέση:

$$h_{t_{R_1}} = h_{t_{R_2}}$$

ἡ ὁποία γράφεται καί:

$$h_1 + \frac{W_1^2}{2} - \frac{U_1^2}{2} = h_2 + \frac{W_2^2}{2} - \frac{U_2^2}{2}$$

ὁπότε:

$$T_2 = T_1 + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2C_p} - \frac{U_1^2 - U_2^2}{2C_p}$$

Θεωρώντας τό σχῆμα (10.2) παρατηροῦμε ὅτι γιά τήν ἰσεντροπική μεταβολή ἀπό τήν κατάσταση 1_t στήν κατάσταση $(T_{t_2}, P_{t_{2is}})$ ἰσχύει:

$$P_{t_{2is}} = P_{t_1} \left(\frac{T_{t_2}}{T_{t_1}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.033 \times 10^5 Nt/m^2 \left(\frac{378.99}{288}\right)^{\frac{1.4}{0.4}} =$$

$$= 1.033 \times 10^5 \times 2.614 = 2.7 \times 10^5 Nt/m^2 \qquad P_{t_{2is}} = 2.7 \times 10^5 Nt/m^2$$

Δίδεται ὅτι $\Delta p_{τάπ} = 0.1 \times 10^5 Nt/m^2$, ὅπου $\Delta p_{τάπ} = P_{t_{2_{is}}} - P_{t_2}$

Ἑπομένως:

$P_{t_2} = P_{t_{2_{is}}} - \Delta P_{\tau\dot{\omega}\pi} = 2.7\times 10^5 - 0.1\times 10^5 = 2.6\times 10^5 Nt/m^2$ $\qquad P_{t_2} = 2.6\times 10^5 Nt/m^2$

Στή συνέχεια βρίσκουμε όπως καί προηγουμένως:

$$T_{t_{2_{is}}} = T_{t_1}\left(\frac{P_{t_2}}{P_{t_1}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 288^oK\times\left(\frac{2.6\times 10^5}{1.033\times 10^5}\right)^{\frac{0.4}{1.4}} =$$

$$= 288\times 1.302 = 374.91^oK \qquad T_{t_{2_{is}}} = 374.91^oK$$

Επίσης έχουμε:

$$P_2 = P_{t_2}\left(\frac{T_2}{T_{t_2}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 2.6\times 10^5 Nt/m^2\times\left(\frac{352.153}{378.99}\right)^{\frac{1.4}{0.4}} = \qquad P_2 = 2.011\times 10^5 Nt/m^2$$

$$= 2.6\times 10^5 Nt/m^2\times 0.773 = 2.011\times 10^5 Nt/m^2$$

Τελικά:

$$\rho_2 = \frac{P_2}{R_g T_2} = \frac{2.011\times 10^5 Nt/m^2}{287m^2/s^2,^oK\times 352.153^oK} = 1.9894kg/m^3 \qquad \rho_2 = 1.9894kg/m^3$$

καί εφαρμόζοντας τήν εξίσωση συνεχείας:

$$b_2 = \frac{m_s}{2\pi R_2\rho_2 V_{m_2}} = \frac{32.695kg/s}{2\pi\times 0.3m\times 1.9894kg/m^3\times 69.498m/s} = 0.12545m \qquad b_2 = 0.12545m$$

Τέλος ό αριθμός Mach είναι:

$$M_2 = \frac{V_2}{\sqrt{\gamma R_g T_2}} = \frac{232.141m/s}{\sqrt{1.4\times 287m^2/s^2,^oK\times 352.153^oK}} = \frac{232.141}{376.158} = 0.617 \qquad M_2 = 0.617$$

Στό σχετικό σύστημα είναι:

$$M_{2_R} = \frac{W_2}{\alpha_2} = \frac{203.2m/s}{376.16m/s} = 0.54$$

δ. Ό βαθμός απόδοσης τής κινητής πτερύγωσης είναι:

$$(\eta_{is})_c = \frac{T_{t_{2_{is}}} - T_{t_1}}{T_{t_2} - T_{t_1}} = \frac{374.91-288.00}{378.99-288.00} = 0.955 \qquad (\eta_{is})_c = 0.955$$

ε. Γιά τόν κενό άγωγό μεταξύ τῶν διατομῶν 2 καί 3 ίσχύει:

$$R_2 V_{u_2} = R_3 V_{u_3}$$

Έτσι έχουμε:

$$V_{u_3} = V_{u_2} \frac{R_2}{R_3} = 221.494\text{m/s} \times \frac{0.30}{0.38} = 174.864\text{m/s} \qquad V_{u_3} = 174.864\text{m/s}$$

Έξ άλλου δίνεται ότι $V_{m_3} = V_{m_2}$ $\qquad V_{m_3} = 69.498\text{m/s}$

ένῶ άκόμη εἶναι:

$$U_3 = \omega R_3 = 1374.8\text{s}^{-1} \times 0.38\text{m} = 522.424\text{m/s} \qquad U_3 = 522.424\text{m/s}$$

Προκύπτουν έπομένως καί τά ύπόλοιπα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου ταχυτήτων:

$$W_{u_3} = V_{u_3} - U_3 = 174.864 - 522.424 = -347.56\text{m/s} \qquad W_{u_3} = -347.56\text{m/s}$$

$$V_3 = (V_{u_3}^{\ 2} + V_{m_3}^{\ 2})^{1/2} = 188.169\text{m/s} \qquad V_3 = 188.169\text{m/s}$$

$$W_3 = (W_{u_3}^{\ 2} + W_{m_3}^{\ 2})^{1/2} = 354.44\text{m/s} \qquad W_3 = 354.44\text{ m/s}$$

$$\alpha_3 = \tan^{-1} \frac{V_{u_3}}{V_{m_3}} = 68.325^{\circ} \qquad \alpha_3 = 68.325^{\circ}$$

$$\beta_3 = \tan^{-1} \frac{W_{u_3}}{W_{m_3}} = 78.692^{\circ} \qquad \beta_3 = 78.692^{\circ}$$

Άπό πλευρᾶς θερμοδυναμικῶν μεγεθῶν έχουμε:

$$T_{t_3} = T_{t_2} \qquad T_{t_3} = 378.99^{\circ}\text{K}$$

$$T_3 = T_{t_3} - \frac{V_3^{\ 2}}{2C_p} = 378.99^{\circ} - \frac{188.169^2\text{m}^2/\text{s}^2}{2 \times 1004\text{m}^2/\text{s}^2,{}^{\circ}\text{K}} =$$

$$= 378.99^{\circ} - 17.63^{\circ} = 361.36^{\circ}\text{K} \qquad T_3 = 361.36^{\circ}\text{K}$$

$$P_{t_3} = P_{t_2} \qquad P_{t_3} = 2.6 \times 10^5\text{Nt/m}^2$$

$$p_3 = p_{t_3}\left(\frac{T_3}{T_{t_3}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 2.6\times IO^5 Nt/m^2\times\left(\frac{361.36}{378.99}\right)^{\frac{1.4}{0.4}} =$$

$$= 2.6\times IO^5\times 0.8464 = 2.2\times IO^5 Nt/m^2 \qquad p_3 = 2.2\times IO^5 Nt/m^2$$

$$\rho_3 = \frac{p_3}{R_g T_3} = \frac{2.2\times IO^5 Nt/m^2}{287 m^2/s^2,{}^oK\times 361.36^oK} = 2.122 kg/m^3 \qquad \rho_3 = 2.122 kg/m^3$$

$$M_3 = \frac{V_3}{\sqrt{\gamma R_g T_3}} = \frac{188.169 m/s}{\sqrt{1.4\times 287 m^2/s^2,{}^oK\times 361.36^oK}} = \frac{188.169}{381.044} = 0.494 \qquad M_3 = 0.494$$

Τέλος γιά τό ὕψος τοῦ πτερυγίου ἔχουμε:

$$b_3 = \frac{m_s}{2\pi R_3\rho_3 V_{m_3}} = \frac{32.695 kg/s}{2\pi\times 0.38 m\times 2.122 kg/m^3\times 69.498 m/s} = 0.09285 m \qquad b_3 = 0.093 m$$

Γιά τήν διατομή 4 ἐξ'ἄλλου ἔχουμε:

$$V_4/V_3 = 0.7$$

$$V_4 = 0.7\times V_3 = 0.7\times 188.169 m/s = 131.718 m/s \qquad V_4 = 131.718 m/s$$

ἐνῶ ἔχει δοθεῖ ὅτι $V_{m_4} = V_4$ $\qquad V_{m_4} = 131.718 m/s$

Γιά τά θερμοδυναμικά μεγέθη ἔχουμε:

$$T_{t_4} = T_{t_3} \qquad T_{t_4} = 378.99^oK$$

$$T_4 = T_{t_4} - \frac{V_4^2}{2C_p} = 378.99^o - \frac{131.718^2 m^2/s^2}{2\times IOO4 m^2/s^2,{}^oK} =$$

$$= 378.99 - 8.64 = 370.35^oK \qquad T_4 = 370.35^oK$$

$$p_{t_4} = p_{t_3} \qquad p_{t_4} = 2.6\times IO^5 Nt/m^2$$

$$p_4 = p_{t_4}\left(\frac{T_4}{T_{t_4}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 2.6\times IO^5 Nt/m^2\times\left(\frac{370.35}{378.99}\right)^{\frac{1.4}{0.4}} =$$

$$= 2.6\times IO^5\times 0.92245 = 2.398\times IO^5 Nt/m^2 \qquad p_4 = 2.398\times IO^5 Nt/m^{-2}$$

$$\rho_4 = \frac{p_4}{R_g T_4} = \frac{2.398\times 10^5 Nt/m^2}{287m^2/s^2,^oK\times 370.35^oK} = 2.25644kg/m^3 \qquad \rho_4 = 2.256kg/m^3$$

$$M_4 = \frac{V_4}{\sqrt{\gamma R_g T_4}} = \frac{131.718m/s}{\sqrt{1.4\times 287m^2/s^2,^oK\times 370.35^oK}} = \frac{131.718}{385.755} = 0.34146 \qquad M_4 = 0.341$$

$$b_4 \; \frac{m_s}{2\pi R_4 \rho_4 V_{m_4}} = \frac{32.695kg/s}{2\pi\times 0.50m\times 2.256kg/m^3\times 131.718m/s} = 0.035m \qquad b_4^{\cdot} = 0.035m$$

στ. Ἡ στοιχειώδης δύναμη πού ἀσκεῖται στή σταθερή πτερύγωση εἶναι:

$$d\vec{F}_W = dm_s\vec{V}_3 - dm_s\vec{V}_4 - \vec{n}_1 p_3 dS_3 - \vec{n}_1 p_4 dS_4$$

ὅπου οἱ δυνάμεις λόγω τάσεων τριβῶν παραλείφθηκαν.

Βρίσκουμε τίς τρεῖς συνιστῶσες τῆς dF_W.

α. Ἀξονική κατεύθυνση.

Παίρνουμε τό ἐσωτερικό γινόμενο τῆς παραπάνω ἐξίσωσης πού δίνει τήν $d\vec{F}_W$ μέ τό μοναδιαῖο διάνυσμα $\vec{j}$ (στήν οὐσία θεωροῦμε τήν προβολή τῆς ἐξίσωσης στήν ἀξονική κατεύθυνση). Ἔχουμε:

$$\int d\vec{F}_W\cdot\vec{j} = \int_{S_3} dm_s\vec{V}_3\cdot\vec{j} - \int_{S_4} dm_s\vec{V}_4\cdot\vec{j} - \int_{S_3} \vec{n}_1\cdot\vec{j}p_3 dS_3 - \int_{S_4} \vec{n}_1\cdot\vec{j}p_4 dS$$

Εἶναι ὅμως:

$$\int d\vec{F}_W\cdot\vec{j} = \int dF_{W_a} = F_{W_a}$$

$$\vec{V}\cdot\vec{j} = V_a$$

$$(\vec{n}_1\cdot\vec{j})_3 = \cos(180^o + 75^o) = -\cos 75^o$$

$$(\vec{n}_1\cdot\vec{j})_4 = \cos 20^o$$

Ἐπίσης εἶναι:

$$V_{a_3} = V_{m_3}\cdot\cos 75^o = 69.498m/s\times 0.25882 = 17.987m/s$$

$$V_{a_4} = V_{m_4}\cdot\cos 20^o = 131.718m/s\times 0.93969 = 123.774m/s$$

Έτσι έχουμε τελικά:

$$\int dF_{W_\alpha} = \int_{S_3} dm_s V_{\alpha_3} - \int_{S_4} dm_s V_{\alpha_4} + \cos 75^o \int_{S_3} p_3 dS_3 - \cos 20^o \int_{S_4} p_4 dS_4$$

από τήν οποία παίρνουμε:

$$F_{W_\alpha} = m_s (V_{\alpha_3} - V_{\alpha_4}) + p_3 S_3 \cos 75^o - p_4 S_4 \cos 20^o =$$

$$=32.695 kg/s \times (17.987 - 123.774) m/s +$$

$$+ 2.2 \times 10^5 Nt/m^2 \times 2\pi \times 0.38 m \times 0.093 m \times 0.25882 -$$

$$- 2.398 \times 10^5 Nt/m^2 \times 2\pi \times 0.5 m \times 0.035 m \times 0.93969$$

$$= - 3458.72 + 12643.49 - 24777.24 = -15592.52 Nt$$ $F_{W_\alpha} = -15592.5Nt$

(φορά άντίθετη τοῦ $\vec{j}$)

β. Ἀκτινική κατεύθυνση

Ἀναλύουμε τή δύναμη $d\vec{F}_W$ σέ τρεῖς συνιστῶσες, σ᾽ ένα σύστημα συντεταγμένων πού ὁρίζουν τά μοναδιαῖα διανύσματα $\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$, $\vec{i}_3$ (περιφερειακή, ἀξονική καί ἀκτινική κατεύθυνση ἀντίστοιχα).
Θεωροῦμε τή ἀκτινική συνιστῶσα (ἀντίστοιχο μοναδιαῖο διάνυσμα τό $\vec{i}_3$). Ἔχουμε:

$$\int_S d\vec{F}_{W_r} = \int_{S_3} dm_s \vec{V}_{r_3} - \int_{S_4} dm_s \vec{V}_{r_4} - \int_{S_3} \vec{i}_3 p_3 dS_3 - \int_{S_4} \vec{i}_3 p_4 dS_4$$

Θεωροῦμε τό ἐσωτερικό γινόμενο τῆς παραπάνω ἐξίσωσης μέ τό μοναδιαῖο διάνυσμα $\vec{k}$ (στήν ούσία θεωροῦμε τήν προβολή τῆς ἐξίσωσης στήν κατακόρυφη κατεύθυνση). Ἔχουμε:

$$\int d\vec{F}_{W_r} \cdot \vec{k} = \int_{S_3} dm_s \vec{V}_{r_3} \cdot \vec{k} - \int_{S_4} dm_s \vec{V}_{r_4} \cdot \vec{k} - \int_{S_3} \vec{i}_1 \cdot \vec{k} p_3 dS_3 - \int_{S_4} \vec{i}_1 \cdot \vec{k} R_4 dS_4$$

Εἶναι (σχῆμα 10.3):

$$\int d\vec{F}_{W_r} \cdot \vec{k} = \int dF_{W_K} = F_{W_K}$$

$$\vec{V}_{r_3} = \vec{i}_3 V_{r_3}$$

$$\vec{V}_{r_4} = \vec{I}_3 \vec{V}_{r_4}$$

$$\vec{I}_3 \cdot \vec{k} = \cos\varphi$$

Τελικά όλα τά όλοκληρώματα τοῦ 2ου μέλους καταλήγουν στό:

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0$$

όπότε:

$$F_{W_K} = 0$$

Στό συμπέρασμα αὐτό μπορούσαμε νά καταλήξουμε καί άπό τήν άρχή, άν παρατηρούσαμε ότι οί δυνάμεις $d\vec{F}_W$ είναι συμμετρικά διατεταγμένες κατά μῆκος τῆς περιφέρειας, πού όρίζει ή μέση διάμετρος τῆς πτερύγωσης, καί άνά δύο ἴσες καί άντίθετες. Ἄρα ή συνισταμένη τους είναι μηδέν ($\vec{F}_{W_r} = 0$).

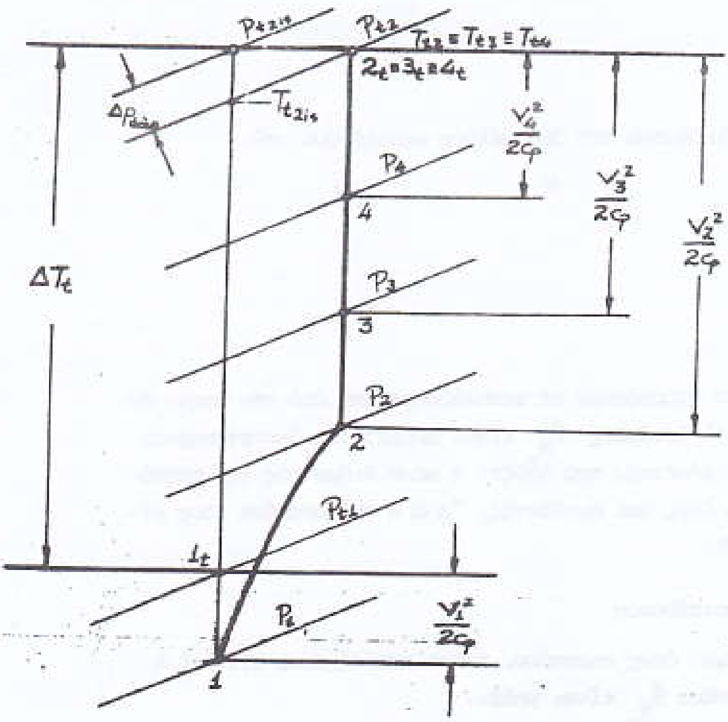
γ. Περιφερειακή κατεύθυνση

Κατά έντελῶς άνάλογο, όπως παραπάνω, τρόπο καταλήγουμε ότι καί ή περιφερειακή συνιστῶσα $\vec{F}_{W_u}$ είναι μηδέν.

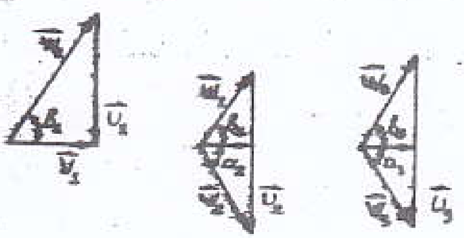
Τέλος γιά τήν άξονική ροπή πού άσκεῖται στήν σταθερή πτερύγωση έχουμε:

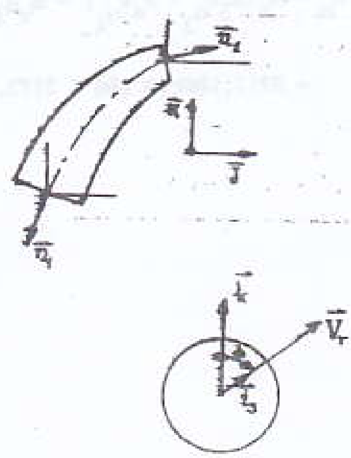
$$M_\alpha = m_s(R_3V_{u_3} - R_4V_{u_4}) = m_sR_3V_{u_3} = F_{W_u} \cdot R_3 =$$

$$= 5717.18\text{Nt} \times 0.38\text{m} = 2172.53\text{Nt} \cdot \text{m}$$



ΣΧΗΜΑ (10.2)





ΣΧΗΜΑ (10.3)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ No 11

Τό σχῆμα (11.1) παριστᾶ ἕναν ὑδραυλικό μετατροπέα ροπῆς, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπό μιά ἀξονική ἀντλία P, ἕνα ἀξονικό στρόβιλο T καί μιά σταθερή πτερύγωση R . Ἡ μεταφορά τῆς ἰσχύος γίνεται ἀπό τήν ἀντλία στό ρευστό σέ πρώτη φάση, καί ἀπό τό ρευστό στόν στρόβιλο, σέ δεύτερη φάση. Ἄν οἱ ἀπώλειες θεωρηθοῦν ἀμελητέες, προκύπτει ὅτι ἡ ἰσχύς τῆς ἀντλίας ἰσοῦται κατ'ἀπόλυτη τιμή μέ τήν ἰσχύ τοῦ στροβίλου.

Ἡ ροή ἀφήνει τήν σταθερή πτερύγωση στή διατομή (1) κατ'ἀξονική διεύθυνση ($V_1 = V_a$). Ἡ σχετική ταχύτητα εἰσόδου στήν ἀντλία σχηματίζει γωνία μέ τήν μεσημβρινή κατεύθυνση $\beta_1 = -19^o$, ἐνῶ στήν ἔξοδο ἀπό τήν ἀντλία ἡ ἴδια ταχύτητα (σχετική) ἔχει ἀξονική διεύθυνση ($W_2 = W_{a_2}$). Τέλος ἡ ροή ἐξέρχεται ἀπό τόν στρόβιλο (διατομή(3)) μέ κατεύθυνση πού σχηματίζει γωνία 45^o ὡς πρός τήν ἀξονική διεύθυνση.

Οἱ πτερυγώσεις εἶναι ἔτσι ὑπολογισμένες, ὥστε $V_1 = W_2 = W_{m_2}$. Δίδεται ἐξ ἄλλου ὅτι ἡ περιφερειακή ταχύτητα στή μέση ἀκτίνα τῆς διατομῆς (1) εἶναι $U_1 = 12m/s$.

Διδομένων τῶν ἀκτίνων $R_1 = 0.0075m$ καί $R_2 = R_3 = 0.0225m$, τοῦ ὕψους τῶν πτερυγίων στή διατομή (1) $h_1 = 0.0075m$ καί τῆς πυκνότητας τοῦ ἐργαζόμενου μέσου (λαδιοῦ) $\rho = 870\ kg/m^3$, ζητοῦνται:

α. Τά τρίγωνα ταχυτήτων στίς διατομές (1), (2) καί (3), καθώς καί ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων περιστροφῆς ἀντλίας - στροβίλου (N_P/N_T).
β. Ἡ ροπή πού ἀσκεῖται στή σταθερή πτερύγωση R.
γ. Ἡ διαφορά τῶν στατικῶν καί ὁλικῶν πιέσεων μεταξύ τῶν διατομῶν (2) καί (1) ($p_2 - p_1$ καί $p_{t_2} - p_{t_1}$).
δ. Ἡ ἰσχύς πού μεταφέρει ὁ μετατροπέας ροπῆς
ε. Ἡ πίεση τοῦ λαδιοῦ μέσα στό σύστημα πρίν ἀπό τήν ἔναρξη λειτουργίας, ἄν θέλουμε κατά τήν λειτουργία ἡ στατική πίεση νά μήν πέφτει κάτω ἀπό $0.68 \times 10^5 Nt/m$ γιά νά ἀπαφευχθεῖ τό φαινόμενο τῆς σπηλαίωσης.

Ὁ ὑπολογισμός νά γίνει σέ μονοδιάστατη βάση, τό δέ ρευστό νά θεωρηθεῖ ἀσυμπίεστο.

