



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Παραλληλοποίηση Επιλύτη του Πρωτεύοντος και
Συζυγούς Προβλήματος Ατριβούς Ροής Συμπιεστού
Ρευστού στη Βελτιστοποίηση Μορφής

Μεταπτυχιακή Εργασία

Αντώνιος Βαρβασούδης

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2018



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Παραλληλοποίηση Επιλύτη του Πρωτεύοντος και Συζυγούς
Προβλήματος Ατριβούς Ροής Συμπιεστού Ρευστού. Εφαρμογή στη
Βελτιστοποίηση Μορφής Αεροτομής.

Μεταπτυχιακή Εργασία

Βαρβασούδης Αντώνιος

Επιβλέπων: Κ. Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2018

Περίληψη

Στη μεταπτυχιακή αυτή εργασία τροποποιείται το ήδη υπάρχον λογισμικό της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης (ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ), για βελτιστοποίησης μορφής σε μεμονωμένη αεροτομή, με σκοπό να εκμεταλλεύεται πολυεπεξεργαστικά συστήματα. Στο εν λόγω λογισμικό επιλύεται το πρωτεύον και το συζυγές πρόβλημα για ατριβή ροή συμπιεστού ρευστού, μόνιμη στο χρόνο. Για την παραμετροποίηση της μορφής της αεροτομής χρησιμοποιούνται καμπύλες Bézier και στόχος της βελτιστοποίησης είναι η μεγιστοποίηση της δύναμης άνωσης.

Οι εξισώσεις Euler διακριτοποιούνται σε οριόδετο μη-δομημένο πλέγμα, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων. Στην παραλληλοποίηση του λογισμικού, το συνολικό χωρίο διασπάται σε υποχωρία αλληλοκαλυπτόμενων ζωνών και σε κάθε νέα μορφή της αεροτομής που προκύπτει κατά τη βελτιστοποίηση, προσαρμόζεται εκ νέου το ίδιο πλέγμα αποφεύγοντας την επαναδημιουργία του.

Τα ανωτέρω προγραμματίστηκαν με τη χρήση του πρωτόκολλου MPI, βάση του οποίου αναλύονται οι απαιτούμενες δομές επικοινωνίας της πολυεπεξεργασίας. Οι τροποποιήσεις που εφαρμόστηκαν στο αναπτυχθέν λογισμικό πιστοποιήθηκαν με σειρά δοκιμών επίλυσης του πρωτεύοντος και του συζυγούς προβλήματος για ατριβείς ροές συμπιεστού ρευστού, μόνιμες στο χρόνο, σε βελτιστοποίηση μορφής μεμονωμένης αεροτομής. Ακολουθούν κάποιες επιπρόσθετες περιπτώσεις βελτιστοποίησης μορφής μεμονωμένων αεροτομών, όπου αναλύεται η επιτάχυνση του λογισμικού λόγω παράλληλης εκτέλεσης του.



National Technical University of Athens
School of Mechanical Engineering
Fluids Section
Parallel CFD & Optimization Unit

**Parallelization of a Flow and its adjoint Solver for the 2D Euler
Equations of Compressible Fluids. Application in Airfoil Shape
Optimization.**

Master Thesis

Varvasoudis Antonios

Supervisor: K. C. Giannakoglou, Professor NTUA
Athens, 2018

Abstract

This master's thesis describes the parallelization of an existing solver of the flow equations and its adjoint for the invicid flow of compressible fluids. The adjoint equations correspond to the shape optimization of an isolated airfoil. The shape of the airfoil is parameterized through Bézier polynomial curves and the optimization target is to maximize the lift force. The discretization of the flow and adjoint equations takes place on an unstructured body-fitted mesh using the Finite Volume Method. The Software parallelization is based on the partitioning of the initial domain into subdomains with overlapping zones. In addition, a Laplacian mesh morphing method is used to adjust the existing mesh on the optimized airfoil shape, to avoid remeshing. The mesh morphing method is also parallelized. Parallel programming and the communication structures are achieved using the MPI protocol. Any new software modifications are validated through a series of optimization test cases for isolated airfoils. Finally, airfoil shape optimization cases are presented in order to evaluate the efficiency and speedup of the parallel software.

Πρόλογος

Με την ενότητα αυτή, θα ήθελα να ευχαριστήσω κατ' αρχήν τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου που με δέχτηκε στην ομάδα του για να ολοκληρώσω το μεταπτυχιακό. Αξίζει σε αυτό το σημείο να τονίσω, ότι η καθοδήγηση του ξεκινά από τα μαθήματα και τις εργασίες των εξαμήνων, τα οποία αποτέλεσαν εφόδια για τη μετέπειτα ροή της μεταπτυχιακής εργασίας και συνεχίστηκε έως το τέλος αυτής.

Ευχαριστώ ιδιαίτερα την επιβλέπουσα μου Δρ. Βαρβάρα Ασούτη, η οποία ήταν πάντα εκεί, έστω και με όριο στο χρόνο ή τον αριθμό ερωτήσεων, για να βοηθήσει τόσο στο επίπεδο της ΥΡΔ, όσο και στον προγραμματισμό.

Ευχαριστώ επίσης όλα τα μέλη της ερευνητικής ομάδας της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ, Ξενοφώντα Τρομπούκη, Κώστα Τσιάκα, Δημήτρη Καψούλη που μου παραχώρησαν χώρο στο γραφείο τους, σε όλη τη διάρκεια της εργασίας και ήταν δίπλα μου σε ό,τι χρειάστηκα.

Δε θα παραλείψω να ευχαριστήσω τους Βαγγέλη Παπουτσή, Κώστα Γκαραγκούνη, Κώστα Σαμούχο και Γιάννη Βρυώνη για τις πολύτιμες συμβουλές τους, όποια στιγμή και αν τους ενόχλησα.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, τη Μαρία και τους φίλους μου για τη στήριξη και την κατανόηση που έδειξαν, καθόσον τα δύο αυτά χρόνια και ιδιαίτερα στην περίοδο της εργασίας, περνούσα σχεδόν όλα τα απογεύματα στο εργαστήριο της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ.

Με εκτίμηση

Αντώνιος Βαρβασούδης

Σεπτέμβριος 2018

Ακρωνύμια

ΕΜΠ Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΕΘΣ Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

ΜΠΥΡ&Β Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής
Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

ΥΡΔ Υπολογιστική Ρευστοδυναμική

ΜΔΕ Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

NTUA National Technical University of Athens

CFD Computational Fluid Dynamics

MPI Message Passing Interface

GPU Graphics Processing Unit

SPMD Single Program Multiple Data

CAD Computer Aided Design

EA Evolutionary Algorithms

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Περιεχόμενα και Δομή της Εργασίας	3
2	Εξισώσεις Ροής	5
2.1	Οι Εξισώσεις της Ροής	5
2.1.1	Διατύπωση των 2D Εξισώσεων Euler	5
2.1.2	Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα	8
2.1.3	Ιδιότητες των 2D Εξισώσεων Euler	9
2.1.4	Οριακές Συνθήκες των 2D Εξισώσεων Euler	10
3	Αριθμητική Επίλυση των Εξισώσεων	11
3.1	Διακριτοποίηση του Χωρίου Ροής	11
3.1.1	Γένεση Πλέγματος	11
3.1.2	Ορισμός της Κυψέλης Ελέγχου	13
3.2	Διακριτοποίηση των Εξισώσεων Ροής	16
3.2.1	Μέθοδος των Πεπερασμένων Όγκων	16
3.2.2	Υπολογισμός των Αριθμητικών Διανυσμάτων της Ροής	20
3.2.3	Αύξηση της Ακρίβειας του Σχήματος Υπολογισμού	22
3.2.4	Υπολογισμός των Παραγώγων	22
3.2.5	Ψευδο-Χρονικό Βήμα Ολοκλήρωσης	23
3.2.6	Αριθμητική Επιβολή Οριακών Συνθηκών	24
3.2.7	Αριθμητική Ολοκλήρωση των Εξισώσεων - Σημειακά Πεπλεγμένο Σχήμα	25
4	Υπολογισμοί σε Πολυεπεξεργαστικό Περιβάλλον Κατανεμημένης Μνήμης	27
4.1	Χαρακτηριστικά Παράλληλου Προγραμματισμού	28
4.2	Δομή Παράλληλου Λογισμικού	30

4.2.1	Διάσπαση-Διαμερισμός Υπολογιστικού Χωρίου	31
4.2.2	Όγκος Επικοινωνίας Μεταξύ των Υποχωρίων	33
4.2.3	Αύξηση Ακρίβειας και Όγκος Επικοινωνίας	35
4.2.4	Συχνότητα Επικοινωνίας	36
4.2.5	Αύξηση Ακρίβειας και Συχνότητα Επικοινωνίας	37
4.2.6	Σύνοψη	37
5	Βελτιστοποίηση με τη Συζυγή Τεχνική	43
5.1	Συνεχής και Διακριτή Συζυγής Μέθοδος	44
5.2	Συνεχής Συζυγής Μέθοδος στη Βελτιστοποίηση Μορφής	45
5.2.1	Συνάρτηση Κόστους	45
5.2.2	Συνεχής Συζυγής Μέθοδος	47
5.3	Προσαρμογή Πλέγματος στη Νέα Μορφή Αεροτομής	53
5.4	Διαδικασία Σχεδιασμού με τη Συνεχή Συζυγή Τεχνική	56
5.5	Υπολογισμός σε Παράλληλο Υπολογιστικό Περιβάλλον	57
5.5.1	Αλγόριθμοι Παραλληλοποίησης Συζυγούς Προβλήματος - Προσαρμογής Πλέγματος	57
5.5.2	Επικοινωνίες	59
5.5.3	Διάγραμμα Ροής Λογισμικού Βελτιστοποίησης	60
6	Πρόλεξη Πεδίων Ροής και Χρόνοι Σύγκλισης	63
6.1	Πιστοποίηση Λογισμικού	63
6.2	Επιτάχυνση Λογισμικού σε Παράλληλο Επεξεργαστή	65
6.3	Κέρδος επί της Βελτιστοποίησης σε Παράλληλο Επεξεργαστή	69
6.4	Πρόλεξη Πεδίου Ροής και Συζυγούς Πεδίου	70
6.5	Βελτιστοποίηση Μορφής Αεροτομής NACA 4415	72
6.6	Βελτιστοποίηση Μορφής Αεροτομής RAE 2822	74
7	Επίλογος - Συμπεράσματα	77
7.1	Συμπεράσματα και Σχόλια	78
7.2	Προτάσεις για Μελλοντικές Προσθήκες	

Περιεχόμενα

Βιβλιογραφία

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η μοντελοποίηση φυσικών προβλημάτων και η ανάπτυξη αξιόπιστων τεχνικών επίλυσης των Μ.Δ.Ε. που τα διέπουν έφτασαν σε ώριμο επίπεδο κατά την τελευταία εικοσαετία του εικοστού αιώνα. Εξαιτίας της ύπαρξης πλέον αξιόπιστου λογισμικού προσομοίωσης περιορίστηκαν οι πειραματικές πιστοποιήσεις έναντι των τεχνικών σχεδιασμού βασισμένων στις υπολογιστικές μεθόδους. Ως εκ τούτου, οι εφαρμογές σχεδιασμού-βελτιστοποίησης αντιμετωπίζονται στις σύγχρονες επιστήμες χρησιμοποιώντας λογισμικά CAD για την παραμετροποίηση, απεικόνιση και εποπτεία τους, λογισμικά υπολογιστικής μηχανικής για την επίλυση των μαθηματικών μοντέλων και λογισμικά βελτιστοποίησης για την αναζήτηση βέλτιστων λύσεων. Στην ανωτέρω εξέλιξη των υπολογιστικών τεχνικών, συνέβαλε η ανάπτυξη εξίσου αποδοτικών λογισμικών προεπεξεργασίας (λογισμικό γένεσης υπολογιστικών πλεγμάτων), καθώς και η πολυεπεξεργασία (υλοποίηση υπολογισμών μεγάλης κλίμακας), τα οποία πλέον, αποτελούν αναπόσπαστο τμήμα της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (ΥΡΔ).

Επικεντρώνοντας στο πεδίο της ΥΡΔ, η ύπαρξη λογισμικού πρόλεξης ροών αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για τον σχεδιασμό της μορφής ενός σώματος που διαρρέεται από ρευστό. Ένα τέτοιο λογισμικό οφείλει να είναι αξιόπιστο ώστε τα αποτελέσματα να είναι αποδεκτά σε ακρίβεια, αλλά ταυτόχρονα να ολοκληρώνεται με το ελάχιστο δυνατό κόστος σε εφικτούς χρόνους. Στη σύγχρονη βιομηχανία ή επιστήμη, η πρόλεξη πεδίων ροής υλοποιείται είτε με εμπορικό είτε με οικείο λογισμικό. Αφενός μεν το πρώτο προσφέρει ευχρηστία και φιλικότητα προς το χρήστη, αφετέρου δε το τελευταίο αντισταθμίζει τα ανωτέρω με την άμεση πρόσβαση στον πηγαίο κώδικα δίνοντας δυνατότητα αλλαγών, ρυθμίσεων και γνώσης των χρησιμοποιούμενων

μοντέλων ροής και αριθμητικών σχημάτων. Ακολουθώντας παραδοσιακά τη γραμμή της ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ η εργασία βασίστηκε σε ήδη υπάρχον λογισμικό το οποίο τροποποιείται όπως αναλύεται παρακάτω.

Η αεροδυναμική βελτιστοποίηση και σχεδιασμός επιτυγχάνεται σε γενικές γραμμές μέσω δύο μεθόδων. Στοχαστικές μέθοδοι [1][2](Εξελικτικοί Αλγόριθμοι (ΕΑ», που χρησιμοποιούν το λογισμικό ΥΡΔ για την αξιολόγηση μίας σειράς τυχαίων λύσεων, με σκοπό την αναζήτηση της βέλτιστης αυτών. Επιπλέον, χρησιμοποιούνται και αιτιοκρατικές μέθοδοι [3] στις οποίες υπολογίζεται η κλίση μίας συνάρτησης κόστους που οδηγεί στο ακρότατο, υπό τον περιορισμό της ικανοποίησης των εξισώσεων ροής. Τα πλεονεκτήματα της πρώτης εξ αυτών μεθόδου είναι ότι δεν εγκλωβίζεται σε τοπικά ακρότατα και μπορεί εύκολα να προσαρμοστεί σε νέα προβλήματα. Αντίθετα, η τελευταία, δεν εγγυάται την εύρεση του καθολικού ακρότατου και απαιτεί εκ νέου προσαρμογή για κάθε διαφορετικό πρόβλημα. Από την άλλη πάλι, μία στοχαστική μέθοδος απαιτεί αυξημένο υπολογιστικό κόστος για τον εντοπισμό μίας βέλτιστης λύσης εξαιτίας των πολλών αξιολογήσεων τυχαίων λύσεων, ενώ στην αιτιοκρατική αυτό δεν ισχύει. Στη βελτιστοποίηση μπορούν να χρησιμοποιηθούν και οι δύο μέθοδοι συνεργατικά δημιουργώντας ένα υβριδικό σχήμα[4][5]. Στο πλαίσιο της εργασίας ακολουθείται ο αιτιοκρατικός τρόπος βελτιστοποίησης.

Επίσης τα προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης δύναται να κατηγοριοποιηθούν και ανάλογα με το στόχο που τίθεται. Αναλυτικότερα η διαδικασία σχεδιασμού μπορεί να αποβλέπει είτε στην εύρεση ενός καθολικού ακρότατου μίας συνάρτησης που περιγράφει την απόδοση ενός συστήματος, είτε στην επίτευξη μιας δεδομένης αεροδυναμικής συμπεριφοράς. Η τελευταία κατηγορία είναι αυτή των προβλημάτων αντίστροφου σχεδιασμού, όπως λ.χ. η εύρεση της μορφής μιας αεροτομής που επιτυγχάνει μια επιθυμητή τιμή συντελεστή άνωσης (ή επιθυμητή κατανομή του μεγέθους της πίεσης) και παράλληλα ελαχιστοποιεί την οπισθέλκουσα.

Όπως προαναφέρθηκε, ένα λογισμικό σχεδιασμού-βελτιστοποίησης επιβάλλεται να παρέχει λύσεις υψηλής ακρίβειας-ανάλυσης, σε αποδεκτό υπολογιστικό κόστος, για μεγάλης κλίμακας προβλήματα. Με την πάροδο των χρόνων, το μέγεθος των προβλημάτων αυξάνει. Επιπλέον, η ανταγωνιστικότητα ενός προϊόντος αυξάνεται με τη μείωση του συνολικού χρόνου σχεδιασμού του. Κατά συνέπεια, η λειτουργία σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον αποτελεί αναπόσπαστο τμήμα των λογισμικών σχεδιασμού-βελτιστοποίησης.

Η πολυεπεξεργασία αποτελεί το κύριο στοιχείο της εργασίας και υλοποιείται με την τεχνική της διάσπασης του συνολικού υπολογιστικού χωρίου σε υποχωρία. Σύμφωνα με αυτό, το αρχικό πλέγμα στο οποίο διακριτοποιούνται οι εξισώσεις, διαμερίζεται σε μικρότερα τμήματα τα οποία ανατίθενται προς επίλυση σε διαφορετικούς επεξεργαστές. Αυτό, συγχρόνως, προϋποθέτει την επικοινωνία μεταξύ των επεξεργαστών για την επίλυση του συνολικού προβλήματος. Η τεχνική παραλληλοποίησης που ακολουθείται στην εργασία υλοποιείται σε συστοιχίες διασυνδεδεμένων επεξεργαστών οι οποίοι διαθέτουν κατανεμημένη μνήμη και επικοινωνούν αξιοποιώντας το πρωτόκολλο MPI.

1.1 Περιεχόμενα και Δομή της Εργασίας

Το αναπτυχθέν λογισμικό της εργασίας βασίζεται σε προϋπάρχον λογισμικό της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ, το οποίο βελτιστοποιεί τη μορφή μεμονωμένης αεροτομής σε συνθήκες 2Δ ατρίβους ροής, συμπιεστού ρευστού, μόνιμης στο χρόνο. Για τη βελτιστοποίηση χρησιμοποιείται η συνεχής συζυγής μέθοδος (continuous adjoint method)[6][7][8][9], μέσω της οποίας υπολογίζονται οι τιμές παραγώγων που αξιοποιούνται από τη μέθοδο της απότομης καθόδου για την εύρεση του ακρότατου.

Οι εξισώσεις που διέπουν το ανωτέρω πρόβλημα διακριτοποιούνται σε οριόδετο μη-δομημένο πλέγμα ενώ σε κάθε αλλαγή της μορφής της αεροτομής από τη μέθοδο βελτιστοποίησης, το οικείο λογισμικό δίνει τη δυνατότητα προσαρμογής του ήδη υπάρχοντος πλέγματος ή την εκ νέου γένεση πλέγματος.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στη ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ προϋπήρχε η δυνατότητα παράλληλης εκτέλεσης του λογισμικού σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον CPUs με τη χρήση πρωτόκολλου PVM, αλλά και αντίστοιχο λογισμικό το οποίο λειτουργεί σε παράλληλο υπολογιστικό περιβάλλον GPUs. Δεδομένου ότι το πρωτόκολλο PVM δεν υποστηρίζεται από όλες τις εφαρμογές, επιβάλλεται η προσαρμογή του προϋπάρχοντος λογισμικού στο πρωτόκολλο επικοινωνίας MPI.

Σκοπός της εργασίας ήταν η παραλληλοποίηση των τμημάτων του λογισμικού της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ, που επιλύουν το πρωτεύον και συζυγές πρόβλημα, αλλά και αυτού που προσαρμόζει το ήδη υπάρχον πλέγμα. Η παραλληλοποίηση βασίστηκε στις δομές που οριοθετεί ένα πολυεπεξεργαστικό σύστημα κατανεμημένης μνήμης και αξιοποιεί αμιγώς το πρωτόκολλο MPI για τη διεπεξεργαστική επικοινωνία (communication overhead).

Στο **Κεφάλαιο 2** διατυπώνονται οι εξισώσεις Euler και οι ιδιότητες που τις χαρακτηρίζουν. Επιπρόσθετα, καθορίζονται οι οριακές συνθήκες που επιβάλλονται για

την επίλυση των εξισώσεων, σε συνθήκες ροής που προαναφέρθηκαν για μεμονωμένη αεροτομή.

Το **Κεφάλαιο 3** εισάγει τις βασικές έννοιες ενός μη-δομημένου πλέγματος που καθορίζουν τους όγκους ελέγχου, στους οποίους διακριτοποιούνται οι εξισώσεις ροής. Στη συνέχεια αναλύεται η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων στον υπολογισμό των αριθμητικών διανυσμάτων της ροής και ο υπολογισμός των παραγώγων για την αύξηση ακρίβειας του σχήματος υπολογισμού. Το κεφάλαιο φτάνει στο τέλος του με την αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων μέσω του ψευδο-χρονικού βήματος.

Στο **Κεφάλαιο 4** αναλύονται εκτενώς οι αρχές στις οποίες βασίστηκε η παραλληλοποίηση. Έπειτα επεξηγείται ο τρόπος διαμερισμού του υπολογιστικού χωρίου, αναλύονται οι έννοιες του όγκου και της συχνότητας επικοινωνίας, καθώς και η επίδραση της αύξησης ακρίβειας του σχήματος υπολογισμού σε αυτή.

Το θεωρητικό τμήμα της εργασίας ολοκληρώνεται στο **Κεφάλαιο 5** με την ανάλυση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, της προσαρμογής του πλέγματος και τις απαιτούμενες τροποποιήσεις του λογισμικού για την παραλληλοποίηση αυτών.

Στο **Κεφάλαιο 6** παρουσιάζονται η πιστοποίηση του αναπτυχθέντος λογισμικού και διάφορες περιπτώσεις βελτιστοποίησης μορφής μεμονωμένων αεροτομών στις οποίες αναλύεται και η επιτάχυνση του λογισμικού λόγω της παράλληλης εκτέλεσής του.

Τέλος στο **Κεφάλαιο 7** συνοψίζονται τα συμπεράσματα των αποτελεσμάτων καθώς και προτάσεις για μελλοντικές προσθήκες στο αναπτυχθέν λογισμικό.

Κεφάλαιο 2

Εξισώσεις Ροής

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι εξισώσεις ροής για μη-συνεκτικές ροές (εναλλακτικά αναφέρονται και ως εξισώσεις *Euler*) [10][11][12]. Οι εξισώσεις διατυπώνονται τόσο στη συντηρητική όσο και τη μη-συντηρητική γραφή τους ενώ, στη συνέχεια, αναφέρεται το πρόβλημα ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων σε τέτοιου είδους ροή. Τέλος το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την ανάλυση επιβολής των οριακών συνθηκών.

2.1 Οι Εξισώσεις της Ροής

2.1.1 Διατύπωση των 2D Εξισώσεων Euler

Οι χρονικά μη-μόνιμες εξισώσεις Euler συμπιεστού ρευστού είναι ένα σύστημα υπερβολικού τύπου στο χωροχρόνο, μερικών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν την ατριβή ροή. Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις περιγράφουν τους νόμους διατήρησης της μάζας, ορμής και ενέργειας ενός ρευστού στο χώρο. Ανάλογα με τις διαστάσεις που μελετώνται, το σύστημα μπορεί να περιλαμβάνει από τρεις (1D) έως πέντε (3D) εξισώσεις. Για 2D ροή συμπιεστού ρευστού, οι εξισώσεις είναι τέσσερις και σε συντηρητική διανυσματική μορφή γράφονται ως:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_i}{\partial x_i} = \vec{0} \quad (2.1)$$

με το δείκτη $i = 1, 2$ για 2Δ ροές. Αναλύοντας την ανωτέρω εξίσωση ο όρος (t) είναι ο χρόνος ενώ το διάνυσμα $x_i = (x_1, x_2) = (x, y)$ είναι οι καρτεσιανές χωρικές συντεταγμένες. Το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών \vec{U} στην εξίσωση (2.1) ορίζεται ως:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

ενώ, αντίστοιχα, το διάνυσμα ατριστούς ροής $\vec{F} = \vec{f}_i = (\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\vec{f}, \vec{g})$ στις δύο διευθύνσεις (x και y) υπολογίζεται ως:

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E_t + p) \end{bmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E_t + p) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

όπου ρ η πυκνότητα του ρευστού, u και v οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά τους άξονες (x και y) αντίστοιχα, p η στατική πίεση και E_t η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού.

Στην περίπτωση της χρονικά μόνιμης ροής, ο όρος t συμβολίζει τον ψευδοχρόνο καθότι οι εξισώσεις επιλύονται αριθμητικά με την τεχνική της χρονοεπέλασης εκμεταλλευόμενες τις ιδιότητες των υπερβολικών εξισώσεων στον χωροχρόνο.

Για τη σύνδεση των θερμοδυναμικών μεγεθών που εμφανίζονται στις εξισώσεις Euler το ρευστό θεωρείται τέλει αέριο και, έτσι, με αφετηρία την καταστατική εξίσωση προκύπτουν οι ακόλουθες βοηθητικές σχέσεις:

$$p = \rho R_g T \quad (2.4)$$

$$E_t = \rho E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (2.5)$$

$$E = e + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (2.6)$$

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (2.7)$$

$$h_t = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \quad (2.8)$$

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} \quad (2.9)$$

όπου

- R_g η σταθερά τελείων αερίων,
- T η στατική θερμοκρασία,
- T_t η ολική θερμοκρασία,
- h_t η ολική ενθαλπία ($h_t = c_p T_t$),
- e η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας του ρευστού ($e = c_v T$),
- γ ο εκθέτης της ισεντροπικής μεταβολής τελείων αερίων,
- c η ταχύτητα του ήχου

Αναλύοντας περαιτέρω τις εξισώσεις της σχέσης (2.1), δίνεται η δυνατότητα να εκφραστούν ως:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_i}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A_i \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} = \vec{0} \quad (2.10)$$

όπου $A_i = \frac{\partial \vec{f}_i}{\partial \vec{U}}$, είναι τα Ιακωβιανά μητρώα των ατριβών ροών για τις συντηρητικές μεταβλητές.

Εναλλακτικός τρόπος γραφής των εξισώσεων Euler είναι η χρήση μεταβλητών στη μη-συντηρητική μορφή τους, η οποία οδηγεί σε απλούστερη έκφραση των Ιακωβιανών μητρώων. Η εν λόγω μορφή είναι χρήσιμη στη μετέπειτα εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων. Χρησιμοποιώντας το διάνυσμα μη-συντηρητικών μεταβλητών:

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Η εξίσωση (2.10), γράφεται ως:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \bar{A}_i \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i} = \vec{0} \quad (2.12)$$

όπου \bar{A}_i , είναι τα Ιακωβιανά μητρώα των ατριβών ροών για τις μη-συντηρητικές μεταβλητές. Αυτά τα μητρώα συνδέονται με τα αντίστοιχα των συντηρητικών μεταβλητών με την ακόλουθη σχέση:

$$\bar{A}_i = M^{-1} A_i M \quad (2.13)$$

όπου $M = \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{V}}$, το οποίο αποτελεί το μητρώο μετασχηματισμού από τις συντηρητικές στις μη-συντηρητικές μεταβλητές. Τα μητρώα M και M^{-1} για 2Δ ροές είναι:

$$M = \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{V}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & \varrho & 0 & 0 \\ v & 0 & \varrho & 0 \\ \frac{1}{2} |\vec{U}|^2 & \varrho u & \varrho v & \frac{1}{\gamma-1} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

και

$$M^{-1} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u/\varrho & 1/\varrho & 0 & 0 \\ -v/\varrho & 0 & 1/\varrho & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma-1) |\vec{U}|^2 & -(\gamma-1)u & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

2.1.2 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Ο σκοπός που αναφέρθηκαν οι μη-συντηρητικές μεταβλητές και τα μητρώα αυτών, δεν είναι άλλος από την ευκολία που προσφέρεται στην εύρεση των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων της ορίζουσας A όπως αναφέρεται στη συνέχεια. Η γνώση των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων σε υπερβολικά προβλήματα επιτρέπει τη διακριτοποίηση σε σχήματα συμβατά με τη φυσική της ροής.

Το μητρώο A συνδέει τα κατά κατεύθυνση Ιακωβιανά μητρώα $A_i = \frac{\partial \vec{f}_i}{\partial \vec{U}}$ μέσω των συνιστωσών ενός μοναδιαίου διανύσματος \hat{n} κάθετου σε κάθε επιμέρους τμήμα της περιβάλλουσας ενός όγκου αναφοράς, το οποίο διασχίζεται από την ατριβή ροή, σύμφωνα με τη σχέση:

$$A = A_i \hat{n}_i \quad (2.16)$$

Όπως απορρέει από τη σχέση (2.13), τα μητρώα A και \bar{A} έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, για το λόγο αυτό αρκεί να υπολογιστούν τα προαναφερθέντα για το μητρώο \bar{A} των μη-συντηρητικών μεταβλητών. Οι ιδιοτιμές υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\det |\lambda_i I - \bar{A}| \quad (2.17)$$

όπου \bar{A} το τοπικό Ιακωβιανό μητρώο για κάθε κόμβο. Από τη σχέση (2.17) προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιοτιμές:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \vec{u} \cdot \hat{n} \\ \lambda_{3,4} &= \vec{u} \cdot \hat{n} \pm c \left| \hat{n} \right|\end{aligned}\quad (2.18)$$

όπου \hat{n} το προαναφερθέν κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα, το οποίο αναλύεται εκτενώς στο κεφάλαιο 3.

Αντίστοιχα, τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από τη σχέση:

$$\begin{aligned}\vec{l}^i \bar{A} &= \lambda_i \vec{l}^i \\ \bar{A} \vec{r}^i &= \lambda_i \vec{r}^i, i = 1, 4\end{aligned}\quad (2.19)$$

Στη συνέχεια, μπορούν να παραχθούν τα μητρώα L^{-1} και L , τα οποία αποτελούνται από τα αριστερά ιδιοδιανύσματα γραμμής (\vec{l}^i) και τα δεξιά ιδιοδιανύσματα στήλης \vec{r}^i του \bar{A} , αντίστοιχα. Τα εν λόγω μητρώα διαγωνοποιούν τον \bar{A} των μη-συντηρητικών μεταβλητών, ως:

$$\bar{A} = L \Lambda L^{-1} \quad (2.20)$$

όπου

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \quad (2.21)$$

Τα μητρώα P και P^{-1} διαγωνοποιούν το μητρώο A των συντηρητικών μεταβλητών, ως:

$$A = P \Lambda P^{-1} \quad (2.22)$$

Επειδή τα μητρώα L^{-1} και L είναι πιο απλά στον υπολογισμό, όπως προαναφέρθηκε, δεν απαιτείται να υπολογιστούν τα μητρώα P και P^{-1} άμεσα, αλλά μπορούν να υπολογιστούν μέσω των μητρώων M και M^{-1} ως εξής:

$$\begin{aligned}P &= ML \\ P^{-1} &= L^{-1}M^{-1}\end{aligned}\quad (2.23)$$

2.1.3 Ιδιότητες των 2D Εξισώσεων Euler

Πριν γίνει αναφορά στη διακριτοποίηση των εξισώσεων πρέπει να αναφερθεί μία σημαντική ιδιότητα που χαρακτηρίζει το διάνυσμα της ατριβούς ροής \vec{F} , δεδομένου ότι είναι ομογενής εξίσωση 1ου βαθμού ως προς το διάνυσμα των συντηρητικών

μεταβλητών \vec{U} . Αυτή η ιδιότητα ισχύει για ιδανικό αέριο ή, σε γενικές γραμμές, για ρευστά τα οποία ικανοποιούν τη σχέση:

$$p = \rho f(e) \quad (2.24)$$

και καταλήγει στο εξής:

$$\vec{F}(\lambda U) = \lambda \vec{F}(U) \quad (2.25)$$

για κάθε λ . Παραγωγίζοντας προκύπτει το εξής:

$$\vec{F}(\vec{U}) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{U}} \vec{U} = A \vec{U} \quad (2.26)$$

Αντικαθιστώντας τώρα τη σχέση (2.26) στη σχέση (2.1) προκύπτει το εξής:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial (A_i \vec{U})}{\partial x_i} = \vec{0} \quad (2.27)$$

Είναι ευνόητο λοιπόν, ότι στις εξισώσεις Euler δεν διαφέρει αν οι ιακωβιανοί πίνακες βρίσκονται εκτός ή εντός της μερικής παραγώγου.

