



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

Παραμετροποίηση Μορφών και Προσαρμοστική  
Παραμόρφωση 3Δ Υπολογιστικών Πλεγμάτων με χρήση  
Αρμονικών Συντεταγμένων. Εφαρμογή στην  
Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση.

Διπλωματική Εργασία

Χρήστος Ζέρβας

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2018



## Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό, μετά και την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους ανθρώπους που συνέβαλλαν στην ολοκλήρωση της, αλλά και των προπτυχιακών μου σπουδών στο ΕΜΠ.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας, κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου, για τη δυνατότητα που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα σύγχρονο και ιδιαίτερα ενδιαφέρον θέμα, για τη συνεχή καθοδήγησή του σε όλη τη διάρκεια της εργασίας και τις πολύτιμες γνώσεις και εμπειρίες που μου προσέφερε.

Θέλω επίσης να ευχαριστήσω τη Δρ. Βαρβάρα Ασούτη, η οποία αφιερώνοντας χρόνο από τις δικές της ασχολίες, συνέβαλε στην έγκαιρη και αποτελεσματική ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας. Όλες οι υποδείξεις και οι συμβουλές της ήταν πολύτιμες, και χωρίς τη βοήθειά της το έργο μου θα ήταν σαφώς δυσκολότερο.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη της ΜΠΥΡ&Β, για την συνεισφορά τους στη διπλωματική μου εργασία.

Ευχαριστώ και όλα τα παιδιά του γραφείου στο κτήριο Ο, για την παρέα, τις συμβουλές και το χρόνο που αφιέρωσαν για μένα.

Θα ήθελα να πω ένα τεράστιο ευχαριστώ στην οικογένειά μου, στους γονείς μου και τον αδερφό μου, οι οποίοι με στηρίζουν με κάθε τρόπο και βρίσκονται πάντα δίπλα μου, σε ό,τι και να κάνω.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλους τους κοντινούς μου ανθρώπους, συμφοιτητές και μη, για τη βοήθεια, την κατανόηση και την στήριξή τους καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου.



# Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ

ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ &

ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

## Παραμετροποίηση Μορφών και Προσαρμοστική Παραμόρφωση 3Δ Υπολογιστικών Πλεγμάτων με χρήση Αρμονικών Συντεταγμένων. Εφαρμογή στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση.

Διπλωματική Εργασία

Χρήστος Ζέρβας

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2018

### Περίληψη

Σε προβλήματα βελτιστοποίησης μορφής απαιτείται συνεχής επαναπλεγματοποίηση των διαρκώς μεταβαλλόμενων χωρίων υπολογισμού, η οποία είναι πολύ χρονοβόρα. Στο πλαίσιο αυτό, η διπλωματική εργασία προτείνει μια μέθοδο παραμετροποίησης και προσαρμογής υπολογιστικών πλεγμάτων, για χρήση στη βελτιστοποίηση μορφής, με στόχο τη μείωση του υπολογιστικού κόστους. Συγκεκριμένα, προτείνει τη δημιουργία κατάλληλου πλέγματος ελέγχου για την παραμετροποίηση των κόμβων του επιφανειακού και 3Δ υπολογιστικού πλέγματος. Η παραμετροποίηση αυτή γίνεται με τη χρήση των αρμονικών συντεταγμένων, που προκύπτουν ως λύσεις των εξισώσεων Laplace με κατάλληλες οριακές συνθήκες. Αρχικά κατασκευάζεται το αρμονικό χωρίο και το σχετικό (αραιό) πλέγμα, στο οποίο επιλύονται οι εξισώσεις Laplace και υπολογίζονται τα πεδία των αρμονικών συντεταγμένων. Στη συνέχεια, υπολογίζονται οι αρμονικές συντεταγμένες των κόμβων του υπολογιστικού (CFD) πλέγματος μέσω παρεμβολής. Αποτέλεσμα της παραμετροποίησης αυτής είναι η ταυτόχρονη και άμεση δυνατότητα μετατόπισης όλων των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος. Για λόγους επιβολής συνέχειας, δημιουργείται ένα σύστημα δύο αρμονικών χωρίων που ελέγχει τη γεωμετρία και το πλέγμα. Στη διπλωματική αυτή εργασία προγραμματίστηκε λογισμικό για την υλοποίηση της παραπάνω διαδικασίας, επεκτείνοντας σε 3Δ παλαιότερη εργασία για 2Δ εφαρμογές. Το λογισμικό αυτό χρησιμοποιήθηκε για βελτιστοποίηση στην εξωτερική και εσωτερική 3Δ αεροδυναμική, με τη χρήση εξελικτικών αλγορίθμων (EA) αλλά και της συζυγούς μεθόδου (adjoint), για την οποία προγραμματίστηκε ό,τι χρειαζόταν για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας με τον κανόνα της αλυσίδας.

**National Technical University of Athens**  
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING  
FLUIDS DEPARTMENT  
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES  
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

**Shape Parameterization and Adaptive Deformation of 3D  
Computational Grids using Harmonic Coordinates.  
Applications in Aerodynamic Optimization.**

Diploma Thesis

**Christos Zervas**

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

**Athens, July 2018**

**Abstract**

In aerodynamic shape optimization, the procedure of regenerating the grid within the continuously changing domain is time consuming. This diploma thesis proposes a parameterization technique and the simultaneous adaptive deformation of 3D computational grids. It proposes the generation of an appropriate control grid for the parametrization of both the nodes of the surface of the geometry and the internal nodes of the 3D computational grid. This parameterization uses the harmonic coordinates resulting from the numerical solution of Laplace equations with appropriate boundary conditions. Firstly, the harmonic grid is generated, in which Laplace equations are solved and the fields of harmonic coordinates are computed. Then, the harmonic coordinates at the nodes of the computational grid are interpolated. The result of this parameterization is the simultaneous and direct displacement of all nodes of the computational grid. Furthermore, to ensure continuity, a system of two harmonic grids is generated, which controls the shape geometry and the CFD grid. During this diploma thesis, software for the implementation of this procedure was programmed, extending previous work for 2D applications to 3D ones. This software was used to solve 3D aerodynamic shape optimization problems, using evolutionary algorithms and the adjoint method. Regarding the latter, software was programmed to compute the sensitivity derivatives using the chain rule.

## Ακρωνύμια

ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΕΘΣ	Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
ΜΠΤΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής Βελτιστοποίησης
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
<hr/>	
2Δ	Δύο Διαστάσεων/Δισδιάστατο
3Δ	Τριών Διαστάσεων/Τρισδιάστατο
ΜΔΕ	Μερική Διαφορική Εξίσωση/Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις
<hr/>	
CFD	Computational Fluid Dynamics
NTUA	National Technical University of Athens
<hr/>	
EASY	Evolutionary Algorithms SYstem
EA	Evolutionary Algorithm
FFD	Free Form Deformation
MAEA	Metamodel Assisted Evolutionary Algorithm





# Περιεχόμενα

## Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1	Η Βελτιστοποίηση στην Αεροδυναμική . . . . .	1
1.2	Ανάγκη για Παραμόρφωση Πλέγματος . . . . .	2
1.3	Μέθοδοι Παραμόρφωσης Πλέγματος . . . . .	3
1.4	Στόχος και Δομή της Εργασίας . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Αρμονικές Συντεταγμένες σε 3Δ Χωρία</b>	<b>7</b>
2.1	Ορισμοί . . . . .	7
2.2	Εισαγωγή στη Θεωρία των Αρμονικών Συναρτήσεων . . . . .	10
2.3	Μέθοδος Παραμετροποίησης με Αρμονικές Συντεταγμένες . . . . .	11
2.3.1	Δημιουργία Αρμονικού Χωρίου και Πλέγματος . . . . .	12
2.3.2	Αριθμητική Επίλυση Εξίσωσης Laplace . . . . .	13
2.3.3	Υπολογισμός των Αρμονικών Συντεταγμένων του CFD Πλέγματος . . . . .	16
2.3.4	Παραμόρφωση Αεροδυναμικού Σώματος . . . . .	18
2.4	Η Τεχνική των Δύο Κλωβών . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Παραδείγματα Εφαρμογής της Μεθόδου</b>	<b>21</b>
3.1	Εφαρμογή σε Σφαίρα . . . . .	21
3.2	Εφαρμογή σε Πτέρυγα Αεροσκάφους . . . . .	26
3.3	Εφαρμογή σε Αγωγό Σχήματος S . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Εφαρμογές στη Βελτιστοποίηση με Εξελικτικούς Αλγορίθμους</b>	<b>35</b>

4.1	Βελτιστοποίηση με χρήση ΕΑ . . . . .	35
4.2	Εφαρμογή στην Πτέρυγα ONERA M6 . . . . .	38
4.3	Εφαρμογή σε Αγωγό Σχήματος U . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Εφαρμογές στη Βελτιστοποίηση με χρήση της Συζυγούς Με- θόδου</b>	<b>51</b>
5.1	Η συζυγής μέθοδος . . . . .	51
5.2	Εφαρμογή Σε Αγωγό Σχήματος U . . . . .	53
5.3	Εφαρμογή της Μεθόδου στο Γενικευμένο Μοντέλο Αυτοκινήτου Dri- vAer . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Ανακεφαλαίωση &amp; Συμπεράσματα</b>	<b>69</b>
6.1	Ανακεφαλαίωση . . . . .	69
6.2	Συμπεράσματα . . . . .	71
6.3	Προτάσεις για Μελλοντική Μελέτη . . . . .	72
	<b>Α' Αλγόριθμος της Μεθόδου των Αρμονικών Συνταταγμένων</b>	<b>73</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Η Βελτιστοποίηση στην Αεροδυναμική

Τα τελευταία χρόνια η ανάπτυξη ενός προϊόντος χαρακτηρίζεται από ιδιαίτερη πολυπλοκότητα. Υπάρχουν υψηλές απαιτήσεις σε σχεδιαστική ανάλυση, κατασκευαστική ακρίβεια καθώς και σε ανταγωνιστικά προϊόντα, παράλληλα με μια διαρκώς μεταβαλλόμενη ζήτηση. Επίσης ο ισχυρός ανταγωνισμός επιβάλλει τη διαρκή ενσωμάτωση και αξιοποίηση των νέων δυνατοτήτων που προσφέρει η τεχνολογία. Έτσι, γίνεται απαραίτητη η ανάλυση ολοένα και περισσότερων μηχανολογικών προϊόντων, επόμενο βήμα της οποίας είναι η βελτιστοποίηση, βάσει προδιαγραφών [38]. Οι μεταβαλλόμενες παράμετροι κατά τη βελτιστοποίηση ονομάζονται μεταβλητές σχεδιασμού (design variables) και τα χαρακτηριστικά προς τροποποίηση, στόχοι (objectives). Σε κάποιες εφαρμογές, μπορεί να υπάρχει η ανάγκη καθορισμού περισσότερων του ενός χαρακτηριστικών. Μάλιστα, οι επιπρόσθετοι στόχοι πολλές φορές είναι αντικρουόμενοι, δηλαδή η σύγκλιση προς έναν στόχο επιφέρει την απόκλιση από κάποιον άλλον. Επίσης, εκτός από την πολυπλοκότητα των στόχων, σε πραγματικές εφαρμογές επιβάλλονται περιορισμοί (constraints) οι οποίοι αυξάνουν περισσότερο τη δυσκολία του προβλήματος. Η μέθοδος της βελτιστοποίησης είναι το εργαλείο το οποίο ανιχνεύει τον χώρο των υποψήφιων λύσεων και οδηγεί στον εντοπισμό της βέλτιστης από όλες τις υποψήφιες λύσεις. Για αυτόν τον λόγο, απαιτείται ο καθορισμός ενός ή περισσότερων συναρτήσεων – στόχων (objective functions) οι οποίες πρέπει να ελαχιστοποιηθούν, των περιορισμών του προβλήματος καθώς και των μεταβλητών σχεδιασμού. Κατά την ανίχνευση του χώρου των υποψήφιων λύσεων, την επιλογή δηλαδή των βέλτιστων τιμών μεταβλητών σχεδιασμού, απαιτείται υποστήριξη και από το λεγόμενο λογισμικό αξιολόγησης, που αξιολογεί τις υποψήφιες λύσεις ως προς τους στόχους που τέθηκαν. Στην αεροδυναμική, ένα είδος βελτιστοποίησης που χρησιμοποιείται πολύ συχνά είναι η βελτιστοποίηση μορφής (shape optimization) η οποία στοχεύει στον προσδιο-

ρισμό της μορφής μιας γεωμετρίας που εμπλέκεται σε πρόβλημα ροής γύρω ή μέσα σε αυτή. Για παράδειγμα, για μια πτέρυγα αεροσκάφους οι μεταβλητές σχεδιασμού μπορούν να είναι τα σημεία που ορίζουν τη γεωμετρία της επιφάνειάς της, ενώ ως στόχος μπορεί να τεθεί η μεγιστοποίηση της άνωσης (L) ή η ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας (D). Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης μπορούν να διακριθούν σε στοχαστικές και αιτιοκρατικές μεθόδους [38]. Οι μέθοδοι στοχαστικής βελτιστοποίησης αναζητούν τη λύση με τυχαματικό τρόπο ή οργανωμένα τυχαία. Βασικό στοιχείο που οδήγησε στη γρήγορη και ευρεία επικράτησή τους ήταν το μη-μαθηματικό υπόβαθρό τους, η ευκολία με την οποία προσαρμόζονται σε κάθε νέο πρόβλημα αρκεί να υπάρχει διαθέσιμο λογισμικό αξιολόγησης κάθε υποψήφιας λύσης και, κυρίως, η δυνατότητά τους να μην εγκλωβίζονται σε τοπικά ακρότατα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα στοχαστικών αλγορίθμων είναι οι εξελικτικοί αλγόριθμοι (Evolutionary Algorithms-EA) [38][17]. Οι αλγόριθμοι αιτιοκρατικής βελτιστοποίησης βασίζονται στη γενικευμένη έννοια της παραγώγου της συνάρτησης-στόχου για τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης, δηλαδή της λύσης που ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί την τιμή της συνάρτησης-στόχου. Ενώ οι στοχαστικές μέθοδοι προσαρμόζονται εύκολα σε κάθε πρόβλημα, δεν ισχύει το ίδιο και για τις αιτιοκρατικές. Το πλεονέκτημα των αιτιοκρατικών μεθόδων είναι ότι μπορούν να συγκλίνουν γρήγορα στη βέλτιστη λύση, όμως, σε αντίθεση με τις στοχαστικές μεθόδους υπάρχει ο κίνδυνος να εντοπιστεί τοπικό ακρότατο, ανάλογα με το σημείο αρχικοποίησης. Το βασικό ζήτημα των μεθόδων αυτών είναι ο υπολογισμός των παραγώγων της συνάρτησης-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, γνωστών και ως παραγώγων ευαισθησίας (sensitivity derivatives). Ενδεικτικές μέθοδοι υπολογισμού των παραγώγων αυτών είναι οι εξής [38]:

- Πεπερασμένες Διαφορές (Finite Differences)
- Ευθεία Διαφόριση (Direct Differentiation)
- Μέθοδος των Μιγαδικών Μεταβλητών (Complex Variable Method)
- Μέθοδος της Αυτόματης Διαφόρισης (Automated Differentiation)
- Συζυγής Μέθοδος (Adjoint Method)

Κατά κύριο λόγο χρησιμοποιείται η Συζυγής Μέθοδος καθώς έχει το πολύ σημαντικό πλεονέκτημα ότι το υπολογιστικό κόστος είναι ανεξάρτητο του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού. Γίνεται εύκολα κατανοητή λοιπόν η σπουδαιότητα της μεθόδου αφού σε ένα σύγχρονο πρόβλημα αεροδυναμικής, ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού μπορεί να είναι ιδιαίτερα μεγάλος.

## 1.2 Ανάγκη για Παραμόρφωση Πλέγματος

Αναπόσπαστο στοιχείο της βελτιστοποίησης σε ένα πρόβλημα ρευστοδυναμικής, από τη στιγμή που τέτοιου είδους προβλήματα λύνονται με τη βοήθεια Ηλεκτρονικού Υπολο-

γιστή, αποτελεί η σωστή διακριτοποίηση του χωρίου υπολογισμού (γένεση υπολογιστικού πλέγματος) [37]. Η διαδικασία της βελτιστοποίησης, όμως, δεν πραγματοποιείται σε ένα βήμα, αλλά γίνεται επαναληπτικά, έως ότου βρεθεί η βέλτιστη λύση. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης τροποποιείται η γεωμετρία του αεροδυναμικού σώματος. Η δημιουργία νέου πλέγματος γύρω από τη γεωμετρία αποτελεί μια δαπανηρή διαδικασία, καθώς απαιτεί σημαντικό υπολογιστικό χρόνο. Δεδομένου ότι επιθυμείται η ελαχιστοποίηση του χρόνου βελτιστοποίησης, επιλέγεται η προσαρμογή του υπάρχοντος πλέγματος σε συμφωνία με την παραμόρφωση της γεωμετρίας, αφού έτσι μπορεί να εξασφαλισθεί ότι η δημιουργία του υπολογιστικού πλέγματος θα γίνεται μόνο μία φορά. Η προσαρμογή αυτή γίνεται σε κάθε χρονικό βήμα (για μη-μόνιμα προβλήματα) ή σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης (για προβλήματα αεροδυναμικού σχεδιασμού), ενώ μετά από κάθε προσαρμογή, η προηγούμενη λύση της ροής μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αρχική τιμή της νέας επίλυσης (εφόσον διατηρείται η τοπολογία του πλέγματος), ώστε να επιτευχθεί γρηγορότερη σύγκλιση. Επομένως, είναι σημαντική η ανάπτυξη μίας μεθόδου προσαρμοστικής παραμόρφωσης πλεγμάτων η οποία θα διατηρεί την ποιότητα του πλέγματος σε κάθε βήμα ενώ θα εκτελεί την προσαρμογή αυτή σε μικρό υπολογιστικό χρόνο. Ο στόχος μιας μεθόδου παραμόρφωσης πλεγμάτων είναι η διάδοση της μετατόπισης του επιφανειακού (οριακού) πλέγματος στο εσωτερικό του υπολογιστικού χωρίου, έτσι ώστε να μετατοπιστούν όλοι οι εσωτερικοί κόμβοι και να προσαρμοστεί το πλέγμα στη νέα γεωμετρία. Μια τέτοια μέθοδος είναι και η μέθοδος των αρμονικών συντεταγμένων, που μελετήθηκε κατά την εκπόνηση της διπλωματικής αυτής εργασίας και εφαρμόστηκε σε 3Δ αεροδυναμικά σώματα. Αποτελεί συνέχεια παλαιότερης διπλωματικής εργασίας [36] που αφορά τη χρήση των αρμονικών συντεταγμένων για την παραμετροποίηση 2Δ αεροδυναμικών σωμάτων.

### 1.3 Μέθοδοι Παραμόρφωσης Πλέγματος

Η ανάγκη αποφυγής της επαναπλεγματοποίησης και, αντ' αυτής, της προσαρμογής του πλέγματος στη νέα γεωμετρία, οδήγησε στην ανάπτυξη πολλών μεθόδων παραμόρφωσης πλέγματος. Οι μέθοδοι αυτές μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε μεθόδους ελεύθερης παραμόρφωσης μορφής, σε μεθόδους μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ), σε μεθόδους φυσικών αναλόγων, και σε αλγεβρικές μεθόδους.

Μία ιδέα που έχει αναπτυχθεί τελευταία στο σχεδιασμό μηχανολογικών αντικειμένων προέρχεται από το χώρο των κινουμένων σχεδίων και των ψηφιακών χαρακτήρων. Αυτή ονομάζεται, τεχνική της Ελεύθερης Παραμόρφωσης Μορφής (Free Form Deformation FFD) [29]. Στη συγκεκριμένη τεχνική, η τροποποίηση μιας γεωμετρίας δεν πραγματοποιείται με αλλαγή των γεωμετρικών παραμέτρων της, αλλά με παραμόρφωση του χώρου μέσα στον οποίο βρίσκεται το αεροδυναμικό σώμα, μέσω της παραμόρφωσης ενός πλέγματος ελέγχου. Η μέθοδος επιτρέπει τη συμβατή παραμόρφωση όχι μόνο του σχήματος του σώματος που είναι επιθυμητό να βελτιστοποιηθεί, αλλά και των υπολογιστικών πλεγμάτων που χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση με μεθόδους υπολογι-

στικής μηχανικής της κάθε υποψήφιας λύσης. Ουσιαστικά, η τεχνική της Ελεύθερης Παραμόρφωσης Μορφής συσχετίζει τις συντεταγμένες των σημείων που περιγράφουν το αεροδυναμικό σώμα με τις συντεταγμένες των σημείων του πλέγματος ελέγχου (οι μετατοπίσεις των οποίων αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού). Συγκεκριμένα, με την τεχνική της Ελεύθερης Παραμόρφωσης Μορφής, αντί ο χρήστης να ελέγχει απευθείας το σώμα, ελέγχει το χώρο που το περιέχει και ο οποίος ορίζεται με τη βοήθεια ενός πλέγματος ελέγχου. Αυτό έχει κατασκευαστεί σύμφωνα με το αεροδυναμικό σώμα που είναι επιθυμητό να παραμορφωθεί. Για να τροποποιηθεί το σώμα, ο χρήστης ή, ενδεχομένως, μια μέθοδος βελτιστοποίησης, μετατοπίζει τα σημεία ελέγχου του πλέγματος ελέγχου και ταυτόχρονα μετατοπίζονται όλα τα σημεία του αεροδυναμικού σώματος. Η Ελεύθερη Παραμόρφωση Μορφής προσφέρει ομαλό έλεγχο στην κίνηση του σώματος χρησιμοποιώντας λίγες παραμέτρους, ουσιαστικά μόνο τα σημεία ελέγχου του πλέγματος.

Όσον αφορά τις μεθόδους ΜΔΕ, επιλύονται ΜΔΕ έτσι ώστε να υπολογιστούν οι μετατοπίσεις του πλέγματος. Μία από τις ΜΔΕ που χρησιμοποιούνται είναι η εξίσωση Laplace [11].

Στην κατηγορία των φυσικών αναλόγων ανήκουν δύο μέθοδοι που χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά. Μία πρώτη μέθοδος παραμόρφωσης πλέγματος είναι η ελαστική μέθοδος [24] [25], κατά την οποία το υπολογιστικό πλέγμα αντιμετωπίζεται ως ένα ελαστικό στερεό σώμα και η παραμόρφωση του πλέγματος καθορίζεται από τους κλασικούς νόμους της ελαστικής θεωρίας των στερεών. Η ελαστική μέθοδος εμφανίζει σημαντική ευελιξία, αλλά χαρακτηρίζεται από υψηλό υπολογιστικό κόστος. Οι ελαστικές εξισώσεις εκφράζουν ισορροπία των ασκούμενων δυνάμεων και ροπών σε στοιχειώδες τμήμα του όγκου αυτού. Εκφράζουν επίσης το σχήμα του υπολογιστικού πλέγματος, που προέκυψε από τη μετατόπιση των επιφανειακών κόμβων. Μια άλλη μέθοδος είναι η μέθοδος των ελατηρίων [10], όπου ολόκληρο το υπολογιστικό χωρίο μοντελοποιείται ως ένα σύστημα αποτελούμενο από γραμμικά ή στρεπτικά ελατήρια, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους στους κόμβους του πλέγματος. Η παραμόρφωση του πλέγματος καθορίζεται από την επίλυση των εξισώσεων στατικής ισορροπίας του συστήματος, αφού οι οριακοί κόμβοι μετακινήθουν σύμφωνα με την παραμόρφωση της γεωμετρίας. Αν και η μέθοδος των γραμμικών ελατηρίων εφαρμόζεται εύκολα, σε μεγάλες μετατοπίσεις και σε πυκνά πλέγματα εμφανίζει προβλήματα στιβαρότητας, οδηγώντας στην εμφάνιση αρνητικών όγκων στο πλέγμα. Συγκεκριμένα, θεωρείται ότι η παραμόρφωση ενός στοιχείου του πλέγματος καθορίζεται από τα ελατήρια, τα οποία είναι τοποθετημένα είτε πάνω στους κόμβους, είτε στις ακμές που ενώνουν τους κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος. Η μετατόπιση των οριακών κόμβων του πλέγματος επηρεάζει τη μετατόπιση των εσωτερικών, η οποία υπολογίζεται από επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας δυνάμεων και ροπών στους κόμβους του πλέγματος.

Η τελευταία κατηγορία μεθόδων παραμόρφωσης πλέγματος είναι οι αλγεβρικές μέθοδοι. Αυτές καθορίζουν τη μετατόπιση κάθε πλεγματοειδούς κόμβου μέσω αλγεβρικών σχέσεων που εξαρτώνται από τη μετακίνηση των οριακών κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος και τη σχετική θέση του προς μετακίνηση κόμβου ως προς τα όρια. Οι

μέθοδοι της κατηγορίας αυτής έχουν αναπτυχθεί σημαντικά τα τελευταία χρόνια, λόγω της μεγάλης ταχύτητας με την οποία εκτελούν τη μετατόπιση του πλέγματος. Γενικά, οι αλγεβρικές τεχνικές μετακίνησης πλέγματος δεν λαμβάνουν υπόψη την τοπολογία του πλέγματος, δηλαδή τον τρόπο σύνδεσης των πλεγματοκλήμων, και για το λόγο αυτό μπορούν εύκολα και αξιόπιστα να εφαρμοστούν σε τυχαίους τύπους πλεγμάτων, δομημένα ή μη-δομημένα, με πολυεδρικά στοιχεία ή με κελιά μεγάλου λόγου επιμήκους (aspect ratio) πλεγμάτων συνεκτικών ρών. Μία τέτοια μέθοδος είναι η παρεμβολή με χρήση συναρτήσεων ακτινικής βάσης (RBF) [15], η οποία κατανέμει τη μετατόπιση των οριακών πλεγματοκλήμων στους εσωτερικούς, ανάλογα με την απόστασή τους από κάποια κέντρα. Η μέθοδος RBF μπορεί να εφαρμοστεί πολύ εύκολα ενώ παράγει πλέγματα καλής ποιότητας, που διατηρούν ικανοποιητικά την ορθογωνικότητα των κελιών κοντά στα όρια. Το βασικό μειονέκτημα της μεθόδου αυτής, στην κλασική της διατύπωση, είναι το γεγονός ότι έχει υψηλό υπολογιστικό κόστος.

Η μέθοδος των αρμονικών συντεταγμένων, που πραγματεύεται η διπλωματική εργασία αποτελεί μία μέθοδο Ελεύθερης Παραμόρφωσης Μορφής (FDD).

## 1.4 Στόχος και Δομή της Εργασίας

Στα περισσότερα προβλήματα βελτιστοποίησης, αναζητείται η βέλτιστη μορφή μιας γεωμετρίας. Αυτόματα τίθεται το πρόβλημα της παραμετροποίησης γεωμετρικών μορφών. Με την παραμετροποίηση, μια συνεχής γεωμετρία συναρτάται ενός μικρού πλήθους μεταβλητών ελέγχου, άρα η βελτιστοποίηση ταυτίζεται με την αναζήτηση του βέλτιστου συνόλου τιμών για αυτές τις μεταβλητές σε σχέση με τον προκαθορισμένο στόχο [38]. Στόχος της διπλωματικής εργασίας είναι να προγραμματίσει και να εφαρμόσει την παραμετροποίηση αυτή με χρήση της θεωρίας των αρμονικών συναρτήσεων με σκοπό τη μορφοποίηση 3D πλεγμάτων ελέγχου και, εν τέλει, την παραμόρφωση 3D αεροδυναμικών σωμάτων. Η παραπάνω διαδικασία θα ενταχθεί στη βελτιστοποίηση μορφών με αυτόματη προσαρμογή του υπολογιστικού πλέγματος. Η μελέτη έχει ήδη πραγματοποιηθεί για 2D αεροδυναμικά σώματα [36]. Η παρούσα διπλωματική εργασία εστιάζει στην ανάπτυξη και την εφαρμογή της μεθόδου σε 3D αεροδυναμικά σώματα.

Η δομή της εργασίας είναι η εξής:

- **Κεφάλαιο 2** : Ορίζονται οι βασικές έννοιες: βαρυκεντρικές και αρμονικές συντεταγμένες, κλωβός (αρμονικό χωρίο), σημεία ελέγχου (Knots) και αρμονική παραμόρφωση και παρουσιάζονται κάποιες βασικές ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων. Στη συνέχεια, αναπτύσσεται η μέθοδος παραμετροποίησης του 3D χώρου με χρήση της θεωρίας των αρμονικών συναρτήσεων. Παρουσιάζονται επιπλέον τα κύρια βήματα της διαδικασίας υλοποίησης του ελέγχου μορφής με χρήση της αρμονικής παραμόρφωσης καθώς και η τεχνική των δύο κλωβών.
- **Κεφάλαιο 3** : Παρουσιάζονται εφαρμογές της μεθόδου σε διαφορετικού τύπου

υπολογιστικά πλέγματα και γίνεται αυθαίρετη παραμόρφωση αυτών χωρίς να υπάρχει κάποια εφαρμογή σε διαδικασία βελτιστοποίησης.