ΛΥΣΗ

α. Κατ'ἀρχὴν εἶναι:

$N_P = \frac{30U_1}{\pi R_1} = \frac{30\times 12m/s}{\pi\times 0.0075m} = 15279rpm$ $\qquad N_P = 15279rpm$

Τό τρίγωνο ταχυτήτων στήν εἴσοδο τῆς ἀντλίας θά ἔχει τήν μορφή τοῦ σχήματος (11.2)
Εὔκολα ὑπολογίζουμε:

$V_1 = U_1/\tan(-19^o) = 12m/s\ /\ 0.344 = 34.851m/s$ $\qquad V_1 = 34.851m/s$

$W_1 = U_1/\sin(-19^o) = 12m/s\ /\ 0.326 = 36.859m/s$ $\qquad W_1 = 36.859m/s$

Στή διατομή (2), θεωρώντας τό ρευστό στήν ἔξοδο ἀπό τήν ἀντλία, ἔχουμε:

$U_{2_P} = \frac{\pi R_2 N_P}{30} = 3U_1 = 3\times 12m/s = 36m/s$ $\qquad U_{2_P} = 36m/s$

Ἄρα τό τρίγωνο τῶν ταχυτήτων στήν ἔξοδο τῆς ἀντλίας εἶναι ὁρισμένο (δεδομένου ὅτι $W_{2_P} = V_1 = 34.851m/s$) $\qquad W_{2_P} = 34.851m/s$
Εἶναι:

$V_2 = (W_{2_P}{}^2 + U_{2_P}{}^2)^{1/2} = (34.851^2 + 36^2)^{1/2} = 50.105m/s$ $\qquad V_2 = 50.105m/s$

$a_2 = \tan^{-1}\frac{U_{2_P}}{W_{2_P}} = \tan^{-1}\frac{36}{34.851} = 45.93^o$ $\qquad a_2 = 45.93^o$

Γιά τό τρίγωνο ταχυτήτων στήν ἔξοδο τοῦ στροβίλου ἔχουμε:

$V_{m_3} = V_1 = 34.851m/s$

$V_{u_3} = V_{m_3} = 34.851m/s$ (πρόσημο -)

$V_3 = \sqrt{2}\times V_{m_3} = 1414\times 34.851m/s = 49.287m/s$ $\qquad V_3 = 49.287m/s$

Ἡ ἰσχύς πού μεταφέρεται ἀπό τήν ἀντλία στό ρευστό εἶναι:

$P_P = m_s(U_1V_{u_1} - U_{2_P}V_{u_2}) = m_s\omega_P(R_1V_{u_1} - R_2V_{u_2})$

όπου $\omega_P = \frac{2\pi N_P}{60} = \frac{2\pi\times15279}{60} = 1600\ s^{-1}$ $\qquad \omega_P = 1600\ s^{-1}$

Ἀπό τήν ἄλλη μεριά ἡ ἰσχύς πού δίνει τό ρευστό στόν στρόβιλο εἶναι:

$$P_T = m_s(U_{2_T}V_{u_2} - U_{3_T}V_{u_3}) = m_s\omega_T(R_2V_{u_2} - R_3V_{u_3})$$

Δεδομένου ὅτι:

$$P_T = -P_P$$

ἔχουμε:

$$-\omega_P(R_1V_{u_1} - R_2V_{u_2}) = \omega_T(R_2V_{u_2} - R_3V_{u_3})$$

Ἐπομένως:

$$\omega_T = -\omega_P\frac{R_1V_{u_1} - R_2V_{u_2}}{R_2V_{u_2} - R_3V_{u_3}} = -1600\frac{-0.0225m\times36m/s}{0.0225m\times36m/s-0.0225m(-34.851m/s)} =$$

$$= 1600\frac{36}{36+34.851} = 1600\frac{36}{70.851} = 813s^{-1} \qquad \omega_T = 813s^{-1}$$

Ἄρα ἡ ταχύτητα περιστροφῆς τοῦ στροβίλου εἶναι:

$$U_{2_T} = \omega_N R_2 = 813s^{-1}\times0.0225m = 18.292m/s \qquad U_{2_T} = 18.292m/s$$

$$N_T = \frac{60\omega}{2\pi} = 7763\ rpm \qquad N_T = 7763rpm$$

δηλαδή

$$N_P/N_T = 15279/7763 = 1.968\ (\simeq 2)$$

Τέλος γιά τό τρίγωνο ταχυτήτων στή διατομή (3) ἔχουμε:

$$W_3 = [(V_{u_3} + U_3)^2 + V_{m_3}^2]^{1/2} = (53.143^2 + 34.851^2)^{1/2} = 63.551m/s \qquad W_3 = 63.551m/s$$

$$\beta_3 = \tan^{-1}\frac{W_{u_3}}{W_{m_3}} = \tan^{-1}\frac{-53.143}{34.851} = -56.74^o \qquad \beta_3 = -56.74^o$$

B. Ἡ ροπή πού ἀσκεῖται στή σταθερή πτερύγωση εἶναι:

$$M_o = m_s(R_3 V_{u_3} - R_1 V_{u_1})$$

Ἀλλά ἡ παροχή εἶναι:

$$m_s = \rho V_1 2\pi R_1 h_1 = 870\text{kg/m}^3 \times 34.851\text{m/s} \times 2\pi \times 0.0075\text{m} \times 0.0075\text{m} =$$

$$= 10.716\text{kg/s}$$

$m_s = 10.716\text{kg/s}$

Ἐπομένως:

$$M_o = 10.716\text{kg/s}\ [-0.0225(-34.851\text{m/s})] = 8.4\text{Nt m}$$

$M_o = 8.4\text{Nt m}$

Ὅπως ἀναφέρθηκε ἡ ἰσχύς τῆς ἀντλίας εἶναι:

$$P_P = m_s(U_1 V_{u_1} - U_2 V_{u_2}) = -10.716\text{kg/s} \times 36\text{m/s} \times 36\text{m/s} =$$

$$= -13.888\text{W} = -13.9\text{KW}$$

Ἀλλά ἡ ἰσχύς αὐτή δίδεται καί ἀπό τή σχέση:

$$P_P = m_s \Delta h_t = m_s \Delta p_t/\rho = m_s(p_{t_1} - p_{t_2})/\rho$$

Ἐπομένως:

$$\Delta p_t = p_{t_1} - p_{t_2} = \frac{\rho P_P}{m_s} = -\frac{13888\text{W} \times 870\text{kg/m}^3}{10.716\text{kg/s}} = -11.275 \times 10^5\text{Nt/m}^2$$

Ἄρα:

$$p_{t_2} - p_{t_1} = 11.275 \times 10^5\text{Nt/m}^2$$

$p_{t_2} - p_{t_1} = 11.275 \times 10^5\ \text{Nt/m}^2$

Ἀλλά

$$p_t = p + \frac{1}{2}\rho V^2$$

Ἐπομένως:

$$p_2 - p_1 = (p_{t_2} - p_{t_1}) - \frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) = 11.275 \times 10^5\text{Nt/m}^2 -$$

$$- \frac{1}{2} \times 870\text{kg/m}^3 \times (50.105^2 - 34.851^2)\text{m}^2/\text{s}^2 = 11.275 \times 10^5\text{Nt/m}^2 -$$

$$- 5.637 \times 10^5\text{Nt/m}^2 = 5.638 \times 10^5\text{Nt/m}^2$$

$p_2 - p_1 = 5.638 \times 10^5\text{Nt/m}^2$

δ. Ἡ μεταφερόμενη ἰσχύς βρέθηκε:

$P = 13.9\ KW$

$|P_P| = |P_T| = 13.888W = 13.9\ KW$

ε. Ἡ πίεση ἐκκινήσεως $p_{start\ up}$ θά εἶναι ἴση μέ τήν $p_{t_1} = p_{t_3}$ λειτουργίας. Παρατηροῦμε ὅτι στό σύστημά μας ἡ μέγιστη ταχύτητα μεταξύ τῶν διατομῶν (1) καί (3) (ἄρα ἡ ἐλαχίστη στατική πίεση) ἐμφανίζεται στή διατομή (3)*. Ἐπομένως, ἄν $p_3 = 0.68 \times 10^5 Nt/m^2$ (ἡ ἐλάχιστη ἐπιτρεπόμενη), τότε:

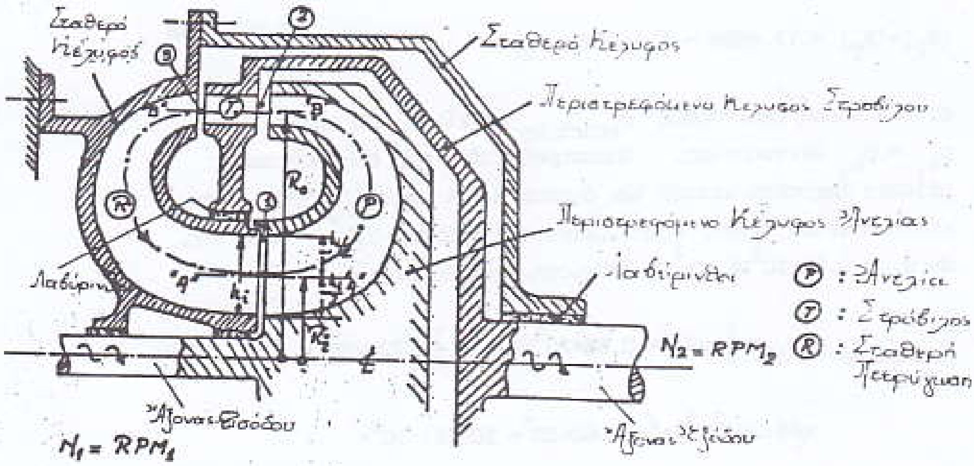
$$p_{start\ up} = p_3 + \frac{1}{2}\rho V_3^2 = 0.68 \times 10^5 Nt/m^2 + \frac{1}{2}\, 870 kg/m^3 \times$$

$$\times 49.287^2 m^2/s^2 = 0.68 \times 10^5 + 10.567 \times 10^5 =$$

$$= 11.247 \times 10^5 Nt/m^2$$

---

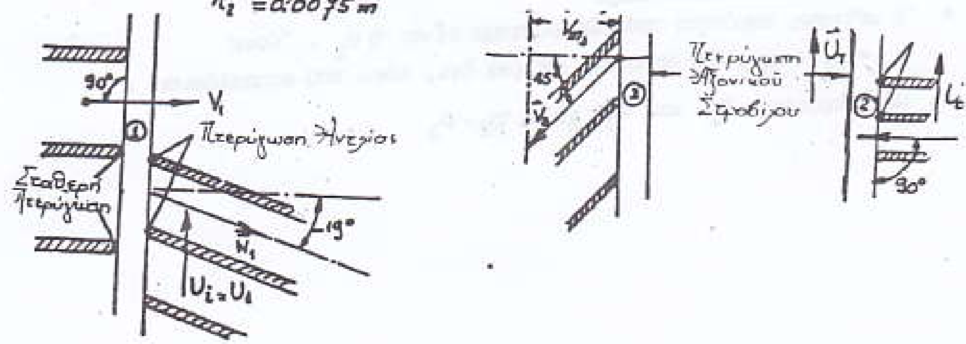
* Ἡ μέγιστη ταχύτητα στό ὅλο σύστημα εἶναι ἡ V_2. Ὅμως $p_{t_2} = p_{t_3} + \Delta p_t$ πού σημαίνει τελικά ὅτι, λόγω τοῦ παραπλήσιου τῶν ταχυτήτων V_2 καί V_3, εἶναι $p_2 > p_3$



$R_o = 3R_i = 0.0225\,m$

$R_i = 0.0075\,m$

$h_i = 0.0075\,m$



Σχ. (11.1)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ Νο 12

Γιά τήν καλύτερη κατανόηση τῆς ροῆς μέσα στίς ἀκτινικές στροβιλομηχανές εἶναι χρήσιμο τό ἀκόλουθο παράδειγμα.

Θεωροῦμε τήν περιστρεφόμενη πτερύγωση ἑνός ἀκτινικοῦ συμπιεστῆ ὅπως τήν παρουσιάζει τό σχῆμα (1). Τό κάθε πτερύγιο εἶναι τμῆμα ἑνός μεσημβρινοῦ ἐπιπέδου. Τό ὕψος h τῶν πτερυγίων εἶναι μικρό σέ σχέση μέ τήν ἀκτίνα R . Ἔτσι, ἡ ροή μπορεῖ μέ καλή προσέγγιση νά θεωρηθεῖ ὁμοιόμορφη κατά τήν κάθετο (n) ἐπάνω στή μέση γραμμή ροῆς πού θεωρεῖται δεδομένη (κατά τήν κατεύθυνση τοῦ ὕψους τοῦ πτερυγίου) Τό πάχος τῶν πτερυγίων εἶναι t καί ὁ ἀριθμός των z_B . Ὁ z_B εἶναι ἀρκετά μεγάλος καί οἱ περιφερειακές μεταβολές τῶν διαφόρων παραμέτρω τῆς ροῆς θεωροῦνται γιά τό πρόβλημά μας ἀμελητέες.

Μπροστά ἀπό τήν κινητή πτερύγωση, ὑπάρχει ὁδηγός πτερύγωση ἡ ὁποία, στήν ἔξοδό της δίνει στή ροή μιά τέτοια γωνία α_1 (στό ἀπόλυτο σύστημα), ὥστε μέ ταχύτητα περιστροφῆς τῆς μηχανῆς ω καί ἀκτίνα εἰσόδου R_1, νά ἔχουμε στήν εἴσοδο τῆς κινητῆς πτερύγωσης σχετική ταχύτητα $\vec{W}_1$ μέ κατεύθυνση μεσημβρινή (βλέπε τρίγωνο ταχυτήτων στήν εἴσοδο τῆς κινητῆς πτερύγωσης, σχῆμα (2)).

Θεωροῦμε ὅτι τά πτερύγια τῆς κινητῆς πτερύγωσης ὁδηγοῦν ἀποτελεσματικά τή ροή καί ἐπομένως ἡ κατεύθυνσή της παραμένει μεσημβρινή μέχρι τήν ἔξοδο. Τό ἀντίστοιχο τρίγωνο ταχυτήτων στήν ἔξοδο δίδεται καί αὐτό στό σχῆμα (2).

Γιά νά μπορέσουμε νά δοῦμε ἄν ἡ μηχανή αὐτή μεταφέρει ἔργο στό ρευστό, χρειάζεται ν'ἀναπτύξουμε τή σχέση πού δίνει τήν περιφερειακή συνιστώσα τῆς δύναμης. Γιά τό σκοπό αὐτό, ἀναπτύσσουμε πρῶτα τή σχέση πού δίνει τή στοιχειώδη περιφερειακή συνιστώσα $d\vec{F}_u$ τῆς δύναμης πού ἀσκεῖται ἀπό τό ρευστό στά πτερύγια τῆς μηχανῆς μεταξύ τῶν διατομῶν (Α-Α) καί (Β-Β) πού ἀπέχουν μεταξύ τους στοιχειώδη ἀπόσταση ds. Ἡ ἀπόσταση s μετρᾶται ἐπάνω στή μέση γραμμή ροῆς (βλέπε σχῆμα (1)). Γιά τήν ἀνάπτυξη τῆς σχέσης αὐτῆς, ἀντί τῶν ὁλοκληρωτικῶν θεωρημάτων, νά χρησιμοποιηθεῖ ὁ νόμος τοῦ Νεύτωνα (δύναμη =(μάζα) X ἐπιτάχυνση)), ὅπου ἡ στοιχειώδης μάζα πού περιέχεται μεταξύ τῶν διατομῶν (Α-Α) καί (Β-Β), θά ἐκφραστεῖ σάν συνάρτηση τῆς ὁλικῆς παροχῆς.

Στή συνέχεια ὑπολογίζουμε τή στοιχειώδη ροπή πού ἀσκεῖται ἀπό τήν $d\vec{F}_u$ στόν ἄξονα καί τήν ἀντίστοιχη στοιχειώδη ἰσχύ. Τέλος ὑπολογίζουμε, ὁλοκληρώνοντας ἀπό τήν εἴσοδο στήν ἔξοδο, τήν ὁλική ἰσχύ πού χρειάζεται νά δώση ὁ ἄξονας στό ρευστό καί τήν ἀντίστοιχη αὔξηση τῆς ὁλικῆς ἐνθαλπίας. Ποιά εἶναι ἡ τελευταία αὐτή σχέση καί ἀπό τή δράση, ποιῶν δυνάμεων προέρχεται ἡ αὔξηση τῆς ἐνθαλπίας, ἄν αὐτή ἔχει τιμή διαφορετική ἀπό τό μηδέν;

Ὁ παραπάνω ὑπολογισμός νά γίνει γιά μόνιμη συμπιεστή ροή καί μέ τυχαία διανομή $W_m(s)$.

Ἄν ἡ ταχύτητα W_m εἶναι ἴση στήν εἴσοδο καί στήν ἔξοδο τῆς πτερύγωσης, νά κατασκευαστῆ τό θερμοδυναμικό διάγραμμα (T,s) τῶν μεταβολῶν τῶν μεγεθῶν τῆς ροῆς μέσα στήν κινητή πτερύγωση στό ἀπόλυτο καί στό σχετικό (περιστρεφόμενο) σύστημα. Πῶς χρησιμοποιεῖται τό ἔργο πού παρέχεται στό ρευστό;

ΛΥΣΗ

Γιά τόν ὑπολογισμό τῆς περιφερειακῆς συνιστώσας τῆς δύναμης, θεωροῦμε τήν ἔκφραση τῆς ἐπιτάχυνσης (δύναμη ἀνά μονάδα μάζας) στό σχετικό σύστημα. Ἔχουμε ὅτι (ἐξισώσεις 2.24, 2.26β τῶν σημειώσεων τοῦ μαθήματος):

$$\frac{d\vec W}{dt} = \frac{\partial \vec W}{\partial t} + \vec W\cdot\nabla\vec W + 2\vec\omega\times\vec W + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)$$

Ἔχουμε ὅτι

$$\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r) = -\nabla(-\frac{\omega^2 r^2}{2})$$

καί ἑπομένως παρατηροῦμε ὅτι ἡ συγκεντρο ἐπιτάχυνση δέν συνεισφέρει στήν περιφερειακή συνιστώσα τῆς δύναμης, ἐπειδή κεῖται σέ μεσημβρινό ἐπίπεδο. Τό ἴδιο ἰσχύει [illegible] καί με τή σχετική ἐπιτάχυνση $\vec W\cdot\nabla\vec W$, ἐφ'ὅσον στήν περίπτωσή μας ἔχουμε ὅτι $\vec W = \vec W_m$. Τέλος ἐπειδή ἡ ροή εἶναι μόνιμη, εἶναι

$$\frac{\partial \vec W}{\partial t} = 0$$

Ἔτσι ἡ μόνη περιφερειακή συνιστώσα τῆς δύναμης, αὐτή προέρχεται ἀπό τήν δύναμη Coriolis. Ἔχουμε σύμφωνα μέ το σχῆμα (1) καί τα δεδομένα τοῦ προβλήματος ὅτι ἡ $2\vec\omega\times\vec W$ εἶναι κάθετη στήν $\vec\omega$ καί στήν $\vec W_m$ καί ἑπομένως, ἐφ'ὅσον $\vec\omega$ καί $\vec W_m$ εἶναι διανύσματα που βρίσκονται στό ἴδιο μεσημβρινό ἐπίπεδο, τό διάνυσμα $2\vec\omega\times\vec W_m$ εἶναι κάθετο σ'αὐτό.
Τό μέτρο τῆς ἐπιτάχυνσης αὐτῆς εἶναι:

$$2|\vec\omega\times\vec W| = 2\omega W_m \sin\lambda$$

καί ἡ στοιχειώδης δύναμη dF_u πού δρᾶ στήν ἐπιφάνεια τῆς πτερύγωσης εἶναι:

$$dF_u = -2dm\,\omega W_m \sin\lambda \qquad (1)$$

ὅπου dm εἶναι ἡ μάζα πού περιέχεται στό κανάλι ἀνάμεσα στίς διατομές (Α-Α) καί (Β-Β).
Ἡ στοιχειώδης αὐτή μάζα dm εἶναι λοιπόν:

$$dm = \rho(\frac{2\pi R}{z_B} - t)h\,ds \qquad (2)$$

Ἐφ'ὅσον ἡ παροχή $\dot m_s$ δίδεται ἀπό τή σχέση:

$$m_s = \rho\,(\frac{2\pi R}{z_B} - t)\,z_B h W_m \tag{3}$$

ἡ στοιχειώδης μάζα dm γράφεται:

$$dm = \frac{m_s}{W_m z_B}\,ds \tag{4}$$

Ἔτσι ἀπό τήν (1) ἔχουμε:

$$dF_u = -\frac{2m_s\omega}{z_B}\,\sin\lambda ds \tag{1α}$$

καί ἡ ἀντίστοιχη ροπή λόγω τῶν δυνάμεων πού δροῦν σέ ὅλα τά πτερύγια εἶναι:

$$dM = z_B R dF_u = -2\omega m_s R \sin\lambda ds \tag{5}$$

Ἄν παρατηρήσουμε ὅτι:

$$\sin\lambda ds = dR$$

τότε ἔχουμε

$$dM = -\,2\omega m_s R dR = -\,\omega m_s d(R^2) \tag{5a}$$

καί ὁλοκληρώνοντας ἀπό (1) ἕως (2) (ἀπό τήν εἴσοδο στήν ἔξοδο)

$$M = -\omega m_s\,(R_2{}^2 - R_1{}^2) \tag{5b}$$

Ἡ ἰσχύς εἶναι:

$$P = -\,\omega M = +\,m_s\,(\omega^2 R_2{}^2 - \omega^2 R_1{}^2) \tag{6}$$

καί ἡ ἀντίστοιχη αὔξηση ἐνθαλπίας

$$\Delta h_t = \frac{P}{m_s} = (\omega^2 R_2{}^2 - \omega^2 R_1{}^2) \tag{7}$$

Ἡ ἀλλαγή σημείου στήν ἰσχύ καί στήν ἐνθαλπία ἔγινε διότι εἴχαμε ὑπολογίσει τήν ροπή πού μεταφέρεται ἀπό τά πτερύγια (δύναμη πού ἀσκεῖ τό ρευστό στά πτερύγια) στόν ἄξονα. Ἡ σχέση (6) δίνει τήν ἰσχύ πού παραλαμβάνει τό ρευστό καί ἡ σχέση (7) δίνει τήν ἀντίστοιχη αὔξηση ὁλικῆς ἐνθαλπίας τοῦ ρευστοῦ.

Ἀπό τό παράδειγμα αὐτό βλέπουμε τήν σημασία πού ἔχει ἡ δύναμη Coriolis στίς φυγόκεντρες μηχανές.

Τό θερμοδυναμικό διάγραμμα πού ζητεῖται ἀπό τό πρόβλημα δίνεται στό σχῆμα (3). Εἶναι ἕνα κλασσικό θερμοδυναμικό διάγραμμα γιά τό ὁποῖο $U_2 > U_1$ καί $W_2 = W_1$. Τήν τελευταία αὐτή παραδοχή τήν κάναμε γιά νά φανεῖ καλύτερα τό γεγονός ὅτι στίς ἀκτινικές (ἤ μικτῆς ροῆς μηχανές) γίνεται μεταφορά ἀπ' εὐθείας μεταξύ τοῦ δυναμικοῦ στατικῆς πίεσης τοῦ ρευστοῦ καί τῆς παρεχομένης (ἀρνητικῆς ἤ θετικῆς) ἐνέργειας. Στήν προκείμενη περίπτωση, ἡ προσδιδόμενη στό ρευστό ἐνέργεια αὐξάνει κατ' εὐθείαν τήν πίεσή του καί ὄχι τήν κινητική του ἐνέργεια.

Μερικές Παρατηρήσεις Ἐπάνω στή Λύση τοῦ Προβλήματος

Εἶναι ἀρκετά εὔκολο νά δῆ κανείς ὅτι μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τή ροπή γύρω ἀπό τόν ἄξονα τῆς μηχανῆς ἐφαρμόζοντας τό ὁλοκληρωτικό θεώρημα τῆς ροπῆς τῆς ὁρμῆς.

Παρακάτω θά περιγράψουμε ἄλλον ἕνα τρόπο γιά τόν ὑπολογισμό τῆς ὁλικῆς ἐνθαλπίας, πού θά μᾶς περιγράψει καί διαφορετικά τό τί γίνεται μέσα στή μηχανή μας.