2.1.4 Οριακές Συνθήκες των 2D Εξισώσεων Euler

Στην περίπτωση ατρίβων ροών στα στερεά τοιχώματα εφαρμόζεται η συνθήκη μη-εισχώρησης κατά την οποία μηδενίζεται η κάθετη ταχύτητα στο τοίχωμα. Για μεμονωμένη αεροτομή τίθεται επ'άπειρο συνθήκη αδιατάρακτης ροής δεδομένου ότι το υπολογιστικό χωρίο εκτείνεται κατά πολύ μακριά από την αεροτομή.

Αξίζει να σημειωθεί ότι σύμφωνα με τη σχέση (2.18), σε μία υποηχητική ροή το σύστημα διαθέτει δύο (2) θετικές ιδιοτιμές και μία (1) αρνητική, ενώ αντίστοιχα σε υπερηχητική ροή όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές, εάν υποθέσουμε ότι η ροή έχει κατεύθυνση προς τα θετικά x . Αυτό σχετίζεται άμεσα με τη ροή της πληροφορίας και για το λόγο αυτό έχει ως φυσική συνέπεια τον καθορισμό του πλήθους των οριακών συνθηκών που θα εφαρμοστούν στην είσοδο και την έξοδο του ρευστού. Έτσι για ροές υποηχητικής ταχύτητας, επιβάλλονται στην είσοδο η ολική πίεση, η ολική θερμοκρασία και η γωνία εισόδου ενώ στην έξοδο η στατική πίεση. Αντίθετα, σε υπερηχητικές ροές, όλες οι ροϊκές ποσότητες ορίζονται στην είσοδο του ρευστού, καθότι καμία πληροφορία δεν ταξιδεύει αντίθετα στη ροή λόγω των τριών (3) θετικών (+) ιδιοτιμών.

Κεφάλαιο 3

Αριθμητική Επίλυση των Εξισώσεων

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ο τρόπος διακριτοποίησης και η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ροής σε μη-δομημένο, οριόδετο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων [11][12][13]. Πρωτίστως, αναλύεται η διακριτοποίηση του χωρίου ολοκλήρωσης των εξισώσεων και ορίζονται οι πεπερασμένοι όγκοι στους οποίους ολοκληρώνονται οι εξισώσεις ροής.

Στη συνέχεια, αναλύεται η διακριτοποίηση των εξισώσεων, ο τρόπος υπολογισμού των διανυσμάτων ροής και η αριθμητική επιβολή των οριακών συνθηκών. Τέλος, παρουσιάζονται οι μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης για χρονικά μόνιμες ροές στο πλαίσιο μίας μεθόδου χρονοεπέλασης (time-marching).

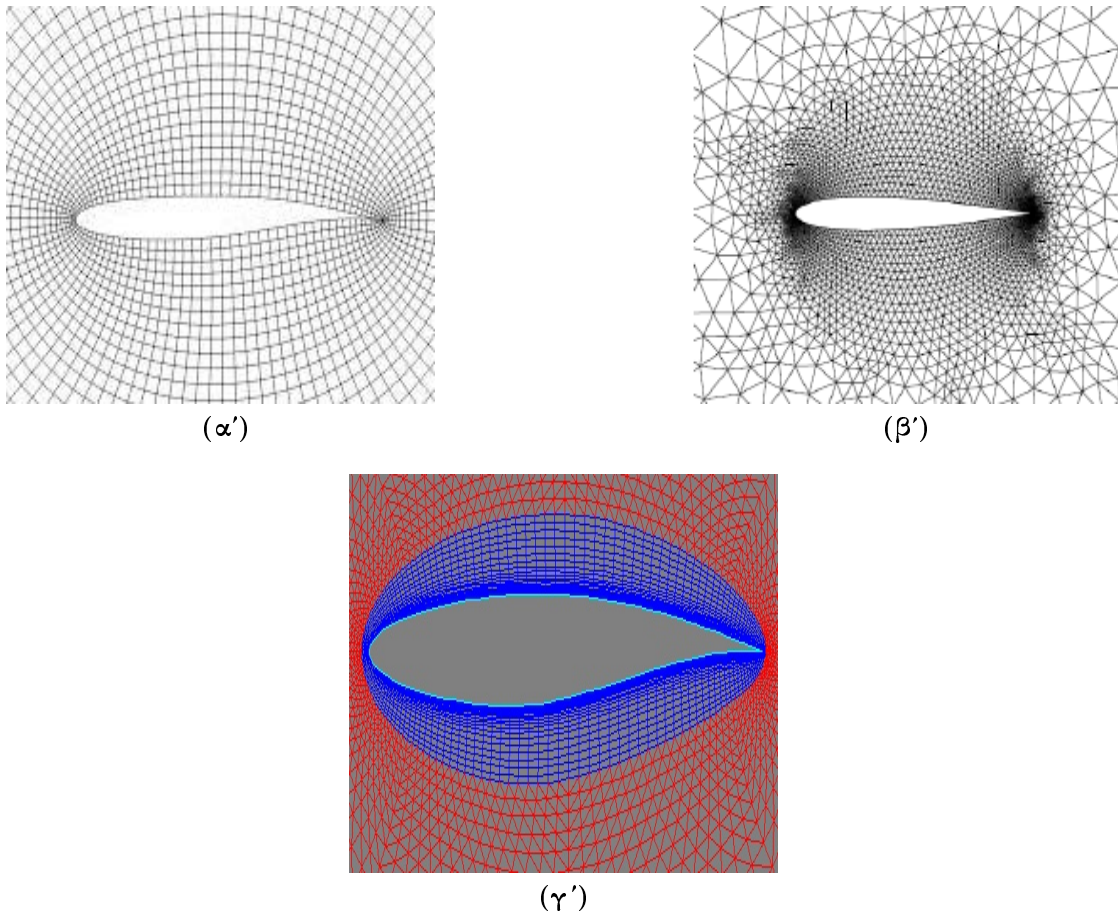
3.1 Διακριτοποίηση του Χωρίου Ροής

3.1.1 Γένεση Πλέγματος

Η επίλυση των εξισώσεων που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 2 βασίζεται στη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων. Το χωρίο ολοκλήρωσης Ω και το σύνορο του $\Gamma = \partial\Omega$ διακριτοποιούνται μέσω πλέγματος. Το πλέγμα δύναται να αποτελείται: (α) μόνο από τετράπλευρα των οποίων οι κορυφές ταυτοποιούνται πλήρως μέσω δύο τιμών (i, j)

και αποκαλείται δομημένο, (β) μόνο από τριγωνικά στοιχεία, το οποίο αποκαλείται μη-δομημένο και (γ) από στοιχεία και των δύο ανωτέρω, όπου πλέον αντιστοιχεί σε ένα υβριδικό μη-δομημένο πλέγμα.

Ενδεικτικά στο σχήμα 3.1, φαίνονται οι τρεις παραπαπάνω περιπτώσεις.



Σχήμα 3.1: (α') Δομημένο πλέγμα τετραγωνικών στοιχείων. (β') Μη-Δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων. (γ') Υβριδικό πλέγμα μεικτών στοιχείων.

Τα βασικότερα πλεονεκτήματα των μη-δομημένων πλεγμάτων έναντι των δομημένων, είναι η διακριτοποίηση χωρίων πολύπλοκης γεωμετρίας, αλλά και η δυνατότητα τοπικής προσαρμογής του πλέγματος στη λύση κατά την εξέλιξη αυτής. Με αυτό τον τρόπο δίνεται η δυνατότητα να ξεκινήσει η επίλυση από ένα αρχικά αραιό πλέγμα και να καταλήξει σε ένα κατά τόπους πιο πυκνό, όπου αυτό απαιτείται από τα ροϊκά μεγέθη για την καλύτερη προσέγγισή τους.

Από την άλλη μεριά, στα δομημένα πλέγματα, ο τρόπος γένεσής τους επιτρέπει πιο εύκολα την προσαρμογή τους στο όριο του χωρίου. Αυτό βέβαια αντιμετωπίζεται και στα μη-δομημένα με μηχανισμούς ελέγχου της πυκνότητάς τους και της διάταξης των

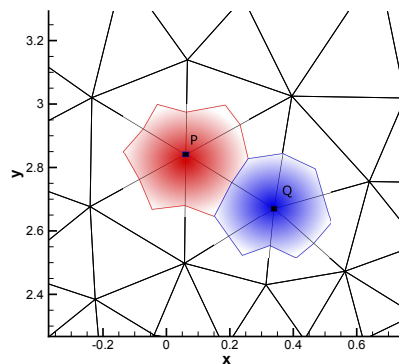
κόμβων στα όρια του χωρίου.

Ένας ελκυστικός τρόπος να συνδιαστούν τα πλεονεκτήματα των δομημένων και μη-δομημένων πλεγμάτων, είναι τα υβριδικά πλέγματα. Αυτά απαιτούν γενικευμένο λογισμικό επίλυσης το οποίο να διαχειρίζεται διαφορετικού τύπου στοιχεία.

Στη συνέχεια της εργασίας γίνεται αναφορά μόνο σε πλέγματα τα οποία αποτελούνται καθαρά από τριγωνικά στοιχεία. Οι πιο γνωστές μέθοδοι γένεσης πλέγματος είναι: (α) της τριγωνοποίησης Delaunay [14] και (β) η μέθοδος του προελαύνοντος μετώπου (advancing front) [15]. Η τελευταία είναι και αυτή η οποία χρησιμοποιήθηκε για να παραχθούν τα πλέγματα στα οποία εφαρμόστηκε το αναπτυχθέν παράλληλο λογισμικό επίλυσης των εξισώσεων Euler και των αντίστοιχων συζυγών. Επιπλέον, αναφέρεται ότι στην εργασία, δεν ενσωματώθηκε η προσαρμογή της πυκνότητας του πλέγματος στη εξέλιξη της λύσης, το οποίο σημαίνει ότι σε κάθε επίλυση των εξισώσεων το πλέγμα παραμένει αμετάβλητο μέχρι τη εύρεση της λύσης. Μόνο στην περίπτωση της βελτιστοποίησης το πλέγμα προσαρμόζεται στο νέο σχήμα της αεροτομής, χωρίς όμως να μεταβάλλεται η πυκνότητα των στοιχείων του πλέγματος παρά μόνο οι συντεταγμένες των κόμβων του.

3.1.2 Ορισμός της Κυψέλης Ελέγχου

Από εδώ και στο εξής, οι όροι "όγκος αναφοράς", "κυψέλη ελέγχου" ή "πεπερασμένος όγκος" θα χρησιμοποιούνται δίχως διάκριση. Οι κυψέλες ελέγχου στις οποίες ολοκληρώνονται οι εξισώσεις ροής ορίζονται στο πλέγμα των τριγωνικών στοιχείων, με τέτοιο τρόπο που να καλύπτουν το σύνολο του υπολογιστικού χωρίου, χωρίς όμως να αλληλοκαλύπτονται (σχήμα 3.2).

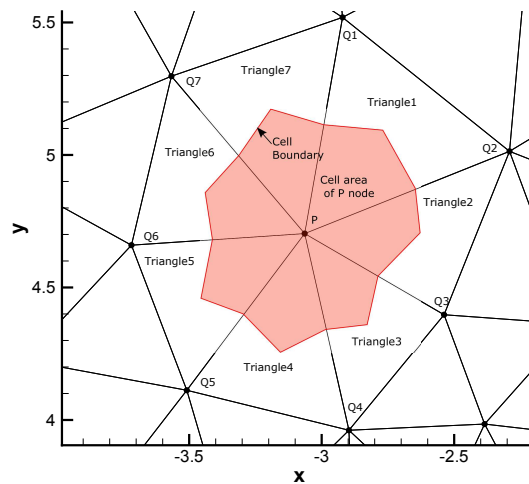


Σχήμα 3.2: Κυψέλες ελέγχου των γειτονικών κόμβων P (κόκκινο χρώμα) και Q (κυανό χρώμα) στις οποίες φαίνεται η επαφή τους δίχως την αλληλοκάλυψη αυτών.

Στις μεθόδους πεπερασμένων όγκων ακολουθείται είτε η κεντροκυψελική (cell-centered approach), είτε η κεντροκομβική (vertex-centered approach) προσέγγιση. Στην πρώτη, οι μεταβλητές της ροής αποθηκεύονται στα βαρύκεντρα των τριγώνων του πλέγματος τα οποία αποτελούν και τις κυψέλες ελέγχου ενώ στη δεύτερη περίπτωση οι υπολογιζόμενες μεταβλητές αποθηκεύονται στους κόμβους του πλέγματος, γύρω από τους οποίους ορίζονται οι κυψέλες ελέγχου.

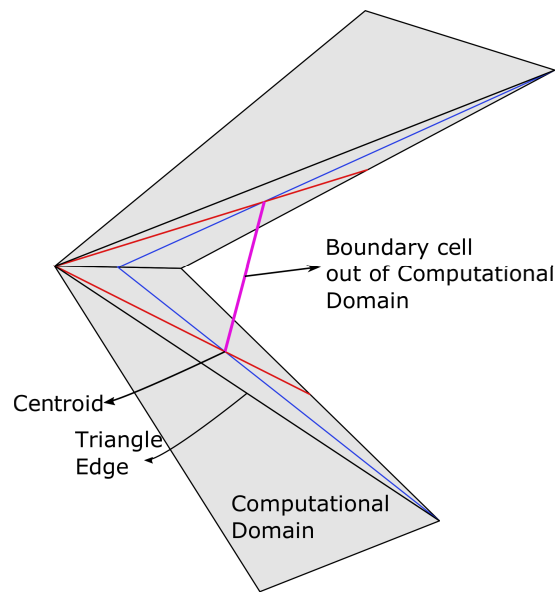
Στην εργασία αυτή χρησιμοποιείται αποκλειστικά η κεντροκομβική προσέγγιση. Για τον ορισμό της κυψέλης ελέγχου, συνδέονται τα μέσα των ακμών του πλέγματος που ξεκινούν από αυτόν με ένα εσωτερικό σημείο των τριγώνων που τον περιστοιχίζουν, το οποίο μπορεί να είναι: α) το βαρύκεντρο τους ή β) το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου (ΚΠΚ) του τριγώνου.

Στην περίπτωση της εργασίας, ως εσωτερικό σημείο επιλέγεται το βαρύκεντρο του τριγώνου και η κυψέλη η οποία παράγεται από ένα σύνολο τριγώνων φαίνεται στο σχήμα 3.3. Αυτός είναι ο (α) τρόπος σχηματισμού της κυψέλης ελέγχου.



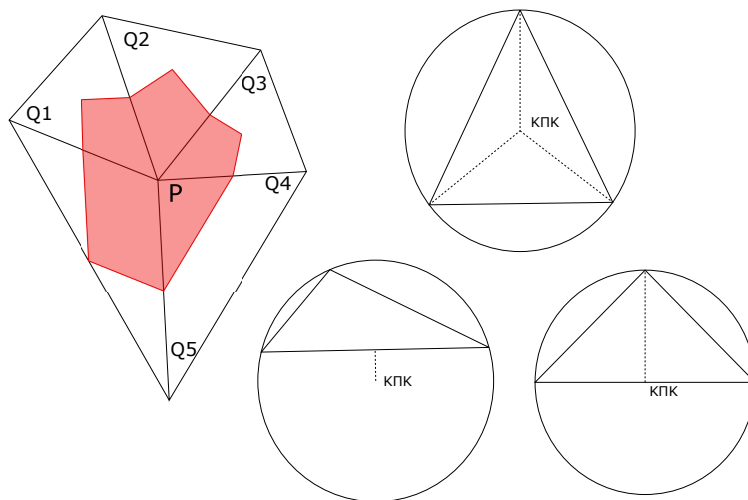
Σχήμα 3.3: Κυψέλη ελέγχου του κόμβου P (κόκκινη ημιδιαφανής περιοχή) που παράγεται από τρίγωνα που σχηματίζονται από αυτόν και τους γειτονικούς του κόμβους Q_i , ενώνοντας τα μέσα των ακμών και τα βαρύκεντρα των τριγώνων.

Η απευθείας χρήση των βαρύκεντρων των τριγώνων και η ένωση μεταξύ τους, αμελώντας στο ενδιαμέσο τα κέντρα των ακμών του πλέγματος, δύναται να αποτελέσει έναν εναλλακτικό τρόπο παραγωγής της κυψέλης ελέγχου. Αυτό όμως μπορεί να οδηγήσει σε ανεπιθύμητες καταστάσεις όπου το όριο της κυψέλης ελέγχου (μωβ γραμμή στο σχήμα 3.4), διέρχεται από χώρο εκτός του υπολογιστικού χωρίου και για το λόγο αυτό αποφεύγεται.



Σχήμα 3.4: Όριο κυψέλης ελέγχου, το οποίο τέμνει χώρο εξωτερικό του υπολογιστικού χωρίου λόγω της χρήσης μόνο των βαρύκεντρων των τριγώνων.

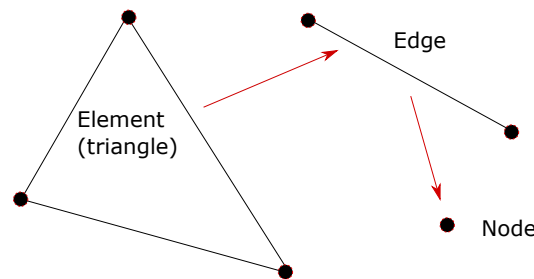
Εναλλακτικά στον (β) τρόπο σχηματισμού της κυψέλης ελέγχου, ως βοηθητικό σημείο για το σχηματισμό της κυψέλης ελέγχου χρησιμοποιείται το ΚΠΚ του τριγώνου. Ενώ σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο αυτό είναι αρκετό, σε ένα αμβλυγώνιο επειδή το ΚΠΚ κείται εκτός του τριγώνου το βοηθητικό σημείο λαμβάνεται ως το μέσο της μεγαλύτερης πλευράς απέναντι από την αμβλεία γωνία. Στο ορθογώνιο τρίγωνο, το ΚΠΚ συμπίπτει με το μέσο της υποτείνουσας, οπότε χρησιμοποιείται ως το βοηθητικό σημείο. Τα ανωτέρω αναπαρίστανται στο σχήμα 3.5.



Σχήμα 3.5: Κυψέλη ελέγχου στην οποία χρησιμοποιείται το ΚΠΚ των τριγώνων.

Σε γενικές γραμμές η χρήση του βαρύκεντρου των τριγώνων προτιμάται έναντι της χρήσης του ΚΠΚ, διότι είναι πιο εύκολο να γενικευθεί σε τετράπλευρα στοιχεία με σκοπό τη δημιουργία λογισμικού που να διαχειρίζεται υβριδικά πλέγματα. Στο πλαίσιο της εργασίας χρησιμοποιείται αποκλειστικά ο (α) τρόπος που περιγράφηκε προηγουμένως.

Μετά τη δημιουργία του πλέγματος, παράγεται ένα πλήθος πληροφοριών ιεραρχικής διάταξης (σχήμα 3.6) που περιλαμβάνει τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και την τοπολογία του πλέγματος. Αυτό δίνει τη δυνατότητα της κίνησης μεταξύ των στοιχείων του πλέγματος όποτε αυτό απαιτείται μέσω πινάκων διευθύνσεων. Η χρήση της έμμεσης διαχείρισης μνήμης αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό των μη-δομημένων πλεγμάτων, δεδομένου ότι η πρόσβαση στα τοπολογικά στοιχεία αυτών γίνεται έμμεσα, σε αντίθεση με τα δομημένα πλέγματα στα οποία υλοποιείται μόνο με τη χρήση δύο συνιστωσών (i,j).



Σχήμα 3.6: Ιεραρχική δομή στην καταχώριση των στοιχείων του πλέγματος στην τοπολογική δομή-δεδομένων.

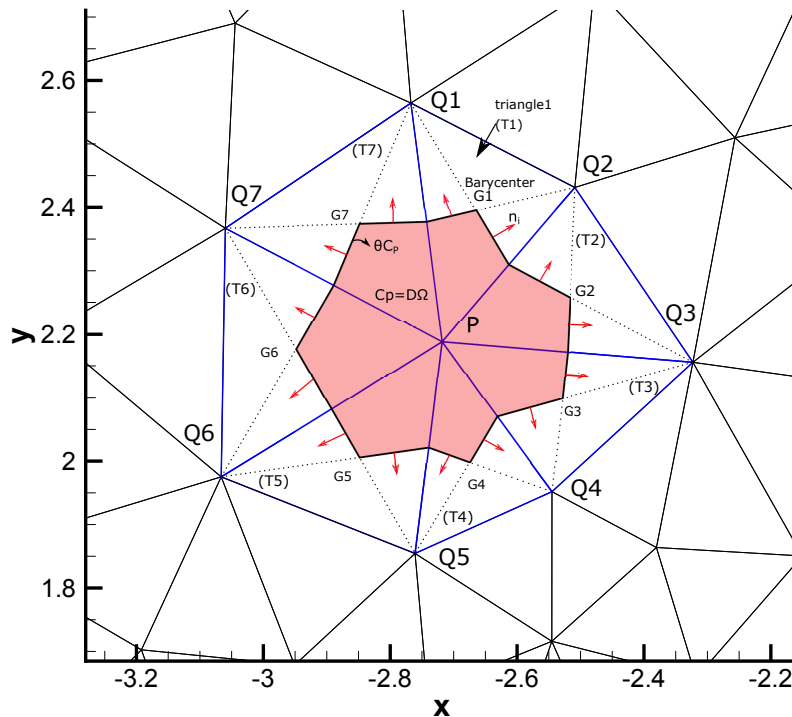
3.2 Διακριτοποίηση των Εξισώσεων Ροής

3.2.1 Μέθοδος των Πεπερασμένων Όγκων

Σύμφωνα με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων, οι εξισώσεις που διέπουν το προς επίλυση πρόβλημα της ροής ολοκληρώνονται σε κάθε κυψέλη ελέγχου. Στη συνέχεια, θα αναλυθεί ο τρόπος κατά τον οποίο διακριτοποιούνται και επιλύονται οι εξισώσεις Euler, ολοκληρωμένες στον ΠΕΠ όγκο κάθε κόμβου του πλέγματος. Αναλύοντας τη σχέση (2.1), η διανυσματική μορφή τους είναι η κάτωθι:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} = \vec{0} \quad (3.1)$$

Η διάσταση των παραπάνω διανυσμάτων ισούται με τον αριθμό των άγνωστων μεταβλητών, κατά συνέπεια με τον αριθμό των εξισώσεων προς επίλυση.



Σχήμα 3.7: Κυψέλη ελέγχου ολοκλήρωσης του κόμβου (P) των εξισώσεων ροής, που προκύπτει από την ένωση των βαρύκεντρων των τριγώνων με τα μέσα των ακμών, που ορίζονται μεταξύ αυτού και των γειτονικών του κόμβων Q.

Στο σχήμα 3.7 παρουσιάζεται μία κυψέλη ελέγχου C_p του κόμβου P, όπως αυτή προκύπτει από τα τρίγωνα T, που σχηματίζονται μεταξύ των γειτονικών κόμβων Q και του κόμβου P. Διακρίνεται το όριο της κυψέλης ∂C_p καθώς επίσης και τα κάθετα μη-μοναδιαία διανύσματα \vec{n}_i στο όριο της κυψέλης. Σε αυτό το σημείο, πρέπει να αναφερθεί ότι στο σύνολο του λογισμικού τα κάθετα διανύσματα μεταξύ των εσωτερικών κόμβων έχουν κατεύθυνση από τον κόμβο P προς τον κόμβο Q και, με αυτήν τη σύμβαση θα οριστούν και οι αντίστοιχες συνεισφορές στα μητρώα επίλυσης, από κόμβο σε κόμβο.

Σε κάθε κυψέλη ελέγχου C_p του τυχαίου κόμβου P του υπολογιστικού χωρίου με

πεπερασμένο εμβαδό $d\Omega = dxdy$, ολοκληρώνονται οι εξισώσεις (3.1):

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega + \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} \right) d\Omega = \vec{0} \quad (3.2)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Green-Gauss, το χωρικό ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε επικαμπύλιο ολοκλήρωμα το οποίο εφαρμόζεται στα όρια της κυψέλης. Η φορά κατά την οποία εφαρμόζεται είναι τέτοια ώστε να θεωρείται μαθηματικά θετική (+), δηλαδή τέτοια ώστε το όριο της κυψέλης να διαγράφεται με φορά αντίθετη με αυτή των δεικτών του ρολογιού. Σε συνέχεια του ανωτέρω θεωρήματος, η σχέση (3.2) γράφεται ως εξής:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega + \underbrace{\oint_{\partial C_P \cap \Gamma} \hat{\vec{F}} d\gamma}_{inv1} + \underbrace{\oint_{\partial C_P \cap \Gamma} \hat{\vec{F}} d\gamma}_{inv2} = \vec{0} \quad (3.3)$$

Στην ανωτέρω εξίσωση σε κάθε στοιχειώδες τμήμα του συνόρου $d\gamma$ αντιστοιχίζεται το κάθετο διάνυσμα $\vec{n} = (n_x, n_y)$ το οποίο έχει φορά όπως αναλύθηκε παραπάνω και μέτρο ίσο με $d\gamma$. Κατά συνέπεια, για το διάνυσμα ροής ανά μονάδα μήκους $\hat{\vec{F}}$ στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\vec{n}}$ ισχύει:

$$\vec{\hat{F}} = \hat{n}_x \vec{f} + \hat{n}_y \vec{g} \quad (3.4)$$

όπου

$$\hat{\vec{n}} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (\hat{n}_x, \hat{n}_y) \quad (3.5)$$

Σε ό,τι αφορά τα σύνορα των κυψελών ελέγχου, αυτά χωρίζονται στα όρια μεταξύ των κυψελών εσωτερικών κόμβων του υπολογιστικού χωρίου τα οποία συμβολίζονται με $\overline{\partial C_P \cap \Gamma}$, ενώ τα όρια στα οποία η κυψέλη έρχεται σε επαφή με το εξωτερικό περιβάλλον ή το τοίχωμα της αεροτομής συμβολίζονται με $\partial C_P \cap \Gamma$. Από αυτό προκύπτουν τα ολοκληρώματα $inv1$ και $inv2$ σχέση (3.3).

Για τις χρονικά μόνιμες ροές που επιλύονται στην εργασία αυτή, η μεταβολή της τιμής των μεταβλητών επίλυσης θεωρείται ομοιόμορφη στον πεπερασμένο όγκο Ω_P της κυψέλης ελέγχου C_P και, γι' αυτό, ισχύει το ακόλουθο για το χρονικό όρο της εξίσωσης (3.3), ο οποίος αποτελεί τον ψευδοχρονικό όρο.

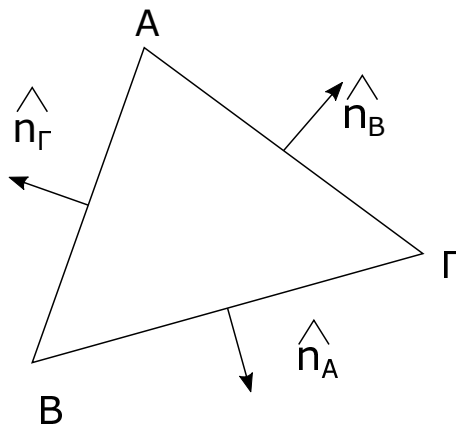
$$\iint_{\Omega_P} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega = \frac{\Delta \vec{U}_P}{\Delta t_P} \iint_{\Omega_P} d\Omega = \frac{\Delta \vec{U}_P}{\Delta t_P} \Omega_P \quad (3.6)$$

Στη συνέχεια, ακολουθεί η διακριτοποιημένη μορφή της σχέσης (3.3):

$$\frac{\Omega_P}{\Delta t_P} \Delta \vec{U}_P + \underbrace{\sum_{Q \in nei(P)} \hat{F}_{PQ} |\vec{n}_{PQ}|}_{fluxes} = 0 \quad (3.7)$$

όπου Ω_P το εμβαδό της κυψέλης για τον κόμβο P, $nei(P)$ οι γείτονες του κόμβου P, $|\vec{n}_{PQ}|$ το κατά τμήματα όριο της κυψέλης και \hat{F}_{PQ} το διάνυσμα ροής ανά μονάδα μήκους.

Προτού αναφερθεί ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων $inu1$ και $inu2$ της σχέσης (3.3), δηλαδή του όρου fluxes της σχέσης (3.7) και με σκοπό την καλύτερη κατανόηση αυτών που ακολουθούν, παρουσιάζεται η διανυσματική ιδιότητα που ισχύει σε μία κλειστή καμπύλη.



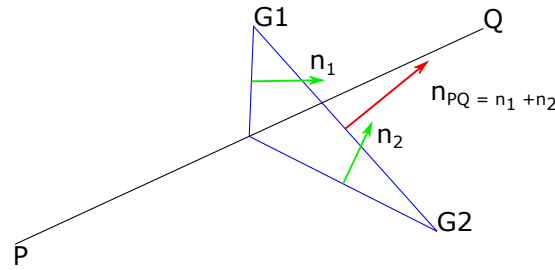
Σχήμα 3.8: Κλειστή πολυγωνική καμπύλη, σε κάθε πλευρά της οποίας αντιστοιχίζεται το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα αυτής.

Σε κάθε κλειστή πολυγωνική γραμμή όπως αυτή του σχήματος 3.8, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\vec{n}_A + \vec{n}_B + \vec{n}_\Gamma = 0 \quad (3.8)$$

$$|\vec{n}_A| = (B\Gamma) \quad (3.9)$$

Αυτή η ιδιότητα χρησιμοποιείται για το διάνυσμα \vec{n}_{PQ} και απλοποιεί τον υπολογισμό των διανυσμάτων ροής κατά την παραγωγή τους, το οποίο γίνεται καλύτερα αντιληπτό από το σχήμα 3.9.



Σχήμα 3.9: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά μίας ακμής PQ του πλέγματος για τον υπολογισμό των αριθμητικών διανυσμάτων της μη-συνεκτικής ροής.

