ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

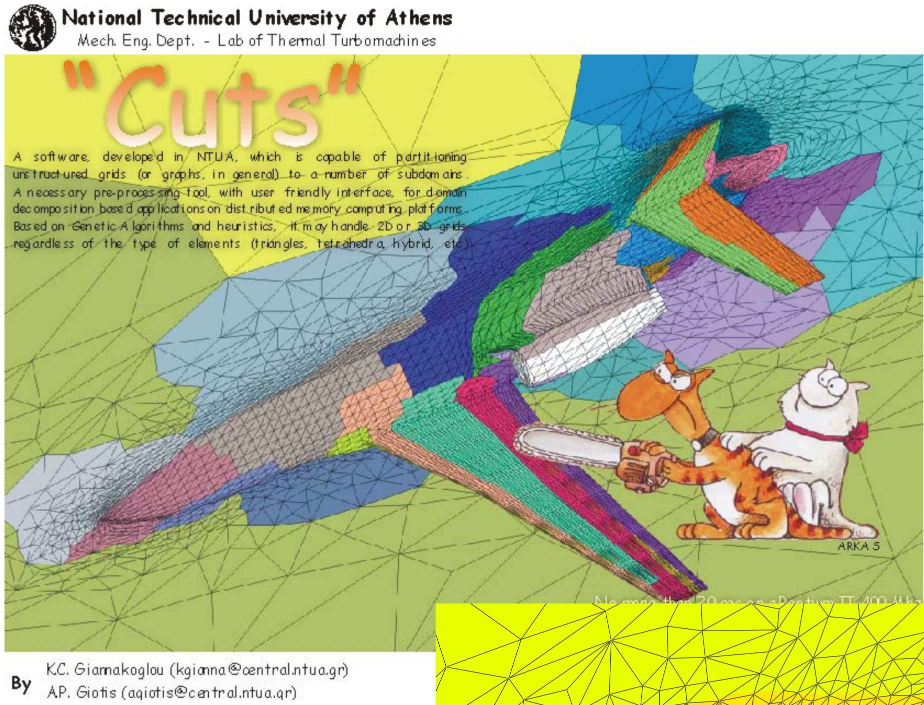
ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΜΗ_ΔΟΜΗΜΕΝΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

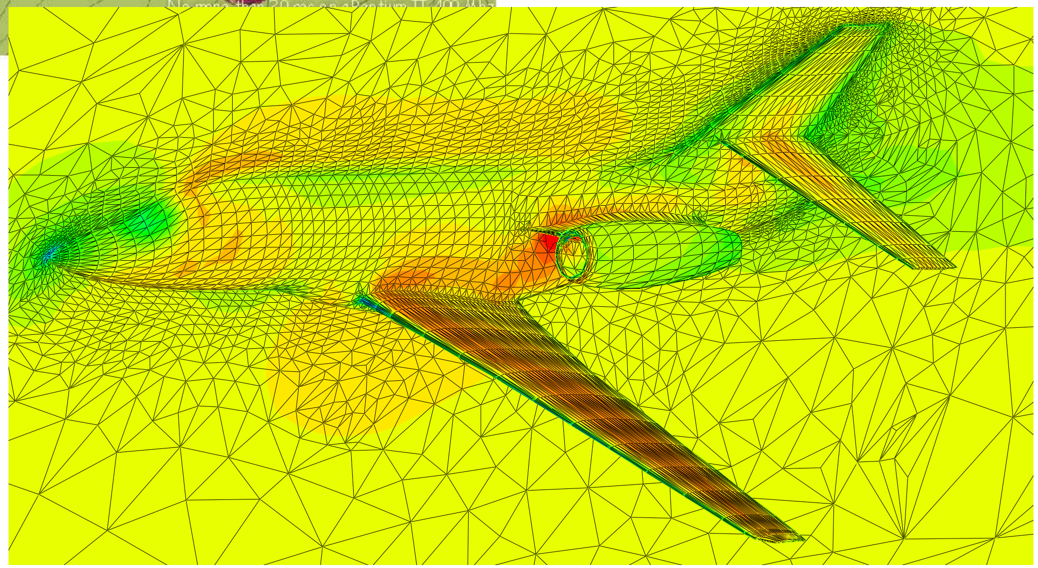
Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου
Καθηγητής ΕΜΠ

kgianna@central.ntua.gr

http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/research/

Αντικείμενο





Βασικά

Κριτήρια Διαμερισμού:

(1) Ισομοιρασμένο υπολογιστικό φορτίο ανά επεξεργαστή

(2) Ελάχιστη διεπεξεργαστική επικοινωνία

Μέθοδοι, ανάλογα με τον τύπο του πλέγματος:

(1) Δομημένα πλέγματα

(2) Μη-δομημένα πλέγματα &, το «χειρότερο» υβριδικά.

Διαμερισμός Ισοδύναμου Γράφου αντί πλέγματος. Γιατί?:

(1) Ίσος αριθμός κόμβων ανά υποχωρίο?

(2) Ίσος αριθμός στοιχείων (λ.χ. τριγώνων) ανά υποχωρίο?

(3) Ποιο είναι το κριτήριο???

Βασικά

Διαδικασία Διαμερισμού ως προς το αποτέλεσμα:

(1) Διαμερισμός σε 2^{ν} υποχωρία (διαδοχικές διχοτομήσεις- βέλτιστο?)

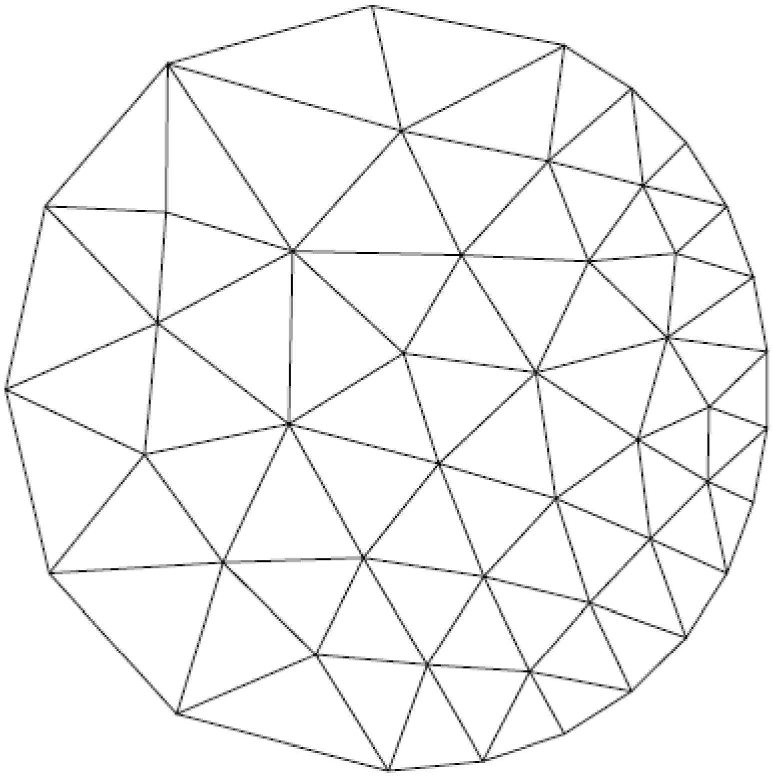
(2) Διαμερισμός σε τυχαίο αριθμό υποχωρίων