Θά παρατηρήσουμε ὅτι ἡ δύναμη εἶναι μέγεθος πού δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τό σύστημα ἀναφορᾶς. Μποροῦμε, λοιπόν νά τήν ὑπολογίσουμε ἤ στό ἀπόλυτο ἤ στό σχετικό σύστημα. Συνήθως, ὑπολογίζουμε τήν ἐπιτάχυνση (ἤ καί κάθε ἄλλο μέγεθος) σέ σύστημα σχετικό μέ τήν πτερύγωση πού θεωροῦμε, διότι μόνο στό σύστημα αὐτό μποροῦμε νά θεωρήσουμε τή ροή μόνιμη (ἄν καί ἀνομοιόμορφη). Ὅπως εἴπαμε καί στό πρῶτο κεφάλαιο, στήν περίπτωση πού ἡ ροή στό ἕνα σύστημα εἶναι ἀνομοιόμορφη, στό ἄλλο παρουσιάζεται μή μόνιμη καί ἔτσι δημιουργοῦνται ἀρκετές δυσκολίες στούς ὑπολογισμούς μας. Ἐξ ἄλλου, ἡ παρουσία τῶν πτερυγίων δημιουργεῖ ἀνωμαλίες πού δέν μᾶς ἐπιτρέπουν πλέον νά μιλᾶμε γιά συναρτήσεις συνεχεῖς καί ἔτσι ὅλη ἡ μαθηματική θεωρία πού χρειαζόμαστε γιά τούς ὑπολογισμούς μας δέν εἶναι ἐφαρμόσιμη.

Στήν ἁπλοποιημένη περίπτωση πού ἐξετάζουμε στό Παράδειγμά μας τό πεδίο εἶναι μόνιμο καί στό ἀπόλυτο καί στό σχετικό σύστημα (οἱ περιφερειακές μεταβολές θεωροῦνται ἀμεληταῖες).

Ἐπίσης ἡ παρουσία τῶν πτερυγίων γίνεται αἰσθητή μόνο στήν ἐξίσωση τῆς συνέχειας, ὅπου ἁπλῶς καί μόνο περιορίζει τήν πραγματική μετωπική ἐπιφάνεια τῆς ροῆς.

Ἔτσι εἶναι δυνατό νά χρησιμοποιήσουμε τήν ἐπιτάχυνση στό ἀπόλυτο σύστημα γιά τόν ὑπολογισμό τῆς δύναμης πού ἀσκεῖται στά πτερύγια καί ἡ ὁποία γιά μόνιμη ροή εἶναι:

$$\vec{a} = (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} \tag{8}$$

Θά προχωρήσουμε παρακάτω σέ ἀνάλυση μαθηματική ἡ ὁποία βρίσκεται στίς σημειώσεις τῶν Θερμικῶν Στροβιλομηχανῶν II, Παράρτημα A2.

Τήν ἀνάλυση αὐτή θά χρησιμοποιήσουμε γιά νά ὑπολογίσουμε τή βαθμωτή ἔκφραση τῆς παραπάνω ἐξίσωσης. Ἡ ἀνάλυση αὐτή δέν ἀπαιτεῖ περισσότερες φυσικές γνώσεις, ἀλλά μαθηματική ἐπεξεργασία, ἡ ὁποία ἔχει ἤδη διδαχτεῖ στόν διανυσματικό λογισμό.

Θεωρώντας τά μοναδιαῖα διανύσματα $\vec{i}_1$ καί $\vec{i}_2$ στήν περιφερειακή καί μεσημβρινή κατεύθυνση ἀντίστοιχα, ἔχουμε (Σημειώσεις Θερμικῶν Στροβιλομηχανῶν ΙΙ, Παράρτημα Α2):

$$\vec{a} = \vec{i}_1\left(\frac{1}{R}\frac{\partial(V_u^2/2)}{\partial\theta} + \frac{V_uV_s}{R}\frac{\partial R}{\partial s} + V_s\frac{\partial V_u}{\partial s}\right)$$

$$\vec{i}_2\left(\frac{\partial(V_s^2/2)}{\partial s} - \frac{V_u^2}{R}\frac{\partial R}{\partial s} + \frac{V_u}{R}\frac{\partial V_s}{\partial\theta}\right)$$

$$= \frac{\vec{i}_1}{R}\left(V_u\frac{\partial V_u}{\partial\theta} + V_sV_u\frac{\partial R}{\partial s} + V_sR\frac{\partial V_u}{\partial s}\right)$$

$$+ \frac{\vec{i}_2}{R}\left(RV_s\frac{\partial V_s}{\partial s} - V_u^2\frac{\partial R}{\partial s} + V_u\frac{\partial V_s}{\partial\theta}\right)$$

$$= \frac{\vec{i}_1}{R}\left(V_u\frac{\partial V_u}{\partial\theta} + V_s\frac{\partial(RV_u)}{\partial s}\right)$$

$$+ \frac{\vec{i}_2}{R}\left(RV_s\frac{\partial V_s}{\partial s} - V_u^2\frac{\partial R}{\partial s} + V_u\frac{\partial V_s}{\partial\theta}\right)$$

ἤ ἄν θεωρήσουμε ὅτι στήν περίπτωσή μας πού οἱ μεταβολές στήν περιφερειακή κατεύθυνση εἶναι ἀμεληταῖες, ἔχουμε $\partial(\ )/\partial\theta = 0$ καί τότε

$$\vec{a} = \frac{\vec{i}_1}{R}\left(V_s\frac{\partial(RV_u)}{\partial s}\right) + \frac{\vec{i}_2}{R}\left(R\frac{\partial V_s^2/2}{\partial s} - V_u^2\frac{\partial R}{\partial s}\right)$$

Ἀπό τήν ἔκφραση αὐτή βλέπουμε ὅτι ἡ περιφερειακή συνιστῶσα τῆς ἐπιτάχυνσης πού δίνει ἀντίστοιχα τήν περιφερειακή συνιστῶσα τῆς δύναμης εἶναι:

$$a_u = \frac{V_s}{R}\frac{\partial(RV_u)}{\partial s} \qquad (9)$$

Ἔχουμε ἀκόμη ὅτι:

$$\frac{V_s}{R}\frac{\partial(RV_u)}{\partial s}=\frac{V_s}{R}\left(\frac{\partial V_u}{\partial s}R+V_u\frac{\partial R}{\partial s}\right)$$

καί έφ'όσον $V_u = U = \omega R$ (στήν περίπτωσή μας)

$$\alpha_u=\frac{V_s}{R}\frac{\partial(RV_u)}{\partial s}=\frac{V_s}{R}\left(\omega R\frac{\partial R}{\partial s}+\omega R\frac{\partial R}{\partial s}\right)=2\omega V_s\frac{\partial R}{\partial s}.$$

Είναι εὔκολο νά δῆ κανείς ὅτι $\frac{\partial R}{\partial s}=\sin\beta$ καί ἔτσι

$$\alpha_u = 2\omega V_s\sin\beta \qquad (9\alpha)$$

Ἡ μάζα dm εἶναι:

$$dm = \left(\frac{2\pi R}{z_B}-t\right)h\rho ds \qquad (10)$$

καί ἡ παροχή:

$$m_s=\rho V_m h\left(\frac{2\pi R}{z_B}-t\right)=\frac{dmV_m}{ds} \qquad (11)$$

Ἔτσι

$$dF_u= dma_u= m_s\frac{ds}{V_s}\omega V_s\sin\beta =2m_s\omega\sin\beta ds$$

καί ἔτσι έφ'ὅσον $\partial R/\partial s = \sin\beta$

$$dF_u= 2m_s ds\omega\frac{\partial R}{\partial s}=2m_s\omega dR \qquad (12)$$

Ἀφοῦ ὑπολογίστηκε ἡ δύναμη εἶναι δυνατόν νά κάνουμε καί τούς ὑπόλοιπους ὑπολογισμούς πού κάναμε παραπάνω γιά τήν στοιχειώδη ροπή, τήν ἰσχύ καί τήν αὔξηση τῆς ἐνθαλπίας.

Ἡ σχέση μεταξύ μάζας dm καί παροχῆς θά μποροῦσε νά βρεθῆ καί διαφορετικά. Εἶναι δυνατόν νά γράψουμε γιά μόνιμη ροή.

$$m_s=\frac{dm}{dt}=\frac{dm}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad (11)$$

καί έφ'ὅσον ἐπίσης γιά μόνιμη ροή

$$ds/dt = W_m = V_s$$

ἔχουμε τή σχέση (11)

Ἡ ἐπιτάχυνση πού μᾶς ἐνδιαφέρει δέν προέρχεται μόνο ἀπό τή μεταβολή τῆς V_u . Ἔτσι ἄν θεωρήσουμε μόνο:

$$a_{u_1} = \frac{dV_u}{dt} = \frac{\partial V_u}{\partial s}\frac{ds}{dt} \tag{13}$$

ἤ ἀκόμη

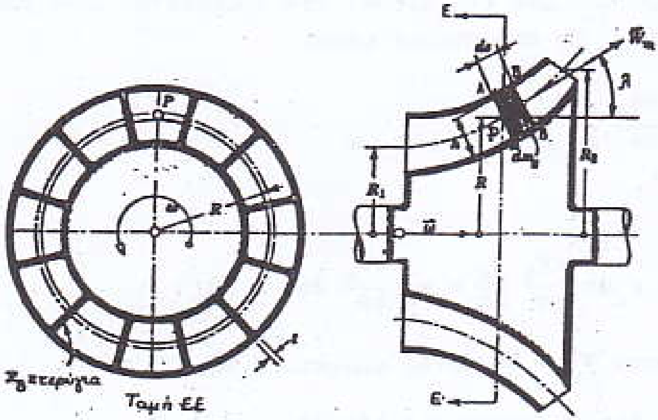
$$dF_{u_1} = dma_u = m_s dt\,\frac{\partial V_u}{\partial s}\frac{ds}{dt} = m_s\,\frac{\partial V_u}{\partial s}\,ds = m_s dV_u$$

τέλος, ἐφ᾽ ὅσον $V_u = \omega R$ (στήν περίπτωσή μας)

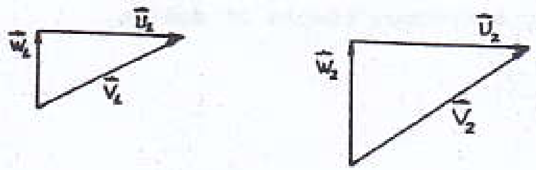
ἔχουμε τήν ἑξῆς ἔκφραση γιά τήν dF_{u_1}

$$dF_{u_1} = \omega m_s dR \tag{14}$$

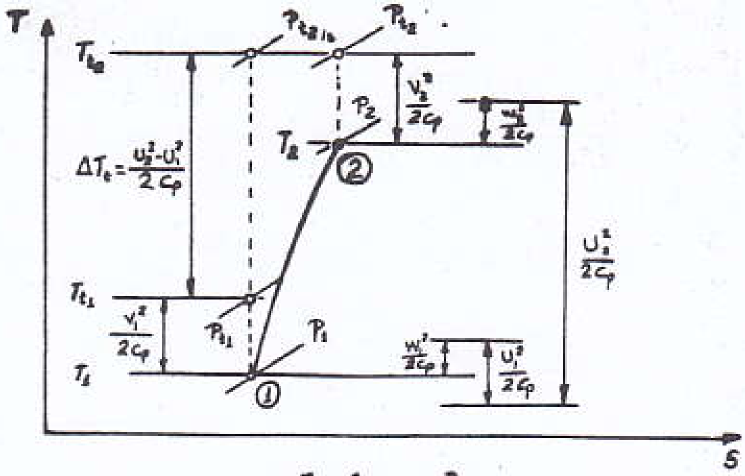
ἡ ὁποία συγκρινόμενη μέ τήν (12) φαίνεται ἐσφαλμένη. Οἱ παραπάνω ὑπολογισμοί ἔγιναν γιά νά δοῦμε ὅτι ἐκφράσεις σάν τή (13), οἱ ὁποῖες δέν προέρχονται ἀπό τίς βασικές ἐξισώσεις εἶναι ἐπικίνδυνες διότι μπορεῖ νά μᾶς ὁδηγήσουν εὔκολα σέ σφάλμα.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

ΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ Νο 13

ίνεται βαθμίδα καθαρά ἀξονικοῦ συμπιεστῆ (ἡ μέση μεσημβρινή γραμμή
οῆς ἀκολουθεῖ τή μέση ἀκτίνα R κάθε διατομῆς ἡ ὁποία εἶναι σταθερή
ιά ὅλες τίς διατομές). Ἡ βαθμίδα εἶναι ἐπαναληπτική, δηλ. ἡ ταχύ-
ητα στήν ἔξοδο τῆς βαθμίδας (διατομή (2)) εἶναι ἴση μέ τήν ταχύτη-
τα στή εἴσοδο (διατομή (1)) πού εἶναι ἀξονική.

Ο συμπιεστής αὐτός, δοκιμάστηκε σέ ἀέρα ($R_g = 287 m^2/s^2, {}^oK, \gamma=1.4$) μέ συνθῆκες εἰσόδου τίς συνθῆκες ἀναφορᾶς ($T_{t_1} = 288^oK$, $p_{t_1} = 1.0332\times 10^5$ Nt/m^2). Ἡ δοκιμή ἔγινε γιά 12000 RPM καί ὁ λόγος πιέσεων, ἡ παροχή καί ὁ ἰσεντροπικός βαθμός ἀπόδοσης ὁλικῶν πρός ὁλικές συνθῆκες βρέθηκαν ἀντίστοιχα $\pi_C = 1.5$, $\Omega = 20kg/s$ καί $(\eta_{t-t})_C = 0.85$ γιά τό σημεῖο λειτουργίας μέ τόν βέλτιστο βαθμό ἀπόδοσης.
Γιά τόν ἀριθμό στροφῶν τῆς δοκιμῆς, ἡ περιφερειακή ταχύτητα στή μέση ἀκτίνα ἦταν 300m/s.

Θέλουμε νά χρησιμοποιήσουμε τή βαθμίδα αὐτή διαδοχικά γιά τήν συγκρότηση πολυβάθμιου συμπιεστῆ πού θά χρησιμοποιεῖ σάν ἐργαζόμενο μέσο τό ἥλιο ($R_g = 2078.46 m^2/s^2, {}^oK$, $\gamma=1.66$) γιά ἕνα κύκλο ἀεριοστροβίλου πυρηνικῆς ἐγκατάστασης. Μηχανικοί λόγοι δέν μᾶς ἐπιτρέπουν νά περάσουμε τήν περιφερειακή ταχύτητα τῶν 300m/s στή μέση ἀκτίνα.

(α) Γιά τήν ταχύτητα λοιπόν αὐτή καί γιά συνθῆκες εἰσόδου στόν πολυβάθμιο συμπιεστή μας $T_{t_1} = 300^oK$ καί $P_{t_1} = 1\times 10^6 Nt/m^2$, ποιός θά εἶναι ὁ λόγος πιέσεων καί ἡ παροχή τῆς βαθμίδας μας θεωρούμενης τώρα σάν πρώτης βαθμίδας τοῦ προλυβάθμιου συμπιεστῆ καί ἐργαζόμενης στό σημεῖο λειτουργίας της πού ἔχει τόν βέλτιστο βαθμό ἀπόδοσης; Ποιό εἶναι τό ἀντίστοιχο σημεῖο λειτουργίας τῆς βαθμίδας ἐργαζόμενης στίς συνθῆκες ἀναφορᾶς;

(β) Ποιές εἶναι οἱ συνθῆκες εἰσόδου στή δεύτερη βαθμίδα τοῦ πολυβάθμιου συμπιεστῆ ἡλίου; Ἄν θελήσουμε νά ἐπαναλάβουμε σάν δεύτερη βαθμίδα τοῦ πολυβάθμιου συμπιεστῆ ποιά θά πρέπει νά εἶναι ἡ μείωση (ποσοστιαία) τῆς ἐπιφανείας τῆς διατομῆς στήν εἴσοδο γιά νά ἐργαστεῖ καί αὐτή μέ τόν βέλτιστο βαθμό ἀπόδοσης; Ποιός θά εἶναι ὁ λόγος πιέσεων τῆς δεύτερης αὐτῆς βαθμίδας;

γ) Στήν περίπτωση πού θά θέλαμε ὁ πολυβάθμιος στρόβιλος νά μᾶς δίνει λόγο πιέσεων 2.5 πόσες ἐπαναληπτικές βαθμίδες τοῦ τύπου πού ἐξετάζουμε θά ἔπρεπε νά ἔχει; Γιά τόν ὑπολογισμό αὐτό θά χρησιμοποιη-

ΛΥΣΗ

(α) Δίδεται γιά τόν συμπιεστή ένα σημείο λειτουργίας στίς συνθήκες άναφοράς. Γιά τό σημείο αύτό λειτουργίας θά ύπολογίσουμε τούς συντελεστές φόρτισης k_{is_1} (έξίσωση (3.38)) καί παροχής φ_1 (έξίσωση (3.45α)), έφ'δσον ό συμπιεστής είναι άξονικός. Έχουμε (γιά έργαζόμενο μέσο άέρα):

$$\Delta h_{is} = c_p T_{t_1}\left[\pi_C^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] = 1004\,m^2/s^2,{}^{o}K \times 288^{o}K \times \left[1.5^{\frac{0.4}{1.4}} - 1\right] =$$

$$= 35514.88\,m^2/s^2$$

$$k_{is_1} = \frac{\Delta h_{is}}{U_1^2} = \frac{35514.88\,m^2/s^2}{300^2\,m^2/s^2} = 0.39461$$

$$\varphi_1 = \frac{m_s}{A_1 U_1} R_g \frac{T_{t_1}}{P_{t_1}}$$

ή

$$A_1\varphi_1 = \frac{m_s}{U_1} R_g \frac{T_{t_1}}{P_{t_1}} = \frac{20kg/s}{300m/s} \times 287\,m^2/s^2,{}^{o}K \times \frac{288^{o}K}{1.0332 \times 10^5\,Nt/m^2} =$$

$$= 0.05333\,m^2$$

Άπό τίς σημειώσεις (σελίδες (3-15) καί (3-21)) ξέρουμε ότι (βλέπε άκόμη τό σχήμα (3.8)) γιά μιά μεγάλη περιοχή άριθμών στροφών, άριθμών Reynolds καί άριθμών Mach, τά διαγράμματα $k_{is_1} = f_1(\varphi_1)$ καί $(\eta_{t-t})_C = f_2(\varphi_1)$ μένουν άμετάβλητα. Έτσι, γιά τόν βέλτιστο βαθμό άπόδοσης $(\eta_{t-t})_C = 0.85$ θά έχουμε τίς ίδιες τιμές τού k_{is_1} καί τού φ_1.

Μέ αύτή τήν παρατήρηση σάν βάση άς έξετάσουμε τώρα τήν βαθμίδα μας σάν πρώτη βαθμίδα τού πολυβάθμιου συμπιεστή ήλίου. Έφ' δσον τό φ_1 διατηρείται σταθερό, διατηρείται σταθερό (πρόκειται γιά τήν ίδια γεωμετρία) καί τό $A_1\varphi_1$. Έπομένως γιά τήν έπιτρεπτή ταχύτητα περιστροφής τών 300m/s έχουμε (γιά έργαζόμενο μέσο ήλιο):

$$(\Delta h_{is})_I = k_{is_1} \times U_1^2 = 35514.88\,m^2/s^2$$

καί

$$\pi_C = \left(\frac{\Delta h_{is}}{C_p T_{t_1}} + 1\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Ἐφ᾽ὅσον $C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R_g = 5227.64 m^2/s^2, {}^oK$

$$\pi_C = \left(\frac{35514.88 m^2/s^2}{5227.64 m^2/s^2, {}^oK \times 300 {}^oK} + 1\right)^{\frac{1.66}{0.66}} = 1.05794$$

καί

$$m_s = (A_1 \varphi_1) \times U_1 \frac{P_{t_1}}{R_g T_{t_1}} = 25.658 kg/s$$

Τό ἀντίστοιχο σημεῖο λειτουργίας τοῦ συμπιεστῆ στίς συνθήκες ἀναφορᾶς ὑπολογίζεται μέ βάση τίς σημειώσεις, σελίδα (3-35). Ὁ συμπιεστής ἐργάζεται μέ μέσο τό ἥλιο στίς 12000 RPM. Ἐφ᾽ὅσον

$$\sqrt{\vartheta} = \frac{\sqrt{\gamma R_g T_{t_1}}}{340.17 m/s} = \frac{\sqrt{1.66 \times 2078 \times 300}}{340.17 m/s} = 2.991$$

οἱ ἀντίστοιχες στροφές ἀναφορᾶς εἶναι:

$$N_{REF} = \frac{N}{\sqrt{\vartheta}} = \frac{12000}{2991} = 4012.04$$

Ἐφ᾽ὅσον γιά ἀντίστοιχα σημεῖα ἔχουμε τό ἴδιο k_{is} καί φ_1 (ἤ $A\varphi_1$), ἡ περιφερειακή ταχύτητα στίς συνθῆκες ἀναφορᾶς εἶναι:

$$U_1 = \frac{300 m/s}{12000 RPM} \times 4012.04 RPM = 100.3 m/s$$

καί ἑπομένως ἔχουμε ὅτι:

$$\Delta h_{is} = k_{is} \times U_1^2 = 0.3946 \times 100.3^2 m^2/s^2 = 3969.71 m^2/s^2$$

καί

$$\pi_{C_{REF}} = \left(\frac{\Delta h_{is}}{C_p T_{t_1}} + 1\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{3969.71}{1004\ 288} + 1\right)^{\frac{1.4}{0.4}} = 1.04888$$

Ἡ παροχή στίς συνθῆκες ἀναφορᾶς εἶναι:

$$m_{s_{REF}} = (A_1 \varphi_1) \times U_1 \frac{P_{t_1}}{R_g T_{t_1}} = 0.05333 \times 100.3 \times \frac{103320}{287\ 288} = 6.686 kg/s$$

'Από τόν πρῶτο αὐτό ὑπολογισμό βλέπουμε ὅτι, λόγω τοῦ μεγάλου μοριακοῦ βάρους τοῦ ἡλίου (στό ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ μεγάλη τιμή τῆς σταθερᾶς τοῦ ἀερίου) καί λόγω τῶν περιορισμῶν γιά μηχανικούς λόγους τῆς ταχύτητας περιστροφῆς τῶν πτερυγίων, καταλήγουμε σέ τιμές λόγου πιέσεων πού εἶναι πολύ περιορισμένες.

