

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Παραμετροποίηση Μορφών και Παραμόρφωση 2Δ και
3Δ Περιοδικών Υπολογιστικών Πλεγμάτων με χρήση
Αρμονικών Συντεταγμένων. Εφαρμογή στην
Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Μορφής.

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
Υπολογιστική Μηχανική

Μεταπτυχιακή Εργασία

Μαρία Φαράκου

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Φεβρουάριος 2019

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ
& ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

**Παραμετροποίηση Μορφών και Παραμόρφωση 2Δ και 3Δ
Περιοδικών Υπολογιστικών Πλεγμάτων με χρήση Αρμονικών
Συντεταγμένων. Εφαρμογή στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση
Μορφής.**

**Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
Υπολογιστική Μηχανική**

Μεταπτυχιακή Εργασία

Μαρίας Φαράκου

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Φεβρουάριος 2019

Περίληψη

Στην Υπολογιστική Ρευστοδυναμική (CFD) η ύπαρξη κατάλληλου υπολογιστικού πλέγματος για την επίλυση της ροής είναι καθοριστικό και αναπόσπαστο στοιχείο των εφαρμογών. Ιδιαίτερα για τα προβλήματα στα οποία εμπλέκεται βελτιστοποίηση μορφής απαιτείται συνεχής επαναπλεγματοποίηση του υπολογιστικού χωρίου για κάθε νέο κύκλο της διαδικασίας. Η γένεση, όμως, νέου υπολογιστικού πλέγματος απαιτεί συνήθως σημαντικό υπολογιστικό χρόνο. Για τον λόγο αυτόν, έχουν αναπτυχθεί τεχνικές οι οποίες προτείνουν την τροποποίηση και παραμόρφωση του ήδη υπάρχοντος πλέγματος, αποφεύγοντας έτσι την κοστοβόρα διαδικασία της δημιουργίας νέου.

Μία τέτοια τεχνική αποτελεί η θεωρία των αρμονικών συντεταγμένων. Η συγκεκριμένη θεωρία προτείνει την χρήση ενός δεύτερου πλέγματος, του αρμονικού πλέγματος, οι συντεταγμένες του οποίου συσχετίζονται με μοναδικό τρόπο με τις συντεταγμένες του CFD πλέγματος. Συνεπώς, η μετατόπιση των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος και ακολούθως η συνολική του παραμόρφωση, επιτυγχάνεται μέσω της μετατόπισης των αρμονικών κόμβων. Επομένως, ο χρήστης διαχειρίζεται, πλέον, το αρμονικό πλέγμα, το οποίο είναι κατά πολύ αραιότερο του CFD πλέγματος, και μέσω αυτού το υπολογιστικό πλέγμα.

Εφαρμογές της μεθόδου των αρμονικών συντεταγμένων έχουν γίνει σε προηγούμενες διπλωματικές εργασίες και αφορούσαν σε γεωμετρικά σχήματα, 2Δ πτερυγώσεις,

2Δ και 3Δ αγωγούς και πτέρυγα αεροσκάφους. Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία, επικεντρώνεται στην εφαρμογή της μεθόδου σε περιοδικά χωρία. Συγκεκριμένα, οι εφαρμογές αφορούν σε 2Δ και 3Δ γραμμικές πτερυγώσεις συμπίεστη και στροβίλου καθώς και σε 3Δ περιφερειακή πτερύγωση συμπίεστη. Στόχος είναι, πέραν της τροποποίησης και παραμόρφωσης των περιγραμμάτων των αεροτομών των πτερυγώσεων, επίτευξη παραμόρφωσης των περιοδικών χωρίων με παράλληλη διατήρηση, όμως, της περιοδικότητάς τους.

Στο πλαίσιο της εργασίας, αναπτύχθηκε λογισμικό σε γλώσσα προγραμματισμού C++ για την παρεμβολή των αρμονικών συντεταγμένων του CFD πλέγματος στο αρμονικό πλέγμα και για την παραμόρφωσή του. Επιπλέον, αναπτύχθηκε κώδικας παράλληλης επεξεργασίας με χρήση του πρωτοκόλλου MPI (Message Passing Interface) για την διαδικασία της παρεμβολής. Χρήση του κώδικα παράλληλης επεξεργασίας γίνεται στην περίπτωση της 3Δ γραμμικής πτερύγωσης στροβίλου και της 3Δ περιφερειακής πτερύγωσης συμπίεστη. Για την περίπτωση των 2Δ πτερυγώσεων, το λογισμικό ενσωματώνεται σε κύκλο αεροδυναμικής βελτιστοποίησης μορφής με χρήση εξελικτικών αλγορίθμων.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING
FLUIDS DEPARTMENT
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

**Shape Parameterization and Deformation of 2D and 3D
Periodic Computational Grids using Harmonic Coordinates.
Applications in Aerodynamic Optimization.**

**Joint Postgraduate Course
Computational Mechanics**

Master Thesis
by

Maria Farakos

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, February 2019

Abstract

In Computational Fluid Dynamics, the need for a proper computational grid for the numerical solution of the flow equations is a decisive and inseparable part of the applications. Especially for problems involving shape optimization, it is necessary to re-form the computational grid for each new cycle of the process. The generation of a new computational grid is a costly process. For this reason, techniques have been developed that propose the modification and deformation of the existing grid, thus avoiding the costly process of creating a new one.

A technique such as the one described above, is the theory of harmonic coordinates. This theory proposes the use of a second grid, the harmonic grid, whose coordinates are uniquely correlated with the coordinates of the CFD grid. Consequently, the displacement of the nodes of the computational grid and then its overall deformation, is accomplished by the displacement of the harmonic nodes. Therefore, the optimization method controls the harmonic grid, which is much more sparse than the CFD grid, and, through this, the computational grid.

Applications of the harmonic coordinate method have been made in previous graduate theses and involved applications in geometric shapes, 2D cascades, 2D and 3D ducts and aircraft wing. This postgraduate thesis focuses on the application of

the method in periodic grids. Specifically, the applications involve 2D and 3D compressor and turbine cascades. The aim is, in addition to modifying and deforming the contours of the airfoils of the cascades, to achieve deformation of the periodic boundaries while maintaining their periodicity.

As part of this postgraduate thesis, software was developed in C++, for the interpolation of the harmonic coordinates of the CFD grid and for its deformation. Moreover, code of parallel computing was developed using the MPI (Message Passing Interface) protocol for the procedure of the interpolation. This code was used in the case of 3D turbine linear cascade and the 3D peripheral compressor cascade. In 2D cascades, the software is integrated into a aerodynamic optimization process using evolutionary algorithms.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγικά Σχόλια	1
1.1	Περί Μεθόδων Βελτιστοποίησης	1
1.2	Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Μορφής	2
1.3	Ελεύθερη Παραμόρφωση Μορφής	3
1.4	Στόχος και Δομή της Εργασίας	4
2	Θεωρία και Χρήση Αρμονικών Συντεταγμένων σε 2Δ Περιοδικά Χωρία	5
2.1	Βασικοί Ορισμοί και Βήματα της Μεθόδου	5
2.1.1	Βαρυκεντρικές Συντεταγμένες	5
2.1.2	Αρμονικές Συντεταγμένες Κλωβού	6
2.1.3	Παρεμβολή στο CFD Πλέγμα	8
2.1.4	Παραμόρφωση Κλωβού και CFD Πλέγματος	9
2.1.5	Τεχνική Δύο Κλωβών	10
2.2	Εφαρμογή σε Περιοδικό Χωρίο	12
3	Παραμετρική Μελέτη και Βελτιστοποίηση Περιγράμματος Αεροτομών 2Δ Πτερυγώσεων	17
3.1	Παραμετρική Μελέτη	17
3.2	Βελτιστοποίηση Περιγράμματος Αεροτομών 2Δ Πτερυγώσεων	25
3.2.1	Βελτιστοποίηση με χρήση Εξελικτικών Αλγορίθμων (EA)	26
3.2.2	Πτερύγωση Συμπιεστή SC10	27

3.2.3	Πτερύγωση Στροβίλου VKI LS89	32
4	Θεωρία Αρμονικών Συντεταγμένων σε 3Δ Χωρία και Εφαρμογή	39
4.1	Επέκταση Βασικών Ορισμών στις Τρεις Διαστάσεις	39
4.2	Εφαρμογή σε 3Δ Γραμμικές Πτερυγώσεις	42
4.2.1	3Δ Πτερύγωση Συμπιεστή SC10	42
4.2.2	3Δ Πτερύγωση Στροβίλου C3X	46
5	Εφαρμογή Θεωρίας Αρμονικών Συντεταγμένων σε Τομέα Κυκλικού Δακτυλίου και Περιφερειακή Πτερύγωση	55
5.1	Εφαρμογή σε Τομέα Κυκλικού Δακτυλίου	55
5.2	Εφαρμογή σε 3Δ Περιφερειακή Πτερύγωση Συμπιεστή.	64
6	Ανακεφαλαίωση και Προτάσεις για Μελλοντική Μελέτη	71
6.1	Ανακεφαλαίωση	71
6.2	Συμπεράσματα	72
6.3	Προτάσεις για Μελλοντικές Μελέτες	73
	Βιβλιογραφία	75

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά Σχόλια

1.1 Περί Μεθόδων Βελτιστοποίησης

Ο ισχυρός και συνεχώς αυξανόμενος ανταγωνισμός στους τομείς της βιομηχανίας και της τεχνολογίας για την αναζήτηση του προϊόντος, το οποίο συγκεντρώνει τα καλύτερα χαρακτηριστικά, έχει οδηγήσει τα τελευταία χρόνια την επικέντρωση του ενδιαφέροντος στους κλάδους της βελτιστοποίησης. Το σύνολο των χαρακτηριστικών του προϊόντος, τα οποία θα αποτελέσουν τις παραμέτρους της βελτιστοποίησης, ονομάζονται μεταβλητές σχεδιασμού (design variables), και το μέγεθος (ή τα μεγέθη) ως προς το οποίο βελτιστοποιείται το προϊόν, ονομάζεται συνάρτηση στόχος (target) ή αντικειμενική συνάρτηση (objective function). Το υπολογιστικό εργαλείο το οποίο αξιολογεί τις υποψήφιες λύσεις ως προς τους στόχους που τέθηκαν, ονομάζεται λογισμικό αξιολόγησης. Επιπλέον, για να πλησιάζει όσο το δυνατόν καλύτερα η υπολογιστική προσομοίωση, το πραγματικό πρόβλημα, είναι συχνά απαραίτητη η επιβολή περιορισμών (constraints) στη διαδικασία της βελτιστοποίησης.

Η μέθοδος βελτιστοποίησης[1] [2]είναι το εργαλείο το οποίο ανιχνεύει την περιοχή των πιθανών λύσεων και καταλήγει στην βέλτιστη. Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης μπορούν να διακριθούν σε δύο βασικές κατηγορίες, τις αιτιοκρατικές και τις στοχαστικές μεθόδους.

Βασικό ζητούμενο σε μία αιτιοκρατική μέθοδο είναι ο υπολογισμός ή η προσέγγιση της τιμής της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης (ή των αντικειμενικών συναρτήσεων) ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Για τον προγραμματισμό μίας αιτιοκρατικής μεθόδου ο χρήστης απαιτείται να επενδύσει περισσότερο χρόνο και απαιτεί επιπλέον χρόνο για την επέκτασή της σε διαφορετικά προβλήματα. Μία αιτιοκρατική μέθοδος συγκλίνει πιο γρήγορα από μια στοχαστική, εμπεριέχοντας όμως τον κίνδυνο σύγκλισης σε τοπικό και όχι στο ολικό ακρότατο (βέλτιστο). Η σωστή σύγκλιση εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την τιμή εκκίνησης που δίνεται στον αλγόριθμο. Ενδεικτικές

μέθοδοι υπολογισμού των παραγώγων σε μία αιτιοκρατική μέθοδο είναι:

- Πεπερασμένες Διαφορές (Finite Differences) [1]
- Ευθεία Διαφορίση (Direct Differentiation)[1]
- Μέθοδος των Μιγαδικών Μεταβλητών(Complex Variable Method)[1]
- Μέθοδος της Αυτόματης Διαφορίσης(Automated Differentiation)[1]
- Συζυγής Μέθοδος(Adjoint Method)[1]

Στις στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης η αναζήτηση του βέλτιστου γίνεται κατά τυχαίο ή οργανωμένα τυχαίο τρόπο. Είναι περισσότερο γενικές μέθοδοι και προσαρμόζονται εύκολα σε ένα νέο πρόβλημα. Η σύγκλισή τους, όπως ήδη αναφέρθηκε, είναι πιο αργή από αυτή των αιτιοκρατικών, με το πλεονέκτημα όμως ότι δεν εγκλωβίζονται σε τοπικά ακρότατα ανεξάρτητα από τη λύση ή τις λύσεις με τις οποίες αρχικοποιούνται.

1.2 Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Μορφής

Στην αεροδυναμική πολύ συχνά συναντάται η έννοια της βελτιστοποίησης μορφής. Σε μία τέτοια διαδικασία βελτιστοποίησης, ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός της μορφής του σώματος, το οποίο μελετάται (λ.χ. αεροτομή ή αγωγός), ώστε η μορφή αυτή να επιστρέφει την επιθυμητή τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Δεδομένου ότι η αναφορά γίνεται σε προβλήματα ρευστοδυναμικής και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης προκύπτει από την επίλυση της ροής γύρω από το σώμα (ή μέσα σε αυτό), είναι σαφές ότι απαιτείται ένα πλεγματοποιημένο χωρίο (υπολογιστικό πλέγμα) στους κόμβους του οποίου επιλύονται επαναληπτικά οι (διακριτοποιημένες) εξισώσεις ροής.

Στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση μορφής, ένας κύκλος βελτιστοποίησης περιλαμβάνει τα εξής βήματα:

- απόδοση τιμών στις μεταβλητές σχεδιασμού και, με βάση αυτές, σχηματισμός της αντίστοιχης γεωμετρίας του σώματος
- γένεση υπολογιστικού πλέγματος γύρω από το ή μέσα στο σώμα
- επίλυση της ροής, ούτως ώστε να αντληθεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για την αξιολόγηση του διανύσματος των μεταβλητών

Η βελτιστοποίηση, όμως, δεν επιτυγχάνεται σε ένα κύκλο, τουναντίον, απαιτούνται επαναλήψεις, ωστόσο επιτευχθεί η σύγκλιση. Άμεσο επακόλουθο αυτού είναι ότι, εκτός των άλλων, σε κάθε κύκλο απαιτείται επαναπλεγματοποίηση του χωρίου στο οποίο επιλύεται η ροή. Η δημιουργία νέου πλέγματος είναι διαδικασία δαπανηρή, καθώς απαιτεί σημαντικό υπολογιστικό χρόνο. Για τον λόγο αυτόν, έχουν αναπτυχθεί τεχνικές οι οποίες βασίζονται στην τροποποίηση/παραμόρφωση του υπάρχοντος πλέγματος και όχι

τη δημιουργία νέου, εξασφαλίζοντας έτσι ότι η κοστοβόρα διαδικασία της πλεγματοποίησης του χωρίου θα γίνει μία και μόνο φορά.

1.3 Ελεύθερη Παραμόρφωση Μορφής

Μία ιδέα που έχει αναπτυχθεί τελευταία και προέρχεται από τον χώρο των κινουμένων σχεδίων, είναι η τεχνική της ελεύθερης παραμόρφωσης μορφής (Free Form Deformation, FFD)[3]. Η ιδέα παρουσιάστηκε πρώτη φορά το 2006 από την εταιρία κινουμένων σχεδίων PIXAR[4] και αφορούσε έλεγχο ψηφιακών χαρακτήρων. Η μέθοδος στη συνέχεια δοκιμάστηκε με επιτυχία στην περιγραφή μηχανολογικών αντικειμένων και αεροδυναμικών σωμάτων.

Η συγκεκριμένη μέθοδος, η οποία στο εξής αναφέρεται ως μέθοδος των αρμονικών συντεταγμένων, προτείνει την χρήση ενός δεύτερου πλέγματος, του πλέγματος ελέγχου. Το σώμα, του οποίου ζητείται η τροποποίηση της μορφής τοποθετείται στο εσωτερικό αυτού του πλέγματος. Η ιδιότητα του πλέγματος ελέγχου, στην οποία και στηρίζεται όλη η μέθοδος, είναι το ότι οι συντεταγμένες των σημείων που περιγράφουν το σώμα ή βρίσκονται στο υπολογιστικό χωρίο γύρω από αυτό, συσχετίζονται με μοναδικό τρόπο με τις συντεταγμένες των σημείων του πλέγματος ελέγχου. Επακόλουθο αυτού είναι ότι, η μετατόπιση των σημείων του κλωβού φέρει ταυτόχρονη μετατόπιση των σημείων του υπολογιστικού χωρίου που βρίσκονται μέσα στο πλέγμα ελέγχου και, κατ' επέκταση, τροποποίηση της γεωμετρίας του σώματος. Έτσι, αντί ο χρήστης να διαχειρίζεται απευθείας το σώμα και το υπολογιστικό χωρίο, διαχειρίζεται τον χώρο που το περιέχει και ο οποίος ορίζεται με τη βοήθεια του πλέγματος ελέγχου. Συνεπώς, δεν τίθεται, πλέον, θέμα επαναπλεγματοποίησης αλλά μετακίνησης των σημείων του υπολογιστικού χωρίου (μέσω μετακίνησης των σημείων του πλέγματος ελέγχου).

Εφαρμογή της μεθόδου έχει γίνει σε προηγούμενες διπλωματικές εργασίες. Συγκεκριμένα, η μέθοδος εφαρμόστηκε σε μεμονωμένη 2Δ συμμετρική αεροτομή NACA 12 καθώς και σε 2Δ αγωγό σχήματος S [5]. Η μέθοδος και για τις δύο εφαρμογές ενσωματώθηκε σε κύκλο αεροδυναμικής βελτιστοποίησης με χρήση εξελικτικών αλγορίθμων. Στην ίδια διπλωματική εργασία έγινε εφαρμογή της μεθόδου σε 2Δ πτερύγωση συμπιεστή NACA 65 και 2Δ πτερύγωση στροβίλου VKI LS89, με ενσωμάτωση της μεθόδου σε κύκλο βελτιστοποίησης.

Σε επόμενη διπλωματική εργασία [6], η θεωρία των αρμονικών συντεταγμένων επεκτάθηκε στις τρεις διαστάσεις. Εφαρμόστηκε, αρχικά, σε απλά γεωμετρικά σχήματα, όπως κύβο και σφαίρα και, στη συνέχεια, σε πτέρυγα αεροσκάφους και 3Δ αγωγό τύπου S. Η μέθοδος ενσωματώθηκε σε κύκλο βελτιστοποίησης για τη μορφοποίηση 3Δ πτέρυγας αεροσκάφους ONERA M6 και αγωγού σχήματος U. Στην ίδια διπλωματική εργασία έγινε εφαρμογή της μεθόδου και ένταξή της σε κύκλο αεροδυναμικής βελτιστοποίησης μορφής για το γενικευμένο μοντέλο αυτοκινήτου DrivAer.

1.4 Στόχος και Δομή της Εργασίας

Στη μεταπτυχιακή αυτή εργασία, η μέθοδος εφαρμόζεται σε 2Δ και 3Δ πτερυγώσεις συμπίεστη και στροβίλου. Στόχος είναι πέραν της μορφοποίησης του περιγράμματος των αεροτομών των πτερυγώσεων να επιτευχθεί παραμόρφωση και των ορίων των πτερυγώσεων με ταυτόχρονη διατήρηση, όμως, της περιοδικότητάς τους. Για την περίπτωση των 2Δ πτερυγώσεων η μέθοδος εντάσσεται σε κύκλο αεροδυναμικής βελτιστοποίησης μορφής, ώστε να προσδιορισθεί τόσο το περίγραμμα της αεροτομής όσο και η μορφή των περιοδικών ορίων που δίνουν το επιθυμητό αποτέλεσμα. Η δομή της εργασίας είναι η εξής:

- Στο 2^ο κεφάλαιο παρουσιάζονται βασικά στοιχεία θεωρίας των αρμονικών συντεταγμένων στις δύο διαστάσεις. Εισάγονται κύριες έννοιες της μεθόδου, οι οποίες χρησιμοποιούνται στο υπόλοιπο της εργασίας, όπως, κλωβός (ή αρμονικό χωρίο), CFD πλέγμα και σημεία ελέγχου του κλωβού. Στο τέλος του κεφαλαίου, παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο μπορεί η μέθοδος να εφαρμοστεί σε 2Δ περιοδικά χωρία.
- Στο 3^ο κεφάλαιο, η μέθοδος των αρμονικών συντεταγμένων βρίσκει εφαρμογή σε 2Δ πτερυγώσεις. Αρχικά γίνεται μία παραμετρική μελέτη για τη διερεύνηση του σωστού τρόπου εφαρμογής της. Στη συνέχεια, ενσωματώνεται σε κύκλο αεροδυναμικής βελτιστοποίησης μορφής με εξελικτικούς αλγορίθμους, για τη μορφοποίηση 2Δ πτερυγώσης συμπίεστη και 2Δ πτερυγώσης στροβίλου.
- Στο 4^ο κεφάλαιο, η προαναφερθείσα θεωρία επεκτείνεται σε 3Δ χωρία. Παρουσιάζεται ο τρόπος εφαρμογής της σε 3Δ περιοδικά χωρία και υλοποιείται σε 3Δ πτερυγώσεις συμπίεστη και στροβίλου.
- Στο 5^ο κεφάλαιο γίνεται αρχικά μία εισαγωγή για τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος σε τομέα κυκλικού δακτυλίου. Στη δεύτερη ενότητα του κεφαλαίου η μέθοδος των αρμονικών συντεταγμένων βρίσκει εφαρμογή σε 3Δ περιφερειακή πτερυγωση συμπίεστη.
- Το 6^ο κεφάλαιο, συνοψίζει τις εφαρμογές και παρουσιάζει τα συμπεράσματα της μελέτης. Τέλος, δίνονται προτάσεις για μελλοντικές επεκτάσεις της μεθόδου.

Κεφάλαιο 2

Θεωρία και Χρήση Αρμονικών Συντεταγμένων σε 2Δ Περιοδικά Χωρία

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της μεθόδου των αρμονικών συντεταγμένων και ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιείται για την παραμόρφωση υπολογιστικού χωρίου. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα βήματα, ώστε να γίνει εφαρμογή των παραπάνω σε 2Δ περιοδικό υπολογιστικό πλέγμα.

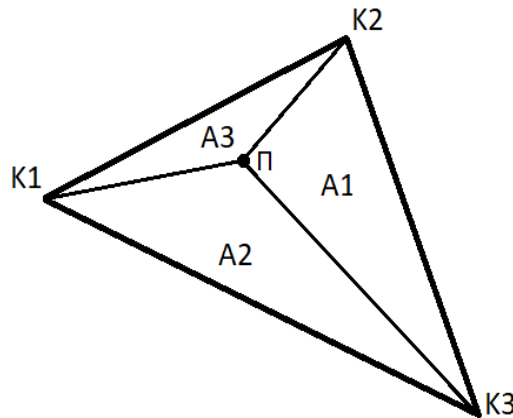
2.1 Βασικοί Ορισμοί και Βήματα της Μεθόδου

2.1.1 Βαρυκεντρικές Συντεταγμένες

Έστω το τρίγωνο $K_1K_2K_3$ του σχήματος 2.1. Οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες, μπορούν να αντιστοιχηθούν με βάρη που φέρει μαζί του κάθε σημείο του τριγώνου[7]. Έστω b_1, b_2, b_3 οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου K_1, K_2, K_3 αντίστοιχα. Η ιδιότητα των βαρυκεντρικών συντεταγμένων είναι ότι δίνουν τη δυνατότητα σε κάθε τυχαίο σημείο του τριγώνου, είτε στο εσωτερικό του είτε στο περίγραμμα, να εκφραστεί μοναδικά συναρτήσει τους και συναρτήσει των συντεταγμένων των τριών κορυφών. Έστω τυχαίο εσωτερικό σημείο του τριγώνου, Π . Το διάνυσμα θέσης $\vec{\Pi}$ του σημείου υπολογίζεται ως:

$$\vec{\Pi} = \sum_{i=1}^3 b_i \vec{K}_i \quad , \text{ με } b_i = \frac{A_j}{\sum_j A_j} \quad (2.1)$$

όπου A_j το εμβαδόν του σχηματιζόμενου τριγώνου απέναντι από την κορυφή K_j (σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1: Οι συντεταγμένες του τυχαίου σημείου Π του τριγώνου μπορούν να εκφραστούν μοναδικά συναρτήσει των βαρυκεντρικών και των καρτεσιανών συντεταγμένων των κορυφών, σύμφωνα με την εξίσωση 2.1, εφόσον οι κορυφές K_1, K_2, K_3 παραμένουν σταθερές.

2.1.2 Αρμονικές Συντεταγμένες Κλωβού

Οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες γενικεύονται από τρίγωνα σε πολύγωνα, μετονομαζόμενες, πλέον, σε αρμονικές συντεταγμένες. Το πολύγωνο το οποίο χρησιμοποιείται στη μεταπτυχιακή αυτή εργασία, για την εφαρμογή της μεθόδου των αρμονικών συντεταγμένων ονομάζεται κλωβός. Ορίζεται, λοιπόν, ως κλωβός κάθε 2Δ (ή 3Δ) πλεγματοποιημένο πολύγωνο N κορυφών ή αλλιώς σημείων ελέγχου. Οι αρμονικές συντεταγμένες μπορούν να αντιστοιχηθούν και πάλι με βάρη τοποθετημένα σε κάθε σημείο του κλωβού, σε κάθε διαφορετικό σημείο αντιστοιχούν και διαφορετικές τιμές αρμονικών συντεταγμένων. Το πλεγματοποιημένο χωρίο που δημιουργείται από το περίγραμμα του κλωβού θα αναφέρεται και ως αρμονικό πλέγμα.

Οι αρμονικές συντεταγμένες των κόμβων του κλωβού προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Laplace στον κλωβό με κατάλληλες οριακές συνθήκες τύπου Dirichlet[8]. Οι οριακές συνθήκες επιβάλλονται στις κορυφές του κλωβού και στους

κόμβους του πλέγματος του κλωβού που κείνται στο περίγραμμά του. Στους εσωτερικούς κόμβους επιλύεται επαναληπτικά η εξίσωση Laplace. Η 2Δ εξίσωση Laplace, για το πεδίο u , ορίζεται ως:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.2)$$

Οι λύσεις της εξίσωσης Laplace καλούνται αρμονικές συναρτήσεις. Έστω πλεγματοποιημένο χωρίο C , με N σημεία ελέγχου και $p(x, y)$ τυχαίο εσωτερικό σημείο. Οι αρμονικές συναρτήσεις $h_i, i = 1 \dots N$, ικανοποιούν την ίδια εξίσωση Laplace σε κάθε εσωτερικό σημείο του χωρίου, καθεμιά όμως με το δικό της ξεχωριστό σύνολο οριακών συνθηκών, οι οποίες ορίζονται στις N κορυφές και στους κόμβους του περιγράμματος. Οι συναρτήσεις αυτές υπακούουν στις ακόλουθες ιδιότητες:

- $h_i(N_j) = \delta_i^j$ Το βάρος της κάθε κορυφής ως προς την ίδια την κορυφή ισούται με τη μονάδα, ενώ ως προς κάθε άλλη κορυφή ισούται με μηδέν.
- $\sum_{i=1}^N h_i(p) = 1$ Σε κάθε τυχαίο σημείο $p(x, y)$ του χωρίου, οι αρμονικές συντεταγμένες από κάθε κορυφή αθροίζουν στη μονάδα.
- $h_i(p) \geq 0$ Οι αρμονικές συντεταγμένες είναι πάντα θετικές.
- Κάθε αρμονική συνάρτηση h_i είναι τουλάχιστον μία φορά παραγωγίσιμη στα όρια και δύο φορές στο εσωτερικό του χωρίου.
- Οι αρμονικές συναρτήσεις λαμβάνουν τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή τους στα όρια του χωρίου.

Η εξίσωση Laplace επιλύεται N φορές, μία φορά για κάθε σημείο ελέγχου. Το σημείο ελέγχου για το οποίο γίνεται η επίλυση, λαμβάνει οριακή συνθήκη $h_i = 1$. Οι κόμβοι, οι οποίοι κείνται στις ακμές του περιγράμματος που συνδέουν το συγκεκριμένο σημείο ελέγχου με τα γειτονικά του, λαμβάνουν οριακή συνθήκη, η οποία είναι αποτέλεσμα γραμμικής κατανομής από τη μονάδα προς το μηδέν. Όλα τα υπόλοιπα σημεία ελέγχου καθώς και οι κόμβοι που κείνται στις υπόλοιπες ακμές, λαμβάνουν οριακή συνθήκη $h = 0$. Στο τέλος των N αυτών επιλύσεων, κάθε σημείο του κλωβού αποκτά N αρμονικές συντεταγμένες, μία από κάθε κορυφή. Έχοντας, λοιπόν, υπολογίσει τις αρμονικές συντεταγμένες, μπορούν πλέον όλα τα εσωτερικά σημεία του κλωβού να εκφραστούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των αρμονικών τους συντεταγμένων και της θέσης των σημείων ελέγχου. Με αυτόν τον τρόπο, οι κορυφές του κλωβού ελέγχουν πλήρως οποιοδήποτε σημείο του κλωβού. Το τυχαίο σημείο p του κλωβού εκφράζεται, πλέον, ως:

$$p = \sum_{i=1}^N h_i(p) C_i \quad (2.3)$$

Η σχέση 2.3 είναι αντίστοιχη της σχέσης 2.1, με τη διαφορά ότι χρησιμοποιούνται πλέον αρμονικές και όχι βαρυκεντρικές συντεταγμένες και το τυχαίο σημείο p , του

οποίου υπολογίζεται η θέση, βρίσκεται σε πολύγωνο και όχι σε τρίγωνο.

2.1.3 Παρεμβολή στο CFD Πλέγμα

Τα σημεία ελέγχου του κλωβού μπορούν, με την κατάλληλη διαδικασία, να ελέγξουν πλήρως, όχι μόνο τα σημεία του ίδιου του κλωβού, αλλά και οποιαδήποτε άλλα σημεία βρεθούν στο εσωτερικό του περιγράμματός του. Έτσι, το σώμα του οποίου ζητείται ο έλεγχος της μορφής και η παραμόρφωσή του, τοποθετείται στο εσωτερικό του κλωβού. Λόγω του ότι, στην εργασία αυτή, οι εφαρμογές αφορούν μόνο σε προβλήματα ρευστοδυναμικής, το πλεγματοποιημένο χωρίο του οποίου ζητείται ο έλεγχος από τις κορυφές του κλωβού, θα αναφέρεται στο εξής ως CFD πλέγμα.

