ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΓΕΝΕΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ
Κ.Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ, Επ. Καθηγητής, Τομέας Ρευστών, Τμήμα Μηχανολόγων Ε.Μ.Π.

ΕΝΟΤΗΤΑ ΜΔ

ΓΕΝΕΣΗ ΜΗ-ΔΟΜΗΜΕΝΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ

ΜΔ.1 Γενικά

Για τη χωρική διακριτοποίηση πολύπλοκων γεωμετριών (σε προβλήματα ροής ή προβλήματα υπολογισμού καταπονήσεων), τα μη-δομημένα πλέγματα προσφέρουν ένα σημαντικό πλεονέκτημα, αυτό της ευελιξίας. Από την άλλη πλευρά όμως, αναγκάζουν το χρήστη τους να προγραμματίσει και να υιοθετήσει μια πολύπλοκη δομή δεδομένων για τη διαχείρισή τους.

Η γένεση μη-δομημένων πλεγμάτων μπορεί να υλοποιηθεί με διαφόρους τρόπους με αφετηρία διαφορετικά αρχικά δεδομένα. Για παράδειγμα, η δημιουργία ενός τέτοιου πλέγματος που περιλαμβάνει λ.χ. τριγωνικά στοιχεία μπορεί να γίνει με αρχικό δεδομένο μόνο το περίγραμμα του ορίου (διακριτοποιημένο σημείο-προς-σημείο). Εναλλακτική κατάσταση αφετηρίας θα μπορούσε να είναι όχι μόνο το διακριτοποιημένο όριο αλλά και ένα νέφος σημείων στο εσωτερικό του. Στην περίπτωση αυτή, το πλέγμα που θα δημιουργηθεί μπορεί να περιέχει όλα ή μέρος από τα σημεία αυτά ή/ και ενδεχόμενα θα χρειαστεί να προστεθούν ορισμένα νέα σημεία. Η ανάλυση θα περιοριστεί στη γένεση διδιάστατων μη-δομημένων πλεγμάτων με τριγωνικά στοιχεία (ή "τριγωνοποίηση", triangulation, του χωρίου είναι ένας δόκιμος όρος για την περίπτωση αυτή) και θα σχολιαστούν σύντομα τρισδιάστατα πλέγματα με τετραεδρικά στοιχεία. Οι περισσότερες από τις υπάρχουσες μεθόδους γένεσης μη-δομημένων πλεγμάτων τριγωνικών στοιχείων ανήκουν σε μια από τις δύο παρακάτω κατηγορίες: την τριγωνοποίηση κατά Delaunay (Delaunay triangulation) και τη Μέθοδο του Προελαύνοντος Μετώπου (Advancing Front Method).

Η δημιουργία τριγώνων κατά Delaunay βασίζεται σε απλές γεωμετρικές θεωρήσεις. Αν προηγούμενα έχει (με κάποιο τρόπο) δημιουργηθεί ένα νέφος σημείων διάσπαρτων στο χώρο μας, η τριγωνοποίηση κατά Delaunay στοχεύει αρχικά στη δημιουργία ψηφίδων (tiles). Κάθε ψηφίδα αποτελεί ένα υποσύνολο των σημείων του επιπέδου, αυτών που βρίσκονται γύρω από κάθε σημείο του νέφους με την ιδιότητα να βρίσκονται πλησιέστερα προς τον "κεντρικό" κόμβο της ψηφίδας, από ότι σε οποιοδήποτε άλλο σημείο του αρχικού νέφους. Τα όρια μιας τέτοιας ψηφίδας πρέπει να σχηματίζονται από τις μεσοκάθετες στα τμήματα που ενώνουν τον "κεντρικό" κόμβο της ψηφίδας με τους πλησιέστερους κόμβους του αρχικού νέφους. Τον ορισμό των ψηφίδων που θα σκεπάσουν όλο το χωρίο ακολουθεί η δημιουργία των τριγώνων. Κάθε ζεύγος κόμβων του αρχικού νέφους που οι ψηφίδες τους εφάπτονται έχοντας κοινή πλευρά ενώνονται με μια ακμή του πλέγματος. Οι ακμές σχηματίζουν τα τρίγωνα της τριγωνοποίησης κατά Delaunay. Η προηγηθείσα δημιουργία των ψηφίδων φέρεται ως ψηφιδοποίηση κατά Dirichlet (Dirichlet tesselation) ή, στη γεωμετρία, ως σχεδιασμός του διαγράμματος Voronoi. Η τριγωνοποίηση κατά Delaunay έχει ορισμένες πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες που θα αναφερθούν σε επόμενη ενότητα. Κάθε τρίγωνο της αντιστοιχεί σε έναν κόμβο του διαγράμματος Voronoi και ότι αυτός ο κόμβος είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. Κανένας δε άλλος κόμβος - κορυφή τριγώνου δεν περιέχεται στο εσωτερικό αυτού του κύκλου. Οι ορισμοί που δόθηκαν για διδιάστατα πλέγματα επεκτείνονται και στις τρείς διαστάσεις, όπου σχηματίζονται τετράεδρα αντί τρίγωνα, ενώ οι κόμβοι του διαγράμματος Voronoi αποτελούν τα κέντρα περιγεγραμμένων σφαιρών σε κάθε τετράεδρο.

Η τριγωνοποίηση κατά Delaunay μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Εν τούτοις, από την πλευρά της συνολικής προσπάθειας που απαιτεί μια πλήρης τριγωνοποίηση ενός χωρίου, η δημιουργία των τριγώνων αποτελεί μόνο το ένα τρίτο της συνολικής εργασίας. Οι άλλες δύο πτυχές του προβλήματος είναι το πως θα σχηματισθεί το νέφος των σημείων - κόμβων (που θα ενωθούν για να σχηματίσουν τα τρίγωνα) αλλά και το πως θα εξασφαλισθεί η ακεραιότητα του ορίου (boundary integrity).

Ιστορικά, οι πρώτες προσπάθειες για τη δημιουργία του νέφους των σημείων που στη συνέχεια θα υποστήριζε τη δημιουργία τριγώνων κατά Delaunay βασίζονταν κυρίως στη γένεση δομημένων πλεγμάτων. Συνήθως, η περιοχή στην οποία έπρεπε να δημιουργηθεί το πλέγμα χωρίζονταν σε υποπεριοχές, κάθε μιά από τις οποίες διακριτοποιούνταν με ένα τοπικό δομημένο πλέγμα. Από τα πολλαπλά δομημένα πλέγματα (multi-block structured grids) αποθηκεύονταν μόνο τα σημεία, τα οποία στη συνέχεια μπορούσαν να τριγωνοποιηθούν κατά Delaunay. Τα πολλαπλά δομημένα πλέγματα μπορούσαν να είναι αλληλοκαλυπτόμενα, με την παρατήρηση ότι ορισμένα από τα σημεία ίσως χρειαστεί να διαγραφούν κατά την τριγωνοποίηση.

Σε μεταγενέστερες φάσεις δημιουργήθηκαν και βρήκαν ευρεία εφαρμογή μέθοδοι αυτόματης δημιουργίας σημείων στο επίπεδο ή το χώρο. Δημοφιλείς τεχνικές σ'αυτή την κατεύθυνση ήταν μέθοδοι αναδρομικών διχοτομήσεων του χωρίου (quadtree, octree subdivision of the domain). Εναλλακτικά, μπορεί η δημιουργία σημείων να γίνεται κατά τη φάση της τριγωνοποίησης. Με δεδομένα μόνο τα σημεία διακριτοποίησης του ορίου, αυτά ενώνονται ώστε να σχηματισθεί μια πρώτη τριγωνοποίηση του χωρίου. Κάθε ένα από αυτά τα τρίγωνα ελέγχεται ως προς τα κριτήρια ποιότητας για το τριγωνικό πλέγμα που έχουμε δεχθεί. Σε όσα τρίγωνα δεν ικανοποιείται το κριτήριο αυτό (και είναι σίγουρο ότι σχεδόν όλα τα τρίγωνα που θα σχηματισθούν χρησιμοποιώντας μόνο οριακούς κόμβους θα αποτυγχάνουν να ικανοποιήσουν κάθε κριτήριο ποιότητας) εισάγεται ένα νέο σημείο σε τρόπο που να βελτιώνει την ποιότητα της τριγωνοποίησης. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρις ότου κάθε τρίγωνο στο πλέγμα να ικανοποιεί τα κριτήρια ποιότητας. Η διαδικασία αυτή είναι ιδιαίτερα ευέλικτη, επεκτείνεται εύκολα σε τριδιάστατα χωρία και (αν εφαρμοστεί προσεκτικά) δίνει γενικά πλέγματα πολύ καλής ποιότητας. Είναι δε δυνατό να συνδυαστεί με μια τεχνική τριγωνοποίησης κατά Delaunay, δίνοντας τελικά πλέγματα υψηλής ποιότητας.

Όπως αναφέρθηκε και προηγούμενα, σημαντικό στοιχείο της τριγωνοποίησης κατά Delaunay είναι η εξασφάλιση της ακεραιότητας του ορίου. Με δεδομένο ένα σύνολο σημείων που τριγωνοποιήθηκε κατά Delaunay, η διαδικασία δημιουργίας ακμών και τριγώνων δεν εξασφαλίζει από μόνη της ότι οι οριακές ακμές (ή τα οριακά τρίγωνα, αν το χωρίο είναι τριδιάστατο) θα αντιστοιχούν ακριβώς στο όριο του χωρίου. Η ακεραιότητα του ορίου μπορεί λ.χ. να εξασφαλισθεί με τη γενικευμένη τριγωνοποίηση κατά Delaunay (generalized Delaunay triangulation), όπου οι αρχές της τριγωνοποίησης κατά Delaunay παύουν να υφίστανται κοντά στα όρια. Εναλλακτικά, ή σε συνδυασμό με τη γενικευμένη τεχνική, μπορεί να επιβληθεί ένας σκελετός σημείων και τριγώνων δίπλα στο όριο, για να αποφευχθεί η παραβίαση του φυσικού ορίου από ακμές ή τρίγωνα που μπορεί να το τέμνουν.

ΜΔ.2 <u>Πλέγματα και Γράφοι</u>

Όπως θα δειχθεί παρακάτω σε κάθε υπολογιστικό μη-δομημένο πλέγμα αντιστοιχεί ένας ισοδύναμος γράφος. Στα μη-δομημένα πλέγματα τριγωνικών στοιχείων που χρησιμοποιούνται συνήθως, ο ισοδύναμος γράφος, Σχήματα ΜΔ.1, ΜΔ.2, προκύπτει αν αντιστοιχίσουμε σε κάθε τριγωνικό στοιχείο έναν κόμβο του γράφου (ο οποίος παίρνει και τον αριθμό του τριγώνου) και σε κάθε πλευρά που ενώνει δύο τρίγωνα μια πλευρά του γράφου που ενώνει τους κόμβους του γράφου που αντιστοιχούν στα τρίγωνα. Είναι προφανές ότι ο ισοδύναμος γράφος περιέχει πληροφορία συνδεσμολογίας και όχι απαραίτητα γεωμετρίας. Επομένως, οι έννοιες πλέγμα και γράφος μπορούν να χρησιμοποιούνται η μία αντί της άλλης. Η επέκταση της έννοιας του γράφου είναι εύκολη και στις τρεις διαστάσεις όπου σε κάθε πυραμίδα αντιστοιχεί ένας κόμβος του γράφου (ο οποίος παίρνει και τον αριθμό της πυραμίδας) και σε κάθε τρίγωνο που είναι κοινό σε δύο γειτονικές πυραμίδες αντιστοιχεί μία πλευρά του γράφου.

Στη συνέχεια δίνονται έννοιες και συμβολισμοί από τη θεωρία των γράφων:

Μη-κατευθυντικός γράφος (non-directed graph) $\Gamma=(V,E)$ ορίζεται ένα σύνολο κόμβων V (vertices) και ένα σύνολο πλευρών E (edges), του οποίου τα στοιχεία $(u,v)\in E$ με $u, v \in V$ είναι ζεύγη κόμβων και παριστούν την πλευρά που ενώνει τους δύο κόμβους. Τα ζεύγη $(u,v) \in E$ είναι μόνο αυτά για τα οποία υπάρχει πλευρά που να ενώνει τον κόμβο u με τον v. Σε ένα μη κατευθυντικό γράφο ισχύει $(u,v)=(v,u)$.

