



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

‘ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ’

Μεταπτυχιακή εργασία με θέμα:

**Προσαρμογή 2Δ και 3Δ πλεγμάτων σε μεταβαλλόμενα
όρια με τη μέθοδο των κινούμενων ελάχιστων
τετράγωνων (MLS)**

ΙΩΑΝΝΗΣ ΤΟΥΡΗΣ

Επιβλέπων:

Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ

ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

**ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ
ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ**

ΑΘΗΝΑ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2016

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλους όσους με στήριξαν κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου και ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή της μεταπτυχιακής μου εργασίας κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα. Η συμβολή του στην ολοκλήρωση της υπήρξε καθοριστική.

Επίσης, ευχαριστώ όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος Υπολογιστική Μηχανική, για την πολύτιμη βοήθεια και τις συμβουλές τους καθ'όλη την διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου. Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω σε όλα τα μέλη της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών ΕΜΠ για τον πολύτιμο χρόνο που αφιέρωσαν και τις χρήσιμες συμβουλές τους. Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ, θέλω να πω στην οικογένεια μου για την ηθική στήριξη σε όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου.

Περίληψη

Η προσαρμογή υπολογιστικών πλεγμάτων είναι πολύ χρήσιμο εργαλείο στις εφαρμογές της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής. Σε προβλήματα βελτιστοποίησης μορφής η προσαρμογή του υπολογιστικού πλέγματος σε νέα όρια είναι απαραίτητη, διότι σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης διαφοροποιούνται τα όρια του υπολογιστικού χωρίου και είναι αναγκαία η προσαρμογή του εσωτερικού του πλέγματος. Επιπλέον, σε εφαρμογές αεροελαστικότητας τα προβλήματα ροής αναφέρονται σε όρια τα οποία μεταβάλλονται με το χρόνο, συνεπώς πρέπει σε κάθε χρονικό βήμα το πλέγμα να προσαρμόζεται στη νέα μορφή των ορίων. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η επαναπλεγματοποίηση είναι πολύ χρονοβόρα και απαιτεί μεγάλο υπολογιστικό χρόνο. Για το λόγο αυτό, έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές προσαρμογής υπολογιστικών πλεγμάτων.

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία αφορά τεχνικές προσαρμογής 2Δ και 3Δ υπολογιστικών πλεγμάτων μέσω της μεθόδου των κινούμενων ελάχιστων τετράγωνων. Ο υπολογιστικός κώδικας που αναπτύσσεται, εφαρμόζεται σε 2Δ και 3Δ γεωμετρίες και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα. Στην εργασία, χρησιμοποιούνται μετρικές ποιότητας μη-δομημένων πλεγμάτων για τον ποιοτικό έλεγχο του κάθε πλέγματος.

Abstract

The adaptation of computational meshes is a useful tool in computation fluid dynamic applications. In shape optimization problems, the adaptation of the computational mesh is required because, in every optimization loop, the boundaries of the computational domain change and the mesh has to be adapted in the new geometry. From a different point of view, in aeroelasticity applications, the problems are mainly time-dependent and the mesh has to be adapted to each and every time step. In the most of the cases, remeshing is time-consuming. For this reason, many techniques for mesh adaptation have been developed.

In the present thesis, the moving least squares method is investigated for adapting 2-D and 3-D meshes. The developed program is tested in 2-D geometries, as well as in 3-D cases. Moreover, in this thesis, quality metric indices for each mesh are used for the assessment of the adapted meshes.

Ακρωνύμια

ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΜΠΥΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
LS	Least Squares
MLS	Moving Least Squares
WLS	Weighted Least Squares
RBF	Radial Basis Function
NTUA	National Technical University of Athens
CG	Conjugate Gradient
EASY	Evolutionary Algorithm System

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες.....	i
Περίληψη.....	ii
Abstract	iii
Ακρωνύμια	iv
Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή	1
1.1 Η βελτιστοποίηση σε εφαρμογές ρευστοδυναμικής.....	1
1.2 Η ανάγκη για Παραμόρφωση Πλέγματος	1
1.3 Άλλες μέθοδοι παραμόρφωσης πλέγματος.....	2
1.4 Δομή της εργασίας	3
Κεφάλαιο 2. Η μέθοδος κινούμενων ελάχιστων τετράγωνων.....	4
2.1 Εισαγωγή	4
2.2 Η Μέθοδος των ελάχιστων τετραγώνων	4
2.3 Η μέθοδος των σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων	5
2.4 Η Βασική ιδέα των MLS	7
2.5 Χρησιμότητα και πραγματικές εφαρμογές της MLS.....	7
2.6 Οι μέθοδοι RBF και MLS στην παραμόρφωση πλεγμάτων.....	9
Κεφάλαιο 3. Η μέθοδος των συζυγών κλίσεων	11
3.1 Εισαγωγή	11
3.2 Μέθοδος των Συζυγών Κλίσεων.....	12
3.3 Βασικός Αλγόριθμος της Μεθόδου Συζυγών Κλίσεων.....	14
Κεφάλαιο 4: Εφαρμογές σε διδιάστατα πλέγματα.....	15
4.1 Εφαρμογές στο 2D πλέγμα μεταξύ δύο τετραγώνων	16
4.1.1 Δοκιμές ως προς την ακτίνα και τον βαθμό πολυωνύμου	17
4.1.2 Ανάλυση για μεγαλύτερες γωνίες.....	43
4.1.3 Εφαρμογή της τμηματικής στροφής	47
4.2 Εφαρμογές σε μεμονωμένη αεροτομή NACA6512.....	52
4.2.1 Δοκιμές ως προς την ακτίνα και τον βαθμό πολυωνύμου	52
4.2.2 Ανάλυση για μεγαλύτερες γωνίες.....	65
4.2.3 Εφαρμογή της τμηματικής στροφής	69
4.3 Εφαρμογές σε πλέγμα γύρω από φύλλο πλάτανου	71
4.3.1 Δοκιμές ως προς την ακτίνα και τον βαθμό πολυωνύμου	72
4.3.2 Ανάλυση για μεγαλύτερες γωνίες.....	82
4.3.3 Εφαρμογή της τμηματικής στροφής	85

4.4 Σχόλια	87
Κεφάλαιο 5: Εφαρμογές σε τριδιάστατα πλέγματα	89
5.1 Εφαρμογές στο 3D πλέγμα μεταξύ κύβου και σφαίρας	89
5.2 Εφαρμογή της τμηματικής στροφής στο 3D πλέγμα μεταξύ κύβου και σφαίρας	96
5.3. Εφαρμογές στο 3D πλέγμα γύρω από δύο φιγούρες ζώων	100
5.4 Σχόλια	104
Κεφάλαιο 6. Συμπεράσματα και Προτάσεις	105
6.1 Συμπεράσματα	105
6.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα	106
Βιβλιογραφία	108

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

1.1 Η βελτιστοποίηση σε εφαρμογές ρευστοδυναμικής

Τα τελευταία χρόνια παρουσιάζεται ιδιαίτερο ενδιαφέρον στον τομέα της βελτιστοποίησης στον σχεδιασμό υδροδυναμικών ή αεροδυναμικών μορφών (λ.χ. σχήμα πτέρυγας, μορφολογία αυτοκινήτου κλπ.) [1]. Η βελτιστοποίηση των μορφών αυτών πραγματοποιείται μέσω μεθόδων βελτιστοποίησης [2]. Οι μέθοδοι αυτές πραγματοποιούν αξιολόγηση των υποψήφιων λύσεων με λογισμικό υπολογιστικής ρευστοδυναμικής ώστε να εντοπίσουν τη βέλτιστη λύση. Αυτό γίνεται αφού πρώτα καθοριστεί ο στόχος ή οι στόχοι μέσω των συναρτήσεων στόχου (objective functions) οι οποίες πρέπει να ελαχιστοποιηθούν ή να μεγιστοποιηθούν, των περιορισμών (constraints) ανισότητας ή ισότητας του προβλήματος και οι μεταβλητές σχεδιασμού (design variables). Προφανώς, κατά την επιλογή των υποψήφιων λύσεων, απαιτείται λογισμικό που να τις αξιολογεί ως προς τους στόχους που έχουν τεθεί εξ' αρχής. Αυτό, για παράδειγμα, μπορεί να είναι ο κώδικας επίλυσης της ροής γύρω από μια πτέρυγα. Συχνό είδος βελτιστοποίησης είναι η βελτιστοποίηση μορφής (shape optimization) στην οποία ζητούμενο είναι η μορφή για την οποία επιτυγχάνονται οι στόχοι που έχουν καθοριστεί μέσω της συνάρτησης στόχου και ικανοποιούνται οι περιορισμοί. Ένα παράδειγμα είναι λχ ο υπολογισμός της βέλτιστης μορφής αεροτομής [3] που δίνει μέγιστο συντελεστή άνωσης c_L για συγκεκριμένες συνθήκες ροής.

1.2 Η ανάγκη για Παραμόρφωση Πλέγματος

Για την αξιολόγηση των υποψήφιων λύσεων στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση μορφής και, τελικά, την εύρεση της βέλτιστης πρέπει να γίνει χρήση επιλύτη της ροής. Όμως, όλα τα προβλήματα ΥΡΔ επιλύονται με χρήση Ηλεκτρονικού Υπολογιστή, επομένως χρήζουν χωρικής διακριτοποίησης, δηλαδή τη γένεση κατάλληλου υπολογιστικού πλέγματος [4],[5]. Αυτό, δεν αρκεί για τη διαδικασία της βελτιστοποίησης η οποία δεν πραγματοποιείται σε ένα βήμα, αλλά είναι επαναληπτική. Αυτό, δηλαδή σημαίνει ότι σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης μεταβάλλεται η μορφή που πρόκειται να βελτιστοποιηθεί.

Συνεπώς, πρέπει να προσαρμοστεί το πλέγμα στη νέα αυτή γεωμετρία ώστε να υποστηρίξει τον επιλύτη στο νέο κύκλο βελτιστοποίησης. Πολλές φορές, επιλέγεται η βελτιστοποίηση με χρήση αιτιοκρατικών ή στοχαστικών μεθόδων βελτιστοποίησης. Όσον αφορά τις στοχαστικές μεθόδους, οι εξελικτικοί αλγόριθμοι (evolutionary algorithms) [6] χρησιμοποιούνται συνήθως σε προβλήματα με λίγες μεταβλητές. Ένα λογισμικό εξελικτικού αλγορίθμου είναι ο EASY (Evolutionary Algorithms System) [7] της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ. Στις περιπτώσεις που επιλέγεται εξελικτικός αλγόριθμος πρέπει να γίνει παραμετροποίηση της προς βελτιστοποίηση μορφής για να καθοριστούν οι

μεταβλητές σχεδιασμού και να μπορεί το αντίστοιχο λογισμικό να ανταποκριθεί. Από την πλευρά των αιτιοκρατικών μεθόδων, υπάρχει η συζυγής μέθοδος βελτιστοποίησης η οποία βασίζεται στον υπολογισμό της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης. Οι συζυγείς μέθοδοι βελτιστοποίησης (adjoint-based optimization) [8], είναι εργαλεία υπολογισμού της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, εξασφαλίζοντας ταυτόχρονα την ικανοποίηση των βασικών εξισώσεων του προβλήματος (λ.χ. των εξισώσεων Navier Stokes).

Επιπλέον, σε χρονικά μεταβαλλόμενα προβλήματα ΥΡΔ καθώς και σε προβλήματα με χωρία ροής με κινούμενα όρια απαιτείται η προσαρμογή του υπολογιστικού πλέγματος στη νέα μορφή των ορίων σε κάθε επανάληψη. Για παράδειγμα, ένα πτερύγιο μιας ανεμογεννήτριας, της οποίας τα στερεά τοιχώματα μετακινούνται λόγω της χρονικά μεταβαλλόμενης δύναμης που ασκείται από τον αέρα, σε κάθε χρονικό βήμα απαιτείται η προσαρμογή του πλέγματος στο νέο σχήμα του πτερυγίου [3].

Στις βιομηχανικές εφαρμογές, όπου τα υπολογιστικά πλέγματα είναι μεγάλα και 3D, η επαναπλεγματοποίηση έχει πολύ μεγάλο κόστος και για το λόγο αυτό εφαρμόζονται διάφορες μέθοδοι προσαρμογής του πλέγματος. Μία τέτοια μέθοδος είναι αυτή των κινούμενων ελάχιστων τετράγωνων (MLS) [8],[9],[10], και η οποία χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία. Η μέθοδος MLS χρησιμοποιείται ως εργαλείο παραμόρφωσης του πλέγματος, αρκεί να είναι γνωστές οι μετατοπίσεις των κόμβων του ορίου.

1.3 Άλλες μέθοδοι παραμόρφωσης πλέγματος

Με στόχο την αποφυγή της επαναπλεγματοποίησης έχουν αναπτυχθεί πολλές μέθοδοι προσαρμογής πλέγματος στη νέα γεωμετρία. Ορισμένες από αυτές εξασφαλίζουν υψηλή ποιότητα πλέγματος αλλά με αυξημένο υπολογιστικό κόστος σε σύγκριση με άλλες που απαιτούν μικρότερο υπολογιστικό χρόνο αλλά δεν αποδίδουν υψηλής ποιότητας πλέγματα.

Μία μέθοδος παραμόρφωσης πλέγματος είναι αυτή κατά την οποία το υπολογιστικό πλέγμα αντιμετωπίζεται ως ελαστικό στερεό σώμα [12], [13]. Εκφράζεται η ισορροπία των ασκούμενων δυνάμεων και ροπών σε στοιχειώδες τμήμα του πλέγματος μέσω των ελαστικών εξισώσεων. Αυτές εκφράζουν το νέο σχήμα του προσαρμοσμένου πλέγματος, με γνωστές τις μετατοπίσεις των επιφανειακών κόμβων.

Άλλη γνωστή μέθοδος παραμόρφωσης πλέγματος είναι η μέθοδος των ελατηρίων [14], [15]. Κατά τη μέθοδο αυτή η παραμόρφωση κάθε στοιχείου περιορίζεται από γραμμικά ή στρεπτικά ελατήρια, τα οποία είναι τοποθετημένα στους κόμβους ή τις ακμές του υπολογιστικού πλέγματος. Με γνωστές τις μετατοπίσεις των οριακών κόμβων, επηρεάζονται οι εσωτερικοί και με επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας υπολογίζονται οι νέες τους θέσεις.

Μία ακόμη μέθοδος παραμόρφωσης πλέγματος είναι η μέθοδος με συναρτήσεις ακτινικής βάσης (RBF) [3], [16]. Πρόκειται για ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο το οποίο προσαρμόζει το πλέγμα αρκεί να είναι γνωστές οι μετατοπίσεις των οριακών κόμβων. Η μέθοδος των RBF αναλύεται συνοπτικά στο κεφάλαιο 2 για να δειχθούν οι διαφορές της με τη μέθοδο MLS που χρησιμοποιείται στην εργασία αυτή [17].

Τέλος, υπάρχει και η μέθοδος στην οποία ορίζεται μία συνάρτηση στόχος [3], [18], η οποία ποσοτικοποιεί την ποιότητα του πλέγματος και, λύνοντας το πρόβλημα ελαχιστοποίησης, προκύπτουν οι νέες θέσεις του υπολογιστικού πλέγματος.

1.4 Δομή της εργασίας

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία αφορά στην ανάπτυξη λογισμικού της μεθόδου MLS και την εφαρμογή της σε διάφορα διδιάστατα και τριδιάστατα πλέγματα.

- **Κεφάλαιο 2:** Αναλύεται η μέθοδος MLS, οι μέθοδοι από τις οποίες προέρχεται καθώς και η χρησιμότητα της μεθόδου στην προσαρμογή πλεγμάτων.
- **Κεφάλαιο 3:** Πραγματοποιείται αναφορά στη μέθοδο συζυγών κλίσεων, η οποία χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των αγνώστων συντελεστών της μεθόδου MLS.
- **Κεφάλαιο 4:** Εφαρμόζεται το λογισμικό της μεθόδου MLS σε 2Δ πλέγματα και εξάγονται χρήσιμα συμπεράσματα.
- **Κεφάλαιο 5:** Εφαρμόζεται η μέθοδος MLS σε 3Δ πλέγματα. Αρχικά, στο απλό πλέγμα μεταξύ ενός κύβου και μίας σφαίρας και στη συνέχεια σε ένα μεγαλύτερο πλέγμα.
- **Κεφάλαιο 6:** Παρουσιάζεται η σύνοψη και τα συμπεράσματα της εργασίας και προτείνονται μελλοντικές επεκτάσεις.

Κεφάλαιο 2. Η μέθοδος των κινούμενων ελάχιστων τετραγώνων

2.1 Εισαγωγή

Το κεφάλαιο αυτό παρουσιάζει τη μέθοδο MLS που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία. Πρόκειται για μέθοδο η οποία χρησιμεύει τόσο στην προσέγγιση δεδομένων σημείων στο χώρο όσο και στη μετακίνηση υπολογιστικών πλεγμάτων.

Η μέθοδος αυτή προέρχεται από την μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων με συναρτήσεις βάρους (weighted least squares) [19] που με τη σειρά της έχει τις ρίζες της στην κλασική μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων (least squares method) [20]. Η μόνη διαφορά της μεθόδου WLS από την LS είναι η χρήση συναρτήσεων βάρους με σκοπό την τοπικότητα της προσέγγισης. Η μέθοδος MLS αρχικά χρησιμοποιεί την WLS μόνο που αυτή, έχει τώρα υπολογιστεί για κάθε σημείο ξεχωριστά. Παρακάτω, παρουσιάζονται σε υποενότητες τόσο τα απλά ελάχιστα τετράγωνα όσο και οι μέθοδοι WLS και MLS.

2.2 Η Μέθοδος LS

Η προσέγγιση δεδομένων διακριτών σημείων είναι μείζονος σημασίας για την επιστήμη της υπολογιστικής μηχανικής. Ένας τρόπος προσέγγισης είναι μέσω της αναζήτησης του πολυωνύμου εκείνου που προσεγγίζει τα διακριτά σημεία με τον βέλτιστο τρόπο. Ως βέλτιστος τρόπος μπορεί να θεωρηθεί η ελαχιστοποίηση της απόκλισης μεταξύ της καμπύλης προσέγγισης και των δεδομένων σημείων. Μαθηματικά αυτό διατυπώνεται ως ελαχιστοποίηση του άθροισματος των τετραγώνων όλων των κομβικών αποκλίσεων [20]

$$\min = \sum_{i=0}^N e_i^2, \text{ όπου } e_i = g(x_i) - y_i \quad (2.1)$$

Αυτή είναι η βασική σχέση της προσέγγισης της LS. Το $g(x)$ είναι το πολυώνυμο προσέγγισης το οποίο ορίζεται ως

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (2.2)$$

ενώ η απόκλιση είναι

$$e_i = g(x_i) - y_i = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_{n-1}x_i^{n-1} + a_nx_i^n - y_i \quad (2.3)$$

Η ποσότητα που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί είναι το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων, δηλαδή

$$\min = \sum_{i=0}^N e_i = \sum_{i=0}^N (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_{n-1}x_i^{n-1} + a_nx_i^n - y_i)^2 \quad (2.4)$$

Η ελαχιστοποίηση της ποσότητας (2.4) μπορεί να επιτευχθεί για τις τιμές των συντελεστών a_i που μηδενίζουν τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial}{\partial a_k}$, $k = 0, \dots, n$.

Συνεπώς, προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα $n+1$ εξισώσεων με αγνώστους τους συντελεστές a_i του πολυωνύμου προσέγγισης.

$$\begin{bmatrix} N+1 & \cdots & \sum_{i=0}^N x_i^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^N x_i^n & \cdots & \sum_{i=0}^N x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^N y_i \\ \sum_{i=0}^N y_i x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^N y_i x_i^n \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Το σύστημα έχει μάλιστα συμμετρικό μητρώο συντελεστών και η επίλυση του για μικρούς βαθμούς πολυωνύμου είναι εύκολη. Για υψηλούς βαθμούς πολυωνύμου είναι πιθανό να προκύψουν αριθμητικές δυσκολίες, όπως η ασθενής κατάσταση της μήτρας.

2.3 Η μέθοδος WLS

Πρόκειται για μία ειδική περίπτωση των γενικευμένων ελαχίστων τετραγώνων με μόνη διαφορά τη χρήση συναρτήσεων βάρους [19]. Δηλαδή η ποσότητα που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί τώρα είναι

$$\min \sum_i \theta \| \bar{x} - x_i \| \| f(x_i) - f_i \|^2 \quad (2.6)$$

για δεδομένο σημείο \bar{x} . Όπως φαίνεται και από την παραπάνω σχέση, η διαφοροποίηση σε σχέση με τα απλά ελάχιστα τετράγωνα έγκειται στη στάθμιση μέσω της συνάρτησης $\theta(d)$ όπου d η Ευκλείδεια απόσταση του \bar{x} από τα δεδομένα σημεία x_i . Η τοπική προσέγγιση των WLS ορίζεται μόνο για απόσταση $\|x - \bar{x}\| < R$, όπου R μία ακτίνα γύρω από την περιοχή του \bar{x} .

Υπάρχουν πολλές επιλογές όσον αφορά τη συνάρτηση βάρους $\theta(d)$. Συχνά χρησιμοποιείται η Gaussian [21]

$$\theta(d) = e^{-\frac{d^2}{h^2}} \quad (2.7)$$

όπου το h είναι μία χωρική παράμετρος που βοηθά στην εξομάλυνση της προσέγγισης. Ακόμη, πολλοί ερευνητές προτείνουν τη χρήση της $\theta(d) = \frac{1}{d^2 + \varepsilon^2}$ (2.8) ως συνάρτησης βάρους.

Άλλη μία δημοφιλής συνάρτηση βάρους είναι η Wendland [22]

$$\theta(d) = (1 - r)^4 (4r + 1) \quad (2.8)$$

όπου $r=d/h$, ενώ με h ορίζεται η τοπική ακτίνα. Η Wendland ορίζεται για $r \leq 1$ δηλαδή για όσα σημεία είναι εντός της-ορισμένης κατά την κρίση του χρήστη-ακτίνας h . Όπως γίνεται κατανοητό, σε όλες τις περιπτώσεις συναρτήσεων βάρους ορίζεται μία ακτίνα επιρροής-παράμετρος πολύ σημαντική για τις εφαρμογές όπως θα φανεί στη συνέχεια. Πρόκειται για την παράμετρο που ορίζει το πόσο τοπική θα είναι η προσέγγιση. Όσο αυξάνεται το h τόσο πιο γενική γίνεται η μέθοδος, ενώ όσο μικρότερο γίνει τόσο λιγότερα σημεία

επηρεάζουν την προσέγγιση. Στις εφαρμογές της εργασίας αυτής χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση βάρους Wendland.

Η προς ελαχιστοποίηση ποσότητα στη μέθοδο WLS, ελαχιστοποιείται ακριβώς όπως και στην απλή μέθοδο LS. Υπολογίζονται οι μερικές παράγωγοι ως προς τους συντελεστές και αυτές απαιτείται να ισούνται με το μηδέν. Έτσι, προκύπτει σύστημα όμοιο με αυτό των LS ως προς τους συντελεστές, με μοναδική διαφορά τους σταθμισμένους όρους.

Στα απλά LS, ο υπολογισμός των άγνωστων συντελεστών c είναι γενικός για ολόκληρο το σύνολο των δοθέντων σημείων, ενώ στα WLS είναι τοπικός και χρειάζεται να υπολογιστούν εκ νέου για κάθε \bar{x} .

Στη μέθοδο WLS προκύπτει τελικά το παρακάτω σύστημα:

$$\sum_i \theta(d_i) b(x_i) b^T(x_i) c(\bar{x}) = \sum_i \theta(d_i) b(x_i) f_i \quad (2.9)$$

ως προς τους συντελεστές $c(\bar{x})$, όπου b είναι οι όροι του πολυωνύμου στις γνωστές θέσεις x_i .

Λύνοντας ως προς τους c , το σύστημα αυτό δίνει :

$$c(\bar{x}) = \sum_i \theta(d_i) b(x_i) b(x_i)^T \sum_i \theta(d_i) b(x_i) f_i \quad (2.10)$$

Αξίζει να τονιστεί εκ νέου, πως οι συντελεστές $c(\bar{x})$ παρέχουν την τοπική προσέγγιση της μεθόδου WLS.

Ακόμη, είναι πολύ πιθανό να προκύψουν αριθμητικές δυσκολίες στην επίλυση του παραπάνω συστήματος λόγω πιθανών μεγάλων τιμών στο μητρώο $\sum_i \theta(d_i) b(x_i) b(x_i)^T$ του αριστερού μέλους.

Μία λύση για αυτό το πρόβλημα είναι η προσαρμογή των συντεταγμένων σε ένα σχετικό σύστημα με κέντρο αναφοράς το εκάστοτε \bar{x} . Η τοπική προσέγγιση δηλαδή ξαναγράφεται ως

$$f_{\bar{x}}(x) = b(x - \bar{x})^T c(\bar{x}) \quad (2.11)$$

ενώ οι συντελεστές που συσχετίζονται γράφονται

$$c(\bar{x}) = [\sum_i \theta(d_i) b(x_i - \bar{x}) b(x_i - \bar{x})^T]^{-1} \sum_i \theta(d_i) b(x_i - \bar{x}) f_i \quad (2.12)$$

Παράλληλα, μπορεί να κατασκευασθεί και η γενική προσέγγιση στη μέθοδο WLS, εξασφαλίζοντας ότι κάθε σημείο του υπό προσέγγιση χωρίου καλύπτεται από τουλάχιστον ένα τοπικό πολυώνυμο προσέγγισης.

Η σωστή στάθμιση των προσεγγίσεων και η προσαρμογή τους στη γενική συνάρτηση προσέγγισης επιτυγχάνεται κατασκευάζοντας την $\phi(x)$, όπου

$$\varphi_j(x) = \frac{\theta_j(x)}{\sum_{k=1}^n \theta_k(x)}, \text{ με } \sum_j \varphi_j(x) \equiv 1 \text{ παντού στο χωρίο} \quad (2.13)$$

Η γενική συνάρτηση προσέγγισης τότε γράφεται,

$$f(x) = \sum_j \varphi_j(x) b(x)^T c(\bar{x}_j) \quad (2.14)$$

ενώ στο με βάση το σχετικό σύστημα με αρχή το \bar{x} γίνεται

$$f(x) = \sum_j \varphi_j(x) b(x - \bar{x}_j)^T c(\bar{x}_j) \quad (2.15)$$

2.4 Η Βασική ιδέα των MLS

Η μέθοδος MLS προτάθηκε για την εξομάλυνση και παρεμβολή δεδομένων σημείων ή επιφανειών [9], [10], [23]. Είναι χρήσιμη για τη δημιουργία επιφανειών από ένα σύνολο σημείων στο χώρο.

Η βασική ιδέα των MLS είναι η εξής: αρχίζει την προσέγγιση των δεδομένων σημείων (data points) με WLS για ένα αυθαίρετο σημείο στο χώρο και, στη συνέχεια, αυτό μετακινείται με βάση την τοπική προσέγγιση που έχει ήδη υπολογιστεί από τη WLS μέθοδο. Ουσιαστικά, δηλαδή, η γενική συνάρτηση προσέγγισης $f(x)$ αποκτάται κάθε φορά από την αντίστοιχη τοπική.

Σε μορφή εξισώσεων τα παραπάνω γράφονται:

$$\min = \sum_i \theta(\|x - x_i\|) \|f_x(x_i) - f_i\|^2 \quad (2.16)$$

Παρατηρώντας την εξίσωση της $f(x)$, γίνεται κατανοητή η τοπικότητα της μεθόδου και πώς αν εφαρμοστεί το σχετικό σύστημα που ορίστηκε παραπάνω με κέντρο αναφοράς το \bar{x} , η γενική προσέγγιση που δίδει η μέθοδος είναι $f(\bar{x}) = c_0$.

Αυτό γίνεται εύκολα κατανοητό αν γραφεί αναλυτικά η συνάρτηση προσέγγισης $f(x)$ στη γενική μορφή της: $f(x) = \sum_{\lambda=0}^k c_\lambda p_\lambda(x - \bar{x})$ με ζητούμενο το $f(\bar{x})$ και όπου p_λ το πολυώνυμο προσέγγισης. Δηλαδή, αξία έχει μόνο ο πρώτος συντελεστής που υπολογίζεται για κάθε σημείο.

Μια πολύ σημαντική εφαρμογή της μεθόδου αφορά στις γνωστές μετατοπίσεις δεδομένων κόμβων και πως οι υπόλοιποι κόμβοι (λ.χ. σε ένα πλέγμα) ακολουθούν αυτές τις μετατοπίσεις εντός της ακτίνας επιρροής. Θεωρώντας δηλαδή ως f_i τις γνωστές μετατοπίσεις των κόμβων (προς οποιαδήποτε κατεύθυνση), με εφαρμογή της μεθόδου MLS υπολογίζονται οι νέες θέσεις των υπόλοιπων κόμβων. Αυτή η χρήσιμη ιδιότητα των MLS εφαρμόζεται στα επόμενα κεφάλαια για τη προσαρμογή διάφορων υπολογιστικών πλεγμάτων.

2.5 Χρησιμότητα και πραγματικές εφαρμογές της MLS

Η μέθοδος MLS χρησιμοποιείται κυρίως για την δημιουργία εξομαλυσμένων επιφανειών αν δοθούν ορισμένα σταθερά σημεία. Παρεμβάλλει με μεγάλη

ακρίβεια δηλαδή σύνολα των σημείων. Αυτό καθιστά την MLS σπουδαίο εργαλείο σε εφαρμογές γραφικών, όπως τα animations.

Ακόμη, όσον αφορά τις εφαρμογές γραφικών και ιδίως των animations είναι πολύ συχνή η ανάγκη μετακίνησης των επιφανειών. Όμως η εκ νέου δημιουργία επιφάνειας είναι ασύμφορη όσον αφορά τον υπολογιστικό χρόνο. Η μέθοδος MLS δίδει τη λύση σε αυτό το πρόβλημα, αφού με γνωστές τις μετατοπίσεις ορισμένων κόμβων της επιφάνειας, υπολογίζει τις μετατοπίσεις και των υπόλοιπων κόμβων.

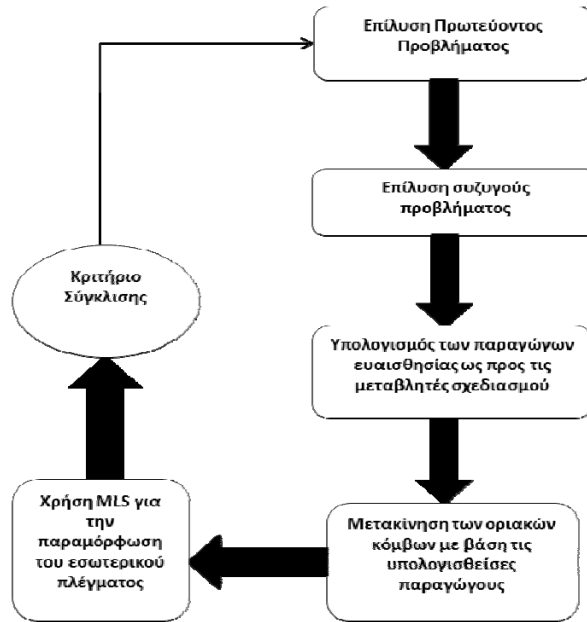
Σε προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης μορφής, ως γνωστόν πολύ σημαντικό ρόλο διαδραματίζει το υπολογιστικό πλέγμα.

Η επαναπλεγματοποίηση δεν συνιστάται για λόγους χρόνου και κόστους (ειδικά για μεγάλου μεγέθους προβλήματα-3D βιομηχανικών εφαρμογών), με συνέπεια την ανάπτυξη τεχνικών παραμόρφωσης του πλέγματος.

Αυτές οι τεχνικές είναι πολύ χρήσιμα εργαλεία για τις αναγκαίες στην ΥΡΔ μετατοπίσεις πλεγμάτων και μία από αυτές είναι και η μέθοδος MLS. Όμως, η δημιουργία νέου πλέγματος δεν αρκεί, καθώς το νέο πλέγμα πρέπει να είναι κατ'ελάχιστον αποδεκτό για εφαρμογές ΥΡΔ. **Αποδεκτό** λέγεται ένα πλέγμα όταν δεν εμφανίζει ανεστραμμένα τριγωνικά ή τετραεδρικά στοιχεία. Αυτό διαπιστώνεται υπολογίζοντας ξεχωριστά για κάθε τρίγωνο την Ιακωβιανή ορίζουσα. Εάν η ορίζουσα αυτή ενός, τουλάχιστον, στοιχείου του πλέγματος αποκτήσει αρνητική τιμή, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα ανεστραμμένο στοιχείο, γεγονός που καθιστά το πλέγμα μη-αποδεκτό.

Για το λόγο αυτό στη μεταπτυχιακή αυτή εργασία, αναπτύχθηκε υπολογιστικός κώδικας μέτρησης των ανεστραμμένων στοιχείων, καθώς και υπολογισμού ορισμένων μετρικών ποιότητας.

Συνοψίζοντας, όπως φαίνεται από τα παραπάνω, η μέθοδος MLS είναι πολύ χρήσιμο εργαλείο σε προβλήματα προσέγγισης/παρεμβολής δεδομένων και κυρίως σε προβλήματα υπολογιστικής ρευστοδυναμικής/βελτιστοποίησης όπου η παραμόρφωση του υπολογιστικού πλέγματος είναι αναγκαία. Κλείνοντας το κεφάλαιο αυτό, παρακάτω παρουσιάζεται σε μορφή διαγράμματος ροής ένας τυπικός κύκλος βελτιστοποίησης και η θέση που κατέχει σε αυτόν η μέθοδος MLS.



Σχήμα 2.1: Τυπικό διάγραμμα ροής ενός προβλήματος βελτιστοποίησης όπου φαίνεται και ο ρόλος της μεθόδου MLS.

2.6 Οι μέθοδοι RBF και MLS στην παραμόρφωση πλεγμάτων

Σε αυτή την υποενότητα γίνεται μια αναφορά στη μέθοδο παραμόρφωσης πλέγματος με συναρτήσεις ακτινικής βάσης (RBF) [3] και γίνεται μια σύγκριση της με την MLS. Αρχικά για να εφαρμοστεί η μέθοδος RBF πρέπει να οριστούν τα K κέντρα της, τα οποία είναι οι οριακοί κόμβοι με γνωστές μετατοπίσεις. Το μοντέλο μετατόπισης ενός οποιουδήποτε εσωτερικού κόμβου που βρίσκεται στη θέση με διάνυσμα x (υποθέτοντας ότι τα κέντρα βρίσκονται στη θέση με διάνυσμα x_{ci}) είναι

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sum_{i=1}^K w_{x,i} \varphi(\|\vec{x}_{ci} - \vec{x}\|) \\ \Delta y &= \sum_{i=1}^K w_{y,i} \varphi(\|\vec{x}_{ci} - \vec{x}\|) \\ \Delta z &= \sum_{i=1}^K w_{z,i} \varphi(\|\vec{x}_{ci} - \vec{x}\|) \end{aligned} \quad (2.17)$$

όπου w_x , w_y , w_z είναι τα βάρη του δικτύου RBF και φ μια συνάρτηση βάσης. Οι τιμές των βαρών αυτών είναι άγνωστες και πρέπει να υπολογιστούν. Για την εύρεση αυτών των τιμών το σύστημα πρέπει να εκπαιδευτεί, εφαρμόζοντας τις εξισώσεις 2.17 K φορές στα K κέντρα και έτσι δημιουργείται το σύστημα

$$\begin{bmatrix} \varphi(\|\vec{x}_{c1} - \vec{x}_{c1}\|) & \cdots & \varphi(\|\vec{x}_{c1} - \vec{x}_{cK}\|) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\|\vec{x}_{cK} - \vec{x}_{c1}\|) & \cdots & \varphi(\|\vec{x}_{cK} - \vec{x}_{cK}\|) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{x1} \\ \vdots \\ w_{xK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \vec{x}_{c1} \\ \vdots \\ \Delta \vec{x}_{cK} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

ή ισοδύναμα

$$A\vec{w}_x = \Delta\vec{x}_c \quad (2.19\alpha)$$

$$A\vec{w}_y = \Delta\vec{y}_c \quad (2.19\beta)$$

$$A\vec{w}_z = \Delta\vec{z}_c \quad (2.19\gamma)$$

Το μητρώο A είναι ίδιο για κάθε κατεύθυνση, συμμετρικό και έχει τιμή μονάδα στα στοιχεία της διαγωνίου του. Αφού βρεθούν τα βάρη, το επόμενο βήμα είναι η χρήση του δικτύου RBF για τον υπολογισμό των μετατοπίσεων των εσωτερικών κόμβων. Αν το πλήθος των εσωτερικών κόμβων είναι ίσο με N , τότε εφαρμόζεται η σχέση 2.17, N φορές.

Ουσιαστικά δηλαδή, για την εύρεση των βαρών w πρέπει να επιλυθεί δύο ή τρεις φορές (όσες και οι διαστάσεις του προβλήματος) ένα σύστημα τάξεως $K \times K$, όπου K το πλήθος των οριακών κόμβων με γνωστές μετατοπίσεις και, στη συνέχεια, για την εφαρμογή της μεθόδου να επιλυθούν N φορές οι εξισώσεις 2.17 (όσοι και οι εσωτερικοί κόμβοι).

Αντίθετα, η μέθοδος MLS, χρειάζεται να επιλύσει N φορές ένα-συνήθως-μικρότερο σύστημα όπου η τάξη του είναι ίση με το πλήθος των στοιχείων του πολυωνύμου που επιλέγεται.

Αυτή είναι και η βασική διαφορά αυτών των δύο συγγενικών κατά τα άλλα μεθόδων. Η μέθοδος RBF έχει πολλές και απλές εξισώσεις για επίλυση, όμως πρέπει να υπολογιστούν τα βάρη και αναλόγως το πλέγμα αυτό μπορεί να απαιτεί επίλυση ενός τεράστιου συστήματος, ενώ στη μέθοδο MLS χρειάζεται να επιλυθούν σχετικά μικρά γραμμικά και σίγουρα πιο εύκολα διαχειρίσιμα συστήματα, τόσες φορές όσοι και οι εσωτερικοί κόμβοι.

Κεφάλαιο 3. Η μέθοδος των συζυγών κλίσεων

3.1 Εισαγωγή

Για την εφαρμογή της μεθόδου MLS πρέπει να υπολογιστούν οι άγνωστοι συντελεστές του πολυωνύμου παρεμβολής. Πρέπει, δηλαδή, να επιλυθούν τρία γραμμικά συστήματα, ένα για κάθε κατεύθυνση συντεταγμένων σε 3Δ προβλήματα (δύο για 2Δ). Όπως έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο 2, στη μέθοδο MLS όσον αφορά τις εφαρμογές στα πλέγματα, για κάθε έναν εσωτερικό κόμβο (κόμβο με άγνωστη μετατόπιση) δημιουργείται γραμμικό σύστημα τάξεως όσοι οι όροι του πολυωνύμου που έχει επιλεχθεί. Δηλαδή πολλά (όσα και οι κόμβοι με άγνωστη μετατόπιση) γραμμικά συστήματα σχετικά μικρής τάξης (όσοι οι όροι του πολυωνύμου). Στην ουσία, αυτά τα συστήματα μπορούν να επιλυθούν με οποιαδήποτε μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων, όμως για λόγους ταχύτητας επιλέγεται επαναληπτική μέθοδος.

Το κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζει την μέθοδο των συζυγών κλίσεων (CG) [2], [24], μια επαναληπτική μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων, η οποία χρησιμοποιήθηκε με σκοπό την εύρεση των αγνώστων συντελεστών της μεθόδου MLS. Πολύ σημαντικός λόγος επιλογής της συγκεκριμένης μεθόδου είναι ότι τα συστήματα που πρέπει να επιλυθούν έχουν συμμετρικά μητρώα συντελεστών.

Έστω λοιπόν ότι το γραμμικό σύστημα προς επίλυση είναι το

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (3.1)$$

Το βασικό σχήμα μιας επαναληπτικής μεθόδου ανίχνευσης κατά γραμμή είναι

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \eta \vec{p}^n \quad (3.2)$$

όπου η είναι το μήκος του βήματος (step length) στην κατεύθυνση \vec{p}^n και ο άνω δείκτης n συμβολίζει τον αριθμό της επανάληψης ή του βήματος. Στη μέθοδο CG, η σχέση αυτή παίρνει τη μορφή

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \eta^n \vec{p}^n \quad (3.3)$$

ενώ το η δεν είναι σταθερό και υπολογίζεται εκ νέου σε κάθε βήμα.

Στο σημείο αυτό κρίνεται αναγκαίο να παρουσιαστεί η τετραγωνική μορφή ενός διανύσματος \vec{x} η οποία είναι

$$F(\vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{x}^T A \vec{x} - \vec{b}^T \vec{x} + c \quad (3.4)$$

Η ελαχιστοποίηση της $F(\vec{x})$ ταυτίζεται με την επίλυση του γραμμικού συστήματος 3.1. Εάν δηλαδή το \vec{x}^* είναι η λύση της 3.1 είναι και το καθολικό ελάχιστο της $F(\vec{x})$. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα αν υπολογιστεί η κλίση της $F(\vec{x})$:

$$\nabla F(\vec{x}) = \frac{1}{2}A^T\vec{x} + \frac{1}{2}A\vec{x} - \vec{b} \quad (3.5)$$

η οποία για συμμετρικό μητρώο γράφεται,

$$\nabla F(\vec{x}) = A\vec{x} - \vec{b} \quad (3.6)$$

Εάν η 3.6 μηδενιστεί, οδηγεί στη λύση του συστήματος 3.1. Μετά από αυτή την απαραίτητη εισαγωγή, παρακάτω επεξηγείται αναλυτικά η μέθοδος CG.

3.2 Μέθοδος των Συζυγών Κλίσεων

Η αρχική ιδέα για τη θεμελίωση της μεθόδου CG είναι να εφαρμοστεί μια μέθοδος ανίχνευσης κατά γραμμή στην οποία να μην ξαναχρησιμοποιείται η κατεύθυνση που ήδη σαρώθηκε. Δηλαδή, εάν το πρόβλημα είναι τάξης $K \times K$, τότε απαιτούνται το πολύ K βήματα [2], [25].

Μια καλή λύση για αυτό είναι η επιλογή κάθετων κατευθύνσεων ανίχνευσης για τις οποίες ισχύει

$$\vec{p}^i{}^T \vec{p}^j = 0, i \neq j \quad (3.7)$$

Το σφάλμα είναι

$$\vec{e}^{n+1} = \vec{e}^n + \eta^n \vec{p}^n \quad (3.8)$$

Απαιτείται το νέο σφάλμα να είναι κάθετο στην παλιά κατεύθυνση \vec{p}^{nT} δηλαδή

$$\vec{p}^{nT} \vec{e}^{n+1} = 0 \quad (3.9)$$

Συνδυάζονται τις εξισώσεις 3.8 και 3.9 προκύπτει

$$\vec{p}^{nT} \vec{e}^n + \eta^n \vec{p}^{nT} \vec{p}^n = 0 \quad (3.10)$$

Λύνοντας ως προς το μήκος βήματος προκύπτει

$$\eta^n = -\frac{\vec{p}^{nT} \vec{e}^n}{\vec{p}^{nT} \vec{p}^n} \quad (3.11)$$

Πρακτικά, δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση 3.11 γιατί απαιτεί τη γνώση του σφάλματος της τρέχουσας επανάληψης το οποίο αν ήταν γνωστό, θα ήταν γνωστή και λύση του συστήματος.

Για το λόγο αυτό επιβάλλεται το τρέχον υπόλοιπο (residual)

$$\vec{r}^n = \vec{b} - A\vec{x}^n \quad (3.12)$$

να είναι κάθετο σε κάθε προηγούμενη κατεύθυνση ανίχνευσης, δηλαδή

$$\vec{p}^{nT} \vec{r}^{n+1} = 0 \quad (3.13)$$

Άλλη μια απαίτηση είναι η A-ορθογωνιότητα που εκφράζεται από τη σχέση

$$\vec{p}^{iT} A \vec{p}^j = 0, \quad i \neq j \quad (3.14)$$

Ακόμη, επειδή

$$\vec{r}^n = \vec{b} - A\vec{x}^{n+1} = \vec{b} - A(\vec{x}^* - \vec{e}^{n+1}) \quad (3.15) \quad \text{και} \quad \vec{b} - A\vec{x}^* = 0 \quad (3.16)$$

η σχέση 3.13 γράφεται

$$\vec{p}^{nT} A \vec{e}^{n+1} = 0 \quad (3.17)$$

Υιοθετώντας την Gram-Schmidt διατύπωση, υποθέτοντας δηλαδή ότι είναι διαθέσιμα K γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\vec{u}^0, \vec{u}^1, \vec{u}^2, \dots, \vec{u}^{K-1}$, παράγεται κάθε διάνυσμα \vec{p}^n

$$\vec{p}^n = \vec{u}^n + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ni} \vec{p}^i \quad (3.18)$$

Στη μέθοδο CG, ως διανύσματα $\vec{u}^0, \vec{u}^1, \vec{u}^2, \dots, \vec{u}^{K-1}$ επιλέγονται τα διανύσματα των υπολοίπων $\vec{r}^0, \vec{r}^1, \vec{r}^2, \dots, \vec{r}^{K-1}$ άρα,

$$\vec{p}^n = \vec{r}^n + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ni} \vec{p}^i \quad (3.19)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση 3.19 καθώς και την απαίτηση A-ορθογωνιότητας προκύπτει

$$\beta_{ij} = -\frac{\vec{r}^{iT} A \vec{p}^j}{\vec{p}^{jT} A \vec{p}^j}, \quad i > j \quad (3.20)$$

Με αυτόν τον τύπο όμως πρέπει να αποθηκευτούν όλα τα προηγούμενα \vec{p}^j για να υπολογιστούν τα β_{ij} . Από τη σχέση Gram-Schmidt προκύπτει ότι

$$\vec{r}^{n+1} = \vec{r}^n - \eta^n A \vec{p}^n \quad (3.21)$$

Άρα,

$$\eta^j \vec{r}^{iT} A \vec{p}^j = \vec{r}^{iT} \vec{r}^j - \vec{r}^{iT} \vec{r}^{j+1} \quad (3.22)$$

Κατάληξη όλων αυτών είναι:

$$\vec{r}^{iT} A \vec{p}^j = \begin{cases} \frac{1}{\eta^j} \vec{r}^{jT} \vec{r}^j, & i = j \\ -\frac{1}{\eta^j} \vec{r}^{j+1T} \vec{r}^{j+1}, & i = j + 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (3.23)$$

Δηλαδή

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\eta^{i-1}} \frac{\vec{r}^{iT} \vec{r}^i}{\vec{p}^{i-1T} A \vec{p}^{i-1}}, & i = j + 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (3.24)$$

Οι συντελεστές β διατάσσονται στην παρακάτω μητρική μορφή

$$\begin{bmatrix} - & - & - & - \\ \beta^1 & - & - & - \\ - & \beta^2 & - & - \\ - & - & \beta^3 & - \end{bmatrix}$$

Τελικά το β^i είναι ίσο με

$$\beta^i = \frac{\vec{r}^{iT} \vec{r}^i}{\vec{r}^{i-1T} \vec{r}^{i-1}} \quad (3.25)$$

3.3 Βασικός αλγόριθμος της μεθόδου συζυγών κλίσεων

Παρακάτω παρουσιάζεται ο βασικός αλγόριθμος της μεθόδου CG για γραμμικά προβλήματα [2]:

Βήμα 0: Επιλογή αρχικής λύσης \vec{x}^0 . Υπολογισμός αρχικού υπολοίπου $\vec{r}^0 = \vec{b} - A\vec{x}^0$. Ορισμός αρχικής κατεύθυνσης ανίχνευσης $\vec{p}^0 = \vec{r}^0$. Δείκτης $n=0$.

