

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΓΕΝΕΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ
Κ.Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ, Λέκτορας, Τομέας Ρευστών, Τμήμα Μηχανολόγων Ε.Μ.Π.

ΕΝΟΤΗΤΑ ΓΔ

ΓΕΝΕΣΗ ΔΟΜΗΜΕΝΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ ΜΕΣΩ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΩΝ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΓΔ.1 Γενικά – Άλλες Μέθοδοι

Γιά τη γένεση υπολογιστικών πλεγμάτων που είναι προσαρμοσμένα στα όρια ενός διδιάστατου ή τριδιάστατου χωρίου (οριόδετα δομημένα πλέγματα) χρησιμοποιούνται συνήθως αριθμητικές μέθοδοι, οι περισσότερες από τις οποίες μπορούν να καταταχθούν στις παρακάτω τρεις κατηγορίες:

- (α) Μέθοδοι που στηρίζονται στο Σύμμορφο Μετασχηματισμό
- (β) Αλγεβρικές Μέθοδοι
- (γ) Μέθοδοι που στηρίζονται στην επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων

(α) Η γένεση διδιάστατων οριόδετων πλεγμάτων με τη Μέθοδο του Σύμμορφου Μετασχηματισμού (Conformal Mapping) αποτελεί ενδεδειγμένη λύση για εκείνες τις περιπτώσεις που δεν επιβάλλεται αυστηρά η διατήρηση μιάς δεδομένης κατανομής οριακών σημείων, αλλά διατηρούμε τη δυνατότητα να τα τοποθετήσουμε σχετικά αυθαίρετα πάνω στο όριο.

Μαθηματικά η μέθοδος συνίσταται στην εύρεση εκείνης της μιγαδικής συνάρτησης που απεικονίζει σύμμορφα το όριο του πραγματικού χωρίου στο ευθύγραμμο όριο ενός ορθογωνικού πολυγώνου. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση της απεικόνισης που υπολογίστηκε, υπολογίζονται τα εσωτερικά σημεία του πραγματικού χωρίου που αντιστοιχούν στους κόμβους του ορθογωνικού πλέγματος.

Οι πολύπλοκες διδιάστατες γεωμετρίες συνηθίζεται να αντιμετωπίζονται με την αλληλουχία απλών σύμμορφων μετασχηματισμών. Επιλεκτική συγκέντρωση πλεγματικών γραμμών σε κάποιες περιοχές του πεδίου ροής επιτυγχάνεται με τη διαδοχή του σύμμορφου μετασχηματισμού από έναν

παραμορφωτικό (stretching) μηχανισμό που διατηρεί την ορθογωνιότητα του πλέγματος, όχι όμως το σύμμορφο της απεικόνισης.

(β) Η γένεση οριόδετων αριθμητικών πλεγμάτων με χρήση Αλγεβρικών Μεθόδων στηρίζεται ουσιαστικά στην παρεμβολή σημείων στο εσωτερικό του χωρίου με βάση μία δεδομένη κατανομή σημείων στην οριακή γραμμή. Πλεονέκτημα είναι η μεγάλη ταχύτητα με την οποία δημιουργείται το πλέγμα. Μειονέκτημα αποτελεί η έλλειψη εξομαλυντικών μηχανισμών για να εμποδίσουν τη μεταφορά στο εσωτερικό του χωρίου ενδεχόμενων ανωμαλιών της οριακής κατανομής σημείων. Συχνά, απλές αλγεβρικές μέθοδοι, όπως για παράδειγμα η γραμμική παρεμβολή, χρησιμοποιούνται για την κατασκευή του εναρκτήριου πλέγματος από το οποίο ξεκινά η λύση των μερικών διαφορικών εξισώσεων που θα υπολογίσουν την τελική μορφή του πλέγματος.

(γ) Η γένεση διδιάστατων ή τριδιάστατων οριόδετων πλεγμάτων με την επίλυση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων ελλειπτικού τύπου είναι σήμερα η περισσότερο δημοφιλής μέθοδος. Στηρίζεται στην κατασκευή ενός πλέγματος καμπυλόγραμμων συντεταγμένων από την επίλυση ελλειπτικών διαφορικών εξισώσεων οι οποίες συνοδεύονται συνήθως από οριακές, συνθήκες τύπου Dirichlet που καθορίζουν τη θέση των σημείων στο όριο. Τα κριτήρια για την εκλογή του τύπου της διαφορικής εξίσωσης που θα διέπει τη γένεση του πλέγματος καθορίζονται από τις απαιτήσεις που ο χρήστης ή προγραμματιστής θέτει τα πλέγματα που θα μπορεί να δημιουργήσει. Γενικά, τέτοιες απαιτήσεις αφορούν τη λειότητα των πλεγματικών γραμμών, την ορθογωνιότητα τους (όσο τουλάχιστον το επιτρέπει η μορφή του περιγράμματος), πυκνώσεις ή αραιώσεις κατά περιοχές των πλεγματικών γραμμών, κλπ. Συνήθως οι εξισώσεις είναι τύπου Laplace ή Poisson (δηλ. με μηδενικό ή μη-μηδενικό δεξί μέλος, που όπως θα γίνει αργότερα κατανοητό αποτελεί το μηχανισμό ελέγχου των ιδιοτήτων των πλεγματικών γραμμών που θα σχηματισθούν) στις οποίες αναγνωρίζουμε την ιδιότητα του να μη μεταφέρουν στο εσωτερικό του χωρίου ασυνέχειες ή ανωμαλίες του ορίου. Ένα πρόσθετο πλεονέκτημά τους είναι το ότι με την προσθήκη κατάλληλων όρων πηγής (το μη-μηδενικό δεξί μέλος που προαναφέραμε) μπορεί κανείς να αυξήσει τη συγκέντρωση των πλεγματικών γραμμών σε προεπιλεγμένες περιοχές ή να κανονίσει την ορθογωνιότητα των πλεγματικών γραμμών.

Τελειώνοντας την ενότητα αυτή θα προσπαθήσουμε πολύ σύντομα να δώσουμε στον αναγνώστη λίγα στοιχεία γύρω από τις δύο σπουδαιότερες απαιτήσεις που έχουμε κατά την κατασκευή πλεγμάτων:

(α) Η ορθογωνιότητα είναι γενικά στοιχείο αν όχι απαραίτητο, τουλάχιστο πολύ επιθυμητό. Θα αναφέρουμε τρεις λόγους που συνηγορούν σ'αυτό. Καταρχή οι μετασχηματισμένες εξισώσεις απλοποιούνται σημαντικά όταν, λόγω της ορθογωνιότητας, μηδενίσουμε τους μη διαγώνιους όρους του μετρικού τανυστή g^{ij} . Δεύτερο, όταν για την επίλυση χρησιμοποιούνται αριθμητικά σχήματα που στηρίζονται σε προσεγγιστικές παραγοντοποιήσεις, τότε τα ορθογώνια πλέγματα συνήθως επιταχύνουν τη σύγκλιση, αφού οι όροι που παραλήφθησαν κατά την παραγοντοποίηση είναι όντως

μηδενικοί. Τέλος, η χρήση περιοδικών ορίων (όπου η καθετότητα εξασφαλίζει και τη συνέχεια των πλεγματικών γραμμών περνώντας από ένα χωρίο στο γειτονικό του) ή η χρήση αλγεβρικών μοντέλων τύρβης σε προβλήματα ροής που επιλύονται στο πλέγμα που δημιουργείται (το μοντέλο Baldwin-Lomax, που είναι ένα από τα περισσότερο χρησιμοποιούμενα, στηρίζεται κυρίως στην κάθετη απόσταση από τα τοιχώματα) διευκολύνονται σημαντικά από την κατασκευή και χρήση ορθογώνιων πλεγμάτων.

(β) Η δυνατότητα συγκέντρωσης πλεγματικών γραμμών σε περιοχές υψηλών κλίσεων των προς επίλυση μεγεθών (λ.χ. σε προβλήματα ροής, κοντά στα κρουστικά κύματα ή κοντά στα τοιχώματα αν η ροή είναι συνεκτική) αποτελεί αναγκαίο στοιχείο κάθε καλού κώδικα γένεσης αριθμητικού πλέγματος.

ΓΔ.2 Γένεση Οριόδετων Δομημένων Πλεγμάτων - Μαθηματική Θεμελίωση

Στην ενότητα ΠΡ δείχθηκε ότι σε κάθε δομημένο πλέγμα που παραμετροποιείται με ένα σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων ξ^i , ($i=1,2$ ή και 3), δηλαδή (ξ,η) ή (ξ,η,ζ) , ισχύουν οι εξισώσεις

$$g^{ij} \frac{\partial^2 x_r}{\partial x^i \partial \xi^j} - g^{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x_r}{\partial \xi^k} = 0 \quad (\Gamma\Delta.1)$$

Οι εξισώσεις (ΓΔ.1) είναι δύο (για το διδιάστατο) μερικές διαφορικές εξισώσεις διατυπωμένες ως προς $x_1=x$, $x_2=y$ ή τρεις (για το τριδιάστατο πρόβλημα) διατυπωμένες ως προς $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$. Υπενθυμίζεται ότι οι εμπλεκόμενοι συντελεστές είναι τα σύμβολα Christoffel που ορίζονται μέσω των παραγώγων του μετρικού τανυστή ως

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^l} \right) \quad (\Gamma\Delta.2)$$

Ο συνδυασμός των (ΓΔ.1) και (ΓΔ.2) δίνει τη βασική ιδέα γύρω από τη γένεση δομημένων πλεγμάτων μέσω ελλειπτικών διαφορικών εξισώσεων (τύπου Laplace ή Poisson), δηλαδή εξισώσεων που θα «μοιάζουν» στη μορφή με τη (ΓΔ.1). Συνεχίζοντας παραπέρα τη σκέψη αυτή, παρατηρούμε ότι θα μπορούσε κάποιος να ελέγξει τις ιδιότητες του πλέγματος που θα παραχθεί (με πυκνώσεις ή αραιώσεις των πλεγματικών γραμμών σε διάφορες περιοχές, επιβάλλοντας την ορθογωνιότητα του πλέγματος στα όριά του ή/και στο εσωτερικό του, κλπ), αν μπορούσε να επέμβει και να προκαθορίσει τους εμπλεκόμενους συντελεστές Γ_{ij}^k , g^{ij} , g_{km} κλπ. σε κάθε κόμβο. Υπενθυμίζεται ότι όταν στο τέλος θα δημιουργηθεί το πλέγμα με προκαθορισμένες τις παραπάνω ποσότητες, προφανώς θα ικανοποιεί την ταυτότητα (ΓΔ.1). Ορισμένοι τρόποι για να προκαθορισθούν τέτοιες γεωμετρικές ποσότητες του πλέγματος θα αναλυθούν στη συνέχεια. Γενικά, διαφορετικοί τρόποι προκαθορισμού

αυτών των ποσοτήτων δημιουργούν τις διαφορετικές τεχνικές γένεσης οριόδετων δομημένων πλεγμάτων που συναντάμε στη βιβλιογραφία.