Τάξη του γράφου ορίζεται το πλήθος των κόμβων που έχει, n=|V|. Οι κόμβοι του γράφου αριθμούνται από το 1 έως το n.

Βαθμός (degree) του κόμβου ορίζεται το πλήθος των πλευρών που έχουν το συγκεκριμένο κόμβο ως άκρη.

Κατευθυντικός γράφος (directed graph) ορίζεται ο γράφος εκείνος οι πλευρές του οποίου έχουν συγκεκριμένη αρχή και τέλος. Επομένως, οι πλευρές δεν υποδεικνύουν μόνο τη σύνδεση δύο κόμβων αλλά και την κατεύθυνση. Τα ζεύγη των κόμβων που αποτελούν τις πλευρές του είναι διατεταγμένα.

Συνδεδεμένος (connected) λέγεται ο γράφος στον οποίο για κάθε ζεύγος κόμβων, υπάρχει ένα σύνολο διαδοχικών πλευρών που συνδέει τους δύο αυτούς κόμβους.

Για την μαθηματική αναπαράσταση ενός γράφου χρησιμοποιούνται μητρώα που περιέχουν πληροφορία διασύνδεση κόμβων. Πιο πολύ χρησιμοποιούμενα είναι τα εξής:

Μητρώο γειτονικότητας (adjacency matrix) A: Έχει διαστάσεις nxn με στοιχεία $\alpha_{u,v}$ τέτοια ώστε $\alpha_{u,v}$=1 αν $(u,v) \in E$ και $\alpha_{u,v}$=0 αν $(u,v) \notin E$.

Μητρώο πρόσπτωσης κόμβων-πλευρών (vertex-edge incidence matrix) C: Ορίζεται σε κατευθυντικούς γράφους με διαστάσεις nxn, με στοιχεία $c_{v,e}$=+1 αν ο κόμβος v είναι το τέλος της πλευράς e, $c_{v,e}$=-1 1 αν ο κόμβος v είναι η αρχή της πλευράς e, $c_{v,e}$=0 σε κάθε άλλη περίπτωση.

Λαπλασιανή μήτρα γράφου L: Αποτελεί ένα τετραγωνικό μητρώο συχνά χρησιμοποιούμενο στις εργασίες που αφορούν τον γράφο. Ορίζεται από τη διαφορά

$$L = \Delta - A$$

Οπου **A** είναι το μητρώο γειτονικότητας του γράφου, **Δ** είναι το διαγώνιο μητρώο διαστάσεων nxn, του οποίου τα μη μηδενικά στοιχεία της διαγωνίου $\Delta_{u,u}$ είναι ίσα με το βαθμό του αντίστοιχου κόμβου u του γράφου. Το μητρώο αυτό είναι συμμετρικό, με μη-διαγώνια στοιχεία ίσα με $L_{i,j}$=-1(=$L_{i,j}$) αν οι κόμβοι i,j συνδέονται με πλευρά και διαγώνιο στοιχείο $L_{i,i}$ που ισούται με τον αριθμό των κόμβων με τους οποίους συνδέεται ο i. Τα υπόλοιπα στοιχεία του μητρώου είναι μηδενικά. Είναι φανερό ότι το άθροισμα των στοιχείων κάθε σειράς είναι μηδέν και ότι παρουσιάζει οριακή διαγώνια υπεροχή.

ΜΔ.3 Χρήσιμα θεωρήματα από τη Θεωρία Γράφων για Μη-Δομημένα Πλέγματα

Η θεωρία των γράφων μπορεί να προσφέρει σημαντική θεωρητική υποστήριξη στην ανάλυση και διαχείριση μη-δομημένων πλεγμάτων. Απλοί γράφοι που δεν περιλαμβάνουν κλειστούς βρόχους (ακμές, δηλαδή, που να συνδέουν έναν κόμβο με τον εαυτό του) ή παράλληλες ακμές (δύο ή περισσότερες ακμές που να συνδέουν τους ίδιους κόμβους του γράφου) είναι αρκετοί για την αναπαράσταση των μη-δομημένων πλεγμάτων.

Το πιο σημαντικό θεώρημα από τη σχετική θεωρία, το οποίο βρίσκει εφαρμογή άμεσα στη διαχείριση μη-δομημένων πλεγμάτων, είναι το γνωστό ως θεώρημα ή τύπος του Euler. Σύμφωνα με αυτόν, αν έχουμε ένα τριδιάστατο πολύεδρο όπως αυτό του Σχήματος ΜΔ.3 (αριστερά) τότε η σχέση

$$n_f = n_e - n_v + 2 \qquad \text{(ΜΔ.1)}$$

συσχετίζει τον αριθμό n_f των εδρών του (f = face), τον αριθμό n_e των ακμών του (e = edge) και τον αριθμό n_v των κορυφών του (v = vertex). Σημειώνεται ότι ο τύπος Euler είναι γενικός και δεν περιορίζεται σε συγκεκριμένο τύπο εδρών. Έτσι, στο πολύεδρο του παραδείγματος συναντάμε τριγωνικές και τετραπλευρικές έδρες. Μια απλή αρίθμηση των αντίστοιχων ποσοτήτων στο πολύεδρο του σχήματος επιδεικνύει την εφαρμογή της σχέσης (ΜΔ.1). Είναι πρακτικά χρήσιμο, επίσης, να παριστάνεται κάθε τέτοιο πολύεδρο με ένα επίπεδο σχήμα, όπως αυτό που φαίνεται στα δεξιά του Σχήματος ΜΔ.3. Μιά τέτοια απεικόνιση επιτρέπει τη γενίκευση του τύπου (ΜΔ.1) του Euler ώστε να καλύπτει και 2-Δ μη-δομημένα πλέγματα. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα του σχήματος και για προφανείς λόγους, η έδρα 1234, του πολύεδρου αναπαριστάνεται με το «εξωτερικό» μέρος του επιπέδου 1234, έτσι ώστε στην επίπεδη αναπαράστασή του το πολύεδρο αντιπροσωπεύεται από ένα μη-δομημένο πλέγμα που καλύπτει όλο το επίπεδο και δεν περιορίζεται από κάποιες εξωτερικές ακμές. Συνεπώς, επισημαίνεται ότι για να ισχύει ο τύπος (ΜΔ.1) του Euler στο 2-Δ πλέγμα πρέπει να συμπεριληφθεί και η εξωτερική «έδρα» 1234.

Είναι αρκετά απλό να αποφύγουμε να μετρήσουμε αυτή την «περιττή» έδρα και να παραμείνουμε σε ένα 2-Δ μη-δομημένο πλέγμα που φράσσεται από εξωτερικά όρια. Η διαφορά που έτσι προκύπτει έγκειται στο ότι, ενώ προηγούμενα κάθε ακμή του 2-Δ πλέγματος ήταν πάντοτε σε επαφή με δύο έδρες (στα 2-Δ πλέγματα η έννοια της έδρας πρέπει να αντικατασταθεί με την έννοια του στοιχείου του πλέγματος-grid element), τώρα εμφανίζονται οριακές ακμές που είναι σε επαφή με ένα μόνο στοιχείο του πλέγματος. Μαθηματικά διατυπωμένη η διαφορά αυτή οδηγεί σε μια τροποποιημένη γραφή της (ΜΔ.2) όπου, ουσιαστικά ο πραγματικός αριθμός των εδρών-στοιχείων είναι αυξημένος κατά ένα. Δηλαδή

$$n_f + 1 = n_e - n_v + 2$$

Η τελευταία σχέση ισχύει μόνο για πλέγματα-χωρία απλής συνοχής, δηλαδή για χωρία που περιορίζονται από ένα μόνο όριο, το εξωτερικό. Μπορεί εύκολα να γενικευθεί για χωρία πολλαπλής συνοχής, τα οποία περιέχουν n_h εσωτερικά όρια («τρύπες» , h=holes) και να πάρει την τελική μορφή

$$n_f = n_e - n_v + 1 - n_h \qquad (\text{ΜΔ}.2)$$

Για επαλήθευση, μπορεί να εφαρμοστεί η σχέση (ΜΔ.2) στο χωρίο απλής συνοχής (n_h=0) και στο χωρίο πολλαπλής συνοχής με ένα εσωτερικό όριο ($n_h = 1$) που φαίνονται στα αριστερά και στα δεξιά, αντίστοιχα, του Σχήματος ΜΔ.4.

Επεκτάσεις του τύπου του Euler μπορούν να προκύψουν χρησιμοποιώντας ενδιάμεσες βοηθητικές σχέσεις. Έτσι, σε ένα 2-Δ μη-δομημένο πλέγμα που μπορεί να περιέχει στοιχεία διαφορετικής μορφής (τρίγωνα, τετράπλευρα, κλπ) ας ονομάζουμε n_{ie} τον αριθμό των εσωτερικών ακμών (αυτών δηλαδή που είναι σε επαφή με δύο στοιχεία του πλέγματος , ie=internal edges), b_{be} τον αριθμό των οριακών ακμών (αυτών δηλαδή που είναι σε επαφή μόνο με ένα στοιχείο του πλέγματος , be=boundary edges) και $n_f^{(i)}$ τον αριθμό των στοιχείων που έχουν i ακμές. Το πλέγμα λ.χ. θα περιλαμβάνει $n_f^{(3)}$ τριγωνικά στοιχεία, $n_f^{(4)}$ τετραπλευρικά στοιχεία κλπ. Είναι πολύ εύκολο να δειχθεί ο ισολογισμός

$$2n_{ie} + n_{be} = \sum_{\forall i, i \geq 3} i n_f^{(i)} \qquad (\text{ΜΔ}.3)$$

Επαληθεύστε λ.χ. τη σχέση (ΜΔ.3) στο 2-Δ μη-δομημένο πλέγμα του Σχήματος ΜΔ.5, όπου $n_{ie} = 6$, $n_{be} = 6$, $n_f^{(3)} = 2$ τρίγωνα και $n_f^{(4)} = 3$ τετράπλευρα.

Ισχύει προφανώς ότι

$$n_{ie} + n_{be} = n_e \qquad (\text{ΜΔ}.4)$$

Επειδή στις περισσότερες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε μη-δομημένα πλέγματα που περιλαμβάνουν αποκλειστικά τριγωνικά στοιχεία ($n_f^{(3)} = n_f$), συνδυάζουμε την ειδική γραφή της σχέσης (ΜΔ.3) ως

$$2n_{ie} + n_{be} = 3n_f$$

με τις σχέσεις (ΜΔ.2) και (ΜΔ.4) και προκύπτει ότι

$$n_f = 2n_v - n_{be} - 2 + 2n_h \qquad (\text{ΜΔ}.5)$$

ή, εναλλακτικά ,ότι

$$n_e = 3n_v - n_{be} - 3 + 3n_h \qquad \text{(ΜΔ.6)}$$

Πρακτικά συμπεράσματα που προκύπτουν από τις τελευταίες σχέσεις είναι προσεγγιστικές συσχετίσεις του αριθμού κόμβων, του αριθμού ακμών και του αριθμού στοιχείων σε ένα 2-Δ μη-δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων, αν αμεληθεί η επίδραση των ορίων. Ασυμπτωτικά λοιπόν ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} n_f &\cong 2n_v \\ n_e &\cong 3n_v \end{aligned} \qquad \text{(ΜΔ.7)}$$

που βοηθούν στον καθορισμό των αποθηκευτικών απαιτήσεων (dimension) των σχετικών πινάκων στα προγράμματα που διαχειρίζονται μη-δομημένα πλέγματα τριγωνικών στοιχείων.