Το επόμενο βήμα είναι να βρεθούν οι αρμονικές συντεταγμένες (βάρη) των κόμβων του CFD πλέγματος. Αυτό υλοποιείται με την παρεμβολή των τιμών των αρμονικών συντεταγμένων των κόμβων του αρμονικού πλέγματος στους κόμβους του CFD πλέγματος. Με την ενσωμάτωση του κλωβού στο CFD πλέγμα, κάθε κόμβος του CFD πλέγματος βρίσκεται στο εσωτερικό ή στο περίγραμμα ενός τριγωνικού στοιχείου του κλωβού. Έστω, λοιπόν, τυχαίο σημείο K του CFD πλέγματος το οποίο βρίσκεται ότι ανήκει στο τρίγωνο $T_1T_2T_3$ του κλωβού. Οι αρμονικές συντεταγμένες του κόμβου K από την κάθε κορυφή του κλωβού i ($i = 1...N$) υπολογίζονται ως:

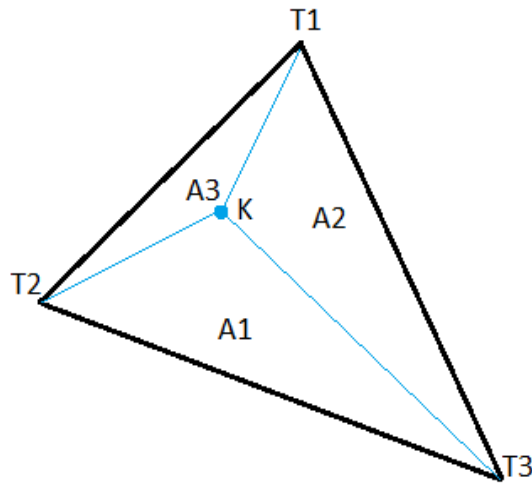
$$w_i = \sum_{i=1}^3 h_i b_i \quad , \text{ με } b_i = \frac{A_i}{\sum_i A_i} \quad (2.4)$$

όπου h_i οι αρμονικές συντεταγμένες που αντιστοιχούν στην κορυφή C_i , των κορυφών T_1, T_2, T_3 και A_j το εμβαδόν του σχηματιζόμενου τριγώνου απέναντι από την κορυφή T_j (σχήμα 2.2). Για να γίνει καλύτερα κατανοητή η εξίσωση 2.4, έστω ότι ζητείται η αρμονική συντεταγμένη του κόμβου K από την κορυφή C_1 του κλωβού. Αυτό προκύπτει ίσο με:

$$w_1 = h_1^{(T_1)} \cdot \frac{A_1}{A} + h_1^{(T_2)} \cdot \frac{A_2}{A} + h_1^{(T_3)} \cdot \frac{A_3}{A} \quad , A = A_1 + A_2 + A_3 \quad (2.5)$$

όπου $h_1^{(T_i)}$, $i = 1, 3$, η αρμονική συντεταγμένη της κορυφής T_i του τριγώνου από την κορυφή C_1 του κλωβού. Ο κόμβος K μπορεί, πλέον, να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των αρμονικών του συντεταγμένων και της θέσης των σημείων ελέγχου του κλωβού ως:

$$K = \sum_{i=1}^N w_i C_i \quad (2.6)$$



Σχήμα 2.2: Για το τυχαίο σημείο K του CFD πλέγματος, το οποίο ανήκει στο τριγωνικό στοιχείο $T_1T_2T_3$ του κλωβού, οι αρμονικές συντεταγμένες του, δίνονται από την εξίσωση 2.4.

2.1.4 Παραμόρφωση Κλωβού και CFD Πλέγματος

Σε μία διαδικασία βελτιστοποίησης μορφής, το ζητούμενο είναι η παραμόρφωση του CFD πλέγματος, ώστε αυτό να πάρει τη μορφή που θα δίνει τα επιθυμητά αποτελέσματα. Το CFD πλέγμα όμως, όπως έχει ήδη αναφερθεί, ελέγχεται από τις κορυφές του κλωβού. Συνεπώς, η παραμόρφωσή του θα γίνει μέσω αυτών. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνεται η μετακίνηση των κόμβων του CFD πλέγματος, μέσω της μετακίνησης των σημείων ελέγχου του κλωβού.

Η διαδικασία της επίλυσης των N εξισώσεων Laplace στον κλωβό όπως και η διαδικασία παρεμβολής του CFD πλέγματος γίνεται μία και μόνο φορά. Συνεπώς, οι αρμονικές συντεταγμένες κάθε υπολογιστικού κόμβου (είτε αυτός ανήκει στο αρμονικό είτε στο CFD πλέγμα) παραμένουν σταθερές και ανεξάρτητες από μετέπειτα μετακινήσεις των σημείων ελέγχου. Συνεπώς, από τις εξισώσεις 2.3 και 2.6 συμπεραίνεται ότι, η θέση των σημείων του κλωβού και του CFD πλέγματος εξαρτάται αποκλειστικά από τη θέση των κορυφών του κλωβού. Έτσι, όταν τα σημεία ελέγχου μετακινήθουν σε νέες θέσεις C'_i (για λόγους βελτιστοποίησης όπως αναφέρθηκε παραπάνω), προκύπτει ότι οι νέες θέσεις των τυχαίων σημείων p' , του κλωβού, και K' , του CFD πλέγματος, δίνεται από τις σχέσεις:

$$p' = \sum_{i=1}^N h_i(p) C'_i$$

$$K' = \sum_{i=1}^N w_i C'_i$$

Αν, λοιπόν, $\delta \vec{C}_i$ είναι το διάνυσμα της μετατόπισης της κορυφής C_i , τότε τα διανύσματα των μετατοπίσεων των σημείων p και K δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$\delta \vec{p} = \sum_{i=1}^N h_i(p) \delta \vec{C}_i$$

$$\delta \vec{K} = \sum_{i=1}^N w_i \delta \vec{C}_i$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ο υπολογισμός των νέων θέσεων απαιτεί τις αρμονικές συντεταγμένες των κόμβων από κάθε κορυφή και τις μετατοπίσεις των κορυφών. Τονίζεται ότι, δεν είναι απαραίτητο κάθε κορυφή του κλωβού να είναι και σημείο ελέγχου. Αν κάποια κορυφή δεν πρόκειται να μετακινηθεί δεν χρειάζεται να γίνει επίλυση της Laplace για την κορυφή αυτήν.

2.1.5 Τεχνική Δύο Κλωβών

Όπως έχει αναφερθεί ήδη, οι κορυφές του κλωβού έχουν πλήρη έλεγχο σε οποιοδήποτε σημείο παρεμβάλλεται σε αυτόν, όχι όμως και σε σημεία τα οποία βρίσκονται έξω από τα όριά του. Έτσι, ένα κρίσιμο σημείο για την αποδεκτή μορφοποίηση του CFD πλέγματος, είναι ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η μετάβαση από την περιοχή επιρροής του κλωβού στην περιοχή έξω από το αρμονικό χωρίο, η οποία παραμένει ανέπαφη. Είναι αναγκαίο η μετάβαση αυτή να γίνεται όσο το δυνατόν ομαλότερα, διότι στην αντίθετη περίπτωση υπάρχει κίνδυνος δημιουργίας μη αποδεκτών στοιχείων στο πλέγμα.

Για την αντιμετώπιση αυτού του φαινομένου, σε προηγούμενη διπλωματική εργασία [[5]], εισήχθη η ιδέα του συστήματος δύο κλωβών, ενός εσωτερικού και ενός εξωτερικού. Οι κορυφές του εξωτερικού κλωβού παραμένουν σταθερές και, συνεπώς, τα σημεία ελέγχου του συστήματος ταυτίζονται αποκλειστικά με τις κορυφές του εσωτερικού κλωβού. Με τον τρόπο αυτόν, επιτυγχάνεται η ομαλή μετάβαση από τα σημεία του εσωτερικού κλωβού των οποίων η θέση επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό (αφού τα σημεία

ελέγχου του εσωτερικού κλωβού στον οποίο περιέχονται μετατοπίζονται), ως τα όρια του εξωτερικού κλωβού τα οποία δεν δέχονται καμία μετατόπιση.

Έστω M , το σύνολο των σημείων ελέγχου, με N εσωτερικά και N' εξωτερικά, είναι δηλαδή, $M = N + N'$. Η συνολική μετατόπιση του κόμβου K του CFD πλέγματος από τα σημεία ελέγχου του εσωτερικού και του εξωτερικού κλωβού, δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}\delta\vec{K} &= \sum_{i=1}^M w_i \delta\vec{C}_i \rightarrow \\ \delta\vec{K} &= \sum_{i=1}^N w_i \delta\vec{C}_i + \sum_{i=N+1}^{N'} w_i \delta\vec{C}_i\end{aligned}\quad (2.7)$$

είναι όμως

$$\sum_{i=N+1}^{N'} w_i \delta\vec{C}_i = 0\quad (2.8)$$

αφού οι κορυφές του εξωτερικού κλωβού δεν μετατοπίζονται. Η εξίσωση 2.7 παίρνει, πλέον, τη μορφή:

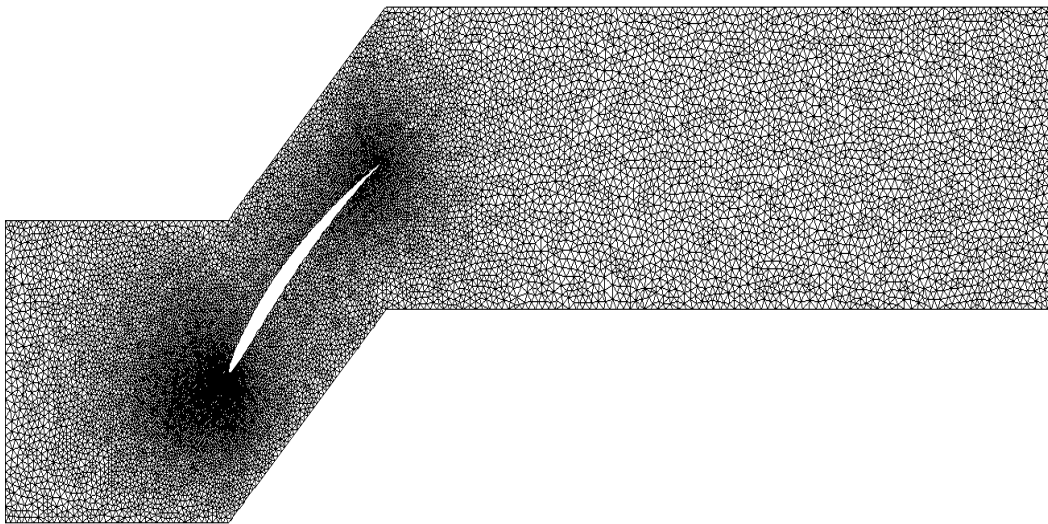
$$\delta\vec{K} = \sum_{i=1}^N w_i \delta\vec{C}_i\quad (2.9)$$

Από τις σχέσεις 2.7, 2.8, 2.9 φαίνεται ότι, στην περίπτωση συστήματος δύο κλωβών, όπου τα σημεία ελέγχου του εξωτερικού κλωβού παραμένουν σταθερά, η μετατόπιση των εσωτερικών σημείων του συστήματος εξαρτάται αποκλειστικά από τις αρμονικές συντεταγμένες που προκύπτουν από τα σημεία ελέγχου του εσωτερικού κλωβού και από τις μετατοπίσεις των σημείων αυτών. Γίνεται αντιληπτό, λοιπόν, ότι δεν χρειάζεται να υπολογιστούν τα βάρη των CFD κόμβων από τα N' εξωτερικά σημεία ελέγχου, αφού δεν θα χρησιμοποιηθούν. Έτσι, η Laplace επιλύεται μόνο για τα σημεία ελέγχου του εσωτερικού κλωβού, εξοικονομώντας με αυτόν τον τρόπο υπολογιστικό χρόνο.

Επακόλουθο των παραπάνω είναι ότι, τα βάρη των κόμβων που εσωκλείονται αποκλειστικά από το περίγραμμα του εσωτερικού κλωβού αθροίζουν στην μονάδα, αντίθετα, τα σημεία που βρίσκονται ανάμεσα στους δύο κλωβούς έχουν άθροισμα βαρών υποχρεωτικά μικρότερο της μονάδας. Αυτό συμβαίνει διότι για τα σημεία αυτά δεν υπολογίστηκαν οι αρμονικές συντεταγμένες από τις κορυφές του εξωτερικού κλωβού.

2.2 Εφαρμογή σε Περιοδικό Χωρίο

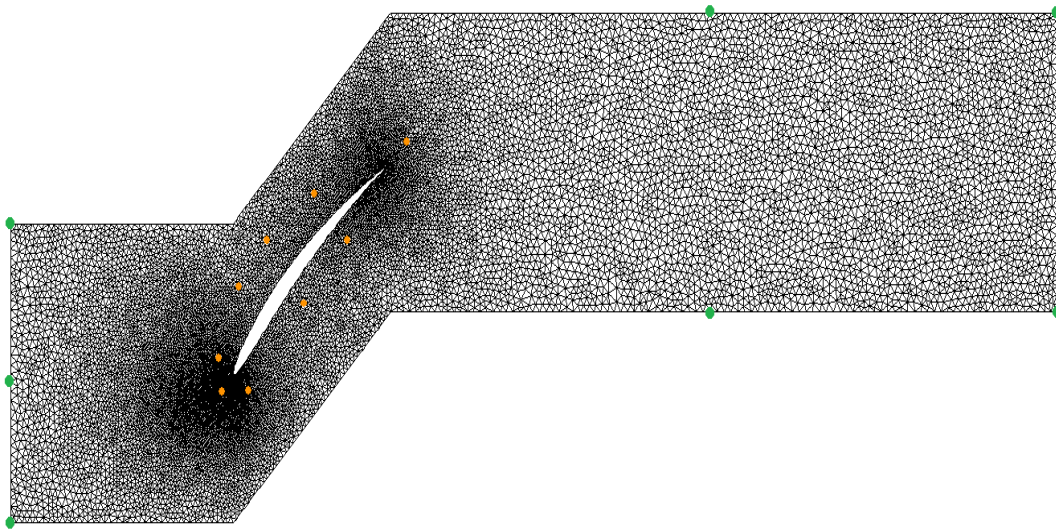
Όλη η ανωτέρω θεωρία εφαρμόζεται σε 2Δ περιοδικό υπολογιστικό πλέγμα στροβιλομηχανών. Επιλέγεται αεροτομή πτερύγωσης συμπίεστη και το υπολογιστικό χωρίο γύρω από αυτήν, σχήμα 2.3. Το πλεγματοποιημένο χωρίο αυτό αποτελεί το CFD πλέγμα της εφαρμογής, το οποίο ζητείται να παραμορφωθεί. Στην πραγματικότητα, το σχήμα της αεροτομής είναι αυτό που ζητείται να παραμορφωθεί, και κατ' επέκταση να βελτιστοποιηθεί, αυτό όμως πρακτικά υλοποιείται με τη μετακίνηση των κόμβων γύρω από αυτήν.



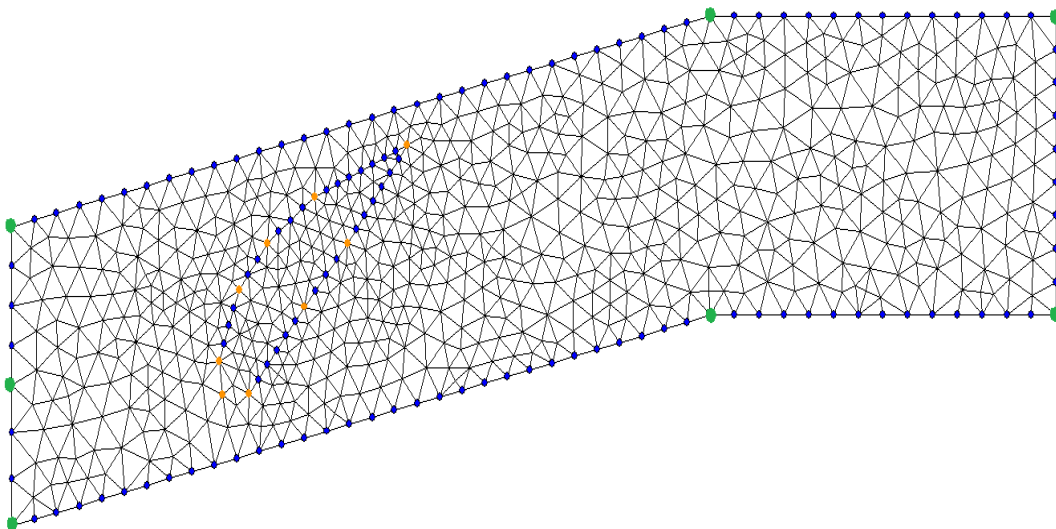
Σχήμα 2.3: Πτερύγωση συμπίεστη και υπολογιστικό χωρίο μαζί με το CFD πλέγμα μέσα σε αυτήν. Το σύστημα κλωβών που επιλέγεται πρέπει να σέβεται την περιοδικότητα του χωρίου.

Σύμφωνα με την τεχνική των δύο κλωβών πρέπει να επιλεχθούν κορυφές για τον εσωτερικό και για τον εξωτερικό κλωβό. Οι κορυφές του εσωτερικού κλωβού είναι αυτές που θα δεχτούν μετατόπιση και, συνεπώς, αυτές που θα επηρεάσουν το περίγραμμα της αεροτομής. Για τον λόγο αυτόν, πρέπει να τοποθετηθούν σχετικά κοντά στο περίγραμμα της αεροτομής ώστε η επίδραση της μετατόπισης τους σε αυτό να είναι αισθητή. Όσον αφορά στα σημεία ελέγχου του εξωτερικού κλωβού, είναι απαραίτητο να δημιουργούν και αυτά ένα περιοδικό πλέγμα με βήμα υποχρεωτικά ίδιο με το βήμα (pitch) της πτερύγωσης. Δεν είναι όμως αναγκαίο το περιοδικό πλέγμα του κλωβού να συμπίπτει ακριβώς με το περιοδικό πλέγμα CFD.

Τα σημεία που επιλέγονται ως κορυφές του εσωτερικού και του εξωτερικού κλωβού απεικονίζονται στο σχήμα 2.4 και το αρμονικό πλέγμα το οποίο δημιουργείται από το σύστημα των δύο κλωβών στο σχήμα 2.5.

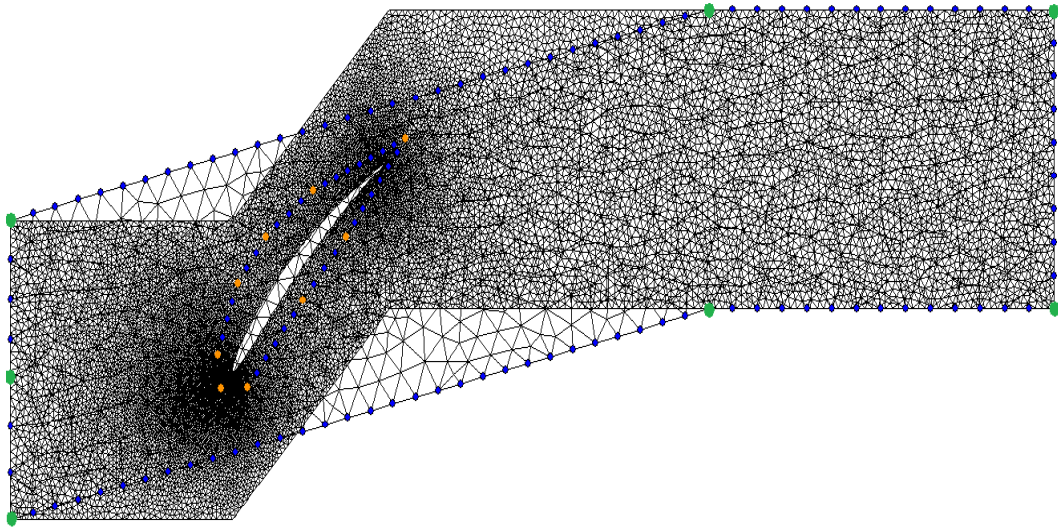


Σχήμα 2.4: Κόμβοι του CFD πλέγματος οι οποίοι επιλέγονται ως κορυφές των δύο κλωβών. Με πορτοκαλί χρώμα σημειώνονται τα σημεία ελέγχου του εσωτερικού κλωβού και με πράσινο του εξωτερικού. Τα σημεία ελέγχου του εξωτερικού κλωβού επιβάλλεται να δημιουργούν περιοδικό πλέγμα με βήμα υποχρεωτικά ίδιο με αυτό της πτερύγωσης.



Σχήμα 2.5: Αρμονικό πλέγμα το οποίο δημιουργείται από το σύστημα των δύο κλωβών για το υπολογιστικό χωρίο του σχήματος 2.3. Με πορτοκαλί χρώμα σημειώνονται τα σημεία ελέγχου του εσωτερικού κλωβού και με πράσινο του εξωτερικού.

Τοποθετώντας το αρμονικό πλέγμα πάνω στο CFD πλέγμα, σχήμα 2.6, παρατηρούνται περιοχές του CFD πλέγματος οι οποίες δεν ανήκουν στο αρμονικό χωρίο, όπως και περιοχές του αρμονικού πλέγματος οι οποίες δεν περιέχουν κόμβους CFD. Συνεπώς, για τους κόμβους αυτούς του CFD πλέγματος που βρίσκονται εκτός του συστήματος των δύο κλωβών δεν μπορεί να γίνει άμεση παρεμβολή ώστε να υπολογιστούν τα βάρη τους, αφού δεν ανήκουν σε κάποιο τριγωνικό στοιχείο του αρμονικού πλέγματος.

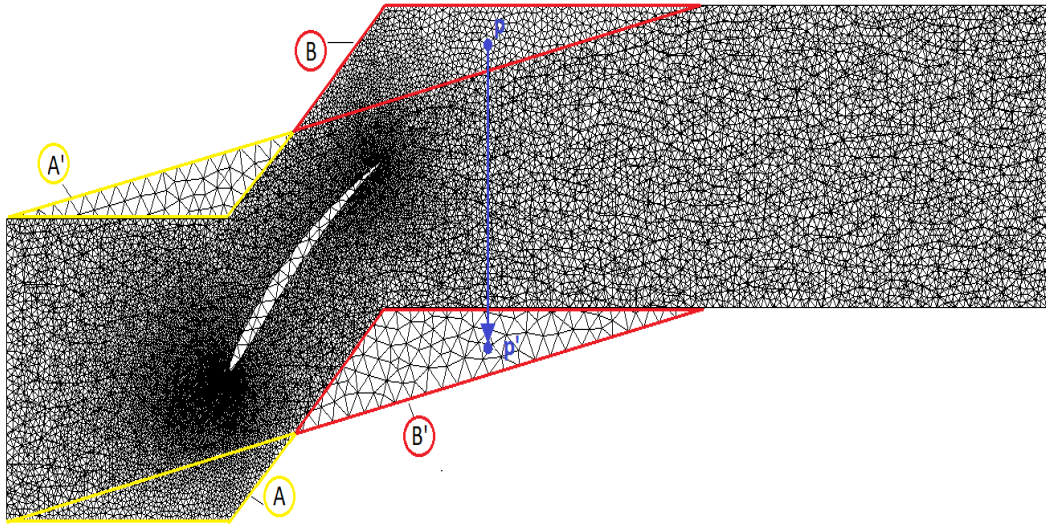


Σχήμα 2.6: Πλέγμα CFD και αρμονικό πλέγμα. Παρατηρείται ότι υπάρχουν κόμβοι του CFD πλέγματος οι οποίοι δεν ανήκουν σε τριγωνικό στοιχείο του αρμονικού πλέγματος.

Λόγω του ότι, το αρμονικό και το CFD πλέγμα είναι περιοδικά με ίδιο βήμα, οι περιοχές του CFD πλέγματος οι οποίες βρίσκονται εκτός του περιγράμματος του εξωτερικού κλωβού, συμπίπτουν με τις περιοχές του αρμονικού πλέγματος οι οποίες δεν περιέχουν κόμβους CFD. Έτσι, όπως απεικονίζεται στο σχήμα 2.7, η περιοχή A του CFD πλέγματος συμπίπτει με την περιοχή A' του αρμονικού χωρίου και η περιοχή B με τη B'.

Συνεπώς, ένας κόμβος $p(x, y)$ του CFD πλέγματος που βρίσκεται εκτός του εξωτερικού κλωβού (σχήμα 2.7), μπορεί να μετακινηθεί κατά απόσταση ίση με το βήμα της περυγώσης στην κατακόρυφη κατεύθυνση και έτσι να δημιουργηθεί ένας νέος νοητός κόμβος p' . Ο νοητός κόμβος p' έχει ίδια τετμημένη με τον p και τεταγμένη μετατοπισμένη κατά το βήμα της περυγώσης. Ο νέος κόμβος p' ανήκει, πλέον, σε τριγωνικό στοιχείο του αρμονικού χωρίου και έτσι μπορεί να υπολογιστεί το βάρος του με παρεμβολή. Το βάρος που υπολογίζεται για τον κόμβο p' είναι το βάρος που δίνεται και στον κόμβο p , ώστε να είναι δυνατόν μετέπειτα να υπολογιστεί και η μετατόπισή του.

Όπως φαίνεται και από το σχήμα 2.7, αν ο κόμβος για τον οποίο ζητείται το βάρος, βρίσκεται στην περιοχή A του CFD πλέγματος, τότε πρέπει να προστεθεί στην τεταγμένη του απόσταση ίση με το βήμα της περυγώσης ώστε ο κόμβος p' να ανήκει στην περιοχή A' και να είναι δυνατόν να υπολογιστεί το βάρος του. Αν όμως βρίσκεται στην περιοχή B του CFD πλέγματος πρέπει να γίνει η ίδια διαδικασία με αφαίρεση, όμως, του βήματος από την τεταγμένη του.

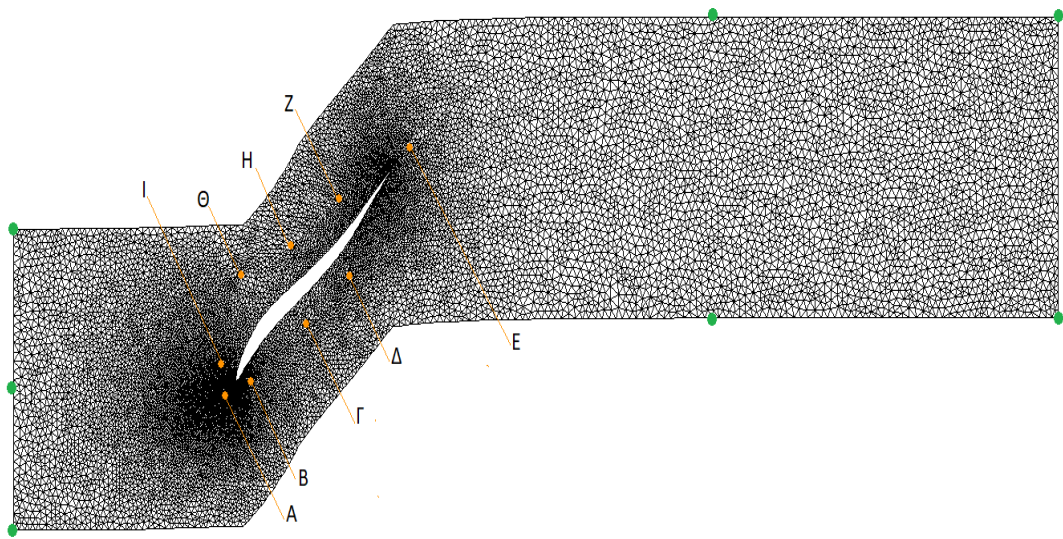


Σχήμα 2.7: Τοποθέτηση CFD πλέγματος στο αρμονικό πλέγμα. Υπάρχουν περιοχές οι οποίες δεν επικαλύπτονται.

Αφού υπολογίστηκαν τα βάρη όλων των κόμβων του CFD πλέγματος, είναι δυνατόν να δοθεί μετατόπιση στα σημεία ελέγχου των κλωβών, ώστε να παραμορφωθεί το περίγραμμα της αεροτομής. Υπενθυμίζεται ότι οι κορυφές του εξωτερικού κλωβού δεν μετατοπίζονται. Οι μετατοπίσεις των κορυφών του εσωτερικού κλωβού δίνονται στον πίνακα 2.1. Στο σχήμα 2.8 απεικονίζεται το τελικό περίγραμμα της αεροτομής μετά τις μετατοπίσεις των σημείων ελέγχου. Τονίζεται ότι εκτός του περιγράμματος της αεροτομής, έχει δεχτεί παραμόρφωση και το περιοδικό όριο του πλέγματος.

	A	B	Γ	Δ	E	Z	H	Θ	I
δx	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0	0
δy	0	0.05	-0.05	-0.1	0	0	0	0.06	0

Πίνακας 2.1: Μετατοπίσεις κατά- x και κατά- y που δόθηκαν στα σημεία του εσωτερικού κλωβού A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I.



Σχήμα 2.8: Θέση σημείων ελέγχου μετά την μετατόπισή τους και τελική παραμόρφωση CFD πλέγματος.

Κεφάλαιο 3

Παραμετρική Μελέτη και Βελτιστοποίηση Περιγράμματος Αεροτομών 2Δ Πτερυγώσεων

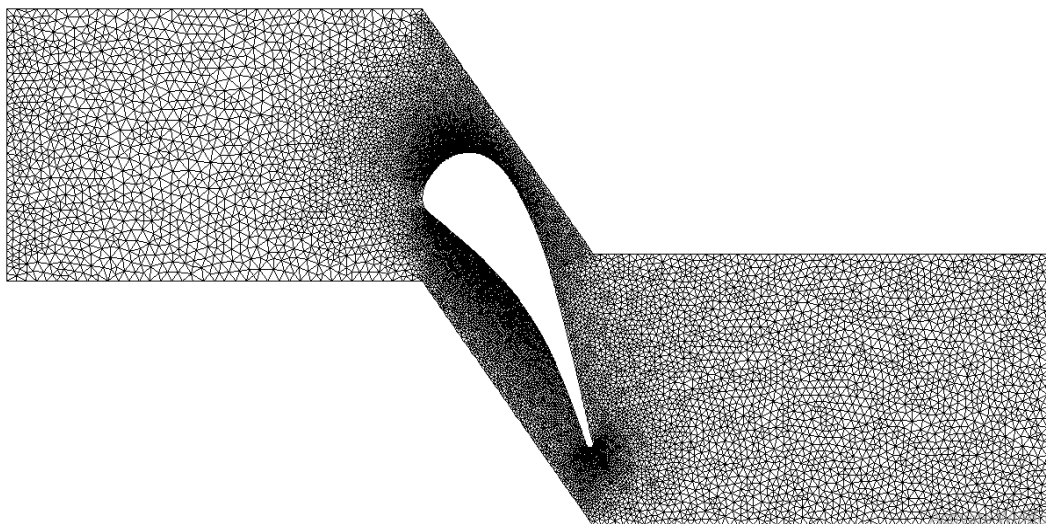
3.1 Παραμετρική Μελέτη

Στην ενότητα αυτή, δίνονται κάποιες βασικές κατευθύνσεις για τον σχηματισμό του συστήματος των δύο κλωβών. Επιλέγεται η αεροτομή πτερύγωσης στροβίλου και το CFD μέσα σε αυτήν, του σχήματος 3.1.

Μία πολύ σημαντική παράμετρος για τη σωστή διεξαγωγή της μεθόδου, είναι ο αριθμός των αρμονικών κόμβων που παρεμβάλλονται μεταξύ των δύο κλωβών στην περιοχή όπου αυτοί πλησιάζουν, δηλαδή κοντά στο περίγραμμα της αεροτομής. Στο περίγραμμα του εσωτερικού κλωβού οι αρμονικές συντεταγμένες λαμβάνουν τιμή ίση με τη μονάδα, ενώ στον εξωτερικό κλωβό μηδενική τιμή. Συνεπώς, μεταξύ των δύο κλωβών πρέπει να παρεμβάλλονται αρκετά σημεία, έτσι ώστε οι τιμές των αρμονικών συντεταγμένων στους ενδιάμεσους κόμβους να φθίνουν ομαλά από τη μονάδα προς το μηδέν.

Το σχήμα 3.2 απεικονίζει ένα αραιό αρμονικό πλέγμα. Ένα πλέγμα τέτοιας μορφής, αν και οικονομικό στην επίλυση της εξίσωσης Laplace στους κόμβους του, είναι ακατάλληλο για τη μέθοδο διότι υπάρχουν τμήματα πλέγματος ανάμεσα στους δύο κλωβούς όπου παρεμβάλλεται μόνο ένας ή και κανένας αρμονικός κόμβος, τα τμήματα αυτά σημειώνονται στο ίδιο σχήμα. Σε ένα τέτοιο αρμονικό πλέγμα δεν γίνεται σωστά η μετάβαση από τον εσωτερικό στον εξωτερικό κλωβό, γεγονός το οποίο επηρεάζει τα

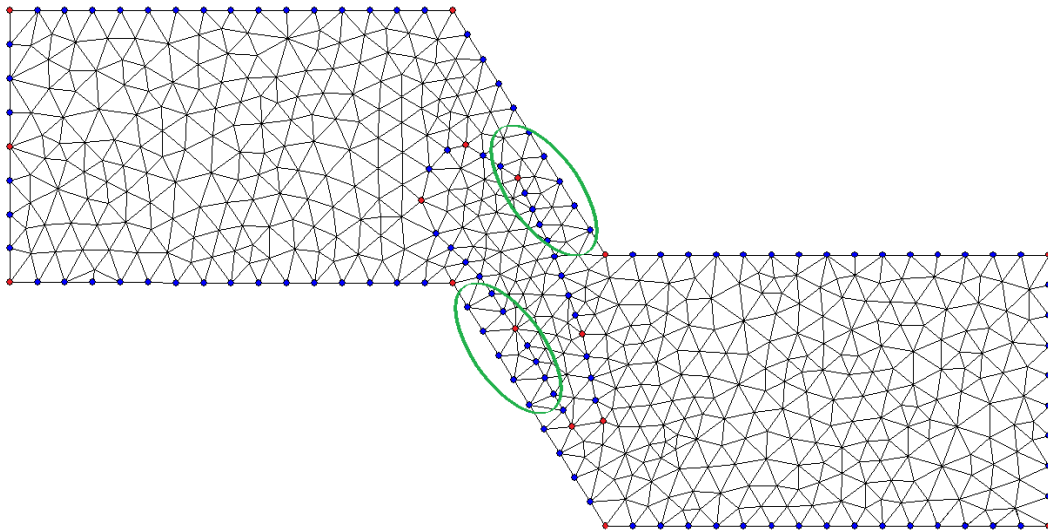
βάρη του CFD πλέγματος και, συνεπώς, την παραμόρφωσή του.