Θα συζητηθεί στη συνέχεια η γένεση οριόδετων δομημένων πλεγμάτων σε ένα διδιάστατο χωρίο του οποίου τα όρια είναι δεδομένα και κατά μήκος των ορίων αυτών έχουν διαταχθεί (με επιθυμητό τρόπο) σημεία-άκρα των πλεγματικών γραμμών. Αφού τα όρια του φυσικού χωρίου είναι δεδομένα, άρα οι πλεγματικές γραμμές $\xi^1=1$ και $\xi^1 = \xi_{\max}^1$ (βλ. Σχήμα ΓΔ.1 πρόκειται για το αριστερό και το δεξιό όριο του χωρίου, υπενθυμίζεται ότι $\xi^1=\xi$), καθώς και οι πλεγματικές γραμμές $\xi^2=1$ και $\xi^2 = \xi_{\max}^2$ (πρόκειται για το κάτω και το πάνω όριο του ίδιου χωρίου, όταν αντίστοιχα $\xi^2=\eta$) είναι γνωστές. Η διαδικασία γένεσης του δομημένου πλέγματος είναι ουσιαστικά η διαδικασία εύρεσης κάθε ενδιάμεσης πλεγματικής γραμμής $\xi^1=2, \dots, \xi_{\max}^1 - 1$ και $\xi^2=2, \dots, \xi_{\max}^2 - 1$. Τις πλεγματικές αυτές γραμμές μπορούμε να τις εκλάβουμε ως ισοϋψείς του ξ^1 και του ξ^2 , σχεδιασμένες μαζί στο φυσικό χωρίο. Πρακτικά, πρέπει η σχεδιάσή τους να γίνει με βήμα τη μονάδα, αφού έτσι ορίστηκε το αντίστοιχο πλέγμα στο μετασχηματισμένο χωρίο. Το πλέγμα στο μετασχηματισμένο ή υπολογιστικό χωρίο (φαίνεται επίσης στο Σχήμα ΓΔ.1, στα δεξιά) έχει τετραγωνικές κυνέλες πλευράς ίσης με τη μονάδα ($\Delta\xi^1=\Delta\xi^2=1$) και είναι εξ ολοκλήρου γνωστό. Εναλλακτικά, το πρόβλημα της γένεσης του πλέγματος ισοδυναμεί με την εύρεση των τιμών των καρτεσιανών συντεταγμένων (x_1, x_2) ή (x, y) σε κάθε εσωτερικό κόμβο του μετασχηματισμένου χωρίου.

Βλέποντας το πρόβλημα της γένεσης του πλέγματος με την παραπάνω σκοπιά και έχοντας αποφασίσει να το αντιμετωπίσουμε με ελλειπτικές διαφορικές εξισώσεις, έχουμε δύο δυνατότητες. Η πρώτη είναι να διατυπώσουμε τις διαφορικές εξισώσεις με μεταβλητές επίλυσης τις φυσικές συντεταγμένες x_i και να τις επιλύσουμε στο μετασχηματισμένο χωρίο, με το προφανές πλεονέκτημα της εύκολης χρήσης σχημάτων πεπερασμένων διαφορών σε ένα τέτοιο χωρίο. Η δεύτερη δυνατότητα είναι να διατυπώσουμε τις διαφορικές εξισώσεις με μεταβλητές επίλυσης τις μετασχηματισμένες συντεταγμένες ξ^i , εμφανίζοντας παραγώγους ως προς τις φυσικές συντεταγμένες x_i . Στη δεύτερη επιλογή, θα χρειαστούν μετασχηματισμοί (λ.χ. με τον κανόνα της αλυσίδας) ώστε να μετατραπούν οι διαφορικές εξισώσεις με ισοδύναμες εκφράσεις στο μετασχηματισμένο χωρίο. Ουσιαστικά, επομένως, η δεύτερη διατύπωση θα πάρει τελικά τη μορφή της πρώτης, έστω και αν πρόκειται να επιλυθεί διαφορετική εξίσωση. Πάντως, και στις δύο περιπτώσεις, η τελική αριθμητική επίλυση θα γίνει στο μετασχηματισμένο χωρίο, με αγνώστους τις φυσικές συντεταγμένες x_i και ιδιαίτερα εύκολη εφαρμογή σχημάτων πεπερασμένων διαφορών λόγω της μορφής του μετασχηματισμένου χωρίου.

Επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε ως βασικό διαφορικό τελεστή τον τελεστή Laplace, για να εκμεταλλευτούμε τις καλές εξομαλυντικές ιδιότητες που έχει αυτός ο τελεστής. Για παράδειγμα, ένας τέτοιος τελεστής είναι ικανός να εξαλείφει κάθε ανωμαλία που ενδεχόμενα εμφανίζουν τα σημεία που τοποθετήθηκαν στα όρια του χωρίου, μέσα σε “μικρή απόσταση” από αυτά. Τότε, με βάση τις δύο δυνατότητες που συζητήθηκαν προηγουμένα, θα διατυπώναμε ενδεικτικά ένα από τα δύο παρακάτω διαφορικά συστήματα

- για την πρώτη δυνατότητα (ο τελεστής Laplace γράφεται στο μετασχηματισμένο επίπεδο και εφαρμόζεται στις καρτεσιανές συντεταγμένες x και y):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0$$

- για τη δεύτερη δυνατότητα (ο τελεστής Laplace γράφεται στο φυσικό επίπεδο και εφαρμόζεται στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες ξ και η):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0$$

Και στο δεύτερο σύστημα, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένα, με κατάλληλες μετατροπές των παραγώγων θα «περάσουμε» σε ένα σύστημα μετασχηματισμένων εξισώσεων που πρέπει να έχει άγνωστους πάλι τα x και τα y . Η επιλογή ανάμεσα στις δύο δυνατότητες που αναφέρθηκαν καθορίζεται από τις ιδιότητες που επιθυμούμε να έχουν τα πλέγματα. Αν όντως ο τελεστής Laplace δίνει λειότητα στο πλέγμα, τότε η μέν πρώτη δυνατότητα θα δημιουργήσει λείες ισοϋψείς των x και y στο μετασχηματισμένο χωρίο (χωρίς κάποιο προφανές όφελος), ενώ η δεύτερη δυνατότητα θα δώσει λείες ισοϋψείς των ξ και η στο φυσικό χωρίο (απόλυτα επιθυμητό, αφού αυτές θα είναι και οι ζητούμενες πλεγματικές γραμμές!). Το παραπάνω σκεπτικό υποδεικνύει τη δεύτερη διατύπωση ως το επιθυμητό σύστημα διαφορικών εξισώσεων για τη γένεση οριόδετων πλεγμάτων. Προχωρώντας παραπέρα, αντί εξισώσεων Laplace (με μηδενικό δεξί μέλος), διατυπώνουμε εξισώσεις τύπου Poisson, ώστε η παρουσία των όρων του δεξιού μέλους να μας δώσει έναν επιπλέον μηχανισμό ελέγχου των ιδιοτήτων του πλέγματος. Στη συνέχεια, ο τελεστής Laplace $\nabla^2(\bullet)$ θα είναι πάντα ο γνωστός διαφορικός τελεστής στο φυσικό επίπεδο (x,y) .

Συνεπώς, διατυπώνουμε εξισώσεις της γενικής μορφής

$$\nabla^2 \xi^r = f^r(\xi^1, \xi^2) \qquad (\Gamma\Delta.3)$$

($r=2$ στο διδιάστατο ή $r=3$ στο τριδιάστατο πρόβλημα) ή αναλυτικότερα

$$\nabla^2 \xi^1 = f^1(\xi^1, \xi^2)$$

$$\nabla^2 \xi^2 = f^2(\xi^1, \xi^2)$$

που όταν επιλυθούν θα δώσουν τα πεδία του ξ^1 και του ξ^2 στο φυσικό χωρίο, ενώ θα ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες τύπου Dirichlet (γνωστές τιμές των ξ^1 και ξ^2 στους οριακούς κόμβους).

Όπως ήδη αναφέρθηκε, η προσθήκη του δεξιού μέλους είναι αυτή που θα μας επιτρέψει παρεμβάσεις στις ιδιότητες του πλέγματος. Η επιλογή των f^r είναι πρωτεύουσας σημασίας για τις ιδιότητες που τελικά θα έχει το πλέγμα που θα δημιουργηθεί. Τονίζεται ότι το σύστημα (ΓΔ.3) πρέπει να επιλυθεί στο μετασχηματισμένο χωρίο και για το λόγο αυτό απαιτείται σχετικός μετασχηματισμός του (λ.χ. με τον κανόνα της αλυσίδας) ώστε να εμφανιστούν οι παράγωγοι των καρτεσιανών συντεταγμένων (x_1, x_2) ως προς τις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες (ξ^1, ξ^2) . Από την Ενότητα ΠΡ γνωρίζουμε να εκφράζουμε τον τελεστή ∇^2 ή $\text{div}(\text{grad})$ ενός φυσικού μεγέθους (λ.χ. του ξ^1 ή του ξ^2) στο μετασχηματισμένο επίπεδο. Έτσι οι εξισώσεις (ΓΔ.3) ξαναγράφονται στη μορφή

$$\nabla^2 \xi^r = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(J g^{ij} \frac{\partial \xi^r}{\partial \xi^j} \right) = f^r$$

ή, εκτελώντας τις πράξεις, στη μορφή

$$f^r = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (J g^{ij} \delta_j^r) = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (J g^{ir}) \quad (\text{ΓΔ.4})$$

Παράλληλα, ισχύει για κάθε καρτεσιανή συντεταγμένη x_μ ($\mu=1,2$) η προφανής ταυτότητα

$$\nabla^2 x_\mu = 0 \quad (\text{ΓΔ.5})$$

που όταν αναπτυχθεί στο μετασχηματισμένο γράφεται ως

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(J g^{ij} \frac{\partial x_\mu}{\partial \xi^j} \right) = g^{ij} \frac{\partial x_\mu^2}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \frac{\partial x_\mu}{\partial \xi^j} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (J g^{ij}) = 0$$

Στην παραπάνω εξίσωση, ο τελευταίος όρος μπορεί να αντικατασταθεί με την εξίσωση (ΓΔ.4), (θέτοντας απλά ότι $i=j$), οπότε προκύπτει η σχέση

$$g^{ij} \frac{\partial x_\mu^2}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \frac{\partial x_\mu}{\partial \xi^j} f^j = 0 \quad (\text{ΓΔ.6})$$

Η σχέση (ΓΔ.6) είναι μία (ανά φυσική συντεταγμένη) μή-γραμμική μερική διαφορική εξίσωση (ας μη ξεχνάμε ότι οι συντελεστές g^{ij} είναι συναρτήσεις των αγνώστων x_μ), και μπορεί να λυθεί στο μετασχηματισμένο χωρίο με κατάλληλες οριακές συνθήκες. Αυτό παρουσιάζεται αναλυτικότερα σε επόμενο κεφάλαιο. Παρατηρούμε την ομοιότητα μεταξύ της (ΓΔ.6) που εμείς επιλέξαμε ως μηχανισμό γένεσης του πλέγματος και της ταυτότητας (ΓΔ.1). Η ομοιότητα αυτή εκφράζεται από την αντιστοίχιση

$$-g^{ij}\Gamma_{ij}^k \leftrightarrow f^k \quad (\Gamma\Delta.7)$$

και υπαγορεύει τον τρόπο επιλογής της μαθηματικής έκφρασης για τους όρους f^k . Έτσι, μια βασική ιδέα για την επιλογή τους θα ήταν να είναι τέτοιοι ώστε (θα δούμε πως υλοποιείται αυτό) να εκφράζουν τις ποσότητες του δεξιού μέλους της (ΓΔ.4).