Μία ιδιαίτερη χρήσιμη γενίκευση του θεωρήματος του Euler είναι αυτή που αφορά το χώρο R^d. Ενα πολύτοπο P (polytope) στο χώρο R^d θα θεωρούμε ότι σχηματίζεται από το συνδυασμό ενός αριθμού k-εδρών, όπου $k \in \{-1,0,1....d\}$. Οι διάφορες μορφές του θεωρήματος του Euler που παρουσιάσθηκαν μέχρι τώρα συσχετίζουν το πλήθος των k-εδρών. Οι κορυφές ενός μη-δομημένου πλέγματος θα χαρακτηρίζονται ως 0-έδρες (επομένως, συμβολικά, για το πλήθος τους θα ισχύει $N_0(P) = n_v$) , οι ακμές θα είναι οι 1-έδρες (το πλήθος τους θα είναι $N_1(P) = n_e$) οι έδρες (στοιχεία στο 2-Δ) θα ονομάζονται 2-έδρες (με $N_2(P) = n_f$) και αν το πλέγμα είναι 3-Δ θα υπάρχουν και πολύεδρα (θα είναι τα στοιχεία του 3-Δ πλέγματος, τετράεδρα, κλπ) που θα ονομάζονται 3-εδρες (με $N_3(P) = n_\phi$). Εξ ορισμού, η –1-έδρα παριστάνει το μηδενικό σύνολο ενός πολύτοπου P ($N_{-1}(P) = 1$) και η d-έδρα (όταν $P \in R^d$) έχει $N_d(P) = 1$. Με τους παραπάνω ορισμούς, διατυπώνεται η γενικευμένη σχέση του Euler, για κάθε πολύτοπο $P \in R^d$, ως

$$\sum_{\kappa=1}^{d} (-1)^\kappa N_\kappa(P) = 0 \qquad \text{(ΜΔ.8)}$$

Η εφαρμογή της (ΜΔ.8) για ένα 2-Δ μή-δομημένο πλέγμα, δηλαδή για ένα πολύτοπο $P \in R^3$ δίνει

$$-N_{-1} + N_o - N_1 + N_2 - N_3 = 0$$

ή

$$-1 + N_o - N_1 + N_2 - 1 = 0$$

ή ακόμα, με τις αντικαταστάσεις των N_o, N_1, N_2 που αναφέραμε προηγούμενα ότι

$$n_v - n_e + n_f - 2 = 0 \qquad (ΜΔ.9)$$

Η τελευταία σχέση είναι ακριβώς η (ΜΔ.1) που διατυπώθηκε για ένα πολύεδρο και , στη συνέχεια, με την απεικόνιση στο επίπεδο βρέθηκε να ισχύει για 2-Δ μή-δομημένα πλέγματα με τις προϋποθέσεις που προαναφέρθηκαν (λ.χ. η τελευταία έδρα να επεκτείνεται στο άπειρο, ουσιαστικά δηλαδή να μην υπάρχει εξωτερικό περίγραμμα που να καθορίζει το πλέγμα). Επομένως η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε 2-Δ μή-δομημένο πλέγμα όταν δεν ληφθούν υπόψη οι επιδράσεις του ορίου.

Κατ' αντιστοιχία, η εφαρμογή της (ΜΔ.8) για ένα 3-Δ μή-δομημένο πλέγμα, δηλαδή για ένα πολύτοπο $P \in R^4$ δίνει ότι

$$-N_{-1} + N_o - N_1 + N_2 - N_3 + N_4 = 0$$

ή με αντικατάσταση ότι

$$n_v - n_e + n_f - n_\varphi = 0 \qquad (ΜΔ.10)$$

Επισημαίνεται και πάλι ότι η εξίσωση (ΜΔ.10) δεν λαμβάνει υπόψη την επίδραση του ορίου. Για παράδειγμα, εφαρμόστε τη (ΜΔ.10) στο απλό 3-Δ πλέγμα του <u>Σχήματος ΜΔ.6)</u> όπου $n_e = 12$, $n_v = 8$, $n_f = 6$ όπου θα προκύψει $n_\varphi = 2$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σωστό αφού προσμετρώνται δύο στοιχεία, το εσωτερικό και το εξωτερικό του περιγράμματος!!!

Για ένα 3-Δ μη-δομημένο πλέγμα μπορεί να προκύψουν (η απόδειξη παραλείπεται) ακριβείς εκφράσεις που να συσχετίζουν το πλήθος των εμπλεκομένων γεωμετρικών ποσοτήτων. Αν n_{bf} είναι το πλήθος των οριακών εδρών (bf = boundary faces) και n_{bv} είναι το πλήθος των οριακών κορυφών (bv = boundary vertices) τότε ισχύουν οι παρακάτω τρείς σχέσεις

$$n_e = n_\varphi + n_u + \frac{3}{4}n_{bf} - \frac{1}{2}n_{bv} \qquad (ΜΔ.11)$$

$$n_f = 2n_\varphi + \frac{1}{2}n_{bf} \qquad (ΜΔ.12)$$

$$n_e + n_\varphi = n_f + n_v + \frac{1}{4}n_{bf} - \frac{1}{2}n_{bv} \qquad (ΜΔ.13)$$

ΜΔ.4 Δυαδικότητα Μή-Δομημένου Πλέγματος και Γράφου

Η συζήτηση που ακολουθεί περιορίζεται σε 2-Δ μη-δομημένα πλέγματα τριγωνικών στοιχείων. Το ίδιο το μη-δομημένο πλέγμα, αντιστοιχίζοντας κάθε κορυφή του με μια κορυφή του γράφου και κάθε ακμή του με μια ακμή του γράφου, αντιστοιχεί πλήρως με ένα επίπεδο γράφο. Στη συνέχεια, στο πλέγμα ή το γράφο που προαναφέραμε θα αντιστοιχίσουμε περισσότερους του ενός δυαδικούς γράφους. Η αντιστοίχιση αυτή είναι συμβατή με την τεχνική των πεπερασμένων όγκων σε κεντροκομβική διατύπωση και αυτή συζητείται παρακάτω.

Σύμφωνα με τη Σχήμα ΜΔ.7, ορίζεται ο **μέσος δυαδικός γράφος** (median dual graph) του αρχικού από τη διαδοχική σύνδεση των βαρύκεντρων των τριγωνικών στοιχείων με τα μέσα των ακμών του πλέγματος. Από διαφορετική οπτική γωνία, οι ακμές του μέσου δυαδικού γράφου καθορίζουν τα όρια μιας κυψέλης-όγκου ελέγχου γύρω από κάθε κορυφή του πλέγματος σε τρόπο ώστε η σύνθεση όλων αυτών των κυψελών να καλύπτει πλήρως το χωρίο χωρίς αλληλοκαλύψεις. Σύμφωνα με το ίδιο σχήμα, ορίζεται και ο **βαρυκεντρικός δυαδικός γράφος** (centroid dual graph) του αρχικού, ο οποίος θα έχει ως κορυφές τα βαρύκεντρα των τριγώνων του πλέγματος και ως ακμές τα ευθύγραμμα τμήματα που θα συνδέουν μεταξύ τους τα βαρύκεντρα. Τα πολύγωνα που έτσι σχηματίζονται μπορούν και πάλι να θεωρηθεί ότι αποτελούν όγκους ελέγχου σε μια εναλλακτική κεντροκομβική διατύπωση πεπερασμένων όγκων. Και πάλι, οι όγκοι που έτσι ορίζονται καλύπτουν όλο το χωρίο επίλυσης, χωρίς αλληλοκαλύψεις.

Τέλος, φέρνοντας τις μεσοκάθετους κάθε ακμής του αρχικού πλέγματος –γράφου ορίζονται κυρτά πολύγωνα γύρω από κάθε κόμβο του μή-δομημένου πλέγματος. Κάθε τέτοιο κυρτό πολύγωνο περιλαμβάνει το σύνολο των σημείων του επιπέδου που βρίσκονται πλησιέστερα στον προαναφερθέντα κόμβο σε σχέση με κάθε άλλο κόμβο του πλέγματος. Η περιοχή του κυρτού πολυγώνου ονομάζεται περιοχή Dirichlet (Dirichlet region) και συσχετίζεται άμεσα με τη ψηφιδοποίηση κατά Dirichlet ή την τριγωνοποίηση κατά Delaunay του χωρίου μας.

Έχοντας τα παραπάνω υπόψη μας και τις ποσοτικές συσχετίσεις του νόμου του Euler μπορούμε να διατυπώσουμε σκέψεις για τη συσχέτιση των κεντροκυψελικών (cell-centered) και των κεντροκομβικών (vertex-centered) τρόπων ανάλυσης και επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων σε μή-δομημένα πλέγματα, με την τεχνική των πεπερασμένων όγκων. Η συζήτηση αναφέρεται σε 3-Δ πλέγματα με τετραεδρικά στοιχεία.

Στην κεντροκυψελική διατύπωση, οι μεταβλητές του προβλήματος θα αποθηκεύονται στα βαρύκεντρα των τετραέδρων και, συνεπώς, οι όγκοι ελέγχου θα ταυτίζονται με τα τετραεδρικά στοιχεία. Οι νόμοι διατήρησης που ικανοποιούμε σε διακριτή μορφή σε τέτοιες κυψέλες, διατυπώνονται με τη βοήθεια του θεωρήματος του Green στη μορφή ισολογισμού «ροών» (fluxes) που διασχίζουν τα όρια κάθε κυψέλης. Τα όρια των κυψελών είναι οι τριγωνικές έδρες του οπότε, πρακτικά, θα απαιτηθεί ο υπολογισμός n_f ροών, σαρώνοντας μια-μια τις έδρες του πλέγματος.

Σύμφωνα με τη σχέση (ΜΔ.12) , αμελώντας την επίδραση των ορίων του πλέγματος στους υπολογισμούς, ο όγκος υπολογισμών που θα απαιτήσει η κεντροκυψελική διατύπωση θα ισούται με

$$((Work)_{CC} \propto n_f \cong 2n_\varphi \qquad (\text{ΜΔ.14})$$

Στην κεντροκομβική διατύπωση, οι μεταβλητές του προβλήματος θα αποθηκεύονται στους κόμβους του πλέγματος και οι όγκοι ελέγχου θα ορίζονται γύρω από αυτούς με κάποιον από τους δυαδικούς γράφους. Ανεξάρτητα από το ποιο δυαδικό γράφο θα διαλέξουμε, γίνεται εύκολα κατανοητό ότι οι ροές που διασχίζουν τα όρια του υπολογίζονται κατά μήκος των ακμών του πλέγματος, με προσεκτικό (κατά περίπτωση) υπολογισμό του εμβαδού της κάθε επιφάνειας που διασχίζει η ροή και της κλίσης της ως προς την ακμή του πλέγματος. Επομένως ο αριθμός των ροών που πρέπει να υπολογισθούν είναι n_e. Αμελώντας και πάλι επιμέρους επιδράσεις των ορίων, ο όγκος υπολογισμών που θα απαιτήσει η κεντροκομβική διατύπωση θα ισούται με

$$(Work)_{VC} \propto n_e \cong n_\varphi + n_v \qquad (\text{ΜΔ.15})$$

όπου η τελευταία προσέγγιση προήλθε από εφαρμογή της (ΜΔ.11). Στο σημείο αυτό θα υποθέσουμε ότι σε ένα «κανονικό» 3-Δ μη-δομημένο πλέγμα τετραεδρικών στοιχείων , κατά μέσο όρο ισχύει

$$n_\varphi = \beta n_v \qquad \text{όπου πρακτικά} \qquad \beta = 5 \div 7 \qquad (\text{ΜΔ.16})$$

Με αντικαταστάσεις υπολογίζουμε το λόγο του όγκου υπολογισμών για τις δυο διατυπώσεις ως

$$\frac{(Work)_{CC}}{(Work)_{VC}} = \frac{2n_\varphi}{n_\varphi + n_v} = \frac{2\beta}{1+\beta} \cong 2 \qquad (\text{ΜΔ.17})$$

Η προσεγγιστική τιμή στην οποία κατέληξε η εξίσωση (ΜΔ.17) δείχνει ότι στα πλέγματα τετραεδρικών στοιχείων που επιλύονται με την τεχνική των πεπερασμένων όγκων, η κεντροκυψελική διατύπωση θα απαιτήσει περίπου διπλάσιο αριθμό υπολογισμών από την κεντροκομβική. Βέβαια, παραμένει ανοικτό το θέμα της ακρίβειας των αποτελεσμάτων που μπορεί να εξασφαλίσει η κάθε μια, πριν να ληφθεί η «δύσκολη» απόφαση για το ποια από τις δύο συμφέρει να υιοθετήσουμε.