- **Κεφάλαιο 4** : Παρουσιάζονται κάποιες βασικές πληροφορίες για τους εξελικτικούς αλγορίθμους και για τον τρόπο συνδυασμού του λογισμικού βελτιστοποίησης EASY με τη μέθοδο των αρμονικών συντεταγμένων. Έπειτα εφαρμόζεται η προτεινόμενη μέθοδος για τη βελτιστοποίηση μορφής πτέρυγας αεροσκάφους, αγωγού σχήματος U με χρήση εξελικτικών αλγορίθμων και αναλύονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν.
- **Κεφάλαιο 5** : Περιγράφεται η συνεχής συζυγής μέθοδος και η εφαρμογή της σε συνεργασία με τη μέθοδο των αρμονικών συντεταγμένων. Γίνεται εφαρμογή τόσο σε αγωγό σχήματος U όσο και στο γενικευμένο μοντέλο αυτοκινήτου DrivAer και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης.
- **Κεφάλαιο 6** Παρουσιάζεται μια σύνοψη της διπλωματικής αυτής εργασίας, τα συμπεράσματα που προέκυψαν και προτάσεις για μελλοντική έρευνα.



## Κεφάλαιο 2

# Αρμονικές Συντεταγμένες σε 3Δ

## Χωρία

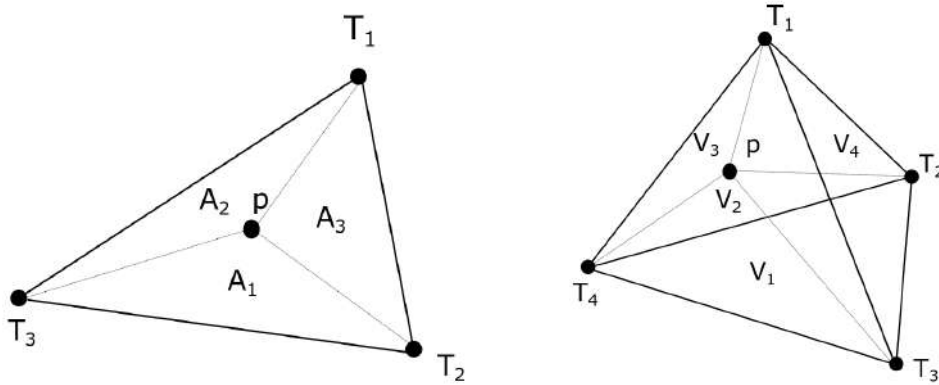
Οι αρμονικές συντεταγμένες έχουν όλες τις ιδιότητες των βαρυκεντρικών συντεταγμένων καθώς και των αρμονικών συναρτήσεων και έτσι αποτελούν ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η θεωρία των βαρυκεντρικών συντεταγμένων, οι βασικοί ορισμοί και το μαθηματικό υπόβαθρο των αρμονικών συναρτήσεων και αναλύονται τα βήματα της μεθόδου παραμετροποίησης και παραμόρφωσης 3Δ υπολογιστικών πλεγμάτων με χρήση αρμονικών συντεταγμένων.

### 2.1 Ορισμοί

#### Βαρυκεντρικές Συντεταγμένες

Στη γεωμετρία, οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες αντιστοιχούν σε βάρη τοποθετημένα στις κορυφές ενός τριγώνου (2Δ) ή ενός τετραέδρου (3Δ) (Σχήμα 2.1) [23]. Αυτά τα βάρη προσδιορίζουν ένα σημείο  $p$ , το οποίο ορίζεται ως το κέντρο βάρους. Τα βάρη αυτά χρησιμοποιούνται για την παρεμβολή των σημείων που βρίσκονται στο εσωτερικό ή το περίγραμμα του τετραέδρου. Με τον όρο παρεμβολή, εννοείται η συσχέτιση των εσωτερικών σημείων του τετραέδρου με τις τιμές των κορυφών που είναι ήδη γνωστές.

## Ιδιότητες των Βαρυκεντρικών Συντεταγμένων



**Σχήμα 2.1:** Οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του σημείου  $P$  στις 2 διαστάσεις (τρίγωνο  $T_1, T_2, T_3$ ) και στις 3 διαστάσεις (τετράεδρο  $T_1, T_2, T_3, T_4$ )

Πιο αναλυτικά, στις  $2\Delta$ , έστω ότι έχουμε ένα τρίγωνο με κορυφές  $T_1, T_2, T_3$  και στις  $3\Delta$ , ένα τετράεδρο με κορυφές  $T_1, T_2, T_3, T_4$ . Οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες δίνουν τη δυνατότητα σε κάθε σημείο  $p(x, y)$  του τριγώνου ή  $p(x, y, z)$  του τετραέδρου να μπορεί να εκφραστεί μοναδικά ως:

$$p = \sum_i b_i(p)T_i \quad (2.1)$$

με  $i = 1, 2, 3$  για τρίγωνο και  $i = 1, 2, 3, 4$  για τετράεδρο. Στην παραπάνω σχέση ισχύει ότι  $b_i = \frac{A_j}{\sum_j A_j}$  όπου  $A_j$  το εμβαδόν του χωρίου για κάθε κορυφή του τριγώνου και  $b_i = \frac{V_j}{\sum_j V_j}$  όπου  $V_j$  ο όγκος του χωρίου για κάθε κορυφή για τετράεδρου, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1.

Ισχύει ότι το άθροισμα των βαρών σε ένα τρίγωνο ή τετράεδρο ισούται με τη μονάδα:

$$\sum_i b_i(p) = 1$$

## Αρμονικές Συντεταγμένες

Οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες έχουν εξαιρετικές ιδιότητες και για αυτό το λόγο, η γενίκευσή τους από τρίγωνα ή τετράεδρα σε πολύγωνα ή πολύεδρα έχει γίνει αντικείμενο έντονης έρευνας. Μία από τις γενικεύσεις των βαρυκεντρικών συντεταγμένων είναι οι αρμονικές συντεταγμένες (harmonic coordinates), οι οποίες συνδυάζουν τις ιδιότητες των βαρυκεντρικών συντεταγμένων και των αρμονικών συναρτήσεων. Η ιδέα αυτή παρουσιάστηκε για πρώτη φορά το 2006 από την PIXAR [16] [28] και αφορούσε έλεγχο κινουμένων σχεδίων. Στη διπλωματική αυτή εργασία γίνεται επέκταση της μεθόδου σε 3D και εφαρμογή της στη βελτιστοποίηση μορφής 3D αεροδυναμικών σωμάτων. Η μέθοδος αυτή έχει τη δυνατότητα να μετατοπίσει όλο το υπολογιστικό πλέγμα, τόσο τα επιφανειακά σημεία όσο και τα εσωτερικά, μετακινώντας μόνο τα σημεία ελέγχου του χώρου που το περιβάλλει.

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, η τεχνική της ελεύθερης παραμόρφωσης μορφής παραμορφώνει πρώτα το χώρο μέσα στον οποίο βρίσκεται το αεροδυναμικό σώμα, μέσω της παραμόρφωσης ενός πλέγματος ελέγχου και, στη συνέχεια, το υπολογιστικό πλέγμα. Για να γίνει αυτό, δημιουργείται ένα χωρίο και το πλέγμα του, το οποίο περικλείει το αεροδυναμικό σώμα ή το τμήμα του αεροδυναμικού σώματος προς βελτιστοποίηση. Το εντός αυτού πλέγμα ονομάζεται **κλωβός** (cage) ή **αρμονικό χωρίο** (πλέγμα) [23] και οι έννοιες αυτές είναι ταυτόσημες. Είναι ένα πολύεδρο το οποίο αποτελείται από ένα μη-δομημένο πλέγμα τετραέδρων. Στο αρμονικό χωρίο επιλύονται οι εξισώσεις Laplace έτσι ώστε κάθε κόμβος του να αποκτήσει τόσες αρμονικές συντεταγμένες, όσες και τα σημεία ελέγχου. Τα **σημεία ελέγχου** ταυτίζονται με τις κορυφές του πολύεδρου, χωρίς όμως αυτό να σημαίνει ότι κάθε κορυφή είναι και σημείο ελέγχου. Στους κόμβους της επιφάνειας, τοποθετούνται οριακές συνθήκες τύπου Dirichlet σύμφωνα με τη θεωρία των αρμονικών συναρτήσεων. Οι αρμονικές συντεταγμένες των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος προκύπτουν από την επίλυση του κλασικού προβλήματος Dirichlet χρησιμοποιώντας την εξίσωση Laplace ως βασική ΜΔΕ με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες. Ο υπολογισμός των αρμονικών συντεταγμένων των εσωτερικών σημείων γίνεται αριθμητικά, καθώς δεν έχει βρεθεί αναλυτική λύση της εξίσωσης Laplace για τυχαίο πολύγωνο ή πολύεδρο. Αυτό βέβαια δεν αποτελεί πρόβλημα καθώς η παραπάνω διαδικασία πραγματοποιείται μία μόνο φορά, αφού τα εσωτερικά σημεία έχουν ήδη εκφραστεί ως γραμμικοί συνδυασμοί των αρμονικών τους συντεταγμένων και της θέσης των κορυφών, οπότε οι νέες θέσεις υπολογίζονται γρήγορα σε περίπτωση που μετακινήθούν οι κορυφές. Προφανώς, δεν είναι απαραίτητο να επιλυθεί η εξίσωση Laplace για κάποιο σημείο ελέγχου που δεν πρόκειται να μετακινήθει. Μέσω παρεμβολής στο αρμονικό χωρίο, τα εσωτερικά σημεία εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των βαρών, γεγονός που καθιστά ευκολότερη την εύρεση της νέας τους θέσης, εάν τα σημεία ελέγχου μετακινήθούν. Ο τρόπος αυτός, από δω και στο εξής θα αναφέρεται ως αρμονική παραμόρφωση ή έλεγχος μορφής. Τελικά, η μετατόπιση των κόμβων του CFD πλέγματος ελέγχεται αποκλειστικά από τις κορυφές (σημεία ελέγχου) του αρμονικού χωρίου, εξοικονομώντας σημαντικό υπολογιστικό χρόνο. Έτσι προκύπτει ένα βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου, όπως θα φανεί και στη συνέχεια, η ανεξαρτησία της

από τον τρόπο κατασκευής του CFD πλέγματος που μετακινεί.

Σε ορισμένα αεροδυναμικά σώματα, στα οποία η βελτιστοποίηση γίνεται για ένα συγκεκριμένο τμήμα του σώματος, δηλαδή το αρμονικό χωρίο τέμνει το υπολογιστικό πλέγμα, καθώς και για να διατηρηθεί η ποιότητα του πλέγματος δημιουργείται ένα σύστημα αρμονικών χωρίων, όπου το εξωτερικό αρμονικό χωρίο περικλείει και το εσωτερικό και το αεροδυναμικό σώμα. Ονομάζεται **σύστημα των δύο κλωβών** και θα παρουσιαστεί εκτενώς στη συνέχεια. Η τεχνική αυτή προτάθηκε πρώτη φορά στη διπλωματική εργασία [36] για 2Δ πλέγματα και θα επεκταθεί εδώ στις 3Δ.

## 2.2 Εισαγωγή στη Θεωρία των Αρμονικών Συναρτήσεων

Όπως προαναφέρθηκε η μέθοδος παραμετροποίησης με χρήση αρμονικών συντεταγμένων χρησιμοποιεί την εξίσωση Laplace, της οποίας οι λύσεις καλούνται αρμονικές συναρτήσεις. Στη συνέχεια, παρατίθενται κάποιοι βασικοί ορισμοί και ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων. Η 3Δ εξίσωση Laplace ορίζεται ως εξής:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (2.2)$$

όπου  $\nabla^2$  ο διαφορικός τελεστής της εξίσωσης Laplace.

Μία συνάρτηση καλείται αρμονική, αν και μόνο αν είναι λύση της εξίσωσης Laplace σε ένα χωρίο  $C \in \mathbb{R}^n$ .

### Ιδιότητες των Αρμονικών Συναρτήσεων

Έστω αρμονικό χωρίο  $C$  με  $M$  σημεία ελέγχου και  $p(x,y,z)$  τυχαίο σημείο του χωρίου. Οι αρμονικές συναρτήσεις  $h_i, i = 1, \dots, M$  πρέπει να ικανοποιούνται εσωτερικά του χωρίου και να ορίζονται για καθεμιά από τις  $T_i$  κορυφές. Οι συναρτήσεις αυτές λοιπόν, έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες [16] [28] [23]:

1. Η αρμονική συντεταγμένη της κάθε κορυφής  $T_j$  ως προς την ίδια την κορυφή ισούται με τη μονάδα ενώ ως προς κάθε άλλη κορυφή ισούται με μηδέν.

$$h_i(T_j) = \delta_i^j$$

όπου  $\delta_i^j$  το σύμβολο του Kronecker, το οποίο ισούται με τη μονάδα όταν  $i = j$  και με το μηδέν όταν  $i \neq j$ .

2. Το άθροισμα όλων των αρμονικών συντεταγμένων από κάθε κορυφή, σε ένα σημείο  $p$ , ισούται με τη μονάδα.

$$\sum_{i=1}^M h_i(p) = 1$$

3. Οι αρμονικές συντεταγμένες είναι πάντα θετικές.

$$h_i(p) \geq 0$$

4.  $h_i(p)$  τουλάχιστον μια φορά παραγωγίσιμη στα όρια.

5.  $h_i(p)$  τουλάχιστον δις παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του χωρίου.

6. Αποκτούν τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή τους στα όρια του χωρίου.

7. Για γνωστές τιμές της αρμονικής συνάρτησης στα όρια του χωρίου, υπάρχει μία και μοναδική αρμονική συνάρτηση που μπορεί να οριστεί για όλα τα σημεία του χωρίου.

Στο εσωτερικό του χωρίου ισχύει ότι:

$$\nabla^2(h_i(p)) = 0, \forall p \in C \quad (2.3)$$

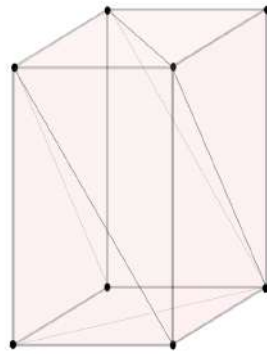
Επομένως η συνάρτηση  $h_i(p)$  ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στο εσωτερικό του χωρίου.

## 2.3 Μέθοδος Παραμετροποίησης με Αρμονικές Συντεταγμένες

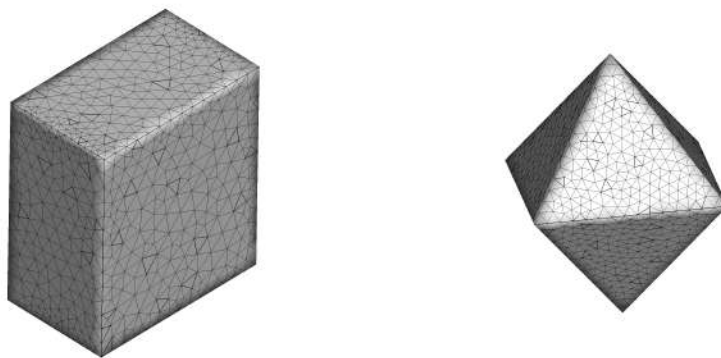
Αφού εισήχθησαν οι βασικοί ορισμοί, θα παρουσιαστούν τα κύρια βήματα της μεθόδου. Αρχικά κατασκευάζεται το αρμονικό χωρίο και το πλέγμα του, το οποίο περικλείει το αεροδυναμικό σώμα που θα βελτιστοποιηθεί. Στο αρμονικό χωρίο επιλύονται οι εξισώσεις Laplace και προκύπτουν οι αρμονικές συντεταγμένες των εσωτερικών κόμβων του, οι οποίες είναι τόσες όσες και τα σημεία ελέγχου. Έπειτα γίνεται ο υπολογισμός των αρμονικών συντεταγμένων των κόμβων του CFD πλέγματος μέσω παρεμβολής. Η διαδικασία αυτή γίνεται μία φορά και τελικά αποθηκεύονται οι υπολογισμένες αρμονικές συντεταγμένες. Τέλος, ακολουθεί η παραμόρφωση του αρμονικού χωρίου όποτε αυτό χρειάζεται, όπως για παράδειγμα σε μία διαδικασία βελτιστοποίησης.

### 2.3.1 Δημιουργία Αρμονικού Χωρίου και Πλέγματος

Το πρώτο βήμα της μεθόδου είναι η δημιουργία του 3D αρμονικού χωρίου, το οποίο περικλείει το προς βελτιστοποίηση σώμα. Είναι ένα μη-δομημένο πλέγμα τετραεδρικών στοιχείων καθώς η διπλωματική αυτή εργασία εστιάζει σε 3D εφαρμογές. Έστω λοιπόν, ότι το αρμονικό χωρίο είναι ένα 3D πολύεδρο (Σχήμα 2.2). Όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2, η επιφάνεια του χωρίου είναι χωρισμένη σε τρίγωνα. Στη γενική περίπτωση κάθε ένα από αυτά τα τρίγωνα στην επιφάνεια του αρμονικού χωρίου αποτελείται από πολύ περισσότερα τριγωνικά στοιχεία (Σχήμα 2.3), απλώς για ευκολότερη ανάλυση της μεθόδου, στο σχήμα 2.2 χρησιμοποιούνται δύο. Όπως προαναφέρθηκε, οι αρμονικές συντεταγμένες αποτελούν γενίκευση των βαρυκεντρικών, οι οποίες έχουν εφαρμογή μόνο σε τρίγωνα (2Δ) ή τετράεδρα (3Δ). Για αυτό το λόγο το αρμονικό χωρίο πρέπει να αποτελείται αποκλειστικά από τετραεδρικά στοιχεία.



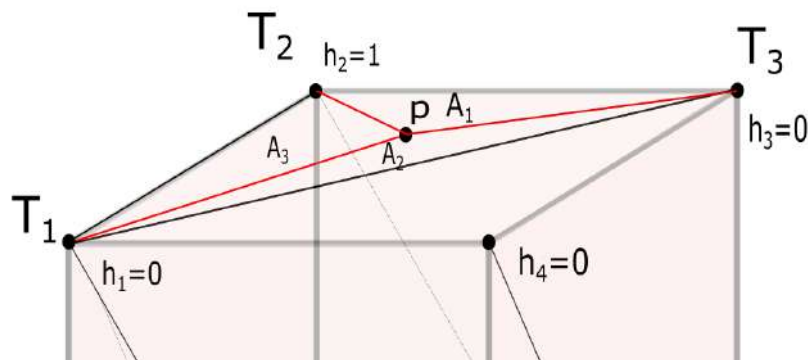
Σχήμα 2.2: Ένα απλό 3D αρμονικό χωρίο με 8 σημεία ελέγχου-κορυφές.



Σχήμα 2.3: Δύο τυχαία αρμονικά χωρία. Στο αριστερό σχήμα οι ορθογωνικές πλευρές είναι υποχρεωτικά διαιρεμένες σε τρίγωνα, καθώς όπως αναφέρθηκε η βάση της μεθόδου είναι η θεωρία των βαρυκεντρικών συντεταγμένων που εφαρμόζεται μόνο σε τριγωνικές επιφάνειες.

### 2.3.2 Αριθμητική Επίλυση Εξίσωσης Laplace

Οι αρμονικές συντεταγμένες  $h_i(p)$  κάθε κόμβου  $p$  του χωρίου είναι οι τιμές που προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης Laplace για κάθε σημείο ελέγχου, με συνθήκες τύπου Dirichlet στα όρια του χωρίου. Από τις βασικές ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων προκύπτει ότι κάθε σημείο ελέγχου, στο οποίο επιλύεται η εξίσωση Laplace, παίρνει την τιμή  $h_i(T_i) = 1$  ενώ όλα τα υπόλοιπα σημεία ελέγχου παίρνουν την τιμή  $h_i(T_j) = 0$ , όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.4. Στους κόμβους που βρίσκονται στην επιφάνεια του πλέγματος επιβάλλονται οριακές συνθήκες σύμφωνα με τη θεωρία των βαρυκεντρικών συντεταγμένων όπως αυτή παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2.1.



**Σχήμα 2.4:** Συνθήκες Dirichlet εφαρμοσμένες σε τυχαίο κόμβο στην επιφάνεια του αρμονικού χωρίου, κατά την επίλυση της εξίσωσης Laplace σε τυχαίο σημείο ελέγχου  $T_2$ . Το σημείο αυτό παίρνει την τιμή  $h_i(T_i) = 1$  ενώ όλα τα υπόλοιπα σημεία ελέγχου παίρνουν την τιμή  $h_i(T_j) = 0$ .

Τα βάρη των επιφανειακών κόμβων υπολογίζονται από την ακόλουθη σχέση:

$$b_i = \frac{A_i}{A_1 + A_2 + A_3} \quad (2.4)$$

όπου  $i = 1, 2, 3$ .

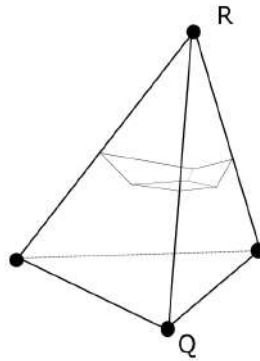
Συγκεκριμένα, για κάθε επιφανειακό κόμβο υπολογίζονται τα 3 βάρη  $b_i$  από τα εμβαδά που σχηματίζονται με τις κορυφές του τριγώνου και πολλαπλασιάζονται με τις αρμονικές συντεταγμένες  $h_i(T)$  που έχουν επιβληθεί στις κορυφές. Έτσι, η οριακή συνθήκη για το σημείο  $p$  είναι:

$$BC(p) = h_1b_1 + h_2b_2 + h_3b_3 \quad (2.5)$$

Πρακτικά η σχέση αυτή υποδηλώνει ότι η οριακή συνθήκη που θα τοποθετηθεί είναι ένα από τα τρία βάρη πολλαπλασιασμένο με την αντίστοιχη αρμονική συντεταγμένη της

κορυφής, καθώς οι αρμονικές συντεταγμένες των άλλων δύο κορυφών είναι ίσες με μηδέν.

Αφού οριστούν οι οριακές συνθήκες για κάθε επιφανειακό κόμβο, ακολουθεί η επίλυση της εξίσωσης Laplace σε όλο το αρμονικό χωρίο. Η διακριτοποίηση της εξίσωσης Laplace σε μη-δομημένα πλέγματα γίνεται με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων χρησιμοποιώντας κεντροκομβικό μοντέλο διαχείρισης. Αρχικά ορίζονται οι όγκοι ελέγχου που χρησιμοποιούνται για την ολοκλήρωση των εξισώσεων Laplace. Για να σχηματιστεί ο όγκος με τον οποίο συνεισφέρει ένα τετραεδρικό στοιχείο στον πεπερασμένο όγκο που ορίζεται με κέντρο ένα κόμβο του (έστω  $R$ , Σχήμα 2.5), ενώνονται με τεθλασμένη γραμμή-επιφάνεια οι μεσοκόμβοι κάθε ακμής του στοιχείου που συντρέχει στον κόμβο αυτό, με τα βαρύκεντρα των κόμβων των δύο πλευρών του στοιχείου που έχουν κοινή την ακμή αυτή, και με το βαρύκεντρο των κόμβων του στοιχείου [35] [32].



**Σχήμα 2.5:** Τρόπος σχηματισμού όγκου ελέγχου γύρω από έναν κόμβο που ανήκει σε ένα τετράεδρο. Παρουσιάζεται ένα τμήμα του όγκου ελέγχου αφού η πλήρης μορφή του προκύπτει συσσωρεύοντας ίδιου ή διαφορετικού τύπου στοιχεία γύρω από τον κόμβο  $R$ .

Η εξίσωση Laplace, γραμμένη εδώ για το πεδίο των  $U$ , που πρέπει να διακριτοποιηθεί στο χωρίο είναι:

$$\nabla^2 U = 0 \quad (2.6)$$

Μετά από ολοκλήρωσή της στον όγκο ελέγχου  $\Omega$  κάθε κόμβου  $R$ :

$$\int_{\Omega} \nabla^2 U d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla U) d\Omega = 0 \quad (2.7)$$

Με εφαρμογή του θεωρήματος Green-Gauss, το χωρικό ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης μετατρέπεται σε επιφανειακό το οποίο υπολογίζεται στο όριο του όγκου ελέγ-



χου  $S$ , δηλαδή:

$$\int_S \nabla U \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (2.8)$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα ξαναγράφεται, σε διακριτή μορφή, ως άθροισμα επιμέρους όρων και στην ειδική περίπτωση όπου το υπολογιστικό χωρίο αποτελείται μόνο από τετράεδρα μπορεί να γραφεί και ως:

$$\sum_{i=1}^Z \nabla U_i \cdot \vec{n} \Delta S_i = 0 \quad (2.9)$$

όπου  $Z$  ο αριθμός των πλευρών.

Τα διανύσματα κλίσης  $\nabla U$  υπολογίζονται σε κάθε τετράεδρο του υπολογιστικού πλέγματος σύμφωνα με την παραδοχή  $P^1$  των πεπερασμένων στοιχείων. Η παραδοχή αυτή υποθέτει γραμμική κατανομή των μεταβλητών μέσα στο τετράεδρο και έτσι η παράγωγος, θεωρείται σταθερή. Οι παράγωγοι λοιπόν υπολογίζονται σε μία ακμή  $j$  (εστω αυτή που ενώνει τους κόμβους  $R$  και  $Q$ ) και χρησιμοποιείται η σχέση:

$$(\nabla U_{RQ})_j = \frac{1}{2}[(\nabla U_R)_j + (\nabla U_Q)_j] - \frac{1}{2}[(\nabla U_R)_j + (\nabla U_Q)_j] \cdot \vec{n} - \frac{U_{j,Q} - U_{j,R}}{\overrightarrow{RQ}} \cdot \vec{n} \quad (2.10)$$

Το σύστημα διακριτοποιημένων εξισώσεων επιλύεται με τη σημειακά πεπλεγμένη μέθοδο Jacobi με εσωτερικές επαναλήψεις ανανέωσης σε κάθε βήμα της.

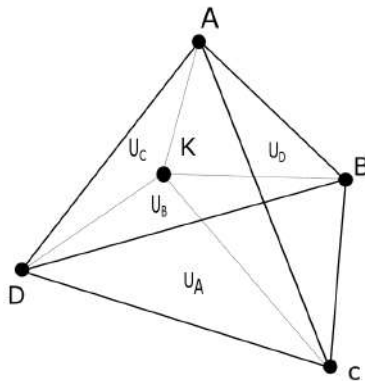
Μετά την εφαρμογή της παραπάνω διαδικασίας, προκύπτουν οι αρμονικές συντεταγμένες  $h_i(p)$  κάθε κόμβου του πλέγματος  $p$ , μια από κάθε σημείο ελέγχου  $T_i$ . Έτσι συνεπάγεται ότι κάθε κόμβος του αρμονικού χωρίου (συμπεριλαμβανομένων των σημείων ελέγχου) θα έχει  $M$  αρμονικές συντεταγμένες, μία από κάθε σημείο ελέγχου, και μπορεί να εκφραστεί ως:

$$p = \sum_{i=1}^M h_i(p) T_i$$

Η μέθοδος αυτή, μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε πολύεδρο, του οποίου τα σημεία ελέγχου θα σχηματίζουν τριγωνικές επιφάνειες, για λόγους που τονίστηκαν παραπάνω.

### 2.3.3 Υπολογισμός των Αρμονικών Συντεταγμένων του CFD Πλέγματος

Αφού υπολογίστηκαν οι αρμονικές συντεταγμένες στους κόμβους του αρμονικού χωρίου, ακολουθεί ο υπολογισμός των αρμονικών συντεταγμένων των κόμβων του CFD πλέγματος μέσω παρεμβολής στο αρμονικό χωρίο. Για να γίνει αυτό πρέπει να ελεγχθεί σε ποιο τετραεδρικό στοιχείο του αρμονικού πλέγματος ανήκει ο κόμβος του CFD και να υπολογισθούν οι αρμονικές συντεταγμένες του κόμβου αυτού ως προς τις κορυφές του αρμονικού χωρίου. Για να πραγματοποιηθεί ο παραπάνω έλεγχος υπολογίζονται και αθροίζονται οι όγκοι που σχηματίζει ο κόμβος του CFD πλέγματος που ελέγχεται, με την κάθε πλευρά του τετραέδρου. Εάν ο όγκος αυτός ισούται με τον όγκο του τετραέδρου σημαίνει ότι ο κόμβος ανήκει στο τετραέδρο. Στη συνέχεια υπολογίζονται οι αρμονικές συντεταγμένες των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος με την ακόλουθη διαδικασία. Έστω ένα τετραεδρικό στοιχείο ABCD του αρμονικού χωρίου και έστω κόμβος  $K$  του CFD πλέγματος. Οι αρμονικές συντεταγμένες  $h_i(K)$  του κόμβου  $K$  για  $i = 1, \dots, M$  σημεία ελέγχου, προκύπτουν ως ο όγκος του τετραέδρου που σχηματίζεται από το σημείο  $K$  και τις άλλες τρεις κορυφές (πλην της  $i$ 'οστής), διαιρεμένος με τον συνολικό όγκο του τετραέδρου ABCD και πολλαπλασιασμένος επί την αρμονική συντεταγμένη  $h_i$  κάθε κορυφής, όπως αυτή προέκυψε από την επίλυση των εξισώσεων Laplace στο αρμονικό χωρίο.



