ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΓΕΝΕΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ
Κ.Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ, Επ. Καθηγητής, Τομέας Ρευστών, Τμήμα Μηχανολόγων Ε.Μ.Π.

ΕΝΟΤΗΤΑ ΠΜ

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΕΛΑΥΝΟΝΤΟΣ ΜΕΤΩΠΟΥ ΓΙΑ ΤΗ ΓΕΝΕΣΗ ΜΗ-ΔΟΜΗΜΕΝΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ

ΠΡ.1 Γενικά

Η τεχνική του Προελαύνοντος Μετώπου (Advancing Front Method, AFM) αναπτύχθηκε από τον Peraire (1987) και σήμερα χρησιμοποιείται ευρύτατα για τη γένεση διδιάστατων πλεγμάτων τριγωνικών στοιχείων ή τριδιάστατων πλεγμάτων τετραεδρικών στοιχείων. Ξεκινά με το διακριτοποιημένο όριο ενός (2-Δ ή 3-Δ) χωρίου και εφαρμόζει ευριστικές τεχνικές για να καθοριστούν το που θα τοποθετηθούν στο επίπεδο ή στο χώρο κομβικά σημεία, αλλά και για τον τρόπο που θα συνδεθούν ώστε να δώσουν ομαλά και κανονικά πλέγματα. Με περαιτέρω επεξεργασία, μέσω της AFM μπορούν να σχηματισθούν πλέγματα με τριγωνικά ή τετραεδρικά στοιχεία τα οποία να συμμορφώνονται με απαιτήσεις πύκνωσης κατά κάποια κατεύθυνση ή σε κάποιες περιοχές που επιλέγει ο χρήστης. Σημειώνεται ότι το τελευταίο σημείο είναι εκεί όπου η γένεση τριγωνικών ή τετραεδρικών στοιχείων κατά Delaunay συναντά ιδιαίτερες δυσκολίες .

Το προελαύνον μέτωπο είναι μια αλληλουχία από πλεγματικές ακμές (αναφερόμαστε εδώ, σε 2-Δ πλέγματα) οι οποίες δεν τέμνονται αλλά το κοινό σημείο μεταξύ δυο διαδοχικών από αυτές είναι η ενδιάμεση κορυφή τους. Οι ακμές αυτές, περιβάλλουν το χωρίο (απλής ή πολλαπλής συνοχής) μέσα στο θα οποίο θα σχηματισθεί το μη-δομημένο πλέγμα. Το μέτωπο θεωρείται προελαύνον εκφράζοντας, με αυτόν τον τρόπο, τη δυναμική του. Έτσι, κάθε φορά που ένα νέο τριγωνικό στοιχείο συμπληρώνεται στο χωρίο-πλέγμα, αυτό είναι πάντα σε επαφή με το μέτωπο και το τροποποιεί ώστε το μέτωπο να περιβάλει το τμήμα του χωρίου όπου ακόμα δεν έχει δημιουργηθεί πλέγμα.

Πριν παρουσιασθεί ο αλγόριθμος που διέπει την AFM, καθορίζονται οι επιθυμητές ιδιότητες των τριγωνικών στοιχείων που πρόκειται να σχηματισθούν. Για 2-Δ προβλήματα, αυτό προτείνεται να γίνει καθορίζοντας τρία γεωμετρικά χαρακτηριστικά, όπως φαίνονται στο Σχήμα ΠΜ.1. Ορίζεται έτσι ένα μήκος δ, ένας λόγος επιμήκους s και μια κατεύθυνση πύκνωσης ή παραμόρφωσης $\vec{a}$. Τα τρίγωνα που θα σχηματισθούν καθορίζονται από το περιγεγραμμένό τους παραλληλόγραμμο διάστασης (δ,sδ), όπου η πρώτη διάσταση λαμβάνεται εγκάρσια και η δεύτερη παράλληλα στην κατεύθυνση που ορίζει το διάνυσμα $\vec{a}$. Γίνεται κατανοητό ότι, με ενιαίες τιμές των δ, s, $\vec{a}$ σε ολόκληρο το χωρίο, αναμένεται να δημιουργηθεί ένα ομαλό πλέγμα με περίπου ίδια τρίγωνα σε όλη την έκταση του, αν βέβαια το επιτρέψουν οι οριακές συνθήκες (ο τρόπος που το αρχικό περίγραμμα έχει χωριστεί σε ευθύγραμμα τμήματα, δηλαδή η αρχική μορφή του μετώπου). Με σκοπό να αποκτήσει ο χρήστης τη δυνατότητα να δημιουργεί τρίγωνα διαφορετικού μεγέθους και προσανατολισμού κατά περιοχές, μια εύλογη εξέλιξη της AFM είναι να μπορούν να καθορίζονται τοπικά οι τιμές των δ, s, $\vec{a}$. Αυτό θα μπορούσε λ.χ. να γίνει επιθέτοντας αρχικά ένα βασικό, αραιότατο πλέγμα (background grid), σε κάθε στοιχείο του οποίου τα δ, s, $\vec{a}$ θα καθορίζονται διαφορετικά και κατά βούληση από το χρήστη. Οι τεχνικές λεπτομέρειες σε μια τέτοια περίπτωση είναι δευτερεύουσας σημασίας σε ένα κείμενο που παρουσιάζει τις αρχές της AFM. Έτσι, στη συνέχεια, θα θεωρούμε ότι τα δ, s, $\vec{a}$ έχουν σταθερές και δεδομένες τιμές σε κάθε σημείο του μετώπου.

