



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής &  
Βελτιστοποίησης

# Μέθοδοι Αιτιοκρατικής και Στοχαστικής Βελτιστοποίησης και Εφαρμογές

*ΔΠΜΣ Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες, ΕΜΠ*

*ΔΠΜΣ Υπολογιστική Μηχανική, ΕΜΠ*

*Εισαγωγικό Μάθημα*

**Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου**

Καθηγητής ΕΜΠ

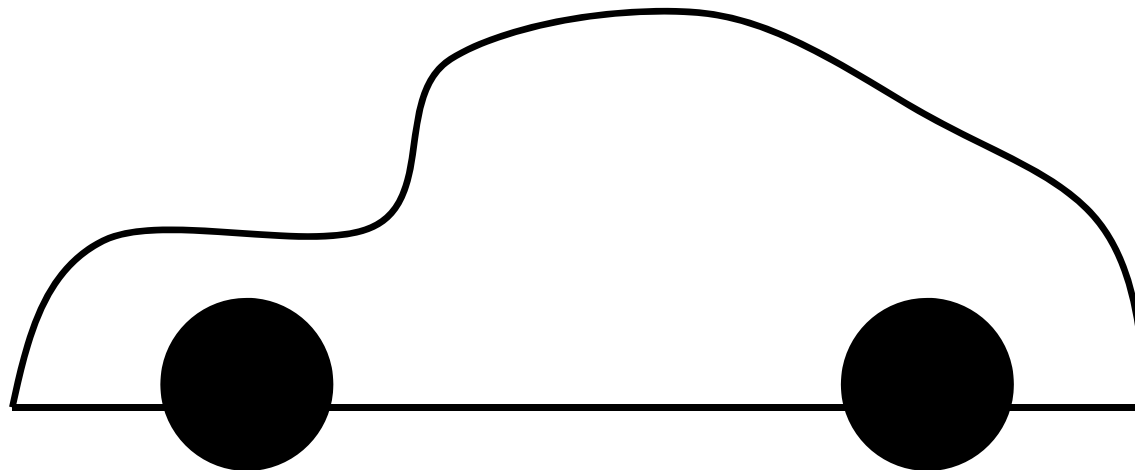
[kgianna@central.ntua.gr](mailto:kgianna@central.ntua.gr)

<http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/research/>



- Η βελτιστοποίηση είναι σήμερα βασικό στοιχείο σε κάθε επιστήμη. Από την **ΑΝΑΛΥΣΗ** στη **ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ!!!!**
- Βελτιστοποίηση λαμβάνει χώρα, ακόμη και αν αυτό δεν φαίνεται ή λέγεται ξεκάθαρα, σχεδόν σε κάθε σχεδιασμό προϊόντος, υπηρεσίας ή διεργασίας. Το θέμα είναι αν γίνεται με το βέλτιστο τρόπο.
- Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης, σε γενικές γραμμές, είναι ίδιες ανεξάρτητα από τον αν εφαρμόζονται στην αεροδυναμική, στην υδροδυναμική, στις κατασκευές, στους αυτοματισμούς, σε ενεργειακά θέματα κλπ. Μόνο οι ιδιαιτερότητες αλλάζουν...
- Από τη **ΜΟΝΟΚΡΙΤΗΡΙΑΚΗ ΒΕΛ/ΣΗ** (Single Objective Optimization, SOO) στην **ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑΚΗ ΒΕΛ/ΣΗ** (Multi Objective Optimization, MOO) και, μετά στη **ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΒΕΛ/ΣΗ** (Multi Disciplinary Optimization, MDO).
- Το μάθημα δεν απευθύνεται αποκλειστικά σε «αεροναυπηγούς».

- ▶ Βέλτιστος Σχεδιασμός Αυτοκινήτου
- ▶ Σχεδιασμός Βέλτιστου Αυτοκινήτου
- ▶ Βέλτιστος Σχεδιασμός Βέλτιστου Αυτοκινήτου
- ▶ Βέλτιστος Σχεδιασμός Μορφής Αυτοκινήτου
- ▶ Σχεδιασμός Βέλτιστης Μορφής Αυτοκινήτου
- ▶ Βέλτιστος Σχεδιασμός Βέλτιστης Μορφής Αυτοκινήτου



# Τι είναι Βέλτιστο?



- ▶ Το πιο γρήγορο
- ▶ Το πιο οικονομικό
- ▶ Το πιο άνετο
- ▶ Το πιο οικολογικό
- ▶ ...



Το βέλτιστο ως προς μια συνάρτηση-στόχο (min ή max F)

ΌΜΩΣ: Ένας ή περισσότεροι στόχοι?



# Καθορισμός στόχων – Συνάρτηση-στόχος

Στη συνέχεια, καθορίζονται οι στόχοι (targets, ένας ή περισσότεροι) και φέρονται στη μορφή συνάρτησης στόχου (objective function) που καλούμαστε να ελαχιστοποιήσουμε ή να μεγιστοποιήσουμε. Στα σύνθετα τεχνολογικά προβλήματα, εδώ υπάρχουν συχνά πολλές επιλογές. Υπάρχει η δυνατότητα να συνενωθούν στόχοι σε μια αντικειμενική συνάρτηση (ή όχι), να γίνει διαχείριση στόχων στη μορφή περιορισμών (constraints), κλπ.

Παράδειγμα διαφορετικών επιλογών:

$$\begin{array}{l} \max C_L \\ \min C_D \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \min -C_L \\ \min C_D \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \min 1/C_L \\ \min C_D \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \max C_L \\ \max -C_D \end{array}$$

$$\min C_D + w/C_L$$

$$\min C_D + 1/C_L$$

$$\min C_D + 10/C_L$$

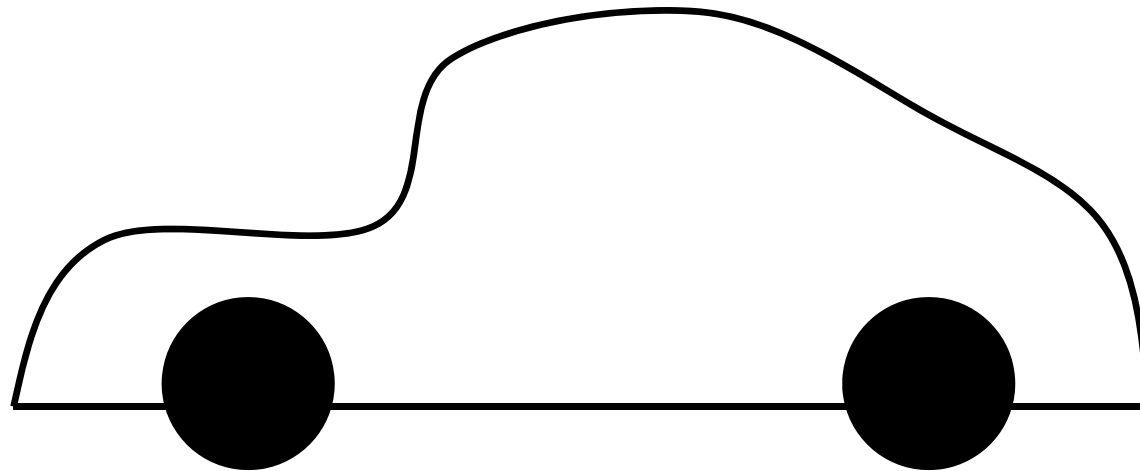
$$\begin{array}{l} \min C_D \\ \text{υπό τον περιορισμό: } C_L = 1.2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \min C_D \\ \text{υπό τον περιορισμό: } C_L > 1.2 \end{array}$$



- **Objective Function** – Συνάρτηση Στόχος (Αντικειμενική Συνάρτηση)
- **Cost Function** – Συνάρτηση Κόστους (προς ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ)
- **Fitness Function** – Συνάρτηση Καταλληλότητας (προς ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ)

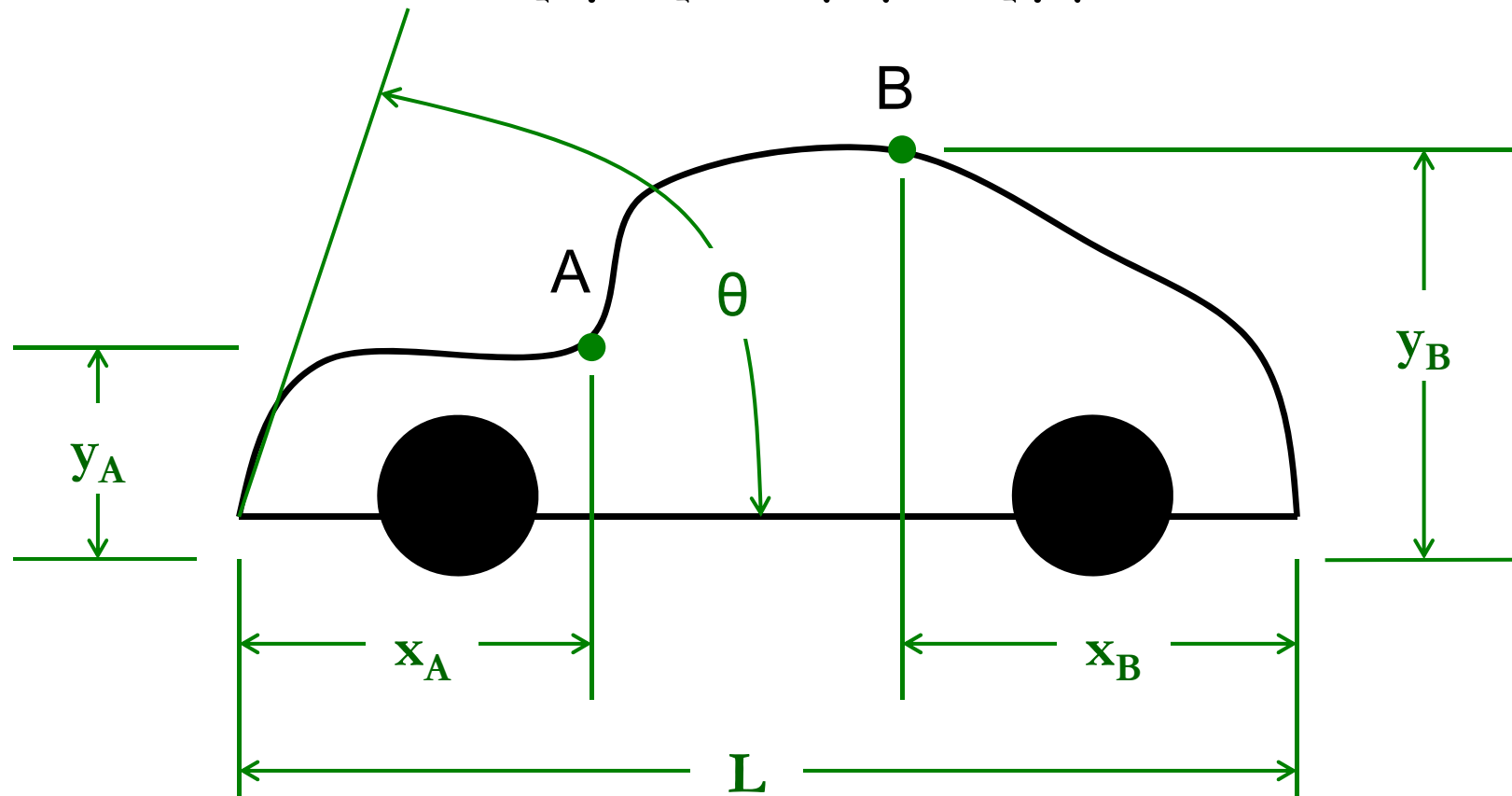
Objective: Minimum DRAG



Objective Function: DRAG Coefficient

$$\min F = C_D$$

## Παραμετροποίηση Μορφής:

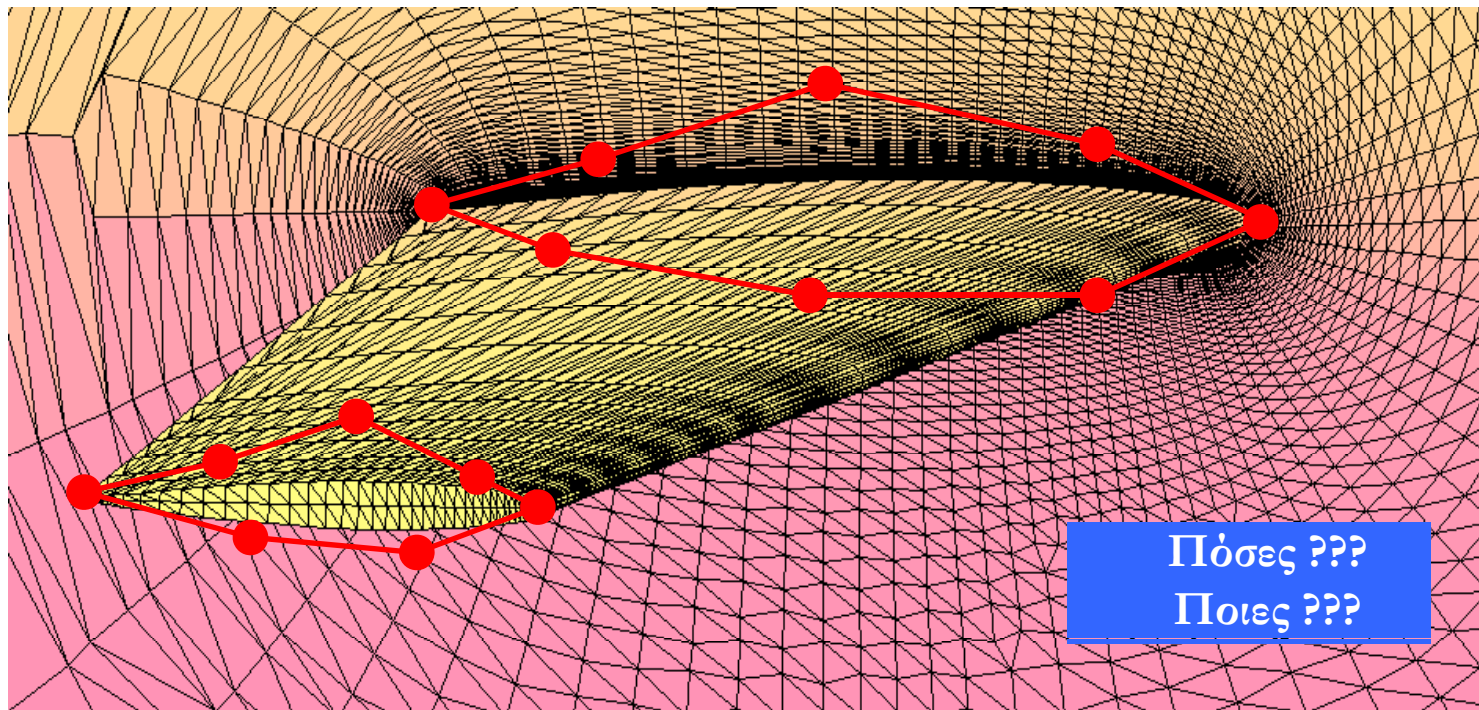


$N=6$  degrees of freedom (dofs; Βαθμοί Ελευθερίας)