**Σχήμα 2.6:** Εύρεση των αρμονικών συντεταγμένων τυχαίου κόμβου  $K$  του υπολογιστικού χωρίου με την παρεμβολή των κόμβων του αεροδυναμικού σώματος στον κλωβό.

Συγκεκριμένα, ισχύει ότι:

$$h_i(K) = h_i(A)V_A + h_i(B)V_B + h_i(C)V_C + h_i(D)V_D \quad (2.11)$$

όπου:

$$V_A = \frac{U_A}{\text{volume of } (ABCD)}$$

$$V_B = \frac{U_B}{\text{volume of } (ABCD)}$$

$$V_C = \frac{U_C}{\text{volume of } (ABCD)}$$

$$V_D = \frac{U_D}{\text{volume of } (ABCD)}$$

όπου προφανώς ισχύει ότι:

$$V_A + V_B + V_C + V_D = 1$$

Συνεπώς, κάθε κόμβος  $K(x, y, z)$  του CFD πλέγματος μπορεί πια να εκφραστεί μοναδικά ως συνάρτηση των βαρών  $h_i$  :

$$K = \sum_{i=1}^M h_i(K)T_i$$

Η διαδικασία αυτή είναι η πιο ακριβή υπολογιστικά από όλες τις διαδικασίες της μεθόδου ιδιαίτερα σε περιπτώσεις όπου το υπολογιστικό πλέγμα είναι πολύ μεγάλο, όπως για παράδειγμα το υπολογιστικό πλέγμα ενός αυτοκινήτου. Αφού αποθηκευτούν οι αρμονικές συντεταγμένες των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος η παραπάνω διαδικασία δεν χρειάζεται να επαναληφθεί. Ακολουθεί η παραμόρφωση του αεροδυναμικού σώματος, η οποία γίνεται όποτε χρειαστεί, όπως για παράδειγμα, σε μια διαδικασία βελτιστοποίησης.

### 2.3.4 Παραμόρφωση Αεροδυναμικού Σώματος

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι, αν τα σημεία ελέγχου μετακινηθούν σε θέσεις  $T'_i$  προκύπτει ότι η νέα θέση του σημείου  $K$  δίνεται από τη σχέση:

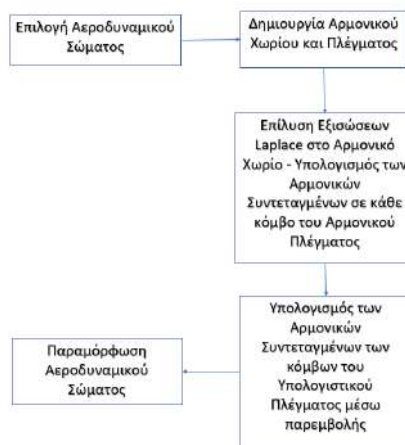
$$K' = \sum_{i=1}^M h_i(K) T'_i \quad (2.12)$$

Τελικά, η συνολική μετατόπιση του σημείου  $K$  είναι:

$$\delta \vec{S}_K = \sum_{i=1}^M h_i(K) \delta \vec{S}_{T_i} \quad (2.13)$$

Από την παραπάνω σχέση βγαίνει το συμπέρασμα ότι για τον υπολογισμό της μετατόπισης ενός σημείου  $K$  του υπολογιστικού πλέγματος, χρειάζονται μόνο οι αρμονικές συντεταγμένες του σημείου από το κάθε σημείο ελέγχου και η μετατόπιση του αντίστοιχου σημείου ελέγχου. Έτσι, όταν ο χρήστης θέλει να παραμορφώσει το αεροδυναμικό σώμα (CFD πλέγμα), ουσιαστικά παραμορφώνει το αρμονικό χωρίο  $C$  μετακινώντας τα σημεία ελέγχου και δημιουργεί έναν καινούριο αρμονικό χωρίο  $C'$ . Το νέο αυτό, χωρίο δεν χρειάζεται φυσικά να δημιουργηθεί καθώς το μόνο που χρειάζεται στη μέθοδο είναι η μετατόπιση των σημείων ελέγχου του αρχικού χωρίου.

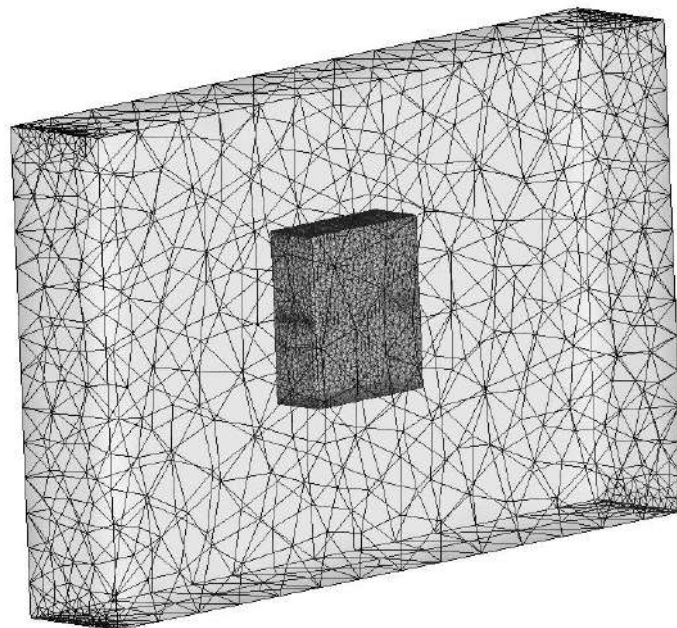
Στο παράρτημα **A'** παρουσιάζεται συνοπτικά ο αλγόριθμος υλοποίησης της μεθόδου. Τα βήματα της μεθόδου όπως αναλύθηκαν παραπάνω, παρουσιάζονται συνοπτικά στο σχήμα 2.7 :



Σχήμα 2.7: Τα βήματα της μεθόδου των αρμονικών συντεταγμένων.

## 2.4 Η Τεχνική των Δύο Κλωβών

Σε κάποια αεροδυναμικά σώματα που η παραμόρφωση είναι τοπική, δημιουργείται ασυνέχεια κατά τη μετάβαση στο τμήμα που μένει ανέπαφο από την επίδραση του αρμονικού χωρίου. Απαιτούμενο κατά τους υπολογισμούς είναι να υπάρχει ομαλότητα του πλέγματος κατά τη μετάβαση στο τμήμα το οποίο μένει ανέπαφο από την επίδραση του αρμονικού χωρίου, γιατί αλλιώς υπάρχει ο κίνδυνος να δημιουργηθούν μη-αποδεκτά στοιχεία πλέγματος.



**Σχήμα 2.8:** Δύο κλωβοί τοποθετημένοι έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η ομαλότητα του πλέγματος κατά τη μετάβαση στο τμήμα το οποίο μένει ανέπαφο από την επίδραση του εσωτερικού αρμονικού χωρίου.

Έτσι δημιουργείται ένα νέο χωρίο, το οποίο πλέον όμως αποτελείται από την ένωση δύο αρμονικών χωρίων, ενός εσωτερικού και ενός εξωτερικού. Η ιδέα αυτή προτάθηκε για πρώτη φορά στη διπλωματική εργασία [36] για 2Δ εφαρμογές και εδώ επεκτείνεται στις 3Δ. Τα εξωτερικά σημεία τοποθετούνται έτσι ώστε να μην περιλαμβάνουν εξ ολοκλήρου το CFD πλέγμα, διότι είναι επιθυμητό τα όριά του να παραμένουν ακίνητα. Για να επιτευχθεί αυτό, είναι αναγκαίο να μην υπάρξει μετακίνηση των σημείων ελέγχου που βρίσκονται πάνω στις εξωτερικές ακμές του εξωτερικού κλωβού. Συνεπώς τα σημεία ελέγχου τα οποία είναι και υπεύθυνα για τη μετατόπιση του αεροδυναμικού σώματος βρίσκονται στον εσωτερικό κλωβό.

Έστω  $M'$  σημεία ελέγχου με  $M$  εσωτερικά σημεία και  $\Lambda$  εξωτερικά. Τα  $\Lambda$  εξωτερικά δεν πρέπει να μετακινήθουν όπως προαναφέρθηκε:

$$\delta \vec{S} = 0 \quad (2.14)$$

Η συνολική μετατόπιση κάθε κόμβου  $K$  του υπολογιστικού πλέγματος δίνεται από τη σχέση:

$$\delta \vec{S}_K = \sum_{i=1}^{M'} h_i(K) \delta \vec{S}_{T_i} \quad (2.15)$$

η οποία λαμβάνοντας υπόψη τους δύο κλωβούς γίνεται:

$$\delta \vec{S}_K = \sum_{i=1}^M h_i(K) \delta \vec{S}_i + \sum_{i=M+1}^{M'} h_i(K) \delta \vec{S}_i \quad (2.16)$$

Όμως:

$$\sum_{i=M+1}^{M'} h_i(K) \delta \vec{S}_i = 0$$

Επομένως δεν χρειάζεται να υπολογιστούν οι αρμονικές συντεταγμένες των κόμβων του CFD πλέγματος από τα  $\Lambda$  σημεία ελέγχου, αφού δεν θα χρησιμοποιηθούν ποτέ. Έτσι υπολογίζονται οι αρμονικές συντεταγμένες των κόμβων μόνο από τα  $M$  εσωτερικά σημεία ελέγχου εξοικονομώντας υπολογιστικό χρόνο. Έτσι, οι αρμονικές συντεταγμένες των κόμβων που βρίσκονται μέσα στο εσωτερικό αρμονικό χωρίο, το οποίο ορίζεται από τα  $M$  σημεία ελέγχου, έχουν άθροισμα αρμονικών συντεταγμένων ίσο με τη μονάδα, ενώ τα σημεία που βρίσκονται στο χώρο μεταξύ των δύο κλωβών έχουν αναγκαστικά άθροισμα των υπολογιζόμενων αρμονικών συντεταγμένων μικρότερο της μονάδας. Προφανώς εάν υπολογίζονταν οι αρμονικές συντεταγμένες και για τα σημεία ελέγχου του εξωτερικού κλωβού, τότε το άθροισμα των αρμονικών συντεταγμένων θα ήταν ίσο με τη μονάδα και στο χώρο μεταξύ των δύο κλωβών. Στο επόμενο κεφάλαιο θα παρουσιαστεί μια εφαρμογή της τεχνικής των δύο κλωβών για να γίνει πλήρως κατανοητή η συνεισφορά της στη μέθοδο των αρμονικών συντεταγμένων.

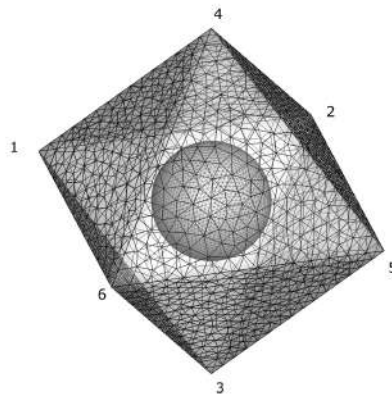
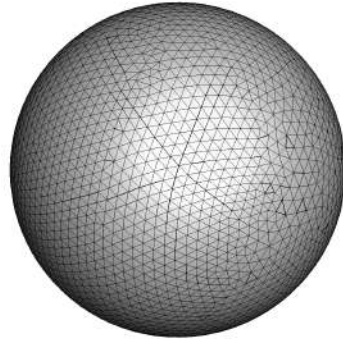
## Κεφάλαιο 3

# Παραδείγματα Εφαρμογής της Μεθόδου

Αφού παρουσιάστηκαν οι βασικοί ορισμοί, η θεωρία των αρμονικών συντεταγμένων, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο πραγματοποιήθηκε η ανάπτυξη της μεθόδου των αρμονικών συντεταγμένων, ακολουθούν παραδείγματα εφαρμογής της. Πρώτα θα παρουσιαστεί μια εφαρμογή σε ένα απλό γεωμετρικό σχήμα όπως η σφαίρα, στη συνέχεια η εφαρμογή σε πτέρυγα αεροσκάφους (Σχήμα 3.5) και, τέλος, θα αποδειχθεί το πρόβλημα ασυνέχειας σε περίπτωση που το αρμονικό χωρίο τέμνει το σώμα, όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αλλά και πώς αυτό διορθώνεται με το σύστημα των δύο κλωβών. Η εφαρμογή αυτή θα γίνει σε έναν αγωγό σχήματος S (Σχήμα 2.8). Τα αρμονικά πλέγματα, καθόλη τη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας δημιουργήθηκαν χρησιμοποιώντας το λογισμικό Pointwise [5]. Πρέπει να τονιστεί ότι στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, οι εφαρμογές που παρουσιάζονται δεν σχετίζονται με τη βελτιστοποίηση και οι μετατοπίσεις των σημείων ελέγχου γίνονται αυθαίρετα. Στόχος είναι να παρουσιαστεί ο τρόπος εφαρμογής της μεθόδου και να ελεγχθεί η ομαλή και επιτυχημένη λειτουργία της. Σε επόμενο κεφάλαιο θα γίνουν εφαρμογές βελτιστοποίησης.

### 3.1 Εφαρμογή σε Σφαίρα

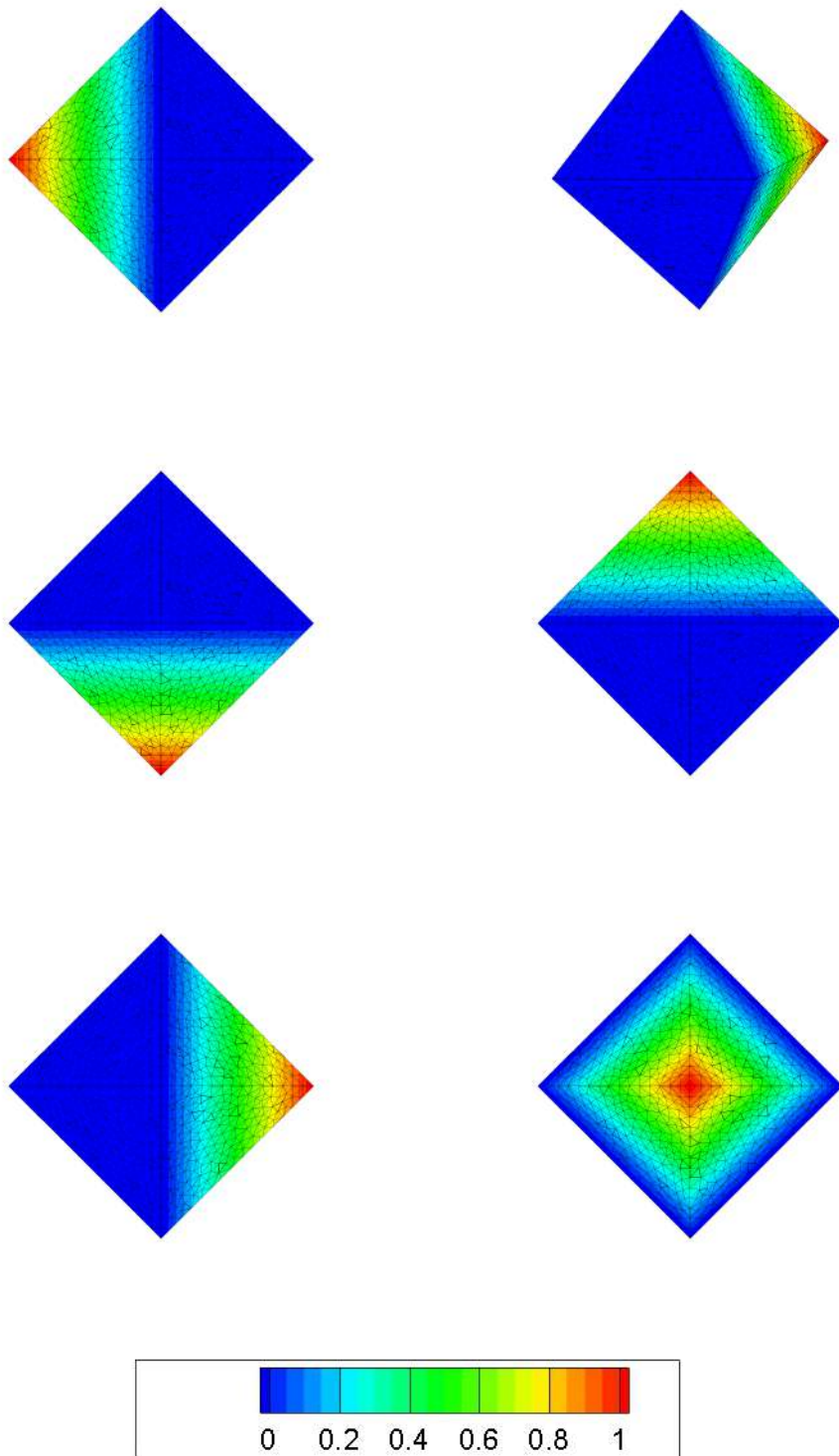
Αρχικά, θα γίνει η εφαρμογή της σε μια απλή γεωμετρία, αυτή της σφαίρας. Το πλέγμα της είναι επιφανειακό και αποτελείται από 2697 κόμβους και 5398 τριγωνικά στοιχεία (Σχήμα 3.1). Το αρμονικό χωρίο γύρω από τη σφαίρα αποτελείται από 6 κορυφές-σημεία ελέγχου, 3473 κόμβους και 17049 τετράεδρα και φαίνεται στο σχήμα 3.1.



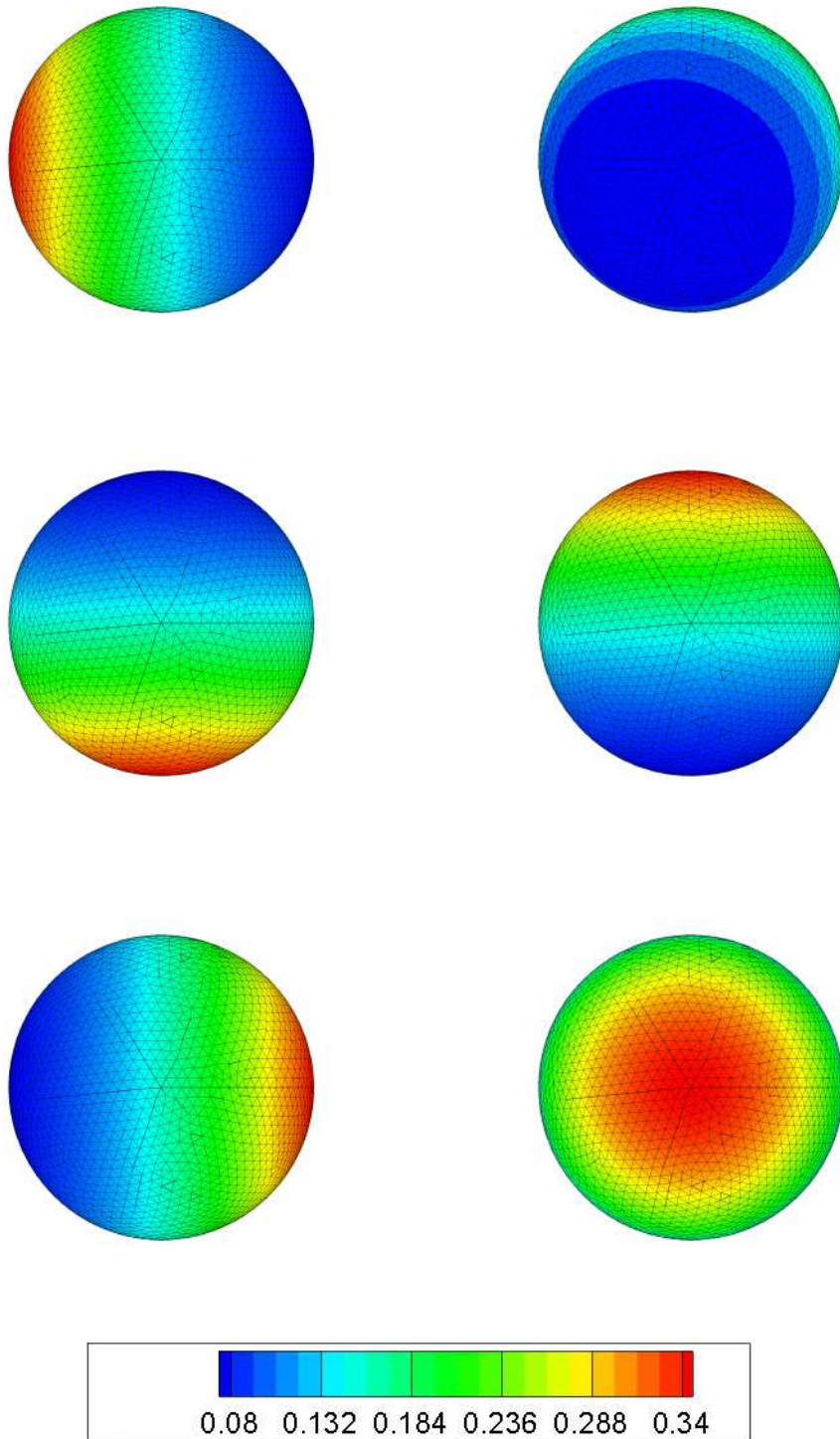
**Σχήμα 3.1:** Το αρμονικό χωρίο γύρω από τη σφαίρα. Στο σχήμα φαίνονται οι 6 κορυφές-σημεία ελέγχου του αρμονικού χωρίου.

Να τονιστεί ότι στο παράδειγμα αυτό, όπως και στο επόμενο (Κεφάλαιο 3.2) τυχαία το πλέγμα είναι επιφανειακό. Η μέθοδος ελέγχει και παραμορφώνει τόσο το επιφανειακό πλέγμα όσο και το εσωτερικό πλέγμα 3D σωμάτων. Στο σχήμα 3.2 παρουσιάζονται οι αρμονικές συντεταγμένες που προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης Laplace για κάθε σημείο ελέγχου. Στο σχήμα 3.3 παρουσιάζονται οι αρμονικές συντεταγμένες των σημείων του πλέγματος της σφαίρας, για κάθε σημείο ελέγχου, μετά και την παρεμβολή τους στο αρμονικό χωρίο. Τέλος, στο σχήμα 3.4 φαίνεται η νέα μορφή της σφαίρας σε σύγκριση με την αρχική, για συγκεκριμένη μετατόπιση του αρμονικού χωρίου.

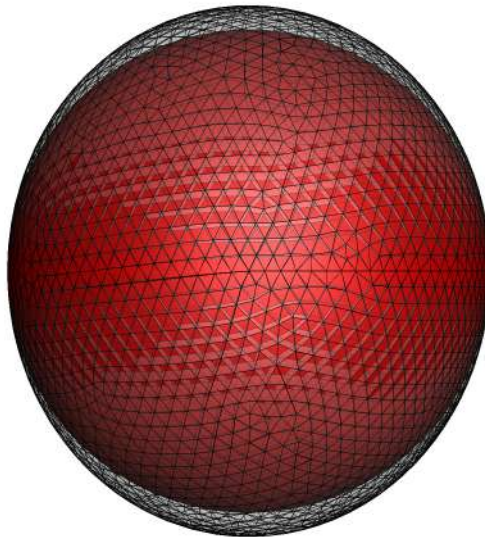
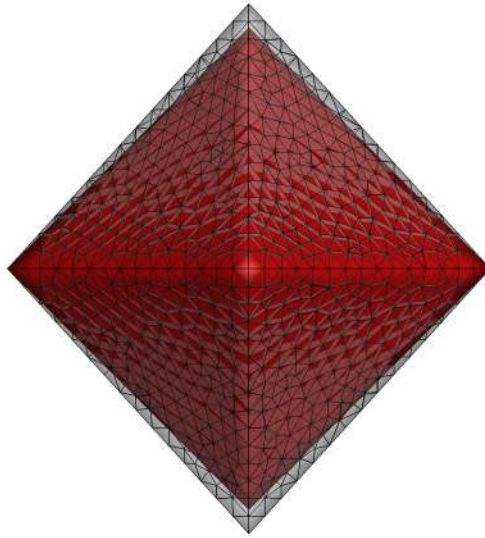




**Σχήμα 3.2:** Αρμονικές συντεταγμένες των κόμβων του αρμονικού χωρίου ως προς κάθε σημείο ελέγχου.



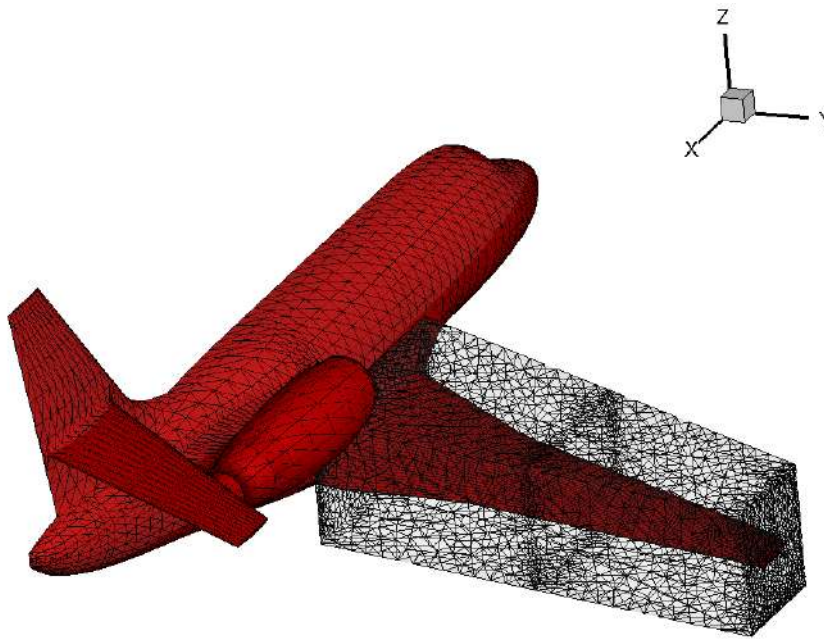
**Σχήμα 3.3:** Αρμονικές συντεταγμένες των κόμβων του πλέγματος της σφαίρας ως προς κάθε σημείο ελέγχου.



*Σχήμα 3.4: Πάνω, η μετατόπιση των κόμβων του αρμονικού χωρίου. Κάτω, η νέα μορφή της σφαίρας (γκρι) σε σύγκριση με την αρχική (κόκκινο).*

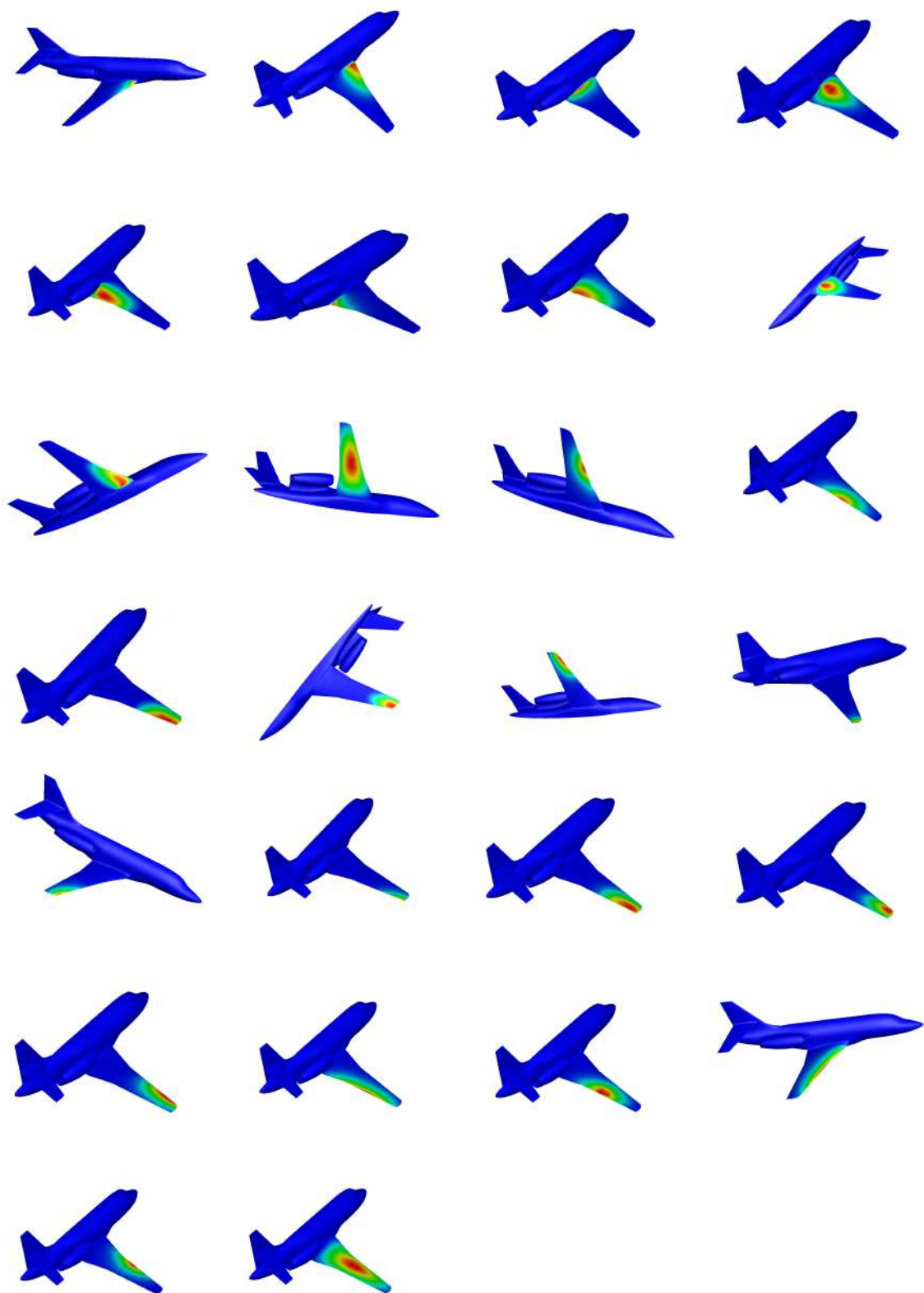
## 3.2 Εφαρμογή σε Πτέρυγα Αεροσκάφους

Το πλέγμα του αεροσκάφους είναι επιφανειακό και αποτελείται από 2992 κόμβους και 5838 τριγωνικά στοιχεία. Το αρμονικό χωρίο τοποθετείται γύρω από την πτέρυγα του αεροσκάφους και αποτελείται από 26 σημεία ελέγχου, 6017 κόμβους και 26875 τετράεδρα (Σχήμα 3.5). Τα πολύεδρα από τα οποία αποτελείται το πλέγμα δεν επηρεάζουν τη μέθοδο, καθώς μόνο οι κόμβοι χρησιμοποιούνται για την παρεμβολή. Αναφέρεται για να φανεί πόσο πιο αραιό είναι το αρμονικό πλέγμα από το υπολογιστικό, αλλά και για λόγους πληρότητας.