β) Οἱ συνθῆκες εἰσόδου στή δεύτερη βαθμίδα θά εἶναι οἱ συνθῆκες ἐξόδου ἀπό τήν πρώτη. 'Υπολογίζουμε πρῶτα τήν ὁλική ἐνθαλπική αὔξηση στή βαθμίδα

$$\Delta h_t = \frac{\Delta h_{is}}{(\eta_{t-t})_C} = \frac{35514.88 m^2/s^2}{0.85} = 41782.21 m^2/s^2$$

καί στή συνέχεια τήν αὔξηση τῆς ὁλικῆς θερμοκρασίας

$$\Delta T_t = \frac{\Delta h_t}{C_p} = \frac{41782.21 m^2/s^2}{5227.64 m^2/s^2, {}^oK} = 7.993^oK$$

ἔτσι ἔχουμε τή θερμοκρασία ἐξόδου

$$T_{t_2} = T_{t_1} + \Delta T_t = 300^oK + 7.993^oK = 307.993^oK$$

καί τήν ὁλική πίεση ἐξόδου

$$P_{t_2} = P_{t_1} \times \pi_C = 1000000 \times 1.05794 = 1.05794 \times 10^6$$

'Από τά δεδομένα τοῦ προβλήματος ἔχουμε ὅτι ἡ μέση ἀκτίνα διατηρεῖται. 'Εφ'ὅσον θέλουμε σάν δεύτερη βαθμίδα νά ἐπαναλάβουμε τήν πρώτη καί νά τή τροφοδοτήσουμε ἔτσι, ὥστε νά ἐργάζεται μέ τόν βέλτιστο βαθμό ἀπόδοσης, θά πρέπει νά διατηρήσουμε τίς τιμές τῶν k_{is} καί φ_1. 'Ετσι, ἐφ'ὅσον καί τό Δh_{is} διατηρεῖται ($\Delta h_{is_{II}} = k_{is_1} U_{1_{II}}^2$), ἔχουμε:

$$\pi_{C_{II}} = \left(\frac{\Delta h_{is}}{C_p T_{t_{1_{II}}}} + 1\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{35514.88 m^2/s^2}{5227.64 m^2/s^2, {}^oK \times 307.993^oK} + 1\right)^{\frac{1.66}{0.66}} = 1.0564$$

'Εχουμε ἐπίσης ὅτι

$$\varphi_1 A_1 = \frac{m_s}{U_1} R_g \frac{T_{t_1}}{P_{t_1}}$$

'Εφαρμόζοντας τή σχέση αὐτή στήν εἴσοδο τῆς δεύτερης βαθμίδας ἔχουμε (ἐφ'ὅσον ἀπό τήν πρώτη καί δεύτερη βαθμίδα περνάει ἡ ἴδια παροχή):

$$(\varphi_1 A_1)_{II} = \frac{25.658 kg/s}{300^{o}K} \times 2078.46 m^2/s^2,{}^{o}K \times \frac{307.993^{o}K}{1.05794\ 10^6 Nt/m^2} = 0.05175 m^2$$

Συγκρίνοντας τή τιμή αὐτή μέ ἐκείνη πού εἴχαμε πρίν ἀπό τήν πρώτη βαθμίδα καί ξέροντας ὅτι ἡ τιμή τοῦ φ_1 παραμένει ἡ ἴδια καί γιά τίς δύο βαθμίδες ἔχουμε:

$$\frac{(A_1)_{II}}{(A_1)_{I}} = \frac{0.05175}{0.05333} = 0.9704$$

γ) Γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀπαιτουμένων βαθμίδων θά πρέπει νά κάνουμε τίς ἑξῆς παρατηρήσεις. Ἔχουμε συμφέρον οἱ βαθμίδες μας νά ἐργάζονται ὅλες μέ τόν βέλτιστο βαθμό ἀπόδοσης. Ἐφ'ὅσον ἡ μέση ἀκτίνα παραμένη σταθερή καί τό k_{is} παραμένει καί αὐτό σταθερό, ἕπεται ὅτι γιά ὅλες τίς βαθμίδες ἔχουμε τό ἴδιο Δh_{is} . Ἐφ'ὅσον καί ὁ βαθμός ἀπόδοσης παραμένει σταθερός ἔχουμε ὅτι τό Δh_t εἶναι τό ἴδιο γιά ὅλες τίς βαθμίδες.

Θεωρώντας τό σχῆμα (1) ὅπου παρουσιάζουμε τό θερμοδυναμμικό διάγραμμα τοῦ πολυβάθμιου συμπιεστῆ, τήν πρώτη βαθμίδα καί μιά ἐνδιάμεση βαθμίδα, παρατηροῦμε ὅτι γιά νά ὑπολογίσουμε τόν ἀριθμό τῶν βαθμίδων χρειαζόμαστε τήν διαφορά $T_{t_B} - T_{t_A}$. Τά φαινόμενα ἀναθέρμανσης δέν μᾶς ἐπιτρέπουν νά χρησιμοποιήσουμε τόν ἰσεντροπικό βαθμό κάθε βαθμίδας. Εἶναι δυνατό (ὅπως κάνουμε συνήθως) νά θεωρήσουμε μέ καλή προσέγγιση σταθερό πολυτροπικό βαθμό γιά νά πᾶμε ἀπό τό σημεῖο Α στό σημεῖο Β τοῦ σχήματος (1). Θά θεωρήσουμε ὅπως μᾶς ὑποδεικνύει ἡ ἐκφώνηση, ὅτι αὐτός ἰσοῦται μέ τόν πολυτροπικό βαθμός ἀπόδοσης τῆς πρώτης βαθμίδας. Ἔχουμε, λοιπόν, ὅτι:

$$(\eta_{is_{t-t}})_C = \frac{\pi_C^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\pi_C^{\frac{\gamma-1}{\gamma\eta_{P_C}}} - 1}$$ (σχέση (3.15β) σημειώσεων τοῦ μαθήματος)

καί ἐπομένως

$$\pi_C^{\frac{\gamma-1}{\gamma\eta_{P_C}}} - 1 = \frac{\pi_C^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{(\eta_{is_{t-t}})_C}$$

ἡ ἀκόμα

$$\pi_C^{\frac{\gamma-1}{\gamma\eta_{p_C}}} = \left(\frac{\pi_C^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1}{(\eta_{is_{t-t}})_C}+1\right)$$

$$\frac{\gamma-1}{\gamma\eta_{p_C}}\ln\pi_C = \ln\left(\frac{\pi_C^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1}{(\eta_{is_{t-t}})_C}+1\right) = \ln\left(\frac{\Delta h_t}{C_pT_{t_1}}+1\right) = 0.02629$$

$$1/\eta_{p_C} = \frac{\ln\left(\frac{\Delta h_t}{C_pT_{t_1}}+1\right)}{\ln\pi_C}\ \frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{1.66}{0.66}\times\frac{0.02629}{\ln 1.05794}$$

$$\eta_{p_C} = 0.8518$$

Ἀφοῦ βρήκαμε τόν πολυτροπικό βαθμό ἀπόδοσης τῆς βαθμίδας θά τόν χρησιμοποιήσουμε, ὅπως εἴπαμε σάν πολυτροπικό βαθμό ἀπόδοσης πού χαρακτηρίζει ὁλόκληρη τήν συμπίεση καί θά ὑπολογίσουμε τόν ἀντίστοιχο ἰσεντροπικό βαθμό ἀπόδοσης

$$\eta_{is_C} = \frac{2.5^{\frac{0.66}{1.66}}-1}{2.5^{\frac{0.66}{1.66\times0.8518}}-1} = 0.82351$$

Ἡ πραγματική ἐνθαλπική αὔξηση τῆς κάθε βαθμίδας εἶναι

$$\Delta h_t = \frac{\Delta h_{is}}{(\eta_{is_{t-t}})_C} = 41782.21 m^2/s^2$$

Ἡ ὁλική πραγματική αὔξηση $(\Delta h_t)_{AB}$ τοῦ πολυβάθμιου συμπιεστῆ εἶναι δυνατό νά ὑπολογιστῆ τώρα εὔκολα:

$$(\Delta h_t)_{AB} = \frac{C_pT_{t_1}}{\eta_{is_C}}\left(\pi_C^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right) =$$

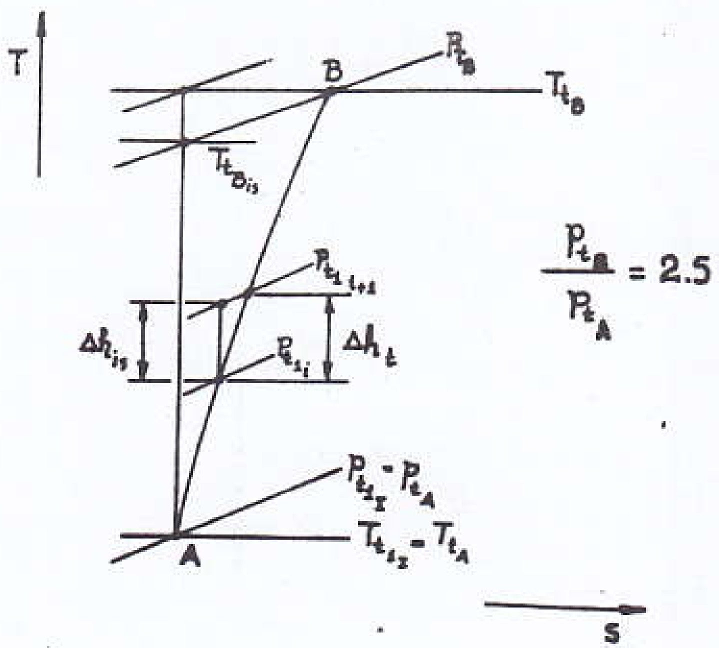
$$= \frac{5227.64 m^2/s^2,{}^oK\times300{}^oK}{0.82351}\left(2.5^{\frac{0.66}{1.66}}-1\right) = 837017.92 m^2/s^2$$

καί ὁ ζητούμενος ἀριθμός βαθμίδων z_{ST} εἶναι

$$z_{ST} = \frac{(\Delta h_t)_{AB}}{\Delta h_t} = \frac{837017.92 m^2/s^2}{41782.21 m^2/s^2} = 20.033 \quad \text{ἤτοι}$$

z_{ST} = 20 βαθμίδες

Π 13-7



<u>Σχήμα 1</u>

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ Νο 14

Τό τετραβάθμιο τμῆμα ὑψηλῆς πίεσης ἀεροπορικοῦ συμπιεστῆ δίνει λόγο πίεσης $\pi_C = 5$. Οἱ βαθμίδες του ἔχουν σχεδιαστεῖ κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε νά δίνουν τήν ἴδια ἐνθαλπική αὔξηση κατά βαθμίδα.

Τό τμῆμα αὐτό τοῦ συμπιεστῆ πρόκειται νά δοκιμαστεῖ πάνω σέ σύνηθες δοκιμαστήριο συμπιεστῶν μέ συνθῆκες εἰσόδου τίς ἀτμοσφαιρικές (γιά ἁπλότητα νά πάρετε $p_{atm} = 1 bar$, $T_{atm} = 300^oK$).

Γιά τίς συνθῆκες αὐτές, ὁ ἐπιθυμητός ἰσεντροπικός βαθμός ἀπόδοσης τοῦ συμπιεστῆ ("ὁλικῶν πρός ὁλικές συνθῆκες") εἶναι 0.85. Ποιός θά πρέπει νά εἶναι ὁ ἀντίστοιχος ἰσεντροπικός βαθμός ἀπόδοσης τῆς πρώτης καί ποιός τῆς τελευταίας βαθμίδας;

Νά ληφθεῖ $R_g = 287 m^2/s^2,^oK$ καί $\gamma = 1.4$. Νά γίνει, πρίν ἀρχίσει ἡ λύση, τό θερμοδυναμικό διάγραμμα τοῦ συμπιεστῆ.

<u>ΛΥΣΗ</u>

α. Ἀρχικά παριστάνουμε στό διάγραμμα T-s τήν μεταβολή τοῦ ἐργαζόμενου μέσου.

Στό σχῆμα (14.1) παριστάνουμε μέ τό σημεῖο 1 τήν εἴσοδο στήν πρώτη βαθμίδα τοῦ τετραβάθμιου συμπιεστῆ ἐνῶ ἡ ἔξοδος ἀπό τή τελευταία βαθμίδα παριστάνεται μέ τό σημεῖο 5 .

Δίδεται ὅτι ἡ ἐνθαλπική αὔξηση εἶναι ἴδια σέ ὅλες τίς βαθμίδες καί ἐπομένως θά ἔχουμε ὅτι ἡ ἐνθαλπική αὔξηση σέ κάθε βαθμίδα θά εἶναι:

$$\Delta h_{t_B} = \frac{\Delta h_t}{4} \qquad (1)$$

Ἐφ᾽ ὅσον τό ἀέριό μας εἶναι θερμικά καί θερμοχωρητικά τέλειο ἔχουμε:

$$h_t = C_p T_t$$

καί ἐπομένως ἡ σχέση (1) γίνεται

$$\Delta T_{t_B} = \frac{\Delta T_t}{4}$$

Ὁ προσδιορισμός τοῦ ζητουμένου ἰσεντροπικοῦ βαθμοῦ ἀπόδοσης τῆς πρώτης βαθμίδας θά γίνει ἀπό τήν ἐξίσωση (3.53), ὁπότε

$$(\eta_{t-t})_I = \frac{T_{t_{2'}} - T_{t_1}}{T_{t_2} - T_{t_1}} \qquad (2)$$

ὅπου $T_{t_1} = T_{atm} = 300^oK$

θά πρέπει νά προσδιορίσουμε τίς θερμοκρασίες

T_{t_2} καί $T_{t_{2'}}$.

Ἀπό τήν ἰσεντροπική συμπίεση ἀλλαγῆς κατάστασης 1→ 2', ἔχουμε:

$$T_{t_2} = T_{t_1} \left(\frac{P_{t_2}}{P_{t_1}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \qquad (3)$$

Θεωροῦμε ὅτι ἡ συμπίεση στίς 4 βαθμίδες τοῦ συμπιεστῆ εἶναι πολυτροπική (μέ σταθερό πολυτροπικό βαθμό ἀπόδοσης) καί ὅτι διέπεται ἀπό τή σχέση (ἐξίσωση (3.7))

$$\frac{T}{p^{\frac{(n-1)}{n}}} = \text{const.}$$

Ἐφαρμόζοντας τή σχέση αὐτή μεταξύ τῶν καταστάσεων 1 καί 2, ἔχουμε:

$$P_{t_2} = P_{t_1} \left(\frac{T_{t_2}}{T_{t_1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \qquad (4)$$

ὅπου n ὁ πολυτροπικός ἐκθέτης (ἐξίσ. (3.18β))

$$n = \frac{1}{1 - \frac{\gamma-1}{\eta_{p_C}\gamma}}$$

Ἀπό τή σχέση (ἐξίσ. (3.15β)) μεταξύ πολυτροπικοῦ καί ἰσεντροπικοῦ βαθμοῦ ἀπόδοσης, ἔχουμε

$$(\eta_{t-t})_C = (\eta_{is})_C = \frac{\pi_C^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\pi_C^{\frac{\gamma-1}{\eta_{p_C}\gamma}} - 1}$$

ἤ

$$\eta_{p_C} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\ln \pi_C}{\ln\left[\frac{\pi_C^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{(\eta_{t-t})_C} + 1 \right]}$$

Δίδεται ὅτι

$\pi_C = 5$, $\gamma = 1.4$ καί $(\eta_{t-t})_C = 0.85$

Ἑπομένως

$$\eta_{p_C} = \frac{1.4-1}{1-4} \frac{\ln 5}{\ln\left[\frac{5^{\frac{1.4-1}{1.4}} - 1}{0.85} + 1 \right]} = .8795 \qquad \eta_{p_C} = 0.8795$$

Ὁ πολυτροπικός ἐκθέτης εἶναι:

$$n = \frac{1}{1 - \frac{1.4-1}{0.8795 \times 1.4}} = 1.4812 \qquad (5) \qquad n = 1.4812$$

Γιά ἰσεντροπική συμπίεση ἔχουμε

$$\Delta h_{t_{is}} = C_p(T_{t_5} - T_{t_1})$$

καί

$$T_{t_1} = T_{t_1}\left(\frac{P_{t_5}}{P_{t_1}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_{t_1}\pi_C^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Οἱ δύο τελευταῖες σχέσεις δίνουν

$$\Delta h_{t_{is}} = C_p T_{t_1}\left(\pi_C^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)$$

ὅπου

$$C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R_g = \frac{1.4}{1.4-1} \times 287 = 1004.5 m^2/s^2, {}^oK \qquad C_p = 1004.5 m^2/s^2, {}^o$$

Ἄρα

$$\Delta h_{t_{is}} = 1004.5 \times 300 \times \left(5^{\frac{1.4-1}{1.4}} - 1\right) = 175934.04 m^2/s^2 \qquad \Delta h_{t_{is}} = 175934.04 \frac{m^2}{s^2}$$

καί

$$T_{t_5} - T_{t_1} = \Delta T_{t_{is}} = \frac{\Delta h_{t_{is}}}{C_p} = \frac{175934.04}{1004.5} = 175.15^oK \qquad T_{t_5} - T_{t_1} = 175.15^oK$$

Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ ἰσεντροπικοῦ βαθμοῦ ἀπόδοσης ὁλικῶν πρός ὁλικές συνθῆκες ἔχουμε

$$(\eta_{t-t})_C = \frac{\Delta h_{t_{is}}}{\Delta h_t}$$

ὁπότε

$$\Delta h_t = \frac{\Delta h_{t_{is}}}{(\eta_{t-t})_C} = \frac{175934.04}{0.85} = 206981.22 m^2/s^2 \qquad \Delta h_t = 206981.22 m^2/s^2$$

καί

$$\Delta T_{t_B} = \frac{\Delta T_t}{4} = \frac{\Delta h_t}{4C_p} = \frac{206981.22}{4 \times 1004.5} = 51.51^oK \qquad \Delta T_{t_B} = 51.51^oK$$

Ἀπό τήν ΔT_{t_B} ὑπολογίζουμε τήν T_{t_2}

$T_{t_2} = \Delta T_{t_B} + T_{t_1} = 51.51+300 = 351.51^oK$ $\qquad T_{t_2} = 351.51^oK$

Οἱ σχέσεις (4) καί (5) δίνουν τήν

$$P_{t_2} = 1\times\left(\frac{351.51}{300}\right)^{\frac{1.4812}{1.4812-1}} = 1.6286bar \qquad P_{t_2} = 1.6286bar$$

καί ἡ σχέση (3) δίνει

$$T_{t_2'} = 300\left(\frac{1.6286}{1}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} = 344.86^oK \qquad T_{t_2'} = 344.86^oK$$

Ὁ ζητούμενος βαθμός ὑπολογίζεται ἀπό τήν σχέση (2)

$$(\eta_{t-t})_I = \frac{344.86-300}{351.51-300} = 0.8709 \qquad (\eta_{t-t})_I = 0.8709$$

Ὁ προσδιορισμός τοῦ ἰσεντροπικοῦ βαθμοῦ ἀπόδοσης γιά τήν τελευταία βαθμίδα γίνεται σύμφωνα μέ τή σχέση:

$$(\eta_{t-t})_{IV} = \frac{T_{t_5''}-T_{t_4}}{T_{t_5}-T_{t_4}} = \frac{T_{t_5''}-T_{t_4}}{\Delta T_{t_B}} \qquad (6)$$

Ἡ θερμοκρασία $T_{t_5''}$ ὑπολογίζεται χρησιμοποιώντας τήν παρακάτω σχέση πού ἰσχύει γιά τήν ἰσεντροπική συμπίεση 4→5".

$$T_{t_5''} = T_{t_4}\left(\frac{P_{t_5}}{P_{t_4}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \qquad (7)$$

Ἡ δέ πίεση P_{t_4} ὑπολογίζεται χρησιμοποιώντας τήν παρακάτω σχέση τῆς πολυτροπικῆς μεταβολῆς τῶν τεσσάρων πρώτων βαθμίδων

$$P_{t_4} = P_{t_1}\left(\frac{T_{t_4}}{T_{t_1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

Ἡ θερμοκρασία T_{t_4} βρίσκεται ἀπό τήν δοθεῖσα θερμοκρασιακή αὔξηση κατά βαθμίδα.

$T_{t_4} = T_{t_1} + 3\Delta T_{t_B} = 300+3\times51.51 = 454.53^oK$ $\qquad T_{t_4} = 454.53^oK$

Επομένως

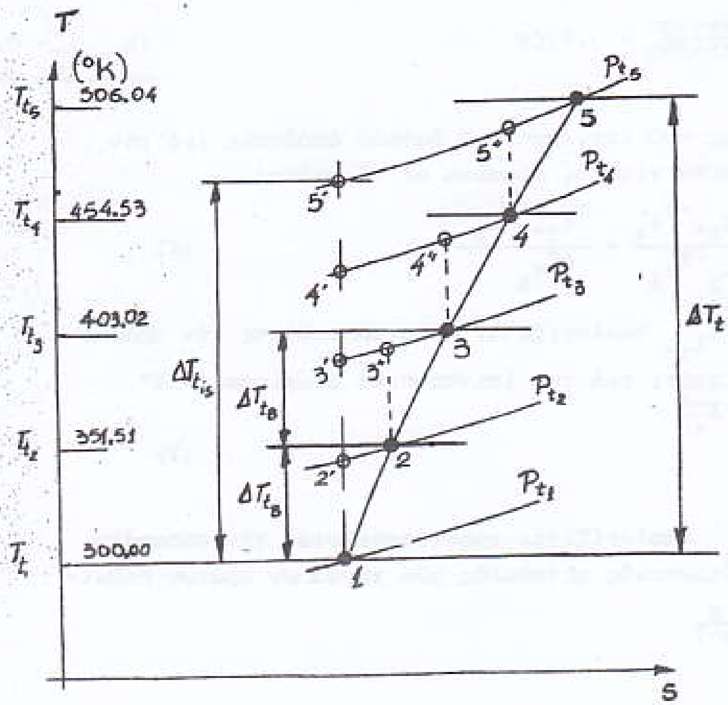
$$P_{t_4} = 1\times\left(\frac{454.53}{300}\right)^{\frac{1.4812}{1.4812-1}} = 3.593\text{bar} \qquad P_{t_4} = 3.593\text{bar}$$

Η σχέση (7) δίνει:

$$T_{t_{5''}} = 454.53 \left(\frac{5}{3.593}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} = 499.54\,^{O}K$$

Ο δέ ισεντροπικός βαθμός απόδοσης τής τετάρτης βαθμίδας υπολογίζεται από τήν σχέση (6)

$$(\eta_{t-t})_{IV} = \frac{499.54-454.53}{51.51} = 0.8738 \qquad (\eta_{t-t})_{IV}=0.8738$$



Σχήμα 14.1

Θερμοδυναμικό Διάγραμμα τετραβάθμιου συμπιεστή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ Νο 15

Μικρός ἀξονικός ἀεριοστρόβιλος πρόκειται νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τήν κάλυψη τῶν ἀναγκῶν σέ ἠλεκτρική ἐνέργεια ἑνός Ἑλληνικοῦ νησιοῦ. Ὁ ἀεριοστρόβιλος αὐτός πρόκειται νά χρησιμοποιήσει καυσαέρια (R_g =325m^2/sec^2,^{o}K, γ =1.35) ὁλικῆς θερμοκρασίας καί ὁλικῆς πίεσης ἀντίστοιχα T_{t_o} = 405^{o}K καί p_{t_o} = 3.2 bar τά ὁποῖα οὕτως ἤ ἄλλως θά πήγαιναν στήν ἀτμόσφαιρα.

Οἱ ἀνάγκες πού καλεῖται νά καλύψει ὁ ἀεριοστρόβιλος ἀνέρχονται στά 3.3MW ὑπολογισμένα στόν ἄξονα τοῦ στροβίλου. Γιά ἁπλότητα κατασκευῆς πρόκειται νά χρησιμοποιηθεῖ μονοβάθμιος ἀξονικός ἰσόθλιπτος (περίπου) ἀεριοστρόβιλος (βλέπε σχῆμα (1)), ὁ ὁποῖος παραλαμβάνει τά καυσαέρια ἀπό τήν πηγή γιά νά τά δώσει στήν ἀτμόσφαιρα (ἀτμοσφαιρική πίεση p_{atm}= 1bar).

Γιά ἕνα πρῶτο ὑπολογισμό παίρνουμε:

α) Γωνία ἐξόδου σταθερῆς πτερύγωσης $α_1$= 75^o

β) Συντελεστή ἀπωλειῶν σταθερῆς πτερύγωσης φ = 0.95

γ) Λόγο μέσων ἀκτίνων εἰσόδου/ἐξόδου κινητῆς πτερύγωσης R_{m_2}/R_{m_1} = 1.

δ) Λόγο μεσημβρινῶν (ἐδῶ ἀξονικῶν) συνιστωσῶν εἰσόδου/ἐξόδου τῆς κινητῆς πτερύγωσης V_{m_2}/V_{m_1} = 1.

ε) Συντελεστή ἀπωλειῶν διακένου μεταξύ σταθερῆς καί κινητῆς πτερύγωσης $Φ_R$ =1. (ἀπώλειες διακένου ἀμελητέες).

στ) Τιμή τοῦ συντελεστῆ ἀναθέρμανσης f_T =0.

Γιά νά ἀποφύγουμε τίς διαδοχικές δοκιμές πού πρέπει νά κάνουμε γιά νά πετύχουμε λύση μέ πραγματικό βαθμό ἀντίδρασης ἴσο μέ τό μηδέν, θά θέσουμε ἀπό τήν ἀρχή θεωρητικό βαθμό ἀντίδρασης r_{th}= 0.07 πού θά μᾶς φέρει κοντά στόν ἐπιθυμητό πραγματικό βαθμό ἀντίδρασης.

Τέλος, γιά νά μειώσουμε τίς διαστάσεις τοῦ στροβίλου θά δεχτοῦμε ἀριθμό στροφῶν N = 6000RPM.

