



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
Δ.Π.Μ.Σ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ  
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ  
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ  
ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ &  
ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Μεταπτυχιακή Εργασία

Προσαρμοστική Παραμόρφωση Υπολογιστικών  
Πλεγμάτων με Αντιστρόφως Ανάλογη της  
Απόστασης Στάθμιση (IDW)

Άχμεντ - Τριαντάφυλλος Ναϊντί

Επιβλέπων: Καθηγητής Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου

Ιούλιος, 2021

## Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της εκπόνησης της μεταπτυχιακής μου εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλους τους ανθρώπους που με βοήθησαν κατά την διάρκεια της ενασχόλησής μου.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε με την ανάθεση ενός τόσο απαιτητικού θέματος. Επιπλέον, τον ευχαριστώ για την συνεχή και στοχευμένη καθοδήγησή του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Η γνώση και η εμπειρία του στη διαχείριση υπολογιστικών πλεγμάτων ήταν βασικά εφόδια για την επιτυχή ολοκλήρωσή της. Ακόμη, ευχαριστώ πολύ τη Δρ. Βαρβάρα Ασούτη για την ουσιαστική βοήθειά της, τόσο σε επίπεδο επίλυσης αποριών, αλλά και τροφοδοσίας μου με επιστημονικό υλικό και υπολογιστικούς κώδικες.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ τον συνάδελφο και καλό φίλο Αλέξανδρο Εσκαντάρ, με τον οποίο συνεργαστήκαμε καθ' όλη τη διάρκεια των εργασιών μας, αλλά και γενικότερα στο Μεταπτυχιακό "Υπολογιστική Μηχανική". Η από κοινού αναζήτηση, έρευνα και συζήτηση, μου έδινε δύναμη και όρεξη για να πετύχω το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Ακόμη, η αλληλεγγύη και αλληλοστήριξη από όλους τους καλούς φίλους που γνώρισα σε αυτό το Μεταπτυχιακό, σε αυτήν την κοινωνικά δύσκολη περίοδο, με βοήθησε να ξεπερνάω εύκολα καθημερινές δυσκολίες και να ασχολούμαι με το αντικείμενο της εργασίας μου, ευχάριστα και με όρεξη.

Τέλος, ευχαριστώ πολύ την οικογένειά μου, για την αμέριστη στήριξη και εμπιστοσύνη που μου δείχνει σε κάθε μου επιλογή.



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
Δ.Π.Μ.Σ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ  
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ  
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ  
ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

## Προσαρμοστική Παραμόρφωση Υπολογιστικών Πλεγμάτων με τη μέθοδο Στάθμισης Αντιστρόφως Ανάλογης της Απόστασης (IDW)

Μεταπτυχιακή εργασία του

**Άχμεντ-Τριαντάφυλου Ναΐντι**

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος, 2021

### Περίληψη

Κοινό πρόβλημα στις εφαρμογές υπολογιστικής ρευστοδυναμικής με κινητά όρια, αποτελεί η προσαρμογή του πλέγματος που καταλαμβάνει το ρευστό στα παραμορφωμένα στερεά όρια. Για την επίτευξη της προσαρμοστικής παραμόρφωσης, είναι απαραίτητο το πλέγμα του ρευστού να κινηθεί με τέτοιο τρόπο, ώστε η ποιότητα του νέου παραμορφωμένου πλέγματος να παραμείνει όσο το δυνατόν καλύτερη. Αρκετές σχετικές μέθοδοι έχουν προταθεί τα τελευταία χρόνια. Κάποιες από αυτές παρουσιάζουν υψηλή στιβαρότητα σε σχέση με τη στρέβλωση και επικάλυψη των πλεγματικών στοιχείων, αλλά είναι υπολογιστικά κοστοβόρες και άλλες είναι υπολογιστικά αποδοτικές, αλλά λιγότερο στιβαρές. Η ανάπτυξη μιας ταυτόχρονα στιβαρής και υπολογιστικά αποδοτικής τεχνικής παραμόρφωσης πλέγματος, έχει αποτελέσει πρόκληση τα τελευταία χρόνια.

Στην μεταπτυχιακή αυτή εργασία αναπτύσσεται και αξιολογείται η μέθοδος παραμόρφωσης πλέγματος με Στάθμιση Αντιστρόφως Ανάλογης της Απόστασης (Inverse Distance Weighting Interpolation - IDW). Η μέθοδος IDW αποτελεί μια ρητή τεχνική παρεμβολής, η οποία υπολογίζει τη συνάρτηση παρεμβολής ως έναν σταθμισμένο μέσο όρο των γνωστών μετατοπίσεων των οριακών κόμβων. Τα βάρη είναι αντιστρόφως ανάλογα των αποστάσεων μεταξύ των εσωτερικών και των οριακών κόμβων του πλέγματος. Η μέθοδος αυτή αναπτύσσεται και βελτιώνεται για χρήση στη διαδικασία αεροδυναμικής βελτιστοποίησης σχήματος. Ωστόσο, μπορεί να εφαρμοστεί εξίσου και σε άλλες εφαρμογές που περιλαμβάνουν κινητά όρια.

Αρχικά, παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες και ο αλγόριθμος της μεθόδου παρεμβολής IDW, καθώς και η μέθοδος υπολογισμού των βαρών. Στη συνέχεια, η μέθοδος ενδυναμώνεται, συμπεριλαμβάνοντας τις στροφές στους οριακούς κόμβους. Η μετατόπιση κάθε οριακού κόμβου διαχωρίζεται σε μία μετακίνηση και μία στροφή, οι οποίες παρεμβάλλονται ξεχωριστά στο εσωτερικό πλέγμα. Το μέρος της στροφής περιγράφεται από τη θεωρία των τετραδονίων (Quaternions), τα οποία είναι υπερ-μιγαδικοί αριθμοί και αναπαριστούν έναν άξονα και μία γωνία περιστροφής. Τέλος, για την επίδειξη της λειτουργίας και της στιβαρότητας της μεθόδου, δοκιμάζεται σε μεγάλες παραμορφώσεις πλεγμάτων 2Δ και 3Δ εφαρμογών.





NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS  
MASTER IN COMPUTATIONAL MECHANICS  
FLUIDS DEPARTMENT  
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

## Adaptive Mesh Deformation using the Inverse Distance Weighting Interpolation Method

Master Thesis by

**Achment-Triantafyllos Naidi**

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, July, 2021

### Abstract

A common problem in fluid structure interaction problems FSI simulations is the coupling of the structural deformations with the simulation of the fluid medium. In order to perform this coupling the fluid volume mesh needs to move in such a way that the fluid mesh is conformal to the structure and that the quality of the fluid mesh is kept as high as possible. Various mesh deformation methodologies have been proposed. Some of them are robust with respect to elements overlapping and crossing, though time consuming, while others are computationally efficient but less robust. In recent years, it has been a challenge to develop an efficient, as well as a robust mesh deformation technique.

In this master thesis, the mesh deformation method named Inverse Distance Weighting (IDW) is formulated, programmed and assessed. IDW is an explicit interpolation technique, which computes the interpolation function as a weighted average of the known boundary node displacements. The weights are inversely proportional to the distances between the inner mesh nodes and the boundary nodes. This method is developed for use in the aerodynamic shape optimization process, while it can similarly be used in other applications of computational fluid dynamics, such as aeroelastic computations or problems involving moving boundaries.

At first, the basic properties, the main algorithm, as well as the weighting function that govern IDW method, are presented. Then, the initial method is improved including boundary node rotations. To this end, the displacement of each boundary node is split into a translation and a rotation part. The rotation part is represented with quaternions, which are hyper-complex numbers that represent a rotation axis and a rotation angle. Finally, for the demonstration of its operation and robustness, the method is implemented in the deformation of 2D and 3D computational meshes, in a variety of different deformation problems.

# Ακρωνύμια

2Δ	Δύο Διαστάσεων/Διδιάστατο.
3Δ	Τριών Διαστάσεων/Τριδιάστατο.
CFD	Computational Fluid Dynamics.
GMRES	Generalized minimal residual method.
IDW	Inverse Distance Weighting.
RBF	Radial Basis Function.
ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
ΚΑΣ	Κίνηση Απαραμόρφωτου Στερεού.
ΜΠΥΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης.
ΣΚΑΣ	Σταθμισμένη Κίνηση Απαραμόρφωτου Στερεού.
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>2</b>
1.1	Περί Αεροδυναμικής Βελτιστοποίησης . . . . .	2
1.2	Ανάγκη Παραμόρφωσης Πλέγματος . . . . .	4
1.3	Μέθοδοι Προσαρμοστικής Παραμόρφωσης Πλέγματος . . . . .	5
1.3.1	Μέθοδοι Φυσικών Αναλόγων . . . . .	6
1.3.2	Μέθοδοι Παρεμβολής . . . . .	9
1.3.3	Μέθοδοι Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων . . . . .	12
1.4	Παρεμβολή με Αντιστρόφως Ανάλογη της Απόστασης Στάθμιση (IDW) . . . . .	13
1.5	Σύνοψη . . . . .	14
1.6	Στόχος και Δομή της Εργασίας . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Μέθοδος Παραμόρφωσης Πλέγματος με Αντι- στρόφως Ανάλογη της Απόστασης Στάθμιση(IDW)</b>	<b>16</b>
2.1	Μαθηματικό Υπόβαθρο της Μεθόδου IDW . . . . .	16
2.2	Βασική Υλοποίηση της μεθόδου IDW . . . . .	18
2.3	Επιλογή παραμέτρων Βαρυτικής Συνάρτησης . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Παρεμβολή Στροφών στη Μέθοδο IDW</b>	<b>27</b>
3.1	Μητρώα Στροφής . . . . .	27
3.2	Τετραδόνια . . . . .	28
3.2.1	Περιστροφή με Τετραδόνια . . . . .	30
3.3	Καθορισμός Στροφών στους Οριακούς Κόμβους . . . . .	33
3.4	Παρεμβολή Μετατοπίσεων στο Πλέγμα . . . . .	37
3.5	Παρεμβολή Στροφών στο Πλέγμα . . . . .	37
3.6	2Δ Εφαρμογή Παραμόρφωσης Πλέγματος με την μέθοδο IDW	38
<b>4</b>	<b>Εφαρμογές IDW σε 2Δ και 3Δ Πλέγματα</b>	<b>42</b>
4.1	Εφαρμογή στην Αεροτομή NACA 4412 . . . . .	42
4.1.1	Περιστροφή Αεροτομής . . . . .	44
4.1.2	Ημιτονοειδής Παραμόρφωση της Αεροτομής . . . . .	47

4.2	Εφαρμογή σε πλέγμα γύρω από πλατανόφυλλο . . . . .	52
4.3	Εφαρμογή σε Μικρό Επιβατικό Αεροσκάφος . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Συγκριτική εφαρμογή παραμόρφωσης πλέγματος με τη μέθοδο ΣΚΑΣ</b>	<b>62</b>
5.1	Βασικές Αρχές της Μεθόδου ΚΑΣ . . . . .	62
5.2	Εφαρμογή σε 3Δ πλέγμα, γύρω από δύο σώματα χοίρων . . .	63
<b>6</b>	<b>Ανακεφαλαίωση και Συμπεράσματα</b>	<b>67</b>
6.1	Ανακεφαλαίωση . . . . .	67
6.2	Συμπεράσματα . . . . .	68
6.3	Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα . . . . .	69
<b>A</b>	<b>Μετρικές Ποιότητας στα Υπολογιστικά Πλέγματα</b>	<b>72</b>
A.1	Μετρικές 2Δ Πλεγμάτων . . . . .	73
A.1.1	Υπολογισμός Ιακωβιανής . . . . .	73
A.1.2	Μετρική Μεγέθους . . . . .	75
A.1.3	Μετρική Σχήματος . . . . .	75
A.1.4	Μετρική Μεγέθους-Σχήματος . . . . .	76
A.2	Μετρικές 3Δ πλεγμάτων . . . . .	76
A.2.1	Υπολογισμός Ιακωβιανής . . . . .	76
A.2.2	Μετρική Σχήματος . . . . .	77
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>79</b>



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Περί Αεροδυναμικής Βελτιστοποίησης

Η ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών τις τελευταίες δεκαετίες έδωσε το έναυσμα για την αεροδυναμική βελτιστοποίηση γεωμετρικών μορφών με υπολογιστικές μεθόδους, πέραν των πειραματικών που ήταν καθιερωμένες. Στον τομέα της αεροδυναμικής και της μηχανικής των ρευστών, το πρόβλημα της ανάλυσης και της πρόλεξης των χαρακτηριστικών της ροής γύρω από αεροδυναμικά σώματα αποτελούσε ανέκαθεν βασικό πεδίο ενδιαφέροντος. Με την ανάπτυξη των θεωριών και τη διατύπωση των νόμων που διέπουν τη φυσική των ρευστών, επόμενο βήμα ήταν η ανάπτυξη κατάλληλων μεθόδων επίλυσης των εξισώσεων που διέπουν τις ροές, ώστε να προλέγονται τα χαρακτηριστικά της ροής γύρω από σώματα, των οποίων η αεροδυναμική συμπεριφορά αποτελεί κρίσιμο παράγοντα σε τεχνολογικές εφαρμογές. Βασικό παράδειγμα τέτοιων εφαρμογών αποτελεί το αεροσκάφος, του οποίου η εξέλιξη ανέκαθεν ακολουθούσε τις εξελίξεις στον τομέα της αεροδυναμικής. Η γενική αδυναμία αναλυτικής επίλυσης των εξισώσεων που διέπουν τις ροές, δηλαδή των εξισώσεων συνέχειας, ορμής (γνωστές και ως εξισώσεις Navier-Stokes) και ενέργειας, οδήγησε στην ανάπτυξη του κλάδου της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (Computational Fluid Dynamics (CFD)), που ασχολείται με την υλοποίηση μεθόδων για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων αυτών, με τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Εκτός όμως από την πρόλεξη της ροής γύρω από αεροδυναμικά σώματα, μεγάλο τεχνολογικό ενδιαφέρον παρουσιάζει και η δυνατότητα σχεδιασμού της βέλτιστης μορφής των σωμάτων αυτών, έτσι ώστε να ικανοποιούν τις σχετικές με την αεροδυναμική τους συμπεριφορά απαιτήσεις. Για παράδειγμα, η διαδικασία σχεδιασμού μπορεί να έχει ως στόχο την ελαχιστοποίηση της αντίστασης ενός σώματος σε εξωτερική ροή, τη μεγιστοποίηση της άν-

ωσης ενός σώματος, την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης σε εσωτερική ροή ή τη μεγιστοποίηση του βαθμού απόδοσης της ροής σε μία πτερύγωση συμπίεστη ή στροβίλου. Τα προβλήματα αυτά είναι γνωστά και ως προβλήματα βέλτιστου σχεδιασμού (optimal design) ή βελτιστοποίησης σχήματος (shape optimization).

Για την ικανοποίηση της ανάγκης αυτής έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι βελτιστοποίησης, οι οποίες έχουν ως στόχο την ελαχιστοποίηση ή τη μεγιστοποίηση μίας ή περισσότερων συναρτήσεων, που είναι γνωστές και ως συναρτήσεις κόστους (cost functions) ή συναρτήσεις καταλληλότητας (fitness functions) ή συναρτήσεις-στόχοι (objective functions). Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης μπορούν να διακριθούν σε στοχαστικές και αιτιοκρατικές μεθόδους[39]. Οι μέθοδοι στοχαστικής βελτιστοποίησης αναζητούν τη βέλτιστη λύση με τρόπο τυχαίο ή οργανωμένα τυχαίο. Οι αλγόριθμοι της κατηγορίας αυτής είναι γενικοί, δηλαδή μπορούν εύκολα να εφαρμοστούν για την επίλυση διαφορετικών προβλημάτων, ενώ μπορούν να εντοπίσουν το ολικό ακρότατο μιας συνάρτησης-στόχου, ανεξάρτητα από την αρχικοποίηση τους. Όμως, έχουν το μειονέκτημα ότι απαιτούν την αξιολόγηση πολλών διαφορετικών λύσεων προτού καταλήξουν στη βέλτιστη, κάτι που τις καθιστά αργές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα στοχαστικών αλγορίθμων είναι οι εξελικτικοί αλγόριθμοι (Evolutionary Algorithms - EA) [39] [1] [13]. Μία αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης χρησιμοποιεί τη γενικευμένη έννοια της παραγώγου της συνάρτησης-στόχου, τιμές της οποίας καλείται να υπολογίσει ή να προσεγγίσει. Το να δημιουργηθεί μια αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης απαιτεί μεγαλύτερο χρόνο επένδυσης από την πλευρά του μηχανικού-προγραμματιστή. Είναι δυσκολότερα επεκτάσιμη σε άλλα παρεμφερή προβλήματα, δηλαδή όταν αλλάζει η συνάρτηση-στόχος ή οι περιορισμοί, συγκλίνει γενικά γρήγορα στη βέλτιστη λύση, με κίνδυνο όμως εγκλωβισμού σε τοπικό βέλτιστο η ακόμα και σε αδυναμία υπολογισμού κάποιου ακρότατου (απόκλιση από τη λύση). Μια αιτιοκρατική μεθοδολογία καθορίζεται αρκετά από το σημείο εκκίνησης της (αρχικοποίηση) και αποτελεί σημαντική απόφαση για την αποτελεσματική σύγκλιση στο καθολικό βέλτιστο. Πολλές σύγχρονες μέθοδοι βελτιστοποίησης, χρησιμοποιούν συγχρόνως στοιχεία και από τις δυο μεθόδους με σκοπό να εκμεταλλευτούν τα δυνατά στοιχεία των μεθόδων και να αποφύγουν τα αδύναμα. Μία ιδανική μέθοδος βελτιστοποίησης θα συνέκλινε με ταχύτητα αιτιοκρατικής μεθόδου, αλλά με δυνατότητα αποφυγής τοπικών ακροτάτων, όπως λ.χ μπορεί να κάνει μια στοχαστική μέθοδος.

Σε όλες τις μεθόδους βελτιστοποίησης που αναφέρθηκαν παραπάνω, η αξιολόγηση της κάθε διαφορετικής λύσης απαιτεί την παραμετροποίηση της εκάστοτε γεωμετρίας, ώστε να αναδειχτούν οι μεταβλητές σχεδιασμού (design variables) και στη συνέχεια, τη γένεση υπολογιστικού πλέγματος (grid generation) το οποίο θα προσαρμόζεται με ακρίβεια στην κάθε διαφορετική γεωμετρία. Λόγω του κόστους γένεσης του πλέγματος, συχνά η διαδικασία βελτιστοποίησης ξεκινά με ένα πλέγμα γύρω από την αρχική γεωμετρία, το οποίο δεν ξαναδημιουργείται μετά από κάθε μεταβολή στη γεωμετρία – αφού κάτι τέτοιο θα είχε υψηλό υπολογιστικό κόστος, αλλά προσαρμόζεται σε κάθε νέο σχήμα, όπως αυτό προκύπτει από τη μέθοδο βελτιστοποίησης που χρησιμοποιείται. Για το λόγο αυτό, η μέθοδος παραμόρφωσης πλέγματος αποτελεί βασική συνιστώσα της διαδικασίας αεροδυναμικής βελτιστοποίησης.

## 1.2 Ανάγκη Παραμόρφωσης Πλέγματος

Η ανάγκη προσαρμοστικής παραμόρφωσης υπολογιστικών πλεγμάτων εντοπίζεται πλέον σε πληθώρα μηχανολογικών εφαρμογών στη βιομηχανία. Εφαρμογές στον τομέα της Αεροδυναμικής βελτιστοποίησης όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 1.1, σε προσομοιώσεις στον τομέα της εμβιομηχανικής[10, 30], αλλά και γενικότερα σε προβλήματα προσομοίωσης με κινητά όρια και αλληλεπίδρασης ρευστού-στερεού[15]. Σε τέτοιου είδους εφαρμογές, η πιο συνηθισμένη τακτική είναι η προσαρμογή του πλέγματος της ροής στη μετακίνηση των ορίων του πεδίου ροής.

Η στιβαρότητα και η ακρίβεια του επιλύτη ροής αποτελεί κυρίαρχη υπόθεση στους αλγόριθμους προσαρμοστικής παραμόρφωσης. Λόγω της παραμόρφωσης του πλέγματος, τα πλεγματικά στοιχεία είναι πιθανό να αναστραφούν, είτε να υποστούν μεγάλη στρέβλωση, με αποτέλεσμα να δημιουργηθούν αστάθειες στην επίλυση. Γενικότερα, δημιουργούνται σφάλματα ακρίβειας στην πρόλεξη της ροής σε περιοχές όπου υπάρχει χαμηλής ποιότητας πλέγμα και ταυτόχρονα η λύση παρουσιάζει μεγάλες χωρικές παραγωγούς. Ως αποτέλεσμα, η ιδεατή ποιότητα πλέγματος εξαρτάται από το φυσικό πρόβλημα που επιλύεται. Συχνά απαιτείται να υπάρχει καλής ποιότητας πλέγμα κοντά στα όρια, όπου οι παράγωγοι της λύσης είναι γενικά μεγαλύτερες. Εάν η ποιότητα του πλέγματος μειώνεται σε μεγάλο βαθμό κατά την προσαρμογή, το πλέγμα πρέπει να ξαναδημιουργηθεί (remeshing), ώστε να ανανεωθεί η βέλτιστη ποιότητα. Εάν αυτό συμβεί απαιτείται ένα επιπλέον βήμα παρεμβολής της λύσης στο νέο πλέγμα (mapping). Ωστόσο, η εκ νέου γένεση του πλέγματος είναι υπολογιστικά κοστοβόρα

διαδικασία και η παρεμβολή της λύσης προσθέτει επιπλέον κόστος. Έτσι, στην υπολογιστική μηχανική είναι επιθυμητό τα βήματα της εκ νέου γένεσης του πλέγματος να πραγματοποιούνται όσο το δυνατόν λιγότερες φορές σε τέτοιου είδους προσομοιώσεις.

### 1.3 Μέθοδοι Προσαρμοστικής Παραμόρφωσης Πλέγματος

Γενικά, οι στρατηγικές προσαρμοστικής παραμόρφωσης του πλέγματος πεδίου ροής στην παραμορφωμένη γεωμετρία μπορούν χωριστούν σε τρεις βασικές κατηγορίες: στις μεθόδους φυσικών αναλόγων, στις μεθόδους παρεμβολής και στις μεθόδους μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Οι μέθοδοι φυσικών αναλόγων προσπαθούν να περιγράψουν την παραμόρφωση του πεδίου ροής σύμφωνα με κάποια φυσική διαδικασία που μπορεί να μοντελοποιηθεί εφαρμόζοντας αριθμητικές μεθόδους. Μια από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους σε αυτήν την κατηγορία, είναι η μέθοδος των γραμμικών ελατηρίων που αρχικά προτάθηκε από τον Batina [3]. Αυτή η μέθοδος, αντιμετωπίζει το πλέγμα του πεδίου ροής ως ένα δίκτυο από ελατήρια. Στην ίδια κατεύθυνση, τα ελαστικά ανάλογα έχουν προταθεί από τους Lohner και Yang[23] και πιο πρόσφατα από τον Stein et al.[33, 34]. Τόσο στη μέθοδο των γραμμικών ελατηρίων, όσο και στην ελαστική μέθοδο μεταβάλλεται το μέτρο δυσκαμψίας των ελατηρίων ή του ελαστικού υλικού τοπικά σε κάθε στοιχείο με βάση το μέγεθος ή την εγγύτητα της παραμορφωμένης επιφάνειας.

Στις μεθόδους παρεμβολής η παραμόρφωση του πλέγματος αντιμετωπίζεται ως ένα πρόβλημα παρεμβολής των παραμορφώσεων των οριακών σημείων στο υπόλοιπο πλέγμα. Γενικά, αυτοί οι μέθοδοι δεν απαιτούν πληροφορία για τη συνδεσμολογία των κόμβων, έτσι μπορούν εύκολα να εφαρμοστούν σε πλέγματα διαφόρων τύπων συμπεριλαμβανομένων πλεγμάτων. Ακόμη, μπορούν να εφαρμοστούν σε πλέγματα με ποικιλόμορφα στοιχεία, όπως πολύεδρα ή ακόμη και μετέωρους κόμβους (hanging nodes). Σε αυτήν την κατηγορία συγκαταλέγεται η μέθοδος προσαρμογής πλέγματος με Αντιστρόφως Ανάλογη της Απόστασης Στάθμιση (IDW), που αναπτύσσεται στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία.

Στις μεθόδους παραμόρφωσης με χρήση μερικών διαφορικών εξισώσεων το

παραμορφωμένο πλέγμα αντιμετωπίζεται ως ένα πρόβλημα συνωριακών τιμών, οπότε το αποτέλεσμα προκύπτει από την επίλυση των εξισώσεων Euler-Lagrange. Αυτές οι μέθοδοι λειτουργούν ικανοποιητικά για πλέγματα με ισομεγέθη πλεγματικά στοιχεία και όταν το μέγεθος της παραμόρφωσης είναι της τάξης του μεγέθους των στοιχείων[27].

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι βασικές αρχές μερικών από τους πιο διαδεδομένους αλγορίθμους προσαρμοστικής παραμόρφωσης από κάθε κατηγορία.

### 1.3.1 Μέθοδοι Φυσικών Αναλόγων

Οι μέθοδοι φυσικών αναλόγων (physical analogies), είναι οι περισσότερο χρησιμοποιούμενες μέθοδοι παραμόρφωσης πλεγμάτων. Δύο από τις πιο διαδεδομένες και αξιόπιστες τεχνικές φυσικών αναλόγων, είναι η μέθοδος των ελατηρίων και η ελαστική μέθοδος.

#### Μέθοδος ελατηρίων (spring analogy method)

Η μέθοδος των γραμμικών ελατηρίων αναπτύχθηκε αρχικά από τον Batina[3]. Κάθε ακμή του πλέγματος αντιστοιχίζεται με ένα ελατήριο και το μέγεθος της σταθεράς του ελατηρίου είναι αντιστρόφως ανάλογο του μήκους της ακμής. Πολλοί ερευνητές έχουν υιοθετήσει αυτήν την τεχνική και τη συγκεκριμένη υπόθεση για τη σταθερά του κάθε ελατηρίου-ακμής [11, 5, 28]. Τα μήκη των ελατηρίων σε ισορροπία, ορίζονται ίσα με τα μήκη των πλεγματικών ακμών. Έτσι, εφαρμόζοντας τον νόμο του *Hooke* για τις μετατοπίσεις των κόμβων, υπολογίζεται η δύναμη που ασκείται σε κάθε κόμβο:

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} (\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i), \quad (1.1)$$

όπου  $\alpha_{ij}$  είναι η σταθερά του κάθε ελατηρίου μεταξύ των πλεγματικών κόμβων  $i$  και  $j$ ,  $\vec{\delta}$  είναι η μετατόπιση του κάθε κόμβου και  $n_i$  ο αριθμός των γειτόνων του κόμβου  $i$ . Στην περίπτωση στατικής ισορροπίας, η δύναμη  $\vec{F}$  σε κάθε κόμβο είναι ίση με 0. Η εξίσωση που προκύπτει για την εύρεση των μετατοπίσεων επιλύεται επαναληπτικά,

$$\vec{\delta}_i^{k+1} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} \vec{\delta}_j^k}{\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij}} \quad (1.2)$$

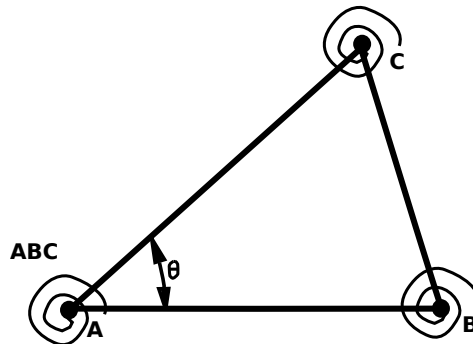
Η παραμόρφωση του πλέγματος καθορίζεται από την επίλυση των εξισώσεων στατικής ισορροπίας του συνολικού συστήματος, αφού οι οριακοί κόμβοι

μετακινήθουν σύμφωνα με την παραμόρφωση της γεωμετρίας. Αν και η μέθοδος των γραμμικών ελατηρίων εφαρμόζεται εύκολα, σε μεγάλες μετατοπίσεις και σε πυκνά πλέγματα, εμφανίζει προβλήματα στιβαρότητας, οδηγώντας στην εμφάνιση αρνητικών όγκων ιδιαίτερα σε τριγωνικά πλέγματα.

Βελτίωση της μεθόδου των γραμμικών ελατηρίων, αποτελεί η προσέγγιση του Farhat [11], όπου προστίθενται μη-γραμμικά, στρεπτικά ελατήρια για την αποφυγή της εμφάνισης αναστραμμένων πλεγματοειδών στοιχείων. Σε κάθε στοιχείο ενός τριγωνικού  $2\Delta$  πλέγματος, εισάγονται τρία στρεπτικά ελατήρια, ένα για κάθε κόμβο του τριγώνου. Το μέτρο δυσκαμψίας κάθε ελατηρίου, εξαρτάται από την γωνία  $\theta$  που σχηματίζει η κορυφή του τριγώνου. Το μέτρο δυσκαμψίας υπολογίζεται από τη σχέση

$$\alpha_A^{ABC} = \frac{1}{\sin^2 \theta_A^{ABC}} \quad (1.3)$$

όπου, το A συμβολίζει τον κόμβο του τριγώνου πάνω στον οποίο γίνεται ο υπολογισμός και ο εκθέτης ABC συμβολίζει το τρίγωνο στο οποίο ανήκει.



Σχήμα 1.1: Τοποθέτηση στρεπτικών ελατηρίων στις κορυφές του τριγώνου ABC

Μια εναλλακτική λύση είναι να διαιρεθεί η σταθερά ελατηρίου κάθε κορυφής, με τη γωνία που δημιουργείται μεταξύ των άλλων δύο ακμών του τριγώνου. Ωστόσο, αυτό οδηγεί σε ένα σύστημα μη-γραμμικών, εξισώσεων αφού το μητρώο  $\alpha_{ij}$  γίνεται συνάρτηση των μετατοπίσεων. Αυτή η προσέγγιση συνήθως αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως μέθοδος ημι-στρεπτικών ελατηρίων (semi-torsional spring approach) [6].

### Ελαστική μέθοδος (elastic analogy method)

Εδώ η παραμόρφωση του πλέγματος επιτυγχάνεται επιλύοντας τις εξισώσεις γραμμικής ελαστικότητας από την ελαστική θεωρία των στερεών, για κάθε

κόμβο του εσωτερικού πεδίου. Η εξίσωση ελαστικότητας περιγράφεται από τη σχέση

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = -f_j, \quad \sigma = D\epsilon, \quad \epsilon = AU \quad (1.4)$$

όπου οι τάσεις  $\sigma_{ij}$ , οι παραμορφώσεις  $\epsilon_{ij}$  και οι μετακινήσεις  $U_i$ , στις τρεις διαστάσεις δίνονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \sigma &= \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\}^T, \\ \epsilon &= \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{12}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}\}^T, \\ U &= \{u \quad v \quad w\}^T \end{aligned}$$

και τα μητρώα  $D$  και  $A$  δίνονται παρακάτω

$$D = \alpha \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T$$

όπου

$$\alpha = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.5)$$

όπου  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας και  $\nu$  ο λόγος *Poisson*.

