ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

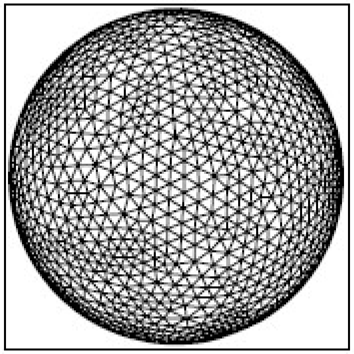
# ΓΕΝΕΣΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ

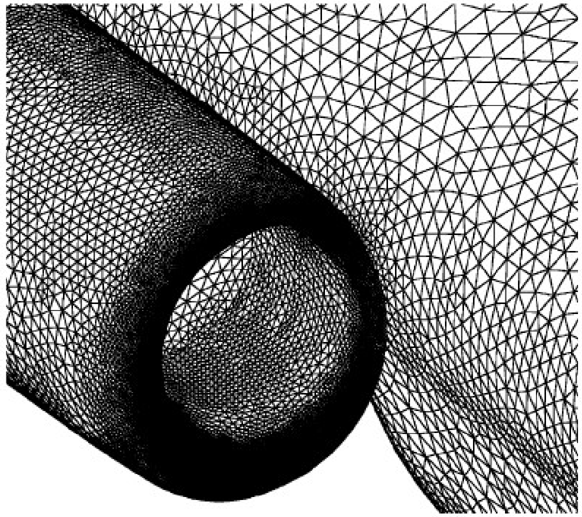
**Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου**
Καθηγητής ΕΜΠ

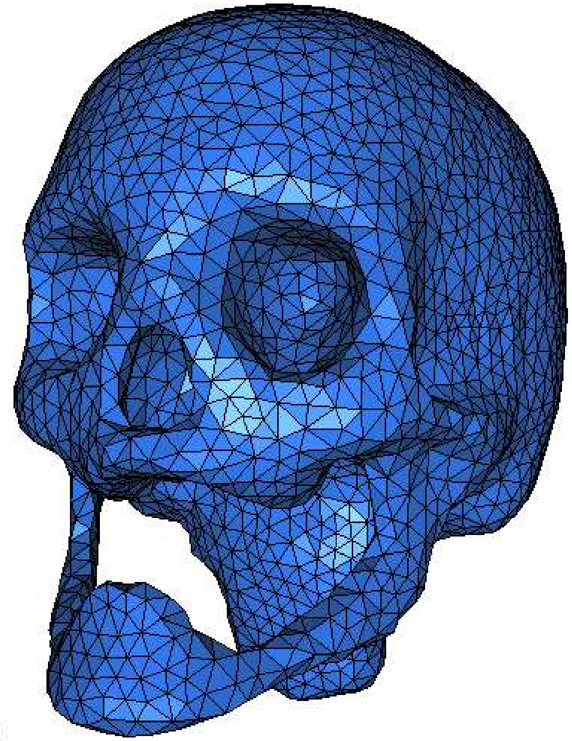
kgianna@mail.ntua.gr

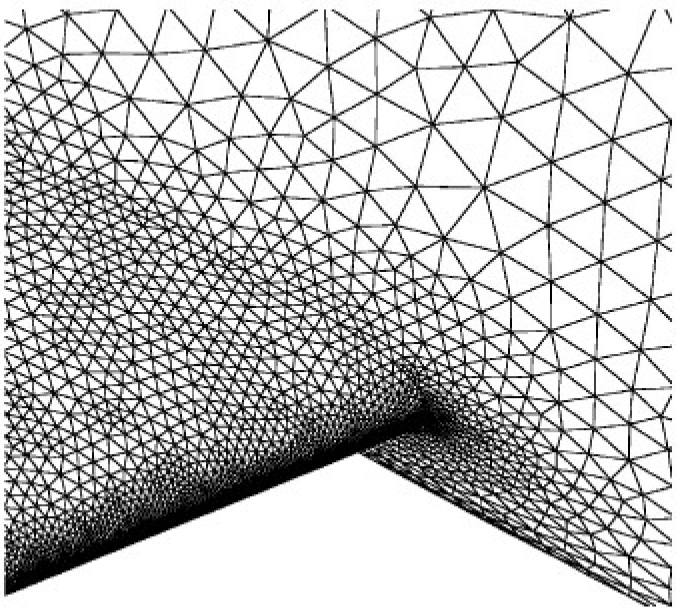
http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/research/

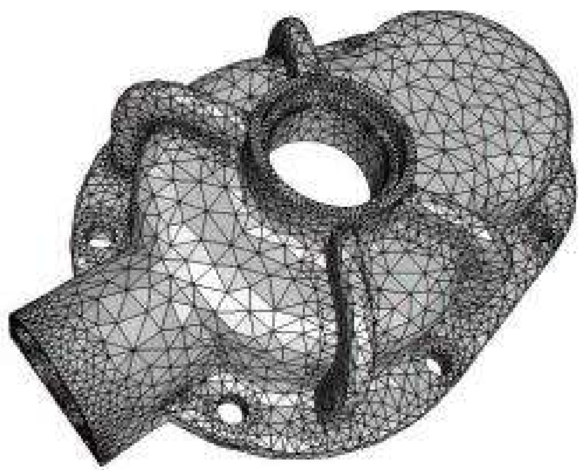
# Γένεση Επιφανειακού Μη-Δομημένου Πλέγματος



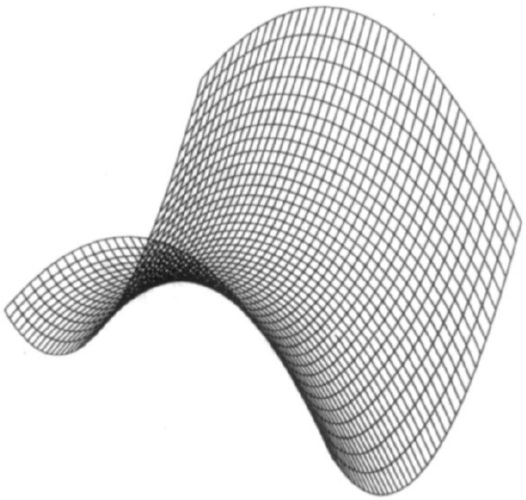








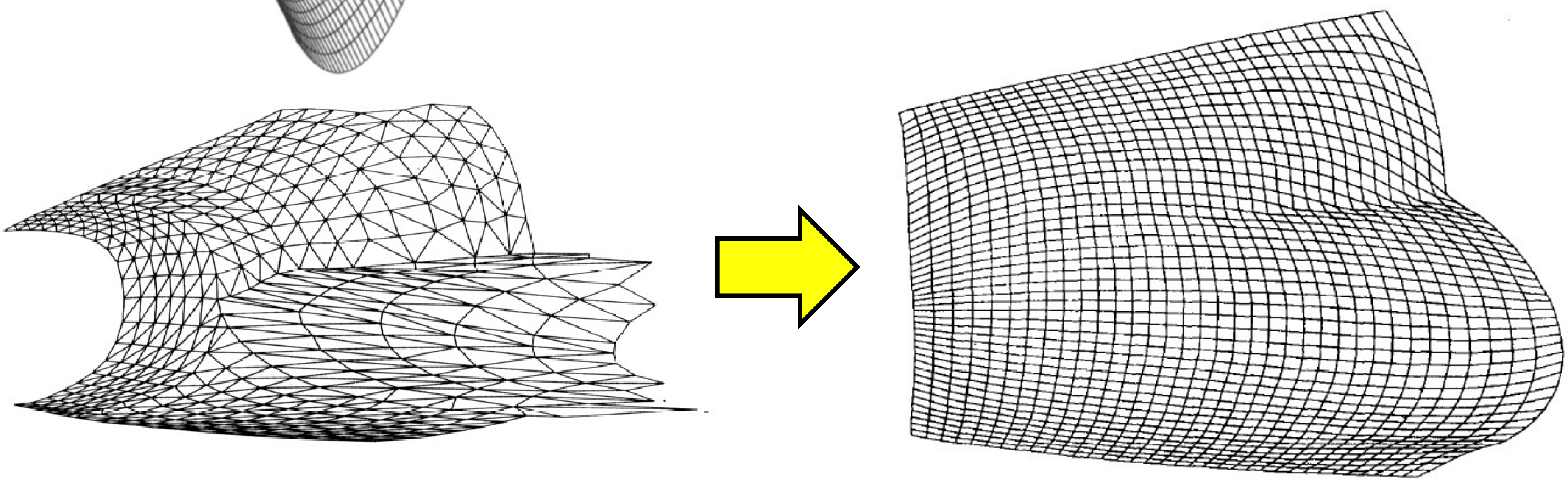
# Γένεση Επιφανειακού Δομημένου Πλέγματος