Ζητοῦνται:

α) Ὁ προσδιορισμός μιᾶς τιμῆς τοῦ συντελεστῆ θεωρητικῆς φόρτισης k_{is} γιά βέλτιστο "ἀπό ὁλικές σέ στατικές συνθῆκες" ἰσεντροπικό βαθμό ἀπόδοσης τῆς βαθμίδας τοῦ στροβίλου.
Χρησιμοποιοῦμε τόν βαθμό αὐτό ἀπόδοσης, ἐπειδή ἡ κινητική ἐνέργεια ἐξόδου δέν πρόκειται νά χρησιμοποιηθεῖ οὔτε νά ἀνακτη-

θεῖ μερικά μέσω διαχύτη (ἐπιβραδυντῆ). Ὁ προσδιορισμός αὐτός θά γίνει ἀπό τούς πίνακες μέ ἐσωτερική παρεμβολή.

β) Νά ὑπολογιστοῦν οἱ σχετικές καί ἀπόλυτες γωνίες ἐξόδου τῆς κινητῆς πτερύγωσης β_2 καί α_2 χρησιμοποιώντας τίς σχέσεις πού ἀναπτύχθηκαν στό 4ο κεφάλαιο καί ὄχι τούς πίνακες.

γ) Νά ὑπολογιστοῦν τά τρίγωνα ταχυτήτων εἰσόδου/ἐξόδου τῆς κινητῆς πτερύγωσης (ἀπόλυτες καί σχετικές ταχύτητες καί γωνίες).

δ) Νά ὑπολογιστοῦν ὁ πραγματικός βαθμός ἀντίδρασης καί ὁ "ἀπό ὁλικές σέ στατικές συνθῆκες" ἰσεντροπικός βαθμός ἀπόδοσης τῆς βαθμίδας.

ε) Νά ὑπολογιστεῖ ἡ μέση ἀκτίνα εἰσόδου R_{m_1} τῆς κινητῆς πτερύγωσης καί τό ὕψος τῶν πτερυγίων χρησιμοποιώντας γιά τόν τελευταῖο αὐτό ὑπολογισμό τήν ὑπόθεση τῆς ὁμοιόμορφης ροῆς στήν ἀντίστοιχη διατομή.

στ) Νά ὑπολογιστεῖ ὁ λόγος διατομῶν εἰσόδου/ἐξόδου τῆς κινητῆς πτερύγωσης.

ζ) Νά δοθῆ σχηματικά τό θερμοδυναμικό διάγραμμα τῆς βαθμίδας.

ΛΥΣΗ

α) Ὁ προσδιορισμός τοῦ k_{is} γιά βέλτιστο ἰσεντροπικό βαθμό ἀπόδοσης θά γίνει μέ τήν βοήθεια τῶν ΠΙΝΑΚΩΝ I καί III τῶν σημειώσεων (σελ. 4.31).

Χρησιμοποιοῦμε τόν Πίνακα III ἐπειδή στόν ἀτμοστρόβιλο τοῦ παραδείγματος τά καυσαέρια ὁδηγοῦνται στήν ἀτμόσφαιρα. Ἐπομένως ἡ κινητική ἐνέργεια στήν ἔξοδο τῆς βαθμίδας θεωροῦμε ὅτι χάνεται τελείως ($\Phi_E = 0$).

Ἀπό τόν καθοδηγητικό Πίνακα I γιά στροβίλους μέ μέγιστο βαθμό ἀπόδοσης ὁδηγούμεθα στή χρήση τοῦ Πίνακα III (2.2) μέ βάση τά ἑξῆς δεδομένα τοῦ προβλήματος:

$\alpha_1 = 75^o$

$R_{m_2}/R_{m_1} = 1.0$

$V_{m_2}/V_{m_1} = 1.0$

$\Phi = 0.95$

$\Phi_R = 1.0$

$\Phi_E = 0.$

Ὁ θεωρητικός βαθμός ἀντίδρασης λαμβάνεται $r_{th} = 0.07$ καί, ἐπομένως, μέ βάση τίς ἑξῆς διαδοχικές τιμές τῶν βέλτιστων μεγεθῶν

	r_{th}	k_{is}
1.	0.000	4.674
2.	0.125	4.207

ἔχουμε μέ γραμμική παρεμβολή ὅτι:

$$k_{is} = 4.674 - 0.07 \times \frac{4.674-4.207}{0.125} = 4.674 - \frac{0.07 \times 0.467}{0.125} = 4.41$$

Αρα γιά τίς βέλτιστες συνθῆκες $\underline{k_{is} = 4.41}$

β) Οἱ ζητούμενες γωνίες β_2 καί α_2 θά ὑπολογιστοῦν ἀπό τίς σχέσεις (4.38) καί (4.39)

$$\tan\beta_2 = -\frac{\Psi}{\Phi(V_{m_2}/V_{m_1})}\cdot\frac{X}{\cos\alpha_1\sqrt{1-r_{th}}} \qquad (1)$$

καί

$$\tan\alpha_2 = \frac{\nu(R_2/R_1) - \Psi X}{\Phi(V_{m_2}/V_{m_1})\cos\alpha_1\sqrt{1-r_{th}}} \qquad (2)$$

Τό μέγεθος X ὑπολογίζεται ἀπό τήν σχέση (4.34)

$$X^2 = (1+f_T)r_{th} + \Phi^2\left(\Phi_R - \left(\frac{V_{m_2}/V_{m_1}}{\Psi}\right)^2 \cos^2\alpha_1\right)(1-r_{th}) -$$

$$- 2\nu\Phi_R\Phi\sin\alpha_1\sqrt{1-r_{th}} + \nu^2(\Phi_R + R_2^2/R_1^2 - 1) \qquad (3)$$

Δίνονται ἀκόμη ὅτι

$$\frac{R_{m_2}}{R_{m_1}} = \frac{R_2}{R_1} = 1$$

$V_{m_1}/V_{m_2} = 1$

$\Phi = 0.95$, $\Phi_R = 1$, $f_T = 0$, $\alpha_1 = 75^\circ$

• Ὁ λόγος ταχυτήτων (ν) ὑπολογίζεται (σχέση (4.27))

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{k_{is}}} = \frac{1}{\sqrt{4.41}} = 0.476 \qquad \nu = 0.476$$

• Ὁ συντελεστής ἀπωλειῶν Ψ ἐκφράζεται (σχέση (4.54))

$$\Psi = 0.99 - \frac{2.28}{10^4}\Delta\beta - \frac{4.97}{180-\Delta\beta} \quad (\Delta\beta \text{ σέ μοῖρες}) \qquad (4)$$

Παρατηροῦμε ὅτι χρειαζόμαστε τήν διαφορά

$\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$

Δηλαδή πρέπει νά γνωρίζουμε τήν β_2 γιά νά ὑπολογίσουμε τό Ψ. Ἀλλά τό Ψ χρειάζεται γιά νά ὑπολογιστεῖ τό β_2. Ἐπομένως εἶναι ἀνάγκη νά χρησιμοποιήσουμε τή μέθοδο τῶν διαδοχικῶν δοκιμῶν.

Παίρνοντας σάν πρώτη τιμή γιά τίς διαδοχικές δοκιμές Ψ=1 ἔχουμε ὅτι

$$X^2=(1+0)\times 0.07+(0.95)^2\times\left[1-\left(\frac{1}{1}\right)^2\cos^2 75\right]\times(1-0.07)-2\times 0.476\times 1\times 0.95\times$$

$$\times\sin 75\times\sqrt{1-0.07}+(0.476)^2\times(1+1-1)=0.237 \qquad \Psi=1 \quad X^2=0.237$$

Ἐπομένως, γιά Ψ=1, X = 0.487 καί:

$$\tan\beta_2=-\frac{1}{0.95\times 1}\times\frac{0.487}{\cos 75\times\sqrt{1-0.07}}=\frac{0.487}{0.2371}=-2.054$$

$$\beta_2=-64.04^{\circ} \qquad \beta_2=-64.04^{\circ}$$

Ἐπίσης ἀπό τή σχέση (4.37) ἔχουμε ὅτι:

$$\tan\beta_1=\tan\alpha_1-\frac{\nu}{\Phi\cos\alpha_1\sqrt{1-r_{th}}}=\tan 75-\frac{0.476}{0.95\times\cos 75\times\sqrt{1-0.07}}=$$

$$=1.725$$

καί ἐπομένως

$$\beta_1=\arctan 1.725=59.89^{\circ} \qquad \underline{\beta_1=59.89^{\circ}}$$

Ἄρα

$$\Delta\beta=\beta_1-\beta_2=59.89-(-64.04)=123.93^{\circ} \qquad \Delta\beta=123.93^{\circ}$$

Μιά δεύτερη τιμή τοῦ Ψ ὑπολογίζεται μέ βάση τήν πρώτη τιμή τῆς Δβ, ἀπό τή σχέση (4). Ἔχουμε:

$$\Psi'=0.99-\frac{2.28}{10^4}\times 123.93-\frac{4.97}{180-123.93}=0.8731$$

Μέ τό νέο αὐτό Ψ = 0.8731 ὑπολογίζουμε ἕνα νέο X ἀπό τή σχέση (3):

$$X^2 = 0.07+0.9025\left[1-\left(\frac{1}{\Psi}\right)^2\times 0.06699\right]\times 0.93 -$$
$$- 2\times 0.476\times 1\times 0.95\times \sin 75\times\sqrt{1-0.07} + (0.476)^2\times(1+1-1) =$$
$$= 0.29345 - 0.0562\times\left(\frac{1}{\Psi}\right)^2$$

Επομένως γιά $\Psi = 0.8731$

$$X^2 = 0.29345-0.0562\left(\frac{1}{0.8731}\right)^2 = 0.2197$$

Άρα $X = 0.4687$

$\Psi = 0.8731$

$X = 0.4687$

καί

$$\tan\beta_2 = -\frac{\Psi\cdot X}{0.2371} = -\frac{0.8731\ 0.4687}{0.2371} = -1.726$$

Άρα

$\beta_2 = -59.91^o$ $\qquad$ $\beta_2 = -59.91^o$

$\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2 = 59.89-(-59.91) = 119.8^o$ $\qquad$ $\Delta\beta = 119.8^o$

Μιά τρίτη τιμή τοῦ Ψ ὑπολογίζεται μέ βάση τή δεύτερη τιμή τῆς Δβ ἀπό τή σχέση (4).

Έχουμε:

$$\Psi = 0.99 - \frac{2.28}{10^4}\times 119.8 - \frac{4.97}{180-119.8} = 0.8801$$

Μέ τό νέο αὐτό $\Psi = 0.8801$ ὑπολογίζουμε ἕνα νέο X ἀπό τή σχέση (3):

$$X^2 = 0.29345-0.0562\times\left(\frac{1}{0.8801}\right)^2 = 0.2209$$

Επομένως $X = 0.4699$

$\Psi = 0.8801$

$X = 0.4699$

καί

$$\tan\beta_2 = -\frac{0.8801\times 0.4699}{0.2371} = -1.744$$

καί

$\beta_2 = -60.17^o$ $\qquad$ $\beta_2 = -60.17^o$

Θεωρώντας τήν προσέγγιση αὐτή ἱκανοποιητική ἔχουμε ὅτι ἡ ζητουμένη γωνία ἐξόδου β_2 εἶναι

$$\underline{\beta_2=-60.17^{\circ}}$$

Ἀπό τήν (2) ὑπολογίζω τήν ἀντίστοιχη τιμή τῆς α_2

$$\tan\alpha_2=\frac{0.476\ 1-\ 0.880I\ 0.4699}{0.2371}=0.2634$$

καί ἐπομένως

$$\underline{\alpha_2=14.75^{\circ}}$$

γ) Ἔχουμε προσδιορίσει ὅτι:

$\alpha_2=14.75^{\circ}$

$\beta_2=-60.17^{\circ}$

Ἐπίσης ἀπό τή σχέση (4.37) ἔχουμε βρεῖ

$\beta_1=59.89^{\circ}$

Ἀπό τά δεδομένα ἔχουμε ὅτι $\alpha_1=75^{\circ}$ καί ἔχουμε ὑπολογίσει ὅτι:

$$\nu=\frac{U_1}{V_{th}}=0.476$$

Ἡ θεωρητική ταχύτητα V_{th} ὑπολογίζεται ἀπό τή σχέση (4.1):

$$V_{th}=\sqrt{2|\Delta h_{1s}|}=\sqrt{2|h_{2_{1s}}-h_{t_o}|}$$

Θεωρώντας τήν ἰσεντροπική πτώση $0\rightarrow 2_{1s}$ ἔχουμε:

$$\frac{T_{2_{1s}}}{T_{t_o}}=\left(\frac{P_{atm}}{P_{t_o}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

ἤ

$$T_{2_{1s}}=T_{t_o}\left(\frac{P_{atm}}{P_{t_o}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=405\times\left(\frac{1}{3.2}\right)^{\frac{1.35-1}{1.35}}=299.56^{\circ}K \qquad T_{2_{1s}}=299.56^{\circ}K$$

καί $\Delta h_{1s}=C_p(T_{t_o}-T_{2_{1s}})$

όπου $c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R_g = \frac{1.35}{1.35-1} \times 325 = 1253.57 m^2/s^2, {}^oK$ $\qquad c_p = 1253.57\ m^2/s^2, {}^oK$

καί

$\Delta h_{is} = 1253.57(405-299.56) = 132176.42 m^2/s^2$ $\qquad \Delta h_{is} = 132176.42\ m^2/s^2$

$V_{th} = \sqrt{2\times 132176.42} = 514.15 m/s$ $\qquad V_{th} = 514.15 m/s$

Άπό τήν τιμή τοῦ ν ὑπολογίζουμε τήν περιφερειακή ταχύτητα U_1:

$U_1 = \nu V_{th} = 0.476\times 514.15 = 244.73 m/s$ $\qquad U_1 = 244.73 m/s$

Ἐπίσης άπό τήν σχέση (4.28)

$$\frac{V_1}{U_1} = \frac{\phi\sqrt{1-r_{th}}}{\nu} = \frac{0.95\times\sqrt{1-0.07}}{0.476} = 1.925$$

ὑπολογίζουμε τήν ταχύτητα V_1

$V_1 = 1.925 U_1 = 1.925\times 244.73 = 471.10 m/s$ $\qquad V_1 = 471.10 m/s$

καί άπό τή σχέση τῶν τριγώνων ταχυτήτων

$$\left(\frac{W_1}{U_1}\right)^2 = 1+\left(\frac{V_1}{U_1}\right)^2 - 2\left(\frac{V_1}{U_1}\right)\sin a_1 = 1+(1.925)^2 - 2\times(1.925)\times\sin 75 = 0.987$$

ὑπολογίζουμε τόν λόγο W_1/U_1

$\frac{W_1}{U_1} = 0.993 \quad W_1 = 0.993 U_1 = 0.993\times 244.73 = 243.02 m/s$

καί ἑπομένως ἡ σχετική ταχύτητα W_1 εἶναι $\qquad W_1 = 243.02 m/s$

Ἡ ἀξονική ταχύτητα V_{m_1} εἶναι:

$V_{m_1} = \cos a_1 \cdot V_1 = \cos 75\times 471.10 = 121.93 m/s$

Ἐπειδή δίδεται $V_{m_2} = V_{m_1}$ ἔχουμε: $\qquad V_{m_2} = V_{m_1} = 121,93 m/s$

Τό τρίγωνο ἐξόδου προσδιορίζεται:

$W_2 = V_{m_2}/\cos\beta_2 = 121.93/\cos(-60.17) = 245.12 m/s$ $\qquad W_2 = 245.12 m/s$

$V_2 = V_{m_2}/\cos a_2 = 121.93/\cos(14.75) = 126.09m/s$ $\quad$ $\underline{V_2 = 126.09m/s}$

Εφ'όσον δίνεται ότι $R_{m_2}/R_{m_1} = 1$ τότε $\quad$ $\underline{U_2 = U_1 = 244,73m/s}$

δ) Ό πραγματικός βαθμός άντίδρασης θά ύπολογιστεΐ άπό τή σχέση (4.5)

$$r = \frac{W_2^2 - W_1^2 + U_1^2 - U_2^2}{V_1^2 - W_2^2 - W_1^2 + U_1^2 - U_2^2} = \frac{(245.12)^2 - (243.02)^2}{(471.10)^2 + (245.12)^2 - (243.02)^2} = 0.00459$$

$\underline{r = 0.00459}$

Ό ίσεντροπικός βαθμός άπόδοσης "άπό όλικές σέ στατικές συνθήκες" τής βαθμίδας ύπολογίζεται άπό τήν σχέση (4.35)

$$(\eta_{t-s})_T = 2\nu\left[\Phi \sin a_1 \sqrt{1 - r_{th}} - \nu(R_2/R_1)^2 + \Psi X(R_2/R_1)\right] =$$

$$= 2\times0.476\times0.95\times\sin75\times\sqrt{0.93} - 0.476\times1 + 0.8801\times$$

$$\times0.4699\times1 = 0.783$$

$\underline{(\eta_{t-s})_T = 0.783}$

ε) Ή μέση άκτίνα είναι, γιά N = 6000RPM

$$U = R_m\omega = R_m\frac{2\pi N}{60}$$

$$R_m = \frac{U30}{\pi N} = \frac{244.73\times30}{\pi\times6000} = 0.3895m$$

$\underline{R_m = 0.3895m}$

Γιά νά καλυφθεΐ ή ίσχύς $P_u = 3.3MW$ τοΰ προβλήματος θά πρέπει:

$$P_u = m_s\Delta h_t$$

Άλλά

$$\Delta h_t = (\eta_{t-s})_T\,\Delta h_{is} \qquad \text{(σχέση 4.19)}$$

καί

$$\Delta h_t = 0.783\times132176.42 = 103494 \quad m^2/s^2$$

$\Delta h_t = 103494 m^2/s^2$

Άρα

$$m_s = \frac{P_u}{\Delta h_t} = \frac{3\times300000}{103494} = 31.89kg/s$$

$m_s = 31.89kg/s$

Εφ'όσον ύποθέτουμε όμοιόμορφη ροή στίς διατομές ό τύπος τής παροχής μάζας είναι:

$m_s = \rho_1 V_{m_1} S_1$

όπου

$S_1 = 2\pi R_{m_1} b_1$

καί

$$\frac{\rho_1}{\rho_{t_o}} = \frac{\left[1-(1-r_{th})Y\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1-\Phi^2(1-r_{th})Y} \qquad \text{(σχέση 4.45)}$$

μέ

$$Y = \frac{\gamma-1}{2} k_{is}\left(\frac{U_1}{a_{t_o}}\right)^2 \qquad \text{(σχέση 4.44)}$$

Ἡ ὁλική ταχύτητα ἤχου ὑπολογίζεται

$$a_{t_o} = \sqrt{(\gamma-1)C_p T_{t_o}} = \sqrt{(1.35-1)\times 1253.57\times 405} = 421.54\text{m/s} \qquad a_{t_o} = 421.54\text{m/s}$$

καί ἡ ὁλική πυκνότητα

$$\rho_{t_o} = \frac{P_{t_o}}{R_g T_{t_o}} = \frac{3.2\times 10^5}{325\times 405} = 2.431\text{kg/m}^3 \qquad \rho_{t_o} = 2431\text{kg/m}^3$$

Ἄρα

$$Y = \frac{1.35-1}{2} \times 4.41\times\left(\frac{244.73}{421.54}\right)^2 = 0.2601 \qquad Y = 0.2601$$

Ὁπότε ἡ σχέση (4.45) δίνει

$$\frac{\rho_1}{\rho_{t_o}} = \frac{\left|1\times(1-0.07)\times 0.2601\right|^{\frac{1.35}{1.35-1}}}{1-(0.95)^2\times(1-0.07)\times 0.2601} = 0.4396$$

$$\rho_1 = 0.4396\times 2431 = 1069\text{kg/m}^3 \qquad \rho_1 = 1069\text{kg/m}^3$$

Ἡ σχέση τῆς παροχῆς δίνει

$$m_s = \rho_1 V_{m_1} 2\pi R_{m_1} b_1$$

$$b_1 = \frac{m_s}{\rho_1 V_{m_1} 2\pi R_{m_1}} = \frac{31.89}{1069\times 121.93\times 2\pi\times 0.3895} = 0.100\text{m} \qquad \underline{b_1 = 0.10\text{m}}$$

Ἐπίσης ἀπό τήν σχέση (4.50)

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1-\left[(\eta_{t-s})_T+k_E/k_{is}\right]\,Y}{1-\Phi^2(1-r_{th})Y}\left[\frac{1-(1-r_{th})Y}{1-Y}\right]^{\frac{Y}{Y-1}}$$

όπου

$$k_E = \left(\frac{V_2}{U_1}\right)^2 = \left(\frac{126.09}{244.73}\right)^2 = 0.2654 \qquad k_E = 0.2654$$

και

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1-\left[0.783+0.2654/4.41\right]\times 0.260I}{1-(0.95)^2\times(1-0.07)\times 0.260I} \times \left[\frac{1-(1-0.07)\times 0.260I}{1-0.260I}\right]^{\frac{1.35}{1.35-1}}$$

Άρα

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1.0969 \qquad \rho_2 = \frac{1.069}{1.0969} = 0.9746\,kg/m^3$$

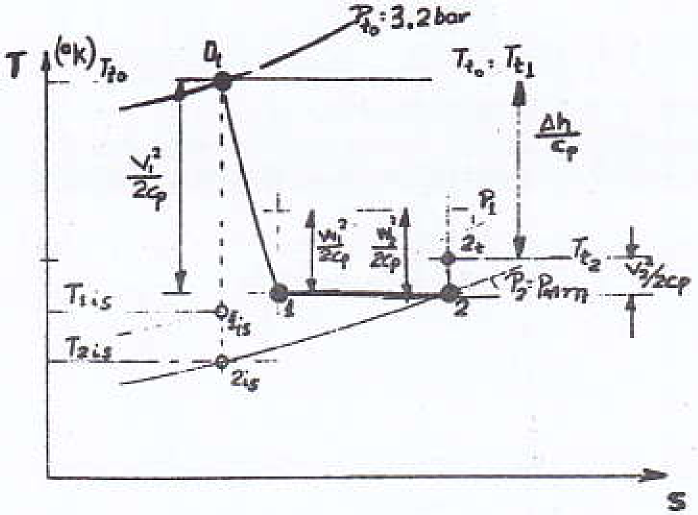
Ομοίως γιά τή διατομή (2) έχουμε $\rho_2 = 0.9746\,kg/ms$

$$b_2 = \frac{m_s}{V_{m_2}\,2\,R_{m_2}} = \frac{31.89}{0.9746\times 121.93\times 2\pi\times 0.3895} = 0.1097m \qquad \underline{b_2 = 0.1097m}$$

στ) Ὁ λόγος διατομῶν εἰσόδου/ἐξόδου τῆς κινητῆς πτερύγωσης ὑπολογίζεται:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi R_{m_1} b_1}{2\pi R_{m_2} b_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{0.1000}{0.1097} = 0.912 \qquad \underline{S_1/S_2 = 0.912}$$