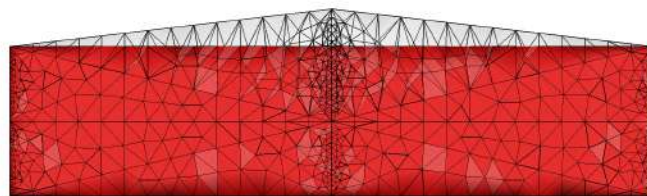
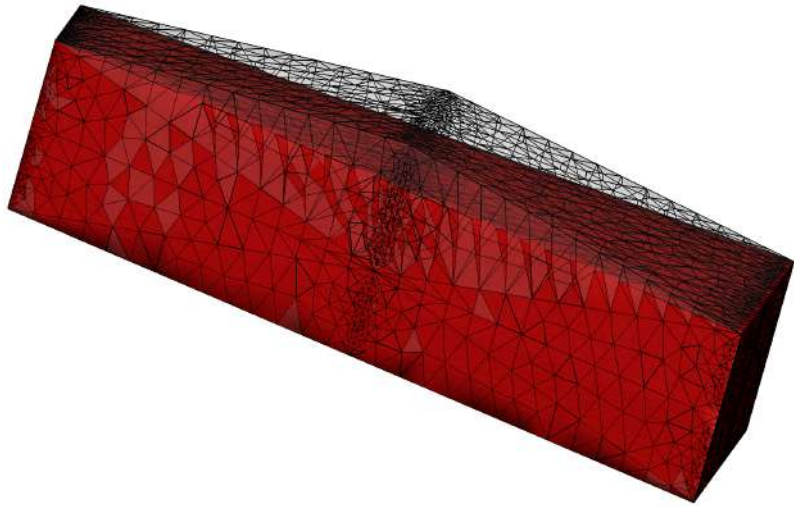


**Σχήμα 3.5:** Το αρμονικό χωρίο (κλωβός) τοποθετημένο γύρω από πτέρυγα αεροσκάφους.

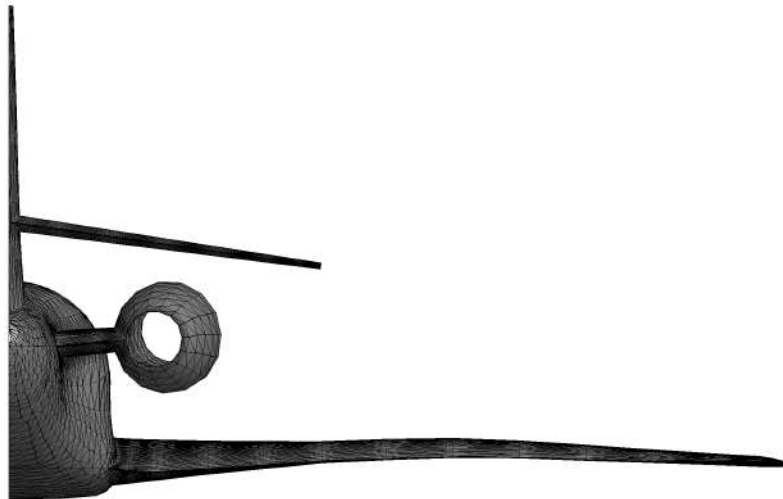
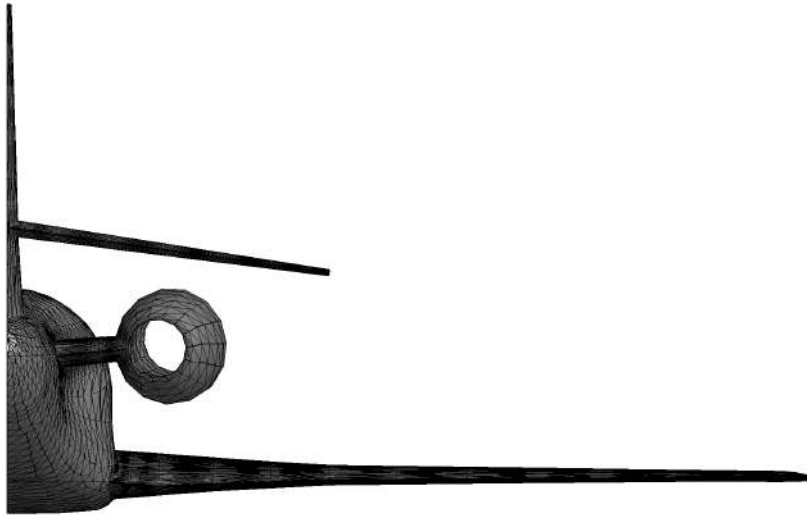
Το αρμονικό χωρίο είναι τοποθετημένο έτσι ώστε να μην περιλαμβάνει τη ρίζα (root) της πτέρυγας. Με την υλοποίηση της διαδικασίας που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 3 προκύπτουν οι αρμονικές συντεταγμένες των κόμβων του αεροσκάφους ως προς τα σημεία ελέγχου, οι οποίες φαίνονται στο σχήμα 3.6. Στο σχήμα 3.7 φαίνονται οι μετατοπίσεις του αρμονικού χωρίου σε σχέση με το αρχικό και στο σχήμα 3.8 η τελική παραμόρφωση της πτέρυγας σε σύγκριση με την αρχική. Όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα οι μετατοπίσεις είναι αυθαίρετες και δεν αποσκοπούν σε κάποια διαδικασία βελτιστοποίησης.



Σχήμα 3.6: Αρμονικές συντεταγμένες των κόμβων του υπολογιστικού χωρίου του αεροσκάφους ως προς κάθε σημείο ελέγχου. Με κόκκινο οι περιοχές όπου οι τιμές των αρμονικών συντεταγμένων έχουν τη μέγιστη τιμή ενώ με μπλε όπου μηδενίζονται.



Σχήμα 3.7: Η μετατόπιση των κόμβων του αρμονικού πλέγματος.



**Σχήμα 3.8:** Η πτέρυγα του αεροσκάφος πριν (πάνω) και μετά (κάτω) τη μετατόπιση των σημείων ελέγχου κατά τον κατακόρυφο άξονα.

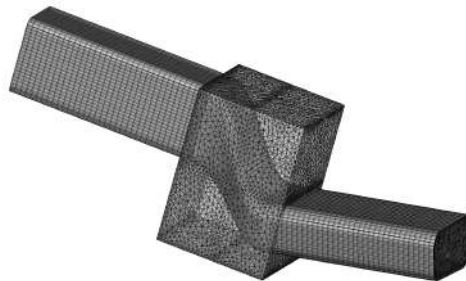
### 3.3 Εφαρμογή σε Αγωγό Σχήματος S

Το αεροδυναμικό σώμα είναι ένας αγωγός σχήματος S. Μέχρι στιγμής παρουσιάστηκαν εφαρμογές που δεν εμφανίζουν κάποιο πρόβλημα κατά τη μετάβαση από την περιοχή επιρροής του κλωβού, στην περιοχή εκτός αυτής. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή, θα φανεί το παραπάνω πρόβλημα, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο αυτό επιλύεται. Το υπολογιστικό πλέγμα αποτελείται από 65333 κόμβους, 103630 τετράεδρα, 7956 πεντάεδρα και 39780 εξάεδρα και φαίνεται στο σχήμα 3.9. Εδώ, γίνεται και εμφανές ότι η μέθοδος των αρμονικών συντεταγμένων δεν χρησιμοποιεί τη συνδεσμολογία του υπολογιστικού πλέγματος.



**Σχήμα 3.9:** Αγωγός τύπου S με το υπολογιστικό πλέγμα.

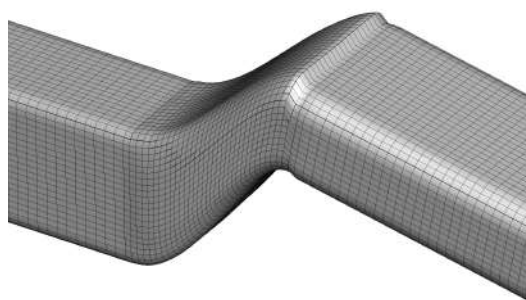
Τοποθετείται το αρμονικό χωρίο γύρω από τον αγωγό. Αποτελείται από 13748 κόμβους και 68378 τετράεδρα, ενώ έχει 26 σημεία ελέγχου (Σχήμα 3.10) .



**Σχήμα 3.10:** Αγωγός τύπου S με το αρμονικό πλέγμα.



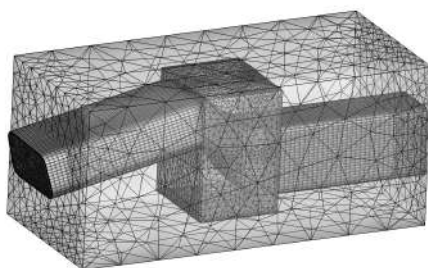
Αν μετατοπιστούν αυθαίρετα τα 9 σημεία ελέγχου που βρίσκονται στον κατακόρυφο άξονα προκύπτει το ακόλουθο πλέγμα για τον αγωγό (Σχήμα 3.11).



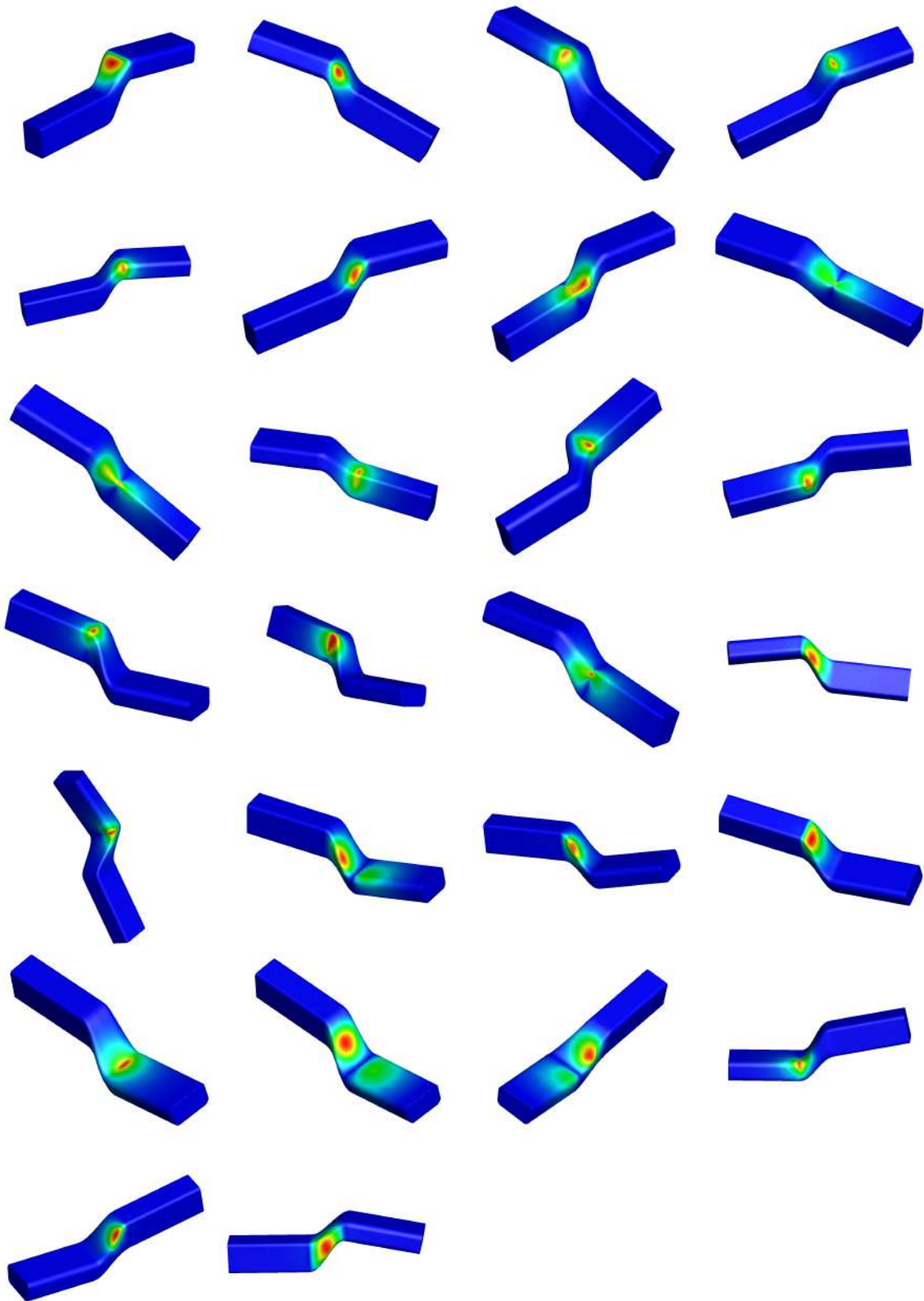
**Σχήμα 3.11:** Αγωγός τύπου  $S$  μετά τη μετατόπιση των κορυφών του αρμονικού πλέγματος.

Παρατηρώντας το σχήμα 3.11 γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η μετάβαση από την περιοχή η οποία μένει ανέπαφη από την επίδραση του κλωβού δεν είναι ομαλή. Αυτό εκτός από το ότι δεν είναι "οπτικά εύμορφο", οδηγεί σε κακή ποιότητα τόσο του εξωτερικού όσο και του εσωτερικού πλέγματος και κατ' επέκταση δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί η διαδικασία της βελτιστοποίησης. Τη λύση στο πρόβλημα αυτό έρχεται να δώσει η τεχνική των δύο κλωβών, όπως αυτή παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2.4.

Στο σχήμα 3.12 φαίνεται ο αγωγός σχήματος  $S$ , καθώς και το σύστημα των δύο κλωβών που τον περιβάλλει. Φαίνεται ότι ο εξωτερικός κλωβός περικλείει τον εσωτερικό. Δεν περικλείει όλο το υπολογιστικό πλέγμα, όμως αυτό δεν επηρεάζει τη μέθοδο καθώς όλα τα επιφανειακά σημεία του εξωτερικού κλωβού μένουν ακίνητα.



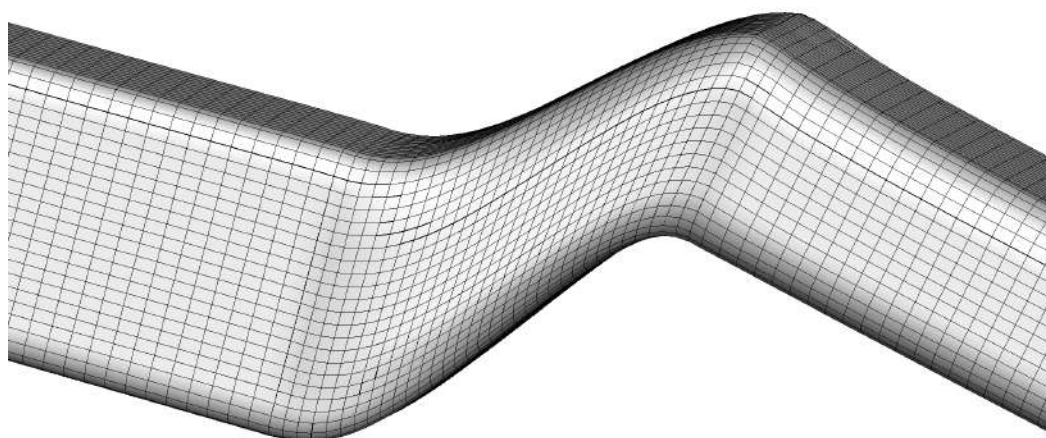
**Σχήμα 3.12:** Αγωγός τύπου  $S$  με το σύστημα δύο κλωβών.



Σχήμα 3.13: Αρμονικές συντεταγμένες των κόμβων του αγωγού τύπου  $S$  για καθενα από τα σημεία ελέγχου, όπως προέκυψαν από την παρεμβολή των αρμονικών συντεταγμένων των κόμβων των δύο κλωβών στους κόμβους του CFD πλέγματος.

Στο σχήμα 3.13 παρουσιάζονται οι αρμονικές συντεταγμένες από κάθε σημείο ελέγχου, για τον αγωγό σχήματος  $S$ , όπως αυτές προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου αρμονικών συντεταγμένων και της τεχνικής των δύο κλωβών.

Εάν τώρα εφαρμοστεί η ίδια μετατόπιση των σημείων ελέγχου όπως και παραπάνω, προκύπτει μια παντελώς ομαλή, με την έννοια του μαθηματικού ορισμού της συνέχειας, παραμόρφωση του πλέγματος του αγωγού (Σχήμα 3.14).



**Σχήμα 3.14:** Αγωγός σχήματος  $S$  μετά τη μετατόπιση των κορυφών του αρμονικού πλέγματος, με την τεχνική των δύο κλωβών. Η λειότητα και η συνέχεια στο αποτέλεσμα είναι εμφανής.

Γίνεται αντιληπτό λοιπόν, πόσο σημαντική είναι η επίδραση της τεχνικής των δύο κλωβών στην αρμονική παραμόρφωση.



## Κεφάλαιο 4

# Εφαρμογές στη Βελτιστοποίηση με Εξελικτικούς Αλγορίθμους

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, ο λόγος για τον οποίο αναζητούνται συνεχώς μέθοδοι παραμόρφωσης πλέγματος είναι η ανάγκη να μην δημιουργείται νέο πλέγμα σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Με τη χρήση της τεχνικής των αρμονικών παραμορφώσεων, η διαδικασία βελτιστοποίησης ξεκινά με κάποια αρχική γεωμετρία, για την οποία κατασκευάζεται το υπολογιστικό πλέγμα. Τοποθετούνται κατάλληλα, ένα ή δύο αρμονικά χωρία που περικλύουν το σώμα, και στη συνέχεια ο ΕΑ ελέγχει την μετατόπιση των σημείων ελέγχου και παραμορφώνει το αεροδυναμικό σώμα. Με τον τρόπο αυτό, παράγονται νέες υποψήφιες λύσεις (διανύσματα των μεταβλητών σχεδιασμού), ως τροποποιήσεις της αρχικής. Με την μετατόπιση των σημείων ελέγχου, αυτόματα παραμορφώνονται και τα υπολογιστικά πλέγματα, με αποτέλεσμα η διαδικασία πλεγματοποίησης να μην χρειάζεται να επαναλαμβάνεται για κάθε νέα υποψήφια λύση. Σε όλα τα προβλήματα βελτιστοποίησης οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι οι μετατοπίσεις των σημείων ελέγχου του αρμονικού πλέγματος.

### 4.1 Βελτιστοποίηση με χρήση ΕΑ

Από τη δεκαετία του 1990 και έκτοτε, η γεωμετρική αύξηση της υπολογιστικής ισχύος και το προσιτό κόστος των μεγάλων και γρήγορων υπολογιστών οδήγησαν χρήση στοχαστικών μεθόδων βελτιστοποίησης με έναν από τους βασικότερους εκπροσώπους, τους εξελικτικούς αλγορίθμους (ΕΑ) [38]. Βασικό στοιχείο που οδήγησε στη γρήγορη και ευρεία επικράτησή τους ήταν το μη-μαθηματικό υπόβαθρό τους, η ευκολία με την οποία προσαρμόζονται σε κάθε νέο πρόβλημα αρκεί να υπάρχει προγραμματισμένο

λογισμικό αξιολόγησης κάθε υποψήφιας λύσης και, κυρίως, η δυνατότητά τους να μην εγκλωβίζονται σε τοπικά ακρότατα. Το μεγαλύτερο πλεονέκτημα των ΕΑ είναι ότι, πρακτικά, σε ένα νέο πρόβλημα η χρήση τους είναι γενικά άμεση χωρίς παρεμβάσεις στη διαδικασία βελτιστοποίησης που απαιτούν οι αιτιοκρατικές μέθοδοι. Βασικό τους μειονέκτημα αποτελεί ότι ο εντοπισμός της βέλτιστης λύσης απαιτεί συνήθως μεγάλο αριθμό αξιολογήσεων. Βασικό γνώρισμα των ΕΑ είναι ότι χειρίζονται πληθυσμούς υποψήφιας λύσεων και όχι μια μεμονωμένη λύση σε κάθε γενιά. Οι ΕΑ, ενώ αρχικά αναπτύχθηκαν για την επίλυση προβλημάτων ενός στόχου, με κατάλληλες μετατροπές μπορούν να αναπτύξουν προβλήματα πολλών στόχων και, μάλιστα, υπερτερούν ως προς αυτό το θέμα σε σχέση με άλλες μεθόδους, λόγω του γεγονότος ότι χειρίζονται έναν πληθυσμό ατόμων και με την ολοκλήρωσή τους αποδίδουν ένα σύνολο λύσεων [38].

## Βασικά Χαρακτηριστικά ενός Εξελικτικού Αλγορίθμου

Η μαθηματική διατύπωση ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης  $M_o$  στόχων που υπόκεινται σε  $M_c$  περιορισμούς ανισότητας είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \min \vec{F}(\vec{b}) &= \min[f_1(\vec{b}), \dots, f_{M_o}(\vec{b})] \\ c_j(\vec{x}) &\leq c_j^{thres} \quad j = 1, \dots, M_c \end{aligned}$$

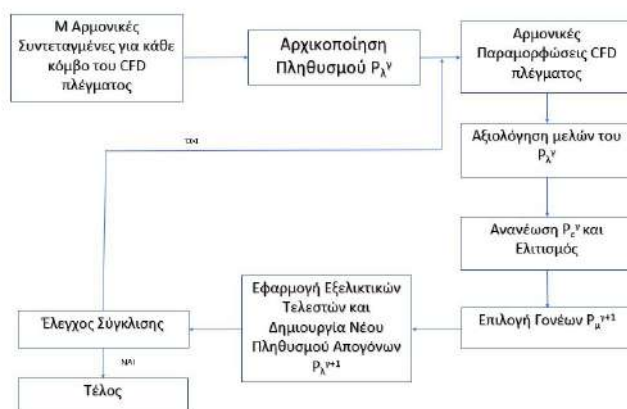
όπου  $\vec{F}$  η διανυσματική συνάρτηση-στόχος,  $\vec{b}$  είναι το διάνυσμα των  $N$  μεταβλητών σχεδιασμού,  $c_j$  είναι η τιμή του περιορισμού  $j$  και  $c_j^{thres}$  είναι το επιθυμητό όριο των περιορισμών. Καθεμιά από τις  $N$  μεταβλητές σχεδιασμού έχει άνω και κάτω όρια καθορισμένα από το χρήστη, τα οποία καθορίζουν το πεδίο ορισμού τους.

Ο ΕΑ διαχειρίζεται τους εξής πληθυσμούς σε κάθε γενιά( $\gamma$ ):

- Τον πληθυσμό των  $\lambda$  απογόνων  $P_\lambda^\gamma$
- Τον πληθυσμό των  $\mu$  γονέων  $P_\mu^\gamma$
- Τον πληθυσμό των  $\epsilon$  επιλέκτων  $P_\epsilon^\gamma$

Οι  $\mu$  γονείς προκύπτουν από τους απογόνους της προηγούμενης γενιάς  $\lambda^{\gamma-1}$  και με τους τελεστές διασταύρωσης και μετάλλαξης δημιουργούνται οι απόγονοι της τρέχουσας γενιάς  $\lambda^\gamma$ . Από τους νέους απογόνους επιλέγονται τα καλύτερα άτομα ώστε να αποτελέσουν τον πληθυσμό των επιλέκτων της γενιάς. Ο ρόλος ύπαρξης του συνόλου των επιλέκτων είναι διπλός. Πρώτον, στον πληθυσμό των επιλέκτων υπάρχουν οι καλύτερες λύσεις της κάθε γενιάς. Έτσι, σε όποια γενιά και αν αποφασίσει ο χρήστης να διακόψει τη λειτουργία του αλγορίθμου, θα είναι καταγεγραμμένες οι καλύτερες λύσεις που έχει βρει ο αλγόριθμος μέχρι τότε. Δεύτερον, κατά την εξέλιξη χρησιμοποιείται

πληροφορία από το σύνολο  $P_\varepsilon^\gamma$  για την ενίσχυση των καλών χαρακτηριστικών των ατόμων στις επόμενες γενιές. Έτσι τα άτομα που αποτελούν τον πληθυσμό επιλέκτων έχουν περισσότερες πιθανότητες διασταύρωσης ώστε να είναι πιο πιθανό να περάσουν τα καλύτερα χαρακτηριστικά τους στους απογόνους ή μεταφέρονται ατόφια στην επόμενη γενιά (τελεστής επιλεκτικότητας ή ελιτισμού). Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται γενιά με γενιά, μέχρι να ικανοποιηθεί κάποιο κριτήριο σύγκλισης του αλγορίθμου (Σχήμα 4.1). Τέτοιο μπορεί να είναι, η μη περαιτέρω βελτίωση της λύσης για κάποιο συνεχόμενο αριθμό αξιολογήσεων ή γενιών, να φτάσει ο αλγόριθμος τον μέγιστο αριθμό αξιολογήσεων ή να έχει ομογενοποιηθεί ο πληθυσμός.



Σχήμα 4.1: Απεικόνιση της διαδικασίας βελτιστοποίησης με EA.

## Λογισμικό EASY

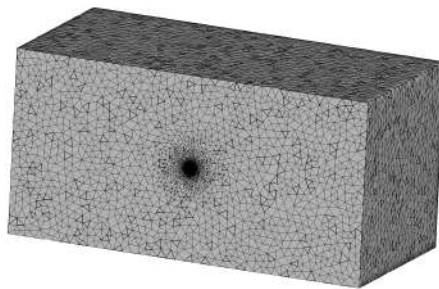
Στη διπλωματική αυτή εργασία η βελτιστοποίηση αεροδυναμικών μορφών με EA πραγματοποιήθηκε μέσω του λογισμικού EASY. Το λογισμικό EASY (Evolutionary Algorithms SYstem) αναπτύχθηκε από τη ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ [3]. Είναι ένα λογισμικό που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για προβλήματα βελτιστοποίησης ενός ή περισσότερων στόχων. Μπορεί να υποστηρίξει προβλήματα με ή χωρίς περιορισμούς, με στοχαστικές ή αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης ή ακόμα και συνδυασμό αυτών. Επιπλέον, διαθέτει επιλογές για χρήση μεταπροτύπων-MAEA (Metamodel Assisted Evolutionary Algorithms), όπως νευρωνικά δίκτυα ή και άλλες μεθόδους παρεμβολής, τα οποία εκπαιδεύονται κατά τη διάρκεια της εξέλιξης. Με αυτήν τη διαδικασία, πολλά άτομα αξιολογούνται μέσω παρεμβολής (μεταπρότυπα) και όχι με το πρόγραμμα αξιολόγησης το οποίο έχει, ενδεχομένως μεγάλο υπολογιστικό κόστος.

## 4.2 Εφαρμογή στην Πτέρυγα ONERA M6

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη βελτιστοποίηση μορφής (3Δ) πτέρυγας αεροσκάφους με κριτήριο την ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας. Στο σχήμα 4.3 φαίνεται το πλέγμα στην επιφάνεια της πτέρυγας. Είναι συμμετρικό και αποτελείται από 300071 κόμβους, 1703873 τετράεδρα, 9268 πρίσματα και 174117 εξάεδρα. Η μέθοδος δεν επηρεάζεται από το είδος των πολυέδρων ούτε από τον αριθμό τους, αναφέρονται απλώς για λόγους πληρότητας.