Αφού οι εξισώσεις ελαστικότητας εμπεριέχουν το μέτρο ελαστικότητας  $E$  και τον λόγο *Poisson*  $\nu$ , αυτές οι ιδιότητες τώρα σχετίζονται με τα χαρακτηριστικά του πλέγματος. Μια κοινή πρακτική είναι ο λόγος *Poisson*  $\nu$  να ορίζεται σταθερός σε ένα εύρος μεταξύ 0 και 1/2 και το μέτρο ελαστικότητας  $E$  να υπολογίζεται ως αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης μεταξύ κάθε εσωτερικού κόμβου με την πιο κοντινή εσωτερική επιφάνεια, είτε να υπολογίζεται αντιστρόφως ανάλογο του όγκου του κάθε εσωτερικού πλεγματοειδούς στοιχείου [4, 37, 17]. Αυτή η προσέγγιση αποδείχτηκε πολύ ευεργετική αποφεύγοντας τα μη-αποδεκτά στοιχεία ιδιαίτερα στην περιοχή κοντά στα όρια. Μια εναλλακτική πρόταση, είναι η χρήση σταθερού μέτρου

ελαστικότητας  $E$  και η τροποποίηση του  $\nu$ , ώστε ο όρος  $\frac{1}{1-2\nu}$  να ισούται με τον λόγο επιμήκους (Aspect Ratio) του πλεγματοειδούς στοιχείου [18]. Αυτή η προσέγγιση αυξάνει τη στιβαρότητα της μεθόδου σε περιοχές του πλέγματος που τα στοιχεία έχουν υψηλό λόγο επιμήκους, όπως η περιοχή του οριακού στρώματος πολύ κοντά στα όρια της γεωμετρίας. Έτσι, πραγματοποιείται κίνηση των εσωτερικών κόμβων πιο κοντά στο πρότυπο κίνησης του απαραμόρφωτου στερεού κοντά στη γεωμετρία.

Οι Yang και Mavriplis [38] ανέπτυξαν μια μέθοδο βασιζόμενη στη συζυγή μέθοδο βελτιστοποίησης (Adjoint-based), με σκοπό να επιτευχθεί βέλτιστη κατανομή του μέτρου ελαστικότητας στο εσωτερικό πλέγμα. Σ' αυτήν την εργασία, η συνάρτηση-κόστους επιλέγεται να είναι ανάλογη του όγκου των στοιχείων του πλέγματος και ελαχιστοποιείται δοκιμάζοντας διαφορετικές τιμές του  $E$  σε κάθε στοιχείο. Αν και η βελτιστοποίηση οδήγησε στην αποφυγή μη-αποδεκτών στοιχείων για πολύ μεγάλες παραμορφώσεις και πολύ ταυσιμένα στοιχεία διαφορετικών τύπων, η λύση του είναι πολύ ακριβή σε σχέση με τις απαιτήσεις της σε υπολογιστική ισχύ (*CPU time*).

Οι περισσότερες τεχνικές παραμόρφωσης πλέγματος που χρησιμοποιούν τη φυσική αναλογία της ελαστικής θεωρίας χρησιμοποιούν τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (FEM) για τη διακριτοποίηση των γραμμικών ελαστικών εξισώσεων και επιλύουν το γραμμικό σύστημα με τη μέθοδο GMRES [4, 18, 16].

### 1.3.2 Μέθοδοι Παρεμβολής

Γενικότερα, αυτές οι μέθοδοι δεν απαιτούν τοπολογική πληροφορία για το πλέγμα. Γι αυτόν τον λόγο, αυτοί οι αλγόριθμοι μπορούν να εφαρμοστούν σε οποιοδήποτε πλέγμα ακόμη και σε πλέγματα που εμπεριέχουν μετέωρους κόμβους (hanging nodes) [25]. Τα αλγεβρικά σχήματα που βασίζονται κυρίως στην παρεμβολή της παραμόρφωσης των ορίων στο εσωτερικό πλέγμα, καταφέρνουν πολύ μικρότερο υπολογιστικό κόστος με μικρότερες απαιτήσεις σε μνήμη, σε σχέση με τις μεθόδους φυσικών αναλόγων. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι βασικές αρχές μερικών από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους προσαρμοστικής παραμόρφωσης πλέγματος με παρεμβολή.

#### Μέθοδος Συναρτήσεων Ακτινικής Βάσης (RBF)

Η μέθοδος παρεμβολής μέσω συναρτήσεων ακτινικής βάσης (RBF) αναπτύχθηκε αρχικά από τον Boer [9]. Η μέθοδος, χρησιμοποιεί τις μετατοπίσεις



των οριακών κόμβων για τη δημιουργία της εξίσωσης παρεμβολής  $u(\vec{x})$ , η οποία αποτελεί ένα άθροισμα συναρτήσεων ακτινικών βάσεων

$$u(\vec{x}) = \sum_{b=1}^{n_b} \alpha_b \phi(\|\vec{x} - \vec{x}_b\|) + p(\vec{x}), \quad (1.6)$$

όπου  $x_b$  οι γνωστές μετατοπίσεις των οριακών κόμβων,  $p$  ένα πολυώνυμο,  $n_b$  ο αριθμός των οριακών κόμβων,  $\alpha_b$  οι συντελεστές που θα αναφερθούν στη συνέχεια και  $\phi$  η συνάρτηση ενεργοποίησης που βασίζεται στην Ευκλείδεια απόσταση  $\|\cdot\|$ . Οι συντελεστές  $\alpha_b$  και το πολυώνυμο  $P$  προσδιορίζονται σύμφωνα τις δύο συνθήκες παρεμβολής 1.7, 1.8.

$$u(\vec{x}_b) = u_b, \quad (1.7)$$

όπου  $u_b$  είναι οι γνωστές μετατοπίσεις σε μια συγκεκριμένη κατεύθυνση, επειδή κάθε κατεύθυνση  $(x, y, z)$  παρεμβάλλεται ξεχωριστά. Η δεύτερη συνθήκη για τους συντελεστές  $\alpha_b$ ,

$$\sum_{b=1}^{n_b} \alpha_b q(\vec{x}_b) = 0, \quad (1.8)$$

όπου  $q$  είναι πολυώνυμο, με βαθμό μικρότερο ή ίσο του πολυωνύμου  $p$ . Με σκοπό τον υπολογισμό των συντελεστών  $\alpha_b$  και του γραμμικού πολυωνύμου, οι εξισώσεις 1.7, 1.8 αναπαρίστανται σε μητρική μορφή

$$\begin{bmatrix} u_b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{b,b} & P_b \\ P_b^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

όπου, ο όρος  $\alpha$  περιέχει τους συντελεστές  $\alpha_b$ , ο όρος  $\beta$  περιέχει τους συντελεστές του γραμμικού πολυωνύμου  $p$ , ο όρος  $M_{b,b}$  αποτελεί ένα  $n_b \times n_b$  μητρώο παρεμβολής και δίνεται ως εξής

$$M_{jk} = \phi(\|\vec{x}_j - \vec{x}_k\|), \quad (1.10)$$

και ο όρος  $P_b$  αποτελεί ένα μητρώο που σχετίζεται με την επιλογή του πολυωνύμου. Στην περίπτωση επιλογής ενός πρωτοβάθμιου πολυωνύμου, ο όρος  $P_b$  δίνεται από ένα  $n_b \times 4$  μητρώο

$$P_b = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n_b} & y_{n_b} & z_{n_b} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Τελικά, οι τιμές των μετακινήσεων για τους εσωτερικούς κόμβους του πλέγματος  $u(\vec{x}_i)$ , σε κάθε θέση  $\vec{x}_i$  μπορούν να βρεθούν εφαρμόζοντας την εξίσωση παρεμβολής 1.6.

Η μέθοδος RBF μπορεί να εφαρμοστεί πολύ εύκολα και παράγει πλέγματα καλής ποιότητας που διατηρούν σε ικανοποιητικό βαθμό απαραμόρφωτα τα πλεγματικά στοιχεία κοντά στα όρια. Ωστόσο, η άμεση εφαρμογή του σε μεγάλα 3D προβλήματα έχει υψηλό υπολογιστικό κόστος. Το κόστος αυτό μπορεί να μειωθεί χρησιμοποιώντας κατάλληλο προσταθεροποιητή. Όπως όλοι οι αλγόριθμοι παραμόρφωσης πλέγματος με παρεμβολή μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε τύπο πλέγματος, αφού δεν εξαρτάται από τη συνδεσμολογία των πλεγματικών κόμβων.

### Μέθοδος Γράφων Delaunay

Η μέθοδος παραμόρφωσης πλεγμάτων με παραμετροποίηση γράφων Delaunay (Delaunay Graph Mapping Method), είναι μια αλγεβρική μέθοδος, η οποία προτάθηκε αρχικά από τον Liu [22] ως μια γρήγορη και απλή μέθοδος μετακίνησης πλεγμάτων. Στη Διπλωματική εργασία του Α.Γ Τσολοβίκου [41] που πραγματοποιήθηκε στην ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ παρουσιάζεται αναλυτικά και υλοποιείται η μέθοδος Γράφων Delaunay σε 2D και 3D πλέγματα. Αυτή η προσέγγιση παράγει πλέγματα καλής ποιότητας και είναι στιβαρή σε μεγάλες παραμορφώσεις. Τα βασικά της βήματα είναι:

1. Παραγωγή Γράφου Delaunay από τους οριακούς πλεγματικούς κόμβους,
2. Εισαγωγή των πλεγματικών κόμβων στον γράφο,
3. Προσαρμογή του Παραμετροποιημένου γράφου με βάση την παραμόρφωση της γεωμετρίας
4. Υπολογισμός νέας θέσης των εσωτερικών κόμβων από τον παραμορφωμένο γράφο μέσω κατάλληλων σχημάτων παρεμβολής σε κάθε στοιχείο του γράφου Delaunay.

Προϋπόθεση στιβαρότητας της μεθόδου είναι τα εμβαδά των τριγώνων είτε αντίστοιχα οι όγκοι των τετραέδρων να παραμένουν θετικά κατά τη μετατόπιση των κορυφών του πλέγματος. Με άλλα λόγια απαιτείται σε κάθε αλλαγή της γεωμετρίας η εγκυρότητα του γράφου. Η απαίτηση αυτή οδηγεί στην επιλογή της τριγωνοποίησης ή τετραεδροποίησης Delaunay για τη γένεση του γράφου. Η επιλογή της ψηφιδοποίησης του χωρίου κατά Delaunay μεγιστοποιεί την ευελιξία του γράφου και, άρα, τη στιβαρότητα της μεθόδου.

### 1.3.3 Μέθοδοι Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων

Σ' αυτήν την προσέγγιση, η παραμόρφωση του πλέγματος επιτυγχάνεται με την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Laplace (Laplace Smoothing equations) και έχει αποδειχθεί μια αποδοτική τεχνική. Η γενική ιδέα της μεθόδου είναι ότι οι εξισώσεις Laplace ικανοποιούν την αρχή του ελάχιστου/μέγιστου. Με άλλα λόγια, αυτό σημαίνει ότι οι τιμές των εσωτερικών μετακινήσεων οριοθετούνται από τις οριακές επιφάνειες. Αυτή η ιδιότητα εγγυάται ότι οι εσωτερικοί κόμβοι θα παραμένουν πάντα εντός ορίων. Η διανυσματική σχέση 1.12

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \vec{u}) &= 0 \\ \Delta \vec{X} &= \vec{u} \Delta t \\ \vec{X}_{new} &= \vec{X}_{old} + \Delta \vec{X}\end{aligned}\tag{1.12}$$

περιγράφει την κλασική Λαπλασιανή μέθοδο. Οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι τόσες, όσες και η διάσταση του προς παραμόρφωση πλέγματος. Με  $\vec{u}$  συμβολίζεται η ταχύτητα παραμόρφωσης του πλέγματος.

#### Τροποποιημένη Λαπλασιανή μέθοδος (Modified Laplacian)

Η τροποποιημένη Λαπλασιανή μέθοδος περιλαμβάνει την ποσότητα  $\gamma$  υψωμένη σε έναν εκθέτη  $q$ ,

$$\nabla \cdot (\gamma^q \nabla \vec{u}) = 0,\tag{1.13}$$

όπου  $\gamma$  είναι ο συντελεστής διάχυσης. Εάν ο εκθέτης  $q = 0$ , πρόκειται για την κλασική Λαπλασιανή μέθοδο. Η επιλογή του συντελεστή  $\gamma$  εξαρτάται κάθε φορά από τη συγκεκριμένη περίπτωση παραμόρφωσης του πλέγματος (case sensitive). Ο συντελεστής διάχυσης  $\gamma$  σχετίζεται με την επιρροή της παραμόρφωσης στο πλέγμα κοντά στα μεταβαλλόμενα όρια. Μεγάλες τιμές του  $\gamma$  οδηγούν σε σχετικά μικρές κλίσεις των μετακινήσεων  $\delta \vec{Q}$ . Έτσι, τα μικρά πλεγματικά στοιχεία που βρίσκονται κοντά στη γεωμετρία τείνουν να κινηθούν ως απαραμόρφωτο σώμα μαζί με τη γεωμετρία. Με αυτόν τον τρόπο, αποφεύγεται η πιθανότητα να δημιουργηθούν στρεβλωμένα ή ακόμη και αναστραμμένα πλεγματικά στοιχεία κοντά στη γεωμετρία λόγω μεγάλων παραμορφώσεων. Έχουν διερευνηθεί αρκετές προσεγγίσεις για τον υπολογισμό της παραμέτρου  $\gamma$ . Οι Crumpton και Giles [8] χρησιμοποίησαν τον συντελεστή διάχυσης ως τιμή αντιστρόφως ανάλογη του όγκου των πλεγματικών στοιχείων, ενώ ο Lohner [24] τον συσχετίζει με την απόσταση κάθε κόμβου από τα όρια της κινούμενης γεωμετρίας.

Ένα μειονέκτημα, που περιορίζει τη χρήση της κλασικής Λαπλασιανής μεθόδου είναι ότι η κάθε συντεταγμένη της παραμόρφωσης επιλύεται ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες δύο. Για παράδειγμα, εάν τα όρια της γεωμετρίας κινούνται μόνο στον  $x$  άξονα, τότε και οι εσωτερικοί κόμβοι κινούνται μόνο στον ίδιο άξονα [16].

## 1.4 Παρεμβολή με Αντιστρόφως Ανάλογη της Απόστασης Στάθμιση (IDW)

Η μέθοδος IDW, αποτελεί μια ρητή τεχνική παρεμβολής διάσπαρτων σημείων. Εισήχθηκε πρώτη φορά από τον D.Shepard το 1968 στο πλαίσιο έρευνας του στο πεδίο των γεωγραφικών πληροφοριακών συστημάτων[31]. Στη βασική της μορφή η μέθοδος παρεμβολής με IDW, υπολογίζει την παρεμβαλλόμενη τιμή  $u$  σε ένα δοσμένο σημείο  $x_i$ , ως ένα σταθμισμένο μέσο όρο των γνωστών τιμών στα σημεία  $u_j = u(x_j)$ . Η εξίσωση παρεμβολής IDW δίνεται από τη σχέση 1.14

$$u(x_i) = \frac{\sum_{j=0}^N w_j(x_i, x_j) u_j}{\sum_{j=0}^N w_j(x_i, x_j)} \quad (1.14)$$

όπου,  $x_i$  είναι τα σημεία που γίνεται η παρεμβολή,  $N$  είναι ο αριθμός των γνωστών τιμών στα σημεία  $x_j$  και  $w_j(x_i, x_j)$ , η συνάρτηση υπολογισμού των βαρών. Η βαρυτική συνάρτηση σχετίζεται με την αντίστροφη απόσταση. Η βασική της μορφή δίνεται από τη σχέση 1.15

$$w_j(x_i, x_j) = \frac{1}{\|x_i - x_j\|^p}, \quad (1.15)$$

όπου  $\|\cdot\|$  είναι η Ευκλείδεια απόσταση και η παράμετρος  $p$  ένας σταθερός εκθέτης. Μεγάλες τιμές του  $p$  οδηγούν σε παρεμβολή που επηρεάζεται κυρίως από τις τιμές των πολύ κοντινών σημείων, οδηγώντας σε απότομες κλίσεις σε μικρά διαστήματα. Από την άλλη, χαμηλές τιμές στην παράμετρο  $p$  οδηγούν σε περισσότερο ομαλές παρεμβολές, όπου το αποτέλεσμα σε κάθε σημείο επηρεάζεται και από τιμές σημείων σε μεγαλύτερη απόσταση. Συχνά επιλέγεται  $p = 2$  διότι οδηγεί σε αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα και με το μικρότερο δυνατό υπολογιστικό κόστος[31].

Η μέθοδος IDW χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά ως μέθοδος παραμόρφωσης πλέγματος από τον Witeveen το 2009[36]. Στην προσαρμοστική παραμόρφωση πλέγματος, οι τιμές προς παρεμβολή είναι οι γνωστές μετατοπί-

σεις των οριακών κόμβων της γεωμετρίας. Ωστόσο, καλύτερη ποιότητα παραμορφούμενου πλέγματος μπορεί να επιτευχθεί παρεμβάλλοντας και τη στροφή του κάθε κόμβου προς το εσωτερικό. Ο Witeveen προτείνει τη χρήση διαφορετικών τιμών για την εκθετική παράμετρο  $p$  για τους σταθερούς και κινητούς οριακούς κόμβους, τόσο για τις μετατοπίσεις, όσο και για τις στροφές.

Ένα πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου, είναι ότι αποτελεί πολύ συντηρητική μέθοδο παρεμβολής. Ωστόσο, όταν συμπεριλαμβάνονται και οι στροφές, αυτή η ιδιότητα χάνεται, που σημαίνει ότι οι εσωτερικοί κόμβοι είναι πιθανό να βρεθούν εκτός του υπολογιστικού χωρίου. Ακόμη, η τεχνική παραμόρφωσης πλέγματος με IDW πλεονεκτεί συγκριτικά με την ευρέως γνωστή μέθοδο RBF, αφού το χρονοβόρο βήμα επίλυσης του συστήματος που κοστίζει  $O(n_b^3)$ , δεν απαιτείται πλέον. Με  $n_b$  συμβολίζονται οι οριακοί κόμβοι της γεωμετρίας. Επιπλέον, η υλοποίηση της μεθόδου είναι αρκετά απλή, αφού δεν χρειάζεται να ληφθεί υπόψη η τοπολογία του πλέγματος. Έτσι, είναι δυνατή η παραμόρφωση πλεγμάτων οποιασδήποτε τοπολογίας ακόμα και για μετέωρους κόμβους (hanging nodes). Τέλος, η μέθοδος IDW μπορεί εύκολα να υλοποιηθεί σε παράλληλη αρχιτεκτονική.

## 1.5 Σύνοψη

Σύμφωνα με την επισκόπηση των μεθόδων παραμόρφωσης πλέγματος που παρουσιάστηκαν περιληπτικά στις προηγούμενες παραγράφους, μπορούμε να εκμαιεύσουμε κάποια γενικά συμπεράσματα. Οι τεχνικές προσαρμοστικής παραμόρφωσης πλέγματος χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες, στις μεθόδους που βασίζονται στην φυσική αναλογία και σε αυτές που βασίζονται στην παρεμβολή. Η προσέγγιση της φυσικής αναλογίας, αντιστοιχίζει την παραμόρφωση του πλέγματος σύμφωνα με μια φυσική διαδικασία που μπορεί να μοντελοποιηθεί με τη χρήση αριθμητικών μεθόδων. Οι τεχνικές που βασίζονται στην παρεμβολή, συνήθως χρησιμοποιούν μια εξίσωση παρεμβολής, με σκοπό τη διάδοση της παραμόρφωσης από τα μεταβαλλόμενα όρια στο εσωτερικό πλέγμα. Οι πιο κοινές μέθοδοι που εφαρμόζονται στη βιομηχανία συνδυάζουν ταυτόχρονα μεθόδους που βασίζονται στην τοπολογία του πλέγματος, όπως η μέθοδος των ελατηρίων (spring analogy) και αλγεβρικές μεθόδους όπως η παρεμβολή με RBF. Στόχος είναι η εξισορρόπηση της στιβαρότητας και ταυτόχρονα του υπολογιστικού κόστους μεταξύ των μεθόδων που παρουσιάστηκαν.

## 1.6 Στόχος και Δομή της Εργασίας

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία εστιάζεται στην υλοποίηση της μεθόδου παραμόρφωσης πλεγμάτων με παρεμβολή Αντιστρόφως Ανάλογη της Απόστασης IDW, για 2Δ και 3Δ προβλήματα. Συγκεκριμένα, η μέθοδος IDW προγραμματίζεται σε C++. Η αποτελεσματικότητα της μεθόδου εξετάζεται σε 2Δ και 3Δ εφαρμογές, ενώ στην αρχική μέθοδο εισάγεται και η παρεμβολή των στροφών των οριακών κόμβων χρησιμοποιώντας τη θεωρία των τετραδονίων.

Η εργασία αυτή αποτελείται από τα εξής κεφάλαια:

**Κεφάλαιο 2:** Περιγράφονται η δομή και οι βασικές ιδιότητες της μεθόδου IDW, καθώς και η μέθοδος επιλογής των παραμέτρων για τη συνάρτηση υπολογισμού των βαρών. Επιπλέον, δίνονται συνοπτικά οι βασικοί αλγόριθμοι που διέπουν τη μέθοδο.

**Κεφάλαιο 3:** Περιγράφεται η διαδικασία που ακολουθείται για τον υπολογισμό και την εισαγωγή των στροφών στην παρεμβολή με τη μέθοδο IDW και ελέγχεται η επιρροή της στην παραμόρφωση του πλέγματος.

**Κεφάλαιο 4:** Γίνεται εφαρμογή της μεθόδου σε 2Δ και 3Δ πλέγματα και ελέγχεται η στιβαρότητά της, σε μεγάλες παραμορφώσεις της γεωμετρίας.

**Κεφάλαιο 5:** Πραγματοποιείται σύγκριση της στιβαρότητας της μεθόδου IDW με τη μέθοδο ΚΑΣ που αναπτύχθηκε στη ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ.

**Κεφάλαιο 6:** Τέλος, παρουσιάζονται τα γενικά συμπεράσματα από την ανάπτυξη και αξιολόγηση της μεθόδου και προτείνονται βελτιώσεις και προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

## Κεφάλαιο 2

# Μέθοδος Παραμόρφωσης Πλέγματος με Αντιστρόφως Ανάλογη της Απόστασης Στάθμιση(IDW)

Στο παρόν κεφάλαιο αρχικά, αναπτύσσεται το μαθηματικό υπόβαθρο της μεθόδου IDW καθώς και η προτεινόμενη συνάρτηση υπολογισμού των βαρών (ενότητα 2.1). Στη συνέχεια, περιγράφεται ο βασικός αλγόριθμος που εφαρμόστηκε για την υλοποίηση της μεθόδου (ενότητα 2.2). Ακόμη, στην ενότητα 2.3 αναλύεται λεπτομερώς η επιρροή των σταθερών παραμέτρων στη βαρυτική συνάρτηση. Τέλος, επιλέγονται οι κατάλληλοι παράμετροι με σκοπό την όσο το δυνατόν βέλτιστη προσαρμογή του πλέγματος στην παραμόρφωση της γεωμετρίας.

### 2.1 Μαθηματικό Υπόβαθρο της Μεθόδου IDW

Εφαρμόζοντας την εξίσωση παρεμβολής 1.14 που παρουσιάστηκε στο 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο, προκύπτει η εξίσωση παρεμβολής των παραμορφώσεων των οριακών κόμβων στο εσωτερικό πλέγμα. Τώρα, οι παρεμβαλλόμενες τιμές είναι οι γνωστές μετακινήσεις των κόμβων της γεωμετρίας στο εσωτερικό πλέγμα. Το βάρος για κάθε εσωτερικό κόμβο σχετίζεται με την αντίστροφη απόσταση από τους οριακούς. Έτσι, δίνεται μεγαλύτερη βαρύτητα στους κόμβους που βρίσκονται κοντά στα όρια και μικρότερη στους πιο απομακρυσμένους.

$$u(\vec{x}_i) = \frac{\sum_{b=0}^{n_b} w(\vec{x}_i, \vec{x}_b) s(\vec{x}_b)}{\sum_{b=0}^{n_b} w(\vec{x}_i, \vec{x}_b)}, \quad (2.1)$$

όπου,  $x_i$  είναι οι θέσεις των εσωτερικών κόμβων,  $x_b$  οι θέσεις των οριακών κόμβων,  $w_b$  τα βάρη που προκύπτουν για κάθε εσωτερικό κόμβο και  $n_b$  ο

αριθμός των οριακών κόμβων. Ο όρος  $s$  περιγράφει τη μετατόπιση των οριακών κόμβων διαχωρίζοντάς τη σε μια μετακίνηση και μια στροφή

$$s(\vec{x}_b) = u(\vec{x}_b) + M\vec{x}_b - \vec{x}_b, \quad (2.2)$$

όπου  $M$  είναι το μητρώο στροφών που σχετίζεται με τον οριακό κόμβο  $b$ . Περισσότερες πληροφορίες για τα μητρώα στροφών μπορούν να βρεθούν στο κεφάλαιο 3.

Η συνάρτηση υπολογισμού των βαρών υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση, [25].

$$w(\vec{x}_b, \vec{x}_i) = A_b \left[ \left( \frac{L_{def}}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_b\|} \right)^a + \left( \frac{\gamma L_{def}}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_b\|} \right)^b \right] \quad (2.3)$$

όπου  $A_b$  είναι το επιφανειακό βάρος που ανατίθεται σε κάθε οριακό κόμβο  $b$ ,  $L_{def}$  είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος για το παραμορφωμένο πλέγμα,  $\gamma$  είναι μια εκτιμώμενη σταθερά για την επιρροή της παραμόρφωσης κοντά στο σώμα και  $a, b$  οι εκθετικοί παράμετροι. Η [25] προτείνει τις τιμές  $a = 3$  και  $b = 5$  για τις εκθετικές παραμέτρους, σύμφωνα με την παραμετρική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε στην [25]. Η παράμετρος  $L_{def}$  υπολογίζεται αυτόματα ως η μέγιστη απόσταση του κεντρικού σημείου στο πλέγμα  $\vec{c}$ , από την θέση κάθε εξωτερικού οριακού κόμβου  $x_{b(fixed)}$ . Το κεντρικό σημείο του πλέγματος υπολογίζεται ως εξής :

$$\vec{c} = \frac{1}{n_b} \sum_{j=1}^{n_b(fixed)} \vec{x}_{b(fixed)}, \quad (2.4)$$

και το μήκος  $L_{def}$  υπολογίζεται από τη σχέση

$$L_{def} = \max_{b=1}^{n_b(fixed)} \|\vec{x}_{b(fixed)} - \vec{c}\| \quad (2.5)$$

Η παράμετρος  $\gamma$  καθορίζει τα βάρη των κόμβων κοντά στο παραμορφωμένο όριο σε σχέση με τα βάρη των πιο απομακρυσμένων. Έτσι, η παράμετρος  $\gamma$  μπορεί να υπολογιστεί αυτόματα ως η μέγιστη διαφορά μεταξύ της μετακίνησης ενός οριακού κόμβου και του μέσου όρου του πεδίου των μετακινήσεων προς την παράμετρο  $L_{def}$ .

$$\gamma = \frac{\eta}{L_{def}} \max_{b=1}^{n_b} \|s(\vec{x}_b) - s_{mean}\| \quad (2.6)$$

όπου



$$s_{mean} = \sum_{b=1}^{n_b} \alpha_b \cdot s_b(\vec{x}_b), \quad (2.7)$$

όπου  $\alpha_b = A_b / \sum_{j=1}^{n_b} A_j$  είναι το κανονικοποιημένο βάρος του κόμβου. Το σύμβολο  $\eta$  αντιπροσωπεύει μια παράμετρο που ορίζει ο χρήστης και καθορίζει εάν η παραμόρφωση του πλέγματος θα είναι περισσότερο τοπική (μικρό  $\eta$ ) ή θα διαδοθεί στο χωρίο (μεγάλο  $\eta$ ). Γενικά η επιλογή  $\eta = 5$  οδηγεί σε καλά αποτελέσματα. Για να διασφαλιστεί καλή ποιότητα του πλέγματος κοντά στα όρια της γεωμετρίας είναι απαραίτητο η παράμετρος  $\gamma \geq 0.1$ [25]

Η μέθοδος του [25] συγκριτικά με τη μέθοδο του [36], οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα, όσον αφορά τη διατήρηση της ορθογωνικότητας σε πλέγματα συνεκτικών ροών, ακόμα καλύτερα και από τη διαδεδομένη μέθοδο RBF. Αυτό οφείλεται στην προσθήκη του 2<sup>ου</sup> όρου στον συντελεστή βαρύτητας με υψηλότερη εκθετική παράμετρο.

## 2.2 Βασική Υλοποίηση της μεθόδου IDW

Για τη βασική υλοποίηση της μεθόδου Στάθμισης Αντιστρόφως Ανάλογης της Απόστασης επιλέγεται να γίνει παρεμβολή του πεδίου μετακινήσεων των οριακών κόμβων  $\mathbf{u}_b$  χωρίς να ληφθεί υπόψη η επιρροή των στρωφών. Συγκεκριμένα, η μεταβολή της θέσης κάθε οριακού κόμβου περιγράφεται αγνοώντας τον 2<sup>ο</sup> όρο της εξίσωσης του πεδίου μετακινήσεων (σχέση 2.2). Η εξίσωση παρεμβολής σύμφωνα με την εξίσωση 2.1 είναι

$$u(\vec{x}) = \frac{\sum_{b=0}^{n_b} w_b(\vec{x}) u_b}{\sum_{b=0}^{n_b} w_b(\vec{x})} \quad (2.8)$$

όπου  $n_b$  είναι ο αριθμός των οριακών κόμβων και  $w_b(\vec{x})$  ο συντελεστής στάθμισης. Η εξίσωση παρεμβολής 2.8 υπολογίζεται για όλους τους εσωτερικούς κόμβους του πλέγματος. Έτσι, παρατηρούμε εύκολα ότι το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου κλιμακώνεται με ρυθμό  $\mathcal{O}(n_i n_b)$ . Η υλοποίησή του είναι αρκετά απλή και περιγράφεται στον ψευδοκώδικα του Αλγορίθμου 1 που ακολουθεί.