**<u>ΣΤΟΧΟΙ:</u>**

**(1) Διατήρηση του πλέγματος πάνω στην επιφάνεια με ακρίβεια.**

**(2) Ποιότητα δομημένου πλέγματος (γωνίες, πυκνώσεις,…)**



**Με αφετηρία ένα μη-δομημένο πλέγμα στην επιφάνεια, να δημιουργηθεί ένα δομημένο με επιθυμητά χαρακτηριστικά (ποιότητας) σε επιλεγμένο patch. (από παλαιότερες εργασίες στο ΕΘΣ/ΕΜΠ)**

# Ορολογία κλπ

(1) 2Δ πλέγμα

(2) 3Δ πλέγμα

(3) Επιφανειακό πλέγμα

Συντομογραφία:

**ΕΠ**= Επιφανειακό Πλέγμα

Για τον «προσεκτικό»:

(1) 2Δ επίπεδο πλέγμα

(2) Επιφανειακό πλέγμα

(3) 3Δ χωρικό πλέγμα

Το να μπορεί κάποιος να δημιουργήσει ένα επιφανειακό πλέγμα υψηλής ποιότητας είναι προαπαίτηση για να μπορέσει να δημιουργήσει, σε δεύτερο χρόνο, ένα χωρικό (3Δ) πλέγμα καλής ποιότητας, δηλαδή αποδεκτό για την υπόψη εφαρμογή Υπολογιστικής Μηχανικής

# Βασικά

<u>Ποια είναι η αφετηρία;;; Πως, δηλαδή, περιγράφεται αρχικά η επιφάνεια;;;</u>

(1) Με ένα δομημένο ΕΠ, μη αποδεκτό σε ποιότητα.

(2) Με ένα μη-δομημένο ΕΠ, μη αποδεκτό σε ποιότητα.

(3) Το τελικό ΕΠνα είναι άλλου τύπου από το αρχικό ΕΠ.

(4) Το ΕΠ να είναι το εξαγόμενο από ένα πακέτο CAD.

<u>Μια βολική, αλλά όχι γενική, περίπτωση:</u>

$$z = z(x, y)$$

$$F(x, y, z) = 0$$

Εκμεταλλευόμαστε όσα ξέρουμε από τη γένεση επίπεδων πλεγμάτων, κάνοντας ειδικές προβολές σε κατάλληλο επίπεδο, κλπ.

Δεν «δουλεύει» πάντα. Γιατί???

Όχι εγγυημένη ποιότητα τελικού πλέγματος!

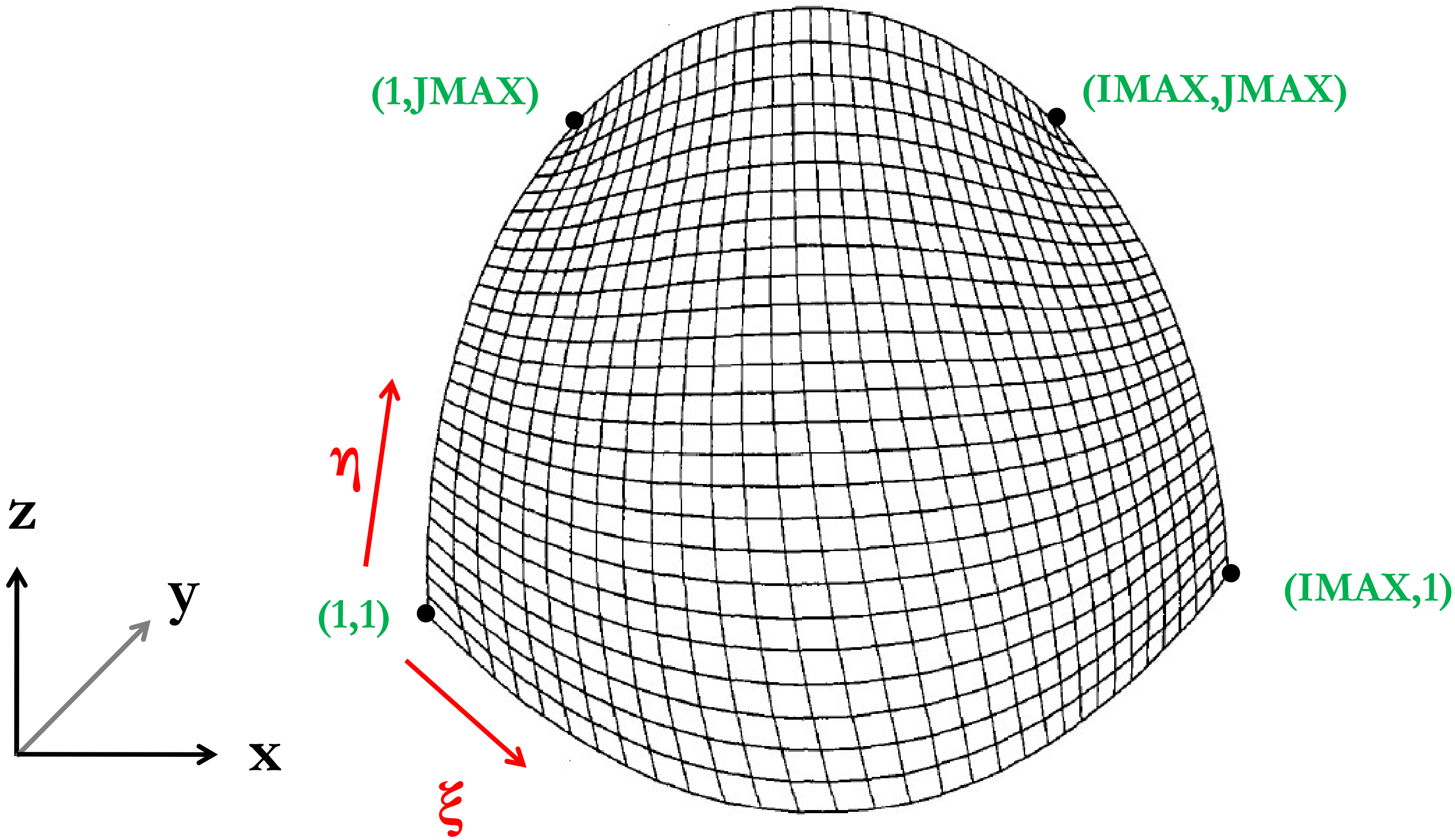
# Προσοχή

**Οι γνώσεις από τη γένεση επίπεδων (2Δ) δομημένων πλεγμάτων, μέσω ελλειπτικών εξισώσεων και του μετασχηματισμού (x,y)→(ξ,η), μεταφέρονται και στη γένεση ΕΠ, με κατάλληλες παρεμβάσεις (λ.χ. εισάγοντας την πληροφορία για τη μορφή της επιφάνειας που πλεγματοποιούμε).**

**Κάθε μέθοδος γένεσης επίπεδων (2Δ) δομημένων πλεγμάτων που θα προκύψει, ο τελευταίος έλεγχος που πρέπει να κάνουμε είναι αν ως ειδική περίπτωση εφαρμόζεται και σε επίπεδα πλέγματα.**

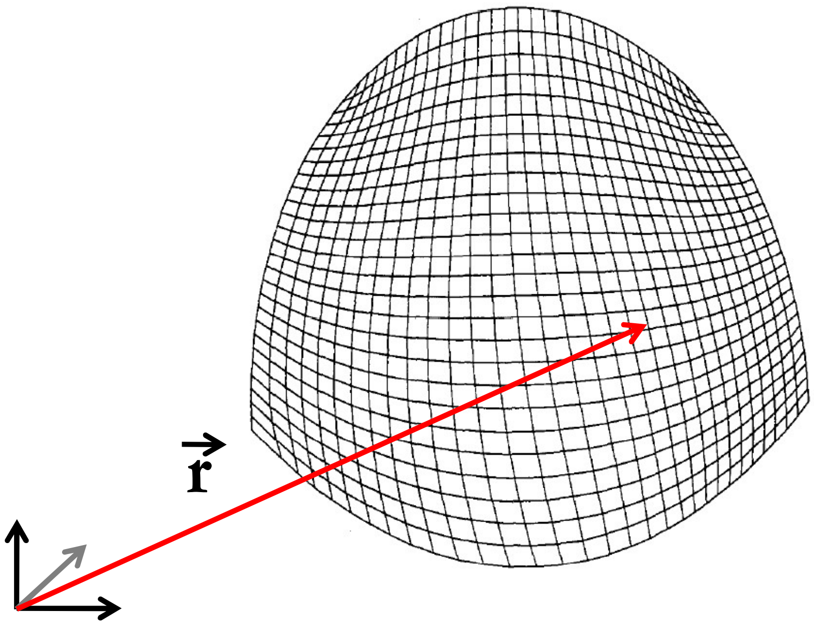
**Δεν θα μπορούσε να μην γίνεται αυτό! Το επίπεδο πλέγμα είναι μια απλή-εκφυλισμένη-εύκολη υποπερίπτωση ΕΠ!!!**

# Απεικόνιση (x,y,z) → (ξ,η)




Το μετασχηματισμένο χωρίο στο (ξ,η) είναι η προφανής και παραλείπεται!

