



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΔΠΜΣ – ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**NURBS ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ**  
**ΜΟΡΦΗΣ ΠΤΕΡΥΓΑΣ ΑΕΡΟΣΚΑΦΟΥΣ**

**Κυριάκος Χ. Ζώτος**

**Επιβλέπων καθηγητής : Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου**

**Οκτώβριος 2016**



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΔΠΜΣ – ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**NURBS ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ**  
**ΜΟΡΦΗΣ ΠΤΕΡΥΓΑΣ ΑΕΡΟΣΚΑΦΟΥΣ**

**Κυριάκος Χ. Ζώτος**

**Επιβλέπων καθηγητής : Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου**

**Οκτώβριος 2016**

## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον επιβέποντα καθηγητή Δρ. Κυριάκο Γιαννάκογλου για την σωστή καθοδήγηση, την ευρύτερη κατανόηση του θέματος με το οποίο καταπιάστηκα σε αυτή την εργασία και την καλλιέργεια του ερευνητικού πνεύματος σε εμένα.

Επίσης, αξίζει ένα μεγάλο ευχαριστώ στα μέλη της ΜΠΥΡ&Β και ιδιαίτερα στον υποψήφιο διδάκτορα Τσιάκα Κωνσταντίνο για την πολύτιμη βοήθειά του με τους υπολογιστικούς κώδικες του εργαστηρίου.

Τέλος ευχαριστώ την οικογένειά μου για την πολύτιμη στήριξή της σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της μεταπτυχιακής αυτής εργασίας.



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της μεταπτυχιακής αυτής εργασίας είναι η ανάπτυξη υπολογιστικού κώδικα για την παραμετροποίηση της γεωμετρίας πτέρυγας αεροσκάφους με καμπύλες και επιφάνειες B-splines ή NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines), στην ίδια λογική με αυτή που χρησιμοποιείται και αναγνωρίζεται από τα πακέτα σχεδίασης σε υπολογιστές. Το επιθυμητό αποτέλεσμα είναι η παραγόμενη από τον κώδικα γεωμετρία να μπορεί να εισαχθεί σε πακέτο σχεδίασης, από όπου θα δημιουργείται πλέγμα που θα περιγράφει τη γεωμετρία και το πλέγμα αυτό θα μπορεί να μπει σε κύκλο βελτιστοποίησης μέσω της συζυγούς μεθόδου. Το κέρδος σε αυτήν την περίπτωση είναι ότι οι μεταβλητές σχεδιασμού ή βελτιστοποίησης είναι τα σημεία ελέγχου της παραμετροποίησης και όχι οι συντεταγμένες των κόμβων του πλέγματος.

Συγκεκριμένα, στο πρώτο τμήμα της εργασίας δημιουργήθηκε υπολογιστικός κώδικας που δέχεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες αεροτομές (airfoils, γεωμετρία σε κάθετες τομές της πτέρυγας), στα άκρα και εσωτερικά της πτέρυγας, προχωρά στην παρεμβολή καμπύλης NURBS στα σημεία κάθε αεροτομής και, στη συνέχεια, στην παρεμβολή επιφάνειας NURBS, στο σύνολο των καμπυλών που δημιουργήθηκαν, με τη μέθοδο skinning. Τέλος η παραμετροποιημένη επιφάνεια NURBS εξάγεται σε μορφή αρχείου τύπου IGES (Initial Graphics Exchange Specification), η οποία χρησιμοποιείται ευρέως στην ανταλλαγή δεδομένων ανάμεσα σε συστήματα CAD/CAM/CAE.

Στο δεύτερο τμήμα της εργασίας εισήχθη το αρχείο τύπου IGES στο λογισμικό ανοιχτού κώδικα SALOME στο οποίο υλοποιήθηκε η γεωμετρία της πτέρυγας γύρω από την οποία δημιουργήθηκε χωρίο μεγάλης διάστασης στο οποίο λαμβάνει χώρα η ροή. Έπειτα, δημιουργήθηκε πλέγμα στο τριδιάστατο αυτό χωρίο, με τριγωνικά στοιχεία στις επιφάνειες και τετράεδρα στο χώρο.

Στο τρίτο και τελευταίο τμήμα της εργασίας, το πλέγμα που δημιουργήθηκε από το λογισμικό Salome εισήχθη στον κώδικα που βασίζεται στη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο και έχει αναπτυχθεί στην ΜΠΥΡ&Β (Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης) του Τομέα Ρευστών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Στον κώδικα αυτό υπολογίστηκαν οι παράγωγοι ευαισθησίας της

αντικειμενικής συνάρτησης (μεταβολή αεροδυναμικής δύναμης ως προς τις συντεταγμένες των κόμβων του πλέγματος). Στη συνέχεια, με επιπλέον ανάπτυξη κώδικα υπολογίστηκαν οι παραγωγοί ευαισθησίας ως προς τα σημεία ελέγχου της παραμετροποίησης της επιφάνειας. Τέλος, υπολογίστηκαν οι νέες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού με τη μέθοδο της απότομης καθόδου και υλοποιήθηκαν κύκλοι βελτιστοποίησης.

## **Abstract**

The purpose of this MSc thesis is the development of computational code for the parameterization of the geometry of an aircraft wing, with the aid of B-splines or NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) curves and surfaces. This concept is principally of interest to the computer aided design community, where they have become the standard for curve and surface description. The desired outcome of this process is a parameterized geometry, which can be imported in a CAD type open license software, with which the mesh that represents the geometry can be created. The mesh being created then can be embedded in an optimization cycle process, based on adjoint methods. The gain finally attained is that the control points constituting the parameterized geometry are being used as design variables in the optimization cycle instead of the coordinates of the mesh nodes.

Specifically, the first part of this thesis is comprised of the development of computational code which takes as input the Cartesian coordinates delineating the airfoils (geometry in vertical projections along the wing) at the tip, the root and internal wing, proceeds to NURBS curve interpolation along the coordinates of each airfoil and the interpolation of NURBS surfaces along the NURBS curves previously being created, based on skinning method. The last process of the code is the export of the NURBS surfaces in IGES (Initial Graphics Exchange Specification) file format, which is widely used to exchange data among CAD/CAM/CAE systems.

In the second part of this thesis the IGES file format is imported in Salome, an open license software, in which initially the geometry of far field around the imported surfaces is being created. Subsequently, a mesh is being created in this passage, with triangles on surfaces and tetrahedron elements in 3D, to be used to conduct the numerical flow analysis.

In the third and last part of this thesis, optimization of the mesh created in Salome is carried out with the aid of a computational code, developed by PCOpt/LTT based, on the Continuous Adjoint Method. This code utilizes the computation of the sensitivity derivatives of the objective function (variation of the aerodynamic force with

respect to the variation of the mesh nodes coordinates). Subsequently, an additional development of code takes part for the computation of sensitivity derivatives with respect to the variation of the control points constituting the parameterized geometry. Finally, the new variables of the control points are computed utilizing the steepest descent method and the same processes constitutes the following optimization cycle.



# Περιεχόμενα

## Κεφάλαιο 1

<b>Εισαγωγή.....</b>	<b>1</b>
1.1 Κίνητρο και σκοπός.....	1
1.2 Διάρθρωση μεταπτυχιακής εργασίας.....	1

## Κεφάλαιο 2

<b>Θεωρητικό υπόβαθρο.....</b>	<b>3</b>
2.1 Καμπύλη B-spline.....	3
2.1.1 Συναρτήσεις βάσης.....	4
2.1.2 Ιδιότητες συναρτήσεων βάσης.....	8
2.1.3 Ιδιότητες καμπυλών B-spline.....	9
2.2 Καμπύλη NURBS (nonuniform rational B-spline).....	13
2.2.1 Ρητές συναρτήσεις (rational functions) – Ομογενείς συντεταγμένες (homogeneous coordinates).....	14
2.2.2 Από τις B-spline στις NURBS.....	16
2.2.3 Ιδιότητες ρητών συναρτήσεων βάσης.....	17
2.2.4 Ιδιότητες καμπυλών NURBS.....	18
2.3 Επιφάνεια NURBS .....	21
2.3.1 Ιδιότητες διπαραγοντικών ρητών συναρτήσεων βάσης.....	23
2.3.2 Ιδιότητες επιφανειών NURBS.....	25
2.4 Εργαλεία μορφοποίησης καμπυλών και επιφανειών B-spline .....	30
2.4.1 Εισαγωγή κόμβου (Knot insertion).....	30
2.4.2 Βελτίωση του διανύσματος κόμβων (Knot refinement).....	33
2.4.3 Αύξηση του βαθμού των συναρτήσεων βάσης (Degree elevation).....	33
2.4.4 Καθολική παρεμβολή καμπύλης σε σύνολο στοιχείων με καρτεσιανές συντεταγ-	

μένες.....	35
2.4.5 Καθολική παρεμβολή καμπύλης σε σύνολο στοιχείων με καρτεσιανές συντεταγμένες με δεδομένη την παράγωγο στο αρχικό άκρο.....	36
2.4.6 Μέθοδος σχηματισμού επιφανειών με παρεμβολή σε σύνολο καμπυλών (Skinning-Skinned surfaces) .....	37
2.5 Περιγραφή υπολογιστικού κώδικα.....	38
<b>Κεφάλαιο 3</b>	
<b>Γένεση πλέγματος στο λογισμικό Salome.....</b>	<b>42</b>
3.1 Γένεση πλέγματος.....	42
<b>Κεφάλαιο 4</b>	
<b>Κύκλος βελτιστοποίησης με συνεχή συζυγή μέθοδο.....</b>	<b>47</b>
4.1 Συνεχής συζυγής μέθοδος.....	47
4.1.1 Το πρωτεύον σύστημα.....	47
4.1.2 Η μαθηματική διατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου.....	48
4.1.3 Διακριτοποίηση και αριθμητική λύση.....	50
4.2 Υπολογισμός νέων τιμών σημείων ελέγχου.....	52
4.2.1 Αναστροφή σημείων (point inversion).....	52
4.2.2 Υπολογισμός γεωμετρικών παραγώγων.....	54
4.3 Μετακίνηση πλέγματος.....	55
<b>Κεφάλαιο 5</b>	
<b>Αποτελέσματα βελτιστοποίησης.....</b>	<b>56</b>
5.1 Αποτελέσματα.....	56
5.2 Συμπεράσματα.....	62
<b>Βιβλιογραφία.....</b>	<b>63</b>

# 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται εισαγωγικές πληροφορίες σχετικά με το κίνητρο και τον σκοπό της εργασίας και περιγράφονται συνοπτικά το περιεχόμενο των κεφαλαίων.

### 1.1 Κίνητρο και Σκοπός

Πολλές φορές στη βιομηχανία, για τη βελτιστοποίηση της γεωμετρίας ενός αντικειμένου, πρέπει αρχικά να μετασχηματιστεί η τελευταία από τη μορφή που δίνεται από τα πακέτα σχεδίασης σε υπολογιστή σε καρτεσιανές συντεταγμένες, να βρεθούν οι βέλτιστοποιημένες συντεταγμένες και, με τη σειρά τους, να μετατραπούν πίσω σε μορφή που δέχονται τα πακέτα σχεδίασης. Δεν υπάρχει όμως κάτι που να εξασφαλίζει ότι η βέλτιστη γεωμετρία, (σύμφωνα με τα κριτήρια που τίθενται) σε καρτεσιανές συντεταγμένες, θα είναι και η βέλτιστη στη μετασχηματισμένη μορφή. Ο σκοπός λοιπόν της εργασίας αυτής είναι η ανάπτυξη υπολογιστικού κώδικα για την παραμετροποίηση της γεωμετρίας πτέρυγας αεροσκάφους με καμπύλες και επιφάνειες B-splines ή NURBS, οι οποίες χρησιμοποιούνται κατά κύριο λόγο και από τα πακέτα σχεδίασης σε υπολογιστές. Το επιθυμητό είναι να εισαχθούν σε διαδικασία βελτιστοποίησης οι παραμετρικές μεταβλητές ως μεταβλητές σχεδιασμού και όχι οι καρτεσιανές συντεταγμένες.

### 1.2 Διάρθρωση μεταπτυχιακής εργασίας

Ακολουθούν στο υπόλοιπο της εργασίας τέσσερα κεφάλαια, το περιεχόμενο των οποίων δίνεται περιληπτικά σε αυτή την υποενότητα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρατίθεται οι έννοιες και η μαθηματική διατύπωση των καμπυλών και επιφανειών B-splines και NURBS και η χρησιμότητά τους γενικά, αλλά και ειδικά στην εργασία αυτή. Αρχικά περιγράφεται η βασική συνιστώσα της μαθηματικής τους διατύπωσης, οι συναρτήσεις βάσης, και οι ιδιότητές των συναρτήσεων βάσης, από τις οποίες πηγάζουν και οι περιγραφόμενες στη συνέχεια ιδιότητες των καμπυλών και επιφανειών B-splines και NURBS. Επίσης περιγράφονται κάποια σημαντικά εργαλεία μορφοποίησης των προηγούμενων, η μαθηματική τους διατύπωση και οι δυνατότητες και η ευελιξία που παρέχουν στη χρήση. Τέλος περιγράφεται ο υπολογιστικός κώδικας που αναπτύχθηκε για την εργασία και τα βήματα από την εισαγωγή των αρχικών δεδομένων περιγραφής της γεωμετρίας της πτέρυγας αεροσκάφους, έως την εξαγωγή της περιγραφής της με επιφάνειες NURBS σε αρχείο τύπου IGES.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται η εισαγωγή του αρχείου που περιγράφει τη γεωμετρία της πτέρυγας με επιφάνειες NURBS στο υπολογιστικό πακέτο σχεδίασης Salome και γίνεται αναλυτική περιγραφή της δημιουργίας πλέγματος στην συγκεκριμένη γεωμετρία, αλλά και σε αυτή που σχηματίστηκε με τη βοήθεια του Salome και περιγράφει το χώρο έως το επάπειρον όριο γύρω από την πτέρυγα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο περιγράφεται η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος, η οποία υλοποιείται στον κώδικα που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση της ρόης στο πλέγμα που δημιουργήθηκε στο πακέτο σχεδίασης Salome και παρέχει πληροφορία για την αλλαγή της γεωμετρίας της πτέρυγας. Αναφέρεται επίσης ο επιπλέον κώδικας που αναπτύχθηκε για την επεξεργασία της πληροφορίας αυτής και ο τρόπος που μετακινείται το πλέγμα για να περιγράψει τη νέα γεωμετρία. Τονίζεται ότι η διαδικασία αυτή αυτοματοποιήθηκε για να πραγματοποιεί κύκλους βελτιστοποίησης με τα προαναφερθέντα βήματα σε κάθε κύκλο.

Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο παρατίθενται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης και διαγράμματα για την παρατήρησή τους και καταγράφονται τα συμπεράσματα που εξάγονται από την εργασία αυτή.

# 2

## ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Στη μοντελοποίηση της γεωμετρίας αντικειμένων από οποιοδήποτε υπολογιστικά πακέτα σχεδίασης χρησιμοποιούνται κατά κόρον παραμετρικές καμπύλες και επιφάνειες (NURBS, B-splines, Bezier κ.ά.). Προτιμούνται από τις πεπλεγμένες περιγραφές (εξισώσεις που περιγράφουν τη συσχέτιση των συντεταγμένων της γεωμετρίας μεταξύ τους) λόγω των πλεονεκτημάτων που παρουσιάζουν.

Στο κεφάλαιο αυτό αναφέρεται η θεωρία των παραμετρικών καμπυλών και επιφανειών B-splines και της πιο γενικής μορφής, των NURBS, που είναι απαραίτητη για την κατανόηση των βημάτων του κώδικα που αναπτύχθηκε. Περιληπτική περιγραφή των βημάτων αυτών γίνεται στο τέλος του κεφαλαίου με παραπομπή κάθε φορά στην αντίστοιχη θεωρία. Συνοπτικά, μπορεί αρχικά να αναφερθεί ότι δίνονται ως δεδομένα στον κώδικα τα σημεία που περιγράφουν αεροτομές (airfoils) σε διάφορα σημεία κατά μήκος του εκπετάσματος της πτέρυγας και τα επιθυμητά μεγέθη αυτού. Από τα δεδομένα υπολογίζονται οι παραμετρικές καμπύλες που περιγράφουν κάθε αεροτομή και, στη συνέχεια, η παραμετρική επιφάνεια που εμπεριέχει όλες τις υπολογισθείσες καμπύλες.

### 2.1 Καμπύλη B-spline

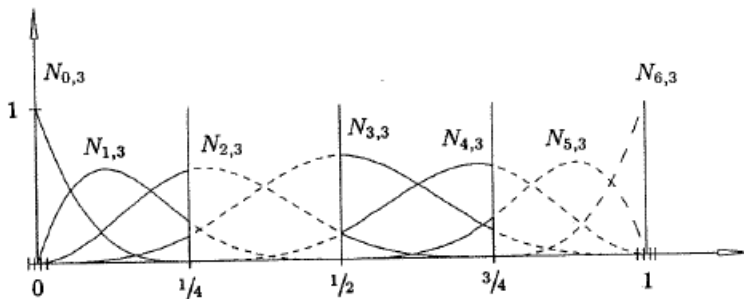
Μία καμπύλη B-spline  $p$ -βαθμού στον 3D χώρο δίνεται από την παρακάτω σχέση [1]:

$$C(u) = (x(u), y(u), z(u)) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i, \quad a \leq u \leq b \quad (2.1)$$

όπου τα  $x(u), y(u)$  και  $z(u)$  είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες της καμπύλης  $C$  ως συνάρτηση της παραμέτρου  $u$ , τα  $P_i(x, y, z)$  είναι τα σημεία ελέγχου (control points) και οι  $N_{i,p}(u)$  είναι οι συναρτήσεις βάσης (basis functions)  $p$ -βαθμού, οι οποίες ορίζονται στο μη-περιοδικό (nonperiodic) και μη-ομοιόμορφο (nonuniform) διάνυσμα κόμβων (knot vector)  $m+1$  κόμβων (knots) [1]

$$U = \underbrace{\{a, \dots, a\}}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{\{b, \dots, b\}}_{p+1} \quad (2.2)$$

Στο σχήμα 2.1 και 2.2 παρατηρείται ότι η καμπύλη  $C$ , που περιγράφει την επιθυμητή γεωμετρία, είναι μια παραμετρική ως προς  $u$  διανυσματική συνάρτηση του γραμμικού συνδυασμού των συναρτήσεων βάσης πολλαπλασιασμένων με τους συντελεστές  $P$ . Από τις ιδιότητες των επιμέρους συντελεστών αυτού του γραμμικού συνδυασμού, πηγάζουν και οι επιθυμητές ιδιότητες των B-spline καμπυλών.



**Σχήμα 2.1:** Κυβικές συναρτήσεις βάσης στο διάνυσμα κόμβων  $U = \{0, 0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1, 1, 1\}$ . Η γραφική παράσταση των συναρτήσεων βάσης εναλλάσσεται από ενιαία σε διακεκομμένη γραμμή ανάμεσα στα διαφορετικά διαστήματα του διανύσματος κόμβων. [1]

### 2.1.1 Συναρτήσεις Βάσης

Στη σχέση (2.2) ορίζεται το διάνυσμα κόμβων ως μία μη-μειούμενη ακολουθία πραγματικών αριθμών ως εξής [1]:

$$u_i \leq u_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m-1$$

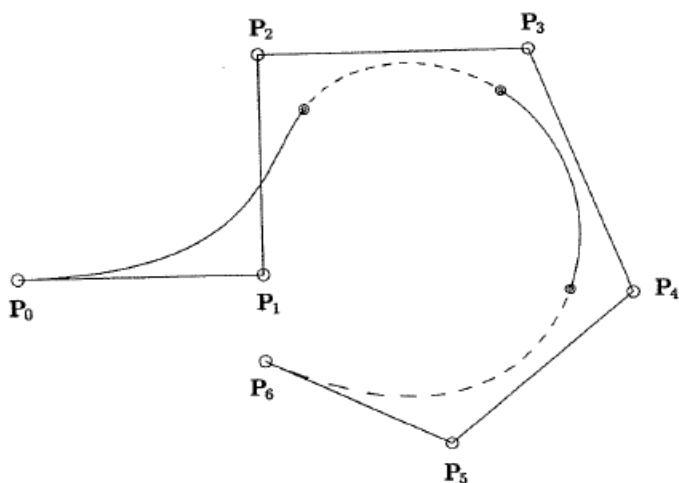
Συνήθως λαμβάνεται  $a=0$  και  $b=1$ , χωρίς αυτό να ισχύει πάντα. Στις περιπτώσεις που δεν ισχύει, το διάστημα  $[a,b]$  μπορεί και πάλι να κανονικοποιηθεί στη μονάδα με τη σχέση

$$u_i = \frac{u_i - a}{b - a}, \quad i=0, \dots, m$$

Συνεπώς, το διάνυσμα κόμβων  $\{0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1\}$  είναι ταυτόσημο με το διάνυσμα

$\{2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$  .

Επίσης υπάρχουν διάφοροι τύποι διανυσμάτων κόμβων, αλλά στην εργασία αυτή χρησιμοποιούνται τα μη-περιοδικά, για τα οποία ισχύει, όπως φαίνεται και στη σχέση (2.2), ότι οι πρώτοι  $p+1$  κόμβοι έχουν την ίδια τιμή και το ίδιο ισχύει και για τους  $p+1$  τελευταίους. Εναλλακτικά αναφέρεται ότι η πρώτη και η τελευταία τιμή έχουν  $p+1$  πολλαπλότητα. Τέλος με τον χαρακτηρισμό μη-ομοιόμορφο περιγράφεται η ιδιότητα οι εσωτερικοί κόμβοι να μην ισαπέχουν πάντοτε και να επιτρέπεται δύο διαδοχικοί από αυτούς να έχουν την ίδια τιμή.