Βήμα 1: Υπολογισμός μεγέθους βήματος $\eta^n = \frac{\vec{r}^{nT} \vec{r}^n}{\vec{p}^{nT} A \vec{p}^n}$.

Βήμα 2: Ανανέωση λύσης $\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \eta^n \vec{p}^n$.

Βήμα 3: Ανανέωση υπολοίπου $\vec{r}^{n+1} = \vec{r}^n - \eta^n A \vec{p}^n$.

Βήμα 4: Υπολογισμός συντελεστή $\beta^{n+1} = \frac{\vec{r}^{n+1T} \vec{r}^{n+1}}{\vec{r}^{nT} \vec{r}^n}$.

Βήμα 5: Ανανέωση διανύσματος κατεύθυνσης ανίχνευσης $\vec{p}^{n+1} = \vec{r}^{n+1} - \beta^{n+1} \vec{p}^n$

Βήμα 6: Ανανέωση τιμής δείκτη $n \leftarrow n+1$. Επιστροφή στο βήμα 1.

Κεφάλαιο 4: Εφαρμογές σε 2Δ πλέγματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται εφαρμογές της μεθόδου MLS για την προσαρμογή μη-δομημένων 2Δ πλεγμάτων. Στον κώδικα που προγραμματίστηκε σε Fortran 90 για τον σκοπό αυτό, ο χρήστης εισάγει το αρχικό πλέγμα, το είδος της μετατόπισης και τους κόμβους που υφίστανται συγκεκριμένη μετατόπιση, το βαθμό του πολυωνύμου παρεμβολής και την ακτίνα επίδρασης της συνάρτησης βάρους. Η συνάρτηση τοπικής επιρροής που χρησιμοποιήθηκε είναι η Wenland C^2 που αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 2 και η τιμή της δίνεται από τη σχέση 2.8, ή

$$\theta(d) = \left(1 - \frac{d}{r}\right)^4 \left(4\frac{d}{r} + 1\right)$$

Αυτή η σχέση ισχύει για τιμές d (ευκλείδια απόσταση των σημείων) στο διάστημα $[0, r]$, ενώ, για $d > r$, η συνάρτηση μηδενίζεται.

Η δημιουργία του προσαρμοσμένου πλέγματος όμως δεν αρκεί για μία ολοκληρωμένη μελέτη. Πρέπει και αυτό το νέο πλέγμα να πληροί κατ'ελάχιστον κάποιες προϋποθέσεις ποιότητας, αλλιώς δεν είναι χρήσιμο. Στην εργασία αυτή χρησιμοποιήθηκε υπολογιστικός κώδικας για τη μέτρηση της ποιότητας του πλέγματος με βασικό κριτήριο τον αριθμό των ανεστραμμένων τριγωνικών στοιχείων και ορισμένες μετρικές ποιότητας.

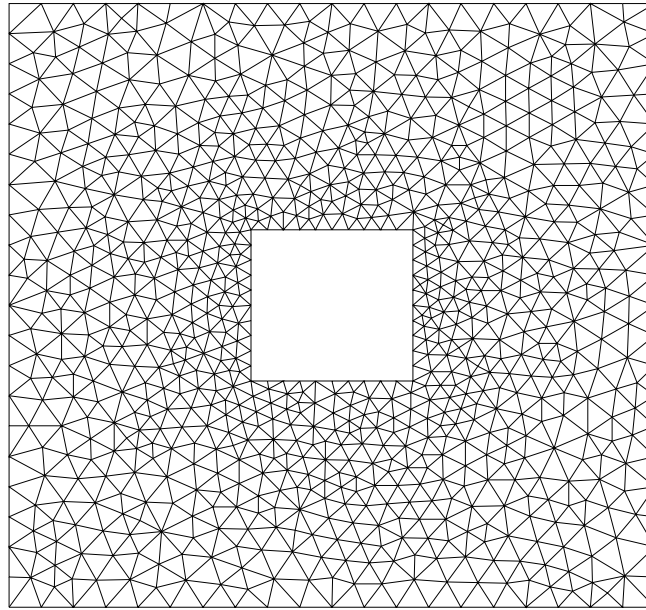
Στις εφαρμογές που παρουσιάζονται παρακάτω, αρχικά μελετήθηκε η επίδραση της ακτίνας r που αφορά την τοπικότητα της μεθόδου για δεδομένη μετατόπιση και για διάφορους βαθμούς πολυωνύμου, ενώ εξάγονται χρήσιμα συμπεράσματα για τη βέλτιστη χρήση τόσο της ακτίνας όσο και του βαθμού πολυωνύμου.

Ακόμη, έγιναν δοκιμές ως προς τη μετατόπιση. Αυτό είχε ως στόχο τον υπολογισμό των οριακών περιπτώσεων μετατόπισης για μεγαλύτερες από τις οποίες το λογισμικό δεν αντέχει και παράγονται ανεστραμμένα τριγωνικά στοιχεία, οπότε σε αυτές τις περιπτώσεις συνιστάται η επαναπλεγματοποίηση.

Παράλληλα, πραγματοποιήθηκε μία παραλλαγή της μεθόδου. Σε αυτή τροποποιήθηκε ο υπολογιστικός κώδικας για να εφαρμόζει τη μέθοδο κάνοντας την στροφή να εφαρμόζεται τμηματικά. Γίνεται σύγκριση των πλεγμάτων που δημιουργήθηκαν με τμηματική και απευθείας στροφή και όπως θα φανεί στα αποτελέσματα η τμηματική μέθοδος αντέχει μεγαλύτερες γωνίες στροφής, αν και κοστίζει περισσότερο σε υπολογιστικό χρόνο.

4.1 Εφαρμογές στο 2Δ πλέγμα μεταξύ δύο τετραγώνων

Το πρώτο πλέγμα που επιλέχθηκε για τις δοκιμές της μεθόδου ήταν αυτό μεταξύ δύο τετραγώνων. Το εσωτερικό τετράγωνο είναι μοναδιαίου μήκους και έχει 11 κόμβους ανά πλευρά, ενώ το εξωτερικό τετράγωνο 21 κόμβους ανά πλευρά. Αυτό το μη-δομημένο πλέγμα που κατασκευάστηκε με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου με λογισμικό της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ, φαίνεται στο σχήμα 4.1.1:



Σχήμα 4.1.1: 2Δ μη-δομημένο πλέγμα μεταξύ δύο τετραγώνων. Το πλέγμα αποτελείται από 1648 τριγωνικά στοιχεία.

4.1.1 Δοκιμές ως προς την ακτίνα και τον βαθμό πολυωνύμου

Όπως είναι γνωστό από το κεφάλαιο 2, πολύ σημαντική παράμετρος της μεθόδου είναι η ακτίνα, που η τιμή της υπόκειται στην κρίση και την εμπειρία του χρήστη αναλόγως το πρόβλημα.

Εάν επιθυμείται μικρή τοπικότητα, πρέπει να δοθεί μεγάλη τιμή στην ακτίνα, ενώ αντιθέτως για περισσότερη τοπική επιρροή των κόμβων η ακτίνα πρέπει να είναι μικρή. Θα φανεί και στα αποτελέσματα πιο κάτω όμως, ότι για πολύ μικρές ακτίνες η μέθοδος δεν συγκλίνει διότι κάποιοι κόμβοι παραμένουν ανεπηρέαστοι από τα μετακινούμενα όρια. Η πιο απλή λύση δείχνει ο ορισμός μεγάλης τιμής της ακτίνας. Το ζήτημα δεν είναι τόσο απλό όμως επειδή ένα βιομηχανικό πρόβλημα έχει πολλές χιλιάδες κόμβους προς μετατόπιση: η μεγάλη ακτίνα συνεπάγεται εμπλοκή περισσότερων σημείων στους υπολογισμούς και αυτό σημαίνει πολύ μεγάλο υπολογιστικό κόστος.

Άρα, αναλόγως την περίπτωση πρέπει να επιλέγεται η κατάλληλη τιμή της παράμετρου της ακτίνας. Στην υπόψη περίπτωση, έγιναν δοκιμές για να υπολογιστεί η τιμή αυτή.

Το εξωτερικό τετράγωνο έχει πλευρά ίση με 4 και η διαγώνιος του είναι ίση με 5.65. Το εσωτερικό έχει πλευρά ίση με 1 και διαγώνιο 1.41.

Με γνωστές τις διαστάσεις αυτές μπορούν να ξεκινήσουν οι δοκιμές για τον υπολογισμό ενός ικανοποιητικού r με σταθερό τον βαθμό του πολυωνύμου και τη μετατόπιση του αντικειμένου. Επιλέχθηκε να γίνουν δοκιμές για $1^{ου}$ έως και $6^{ου}$ βαθμού πολυώνυμο για διάφορες στροφές του εσωτερικού τετραγώνου γύρω από το κέντρο (το σημείο (0,0)). Η πρώτη γωνία στροφής που επιλέχθηκε για τις δοκιμές ήταν 30° .

Όπως έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο 2, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος CG για την επίλυση του συστήματος των αγνώστων συντελεστών της μεθόδου MLS.

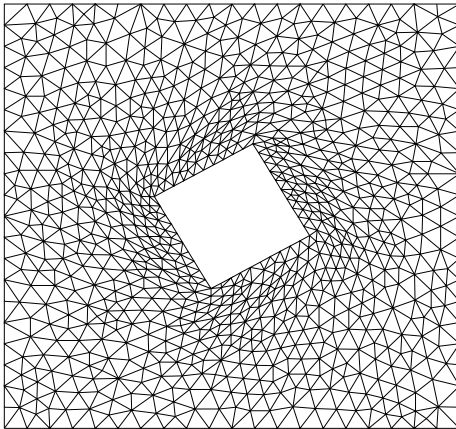
Ξεκινώντας την ανάλυση με στόχο την εύρεση των οριακών ακτίνων ανά βαθμό πολυωνύμου για στροφή 30° του εσωτερικού τετραγώνου διαπιστώθηκε ότι για τιμές ακτίνας από 0.5 έως 1.8 ορισμένοι κόμβοι παρέμεναν ανεπηρέαστοι, έτσι ήταν αδύνατον να συγκλίνει η μέθοδος CG με συνέπεια αυτού να μην μπορεί να δημιουργηθεί νέο πλέγμα.

Οι δοκιμές και τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα 4.1.1:

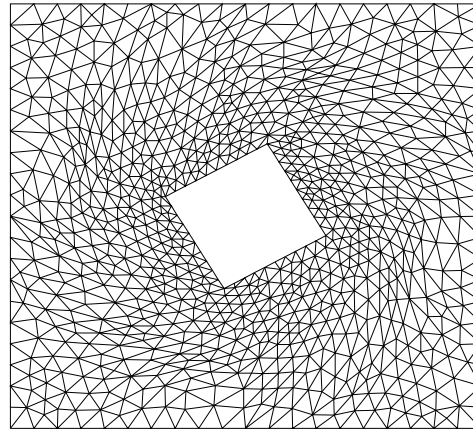
Τιμή ακτίνας r	Σύγκλιση CG
0.5	Όχι
1.0	Όχι
1.5	Όχι
1.6	Όχι
1.7	Όχι
1.8	Όχι
1.9	Ναι
2.0	Ναι

Πίνακας 4.1.1: Τιμές ακτίνας επιρροής της μεθόδου- Σύγκλιση της μεθόδου CG για στροφή 30° του εσωτερικού τετραγώνου.

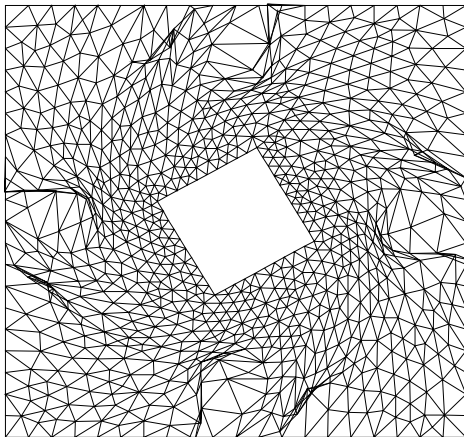
Άρα, η ελάχιστη αποδεκτή της ακτίνας για τη στροφή αυτή είναι ίση με 1.9. Όμως αυτό δεν συνεπάγεται ότι είναι και η ιδανική. Τα πλέγματα που δημιουργήθηκαν με ακτίνα 1.9 και για $1^{\text{ου}}$ έως και $6^{\text{ου}}$ βαθμού πολυώνυμο φαίνονται στο σχήμα 4.1.2:



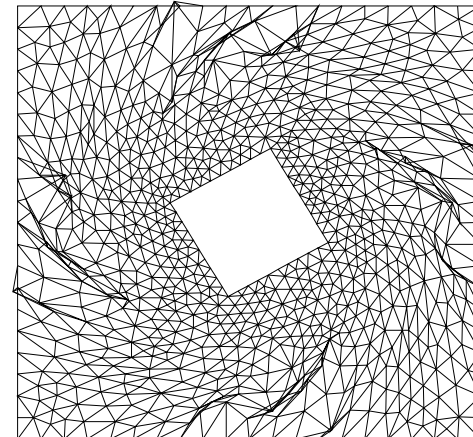
(α) Πολυώνυμο $1^{\text{ου}}$ βαθμού.



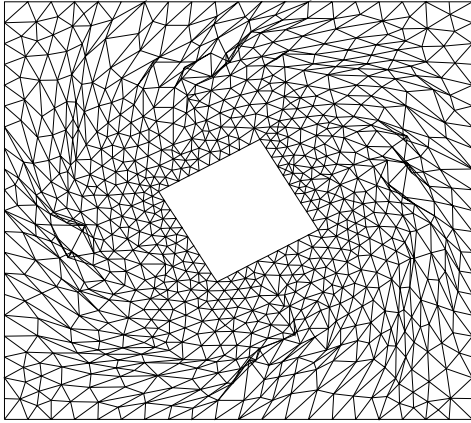
(β) Πολυώνυμο $2^{\text{ου}}$ βαθμού.



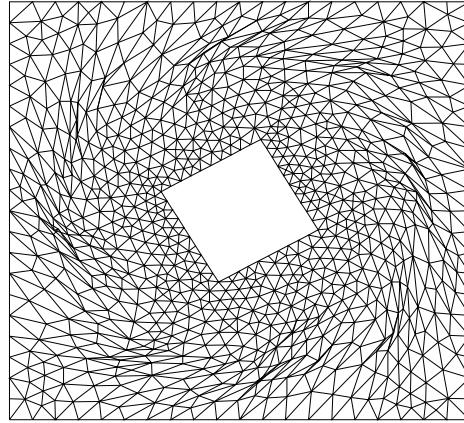
(γ) Πολυώνυμο $3^{\text{ου}}$ βαθμού.



(δ) Πολυώνυμο $4^{\text{ου}}$ βαθμού.



(ε) Πολυώνυμο 5^{ου} βαθμού.



(στ) Πολυώνυμο 6^{ου} βαθμού.

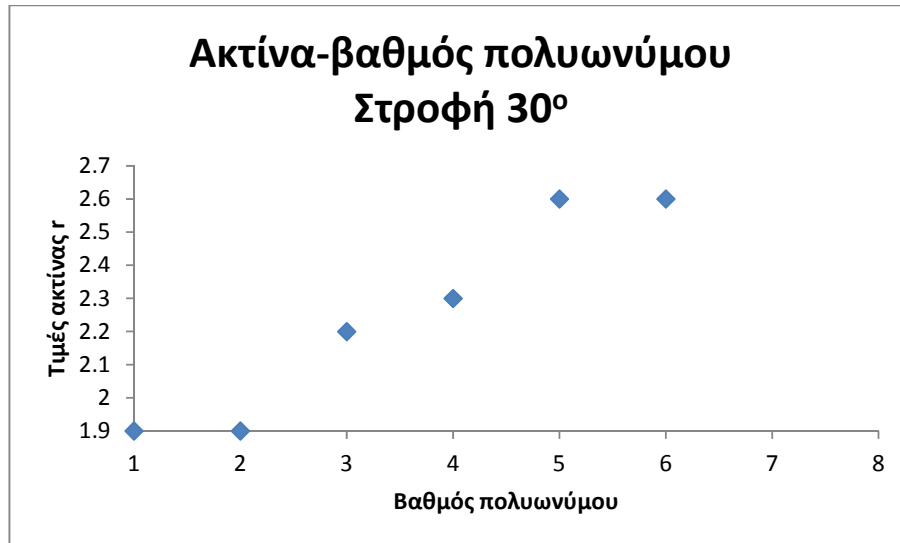
Σχήμα 4.1.2: Πλέγματα μεταξύ δύο τετραγώνων με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 30° του εσωτερικού τετραγώνου. Χρησιμοποιήθηκε ακτίνα $r=1.90$ που είναι η οριακή τιμή. Όπως φαίνεται, για βαθμούς πολυωνύμου από 3 και πάνω τα πλέγματα είναι μη-αποδεκτά καθώς εμφανίζουν ανεστραμμένα τρίγωνα.

Έτσι, για αυτό το πλέγμα και για στροφή 30° η μέθοδος MLS αποδίδει πλέγμα χωρίς ανεστραμμένα στοιχεία για 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού πολυώνυμο. Η ανάλυση μπορεί να συνεχιστεί για να υπολογιστούν οι οριακές τιμές ακτίνας ανά βαθμό πολυωνύμου, όπου για αυτές το πλέγμα δεν εμφανίζει σε κανένα σημείο ανεστραμμένα στοιχεία.

Τιμές ακτίνας r	Βαθμός πολυωνύμου k
1.9	1
1.9	2
2.2	3
2.3	4
2.6	5
2.6	6

Πίνακας 4.1.2: Ελάχιστες τιμές ακτίνας r ανά βαθμό πολυωνύμου για τη δημιουργία πλεγμάτων χωρίς ανεστραμμένα στοιχεία για στροφή 30° του εσωτερικού τετραγώνου.

Η μεταβολή ελάχιστης ακτίνας ως συνάρτηση του βαθμού πολυωνύμου για τη δεδομένη στροφή που μελετάται, παρουσιάζεται στο διάγραμμα του σχήματος 4.1.3:



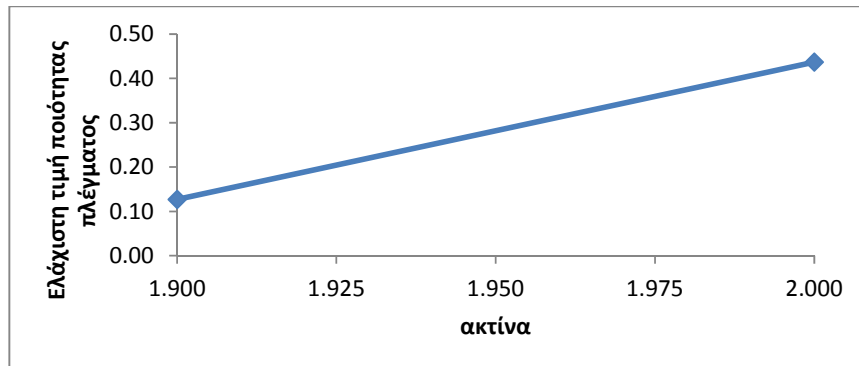
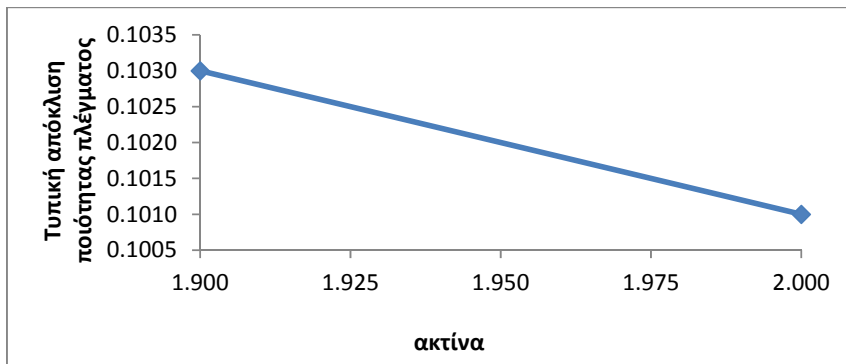
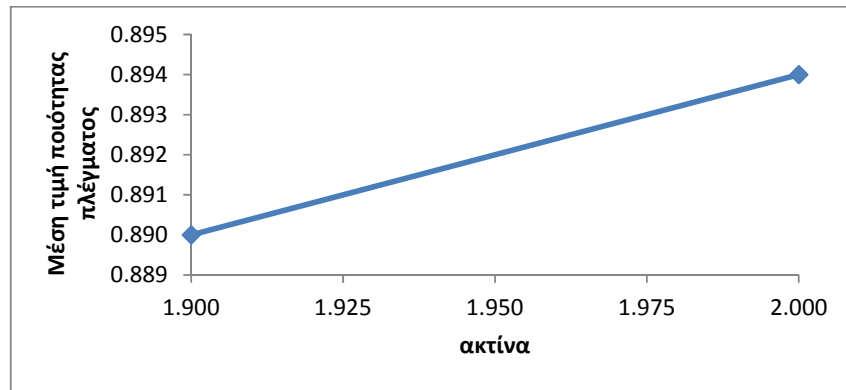
Σχήμα 4.1.3: Μεταβολή της ακτίνας ως συνάρτηση του βαθμού πολυωνύμου για στροφή 30° του εσωτερικού τετραγώνου για δημιουργία πλεγμάτων χωρίς ανεστραμμένα στοιχεία.

Παρατηρείται ότι, εν γένει μεγαλύτεροι βαθμοί πολυωνύμου χρειάζονται και αυξημένη ακτίνα για να αποδώσουν αποδεκτά πλέγματα. Όμως οι παραπάνω οριακές τιμές ακτίνων δεν είναι οι βέλτιστες. Χρησιμοποιούνται οι μετρικές ποιότητας πλέγματος για να διαπιστωθεί ποία ακτίνα είναι η βέλτιστη ανα βαθμό πολυωνύμου για τη στροφή των 30° .

Ξεκινώντας την ανάλυση για $1^{ου}$ βαθμού πολυώνυμο διαπιστώθηκε ότι αποδίδει αποδεκτό πλέγμα χωρίς μόνο για τιμές ακτίνας 1.90 και 2.00. Οι τιμές των μετρικών ποιότητας ως συνάρτηση των τιμών αυτών φαίνονται στον πίνακα 4.1.3, ενώ τα διαγράμματα των σχημάτων 4.1.4(α), 4.1.4(β) και 4.1.4(γ) δείχνουν την μεταβολή των μετρικών ποιότητας ως συνάρτηση της ακτίνας.

Ακτίνα (r)	1.90	2.00
\bar{q}_e	0.890	0.895
σ_{qe}	0.103	0.100
q_{min}	0.127	0.437

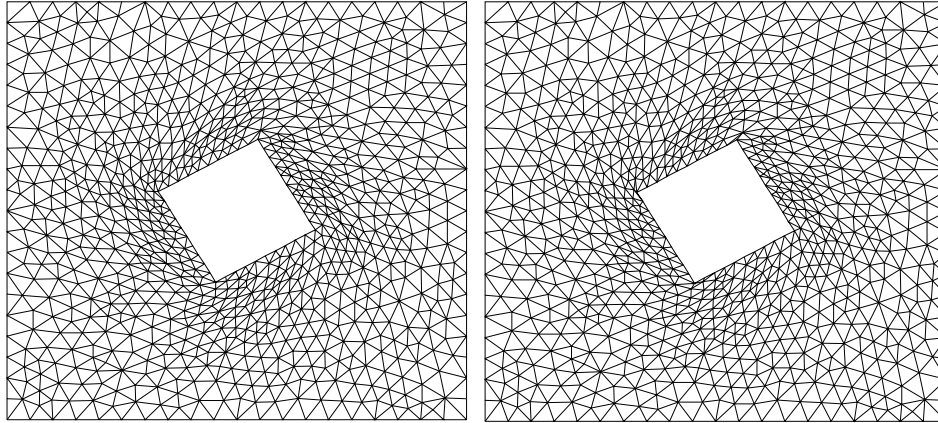
Πίνακας 4.1.3: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος για τις τιμές της ακτίνας που αποδίδουν αποδεκτό πλέγμα με χρήση $1^{ου}$ βαθμού πολυωνύμου για στροφή 30° του εσωτερικού τετραγώνου.



Σχήμα 4.1.4: Διαγράμματα μεταβολής της μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος ως συνάρτηση της ακτίνας για βαθμό πολυωνύμου ίσο με 1 και στροφή 30° του εσωτερικού τετραγώνου. Τα πλέγματα προέκυψαν από τη μέθοδο MLS.

Τα διαγράμματα αυτά δείχνουν ότι για ακτίνα ίση με 2.00 η ποιότητα του πλέγματος βελτιώνεται, καθώς η μέση και η ελάχιστη τιμή αυξάνονται, ενώ η τυπική απόκλιση μειώνεται σε σχέση με τις αντίστοιχες τιμές για την ακτίνα 1.90.

Στο σχήμα 4.1.5 φαίνονται τα πλέγματα που προέκυψαν για ακτίνες 1.90, 2.00 και για $1^{ου}$ βαθμού πολυώνυμο:



(α) Ακτίνα $r=1.90$.

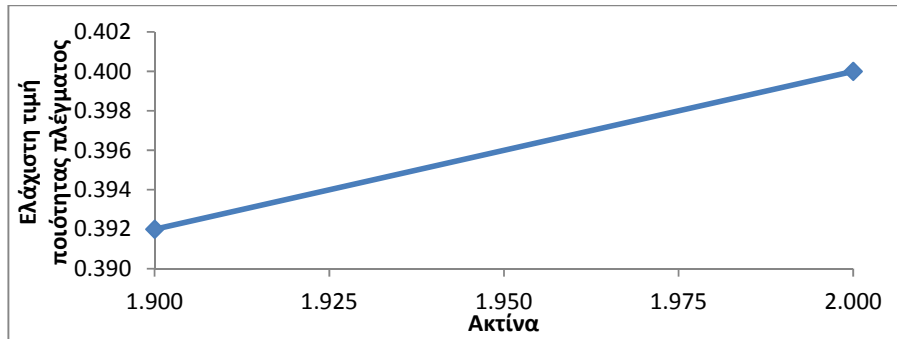
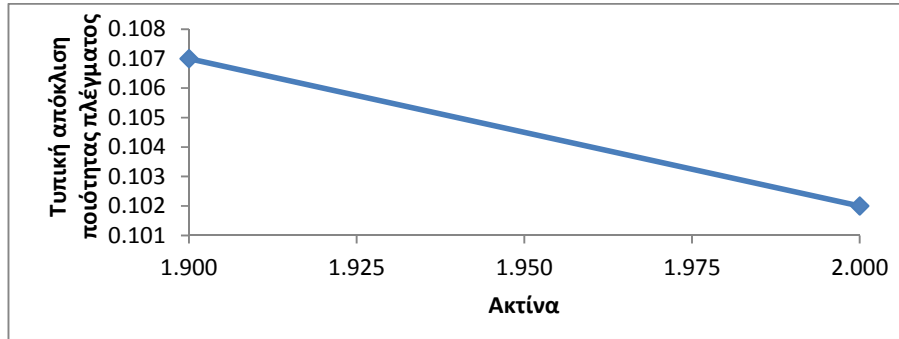
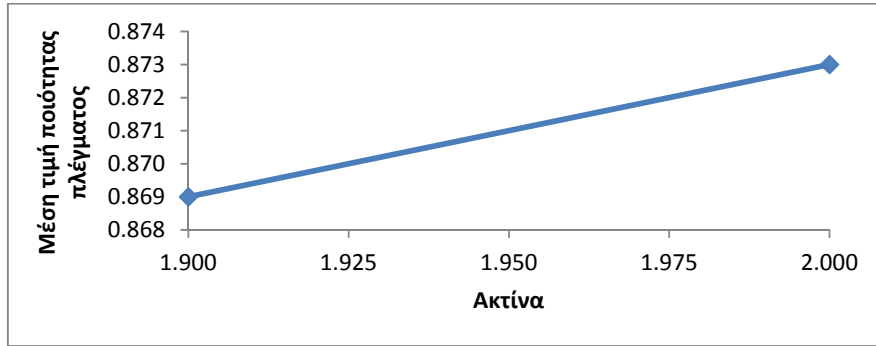
(β) Ακτίνα $r=2.00$.

Σχήμα 4.1.5: Πλέγματα μεταξύ δύο τετραγώνων μέσω της μεθόδου MLS για στροφή 30° του εσωτερικού τετραγώνου. Χρήση πολυωνύμου $1^{\text{ου}}$ βαθμού.

Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκε η παραπάνω διερεύνηση ως προς την παράμετρο της ακτίνας και για τους υπόλοιπους βαθμούς πολυωνύμου. Για πολυώνυμο $2^{\text{ης}}$ τάξης, οι τιμές της ακτίνας που απέδωσαν πλέγμα χωρίς ανεστραμμένα τρίγωνα ήταν και πάλι (όπως και για $1^{\text{ου}}$ βαθμού πολυώνυμο) ίσες με 1.90 και 2.00. Ο πίνακας 4.1.4 παρουσιάζει τις τιμές των μετρικών ως συνάρτηση των ακτίνων αυτών:

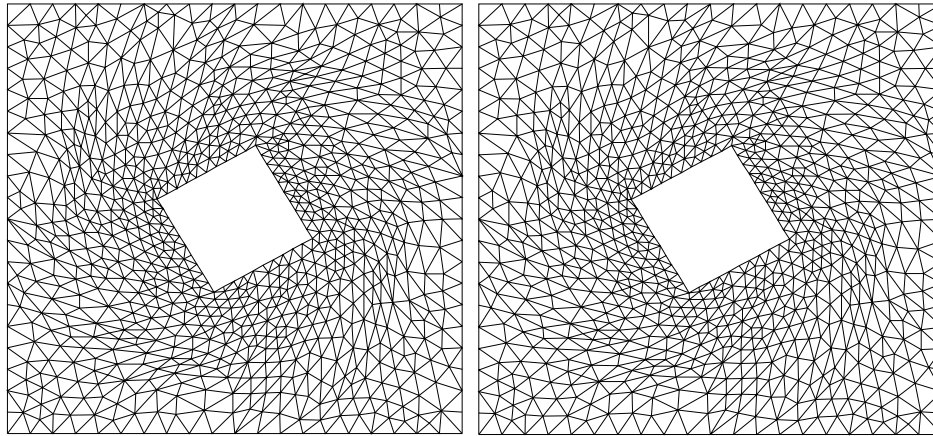
Ακτίνα (r)	1.90	2.00
\bar{q}_e	0.869	0.873
σ_{qe}	0.107	0.101
q_{\min}	0.392	0.420

Πίνακας 4.1.4: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος για τις τιμές της ακτίνας που αποδίδουν αποδεκτό πλέγμα με χρήση $2^{\text{ου}}$ βαθμού πολυωνύμου για στροφή 30° του εσωτερικού τετραγώνου.



Σχήμα 4.1.6: Διαγράμματα μεταβολής της μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος ως συνάρτηση της ακτίνας για βαθμό πολυωνύμου ίσο με 2 και στροφή 30° . Τα πλέγματα προέκυψαν από τη μέθοδο MLS.

Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1.6, οι μετρικές της μέσης και ελάχιστης ποιότητας αυξάνονται, ενώ η τυπική απόκλιση μειώνεται. Άρα, η χρήση ακτίνας 2.00 βελτιώνει την ποιότητα του πλέγματος, για αυτόν το βαθμό πολυωνύμου.



(α) Ακτίνα $r=1.90$.

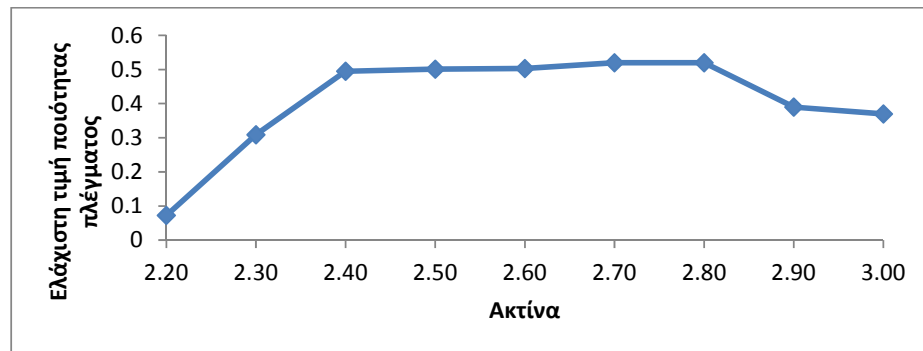
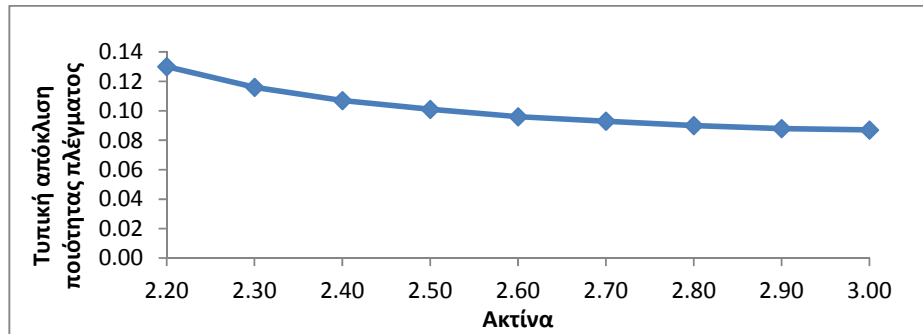
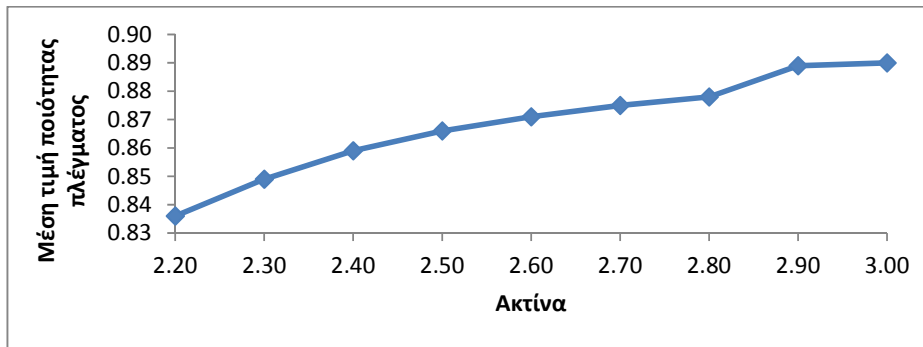
(β) Ακτίνα $r=2.00$.

Σχήμα 4.1.7: Πλέγματα μεταξύ δύο τετραγώνων μέσω της μεθόδου MLS για στροφή 30° του εσωτερικού τετραγώνου. Χρήση πολυωνύμου $2^{\text{ου}}$ βαθμού.

Χρησιμοποιώντας $3^{\text{ου}}$ βαθμού πολυώνυμο, η ελάχιστη τιμή ακτίνας για δημιουργία πλέγματος χωρίς ανεστραμμένα στοιχεία είναι ίση με 2.20. Για την τιμή αυτή και αυξάνοντας κατά 0.10 την ακτίνα σε κάθε δοκιμή προέκυψαν οι παρακάτω τιμές των μετρικών ποιότητας:

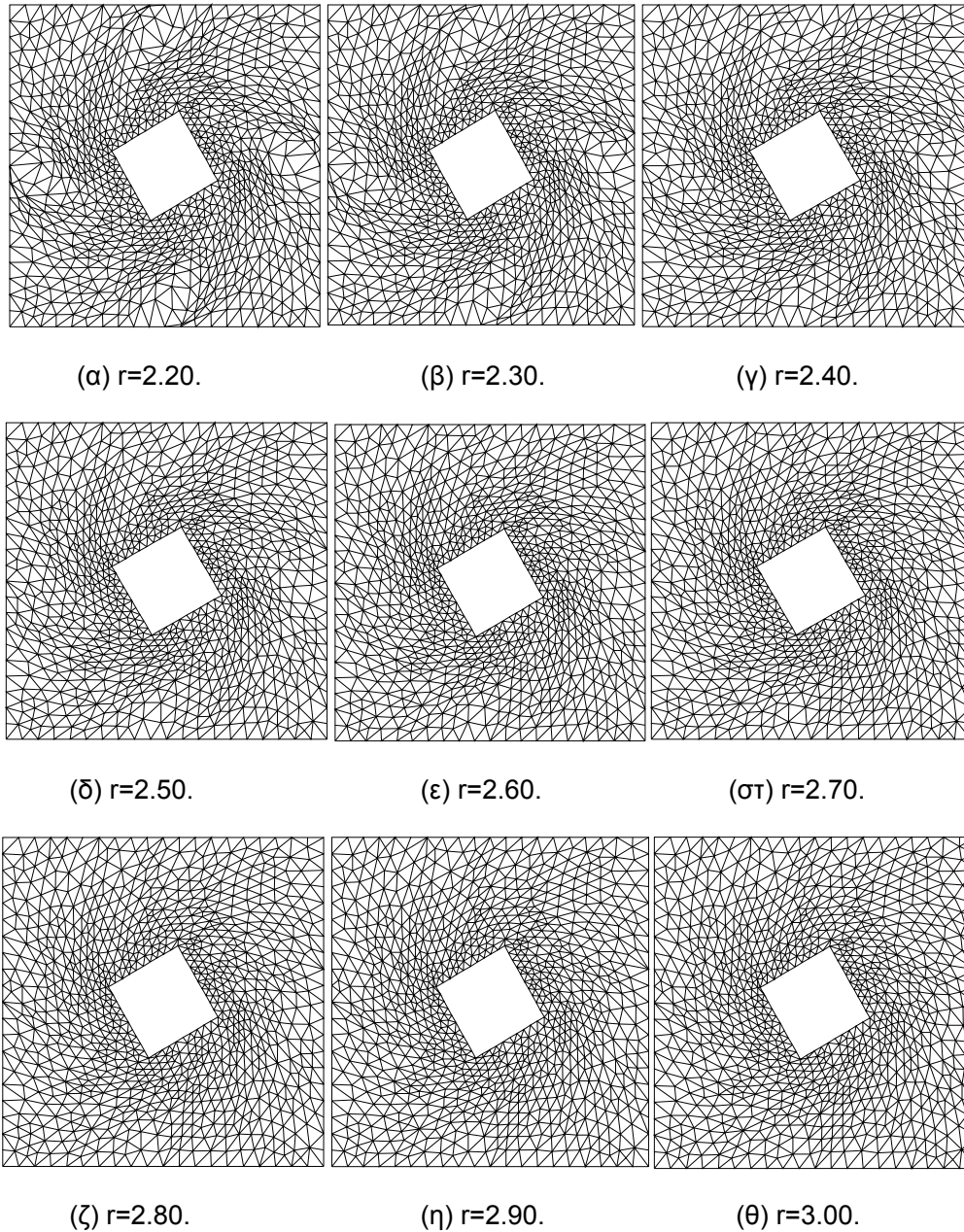
Ακτίνα (r)	2.20	2.30	2.40	2.50	2.60	2.70	2.80	2.90	3.00
\bar{q}_e	0.836	0.849	0.859	0.866	0.871	0.875	0.878	0.889	0.89
σ_{qe}	0.130	0.116	0.107	0.101	0.096	0.093	0.090	0.088	0.087
q_{\min}	0.0725	0.309	0.495	0.501	0.503	0.520	0.520	0.390	0.370

Πίνακας 4.1.5: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος για τις τιμές της ακτίνας που αποδίδουν αποδεκτό πλέγμα με χρήση $3^{\text{ου}}$ βαθμού πολυωνύμου για στροφή 30° του εσωτερικού τετραγώνου.



Σχήμα 4.1.8: Διαγράμματα μεταβολής της μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος ως συνάρτηση της ακτίνας για βαθμό πολυωνύμου ίσο με 3 και στροφή 30°. Τα πλέγματα προέκυψαν από τη μέθοδο MLS.

Από τα διαγράμματα του σχήματος 4.1.8 μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα για τις τρεις μετρικές ποιότητας του πλέγματος. Αρχικά, ότι η μέση τιμή για ακτίνες 2.90 και 3.00 παρουσιάζει τη μέγιστη της τιμή, ενώ η τυπική απόκλιση μεταβάλλεται ελάχιστα για τιμές ακτίνας από 2.80 έως και 3.00. Τέλος, η ελάχιστη τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος αυξάνεται για ακτίνες 2.20 έως και 2.80, ενώ για ακτίνες από 2.90 και άνω ελαττώνεται. Συμπερασματικά, τιμή ακτίνας στην περιοχή του 2.80 αποδίδει το βέλτιστο πλέγμα για στροφή 30° και βαθμό πολυωνύμου ίσο με 3.

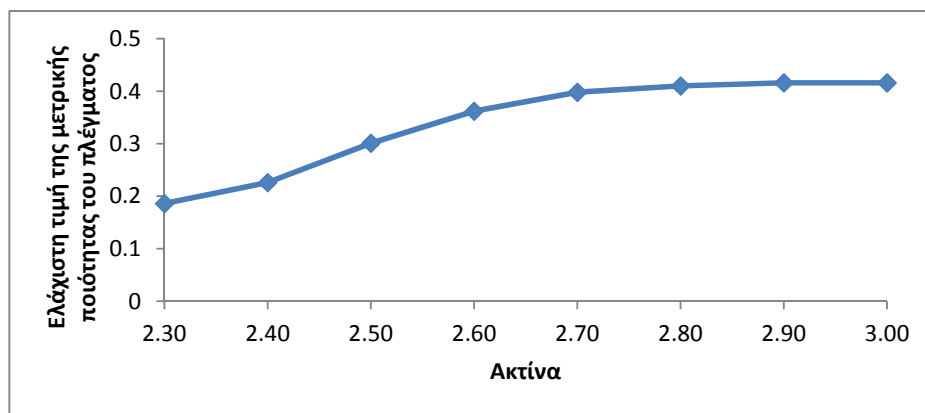
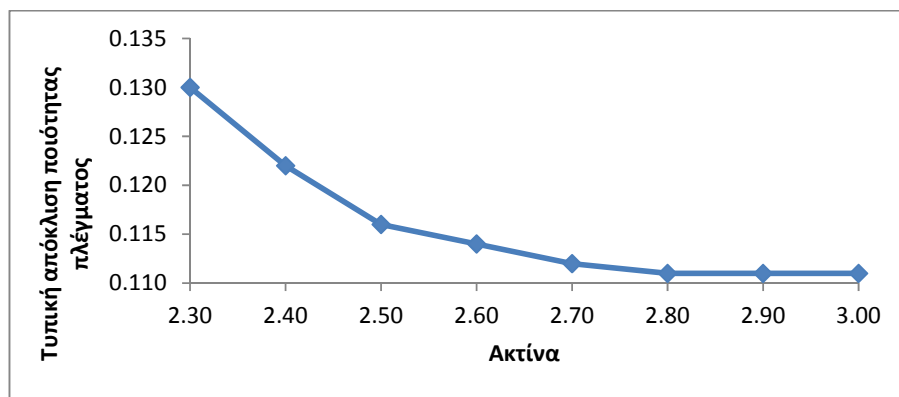
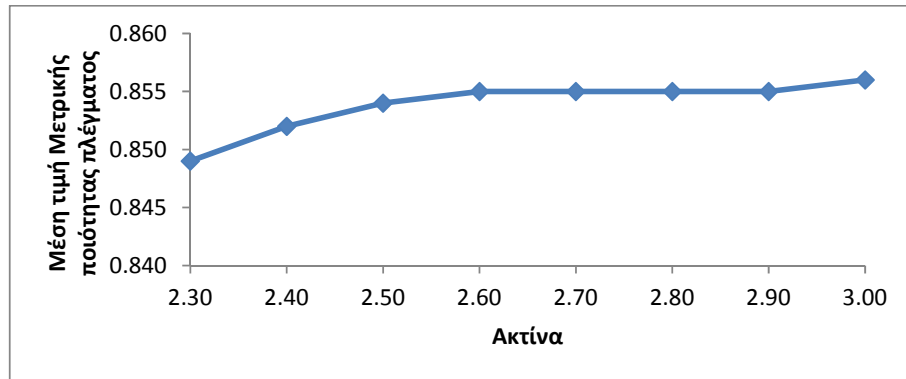


Σχήμα 4.1.9: Πλέγματα μεταξύ δύο τετραγώνων με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 30° . Χρησιμοποιήθηκε πολυώνυμο $3^{\text{ου}}$ βαθμού για 9 τιμές ακτίνας.

Συνεχίζοντας την ανάλυση για $4^{\text{ου}}$ βαθμού πολυώνυμο, διαπιστώνεται ότι πλέγμα χωρίς ανεστραμμένα τριγωνικά στοιχεία δημιουργείται για ακτίνα ίση με 2.30. Οι μετρικές ποιότητας του πλέγματος ως συνάρτηση διάφορων τιμών της ακτίνας από την οριακή (2.30) έως και 3.00 φαίνονται στον πίνακα 4.1.6. Τα αντίστοιχα διαγράμματα παρουσιάζονται στο σχήμα 4.1.10.