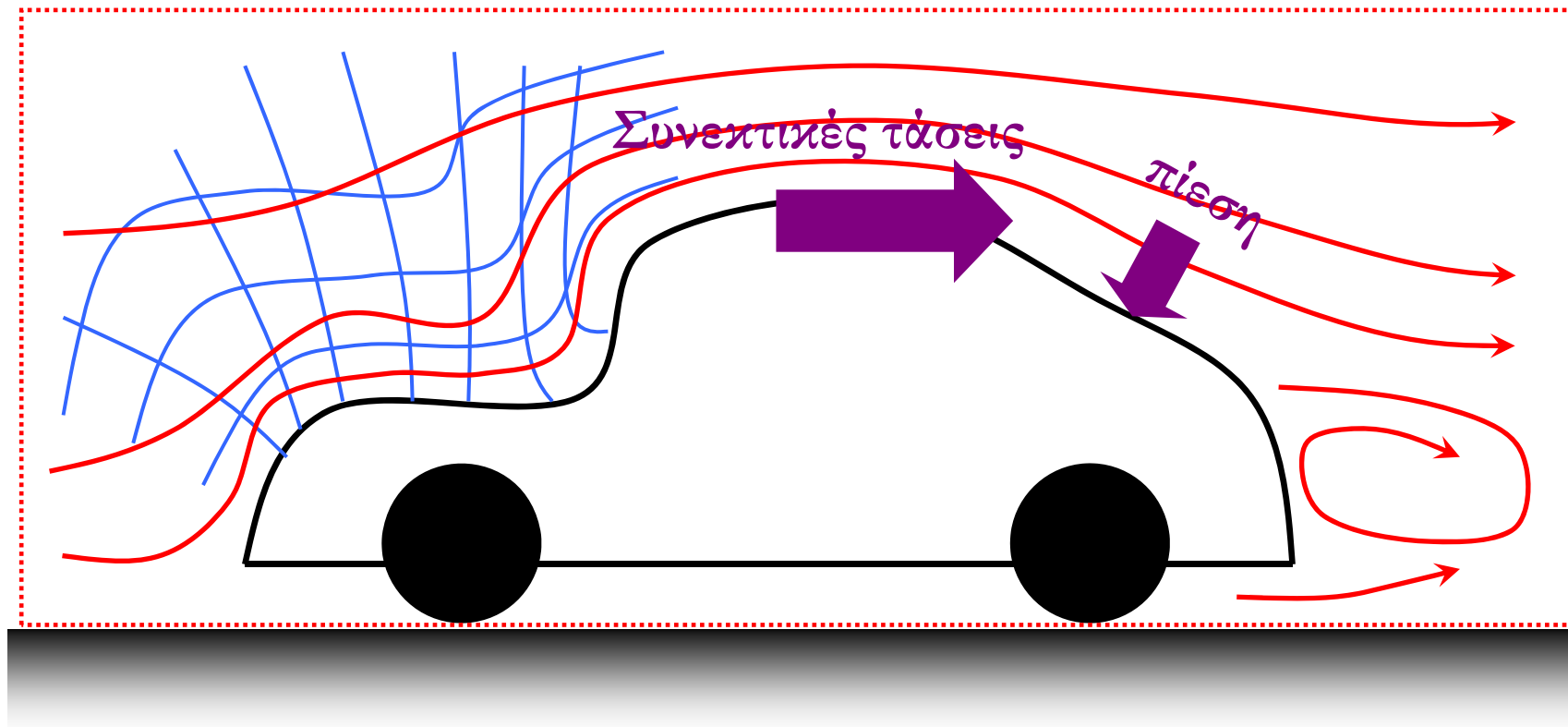


Πριν ξεκινήσει οποιαδήποτε βελτιστοποίηση, πρέπει να αναγνωρισθούν οι ελεύθερες μεταβλητές ή παράμετροι (free variables) ή μεταβλητές σχεδιασμού (design variables) του προβλήματος. Η επιλογή αυτή είναι ιδιαίτερα κρίσιμη. Λάθος επιλογή μπορεί να σημαίνει ότι υπάρχουν ενδεχομένως βέλτιστες λύσεις που η μέθοδος βελτιστοποίηση δεν θα μπορέσει να εντοπίσει.

Παράδειγμα αεροδυναμικού σχεδιασμού πτέρυγας:



## Λογισμικό Αξιολόγησης: Κώδικας επίλυσης εξισώσεων ροής

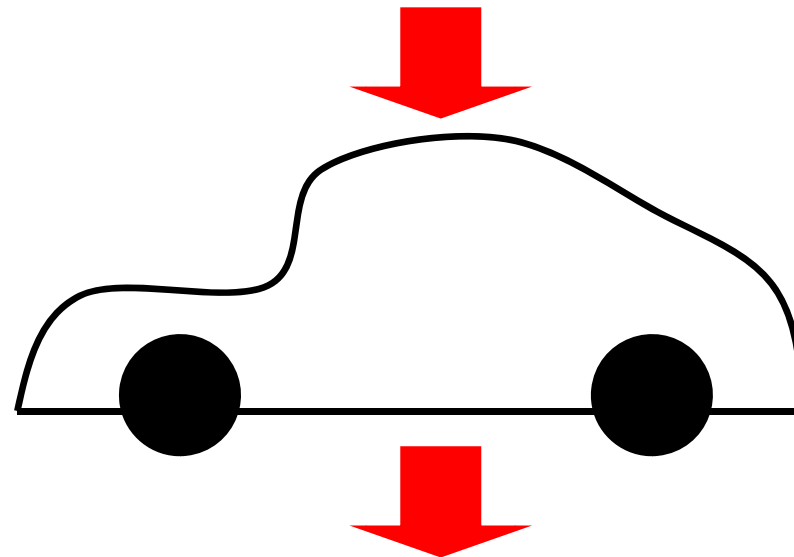
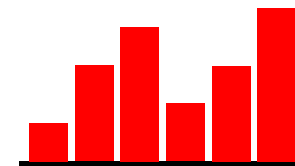


$$C_D = \int_{\text{carcontour}} \text{forces}$$

$L$	$x_A$	$y_A$	$x_B$	$y_B$	$\theta$
-----	-------	-------	-------	-------	----------

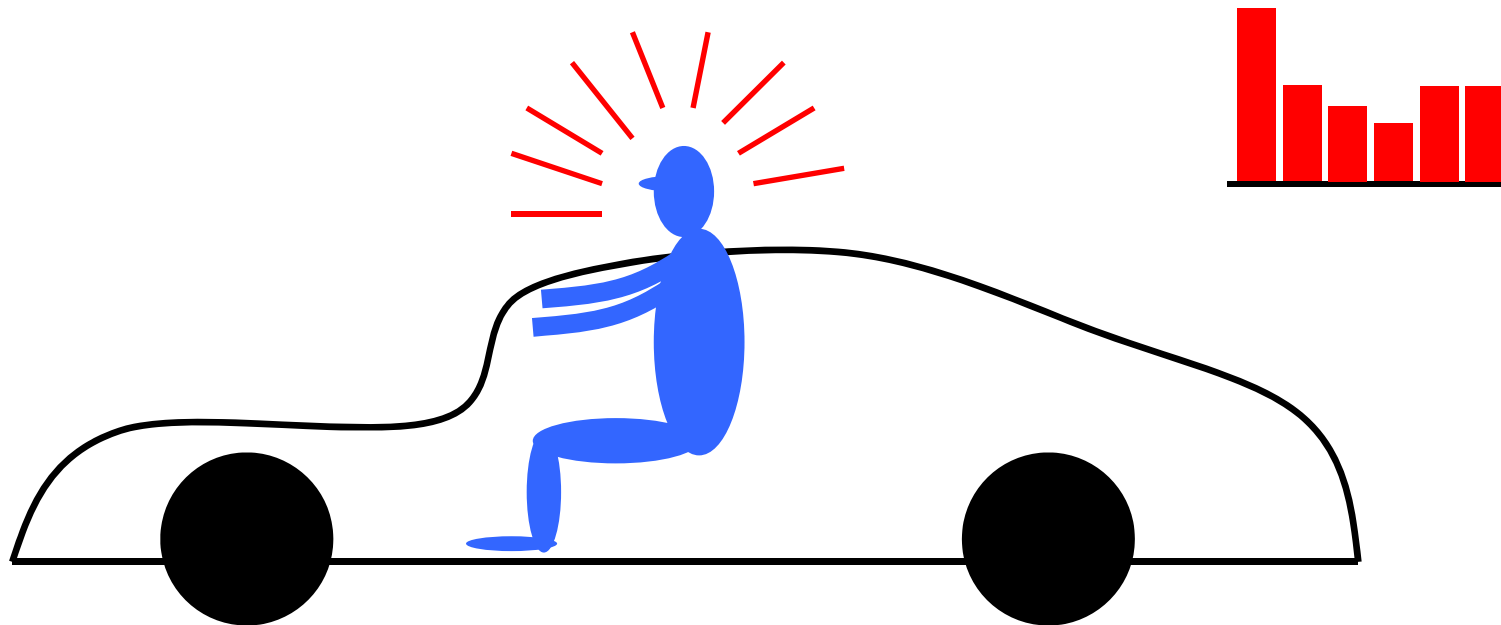
$\vec{b} =$

$b_1=...$	$b_2=...$	$b_3=...$	$b_4=...$	$b_5=...$	$b_6=...$
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------



$$F = C_D = \dots$$

## Constraints:



Μια μη-αποδεκτή λύση !!!

**Gradient-Based Method**  
(Μέθοδοι Κλίσης  $F$ )

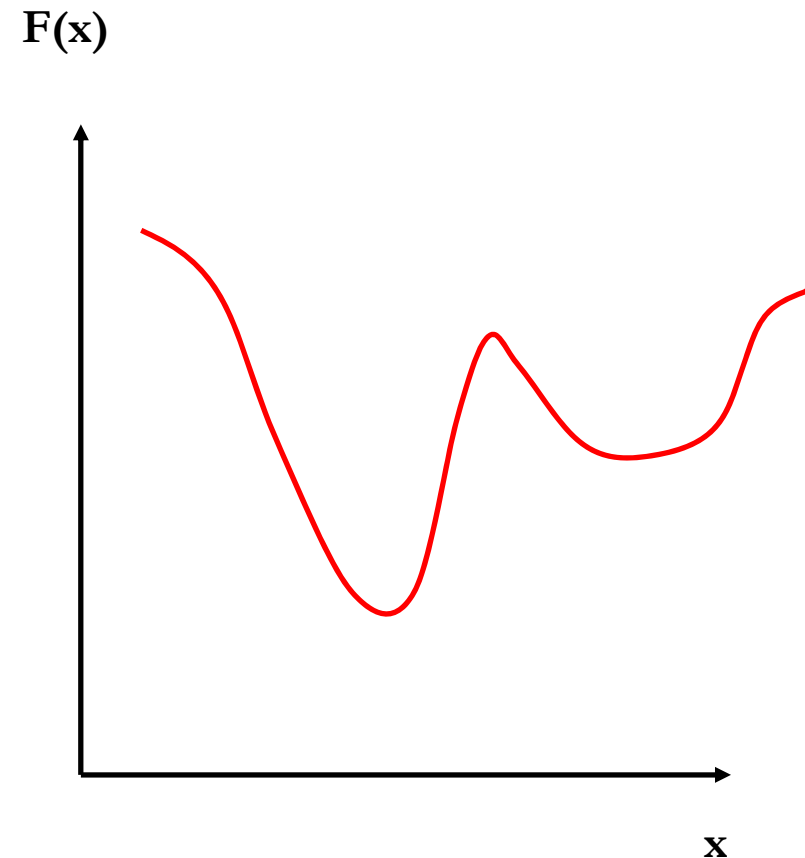
vs.

**Stochastic Methods**  
(Στοχαστικές Μέθοδοι)

**Individual-based Methods**  
(Ατομικές Μέθοδοι)

vs.

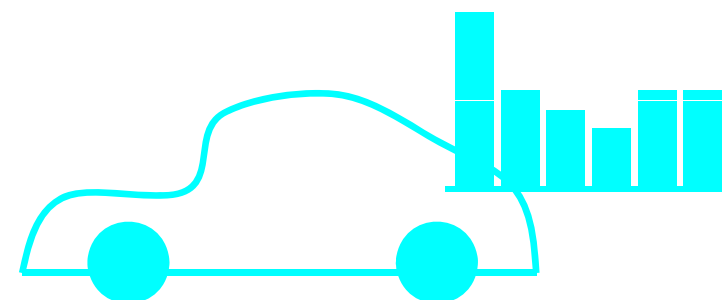
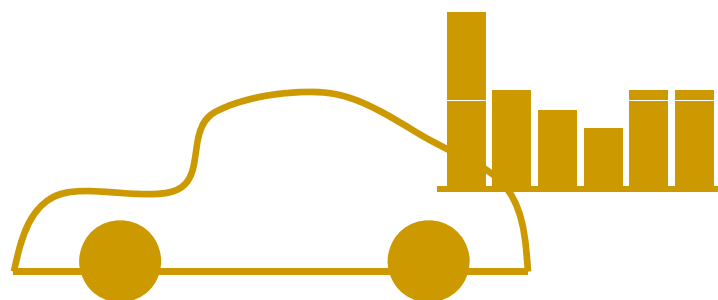
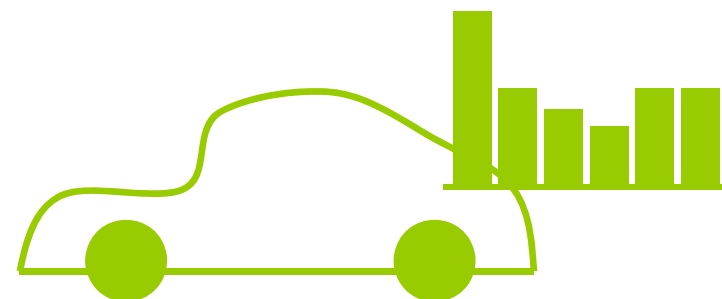
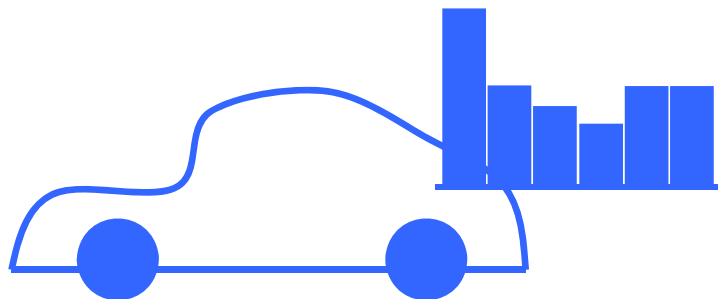
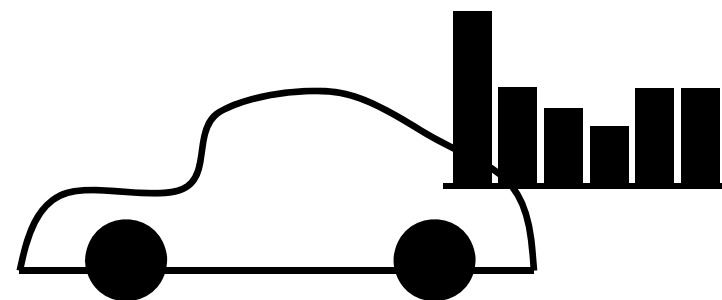
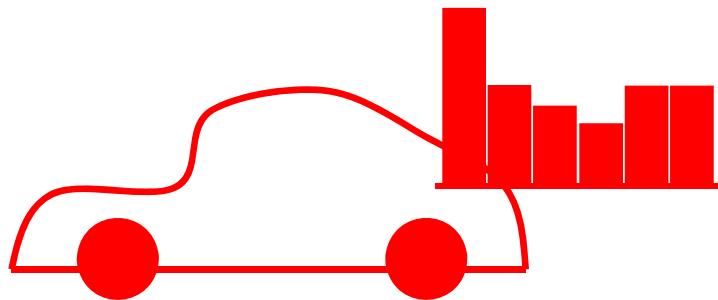
**Population-based Methods**  
(Πληθυσιαστικές Μέθοδοι)