ΜΔ.5 Η κατά Delaunay Τριγωνοποίηση – Ιδιότητες

Στην πράξη, η κατά Delaunay τριγωνοποίηση 2-Δ χωρίων αποτελεί μια πολύ αποδοτική και ευρύτατα χρησιμοποιούμενη μέθοδο γένεσης μη-δομημένων πλεγμάτων με τριγωνικά στοιχεία. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιασθούν οι βασικές ιδιότητες της κατά Delaunay τριγωνοποίησης, που εκμεταλλεύονται γεωμετρικές ιδιότητες που απορρέουν από τον ορισμό των περιοχών Dirichlet ή του διαγράμματος Voronoi για ένα νέφος σημείων στο επίπεδο. Στο Σχήμα ΜΔ.8 φαίνεται λ.χ. το διάγραμμα Voronoi σε ένα τετραγωνικό χωρίου όπου υπάρχει ένα νέφος από 40 τυχαία τοποθετημένα σημεία. Η κατά Delaunay τριγωνοποίηση του ίδιου χωρίου με το ίδιο νέφος σημείων θα αποτελέσει το δυαδικό σχηματισμό του διαγράμματος Voronoi που παρουσιάζεται στο σχήμα. Πρακτικά, τα τρίγωνα θα προκύψουν συνδέοντας με μια ακμή κάθε ζεύγος σημείων του νέφους των οποίων οι περιοχές Dirichlet (στο διάγραμμα Voronoi) μοιράζονται μια ακμή στο όριό τους. Στη γενική περίπτωση που δεν θα βρεθούν περισσότερα από τρία σημεία που να ανήκουν στον ίδιο κύκλο, τότε οι κορυφές του διαγράμματος Voronoi είναι τα κέντρα των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων. Αυτό αποδεικνύεται άμεσα, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι κορυφές του διαγράμματος Voronoi σχηματίζονται από τις μεσοκάθετες στις πλευρές των τριγώνων, άρα ισαπέχουν από τις κορυφές των τριγώνων που είναι σημεία του νέφους. Αγνοώντας οτιδήποτε συμβαίνει στην περιοχή του ορίου, οι ακμές του διαγράμματος Voronoi είναι σε αντιστοιχία (μια-προς-μια) με τις ακμές τις κατά Delaunay τριγωνοποίησης. Αφού οι ακμές του διαγράμματος Voronoi αποτελούν το γεωμετρικό τόπο των σημείων που ισαπέχουν από δύο κόμβους του πλέγματος, κάθε ακμή του διαγράμματος Voronoi είναι κάθετη στην αντίστοιχη ακμή της τριγωνοποίησης κατά Delaunay. Η δυαδικότητα αυτή επεκτείνεται και στα 3-Δ μη-δομημένα πλέγματα με άμεσο τρόπο.

Η κατά Delaunay τριγωνοποίηση χαρακτηρίζεται από ορισμένες ιδιότητες που η ικανοποίηση τους έχει ιδιαίτερα μεγάλη σημασία κατά τη γένεση μη-δομημένων πλεγμάτων. Δυστυχώς όμως, όλες οι ιδιότητες του 2-Δ προβλήματος (γένεση τριγώνων) δεν επεκτείνονται αναγκαστικά στο 3-Δ πρόβλημα (γένεση τετραέδρων). Παρακάτω θα αναφερθούν σε συντομία οι πιο σημαντικές ιδιότητες της 2-Δ κατά Delaunay τριγωνοποίησης.

1. **Μοναδικότητα** (Uniqueness): Η κατά Delaunay τριγωνοποίηση είναι μοναδική. Αυτό σημαίνει ότι δεν επιτρέπεται να υπάρχουν δύο τρίγωνα σε επαφή με μια κοινή πλευρά τους που να έχουν τον ίδιο περιγεγραμμένο κύκλο. Όπως φαίνεται στο Σχήμα ΜΔ.9, μια τέτοια περίπτωση θα επέτρεπε δύο διαφορετικές αλλά ισοδύναμες λύσεις, ανάλογα με τη διαγώνιο που θα επιλέξουμε να φέρουμε στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο. Η μοναδικότητα απορρέει από τη μοναδικότητα της ψηφιδοποίησης κατά Delaunay.

2. Τ**ο κριτήριο του Περιγεγραμμένου Κύκλου** (The Circumcircle Criterion): η τριγωνοποίηση σε ένα νέφος $N \geq 2$ σημείων θα ονομάζεται κατά Delaunay αν και μόνο αν ο περιγεγραμμένος κύκλος σε οποιοδήποτε από τα τρίγωνα που θα προκύψουν δεν περιέχει κανένα άλλο από τα N σημεία. Η περίπτωση του να περιέχεται κάποιο κομβικό σημείο στον περιγεγραμμένο κύκλο θα σήμαινε ότι οι περιοχές του διαγράμματος Voronoi δεν θα ήταν (τοπικά) κυρτές και συνεπώς θα είχαμε μη-κανονική ψηφιδοποίηση κατά Dirichlet. Το Σχήμα ΜΔ.10 δείχνει δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις, μια που ικανοποιείται και μια που δεν ικανοποιείται το παραπάνω κριτήριο. Πρακτικά, ο έλεγχος του αν το σημείο Δ ανήκει στο εσωτερικό του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ

πραγματοποιείται ελέγχοντας αν το άθροισμα των γωνιών ΒΑΓ και ΓΔΒ είναι μεγαλύτερο των 180^o. Στην περίπτωση που δεν ικανοποιείται το κριτήριο του περιγεγραμμένου κύκλου, η λύση-διόρθωση είναι απλή. Προτείνεται η αλλαγή διαγωνίων κατά την τριγωνοποίηση του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Αποδεικνύεται η αλλαγή διαγωνίων (diagonal swapping, χρησιμοποίηση της διαγωνίου ΑΔ αντί της ΒΓ, άρα ορισμός των τριγώνων ΑΓΔ και ΑΔΒ , αντί των ΑΒΓ και ΒΓΔ) δίνει δύο νέα τρίγωνα που ικανοποιούν το κριτήριο του περιγεγραμμένου κύκλου.

3. **Η ιδιότητα του Κύκλου περί την Ακμή** (Edge Circle Property): Μια τριγωνοποίηση ενός νέφους σημείων είναι Delaunay αν και μόνο αν, για κάθε ακμή του πλέγματος, υπάρχει ένας τουλάχιστον κύκλος που να διέρχεται από τα σημεία-άκρα της, ο οποίος να μην περιέχει κανένα άλλο σημείο-κόμβο του πλέγματος. Η ιδιότητα αυτή είναι χρήσιμη γιατί, επιπλέον, καθορίζει ένα μηχανισμό υλοποίησης της λεγόμενης κατά Delaunay τριγωνοποίησης με περιορισμούς ακμών (constrained Delaunay triangulation). Σ΄αυτή, εκτός από το νέφος σημείων ο χρήστης επιθυμεί να καθορίσει ορισμένες ακμές οι οποίες θα αποτελέσουν a priori ακμές του πλέγματος που θα σχηματισθεί). Η κατά Delaunay τριγωνοποίηση με περιορισμούς ακμών απαιτεί για κάθε ακμή του πλέγματος να υπάρχει ένας κύκλος που να διέρχεται από τα σημεία-άκρα της που να μην περιέχει κανένα άλλο σημείο-κόμβο της τριγωνοποίησης που να είναι <u>ορατό </u>από την ακμή αυτή. Για παράδειγμα, στο <u>Σχήμα ΜΔ.11</u>, ο κόμβος Κ δεν είναι ορατός από την ακμή ΜΝ, λόγω της ακμής υπό περιορισμό ΑΝ.

4. **Η ιδιότητα Ίσων Γωνιών** (Equiangularity property) : Η τριγωνοποίηση κατά Delaunay μεγιστοποιεί την ελάχιστη γωνία που θα προκύψει στα σχηματιζόμενα τρίγωνα. Για το λόγο αυτό, η κατά Delaunay τριγωνοποίηση ονομάζεται και MaxMin Triangulation. Επιπλέον, η ίδια ιδιότητα διέπει τις γωνίες του τετραπλεύρου που σχηματίζει κάθε ζεύγος γειτονικών τριγώνων με μια κοινή ακμή.

5. **Η Ιδιότητα του Ελάχιστου Κύκλου που Περιέχει το Τρίγωνο** (Minimum Containment Circle): Ο κύκλος που περιέχει ένα τρίγωνο ορίζεται στο <u>Σχήμα ΜΔ.12</u> Για ένα οξυγώνιο ή ορθογώνιο τρίγωνο συμπίπτει με τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου. Για ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο, ο κύκλος αυτός φέρεται με διάμετρο τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου και προφανώς η κορυφή που αντιστοιχεί στην αμβλεία γωνία είναι στο εσωτερικό του κύκλου. Η κατά Delaunay τριγωνοποίηση ελαχιστοποιεί το μέγιστο κύκλο που περιέχει τα τρίγωνα, για ολόκληρη την τριγωνοποίηση.

6. **Η Ιδιότητα του Πλησιέστερου Γείτονα** (Nearest Neighboor property): Μια ακμή που σχηματίζεται ενώνοντας μια κορυφή με την πλησιέστερη γειτονική κορυφή είναι ακμή της κατά Delaunay τριγωνοποίησης. Πρέπει όμως να επισημανθεί ότι οι ακμές που σχηματίζονται με τον τρόπο αυτό δεν αποτελούν παρά μόνο ένα μέρος των ακμών που θα δώσει τελικά η κατά Delaunay τριγωνοποίηση.

7. Ελάχιστη Τραχύτητα (Minimum Roughness): Η κατά Delaunay τριγωνοποίηση δημιουργεί την ελάχιστη τραχύτητα για ένα σύνολο αυθαίρετων δεδομένων που έχουν αντιστοιχηθεί με τις ακμές του πλέγματος. Εστω λ.χ. ότι σε κάθε κόμβο i του μη-δομημένου πλέγματος έχει δοθεί η αυθαίρετη τιμή f_i. Στη συνέχεια οι κόμβοι αυτοί συνδέονται μεταξύ τους με ακμές και δημιουργείται η τριγωνοποίηση κατά Delaunay. Αποδεικνύεται ότι η τραχύτητα της τριγωνοποίησης, υπολογισμένη κατά Sobolev ως

$$\iint [(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2]dxdy \qquad (\text{ΜΔ}.18)$$

είναι ελάχιστη όταν η τριγωνοποίηση είναι κατά Delaunay, σε σχέση με κάθε δυνατή τριγωνοποίηση.

ΜΔ.6 Αλγόριθμοι της κατά Delaunay Τριγωνοποίησης

Στη βιβλιογραφία έχει εμφανισθεί ένας μεγάλος αριθμός διαφορετικών αλγόριθμων που πραγματοποιούν κατά Delaunay τριγωνοποίηση σε επίπεδα χωρία. Μια κατηγορία μεθόδων που χρησιμοποιούνται αρκετά στην πράξη είναι οι Αλγόριθμοι Βηματικής Εισαγωγής (Incremental Insertion Algorithms). Στην κατηγορία αυτή ανήκουν αλγόριθμοι όπως είναι του Bowyer, του Watson, του Gree-Sibson κλπ. καθώς και αρκετές τροποποιήσεις-βελτιώσεις τους.

