

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ (7^{ου})

2^η (&τελευταία) Υποχρεωτική Εργασία για το Σπίτι (12/2024)

Θέμα στις Μεθόδους Gradient-based Optimization

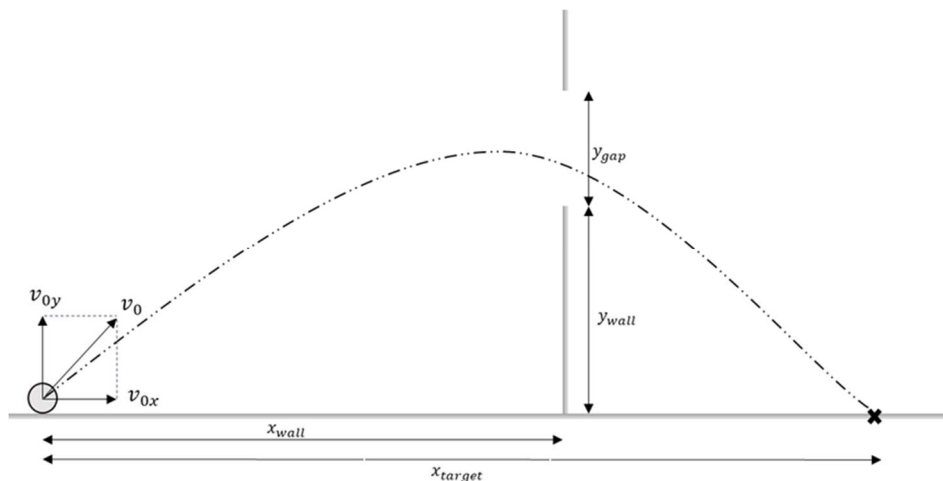
Η άσκηση έχει σκοπό την εξάσκησή σας στην εύρεση παραγώγων ευαισθησίας με τη συνεχή συζυγή μέθοδο και, στη συνέχεια, τη χρήση τους σε αλγόριθμο βελτιστοποίησης.

Εκτοξεύεται φυσίγγιο με φαρμακευτικό υλικό βάρους 0.5kg, από το έδαφος (σημείο $x=0.0m$, $y=0.0m$), με αρχική ταχύτητα η οποία πρέπει να υπολογιστεί, με σκοπό να προσγειωθεί σε σημείο του (ίδιου οριζώντιου, άρα σε $y=0.0m$) εδάφους σε απόσταση $x_{target} = 20m$ από το σημείο βολής ξεπερνώντας εμπόδια στην πορεία του (βλ. παρακάτω).

Το φαρμακευτικό υλικό είναι εύπλαστο μπορεί να τοποθετηθεί σε σφαιρικό φυσίγγιο, ενδεχομένως προσθέτοντας και "έρμα" ("αδρανές υλικό", E), φτάνοντας τη συνολική μάζα $m=(0.5+E)kg$ για όλο το σφαιρικό φυσίγγιο. Το αν χρειάζεται "έρμα" και ποια η τιμή του E θα φανεί από τη βελτιστοποίηση. Προφανώς το E πρέπει να είναι μη-αρνητικός αριθμός. Ας είναι v_{0y} και v_{0x} η κατακόρυφη και οριζόντια ταχύτητα εκτόξευσης που προαναφέρθηκε.

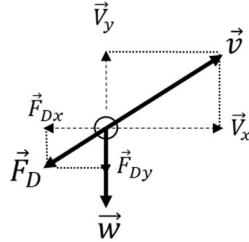
Η εκτόξευση πρέπει να είναι τέτοια (δηλαδή η βελτιστοποίηση να ρυθμίσει τα v_{0y} , v_{0x} και E , ώστε το φυσίγγιο να περνά μέσα από άνοιγμα σε κατακόρυφο (μηδενικού πάχους) τοίχο, ο οποίος βρίσκεται σε απόσταση $x_{wall} = 10m$ από το σημείο βολής. Το άνοιγμα αυτό ξεκινά στο ύψος $y_{wall} = 8m$ από το έδαφος και τερματίζει στα 11m, δηλαδή έχει ύψος 3m

Η διάταξη σκιαγραφείται στη συνέχεια:



Η πυκνότητα του φαρμακευτικού υλικού είναι $\rho_1=200\text{kg/m}^3$, και αυτή του υλικού "έρμα" είναι $\rho_2=50\text{kg/m}^3$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο φυσίγγιο, είναι το βάρος του και η αντίσταση του αέρα, η οποία είναι ανάλογη του τετραγώνου της στιγμιαίας ταχύτητάς του, αλλά αντίθετης κατεύθυνσης. Σχηματικά:



όπου:

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2}\rho C_D A \|\vec{v}\| \vec{v}$$

$$\vec{W} = m \vec{g}$$

- $\rho = 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ η πυκνότητα του αέρα
- \vec{F}_D η αντίσταση του αέρα
- $C_D = 0.47 + K/80$ ο συντελεστής οπισθέλκουσας, όπου K το τελευταίο ψηφίο στον αριθμό μητρώου σας στη Σχολή.
- A η μέγιστη διατομή της σφαίρας (εμπρόσθια όψη)
- $\vec{v} = \frac{dx}{dt}$ η στιγμιαία ταχύτητα της σφαίρας
- $\vec{g} = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ κατακόρυφα, η επιτάχυνση της βαρύτητας

Η συνολική δύναμη που επιδρά στο κέντρο της σφαίρας ισούται με το διανυσματικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό, και σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα είναι ανάλογη της μάζας και της επιτάχυνσης:

$$\vec{F} = \vec{F}_D + \vec{W} = m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

Η οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{2m}\rho C_D A \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{1}{2m} \rho C_D A \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \frac{dy}{dt} \quad (2)$$

Στόχος τη βελτιστοποίησης είναι να ευρεθεί το σύνολο τιμών των τριών μεταβλητών βελτιστοποίησης που προαναφέρθηκαν **ώστε η χρονική διάρκεια T της βολής να είναι ελάχιστη.**

Ζητούμενα:

1. Διατυπώστε τη συνεχή συζυγή μέθοδο για να βρείτε τις παραγώγους της συνάρτησης στόχου ως προς τις τρεις μεταβλητές βελτιστοποίησης. Κάντε το αγνοώντας τους περιορισμούς που συνεπάγεται η παρουσία του ενδιάμεσου τοίχου. Συγκρίνετε με τις παραγώγους που βγάζουν οι πεπερασμένες διαφορές, αφού προφανώς διερευνήσετε την τιμή του ϵ που θα χρησιμοποιήσετε. Πινακοποιήστε τα αποτελέσματα. Για να λύσετε τις σ.δ.ε. χρησιμοποιήστε Runge-Kutta δεύτερης ή μεγαλύτερης τάξης - πριν διαλέξετε χρονικό βήμα, κάντε δοκιμές με διάφορες τιμές του ϵ ώστε να βρείτε μια λύση που είναι "ανεξάρτητη" του χρονικού βήματος.

2. Δημιουργήστε μέθοδο βελτιστοποίησης και χρησιμοποιήστε την ώστε να λυθεί το πρόβλημα βελτιστοποίησης και να υπολογίσετε τα στοιχεία βολής. Πινακοποιήστε τα αποτελέσματα. Διαλέξτε όποια μέθοδο βελτιστοποίησης θέλετε για τη διαχείριση των περιορισμών (προτείνεται η ALM, αλλά μπορείτε να διαλέξετε). Προαιρετικά, πιο πολύ για να προχωρήσετε με μικρά βήματα, συνιστάται να λύσετε (απλοποιώντας τον ίδιο κώδικα) το πρόβλημα και χωρίς τους περιορισμούς από την παρουσία του τοίχου.

3. Δημιουργήστε τη μέθοδο των μιγαδικών μεταβλητών (complex variable method) ώστε να υπολογίσετε ξανά τις παραγώγους που δείξατε στο πρώτο ερώτημα. Για να διευκολυνθείτε, σε αυτό το ερώτημα, χρησιμοποιήστε την (απλούστερη) μέθοδο Euler για την επίλυση των σ.δ.ε. Συγκρίνετε με τις παραγώγους που (με τη μέθοδο Euler) βγάζουν οι πεπερασμένες διαφορές.

Οδηγίες για τον Τρόπο Εργασίας και το Κείμενο που θα Παραδώσετε

- Προθεσμία παράδοσης: **την Παρασκευή πριν τη Δευτέρα που λογικά ξεκινούν οι εξετάσεις του χειμερινού εξαμήνου.**
- Σε κάθε σχήμα ή γράφημα να υπάρχει κατάλληλη λεζάντα με πλήρη περιγραφή και σχολιασμό του.
- Η εργασία είναι ατομική και υποχρεωτική.
- Προσμετράται στο βαθμό του μαθήματος. Όπως και στα προηγούμενα θέματα, ισχύει ότι κάθε εργασία που θα παραδοθεί βαθμολογείται εκ προοιμίου με 10 αλλά καθορίζεται (ανάλογα με την ποιότητά της) το ποσοστό συμμετοχής στον τελικό βαθμό. Μπορείτε να συγκεντρώσετε, κατά μέγιστο 50% του τελικού βαθμού σας στη συνιστώσα "Αιτιοκρατικές μέθοδοι".
- Στείλτε την εργασία ως ENA μοναδικό pdf στο HELIOS. Το pdf θα περιέχει ως παράρτημα (στο τέλος, αφού απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα), το λογισμικό που γράψατε για κάθε ερώτημα.