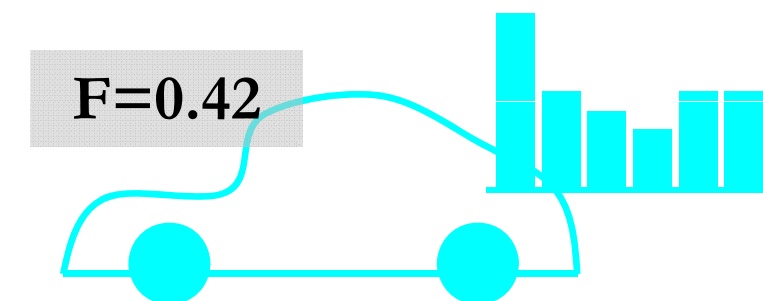
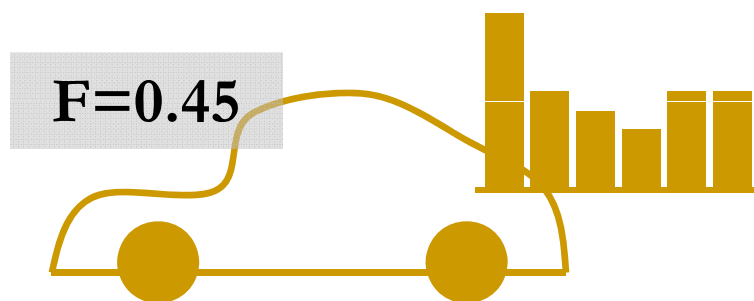
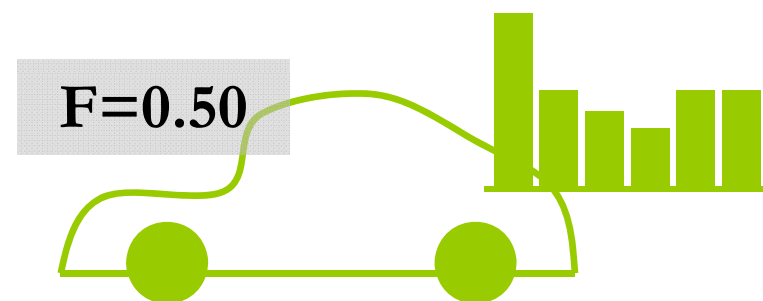
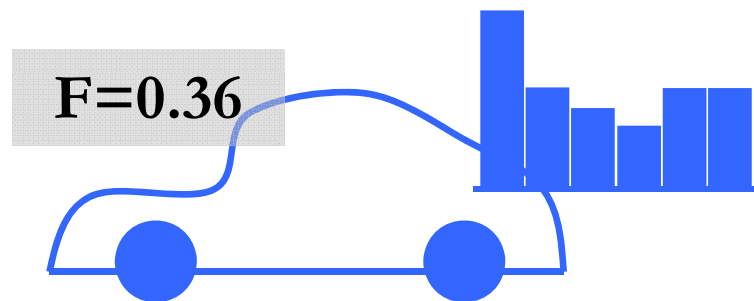
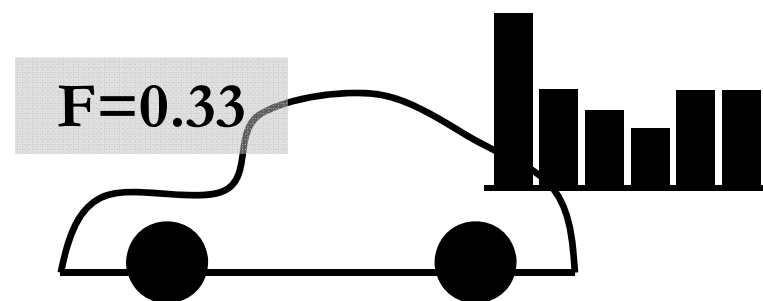
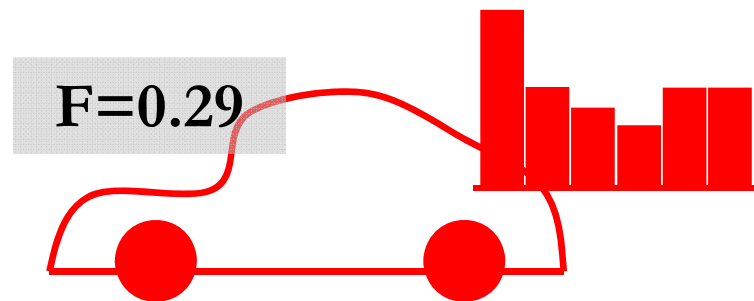


- Για μια βελτιστοποίηση χρειάζονται:
  - ▶ Στόχος ή στόχοι (min ή max).
  - ▶ Ελεύθερες μεταβλητές ή μεταβλητές σχεδιασμού-βελτιστοποίησης.
  - ▶ Ενδεχομένως περιορισμοί (συμπερ/νων των ορίων των μεταβλητών σχεδιασμού).
  - ▶ Μια μέθοδος αξιολόγησης (ανάλυσης) υποψηφίων λύσεων ή υποκατάστατά της.
  - ▶ Μια μέθοδος βελτιστοποίησης. Προέχει η απόφαση ως προς το σε ποια κατηγορία θα ανήκει η μέθοδος. Μετά, επιλέγεται και η μέθοδος αυτή καθαυτή.

## Πληθυσμιακή Μέθοδος - A Population-based Algorithm:

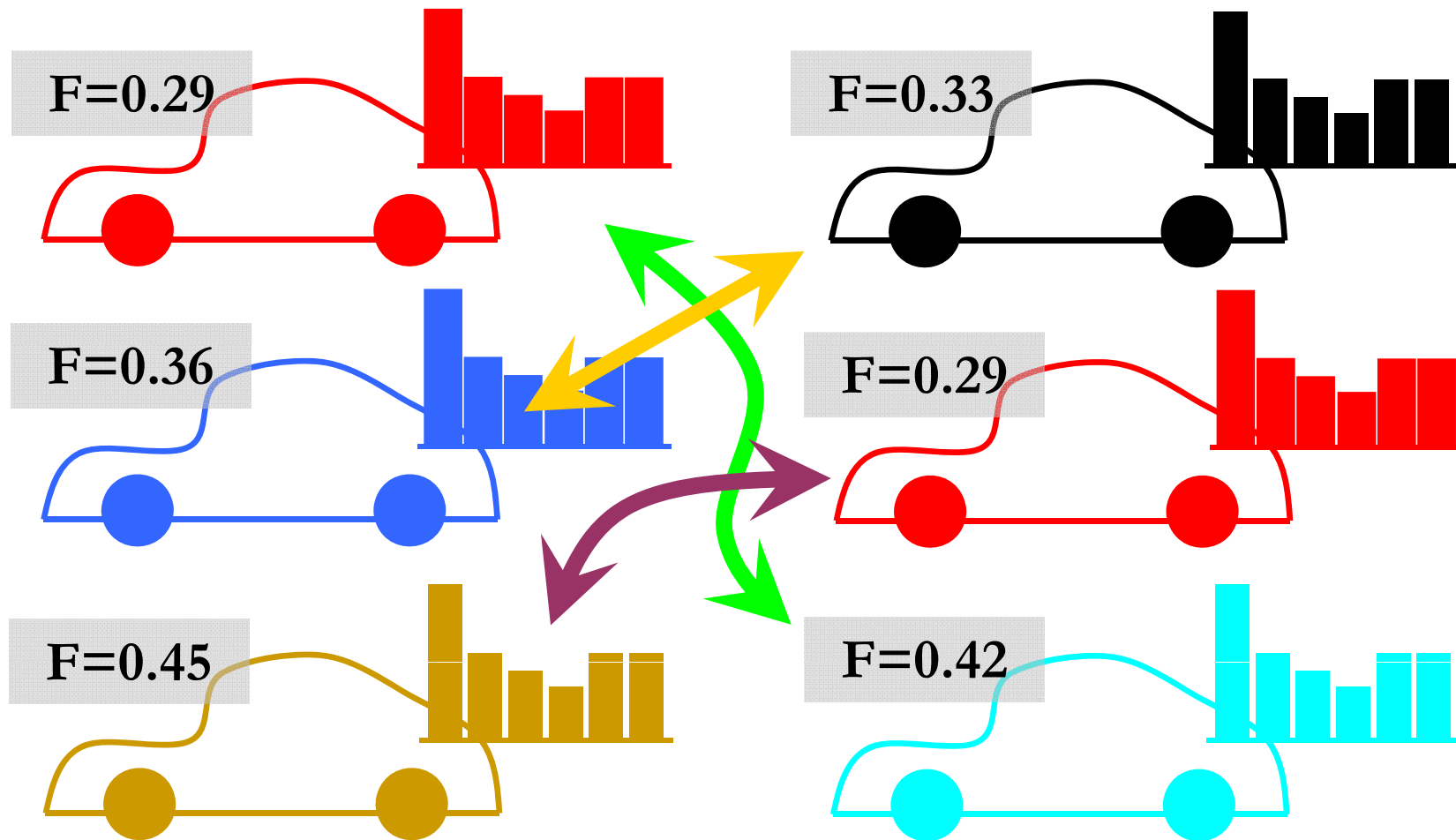


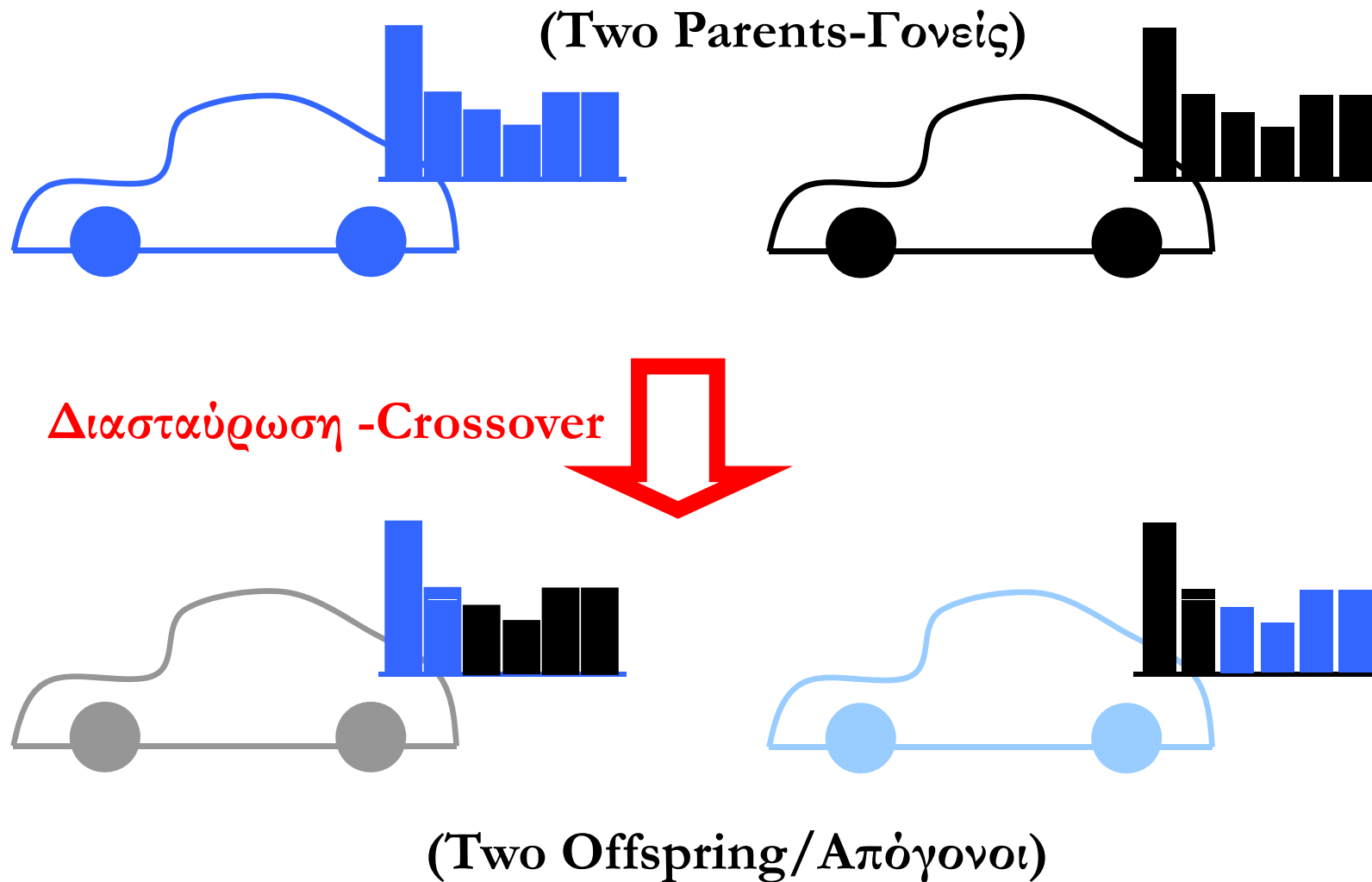
## Αξιολόγηση Πληθυσμού - Evaluation of the Population:

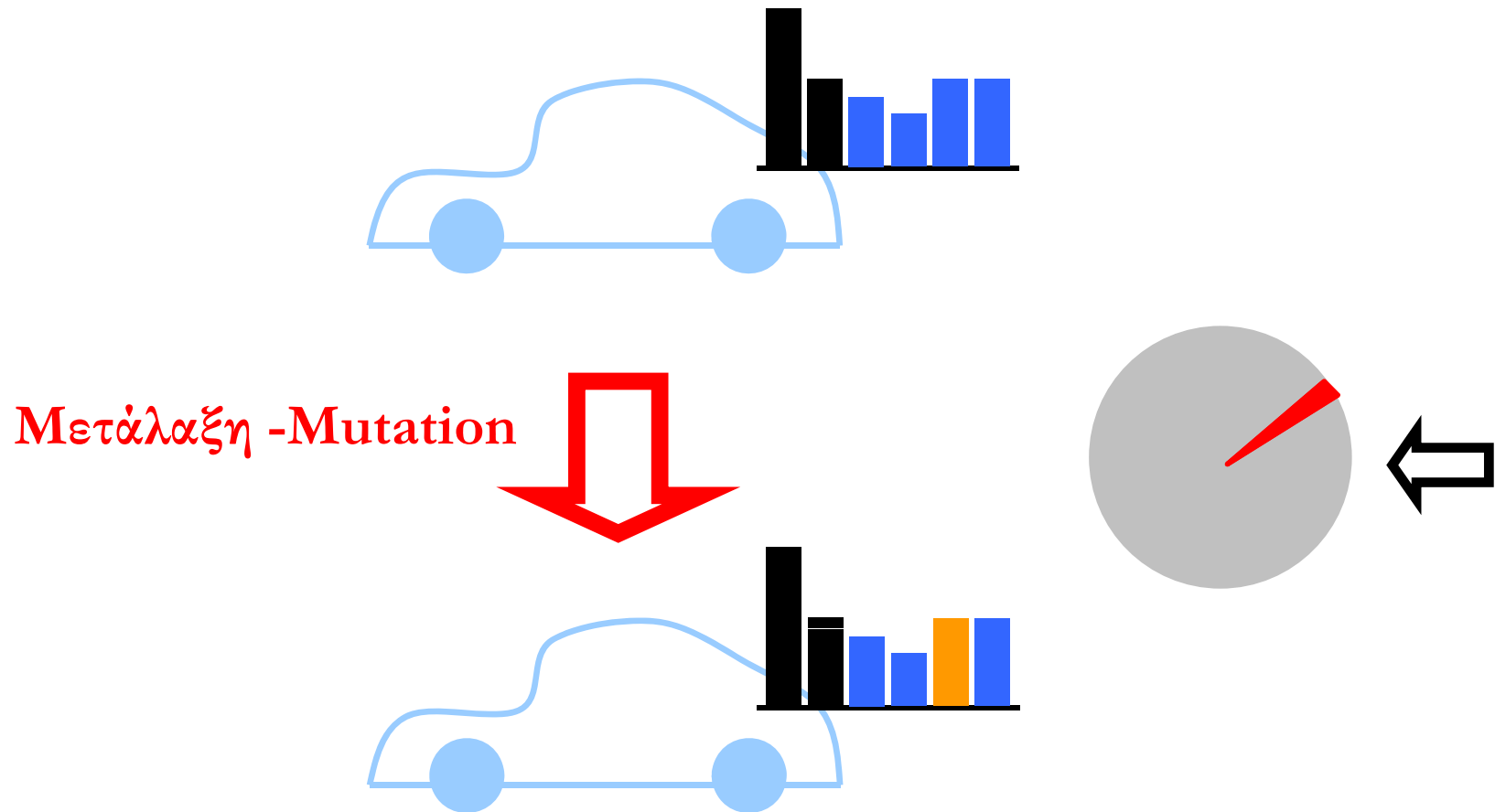




## Επιλογή Γονέων - Parent Selection:

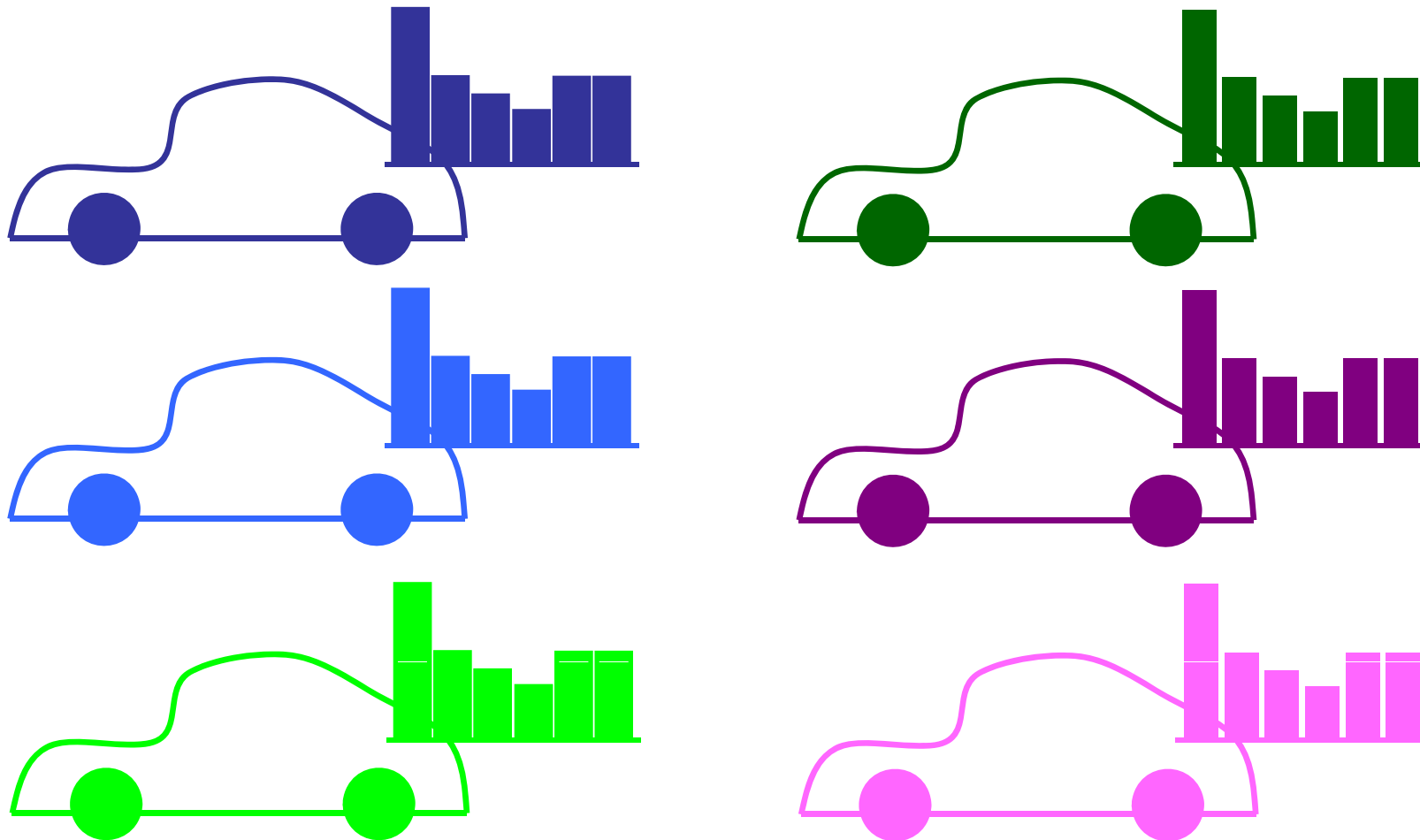








## The New Offspring Population



# Εξελικτικοί Αλγόριθμοι (Evolutionary Algorithms)

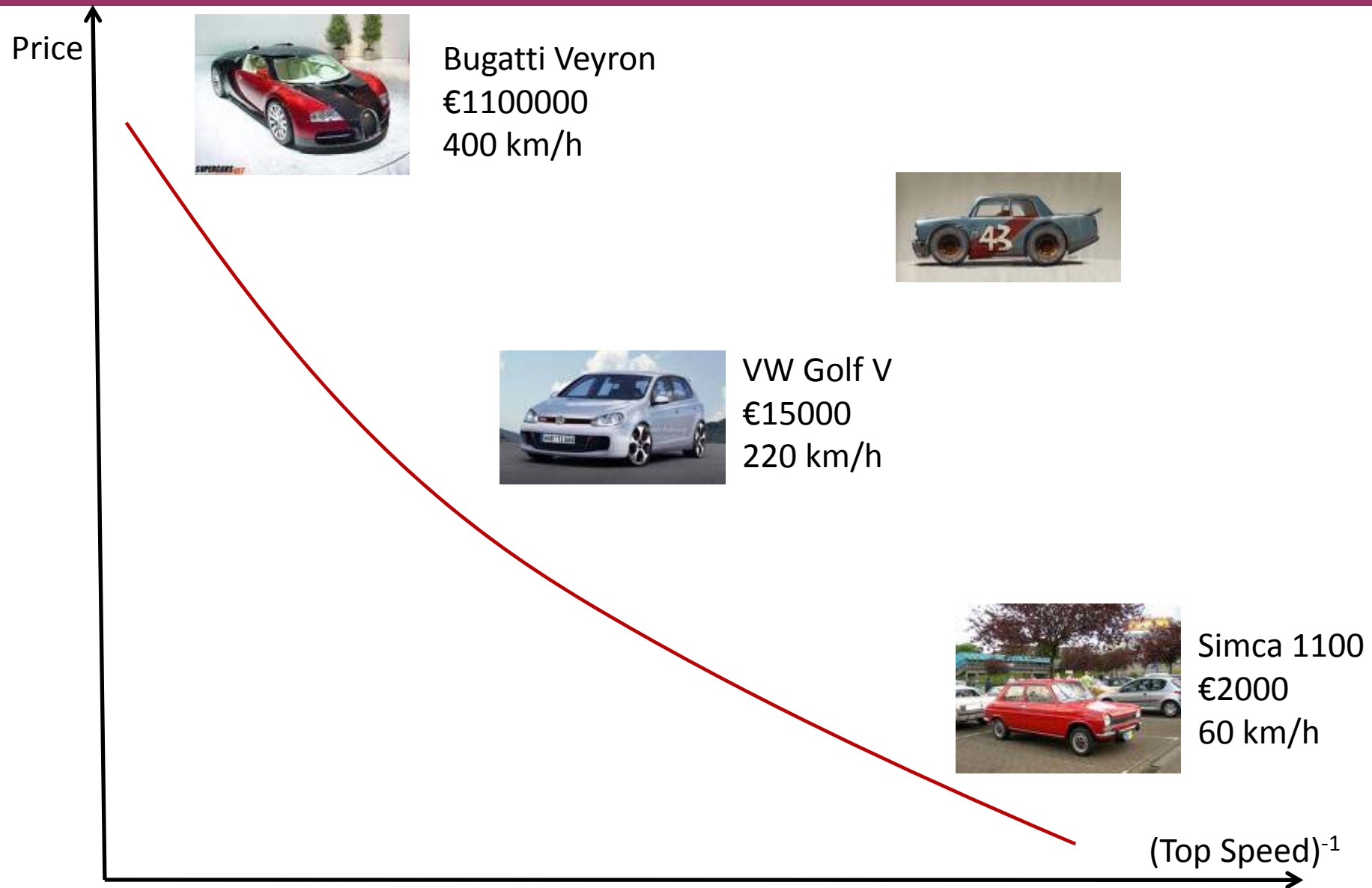


Το λογισμικό E.A.SY. (Evolutionary Algorithm SYstem) υλοποιεί τους εξελικτικούς αλγορίθμους, είναι γενικό, το χρησιμοποιούν πολλές πανεπιστημιακές ομάδες και εταιρίες στην Ελλάδα και το εξωτερικό. Θα το πάρετε, θα το χρησιμοποιήσετε σε προαιρετικές εργασίες και μπορείτε να το χρησιμοποιήσετε και «αλλού»



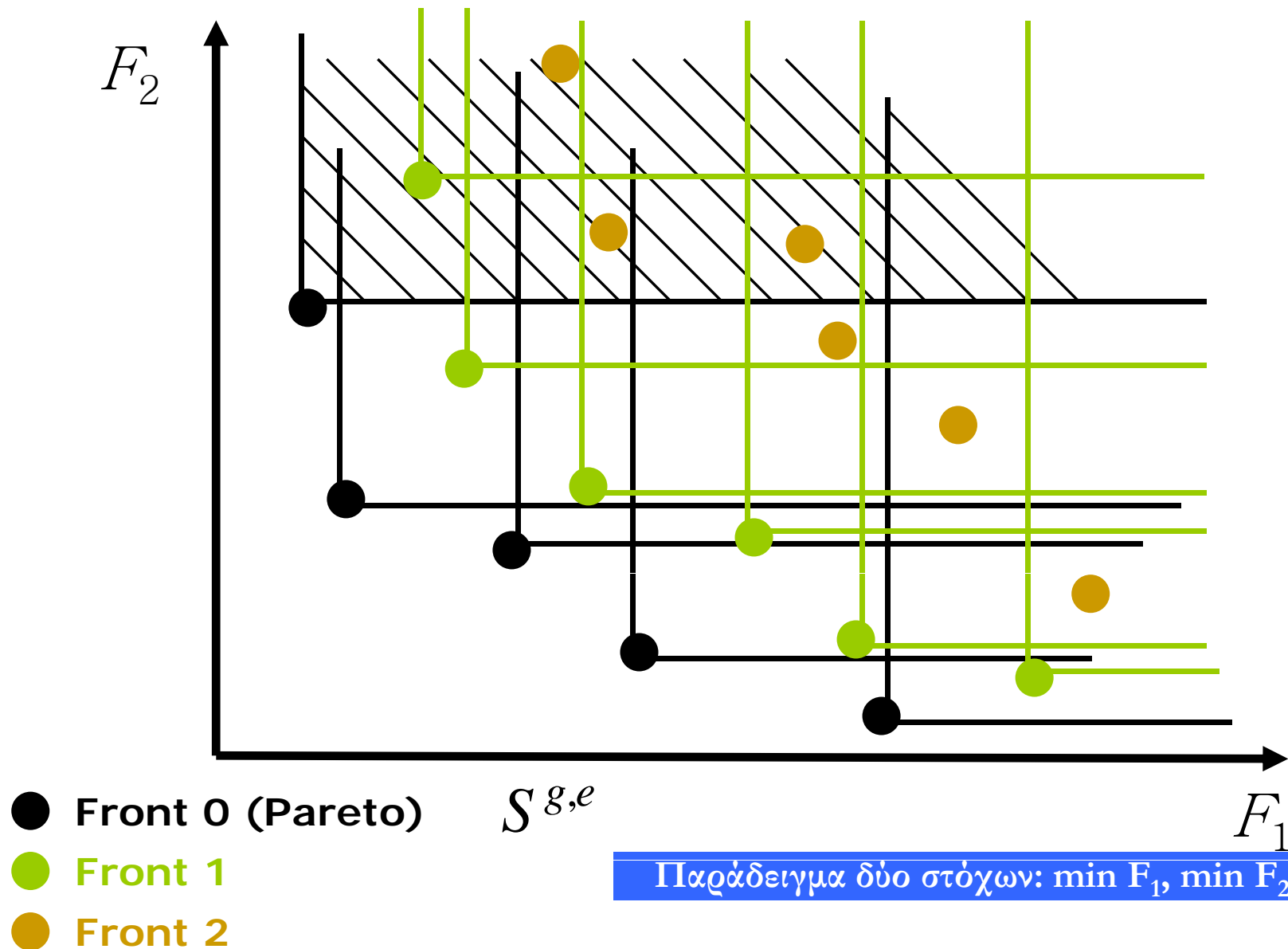


# Πολυκριτηριακή Βελτιστοποίηση – Μέτωπο Pareto





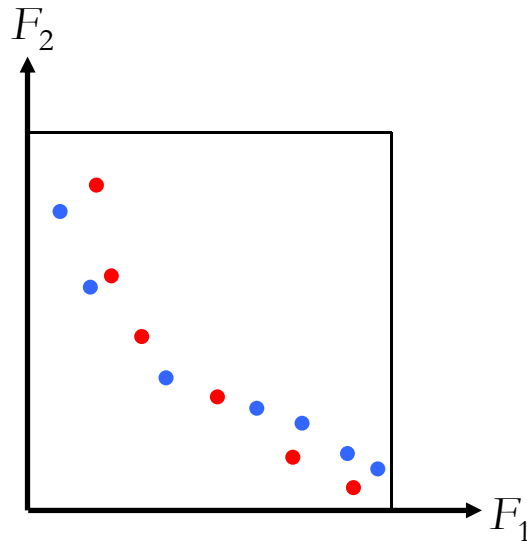
# Πολυκριτηριακή Βελτιστοποίηση – Μέτωπο Pareto



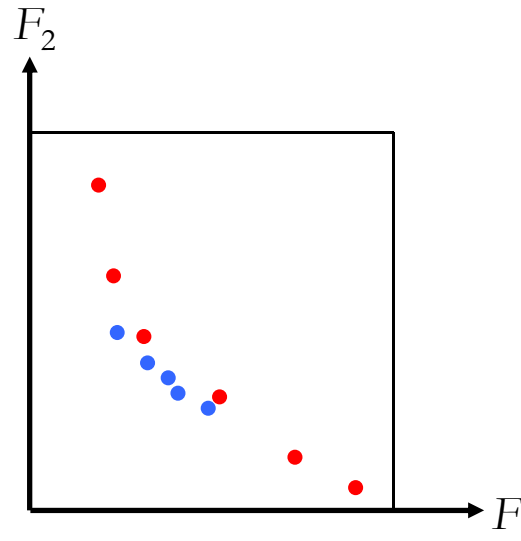
# Πως θα συγκρίνατε τα παρατω μέτωπα Pareto ?