ζ) Θερμοδυναμικό Διάγραμμα



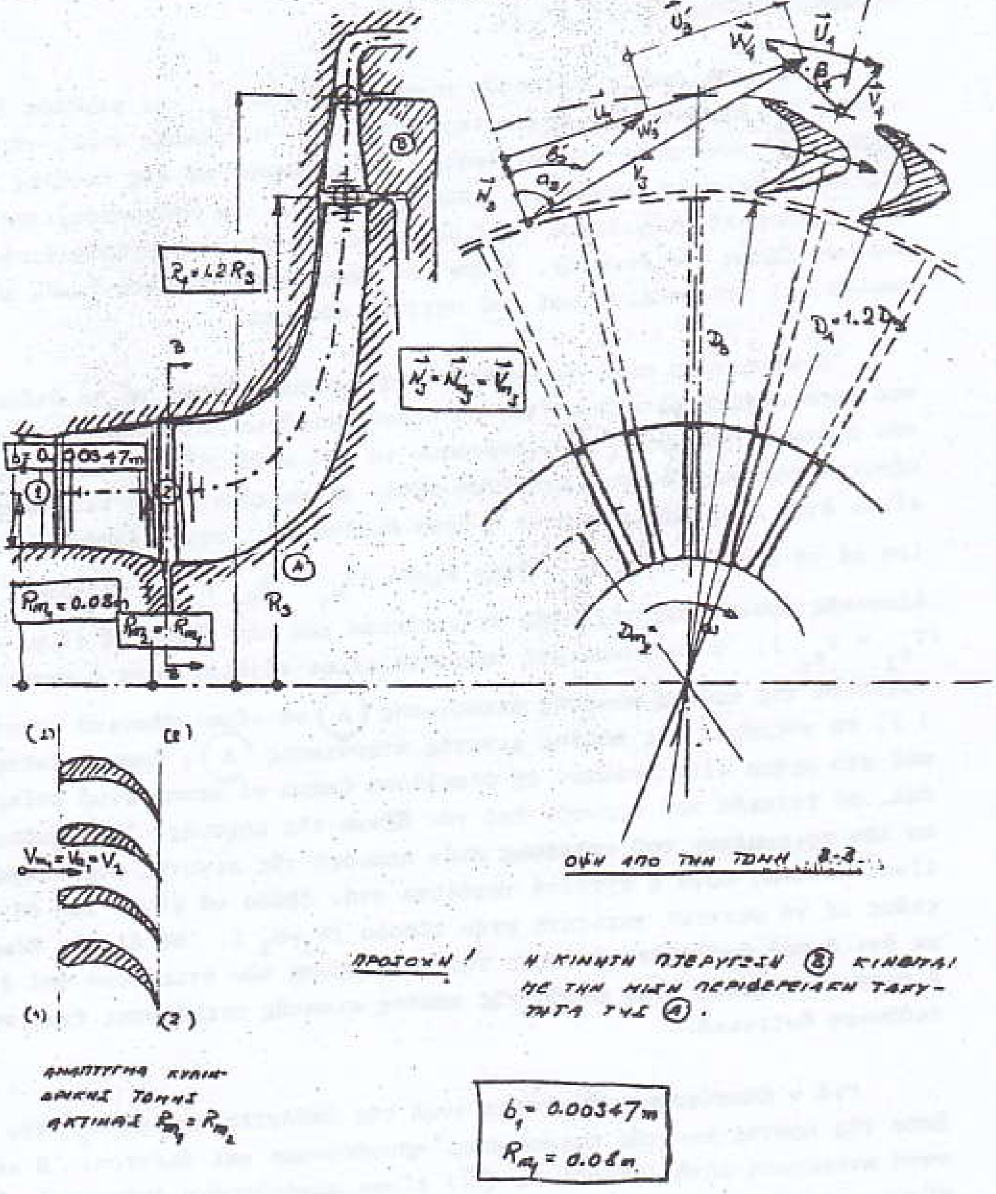
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ Νο 16

Ὁ ὑπολογισμός συμπιεστῶν μικρῆς παροχῆς $\dot{m}_s$ καί μεγάλου λόγου πίεσης π_C παρουσιάζει ὁρισμένες δυσκολίες. Οἱ μικρές τιμές τῆς μεσημβρινῆς συνιστώσας τῆς ταχύτητας σέ συνδυασμό μέ τίς μεγάλες τιμές τῆς περιφερειακῆς ταχύτητας, ἀπαραίτητης γιά τήν πραγματοποίηση τοῦ μεγάλου λόγου πιέσεων (καί μεταφορᾶς μεγάλης ποσότητας ἔργου ἀπό τόν ἄξονα στό ρευστό), ἔχουν σάν ἀποτέλεσμα μεγάλες τιμές τῶν γωνιῶν καί στό ἀπόλυτο καί στό σχετικό σύστημα.

Ἡ κατάσταση αὐτή θά μποροῦσε νά ἀντιμετωπιστεῖ μέ τή διάταξη πού παρουσιάζει τό σχῆμα (1). Τά ὁδηγά πτερύγια πού ὑπάρχουν μεταξύ τῶν διατομῶν (1) καί (2), στρέφουν τή ροή κατά 75° ἀπό τήν ἀρχική ἀξονική της κατεύθυνση. Στή θέση αὐτή, τά τοιχώματα τοῦ κελύφους εἶναι ἔτσι διαμορφωμένα ὥστε ἡ μέση ἀκτίνα R_{m_1} στην εἴσοδο νά εἶναι ἴση μέ τή μέση ἀκτίνα R_{m_2} στήν ἔξοδο ($R_{m_1} = R_{m_2}$) καί οἱ τιμές τῆς ἀξονικῆς συνιστώσας τῆς ροῆς στήν εἴσοδο καί τήν ἔξοδο νά εἶναι ἴσες ($V_{a_2} = V_{a_1}$). Ἡ περιφερειακή ταχύτητα εἶναι τέτοια, ὥστε ἡ σχετική ταχύτητα τῆς πρώτης κινητῆς πτερύγωσης (A) νά εἶναι ἀξονική (διατομή 2). Τά πτερύγια τῆς πρώτης κινητῆς πτερύγωσης (A), ὅπως φαίνεται καί στό σχῆμα (1), κεῖνται ἐξ ὁλοκλήρου ἐπάνω σέ μεσημβρινά ἐπίπεδα, δηλ. σέ ἐπίπεδα πού περνοῦν ἀπό τόν ἄξονα τῆς μηχανῆς. Ἡ διαμόρφωση τῶν τοιχωμάτων τοῦ κελύφους στήν περιοχή τῆς κινητῆς πτερύγωσης εἶναι τέτοια, ὥστε ἡ σχετική ταχύτητα στήν ἔξοδο νά εἶναι ἴση σέ μέγεθος μέ τή σχετική ταχύτητα στήν εἴσοδο ($W_3 = W_2$). Ἐξ ἄλλου, θεωροῦμε ὅτι ἡ ροή ἀκολουθεῖ ἀπόλυτα τήν κατεύθυνση τῶν πτερυγίων καί ἔτσι ἡ σχετική ταχύτης στήν ἔξοδο τῆς πρώτης κινητῆς πτερύγωσης ἔχει κατεύθυνση ἀκτινική.

Γιά ν'ἀποφύγουμε τή μεγάλη τιμή τῆς ἀπόλυτης γωνίας α_3 στήν ἔξοδο τῆς πρώτης κινητῆς πτερύγωσης, προσθέτουμε καί δεύτερη. Ἡ κινητή πτερύγωση αὐτή (πτερύγωση (B)) εἶναι συνδεδεμένη ἐπάνω στόν ἴδιο ἄξονα, μέ σύστημα μετάδοσης πού τῆς ἐπιβάλλει περιστροφή μέ τόν ἴσο ἀριθμό στροφῶν ἀπό αὐτές τοῦ ἄξονα καί πρός τήν κατεύθυνση περιστροφῆς τοῦ ἄξονα. Ἡ ἐπόκλιση τῆς ροῆς μέσα στά δεύτερα κινητά πτερύγια, ὅπως τά παρουσιάζει τό σχῆμα (1), εἶναι διπλάσια ἀπό τή γωνία πού σχηματίζει ἡ σχετική πρός τή δεύτερη αὐτή κινητή πτερύγωση ταχύτητα W_3' στήν εἴσοδό της. Τά τοιχώματα τοῦ κελύφους στήν περιοχή αὐτή εἶναι ἔτσι διαμορφωμένα, ὥστε νά ἔχουμε $V_{m_3} = V_{m_4}$.

Π16.2

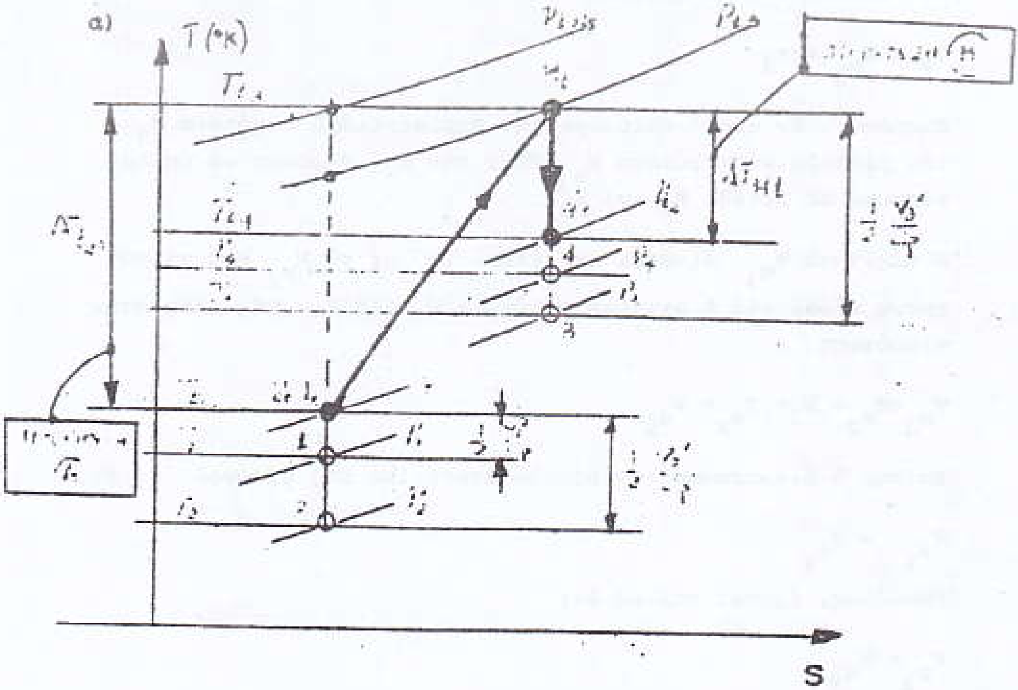


R4 = 1.2R3
b1 = 0.00347m
Rm1 = 0.08m
Rm2 = Rm1
R3
Vm1 = Va1 = V1
ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗΣ ΤΟΜΗΣ ΑΚΤΙΝΑΣ Rm1 = Rm2
D4 = 1.2D3
D3
ΟΨΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΟΜΗ 3-3
ΠΡΟΣΟΧΗ! Η ΚΙΝΗΤΗ ΠΤΕΡΥΓΩΣΗ (Β) ΚΙΝΕΙΤΑΙ ΜΕ ΤΗΝ ΜΙΣΗ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΤΗΣ (Α).
b1 = 0.00347m
Rm1 = 0.08m

ΣΧΗΜΑ 1

ΛΥΣΗ

α)



β) Οἱ τιμές τῶν μεγεθῶν πού ζητοῦνται θά προσδιοριστοῦν κατά τόν ἑξῆς τρόπο:

Στό τρίγωνο ταχυτήτων ἐξόδου ἀπό τήν κινητή πτερύγωση Α στή θέση 3-3 ἔχουμε ὅτι

$W_{m_3} = W_3$

Ἐπίσης, ἡ περιφερειακή ταχύτητα εἶναι στή θέση αὐτή:

$U_3 = \omega_A R_3$ (1)

καί άκόμη, ισχύει ή σχέση

$$U_3 = W_{m_3} \tan a_3 \tag{2}$$

Έπομένως, άν προσδιορίσουμε τήν περιφερειακή ταχύτητα U_3, τήν μεσημβρινή ταχύτητα W_{m_3} καί τήν ω, μπορούμε νά ύπολογίσουμε τά μεγέθη R_3 καί a_3.

Ή ταχύτητα W_{m_3} δίνεται ότι είναι ίση μέ τή W_{m_2} πού ταυτόχρονα είναι καί ή σχετική ταχύτητα W_2 είσόδου τής ροής στήν πτερύγωση Α.

$$W_{m_3} = W_{m_2} = W_2 = V_{m_2} = V_{a_2}$$

Έπίσης ή διαμόρφωση τών όδηγών πτερυγίων μάς έξασφαλίζει ότι:

$$V_{a_1} = V_{a_2}$$

Έπομένως, έχουμε τελικά ότι

$$W_{m_3} = V_{a_1}$$

Γιά νά ύπολογίσουμε τήν άξονική ταχύτητα V_{a_1} χρησιμοποιούμε τήν έξίσωση τής συνέχειας στή διατομή 1-1

$$m_s = \rho_1 2\pi R_{m_1} b_1 V_{a_1} \tag{3}$$

όπου

m_s = 0.02kg/sec

R_{m_1} = 0.08m

b_1 = 0.00347m

Στήν έξίσωση (3) έχουμε δύο άγνώστους, τήν ταχύτητα V_{a_1} καί τήν πυκνότητα ρ_1. Άπό τήν ίσεντροπική μεταβολή μεταξύ τών καταστάσεων 1_t καί 1 έχουμε τή σχέση:

$$\frac{\rho_1}{\rho_{t_1}} = \left(\frac{T_1}{T_{t_1}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{4}$$

$T_2 = 288 - \frac{1}{2\times 1004.5}\times(368.98)^2 = 220.23^{o}K$ $\qquad T_2 = 220.23^{o}K$

Ἡ ζητουμένη πίεση p_2 ὑπολογίζεται μέ τόν παρακάτω τρόπο:

$$p_2 = p_{t_1}\left(\frac{T_2}{T_{t_1}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.033\times 10^5\left(\frac{220.23}{288}\right)^{\frac{1.4}{0.4}} =$$

$$= 0.9149\times 10^5 Nt/m^2$$

$$\boxed{p_2 = 0.9149\times 10^5 \frac{Nt}{m^2}}$$

Ὁ ὑπολογισμός τῆς p_3 ἀπαιτεῖ τήν γνώση τῆς ὀλικῆς πίεσης p_{t_3} καί τῆς T_3 πού ὑπολογίζονται κατά τόν ἑξῆς τρόπο:

$$\frac{p_{t_3}}{p_{t_1}} = \pi_C = 5$$

Ἐπομένως

$$p_{t_3} = 5\times p_{t_1} = 5\times 1.033\times 10^5 = 5.165\times 10^5 Nt/m^2$$ $\qquad p_{t_3} = 5.165\times 10^5\ Nt/m^2$

Ἐπίσης

$$\Delta h_{t_{23}} = C_p(T_{t_3} - T_{t_2})$$

$$T_{t_3} = \frac{\Delta h_{t_{23}}}{C_p} + T_{t_2} = \frac{195301.49}{[illegible]} + 288 = 483.51^{o}K$$ $\qquad T_{t_3} = 483.51^{o}K$

Ἀκόμα

$$T_3 = T_{t_3} - \frac{1}{2C_p}V_3^2$$

ὅπου

$$V_3 = \frac{W_{m_3}}{\cos a_3} = \frac{95.50}{\cos [illegible]} = 576.82 m/s$$ $\qquad V_3 = 576.82 m/s$

καί ἐπομένως

$$T_3 = T_{t_3} - \frac{1}{2C_p}V_3^2 = 483.51^{o} - \frac{1}{[illegible]}\times(576.82)^2 = 317.89^{o}K$$ $\qquad T_3 = 317.89^{o}K$

Ἡ σχέση τῆς ἰσεντροπικῆς μεταβολῆς δίνει

διαδοχικές δοκιμές ὑπολογίζουμε τά ἀκόλουθα ζεύγη τιμῶν:

$_1 = 91.73 m/s$ A = 88.43m/s

$_{a_1} = 80.00 m/s$ A = 77.81m/s

$_{a_1} = 100.00 m/s$ A = 95.74m/s

$_{a_1} = 95.50 m/s$ A = 91.5 m/s

ἱ διαδοχικές δοκιμές μᾶς δίνουν τιμή γιά τήν ἀξονική ταχύτη-
α εἰσόδου $V_{a_1} = 95.50 m/s$

ἑπομένως ἔχουμε προσδιορίσει τήν μεσημβρινή ταχύτητα W_{m_3}
ού εἶναι ἴση καί μέ τήν W_3

$$W_2 = V_{m_2} = V_{a_1} = W_3 = W_{m_3} = 95.50 m/s$$

Ἀπό τή σχέση πού ἐκφράζει τήν μεταβολή τῆς ὁλικῆς ἐνθαλπίας στήν πτερύγωση A ἔχουμε:

$$\Delta h_{t_{23}} = \frac{C_p T_{t_2}}{(\eta_{t-t})_A} \left[\pi_C^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \qquad (9)$$

Η μεταβολή στά ὁδηγά πτερύγια ἀπό τή θέση 1 στή θέση 2 γίνεται χωρίς ἐναλλαγή ἔργου καί ἔτσι:

$$T_{t_1} = T_{t_2} \qquad \text{ἤ} \qquad T_{t_2} = 288^{o}K$$

Αντικαθιστώντας τά γνωστά μεγέθη στην (9) παίρνουμε

$$\Delta h_{t_{23}} = \frac{1004.5 \times 288}{0.86} \left[5^{\frac{1.4-1}{1.4}} - 1 \right] = 196391.49 m^2/s^2 \qquad \Delta h_{t_{23}} = 196391 m^2/s^2$$

Επίσης, ἡ ἴδια ἐνεργειακή μεταβολή ἐκφράζεται σύμφωνα μέ τήν σχέση τοῦ EULER;

$$\Delta h_{t_{23}} = U_3 V_{u_3} - U_2 V_{u_2} \qquad (10)$$

Ἀπό τή δοθεῖσα μορφή τῶν τριγώνων τῶν ταχυτήτων στίς θέσεις 2 καί 3 ἔχουμε ὅτι

$$V_{u_2} = U_2$$

$$V_{u_3} = U_3$$

Ὁπότε καί ἡ σχέση (10) μετατρέπεται σέ:

$$\Delta h_{t_{23}} = U_3^2 - U_2^2$$

ἀπό τίς σχέσεις

$$U_3 = \omega_A R_{m_3}$$

$$U_2 = \omega_A R_{m_2}$$

καί ἀντικαθιστώντας

$$\Delta h_{t_{23}} = \omega_A^2 R_{m_3}^2 - \omega_A^2 R_{m_2}^2$$

ἤ

$$\Delta h_{t_{23}} = \omega_A^2 (R_{m_3}^2 - R_{m_2}^2) \qquad (11)$$

Τό τρίγωνο ταχυτήτων στήν εἴσοδο τῆς κινητῆς πτερύγωσης A ἔχει $a_2 = 75^o$, $\beta_2 = 0^o$ καί $W_2 = V_{m_2} = 95.50 m/s$.
Μέ τά στοιχεῖα αὐτά ὑπολογίζουμε τήν περιφερειακή ταχύτητα στήν εἴσοδο τῆς A.

$$U_2 = V_{u_2} = V_{m_2} \times \tan a_2 = 95.50 \times \tan 75^o = 356.41 m/s \qquad U_2 = 356.41 m/s$$

Ἀκόμη ὑπολογίζουμε τήν γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς

$$\omega_A = \frac{U_2}{R_{m_2}} = \frac{356.41}{0.08} = 4455.125 sec^{-1} \qquad \omega_A = 4455.125 sec$$

Στήν ἐξίσωση (11) ἔχουμε μόνο ἄγνωστο τήν ζητουμένη ἀκτίνα R_{m_3} καί ἑπομένως:

$$R_{m_3}^2 = \frac{\Delta h_{t_{23}}}{\omega_A^2} + R_{m_2}^2 = \frac{196391.49}{(4455.125)^2} + (0.08)^2 = 0.01629\mathrm{m}^2 \qquad \boxed{R_{m_3} = 0.1277\mathrm{m}}$$

Ἡ περιφερειακή ταχύτητα στή θέση ἐξόδου ἀπό τήν Α εἶναι:

$$U_3 = \omega_A R_{m_3} = 4455.125\times 0.1277 = 568.92\mathrm{m/s}$$

Καί ἀπό τό τρίγωνο ταχυτήτων ἐξόδου στή θέση 3-3

$$\tan a_3 = \frac{U_3}{W_{m_3}} = \frac{568.92}{95.50} = 5.957$$

καί

$$a_3 = \arctan 5.957 = 80.47^\circ \qquad \boxed{a_3 = 80.47^\circ}$$

γ) Οἱ στατικές πιέσεις P_1, P_2, P_3

Ἡ στατική πίεση στή διατομή 1-1 βρίσκεται ἀπό τή σχέση τῆς ἰσεντροπικῆς μεταβολῆς

$$\frac{P_1}{P_{t_1}} = \left(\frac{T_1}{T_{t_1}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Ὅπου ἀπό τή σχέση (5) ἡ θερμοκρασία T_1 εἶναι

$$T_1 = T_{t_1} - \frac{1}{2C_p} V_{a_1}^2 = 288 - \frac{1}{2\times 1004.5}\, 95.5^2 = 283.46^\circ\mathrm{K} \qquad T_1 = 283.46^\circ\mathrm{K}$$

Ἄρα

$$P_1 = P_{t_1}\left(\frac{T_1}{T_{t_1}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.033\times 10^5\times\left(\frac{283.46}{288}\right)^{\frac{1.4}{0.4}} = 0.9771\times 10^5\mathrm{Nt/m^2}$$

$$\boxed{P_1 = 0.9771\times 10^5\ \frac{\mathrm{Nt}}{\mathrm{m}^2}}$$

Μέ ὅμοιο τρόπο

$$T_2 = T_{t_1} - \frac{1}{2C_p} V_2^2$$

ὅπου

$$V_2 = V_{a_2}/\cos a_2 = 95.5/\cos 75^\circ = 368.98\mathrm{m/s} \qquad V_2 = 368.98\mathrm{m/s}$$

καί

$$T_2 = 288 - \frac{1}{2\times1004.5}\times(368.98)^2 = 220.23^oK \qquad T_2 = 220.23^oK$$

Ἡ ζητουμένη πίεση p_2 ὑπολογίζεται μέ τόν παρακάτω τρόπο:

$$p_2 = p_{t_1}\left(\frac{T_2}{T_{t_1}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.033\times10^5\left(\frac{220.23}{228}\right)^{\frac{1.4}{0.4}} =$$

$$= 0.9149\times10^5 Nt/m^2 \qquad \boxed{p_2 = 0.9149\times10^5 \frac{Nt}{m^2}}$$

Ὁ ὑπολογισμός τῆς p_3 ἀπαιτεῖ τήν γνώση τῆς ὁλικῆς πίεσης p_{t_3} καί τῆς T_3 πού ὑπολογίζονται κατά τόν ἑξῆς τρόπο:

$$\frac{p_{t_3}}{p_{t_1}} = \pi_C = 5$$

Ἑπομένως

$$p_{t_3} = 5\times p_{t_1} = 5\times1.033\times10^5 = 5.165\times10^5 Nt/m^2 \qquad p_{t_3} = 5.165\times10^5 \; Nt/m^2$$

Ἐπίσης

$$\Delta h_{t_{23}} \quad C_p(T_{t_3} - T_{t_2})$$

$$T_{t_3} = \frac{\Delta h_{t_{23}}}{C_p} + T_{t_2} = \frac{196391.49}{1004.5} + 288 = 483.51^oK \qquad T_{t_3} = 483.51^oK$$

Ἀκόμα

$$T_3 = T_{t_3} - \frac{1}{2C_p}V_3^2$$

ὅπου

$$V_3 = \frac{W_{m_3}}{\cos a_3} = \frac{95.50}{\cos 80.47} = 576.82 m/s \qquad V_3 = 576.82 m/s$$

καί ἑπομένως

$$T_3 = T_{t_3} - \frac{1}{2C_p}V_3^2 = 483.51^o - \frac{1}{2\times1004.5}\times(576.82)^2 = 317.89^oK \qquad T_3 = 317.89^oK$$

Ἡ σχέση τῆς ἰσεντροπικῆς μεταβολῆς δίνει

Ἡ σχέση τῆς ἰσεντροπικῆς μεταβολῆς δίνει

$$p_3 = p_{t_3}\left(\frac{T_3}{T_{t_3}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 5.165\times IO^5 \left(\frac{317.89}{483.51}\right)^{\frac{1.4}{0.4}} =$$

$$= 1.1902\times IO^5 Nt/m^2$$

$$\boxed{p_3 = 1.1902\times IO^5\ \frac{Nt}{m^2}}$$

δ) Στατική πίεση p_4 καί γωνία ἐξόδου α_4.