Για λόγους πληρότητας, δίνεται η ανάπτυξη των βασικών εξισώσεων (ΓΔ.6) σε πλήρη μορφή. Είναι

$$g^{11} \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} + 2g^{12} \frac{\partial x^2}{\partial \xi \partial \eta} + g^{22} \frac{\partial x^2}{\partial \eta^2} + f^1 \frac{\partial x}{\partial \xi} + f^2 \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0 \quad (\Gamma\Delta.8)$$

$$g^{11} \frac{\partial y^2}{\partial \xi^2} + 2g^{12} \frac{\partial y^2}{\partial \xi \partial \eta} + g^{22} \frac{\partial y^2}{\partial \eta^2} + f^1 \frac{\partial y}{\partial \xi} + f^2 \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0$$

τονίζοντας, επίσης, ότι λόγω της εμπλοκής των μετρικών, το σύστημα είναι πεπλεγμένο. Με απλό μετασχηματισμό των μετρικών δεύτερης τάξης, το σύστημα αυτό γράφεται και στη μορφή

$$Ax_{\xi\xi} - 2Bx_{\xi\eta} + \Gamma x_{\eta\eta} = -J^2(f^1 x_{\xi} + f^2 x_{\eta}) \quad (\Gamma\Delta.9)$$

$$Ay_{\xi\xi} - 2By_{\xi\eta} + \Gamma y_{\eta\eta} = -J^2(f^1 y_{\xi} + f^2 y_{\eta})$$

με

$$A = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 = g_{22} = J^2 g^{11}$$

$$B = x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta} = g_{12} = -J^2 g^{12} \quad (\Gamma\Delta.10)$$

$$\Gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 = g_{11} = J^2 g^{22}$$

ΓΔ.3 Έλεγχος του Πλέγματος με Πληροφορία από τα Όρια

Έστω ότι η δημιουργία του δομημένου οριόδετου πλέγματος αφορά το χωρίο του Σχήματος ΓΔ.1 (δεξιά). Θεωρούνται δεδομένα τα οριακά σημεία του χωρίου, που βρίσκονται κατανεμημένα στις πλεγματικές γραμμές $\xi=1$ (αριστερά), $\xi=\xi_{\max}$ (δεξιά), $\eta=1$ (κάτω) και $\eta=\eta_{\max}$ (πάνω). Η δεδομένη κατανομή σημείων λ.χ. στο κάτω όριο (γραμμή $\eta=1$) ουσιαστικά σημαίνει ότι οι μετρικές x_{ξ} και y_{ξ}

είναι γνωστές. Πράγματι, αυτές μπορούν να υπολογισθούν σε κάθε κόμβο με κεντρικές διαφορές δεύτερης τάξης ως

$$x_{\xi}(i,1) = \frac{1}{2}(x(i+1,1) - x(i-1,1))$$

$$y_{\xi}(i,1) = \frac{1}{2}(y(i+1,1) - y(i-1,1))$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ότι $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$, ενώ οι παραπάνω τύποι δεν εφαρμόζονται στους ακραίους κόμβους $(1,1)$ και $(\xi_{\max},1)$. Εκεί, ανάντι σχήματα πεπερασμένων διαφορών, ίδιας τάξης ακρίβειας, πρέπει να επιλεγούν.

Για να υπολογιστούν οι υπόλοιπες μετρικές στους κόμβους της ίδιας πλεγματικής γραμμής (δηλαδή, οι x_{η} και y_{η}) απαιτείται πληροφορία-συσχέτιση με τους εσωτερικούς κόμβους του πλέγματος, που όμως είναι άγνωστοι. Επιβάλλοντας συγκεκριμένες συνθήκες στη γειτονιά αυτής της πλεγματικής γραμμής (για την απόσταση των κόμβων της επόμενης πλεγματικής γραμμής ή την ορθογωνιότητα των πλεγματικών γραμμών ξ =σταθερό στα σημεία που τέμνουν τη γραμμή $\eta=1$, ή ακόμα για κλίσεις των παραπάνω ποσοτήτων, κλπ.) μπορούν να εκτιμηθούν και οι υπόλοιπες μετρικές. Έτσι, για παράδειγμα, οι Thomas και Middlecoff πρότειναν την επιβολή των παρακάτω δύο συνθηκών :

- το να είναι ευθεία κάθε πλεγματική γραμμή ξ =σταθερό που τέμνει τη γραμμή $\eta=1$, στην «ευρύτερη» περιοχή κοντά στο όριο. Μαθηματικά αυτό διατυπώνεται στην επιβολή της συνθήκης

$$\begin{pmatrix} x_{\eta} \\ y_{\eta} \end{pmatrix}_{\eta} = 0 \quad (\Gamma\Delta.11)$$

κατά μήκος της γραμμής $\eta=1$, και

- το να είναι κάθε γραμμή ξ =σταθερό που τέμνει το όριο $\eta=1$ κάθετη προς την οριακή γραμμή. Μαθηματικά αυτό διατυπώνεται ως

$$g_{12} = 0 \Rightarrow x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} = 0 \quad (\Gamma\Delta.12)$$

Για τη χρήση των συνθηκών (ΓΔ.11) και (ΓΔ.12) προτάθηκε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να γραφούν οι όροι πηγής που αναζητάμε στη μορφή

$$f^1 = \phi(\xi, \eta)(\xi_x^2 + \xi_y^2) = \phi(\xi, \eta)g^{11}$$

(ΓΔ.13)

$$f^2 = \psi(\xi, \eta)(\eta_x^2 + \eta_y^2) = \psi(\xi, \eta)g^{22}$$

οπότε οι “βασικές” εξισώσεις (ΓΔ.9) διατυπώνονται στη μορφή

$$A(x_{\xi\xi} + \phi x_\xi) - 2Bx_{\xi\eta} + \Gamma(x_{\eta\eta} + \psi x_\eta) = 0$$

(ΓΔ.14)

$$A(y_{\xi\xi} + \phi y_\xi) - 2By_{\xi\eta} + \Gamma(y_{\eta\eta} + \psi y_\eta) = 0$$

Για το κάτω όριο, $\eta=1$, απαλείφεται η ποσότητα ψ μεταξύ των εξισώσεων (ΓΔ.14). Εκτελώντας τις πράξεις προκύπτει ότι

$$A(y_\eta(x_{\xi\xi} + \phi x_\xi) - x_\eta(y_{\xi\xi} + \phi y_\xi)) = y_\eta^2 \left(2B \left(\frac{x_\eta}{y_\eta} \right)_\xi - \Gamma \left(\frac{x_\eta}{y_\eta} \right)_\eta \right)$$

Γράφοντας την τελευταία εξίσωση στην οριακή γραμμή $\eta=1$, το δεύτερο μέλος είναι μηδέν λόγω της (ΓΔ.11) για το δεύτερο όρο και της (ΓΔ.12) για τον πρώτο όρο ($B=0$). Επιλύοντας, μετά τις απλοποιήσεις, ως προς τη μεταβλητή ϕ έχουμε

$$\phi = \frac{x_\eta y_{\xi\xi} - y_\eta x_{\xi\xi}}{J} = \frac{(x_\eta / y_\eta) y_{\xi\xi} - x_{\xi\xi}}{x_\xi - y_\xi (x_\eta / y_\eta)}$$

Η συνθήκη όμως (ΓΔ.12) δίνει ότι

$$\frac{x_\eta}{y_\eta} = -\frac{y_\xi}{x_\xi}$$

οπότε ο συνδυασμός των δύο τελευταίων εξισώσεων δίνει ότι

$$\phi = -\frac{y_\xi y_{\xi\xi} + x_\xi x_{\xi\xi}}{x_\xi^2 + y_\xi^2} \tag{ΓΔ.15}$$

Η σχέση (ΓΔ.15), κατά μήκος της γραμμής $\eta=1$ (το ίδιο όμως ισχύει και κατά μήκος της γραμμής $\eta=\eta_{\max}$) επιτρέπει τον υπολογισμό του $\phi=\phi(\xi)$, αφού περιέχει μόνο γνωστά διαφορικά ($x_\xi, x_{\xi\xi}, y_\xi, y_{\xi\xi}$) κατά μήκος της διακριτοποιημένης αυτής οριακής γραμμής.

Είναι εύκολο να διατυπώσουμε αντίστοιχες συνθήκες των (ΓΔ.11) και (ΓΔ.12) κατά μήκος των άλλων δύο οριακών γραμμών του χωρίου, δηλ. των $\xi=1$ και $\xi=\xi_{\max}$ και να αποδείξουμε, απαλείφοντας τώρα το φ , ότι σ'αυτές μπορεί να υπολογιστεί το ψ από τη σχέση

$$\psi = -\frac{x_{\eta}x_{\eta\eta} + y_{\eta}y_{\eta\eta}}{x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2} \quad (\Gamma\Delta.16)$$

Η σχέση (ΓΔ.16), κατά μήκος των γραμμών $\xi=1$ και $\xi=\xi_{\max}$, επιτρέπει πράγματι τον υπολογισμό των $\psi=\psi(\eta)$, αφού περιέχει μόνο γνωστά διαφορικά $(x_{\eta}, x_{\eta\eta}, y_{\eta}, y_{\eta\eta})$ κατά μήκος των γραμμών αυτών.

Με γνωστή την κατανομή $\phi(\xi)$ στα όρια $\eta=1$ και $\eta=\eta_{\max}$ και την κατανομή $\psi(\eta)$ στα όρια $\xi=1$ και $\xi=\xi_{\max}$ επιβάλλουμε τη χωρική τους κατανομή με κάποιο νόμο (λ.χ. γραμμική κατανομή) στο εσωτερικό του χωρίου. Μια τέτοια κατανομή θα μπορούσε λ.χ. να είναι της μορφής

$$\phi(\xi, \eta) = \phi(\xi, 1) \left(1 - \frac{\eta - 1}{\eta_{\max} - 1} \right) + \phi(\xi, \eta_{\max}) \frac{\eta - 1}{\eta_{\max} - 1} \quad (\Gamma\Delta.17)$$

$$\psi(\xi, \eta) = \psi(1, \eta) \left(1 - \frac{\xi - 1}{\xi_{\max} - 1} \right) + \psi(\xi_{\max}, \eta) \frac{\xi - 1}{\xi_{\max} - 1} \quad (\Gamma\Delta.18)$$

Με γνωστά τα ϕ και ψ σε κάθε κόμβο του προς γένεση πεδίου, οι όροι πηγής f^1 και f^2 υπολογίζονται τοπικά μέσω των σχέσεων (ΓΔ.13).