Μέθοδοι, ανάλογα με το ζητούμενο:

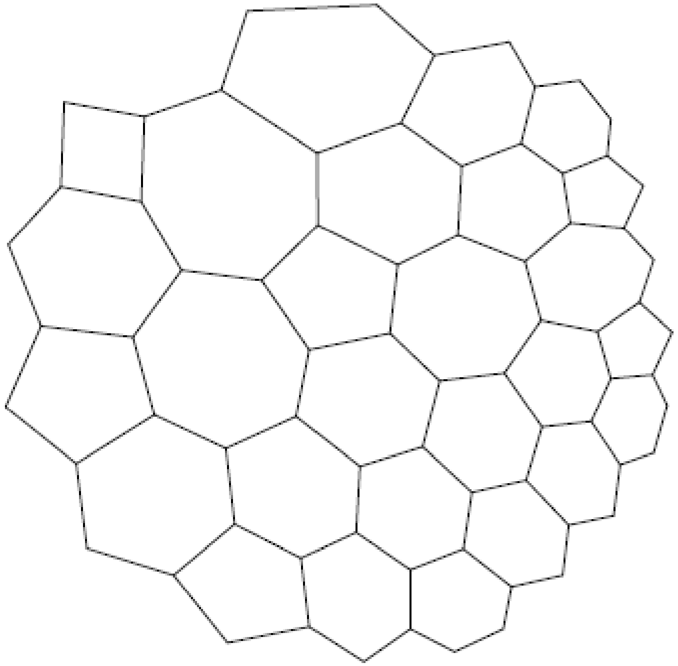
(1) Ευριστικές (heuristics)

(2) Βασισμένες στα μαθηματικά της θεωρίας γράφων (λ.χ. φασματικές)

Μη-Δομημένο Πλέγμα & Ισοδύναμος Γράφος



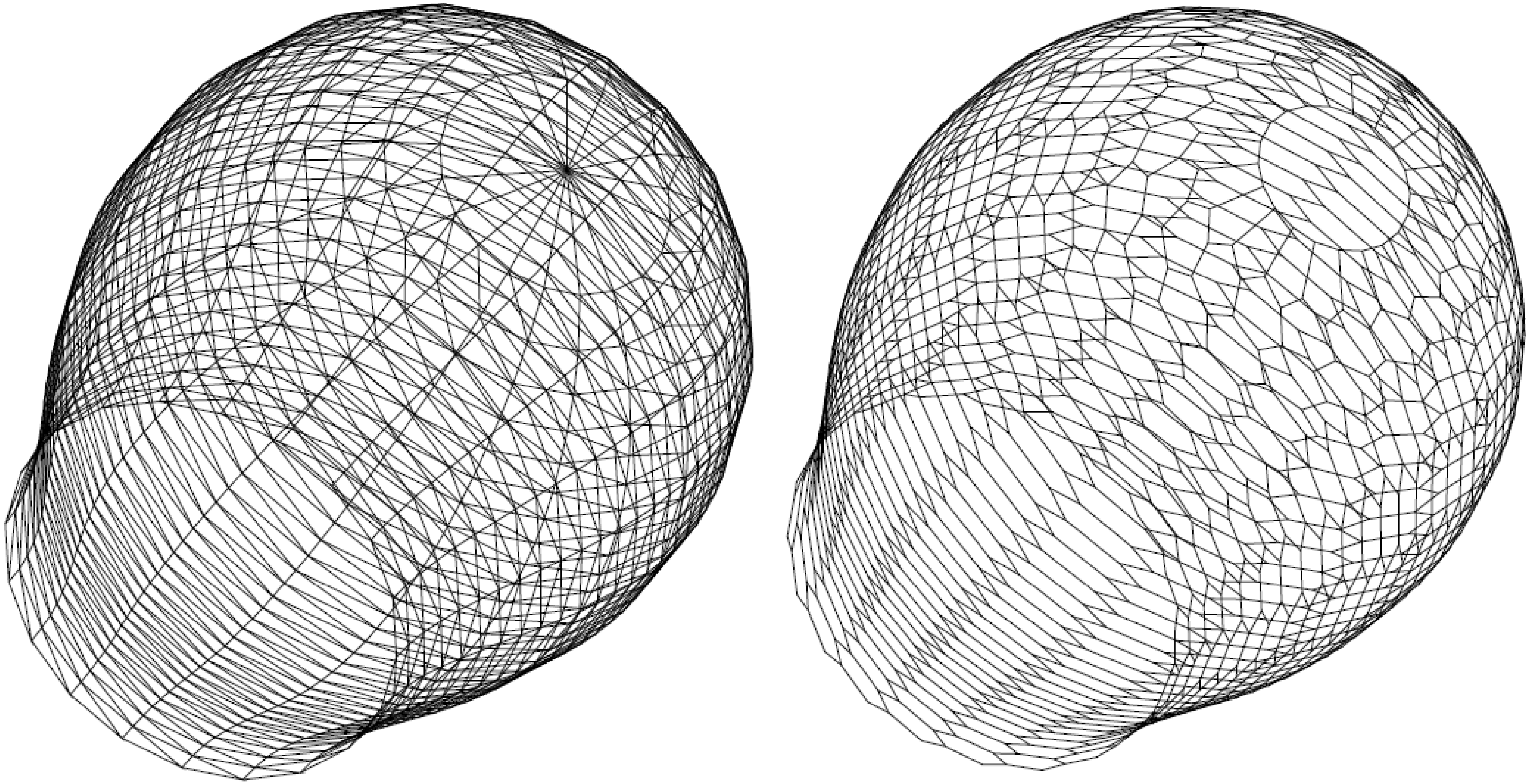
Σχήμα 2-2 Μη-δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων



Σχήμα 2-3 Ισοδύναμος γράφος πλέγματος

Λ.χ. για επίπεδα πλέγματα

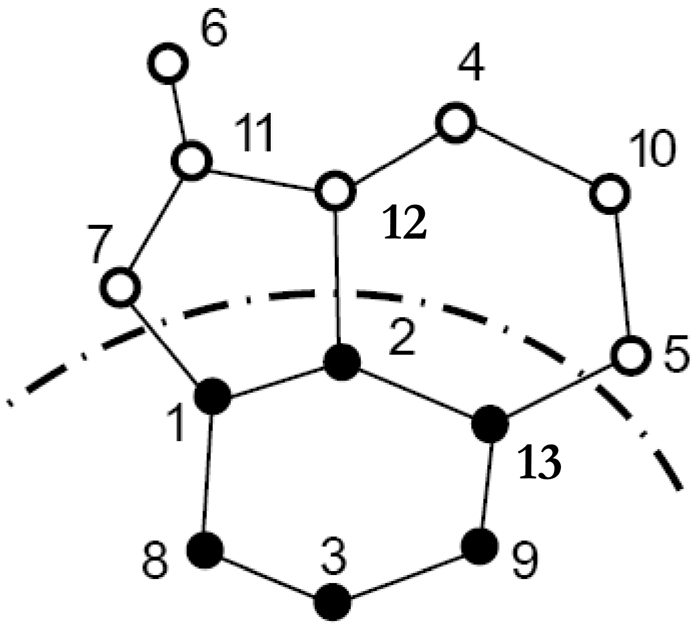
Μη-Δομημένο Πλέγμα & Ισοδύναμος Γράφος



Μη-δομημένο επιφανειακό τριγωνικό πλέγμα με τον ισοδύναμο γράφο του

Λ.χ. για επιφανειακά πλέγματα

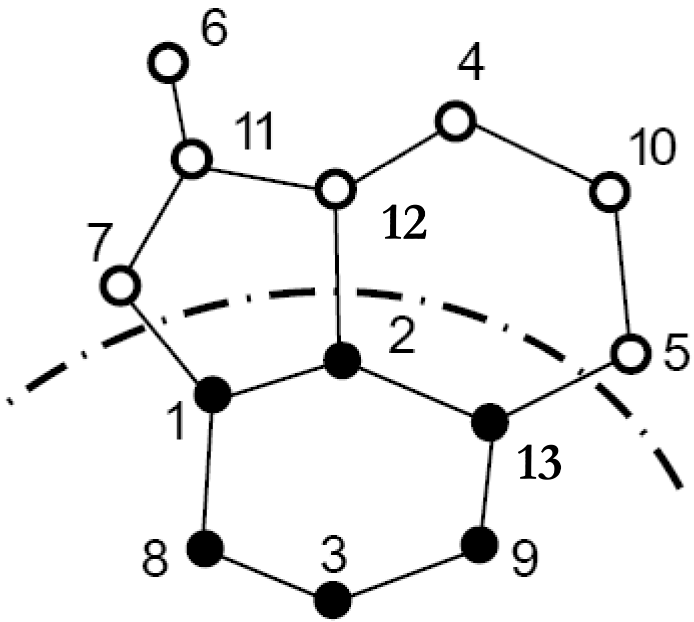
Αναμενόμενο Αποτέλεσμα – Διατύπωση Προβλήματος



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	…

(ΜΙΑ) ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗ ΓΡΑΦΟΥ: **Αναζητούμε ένα flag (0 ή 1 : σε ποιο υποχωρίο ανήκει) για κάθε κόμβο του γράφου.** ***Αναλόγως της μαθηματικής διατύπωσης, συχνά συμφέρει τα flags να είναι (-1 και 1) αντί για (0 και 1).***

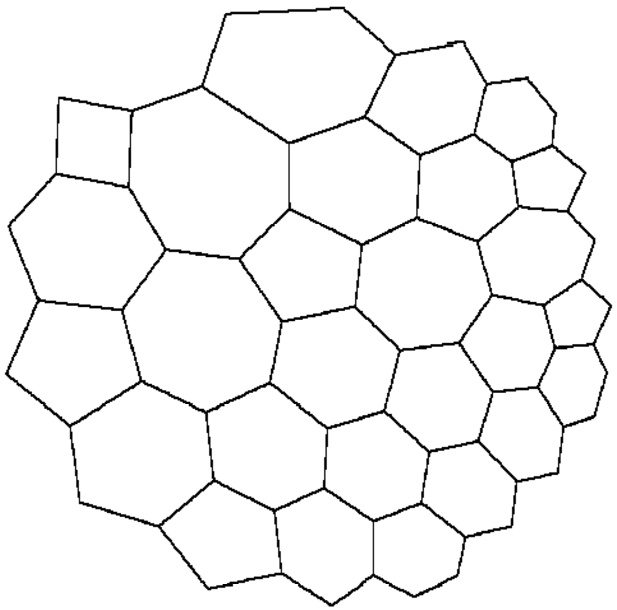
Αναμενόμενο Αποτέλεσμα – Διατύπωση Προβλήματος

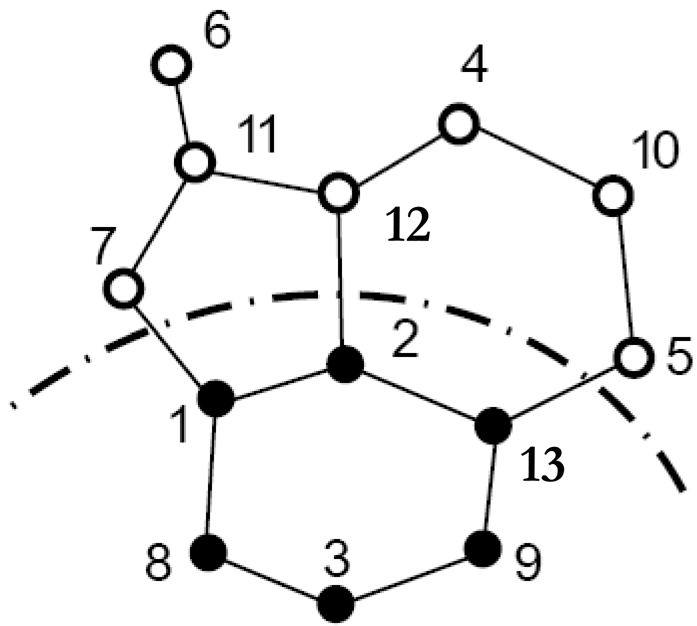


Θεωρία Γράφων – Βασικοί Ορισμοί

Μη-κατευθυντικός γράφος (non-directed graph) $\Gamma=(V,E)$ ορίζεται ένα σύνολο κόμβων V (vertices) και ένα σύνολο πλευρών E, του οποίου τα στοιχεία $(u,v) \in E$ με $u, v \in V$ είναι ζεύγη κόμβων και παριστούν την πλευρά που ενώνει τους δύο κόμβους. Τα ζεύγη $(u,v) \in E$ είναι μόνο αυτά για τα οποία υπάρχει πλευρά που να ενώνει τον κόμβο u με τον v. Σε ένα μη κατευθυντικό γράφο ισχύει $(u,v)=(v,u)$.