Δίνεται ὅτι

$$\omega_B = \frac{\omega_A}{2} = \frac{4455.125}{2} = 2257.5625 sec^{-1}$$

Ἐπίσης ἡ περιφερειακή ταχύτητα περιστροφῆς στήν εἴσοδο τῆς δεύτερης κινητῆς πτερύγωσης εἶναι:

$$U_3' = \omega_B \times R_{m_3} = 2227.565\times 0.1277 = 284.46 m/s \qquad U_3' = 284.46 m/s$$

Ἡ σχετική ταχύτητα εἰσόδου στήν B κινητή πτερύγωση ὑπολογίζεται ἀπό τή σχέση

$$W_3' = \sqrt{W_{m_3}^2 + W_{u_3}'^2} = \sqrt{W_{m_3}^2 + U_3'^2} =$$

$$= \sqrt{(95.5)^2+(284.46)^2} = 300.06 m/s \qquad W_3' = 300.06 m/s$$

Ἡ γωνία β_3' εἶναι:

$$\beta_3' = \arctan\frac{U_3'}{V_{m_3}} = \arctan\frac{284.46}{95.5} = 71.44^\circ \qquad \beta_3' = 71.44^\circ$$

Ἐπειδή μᾶς δίνεται ὅτι ἡ ἀπόκλιση τῆς ροῆς στήν κινητή πτερύγωση $\bar{B}$ εἶναι διπλάσια ἀπό τή γωνία β_3', ἡ γωνία β_4 θά εἶναι ὅπως φαίνεται καί ἀπό τό σχῆμα (1)

$$\beta_4 = -71.44^\circ$$

Ἀπό τά τρίγωνα ταχυτήτων στήν εἴσοδο καί στήν ἔξοδο τῆς κινητῆς πτερύγωσης B ἔχουμε ὅτι:

$$W_{u_4} = U_3' = 284.46 m/s$$

Στό σχῆμα (1) δίνεται ὅτι

$R_4 = 1.2R_3 = 1.2\ 0.1277 = 0.15324m$ $\qquad R_4 = 0.15324m$

Σ'αὐτήν τήν ἀκτίνα ἡ περιφερειακή ταχύτητα εἶναι:

$U_4 = \omega_B R_4 = 2227.565\ 0.15324 = 341.35m/s$ $\qquad U_4 = 341.35m/s$

καί ἐπομένως

$V_{u_4} = U_4 - W_{u_4} = 341.35 - 284.46 = 56.89m/s$ $\qquad V_{u_4} = 56.89m/s$

ὅπως ἀκόμα:

$$\alpha_4 = \arctan\frac{V_{u_4}}{V_{m_4}} = \arctan\frac{56.89}{95.50} = 30.78^{o} \qquad \alpha_4 = 30.78^{o}$$

καί

$$V_4 = \frac{V_{m_4}}{\cos\alpha_4} = \frac{95.50}{\cos 30.78} = 111.16m/s \qquad V_4 = 111.16m/s$$

Τό ἔργο στήν κινητή πτερύγωση Β ὑπολογίζεται ἀπό τή σχέση:

$$\Delta h_{t_{34}} = U_4 V_{u_4} - U_3 V_{u_3} =$$

$$= 341.35 \times 56.89 - 284.46 \times 568.92 = -142415.58m^2/s^2$$

Τό ἀρνητικό σημεῖο μᾶς ἐπισημαίνει ὅτι ἡ κινητή πτερύγωση Β δίνει ἐνέργεια στόν ἄξονα καί ἐπομένως λειτουργεῖ σάν στρόβιλος.

Ἡ μεταβολή τῶν ὁλικῶν μεγεθῶν ἐκφράζεται ἐπίσης ἀπό τή σχέση:

$$\Delta h_{t_{34}} = c_p (T_{t_4} - T_{t_3})$$

ἤ

$$T_{t_4} = \frac{\Delta h_{t_{34}}}{c_p} + T_{t_3} = -\frac{142415.58}{1004.5} + 483.51 = 341.73^{o}K \qquad T_{t_4} = 341.73^{o}K$$

Ἡ στατική θερμοκρασία ἐπίσης εἶναι:

$$T_4 = T_{t_4} - \frac{1}{2C_p} V_4^2 = 341.73 - \frac{111.16^2}{2\times 1004.5} = 335.58^oK \qquad T_4 = 335.58^oK$$

Ἐπειδή γιά τήν κινητή πτερύγωση B δίνεται ὅτι $(\eta_{t-t})_B = 1.0$ ἡ ἐκτόνωση εἶναι ἰσεντροπική καί ἔτσι:

$$\frac{P_{t_4}}{P_{t_3}} = \left(\frac{T_{t_4}}{T_{t_3}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Ἐπίσης, ἡ στατική πίεση P_4 εἶναι:

$$P_4 = P_{t_3}\left(\frac{T_4}{T_{t_3}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 5.165\times IO^5\left(\frac{335.58}{483.51}\right)^{\frac{1.4}{0.4}} =$$

$$= 1.438\times IO^5 Nt/m^2 \qquad P_4 = 1.438\times IO^5\ Nt/m^2$$

Ἡ ὁλική πίεση, ἀντίστοιχα, εἶναι

$$P_{t_4} = P_{t_3}\left(\frac{T_{t_4}}{T_{t_3}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 5.165\times IO^5\left(\frac{341.73}{483.51}\right)^{\frac{1.4}{0.4}} =$$

$$= 1.533\times IO^5 Nt/m^2 \qquad P_{t_4} = 1.533\times IO^5\ Nt/m^2$$

ε) Τό ἔργο ($\Delta h_{t_{24}}$) μέ τό ὁποῖο τροφοδοτεῖται ὁ ἄξονας τῆς μηχανῆς θά εἶναι τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν ἐνεργειακῶν μεταβολῶν στίς πτερυγώσεις A καί B.
Ὁ ὑπολογισμός δίνει

$$\Delta h_{t_{24}} = \Delta h_{t_{23}} + \Delta h_{t_{34}} = 196391.49 - 142415.58 = 53975.91 m^2/s^2$$

$$\Delta h_{t_{24}} = 53975.91 m^2/s^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ Νο 17

Γιά τή μεταφορά φυσικοῦ ἀερίου χρησιμοποιοῦμε συνήθως πολυβάθμιους ἀκτινικούς συμπιεστές (βλέπε σχῆμα (1)). Στή συγκεκριμένη περίπτωση ἔχουμε νά συμπιέσουμε φυσικό ἀέριο παροχῆς m_s = 130kg/s , τό ὁποῖο βρίσκεται σέ πίεση p_t = 50bar καί θερμοκρασία $T_t = 327.15^{o}K$. Ὁρισμένα ἀπό τά χαρακτηριστικά τοῦ ἀερίου αὐτοῦ δίνονται στά σχήματα (3.9) καί (3.10) τῶν Σημειώσεων. Δίνεται ἀκόμη ὅτι ἡ παγκόσμια σταθερά τῶν ἀερίων εἶναι $R = 8312.6 m^2 kg/s^2, {}^{o}K, Kmole$ καί ὅτι τό μοριακό βάρος τοῦ φυσικοῦ ἀερίου εἶναι M.W. = 16.852kg/Kmole ($R_g = Z \frac{R}{M.W.}$ ὅπου Z ὁ συντελεστής συμπιεστότητας).

Θέλουμε νά προσδιορίσουμε τήν πρώτη βαθμίδα τοῦ ἀκτινικοῦ συμπιεστῆ πού θά μᾶς κάνει τή συμπίεση (βλέπε σχῆμα (2)). Γιά τό σκοπό αὐτό θά χρησιμοποιήσουμε ὑπάρχουσα βαθμίδα πού δίνει στίς συνθῆκες ἀναφορᾶς $\pi_{C_{REF}} = 1.8$ γιά N_{REF} = 10000RPM καί γιά τό σημεῖο λειτουργίας μέ τόν μέγιστο βαθμό ἀπόδοσης πού εἶναι $(\eta_{is_C})_{REF} = 0.78$.

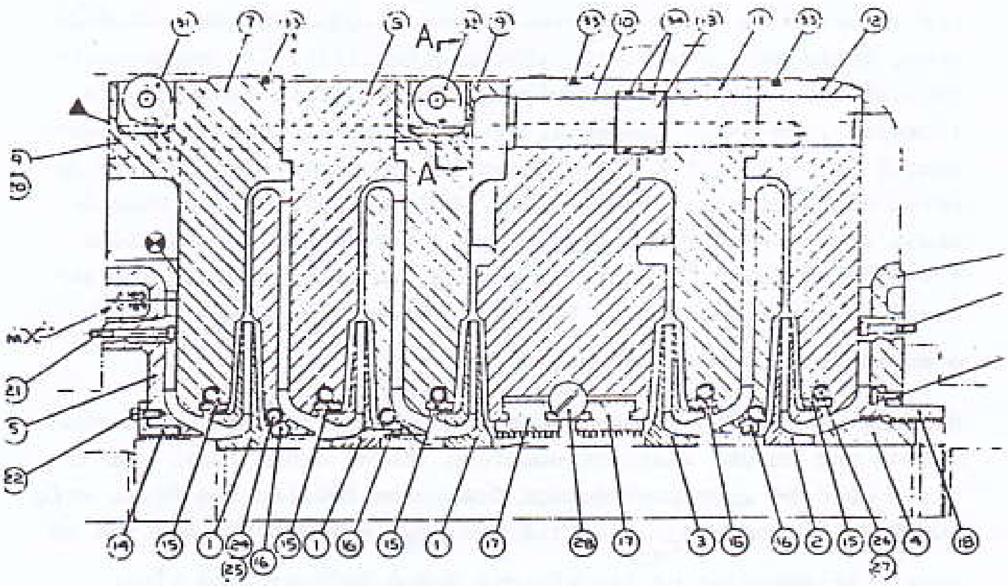
Τό ὑλικό πού πρόκειται νά χρησιμοποιήσουμε γιά τήν κατασκευή μᾶς περιορίζει τήν μεγίστη ταχύτητα περιστροφῆς σέ U_2 = 270m/s ὅπου (2) ἡ διατομή στήν ἔξοδο τῆς κινητῆς πτερύγωσης). Στήν περίπτωση πού ἡ ἐξωτερική διάμετρος τῆς κινητῆς πτερύγωσης εἶναι D_2= 0.5m:

α) Νά προσδιοριστοῦν ἡ ὁλική πίεση p_{t_3} καί ἡ ὁλική θερμοκρασία T_{t_3} πού θά ἔχουμε στήν ἔξοδο τῆς πρώτης βαθμίδας στήν περίπτωση λειτουργίας μέ φυσικό ἀέριο.

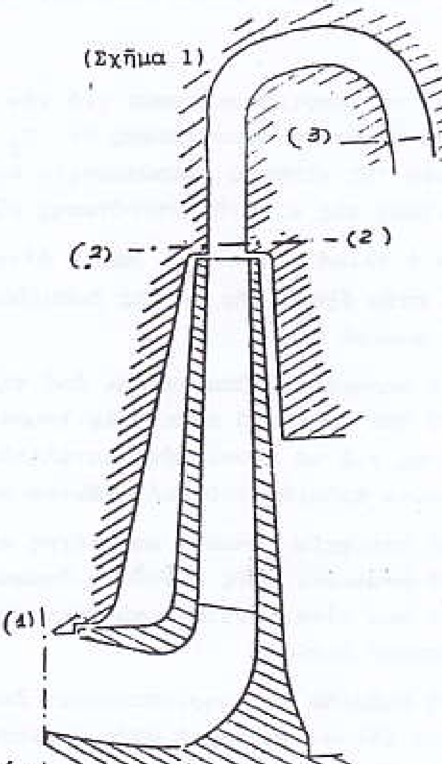
β) Νά προσδιοριστεῖ ἡ παροχή πού ἀπαιτεῖται ἀπό τήν ὑπάρχουσα βαθμίδα στίς 10000 RPM καί στό σημεῖο λειτουργίας μέ τό μέγιστο βαθμό ἀπόδοσης γιά νά εἶναι αὐτή κατάλληλη γιά νά χρησιμοποιηθεῖ σάν πρώτη βαθμίδα τοῦ πολυβάθμιου συμπιεστῆ.

γ) Νά ὑπολογιστοῦν τά στοιχεῖα (παροχή καί λόγος πιέσεων) τῆς βαθμίδας ὅταν αὐτή δουλεύει στίς συνθῆκες ἀναφορᾶς καί σέ σημεῖο λειτουργίας πού εἶναι ἀντίστοιχο ἐκείνου πού ἀπαιτεῖ ἡ μεταφορά τοῦ φυσικοῦ ἀερίου.

δ) Μπορεῖ ἡ ἴδια αὐτή βαθμίδα νά χρησιμοποιηθεῖ ὅπως ἔχει σάν δεύτερη βαθμίδα τοῦ ἴδιου συμπιεστῆ στήν περίπτωση τοῦ φυσικοῦ ἀερίου; Φυσικά, ἀπαιτοῦμε νά μήν ἀλλάξουν τιμή τά χαρακτηριστικά ἐκεῖνα πού μᾶς ἐπιτρέπουν νά ἐξακολουθοῦμε νά ἐργαζόμαστε μέ τόν μέγιστο βαθμό ἀπόδοσης.
Νά δοθοῦν ἐξηγήσεις γιά τή θετική ἤ ἀρνητική ἀπάντηση.



(Σχῆμα 1)



(Σχῆμα 2)

ΛΥΣΗ

Α. ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

Γιά τούς ὑπολογισμούς μας ἐνδιαφερόμαστε γιά τίς ἀκόλουθες περιπτώσεις λειτουργίας:

α) Λειτουργία τῆς βαθμίδας σέ συνθῆκες ἀναφορᾶς καί μέ χαρακτηριστικά μεγέθη:

$\gamma = 1.4, \quad R_g = 287.04 m^2/s^2, {}^oK \qquad C_p = 1004 m^2/s^2, {}^oK$

$P_{t_{1_{REF}}} = 1.0332 \times 10^5 Nt/m^2, \quad T_{t_{1_{REF}}} = 288.0^oK$

σημεῖο λειτουργίας μέ λόγο πιέσεων $\pi_{C_{REF}} = 1.8$ σέ στροφές $N_{REF} = 10000RPM$.

Γιά τό σημεῖο αὐτό λειτουργίας ξέρουμε ὅτι ἔχουμε τόν μέγιστο βαθμό ἀπόδοσης $\eta_{is_{C_{REF}}} = 0.78$ καί ὅτι ἡ περιφερειακή ταχύτητα εἶναι

$$U_{2_{REF}} = \frac{\pi N_{REF}}{60} D_2 = \frac{\pi 10000}{60} 0.5 = 261.80 m/s \qquad U_{2_{REF}} = 261.80m$$

β) Λειτουργία μέ φυσικό ἀέριο στίς συνθῆκες εἰσόδου πού δίνονται ὡς ἑξῆς:

$m_s = 130 kg/s \qquad m_s = 130 kg/s$

$P_{t_1} = 50 bar = 50 \times 10^5 Nt/m^2 \qquad P_{t_1} = 50 \times 10^5 Nt/m$

$T_{t_1} = 327.15^oK = 327.15 - 273.15 = 54^oC \qquad T_{t_1} = 54^oC$

Γνωρίζοντας τήν παγκόσμια σταθερά

$$R = 8312.6 \frac{m^2}{s^2, {}^oK} \frac{kg}{Kmole}$$

ἡ σταθερά τοῦ φυσικοῦ ἀερίου ὑπολογίζεται κάθε φορά ἀπό τή σχέση

$$R_{g_\varphi} = z\,\frac{R}{M.W.}$$

όπου z είναι ὁ συντελεστής συμπιεστότητας (σχ.3.10) ἐκφράζεται σέ συνάρτηση τῶν p_{t_1} καί T_{t_1}. Στή περίπτωσή μας (p_{t_1} = 50bar , T_{t_1} = 54°C)

$z = 0.87$ $\qquad$ $z = 0.87$

Δίνεται ἀκόμη ὅτι τό μοριακό βάρος εἶναι

M.W.= 16.852kg/Kmole

καί ἔχουμε

$$R_{g_\varphi} = 0.87\,\frac{8312.6}{16.852} = 429.14\,m^2/s^2,{}^oK \qquad R_{g_\varphi} = 429.14\,\frac{m^2}{s^2,{}^oK}$$

Ἀπό τό σχῆμα (3.9) γιά τίς ἴδιες συνθῆκες (p_{t_1} = 50bar, T_{t_1} = 54°C) ἔχουμε:

$\gamma_\varphi = 1.245$ $\qquad$ $\gamma_\varphi = 1.245$

Μέ τίς τιμές αὐτές ὑπολογίζουμε τό συντελεστή C_{P_φ} γιά τό φυσικό ἀέριο

$$C_{P_\varphi} = \frac{\gamma_\varphi}{\gamma_\varphi - 1}\,R_{g_\varphi} = \frac{1.245}{1.245-1}\times 429.14 = 2180.73\,m^2/s^2,{}^oK \qquad C_{P_\varphi} = 2180.73\,\frac{m^2}{s^2,{}^oK}$$

Ἀπό τήν ὁριακή περιφερειακή ταχύτητα λειτουργίας πού δίνεται ἴση μέ $\qquad U_{2\varphi}$= 27m/s

καί ἀπό τήν διάμετρο τῆς D_2 πού δίνεται ἴση μέ $\qquad D_2$= 0.50m

μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τίς στροφές στίς ὁποῖες θά λειτουργήσουμε γιά τό φυσικό ἀέριο καί οἱ ὁποῖες εἶναι:

$$U_{2\varphi} = \omega_\varphi\,\frac{D_2}{2} = \frac{2\pi N_\varphi}{60}\,\frac{D_2}{2}$$

ἤ

$$N_\varphi = \frac{U_{2\varphi}\times 60}{\pi D_2} = \frac{270\times 60}{\pi\times 0.5} = 10313.24\ \text{RPM} \qquad N_\varphi = 10313.24\text{RPM}$$

Τό σημεῖο λειτουργίας πού θέλουμε γιά τό φυσικό άέριο εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει μέγιστο βαθμό ἀπόδοσης. Σύμφωνα μέ ὅσα ξέρουμε ἀπό τή θεωρία ἄν διατηρήσουμε τό k_{is} καί τό $\varphi_{\alpha\nu}$ (μιλᾶμε γιά ἀκτινικό συμπιεστή) σταθερά μέ πλατύ διάστημα ἀριθμῶν Re καί ἀριθμῶν Mach ὁ βαθμός ἀπόδοσης διατηρεῖται σχεδόν ὁ ἴδιος.

Ἑπομένως ἐφ'ὅσον ζητᾶμε νά λειτουργήσουμε μέ τόν μέγιστο βαθμό ἀπόδοσης, αὐτός θά εἶναι ἴσος μέ 0.78 καί θά ἐπιτευχθεῖ ἐφ'ὅσον διατηρήσουμε τό k_{is} καί τό $\varphi_{\alpha\nu}$ πού ἀντιστοιχεῖ στό βαθμό αὐτό ἀπόδοσης.

γ) Λειτουργία στίς συνθῆκες ἀναφορᾶς σέ σημεῖο ἀντίστοιχο ἐκείνου στό ὁποῖο λειτουργοῦμε ὅταν ἔχουμε φυσικό ἀέριο.
Ἡ ἀντιστοιχία στροφῶν προσδιορίζεται ἀπό τή σχέση (3.33).
Ἔτσι ἔχουμε:

$$N'_{REF} = \frac{N\varphi}{\sqrt{\vartheta}}$$

ὅπου $\sqrt{\vartheta}$ ὑπολογίζεται ἀπό τή σχέση (3.29).

$$\sqrt{\vartheta} = \frac{\sqrt{\gamma\varphi R_{g_\varphi} T_{t_1}}}{340.17} = \frac{\sqrt{1.245 \times 429.14 \times 327.15}}{340.17} =$$

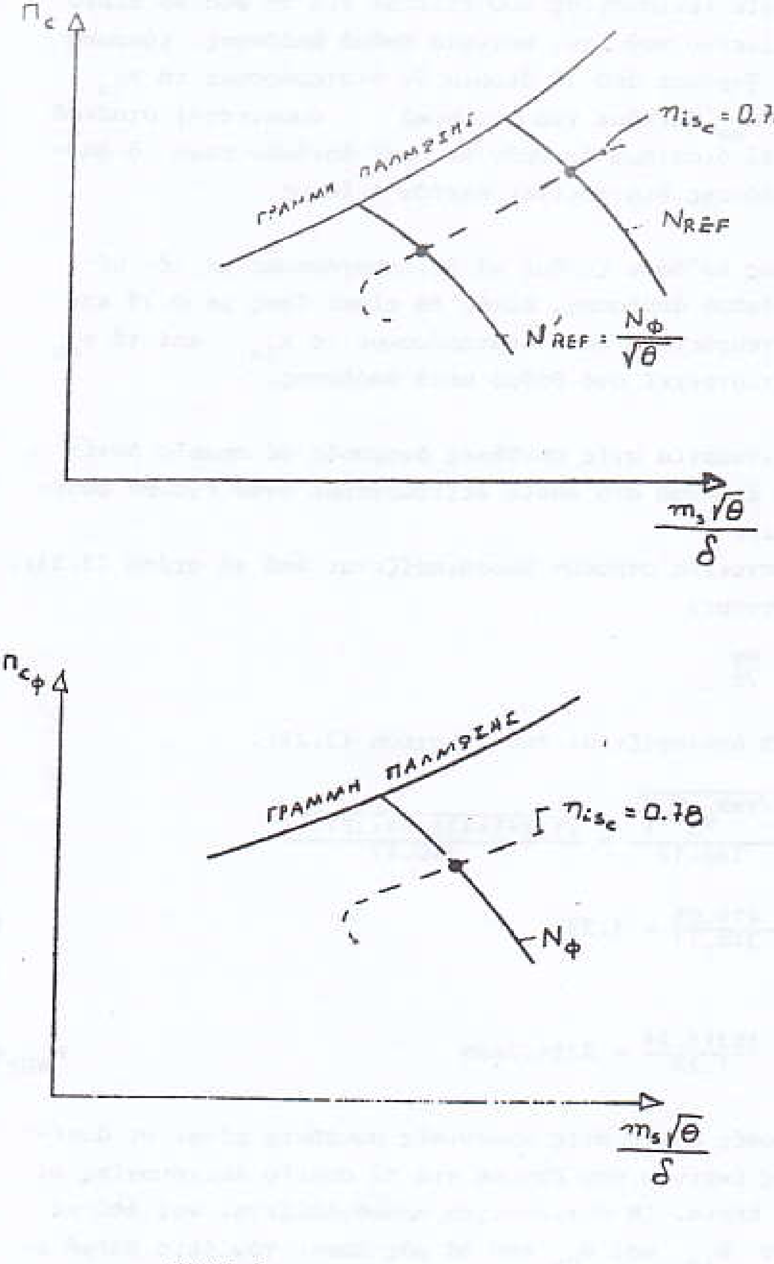
$$= \frac{418.08}{340.17} = 1.23 \qquad \sqrt{\vartheta} = 1.23$$

ἔτσι

$$N'_{REF} = \frac{10313.24}{1.23} = 8384.7\text{RPM} \qquad N'_{REF} = 8384.7\text{RPM}$$

Οἱ στροφές αὐτές στίς κανονικές συνθῆκες εἶναι οἱ ἀντίστοιχες ἐκείνων πού ἔχουμε γιά τό σημεῖο λειτουργίας σέ φυσικό ἀέριο. Ἡ ἀντιστοιχία προσδιορίζεται καί ἐδῶ μέ τό ἴδιο k_{is} καί $\varphi_{\alpha\nu}$ πού θά μᾶς δώσει τόν ἴδιο βαθμό ἀπόδοσης $\eta_{is} = 0.78$.
Ἡ ἀντίστοιχη περιφερειακή ταχύτητα εἶναι:

$$U'_{2_{REF}} = \frac{\pi N'_{REF}}{60} D_2 = \frac{\pi 838.47}{60} \times 0.5 = 219.5\text{m/s} \qquad U'_{2_{REF}} = 219.5\text{m/s}$$


Π_c
ΓΡΑΜΜΗ ΠΑΛΜΩΣΗΣ
η_isc = 0.78
N_REF
N'_REF = N_Φ/√θ
m_s√θ/δ
Π_cΦ
ΓΡΑΜΜΗ ΠΑΛΜΩΣΗΣ
η_isc = 0.78
N_Φ
m_s√θ/δ

ΣΧΗΜΑ 3

Τά σημεῖα λειτουργίας τῶν τριῶν περιπτώσεων πού ἐξετάσαμε παρουσιάζονται στό σχῆμα (3) στά πεδία τῶν χαρακτηριστικῶν τοῦ συμπιεστή γιά ἀέρα μέ $\gamma = 1.4$ καί γιά τό φυσικό ἀέριο.