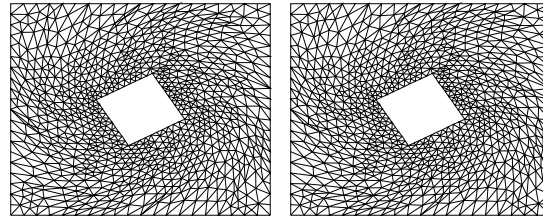
Ακτίνα (r)	2.30	2.40	2.50	2.60	2.70	2.80	2.90	3.00
\bar{q}_e	0,849	0,853	0,854	0,855	0,856	0,856	0,856	0,856
σ_{qe}	0.130	0.122	0.116	0.114	0.113	0.112	0.112	0.112
q_{min}	0.186	0.226	0.306	0.362	0.398	0.415	0.416	0.416

Πίνακας 4.1.6: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος για τις τιμές της ακτίνας που αποδίδουν αποδεκτό πλέγμα με χρήση 4^{ου} βαθμού πολυωνύμου για στροφή 30°.



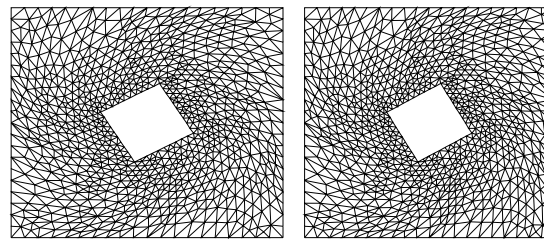
Σχήμα 4.1.10: Διαγράμματα μεταβολής της μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος ως συνάρτηση της ακτίνας για βαθμό πολυωνύμου ίσο με 4 και στροφή 30°. Τα πλέγματα προέκυψαν από τη μέθοδο MLS.

Από τα διαγράμματα του σχήματος 4.1.10 φαίνεται ότι η μέση τιμή της μετρικής ποιότητας δεν παρουσιάζει ιδιαίτερες διακυμάνσεις, ενώ η τυπική απόκλιση μειώνεται αυξάνοντας την ακτίνα και το ελάχιστο της προκύπτει για ακτίνα ίση με 2.80. Τέλος, η ελάχιστη τιμή ποιότητας του πλέγματος, δεν μεταβάλλεται για τιμή ακτίνας 2.80 και πάνω. Συμπερασματικά, για στροφή 30° και βαθμό πολυωνύμου ίσο με 4, η χρήση ακτίνας 2.80 είναι η βέλτιστη.



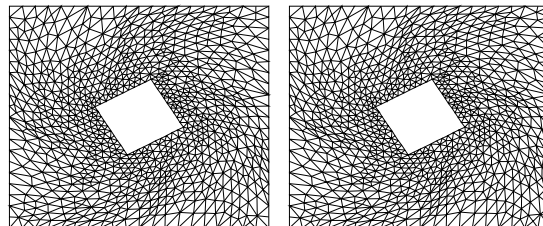
(α) $r=2.30$.

(β) $r=2.40$.



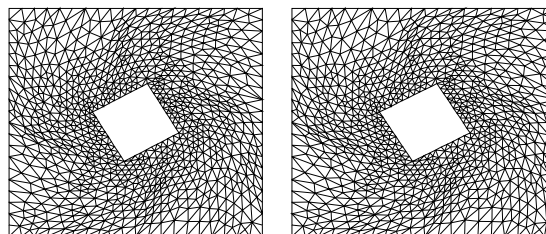
(γ) $r=2.50$.

(δ) $r=2.60$.



(ε) $r=2.70$.

(στ) $r=2.80$.



(ζ) $r=2.90$.

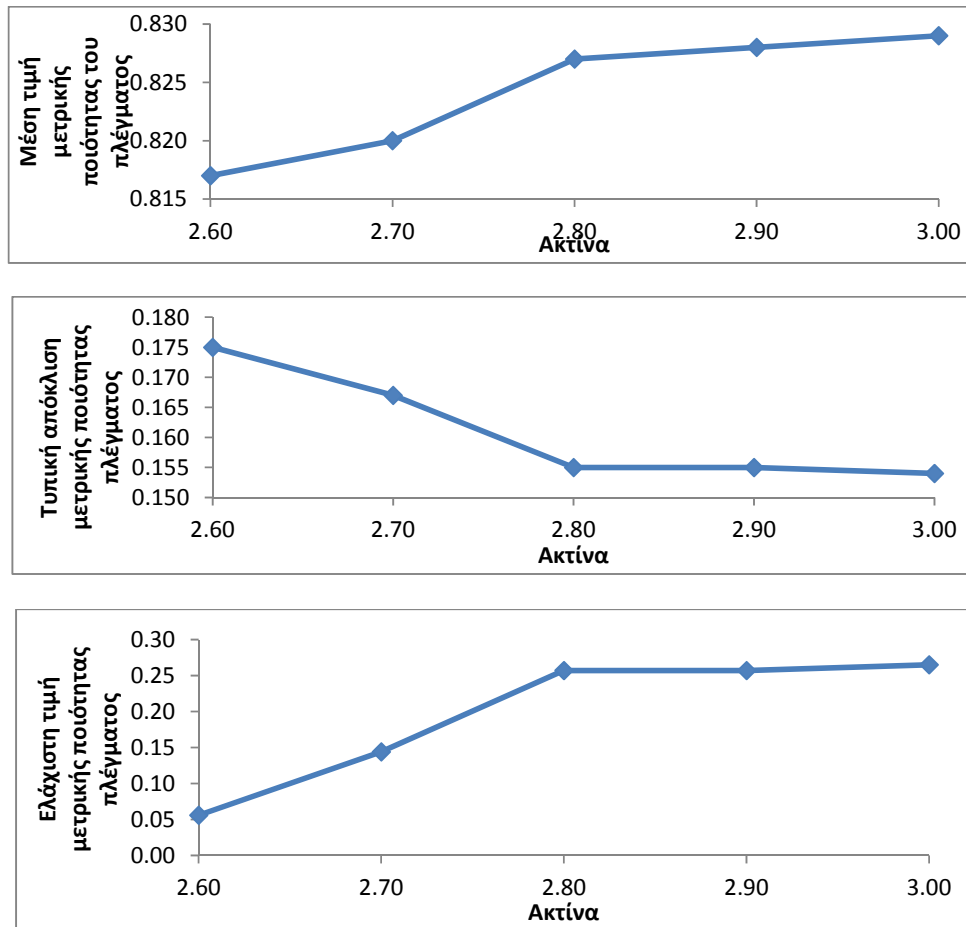
(η) $r=3.00$.

Σχήμα 4.1.11: Πλέγματα μεταξύ δύο τετραγώνων με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή του εσωτερικού τετραγώνου 30° από το κέντρο. Χρησιμοποιήθηκε πολυώνυμο $4^{ου}$ βαθμού για 8 τιμές ακτίνας.

Όμοια με πριν, πραγματοποιήθηκε διερεύνηση ως προς την τιμή της ακτίνας χρησιμοποιώντας 5^{ου} βαθμού πολυώνυμο για στροφή 30° του εσωτερικού τετραγώνου. Η οριακή τιμή της ακτίνας για τη δημιουργία πλέγματος χωρίς ανεστραμμένα στοιχεία είναι 2.60. Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος δίδονται στον πίνακα 4.1.7, ενώ τα αντίστοιχα διαγράμματα στο σχήμα 4.1.12:

Ακτίνα (r)	2.60	2.70	2.80	2.90	3.00
\bar{q}_e	0.817	0.820	0.827	0.827	0.829
σ_{qe}	0.175	0.167	0.155	0.155	0.154
q_{min}	0.056	0.144	0.257	0.257	0.265

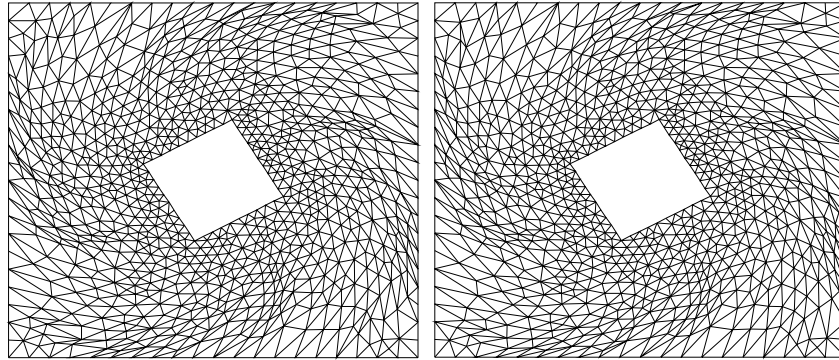
Πίνακας 4.1.7: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος για τις τιμές της ακτίνας που αποδίδουν αποδεκτό πλέγμα με χρήση 5^{ου} βαθμού πολυωνύμου για στροφή 30°.



Σχήμα 4.1.12: Διαγράμματα μεταβολής της μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος ως συνάρτηση της ακτίνας για βαθμό πολυωνύμου ίσο με 5 και στροφή 30°. Τα πλέγματα προέκυψαν από τη μέθοδο MLS.

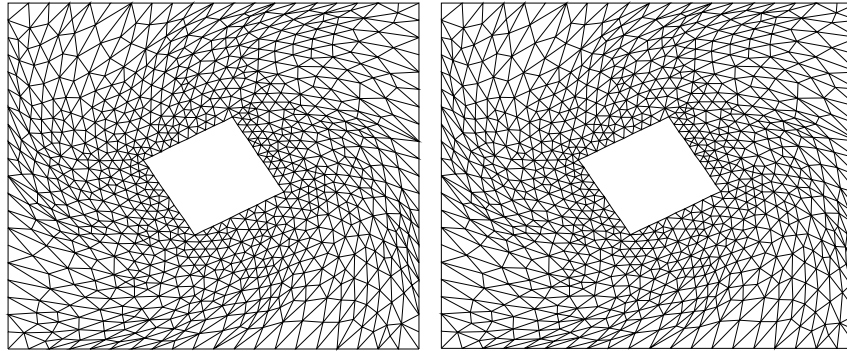
Από τα διαγράμματα του σχήματος 4.1.12 παρατηρείται ότι η μέση τιμή της ποιότητας βελτιώνεται όσο αυξάνεται η ακτίνα, ενώ η τυπική απόκλιση και η

ελάχιστη τιμή για ακτίνα 2.80 και πάνω δεν παρουσιάζουν σημαντικές μεταβολές. Άρα, στην περίπτωση αυτή η βέλτιστη ακτίνα είναι ίση με 2.80.



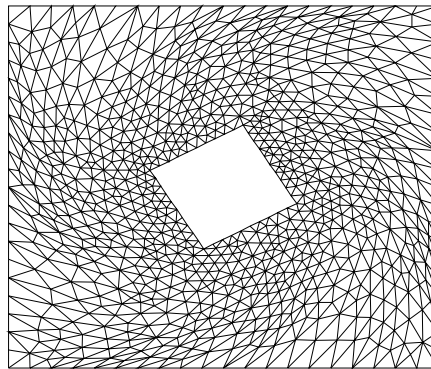
(α) $r=2.60$.

(β) $r=2.70$.



(γ) $r=2.80$.

(δ) $r=2.90$.



(ε) $r=3.00$.

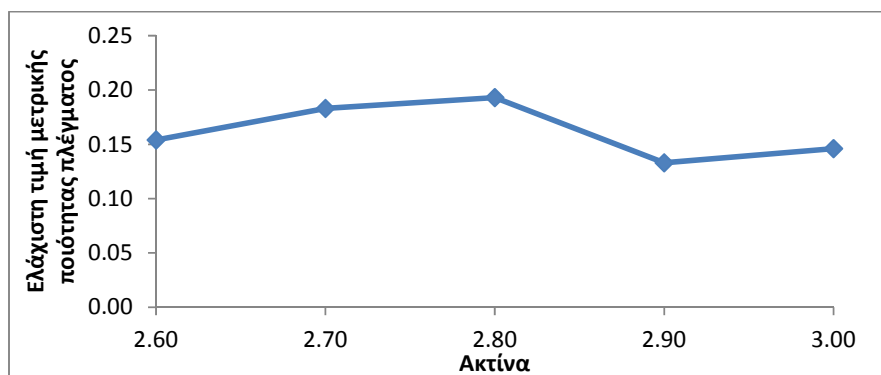
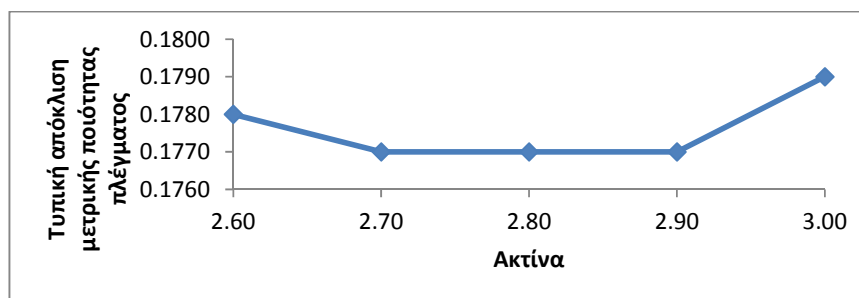
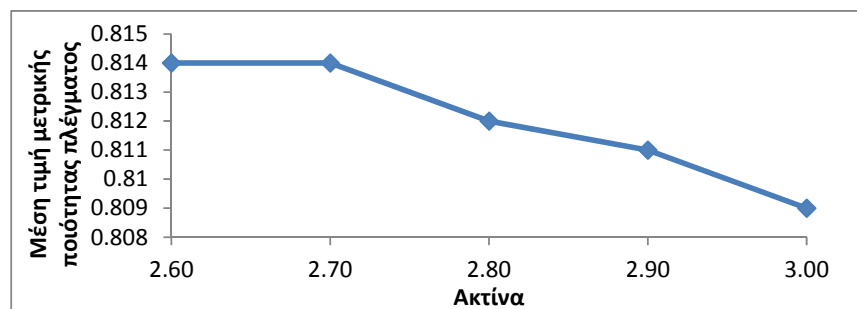
Σχήμα 4.1.13: Πλέγματα μεταξύ δύο τετραγώνων με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 30° . Χρησιμοποιήθηκε πολυώνυμο $5^{\text{ου}}$ βαθμού για 5 τιμές ακτίνας.

Τέλος, για $6^{\text{ου}}$ βαθμού πολυώνυμο, η οριακή τιμή της ακτίνας για δημιουργία αποδεκτού πλέγματος είναι ίση με 2.60. Μελετήθηκε, όμοια με πριν, η ποιότητα των πλεγμάτων για ακτίνες έως και 3.00. Ο πίνακας 4.1.8

παρουσιάζει τις τιμές των μετρικών ως συνάρτηση των ακτίνων και τα διαγράμματα του σχήματος 4.1.14 τους μεταβολές τους:

Ακτίνα (r)	2.60	2.70	2.80	2.90	3.00
\bar{q}_e	0.814	0.814	0.812	0.811	0.809
σ_{qe}	0.178	0.177	0.177	0.177	0.177
q_{\min}	0.154	0.183	0.193	0.133	0.141

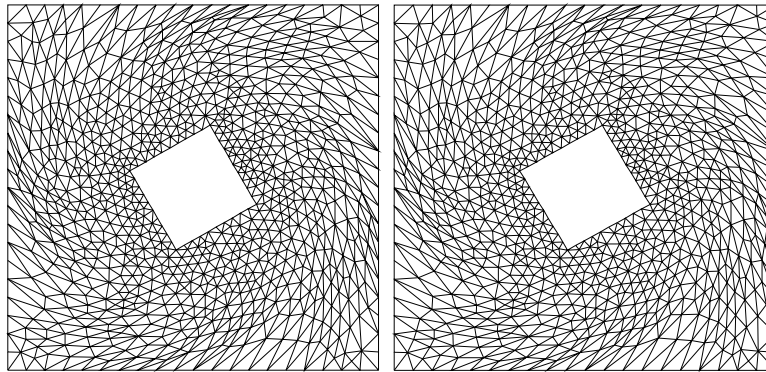
Πίνακας 4.1.8: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος για τις τιμές της ακτίνας που αποδίδουν αποδεκτό πλέγμα με χρήση 6^{ου} βαθμού πολυωνύμου για στροφή 30° του εσωτερικού τετραγώνου.



Σχήμα 4.1.14: Διαγράμματα μεταβολής της μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος ως συνάρτηση της ακτίνας για βαθμό πολυωνύμου ίσο με 6 και στροφή 30°. Τα πλέγματα προέκυψαν από τη μέθοδο MLS.

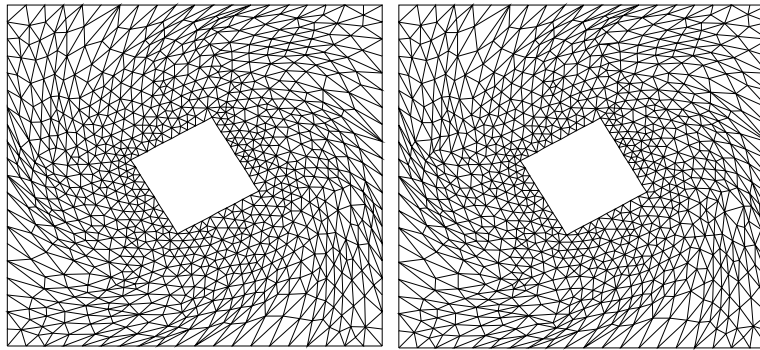
Από τα διαγράμματα προκύπτει ότι η μέση τιμή της εμφανίζει τις μέγιστες τιμές της για ακτίνες 2.60 και 2.70, η τυπική απόκλιση την ελάχιστη τιμή της

για ακτίνες 2.70, 2.80 και 2.90 και η ελάχιστη τιμή μεγιστοποιείται για ακτίνα ίση με 2.80.



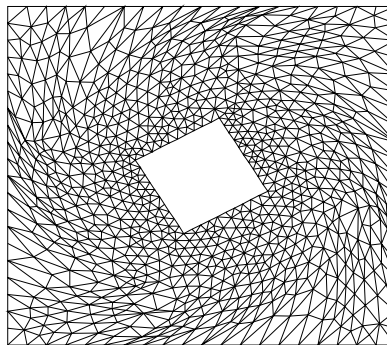
(α) $r=2.60$.

(β) $r=2.70$.



(γ) $r=2.80$.

(δ) $r=2.90$.

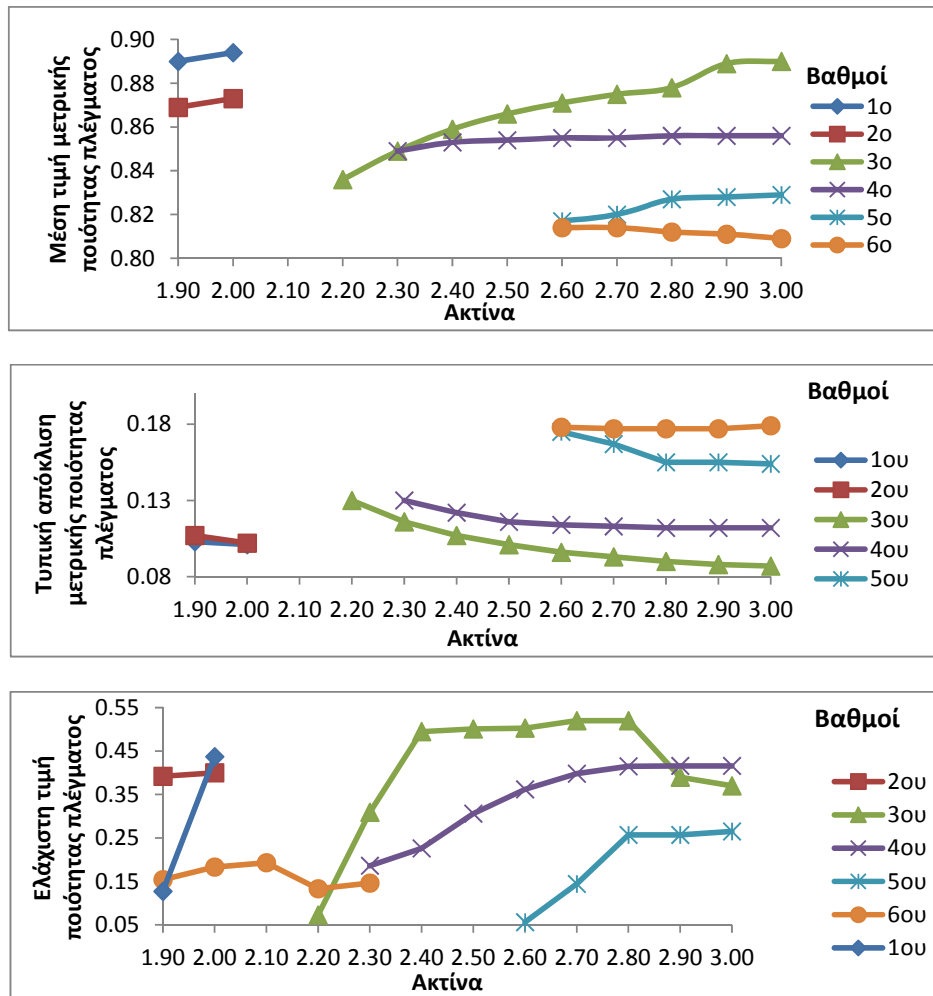


(ε) $r=3.00$.

Σχήμα 4.1.15: Πλέγματα μεταξύ δύο τετραγώνων με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 30° . Χρησιμοποιήθηκε πολυώνυμο $6^{ου}$ βαθμού για 5 τιμές ακτίνας.

Η ανάλυση που προηγήθηκε παρουσιάζει εκτενώς τη συμπεριφορά των πλεγμάτων που δημιουργούνται με τη μέθοδο κινούμενων ελάχιστων τετραγώνων για στροφή 30° του εσωτερικού τετραγώνου ως συνάρτηση της

ακτίνας με χρήση πολυωνύμων 1^{ης} έως και 6^{ης} τάξης. Έτσι, για κάθε πολυώνυμο, είναι γνωστές οι τιμές των ακτίνων που βελτιστοποιούν τις μετρικές ποιότητας. Όμως, με αυτό τον τρόπο δεν γίνεται σύγκριση των βαθμών πολυωνύμων. Η σύγκριση αυτή πραγματοποιείται στα παρακάτω διαγράμματα του σχήματος 4.1.16, όπου παρουσιάζονται συνοπτικά οι μετρικές ποιότητας ως συνάρτηση της ακτίνας για όλους τους βαθμούς πολυωνύμου. Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι έχουν δοκιμαστεί και μεγαλύτερες τιμές ακτίνας επιρροής, όμως κρίθηκε σκόπιμο να μην παρουσιαστούν, διότι όχι μόνο δεν επηρέασαν θετικά την ποιότητα των πλεγμάτων, αλλά καθυστέρησαν και τη σύγκλιση.



Σχήμα 4.1.16: Συγκριτικά διαγράμματα μεταβολής της μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος ως συνάρτηση της ακτίνας για 1^{ου} έως και 6^{ου} βαθμού πολυώνυμο και στροφή 30° του εσωτερικού τετραγώνου. Τα πλέγματα προέκυψαν από τη μέθοδο MLS.

Όπως παρατηρείται από το 1^ο διάγραμμα του σχήματος 4.1.16 η μέση τιμή της πλεγματικής ποιότητας μεγιστοποιείται με χρήση πολυωνύμου 1^{ης} τάξεως και ακτίνας ίση με 2.00, ενώ η αμέσως επόμενη τιμή αυτής της μετρικής

βρίσκεται για χρήση 3^{ου} βαθμού πολυωνύμου και ακτίνες 2.90 και 3.00. Από το 2^ο διάγραμμα, προκύπτει ότι η τυπική απόκλιση της μέσης τιμής της μετρικής ποιότητας, παρουσιάζει ελάχιστη τιμή με χρήση 3^{ης} τάξεως πολυώνυμο και για ακτίνες 2.90 και 3.00. Επίσης, φαίνεται ότι τα πολυώνυμα 5^{ου} και 6^{ου} βαθμού παρουσιάζουν υψηλές τυπικές αποκλίσεις συγκριτικά με τα υπόλοιπα, γεγονός που αποτρέπει τη χρήση τους. Τέλος, το 3^ο διάγραμμα δείχνει ότι η ελάχιστη τιμή της ποιότητας πλέγματος παρουσιάζει μέγιστο για 3^{ου} βαθμού πολυώνυμο και ακτίνα ίση με 2.80.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η μέθοδος MLS στο πλέγμα μεταξύ των δυο τετραγώνων, για τη στροφή των 30^ο του εσωτερικού, αποδίδει ποιοτικά πλέγματα με χρήση μικρών βαθμών πολυωνύμου όπως φαίνεται στα διαγράμματα του σχήματος 4.1.16. Συγκεκριμένα, για 1^{ου} έως και 3^{ου} βαθμού πολυώνυμο, και οι 3 μετρικές που χρησιμοποιήθηκαν παρουσίαζαν καλύτερη συμπεριφορά συγκριτικά με τις αντίστοιχες τιμές τους για πολυώνυμο 4^{ου} έως και 6^{ου} βαθμού.

Όσον αφορά την ακτίνα, μεγαλύτερος βαθμός πολυωνύμου οδηγεί σε υψηλότερη τιμή για την ελάχιστη δυνατή ακτίνα για δημιουργία πλεγμάτων χωρίς ανεστραμμένα στοιχεία. Αυτό το συμπέρασμα έχει φυσική ερμηνεία, διότι μεγαλύτερες τιμές ακτίνας 'πιάνουν' περισσότερα σημεία, άρα αυξάνουν τους κόμβους που εισέρχονται στο σύστημα των αγνώστων συντελεστών.

Η ανάλυση της μεθόδου MLS που προηγήθηκε, συνεχίζεται παρακάτω για διάφορες γωνίες στροφής του εσωτερικού τετραγώνου, όμως για λόγους συντομίας τα αποτελέσματα παρουσιάζονται με συγκεντρωτικό τρόπο όπως στο σχήμα 4.1.16.

Η επόμενη στροφή του εσωτερικού τετραγώνου που εξετάστηκε ήταν κατά 45^ο. Πραγματοποιήθηκαν δοκιμές ως προς την παράμετρο της ακτίνας για όλους τους βαθμούς πολυωνύμου από 1 έως και 6 και τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τις μετρικές των πλεγμάτων παρουσιάζονται στους πίνακες 4.1.9(α), 4.1.9(β), 4.1.9(γ). Όπου δεν υπάρχει κάποια τιμή στους παρακάτω πίνακες, σημαίνει ότι το πλέγμα κρίθηκε μη-αποδεκτό. Οι μεταβολές των μετρικών ως συνάρτηση της παράμετρου της ακτίνας για κάθε πολυώνυμο που χρησιμοποιήθηκε φαίνονται στα διαγράμματα του σχήματος 4.1.17.

Τιμές Ακτίνας	Βαθμός Πολυωνύμου					
	1 ^{ου}	2 ^{ου}	3 ^{ου}	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
1.90	0.825	0.790	-	-	-	-
2.00	-	0.795	-	-	-	-
2.10	-	0.799	-	-	-	-
2.20	-	-	-	-	-	-
2.30	-	-	0.745	0.763	-	-
2.40	-	-	0.764	0.766	-	-
2.50	-	-	0.776	0.767	-	-
2.60	-	-	0.785	0.768	-	0.723
2.70	-	-	0.792	0.768	0.726	0.721
2.80	-	-	0.797	0.766	0.730	0.718
2.90	-	-	0.802	0.766	0.733	-
3.00	-	-	0.805	0.766	0.736	-

(α) Αποτελέσματα μέσης τιμής μετρικής ποιότητας του πλέγματος για διάφορες τιμές ακτίνας και βαθμών πολυωνύμων για στροφή 45°.

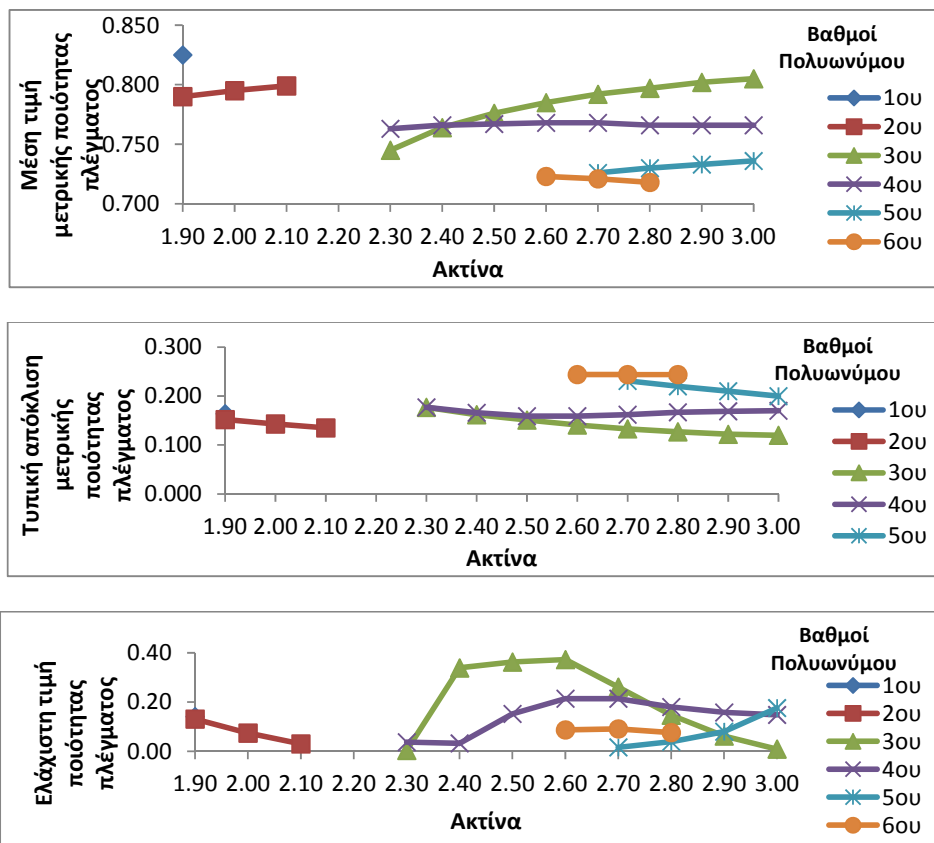
Τιμές Ακτίνας	Βαθμός Πολυωνύμου					
	1 ^{ου}	2 ^{ου}	3 ^{ου}	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
1.90	0.164	0.152	-	-	-	-
2.00	-	0.143	-	-	-	-
2.10	-	0.135	-	-	-	-
2.20	-	-	-	-	-	-
2.30	-	-	0.177	0.177	-	-
2.40	-	-	0.162	0.166	-	-
2.50	-	-	0.151	0.159	-	-
2.60	-	-	0.141	0.159	-	0.244
2.70	-	-	0.133	0.162	0.231	0.244
2.80	-	-	0.127	0.167	0.220	0.244
2.90	-	-	0.122	0.169	0.210	-
3.00	-	-	0.120	0.170	0.200	-

(β) Αποτελέσματα τυπικής απόκλισης της μετρικής ποιότητας του πλέγματος για διάφορες τιμές ακτίνας και βαθμών πολυωνύμων για στροφή 45°.

Τιμές Ακτίνας	Βαθμός Πολυωνύμου					
	1 ^{ου}	2 ^{ου}	3 ^{ου}	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
1.90	0.141	0.131	-	-	-	-
2.00	-	0.074	-	-	-	-
2.10	-	0.030	-	-	-	-
2.20	-	-	-	-	-	-
2.30	-	-	0.0036	0.0372	-	-
2.40	-	-	0.339	0.0322	-	-
2.50	-	-	0.363	0.152	-	-
2.60	-	-	0.373	0.214	-	0.087
2.70	-	-	0.261	0.214	0.016	0.091
2.80	-	-	0.147	0.180	0.039	0.076
2.90	-	-	0.062	0.158	0.080	-
3.00	-	-	0.009	0.148	0.176	-

(γ) Αποτελέσματα ελάχιστης τιμής μετρικής ποιότητας του πλέγματος για διάφορες τιμές ακτίνας και βαθμών πολυωνύμων για τη στροφή των 45°.

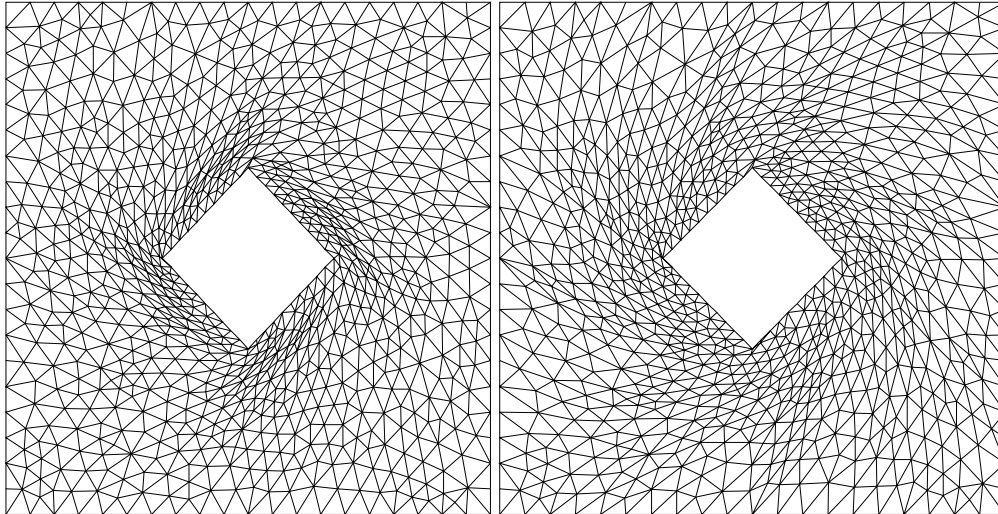
Πίνακας 4.1.9: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας πλέγματος για τιμές της ακτίνας που αποδίδουν αποδεκτό πλέγμα με χρήση πολυωνύμων 1^{ου} έως και 6^{ου} βαθμού για στροφή 45° του εσωτερικού τετραγώνου με τη μέθοδο MLS.



Σχήμα 4.1.17: Συγκριτικά διαγράμματα μεταβολής της μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος ως συνάρτηση της ακτίνας για 1^{ου} έως και 6^{ου} βαθμού πολυώνυμο και στροφή 45°. Τα πλέγματα προέκυψαν από τη μέθοδο MLS.

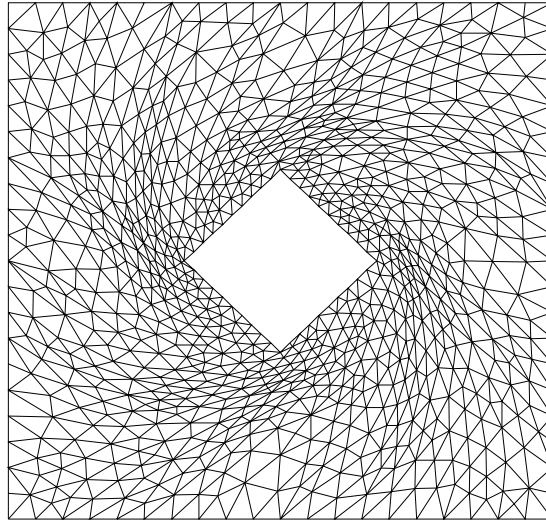
Από τα παραπάνω αποτελέσματα, μπορούν να εξαχθούν ορισμένα χρήσιμα συμπεράσματα. Μια πρώτη παρατήρηση είναι, ότι αναλόγως την τάξη του πολυωνύμου, υπάρχει κάποια οριακή τιμή της ακτίνας για την οποία αποδίδεται αποδεκτό πλέγμα. Επίσης, από το σχήμα 4.1.17(α) παρατηρείται ότι η μέση τιμή της ποιότητας του πλέγματος παρουσιάζει μέγιστες τιμές για 1^{ου} βαθμού πολυώνυμο και ακτίνα ίση με 1.90. Όσον αφορά την τυπική απόκλιση (σχήμα 4.1.17(β)), εμφανίζει τη μικρότερη της τιμή με χρήση πολυωνύμου 3^{ου} βαθμού και ακτίνα ίση με 3. Επιπλέον, από το σχήμα 4.1.17(γ) που παρουσιάζει την ελάχιστη τιμή της μετρικής ποιότητας, παρατηρείται ότι με χρήση ακτίνας 2.60 και πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού μεγιστοποιείται η τιμή της.

Άρα, αναλόγως ποια μετρική επιθυμείται να βελτιστοποιηθεί, μπορεί να επιλεγεί και ο αντίστοιχος συνδυασμός βαθμού πολυωνύμου και ακτίνας επιρροής.



(α) Πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού, $r=1.90$.

(β) Πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού, $r=3.00$.



(γ) Πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού, $r=2.60$.

Σχήμα 4.1.18: Πλέγματα μεταξύ δύο τετραγώνων με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 45°. Το 1^ο πλέγμα παρουσιάζει μέγιστη μέση τιμή μετρικής ποιότητας, το 2^ο την ελάχιστη τυπική απόκλιση, ενώ το 3^ο τη μέγιστη ελάχιστη τιμή.

Η επόμενη στροφή που εξετάστηκε είναι ίση με 60°. Τα αποτελέσματα των μετρικών ποιότητας του πλέγματος ως προς την ακτίνα και τα πολυώνυμα παρουσιάζονται στους πίνακες 4.1.10(α), 4.1.10(β) και 4.1.10(γ).

Τιμές Ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου					
	1ου	2ου	3ου	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
1.90	-	-	-	-	-	-
2.00	-	-	-	-	-	-
2.10	-	-	-	-	-	-
2.20	-	-	-	-	-	-
2.30	-	-	-	-	-	-
2.40	-	-	0.658	-	-	-
2.50	-	-	0.675	0.674	-	-
2.60	-	-	0.686	0.675	-	-
2.70	-	-	-	0.675	-	-
2.80	-	-	-	-	-	-
2.90	-	-	-	-	0.644	-
3.00	-	-	-	-	0.648	-
4.00	-	-	-	-	0.675	-
5.00	-	-	-	-	0.676	0.669
10.00	-	-	-	-	0.677	0.676

(α) Αποτελέσματα μέσης τιμής μετρικής ποιότητας του πλέγματος για διάφορες τιμές ακτίνας και βαθμών πολυωνύμων για στροφή 60° του εσωτερικού τετραγώνου.

Τιμές Ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου					
	1ου	2ου	3ου	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
1.90	-	-	-	-	-	-
2.00	-	-	-	-	-	-
2.10	-	-	-	-	-	-
2.20	-	-	-	-	-	-
2.30	-	-	-	-	-	-
2.40	-	-	0.224	-	-	-
2.50	-	-	0.208	0.190	-	-
2.60	-	-	0.193	0.194	-	-
2.70	-	-	-	0.203	-	-
2.80	-	-	-	-	-	-
2.90	-	-	-	-	0.255	-
3.00	-	-	-	-	0.248	-
4.00	-	-	-	-	0.195	-
5.00	-	-	-	-	0.185	0.203
10.00	-	-	-	-	0.185	0.187

(β) Αποτελέσματα τυπικής απόκλισης της μετρικής ποιότητας του πλέγματος για διάφορες τιμές ακτίνας και βαθμών πολυωνύμων για στροφή 60° του εσωτερικού τετραγώνου.

Τιμές Ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου					
	1ου	2ου	3ου	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
1.90	-	-	-	-	-	-
2.00	-	-	-	-	-	-
2.10	-	-	-	-	-	-
2.20	-	-	-	-	-	-
2.30	-	-	-	-	-	-
2.40	-	-	0.137	-	-	-
2.50	-	-	0.151	0.036	-	-
2.60	-	-	0.138	0.105	-	-
2.70	-	-	-	0.027	-	-
2.80	-	-	-	-	-	-
2.90	-	-	-	-	0.0078	-
3.00	-	-	-	-	0.073	-
4.00	-	-	-	-	0.134	-
5.00	-	-	-	-	0.225	0.148
10.00	-	-	-	-	0.226	0.222

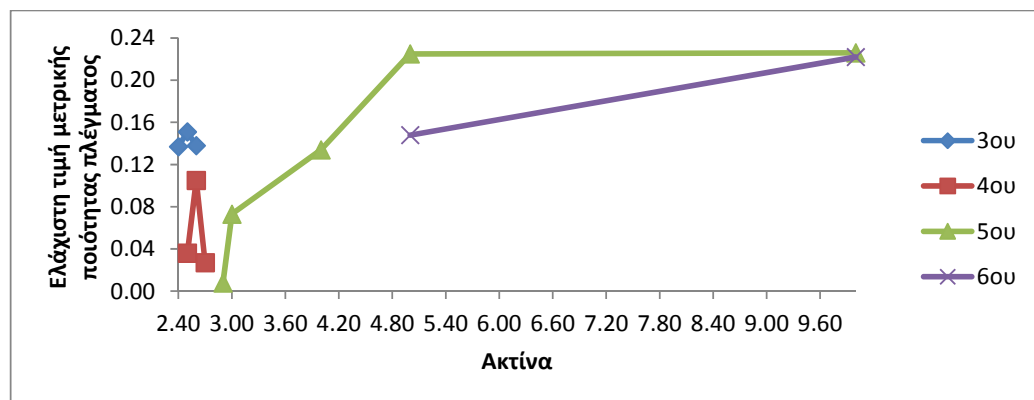
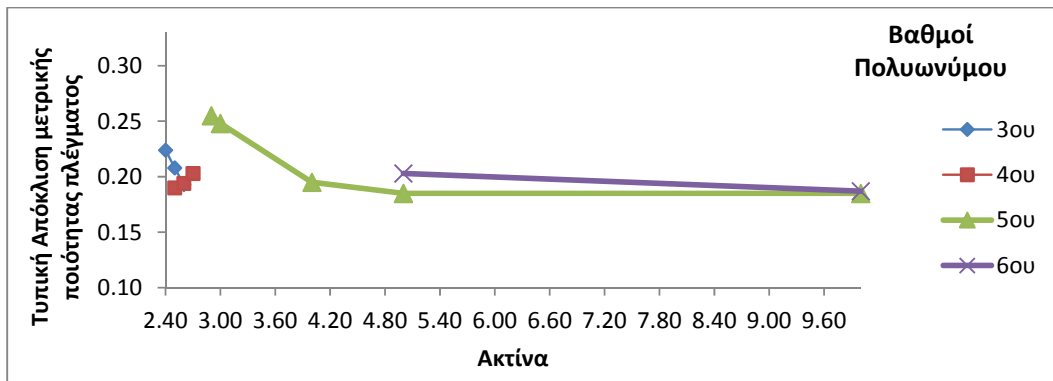
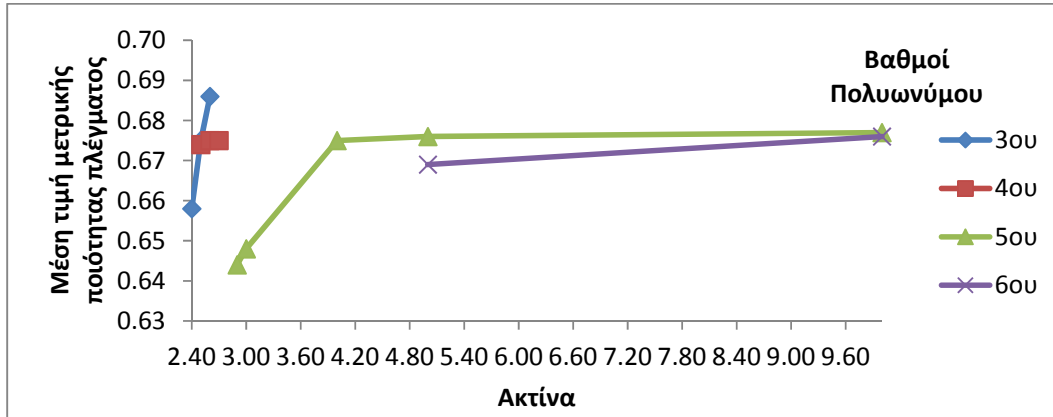
(γ) Αποτελέσματα ελάχιστης τιμής μετρικής ποιότητας του πλέγματος για διάφορες τιμές ακτίνας και βαθμών πολυωνύμων για στροφή 60° του εσωτερικού τετραγώνου.

Πίνακας 4.1.10: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας πλέγματος για τιμές της ακτίνας που αποδίδουν αποδεκτό πλέγμα με χρήση πολυωνύμων 1^{ου} έως και 6^{ου} βαθμού για στροφή 60° του εσωτερικού τετραγώνου. Τα προέκυψαν με τη μέθοδο MLS.

Όπως φαίνεται στους παραπάνω πίνακες, η μέθοδος MLS δεν αποδίδει αποδεκτό πλέγμα με χρήση πολυωνύμων 1^{ης} και 2^{ης} τάξης για καμία τιμή ακτίνας. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει ότι η μέθοδος για μεγαλύτερες μετατοπίσεις απαιτεί και μεγαλύτερης τάξης πολυώνυμα για να δημιουργήσει αποδεκτά πλέγματα.

Ακόμα, η ελάχιστη δυνατή τιμή ακτίνας (σε κάθε πολυώνυμο) για δημιουργία κατάλληλου πλέγματος είναι αυξημένη συγκριτικά με τις προηγούμενες περιπτώσεις στροφής. Επιπλέον, για το λόγο αυτό, για τη στροφή των 60° που εξετάζεται, χρησιμοποιήθηκαν μεγαλύτερες τιμές ακτίνας από πριν.

Οι παραπάνω μετρικές, παρουσιάζονται σε μορφή διαγράμματος στα σχήματα 4.1.16(α), 4.1.16(β), 4.1.16(γ).



Σχήμα 4.1.17: Συγκριτικά διαγράμματα μεταβολής της μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος ως συνάρτηση της ακτίνας για 3^{ου} έως και 6^{ου} βαθμού πολυώνυμο και στροφή 60° του εσωτερικού τετραγώνου. Τα πλέγματα προέκυψαν από τη μέθοδο MLS.

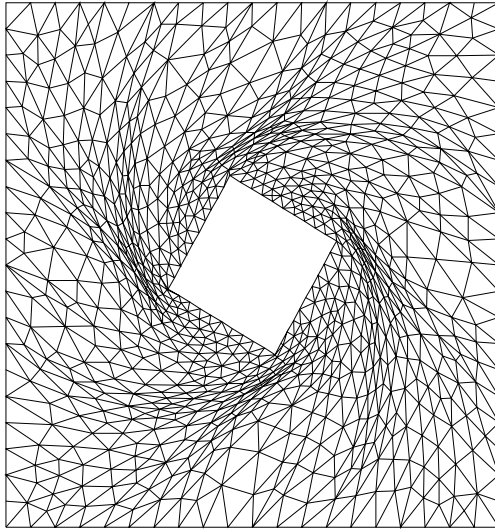
Από τα διαγράμματα παρατηρείται ότι η μέση τιμή της μετρικής ποιότητας αυξάνεται όσο αυξάνεται η ακτίνα, ενώ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της με χρήση 3^{ου} βαθμού πολυώνυμο και ακτίνα 2.60. Επίσης, η τυπική απόκλιση και η ελάχιστη τιμή ποιότητας παίρνουν τις βέλτιστες τιμές τους όταν γίνεται χρήση πολυωνύμου 5^{ου} βαθμού και για ακτίνα ίση με 5.

