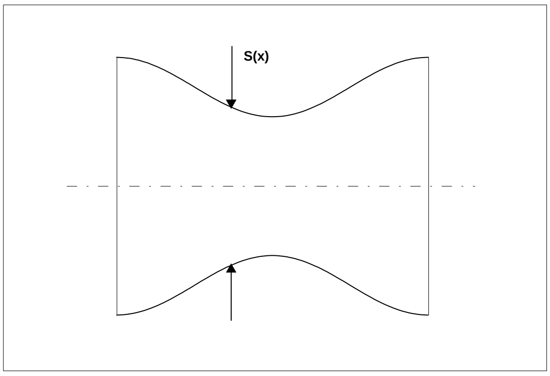
ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ
ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Κ.Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ, Αν. Καθηγητής, Τομέας Ρευστών, Σχολή Μηχανολόγων Ε.Μ.Π.

ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ EULER

Διαφορετικές Γραφές των Εξισώσεων Ροής

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτυχθούν λεπτομερώς οι μονοδιάστατες εξισώσεις ροής μέσα σε έναν αγωγό, όπως αυτός του σχήματος, που έχει διατομή S=S(x), μεταβαλλόμενη με την απόσταση x. Οι εξισώσεις ροής, που εκφράζουν τη διατήρηση της παροχής μάζας, της ορμής και της ενέργειας μέσα στον αγωγό, μπορούν να γραφούν ως εξής:



$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u S)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial(\rho u S)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2+p)S}{\partial x}=p\frac{dS}{dx} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho E S)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u H S)}{\partial x}=0$$

όπου E είναι η ολική ενέργεια ανά μονάδα μάζας και H είναι η ολική ενθαλπία για τις οποίες ισχύει ότι (c είναι η ταχύτητα του ήχου) $E = e + \frac{u^2}{2} = H - \frac{p}{\rho}$

(2)

$$H = h + \frac{1}{2}u^2 = c_p T + \frac{1}{2}u^2 = \gamma c_v T + \frac{1}{2}u^2 = \gamma e + \frac{1}{2}u^2 = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} \qquad (3)$$

$$\rho H = p + E_t \quad , \quad E_t = \rho E \qquad (4)$$

$$e = c_v T = c_v \frac{p}{R_g \rho} = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma(\gamma - 1)} \qquad (5)$$

Μια εναλλακτική γραφή των εξισώσεων (1) μπορεί να προκύψει με την εκτέλεση των παραγωγίσεων και αυτή είναι η

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\rho u}{S}\frac{dS}{dx}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+\rho c^2\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\rho u c^2}{S}\frac{dS}{dx}$$

Συνοψίζοντας τις εξισώσεις (6) σε μια μορφή όπου το διάνυσμα των εξαρτημένων μεταβλητών είναι αυτό των λεγόμενων <u>μη-συντηρητικών</u> μεταβλητών, το οποίο για τη συνέχεια θα συμβολίζεται με

$$V = [\rho \quad u \quad p]^T \tag{7}$$

μπορούμε να γράψουμε σε διανυσματική μορφή τις εξισώσεις ροής ως

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \tilde{A}\frac{\partial V}{\partial x} = \tilde{Q} \tag{8}$$

όπου το δεξιό μέλος της (8) είναι το

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} -\rho u \\ 0 \\ -\rho c^2 u \end{bmatrix} \frac{1}{S}\frac{dS}{dx} \tag{9}$$

ενώ το μητρώο A ορίζεται ως

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 & u \end{vmatrix} \tag{10}$$

Εναλλακτικός τρόπος γραφής της εξίσωσης (8) είναι χρησιμοποιώντας τις λεγόμενες <u>συντηρητικές</u> μεταβλητές του πεδίου ροής. Το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών ορίζεται ως

$$U = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho \\ m \\ E_t \end{vmatrix} \tag{11}$$

Οι εξισώσεις (1) ξαναγράφονται στη συντηρητική μορφή, ως εξής

$$\begin{gathered} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = -\frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\rho u \\ \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = -\frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\rho u^2 \\ \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u H)}{\partial x} = -\frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\rho u H \end{gathered} \tag{12}$$

και να συνοψισθούν στη διανυσματική γραφή

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = Q \tag{13}$$

όπου

$$f = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ \dfrac{m^2}{\rho} + p \\ \dfrac{m}{\rho}(E_t + p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ (\gamma - 1)E_t + \dfrac{m^2}{\rho}\left(\dfrac{3-\gamma}{2}\right) \\ \dfrac{m}{\rho}\left[\gamma E_t - (\gamma - 1)\dfrac{m^2}{2\rho}\right] \end{bmatrix} \tag{14}$$