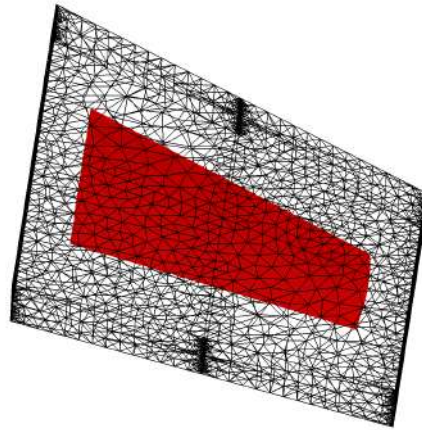
**Σχήμα 4.2:** Το υπολογιστικό πλέγμα πάνω στην επιφάνεια της πτέρυγας M6.



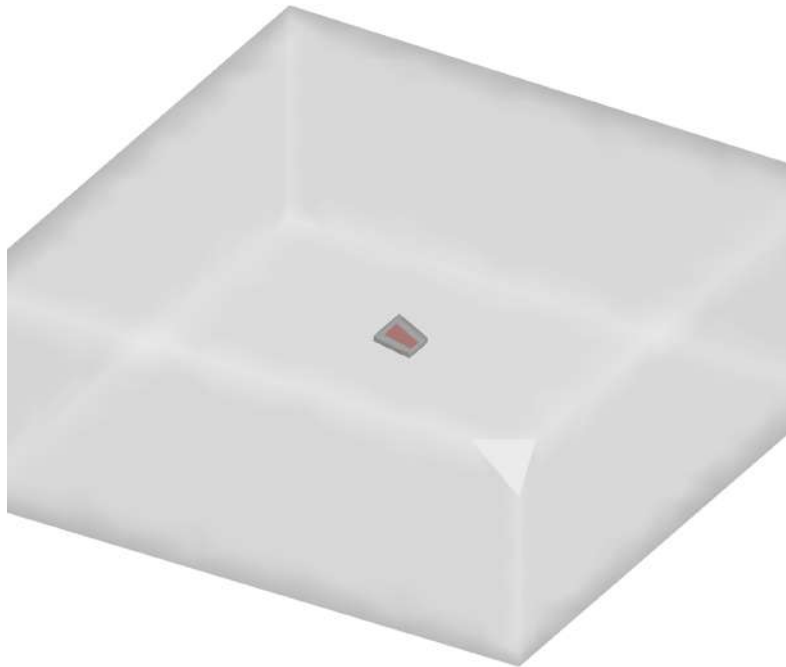
**Σχήμα 4.3:** Το υπολογιστικό πλέγμα γύρω από την επιφάνεια της πτέρυγας M6.

Στο σχήμα 4.4 απεικονίζεται το αρμονικό χωρίο γύρω από την πτέρυγα και στο σχήμα 4.5 το σύστημα των δύο κλωβών που σχηματίζεται γύρω από την πτέρυγα. Όπως έχει αναλυθεί, η τεχνική των δύο κλωβών εξασφαλίζει ομαλότητα του υπολογιστικού πλέγματος και διατηρεί την ποιότητά του κατά τη μετάβαση στο τμήμα το οποίο μένει ανέπαφο από οποιαδήποτε επίδραση του πρώτου κλωβού.





Σχήμα 4.4: Το αρμονικό χωρίο γύρω από την επιφάνεια της πτέρυγας M6.



Σχήμα 4.5: Το σύστημα των δύο κλωβών γύρω από την επιφάνεια της πτέρυγας M6.

Όπως αναφέρθηκε το υπολογιστικό πλέγμα της πτέρυγας είναι συμμετρικό με επίπεδο συμμετρίας το επίπεδο της ρίζας της. Από τα σχήματα φαίνεται ότι το σύστημα των δύο κλωβών είναι έξω από το επίπεδο συμμετρίας. Αυτό συμβαίνει για να διατηρηθεί η ποιότητα του πλέγματος και να μην υπάρξει κάποια ασυνέχεια. Τα σημεία που βρίσκονται πάνω ή κοντά στον άξονα συμμετρίας δεν μετακινούνται κατά τη βελτιστοποίηση και έχει τεθεί περιορισμός ως προς αυτό, όπως θα φανεί στη συνέχεια.

Η βελτιστοποίηση έχει στόχο την ελαχιστοποίηση του συντελεστή οπισθέλκουσας ( $F = C_d$ ) για ατριβή ροή, με γωνία επί άπειρο ροής  $\alpha=3.06$  μοίρες και αριθμό Mach  $M=0.8395$ . Για την επίλυση της ροής χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις Euler για συμπίεστο ρευστό και χρονικά μόνιμη ροή [20].

$$\nabla(\rho\vec{u}) = 0 \quad (4.1)$$

$$\nabla p + \nabla(\rho\vec{u}\vec{u}^T) = 0 \quad (4.2)$$

$$\nabla(\vec{u}(E + p)) = 0 \quad (4.3)$$

όπου  $p$  η στατική πίεση του ρευστού,  $\rho$  η πυκνότητα,  $\vec{u}$  το διάνυσμα της ταχύτητας,  $E$  η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού που δίνεται από τη σχέση:

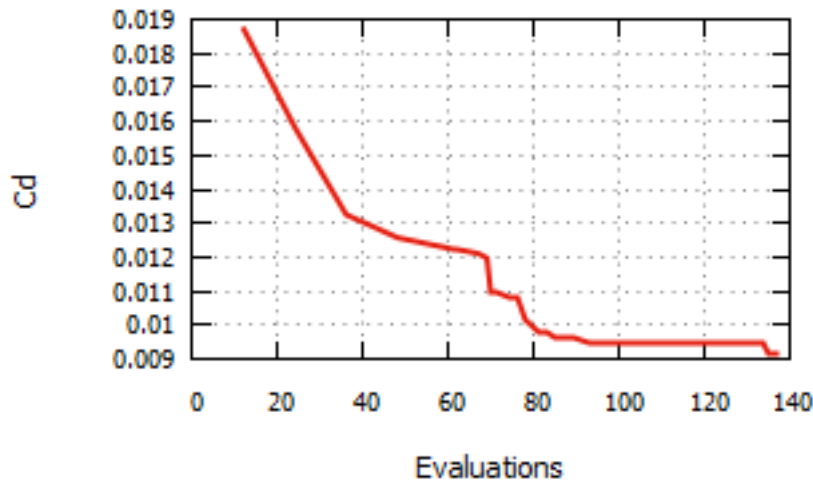
$$E = \rho e + \frac{1}{2}\rho u^2 \quad (4.4)$$

όπου  $e$  η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας.

Για την επίλυση των εξισώσεων Euler χρησιμοποιήθηκε CFD κώδικας που έχει αναπτυχθεί στη ΜΠΥΡ&Β και εκτελείται σε σύγχρονες μονάδες επεξεργασίας καρτών γραφικών. Ο επιλύτης χρησιμοποιεί για την επίλυση της ροής μη-δομημένα πλέγματα, τα οποία σε 3Δ εφαρμογές αποτελούνται από τετράεδρα, εξάεδρα, πυραμίδες ή πρίσματα. Στη διπλωματική εργασία έγινε χρήση του 3Δ κώδικα σε μόνιμη ροή. Επίσης ο κώδικας χρησιμοποιεί τη κεντροκομβική διατύπωση της τεχνικής των πεπερασμένων όγκων. Η επίλυση των εξισώσεων πραγματοποιήθηκαν στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές της ΜΠΥΡ&Β και χρησιμοποιήθηκαν παράλληλα δύο ίδιες κάρτες γραφικών (GPUs) [21] και συγκεκριμένα οι κάρτες Tesla M2050 της NVIDIA [6].

Για τον εξελικτικό αλγόριθμο χρησιμοποιήθηκαν, πληθυσμός γονέων  $\mu = 8$  και πληθυσμός απογόνων  $\lambda = 12$ . Επίσης χρησιμοποιήθηκε ΜΑΕΑ, όπου τα μεταπρότυπα ενεργοποιούνται μετά τις 100 αξιολογήσεις. Ως ανώτερο όριο της βελτιστοποίησης τίθενται οι 140 αξιολογήσεις καθώς αυτός ήταν ο υπολογιστικός χρόνος που διατέθηκε για τη συγκεκριμένη εφαρμογή. Γενικότερα, στόχος δεν είναι να βρεθεί η βέλτιστη δυνατή λύση, αλλά να παρουσιαστεί πώς μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος των αρμονικών συντεταγμένων σε μια διαδικασία βελτιστοποίησης. Ως μεταβλητές σχεδιασμού τέθηκαν οι μετατοπίσεις των σημείων ελέγχου του αρμονικού χωρίου. Τα σημεία που βρίσκονται στην ρίζα της πτέρυγας έχουν μηδενική μετατόπιση  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Στα υπόλοιπα σημεία επιτρέπεται μετατόπιση μόνο κατά  $dz$ .

Στο σχήμα 4.6 φαίνεται η σύγκλιση της βελτιστοποίησης και ο ελάχιστος αριθμός του  $C_D$ , που προέκυψε ύστερα από 140 αξιολογήσεις.

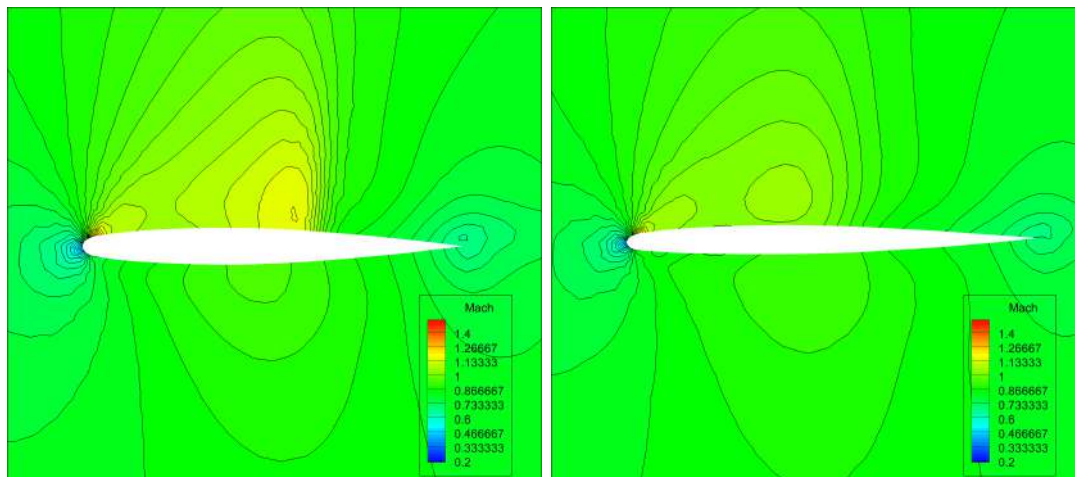


**Σχήμα 4.6:** Ατριβής ροή γύρω από πτέρυγα *ONERA M6*. Σύγκλιση μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης για τη μεγιστοποίηση του συντελεστή οπισθέλκουσας κατά τη διάρκεια 140 αξιολογήσεων, χρησιμοποιώντας το μεταπρότυπο ακτινικής βάσης *RBF* του *EASY*.

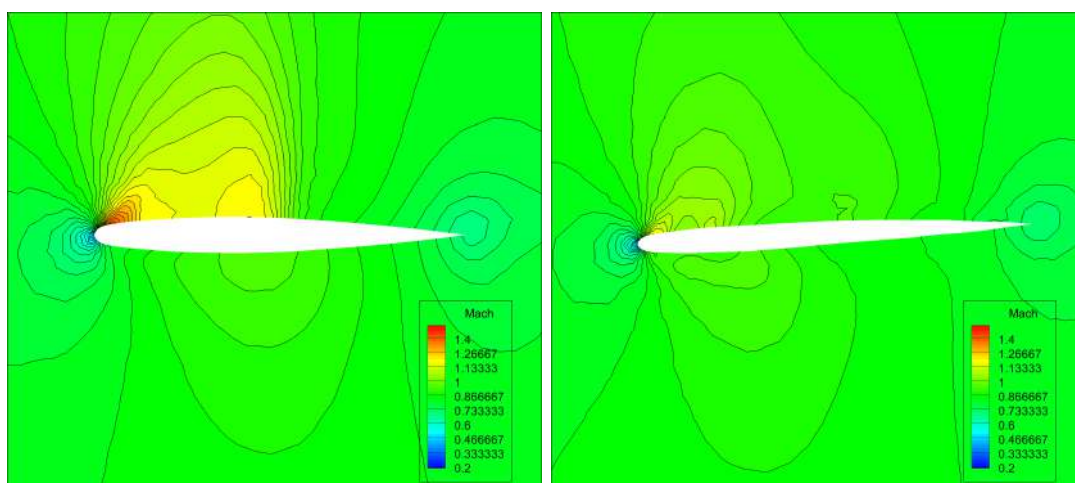
Στον πίνακα 4.2 φαίνεται η μεταβολή στην τιμή της συνάρτησης  $F$  και ο υπολογιστικός χρόνος σε ισοδύναμες επιλύσεις ροής (Equivalent Flow Solutions, EFS). Μία EFS ισοδυναμεί με μία αξιολόγηση του EA.

Αρχική Τιμή $F$	Τελική Τιμή $F$	Βελτίωση	Κόστος
0.0187009	0.00918534	50.86%	140 EFS

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση των εξισώσεων ροής γύρω από την αρχική και τη βελτιστοποιημένη γεωμετρία παρουσιάζονται, σε δύο διαφορετικές θέσεις, στα σχήματα 4.7, 4.8.

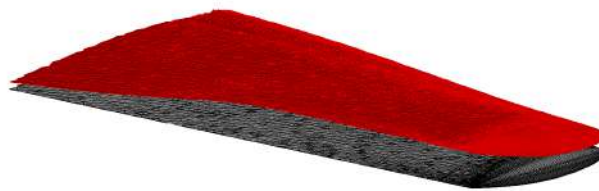


**Σχήμα 4.7:** Ατριβής ροή γύρω από την αρχική M6 (αριστερά) και τη βελτιστοποιημένη (δεξιά) πτέρυγα. Κατανομή αριθμού Mach, στη θέση που αντιστοιχεί στο 25% του μήκους του εκπετάσματος (*wingspan*).



**Σχήμα 4.8:** Ατριβής ροή γύρω από την αρχική M6 (αριστερά) και τη βελτιστοποιημένη (δεξιά) πτέρυγα. Κατανομή αριθμού Mach, στη θέση που αντιστοιχεί στο 60% του μήκους του εκπετάσματος (*wingspan*).

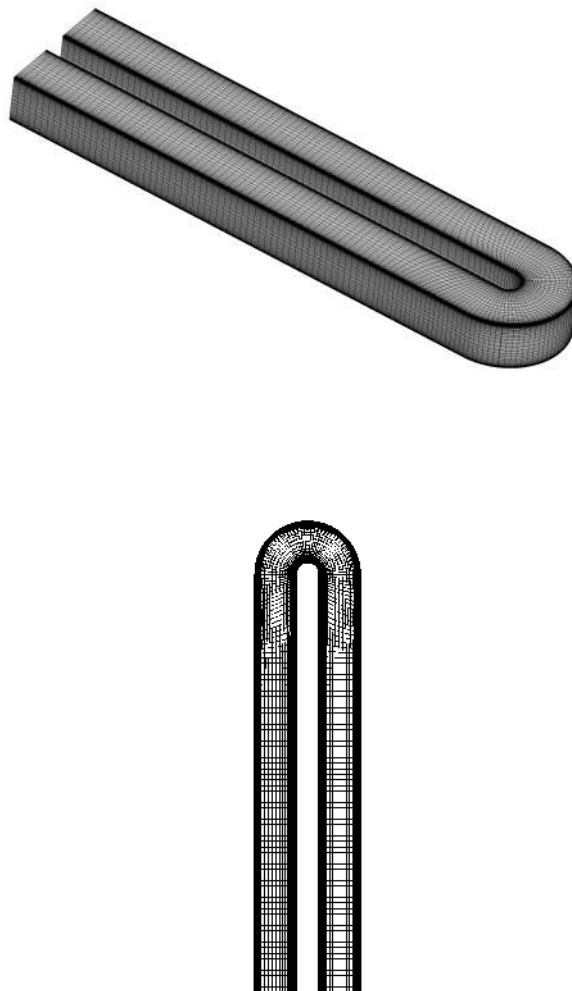
Στα σχήματα 4.7, 4.8, για την αρχική πτέρυγα η ροή είναι διηχητική και εμφανίζεται κύμα κρούσης και αυτό αποτελεί το λόγο ύπαρξης οπισθέλκουσας σε ένα πρόβλημα ατριβούς ρής. Αντίθετα στη βελτιστοποιημένη πτέρυγα το κύμα κρούσης εξασθενεί και έτσι ο συντελεστής οπισθέλκουσας τείνει στο μηδέν. Στο σχήμα 4.9 φαίνεται η μετατόπιση των σημείων ελέγχου του CFD πλέγματος, μετά τη βελτιστοποίηση.



**Σχήμα 4.9:** Νέα γεωμετρία πτέρυγας μετά τη βελτιστοποίηση (κόκκινο χρώμα) σε σύγκριση με την αρχική γεωμετρία (μαύρο χρώμα).

### 4.3 Εφαρμογή σε Αγωγό Σχήματος U

Στο κεφάλαιο αυτό θα πραγματοποιηθεί βελτιστοποίηση ενός αγωγού σχήματος U με EA, με στόχο την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης. Ένα βασικό στοιχείο των αγωγών αυτών είναι οι στροφές σχήματος U που συνδέουν δύο διαδοχικές διόδους μεταξύ τους, καθώς αποτελούν περιοχή υψηλών απωλειών ολικής πίεσης [14] [13]. Για τη μελέτη που γίνεται στη διπλωματική εργασία, τα τοιχώματα του αγωγού θεωρούνται αδιαβατικά, αμελώντας τα θερμικά φορτία.



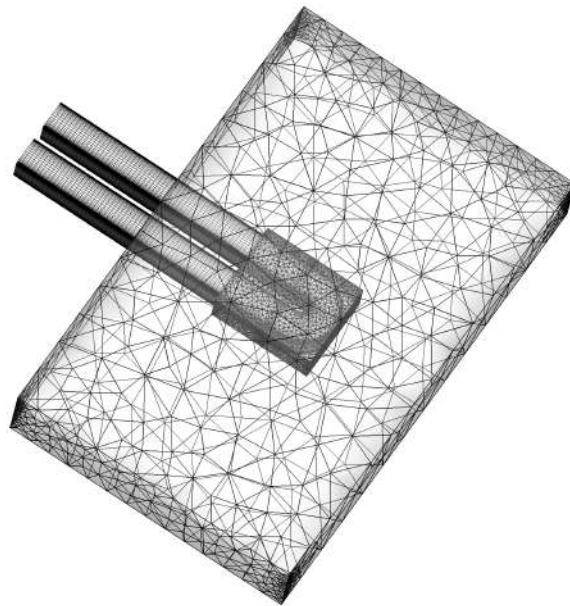
Σχήμα 4.10: Αγωγός σχήματος U (3Δ).

Οι περιοχές της ροής στις οποίες παρουσιάζονται κατά κύριο λόγο οι απώλειες ολικής πίεσης είναι τα σημεία στροφής του αγωγού, οπότε σε εκείνη την περιοχή εστιάζει και η βελτιστοποίηση.

Από τα παραπάνω, το αρμονικό πλέγμα προκύπτει ως εξής:

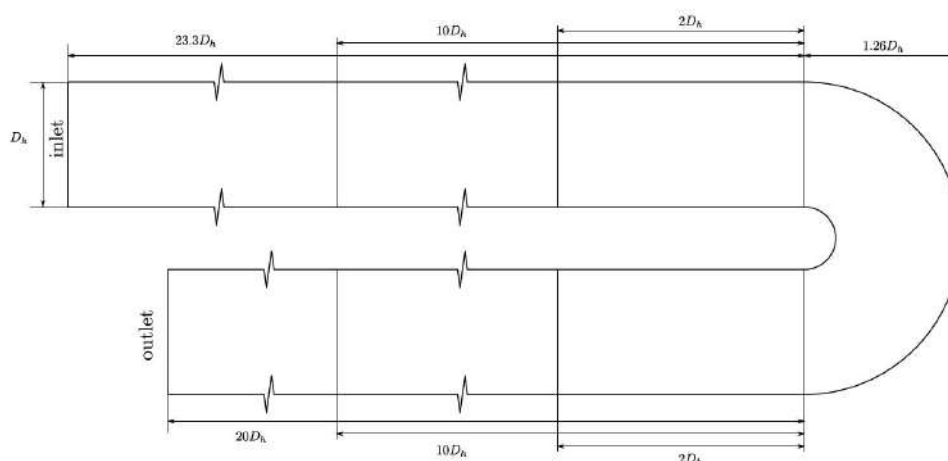


Σχήμα 4.11: Αγωγός Σχήματος  $U$  μαζί με το αρμονικό χωρίο.



Σχήμα 4.12: Το σύστημα των δύο κλωβών για τον αγωγό σχήματος  $U$ .

Το αρμονικό χωρίο αποτελείται από 7732 κόμβους, 36499 τετράεδρα και έχει 26 σημεία ελέγχου. Η βελτιστοποίηση γίνεται για  $3\Delta$ , ο οποίος αρχικά έχει εξωτερική διάμετρο  $1.26D_h$  και εσωτερική διάμετρο  $0.26D_h$ , όπου  $D_h$  η υδραυλική διάμετρος και είναι  $D_h=0.075 \mu$ . Το ύψος και το πλάτος του αγωγού ισούνται με την υδραυλική διάμετρο. Στο σχήμα 4.13 φαίνονται αναλυτικά οι βασικές διαστάσεις του αγωγού:



Σχήμα 4.13: Αγωγός σχήματος U μαζί με το αρμονικό χωρίο ( $3\Delta$ ).

Το πλέγμα του αγωγού αποτελείται από 902289 κόμβους και από 871200 εξαεδρικά στοιχεία. Όσον αφορά τα στοιχεία της ροής, η ταχύτητα εισόδου έχει συνιστώσα μόνο κατά τη διεύθυνση  $y$ , ενώ ο αριθμός Reynolds ισούται με 43830. Η ροή θεωρείται τυρβώδης και ασυμπίεστη και για την επίλυσή της χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις Navier-Stokes. Στόχος της βελτιστοποίησης είναι η ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης.

$$F = \Delta P_t = \frac{P_{ti} - P_{to}}{\frac{1}{2}\rho U_0^2} \quad (4.5)$$

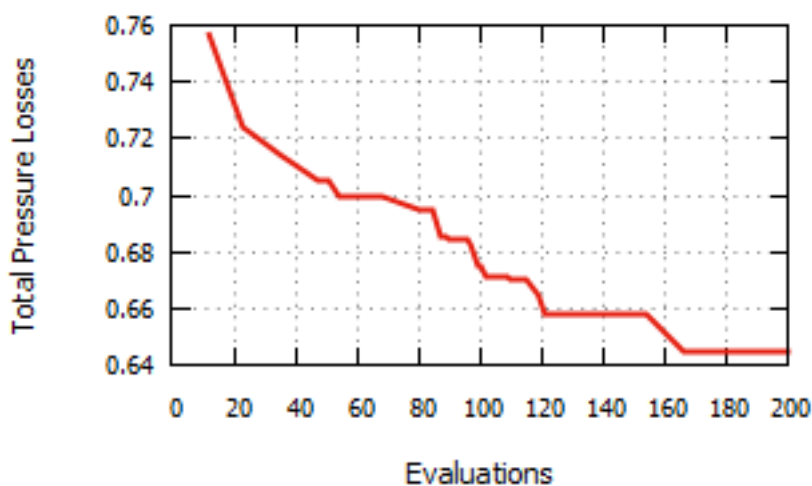
Για τον εξελικτικό αλγόριθμο χρησιμοποιήθηκαν, πληθυσμός γονέων  $\mu = 8$  και πληθυσμός απογόνων  $\lambda = 12$ . Επίσης χρησιμοποιήθηκε MAEA ακτινικής βάσης, όπου τα μεταμοντέλα ενεργοποιούνται μετά τις 100 αξιολογήσεις. Ως ανώτερο όριο της βελτιστοποίησης τίθενται οι 200 αξιολογήσεις. Οι εξισώσεις Navier-Stokes επιλύονται για τυρβώδη, ασυμπίεστη, χρονικά μόνιμη ροή. Το μοντέλο τύρβης που χρησιμοποιείται είναι το μοντέλο των Spalart - Allmaras[30]. Οι παραπάνω εξισώσεις παρουσιάζονται αναλυτικά στο κεφάλαιο 5.2. Για τον υπολογισμό των μεγεθών της ροής θα χρησιμοποιηθεί ένας κώδικας επίλυσης μόνιμης, ασυμπίεστης ροής συνεχτικού ρευστού. Ο κώδικας αυτός, προέρχεται από το ελεύθερο λογισμικό OpenFOAM για το οποίο γίνεται αναφορά στο κεφάλαιο 5.1 και ονομάζεται simpleFoam. Χρησιμοποιήθηκε η εκδοχή του, που συντηρείται και εξελίσσεται από τη ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ. Η επίλυση



των εξισώσεων ροής γίνεται παράλληλα σε δώδεκα πυρήνες μίας μονάδας Intel Xeon CPU στα 2.199 GHz, με 25.6 MByte cache μνήμη.

## Αποτελέσματα Βελτιστοποίησης

Δεδομένου ότι στόχος είναι η ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης είναι αναμενόμενο το τελικό βελτιστοποιημένο σχήμα του αγωγού να δημιουργήσει κοιλότητες στην επιφάνειά του με σκοπό η κύρια δέσμη της ροής να μην έρχεται σε επαφή με το τοίχωμα αλλά με το ίδιο το ρευστό, μειώνοντας έτσι σημαντικά τις απώλειες ολικής πίεσης λόγω τριβής. Στο σχήμα 4.14 παρουσιάζεται η τιμή της συνάρτησης-στόχου κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης.



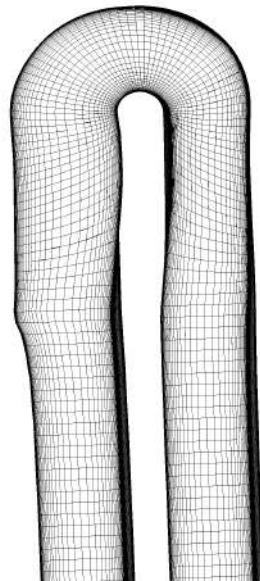
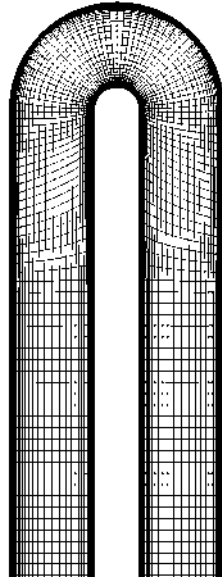
**Σχήμα 4.14:** Τυρβώδης ροή σε αγωγό σχήματος  $U$ . Σύγκλιση μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης για την ελαχιστοποίηση της διαφοράς των αδιάστατων απωλειών ολικής πίεσης εισόδου-εξόδου κατά τη διάρκεια των 200 αξιολογήσεων.

Στα σχήματα 4.15, 4.16 παρατίθενται η αρχική και η τελική μορφή του αγωγού, ξεχωριστά αλλά και σε σύγκριση.

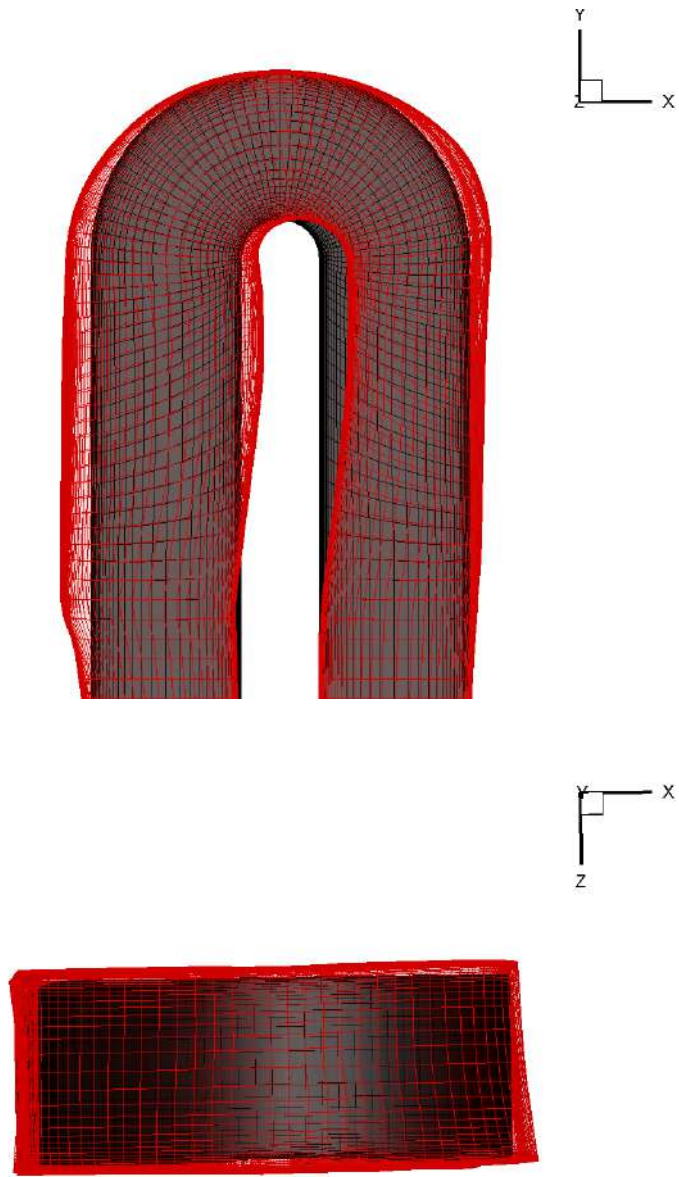
Στον πίνακα 4.3 φαίνεται η μεταβολή στην τιμή της συνάρτησης-στόχου (ως προς την τιμή που προέκυψε από την επίλυση της ροής στην αρχική γεωμετρία) και ο υπολογιστικός χρόνος σε ισοδύναμες επιλύσεις ροής (Equivalent Flow Solutions, EFS).