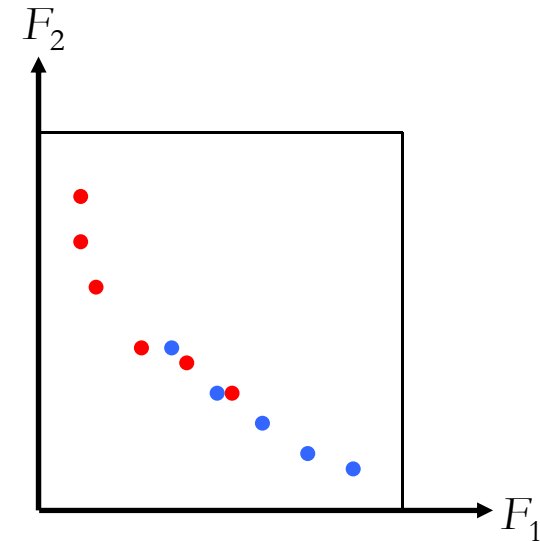
Περίπτωση Α:



Περίπτωση Β:



Περίπτωση Γ:



Σχόλια λ.χ. για την περίπτωση Β:

- ▶ Δεν αποκλείεται κάποιος να είναι περισσότερο ευχαριστημένος με το μπλέ μέτωπο και κάποιος άλλος με το κόκκινο μέτωπο!
- ▶ Αρχίστε να σκέφτεστε την ιδέα του «μετώπου των μετώπων Pareto» (αποτελείται από τις μη-κυριαρχούμενες λύσεις από όλα τα διαθέσιμα μέτωπα). Τότε θα ήταν ενδιαφέρον να καταγράφονταν ποιες και πόσες από τις λύσεις του τελικού μετώπου έδωσε κάθε μέθοδος.





Ας γνωρίζουμε ότι:

- ▶ Δεν μπορούν όλες οι μέθοδοι βελτιστοποίησης να παράγουν το μέτωπο των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων, τουλάχιστον «με τη μία».
- ▶ Προφανώς, μέτωπο Pareto υπολογίζεται για οποιοδήποτε αριθμό στόχων. Μέχρι 3 στόχους, το μέτωπο Pareto απεικονίζεται. Αλλά, για περισσότερους από 3 στόχους, το ποιος είναι ο καλύτερος τρόπος να παρουσιασθεί και να κατανοηθεί το πολυδιάστατο μέτωπο Pareto είναι (και θα είναι) ένα «ανοιχτό θέμα».
- ▶ Το να υπολογισθεί το μέτωπο Pareto στοιχίζει ασφαλώς περισσότερο από το να λυθεί το πρόβλημα ως προς μόνο ένα στόχο.
- ▶ Με τον υπολογισμό του μετώπου Pareto, ουσιαστικά αρχίζει ένα νέο πρόβλημα (δικό μας ή κάποιου άλλου): ποια λύση από τις πολλές του μετώπου θα επιλεγεί. Μια νέα επιστήμη το αναλαμβάνει: λήψη απόφασης, decision making!
- ▶ Δεν συγκρίνονται εύκολα και «αντικειμενικά» δύο μέτωπα Pareto!



Ταχύτητα εύρεσης της βέλτιστης λύσης  
ή των βέλτιστων λύσεων



Ακολουθεί μια σειρά παραδειγμάτων πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης, κυρίως αλλά όχι αποκλειστικά από την αεροδυναμική. Όλα έχουν μελετηθεί με υπολογιστικά εργαλεία που αναπτύχθηκαν και αναπτύσσονται στη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του Τομέα Ρευστών της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών ΕΜΠ.

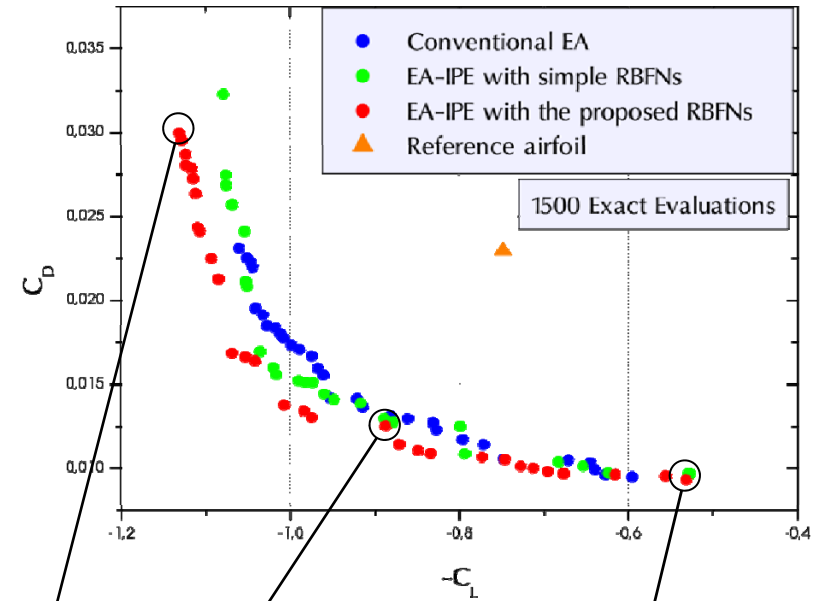
# Π1: Βελτιστοποίηση μορφής μεμονωμένης αεροτομής

Πρόβλημα δύο στόχων:

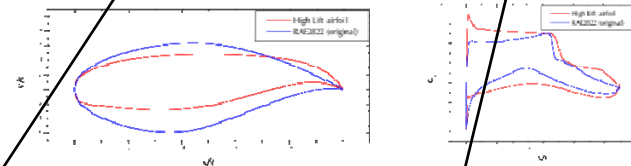
$$\begin{cases} f_1 = -C_L \\ f_2 = C_D \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{σε συνθήκες} \\ \text{ροής:} \end{array} \quad \begin{array}{l} M_\infty = 0.75 \\ Re_\infty = 6.2 \cdot 10^6 \\ \alpha_\infty = 2.73^\circ \end{array}$$

Ας γνωρίζουμε ότι:

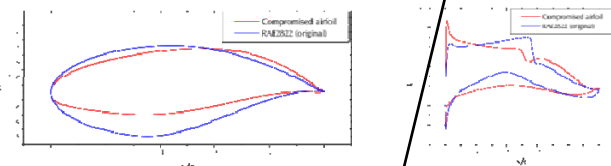
- ▶ Στο σχήμα συγκρίνονται τα μέτωπα βέλτιστων λύσεων τριών μεθόδων βελ/σης και η απόδοση της αεροτομής αναφοράς.
- ▶ Όλες χρησιμοποίησαν την ίδια παραμετροποίηση μορφής (Bezier) με τα ίδια όρια μεταβολής των μεταβλητών σχεδιασμού.
- ▶ Κριτήριο τερματισμού κάθε υπολογισμού ήταν οι 1500 **Exact Evaluations**. Γι' αυτό καμιά δεν εντόπισε το μέτωπο Pareto.
- ▶ Βρείτε την καλύτερη!



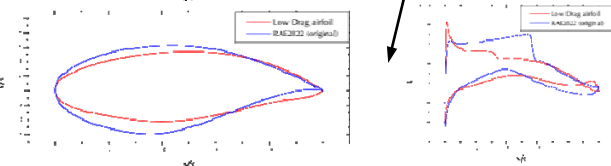
High-Lift:



Compromise:

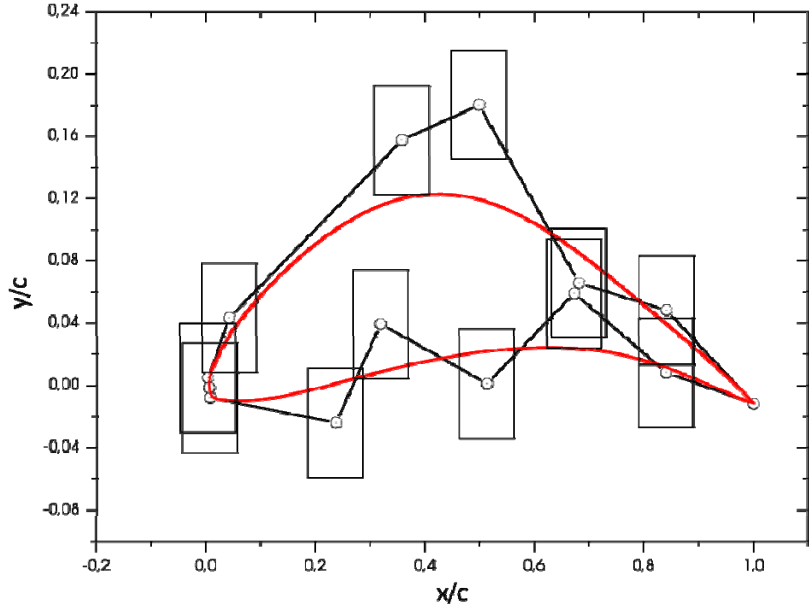


Low-Drag:





# Π2: Σχεδιασμός βέλτιστης περύγωσης συμπίεστη



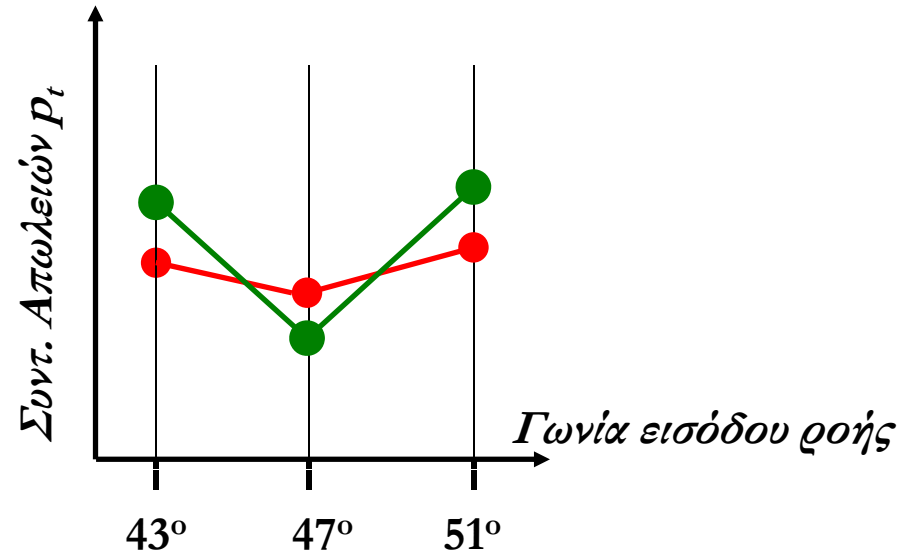
$M_1 = 0.62$   
 $Re = 8,41 \times 10^5$   
 $\beta_{1,DOP} = 47^\circ$   
 $\beta_{1,DOP} = 43^\circ$   
 $\beta_{1,DOP} = 51^\circ$

Βέλτιστη λειτουργία σε 3 σημεία λειτουργίας

Πρόβλημα δύο στόχων:

$$F_1 = \omega_{\beta_{1,DOP}} = \frac{P_{t1} - P_{t2}}{P_{t1} - P_1} \Big|_{\beta_{1,DOP}}$$

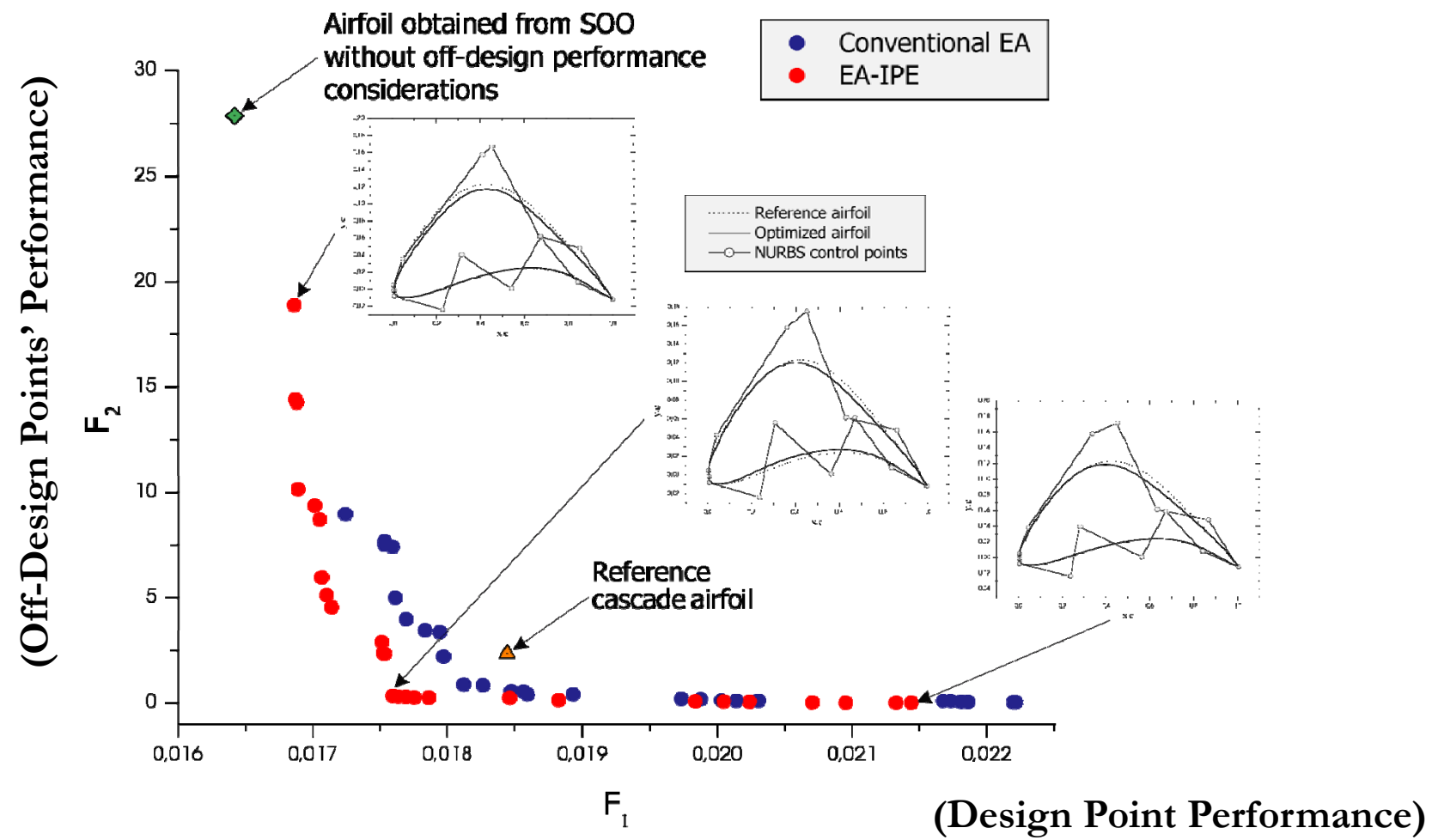
$$F_2 = 10^4 \sum_{i=1}^{noff} (\omega_{\beta_{1,i}} - \omega_{\beta_{1,DOP}})$$



