

26/12/2024

Χρόνια Πολλά!

Μια ακόμη βοήθεια (πέραν όσων είπαμε στο μάθημα) για το πως πρέπει να προχωρήσετε το homework 2, χωρίς να μπερδευτείτε. Η βοήθεια δίνεται για να μην ταλαιπωρηθείτε, λόγω απειρίας σε ένα λεπτό σημείο (στο: ποιες είναι οι ισχύουσες εξισώσεις) αλλά και πως θα εφαρμόσετε τη μέθοδο ALM (Augmented Lagrange Multiplier method) για να λύσετε το πρόβλημα με περιορισμούς. Η ALM διδάσκεται ως η πιο απλή μέθοδος για επιβολή περιορισμών, αυτό όμως δεν την κάνει τόσο αυτόματη όσο θα θέλαμε (θέλει καλή ρύθμιση για να τρέξει και δεν υπάρχει λόγος να ταλαιπωρηθείτε σε αυτό). Γενικά, υπάρχουν πολύ καλύτερες, αλλά και πιο απαιτητικές μέθοδοι σε γνώσεις (και για αυτό δεν διδάσκονται).

Η βοήθεια δίνεται, εδώ, σε ένα απλό παράδειγμα που δεν έχει τον περιορισμό να περάσει η βολή από ένα «παράθυρο» (όπως το homework), έχει απλοποιημένες εξισώσεις κίνησης και έχει μια μόνο μεταβλητή σχεδιασμού (b).

Έστω οι απλουστευμένες εξισώσεις μιας βολής: $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = ay$ και $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -g$, με το a να είναι μια σταθερά (έστω $a=0.10$, μονάδες παραλείπονται) και $g=9.81$. Η βολή εκτελείται από το $(x,y)=(0,0)$, τη στιγμή $t=0$, με αρχική ταχύτητα $V_x=b$ (ο άγνωστος μας!) και V_y =σταθερή (έστω $=10$, έτσι το αναγκάζουμε να «σηκωθεί» από το έδαφος). Θέλουμε να προσγειωθεί στο έδαφος σε απόσταση $x^*=10$.

Αν και το homework ζητά να ελαχιστοποιήσετε τον χρόνο της βολής, το πρώτο που πρέπει να καταλάβετε είναι ότι, στο παράδειγμα αυτό, δεν υπάρχει θέμα βελτιστοποίησης. Υπάρχει μόνο μια αρχική τιμή της V_x για την οποία πετυχαίνουμε το στόχο και αυτήν ψάχνουμε. Σε όποιον χρόνο T χρειαστεί για να φτάσει τον στόχο, συμφωνείτε;

Ένα τέτοιο πρόβλημα μπορείτε να το λύσετε με ένα διπλό/nested loop:

- Εξωτερικό loop: μια (απλοποιημένη) ALM. Στην πραγματικότητα είναι μια απλή μέθοδος ποινής: βάζουμε ποινή/penalty, η οποία διαρκώς αυξάνει μέχρι ένα πάνω όριο, όταν δεν ικανοποιείται ο περιορισμός. Στο loop αυτό, «παίζουμε» με το ω_p .
- Εσωτερικό loop: λύνεται ένα πρόβλημα βελ/σης με τη συνεχή συζυγή μέθοδο.

Ότι σας δίνεται εδώ είναι απλώς μια ιδέα για να μην ταλαιπωρηθείτε. Προφανώς, θα εκτιμηθεί να αυτοσχεδιάζετε και να παρουσιάσετε την δική σας εκδοχή:

Μπορεί κάποιος να γράψει την επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση (η πραγματική F είναι προφανώς ο χρόνος βολής T) ως:

$$F_{aug} = T + \int_0^T \Psi_1 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - ay \right) dt + \int_0^T \Psi_2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + g \right) dt + \omega_p (x(T) - x^*)^2 + \Psi_3 y(T)$$

Ο προτελευταίος όρος είναι ο όρος από την ALM που τιμωρεί τη λύση αν $x(T) \neq x^*$, ο συντελεστής του οποίου (ω_p) «έρχεται» από το εξωτερικό loop της ALM (λχ ξεκινήστε με $\omega_p=10$ και, σε κάθε εξωτερική επανάληψη, ίσως μετά τις πρώτες 20, πολλαπλασιάζετέ το λ.χ. με 1.03, μέχρι μια μέγιστη

τιμή, λχ $\omega_{p,max}=30$), ενώ ο τελευταίος όρος είναι για να «πει» στη συζυγή μέθοδο (στο εσωτερικό loop) ότι T είναι ο χρόνος που το σώμα φτάνει το $y=0$.

Δείξτε ότι οι συζυγείς εξισώσεις είναι $\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0$ και $\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} = a\psi_1$, που λύνονται ανάποδα στο χρόνο, με οριακές συνθήκες:

$$\psi_1(T)=0, \quad \psi_2(T)=0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial t}(T) = 2\omega_p(x(T) - x^*), \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial t}(T) = \frac{-1-2\omega_p(x(T)-x^*)V_x(T)}{V_y(T)},$$

ενώ η παράγωγος (για την απότομη κάθοδο που θα ανανεώσει το b , μέσα στο εσωτερικό loop) είναι:

$$\frac{dT}{db} = -\psi_1(0)$$

Προτροπή: Κάντε πρώτα τα «μαθηματικά» και τον κώδικα που λύνει αυτό το πρόβλημα. Κάντε τον να τρέχει και καταλάβετε πως πρέπει να αλλάζει το ω_p στο εξωτερικό loop. Αν έχετε αυτόν τον κώδικα, το να τον προσαρμόσετε στις δικές σας (πλήρεις) εξισώσεις κίνησης, με τον περιορισμό του να περάσει η βολή μέσα από το παράθυρο είναι, κανονικά, μια εύκολη και σύντομη επέκταση.

Αν υπάρχει κάποιο λάθος στη δακτυλογράφηση αυτού του κειμένου, φαντάζομαι θα το βρείτε... δεν έγινε σκόπιμα.

Σημαντικό: Για το ερώτημα (3), το να γίνουν ξανά όλα με τη μέθοδο των μιγαδικών μεταβλητών, μπορείτε να παρουσιάσετε τη δουλειά σας στο προηγούμενο απλοποιημένο παράδειγμα, δεν χρειάζεται να το κάνετε στην πλήρη άσκηση του homework.

Κ. Γιαννάκογλου