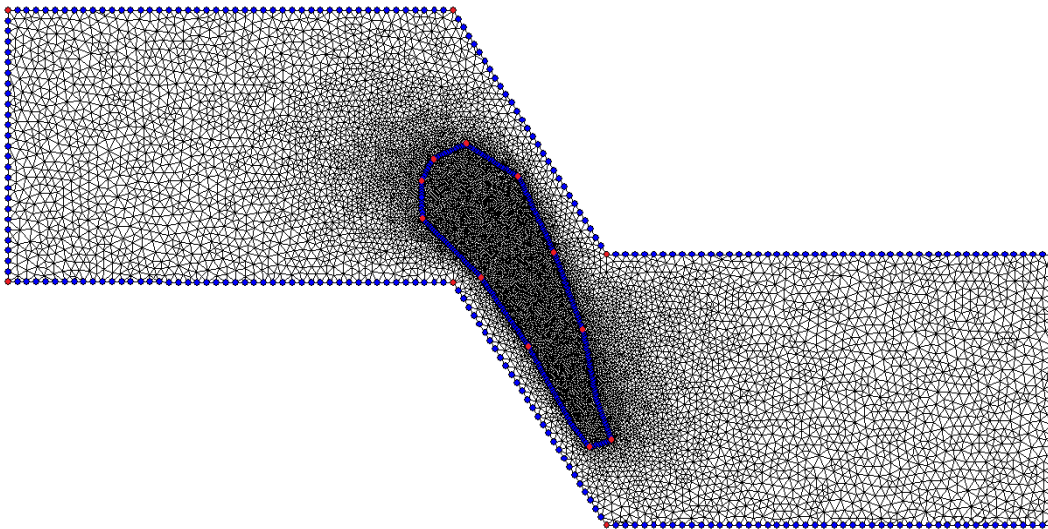
Σχήμα 3.1: Αεροτομή περύγωσης στροβίλου και CFD πλέγμα το οποίο επιλέγεται για την παρουσίαση των σωστών βημάτων δημιουργίας συστήματος δύο κλωβών.

Το σχήμα 3.3 απεικονίζει ένα πυκνότερο αρμονικό χωρίο όπου μεταξύ των δύο κλωβών στην περιοχή κοντά στο περίγραμμα της αεροτομής, παρεμβάλλονται αρκετά σημεία ώστε να εξασφαλίζεται η ομαλή μετάβαση. Ένα τέτοιο πλέγμα, όμως, φέρει μεγάλο υπολογιστικό κόστος για την επίλυση της εξίσωσης Laplace χωρίς την ταυτόχρονη βελτίωση των αποτελεσμάτων. Συνεπώς, χαρακτηρίζεται, επίσης, ως ακατάλληλο.

Επομένως, ο αριθμός των σημείων που τοποθετούνται ενδιάμεσα των δύο κλωβών πρέπει να είναι τέτοιος ώστε να αποσβένουν ομαλά οι τιμές των αρμονικών συντεταγμένων σε αυτούς αλλά και να μην αυξάνεται κατά πολύ το υπολογιστικό κόστος. Ο τελικός αριθμός σημείων που τοποθετούνται ποικίλει ανάλογα την εφαρμογή.



Σχήμα 3.2: Αραιό αρμονικό πλέγμα και σύστημα δύο κλωβών. Με κόκκινο χρώμα σημειώνονται οι κορυφές του εσωτερικού και του εξωτερικού κλωβού. Στα τμήματα του πλέγματος που σημειώνονται, οι αρμονικοί κόμβοι μεταξύ των δύο κλωβών δεν είναι αρκετοί ώστε να αποσβένουν ομαλά οι τιμές των αρμονικών συντεταγμένων σε αυτούς.



Σχήμα 3.3: Πυκνότερο αρμονικό πλέγμα και σύστημα δύο κλωβών. Με κόκκινο χρώμα σημειώνονται οι κορυφές του εσωτερικού και του εξωτερικού κλωβού. Η απόσβεση των τιμών των αρμονικών συντεταγμένων στους κόμβους επιτυγχάνεται, παρ' όλα αυτά το υπολογιστικό κόστος αυξάνεται κατά πολύ.

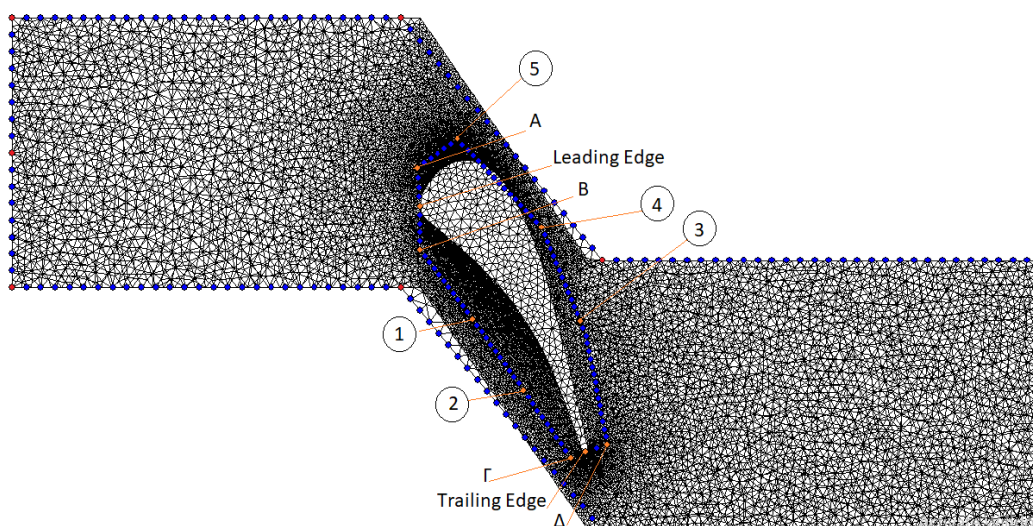
Οι κορυφές των δύο κλωβών πρέπει να τοποθετούνται με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται ότι δεν τέμνονται τα περιγράμματα των δύο κλωβών αλλά και ότι υπάρχει αρκετή απόσταση μεταξύ τους, ώστε να είναι δυνατόν να τοποθετηθούν όσοι κόμβοι χρειάζονται, για τους λόγους που αναφέρθηκαν παραπάνω. Το υπολογιστικό χωρίο

του σχήματος 3.1, όπως και όλα τα υπολογιστικά χωρία CFD που χρησιμοποιούνται στην μεταπτυχιακή εργασία αυτή, είναι περιοδικό χωρίο, συνεπώς, όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο εξωτερικός κλωβός είναι απαραίτητο να δημιουργεί περιοδικό χωρίο με βήμα ίδιο με αυτό της πτερυγώσης. Ο εσωτερικός κλωβός είναι επιθυμητό να ακολουθεί τη μορφή του περιγράμματος της αεροτομής έτσι ώστε να μπορεί να ελέγξει καλύτερα το σχήμα της.

Συγκεκριμένα για την περίπτωση των πτερυγώσεων, είναι επιθυμητό να διατηρείται σταθερό το μήκος της χορδής. Για αυτόν τον λόγο, τοποθετούνται δύο σημεία, ένα στην ακμή προσβολής και ένα στην ακμή εκφυγής, των οποίων η θέση διατηρείται σταθερή καθ' όλη την διαδικασία. Επίσης, σταθερή επιθυμείται να διατηρείται η μορφή της αεροτομής τόσο στην ακμή προσβολής όσο και στην ακμή εκφυγής. Έτσι, τοποθετούνται στις δύο ακμές, ακόμα δύο σημεία συνενθιακά με αυτές, των οποίων η θέση διατηρείται σταθερή.

Στο σχήμα 3.4 απεικονίζεται ένα προτεινόμενο σύστημα δύο κλωβών για το υπολογιστικό πλέγμα 3.1. Τα σημεία A και B είναι συνενθιακά με την ακμή προσβολής ενώ τα Γ και Δ με την ακμή εκφυγής. Οι δύο ακμές και τα σημεία A, B, Γ, Δ παραμένουν ακίνητα. Τα σημεία 1, 2, 3, 4, 5 είναι αυτά που δέχονται μετατόπιση. Για τη συγκεκριμένη διάταξη τα σημεία μπορούν να μετατοπιστούν κατά 2,5 mm, όταν μετακινούνται όλα με την ίδια μέγιστη μετατόπιση, διότι για μεγαλύτερες τιμές δημιουργούνται μη αποδεκτά τριγωνικά στοιχεία.

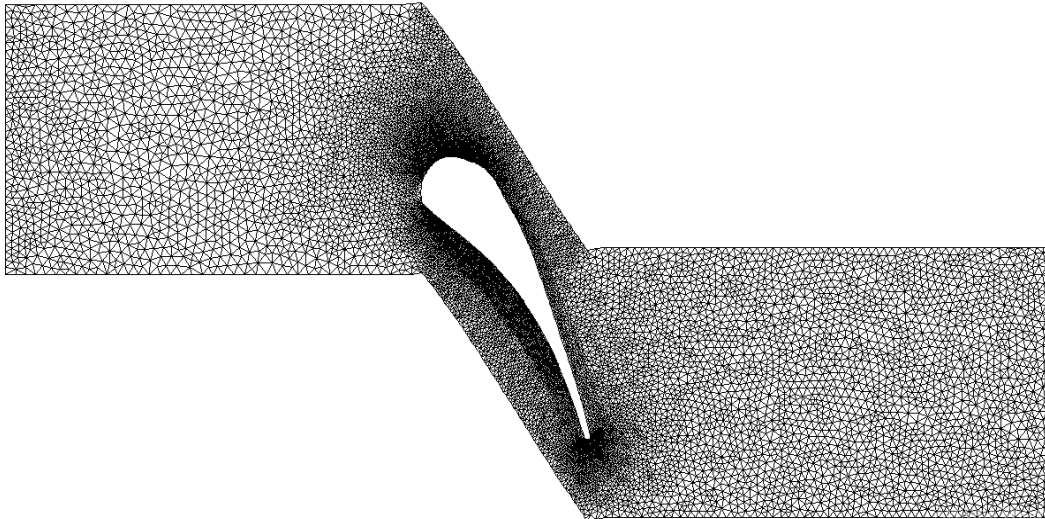
Στη συνέχεια δίνονται μετατοπίσεις στα σημεία 1, 2, 3, 4, 5 οι οποίες αναγράφονται στους πίνακες 3.1 και 3.2, με τα αντίστοιχα υπολογιστικά χωρία τα οποία προκύπτουν να απεικονίζονται στα σχήματα 3.5 και 3.6 αντίστοιχα.



Σχήμα 3.4: Σύστημα δύο κλωβών για το υπολογιστικό χωρίο 3.1. Η ακμή προσβολής, η ακμή εκφυγής και τα σημεία A, B, Γ, Δ παραμένουν ακίνητα. Τα υπόλοιπα σημεία δέχονται μετατόπιση έως 2,5 mm.

	1	2	3	4	5
δx (mm)	2,5	2,5	-2,5	-2,5	-2,5
δy (mm)	2,5	2,5	-2,5	-2,5	-2,5

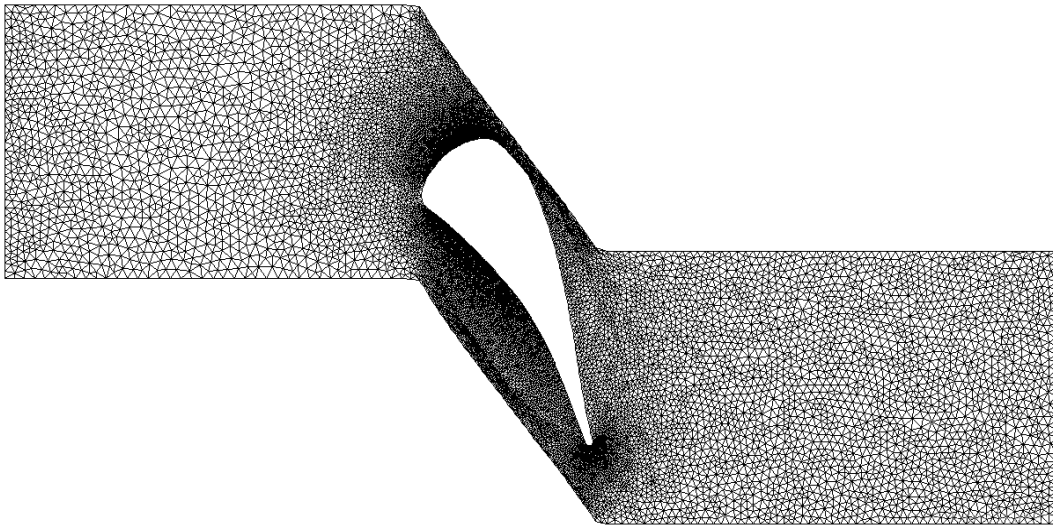
Πίνακας 3.1: Μετατοπίσεις κατά- x και κατά- y που δόθηκαν στα σημεία του εσωτερικού κλωβού 1, 2, 3, 4, 5.



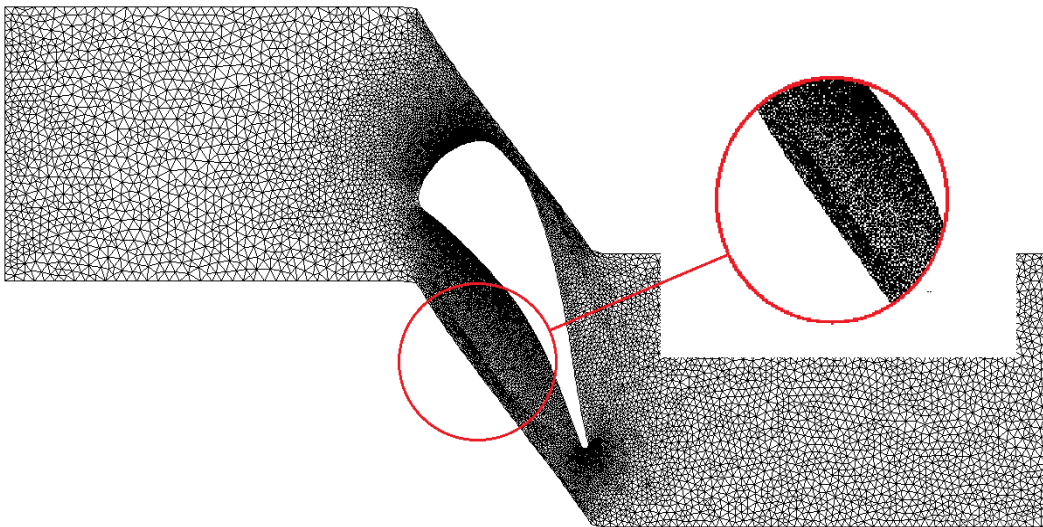
Σχήμα 3.5: Παραμόρφωση χωρίου και CFD πλέγματος μετά από μετατόπιση των σημείων του εσωτερικού κλωβού όπως υποδεικνύει ο πίνακας 3.1. Το υπολογιστικό πλέγμα έχει πυκνώσει αρκετά γύρω από το περίγραμμα της αεροτομής, παρ' όλα αυτά δεν έχουν δημιουργηθεί μη-αποδεκτά στοιχεία πλέγματος.

	1	2	3	4	5
δx (mm)	-2,5	-2,5	2,5	2,5	2,5
δy (mm)	-2,5	-2,5	2,5	2,5	2,5

Πίνακας 3.2: Μετατοπίσεις κατά- x και κατά- y που δόθηκαν στα σημεία του εσωτερικού κλωβού 1, 2, 3, 4, 5.



Σχήμα 3.6: Παραμόρφωση χωρίου και CFD πλέγματος μετά από μετατόπιση των σημείων του εσωτερικού κλωβού όπως υποδεικνύει ο πίνακας 3.2.



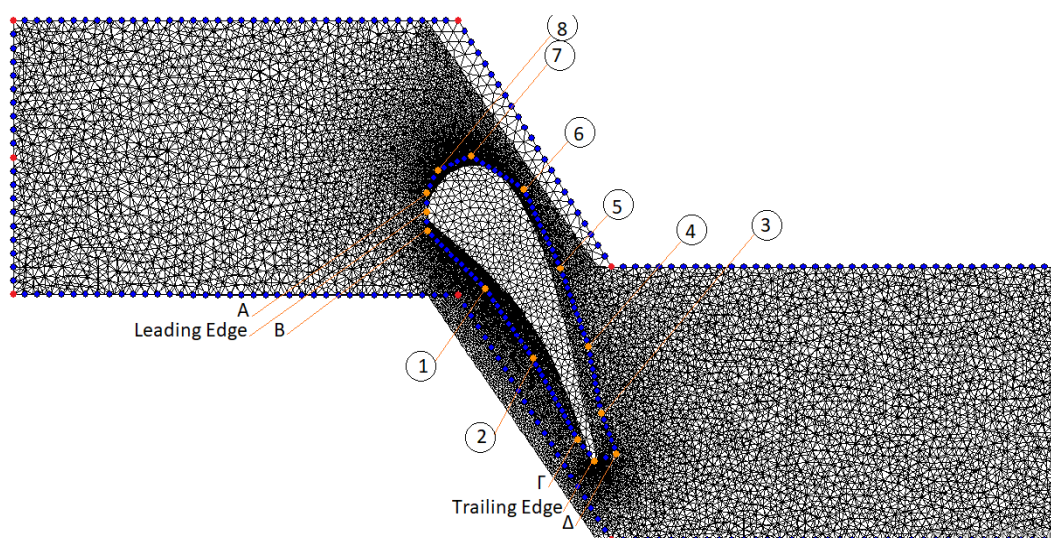
Σχήμα 3.7: Σημειώνεται τμήμα του πλέγματος όπου αυτό έχει συσσωρευτεί κοντά στο περιοδικό όριο. Αυτό συμβαίνει λόγω των μετακινήσεων που δόθηκαν στις κορυφές καθώς και λόγω της μορφής του περιγράμματος του εξωτερικού κλωβού.

Στο σχήμα 3.7 σημειώνεται τμήμα του πλέγματος όπου φαίνονται οι κόμβοι να έχουν συσσωρευτεί κοντά στο περιοδικό όριο. Αυτό συμβαίνει αφενός λόγω των μετακινήσεων που έχουν δοθεί στις κορυφές του εσωτερικού κλωβού και αφετέρου λόγω του περιγράμματος του εξωτερικού κλωβού. Στις κορυφές 1 και 2 (σχ. 3.4) δόθηκαν αρνητικές μετατοπίσεις τόσο κατά τον άξονα x όσο και κατά τον y (πίνακας 3.2). Έτσι, τα σημεία αυτά μετακινούνται προς τα αρνητικά x και τα αρνητικά y και καθώς επιδρούν στους κόμβους του CFD πλέγματος μετακινούνται και αυτοί προς την ίδια κατεύθυνση.

Το περίγραμμα του εξωτερικού κλωβού όμως δεν τους επιτρέπει να μετακινήθουν πέρα από αυτόν και έτσι συσσωρεύονται στο σημείο αυτό. Το ίδιο παρατηρείται και στην πάνω πλευρά του περιοδικού ορίου.

Στο σχήμα 3.8 απεικονίζεται ένα ακόμα προτεινόμενο σύστημα κλωβών για την περύγωση στροβίλου. Σε αυτήν την περίπτωση, ο εσωτερικός κλωβός αποτελείται από περισσότερα σημεία τα οποία ακολουθούν πιο πιστά την μορφή της αεροτομής. Ακόμα, παρατηρείται ότι το σημείο Γ το οποίο σύμφωνα με τα προαναφερθέντα θα έπρεπε να είναι συνευθειακό με το σημείο Δ και την ακμή εκφυγής, δεν είναι. Αντιθέτως έχει τοποθετηθεί σε άλλη θέση. Αυτό συμβαίνει διότι, με τη συγκεκριμένη διάταξη των δύο κλωβών, αν τοποθετείτο συνευθειακά, θα συνέπιπτε με τον εξωτερικό κλωβό. Η μετατόπιση που μπορούν να δεχτούν τα σημεία είναι μέχρι 2 mm, για μεγαλύτερη μετατόπιση δημιουργούνται μη αποδεκτά τριγωνικά στοιχεία.

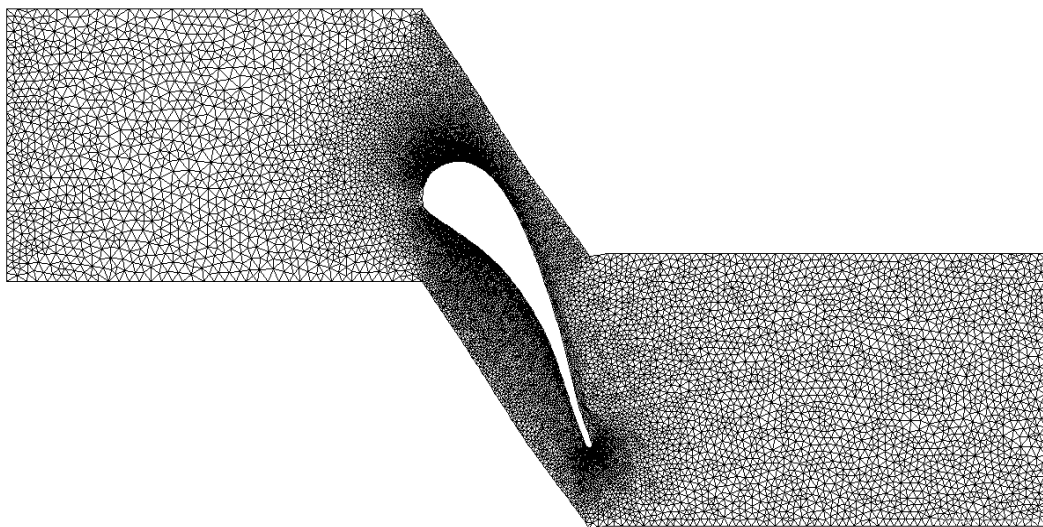
Στη συνέχεια, δίνονται μετατοπίσεις στα σημεία 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 οι οποίες αναγράφονται στους πίνακες 3.3 και 3.4, με τα αντίστοιχα υπολογιστικά χωρία τα οποία προκύπτουν να απεικονίζονται στα σχήματα 3.9 και 3.10 αντίστοιχα.



Σχήμα 3.8: Σύστημα δύο κλωβών για το υπολογιστικό χωρίο 3.1. Η ακμή προσβολής, η ακμή εκφυγής και τα σημεία A, B, Γ, Δ παραμένουν ακίνητα. Τα υπόλοιπα σημεία δέχονται μετατόπιση έως 2 mm.

	1	2	3	4	5	6	7	8
δx (mm)	2	2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
δy (mm)	2	2	-2	-2	-2	-2	-2	-2

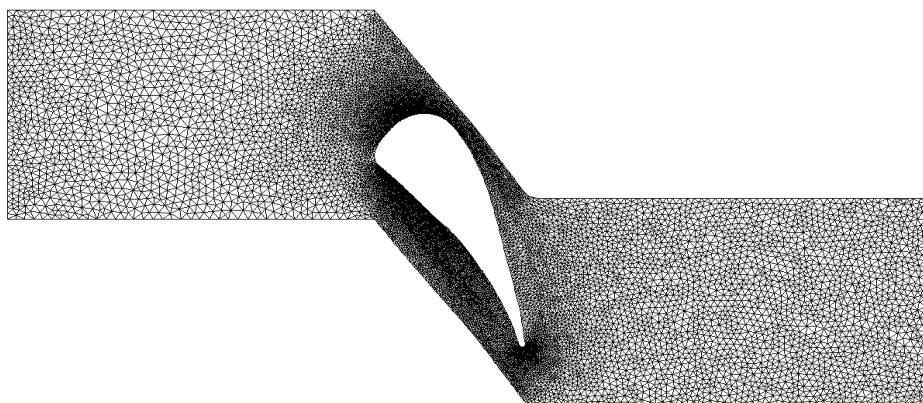
Πίνακας 3.3: Μετατοπίσεις κατά-x και κατά-y που δόθηκαν στα σημεία του εσωτερικού κλωβού 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.



Σχήμα 3.9: Παραμόρφωση χωρίου και CFD πλέγματος μετά από μετατόπιση των σημείων του εσωτερικού κλωβού όπως υποδεικνύει ο πίνακας 3.3.

	1	2	3	4	5	6	7	8
δx (mm)	-2	-2	2	2	2	2	2	2
δy (mm)	-2	-2	2	2	2	2	2	2

Πίνακας 3.4: Μετατοπίσεις κατά $-x$ και κατά $-y$ που δόθηκαν στα σημεία του εσωτερικού κλωβού 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.



Σχήμα 3.10: Παραμόρφωση χωρίου και CFD πλέγματος μετά από μετατόπιση των σημείων του εσωτερικού κλωβού όπως υποδεικνύει ο πίνακας 3.4.

Γίνεται αντιληπτό από τα παραπάνω, ότι ο αριθμός και ο τρόπος με τον οποίο τοποθετούνται τα σημεία ελέγχου του εσωτερικού και του εξωτερικού κλωβού έχει μεγάλη επίδραση στη μετατόπιση την οποία μπορούν να δεχτούν τα σημεία όπως και στην τελική παραμόρφωση του CFD πλέγματος.

Συνοψίζοντας, τα σημεία στα οποία πρέπει να δοθεί προσοχή κατά τη δημιουργία του συστήματος των δύο κλωβών είναι:

- Τα σημεία του εξωτερικού κλωβού πρέπει να δημιουργούν περιοδικό χωρίο με βήμα ίσο με το βήμα της πτερύγωσης.
- Τα σημεία του εσωτερικού κλωβού πρέπει να ακολουθούν όσο το δυνατόν καλύτερα τη μορφή του περιγράμματος τη αεροτομής.
- Μεταξύ εξωτερικού και εσωτερικού κλωβού, στην περιοχή κοντά στο περίγραμμα της αεροτομής, πρέπει να υπάρχει αρκετή απόσταση ώστε να είναι δυνατόν να τοποθετηθούν όσοι κόμβοι είναι απαραίτητοι για την απόσβεση των τιμών των αρμονικών συντεταγμένων.
- Με την κατάλληλη τοποθέτηση των σημείων ελέγχου, το μήκος της χορδής της αεροτομής και η μορφή της ακμής προσβολής και της ακμής εκφυγής πρέπει να διατηρούνται σταθερά.

3.2 Βελτιστοποίηση Περιγράμματος Αεροτομών 2Δ Πτερυγώσεων

Στην ενότητα αυτή, χρησιμοποιείται η θεωρία του κεφαλαίου 2 καθώς και οι παρατηρήσεις της προηγούμενης ενότητας 3.1 για την αεροδυναμική βελτιστοποίηση μορφής αεροτομών πτερυγώσεων στροβιλομηχανών. Γίνονται δύο εφαρμογές, η πρώτη αφορά σε πτερύγωση συμπιεστή και η δεύτερη σε πτερύγωση στροβίλου. Στη συνέχεια, δίνονται τα βασικά βήματα που ακολουθούνται για τη βελτιστοποίηση.

- Βήμα 1^ο Γένεση CFD πλέγματος. Στο πρώτο βήμα ορίζεται το ποιο είναι το χωρίο και το υπολογιστικό πλέγμα το οποίο παραμορφώνεται.
- Βήμα 2^ο Ορισμός των σημείων του CFD πλέγματος τα οποία αποτελούν κορυφές των δύο κλωβών. Στο βήμα αυτό δίνεται ιδιαίτερη σημασία διότι η επιλογή των σημείων έχει άμεση επίδραση στο υπόλοιπο της διαδικασίας. Για το βήμα αυτό χρησιμοποιούνται όλα όσα αναφέρθηκαν στην ενότητα 3.1.
- Βήμα 3^ο Ορισμός μεταβλητών σχεδιασμού. Τις μεταβλητές σχεδιασμού αποτελούν οι κατά- x και κατά- y μετατοπίσεις των κορυφών του εσωτερικού κλωβού. Η μετατόπιση που τους επιτρέπεται δεν πρέπει να είναι πολύ μεγάλη διότι είναι πι-

θανό να προκύψουν μη-αποδεκτά στοιχεία πλέγματος, αλλά ούτε και πολύ μικρή διότι δεν θα υπάρξει αισθητή αλλαγή στο περίγραμμα της αεροτομής.

- Βήμα 4^ο Βελτιστοποίηση. Στο τελευταίο βήμα ορίζονται η αντικειμενική συνάρτηση και η μέθοδος βελτιστοποίησης. Την αντικειμενική συνάρτηση αποτελεί κάποιο μέγεθος της ροής, αφού οι εφαρμογές αφορούν προβλήματα ρευστοδυναμικής, το οποίο ορίζεται βάσει των δεδομένων του προβλήματος. Γίνεται χρήση στοχαστικών μεθόδων βελτιστοποίησης και, συγκεκριμένα, εξελικτικών αλγορίθμων (EA).

3.2.1 Βελτιστοποίηση με χρήση Εξελικτικών Αλγορίθμων (EA)

Ένας από τους βασικότερους εκπροσώπους των στοχαστικών μεθόδων βελτιστοποίησης, είναι οι εξελικτικοί αλγόριθμοι. Βασικά στοιχεία, που οδήγησαν στην γρήγορη και ευρεία επικράτησή τους, είναι η ευκολία με την οποία προσαρμόζονται σε κάθε νέο πρόβλημα, χωρίς να είναι απαραίτητη η παρέμβαση στην διαδικασία βελτιστοποίησης (πράγμα που απαιτούν οι αιτιοκρατικές μέθοδοι) και η δυνατότητά τους να μην εγκλωβίζονται σε τοπικά ακρότατα. Μειονέκτημά τους αποτελεί το ότι ο εντοπισμός της βέλτιστης λύσης απαιτεί συνήθως μεγάλο αριθμό αξιολογήσεων. Βασικό γνώρισμα των EA είναι ότι χειρίζονται πληθυσμούς υποψηφίων λύσεων και όχι μεμονωμένες λύσεις.

Ένας EA διαχειρίζεται τους εξής πληθυσμούς σε κάθε γενιά(γ):

- πληθυσμός των λ απογόνων P_λ^γ
- πληθυσμός των λ γονέων P_μ^γ
- πληθυσμός των λ γονέων P_ϵ^γ

Στους μ γονείς της τρέχουσας γενιάς εφαρμόζονται οι τελεστές διασταύρωσης και μετάλλαξης, δημιουργώντας έτσι τους απογόνους της τρέχουσας γενιάς. Από τους απογόνους αυτούς επιλέγονται τα καλύτερα άτομα ώστε να αποτελέσουν τον πληθυσμό των επίλεκτων της γενιάς, ελίτ. Η ύπαρξη πληθυσμού ελίτ εξυπηρετεί δύο σκοπούς. Πρώτον, διότι, αν σταματήσει η εξέλιξη το σύνολο αυτό περιέχει τις βέλτιστες λύσεις και δεύτερον, γιατί με τη διαδικασία του ελιτισμού αυξάνονται οι πιθανότητες να περάσουν τα καλά χαρακτηριστικά σε επόμενες γενιές.