**Σχήμα 2.2:** Κυβική B-spline καμπύλη που χρησιμοποιεί τις συναρτήσεις βάσης που παρουσιάζονται στο σχήμα 2.1. Η γραφική παράσταση της καμπύλης εναλλάσσεται σε ενιαία και διακεκομμένη γραμμή ανάλογα με το διάστημα του διανύσματος κόμβων στο οποίο αντιστοιχεί. [1]

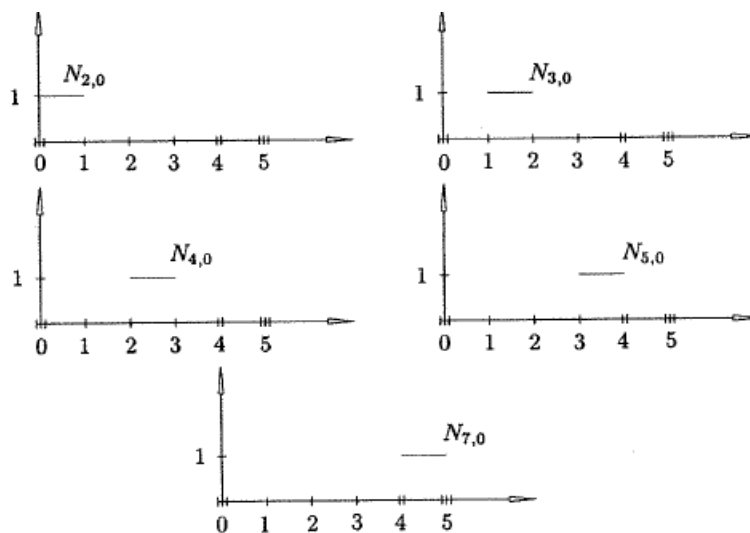
Με τη βοήθεια του διανύσματος κόμβων ορίζονται και οι B-spline συναρτήσεις βάσης  $p$ -βαθμού ( $p+1$  τάξης) ως εξής [1]:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{αν } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.3)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

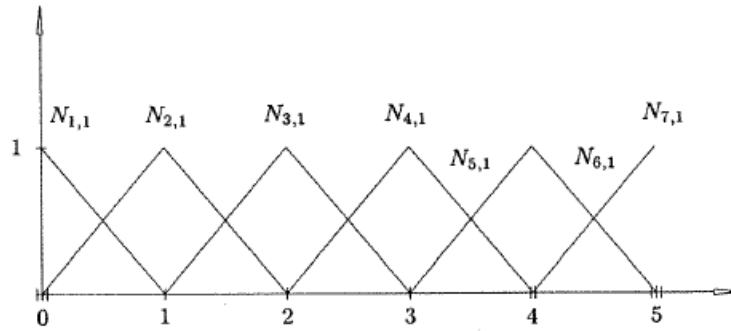
Από τον ορισμό αυτό σημειώνονται τα παρακάτω [1]:

- i. Τα  $N_{i,0}(u)$  (σχήμα 2.3a) είναι κλιμακωτές συναρτήσεις και ισούνται με το 0 παντού εκτός από το ημιανοιχτό διάστημα  $u \in [u_i, u_{i+1})$ .
- ii. Για  $p > 0$ , τα  $N_{i,p}(u)$  (σχήματα 2.3b και 2.3c) είναι γραμμικός συνδυασμός δύο  $(p-1)$  βαθμού συναρτήσεων βάσης.
- iii. Ο υπολογισμός ενός συνόλου συναρτήσεων βάσης απαιτεί τον προσδιορισμό ενός διανύσματος κόμβων και του βαθμού  $p$ .
- iv. Η εξίσωση (2.3) μπορεί να οδηγήσει στο πηλίκο  $\frac{0}{0}$ , το οποίο ορίζεται ίσο με 0.

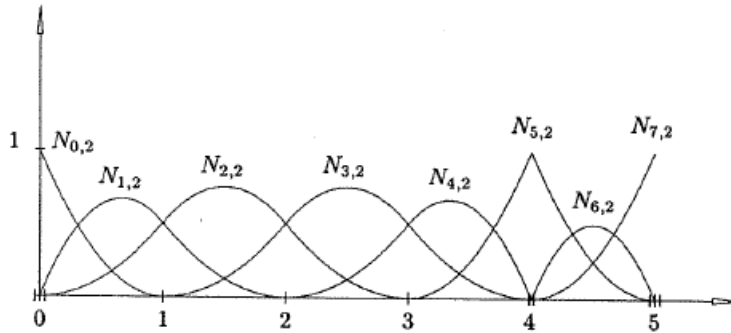




(a)



(b)



(c)

**Σχήμα 2.3:** Παράδειγμα συναρτήσεων βάσης στο διάνυσμα κόμβων  $U=\{0,0,0,1,2,3,4,4,$

$5,5,5\}$  (a) Μηδενικού βαθμού, (b) Πρώτου βαθμού και (c) Δευτέρου βαθμού. [1]

- v. Τα  $N_{i,p}(u)$  είναι τμηματικά πολυώνυμα που ορίζονται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών  $u$ , αλλά γενικά το διάστημα που μας ενδιαφέρει είναι το  $[u_0, u_m]$ .
- vi. Το ημιανοιχτό διάστημα  $[u_i, u_{i+1})$  καλείται  $i$ -οστό διάστημα κόμβων (knot span) και μπορεί να έχει μηδενικό μήκος, καθώς επιτρέπεται δύο διαφορετικοί κόμβοι να έχουν την ίδια τιμή.

### 2.1.2 Ιδιότητες συναρτήσεων βάσης

Παρακάτω προσδιορίζονται οι σημαντικές ιδιότητες των συναρτήσεων βάσης  $p$ -βαθμού και διανύσματος κόμβων  $U=\{u_0, \dots, u_m\}$  [1]:

**Iδ 2.1.2.1**  $N_{i,p}(u)=0$  αν το  $u$  βρίσκεται εκτός του διαστήματος  $[u_i, u_{i+p+1})$ . Αυτή η ιδιότητα δείχνει τον τοπικό χαρακτήρα των συναρτήσεων βάσης.

**Iδ 2.1.2.2**  $N_{i,p}(u) \geq 0$  για όλα τα  $i, p$  και  $u$  (οι συναρτήσεις βάσης δεν έχουν αρνητικές τιμές).

**Iδ 2.1.2.3** Για ένα αυθαίρετο διάστημα κόμβων  $[u_i, u_{i+1})$ ,  $\sum_{j=i-p}^i N_{j,p}(u) = 1$  για όλα τα  $u \in [u_i, u_{i+1})$  (ιδιότητα του διαμερισμού της μονάδας).

**Iδ 2.1.2.4** Σε κάθε δοθέν διάστημα κόμβων  $[u_i, u_{i+1})$ , το πολύ  $p+1$  από τα  $N_{i,p}$  είναι μη μηδενικά. Συγκεκριμένα τα  $N_{i-p,p}, \dots, N_{i,p}$ . Για παράδειγμα, στο διάστημα  $[u_3, u_4)$  οι κυβικές συναρτήσεις που είναι μη μηδενικές είναι οι  $N_{0,3}, \dots, N_{3,3}$ .

**Iδ 2.1.2.5** Όλες οι παράγωγοι των  $N_{i,p}(u)$  υπάρχουν στο εσωτερικό ενός διαστήματος κόμβων. Στους κόμβους όμως οι  $N_{i,p}(u)$  είναι  $p-k$  φορές συνεχώς παραγωγίσιμες, όπου  $k$  είναι η πολλαπλότητα του κόμβου (δηλαδή πόσοι κόμβοι έχουν την ίδια τιμή). Η πολλαπλότητα του κάθε κόμβου όμως εντοπίζεται ξεχωριστά για κάθε συνάρτηση βάσης και μόνο για τους κόμβους που βρίσκονται στο διάστημα που αυτή είναι μη-μηδενική.

**Iδ 2.1.2.6** Εκτός από την περίπτωση όπου  $p=0$ , τα  $N_{i,p}(u)$  έχουν μόνο μία μέγιστη τιμή για κάποιο  $u_0$ .

**Iδ 2.1.2.7** Για  $m+1$  κόμβους υπάρχουν  $n+1$  συναρτήσεις βάσης, όπου  $n=m-p-1$ . Επίσης ισχύει ότι  $N_{i,p}(u_0)=0$  για  $i \neq 0$  και  $N_{i,p}(u_m)$  για  $i \neq n$ .

### 2.1.3 Ιδιότητες καμπυλών B-spline

Από τις ιδιότητες των συναρτήσεων βάσης που περιγράφηκαν στην προηγούμενη υποενότητα πηγάζουν οι παρακάτω ιδιότητες των καμπυλών B-spline.

**Ιδ 2.1.3.1** Αν  $n=p$  και  $U=\{0,\dots,0,1,\dots,1\}$ , τότε η  $C(u)$  είναι μία καμπύλη Bezier. Οι καμπύλες Bezier αποτελούν εκφυλισμένη περίπτωση των B-spline κι έχουν την ιδιαιτερότητα όλες οι συναρτήσεις βάσης να είναι μη-μηδενικές εντός του διαστήματος  $[0,1]$  του διανύσματος κόμβων. Όπως φαίνεται στα σχήματα 2.4 και 2.5, αυτό σημαίνει ότι στο σχηματισμό κάθε σημείου της καμπύλης συνεισφέρουν όλα τα σημεία ελέγχου  $P_i$ .

**Ιδ 2.1.3.2** Η  $C(u)$  είναι μία τμηματική πολυωνυμική καμπύλη (εφόσον τα  $N_{i,p}(u)$  είναι τμηματικά πολυώνυμα). Ο βαθμός  $p$ , ο αριθμός των σημείων ελέγχου,  $n+1$ , και ο αριθμός των κόμβων συνδέονται με τη σχέση

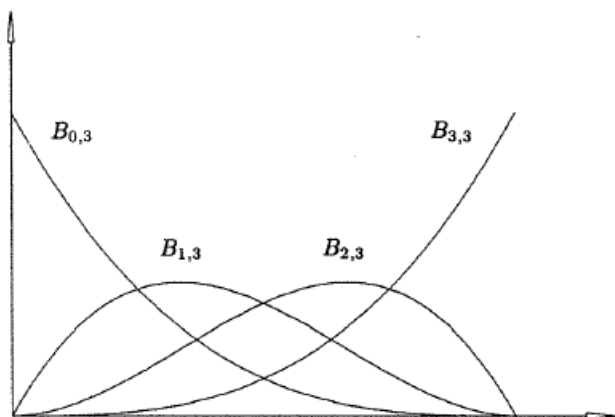
$$m=n+p+1 .$$

**Ιδ 2.1.3.3** Το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου συμπίπτει με την αρχή και το τέλος της καμπύλης αντίστοιχα.  $C(0)=P_0$  και  $C(1)=P_n$ .

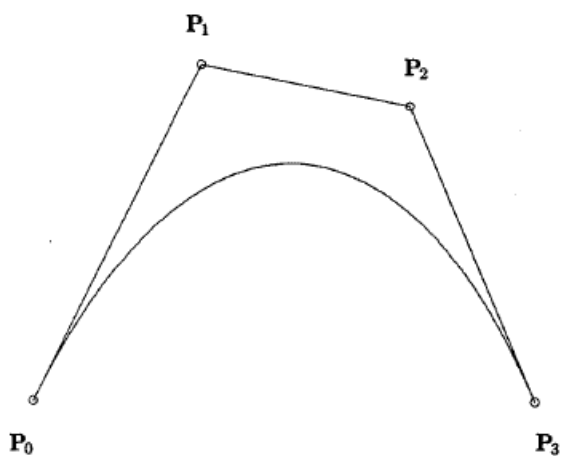
**Ιδ 2.1.3.4** Οποιοσδήποτε μετασχηματισμός στη γεωμετρία της καμπύλης γίνεται ματακινώντας μόνο τις θέσεις των σημείων ελέγχου.

**Ιδ 2.1.3.5** Η καμπύλη εμπεριέχεται εντός της επιφάνειας του πολυγώνου ελέγχου (control polygon) που σχηματίζουν τα σημεία ελέγχου  $P_i$  (σχήματα 2.6 και 2.7). Συγκεκριμένα για  $u \in [u_i, u_{i+1})$  η καμπύλη  $C(u)$  εμπεριέχεται εντός της επιφάνειας που σχηματίζουν τα  $P_{i-p}, \dots, P_i$ . Ειδικά στο σχήμα 2.7 παρατηρείται το πόσο ισχυρή είναι αυτή η ιδιότητα, καθώς για τα συνευθειακά σημεία ελέγχου  $P_2, P_3$  και  $P_4$  το τμήμα της καμπύλης, που σχηματίζεται αποκλειστικά από αυτά, συμπίπτει με την ευθεία που τα ενώνει.

**Ιδ 2.1.3.6** Τοπικό σχήμα διαμόρφωσης (σχήμα 2.8): μετακινώντας τα  $P_i$  αλλάζει η καμπύλη  $C(u)$  μόνο στο διάστημα  $[u_i, u_{i+p+1})$ , το οποίο συμβαίνει γιατί τα  $N_{i,p}(u) = 0$  για  $u \notin [u_i, u_{i+p+1})$  (Ιδιότητα ιδ 2.1.2.1).



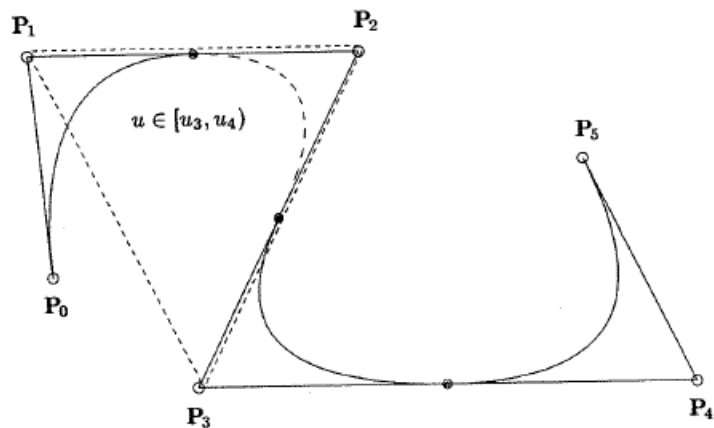
**Σχήμα 2.4:** Κυβικές συναρτήσεις βάσης στο διάνυσμα κόμβων  $U=\{0,0,0,0,1,1,1,1\}$  [1]



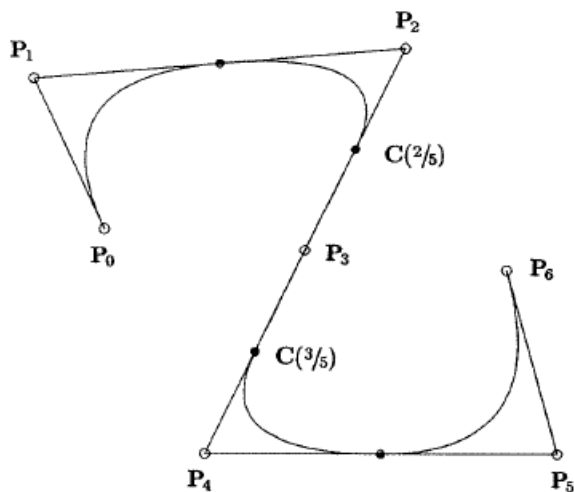
**Σχήμα 2.5:** Κυβική καμπύλη Bezier που αντιστοιχεί στις συναρτήσεις βάσης του σχήματος 2.1. [1]

**Ιδ 2.1.3.7** Το πολύγωνο ελέγχου αποτελεί μία τμηματική γραμμική προσέγγιση της καμπύλης, η οποία βελτιώνεται με εισαγωγή νέου κόμβου (knot insertion) ή με αύξηση του βαθμού των συναρτήσεων βάσης (degree elevation) (βλ. υποενότητες 2.4.1 και 2.4.3). Γενικά, όσο πιο μικρός είναι ο βαθμός των συναρτήσεων βάσης, τόσο πιο κοντά ακολουθεί το πολύγωνο ελέγχου η καμπύλη B-spline (σχήμα 2.9).

Αυτό συμβαίνει γιατί όσο μικρότερος είναι ο βαθμός, τόσο λιγότερα σημεία ελεγχου συμμετέχουν στον προσδιορισμό ενός σημείου  $C(u_0)$  της καμπύλης για δοθέν  $u_0$ . Ακραία περίπτωση αποτελεί η περίπτωση  $p=1$ , στην οποία κάθε σημείο  $C(u_0)$  είναι γραμμική παρεμβολή ανάμεσα σε δύο σημεία ελέγχου. Τότε η καμπύλη είναι το πολύγωνο ελέγχου.

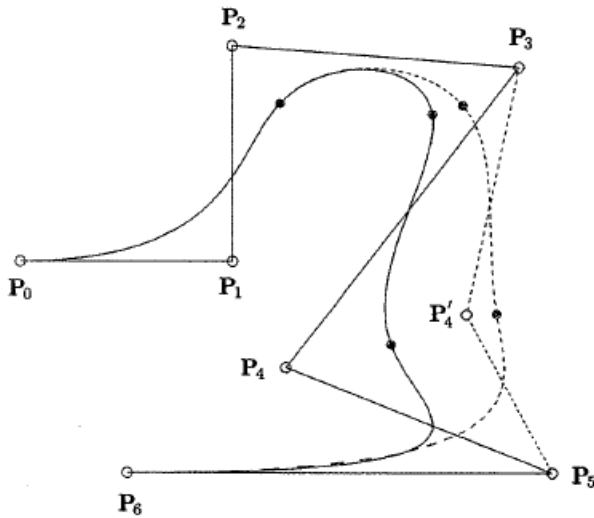


**Σχήμα 2.6:** Παρατηρείται η ιδιότητα Ιδ2.1.3.5 για το διάστημα  $u \in [u_3, u_4)$ , όπου η καμπύλη εμπεριέχεται στο τρίγωνο που σχηματίζουν τα σημεία  $P_1, P_2$  και  $P_3$ . [1]

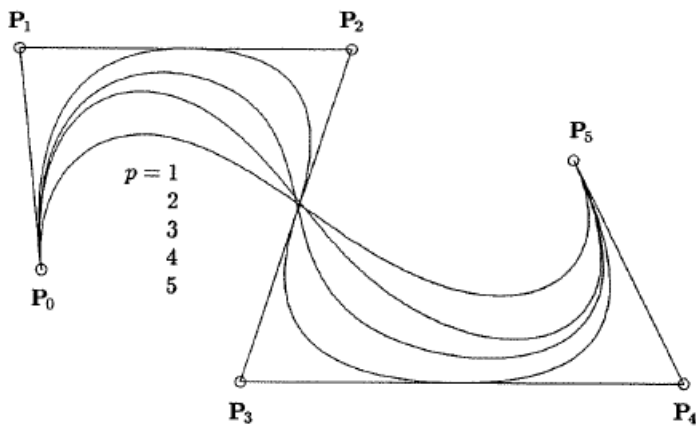


**Σχήμα 2.7:** Παρατηρείται η ιδιότητα Ιδ2.1.3.5 σε τετραγωνική B-spline καμπύλη στο  $U=\{0,0,0,1/5,2/5,3/5,4/5,1,1,1\}$ . Η καμπύλη είναι μία ευθεία γραμμή ανάμεσα στα  $C(2/5)$  και  $C(3/5)$ . [1]

**1δ 2.1.3.8** Διασχίζοντας το μήκος της καμπύλης από το  $u=0$  στο  $u=1$ , κάθε φορά που το  $u$  περνά έναν κόμβο, μηδενίζεται μία  $N_{i,p}(u)$  συνάρτηση (κατά συνέπεια και η συνεισφορά του αντίστοιχου σημείου ελέγχου  $P_i$ ) και απόκτα τιμή μία άλλη  $N_{i,p}(u)$ .



**Σχήμα 2.8:** Μία κυβική καμπύλη στο  $U=\{0,0,0,0,1/4,1/2,3/4,1,1,1,1\}$ . Μετακινώντας το  $P_4$  στο  $P'_4$  επηρεάζεται και αλλάζει η καμπύλη στο διάστημα  $[1/4,1)$ . [1]



**Σχήμα 2.9:** B-spline καμπύλες διαφορετικών βαθμών που χρησιμοποιούν το ίδιο πολύγωνο ελέγχου. [1]

**Ιδ 2.1.3.9** Κανένα επίπεδο δεν τέμνει την καμπύλη σε περισσότερα σημεία από αυτά που τέμνει το πολύγωνο ελέγχου (αντικαθίσταται η λέξη επίπεδο με τη λέξη γραμμή για 2Δ καμπύλη). Αυτή η ιδιότητα επιτρέπει μία διαισθητική πρόβλεψη των αλλαγών κατεύθυνσης της καμπύλης, οι οποίες δεν πρόκειται να είναι περισσότερες από αυτές που παρατηρούνται στο πολύγωνο ελέγχου.

**Ιδ 2.1.3.10** Η συνέχεια και η διαφορισιμότητα της  $C(u)$  καμπύλης ακολουθεί αυτή των συναρτήσεων βάσης  $N_{i,p}(u)$  (βλ. Ιδ 2.1.2.5, καθώς η  $C(u)$  είναι γραμμικός συνδυασμός των  $N_{i,p}(u)$ ). Έτσι η  $C(u)$  είναι απείρως διαφορίσιμη στο εσωτερικό των διαστημάτων των κόμβων και τουλάχιστον  $p-k$  φορές συνεχώς διαφορίσιμη σε έναν κόμβο πολλαπλότητας  $k$ . Το τουλάχιστον χρησιμοποιείται γιατί μπορεί να αυξηθεί ο αριθμός που είναι συνεχώς διαφορίσιμη η καμπύλη σε έναν κόμβο, τοποθετώντας σε συγκεκριμένες θέσεις τα σημεία ελέγχου.

**Ιδ 2.1.3.11** Είναι πιθανό (και μερικές φορές χρήσιμο) να χρησιμοποιούνται πολλαπλά συμπίπτοντα σημεία ελέγχου  $P_i$ . Σε αυτήν την περίπτωση, στο σημείο όπου συμπίπτουν δύο σημεία ελέγχου μπορεί να παρατηρηθεί μία αιχμή (οπτική ασυνέχεια), παρόλο που η καμπύλη εκεί μπορεί να είναι  $C^1$  συνεχής.

## 2.2 Καμπύλη NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines)

Μία καμπύλη Nurbs (μη-ομοιόμορφη ρητή B-spline)  $p$ -βαθμού δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$C(u) = (x(u), y(u), z(u)) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i}, \quad a \leq u \leq b \quad (2.4a)$$

ή αλλιώς

$$C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) P_i, \quad \text{όπου} \quad R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u) w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u) w_j} \quad \text{και} \quad a \leq u \leq b \quad (2.4\beta)$$

Με τις συναρτήσεις βάσης και πάλι ορισμένες, όπως και στις B-spline καμπύλες, στο διάστημα κόμβων  $U = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\}$ .

Η διαφορά με τις B-splines προκύπτει από τα βαθμωτά βάρη (weights)  $w_i$  (όπου  $w_i > 0$ ). Παρακάτω επιχειρείται η αποσαφήνιση πρώτα του όρου “ρητή” και, στη συνέχεια, ο τρόπος μετάβασης από τις B-spline στις NURBS.