Στη συνέχεια, αναλύεται ο τρόπος υπολογισμού του ολοκληρώματος *inv1* της σχέσης (3.3) για το οποίο ισχύει:

$$\vec{F}_{PQ} = \oint_{\partial C_{PQ}} \vec{F} d\gamma = \vec{f}_i(\vec{U}_{PQ}^L, \vec{U}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ}^i) \quad (3.10)$$

όπου

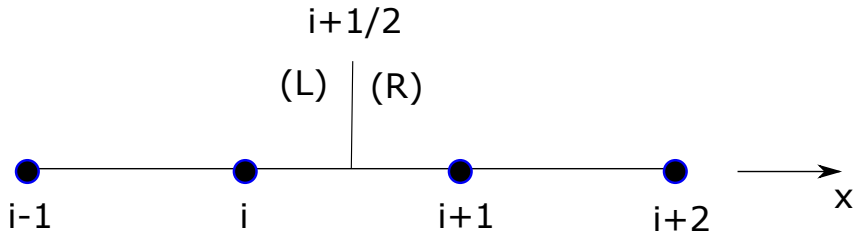
$$\vec{n}_{PQ} = \oint_{\partial C_{PQ}} \hat{n} d\gamma \quad (3.11)$$

είναι το κάθετο διάνυσμα στο ευθύγραμμο τμήμα G1G2, με φορά (όπως προαναφέρθηκε) από τον κόμβο P στον κόμβο Q και μήκος ίσο με αυτό του ευθύγραμμου τμήματος.

3.2.2 Υπολογισμός των Αριθμητικών Διανυσμάτων της Ροής

Από τα προηγούμενα, είναι ευνόητο ότι για τον υπολογισμό των μη-συνεκτικών διανυσμάτων ροής πρέπει να πραγματοποιηθεί σάρωση του πλέγματος κατά το σύνολο των ακμών. Σε κάθε ακμή PQ του υπολογιστικού χωρίου υπολογίζεται το διάνυσμα \vec{F}_{PQ} και συνεισφέρει με θετικό (+) πρόσημο στον ισολογισμό του υπολοίπου (Residual) στον κόμβο P και με αρνητικό (-) στο αντίστοιχο του κόμβου Q, λόγω της σύμβασης κατεύθυνσης του κάθετου διανύσματος από τον κόμβο P στον Q. Το εν λόγω διάνυσμα υπολογίζεται ανά ακμή πλέγματος από τη σχέση (3.10).

Για τον ισολογισμό του ανωτέρω διανύσματος ανά ακμή του πλέγματος, θεωρείται ένα 1Δ πρόβλημα Riemann μεταξύ δύο καταστάσεων, της αριστερής L και της δεξιάς R (σχήμα 3.10). Αυτές αντιστοιχίζονται εκατέρωθεν του μέσου M της ακμής PQ, και τα αντίστοιχα διανύσματα των καταστάσεων αυτών είναι τα \vec{U}_{PQ}^L και \vec{U}_{PQ}^R .



Σχήμα 3.10: 1Δ πρόβλημα Riemann μεταξύ δύο κόμβων.

Σύμφωνα με αυτό, το διάνυσμα ροής υπολογίζεται με βάση το σχήμα διάσπασης των διαφορών ροής (Flux Difference Splitting Scheme) του Roe [16], ως:

$$\hat{\vec{F}}_{PQ} = \frac{1}{2} \left(\hat{\vec{F}}(\vec{U}_{PQ}^L, \hat{\vec{n}}_{PQ}) + \hat{\vec{F}}(\vec{U}_{PQ}^R, \hat{\vec{n}}_{PQ}) \right) - \frac{1}{2} \left| \tilde{A}_{PQ} \right| (\vec{U}_{PQ}^R - \vec{U}_{PQ}^L) \hat{\vec{n}}_{PQ} \quad (3.12)$$

Στην παραπάνω σχέση ο πίνακας \tilde{A} είναι το Ιακωβιανό μητρώο του διανύσματος \vec{F} , υπολογιζόμενο από τις μέσες κατά Roe τιμές των μη-συντηρητικών μεταβλητών \tilde{V} εκφρασμένες στο κέντρο M της ακμής PQ, ως:

$$\tilde{V}_{PQ} = (\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p})^T \quad (3.13)$$

οι οποίες υπολογίζονται από τις αντίστοιχες συντηρητικές μεταβλητές στους κόμβους P και Q. Οι μέσες κατά Roe τιμές υπολογίζονται ως εξής:

$$\tilde{V}_{PQ} = \frac{\sqrt{\rho_L} \vec{V}_L + \sqrt{\rho_R} \vec{V}_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3.14)$$

Η εξίσωση (3.14) εφαρμόζεται άμεσα για τρεις πρώτες συνιστώσες των μη-συντηρητικών μεταβλητών, ενώ η μέση τιμή της πίεσης p κατά Roe υπολογίζεται μέσω της σχέσης (2.8).

Για τις τιμές των μη-συντηρητικών μεταβλητών της αριστερής και δεξιάς κατάστασης ορίζονται με αντιστοίχιση αυτών στις τιμές των κόμβων P και Q, ως ακολούθως:

$$\vec{V}_{PQ}^L = \vec{V}_P, \quad \vec{V}_{PQ}^R = \vec{V}_Q \quad (3.15)$$

Στην περίπτωση αυτή το σχήμα υπολογισμού της σχέσης (3.12) αντιστοιχεί σε ακρίβεια πρώτης τάξης.

3.2.3 Αύξηση της Ακρίβειας του Σχήματος Υπολογισμού

Η επίλυση με ακρίβεια πρώτης τάξης στη διακριτοποίηση των μη-συνεκτικών όρων, μπορεί να οδηγήσει σε αποτελέσματα χαμηλής ποιότητας. Για το λόγο αυτό είναι αναγκαίο να αυξηθεί η τάξη ακρίβειας στο σχήμα διακριτοποίησης που ακολουθείται. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της προεκβολής των τιμών των μεταβλητών από τους κόμβους P και Q στο μέσο M της ακμής PQ, στο οποίο υπολογίζονται οι μέσες τιμές κατά Roe και το οποίο γίνεται μέσω των σχέσεων:

$$\vec{V}^L = \vec{V}_P + \frac{1}{2} \vec{PQ} \cdot (\nabla \vec{V})_P \quad (3.16)$$

$$\vec{V}^R = \vec{V}_Q - \frac{1}{2} \vec{PQ} \cdot (\nabla \vec{V})_Q \quad (3.17)$$

Με την εφαρμογή του ανωτέρω σχήματος το μονοδιάστατο πρόβλημα Riemann λύνεται για κάθε ακμή του πλέγματος.

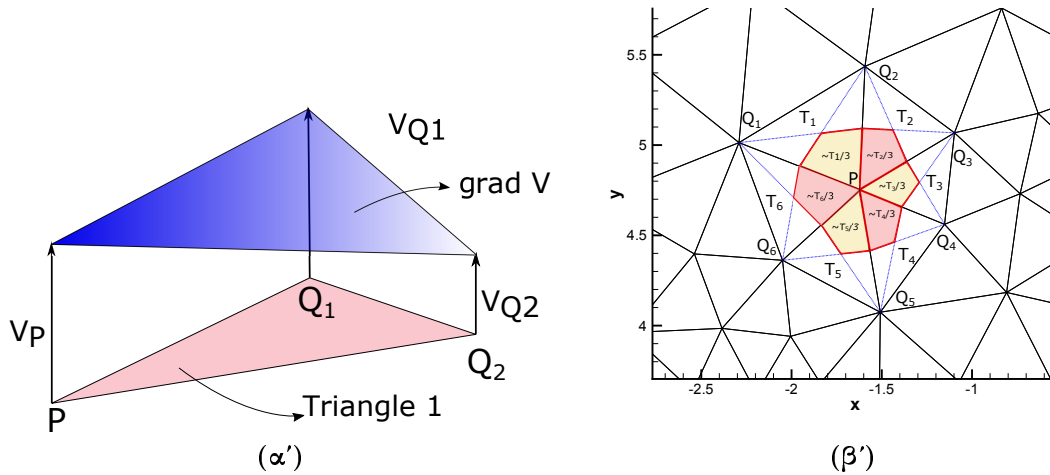
3.2.4 Υπολογισμός των Παραγώγων

Από την προηγούμενη ενότητα είναι ευνόητο ότι είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των παραγώγων στους κόμβους του πλέγματος. Για να υπολογιστούν οι ζητούμενες παράγωγοι θεωρείται ότι οι μη-συντηρητικές μεταβλητές \vec{V} κατανέμονται γραμμικά σε κάθε τριγωνικό στοιχείο του πλέγματος στο επίπεδο (x, y) , δηλαδή ότι η παράγωγος είναι σταθερή σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του τριγώνου [17] όπως φαίνεται στο σχήμα 3.11α'.

Έχοντας υπολογίσει το γινόμενο της παράγωγου Φ για κάθε διεύθυνση x_i του κόμβου P με το εμβαδόν του αντίστοιχου τριγώνου, που σχηματίζει αυτός ο κόμβος με τους αντίστοιχους γειτονικούς Q κόμβους, δίνεται πλέον η δυνατότητα να υπολογιστεί η συνολική παράγωγος Φ ανά διεύθυνση του κόμβου P με τον ακόλουθο τύπο:

$$\nabla \Phi_P = \frac{\sum_1^{\max \text{triangles}} (\nabla \Phi \Omega_{\text{triangle}})}{\sum_1^{\max \text{triangles}} (\Omega_{\text{triangle}})} \quad (3.18)$$

όπου $(\max \text{triangles})$ είναι ο αριθμός των τριγώνων στα οποία ανήκει ο κόμβος P (σχήμα 3.11β').



Σχήμα 3.11: (α') Γραμμική κατανομή των τιμών των μη-συντηρητικών μεταβλητών στο εσωτερικό ενός τριγωνικού στοιχείου. (β') Τριγωνικά στοιχεία τα οποία συνεισφέρουν κατά τμήματα στο σχηματισμό της κυψέλης του κόμβου P.

3.2.5 Ψευδο-Χρονικό Βήμα Ολοκλήρωσης

Για τον υπολογισμό του ψευδο-χρονικού βήματος χρησιμοποιούνται δύο εναλλακτικοί τρόποι, είτε κατά στοιχείο είτε κατά ακμή. Ο πρώτος δύναται να χρησιμοποιηθεί σε πλέγματα με τριγωνικά ή τετραπλευρικά στοιχεία ενώ ο δεύτερος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πλέγματα με συνδιασμό στοιχείων. Στην εργασία θα αναφερθεί μόνο ο δεύτερος τρόπος ο οποίος και υλοποιείται στο σχετικό λογισμικό. Σύμφωνα με αυτόν, η σχέση που χρησιμοποιείται για τον τοπικό υπολογισμό του Δt είναι η κάτωθι:

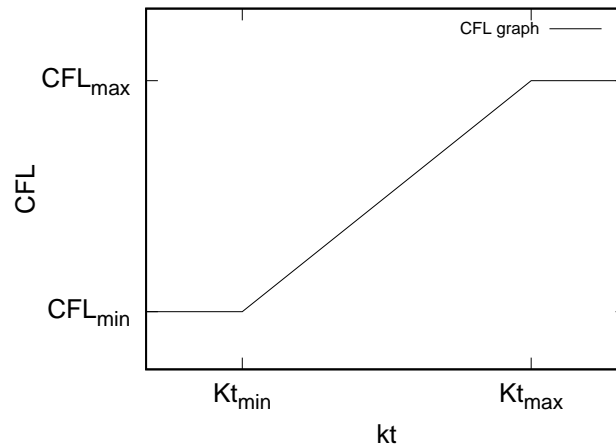
$$\Delta t_P = \frac{CFL \Omega_P}{\sum_i T_i}, \quad i = 2 \text{ για } 2\Delta \quad (3.19)$$

όπου Ω_P το εμβαδό της κυψέλης του κόμβου P. Ο παράγοντας T_i υπολογίζεται από τη σχέση:

$$T_i = (|u_i| + c)\Omega_{P_i} \quad (3.20)$$

όπου Ω_{P_i} οι προβολές του όγκου ελέγχου του κόμβου P κατά την κατεύθυνση i. Ο όρος στην παρένθεση αντιστοιχεί στη μέγιστη ταχύτητα διάδοσης της πληροφορίας ανά κατεύθυνση. Ο παράγοντας CFL είναι ο αριθμός των Courant-Friedrichs-Lewy, ο οποίος επιλέγεται έτσι ώστε να εξασφαλίζεται ο ταχύτερος δυνατός ρυθμός σύγκλισης χωρίς να διαταράσσεται η ευστάθεια του σχήματος επίλυσης. Επιπρόσθετα αναφέρεται ότι ο αριθμός αυτός περιορίζεται στην αρχή της επίλυσης, αυξάνεται γραμμικά κατά τη

διάρκεια της επίλυσης και, τελικά, μετά από κάποιο ψευδο-χρονικό βήμα σταθεροποιείται σε μία τιμή την οποία διατηρεί μέχρι τη σύγκλιση της επίλυσης, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.12.



Σχήμα 3.12: Προσδιορισμός του CFL ανάλογα με το ψευδο-χρονικό βήμα ολοκλήρωσης.

Στο διάγραμμα του σχήματος 3.12 δεν παρουσιάζονται τιμές, καθότι αυτές μπορεί να διαφέρουν από περίπτωση σε περίπτωση και άπτονται στην ευχέρεια της επιλογής του χρήστη περιοριζόμενες από τη φυσική του προβλήματος.

3.2.6 Αριθμητική Επιβολή Οριακών Συνθηκών

Όπως προαναφέρθηκε, στις ατριβείς ροές, η συνθήκη μη-εισχώρησης στο στερεό τοίχωμα επιβάλλεται μηδενίζοντας την κάθετη ταχύτητα στο τοίχωμα μέσω της σχέσης:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad (3.21)$$

Κατά συνέπεια, το διάνυσμα της ατριβούς ροής για τους κόμβους του στερεού τοιχώματος διαμορφώνεται ως εξής:

$$\vec{F}_{wall} = \begin{bmatrix} 0 \\ pn_x \\ pn_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Στο επ' άπειρο όριο, ορίζονται οι τιμές των μεταβλητών της αδιατάρακτης ροής από το χρήστη και με την εφαρμογή του σχήματος διάσπασης των διαφορών ροής του Roe υπολογίζεται το διάνυσμα της ατριβούς ροής για τους κόμβους αυτούς.

3.2.7 Αριθμητική Ολοκλήρωση των Εξισώσεων - Σημειακά Πεπλεγμένο Σχήμα

Για την επίλυση των εξισώσεων ροής στον ψευδο-χρόνο χρησιμοποιείται η Δέλτα-διατύπωση (Delta Formulation) χρησιμοποιώντας το σημειακά πεπλεγμένο σχήμα επίλυσης. Τα υπόλοιπα των εξισώσεων στο ψευδο-χρονικό βήμα $n + 1$ υπολογίζονται συναρτήσει των υπολοίπων στο προηγούμενο βήμα n ως ακολούθως:

$$\vec{R}^{n+1} = \vec{R}^n + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \Delta \vec{U}^{n+1} \quad (3.23)$$

$$\Delta \vec{U}^{n+1} = \vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n \quad (3.24)$$

Η διόρθωση $\Delta \vec{U}_P$ ανά ψευδο-χρονικό βήμα για τον κόμβο P, περιγράφεται από τη σχέση:

$$\frac{\Omega_P}{\Delta t_P} \Delta \vec{U}_P^{n+1} = -\vec{R}_P^{n+1} \quad (3.25)$$

Κατά συνέπεια, οι διακριτοποιημένες εξισώσεις για τον κόμβο P από τη σχέση (3.23) και (3.25), είναι οι εξής:

$$\underbrace{\left(\frac{\Omega_P}{\Delta t_P} I_P + \left[\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right]_P \right)}_{\text{LHS}} \Delta \vec{U}_P^{n+1} = \underbrace{-\vec{R}_P^n}_{\text{RHS}} \quad (3.26)$$

όπου I_P το μοναδιαίο μητρώο. Οι εξισώσεις (3.26), χωρίζοντας αυτές σε γινόμενο διαγώνιων όρων που αφορούν τον κόμβο P και μη-διαγώνιων για τους γειτονικούς του κόμβους Q, λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή:

$$D_P^n \Delta \vec{U}_P^{n+1} + \sum_{Q \in \text{nei}(P)} Z_P^n \Delta \vec{U}_Q^{n+1} = -\vec{R}^n \quad (3.27)$$

Παραγωγίζοντας τώρα τα υπόλοιπα των εξισώσεων R^n ως προς \vec{U}_P παράγονται οι όροι που θα δώσουν συνεισφορά στα διαγώνια στοιχεία D_P του κόμβου P στα οποία

προστίθεται και η διόρθωση του ψευδο-χρονικού βήματος της σχέσης.

Παραγωγίζοντας ξανά, τα υπόλοιπα των εξισώσεων R^n ως προς \vec{U}_Q , όπου $Q \in nei(P)$ ο κάθε γειτονικός κόμβος του κόμβου P , παράγονται οι όροι που θα δώσουν συνεισφορά στα μη-διαγώνια στοιχεία Z_P του κόμβου P .

Σημειώνεται ότι, στην περίπτωση δεύτερης τάξης ακρίβειας του σχήματος υπολογισμού, η σχέση (3.26) εξαρτάται και από τους γειτονικούς κόμβους των κόμβων Q . Επιλέγεται στην παραγωγή να ληφθούν υπόψη μόνο οι γειτονικοί κόμβοι Q του P και για το λόγο αυτό, στο LHS ακολουθείται προσέγγιση πρώτης τάξης ακρίβειας. Αυτό δεν επηρεάζει τη φυσική του προβλήματος προς επίλυση η οποία περιλαμβάνεται στο RHS, δεδομένου ότι το αποτέλεσμα της παραγωγίσης θα συνεισφέρει μόνο στο LHS, το οποίο επηρεάζει μόνο τη σύγκλιση των εξισώσεων προς επίλυση.

Τέλος για την επίλυση των εξισώσεων (3.27), χρησιμοποιείται η μέθοδος Jacobi, με εσωτερικές επαναλήψεις j_{max} ανά ψευδο-χρονικό βήμα, καταλήγοντας στην ακόλουθη μορφή:

$$\Delta\vec{U}_P^{n+1,j+1} = -(D_P^n)^{-1} \left(\vec{R}^n + \sum_{Q \in nei(P)} Z_P^n \Delta\vec{U}_Q^{n+1,j} \right), j = 1, \dots, j_{max} \quad (3.28)$$

Μετά από κάθε Jacobi επανάληψη τα νέα ροϊκά μεγέθη ανανεώνονται ως εξής:

$$\vec{U}_P^{n+1} = \vec{U}_P^n + \Delta\vec{U}_P^{n+1} \quad (3.29)$$

Κεφάλαιο 4

Υπολογισμοί σε Πολυεπεξεργαστικό Περιβάλλον Κατανεμημένης Μνήμης

Παρακάτω παρουσιάζεται ο τρόπος κατά τον οποίο η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ροής προσαρμόζεται, ώστε να μπορεί να επιτευχθεί σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον. Οι λόγοι που επιβάλλουν αυτό, κυρίως για μεγάλης κλίμακας προβλήματα, είναι ο περιορισμός μνήμης στην περίπτωση σειριακής επίλυσης σε έναν επεξεργαστή αλλά και η μείωση του χρόνου αναμονής. Για τη μεταφορά ενός τέτοιου κώδικα από σειριακό σε παράλληλο τρόπο λειτουργίας, απαιτούνται σε κάποια σημεία απλές τροποποιήσεις αλλά και πλήρη αναδόμηση του σε άλλα.

Η παραλληλοποίηση του κώδικα βασίστηκε στο διαμερισμό του συνολικού υπολογιστικού φορτίου σε μικρότερα, εκ των οποίων το καθένα ανατίθεται σε έναν πυρήνα σύγχρονου πολυπύρηνου επεξεργαστή για να επιλυθεί. Στον αλγόριθμο επίλυσης, πέραν των βημάτων που ακολουθεί ως σειριακός, απαιτείται επιπλέον να ενσωματωθούν οι ενδιάμεσες φάσεις επικοινωνίας.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου και ακολουθώντας την παράδοση της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ [12][13] αναφέρονται τα χαρακτηριστικά και η δομή στην οποία στηρίχθηκε η παραλληλοποίηση, ο τρόπος διαμερισμού του υπολογιστικού χωρίου, οι προσθήκες στο σειριακό κώδικα που επιβλήθηκαν από την παραλληλοποίηση καθώς και το είδος των επικοινωνιών που υλοποιήθηκαν.

4.1 Χαρακτηριστικά Παράλληλου Προγραμματισμού

Πριν την ανάλυση της παραλληλοποίησης του λογισμικού, αναφέρονται κάποιες βασικές έννοιες περί των παράλληλων υπολογιστικών συστημάτων (cluster) [18] με σκοπό την καλύτερη κατανόηση όσων ακολουθούν.

Αρχιτεκτονική Μνήμης: Ένα cluster διαθέτει κάποιους υπολογιστικούς κόμβους συνδεδεμένους μεταξύ τους. Κάθε κόμβος με τη σειρά του εξοπλίζεται με ένα πλήθος πολυπύρηνων επεξεργαστών και ο κάθε πυρήνας μπορεί να διαχειριστεί μία διεργασία (process) (στη συνέχεια η λέξη επεξεργαστής θα χρησιμοποιείται για να δηλώσει ένα πυρήνα). Επιπλέον, ο κάθε υπολογιστικός κόμβος διαθέτει μία ποσότητα μνήμης, η οποία είναι κοινή για όλους τους επεξεργαστές του. Τέτοιο σύστημα που διαθέτει κατανεμημένη μνήμη σε κάθε υπολογιστικό κόμβο, η οποία όμως είναι κοινή στους τοπικούς επεξεργαστές του κάθε κόμβου, διαθέτει η ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ και χρησιμοποιήθηκε στο πλαίσιο της εργασίας.

Χώρος Διευθύνσεων Μνήμης: Άμεσα σχετιζόμενος με τον τύπο μνήμης του cluster είναι ο χώρος διευθύνσεων της μνήμης που δύναται να είναι κοινός, κατανεμημένος ή υβριδικός. Στην εργασία το υπολογιστικό φορτίο διαμοιράζεται σε επιμέρους διεργασίες, οι οποίες πρέπει να διαθέτουν το ελάχιστο δυνατό πλήθος πληροφοριών για την επίλυση των εξισώσεων τοπικά. Ως επακόλουθο, ο τύπος διευθύνσεων που χρησιμοποιείται είναι κατανεμημένος, απαγορεύοντας την ύπαρξη κοινών μεταβλητών. Το πλεονέκτημα αυτού είναι ότι η κάθε διεργασία διαχειρίζεται τις τοπικές τις πληροφορίες, χωρίς να υπάρχει κίνδυνος της πρόσβασης-αλλαγής αυτών από άλλες διεργασίες. Αντίθετα, το μειονέκτημα είναι ότι για κάθε πρόσβαση σε πληροφορία που διατίθεται από άλλη διεργασία, απαιτείται να οριστεί ρητά μία δομή επικοινωνίας μεταξύ των διεργασιών. Το προγραμματιστικό μοντέλο μέσω του οποίου υλοποιούνται οι επικοινωνίες στο αναπτυχθέν λογισμικό είναι το Message Passing Interface (MPI)[19].

Προγραμματιστική Δομή: Με την έναρξη ενός λογισμικού που προγραμματίστηκε με δομές του MPI, ανατίθεται στις διεργασίες του ένα αναγνωριστικό που τις συνοδεύει μέχρι τη λήξη του. Επιπλέον κάθε διεργασία διαθέτει το δικό της σύνολο δεδομένων και χώρο διευθύνσεων μνήμης. Στο προγραμματιστικό μοντέλο που έχει υιοθετηθεί από το MPI, όλες οι διεργασίες εκτελούν τον ίδιο κώδικα και διαφοροποιούν την εκτέλεση τους ανάλογα με το αναγνωριστικό τους. Αυτό το μοντέλο αποτελεί μία ευρύτατα διαδεδομένη προγραμματιστική τεχνική, για εφαρμογές όπου εκτελούνται όμοιες λειτουργίες με διαφορετικά δεδομένα και ονομάζεται Sin-

gle Program Multiple Data (SPMD). Στο μοντέλο SPMD απαιτούνται σχήματα συγχρονισμού και ανταλλαγής δεδομένων (επικοινωνία) μεταξύ των διεργασιών, διότι όπως προαναφέρθηκε τα δεδομένα μίας διεργασίας δεν είναι προσπελάσιμα από άλλη. Αν και κάτι τέτοιο αυξάνει την πολυπλοκότητα δημιουργίας του λογισμικού, ταυτόχρονα μπορεί να οδηγήσει σε υψηλές επιδόσεις, ακριβώς για το λόγο του ότι ο προγραμματιστής έχει τον πλήρη έλεγχο της υλοποίησης.

Τύπος Επικοινωνιών: Οι επικοινωνίες που χρησιμοποιούνται στο πρωτόκολλο MPI, είναι δυνατόν να είναι blocking ή non-blocking. Στην πρώτη περίπτωση η διεργασία που εμπλέκεται σε μία επικοινωνία με μία άλλη, δεν δύναται να χρησιμοποιήσει το ίδιο προσωρινό χώρο αποθήκευσης για άλλη επικοινωνία, το οποίο αφενός διασφαλίζει την ακεραιότητα του πληροφορίας, αλλά αφετέρου δύναται να οδηγήσει σε ενδεχόμενη αναμονή των διεργασιών. Αντίθετα στη δεύτερη περίπτωση, δε διασφαλίζεται η ακεραιότητα της πληροφορίας αλλά μπορεί να μειώσει τους χρόνους αναμονής ανά διεργασία εξαιτίας των επικοινωνιών. Στο πλαίσιο της εργασίας επιλέγονται επικοινωνίες της μορφής blocking ή non-blocking με δέσμευση μέσω ενός barrier για να συγχρονιστούν όλες οι διεργασίες, καθότι η επίλυση των εξισώσεων πρέπει να εξελίσσεται ταυτόχρονα στο σύνολο του υπολογιστικού χωρίου.

Μετρικές Αξιολόγησης Παράλληλου Λογισμικού: Για την αξιολόγηση του παράλληλου λογισμικού ορίζονται οι ακόλουθες μετρικές:

- (α) Η Επιτάχυνση (speedup) που δείχνει πόσες φορές πιο γρήγορο είναι το λογισμικό σε παράλληλη εκτέλεση από τη σειριακή και ορίζεται ως $S = T_s/T_p$, όπου T_s και T_p ο χρόνος σειριακής και παράλληλης εκτέλεσης αντίστοιχα. Η ιδανική επιτάχυνση ισούται με το πλήθος p των επεξεργαστών που χρησιμοποιούνται και ισχύει $S < p$.
- (β) Η Αποδοτικότητα (efficiency) που δείχνει πόσο επιτυχημένη είναι η παραλληλοποίηση και ορίζεται ως $E = S/p$. Αναλυτικότερα ισούται με το ποσοστό του χρόνου που κάθε επεξεργαστής απασχολείται και ισχύει $E < 1$.
- (γ) Η Κλιμακωσιμότητα (scalability) που εκφράζει ποιοτικά την ικανότητα ενός λογισμικού να βελτιώνει την επίδοσή του με την προσθήκη επιπλέον επεξεργαστών.

Από το νόμο του Amdahl [20] περιγράφεται ότι το θεωρητικό speedup ($S_{latency}$) σε ένα παράλληλο λογισμικό δύναται να αυξάνει όσο αυξάνονται οι χρησιμοποιούμενοι πόροι, αλλά περιορίζεται πάντα από το τμήμα του λογισμικού το οποίο δεν επωφελείται από

την παραλληλοποίηση και ορίζεται από τη σχέση:

$$S_{latency}(s) = \frac{1}{(1 - par) + \frac{par}{s}} \quad (4.1)$$

όπου par το ποσοστό του λογισμικού που επωφελείται της παραλληλοποίησης και s το speedup του αντίστοιχου τμήματος του λογισμικού, το οποίο διαμορφώνεται από τις επικοινωνίες.

Συνοψίζοντας στην περίπτωση της παράλληλης επεξεργασίας θα έπρεπε να επιτυγχάνεται μία ιδεατή επιτάχυνση (μείωση του χρόνου κατά n φορές με χρήση n επεξεργαστών). Αυτό όμως δεν δύναται να επιτευχθεί λόγω της αδυναμίας παραλληλοποίησης του συνόλου του λογισμικού και των απαιτούμενων επικοινωνιών που προαναφέρθηκαν, το λεγόμενο και ως κόστος επικοινωνίας (communication overhead). Σε γενικές γραμμές για να είναι αποδοτικό ένα παράλληλο λογισμικό επίλυσης πρέπει: (α) να εξασφαλίζεται η ισοκατανομή του φορτίου (load balancing), (β) να ελαχιστοποιείται ο όγκος επικοινωνίας και (γ) να ελαχιστοποιείται η συχνότητα της επικοινωνίας. Τα δύο πρώτα χαρακτηριστικά εξαρτώνται από το λογισμικό και τον τρόπο διαμερισμού του υπολογιστικού χωρίου ενώ το τελευταίο εξαρτάται από τον προγραμματισμό του λογισμικού επίλυσης.

4.2 Δομή Παράλληλου Λογισμικού

Η παραλληλοποίηση του λογισμικού επίλυσης των εξισώσεων της ροής, βασίστηκε σε ένα μοντέλο Συντονιστή-Εργαζόμενου (Master-Worker). Σύμφωνα με το πρωτόκολλο επικοινωνίας MPI, αναφέρεται ότι όταν το λογισμικό εκτελείται σειριακά, δεσμεύεται ένας (1) επεξεργαστής (CPU) και, κατά συνέπεια, η διεργασία είναι μία (1) με ταυτότητα $ID = 0$. Αντίθετα όταν ακολουθείται παράλληλη εκτέλεση δεσμεύονται n επεξεργαστές με αριθμό διεργασιών που ανέρχεται στις n και $ID = 0, \dots, n - 1$, δεδομένου ότι η πρώτη διεργασία εξακολουθεί να είναι η (0). Κατά τον προγραμματισμό του λογισμικού σύμφωνα με το μοντέλο Συντονιστή-Εργαζόμενου, η διεργασία με ταυτότητα $ID = 0$ είναι ο συντονιστής.

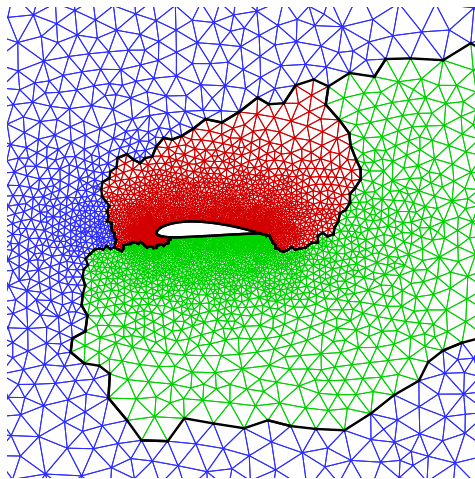
Αναλυτικότερα, όταν το λογισμικό επίλυσης εκτελεστεί σειριακά, τότε ο συντονιστής αναλαμβάνει το συνολικό φόρτο εργασίας. Στην περίπτωση που κληθεί το λογισμικό επίλυσης να εκτελεστεί παράλληλα, απαιτούνται τρεις (3) τουλάχιστον διαθέσιμες διεργασίες. Η διεργασία με $ID = 0$ ως συντονιστής, αναλαμβάνει το διαχειριστικό τμήμα της επίλυσης, ενώ οι διεργασίες με $ID = 1, 2$ ως εργαζόμενοι, αναλαμβάνουν

το φόρτο επίλυσης.