Σε αυτήν τη μεταπτυχιακή εργασία, χρησιμοποιείται το λογισμικό βελτιστοποίησης EASY (Evolutionary Algorithm SYstem)[9], το οποίο έχει αναπτυχθεί από τη ΜΠΥΡ & Β του Ε.Θ.Σ. Το λογισμικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αντιμετώπιση προβλημάτων πολλών ή ενός στόχου με την επιβολή ή όχι περιορισμών. Επιπλέον, διαθέτει επιλογές για χρήση μεταπροτύπων. Με τη διαδικασία των μεταπροτύπων, πολλά άτομα

αξιολογούνται μέσω παρεμβολής και όχι με το λογισμικό αξιολόγησης εξοικονομώντας, έτσι, υπολογιστικό χρόνο.

Για τις εφαρμογές που παρουσιάζονται στη συνέχεια, οι παράμετροι του εξελικτικού αλγορίθμου είναι οι εξής:

- Πληθυσμός γονέων $\mu=30$,
- Πληθυσμός γονέων $\lambda=60$,
- Πληθυσμός ελίτ = 2,
- Χρήση μεταπροτύπων ακτινικής βάσης RBF,
- Μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων: 600

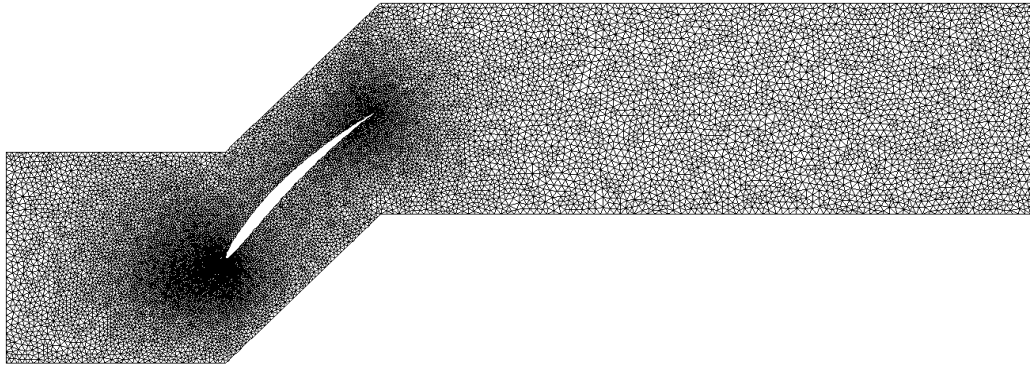
3.2.2 Πτερύγωση Συμπιεστή SC10

Πραγματοποιείται βελτιστοποίηση της μορφής πτερύγωσης συμπιεστή SC10[10] με αντικειμενική συνάρτηση την αύξηση της στατικής πίεσης, (p_2/p_1) . Η μορφή της αεροτομής ελέγχεται μέσω συστήματος δύο κλωβών. Το υπολογιστικό χωρίο γύρω από την πτερύγωση συμπιεστή SC10 (CDF πλέγμα) φαίνεται στο σχήμα 3.11. Οι συντεταγμένες του υπολογιστικού χωρίου έχουν αδιαστατοποιηθεί ως προς το μήκος της χορδής. Το σχήμα 3.12 απεικονίζει τους κόμβους του CFD πλέγματος οι οποίοι επιλέγονται ως κορυφές των δύο κλωβών.

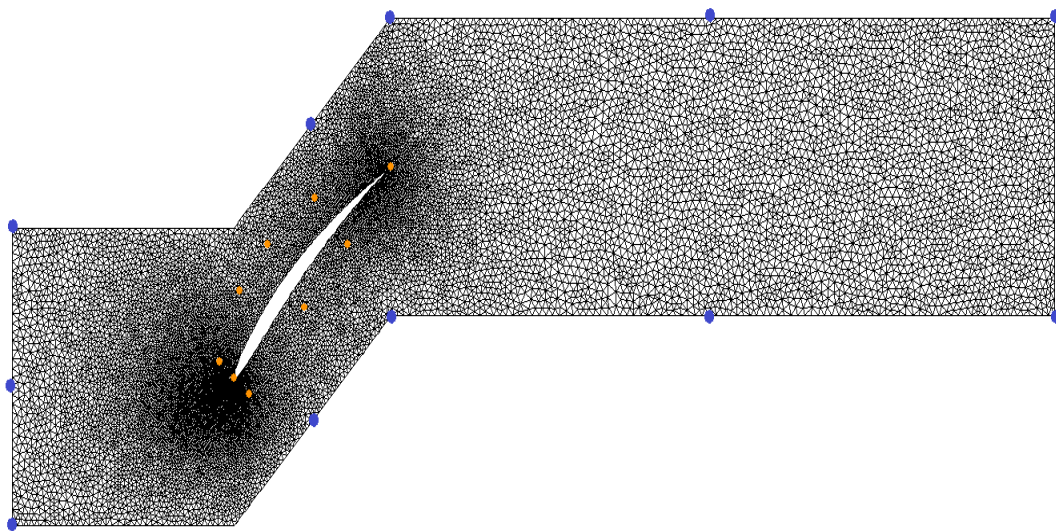
Στο σχήμα 3.13 απεικονίζεται το αρμονικό χωρίο, με πράσινο χρώμα σημειώνονται τα σημεία ελέγχου του εξωτερικού κλωβού, ενώ με κόκκινο και πορτοκαλί αυτά του εσωτερικού. Τα σημεία ελέγχου του εξωτερικού κλωβού δεν μετατοπίζονται. Τα πορτοκαλί σημεία ελέγχου του εσωτερικού κλωβού επίσης δεν μετατοπίζονται αφενός για να παραμείνει σταθερό το μήκος της χορδής, αφετέρου για να διατηρείται η καμπυλότητα στην ακμή προσβολής. Τα σημεία του εσωτερικού κλωβού με κόκκινο χρώμα επιδέχονται μετατόπιση είτε κατά x είτε κατά y κατά 0.05 (αδιάστατο μέγεθος).

Για την βελτιστοποίηση της μορφής της αεροτομής χρησιμοποιείται το λογισμικό EASY με 10 μεταβλητές σχεδιασμού, τις κατά x και τις κατά y μετατοπίσεις των πέντε σημείων ελέγχου του εσωτερικού κλωβού.

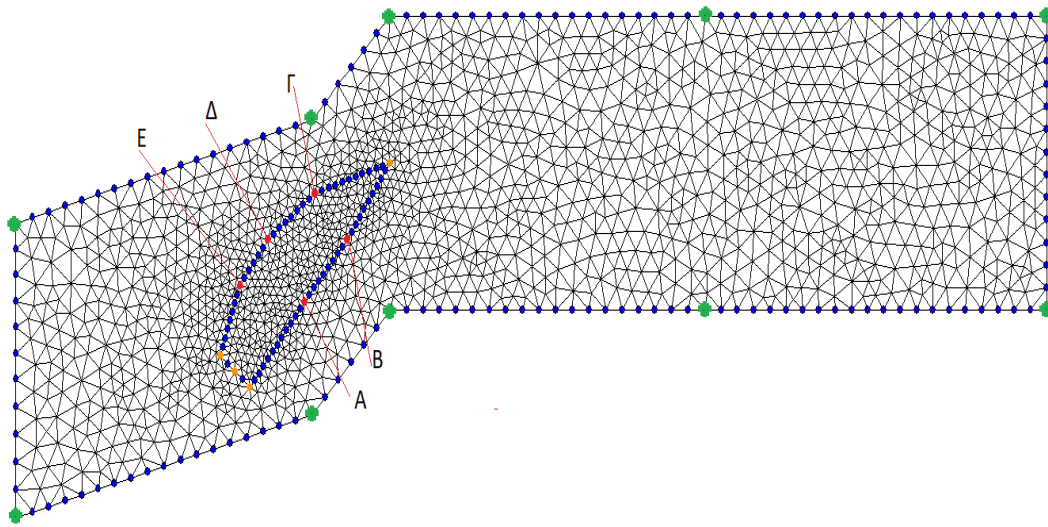
Η ροή θεωρείται ατριβής και εισέρχεται με γωνία $\alpha_1 = 58^\circ$. Ο ισεντροπικός αριθμός Mach εξόδου της ροής είναι $M_{2, is} = 0.4425$. Ο κώδικας για την επίλυση της ατριβούς ροής έχει αναπτυχθεί από τη ΜΠΥΡ&B του Ε.Θ.Σ.



Σχήμα 3.11: Πτερύγωση συμπίεστη SC10 και υπολογιστικό χωρίο 16092 κόμβων και 31536 τριγωνικών στοιχείων στο οποίο επιλύεται η ροή.

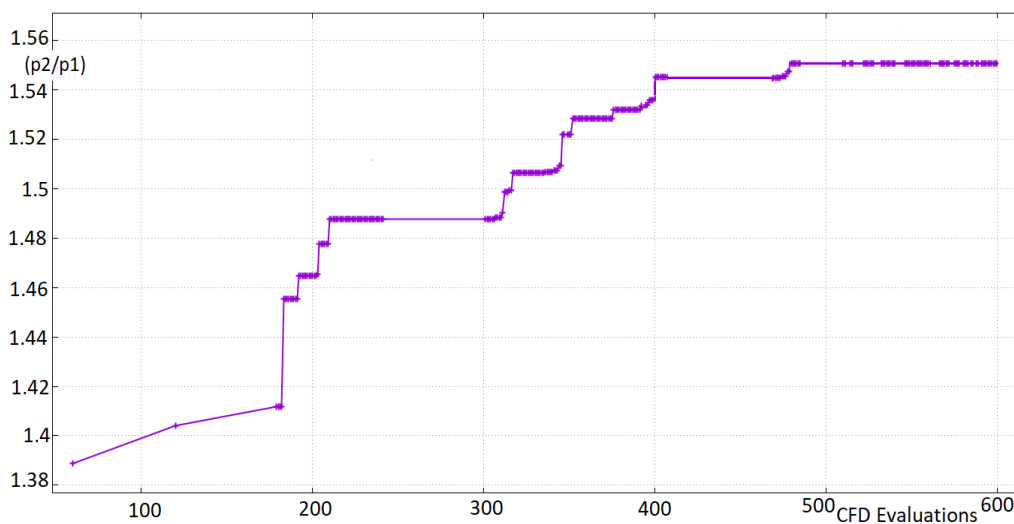


Σχήμα 3.12: Κόμβοι του CFD πλέγματος οι οποίοι επιλέγονται ως κορυφές των δύο κλωβών. Με μπλε χρώμα σημειώνονται τα σημεία που χρησιμοποιούνται ως κορυφές του εξωτερικού κλωβού και με πορτοκαλί αυτά που χρησιμοποιούνται για τον εσωτερικό κλωβό.

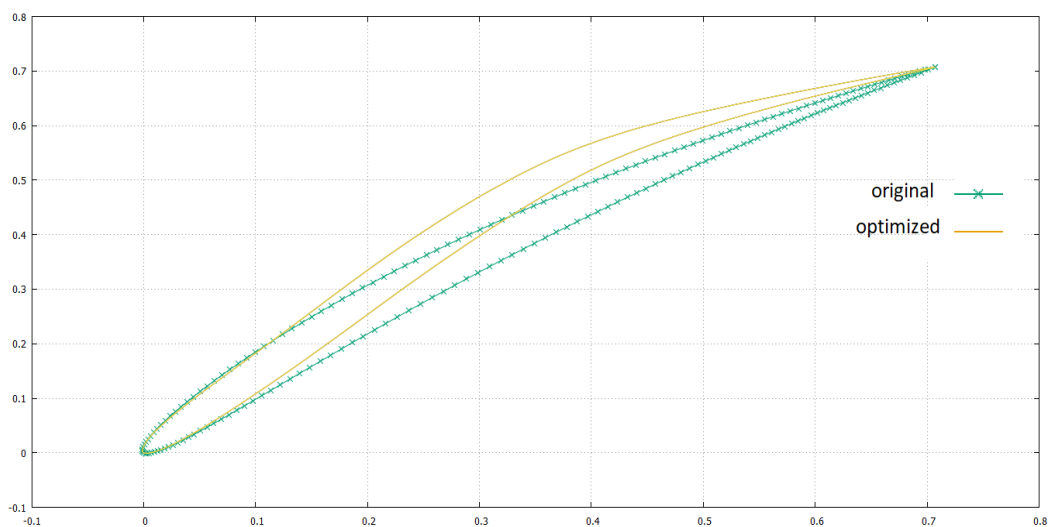


Σχήμα 3.13: Εξωτερικός και εσωτερικός κλωβός. Με πράσινο χρώμα απεικονίζονται τα σημεία ελέγχου του εξωτερικού κλωβού, ενώ με κόκκινο και πορτοκαλί τα σημεία του εσωτερικού κλωβού. Τα κόκκινα σημεία ελέγχου A , B , Γ , Δ , E είναι τα μόνα που μετατοπίζονται, είτε κατά x είτε κατά y , κατά 0.05 . Οι μετατοπίσεις αυτές των πέντε σημείων ελέγχου αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού της βελτιστοποίησης.

Στο σχήμα 3.15 απεικονίζεται η αρχική μορφή της αεροτομής σε σύγκριση με τη βελτιστοποιημένη. Για τη βελτιστοποιημένη μορφή η αντικειμενική συνάρτηση προκύπτει ίση με $(p_2/p_1) = 1.55$. Το σχήμα 3.14 απεικονίζει τη σύγκλιση του εξελικτικού αλγορίθμου για τις 600 αξιολογήσεις που έγιναν.



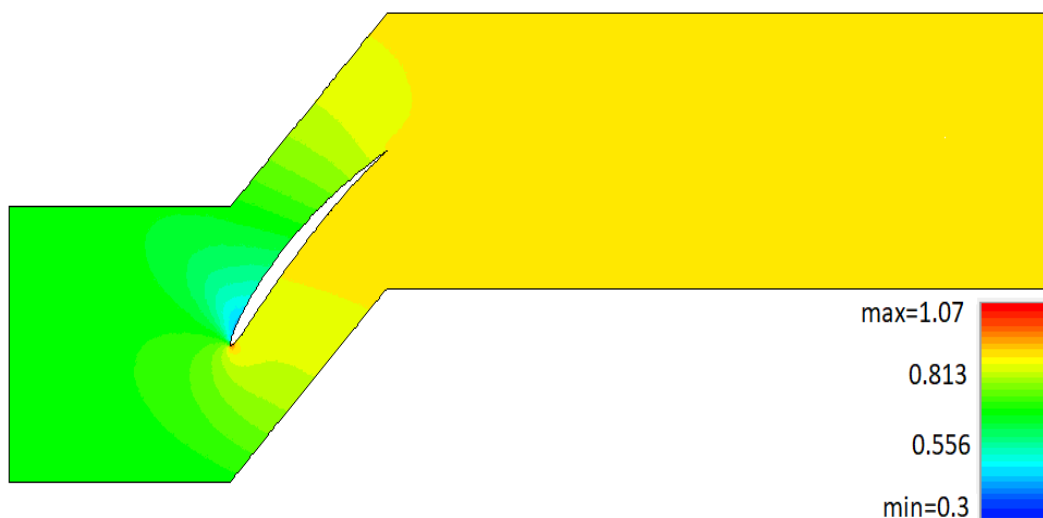
Σχήμα 3.14: Σύγκλιση εξελικτικού αλγορίθμου. Στον οριζόντιο άξονα δίνονται οι CFD αξιολογήσεις και στον κατακόρυφο η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, (p_2/p_1)



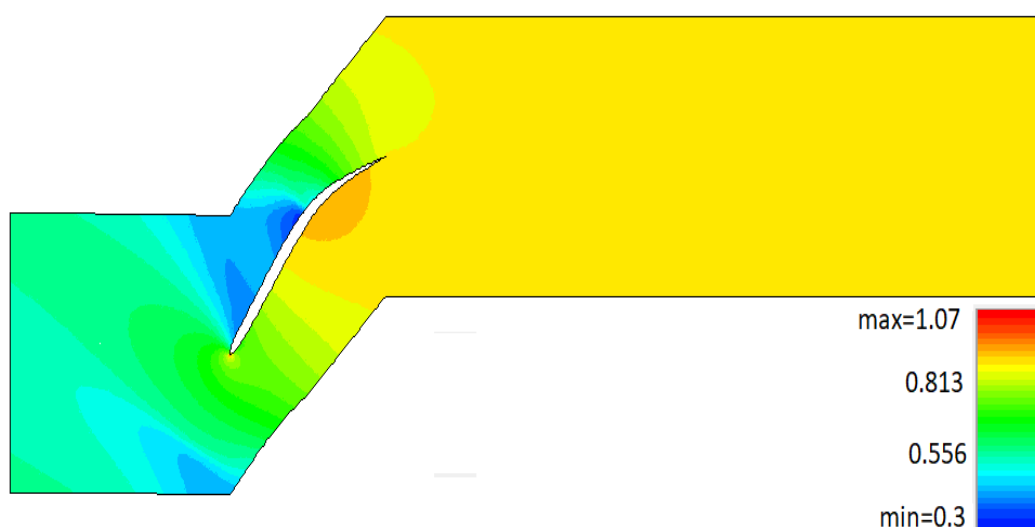
Σχήμα 3.15: Αρχική και βελτιστοποιημένη μορφή αεροτομής. Η αρχική μορφή αντιστοιχεί σε τιμή $(p_2/p_1) = 1.27$ και η βελτιστοποιημένη σε τιμή $(p_2/p_1) = 1.55$.

Η κατανομή πίεσης στην αρχική και στη βελτιστοποιημένη μορφή της αεροτομής φαίνεται στα σχήματα 3.16 και 3.17. Στο σχήμα 3.18 απεικονίζεται η κατανομή του ισοεντροπικού αριθμού Mach στο περίγραμμα της αεροτομής.

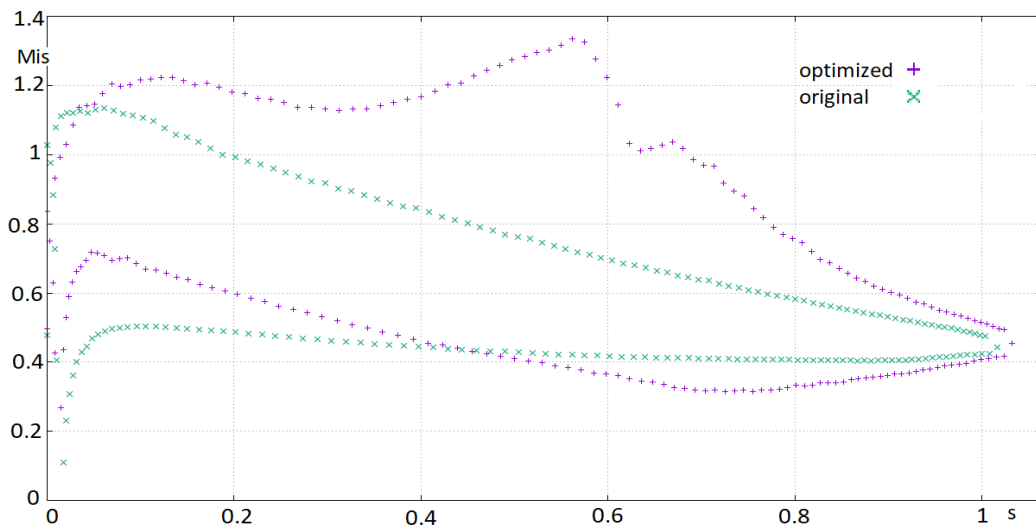
Φαίνεται ότι το περίγραμμα της αεροτομής έχει κυρτώσει. Το χροστικό κύμα που εμφανιζόταν στην αρχική μορφή του περιγράμματος της αεροτομής, έχει γίνει ισχυρότερο και πιο μεγάλης έκτασης. Στο σημείο όπου κυρτώνει το περίγραμμα, εμφανίζεται και ένα δεύτερο κύμα χρούσης, ακόμα πιο ισχυρό από το προηγούμενο. Έτσι, καθώς αυξάνεται ο αριθμός Mach της ροής στην πλευρά υποπίεσης, υπάρχει ταυτόχρονη μείωση της στατικής πίεσης και συνεπώς αύξηση του λόγου στατικής πίεσης (καθώς η στατική πίεση εξόδου παραμένει σταθερή).



Σχήμα 3.16: Ατρίβης ροή σε 2Δ περύγωση συμπίεστη SC10. Κατανομή πίεσης στο υπολογιστικό χωρίο για την αρχική μορφή της αεροτομής. Η μορφή αυτή αντιστοιχεί σε τιμή αντικειμενικής συνάρτησης $(p_2/p_1) = 1.27$.



Σχήμα 3.17: Ατρίβης ροή σε 2Δ περύγωση συμπίεστη SC10. Κατανομή πίεσης στο υπολογιστικό χωρίο για τη βελτιστοποιημένη μορφή της αεροτομής. Η μορφή αυτή αντιστοιχεί σε τιμή αντικειμενικής συνάρτησης $(p_2/p_1) = 1.55$.



Σχήμα 3.18: Κατανομή ισεντροπικού αριθμού Mach στο περίγραμμα αεροτομής 2Δ πτερύγωσης συμπιεστή SC10 για την αρχική μορφή και για τη βελτιστοποιημένη. Ατριβής ροή.

3.2.3 Πτερύγωση Στροβίλου VKI LS89

Πραγματοποιείται, στη συνέχεια, βελτιστοποίηση της μορφής πτερύγωσης στροβίλου VKI LS89[11] με αντικειμενική συνάρτηση την στροφή της ροής. Ζητείται, δηλαδή, η μεγιστοποίηση κατά μέτρον της διαφοράς ($\alpha_1 - \alpha_2$). Η μορφή της αεροτομής ελέγχεται μέσω συστήματος δύο κλωβών.

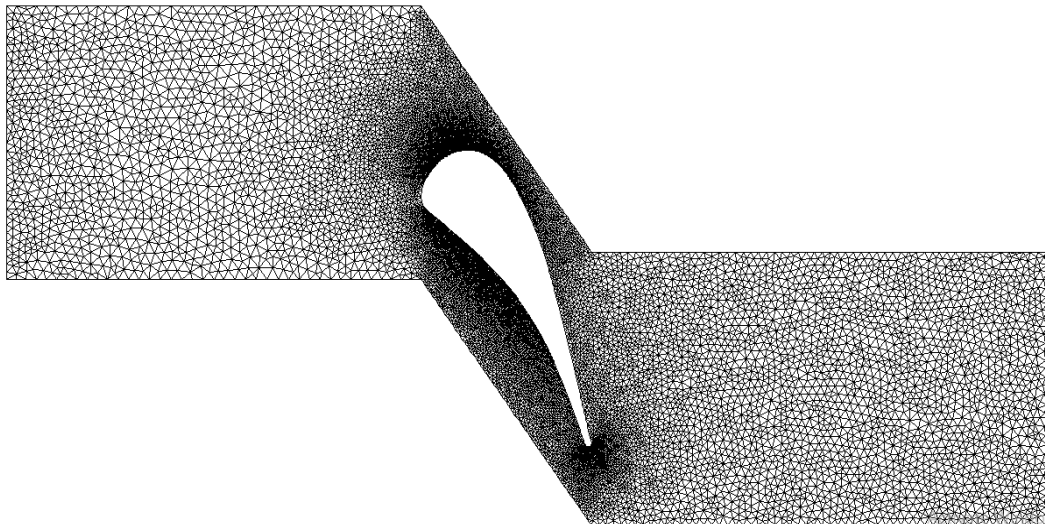
Το υπολογιστικό χωρίο γύρω από την πτερύγωση στροβίλου VKI LS89 (CDF πλέγμα) φαίνεται στο σχήμα 3.19. Στο σχήμα 3.20 απεικονίζονται οι κόμβοι του CFD πλέγματος οι οποίοι επιλέγονται ως κορυφές των δύο κλωβών. Με μπλε χρώμα σημειώνονται οι κορυφές του εξωτερικού κλωβού και με πορτοκαλί του εσωτερικού.

Στο σχήμα 3.21 φαίνεται το δημιουργηθέν αρμονικό υπολογιστικό χωρίο. Με πράσινο χρώμα σημειώνονται τα σημεία ελέγχου του εξωτερικού κλωβού, τα οποία δεν μετακινούνται. Με κόκκινο και πορτοκαλί χρώμα σημειώνονται τα σημεία ελέγχου του εσωτερικού κλωβού. Τα κόκκινα σημεία του εσωτερικού κλωβού, επίσης δεν μετατοπίζονται. Αυτό συμβαίνει τόσο για να παραμείνει σταθερό το μήκος της χορδής, όσο και για να διατηρηθεί η καμπυλότητα στις ακμές προσβολής και εκφυγής. Συνεπώς, τα σημεία ελέγχου τα οποία επιδέχονται μετατόπιση είναι μόνο τα πορτοκαλί σημεία του εσωτερικού κλωβού, τα οποία μετατοπίζονται τόσο κατά $-x$ όσο και κατά $-y$, κατά 2 mm.

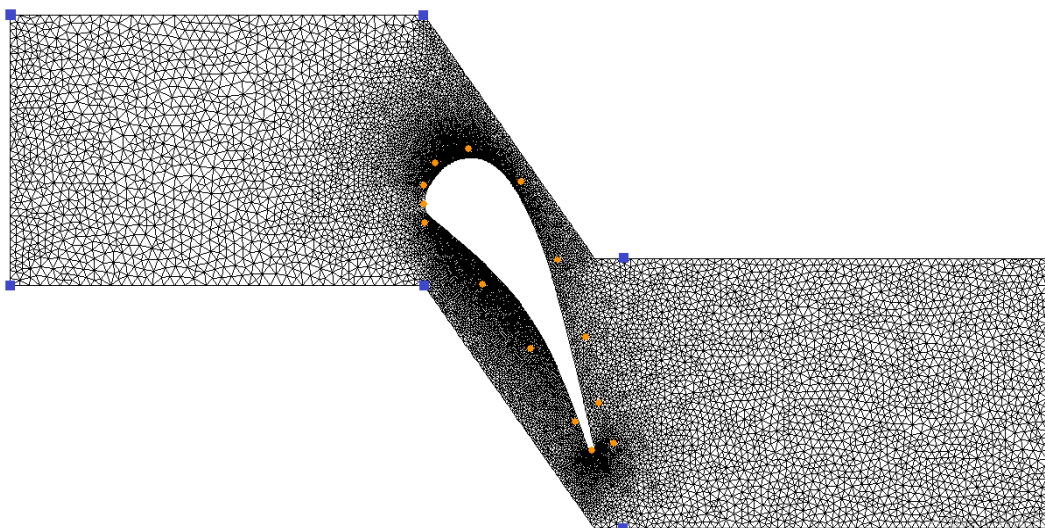
Για τη βελτιστοποίηση της μορφής της αεροτομής χρησιμοποιείται το λογισμικό EASY με 16 μεταβλητές σχεδιασμού, τις κατά x και τις κατά y μετατοπίσεις των 8 σημείων ελέγχου του εσωτερικού κλωβού, A, B, Γ, Δ, E, Z, H και Θ (σχήμα 3.21).

Η ροή θεωρείται ατριβής και εισέρχεται με γωνία $\alpha_1 = 0^\circ$. Ο ισεντροπικός αριθμός

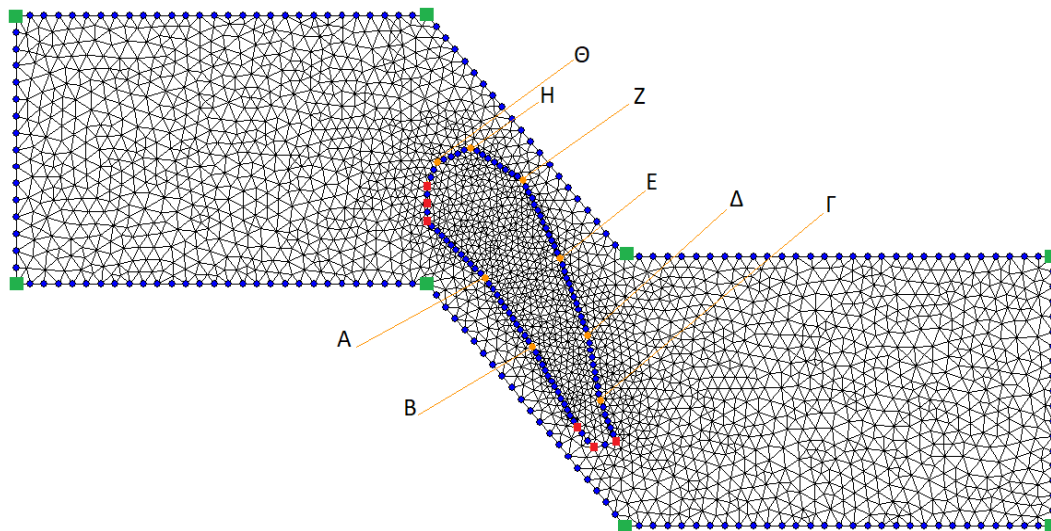
Mach εξόδου της ροής είναι $M_{2is} = 0.8425$.



Σχήμα 3.19: 2Δ Πτερύγωση στροβίλου VKI LS89 και υπολογιστικό χωρίο 14273 κόμβων και 27715 τριγωνικών στοιχείων στους κόμβους του οποίου επιλύεται η ροή.

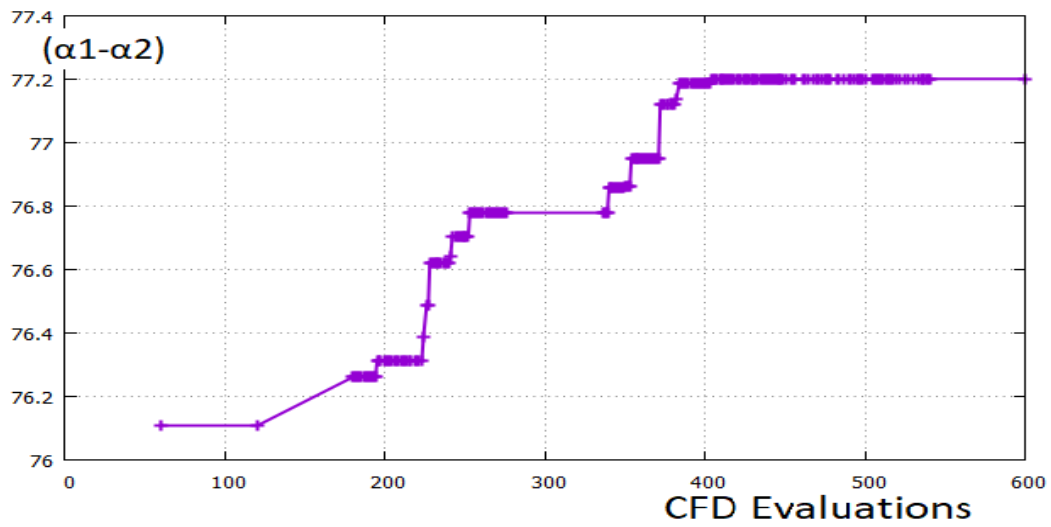


Σχήμα 3.20: Κόμβοι του CFD πλέγματος οι οποίοι επιλέγονται ως κορυφές των δύο κλωβών. Με μπλε χρώμα σημειώνονται τα σημεία που χρησιμοποιούνται ως κορυφές του εξωτερικού κλωβού και με πορτοκαλί αυτά που χρησιμοποιούνται για τον εσωτερικό κλωβό.