### 2.2.1 Ρητές συναρτήσεις (rational functions) – Ομογενείς συντεταγμένες (homogeneous coordinates)

Οι απλές πολυωνυμικές καμπύλες αδυνατούν να περιγράψουν με ακρίβεια κωνικές καμπύλες συμπεριλαμβανομένου και του κύκλου. Για την αναπαράσταση των τελευταίων γίνεται χρήση ρητών συναρτήσεων, οι οποίες ορίζονται ως το πηλίκο δύο πολυωνύμων. Συγκεκριμένα έχουν τη μορφή

$$x(u) = \frac{X(u)}{W(u)}, \quad y(u) = \frac{Y(u)}{W(u)} \quad \text{και} \quad z(u) = \frac{Z(u)}{W(u)} \quad (2.5)$$

όπου τα  $X(u), Y(u), Z(u)$  και  $W(u)$  είναι πολυώνυμα και κάθε συνάρτηση συντεταγμένων έχει τον ίδιο παρονομαστή.

Οι ρητές συναρτήσεις με την παραπάνω μορφή των συναρτήσεων συντεταγμένων μπορούν να οδηγήσουν σε αποτελεσματικές διαδικασίες και σε συμπαγή αποθήκευση δεδομένων. Για την επίτευξη αυτού του σκοπού γίνεται χρήση των ομογενών συντεταγμένων για την αναπαράσταση ρητών καμπυλών στον  $n$ -διάστατο

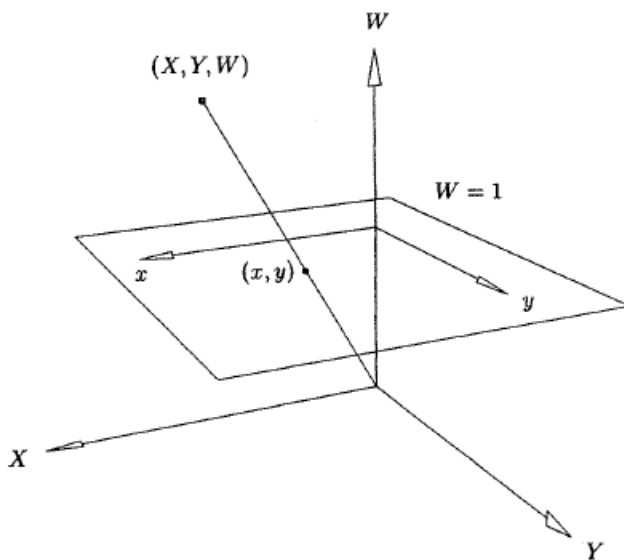


χώρο ως πολυωνυμική καμπύλη στον  $(n+1)$ -διάστατο χώρο. Αρχικά θεωρείται ένα σημείο στον 3Δ Ευκλείδειο χώρο,  $P=(x,y,z)$ . Τότε, το  $P$  γράφεται ως  $P^w=(wx,wy,wz,w)=(X,Y,Z,W)$  στον τετραδιάστατο χώρο, με  $w \neq 0$ . Για να ληφθεί το  $P$  από το  $P^w$ , διαιρούνται όλες οι συντεταγμένες του τελευταίου με την τέταρτη συντεταγμένη,  $W$ , δηλαδή με αντιστοίχιση του  $P^w$  από την αρχή των αξόνων συντεταγμένων στο υπερεπίπεδο  $W=1$  (σχήμα 2.10). Αυτή η αντιστοίχιση, η οποία υποδηλώνεται με το  $H$ , είναι μία προοπτική απεικόνιση με κέντρο την αρχή των αξόνων συντεταγμένων

$$P = H\{P^w\} = H\{(X, Y, Z, W)\} = \begin{cases} \left(\frac{X}{W}, \frac{Y}{W}, \frac{Z}{W}\right) & \text{αν } W \neq 0 \\ \text{κατεύθυνση } (X, Y, Z) & \text{αν } W=0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Παρατηρείται ότι για αυθαίρετα  $x, y, z, w_1, w_2$ , όπου  $w_1 \neq w_2$

$$H\{P^{w_1}\} = H\{(w_1x, w_1y, w_1z, w_1)\} = (x, y, z) = H\{(w_2x, w_2y, w_2z, w_2)\} = H\{P^{w_2}\}$$



**Σχήμα 2.10:** Αναπαράσταση Ευκλείδειων σημείων σε ομογενή μορφή για τη διδιάστατη περίπτωση  $P(x,y)$

### 2.2.2 Από τις B-spline στις NURBS

Για ένα σύνολο σημείων ελέγχου,  $\{P_i\}$ , και βαρών  $\{w_i\}$ , κατασκευάζονται τα σταθμισμένα σημεία ελέγχου,  $P_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$ . Τότε ορίζεται η μη-ρητή (πολυωνυμική) B-spline καμπύλη στον τετραδιάστατο χώρο, μέσω της σχέσης (2.1)

για τα σημεία ελέγχου  $P_i^w$ , ως εξής:  $C^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i^w$ . Εφαρμόζοντας την

προοπτική απεικόνιση,  $H$ , στο  $C^w(u)$  (σχήμα 2.11) προκύπτει η ρητή B-spline (όπου σε συνδυασμό με μη-ομοιόμορφο διάνυσμα κόμβων είναι η NURBS καμπύλη). Συγκεκριμένα, γράφοντας τις συναρτήσεις συντεταγμένων της σχέσης (2.6), προκύπτουν:

$$\begin{aligned} X(u) &= \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i x_i, & Y(u) &= \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i y_i, \\ Z(u) &= \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i z_i, & W(u) &= \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i, \end{aligned}$$

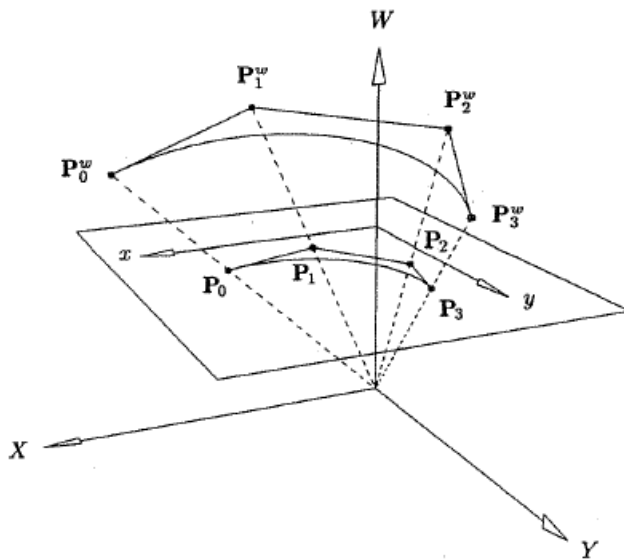
Βρίσκοντας στη συνέχεια τις συντεταγμένες στον 3Δ χώρο προκύπτουν τα:

$$\begin{aligned} x(u) &= \frac{X(u)}{W(u)} = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i x_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} \\ y(u) &= \frac{Y(u)}{W(u)} = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i y_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} \\ z(u) &= \frac{Z(u)}{W(u)} = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i z_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} \end{aligned}$$

Τέλος χρησιμοποιώντας διανυσματική γραφή προκύπτει :

$$C(u) = (x(u), y(u), z(u)) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i (x_i, y_i, z_i)}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i}$$

όπου είναι και η σχέση (2.4α) που δίνει τις καμπύλες NURBS.



**Σχήμα 2.11:** Γεωμετρική κατασκευή της καμπύλης NURBS στον 2Δ χώρο από μία καμπύλη B-spline στον 3Δ [1].

### 2.2.3 Ιδιότητες ρητών συναρτήσεων βάσης

Ακολουθούν, σε συντομία, οι ιδιότητες των  $R_{i,p}(u)$  ρητών συναρτήσεων βάσης, οι οποίες προκύπτουν από τη σχέση (2.4) και τις αντίστοιχες ιδιότητες των  $N_{i,p}(u)$  συναρτήσεων βάσης που αναφέρθηκαν στο υποκεφάλαιο 2.1.2:

**Ιδ 2.2.3.1** Μη-αρνητικές τιμές:  $R_{i,p}(u) \geq 0$  για όλα τα  $i, p$  και  $u \in [0, 1]$ .

**Ιδ 2.2.3.2** Διαμερισμός της μονάδας :  $\sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) = 1$  για όλα τα  $u \in [0, 1]$ .

**Ιδ 2.2.3.3**  $R_{0,p}(0) = R_{n,p}(1) = 1$ .

**Ιδ 2.2.3.4** Για  $p > 0$ , όλα τα  $R_{i,p}(u)$  έχουν ακριβώς μία μέγιστη τιμή στο διάστημα  $u \in [0,1]$ .

**Ιδ 2.2.3.5** Τοπικό πεδίο ορισμού:  $R_{i,p}(u) = 0$  για  $u \notin [u_i, u_{i+p+1})$ . Επιπλέον, σε κάθε διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς κόμβους (διάστημα νοείται και αυτό ανάμεσα σε κόμβους με την ίδια τιμή), το πολύ  $p+1$  από τα  $R_{i,p}(u)$  είναι μη μηδενικά (γενικά ισχύει ότι τα  $R_{i-p,p}(u), \dots, R_{i,p}(u)$  είναι μη μηδενικά στο  $[u_i, u_{i+1})$ ).

**Ιδ 2.2.3.6** Όλες οι παράγωγοι των  $R_{i,p}(u)$  υπάρχουν στο εσωτερικό ενός διαστήματος κόμβων, όπου αυτές είναι ρητές συναρτήσεις με μη-μηδενικό παρονομαστή. Σε έναν κόμβο, οι  $R_{i,p}(u)$  είναι  $p-k$  φορές συνεχώς διαφορίσιμη, όπου  $k$  είναι η πολλαπλότητα του κόμβου.

**Ιδ 2.2.3.7** Αν  $w_i = 1$  για όλα τα  $i$ , τότε  $R_{i,p}(u) = N_{i,p}(u)$  για όλα τα  $i$ , δηλαδή οι B-spline είναι ειδική περίπτωση των NURBS. Γενικά για κάθε  $a \neq 0$ , αν  $w_i = a$  για όλα τα  $i$ , τότε  $R_{i,p}(u) = N_{i,p}(u)$  για όλα τα  $i$ .

#### 2.2.4 Ιδιότητες καμπυλών NURBS

Οι ιδιότητες των ρητών συναρτήσεων βάσης οδηγούν στα σημαντικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά των καμπυλών NURBS που αποτυπώνονται στις παρακάτω ιδιότητες:

**Ιδ 2.2.4.1**  $C(0) = P_0$  και  $C(1) = P_n$ , το οποίο προκύπτει από την ιδιότητα Ιδ 2.2.3.3.

**Ιδ 2.2.4.2** Οποιοσδήποτε μετασχηματισμός (μεταφορά, παραμόρφωση, περιστροφή κτλ.) εφαρμόζεται στην καμπύλη μέσω της εφαρμογής του στα σημεία ελέγχου. Επίσης οι καμπύλες NURBS είναι αμετάβλητες και κάτω από οποιαδήποτε προοπτική προβολή, γεγονός πολύ σημαντικό στα γραφικά υπολογιστών.

**Ιδ 2.2.4.3** Αν  $u \in [u_i, u_{i+1})$ , τότε η  $C(u)$  βρίσκεται εντός του κυρτού κελύφους που σχηματίζουν τα σημεία ελέγχου  $P_{i-p}, \dots, P_i$ , δηλαδή του πολυγώνου ελέγχου. Η ιδιότητα αυτή προκύπτει από τις αντίστοιχες Ιδ 2.2.3.1, Ιδ 2.2.3.2 και Ιδ 2.2.3.5.

**Ιδ 2.2.4.4** Η  $C(u)$  είναι απείρως παραγωγίσιμη στο εσωτερικό ενός διαστήματος κόμβων και  $p$ - $k$  παραγωγίσιμη σε έναν κόμβο πολλαπλότητας  $k$ .

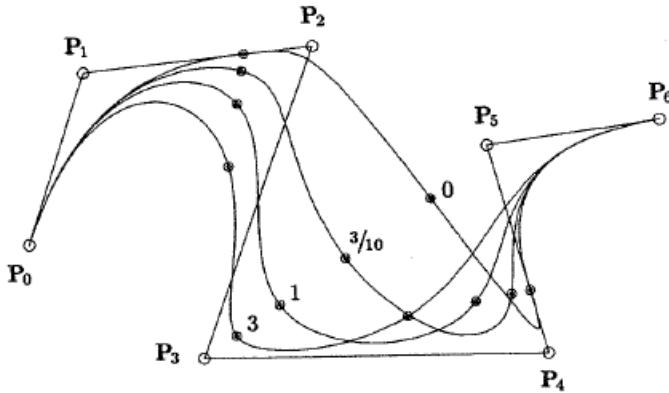
**Ιδ 2.2.4.5** Η ιδιότητα της μειωμένης διακύμανσης (όπως και στην ιδιότητα Ιδ 2.1.3.9): κανένα επίπεδο δεν τέμνει περισσότερες φορές την καμπύλη από ότι το πολύγωνο ελέγχου (αντικαθιστούμε τη λέξη επίπεδο με τη λέξη γραμμή για  $2\Delta$  καμπύλη). Πρακτικά αυτή η ιδιότητα σημαίνει ότι η καμπύλη δεν έχει περισσότερα σημεία καμπής από ότι το πολύγωνο ελεγχου.

**Ιδ 2.2.4.6** Μία καμπύλη NURBS χωρίς εσωτερικούς κόμβους είναι μία ρητή Bezier καμπύλη. Όπως αναφέρθηκε και στην ιδιότητα Ιδ 2.1.3.1, αυτό σημαίνει ότι στη δημιουργία του κάθε σημείου της καμπύλης συνεισφέρουν όλα τα σημεία ελέγχου.

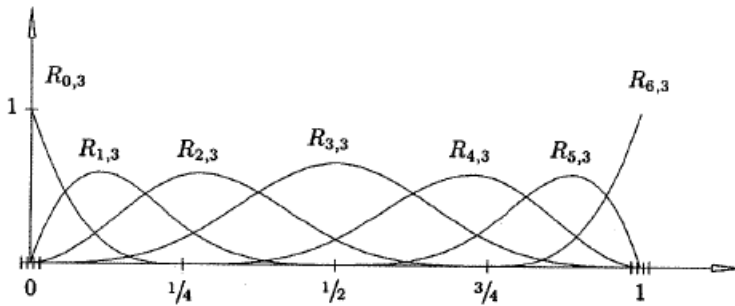
**Ιδ 2.2.4.7** Τοπική προσέγγιση: αν το σημείο ελέγχου  $P_i$  μετακινηθεί ή το βάρος  $w_i$  αλλαχθεί, επηρεάζεται μόνο το τμήμα της καμπύλης στο διάστημα  $u \in [u_i, u_{i+p+1})$ , το οποίο προκύπτει από την ιδιότητα Ιδ 2.2.4.5.

Η ιδιότητα Ιδ 2.2.4.7 είναι πολύ σημαντική για τον διαδραστικό σχεδιασμό σχημάτων. Χρησιμοποιώντας τις καμπύλες NURBS, είναι δυνατόν να γίνει χρήση είτε της μετακίνησης των σημείων ελέγχου είτε της μεταβολής των βαρών για να επιτευχθεί τοπικός έλεγχος των σχημάτων. Στα σχήματα 2.12 και 2.13α-γ παρατηρείται το αποτέλεσμα που έχει η μεταβολή ενός μόνο βάρους στο σχήμα της καμπύλης και στις συναρτήσεις βάσης. Αν το  $u \in [u_i, u_{i+p+1})$ , τότε αν αυξηθεί ή μειωθεί το  $w_i$ , το σημείο  $C(u)$  κινείται πιο κοντά ή πιο μακριά αντίστοιχα στο  $P_i$ . Επιπλέον, η κίνηση της  $C(u)$  για σταθερό  $u$  γίνεται όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.14 κατά μήκος ευθείας γραμμής. Στο σχήμα αυτό, παρατηρούνται επίσης τα σημεία  $B = C(u, \text{για } w_3 = 0)$  και  $N = C(u, \text{για } w_3 = 1)$ , τα οποία σχηματίζουν μία ευθεία που

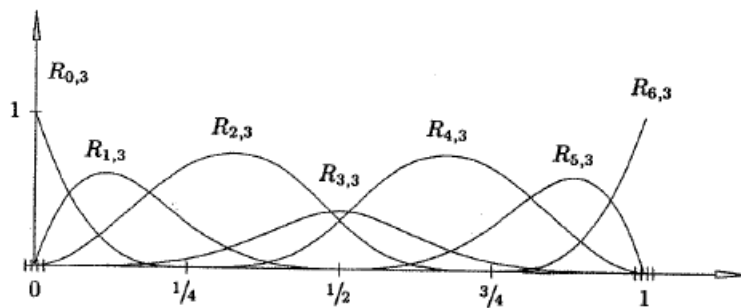
περνά από το σημείο  $P_3$ . Για ένα τυχαίο βάρος  $0 < w_3 < \infty$ , το σημείο  $B_3 = C(u, w_3)$  βρίσκεται πάνω στο γραμμικό τμήμα που σχηματίζουν τα σημεία  $B$  και  $P_3$ .



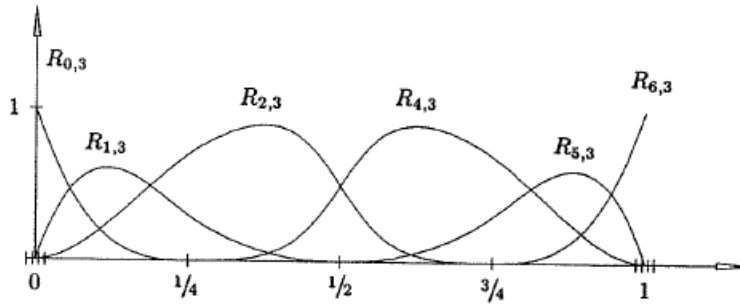
**Σχήμα 2.12:** Ρητή κυβική B-spline (NURBS) καμπύλη με το βάρος  $w_3$  να μεταβάλλεται.



(a)

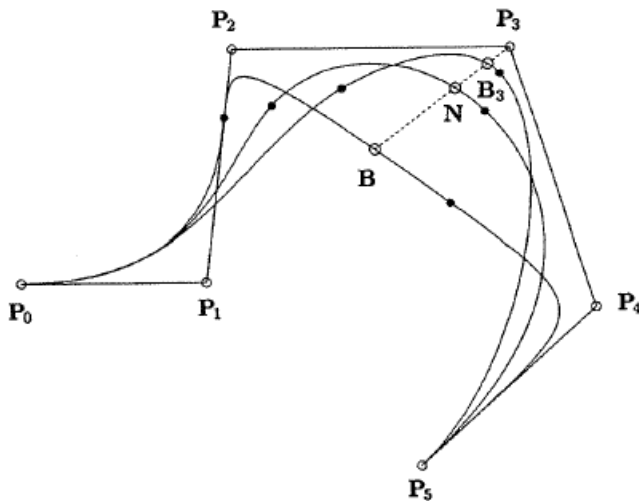


(b)



(c)

**Σχήμα 2.13:** Οι κυβικές συναρτήσεις βάσης για τις καμπύλες του σχήματος 2.12 με (a)  $w_3=1$ , (b)  $w_3=3/10$  και (c)  $w_3=0$ .



**Σχήμα 2.14:** Μετακίνηση του σημείου της καμπύλης για σταθερό  $u$  κατά μήκος ευθείας γραμμής.

## 2.3 Επιφάνεια NURBS

Μία επιφάνεια NURBS  $p$ -βαθμού στην  $u$  κατεύθυνση και  $q$ -βαθμού στην  $v$  κατεύθυνση είναι μία διπαραμετρική διανυσματική τμηματική ρητή συνάρτηση της μορφής:

$$S(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}}, \quad 0 \leq u,v \leq 1 \quad (2.7)$$

Τα  $P_{i,j}$  σχηματίζουν ένα “πλέγμα ελέγχου” (control net) δύο κατευθύνσεων, τα  $w_{i,j}$  είναι  $N_{i,p}(u)$  και  $N_{j,q}(v)$ , είναι οι μη-ρητές B-spline συναρτήσεις βάσης στα τα βάρη και οι διανύσματα κόμβων

$$U = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}\} = \{u_0, \dots, u_r\} \quad (r+1 \text{ κόμβοι})$$

$$V = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1}\} = \{v_0, \dots, v_s\} \quad (s+1 \text{ κόμβοι})$$

όπου ισχύει  $r=n+p+1$  και  $s=m+q+1$  για  $U$  και  $V$  αντίστοιχα, στην ίδια λογική με την ιδιότητα Ιδ 2.1.3.2 για τις καμπύλες B-splines.

Η σχέση (2.7) μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u,v)P_{i,j} \quad (2.8)$$

όπου  $R_{i,j}(u,v) = \frac{N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(u)N_{l,q}(v)w_{k,l}}$  είναι οι ρητές συναρτήσεις βάσης.

Επίσης, σε συμφωνία με όσα περιγράφηκαν για τις καμπύλες, μπορούν να περιγραφούν οι NURBS χρησιμοποιώντας ομογενείς συντεταγμένες. Έτσι προκύπτει η παρακάτω σχέση για την επιφάνεια  $S^w(u,v)$  στον 4Δ χώρο:

$$S^w(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}P_{i,j}^w, \quad 0 \leq u,v \leq 1 \quad (2.9)$$

Όπως ισχύει και για τις καμπύλες, οι B-splines αποτελούν εκφυλισμένη περίπτωση των NURBS, καθώς μία NURBS καμπύλη, για την οποία ισχύει  $w_{i,j}=a$  για



κάθε  $i, j$  με  $a \neq 0$ , είναι καμπύλη B-spline. Το ίδιο ισχύει και για τις επιφάνειες, οπότε σε αυτή την υποενότητα κάθε ιδιότητα που αναφέρεται για τις NURBS θα ισχύει και για τις B-spline επιφάνειες αν επιβεβαιώνεται η περίπτωση για τα βάρη που προαναφέρθηκε. Η μόνη διαφορά έχει να κάνει με το ότι οι συναρτήσεις βάσης των επιφανειών B-spline λαμβάνονται από το τανυστικό γινόμενο των  $N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)$ , ενώ οι αντίστοιχες των NURBS επιφανειών λαμβάνονται από τη σχέση (2.8) που δεν αποτελεί τανυστικό γινόμενο.