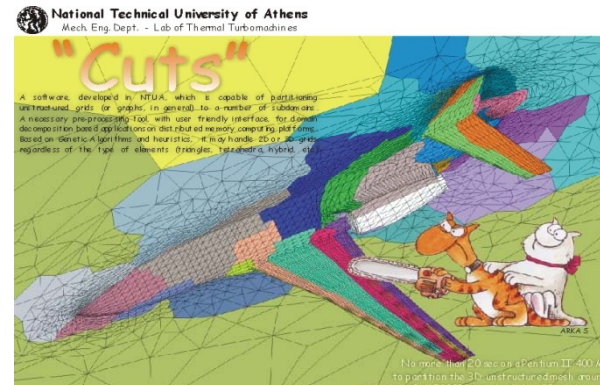
# Π2: Σχεδιασμός βέλτιστης πτερόγωσης συμπίεστη



Αποτελέσματα με το ίδιο υπολογιστικό κόστος:  
ίδιος αριθμός αξιολογήσεων (εξετασθεισών λύσεων)



# Ανάγκη για χρήση Πολυεπεξεργασίας



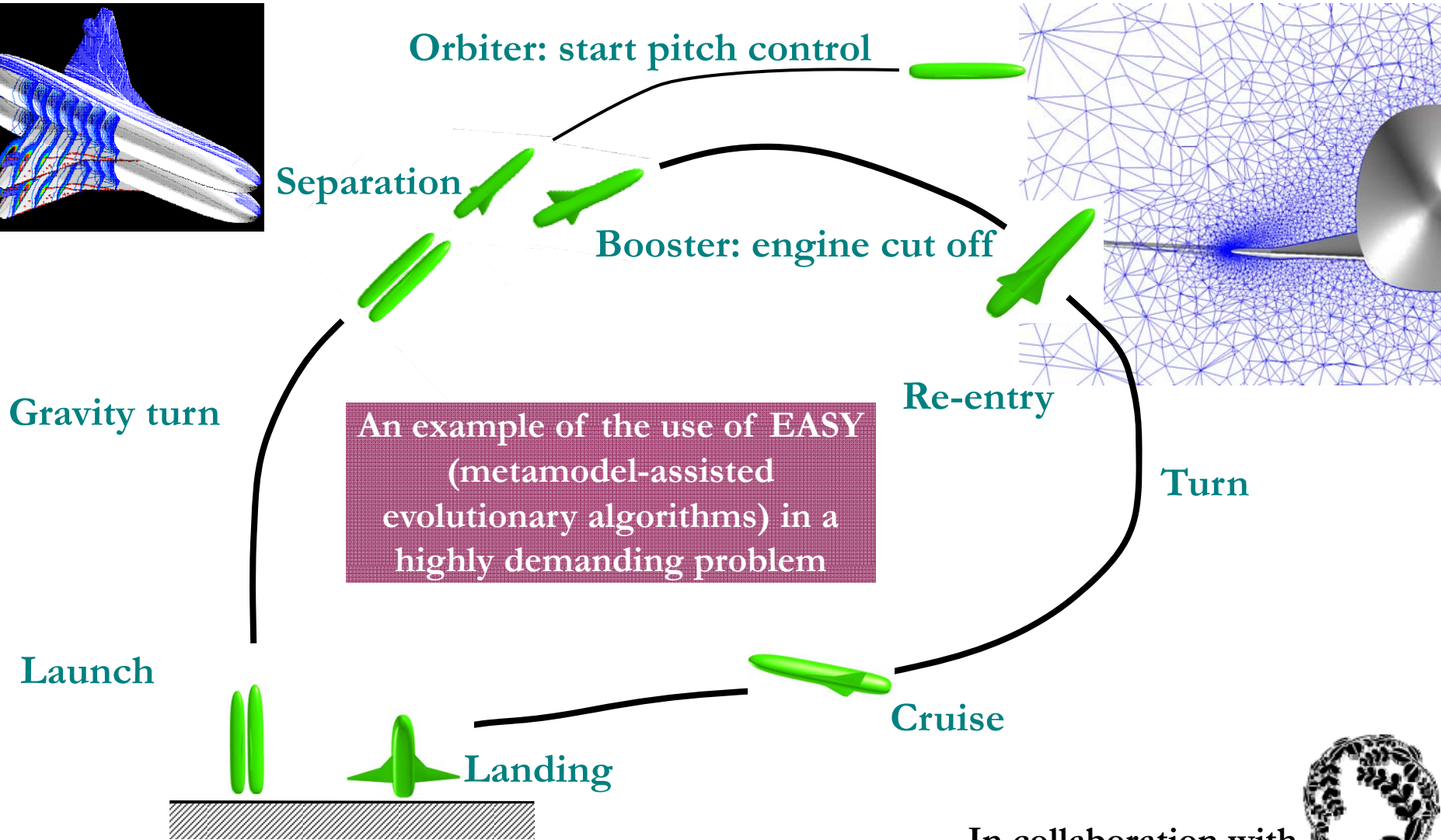
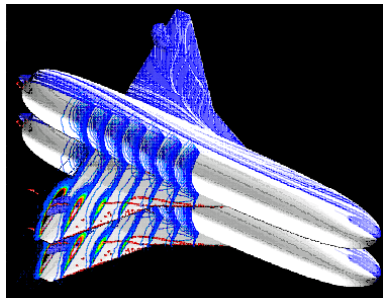
Η πολυεπεξεργασία ή η παράλληλη επεξεργασία (multi-processing or parallel processing) μπορεί να εφαρμοσθεί σε πολλά επίπεδα:

- ▶ Κάθε φορά που αξιολογείται μια λύση (λ.χ. τρέχει ένας κώδικας Navier-Stokes για μια αεροτομή ή μια πτερόγωση ή ένα αεροπλάνο) αυτό να γίνεται παράλληλα (τεχνική πολλαπλών υποχωρίων).
- ▶ Αν η μέθοδος βελτιστοποίησης είναι **πληθυσμιακή** (population-based optimization methods) και άρα μπορούν πολλές υποψήφια λύσεις να αξιολογούνται ταυτοχρόνως, αυτό μπορεί να γίνει μοιράζοντας αξιολογήσεις στους διαθέσιμους επεξεργαστές.
- ▶ Να γίνονται και τα δύο ανωτέρω ! (πολλές ταυτόχρονες αξιολογήσεις που καθεμιά θα γίνεται παράλληλα).

**ΠΡΟΣΟΧΗ:** Το ενδιαφέρον και η έρευνα στρέφεται πλέον σε πραγματικά παράλληλες μεθόδους βελτιστοποίησης αντί της απλής μεταφοράς σε παράλληλο υπολογιστή μεθόδων που φτιάχτηκαν για σειριακή επεξεργασία!!!!



# Π3: Optimization of a Reusable Launch Vehicle (RLV)



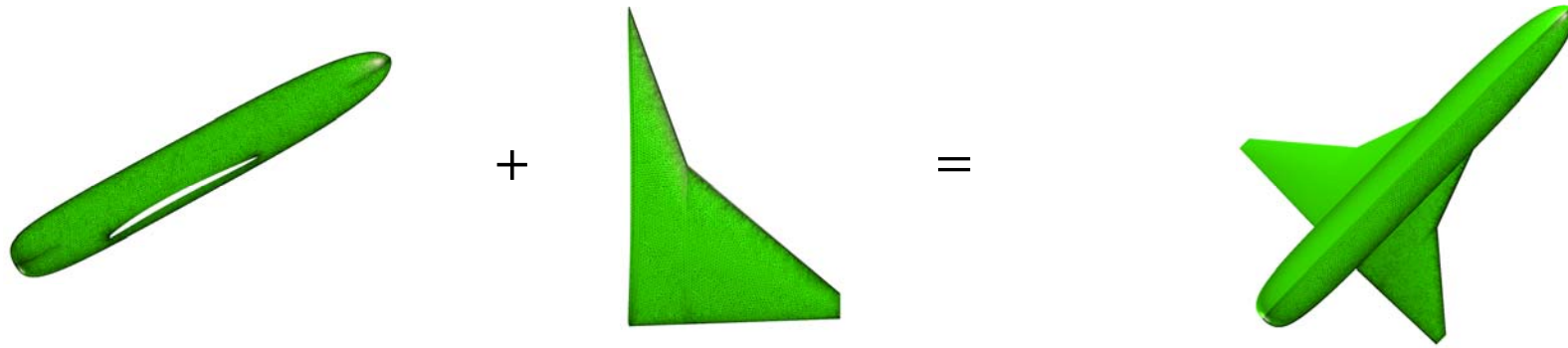
In collaboration with



TOHOKU UNIVERSITY



# Π3: Optimization of a Reusable Launch Vehicle (RLV)



**Objective 1:** Minimum shifting of the aerodynamic center; minimum control mechanisms.

**Objective 2:** Minimum pitching moment at transonic flight; overcoming the drawback of high-performance arrow wings, for stability purposes.