---

**Αλγόριθμος 1** Παρεμβολή IDW

---

**Δεδομένα:**

1. Εσωτερικοί κόμβοι  $\rightarrow n_i$
2. Οριακοί κόμβοι Παραμορφωμένου Πλέγματος  $\rightarrow n_b$ ,

**Αποτέλεσμα:** Προσαρμοσμένο Πλέγμα  $\rightarrow \vec{u}(\vec{x})$ 

- 1: **Για** κάθε εσωτερικό κόμβο  $n_i$  **επανέλαβε**
  - 2: **Για** κάθε οριακό κόμβο  $n_b$  **επανέλαβε**
  - 3: Υπολόγισε βάρος  $w_b(\vec{x}_i)$ ;
  - 4: Υπολόγισε Αριθμητή  $+= w_b(\vec{x}_i)u_b$ ;
  - 5: Υπολόγισε Παρονομαστή  $+= w_b(\vec{x}_i)$ ;
  - 6: **Τέλος Για**
  - 7:  $u(\vec{x}_i) =$  Αριθμητής/Παρονομαστής;
  - 8: **Τέλος Για**
- 

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι ακίνητοι κόμβοι  $u_b$  αποτελούν το μηδενικό διάνυσμα, κάτι που σημαίνει ότι το βήμα της ανανέωσης του αριθμητή για αυτούς μπορεί να παρακαμφθεί, ώστε να αυξηθεί η αποδοτικότητα του αλγορίθμου. Ουσιαστικά αποφεύγεται ένας επιπλέον έλεγχος για κάθε οριακό κόμβο. Έτσι, η τελική βέλτιστη μορφή της μεθόδου παρουσιάζεται στον ψευδοκώδικα του Αλγορίθμου 2.

---

**Αλγόριθμος 2** Παρεμβολή IDW - Βελτιωμένη Έκδοση

---

**Δεδομένα:**

1. Εσωτερικοί κόμβοι  $\rightarrow n_i$
2. Οριακοί κόμβοι Παραμορφωμένου Πλέγματος  $\rightarrow n_b$ ,

**Αποτέλεσμα:** Προσαρμοσμένο Πλέγμα  $\rightarrow \vec{u}(\vec{x})$ 

- 1: **Για** κάθε εσωτερικό κόμβο  $n_i$  **επανέλαβε**
  - 2: **Για** κάθε κινητό οριακό κόμβο  $n_b$  **επανέλαβε**
  - 3: Υπολόγισε βάρος  $w_b(\vec{x}_i)$ ;
  - 4: Υπολόγισε Αριθμητή  $+= w_b(\vec{x}_i)u_b$ ;
  - 5: Υπολόγισε Παρονομαστή  $+= w_b(\vec{x}_i)$ ;
  - 6: **Τέλος Για**
  - 7: **Για** κάθε σταθερό οριακό κόμβο  $n_b$  **επανέλαβε**
  - 8: Υπολόγισε βάρος  $w_b(\vec{x}_i)$ ;
  - 9: Υπολόγισε Παρονομαστή  $+= w_b(\vec{x}_i)$ ;
  - 10: **Τέλος Για**
  - 11:  $u(\vec{x}_i) =$  Αριθμητής/Παρονομαστής;
  - 12: **Τέλος Για**
- 

Στον παραπάνω ψευδοκώδικα ο υπολογισμός των βαρών είναι ξεχωριστός για τους κινητούς και σταθερούς οριακούς κόμβους. Έτσι, είναι εύκολο να εφαρμοστούν ξεχωριστές παράμετροι ( $\gamma_{mov}$ ,  $\gamma_{fix}$ ) στη βαρυτική συνάρτηση, ώστε να υπάρχει καλύτερος έλεγχος της διάδοσης της παραμόρφωσης κοντά στα όρια. Η επιρροή της παραμέτρου  $\gamma$  περιγράφεται με περισσότερη λεπτομέρεια

στην επόμενη ενότητα.

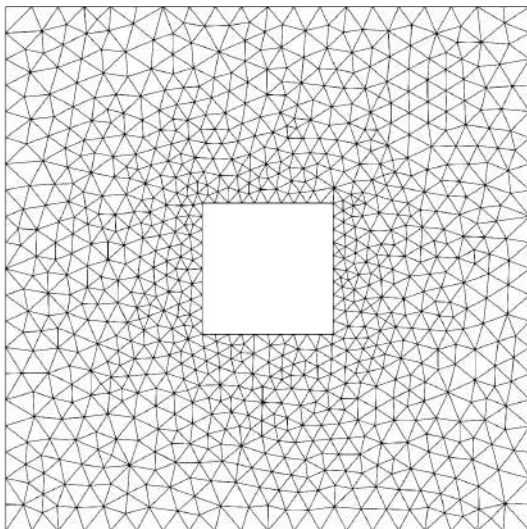
## 2.3 Επιλογή παραμέτρων Βαρυτικής Συνάρτησης

Η επιλογή των παραμέτρων της συνάρτησης υπολογισμού των βαρών στη μέθοδο παρεμβολής με IDW έχει σημαντική επιρροή στην τελική ποιότητα του παραμορφωμένου πλέγματος. Στην παρούσα ενότητα περιγράφεται η επιρροή των παραμέτρων της βαρυτικής συνάρτησης 2.3 στη διάδοση της παραμόρφωσης. Ταυτόχρονα γίνεται επίδειξη της επιρροής τους στην τελική ποιότητα του πλέγματος κατά τη μεταβολή τους. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι παράμετροι μπορούν να διαφοροποιηθούν ανάλογα με τις απαιτήσεις κάθε εφαρμογής.

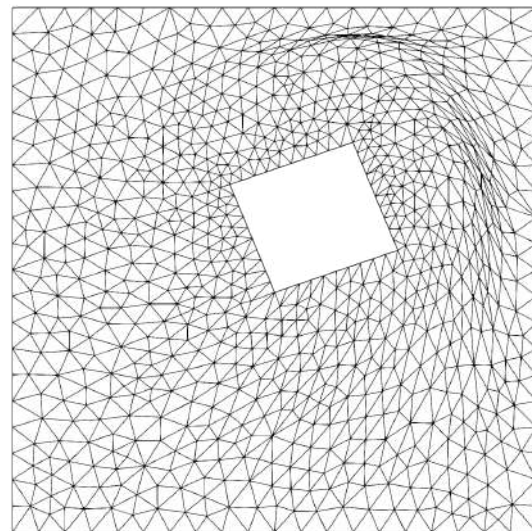
Για την επίδειξη της επιρροής της μεταβολής των παραμέτρων δοκιμάζεται ένα 2Δ αραιό τριγωνικό πλέγμα γύρω από ένα κινούμενο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1. Ο έλεγχος γίνεται για ταυτόχρονη μετακίνηση και περιστροφή της γεωμετρίας κατά  $20^\circ$  (σχήμα 2.2). Ως αρχικές παράμετροι επιλέγονται οι παρακάτω

- $\alpha = 3$
- $\beta = 5$
- $\gamma_{mov} = 0.1$
- $\gamma_{fix} = 0.0$

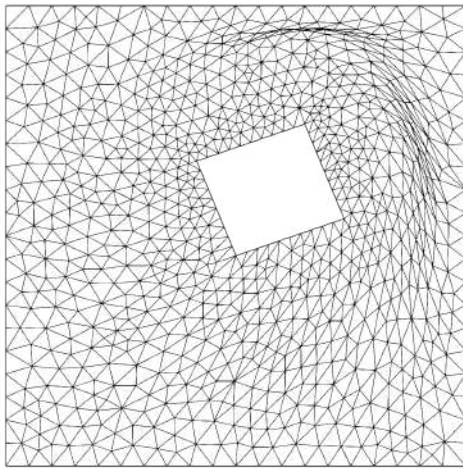
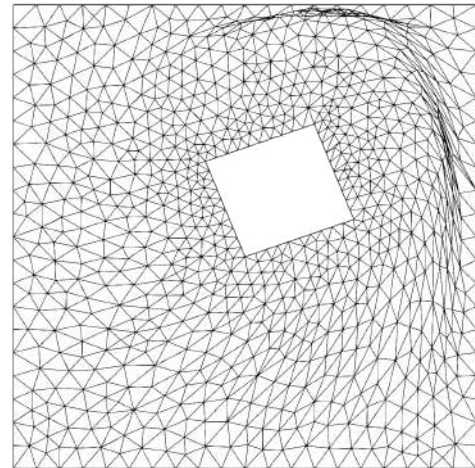
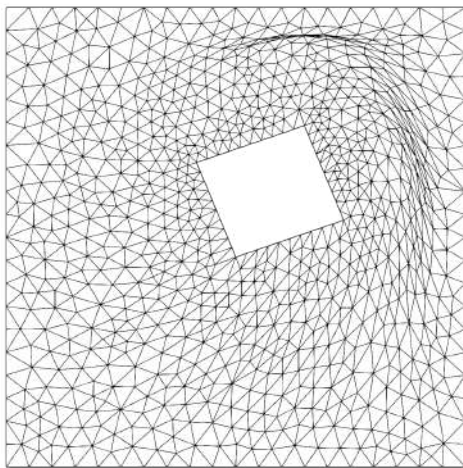
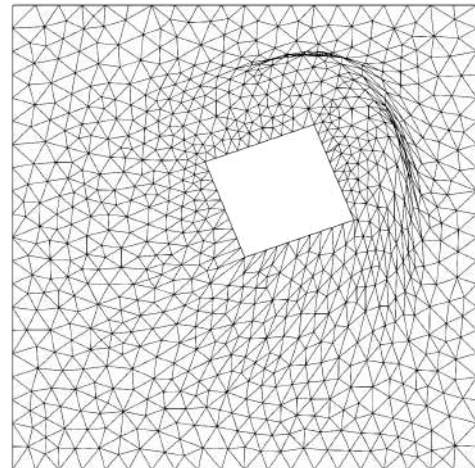
Οι παράμετροι  $L_{def}$  και  $A_b$  υπολογίζονται αυτόματα σύμφωνα με τις εξισώσεις που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 2.1.



Σχήμα 2.1: Αρχικό 2Δ πλέγμα.

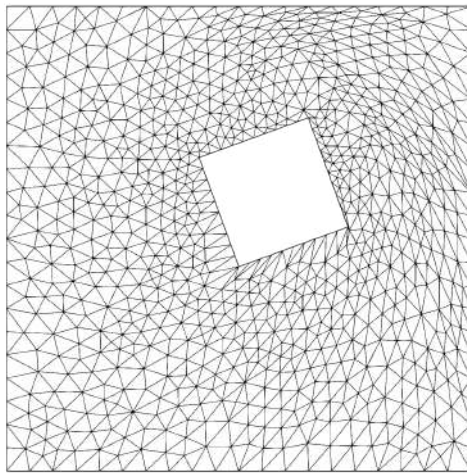
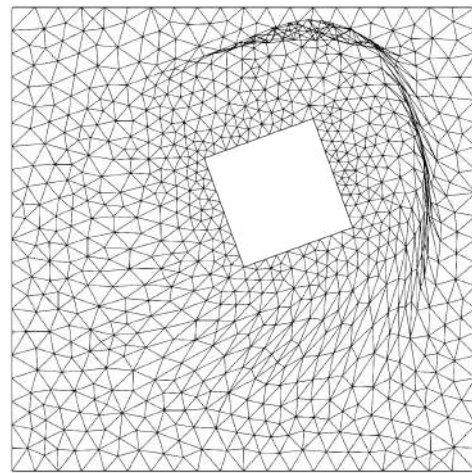
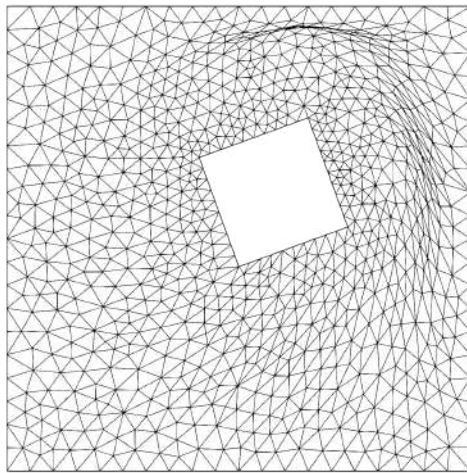
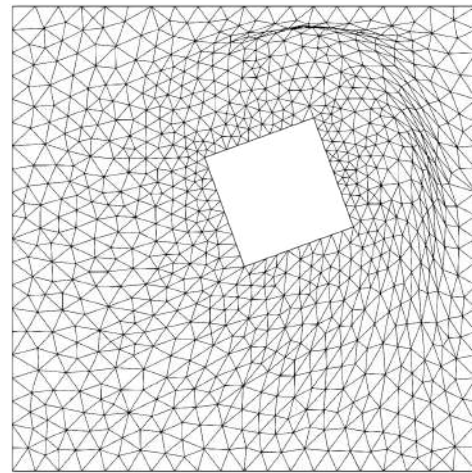


Σχήμα 2.2: Παραμόρφωση πλέγματος με τις αρχικές παραμέτρους.

(a)  $\gamma_{mov} = 0.4$ (b)  $\gamma_{mov} = 0.8$ (c)  $\gamma_{fix} = 0.4$ (d)  $\gamma_{fix} = 0.8$ **Σχήμα 2.3:** Επίδραση της παραμέτρου  $\gamma$  στην παραμόρφωση του πλέγματος

Παράμετροι		Αριθμός ναστραμμένων Τριγώνων	Ποιότητα Σχήματος	Μετρική Μεγέθους- Σχήματος
<b>Αρχικές</b>		<b>0</b>	<b>0.8624</b>	<b>0.4337</b>
$\gamma_{mov}$	0.4	1	0.85938	0.4322
	0.8	15	0.8475	0.4142
$\gamma_{fix}$	0.4	1	0.85986	0.4320
	0.8	9	0.86358	0.4481

**Πίνακας 2.1:** Αριθμός αναστραμμένων τριγώνων και μεταβολή της μέσης ποιότητας σχήματος, σε σχέση με τη μεταβολή των παραμέτρων  $\gamma_{mov}, \gamma_{fix}$ .

(a)  $a = 2$ (b)  $a = 5$ (c)  $b = 2$ (d)  $b = 7$ Σχήμα 2.4: Επίδραση εκθετικών παραμέτρων  $a$ ,  $b$  στην παραμόρφωση του πλέγματος

Παράμετροι		Αριθμός Αναστραμμένων Τριγώνων	Μετρική Σχήματος	Μετρική Μεγέθους- Σχήματος
<b>Αρχικές</b>		<b>0</b>	<b>0.8624</b>	<b>0.4337</b>
a	2	0	0.87376	0.45065
	5	34	0.8567	0.42340
b	2	0	0.8624	0.4336
	7	0	0.8623	0.4337

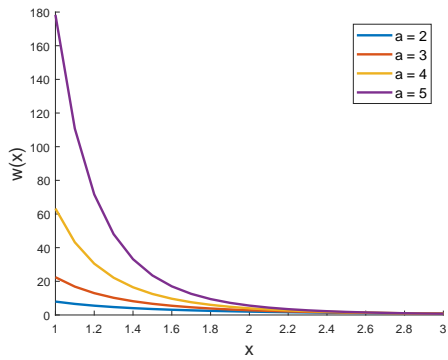
Πίνακας 2.2: Αριθμός αναστραμμένων τριγώνων και μεταβολή της μέσης ποιότητας σχήματος, σε σχέση με τη μεταβολή των εκθετικών παραμέτρων  $a$ ,  $b$ .

### Παρατηρήσεις

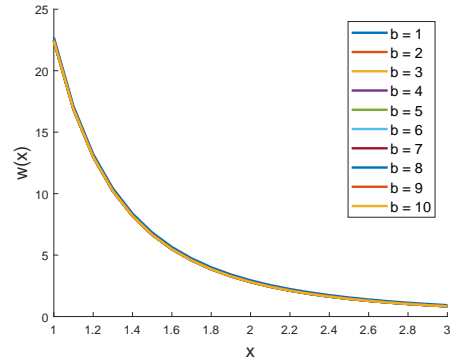
Παρατηρώντας την μεταβολή των μετρικών ποιότητας σε συνδυασμό με τον αριθμό των αναστραμμένων τριγώνων στους πίνακες 2.1, 2.2, προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα για τη μεταβολή των σταθερών παραμέτρων. Για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων αξίζει να σημειωθεί ότι η μέγιστη τιμή των μετρικών σχήματος και μεγέθους-σχήματος είναι ίση με 1 (Παράρτημα Α).

1. Κατά την αύξηση της παραμέτρου  $\gamma$  [0.4 ÷ 0.8], τόσο για τα μεταβαλλόμενα όσο και στα ακίνητα όρια, παρατηρείται η μείωση των μετρικών ποιότητας του πλέγματος, αλλά και η δημιουργία αναστραμμένων τριγώνων. Στον πίνακα 2.1 παρουσιάζονται συγκριτικά οι μέσες τιμές της ποιότητας για κάθε περίπτωση.
2. Κατά τη μείωση της εκθετικής παραμέτρου  $a$  ( $a < 3$ ), παρατηρείται η αύξηση της ποιότητας του πλέγματος, ωστόσο φαίνεται καθαρά στο σχήμα 2.4a ότι τα πλεγματικά στοιχεία κοντά στα μεταβαλλόμενα όρια δέχονται μεγάλη επιρροή από την παραμόρφωση και δεν διατηρείται η αρχική τους δομή. Αντίθετα, η αύξηση του  $a$  ( $a > 3$ ) διατηρεί απαραμόρφωτο πλέγμα γύρω από τα μεταβαλλόμενα όρια. Ωστόσο δημιουργούνται πολλά αναστραμμένα στοιχεία μακριά από τη γεωμετρία (σχήμα 2.4b) και η ποιότητα του πλέγματος μειώνεται (πίνακας 2.2).
3. Τέλος, όπως φαίνεται τόσο από τα σχήματα 2.4c, 2.4d όσο και από τον πίνακα 2.2, η μεταβολή της εκθετικής παραμέτρου  $b$  δεν επηρεάζει σχεδόν καθόλου την ποιότητα του τελικού πλέγματος.

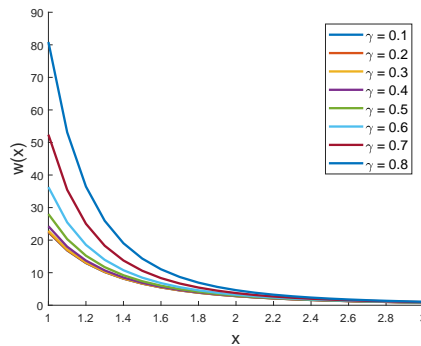
Για την καλύτερη κατανόηση της επιρροής των σταθερών παραμέτρων στην βαρυτική συνάρτηση 2.3, παρουσιάζονται διαγράμματα κατανομής των βαρών σε σχέση με την απόσταση  $x$ . Τα διαγράμματα αφορούν τη μεταβολή των παραμέτρων  $\gamma$ ,  $a$  και  $b$ .



(a) Κατανομή βαρυτικής συνάρτησης σε σχέση με τη μεταβολή της παραμέτρου  $a$ . ( $b = 5, \gamma = 0.1$ )



(b) Κατανομή βαρυτικής συνάρτησης σε σχέση με τη μεταβολή της παραμέτρου  $b$ . ( $a = 3, \gamma = 0.1$ )



(c) Κατανομή βαρυτικής συνάρτησης σε σχέση με τη μεταβολή της παραμέτρου  $\gamma$ . ( $a = 3, b = 5$ )

**Σχήμα 2.5:** Διαγράμματα κατανομής των βαρών κατά την μεταβολή των παραμέτρων  $a, b$  και  $\gamma$ , της βαρυτικής συνάρτησης 2.3.

Σύμφωνα, με τα σχήματα 2.3, 2.4, τους συγκριτικούς πίνακες ποιότητας 2.1, 2.2 και τα διαγράμματα κατανομής των βαρών κατά τη μεταβολή των παραμέτρων (σχήμα 2.5), περιγράφεται αναλυτικά η σημασία και η επιρροή της κάθε παραμέτρου στην προσαρμοστική παραμόρφωση πλεγμάτων με τη μέθοδο IDW.

1. Παράμετρος  $\gamma$ : Η παράμετρος  $\gamma$  βασίζεται στη μέγιστη διαφορά μεταξύ της μετακίνησης του οριακού κόμβου και της μέσης μετακίνησης όλων των οριακών κόμβων του πλέγματος, όπως παρουσιάζεται στην εξίσωση 2.6. Η μεταβολή του  $\gamma$  σχετίζεται με το μέγεθος της παραμόρφωσης του πλέγματος στις περιοχές που βρίσκονται κοντά στα όρια και ανατίθεται ξεχωριστά για τους κινούμενους  $\gamma_{mov}$  και ακίνητους  $\gamma_{fix}$  οριακούς κόμβους, με αποτέλεσμα να αποκτάται καλύτερος έλεγχος της επιρροής της παραμόρφωσης στις περιοχές των ορίων ανάλογα με τις απαιτήσεις της εκάστοτε εφαρμογής. Η αύξηση της παραμέτρου  $\gamma$  διατηρεί

το πλέγμα अपαραμόρφωτο σε μεγαλύτερη περιοχή κοντά στο όριο, ενώ αντίθετα αποτελέσματα προκαλούνται κατά τη μείωσή του. Στα σχήματα 2.3a - 2.3d, φαίνεται ότι η αύξηση της παραμέτρου  $\gamma$  διατηρεί το πλέγμα απαραμόρφωτο γύρω από τα μεταβαλλόμενα ή ακίνητα όρια σε μεγαλύτερη ακτίνα. Ωστόσο, μειώνεται ο ενδιαμέσος χώρος για την απορρόφηση της παραμόρφωσης, με αποτέλεσμα να δημιουργούνται αναστραμμένα και κακής ποιότητας τρίγωνα (πίνακας 2.1). Ακόμη, στο διάγραμμα 2.5c φαίνεται εύκολα ότι η αύξηση της τιμής της παραμέτρου  $\gamma$ , αυξάνει αντίστοιχα τα βάρη κοντά στους οριακούς κόμβους. Έτσι, επιλέγεται  $\gamma_{mov} = 0.1$ , αφού διασφαλίζει ταυτόχρονα καλή ποιότητα στο πλέγμα κοντά στα μεταβαλλόμενα όρια και αφήνει αρκετό χώρο, ώστε να απορροφηθεί η παραμόρφωση στην ενδιαμέση περιοχή. Αντίστοιχα, για την παράμετρο  $\gamma_{fix}$  επιλέγονται όσο το δυνατόν μικρότερες τιμές ( $\approx 0$ ), ώστε να χρησιμοποιηθεί περισσότερος χώρος για την απορρόφηση της παραμόρφωσης.

2. Εκθετικοί παράμετροι  $\alpha, b$ : Η επιρροή των εκθετικών παραμέτρων αφορά το διάστημα απορρόφησης της παραμόρφωσης ανάμεσα στα δύο όρια (μεταβαλλόμενο και σταθερό). Χαμηλότεροι εκθέτες οδηγούν σε πιο ομαλά αποτελέσματα και επηρεάζεται περισσότερο η περιοχή κοντά στα όρια (σχήμα 2.4a). Αντίθετα υψηλοί εκθέτες οδηγούν σε απότομες κλίσεις (διάγραμμα 2.5a) και η παραμόρφωση απορροφάται σε μικρό διάστημα ανάμεσα στα όρια (σχήμα 2.4b). Στα σχήματα 2.4c και 2.4d, όπου μεταβάλλεται ο εκθέτης  $b$ , δεν παρατηρούνται σημαντικές διαφορές στο τελικό πλέγμα, όπως φαίνεται καθαρά στο διάγραμμα 2.5b. Στον πίνακα 2.2, παρουσιάζονται ο αριθμός των αναστραμμένων τριγώνων, καθώς και οι μετρικές ποιότητας κατά τη μεταβολή των εκθετικών παραμέτρων  $a$  και  $b$ .
3. Παράμετρος  $A_b$ : Η παράμετρος  $A_b$  αποτελεί το βάρος του εμβαδού που ανατίθεται σε κάθε οριακό κόμβο. Πειραματικά αποτελέσματα έχουν δείξει ότι αγνοώντας το βάρος ( $A_b = 1$ ) οι μεγαλύτερες στρεβλώσεις συμβαίνουν στην περιοχή κοντά στο παραμορφωμένο όριο[35]. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι ακίνητοι κόμβοι έχουν μεγαλύτερο επιφανειακό εμβαδόν, έτσι έχουν μεγαλύτερη επιρροή στη βαρυτική συνάρτηση. Ακόμη, παραλείποντας το βάρος  $A_b$  περισσότερο βάρος δίνεται σε περιοχές που το πλέγμα είναι πιο πυκνό. Αυτές οι περιοχές είναι συνήθως εκεί που η ποιότητα του πλέγματος έχει κρίσιμη σημασία για την επίλυση με λογισμικό CFD. Έτσι είναι απαραίτητο να δίνεται περισσότερο βάρος σε αυτές τις περιοχές με σκοπό το πλέγμα



να παραμορφώνεται όσο το δυνατόν λιγότερο. Αξίζει να σημειωθεί ότι η πύκνωση (refinement) ή το αραίωμα (coarsening) του οριακού πλέγματος θα οδηγήσει σε διαφορετική εξίσωση παρεμβολής.

4. Παράμετρος  $L_{def}$  : Οι μεταβολές του χαρακτηριστικού μήκους πλέγματος  $L_{def}$  δεν προσδίδουν ιδιαίτερες μεταβολές στην ποιότητα του τελικού πλέγματος. Οπότε, όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα υπολογίζεται αυτόματα ως η μέγιστη απόσταση μεταξύ οποιουδήποτε οριακού κόμβου με το κεντρικό σημείο του πλέγματος (σχέση 2.4).

Συνοψίζοντας, σύμφωνα με την παραμετρική μελέτη που παρουσιάστηκε για την επιρροή των σταθερών παραμέτρων στη βαρυτική συνάρτηση, επιλέγονται οι αρχικές παράμετροι ( $a = 3$ ,  $b = 5$ ,  $\gamma_{mov} = 0.1$ ,  $\gamma_{fix} = 0$ ), αφού δίνουν πιο ικανοποιητικά αποτελέσματα σχετικά με την ποιότητα του τελικού πλέγματος. Ωστόσο, αξίζει να αναφερθεί ότι ανάλογα με τον τύπο και το μέγεθος του πλέγματος, είναι πιθανόν κάποιες από τις παραμέτρους να χρειάζονται προσαρμογή για την επίτευξη καλύτερης ποιότητας στο τελικό πλέγμα.

## Κεφάλαιο 3

# Παρεμβολή Στροφών στη Μέθοδο IDW

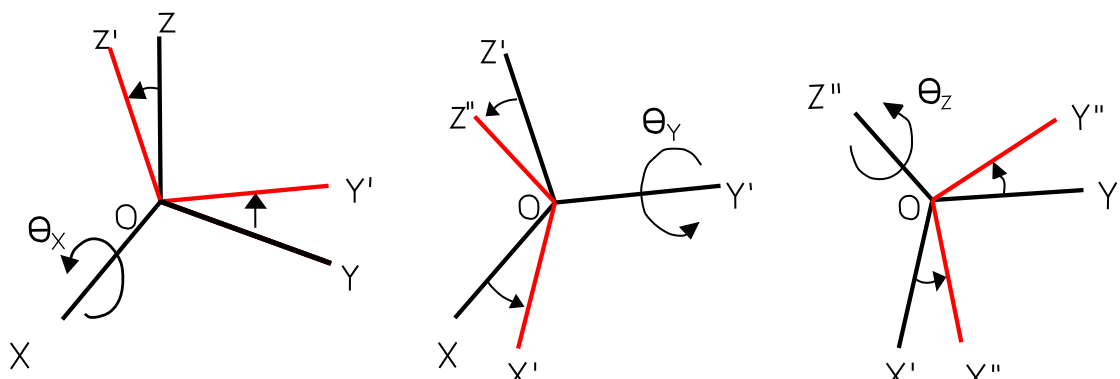
Στη μέθοδο IDW είναι πολύ σημαντικό να συμπεριληφθούν οι στροφές των οριακών κόμβων. Η παρεμβολή των στροφών στους εσωτερικούς κόμβους συμβάλει στη διατήρηση της απαραμόρφωτης δομής του πλέγματος κοντά στις παραμορφωμένες επιφάνειες, κάτι το οποίο είναι επιθυμητό. Στη συνέχεια, τα τετραδόνια που υπολογίζονται στο όριο παρεμβάλλονται ξεχωριστά στο εσωτερικό πλέγμα. Ο υπολογισμός των στροφών εισάγει επιπλέον πολυπλοκότητα στο λογισμικό, καθώς μόνο οι μετατοπίσεις των οριακών κόμβων μπορούν να υπολογισθούν άμεσα. Επιπλέον πρέπει να ορισθεί ο τρόπος παρεμβολής των στροφών. Η μεθοδολογία αντιμετώπισης αυτών των ζητημάτων περιγράφεται αναλυτικά στις παρακάτω παραγράφους.

### 3.1 Μητρώα Στροφής

Πιο συγκεκριμένα, στα μητρώα στροφής γίνεται χρήση των γωνιών Euler ή των γωνιών άξονα. Οι γωνίες Euler αναπαριστούν τη στροφή γύρω από τους τρεις Καρτεσιανούς άξονες  $x$ ,  $y$  και  $z$ , με γωνίες  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  και  $\theta_z$  αντίστοιχα. Κάθε Euler στροφή ως προς κάθε άξονα μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα μητρώο στροφής [32].

$$R_{\theta_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix}, R_{\theta_y} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix}, R_{\theta_z} = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & \sin\theta_z & 0 \\ -\sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Στο σχήμα 3.1, παρουσιάζεται ένα απλό παράδειγμα για το πως περιτρέφεται ένας άξονας με τις γωνίες Euler



Σχήμα 3.1: Περιστροφή Καρτεσιανού άξονα μέσω των γωνιών Euler  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$

Το τελικό μητρώο στροφής προκύπτει από το γινόμενο των επιμέρους μητρώων. Σε αυτό το σημείο πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στη σειρά που θα γίνουν οι στροφές, καθώς το τελικό μητρώο εξαρτάται από αυτή. Παρόλο που η αναπαράσταση των στροφών μέσω των γωνιών Euler είναι και η πιο διαδεδομένη μέθοδος, πολλές φορές οδηγεί σε γυροσκοπικό κλείδωμα (Gimbal lock). Το συγκεκριμένο πρόβλημα αποδίδεται στην έλλειψη αλληλεπίδρασης μεταξύ των επιμέρους μητρώων στροφής [32].