# Πρώτη Θεμελιώδης Μορφή Δομημένου ΕΠ




$$I = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}d\eta\right)\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}d\eta\right) =$$

$$= Ed\xi^2 + 2Fd\xi d\eta + Gd\eta^2$$

**όπου**

$$E = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} = \vec{r}_\xi \cdot \vec{r}_\xi$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = \vec{r}_\xi \cdot \vec{r}_\eta$$

$$G = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = \vec{r}_\eta \cdot \vec{r}_\eta$$

**Πρώτοι θεμελιώδεις συν/στές. Τους ξέρατε ήδη!!!!**

$$E \leftrightarrow g_{11} \qquad F \leftrightarrow g_{12} \qquad G \leftrightarrow g_{22}$$

$$\boxed{I = g_{ij}d\xi^i d\xi^j}$$

**Ομογενής συνάρτηση 2$^{ου}$ βαθμού ως προς τα dξ και dη**

# Πρώτη Θεμελιώδης Μορφή Δομημένου ΕΠ

**<u>Κατανόηση:</u>**

**Η πρώτη θεμελιώδης μορφή I της επιφάνειας σε ένα σημείο της P προέρχεται από το διάνυσμα** $d\vec{r}$ **, μιας και ορίστηκε ως**

$$I = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$$

**όπου το** $d\vec{r}$ **είναι η πρώτης τάξης προσέγγιση του διανύσματος**

$$\vec{r}(\xi + d\xi, \eta + d\eta) - \vec{r}(\xi, \eta) - O\left(\left(d\xi^2 + d\eta^2\right)^{1/2}\right)$$

**όπως εύκολα απορρέει από το ανάπτυγμα Taylor. Αναφερόμαστε στην κίνηση από ένα σημείο της επιφάνειας σε κάποιο γειτονικό.**

# Πρώτη Θεμελιώδης Μορφή Δομημένου ΕΠ

**Αλλάζοντας παραμετροποίηση, (ξ,η)→(θ,φ), η πρώτη θεμελιώδης μορφή Ι είναι αναλλοίωτη (γιατί;; Φυσική σημασία!!) αλλά, προσοχή, οι νέοι πρώτοι θεμελιώδεις συντελεστές θα είναι, γενικά, διαφορετικοί!**

$$I^* = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} d\phi\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} d\phi\right) =$$

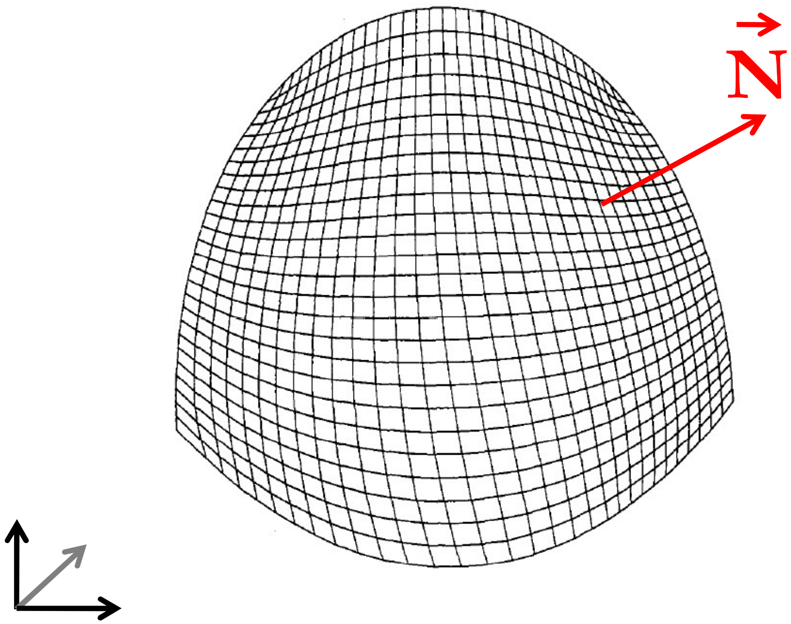
$$= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} d\eta\right) + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} d\eta\right) \right|^2 =$$

$$= \left| \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right) d\xi + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right) d\eta \right|^2 =$$

$$= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} d\eta \right|^2 = \left| d\vec{r} \right|^2 = I(d\xi, d\eta)$$

$$I = g_{ij} d\xi^i d\xi^j \qquad\qquad I^* = E^* d\theta^2 + 2F^* d\theta d\phi + G^* d\phi^2$$

# Μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα

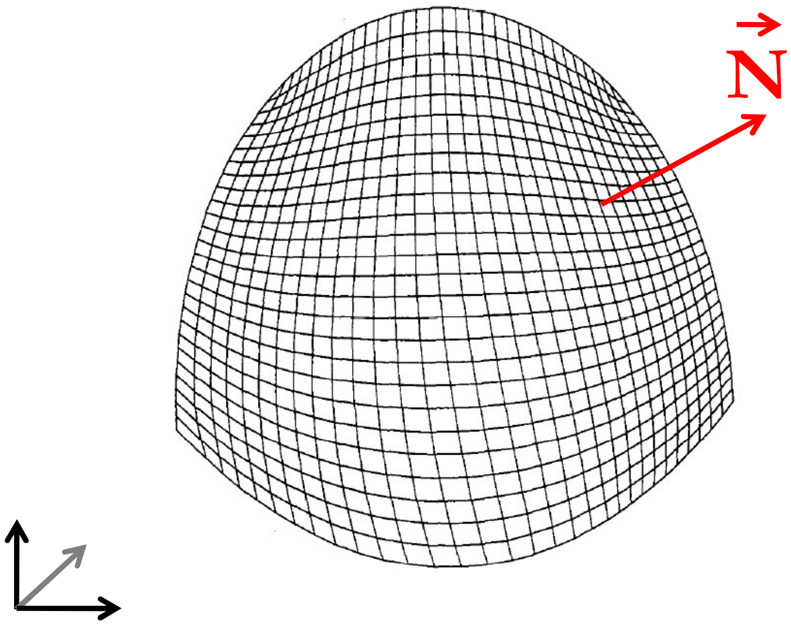



$$\vec{N} = \frac{\vec{r}_\xi \times \vec{r}_\eta}{\left|\vec{r}_\xi \times \vec{r}_\eta\right|} = \frac{\vec{g}_1 \times \vec{g}_2}{\left|\vec{g}_1 \times \vec{g}_2\right|}$$

$$d\vec{N} = \vec{N}_\xi d\xi + \vec{N}_\eta d\eta$$

$$d(\vec{N}\cdot\vec{N}) = \underbrace{2d\vec{N}\cdot\vec{N}}_{\text{Κάθετα!}} = d(1) = 0$$

# Δεύτερη Θεμελιώδης Μορφή Δομημένου ΕΠ




$$II = -d\vec{r}\cdot d\vec{N} = -(\vec{r}_\xi d\xi + \vec{r}_\eta d\eta)\cdot(\vec{N}_\xi d\xi + \vec{N}_\eta d\eta) =$$

$$= -\vec{r}_\xi \vec{N}_\xi d\xi^2 - (\vec{r}_\xi \vec{N}_\eta + \vec{r}_\eta \vec{N}_\xi) d\xi d\eta - \vec{r}_\eta \vec{N}_\eta d\eta^2 =$$

$$= L d\xi^2 + 2M d\xi d\eta + N d\eta^2$$

$$L = \Omega_{11} = -\vec{r}_\xi \cdot \vec{N}_\xi$$

$$M = \Omega_{21} = \Omega_{12} = -\frac{1}{2}(\vec{r}_\xi \cdot \vec{N}_\eta + \vec{r}_\eta \cdot \vec{N}_\xi)$$