Αρχική Τιμή $F$	Τελική Τιμή $F$	Βελτίωση	Κόστος
1	0.644	35.6%	200 EFS

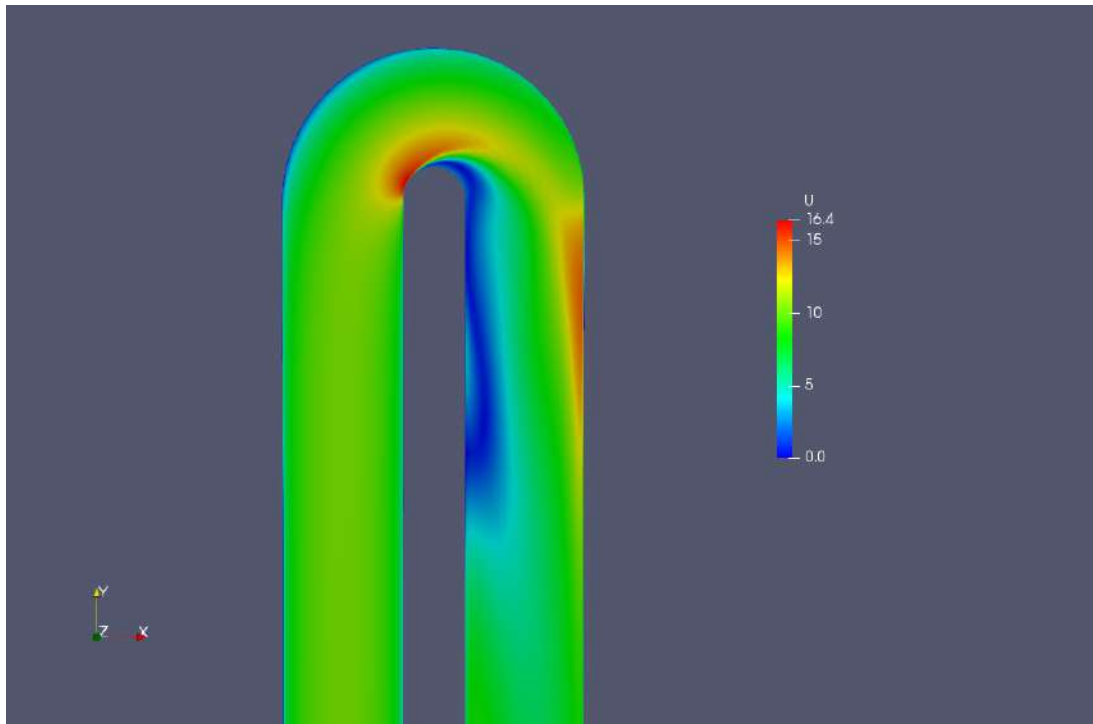
Από το σχήμα 4.18 φαίνεται ότι στην αρχική γεωμετρία συμβαίνει αποκόλληση της ροής στα σημεία όπου υπάρχει μηδενική ταχύτητα (μπλε χρώμα), κάτι αυξάνει τις απώλειες πίεσης. Αντίθετα στη βελτιστοποιημένη γεωμετρία δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο μειώνοντας αρκετά τις απώλειες.



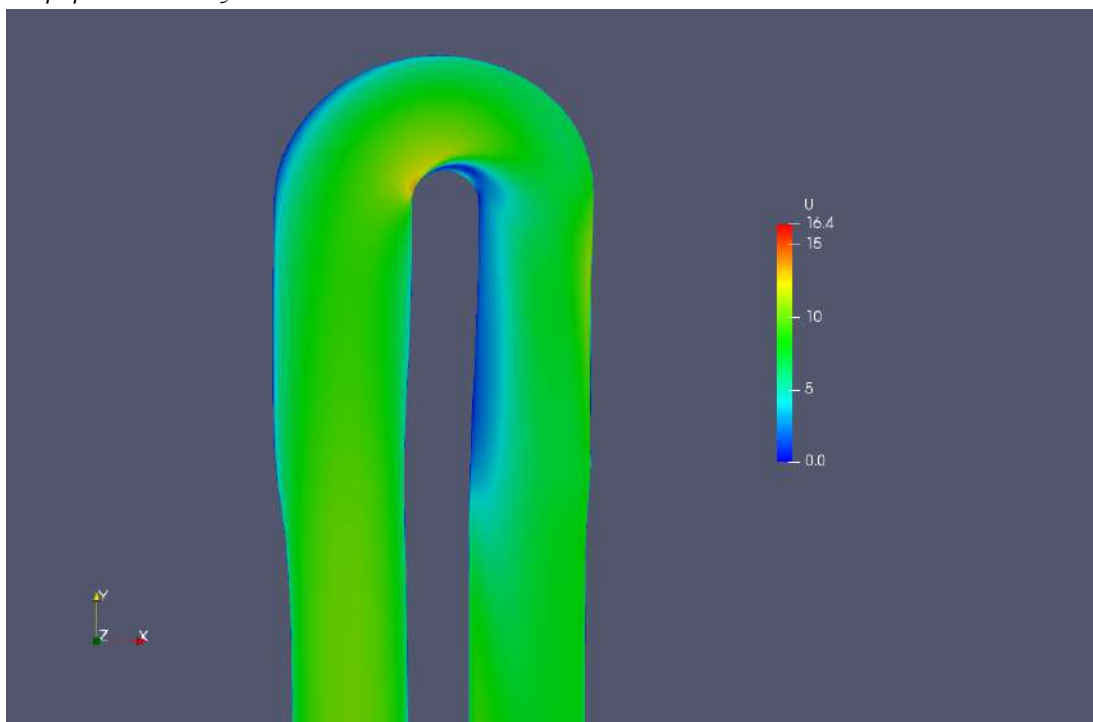
Σχήμα 4.15: Αρχική και τελική μορφή του αγωγού.



**Σχήμα 4.16:** Η αρχική μορφή του αγωγού (μαύρο) σε σύγκριση με την τελική του μορφή (κόκκινο).



**Σχήμα 4.17:** Απεικόνιση του σχήματος και του πεδίου ταχυτήτων στον αρχικό αγωγό. Τομή κατά τον άξονα Z.



**Σχήμα 4.18:** Απεικόνιση του σχήματος και του πεδίου ταχυτήτων στον βελτιστοποιημένο αγωγό. Τομή κατά τον άξονα Z.

## Κεφάλαιο 5

# Εφαρμογές στη Βελτιστοποίηση με χρήση της Συζυγούς Μεθόδου

Στο κεφάλαιο αυτό, αναλύεται το θεωρητικό υπόβαθρο της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, παρουσιάζονται σε συντομία πώς παράγονται οι συζυγείς εξισώσεις της ροής, καθώς και οι παράγωγοι ευαισθησίας της συνάρτησης-στόχου. Στη συνέχεια θα γίνουν εφαρμογές της μεθόδου των αρμονικών συντεταγμένων, με τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Αυτό αποτελεί κάτι καινούριο, καθώς στη διπλωματική εργασία με την εφαρμογή σε 2Δ σώματα [36], η μόνη μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για βελτιστοποίηση, ήταν οι ΕΑ.

Στις αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης το πιο βασικό θέμα είναι ο υπολογισμός των παραγώγων. Ευνόητη επιθυμία είναι το κόστος της μεθόδου υπολογισμού των παραγώγων να παραμένει σταθερό (ανεξάρτητο) με την αύξηση του πλήθους των ελεύθερων μεταβλητών.

### 5.1 Η συζυγής μέθοδος

Η συζυγής μέθοδος (adjoint method), όπως αναφέρθηκε, είναι ένα μαθηματικό εργαλείο που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των παραγώγων μιας συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές της βελτιστοποίησης. Πρωτοεμφανίστηκε στη θεωρία ελέγχου, όπου και χρησιμοποιούνταν ως μέθοδος βελτιστοποίησης [19], αλλά πλέον βρίσκει μεγάλη εφαρμογή σε προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, καθώς και σε αρκετούς άλλους τομείς όπως η γεωφυσική ή η σεισμική τομογραφία [31]. Υπάρχουν δύο κατηγορίες της συζυγούς μεθόδου, η διακριτή (discrete) [9] και η συνεχής (continuous)

[26]. Στη διακριτή μέθοδο, αρχικά γίνεται διακριτοποίηση των ροϊκών εξισώσεων και της συνάρτησης-στόχου και παράγονται οι προς επίλυση συζυγείς εξισώσεις, οι οποίες μπορούν να γραφούν απευθείας σε μητρώϊκή μορφή και να επιλυθούν αριθμητικά. Στη διπλωματική εργασία εφαρμόζεται η συνεχής συζυγής μέθοδος, όπως αυτή αναπτύσσεται από τη ΜΠΤΡ&Β του ΕΜΠ. Στη συνεχή συζυγή μέθοδο, οι συζυγείς εξισώσεις διατυπώνονται μαθηματικά χρησιμοποιώντας τις συνεχείς εξισώσεις ροής, δηλαδή στη μορφή ΜΔΕ, πρώτου αυτές διακριτοποιηθούν. Αρχικά παράγεται η επαυξημένη συνάρτηση-στόχου  $F_{aug}$  προσθέτοντας στην συνάρτηση-στόχου τις εξισώσεις ροής πολλαπλασιασμένες με τις συζυγείς μεταβλητές. Με χρήση του θεωρήματος Green-Gauss εξάγονται οι εκφράσεις των συνεχών συζυγών μεθόδων, οι συζυγείς οριακές συνθήκες καθώς και οι εκφράσεις των παραγώγων ευαισθησίας. Τέλος, οι συζυγείς ΜΔΕ της ροής διακριτοποιούνται για να λυθούν αριθμητικά. Πλεονέκτημα της συζυγούς μεθόδου είναι το χαμηλό υπολογιστικό κόστος που τη συνοδεύει. Πιο συγκεκριμένα, το κόστος υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας μιας συνάρτησης-στόχου είναι ανεξάρτητο του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού, ενώ ο χρόνος που απαιτείται συνολικά για τον υπολογισμό είναι ο χρόνος για να επιλυθούν οι εξισώσεις της ροής και ο χρόνος που απαιτείται για την επίλυση των συζυγών εξισώσεων. Ο χρόνος επίλυσης των συζυγών εξισώσεων μπορεί να θεωρηθεί πρακτικά ίσος του χρόνου που απαιτείται για την επίλυση των ροϊκών εξισώσεων. Στον αντίποδα, μειονέκτημα της μεθόδου αποτελεί η ανάγκη επαναδιατύπωσης των συζυγών εξισώσεων και των οριακών συνθηκών και, συνεπώς, ο επαναπρογραμματισμός του σχετικού λογισμικού για διαφορετικές συναρτήσεις-στόχου. Η επίλυση των εξισώσεων ροής και των συζυγών εξισώσεων γίνεται με τη βοήθεια του λογισμικού OpenFOAM [4], εφαρμόζοντας τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων (finite volume method). Για την επίλυση των συζυγών εξισώσεων χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό που έχει αναπτύξει η ΜΠΤΡ&Β στο ανοιχτό λογισμικό OpenFOAM.

## Το λογισμικό OpenFoam

Το OpenFOAM [4] είναι ένα ελεύθερο λογισμικό ανοιχτού κώδικα για την επίλυση προβλημάτων Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής, το οποίο χρησιμοποιείται ευρύτατα τόσο σε βιομηχανικό αλλά και σε ακαδημαϊκό επίπεδο. Περιλαμβάνει εργαλεία για τη γένεση πλέγματος καθώς και επιλύτες για ένα εύρος προβλημάτων. Οι επιλύτες αυτοί χρησιμοποιούνται για να λυθούν οι διακριτοποιημένες μορφές των εξισώσεων, ενώ στο χρήστη δίνεται επίσης η ελευθερία να επιλέξει το σχήμα διακριτοποίησης που θα χρησιμοποιηθεί για κάθε όρο της προς επίλυση εξίσωσης. Το λογισμικό είναι γραμμένο στη γλώσσα προγραμματισμού C++ και καθώς ο κώδικας είναι ανοιχτός, μπορεί ο καθένας να τον προσαρμόσει στις ανάγκες του. Πλεονέκτημα του λογισμικού OpenFOAM είναι ότι παρέχει τη δυνατότητα παράλληλης επεξεργασίας, δηλαδή να επιλύονται σε διαφορετικούς επεξεργαστές διάφορα τμήματα του προβλήματος ταυτόχρονα, πράγμα που μειώνει δραστικά το χρόνο που απαιτείται για την επίλυση ενός προβλήματος. Στη διπλωματική εργασία χρησιμοποιούνται οι συζυγείς τεχνικές που έχουν διατυπωθεί και

προγραμματιστεί από τη ΜΠΥΡ&Β στο OpenFOAM και όχι ο ίδιος ο επιλύτης που προσφέρει ανοιχτό το OpenFOAM.

## 5.2 Εφαρμογή Σε Αγωγό Σχήματος U

Στο σημείο αυτό θα παρουσιαστεί η διαδικασία βελτιστοποίησης με τη συζυγή μέθοδο του ίδιου ακριβώς αγωγού σχήματος U που βελτιστοποιήθηκε με τη βοήθεια εξελικτικών αλγορίθμων, στο κεφάλαιο 4.3. Ο τρόπος σχηματισμού του συστήματος κλωβών φαίνεται στα σχήματα 4.11, 4.12. Αρχικά θα αναλυθεί ο τρόπος σχηματισμού των εξισώσεων ροής και των συζυγών εξισώσεων και, στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης. Τέλος, θα γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων, όπως αυτά προέκυψαν από τις δύο μεθόδους βελτιστοποίησης που εφαρμόστηκαν, τη συζυγή μέθοδο και τους EA.

Ακολουθούν τα βήματα της βελτιστοποίησης του αγωγού σχήματος U με τη συζυγή μέθοδο [7] [38].

### Εξισώσεις Ροής

Η ροή είναι τυρβώδης και το μοντέλο τύρβης που χρησιμοποιείται είναι το Spalart - Allmaras[30]. Οι εξισώσεις Navier-Stokes, οι εξισώσεις του μοντέλου τύρβης, καθώς και οι οριακές συνθήκες του προβλήματος αποτελούν το πρωτεύον πρόβλημα. Οι εξισώσεις Navier-Stokes επιλύονται για τυρβώδη, ασυμπίεστη, χρονικά μόνιμη ροή [34]. Με την επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος, υπολογίζεται και η τιμή της συνάρτησης-στόχου. Οι μεταβλητές του πρωτεύοντος πεδίου και οι μεταβλητές του μοντέλου τύρβης που χρησιμοποιείται περιέχονται στο διάνυσμα  $\vec{U}$ . Οι εξισώσεις ροής που διέπουν το πρόβλημα γράφονται, με τη συμβολική χρήση του τελεστή ροής  $\vec{R}$ , στη μορφή:

$$\vec{R} = \vec{R}(\vec{U}, \vec{b}) \quad (5.1)$$

όπου  $\vec{b}$  το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού. Είναι:

$$R^p = -\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad (5.2)$$

$$R^v = v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.3)$$

όπου  $i = 1, 2, 3$  για 3D ροή,  $p$  η κινηματική στατική πίεση (δηλαδή η στατική πίεση

του ρευστού διαιρεμένη με τη σταθερή πυκνότητα αυτού),  $\tau_{ij} = (\nu + \nu_t)(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ , όπου  $\nu$  η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού και  $\nu_t$  ο συντελεστής τυρβώφους συνεκτικότητας. Η επανάληψη του δείκτη σημαίνει άθροιση στις τρεις καρτεσιανές συντεταγμένες. Να σημειωθεί ότι ακολουθείται η σύμβαση του Einstein, σύμφωνα με την οποία οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες υποδηλώνουν άθροιση.

Επιλύεται μια επιπλέον μερική διαφορική εξίσωση, αυτή του μοντέλου τύρβης Spalart - Allmaras [30]. Σύμφωνα με το μοντέλο, η τυρβώδης κινηματική συνεκτικότητα ορίζεται ως:

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1} \quad (5.4)$$

όπου  $f_{v1} = \frac{X^3}{X^3 + C_{v1}^3}$  και  $X = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}$ .

Η μεταβλητή  $\tilde{\nu}$ , γνωστή και ως μεταβλητή του μοντέλου Spalart - Allmaras [30], υπολογίζεται από την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης:

$$R^{\nu t} = u_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} = C_{b1}(1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\nu} - [C_{w1} f_w - \frac{C_{b1}}{\kappa^2} f_{t2}] (\frac{\tilde{\nu}}{d})^2 + \frac{1}{\sigma} [\frac{\partial}{\partial x_j} ((\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j}) + C_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i}] \quad (5.5)$$

Τα μεγέθη  $\sigma, C_{b1}, C_{b2}, \kappa, C_{v1}$  αποτελούν σταθερές με τιμές καθορισμένες από τους δημιουργούς του μοντέλου,  $d$  είναι η απόσταση από το πλησιέστερο στερεό τοίχωμα, ενώ τα μεγέθη  $\tilde{S}, f_{t1}, f_{t2}, f_{t3}, f_w$  προσδιορίζονται από συγκεκριμένες σχέσεις [30] [35].

Η επίλυση των εξισώσεων ροής γίνεται παράλληλα σε δώδεκα πυρήνες μίας μονάδας Intel Xeon CPU στα 2.199 GHz, με 25.6 MByte cache μνήμη.

## Συνάρτηση-Στόχος

Στο κεφάλαιο αυτό, που αναλύεται ένα πρόβλημα εσωτερικής αεροδυναμικής, η προς ελαχιστοποίηση συνάρτηση είναι οι απώλειες ολικής πίεσης μέσα στον αγωγό. Γενικά, η  $F$  εξαρτάται από το διάνυσμα  $\vec{U}$  και τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_N)$ . Οπότε ισχύει:  $F = F(\vec{b}, \vec{U}(\vec{b}))$ .

Η συνάρτηση  $F$  των ογκικά ολοκληρωμένων ολικών απωλειών πίεσης δίνεται από τον τύπο:

$$F = - \int_{S_{IO}} p_i u_k n_k dS \quad (5.6)$$

όπου  $S_{IO}$  οι διατομές εισόδου (inlet) και εξόδου (outlet) της ροής. Η διαφορά αυτή αποτελεί μια θετική ποσότητα και στόχος της βελτιστοποίησης είναι η ελαχιστοποίησή



της. Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης θα λυθεί με τον περιορισμό να ικανοποιούνται οι εξισώσεις ροής, οι οποίες συμβολίζονται κατά την εξίσωση 5.1 ως  $R_n = 0$ . Πρώτο βήμα για να αναπτυχθεί η συζυγής μέθοδος είναι η διατύπωση της επαυξημένης συνάρτησης-στόχου. Αυτή ορίζεται προσθέτοντας στην  $F$  τα χωρικά ολοκληρώματα των γινομένων των υπολοίπων των εξισώσεων ροής του πρωτεύοντος προβλήματος με τα πεδία των συζυγών μεταβλητών του προβλήματος.

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega + \int_{\Omega} q R^p d\Omega \quad (5.7)$$

όπου  $\Omega$  είναι το υπολογιστικό χωρίο,  $u_i$  η συζυγής ταχύτητα και  $q$  η συζυγής πίεση [27] [22]. Πρέπει να τονιστεί ότι καθώς τα υπόλοιπα των συναρτήσεων της ροής πρέπει πάντα να είναι μηδενικά, δηλαδή  $F \equiv F_{aug}$ .

Γενικά, στη διατύπωση της συζυγούς μεθόδου, στόχος μας είναι να εξαφανιστεί οποιαδήποτε ποσότητα εκφράζει ρυθμό μεταβολής ροϊκής μεταβλητής, είτε πρωτεύουσας είτε συζυγούς.

## Συζυγείς Εξισώσεις

Οι συζυγείς πεδριακές εξισώσεις είναι [33] [27]:

$$R^q = -\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (5.8)$$

$$R^u = u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial(u_i v_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^\alpha}{\partial x_j} + \frac{\partial q}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.9)$$

όπου  $\tau_{ij}^\alpha = (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  ο συζυγής τανυστής τάσεων. Σκόπιμα, για οικονομία του κειμένου παραλείπεται η συζυγής εξίσωση του μοντέλου τύρβης [7].

Ικανοποιώντας τις εξισώσεις 5.8 5.9 όλοι οι όροι που εξαρτώνται από τα  $\frac{\delta v_i}{\delta b_n}, \frac{\delta p}{\delta b_n}$  κατά την παραγωγή της σχέσης 5.7 εξαφανίζονται.

Από την παραγωγή της σχέσης 5.7, την επίλυση των συζυγών εξισώσεων και την επιλογή των κατάλληλων οριακών συνθηκών, προκύπτει τελικά μια σχέση κατά την οποία η παράγωγος ευαισθησίας  $\frac{\delta F}{\delta b_i}$  συναρτάται γενικά των άμεσων μεταβολών της συνάρτησης-στόχου ως προς τις ροϊκές μεταβλητές και των χωρικών μεταβολών των πρωτευουσών και συζυγών μεταβλητών [7]. Οπότε υπολογίζονται άμεσα οι παράγωγοι ευαισθησίας  $\frac{\delta F}{\delta x_m^j}$ .

## Υπολογισμός Παραγώγων Ευαισθησίας

Το επόμενο βήμα της διαδικασίας βελτιστοποίησης βασισμένης στην κλίση της συνάρτησης-στόχου είναι ο προσδιορισμός των παραγώγων ευαισθησίας της συνάρτησης-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, προκειμένου αυτές να καθορίσουν το βήμα της μεταβολής τους, ώστε να υπολογιστούν οι νέες τιμές των παραμέτρων. Στη βελτιστοποίηση με τη συζυγή μέθοδο, ο υπολογισμός αυτός γίνεται βάσει του κανόνα της αλυσίδας:

$$\frac{\delta F}{\delta b_i} = \sum_{j=1}^{n_{CFD}} \sum_{m=1}^3 \frac{\delta F}{\delta x_m^j} \frac{\delta x_m^j}{\delta b_i} \quad (5.10)$$

όπου  $n_{CFD}$  όλοι οι κόμβοι του υπολογιστικού πλέγματος, και του επιφανειακού και του εσωτερικού,  $x_m^j$  οι συντεταγμένες τους και  $b_i$  οι μεταβλητές σχεδιασμού όπως εδώ καθορίζονται από τον έναν ή δύο κλωβούς που χρησιμοποιούνται. Ο πρώτος όρος της σχέσης 5.10 αποτελεί τις παραγώγους ευαισθησίας οι οποίες προκύπτουν από την επίλυση των συζυγών εξισώσεων, ενώ ο δεύτερος όρος είναι οι αρμονικές συντεταγμένες του CFD πλέγματος και υπολογίζεται όπως αναλύθηκε στο κεφάλαιο 2.3.3.

## Μέθοδος της Απότομης Καθόδου

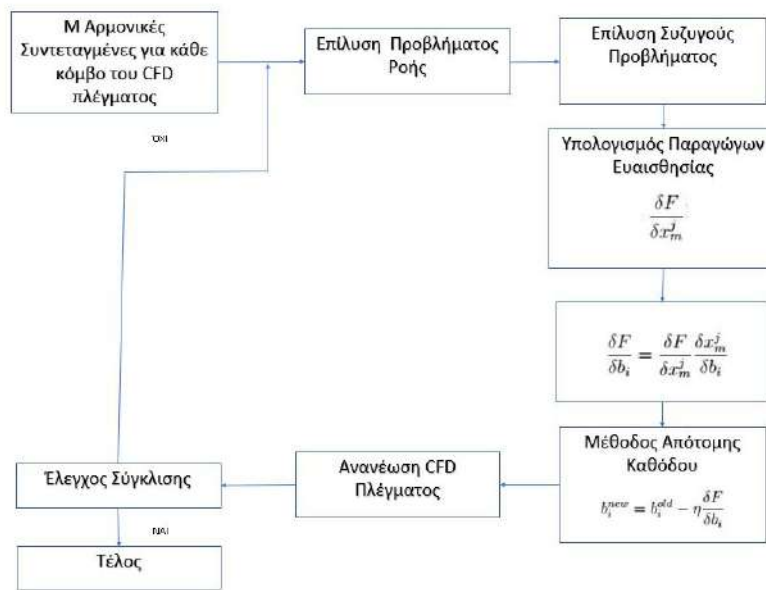
Αφού υπολογιστούν οι παράγωγοι της συνάρτησης-στόχου με τη βοήθεια της συζυγούς μεθόδου, μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη διαδικασία για την ελαχιστοποίηση της  $F$ , με απλούστερη τη διαδικασία απότομης καθόδου (steepest descent), όπου:

$$b_i^{new} = b_i^{old} - \eta \frac{\delta F}{\delta b_i} \quad (5.11)$$

Στην παραπάνω εξίσωση ο όρος  $\eta$  είναι ένας βαθμωτός συντελεστής που ορίζει το βήμα της καθόδου. Πέραν της μεθόδου της απότομης καθόδου μπορούν να χρησιμοποιηθούν κι άλλες μέθοδοι όπως η μέθοδος των συζυγών κλίσεων (Conjugate Gradient), η μέθοδος Newton και προσεγγιστικές μέθοδοι Newton όπως η SR1 και η BFGS.

Η διαδικασία υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας, δηλαδή η διαδικασία που υλοποιεί τον πολλαπλασιασμό (κανόνα της αλυσίδας) των αρμονικών συντεταγμένων του υπολογιστικού πλέγματος με τις παραγώγους ευαισθησίας από την επίλυση του συζυγούς προβλήματος, καθώς και η εφαρμογή της μεθόδου της απότομης καθόδου και εν τέλει ο υπολογισμός της παραμόρφωσης του υπολογιστικού πλέγματος προγραμματίστηκαν σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran 90.

Τα βήματα της παραπάνω διαδικασίας φαίνονται και συνοπτικά στο σχήμα 5.1

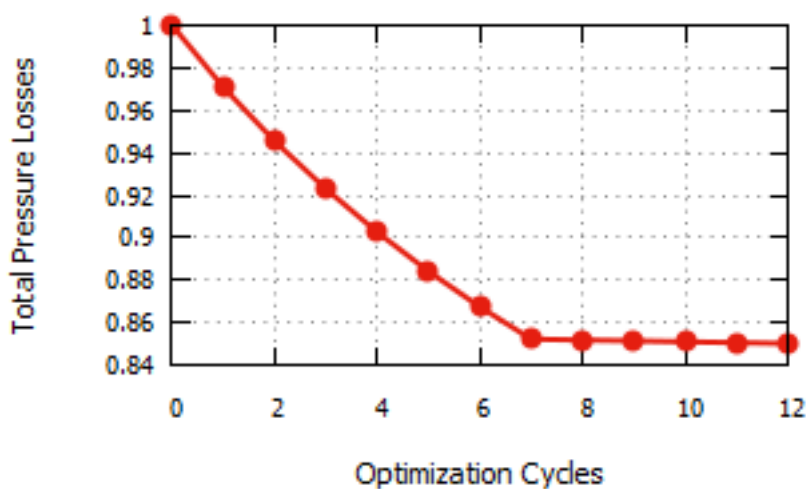


**Σχήμα 5.1:** Ο συνολικός βρόχος βελτιστοποίησης μέσω συζυγών μεθόδων σε χρήση με την παραμετροποίηση με αρμονικές συντεταγμένες

Στον πίνακα 5.2 φαίνεται η μεταβολή στην τιμή της  $F$  (ως προς την τιμή που προέκυψε από την επίλυση της ροής στην αρχική γεωμετρία) και ο υπολογιστικός χρόνος σε ισοδύναμες επιλύσεις ροής (Equivalent Flow Solutions, EFS). Μία EFS θεωρείται ότι ισοδυναμεί με μία επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος, η επίλυση του οποίου θεωρείται ότι ισοδυναμεί με την επίλυση του συζυγούς προβλήματος. Άρα ένας κύκλος βελτιστοποίησης ισοδυναμεί με δύο EFS.