Εναλλακτικά, όπως προαναφέρθηκε, μπορεί να γίνει χρήση των γωνιών άξονα, όπου ορίζεται μία γωνία στροφής  $\Theta$  και ένας μοναδιαίος άξονας περιστροφής  $n = [n_x n_y n_z]^T$ . Σε αυτή την περίπτωση το μητρώο ορίζεται ως εξής

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta + n_x^2(1 - \cos\theta) & n_x n_y(1 - \cos\theta) - n_z \sin\theta & n_x n_z(1 - \cos\theta) + n_y \sin\theta \\ n_y n_x(1 - \cos\theta) + n_z \sin\theta & \cos\theta + n_y^2(1 - \cos\theta) & n_x n_z(1 - \cos\theta) - n_x \sin\theta \\ n_z n_x(1 - \cos\theta) - n_y \sin\theta & n_z n_y(1 - \cos\theta) + n_x \sin\theta & \cos\theta + n_z^2(1 - \cos\theta) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

## 3.2 Τετραδόνια

Σύμφωνα με το θεώρημα Euler για την περιστροφή, οποιαδήποτε περιστροφή η σειρά διαδοχικών περιστροφών ενός απαραμόρφωτου στερεού γύρω από ένα σημείο  $p$  στο Καρτεσιανό επίπεδο, μπορεί να περιγραφεί ως η περιστροφή γύρω από έναν άξονα Euler τοποθετημένο στο σημείο  $p$  με γωνία  $\theta$ . Επομένως, οποιαδήποτε περιστροφή στο Καρτεσιανό επίπεδο μπορεί να περιγραφεί συνδυάζοντας ένα διάνυσμα  $\vec{v} = [x, y, z]$  και μια βαθμωτή ποσότητα  $\theta$ . Τα τετραδόνια προσφέρουν έναν εύρωστο τρόπο αναπαράστασης της σχέσης του άξονα περιστροφής  $\vec{v}$  με τη γωνία στροφής  $\theta$ . Έτσι τα τετραδόνια μπορούν να χρησιμοποιηθούν για περιστροφή οποιουδήποτε σημείου  $p$  σε σχέση με έναν άξονα.

Απο μαθηματικής σκοπιάς, τα τετραδόνια είναι υπερμιγαδικοί αριθμοί, με ένα πραγματικό και τρία φανταστικά μέρη, όπου η γενική μορφή αναπαράστασης τους δίνεται ως:

$$q = s + xi + yj + zk, \quad s, x, y, z \in R \quad (3.3)$$

Σύμφωνα με τη σχέση του Hamilton

$$\begin{aligned} ii &= jj = kk = ijk = -1 \\ ij &= -ji = k \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j \end{aligned}$$

Ένα τετραδόνιο μπορεί να αναπαρασταθεί και ως διατεταγμένο ζεύγος

$$q = [s, \vec{v}], \quad \vec{v} = [x, y, z] \quad (3.4)$$

Πραγματικό τετραδόνιο ονομάζεται το τετραδόνιο που έχει μηδενικό διανυσματικό μέρος

$$q = [s, 0] \quad (3.5)$$

Το γινόμενο μεταξύ δύο πραγματικών τετραδονίων, είναι και αυτό πραγματικό τετραδόνιο. Αντίστοιχα, καθαρά τετραδόνια ονομάζονται τα τετραδόνια με μηδενικό πραγματικό μέρος, ενώ το γινόμενό τους δεν είναι καθαρό τετραδόνιο, και δίνονται ως:

$$q = [0, \vec{v}] \quad (3.6)$$

Ένα οποιοδήποτε Καρτεσιανό διάνυσμα  $\vec{v}$  μεταφέρεται στο υπερμιγαδικό επίπεδο των τετραδονίων ως καθαρό τετραδόνιο. Για λόγους πληρότητας παρατίθενται ιδιότητες που ισχύουν στα τετραδόνια.

- Προσεταιριστική :  $(q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3)$ ,
- Επιμεριστική :  $q_1 (q_2 + q_3) = q_1 q_2 + q_1 q_3$ ,
- Αντιμεταθετική :  $q_1 q_2 \neq q_2 q_1$ ,

- Συζυγής ενός τετραδονίου :  $q^* = s - xi - yj - zk$ ,
- Μέγεθος ενός τετραδονίου :  $\|q\| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}$ ,
- Αντίστροφο ενός τετραδονίου :  $q^{-1} = q^*/(qq^*)$ ,
- Μοναδιαίο τετραδόνιο :  $\|q\| = 1$ ,
- Για ένα μοναδιαίο τετραδόνιο :  $q^{-1} = q^*$

Άθροιση και αφαίρεση δύο τετραδονίων  $q_1, q_2$

$$q_1 + q_2 = [s_1 + s_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2] \quad (3.7)$$

$$q_1 - q_2 = [s_1 - s_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_2] \quad (3.8)$$

Το γινόμενο δύο τετραδονίων  $q_1, q_2$

$$q_1 q_2 = [s_1, \vec{v}_1][s_2, \vec{v}_2] = [s_1 s_2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2, s_1 \vec{v}_2 + s_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2] \quad (3.9)$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο τετραδονίων  $q_1, q_2$

$$q_1 \cdot q_2 = s_1 s_2 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \quad (3.10)$$

Όμοια με τα καρτεσιανά διανύσματα, το εσωτερικό γινόμενο δύο τετραδονίων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της γωνίας  $\theta$  μεταξύ τους:

$$q_1 \cdot q_2 = \|q_1\| \|q_2\| \cos \theta \quad (3.11)$$

### 3.2.1 Περιστροφή με Τετραδόνια

Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφεται μαθηματικά, πως με την χρήση τετραδονίων, μπορεί να περιστραφεί ένα τετραδόνιο  $P$  δεδομένης μίας γωνίας  $\theta$  και ενός άξονα  $\vec{v}$ . Έπειτα, μέσω ενός παραδείγματος, παρουσιάζεται η τελική σχέση περιστροφής κάνοντας χρήση τετραδονίων.

Όπως και στο Καρτεσιανό επίπεδο έτσι και στο μιγαδικό, είναι δυνατή η χρήση πολικών συντεταγμένων. Η περιγραφή ενός μιγαδικού  $z \in \mathbb{C}$  στο πολικό επίπεδο γίνεται ως

$$z = x + yi = \|z\|(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (3.12)$$

ή και ως διατεταγμένο ζεύγος

$$z = [x, yi] = [\|z\| \cos \theta, \|z\| \sin \theta i] \quad (3.13)$$

Ο μιγαδικός  $z$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιστροφή οποιουδήποτε σημείου  $c = x + yi$  στο μιγαδικό επίπεδο. Έτσι δεδομένης μιας γωνίας  $\theta$  και πολλαπλασιάζοντας τον  $z$  με τον  $c$ , ορίζεται η γενική σχέση περιστροφής ενός σημείου στο μιγαδικό χώρο ως

$$\begin{aligned} zc &= x \cos \theta - y \sin \theta + (x \sin \theta + y \cos \theta)i \\ zc &= [x \cos \theta - y \sin \theta, (x \sin \theta + y \cos \theta)i] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Αυτή η ανάλυση επεκτείνεται και στα τετραδόνια, όπου ορίζεται με όμοιο τρόπο ένα τετραδόνιο  $R$  το οποίο χρησιμοποιείται για την περιστροφή τετραδονίων,

$$R = [\|R\| \cos \theta, \|R\| \sin \theta \vec{v}] \quad (3.15)$$

Για την επιτυχή περιστροφή ενός τετραδονίου  $P$  με γωνία  $\theta$  γύρω από ένα τετραδόνιο  $R$ , εφαρμόζεται η σχέση

$$P' = RPR^{-1} \quad (3.16)$$

Το τετραδόνιο  $R$  πρέπει να είναι μοναδιαίο, επομένως στη σχέση 3.16 μπορεί να αντικατασταθεί ο όρος  $R^{-1}$  με  $R^*$ . Ο λόγος που πολλαπλασιάζεται από δεξιά και αριστερά το τετραδόνιο  $P$  με  $R, R^*$  στη σχέση 3.16, είναι για να διατηρεί το αρχικό του μήκος μετά την περιστροφή. Παρόλα αυτά, επειδή πολλαπλασιάζεται δύο φορές με το τετραδόνιο περιστροφής  $R, R^*$  το τετραδόνιο  $P$  στρίβει διπλάσια γωνία,  $2\theta$ . Για να αποφευχθεί αυτό το πρόβλημα, η σχέση 3.15 μετατρέπεται ως εξής:

$$Q = \left[ \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \vec{v} \right] \quad (3.17)$$

### Παράδειγμα Περιστροφής με Τετραδόνια

Σε αυτό το σημείο, παρουσιάζεται ένα απλό παράδειγμα, όπου περιστρέφεται κατά γωνία  $\theta = 90^\circ$  το διάνυσμα θέσης  $\vec{p} = (2, 0, 0)$  γύρω από τον άξονα  $\vec{v} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$  κάνοντας χρήση τετραδονίων. Όπως έχει αναφερθεί,

οποιοδήποτε διάνυσμα μπορεί να αναπαρασταθεί στο υπερμιγαδικό επίπεδο ως καθαρό τετραδόνιο. Έτσι, το πρώτο βήμα είναι, η μετατροπή των  $\vec{p}$  και  $\vec{v}$  στα τετραδόνια  $P$  και  $V$  με τις σχέσεις 3.6, δίνοντας 3.17.

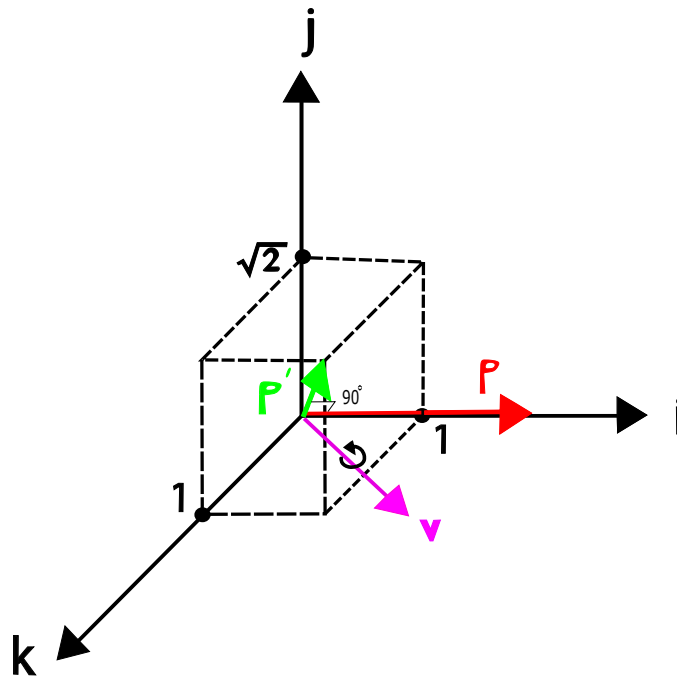
$$P = [0, 2i + 0j + 0k] \quad (3.18)$$

$$V = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}k \right) \right] \quad (3.19)$$

Η τελική θέση  $P'$  του τετραδονίου  $P$  μετά την περιστροφή υπολογίζεται από τη σχέση 3.16, ως

$$P' = VPV^* = [0, i + \sqrt{2}j + k] \quad (3.20)$$

Στο σχήμα που ακολουθεί, απεικονίζεται η περιστροφή.



**Σχήμα 3.2:** Περιστροφή κατά γωνία  $\theta = 90^\circ$  του τετραδονίου  $P = [0, 2i]$  γύρω από το τετραδόνιο  $V = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}k \right) \right]$

### 3.3 Καθορισμός Στροφών στους Οριακούς Κόμβους

Για κάθε οριακό κόμβο είναι γνωστό το διάνυσμα θέσης  $\vec{x}$  αλλά και το διάνυσμα μετατόπισης  $\vec{u}$ . Για να συμπεριληφθούν οι στροφές στη μέθοδο IDW, θα πρέπει πρώτα να υπολογιστούν σε κάθε οριακό οριακό κόμβο. Εφόσον τα τετραδόνια υπερέχουν ως μέθοδος αναπαράστασης στροφών σε σχέση με τα μητρώα στροφής, επιλέχθηκαν για την αναπαράστασή τους. Σκοπός είναι να βρεθεί το διάνυσμα  $\vec{t}$  και τετραδόνιο περιστροφής  $R$  σε κάθε οριακό κόμβο, τέτοιο ώστε

$$X_d = R \cdot X_u \cdot R^* + T, \quad (3.21)$$

όπου οι δείκτες  $u$  και  $d$  υποδηλώνουν την απαραμόρφωτη (undeformed) και παραμορφωμένη (deformed) κατάσταση αντίστοιχα. Τα  $X_u$ ,  $X_d$  και  $T$  είναι τετραδόνια που αναπαριστούν τα διανύσματα θέσης και μετατόπισης ως

$$\begin{aligned} X_u &= [0, \vec{x}], \\ X_d &= [0, \vec{x} + \vec{u}], \\ T &= [0, \vec{t}], \end{aligned}$$

Προκειμένου να καθοριστούν τα τετραδόνια περιστροφής στους οριακούς κόμβους, πρέπει να ορισθεί μια συστάδα γειτονικών κόμβων. Υπάρχουν διάφορες στρατηγικές, ώστε να καθοριστούν οι γειτονικοί κόμβοι. Κάποιος θα μπορούσε να επιλέξει τα κέντρα των γειτονικών κελιών [26]. Σε αυτήν την εργασία επιλέχθηκαν οι κόμβοι που ενώνονται απευθείας με ακμή, με τον εκάστοτε οριακό κόμβο [29].

Οι περιστροφές σε κάθε οριακή κυψέλη υπολογίζονται, μέσω τριών βημάτων. Ως είσοδος της μεθόδου θεωρούνται τα διανύσματα θέσης των απαραμόρφωτων και παραμορφωμένων κυψελών. Στο πρώτο βήμα υπολογίζονται τα κέντρα των απαραμόρφωτων και παραμορφωμένων κυψελών και μεταφέρονται στην αρχή των αξόνων σχήμα 3.3. Ο υπολογισμός του κέντρου κάθε κυψέλης δίνεται ως

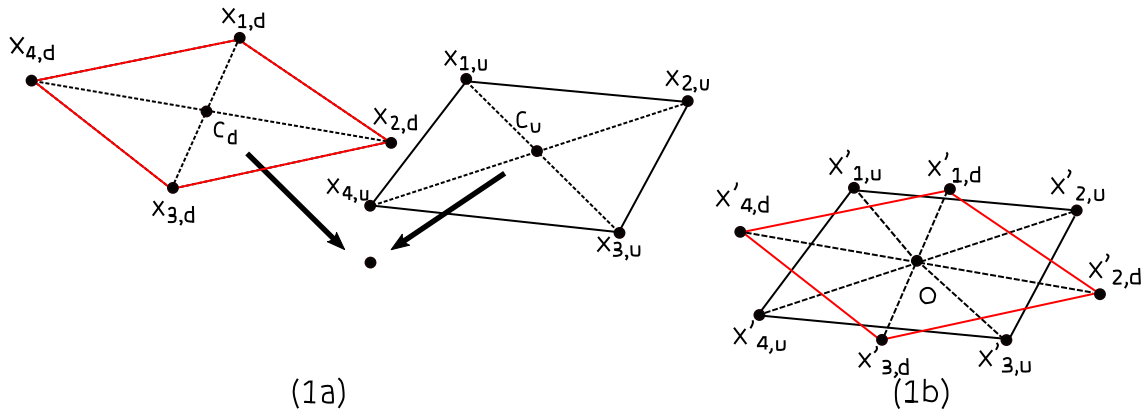
$$c = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \vec{x}_j, \quad (3.22)$$



όπου  $n$  είναι ο αριθμός των κορυφών κάθε κυψέλης. Οι ανανεωμένες θέσεις των κορυφών κάθε κυψέλης υπολογίζονται ως

$$\vec{x}'_u = \vec{x}_u - \vec{c}_u \quad (3.23)$$

$$\vec{x}'_d = \vec{x}_d - \vec{c}_d \quad (3.24)$$



**Σχήμα 3.3:** Μεταφορά απαραμόρφωτης και παραμορφωμένης κυψέλης στην αρχή των αξόνων

Στο δεύτερο βήμα, υπολογίζονται τα κάθετα διανύσματα στην απαραμόρφωτη και στην παραμορφωμένη κυψέλη αντίστοιχα, έπειτα περιστρέφεται η απαραμόρφωτη κυψέλη έτσι ώστε να ευθυγραμμιστεί το κάθετο διάνυσμα της με το κάθετο διάνυσμα της παραμορφωμένης σχήμα 3.4. Το κανονικοποιημένο κάθετο διάνυσμα  $\vec{n}$  σε κάθε κυψέλη, υπολογίζεται ως ο μέσος όρος των κανονικοποιημένων κάθετων διανυσμάτων ανά δύο διαδοχικές κορυφές της κυψέλης

$$\vec{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\vec{x}_j \times \vec{x}_{j+1}}{\|\vec{x}_j \times \vec{x}_{j+1}\|} \quad (3.25)$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί πως οι κορυφές  $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_1$ , καθώς οι κορυφές είναι αριθμημένες σε συνεχόμενη αρίθμηση, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.4. Ο άξονας περιστροφής  $\vec{a}_1$  υπολογίζεται ως το κανονικοποιημένο κάθετο διάνυσμα μεταξύ των κάθετων διανυσμάτων στις παραμορφωμένες και απαραμόρφωτες κυψέλες

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{n}_u \times \vec{n}_d}{\|\vec{n}_u \times \vec{n}_d\|} \quad (3.26)$$

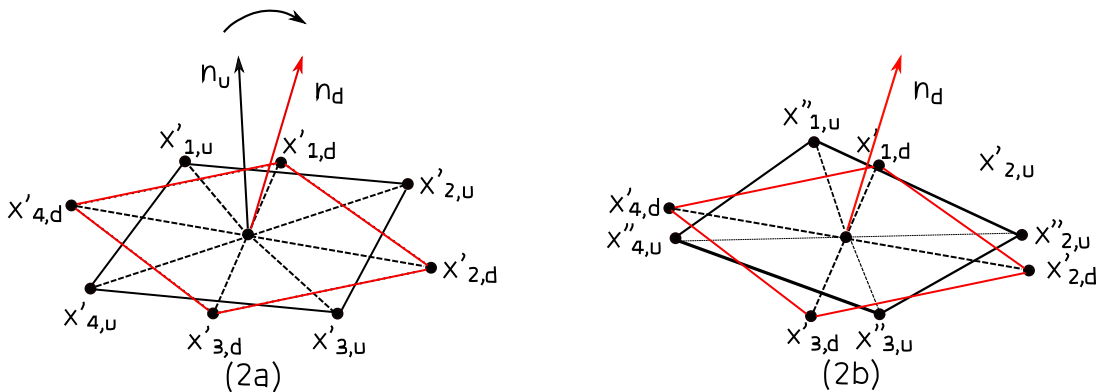
Η γωνία της πρώτης περιστροφής είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζουν τα κάθετα διανύσματα στις παραμορφωμένες και απαραμόρφωτες κυψέλες

$$\omega_1 = \arccos \left( \frac{\vec{n}_u \cdot \vec{n}_d}{\|\vec{n}_u\| \|\vec{n}_d\|} \right) \quad (3.27)$$

Ο μοναδιαίος άξονας περιστροφής  $\vec{a}_1$  και η γωνία περιστροφής  $\omega_1$ , χρησιμοποιούνται για την εύρεση του πρώτου τετραδονίου στροφής  $R_1$ , σε συνδυασμό με την εξίσωση 3.17. Η ανανεωμένη θέση των διανυσμάτων θέσης  $x''_u$  της απαραμόρφωτης κυψέλης μπορεί να υπολογισθεί, εφαρμόζοντας αυτήν την περιστροφή σε κάθε κορυφή της

$$\vec{X}''_u = R_1 \cdot \vec{X}'_u \cdot R_1^* \quad (3.28)$$

όπου  $\vec{X}''_u = [0, \vec{x}''_u]$  και  $\vec{X}'_u = [0, \vec{x}'_u]$



**Σχήμα 3.4:** Υπολογισμός κάθετου διανύσματος  $n_u, n_d$  στην παραμορφωμένη και απαραμόρφωτη κυψέλη σχήμα (2a), και ευθυγράμμιση του  $n_u$  με το  $n_d$  σχήμα (2b)

Στο τρίτο και τελευταίο βήμα η μέθοδος περιστρέφει την απαραμόρφωτη κυψέλη γύρω από το κάθετο διάνυσμα, ώστε οι κορυφές των κυψελών να ταυτιστούν όσο το δυνατόν περισσότερο, σχήμα 3.5. Ο άξονας περιστροφής για αυτήν την κίνηση είναι το κανονικοποιημένο κάθετο διάνυσμα στην παραμορφωμένη κυψέλη και υπολογίζεται ως

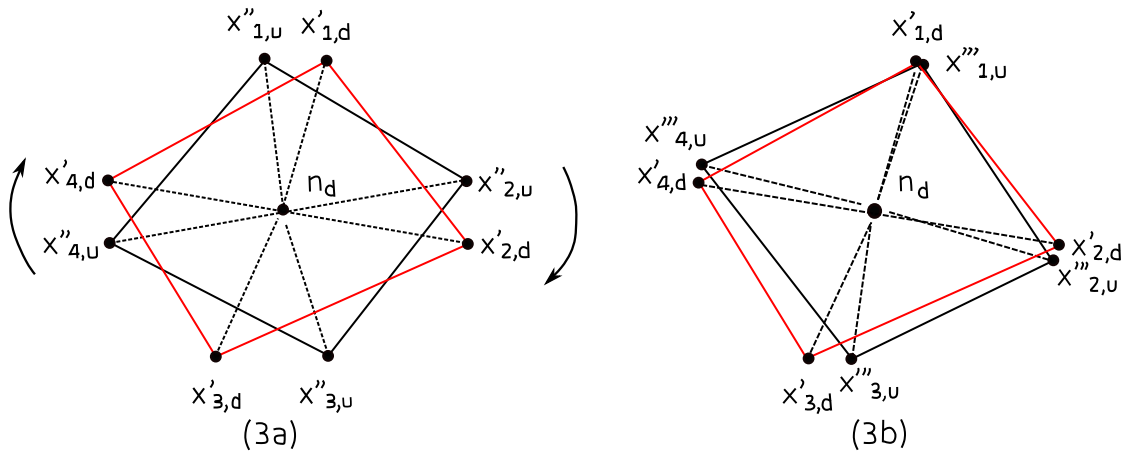
$$\vec{a}_2 = \frac{\vec{n}_d}{\|\vec{n}_d\|} \quad (3.29)$$

Η γωνία της δεύτερης περιστροφής, δίνεται από τη μέση τιμή της γωνίας μεταξύ των κόμβων στις κορυφές της παραμορφωμένης και απαραμόρφωτης κυψέλης.

$$\omega_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \arccos \left( \frac{\vec{x}_{j,u} \cdot \vec{x}_{j,d}}{\|\vec{x}_{j,u}\| \cdot \|\vec{x}_{j,d}\|} \right) \quad (3.30)$$

Ο άξονας περιστροφής  $\vec{a}_2$  και η γωνία περιστροφής  $\omega_2$ , χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του δεύτερου τετραδονίου στροφής  $R_2$  σε συνδυασμό με την εξίσωση 3.17. Το τελικό τετραδόνιο στροφής σε κάθε κυψέλη συμβολίζεται με  $R$  και υπολογίζεται ως

$$R = R_2 R_1 \quad (3.31)$$



**Σχήμα 3.5:** Περιστροφή απαράμορφωτης κυψέλης, χρησιμοποιώντας ως άξονα περιστροφής το κάθετο διάνυσμα  $n_d$  ώστε οι κορυφές των κυψελών (παραμορφωμένη - απαράμορφωτη) να πλησιάσουν.

Εφόσον υπολογισθούν τα τετραδόνια στροφής σε κάθε κυψέλη, μπορούν να υπολογισθούν τα τετραδόνια στροφής σε κάθε κόμβο του πλέγματος μέσω παρεμβολής. Αυτό γίνεται μέσω σφαιρικής γραμμικής παρεμβολής (SLERP - Spherical Linear Interpolation). Η γραμμική σφαιρική παρεμβολή μεταξύ δύο τετραδονίων υπολογίζεται ως [32]

$$Q_{SLERP} = \frac{\sin[(1-w)\omega]}{\sin \omega} Q_1 + \frac{\sin[w\omega]}{\sin \omega} Q_2, \quad (3.32)$$

όπου  $0 \leq w \leq 1$  είναι το βάρος για το δεύτερο τετραδόνιο, και  $\omega$  η γωνία μεταξύ των τετραδονίων όπου και υπολογίζεται ως

$$\omega = \arccos(Q_1 \cdot Q_2) \quad (3.33)$$

Για τον υπολογισμό σφαιρικής γραμμικής παρεμβολής  $Q_{SLERP_n}$  μεταξύ πολλών τετραδονίων  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , η παρακάτω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί [20]

$$Q_{SLERP_2} = SLERP \left( Q_1, Q_2, \frac{w_2}{w_1 + w_2} \right) \quad (3.34)$$

$$Q_{SLERP_3} = SLERP \left( Q_{SLERP_2}, Q_3, \frac{w_3}{w_1 + w_2 + w_3} \right) \quad (3.35)$$

⋮

$$Q_{SLERP_n} = SLERP \left( Q_{SLERP_{n-1}}, Q_n, \frac{w_n}{\sum_{j=1}^n w_j} \right) \quad (3.36)$$

Με σκοπό τον υπολογισμό των τετραδονίων στροφής σε κάθε κόμβο, ο παραπάνω ψευδοκώδικας εφαρμόζεται κάνοντας χρήση των τετραδονίων στροφής όλων των κυψελών που ενώνονται με αυτόν τον κόμβο, με ίσα βάρη  $w_j = \frac{1}{n}$ . Εφόσον τα τετραδόνια στροφής έχουν υπολογισθεί σε κάθε κόμβο, το διάνυσμα μετατόπισης  $\vec{t}$  υπολογίζεται σύμφωνα με την εξίσωση 3.21.

### 3.4 Παρεμβολή Μετατοπίσεων στο Πλέγμα

Η μεθοδολογία IDW χρησιμοποιείται για την παρεμβολή των μετατοπίσεων στο εσωτερικό του πλέγματος.

$$t(\vec{x}) = \frac{\sum_{b=1}^{n_b} w_b(\vec{x}) \vec{t}_b}{\sum_{b=1}^{n_b} w_b(\vec{x})} \quad (3.37)$$

όπου  $t(\vec{x})$  είναι το διάνυσμα μετατόπισης ενός κόμβου  $\vec{x}$  στο εσωτερικό του πλέγματος,  $n_b$  είναι ο αριθμός των οριακών κόμβων,  $w_b(\vec{x})$  είναι η συνάρτηση βάρους και  $\vec{t}_b$  είναι το διάνυσμα μετατόπισης του οριακού κόμβου  $b$ .

### 3.5 Παρεμβολή Στροφών στο Πλέγμα

Η παρεμβολή των στροφών μπορεί να γίνει όμοια με την παρεμβολή των μετατοπίσεων, όπως περιγράφεται παρακάτω

$$R(\vec{x}) = \frac{\sum_{b=1}^{n_b} w_b(\vec{x}) R_b}{\sum_{b=1}^{n_b} w_b(\vec{x})} \quad (3.38)$$

όπου  $R_b$  είναι το τετραδόνιο στροφής του οριακού κόμβου  $b$ . Το τετραδόνιο που υπολογίζεται μετά την παρεμβολή δεν είναι απαραίτητα μοναδιαίο, επομένως θα πρέπει να κανονικοποιηθεί. Η μετατόπιση  $\vec{u}$  ενός εσωτερικού κόμβου του πλέγματος υπολογίζεται ως

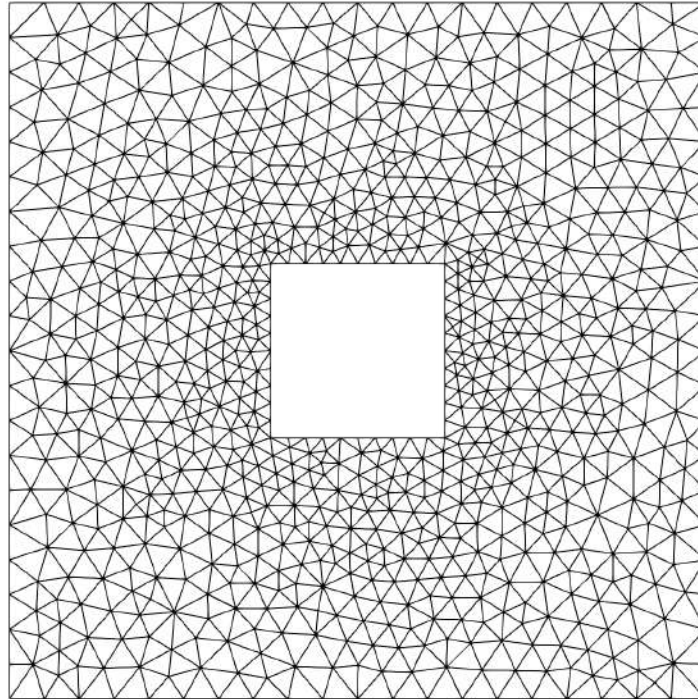
$$U(\vec{x}) = \hat{R}(\vec{x}) X \hat{R}(\vec{x})^* - X + T(\vec{x}), \quad (3.39)$$

όπου  $U = [0, u]$ ,  $X = [0, \vec{x}]$ ,  $T = [0, \vec{t}]$  και  $\hat{R}(\vec{x})$  είναι το κανονικοποιημένο τετραδόνιο  $R(\vec{x})$  μετά την παρεμβολή. Η παραπάνω διαδικασία ονομάζεται γραμμική παρεμβολή ή γνωστή και ως LERP.