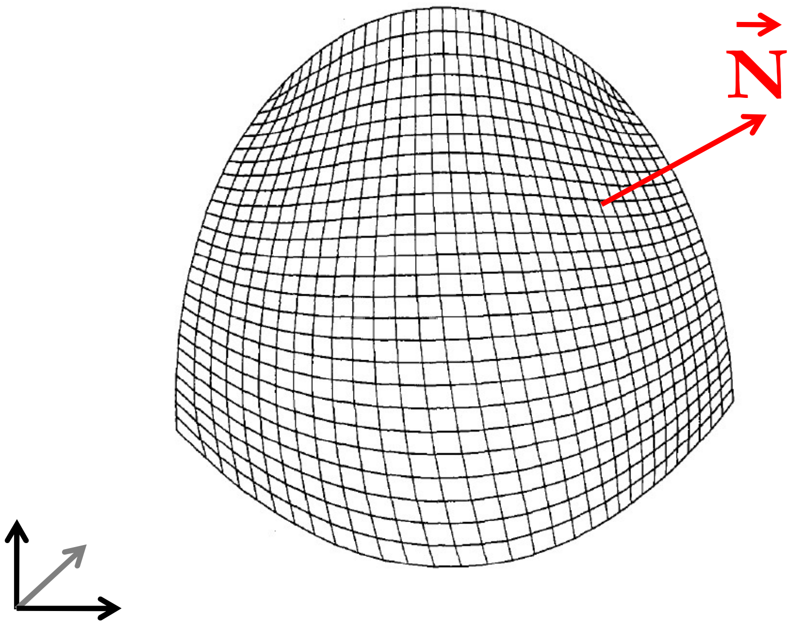
$$N = \Omega_{22} = -\vec{r}_\eta \cdot \vec{N}_\eta$$

Δεύτεροι θεμελιώδεις συν/στές

$$\boxed{\mathrm{II} = \Omega_{ij} d\xi^i d\xi^j}$$

Επίσης αναλλοίωτη ...

# Δεύτερη Θεμελιώδης Μορφή Δομημένου ΕΠ




**Εναλλακτική γραφή 2$^{ων}$ θεμ. συντελεστών:**

$$(\vec{r}_\xi \cdot \vec{N})_\xi = \vec{r}_{\xi\xi} \cdot \vec{N} + \vec{r}_\xi \cdot \vec{N}_\xi = 0$$

$$(\vec{r}_\xi \cdot \vec{N})_\eta = \vec{r}_{\xi\eta} \cdot \vec{N} + \vec{r}_\xi \cdot \vec{N}_\eta = 0$$

$$(\vec{r}_\eta \cdot \vec{N})_\xi = \vec{r}_{\eta\xi} \cdot \vec{N} + \vec{r}_\eta \cdot \vec{N}_\xi = 0$$

$$(\vec{r}_\eta \cdot \vec{N})_\eta = \vec{r}_{\eta\eta} \cdot \vec{N} + \vec{r}_\eta \cdot \vec{N}_\eta = 0$$

$$L = \vec{r}_{\xi\xi} \cdot \vec{N} \qquad M = \vec{r}_{\xi\eta} \cdot \vec{N} \qquad N = \vec{r}_{\eta\eta} \cdot \vec{N}$$

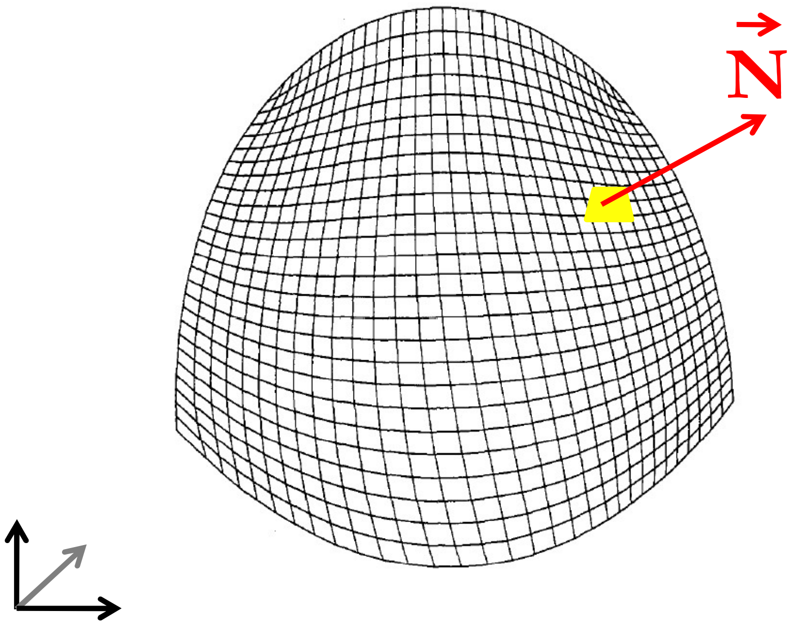
**Άρα:**

$$II = Ld\xi^2 + 2Md\xi d\eta + Nd\eta^2 = \vec{r}_{\xi\xi} \cdot \vec{N} d\xi^2 + 2\vec{r}_{\xi\eta} \cdot \vec{N} d\xi d\eta + \vec{r}_{\eta\eta} \cdot \vec{N} d\eta^2$$

**όπου:**

$$II = d^2\vec{r} \cdot \vec{N} \qquad d^2\vec{r} = \vec{r}_{,ij} d\xi^i d\xi^j$$

# Εμβαδόν επιφανειακής κυψέλης




$$Area = \iint (\vec{r}_\xi \times \vec{r}_\eta) d\xi d\eta$$

$$Area = \iint \sqrt{EG - F^2}\, d\xi dn$$

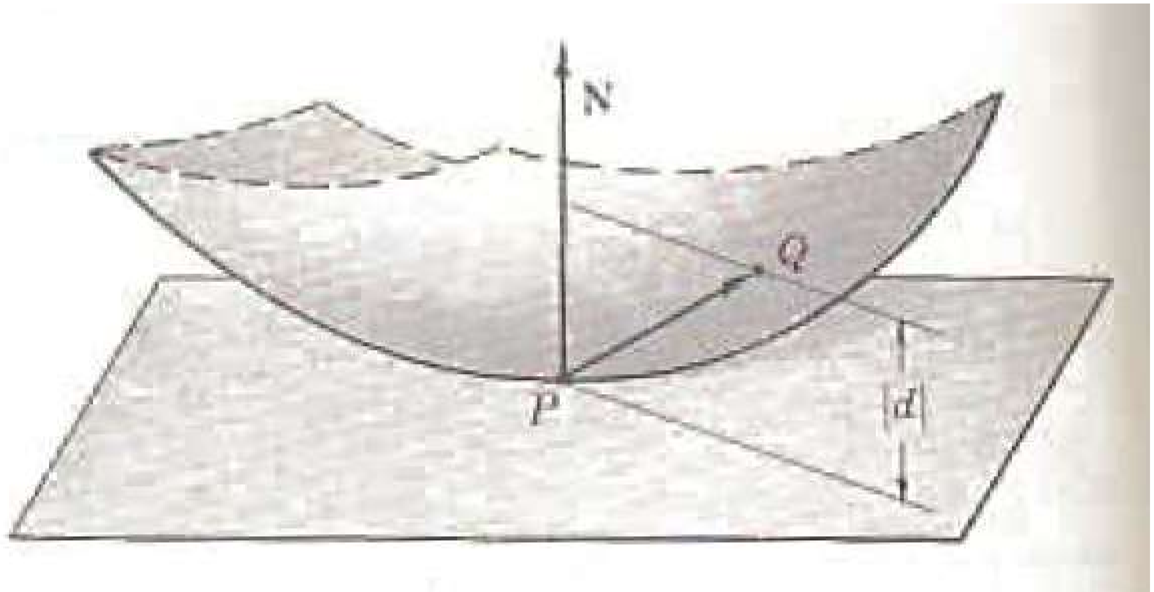
**Επιφανειακή Ιακωβιανή**

$$EG - F^2 = \left(\vec{r}_\xi \times \vec{r}_\eta\right) \cdot \left(\vec{r}_\xi \times \vec{r}_\eta\right) = \left|\vec{r}_\xi \times \vec{r}_\eta\right|^2$$