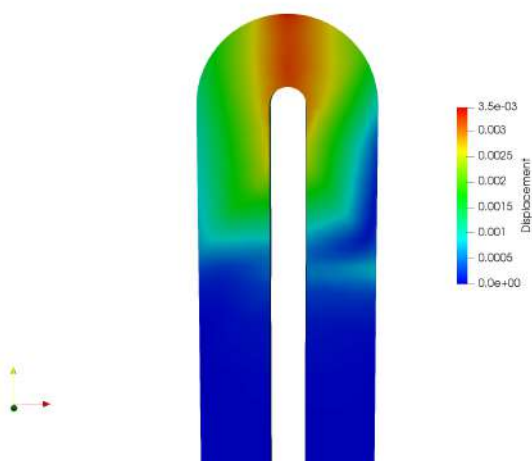
Αρχική Τιμή $F$	Τελική Τιμή $F$	Βελτίωση	Κόστος
1	0.854	14.59%	24 EFS

Στο σχήμα 5.2 παρουσιάζεται η εξέλιξη της τιμής της συνάρτησης-στόχου κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης.



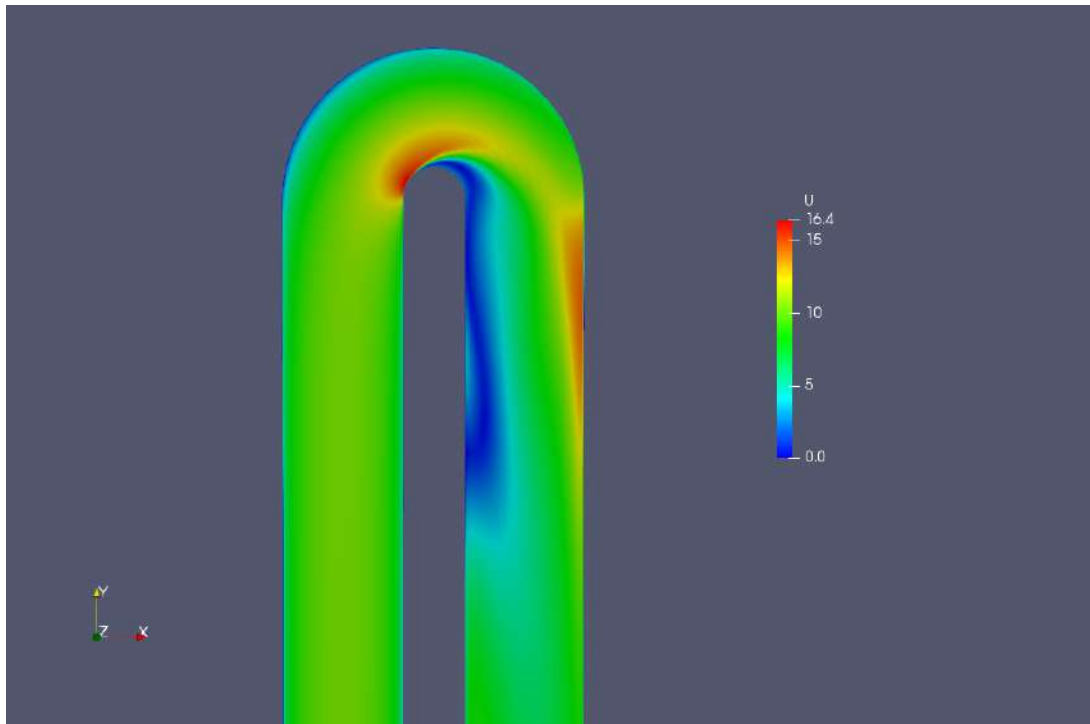
**Σχήμα 5.2:** Τυρβώδης ροή σε αγωγό σχήματος U. Σύγκλιση μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης για την ελαχιστοποίηση της διαφοράς των απωλειών ολικής πίεσης κατά τη διάρκεια των κύκλων βελτιστοποίησης, με χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου.

Στο σχήμα 5.3 φαίνονται οι μετατοπίσεις που προέκυψαν από τη διαδικασία της βελτιστοποίησης του αγωγού με τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Παρατηρείται ότι ενώ οι μετατοπίσεις είναι σχετικά μικρές, επιτυγχάνεται σημαντική βελτίωση της συνάρτησης  $F$ .

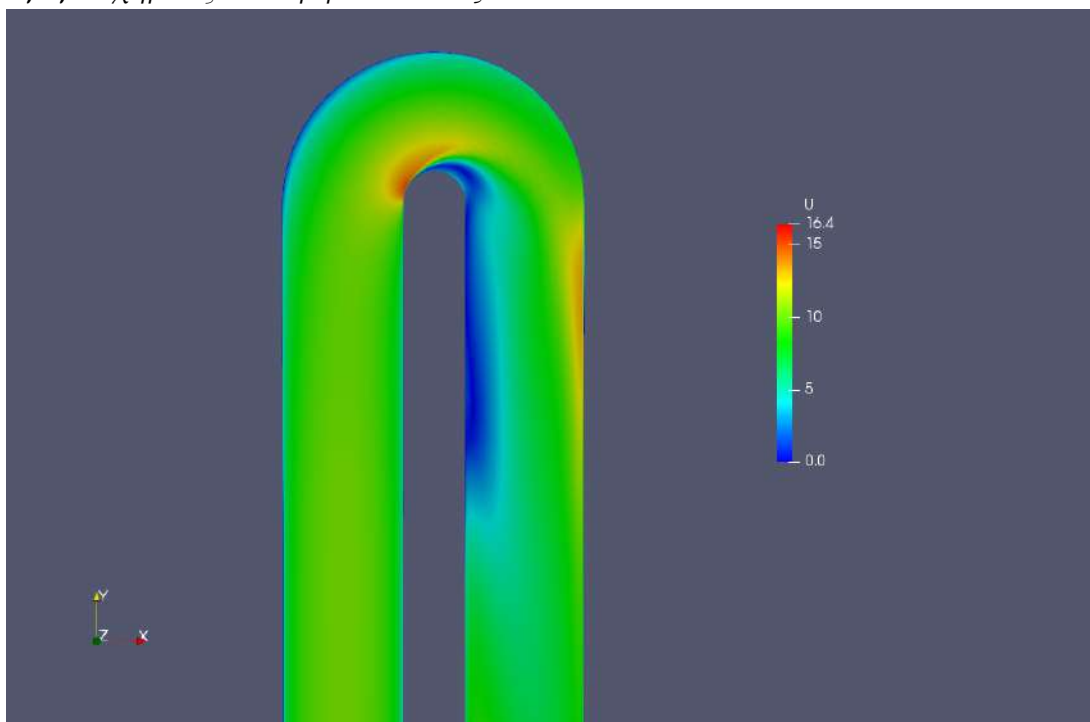


**Σχήμα 5.3:** Βελτιστοποιημένος αγωγός σχήματος U. Το μέγεθος της μετατόπισης της αρχικής γεωμετρίας, όπως προέκυψε έπειτα από τη βελτιστοποίηση με τη συνεχή συζυγή μέθοδο.

Στα σχήματα 5.4, 5.5 παρατίθενται η ροή στην αρχική και τη βελτιστοποιημένη μορφή του αγωγού.



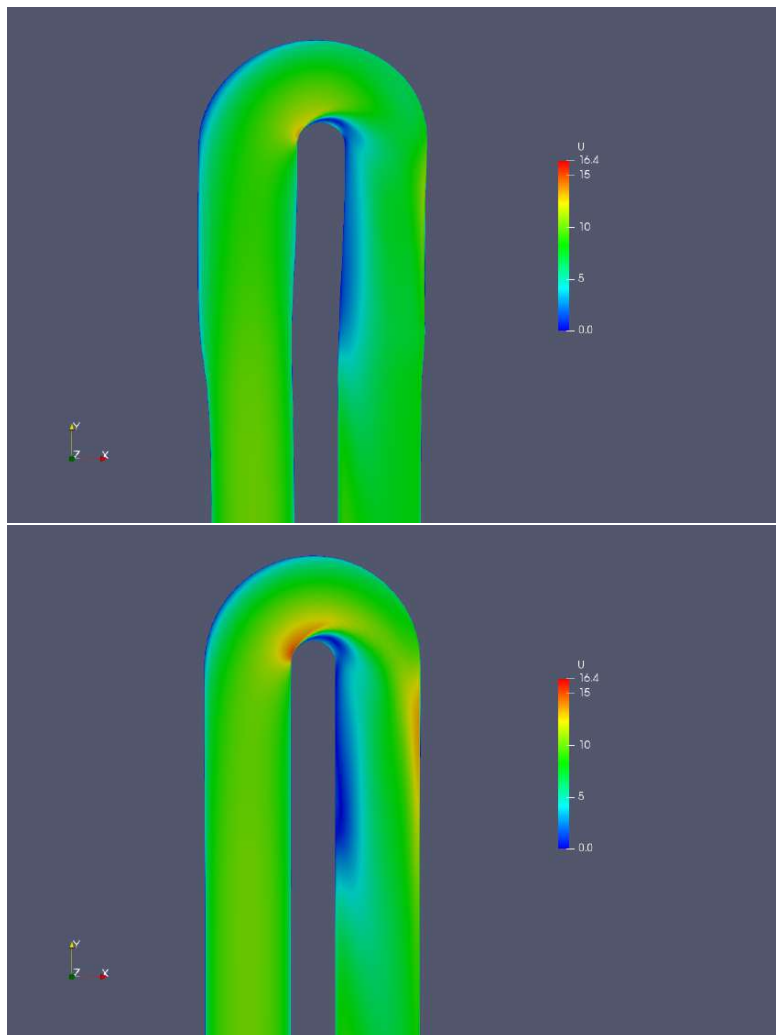
**Σχήμα 5.4:** Γεωμετρία και πεδίο ταχύτητας για τον 1<sup>ο</sup> κύκλο βελτιστοποίησης στον αγωγό σχήματος U. Τομή κατά τον άξονα Z.



**Σχήμα 5.5:** Γεωμετρία και πεδίο ταχύτητας για τον 12<sup>ο</sup> κύκλο βελτιστοποίησης στον αγωγό σχήματος U. Τομή κατά τον άξονα Z.

## Σύγκριση Αποτελεσμάτων

Για τον αγωγό σχήματος  $U$  η διαδικασία της βελτιστοποίησης έγινε τόσο με χρήση εξελικτικών αλγορίθμων, (EA) όσο και με χρήση της Συζυγούς Μεθόδου. Όπως έχει αναφερθεί, μεγάλο πλεονέκτημα των στοχαστικών μεθόδων και, κατά συνέπεια, των εξελικτικών αλγορίθμων είναι η δυνατότητά τους να μην εγκλωβίζονται σε τοπικά ακρότατα. Αντίθετα, οι αιτοκρατικές μέθοδοι μπορεί να συγκλίνουν γρήγορα στη βέλτιστη λύση, όμως, σε αντίθεση με τις στοχαστικές μεθόδους υπάρχει ο κίνδυνος να εντοπιστεί τοπικό ακρότατο, ανάλογο με το σημείο αρχικοποίησης. Στο σχήμα 5.6 απεικονίζονται τα αποτελέσματα από την επίλυση της ροής στον βελτιστοποιημένο αγωγό και με τους δύο τρόπους βελτιστοποίησης.



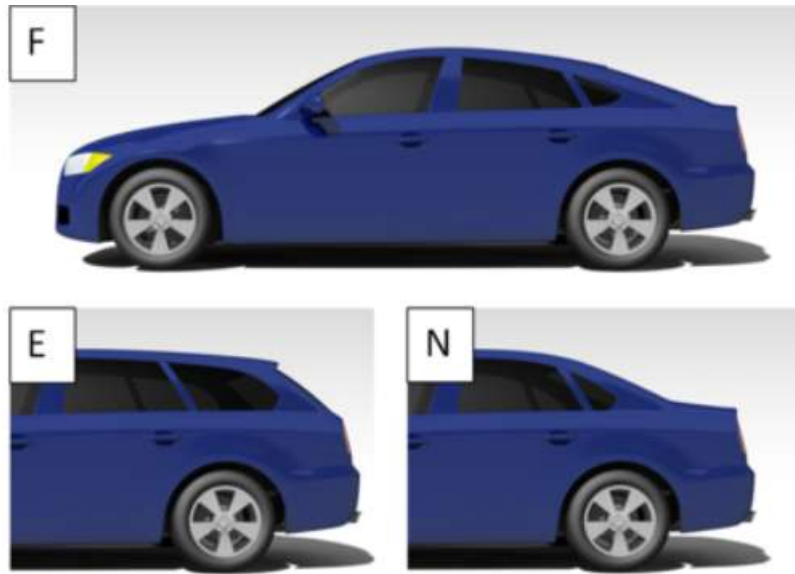
**Σχήμα 5.6:** Τυρβώδης ροή σε αγωγό σχήματος  $U$ . Σύγκριση της ροής για τη βελτιστοποιημένη γεωμετρία, που προέκυψε από βελτιστοποίηση με EA (πάνω) και από βελτιστοποίηση με τη συνεχή συζυγή μέθοδο (κάτω).

## 5.3 Εφαρμογή της Μεθόδου στο Γενικευμένο Μοντέλο Αυτοκινήτου DrivAer

Μία πιο απαιτητική εφαρμογή αποτελεί η παραμόρφωση του πλέγματος γύρω από μία σύνθετη γεωμετρία, όπως είναι αυτή του γενικευμένου μοντέλου αυτοκινήτου DrivAer. Στο κεφάλαιο αυτό, θα εφαρμοστεί η μέθοδος των αρμονικών συντεταγμένων στο μοντέλο DrivAer και θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησής του με χρήση της συζυγούς μεθόδου. Η εφαρμογή αυτή έχει μια διαφορά με τις προηγούμενες, καθώς τοποθετείται σύστημα δύο κλωβών σε δύο διαφορετικά σημεία του αυτοκινήτου.

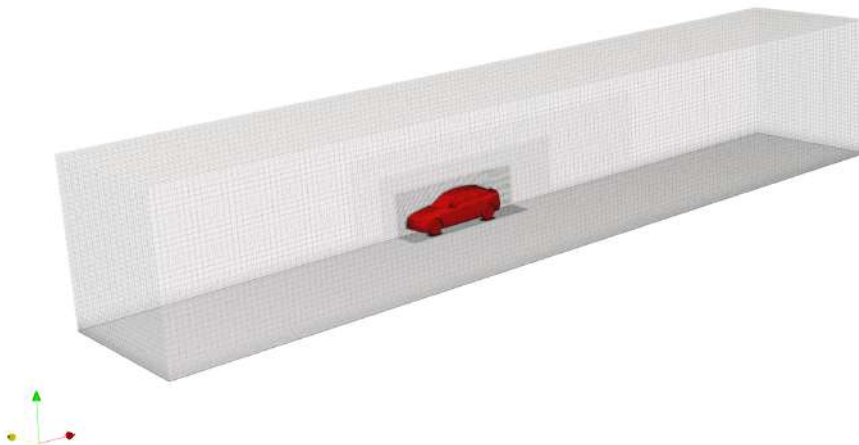
### Το μοντέλο DrivAer

Ένας από τους παράγοντες που ερευνώνται αρκετά είναι η αεροδυναμική των αυτοκινήτων, καθώς συμβάλλει στη μείωση των ρύπων που εκπέμπονται, κάτι που έχει αποκτήσει ιδιαίτερη σημασία στη σύγχρονη εποχή. Για το σκοπό αυτό, είναι απαραίτητο να προσομοιώνεται με ακρίβεια, μέσω υπολογιστικών τεχνικών, η ροή γύρω από τα αυτοκίνητα. Γενικές μελέτες των φαινομένων της ροής γίνονται με τη χρήση απλοποιημένων μοντέλων αυτοκινήτων όπως είναι το μοντέλο Ahmed [8] και το μοντέλο SAE [12]. Τέτοια μοντέλα δίνουν τη δυνατότητα να μελετηθεί η βασική δομή της ροής, χωρίς να την επηρεάζουν παρεμβολές που δημιουργούνται λόγω των διαφορετικών περιοχών του αυτοκινήτου, όπως η ύπαρξη και η περιστροφή των τροχών ή η αλληλεπίδραση του δρόμου και της κάτω πλευράς του οχήματος. Οι παρεμβολές αυτές όμως είναι που προκαλούν μερικά από τα πιο σύνθετα φαινόμενα της ροής και για το λόγο αυτό συχνά είναι απαραίτητη η μελέτη τους. Το πρόβλημα αυτό λοιπόν, έρχεται να διορθώσει ένα νέο, ρεαλιστικό, γενικευμένο μοντέλο αυτοκινήτου, το DrivAer. Το μοντέλο DrivAer αναπτύχθηκε από τον τομέα Αεροδυναμικής και Μηχανικής Ρευστών του Τεχνικού Πανεπιστημίου του Μονάχου σε συνεργασία με τις Audi AG [1] και BMW Group [2]. Το μοντέλο έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε να αποτελείται από διαφορετικά, εναλλάξιμα μέρη ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ένα μεγάλο εύρος μελετών [18]. Το DrivAer αποτελεί μία προσπάθεια να γεφυρωθεί το χάσμα ανάμεσα στα εξαιρετικά απλοποιημένα μοντέλα που χρησιμοποιούνται στη βιβλιογραφία και στην περιορισμένη εφαρμογή των αποτελεσμάτων μιας αεροδυναμικής μελέτης συγκεκριμένου μοντέλου της παραγωγής, χάρη στο γεγονός ότι είναι διαμορφώσιμο και, άρα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μια πληθώρα αεροδυναμικών μελετών και βελτιστοποιήσεων.



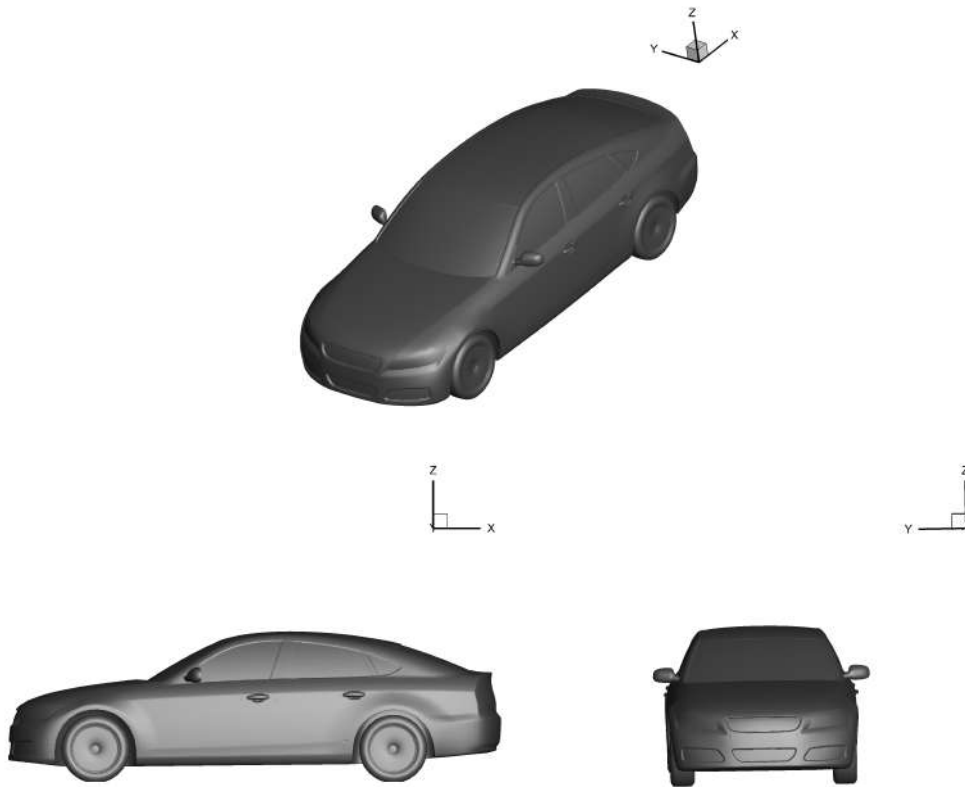
**Σχήμα 5.7:** Διαφορετικές διαμορφώσεις του *DrivAer*: *Fastback (F)*, *Estate Back (E)*, *Notchback (N)*. Από το Τεχνικό Πανεπιστήμιο του Μονάχου (*TUM*) [18].

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη μελέτη του συγκεκριμένου μοντέλου μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια για τη βελτιστοποίηση πραγματικών οχημάτων της παραγωγής. Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία θα γίνει μελέτη της ροής του αέρα γύρω από τη διαμόρφωση *Fastback* του *DrivAer*. Η γεωμετρία του μοντέλου φαίνεται στο σχήμα 5.9. Η γεωμετρία αυτή περιλαμβάνει το μισό αυτοκίνητο (αριστερό τμήμα), μαζί με όλες τις εξωτερικές επιφάνειες αυτού, όπως είναι οι τροχοί και οι καθρέφτες. Το πλέγμα γύρω από τη γεωμετρία αποτελείται από 2818377 κόμβους και 13047429 κελιά (κυρίως εξάεδρα) (Σχήμα 5.8).



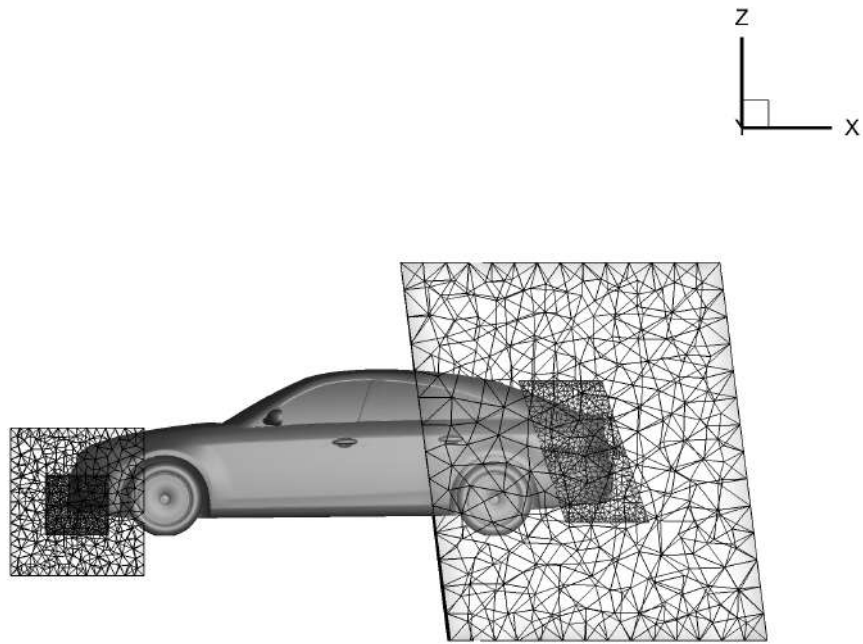
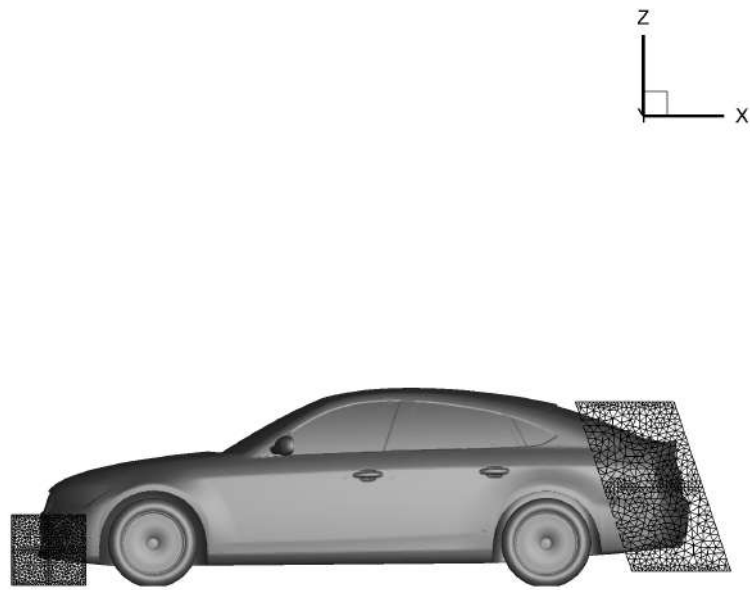
**Σχήμα 5.8:** Το υπολογιστικό πλέγμα του μοντέλου *DrivAer*.





**Σχήμα 5.9:** Γενικευμένο μοντέλο αυτοκινήτου *DrivAer* με διαμόρφωση *Fastback*.

Ένα μοντέλο αυτοκινήτου μπορεί να βελτιστοποιηθεί σε αρκετά σημεία. Στη διπλωματική αυτή εργασία επιλέχθηκαν δύο περιοχές, η περιοχή στο οπίσθιο και η περιοχή στο εμπρόσθιο μέρος του αυτοκινήτου. Στο πλαίσιο αυτό, δημιουργείται δύο φορές το σύστημα των δύο κλωβών, όπως φαίνεται στο σχήματα 5.9 και 5.8. Όπως γίνεται αντιληπτό, από τη στιγμή που το πλέγμα του *DrivAer* είναι συμμετρικό, το ίδιο συμβαίνει και με το αρμονικό χωρίο, ενώ το επίπεδο συμμετρίας δεν πρέπει να μεταβληθεί. Το αρμονικό πλέγμα ελέγχου για το οπίσθιο τμήμα αποτελείται από 9637 κόμβους και από 47432 τετράεδρα. Αντίστοιχα, για το εμπρόσθιο τμήμα, το πλέγμα ελέγχου αποτελείται από 9427 κόμβους και από 46232 τετράεδρα.



**Σχήμα 5.10:** Γενικευμένο μοντέλο αυτοκινήτου *DrivAer* μαζί με τα αρμονικά χωρία, με διπλό σύστημα δύο κλωβών.

## Βελτιστοποίηση με τη Συζυγή Μέθοδο

Η ανάπτυξη της συζυγούς μεθόδου γίνεται ακριβώς όπως παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 5.2 [7], προσαρμοσμένη φυσικά στις συνθήκες του προβλήματος:

### Εξισώσεις και Συνθήκες Ροής

Αρχικά, πρέπει να τονιστεί ότι μελετάται ένα πρόβλημα εξωτερικής αεροδυναμικής, όπου το αυτοκίνητο κινείται με χαμηλή ταχύτητα, οπότε μπορεί να γίνει η θεώρηση ότι η ροή είναι ασυμπίεστη, δηλαδή η τιμή της πυκνότητας  $\rho$  δεν μεταβάλλεται χρονικά αλλά και χωρικά. Επομένως, οι εξισώσεις της μέσης ροής καθώς και οι εξισώσεις των μοντέλων τύρβης θα γραφούν για ασυμπίεστο ρευστό. Αν και η ροή γύρω από κάθε αυτοκίνητο είναι εκ φύσεως χρονικά μεταβαλλόμενη (unsteady), στην εργασία αυτή, επιλέγεται να επιλυθεί ως μόνιμη. Ο λόγος δεν είναι άλλος από τη μείωση του υπολογιστικού κόστους. Η ροή είναι τυρβώδης και το μοντέλο τύρβης που χρησιμοποιείται είναι το Spalart - Allmaras [30]. Το χαρακτηριστικό μήκος είναι  $L_{ref}=1$  και η ταχύτητα στο επ' άπειρο όριο,  $U_{\infty} = 38.89m/s$ .

Η επίλυση των εξισώσεων ροής γίνεται παράλληλα σε δώδεκα πυρήνες μίας μονάδας Intel Xeon CPU στα 2.399 GHz, με 20.48 MByte cache μνήμη.

### Συνάρτηση-Στόχος

Στην αεροδυναμική μελέτη του DriVaer, η προς ελαχιστοποίηση συνάρτηση-στόχος είναι η δύναμη της οπισθέλκουσας στο αυτοκίνητο.

Ο συντελεστής οπισθέλκουσας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$C_d = \frac{F_d}{(1/2)\rho U_{\infty}^2 A_{ref}} \quad (5.12)$$

όπου  $F_d$  η οπισθέλκουσα που ασκείται στο αυτοκίνητο,  $U_{\infty}$  η ταχύτητα της επ' άπειρον ροής,  $\rho$  η πυκνότητα του αέρα και  $A_{ref}$  η μετωπική επιφάνεια του αυτοκινήτου.

Από το σημείο αυτό και μετά η διαδικασία είναι η ίδια με αυτήν που ακολουθήθηκε στο κεφάλαιο 5.2 και φαίνεται στο σχήμα 5.1.

Για να προκύψει η βέλτιστη γεωμετρία πρέπει όλη η διαδικασία να επαναληφθεί για αρκετούς ακόμα κύκλους βελτιστοποίησης. Καθώς όμως οι υπολογιστικές απαιτήσεις για κάτι τέτοιο είναι αρκετά μεγάλες δεν κρίθηκε σκόπιμο να εκτελεστούν επιπλέον κύκλοι οπότε η διαδικασία σταμάτησε στους 4 κύκλους. Εξάλλου κατά τη βελτιστοποίηση μιας

γεωμετρίας η οποία βρίσκεται ήδη σε καλό επίπεδο ο πρώτος κύκλος βελτιστοποίησης επιτυγχάνει κέρδος έως και 80% του συνολικού, ενώ κάθε επόμενο βήμα συνεισφέρει λιγότερο. Σκοπός, εξάλλου, της διπλωματικής αυτής εργασίας δεν είναι η αναζήτηση της βέλτιστης γεωμετρίας, αλλά η ανάπτυξη της μεθόδου των αρμονικών συντεταγμένων και η εφαρμογή της στη βελτιστοποίηση 3D σωμάτων.