Ο καθορισμός του αρχικού μετώπου γίνεται διαγράφοντας τα όρια του χωρίου σε τρόπο ώστε το χωρίο να βρίσκεται πάντοτε στα αριστερά του διαγραφόμενου ορίου. Πρακτικά, αυτό ισοδυναμεί με διαγραφή αντίθετη των δεικτών του ρολογιού για το εξωτερικό όριο και διαγραφή κατά τους δείκτες του ρολογιού για τα ενδεχόμενα εσωτερικά όρια του χωρίου. Για χωρία απλής συνοχής, θα σχηματισθεί ένας κλειστός βρόχος ακμών. Για χωρία πολλαπλής συνοχής, ο αριθμός των κλειστών βρόχων θα είναι μεγαλύτερος. Στο σημείο αυτό, ας δεχθούμε ότι η διαμέριση του ορίου σε ευθύγραμμα τμήματα, είναι σύμφωνη με τα δ, s, $\vec{a}$. Στην αντίθετη περίπτωση, απαιτείται προεπεξεργασία του ορίου με τη διάσπαση των αρχικών ακμών σε μικρότερες και την εισαγωγή νέων κόμβων.

Κατά τη διαδικασία γένεσης του πλέγματος, κάθε ευθύγραμμο τμήμα του μετώπου θεωρείται ενεργό, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα που δεν είναι πλέον ενεργά έχουν απαλειφθεί από το διαρκώς ανανεούμενο μέτωπο. Η διαδικασία γένεσης τριγωνικών στοιχείων και η σύγχρονη διαδικασία ανανέωσης του προελαύνοντος μετώπου περιγράφονται βήμα προς βήμα στον παρακάτω αλγόριθμο. Ξεχνώντας προς το παρόν τον τρόπο με τον οποίο βρίσκονται νέα τρίγωνα που σιγά-σιγά εμπλουτίζουν και διαμορφώνουν το πλέγμα, ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλεύεται το παράδειγμα του <u>Σχήματος ΠΜ.2</u> για την κατανόηση των διαδοχικών μορφών που παίρνει το μέτωπο. Τα <u>Σχήματα ΠΜ.3, 4 και 5</u> δείχνουν αντίστοιχες φάσεις του σχηματισμού μη-δομημένου πλέγματος με την AFM.

ΠΡ.2 Ο Αλγόριθμος του Προελαύνοντος Μετώπου

Περιγράφεται βήμα-προς-βήμα ο αλγόριθμος της AFM:

ΒΗΜΑ 1: Επιλέγεται ένα ενεργό ευθύγραμμο τμήμα του μετώπου. Στην περίπτωση που παρουσιάζονται σημαντικές μεταβολές στην τιμή της βοηθητικής ποσότητας δ, από περιοχή σε περιοχή του πλέγματος το τμήμα που θα επιλεχθεί συμφέρει να είναι αυτό με το μικρότερο μήκος.

ΒΗΜΑ2: Έστω ότι το ευθύγραμμο τμήμα που επιλέχθηκε έχει άκρα τους κόμβους Α και Β. Το επόμενο στάδιο είναι ο υπολογισμός των δ, s, $\vec{a}$ στο μέσο Μ του ΑΒ. Για τον υπολογισμό θα χρειαστεί το βοηθητικό («βασικό», background) πλέγμα ή, βέβαια, θα παραληφθεί ο υπολογισμός αν τα δ,s, $\vec{a}$ είναι σταθερά. Για πρακτικούς λόγους πραγματοποιείται στροφή του τοπικού συστήματος συντεταγμένων ώστε το $\vec{a}_M$ να συμπίπτει με τον άξονα των τετμημένων (x), ενώ συγχρόνως πολλαπλασιάζονται οι κατά x συντεταγμένες με s_M. Στο νέο τοπικό σύστημα, πρόκειται να δημιουργεί ένα τρίγωνο, όσο περισσότερο ομαλό γίνεται.

ΒΗΜΑ3: Υπολογίζεται η απόσταση δ_1 σύμφωνα με τις εκφράσεις

$$\delta_1 = \begin{cases} 0{,}55AB & ...\alpha\nu... \quad \delta_M < 0{,}55AB \\ \delta_M & ...\alpha\nu... \quad 0{,}55AB < \delta_M < 2AB \\ 2AB & ...\alpha\nu... \quad 2AB < \delta_M \end{cases} \qquad (\Pi M.1)$$

Οι ανισότητες που περιγράφονται παραπάνω εξασφαλίζουν ότι δεν πρόκειται να δημιουργηθούν τρίγωνα με ιδιαίτερη παραμόρφωση στη μία κατεύθυνση (πολύ αμβλυγώνια ή πολύ οξυγώνια τρίγωνα). Οι σχέσεις (ΠΜ.1) μπορούν να αντικατασταθούν με άλλες αντίστοιχες σχέσεις, αν και φαίνεται ότι λειτουργούν πολύ καλά σε ευρύ αριθμό περιπτώσεων. Ονομάζουμε C το σημείο που απέχει απόσταση δ_1 από τα Α και Β, με υπολογισμούς που πάντα γίνονται στο νέο σύστημα συντεταγμένων.

ΒΗΜΑ 4: Εντοπίζονται όλοι οι ενεργοί κόμβοι του μετώπου οι οποίοι βρίσκονται μέσα στον κύκλο που σχεδιάζεται με κέντρο το σημείο C και ακτίνα ίση με το γινόμενο n·AB. Η επιλογή της παραμέτρου n είναι ελεύθερη. Συνιστώνται τιμές της τάξης του 4-5. Οι κόμβοι που έτσι εντοπίζονται κατατάσσονται ανάλογα με την απόστασή τους από το C, με πρώτο στη σειρά τον κόμβο που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το C. Έστω ότι η διαδικασία αυτή κατέγραψε και ταξινόμησε p κόμβους, τους $N_1, N_2 \ldots N_p$.