Τέλος, για λόγους πληρότητας, κρίνεται σκόπιμο να γίνει αναφορά στον τρόπο με τον οποίο υπολογίστηκε η ελάχιστη ακτίνα ανά βαθμό πολυωνύμου. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε πολυώνυμο και τις ακτίνες που δοκιμάστηκαν παρουσιάζεται ο πίνακας 4.1.11 με τον αριθμό των ανεστραμμένων στοιχείων που προκύπτουν.

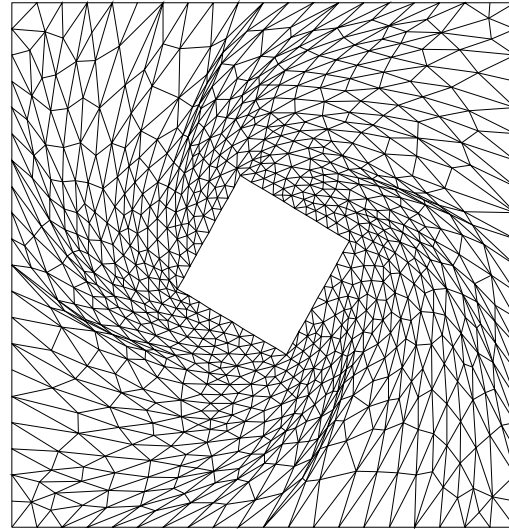
Τιμές Ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου					
	1ου	2ου	3ου	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
1.90	2	1	120	105	121	108
2.00	8	2	113	90	106	105
2.10	16	4	55	42	91	95
2.20	31	4	13	24	105	61
2.30	45	6	3	9	80	42
2.40	46	6	0	4	66	12
2.50	46	6	0	0	59	2
2.60	44	6	0	0	41	1
2.70	43	7	1	0	20	1
2.80	43	10	1	15	3	5
2.90	42	16	2	17	0	10
3.00	42	27	6	16	0	10
4.00	34	43	10	11	0	24
5.00	35	37	31	31	0	0
10.00	35	35	61	45	0	0

Πίνακας 4.1.11: Αποτελέσματα για τον αριθμό ανεστραμμένων τριγώνων για τις δοκιμές με τη μέθοδο MLS, για τη στροφή 60°.

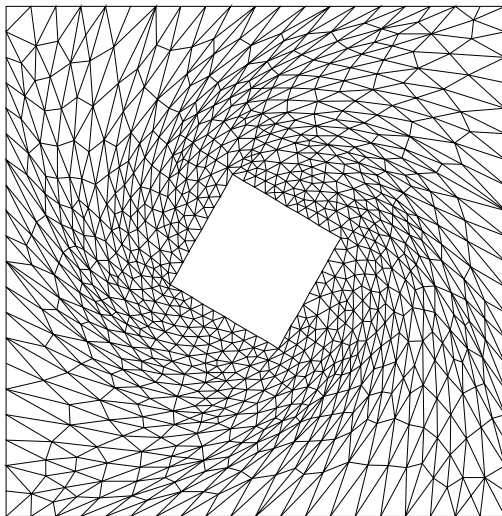
Όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού πολυώνυμα δεν αποδίδουν αποδεκτά πλέγματα, ενώ 3^{ου} και 4^{ου} βαθμού δημιουργούν αποδεκτά πλέγματα μόνο για ορισμένες τιμές ακτίνας. Τέλος, ομαλή συμπεριφορά παρουσιάζουν τα πολυώνυμα 5^{ου} και 6^{ου} βαθμού όπου υπολογίζεται και η ελάχιστη δυνατή ακτίνα για δημιουργία αποδεκτού πλέγματος.



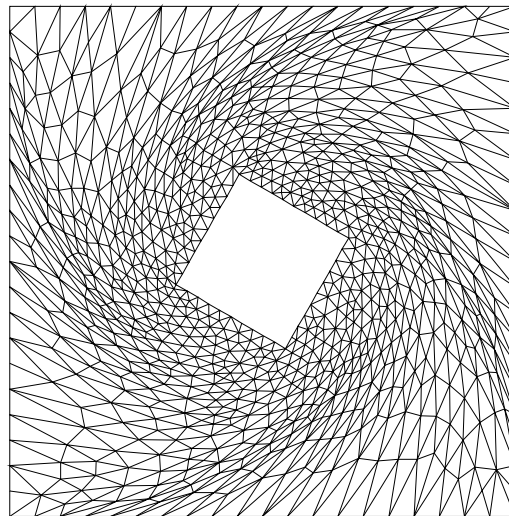
(α) Πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού, $r=2.60$,
 $\bar{q}=0.686$, $\sigma=0.193$, $q_{\min}=0.138$.



(β) Πολυώνυμο 4^{ου} βαθμού, $r=2.60$,
 $\bar{q}=0.675$, $\sigma=0.194$, $q_{\min}=0.105$.



(γ) Πολυώνυμο 5^{ου} βαθμού, $r=5$,
 $\bar{q}=0.676$, $\sigma=0.185$, $q_{\min}=0.225$.



(δ) Πολυώνυμο 6^{ου} βαθμού, $r=5$,
 $\bar{q}=0.669$, $\sigma=0.203$, $q_{\min}=0.148$.

Σχήμα 4.1.18: Πλέγματα μεταξύ δύο τετραγώνων με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 60° . Παρουσιάζονται τα βέλτιστα πλέγματα ως προς τις μετρικές και οι τιμές των μετρικών τους για πολυώνυμο 3^{ου}, 4^{ου}, 5^{ου} και 6^{ου} βαθμού με χρήση της κατάλληλης ακτίνας ανά περίπτωση.

Η διερεύνηση που προηγήθηκε στο πλέγμα μεταξύ των δύο τετραγώνων για στροφές 30° , 45° και 60° του εσωτερικού τετραγώνου, και πως αυτό προσαρμόζεται μέσω της μεθόδου MLS για διάφορα πολυώνυμα και ακτίνες συνεχίζεται περαιτέρω και για μεγαλύτερες γωνίες ή διαφορετικές μετατοπίσεις (λ.χ. γραμμική μετατόπιση του εσωτερικού τετραγώνου).

4.1.2 Ανάλυση για μεγαλύτερες γωνίες

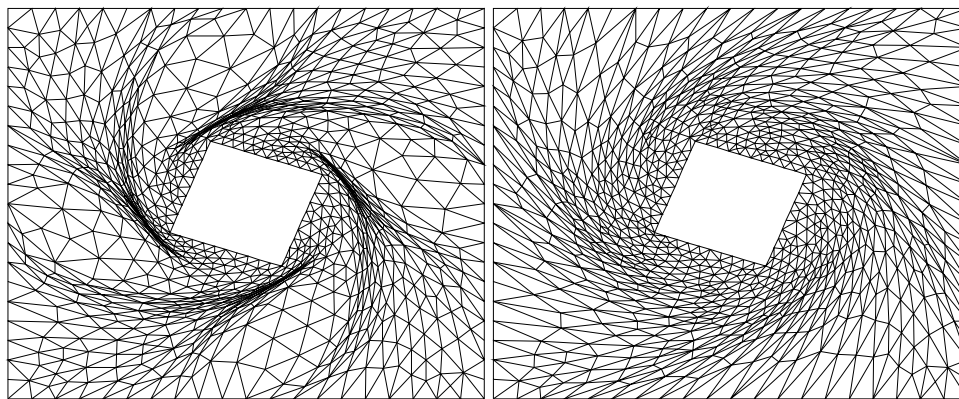
Στην προηγούμενη υποενότητα εξετάστηκαν λεπτομερώς οι περιπτώσεις στροφής 30° , 45° και 60° και τα αποτελέσματα της μεθόδου παρουσιάστηκαν εκτενώς για διάφορες τιμές της ακτίνας και των πολυωνύμων.

Εδώ δεν εξετάζονται αυτές οι παράμετροι, ενώ στόχος είναι η εύρεση της κρίσιμης γωνίας όπου το προκύπτον πλέγμα κρίνεται μη αποδεκτό. Για λόγους συντομίας, για τις διάφορες γωνίες στροφής που μελετήθηκαν, παρουσιάζονται μόνο τα οριακά κατάλληλα πλέγματα ανά στροφή, καθώς και αυτά που εμφάνισαν τις βέλτιστες τιμές των μετρικών ποιότητας.

Η πρώτη στροφή που εξετάζεται είναι αυτή των 70° του εσωτερικού τετραγώνου. Πραγματοποιώντας δοκιμές για διάφορους βαθμούς πολυωνύμου και ακτίνας, διαπιστώθηκε ότι το λογισμικό αντέχει και το 1° κατάλληλο πλέγμα δημιουργείται για πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού και ακτίνα 2.40. Όσον αφορά τις μετρικές ποιότητας, η μέθοδος δημιουργεί για αυτήν τη στροφή το ποιοτικότερο πλέγμα με χρήση $5^{ου}$ βαθμού πολυωνύμου και ακτίνας 5.

Περίπτωση	Βαθμός πολυωνύμου	Ακτίνα	\bar{q}	σ	q_{min}
Οριακό Πλέγμα	$3^{ος}$	2.40	0.590	0.268	0.015
Βέλτιστο Πλέγμα	$5^{ος}$	5.00	0.616	0.200	0.198

Πίνακας 4.1.12: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας πλέγματος για γωνία στροφής 70° του εσωτερικού τετραγώνου. Παρουσιάζονται το οριακό και το βέλτιστο πλέγμα μέσω της μεθόδου MLS.



(α) Πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού, $r=2.40$.

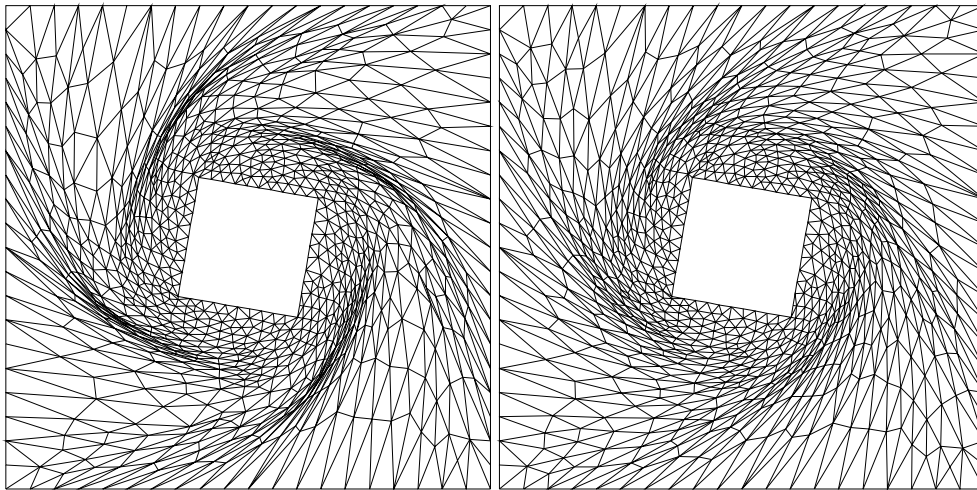
(β) Πολυώνυμο $5^{ου}$ βαθμού, $r=5.00$.

Σχήμα 4.1.19: Πλέγματα με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 70° του εσωτερικού τετραγώνου. Το πλέγμα (α) δεν παρουσιάζει ανεστραμμένα στοιχεία, ενώ το (β) είναι το βέλτιστο ως προς τις μετρικές ποιότητας που προκύπτει από τη μέθοδο για αυτή τη στροφή.

Η ανάλυση συνεχίζεται για γωνία στροφής 80° . Όπως διαπιστώθηκε από τις δοκιμές το λογισμικό της μεθόδου αντέχει και αυτήν τη στροφή. Στον πίνακα 4.1.13 παρουσιάζονται οι μετρικές ποιότητας του οριακά κατάλληλου και του βέλτιστου από άποψη ποιότητας πλέγματος.

Περίπτωση	Βαθμός πολυωνύμου	Ακτίνα	\bar{q}	σ	q_{\min}
Οριακό Πλέγμα	5^{os}	3.50	0.548	0.254	0.025
Βέλτιστο Πλέγμα	5^{os}	5.00	0.554	0.213	0.161

Πίνακας 4.1.13: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας πλέγματος για γωνία στροφής 80° του εσωτερικού τετραγώνου. Παρουσιάζονται το οριακό και το βέλτιστο πλέγμα μέσω της μεθόδου MLS.



(α) Πολυώνυμο 5^{ou} βαθμού, $r=3.50$.

(β) Πολυώνυμο 5^{ou} βαθμού, $r=5.00$

Σχήμα 4.1.20: Πλέγματα με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 80° του εσωτερικού τετραγώνου. Το πλέγμα (α) δεν παρουσιάζει ανεστραμμένα στοιχεία, ενώ το (β) είναι το βέλτιστο που προκύπτει από τη μέθοδο για αυτήν τη στροφή.

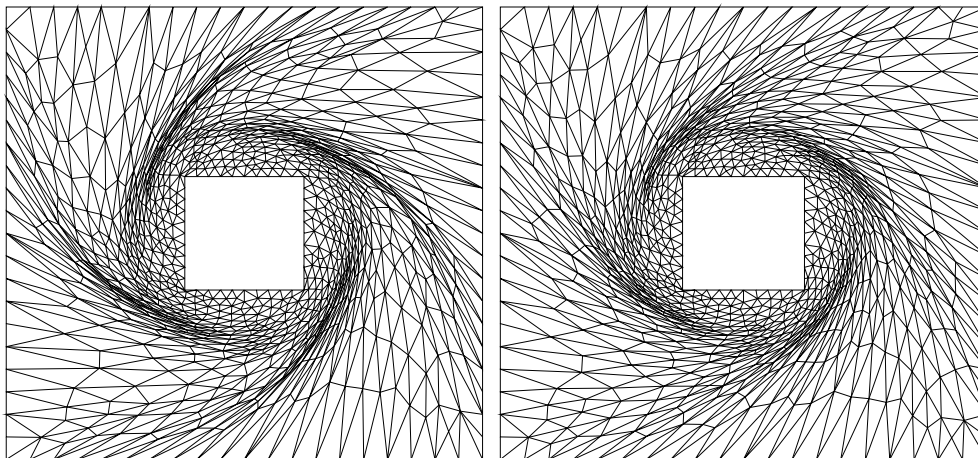
Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι τα πλέγματα που προέκυψαν με χρήση 5^{ou} και 6^{ou} βαθμού πολυωνύμων και μεγαλύτερες ακτίνες δεν επέφεραν βελτίωση στις μετρικές ποιότητας των πλεγμάτων. Το βέλτιστο πλέγμα για στροφή 80° με εφαρμογή της μεθόδου MLS προκύπτει για πολυώνυμο 5^{ns} τάξης και ακτίνα ίση με 5.

Η επόμενη γωνία στροφής που εξετάζεται είναι ίση με 90° . Και σε αυτή την περίπτωση το λογισμικό δημιουργεί πλέγμα χωρίς ανεστραμμένα τρίγωνα και οι μετρικές ποιότητας για την οριακά κατάλληλη και τη βέλτιστη χρήση της μεθόδου φαίνονται στον πίνακα 4.1.14.

Περίπτωση	Βαθμός πολυωνύμου	Ακτίνα	\bar{q}	σ	q_{\min}
Οριακό Πλέγμα	5^{os}	3.70	0.491	0.245	0.0247
Βέλτιστο Πλέγμα	5^{os}	6.00	0.492	0.226	0.094

Πίνακας 4.1.14: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας πλέγματος για στροφή 90° . Παρουσιάζονται το οριακό και το βέλτιστο πλέγμα μέσω της μεθόδου MLS.

Από τους πίνακες 4.1.12, 4.1.13 και 4.1.14 παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται η γωνία στροφής τόσο μικρότερες είναι οι διαφορές των μετρικών ποιότητας μεταξύ των οριακά κατάλληλων και βέλτιστων πλεγμάτων. Για παράδειγμα, από τον πίνακα 4.1.13 που αφορά την στροφή 90° η διαφορά στην ποιότητα μεταξύ των δύο πλεγμάτων που παρουσιάζονται είναι πολύ μικρή. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι γωνίες στροφής που εξετάζονται είναι πολύ μεγάλες και πλησιάζουν στην οριακή γωνία που η μέθοδος δεν μπορεί να δημιουργήσει αποδεκτό πλέγμα.



(α) Πολυώνυμο 5^{ou} βαθμού, $r=3.70$.

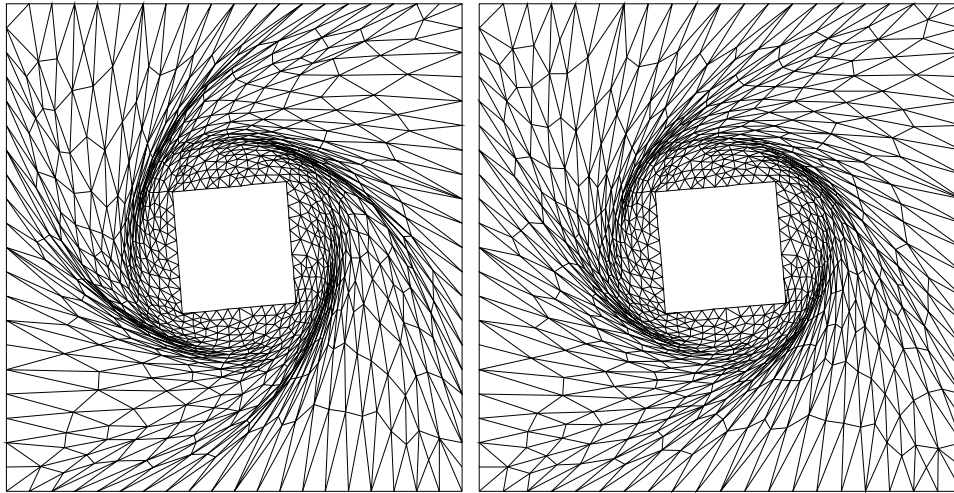
(β) Πολυώνυμο 5^{ou} βαθμού, $r=6.00$

Σχήμα 4.1.21: Πλέγματα με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 90° του εσωτερικού τετραγώνου. Το πλέγμα (α) δεν παρουσιάζει ανεστραμμένα στοιχεία, ενώ το (β) είναι το βέλτιστο που προκύπτει από τη μέθοδο για αυτήν τη στροφή.

Η επόμενη στροφή που εξετάζεται είναι για γωνία 95° . Όπως διαπιστώθηκε από τις δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν, η μέθοδος και για αυτήν τη στροφή δημιουργεί πλέγματα χωρίς ανεστραμμένα στοιχεία. Ο πίνακας 4.1.15 παρουσιάζει τις μετρικές ποιότητας για το οριακά κατάλληλο και το βέλτιστο ποιοτικά πλέγμα που προκύπτουν μέσω της μεθόδου MLS.

Περίπτωση	Βαθμός πολυωνύμου	Ακτίνα	\bar{q}	σ	q_{\min}
Οριακό Πλέγμα	5 ^{ος}	3.70	0.459	0.251	0.0043
Βέλτιστο Πλέγμα	5 ^{ος}	6.00	0.460	0.235	0.041

Πίνακας 4.1.15: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας πλέγματος για στροφή 95°. Παρουσιάζονται το οριακό και το βέλτιστο πλέγμα μέσω της μεθόδου MLS.

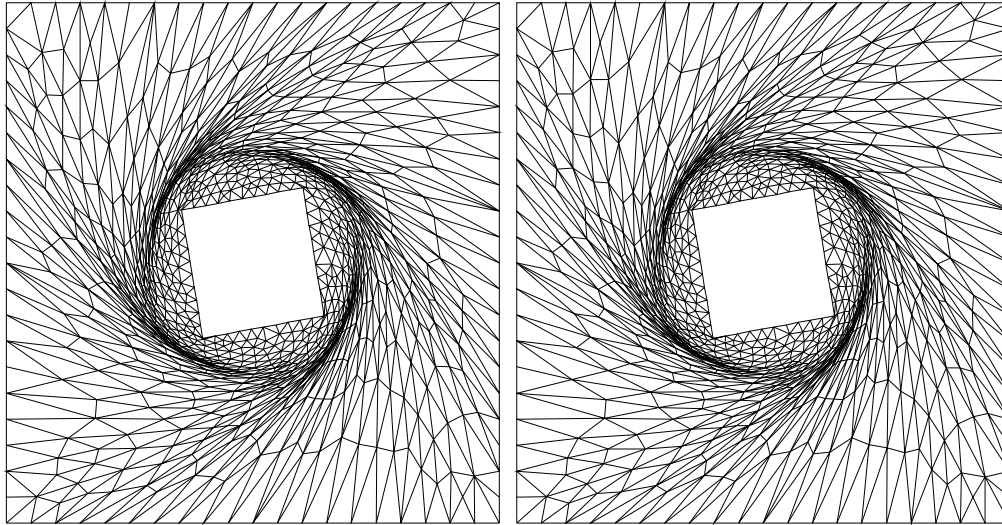


(α) Πολυώνυμο 5^{ου} βαθμού, $r=3.70$.

(β) Πολυώνυμο 5^{ου} βαθμού, $r=6.00$.

Σχήμα 4.1.22: Πλέγματα με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 95° του εσωτερικού τετραγώνου. Το πλέγμα (α) δεν παρουσιάζει ανεστραμμένα στοιχεία, ενώ το (β) είναι το βέλτιστο που προκύπτει από τη μέθοδο για αυτήν τη στροφή.

Η επόμενη στροφή που εξετάζεται είναι για γωνία 100° και όπως αποδείχθηκε είναι και η οριακή. Το λογισμικό της μεθόδου MLS δεν δημιούργησε ομαλά πλέγματα για κανένα συνδυασμό πολυωνύμου-ακτίνας επιρροής. Με χρήση 5^{ης} τάξης πολυώνυμου και ακτίνες από 5 και πάνω, τα πλέγματα που προέκυψαν εμφάνισαν ένα ανεστραμμένο τρίγωνο, ενώ για άλλους βαθμούς πολυωνύμου και ακτίνες τα πλέγματα παρουσίασαν μεγάλο αριθμό ανεστραμμένων στοιχείων. Τα πλέγματα για 5^{ης} τάξης πολυώνυμο και ακτίνες 5 και 6 παρουσιάζονται στο σχήμα 4.1.23:



(α) Πολυώνυμο 5^{ου} βαθμού, $r=5.00$.

(β) Πολυώνυμο 5^{ου} βαθμού, $r=6.00$.

Σχήμα 4.1.23: Πλέγματα με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 100° του εσωτερικού τετραγώνου. Και τα δύο πλέγματα έχουν παρουσιάσει από ένα ανεστραμμένο τρίγωνο, επομένως η γωνία στροφής 100° είναι η κρίσιμη, στην οποία το πλέγμα κρίνεται μη-αποδεκτό.

Συμπερασματικά, η μέθοδος προσαρμογής πλέγματος MLS αποδίδει ποιοτικά πλέγματα για αρκετά μεγάλες γωνίες στροφής. Ακόμη, παρατηρείται ότι η παράμετρος της ακτίνας παρουσιάζει ευαισθησία στη χρήση της και απαιτεί εμπειρία από το χρήστη. Επιπλέον, όσο αυξάνεται η γωνία στροφής, η μέθοδος απαιτεί αυξημένο βαθμό πολυωνύμου για να λειτουργήσει. Τέλος, πολυώνυμα υψηλής τάξης απαιτούν μεγαλύτερη τιμή ακτίνας για να δημιουργήσουν αποδεκτά πλέγματα.

4.1.3 Εφαρμογή της τμηματικής στροφής

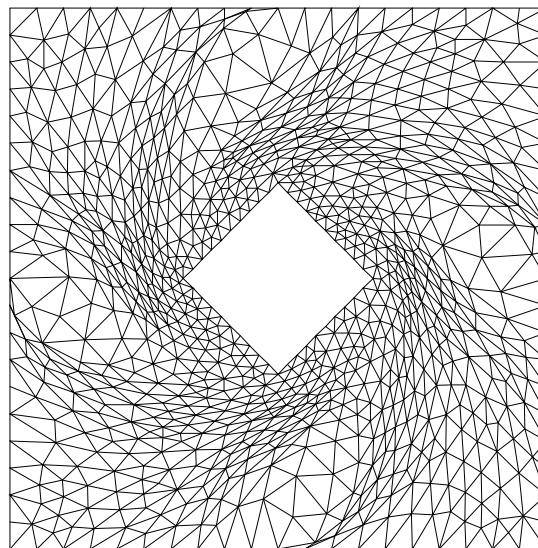
Στην υποενότητα αυτή υλοποιείται μία παραλλαγή του υπολογιστικού κώδικα της μεθόδου MLS για το πλέγμα μεταξύ των δύο τετραγώνων, έτσι ώστε η στροφή του εσωτερικού τετραγώνου να εφαρμόζεται τμηματικά. Στόχος είναι να εξεταστεί αν η μέθοδος, μέσω αυτής της παραλλαγής, αντέχει μεγαλύτερες γωνίες στροφής, καθώς και πώς αυτή επηρεάζει την ποιότητα του πλέγματος που προκύπτει.

Συγκεκριμένα, ο χρήστης επιλέγει το βήμα που πραγματοποιείται η συνολική στροφή για τη μετατόπιση του πλέγματος και, στη συνέχεια, διαιρούνται οι συνολικές μοίρες με το βήμα.

Το αποτέλεσμα της διαίρεσης αυτής δείχνει πόσες φορές θα εφαρμοστεί η μέθοδος για γωνία στροφής ίση με το βήμα. Κατά αυτόν τον τρόπο, σε κάθε επανάληψη δημιουργείται μετατοπισμένο πλέγμα, το οποίο στην επόμενη επανάληψη είναι το αρχικό που πρέπει να προσαρμοστεί. Το βήμα που χρησιμοποιείται στην εργασία αυτή είναι ίσο με 5 μοίρες.

Το πλεονέκτημα αυτής της παραλλαγής της μεθόδου είναι ότι εφόσον η μέθοδος εφαρμόζεται για μικρή γωνία (ίση με το βήμα) πολλές φορές, αναμένεται το λογισμικό να αποδίδει ποιοτικότερα πλέγματα και κυρίως ότι θα αντέχει μεγαλύτερες γωνίες στροφής από την κλασική μέθοδο. Από την άλλη, μειονέκτημα της είναι ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται. Πχ. για στροφή 90° και βήμα ίσο με 5° ο κώδικας θα 'τρέξει' 18 φορές.

Στη συνέχεια, εξετάζεται η μέθοδος της τμηματικής στροφής συγκριτικά με την κλασική MLS για γωνία στροφής 45° . Χρησιμοποιείται $3^{ου}$ βαθμού πολυώνυμο και ακτίνα επιρροής ίση με 2.30. Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστεί στο σχήμα 4.1.24 το αντίστοιχο πλέγμα που προέκυψε από την απλή μέθοδο.

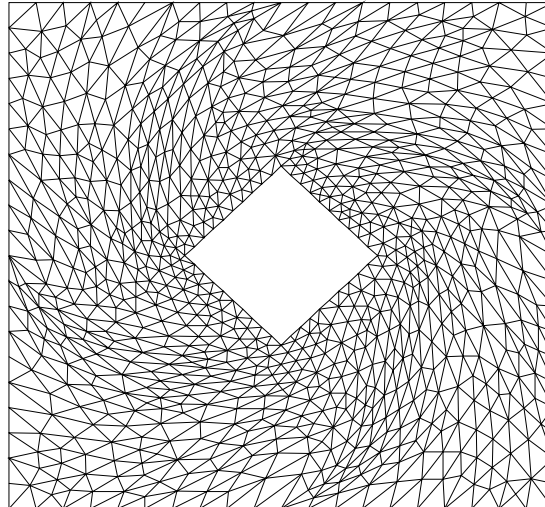


Σχήμα 4.1.24: Πλέγμα με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 45° του εσωτερικού τετραγώνου (Πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού, $r=2.30$).

Με εφαρμογή της μεθόδου τμηματικά, διαπιστώνεται ότι προκύπτει ποιοτικότερο πλέγμα. Τα αποτελέσματα για τον αριθμό των ανεστραμμένων τριγώνων και των μετρικών ποιότητας παρουσιάζονται στον πίνακα 4.1.16.

$k=3$ $r=2.20$	Αριθμός Ανεστραμμένων Στοιχείων	\bar{q}	σ	q_{min}
Απλή μέθοδος	0	0.745	0.177	0.0036
Τμηματική μέθοδος	0	0.767	0.155	0.287

Πίνακας 4.1.16: Αποτελέσματα ανεστραμμένων τριγώνων και μετρικών ποιότητας με εφαρμογή της μεθόδου MLS για απευθείας και τμηματική στροφή, για συνολική στροφή 45° του εσωτερικού τετραγώνου.



Σχήμα 4.1.25: Πλέγμα με εφαρμογή της τμηματικής μεθόδου MLS για στροφή 45° του εσωτερικού τετραγώνου (Πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού, $r=2.30$).

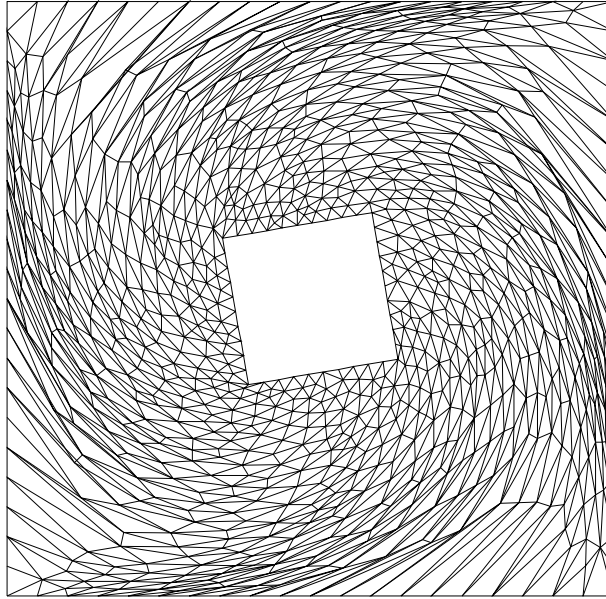
Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, η εφαρμογή της τμηματικής στροφής επηρεάζει θετικά τις μετρικές ποιότητας του πλέγματος. Αντίστοιχες δοκιμές, για σύγκριση των μεθόδων ως προς την ποιότητα, μπορούν να συνεχιστούν για διάφορες γωνίες στροφής.

Η επόμενη δοκιμή αφορά την αντοχή της μεθόδου με τμηματική στροφή για γωνίες όπου η απλή μέθοδος δεν αντέχει. Στην προηγούμενη ενότητα αποδείχθηκε ότι η απλή μέθοδος MLS στο πλέγμα των δύο τετραγώνων αντέχει έως και στροφή 95°. Για το λόγο αυτό, εφαρμόζεται η μέθοδος τμηματικά για στροφή 100°.

$k=5$ $r=5$	Αριθμός Ανεστραμμένων Στοιχείων	\bar{q}	σ	q_{\min}
Απλή μέθοδος	1	0.427	0.245	0.0001
Τμηματική μέθοδος	0	0.500	0.241	0.0049

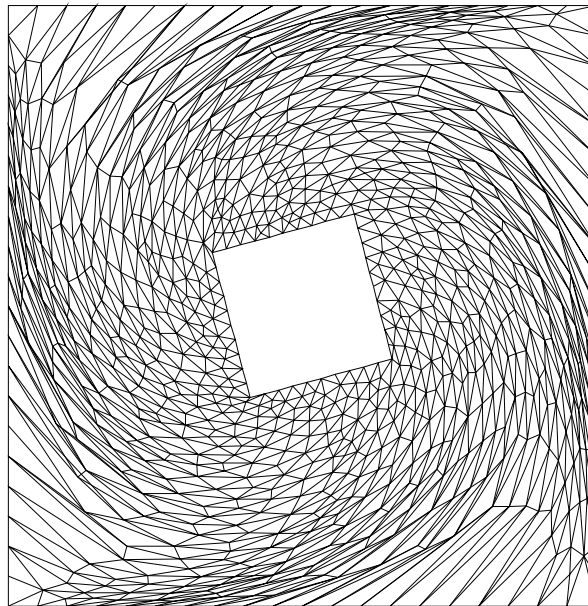
Πίνακας 4.1.17: Αποτελέσματα ανεστραμμένων τριγώνων και μετρικών ποιότητας με εφαρμογή της μεθόδου MLS για απευθείας και τμηματική στροφή, για συνολική στροφή 100° του εσωτερικού τετραγώνου.

Από τον πίνακα 4.1.17 φαίνεται ότι η μέθοδος με εφαρμογή της τμηματικής στροφής αντέχει και για 100°. Το πλέγμα αυτό παρουσιάζεται στο σχήμα 4.1.26.



Σχήμα 4.1.26: Πλέγμα με εφαρμογή της τμηματικής μεθόδου MLS για στροφή 100° του εσωτερικού τετραγώνου(Πολυώνυμο $5^{\text{ου}}$ βαθμού, $r=5$). Το πλέγμα δεν παρουσίασε κανένα ανεστραμμένο τρίγωνο.

Η επόμενη στροφή που εξετάζεται είναι για γωνία 105° . Όπως και προηγουμένως η γωνία σε κάθε επανάληψη είναι 5° επομένως η μέθοδος, για να στραφεί κατά 105° το εσωτερικό τετραγώνο, εφαρμόστηκε 21 φορές. Όμως το τελικό πλέγμα εμφάνισε μικρό αριθμό ανεστραμμένων τριγώνων, συνεπώς η τμηματική μέθοδος έχει οριακή γωνία στροφής τις 100° για αυτό το πλέγμα.

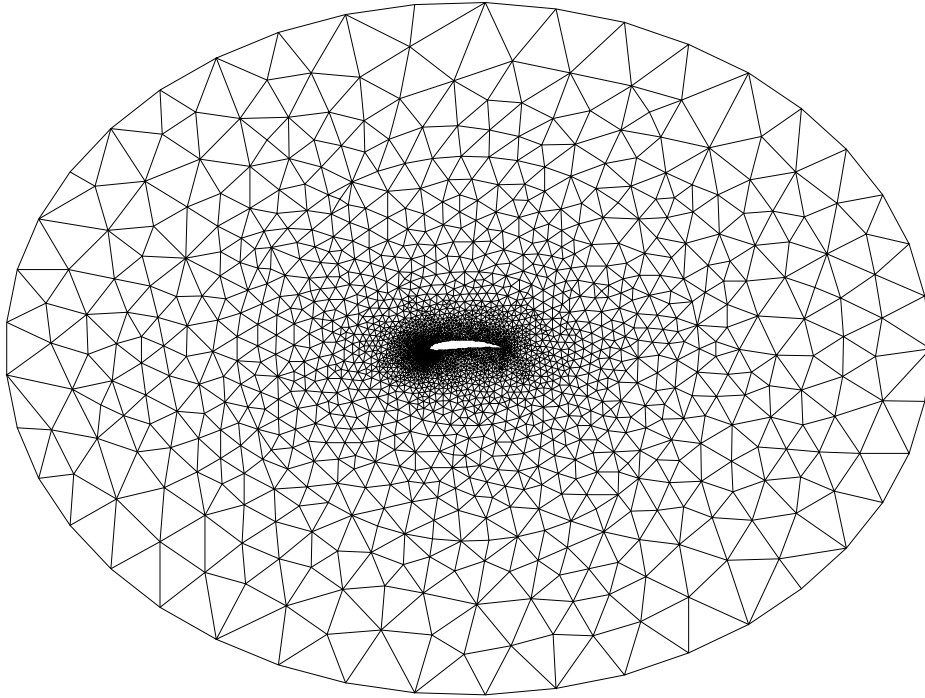


Σχήμα 4.1.27: Πλέγμα με εφαρμογή της τμηματικής μεθόδου MLS για στροφή 105° του εσωτερικού τετράγωνου(πολυώνυμο $5^{\text{ου}}$ βαθμού, $r=5$). Το πλέγμα κρίνεται μη-αποδεκτό διότι παρουσίασε 10 ανεστραμμένα στοιχεία.

Οι παραπάνω δοκιμές για αυτή την παραλλαγή της μεθόδου, έδειξαν ότι βελτιώνει την ποιότητα του πλέγματος καθώς και ότι αντέχει λίγο μεγαλύτερες γωνίες στροφής από ότι η απλή μέθοδος MLS. Όμως η χρήση αυτού του λογισμικού αυξάνει αρκετά τον υπολογιστικό χρόνο και για αυτό το λόγο η χρήση του συνιστάται μόνο σε ειδικές περιπτώσεις που η επαναπλεγματοποίηση πρέπει να αποφευχθεί.

4.2 Εφαρμογές σε μεμονωμένη αεροτομή NACA6512

Σε αυτή την ενότητα εφαρμόζεται η μέθοδος παραμόρφωσης πλέγματος MLS στο πλέγμα γύρω από μεμονωμένη αεροτομή NACA6512. Διερευνάται το πώς η στροφή της αεροτομής γύρω από το κέντρο της επηρεάζει την ποιότητα του πλέγματος που προκύπτει. Το αρχικό πλέγμα έχει δημιουργηθεί με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου με λογισμικό της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ.



Σχήμα 4.2.1: 2D μη-δομημένο πλέγμα γύρω από αεροτομή NACA6512. Η αεροτομή αποτελείται από 88 οριακούς κόμβους, ενώ το πλέγμα συνολικά αποτελείται από 2687 κόμβους και 5247 τριγωνικά στοιχεία. Εφαρμόζεται η μέθοδος MLS για τις διάφορες στροφές της αεροτομής γύρω από το κέντρο της και διερευνάται πως επηρεάζεται η ποιότητα του πλέγματος.

4.2.1 Δοκιμές ως προς την ακτίνα και τον βαθμό πολυωνύμου

Σε αυτή την υποενότητα εξετάζεται ο αριθμός των ανεστραμμένων στοιχείων και οι μετρικές ποιότητας του προκύπτοντος πλέγματος όσον αφορά την παράμετρο της ακτίνας επιρροής και τον βαθμό του πολυωνύμου. Συνάρτηση βάρους είναι η Wendland C^2 και για τη λύση του συστήματος των αγνώστων συντελεστών η μέθοδος CG.

Με στόχο την εύρεση της οριακής τιμής ακτίνας πραγματοποιήθηκαν δοκιμές για στροφή 10° της αεροτομής από το κέντρο της. Τα αποτελέσματα της σύγκλισης της μεθόδου CG παρουσιάζονται στον πίνακα 4.2.1:

Τιμή ακτίνας r	Σύγκλιση CG
1.0	Όχι
2.0	Όχι
3.0	Όχι
4.0	Όχι
5.0	Όχι
5.1	Ναι
6.0	Ναι

Πίνακας 4.2.1: Τιμές ακτίνας επιρροής της μεθόδου- Σύγκλιση της μεθόδου CG για το πλέγμα γύρω από την αεροτομή NACA6512 για γωνία στροφής 10° της αεροτομής.

Όπως παρατηρείται από τον πίνακα 4.2.1 η μικρότερη τιμή της ακτίνας για την οποία προκύπτει πλέγμα είναι ίση με 5.10. Αυτό δεν συνεπάγεται ότι είναι και η ιδανική όπως είναι γνωστό από τις αντίστοιχες δοκιμές της ενότητας 4.1.1. Στη συνέχεια για γωνία στροφής 10° εξετάζεται η ποιότητα των πλεγμάτων που προκύπτουν μέσω της μεθόδου MLS για διάφορες ακτίνες και βαθμούς πολυωνύμων. Τα αποτελέσματα των μετρικών ποιότητας φαίνονται στους πίνακες 4.2.2(α), 4.2.2(β) και 4.2.2(γ). Όπου δεν υπάρχει τιμή, το πλέγμα έχει εμφανίσει ανεστραμμένα στοιχεία και έχει κριθεί μη-αποδεκτό.

Τιμές Ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου					
	1ου	2ου	3ου	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
5.10	0.945	0.949	0.949	-	0.946	0.949
6.00	-	0.938	0.950	0.948	0.946	0.949
7.00	-	-	0.950	0.949	0.948	0.949
8.00	-	-	0.950	0.949	0.948	0.949
9.00	-	-	0.950	0.949	0.949	0.949
10.00	-	-	0.950	0.949	0.949	0.949

(α) Αποτελέσματα μέσης τιμής μετρικής ποιότητας του πλέγματος για διάφορες τιμές ακτίνας και βαθμών πολυωνύμων για στροφή 10° της αεροτομής.

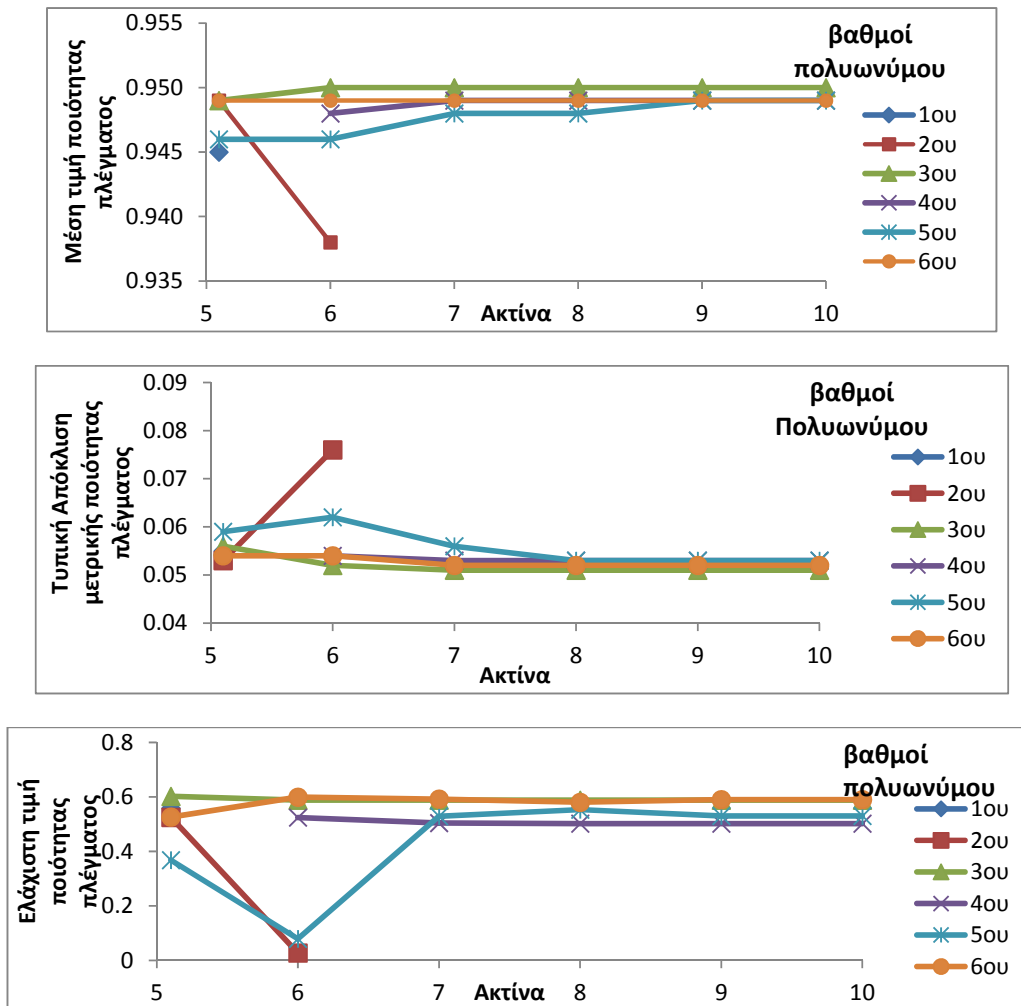
Τιμές Ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου					
	1ου	2ου	3ου	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
5.10	0.055	0.053	0.056	-	0.059	0.054
6.00	-	0.076	0.052	0.054	0.062	0.054
7.00	-	-	0.051	0.053	0.056	0.052
8.00	-	-	0.051	0.053	0.053	0.052
9.00	-	-	0.051	0.053	0.053	0.052
10.00	-	-	0.051	0.053	0.053	0.052

(β) Αποτελέσματα τυπικής απόκλισης της μετρικής ποιότητας του πλέγματος για διάφορες τιμές ακτίνας και βαθμών πολυωνύμων για στροφή 10° της αεροτομής.

Τιμές Ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου					
	1ου	2ου	3ου	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
5.10	0.559	0.525	0.602	-	0.368	0.526
6.00	-	0.027	0.588	0.524	0.079	0.599
7.00	-	-	0.588	0.504	0.529	0.592
8.00	-	-	0.588	0.502	0.553	0.580
9.00	-	-	0.588	0.502	0.530	0.590
10.00	-	-	0.588	0.502	0.530	0.590

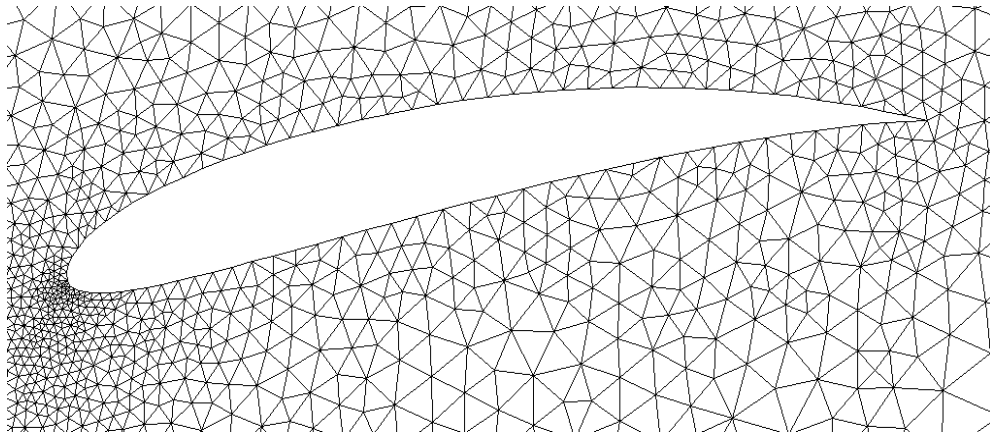
(γ) Αποτελέσματα ελάχιστης τιμής μετρικής ποιότητας του πλέγματος για διάφορες τιμές ακτίνας και βαθμών πολυωνύμων για στροφή 10° της αεροτομής.

Πίνακας 4.2.2: Αποτελέσματα με τη μέθοδο MLS, μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας πλέγματος για τιμές της ακτίνας που αποδίδουν αποδεκτό πλέγμα με χρήση πολυωνύμων 1^{ου} έως και 6^{ου} βαθμού για στροφή 10° της αεροτομής.