Ένα δεύτερο παράδειγμα μεθόδου που αξίζει να αναφερθεί είναι αυτή του Sorenson. Στη μέθοδο αυτή ο έλεγχος των ιδιοτήτων του πλέγματος γίνεται κατά μήκος δύο μόνο από τις τέσσερις πλεγματικές γραμμές του ορίου. Εστω λ.χ. ότι ο έλεγχος είναι επιθυμητό να γίνει κατά μήκος του κάτω ($\eta=1$) και του πάνω ($\eta=\eta_{\max}$) ορίου. Σε κάθε κόμβο αυτών των οριακών γραμμών επιβάλλουμε δύο συνθήκες:

- επιθυμητή απόσταση των κόμβων της επόμενης πλεγματικής γραμμής. Αν η απόσταση αυτή συμβολιστεί με s τότε θα ισχύει ότι

$$s = \sqrt{x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2} = \text{γνωστό} \quad (\Gamma\Delta.19)$$

- ορθογωνιότητα των πλεγματικών γραμμών στη περιοχή αυτή, η οποία έχει ήδη διατυπωθεί στη μορφή της σχέσης (ΓΔ.12) και πρακτικά ισοδυναμεί με την απαλειφή του συντελεστή B από τις σχέσεις (ΓΔ.9).

Το σύστημα των δύο εξισώσεων που προκύπτει γράφεται

$$x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 = s^2$$

$$x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} = 0$$

και μπορεί να επιλυθεί ως προς τις άγνωστες παραγώγους x_{η} και y_{η} , οπότε προκύπτουν οι εκφράσεις

$$x_{\eta} = -\frac{sy_{\xi}}{\sqrt{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2}} \quad (\Gamma\Delta.20)$$

$$y_{\eta} = -\frac{x_{\xi}}{y_{\xi}}x_{\eta}$$

Επισημαίνεται ότι η επιλογή του προσήμου στη λύση του x_{η} έγινε έτσι ώστε να εξασφαλίζεται θετική τιμή της Ιακωβιανής ορίζουσας J .

Σε επόμενο βήμα διατυπώνονται οι εξισώσεις (ΓΔ.9), με $B=0$, σε κάθε σημείο των οριακών πλεγματικών γραμμών $\eta=1$ και $\eta=\eta_{\max}$. Πέραν των όρων πηγής f^1 και f^2 , οι μοναδικοί άλλοι άγνωστοι στο σύστημα των δύο εξισώσεων αυτών είναι οι παράγωγοι $x_{\eta\eta}$ και $y_{\eta\eta}$. Επισημαίνεται ότι οι μεικτές παράγωγοι $x_{\xi\eta}$ και $y_{\xi\eta}$ είναι γνωστές αφού πρακτικά ισούνται με τις κατά όριο (κατά ξ) παραγώγους των γνωστών ποσοτήτων x_{η} και y_{η} . Υποθέτοντας ότι και οι ποσότητες $x_{\eta\eta}$ και $y_{\eta\eta}$ είναι γνωστές (ακολουθούν σχετικοί σχολιασμοί) επιλύεται το σύστημα

$$\begin{bmatrix} J^2x_{\xi} & J^2x_{\eta} \\ J^2y_{\xi} & J^2y_{\eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} Ax_{\xi\xi} + \Gamma x_{\eta\eta} \\ Ay_{\xi\xi} + \Gamma y_{\eta\eta} \end{bmatrix}$$

και προκύπτουν οι τιμές των f^1 και f^2 σε κάθε σημείο των δύο οριακών γραμμών ως

$$f^1 = \frac{1}{J^3} \left\{ -y_{\eta} (Ax_{\xi\xi} + \Gamma x_{\eta\eta}) + x_{\eta} (Ay_{\xi\xi} + \Gamma y_{\eta\eta}) \right\} \quad (\Delta\Gamma.21)$$

$$f^2 = \frac{1}{J^3} \left\{ -x_{\xi} (Ay_{\xi\xi} + \Gamma y_{\eta\eta}) + y_{\xi} (Ax_{\xi\xi} + \Gamma x_{\eta\eta}) \right\}$$

Ο υπολογισμός των $f^1(\xi,\eta)$ και $f^2(\xi,\eta)$ σε κάθε σημείο (ξ,η) του πλέγματος προκύπτει από εκθετικές διανομές κατά μήκος πλεγματικών γραμμών ξ =σταθερό. Έτσι

$$f^1(\xi, \eta) = f^1(\xi, 1) \exp(-a\eta) + f^1(\xi, \eta_{\max}) \exp(-c(\eta_{\max} - \eta))$$

(ΓΔ.22)

$$f^2(\xi, \eta) = f^2(\xi, 1) \exp(-b\eta) + f^2(\xi, \eta_{\max}) \exp(-d(\eta_{\max} - \eta))$$

όπου η επιλογή τιμών για a,b,c,d καθορίζει τη «γρήγορη» (μεγαλύτερες τιμές, λ.χ. 0,7) ή «αργή» (μικρές τιμές 0,2) απόσβεση των οριακών τιμών των f^1 και f^2 καθώς κινούμαστε προς το εσωτερικό του πεδίου. Αποσβένοντας τις (υψηλές στα όρια) τιμές των f^1 και f^2 καθώς απομακρυνόμαστε από τα όρια, ουσιαστικά οι διαφορικές εξισώσεις (ΓΔ.9) γίνονται εξισώσεις τύπου Laplace (μηδενικό δεξί μέλος, χωρίς μηχανισμούς ελέγχου) στο εσωτερικό του πεδίου. Γίνεται συνεπώς αντιληπτό ότι η μέθοδος που πρότεινε ο Sorenson ουσιαστικά εξασφαλίζει έλεγχο στην κατανομή του πλέγματος μόνο κοντά σε δύο από τις τέσσερις οριακές γραμμές, αφήνοντας «χωρίς έλεγχο» το εσωτερικό του χωρίου και τις άλλες δύο οριακές γραμμές.

Από πρακτικής σκοπιάς απομένει να συζητηθεί η παραδοχή που έγινε ότι τα $x_{\eta\eta}$ και $y_{\eta\eta}$ θεωρούνται γνωστά στα όρια $\eta=1$ και $\eta=\eta_{\max}$. Αφού η αριθμητική επίλυση του συστήματος που προκύπτει ως προς τις φυσικές συντεταγμένες x_i , $i=1,2$ των κόμβων γίνεται επαναληπτικά, υιοθετείται η επαναληπτική διόρθωση των $x_{\eta\eta}$, $y_{\eta\eta}$. Δηλαδή, σε κάθε επανάληψη, τα $x_{\eta\eta}$ και $y_{\eta\eta}$ υπολογίζονται με σχήματα πεπερασμένων διαφορών εφαρμοσμένα στο τρέχον πλέγμα. Συνήθως, προβλήματα σύγκλισης, που μπορεί να οφείλονται σε αφύσικες τιμές των $x_{\eta\eta}$ και $y_{\eta\eta}$ υπολογισμένες από ένα «κακό» μεταβατικό πλέγμα, αντιμετωπίζονται υποχαλαρώνοντας (πολλές φορές μάλιστα με πολύ χαμηλή τιμή του συντελεστή χαλάρωσης) τις τιμές των $x_{\eta\eta}$ και $y_{\eta\eta}$ που υπολογίζονται, κυρίως κατά τις πρώτες επαναλήψεις.

Στη μέθοδο του Sorenson μπορούν να προταθούν πολλές τροποποιήσεις, εμπλέκοντας εναλλακτικά δεδομένα για το προς γένεση πλέγμα. Έτσι, λ.χ. θα μπορούσαμε να προτείνουμε να υπολογίζονται τα $x_{\eta\eta}$ και $y_{\eta\eta}$ όχι επαναληπτικά, αλλά με προκαθορισμένες τιμές. Οι τιμές αυτές (που ουσιαστικά είναι οριακές συνθήκες για τα $x_{\eta\eta}$ και $y_{\eta\eta}$) πηγάζουν από τρεις υποθέσεις-παραδοχές:

- τη γνωστή κατανομή της απόστασης της επόμενης πλεγματικής γραμμής $\eta=2$ ή $\eta=\eta_{\max}-1$ από τις οριακές $\eta=1$ ή $\eta=\eta_{\max}$, αντίστοιχα. Η κατανομή αυτή θα συμβολίζεται με s (το μπορεί να είναι σταθερό ή μεταβλητό για διαφορετικές τιμές του ξ) και θα ισχύει η σχέση (ΓΔ.19) που επαναλαμβάνεται εδώ για λόγους πληρότητας

$$s^2 = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2$$

(ΓΔ.19)

- τη γνωστή κατανομή της κατά η μεταβολής της απόστασης s διαδοχικών πλεγματικών γραμμών κοντά στο όριο. Παραγωγίζοντας την (ΓΔ.19) προκύπτει ότι

$$ss_{\eta} = x_{\eta}x_{\eta\eta} + y_{\eta}y_{\eta\eta}$$

(ΓΔ.23)

όπου s_η είναι η κατά η παράγωγος του s .

- την παραδοχή ότι η ορθογωνιότητα των πλεγματικών γραμμών διατηρείται και στη γειτονιά του ορίου, δηλαδή

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(g_{12}) = \frac{\partial}{\partial \eta}(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) = 0$$

η οποία γράφεται και ως

$$x_\xi x_{\eta\eta} + y_\xi y_{\eta\eta} = -x_\eta (x_\eta)_\xi - y_\eta (y_\eta)_\xi \quad (\Gamma\Delta.24)$$

Υπενθυμίζεται ότι η κλασσική μέθοδος Sorenson έχει γνωστά τα x_η και y_η και ένα θέμα μιας απλής παραγωγίσισης κατά s για να υπολογιστούν και οι μεικτές παράγωγοι τους $(x_\eta)_\xi$ και $(y_\eta)_\xi$.