ΒΗΜΑ 5: Τοποθετείται ο κόμβος C στην κορυφή της λίστας των κόμβων που δημιουργήθηκε στο προηγούμενο βήμα (οπότε όλοι οι κόμβοι της λίστας μετατοπίζονται κατά μία θέση προς τα πίσω), εκτός εάν ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι σχέσεις

$AN_1 < 1{,}5\delta_1$ και $BN_1 < 1{,}5\delta_1$

Στην τελευταία περίπτωση, η λίστα του βήματος 4 διατηρείται ως είχε.

ΒΗΜΑ 6: Το απαιτούμενο σημείο N_j με το οποίο θα σχηματισθεί το νέο τρίγωνο ABN_j ορίζεται ως ο πρώτος κόμβος από τους καταγραμμένους στη λίστα για τον οποίο το τρίγωνο ABN_j δεν περιέχει κανένα άλλο κόμβο N_i της λίστας (εξαιρουμένου του C, αν υπάρχει στην κορυφή της λίστας) και συγχρόνως το ευθύγραμμο τμήμα MN_j δεν τέμνεται με καμμιά πλευρά του μετώπου. Από τη στιγμή που το σημείο N_j που ικανοποιεί τις προηγούμενες απαιτήσεις εντοπιστεί, κατασκευάζεται και καταγράφεται το νέο τρίγωνο ABN_j, οι συντεταγμένες του νέου κόμβου μετασχηματίζονται ξανά στο «πραγματικό» καρτεσιανό επίπεδο και τροποποιείται το μέτωπο. Η τροποποίηση του μετώπου συνίσταται στη διαγραφή των ακμών εκείνων που χρησιμοποιήθηκαν στο νέο τρίγωνο και την προσθήκη νέων ακμών που ενδεχόμενα σχηματίστηκαν. Το Σχήμα ΠΜ.2 δίνει παραστατικά την ανανέωση του μετώπου σε ένα απλό παράδειγμα γένεσης μη-δομημένου πλέγματος.

ΒΗΜΑ 7: Επιστροφή στο βήμα 1, εκτός αν ο αριθμός των ενεργών ακμών του μετώπου γίνει μηδενικός.

ΠΡ.3 Πρακτικά Θέματα κατά την Υλοποίηση του AFM

Στο βήμα 6 της AFM, απαιτείται ο έλεγχος ενδεχόμενης τομής δύο ευθύγραμμων τμημάτων του MN_j και κάθε μιάς πλευράς του μετώπου. Ο έλεγχος της τομής ή όχι δύο ευθύγραμμων τμημάτων, έστω των ΑΒ και ΓΔ του Σχήματος ΠΜ.6 μπορεί εύκολα να πραγματοποιηθεί υλοποιώντας προγραμματιστικά την παρακάτω διαδικασία:

Ας είναι Μ το σημείο τομής των ΑΒ και ΓΔ. Γενικά, και εκτός από την περίπτωση που τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλα, υπάρχει πάντα ένα σημείο Μ τομής των ευθειών-φορέων τους και σκοπός μας είναι να εντοπιστεί αν το σημείο Μ είναι ταυτόχρονα στο εσωτερικό των ΑΒ και ΓΔ, οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα θα τέμνονται πραγματικά.

Γενικά μπορούμε να γράψουμε δυο εκφράσεις που καθορίζουν το διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{r_M}$ του σημείου Μ. Είναι

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \beta_1(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$
$$\vec{r}_M = \vec{r}_\Gamma + \beta_2(\vec{r}_\Delta - \vec{r}_\Gamma)$$

όπου β_1 και β_2 κατάλληλοι συντελεστές και $\vec{r}_{\mathrm{A}}, \vec{r}_{\mathrm{B}}, \vec{r}_{\Gamma}, \vec{r}_{\Delta}$ τα διανύσματα των Α,Β,Γ,Δ. Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη των παραπάνω εκφράσεων προκύπτει ότι

$$\beta_1(\vec{r}_{\mathrm{B}} - \vec{r}_{A}) + \beta_2(\vec{r}_{\Gamma} - \vec{r}_{\Delta}) = \vec{r}_{\Gamma} - \vec{r}_{\mathrm{A}}$$

ή σε μητρική μορφή για διδιάστατο πρόβλημα, ότι

$$\begin{bmatrix} x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} & x_{\Gamma} - x_{\Delta} \\ y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} & y_{\Gamma} - y_{\Delta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\Gamma} - x_{\mathrm{A}} \\ y_{\Gamma} - y_{\mathrm{A}} \end{bmatrix} \qquad (\Pi\mathrm{M}.2)$$

Η λύση του συστήματος αυτού δίνει τα β_1 και β_2, με γνωστές τις συντεταγμένες των κόμβων Α,Β,Γ,Δ, εξ ορισμού, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ τέμνονται αν

$$0 \le \beta_1 \le 1 \qquad \text{και} \qquad 0 \le \beta_2 \le 1$$

Ειδικές περιπτώσεις που πρέπει να αντιμετωπιστούν είναι η ενδεχόμενη παραλληλία των ΑΒ και ΓΔ.