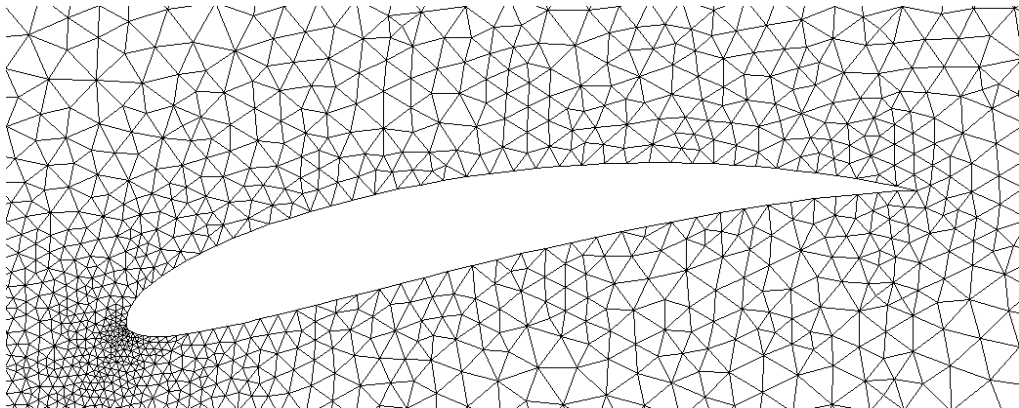


Σχήμα 4.2.2: Διαγράμματα μεταβολής της μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος ως συνάρτηση της ακτίνας για 1^{ου} έως και 6^{ου} βαθμού πολυωνύμου και στροφή 10° της αεροτομής. Τα πλέγματα προέκυψαν από τη μέθοδο MLS.

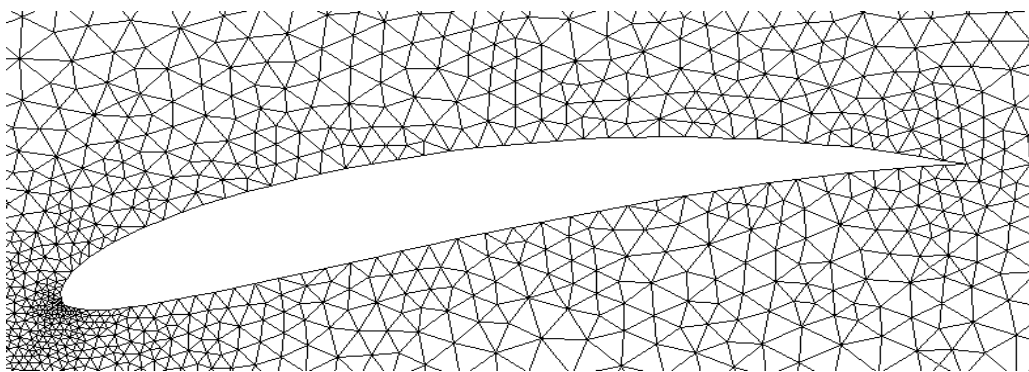
Από τα διαγράμματα του σχήματος 4.2.2 προκύπτει αρχικά το συμπέρασμα ότι η μέθοδος, για αυτήν τη στροφή, αποδίδει πολύ ποιοτικά πλέγματα. Αυτό βέβαια οφείλεται και στη μικρή τιμή της στροφής που επιλέχθηκε. Η ποιότητα του πλέγματος πέφτει όσο πιο μεγάλες είναι οι στροφές όπως θα φανεί και στη συνέχεια.



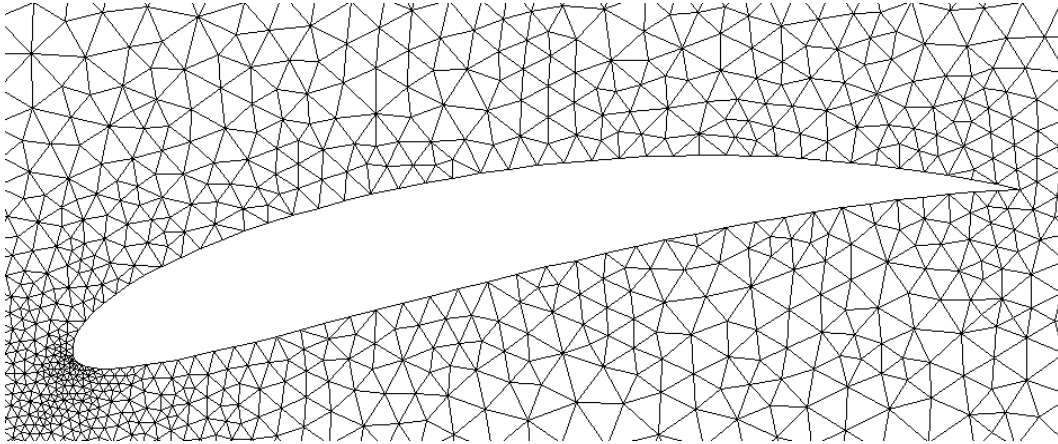
(α) Πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού και ακτίνα επιρροής 5.10.



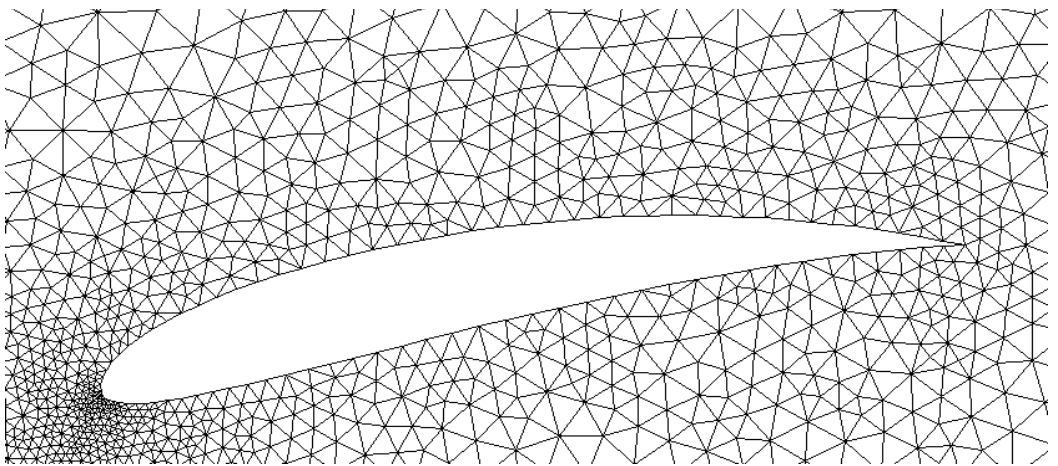
(β) Πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού και ακτίνα επιρροής 5.10.



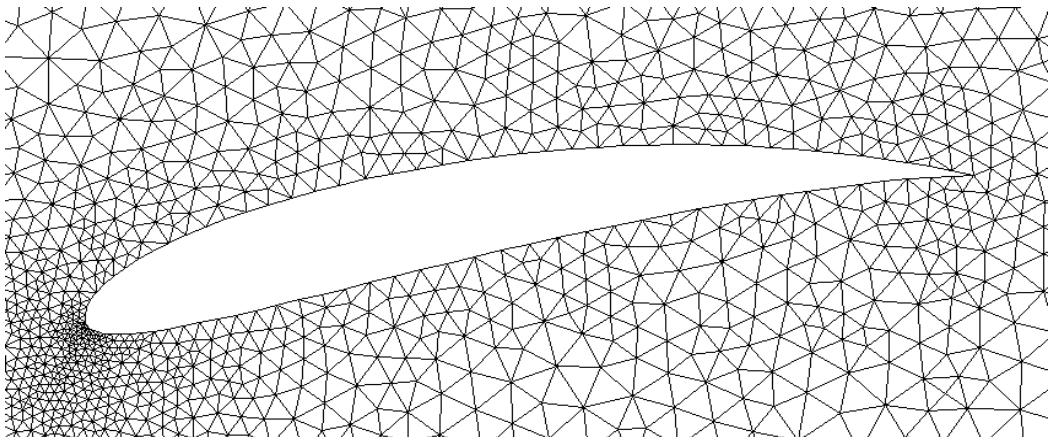
(γ) Πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού και ακτίνα επιρροής 6.00.



(δ) Πολυώνυμο 4^{ου} βαθμού και ακτίνα επιρροής 6.00.



(ε) Πολυώνυμο 5^{ου} βαθμού και ακτίνα επιρροής 8.00.



(στ) Πολυώνυμο 6^{ου} βαθμού και ακτίνα επιρροής 9.00.

Σχήμα 4.2.3: Βέλπιστα πλέγματα ως προς τις μετρικές ποιότητας με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 10° της αεροτομής για κάθε βαθμό πολυωνύμου.

Η επόμενη γωνία στροφής που εξετάζεται είναι ίση με 20°. Τα αποτελέσματα για τις μετρικές ποιότητας ως προς τις ακτίνες και τους βαθμούς πολυωνύμων που δοκιμάζονται παρουσιάζονται στους πίνακες 4.2.3(α), 4.2.3(β) και 4.2.3(γ). Όπου δεν υπάρχει τιμή, το αντίστοιχο πλέγμα έχει εμφανίσει ανεστραμμένα τρίγωνα, συνεπώς είναι ακατάλληλο για χρήση.

Τιμές Ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου					
	1ου	2ου	3ου	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
5.10	0.924	0.941	0.942	-	-	0.937
6.00	-	-	0.944	0.939	-	0.940
7.00	-	-	0.944	0.940	-	0.939
8.00	-	-	0.944	0.940	0.940	-
9.00	-	-	0.944	0.940	0.941	0.938
10.00	-	-	0.944	0.940	0.941	-

(α) Μέση τιμή μετρικής ποιότητας πλέγματος.

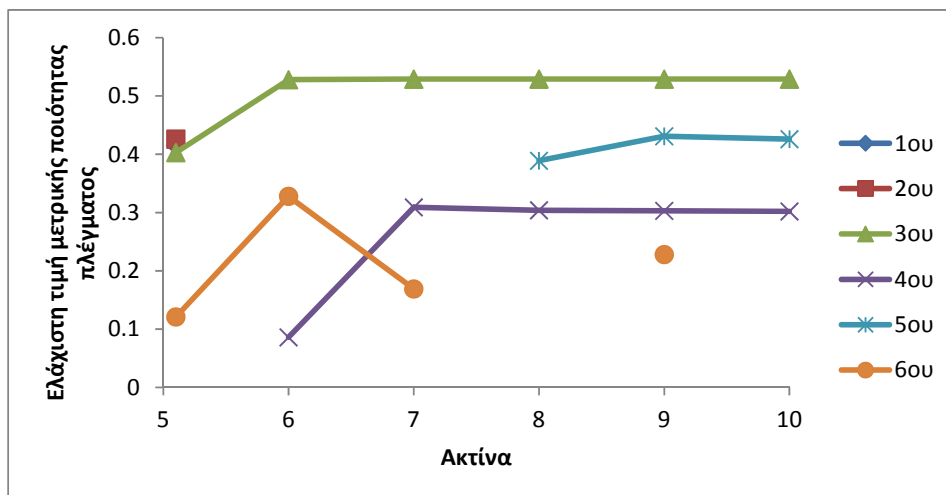
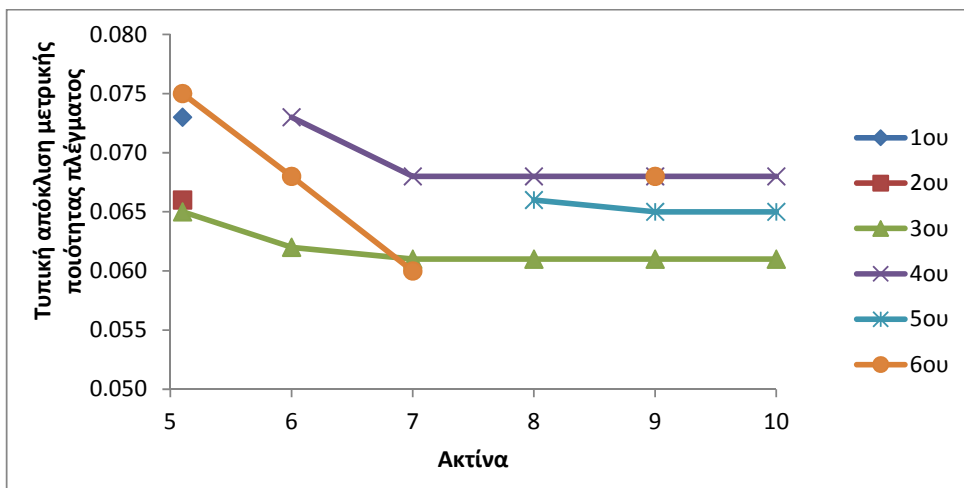
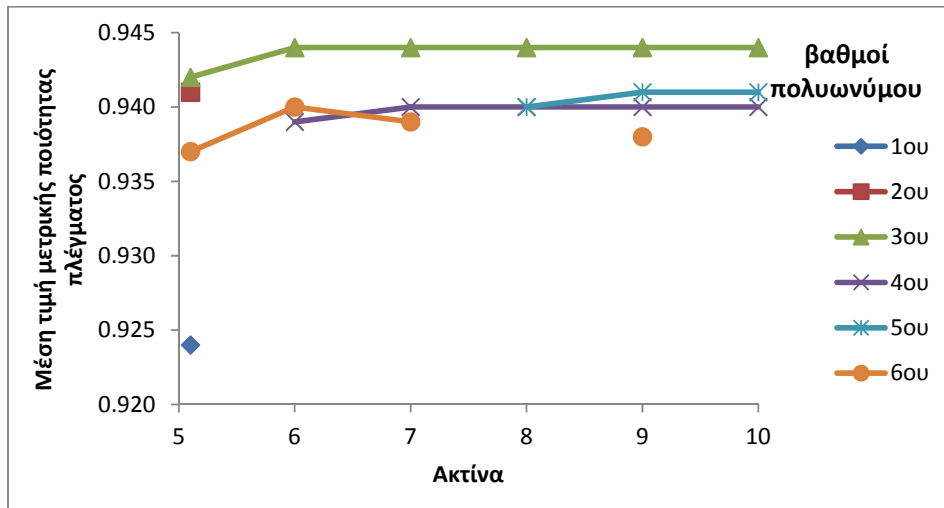
Τιμές Ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου					
	1ου	2ου	3ου	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
5.10	0.073	0.066	0.065	-	-	0.075
6.00	-	-	0.062	0.073	-	0.068
7.00	-	-	0.061	0.068	-	0.060
8.00	-	-	0.061	0.068	0.066	-
9.00	-	-	0.061	0.068	0.065	0.068
10.00	-	-	0.061	0.068	0.065	-

(β) Τυπική απόκλιση μετρικής ποιότητας πλέγματος.

Τιμές Ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου					
	1ου	2ου	3ου	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
5.10	0.415	0.426	0.403	-	-	0.121
6.00	-	-	0.528	0.086	-	0.328
7.00	-	-	0.529	0.309	-	0.169
8.00	-	-	0.529	0.304	0.389	-
9.00	-	-	0.529	0.303	0.431	0.228
10.00	-	-	0.529	0.302	0.426	-

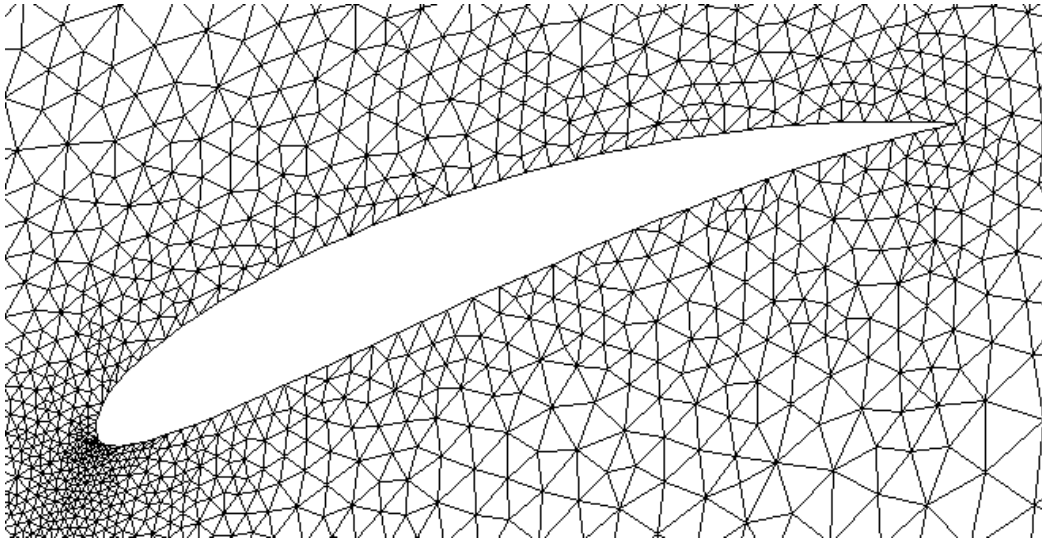
(γ) Ελάχιστη τιμή ποιότητας πλέγματος.

Πίνακας 4.2.3: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας πλέγματος για τιμές της ακτίνας που αποδίδουν πλέγμα χωρίς ανωμαλίες με χρήση πολυωνύμων 1^{ου} έως και 6^{ου} βαθμού για στροφή 20° της αεροτομής.

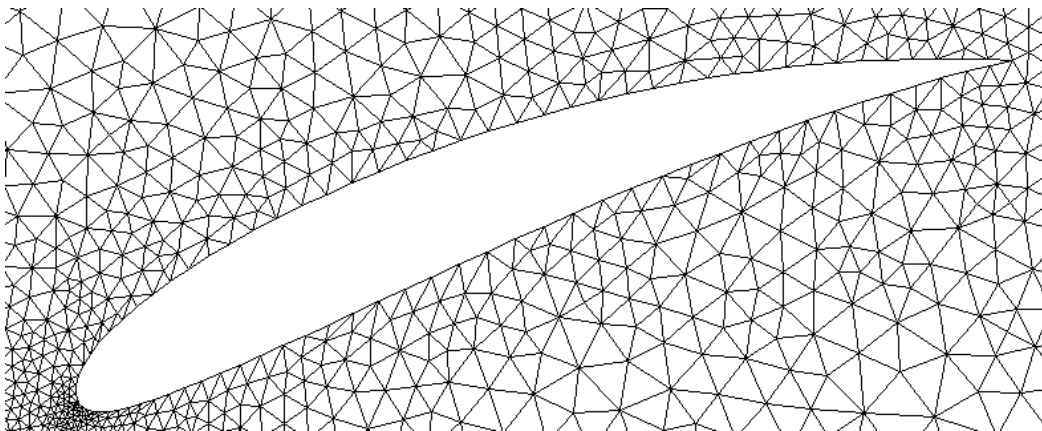


Σχήμα 4.2.4: Διαγράμματα μεταβολής της μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος ως συνάρτηση της ακτίνας για 1^{ου} έως και 6^{ου} βαθμού πολυώνυμα και στροφή 20° της αεροτομής. Τα πλέγματα προέκυψαν από τη μέθοδο MLS.

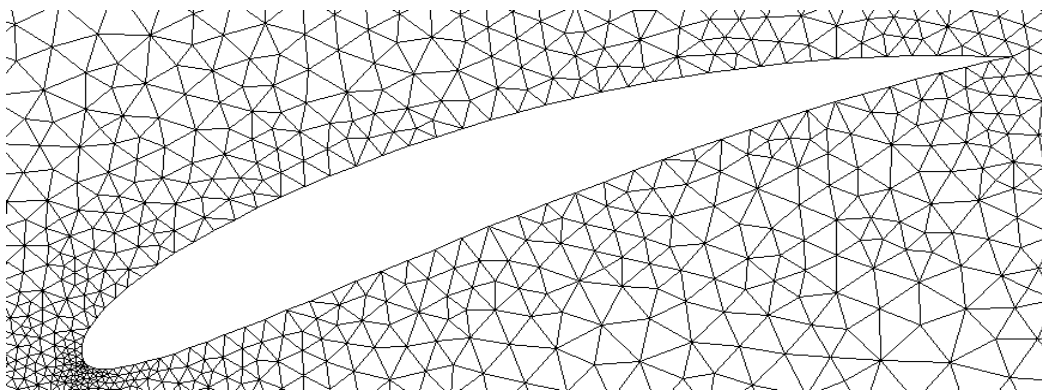
Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να τονιστεί εκ νέου η ευαισθησία της μεθόδου στη χρήση της ακτίνας επιρροής όσον αφορά το βαθμό πολυωνύμου που χρησιμοποιείται. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της διαπίστωσης για στροφή 20° , είναι η χρήση πολυωνύμου $6^{\text{ου}}$ βαθμού όπου παρουσιάζεται ασυνέχεια στις τιμές της ακτίνας επιρροής που δημιουργούν πλέγματα κατάλληλα προς χρήση.



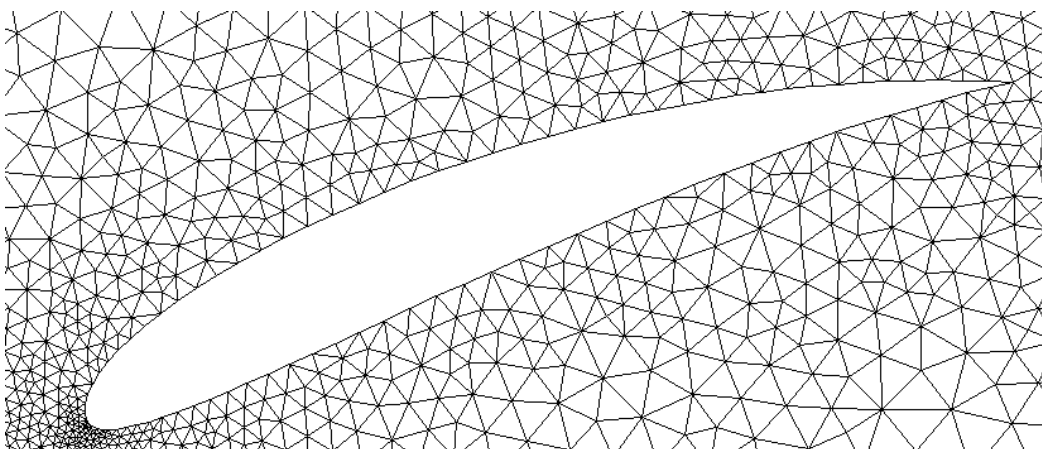
(α) Πολυώνυμο $1^{\text{ου}}$ βαθμού και ακτίνα επιρροής 5.10.



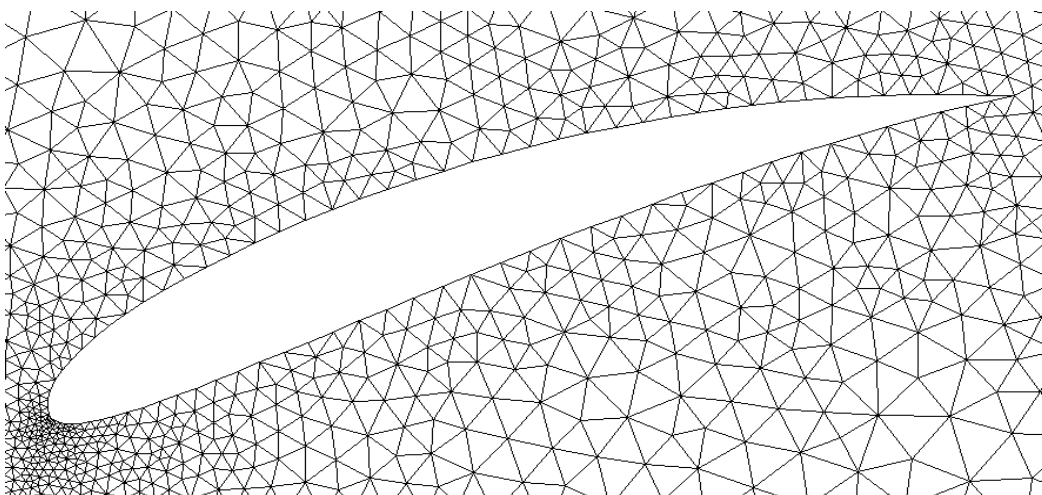
(β) Πολυώνυμο $2^{\text{ου}}$ βαθμού και ακτίνα επιρροής 5.10.



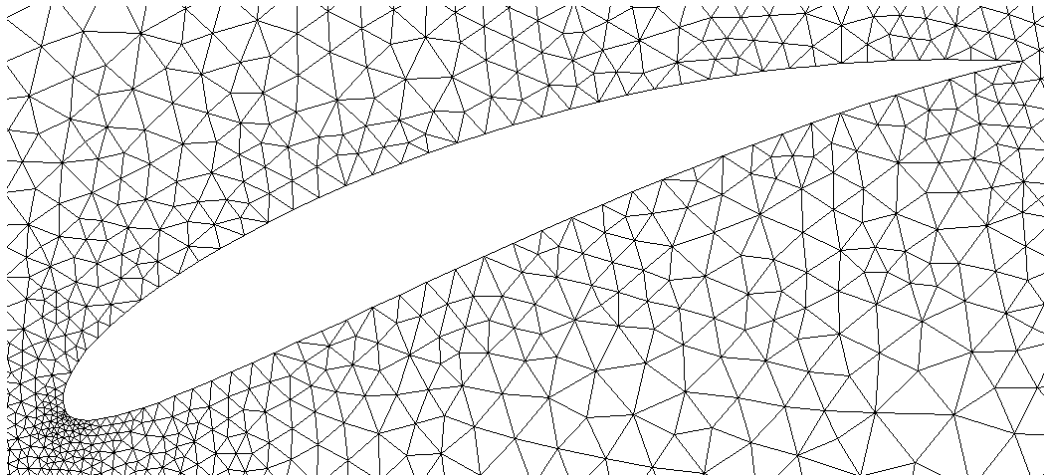
(γ) Πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού και ακτίνα επιρροής 7.00.



(δ) Πολυώνυμο 4^{ου} βαθμού και ακτίνα επιρροής 7.00.



(ε) Πολυώνυμο 5^{ου} βαθμού και ακτίνα επιρροής 9.00.



(στ) Πολυώνυμο 6^{ου} βαθμού και ακτίνα επιρροής 6.00.

Σχήμα 4.2.5: Βέλτιστα πλέγματα ως προς τις μετρικές ποιότητας με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 30° της αεροτομής, για κάθε βαθμό πολυωνύμου.

Η επόμενη στροφή που εξετάζεται είναι ίση με 30° της αεροτομής. Τα αποτελέσματα των μετρικών ποιότητας για τις ακτίνες και τα πολυώνυμα που μελετήθηκαν παρουσιάζονται στους πίνακες 4.2.4(α), 4.2.4(β) και 4.2.4(γ). Όπου δεν υπάρχει τιμή το πλέγμα είχε εμφανίσει ανεστραμμένα τρίγωνα.

Τιμές Ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου					
	1 ^{ου}	2 ^{ου}	3 ^{ου}	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
5.10	0.89	0.928	0.932	-	-	-
6.00	-	-	0.935	-	-	-
7.00	-	-	0.936	0.928	-	-
8.00	-	-	0.936	0.928	0.928	-
9.00	-	-	0.936	0.928	0.928	-
10.00	-	-	0.936	0.928	0.928	-

(α) Μέση τιμή μετρικής ποιότητας πλέγματος.

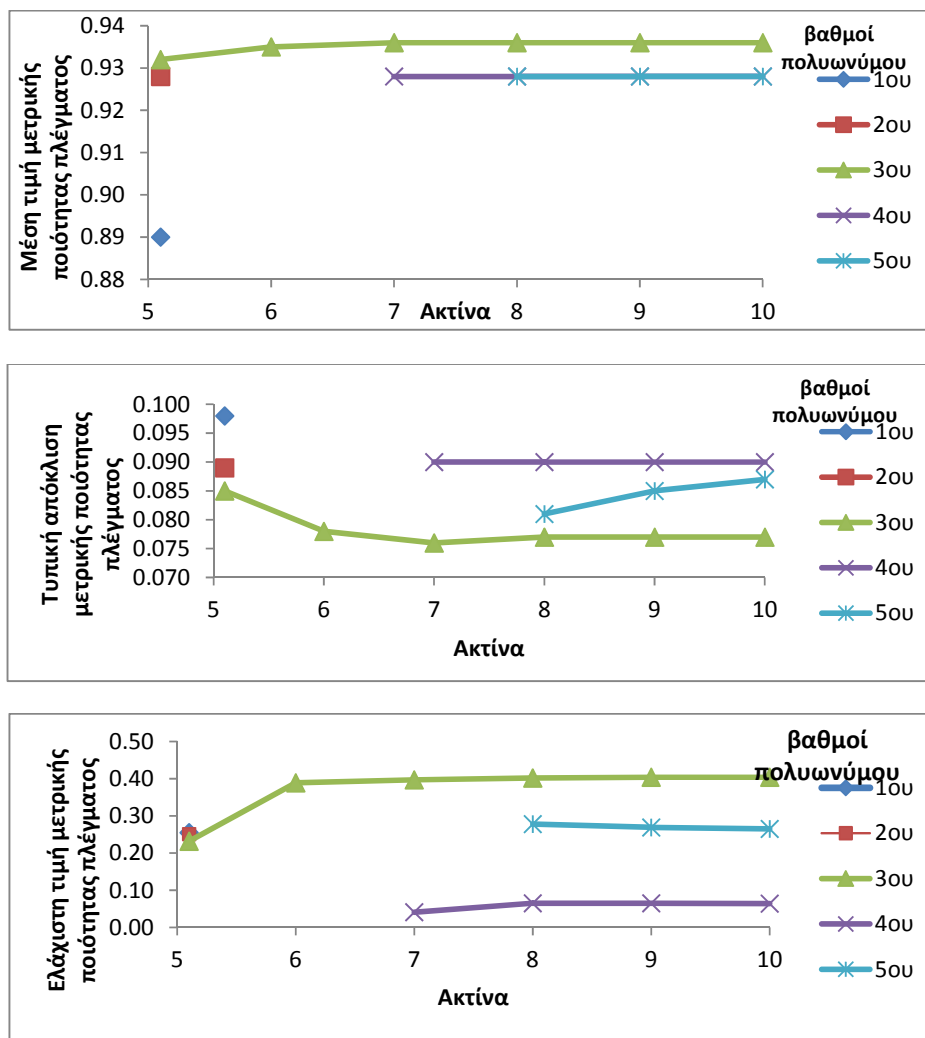
Τιμές Ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου					
	1 ^{ου}	2 ^{ου}	3 ^{ου}	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
5.10	0.098	0.089	0.085	-	-	-
6.00	-	-	0.078	-	-	-
7.00	-	-	0.077	0.090	-	-
8.00	-	-	0.077	0.090	0.081	-
9.00	-	-	0.077	0.090	0.085	-
10.00	-	-	0.077	0.090	0.087	-

(β) Τυπική απόκλιση μετρικής ποιότητας πλέγματος.

Τιμές Ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου					
	1 ^{ου}	2 ^{ου}	3 ^{ου}	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
5.10	0.255	0.251	0.232	-	-	-
6.00	-	-	0.389	-	-	-
7.00	-	-	0.397	0.041	-	-
8.00	-	-	0.402	0.065	0.278	-
9.00	-	-	0.404	0.065	0.269	-
10.00	-	-	0.404	0.064	0.265	-

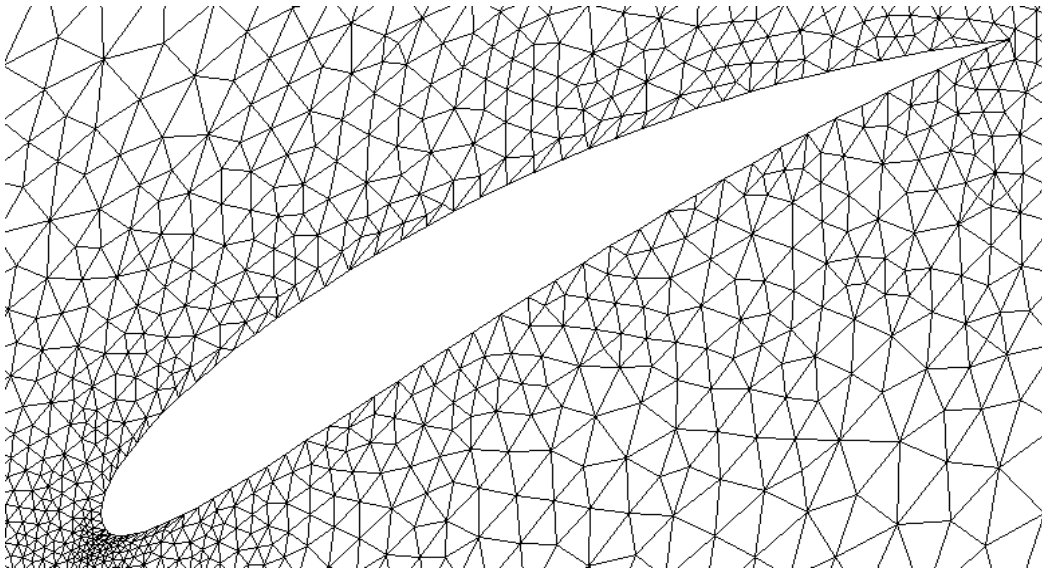
(γ) Ελάχιστη τιμή ποιότητας πλέγματος.

Πίνακας 4.2.4: Αποτελέσματα με τη μέθοδο MLS μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας πλέγματος για τιμές της ακτίνας που αποδίδουν αποδεκτό πλέγμα με χρήση πολυωνύμων 1^{ου} έως και 6^{ου} βαθμού για στροφή 30° της αεροτομής.

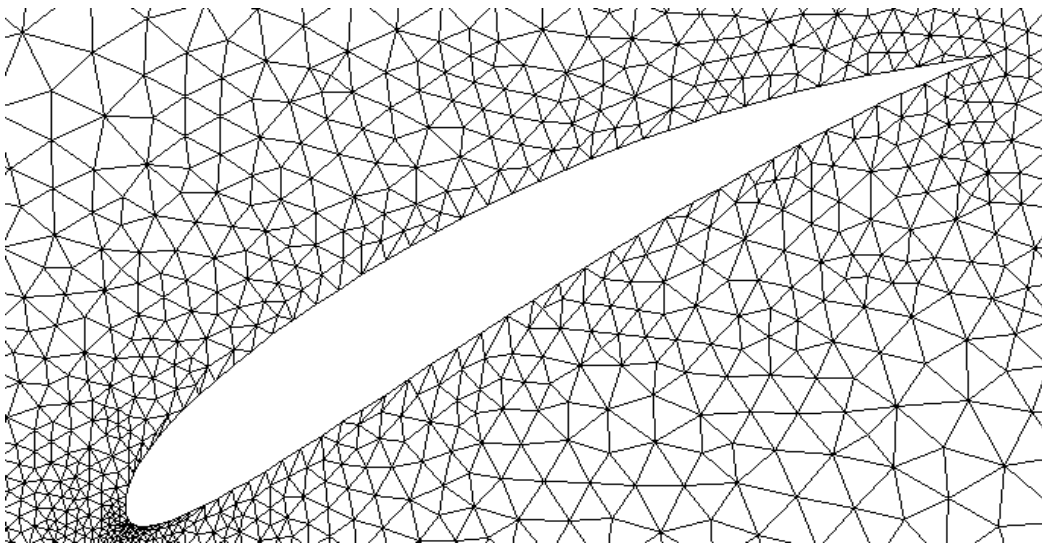


Σχήμα 4.2.6: Διαγράμματα μεταβολής της μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος ως συνάρτηση της ακτίνας για 1^{ου} έως και 5^{ου} βαθμού πολυωνύμου και στροφή της αεροτομής 30°. Τα πλέγματα προέκυψαν από τη μέθοδο MLS.

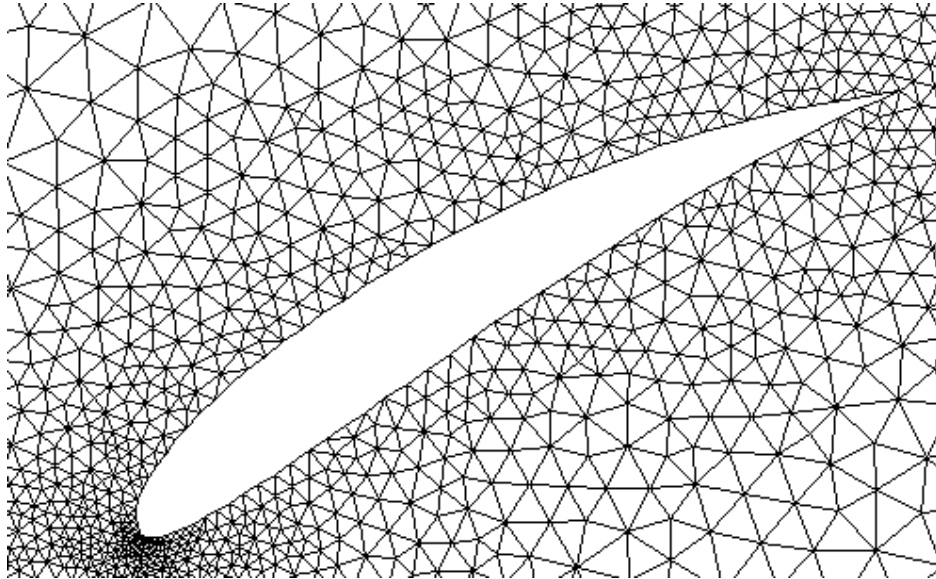
Όπως φαίνεται παραπάνω, τα αποτελέσματα των δοκιμών της μεθόδου για στροφή 30° της αεροτομής παρουσιάζουν ποικιλία. Αρχικά, η χρήση πολυωνύμου 6^{ου} βαθμού δεν απέδωσε καν αποδεκτό πλέγμα για όλες τις τιμές ακτίνας που εξετάστηκαν. Αυτό αποδεικνύει εκ νέου την ευαισθησία της μεθόδου στην τιμή της ακτίνας και ότι κάθε πολυώνυμο λειτουργεί σε ορισμένες περιοχές τιμών ακτίνας. Ακόμα, από τα διαγράμματα του σχήματος 4.2.6 φαίνεται η ποικιλία στις τιμές των μετρικών. Για παράδειγμα, η χρήση πολυωνύμου 3^{ου} βαθμού με παράλληλη αύξηση της ακτίνας βελτιώνει τις τρεις μετρικές ποιότητας, ενώ τα πολυώνυμα 4^{ου} και 5^{ου} βαθμού δεν παρουσιάζουν μεταβολή των μετρικών ως συνάρτηση της ακτίνας.



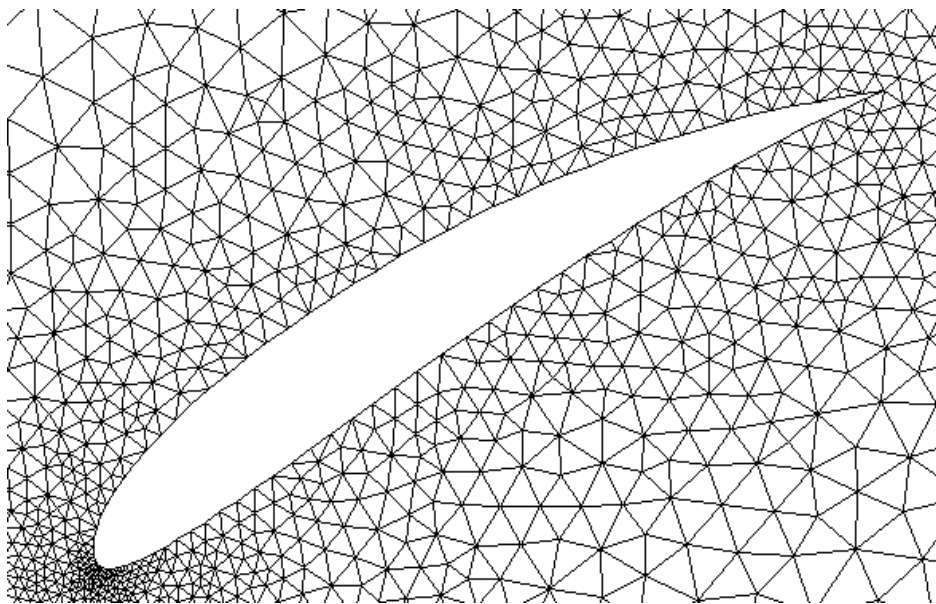
(α) Πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού και ακτίνα επιρροής 5.10.



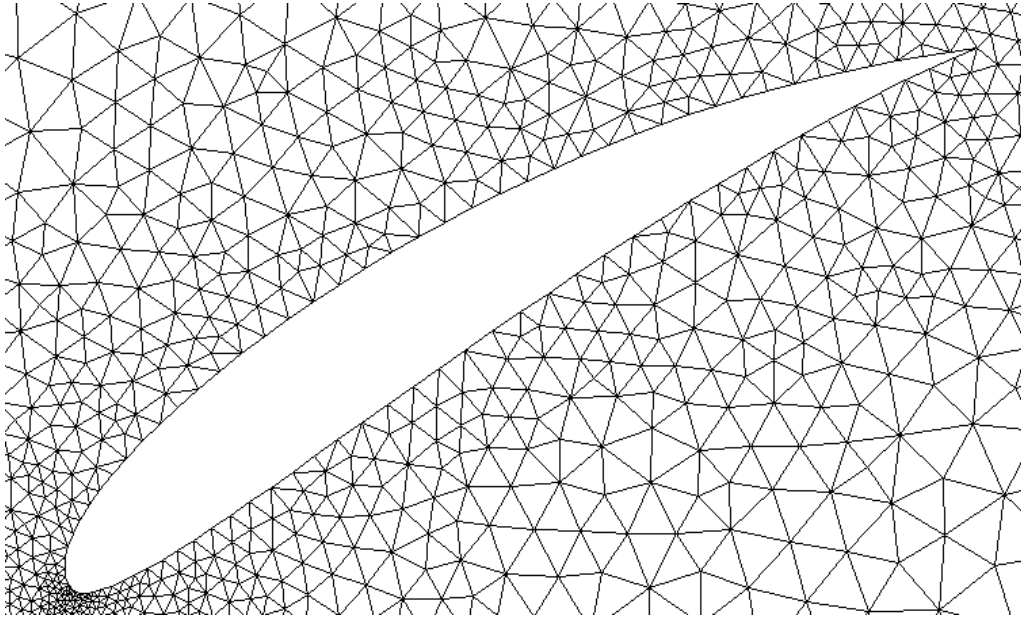
(β) Πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού και ακτίνα επιρροής 5.10.



(γ) Πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού και ακτίνα επιρροής 8.00.



(δ) Πολυώνυμο 4^{ου} βαθμού και ακτίνα επιρροής 8.00.



(ε) Πολυώνυμο 5^{ου} βαθμού και ακτίνα επιρροής 8.00.

Σχήμα 4.2.7: Βέλτιστα Πλέγματα ως προς τις μετρικές ποιότητας με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 30° της αεροτομής για κάθε βαθμό πολυωνύμου.

Η ανάλυση που προηγήθηκε για τις γωνίες στροφής 10°, 20° και 30° της αεροτομής από το κέντρο της, αξίζει να συνεχιστεί για διάφορες γωνίες για την εύρεση των βέλτιστων ως προς την ποιότητα πλεγμάτων που προκύπτουν μέσω της μεθόδου MLS.

4.2.2 Ανάλυση για μεγαλύτερες γωνίες

Στην προηγούμενη υποενότητα εξετάστηκαν λεπτομερώς οι περιπτώσεις στροφής 10°, 20° και 30° της αεροτομής και τα αποτελέσματα της μεθόδου παρουσιάστηκαν εκτενώς για διάφορες τιμές της ακτίνας και των πολυωνύμων.

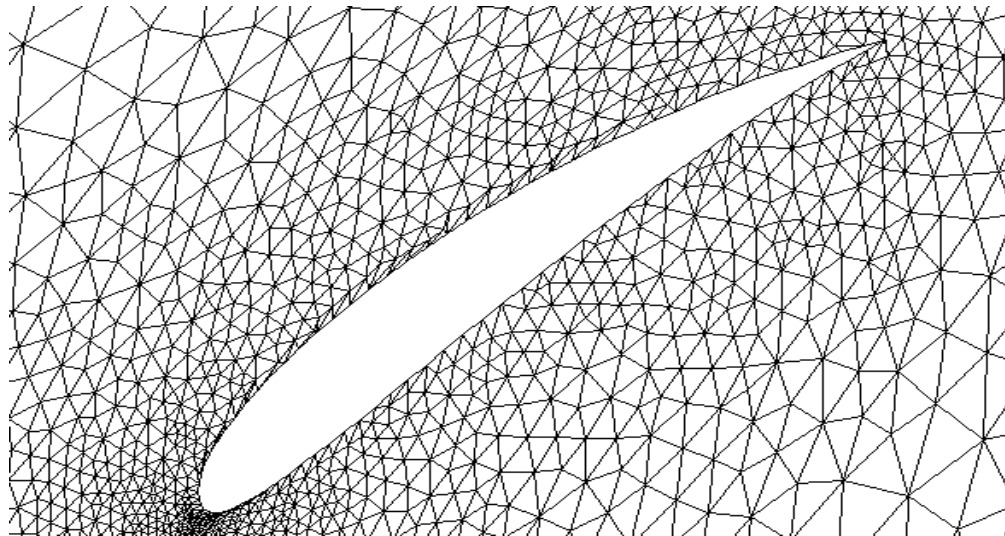
Εδώ δεν εξετάζονται αυτές οι παράμετροι, ενώ στόχος είναι η εύρεση της κρίσιμης γωνίας όπου το πλέγμα κρίνεται ακατάλληλο. Δοκιμάζονται στροφές 10° της αεροτομής ανα περίπτωση. Για λόγους συντομίας της εργασίας, για τις διάφορες γωνίες στροφής που μελετήθηκαν, παρουσιάζονται μόνο τα οριακά κατάλληλα πλέγματα ανα στροφή. Οριακά κατάλληλο πλέγμα νοείται το πρώτο αποδεκτό πλέγμα που προκύπτει από τις δοκιμές της μεθόδου.

Τα αποτελέσματα των μετρικών ποιότητας για τις διάφορες γωνίες στροφής καθώς και η κρίσιμη για την οποία η μέθοδος δεν αντέχει παρουσιάζονται στον πίνακα 4.2.5.