Το σύστημα των εξισώσεων (ΓΔ.23) και (ΓΔ.24) μπορεί εύκολα να επιλυθεί ως προς τις δύο άγνωστες ποσότητες $x_{\eta\eta}$ και $y_{\eta\eta}$ και έτσι να υπολογιστούν αυτές κατά μήκος των γραμμών $\eta=1$ και $\eta=\eta_{\max}$. Θα είναι

$$x_{\eta\eta} = \frac{1}{J}(K_2 y_\eta - K_1 y_\xi) \quad (\Gamma\Delta.25)$$

$$y_{\eta\eta} = \frac{1}{J}(K_1 x_\xi - K_{21} x_\eta)$$

όπου

$$K_1 = s s_\eta \quad \text{και} \quad K_2 = -x_\eta (x_\eta)_\xi - y_\eta (y_\eta)_\xi$$

ΓΔ.4 Έλεγχος του Πλέγματος με Πληροφορία από το Εσωτερικό

Μέχρι τώρα, οι όροι πηγής f^1 και f^2 υπολογίζονταν κατά μήκος όλων ή μερικών πλεγματικών γραμμών και στη συνέχεια διανέμονταν στο εσωτερικό του πεδίου με κάποιο σχήμα παρεμβολής. Νόμοι παρεμβολής που χαρακτηρίζονταν από εκθετική απόσβεση των όρων μακρυνά από τα όρια εξασφάλιζαν ένα λείο πλέγμα «στην καρδιά» του πεδίου.

Θα σχολιάσουμε, τώρα, έναν τρόπο που θα επέτρεπε να υπολογισθούν οι όροι f^1 και f^2 επιβάλλοντας συγκεκριμένες απαιτήσεις στο εσωτερικό του πλέγματος. Η μέθοδος αυτή έχει αναπτυχθεί στο

Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών από το γράφοντα και έχει βρει εφαρμογή σε πολλές δύσκολες περιπτώσεις γένεσης πλέγματος.

Ως αφετηρία έχει τις εξισώσεις (ΓΔ.4) Με την υπόθεση ότι το πλέγμα είναι ορθογώνιο, αυτές γράφονται ως

$$f^1 = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} (Jg^{11}) = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{g_{22}}{J} \right) \quad (\Gamma\Delta.26)$$

$$f^2 = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} (Jg^{22}) = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{g_{11}}{J} \right)$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα ενός ορθογώνιου πλέγματος παίρνει την απλή μορφή

$$J = \sqrt{g_{11}g_{22}} \quad (\Gamma\Delta.27)$$

οπότε ο συνδυασμός των (ΓΔ.26) και (ΓΔ.27) δίνει

$$f^1 = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \right) \quad (\Gamma\Delta.28)$$

$$f^2 = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \right)$$

Οι σχέσεις (ΓΔ.28) περιέχουν στο δεξί μέλο την ποσότητα $\sqrt{g_{22}/g_{11}}$ που αποτελεί το λόγο επιμήκους (aspect ratio, ύψος προς βάση) των πλεγματικών κυψελών. Ο χρήστης επομένως μπορεί να καθορίσει τη χωρική κατανομή των λόγων επιμήκους $\sqrt{g_{22}/g_{11}}$ σε όλο το μετασχηματισμένο πεδίο και εύκολα να υπολογίσει τα δεξιά μέλη των εξισώσεων (ΓΔ.28) με απλές διαφορίσεις κατά ξ και η . Με τον τρόπο αυτό καθορίζει τους όρους πηγής f^1 και f^2 και προχωρεί στην αριθμητική επίλυση του συστήματος (ΓΔ.9) με προκαθορισμένους (σταθερούς σε κάθε σημείο) όρους f^1 και f^2 .

ΓΔ.5 Γένεση Δομημένων Πλεγμάτων με Διαρμονικές Εξισώσεις

Σύμφωνα με τα όσα έχουν αναφερθεί μέχρι τώρα, η χρήση εξισώσεων τύπου Laplace ($f^1=f^2=0$) δημιουργεί λεία πλέγματα σε οποιοδήποτε χωρίο χωρίς όμως να εξασφαλίζεται οποιοσδήποτε έλεγχος πυκνότητας ή ορθογωνιότητας των πλεγματικών γραμμών. Είναι προφανές ότι η εξίσωση Laplace για τις φυσικές συντεταγμένες επιδέχεται μια μόνο οριακή συνθήκη ανά συντεταγμένη (x ή

γ) και οριακό κόμβο. Για το λόγο αυτό και στην προσπάθεια να επιβάλλουμε περισσότερες της μιας οριακές συνθήκες σε κάθε κόμβο, υιοθετήσαμε τις εξισώσεις τύπου Poisson με μή-μηδενικούς όρους πηγής f^1 και f^2 .

Ένας άλλος τρόπος για να αυξηθεί ο αριθμός των οριακών συνθηκών για τις φυσικές συντεταγμένες είναι η διατύπωση και επίλυση διαρμονικών εξισώσεων αντί εξισώσεων τύπου Poisson. Γενικά, μια διαρμονική εξίσωση γραμμένη για την τυχαία μεταβλητή ϕ , διατυπώνεται ως

$$\nabla^4 \phi = \nabla^2 (\nabla^2 \phi) = 0 \quad (\Gamma\Delta.29)$$

και επιδέχεται το παρακάτω ζεύγος οριακών συνθηκών σε κάθε κόμβο

$$\phi = \phi^* \quad \text{και} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (\Gamma\Delta.30)$$

Οι οριακές αυτές συνθήκες, αν εφαρμόζονταν για τις φυσικές συντεταγμένες x και y στη θέση της μεταβλητής ϕ , θα επέτρεπαν τον έλεγχο της θέσης των οριακών κόμβων (συνθήκη Dirichlet) αλλά και της κλίσης των πλεγματικών γραμμών που συναντούν το όριο (συνθήκη Neumann). Εδώ n είναι η κάθετη κατεύθυνση στο όριο.

Η διαρμονική εξίσωση (ΓΔ.29) μπορεί να διασπασθεί σε δύο εξισώσεις που πρέπει κατά σειρά να ικανοποιηθούν, δηλαδή

$$\nabla^2 p = 0 \quad (\Gamma\Delta.31)$$

$$\nabla^2 \phi = p$$

με οριακές συνθήκες για τα p και ϕ τις παρακάτω

$$\phi = \phi^* \quad \text{και} \quad p = \nabla^2 \phi - c \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (\Gamma\Delta.32)$$

όπου c μια τυχαία μη-μηδενική σταθερά και ϕ^* η δεδομένη τιμή του ϕ σε κάθε σημείο του ορίου.

Η χρήση της διαρμονικής εξίσωσης για το πρόβλημα της γένεσης οριόδετου δομημένου πλέγματος σημαίνει τη διατύπωση των εξισώσεων

$$\nabla^2 (\nabla^2 \xi) = 0 \quad (\Gamma\Delta.33)$$

$$\nabla^2(\nabla^2\eta) = 0$$

που θα επιλυθούν με μετασχηματισμό στο επίπεδο (ξ, η) σύμφωνα με τα βήματα που υπαγορεύει η σχέση (ΓΔ.32), δηλαδή

$$\nabla^2 p = 0 \quad (\text{ΓΔ.34}\alpha)$$

$$\nabla^2 \xi = p \quad (\text{ΓΔ.34}\beta)$$

$$\nabla^2 q = 0 \quad (\text{ΓΔ.34}\gamma)$$

$$\nabla^2 \eta = q \quad (\text{ΓΔ.34}\delta)$$

Ο μετασχηματισμός στο επίπεδο (ξ, η) δημιουργεί τις παρακάτω εξισώσεις

$$Ap_{\xi\xi} - 2Bp_{\xi\eta} + \Gamma p_{\eta\eta} = 0 \quad (\text{ΓΔ.35}\alpha)$$

$$Aq_{\xi\xi} - 2Bq_{\xi\eta} + \Gamma q_{\eta\eta} = 0 \quad (\text{ΓΔ.35}\beta)$$

$$Ax_{\xi\xi} - 2Bx_{\xi\eta} + \Gamma x_{\eta\eta} = -J^2(p_{x_\xi} + qx_\eta) \quad (\text{ΓΔ.35}\gamma)$$

$$Ay_{\xi\xi} - 2By_{\xi\eta} + \Gamma y_{\eta\eta} = -J^2(py_\xi + qy_\eta) \quad (\text{ΓΔ.35}\delta)$$

όπου οι ποσότητες A, B, Γ έχουν ορισθεί στη σχέση (ΓΔ.10). Οι οριακές συνθήκες για την επίλυση των (ΓΔ.35γ) και (ΓΔ.35δ) είναι τύπου Dirichlet, που απορρέουν από τη γνωστή κατανομή κόμβων (x =γνωστό, y =γνωστό) στο όριο. Οι οριακές συνθήκες για τις ποσότητες p και q στις εξισώσεις (ΓΔ.35α) και (ΓΔ.35β) είναι περισσότερο σύνθετες. Για να προκύψουν, θεωρούμε ότι εφαρμόζονται οι εξισώσεις (ΓΔ.35γ) και (ΓΔ.35δ) σε κάθε σημείο του ορίου. Τοπικά, αυτές αποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων που λύνεται εύκολα ως προς τις τοπικές τιμές του p και q , δίνοντας ότι

$$p = \frac{1}{J}(y_\eta L(x) - x_\eta L(y)) \quad (\text{ΓΔ.36})$$

$$q = \frac{1}{J}(x_\xi L(y) - y_\xi L(x))$$

όπου ο τελεστής $L(\bullet)$ είναι ο

$$L(\bullet) = -\frac{1}{J^2} \left(A(\bullet)_{\xi\xi} - 2B(\bullet)_{\xi\eta} + \Gamma(\bullet)_{\eta\eta} \right) = 0 \quad (\Gamma\Delta.37)$$

(συγκρίνετε τις σχέσεις (ΓΔ.36) με τις σχέσεις (ΓΔ.21) που χρησιμοποιήθηκαν στην τεχνική του Sorenson). Συγχρόνως όμως στο όριο ισχύουν και οι σχέσεις (ΓΔ.34) και (ΓΔ.34δ). Επομένως, οι οριακές συνθήκες για τα p και q σύμφωνα με τη (ΓΔ.32) θα γράφονται είτε στη μορφή

$$p = \nabla^2 \xi - c \frac{\partial \xi}{\partial n} \quad (\Gamma\Delta.38\alpha)$$

$$q = \nabla^2 \eta - c \frac{\partial \eta}{\partial n} \quad (\Gamma\Delta.38\beta)$$

ή στη μορφή

$$p = \frac{1}{J} \left(y_\eta L(x) - x_\eta L(y) \right) - c \frac{\partial \xi}{\partial n} \quad (\Gamma\Delta.39\alpha)$$