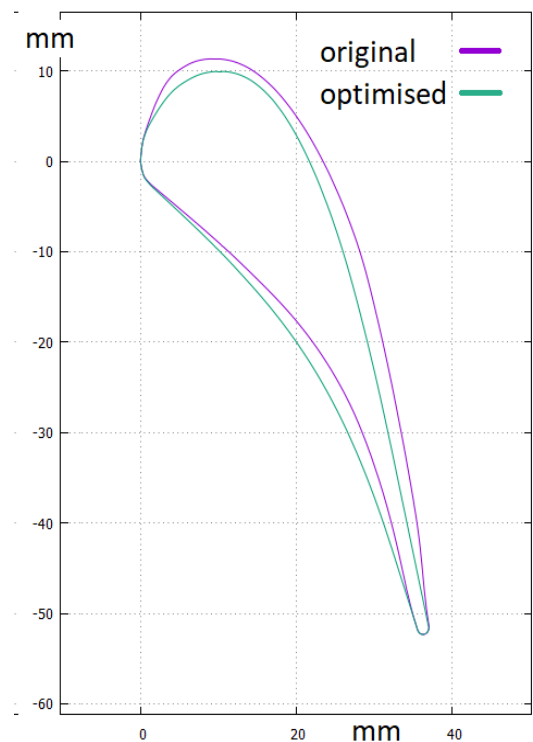


Σχήμα 3.21: Χωρίο αρμονικών κόμβων. Με πράσινο σημειώνονται οι κορυφές του εξωτερικού κλωβού και με πορτοκαλί και κόκκινο οι κορυφές του εσωτερικού. Τα πορτοκαλί σημεία ελέγχου A, B, Γ, Δ, E, Z, H και Θ μετατοπίζονται κατά-x και κατά-y κατά 2 mm. Οι δεκαέξι κατά-x και κατά-y μετατοπίσεις των σημείων αυτών, αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού της βελτιστοποίησης. Τα υπόλοιπα σημεία ελέγχου παραμένουν ακίνητα καθ' όλη τη διάρκεια της βελτιστοποίησης.

Στο σχήμα 3.23 απεικονίζεται η αρχική μορφή της αεροτομής σε σύγκριση με την βελτιστοποιημένη. Η αντικειμενική συνάρτηση για τη βελτιστοποιημένη μορφή της αεροτομής προκύπτει ίση με $(\alpha_1 - \alpha_2) = -77.2^\circ$. Υπενθυμίζεται ότι, ζητούμενο είναι η κατά μέτρον μεγιστοποίηση της διαφοράς των γωνιών. Λόγω του ότι η γωνία εισόδου (α_1 είναι μηδέν μοίρες, στο εξής θα αναφέρεται μόνο η τιμή της γωνίας α_2 (και όχι η διαφορά $(\alpha_1 - \alpha_2)$). Το σχήμα 3.22 απεικονίζει τη σύγκλιση του εξελικτικού αλγορίθμου για τις 600 αξιολογήσεις.



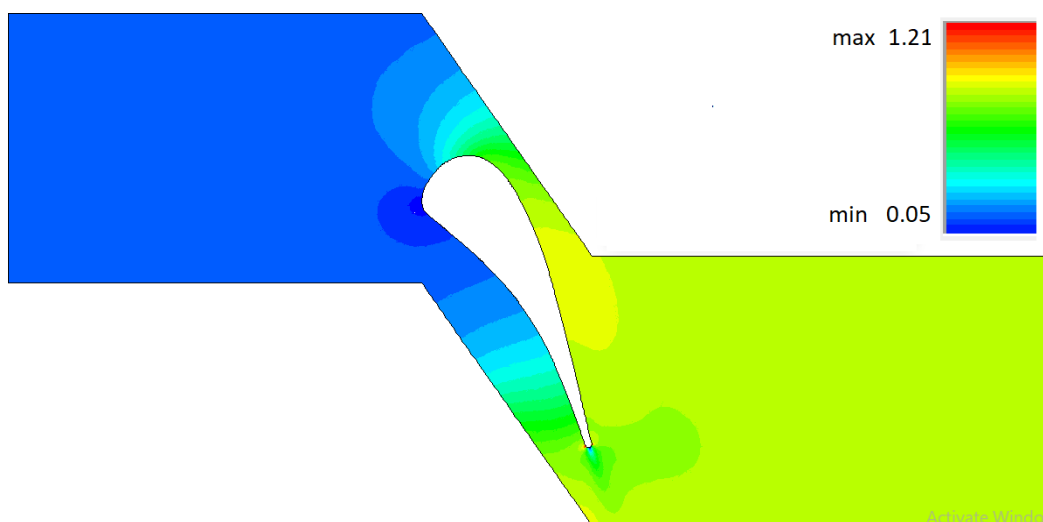
Σχήμα 3.22: Σύγκλιση εξελικτικού αλγορίθμου. Στον οριζόντιο άξονα δίνονται οι CFD αξιολογήσεις και στον κατακόρυφο η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, ($\alpha_1 - \alpha_2$)



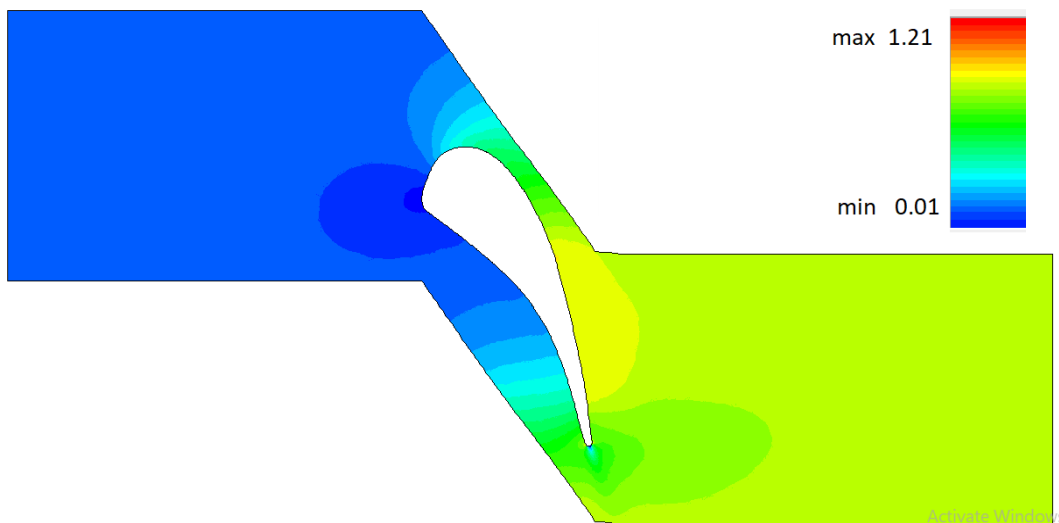
Σχήμα 3.23: Αρχικό περίγραμμα αεροτομής 2Δ περύγωσης στροβίλου VKI LS89 σε σύγκριση με το περίγραμμα που προκύπτει από την βελτιστοποίηση. Η αρχική μορφή αντιστοιχεί σε τιμή στροφής της ροής $\alpha_2 = -74.7^\circ$ ενώ η βελτιστοποιημένη μορφή σε τιμή $\alpha_2 = -77.2^\circ$.

Η κατανομή πίεσης στην αρχική και στη βελτιστοποιημένη μορφή της αεροτομής φαίνεται στα σχήματα 3.24 και 3.25. Στο σχήμα 3.26 απεικονίζεται η κατανομή του ισεντροπικού αριθμού Mach στο περίγραμμα της αεροτομής για την αρχική μορφή και τη βελτιστοποιημένη.

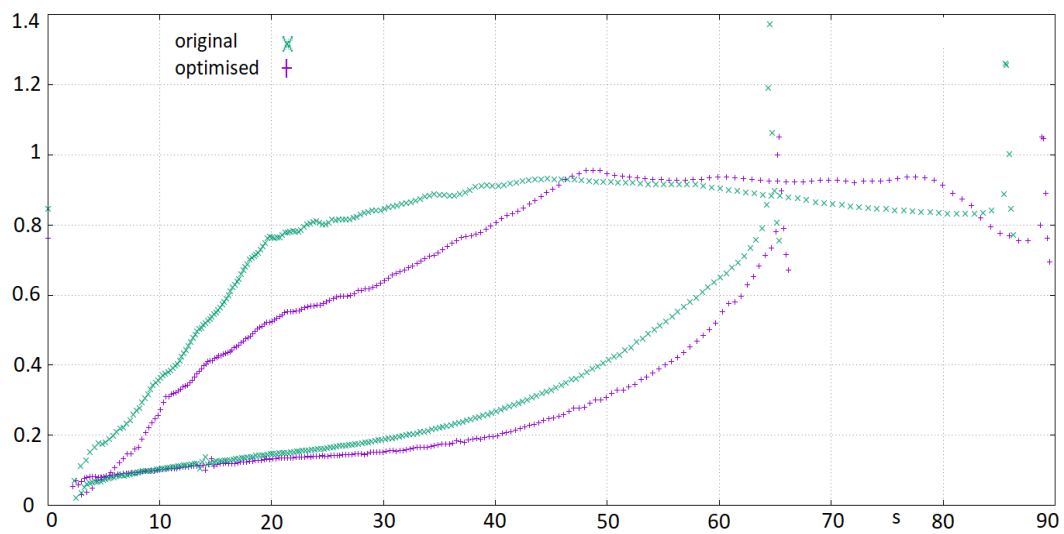
Το περίγραμμα της αεροτομής που προέκυψε από τη βελτιστοποίηση έχει κυρτώσει. Αυτό ήταν και το αναμενόμενο σχήμα, αφού αντικειμενική συνάρτηση είναι η κατά μέτρον μεγιστοποίηση της γωνίας εξόδου. Στο σημείο όπου το περίγραμμα έχει κυρτώσει σημειώνεται μείωση της στατικής πίεσης και αύξηση του αριθμού Mach, αφού η ροή επιταχύνεται λόγω της μεγαλύτερης καμπυλότητας των τοιχωμάτων.



Σχήμα 3.24: Ατριβής ροή σε 2Δ περύγωση στροβίλου VKI LS89. Κατανομή αριθμού Mach στο υπολογιστικό χωρίο για την αρχική μορφή της αεροτομής. Η μορφή αυτή αντιστοιχεί σε τιμή αντικειμενικής συνάρτησης $\alpha_2 = -74.7^\circ$



Σχήμα 3.25: Ατριβής ροή σε 2Δ περύγωση στροβίλου VKI LS89. Κατανομή αριθμού Mach στο υπολογιστικό χωρίο για την βελτιστοποιημένη μορφή της αεροτομής. Η μορφή αυτή αντιστοιχεί σε τιμή αντικειμενικής συνάρτησης $\alpha_2 = -77.2^\circ$



Σχήμα 3.26: Κατανομή ισεντροπικού αριθμού Mach στο περίγραμμα αεροτομής 2Δ περύγωσης στροβίλου VKI LS89 για την αρχική μορφή και για τη βελτιστοποιημένη. Η αρχική μορφή αντιστοιχεί σε τιμή στροφής της ροής $\alpha_2 = -74.7^\circ$ ενώ η βελτιστοποιημένη μορφή σε τιμή $\alpha_2 = -77.2^\circ$.

Κεφάλαιο 4

Θεωρία Αρμονικών

Συντεταγμένων σε 3Δ Χωρία και

Εφαρμογή

Στο κεφάλαιο αυτό επεκτείνεται η θεωρία των αρμονικών συντεταγμένων στις τρεις διαστάσεις. Οι ορισμοί είναι όμοιοι με αυτούς του κεφαλαίου 2 με τη διαφορά ότι εκφράζονται εδώ για τις τρεις διαστάσεις. Εφαρμογή της θεωρίας των αρμονικών συντεταγμένων σε 3Δ χωρία έχει γίνει σε προηγούμενη διπλωματική εργασία [[6]], η πρωτοτυπία, όμως, της συγκεκριμένης μεταπτυχιακής εργασίας έγκειται στη διατήρηση της περιοδικότητας των 3Δ χωρίων που μελετώνται, ώστε η προκύπτουσα μέθοδος να μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε εφαρμογές πτερυγώσεων στροβιλομηχανών. Έτσι, στη δεύτερη ενότητα του κεφαλαίου παρουσιάζεται η διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου σε 3Δ γραμμικές πτερυγώσεις.

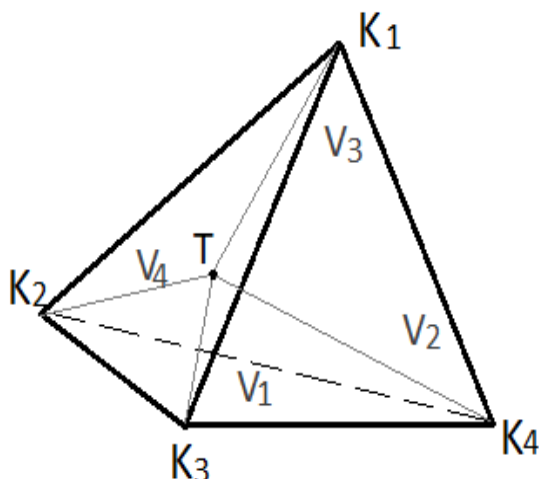
4.1 Επέκταση Βασικών Ορισμών στις Τρεις Διαστάσεις

Στις δύο διαστάσεις οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες παρομοιάζονται με βάρη στις κορυφές και στα σημεία του περιγράμματος ενός τριγώνου. Στις τρεις διαστάσεις αυτό επεκτείνεται σε ένα τετράεδρο. Έστω, λοιπόν, το τετράεδρο $K_1K_2K_3K_4$ σχήματος 4.1 και b_1, b_2, b_3, b_4 οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες των τεσσάρων κορυφών αντίστοιχα.

Κατ' αντιστοιχία με τη σχέση 2.1, το διάνυσμα θέσης ενός εσωτερικού σημείου T , εκφράζεται ως:

$$\vec{T} = \sum_{i=1}^3 b_i \vec{K}_i, \quad \text{με } b_i = \frac{V_j}{\sum_j V_j} \quad (4.1)$$

όπου V_j το εμβαδόν του σχηματιζόμενου τετραέδρου απέναντι από την κορυφή K_j (σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.1: Το τυχαίο σημείο T στο εσωτερικό του τετραέδρου μπορεί να εκφραστεί μοναδικά συναρτήσει των βαρυκεντρικών συντεταγμένων των κορυφών του K_1, K_2, K_3, K_4 , σύμφωνα με την εξίσωση 4.1, εφόσον οι κορυφές παραμένουν σταθερές.

Όσον αφορά στην έννοια του κλωβού, από 2Δ πλεγματοποιημένο πολύγωνο, έχει πλέον, τη μορφή 3Δ πλεγματοποιημένου πολυέδρου. Στις κορυφές και στους κόμβους του περιγράμματος του κλωβού επιβάλλονται οριακές συνθήκες, ενώ στα εσωτερικά σημεία επιλύεται επαναληπτικά η εξίσωση Laplace. Η 3Δ εξίσωση Laplace ορίζεται ως:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (4.2)$$

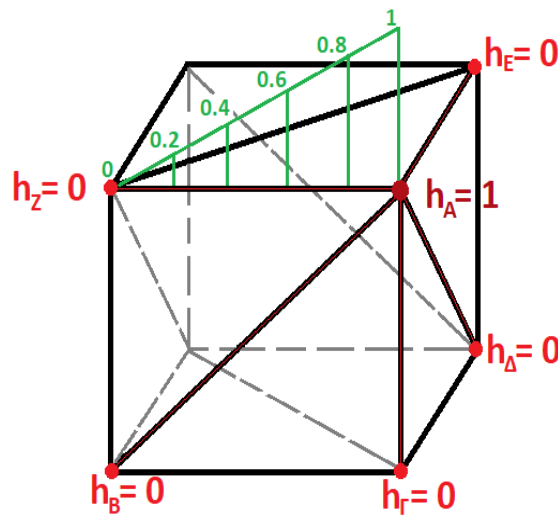
Οι λύσεις της εξίσωσης Laplace, όπως αναφέρεται και στην υποενότητα 2.1.2, καλούνται αρμονικές συναρτήσεις και ισχύει για αυτές ότι αναφέρεται στην ίδια υποενότητα.

Η επίλυση της εξίσωσης Laplace γίνεται από μία φορά για κάθε κορυφή του πολυέδρου. Οι οριακές συνθήκες επιβάλλονται με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα 4.2. Όταν, δηλαδή, η επίλυση γίνεται για την κορυφή A , αυτή αποκτά οριακή συνθήκη $h_A = 1$, ενώ όλες οι υπόλοιπες κορυφές του κλωβού λαμβάνουν οριακή συνθήκη $h = 0$. Οι κόμβοι που κείνται στις ακμές που συνδέουν την κορυφή, για την οποία γίνεται η επίλυση,

με γειτονικές κορυφές, λαμβάνουν οριακή συνθήκη η οποία είναι αποτέλεσμα γραμμικής κατανομής από τη μονάδα (συνθήκη κορυφής) προς το μηδέν (συνθήκη γειτονικής κορυφής). Στο τέλος της διαδικασίας, κάθε σημείο του κλωβού αποκτά N αρμονικές συντεταγμένες, μία από κάθε κορυφή. Κάθε εσωτερικό σημείο του κλωβού μπορεί, πλέον, να εκφραστεί ως:

$$p = \sum_{i=1}^N h_i(p) C_i \quad (4.3)$$

Η σχέση 4.3 είναι αντίστοιχη της σχέσης 4.1 χρησιμοποιώντας όμως αρμονικές συντεταγμένες καθώς το εσωτερικό σημείο δεν βρίσκεται σε τετράεδρο αλλά σε πολύεδρο.



Σχήμα 4.2: Επιβολή οριακών συνθηκών σε 3Δ κλωβό.

Το 3Δ CFD πλέγμα του οποίου ζητείται η παραμόρφωση τοποθετείται στο εσωτερικό του κλωβού. Έτσι, κάθε κόμβος του CFD πλέγματος βρίσκεται στο εσωτερικό ή στο περίγραμμα ενός τετραεδρικού στοιχείου του αρμονικού πλέγματος. Η διαδικασία εύρεσης των αρμονικών συντεταγμένων των κόμβων του CFD πλέγματος είναι όμοια με αυτήν που παρουσιάστηκε στην ενότητα 2.1.3. Οι αρμονικές συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου K του CFD πλέγματος το οποίο βρίσκεται να ανήκει στο τετραεδρικό στοιχείο $T_1T_2T_3T_4$ του αρμονικού πλέγματος, υπολογίζονται ως:

$$w_i = \sum_{i=1}^4 h_i b_i, \quad \text{με } b_i = \frac{V_i}{\sum_i V_i} \quad (4.4)$$

όπου h_i οι αρμονικές συντεταγμένες από την κορυφή C_i , των κορυφών T_1, T_2, T_3, T_4 και V_j το εμβαδόν του σχηματιζόμενου τετραέδρου απέναντι από την κορυφή T_j .

Έτσι, το διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου K δίνεται και πάλι από τη σχέση 2.6, με τη διαφορά ότι οι αρμονικές συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται, έχουν προκύψει

από τη σχέση 4.4.

Ο τρόπος με τον οποίο μετατοπίζονται τα σημεία τόσο του αρμονικού όσο και του CFD πλέγματος, καθώς και η θεωρία της τεχνικής των δύο κλωβών, ισχύουν όπως παρουσιάστηκαν στις υποενότητες 2.1.4 και 2.1.5 με ισχύ των αντίστοιχων σχέσεων.

4.2 Εφαρμογή σε 3Δ Γραμμικές Πτερυγώσεις

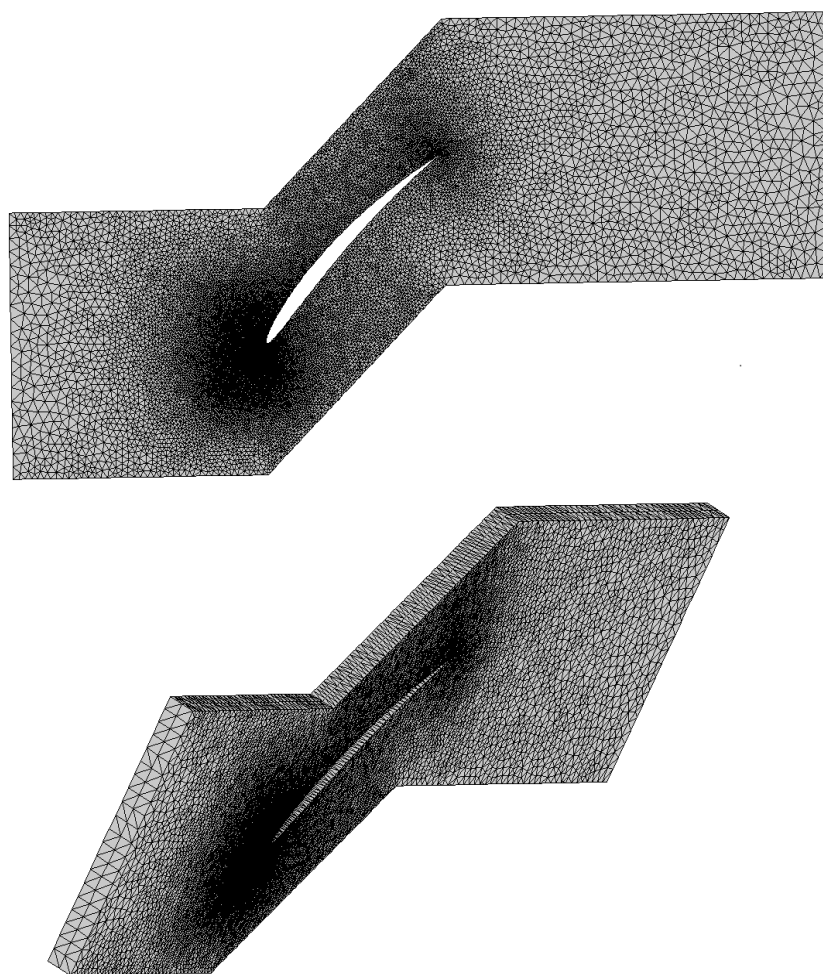
Η εφαρμογή της θεωρίας των αρμονικών συντεταγμένων σε συνδυασμό με την τεχνική των δύο κλωβών σε 3Δ περιοδικά χωρία, ακολουθεί τις ίδιες βασικές κατευθυντήριες γραμμές με την εφαρμογή σε 2Δ περιοδικά χωρία. Έτσι, υπενθυμίζεται ότι:

- Τα σημεία ελέγχου του εξωτερικού κλωβού οφείλουν να σχηματίζουν περιοδικό χωρίο με βήμα ίσο με αυτό της πτερύγωσης.
- Τα σημεία ελέγχου του εσωτερικού κλωβού πρέπει να ακολουθούν όσο το δυνατόν πιο πιστά το περίγραμμα της αεροτομής της πτερύγωσης.
- Στις ακμές προσβολής και εκφυγής τα σημεία ελέγχου πρέπει να τοποθετούνται με τέτοιο τρόπο ώστε το μήκος της χορδής όπως και η μορφές των ακμών να διατηρούνται.

Η δημιουργία των 3Δ αρμονικών περιοδικών χωρίων, που παρουσιάζονται στις επόμενες δύο υποενότητες, έγινε με χρήση του λογισμικού Pontwise[12].

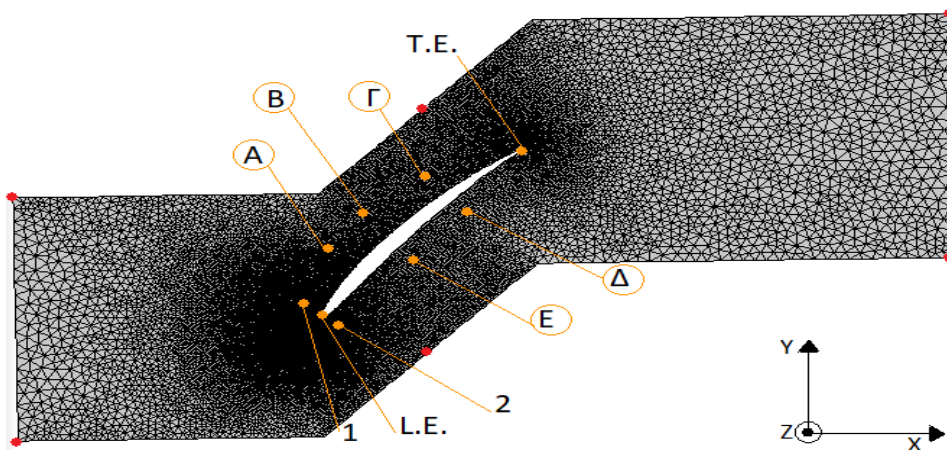
4.2.1 3Δ Πτερύγωση Συμπιεστή SC10

Η πρώτη εφαρμογή αφορά στην 3Δ πτερύγωση συμπιεστή SC10, σχήμα 4.3. Οι κόμβοι του CFD πλέγματος οι οποίοι επιλέγονται ως σημεία ελέγχου του συστήματος κλωβών απεικονίζονται στο σχήμα 4.4. Στο σχήμα φαίνονται μόνο τα 15 από τα συνολικά 30 σημεία ελέγχου του συστήματος των 2 κλωβών. Τα υπόλοιπα 15 σημεία ελέγχου δεν είναι δυνατόν να φανούν στο σχήμα καθώς είναι μετατοπισμένα κατά τον άξονα z (και μόνο). Έχουν, δηλαδή, ίδιες x και y συντεταγμένες με τα πρώτα 15 σημεία και διαφέρουν ως προς την τρίτη διάσταση z.

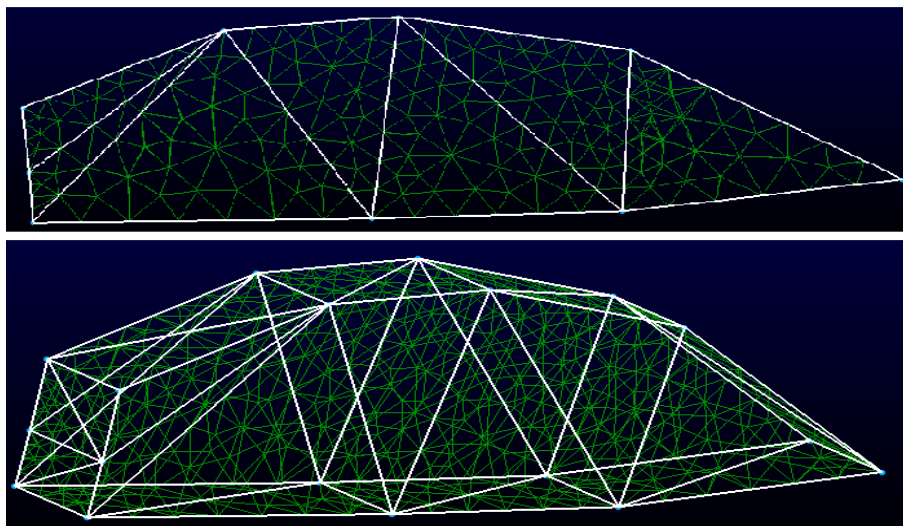


Σχήμα 4.3: 3D πτερύγωση συμπιεστή SC10 και μέσα σε αυτήν υπολογιστικό χωρίο 63950 κόμβων και 253450 τετραεδρικών στοιχείων.

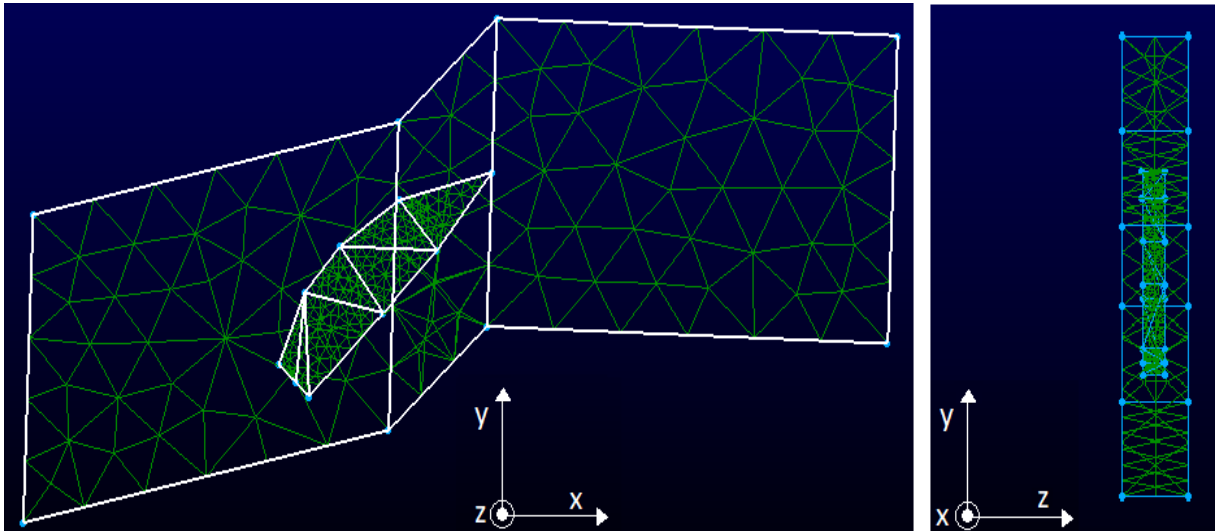
Ο εσωτερικός κλωβός, ο οποίος σχηματίζεται με βάση τα σημεία ελέγχου που ορίζονται στο σχήμα 4.4, απεικονίζεται στο σχήμα 4.5. Όσον αφορά στον εξωτερικό κλωβό, τα σημεία ελέγχου του δεν βρίσκονται στο ίδιο κατά-z επίπεδο με αυτά του εσωτερικού. Έχουν τοποθετηθεί σε κάποια απόσταση από αυτά, ώστε να είναι δυνατό να αποσβένονται οι τιμές των αρμονικών συντεταγμένων στους ενδιάμεσους κόμβους. Ο εξωτερικός κλωβός απεικονίζεται στο σχήμα (4.6).



Σχήμα 4.4: Κόμβοι του CFD πλέγματος οι οποίοι επιλέγονται ως κορυφές των δύο κλωβών. Με κόκκινο χρώμα σημειώνονται τα σημεία ελέγχου του εξωτερικού κλωβού και με πορτοκαλί του εσωτερικού. Τονίζεται ότι τα σημεία ελέγχου του εσωτερικού και εξωτερικού κλωβού δεν είναι τοποθετημένα στο ίδιο κατά- z επίπεδο. Τα σημεία ελέγχου A, B, Γ, Δ, E καθώς και τα αντίστοιχά τους μετατοπισμένα κατά z , έστω $A', B', \Gamma', \Delta', E'$, του εσωτερικού κλωβού, είναι αυτά τα οποία επιδέχονται μετατόπιση. Η μετατόπιση την οποία μπορούν να δεχτούν είναι κατά τους άξονες x και y .

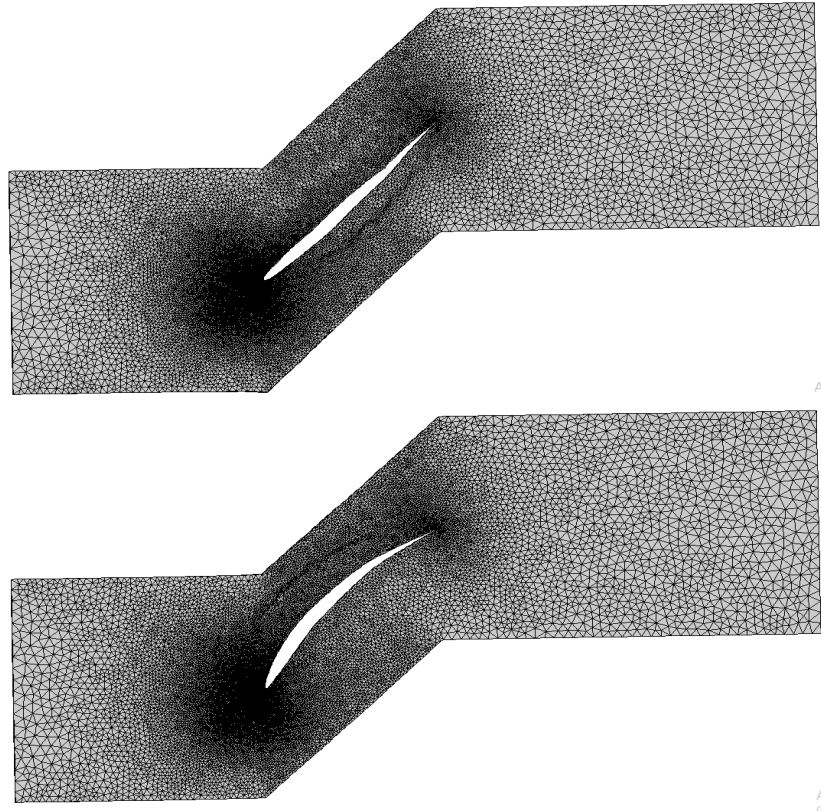


Σχήμα 4.5: Εσωτερικός κλωβός για την 3Δ περύγωση συμπίεστη SC10 του σχήματος 4.3.