Συνδεδεμένος (connected) λέγεται ο γράφος στον οποίο για κάθε ζεύγος κόμβων, υπάρχει ένα σύνολο διαδοχικών πλευρών που συνδέει τους δύο αυτούς κόμβους.



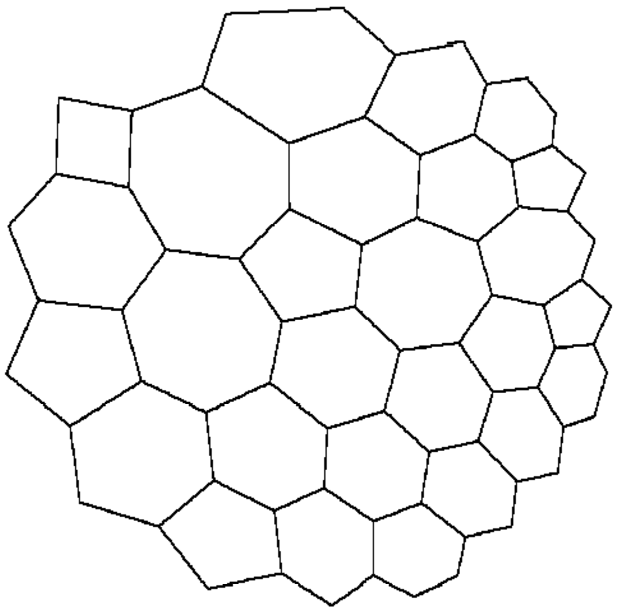


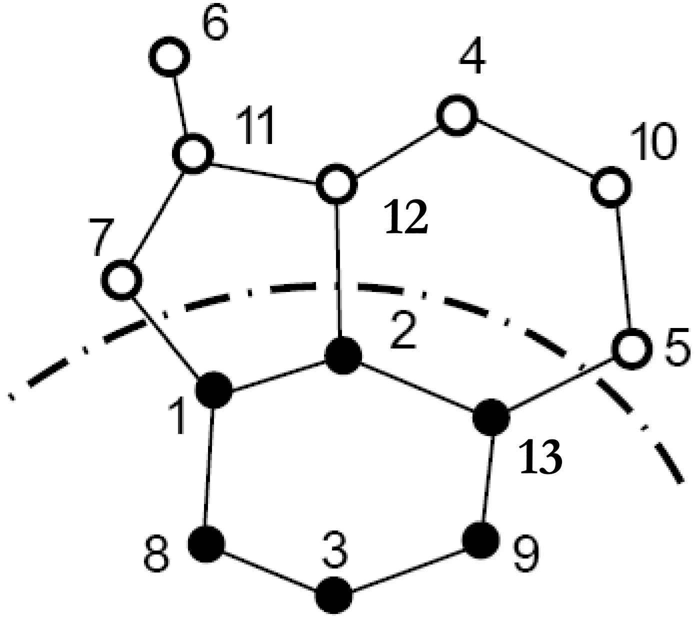
Θεωρία Γράφων – Βασικοί Ορισμοί

Τάξη του γράφου ορίζεται το πλήθος των κόμβων που έχει, n=|V|. Οι κόμβοι του γράφου αριθμούνται από το 1 έως το n.

Βαθμός (degree) του κόμβου ορίζεται το πλήθος των πλευρών που έχουν το συγκεκριμένο κόμβο ως άκρη.

Κατευθυντικός γράφος (directed graph) ορίζεται ο γράφος εκείνος οι πλευρές του οποίου έχουν συγκεκριμένη αρχή και τέλος. Επομένως, οι πλευρές δεν υποδεικνύουν μόνο τη σύνδεση δύο κόμβων αλλά και την κατεύθυνση. Τα ζεύγη των κόμβων που αποτελούν τις πλευρές του είναι διατεταγμένα.





Θεωρία Γράφων – Βασικοί Ορισμοί

Μητρώο γειτονικότητας (adjacency matrix) **A**: Έχει διαστάσεις nxn με στοιχεία $\alpha_{u,v}$ τέτοια ώστε $\alpha_{u,v}=1$ αν $(u,v) \in E$ και $\alpha_{u,v}=0$ αν $(u,v) \notin E$.

Λαπλασιανό μητρώο γράφου **L**: Τετραγωνικό-συμμετρικό (με διαγώνια υπεροχή) μητρώο:

$$L=D-A,$$ όπου:

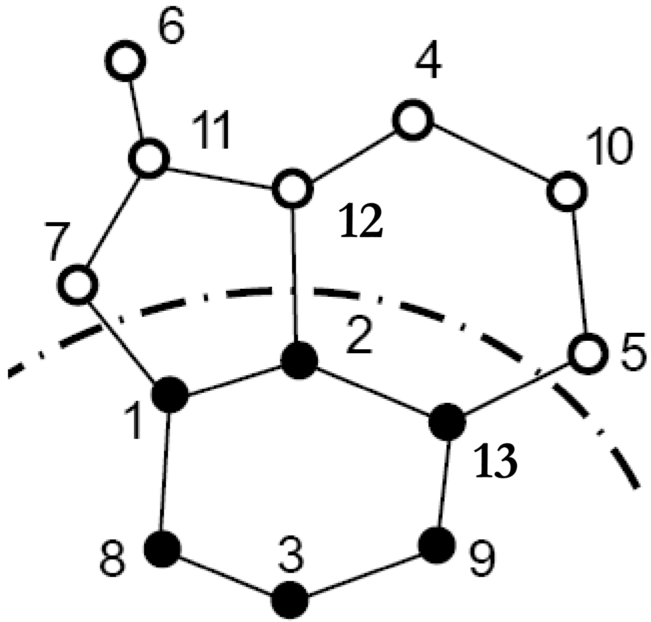
A είναι το μητρώο γειτονικότητας του γράφου

D είναι το διαγώνιο μητρώο διαστάσεων nxn, του οποίου τα μη μηδενικά στοιχεία της διαγωνίου $\Delta_{u,u}$ είναι ίσα με το βαθμό του αντίστοιχου κόμβου u του γράφου.