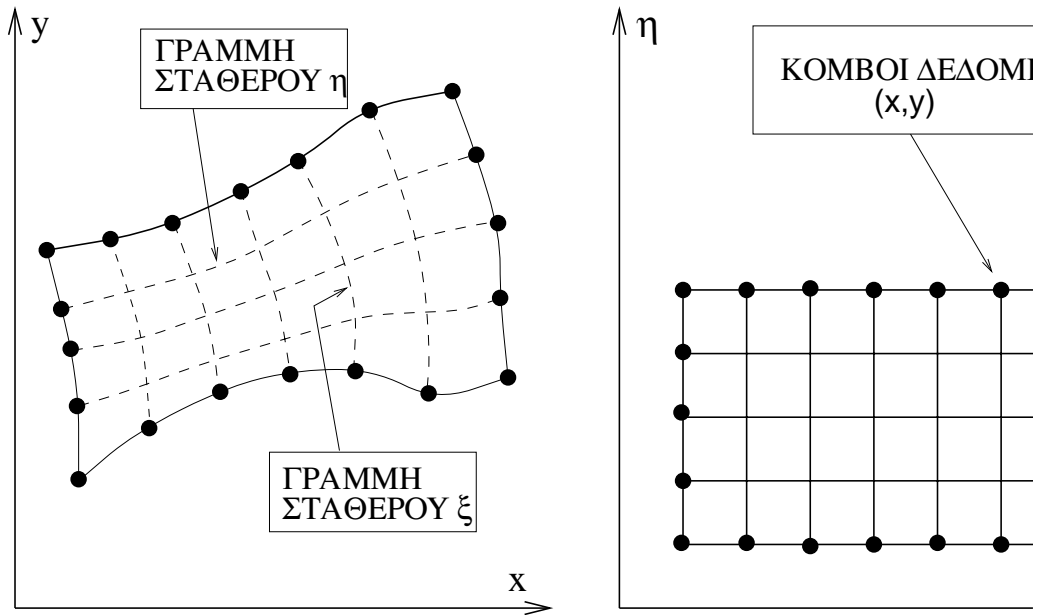
$$q = \frac{1}{J} \left(x_\xi L(y) - y_\xi L(x) \right) - c \frac{\partial \eta}{\partial n} \quad (\Gamma\Delta.39\beta)$$

Η (ΓΔ.39α) ισχύει στις γραμμές $\eta=1$ και $\eta=\eta_{\max}$, ενώ η (ΓΔ.39β) στις γραμμές $\xi=1$ και $\xi=\xi_{\max}$.

Ο ρόλος της αυθαίρετης σταθεράς c στην ορθογωνιότητα των πλεγματικών γραμμών πρέπει να επισημανθεί και να αναλυθεί προσεκτικά. Στο εσωτερικό του χωρίου τα p και q ικανοποιούν τις (ΓΔ.34β) και (ΓΔ.34δ), ενώ στο όριο τις (ΓΔ.38α) και (ΓΔ.38β). Καθώς ο υπολογισμός συγκλίνει και το πλέγμα τείνει να αποκτήσει την τελική (συγκλιμένη) μορφή του, οι τιμές των p και q στα όρια τείνουν προς την τελική τιμή των $\nabla^2 \xi$ και $\nabla^2 \eta$ αντίστοιχα. Επομένως οι εξισώσεις (ΓΔ.38) τείνουν να πάρουν τις μορφές

$$c \frac{\partial \xi}{\partial n} = 0 \quad \text{και} \quad c \frac{\partial \eta}{\partial n} = 0$$

δηλαδή, οι γραμμές ξ =σταθερό και η =σταθερό τείνουν να γίνουν κάθετες στα αντίστοιχα όρια. Τονίζεται ότι η εφαρμογή των οριακών συνθηκών (ΓΔ.39) για τα p , q απαιτεί επιπλέον πληροφορία, η οποία μπορεί να επιτευχθεί συνδυάζοντας τις παραπάνω μεθόδους με τεχνικές όπως αυτές που αναφέρθηκαν για τις μεθόδους του Sorenson ή του Middlecoff, κλπ.



Σχήμα ΓΔ.1: Διακριτοποιημένα όρια (σημείο-προς-σημείο) του φυσικού χωρίου και το εξ αρχής γνωστό μετασχηματισμένο ή υπολογιστικό χωρίο .

ΓΔ.6 Μια Εφαρμογή Μεθόδων Γένεσης Δομημένων Πλεγμάτων

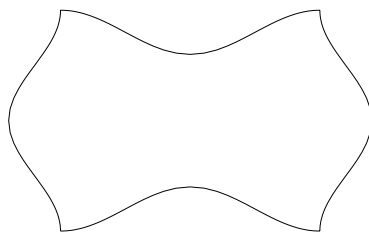
Στη συνέχεια παρατίθεται μια σειρά σχημάτων, χωρίς αρίθμηση, στα οποία δείχνεται η μορφή πλεγμάτων που μπορούν να παραχθούν με αρκετές από τις τεχνικές γένεσης οριόδετων δομημένων πλεγμάτων που έχουν ήδη αναλυθεί στην Ενότητα αυτή.

Για την εφαρμογή που ακολουθεί επιλέχθηκε μια απλή, από πρώτη άποψη γεωμετρία. Το περίγραμμά της δίνεται αμέσως παρακάτω. Αποτελείται από δύο συμμετρικά άνω και κάτω καμπύλα όρια με την κυρτή πλευρά τους στο εσωτερικό του χωρίου. Το αριστερό και το δεξιό όριο είναι επίσης συμμετρικά με την κοίλη πλευρά τους στο εσωτερικό του χωρίου όπου θα κατασκευασθεί το πλέγμα. Οι τέσσερις κορυφές του σχηματίζουν ένα τετράγωνο μοναδιαίας πλευράς. Κάθε πλευρά δημιουργείται με την ίδια συνάρτηση, άσχετα με τον προσανατολισμό της και την κατεύθυνση της κοίλης ή κυρτής πλευράς της. Αν επί της ευθείας που συνδέει δύο γειτονικές κορυφές, μοναδιαίας απόστασης, μετρά η συντεταγμένη κ ($\kappa=0.0$ ως 1.0), τότε η εγκάρσια συντεταγμένη λ (με αφετηρία-μηδενική τιμή το παραπάνω ευθύγραμμο τμήμα θα δίνεται από τη σχέση

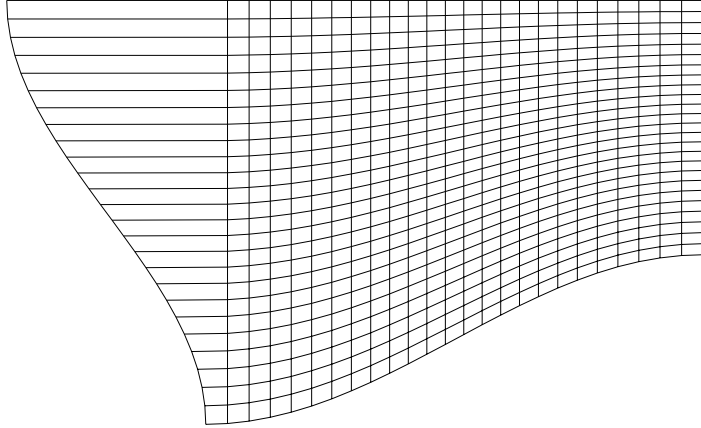
$$\lambda = \pm \varepsilon(1 - \cos(2\pi\kappa))$$

όπου ε είναι μία σταθερά. Αυξάνοντας την τιμή του ε αυξάνουμε την καμπυλότητα στα κυρτά και κοίλα τμήματα του περιγράμματος. Εδώ η τιμή του ε ήταν σταθερή και για τις τέσσερις πλευρές ($\varepsilon=0.15$). Αλλάζοντας την τιμή του ε και το πρόσημο στην παραπάνω σχέση (ίσως και από πλευρά σε πλευρά) μπορούν να σχηματισθούν άλλες συναφείς γεωμετρίες και να δοκιμαστούν σε αυτές οι μέθοδοι γένεσης πλέγματος που προγραμματίζουμε.

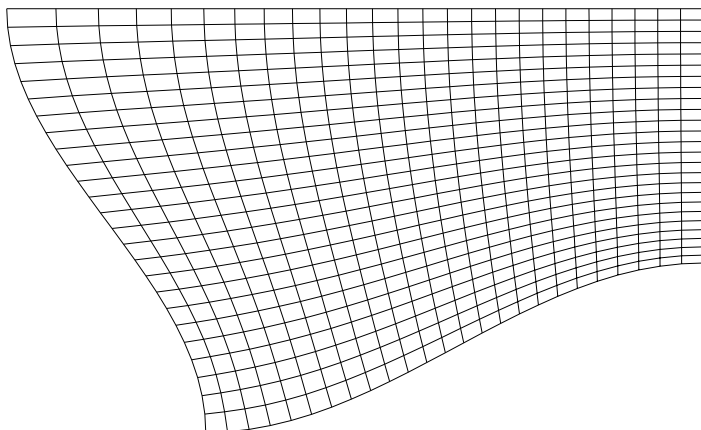
Το περίγραμμα της που δίνεται παρακάτω είναι για ολόκληρο το χωρίο. Σε κάθε επόμενο σχήμα όμως θα δίνεται μόνο το ένα τεταρτημόριο (το κάτω αριστερά) του χωρίου-πλέγματος, λόγω της διπλής συμμετρίας ως προς τον κατακόρυφο και τον οριζόντιο άξονα. Όλα τα πλέγματα που θα δημιουργηθούν έχουν διάσταση 51×51 κόμβους. Οι οριακοί όμως κόμβοι θα είναι κατά περίπτωση διαφορετικά διατεταγμένοι στο περίγραμμα.



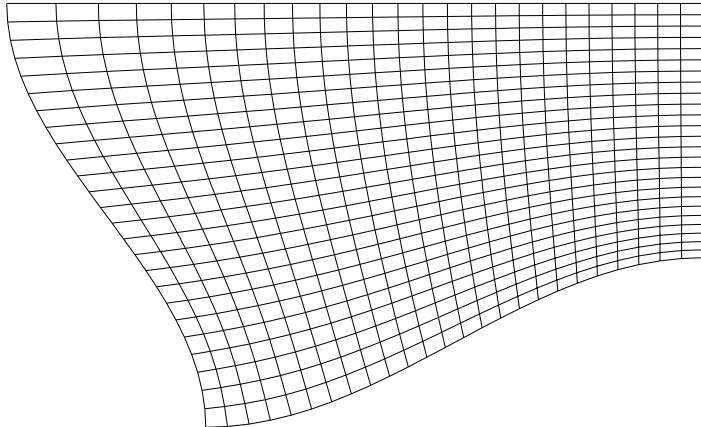
Με ισομοιρασμένους τους οριακούς κόμβους στο περίγραμμα, παρουσιάζεται στη συνέχεια το γραμμικό πλέγμα της αρχικοποίησης. Αυτό κατασκευάστηκε με γραμμική παρεμβολή μεταξύ κάτω και άνω ορίου, αφού η παρεμβολή μεταξύ αριστερού και δεξιού ορίου θα έδινε γραμμές πλέγματος εκτός του περιγράμματος.