### 2.3.1 Ιδιότητες διπαραγοντικών ρητών συναρτήσεων βάσης

Ακολουθούν οι ιδιότητες των διπαραμετρικών ρητών συναρτήσεων βάσης της σχέσης (2.8), στην οποία στον αριθμητή εμφανίζεται το τανυστικό γινόμενο των  $N_{i,p}(u)$  και  $N_{j,q}(v)$ . Οι ιδιότητες αυτές προκύπτουν από τις αντίστοιχες που περιγράφηκαν ξεχωριστά για κάθε συνάρτηση βάσης στην υποενότητα 2.1.1:

**Ιδ 2.3.1.1:** Μη-αρνητικές τιμές:  $R_{i,j}(u, v) \geq 0$  για όλα τα  $i, j, u$  και  $v$ .

**Ιδ 2.3.1.2:** Διαμερισμός της μονάδας:  $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u, v) = 1$  για όλα τα  $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .

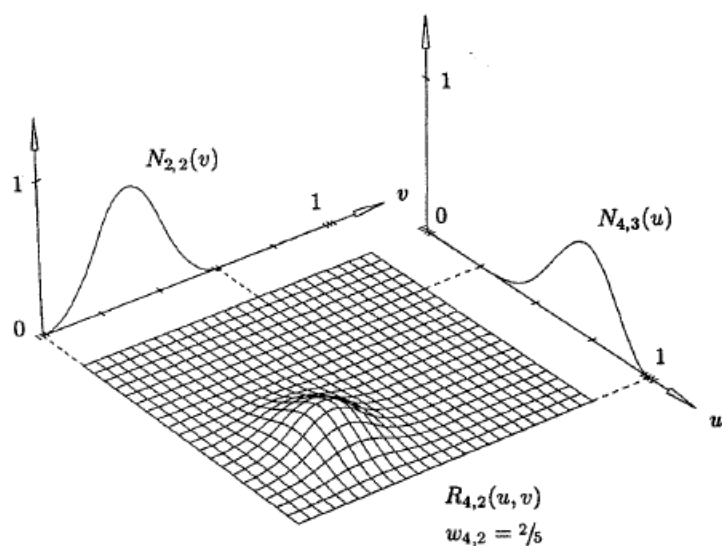
**Ιδ 2.3.1.3:** Τοπικό πεδίο ορισμού:  $R_{i,j}(u, v) = 0$ , αν τα  $(u, v)$  βρίσκονται εκτός του ορθογωνίου παραλληλογράμμου  $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$  (σχήμα 2.15).

**Ιδ 2.3.1.4:** Σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο της μορφής  $[u_{i_0}, u_{i_0+p+1}) \times [v_{j_0}, v_{j_0+q+1})$  το πολύ  $(p+1)(q+1)$  συναρτήσεις βάσης είναι μη-μηδενικές. Συγκεκριμένα οι  $R_{i,j}(u, v)$  για  $i_0 - p \leq i \leq i_0$  και  $j_0 - q \leq j \leq j_0$  είναι μη μηδενικές.

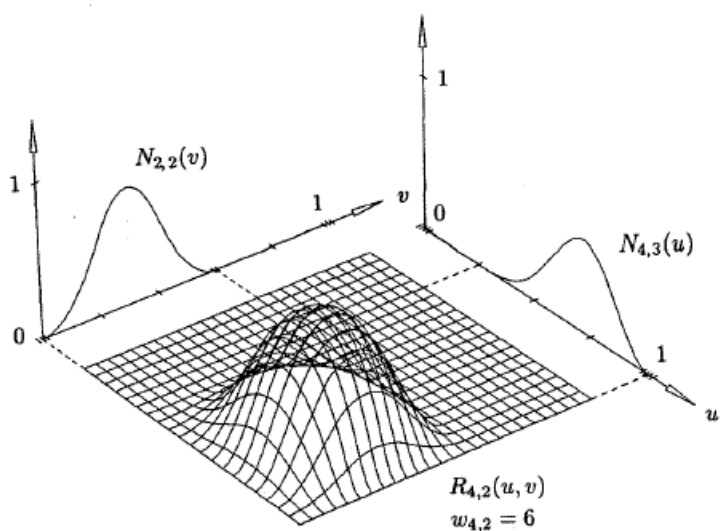
**Ιδ 2.3.1.5:** Αν  $p > 0$  και  $q > 0$ , τότε οι  $R_{i,j}(u, v)$  αποκτούν ακριβώς μία μέγιστη τιμή (σχήμα 2.15).

**Ιδ 2.3.1.6:**  $R_{0,0}(0,0) = R_{n,0}(1,0) = R_{0,m}(0,1) = R_{n,m}(1,1) = 1$ .

**Ιδ 2.3.1.7:** Εσωτερικά των παραλληλογράμμων που σχηματίζονται από τις  $u$  και  $v$  γραμμές κόμβων, όπου η συνάρτηση του τανυστικού γινομένου είναι διπαραμετρικό πολυώνυμο, όλες οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν. Σε έναν  $u$  ή  $v$  κόμβο, είναι  $(p-k)$  ή  $(q-k)$  φορές παραγωγίσιμη στην  $u$  ή  $v$  κατεύθυνση, όπου  $k$  είναι η πολλαπλότητα του κόμβου.



(a)



(b)

**Σχήμα 2.15:** Οι συναρτήσεις βάσης  $R_{4,2}(u,v)$  με  $U=\{0,0,0,0,1/4,1/2,3/4,1,1,1,1\}$  και  $V=\{0,0,0,1/5,$

$2/5,3/5,4/5,1,1,1\}$ . Ισχύει  $w_{i,j}=1$  για όλα τα  $(i,j)\neq(4,2)$ . (a)  $w_{4,2}=2/5$ , (b)  $w_{4,2}=6$  [1].

### 2.3.2 Ιδιότητες επιφανειών NURBS

Οι επιφάνειες NURBS έχουν τις εξής ιδιότητες:

**Ιδ 2.3.2.1:** Αν  $n=p$ ,  $m=q$ ,  $U=\{0,\dots,0,1,\dots,1\}$ ,  $V=\{0,\dots,0,1,\dots,1\}$  και  $w_{i,j}=a$  για κάθε  $i,j$  με  $a\neq 0$  τότε η  $S(u,v)$  είναι μία επιφάνεια Bezier. Αυτό όπως έχει αναφερθεί σημαίνει ότι εντός του διαστήματος  $[0,1]$  όλες οι  $R_{i,j}(u,v)$  είναι μη-μηδενικές και συνεισφέρουν όλες στο σχηματισμό κάθε σημείου της επιφάνειας.

**Ιδ 2.3.2.2:** Η επιφάνεια συναντά τα τέσσερα γωνιακά σημεία ελέγχου:  $S(0,0)=P_{0,0}$ ,  $S(1,0)=P_{n,0}$ ,  $S(0,1)=P_{0,m}$  και  $S(1,1)=P_{n,m}$  (σχήματα 2.16, 2.17 και 2.18). Αυτό προκύπτει από τις ιδιότητες Ιδ 2.3.1.2 και Ιδ 2.3.1.6.

**Ιδ 2.3.2.3:** Εφαρμόζεται ένας μετασχηματισμός στην επιφάνεια μέσω της εφαρμογής του στα σημεία ελέγχου, όπου προκύπτει επίσης από την ιδιότητα Ιδ 2.3.1.2.

**Ιδ 2.3.2.4:** Η επιφάνεια βρίσκεται αποκλειστικά εντός του κυρτού κελύφους που σχηματίζει το πολύγωνο ελέγχου. Συγκεκριμένα αν  $(u,v) \in [u_{i_0}, u_{i_0+p+1}) \times [v_{j_0}, v_{j_0+q+1})$ , τότε η  $S(u,v)$  βρίσκεται εντός του κελύφους που σχηματίζουν τα σημεία ελέγχου  $P_{i,j}$ , για  $i_0 - p \leq i \leq i_0$  και  $j_0 - q \leq j \leq j_0$ . Αυτό προκύπτει από τις ιδιότητες Ιδ 2.3.1.1, Ιδ 2.3.1.2 και Ιδ 2.3.1.4.

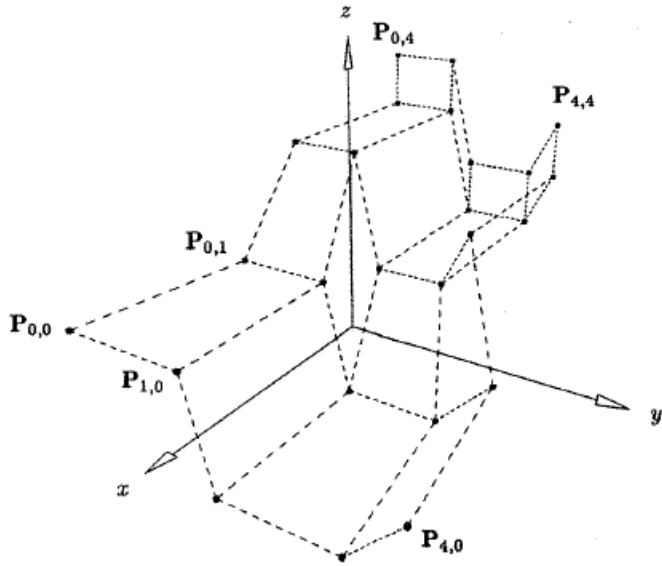
**Ιδ 2.3.2.5:** Αν ενωθούν τα σημεία ελέγχου με γραμμές σχηματίζεται ένα “πλέγμα ελέγχου” που αποτελεί μία τμηματική επίπεδη προσέγγιση της σχηματιζόμενης επιφάνειας. Όπως συμβαίνει και στις καμπύλες όσο πιο μικρός ο βαθμός των συναρτήσεων βάσης, τόσο καλύτερη η προσέγγιση.

**Ιδ 2.3.2.6:** Τοπικό σχήμα διαμόρφωσης: Αν ένα σημείο ελέγχου  $P_{i,j}$  μετακινηθεί ή το βάρος  $w_{i,j}$  αλλαχθεί, επηρεάζεται μόνο το τμήμα της επιφάνειας που αντιστοιχεί στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$ , το οποίο προκύπτει από την

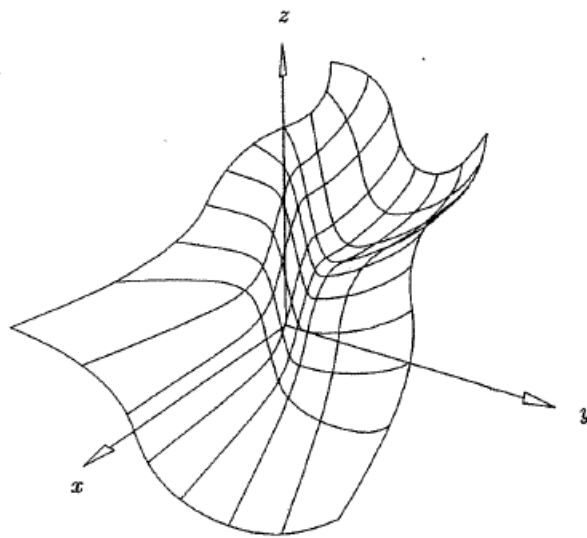
ιδιότητα Ιδ 2.3.1.4. Στο σχήμα 2.17 φαίνεται το πως επηρεάζεται το τμήμα της επιφάνειας που αντιστοιχεί στο παραλληλόγραμο  $[\frac{1}{4}, 1) \times [\frac{2}{5}, 1)$  όταν μετακινείται το σημείο  $P_{3,5}$ . Επίσης, παρατηρείται ότι η αρχική επιφάνεια είναι επίπεδη, καθώς ακολουθεί τα σημεία ελέγχου που βρίσκονται όλα στο ίδιο επίπεδο (ιδιότητα Ιδ 2.3.2.5). Το δίκτυο ελέγχου με τα σημεία παρουσιάζεται πιο ψηλά από τις επιφάνειες για ευκρινέστερη απεικόνιση. Τέλος, στα σχήματα 2.15 και 2.19 παρατηρούνται οι αλλαγές που προκαλεί στην επιφάνεια η αλλαγή ενός βάρους. Ειδικά στο σχήμα 2.19 φαίνεται η αντίστοιχη ιδιότητα με τις καμπύλες, να κινείται σε μία ευθεία το σημείο  $S(u,v)$  προς το σημείο ελέγχου  $P_{i,j}$  ή μακριά από αυτό, ανάλογα με την τιμή του βάρους.

**Ιδ 2.3.2.7:** Η συνέχεια και η διαφορισιμότητα της  $S(u,v)$  ακολουθεί αυτή των συναρτήσεων βάσης. Συγκεκριμένα, η  $S(u,v)$  είναι  $(p-k)$  ή  $(q-k)$  φορές διαφορίσιμη στην  $u$  ή  $v$  κατεύθυνση αντίστοιχα σε έναν κόμβο πολλαπλότητας  $k$ . Όπως και στην περίπτωση των καμπυλών, μπορεί να προκύψει ασυνέχεια λόγω των συναρτήσεων βάσης, η οποία όμως μπορεί να εξαλειφθεί με συγκεκριμένη τοποθέτηση των σημείων ελέγχου. Επίσης, μπορούν να δημιουργηθούν οπτικές ασυνέχειες (αιχμές) σε σημεία που δεν υπάρχουν ασυνέχειες στις συναρτήσεις βάσης (σχήμα 2.18), χρησιμοποιώντας συμπίπτοντα σημεία ελέγχου.

Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν υπάρχει για τις επιφάνειες ιδιότητα αντίστοιχη με αυτή της μειωμένης διακύμανσης για τις καμπύλες.

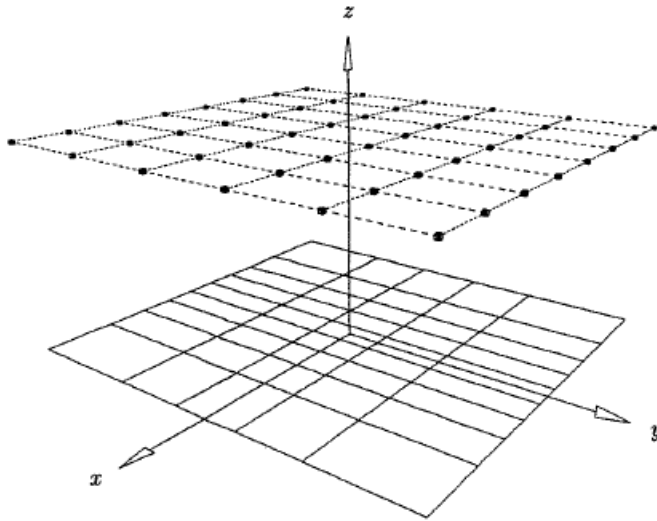


(a)

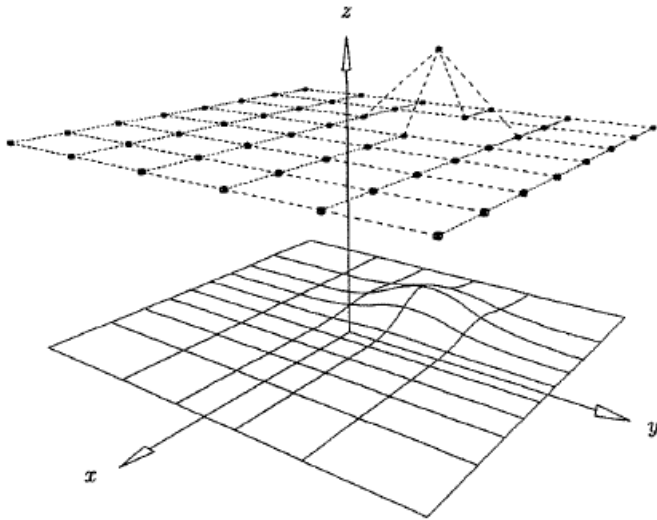


(b)

**Σχήμα 2.16:** Το “πλέγμα ελέγχου” και μία επιφάνεια NURBS τετραγωνική και στις δύο κατευθύνσεις, με  $w_{1,1}=w_{1,2}=w_{2,1}=w_{2,2}=10$  και τα υπόλοιπα βάρη μονάδα. Τα διανύσματα κόμβων είναι  $U=V=\{0,0,0,1/3,2/3,1,1,1\}$ . (a) Το πλέγμα με τα σημεία ελέγχου, (b) Η αντίστοιχη επιφάνεια NURBS [1].

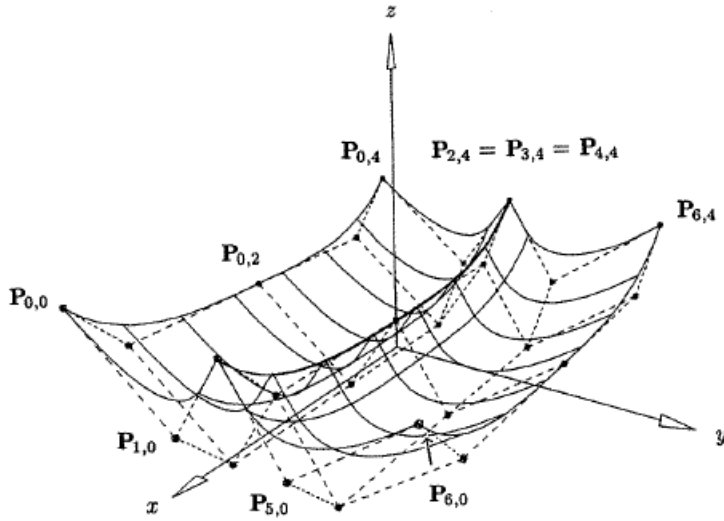


(a)

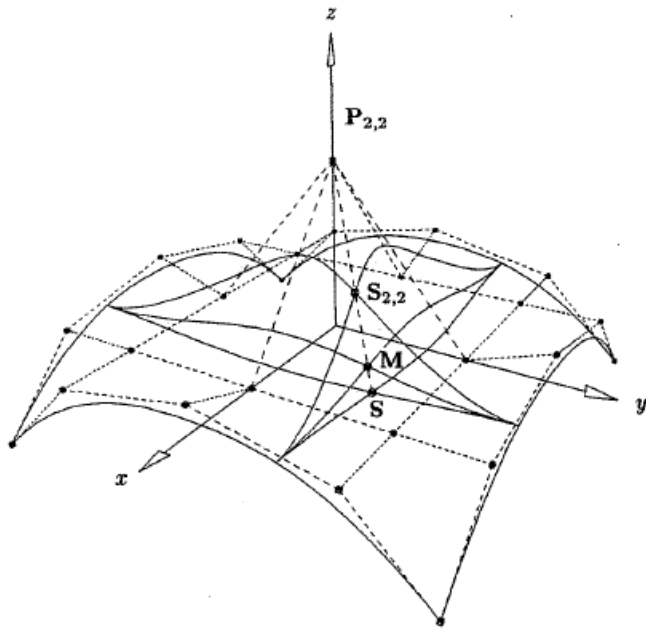


(b)

**Σχήμα 2.17:** (a) Μία επίπεδη τετραγωνική×κυβική επιφάνεια με  $U=\{0,0,0,1/4,1/2,3/4,1,1,1\}$  και  $V=\{0,0,0,0,1/5,2/5,3/5,4/5,1,1,1,1\}$  με όλα τα βάρη μονάδα, (b) Το σημείο  $P_{3,5}$  μετακινείται επηρεάζοντας την επιφάνεια μόνο στο τμήμα  $[1/4,1) \times [2/5,1) [1]$ .



**Σχήμα 2.18:** Μία κυβική και στις δύο κατευθύνσεις επιφάνεια με οπτική ασυνέχεια κατά μήκος της αναδίπλωσης, με  $U=\{0,0,0,1/4,1/2,3/4,1,1,1\}$ ,  $V=\{0,0,0,0,1/2,1,1,1,1\}$ , όλα τα βάρη μονάδα και  $P_{2,j}=P_{3,j}=P_{4,j}$  για  $0 \leq j \leq 4$  [1].



**Σχήμα 2.19:** Αλλαγή του σημείου  $S_{2,2}$  πάνω σε ευθεία γραμμή, ανάλογα με την αλλαγή του βάρους  $w_{2,2}$  [1].

## 2.4 Εργαλεία μορφοποίησης καμπυλών και επιφανειών B-splines

Σε αυτό το υποκεφάλαιο περιγράφονται χρήσιμα εργαλεία στην εφαρμογή των B-spline επιφανειών και καμπυλών στον διαδραστικό σχεδιασμό (και στις NURBS αρχικά οι ενέργειες γίνονται στις B-spline στον τετραδιάστατο χώρο και μετά λαμβάνονται οι NURBS στον 3Δ χώρο μέσω της απεικόνισης H).

### 2.4.1 Εισαγωγή κόμβου (knot insertion)

Ας υποθεθεί NURBS καμπύλη  $C^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)P_i^w$  ορισμένη στο  $U=\{u_0, \dots, u_m\}$ .

Ας υποθεθεί επίσης ένας κόμβος  $\bar{u} \in [u_k, u_{k+1})$  ο οποίος εισάγεται στο διάνυσμα  $U$  σχηματίζοντας το νέο διάνυσμα κόμβων

$$\bar{U} = \{\bar{u}_0 = u_0, \dots, \bar{u}_k = u_k, \bar{u}_{k+1} = \bar{u}, \bar{u}_{k+2} = u_{k+1}, \dots, \bar{u}_{m+1} = u_m\}$$

Τότε, η καμπύλη  $C^w(u)$  έχει στο νέο διάνυσμα  $\bar{U}$  την εξής μορφή:

$$C^w(u) = \sum_{i=0}^{n+1} \bar{N}_{i,p}(u)Q_i^w$$

Προκύπτουν έτσι δύο διαφορετικές περιγραφές της ίδιας (γεωμετρικά και παραμετρικά) καμπύλης σε δύο διαφορετικά διανύσματα κόμβων. Από αυτές τις σχέσεις μένει μόνο ο προσδιορισμός των νέων σημείων ελέγχου,  $Q_i^w$ , για να μπορεί να υπολογιστεί η  $C^w(u)$  στο  $\bar{U}$ . Τα  $Q_i^w$  υπολογίζονται από τη σχέση

$$Q_i^w = a_i P_i^w + (1 - a_i) P_{i-1}^w \quad (2.10)$$

$$\text{όπου } a_i = \begin{cases} 1 & i \leq k-p \\ \frac{\bar{u} - u_i}{u_{i+p} - u_i} & k-p+1 \leq i \leq k \\ 0 & i \geq k+1 \end{cases}$$

$p$  ο βαθμός των συναρτήσεων βάσης και  $k$  ο δείκτης που φαίνεται παραπάνω στο διάνυσμα  $\bar{U}$ .