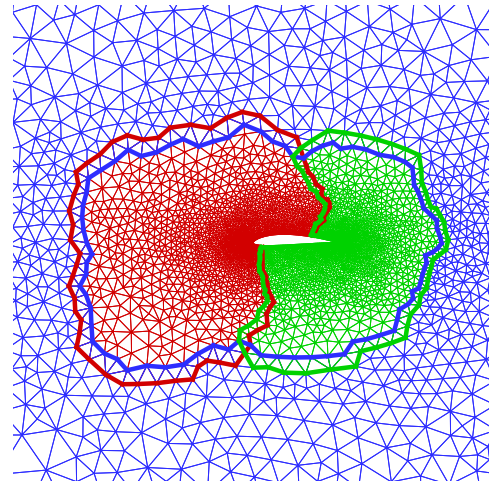
Για τον επιμερισμό του υπολογιστικού φορτίου στους εργαζομένους επιβάλλεται πρωτίστως ο κάθε εργαζόμενος να γνωρίζει το τμήμα του υπολογιστικού χωρίου στο οποίο επιλύει τις εξισώσεις ροής. Από αυτό προκύπτει ότι, αν χρησιμοποιηθούν n CPUs με $n \geq 3$, τότε το υπολογιστικό χωρίο πρέπει να διαμοιραστεί σε $(n - 1)$ υποχωρία.

4.2.1 Διάσπαση-Διαμερισμός Υπολογιστικού Χωρίου

Ο διαμερισμός του υπολογιστικού χωρίου πραγματοποιήθηκε με το λογισμικό Metis [21][22], το οποίο αξιοποιεί το γράφο του υπολογιστικού χωρίου που παράγεται από οικείο λογισμικό της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ. Το υπολογιστικό χωρίο δύναται να διασπαστεί σε υποχωρία τα οποία είναι μη-αλληλοκαλυπτόμενα και μοιράζονται κοινές ακμές και κόμβους, ή υποχωρία αλληλοκαλυπτόμενα τα οποία μοιράζονται μία κοινή ζώνη που αποτελείται από τρίγωνα και κόμβους (overlapping zone), όπως φαίνονται στο σχήμα 4.1.



(α')

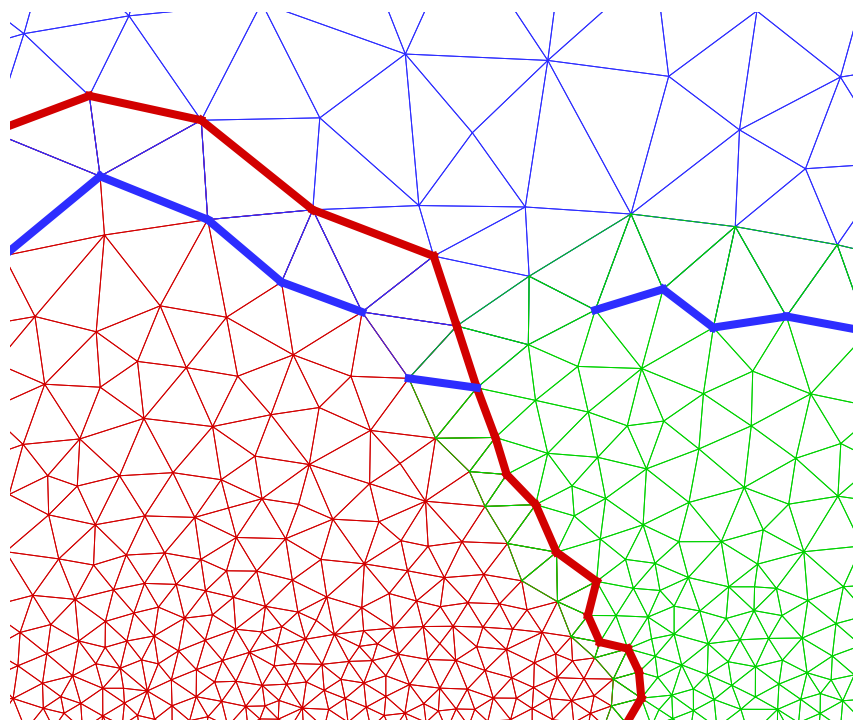


(β')

Σχήμα 4.1: (α') Μη-αλληλοκαλυπτόμενα υποχωρία με κοινές ακμές-κόμβους. (β') Αλληλοκαλυπτόμενα υποχωρία με κοινή ζώνη τριγώνων-κόμβων μεταξύ τους.

Στην εργασία επιλέχθηκε ο διαμοιρασμός σε αλληλοκαλυπτόμενα υποχωρία με κοινά τριγωνικά στοιχεία και κόμβους, εύρους μίας ακμής μεταξύ τους όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1β'. Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί ότι οι υπολογισμοί σε κάθε κόμβο

γίνονται μόνο από έναν επεξεργαστή. Από εδώ και στο εξής, ένας κόμβος θα ονομάζεται «ενεργός» για το υποχωρίο στο οποίο υπολογίζεται, ενώ είναι «ανεργός» για όλα τα υπόλοιπα υποχωρία που τον μοιράζονται. Είναι ευνόητο, λοιπόν, ότι το κάθε πλεγματοειδές τριγωνικό στοιχείο μπορεί να ανήκει το πολύ σε τρία υποχωρία και, κατά συνέπεια, οι κορυφές αυτού να αποτελούν τοπικούς κόμβους στα αντίστοιχα υποχωρία. Για να γίνουν κατανοητές οι έννοιες του ενεργού και ανεργού κόμβου, στο σχήμα 4.2 παρουσιάζεται μία λεπτομέρεια στο άνω σημείο συμβολής των τριών υποχωρίων του σχήματος 4.1β'.



Σχήμα 4.2: Λεπτομέρεια του σχήματος 4.1β' στην άνω περιοχή συμβολής των τριών υποχωρίων.

Αναλυτικότερα στο σχήμα 4.2 κάτω δεξιά φαίνεται το κόκκινο υποχωρίο το οποίο μοιράζεται κόμβους με το πράσινο και το μπλε υποχωρίο. Η έντονη κόκκινη γραμμή αποτελεί το όριο του αντίστοιχου υποχωρίου, η οποία βρίσκεται εντός των άλλων δύο

υποχωρίων.

Οι πλεγματικές γραμμές που ενώνουν κόμβους μεταξύ ορίων δύο γειτονικών υποχωρίων μαζί με τα όρια τους, συνιστούν την αλληλοκαλυπτόμενη ζώνη ενώ οι αντίστοιχοι κόμβοι είναι κοινοί μεταξύ των δύο υποχωρίων και απαρτίζουν τους κόμβους επικοινωνίας μεταξύ τους.

Οι κόμβοι που ανήκουν στο κόκκινο όριο είναι όλοι ανενεργοί στο κόκκινο υποχωρίο και ενεργοί σε κάποιο από τα δύο άλλα. Για το λόγο αυτό, η πληροφορία για τους κόμβους αυτούς θα υπολογιστεί από το γειτονικό υποχωρίο στο οποίο είναι ενεργοί και θα αποσταλεί στο κόκκινο υποχωρίο. Άρα, η πληροφορία των κόμβων αυτών αποτελεί την εισερχόμενη επικοινωνία του κόκκινου υποχωρίου και, αντίστοιχα, την εξερχόμενη επικοινωνία στο υποχωρίο που υπολογίζεται.

Οι ενεργοί κόμβοι του κόκκινου υποχωρίου είναι όλοι εκείνοι οι οποίοι περικλείονται από το κόκκινο όριο χωρίς αυτούς που ανήκουν στο όριο αυτό. Οι ενεργοί τώρα κόμβοι του κόκκινου υποχωρίου οι οποίοι όμως ανήκουν και στην αλληλοκαλυπτόμενη ζώνη υπολογίζονται στο κόκκινο υποχωρίο αλλά ανήκουν και στο όριο κάποιου γειτονικού υποχωρίου. Για το λόγο αυτό η πληροφορία που περιέχεται σε αυτούς πρέπει να αποσταλεί από το κόκκινο υποχωρίο προς το γειτονικό υποχωρίο στο οποίο είναι ενεργοί. Η πληροφορία αυτών των κόμβων αποτελεί την εξερχόμενη πληροφορία του κόκκινου υποχωρίου και, αντίστοιχα, την εισερχόμενη στο υποχωρίο στο οποίο οι κόμβοι αυτοί είναι ανενεργοί.

Ολοκληρώνοντας την ενότητα αυτή, ως κριτήριο του διαμερισμού του συνολικού χωρίου τίθεται ο ισοκαταμερισμός των κόμβων και, κατά συνέπεια, του υπολογιστικού φορτίου των εργαζόμενων. Επιπρόσθετα, η ελαχιστοποίηση των αλληλοκαλυπτόμενων ζωνών είναι αυτό που καθορίζει τον όγκο της επικοινωνίας και είναι κάτι το οποίο επίσης καλύπτεται από το λογισμικό διαμερισμού.

4.2.2 Όγκος Επικοινωνίας Μεταξύ των Υποχωρίων

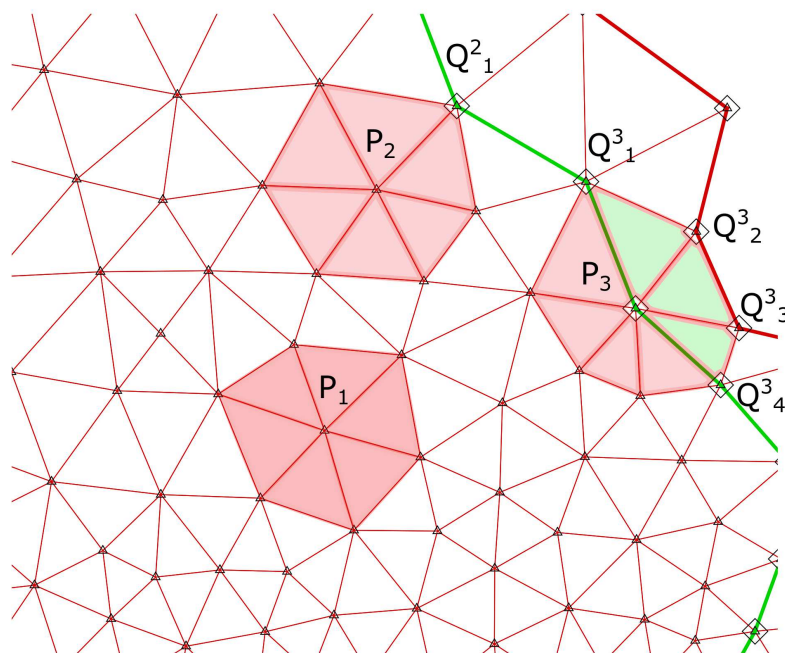
Όπως προαναφέρθηκε, τα υποχωρία μοιράζονται στους εργαζόμενους με σκοπό την επίλυση των εξισώσεων σε αυτά και μόνο σημείο συγχρονισμού μεταξύ τους τη στιγμή της επικοινωνίας. Για να μπορεί να επιτευχθεί αυτό, πρέπει οι εργαζόμενοι να διαθέτουν όλα εκείνα τα στοιχεία-δεδομένα τα οποία είναι ικανά να διακριτοποιήσουν τοπικά τις εξισώσεις προς επίλυση, όπως αυτές προκύπτουν από τη σχέση (3.26).

Από την εξίσωση (3.26), επιβάλλεται ο υπολογισμός του Ιακωβιανού Μητρώου (A), τόσο για το δεξιό μέλος της εξίσωσης RHS , όσο και για το αριστερό LHS .

Όπως αναλύθηκε στο κεφάλαιο 2, για να υπολογιστεί το εν λόγω μητρώο απαιτούνται

οι τιμές των συντηρητικών μεταβλητών \vec{U} . Από τη σχέση (3.26) καθορίζεται ότι για την παραγωγή του Ιακωβιανού μητρώου για τον κόμβο P , οι τιμές των συντηρητικών μεταβλητών πρέπει να είναι γνωστές και για κάθε γειτονικό κόμβο $Q \in nei(P)$.

Επιπρόσθετα γίνεται εύκολα κατανοητό, από τις σχέσεις (3.16) και (3.17), ότι όταν αυξάνεται η ακρίβεια του σχήματος υπολογισμού, είναι απαραίτητη η γνώση των παραγώγων του κόμβου P αλλά και των παραγώγων καθενός από τους γειτονικούς του κόμβους $Q \in nei(P)$.



Σχήμα 4.3: Ενεργοί και Ανενεργοί κόμβοι υποχωρίου για τη διακριτοποίηση των εξισώσεων ροής.

Το κάθε υποχωρίο δύναται να υπολογίσει όλα τα ανωτέρω για κάθε κόμβο ο οποίος δεν ανήκει στην αλληλοκαλυπτόμενη ζώνη με ένα γειτονικό υποχωρίο όπως φαίνεται στο σχήμα 4.3. Αναλυτικότερα, το ανωτέρω ισχύει για κάθε «ενεργό» κόμβο P του υποχωρίου, για τον οποίο όλοι οι γειτονικοί κόμβοι $Q \in nei(P)$ είναι επίσης «ενεργοί» στο ίδιο υποχωρίο. Τέτοιου είδους κόμβοι είναι είτε ο P_1 είτε ο P_2 του σχήματος 4.3. Αντίθετα κόμβοι όπως ο P_3 του σχήματος 4.3, οι οποίοι ανήκουν στην

αλληλοκαλυπτόμενη ζώνη του υποχωρίου και είναι «ενεργοί» στον εν λόγω υποχωρίο, υστερούν στη διαθέσιμη πληροφορία. Αυτό συμβαίνει διότι κάποιοι γειτονικοί τους κόμβοι $Q \in nei(P)$, οι οποίοι ανήκουν στο εν λόγω υποχωρίο, είναι «ανενεργοί» σε αυτό και υπολογίζονται από το γειτονικό υποχωρίο, μεταξύ του οποίου σχηματίζεται και η αλληλοκαλυπτόμενη ζώνη. Στην περίπτωση του κόμβου P_3 , αυτοί οι κόμβοι είναι οι Q_2^3 και Q_3^3 του σχήματος 4.3.

Στο σχήμα 4.3, φαίνονται με κόκκινη σκίαση τα τρίγωνα των οποίων οι κορυφές είναι όλες ενεργές στο κόκκινο υποχωρίο ενώ με πράσινη σκίαση φαίνονται τα τρίγωνα των οποίων μία τουλάχιστον κορυφή είναι ανενεργή στο κόκκινο υποχωρίο. Εξαιτίας αυτών των κόμβων, επιβάλλεται η επικοινωνία μεταξύ των υποχωρίων. Ένα από τα χαρακτηριστικά της επικοινωνίας όπως προαναφέρθηκε είναι ο όγκος αυτής. Αυτός λοιπόν καθορίζεται από τον αριθμό των κόμβων που ανήκουν στο σύνολο των αλληλοκαλυπτόμενων ζωνών και τον αριθμό των μεταβλητών που πρέπει να ανταλλάγουν μεταξύ των υποχωρίων κατά την επίλυση των εξισώσεων.

Στην ενότητα 4.2.1 αναλύθηκαν οι όροι της εξερχόμενης και της εισερχόμενης επικοινωνίας μεταξύ γειτονικών υποχωρίων. Με βάση τους ορισμούς αυτούς και επειδή ένας κόμβος μπορεί να ανήκει το πολύ σε τρία (3) υποχωρία, η εξερχόμενη πληροφορία μπορεί να κατευθύνεται το μέγιστο σε άλλα δύο (2) υποχωρία. Είναι ευνόητο λοιπόν ότι όσο μεγαλύτερο είναι το ποσοστό των κόμβων επικοινωνίας (*overlap zone nodes*), τόσο μεγαλύτερος είναι ο όγκος επικοινωνίας που απαιτείται να ανταλλαγεί για να επιτευχθεί η επίλυση των εξισώσεων.

Επιπρόσθετα, σε ότι αφορά την ποσότητα της εξερχόμενης πληροφορίας, επειδή αναφερόμαστε σε 2Δ ροή, η πληροφορία που αποθηκεύεται σε κάθε κόμβο και πρέπει να ανταλλαγεί, αποτελείται από τις τέσσερις (4) συντηρητικές τιμές των μεταβλητών, σύμφωνα με τη σχέση (2.2).

4.2.3 Αύξηση Ακρίβειας και Όγκος Επικοινωνίας

Σε συνέχεια όσων προαναφέρθηκαν, η αύξηση ακρίβειας στο σχήμα υπολογισμού συνεισφέρει επιπλέον και στην αύξηση του όγκου επικοινωνίας. Αυτό γίνεται εύκολα κατανοητό από τη σχέση (3.12) σε συνδιασμό με τις σχέσεις (3.16) και (3.17). Από αυτές τις σχέσεις προκύπτει ότι για τον υπολογισμό των ποσοτήτων της πυκνότητας ροής \vec{F}_{PQ} , σύμφωνα με τη σχέση (3.12), στις ακμές (PQ), οι οποίες ορίζονται από έναν ανενεργό και έναν ενεργό κόμβο στο ίδιο υποχωρίο, απαιτούνται επιπλέον οι τιμές των παραγώγων σε αυτούς τους κόμβους. Επειδή μελετάται η 2Δ ροή, οι ανταλλασσόμενες

ποσότητες πλέον ανέρχονται στις δώδεκα (12), ανά κόμβο επικοινωνίας, τέσσερις (4) τιμές συντηρητικών μεταβλητών και οκτώ (8) τιμές των αντίστοιχων παραγώγων τους προς τις δύο (2) κατευθύνσεις.

Με την αύξηση του σχήματος υπολογισμού λοιπόν, από 1ης σε 2ης ακρίβειας, γίνεται κατανοητό ότι ο όγκος επικοινωνίας σε ίδιο πλέγμα διαμερισμένο σε ίδιο αριθμό υποχωρίων, τριπλασιάζεται.

4.2.4 Συχνότητα Επικοινωνίας

Εκτός από τον όγκο επικοινωνίας έχουμε και τη συχνότητα επικοινωνίας, η οποία επηρεάζει εξίσου το χρόνο και το κόστος επίλυσης. Η επικοινωνία μπορεί να χωριστεί είτε σε εφάπαξ επικοινωνία η οποία πραγματοποιείται μία (1) φορά καθόλη τη διάρκεια του κώδικα, είτε σε επαναλαμβανόμενες επικοινωνίες κατά την επίλυση των εξισώσεων. Στην εφάπαξ επικοινωνία αναφέρονται όλες εκείνες οι πληροφορίες οι οποίες είναι απαραίτητο να υπολογιστούν από το συντονιστή και να διανεμηθούν στους εργαζόμενους. Δια μέσου αυτών των επικοινωνιών γνωστοποιείται στους εργαζόμενους το υποχωρίο εργασίας τους, οι κόμβοι επικοινωνίας τους, τα γειτονικά υποχωρία στα οποία οφείλουν να δώσουν και να λάβουν πληροφορίες. Επιπλέον διαμοιράζονται διάφορες τιμές που οι εργαζόμενοι πρέπει να έχουν για να αρχικοποιηθεί κατάλληλα το υπολογιστικό χωρίο, να δρομολογηθεί η επίλυση κατάλληλα ανά περίπτωση (ελεύθερη αεροτομή, αγωγός, περιοδικότητα ροής) αλλά και να επιβληθούν κατάλληλα οι οριακές συνθήκες, τοπικά πλέον στο κάθε υποχωρίο. Επίσης, στην εφάπαξ επικοινωνία ανήκει και αυτή του συντονιστή στο τέλος της επίλυσης κατά την οποία όλα τα αποτελέσματα των υποχωρίων διοχετεύονται από τους εργαζόμενους στο συντονιστή.

Από την άλλη πλευρά υπάρχουν και επικοινωνίες οι οποίες πρέπει να επαναλαμβάνονται κατά τη διάρκεια εξέλιξης του κώδικα με σκοπό η επίλυση να εξελίσσεται ομαλά και ταυτόχρονα στο σύνολο του υπολογιστικού χωρίου παρότι εξελίσσεται ταυτόχρονα σε όλα τα υποχωρία.

Κατ' αρχάς, για να εξελίσσεται ταυτόχρονα η συνολική επίλυση στο σύνολο του υποχωρίου, όλοι οι εργαζόμενοι κάθε στιγμή πρέπει να βρίσκονται στο ίδιο ψευδο-χρονικό βήμα επανάληψης, με σκοπό να υπολογίζουν κατά τον ίδιο τρόπο και με τον ίδιο αριθμό *CFL* τον ψευδοχρονικό όρο της εξίσωσης (3.26) όπως αναλύθηκε στην παράγραφο 3.2.5. Εκτός όμως από το ψευδο-χρονικό βήμα, οι εργαζόμενοι δεσμεύονται να συμβαδίζουν και ως προς τις ενδιάμεσες επαναλήψεις της μεθόδου *Jacobi* που απαιτούνται για κάθε ψευδοχρονικό βήμα (παράγραφος 3.2.7).

Από τα ανωτέρω καθορίζεται ότι όσες φορές εκτελείται μία επανάληψη *Jacobi* τόσες φορές πρέπει να επικοινωνήσουν οι εργαζόμενοι μεταξύ τους με σκοπό να ανταλλάξουν ο καθένας με τους γειτονικούς προς αυτόν, τις ποσότητες $\Delta \vec{U}_P^{n+1,j}$, τις οποίες υπολόγισε ο καθένας για τους ενεργούς κόμβους της αλληλοκαλυπτόμενης ζώνης. Επιπρόσθετα, όπως προαναφέρθηκε, επειδή όλες οι διεργασίες πρέπει να βρίσκονται στο ίδιο στιγμιότυπο, αυτό οφείλει να διασφαλιστεί από τον συντονιστή ο οποίος μέσω μίας εντολής προς τους εργαζόμενους σε κάθε επανάληψη ψευδο-χρονικού βήματος, τερματίζει το σύνολο των διεργασιών τη στιγμή που εξασφαλίζεται το κριτήριο σύγκλισης.

4.2.5 Αύξηση Ακρίβειας και Συχνότητα Επικοινωνίας

Όλα τα ανωτέρω ισχύουν όταν το σχήμα υπολογισμού είναι 1ης τάξης. Όταν το σχήμα ακρίβειας αυξάνεται σε 2ης τάξης, τότε στο ίδιο ψευδο-χρονικό βήμα οι εργαζόμενοι πρέπει να επικοινωνήσουν μία (1) επιπλέον φορά, με σκοπό πλέον να ανταλλάξουν τις τιμές των παραγώγων για τους κόμβους που προαναφέρθηκαν.

Άρα γίνεται αντιληπτό ότι, αυξάνοντας την ακρίβεια του σχήματος υπολογισμού από 1ης σε 2ης τάξης, η συχνότητα της επικοινωνίας διπλασιάζεται.

4.2.6 Σύνοψη

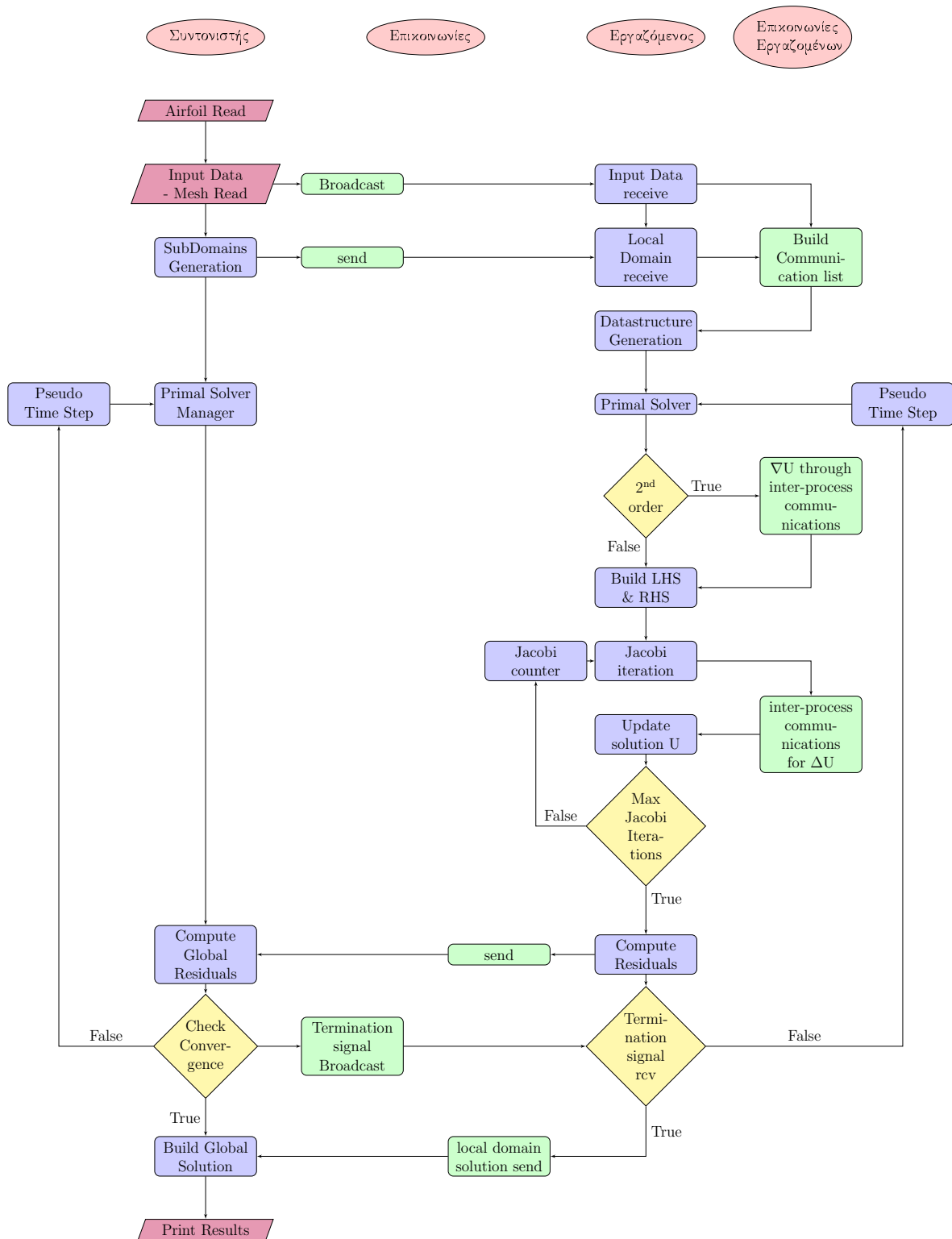
Ανακεφαλαιώνοντας, όταν ο κώδικας εκτελείται παράλληλα, εκτελούνται δύο (2) τμήματά του αυτό του συντονιστή και αυτό του εργαζόμενου, ως εξής:

1. **Συντονιστής** : Εκτελεί το τμήμα κώδικα, το οποίο θα εκτελούνταν και σειριακά αποδεδειγμένο όμως από οποιοδήποτε φόρτο υπολογισμού. Δηλαδή ευθύνεται για το διαχειριστικό τμήμα κατά την εκτέλεση της επίλυσης. Διαθέτει πληροφορία για το συνολικό υπολογιστικό χωρίο, χωρίς όμως να υπολογίζει την πλήρη τοπολογική δομή (*Datastructure*). Διαθέτει τη συνολική αρίθμηση κόμβων, τριγώνων και τις συντεταγμένες αυτών. Όπως προκύπτει από αυτά που προαναφέρθηκαν, επειδή εκτελείται ταυτόχρονα με το αντίστοιχο τμήμα που εκτελούν οι εργαζόμενοι σε κάθε χρονική στιγμή, βασικό μέλημα στον προγραμματισμό είναι να εκτελεί τις λιγότερες δυνατές εργασίες ώστε να μην επηρεάζει τη συνολική εξέλιξη της επίλυσης. Συνοπτικά, οι εργασίες που εκτελούνται είναι:

- (α) Αρχικά διαβάζει το συνολικό υπολογιστικό χωρίο, το διασπά σε υποχωρία και υπολογίζει αυτά που θα απαιτηθούν από τους εργαζόμενους, πριν τον υπολογισμό της τοπολογικής δομής από αυτούς.
- (β) Διαμοιράζει τα στοιχεία στους εργαζόμενους μέσω των εφάπαξ επικοινωνιών που αναλύθηκαν ανωτέρω, δημιουργώντας με αυτόν τον τρόπο τα υποχωρία με την τοπική τους αρίθμηση και τις λίστες αντιστοίχισης αυτής προς τη συνολική αρίθμηση των κόμβων. Επιπλέον, σε αυτό το σημείο, παράγονται οι λίστες με τους κόμβους επικοινωνίας του κάθε υποχωρίου.
- (γ) Με το πέρας κάθε ψευδο-χρονικού βήματος, συλλέγει τα υπόλοιπα (*Residuals*) των εργαζομένων, υπολογίζει το συνολικό υπόλοιπο και αποφασίζει για τον τερματισμό ή όχι της επίλυσης.
- (δ) Μετά τον τερματισμό της επίλυσης συλλέγει τις τιμές των μεταβλητών από τους εργαζόμενους, τις αντιστοιχίζει στο συνολικό υποχωρίο και τυπώνει τα αρχεία αποτελεσμάτων.
2. **Εργαζόμενος :** Εκτελεί ένα τμήμα του κώδικα το οποίο σε σειριακή εκτέλεση είναι αυτό που συνδέεται άμεσα με το υπολογιστικό φορτίο. Δεδομένης της διάσπασης με αλληλοκαλυπτόμενες ζώνες, στον κάθε εργαζόμενο εκτελούνται οι εργασίες ως κάτωθι:
- (α) Αναμένει από το συντονιστή τα δεδομένα του υποχωρίου και άλλα δεδομένα ροής.
- (β) Επικοινωνεί με τους λοιπούς γειτονικούς εργαζόμενους του, μία φορά, με σκοπό να συντάξει τις λίστες των κόμβων επικοινωνίας (εισερχόμενης και εξερχόμενης).
- (γ) Υπολογίζει την τοπολογική δομή δεδομένων για το υπολογιστικό χωρίο που του αναλογεί.
- (δ) Επικοινωνεί με τους λοιπούς γειτονικούς εργαζόμενους του, μία φορά, πριν την πρώτη επανάληψη *Jacobi*, για να αποδώσει και να λάβει τις μεταβολές που υπολογίζει για τους «ενεργούς» και «ανενεργούς» σε αυτόν κόμβους αντίστοιχα, με σκοπό να αρχικοποιηθεί το σχήμα επίλυσης ως προς τα αρχικά $\Delta \vec{U}_P^{n=1, j=0}$ για κάθε τοπικό κόμβο P του υποχωρίου.
- (ε) Εκκινεί αυτόνομα την επίλυση των εξισώσεων τοπικά και ανεξάρτητα από τους άλλους.