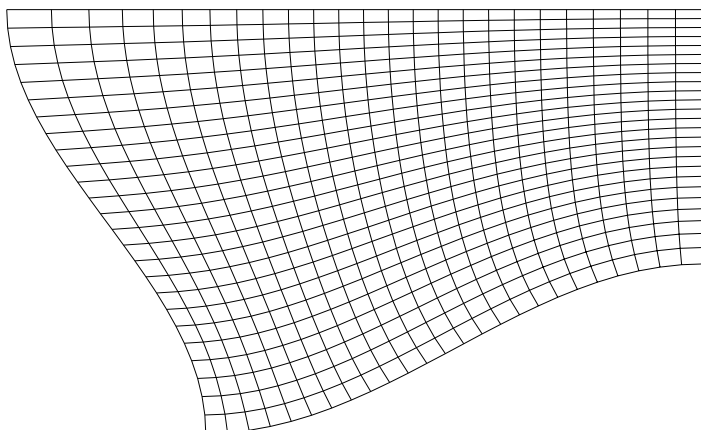
Παρακάτω δίνεται το πλέγμα που προκύπτει από τις Laplace εξισώσεις (ΓΔ.9), με $f^1=f^2=0$. Ήταν αναμενόμενο να συγκεντρωθούν αρκετές γραμμές στο κυρτό τμήμα του ορίου (τα μέσα των πάνω και κάτω πλευρών) ενώ η άλλη οικογένεια γραμμών «αποφεύγει» τα κοίλα τμήματα του ορίου (τα μέσα των αριστερά και δεξιά πλευρών).



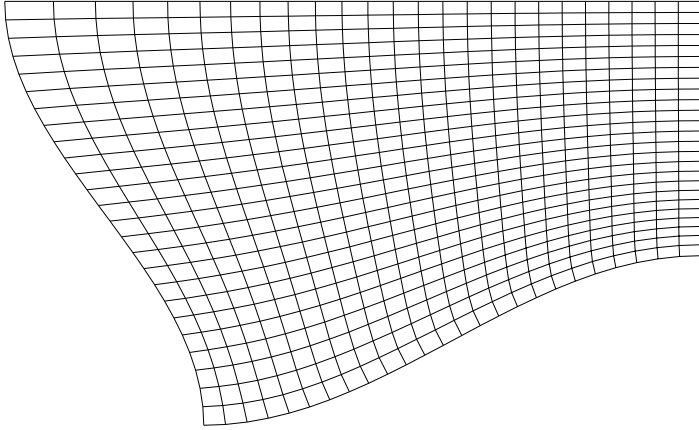
Η μέθοδος Thomas-Middlecoff, έδωσε το παρακάτω πλέγμα:



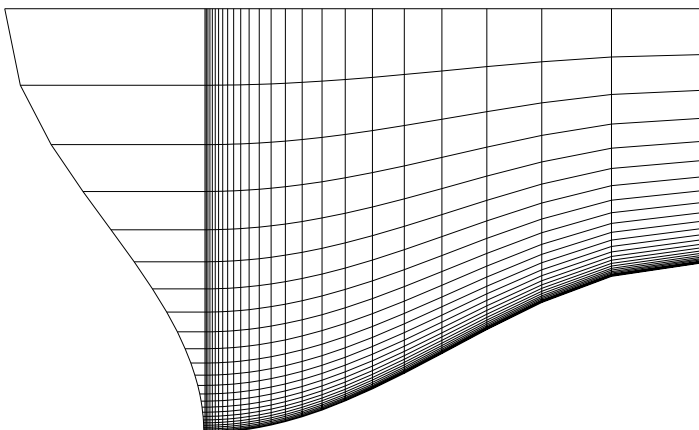
Η μέθοδος Sorenson, επιβάλλοντας απόσταση πρώτης πλεγματοτικής γραμμής από την οριακή γραμμή ίση με αυτή που καθορίζει το εγκάρσιο όριο (έτσι υπολογίστηκε το s της σχέσης (ΓΔ.20)) και με $a=b=c=d=0.1$ έδωσε το παρακάτω πλέγμα. Η μέθοδος Sorenson ελέγχει μόνο το άνω και το κάτω όριο, όπου πραγματικά έχει ελεγχθεί απόλυτα η απόσταση s . Το πλέγμα κοντά στα αριστερά και δεξιά όρια είναι μη-ελέγξιμο.



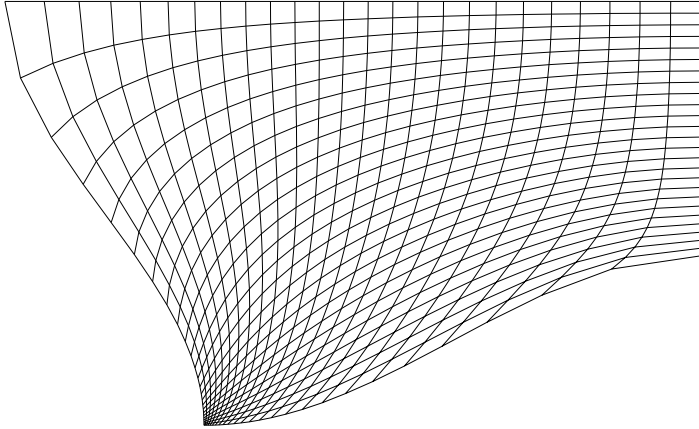
Ξαναχρησιμοποιείται η μέθοδος Sorenson, επιβάλλοντας ίδια με πριν απόσταση πρώτης πλεγματοτικής γραμμής από την οριακή γραμμή αλλά με $a=b=c=d=0.7$ και προκύπτει το παρακάτω πλέγμα. Με τους μεγαλύτερους συντελεστές, πετυχαίνουμε αργή απόσβεση του s που επιβάλλουμε στο όριο. Έτσι επηρεάζει και επηρεάζεται πολύ από τις γειτονικές γραμμές του και το αποτέλεσμα δε σέβεται απόλυτα την απόσταση s που επιβάλαμε μέσω των όρων πηγής.



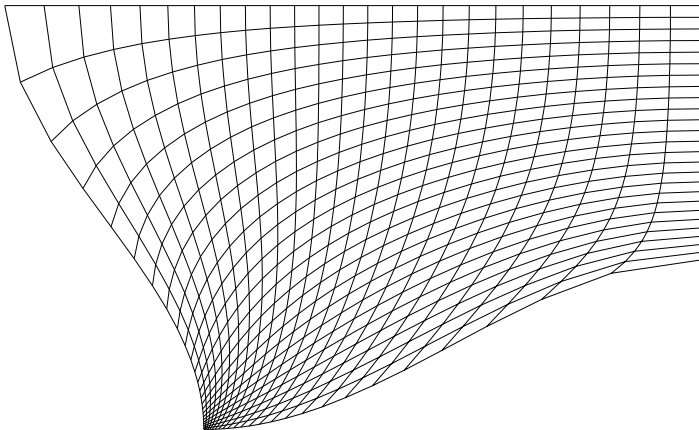
Διατηρούμε την ίδια διάσταση πλέγματος αλλά τοποθετούμε τους οριακούς κόμβους στο περίγραμμα με γεωμετρική πρόοδο (λόγος προόδου = 1.20, πύκνωση και στα δύο άκρα κάθε πλευράς). Δείχνεται στη συνέχεια το γραμμικό πλέγμα της αρχικοποίησης που κατασκευάστηκε με γραμμική παρεμβολή μεταξύ κάτω και άνω ορίου, όπως και προηγούμενα.



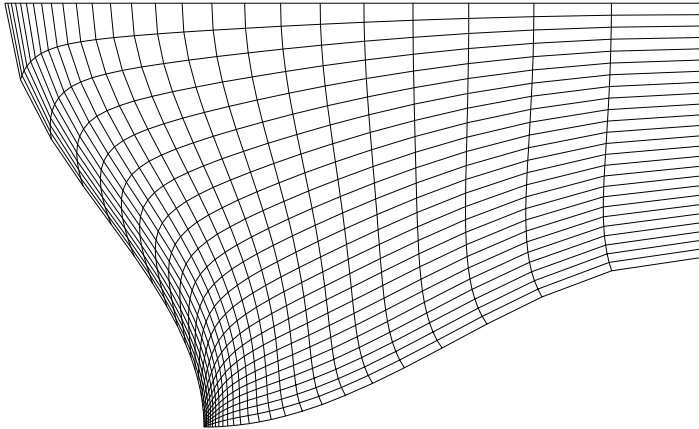
Παρακάτω δίνεται το πλέγμα που προκύπτει από τις Laplace εξισώσεις (ΓΔ.9), με $f^1=f^2=0$. Τώρα που το περίγραμμα είναι πυκνωμένο στα άκρα του φαίνεται πού καθαρά η αδυναμία των πλεγμάτων Laplace και η ανάγκη ελέγχου με όρους πηγής.



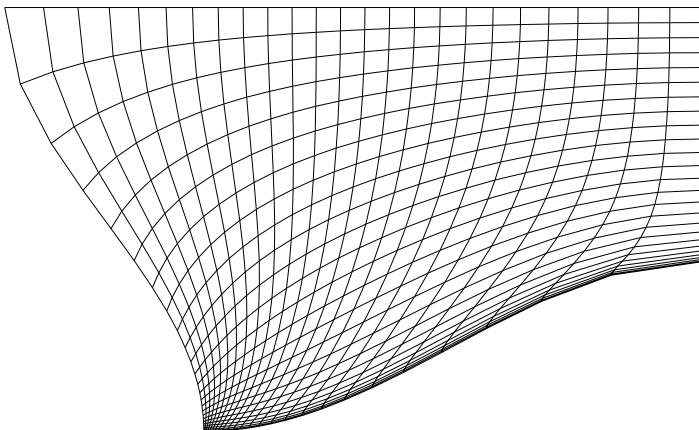
Η μέθοδος Thomas-Middlecoff, έδωσε το παρακάτω πλέγμα:



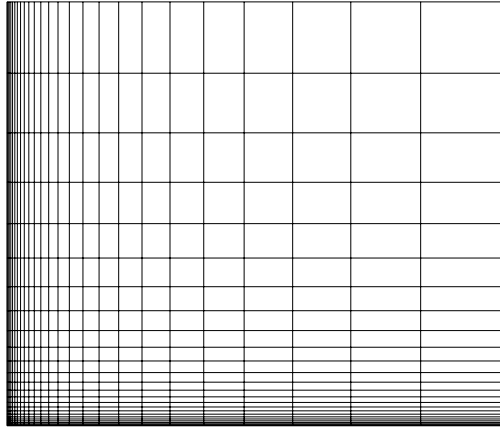
Η μέθοδος Sorenson, επιβάλλοντας απόσταση πρώτης πλεγματικής γραμμής από την οριακή γραμμή ίση με αυτή που καθορίζει το εγκάρσιο όριο (έτσι υπολογίστηκε το s της σχέσης (ΓΔ.20)) και με $a=b=c=d=0.1$ έδωσε το παρακάτω πλέγμα. Η μέθοδος Sorenson ελέγχει μόνο το άνω και το κάτω όριο, όπου πραγματικά έχει ελεγχθεί απόλυτα η απόσταση s . Το πλέγμα κοντά στα αριστερά και δεξιά όρια είναι μη-ελέγξιμο. Τώρα που το περίγραμμα είναι πυκνωμένο στα άκρα του, η σύγκλιση ήταν πολύ δυσκολότερη.