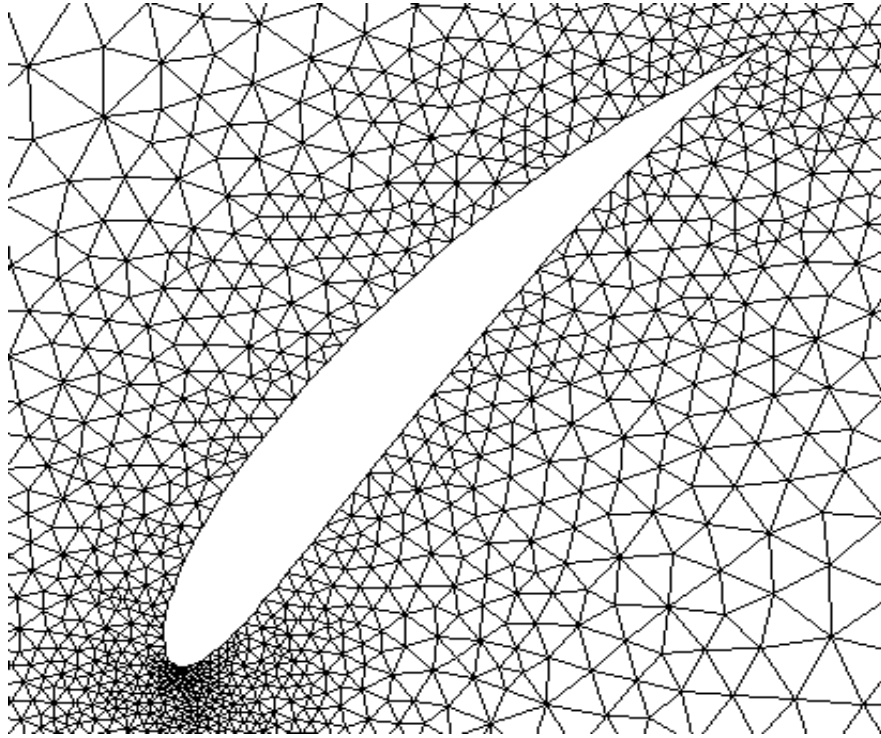
Γωνία Στροφής(°)	Ακτίνα	Βαθμός Πολυωνύμου	\bar{q}_e	σ	q_{\min}
40	5.10	1ος	0.843	0.128	0.068
50	6.00	3ος	0.916	0.118	0.198
60	6.00	3ος	0.904	0.139	0.155
70	6.00	3ος	0.892	0.161	0.082
80	7.00	3ος	0.881	0.180	0.018
90	-	-	-	-	-

Πίνακας 4.2.5: Αποτελέσματα για τη μέση τιμή, τυπική απόκλιση και ελάχιστη τιμή της ποιότητας των πλεγμάτων που προκύπτουν από τη μέθοδο MLS για τις διάφορες γωνίες στροφής. Παρουσιάζονται ο βαθμός του πολυωνύμου και η ακτίνα επιρροής για κάθε περίπτωση καθώς και η κρίσιμη γωνία στροφής για την οποία η μέθοδος δεν αποδίδει αποδεκτό πλέγμα.

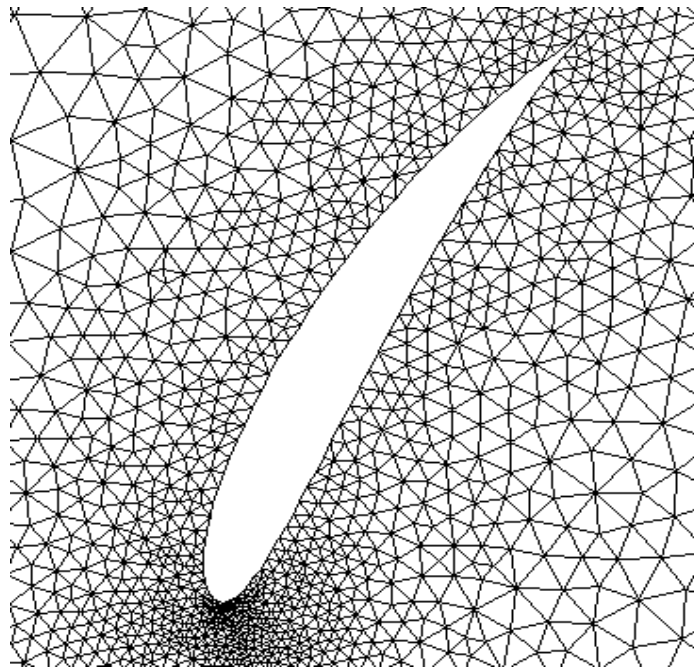
Η στροφή της αεροτομής σταμάτησε στις 90°, διότι το πλέγμα εμφάνισε ανεστραμμένα στοιχεία για όλους τους συνδυασμούς πολυωνύμων και ακτίνων που εξετάστηκαν. Τα υπόλοιπα πλέγματα που προέκυψαν από τη μέθοδο παρουσιάζονται στα σχήματα 4.2.8, 4.2.9, 4.2.10, 4.2.11 και 4.2.12.



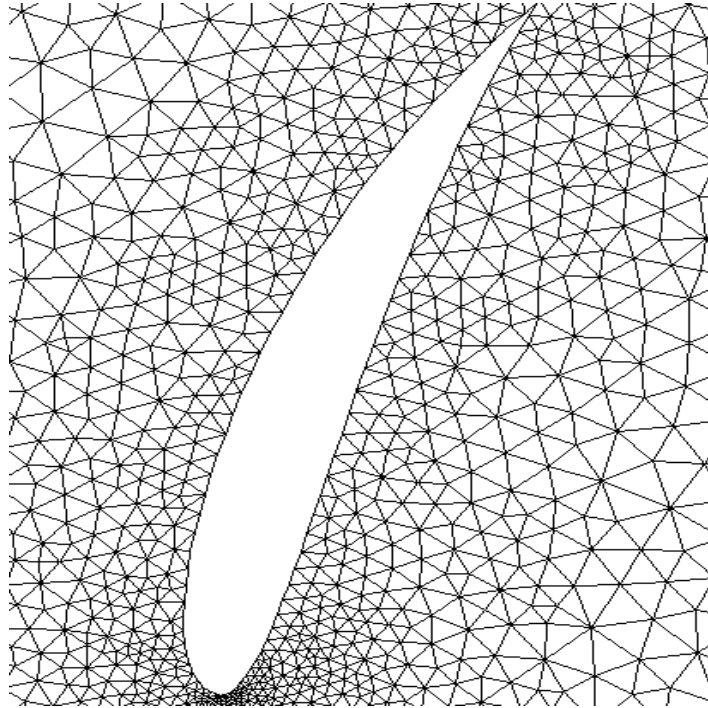
Σχήμα 4.2.8: Πλέγμα με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 40° της αεροτομής, με χρήση 1^{ου} βαθμού πολυωνύμου και ακτίνα ίση με 5.10.



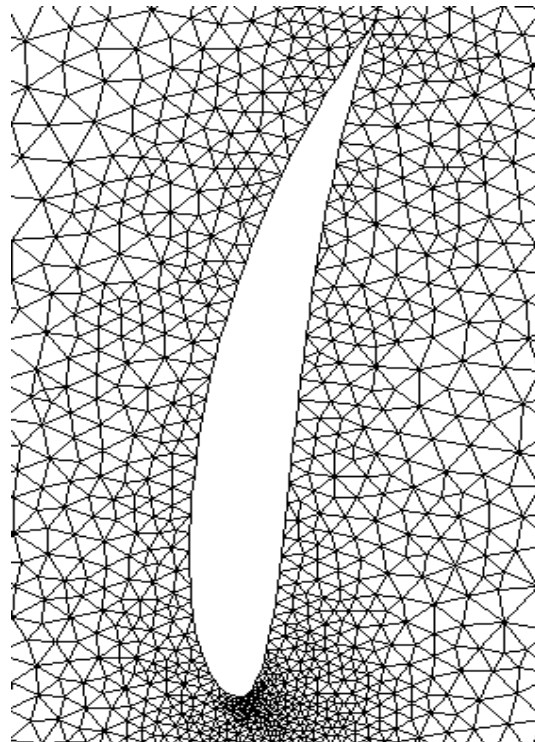
Σχήμα 4.2.9: Πλέγμα με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 50° της αεροτομής, με χρήση $3^{\text{ου}}$ βαθμού πολυωνύμου και ακτίνα ίση με 6.00.



Σχήμα 4.2.10: Πλέγμα με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 60° της αεροτομής, με χρήση $3^{\text{ου}}$ βαθμού πολυωνύμου και ακτίνα ίση με 6.00.



Σχήμα 4.2.11: Πλέγμα με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 70° της αεροτομής, με χρήση $3^{\text{ου}}$ βαθμού πολυωνύμου και ακτίνα ίση με 6.00.



Σχήμα 4.2.12: Πλέγμα με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 80° της αεροτομής, με χρήση $3^{\text{ου}}$ βαθμού πολυωνύμου και ακτίνα ίση με 7.00.

4.2.3 Εφαρμογή της τμηματικής στροφής

Σκοπός αυτής της υποενότητας είναι η διερεύνηση της αντόχης της μεθόδου MLS, όταν η στροφή της αεροτομής εφαρμόζεται τμηματικά. Δηλαδή, η μέθοδος MLS εφαρμόζεται τόσες φορές (n) όσες και το ακέραιο αποτέλεσμα της διαίρεσης των συνολικών μοιρών που πρόκειται να στρίψει η αεροτομή με τις μοίρες του βήματος. Εδώ, επιλέγεται βήμα ίσο με 5° . Σε κάθε επανάληψη, το προς προσαρμογή πλέγμα είναι αυτό που δημιουργήθηκε στην προηγούμενη επανάληψη.

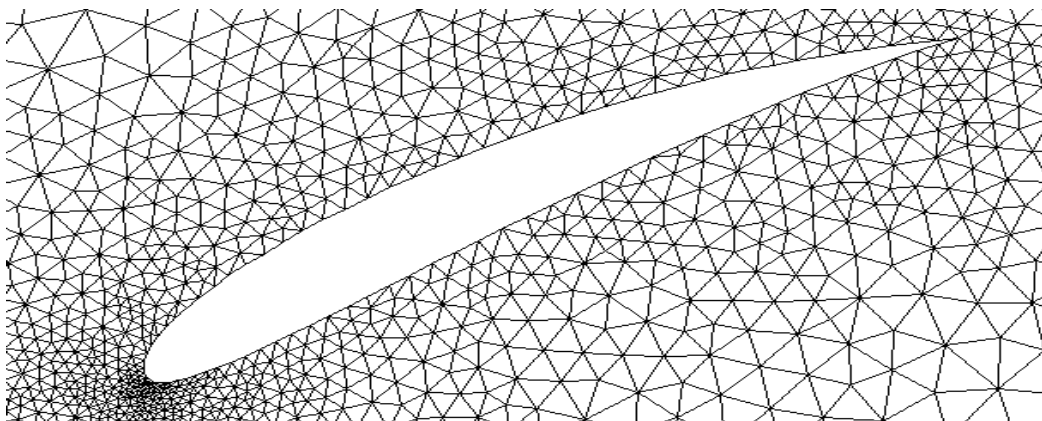
Επιλέγεται η τμηματική μέθοδος να εξεταστεί σε δύο περιπτώσεις. Αρχικά για γωνία μικρότερη της κρίσιμης όπου και η απλή μέθοδος αποδίδει αποδεκτό πλέγμα. Αυτό έχει ως στόχο τη σύγκριση της ποιότητας των πλεγμάτων μέσω της απλής και της τμηματικής μεθόδου MLS. Επιλέγεται γωνία στροφής 30° .

Τα αποτελέσματα των μετρικών ποιότητας για στροφή 30° με χρήση $3^{ου}$ βαθμού πολυωνύμου και ακτίνα ίση με 8 για την απλή και την τμηματική μέθοδο παρουσιάζονται στον πίνακα 4.2.6.

$k=3$ $r=8$	Αριθμός Ανεστραμμένων Στοιχείων	\bar{q}	σ	q_{min}
Απλή μέθοδος	0	0.936	0.077	0.402
Τμηματική μέθοδος	0	0.937	0.068	0.497

Πίνακας 4.2.6: Αποτελέσματα μετρικών ποιότητας πλέγματος με εφαρμογή της απλής και της τμηματικής μεθόδου MLS για στροφή 30° της αεροτομής.

Όπως φαίνεται, η μέθοδος MLS όταν εφαρμόζεται κατά τμήματα υπερτερεί ως προς την ποιότητα του πλέγματος που δημιουργείται, συγκριτικά με την απλή μέθοδο. Όμως, η χρήση της τμηματικής στροφής δεν προτείνεται για μικρές γωνίες στροφής, διότι ο υπολογισμός είναι πολύ χρονοβόρος σε σύγκριση με τον κώδικα που εφαρμόζει την απλή μέθοδο.

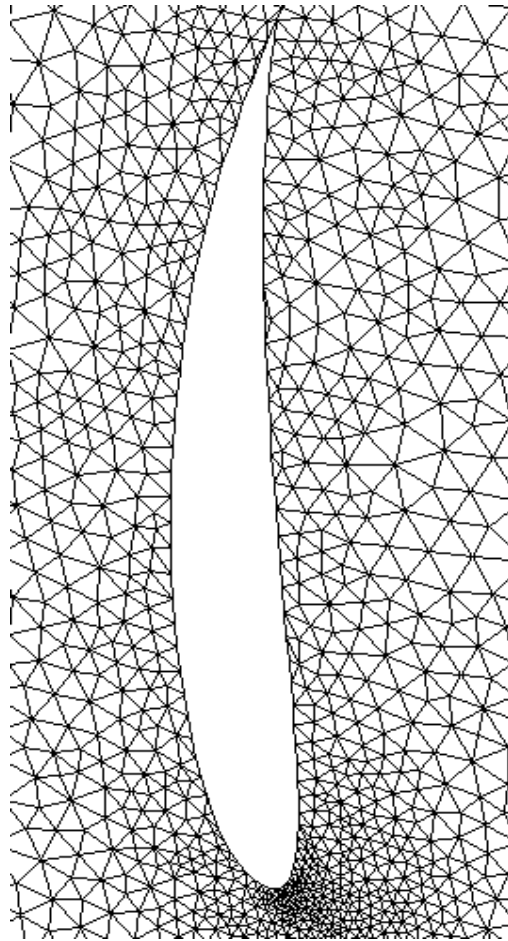


Σχήμα 4.2.13: Πλέγμα με εφαρμογή της τμηματικής μεθόδου MLS για συνολική στροφή 30° της αεροτομής. Έγινε χρήση $3^{ου}$ βαθμού πολυωνύμου και ακτίνας επιρροής 8. Η μέθοδος εφαρμόζεται 6 φορές καθώς το βήμα ανα επανάληψη είναι ίσο με 5 μοίρες.

Στη συνέχεια, εξετάζεται η στροφή των 90° της αεροτομής που είναι και η κρίσιμη για την απλή μέθοδο σε αυτό το πλέγμα. Η τμηματική εφαρμογή της μεθόδου άντεξε, δημιουργώντας αποδεκτό πλέγμα.

$k=3$ $r=7$	Αριθμός Ανεστραμμένων Στοιχείων	\bar{q}	σ	q_{min}
Απλή μέθοδος	4	0.867	0.204	0.0008
Τμηματική μέθοδος	0	0.873	0.173	0.0044

Πίνακας 4.2.7: Αποτελέσματα μετρικών ποιότητας πλέγματος με εφαρμογή της απλής και της τμηματικής μεθόδου MLS για στροφή 90° της αεροτομής.



Σχήμα 4.2.14: Πλέγμα με εφαρμογή της τμηματικής μεθόδου MLS για συνολική στροφή 90° της αεροτομής. Έγινε χρήση $3^{ου}$ βαθμού πολυωνύμου και ακτίνας επιρροής 7. Η μέθοδος εφαρμόζεται 18 φορές καθώς το βήμα ανα επανάληψη είναι ίσο με 5° .

Στη συνέχεια πραγματοποιώντας δοκιμή για συνολική στροφή 95° της αεροτομής, διαπιστώθηκε ότι το λογισμικό της τμηματικής στροφής δεν παράγει αποδεκτό πλέγμα για κανέναν συνδυασμό πολυωνύμων-ακτίνων.

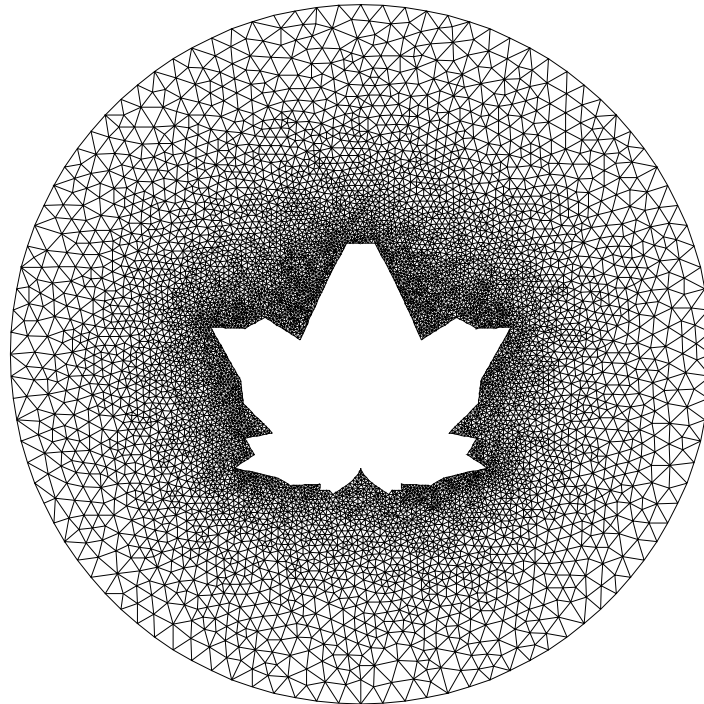
Αυτό σημαίνει ότι η οριακή γωνία, για αυτό το πλέγμα, με εφαρμογή της τμηματικής στροφής της μεθόδου MLS, είναι ίση με 90° , δηλαδή μεγαλύτερη από την οριακή της απλής μεθόδου. Ακόμη, όπως διαπιστώνεται από το παράδειγμα της στροφής 30° , η εφαρμογή τμηματικής στροφής βελτιώνει τις μετρικές ποιότητας.

Αυτά τα αποτελέσματα καθιστούν την μέθοδο πολύ χρήσιμο εργαλείο στην προσαρμογή των πλεγμάτων, όμως συνιστάται μόνο για πολύ μεγάλες στροφές γιατί ο υπολογιστικός χρόνος εφαρμογής της είναι υπερβολικά μεγάλος συγκριτικά με την απλή μέθοδο MLS.

4.3 Εφαρμογές σε πλέγμα γύρω από φύλλο πλάτανου

Η ενότητα αυτή εφαρμόζει τη μέθοδο προσαρμογής πλέγματος MLS στο πλέγμα γύρω από ένα φύλλο πλατάνου για διάφορες γωνίες στροφής του [23]. Το πλέγμα αυτό έχει δημιουργηθεί με τη βοήθεια λογισμικού της ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ, με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου.

Πραγματοποιούνται διαφορετικού μέτρου στροφές της εσωτερικής γεωμετρίας, προσαρμόζεται το αρχικό πλέγμα και διερευνάται η ποιότητα του πλέγματος. Ως συνάρτηση τοπικής επιρροής, επιλέγεται η Wendland C^2 που χρησιμοποιήθηκε και στις προηγούμενες εφαρμογές.



Σχήμα 4.3.1: Πλέγμα γύρω από γεωμετρία φύλλου πλατάνου. Το φύλλο οριοθετείται από 337 κόμβους, ενώ ο κύκλος εξωτερικά από 100 κόμβους. Συνολικά, το πλέγμα αποτελείται από 14657 τριγωνικά στοιχεία και 7547 κόμβους.

4.3.1 Δοκιμές ως προς την ακτίνα και τον βαθμό πολυωνύμου

Η υποενοότητα αυτή εξετάζει πώς οι παράμετροι της μεθόδου MLS επηρεάζουν την ποιότητα των πλεγμάτων για διάφορες στροφές του φύλλου. Οι παράμετροι αυτές, όπως είναι γνωστό από τις προηγούμενες εφαρμογές, είναι η ακτίνα τοπικής επιρροής και το πολυώνυμο που χρησιμοποιείται.

Για το πλέγμα γύρω από το φύλλο πλάτανου, εφαρμόζονται διαφόρων μέτρων στροφές, εξετάζονται οι παράμετροι της ακτίνας και του πολυωνύμου και βασικός στόχος είναι η εύρεση των ανεπιθύμητων ανεστραμμένων στοιχείων και, στη συνέχεια, οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων αυτών ως προς την ποιότητα του πλέγματος.

Ως γνωστόν (κεφ. 3), για την επίλυση του συστήματος των αγνώστων συντελεστών της μεθόδου, χρησιμοποιείται η μέθοδος CG. Σε περίπτωση που η επιλογή ακτίνας επιρροής αφήνει έστω και έναν εσωτερικό κόμβο ανεπηρέαστο από τους οριακούς (με γνωστή μετατόπιση), η μέθοδος CG δεν επιλύει το σύστημα και ο υπολογιστικός κώδικας δεν αποδίδει καν πλέγμα.

Πρώτη γωνία στροφής που επιλέγεται για τις δοκιμές, είναι ίση με 10° γύρω από το σημείο (0,0). Οι δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν ως προς την ακτίνα και τη σύγκλιση της μεθόδου CG παρουσιάζονται στον πίνακα 4.3.1:

Τιμή ακτίνας r	Σύγκλιση CG
7.0	Όχι
7.1	Όχι
7.2	Όχι
7.3	Όχι
7.4	Όχι
7.5	Όχι
7.6	Όχι
7.7	Ναι
8.0	Ναι

Πίνακας 4.3.1: Τιμές ακτίνας επιρροής της μεθόδου- Σύγκλιση της μεθόδου CG για το πλέγμα γύρω από φύλλο πλατάνου για στροφή 10° .

Συνεπώς, για αυτή τη μικρή στροφή η οριακή τιμή ακτίνας είναι ίση με 7.70. Αυτό σημαίνει ότι, από αυτήν την τιμή και πάνω μπορεί η μέθοδος MLS να δημιουργήσει πλέγματα. Στη συνέχεια, εξετάζονται οι μετρικές ποιότητας για τη στροφή των 10° με χρήση διαφόρων ακτίνων και πολυωνύμων. Τα αποτελέσματα φαίνονται στους πίνακες 4.3.2(α), 4.3.2(β), 4.3.2(γ), ενώ όπου δεν υπάρχει τιμή το αντίστοιχο πλέγμα έχει παρουσιάσει ανεστραμμένα τρίγωνα.

Τιμές Ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου					
	1 ^{ου}	2 ^{ου}	3 ^{ου}	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
7.70	0.940	0.947	0.948	-	-	-
9.00	-	-	0.949	0.946	-	-
11.00	-	-	0.949	0.947	0.946	-
13.00	-	-	0.948	0.947	0.947	0.945
15.00	-	-	0.948	0.947	0.947	0.946

(α) Μέση τιμή μετρικής ποιότητας.

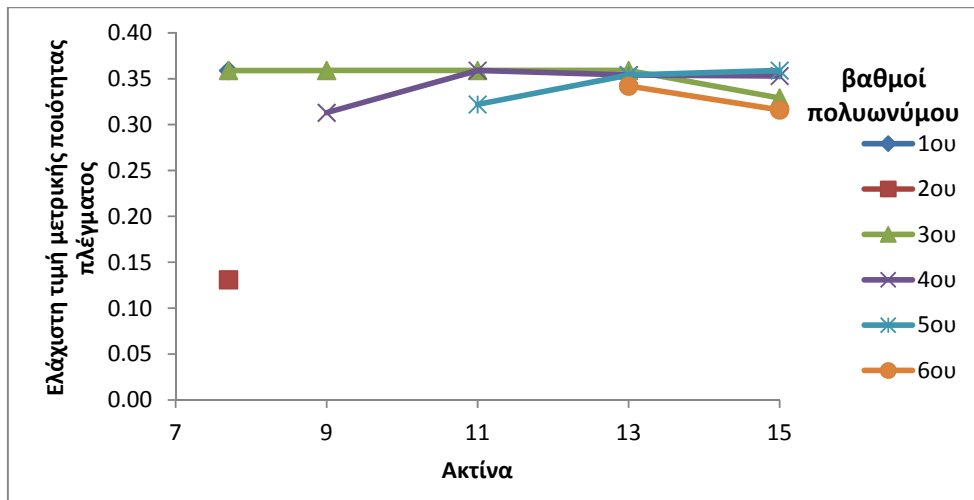
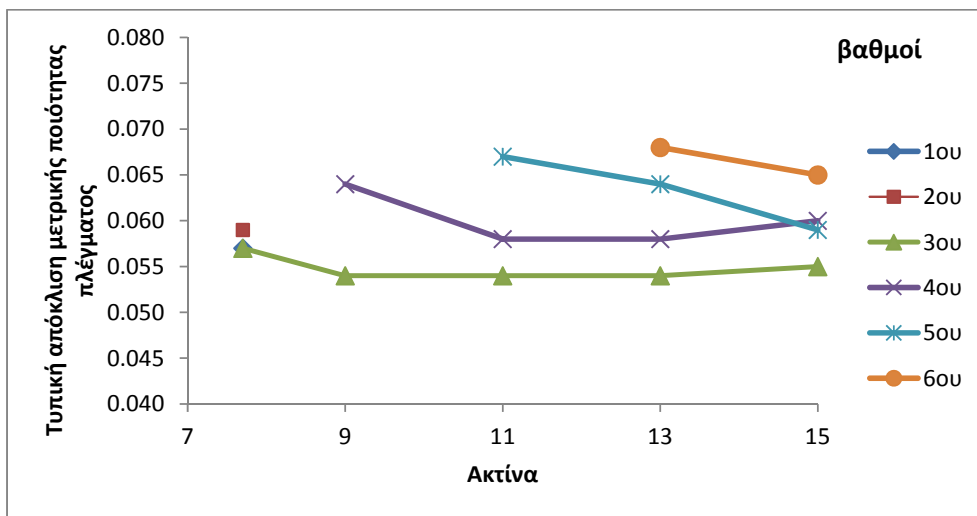
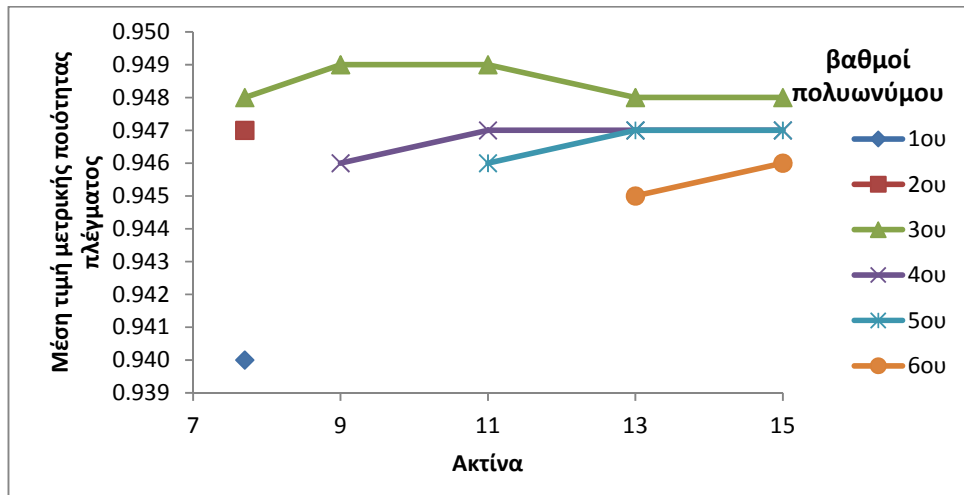
Τιμές Ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου					
	1 ^{ου}	2 ^{ου}	3 ^{ου}	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
7.70	0.058	0.059	0.057	-	-	-
9.00	-	-	0.054	0.064	-	-
11.00	-	-	0.054	0.058	0.067	-
13.00	-	-	0.054	0.058	0.064	0.068
15.00	-	-	0.055	0.060	0.059	0.065

(β) Τυπική απόκλιση μετρικής ποιότητας πλέγματος.

Τιμές Ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου					
	1 ^{ου}	2 ^{ου}	3 ^{ου}	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
7.70	0.359	0.131	0.359	-	-	-
9.00	-	-	0.359	0.313	-	-
11.00	-	-	0.359	0.359	0.322	-
13.00	-	-	0.359	0.354	0.354	0.342
15.00	-	-	0.329	0.353	0.539	0.316

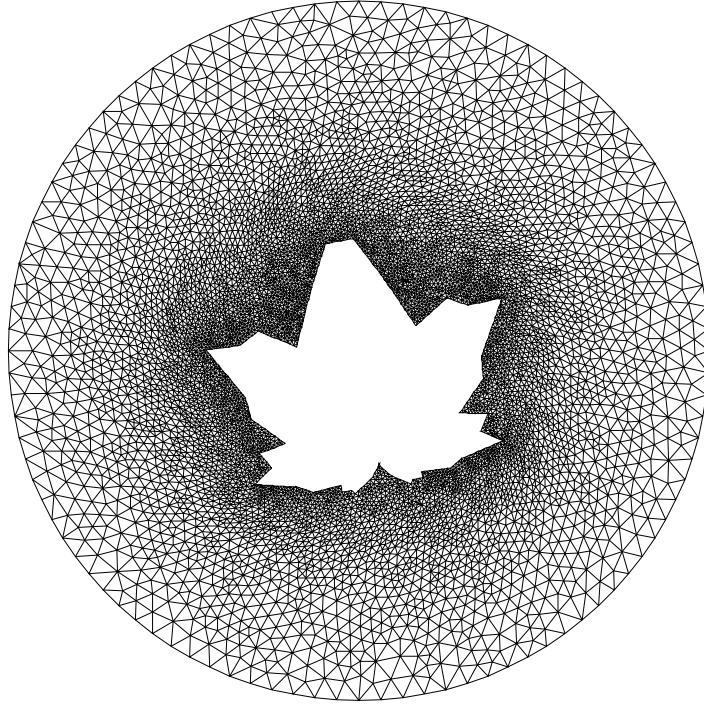
(γ) Ελάχιστη τιμή μετρικής ποιότητας πλέγματος.

Πίνακας 4.3.2: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας πλέγματος για τιμές της ακτίνας, με τη μέθοδο MLS, που αποδίδουν πλέγμα χωρίς ανωμαλίες με χρήση πολυωνύμων 1^{ου} έως και 6^{ου} βαθμού για στροφή 10° του φύλλου πλατάνου.

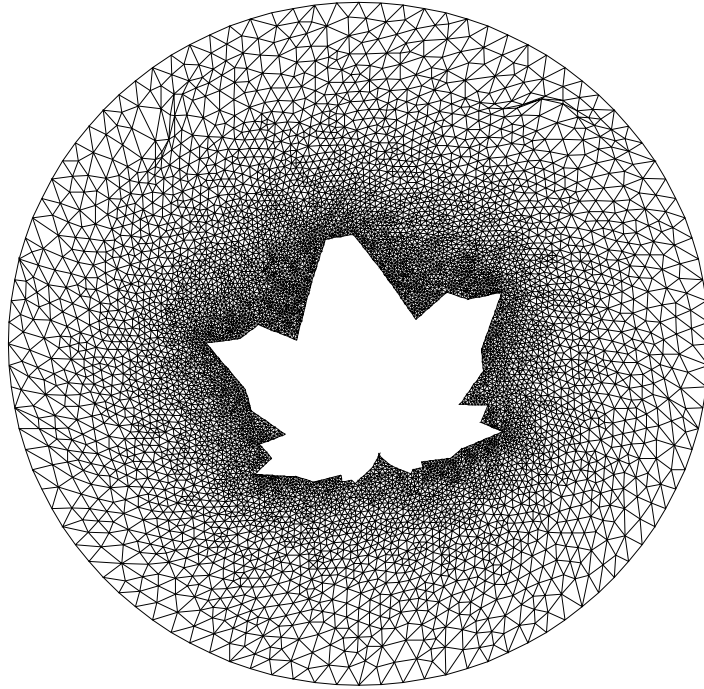


Σχήμα 4.3.2: Διαγράμματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής μετρικής ποιότητας πλέγματος ως συνάρτηση της ακτίνας για 1^{ου} έως και 6^{ου} βαθμού πολυώνυμα για στροφή 10° του φύλλου.

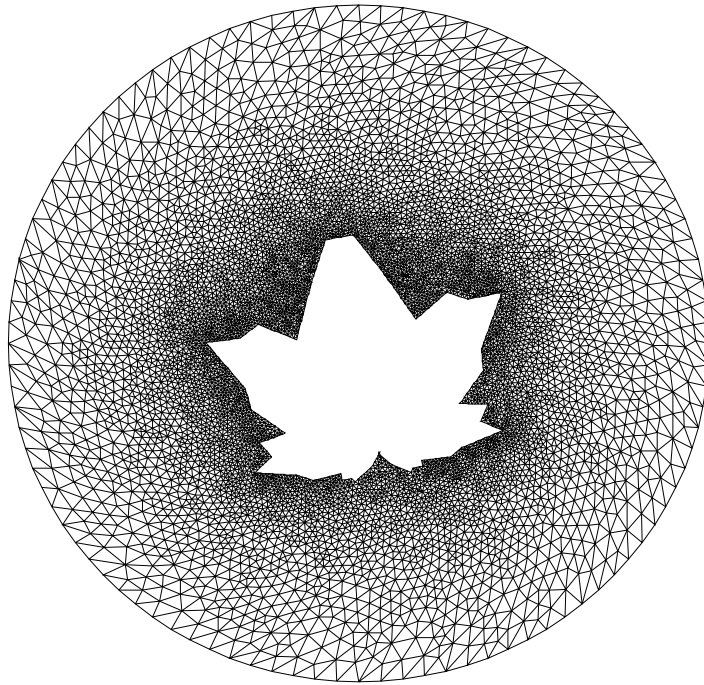
Όπως μπορεί να διαπιστωθεί από τα ανωτέρω αποτελέσματα, η μέθοδος MLS δημιουργεί ποιοτικότερα πλέγματα με χρήση 3^{ου} βαθμού πολυώνυμο για αυτήν τη στροφή. Ακόμη, όπως ακριβώς συνέβη και στις προηγούμενες εφαρμογές, τα πολυώνυμα 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού αποδίδουν αποδεκτά πλέγματα με χρήση μικρών τιμών ακτίνας, ενώ αυξάνοντας την ακτίνα δημιουργούν πλέγματα με ανεστραμμένα στοιχεία. Τέλος, υψηλότεροι βαθμοί πολυωνύμου χρειάζονται μεγαλύτερες τιμές ακτίνας για να δημιουργήσουν αποδεκτά πλέγματα.



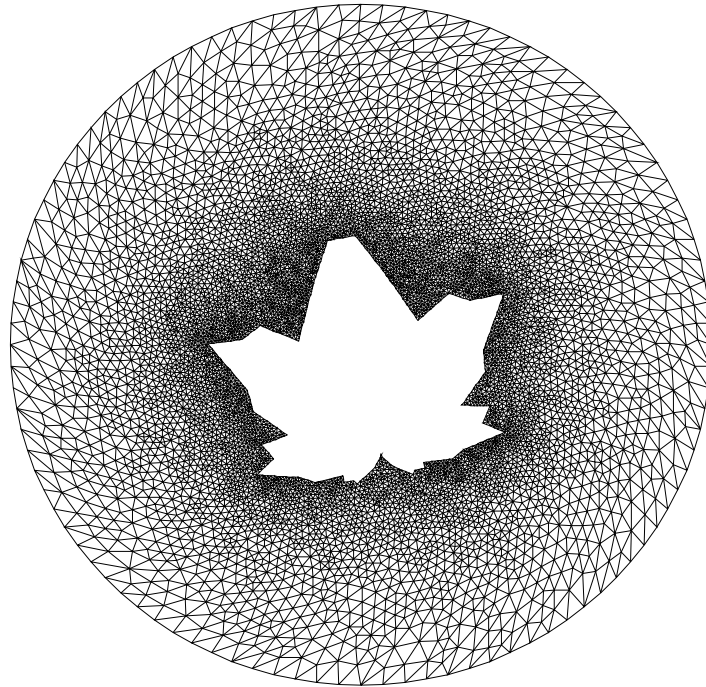
(α) Πλέγμα με χρήση 1^{ου} βαθμού πολυώνυμο και ακτίνας 7.70 για στροφή 10°.



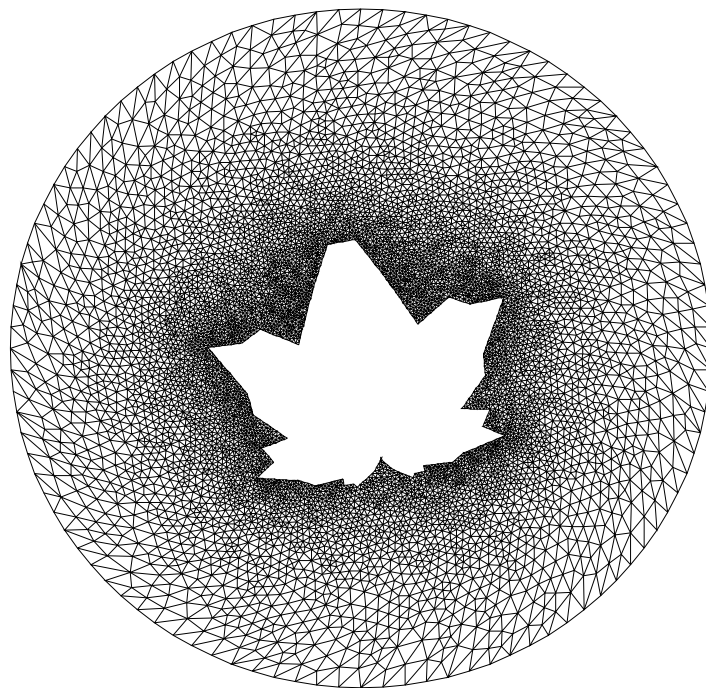
(β) Πλέγμα με χρήση 2^{ου} βαθμού πολυώνυμο και ακτίνας 7.70 για στροφή 10°.



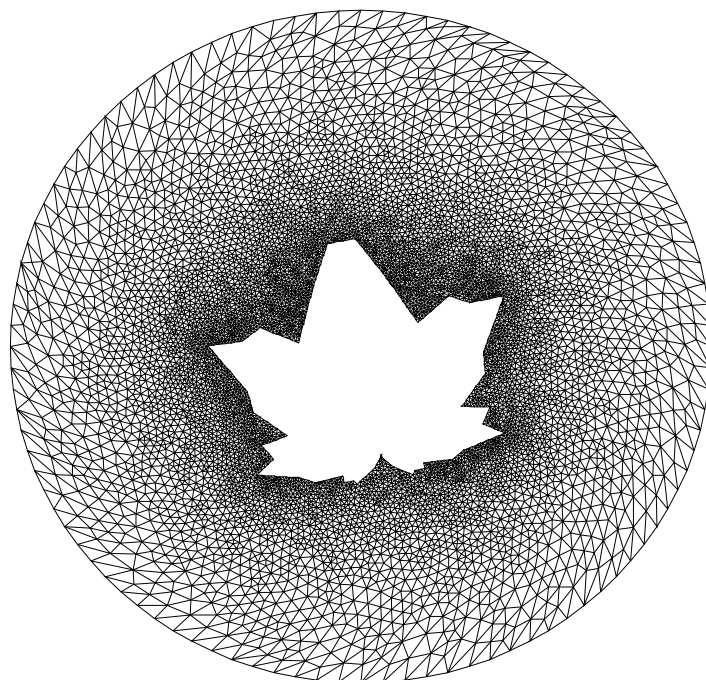
(γ) Πλέγμα με χρήση 3^{ου} βαθμού πολυώνυμο και ακτίνας 9.00 για στροφή 10°.



(δ) Πλέγμα με χρήση 4^{ου} βαθμού πολυώνυμο και ακτίνας 11 για στροφή 10°.



(ε). Πλέγμα με χρήση 5^{ου} βαθμού πολυώνυμο και ακτίνας 15 για στροφή 10°.



(στ) Πλέγμα με χρήση 6^{ου} βαθμού πολυώνυμο και ακτίνας 15 για στροφή 10^ο.

Σχήμα 4.3.3: Βέλτιστα πλέγματα ως προς τις μετρικές ποιότητας με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 10^ο του φύλλου, για κάθε πολυώνυμο με την αντίστοιχη ακτίνα.

Η επόμενη γωνία στροφής που εξετάζεται είναι ίση με 20^ο. Τα αποτελέσματα των μετρικών ποιότητας για διάφορες ακτίνες και πολυώνυμα 1^{ης} έως και 6^{ης} τάξης παρουσιάζονται στον πίνακα 4.3.3.

Τιμές Ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου					
	1 ^{ου}	2 ^{ου}	3 ^{ου}	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
7.70	-	-	0.924	-	-	-
9.00	-	-	0.924	-	-	-
11.00	-	-	0.924	-	0.925	-
13.00	-	-	-	0.926	0.925	0.923
15.00	-	-	-	0.926	0.925	0.923

(α) Μέση τιμή μετρικής ποιότητας.

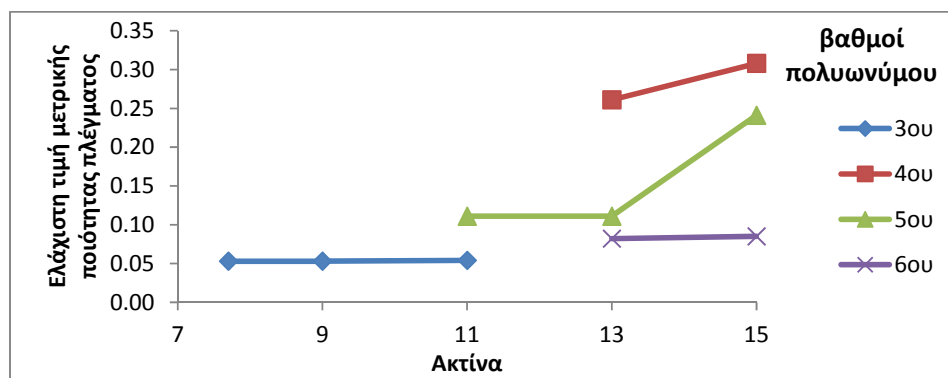
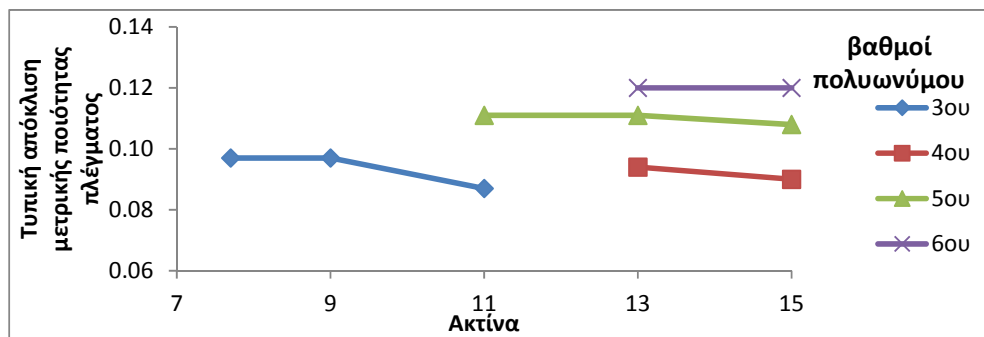
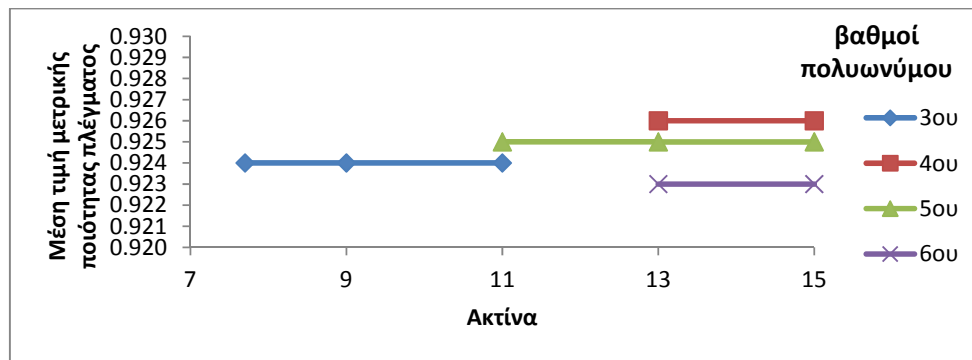
Τιμές Ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου					
	1 ^{ου}	2 ^{ου}	3 ^{ου}	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
7.70	-	-	0.097	-	-	-
9.00	-	-	0.097	-	-	-
11.00	-	-	0.087	-	0.111	-
13.00	-	-	-	0.094	0.111	0.120
15.00	-	-	-	0.090	0.108	0.120

(β) Τυπική απόκλιση μετρικής ποιότητας.

Τιμές Ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου					
	1 ^{ου}	2 ^{ου}	3 ^{ου}	4 ^{ου}	5 ^{ου}	6 ^{ου}
7.70	-	-	0.053	-	-	-
9.00	-	-	0.053	-	-	-
11.00	-	-	0.054	-	0.111	-
13.00	-	-	-	0.261	0.111	0.082
15.00	-	-	-	0.308	0.241	0.085

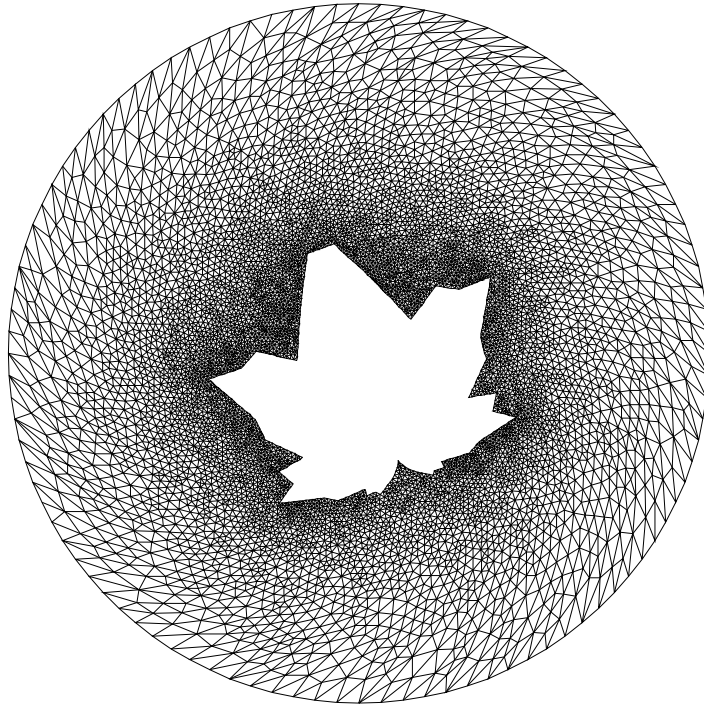
(γ) Ελάχιστη τιμή μετρικής ποιότητας.