Ο αλγόριθμος του Watson είναι εύκολο να παρουσιασθεί αν επικεντρωθούμε σε ένα επιμέρους πρόβλημά του, η επαναληπτική λύση-εφαρμογή του οποίου καθορίζει και τη διαμόρφωση του τελικού πλέγματος τριγωνικών στοιχείων. Το πρόβλημα θα αναλυθεί θεωρώντας ότι έχουμε ήδη μια (όχι τελική) κατά Delaunay τριγωνοποίηση ενός χωρίου, την οποία θέλουμε να εμπλουτίσουμε με νέα τρίγωνα και νέα σημεία. Έστω δε ότι με ένα τυχαίο τρόπο δημιουργείται ένα νέο σημείο Μ μέσα στο υπάρχον πλέγμα. Το πως θα δημιουργηθεί αυτό το νέο σημείο είναι δευτερεύουσας σημασίας, αφού υπάρχουν αρκετοί τρόποι για να γίνει κάτι τέτοιο. Στη γενική περίπτωση, το σημείο αυτό θα κείται στο εσωτερικό ενός τριγώνου (BCD) του τρέχοντος πλέγματος, το οποίο στη συνέχεια θα αποκαλείται ριζικό (root) τρίγωνο για το σημείο Μ. Ξεκινώντας από το ριζικό τρίγωνο του Μ, εντοπίζουμε κάθε άλλο τρίγωνο του τρέχοντος πλέγματος, του οποίου ο περιγεγραμμένος κύκλος περιέχει το σημείο Μ. Είναι προφανές ότι η αναζήτηση αυτών των τριγώνων πρέπει να γίνει με έναν έξυπνο και οικονομικό τρόπο. Ούτως ή άλλως, το ριζικό τρίγωνο έχει πάντα την ιδιότητα ο περιγεγραμμένος κύκλος του να περιέχει το Μ. Τα αμέσως επόμενα τρίγωνα που είναι πιθανό να πληρούν την ιδιότητα αυτή είναι τα (τρία, στη γενική περίπτωση) τρίγωνα που είναι σε άμεση επαφή με το ριζικό. Ενδεχόμενα και τα γειτονικά αυτών, αλλά η αναζήτηση μπορεί να σταματήσει όταν σε μια οικογένεια γειτόνων κανένα τρίγωνο δεν ικανοποιεί την ιδιότητα αυτή.

Μόλις εντοπιστούν όλα τα τρίγωνα με την παραπάνω ιδιότητα (εδώ τα BCD, ABD), αυτά απαλείφονται από το τρέχον πλέγμα και έτσι αποκαλύπτεται ένα κλειστό πολύγωνο που περιβάλλει το Μ, έτσι ώστε κάθε πλευρά του πολυγώνου να είναι ορατή από το Μ. Το επόμενο βήμα είναι η τριγωνοποίηση του πολυγώνου αυτού (Σχήμα ΜΔ.13). Η τριγωνοποίηση γίνεται με τον πιο ευθύ τρόπο, ενώνοντας ακμές του πολυγώνου με το σημείο Μ και σχηματίζοντας τόσα τρίγωνα όσες είναι και οι ακμές του πολυγώνου. Τα τρίγωνα αυτά διατηρούν τις ιδιότητες της κατά Delaunay τριγωνοποίησης και τοποθετούνται στη βάση καταχώρησης των στοιχείων του πλέγματος. Η βάση αυτή ανανεώνεται αφού διαγράφονται τρίγωνα και ακμές, προστίθενται νέα τρίγωνα και νέες ακμές μαζί με το νέο σημείο Μ. Στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται ένας πλήρης κύκλος της βηματικής εισαγωγής (σημείου, ακμών και τριγώνων) κατά Watson, ο δε αλγόριθμος συνεχίζει επιλέγοντας ένα νέο σημείο και συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία εμπλουτισμού του τρέχοντος πλέγματος.

Ο αλγόριθμος βηματικής εισαγωγής κατά Green και Sibson μοιάζει πολύ με τον αλγόριθμο του Watson που περιγράψαμε προηγούμενα. Η βασική του διαφορά έγκειται στο ότι χρησιμοποιείται η τοπική εναλλαγή διαγωνίων (local edge swapping) για να ανανεωθεί η τριγωνοποίηση. Όπως και στον αλγόριθμο του Watson, ένα νέο σημείο Μ προστίθεται στην τρέχουσα τριγωνοποίηση. Αμέσως μετά την εισαγωγή του σημείου εντοπίζεται το τρίγωνο που περιέχει το νέο σημείο Μ. Ας είναι BCD αυτό το τρίγωνο , Σχήμα ΜΔ.14. Σχηματίζονται προσωρινά τρία νέα τρίγωνα, τα BDM, DCM, BCM με διάθεση να αντικαταστήσουν το BCD στη βάση καταχώρησης αν και εφόσον το έτσι χρησιμοποιούμενο πλέγμα έχει τις ιδιότητες της κατά Delaunay τριγωνοποίησης. Ειδικά αν ο κόμβος Μ βρεθεί να ανήκει στην ακμή που χωρίζει δυο τρίγωνα του τρέχοντος πλέγματος, τότε δημιουργούνται τέσσερα τρίγωνα, όλα με κορυφή του Μ, στη θέση των δυο τριγώνων που μοιράζονταν την ακμή στην οποία ανήκει το Μ.

Οι 3 ή 4 ακμές που ορίστηκαν με τον τρόπο αυτό διασπώντας αντίστοιχα 1 ή 2 τρίγωνα του τρέχοντος πλέγματος είναι αυτόματα ακμές που υπακούουν στα κριτήρια της κατά Delaunay τριγωνοποίησης. Αυτό μπορεί να δειχθεί εφαρμόζοντας το κριτήριο του περιγεγραμμένου τριγώνου. Δυστυχώς όμως, μερικές από τις «παλιές» ακμές του τρέχοντος πλέγματος, σε συνδυασμό με τις νέες που σχηματίσθηκαν, παύουν να ικανοποιούν κάποια από τα κριτήρια της κατά Delaunay τριγωνοποίησης και γι’αυτό πρέπει να τροποποιηθούν «κατάλληλα». Αλγοριθμικά, αυτό σημαίνει ότι πρέπει πρώτα να βρεθούν εκείνες οι «ύποπτες» ακμές που δεν ικανοποιούν το κριτήριο του περιγεγραμμένου κύκλου και να καταγραφούν. Στη συνέχεια, από τον κατάλογο των «υπόπτων» ακμών επιλέγεται καθεμιά από αυτές και προσδιορίζεται ως η διαγώνιος ενός τετραπλεύρου που σχηματίζεται από τα δυο εκατέρωθεν τρίγωνα. Σε καθένα από τα δυο αυτά δημιουργείται ο περιγεγραμμένος κύκλος του και εξετάζεται αν το τέταρτο σημείο (η τέταρτη κορυφή του τετραπλεύρου) είναι εσωτερική ή εξωτερική του κύκλου. Στην περίπτωση που η τέταρτη κορυφή είναι εσωτερική του περιγεγραμμένου κύκλου, τότε η αντίστοιχη «ύποπτη» ακμή απαλείφεται και αντικαθίσταται με την «άλλη» διαγώνιο του τετραπλεύρου (την AM αντί της BD), όπως φαίνεται στο Σχήμα ΜΔ.14.

Εναλλακτικές τεχνικές των παραπάνω είναι οι Αλγόριθμοι Ολικής Εναλλαγής Ακμών (Globad Edge Swapping Algorithms). Ο πιο γνωστός από την κατηγορία αυτή είναι ο αλγόριθμος του Lawson.

Απαιτεί να προϋπάρχει μια τριγωνοποίηση (που δεν ικανοποιεί τις συνθήκες κατά Delaunay) και επαναληπτικά την τροποποιεί ώστε να τις ικανοποιεί. Βασικός στόχος του αλγορίθμου είναι να βελτιώσει το βαθμό στον οποίο ικανοποιείται το κριτήριο των ίσων γωνιών. Σαρώνει μία-προς-μία τις εσωτερικές ακμές του πλέγματος, τις θεωρεί ως διαγωνίους ενός τετραπλεύρου που σχηματίζουν τα δύο εκατέρωθεν τρίγωνα και προχωρεί ή δεν προχωρεί στο σχηματισμό δύο νέων τριγώνων χρησιμοποιώντας την «άλλη» διαγώνιο του τετραπλεύρου, ανάλογα με μια τέτοια κίνηση βελτιώνει ή δεν βελτιώνει αντίστοιχα, το κριτήριο των ίσων γωνιών.

Τρίτη κατηγορία είναι οι Αλγόριθμοι τύπου Διαίρει-και-Κυρίευε (Divide-and-Conquer Algorithms). Οι αλγόριθμοι αυτοί προχωρούν στην κατά Delaunay τριγωνοποίηση ενός χωρίου με προκαθορισμένο νέφος σημείων στο εσωτερικό του. Επιλέγεται μια τυχαία διεύθυνση (λ.χ. η κατεύθυνση του άξονα x) και τα σημεία χωρίζονται σε δυο υπο-ομάδες ίσου πλήθους , αυτές με τις μικρότερες και αυτές με τις μεγαλύτερες συντεταγμένες κατά την επιλεγείσα κατεύθυνση. Κάθε μια υπο-ομάδα τριγωνοποιείται κατά Delaunay ανεξάρτητα από την άλλη. Το επόμενο βήμα, που είναι και το πιο σημαντικό σε έναν τέτοιο αλγόριθμο συσχετίζεται με τη μίξη των δυο τριγωνοποιημένων υπο-ομάδων, δημιουργώντας τρίγωνα που ικανοποιούν τις ιδιότητες κατά Delaunay και στο μεταξύ τους χώρο. Η μίξη της «αριστερής» και της «δεξιάς» υπο-ομάδας γίνεται σύμφωνα με ορισμένους απλούς κανόνες. Για παράδειγμα, η μίξη επιτρέπει μόνο το σχηματισμό ακμών που θα συνδέουν έναν κόμβο της αριστερής με έναν κόμβο της δεξιάς υπο-ομάδας. Όμως, συγχρόνως, επιτρέπει την ενδεχόμενη απαλοιφή κάποιων ακμών στην ενδιάμεση επιφάνεια, ώστε η συνολική τριγωνοποίηση να είναι κατά Delaunay. Το Σχήμα ΜΔ-15 δείχνει ένα παράδειγμα τέτοιας τριγωνοποίησης.

Αλλοι αλγόριθμοι για την κατά Delaunay τριγωνοποίηση είναι ο αλγόριθμος των Tanemura-Merriam, η τριγωνοποίηση κατά MinMax, κλπ. Διάφορες ευριστικές μέθοδοι (greedy algorithms) τριγωνοποίησης που βασίζονται σε πρακτικούς, απλούς αλγόριθμους οδηγούν σε τριγωνοποιήσεις που απέχουν σημαντικά σε ποιότητα από την κατά Delaunay τριγωνοποίηση.

ΜΔ.7 Ποιότητα στοιχείων πλέγματος

Παρακάτω θα οριστούν ποσότητες που θα λέγονται δείκτες ποιότητας και οι οποίοι θα επιτρέπουν τη «βαθμολόγηση» ενός πλέγματος, όσο αφορά την ποιότητά του. Υπενθυμίζεται ότι η ποιότητα ενός πλέγματος είναι αλληλένδετη με το πόσο κοντά ή μακριά από το ιδανικό (ισόπλευρο) τρίγωνο βρίσκονται τα τρίγωνα που αποτελούν το πλέγμα.

Για την θεώρηση των δεικτών ποιότητας υπενθυμίζεται ότι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου σε ένα τρίγωνο δίδεται από τη σχέση:

$$R = \frac{a \cdot \beta \cdot \gamma}{4 \cdot E} \qquad (\text{ΜΔ}.19)$$

όπου *α, β, γ* τα μήκη των πλευρών του τριγώνου και Ε το εμβαδόν του. Επίσης επισημαίνεται ότι η ακτίνα του εγγεγραμμένου σε ένα τρίγωνο κύκλου δίδεται από την σχέση :

$$r = \frac{2 \cdot E}{a + \beta + \gamma} \qquad \text{(ΜΔ.20)}$$

Σημειώνεται ότι το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου δίδεται από την σχέση :

$$E = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4} \qquad \text{(ΜΔ.21)}$$

Οι κυριότεροι δείκτες ποιότητας που χρησιμοποιούνται είναι οι εξής:

(α) Ο λόγος της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου προς το μήκος της μέγιστης πλευράς του τριγώνου

$$Q_1 = \frac{R}{\max(\alpha, \beta, \gamma)} \qquad \text{(ΜΔ.22)}$$

Για το ισόπλευρο τρίγωνο το οποίο αποτελεί πρότυπο στοιχείο ο δείκτης ισούται με $Q_1 = 1/\sqrt{3}$.

