

Εργασία για το Σπίτι (2023-24-E2)

ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ (ανά δύο άτομα, αν προτιμάτε - στην περίπτωση αυτή, αξίζει να προσπαθήσετε όντως και το τελευταίο ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΟ ερώτημα):

Υπολογισμός Grad (Συνάρτησης) με διάφορες μεθόδους που διδαχθήκατε

Το Πρόβλημα:

Αερόστατο σφαιρικού σχήματος βρίσκεται σε διαδικασία απογείωσης. Η κατακόρυφη κίνησή του κατά την απογείωση (κατά τον άξονα y) δίνεται από τη συνήθη διαφορική εξίσωση

$$\rho_{\sigma} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) \frac{dv}{dt} = L - B - D,$$

η λύση της οποίας επιτρέπει τον υπολογισμό της ταχύτητας ($v(t)$) του αερόστατου σε κάθε χρονική στιγμή. Οι εμπλεκόμενες δυνάμεις είναι η άνωση, το βάρος και η αντίσταση του αέρα, με μαθηματικές εκφράσεις

$$\begin{aligned} L &= \rho_{\alpha} g \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right), \\ B &= \rho_{\sigma} g \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right), \\ D &= c_D \frac{1}{2} \rho_{\alpha} v^2 (\pi R^2), \end{aligned}$$

όπου ρ_{α} και ρ_{σ} η πυκνότητα του αέρα και του αερόστατου αντίστοιχα με $\rho_{\alpha} > \rho_{\sigma}$, R η ακτίνα του αερόστατου, c_D ο (σταθερός) συντελεστής αντίστασης, v η ταχύτητα του αερόστατου σε κάθε χρονική στιγμή και g ο συντελεστής βαρύτητας.

Στο τέλος των πρώτων 10 sec, το αερόστατο έχει κινητική ενέργεια

$$K = \frac{1}{2} \rho_{\sigma} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) v^2$$

Καλείστε να βρείτε την ευαισθησία της τιμής της συνάρτησης $K(10 \text{ sec})$ ως προς καθεμιά από τις μεταβλητές σχεδιασμού (ρ_{σ}, R, c_D) (είναι τρεις, άρα $N=3$ στη γνωστή μας ορολογία). Δεν σας ζητείται να κάνετε βελτιστοποίηση, μόνο να υπολογίσετε παραγώγους.

Τιμές στις μεταβλητές δίνετε μόνοι σας, δεν θα δοθεί πίνακας! Φροντίστε απλώς να σηκώνεται το αερόστατο.....

Ζητούμενα:

1) Να προγραμματιστεί λογισμικό που θα επιλύει αριθμητικά τη διαφορική εξίσωση του προβλήματος. Ως μέθοδος επίλυσης προτείνεται η μέθοδος Euler ή, ακόμη καλύτερα, η Runge-Kutta (2^{ης} ή 4^{ης} τάξης). Διαλέξτε μόνοι σας χρονικό βήμα, για επαρκή ακρίβεια (κάντε μια διερεύνηση, πριν

ξεκινήσετε). Να δοθούν τιμές στις μεταβλητές και να σχεδιαστεί διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου θεωρώντας ότι στην αρχή των χρόνων, η ταχύτητα είναι μηδενική ($v(t = 0) = 0$). Υπολογίστε και την κινητική ενέργεια K τη χρονική στιγμή $t=10$ sec. Δείξτε τις διερευνήσεις που κάνατε.

2) Να βρεθούν οι παράγωγοι της K (10 sec) ως προς τις N παραμέτρους με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών (FD), τη μέθοδο των μιγαδικών μεταβλητών, τη συνεχή DD και τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Κάντε και παρουσιάστε την πρέπουσα διερεύνηση ως προς το έψιλον (ϵ) που θα χρησιμοποιήσετε στις δύο πρώτες μεθόδους.

3) ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΟ (γιατί ο κώδικάς σας μπορεί να είναι γραμμένος σε γλώσσα που να μην υποστηρίζει το TAPENADE, αν αυτό επιλέξετε). Να υπολογιστούν οι ίδιες παράγωγοι με τη μέθοδο της αυτόματης διαφόρισης (AD), σε forward και reverse mode, παραγωγίζοντας τον κώδικα του πρώτου ερωτήματος.

4) ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΟ Να γίνουν και οι διακριτές εκδοχές των DD και της συνεχούς μεθόδου. Στην περίπτωση αυτή, για να μην ταλαιπωρηθείτε, χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Euler για να λύσετε τη σδε.

Στην έκθεσή σας, σε παράρτημα, επισυνάψτε όλους τους κώδικες που χρησιμοποιήσατε.