Πίνακας 4.3.3: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας πλέγματος για τιμές της ακτίνας που αποδίδουν πλέγμα χωρίς ανωμαλίες με χρήση πολυωνύμων 1^{ου} έως και 6^{ου} βαθμού για στροφή 20° του φύλλου πλάτανου με τη μέθοδο MLS.

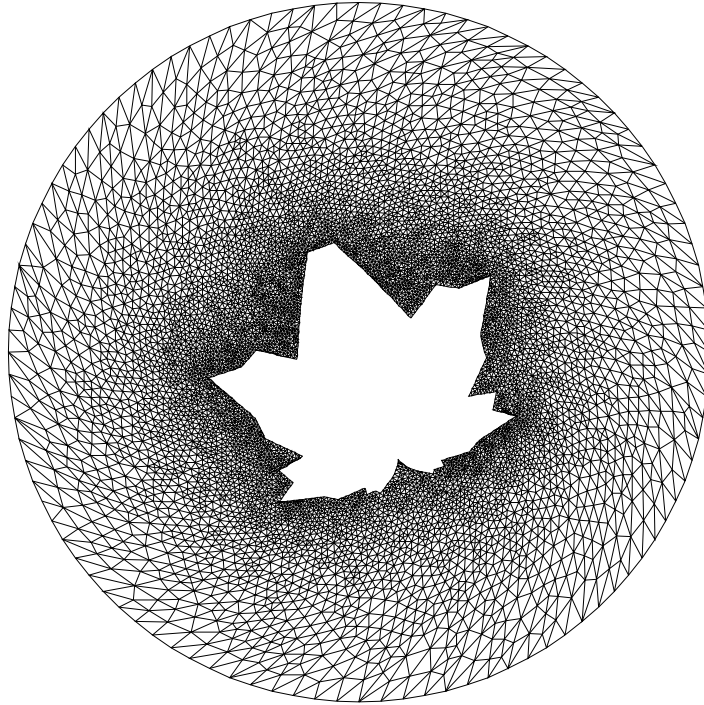


Σχήμα 4.3.4: Διαγράμματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής μετρικής ποιότητας πλέγματος ως συνάρτηση της ακτίνας για 3^{ου} έως και 6^{ου} βαθμού πολυώνυμο για την στροφή 20° του φύλλου.

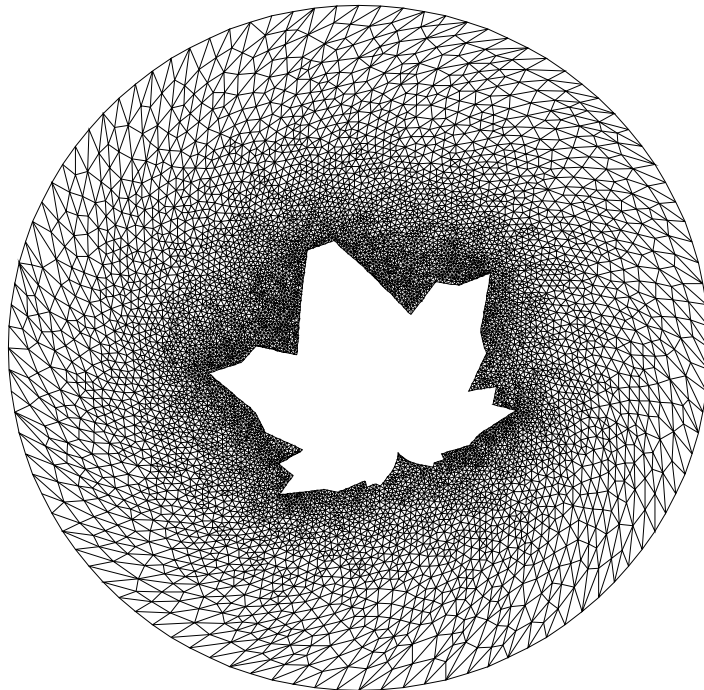
Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα παραπάνω, για αυτή τη στροφή η χρήση πολυωνύμων 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού δεν μπορεί να δημιουργήσει αποδεκτό πλέγμα για καμία τιμή ακτίνας επιρροής. Επίσης, τα πολυώνυμα 3^{ου} έως και 6^{ου} βαθμού αποδίδουν αποδεκτά πλέγματα μόνο για ορισμένες τιμές ακτίνων. Τέλος, τα αποτελέσματα παρουσιάζουν ποικιλία ως προς τις μετρικές ποιότητας. Η βέλτιστη μέση τιμή βρίσκεται με χρήση 4^{ου} βαθμού πολυώνυμου και ακτίνας 13, η βέλτιστη τυπική απόκλιση με χρήση 3^{ου} βαθμού πολυώνυμου και ακτίνας 11 και η βέλτιστη ελάχιστη τιμή ποιότητας με χρήση 4^{ου} βαθμού πολυώνυμου και ακτίνας 15. Αυτά τα πλέγματα φαίνονται στα σχήματα 4.3.5(α), 4.3.5(β) και 4.3.5(γ).



(α) Πλέγμα με χρήση 4^{ου} βαθμού πολυώνυμου και ακτίνας 13 για στροφή 20°. Το πλέγμα αυτό παρουσιάζει τη βέλτιστη μέση τιμή ποιότητας.



(β) Πλέγμα με χρήση 3^{ου} βαθμού πολυώνυμου και ακτίνας 11 για στροφή 20°. Το πλέγμα αυτό παρουσιάζει τη βέλτιστη τυπική απόκλιση μετρικής ποιότητας.



(γ) Πλέγμα με χρήση 4^{ου} βαθμού πολυώνυμου και ακτίνας 15 για στροφή 20° του φύλλου. Το πλέγμα αυτό παρουσιάζει τη βέλτιστη ελάχιστη τιμή ποιότητας.

Σχήμα 4.3.5: Βέλτιστα πλέγματα ως προς τις μετρικές ποιότητας με εφαρμογή της μεθόδου MLS για στροφή 20°.

4.3.2 Ανάλυση για μεγαλύτερες γωνίες

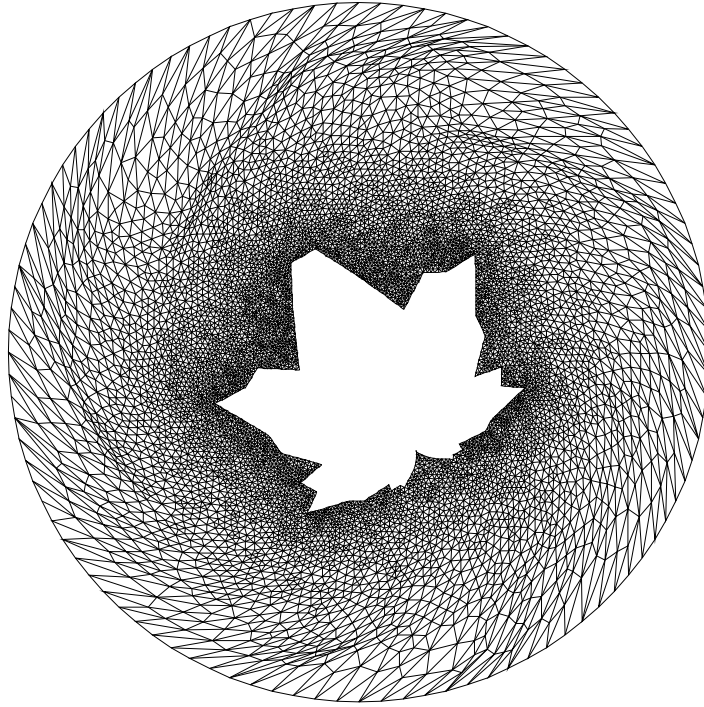
Στην προηγούμενη υποενότητα εξετάστηκαν λεπτομερώς οι περιπτώσεις στροφής 10° και 20° του φύλλου πλατάνου και τα αποτελέσματα της μεθόδου παρουσιάστηκαν εκτενώς για διάφορες τιμές της ακτίνας και των πολυωνύμων.

Στην υποενότητα αυτή δεν εξετάζονται αυτές οι παράμετροι, ενώ στόχος είναι η εύρεση της κρίσιμης γωνίας όπου το προκύπτον πλέγμα κρίνεται μη-αποδεκτό. Δοκιμάζονται στροφές του φύλλου ανά 10°. Για λόγους συντομίας της εργασίας, για τις διάφορες γωνίες στροφής που μελετήθηκαν, παρουσιάζονται μόνο τα οριακά κατάλληλα πλέγματα ανα στροφή.

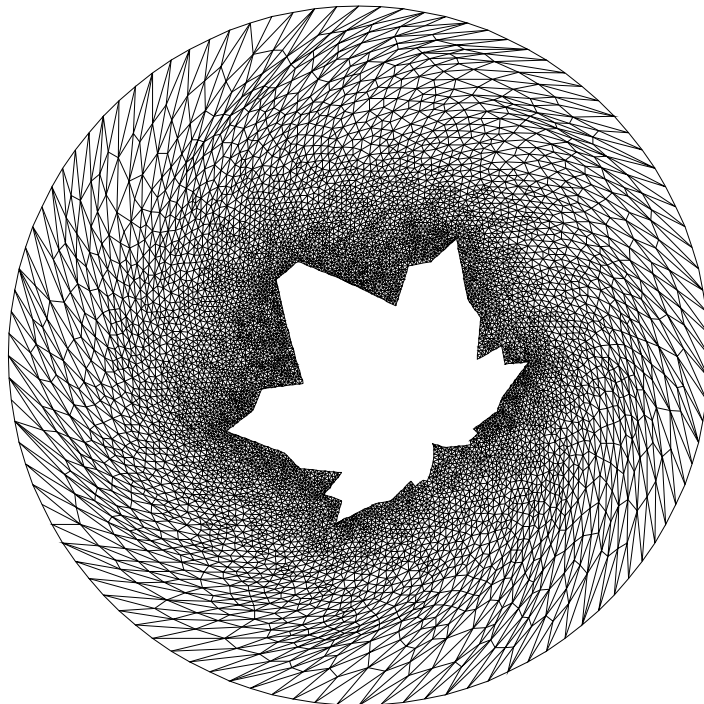
Γωνία Στροφής(°)	Ακτίνα	Βαθμός Πολυωνύμου	\bar{q}_e	σ	q_{\min}
30	11	4	0.898	0.144	0.070
40	13	4	0.869	0.171	0.107
50	13	4	0.838	0.204	0.072
60	15	5	0.826	0.247	0.034
70	17	5	0.795	0.279	0.031
80	-	-	-	-	-

Πίνακας 4.3.4: Αποτελέσματα για τη μέση τιμή, τυπική απόκλιση και ελάχιστη τιμή της ποιότητας των ομαλών πλεγμάτων που προκύπτουν από τη μέθοδο MLS για τις διάφορες γωνίες στροφής του φύλλου. Παρουσιάζονται ο βαθμός του πολυωνύμου και η ακτίνα επιρροής για κάθε περίπτωση καθώς και η κρίσιμη γωνία στροφής για την οποία η μέθοδος δεν αποδίδει αποδεκτό πλέγμα.

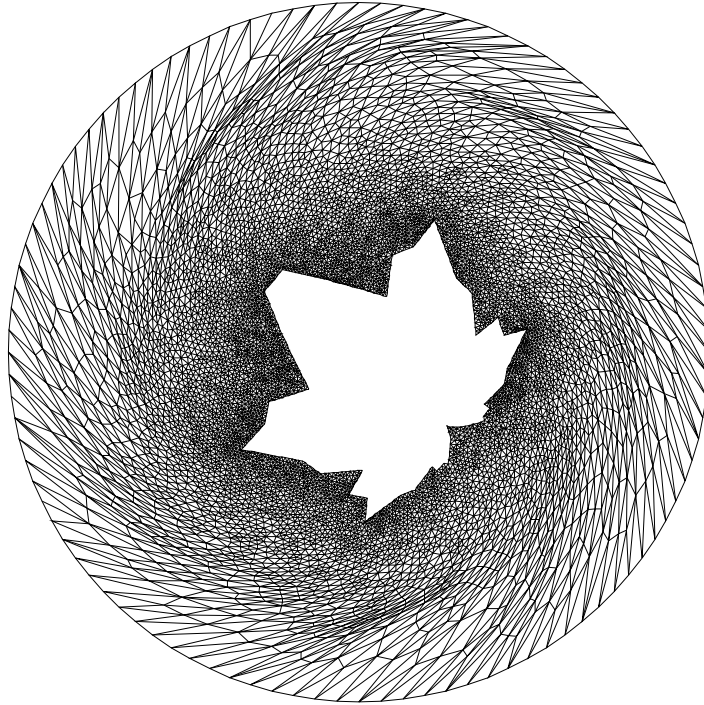
Η γωνία στροφής του φύλλου σταμάτησε στις 80° η οποία είναι και η κρίσιμη για αυτό το πλέγμα, γιατί η μέθοδος εμφάνισε ανεστραμμένα στοιχεία για όλους τους βαθμούς πολυωνύμου και όλες τις ακτίνες επιρροής που εξετάστηκαν.



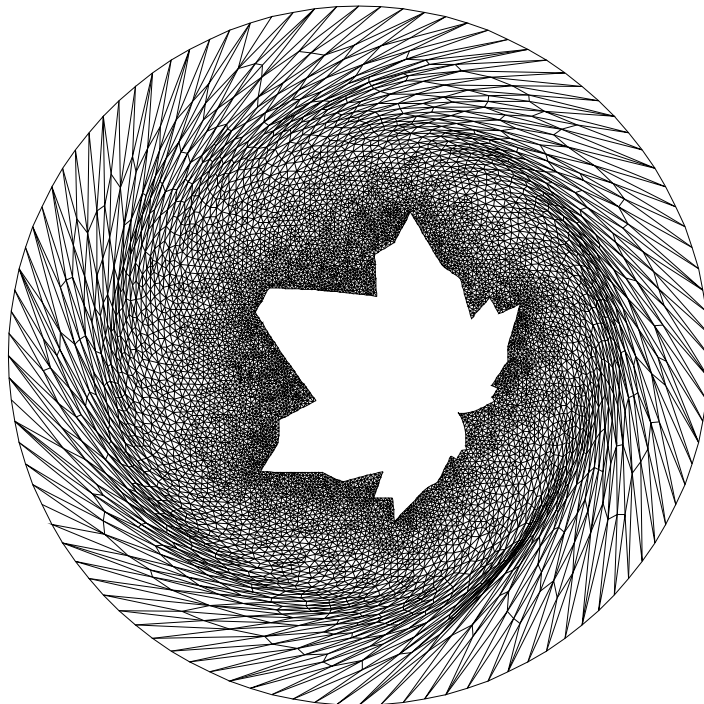
Σχήμα 4.3.6: Πλέγμα με εφαρμογή της μεθόδου MLS με χρήση 4^{ου} βαθμού πολυώνυμου και ακτίνας 11 για στροφή 30° του φύλλου.



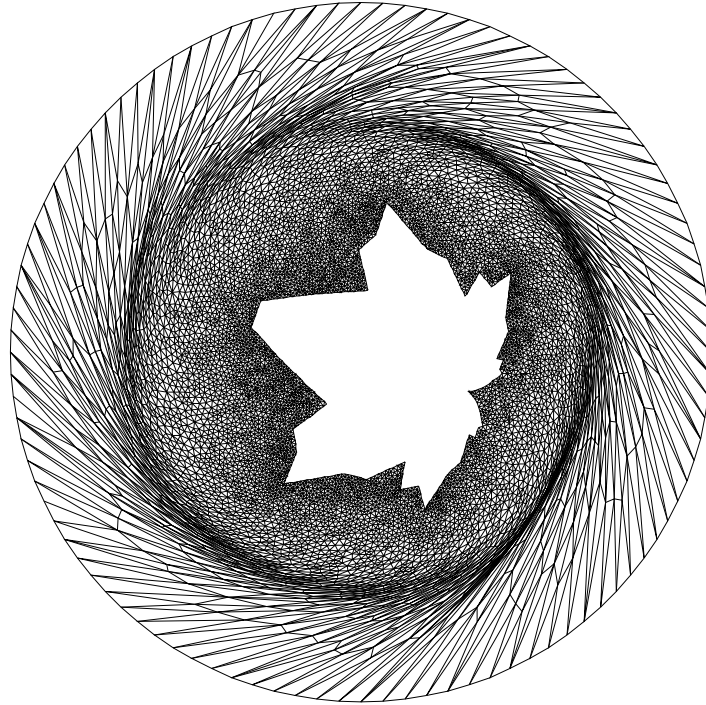
Σχήμα 4.3.7: Πλέγμα με εφαρμογή της μεθόδου MLS με χρήση 4^{ου} βαθμού πολυώνυμου και ακτίνας 13 για στροφή 40° του φύλλου.



Σχήμα 4.3.8: : Πλέγμα με εφαρμογή της μεθόδου MLS με χρήση 4^{ου} βαθμού πολυώνυμου και ακτίνας 13 για στροφή 50° του φύλλου.



Σχήμα 4.3.9: Πλέγμα με εφαρμογή της μεθόδου MLS με χρήση 5^{ου} βαθμού πολυώνυμου και ακτίνας 15 για στροφή 60° του φύλλου.



Σχήμα 4.3.10: Πλέγμα με εφαρμογή της μεθόδου MLS με χρήση 5^{ου} βαθμού πολυώνυμου και ακτίνας 17 για στροφή 70° του φύλλου.

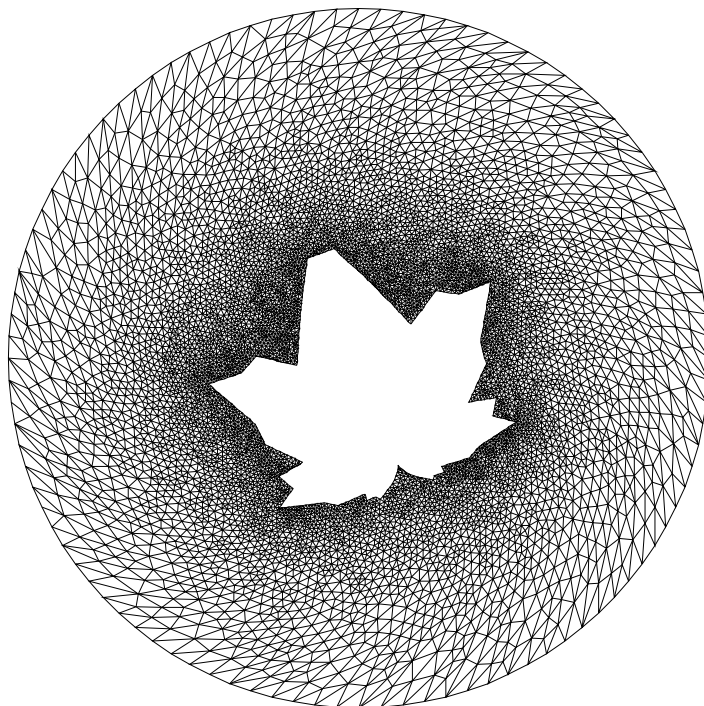
4.3.3 Εφαρμογή της τμηματικής στροφής

Σκοπός αυτής της υποενότητας είναι η διερεύνηση της αντοχής της μεθόδου MLS, όταν η στροφή του φύλλου εφαρμόζεται τμηματικά. Δηλαδή, η μέθοδος MLS εφαρμόζεται τόσες φορές (n) όσες και το αποτέλεσμα της διαίρεσης των συνολικών μοιρών που πρόκειται να στρίψει το φύλλο με τις μοίρες του βήματος. Όπως και στις προηγούμενες εφαρμογές το βήμα είναι ίσο με 5°.

Επιλέγεται η τμηματική εφαρμογή της μεθόδου να εξεταστεί σε δύο περιπτώσεις. Αρχικά, για στροφή ίση με 20° (γωνία που δεν είναι οριακή) με στόχο να γίνει διερεύνηση ως προς τις μετρικές ποιότητας που προκύπτουν, ενώ, στη συνέχεια, εξετάζεται η οριακή μέγιστη γωνία στροφής με σκοπό τη διερεύνηση ως προς την αντοχή της τμηματικής μεθόδου MLS.

$k=4$ $r=13$	Αριθμός Ανεστραμμένων Στοιχείων	\bar{q}	σ	q_{\min}
Απλή μέθοδος	0	0.926	0.094	0.261
Τμηματική μέθοδος	0	0.934	0.078	0.293

Πίνακας 4.3.5: Αποτελέσματα μετρικών ποιότητας πλέγματος με εφαρμογή της απλής και της τμηματικής μεθόδου MLS για στροφή 20° του φύλλου.



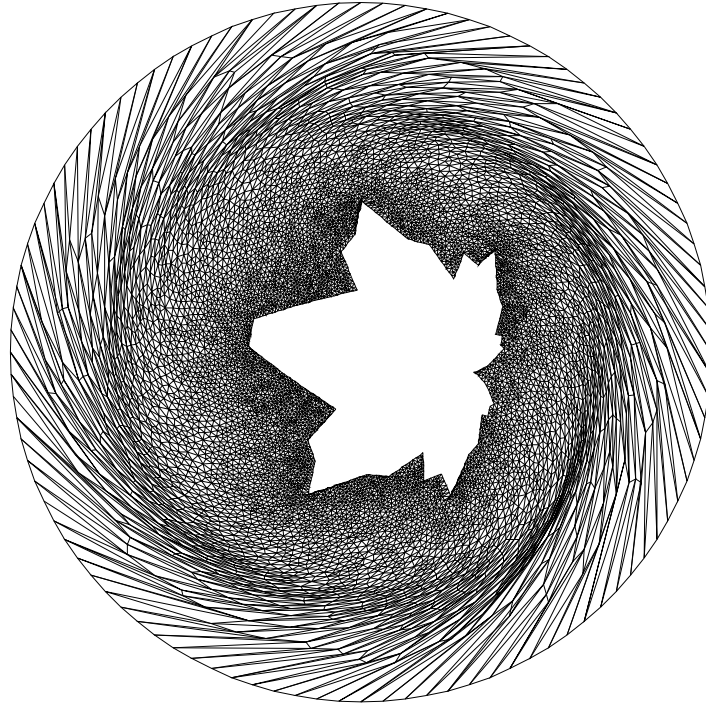
Σχήμα 4.3.11: Πλέγμα με εφαρμογή της τμηματικής μεθόδου MLS με βήμα 5° για συνολική στροφή 20° του φύλλου. Έγινε χρήση $4^{\text{ου}}$ βαθμού πολυωνύμου και ακτίνας επιρροής 13.

Στο σημείο αυτό εξετάζεται η τμηματική εφαρμογή της μεθόδου για στροφή 80° που είναι και η μέγιστη για το πλέγμα αυτό. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 4.3.6:

$k=5$ $r=17$	Αριθμός Ανεστραμμένων Στοιχείων	\bar{q}	σ	q_{\min}
Απλή μέθοδος	77	0.774	0.308	0.0005
Τμηματική μέθοδος	0	0.796	0.321	0.0085

Πίνακας 4.3.6: Αποτελέσματα μετρικών ποιότητας πλέγματος με εφαρμογή της απλής και της τμηματικής μεθόδου MLS για στροφή 80° του φύλλου.

Όπως δείχνει ο πίνακας 4.3.6, με την απλή εφαρμογή της μεθόδου το προκύπτον πλέγμα παρουσίασε 77 ανεστραμμένα τριγωνικά στοιχεία, ενώ με την τμηματική στροφή κανένα. Συνεπώς, η τμηματική στροφή βελτιώνει την ανοχή της μεθόδου MLS.



Πίνακας 4.3.12: Πλέγμα με εφαρμογή της τμηματικής μεθόδου MLS με βήμα 5° για συνολική στροφή 80° του φύλλου από το κέντρο του. Έγινε χρήση $5^{\text{ου}}$ βαθμού πολυωνύμου και ακτίνας επιρροής 17. Το πλέγμα δεν εμφανίζει ανεστραμμένα τριγωνικά στοιχεία.

Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκε στροφή ίση με 90° , όμως το τελικό πλέγμα παρουσίασε χαμηλό αριθμό ανεστραμμένων τριγώνων και κρίθηκε μη-αποδεκτό. Συνεπώς, η κρίσιμη γωνία στροφής για αυτό το πλέγμα αυξήθηκε κατά 10 μοίρες, κάνοντας χρήση της τμηματικής στροφής με τη μέθοδο MLS.

4.4 Σχόλια

Όσον αφορά την ακτίνα τοπικής επιρροής, παρατηρείται ότι η μέθοδος MLS είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη στην παράμετρο αυτή. Συγκεκριμένα, επιλογή μικρής τιμής ακτίνας αφήνει πολλούς κόμβους ανεπηρέαστους, συνεπώς χάνεται αρκετή 'πληροφορία' ως προς τη μετατόπιση που πρέπει να υπολογιστεί και έτσι το πλέγμα που προκύπτει είτε δεν είναι ποιοτικό είτε είναι μη-αποδεκτό. Από την άλλη, μεγάλη τιμή ακτίνας σημαίνει ότι ακόμη και απομακρυσμένοι κόμβοι με γνωστή μετατόπιση επηρεάζουν τη μετατόπιση των εσωτερικών, γεγονός που δεν αποδίδει το βέλτιστο αποτέλεσμα και είναι πιθανό η ποιότητα του πλέγματος να είναι χαμηλή. Σε γενικές γραμμές, σε περιπτώσεις μικρής μετατόπισης η μέθοδος απαιτεί μικρότερες τιμές ακτίνας, ενώ αυξάνοντας τη μετατόπιση αυξάνεται και η ακτίνα.

Ακόμη, όπως φάνηκε από τις παραπάνω εφαρμογές, η μέθοδος είναι αρκετά ευαίσθητη και σε ενδιάμεσες τιμές ακτίνας τοπικής επιρροής και τα αποτελέσματα παρουσιάζουν ποικιλία. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι στην

τυχαία ακτίνα r που έχει οριστεί για οποιοδήποτε πλέγμα, πιθανώς βρίσκονται οριακοί κόμβοι που δεν 'πρέπει' καθώς επηρεάζουν αρνητικά τη συνολική μετατόπιση του υπόψη εσωτερικού κόμβου και, με αυτό τον τρόπο, μειώνεται η ποιότητα του προσαρμοσμένου πλέγματος. Επιπλέον, φαίνεται από τα αποτελέσματα των πλεγμάτων που εξετάστηκαν, ότι το πλέγμα μεταξύ των δύο τετραγώνων έχει λιγότερη ευαισθησία στην παράμετρο της ακτίνας λόγω της απλότητάς του, σε αντίθεση με τα πιο πολύπλοκα πλέγματα γύρω από την αεροτομή και το φύλλο πλατάνου, όπου τα αποτελέσματα των μετρικών ποιότητας παρουσίασαν μεγάλη ποικιλία.

Συνεπώς, το ζήτημα επιλογής παράμετρου ακτίνας στη μέθοδο MLS είναι αρκετά πολύπλοκο και αφήνεται στην εμπειρία του χρήστη.

Μικρότερη ποικιλία αποτελεσμάτων παρουσιάστηκε ως προς τη δεύτερη παράμετρο της μεθόδου MLS, αυτή του βαθμού πολυωνύμου. Συγκεκριμένα, μεγάλοι βαθμοί πολυωνύμου απαιτούνται σε πιο δύσκολες εφαρμογές πλεγμάτων και μεγαλύτερες στροφές, ενώ σε απλούστερα πλέγματα αρκούν και πολυώνυμα $1^{ου}$ ή $2^{ου}$ βαθμού. Ακόμη, χρήση μεγάλου βαθμού πολυωνύμου (λ.χ. $4-5^{ου}$) απαιτεί και μεγαλύτερη τιμή της παράμετρου της ακτίνας για να λειτουργήσει σωστά η μέθοδος.

Συμπερασματικά, η μέθοδος MLS αντέχει μεγάλες μετατοπίσεις και δημιουργεί ποιοτικά πλέγματα ακόμη και σε εφαρμογές πολύπλοκης μορφής όπως αυτή του πλέγματος γύρω από το φύλλο. Απαιτεί στις περισσότερες των περιπτώσεων μεγάλους βαθμούς πολυωνύμου για να προσαρμόσει τα πλέγματα που υπόκεινται σε μεγάλες μετατοπίσεις, ενώ παρουσιάζει ευαισθησία ως προς την ακτίνα. Τέλος, η αντοχή της μεθόδου μπορεί να αυξηθεί ακόμα περισσότερο κάνοντας χρήση της τμηματικής στροφής. Σε όλες τις εφαρμογές των πλεγμάτων που μελετήθηκαν, η οριακή γωνία αυξήθηκε με χρήση της τμηματικής μεθόδου. Αυτή η παραλλαγή, βελτιώνει και τις μετρικές ποιότητας του πλέγματος, όμως η χρήση της συνιστάται μόνο σε περιπτώσεις με πολύ δύσκολη γεωμετρία ή μεγάλων μετατοπίσεων, γιατί ο υπολογιστικός χρόνος αυξάνεται πάρα πολύ.

Κεφάλαιο 5: Εφαρμογές σε 3D πλέγματα

Σε αυτό το κεφάλαιο εφαρμόζεται η μέθοδος MLS για διάφορες μετατοπίσεις σε 3D πλέγματα. Στον υπολογιστικό κώδικα που αναπτύχθηκε, ο χρήστης εισάγει το πλέγμα που πρόκειται να προσαρμοστεί, τους κόμβους για τους οποίους είναι γνωστή η μετατόπιση, το είδος της μετατόπισης, τον βαθμό πολυωνύμου και την ακτίνα τοπικής επιρροής. Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, η συνάρτηση ενεργοποίησης είναι η Wendland C^2 .

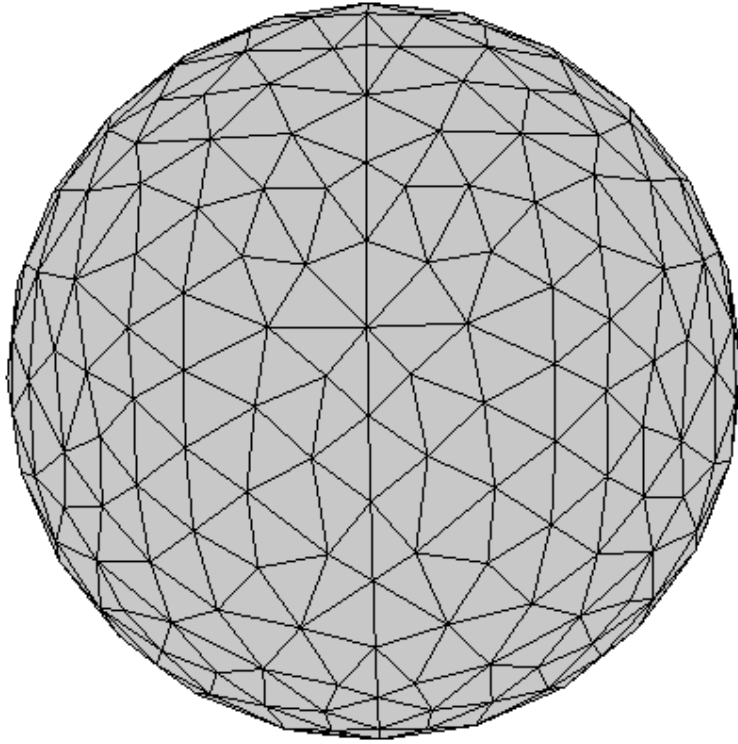
Με τον τρόπο αυτό, δημιουργείται το νέο προσαρμοσμένο 3D πλέγμα. Όμως, το πλέγμα αυτό πρέπει να ανταποκρίνεται σε κάποιες προϋποθέσεις για να είναι κατάλληλο για χρήση. Η βασική προϋπόθεση είναι η απουσία ανεστραμμένων τετραέδρων. Για τον λόγο αυτό, αναπτύχθηκε υπολογιστικός κώδικας ο οποίος υπολογίζει τον αριθμό αυτών. Εάν αυτός ο αριθμός είναι ίσος με μηδέν, τότε το πλέγμα είναι αποδεκτό.

Στις εφαρμογές που παρουσιάζονται παρακάτω, αρχικά υπολογίζονται ο κατάλληλος βαθμός πολυωνύμου και η οριακή τιμή της ακτίνας όπου δημιουργείται νέο πλέγμα.

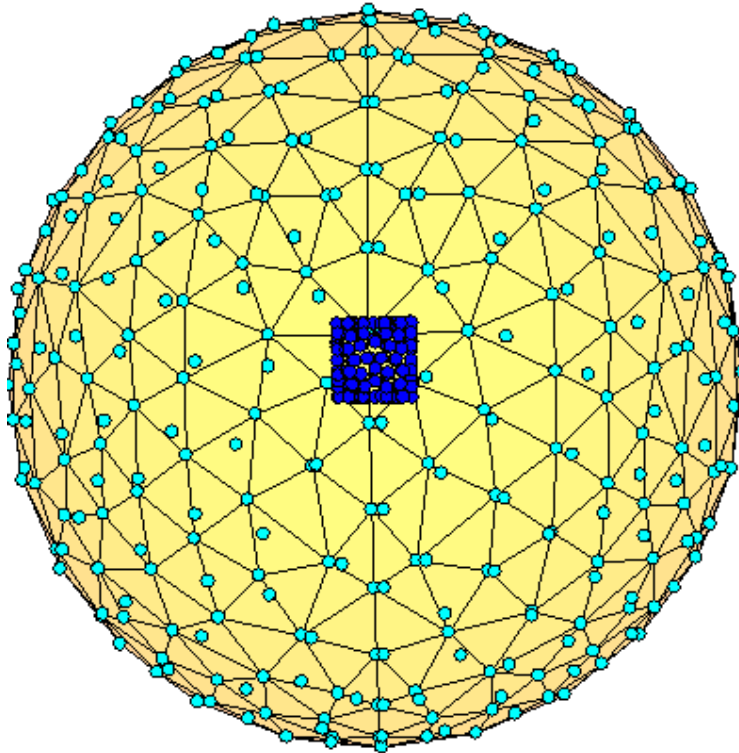
Στη συνέχεια, μέσω δοκιμών υπολογίζεται η οριακή τιμή γωνίας στροφής για την οποία η μέθοδος MLS δεν δημιουργεί αποδεκτό πλέγμα, ενώ τέλος εφαρμόζεται η παραλλαγή της μεθόδου MLS κατά την οποία η στροφή εφαρμόζεται κατά τμήματα και πραγματοποιείται σύγκριση με την απλή μέθοδο MLS.

5.1 Εφαρμογές στο 3D πλέγμα μεταξύ κύβου και σφαίρας

Το πρώτο 3D πλέγμα που επιλέγεται για τις εφαρμογές είναι αυτό, όπου στο εσωτερικό υπάρχει ένας κύβος και εξωτερικά μία σφαίρα. Ο ενδιάμεσος χώρος έχει πλεγματοποιηθεί με λογισμικό της ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ. Πρόκειται για μια σχετικά απλή περίπτωση, που όμως μπορεί να δώσει χρήσιμα συμπεράσματα για τη συμπεριφορά της μεθόδου MLS. Πραγματοποιούνται διάφορες στροφές του κύβου γύρω από το κέντρο του, προσαρμόζεται το πλέγμα μέσω της μεθόδου MLS και διερευνάται ο αριθμός των ανεστραμμένων στοιχείων για κάθε περίπτωση.



Σχήμα 5.1.1: 3D πλέγμα γύρω από κύβο μέσα σε σφαίρα. Στο σχήμα φαίνεται το εξωτερικό περίβλημα το οποίο είναι μια σφαίρα με ακτίνα ίση με 10.



Σχήμα 5.1.2: 3D πλέγμα γύρω από κύβο μέσα σε σφαίρα. Ο κύβος αποτελείται από 176 κόμβους, ενώ η σφαίρα από 305. Συνολικά το πλέγμα αυτό αποτελείται από 10608 τετράεδρα και 2026 κόμβους.

Η πρώτη γωνία στροφής που εξετάζεται είναι ίση με 30 μοίρες ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Για αυτή τη σχετικά μικρή γωνία στροφής, η πρώτη δοκιμή αφορά την εύρεση της οριακής τιμής ακτίνας για την οποία η μέθοδος μπορεί να δημιουργήσει πλέγμα- δεν υπάρχει ούτε ένας ανεπηρέαστος κόμβος. Τα αποτελέσματα ακτίνας και σύγκλισης της μεθόδου συζυγών κλίσεων, του επιλύτη που χρησιμοποιείται για το σύστημα των αγνώστων συντελεστών (βλ. κεφ.3) παρουσιάζονται στον πίνακα 5.1.1.

Ακτίνα επιρροής	Σύγκλιση CG
5.00	Όχι
6.00	Όχι
7.00	Όχι
8.00	Όχι
9.00	Ναι

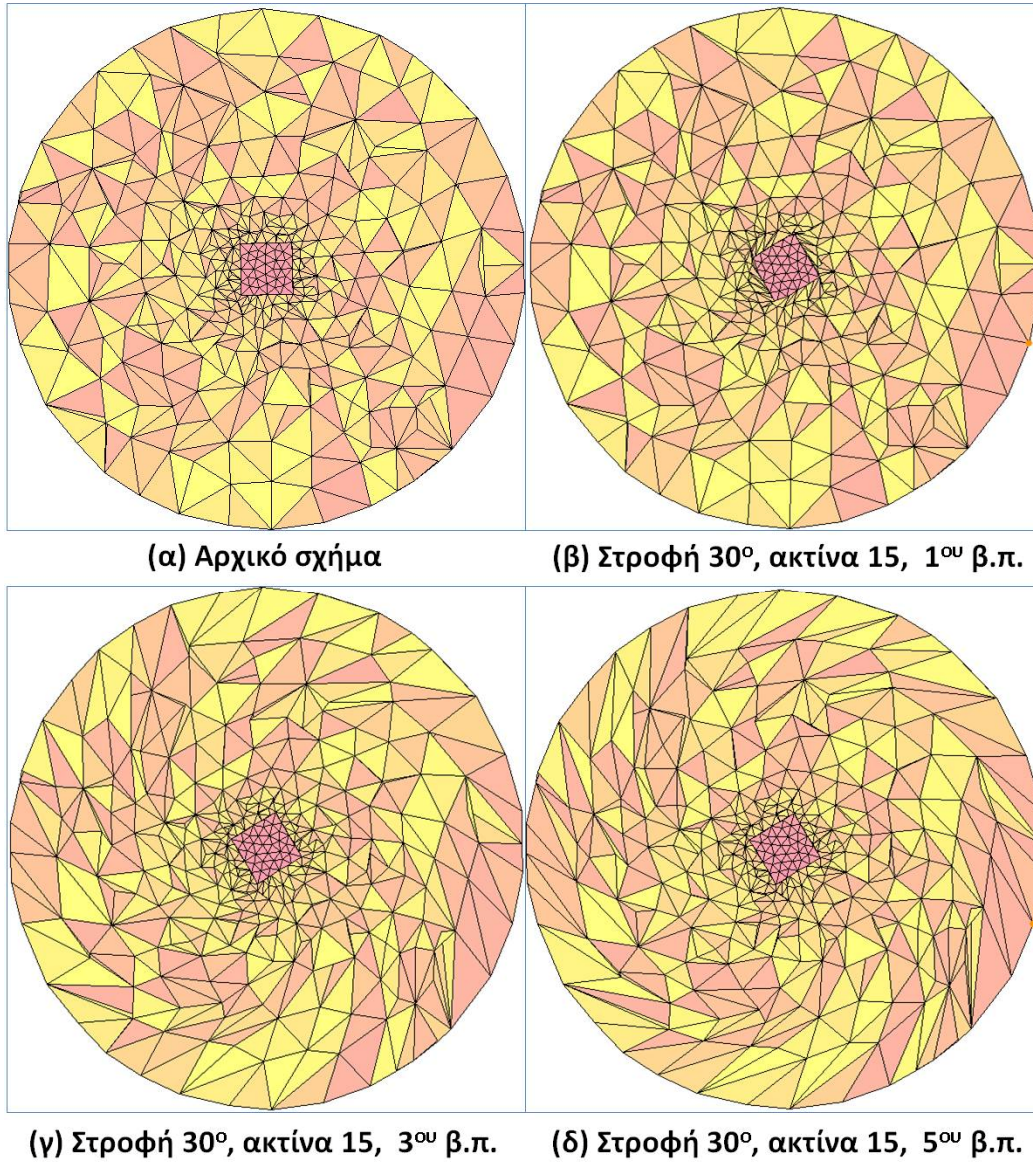
Πίνακας 5.1.1: Τιμές ακτίνας επιρροής της μεθόδου- Σύγκλιση της μεθόδου CG για το 3D πλέγμα γύρω από τον κύβο και για γωνία στροφής 30° του κύβου.

Στη συνέχεια, εξετάζεται η συμπεριφορά της μεθόδου για τη στροφή αυτή, ως προς διάφορες ακτίνες και πολυώνυμα και υπολογίζονται τα ανεστραμμένα στοιχεία.

Τιμές Ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου				
	1 ^{ου}	2 ^{ου}	3 ^{ου}	4 ^{ου}	5 ^{ου}
9	0	0	0	0	121
11	1	0	0	0	0
13	104	4	0	0	0
15	152	121	0	0	0
17	170	159	0	0	0
19	173	170	0	0	0
21	174	170	0	0	0

Πίνακας 5.1.2: Αποτελέσματα ανεστραμμένων τετραεδρικών στοιχείων στο 3Δ πλέγμα μεταξύ κύβου και σφαίρας μέσω της μεθόδου MLS για στροφή 30° του κύβου.

Μπορεί να παρατηρηθεί ότι η μέθοδος με χρήση μικρών βαθμών πολυωνύμου απαιτεί σχετικά μικρές τιμές ακτίνας για να δημιουργήσει ομαλά πλέγματα, ενώ με αύξηση της ακτίνας δημιουργούνται ανεστραμμένα τετράεδρα. Ακόμη, με χρήση πολυωνύμων 3^{ου} και 4^{ου} βαθμού δεν δημιουργούνται ανεστραμμένα στοιχεία, ανεξαρτήτως ακτίνας.



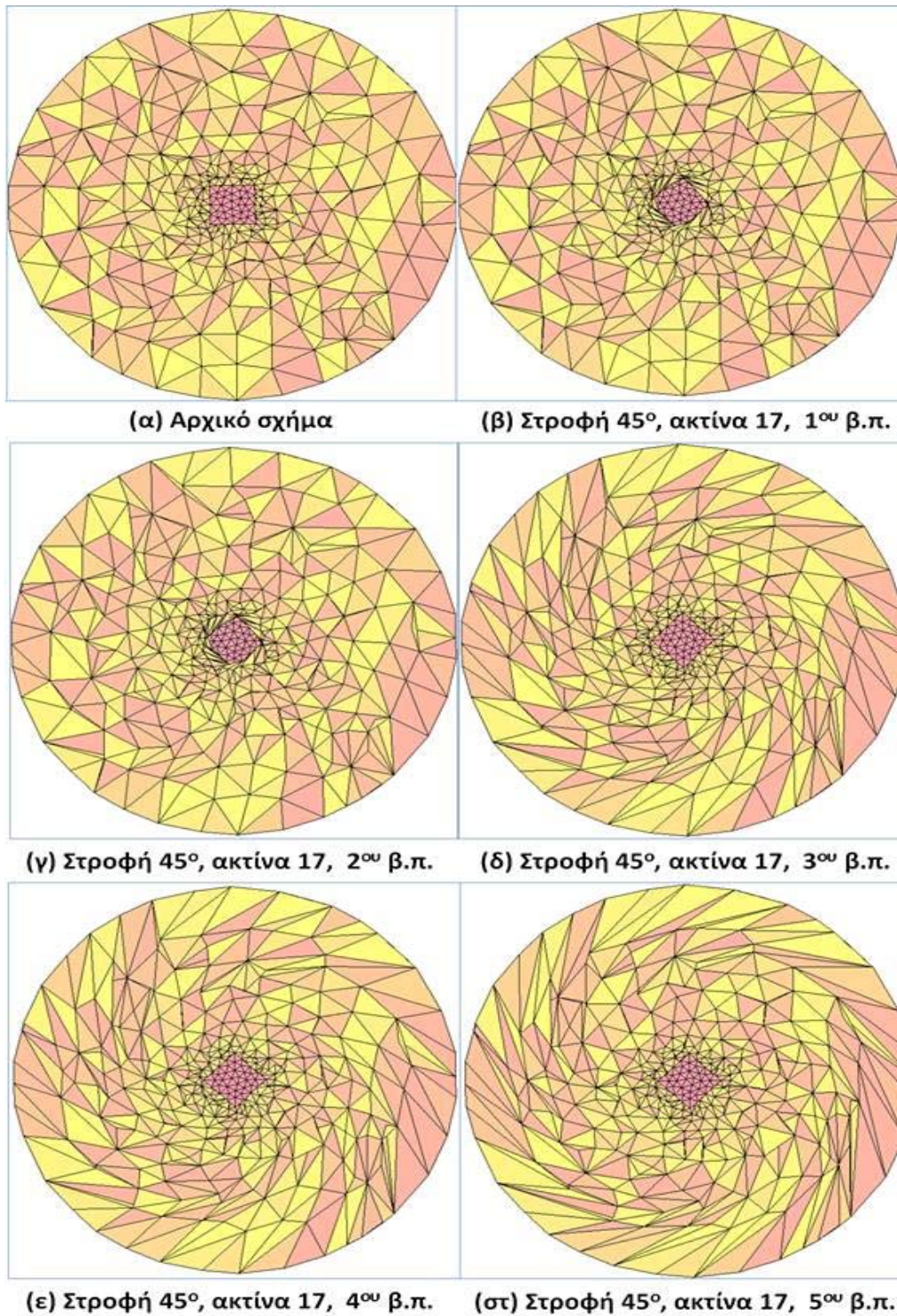
Σχήμα 5.1.3: 3Δ πλέγματα γύρω από κύβο μέσα σε σφαίρα. Πάνω αριστερά το αρχικό πλέγμα, ενώ τα υπόλοιπα προέκυψαν από τη μέθοδο MLS για στροφή 30° του κύβου ως προς τον άξονα Y. Παρουσιάζονται τα πλέγματα με χρήση ακτίνας επιρροής ίση με 15 και πολωνύμων $1^{\text{ου}}$, $3^{\text{ου}}$ και $5^{\text{ου}}$ βαθμού. Το πλέγμα με χρήση $1^{\text{ου}}$ βαθμού πολωνύμου είναι μη-αποδεκτό καθώς έχει εμφανίσει 152 ανεστραμμένα τετράεδρα.

Στη συνέχεια, επιλέγεται γωνία στροφής ίση με 45° . Τα αποτελέσματα για τα πολυώνυμα και τις ακτίνες που χρησιμοποιούνται παρουσιάζονται στον πίνακα 5.1.3.