Σχήμα 4.6: Σύστημα εσωτερικού και εξωτερικού κλωβού για την 3Δ περύγωση συμπιεστή SC10 του σχήματος 4.3. Η διάταξη απεικονίζεται στο επίπεδο x - y και y - z . Τα σημεία ελέγχου του εσωτερικού κλωβού δεν είναι τοποθετημένα στο ίδιο κατά- z επίπεδο.

Στη συνέχεια, δίνονται μετατοπίσεις στα σημεία A, 'A, B, 'B, Γ, 'Γ, Δ, 'Δ, E, 'E. Οι μετατοπίσεις που δίνονται στα σημεία A, B, Γ, Δ, E είναι ίδιες με αυτές που δίνονται στα αντίστοιχα τονούμενά τους. Οι συντεταγμένες των κόμβων του CFD πλέγματος 4.3 έχουν αδιαστατοποιηθεί με το μήκος της χορδής της αεροτομής της περύγωσης, συνεπώς και οι μετατοπίσεις αποτελούν αδιάστατους αριθμούς. Η στερεότητα της περύγωσης είναι ίση με την μονάδα. Η μέγιστη μετατόπιση που δόθηκε στα σημεία ελέγχου έχει τιμή $0.04c$. Τα προκύπτοντα υπολογιστικά χωρία απεικονίζεται στο σχήμα 4.7. Πέραν του περιγράμματος της αεροτομής της περύγωσης, παραμορφώνονται και τα περιοδικά όρια του χωρίου.



Σχήμα 4.7: Παραμορφώσεις του χωρίου και του CFD πλέγματος για τυχαίες μετατοπίσεις των σημείων ελέγχου του εσωτερικού κλωβού.

4.2.2 3Δ Πτερύγωση Στροβίλου C3X

Η δεύτερη εφαρμογή αφορά σε 3Δ πτερύγωση στροβίλου C3X[13]. Η πτερύγωση καθώς και το υπολογιστικό πλέγμα γύρω από αυτήν απεικονίζονται στο σχήμα 4.8. Το πλέγμα αποτελείται από 1828478 κόμβους και 8819840 τετραεδρικά στοιχεία. Οι συντεταγμένες των σημείων του πλέγματος είναι σε μονάδες cm. Το μήκος της χορδής είναι ίσο με 14.493 cm. Λόγω του μεγάλου αριθμού κόμβων του πλέγματος, δεν ήταν προφανής η μορφή και η πυκνότητα του αρμονικού χωρίου. Για αυτόν το λόγο, δοκιμάστηκαν διάφορες διαμορφώσεις για να καταλήξουμε σε αυτήν που προσφέρει τις

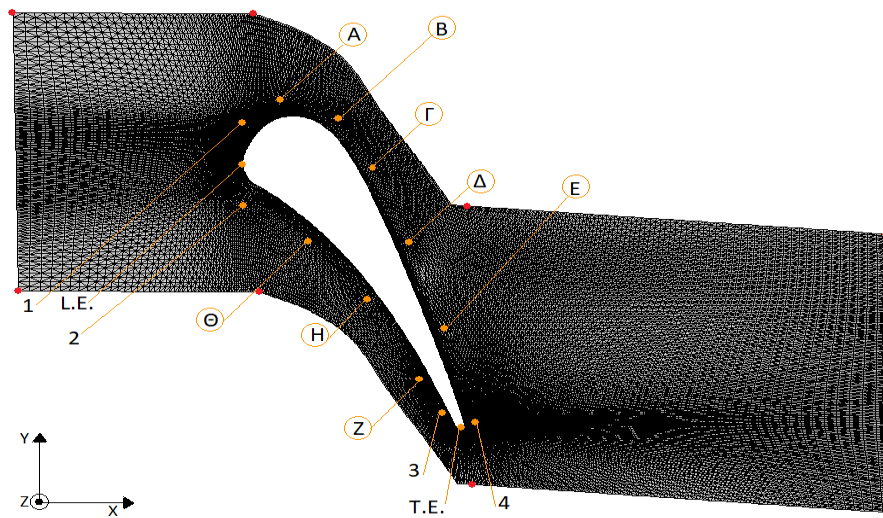
μεγαλύτερες και ακριβέστερες παραμορφώσεις.



Σχήμα 4.8: 3Δ πτερύγωση στροβίλου C3X και μέσα σε αυτήν υπολογιστικό χωρίο 1828478 κόμβων και 8819840 τετραεδρικών στοιχείων.

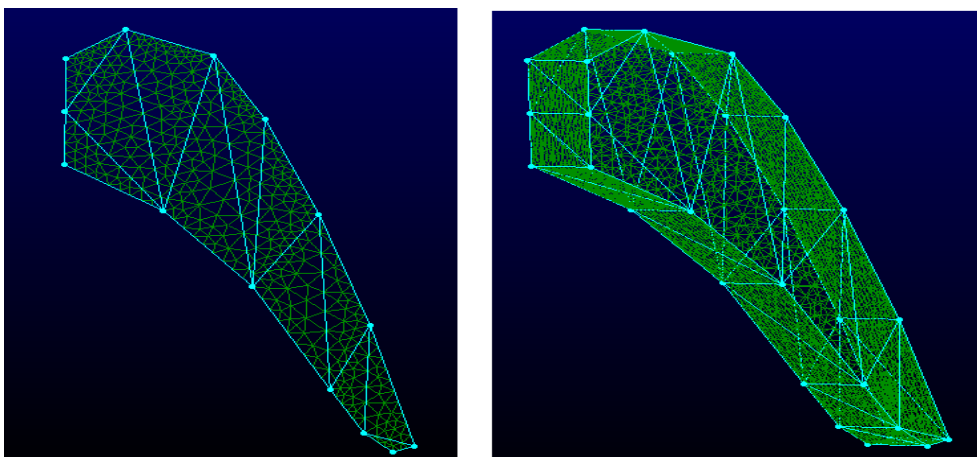
Σχηματισμός 1ου Αρμονικού Χωρίου

Οι κόμβοι του CFD πλέγματος οι οποίοι επιλέγονται ως σημεία ελέγχου των δύο κλωβών απεικονίζονται στο σχήμα 4.9. Στο σχήμα αυτό, φαίνονται 8 σημεία ελέγχου του εξωτερικού κλωβού και 14 του εσωτερικού. Παρ' όλα αυτά, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως υπάρχουν και άλλα 22 σημεία ελέγχου (8 του εξωτερικού και 14 του εσωτερικού κλωβού), τα οποία δεν μπορούν να φανούν στο σχήμα καθώς είναι μετατοπισμένα κατά τον άξονα z . Έχουν, δηλαδή, ίδιες τιμές τεταγμένων και τετμημένων με τα σημεία που φαίνονται στο σχήμα 4.9 διαφέρουν, όμως, κατά την z κατεύθυνση.

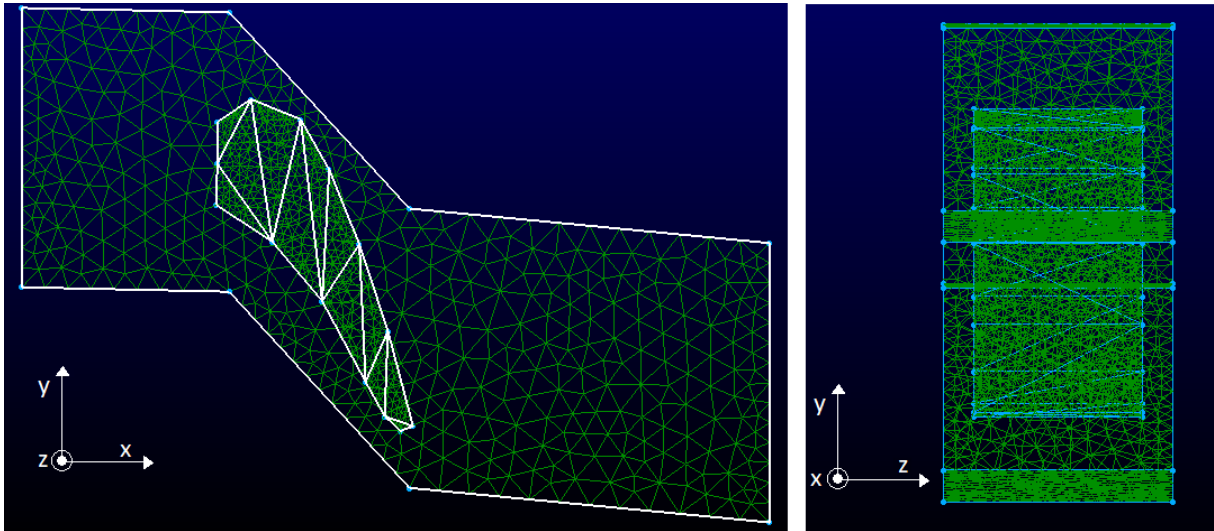


Σχήμα 4.9: Κόμβοι του CFD πλέγματος οι οποίοι επιλέγονται ως κορυφές των δύο κλωβών. Με κόκκινο χρώμα σημειώνονται τα σημεία ελέγχου του εξωτερικού κλωβού και με πορτοκαλί του εσωτερικού. Τα σημεία ελέγχου του εσωτερικού και του εξωτερικού κλωβού δεν βρίσκονται στο ίδιο κατά- z επίπεδο. Τα σημεία ελέγχου $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$ καθώς και τα αντίστοιχά τους μετατοπισμένα κατά z , έστω $A', B', \Gamma', \Delta', E', Z', H', \Theta'$ του εσωτερικού κλωβού, είναι αυτά τα οποία επιδέχονται μετατόπιση. Η μετατόπιση την οποία μπορούν να δεχτούν είναι κατά τους άξονες x και y .

Τα σημεία ελέγχου που απεικονίζονται στο σχήμα 4.9 σχηματίζουν τον εσωτερικό κλωβό του σχήματος 4.10 και το σύστημα κλωβών του σχήματος 4.11. Το τελικό αρμονικό χωρίο αποτελείται από 13121 κόμβους και 71869 τετραεδρικά στοιχεία.



Σχήμα 4.10: Εσωτερικός κλωβός για την 3D περύγωση στροβίλου $C3X$ του σχήματος 4.8.

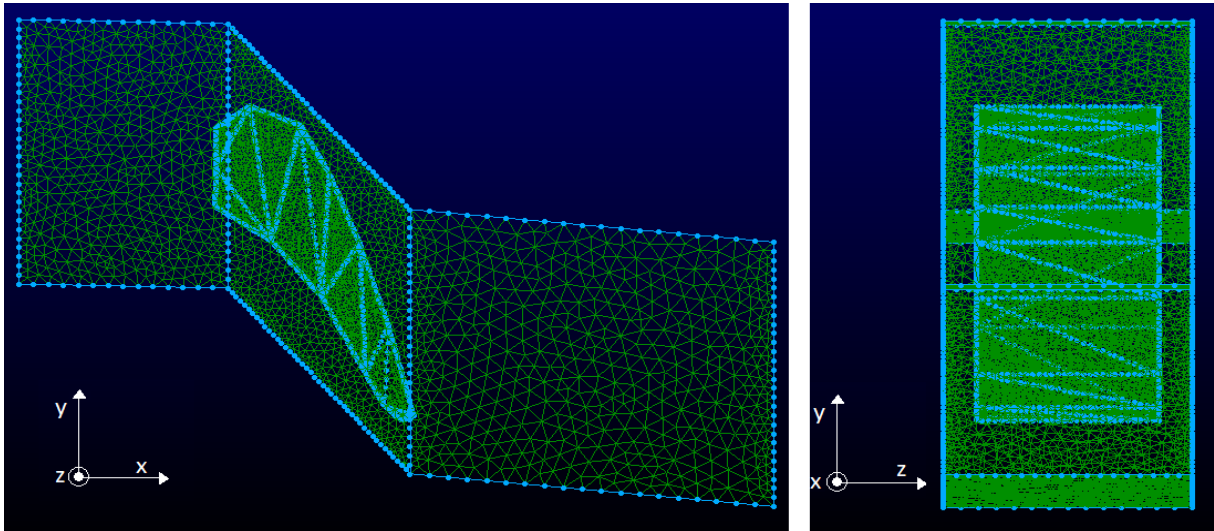


Σχήμα 4.11: Σύστημα εσωτερικού και εξωτερικού κλωβού για την 3Δ περύγωση στροβίλου $c3x$ του σχήματος 4.8. Το σύστημα απεικονίζεται κατά 2 επίπεδα. Στην απεικόνιση στο y - z επίπεδο, φαίνεται ότι τα σημεία ελέγχου του εσωτερικού και του εξωτερικού κλωβού δεν βρίσκονται στο ίδιο κατά- z επίπεδο. Αυτό συμβαίνει για να είναι δυνατόν να αποσβένουν οι τιμές των αρμονικών συντεταγμένων σε αυτήν την κατεύθυνση.

Τα σημεία ελέγχου του εσωτερικού κλωβού του σχήματος 4.11 μπορούν να λάβουν μετατόπιση έως 0.07 cm. Για μετατοπίσεις μεγαλύτερες αυτής της τιμής σχηματίζονται μη-αποδεκτά στοιχεία πλέγματος. Αυτό συμβαίνει λόγω του ότι το αρμονικό πλέγμα που χρησιμοποιείται είναι αρκετά αραιό για ένα τόσο πυκνό υπολογιστικό πλέγμα.

Σχηματισμός Πυκνότερου Αρμονικού Χωρίου

Όπως ήδη αναφέρθηκε, το αρμονικό χωρίο που χρησιμοποιείται παραπάνω δεν προσφέρει δυνατότητα μεγάλης μετατόπισης των σημείων ελέγχου του κλωβού. Για τον λόγο αυτόν, σχηματίζεται ένα δεύτερο πυκνότερο αρμονικό χωρίο. Χρησιμοποιούνται τα ίδια σημεία ελέγχου και μόνη αλλαγή, πέραν των περισσότερων κόμβων, είναι μια λίγο διαφορετική διαμόρφωση του εξωτερικού κλωβού. Το σύστημα των δύο κλωβών απεικονίζεται στο σχήμα 4.12. Το τελικό αρμονικό πλέγμα αποτελείται από 75326 κόμβους και 427025 τετραεδρικά στοιχεία. Ο αριθμός των κόμβων και των τετραεδρικών στοιχείων του αρμονικού πλέγματος αυξήθηκε κατά πολύ σε σχέση με το προηγούμενο αραιότερο αρμονικό πλέγμα (σχ. 4.11), ωστόσο, αυτό είναι απαραίτητο σε ένα τόσο πυκνό υπολογιστικό πλέγμα, όπως αυτό της περύγωσης C3X, για την σωστή παρεμβολή των κόμβων του CFD πλέγματος στους κόμβους του αρμονικού.

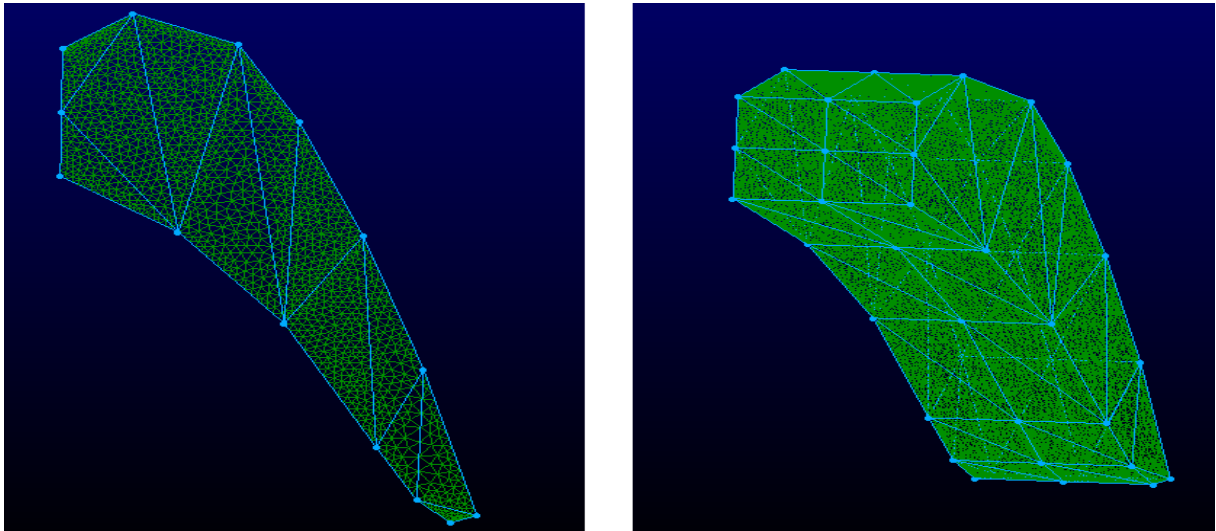


Σχήμα 4.12: Σύστημα δύο κλωβών για το υπολογιστικό πλέγμα της 3D πτερύγωσης στροβίλου $c3x$ του σχήματος 4.8. Το σύστημα απεικονίζεται κατά τα επίπεδα $y-x$ και $y-z$. Η διαμόρφωση αυτή έχει ως αποτέλεσμα πυκνότερο αρμονικό πλέγμα 75326 κόμβων και 427025 τετραεδρικών στοιχείων.

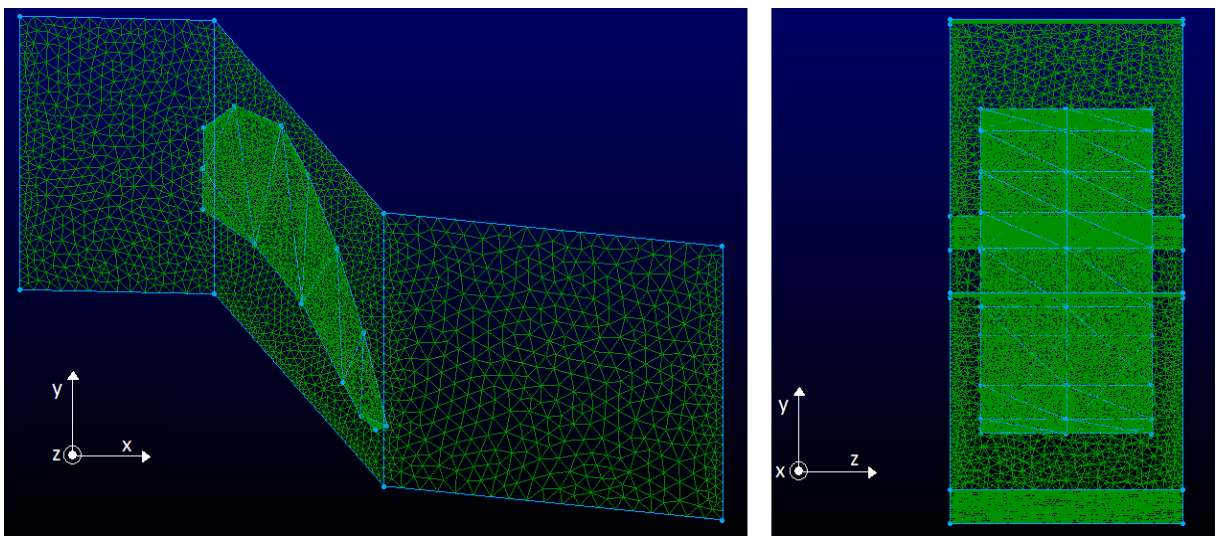
Οι μετατοπίσεις των σημείων ελέγχου, βάσει του αρμονικού πλέγματος του σχήματος 4.12, δύναται να λάβουν τιμές έως και 0.2 cm. Υπενθυμίζεται ότι το μήκος της χορδής είναι ίσο με 14.493 cm. Φαίνεται, λοιπόν, ότι τα περιθώρια μετατοπίσεων των σημείων ελέγχου αυξάνονται σε σχέση με αυτά που προσφέρει η αραιότερη διαμόρφωση του αρμονικού χωρίου του σχήματος 4.11. Η αύξηση, βέβαια, αυτή, δεν επέρχεται χωρίς ταυτόχρονη αύξηση του υπολογιστικού κόστους. Πυκνότερο αρμονικό πλέγμα σημαίνει μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος για την επίλυση της εξίσωσης Laplace και για την παρεμβολή του CFD πλέγματος.

Σχηματισμός 2ου Αρμονικού Χωρίου

Για τον σχηματισμό του αρμονικού χωρίου χρησιμοποιούνται και πάλι τα σημεία ελέγχου που απεικονίζονται στο σχήμα 4.9 με τη διαφορά ότι, όσον αφορά στον εσωτερικό κλωβό, τοποθετούνται επιπλέον σημεία ενδιάμεσα αυτών του σχήματος. Το σχήμα του εξωτερικού κλωβού παραμένει ως έχει. Ο εσωτερικός κλωβός απεικονίζεται στο σχήμα 4.13 και το σύστημα των δύο κλωβών στο σχήμα 4.14. Το δημιουργηθέν αρμονικό πλέγμα αποτελείται από 88056 κόμβους και 502825 τετραεδρικά στοιχεία.



Σχήμα 4.13: Εσωτερικός κλωβός για την C3X περύγωση στροβίλου. Σε σχέση με τον κλωβό του σχήματος 4.10, η διαφορά έγκειται στο ότι έχουν τοποθετηθεί επιπλέον ενδιάμεσα σημεία ελέγχου.



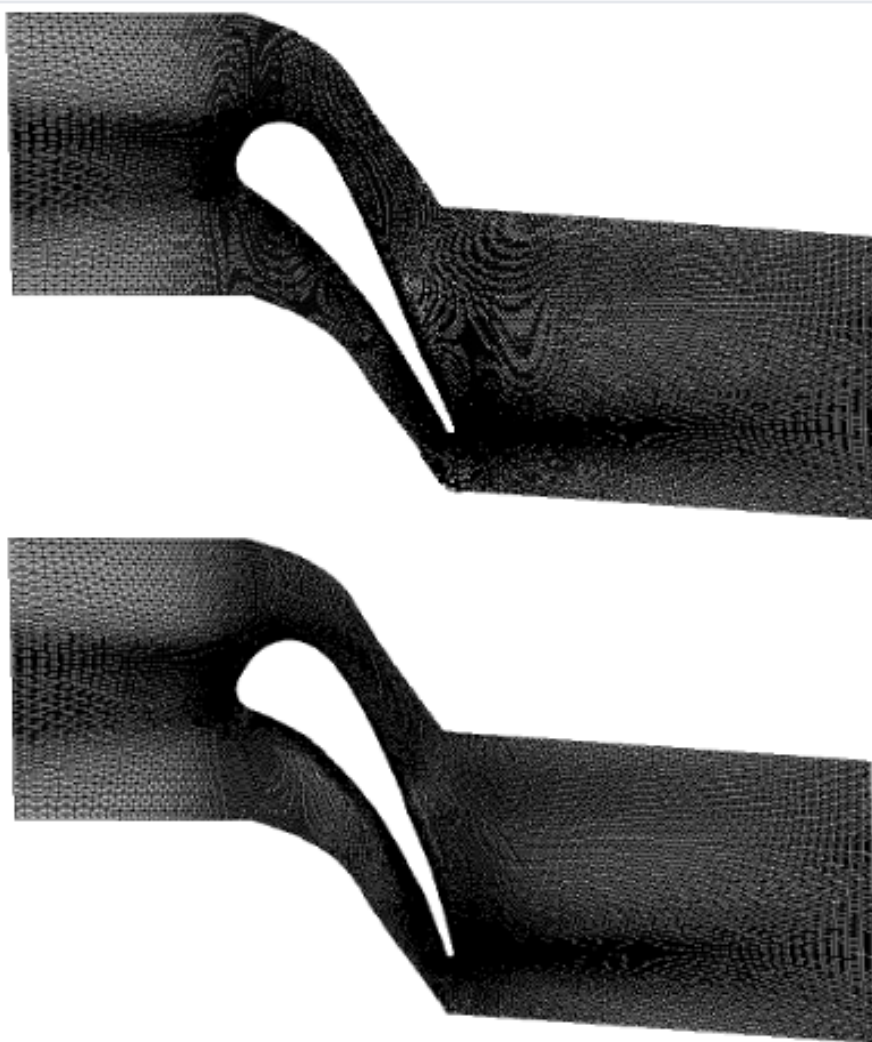
Σχήμα 4.14: Σύστημα ελέγχου δύο κλωβών για την περύγωση στροβίλου C3X.

Το αρμονικό πλέγμα που δημιουργείται είναι πυκνότερο των δύο προηγούμενων. Λόγω της πυκνότητας τόσο του αρμονικού όσο και του CFD πλέγματος, η παρεμβολή του CFD πλέγματος στο αρμονικό γίνεται με χρήση παράλληλης επεξεργασίας. Συγκεκριμένα, στα πλαίσια αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας αναπτύχθηκε και προγραμματίστηκε κώδικας για την παράλληλη επεξεργασία της διαδικασίας της παρεμβολής με χρήση του πρωτοκόλλου MPI (Message Passing Interface).

Το CFD πλέγμα αποτελείται από 1828478 κόμβους και 8819840 τετραεδρικά στοιχεία. Η διαδικασία της παρεμβολής επιλύεται ταυτόχρονα σε 7 επεξεργαστές. Στους πρώτους

6 στέλνονται από 300000 κόμβοι του CFD πλέγματος ενώ στον τελευταίο 28478 κόμβοι. Στο τέλος της διαδικασίας κάθε επεξεργαστής επιστρέφει τα υπολογισθέντα βάρη των CFD κόμβων στον κεντρικό επεξεργαστή. Με χρήση του πρωτοκόλλου MPI ο συνολικός χρόνος υπολογισμού των βαρών μειώνεται κατά 85%.

Οι μετατοπίσεις των σημείων ελέγχου του εσωτερικού κλωβού μπορούν να πάρουν τιμές έως και 0.5 cm. Για μεγαλύτερες τιμές δημιουργούνται μη-αποδεκτά στοιχεία πλέγματος. Στο σχήμα 4.15 απεικονίζονται ενδεικτικά παραμορφώσεις του CFD πλέγματος για τυχαίες μετακινήσεις των σημείων ελέγχου.



Σχήμα 4.15: Παραμορφώσεις του CFD πλέγματος για τυχαίες μετακινήσεις των σημείων ελέγχου.

Συμπερασματικά, όσο πυκνότερο είναι το αρμονικό πλέγμα και όσο μεγαλύτερος ο αριθμός των σημείων ελέγχου, τόσο μεγαλύτερα είναι τα περιθώρια μετακίνησης αυτών και, συνεπώς, τόσο περισσότερες οι δυνατότητες παραμόρφωσης του CFD πλέγματος.

Αυτό όμως συνεπάγεται αύξηση υπολογιστικού χρόνου, κυρίως όσον αφορά στη διαδικασία της παρεμβολής. Το πρόβλημα αυτό, παρ' όλα αυτά, μπορεί να ξεπεραστεί με χρήση παράλληλης επεξεργασίας.

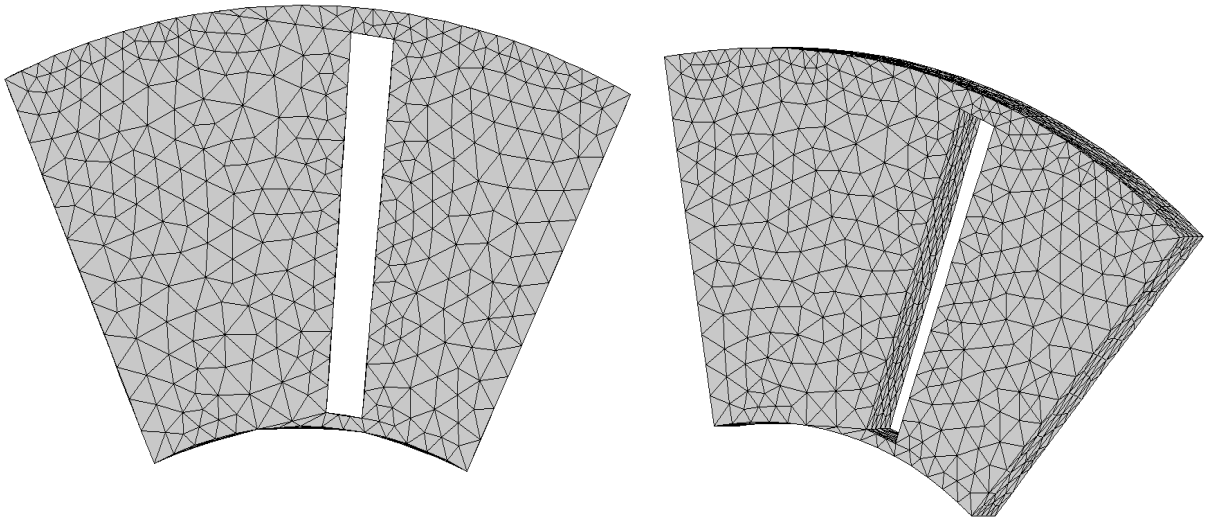
Κεφάλαιο 5

Εφαρμογή Θεωρίας Αρμονικών Συντεταγμένων σε Τομέα Κυκλικού Δακτυλίου και Περιφερειακή Πτερύγωση

Σκοπός του κεφαλαίου είναι η εφαρμογή της μεθόδου των αρμονικών συντεταγμένων σε 3D περιφερειακή πτερύγωση με ταυτόχρονη διατήρηση της περιοδικότητας των ορίων της. Η πρώτη ενότητα του κεφαλαίου παρουσιάζει την εφαρμογή της θεωρίας των αρμονικών συντεταγμένων σε τομέα κυκλικού δακτυλίου και λειτουργεί ως μία εισαγωγή για τη δεύτερη ενότητα η οποία και αφορά στην περιφερειακή πτερύγωση.

5.1 Εφαρμογή σε Τομέα Κυκλικού Δακτυλίου

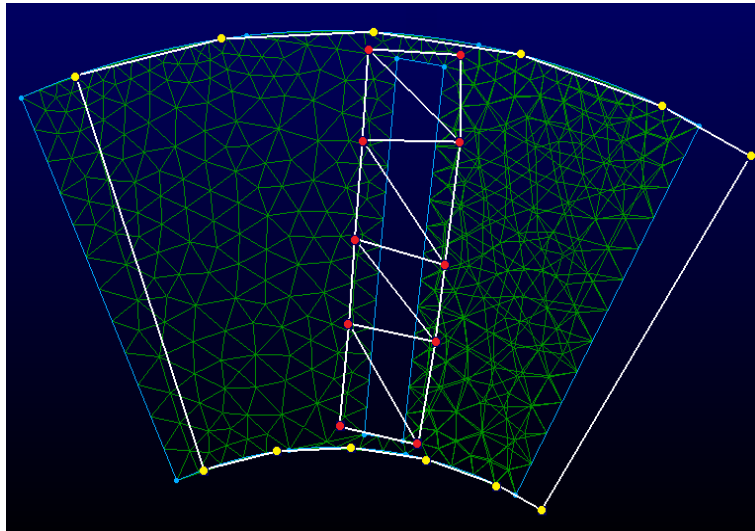
Η πρώτη εφαρμογή αφορά σε τομέα κυκλικού δακτυλίου, το πλεγματοποιημένο χωρίο του οποίου απεικονίζεται στο σχήμα 5.1. Το πλεγματοποιημένο χωρίο αυτό αποτελεί το CFD πλέγμα της εφαρμογής. Το κενό τμήμα του χωρίου αποτελεί την περιοχή η οποία ζητείται να παραμορφωθεί μέσω παραμόρφωσης του πλέγματος γύρω από αυτήν. Βασικό ζητούμενο της διαδικασίας είναι η διατήρηση των περιοδικών ορίων του τομέα. Λόγω της μορφής του χωρίου είναι απαραίτητη η χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τρόποι για την αντιμετώπιση μίας τέτοιας περίπτωσης.