$$J = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}$$

# Φυσική Σημασία του ΙΙ

**P (ξ, η)**
**Q (ξ+dξ, η+dη)**



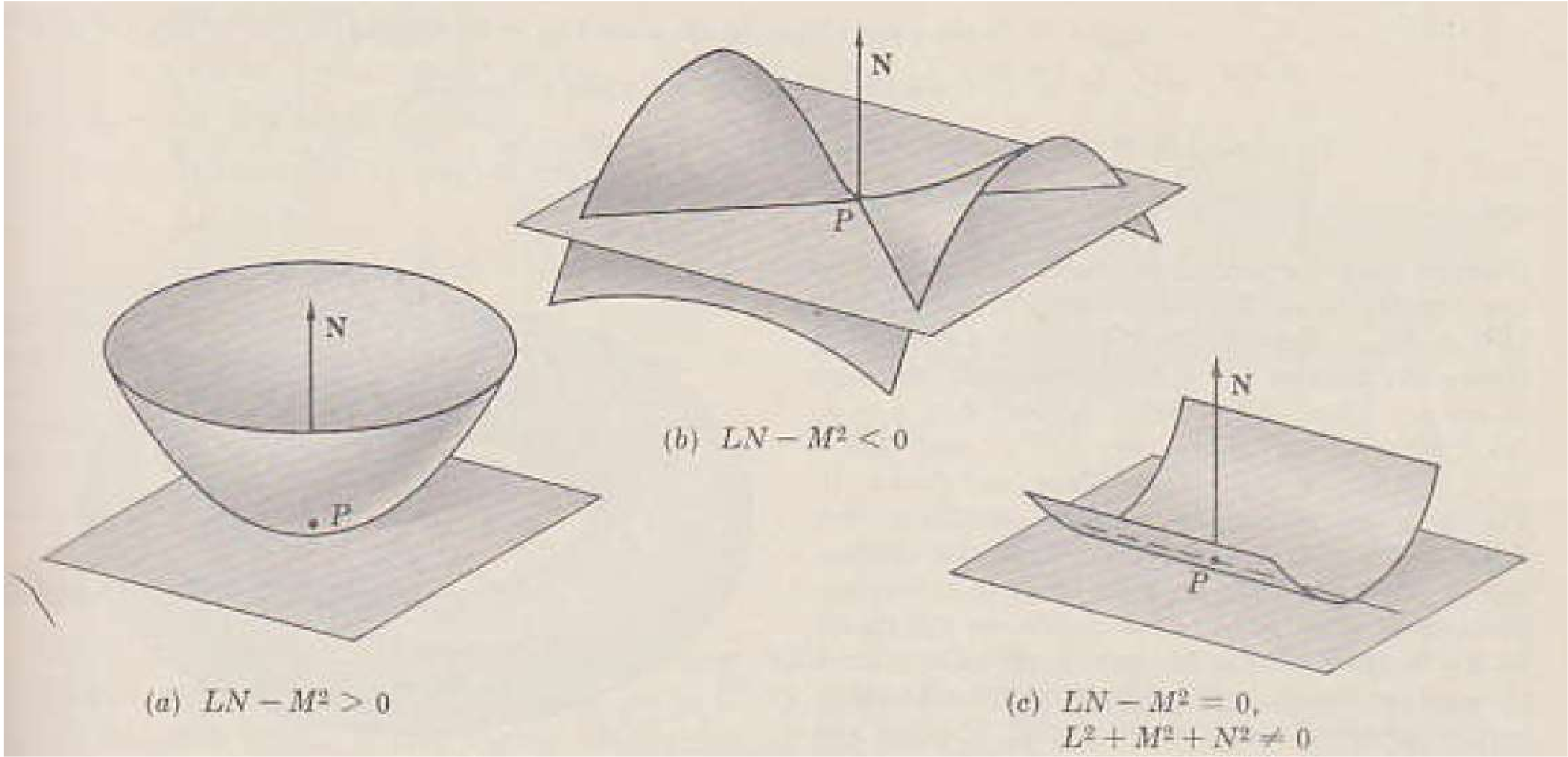

$$d=\vec{PQ}\cdot\vec{N}=\left\{\vec{r}(\xi+d\xi,\eta+d\eta)-\vec{r}(\xi,\eta)\right\}\cdot\vec{N}=$$

$$=\left\{d\vec{r}+\frac{1}{2}d^2\vec{r}+O(d\xi^2+d\eta^2)\right\}\cdot\vec{N}=$$

$$=\underbrace{d\vec{r}\cdot\vec{N}}_{\substack{\text{ΜΗΔΕΝ}\\ \perp}}+\frac{1}{2}d^2\vec{r}\cdot\vec{N}+O(d\xi^2+d\eta^2)$$

$$\Rightarrow d\sim\frac{1}{2}\mathrm{II}$$

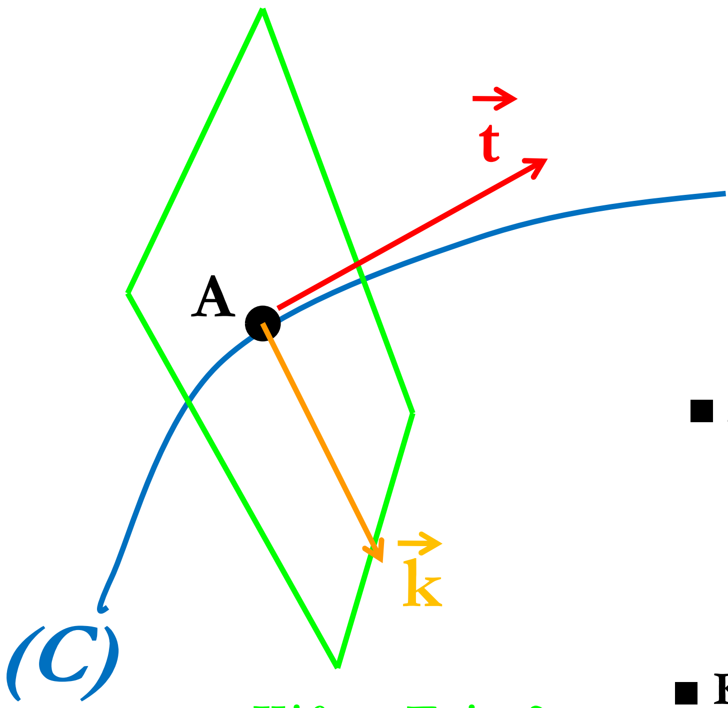
# Φυσική Σημασία του ΙΙ – Πρόσημο του LN-M²




Ελλειπτικό | Υπερβολικό | Παραβολικό

$$II = Ld\xi^2 + 2Md\xi d\eta + Nd\eta^2$$

# ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: Καμπύλη (C) στο χώρο




■ **Μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα:**

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}\,/\,dt}{ds\,/\,dt}$$

**όπου t η παραμετροποίηση της καμπύλης.**

■ **Διάνυσμα καμπυλότητας (όχι μοναδιαίο):**

$$\vec{k} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$$

■ **Καμπυλότητα, ακτίνα καμπυλότητας:**

$$\kappa = \left|\vec{k}\right| \qquad \rho = \frac{1}{\kappa}$$

■ **Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα:**

$$\vec{u}_k = \frac{\vec{k}}{\left|\vec{k}\right|}$$

# Σχετική άσκηση για καμπύλη στο επίπεδο

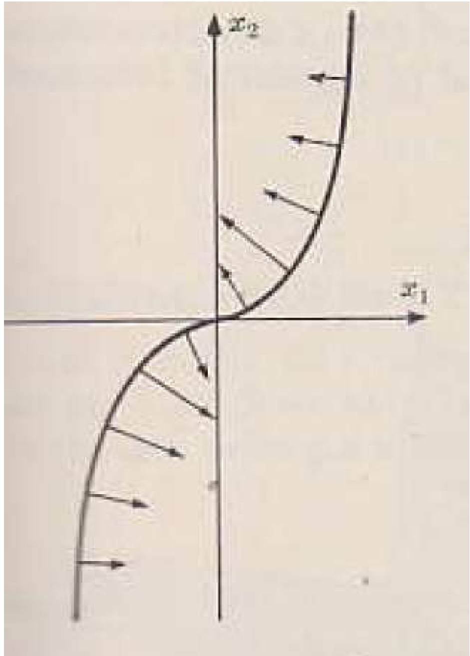
## Επίπεδη καμπύλη $(t, t^3/3)$:

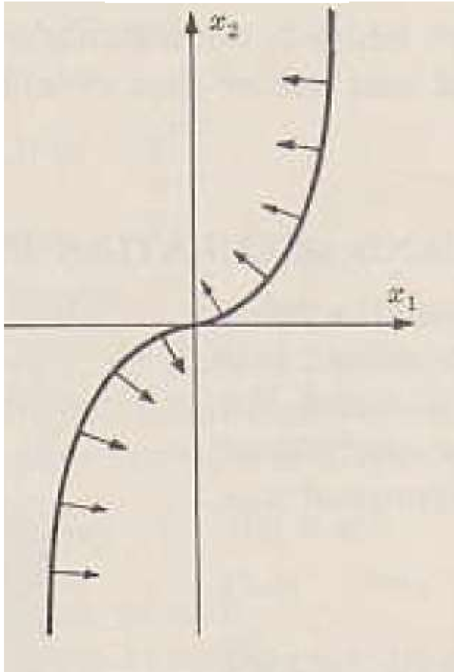
Πρωτεύον μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα:

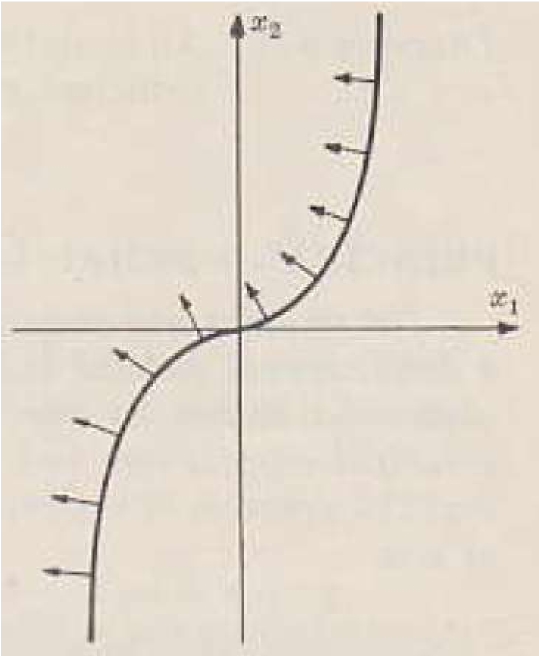
(Αυθαίρετη αλλά συνεχής φορά)

$$\vec{k} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$$

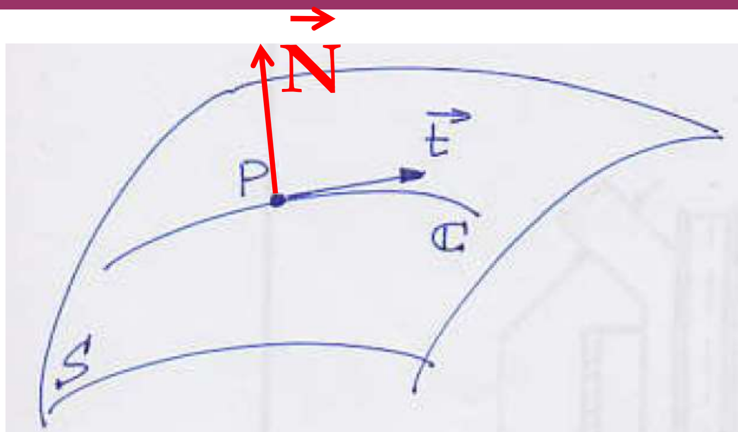
$$\vec{u}_k = \frac{\vec{k}}{\left|\vec{k}\right|}$$



# Καμπύλη που ανήκει σε επιφάνεια




■ Διάνυσμα καμπυλότητας (όχι μοναδιαίο):

$$\vec{k} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$$

■ Διάνυσμα κάθετης καμπυλότητας της (C) στο P:

$$\vec{k}_n = (\vec{k}\cdot\vec{N})\vec{N}$$

που ΔΕΝ εξαρτάται από τη φορά της (C).

■ Κάθετη καμπυλότητα της (C) στο P:

$$\kappa_n = \vec{k}\cdot\vec{N}$$

που εξαρτάται από τη φορά του N, όχι της (C).

Αποδεικνύεται ότι:

$$\kappa_n = \frac{Ld\xi^2 + 2Md\xi d\eta + Nd\eta^2}{Ed\xi^2 + 2Fd\xi d\eta + Gd\eta^2} = \frac{\Omega_{ij}d\xi^i d\xi^j}{g_{ij}d\xi^i d\xi^j} = \frac{II}{I}$$

# (Απόδειξη)

$$\kappa_n = \frac{Ld\xi^2 + 2Md\xi d\eta + Nd\eta^2}{Ed\xi^2 + 2Fd\xi d\eta + Gd\eta^2} = \frac{\Omega_{ij} d\xi^i d\xi^j}{g_{ij} d\xi^i d\xi^j} = \frac{II}{I}$$

$$\left( \vec{t} \cdot \vec{N} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{t}}{dt} \cdot \vec{N} + \vec{t} \cdot \frac{d\vec{N}}{dt} = 0 \right)$$

$$\kappa_n = \vec{k} \cdot \vec{N} = \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{N} = \frac{\frac{d\vec{t}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} \cdot \vec{N} = \frac{\frac{d\vec{t}}{dt} \cdot \vec{N}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} = \frac{-\vec{t} \cdot \frac{d\vec{N}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} =$$

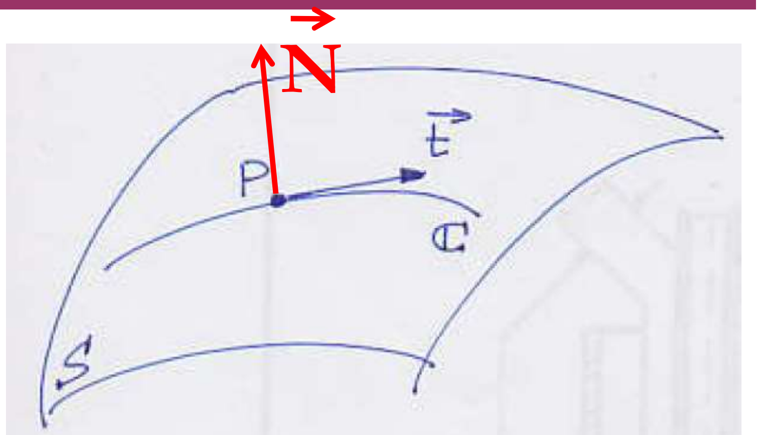
$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|}$$

$$= \frac{-1}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{N}}{dt} = - \frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{N}}{dt}}{\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}} =$$

$$= - \frac{\left(\vec{r}_\xi \frac{d\xi}{dt} + \vec{r}_\eta \frac{d\eta}{dt}\right) \cdot \left(\vec{N}_\xi \frac{d\xi}{dt} + \vec{N}_\eta \frac{d\eta}{dt}\right)}{\left(\vec{r}_\xi \frac{d\xi}{dt} + \vec{r}_\eta \frac{d\eta}{dt}\right) \cdot \left(\vec{r}_\xi \frac{d\xi}{dt} + \vec{r}_\eta \frac{d\eta}{dt}\right)} \Rightarrow \ldots$$

# Κάθετη καμπυλότητα της (C) στο P

$$\kappa_n = \frac{Ld\xi^2 + 2Md\xi d\eta + Nd\eta^2}{Ed\xi^2 + 2Fd\xi d\eta + Gd\eta^2} = \frac{\Omega_{ij} d\xi^i d\xi^j}{g_{ij} d\xi^i d\xi^j} = \frac{II}{I}$$




**<u>ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ:</u>**

**Η κάθετη καμπυλότητα στο σημείο P μιας καμπύλης C της επιφάνειας S εξαρτάται μόνο από τις παραγώγους dξ/dt και dη/dt και, πρακτικά, από τον λόγο**

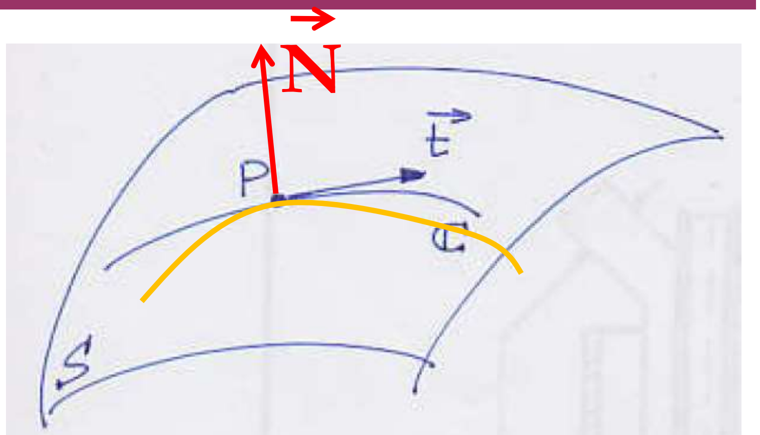
**( dξ/dt / dη/dt )**

**δηλαδή από την κατεύθυνση της εφαπτόμενης της C στο P.**

**'Ετσι προκύπτουν τα εξής δύο συμπεράσματα/θεωρήματα (αρκεί να θυμηθείτε και την 1ης τάξης φυσική σημασία που έχει η I και η II):**