### 3.6 2Δ Εφαρμογή Παραμόρφωσης Πλέγματος με την μέθοδο IDW

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι η αξιολόγηση της μεθόδου IDW με παρεμβολή στροφών στην προσαρμοστική παραμόρφωση πλέγματος. Η στιβαρότητα της μεθόδου δοκιμάζεται σε 2Δ τριγωνικό πλέγμα 884 κόμβων, γύρω από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σχήμα. Για την αξιολόγηση της μεθόδου ελέγχονται οι μετρικές ποιότητας σχήματος και μεγέθους-σχήματος και γίνεται σύγκριση με την αρχική μέθοδο IDW χωρίς την παρεμβολή των στροφών. Οι μετρικές ποιότητας περιγράφονται αναλυτικά στο παράρτημα Α. Επιπλέον, σε κάθε εφαρμογή παραμόρφωσης υπολογίζεται ο αριθμός των αναστραμμένων τριγώνων στο τελικό πλέγμα. Οι σταθερές παράμετροι που επιλέχθηκαν είναι

- $\alpha = 3$
- $\beta = 5$
- $\gamma_{mov} = 0.1$
- $\gamma_{fix} = 0.0$

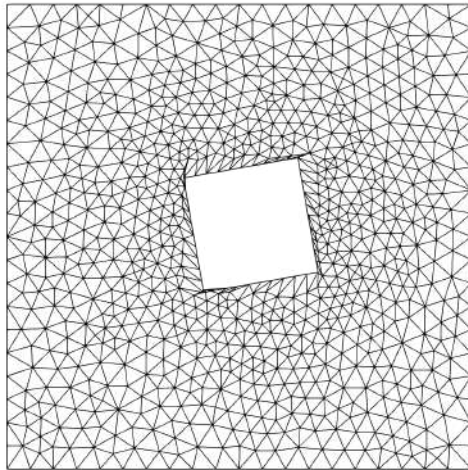


Σχήμα 3.6: Αρχικό 2Δ πλέγμα

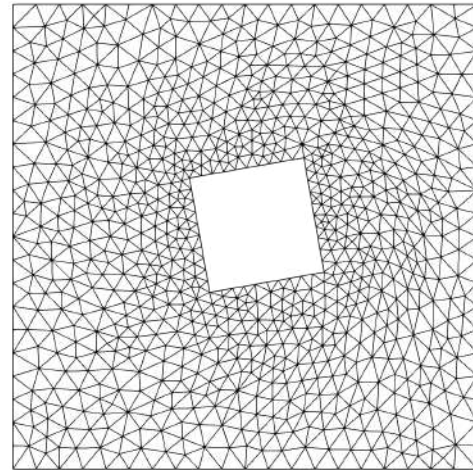
Οι τρεις εφαρμογές παραμόρφωσης της γεωμετρίας του ορθογωνίου:

1. Μετακίνηση  $\Delta\vec{X} = (0.1, 0.1, 0)$  και στροφή  $\phi = 10^\circ$
2. Μετακίνηση  $\Delta\vec{X} = (0.2, 0.2, 0)$  και στροφή  $\phi = 20^\circ$
3. Μετακίνηση  $\Delta\vec{X} = (0.3, 0.3, 0)$  και στροφή  $\phi = 30^\circ$

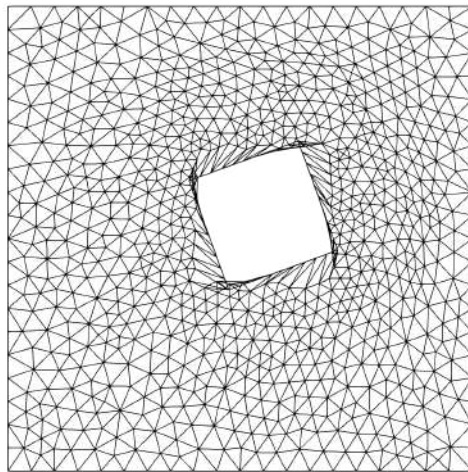
Στην αριστερή στήλη των παρακάτω σχημάτων, γίνεται παραμόρφωση του πλέγματος χωρίς την παρεμβολή στροφών, ενώ στην δεξιά στήλη οι στροφές συμπεριλαμβάνονται στην παρεμβολή με τη μέθοδο IDW.



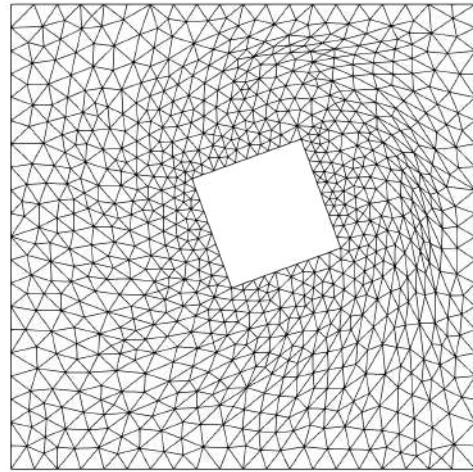
(a) Εφαρμογή 1. IDW



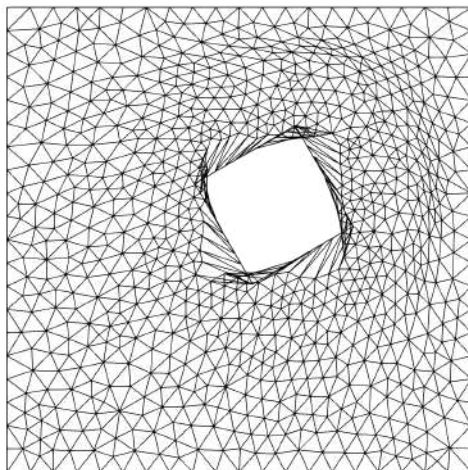
(b) Εφαρμογή 1. IDW-παρεμβολή στροφών



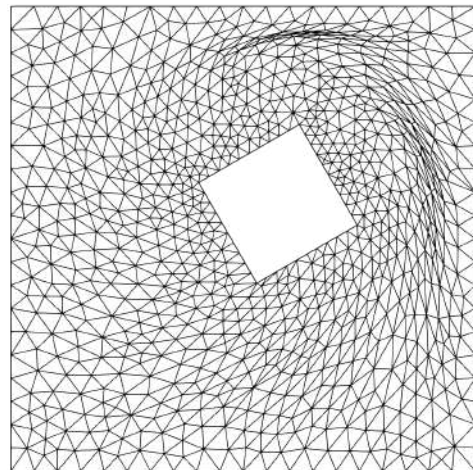
(c) Εφαρμογή 2. IDW



(d) Εφαρμογή 2. IDW-παρεμβολή στροφών



(e) Εφαρμογή 3. IDW



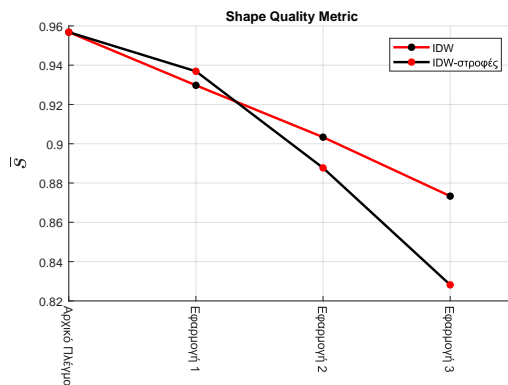
(f) Εφαρμογή 3. IDW-παρεμβολή στροφών

**Σχήμα 3.7:** Συγκριτικά σχήματα παραμόρφωσης πλέγματος με τη μέθοδο IDW, χωρίς (αριστερή στήλη) και με παρεμβολή στροφών (δεξιά στήλη), για τις τρεις εφαρμογές.

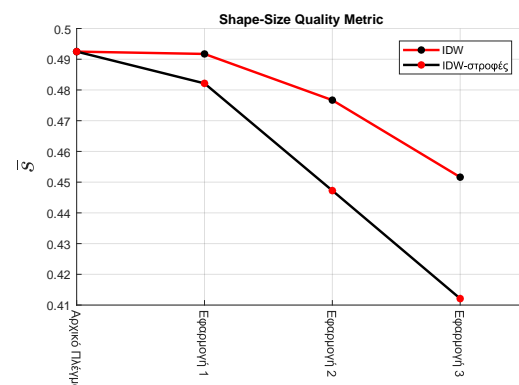
Παρακάτω παρουσιάζονται συγκριτικός πίνακας αναστραμμένων τριγώνων και διαγράμματα μέσων τιμών για τις μετρικές ποιότητας σχήματος και μεγέθους-σχήματος.

Εφαρμογή	IDW	IDW-παρεμβολή στροφών
1	5	0
2	23	0
3	25	0

**Πίνακας 3.1:** Αριθμός αναστραμμένων τριγώνων για κάθε εφαρμογή παραμόρφωσης.



**Σχήμα 3.8:** Συγκριτικό διάγραμμα μετρικής ποιότητας Σχήματος, μεταξύ των μεθόδων IDW (κόκκινο) και IDW με παρεμβολή στροφών (μαύρο), για κάθε εφαρμογή



**Σχήμα 3.9:** Συγκριτικό διάγραμμα μετρικής ποιότητας Μεγέθους-Σχήματος, μεταξύ των μεθόδων IDW (κόκκινο) και IDW με παρεμβολή στροφών (μαύρο), για κάθε εφαρμογή

Από τη μελέτη παραμόρφωσης πλέγματος που παρουσιάστηκε παραπάνω, προκύπτει ότι η προσθήκη της παρεμβολής στροφών στην αρχική μέθοδο IDW βελτιώνει ικανοποιητικά το τελικό πλέγμα, αφού δεν δημιουργείται κανένα αναστραμμένο τρίγωνο και στις τρεις εφαρμογές (πίνακας 3.1). Επιπλέον, παρατηρώντας τα συγκριτικά διαγράμματα των μέσων τιμών για τις δύο μετρικές ποιότητας, η μεταβολή είναι μικρή σε σχέση με την ποιότητα του αρχικού πλέγματος (σχήματα 3.8 και 3.9). Πρέπει να σημειωθεί, ότι οι μετρικές ποιότητας σχήματος και μεγέθους-σχήματος δεν δίνουν πληροφορία για την ύπαρξη ή μη αναστραμμένων στοιχείων. Έτσι, κάθε μέθοδος κρίνεται συνδυάζοντας την τελική ποιότητα και τον αριθμό των αναστραμμένων στοιχείων.



## Κεφάλαιο 4

# Εφαρμογές IDW σε 2Δ και 3Δ Πλέγματα

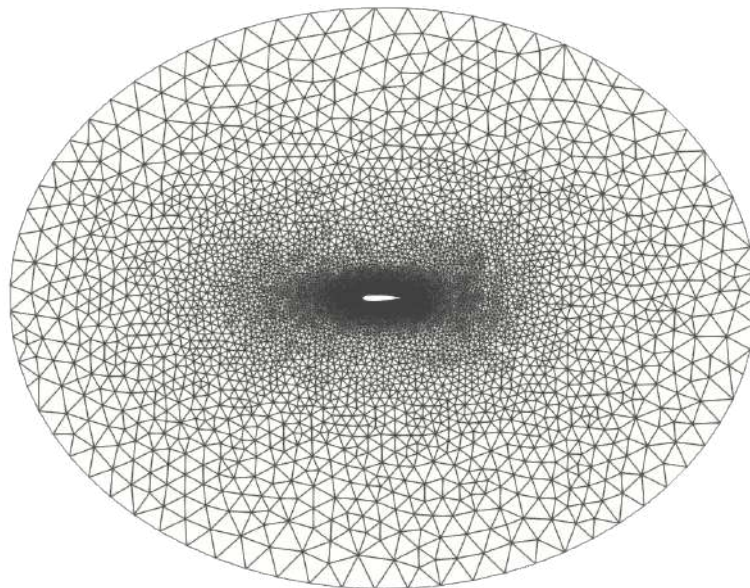
Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τέσσερις εφαρμογές της μεθοδολογίας IDW με παρεμβολή στροφών σε 2Δ και 3Δ προβλήματα. Σκοπός του κεφαλαίου είναι η ανάδειξη των δυνατοτήτων της μεθόδου, τόσο σε 2Δ αλλά και σε 3Δ εφαρμογές. Τα υπολογιστικά πλέγματα που χρησιμοποιούνται διαφέρουν σε μέγεθος αλλά και σε τύπο στοιχείων. Οι εφαρμογές μελετώνται ως προς τη διατήρηση της ποιότητας των στοιχείων τους. Οι μετρικές που επιλέχθηκαν για τον καθορισμό της ποιότητας του πλέγματος είναι η μετρική σχήματος και η μετρική σχήματος-μεγέθους (Παράρτημα Α). Αρχικά υπολογίζεται η μέση τιμή της μετρικής μεγέθους και της μετρικής σχήματος-μεγέθους στο αρχικό απραμόρφωτο πλέγμα και, στη συνέχεια, στο παραμορφωμένο. Έπειτα, παρουσιάζονται πίνακες όπου συγκρίνονται οι μεταβολές της μέσης τιμής των μετρικών σχήματος και σχήματος-μεγέθους σε σχέση με το αρχικό πλέγμα.

### 4.1 Εφαρμογή στην Αεροτομή NACA 4412

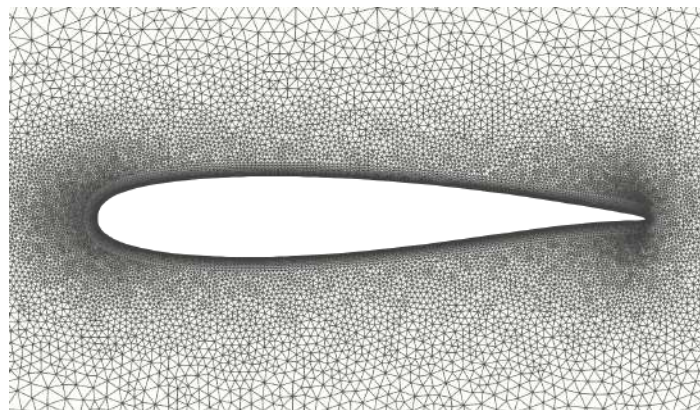
Σε αυτήν την ενότητα, γίνεται εφαρμογή της μεθόδου IDW με παρεμβολή στροφών, στην παραμόρφωση μη δομημένου πλέγματος γύρω από την αεροτομή NACA 4412. Το πλέγμα αποτελείται από 28809 κόμβους και 57143 τριγωνικά στοιχεία, ενώ κοντά στα τοιχώματα έχει κατάλληλη πύκνωση για προλέξεις συνεκτικών ροών. Το αρχικό πλέγμα δίνεται στα σχήματα 4.6b και 4.2.

Στο παράδειγμα αυτό, εφαρμόζονται δύο παραμορφώσεις. Στην πρώτη εφαρμογή, η αεροτομή περιστρέφεται γύρω από την ακμή πρόσπτωσης ενώ στη δεύτερη, αυτή παραμορφώνεται ημιτονοειδώς κατά την κατεύθυνση της χορδής. Οι παράμετροι που επιλέχθηκαν είναι

- $\alpha = 3$
- $\beta = 5$
- $\gamma_{mov} = 0.1$
- $\gamma_{fix} = 0.0$



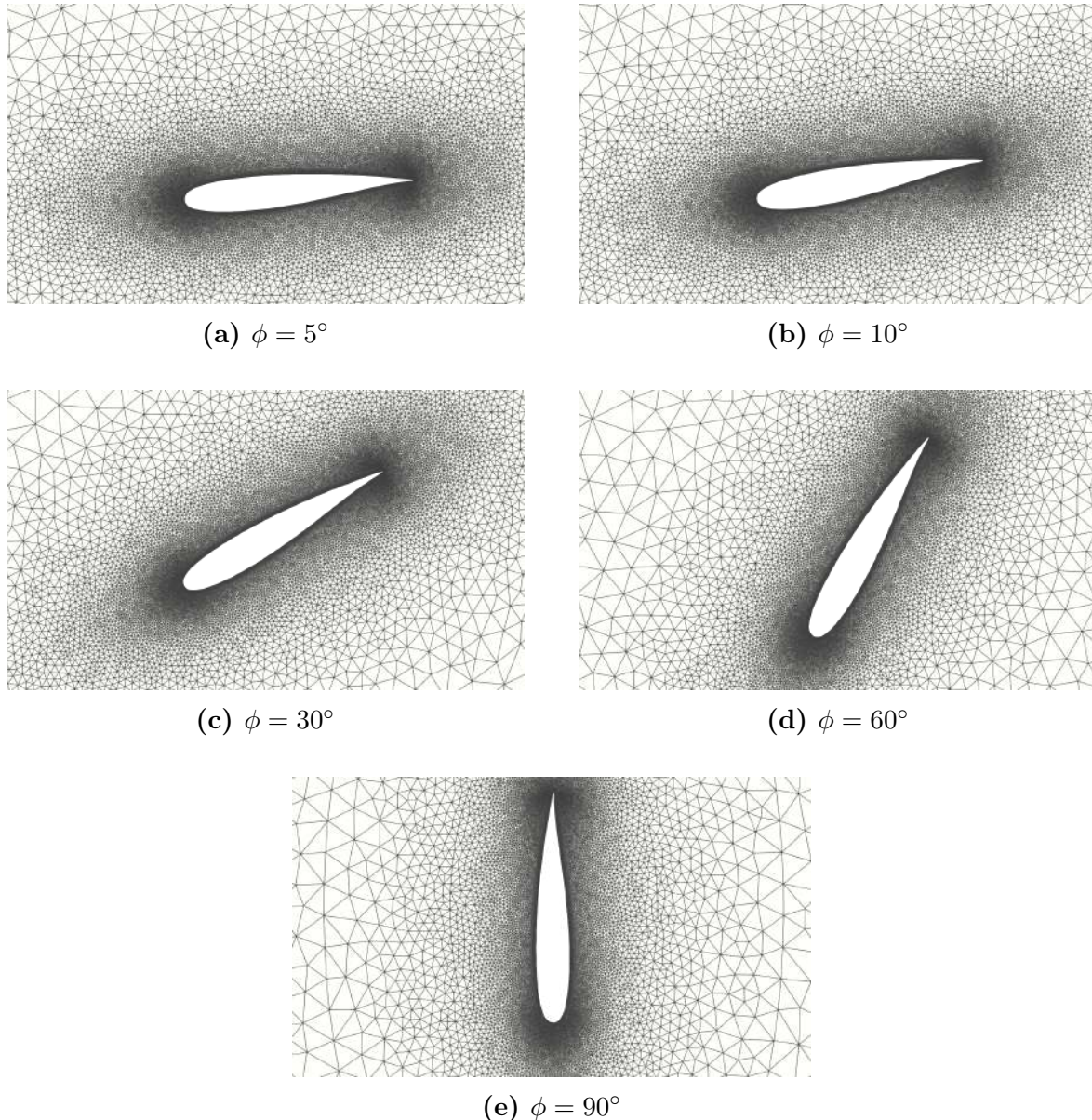
Σχήμα 4.1: Αεροτομή NACA 4412. Αρχικό 2Δ πλέγμα



Σχήμα 4.2: Αεροτομή NACA 4412. Το πλέγμα κοντά στην αεροτομή

### 4.1.1 Περιστροφή Αεροτομής

Η αεροτομή περιστρέφεται ανθρωρολογιακά γύρω από την ακμή πρόσπτωσης, όπου  $\vec{x} = [0, 0, 0]$ , σε γωνίες  $\phi^\circ = 5^\circ, 10^\circ, 30^\circ, 60^\circ$  και  $90^\circ$ . Σε κάθε γωνία υπολογίζεται η μετρική σχήματος και η μετρική σχήματος-μεγέθους στο τελικό πλέγμα. Η παραμόρφωση του πλέγματος γίνεται μέσω της μεθόδου IDW με παρεμβολή στροφών. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο σχήμα 4.3:

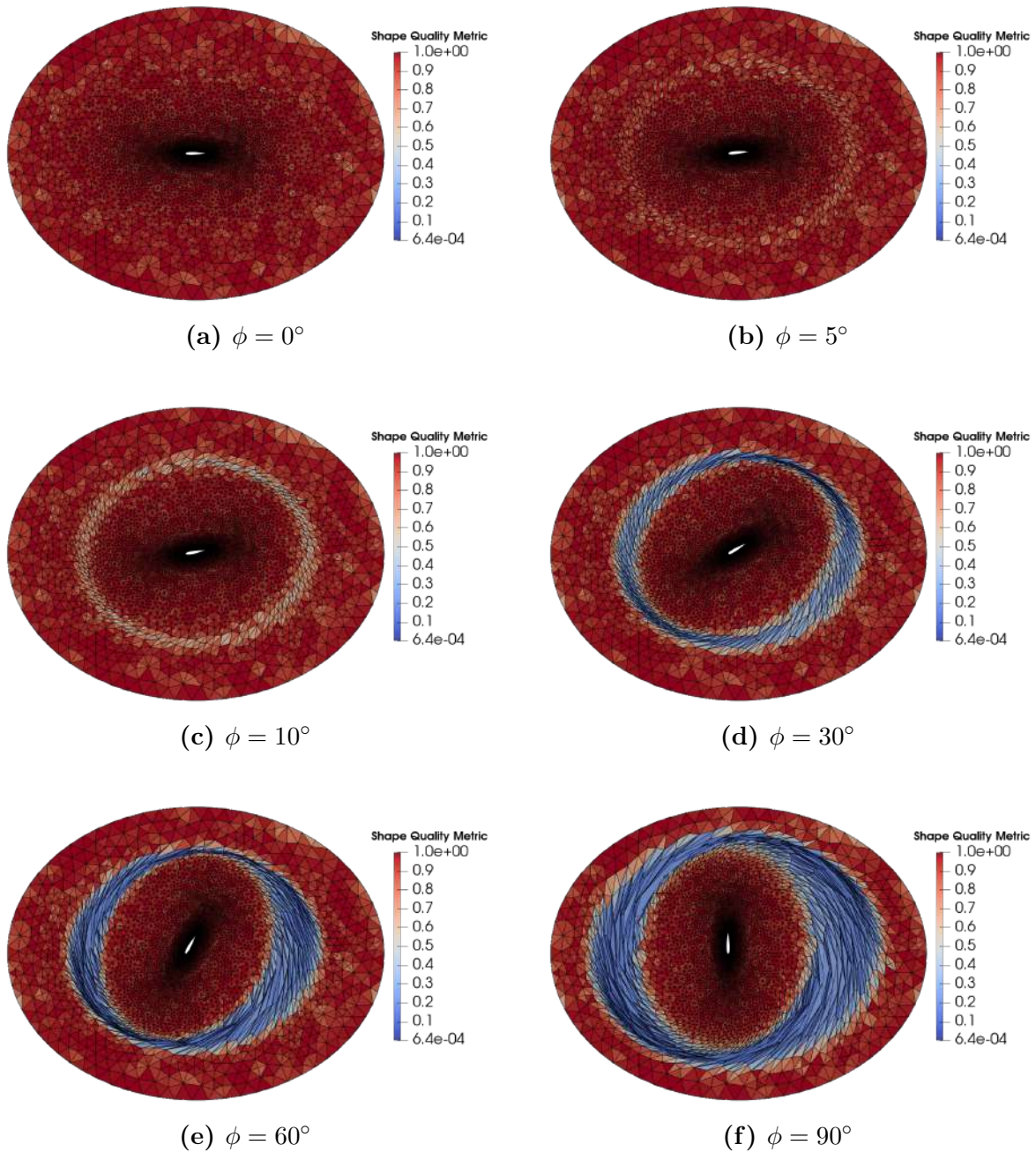


**Σχήμα 4.3:** Αεροτομή NACA 4412. Περιστροφή αεροτομής, μέσω της μεθόδου IDW με παρεμβολή στροφών.

Η παραμόρφωση μεταφέρεται σε μια σταθερή ακτίνα κοντά τα όρια του χωρίου, ενώ το πλέγμα κοντά στην αεροτομή παραμένει απαραμόρφωτο για όλες τις γωνίες  $\phi$ . Η ακτίνα που μεταφέρεται η παραμόρφωση έχει άμεση



σχέση με τις παραμέτρους  $a$ ,  $\beta$ ,  $\gamma_{mov}$ ,  $\gamma_{fix}$ . Στο σχήμα 4.8, παρουσιάζεται βαθμωτό πεδίο τιμών της μετρικής σχήματος  $s$  για κάθε γωνία  $\phi$ .



**Σχήμα 4.4:** Αεροτομή NACA 4412. Βαθμωτό πεδίο μετρικής ποιότητας σχήματος για κάθε στροφή της αεροτομής σε γωνίες  $\phi = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ .

Σύμφωνα με το βαθμωτό πεδίο τιμών της μετρικής  $s$ , παρατηρείται ότι για γωνίες μεταξύ  $5^\circ - 30^\circ$  η στρεβλότητα του πλέγματος διατηρείται σε ανεκτά όρια. Για γωνίες άνω των  $30^\circ$ , η παραμόρφωση δεν μπορεί να απορροφηθεί στην ενδιάμεση περιοχή μεταξύ κινουμένων και ακίνητων ορίων. Όπως έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο 2, μεταβάλλοντας κατάλληλα τις σταθερές παραμέτρους, μπορεί να προσαρμοστεί η ακτίνα διατήρησης απαραμόρφωτου πλέγματος γύρω από τα μεταβαλλόμενα όρια. Στον πίνακα 4.1, παρουσιάζε-

ται η μέση τιμή για τη μετρική-σχήματος και μεγέθους σχήματος σε κάθε γωνία  $\phi$ .

Πίνακας Μετρικών Σχήματος και Σχήματος-Μεγέθους		
$\phi^\circ$	Μετρική Σχήματος	Μετρική Σχήματος-Μεγέθους
0	0.6245	0.02798
5	0.6235	0.02797
10	0.6218	0.02796
30	0.6162	0.02791
60	0.6124	0.0277
90	0.6075	0.02764

**Πίνακας 4.1:** Αεροτομή NACA 4412. Μεταβολή μέσης τιμής μετρικών σχήματος και μεγέθους-σχήματος.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο μέσος όρος της ποιότητας του αρχικού πλέγματος είναι χαμηλότερος από τον ιδανικό ( $\approx 1$ ) για τις μετρικές σχήματος και μεγέθους-σχήματος, λόγω της επίδρασης των στρεβλωμένων κελιών στην περιοχή του οριακού στρώματος. Έτσι, η μεταβολή του μέσου όρου συγκρίνεται με ποιότητα αναφοράς αυτή του αρχικού πλέγματος συμπεριλαμβάνοντας τη στρεβλότητα των κελιών στην περιοχή του οριακού στρώματος. Τέλος, στον πίνακα 4.2 παρουσιάζεται ο αριθμός αναστραμμένων στοιχείων στο τελικό πλέγμα, για κάθε στροφή της αεροτομής.

Πίνακας Αναστραμμένων Τριγώνων	
$\phi^\circ$	Αριθμός Αναστραμμένων
5	0
10	0
30	0
60	4
90	10

**Πίνακας 4.2:** Αεροτομή NACA 4412. Αριθμός αναστραμμένων τριγώνων στο τελικό πλέγμα, για κάθε περίπτωση στροφής.

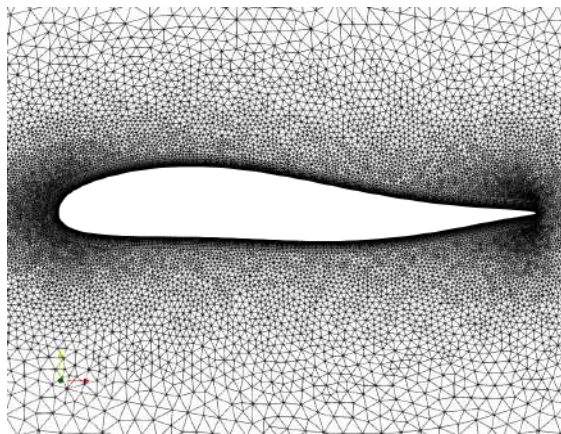
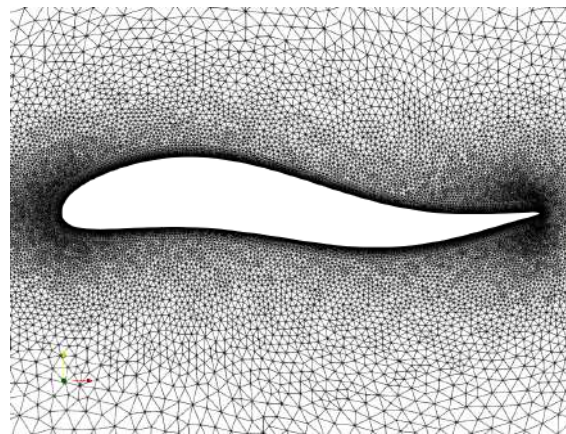
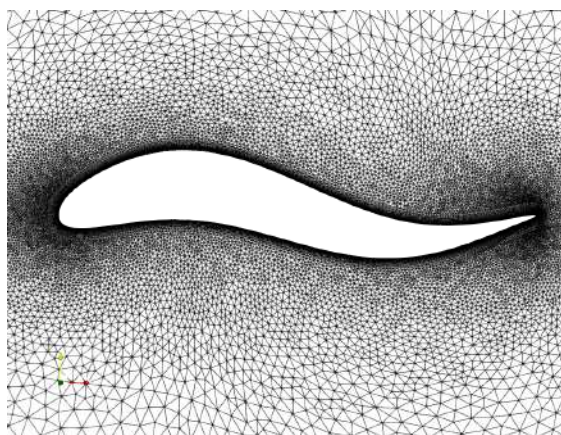
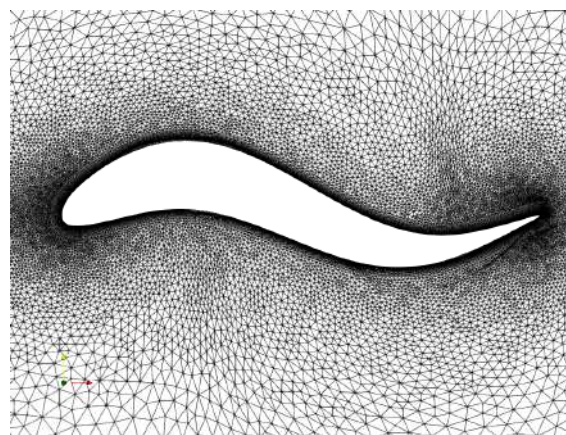
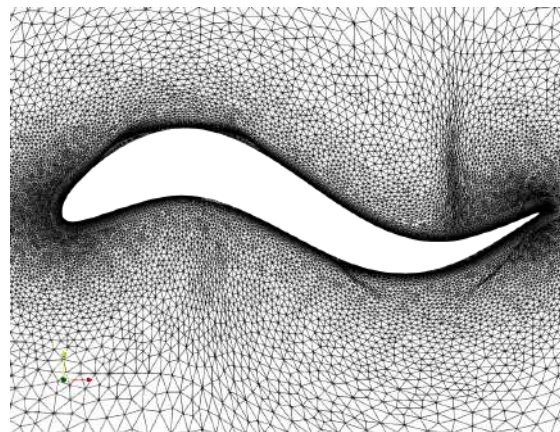
### 4.1.2 Ημιτονοειδής Παραμόρφωση της Αεροτομής

Στην αρχική γεωμετρία, εφαρμόζεται παραμόρφωση που περιγράφεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{x}_0 \\ \vec{y} &= \vec{y}_0 + \alpha \sin(2\pi\vec{x}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

όπου  $\vec{x}_0$ ,  $\vec{y}_0$  οι αρχικές θέσεις των σημείων του πλέγματος και  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  οι αντίστοιχες νέες θέσεις. Η παραμόρφωση που επιβάλλει η σχέση 4.1 δίνει ένα ημιτονοειδές σχήμα στην αεροτομή. Η παραμόρφωση αυξάνεται όσο μεγαλώνει ο συντελεστής  $\alpha$ , ο οποίος παίρνει τιμές από 0 έως 0.1 με βήμα 0.02. Η γεωμετρία που προκύπτει έπειτα από κάθε βήμα παραμόρφωσης, αναδεικνύει τις δυνατότητες της μεθόδου σε εφαρμογές έντονων παραμορφώσεων. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο σχήμα 4.5.