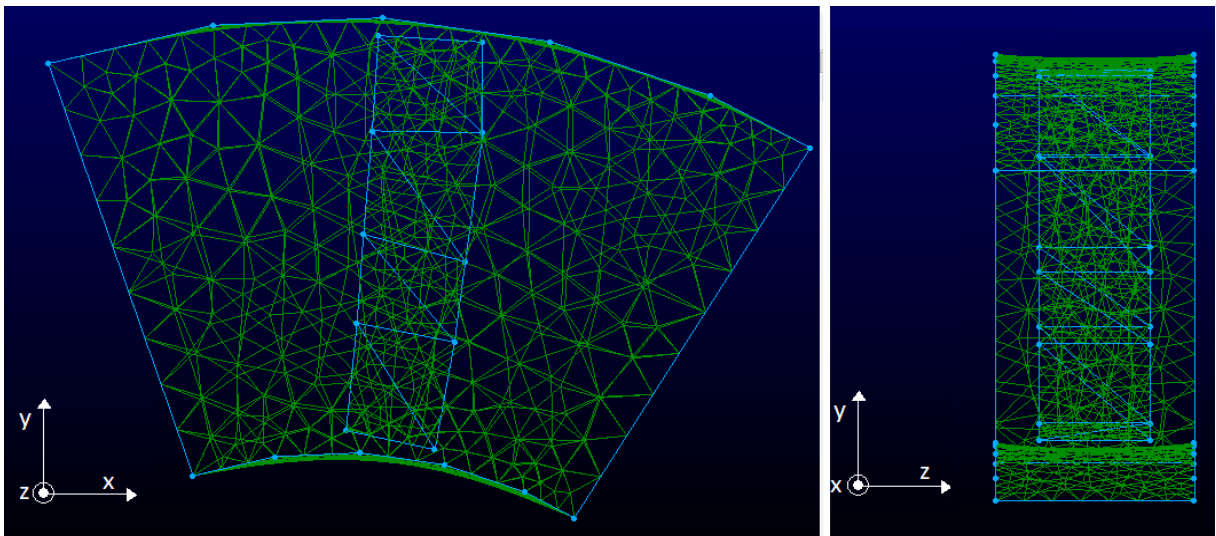
Σχήμα 5.1: Πλεγματοποιημένο χωρίο σε μορφή τομέα κυκλικού δακτυλίου. Η κενή περιοχή είναι αυτή η οποία παραμορφώνεται.

1ος Τρόπος

Επιλέγονται αρχικά τα σημεία του CFD πλέγματος τα οποία αποτελούν σημεία ελέγχου του αρμονικού χωρίου. Τα σημεία αυτά απεικονίζονται στο σχήμα 5.2. Πέραν των 22 σημείων ελέγχου τα οποία είναι εμφανή στο σχήμα, υπάρχουν άλλα 22 σημεία ελέγχου τα οποία έχουν ίδιες τιμές τετμημένων και τεταγμένων με αυτά που φαίνονται, διαφέρουν όμως κατά την z κατεύθυνση. Τονίζεται ότι τα σημεία του εσωτερικού και του εξωτερικού κλωβού δεν τοποθετούνται στο ίδιο επίπεδο ώστε να είναι δυνατή η απόσβεση των τιμών των αρμονικών συντεταγμένων κατά τον άξονα z . Στο σχήμα 5.3 παρουσιάζεται το προκύπτον σύστημα των δύο κλωβών κατά τα επίπεδα $x - y$ και $y - z$.



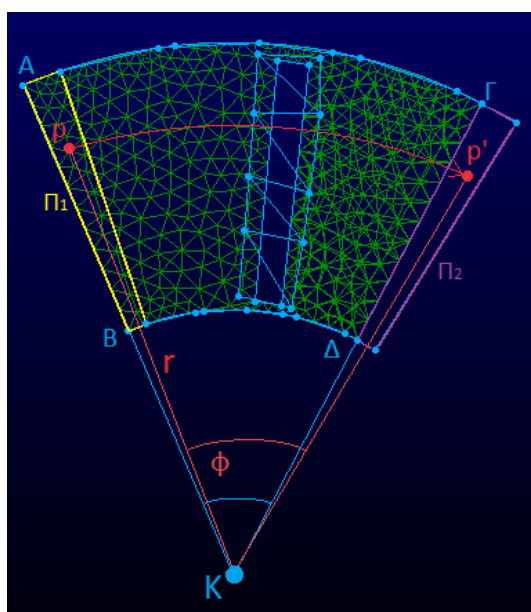
Σχήμα 5.2: Σημεία CFD πλέγματος τα οποία αποτελούν σημεία ελέγχου του αρμονικού πλέγματος. Με κόκκινο χρώμα σημειώνονται τα σημεία ελέγχου του εσωτερικού κλωβού και με κίτρινο αυτά του εξωτερικού.



Σχήμα 5.3: Σύστημα δύο κλωβών για την παραμόρφωση του CFD πλέγματος του σχήματος 5.1. Η διάταξη απεικονίζεται κατά τα επίπεδα $x - y$ και $y - z$.

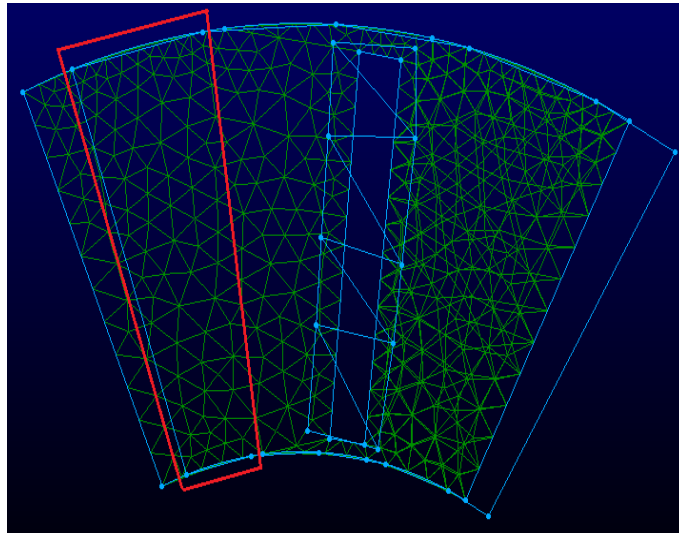
Από το σχήμα 5.4 παρατηρείται ότι υπάρχει ένα τμήμα του CFD πλέγματος το οποίο δεν ανήκει στο αρμονικό χωρίο, καθώς και τμήμα του αρμονικού χωρίου το οποίο δεν περιέχει κόμβους του CFD πλέγματος. Για τον υπολογισμό των αρμονικών συντεταγμένων των κόμβων αυτών αρχικά υπολογίζεται το κέντρο K του τομέα και η γωνία φ , σχήμα 5.4. Έτσι, ένα σημείο p του CFD πλέγματος της περιοχής Π_1 , το οποίο δεν ανήκει σε τετραεδρικό στοιχείο του αρμονικού πλέγματος, μετατοπίζεται κατά γωνία φ και τοποθετείται σε απόσταση ίση με την ακτίνα του r από το κέντρο K . Έτσι, προ-

κύπτει το νέο σημείο p' στην περιοχή Π_2 το οποίο ανήκει στο αρμονικό πλέγμα και, συνεπώς, είναι δυνατόν να υπολογιστούν οι αρμονικές συντεταγμένες του. Οι αρμονικές συντεταγμένες που υπολογίζονται για το σημείο p' δίνονται και στο σημείο p . Με αυτόν τον τρόπο όλα τα σημεία τα οποία ανήκουν στην περιοχή Π_1 παρεμβάλλονται στο αρμονικό χωρίο. Λόγω του ότι οι κόμβοι των ακμών AB και η $\Gamma\Delta$ αποκτούν τις ίδιες τιμές αρμονικών συντεταγμένων, μετατοπίζονται και κατά τον ίδιο τρόπο. Έτσι εξασφαλίζεται η διατήρηση της περιοδικότητας του χωρίου.



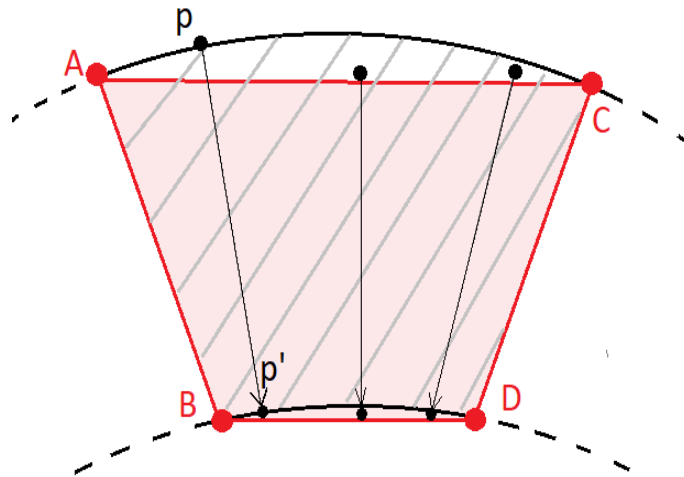
Σχήμα 5.4: Το τυχαίο σημείο p δεν βρίσκεται να ανήκει σε τετραεδρικό στοιχείο του αρμονικού χωρίου. Για αυτόν τον λόγο μετατοπίζεται κατά γωνία ϕ και σε σταθερή απόσταση από το κέντρο K ίση με την ακτίνα του r , στην νέα θέση p' .

Παρατηρώντας τη σημειωμένη με κόκκινο περιοχή του σχήματος 5.5, φαίνεται ότι υπάρχουν και κάποιες ακόμα περιοχές του CFD πλέγματος οι οποίες δεν περιέχονται στο αρμονικό πλέγμα, όπως και περιοχές του αρμονικού πλέγματος οι οποίες δεν περιέχουν κόμβους του CFD πλέγματος.



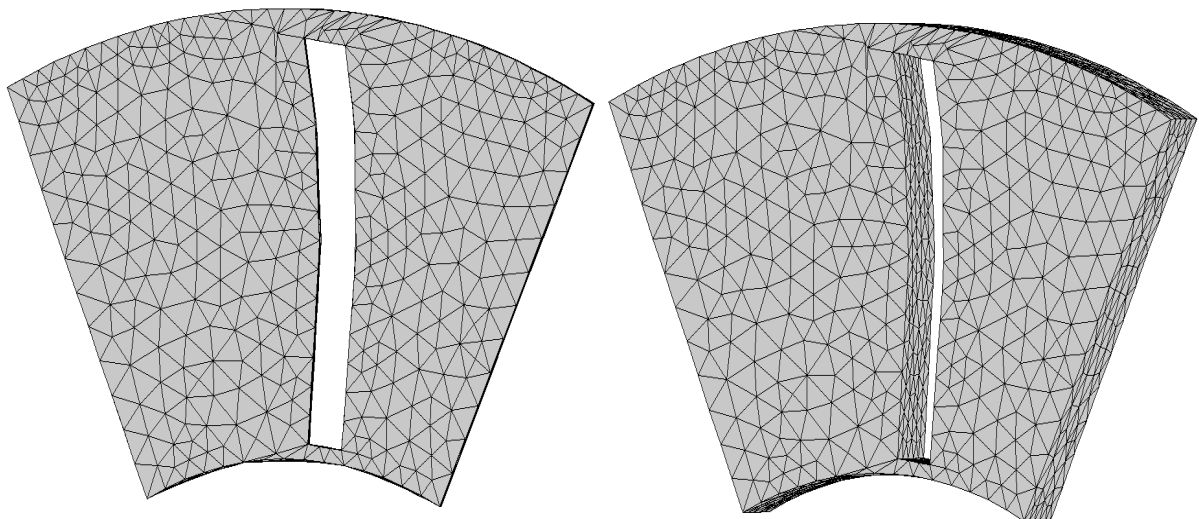
Σχήμα 5.5: CFD πλέγμα και αρμονικό χωρίο. Η σημειωμένη περιοχή είναι ενδεικτικά μία ακόμα περιοχή όπου δεν υπάρχει επικάλυψη CFD και αρμονικού πλέγματος.

Το ποιες ακριβώς είναι οι σημειωμένες περιοχές του σχήματος 5.5 οι οποίες δεν επικαλύπτονται, γίνεται καλύτερα κατανοητό με το σχήμα 5.6. Με μαύρο χρώμα σημειώνονται τα όρια του CFD πλέγματος και με κόκκινο του αρμονικού χωρίου. Τα όρια του CFD πλέγματος κείνται πάνω σε κύκλο ενώ του αρμονικού χωρίου σε ευθύγραμμα τμήματα. Για αυτόν τον λόγο προκύπτουν οι περιοχές μη-επικάλυψης που απεικονίζονται. Έτσι ένα σημείο p το οποίο δεν βρίσκεται να ανήκει σε τετραεδρικό στοιχείο του αρμονικού πλέγματος μετακινείται στην θέση p' . Το σημείο p' ανήκει στην ευθεία που ενώνει το σημείο p με το κέντρο K , καθώς και σε κύκλο με κέντρο το σημείο K και ακτίνα ίση με την ακτίνα του σημείου p μείον την απόσταση AB .



Σχήμα 5.6: Επεξήγηση του σχήματος 5.5. Με μαύρο χρώμα διαγράφονται τα όρια του CFD πλέγματος και με κόκκινο του αρμονικού. Ένα σημείο p του CFD πλέγματος μετακινείται στην νέα θέση p' ώστε να είναι δυνατόν να παρεμβληθεί στο αρμονικό πλέγμα.

Αφού γίνει η παρεμβολή όλων των κόμβων του CFD πλέγματος στο αρμονικό πλέγμα, δίνονται μετακινήσεις στα σημεία ελέγχου του εσωτερικού κλωβού ώστε να παραμορφωθεί το υπολογιστικό πλέγμα. Σημειώνεται ότι για τις μετατοπίσεις χρησιμοποιείται κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (ρ, z, θ) . Οι μετατοπίσεις γίνονται αποκλειστικά κατά $d\theta$. Οι τιμές των ακτίνων ρ και των αποστάσεων z του κάθε σημείου ελέγχου διατηρούνται σταθερές. Το σχήμα 5.7 απεικονίζει το προκύπτον υπολογιστικό πλέγμα μετά από τυχαίες μετατοπίσεις των σημείων ελέγχου του εσωτερικού κλωβού.

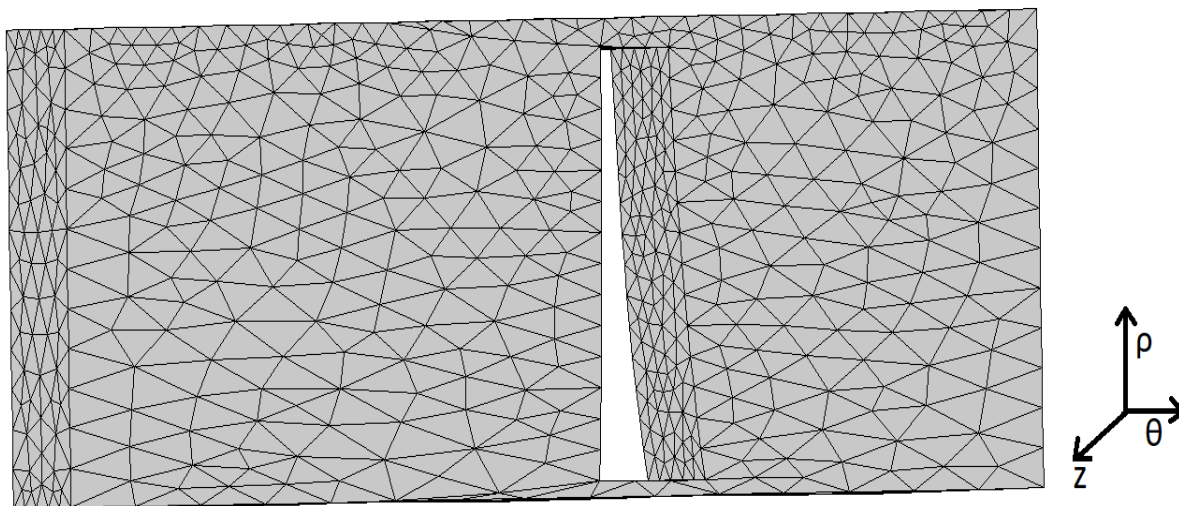


Σχήμα 5.7: Προκύπτον υπολογιστικό πλέγμα μετά από τυχαίες μετατοπίσεις των σημείων ελέγχου του εσωτερικού κλωβού.

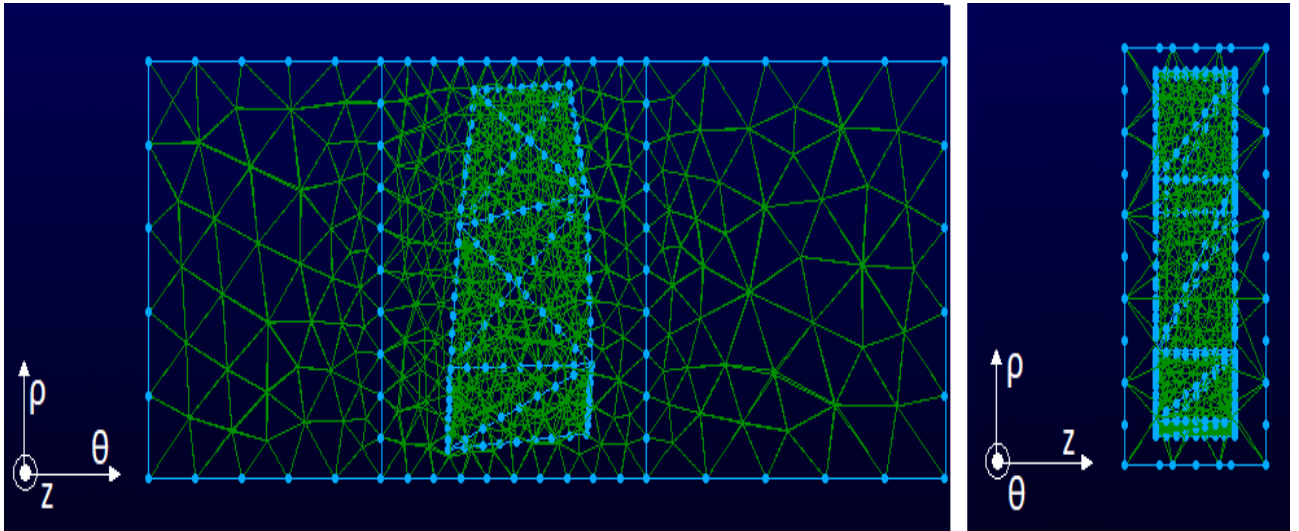
2ος Τρόπος

Με τη διαδικασία που αναλύεται παραπάνω διατηρείται η περιοδικότητα του χωρίου, δεν παραμένουν όμως σε σταθερή ακτίνα τα μη-περιοδικά όρια αυτού πάνω και κάτω, χαρακτηριστικό το οποίο είναι απαραίτητο για την επόμενη εφαρμογή σε περιφερειακή πτερύγωση. Έτσι, με τον τρόπο που παρουσιάζεται στη συνέχεια, πέραν της διατήρησης της περιοδικότητας, προστίθεται η απαίτηση διατήρησης σε σταθερή ακτίνα των κόμβων οι οποίοι ανήκουν στα μη-περιοδικά όρια.

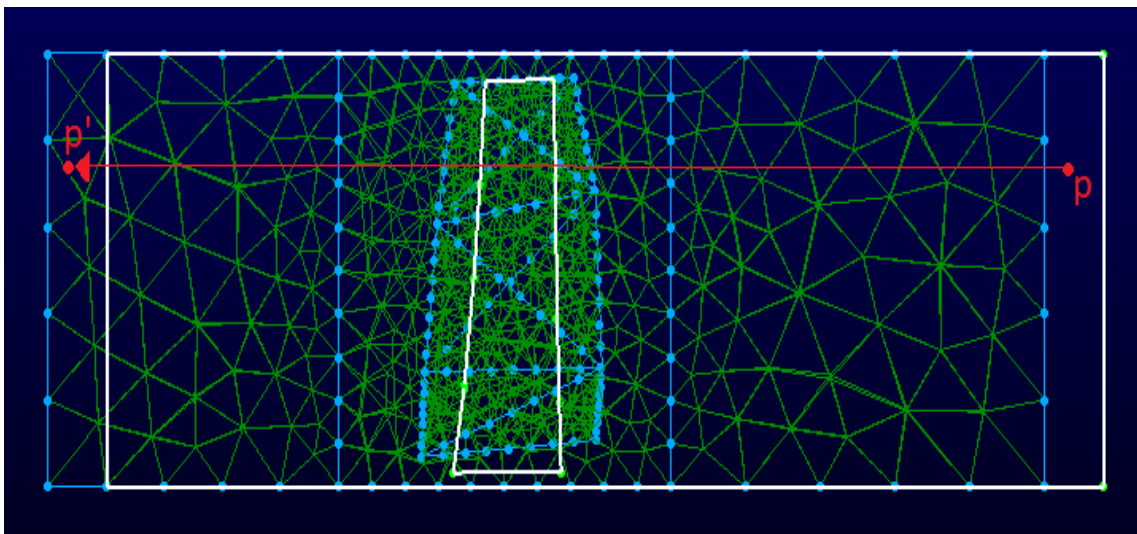
Με χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων το CFD πλέγμα μετασχηματίζεται στο πλεγματοποιημένο χωρίο του σχήματος 5.8. Το σύστημα των δύο κλωβών σχηματίζεται βάσει του μετασχηματισμένου χωρίου και απεικονίζεται στο σχήμα 5.9. Στο σχήμα 5.10 απεικονίζεται το σύστημα των δύο κλωβών τοποθετημένο στο CFD πλέγμα. Εμφανίζονται περιοχές μη-επικάλυψης των δύο πλεγμάτων. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται μετακινώντας έναν κόμβο p , ο οποίος δεν βρίσκεται να ανήκει σε τετραεδρικό στοιχείο του αρμονικού πλέγματος, κατά την κατεύθυνση θ και κατά ποσότητα φ (σχήμα 5.4). Με αυτόν τον τρόπο είναι δυνατόν να γίνει η παρεμβολή του στο αρμονικό πλέγμα. Οι τιμές των αρμονικών συντεταγμένων που θα υπολογιστούν για το νέο σημείο p' δίνονται και στο σημείο p .



Σχήμα 5.8: Μετασχηματισμένο χωρίο με χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων. Οι τρεις κατευθύνσεις αντιστοιχούν πλέον στις μεταβλητές θ, ρ, z .



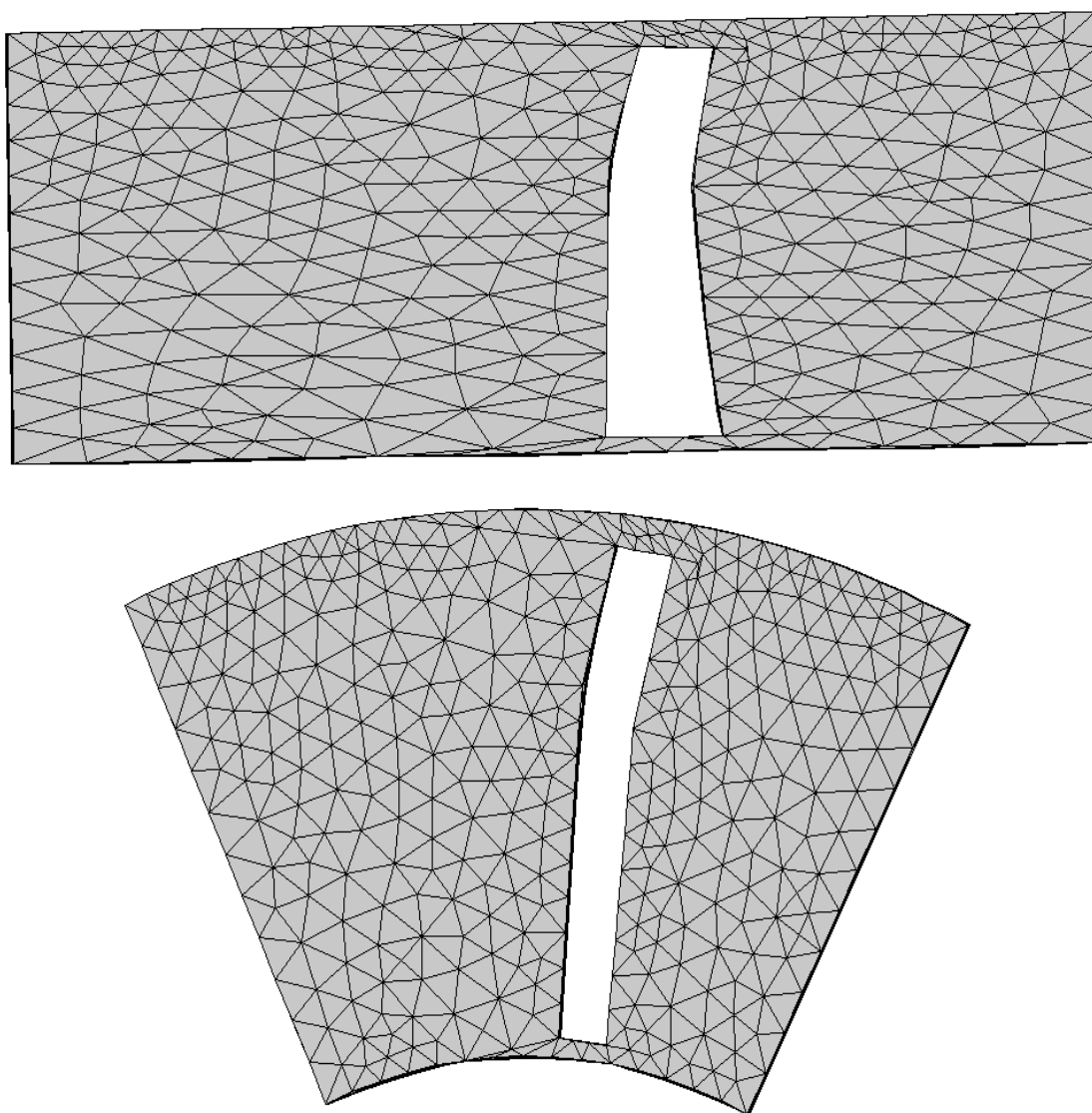
Σχήμα 5.9: Σύστημα δύο κλωβών για το μετασχηματισμένο υπολογιστικό χωρίο του σχήματος 5.8.



Σχήμα 5.10: Σύστημα δύο κλωβών και CFD πλέγμα. Με άσπρο σημειώνεται το περίγραμμα του CFD πλέγματος. Ένας τυχαίος κόμβος p ο οποίος δεν βρίσκεται να ανήκει σε τετραεδρικό στοιχείο του αρμονικού πλέγματος μετακινείται κατά φ (σχήμα 5.4) κατά την κατεύθυνση θ .

Στη συνέχεια, δίνονται μετατοπίσεις στα σημεία ελέγχου του εσωτερικού κλωβού. Οι μετατοπίσεις αφορούν μόνο στην κατεύθυνση θ , οι τιμές των συντεταγμένων ρ και z παραμένουν σταθερές. Στο σχήμα 5.11 απεικονίζεται το CFD πλέγμα μετά τις μετατοπίσεις των σημείων ελέγχου, σε κυλινδρικές και καρτεσιανές συντεταγμένες. Λόγω του ότι οι μετατοπίσεις αφορούν μόνο στη θ κατεύθυνση εξασφαλίζεται το ότι οι ακτίνες και οι κατά- z συντεταγμένες όλων των σημείων παραμένουν σταθερές. Συνεπώς, τα

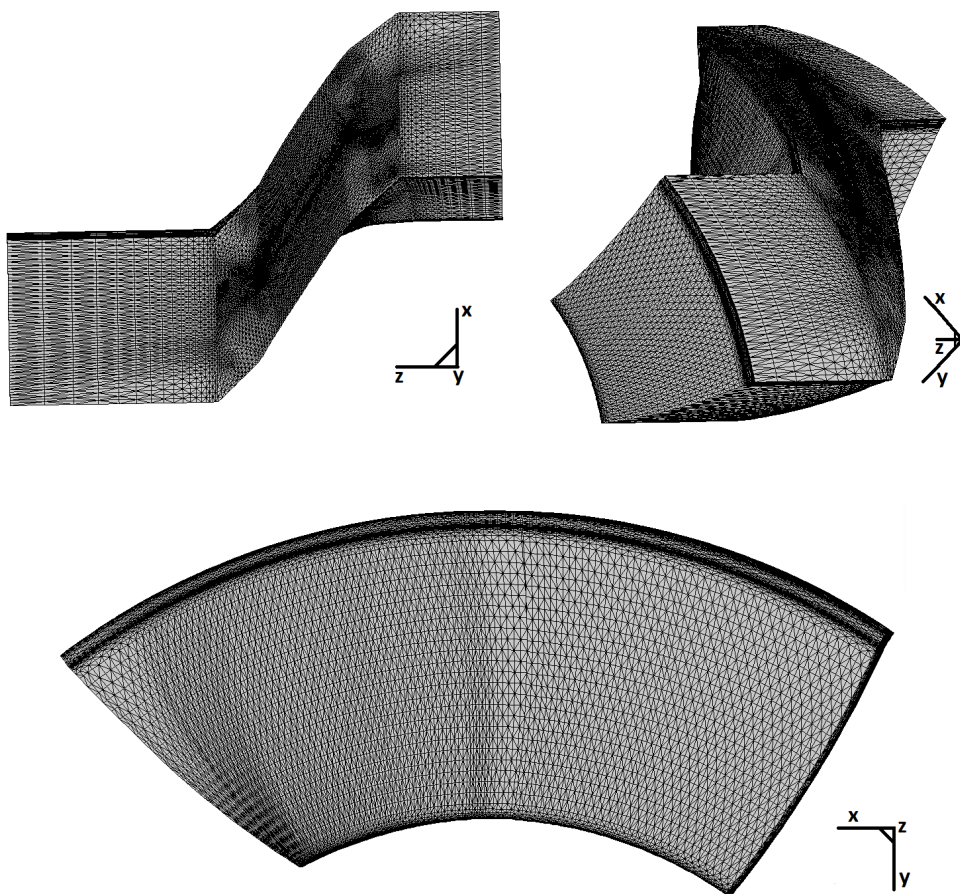
σημεία τα οποία κείνται στα μη-περιοδικά όρια διατηρούν σταθερές τιμές ακτίνων, όπως είναι και το επιθυμητό αποτέλεσμα.



Σχήμα 5.11: CFD πλέγμα μετά από μετατοπίσεις των σημείων ελέγχου του εσωτερικού κλωβού σε κυλινδρικές και καρτεσιανές συντεταγμένες. Οι μετατοπίσεις αφορούν μόνο στην κατεύθυνση θ και ως εκ τούτου τα σημεία διατηρούν σταθερές τιμές ακτίνων.

5.2 Εφαρμογή σε 3Δ Περιφερειακή Πτερύγωση Συμπιεστή.

Σε αυτήν την ενότητα εφαρμόζεται η μέθοδος των αρμονικών συντεταγμένων σε 3Δ περιφερειακή πτερύγωση συμπιεστή[[14]]. Η περιφερειακή πτερύγωση και το υπολογιστικό πλέγμα μέσα σε αυτήν απεικονίζεται στο σχήμα 5.12 κατά διάφορα επίπεδα. Το πλέγμα αποτελείται από 1205554 κόμβους και 5926148 τετραεδρικά στοιχεία.

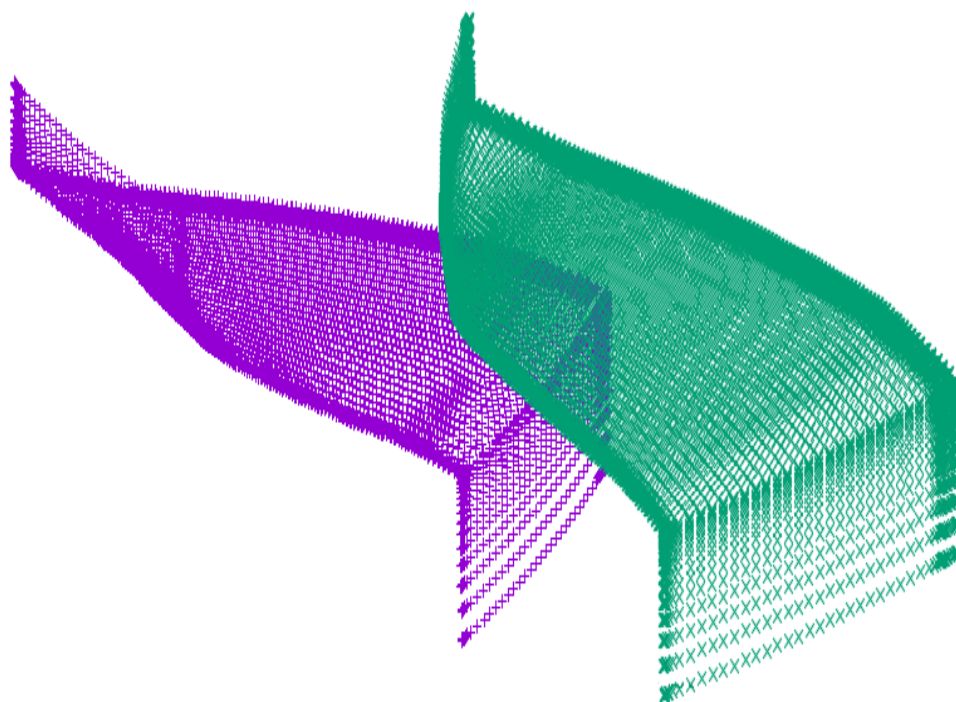


Σχήμα 5.12

Για την περίπτωση της 3Δ περιφερειακής πτερύγωσης συμπιεστή απαιτείται η διατήρηση της περιοδικότητας των περιοδικών ορίων καθώς και η σταθερή κατά- x και κατά- y τιμή των συντεταγμένων των σημείων που κείνται στα μη-περιοδικά όρια. Δοκιμάζονται, στη συνέχεια, δύο τρόποι για την αντιμετώπιση της πτερύγωσης.