Επίσης στο βήμα 6 της AFM απαιτείται ο έλεγχος του αν ένα σημείο βρίσκεται στο εσωτερικό ενός τριγώνου. Σύμφωνα με το Σχήμα ΠΜ.7 αναζητούμε (με τον πιο σύντομο τρόπο) να επαληθεύσουμε το αν το τρίγωνο ΑΒΓ περιέχει ή όχι τον κόμβο Μ.

Αν το σημείο Μ είναι εσωτερικό του τριγώνου, τότε οι φυσικές συντεταγμένες του ορίζονται ως

$$L_1 = \frac{(\mathrm{MB\Gamma})}{(\mathrm{AB\Gamma})} \qquad L_1 = \frac{(\mathrm{MA\Gamma})}{(\mathrm{AB\Gamma})} \qquad L_3 = \frac{(\mathrm{MAB})}{(\mathrm{AB\Gamma})} \qquad (\Pi\mathrm{M}.3)$$

όπου οι παρενθέσεις δηλώνουν το εμβαδόν τριγώνου. Είναι προφανώς

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

ενώ οι φυσικές συντεταγμένες των κόμβων Α,Β και Γ είναι αντίστοιχα οι (1,0,0), (0,1,0) και (0,0,1). Η συσχέτιση φυσικών και καρτεσιανών συντεταγμένων γίνεται από τη σχέση

$$x = x_i L_i \qquad y = y_i L_i \qquad (\Pi\mathrm{M}.4).$$

όπου επαναλαμβανόμενοι δείκτες σημαίνουν άθροιση για τις τιμές i=1,2,3 (έστω $x_1=x_A$, $x_2=x_B$, κοκ) Οι δύο τελευταίες σχέσεις συνοψίζονται στη μητρική γραφή

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_{\mathrm{A}} & x_{\mathrm{B}} & x_{\Gamma} \\ y_{\mathrm{A}} & y_{\mathrm{B}} & y_{\Gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \qquad (\text{ΠΜ.5})$$

Η αντιστροφή της σχέσης (ΠΜ.5) δίνει ότι

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2E} \begin{bmatrix} (x_{\mathrm{B}} y_{\Gamma} - x_{\Gamma} y_{\mathrm{B}}) & (y_{\mathrm{B}} - y_{\Gamma}) & (x_{\Gamma} - x_{\mathrm{B}}) \\ (x_{\Gamma} y_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{A}} y_{\Gamma}) & (y_{\Gamma} - y_{\mathrm{A}}) & (x_{\mathrm{A}} - x_{\Gamma}) \\ (x_{\mathrm{A}} y_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{B}} y_{\mathrm{A}}) & (y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{B}}) & (x_{\mathrm{B}} - x_{\Gamma}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \qquad (\text{ΠΜ.6})$$

όπου

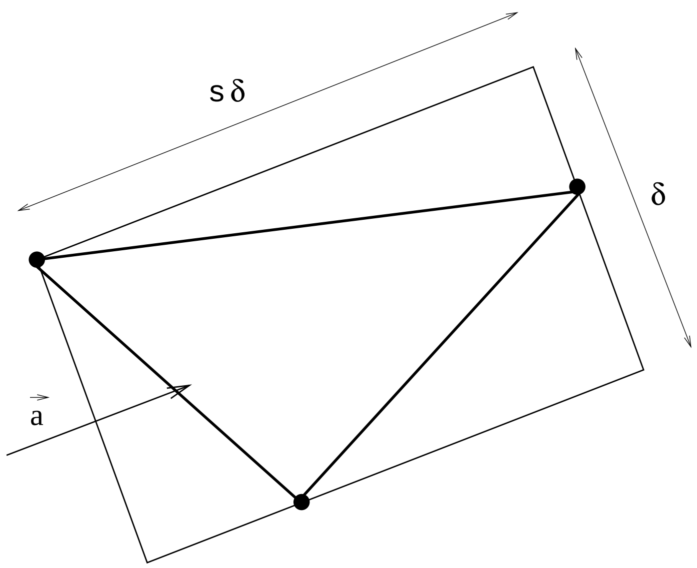
$$E = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x_{\mathrm{A}} & y_{\mathrm{A}} \\ 1 & x_{\mathrm{B}} & y_{\mathrm{B}} \\ 1 & x_{\Gamma} & y_{\Gamma} \end{bmatrix} \qquad (\text{ΠΜ.7})$$

Συνεπώς, ένας προφανής έλεγχος για το αν το σημείο Μ είναι εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ είναι να χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις (ΠΜ.6) και (ΠΜ.7) , με $x=x_M$, $y=y_M$ και να υπολογιστούν οι φυσικές συντεταγμένες του Μ. Το σημείο Μ θα είναι εσωτερικό αν ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις

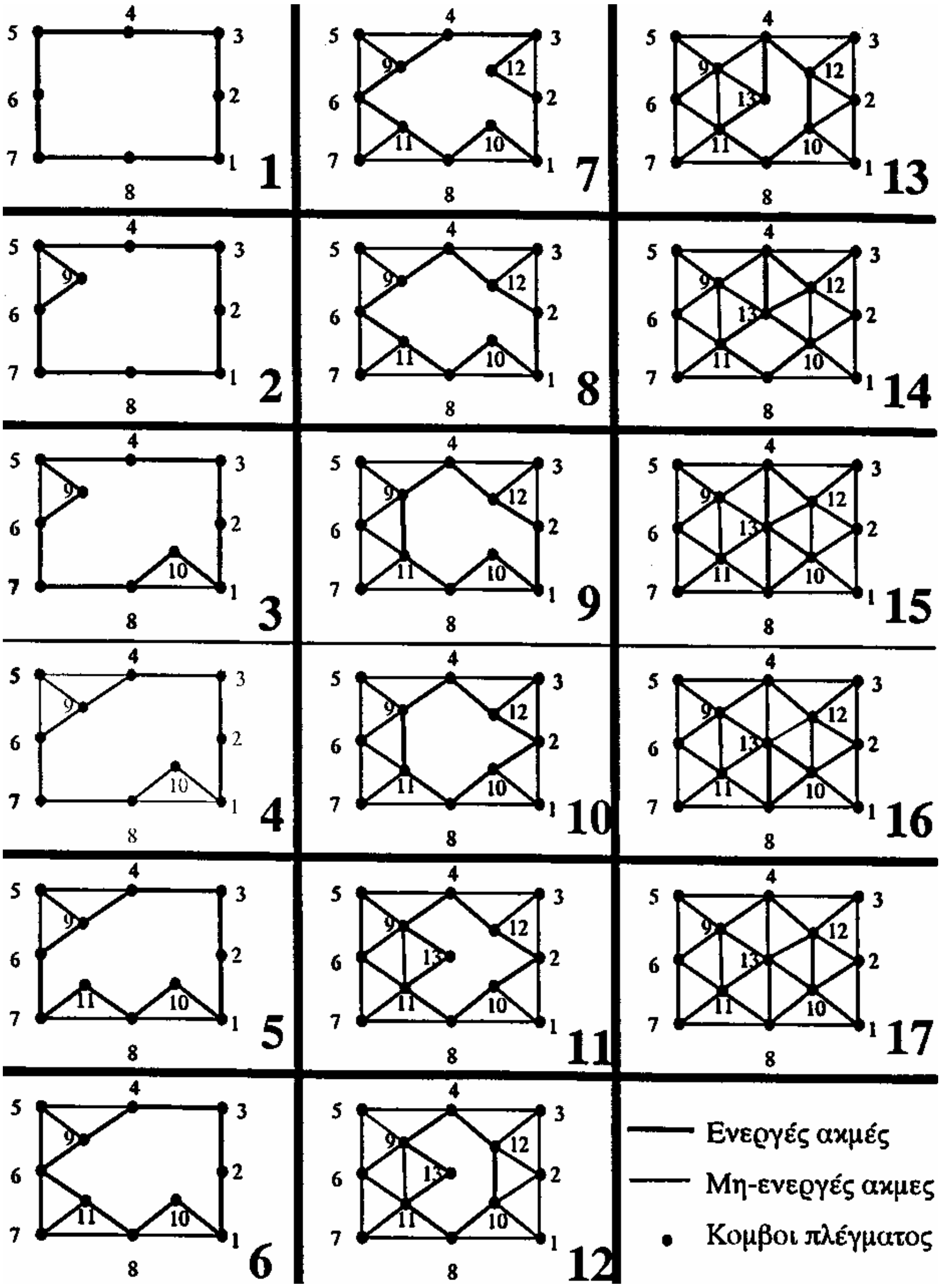
$$0 \le L_1 \le 1 \qquad 0 \le L_2 \le 1, \qquad 0 \le L_3 \le 1 \qquad (\text{ΠΜ.8})$$

Βιβλιογραφική αναφορά για την AFM:

J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan and O.C. Zienkiewicz, “Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations”, Journal of Computational Physics 72, 449-466, 1987.



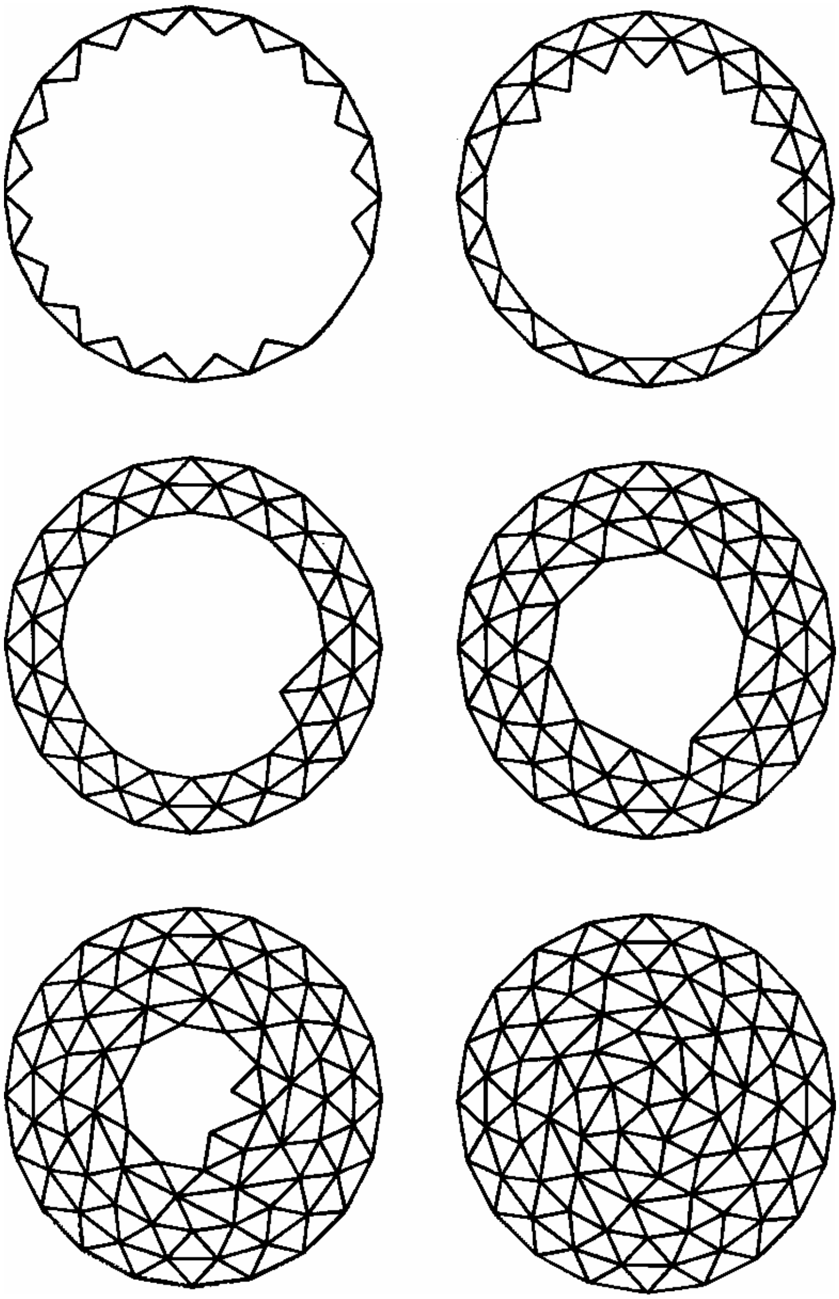
<u>Σχήμα ΠΜ.1:</u> Επιθυμητό τρίγωνο με το περιγεγραμμένο του παραλληλόγραμμο διάστασης (δ,sδ), όπου η πρώτη διάσταση λαμβάνεται εγκάρσια και η δεύτερη παράλληλα στην κατεύθυνση που ορίζει το διάνυσμα $\vec{a}$.