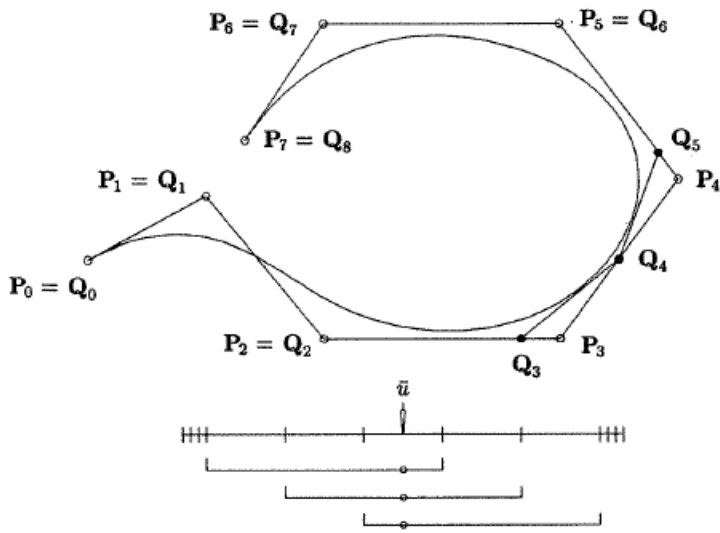


Αυτό που, στην ουσία, επιτυγχάνεται με την εισαγωγή κόμβου είναι η απόκτηση της δυνατότητας να υπάρχει επιπλέον ένα σημείο ελέγχου διαθέσιμο για την τροποποίηση τους σχήματος συγκεκριμένου τμήματος της καμπύλης (αντικατάσταση  $p-1$  αρχικών με  $p$  νέα σημεία). Στο σχήμα 2.20 παρατηρείται η αλλαγή στα σημεία ελέγχου, αλλά και στις συναρτήσεις βάσης λόγω της αλλαγής στο διάνυσμα κόμβων.

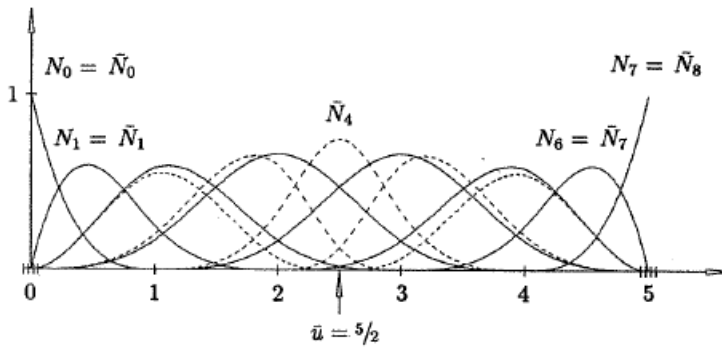
Στην περίπτωση που είναι απαραίτητο να εισαχθεί ένας κόμβος πολλές φορές η σχέση (2.10) πρέπει να τροποποιηθεί σχετικά. Ας υποτεθεί η ύπαρξη ενός κόμβου  $\bar{u} \in [u_k, u_{k+1})$ , ο οποίος έχει αρχικά πολλαπλότητα  $s$  και επιθυμείται η εισαγωγή του  $r$  φορές στο αρχικό διάνυσμα κόμβων, όπου  $r+s \leq p$  (δεν έχει νόημα να υπάρξει κόμβος με πολλαπλότητα μεγαλύτερη του  $p$ , καθώς με  $p$  το αντίστοιχο σημείο ελέγχου θα βρίσκεται πάνω στην καμπύλη). Ορίζεται το  $i$ -οστό νέο σημείο ελέγχου στο  $r$ -οστό βήμα εισαγωγής ως  $Q_{i,r}^w$  (με  $Q_{i,0}^w = P_i^w$ ). Τότε το  $Q_{i,r}^w$  δίνεται από τη σχέση:

$$Q_{i,r}^w = a_{i,r} Q_{i,r-1}^w + (1 - a_{i,r}) Q_{i-1,r-1}^w \quad (2.11)$$

$$\text{,όπου } a_{i,r} = \begin{cases} 1 & i \leq k-p+r-1 \\ \frac{\bar{u} - u_i}{u_{i+p-r+1} - u_i} & k-p+r \leq i \leq k-s \\ 0 & i \geq k-s+1 \end{cases}$$



(a)



(b)

**Σχήμα 2.20:** Εισαγωγή κόμβου σε κυβική καμπύλη. (a) Το πολύγωνο ελέγχου μετά την εισαγωγή του  $u=5/2$  στο διάνυσμα κόμβων  $U=\{0,0,0,0,1,2,3,4,5,5,5,5\}$  (b) Οι αρχικές (συνεχής γραμμή) και οι νέες (διακεκομμένη γραμμή) συναρτήσεις βάσης πριν και μετά την εισαγωγή κόμβου [1].

Όταν επιθυμείται η εισαγωγή κόμβων σε επιφάνειες ακολουθείται η ίδια διαδικασία για τα διανύσματα κόμβων  $U$  και  $V$ . Απλά, στη συνέχεια, πρέπει να υπολογιστούν τα σημεία ελέγχου σε κάθε στήλη ή σειρά αντίστοιχα στο “πλέγμα ελέγχου”.

### 2.4.2 Βελτίωση του διάνυσματος κόμβων (knot refinement)

Η εισαγωγή κόμβων αφορά την εισαγωγή ενός απλού κόμβου μία ή περισσότερες φορές. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις που είναι αναγκαίο να εισαχθούν μαζί περισσότεροι του ενός κόμβοι. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται βελτίωση διάνυσματος κόμβων (knot refinement) κι έχει ως εξής:

Ας υποτεθεί ένα διάνυσμα κόμβων  $U=\{u_0, \dots, u_m\}$  κι ένα σύνολο σημείων  $X=\{x_0, \dots, x_r\}$  για τα οποία ισχύει η σχέση  $x_i \leq x_{i+1}$  και  $u_0 < x_i < u_m$  για όλα τα  $i$ . Η διαδικασία της βελτίωσης διάνυσματος κόμβων πραγματοποιείται με την εισαγωγή των σημείων του  $X$  στο διάνυσμα  $U$  και τον ακόλουθο υπολογισμό του νέου συνόλου σημείων ελέγχου  $Q_i^w$ , για  $i=0, \dots, n+r+1$ . Σημειώνεται ότι τα στοιχεία του  $X$  εισάγονται με την αντίστοιχη πολλαπλότητα στο  $U$ . Αν για παράδειγμα κάποιο  $x_i$  έχει πολλαπλότητα 3 στο  $X$  άλλα υπάρχει και στο  $U$  με πολλαπλότητα 1, τότε θα εισαχθεί 2 φορές.

### 2.4.3 Αύξηση του βαθμού των συναρτήσεων βάσης (Degree elevation)

Υποτίθεται πάλι μία καμπύλη  $C^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)P_i^w$  στον 4Δ χώρο. Εφόσον είναι τμηματική πολυωνυμική καμπύλη, πρέπει να μπορεί να ανεβεί ο βαθμός των συναρτήσεων βάσης σε  $p+1$  και να υπάρχουν σημεία ελέγχου  $Q_i^w$  και διάνυσμα κόμβων  $\bar{U}$  τέτοια ώστε να ισχύει

$$C_p^w(u) = C_{p+1}^w(u) = \sum_{i=0}^{\bar{n}} N_{i,p+1}(u)Q_i^w \quad (2.12)$$

Οι  $C_{p+1}^w(u)$  και  $C_p^w(u)$  είναι η ίδια καμπύλη γεωμετρικά και παραμετρικά. Η μόνη αλλαγή είναι τα νέα σημεία ελέγχου  $Q_i^w$ , ο αριθμός τους  $\bar{n} + 1$  και το νέο διάνυσμα κόμβων  $\bar{U}$  που πρέπει να υπολογιστούν, τα οποία ολοκληρώνουν τη διαδικασία αύξησης του βαθμού συναρτήσεων βάσης (degree elevation).

Η διαδικασία έχει ως εξής:

Αρχικά, για να υπολογιστούν τα  $\bar{n}$  και  $\bar{U}$  της σχέσης (2.12) θεωρείται ότι το διάνυσμα  $U$  έχει την παρακάτω μορφή

$$U = \{u_0, \dots, u_m\} = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \underbrace{u_1, \dots, u_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{u_s, \dots, u_s}_{m_s}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\}$$

όπου τα  $m_1, \dots, m_s$  υποδηλώνουν τις πολλαπλότητες των εσωτερικών κόμβων. Η καμπύλη  $C_p^w(u)$  είναι πολυωνυμική σε κάθε μη εκφυλισμένο διάστημα κόμβων, οπότε ο βαθμός της μπορεί να αυξηθεί σε  $p+1$  εκεί. Σε έναν κόμβο πολλαπλότητας  $m_i$ , η  $C_p^w(u)$  είναι  $C^{p-m_i}$  συνεχής. Οπότε, επειδή η νέα καμπύλη  $C_{p+1}^w(u)$  ( $p+1$ )-βαθμού πρέπει να έχει την ίδια συνέχεια παντού, ακολουθεί ότι ο κάθε κόμβος θα πρέπει να έχει πολλαπλότητα  $m_i+1$ . Έτσι προκύπτει ότι

$$\bar{n} = n + s + 1 \quad (2.13)$$

και

$$\bar{U} = \{u_0, \dots, u_{\bar{m}}\} = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+2}, \underbrace{u_1, \dots, u_1}_{m_1+1}, \dots, \underbrace{u_s, \dots, u_s}_{m_s+1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+2}\} \quad (2.14)$$

όπου  $\bar{m} = m + s + 2$ .

Για τον υπολογισμό, τώρα, των νέων σημείων ισχύει η παρακάτω σχέση

$$Q_i^w = P_i^t = \sum_{j=\max(0, i-t)}^{\min(p, i)} \frac{\binom{p}{j} \binom{t}{i-j} P_j}{\binom{p+t}{i}}, \quad \text{για } i=0, \dots, p+t \quad (2.15)$$

όπου το  $t$  δείχνει πόσο ανεβαίνει ο βαθμός της καμπύλης (από  $p$  σε  $p+t$ ) και η γραφή  $\binom{p}{j}$  υποδηλώνει την πράξη  $\binom{p}{j} = \frac{p!}{j!(p-j)!}$ .

Όπως και στα προηγούμενα η αύξηση του βαθμού των συναρτήσεων βάσης στις επιφάνειες εφαρμόζεται με τον ίδιο τρόπο, απλώς ο υπολογισμός των νέων σημείων γίνεται για όλες τις στήλες ή/και γραμμές στο “πλέγμα ελέγχου” που

σχηματίζουν τα  $Q_{i,j}^w$ , αν η αύξηση του βαθμού γίνει στις  $N_{i,p}(u)$  ή/και  $N_{j,q}(v)$  συναρτήσεις βάσης αντίστοιχα.

#### 2.4.4 Καθολική παρεμβολή καμπύλης σε σύνολο στοιχείων με καρτεσιανές συντεταγμένες

Αν δοθεί ένα σύνολο σημείων  $Q_k$  σε καρτεσιανές συντεταγμένες, όπου  $k=0, \dots, n$ , μπορεί να δημιουργηθεί μία  $p$ -βαθμού μη-ρητή B-spline καμπύλη που θα περνά από όλα αυτά τα σημεία. Αρχικά, θα πρέπει να ανατεθεί μία παράμετρος  $\bar{u}_k$  για κάθε σημείο  $Q_k$  και να επιλεγεί ένα κατάλληλο διάνυσμα κόμβων  $U = \{u_0, \dots, u_m\}$  ώστε να δημιουργηθεί το παρακάτω σύστημα  $(n+1) \times (n+1)$  γραμμικών εξισώσεων

$$Q_k = C(\bar{u}_k) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) P_i \quad (2.16)$$

Τα σημεία ελέγχου  $P_i$  είναι οι  $n+1$  άγνωστοι. Αξίζει να σημειωθεί ότι αν ο αριθμός των συντεταγμένων των  $Q_k$  είναι  $r$  (όπου  $r=2, 3$  ή  $4$  για  $\{x,y\}$ ,  $\{x,y,z\}$  ή  $\{wx,wy,wz,w\}$  αντίστοιχα) τότε η εξίσωση (2.16) έχει έναν πίνακα συντελεστών με  $r$  δεξιά μέλη, δηλαδή  $r$  λύσεις για τις  $r$  συντεταγμένες των  $P_i$ .

Η επιλογή της μεθόδου υπολογισμού των παραμέτρων  $\bar{u}_k$  επηρεάζει το σχήμα και την παραμετροποίηση της καμπύλης. Εδώ θα χρησιμοποιείται η μέθοδος του μήκους χορδής (chord length). Ορίζεται  $d$  να είναι το συνολικό μήκος χορδής

$$d = \sum_{k=1}^n |Q_k - Q_{k-1}| \quad (2.17)$$

Τότε  $\bar{u}_0 = 0 \quad \bar{u}_n = 1$

$$\bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{|Q_k - Q_{k-1}|}{d}, \quad k=1, \dots, n-1 \quad (2.18)$$

Για τους κόμβους τώρα του  $U$  επιλέγεται η τεχνική των μέσων όρων, οπότε ισχύει

$$\begin{aligned}
u_0 = \dots = u_p = 0 \quad u_{m-p} = \dots = u_m = 1 \\
u_{j+p} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=j}^{j+p-1} \bar{u}_i \quad j=1, \dots, n-p
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Τέλος, μένει ο υπολογισμός των  $P_i$  από το σύστημα εξισώσεων (2.16). Για παράδειγμα, αν δίνονται 5 σημεία με καρτεσιανές συντεταγμένες,  $n=4$ , και χρειάζεται η παρεμβολή μιας κυβικής καμπύλης, θα υπολογισθούν οι παράμετροι  $\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$  και  $\bar{u}_4$ , το διάνυσμα κόμβων  $U=\{0,0,0,0, u_4, 1,1,1,1\}$  και, τελικά, θα λυθεί το σύστημα

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
N_{0,3}(\bar{u}_1) & N_{1,3}(\bar{u}_1) & N_{2,3}(\bar{u}_1) & N_{3,3}(\bar{u}_1) & 0 \\
N_{0,3}(\bar{u}_2) & N_{1,3}(\bar{u}_2) & N_{2,3}(\bar{u}_2) & N_{3,3}(\bar{u}_2) & 0 \\
0 & N_{1,3}(\bar{u}_3) & N_{2,3}(\bar{u}_3) & N_{3,3}(\bar{u}_3) & N_{4,3}(\bar{u}_3) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
P_0 \\
P_1 \\
P_2 \\
P_3 \\
P_4
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
Q_0 \\
Q_1 \\
Q_2 \\
Q_3 \\
Q_4
\end{bmatrix}$$

#### 2.4.5 Καθολική παρεμβολή καμπύλης σε σύνολο στοιχείων με καρτεσιανές συντεταγμένες με δεδομένη την παράγωγο στο αρχικό άκρο

Εκτός από τα  $n+1$  σημεία που δίνονται στην προηγούμενη υποενότητα, μπορεί να δοθούν και οι μερικές παράγωγοι ως προς κάθε συντεταγμένη στην αρχή της καμπύλης. Τότε, θα υπάρξουν κάποιες αλλαγές σε σχέση με τους προηγούμενους υπολογισμούς και το τελικό σύστημα θα είναι  $(n+2) \times (n+2)$ . Αρχικά, οι παράμετροι  $\bar{u}_k$  θα υπολογιστούν με τον ίδιο τρόπο όπως στις σχέσεις (2.17) και (2.18). Στη συνέχεια, η σχέση (2.19) για τους κόμβους θα γίνει

$$\begin{aligned}
u_0 = \dots = u_p = 0 \quad u_{m-p} = \dots = u_m = 1 \\
u_{j+p+1} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=j}^{j+p-1} \bar{u}_i \quad j=0, \dots, n-p
\end{aligned} \tag{2.20}$$

όπου  $m=n+p+2$ .

Τέλος, το σύστημα που είναι να λυθεί είναι αυτό της σχέσης (2.16) με προσθήκη στη δεύτερη γραμμή της εξίσωσης του  $-P_0 + P_1 = \frac{d \cdot u_{p+1}}{\rho} D_0$ , όπου  $D_0$  είναι η παράγωγος, με  $r$  δεξιά μέλη αντίστοιχα όπως και τα σημεία ελέγχου, και  $d$  το μήκος χορδής. Για το παράδειγμα της προηγούμενης υποενότητας αν δοθεί και η παράγωγος, το τελικό σύστημα θα είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho}{d \cdot u_{p+1}} & \frac{\rho}{d \cdot u_{p+1}} & 0 & 0 & 0 \\ N_{0,3}(\bar{u}_1) & N_{1,3}(\bar{u}_1) & N_{2,3}(\bar{u}_1) & N_{3,3}(\bar{u}_1) & 0 \\ N_{0,3}(\bar{u}_2) & N_{1,3}(\bar{u}_2) & N_{2,3}(\bar{u}_2) & N_{3,3}(\bar{u}_2) & 0 \\ 0 & N_{1,3}(\bar{u}_3) & N_{2,3}(\bar{u}_3) & N_{3,3}(\bar{u}_3) & N_{4,3}(\bar{u}_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0 \\ D_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix}$$

#### 2.4.6 Μέθοδος σχηματισμού επιφανειών με παρεμβολή σε σύνολο καμπυλών (Skinning-Skinned surfaces)

Για ένα σύνολο B-spline καμπυλών  $C_k(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)P_{i,k}$ , όπου  $k=0, \dots, K$ ,

μπορεί να σχηματισθεί μία επιφάνεια B-spline με παρεμβολή επί αυτού του συνόλου. Αρχικά θα πρέπει όλες οι καμπύλες να είναι ορισμένες στο ίδιο διάνυσμα κόμβων  $U$  και να έχουν ίδιο βαθμό  $p$ . Αν δεν συμβαίνει αυτό τότε ακολουθούν τα εξής βήματα για να αποκτήσουν κοινό  $U$  και  $p$ :

α) Διαβεβαιώνεται ότι οι καμπύλες ορίζονται στο ίδιο εύρος παραμέτρων. Πρακτικά όπως αναφέρεται στην υποενότητα 2.1.1 κανονικοποιούνται τα διανύσματα κόμβων στο διάστημα  $[0,1]$ .

β) Ορίζεται ως  $p$  ο μεγαλύτερος βαθμός ανάμεσα στις καμπύλες και γίνεται αύξηση του βαθμού των καμπυλών μικρότερου βαθμού σε  $p$  (υποενότητα 2.4.3).

γ) Ενοποιούνται τα στοιχεία όλων των διανυσμάτων κόμβων σε ένα διάνυσμα  $U_{new}$ , με την κάθε τιμή κόμβου να εμφανίζεται στη μέγιστη πολλαπλότητα και

δ) Χρησιμοποιώντας το  $U_{new}$  εφαρμόζεται η βελτίωση κόμβων που περιγράφεται στην υποενότητα 2.4.2 σε κάθε διάνυσμα κόμβων.

Εφόσον αποκτηθούν κοινά  $U$  και  $p$  επιλέγεται στην κατεύθυνση  $v$  ο βαθμός  $q$  (πρέπει να ισχύει  $q \leq K$ ) και υπολογίζονται οι παράμετροι  $\{\bar{v}_k\}$ ,  $k=0, \dots, K$  και το διάνυσμα κόμβων  $V$ . Οι παράμετροι  $v_k$  παρόμοια με την (2.18) ως εξής:

$$\bar{v}_0 = 0 \quad \bar{v}_K = 0$$

$$\bar{v}_k = \bar{v}_{k-1} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \frac{|P_{i,k} - P_{i,k-1}|}{d_i} \quad k=1, \dots, K-1 \quad (2.21)$$

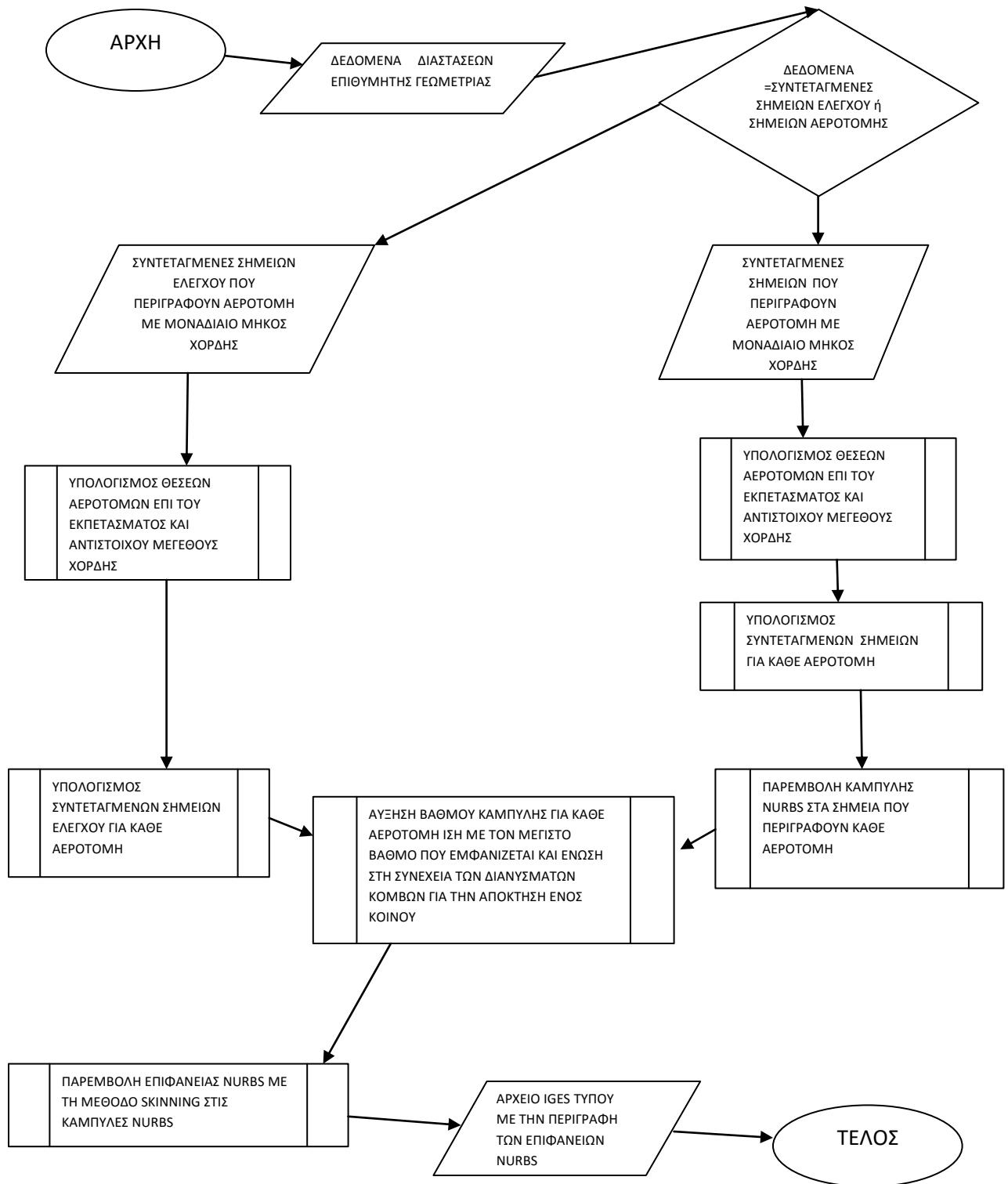
όπου το  $d_i$  δηλώνει το συνολικό μήκος χορδής των  $P_{i,0}, \dots, P_{i,K}$ . Οι κόμβοι του διανύσματος υπολογίζονται από τη σχέση (2.19).