(a)  $\alpha = 0.02$ (b)  $\alpha = 0.04$ (c)  $\alpha = 0.06$ (d)  $\alpha = 0.08$ (e)  $\alpha = 0.1$ 

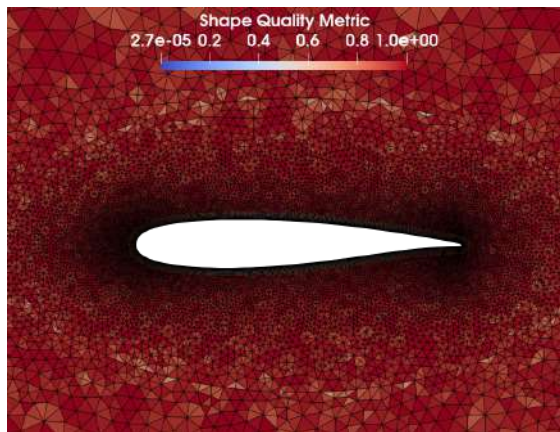
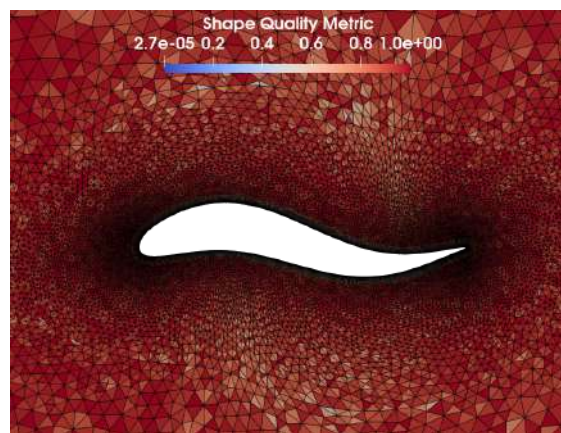
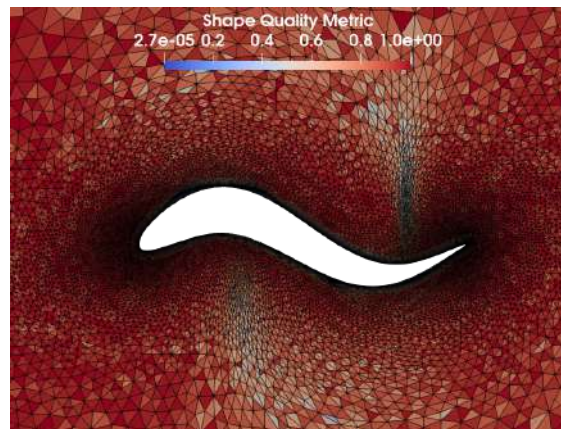
**Σχήμα 4.5:** NACA 4412. Ημιτονοειδής παραμόρφωση αεροτομής, μέσω της μεθόδου IDW με παρεμβολή στρωφών.

Η ημιτονοειδής παραμόρφωση παράγει διαφορετικές στροφές στους οριακούς κόμβους και με διαφορετική κατεύθυνση. Έτσι για τιμές του συντελεστή  $\alpha$  άνω του 0.4, η δομή του πλέγματος μέσα στο οριακό στρώμα αλλοιώνεται έντονα. Περιοχές που βρίσκονται σε μικρή ακτίνα από το τέλος του οριακού στρώματος, διατηρούν υψηλή ποιότητα ακόμα και στην περίπτωση που ο

συντελεστής  $\alpha$  ισούται με 0.1. Όμοια με την περίπτωση περιστροφής η επιλογή των σταθερών παραμέτρων, μπορεί να επηρεάσει σημαντικά το τελικό αποτέλεσμα.

Για κάθε τιμή του συντελεστή  $\alpha$  υπολογίζεται η μετρική σχήματος και σχήματος-μεγέθους. Η τελική ποιότητα του πλέγματος παρουσιάζεται στα σχήματα 4.6b - 4.6f, μέσω του βαθμωτού πεδίου τιμών της μετρικής σχήματος.



(a)  $\alpha = 0$ (b)  $\alpha = 0.02$ (c)  $\alpha = 0.04$ (d)  $\alpha = 0.06$ (e)  $\alpha = 0.08$ (f)  $\alpha = 0.1$ 

**Σχήμα 4.6:** Αεροτομή NACA 4412. Βαθμωτό πεδίο μετρικής ποιότητας σχήματος για κάθε τιμή του συντελεστή  $\alpha = 0.02 - 0.1$

Σύμφωνα με το βαθμωτό πεδίο τιμών της μετρικής σχήματος, παρατηρείται ότι τιμές του συντελεστή  $\alpha$  μεταξύ  $0.02 - 0.06$ , η στρεβλότητα του πλέγματος διατηρείται σε ανεκτά όρια. Για τιμές του συντελεστή  $\alpha$  από  $0.08$  και άνω, η παραμόρφωση δεν μπορεί να διαδοθεί αποδοτικά στο πλέγμα που βρίσκεται εντός της περιοχής του οριακού στρώματος. Όπως έχει

αναφερθεί στο κεφάλαιο 2, η ακτίνα διατήρησης απαραμόρφωτου πλέγματος γύρω από τα κινούμενα όρια μπορεί να προσαρμοστεί, μεταβάλλοντας κατάλληλα τις σταθερές παραμέτρους. Στον πίνακα 4.3, παρουσιάζονται συγκριτικά αποτελέσματα για τη μέση τιμή των μετρικών σχήματος και μεγέθους-σχήματος για κάθε τιμή του συντελεστή  $\alpha$ .

Πίνακας Μετρικών Σχήματος και Σχήματος-Μεγέθους		
$\alpha$	Μετρική Σχήματος	Μετρική Σχήματος-Μεγέθους
0	0.6245	0.02798
0.02	0.6238	0.02796
0.04	0.6227	0.02793
0.06	0.6180	0.02789
0.08	0.6123	0.02784
0.1	0.6015	0.02778

**Πίνακας 4.3:** Αεροτομή NACA 4412. Μεταβολή μέσης τιμής μετρικών σχήματος και μεγέθους-σχήματος.

Τέλος, παρουσιάζεται πίνακας με τον αριθμό αναστραμμένων στοιχείων για κάθε τιμή του συντελεστή  $\alpha$ .

Πίνακας Αναστραμμένων Τριγώνων	
$\alpha$	Αριθμός Αναστραμμένων
0.02	0
0.04	0
0.06	2
0.08	34
0.1	132

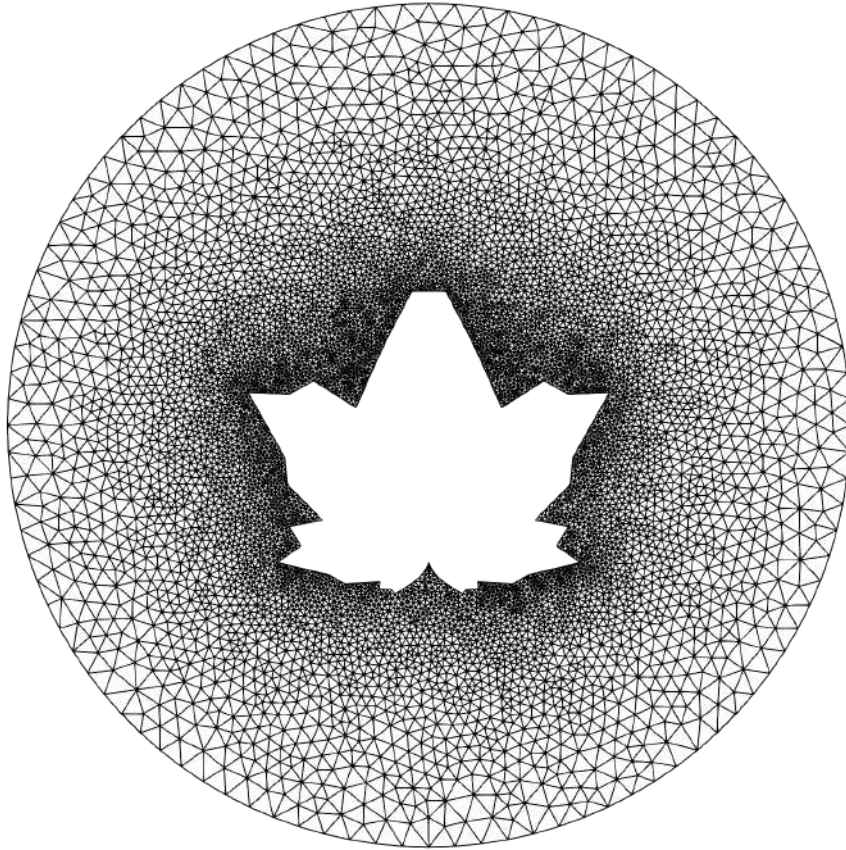
**Πίνακας 4.4:** Αεροτομή NACA 4412. Αριθμός αναστραμμένων τριγώνων για κάθε περίπτωση παραμόρφωσης.

Σύμφωνα με τα αναστραμμένα στοιχεία που παράγονται, παρατηρείται ότι δεν μπορούν να εφαρμοστούν έντονες παραμορφώσεις με τη μέθοδο IDW με παρεμβολή στροφών, καθώς για τιμές  $\alpha > 0.04$  παράγονται αναστραμμένα στοιχεία. Αξίζει να σημειωθεί ότι η συγκεκριμένη εφαρμογή είναι αρκετά απαιτητική λόγω του πυκνού πλέγματος κοντά στην αεροτομή, κατάλληλου για προσομοίωση συνεκτικών ροών.

## 4.2 Εφαρμογή σε πλέγμα γύρω από πλατανόφυλλο

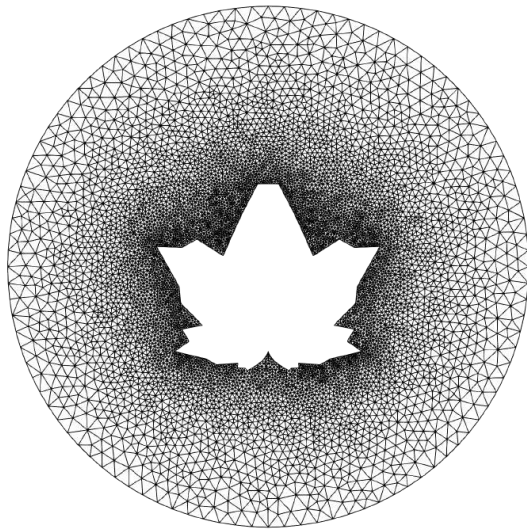
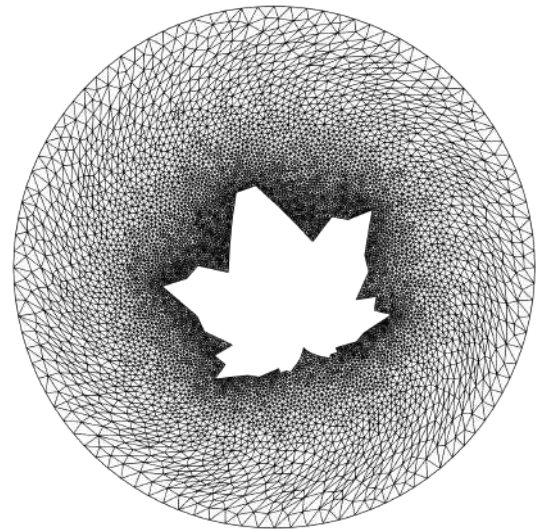
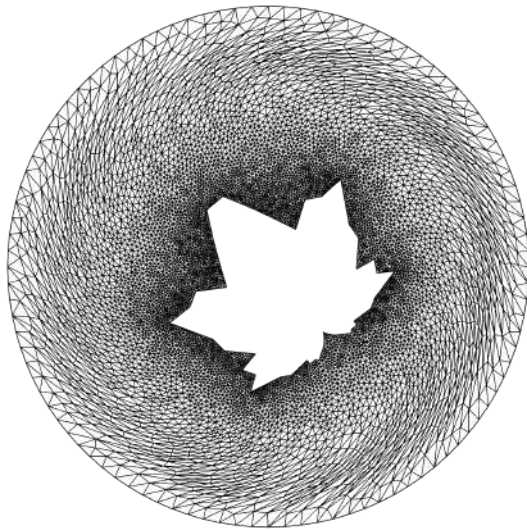
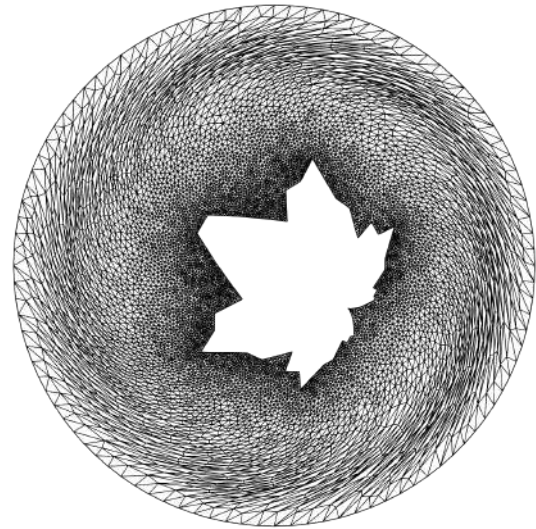
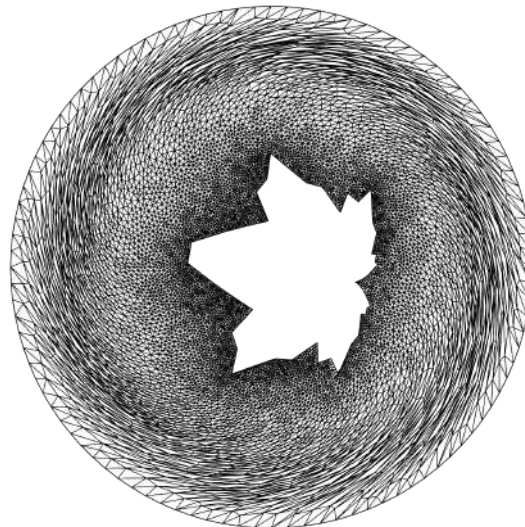
Η μέθοδος που υλοποιήθηκε στη μεταπτυχιακή εργασία, μπορεί να εφαρμοστεί σε πληθώρα εφαρμογών εκτός του πεδίου της Αεροδυναμικής. Η εφαρμογή που ακολουθεί αφορά την παραμόρφωση του πλέγματος γύρω από ένα πλατανόφυλλο κατά την περιστροφή του. Από το σχήμα του, το πλατανόφυλλο έχει μια ιδιαίτερα απαιτητική γεωμετρία, ακόμη και σε μικρές στροφές και μπορεί εύκολα να δώσει αναστραμμένα τρίγωνα.

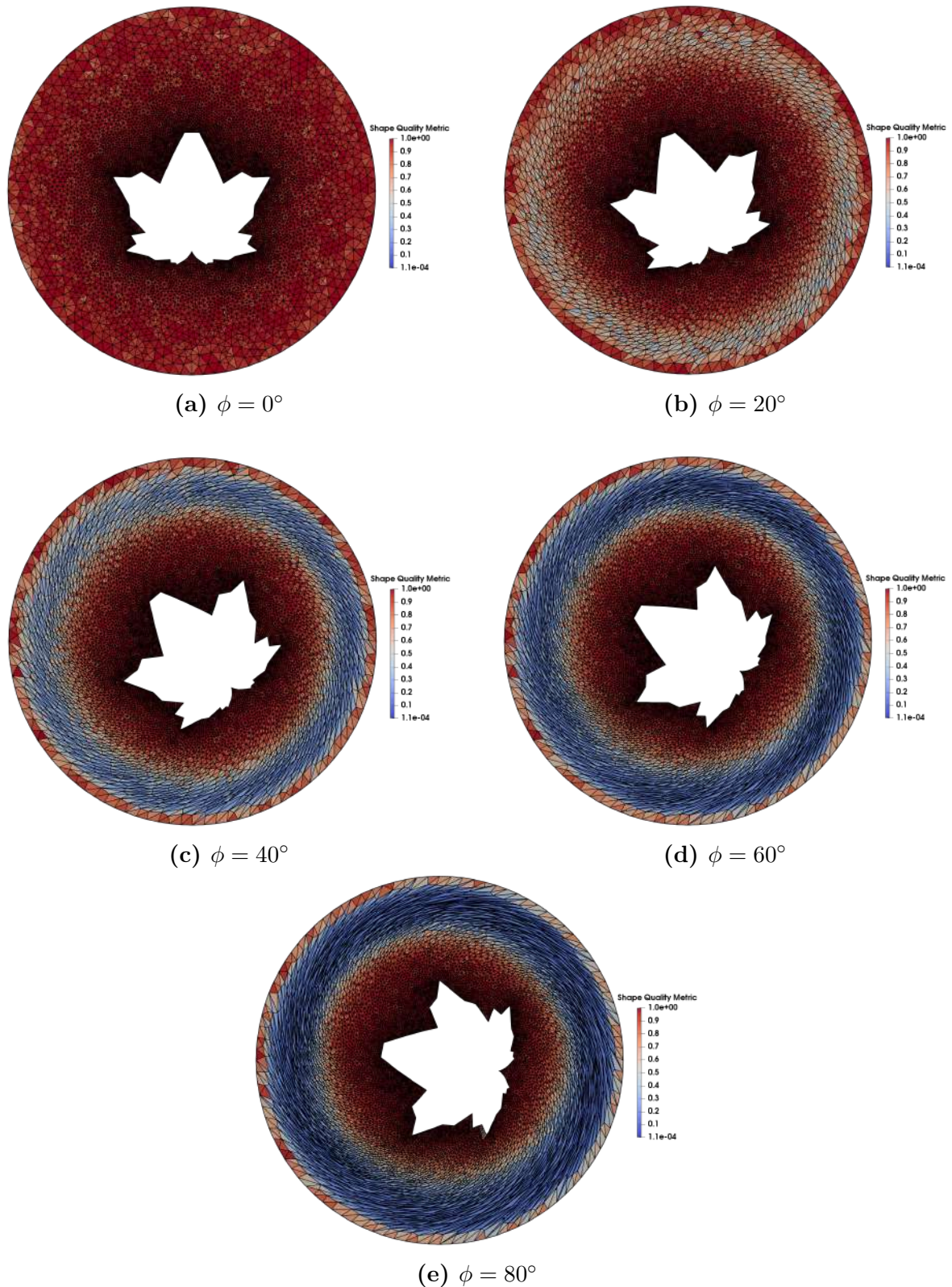
Το πλέγμα γύρω από το περίγραμμα του πλατανόφυλλου αποτελείται από 75457 κόμβους και 14557 τριγωνικά στοιχεία. Η γεωμετρία του φύλλου περιστρέφεται από  $0^\circ$  μέχρι  $100^\circ$  με βήμα  $20^\circ$  γύρω από το κέντρο του  $(0, 0)$ . Στο σχήμα 4.7 φαίνεται το αρχικό πλέγμα και, στη συνέχεια, παρουσιάζεται η παραμόρφωση του πλέγματος κατά την περιστροφή (σχήματα 4.8a-4.8e). Στη συνέχεια, παρουσιάζεται το πεδίο τιμών της ποιότητας σχήματος στα στοιχεία του πλέγματος (σχήματα 4.9a-4.9e). Τέλος, παρατίθενται συγκεντρωτικοί πίνακες μεταβολής της μέσης τιμής για τις μετρικές ποιότητας σχήματος και μεγέθους-σχήματος, καθώς και για τον αριθμό των αναστραμμένων στοιχείων για κάθε περίπτωση στροφής (πίνακες 4.6), 4.5)



Σχήμα 4.7: Περίπτωση πλατανόφυλλου. Αρχικό  $2\Delta$  πλέγμα



(a)  $\phi = 0^\circ$ (b)  $\phi = 20^\circ$ (c)  $\phi = 40^\circ$ (d)  $\phi = 60^\circ$ (e)  $\phi = 80^\circ$ **Σχήμα 4.8:** Περίπτωση πλατανόφυλλου. Στροφή σε γωνίες  $\phi [0^\circ - 80^\circ]$ .



**Σχήμα 4.9:** Βαθμωτό πεδίο μετρικής ποιότητας σχήματος  $s$  για κάθε περιστροφή του πλατανόφυλλου σε γωνίες  $\phi [0^\circ - 80^\circ]$ .

Πίνακας Μετρικών Σχήματος και Σχήματος-Μεγέθους		
$\phi^\circ$	Μετρική Σχήματος	Μετρική Μεγέθους-Σχήματος
0	0.9585	0.0125
20	0.9190	0.2063
40	0.8637	0.19375
60	0.8229	0.18120
80	0.78997	0.1693

**Πίνακας 4.5:** Περίπτωση πλατανόφυλλο. Μεταβολή μέσης τιμής μετρικών σχήματος και μεγέθους-σχήματος.

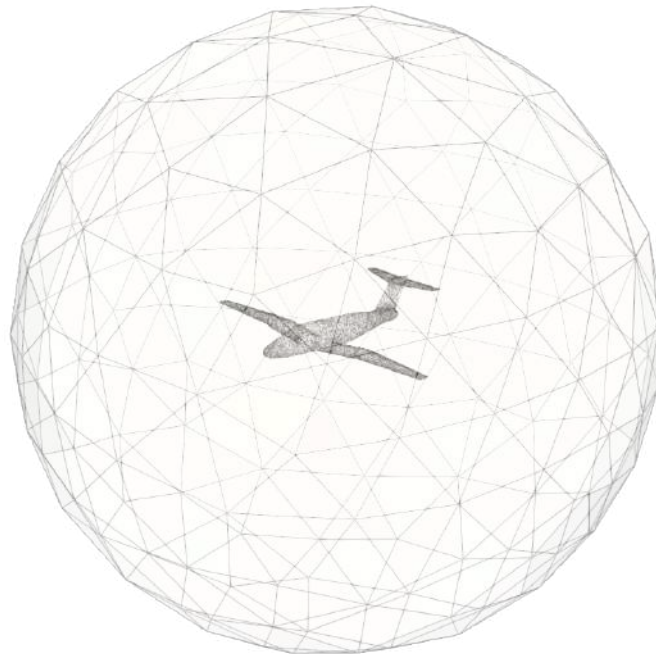
Πίνακας Αναστραμμένων Τριγώνων	
$\phi^\circ$	Αριθμός Αναστραμμένων Τριγώνων
20	0
40	0
60	0
80	64

**Πίνακας 4.6:** Περίπτωση πλατανόφυλλο. Αριθμός αναστραμμένων τριγώνων για κάθε στροφή.

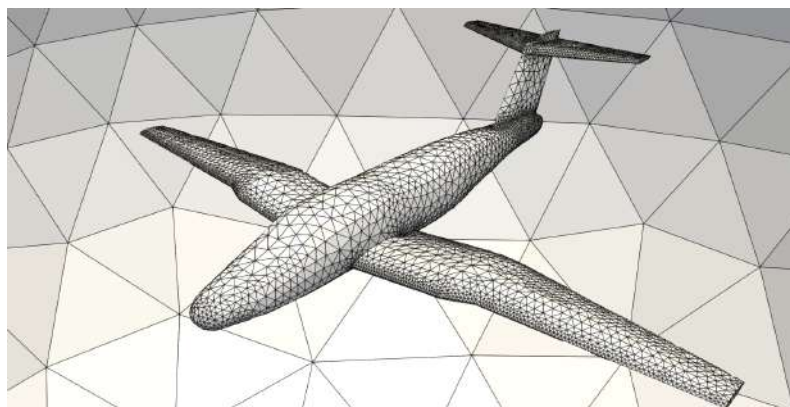
Σύμφωνα, με τους παραπάνω πίνακες παρατηρείται εύκολα ότι ακόμα και για μεγάλες στροφές της γεωμετρίας του πλατανόφυλλο, η ποιότητα διατηρείται σε υψηλά επίπεδα σε σχέση με το αρχικό. Επιπλέον, δημιουργούνται αναστραμμένα μετά τις  $60^\circ$ , κάτι το οποίο δείχνει τη δυνατότητα της μεθόδου να διατηρεί την εγκυρότητα του πλέγματος για έντονες παραμορφώσεις μιας περίπλοκης γεωμετρίας, όπως αυτή του πλατανόφυλλο.

### 4.3 Εφαρμογή σε Μικρό Επιβατικό Αεροσκάφος

Η εφαρμογή που εξετάζεται σε αυτό το κεφάλαιο, αφορά την παραμόρφωση πλέγματος γύρω από ένα μικρό επιβατικό αεροσκάφος. Συγκεκριμένα εξετάζεται η παραμόρφωση του πλέγματος όταν το αεροσκάφος εκτελεί διαδοχικές περιστροφές, γύρω από τον διαμήκη άξονα. Το αρχικό πλέγμα αποτελείται από 30446 κόμβους και 158723 τετράεδρα. Το αρχικό επιφανειακό και ογκικό πλέγμα δίνονται στα σχήματα 4.11 - 4.12, ενώ το υπολογιστικό χωρίο παρουσιάζεται στο σχήμα 4.10.

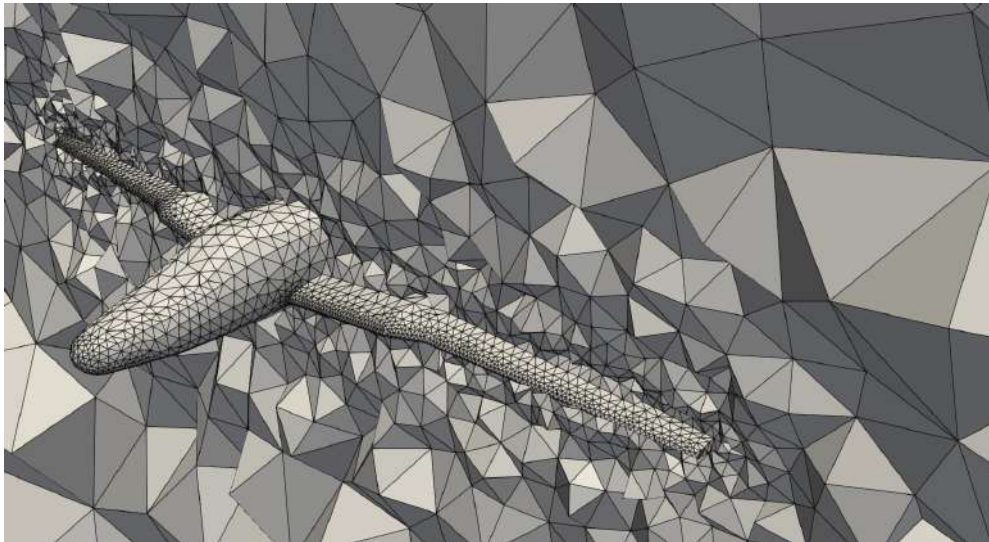


**Σχήμα 4.10:** Μικρό επιβατικό αεροσκάφος. Το υπολογιστικό χωρίο γύρω από το αεροσκάφος.



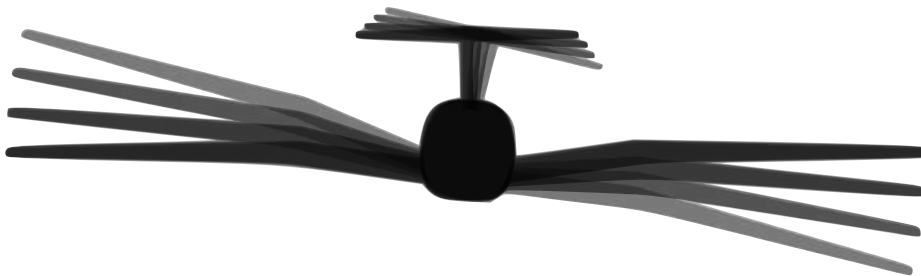
**Σχήμα 4.11:** Μικρό επιβατικό αεροσκάφος. Το πλέγμα στην επιφάνεια του αεροσκάφους.





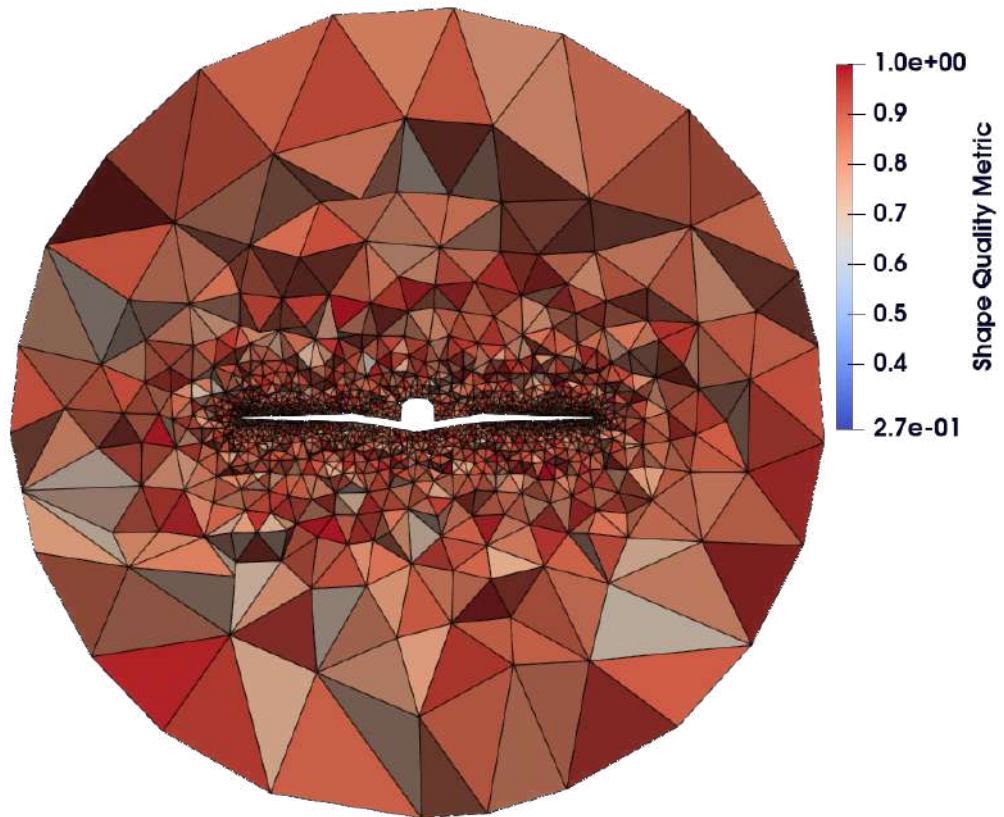
Σχήμα 4.12: Το αρχικό πλέγμα γύρω από το μικρό επιβατικό αεροσκάφος

Η κίνηση που εκτελεί το αεροσκάφος είναι η κλίση ή διαχοιτισμός (roll). Εξετάζεται για γωνίες  $5^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $15^\circ$  γύρω από τον άξονα  $X$ , με κέντρο περιστροφής το  $(0, 0, 0)$ . Τα roll που εφαρμόζονται στο αεροσκάφος παρουσιάζονται στο σχήμα 4.13.