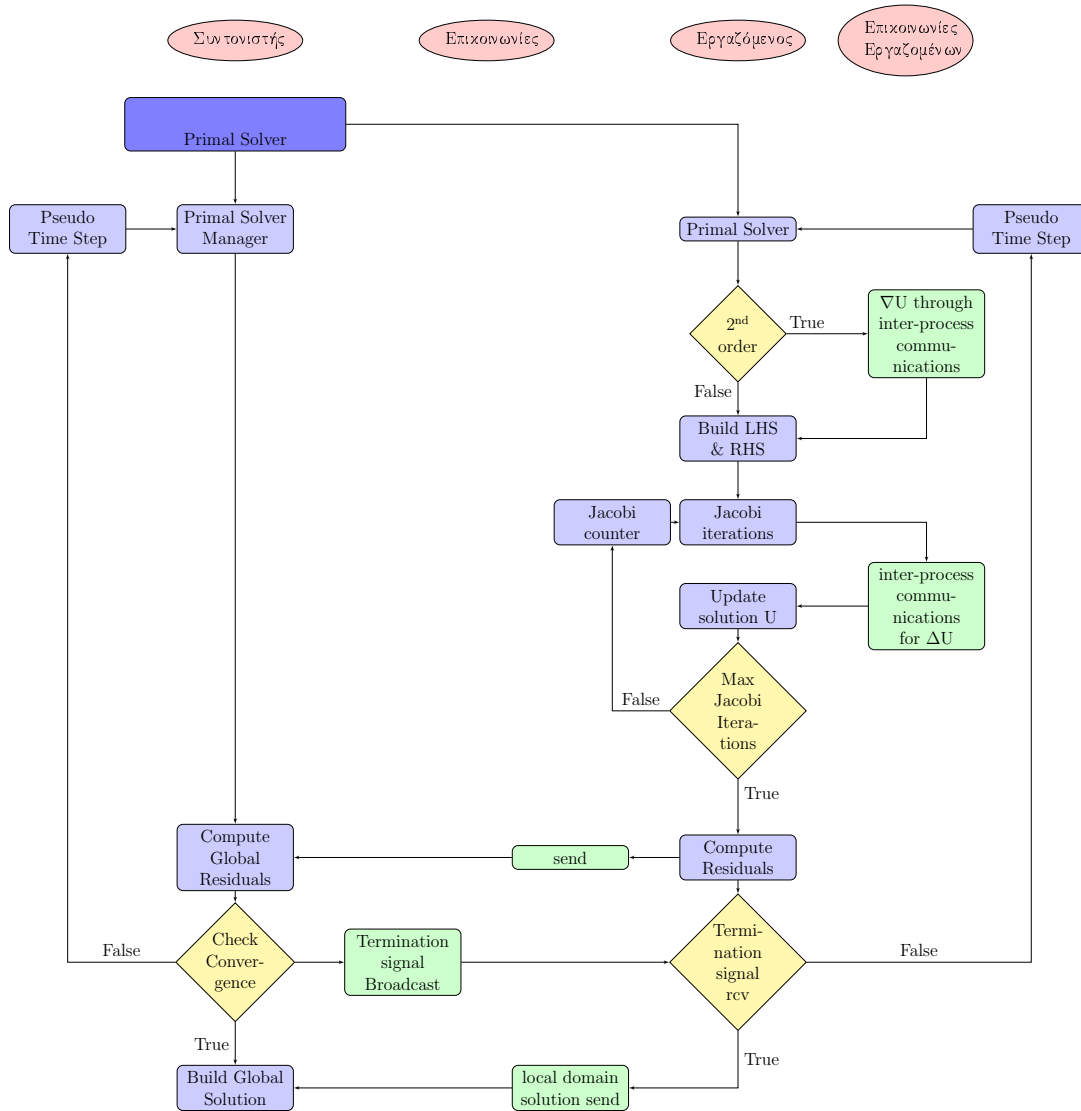
- (στ) Επικοινωνεί με τους γειτονικούς εργαζόμενους του, σε κάθε επανάληψη *Jacobi* τις μεταβολές που υπολογίζει για τους «ενεργούς» σε αυτόν κόμβους και ταυτόχρονα λαμβάνει από τους ίδιους τις μεταβολές για τους «ανενεργούς» κόμβους του υποχωρίου του.
- (ζ) Στην περίπτωση 2ης τάξης ακρίβειας, επικοινωνεί με τους γειτονικούς εργαζόμενους του, σε κάθε ψευδο-χρονικό βήμα, τις παραγώγους που έχει υπολογίσει για τους κόμβους επικοινωνίας.
- (η) Επικοινωνεί με τον συντονιστή, σε κάθε ψευδο-χρονικό βήμα στέλνοντας τα υπόλοιπα των εξισώσεων και λαμβάνοντας την απόφαση συνέχισης ή όχι της επίλυσης.
- (θ) Μετά το τέλος της επίλυσης των εξισώσεων, επικοινωνεί με τον συντονιστή για να αποδώσει τις τιμές των υπολογιζόμενων μεταβλητών για κάθε κόμβο του υποχωρίου του.

Όλα τα ανωτέρω συνοψίζονται σχηματικά στο ακόλουθο διάγραμμα.



Σχήμα 4.4: Διάγραμμα ροής εργασιών του αναπτυχθέντος λογισμικού σε παράλληλο επεξεργαστή, για την επίλυση των εξισώσεων Euler.

Από το σχήμα 4.4 μπορεί να εξαχθεί το διάγραμμα ροής του τμήματος του αναπτυχθέντος λογισμικού το οποίο επιλύει τις εξισώσεις Euler και παρουσιάζεται στο σχήμα 4.5.



Σχήμα 4.5: Διάγραμμα ροής εργασιών του τμήματος του αναπτυχθέντος λογισμικού που επιλύει τις εξισώσεις euler.

Τέλος, πρέπει να αναφερθεί ότι όταν το λογισμικό εκτελείται σε μορφή κύκλων βελτιστοποίησης όπου επιπλέον επιλύεται και το συζυγές πρόβλημα, απαιτούνται κάποιες επιπρόσθετες επικοινωνίες, οι οποίες αναλύονται σε μετέπειτα κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 5

Βελτιστοποίηση με τη Συζυγή Τεχνική

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζεται η συνεχής συζυγής διατύπωση (continuous adjoint method) των μόνιμων 2Δ εξισώσεων Euler μη-συνεκτικής ροής. Η συζυγής μέθοδος εφαρμόζεται στη βελτιστοποίηση μορφής μιας αεροτομής παραμετροποιημένης με καμπύλες Bézier, με σκοπό είτε τη μεγιστοποίηση της άνωσης, είτε την ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας με την επίτευξη συγκεκριμένης τιμής άνωσης. Το βασικό πλεονέκτημα που προσφέρει η χρήση της συζυγούς μεθόδου είναι ότι το κόστος υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας της συνάρτησης κόστους (λ.χ. της δύναμης άνωσης) ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού (συντεταγμένες των σημείων ελέγχου της καμπύλης Bézier) είναι ανεξάρτητο του πλήθους τους.

Το μειονέκτημα που συνοδεύει όμως τα ανωτέρω, έγκειται στην ανάγκη επαναδιατύπωσης των συζυγών εξισώσεων ανάλογα με το πρόβλημα και τη συνάρτηση κόστους.

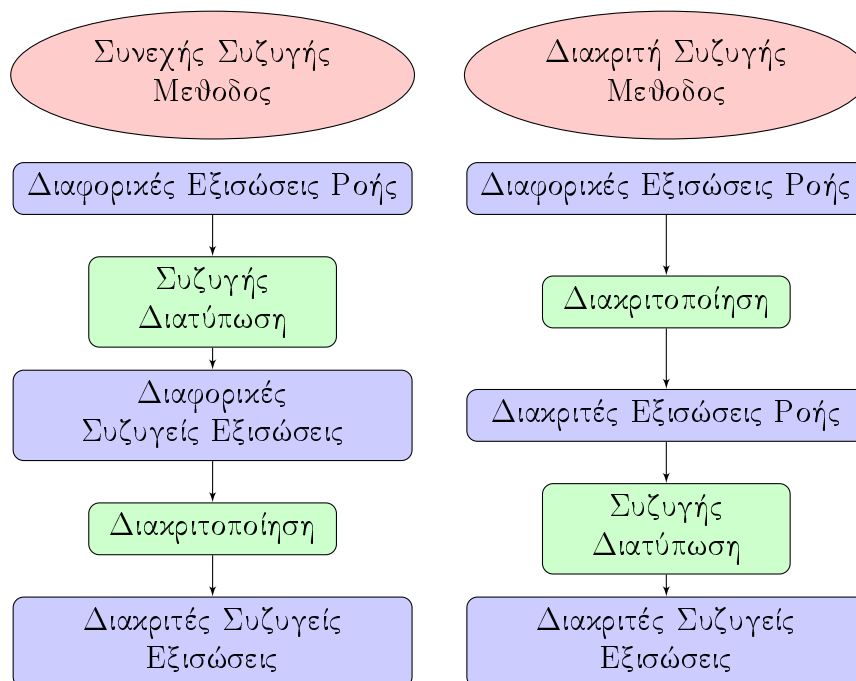
Μετά τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, χρησιμοποιείται η μέθοδος απότομης καθόδου με σκοπό την εύρεση των μεταβλητών σχεδιασμού που βελτιστοποιούν τη συνάρτηση κόστους.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου παρουσιάζεται η μαθηματική διάτυπωση της συνάρτησης κόστους, αναπτύσσεται μαθηματικά η συνεχής συζυγής μέθοδος για τις 2Δ εξισώσεις Euler, από την οποία προκύπτουν οι συζυγείς εξισώσεις (*Field Adjoint-Equations* (FAE)), οι συζυγείς οριακές συνθήκες (*Adjoint Boundary Conditions* (ABC)) και οι παράγωγοι ευαισθησίας (*Sensitivity Derivatives* (SD)).

Στο τέλος, ακολουθεί μία αναφορά στη μορφοποίηση του πλέγματος (Mesh Morphing) μετά τη μεταβολή του σχήματος της αεροτομής, καθώς το πλέγμα που χρησιμοποιείται είναι οριόδετο και οφείλει να ακολουθεί της μεταβολές της μορφής της αεροτομής. Τέλος θα αναλυθεί η τροποποίηση του λογισμικού με σκοπό να επιλύει τα ανωτέρω σε παράλληλο επεξεργαστικό περιβάλλον, τόσο για τις συζυγείς εξισώσεις αλλά και για το τμήμα αναπροσαρμογής του πλέγματος.

5.1 Συνεχής και Διακριτή Συζυγής Μέθοδος

Υπάρχει η συνεχής και η διακριτή διατύπωση των συζυγών εξισώσεων.[23][24] Η διαφορά έγκειται στον τρόπο με τον οποίο προκύπτουν οι συζυγείς εξισώσεις στη διακριτοποιημένη μορφή τους. Στη συνεχή μέθοδο (continuous adjoint method) [6][7][8][9], προκύπτουν οι συζυγείς διαφορικές συζυγείς εξισώσεις από τις διαφορικές εξισώσεις ροής και, στη συνέχεια, διακριτοποιούνται στις διακριτές συζυγείς εξισώσεις. Αντίθετα, στη διακριτή μέθοδο (discrete adjoint method) [25][26] η συζυγής διατύπωση εφαρμόζεται στις διακριτοποιημένες εξισώσεις της ροής και προκύπτουν οι διακριτές συζυγείς εξισώσεις. Συνοπτικά φαίνονται στο σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1: Διάγραμμα παραγωγής των Διακριτών Συζυγών Εξισώσεων.

Τα πλεονεκτήματα-μειονεκτήματα της εκάστοτε μεθόδου καθορίζονται από την

ανωτέρω διατύπωση. Αναλυτικότερα, στη συνεχή συζυγή μέθοδο απαιτείται αρκετή προεργασία για την θεμελίωση της και την εύρεση της παραγώγου της συνάρτησης κόστους. Επιπλέον, κάθε αλλαγή της συνάρτησης κόστους απαιτεί επαναδιατύπωση της μεθόδου. Σε ότι αφορά τη διακριτή μέθοδο, είναι πιο άμεση αλλά απαιτεί μεγαλύτερη διαθέσιμη μνήμη για την αποθήκευση των δεδομένων που υπολογίστηκαν κατά την επίλυση της ροής.

Επιπρόσθετα, πλεονέκτημα της συνεχής συζυγής μεθόδου είναι ότι ο αλγόριθμος επίλυσης των συζυγών μ.δ.ε δημιουργείται εξαρχής, προσφέροντας τη δυνατότητα επιλογής του σχήματος διακριτοποίησης, το οποίο δύναται να είναι και διαφορετικό από αυτό των εξισώσεων ροής. Αντίθετα, στη διακριτή μέθοδο ο αλγόριθμος επίλυσης αξιοποιεί μόνο τις ιδιότητες που εφαρμόστηκαν στην επίλυση των εξισώσεων ροής.

Στην εργασία αυτή θα αναλυθεί μόνο η συνεχής συζυγής μέθοδος.

5.2 Συνεχής Συζυγής Μέθοδος στη Βελτιστοποίηση Μορφής

5.2.1 Συνάρτηση Κόστους

Στην ενότητα αυτή αναλύεται η βελτιστοποίηση του σχήματος μίας αεροτομής σε ελεύθερη ροή με βάση ένα κριτήριο, το οποίο ως μαθηματική έκφραση εξαρτάται από την τιμή μίας συνάρτησης κόστους (F_{obj}) και ορίζεται ως εξής:

$$F_{obj} = w_{c_L}(C_L - C_{L_t})^2 + w_{c_D}C_D^2 \quad (5.1)$$

όπου C_L ο συντελεστής της δύναμης άνωσης που ασκείται στην αεροτομή, C_{L_t} η επιθυμητή τιμή του συντελεστή άνωσης που τίθεται από το χρήστη, C_D ο συντελεστής της δύναμης οπισθέλκουσας επί της αεροτομής και w_{c_L} , w_{c_D} οι συντελεστές βαρύτητας της άνωσης και της οπισθέλκουσας ως προς τη συνεισφορά τους στην τιμή της συνάρτησης κόστους, αντίστοιχα.

Ο λόγος που λαμβάνεται υπόψη η οπισθέλκουσα είναι ότι η ροή που επιλύεται αφορά συμπιεστό ρευστό και παρά τη μη-ύπαρξη συνεκτικότητας, εμφανίζεται οπισθέλκουσα λόγω της εμφάνισης χρουστικού κύματος σε διηχητική ροή.

Τα κριτήρια της βελτιστοποίησης είναι:

- (α) η μεγιστοποίηση της τιμής του συντελεστή άνωσης, θέτοντας $w_{C_L} = 1, w_{C_D} = 0$ και $C_{L_t} = 0$
- (β) η ελαχιστοποίηση της τιμής του συντελεστή οπισθέλκουσας, με ταυτόχρονο περιορισμό στην τιμή του συντελεστή άνωσης το $C_{L_t} = ct$, θέτοντας $w_{C_L} \neq 0$ και $w_{C_D} \neq 0$

Η άνωση-οπισθέλκουσα είναι διανύσματα δύναμης εκφρασμένα σε μία κατεύθυνση κάθετη ή παράλληλη στη ροή αντίστοιχα, και υπολογίζονται ως εξής:

$$Force(k) = \int_{S_{wall}} p \hat{n}_i \cdot \hat{r}_i^k dS \quad k \in [1, 2] \quad (5.2)$$

$$Drag = Force(1) \quad (5.3)$$

$$Lift = Force(2) \quad (5.4)$$

όπου p η στατική πίεση, \hat{n}_i το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε κάθε σημείο της επιφάνειας της αεροτομής και \hat{r}_i^k το μοναδιαίο διάνυσμα κατεύθυνσης του διανύσματος της δύναμης.

Οι αντίστοιχοι συντελεστές των δυνάμεων άνωσης και οπισθέλκουσας υπολογίζονται ως εξής:

$$C_D = Force(1) \frac{2}{\rho_\infty S V_\infty^2} = Force(1) K_{C_{LD}} \quad (5.5)$$

$$C_L = Force(2) \frac{2}{\rho_\infty S V_\infty^2} = Force(2) K_{C_{LD}} \quad (5.6)$$

όπου ρ_∞ η πυκνότητα της επ' άπειρο ροής, S το μήκος της αεροτομής λόγω 2Δ ροής και V^2 το τετράγωνο του μέτρου της ταχύτητας της επ' άπειρο ροής.

Για να μπορεί να εφαρμοστεί οποιοδήποτε είδους βελτιστοποίηση απαιτείται να οριστούν οι μεταβλητές σχεδιασμού, των οποίων η αλλαγή επιφέρει μεταβολή στη συνάρτηση κόστους. Στην περίπτωση της αεροτομής που εξετάζεται, ορίζεται μία παραμετροποίηση αυτής μέσω πολυωνύμων Bézier. Από την παραμετροποίηση αυτή, οι συντεταγμένες (x, y) των σημείων ελέγχου των πολυωνύμων Bézier αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού και καθορίζουν το διάνυσμα $\vec{b} = [b_1, b_2, \dots, b_N]^T$ αυτών. Κάθε συνδιασμός αυτών, δηλαδή κάθε συγκεκριμένο διάνυσμα \vec{b} , καθορίζει μονοσήμαντα το σχήμα της αεροτομής, άρα και την κατανομή πίεσης επί αυτής, για δεδομένες συνθήκες ροής. Η διαφορετική κατανομή πίεσης σύμφωνα με τη σχέση (5.2) μεταβάλλει τις δυνάμεις άνωσης-οπισθέλκουσας, οι οποίες με τη σειρά τους επηρεάζουν την τιμή της συνάρτησης κόστους.

Τέλος οι ανανεωμένες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού υπολογίζονται βάσει της μεταβολής της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, εφαρμόζοντας είτε τη μέθοδο της απότομης ανόδου (+) στην περίπτωση μεγιστοποίησης της άνωσης, είτε της απότομης καθόδου (−) στην περίπτωση ελαχιστοποίησης της οπισθέλκουσας, ως εξής:

$$b_n^{new} = b_n^{old} \pm \eta \frac{\delta F}{\delta b_n}, \quad n \in [1, N] \quad \eta > 0 \quad (5.7)$$

όπου η τιμή (η) ρυθμίζει το μέγεθος της μεταβολής της μεταβλητής σχεδιασμού.

5.2.2 Συνεχής Συζυγής Μέθοδος

Κατά τη χρήση αιτιοκρατικής μεθόδου βελτιστοποίησης, απαιτείται ο προσδιορισμός της ολικής παραγωγής της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, όπως προαναφέρθηκε. Η αεροδυναμική δύναμη, όμως εξαρτάται από το ροϊκό μέγεθος της πίεσης p (σχέση (5.2)), του οποίου το πεδίο τιμών της παραγωγής ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού είναι κοστοβόρα στον υπολογισμό.

Μεσω του συζυγούς προβλήματος επιτυγχάνεται ο υπολογισμός της ολικής παραγωγής της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, αποφεύγοντας οποιοδήποτε κοστοβόρο υπολογισμό των παραγωγών κάθε ροϊκού μεγέθους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού $\left(\frac{\delta U}{\delta b_n}\right)$. Στη συνέχεια, για την ανάπτυξη των εξισώσεων του συζυγούς προβλήματος ορίζεται η επαυξημένη συνάρτηση κόστους, ως κάτωθι:

$$F_{aug} = F + \iint_{\Omega} \Psi_n R_n d\Omega \quad (5.8)$$

όπου $\vec{\Psi}$ το διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών. Η F_{aug} ταυτίζεται με την F , δεδομένου ότι οι εξισώσεις ροής έχουν επιλυθεί άρα και το υπόλοιπο τους \vec{R} ισούται με μηδέν (0). Η μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού b_i για ($i = 1, \dots, N$), με βάση το θεώρημα Leibnitz, προκύπτει ως:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i} &= \frac{\delta F}{\delta b_i} + \frac{\delta}{\delta b_i} \iint_{\Omega} \Psi_n R_n d\Omega \\ &= \frac{\delta F}{\delta b_i} + \iint_{\Omega} \frac{\partial (\Psi_n R_n)}{\partial b_i} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \Psi_n R_n \frac{\delta x_i}{\delta b_i} \hat{n}_i dS \end{aligned} \quad (5.9)$$

Εφόσον οι εξισώσεις ροής ικανοποιούνται στο χωρίο ολοκλήρωσης τους (Ω) (δηλαδή $\vec{R}|_{\Omega} = 0$), η σχέση (5.9) μπορεί να αναδιατυπωθεί ως:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i} = \underbrace{\frac{\delta F}{\delta b_i}}_{T1} + \underbrace{\iint_{\Omega} \Psi_n \frac{\partial R_n}{\partial b_i} d\Omega}_{T2} + \underbrace{\int_{S_{\infty} \cup S_{wall}} \Psi_n R_n \frac{\delta x_l}{\delta b_i} \hat{n}_l dS}_{Leibnitz} \quad (5.10)$$

όπου $\partial\Omega = S_{\infty} \cup S_{wall}$, S_{∞} το επ' άπειρο όριο του υπολογιστικού χωρίου και S_{wall} το στερεό τοίχωμα της αεροτομής.

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα της σχέσης (5.10) περιλαμβάνει τη μεταβολή των συντεταγμένων των κόμβων της σχεδιαζόμενης γεωμετρίας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού στα όρια $S = S_{\infty} \cup S_{wall}$. Οι όροι T1 και T2 αναπτύσσονται στη συνέχεια.

Ανάλυση Όρου T1

Ο όρος T1 της εξίσωσης (5.10) λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (5.1) και (5.2), ισούται με:

$$\begin{aligned} T1 &:= \frac{\delta F}{\delta b_i} = \underbrace{2w_{C_L} K_{C_{LD}} (C_L - C_{L_t})}_{K_L} \frac{\delta}{\delta b_i} \int_{S_{wall}} p \hat{n}_l \hat{r}_l^2 dS \\ &\quad + \underbrace{2w_{C_D} K_{C_{LD}} C_D}_{K_D} \frac{\delta}{\delta b_i} \int_{S_{wall}} p \hat{n}_l \hat{r}_l^1 dS \\ &= K_L \left(\int_{S_{wall}} \frac{\delta p}{\delta b_i} \hat{n}_l \hat{r}_l^2 dS + \int_{S_{wall}} p \hat{r}_l^2 \frac{\delta(\hat{n}_l dS)}{\delta b_i} + \int_{S_{wall}} p \hat{n}_l \frac{\delta \hat{r}_l^2}{\delta b_i} dS \right) \\ &\quad + K_D \left(\int_{S_{wall}} \frac{\delta p}{\delta b_i} \hat{n}_l \hat{r}_l^1 dS + \int_{S_{wall}} p \hat{r}_l^1 \frac{\delta(\hat{n}_l dS)}{\delta b_i} + \int_{S_{wall}} p \hat{n}_l \frac{\delta \hat{r}_l^1}{\delta b_i} dS \right) \\ &= \underbrace{\int_{S_{wall}} (K_L \hat{n}_l \hat{r}_l^2 + K_D \hat{n}_l \hat{r}_l^1) \frac{\delta p}{\delta b_i} dS}_{ABC_{wall}} + \underbrace{\int_{S_{wall}} p (K_L \hat{r}_l^2 + K_D \hat{r}_l^1) \frac{\delta(\hat{n}_l dS)}{\delta b_i}}_{SD} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Το πρώτο επιφανειακό ολοκλήρωμα που περιλαμβάνει τον κοστοβόρο όρο μεταβολής των ροικών μεγεθών (πίεσης) ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, στο στερεό όριο της αεροτομής, επιβάλλεται να απαλειφθεί και για το λόγο αυτό λαμβάνεται υπόψη στη διατύπωση των συζυγών οριακών συνθηκών επί της αεροτομής. Αντίθετα, το δεύτερο

επιφανειακό ολοκλήρωμα που αφορά τη μεταβολή των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του σώματος ως προς τη μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού, συνεισφέρει στην έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας.

Ανάλυση Όρου T2

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Green-Gauss ο όρος T2 αναλύεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 T2 &:= \iint_{\Omega} \Psi_n \frac{\partial R_n}{\partial b_i} d\Omega = \iint_{\Omega} \Psi_n \frac{\partial}{\partial b_i} \left(\frac{\partial f_{nm}}{\partial x_m} \right) d\Omega \\
 &= \iint_{\Omega} \Psi_n \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial f_{nm}}{\partial b_i} \right) d\Omega \\
 &= \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\Psi_n \frac{\partial f_{nm}}{\partial b_i} \right) d\Omega - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_m} \frac{\partial f_{nm}}{\partial b_i} d\Omega \\
 &= \int_S \Psi_n \frac{\partial f_{nm}}{\partial b_i} \hat{n}_m dS - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_m} \left(\frac{\partial f_{nm}}{\partial U_k} \frac{\partial U_k}{\partial b_i} \right) d\Omega \\
 &= \underbrace{\int_S \Psi_n \frac{\partial f_{nm}}{\partial b_i} \hat{n}_m dS}_{T3} + \iint_{\Omega} \underbrace{\left(-\frac{\partial \Psi_n}{\partial x_m} \mathbf{A}_{nmk} \right)}_{FAE} \frac{\partial U_k}{\partial b_i} d\Omega
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Μηδενίζοντας το ολοκλήρωμα που περιλαμβάνει τον όρο $\left(\frac{\partial U_k}{\partial b_i} \right)$, προκύπτουν οι εξισώσεις του συζυγούς προβλήματος FAE, αποφεύγοντας έτσι τον κοστοβόρο υπολογισμό των παραγώγων των ροϊκών μεγεθών ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Ο όρος T3 αναπτύσσεται στη συνέχεια ξεχωριστά.

Ανάλυση Όρου T3

Επειδή η επιφάνεια S αποτελείται από τα στερεά και τα επ' άπειρο όρια του υπολογιστικού χωρίου, ισχύει ότι $S = S_\infty \cup S_{wall}$. Αναλύοντας τον όρο T3 της εξίσωσης (5.12), λαμβάνεται ξεχωριστά η συμβολή κάθε ορίου και προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned}
T3 &:= \int_S \Psi_n \frac{\partial f_{nm}}{\partial b_i} \hat{n}_m dS = \int_{S_\infty \cup S_{wall}} \Psi_n \frac{\partial f_{nm}}{\partial b_i} \hat{n}_m dS \\
&= \int_{S_\infty} \Psi_n \frac{\partial f_{nm}}{\partial b_i} \hat{n}_m dS + \int_{S_{wall}} \Psi_n \frac{\partial f_{nm}}{\partial b_i} \hat{n}_m dS \\
&= \int_{S_\infty} \Psi_n \frac{\partial f_{nm}}{\partial U_k} \frac{\partial U_k}{\partial b_i} \hat{n}_m dS + \int_{S_{wall}} \Psi_n \frac{\partial f_{nm}}{\partial b_i} \hat{n}_m dS \\
&= \int_{S_\infty} \Psi_n \frac{\partial f_{nm}}{\partial U_k} \left(\frac{\delta U_k}{\delta b_i} - \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \frac{\delta x_l}{\delta b_i} \right) \hat{n}_m dS + \int_{S_{wall}} \Psi_n \frac{\partial f_{nm}}{\partial b_i} \hat{n}_m dS \\
&= \underbrace{\int_{S_\infty} \Psi_n A_{nmk} \frac{\delta U_k}{\delta b_i} \hat{n}_m dS}_{ABC_\infty} + \underbrace{\int_{S_{wall}} \Psi_n \frac{\partial f_{nm}}{\partial b_i} \hat{n}_m dS}_{T4} \quad (5.13)
\end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος θα καθορίσει τις συζυγείς οριακές συνθήκες στο επ' άπειρο όριο του υπολογιστικού χωρίου, ενώ ο όρος T4 αναλύεται παρακάτω.

Ανάλυση Όρου T4

Στη συνέχεια, αναλύεται περαιτέρω ο όρος T4, με σκοπό να αποδεδμευτούν όλα τα υπόλοιπα ολοκληρώματα που θα συνεισφέρουν στις παραγώγους ευαισθησίας και να παραμείνουν μόνο οι όροι που σχετίζονται με την επιβολή των οριακών συνθηκών στο συζυγές πρόβλημα. Ο εν λόγω όρος αναλύεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
T4 &:= \int_S \Psi_n \frac{\partial f_{nm}}{\partial b_i} \hat{n}_m dS \\
&= \int_{S_{wall}} \Psi_n \frac{\delta f_{nm}}{\delta b_i} \hat{n}_m dS - \underbrace{\int_{S_{wall}} \Psi_n \frac{\partial f_{nm}}{\partial x_l} \hat{n}_m \frac{\delta x_l}{\delta b_i} dS}_{SD} \\
&= \underbrace{\int_{S_{wall}} \Psi_n \frac{\delta (f_{nm} \hat{n}_m)}{\delta b_i} dS}_{T5} - \underbrace{\int_{S_{wall}} \Psi_n f_{nm} \frac{\delta \hat{n}_m}{\delta b_i} dS}_{SD} - \underbrace{\int_{S_{wall}} \Psi_n \frac{\partial f_{nm}}{\partial x_l} \hat{n}_m \frac{\delta x_l}{\delta b_i} dS}_{SD} \quad (5.14)
\end{aligned}$$

Ανάλυση Όρου T5

Ο όρος αυτός επιβάλλεται να αναλυθεί περαιτέρω διότι εμπρικλείει συνεισφορά στις παραγώγους ευαισθησίας (SD), αλλά συμβάλλει και στον καθορισμό των συζυγών οριακών συνθηκών επί της αεροτομής.

Πριν την ανάλυση υπενθυμίζεται ότι οι οριακές συνθήκες επίλυσης των εξισώσεων ροής είναι οι εξής:

$$\text{Primal Wall Boundary Conditions (PBC}_{wall}) = \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad (5.15)$$

Επίσης ο όρος του ολοκληρώματος T5 που διαφορίζεται με το διάνυσμα μεταβλητών b_i , είναι ο εξής:

$$f_{nm}n_m = \begin{bmatrix} \rho u_m \\ \rho u_m u_i + p \delta_m^i \\ \rho u_m E \end{bmatrix} n_m \quad (5.16)$$

Με τη χρήση των σχέσεων (5.15) και (5.16), ο όρος T5, αναλύεται ως εξής:

$$\begin{aligned} T5 &:= \int_{S_{wall}} \Psi_n \frac{\delta(f_{nm}\hat{n}_m)}{\delta b_i} dS = \int_{S_{wall}} \Psi_{m+1} \frac{\delta(p \hat{n}_m)}{\delta b_i} dS \\ &= \underbrace{\int_{S_{wall}} \Psi_{m+1} \frac{\delta p}{\delta b_i} \hat{n}_m dS}_{ABC_{wall}} + \underbrace{\int_{S_{wall}} \Psi_{m+1} p \frac{\delta \hat{n}_m}{\delta b_i} dS}_{SD}, \quad m[1, 2] \end{aligned} \quad (5.17)$$

Στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται η μαθηματική ανάλυση και κάθε ολοκλήρωμα κατηγοριοποιείται σε μία εκ των τριών ομάδων FAE, ABC και SD. Ακολουθεί η ανάλυση της κάθε ομάδας ξεχωριστά.