(β) Ο λόγος της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου προς την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου

$$Q_2 = \frac{R}{r} \qquad \text{(ΜΔ.23)}$$

Για το ισόπλευρο τρίγωνο ο δείκτης ισούται με $Q_2 = 2$.

(γ) Ο λόγος της μέγιστης πλευράς του τριγώνου προς την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου

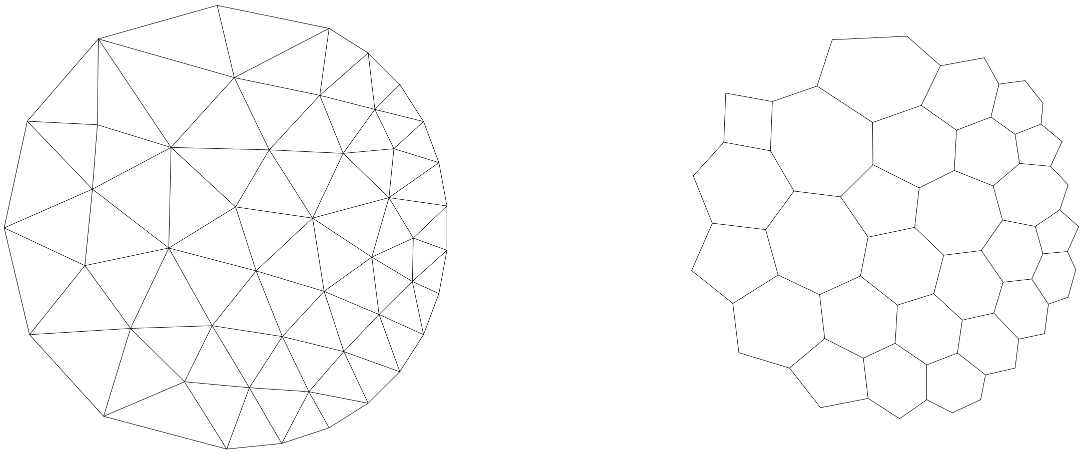
$$Q_3 = \frac{\max(\alpha, \beta, \gamma)}{r} \qquad \text{(ΜΔ.24)}$$

Για το ισόπλευρο τρίγωνο ο δείκτης ισούται με $Q_3 = 2\sqrt{3}$.

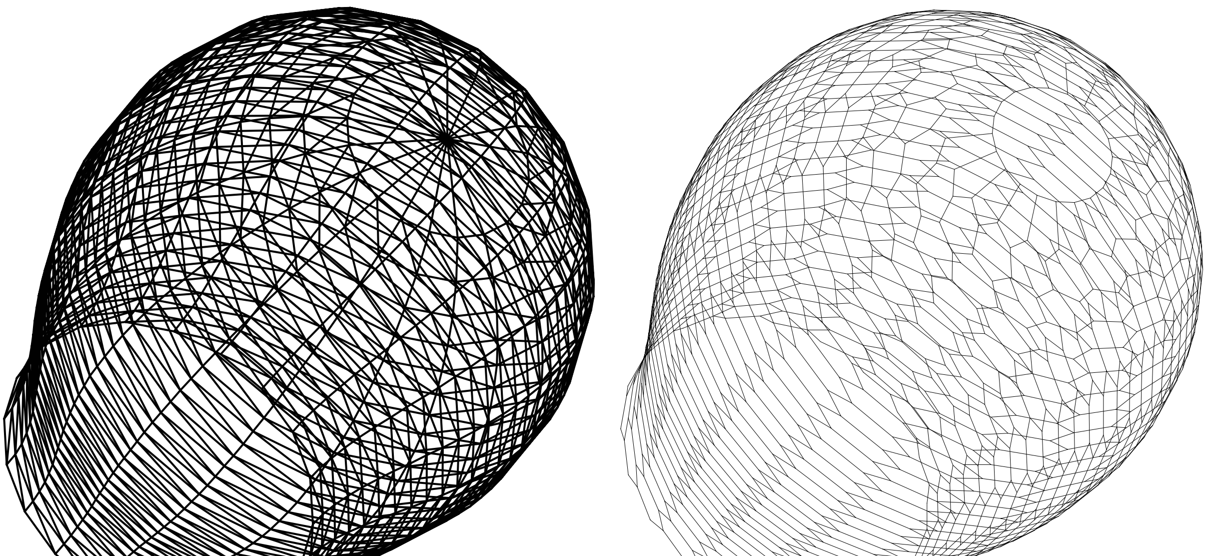
(δ) Ο λόγος του μέσου μήκους των πλευρών στο τετράγωνο προς το εμβαδόν του τριγώνου

$$Q_4 = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)^2}{9E} \tag{ΜΔ.25}$$

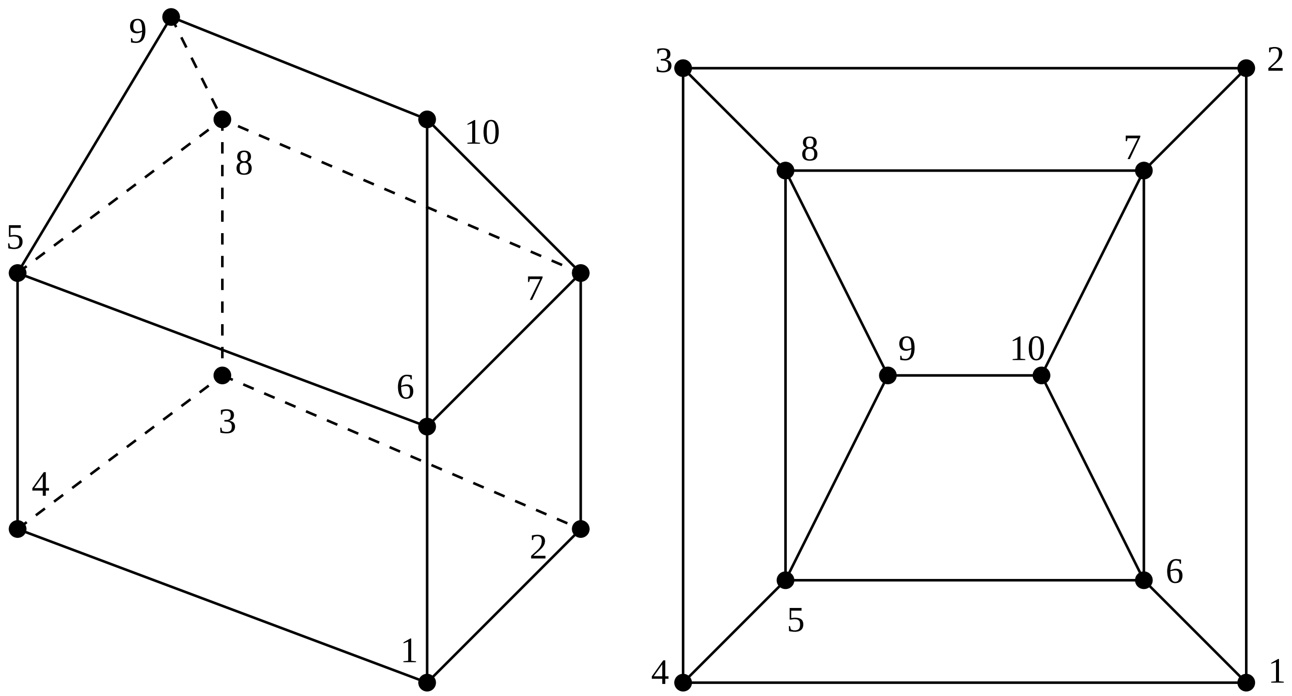
Για το ισόπλευρο τρίγωνο ο δείκτης ισούται με $Q_4 = 4\sqrt{3}/3$.



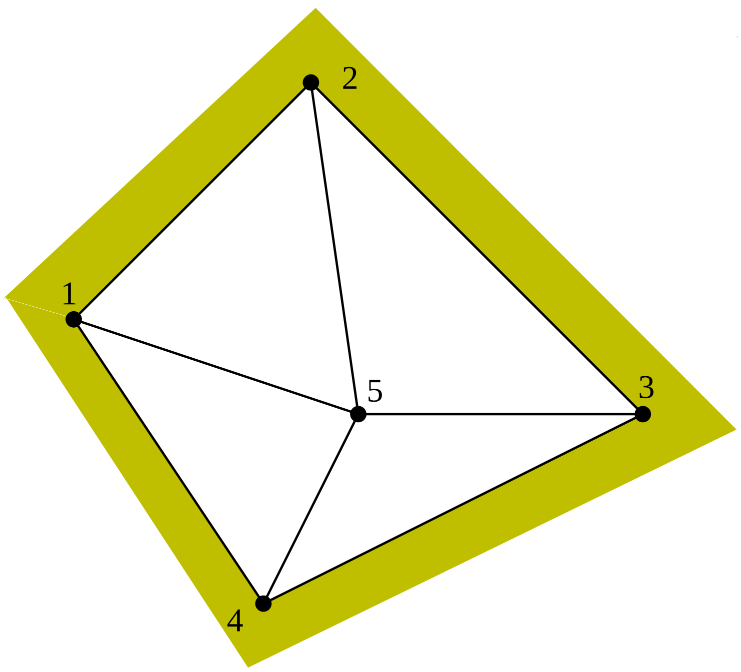
Σχήμα ΜΔ-1: Μη-δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων και ο ισοδύναμος γράφος του.



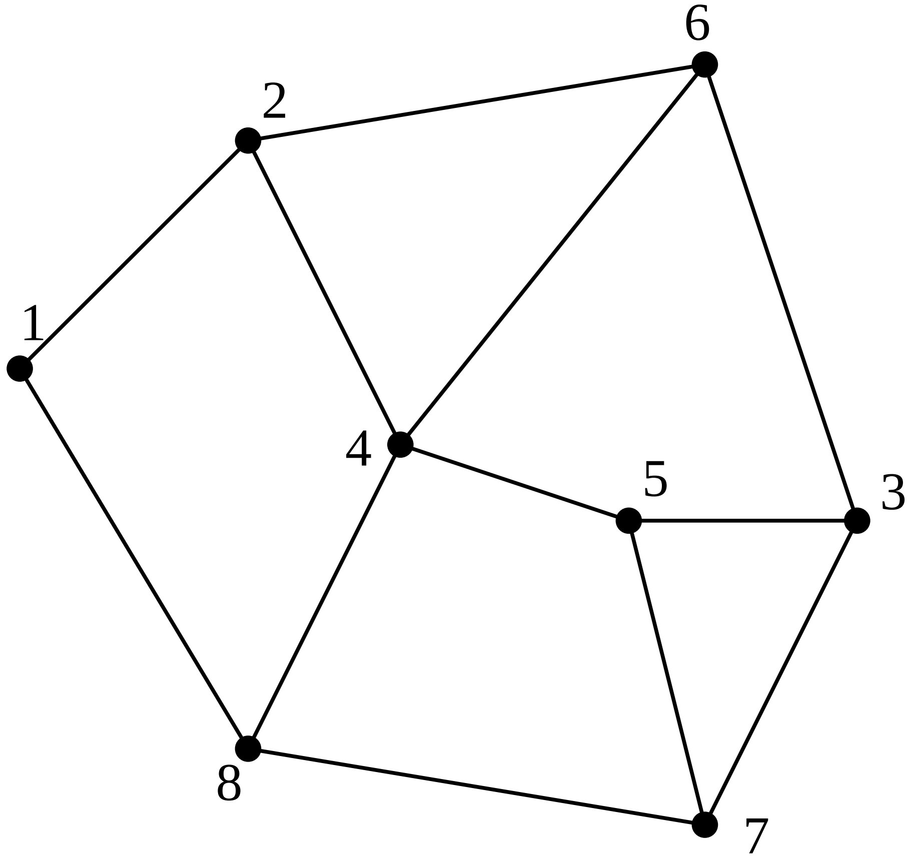
Σχήμα ΜΔ-2: Μη-δομημένο επιφανειακό τριγωνικό πλέγμα με τον ισοδύναμο γράφο του



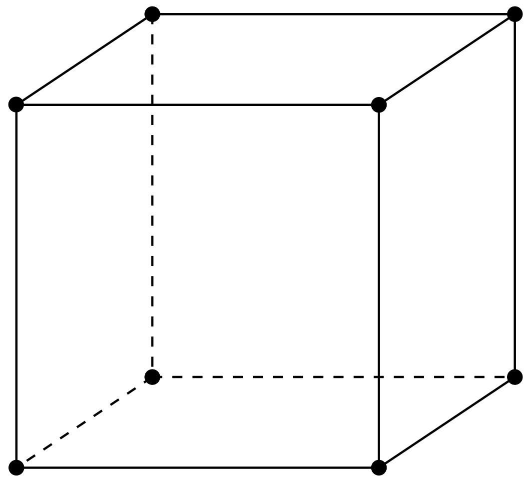
Σχήμα ΜΔ-3: 3-Δ πολύεδρο και το επίπεδο ανάπτυγμά του.