# Κάθετη καμπυλότητα της (C) στο P

$$\kappa_n = \frac{Ld\xi^2 + 2Md\xi d\eta + Nd\eta^2}{Ed\xi^2 + 2Fd\xi d\eta + Gd\eta^2} = \frac{\Omega_{ij} d\xi^i d\xi^j}{g_{ij} d\xi^i d\xi^j} = \frac{II}{I}$$




**<u>ΠΡΩΤΟ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:</u>**

**Επειδή τα I και II είναι αναλλοίωτα, η κάθετη καμπυλότητα είναι επίσης αναλλοίωτη για κάθε παραμετρικό μετασχηματισμό, για το ίδιο σημείο P της ίδιας καμπύλης (C).**

**<u>ΔΕΥΤΕΡΟ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:</u>**

**Ὅλες οι καμπύλες της επιφάνειας (S) που περνούν από το P και εκεί εφάπτονται στην ίδια ευθεία (που περνά από το P), έχουν την ίδια κάθετη καμπυλότητα!**

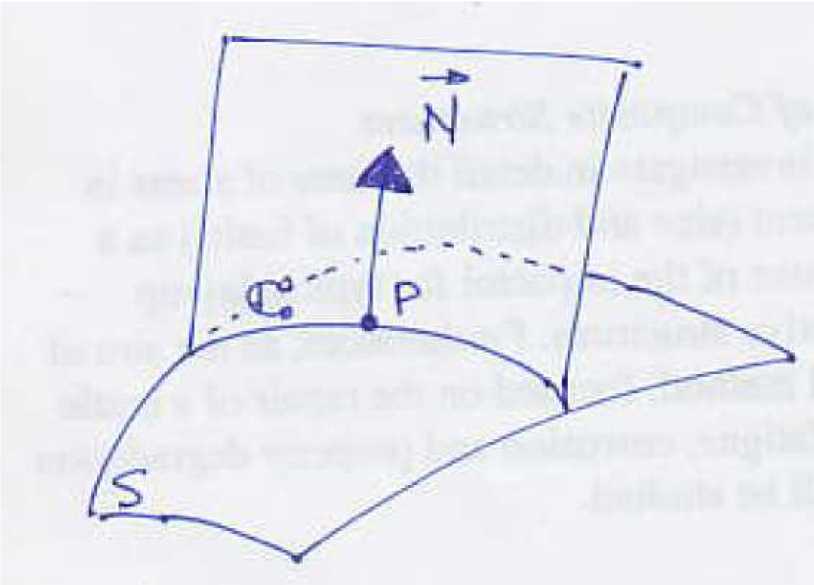
**Απόδειξη:**

$$\kappa_n = F\left( L, M, N, E, F, G, \frac{\frac{d\xi}{dt}}{\frac{d\eta}{dt}} \right)$$

# Γιατί τα κάνουμε όλα αυτά????

**Αναζητούμε <u>ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΕΣ</u> πληροφορίες τις οποίες μπορούμε να πάρουμε (αφού τις υπολογίσουμε) από το αρχικό πλέγμα που περιγράφει την επιφάνεια και να τις εισάγουμε στη διαδικασία γένεσης του πλέγματος ώστε ο γενέτης να σέβεται την επιφάνεια!!**

# Κάθετη τομή επιφάνειας στο P



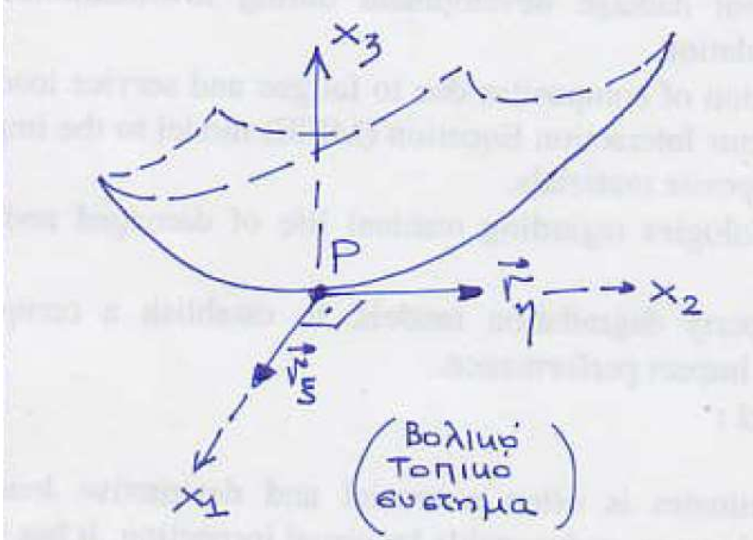

**(Normal Section)**

**Καμπύλη C της επιφάνειας S που ορίζεται από την τομή της S με ένα (οποιοδήποτε) επίπεδο που εμπεριέχει το τοπικό κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας στο σημείο P.**

**ΘΕΩΡΗΜΑ:**

**Η καμπυλότητα μιας κάθετης τομής της επιφάνειας S στο σημείο P ισούται με την κάθετη καμπυλότητα στο P.**

# Κάθετη καμπυλότητα – Διερεύνηση




(άρα $\vec{r} = \xi \vec{i}_1 + \eta \vec{i}_2 + f(\xi,\eta)\vec{i}_3$)
MONGE PATCH στη
γειτονιά του P.

**Συγκρατήστε:**

**θ είναι η γωνία κατά την οποία κινούμαι στον παραμετρικό χώρο (ξ,η).**

Έστω, στο P, $\vec{r}_\xi \cdot \vec{r}_\eta = \emptyset$
$|\vec{r}_\xi| = 1$, $|\vec{r}_\eta| = 1$

Στο P:
$$\begin{cases} E = \vec{r}_\xi \cdot \vec{r}_\xi = 1 \\ F = \vec{r}_\xi \cdot \vec{r}_\eta = 0 \\ G = \vec{r}_\eta \cdot \vec{r}_\eta = 1 \end{cases}$$

$$\kappa_n = \frac{L d\xi^2 + 2M d\xi d\eta + N d\eta^2}{E d\xi^2 + 2F d\xi d\eta + G d\eta^2} =$$

$$= \frac{L d\xi^2 + 2M d\xi d\eta + N d\eta^2}{d\xi^2 + d\eta^2}$$

Ακίνδυνη παραδοχή: $d\xi^2 + d\eta^2 = 1$
ή $d\xi = \cos\theta$, $d\eta = \sin\theta$

# Κάθετη καμπυλότητα – Διερεύνηση

$$\kappa_n = L\cos^2\theta + 2M\cos\theta\sin\theta + N\sin^2\theta$$

**Διερευνούμε τιμές του θ που ελαχιστοποιούν/μεγιστοποιούν το $\kappa_n$**

$$\frac{\partial \kappa_n}{\partial \theta} = 2M(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2(N-L)\cos\theta\sin\theta$$

$$\frac{\partial^2 \kappa_n}{\partial \theta^2} = 4M(-\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta) + 2(N-L)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta$$

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta$$

**Ας είναι $\theta^*$ η γωνία που μεγιστοποιεί το $\kappa_n$. Τότε η $\theta^*-\pi/2$ το ελαχιστοποιεί.**

**Πρωτεύουσες κατευθύνσεις (principal directions): οι δύο κατευθύνσεις dξ/dη (ή γωνία θ) όπου το $\kappa_n$ γίνεται μέγιστο και ελάχιστο.**

**Πρωτεύουσες καμπυλότητες (principal curvatures): οι αντίστοιχες κάθετες καμπυλότητες.**

# Κάθετη καμπυλότητα – Άσκηση

Επιφάνεια $\quad \vec{r}(\xi,\eta) = \xi\vec{i}_1 + \eta\vec{i}_2 + (\xi^2-\eta^2)\vec{i}_3$

$\vec{r}_\xi = \vec{i}_1 + 2\xi\vec{i}_3, \quad \vec{r}_\eta = \vec{i}_2 - 2\eta\vec{i}_3, \quad \vec{r}_{\xi\xi} = 2\vec{i}_3, \quad \vec{r}_{\eta\eta} = -2\vec{i}_3, \quad \vec{r}_{\xi\eta} = \emptyset$

$$\vec{N} = \frac{(-2\xi\vec{i}_1 + 2\eta\vec{i}_2 + \vec{i}_3)}{\{4\xi^2 + 4\eta^2 + 1\}^{1/2}}$$

$E = \vec{r}_\xi \cdot \vec{r}_\xi = 1 + 4\xi^2, \quad F = \vec{r}_\xi \cdot \vec{r}_\eta = -4\xi\eta, \quad G = \vec{r}_\eta \cdot \vec{r}_\eta = 1 + 4\eta^2$

$$L = \vec{r}_{\xi\xi} \cdot \vec{N} = \frac{2}{\{4\xi^2+4\eta^2+1\}^{1/2}}$$

$$M = \vec{r}_{\xi\eta} \cdot \vec{N} = \emptyset$$

$$N = \vec{r}_{\eta\eta} \cdot \vec{N} = \frac{-2}{\{4\xi^2+4\eta^2+1\}^{1/2}}$$

$$LN - M^2 = \frac{-4}{4\xi^2+4\eta^2+1} < 0$$

(άρα υπερβολικό!)