Θεωρία Γράφων – Βασικοί Ορισμοί

Μητρώο γειτονικότητας (adjacency matrix) A & Λαπλασιανό μητρώο L:

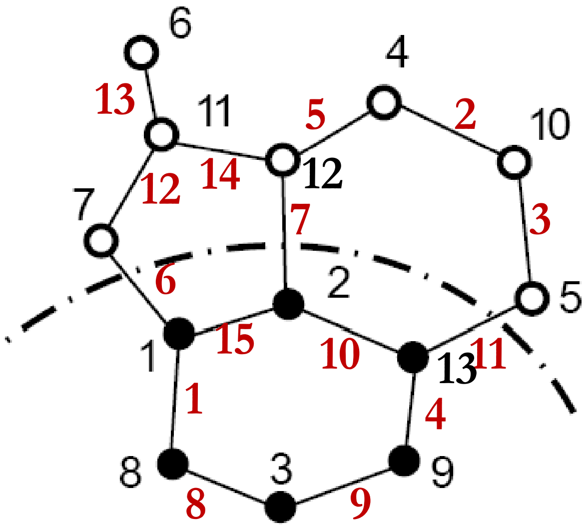
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													



Θεωρία Γράφων – Βασικοί Ορισμοί

Μητρώο πρόσπτωσης κόμβων-πλευρών (vertex-edge incidence matrix) C: Ορίζεται σε κατευθυντικούς γράφους, είναι μη-τετραγωνικό με διαστάσεις [*Κόμβοι x Ακμές*], με στοιχεία $c_{v,e}$=+1 αν ο κόμβος v είναι το τέλος της πλευράς e, $c_{v,e}$=-1 1 αν ο κόμβος v είναι η αρχή της

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1															
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															
12															
13															



Λαπλασιανό μητρώο γράφου **L**: Τετραγωνικό-συμμετρικό (με διαγώνια υπεροχή) μητρώο:

$$L=D-A,$$ όπου:

A είναι το μητρώο γειτονικότητας του γράφου

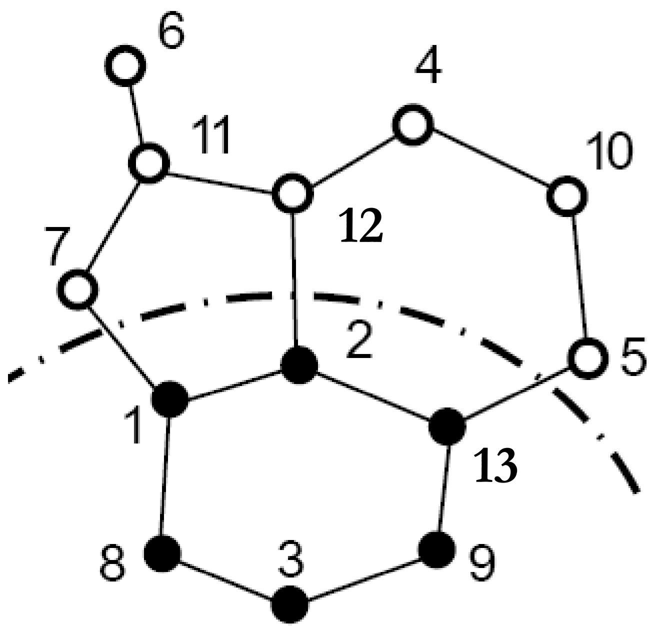
D είναι το διαγώνιο μητρώο διαστάσεων nxn, του οποίου τα μη μηδενικά στοιχεία της διαγωνίου $\Delta_{u,u}$ είναι ίσα με το βαθμό του αντίστοιχου κόμβου u του γράφου.

Ισχύει: $$L=CC^T$$

(ΑΠΛΗ) ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗ: Συναρτήσεις κόστους (προς ελαχιστοποίηση):

$$F=\frac{N_{ce}}{N_1N_2} \quad \kappa\alpha\iota \quad F=\frac{N_{ce}}{\min(N_1N_2)}$$

$$F=\frac{\left|N_1-N_2\right|}{\sqrt{N_1N_2}}+w\frac{N_{ce}}{N_e}$$



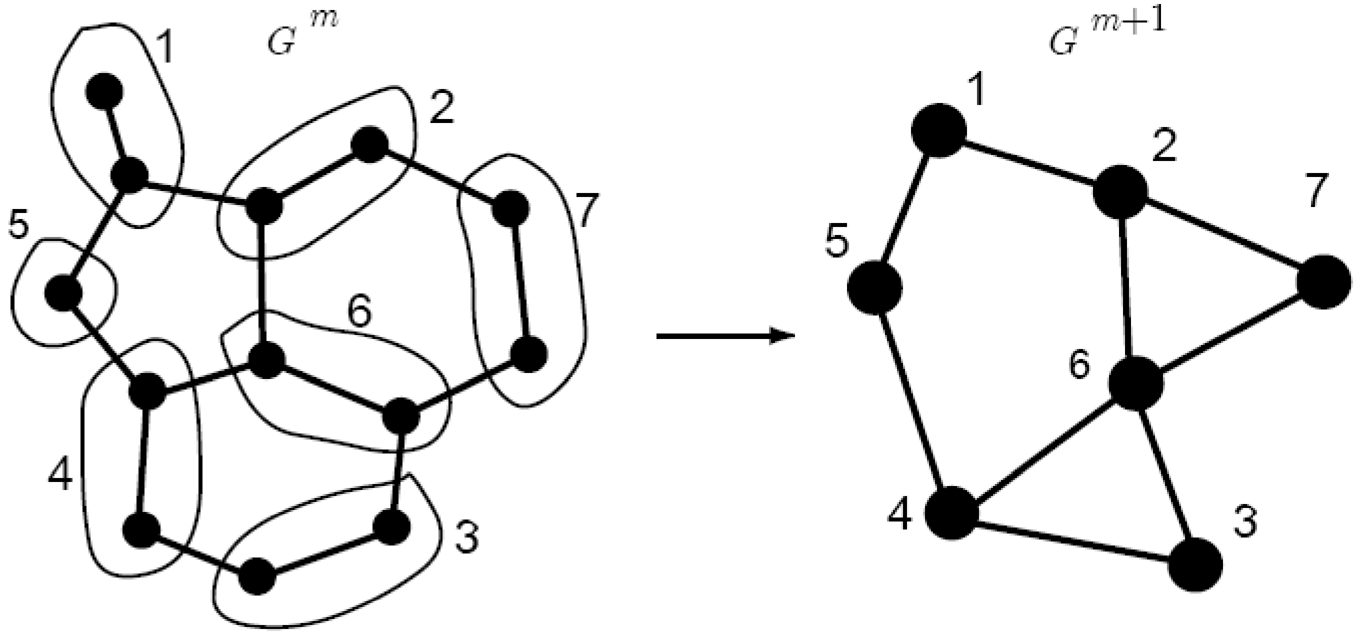
<u>(ΑΠΛΗ) ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗ:</u> Έκφραση του Number of Cutting Edges:

$$N_{ce} = \frac{p_o^T L p_o}{4}$$

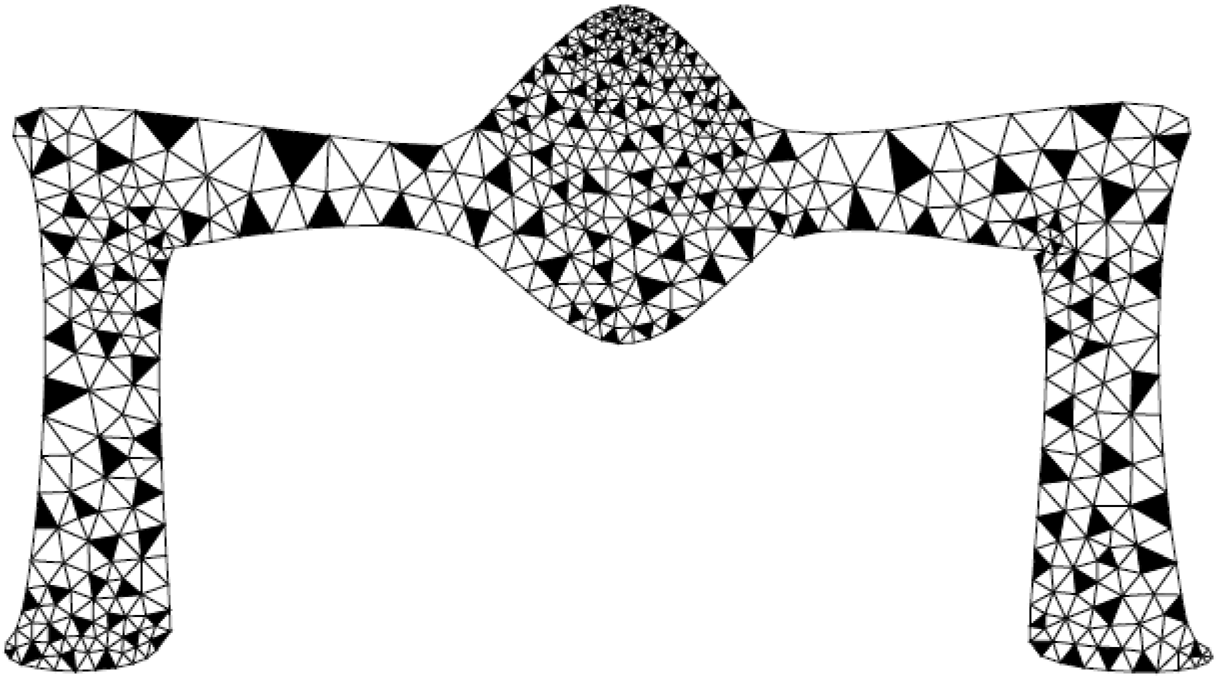
όπου $\mathbf{p}^0$ είναι το διάνυσμα διχοτόμησης με στοιχεία -1 ή 1 ανάλογα σε ποιο υποχωρίο ανήκει κάθε κόμβος του γράφου.

Ποια είναι η έκφραση του $|N_1-N_2|$ αν έχετε το $\mathbf{p}^0$ :::::

Μια Υποθετική Συστολή Γράφου:

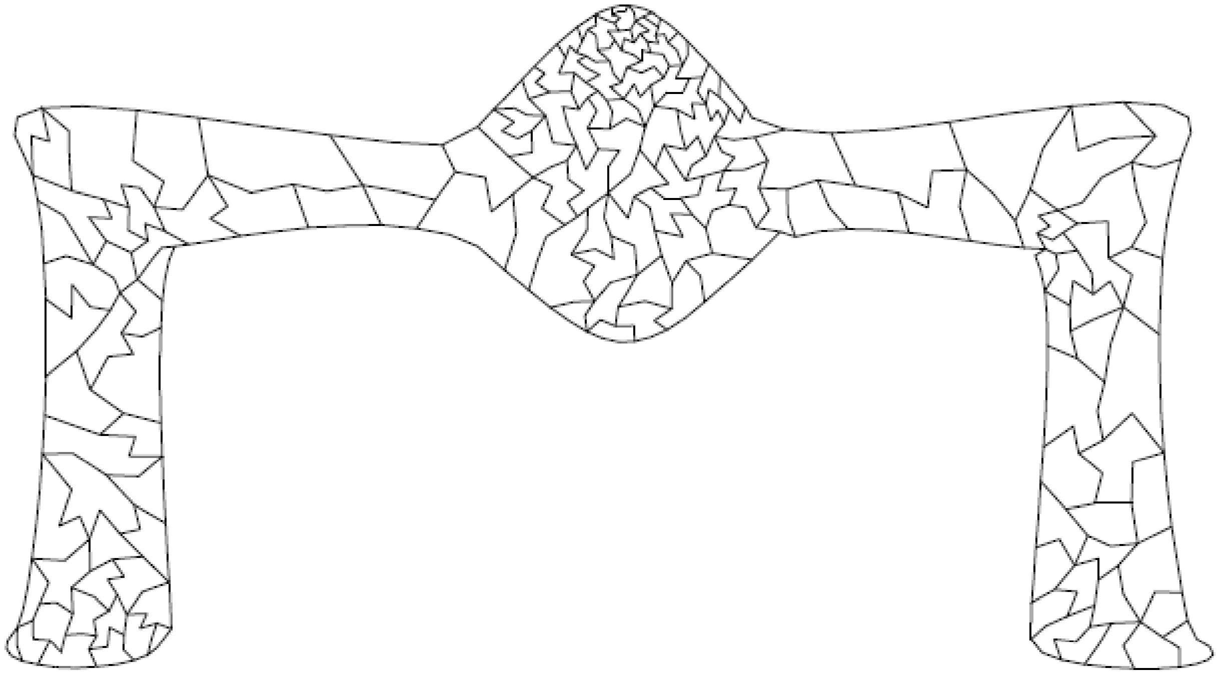


Ιδέες Επιτάχυνσης Διαμερισμού μέσω Συσσωματώσεων

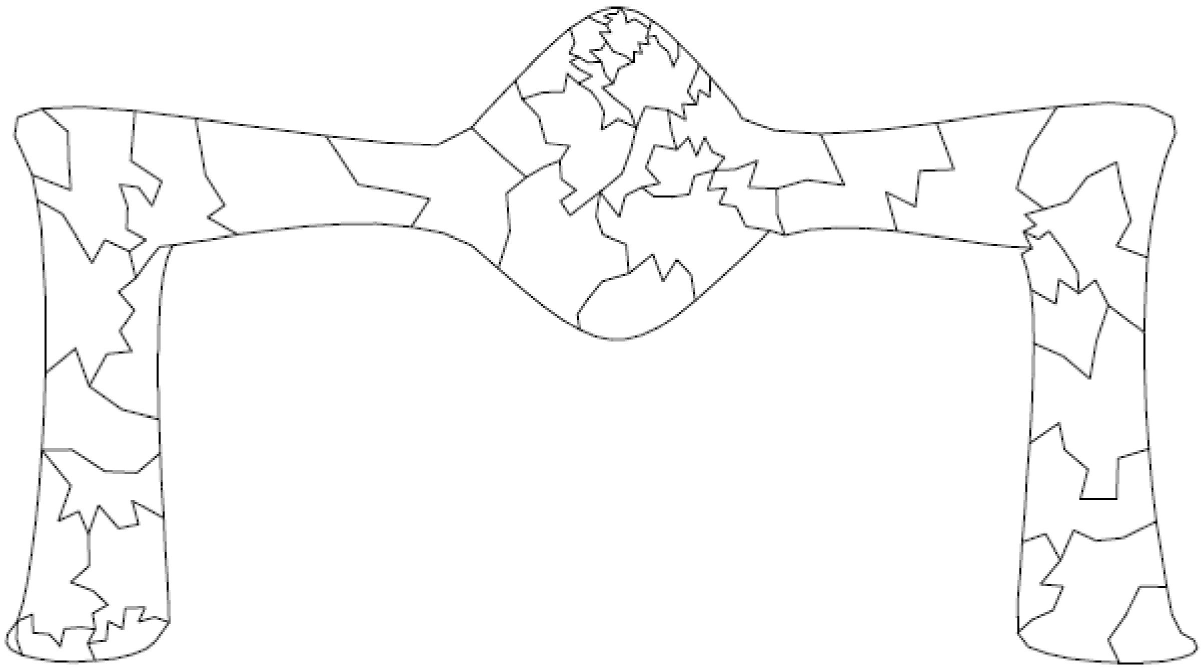


Σχήμα 4-1 Μαρκάρισμα ανεξάρτητων τριγώνων με μαύρο στο αρχικό πλέγμα

Ιδέες Επιτάχυνσης Διαμερισμού μέσω Συσσωματώσεων

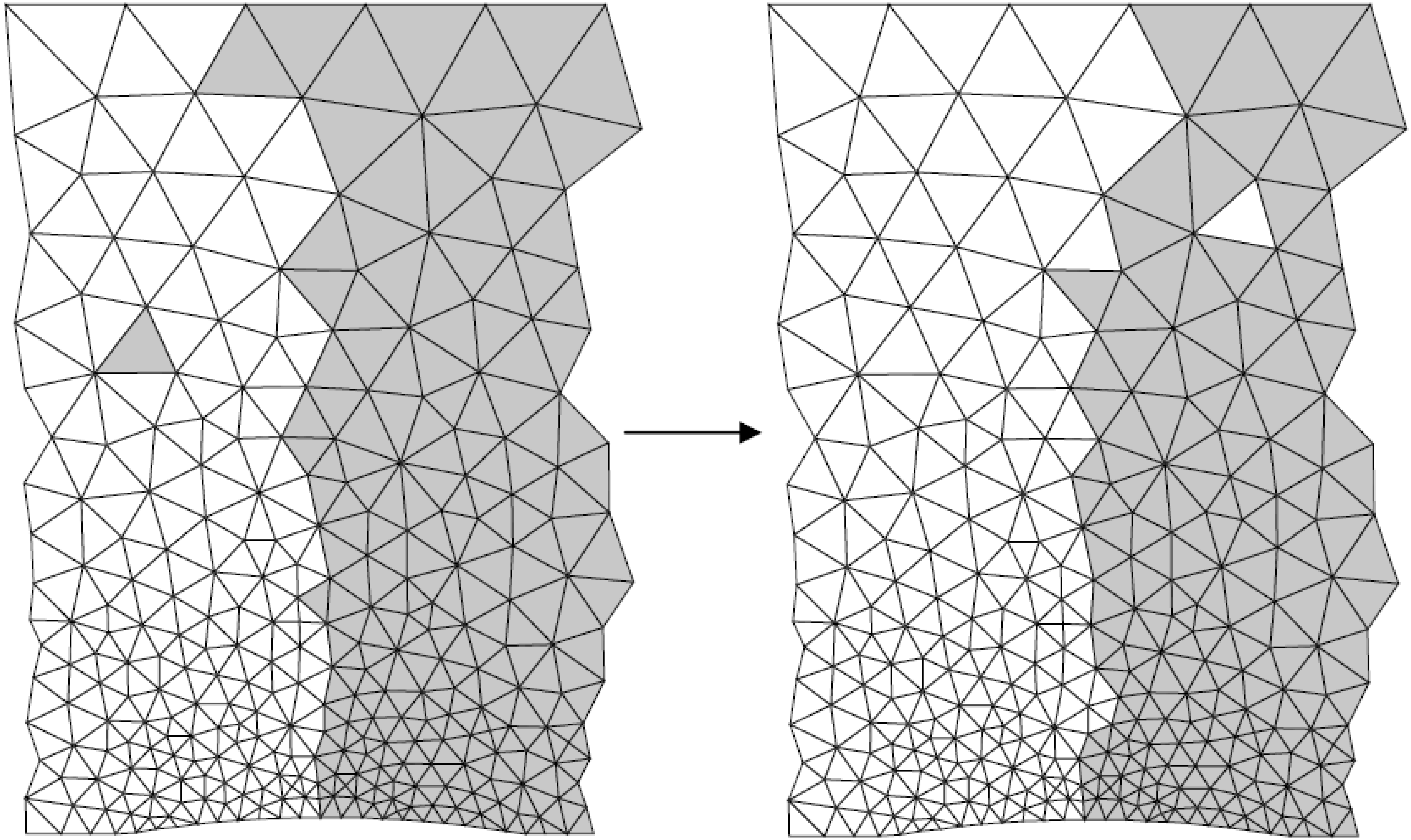


Σχήμα 4-2 Συστάδες τριγώνων στο επίπεδο Γ^1



Σχήμα 4-3 Συστάδες τριγώνων στο τελικό επίπεδο Γ^2

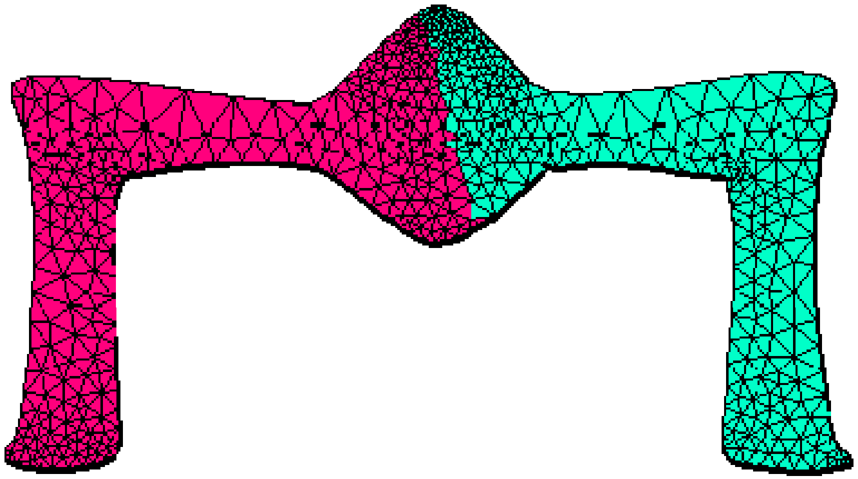
Ανάγκη «Επεμβάσεων» σε Ευριστικούς Αλγορίθμους