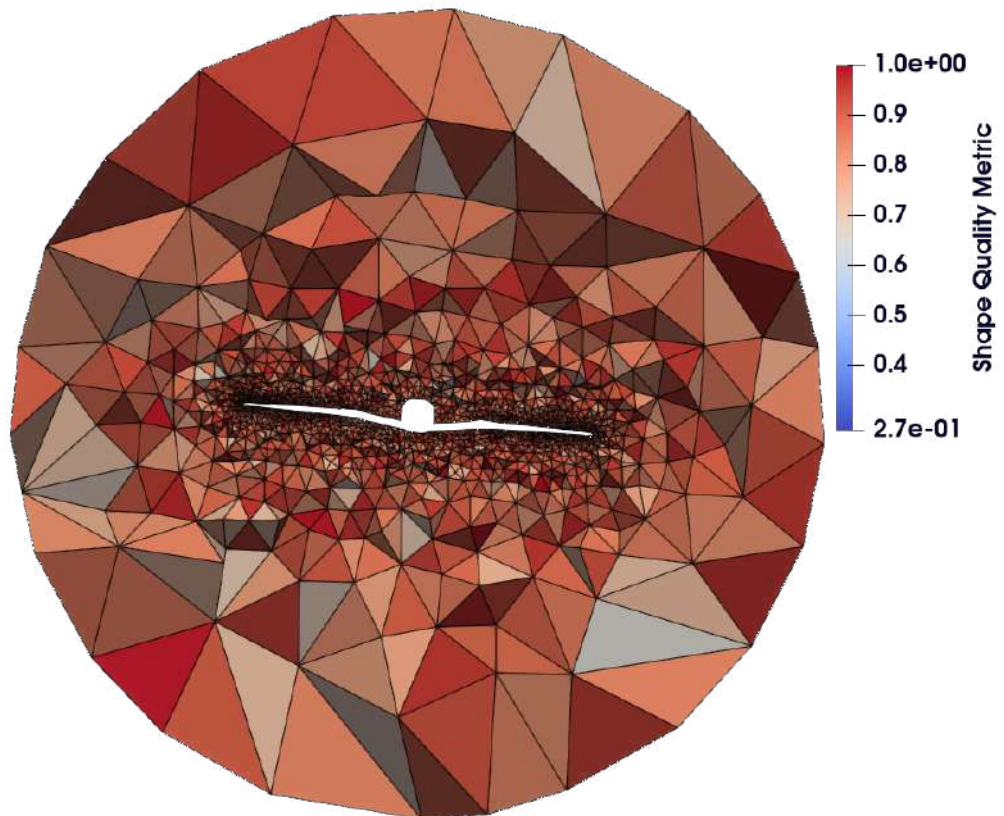


Σχήμα 4.13: Μικρό επιβατικό αεροσκάφος. Οι κινήσεις roll γύρω από τον άξονα  $X$  για γωνίες  $5^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $15^\circ$ .

Στα σχήματα 4.14 - 4.16, παρουσιάζεται το βαθμωτό πεδίο τιμών της μετρικής ποιότητας σχήματος στο πλέγμα τετραεδρικών στοιχείων γύρω από το αεροσκάφος, για κάθε roll.

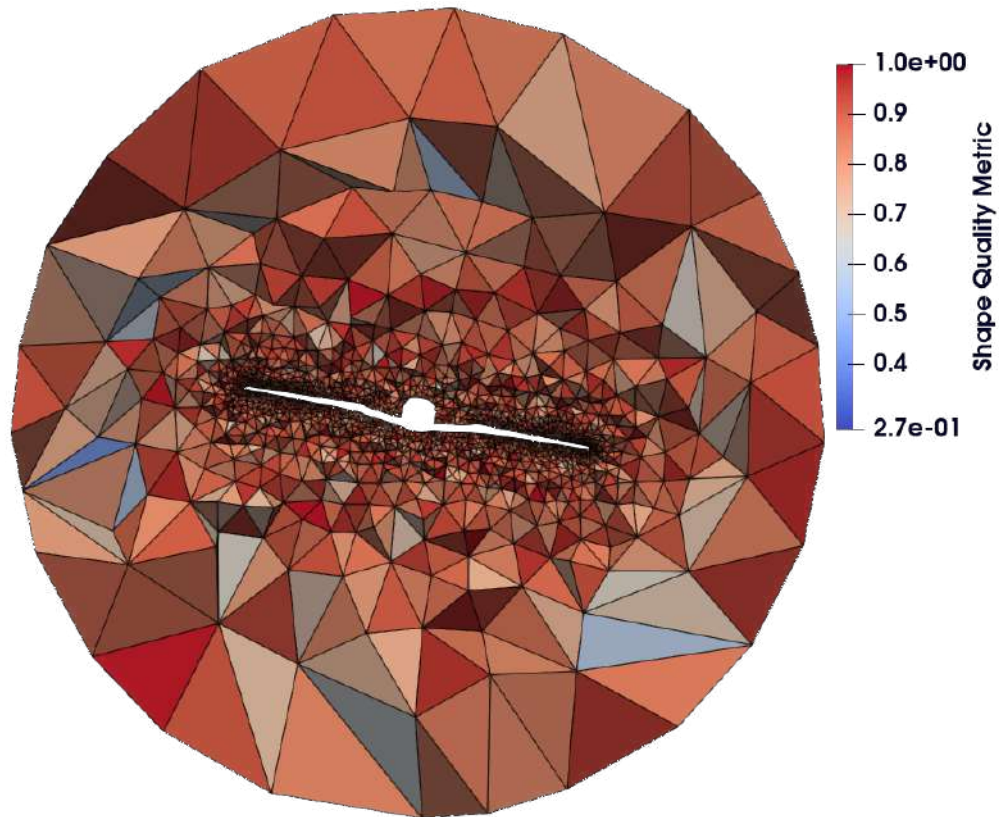


Σχήμα 4.14: Αρχικό πλέγμα.

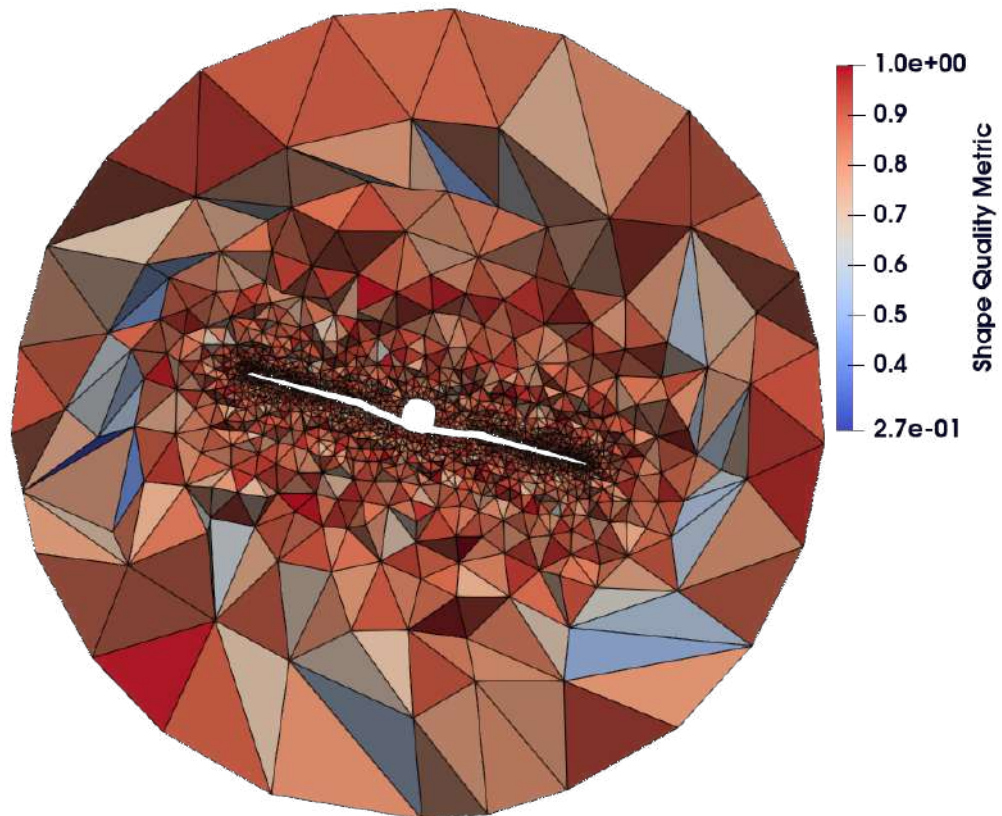


Σχήμα 4.15: Roll σε γωνία 5° και το βαθμωτό πεδίο της μετρικής σχήματος.



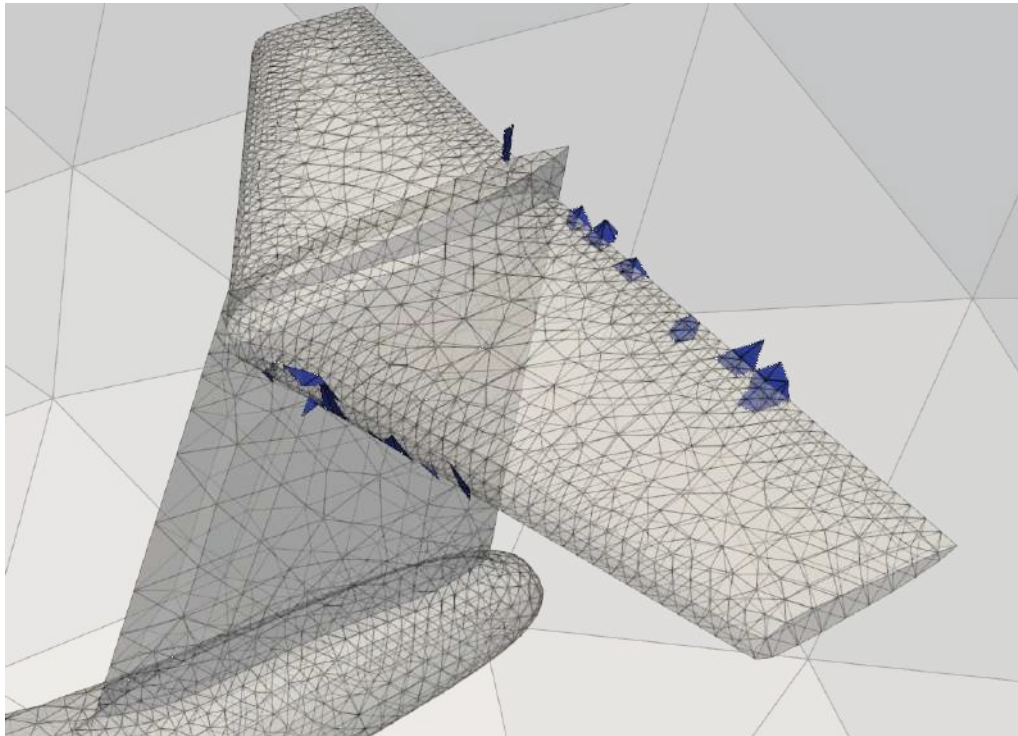


Σχήμα 4.16: Roll σε γωνία  $10^\circ$  και το βαθμωτό πεδίο της μετρικής σχήματος.



Σχήμα 4.17: Roll σε γωνία  $15^\circ$  και το βαθμωτό πεδίο της μετρικής σχήματος.

Σύμφωνα με τα σχήματα 4.14 - 4.15, η μετρική ποιότητας σχήματος διατηρείται στο μεγαλύτερο μέρος του πλέγματος για κάθε εφαρμογή roll σε σχέση με το αρχικό πλέγμα. Αξίζει να σημειωθεί ότι μέχρι και για roll  $10^\circ$ , δεν παρουσιάζεται κανένα μη-έγκυρο τετράεδρο, ενώ για roll  $15^\circ$  παρουσιάζονται 62 αναστραμμένα τετράεδρα όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.18.



**Σχήμα 4.18:** Μικρό επιβατικό αεροσκάφος. Αναστραμμένα τετράεδρα χρωματισμένα με μπλε χρώμα, για roll  $15^\circ$ .

Στη συγκεκριμένη εφαρμογή, επιλέχθηκαν οι τιμές  $\gamma_{move} = 0.8$  και  $\gamma_{fix} = 0.2$ , από κοινού για όλες τις γωνίες  $5^\circ$ ,  $10^\circ$ , και  $15^\circ$ .

## Κεφάλαιο 5

# Συγκριτική εφαρμογή παραμόρφωσης πλέγματος με τη μέθοδο ΣΚΑΣ

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται συγκριτικά αποτελέσματα παραμόρφωσης πλέγματος μεταξύ της μεθόδου IDW με παρεμβολή στροφών και της μεθόδου Σταθμισμένης Κίνησης Απαραμόρφωτου Σώματος ΣΚΑΣ [40]. Οι δύο μέθοδοι αναπτύχθηκαν και υλοποιήθηκαν ταυτοχρόνως στη ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ σε συνεργασία με τον μεταπτυχιακό φοιτητή Αλέξανδρο Εσκαντάρ. Η μέθοδος προσαρμοστικής παραμόρφωσης πλέγματος ΚΑΣ συγκαταλέγεται στις μεθόδους φυσικών αναλόγων και απαιτεί επαναλήψεις. Αρχικά, περιγράφονται περιληπτικά οι βασικές αρχές της μεθόδου ΚΑΣ και, στη συνέχεια, οι δύο μέθοδοι συγκρίνονται σε μια 3Δ εφαρμογή παραμόρφωσης πλέγματος.

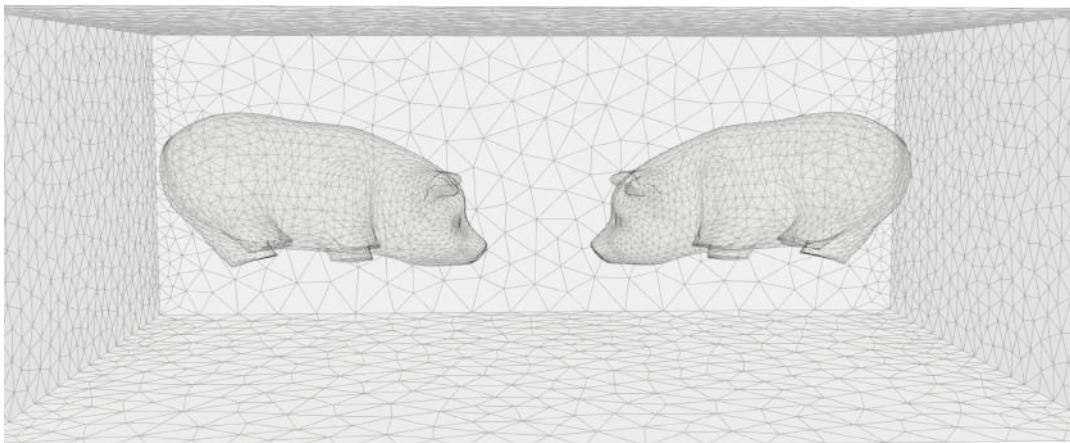
### 5.1 Βασικές Αρχές της Μεθόδου ΚΑΣ

Αντίστοιχα με τη μέθοδο IDW, η μέθοδος ΚΑΣ παραμορφώνει το εσωτερικό πλέγμα με βάση τη μετακίνηση των οριακών κόμβων. Σκοπός της μεθόδου ΚΑΣ είναι η όσο το δυνατόν καλύτερη προσέγγιση της κίνησης κάθε κυψέλης του πλέγματος ως απαραμόρφωτο στερεό. Για τον λόγο αυτό καταστρώνεται ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης με βάση την ιδεατή μετακίνηση του απολύτως στερεού σώματος. Το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει είναι μη-γραμμικό και απαιτεί επαναλήψεις. Στην εργασία αυτή επιλέχθηκε η μέθοδος Newton Raphson [13] για την επίλυση του μη-γραμμικού συστήματος. Από την επίλυση των εξισώσεων προκύπτει μια στροφή και μία μετακίνηση για κάθε εσωτερικό κόμβο του πλέγματος. Η αρχική μέθοδος ΚΑΣ βελτιώθηκε σταθμίζοντας τις μετακινήσεις των κόμβων του εσωτερικού πλέγματος με βάση γεωμετρικά χαρακτηριστικά κάθε κυψέλης από την αρχική μορφή του πλέγματος. Σκοπός της βελτίωσης αυτής είναι ο περιορισμός της στρέβλω-

σης του πλέγματος γύρω από τα κινούμενα όρια και η ομαλή διάχυση της παραμόρφωσης προς το εσωτερικό. Η βελτιωμένη μέθοδος ονομάζεται Σταθμισμένη Κίνηση Απαραμόρφωτου Στερεού (ΣΚΑΣ). Ακόμη, προστέθηκε η δυνατότητα παραμόρφωσης πλεγμάτων με περιοδικά όρια, που εμφανίζονται συνήθως σε εφαρμογές προσομοιώσεων σε στροβιλομηχανές. Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τη μέθοδο ΚΑΣ μπορούν να αναζητηθούν στην εργασία [40]. Στη συνέχεια, αξιολογείται η αποδοτικότητα των δύο μεθόδων σε εφαρμογές παραμορφώσεων 3Δ πλέγματος γύρω από δύο σώματα χοίρων.

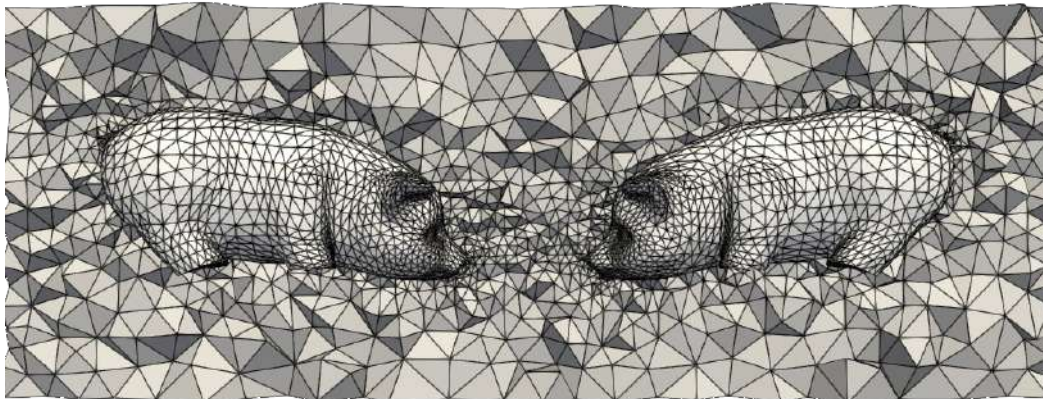
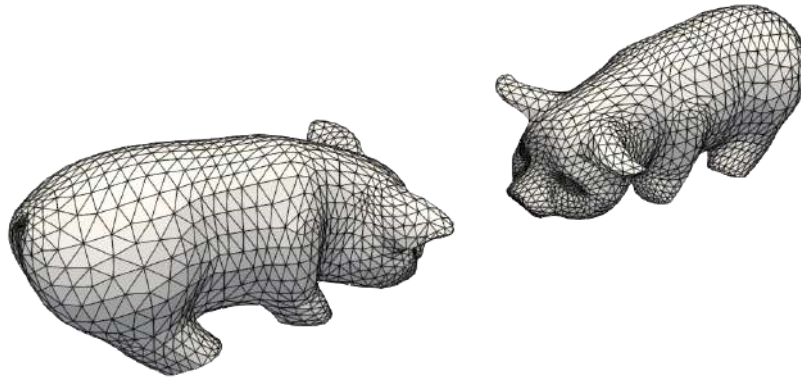
## 5.2 Εφαρμογή σε 3Δ πλέγμα, γύρω από δύο σώματα χοίρων

Η εφαρμογή που εξετάζεται, αφορά την παραμόρφωση πλέγματος γύρω από δύο σώματα χοίρων. Το αρχικό πλέγμα αποτελείται από 21663 κόμβους και 111323 τετράεδρα στοιχεία. Το υπολογιστικό χωρίο δίνεται στο σχήμα 5.1. Στο σχήμα 5.2 παρουσιάζονται το επιφανειακό και ογκικό πλέγμα για τους δύο χοίρους. Η παραμόρφωση που επιβάλλεται, περιλαμβάνει τη μετακίνηση του αριστερού χοίρου κατά (0.5, 0.5, 0.5) και τη στροφή του δεξιού κατά  $15^\circ$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 5.3. Οι δύο μέθοδοι παραμόρφωσης αξιολογούνται με κριτήρια τη μέση τιμή της μετρικής ποιότητας σχήματος, καθώς και τον αριθμό των αναστραμμένων στοιχείων.



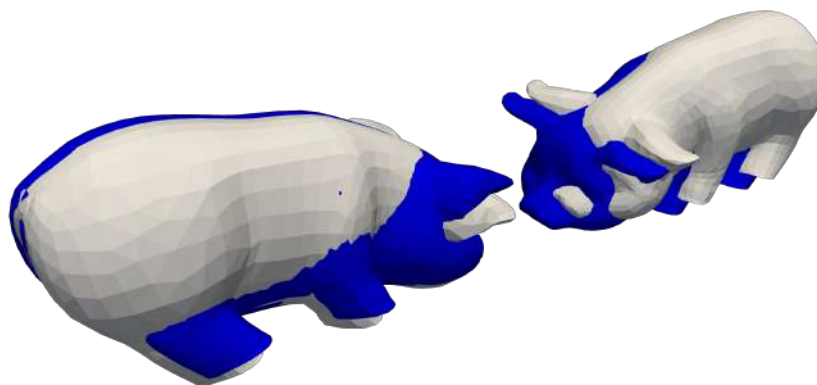
Σχήμα 5.1: Περίπτωση δύο χοίρων. 3Δ υπολογιστικό χωρίο





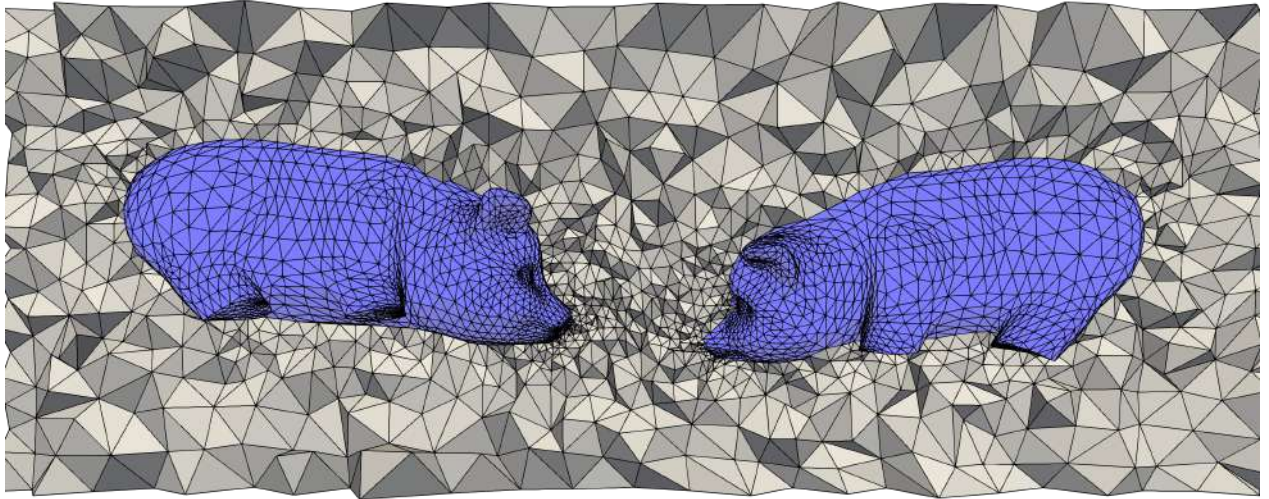
**Σχήμα 5.2:** Περίπτωση δύο χοίρων. Αρχικό επιφανειακό (επάνω) και ογκικό (κάτω) πλέγμα.

Στο σχήμα 5.3 παρουσιάζεται η παραμόρφωση των δύο χοίρων συγκριτικά με την αρχική τους γεωμετρία.

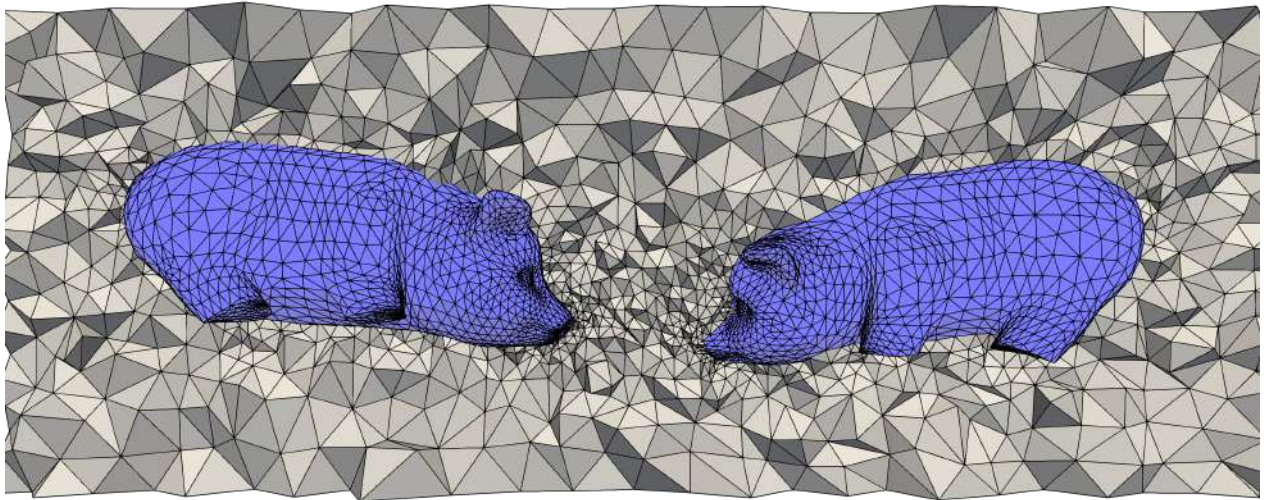


**Σχήμα 5.3:** Περίπτωση δύο χοίρων. Αρχική θέση χοίρων (μπέζ χρώμα). Τελική θέση χοίρων (μπλέ χρώμα).

Στα σχήματα 5.4 και 5.5, φαίνεται το παραμορφωμένο ογκικό πλέγμα σε τομή γύρω από τις δύο φιγούρες για τις μεθόδους IDW με παρεμβολή στροφών και ΣΚΑΣ αντίστοιχα.



**Σχήμα 5.4:** Περίπτωση δύο χοίρων. Τομή στο τελικό ογκικό πλέγμα γύρω από τις δύο φιγούρες. Παραμόρφωση με τη μέθοδο ΣΚΑΣ.



**Σχήμα 5.5:** Περίπτωση δύο χοίρων. Τομή στο τελικό ογκικό πλέγμα γύρω από τις δύο φιγούρες. Παραμόρφωση με τη μέθοδο ΣΚΑΣ.

Και οι δύο μέθοδοι προσαρμοστικής παραμόρφωσης πλέγματος έδωσαν πλέγμα χωρίς αναστραμμένα τρίγωνα. Στον πίνακα 5.1 δίνεται η μέση τιμή της μετρικής ποιότητας σχήματος για κάθε μέθοδο.



Μέθοδος	Shape Mean	Shape Max	Shape Min
Αρχικό Πλέγμα	0.8283	0.9944	0.1512
IDW	0.8164	0.99808	0.1123
ΣΚΑΣ	0.8152	0.99833	0.15125

**Πίνακας 5.1:** Περίπτωση δύο χοίρων. Μεταβολή μέσης τιμής της μετρικής ποιότητας σχήματος για τις μεθόδους IDW με παρεμβολή στρωφών και ΣΚΑΣ.

Συνοψίζοντας, παρατηρείται ότι και οι δύο μέθοδοι δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα για αυτήν την εφαρμογή παραμόρφωσης. Και στις δύο περιπτώσεις δεν δημιουργήθηκαν αναστραμμένα τετράεδρα και η μετρική ποιότητας διατηρείται σε υψηλά επίπεδα με σχεδόν ταυτόσημες τιμές.

# Κεφάλαιο 6

## Ανακεφαλαίωση και Συμπεράσματα

### 6.1 Ανακεφαλαίωση

Στην εργασία αυτή, αναπτύχθηκε η μέθοδος παραμόρφωσης 2Δ και 3Δ υπολογιστικών πλεγμάτων με τη χρήση της μεθόδου IDW, για χρήση, μεταξύ άλλων, κατά τη διαδικασία αεροδυναμικής βελτιστοποίησης σχήματος. Αρχικά παρουσιάστηκαν οι βασικές ιδιότητες και οι βασικοί αλγόριθμοι παραμόρφωσης πλέγματος που υπάρχουν στη βιβλιογραφία. Στη συνέχεια αναλύθηκαν τα βήματα της διαδικασίας παραμόρφωσης, όπως αυτή εφαρμόζεται με τη μέθοδο IDW. Επιπλέον, περιγράφεται η συνάρτηση υπολογισμού των βαρών και η επιρροή της επιλογής των παραμέτρων στην παραμόρφωση του πλέγματος κοντά στα κινητά όρια. Ακόμη, η μέθοδος βελτιώνεται παρεμβάλλοντας ξεχωριστά τα πεδία μετακινήσεων και στροφών των οριακών κόμβων στο εσωτερικό πλέγμα μέσω της θεωρίας των τετραδονίων. Για την επίδειξη της λειτουργίας και της στιβαρότητάς της, η μέθοδος που αναπτύχθηκε εφαρμόστηκε σε περιπτώσεις παραμόρφωσης 2Δ και 3Δ υπολογιστικών πλεγμάτων, για μηχανολογικές και μη εφαρμογές.

Το λογισμικό παραμόρφωσης πλεγμάτων με τη μέθοδο IDW, προγραμματίστηκε σε γλώσσα C++. Το λογισμικό αυτό, αναπτύχθηκε τόσο για 2Δ όσο και για 3Δ πλέγματα, ενώ εφαρμόζεται με τον ίδιο τρόπο σε δομημένα και μη-δομημένα πλέγματα.

Κατά την ανάπτυξη του λογισμικού παραμόρφωσης πλέγματος, προγραμματίστηκαν τα εξής:

- Ανάγνωση του πλέγματος και της επιβαλλόμενης παραμόρφωσης των οριακών κόμβων, όπως αυτή προκύπτει, για παράδειγμα, σε κάθε κύκλο μιας διαδικασίας βελτιστοποίησης, η οποία αποτελεί την οριακή συνθήκη για την παραμόρφωση του πλέγματος.

- Ανάπτυξη κατάλληλου λογισμικού το οποίο δέχεται ως είσοδο πλέγμα το οποίο έχει παραχθεί από το λογισμικό ανοιχτού λογισμικού OpenFOAM (points, faces, boundary), στα αρχεία πλέγματος του ΜΠΥΡ&Β (.nod, .ele).
- Υπολογισμός των βαρών κάθε κόμβου του εσωτερικού πλέγματος μέσω της βαρυτικής συνάρτησης που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2.
- Παρεμβολή των μετατοπίσεων των κινούμενων ορίων μέσω της εξίσωσης 2.1.
- Υπολογισμός των στροφών κάθε οριακού κόμβου από τη θεωρία των τετραδονίων. Στη συνέχεια, οι στροφές παρεμβάλλονται στους εσωτερικούς κόμβους με την εξίσωση παρεμβολής IDW.

## 6.2 Συμπεράσματα

Σύμφωνα με την ανάλυση που έγινε στην εργασία αυτή, φαίνεται ότι η μέθοδος παραμόρφωσης πλεγμάτων με τη χρήση της μεθόδου παρεμβολής IDW, είναι μια στιβαρή και αξιόπιστη μέθοδος. Σε όλες τις εφαρμογές που παρουσιάστηκαν, η μέθοδος αυτή έδωσε ικανοποιητικής ποιότητας πλέγματα σε σχέση με το αρχικό, ακόμα και για μεγάλες παραμορφώσεις.