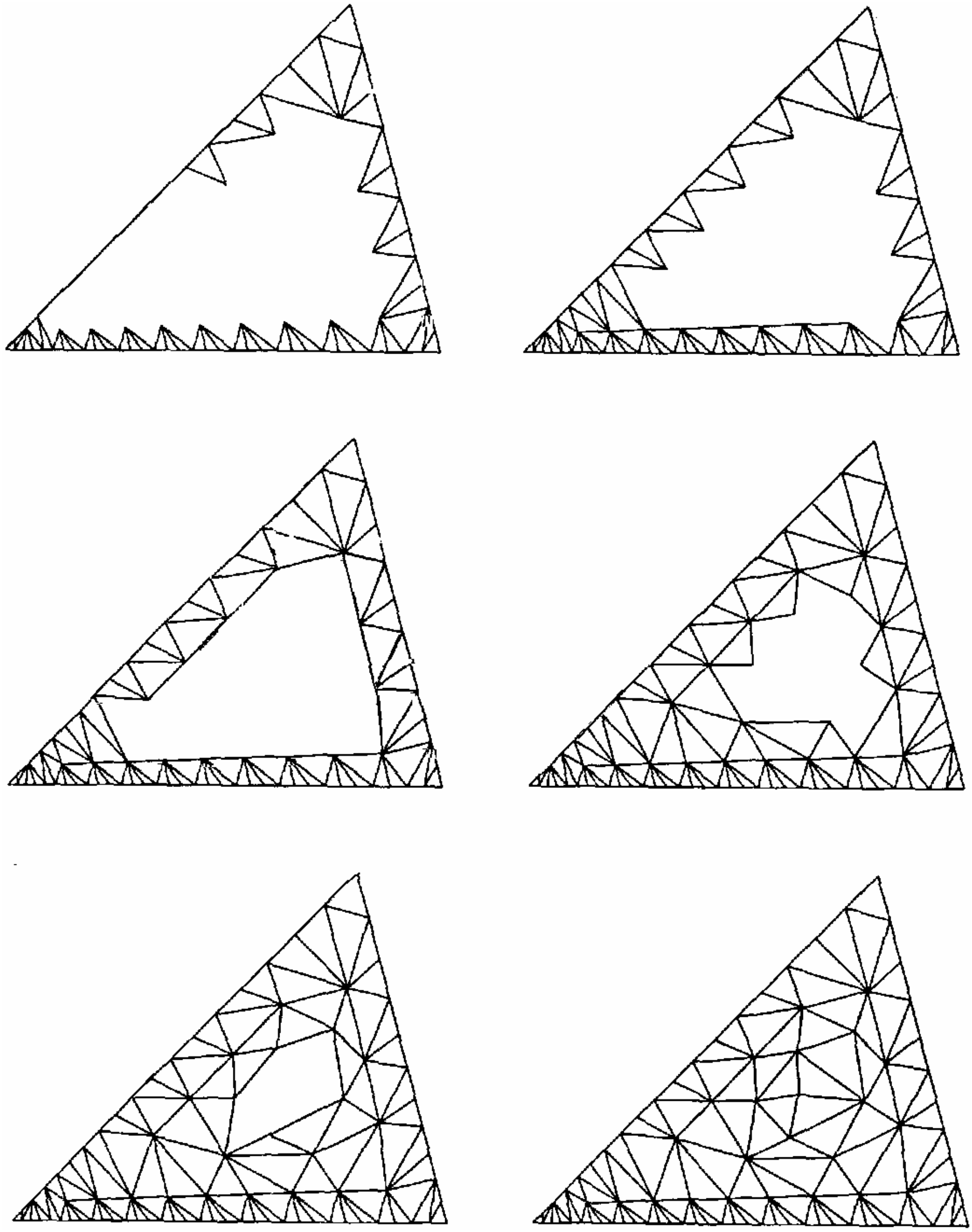
Σχήμα ΠΜ.2: Διαδοχικές φάσεις εφαρμογής της AFM.