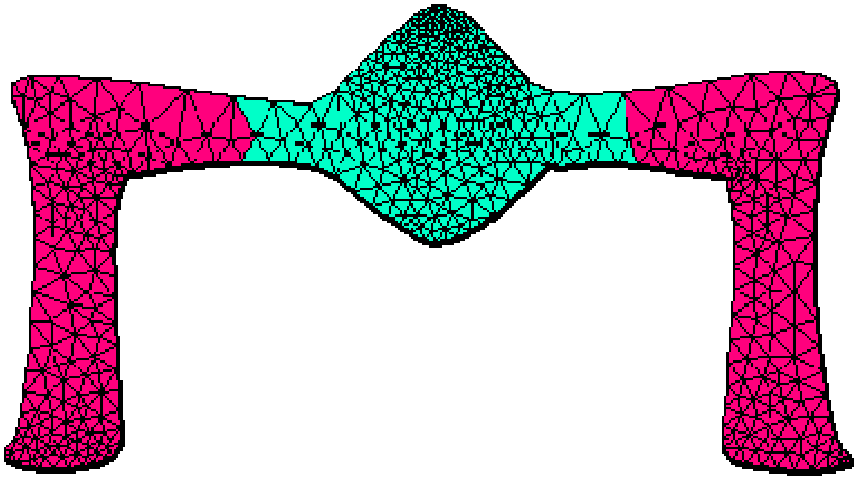


Recursive Spectral Bisection (RSB) Method

Επαναληπτική φασματική διχοτόμηση: Αποτελεί ίσως την πιο ευρέως διαδεδομένη μέθοδο με ισχυρό μαθηματικό υπόβαθρο. Χρησιμοποιείται μια ιδιότητα του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στη δεύτερη μικρότερη ιδιοτιμή της Λαπλασιανής μήτρας του ισοδύναμου γράφου (διάνυσμα Fiedler), που έχει αποδειχθεί ότι δίνει πληροφορίες για τη σύνδεση των κόμβων του γράφου. Αν αναθέσουμε σε κάθε κόμβο του γράφου τη τιμή του στοιχείου του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στον αριθμό του κόμβου, και χωρίσουμε τους κόμβους έτσι ώστε οι μισοί με τη μικρότερη τιμή να ανήκουν στο ένα υποχωρίο και οι άλλοι μισοί στο άλλο, αποδεικνύεται ότι το διαχωριστικό τους όριο είναι ελάχιστο.

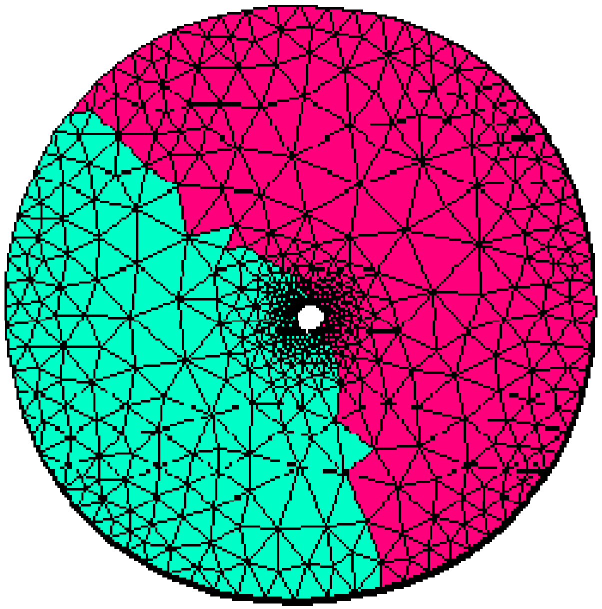
Υπολογιστικό φορτίο: Αλγόριθμος εύρεσης των ιδιοτιμών. Ακόμη όμως και ο αλγόριθμος του Lanczos που αποτελεί ίσως τον καλύτερο τρόπο λύσης του ιδιοπροβλήματος, απαιτεί χρόνο ο οποίος αυξάνει εκθετικά με τον αριθμό των κόμβων του γράφου. Αυτό καθιστά τη μέθοδο ασύμφορη για μεγάλα πλέγματα με τις κλασικές μεθόδους λύσης του ιδιοπροβλήματος. Η μέθοδος της φασματικής διχοτόμησης μπορεί να επιταχυνθεί αν ο υπολογισμός του διανύσματος Fiedler γίνει χρησιμοποιώντας ένα πολυεπίπεδο αλγόριθμο, βλάπτοντας ίσως λίγο την ποιότητα του αποτελέσματος.



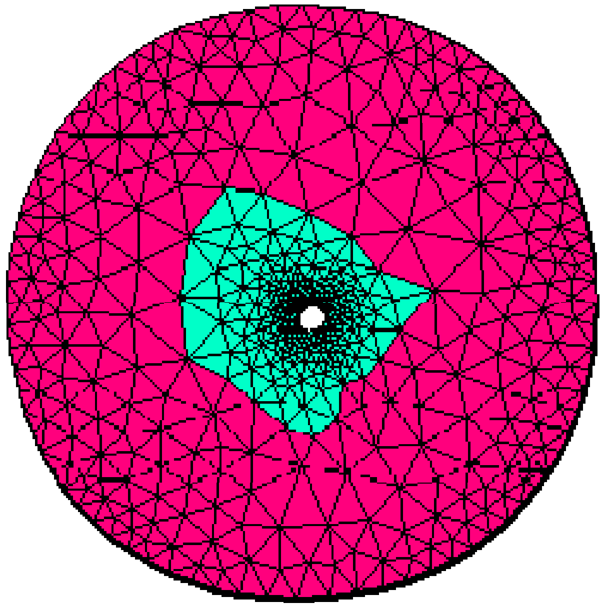


R.S.B.

Heuristic



R.S.B.



Heuristic