Συνοπτικά τα βασικά συμπεράσματα που προκύπτουν από την ανάλυση που έγινε στη μεταπτυχιακή αυτή εργασία, ως προς τη χρήση και την εφαρμογή της μεθόδου είναι τα εξής:

- Ο IDW αποτελεί μια μέθοδο παραμόρφωσης σημείο προς σημείο, πράγμα που σημαίνει ότι μπορεί εύκολα να υλοποιηθεί παράλληλα και σε οποιονδήποτε τύπο πλέγματος. Η μέθοδος παρεμβάλλει τις μετακινήσεις και στροφές των οριακών κόμβων στο εσωτερικό πλέγμα μέσω της εξίσωσης παρεμβολής που εξαρτάται από την αντίστροφη απόσταση μεταξύ κάθε εσωτερικού κόμβου σε σχέση με τους οριακούς. Χάρη στη ρητή φύση της εξίσωσης παρεμβολής, δεν απαιτείται η επαναληπτική επίλυση κάποιου συστήματος εξισώσεων, γεγονός που καθιστά τη

μέθοδο IDW υπολογιστικά φθηνή.

- Αποδείχθηκε ότι, συμπεριλαμβάνοντας την παρεμβολή του πεδίου των στροφών, αυξάνεται η ποιότητα του παραμορφωμένου πλέγματος σε σχέση με την παρεμβολή μόνο των μετακινήσεων. Οι στρόφες αναπαριστώνται από τα τετραδόνια.
- Η επιλογή κατάλληλων παραμέτρων στη βαρυτική συνάρτηση (εξίσωση 2.3) έχει καθοριστικό ρόλο στη διατήρηση της απαραμόρφωτης δομής του πλέγματος γύρω από τα κινητά όρια της γεωμετρίας. Σύμφωνα με την παραμετρική μελέτη που παρουσιάστηκε στην ενότητα 2.3, η επιλογή των σταθερών παραμέτρων επηρεάζουν τόσο το εύρος της απαραμόρφωτης περιοχής, όσο και της ενδιάμεσης περιοχής όπου απορροφάται η παραμόρφωση στο εσωτερικό πλέγμα.
- Η μέθοδος IDW μπορεί να εφαρμοστεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο σε 2Δ και 3Δ πλέγματα εσωτερικής και εξωτερικής αεροδυναμικής.
- Η μέθοδος που αναπτύχθηκε μπορεί να εφαρμοστεί με την ίδια ευκολία τόσο σε περιπτώσεις αεροδυναμικής ή υδροδυναμικής βελτιστοποίησης μορφής, όσο και σε μη μόνιμα προβλήματα ΥΡΔ που περιλαμβάνουν κινούμενα όρια ή σε υπολογισμούς αεροελαστικότητας.

### 6.3 Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

Μερικά θέματα για περαιτέρω έρευνα και προγραμματισμό σχετικά με τη μέθοδο παραμόρφωσης πλεγμάτων με τη μέθοδο IDW, θα μπορούσαν να είναι τα εξής:

- Η παρούσα μέθοδος έχει υλοποιηθεί σε σειριακή μορφή. Η αποδοτικότητά της σε υπολογιστικό κόστος θα βελτιωθεί σημαντικά αν υλοποιηθεί παράλληλα. Το πιο κοστοβόρο βήμα της, είναι ο υπολογισμός των μετατοπίσεων των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος που καταλαμβάνει σχεδόν το 100% του υπολογιστικού χρόνου. Αυτό το βήμα περιλαμβάνει έναν διπλό βρόχο επανάληψης μεταξύ κάθε εσωτερικού κόμβου με όλους τους οριακούς. Θα μπορούσε εύκολα να υλοποιηθεί παράλληλα μοιράζοντας τους εσωτερικούς

κόμβους σε διαφορετικούς επεξεργαστές, με την απαίτηση η πληροφορία για όλους τους οριακούς κόμβους να περνά σε κάθε επεξεργαστή.

- Με σκοπό την αύξηση της στιβαρότητας της μεθόδου, θα μπορούσε να ερευνηθεί εάν η χρήση διαφορετικών εκθετικών παραμέτρων για την παρεμβολή μετακινήσεων και στροφών όπως προτάθηκε από τον Witteveen [36].
- Η μέθοδος θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στην επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης με τη συζυγή μέθοδο ή με άλλες μεθόδους βελτιστοποίησης, όπως οι εξελικτικοί αλγόριθμοι, έτσι ώστε να πιστοποιηθεί η αποτελεσματικότητα και η ταχύτητά της στο πλαίσιο μιας διαδικασίας βελτιστοποίησης.
- Η μέθοδος θα μπορούσε να βελτιωθεί με σκοπό τη διαχείριση πλεγμάτων με περιοδικά όρια που συναντούνται κυρίως σε εφαρμογές στροβιλομηχανών. Σε αυτήν την περίπτωση παραμορφώνονται και τα περιοδικά όρια ακολουθώντας την παραμόρφωση των ορίων του πλέγματος. Έτσι, δημιουργείται περισσότερος ελεύθερος χώρος για την απορρόφηση της παραμόρφωσης στο εσωτερικό πλέγμα.
- Τέλος, η εισαγωγή κινητών εξωτερικών ορίων (sliding boundary) θα βελτίωνε αρκετά το πρόβλημα που δημιουργείται στη διάχυση της παραμόρφωσης, όταν δεν υπάρχει επαρκής χώρος μεταξύ των ορίων, όπως έχει υλοποιηθεί από την Uyttersprot [35].

# Παράρτημα

# Παράρτημα Α

## Μετρικές Ποιότητας στα Υπολογιστικά Πλέγματα

Οι μετρικές ποιότητας πλέγματος χρησιμοποιούνται για να αξιολογήσουν το αποτέλεσμα της διαδικασίας γένεσης πλέγματος και, κατ' επέκταση, το αποτέλεσμα κάθε μεθόδου παραμόρφωσης. Χωρίς αυτές θα ήταν ακατόρθωτο να καθοριστεί αν το πλέγμα που παράχθηκε πληρεί ακόμα και τις ελάχιστες προδιαγραφές ποιότητας, ώστε να χρησιμοποιηθεί σε μία υπολογιστική προσομοίωση [19]. Το ελάχιστο κριτήριο ποιότητας είναι τα στοιχεία που παράγονται να είναι μη-αναστραμμένα. Επεκτείνοντας τις απαιτήσεις είναι συχνά επιθυμητό τα στοιχεία που παράγονται να έχουν καλό σχήμα. Επίσης δεν υπάρχει πρόσβαση στην λύση καθώς δεν μπορεί να παραχθεί χωρίς να υπάρχει πλέγμα. Εφόσον δεν υπάρχει γνώση για την λύση, αυτό που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι οι γεωμετρικές ιδιότητες των στοιχείων του πλέγματος, ώστε να αντιστοιχούν θεωρητικά στο προς επίλυση πρόβλημα. Οι μετρικές που βασίζονται σε γεωμετρικές ιδιότητες χρησιμοποιούνται ώστε να μπορούν να αναγνωρίσουν στοιχεία χαμηλής ποιότητας. Τα στοιχεία αυτά μπορούν να διορθωθούν χρησιμοποιώντας διάφορες τεχνικές, όπως μεθοδολογίες μετακίνησης κόμβων που χρησιμοποιούν τεχνικές βελτιστοποιήσεις χρησιμοποιώντας συναρτήσεις κόστους βασιζόμενες σε μετρικές ποιότητας [12]. Επιπλέον, η ποιότητα του πλέγματος μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την απόδοση μιας προσομοίωσης με διάφορους τρόπους. Για παράδειγμα, στοιχεία χαμηλής ποιότητας μπορεί να καθυστερήσουν αρκετά τους επαναληπτικούς επιλύτες η ακόμα και να τους οδηγήσουν σε απόκλιση. Έτσι μέχρι να δημιουργηθούν αλγόριθμοι παραγωγής και παραμόρφωσης πλέγματος που εγγυώνται ποιητικά αποτελέσματα, οι εκ των προτέρων (a priori) μετρικές πλέγματος θα παραμένουν ένα σημαντικό εργαλείο.

Γενικά μια μετρική ποιότητας ενός στοιχείου δίνεται από την  $F$ . Η  $F$  είναι συνάρτηση της θέσης των κόμβων του στοιχείου και δίνει συνήθως μια βα-

θμωτή ποσότητα ως αποτέλεσμα. Η παρακάτω λίστα αριθμεί μερικές από τις ιδιότητες που πρέπει να κατέχουν όλες οι μετρικές ποιότητας [19].

- Η  $F$  πρέπει να είναι αδιάστατη,
- Το χωρίο της  $F$ , το οποίο περιέχει όλα τα στοιχεία όπου η μετρική ορίζεται, πρέπει να είναι σαφώς ορισμένο [14],
- Η  $F$  αναφέρεται σε ένα ιδανικό στοιχείο το οποίο περιγράφει την επιθυμητή γεωμετρική μορφή [2],
- Η τιμή της  $F$  είναι αμετάβλητη σε παράλληλες μετατοπίσεις του στοιχείου στο χώρο,
- Εκτός από τις μετρικές φορές, η τιμή της  $F$  δεν εξαρτάται από την φορά των στοιχείων.

## A.1 Μετρικές 2Δ Πλεγμάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν μετρικές ποιότητας που αφορούν μη-δομημένα 2Δ πλέγματα που αποτελούνται από τριγωνικά στοιχεία. Συγκεκριμένα, θα παρουσιαστεί ο υπολογισμός της Ιακωβιανής και των μετρικών σχήματος, μεγέθους και μεγέθους-σχήματος.

### A.1.1 Υπολογισμός Ιακωβιανής

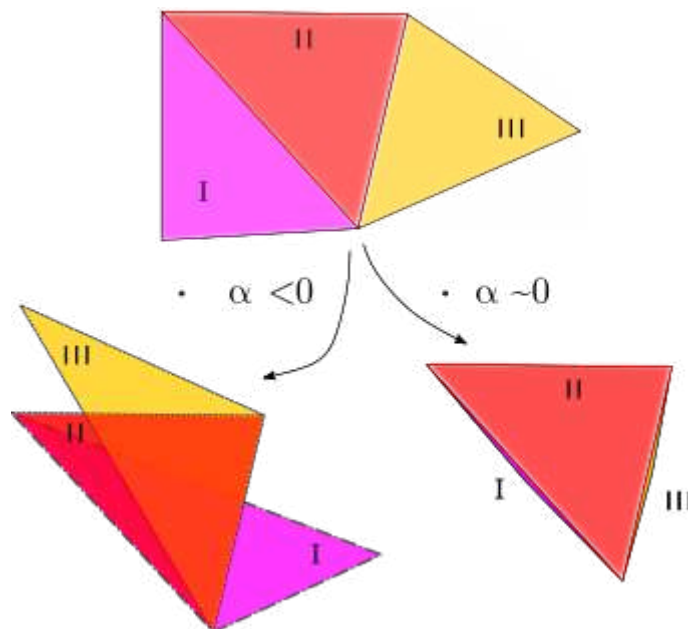
Το πρώτο βήμα για τον καθορισμό της ποιότητας ενός τριγωνικού στοιχείου, είναι ο ορισμός της φοράς με την οποία γίνεται η αρίθμηση των κόμβων του στοιχείου. Επιλέγεται η ανθρωπολογιακή φορά, γεγονός που εξασφαλίζει το θετικό πρόσημο της ιακωβιανής ορίζουσας για τα αποδεκτά τρίγωνα. Έστω οι κόμβοι  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_j, y_j)$ ,  $(x_k, y_k)$  ενός τριγωνικού στοιχείου. Σε κάθε κορυφή αυτού του τριγωνικού στοιχείου υπολογίζεται η Ιακωβιανή ορίζουσα. Για τον κόμβο  $k$  υπολογίζεται ως:

$$A_k = \begin{bmatrix} x_j - x_k & x_k - x_i \\ y_j - y_k & y_k - y_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα  $\alpha = \det(A_n)$  με  $n = i, j, k$ , δίνει ως αποτέλεσμα δύο φορές το εμβαδόν του τριγώνου όπου υπολογίζεται, ανεξαρτήτως του πιο από τα τρία Ιακωβιανά μητρώα χρησιμοποιείται. Επιπλέον, εφαρμόζοντας τους



τρεις συνδυασμούς του γινομένου  $A_n^T A_n$  [19], σχηματίζονται τρία μητρώα (μετρικοί ταχυστές). Έστω  $\lambda_{ab}^n$ ,  $a, b = 1, 2$ , τα οποία είναι τα  $i, j$  στοιχεία του  $n$  μετρικού ταχυστή. Γεωμετρικά, για τον  $i$  κόμβο ισχύει ότι,  $\lambda_{11}^i$  ισούται με το τετράγωνο του μήκους της πλευράς που ενώνει τον κόμβο  $i$  με τον κόμβο  $j$ ,  $\lambda_{22}^i$  ισούται με το τετράγωνο του μήκους της πλευράς που ενώνει τον κόμβο  $i$  με τον κόμβο  $k$ . Το εσωτερικό γινόμενο ισούται με  $\lambda_{12}^i = \sqrt{\lambda_{11}^i \lambda_{22}^i} \cos \theta_i$ , όπου  $\theta_i$  είναι η γωνία μεταξύ των δύο πλευρών που ενώνονται στο  $i$  κόμβο. Δεχτά τρίγωνα θεωρούνται αυτά με θετικό εμβαδόν, π.χ.  $0 < \alpha < \infty$ . Τιμές πολύ κοντά στο μηδέν υποδεικνύουν εκφυλισμένα τρίγωνα ενώ αρνητικές τιμές υποδεικνύουν μη αποδεκτά τρίγωνα (αναστραμμένα) [21]. Το σχήμα A.1 βοηθά στο να γίνουν αντιληπτές οι επιπτώσεις αρνητικής και κοντά στο μηδέν τιμής της Ιακωβιανής ορίζουσας.



**Σχήμα A.1:** Αρχικά τα τρίγωνα I,II,III έχουν  $\alpha > 0$ , μετά από δύο τυχαίες παραμορφώσεις, αριστερά του σχήματος τα τρίγωνα I,III υπολογίζονται με  $\alpha < 0$  ενώ τα τρίγωνα I,III δεξιά υπολογίζονται με  $\alpha \approx 0$

### Α.1.2 Μετρική Μεγέθους

Η μετρική μεγέθους δίνει μια τιμή ποιότητας, για τα στοιχεία τα οποία είναι ασυνήθιστα μεγάλα ή ασυνήθιστα μικρά, σε σύγκριση με ένα στοιχείο αναφοράς. Στοιχείο αναφοράς συνήθως αποτελεί το ισόπλευρο τρίγωνο. Γενικά το εμβαδόν  $w$  του τριγώνου αναφοράς μπορεί να είναι συνάρτηση της θέσης μέσα στο πλέγμα. Σε πιο απλές περιπτώσεις θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ένα στοιχείο αναφοράς για όλο το πλέγμα. Για παράδειγμα, το εμβαδόν αναφοράς θα μπορούσε να είναι ίσο με το εμβαδόν της συνολικής επιφάνειας του χωρίου διαιρεμένο με τον αριθμό των τριγώνων. Η μετρική μεγέθους  $f_{size}$  με εμβαδόν αναφοράς  $w$ , δίνεται από τη σχέση:

$$f_{size} = \min\left(\tau, \frac{1}{\tau}\right) \quad (\text{A.2})$$

$$\tau = \frac{\alpha}{2w}$$

όπου  $\alpha$  η ορίζουσα του Ιακωβιανού μητρώου στο τρίγωνο μετά την παραμόρφωση και  $w$  το εμβαδόν αναφοράς. Η ποσότητα  $\tau$  είναι ο λόγος εμβαδού του τριγώνου μετά την παραμόρφωση προς το εμβαδόν του τριγώνου αναφοράς. Η ποσότητα  $\tau$  είναι αδιάστατη [19]. Οι βασικές ιδιότητες της μετρικής μεγέθους (Size) δίνονται παρακάτω:

- $f_{size} = 1$  αν και μόνο αν το τρίγωνο μετά την παραμόρφωση έχει το ίδιο εμβαδόν με το τρίγωνο αναφοράς.
- $f_{size} = 0$  αν και μόνο αν το τρίγωνο μετά την παραμόρφωση είναι εκφυλισμένο.

### Α.1.3 Μετρική Σχήματος

Η μετρική σχήματος (Shape) χρησιμοποιείται για την ανεύρεση στρεβλώσεων στο σχήμα των τριγώνων, ανεξάρτητα από το μέγεθος του εκάστοτε τριγώνου. Όπως και στην μετρική μεγέθους έτσι και στην μετρική σχήματος πρέπει να ορισθεί ένα στοιχείο αναφοράς. Εφόσον η μετρική αφορά το σχήμα του τριγώνου, ορίζεται ως σχήμα αναφοράς το ισόπλευρο τρίγωνο. Η μετρική σχήματος δίνεται στη σχέση Α.3

$$f_{shape} = \sqrt{3}\alpha / (\lambda_{11} + \lambda_{22} - \lambda_{12}) \quad (\text{A.3})$$

Ο τρόπος υπολογισμού των  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{22}$ ,  $\lambda_{12}$  περιγράφεται στο κεφάλαιο Α.1.1, ενώ  $\alpha$  είναι η ορίζουσα του Ιακωβιανού μητρώου στο τρίγωνο μετά την

παραμόρφωση. Οι βασικές ιδιότητες της μετρικής σχήματος (Shape) δίνονται παρακάτω:

- $f_{shape} = 1$  αν και μόνο αν το τρίγωνο μετά την παραμόρφωση είναι ισόπλευρο.
- $f_{shape} = 0$  αν και μόνο αν το τρίγωνο μετά την παραμόρφωση είναι εκφυλισμένο.

#### A.1.4 Μετρική Μεγέθους-Σχήματος

Ο συνδυασμός των μετρικών μεγέθους και σχήματος, δίνει ως αποτέλεσμα τη μετρική μεγέθους-σχήματος (Size-Shape), όπου υπολογίζεται ως το μεταξύ τους γινόμενο, όπως φαίνεται και στη σχέση

$$f_{size-shape} = f_{size} f_{shape} \quad (A.4)$$

- $f_{size-shape} = 1$  αν και μόνο αν το το τρίγωνο μετά την παραμόρφωση είναι ισόπλευρο με εμβαδόν  $w$ .
- $f_{size-shape} = 0$  αν και μόνο αν το τρίγωνο μετά την παραμόρφωση είναι εκφυλισμένο.

## A.2 Μετρικές 3Δ πλεγμάτων

Για τα 3Δ πλέγματα παρουσιάζεται ο υπολογισμός μετρικών μόνο για τετραεδρικά στοιχεία. Για άλλα στοιχεία, όπως είναι τα εξάεδρα και οι σφήνες, οι μετρικές δεν υπολογίζονται τόσο εύκολα, καθώς δεν διέπονται από βασικές μαθηματικές ιδιότητες που περιγράφονται αναλυτικά στην [7]. Στοιχεία όπως οι πυραμίδες, τα πρίσματα και άλλα 3Δ στοιχεία όπου τρεις η παραπάνω ακμές συναντώνται σε ένα κόμβο, παρουσιάζουν και αυτά δυσκολίες, καθώς πολλές φορές δεν ορίζεται Ιακωβιανό μητρώο [7]. Στις παρακάτω παραγράφους περιγράφεται ο υπολογισμός του Ιακωβιανού μητρώου και της μετρικής σχήματος (Shape) για τετραεδρικά στοιχεία.

### A.2.1 Υπολογισμός Ιακωβιανής

Ένα τετράεδρο αποτελείται από τέσσερις κόμβους. Έστω ότι οι συντεταγμένες των κόμβων είναι  $(x_k, y_k, z_k), k = 0, 1, 2, 3$ . Έτσι δημιουργούνται τέσσερα Ιακωβιανά μητρώα  $A_k$ , ένα για κάθε κόμβο του τετραέδρου.

$$(-1)^k \begin{bmatrix} x_{k+1} - x_k & x_{k+2} - x_k & x_{k+3} - x_k \\ y_{k+1} - y_k & y_{k+2} - y_k & y_{k+3} - y_k \\ z_{k+1} - z_k & z_{k+2} - z_k & z_{k+3} - z_k \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Η ορίζουσα του  $A_k$  δίνει ως αποτέλεσμα έξι φορές τον όγκο του τετραέδρου όπου υπολογίζεται και παραμένει ίδια ανεξάρτητα σε ποια από τις τέσσερις Ιακωβιανές υπολογίζεται. Έστω  $a = \det(A_k)$ . Τέσσερα επιπλέον μητρώα (μετρικοί τανυστές) δίνονται σχηματίζοντας τους τέσσερις συνδυασμούς του γινομένου  $A_k^T A_k$ . Αυτά τα μητρώα είναι συμμετρικά και έχουν έξι ξεχωριστά στοιχεία. Έστω  $\lambda_{ij}^k, i, j = 1, 2, 3$ , τα οποία είναι τα  $i, j$  στοιχεία του  $k$  μετρικού τανυστή. Γεωμετρικά, για τον  $k$  κόμβο ισχύει ότι,  $\lambda_{11}^k$  ισούται με το τετράγωνο του μήκους της πλευράς που ενώνει τον κόμβο  $k$  με τον κόμβο  $k + 1$ ,  $\lambda_{22}^k$  ισούται με το τετράγωνο του μήκους της πλευράς που ενώνει τον κόμβο  $k$  με τον κόμβο  $k + 2$ , και  $\lambda_{33}^k$  ισούται με το τετράγωνο του μήκους της πλευράς που ενώνει τον κόμβο  $k$  με τον κόμβο  $k + 3$ . Τα μη διαγώνια στοιχεία  $\lambda_{12}^k, \lambda_{23}^k, \lambda_{13}^k$  ισούνται με το γινόμενο του μήκους τους επί το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας. Αποδεκτά τετράεδρα θεωρούνται αυτά που έχουν θετικό όγκο. Όγκοι πολύ κοντά στο μηδέν υποδεικνύουν εκφυλισμένα τετράεδρα, ενώ οι αρνητικοί όγκοι υποδεικνύουν μη αποδεκτά τετράεδρα (ανεστραμμένα).

### A.2.2 Μετρική Σχήματος

Οι μετρικές μεγέθους και σχήματος χρησιμοποιούνται πιο συχνά για τον έλεγχο της ποιότητας των τετραέδρων. Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφεται ο υπολογισμός της μετρικής σχήματος. Η μετρική σχήματος (Shape) χρησιμοποιείται για την ανεύρεση στρεβλώσεων στο σχήμα των τετραέδρων, ανεξάρτητα από το μέγεθος του εκάστοτε τετραέδρου και δίνεται από τη σχέση A.6

$$f_{shape} = \frac{3(\alpha\sqrt{2})^{2/3}}{\frac{3}{2}(\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33}) - (\lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{13})} \quad (\text{A.6})$$

Με βάση τις τιμές της συνάρτησης αυτής, γίνεται η αξιολόγηση της ποιότητας των προσαρμοσμένων πλεγμάτων τετραεδρικών στοιχείων, που υπολογίζονται στις 3Δ εφαρμογές της διπλωματικής μεταπτυχιακής εργασίας. Οι βασικές ιδιότητες της μετρικής μεγέθους είναι οι εξής:

- $f_{shape} = 1$  αν και μόνο αν το τετράεδρο στοιχείο είναι ισόπλευρο.
- $f_{shape} = 0$  αν και μόνο αν το τετράεδρο στοιχείο είναι εκφυλισμένο.
- $f_{shape} < 0$  σημαίνει ότι το τετραεδρικό στοιχείο είναι αναστραμμένο, δηλαδή δεν είναι έγκυρο και δε συμπεριλαμβάνεται στη μετρική.

Η μετρική αυτή αποτελεί και μια σαφή ένδειξη για την εγκυρότητα του νέου πλέγματος. Σε περίπτωση που η συνάρτηση  $F_{shape}$  πάρει αρνητική τιμή για ένα ή περισσότερα τετραεδρικά στοιχεία, τότε ο χρήστης ενημερώνεται ότι στο νέο πλέγμα έχουν εμφανιστεί αναστραμμένα στοιχεία, κάτι που σημαίνει ότι αυτό δεν είναι έγκυρο.

# Βιβλιογραφία

- [1] W. Annicchiarico, J. Periaux, M. Cerrolaza, and G. Winter. *Evolutionary Algorithms And Intelligent Tools In Engineering Optimization*. World Bank, 2005.
- [2] I. Babuška and A. K. Aziz. On the angle condition in the finite element method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 13(2):214–226, 1976.
- [3] J. T. Batina. Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. *AIAA Journal*, 28(8):1381–1388, 1990.
- [4] R. Biedron and E. Lee-Rausch. Rotor airloads prediction using unstructured meshes and loose CFD/CSD coupling. In *26th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, page 7341, 2008.
- [5] F. Blom, P. Leyland, F. Blom, and P. Leyland. Analysis of fluid-structure interaction on moving airfoils by means of an improved ale-method. In *28th Fluid Dynamics Conference*, page 1770, 1997.
- [6] F. J. Blom. Considerations on the spring analogy. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 32(6):647–668, 2000.
- [7] Y. K. Choo. Surface modeling, grid generation, and related issues in computational fluid dynamic (CFD) solutions. 1995.
- [8] P. Crumpton and M. Giles. Implicit time accurate solutions on unstructured dynamic grids. In *12th Computational Fluid Dynamics Conference*, page 1671, 1995.
- [9] A. De Boer, M. Van der Schoot, and H. Bijl. Mesh deformation based on radial basis function interpolation. *Computers & Structures*, 85(11-14):784–795, 2007.
- [10] Z. Ding, H. Zhu, and M. H. Friedman. Coronary artery dynamics in vivo. *Annals of Biomedical Engineering*, 30(4):419–429, 2002.

- [11] C. Farhat, C. Degand, B. Koobus, and M. Lesoinne. Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 163(1-4):231–245, 1998.
- [12] L. A. Freitag and P. Knupp. Tetrahedral element shape optimization via the jacobian determinant and condition number. Technical report, Sandia National Labs., Albuquerque, NM (US); Sandia National Labs., 1999.
- [13] K. Giannakoglou, D. Papadimitriou, and I. Karpolis. Aerodynamic shape design using evolutionary algorithms and new gradient-assisted metamodels. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(44):6312 – 6329, 2006.
- [14] P. F. H. Borouchaki, F. Hecht. Mesh gradation control.
- [15] O. Hassan, E. Probert, and K. Morgan. Unstructured mesh procedures for the simulation of three-dimensional transient compressible inviscid flows with moving boundary components. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 27(1-4):41–55, 1998.
- [16] S.-Y. Hsu, C.-L. Chang, and J. Samareh. A simplified mesh deformation method using commercial structural analysis software. In *10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, page 4409, 2004.
- [17] A. A. Johnson and T. E. Tezduyar. Simulation of multiple spheres falling in a liquid-filled tube. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134(3-4):351–373, 1996.
- [18] S. L. Karman Jr. Unstructured viscous layer insertion using linear-elastic smoothing. *AIAA Journal*, 45(1):168–180, 2007.
- [19] P. M. Knupp. Algebraic mesh quality metrics for unstructured initial meshes. *Finite Elements in Analysis and Design*, 39(3):217–241, 2003.
- [20] K. Kovalev. Unstructured hexahedral non-conformal mesh generation. *Faculty of Engineering, Vrije Universiteit Brussel*, 2005.
- [21] W. Kwok and Z. Chen. A simple and effective mesh quality metric for hexahedral and wedge elements. In *IMR*, pages 325–333. Citeseer, 2000.



- [22] X. Liu, N. Qin, and H. Xia. Fast dynamic grid deformation based on delaunay graph mapping. *Journal of Computational Physics*, 211(2):405–423, 2006.
- [23] R. Löhner and C. Yang. Improved ale mesh velocities for moving bodies. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 12(10):599–608, 1996.
- [24] R. Löhner, C. Yang, E. Oñate, and S. Idelsohn. Viscous free surface hydrodynamics using unstructured grids. In *Proc. 22nd Symp. Naval Hydro*, pages 476–490, 1998.
- [25] E. Luke, E. Collins, and E. Blades. A fast mesh deformation method using explicit interpolation. *Journal of Computational Physics*, 231(2):586–601, 2012.
- [26] D. Maruyama, D. Bailly, and G. Carrier. High-quality mesh deformation using quaternions for orthogonality preservation. *AIAA Journal*, 52(12):2712–2729, 2014.
- [27] A. Masud, M. Bhanabhagwanwala, and R. A. Khurram. An adaptive mesh rezoning scheme for moving boundary flows and fluid–structure interaction. *Computers & Fluids*, 36(1):77–91, 2007.
- [28] S. Piperno. Explicit/implicit fluid/structure staggered procedures with a structural predictor and fluid subcycling for 2d inviscid aerodynamic simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 25(10):1207–1226, 1997.
- [29] J. A. Samareh. Application of quaternions for mesh deformation. 2002.
- [30] M. M. Selim and A. Gupta. Feasibility study of substituting the ffr invasive procedure with cfd analysis for assessment of human coronary artery stenosis. In *Proceedings of the Fifteenth Annual Early Career Technical Conference, The University of Alabama, USA*, 2015.
- [31] D. Shepard. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. In *Proceedings of the 1968 23rd ACM National Conference*, pages 517–524, 1968.
- [32] K. Shoemake. Animating rotation with quaternion curves. In *Proceedings of the 12th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, pages 245–254, 1985.

- [33] K. Stein, T. Tezduyar, and R. Benney. Mesh moving techniques for fluid-structure interactions with large displacements. *J. Appl. Mech.*, 70(1):58–63, 2003.
- [34] K. Stein, T. E. Tezduyar, and R. Benney. Automatic mesh update with the solid-extension mesh moving technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(21-22):2019–2032, 2004.
- [35] L. Uyttensprot. Inverse distance weighting mesh deformation: A robust and efficient method for unstructured meshes. 2014.
- [36] J. Witteveen. Explicit and robust inverse distance weighting mesh deformation for cfd. In *48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, page 165, 2010.
- [37] Z. Yang and D. Mavriplis. Unstructured dynamic meshes with higher-order time integration schemes for the unsteady navier-stokes equations. In *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, page 1222, 2005.
- [38] Z. Yang and D. J. Mavriplis. Mesh deformation strategy optimized by the adjoint method on unstructured meshes. *AIAA Journal*, 45(12):2885–2896, 2007.
- [39] Κ. Γιαννάκογλου. *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Ε.Μ.Π., 2006.
- [40] Α. Εσκαντάρ. Μετατόπιση 3Δ Περιοδικών Πλεγμάτων με χρήση Προτύπου Κίνησης Απαραμόρφωτου Στερεού. Μεταπτυχιακή Εργασία. 2021.
- [41] Α. Τσολοβίκος. Προσαρμογή Υπολογιστικών Πλεγμάτων με χρήση γράφων Delaunay - Εφαρμογές στην Βελτιστοποίηση με χρήση της Συζυγούς Μεθόδου. Διπλωματική Εργασία. 2018.