ΒΗ ΜΑ										
1	1 2	2 3	3 4	4 5	5 6	6 7	7 8	8 1		
2	1 2	2 3	3 4	4 5	6 7	7 8	8 1	5 9	9 6	
3	1 2	2 3	3 4	4 5	6 7	7 8	5 9	9 6	10 1	8 10
4	1 2	2 3	3 4	6 7	7 8	9 6	10 1	8 10	4 9	
5	1 2	2 3	3 4	6 7	9 6	10 1	8 10	4 9	7 11	11 8
6	1 2	2 3	3 4	9 6	10 1	8 10	4 9	11 8	6 11	
7	1 2	3 4	9 6	10 1	8 10	4 9	11 8	6 11	2 12	12 3
8	1 2	9 6	10 1	8 10	4 9	11 8	6 11	2 12	12 4	
9	1 2	10 1	8 10	4 9	11 8	2 12	12 4	9 11		
10	8 10	4 9	11 8	2 12	12 4	9 11	10 2			
11	8 10	4 9	11 8	2 12	12 4	10 2	9 13	13 11		
12	8 10	4 9	11 8	12 4	9 13	13 11	10 12			
13	8 10	11 8	12 4	13 11	10 12	4 13				
14	8 10	11 8	12 4	13 11	4 13	10 13	13 12			
15	11 8	12 4	13 11	4 13	13 12	8 13				
16	12 4	4 13	13 12							
17	---									

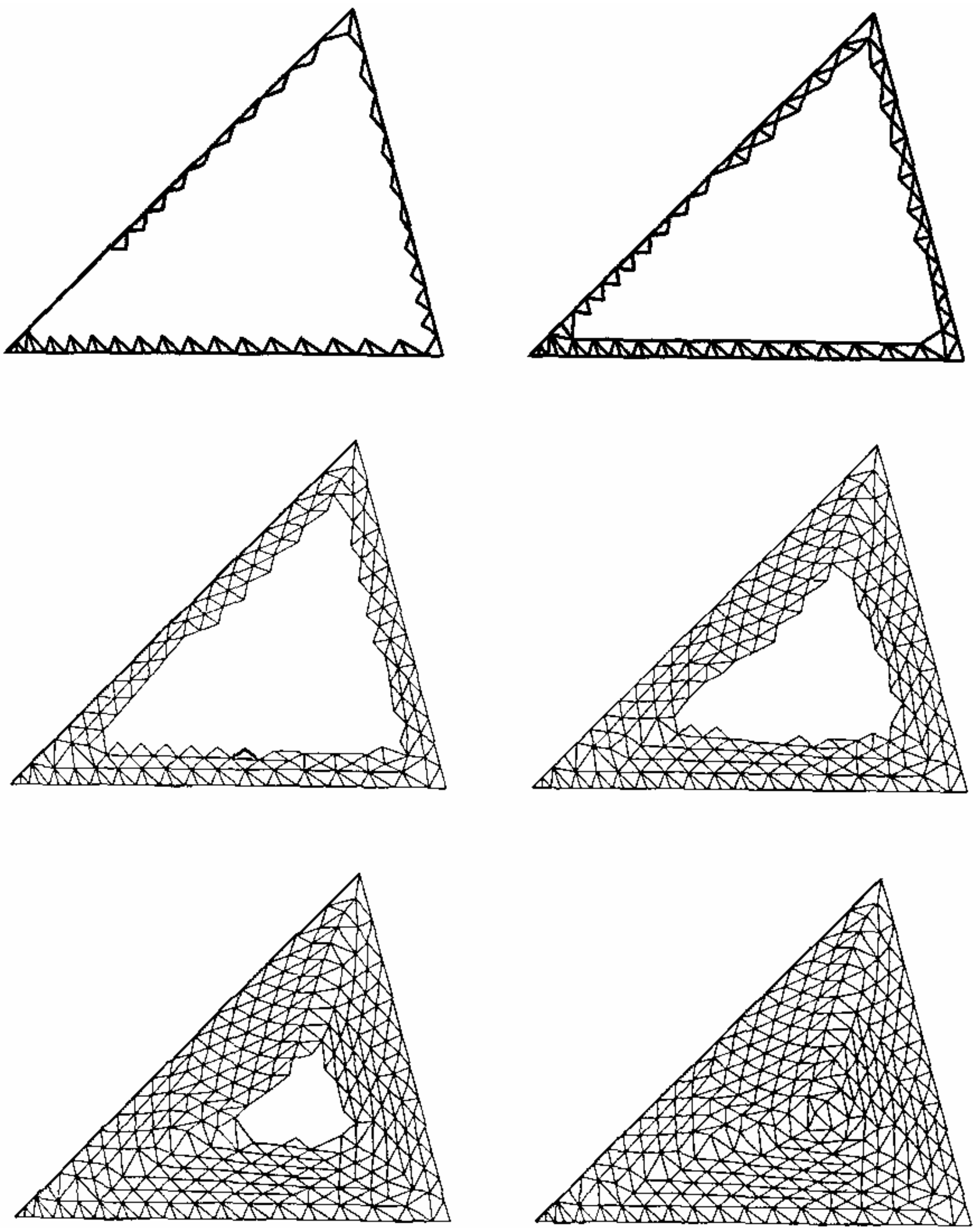
<u>Σχήμα ΠΜ.2:</u> Διαδοχικές φάσεις εφαρμογής της AFM. (συνέχεια)