# Κάθετη καμπυλότητα – Άσκηση

Στο ORIGIN $(\xi=\emptyset, \eta=\emptyset)$ :

$E=1$ , $F=0$ , $G=1$ , $L=2$ , $M=0$ , $N=-2$

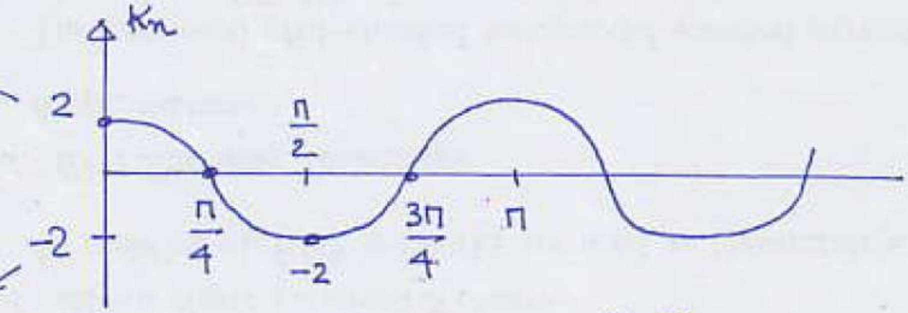
$$K_n = \frac{L d\xi^2 + 2M d\xi d\eta + N d\eta^2}{E d\xi^2 + 2F d\xi d\eta + G d\eta^2} = \frac{2(d\xi^2 - d\eta^2)}{d\xi^2 + d\eta^2}$$

# Κάθετη καμπυλότητα –Άσκηση

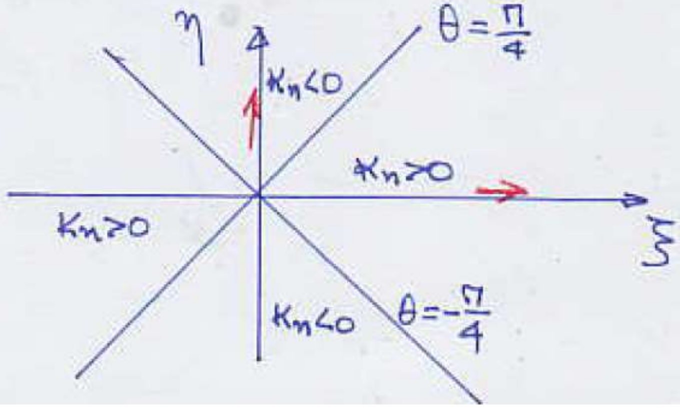
γνωστή υπόθεση : $d\xi^2+d\eta^2=1 \Rightarrow d\xi=\cos\theta$ , $d\eta=\sin\theta$

$$\kappa_n = \frac{2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{1} = 2\cos 2\theta$$

1η πρωτεύουσα καμπυλότητα




2η πρωτεύουσα καμπυλότητα.




(Πρωτεύουσες κατευθύνσεις $\theta=0$ & $\frac{\pi}{2}$)

# Δύο ακόμη αναλλοίωτες ποσότητες

**Πρωτεύουσες καμπυλότητες (principal curvatures):** είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$$\left(EG - F^2\right)\kappa^2 - \left(EN + GL - 2FM\right)\kappa + \left(LN - M^2\right) = 0$$

**Μέση καμπυλότητα (mean curvature):** το ημιάθροισμα των λύσεών της

$$\mu = \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2} g^{ij} \Omega_{ij}$$

**Καμπυλότητα Gauss (Gauss curvature):** το γινόμενο των λύσεών της

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\Omega_{11}\Omega_{22} - \Omega_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

**Η Μέση καμπυλότητα & καμπυλότητα Gauss είναι αναλλοίωτες και «πολύ χρήσιμες» στη γένεση ΕΠ.**

# Εξισώσεις Gauss-Weingarten

$$\vec{r}_{\xi\xi} = \Gamma_{11}^{1}\vec{r}_{\xi} + \Gamma_{11}^{2}\vec{r}_{\eta} + a_{11}\vec{N}$$

$$\vec{r}_{\xi\eta} = \Gamma_{12}^{1}\vec{r}_{\xi} + \Gamma_{12}^{2}\vec{r}_{\eta} + \alpha_{12}\vec{N}$$

$$\vec{r}_{\eta\eta} = \Gamma_{22}^{1}\vec{r}_{\xi} + \Gamma_{22}^{2}\vec{r}_{\eta} + \alpha_{22}\vec{N}$$

$$\vec{N}_{\xi} = \beta_{1}^{1}\vec{r}_{\xi} + \beta_{1}^{2}\vec{r}_{\eta} + \gamma_{1}\vec{N}$$

$$\vec{N}_{\eta} = \beta_{2}^{1}\vec{r}_{\xi} + \beta_{2}^{2}\vec{r}_{\eta} + \gamma_{2}\vec{N}$$

ή

$$\vec{r}_{,ij} = \Gamma_{ij}^{k}\vec{r}_{,k} + a_{ij}\vec{N}$$

$$\vec{N}_{,i} = \beta_{i}^{j}\vec{r}_{,j} + \gamma_{i}\vec{N}$$

# Τα σύμβολα Christoffel 2ου είδους

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{GE_{\xi} - 2FF_{\xi} + FE_{\eta}}{2(EG - F^{2})} \qquad \Gamma_{11}^{2} = \frac{2EF_{\xi} - EE_{\eta} + FE_{\xi}}{2(EG - F^{2})}$$

$$\Gamma_{12}^{1} = \frac{GE_{\eta} - FG_{\xi}}{2(EG - F^{2})} \qquad \Gamma_{12}^{2} = \frac{EG_{\xi} - FE_{\eta}}{2(EG - F^{2})}$$

$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{2GF_{\eta} - GG_{\xi} - FG_{\eta}}{2(EG - F^{2})} \qquad \Gamma_{22}^{2} = \frac{EG_{\eta} - 2FF_{\eta} + FG_{\xi}}{2(EG - F^{2})}$$

ή

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} = \frac{1}{2} g^{\sigma\delta} \left( g_{\alpha\sigma,\beta} + g_{\beta\sigma,\alpha} - g_{\alpha\beta,\sigma} \right)$$

# Εξισώσεις Gauss-Weingarten

$$\vec{r}_{\xi\xi} = \Gamma^1_{11}\vec{r}_\xi + \Gamma^2_{11}\vec{r}_\eta + L\vec{N}$$

$$r_{\xi\eta} = \Gamma^1_{12} r_\xi + \Gamma^2_{12} r_\eta + M N$$

$$\vec{r}_{\eta\eta} = \Gamma^1_{22}\vec{r}_\xi + \Gamma^2_{22}\vec{r}_\eta + N\vec{N}$$

ή

$$\vec{r}_{,ij} = \Gamma^k_{ij}\vec{r}_{,k} + \Omega_{ij}\vec{N}$$

&

$$\vec{N}_\xi = \beta^1_1\vec{r}_\xi + \beta^2_1\vec{r}_\eta$$

$$\vec{N}_\eta = \beta^1_2\vec{r}_\xi + \beta^2_2\vec{r}_\eta$$

ή

$$\vec{N}_{,i} = b^j_i\vec{r}_{,j} = b^j_i\vec{g}_j$$

# Εξισώσεις Gauss-Weingarten

$$\beta_1^1 = \frac{MF - LG}{EG - F^2}$$

$$\beta_1^2 = \frac{LF - ME}{EG - F^2}$$

$$\beta_2^1 = \frac{NF - MG}{EG - F^2}$$

$$\beta_2^2 = \frac{MF - NE}{EG - F^2}$$