Τα στοιχεία αυτά, στη συνέχεια, χρησιμοποιούνται για να γίνουν  $n+1$  παρεμβολές καμπυλών κατά μήκος των σημείων ελέγχου των  $C_k(u)$  καμπυλών, με αποτέλεσμα τον υπολογισμό των  $Q_{i,j}$  σημείων ελέγχου της επιφάνειας με παρεμβολή. Με άλλα λόγια το  $Q_{i,j}$  είναι τα  $j$ -οστό σημείο ελέγχου της παρεμβολής διαμέσου των σημείων  $P_{i,0}, \dots, P_{i,K}$ .

## 2.5 Περιγραφή λειτουργίας υπολογιστικού κώδικα

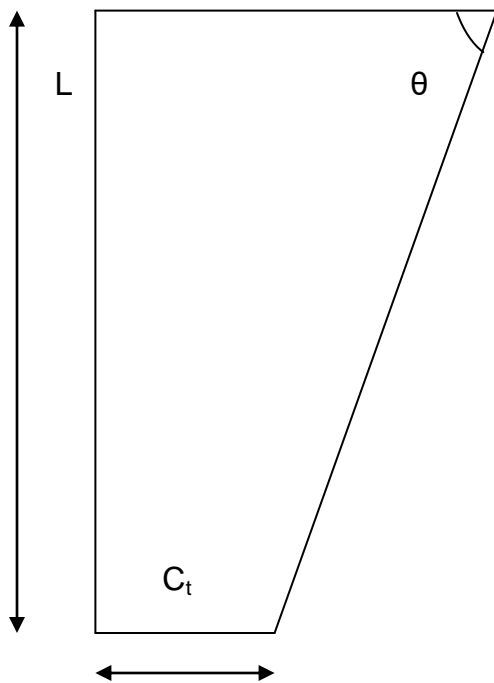
Στον κώδικα (σχήμα 2.21) που αναπτύχθηκε δίνονται ως δεδομένα οι επιθυμητές διαστάσεις της πτέρυγας (σχήμα ). Το εκπέτασμά της  $L$  (σχήμα 2.22), το μήκος της χορδής  $C_T$  της αεροτομής (airfoil), που λαμβάνεται με κάθετη τομή στην άκρη του (tip) και η γωνία  $\theta$  που σχηματίζει το χείλος πρόσπτωσης της πτέρυγας με τη χορδή στη ρίζα του (root). Στη συνέχεια δίνονται οι συντεταγμένες σημείων που περιγράφουν την πλευρά υποπίεσης μίας αεροτομής, μοναδιαίου μήκους χορδής, και αντίστοιχα τα σημεία που περιγράφουν την πλευρά υπερπίεσης. Με τη βοήθεια και των αρχικών δεδομένων υπολογίζονται οι συντεταγμένες των αντίστοιχων σημείων



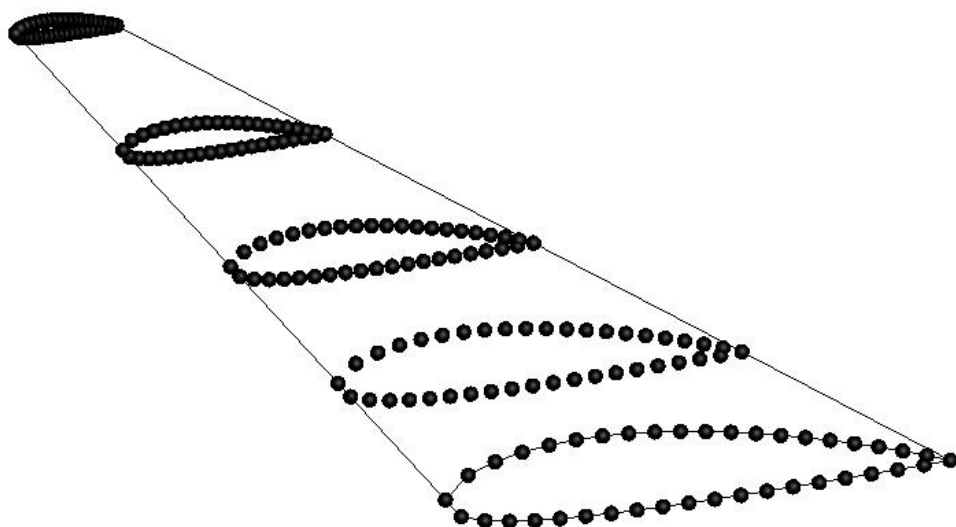


**Σχήμα 2.21:** Διάγραμμα ροής υπολογιστικού κώδικα.

για χορδές στις θέσεις από 0 έως L κατά μήκος του εκπετάσματος της πτέρυγας με τη θέση 0 να είναι στην άκρη της (σχήμα 2.23). Σε κάθε θέση πραγματοποιείται παρεμβολή καμπύλης NURBS και για τις δύο πλευρές της κάθε αεροτομής φροντίζοντας να επιτυγχάνεται συνέχεια στο χείλος πρόσπτωσης (υποενότητα 2.4.5). Στο σημείο αυτό τονίζεται ότι τα προηγούμενα βήματα μπορούν να παραληφθούν και να δωθούν απευθείας οι περιγραφές των αεροτομών με καμπύλες NURBS. Εξαιτίας του ότι οι καμπύλες που υπολογίζονται ή δίνονται ενδέχεται να μην έχουν ίδιο βαθμό ή διάνυσμα κόμβων, πραγματοποιείται η αύξηση του βαθμού όλων των καμπυλών στο επίπεδο αυτού της καμπύλης με τον μεγαλύτερο βαθμό και η ένωση των προκυπτόντων διανυσμάτων κόμβων για την απόκτηση ενός κοινού διανύσματος (υποενότητα 2.4.6). Τέλος γίνεται παρεμβολή επιφάνειας NURBS στις καμπύλες που υπολογίζονται στην πλευρά υποπίεσης και αντίστοιχα παρεμβολή επιφάνειας για τις καμπύλες που υπολογίζονται στην πλευρά υπερπίεσης. Οι δύο παραμετροποιημένες επιφάνειες εξάγονται από τον κώδικα σε αρχείο τύπου IGES [4], ο οποίος αποτελεί Διεθνές Αμερικάνικο Πρότυπο μεταφοράς γεωμετρικών δεδομένων και δεδομένων γραφικών υπολογιστή.



**Σχήμα 2.22:** Προβολή της επιφάνειας της πτέρυγας (planform).



**Σχήμα 2.23:** Οι θέσεις των συντεταγμένων των σημείων που περιγράφουν κάθε αεροτομή, όπως προκύπτουν μετά τους υπολογισμούς με τα δεδομένα διαστάσεων που δίνονται, τη θέση κάθε αεροτομής και τις συντεταγμένες για μοναδιαία χορδή που αντιστοιχούν σε κάθε θέση.

# 3

## ΓΕΝΕΣΗ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ SALOME

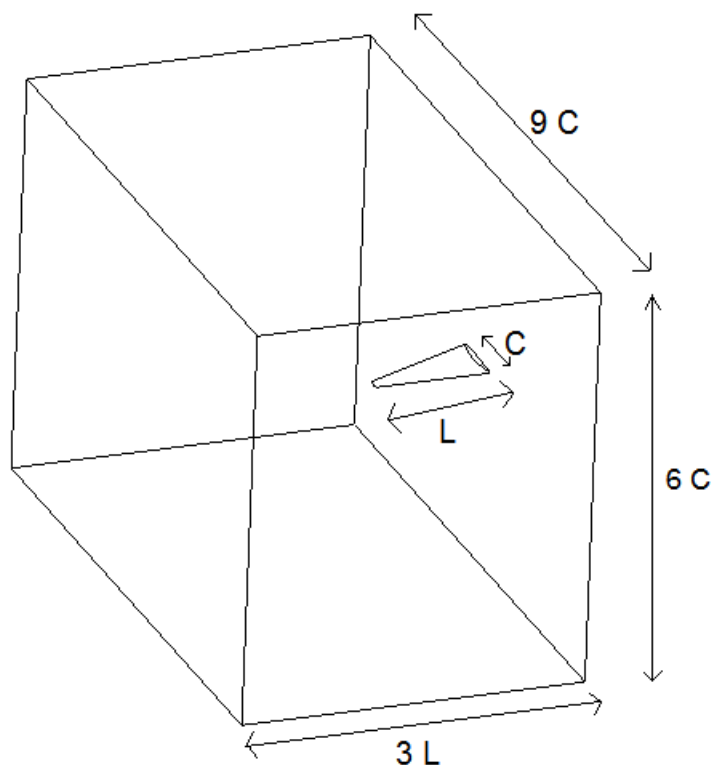
Μετά το πρώτο τμήμα της παραμετροποίησης της πτέρυγας, ακολούθησε η μεταφορά, μέσω του αρχείου τύπου IGES, των δεδομένων που υπολογίστηκαν στην πλατφόρμα Salome [5] για την πραγματοποίηση του δεύτερου κομματιού της εργασίας. Το Salome είναι λογισμικό ανοιχτού κώδικα που προσφέρεται για διαδικασίες επεξεργασίας προ και μετά της αριθμητικής προσομοίωσης. Μέσα στις πολλές λειτουργίες και δυνατότητες που παρέχει στον χρήστη είναι και η δημιουργία επιθυμητών γεωμετριών, η μετέπειτα δημιουργία πλέγματος στις γεωμετρίες αυτές και η εξαγωγή του τελικού πλέγματος στον επιθυμητό τύπο αρχείου για περαιτέρω χρήση. Παρακάτω περιγράφεται η χρήση του και το τελικό αποτέλεσμα στην εργασία αυτή.

### 3.1 Γένεση πλέγματος

Στην πλατφόρμα Salome αρχικά εισήχθησαν οι δύο επιφάνειες NURBS, που περιγράφουν τις πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης της πτέρυγας. Στη συνέχεια δημιουργήθηκε η γεωμετρία του χωρίου γύρω και αρκετά μακριά από αυτό. Στο σχήμα 3.1 φαίνονται τα αντίστοιχα μεγέθη του χωρίου σε σχέση με το μήκος της χορδής (C) στη ρίζα της πτέρυγας και σε σχέση με το εκπέτασμα της πτέρυγας (L). Η τελική γεωμετρία πέρασε έπειτα στην υπομονάδα πλεγματοποίησης του Salome στην οποία δημιουργήθηκε το πλέγμα ως εξής:

Αρχικά, για το κυρίως πλέγμα επιλέχθηκε η διακριτοποίηση κάθε ακμής της γεωμετρίας σε πέντε τμήματα, από την οποία ξεκίνησε η δημιουργία τριγωνικών στοιχείων σε κάθε επιφάνεια. Εκεί χρησιμοποιήθηκε η επιλογή max element area στην οποία ορίζεται η μέγιστη περιοχή που θα καλύπτει το κάθε τριγωνικό στοιχείο. Έπειτα, ακολούθησε η δημιουργία τετραεδρικών στοιχείων στο χώρο

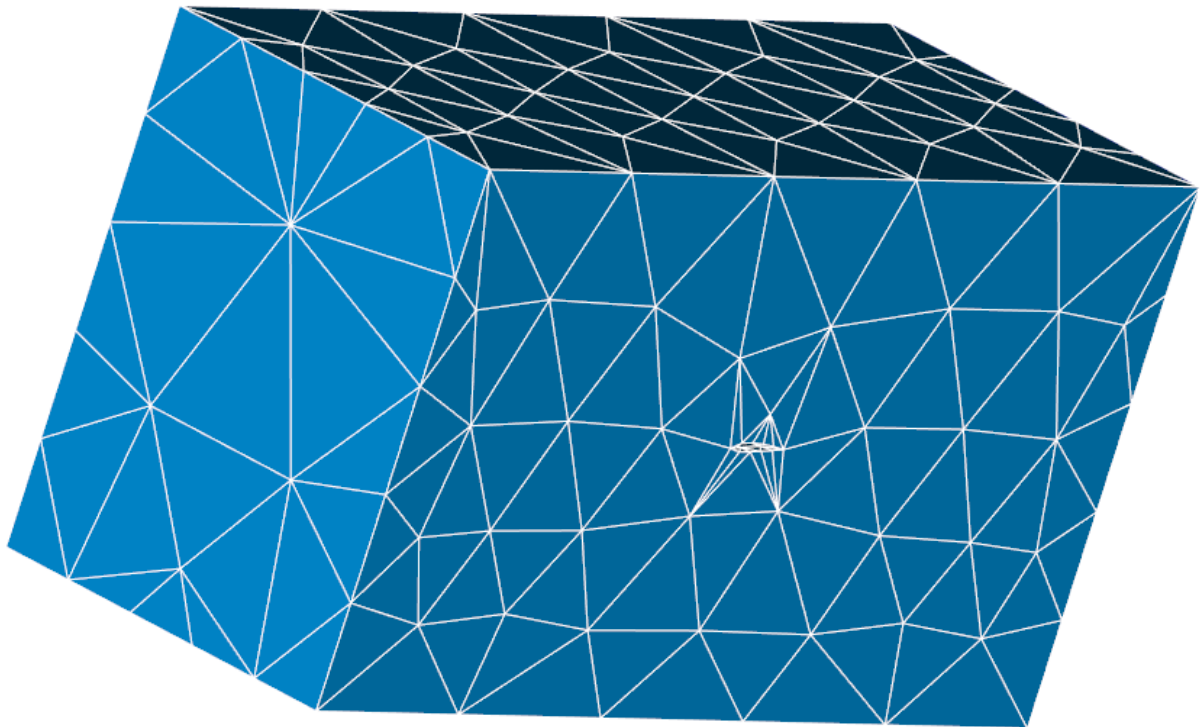
χρησιμοποιώντας την επιλογή Netgen 3D Parameters, η οποία αποτελεί πρόσθετο εργαλείο πλεγματοποίησης του Salome. Με τη συγκεκριμένη επιλογή μπορεί να διαμορφωθεί ο ρυθμός αποπύκνωσης του πλέγματος στο χώρο ξεκινώντας από το πυκνό πλέγμα μίας επιφάνειας και καταλήγωντας στο αραιότερο πλέγμα μίας άλλης. Εδώ επιλέχθηκε ο ελάχιστος ρυθμός.



**Σχήμα 3.1:** Η γεωμετρία που δημιουργήθηκε στην πλατφόρμα Salome. Παρατηρείται η πτέρυγα και το χωρίο που προσδιορίζεται γύρω από αυτό και τα σχετικά μεγέθη ως προς το μήκος της χορδής  $C$  στη ρίζα της πτέρυγας και ως προς το μήκος του  $L$ .

Το αρχικό πλέγμα δημιουργήθηκε σκοπίμως πολύ αραιό (σχήμα 3.2) λόγω του μεγάλου όγκου της αεροδυναμικής σήραγγας. Παρότι επιλέχθηκε η λεπτομερέστερη περίπτωση στο χωρικό πλέγμα, η πολύ αραιή διακριτοποίηση στις

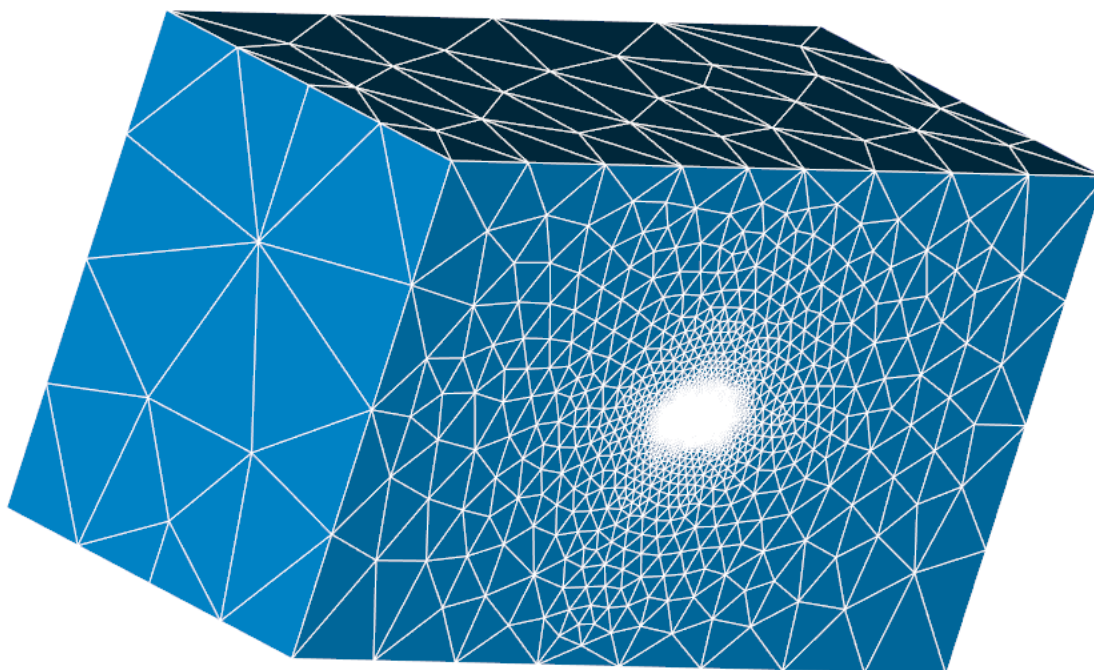
ακμές και τις επιφάνειες δημιούργησε μεγάλα τετραεδρικά στοιχεία οπότε ο χώρος καλύφθηκε με όσο το δυνατόν λιγότερα στοιχεία. Για την βελτίωση του πλέγματος έγινε πύκνωση της διακριτοποίησης των ακμών της πτέρυγας με τη χρήση υποπλεγμάτων. Για το χείλος πρόσπτωσης (leading edge) και το χείλος εκφυγής (trailind edge) επιλέχθηκε διακριτοποίηση σε 150 τμήματα, για τις ακμές στην άκρη της πτέρυγας (tip) σε 40 τμήματα και για τις ακμές στη ρίζα της πτέρυγας (root) σε 70 τμήματα. Επίσης,



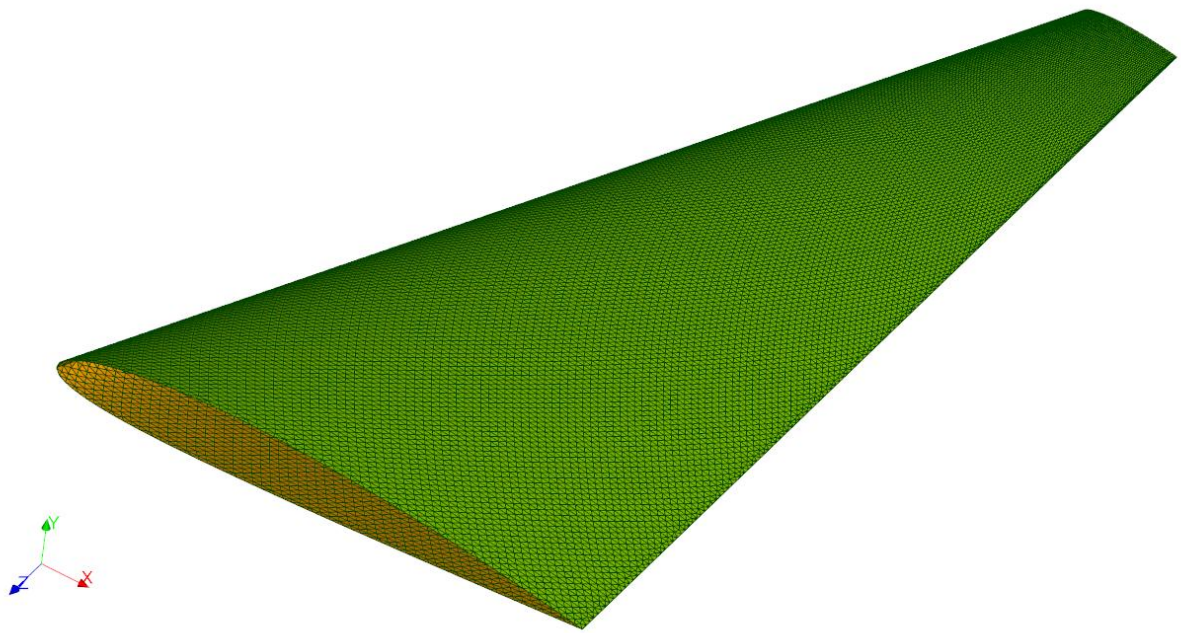
Σχήμα 3.2: Το αρχικό κυρίως πλέγμα. Παρατηρείται το μεγάλο μέγεθος των στοιχείων και η έλλειψη πύκνωσης κοντά στην πτέρυγα. [5]

επιλέχθηκε η χρήση υποπλέγματος (submesh, εργαλείο επεξεργασίας επιμέρους τμήματος ενός πλέγματος) στην πλευρά του χωρίου που βρίσκεται η ρίζα της πτέρυγας, με ανάπτυξη των τριγωνικών στοιχείων με την υπόθεση Netgen 2D Parameters που είναι αντίστοιχη της Netgen 3D Parameters. Επιλέχθηκε και εδώ ο

ελάχιστος ρυθμός. Με τον τρόπο αυτό και τον υπολογισμό με τα νέα δεδομένα του κυρίως πλέγματος, δημιουργήθηκε το επιθυμητο αποτέλεσμα: Πολυ πυκνό πλέγμα και μικρά στοιχεία κοντά στην πτέρυγα και στην πλευρά του χωρίου που βρίσκεται η ρίζα της (σχήμα 3.3) και μικρό ρυθμό αραιώσης του πλέγματος και αύξησης των στοιχείων όσο απομακρυνόμαστε από αυτά. Το τελικό πλέγμα αποτελείται από 199.091 κόμβους εκ των οποίων οι 23.384 (σχήμα 3.4) βρίσκονται στις πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης της πτέρυγας.