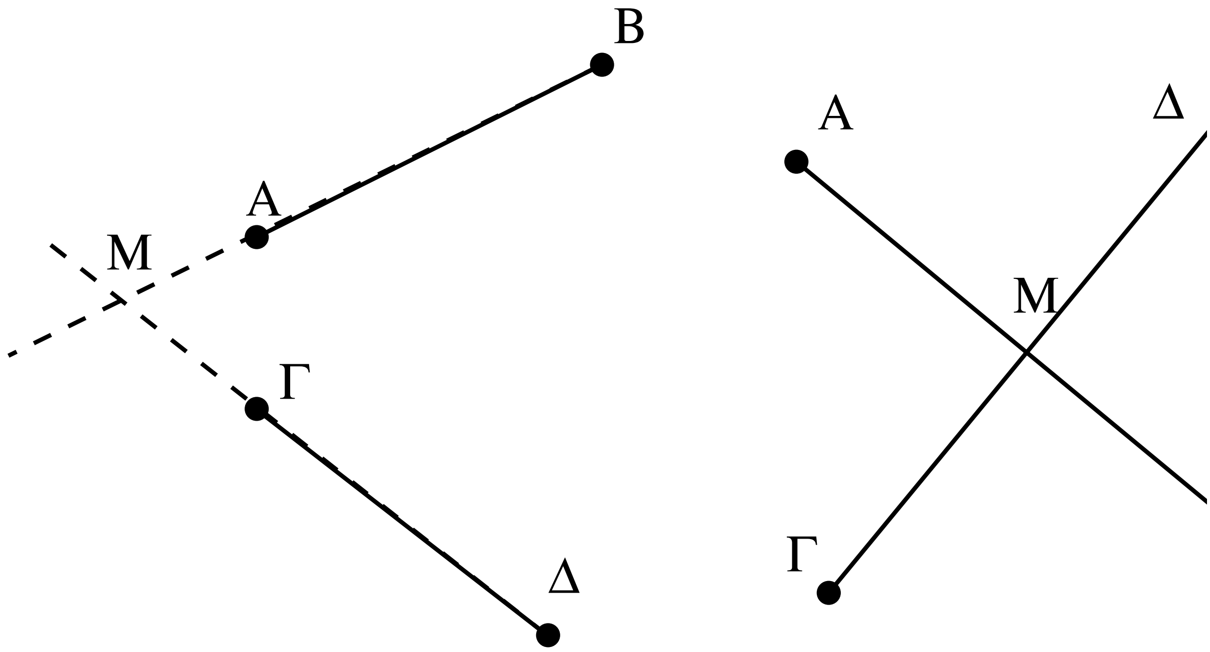
Σχήμα ΠΜ.3: Διαδοχικές φάσεις εφαρμογής της AFM σε ένα κυκλικό χωρίο.



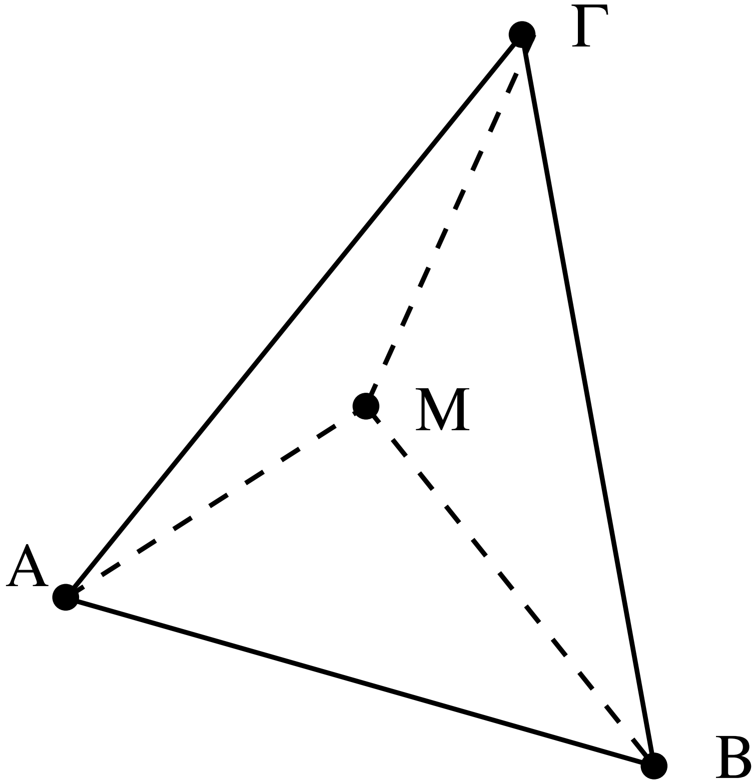
<u>Σχήμα ΠΜ.4:</u> Διαδοχικές φάσεις εφαρμογής της AFM σε ένα τριγωνικό χωρίο.



Σχήμα ΠΜ.5: Διαδοχικές φάσεις εφαρμογής της AFM σε ένα τριγωνικό χωρίο, με διαφορετικά διακριτοποιημένο όριο.



<u>Σχήμα ΠΜ.6:</u> Εύρεση της τομής δύο ευθυγράμμων τμημάτων.



<u>Σχήμα ΠΜ.7:</u> Τοποθέτηση σημείου Μ ως προς τρίγωνο (εσωτερικό ή εξωτερικό)