Συζυγείς Πεδιακές Εξισώσεις (FAE)

Από την ανάλυση που προηγήθηκε, οι πεδιακές συζυγείς εξισώσεις (FAE) των μόνιμων εξισώσεων Euler (κεφάλαιο 2), προκύπτουν από τον τελευταίο όρο της εξίσωσης (5.12) προσθέτοντας σε αυτόν τον ψευδοχρονικό όρο μεταβολής των συζυγών μεταβλητών. Αυτό το οποίο πρέπει να αποφευχθεί μέσω του συζυγούς προβλήματος, είναι η αποφυγή υπολογισμού των πεδίων $\left(\frac{\partial U_k}{\partial b_i}\right)$, ο οποίος είναι κοστοβόρος. Δηλαδή πρέπει να υπολογιστεί ένα κατάλληλο συζυγές πεδίο, από τις ακόλουθες συζυγείς εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_m} \mathbf{A}_{nmk} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} - \mathbf{A}_{mnk} \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_m} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} - \mathbf{A}_{nmk}^T \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_m} = 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

Συγκρίνοντας τώρα τις συζυγείς εξισώσεις με τις εξισώσεις του ευθέος προβλήματος (primal) παρατηρείται η ομοιότητα μεταξύ τους, με την κύρια διαφορά ότι οι συζυγείς εξισώσεις δεν είναι συντηρητικές.

Συζυγείς Οριακές Συνθήκες (ABC)

Για να καθοριστούν οι συζυγείς οριακές συνθήκες θα πρέπει η άθροιση όλων των υπολοίπων όρων (ABC) να είναι ίση με μηδέν. Συγκεντρώνοντας τους όρους που αφορούν τα όρια του χωρίου επίλυσης, προκύπτουν οι οριακές συνθήκες για το συζυγές πρόβλημα.

$$\begin{aligned} ABC &:= \int_{S_{wall}} \frac{\delta p}{\delta b_i} \hat{n}_l \hat{r}_l dS + \int_{S_\infty} \Psi_n A_{nmk} \frac{\partial U_k}{\partial b_i} \hat{n}_m dS + \int_{S_{wall}} \Psi_{m+1} \frac{\delta p}{\delta b_i} \hat{n}_m dS \\ &= \underbrace{\int_{S_\infty} \Psi_n A_{nmk} \frac{\partial U_k}{\partial b_i} \hat{n}_m dS}_{ABC_\infty} + \underbrace{\int_{S_{wall}} (\Psi_{m+1} \hat{n}_m + (K_L \hat{n}_l \hat{r}_l^2 + K_D \hat{n}_l \hat{r}_l^1)) \frac{\delta p}{\delta b_i} dS}_{ABC_{wall}} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Οι οριακές συνθήκες επιβάλλονται κατάλληλα ώστε να αποφευχθεί ο κοστοβόρος υπολογισμός της μεταβολής των ροϊκών μεγεθών ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού $\left(\frac{\partial U_k}{\partial b_i}, \frac{\delta p}{\delta b_i}\right)$.

Για τα επ' άπειρο όρια (S_∞) προκύπτει η ακόλουθη οριακή συνθήκη:

$$ABC|_{S_\infty} := \vec{\Psi}|_{S_\infty} = \vec{0} \quad (5.20)$$

ενώ για τα στερεά όρια (S_{wall}) προκύπτει ότι:

$$ABC|_{S_{wall}} := \Psi_{m+1}|_{S_{wall}} \hat{n}_m + (K_L \hat{n}_l \hat{r}_l^2 + K_D \hat{n}_l \hat{r}_l^1) = 0 \quad (5.21)$$

Παράγωγοι Ευαισθησίας (SD)

Η μεταβολή της συνάρτησης κόστους ως προς τη μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού προκύπτει από την άθροιση όλων των μη-μηδενικών όρων (SD) που φαίνονται στην ανωτέρω ανάλυση. Αναλυτικότερα έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i} &= - \int_{S_{wall}} \Psi_n f_{nm} \frac{\delta \hat{n}_m}{\delta b_i} dS - \int_{S_{wall}} \Psi_n \frac{\partial f_{nm}}{\partial x_l} \hat{n}_m \frac{\delta x_l}{\delta b_i} dS \\ &\quad + \int_{S_{wall}} p (K_L \hat{r}_l^2 + K_D \hat{r}_l^1) \frac{\delta(\hat{n}_l dS)}{\delta b_i} + \int_{S_{wall}} \Psi_{m+1} p \frac{\delta \hat{n}_m}{\delta b_i} dS \\ &= + \int_{S_{wall}} (-\Psi_n f_{nm} + \Psi_{m+1} p) \frac{\delta \hat{n}_m}{\delta b_i} dS - \int_{S_{wall}} \Psi_n \frac{\partial f_{nm}}{\partial x_l} \hat{n}_m \frac{\delta x_l}{\delta b_i} dS \\ &\quad + \int_{S_{wall}} p (K_L \hat{r}_l^2 + K_D \hat{r}_l^1) \frac{\delta(\hat{n}_l dS)}{\delta b_i} \end{aligned} \quad (5.22)$$

5.3 Προσαρμογή Πλέγματος στη Νέα Μορφή Αεροτομής

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου αυτού, μετά τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας (SD), υπολογίζεται το νέο διάνυσμα μεταβλητών b_n^{new} . Δεδομένου ότι κάθε συνδιασμός παραμέτρων b_n^{new} ορίζει μονοσήμαντα μία αεροτομή, είναι ευνόητο ότι παράγεται μία νέα αεροτομή στην οποία δεν αντιστοιχεί το υπάρχον πλέγμα (υπολογιστικό χωρίο).

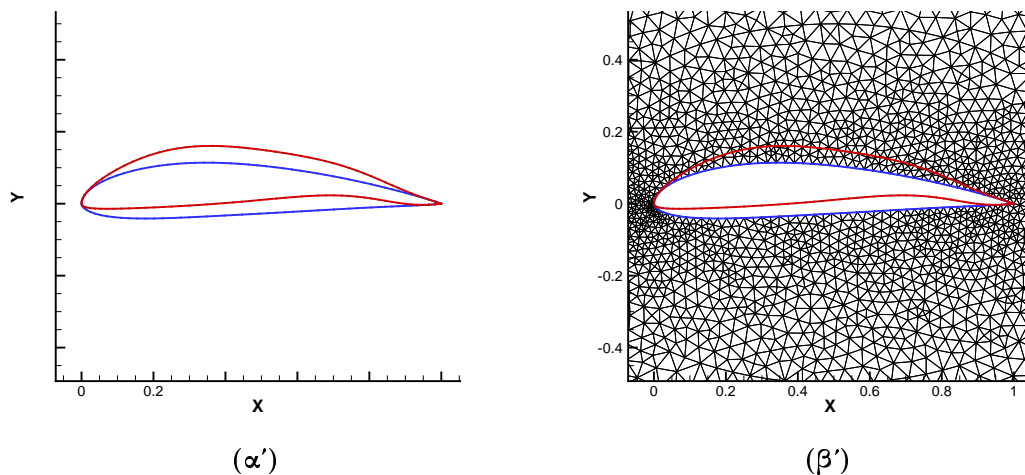
Σε αυτό το σημείο του λογισμικού, δίνεται η δυνατότητα να ξαναπαραχθεί το πλέγμα περιβάλλοντας τη νέα αεροτομή, καθότι χρησιμοποιείται οριόδετο πλέγμα. Η εν λόγω λύση δεν είναι πάντοτε εφικτή, λόγω πιθανής πολυπλοκότητας γεωμετρίας και κατά

συνέπεια λόγω αυξημένου κόστους.

Κάτι πιο απλό είναι η χρήση ενός λογισμικού το οποίο αναλαμβάνει να αναπροσαρμόσει το ήδη υπάρχον πλέγμα, στα στερεά όρια S_{wall} της νέας αεροτομής. Αυτό δεν θα αλλάξει τη δομή του πλέγματος, παρά μόνο τις συντεταγμένες. Τα πλεονεκτήματα αυτής της μεθόδου είναι ότι αποφεύγεται η κοστοβόρα παραγωγή νέου πλέγματος και, επιπλέον, στην περίπτωση του παράλληλου επεξεργαστή, αποφεύγεται η εκ νέου διαμοίραση του υπολογιστικού χωρίου. Στον αντίποδα, το μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι σε ακραίες μεταβολές του σχήματος, ενδέχεται η αναπροσαρμογή του πλέγματος να μην είναι εφικτή, προκαλώντας μη-αποδεκτά τριγωνικά στοιχεία.

Αναλυτικότερα, η διαδικασία αναπροσαρμογής προσπαθεί να μοιράσει τις μεγάλες μεταβολές των κόμβων οι οποίοι ανήκουν στο στερεό όριο S_{wall} , ομοιόμορφα σε όλο το υπόλοιπο υποχωρίο. Μόλις επιμεριστούν οι εν λόγω μεταβολές σε όλο το υπόλοιπο χωρίο, οι υπάρχοντες κόμβοι ανανεώνονται ως προς τις συντεταγμένες τους και μπορεί να παραχθεί εκ νέου η δομή δεδομένων του υποχωρίου.

Για να γίνει πιο κατανοητό, στα σχήματα 5.2 φαίνεται η αλλαγή στο σχήμα της αεροτομής μετά από κάποιους κύκλους βελτιστοποίησης και το πως η νέα αεροτομή δεν σέβεται το υπάρχον πλέγμα.



Σχήμα 5.2: (α') Νέο σχήμα αεροτομής (κόκκινο χρώμα) σε αντιπαραβολή με το αρχικό σχήμα (κυανό χρώμα). (β') Μη επαφή του οριζόμενου πλέγματος με τη νέα παραγόμενη αεροτομή.

Από το σχήμα 5.2α', είναι εμφανής η μετακίνηση των κόμβων του τοιχώματος S_{wall} . Για τον ομοιόμορφο επιμερισμό αυτών των μεταβολών συντεταγμένων για τους κόμβους αυτούς τόσο κατά τον (x) , όσο και τα τον (y) άξονα, θα χρησιμοποιηθεί μία εξίσωση

Laplace για κάθε άξονα. Η ιδιότητα των εξισώσεων αυτών είναι να ομαλοποιήσουν τυχόν έντονες ανωμαλίες από τα όρια του χωρίου στα οποία εφαρμόζονται, μέσω της μεταφοράς αυτών προς το εσωτερικό του χωρίου.

Οι εξισώσεις οι οποίες επιλύονται, σε διανυσματική μορφή, είναι οι εξής:

$$\iint_{\Omega} \nabla^2 \vec{M} d\Omega = 0 \quad (5.23)$$

όπου \vec{M} είναι το μητρώο μετακινήσεων των κόμβων κατά τον (x, y) άξονα. Με την εφαρμογή του θεωρήματος Green-Gauss, οι ανωτέρω εξισώσεις καταλήγουν στις εξής:

$$\oint_{S_{\Omega}} \nabla \vec{M} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (5.24)$$

Στο σημείο αυτό σημειώνεται ότι η επίλυση των εξισώσεων, πραγματοποιείται στο υπάρχον πλέγμα, διατηρώντας το αμετάβλητο κατά τη διάρκεια της λύσης.

Για την επίλυση του ανωτέρω συστήματος εξισώσεων χρησιμοποιείται η Δέλτα Διατύπωση (Delta Formulation). Οι οριακές συνθήκες που εφαρμόζονται για την επίλυση είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} BC|_{S_{\infty}} &\rightarrow LHS_{Diagonal} = \vec{I} \\ &LHS_{NONDiagonal} = \vec{0} \\ &RHS = \vec{0} \\ BC|_{S_{wall}} &\rightarrow LHS_{Diagonal} = \vec{I} \\ &LHS_{NONDiagonal} = \vec{0} \\ &RHS = \vec{M} \end{aligned} \quad (5.25)$$

όπου το μητρώο μετακινήσεων \vec{M} ισούται με:

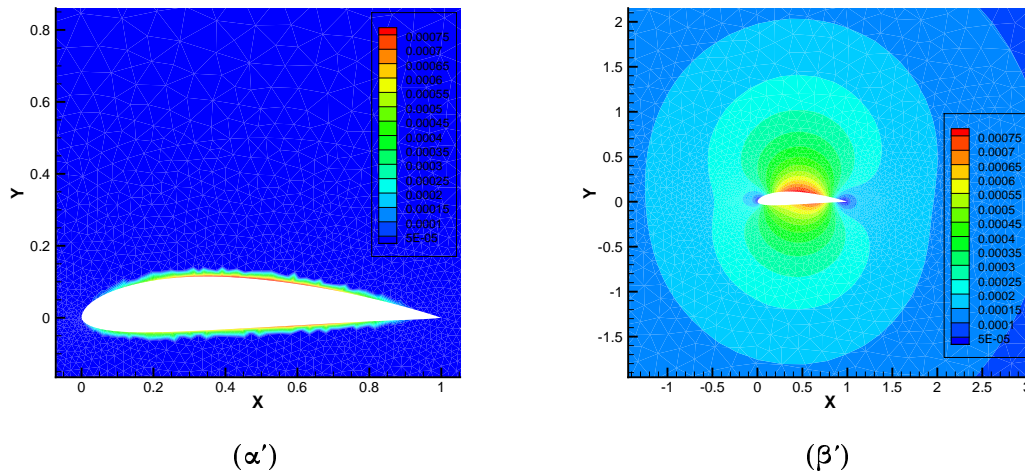
$$\vec{M}|_{S_{wall}} = \vec{X}_i|_{bef} - \vec{X}_i|_{after} \quad (5.26)$$

όπου $\vec{X}_i|_{bef}$ οι συντεταγμένες των κόμβων της αεροτομής πριν την ανανέωση της μορφής της ενώ $\vec{X}_i|_{after}$ οι συντεταγμένες των κόμβων της μορφής που προέκυψε λόγω των νέων τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού. Μετά την επίλυση των εξισώσεων ανανεώνονται οι συντεταγμένες των κόμβων του υπολογιστικού χωρίου $\vec{X}_i|_{Morhed}$, ως

κάτωθι:

$$\vec{X}_i|_{Morhed} = \vec{X}_i|_{bef} + \vec{M} \quad (5.27)$$

Στα σχήματα 5.3 φαίνεται πως η αρχική μετακίνηση των κόμβων που ανήκουν στο σύνορο $S|_{wall}$, διαμοιράζεται στο συνολικό υποχωρίο.



Σχήμα 5.3: (α') Μετακινήσεις κόμβων τοιχώματος λόγω αλλαγής της αεροτομής. (β') Μετακινήσεις κόμβων συνολικού υπολογιστικού χωρίου μετά την εφαρμογή της προσαρμογής πλέγματος.

5.4 Διαδικασία Σχεδιασμού με τη Συνεχή Συζυγή Τεχνική

Κατά τη διαδικασία σχεδιασμού της βελτιστοποίησης επί της μεμονωμένης αεροτομής, αρχικά καθορίζεται η συνάρτηση κόστους F , όπως αναλύθηκε στην ενότητα 5.2.1. Επιλέγεται το γεωμετρικό μοντέλο παραμετροποίησης της αεροτομής, μέσω των πολυωνύμων Bézier και, στη συνέχεια, η μέθοδος βελτιστοποίησης (απότομης ανόδου-καθόδου), ενώ για τον υπολογισμό της παραγώγου της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, χρησιμοποιείται η συνεχής συζυγής μέθοδος. Σε συνέχεια των ανωτέρω, ο αλγόριθμος σχεδιασμού-βελτιστοποίησης ο οποίος προγραμματίζεται, είναι ο εξής:

(α) Επιλογή των αρχικών συντελεστών \vec{b}^n για το βήμα $n = 0$.

- (β) Βάση των ανωτέρω συντελεστών και χρησιμοποιώντας το μοντέλο παραμετροποίησης, παράγεται το περίγραμμα μίας αρχικής αεροτομής προς βελτιστοποίηση.
- (γ) Παράγεται το αρχικό πλέγμα γύρω από αυτή την αεροτομή.
- (δ) Επιλύονται οι εξισώσεις ροής και υπολογίζονται οι τιμές των μεταβλητών της ροής \vec{U}^n και η τιμή της F_{obj}^n .
- (ε) Επίλυση των συζυγών εξισώσεων και υπολογισμός των συζυγών μεταβλητών Ψ^n .
- (στ) Υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας ($\frac{\delta F}{\delta b_i}$).
- (ζ) Ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού με τη μέθοδο της απότομης ανόδου/καθόδου.
- (η) Μεταβολή του σχήματος της αεροτομής και υπολογισμός της μετακίνησης των κόμβων του τοιχώματος της.
- (θ) Αναπροσαρμογή του πλέγματος στο νέο σχήμα της αεροτομής ή επαναπαραγωγή του πλέγματος γύρω από αυτό.
- (η) Επιστροφή στο βήμα (α) με $n \leftarrow n + 1$

5.5 Υπολογισμός σε Παράλληλο Υπολογιστικό Περιβάλλον

5.5.1 Αλγόριθμοι Παραλληλοποίησης Συζυγούς Προβλήματος - Προσαρμογής Πλέγματος

Προκειμένου τα τμήματα του λογισμικού που επιλύουν το συζυγές πρόβλημα και προσαρμόζουν το πλέγμα, να μπορούν να εκτελεστούν σε παράλληλο υπολογιστικό περιβάλλον, το λογισμικό τροποποιήθηκε κατά τρόπο όμοιο με αυτό που χρησιμοποιήθηκε για την παραλληλοποίηση του τμήματος επίλυσης του πρωτεύοντος προβλήματος. Κατά συνέπεια, το υπολογιστικό φορτίο του συζυγούς προβλήματος αλλά και της προσαρμογής του πλέγματος, διαμοιράζεται στους ανάλογους εργαζόμενους σύμφωνα με τη διαμέριση που αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 4.

Οι συζυγείς εξισώσεις επιλύονται με τον ίδιο αλγόριθμο του ψευδο-χρονικού βήματος ολοκλήρωσης (υποενότητα 3.2.7 και 4.2.6) και για το λόγο αυτό δεν θα αναπτυχθεί αναλυτικά ο αλγόριθμος για το συζυγές πρόβλημα. Συνοπτικά αναφέρεται ότι επιβάλλεται όλοι οι εργαζόμενοι να βρίσκονται στο ίδιο ψευδο-χρονικό σημείο της επίλυσης. Στην επίλυση του συζυγούς προβλήματος, ομοίως με την επίλυση των εξισώσεων ροής, αυτό επιτυγχάνεται μέσω του συντονιστή. Επιπρόσθετα, και κατ'αντιστοιχία με την επίλυση των εξισώσεων ροής ορίζεται η λήξη της επίλυσης σύμφωνα με τα κριτήρια σύγκλισης από το συντονιστή. Στο σημείο αυτό σημειώνεται ότι το συζυγές πρόβλημα επιλύεται με σχήμα διακριτοποίησης πρώτης τάξης και δεν απαιτείται υπολογισμός και επικοινωνία των παραγώγων των συζυγών μεταβλητών.

Σε ότι αφορά, την παραλληλοποίηση της προσαρμογής του πλέγματος, επίσης ακολουθείται το μοντέλο συντονιστή-εργαζόμενου. Σε αντίθεση με την επίλυση των εξισώσεων ροής, οι εξισώσεις της αναπροσαρμογής του πλέγματος (5.24) δεν απαιτούν ψευδο-χρονικό βήμα ολοκλήρωσης, αλλά επιλύονται με την επαναληπτική μέθοδο Jacobi. Κατά συνέπεια, ο συντονιστής διασφαλίζει όλοι οι εργαζόμενοι να βρίσκονται στο ίδιο βήμα της επαναληπτικής μεθόδου Jacobi, ελέγχοντας κάθε φορά το υπόλοιπο των εξισώσεων. Στην περίπτωση που ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης για τις εξισώσεις προσαρμογής του πλέγματος, τερματίζει τη διαδικασία αναπροσαρμογής, συγκεντρώνει τις νέες συντεταγμένες των κόμβων του υπολογιστικού χωρίου και τυπώνει τα απαιτούμενα αρχεία αποτελεσμάτων.

Επειδή ο συντονιστής διαθέτει όλη την απαιτούμενη πληροφορία για την ολοκλήρωση του υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας και την παραγωγή του νέου σχήματος αεροτομής, ο αλγόριθμος αναπροσαρμογής του πλέγματος διαμορφώνεται ως εξής:

- (α) Στο συντονιστή συγκεντρώνονται όλα τα στοιχεία των παραγώγων ευαισθησίας που έχουν υπολογιστεί από τους εργαζόμενους κατά την επίλυση του συζυγούς προβλήματος.
- (β) Ο συντονιστής υπολογίζει το νέο διάνυσμα μεταβλητών b_n^{new} και με βάση αυτό παράγει μία νέα αεροτομή.
- (γ) Ο συντονιστής υπολογίζει τις μεταβολές των κόμβων των τοιχωμάτων της αεροτομής και συντάσσει το διάνυσμα $\vec{M}|_{S_{wall}}$.
- (δ) Αποστέλλεται το διάνυσμα $\vec{M}|_{S_{wall}}$, σε όλους τους εργαζομένους για να χρησιμοποιήσουν με τη σειρά τους τα στοιχεία που αναφέρονται στο τοπικό τους υποχωρίο.
- (ε) Εκκινείται η διαδικασία αναπροσαρμογής του πλέγματος σε κάθε εργαζόμενο.

- (στ) Σε κάθε επανάληψη Jacobi ανταλλάσσονται μεταξύ των εργαζομένων:
- (α') Οι υπολογιζόμενες παράγωγοι $\nabla \vec{M}$ για τους κόμβους επικοινωνίας.
 - (β') Οι υπολογιζόμενες ποσότητες $\overline{\delta \vec{M}}|_{S_{wall}}$ των κόμβων επικοινωνίας.
- (ζ) Σε κάθε επανάληψη Jacobi ανταλλάσσονται μεταξύ του συντονιστή και των εργαζομένων:
- (α') Τα υπόλοιπα των εξισώσεων υπολογισμού.
 - (β') Η απόφαση συνέχισης ή όχι της επίλυσης.
- (η) Μετά τη σύγκλιση των εξισώσεων συγκεντρώνονται οι νέες συντεταγμένες των κόμβων και παράγονται τα αρχεία αποτελεσμάτων της αναπροσαρμογής πλέγματος.

5.5.2 Επικοινωνίες

Σε συνέχεια των όσων αναφέρθηκαν προηγουμένως, είναι επακόλουθο να απαιτούνται επιπλέον επικοινωνίες λόγω τόσο του συζυγούς προβλήματος όσο και της προσαρμογής του πλέγματος.

Επικοινωνίες Συζυγούς Προβλήματος

Επειδή το συζυγές πρόβλημα επιλύεται πανομοιότυπα με το ευθύ πρόβλημα, χρησιμοποιούνται οι ίδιες δομές επικοινωνίας, οι οποίες παρουσιάζονται παρακάτω:

- (α) Μεταξύ γειτονικών εργαζόμενων, μία φορά, πριν την πρώτη επανάληψη *Jacobi*, για να αποδοθούν και να ληφθούν οι μεταβολές που υπολογίζονται για τους «ενεργούς» και «ανενεργούς» κόμβους αντίστοιχα, με σκοπό να αρχικοποιηθεί το σχήμα επίλυσης για κάθε τοπικό κόμβο (P) του υποχωρίου.
- (β) Μεταξύ γειτονικών εργαζόμενων, σε κάθε επανάληψη *Jacobi* για την αποστολή των μεταβολών που υπολογίζονται για τους «ενεργούς» κόμβους και ταυτόχρονα, λήψη των μεταβολών για τους «ανενεργούς» κόμβους του υποχωρίου.
- (γ) Μεταξύ συντονιστή και εργαζομένων, σε κάθε ψευδο-χρονικό βήμα για την αποστολή των υπόλοιπων των εξισώσεων από τους εργαζόμενους και την αποστολή της απόφασης συνέχισης ή όχι της επίλυσης από το συντονιστή.

- (δ) Μετά το τέλος της επίλυσης των εξισώσεων, μεταξύ συντονιστή και εργαζομένων, για να αποδοθούν οι τιμές των υπολογιζόμενων μεταβλητών του συζυγούς προβλήματος για κάθε κόμβο του υπολογιστικού χωρίου.

Επικοινωνίες Προσαρμογής Πλέγματος

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο αναπροσαρμογής του πλέγματος που αναπτύχθηκε παραπάνω, οι απαιτούμενες επικοινωνίες είναι οι εξής:

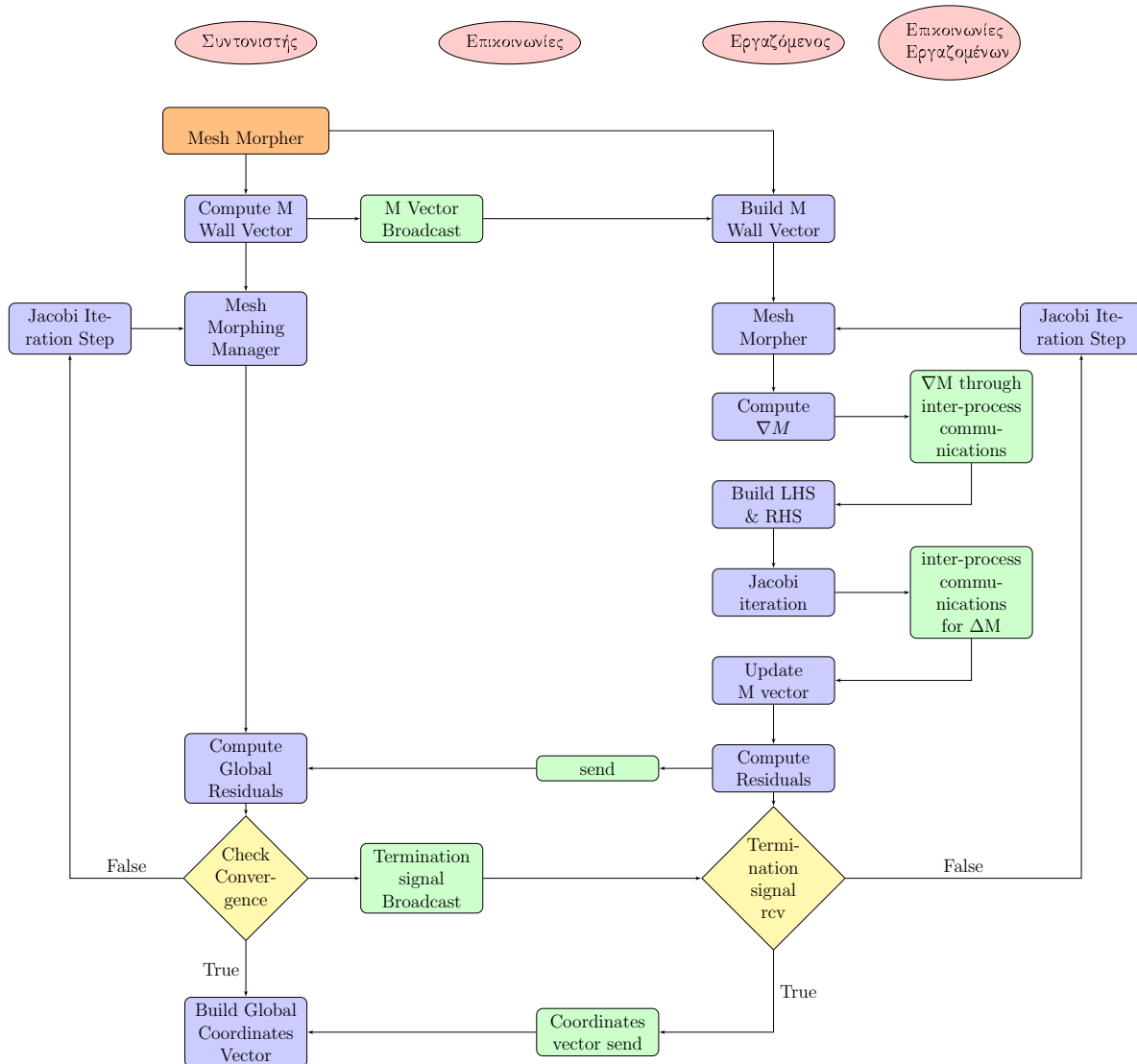
- (α) Αρχικά μεταξύ εργαζομένων-συντονιστή για την αποστολή των τιμών των παραγώγων ευαισθησίας.
- (β) Μεταξύ συντονιστή-εργαζομένων για την αποστολή του διανύσματος $\vec{M}|_{S_{wall}}$.
- (γ) Μεταξύ εργαζομένων για την ανταλλαγή των υπολογιζόμενων τιμών των παραγώγων $\nabla \vec{M}$.
- (δ) Μεταξύ εργαζομένων για την ανταλλαγή των υπολογιζόμενων ποσοτήτων $\vec{\delta M}|_{S_{wall}}$ των κόμβων επικοινωνίας.
- (ε) Μεταξύ εργαζομένων-συντονιστή για την αποστολή των υπολοίπων των εξισώσεων της αναπροσαρμογής του πλέγματος.
- (στ) Μεταξύ συντονιστή-εργαζομένων για την αποστολή της απόφασης συνέχισης ή όχι της επίλυσης.
- (ζ) Μεταξύ εργαζομένων-συντονιστή για την αποστολή των τελικών συντεταγμένων των κόμβων του υπολογιστικού χωρίου.

Τέλος, αναφέρεται ότι υπάρχουν και επικοινωνίες οι οποίες πραγματοποιούνται μία φορά σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης και φαίνονται στο διάγραμμα ροής 5.5 που αναλύεται παρακάτω.

5.5.3 Διάγραμμα Ροής Λογισμικού Βελτιστοποίησης

Επειδή ο αλγόριθμος που επιλύει τις εξισώσεις του συζυγούς προβλήματος είναι πανομοιότυπος με αυτόν που επιλύει τις εξισώσεις του πρωτεύοντος προβλήματος, το διάγραμμα ροής εργασιών του είναι το ίδιο με αυτό του σχήματος 4.5 αφαιρώντας το τμήμα του υπολογισμού και επικοινωνίας των παραγώγων.