Σχήμα 3.3: Το τελικό κυρίως πλέγμα. Παρατηρείται η πύκνωση των στοιχείων στο χώρο από το επ'άπειρο όριο προς την πτέρυγα. [5]



Σχήμα 3.4: Το κυρίως πλέγμα της πτέρυγας. [5]



# 4

## ΚΥΚΛΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕ ΤΗ ΣΥΝΕΧΗ ΣΥΖΥΓΗ ΜΕΘΟΔΟ

Στο τρίτο μέρος της εργασίας, πραγματοποιήθηκε κύκλος βελτιστοποίησης του πλέγματος που δημιουργήθηκε με το λογισμικό Salome και δοκιμάστηκε εάν αυτό μπορεί να οδηγήσει σε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Στα υποκεφάλαια που ακολουθούν περιγράφονται λεπτομερώς τα βήματα του κύκλου βελτιστοποίησης.

### 4.1 Συνεχής συζυγής μέθοδος

Το πρώτο βήμα του κύκλου βελτιστοποίησης ήταν η εισαγωγή του πλέγματος στον κώδικα που βασίζεται στη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο και έχει αναπτυχθεί στην ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ. Παρακάτω παρατίθενται οι εξισώσεις που περιγράφουν τη μέθοδο και δείχνουν πως υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας, δηλαδή η μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού (συντεταγμένες κόμβων του πλέγματος).[3],[6]

#### 4.1.1 Το πρωτεύον σύστημα εξισώσεων

Το πρωτεύον σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει την ροή που επιλέχθηκε στον κώδικα αποτελείται από τις εξισώσεις Euler για συμπιεστό μη συνεκτικό ρευστό (inviscid flow), [3],[6],[9],[10],[11]

$$R_n = \frac{\partial U_n}{\partial t} + \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_k} = 0 \quad (4.1)$$

όπου  $k=1,3$  και  $n=1,5$  για τριδιάστατες ροές και  $U = [\rho, \rho v_k, E]^T$  είναι το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών με  $\rho$  την πυκνότητα,  $v_k$  τις συνιστώσες της ταχύτητας και

Ε την ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου. Οι ατριβείς (inviscid) ροές δίνονται από [3],[6],[9],[10],[11]:

$$f_{nk}^{inv} = \begin{bmatrix} \rho v_k \\ \rho v_{n-1} v_k + p \delta_{(n-1)k} \\ v_k (E + p) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

όπου  $p$  είναι η στατική πίεση και  $\delta_{ij}$  το δέλτα του Kronecker. Υποθέτοντας ότι  $\Omega$  είναι το υπολογιστικό χωρίο και επειδή πρόκειται για εξωτερική αεροδύναμη το όριο  $S$  του  $\Omega$  αποτελείται από τον στερεό τοίχο  $S_w$  (πτέρυγα) και το απομακρυσμένο όριο  $S_\infty$  (far field).

#### 4.1.2 Μαθηματική διατύπωση της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου

Η αντικειμενική συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση είναι η προβολή της αεροδύναμης που επενεργεί στην πτέρυγα κατά μήκος διεύθυνσης που καθορίζεται από το διάνυσμα  $r_k$  [3],[6],[9]. Αυτό εκφράζεται ως :

$$F = \int_{S_w} p n_k r_k dS \quad (4.3)$$

όπου  $n_k$  είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος στην επιφάνεια  $S_w$  και  $r_k = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$ , με τον όρο  $\bar{u}$  να είναι το διάνυσμα της ταχύτητας της ροής. Το σχήμα του σώματος  $S_w$  εξαρτάται από το σύνολο  $N$  των κόμβων του πλέγματος  $b_i$ ,  $i \in [1, N]$ . Η μεταβολή της συνάρτησης  $F$  εξαιτίας οποιασδήποτε μεταβολής των  $b_i$  δίνεται από τη σχέση :

$$\frac{\delta F}{\delta b_i} = \int_{S_w} \frac{\delta p}{\delta b_i} n_k r_k dS + \int_{S_w} p \frac{\delta}{\delta b_i} (n_k r_k dS) \quad (4.4)$$

Η διατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου ξεκινά υπολογίζοντας τις μεταβολές της επαυξημένης (augmented) αντικειμενικής συνάρτησης  $F_{aug} = F + \int_{\Omega} \Psi_n R_n d\Omega$  ως

προς τα  $b_i$  ως εξής :

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i} = \frac{\delta F}{\delta b_i} + \int_{\Omega} \Psi_n \frac{\partial R_n}{\partial b_i} d\Omega + \int_{\Omega} R_n \frac{\partial \Psi_n}{\partial b_i} d\Omega + \int_S \Psi_n R_n n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_i} dS \quad (4.5)$$

Τα δύο τελευταία ολοκληρώματα εξαλείφονται καθώς ισχύουν οι εξισώσεις  $R_n=0$ . Το πρώτο πεδιακό ολοκλήρωμα της σχέσης (4.5) γράφεται ως :

$$\int_{\Omega} \Psi_n \frac{\partial R_n}{\partial b_i} d\Omega = \int_{\Omega} \Psi_n \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial b_i} \right) d\Omega \quad (4.6)$$

Το δεύτερο μέλος αναπτύσσεται περαιτέρω ως εξής :

$$\int_{\Omega} \Psi_n \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial b_i} \right) d\Omega = \int_S \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial b_i} n_k dS - \int_{\Omega} A_{nmk} \frac{\partial \Psi_n}{\partial b_i} \frac{\partial U_m}{\partial b_i} d\Omega \quad (4.7)$$

καθώς  $f_{nk}^{inv} = A_{nmk} U_m$  με το  $A_{nmk}$  να είναι η Ιακωβιανή της ροής. Στην (4.7) το επιφανειακό ολοκλήρωμα αναλύεται σε δύο ολοκληρώματα κατά μήκος του  $S_w$  και του  $S_{\infty}$ . Καθώς οι αλλαγές στις μεταβλητές σχεδιασμού δεν επηρεάζουν το  $S_{\infty}$  ισχύει

$$\begin{aligned} \int_S \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial b_i} n_k dS &= \int_{S_w} \Psi_n \frac{\delta(f_{nk}^{inv} n_k dS)}{\delta b_i} - \int_{S_w} \Psi_n f_{nk}^{inv} \frac{\delta(n_k dS)}{\delta b_i} - \int_{S_w} \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_l} \frac{\delta x_l}{\delta b_i} n_k dS + \\ &+ \int_{S_{\infty}} \Psi_n A_{nmk} n_k \frac{\delta U_m}{\delta b_i} dS \end{aligned} \quad (4.8)$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη μη-εισχώρησης και θέτοντας  $\Psi_n=0$  στα επ'άπειρο όρια για να εξαλειφθεί, ο τελευταίος όρος στη σχέση (4.8), το παραπάνω επιφανειακό ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int_S \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial b_i} n_k dS = \int_{S_w} \Psi_{k+1} n_k \frac{\delta p}{\delta b_i} dS - \int_{S_w} (\Psi_{k+1} p - \Psi_n f_{nk}^{inv}) \frac{\delta(n_k dS)}{\delta b_i} - \int_{S_w} \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_l} \frac{\delta x_l}{\delta b_i} n_k dS \quad (4.9)$$

Το επόμενο βήμα είναι να γίνει η έκφραση (4.5) ανεξάρτητη της αλλαγής των μεταβλητών της ροής. Αρχικά εξαλείφονται τα πεδιακά ολοκληρώματα αυτής της έκφρασης, τα οποία εξαρτώνται από τις αλλαγές  $\delta U_m / \delta b_i$ , ικανοποιώντας την πεδιακή συζυγή εξίσωση

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial t} - A_{nmk} \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} = 0 \quad (4.10)$$

Στις ατριβείς ροές, για να εξαλειφθούν τα επιφανειακά ολοκληρώματα της μεταβολής της πίεσης στα στερεά τοιχώματα, στις εξισώσεις (4.4) και (4.9), εφαρμόζεται η έκφραση  $\Psi_{m+1} n_m = -r_m n_m$ , που είναι αντίστοιχη της συνθήκης μη-εισχώρησης για την πρωτεύουσα ταχύτητα. Η κάθετη στην επιφάνεια συζυγής ταχύτητα γίνεται ίση με μηδέν μόνο όταν το  $\bar{n}$  είναι κάθετο στο  $\bar{r}$ . Οι οριακές συνθήκες για τη συζυγή ταχύτητα στα τοιχώματα εξαλείφει επίσης τα επιφανειακά ολοκληρώματα που περιλαμβάνουν μεταβολές της πίεσης επάνω στα τοιχώματα στις εξισώσεις (4.4) και (4.9).

Τελικά, τα εναπομείναντα επιφανειακά ολοκληρώματα δίνουν τις παραγώγους ευαισθησίας,

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i} = \int_{S_w} p \frac{\delta}{\delta b_i} (n_k r_k dS) - \int_{S_w} \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_l} \frac{\delta x_l}{\delta b_i} n_k dS + \int_{S_w} (\Psi_{k+1} p - \Psi_n f_{nk}^{inv}) \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} \quad (4.11)$$

#### 4.1.3 Διακριτοποίηση και αριθμητική λύση

Η πρωτεύουσα (4.1) και η συζυγής εξίσωση (4.10) διακριτοποιούνται χρησιμοποιώντας την κεντροκομβική μέθοδο πεπερασμένων όγκων σε μη-δομημένο πλέγμα. Στο σχήμα 4.1 παρουσιάζεται ένας πεπερασμένος όγκος που σχηματίζεται γύρω από έναν κόμβο P σε διδιάστατο πλέγμα για λόγους απλότητας. Στον πρωτεύοντα επιλύτη, οι ατριβείς αριθμητικές ροές που διασχίζουν γειτονικούς πεπερασμένους όγκους, υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τον προσεγγιστικό επιλύτη Riemann με ακρίβεια δεύτερης τάξης ως εξής:

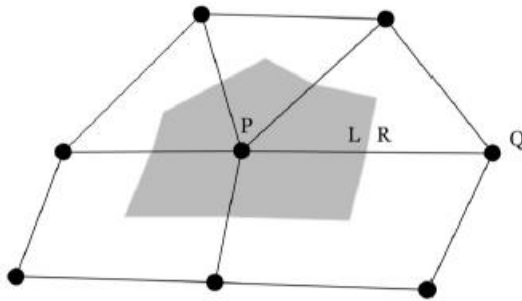
$$\Phi_n^{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{A}_{nm}^P U_m^P + \underline{A}_{nm}^Q U_m^Q) - \frac{1}{2}|\underline{A}_{nm}^{PQ}|(U_m^R - U_m^L) \quad (4.12)$$

όπου ο  $\Phi^{PQ}$  χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του υπολοίπου στον κόμβο P και ο  $\Phi^{QP} = -\Phi^{PQ}$  χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του υπολοίπου στο Q [3],[6],[9]. Στην εξίσωση (4.12) ισχύει  $\underline{A}_{nm} = A_{nmk} n_k$  όπου  $n_k$  είναι το κάθετο διάνυσμα στη διεπιφάνεια των πεπερασμένων όγκων που σχηματίζεται γύρω από τους κόμβους P,Q και δείχνει προς το Q. Ο όρος  $\underline{A}^{PQ}$  υπολογίζεται με βάση τις μέσες κατά Roe μεταβλητές ροής,  $U^P$  και  $U^Q$  είναι οι μεταβλητές ροής που αποθηκεύονται στα P και Q αντίστοιχα και  $U^R$  και  $U^L$  είναι οι μεταβλητές ροής στο δεξί και αριστερό σύνορο του πεπερασμένου όγκου, όπου αποκτώνται με προεκβολή των  $U^Q$  και  $U^P$  αντίστοιχα.

Οι συζυγείς ατριβείς αριθμητικές ροές υπολογίζονται ως εξής:

$$\Phi_m^{adj,PQ} = -\frac{1}{2} \underline{A}_{nm}^P (\Psi_n^P + \Psi_n^Q) - \frac{1}{2} |\underline{A}_{nm}^{PQ}| (\Psi_n^R + \Psi_n^L) \quad (4.13)$$

$$\Phi_m^{adj,QP} = \frac{1}{2} \underline{A}_{nm}^Q (\Psi_n^P + \Psi_n^Q) + \frac{1}{2} |\underline{A}_{nm}^{PQ}| (\Psi_n^R + \Psi_n^L) \quad (4.14)$$



**Σχήμα 4.1:** Πεπερασμένος όγκος γύρω από κόμβο P [3].

Οι πρωτεύουσες και οι συζυγείς εξισώσεις λύνονται επαναληπτικά με τις διορθώσεις των πρωτευουσών και των συζυγών μεταβλητών  $\Delta U$  και  $\Delta \Psi$  αντίστοιχα σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_n}{\partial U_m} \Delta U_m &= -R_n & U_m^{n+1} &= U_m^n + \Delta U_m \\ \frac{\partial R_m}{\partial \Psi_n} \Delta \Psi_n &= -R_m & \Psi_n^{n+1} &= \Psi_n^n + \Delta \Psi_n \end{aligned} \quad (4.15)$$

Οι εξισώσεις (4.15) λύνονται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Jacobi που παραλληλοποιείται εύκολα σε κάρτες γραφικών.

## 4.2 Υπολογισμός νέων τιμών σημείων ελέγχου

Το δεύτερο βήμα του κύκλου βελτιστοποίησης περιλαμβάνει την ανάπτυξη κώδικα με τη βοήθεια του οποίου έγιναν οι υπολογισμοί που παρατίθενται παρακάτω.

### 4.2.1 Αναστροφή σημείων (point inversion)

Αρχικά ο κώδικας υπολογίζει για κάθε κόμβο του πλέγματος τις αντίστοιχες τιμές των παραμέτρων των διανυσμάτων κόμβων που περιγράφουν την επιφάνεια της πτέρυγας όπου βρίσκεται το πλέγμα. Για τον υπολογισμό αυτό ακολουθείται η εξής διαδικασία:

Χωρίζεται το  $U$  διάνυσμα κόμβων σε 110 μέρη και το  $V$  σε 100 και υπολογίζονται τα  $S(u,v)$  σημεία για όλες τις παραμέτρους που προκύπτουν. Στη συνέχεια, υπολογίζεται η διαφορά κάθε σημείου του πλέγματος  $P$  από όλα τα  $S(u,v)$  σημεία και για την μικρότερη διαφορά κάθε σημείου ελέγχου δημιουργείται η διανυσματική συνάρτηση

$$r(u,v) = S(u,v) - P \quad (4.16)$$

Σχηματίζονται επίσης οι βαθμωτές συναρτήσεις

$$f(u, v) = r(u, v) \cdot S_u(u, v) = 0 \quad (4.17)$$

$$g(u, v) = r(u, v) \cdot S_v(u, v) = 0 \quad (4.18)$$

όπου όταν επιβεβαιώνονται ελαχιστοποιείται η απόσταση των P από την επιφάνεια. Οι κάτω δείκτες u, v υπονοούν παντού παραγώγιση ως προς την παράμετρο που αναγράφεται ως δείκτης.

Για να λυθεί το σύστημα των εξισώσεων (4.17) και (4.18) με την επαναληπτική μέθοδο Newton ορίζονται τα

$$\delta_i = \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{i+1} - u_i \\ v_{i+1} - v_i \end{bmatrix}$$

$$J_i = \begin{bmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |S_u|^2 + r \cdot S_{uu} & S_u \cdot S_v + r \cdot S_{uv} \\ S_u \cdot S_v + r \cdot S_{vu} & |S_v|^2 + r \cdot S_{vv} \end{bmatrix}$$

$$\kappa_i = - \begin{bmatrix} f(u_i, v_i) \\ g(u_i, v_i) \end{bmatrix}$$

όπου όλες οι συναρτήσεις στον πίνακα  $J_i$  υπολογίζονται στα  $(u_i, v_i)$ . Στην i-οστή επανάληψη λύνεται το  $2 \times 2$  σύστημα γραμμικών ως προς τους αγνώστους  $\delta_i$

$$J_i \delta_i = \kappa_i \quad (4.19)$$

Τέλος, από τα  $\delta_i$  αποκτώνται οι νέες τιμές των παραμέτρων

$$u_{i+1} = \Delta u + u_i \quad (4.20)$$

$$v_{i+1} = \Delta v + v_i$$

Τα κριτήρια σύγκλισης δίνονται από

$$|(u_{i+1} - u_i)S_u(u, v) + (v_{i+1} - v_i)S_v(u, v)| \leq \varepsilon_1 \quad (4.21)$$

$$|S_u(u_i, v_i) - P| \leq \varepsilon_1 \quad (4.22)$$

$$\frac{|S_u(u_i, v_i) \cdot (S(u_i, v_i) - P)|}{|S_u(u_i, v_i)| |(S(u_i, v_i) - P)|} \leq \varepsilon_2 \quad \frac{|S_v(u_i, v_i) \cdot (S(u_i, v_i) - P)|}{|S_v(u_i, v_i)| |(S(u_i, v_i) - P)|} \leq \varepsilon_2 \quad (4.23)$$

Στη συνέχεια ελέγχονται και πάλι οι συνθήκες (4.22), αν αυτές δεν ικανοποιούνται υπολογίζεται νέα τιμή  $(u_{i+1}, v_{i+1})$  μέσω της (4.20). Τότε, ελέγχονται ακόμη οι συνθήκες που επιβεβαιώνουν ότι οι παράμετροι παραμένουν εντός των διανυσμάτων κόμβων ( $u_{i+1} \in [a, b]$  και  $v_{i+1} \in [c, d]$ )

$$\begin{aligned} \text{αν } (u_{i+1} < a) \quad u_{i+1} &= a \\ \text{αν } (u_{i+1} > b) \quad u_{i+1} &= b \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \text{αν } (v_{i+1} < c) \quad v_{i+1} &= c \\ \text{αν } (v_{i+1} > d) \quad v_{i+1} &= d \end{aligned}$$

και

$$|(u_{i+1} - u_i)S_u(u_i, v_i) + (v_{i+1} - v_i)S_v(u_i, v_i)| \leq \varepsilon_1 \quad (4.24)$$

Οι επαναλήψεις σταματούν όταν ικανοποιηθεί μία από τις σχέσεις (4.21), (4.22) ή (4.24).

#### 4.2.2 Υπολογισμός γεωμετρικών παραγώγων

Από τη σχέση (2.7) και για βάρυ μονάδα προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{i,j}, \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (4.25)$$

Οπότε, παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της (4.25) με  $P_{i,j}$  προκύπτουν οι γεωμετρικές παράγωγοι, δηλαδή οι μεταβολές της θέσης των κόμβων του πλέγματος ως συνάρτηση της μεταβολής της θέσης των σημείων ελέγχου, ως εξής:

$$\frac{dS(u, v)}{dP_{i,j}} = N_{i,p}(u) N_{j,q}(v), \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (4.26)$$



Με τη βοήθεια των σχέσεων (4.11) και (4.26) υπολογίζονται στον κώδικα που αναπτύχθηκε οι παράγωγοι ευαισθησίας ως προς τη μεταβολή της θέσης των σημείων ελέγχου με τη μέθοδο της αλυσιδωτής παραγώγισης.

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_k} \frac{\delta b_k}{\delta P_{i,j}} = \frac{\delta F_{aug}}{\delta P_{i,j}} \quad (4.27)$$

εφόσον με τους όρους  $\delta b_k$  και  $\delta S(u,v)$  περιγράφεται η μεταβολή της θέσης των κόμβων του πλέγματος. Στην (4.27) γίνεται άθροιση ως προς τον δείκτη  $k$ .

Από την (4.27) και τη μέθοδο της απότομης καθόδου προκύπτει η ανανεωμένη τιμή των θέσεων των σημείων ελέγχου από τη σχέση

$$P_{i,j}^{new} = P_{i,j}^{old} - \eta \frac{\delta F_{aug}}{\delta P_{i,j}} \quad (4.28)$$

με συντελεστή  $\eta=0.01$ .

### 4.3 Μετακίνηση πλέγματος

Με τα νέα σημεία ελέγχου που προκύπτουν από τη σχέση (4.28) υπολογίζονται οι νέες θέσεις των κόμβων του πλέγματος στην επιφάνεια της πτέρυγας, καθώς με τη σχέση (4.20) έχουν βρεθεί οι κόμβοι  $u,v$  που αναπαράγουν κάθε κόμβο στην παραμετρική περιγραφή. Για την μετακίνηση όμως του 3D πλέγματος χρησιμοποιείται ο κώδικας που αναπτύχθηκε στην ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ και χρησιμοποιεί τη μέθοδο των ελατηρίων. Το νέο πλέγμα εισάγεται εκ νέου στον κώδικα συνεχούς συζυγούς μεθόδου της ΜΠΥΡ&Β και ξεκινά νέος κύκλος βελτιστοποίησης.