Ὅπως εἴπαμε καί προηγουμένως ἡ διατήρηση τοῦ βαθμοῦ ἀπόδοσης η_{is_C} σταθεροῦ καί στίς τρεῖς περιπτώσεις μᾶς ὁδηγεῖ (Σημ. σελ. 3-22 καί 3-25) νά δεχθοῦμε ὅτι θά ἔχουμε ἐπίσης σταθερές τίς ποσότητες K_{is_2} καί $\varphi_{\alpha\nu}$ ὅπως ὁρίζονται στίς σχέσεις (3.38) καί (3.45) γιά τήν περίπτωση ἀκτινικοῦ συμπιεστή. Ἑπομένως θά ἔχουμε:

$$k_{is_2} = \frac{C_p T_{t_1}\left[(P_{t_3}/P_{t_1})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]}{U_2^2} = \text{σταθερό} \qquad (1)$$

$$\varphi_{\alpha\nu} = m_s R_g \frac{T_{t_1}}{P_{t_1}}\left(1+\frac{v_{t_3}}{v_{t_1}}\right)\frac{1}{2A_2U_2} = \text{σταθερό} \qquad (2)$$

ὅπου

$$\frac{v_{t_3}}{v_{t_1}} = \frac{1+x_C/\eta_{is_C}}{(1+x_C)^{\gamma/\gamma-1}} \qquad (3)$$

καί

$$x_C = k_{is_2}(\gamma-1)\left(\frac{U_2}{a_{t_1}}\right)^2 \qquad (4)$$

Ἡ ταχύτητα τοῦ ἤχου στίς ὁλικές συνθῆκες εἶναι γιά τίς περιπτώσεις (α) καί (γ)

$$a_{t_1} = \sqrt{\gamma R_g T_{t_{1_{REF}}}} = \sqrt{1.4\times 287.04\times 288} = 340.19\,m/s \qquad a_{t_1} = 340.19\,m/s$$

καί γιά τήν περίπτωση (β)

$$a_{t_{1\varphi}} = \sqrt{\gamma\varphi R_{g_\varphi} T_{t_1}} = \sqrt{1.245\times 429.14\times 327.15} = 418.08\,m/s \qquad a_{t_{1\varphi}} = 418.08\,m/s$$

Ἀπό τά μεγέθη πού ὑπολογίσαμε στήν (α) περίπτωση λειτουργίας ἔχουμε ὅτι (σχέση (1))

$$k_{is_2} = \frac{1004\times288\times\left[(1.8)^{0.4/1.4}-1\right]}{(261.80)^2} = 0.771 \qquad k_{is_2} = 0.771$$

Ἡ τιμή αὐτή τοῦ συντελεστή φόρτισης k_{is_2} θά παραμείνει σταθερή καί γιά τίς ἄλλες συνθῆκες λειτουργίας.

Ἄν χρησιμοποιήσουμε τήν σχέση (1) γιά τήν (β) περίπτωση λειτουργίας ἔχουμε

$$0.771 = \frac{2180.73\times327.15\times\left[(p_{t_3}/p_{t_1})^{0.245/1.245}-1\right]}{(270)^2}$$

καί λύνοντας ὡς πρός p_{t_3}/p_{t_1} ἔχουμε

$$\pi_{C_\varphi} = \frac{p_{t_3}}{p_{t_1}} = \left[\frac{0.771\times(270)^2}{2180.73\times327.15}+1\right]^{\frac{1.245}{0.245}} = 1.47 \qquad \pi_{C_\varphi} = \frac{p_{t_3}}{p_{t_1}} = 1.47$$

Ἐπομένως ἡ ζητούμενη πίεση p_{t_3} θά εἶναι:

$$p_{t_3} = \pi_{C_\varphi}\times p_{t_1} = 1.47\times50\times10^5 = 73.5\times10^5 Nt/m^2 \qquad p_{t_3} = 73.5\times10^5 Nt/m^2$$

Ἐνῶ ἀπό τή σχέση (3.42) ἔχουμε ὅτι:

$$\frac{p_{t_3}}{p_{t_1}} = (1+x_C)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

καί ἐπομένως γιά τό φυσικό ἀέριο

$$x_{C_\varphi} = \left(\frac{p_{t_3}}{p_{t_1}}\right)^{\frac{\gamma_\varphi-1}{\gamma_\varphi}} -1 = (1.47)^{\frac{0.245}{1.245}} -1 = 0.0788 \qquad x_{C_\varphi} = 0.0788$$

Ἔτσι ἀπό τήν ἐξίσωση (3.43) παίρνουμε:

$$\left(\frac{T_{t_3}}{T_{t_1}}\right)_\varphi = 1+\frac{x_{C_\varphi}}{\eta_{is_C}} = 1+\frac{0.0788}{0.78} = 1.101 \qquad \left(\frac{T_{t_3}}{T_{t_1}}\right)_\varphi = 1.101$$

καί ἡ ζητούμενη ὁλική θερμοκρασία στήν ἔξοδο εἶναι:

$T_{t_3} = 1.101 \times T_{t_1} = 1.101 \times 327.15 = 360.19^{o}K$ $\qquad T_{t_3} = 360.19^{o}K$

B. Προσδιορισμός τῆς παροχῆς στίς συνθῆκες ἀναφορᾶς μέ N_{REF} = 10000RPM.

Ἡ σχέση (2) γιά τήν (B) περίπτωση λειτουργίας γράφεται:

$$2A_2\varphi_{\alpha\nu} = m_s R_{g_\varphi} \frac{T_{t_1}}{P_{t_1}} \left(1+\frac{v_{t_3}}{v_{t_1}}\right)_\varphi \frac{1}{U_{2\varphi}} \qquad (6)$$

Ὑπολογίζουμε ἀπό τήν ἐξίσωση (3.44) τό μέγεθος

$$\left(\frac{v_{t_3}}{v_{t_1}}\right)_\varphi = \left(\frac{T_{t_3}/T_{t_1}}{P_{t_3}/P_{t_1}}\right)_\varphi = \frac{1.101}{1.47} = 0.749 \qquad \left(\frac{v_{t_3}}{v_{t_1}}\right)_\varphi = 0.749$$

καί ἡ ἐξίσωση (6) δίνει

$$2A_2\varphi_{\alpha\nu} = 130 \times 429.14 \times \frac{327.15}{50 \times 10^5}(1+0.749)\ \frac{1}{270} = 0.0236m^2$$

$$2A_2\varphi_{\alpha\nu} = 0.0236m^2$$

Ἐπειδή ἡ γεωμετρία παραμένει σταθερή ἡ ποσότητα $2A_2\varphi_{\alpha\nu}$ θά παραμένει σταθερή γιά τίς τρεῖς περιπτώσεις λειτουργίας.

Τή σχέση (2) τή χρησιμοποιοῦμε γιά τή περίπτωση συνθηκῶν (α) λειτουργίας καί ἔχουμε

$$0.0236 = m_{s_{REF}} R_g \frac{T_{t_1}}{P_{t_1}} \left(1+\frac{v_{t_3}}{v_{t_1}}\right)_{REF} \frac{1}{U_{2REF}} \qquad (7)$$

Ἐφ᾽ ὅσον

$$x_{C_{REF}} = \left(\frac{P_{t_3}}{P_{t_1}}\right)_{REF}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} -1 = (1.8)^{\frac{0.4}{1.4}} - 1 = 0.183 \qquad x_{C_{REF}} = 0.183$$

ἔχουμε ἀπό τή σχέση (3)

$$\frac{v_{t_3}}{v_{t_1}} = \frac{1+0.183/0.78}{(1+0.183)^{1.4/0.4}} = \frac{1.235}{1.8} = 0.686 \qquad \frac{v_{t_3}}{v_{t_1}} = 0.686$$

Επομένως από τή σχέση (7) δίνει τήν παροχή $m_{s_{REF}}$ στίς συνθήκες λειτουργίας (α)

$$m_{s_{REF}} = \frac{0.0236\times 261.8\times 1.0332\times 10^5}{287.04\times 288(0.686+1)} = 4.58 kg/s \qquad m_{s_{REF}} = 4.58 kg/s$$

Γ. Υπολογισμός παροχής καί λόγου πιέσεων γιά τή λειτουργία μέ $N'_{REF} = 8384.7 RPM$

Καί πάλι θά χρησιμοποιήσουμε τό ότι τό k_{is_2} παραμένει σταθερό καί γιά τά τρία σημεία λειτουργίας καί από τή σχέση (1) έχουμε

$$\left(\frac{P_{t_3}}{P_{t_1}}\right)' = \left[\frac{k_{is_2}(U'_{2REF})^2}{C_p T_{t_1}} + 1\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

ή

$$\left(\frac{P_{t_3}}{P_{t_1}}\right)' = \left[\frac{0.771\times(219.5)^2}{1004\times 288} + 1\right]^{1.4/0.4} = 1.527 \qquad \pi'_{C_{REF}} = \left(\frac{P_{t_3}}{P_{t_1}}\right) = 1.527$$

Εφ' όσον

$$x'_C = (\pi'_C)_{REF}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 = (1.257)^{\frac{0.4}{1.4}} - 1 = 0.1286 \qquad x'_C = 0.1286$$

έχουμε ότι:

$$\left(\frac{v_{t_3}}{v_{t_1}}\right)' = \frac{1+0.1286/0.78}{\pi'_{C_{REF}}} = \frac{1.1649}{1.527} = 0.7628 \qquad \left(\frac{v_{t_3}}{v_{t_1}}\right) = 0.7628$$

Επομένως ή σχέση (2) γράφεται γιά τήν περίπτωση (γ) λειτουργίας ώς εξής:

$$0.0236 = m'_{s_{REF}} R_g \frac{T_{t_1}}{P_{t_1}} \left(1 + \frac{v_{t_3}}{v_{t_1}}\right) \frac{1}{U'_{2_{REF}}}$$

ή

$$m'_{s_{REF}} = \frac{0.0236\times 1.0332\times 10^5\times 219.5}{288\times 287.04\times(1+0.7628)} = 3.673 kg/s \qquad m'_{s_{REF}} = 3.673 kg/s$$

Δ. Ἡ βαθμίδα σάν δεύτερη βαθμίδα τοῦ συμπιεστῆ. Φυσικοῦ ἀερίου.

Οἱ συνθῆκες ἐξόδου ἀπό τήν πρώτη βαθμίδα P_{t_3} καί T_{t_3} εἶναι φυσικά οἱ συνθῆκες εἰσόδου τῆς δεύτερης βαθμίδας τοῦ συμπιεστή μας.
Ἐφ᾽ὅσον καί γιά τή βαθμίδα αὐτή θέλουμε τόν ἴδιο μέγιστο βαθμό ἀπόδοσης θά πρέπει νά διατηρήσουμε τίς ὑπολογισμένες τιμές τοῦ k_{is_2} καί τοῦ $\phi_{αν}$.
Ἔχουμε λοιπόν:

$$0.771 = \frac{C_{P_{II}} T_{t_3}\left[(P_{t_5}/P_{t_3})^{\frac{\gamma_{II}-1}{\gamma_{II}}} -1\right]}{U_2^2}$$

ἤ

$$\frac{P_{t_5}}{P_{t_3}} = \left[\frac{0.771\times U_2^2}{C_{P_{II}} T_{t_3}} +1\right]^{\frac{\gamma_{II}}{\gamma_{II}-1}} \qquad (8)$$

γιά τίς τιμές πού ὑπολογίσαμε

$P_{t_3} = 73.5\times IO^5 Nt/m^2$ καί $\qquad P_{t_3} = 73.5$ bar

$T_{t_3} = 360.19^oK = 360.19-273.15 = 87.04^oC \qquad T_{t_3} = 87.04^oK$

βρίσκουμε ἀπό τά σχήματα (3.10) καί (3.9)

$Z_{II} = 0.87$

$\gamma_{II} = 1.222$

καί

$R_g = 429.14 m^2/s^2, {}^oK$

ἄρα

$C_{P_{II}} = \frac{1.222}{0.222}\times 429.14 = 2362.2 m^2/s^2, {}^oK \qquad C_{P_{II}} = 2362.2 m^2/s^2, {}^oK$

καί ἑπομένως ἡ σχέση (8) δίνει

$$\frac{P_{t_5}}{P_{t_3}} = \left[\frac{0.771\times(270)^2}{2.362.2\times 360.19}+1\right]^{\frac{1.222}{0.222}} = 1.422 \qquad \pi_{C_{II}} = \frac{P_{t_5}}{P_{t_3}} = 1.422$$

Όπως περιμέναμε διατήρηση τοῦ ἴδιου k_{is_2} μᾶς ἀναγκάζει νά λειτουργοῦμε μέ μικρότερο λόγο συμπίεσης γιά τήν δεύτερη βαθμίδα. Ἀπό τή σχέση (4) ἔχουμε:

$$x_{C_{II}} = (1.222-1)\times 0.771\times\left(\frac{270}{a_{t_3}}\right)^2$$

ὅπου $a_{t_3} = \sqrt{\gamma_{II}R_g T_{t_3}} = \sqrt{1.222\times 429.14\times 360.19} = 434.6\text{m/s}$ $\qquad a_{t_3} = 434.6\text{m/s}$

ὁπότε $x_{C_{II}} = 0.066$ $\qquad x_{C_{II}} = 0.066$

καί ἐπομένως

$$\frac{v_{t_5}}{v_{t_3}} = \frac{1+0.066/0.78}{1.422} = 0.763 \qquad \frac{v_{t_5}}{v_{t_3}} = 0.763$$

Ἐφ᾽ ὅσον ἀπό τήν δεύτερη βαθμίδα περνάει ἡ ἴδια παροχή μάζας πού περνάει καί ἀπό τήν πρώτη βαθμίδα, ἐφ᾽ ὅσον ἀκόμα ἡ περιφερειακή ταχύτητα στήν ἔξοδο τῆς κινητῆς πτερύγωσης εἶναι U_2 ἔχουμε ὅτι:

$$(\varphi_{av}2A_2)_{II} = m_s R_g \frac{T_{t_3}}{P_{t_3}}\left(1+\frac{v_{t_5}}{v_{t_3}}\right)\frac{1}{U_2}$$

$$=130\times 429.14\times\frac{360.19}{73.5\times 10^5}(1+0.763)\,\frac{1}{270} =$$

$$=0.01785\text{m}^2 \qquad (\varphi_{av}2A_2)_{II} = 0.01785\text{m}$$

Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι ἡ τιμή τοῦ $(\varphi_{av}2A_2)_{II}$ εἶναι διαφορετική ἀπό τήν τιμή τῆς ἴδιας ποσότητας ὅπως ὑπολογίστηκε γιά τήν πρώτη βαθμίδα. Ἐπομένως δέν εἶναι δυνατόν ἄν δεχθοῦμε τήν ἴδια γεωμετρία καί γιά τήν δεύτερη βαθμίδα νά λειτουργήσουμε στήν τιμή τοῦ φ_{av} ἡ ὁποία μᾶς ἐξασφαλίζει τόν μέγιστο βαθμό ἀπόδοσης. Ἡ ἀντίστοιχη μείωση στόν συντελεστή $(\varphi_{av})_{II}$ εἶναι περίπου 24.4% τοῦ ἤδη ὑπολογισμένου φ_{av} τῆς πρώτης βαθμίδας. Αὐτό μᾶς δείχνει ὅτι ἄν χρησιμοποιήσουμε τήν ἴδια γεωμετρία σάν δεύτερη βαθμίδα τοῦ συμπιεστοῦ μέ φυσικό ἀέριο ἡ δεύτερη αὐτή βαθμίδα θά λειτουργεῖ πλησιέστερα στήν γραμμή πάλμωσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ Νο 18

Στά προβλήματα Π-12 καί Π-16 έξετάσαμε διάφορες πλευρές τῆς ροῆς μέσα ἀπό μιά κινητή πτερύγωση μέ πτερύγια πού κεῖνται σέ ἐπίπεδα πού διέρχονται ἀπό τόν ἄξονα τῆς μηχανῆς. Σ'αὐτή τήν περίπτωση οἱ σχετικές ταχύτητες στήν εἴσοδο καί ἔξοδο τῆς κινητῆς αὐτῆς πτερύγωσης (W_1 καί W_2 ἀντίστοιχα) θεωρήθηκαν ὅτι ἀκολουθοῦν τήν κατεύθυνση πού ἐπιβάλουν τά πτερύγια (μεσημβρινή). Ἐάν θεωρήσουμε ὅτι ἡ W_1 εἶναι ἴση μέ τήν W_2 , νά προσδιοριστεῖ θεωρητικά, σέ τί ποσοστό ἡ ἐνέργεια πού μεταφέρεται ἀπό τόν ἄξονα στό ρευστό πηγαίνει σέ αὔξηση τῆς στατικῆς πίεσης καί σέ τί ποσοστό σέ αὔξηση τῆς κινητικῆς ἐνέργειας τοῦ ρευστοῦ.

ΛΥΣΗ

Ἀπό τό παράδειγμα Π12 ἔχουμε ὅτι ἡ μεταβολή τῆς ὁλικῆς ἐνθαλπίας πού δίνεται ἀπό τή σχέση τοῦ EULER εἶναι:

$$h_{t_2}-h_{t_1}=\Delta h_t=U_2V_{u_2}-U_1V_{u_1}$$

γιά τήν περίπτωση πού οἱ σχετικές ταχύτητες W_2 καί W_1 εἶναι μεσημβρινές ἔχουμε

$$U_2V_{u_2}-U_1V_{u_1}=\omega^2(R_2{}^2-R_1{}^2) \qquad (1a)$$

καί ἐπομένως

$$h_{t_2}-h_{t_1}=\omega^2(R_2{}^2-R_1{}^2) \qquad (1)$$

Α ΤΡΟΠΟΣ

Ἡ διατήρηση τῆς ὁλικῆς σχετικῆς ἐνθαλπίας στήν κινητή πτερύγωση (ἐξίσωση 2.34) δίνει

$$h_{t_{R_1}}=h_{t_{R_2}} \qquad (2)$$

γιά μόνιμη ἀδιαβατική ροή.

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ὁλικῆς σχετικῆς ἐνθαλπίας (ἐξίσωση 2.30) ἔχουμε

$$h_{t_{R_1}}=h_1+\frac{W_1{}^2}{2}-\frac{\omega^2R_1{}^2}{2} \qquad (3)$$

καί

$$h_{t_{R_2}}=h_2+\frac{W_2{}^2}{2}-\frac{\omega^2R_2{}^2}{2} \qquad (4)$$

Δίδεται ἀκόμη ἀπό τό πρόβλημα ὅτι

$$W_1=W_2 \qquad (5)$$

Συνδυασμός τῶν σχέσεων (2), (3) καί (4), δίνει

$$h_1+\frac{W_1{}^2}{2}-\frac{\omega^2R_1{}^2}{2}=h_2+\frac{W_2{}^2}{2}-\frac{\omega^2R_2{}^2}{2}$$

καί χρησιμοποίηση τῆς σχέσης (5) δίνει ἀκόμη ὅτι

$$h_2-h_1 = \frac{\omega^2 R_2{}^2}{2} - \frac{\omega^2 R_1{}^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\omega^2(R_2{}^2-R_1{}^2) = \frac{\Delta h_t}{2} \quad (6)$$

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ὁλικῆς ἐνθαλπίας ἔχουμε

$$h_{t_1} = h_1 + \frac{V_1{}^2}{2} \quad (7)$$

καί

$$h_{t_2} = h_2 + \frac{V_2{}^2}{2} \quad (8)$$

Ἡ κινητική ἐνέργεια τοῦ ρευστοῦ ἀνά μονάδα μάζης εἶναι ἴση πρός $V^2/2$. Ἡ ἀντίστοιχη αὔξηση τῆς κινητικῆς ἐνέργειας ἀπό τήν εἴσοδο στήν ἔξοδο εἶναι ἐπίσης:

$$\Delta K_E = \frac{V_2{}^2}{2} - \frac{V_1{}^2}{2} \quad (9)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (7) καί (8) ἔχουμε

$$h_{t_2}-h_{t_1} = h_2-h_1 + \frac{V_2{}^2}{2} - \frac{V_1{}^2}{2} \quad (10)$$

Ἀντικαθιστώντας στή σχέση (10) τά ἀποτελέσματα τῶν σχέσεων (1) καί (6) παίρνουμε:

$$\omega^2(R_2{}^2-R_1{}^2) = \frac{1}{2}\,\omega^2(R_2{}^2-R_1{}^2) + \frac{1}{2}(V_2{}^2-V_1{}^2)$$

ἤ ἀκόμα

$$\Delta K_E = \frac{1}{2}\,(V_2{}^2-V_1{}^2) = \frac{\omega^2}{2}\,(R_2{}^2-R_1{}^2) = \frac{\Delta h_t}{2} \quad (11)$$

Οἱ σχέσεις (11) καί (6) μᾶς ὁδηγοῦν στό συμπέρασμα ὅτι ἡ μισή ἀπό τήν ἐνέργεια πού μεταφέρεται ἀπό τόν ἄξονα στό ρευστό πηγαίνει σέ αὔξηση τῆς κινητικῆς ἐνεργείας. Ἐπομένως ἡ ἄλλη μισή ἡ ὁποία αὐξάνει τήν στατική ἐνθαλπία πηγαίνει σέ ἀντίστοιχη αὔξηση τῆς στατικῆς πίεσης.

Β. ΤΡΟΠΟΣ

Ἀπό τά τρίγωνα ταχυτήτων εἰσόδου καί ἐξόδου ἔχουμε:

$$W_1{}^2+U_1{}^2 = V_1{}^2$$

$$W_2{}^2+U_2{}^2 = V_2{}^2$$

Ἀφαιρώντας τίς σχέσεις κατά μέλη ἔχουμε:

$$W_2{}^2-W_1{}^2+U_2{}^2-U_1{}^2= V_2{}^2-V_1{}^2$$

Ἐφ'ὅσον

$$W_2 = W_1$$

βρίσκουμε ὅτι

$$\Delta K_E = \frac{U_2{}^2-U_1{}^2}{2} = \frac{V_2{}^2-V_1{}^2}{2}$$

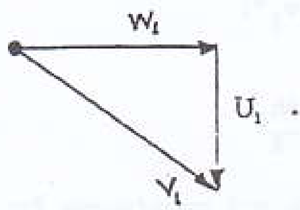
Ἀπό τή σχέση (1) ὅμως ἔχουμε ὅτι

$$\Delta h_t = U_2{}^2-U_1{}^2$$

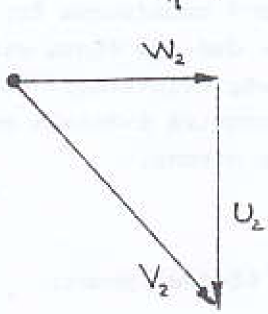
ἤ

$$\Delta h_t = V_2{}^2-V_1{}^2= 2\,\frac{1}{2}(V_2{}^2-V_1{}^2)= 2\Delta K_E$$

Ἡ σχέση αὐτή μᾶς ὁδηγεῖ στά ἴδια συμπεράσματα πού βρήκαμε μέ τόν προηγούμενο τρόπο λύσης.



Τρίγωνο Ταχυτήτων Εἰσόδου



Τρίγωνο Ταχυτήτων Ἐξόδου