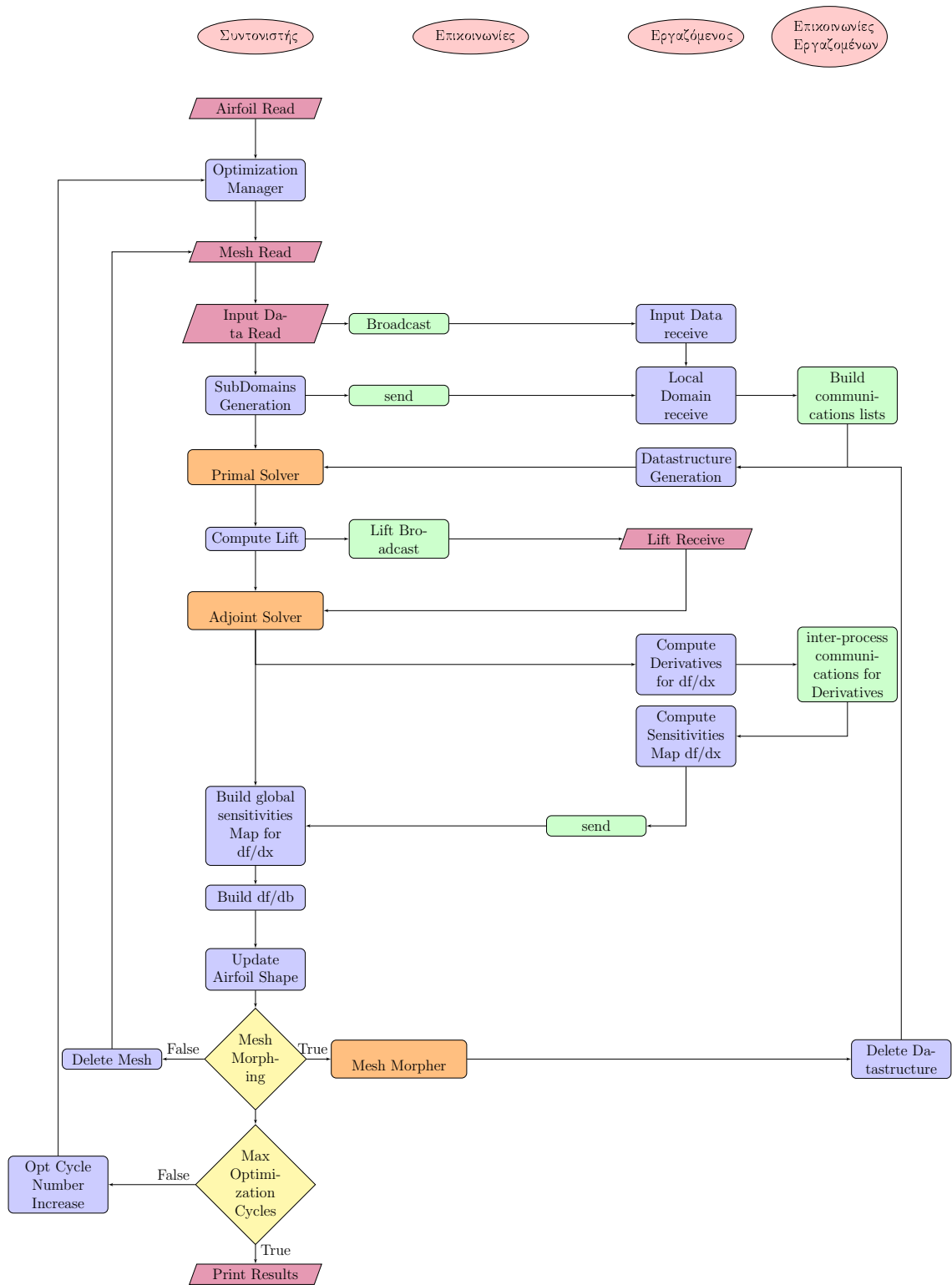
Το διάγραμμα ροής της προσαρμογής του πλέγματος σε παράλληλο επεξεργαστή, παρουσιάζεται στο σχήμα 5.4:



Σχήμα 5.4: Διάγραμμα ροής εργασιών προσαρμογής του υφιστάμενου πλέγματος στο νέο σχήμα της αεροτομής.

Στο διάγραμμα ροής εργασιών του συνολικού λογισμικού, τα τμήματα αυτού που επιλύουν το πρωτεύον, το συζυγές πρόβλημα και προσαρμόζουν το πλέγμα θα παρουσιαστούν απλά με ένα κόμβο ανάλογου ονόματος, καθότι οι εργασίες που εκτελούνται σε αυτά παρουσιάστηκαν εκτενώς στα σχήματα 4.5 και 5.4.

Από τα ανωτέρω προκύπτει το διάγραμμα ροής εργασιών, του αναπτυχθένος λογισμικού όταν αυτό εκτελείται σε κύκλους βελτιστοποίησης σε παράλληλο επεξεργαστή και παρουσιάζεται στο σχήμα 5.5.



Σχήμα 5.5: Διάγραμμα ροής εργασιών του αναπτυχθέντος λογισμικού σε παράλληλο επεξεργαστή, κατά την εκτέλεση κύκλων βελτιστοποίησης.

Κεφάλαιο 6

Πρόλεξη Πεδίων Ροής και Χρόνοι Σύγκλισης

Το κεφάλαιο ξεκινά με την πιστοποίηση του αναπτυχθέντος λογισμικού στην εργασία. Έπειτα παρουσιάζεται η αποτίμηση του κέρδους στην περίπτωση εφαρμογής του κώδικα σε παράλληλο επεξεργαστή εν αντιθέσει με τη σειριακή του εκτέλεση. Αυτό θα επιτευχθεί είτε εναλλάσσοντας το μέγεθος της υπολογιστικής ισχύος είτε τον όγκο υπολογισμών σε εφαρμογές πρόλεξης 2Δ μόνιμων ατρίβων ροών, υψηλών αριθμών Mach, σε μεμονωμένες αεροτομές .

Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παρουσίαση αποτελεσμάτων πρόλεξης του πεδίου ροής και του συζυγούς πεδίου σε κάποια είδη αεροτομών.

Στις περιπτώσεις που ακολουθούν, η ανάλυση πραγματοποιείται με το αναπτυχθέν λογισμικό, ενώ οι ρυθμοί σύγκλισης που παρουσιάζονται, δίνονται στη μορφή του δεκαδικού λογαρίθμου της νόρμας του υπολοίπου των επιλυόμενων εξισώσεων.

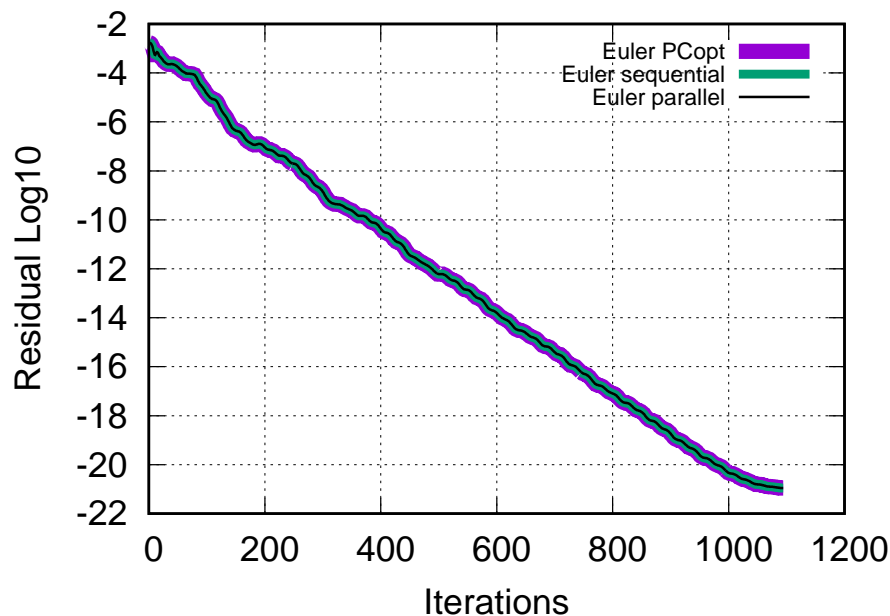
6.1 Πιστοποίηση Λογισμικού

Πριν τη σύγκριση οποιουδήποτε άλλου αποτελέσματος προέχει η επαλήθευση του αναπτυχθέντος λογισμικού. Το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε στην εργασία ως βάση, αποτέλεσε αντικείμενο διατριβών του εργαστηρίου ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ, όπου υπήρξε επαρκής πιστοποίηση του σε εύρος εφαρμογών.

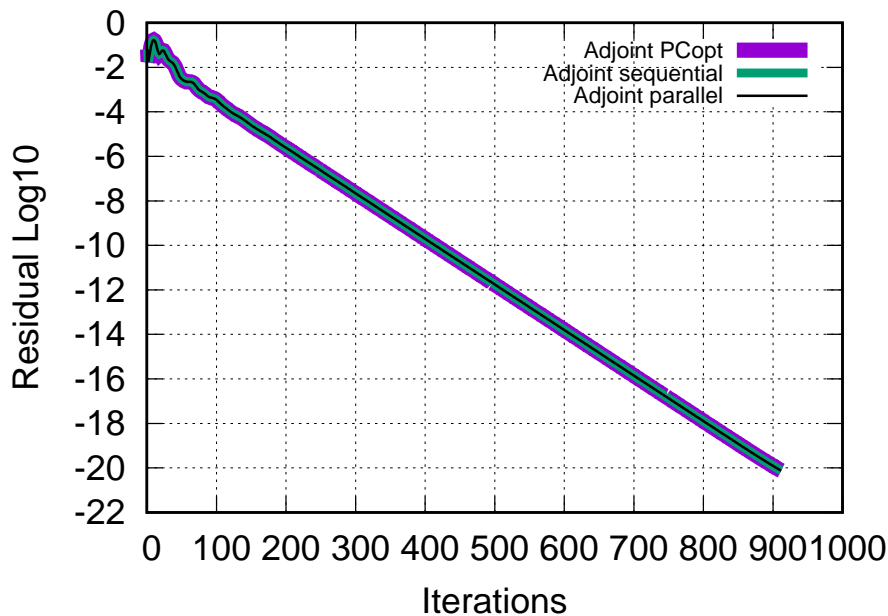
Δεδομένων των ανωτέρω, η επαλήθευση του αναπτυχθέντος λογισμικού, μετά την

εφαρμογή του πρωτόκολλου επικοινωνίας MPI, πραγματοποιείται μέσω του λογισμικού βάσης που χρησιμοποιήθηκε. Για αρχή συγκρίνεται ο ρυθμός σύγκλισης των επιλυόμενων εξισώσεων του σειριακού λογισμικού του εργαστηρίου ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ, με τον αντίστοιχο του αναπτυχθέντος λογισμικού σε σειριακή εκτέλεση. Στη συνέχεια και δεδομένης της ταύτισης των δύο ανωτέρω ρυθμών σύγκλισης, συγκρίνεται ο αντίστοιχος ρυθμός σύγκλισης της σειριακής εκτέλεσης με αυτόν της παράλληλης εκτέλεσης του αναπτυχθέντος λογισμικού.

Η εφαρμογή η οποία χρησιμοποιήθηκε για την επαλήθευση του λογισμικού της εργασίας, είναι η πρόλεξη 2Δ μόνιμης ατρίβους ροής, με $M_\infty = 0.5$, γωνία επ' άπειρο ροής $\alpha_\infty = 3^\circ$, σε μεμονωμένη αεροτομή NACA 0012 και πλέγμα περίπου 4700 κόμβων. Ενδεικτικά στα σχήματα 6.1 και 6.2, παρατίθεται η πορεία σύγκλισης του υπολοίπου για την εξίσωση της συνέχειας και τη συζυγή αυτής αντίστοιχα, για το λογισμικό της ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ και το αναπτυχθέν λογισμικό σε σειριακή και παράλληλη λειτουργία.



Σχήμα 6.1: Διάγραμμα σύγκλισης της εξίσωσης της πυκνότητας του πρωτεύοντος προβλήματος.



Σχήμα 6.2: Διάγραμμα σύγκλισης της εξίσωσης της συζυγούς πυκνότητας.

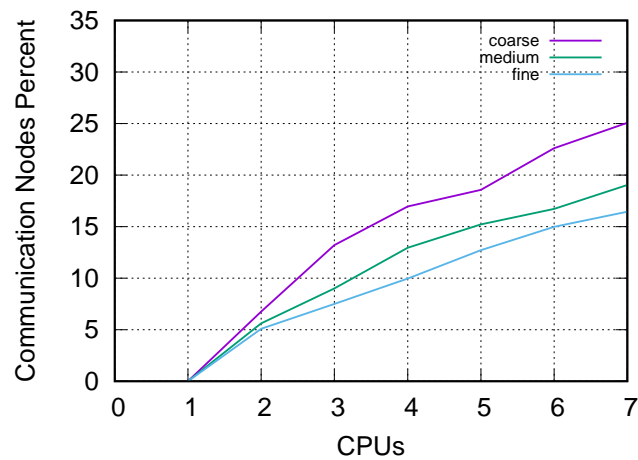
Όπως φαίνεται στα σχήματα 6.1 και 6.2, η πορεία σύγκλισης των δύο λογισμικών ταυτίζεται τόσο για τις εξισώσεις ροής όσο και για τις συζυγείς εξισώσεις. Από εδώ και στο εξής το αναπτυχθέν λογισμικό θεωρείται πιστοποιημένο και κατα συνέπεια δύναται να χρησιμοποιηθεί για να μελετηθούν οι περιπτώσεις στις οποίες εφαρμόστηκε και παρουσιάζονται παρακάτω.

6.2 Επιτάχυνση Λογισμικού σε Παράλληλο Επεξεργαστή

Παρακάτω παρουσιάζεται η επιτάχυνση του αναπτυχθέντος λογισμικού στο πλαίσιο της εργασίας, σε παράλληλο πολυεπεξεργαστικό σύστημα του εργαστηρίου ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ.

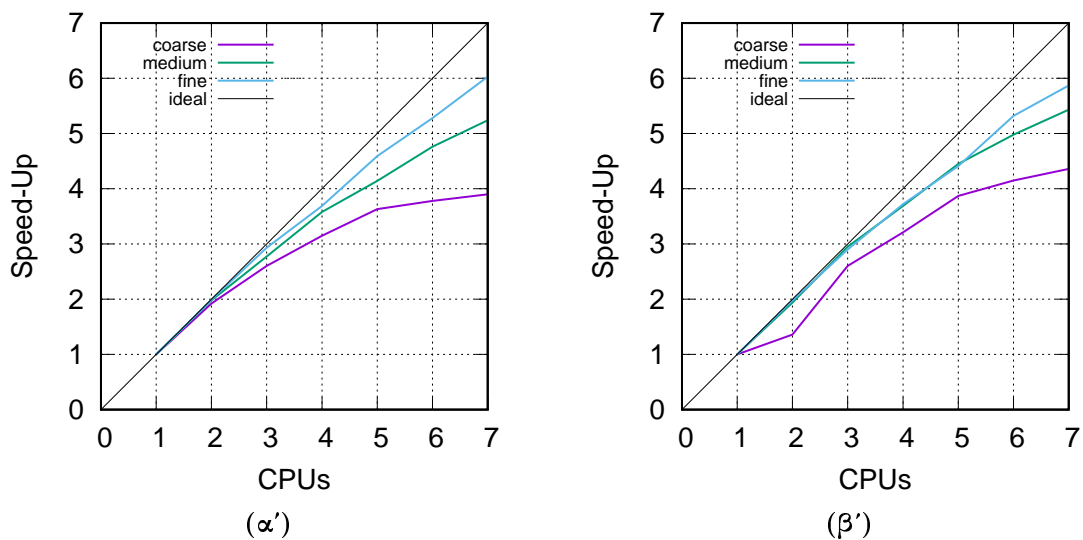
Για την ανάλυση της επιτάχυνσης επιλέχθηκε ατριβής ροή, χρονικά μόνιμη, η οποία προσπίπτει σε αεροτομή NACA 0012 με γωνία $\alpha_\infty = 3^\circ$ και $M_\infty = 0.5$.

Για να ελεγχθεί η επιτάχυνση του λογισμικού, η ανωτέρω περίπτωση εφαρμόστηκε σε τρία πλέγματα, αραιό, μεσαίο και πυκνό, τα οποία αποτελούνται από 3469, 6734 και 11149 κόμβους αντίστοιχα.



Σχήμα 6.3: Ποσοστό αύξησης των κόμβων επικοινωνίας σε συνάρτηση με τα υποχωρία επίλυσης.

Στο διάγραμμα 6.3 παρουσιάζεται η αύξηση του ποσοστού των κόμβων επικοινωνίας ως προς τους συνολικούς κόμβους του πλέγματος, καθώς αυξάνεται ο αριθμός των υποχωρίων, για καθεμία από τις τρεις περιπτώσεις που προαναφέρθηκαν.

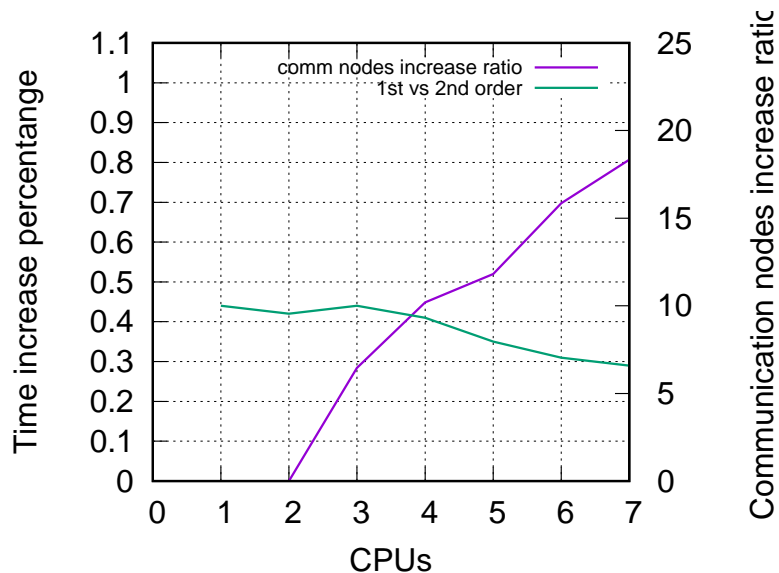


Σχήμα 6.4: (α') Επιτάχυνση λογισμικού επίλυσης εξισώσεων πρωτεύοντος προβλήματος με ακρίβεια σχήματος υπολογισμού 1^{ης} τάξης. (β') Επιτάχυνση λογισμικού επίλυσης εξισώσεων πρωτεύοντος προβλήματος με ακρίβεια σχήματος υπολογισμού 2^{ης} τάξης.

Στα σχήματα 6.4 παρουσιάζεται η επιτάχυνση του αναπτυχθέντος λογισμικού σε παράλληλο επεξεργαστή, τόσο για 1^{ης} τάξης ακρίβειας του σχήματος υπολογισμού, όσο και για 2^{ης} τάξης ακρίβειας. Παρατηρείται ότι μέχρι τον αριθμό των πέντε υποχωρίων,

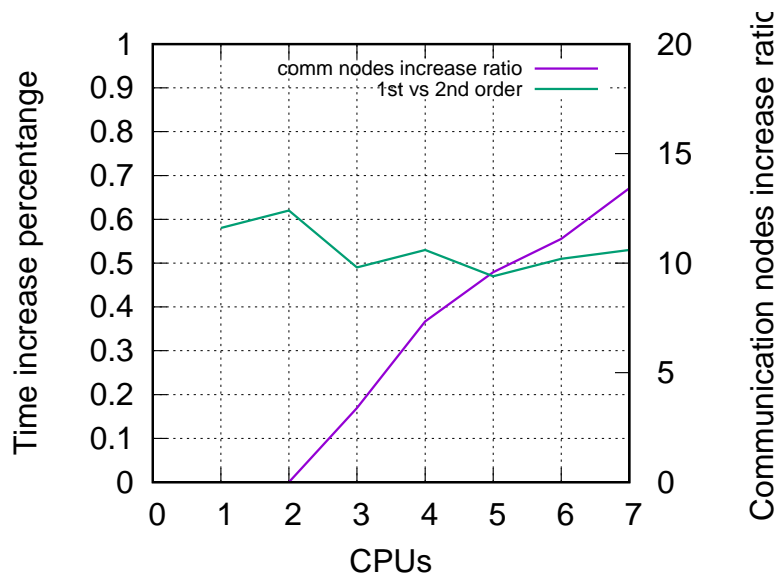
ακολουθείται σχετικά η ιδεατή επιτάχυνση, η οποία αναπαρίσταται με τη διαγώνιο μαύρη ευθεία στα σχήματα. Πέραν αυτού του αριθμού υποχωριών παρουσιάζεται μία εμφανής απόκλιση από την ιδεατή κλίση επιτάχυνσης το οποίο οφείλεται στην αυξημένη απαίτηση επικοινωνίας λόγω αύξησης των κόμβων επικοινωνίας, όπως αυτό φαίνεται από το σχήμα 6.3.

Επιπρόσθετα παρατηρείται ότι όσο πυκνώνει το πλέγμα η επιτάχυνση κείτεται πιο κοντά στην ιδεατή. Αυτό είναι λογικό με βάση το σχήμα 6.3, εφόσον στο πιο πυκνό πλέγμα το ποσοστό των κόμβων επικοινωνίας είναι μικρότερο σε σχέση με ενός πιο αραιού πλέγματος.

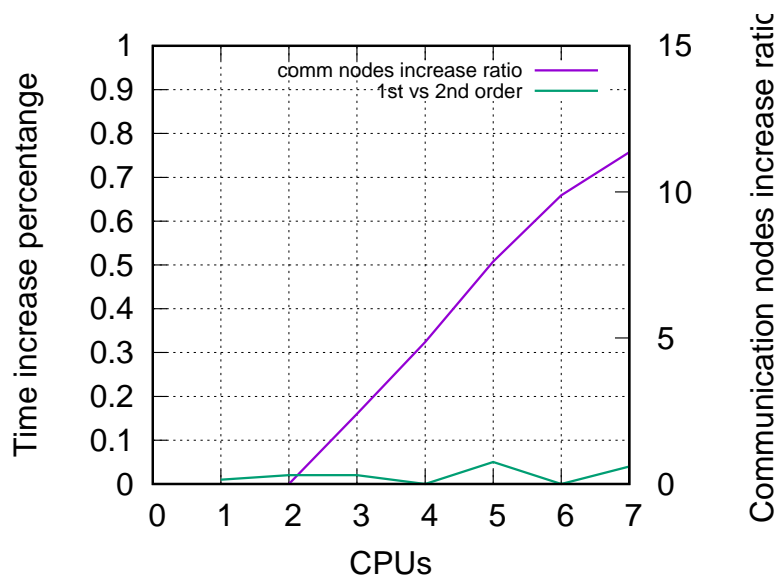


Σχήμα 6.5: Πράσινη καμπύλη: Ποσοστό της αύξησης του απαιτούμενου χρόνου επίλυσης για 2^{ης} τάξης ακρίβεια ως προς το χρόνο επίλυσης 1^{ης} τάξης ακρίβειας σε συνάρτηση με τον αριθμό των υποχωριών επίλυσης. Μωβ καμπύλη: Λόγος της αύξησης του αριθμού των κόμβων επικοινωνίας σε σχέση με τους συνολικούς κόμβους σε συνάρτηση με τον αριθμό των υποχωριών επίλυσης.

Στο σχήμα 6.5 παρατηρείται ότι στο αραιό πλέγμα, όσο αυξάνονται οι κόμβοι επικοινωνίας με σημείο αναφοράς το μηδέν στα δύο (2) υποχωρία επίλυσης, τόσο μικρότερος επιπρόσθετος χρόνος επίλυσης απαιτείται για την αύξηση της τάξης ακρίβειας του σχήματος υπολογισμού.



Σχήμα 6.6: Όμοια αποτελέσματα παρατηρούνται και στο πλέγμα μεσαίου μεγέθους όπως στο αραιό του σχήματος 6.5.



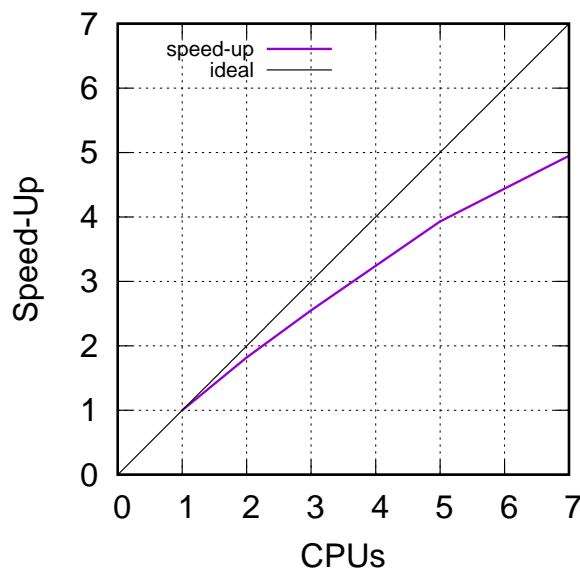
Σχήμα 6.7: Ομοίως με το σχήμα 6.5.

Σε αντίθεση με τα σχόλια των σχημάτων 6.5 και 6.6, στο πυκνό πλέγμα σύμφωνα με το σχήμα 6.7, παρατηρείται ότι χρόνος επίλυσης για διαφορετική τάξης ακρίβεια παραμένει σχετικά σταθερός. Αυτό σημαίνει ότι το κέρδος λόγω της παράλληλης εκτέλεσης απομειώνεται από τις επικοινωνίες. Αυτό αποτελεί ακόμα μία ένδειξη ότι το εν λόγω πλέγμα δεν είναι αρκετά πυκνό σε σχέση με τα άλλα δύο.

6.3 Κέρδος επί της Βελτιστοποίησης σε Παράλληλο Επεξεργαστή

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η επιτάχυνση του αναπτυχθέντος λογισμικού κατά τη λειτουργία 5 κύκλων βελτιστοποίησης επί του σχήματος μίας αεροτομής, με στόχο την αύξηση του συντελεστή άνωσης.

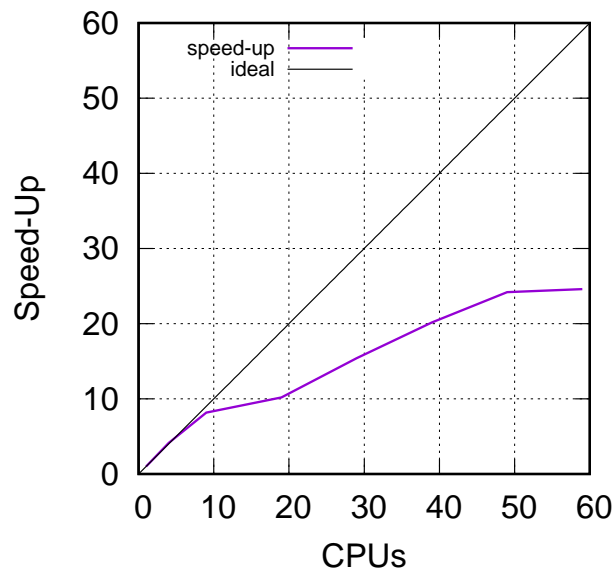
Για το σχεδιασμό της αεροτομής χρησιμοποιήθηκαν 30 σημεία Bézier, 15 για την περιοχή πίεσης και 15 για την περιοχή υποπίεσης. Το πλέγμα ήταν μη-δομημένο με 12504 κόμβους συνολικά. Η ροή ήταν ατριβής, χρονικά μόνιμη, η οποία προσπίπτει στην αεροτομή με $\alpha_\infty = 3^\circ$ και $M_\infty = 0.5$. Τέλος η σύγκριση πραγματοποιείται στον ίδιο αριθμό επαναλήψεων τόσο για την επίλυση του πρωτεύοντος, όσο και για του συζυγούς προβλήματος, ενώ χρησιμοποιήθηκε σχήμα υπολογισμού 2^{ης} τάξης ακρίβειας.



Σχήμα 6.8: Διάγραμμα επιτάχυνσης του λογισμικού σε λειτουργία 5 κύκλων βελτιστοποίησης του σχήματος αεροτομής (12504 κόμβοι).

Στο σχήμα 6.8 αποτυπώνεται η επιτάχυνση της βελτιστοποίησης ως συνάρτηση του αριθμού των υποχωρίων που χρησιμοποιούνται. Παρατηρείται ότι έως και τα τρία υποχωρία η επιτάχυνση προσεγγίζει την ιδανική καμπύλη ενώ μετά από αυτόν τον αριθμό αποκλίνει λόγω της αύξησης των επικοινωνιών.

Στη συνέχεια, για την ίδια περίπτωση (αεροτομή και συνθήκες ροής), οι κόμβοι του πλέγματος αυξάνονται στους 49572 και χρησιμοποιούνται έως 60 επεξεργαστές.



Σχήμα 6.9: Διάγραμμα επιτάχυνσης του λογισμικού σε λειτουργία 5 κύκλων βελτιστοποίησης του σχήματος αεροτομής (49572 κόμβοι).

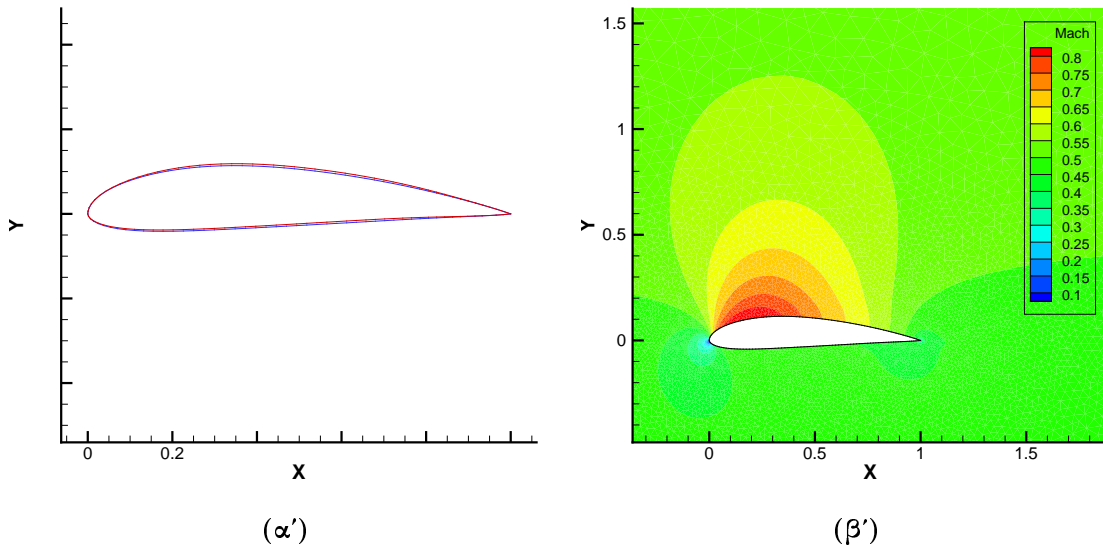
Στο σχήμα 6.9 παρατηρείται ότι η επιτάχυνση του λογισμικού σχεδόν συμπίπτει με την ιδανική καμπύλη έως και τους 10 επεξεργαστές, ενώ πέρα από αυτό το σημείο παρατηρείται ότι το κόστος επικοινωνιών επηρεάζει αρνητικά, μειώνοντας την κλίση της επιτάχυνσης. Από αυτό φαίνεται ότι σε προβλήματα μεγαλύτερης κλίμακας στην περιοχή όπου η επιτάχυνση τείνει να είναι σχεδόν γραμμική ως προς τη χρήση των επεξεργαστών για ένα αριθμό αυτών, το λογισμικό έχει τον καλύτερο βαθμό απόδοσης.

6.4 Πρόλεξη Πεδίου Ροής και Συζυγούς Πεδίου

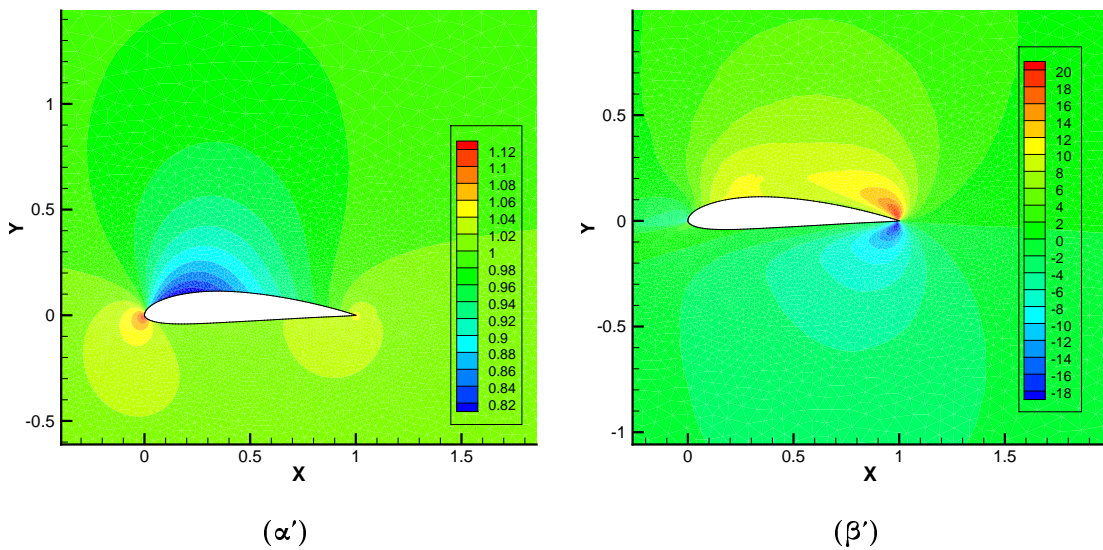
Ενδεικτικά για την αεροτομή της ενότητας 6.3, παρατίθενται σχήματα που παρουσιάζουν ποιοτικά το πεδίο ροής αλλά και το συζυγές πεδίο.