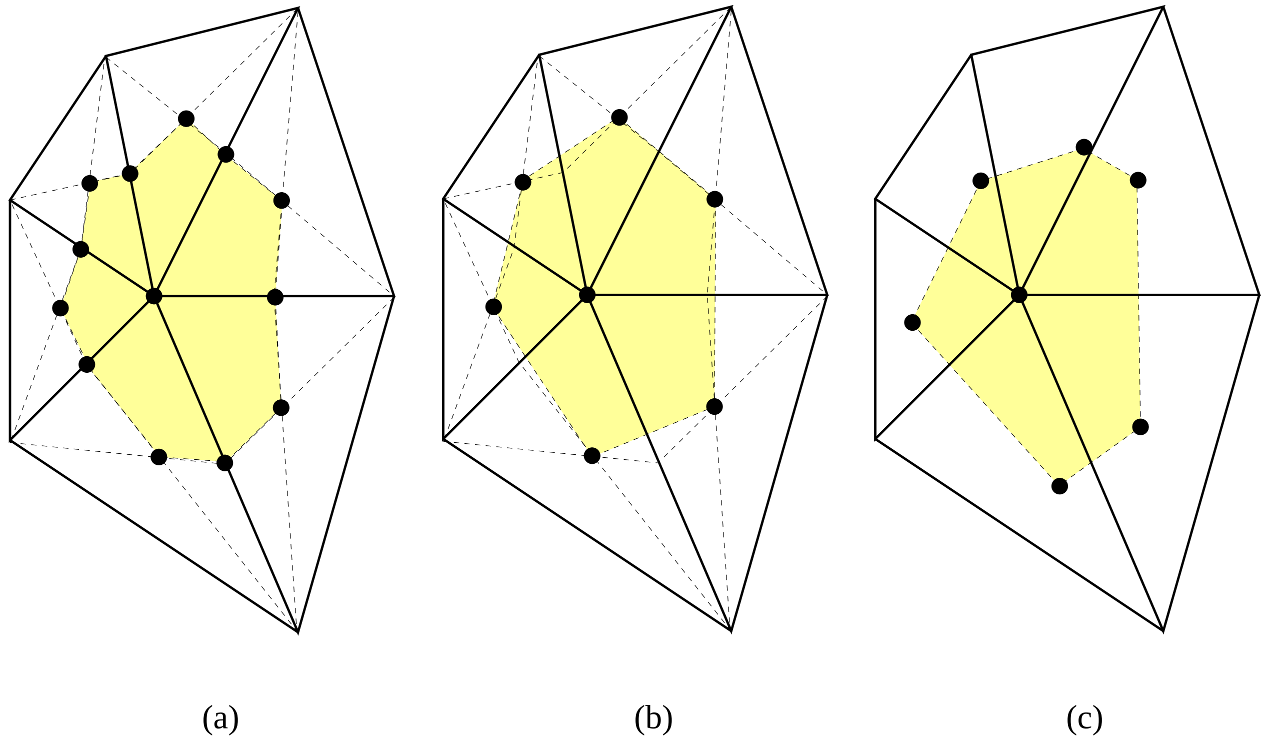
Σχήμα ΜΔ-4: Χωρίο απλής συνοχής (n_h=0) και χωρίο με ένα εσωτερικό όριο (n_h=1) για την εφαρμογή του τύπου του Euler .



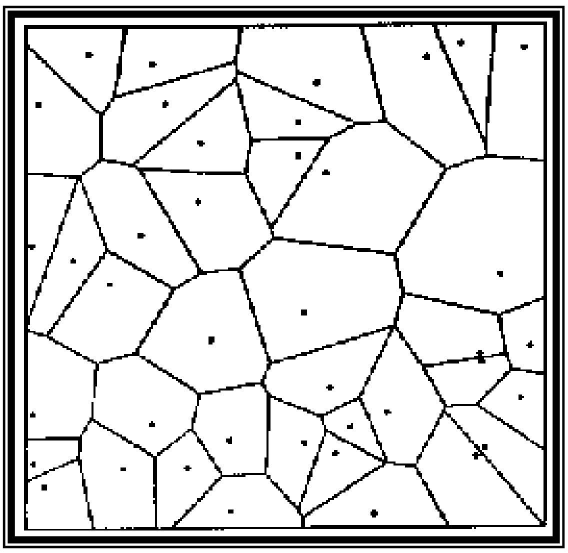
Σχήμα ΜΔ-5: 2-Δ μη-δομημένο πλέγμα του με $n_{ie} = 6$, $n_{be} = 6$, $n_f^{(3)} = 2$ τρίγωνα και $n_f^{(4)} = 3$ τετράπλευρα.



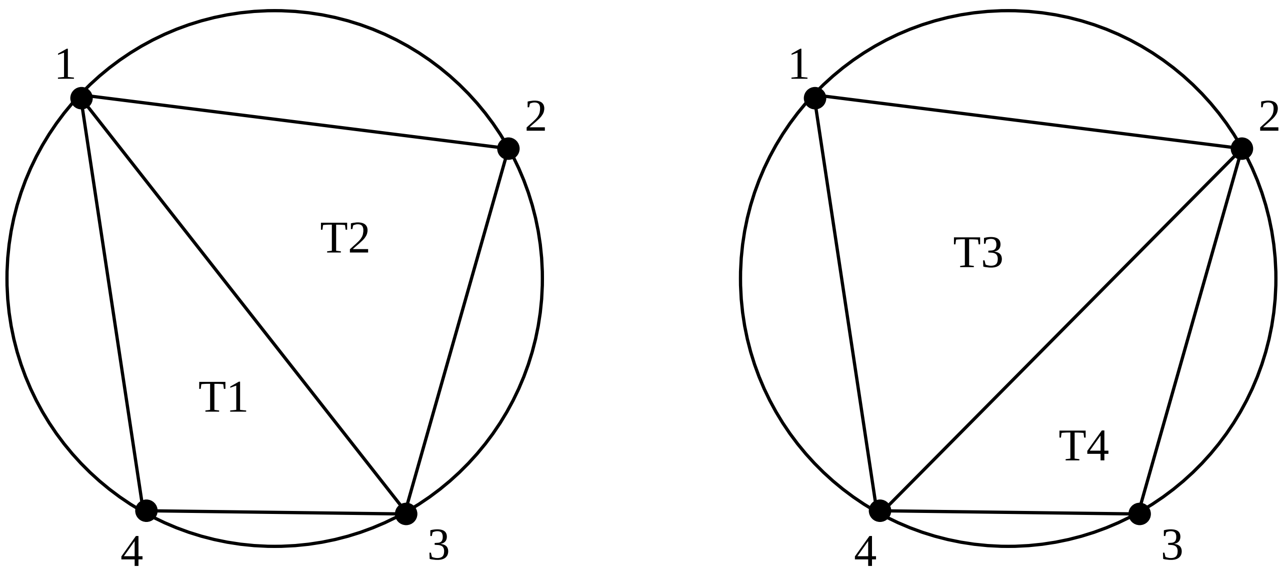
Σχήμα ΜΔ-6: Απλό 3-Δ με μία εξαεδρική κυψέλη.



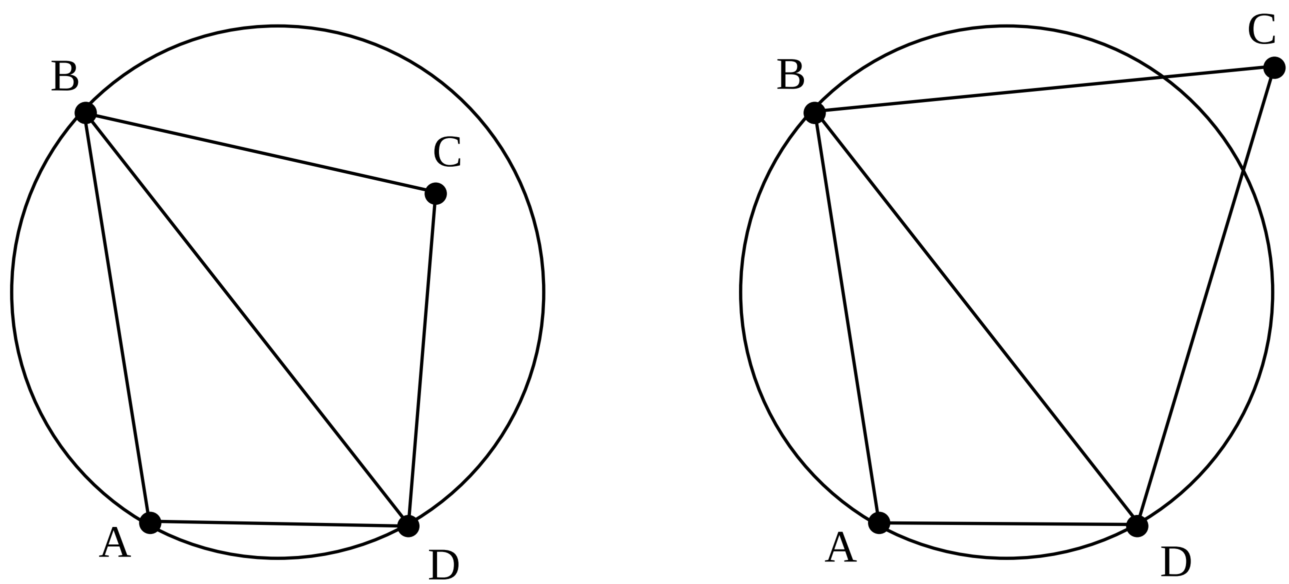
<u>Σχήμα ΜΔ-7:</u> (a) Μέσος δυαδικός γράφος, (b) βαρυκεντρικός δυαδικός γράφος και (c) περιοχή Dirichlet μη-δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων.



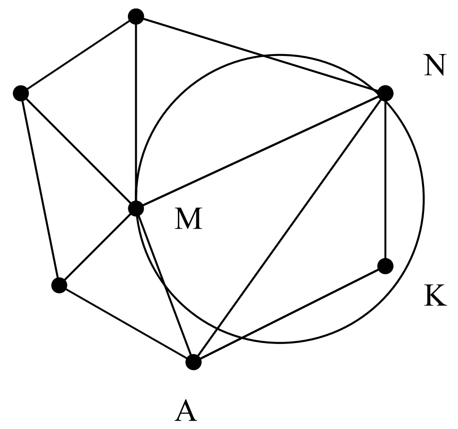
<u>Σχήμα ΜΔ-8:</u> Διάγραμμα Voronoi σε απλό χωρίο με 40 σημεία.