Τιμές Ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου				
	1 ^{ου}	2 ^{ου}	3 ^{ου}	4 ^{ου}	5 ^{ου}
9	0	0	0	1	288
11	41	0	0	0	0
13	244	68	0	0	0
15	257	255	0	0	0
17	257	259	0	0	0
19	260	260	0	0	0
21	260	260	0	0	0

Πίνακας 5.1.3: Αποτελέσματα ανεστραμμένων τετραεδρικών στοιχείων στο 3Δ πλέγμα μεταξύ κύβου και σφαίρας μέσω της μεθόδου MLS για στροφή 45° του κύβου.

Όπως φαίνεται στον πίνακα 5.1.3, τα πολυώνυμα 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού δημιουργούν ομαλά πλέγματα μόνο με χρήση μικρών τιμών ακτίνας, το πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού δημιουργεί αποδεκτά πλέγματα ανεξαρτήτως ακτίνας επιροής, ενώ οι μεγαλύτεροι βαθμοί πολυωνύμου χρειάζονται ελάχιστη τιμή ακτίνας ίση με 11 για τη δημιουργία πλεγμάτων χωρίς ανεστραμμένα τετράεδρα.



Σχήμα 5.1.4: 3D πλέγματα γύρω από κύβο μέσα σε σφαίρα. Πάνω αριστερά το αρχικό πλέγμα, ενώ τα υπόλοιπα προέκυψαν από τη μέθοδο MLS για στροφή 45° του κύβου ως προς τον άξονα Υ. Παρουσιάζονται τα πλέγματα με χρήση ακτίνας επιρροής ίση με 17 για όλα τα πολυώνυμα που χρησιμοποιήθηκαν. Τα πλέγματα με χρήση 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού πολυώνυμα είναι ακατάλληλα προς χρήση καθώς έχουν εμφανίσει 257 και 259 ανεστραμμένα τετράεδρα, αντίστοιχα.

Παρατηρώντας προσεκτικά το σχήμα 5.1.4 διακρίνονται ορισμένα από τα ανεστραμμένα τετράεδρα που έχουν προκύψει στα πλέγματα (β) και (γ), ειδικά στην περιοχή που βρίσκεται ο κύβος. Αυτό οφείλεται στην τιμή της ακτίνας η οποία είναι σχετικά υψηλή και τα πολυώνυμα μικρής τάξης δεν μπορούν να αποδώσουν ποιοτικό πλέγμα. Τα υπόλοιπα πλέγματα με χρήση $3^{ου}$, $4^{ου}$ και $5^{ου}$ βαθμού πολυώνυμα, δεν παρουσιάζουν ανεστραμμένα στοιχεία και είναι κατάλληλα για εφαρμογές ΥΡΔ.

Άρα, πρέπει να επισημανθεί εκ νέου η παρατήρηση του προηγούμενου κεφαλαίου, ότι η χρήση πολυωνύμων υψηλής τάξεως στη μέθοδο MLS, απαιτεί υψηλότερες τιμές ακτίνας, ενώ τα χαμηλής τάξεως πολυώνυμα αποδίδουν ποιοτικότερα πλέγματα με χρήση μικρών τιμών ακτίνας.

5.2 Εφαρμογή της τμηματικής στροφής στο 3Δ πλέγμα μεταξύ κύβου και σφαίρας

Η υποενοότητα αυτή εξετάζει την προσαρμογή του τριδιάστατου πλέγματος μεταξύ κύβου και σφαίρας μέσω της μεθόδου MLS όταν η στροφή του κύβου εφαρμόζεται τμηματικά. Όπως έχει φανεί από τις προηγούμενες εφαρμογές, η αλλαγή αυτή στον υπολογιστικό κώδικα βελτιώνει την αντοχή της μεθόδου, αλλά αυξάνει αρκετά τον υπολογιστικό χρόνο.

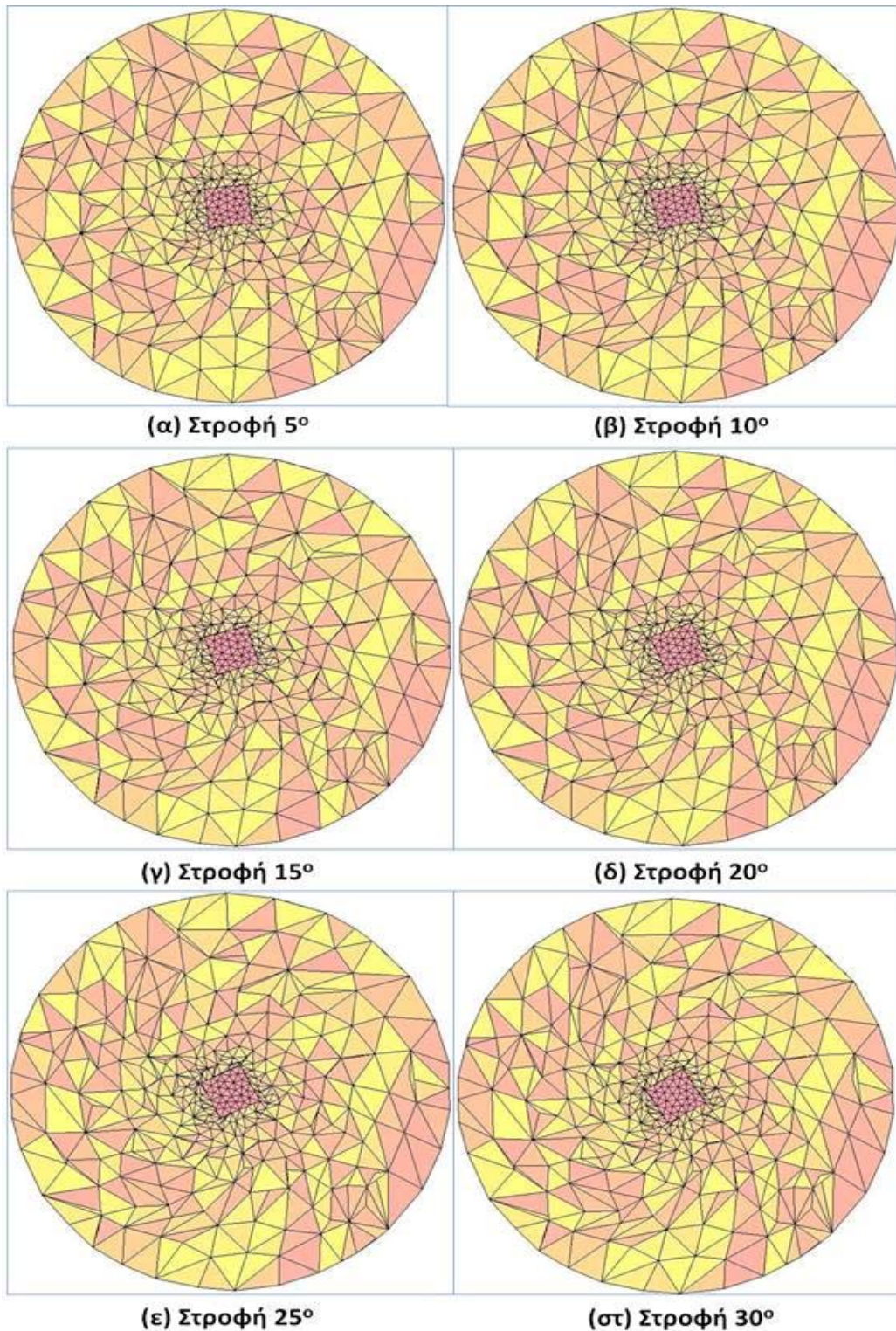
Εδώ, επιλέγεται να πραγματοποιηθούν δοκιμές για τις στροφές 30° και 45° που μελετήθηκαν παραπάνω, αλλά με χρήση πολυωνύμου και ακτίνας που απέδωσαν ακατάλληλο πλέγμα με την απλή μέθοδο MLS.

Αρχικά, και για συνολική γωνία στροφής του κύβου 30° επιλέγεται να εφαρμοστεί η τμηματική στροφή με χρήση πολυωνύμου $2^{ου}$ βαθμού και ακτίνας 13. Με αυτές τις παράμετρους, η μέθοδος απέδωσε πλέγμα με 4 ανεστραμμένα τετράεδρα, αριθμός που καθιστά το πλέγμα μη-αποδεκτό.

Το βήμα στροφής ανά επανάληψη είναι ίσο με 5° , συνεπώς η μέθοδος εφαρμόζεται 6 φορές για τη συνολική στροφή των 30° .

Γωνία Στροφής 30°	Βαθμός πολυωνύμου	Ακτίνα	Ανεστραμμένα Τετράεδρα
Απλή Μέθοδος	$2^{ου}$	13	4
Τμηματική Μέθοδος	$2^{ου}$	13	0

Πίνακας 5.2.1: Αποτελέσματα της μεθόδου MLS για συνολική στροφή 30° . Η απλή μέθοδος MLS δημιούργησε πλέγμα με 4 ανεστραμμένα τετράεδρα, ενώ εφαρμόζοντας τη μέθοδο με τη τμηματική στροφή το πλέγμα που προέκυψε είναι αποδεκτό.



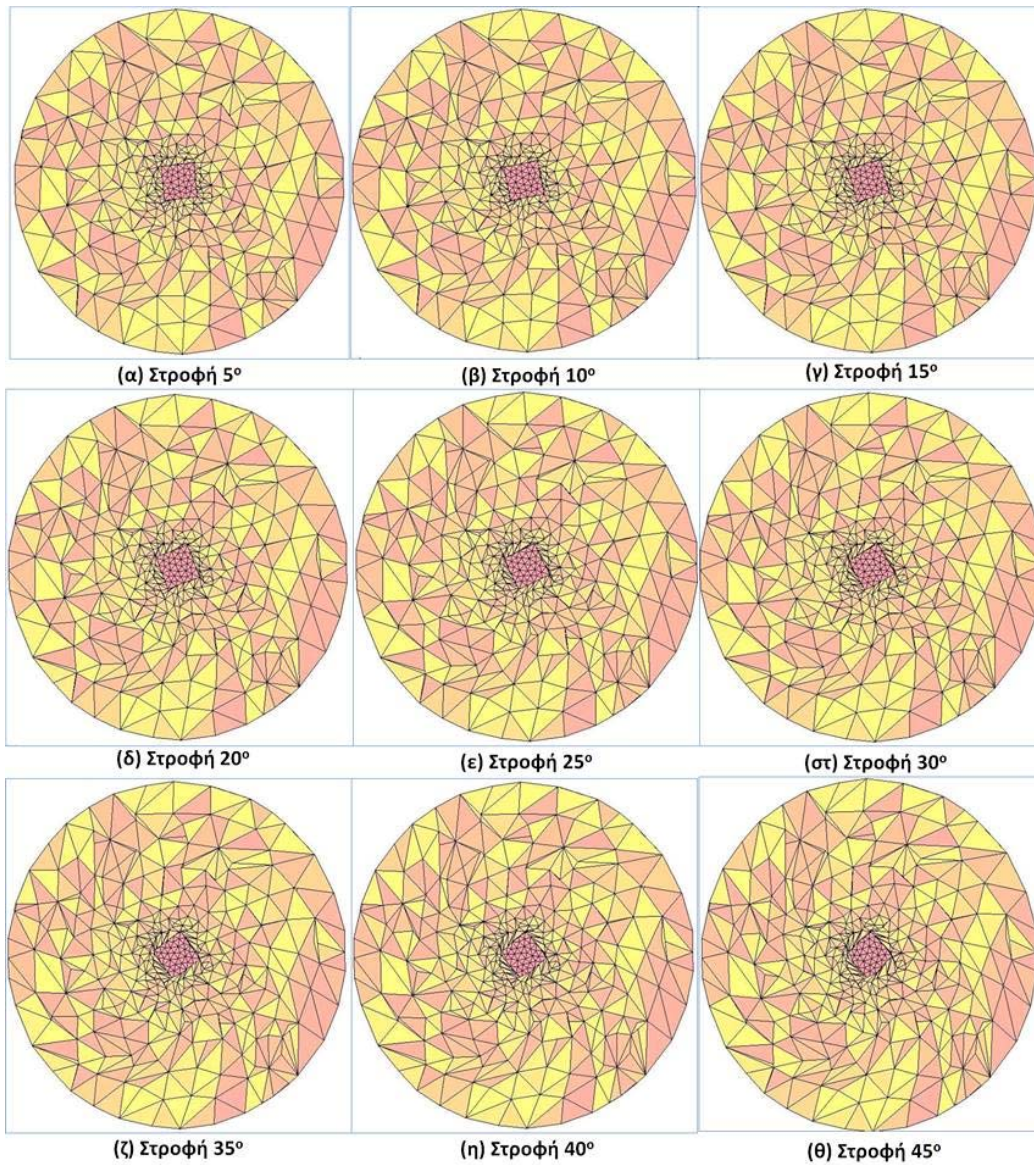
Σχήμα 5.2.1: Εφαρμογή της τμηματικής μεθόδου MLS για συνολική στροφή 30 μοιρών του κύβου από το κέντρο του πλέγματος. Παρουσιάζονται όλα τα ενδιάμεσα πλέγματα που προέκυψαν, για βήμα στροφής ίσο με 5 μοίρες. Χρησιμοποιήθηκε πολυώνυμο 2^{ης} τάξης και ακτίνα τοπικής επιρροής 13.

Για συνολική στροφή 45° , επιλέγεται να εξεταστεί η μέθοδος με χρήση 2^{0u} βαθμού πολυωνύμου και ακτίνας ίσης με 15. Υπενθυμίζεται ότι η απλή μέθοδος MLS είχε δημιουργήσει ακατάλληλο πλέγμα με συνολικά 255 ανεστραμμένα στοιχεία. Τα αποτελέσματα από την εφαρμογή της τμηματικής στροφής παρουσιάζονται στον πίνακα 5.2.2.

Γωνία Στροφής 45°	Βαθμός πολυωνύμου	Ακτίνα	Ανεστραμμένα Τετράεδρα
Απλή Μέθοδος	2^{0u}	15	255
Τμηματική Μέθοδος	2^{0u}	15	206

Πίνακας 5.2.2: Αποτελέσματα της μεθόδου MLS για συνολική στροφή 45° του κύβου. Η απλή μέθοδος MLS δημιούργησε πλέγμα με 255 ανεστραμμένα τετράεδρα, ενώ εφαρμόζοντας τη στροφή τμηματικά ανα 5 μοίρες δημιουργείται πλέγμα με 206 ανεστραμμένα τετράεδρα.

Σε αυτήν την περίπτωση, η τμηματική εφαρμογή της στροφής δεν δημιούργησε αποδεκτό πλέγμα, όμως αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι το αντίστοιχο πλέγμα, με την απλή εφαρμογή της μεθόδου, έχει συνολικά 255 ανεστραμμένα στοιχεία. Αυτός ο αριθμός είναι πολύ υψηλός για να μπορέσει η μέθοδος μέσω της τμηματικής στροφής (και με τη χρήση των ίδιων παραμέτρων) να δημιουργήσει αποδεκτό πλέγμα. Όμως, όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα του πίνακα 5.2.2, στην περίπτωση της τμηματικής στροφής ο αριθμός ανεστραμμένων στοιχείων είναι μικρότερος, συνεπώς βελτιώνεται η ποιότητα του πλέγματος. Βέβαια, όπως προαναφέρθηκε, και τα δύο πλέγματα του πίνακα 5.2.2 είναι μη-αποδεκτά.

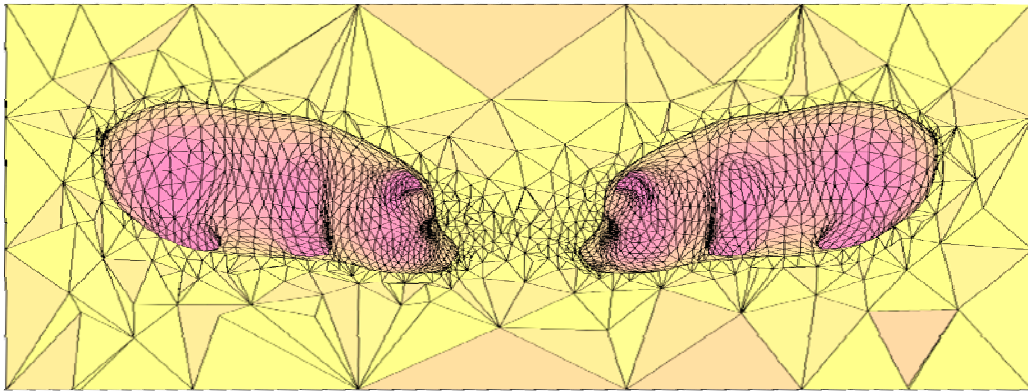


Σχήμα 5.2.2: Εφαρμογή της τμηματικής μεθόδου MLS για συνολική στροφή 45° του κύβου. Παρουσιάζονται όλα τα ενδιάμεσα πλέγματα που προέκυψαν από τη μέθοδο, για βήμα στροφής ανα επανάληψη ίσο με 5°. Χρησιμοποιήθηκε πολυώνυμο 2^{ης} τάξης και ακτίνα τοπικής επιρροής 15.

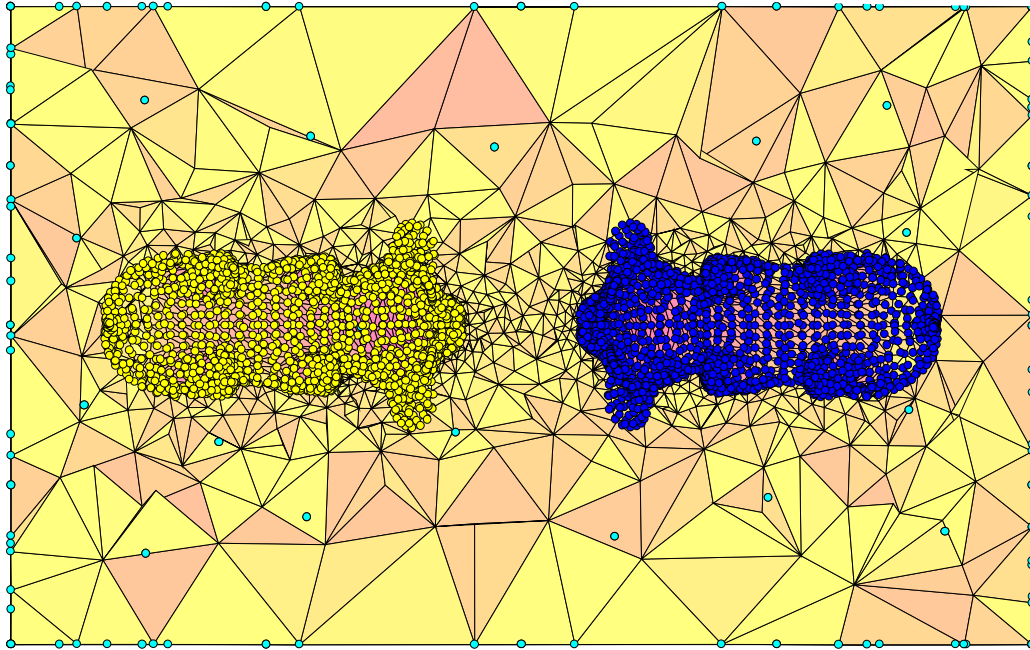
5.3. Εφαρμογές στο 3D πλέγμα γύρω από δύο φιγούρες ζώων

Στην ενότητα αυτή, εξετάζεται η προσαρμογή, μέσω της μεθόδου MLS, ενός ‘διαφορετικού’ 3D πλέγματος. Εφαρμόζεται το λογισμικό που αναπτύχθηκε και υλοποιεί τη μέθοδο MLS σε 3D πλέγματα και διερευνάται πώς η στροφή δύο δύσκολων γεωμετριών ταυτόχρονα, επηρεάζουν την ομαλότητα του αρχικού πλέγματος.

Επιλέγεται για αυτή την εφαρμογή, 3D πλέγμα μεταξύ δύο “γουρουνιών”. Το πλέγμα δημιουργήθηκε με λογισμικό γένεσης πλεγμάτων της ΜΠΥΡ&Β ΕΜΠ. Πρόκειται για ένα ιδιαίτερο και δύσκολο πλέγμα και η δυσκολία του έγκειται κυρίως στην περίεργη γεωμετρία των σωμάτων. Ένας ακόμη λόγος είναι πώς, ενώ στα προηγούμενα πλέγματα που μελετήθηκαν η στροφή εφαρμοζόταν σε μία γεωμετρία, στο πλέγμα αυτό η στροφή αφορά δύο γεωμετρίες.



Σχήμα 5.3.1: 3D πλέγμα γύρω από το περίγραμμα δύο σωμάτων με εξωτερικό όριο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 20x12x32 με κέντρο στο σημείο (0,0,-7.5). Το πλέγμα αποτελείται από 39674 τετραεδρικά στοιχεία και 8865 κόμβους συνολικά. Το περίγραμμα κάθε σώματος αποτελείται από 2054 κόμβους.



Σχήμα 5.3.2: 3D πλέγμα γύρω από το περίγραμμα δύο σωμάτων με εξωτερικό όριο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 20x12x32. Στο παρόν σχήμα φαίνεται η κάτοψη του πλέγματος.

Αρχικά, η ανάλυση εστιάζεται στην εύρεση της ελάχιστης ακτίνας τοπικής επιρροής για να δημιουργηθεί πλέγμα μέσω της μεθόδου. Χρησιμοποιείται ως συνάρτηση ενεργοποίησης η Wendland C^2 . Ακόμη, είναι γνωστό ότι η τιμή της ακτίνας πρέπει να είναι τόση, ώστε κάθε εσωτερικός κόμβος να επηρεάζεται τουλάχιστον από έναν κόμβο με γνωστή μετατόπιση. Με βάση τα παραπάνω και τις διαστάσεις του πλέγματος αυτού, προκύπτει ότι η ελάχιστη τιμή της ακτίνας πρέπει να είναι περίπου 5 όταν πρόκειται να στραφούν και τα δύο σώματα. Πραγματοποιούνται και δοκιμές στον υπολογιστικό κώδικα για αυτό το σκοπό και τα αποτελέσματα της σύγκλισης παρουσιάζονται στον πίνακα 5.3.1.

Ακτίνα επιρροής	Σύγκλιση CG
3.00	Όχι
4.00	Όχι
5.00	Ναι

Πίνακας 5.3.1: Τιμές ακτίνας επιρροής της μεθόδου- Σύγκλιση της μεθόδου CG για το 3D πλέγμα γύρω από τις φιγούρες ζώων και για γωνία στροφής 5° .

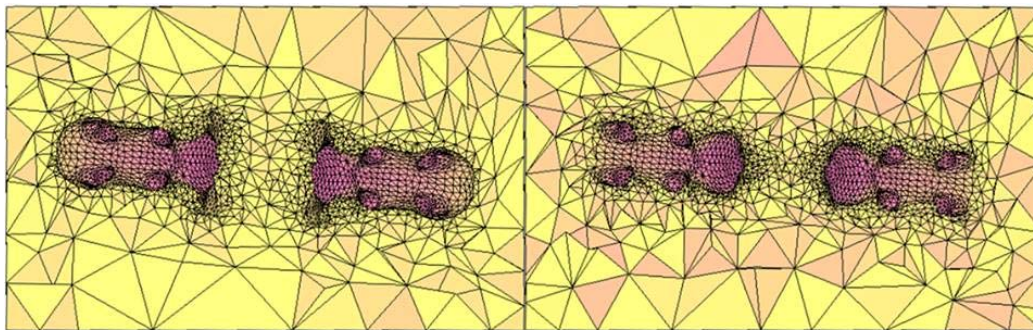
Συνεπώς, η ελάχιστη δυνατή ακτίνα για τη δημιουργία νέου πλέγματος όταν πρόκειται να στρίψουν και τα δύο σώματα είναι ίση με 5.

Στη συνέχεια, για στροφή 5 μοιρών των δύο γεωμετριών γύρω από τον άξονα Y που περνά από το σημείο (0,0,-7.5), εφαρμόζεται το λογισμικό της μεθόδου MLS και διερευνάται ο αριθμός των ανεστραμμένων τετραεδρικών στοιχείων.

Τιμές ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου			
	1 ^{ου}	2 ^{ου}	3 ^{ου}	4 ^{ου}
5.00	0	0	0	0
10.00	0	0	556	4364

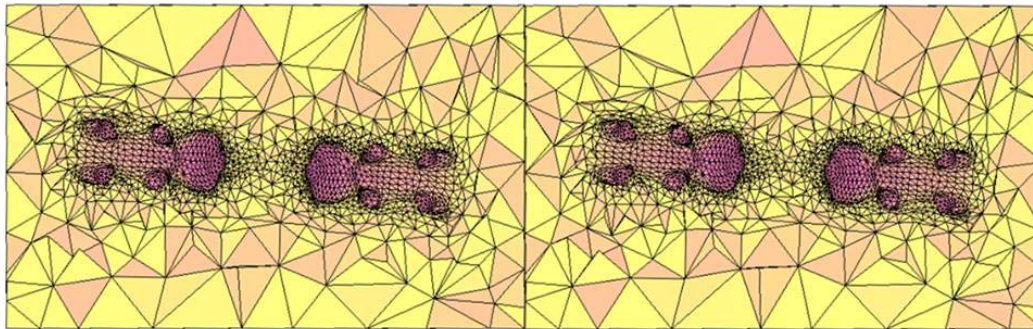
Πίνακας 5.3.2: Αποτελέσματα ανεστραμμένων τετραεδρικών στοιχείων στο 3Δ πλέγμα γύρω από δύο φιγούρες ζώων μέσω της μεθόδου MLS για στροφή 5° των δύο σωμάτων.

Όπως φαίνεται στον πίνακα 5.3.2, η μέθοδος αποδίδει αποδεκτά πλέγματα με χρήση ακτίνας 5 για όλα τα πολυώνυμα που επιλέγονται, ενώ το ίδιο συμβαίνει και για ακτίνα 10 όταν τα πολυώνυμα είναι 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού. Με χρήση ακτίνας 10 και μεγαλύτερης τάξεως πολυώνυμα τα πλέγματα που προκύπτουν είναι μη-αποδεκτά καθώς εμφανίζουν μεγάλο αριθμό ανεστραμμένων τετραεδρικών στοιχείων.



α) Ακτίνα 5 , 1^{ου} βαθμού πολυώνυμο

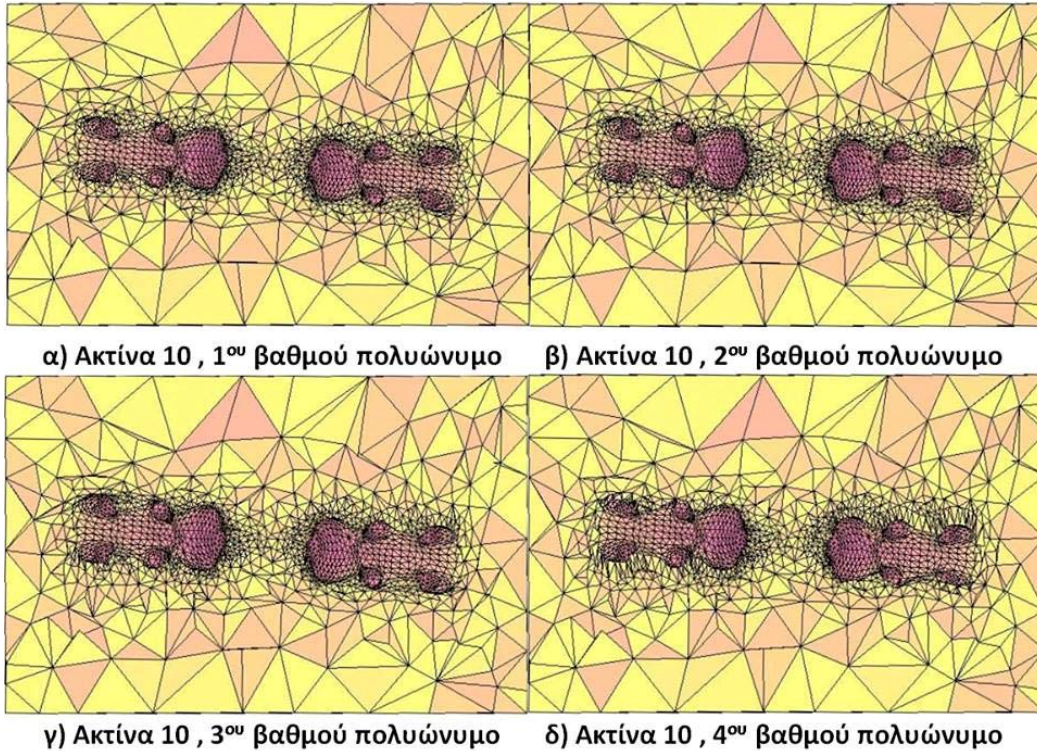
β) Ακτίνα 5 , 2^{ου} βαθμού πολυώνυμο



γ) Ακτίνα 5 , 3^{ου} βαθμού πολυώνυμο

δ) Ακτίνα 5 , 4^{ου} βαθμού πολυώνυμο

Σχήμα 5.3.3: 3Δ πλέγματα γύρω από δύο φιγούρες ζώων με εξωτερικό όριο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Τα πλέγματα προέκυψαν από τη μέθοδο MLS για στροφή 5° και των δύο σωμάτων. Παρουσιάζονται τα πλέγματα με χρήση ακτίνας ίσης με 5 και 1^{ου}, 2^{ου}, 3^{ου} και 4^{ου} βαθμού πολυώνυμο. Και τα 4 αυτά πλέγματα δεν παρουσίασαν ανεστραμμένα τετράεδρα.



Σχήμα 5.3.4: 3D πλέγματα γύρω από δύο φιγούρες ζώων με εξωτερικό όριο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Τα πλέγματα αυτά προέκυψαν από τη μέθοδο MLS για στροφή 5° και των δύο σωμάτων. Παρουσιάζονται τα πλέγματα με χρήση ακτίνας ίσης με 10 και 1^{ου}, 2^{ου}, 3^{ου} και 4^{ου} βαθμού πολυώνυμο. Αποδεκτά είναι τα πλέγματα με χρήση 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού πολυώνυμο.

Η επόμενη περίπτωση που εξετάζεται είναι για στροφή 15° των 2 σωμάτων. Τα αποτελέσματα των ανεστραμμένων τετραέδρων για τα πλέγματα που προκύπτουν από τη μέθοδο MLS παρουσιάζονται στον πίνακα 5.3.3.

Τιμές ακτίνας	Βαθμοί Πολυωνύμου			
	1 ^{ου}	2 ^{ου}	3 ^{ου}	4 ^{ου}
5.00	14	90	116	969
10.00	7	51	3711	7675

Πίνακας 5.3.3: Αποτελέσματα ανεστραμμένων τετραεδρικών στοιχείων στο 3D πλέγμα γύρω από δύο γουρούνια μέσω της μεθόδου MLS για στροφή 15° των δύο γουρουνιών από το κέντρο του πλέγματος.

Ο παραπάνω πίνακας δείχνει ότι για όλους τους συνδυασμούς ακτίνας-πολυωνύμων που εξετάστηκαν τα πλέγματα που προέκυψαν από τη μέθοδο εμφάνισαν ανεστραμμένα τετράεδρα. Αυτό σημαίνει, ότι η μέθοδος με χρήση πολυωνύμων έως και 4^{ου} βαθμού δεν είναι ικανή να οδηγήσει σε αποδεκτά πλέγματα, συνεπώς οι δοκιμές σταματούν στις 15 μοίρες. Αξίζει να σημειωθεί ότι έχει ενδιαφέρον να εξεταστούν και άλλοι συνδυασμοί πολυωνύμου-ακτίνας, όμως το υπολογιστικό κόστος είναι αρκετά υψηλό και ξεφεύγει από το πλαίσιο της εργασίας αυτής.

5.4 Σχόλια

Στις εφαρμογές των 3D πλεγμάτων που παρουσιάστηκαν προηγουμένως, σκοπός ήταν η προσαρμογή αυτών σε διάφορες στροφές των εσωτερικών γεωμετρικών μέσω της μεθόδου MLS και ο έλεγχος δημιουργίας των ανεπιθύμητων ανεστραμμένων τετραεδρικών στοιχείων. Η Ιακωβιανή ορίζουσα του κάθε τετραεδρικού στοιχείου είναι το μέγεθος το οποίο καθορίζει εάν ένα πλέγμα είναι ακατάλληλο. Όταν η ορίζουσα ενός τετραεδρικού στοιχείου αποκτήσει αρνητική τιμή, τότε αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ανεστραμμένο στοιχείο, συνεπώς το πλέγμα είναι ακατάλληλο.

Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα, μικρής τάξεως πολυώνυμα δεν μπορούν να αποδώσουν αποδεκτά πλέγματα ακόμη και για μικρές γωνίες στροφής.

Όσον αφορά την παράμετρο της ακτίνας τοπικής επιρροής, με χρήση τιμών της κοντά στην οριακή για κάθε 3D πλέγμα που εξετάστηκε, διαπιστώθηκε η αδυναμία της μεθόδου να δημιουργήσει αποδεκτά πλέγματα. Άρα, πρέπει να χρησιμοποιηθούν μεγαλύτερες τιμές ακτίνας, με άμεση συνέπεια την αύξηση του υπολογιστικού κόστους.

Τέλος, όταν η στροφή πραγματοποιείται τμηματικά, μπορεί να αυξάνεται κατά πολύ ο υπολογιστικός χρόνος, όμως βελτιώνεται η αντοχή της μεθόδου MLS ως προς τα ανεστραμμένα στοιχεία όπως φάνηκε από τα αποτελέσματα.

Είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο καθώς η μέθοδος αντέχει μεγαλύτερες γωνίες στροφής, όμως πρέπει να χρησιμοποιείται μόνο σε οριακές περιπτώσεις όπου η επαναπλεγματοποίηση πρέπει να αποφευχθεί ή είναι αδύνατη. Το υπολογιστικό κόστος του λογισμικού της τμηματικής στροφής είναι πολλαπλάσιο του ήδη υψηλού κόστους του λογισμικού της απλής μεθόδου MLS, συνεπώς κρίνεται απαγορευτική η χρήση του όταν δεν είναι απολύτως απαραίτητη η αποφυγή της επαναπλεγματοποίησης.

Κεφάλαιο 6. Συμπεράσματα και Προτάσεις

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που έχουν εξαχθεί από τις εφαρμογές των κεφαλαίων 4 και 5 σε ότι αφορά τη μέθοδο MLS στην προσαρμογή του πλέγματος, καθώς και προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

6.1 Συμπεράσματα

Πρόκειται για μία αποτελεσματική μέθοδο στη μετατόπιση υπολογιστικών πλεγμάτων με μεγάλες στροφές, όπως στις περιπτώσεις του τετραγώνου και της αεροτομής. Εφαρμόστηκαν μεγάλου μέτρου στροφές και η μέθοδος απέδωσε ομαλά πλέγματα, ενώ παράλληλα διατήρησε την ποιότητα των πλεγμάτων σε υψηλά επίπεδα.

Ακόμη, είναι αποτελεσματική σε μετατοπίσεις υπολογιστικών πλεγμάτων όπου το γεωμετρικό μοντέλο χαρακτηρίζεται από μεγάλες και απότομες μεταβολές των γεωμετρικών του χαρακτηριστικών, όπως το φύλλο πλατάνου. Σε αυτήν την εφαρμογή, το λογισμικό άντεξε αρκετά υψηλή γωνία στροφής, παρά τη δυσκολία στη γεωμετρία.

Στις 3D εφαρμογές, το λογισμικό αποδίδει ομαλά πλέγματα για μικρότερες γωνίες στροφής λόγω της χαμηλότερης αρχικής ποιότητας των πλεγματικών στοιχείων.

Όσον αφορά τις παράμετρος της μεθόδου που μελετήθηκαν, η τάξη του πολυωνύμου που πρέπει να χρησιμοποιηθεί ποικίλει αναλόγως το πλέγμα και τη γωνία στροφής.

Σε πιο απλά πλέγματα, όπως σε αυτό μεταξύ των δύο τετραγώνων, μικροί βαθμοί πολυωνύμου αρκούν για τη δημιουργία ποιοτικών πλεγμάτων, όμως όσο αυξάνεται η γωνία στροφής πρέπει να γίνει χρήση μεγαλύτερου βαθμού πολυωνύμου. Στις δυσκολότερες εφαρμογές που εξετάστηκαν και ειδικότερα στα 3D πλέγματα, απαιτείται χρήση πολυωνύμων μεγάλης τάξης για να δημιουργηθούν κατάλληλα πλέγματα χωρίς ανεστραμμένα πλεγματικά στοιχεία. Συμπερασματικά, όσο “δυσκολότερο” είναι το πλέγμα ή μεγαλύτερη η μετατόπιση τόσο μεγαλύτεροι βαθμοί πολυωνύμου απαιτούνται για να δημιουργηθούν αποδεκτά και ποιοτικά πλέγματα.

Σχετικά με την παράμετρο της ακτίνας τοπικής επιρροής, παρατηρήθηκε μεγάλη ποικιλία στα αποτελέσματα των πλεγμάτων. Πρόκειται για την πλέον σημαντική παράμετρο της μεθόδου η οποία και διαφοροποιεί τη μέθοδο MLS από την απλή μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

Αρχικά, για κάθε πλέγμα έπρεπε να υπολογιστεί η ελάχιστη δυνατή ακτίνα για τη δημιουργία πλέγματος, η τιμή της οποίας πρέπει να είναι τόση ώστε κανένας εσωτερικός κόμβος να μην μένει ανεπηρέαστος από κόμβο με γνωστή μετατόπιση.

Η μέθοδος MLS σε πιο απλά πλέγματα, μπορεί να δημιουργήσει ποιοτικά πλέγματα με χρήση ακτίνας ίση με την ελάχιστη δυνατή ή λίγο μεγαλύτερη, όμως σε δυσκολότερες εφαρμογές αυτό δεν συμβαίνει. Αντιθέτως, απαιτούνται τιμές ακτίνας αρκετά μεγάλες συγκριτικά με την οριακή του εκάστοτε πλέγματος. Επιπλέον, μικρές γωνίες στροφής απαιτούν μικρότερη τιμή ακτίνας, ενώ μεγαλύτερες στροφές χρειάζονται υψηλές τιμές ακτίνας.

Όμως, σε ορισμένες εφαρμογές, παρατηρήθηκε ευαισθησία της μεθόδου MLS στην επιλογή ακτίνας, δηλαδή χρήση μεγαλύτερων τιμών της δεν απέδωσε ποιοτικότερο πλέγμα από το αντίστοιχο με χρήση μικρότερης ακτίνας. Η μέθοδος είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη στην επιλογή ακτίνας και, για αυτόν το λόγο πρέπει να γίνεται ανάλυση ευαισθησίας από τον χρήστη σε κάθε περίπτωση για την εύρεση της κατάλληλης τιμής της.

Ένα ακόμη συμπέρασμα όσον αφορά τις εφαρμογές που προηγήθηκαν είναι ότι η μέθοδος MLS αποδίδει ποιοτικότερα πλέγματα και αυξάνεται η αντοχή της σε μεγάλες στροφές, όταν η συνολική στροφή πραγματοποιείται κατά τμήματα. Αυτή η παραλλαγή βέβαια, αυξάνει κατά πολύ το υπολογιστικό κόστος και πρέπει να εφαρμόζεται μόνο σε “δύσκολες” και οριακές περιπτώσεις.

6.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Στα πλέγματα των κεφαλαίων 4 και 5 που εξετάστηκαν, χρησιμοποιήθηκε ως συνάρτηση τοπικής επιρροής η Wendland C^2 . Μία πρόταση για μελλοντική μελέτη είναι να χρησιμοποιηθούν άλλες συναρτήσεις τοπικής επιρροής και να πραγματοποιηθούν συγκρίσεις με τα αποτελέσματα της Wendland.

Επίσης, όπως φάνηκε από τα αποτελέσματα των εφαρμογών η χρήση της τμηματικής στροφής έχει θετική επίδραση στην αντοχή της μεθόδου. Αυτή η παραλλαγή της μεθόδου πραγματοποιήθηκε με σταθερό το βαθμό του πολυωνύμου και της ακτίνας σε κάθε επανάληψη(βήμα της στροφής). Μία πρόταση για μελλοντική έρευνα είναι να εφαρμοστεί η τμηματική στροφή, με μεταβλητές παράμετρους σε κάθε βήμα της στροφής. Δηλαδή, να διαφοροποιείται το πολυώνυμο και η ακτίνα ανά βήμα. Αυτό σίγουρα θα εξοικονομήσει πολύτιμο υπολογιστικό χρόνο, διότι στις πρώτες επαναλήψεις όπου οι γωνίες είναι μικρές, μπορούν να χρησιμοποιηθούν μικρής τάξης πολυώνυμα και μικρές τιμές ακτίνας.

Επιπλέον, μία ενδιαφέρουσα ιδέα, είναι η εφαρμογή της μεθόδου με παράλληλη “εκπαίδευση” της σε ένα πολυεπεξεργαστικό σύστημα. Ως γνωστόν, η μέθοδος MLS υπολογίζει τη μετατόπιση κάθε εσωτερικού κόμβου ξεχωριστά, η οποία εξαρτάται από τις γνωστές μετατοπίσεις ορισμένων κόμβων. Υπολογίζοντας τη μετατόπιση του 1^{ου} εσωτερικού κόμβου και προσθέτοντας αυτόν στους κόμβους γνωστής μετατόπισης, ο 2^{ος} εσωτερικός που πρέπει να υπολογιστεί η μετατόπιση του, υπολογίζεται με βάση τη

μετατόπιση των οριακών συν τη μετατόπιση του 1^{ου} εσωτερικού κοκ. Έτσι, όλοι οι κόμβοι έχουν μια “αρχική” γνωστή μετατόπιση, δηλαδή έχουν εκπαιδευτεί. Προτείνεται η εφαρμογή αυτής της ιδέας αυτής για μελλοντική έρευνα και σύγκριση με τα αποτελέσματα της απλής μεθόδου.

Βιβλιογραφία

- [1] Καμπόλης, Ι.: *Πολυεπίπεδοι, πολυεπεξεργαστικοί αλγόριθμοι αεροδυναμικής βελτιστοποίησης στις στροβιλομηχανές*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2009.
- [2] Γιαννάκογλου Κ. Χ.: *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ, 2006.
- [3] Λιατσικούρας, Α.: *Προγραμματισμός Μεθόδου Παραμόρφωσης Πλέγματος με Συναρτήσεις Ακτινικής Βάσης και Προσταθεροποιητή για χρήση στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2015.
- [4] Λιακόπουλος, Π.: *Γένεση μη-δομημένων πλεγμάτων και διαχείρισή τους σε μεθόδους ανάλυσης και βελτιστοποίησης συνιστωσών στροβιλομηχανών και εφαρμογές, αξιοποιώντας τεχνολογίες πλέγματος (Grid computing)*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2008.
- [5] Γιαννάκογλου Κ. Χ.: *Γένεση και Προσαρμογή Αριθμητικών Πλεγμάτων*, 1999.
- [6] Kampolis I.C., Zymaris A.C, Asouti V.G. and Giannakoglou K.C.: *Multilevel Optimization Strategies based on Metamodel-Assisted Evolutionary Algorithms, for Computationally Expensive Problems*. 2007 IEEE Congression Evolutionary Computation CEC, Singapore, September 25-28, 2007.
- [7] Κοντολέοντος, Ε.: *Ανάλυση και βελτιστοποίηση σύνθετων ρευστομηχανικών διατάξεων με χρήση υπολογιστικής ρευστοδυναμικής και εξελικτικών αλγορίθμων*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2012.
- [8] Ζερβογιάννης, Θ.: *Μέθοδοι βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική και τις στροβιλομηχανές με χρήση συζυγών τεχνικών, υβριδικών πλεγμάτων και του ακριβούς εσσιανού μητρώου*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2011.
- [9] Sieger Daniel, Menzel Stefan, Botsch Mario: *Constrained Space Deformation for Design Optimization*, Procedia Engineering, 2014,82:114-126.
- [10] Nealen Andrew: *An As-Short-As-Possible Introduction to the Least Squares, Weighted Least Squares and Moving Least Squares Methods for Scattered Data Approximation and Interpolation*, Technical Report, TU Darmstadt, 2004.

- [11] Lancaster P., and Salkauskas, K.: *Surfaces generated by moving least squares methods*. Mathematics of Computation 87,1981, 141–158.
- [12] Lynch, D.: *Unified approach to simulation on deforming elements with application to phase change problems*. Journal of Computational Physics, 47(3):387 – 411, 1982.
- [13] Lynch, D. and ONeil, K.: *Elastic grid deformation for moving boundary problems in two space dimensions*. In 3rd International Conference, Mississippi University, Oxford, May 19-23 1980.
- [14] Batina, J.: *Unsteady Euler algorithms with unstructured dynamic mesh for complex-aircraft aerodynamic analysis*. AIAA Journal, 29(3):327-333, 200.
- [15] Degand, C. and Farhat, C.: *A three-dimensional torsional spring analogy method for unstructured dynamic meshes*. Computers & Structures, 80(3-4):305- 316, 2002.
- [16] Scott A. Sara and Edward J. Kansa: *Multiquadric Radial Basis Function Approximation Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Science Press, 2010.
- [17] Fasshauer, G: *RBF Interpolation and MLS Approximation*. Padova University Press, 2008.
- [18] Braess, H. and Wriggers, P.: *Arbitrary Lagrangian Eulerian finite element analysis of free surface flow*. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 190(1-2):95-109, 2000.
- [19] Tianhe Z., Danfu H.: *A weighted least squares method for scattered data fitting*. Journal of Computational and Applied Mathematics 217, 56-63, 2008.
- [20] Γιαννάκογλου Κ. Χ., Αναγνωστόπουλος Ι., Μπεργελές Γ.: *Αριθμητική Ανάλυση για μηχανικούς*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ, 2003.
- [21] Alexa, M., Behr, J., Cohen-Or, D., Fleishman, S., Levin, D.,and T. Silva, C. 2003. *Computing and rendering point set surfaces*. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics 9, 1, 3–15.
- [22] Wendland, H. 1995. *Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degree*. Advances in Computational Mathematics 4, 389–396.
- [23] Levin, D. 1998. *The approximation power of moving least-squares*. Math. Comp. 67, 224, 1517–1531.

[24] Κολοβός Κ.: Προγραμματισμός μεθόδου συναρτήσεων ακτινικής βάσης (RBF) για τη μετατόπιση υπολογιστικών πλεγμάτων σε κάρτες γραφικών, Μεταπτυχιακή Εργασία, ΔΠΜΣ Υπολογιστική Μηχανική, 2015.

[25] Shewchuk, R. Jonathan: *An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain*. Technical report, Pittsburgh, PA, USA, 1994.