Στο σχήμα 6.10 παρουσιάζεται στα αριστερά η μεταβολή του σχήματος της αεροτομής από τον πρώτο στον πέμπτο κύκλο βελτιστοποίησης και δεξιά η κατανομή του αριθμού Mach στο τελικό σχήμα της αεροτομής.

Στο σχήμα 6.11 αντιπαραβάλλονται το πεδίο ροής της πυκνότητας αριστερά, με το πεδίο της συζυγούς πυκνότητας. Παρατηρείται ότι το συζυγές πεδίο είναι ανάστροφο σε σχέση με το αντίστοιχο του πρωτεύοντος προβλήματος.



Σχήμα 6.10: (α') Σχήμα αεροτομής στον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης (κυανό χρώμα) και στον πέμπτο (κόκκινο χρώμα), με στόχο τη μεγιστοποίηση της άνωσης. (β') Κατανομή του αριθμού Mach στο βελτιστοποιημένο σχήμα αεροτομής.

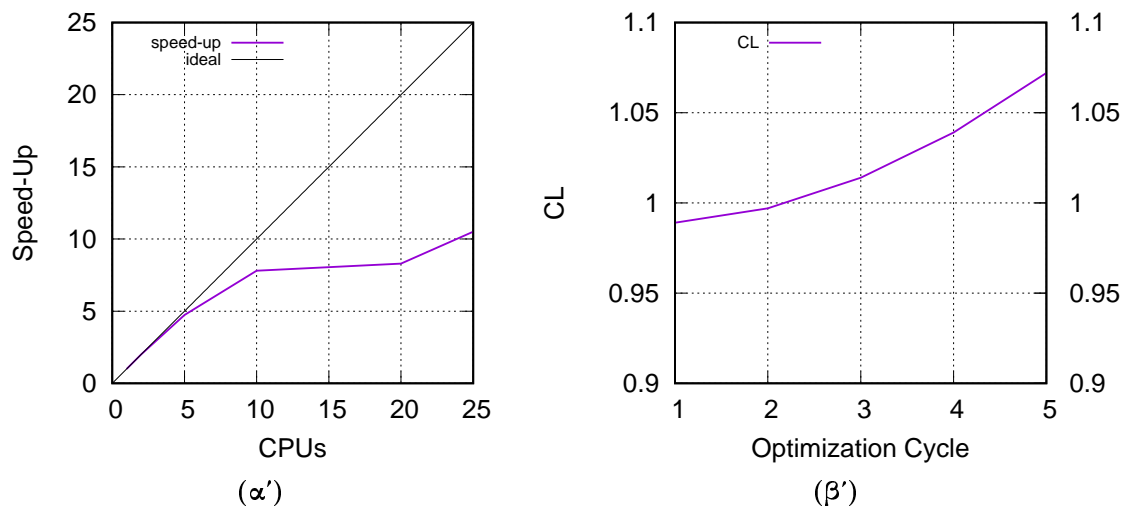


Σχήμα 6.11: (α') Πεδίο ροής της εξίσωσης συνέχειας. (β') Πεδίο Ροής για τη συζυγή πυκνότητα.

6.5 Βελτιστοποίηση Μορφής Αεροτομής NACA 4415

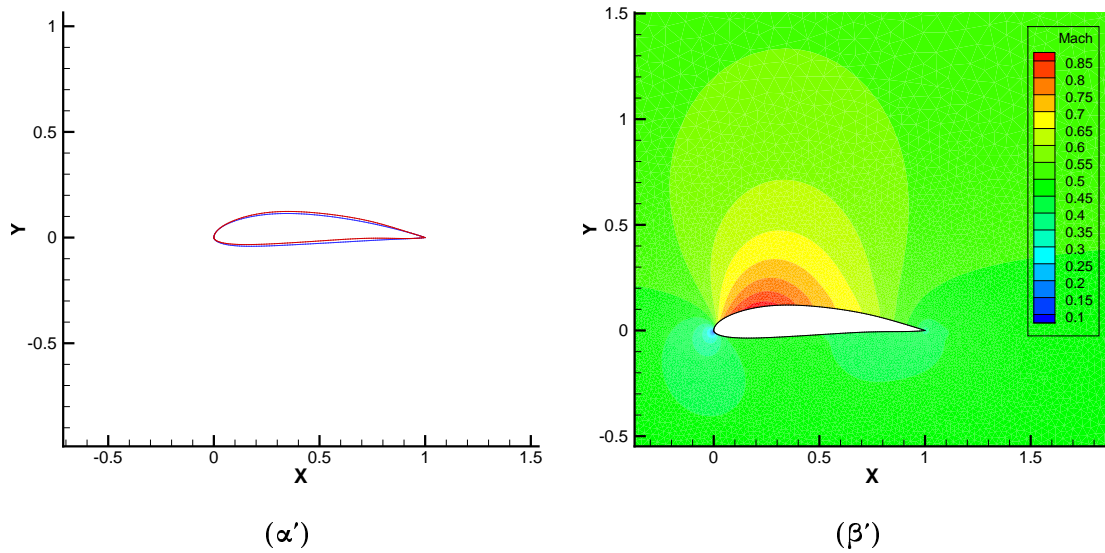
Παρακάτω αναλύεται η βελτιστοποίηση της μορφής της αεροτομής NACA 4415 με σκοπό την αύξηση του συντελεστή άνωσης, εφαρμόζοντας το αναπτυχθέν λογισμικό για 5 κύκλους βελτιστοποίησης.

Για το σχεδιασμό της αεροτομής χρησιμοποιήθηκαν 30 σημεία Bézier, 15 για την πλευρά υπερπίεσης και 15 για την πλευρά υποπίεσης. Το οριόδετο μη-δομημένο πλέγμα αποτελούνταν από 20243 κόμβους συνολικά. Η ροή ήταν ατριβής, χρονικά μόνιμη, η οποία προσπίπτει στην αεροτομή με $\alpha_\infty = 3^\circ$ και $M_\infty = 0.5$. Οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν με σχήμα υπολογισμού 2^{76} τάξης ακρίβειας.

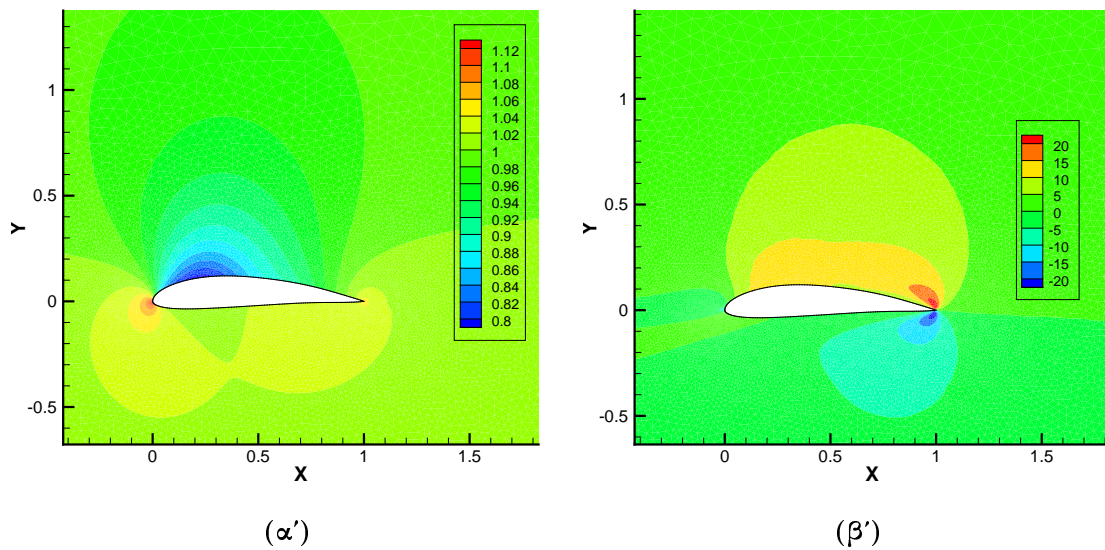


Σχήμα 6.12: (α') Επιτάχυνση λογισμικού. (β') Εξέλιξη της τιμής του συντελεστή άνωσης κατά τους κύκλους βελτιστοποίησης με στόχο τη μεγιστοποίηση της άνωσης.

Στο σχήμα 6.12 παρουσιάζεται, αριστερά η επιτάχυνση του λογισμικού ενώ δεξιά η εξέλιξη της τιμής του συντελεστή άνωσης εν συνάρτησει των κύκλων βελτιστοποίησης. Στα παρακάτω σχήματα παρατίθενται ενδεικτικά η εξέλιξη του σχήματος της αεροτομής (σχήμα 6.13α'), η κατανομή του αριθμού Mach (σχήμα 6.13β'), καθώς και τα πεδία ροής για την εξίσωση της συνέχειας και της αντίστοιχης για το συζυγές πρόβλημα στο τελικό σχήμα της αεροτομής (σχήμα 6.14).



Σχήμα 6.13: (α') Σχήμα αεροτομής στον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης (κυανό χρώμα) και στον πέμπτο (κίτρινο χρώμα). (β') Κατανομή του αριθμού Mach στο βελτιστοποιημένο σχήμα αεροτομής.



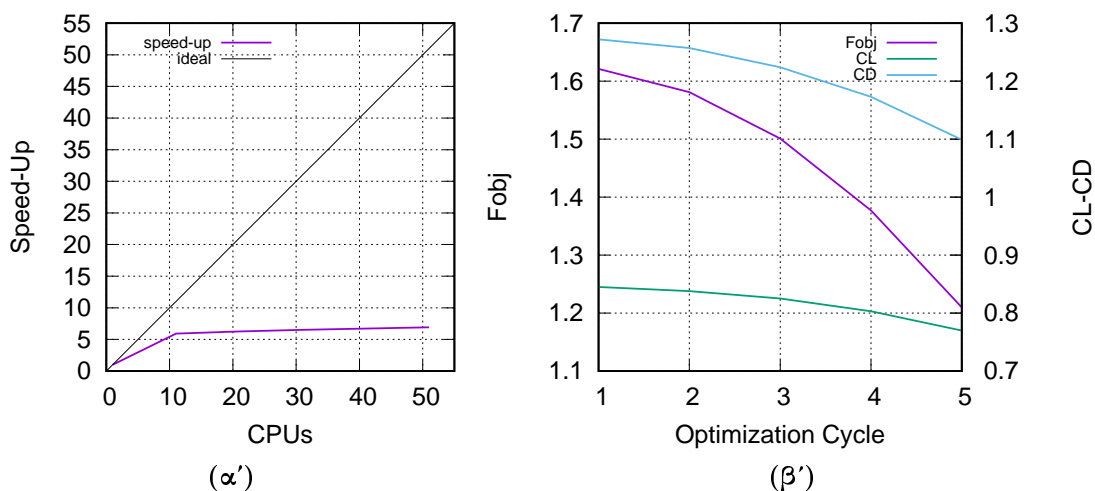
Σχήμα 6.14: (α') Πεδίο ροής της εξίσωσης συνέχειας. (β') Πεδίο Ροής για τη συζυγή πυκνότητα.

6.6 Βελτιστοποίηση Μορφής Αεροτομής RAE 2822

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η βελτιστοποίηση μορφής της αεροτομής RAE 2822 σε διηχητική ροή.

Εξαιτίας της εμφάνισης του κρουστικού κύματος, άρα και της αναμενόμενης οπισθέλκουσας, χρησιμοποιείται ως κριτήριο της βελτιστοποίησης η μείωση του συντελεστή οπισθέλκουσας, θέτοντας ως περιορισμό έναν ελάχιστο συντελεστή άνωσης.

Για το σχεδιασμό της αεροτομής χρησιμοποιήθηκαν 16 σημεία Bézier, 8 για την περιοχή πίεσης και 8 για την περιοχή υποπίεσης. Το πλέγμα ήταν οριόδετο μη-δομημένο, με 5744 κόμβους συνολικά. Η ροή ήταν ατριβής, χρονικά μόνιμη, με $\alpha_\infty = 2.72^\circ$ και $M_\infty = 0.725$, ενώ οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν με σχήμα υπολογισμού 2^{ης} τάξης ακρίβειας.

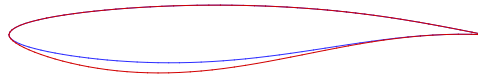


Σχήμα 6.15: (α') Επιτάχυνση λογισμικού. (β') Εξέλιξη των τιμών του συντελεστή άνωσης, οπισθέλκουσας και συνάρτησης κόστους κατά τους κύκλους βελτιστοποίησης με στόχο την ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας και ταυτόχρονο περιορισμό της άνωσης σε συγκεκριμένη τιμή.

Στο σχήμα 6.15 αριστερά παρουσιάζεται η επιτάχυνση του λογισμικού, για την οποία διαπιστώνεται ότι λόγω του μικρού πλέγματος, είναι ικανοποιητική έως τους 10 επεξεργαστές. Μετά από αυτόν τον αριθμό φαίνεται ότι δεν υπάρχει περαιτέρω όφελος, καθώς οι επικοινωνίες είναι κατά πολύ περισσότερες.

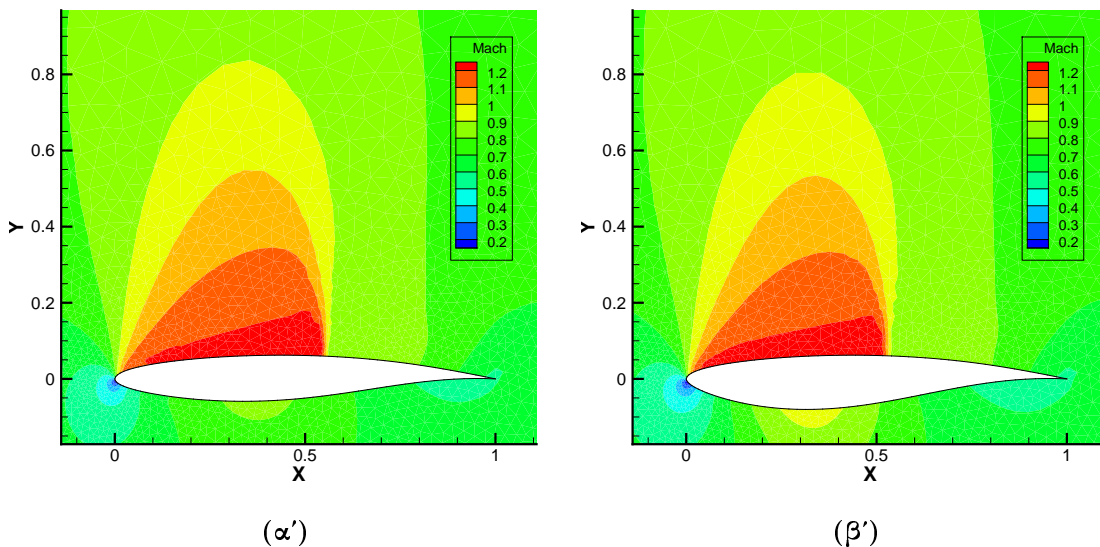
Στα δεξιά του σχήματος 6.15 αποτυπώνεται η μείωση της συνάρτησης κόστους

κατά την εξέλιξη της βελτιστοποίησης με την ταυτόχρονη μείωση του συντελεστή οπισθέλκουσας. Επίσης παρατηρείται και μία μείωση της τιμής του συντελεστή άνωσης, μικρότερης κλίσης, καθότι το εν λόγω μέγεθος χρησιμοποιείται ως περιορισμός και όχι ως βασικός στόχος της βελτιστοποίησης.



Σχήμα 6.16: Σχήμα αεροτομής στον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης (κυανό χρώμα) και στον πέμπτο (κόκκινο χρώμα), με στόχο την ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας και ταυτόχρονο περιορισμό της άνωσης σε συγκεκριμένη τιμή.

Στο σχήμα 6.16 παρατηρείται η μεταβολή του σχήματος της αεροτομής από κυανό, που αντιστοιχεί στο αρχικό σχήμα, σε κόκκινο που αντιστοιχεί στον πέμπτο κύκλο βελτιστοποίησης.



Σχήμα 6.17: (α') Κατανομή του αριθμού Mach στο αρχικό σχήμα αεροτομής. (β') Κατανομή του αριθμού Mach στο βελτιστοποιημένο σχήμα αεροτομής.

Στα σχήματα 6.17 παρουσιάζονται η κατανομή του αριθμού Mach στο αρχικό σχήμα της αεροτομής (αριστερά) και στο τελικό σχήμα (δεξιά).

Παρατηρείται πλέον και ποιοτικά στα ανωτέρω σχήματα, ότι το μέγεθος του κρουστικού κύματος μειώνεται, το οποίο κατά συνέπεια επιφέρει μείωση της οπισθέλκουσας, δηλαδή της συνάρτησης κόστους όπως παρουσιάστηκε στο σχήμα 6.15β'.

Κεφάλαιο 7

Επίλογος - Συμπεράσματα

Η εργασία επικεντρώθηκε στην εξέλιξη του προϋπάρχοντος λογισμικού του εργαστηρίου ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ, το οποίο βελτιστοποιεί τη μορφή της αεροτομής για την επίτευξη μεγαλύτερης άνωσης-μικρότερης οπισθέλκουσας σε συνθήκες ελεύθερης ατρίβους ροής, υψηλών ταχυτήτων Mach, μόνιμης στο χρόνο. Πιο συγκεκριμένα, το εν λόγω λογισμικό εμπλουτίστηκε με τις απαραίτητες δομές σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran 90, οι οποίες δίνουν τη δυνατότητα σε αυτό να εκτελείται είτε σειριακά, είτε παράλληλα σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον. Σε αντίθεση με το προϋπάρχον λογισμικό το οποίο ήταν δυνατό να εκτελείται παράλληλα με τη χρήση του πρωτόκολλου PVM, στην εργασία χρησιμοποιήθηκε μόνο το πρωτόκολλο MPI για τις απαιτούμενες διεπεξεργαστικές επικοινωνίες.

Πιο συγκεκριμένα το αναπτυχθέν λογισμικό δύναται να παράξει το σχήμα της μεμονωμένης αεροτομής χρησιμοποιώντας μια παραμετροποίηση αυτής μέσω πολυωνύμων Bézier, των οποίων τα σημεία χρησιμοποιούνται ως μεταβλητές σχεδιασμού στη διαδικασία της βελτιστοποίησης. Έπειτα από αυτό και με τη χρήση της μεθόδου του προελαύνοντος μετώπου (advancing front), παράγεται ένα μη-δομημένο, οριόδετο στην επιφάνεια της αεροτομής πλέγμα, το οποίο αποτελείται αμιγώς από τριγωνικά στοιχεία.

Όταν το λογισμικό χρησιμοποιείται για την επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος και κατά τη διακριτοποίηση των εξισώσεων Euler, ο υπολογισμός των διανυσμάτων ροής πραγματοποιείται με τη χρήση του σχήματος διάσπασης των διαφορών ροής (Flux Difference Splitting Scheme) του Roe .

Επιπρόσθετα το λογισμικό για τη βελτιστοποίηση μορφής της αεροτομής, χρησιμοποιεί τη συνεχή συζυγή μέθοδο, η οποία σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης παράγει τις

παραγωγούς ευαισθησίας των σημείων των πολυωνύμων Bézier τα οποία διαχειρίζονται μονοσήμαντα το σχήμα της αεροτομής. Μέσω της χρήσης της μεθόδου της απότομης ανόδου παράγονται τα νέα σημεία των πολυωνύμων Bézier, μεταβάλλοντας το σχήμα της αεροτομής.

Στο τέλος κάθε κύκλου βελτιστοποίησης, το λογισμικό διαθέτει τη δυνατότητα είτε να παράξει ένα νέο πλέγμα περιβάλλοντας το νέο σχήμα αεροτομής που υπολογίστηκε, είτε να αναπροσαρμόσει το ήδη υπάρχον πλέγμα στο νέο σχήμα αεροτομής. Αξίζει να σημειωθεί ότι και αυτό το τμήμα του λογισμικού δύναται να εκτελεστεί σε παράλληλο επεξεργαστή.

Για τους υπολογισμούς που παρουσιάστηκαν στην εργασία χρησιμοποιήθηκαν οι υπολογιστικές πλατφόρμες του εργαστηρίου ΜΠΥΡ&B/EMΠ [27]. Οι δύο πρώτες πλατφόρμες αποτελούν το CPU cluster της ΜΠΥΡ&B/EMΠ διαθέτοντας περίπου 100 υπολογιστικούς κόμβους που φέρουν από 2 επεξεργαστές (Quad/six/eight or ten core Xeon) έκαστος, με σύνολο πυρήνων να ανέρχεται περίπου στους 850 και μνήμη RAM στα 3,1TB. Η άλλη πλατφόρμα του εργαστηρίου αποτελείται συνολικά από οκτώ (8) υπολογιστικούς κόμβους. Τέσσερις (4) από αυτούς φέρουν από δύο επεξεργαστές Quad core Xeon έκαστος, ενώ οι υπόλοιποι τέσσερις (4) φέρουν από δύο Six core Xeon. Η μνήμη RAM του κάθε υπολογιστικού κόμβου κυμένεται από 16 έως 32 GB. Η εν λόγω πλατφόρμα αποτελεί το GPU cluster της ΜΠΥΡ&B/EMΠ φέροντας 12 Tesla M2050, 4 K20 και 4 K40 Nvidia GPUs. Οι ανωτέρω συστοιχίες φέρουν λειτουργικό Linux CentOS 7.1. Η επικοινωνία μεταξύ τους επιτυγχάνεται με πρωτόκολλο TCP/IP ενώ η παράλληλη επεξεργασία υποστηρίζεται από το πρωτόκολλο MPI.

7.1 Συμπεράσματα και Σχόλια

Μετά την πιστοποίηση του αναπτυχθέντος λογισμικού, παράχθηκαν τα δεδομένα επιτάχυνσης κατά την εκτέλεση σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον. Από αυτά παρατηρήθηκε η γραμμική επιτάχυνση του λογισμικού συναρτήσει του αριθμού των χρησιμοποιούμενων επεξεργαστών, η οποία πλησιάζει τη βέλτιστη κλίση ενώ στη συνέχεια αποκλίνει από αυτήν όσο το χρονικό κόστος επικοινωνίας αυξάνει. Ο αριθμός των επεξεργαστών στον οποίο παρατηρούνται τα ανωτέρω, διαφέρει κατά περίπτωση επηρεαζόμενος κυρίως από τις συνθήκες της ροής αλλά και από το μέγεθος του πλέγματος.

Σε ότι αφορά την αύξηση της τάξης ακρίβειας των υπολογισμών, συγκρίθηκε το ποσοστό αύξησης των κόμβων επικοινωνίας και ο επιπρόσθετος χρόνος που

απαιτείται για την αύξηση της τάξης ακρίβειας σε συνάρτηση με τον αριθμό των χρησιμοποιούμενων επεξεργαστών. Παρατηρήθηκε ότι όταν το λογισμικό επίλυσης εκτελείται παράλληλα, ο επιπρόσθετος χρόνος που απαιτείται για την αύξηση της τάξης ακρίβειας μειώνεται.

Τέλος αναφέρθηκε ενδεικτικά το αποτιμώμενο κέρδος σε συγκεκριμένο αριθμό κύκλων βελτιστοποίησης όταν το λογισμικό εκτελείται σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον.

Συνοψίζοντας η παραλληλοποίηση του λογισμικού αποφέρει τεράστια οφέλη ως προς το χρόνο επίλυσης και ιδιαίτερα όσο τα προβλήματα είναι μεγαλύτερα σε κλίμακα, καθώς το κόστος επικοινωνίας επιδρά κατά πολύ λιγότερο αρνητικά στην επιτάχυνση του λογισμικού.

7.2 Προτάσεις για Μελλοντικές Προσθήκες

Ακολουθεί μία σύντομη παράθεση με μελλοντικές τροποποιήσεις του πρωτεύοντος και του συζυγούς προβλήματος, που δύνανται να αποτελέσουν τη φυσική συνέχεια του αναπτυχθέντος λογισμικού βελτιστοποίησης:

- (α) Η MPI παραλληλοποίηση της διαδικασίας επίλυσης ώστε να διαχειρίζεται υβριδικά πλέγματα.
 - (β) Η προσαρμογή του λογισμικού μέσω MPI παραλληλοποίησης για την επίλυση χρονικά μη-μόνιμων ροών.
 - (γ) Η ενσωμάτωση των κατάλληλων δομών με σκοπό τη μελέτη διαφορετικών περιπτώσεων, ήτοι πτερυγώσεις στροβιλομηχανών που διέπονται από περιοδικές οριακές συνθήκες ή ροές εντός αγωγών.
 - (δ) Η εισαγωγή κατάλληλων προσθηκών για την επίλυση ροών χαμηλών αριθμών Mach, οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ασυμπίεστες.
 - (ε) Η περαιτέρω MPI παραλληλοποίηση με σκοπό την επίλυση τυρβωδών ροών.
 - (στ) Ως ακόλουθο των ανωτέρω, η επέκταση του λογισμικού για να επιλύει 3Δ ροές.
-

Βιβλιογραφία

- [1] Goldberg, DE: *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning, addison-wesley, reading, ma, 1989*. Google Scholar, 2014.
- [2] Michalewicz, Zbigniew: *Evolution strategies and other methods*. In *Genetic Algorithms+ Data Structures= Evolution Programs*, pages 159–177. Springer, 1996.
- [3] Mohammadi, B and Pironneau, O: *Applied shape optimization for fluids. clarendon*. Oxford, 2001.
- [4] Καμπόλης, Ι.: *Πολυεπίεδοι, πολυεπεξεργαστικοί αλγόριθμοι αεροδυναμικής βελτιστοποίησης στις στροβιλομηχανές*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2009.
- [5] Καρακάσης, Μ.: *Ιεραρχικοί, καταναμημένοι εξελικτικοί αλγόριθμοι και υπολογιστική ευφύια στη σχεδίαση βέλτιστων αεροδυναμικών μορφών σε περιβάλλον πολυεπεξεργασίας*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2006.
- [6] Jameson, A.: *Aerodynamic design via control theory*. Journal of Scientific Computing, 3:233–260, 1988.
- [7] Anderson, W.K. and Venkatakrisnan, V.: *Aerodynamic design optimization on unstructured grids with a continuous adjoint formulation*. Computers & Fluids, 28(4-5):443–480, 1999.
- [8] Papadimitriou, D.I. and Giannakoglou, K.C.: *A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals for inviscid and viscous flows*. Computers & Fluids, 36(2):325–341, 2007.
- [9] Kavvadias, I.S., Papoutsis-Kiachagias, E.M., and Giannakoglou, K.C.: *On the proper treatment of grid sensitivities in continuous adjoint methods for shape optimization*. Journal of Computational Physics, 301:1–18, 2015.
- [10] Hirsch, C.: *Numerical Computation of Internal and External Flows, Volume 1: Fundamentals of Numerical Discretization*. Wiley Series in Numerical Methods in Engineering. Wiley, 1991, ISBN 9780471923855. <https://books.google.gr/books?id=ONEutwEACAAJ>.

-
- [11] Hirsch, C.: *Numerical Computation of Internal and External Flows, Volume 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*. Elsevier Science, 2019, ISBN 9780080940519. <https://books.google.gr/books?id=nUN9AwAAQBAJ>.
- [12] Ασούτη, Β.: *Μέθοδοι αεροδυναμικής ανάλυσης και σχεδιασμού για ροές υψηλών και χαμηλών ταχυτήτων, σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2009.
- [13] Κουμπογιάννης, Δ.: *Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier–Stokes με χρήση μη-δομημένων πλεγμάτων σε περιβάλλον παράλληλης επεξεργασίας*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1998.
- [14] Fortune, S.: *Handbook of discrete and computational geometry*. chapter Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations, pages 377–388. CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 1997, ISBN 0-8493-8524-5. <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=285869.285891>.
- [15] Merriam, M.: *An efficient advancing front algorithm for delaunay triangulation*. In *29th Aerospace Sciences Meeting*, page 792, 1991.
- [16] Roe, P.L.: *Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*. *Journal of Computational Physics*, 43(2):357–372, 1981.
- [17] Ζερβογιάννης, Θ.: *Μέθοδοι βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική και τις στροβιλομηχανές με χρήση συζυγών τεχνικών, υβριδικών πλεγμάτων και του ακριβούς εσσιανού μητρώου*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2011.
- [18] Rauber, T. and Rünger, G.: *Parallel programming: For multicore and cluster systems*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [19] Gabriel, E., Fagg, Graham E., Bosilca, G., Angskun, T., Dongarra, J., Squyres, J.M., Sahay, V., Kambadur, P., Barrett, B., Lumsdaine, A., Castain, R.H., Daniel, D.J., Graham, R.L., and Woodall, T.S.: *Open MPI: Goals, concept, and design of a next generation MPI implementation*. In *Proceedings, 11th European PVM/MPI Users’ Group Meeting*, pages 97–104, Budapest, Hungary, September 2004.
- [20] Amdahl, G.M.: *Validity of the single processor approach to achieving large scale computing capabilities*. In *Proceedings of the April 18-20, 1967, Spring Joint Computer Conference, AFIPS ’67 (Spring)*, pages 483–485, New York, NY, USA, 1967. ACM. <http://doi.acm.org/10.1145/1465482.1465560>.
- [21] Hendrickson, B.: *Graph partitioning and parallel solvers: Has the emperor no clothes? (extended abstract)*. In *In Proc. Irregular’98*, pages 218–225. Springer-Verlag, 1998.
-

- [22] *METIS - Serial Graph Partitioning and Fill-reducing Matrix Ordering*, webpage. <http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/metis/metis/download>.
 - [23] Peter, J. and Dwight., R.P.: *Numerical sensitivity analysis for aerodynamic optimization: A survey of approaches*. *Computers & Fluids*, 39(3):373–391, 2010.
 - [24] Giles, M. and Pierce, N.: *An introduction to the adjoint approach to design*. *Flow, Turbulence and Combustion*, 65:393–415, 2000.
 - [25] Giles, M. and Pierce, N.: *Adjoint equations in CFD: duality, boundary conditions and solution behaviour*. In *13th Fluid Dynamics Conference, AIAA Paper 1997-1850*, New Orleans, LA, June 1997.
 - [26] Mavriplis, D.: *Discrete adjoint-based approach for optimization problems on three-dimensional unstructured meshes*. *AIAA Journal*, 45(4):740–750, 2007.
 - [27] *Parallel CFD & Optimization Unit (PCOpt)*, webpage. <http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/research/velos.html>.
-