**Objective 3:** Minimum drag at transonic flight; the flight is transonic for major part of the range; maximum range.

**Objective 4:** Maximum lift at subsonic flight; runaway distance to be minimized.

$$F_1 = \left| C_{Mp}^{\text{supersonic}} - C_{Mp}^{\text{transonic}} \right|$$

$$F_2 = \left| C_{Mp}^{\text{transonic}} \right|$$

$$F_3 = C_D^{\text{transonic}}$$

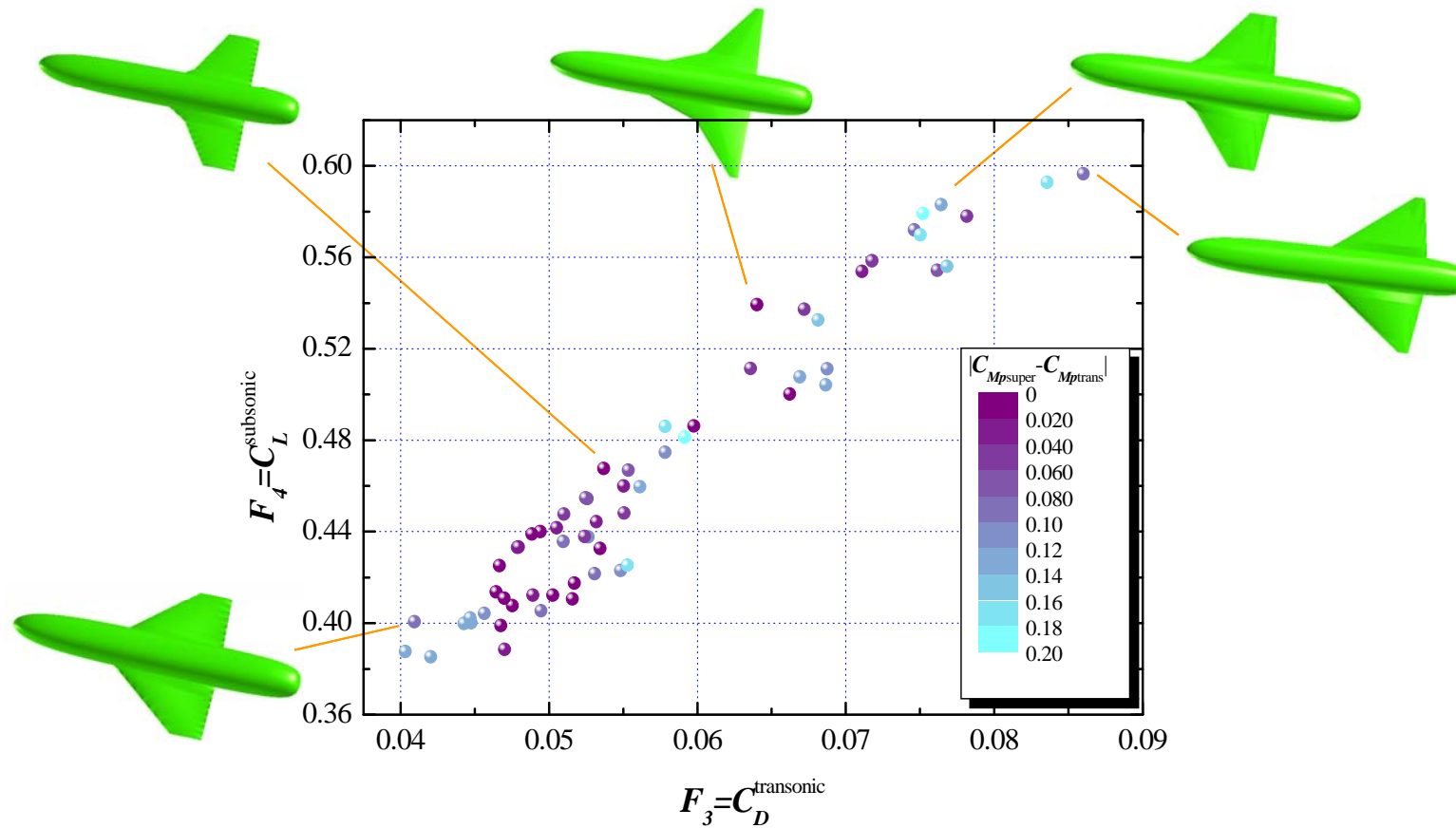
$$F_4 = C_L^{\text{subsonic}}$$

In collaboration with



TOHOKU  
UNIVERSITY

# Π3: Optimization of a Reusable Launch Vehicle (RLV)

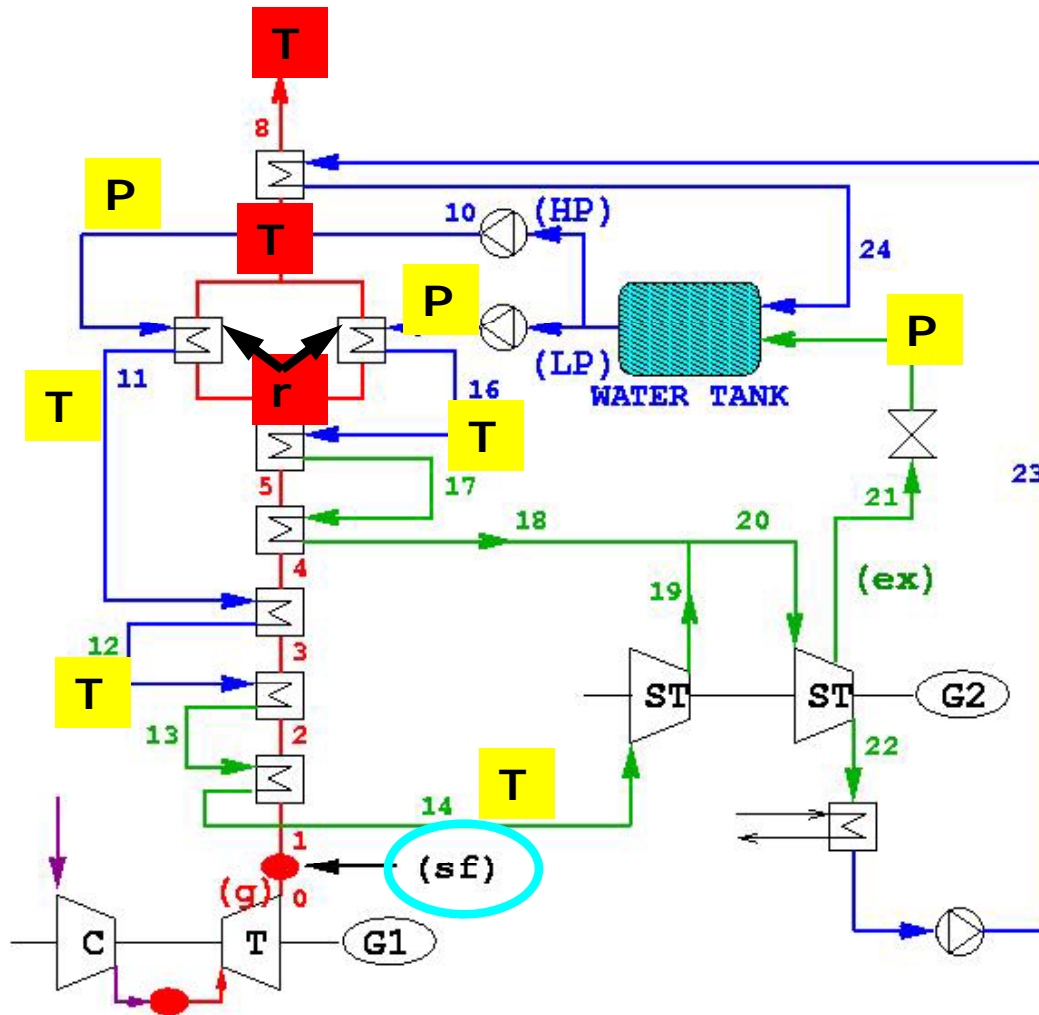


In collaboration with



TOHOKU  
UNIVERSITY

# Π5: Σχεδιασμός βέλτιστων σταθμών ηλεκτροπαραγωγής



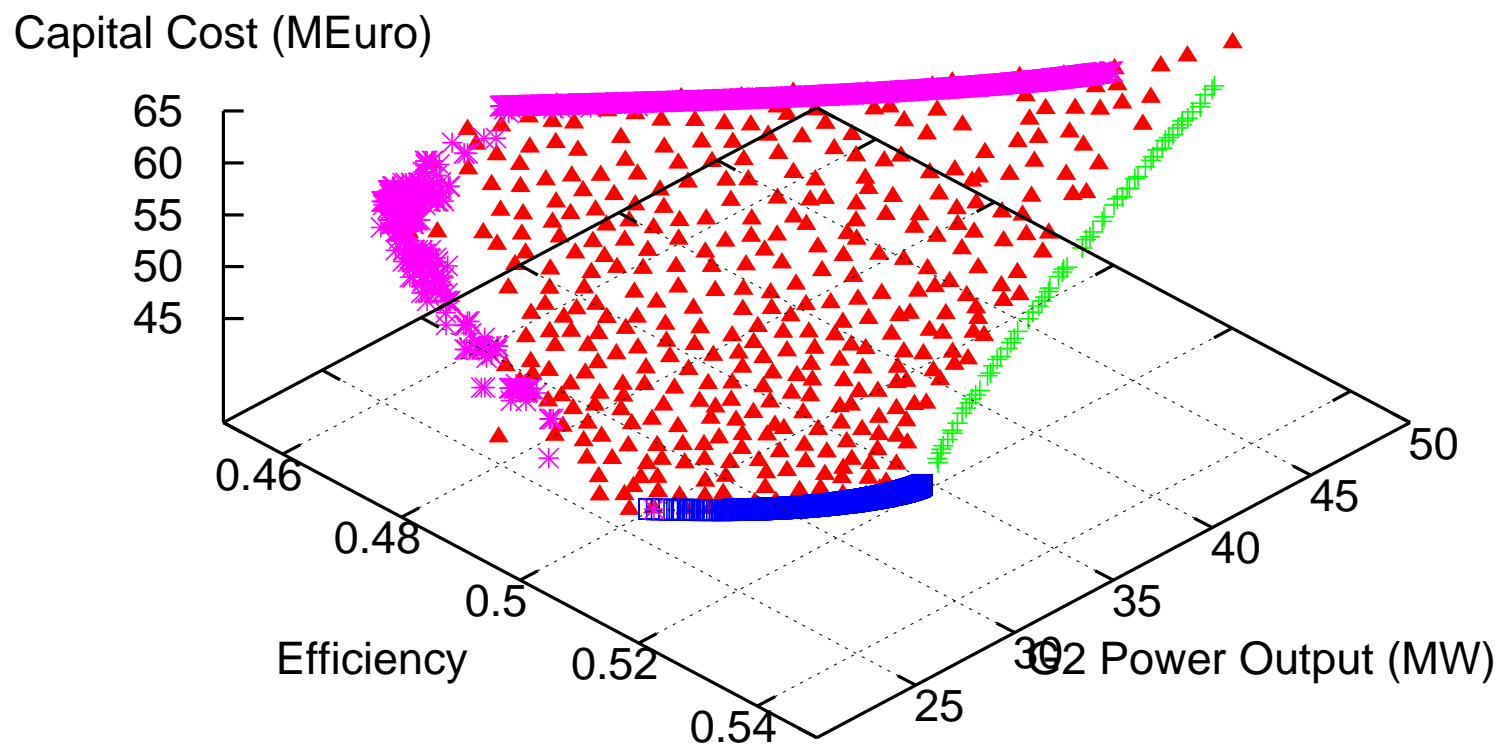
## Τρεις Στόχοι:

- (a) μέγιστη απόδοση,
- (b) μέγιστη ισχύς,
- (c) ελάχιστη επένδυση.

Έρευνα χρηματοδοτούμενη  
από τη

ΔΙΟΧΕΙΡΗΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΥ



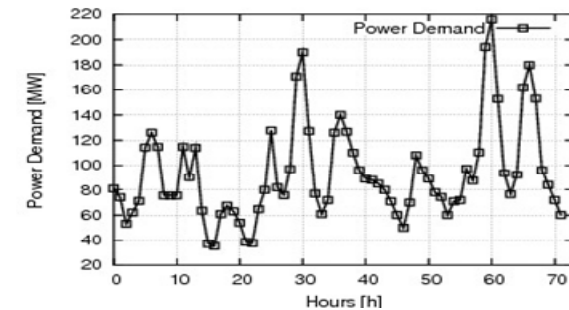


# Π6: Βέλτιστη ανάθεση φορτίου σε μονάδες αεριοστροβίλων



Δίνονται:

- Κ Αεριοστροβιλικές Μονάδες
- Η ενεργειακή ζήτηση για Τ ώρες.



Ένας Στόχος: ελαχιστοποίηση του συνολικού λειτουργικού κόστους:

$$TOC = \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^M OC_i^{(j)} + \sum_{j=1}^T \Phi(\Delta d^{(j)})$$

- ☑ Κόστος παραγωγής
- ☑ Κόστος εκκίνησης μονάδας
- ☑ Κόστος κράτησης μονάδας

Επιβάρυνση της τιμής της συνάρτησης κόστους αν δεν καλύπτεται η ζήτηση.

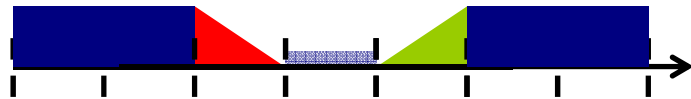
Έρευνα χρηματοδοτούμενη από τη ΓΓΕΤ (Πρόγραμμα ΠΕΝΕΔ) και τη

ΔΗΜΟΣΙΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΥ





# Π6: Βέλτιστη ανάθεση φορτίου σε μονάδες αεριοστρόβιλων

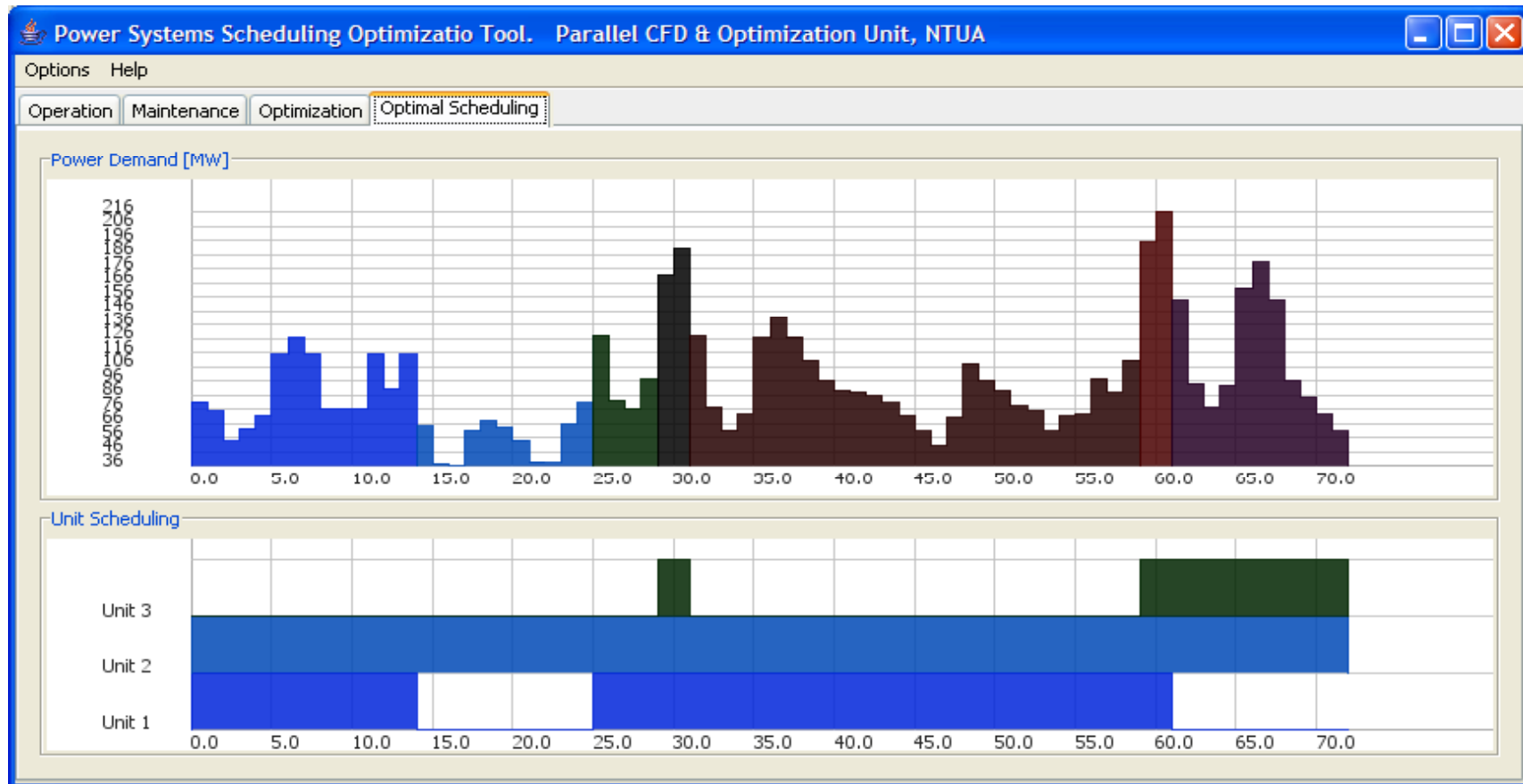


$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

## Προσέξτε:

- ▶ Εδώ δεν υπάρχουν συνεχείς αλλά διακριτές (0 ή 1) μεταβλητές. Θα χρησιμοποιηθούν ίδιες ή άλλες μέθοδοι?
- ▶ Εδώ υπάρχουν πολλοί περιορισμοί και δεν είναι δεκτές όλες οι δυαδικές στοιχειοσειρές ως λύσεις του προβλήματος.

# Π6: Βέλτιστη ανάθεση φορτίου σε μονάδες αεριοστρόβιλων



Έρευνα χρηματοδοτούμενη από τη ΓΓΕΤ (Πρόγραμμα ΠΕΝΕΔ) και τη

ΔΗΜΟΣΙΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΥ



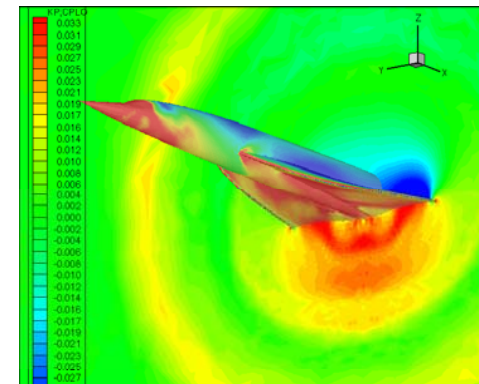


## Environmentally Friendly High Speed Aircraft

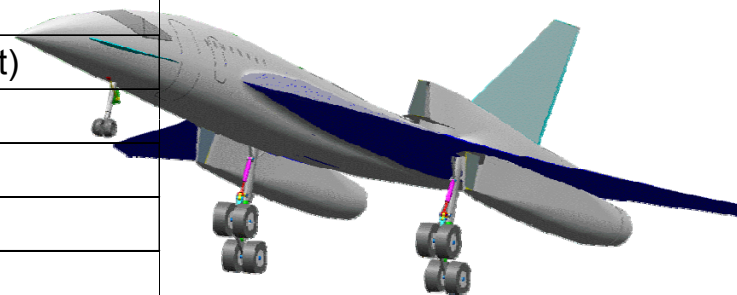
Design of a new small size commercial supersonic transport aircraft:

Environmental constraints: Noise, sonic boom, emissions

Economically viable (range, time reduction, comfort,...)

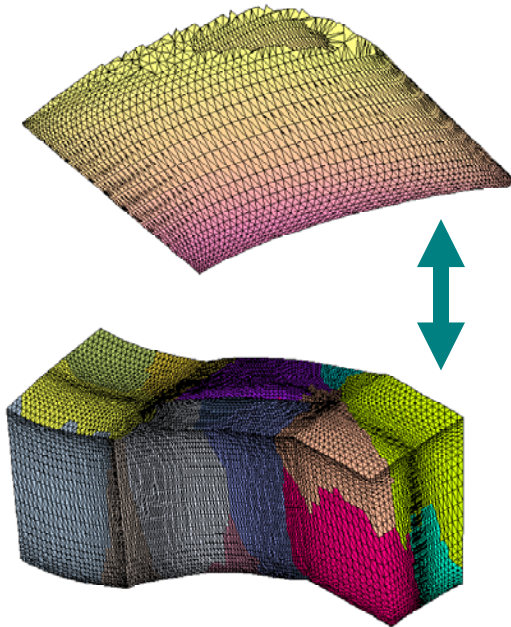


Environmental objectives	
Noise	ICAO Chapter 4 less 8dB
NOx emissions	High altitude: less than 10g per kg fuel burnt (5g in the long term) At landing and take-off: comparable to subsonic aircraft
Sonic boom	less than 15 Pa (tbc) differential pressure (overland flight)
Commercial characteristics objectives	
Size of cabin	8 to 16 passengers
Speed	transonic to M 1.8
Range	3500 to 4500 nm (~6000 to ~9000 km)
Airfield length	7000 ft

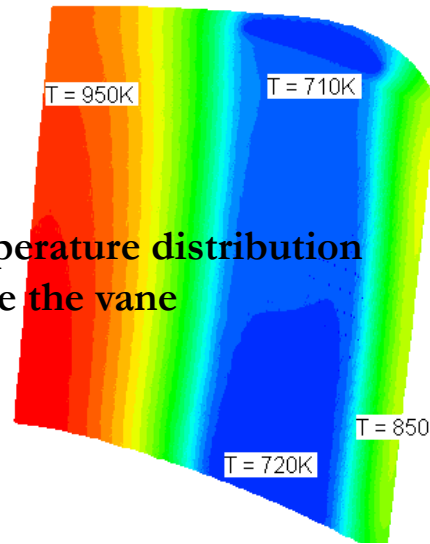




# Π8: Σχεδιασμός εσωτερικά ψυχόμενου περυγίου στροβίλου

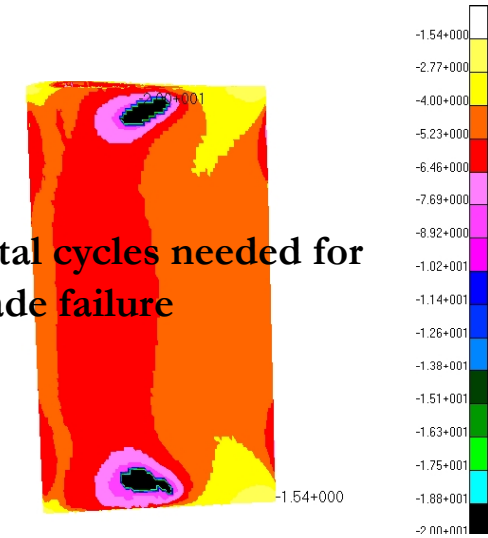


Temperature distribution inside the vane

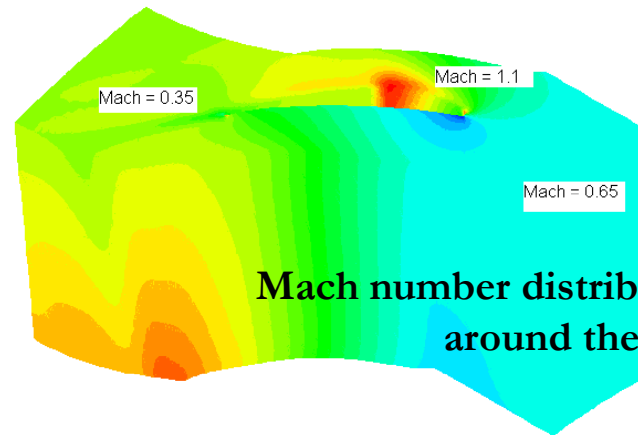


Application in the second-stage vane of the high-pressure turbine of a two-spool low by-pass ratio turbofan engine.