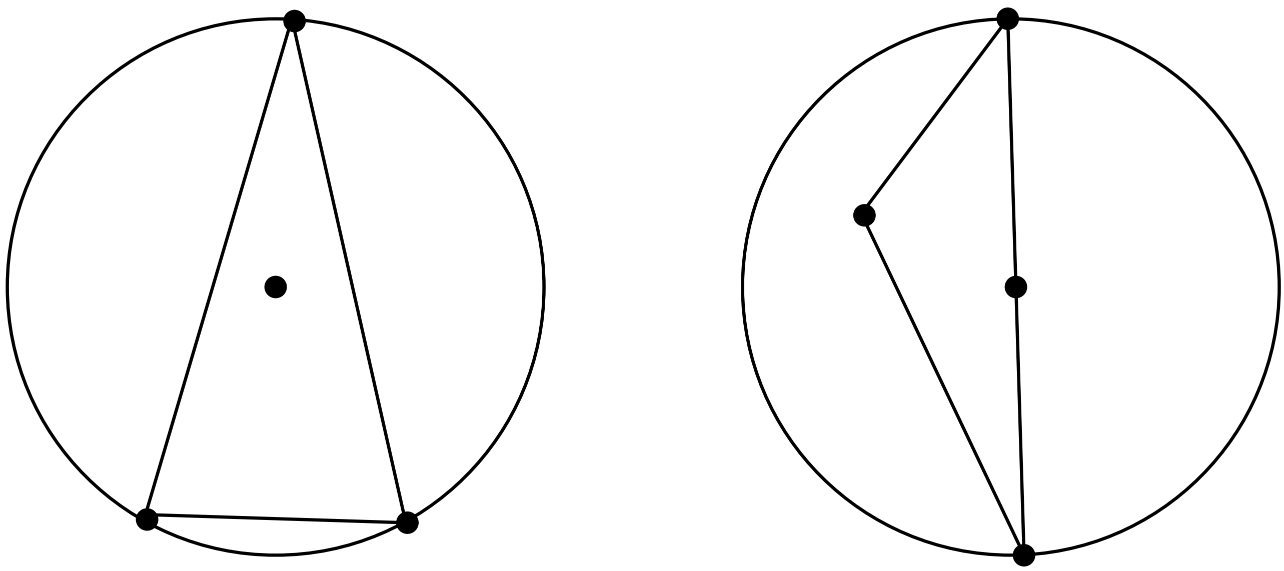
<u>Σχήμα ΜΔ-9:</u> Δύο διαφορετικές λύσεις για τη διάσπαση τετραπλεύρου με τις 4 κορυφές του επί περιφερείας κύκλου.



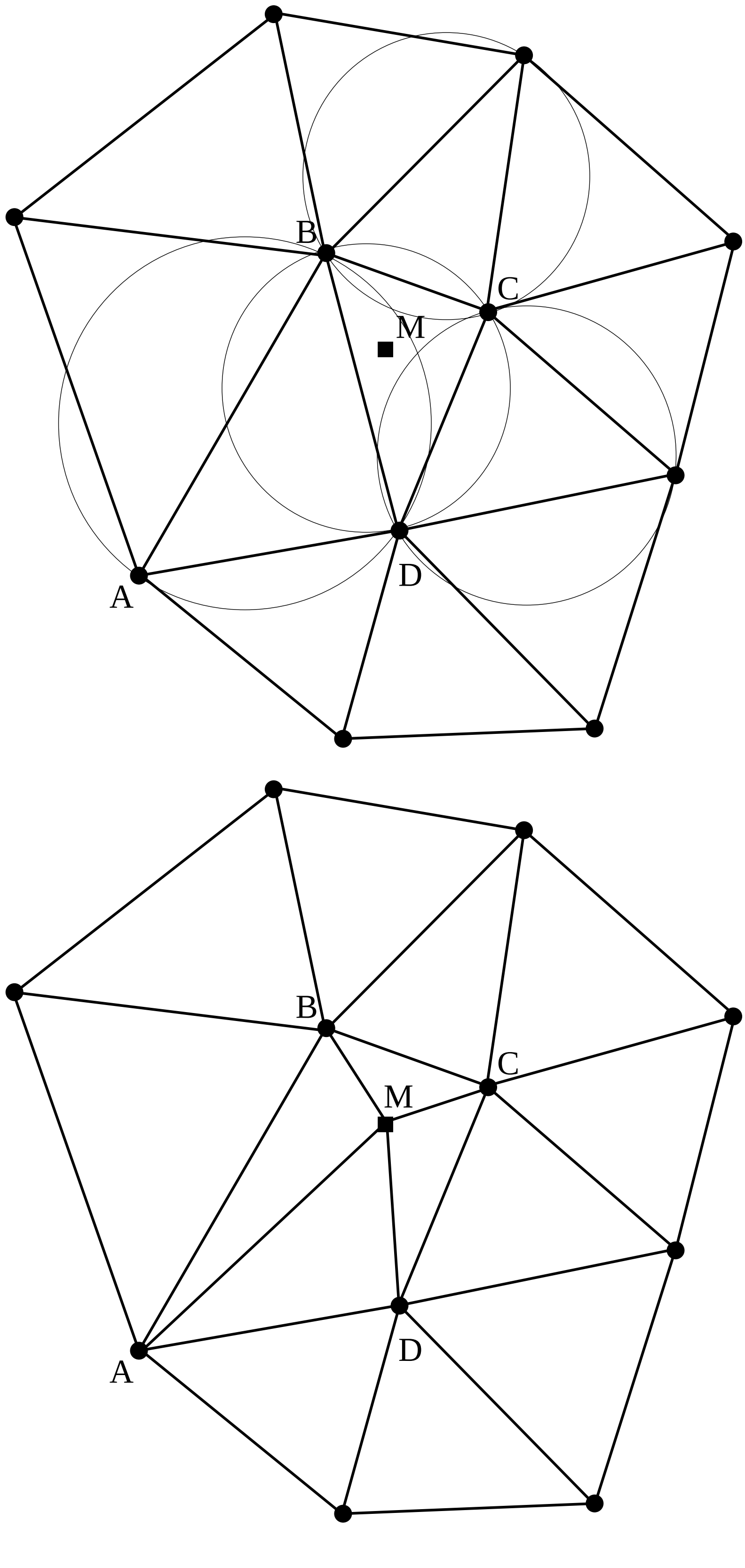
<u>Σχήμα ΜΔ-10:</u> Κριτήριο του περιγεγραμμένου κύκλου



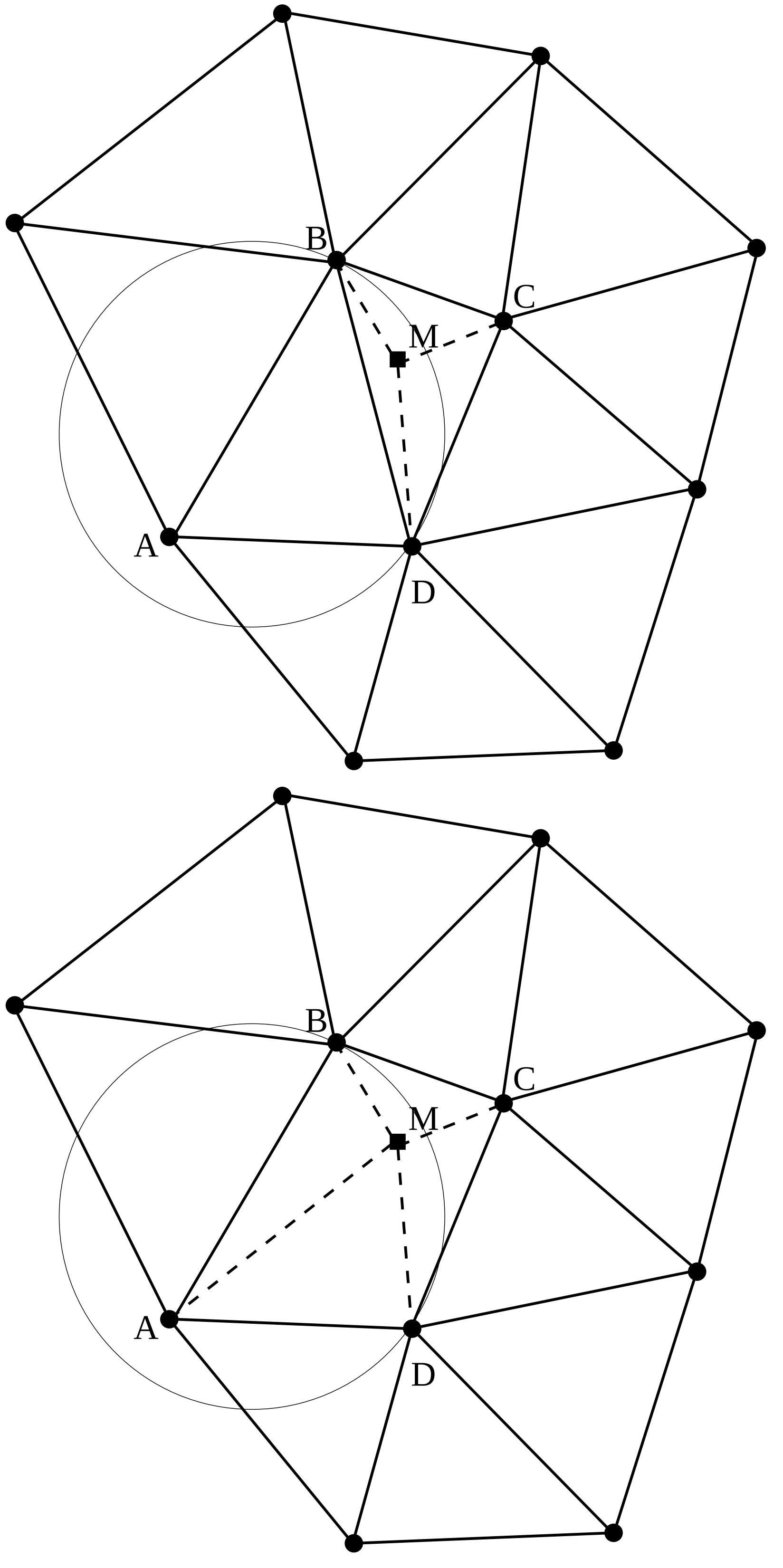
<u>Σχήμα ΜΔ-11:</u> Ιδιότητα του κύκλου ακμής (MN).



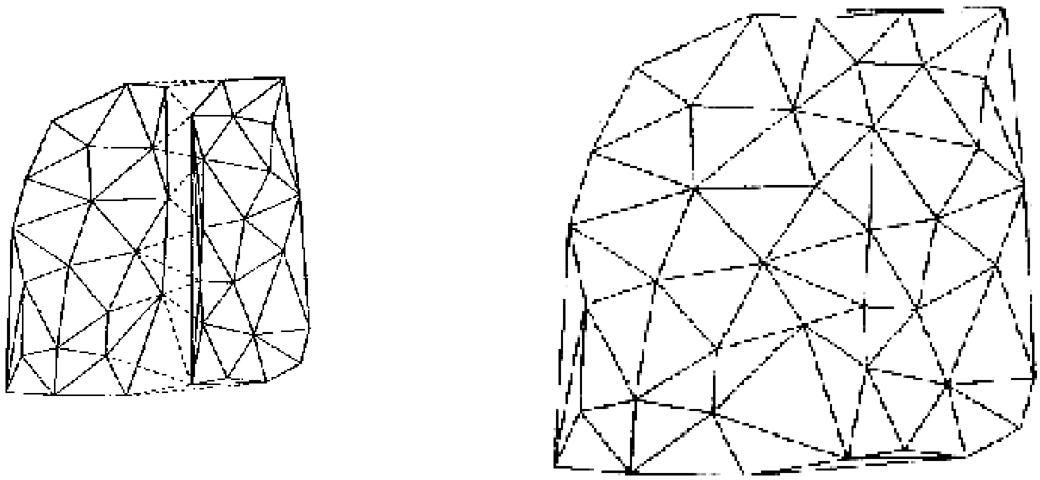
<u>Σχήμα ΜΔ-12:</u> Ιδιότητα του ελαχίστου κύκλου.



<u>Σχήμα ΜΔ-13:</u> Αλγόριθμος Βηματικής Εισαγωγής του Watson.



<u>Σχήμα ΜΔ-14:</u> Αλγόριθμος Βηματικής Εισαγωγής του Green-Sibson.



<u>Σχήμα ΜΔ-15:</u> Αλγόριθμος Διαίρει-και-κυρίευε, πριν και μετά τη μίξη.