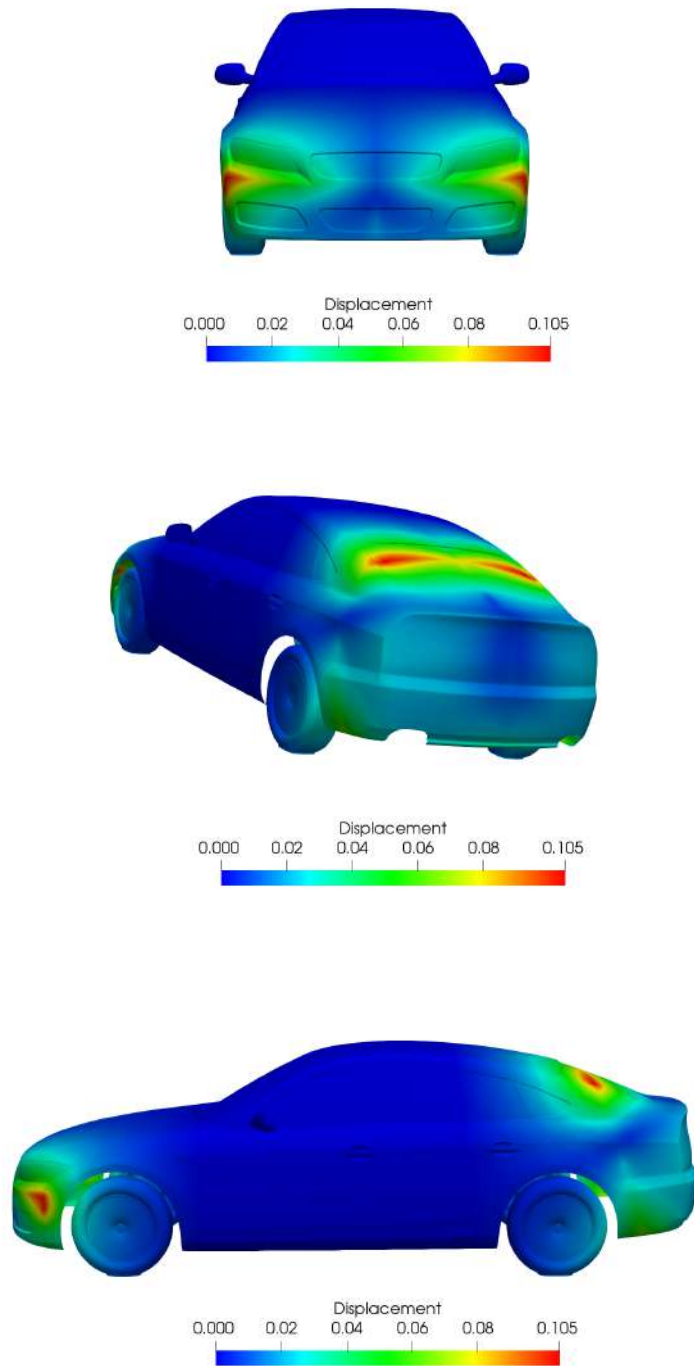
## Αποτελέσματα Βελτιστοποίησης

Στον πίνακα 5.3 φαίνεται η μεταβολή στην τιμή της συνάρτησης  $F$  και ο υπολογιστικός χρόνος σε Equivalent Flow Solutions (EFS).

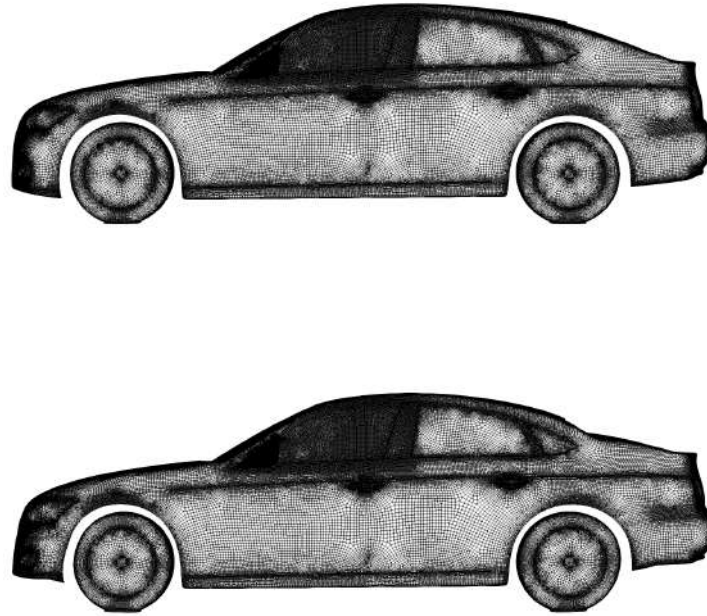
Αρχική Τιμή $F$	Τελική Τιμή $F$	Βελτίωση	Κόστος
0.30987	0.2919	5.8%	8 EFS

Στο σχήμα 5.11 φαίνονται τα πεδία των μετατοπίσεων, όπως αυτά προέκυψαν από τη βελτιστοποίηση του DrivAer με χρήση της συζυγούς μεθόδου. Στα σχήματα 5.12, 5.13 παρουσιάζονται οι μετατοπίσεις του αυτοκινήτου που προέκυψαν από την παραπάνω διαδικασία βελτιστοποίησης.

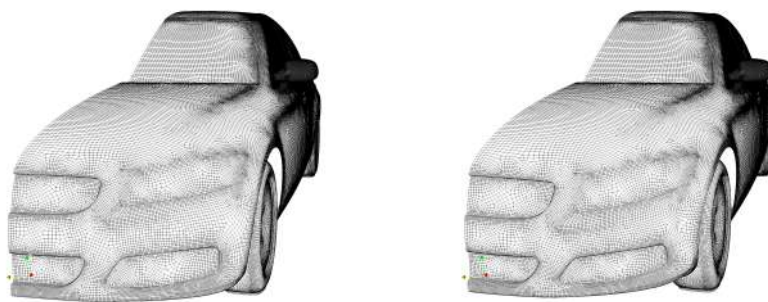
Από τα σχήματα είναι εύλογο να παρατηρηθεί ότι οι μετατοπίσεις που προέκυψαν δεν αντιστοιχούν σε πραγματικές δυνατότητες μετατόπισης. Είναι εμφανές ότι, όσον αφορά το οπίσθιο τμήμα του αυτοκινήτου, τα σημεία μέγιστων μετατοπίσεων είναι στο πίσω τζάμι, που δεν αποτελεί αντικείμενο αεροδυναμικής μελέτης. Αντίστοιχα και στο εμπρόσθιο τμήμα οι μετατοπίσεις δεν είναι ομαλές και προκαλούν βυθίσεις και ασυνέχειες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι δεν τέθηκαν περιορισμοί κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης και το λογισμικό δεν διαθέτει περιορισμούς ώστε να αποτρέψει τις συγκεκριμένες μετατοπίσεις. Ο μόνος περιορισμός που τέθηκε ήταν να μη μετακινηθούν τα σημεία ελέγχου του κλωβού που βρίσκονται πάνω στον άξονα συμμετρίας κατά  $\Delta y$ . Στόχος της μελέτης ήταν η εφαρμογή της μεθόδου σε μια πολύπλοκη γεωμετρία, η ταυτόχρονη τοποθέτηση διαφορετικών συστημάτων δύο κλωβών στο ίδιο αεροδυναμικό σώμα και φυσικά η εφαρμογή αυτών σε μία διαδικασία βελτιστοποίησης.



**Σχήμα 5.11:** Εφαρμογή στο αυτοκίνητο *DrivAer*. Το μέγεθος της μετατόπισης της αρχικής γεωμετρίας, όπως προέκυψε έπειτα από τη βελτιστοποίηση με τη συζυγή μέθοδο.



**Σχήμα 5.12:** Εφαρμογή στο αυτοκίνητο *DrivAer*. Σύγκριση της αρχικής γεωμετρίας (πάνω) με τη βελτιστοποιημένη (κάτω).



**Σχήμα 5.13:** Εφαρμογή στο αυτοκίνητο *DrivAer*. Σύγκριση της αρχικής γεωμετρίας (αριστερά) του εμπρόσθιου τμήματος με την αντίστοιχη βελτιστοποιημένη (δεξιά).

# Κεφάλαιο 6

## Ανακεφαλαίωση & Συμπεράσματα

### 6.1 Ανακεφαλαίωση

Στην εργασία αυτή, αναπτύχθηκε και προγραμματίστηκε λογισμικό για προσαρμοστική παραμόρφωση 3D υπολογιστικών πλεγμάτων με χρήση των αρμονικών συντεταγμένων. Επίσης, έγινε εφαρμογή της μεθόδου για τη βελτιστοποίηση αεροδυναμικών σωμάτων και με ΕΑ και με τη συζυγή μέθοδο. Αποτελεί επέκταση παλαιότερης διπλωματικής εργασίας που ανέπτυξε και εφάρμοσε τη μέθοδο σε 2D σώματα. Κατά τη διάρκεια του βρόχου αεροδυναμικής βελτιστοποίησης μορφής, προκύπτει η ανάγκη για τη γένεση πλέγματος κάθε φορά που τα στερεά όρια της προς βελτιστοποίησης μορφής τροποποιούνται. Επειδή η επαναπλεγματοποίηση δεν ενδείκνυται, ιδιαίτερα σε εφαρμογές με μεγάλα 3D πλέγματα, αναπτύχθηκε η μέθοδος της εργασίας αυτής, ώστε να επιταχυνθεί ο κύκλος βελτιστοποίησης.

Αναλυτικά, στη διπλωματική εργασία, παρουσιάστηκαν τα εξής:

- Αναλύθηκε το θεωρητικό υπόβαθρο και οι βασικές ιδιότητες των βαρυκεντρικών και αρμονικών συντεταγμένων. Στη συνέχεια, παρουσιάστηκαν τα βήματα με τα οποία εφαρμόζεται η μέθοδος. Το πρώτο βήμα είναι η επιλογή του αεροδυναμικού σώματος προς βελτιστοποίηση. Δεύτερο, η δημιουργία του αρμονικού χωρίου και πλέγματος γύρω από αυτό, με χρήση κάποιου λογισμικού. Η κατανομή των σημείων ελέγχου πρέπει να γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζει καλύτερο και ομαλότερο έλεγχο της περιοχής επιρροής του αρμονικού χωρίου. Σε όλο το αρμονικό χωρίο επιλύεται η εξίσωση Laplace και προκύπτουν οι αρμονικές συντεταγμένες για κάθε κόμβο του αρμονικού χωρίου, μία από κάθε σημείο ελέγχου. Μέσω παρεμβολής, προκύπτουν οι αρμονικές συντεταγμένες των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος ως προς τα σημεία ελέγχου του αρμονικού χωρίου. Αυτή η διαδικασία πραγματοποιείται μία μόνο φορά, αποθηκεύοντας τις αρμονι-

κές συντεταγμένες των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος. Αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη βελτιστοποίηση αεροδυναμικών σωμάτων.

- Σε κάποια αεροδυναμικά σώματα η μετάβαση από την περιοχή η οποία μένει ανέπαφη από την επίδραση του αρμονικού χωρίου δεν είναι ομαλή. Για το λόγο αυτό καθώς και για τη διατήρηση της ποιότητας του πλέγματος δημιουργείται ένα σύστημα δύο κλωβών, αντί ενός, το οποίο αποτελείται από την άθροιση δύο διαφορετικών αρμονικών χωρίων, ενός εσωτερικού και ενός εξωτερικού.
- Παρουσιάστηκαν παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου τόσο σε ένα απλό σώμα όπως η σφαίρα, όσο και σε πτέρυγα αεροσκάφους, ενώ πραγματοποιήθηκε εφαρμογή της τεχνικής των δύο κλωβών σε αγωγό τύπου S, αποδεικνύοντας τη σημασία της.
- Πραγματοποιήθηκε βελτιστοποίηση με εξελικτικούς αλγορίθμους της πτέρυγας ONERA M6 και αγωγού σχήματος U.
- Πραγματοποιήθηκε βελτιστοποίηση με τη συζυγή μέθοδο, αγωγού σχήματος U και παρουσιάστηκαν τα αποτελέσματα συγκριτικά με τη βελτιστοποίηση με εξελικτικούς αλγορίθμους. Επίσης εφαρμόστηκε βελτιστοποίηση με τη συζυγή μέθοδο του γενικευμένου μοντέλου αυτοκινήτου DrivAer. Στη διαδικασία αυτή, τοποθετήθηκαν δύο ξεχωριστά συστήματα αρμονικών χωρίων (δύο διπλοί κλωβοί) σε διαφορετικές περιοχές του αυτοκινήτου.

Κατά τη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας προγραμματίστηκε λογισμικό σε γλώσσα Fortran και C++. Αυτό το λογισμικό αποτελείται από τρία μέρη:

- Στον πρώτο αλγόριθμο, γίνεται ανάγνωση του πλέγματος του κλωβού, τοποθέτηση των οριακών συνθηκών στην επιφάνεια του πλέγματος και επίλυση της εξίσωσης Laplace. Τελικά, προκύπτουν οι αρμονικές συντεταγμένες κάθε κόμβου του κλωβού από κάθε σημείο ελέγχου.
- Στο δεύτερο αλγόριθμο, γίνεται η παρεμβολή των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος στο αρμονικό χωρίο. Ελέγχεται σε ποιο τετραεδρικό στοιχείο του αρμονικού πλέγματος ανήκει κάθε κόμβος του υπολογιστικού. Έπειτα, υπολογίζονται οι αρμονικές συντεταγμένες του κόμβου αυτού ως προς τα σημεία ελέγχου.
- Στο τελευταίο τμήμα, γίνεται η παραμόρφωση του αεροδυναμικού σώματος, η οποία πλέον εξαρτάται αποκλειστικά από τα βάρη που προέκυψαν και τη μετατόπιση των σημείων ελέγχου.

Οι παραπάνω κώδικες τροποποιήθηκαν για να εφαρμοστεί η τεχνική των δύο κλωβών. Για τη βελτιστοποίηση με εξελικτικούς αλγορίθμους χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό EASY που έχει αναπτυχθεί από τη ΜΠΥΡ&Β, και με τη συζυγή μέθοδο, οι κώδικες όπως επίσης έχουν αναπτυχθεί από τη ΜΠΥΡ&Β. Τέλος, προγραμματίστηκε η διαδικασία που υλοποιεί τον πολλαπλασιασμό (κανόνα της αλυσίδας) των αρμονικών συντεταγμένων του υπολογιστικού πλέγματος με τις παραγώγους ευαισθησίας από



την επίλυση του συζυγούς προβλήματος, για τον υπολογισμό των νέων τιμών των σημείων ελέγχου χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της απότομης καθόδου και, εν τέλει, τον υπολογισμό της παραμόρφωσης του υπολογιστικού πλέγματος.

## 6.2 Συμπεράσματα

Από τη διπλωματική εργασία προέκυψαν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Αρχικά, έγινε επιτυχής επέκταση της μεθόδου από 2Δ σε 3Δ σώματα και διαπιστώθηκε η αποτελεσματική λειτουργία της μεθόδου.
- Το τμήμα του αεροδυναμικού σώματος που επηρεάζεται περισσότερο είναι αυτό που βρίσκεται πλησιέστερα στον κόμβο του αρμονικού χωρίου που μετατοπίζεται. Για αυτό το λόγο δεν συμφέρει να τοποθετείται το αρμονικό χωρίο πολύ μακριά από το υπολογιστικό πλέγμα, αφού έτσι η επίδραση θα είναι πολύ μικρή.
- Σε όλες τις εφαρμογές το αρμονικό πλέγμα ήταν αρκετά πιο αραιό από το υπολογιστικό. Πρακτικά αυτό συμβαίνει για εξοικονόμηση υπολογιστικού χρόνου, καθώς τα αποτελέσματα είναι εξίσου ικανοποιητικά με την περίπτωση πιο πυκνού αρμονικού πλέγματος.
- Με τη χρήση της τεχνικής των δύο κλωβών, το νέο πλέγμα δεν έχει ασυνέχειες και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε διαδικασία βελτιστοποίησης.
- Ως προς το υπολογιστικό κόστος, η μέθοδος εξαρτάται αποκλειστικά από το πλήθος των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος, και το μόνο τμήμα του λογισμικού που μπορεί να καθυστερήσει την υλοποίηση της μεθόδου είναι ο υπολογισμός των αρμονικών συντεταγμένων των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος. Παρόλα αυτά, η διαδικασία αυτή πραγματοποιείται μία μόνο φορά και δεν χρειάζεται να επαναληφθεί σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, κάτι που εξοικονομεί πολύ υπολογιστικό χρόνο.
- Από τη στιγμή που έχει ολοκληρωθεί η διαδικασία υπολογισμού των αρμονικών συντεταγμένων του υπολογιστικού πλέγματος, το σύστημα των δύο κλωβών δεν επηρεάζει πια τη μέθοδο. Πλέον η παραμόρφωση του αεροδυναμικού σώματος εξαρτάται μόνο από τη μετατόπιση των σημείων ελέγχου.

## 6.3 Προτάσεις για Μελλοντική Μελέτη

Ως συνέχεια της διπλωματικής αυτής εργασίας, ακολουθούν κάποιες προτάσεις οι οποίες χρήζουν περαιτέρω μελέτη και ανάπτυξη:

- Στην παραμετροποίηση με αρμονικές συντεταγμένες, ο αλγόριθμος με τον οποίο γίνεται η παρεμβολή των αρμονικών συντεταγμένων του κλωβού στο υπολογιστικό πλέγμα δύναται να παραλληλοποιηθεί, καθώς ο αλγόριθμος διερευνά σε ποιο τετράεδρο του αρμονικού χωρίου βρίσκεται ο κόμβος του υπολογιστικού πλέγματος.
- Θα μπορούσε να γίνει εφαρμογή της μεθόδου σε ένα πρόβλημα στροβιλομηχανής. Αυτό είναι ένα πρόβλημα που απαιτεί πρόσθετο προγραμματισμό καθώς πρέπει να γίνει σωστή κατασκευή των αεροδυναμικών χωρίων ώστε, κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης, η μορφοποίηση του πλέγματος να γίνεται με κατάλληλο τρόπο και να επιβάλλεται η περιοδικότητα μεταξύ των ορίων του υπολογιστικού χωρίου.
- Η κατασκευή των αρμονικών χωρίων και πλεγμάτων έγινε καθόλη τη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας στο λογισμικό Pointwise, μια διαδικασία που ήταν πολύπλοκη και χρονοβόρα. Έτσι θα μπορούσε να δημιουργηθεί ένα γραφικό περιβάλλον χρήστη (GUI) για κατασκευή του αρμονικού χωρίου και πλέγματος, κάτι που θα κάνει την εφαρμογή της μεθόδου πιο άμεση.

## Παράρτημα Α΄

### Αλγόριθμος της Μεθόδου των Αρμονικών Συνταταγμένων

Ο αλγόριθμος υλοποίησης της μεθόδου χωρίζεται σε 3 βασικά μέρη. Για τους υπολογισμούς, εφαρμόστηκαν οι τύποι που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 2.3. Όπως αναφέρθηκε, οι επιφάνειες του αρμονικού χωρίου είναι διαιρεμένες σε τρίγωνα έτσι ώστε οι κορυφές τους να είναι σημεία ελέγχου. Για την ανάλυση του αλγορίθμου αυτά τα τρίγωνα θα αποκαλούνται **patches**.

---

Αλγόριθμος υπολογισμού αρμονικών συντεταγμένων των κόμβων του κλωβού.

---

Ανάγνωση αρχείων αρμονικού πλέγματος

#### Αρχή Επανάληψης

Για ( $i = 1; i \leq$  Αριθμός Σημείων Ελέγχου;  $i++$ )

Τοποθέτηση οριακών συνθηκών στα σημεία ελέγχου

$$h(i) = 1, h(m) = 0, m \neq i$$

Σάρωση όλων των patches στα οποία ανήκει το σημείο ελέγχου.

#### Αρχή Επανάληψης

Για ( $j = 1; j \leq$  Αριθμός patches του κλωβού;  $j++$ )

Σάρωση όλων των κόμβων που ανήκουν στο συγκεκριμένο patches.

#### Αρχή Επανάληψης

Για ( $k = 1; k \leq$  Αριθμός κόμβων αρμονικού πλέγματος;  $k++$ )

Υπόλογισμός όγκων

Υπολογισμός οριακών συνθηκών επιφανειακών κόμβων

#### Τέλος

#### Τέλος

Κλήση επιλύτη εξίσωσης Laplace για τους εσωτερικούς κόμβους του κλωβού

Υπολογισμός αρμονικών συντεταγμένων των κόμβων του αρμονικού πλέγματος

#### Τέλος

---

Αλγόριθμος υπολογισμού αρμονικών συντεταγμένων των κόμβων του CFD πλέγματος.

---

Ανάγνωση αρχείων αρμονικού πλέγματος

Ανάγνωση αρχείων CFD πλέγματος

Ανάγνωση αρμονικών συντεταγμένων του αρμονικού πλέγματος

**Αρχή Επανάληψης**

Για ( $i = 1; i \leq \text{Αριθμός Κόμβων CFD Πλέγματος}; i++$ )

Σάρωση όλων των τετραέδρων του κλωβού.

**Αρχή Επανάληψης**

Για ( $j = 1; j \leq \text{Αριθμός τετραέδρων του κλωβού}; j++$ )

Εύρεση των 4 κόμβων του τετραέδρου και των συντεταγμένων τους

Υπολογισμός όγκων που σχηματίζει ο κόμβος με το τετράεδρο

Έλεγχος αν ανήκει στο αρμονικό χωρίο ο κόμβος

Υπολογισμός των αρμονικών συντεταγμένων όλων των κόμβων CFD πλέγματος

**Τέλος**

**Τέλος**

---

Αλγόριθμος υπολογισμού αρμονικών συντεταγμένων της μετατόπισης του CFD πλέγματος.

---

Ανάγνωση αρχείων CFD πλέγματος

Ανάγνωση αρμονικών συντεταγμένων κόμβων CFD πλέγματος

Ανάγνωση θέσης και μετατόπισης των σημείων ελέγχου

Υπολογισμός Μετατόπισης Υπολογιστικού Πλέγματος



## Βιβλιογραφία

- [1] Audi, official web site. <https://www.audi.com/>.
- [2] BMW, official web site. <https://www.bmw.com/>.
- [3] Evolutionary Algorithm System (EASY). <http://147.102.55.162/EASY/>.
- [4] OpenFoam, official web site. <http://www.openfoam.com/>.
- [5] Pointwise, official web site. <https://www.pointwise.com/>.
- [6] Tesla. <http://www.nvidia.com/object/preconfigured-clusters.html>.
- [7] Παπουτσής-Κιαχαγιάς Ε. *Συζυγείς μέθοδοι για τυρβώδεις ροές, με εφαρμογή στη βελτιστοποίηση μορφής ή τοπολογίας και στο στιβαρό σχεδιασμό. Διδακτορική διατριβή.* Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, Αθήνα, 2013.
- [8] Ahmed S., Ramm G., and Faltin G. *Some Salient Features of the TimeAveraged Ground Vehicle Wake.* SAE Technical Paper 840300, 1984.
- [9] Asouti V. G., Zymaris A. S., Papadimitriou D. I., and Giannakoglou K. C. Continuous and discrete adjoint approaches for aerodynamic shape optimization with low mach number preconditioning. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 57(10):1485–1504, 2008.
- [10] Blom F.J. Considerations on the spring analogy. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 32(6):647–668, 2000.
- [11] Burg C. Analytic Study of 2d and 3d grid motion using modified laplacian. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 52(2):163–197, 2006.
- [12] Cogotti A. *A Parametric Study on the Ground Effect of a Simplified Car Model.* SAE Technical Paper 980031, 1998.
- [13] Coletti F., Verstraete T., Bulle J., V. der Wielen T., van den Berge N., and Arts T. Optimization of a U-Bend for Minimal Pressure Loss in Internal Cooling Channels - Part I: Numerical Method. *ASME Journal of engineering for Gas Turbines and Power*, 135:pp 051015,, 2013.
- [14] Coletti F., Verstraete T., Bulle J., V. der Wielen T., van den Berge N., and Arts T. Optimization of a U-Bend for Minimal Pressure Loss in Internal Cooling

Channels - Part II: Experimental validation. *ASME Journal of engineering for Gas Turbines and Power*, 135:pp 051016,, 2013.

- [15] de Boer A., Schoot M.S. van der, and Bijl H. Mesh deformation based on radial basis function interpolation. *Computers and Structures*, 85:784–795, 2007.
- [16] DeRose T., Mayer M. Harmonic Coordinates. *Pixar Animation Studios*, 2006.
- [17] Giannakoglou K.C., Papadimitriou D.I. and Kampolis I.C. Aerodynamic shape design using evolutionary algorithms and new gradient-assisted metamodels. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(44-47):6312–6329, 2006.
- [18] Heft A., Indinger T., and Adams N. Introduction of a New Realistic Generic Car Model for Aerodynamic Investigations. *In 2012 SAE World Congress*, no.2012-01-0168, April 2012.
- [19] Holger M. Heat and Mass Transfer between Impinging Gas Jets and Solid Surfaces. *Advances in Heat Transfer*, 13, 2005.
- [20] Hunter J. K. An Introduction to the Incompressible Euler Equations. *University of California, Davis (US)*, September 25 2006.
- [21] I. Kampolis and X. Trompoukis and V. Asouti and K. Giannakoglou. CFD-based analysis and two-level aerodynamic optimization on Graphics Processing Units. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(9–12):712–722, 2010.
- [22] I.S. Kavvadias and E.M. Papoutsis-Kiachagias and K.C. Giannakoglou. On the proper treatment of grid sensitivities in continuous adjoint methods for shape optimization. *Journal of Computational Physics*, 301:1–18, 2015.
- [23] Lidberg P. *Barycentric and harmonic coordinates*. Departement of Mathematics, Uppsala University, 2012.
- [24] Lynch D. Unified approach to simulation on deforming elements with application to phase change problems. *Journal of Computational Physics*, 47(3):387–411, 1982.
- [25] Lynch D. Elastic grid deformation for moving boundary problems in two space dimensions. *In 3rd International Conference, Mississippi University, Oxford*, May 19-23 1980.
- [26] Papadimitriou D.I. and Giannakoglou K.C. A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals for inviscid and viscous flows. *Computers & Fluids*, 36(2):325–341, 2007.
- [27] Papoutsis-Kiachagias E.M., Giannakoglou K.C. Continuous adjoint methods for turbulent flows, applied to shape and topology optimization: industrial applications. *Arch. Comput. Methods Eng.* , 2014.

- [28] Pushkar J., Mayer M., DeRose T., Green B., Sanocki T. Harmonic Coordinates for Character Articulation. *Pixar Animation Studios*, 2006.
- [29] Sederberg T. W., Parry S. R. Free-Form Deformation of Solid Geometric Models . *Brigham Young University Provo, Utah 84602* , 20, Number 4, 1986.
- [30] Spalart P. and Allmaras S. A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows. *AIAA Paper 1992-439, 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, USA*, January 6-9 1992.
- [31] Tromp J., Tape C. , Liu Q . Seismic tomography, adjoint methods, time reversal and banana-doughnut kernels. *Seismological Laboratory, California Institute of Technology*, 25 March 2004.
- [32] Β. Ασούτη. Μέθοδοι αεροδυναμικής ανάλυσης και σχεδιασμού για ροές υψηλών και χαμηλών ταχυτήτων, σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον. Διδακτορική διατριβή. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2009.
- [33] Κ. Γκαραγκούνης. Διερεύνηση Διαφορετικών Διατυπώσεων της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου για τον Υπολογισμό Παραγώγων Ευαισθησίας στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση με Ακρίβεια. Εφαρμογές. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2016.
- [34] Κουμπογιάννης Δ. Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier–Stokes με χρήση μη-δομημένων πλεγμάτων σε περιβάλλον παράλληλης επεξεργασίας. Διδακτορική διατριβή. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, Αθήνα, 1998.
- [35] Θ. Ζερβογιάννης. Μέθοδοι βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική και τις στροβιλομηχανές με χρήση συζυγών τεχνικών, υβριδικών πλεγμάτων και του ακριβούς εσσιανού μητρώου. Διδακτορική διατριβή. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2011.
- [36] Μαυρονικόλα Μ. Παραμετροποίηση Μορφών και Προσαρμογή Υπολογιστικών Πλεγμάτων με χρήση Αρμονικών Συντεταγμένων. Εφαρμογή στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Μορφής 2Δ Πτερυγώσεων και Αγωγών. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2017.
- [37] Λιακόπουλος Π. Γένεση μη-δομημένων πλεγμάτων και διαχείρισή τους σε μεθόδους ανάλυσης και βελτιστοποίησης συνιστωσών στροβιλομηχανών και εφαρμογές, αξιοποιώντας τεχνολογίες πλέγματος (*Grid computing*). Διδακτορική διατριβή. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2008.
- [38] Γιαννάκογλου Κ. Χ. Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική. Ε.Μ.Π., 2006.