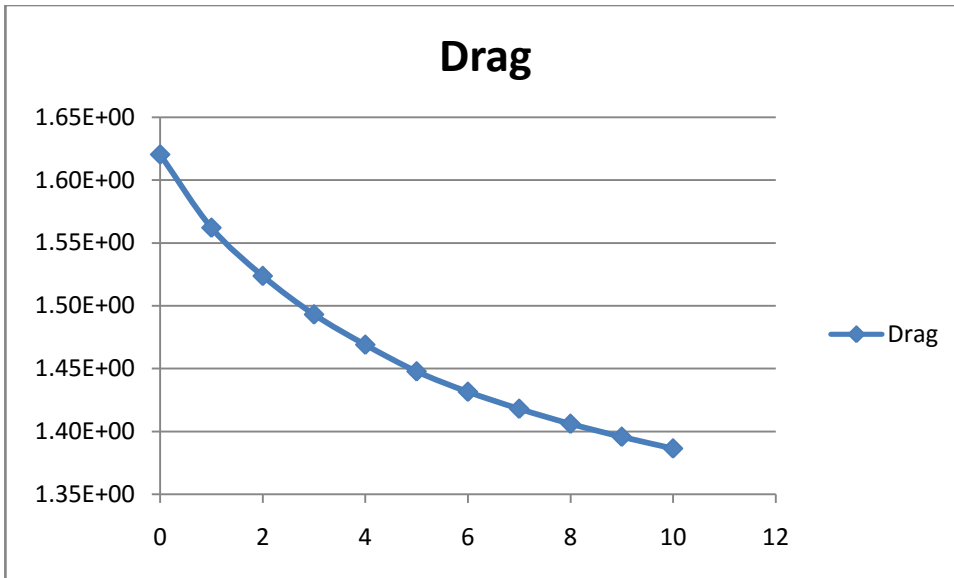
# 5

## ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

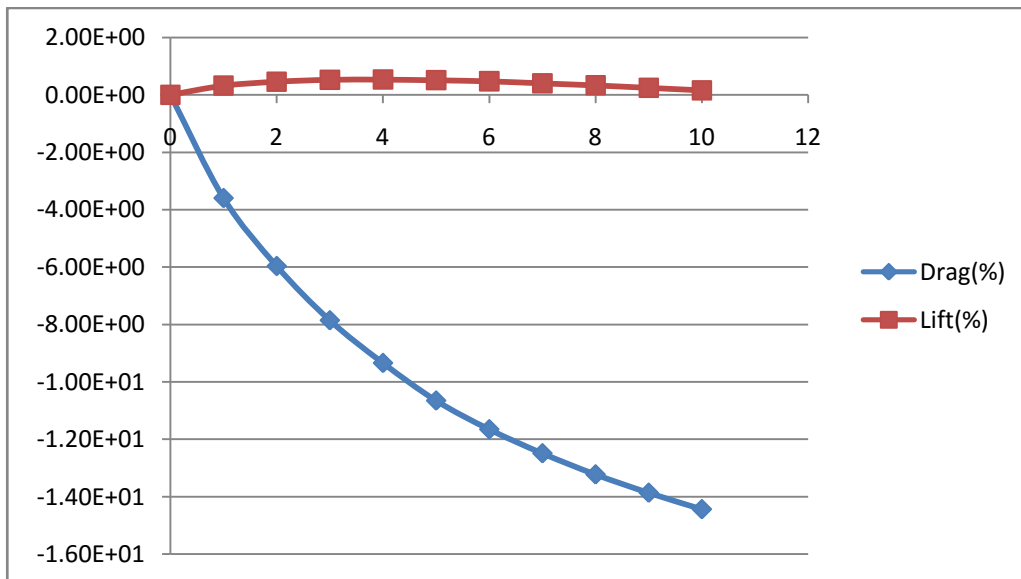
### 5.1 Αποτελέσματα

Πραγματοποιήθηκαν δέκα κύκλοι βελτιστοποίησης με τα βήματα που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 4. Σε αυτά χρησιμοποιήθηκαν συντεταγμένες σημείων που περιγράφουν την αεροτομή NACA 2412. Δόθηκαν 101 σημεία που περιγράφουν την πλευρά υποπίεσης και 101 που περιγράφουν την πλευρά υπερπίεσης. Οι διαστάσεις της πτέρυγας που δόθηκαν ήταν  $L=17.156\text{m}$ ,  $C_t=2\text{m}$  και  $\theta=65^\circ$ . Επίσης ο βαθμός που επιλέχθηκε για τις καμπύλες που περιγράφουν τις αεροτομές (κατεύθυνση  $u$  παραμέτρου) ήταν 3 και ο βαθμός κατά μήκος του εκπετάσματος (κατεύθυνση της παραμέτρου  $v$ ) ήταν πάλι 3. Τέλος οι θέσεις των αεροτομών κατά μήκος του εκπετάσματος επιλέχθηκαν να είναι οι 0, 0.25L, 0.5L, 0.75L και L.

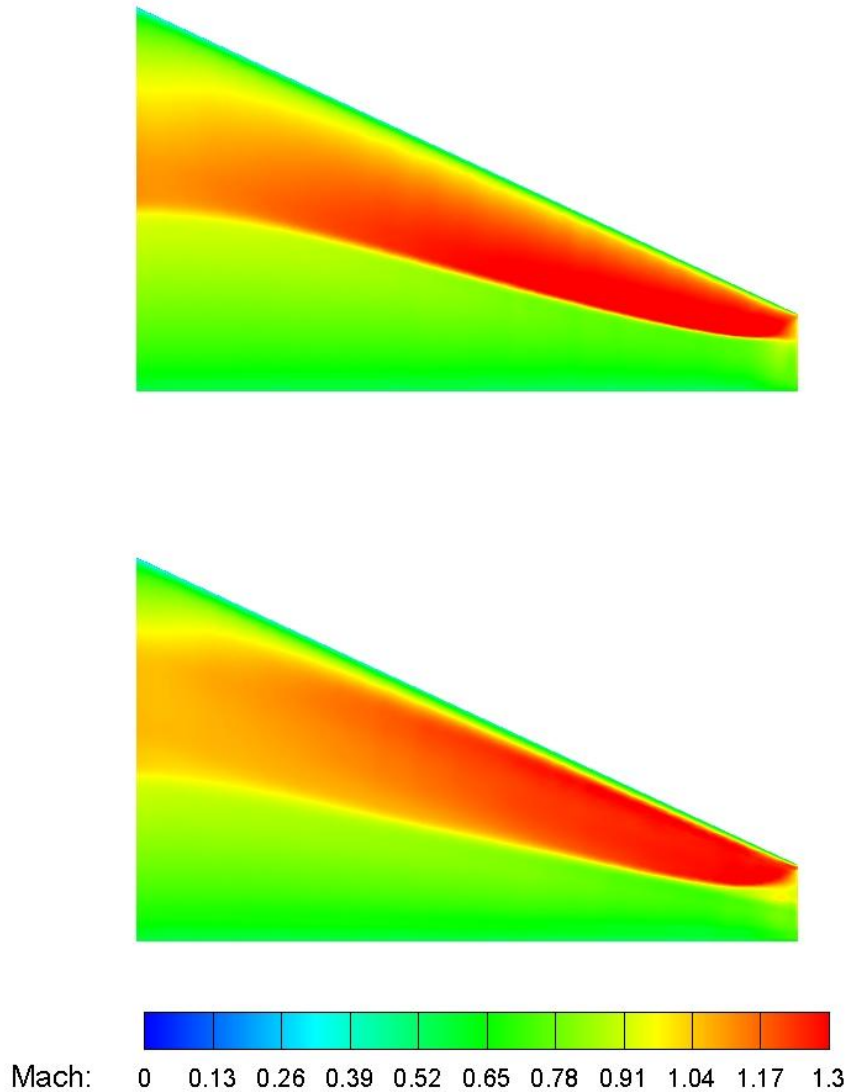
Όπως φαίνεται στα σχήματα 5.1 και 5.2 το αποτέλεσμα των δέκα κύκλων βελτιστοποίησης έδωσε 14% μείωση της τιμής της οπισθέλκουσας (Drag) και σχετικά αμετάβλητη την τιμή της άνωσης (Lift). Στα σχήματα 5.3 και 5.4 όπου παρουσιάζεται η κατανομή του αριθμού Mach στην πτέρυγα μετά τον πρώτο και μετά τον δέκατο κύκλο βελτιστοποίησης, επίσης παρατηρείται μικρή μείωση του κύματος κρούσης.



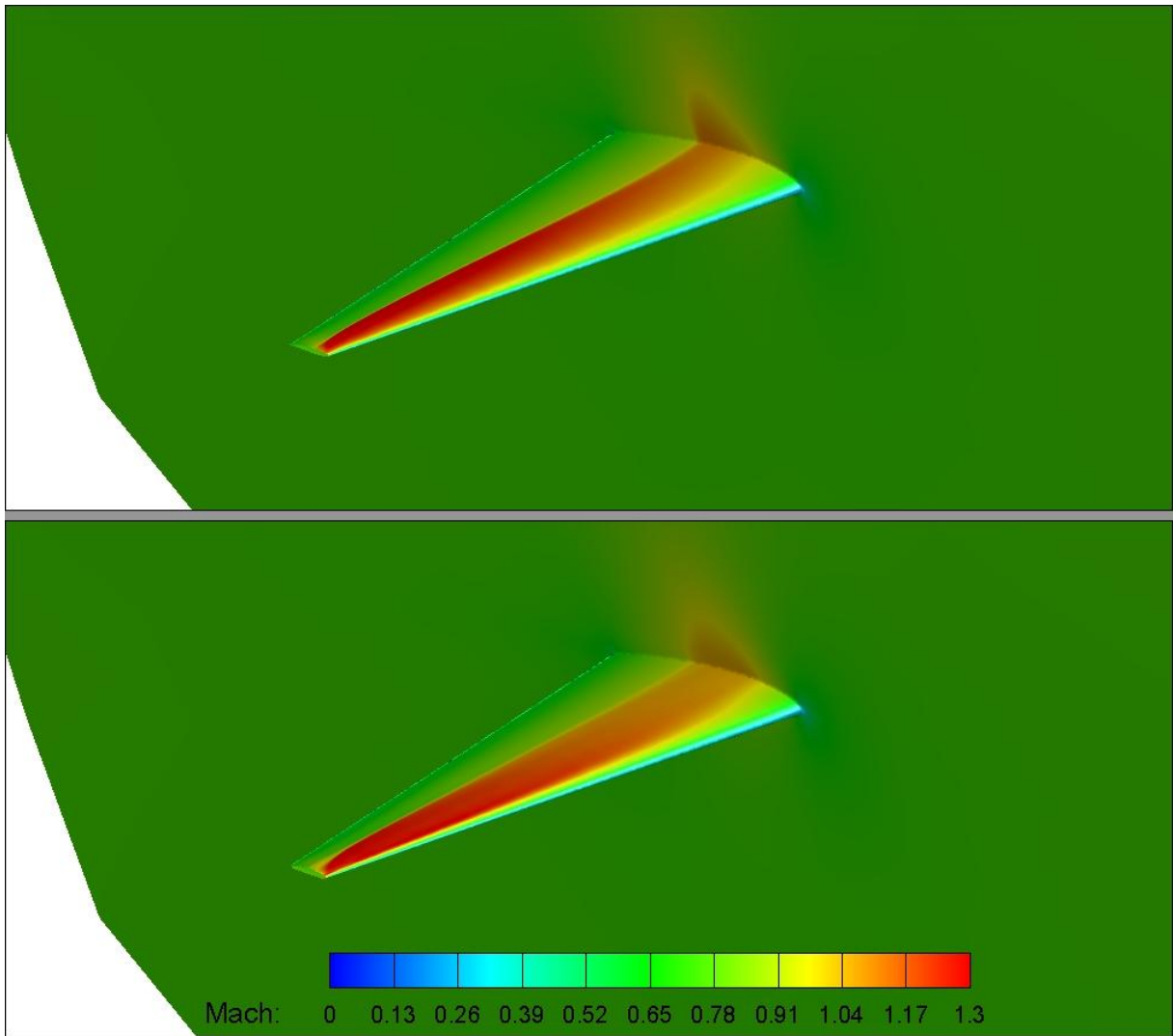
**Σχήμα 5.1:** Παρατηρείται η μείωση της τιμής της οπισθέλκουσας (Drag) με τους κύκλους βελτιστοποίησης.



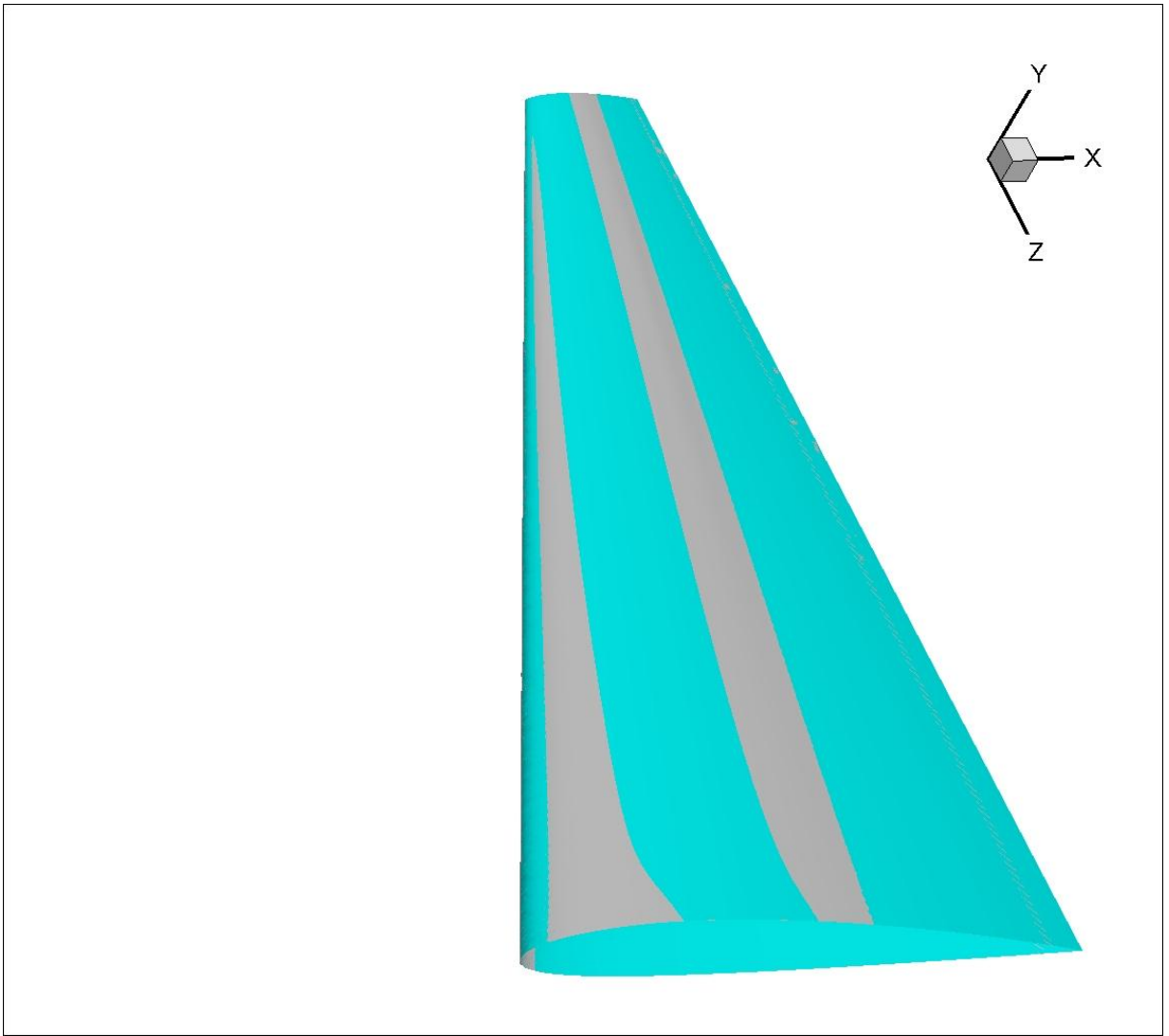
**Σχήμα 5.2:** Μεταβολή της τιμής της οπισθέλκουσας (Drag) και της τιμής της άνωσης (Lift) σε σχέση με την τιμή στον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης και συνολικά με τους κύκλους βελτιστοποίησης.



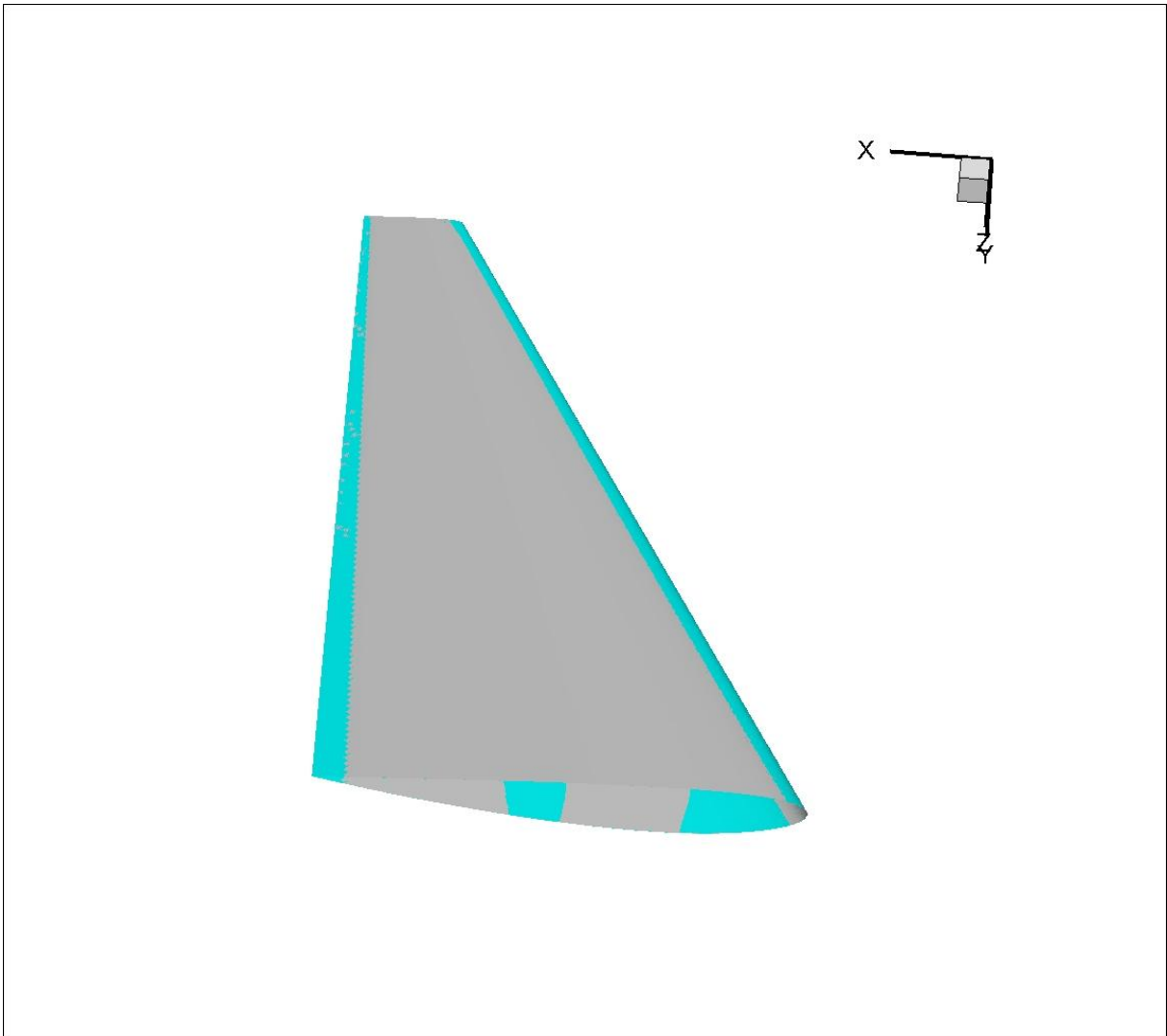
**Σχήμα 5.3:** Κατανομή του αριθμού Mach στην επιφάνεια της πτέρυγας (κάτοψη) μετά τον πρώτο και τον δέκατο κύκλο βελτιστοποίησης αντίστοιχα, όπως προκύπτει για ροή υπό γωνία  $\alpha=2.72^\circ$  και τιμή  $Mach=0.75$  στο επ'άπειρο όριο. Μειώνεται το κύμα κρούσης, ειδικά προς τη ρίζα της πτέρυγας.



**Σχήμα 5.4:** Κατανομή του αριθμού Mach για τις περιπτώσεις του σχήματος 5.3 στην επιφάνεια της πτέρυγας, αλλά και γύρω από αυτή.



(a)



(β)

**Σχήμα 5.5:** Με το γαλάζιο (ανοιχτό) χρώμα φαίνεται η αρχική γεωμετρία της πτέρυγας και με το γκρι (έντονο) χρώμα η γεωμετρία της πτέρυγας μετά από δέκα κύκλους βελτιστοποίησης, α) πλευρά υποπίεσης και β) πλευρά υπερπίεσης.

## 5.2 Συμπεράσματα

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη μεταπτυχιακή αυτή εργασία είναι τα εξής:

α) Είναι εφικτό να δημιουργηθεί η παραμετροποιημένη μορφή μίας πτέρυγας αεροσκάφους με επιφάνειες NURBS, έχοντας ως δεδομένο την περιγραφή αεροτομών με συντεταγμένες σημείων κατά μήκος του εκπετάσματος και παρεμβολή σε αυτές τις αεροτομές (στις επιφάνειες που δημιουργούνται οι καμπύλες αποτελούν ισοπαραμετρικές περιπτώσεις),

β) Η πληροφορία αυτή (επιφάνειες NURBS) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία καλής ποιότητας πλέγματος που να μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε κύκλους βελτιστοποίησης,

γ) Μπορεί να πραγματοποιηθεί η τελική βελτιστοποίηση ως προς τις θέσεις των σημείων ελέγχου της παραμετροποιημένης μορφής με μετατροπή των παραγώγων ευαισθησίας με τη βοήθεια των γεωμετρικών παραγώγων.

δ) Σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης παρατηρείται πτώση του συντελεστή οπισθέλκουσας και ταυτόχρονη διατήρηση του συντελεστή άνωσης με τη δημιουργία κάθε φορά ιδανικότερης γεωμετρίας.

ε) Το κύμα κρούσης που παρατηρείται στους πρώτους κύκλους βελτιστοποίησης μειώνεται σταδιακά.



## Βιβλιογραφία

- [1] Piegl, L. and Tiller, W.: “*The NURBS Book*”, *Second Edition*, Springer-Verlag, 1997
- [2] Rogers, D. F.: “An Introduction to NURBS with Historical Perspective”, Morgan Kaufmann Publishers, 2001
- [3] Xenofon S. Trompoukis, Konstantinos T. Tsiakas, Mehdi Ghavami Nejad, Varvara G. Asouti, and Kyriakos C. Giannakoglou, “The Continuous Adjoint Method on graphics processing units for compressible flows”, in the International Conference on Engineering and Applied Sciences Optimization, M.Papadrakakis, M.G.Kalafitis, N.D.Lagaros(eds.), (Kos Island, Greece, 2014)
- [4] IGES/PDES Organisation, “Initial Graphics Exchange Specification IGES 5.3”, N.Charleston, SC:U.S. Product Data Association, 1996
- [5] Salome: The Open Source Integration Platform for Numerical Simulation <http://www.salome-platform.org/>
- [6] D.I.Papadimitriou, K.C.Giannakoglou, “A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals, for inviscid and viscous flows”, *Journal Computers & Fluids* 36(2007) 325-341
- [7] I.C. Kambolis, X.S. Trompoukis, V.G. Asouti, K.C. Giannakoglou, “CFD-based analysis and two-level aerodynamic optimization on graphics processing units”, *Journal Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 199 (2010) 712-722
- [8] Antony Jameson, Sriram Shankaran, Luigi Martinelli, “Continuous Adjoint Method for Unstructured Grids”, *AIA A Journal*, Vol. 46, No. 5, May 2008
- [9] Γιαννάκογλου Κ., “Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική”, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών. Ε.Μ.Π., 2005
- [10] Τσαγγάρης Σ., “Μηχανική των ρευστών”, Εκδόσεις Συμείων Ο.Ε., 1995
- [11] G.K. Batchelor, “An Introduction to Fluid Dynamics”, Cambridge Univ. Press, 1<sup>st</sup> edition, 1967