ενώ το Q περιέχει τα δεξιά μέλη των εξισώσεων (12). Εισάγοντας την Ιακωβιανή ορίζουσα A,

$$A = \frac{\partial f}{\partial U} = \begin{vmatrix} \varnothing & 1 & \varnothing \\ \dfrac{\gamma - 3}{2}u^2 & (3-\gamma)u & (\gamma - 1) \\ -u[\gamma E - (\gamma - 1)u^2] & \gamma E - \dfrac{\gamma - 1}{2}3u^2 & \gamma u \end{vmatrix} \tag{15}$$

η εξίσωση (13) μπορεί να γραφεί, εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσωτής παραγώγισης, ως

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = Q \tag{16}$$

<u>Επεξεργασία της Ιακωβιανής Ορίζουσας A</u>

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της ορίζουσας A, η οποία προκύπτει από την ανάλυση των εξισώσεων ροής με τη χρήση μη-συντηρητικών μεταβλητών. Για την ορίζουσα A, οι ιδιοτιμές προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης

$$\det|\lambda I - \widetilde{A}| = 0 \tag{17}$$

δηλαδή την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} u - \lambda & \rho & 0 \\ 0 & u - \lambda & \dfrac{1}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 & u - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{18}$$

Το υπερβολικό σύστημα των εξισώσεων ροής διαθέτει τρεις πραγματικές ιδιοτιμές και τρία γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Η επίλυση της (18) δίνει τις τρεις πραγματικές ιδιοτιμές που είναι

$$\lambda_1 = u, \lambda_2 = u + c, \lambda_3 = u - c \tag{19}$$

Η εύρεση των αριστερών ιδιοδιανυσμάτων προκύπτει από την παρακάτω εξίσωση

$$\tilde{l}^{(j)}\widetilde{A} = \lambda_{(j)}\tilde{l}^{(j)} \tag{20}$$

όπου ο δείκτης (l) δεν αθροίζεται. Η τελευταία μπορεί να γραφεί αναλυτικότερα και ως

$$(l_1, l_2, l_3)\begin{vmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \rho c^2 & u \end{vmatrix} = \lambda(l_1, l_2, l_3) \tag{21}$$

Τα αριστερά ιδιοδιανύσματα τα οποία προκύπτουν είναι τα εξής

$$\tilde{l}^{(1)} = (\alpha \quad 0 \quad -\frac{\alpha}{c^2}), \quad \tilde{l}^{(2)} = \left(\varnothing \ \beta \ \frac{\beta}{\rho c}\right), \quad \tilde{l}^{(3)} = \left(\varnothing \ \delta \ -\frac{\delta}{\rho c}\right) \tag{22}$$

όπου οι σταθερές α, β και δ ορίζονται κατά βούληση. Μια τυπική "αδιάστατη" έκφραση για τα ιδιοδιανύσματα (22) μπορεί να προκύψει αν α=β=γ=1. Για υποηχητική ροή το σύστημα διαθέτει δύο θετικές ιδιοτιμές (λ_1 και λ_2) και μια αρνητική (λ_3). Για την υπερηχητική ροή υπάρχουν μόνο τρεις θετικές ιδιοτιμές. Η ανάλυση αυτή ισχύει με την υπόθεση ροής που κατευθύνεται προς τα θετικά x και καθορίζει τις οριακές συνθήκες που επιβάλλονται στην είσοδο και έξοδο του πεδίου ροής.

<u>Διαγωνοποίηση της Ιακωβιανής Ορίζουσας Α</u>

Από τη θεωρία πινάκων και σύμφωνα με τον τρόπο με τον οποίο υπολογίστηκαν προηγούμενα οι ιδιοτιμές και τα αριστερά ιδιοδιανύσματα, προκύπτει ότι

$$L^{-1}\tilde{A} = \Lambda L^{-1} \tag{23}$$

ή ακόμα ότι

$$\tilde{A} = L\Lambda L^{-1} \tag{24}$$

όπου ο πίνακας Λ είναι διαγώνιος με στοιχεία τις υπολογισθείσες ιδιοτιμές του πίνακα Α και ο πίνακας L^{-1} περιέχει τα ιδιοδιανύσματα του Α (ένα ιδιοδιάνυσμα ανά σειρά του πίνακα) και είναι

$$\Lambda = \begin{vmatrix} u & \varnothing & \varnothing \\ \varnothing & u+c & \varnothing \\ \varnothing & \varnothing & u-c \end{vmatrix} \qquad L^{-1} = \begin{vmatrix} \alpha & \varnothing & -\frac{\alpha}{c^2} \\ \varnothing & \beta & \frac{\beta}{\rho c} \\ \varnothing & \delta & -\frac{\delta}{\rho c} \end{vmatrix} \tag{25}$$