1ος Τρόπος

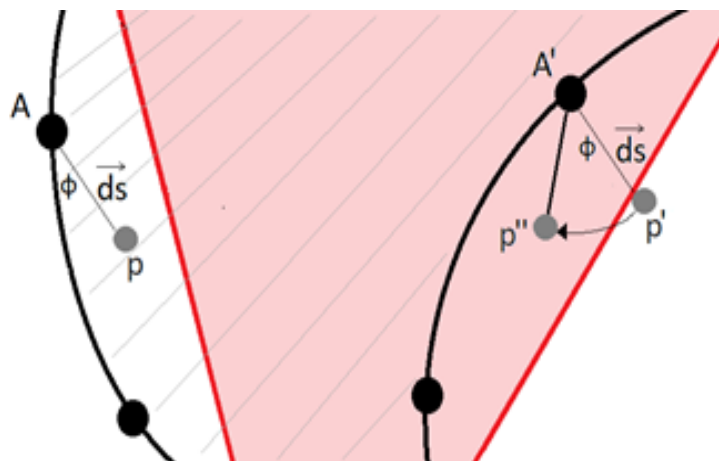
Η εφαρμογή αντιμετωπίζεται, καταρχάς, με τη διαδικασία που περιγράφεται στην συνέχεια. Αρχικά εντοπίζονται και αποθηκεύονται οι περιοδικοί κόμβοι των δύο πλευρών. Το σχήμα 5.13 απεικονίζει τους κόμβους οι οποίοι ανήκουν στις δυο περιοδικές πλευρές. Με αυτόν τον τρόπο, αν ένας περιοδικός κόμβος (έστω στη μωβ πλευρά) δεν βρεθεί να ανήκει σε τετραεδρικό στοιχείο του αρμονικού πλέγματος κατά τη διαδικασία της παρεμβολής, εντοπίζεται ο αντίστοιχος περιοδικός του στην άλλη πλευρά (πράσινη), υπολογίζονται οι αρμονικές συντεταγμένες αυτού και οι τιμές αυτές δίνονται και στον πρώτο περιοδικό κόμβο.



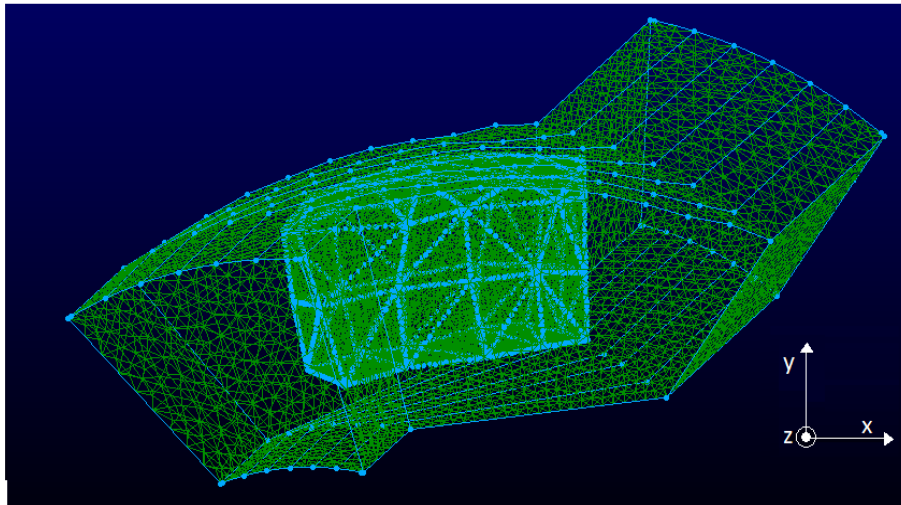
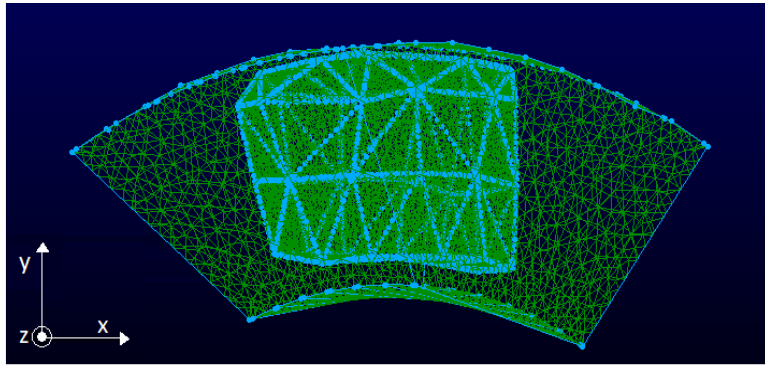
Σχήμα 5.13: Κόμβοι περιοδικών πλευρών της 3D περιφερειακής πτερύγωσης συμπίεστης.

Για την περίπτωση όπου ένας τυχαίος κόμβος p (σχήμα 5.14) δεν βρίσκεται σε τετραεδρικό στοιχείο του αρμονικού πλέγματος αλλά δεν είναι και περιοδικός κόμβος, ανιχνεύεται, αρχικά, ο κοντινότερος σε αυτόν περιοδικός κόμβος, έστω A . Έπειτα υπολογίζεται το διάνυσμα της απόστασής του από αυτόν, έστω ds . Στη συνέχεια, αναζητείται ο αντίστοιχος περιοδικός του A , έστω A' και προστίθεται σε αυτόν το διάνυσμα ds . Με τον τρόπο αυτόν εντοπίζεται ο κόμβος p' , ο οποίος στρέφεται κατά γωνία ίση με τη γωνία της πτερύγωσης ώστε να προκύψει ο τελικός κόμβος p'' . Ο κόμβος p'' είναι ο κόμβος για τον οποίο υπολογίζονται οι αρμονικές συντεταγμένες, οι τιμές των οποίων αποδίδονται στον κόμβο p . Η διαδικασία της παρεμβολής υλοποιήθηκε με παραλληλοποιημένο κώδικα με χρήση του πρωτοκόλλου MPI, ο οποίος αναπτύχθηκε και προγραμματίστηκε στο πλαίσιο της μεταπτυχιακής εργασίας.

Με την παραπάνω διαδικασία εξασφαλίζεται η διατήρηση της περιοδικότητας. Για την επιπλέον εξασφάλιση της διατήρησης σταθερής θέσης των μη-περιοδικών ορίων, μετά την μετατόπιση των σημείων ελέγχου και την παραμόρφωση του CFD πλέγματος, όσοι κόμβοι ανήκουν στα όρια αυτά επαναφέρονται στις αρχικές τους θέσεις μέσω διόρθωσης των καρτεσιανών συντεταγμένων τους.

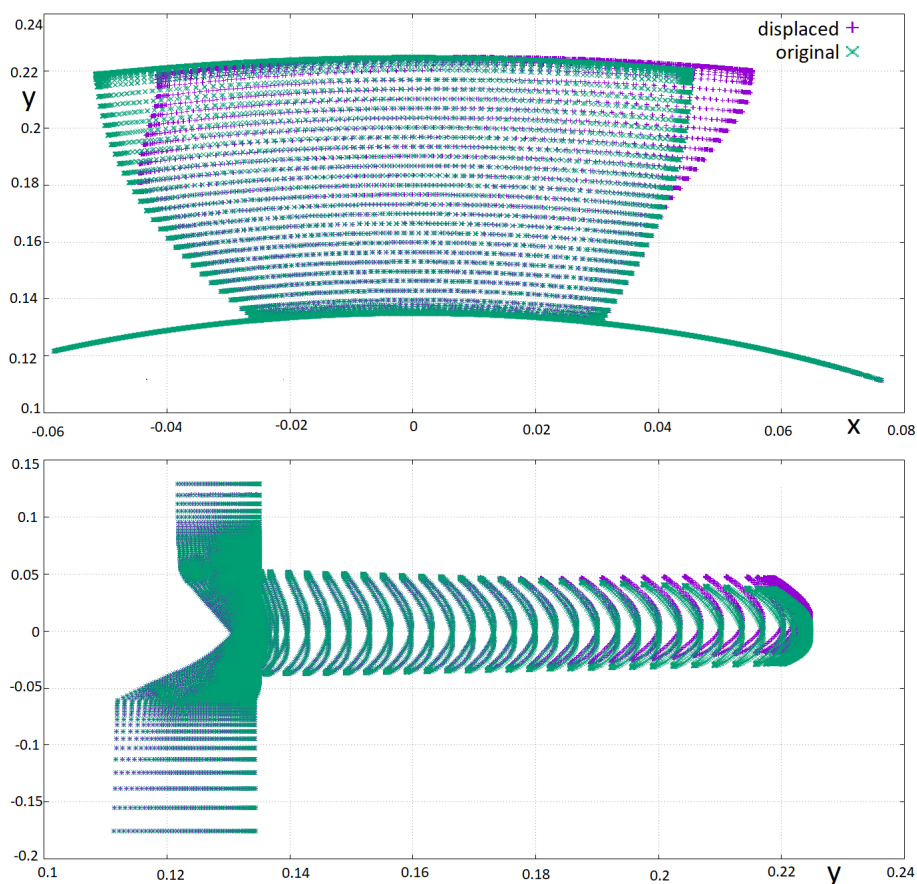


Σχήμα 5.14: Με μαύρο χρώμα σημειώνονται τα όρια του CFD πλέγματος και με κόκκινο του αρμονικού. Ένας τυχαίος κόμβος p εκτός αρμονικού χωρίου αποκτά τις τιμές των αρμονικών συντεταγμένων που υπολογίζονται για τον κόμβο p'' με την διαδικασία που περιγράφεται.



Σχήμα 5.15: Σύστημα δύο κλωβών για τη διαχείριση της περιφερειακής περύγωσης συμπίεστη.

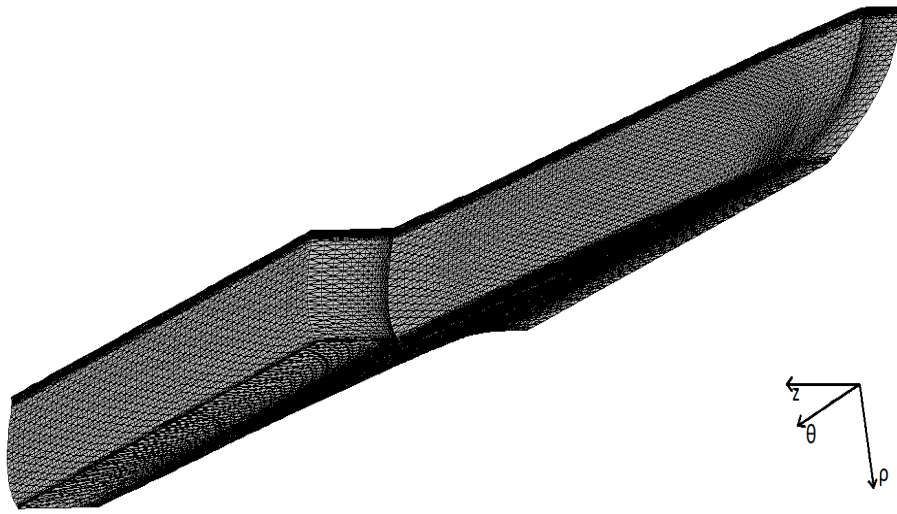
Στο σχήμα 5.15 απεικονίζεται το σύστημα δύο κλωβών για την περύγωση. Το προκύπτον υπολογιστικό χωρίο αποτελείται από 47458 κόμβους και 271256 τετραεδρικά στοιχεία. Στο σχήμα 5.16 παρουσιάζεται η παραμόρφωση της γεωμετρίας του περυγίου, λόγω παραμόρφωσης του υπολογιστικού πλέγματος γύρω από αυτό, για τυχαίες παραμορφώσεις των σημείων ελέγχου του εσωτερικού κλωβού.



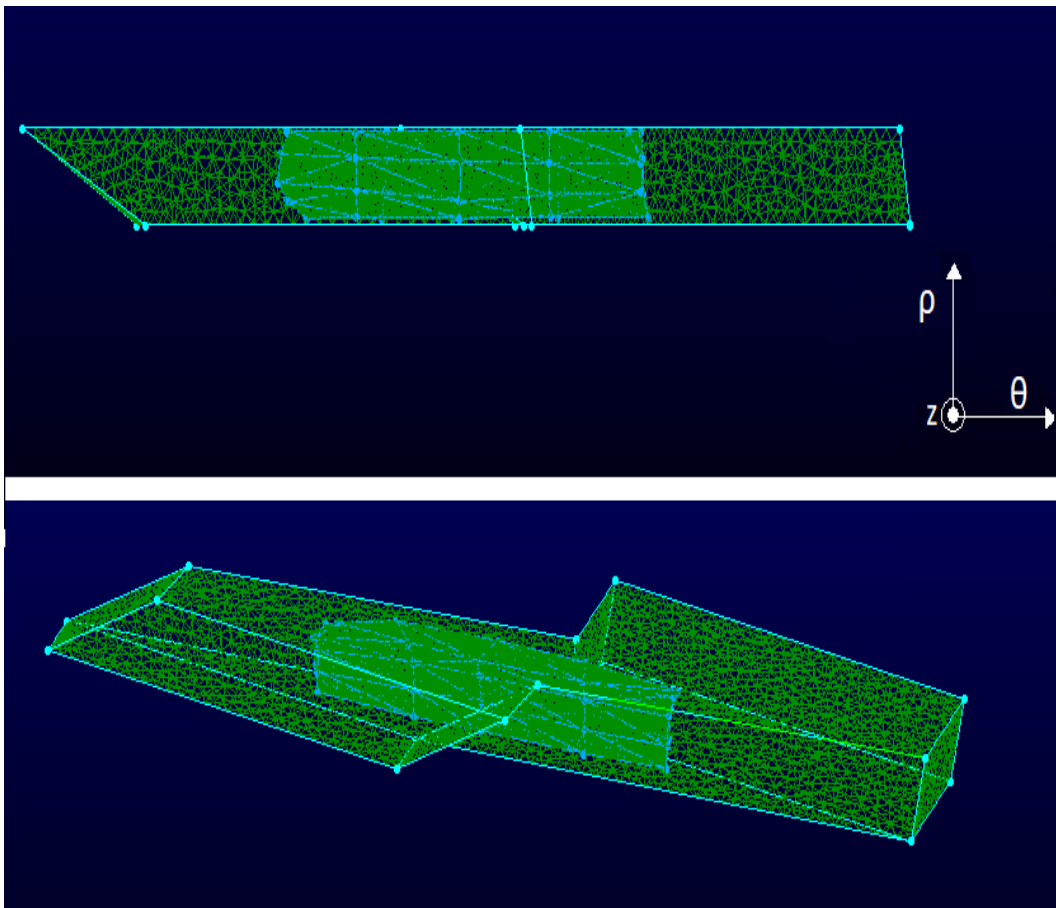
Σχήμα 5.16: Παραμόρφωση γεωμετρίας πτερυγίου και σύγκρισή με το αρχικό. Η μετατόπιση των σημείων ελέγχου γίνεται κατά τους άξονες x και z .

2ος Τρόπος

Σε δεύτερο στάδιο, γίνεται χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων. Το μετασχηματισμένο σε κυλινδρικές συντεταγμένες υπολογιστικό χωρίο απεικονίζεται στο σχήμα 5.17. Το σύστημα των δύο κλωβών σχηματίζεται με βάση το μετασχηματισμένο υπολογιστικό πλέγμα και παρουσιάζεται στο σχήμα 5.18. Το προκύπτον αρμονικό πλέγμα αποτελείται από 29433 κόμβους και 166006 τετραεδρικά στοιχεία.

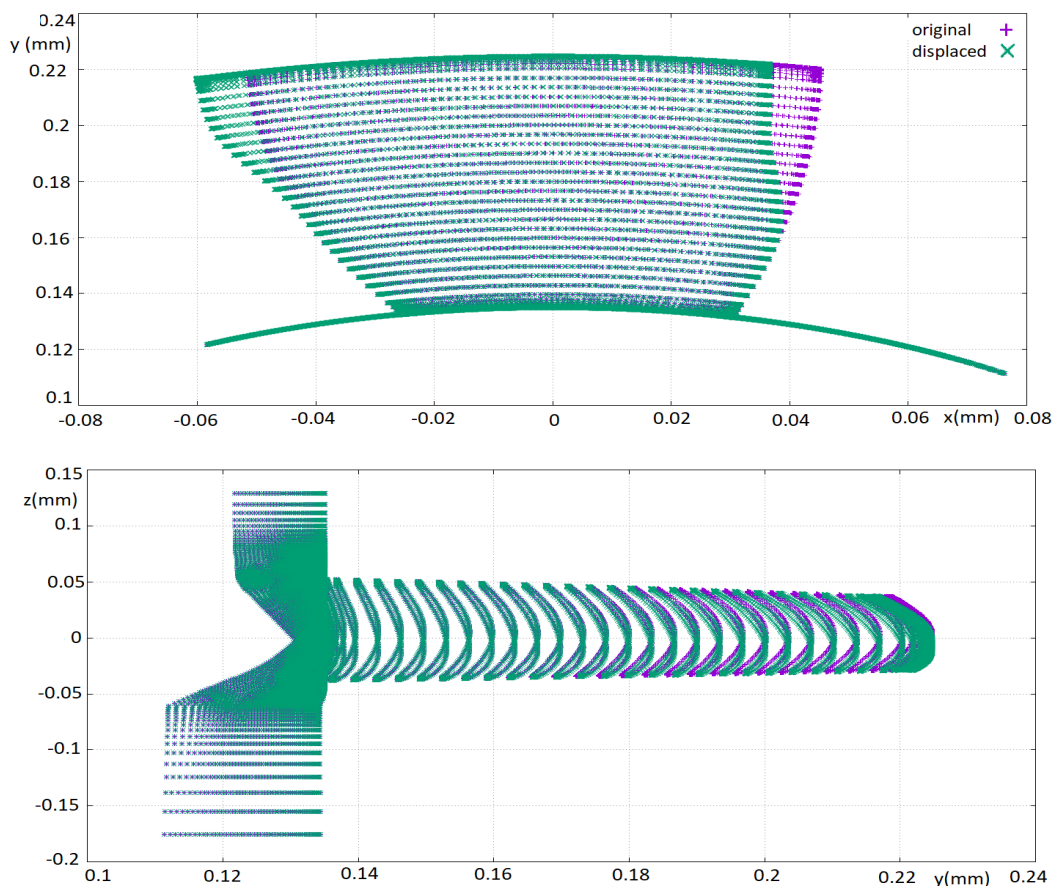


Σχήμα 5.17: Μετασχηματισμένο χωρίο με χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων. Οι τρεις κατευθύνσεις αντιστοιχούν στις μεταβλητές θ , ρ , z .



Σχήμα 5.18: Σύστημα δύο κλωβών για το μετασχηματισμένο χωρίο του σχήματος 5.17.

Στη συνέχεια, δίνονται μετακινήσεις στα σημεία ελέγχου του εσωτερικού κλωβού κατά την κατεύθυνση θ . Το παραμορφωμένο CFD χωρίο είναι, αρχικά, εκφρασμένο σε κυλινδρικές συντεταγμένες και, στη συνέχεια, μετασχηματίζεται και πάλι σε καρτεσιανές. Λόγω της μορφής της περυγώσης δεν είναι εύκολα ορατή και κατανοητή η παραμόρφωση της γεωμετρίας του περυγίου μέσα στην περυγώση. Για αυτόν το λόγο στο σχήμα 5.19 απεικονίζεται αποκλειστικά η μορφή του παραμορφωμένου περυγίου σε σύγκριση με την αρχική.



Σχήμα 5.19: Παραμορφωμένη γεωμετρία περυγίου σε σύγκριση με την αρχική. Η γεωμετρία παρουσιάζεται κατά τα επίπεδα $x - y$ και $y - z$.

Κεφάλαιο 6

Ανακεφαλαίωση και Προτάσεις για Μελλοντική Μελέτη

6.1 Ανακεφαλαίωση

Σε μία μέθοδο αεροδυναμικής βελτιστοποίησης μορφής, η ανάγκη για νέο υπολογιστικό πλέγμα σε κάθε κύκλο, είναι αναπόσπαστο τμήμα της διαδικασίας. Η εναναπλεγματοποίηση, όμως, του υπολογιστικού χωρίου είναι κοστοβόρα διαδικασία, καθώς απαιτεί σημαντικό υπολογιστικό χρόνο. Για τον λόγο αυτόν, έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι που βασίζονται στην παραμόρφωση του ήδη υπάρχοντος υπολογιστικού πλέγματος και όχι στη γένεση νέου. Μία τέτοια μέθοδο αποτελεί και η μέθοδος των αρμονικών συντεταγμένων. Χρήση της μεθόδου έχει γίνει σε προηγούμενες διπλωματικές εργασίες, εφαρμοζόμενη σε γεωμετρικά σώματα, σε 2Δ πτερυγώσεις, σε 2Δ και 3Δ αγωγούς και σε πτέρυγα αεροσκάφους. Σε αυτήν τη μεταπτυχιακή εργασία οι εφαρμογές επικεντρώθηκαν σε 2Δ και 3Δ περιοδικά χωρία. Βασικός στόχος όλων των εφαρμογών είναι η διατήρηση της περιοδικότητας των ορίων των υπολογιστικών χωρίων.

Αναλυτικά στην εργασία παρουσιάστηκαν τα εξής:

- Αναλύθηκε το θεωρητικό υπόβαθρο και οι βασικές ιδιότητες των αρμονικών συντεταγμένων καθώς και η τεχνική των δύο κλωβών. Παρουσιάστηκε, στη συνέχεια, ο τρόπος με τον οποίο είναι δυνατόν να εφαρμοστούν τα προαναφερθέντα σε περιοδικό χωρίο.
- Σε δεύτερο στάδιο, έγινε παραμετρική μελέτη για την διερεύνηση του σωστό-υ τρόπου εφαρμογής της μεθόδου. Δοκιμάστηκαν διαφορετικές διαμορφώσεις κλωβών και εξετάστηκε ο τρόπος με τον οποίο παραμορφώνεται το υπολογιστι-

κό πλέγμα σε κάθε περίπτωση. Έτσι, εξήχθησαν οι βασικές κατευθύνσεις που πρέπει να ακολουθηθούν για τη δημιουργία συστήματος δύο κλωβών σε περιοδικό χωρίο.

- Στη συνέχεια, η παραπάνω θεωρία και τα συμπεράσματα της παραμετρικής μελέτης βρήκαν εφαρμογή σε 2Δ πτερυγώσεις συμπιεστή και στροβίλου. Για τις περιπτώσεις αυτές, η μέθοδος ενσωματώθηκε σε κύκλο αεροδυναμικής βελτιστοποίησης μορφής με χρήση εξελικτικών αλγορίθμων.
- Σε επόμενο κεφάλαιο, η θεωρία των αρμονικών συντεταγμένων επεκτάθηκε στις τρεις διαστάσεις. Παρουσιάστηκαν οι βασικές διαφοροποιήσεις σε σχέση με τις δύο διαστάσεις και έπειτα έγινε εφαρμογή σε 3Δ πτερυγώσεις συμπιεστή και στροβίλου.
- Τέλος, η μέθοδος των αρμονικών συντεταγμένων βρήκε εφαρμογή σε τομέα κυκλικού δακτυλίου, εξετάζοντας 2 τρόπους με τους οποίους μπορεί να υλοποιηθεί με ταυτόχρονη διατήρηση των περιοδικών ορίων. Η τελευταία εφαρμογή της μεθόδου αφορά σε 3Δ περιφερειακή πτερύγωση συμπιεστή.

Στο πλαίσιο της εργασίας προγραμματίστηκε λογισμικό σε γλώσσα C++ για την παρεμβολή των αρμονικών συντεταγμένων στο CFD πλέγμα και την παραμόρφωση αυτού, για την περίπτωση των 2Δ και 3Δ υπολογιστικών πλεγμάτων. Επιπλέον, για την περίπτωση της 3Δ γραμμικής πτερύγωσης στροβίλου και της 3Δ περιφερειακή πτερύγωσης συμπιεστή αναπτύχθηκε κώδικας παράλληλης επεξεργασίας με χρήση του πρωτοκόλλου MPI για την διαδικασία της παρεμβολής.

6.2 Συμπεράσματα

Μετά από την μελέτη η οποία διεξήχθη στο πλαίσιο της εργασίας, προέκυψαν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Ιδιαίτερη σημασία πρέπει να δίνεται στη σωστή κατασκευή του αρμονικού χωρίου. Τα σημεία ελέγχου του εσωτερικού κλωβού δεν πρέπει να τοποθετούνται σε μεγάλη απόσταση από το περίγραμμα του σώματος προς παραμόρφωση, αλλιώς, η επίδραση σε αυτό δεν θα είναι αισθητή.
- Τα σημεία ελέγχου του εξωτερικού κλωβού, για την περίπτωση πτερυγώσεων στροβιλομηχανών, οφείλουν να σχηματίζουν περιοδικό χωρίο, με βήμα ίδιο με αυτό της υπό μελέτη πτερύγωσης.
- Τα περιγράμματα των δύο κλωβών πρέπει να βρίσκονται σε τέτοια απόσταση μεταξύ τους, ούτως ώστε να επιτρέπεται η ενδιάμεση τοποθέτηση αρμονικών κόμβων. Σε αντίθετη περίπτωση είναι πιθανό να προκύψουν λάθη στη συνέχεια της διαδικασίας.

- Οι μετατοπίσεις των σημείων ελέγχου του εσωτερικού κλωβού δεν πρέπει να είναι πολύ μεγάλες, διότι έτσι, ελοχεύει ο κίνδυνος δημιουργίας μη-αποδεκτών στοιχείων πλέγματος, ούτε, όμως, και πολύ μικρές καθώς σε αυτή την περίπτωση η επίδραση στη μορφή του σώματος προς παραμόρφωση θα είναι αμελητέα.
- Όσον αφορά στον αριθμό των σημείων ελέγχου, περισσότερα σημεία προσφέρουν μεγαλύτερες και ακριβέστερες δυνατότητες παραμόρφωσης με ταυτόχρονη, όμως, αύξηση του υπολογιστικού χρόνου για την επίλυση της εξίσωσης Laplace στο αρμονικό χωρίο.
- Το ίδιο ισχύει και για την πυκνότητα του αρμονικού πλέγματος. Περισσότεροι αρμονικοί κόμβοι φέρουν ομαλότερη απόσβεση των αρμονικών συντεταγμένων σε αυτούς και ακολούθως ακριβέστερη παρεμβολή του υπολογιστικού πλέγματος. Αυτό δίνει τη δυνατότητα για μεγαλύτερες μετατοπίσεις των σημείων ελέγχου. Σαφώς, βέβαια, πύκνωση του αρμονικού χωρίου σημαίνει αύξηση υπολογιστικού χρόνου, τόσο για την επίλυση της Laplace όσο και για τη διαδικασία της παρεμβολής.
- Ως προς την ταχύτητα της μεθόδου, αυτή εξαρτάται, στο μεγαλύτερο βαθμό της, από το πλήθος των κόμβων του CFD πλέγματος. Το κομμάτι της μεθόδου που μπορεί να καθυστερήσει την όλη διαδικασία είναι η παρεμβολή των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος στο αρμονικό πλέγμα. Η διαδικασία αυτή, παρ' όλα αυτά, πραγματοποιείται μία και μόνο φορά, γεγονός που εξοικονομεί σημαντικό υπολογιστικό χρόνο.
- Επιπλέον, η διαδικασία της παρεμβολής επιταχύνεται σημαντικά με χρήση παράλληλης επεξεργασίας, προσφέροντας περιθώρια σημαντικής μείωσης του υπολογιστικού χρόνου της διαδικασίας.

6.3 Προτάσεις για Μελλοντικές Μελέτες

Στη συνέχεια, δίνονται προτάσεις για περαιτέρω μελέτη του θέματος και περισσότερες εφαρμογές της μεθόδου:

- Οι εφαρμογές που παρουσιάστηκαν στην εργασία, έγιναν χωρίς τη χρήση περιορισμών. Για πραγματικές εφαρμογές, όμως, αυτοί πρέπει να λαμβάνονται σοβαρά υπόψιν. Συνεπώς, σε μία επόμενη μελέτη, μπορεί να γίνει εφαρμογή της μεθόδου με την επιπλέον επιβολή των απαραίτητων περιορισμών.
- Επίσης, για την περίπτωση του 3D στροβίλου c3x, τον οποίο διατρέχουν σωλήνες φύξης, είναι απαραίτητο να μην αλλάξει η διατομή των σωλήνων αυτών, ούτε να βρεθούν εκτός του περιγράμματός του. Έτσι, μελλοντικά, μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος στον στρόβιλο c3x, με σεβασμό στους περιορισμούς αυτούς.

Βιβλιογραφία

- [1] Κ., Γιαννάκογλου: *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Ε.Μ.Π., 2006.
- [2] Giannakoglou K.C., Papadimitriou D.I. and Karpolis I.C.: *Aerodynamic shape design using evolutionary algorithms and new gradient-assisted metamodels*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195(44-47):6312–6329, 2006.
- [3] Sederberg T. W., Parry S. R. : *Free Form Deformation of Solid Geometric Models*. Brigham Young University Provo, Utah 84602, 20, Number 4, 1986.
- [4] Pushkar J., Mayer M., DeRose T. Green B. Sanocki T.: *Harmonic Coordinates for Character Articulation*. Pixar Animation Studios, 2006.
- [5] Μ., Μαυρονικόλα: *Παραμετροποίηση Μορφών και Προσαρμογή Υπολογιστικών Πλεγμάτων με χρήση Αρμονικών Συντεταγμένων. Εφαρμογή στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Μορφής 2Δ Πτερυγώσεων και Αγωγών*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2017.
- [6] Χ., Ζερβάς: *Παραμετροποίηση Μορφών και Προσαρμοστική Παραμόρφωση 3Δ Υπολογιστικών Πλεγμάτων με χρήση Αρμονικών Συντεταγμένων. Εφαρμογή στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2018.
- [7] P., Lidberg: *Barycentric and harmonic coordinates*. Departement of Mathematics, Uppsala University, 2012.
- [8] Burg C.: *Analytic Study of 2nd and 3rd grid motion using modified laplacian*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 52(2):163–197, 2006.
- [9] *Evolutionary Algorithm System (EASY), webpage*. <http://147.102.55.162/EASY/>.
- [10] *RPMturbo, webpage*. <https://rpmturbo.com/testcases/sc10/index.html>.
- [11] Lasse Mueller, Tom Verstraete.: *The LS89 Optimization Test Case*. von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2016.
- [12] *Pointwise, webpage*. <http://www.pointwise.com/>.

- [13] *Research Gate, webpage.* https://www.researchgate.net/figure/Mainstream-cascade-and-C3X-geometric-configuration-and-its-newlinecross-section-area-at-midspan_fig1_324698564.
- [14] Inoue M., Kurooumaru M. and Fukuhara M: *Behaviour of Tip Leakage Flow Behind an Axial Compressor Rotor.* Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 108, 1986.