Total cycles needed for blade failure



Mach number distribution around the vane



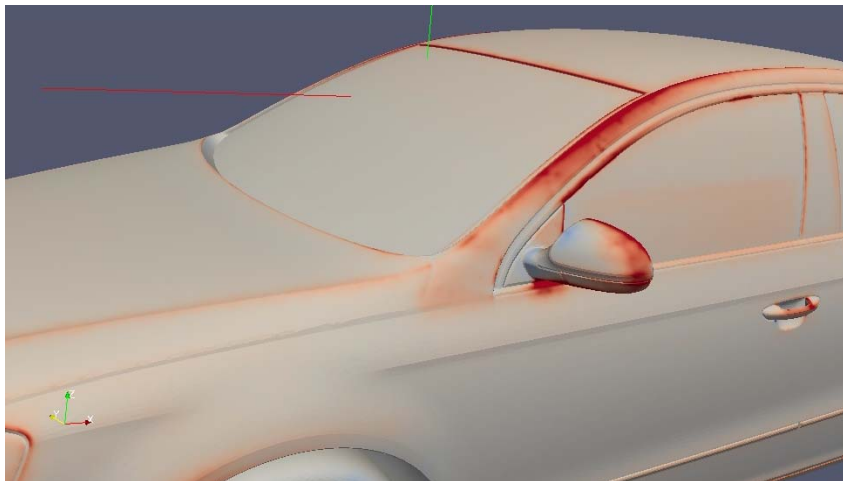
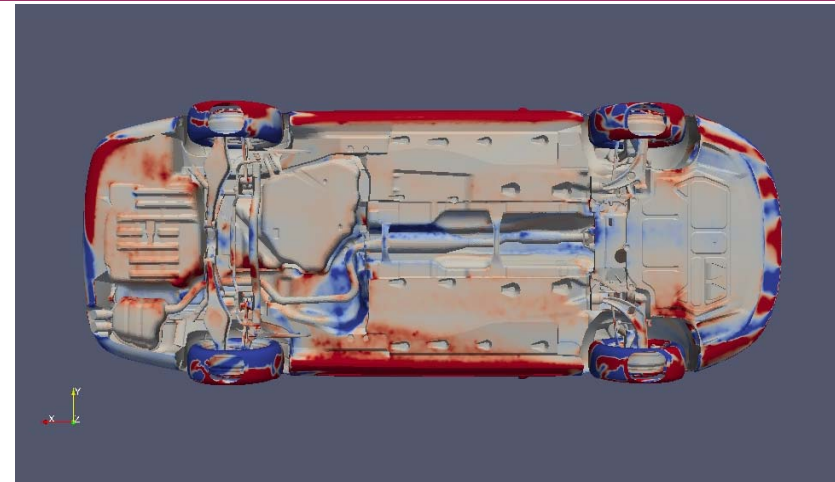
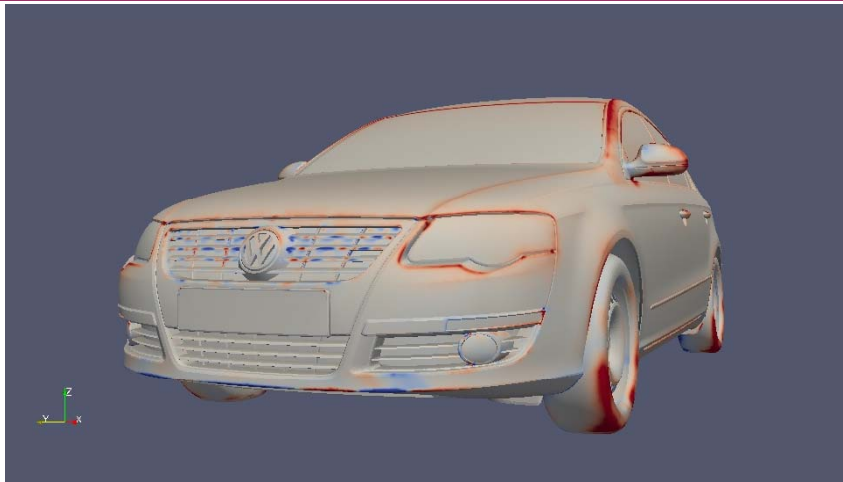
Ένα καλό παράδειγμα Multidisciplinary Optimization!

In collaboration with



HAI

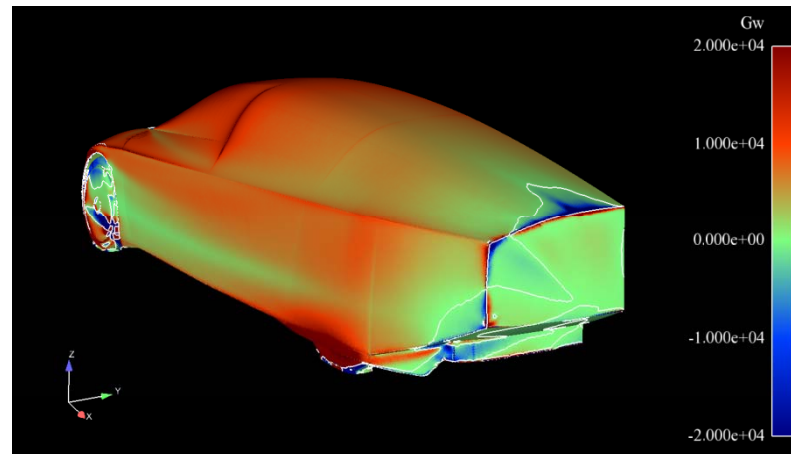
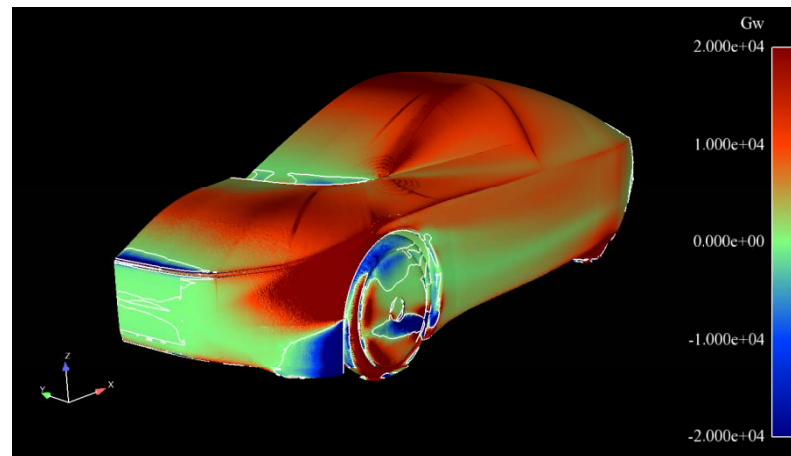
# Π9: Σχεδιασμός μορφής αυτοκινήτων



Ο χάρτης παραγών ευαισθησίας με συνάρτηση κόστους την δύναμη αντίστασης σε πραγματική γεωμετρία αυτοκινήτου (VW Passat B-6)

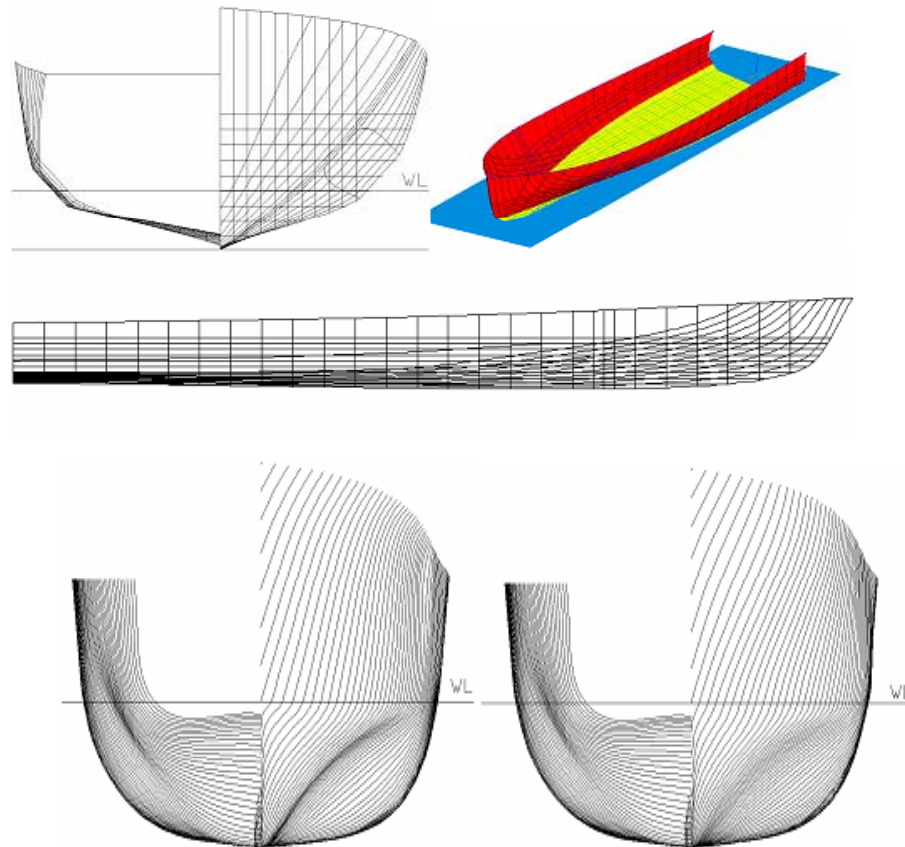
Χρηματοδοτούμενη έρευνα από την Volkswagen στη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του ΕΜΠ (2007-2013)

# Π9: Σχεδιασμός μορφής αυτοκινήτων



Χρηματοδοτούμενη έρευνα από την Volkswagen στη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του ΕΜΠ (2007-2013)

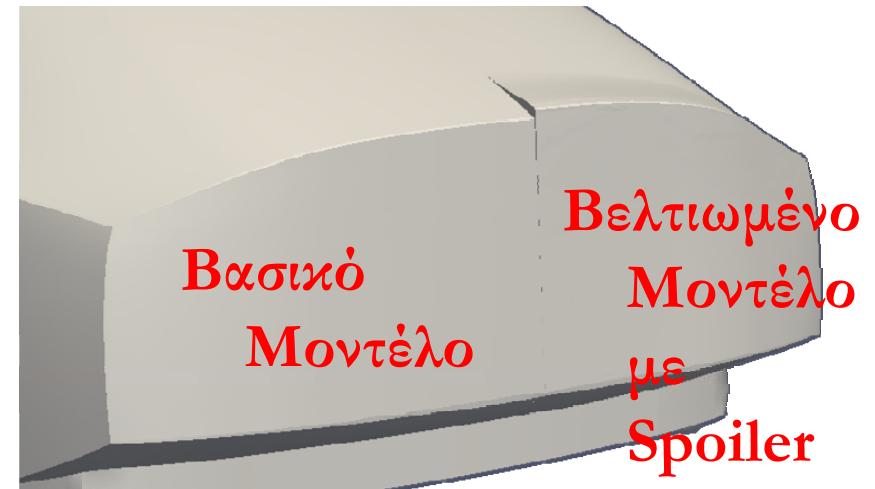
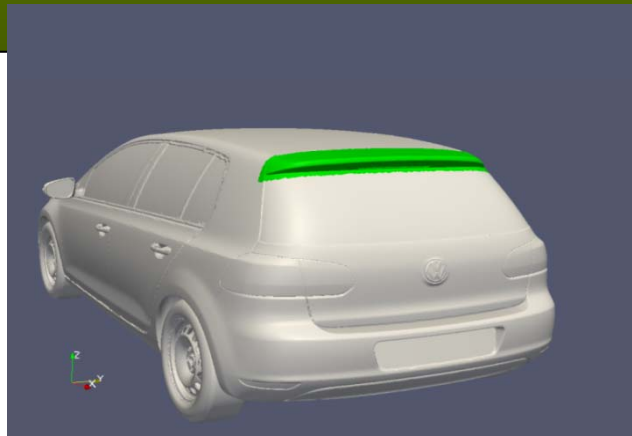
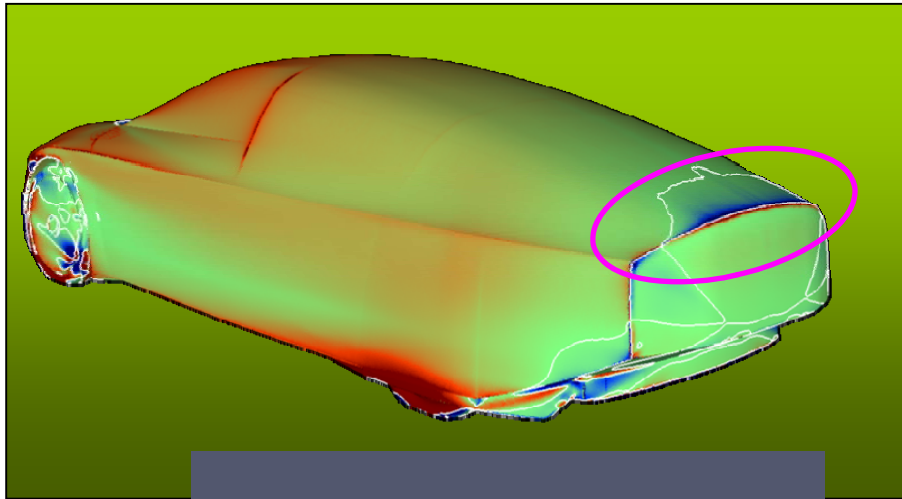
# Π10: Βελτιστοποίηση γάστρας κορβέτας



Εργασία που έγινε στη Σχολή  
Ναυπηγών (Καθ.  
Γρηγορόπουλος) με λογισμικό  
Βελτιστοποίησης τον κώδικα  
EASY της Μονάδα Παράλληλης  
Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης του ΕΜΠ



# Π12: Εφαρμογές Αυτοκινητοβιομηχανίας



Χρηματοδοτούμενη έρευνα από την Volkswagen στη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του ΕΜΠ (2007-2013)