Εκλέγοντας αυθαίρετα ότι α=β=δ=1, ο πίνακας L^{-1} και ο αντίστροφός του γράφονται

$$L^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & \varnothing & -\frac{1}{c^2} \\ \varnothing & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ \varnothing & 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{vmatrix} \qquad L = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\rho}{2c} & -\frac{\rho}{2c} \\ \varnothing & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \varnothing & \frac{\rho c}{2} & -\frac{\rho c}{2} \end{vmatrix} \tag{26}$$

Τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του Α αποτελούν τις στήλες του πίνακα L ενώ τα αριστερά ιδιοδιανύσματα είναι οι γραμμές του πίνακα L^{-1}.

<u>Μετατροπή Συντηρητικών σε Μη-Συντηρητικές Μεταβλητές</u>

Η μετατροπή από έναν τρόπο γραφής των εξισώσεων ροής με τη χρήση των συντηρητικών μεταβλητών U, σε έναν άλλο τρόπο γραφής με τη χρήση των μη-συντηρητικών μεταβλητών N, διέπεται από την Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού

$$M=\frac{\partial U}{\partial V}=\left|\begin{array}{ccc}\dfrac{\partial(\rho)}{\partial\rho} & \dfrac{\partial(\rho)}{\partial u} & \dfrac{\partial(\rho)}{\partial p}\\ \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial\rho} & \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial u} & \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial p}\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho}\left[\dfrac{p}{\gamma-1}+\dfrac{1}{2}\rho u^2\right] & \dfrac{\partial}{\partial u}\left[\dfrac{p}{\gamma-1}+\dfrac{1}{2}\rho u^2\right] & \dfrac{\partial}{\partial p}\left[\dfrac{p}{\gamma-1}+\dfrac{1}{2}\rho u^2\right]\end{array}\right| \tag{27}$$

και μετά την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων, παίρνει την τελική μορφή

$$\mathrm{M}=\left|\begin{array}{ccc}1 & \varnothing & \varnothing\\ u & \rho & \varnothing\\ \dfrac{1}{2}u^2 & \rho u & \dfrac{1}{\gamma-1}\end{array}\right|\ ,\ \det(\mathrm{M})=\frac{\rho}{\gamma-1} \tag{28}$$

Ξεκινώντας από την εξίσωση ροής, όπως αυτή γράφεται συναρτήσει των συντηρητικών μεταβλητών U, προκύπτει διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned}&\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}=Q\Rightarrow\frac{\partial U}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x}=Q\\ &\Rightarrow M\frac{\partial V}{\partial t}+A\frac{\partial V}{\partial x}=Q\Rightarrow\frac{\partial V}{\partial t}+(\mathrm{M}^{-1}\mathrm{AM})\frac{\partial V}{\partial x}=M^{-1}Q\end{aligned} \tag{29}$$

και τελικά η γραφή των εξισώσεων ροής στη μη-συντηρητική μορφή τους, ως

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\tilde{A}\frac{\partial V}{\partial x}=\tilde{Q} \tag{30}$$

όπου προφανώς ισχύει

$$\begin{aligned}\tilde{A}&=\mathrm{M}^{-1}\mathrm{AM}\\ A&=\mathrm{M}\tilde{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}^{-1}\\ \tilde{Q}&=\mathrm{M}^{-1}Q\end{aligned} \tag{31}$$

Ο ορισμός των μη-συντηρητικών Ιακωβιανών δεν απαιτεί τον απ'ευθείας ορισμό καταστατικών σχέσεων για το ρευστό και κατά συνέπεια είναι περισσότερο γενικός. Επειδή, τέλος, η συντηρητική A και η μη-συντηρητική ορίζουσα A συνδέονται από τους μετασχηματισμούς των δύο πρώτων εξισώσεων της (31), οι δυο ορίζουσες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Αυτό εξάλλου προκύπτει από τη διαγωνοποίηση της ορίζουσας A, όπως φαίνεται στις παρακάτω εξισώσεις

$$\left.\begin{aligned}\tilde{A}&=L\,\Lambda L^{-1}\\ A&=M\,\tilde{A}M^{-1}\end{aligned}\right\}\Rightarrow A=(ML)\Lambda(L^{-1}M^{-1})=P\Lambda P^{-1} \tag{32}$$

δηλαδή, τελικά

$$A=P\Lambda P^{-1}\qquad \begin{aligned}P&=ML\\ P^{-1}&=L^{-1}M^{-1}\end{aligned} \tag{33}$$