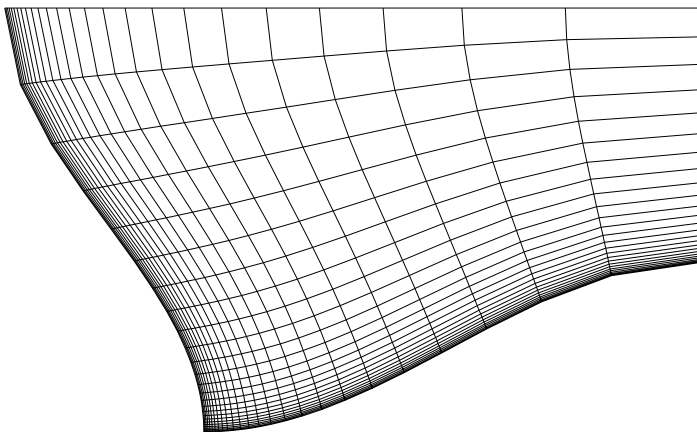
Ξαναχρησιμοποιείται η μέθοδος Sorenson, επιβάλλοντας ίδια με πριν απόσταση πρώτης πλεγματικής γραμμής από την οριακή γραμμή αλλά με $a=b=c=d=0.7$ και προκύπτει το παρακάτω πλέγμα:



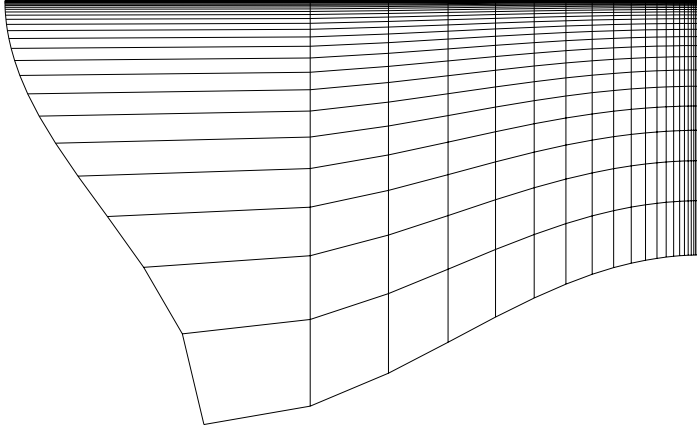
Επιχειρούμε να ελέγξουμε τους όρους πηγής f^1 και f^2 στο εσωτερικό του πλέγματος. Δημιουργούμε ένα αντίστοιχο πλέγμα (δεν είναι το μετασχηματισμένο, αλλά κάποιο βοηθητικό) μέσα σε ένα τετράγωνο μοναδιαίας πλευράς, με ίδιο αριθμό σημείων σε κάθε πλευρά και πυκνωμένο με την ίδια γεωμετρική πρόοδο (βλ. επόμενο σχήμα). Αυτό το χρησιμοποιούμε ώστε να βρούμε το λόγο επιμήκους όλων των κυψελών του και μεταφέρουμε την πληροφορία αυτή στους αντίστοιχους κόμβους του πλέγματος. Με τις διαφορίσεις (ΓΔ.28) υπολογίζουμε παντού τα f^1 και f^2 . Οι τιμές τους δεν αλλάζουν κατά το επαναληπτικό σχήμα.



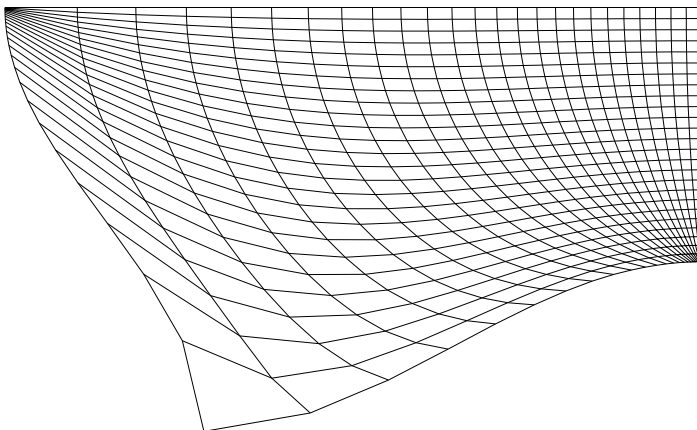
Με τους έτσι υπολογισμένους όρους πηγής, λύνονται οι εξισώσεις τύπου Poisson και προκύπτει το παρακάτω πλέγμα:



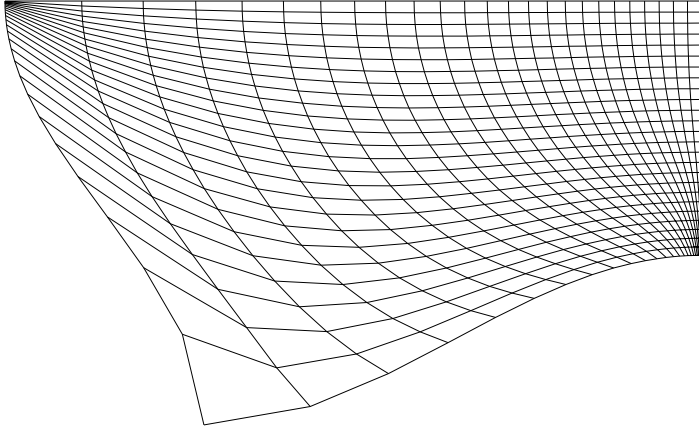
Διατηρούμε την ίδια διάσταση πλέγματος αλλά τοποθετούμε τους οριακούς κόμβους στο περίγραμμα με γεωμετρική πρόοδο (λόγος προόδου = 0.80, αραίωση και στα δύο άκρα κάθε πλευράς). Δείχνεται στη συνέχεια το γραμμικό πλέγμα της αρχικοποίησης που κατασκευάστηκε με γραμμική παρεμβολή μεταξύ κάτω και άνω ορίου, όπως και προηγούμενα.



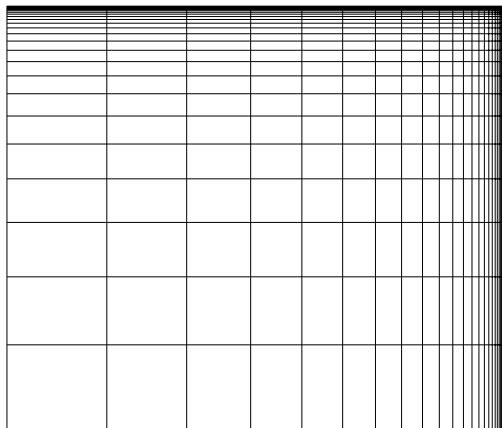
Παρακάτω δίνεται το πλέγμα που προκύπτει από τις Laplace εξισώσεις (ΓΔ.9), με $f^1=f^2=0$. Η εξίσωση Laplace αδυνατεί να ελέγξει την πύκνωση στην καρδιά του πλέγματος



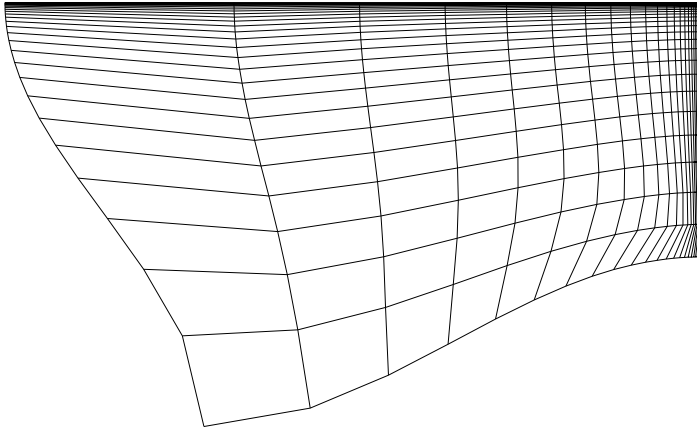
Η μέθοδος Sorenson, επιβάλλοντας απόσταση πρώτης πλεγματικής γραμμής από την οριακή γραμμή ίση με αυτή που καθορίζει το εγκάρσιο όριο (έτσι υπολογίστηκε το s της σχέσης (ΓΔ.20)) και με $a=b=c=d=0.5$ έδωσε το παρακάτω πλέγμα:



Επιχειρούμε να ελέγξουμε τους όρους πηγής f^1 και f^2 στο εσωτερικό του πλέγματος. Δημιουργούμε ένα αντίστοιχο πλέγμα (δεν είναι το μετασχηματισμένο, αλλά κάποιο βοηθητικό) μέσα σε ένα τετράγωνο μοναδιαίας πλευράς, με ίδιο αριθμό σημείων σε κάθε πλευρά και πυκνωμένο με την ίδια γεωμετρική πρόοδο (βλ. επόμενο σχήμα). Αυτό το χρησιμοποιούμε ώστε να βρούμε το λόγο επιμήκους όλων των κυψελών του και μεταφέρουμε την πληροφορία αυτή στους αντίστοιχους κόμβους του πλέγματος.



Με τους έτσι υπολογισμένους όρους πηγής, λύνονται οι εξισώσεις τύπου Poisson και προκύπτει το παρακάτω πλέγμα:



ΓΑ.7 Βιβλιογραφία

Ένα πολύ καλό και γενικό ανάγνωσμα (παρά το ότι είναι παλιό) είναι το review paper:

J.F. Thompson, Z.U.A. Warsi and C.W. Mastin,

“Boundary-Fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Partial Differential Equations – A Review”,

J. Computational Physics 47, 1-108, 1982.

Η μέθοδος των Thomas-Middlecoff έχει δημοσιευτεί στο:

P.D. Thomas and J.F. Middlecoff,

“Direct Control of the Grid Point Distribution in Meshes Generated by Elliptic Equations”,

AIAA Journal, Vol. 18, No. 6, June 1980.

Η μέθοδος του Sorenson έχει δημοσιευτεί στο:

R.L. Sorenson and J.L. Steger,

“Numerical Generation of Two-Dimensional Grids by the Use of Poisson Equations with Grid Control at Boundaries”

WNGG-NASA, 449, 1980.

Η μέθοδος γένεσης πλέγματος με διαρμονική μπορεί να βρεθεί στη δημοσίευση:

P.D. Sparis,

“A Method for Generating Boundary-Orthogonal Curvilinear Coordinate Systems Using the Biharmonic Equation”

J. Computational Physics 61, 445-462, 1985.

Τέλος, συνιστάται και η συλλογή εργασιών του:

AGARD Conference Proceedings CP-464,

“Applications of Mesh Generation to Complex 3-D Configurations”, 1990.

Σημειώνεται ότι κάθε βιβλίο Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής έχει κάποιο σχετικό κεφάλαιο (σύντομο συνήθως, που όσο αφορά τη γένεση πλεγμάτων με ελλειπτικές εξισώσεις μάλλον υπερκαλύπτεται από τις παρούσες σημειώσεις).