



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Μέθοδος των Τεμνομένων Κυψελών για 2Δ Χρονικά
Μόνιμες και Μη-Μόνιμες Ροές. Προγραμματισμός και
Διερεύνηση Προσταθεροποιητή Χαμηλών Αριθμών
Mach για τον Ευθύ και Συζυγή Επιλύτη

Διπλωματική Εργασία

Βρυώνης Παναγιώτης-Γιάννης

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2017



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Μέθοδος των Τεμνομένων Κυψελών για 2Δ Χρονικά Μόνιμες και
Μη-Μόνιμες Ροές. Προγραμματισμός και Διερεύνηση
Προσταθεροποιητή Χαμηλών Αριθμών Mach για τον Ευθύ και
Συζυγή Επιλύτη

Διπλωματική Εργασία

Βρυώνης Παναγιώτης-Γιάννης

Επιβλέπων: Κ. Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2017

Περίληψη

Η διπλωματική αυτή εργασία επεκτείνει μεθοδολογία και υπάρχον λογισμικό επίλυσης συμπεριστών ροών με την εισαγωγή προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach, με σκοπό να αντιμετωπισθούν οι αργοί χρόνοι σύγκλισης που εμφανίζονται σε ροές (πολύ) χαμηλών ταχυτήτων. Για τη διακριτοποίηση των εξισώσεων που διέπουν τη ροή σε μη-οριόδετα πλέγματα με τη Μέθοδο των Εμβαπτιζομένων Σωμάτων (Immersed Boundary Method), χρησιμοποιείται η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων ενώ η αλληλεπίδραση των στερεών ορίων με τη ροή πραγματοποιείται με τη Μέθοδο των Τεμνομένων Κυψελών (Cut-Cell Method). Τα παραπάνω πραγματοποιούνται για χρονικά μόνιμες και χρονικά μη-μόνιμες ροές. Στη δεύτερη φάση της εργασίας, διατυπώνεται η συνεχής συζυγής μέθοδος των μόνιμων εξισώσεων Euler και εφαρμόζεται η ίδια μέθοδος προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach, με σκοπό την επιτάχυνση επίλυσης και του αντίστοιχου συζυγούς πεδίου (Adjoint Field), για εφαρμογή σε προβλήματα βελτιστοποίησης μορφής στην αεροδυναμική και την ευρύτερη περιοχή της μηχανικής των ρευστών. Ο προγραμματισμός έγινε διατηρώντας την παραλληλοποίηση του κώδικα-βάση, με MPI.

Για την πιστοποίηση ως προς την ακρίβεια αλλά και την ταχύτητα σύγκλισης των εξισώσεων ροής πραγματοποιείται σειρά δοκιμών σε μεμονωμένες αεροτομές με ή χωρίς flap σε χρονικά μόνιμες και μη-μόνιμες ροές σε διάφορους αριθμούς Mach. Ειδικά για την πιστοποίηση της συμπεριφοράς του προσταθεροποιητή σε στρωτές ροές μελετάται και η ροή σε αγωγό με ενδιάμεση απότομη διεύρυνση. Τέλος, μιας και η προσταθεροποίησης εφαρμόστηκε και στις συζυγείς εξισώσεις, πραγματοποιείται και βελτιστοποίηση της μορφής μιας αεροτομής με στόχο τη μεγιστοποίηση της δύναμης άνωσης.



National Technical University of Athens
School of Mechanical Engineering
Fluids Section
Parallel CFD & Optimization Unit

**Cut-Cell Method for 2D Steady and Unsteady Flow Simulations.
Programming and Evaluation of a Low Mach Number Preconditioner for the
Primal and Adjoint Equations**

Diploma Thesis

Vrionis Panayiotis-Yiannis

Supervisor: K. C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, 2017

Abstract

This diploma thesis involves the implementation of a low Mach number preconditioner on an existing 2D compressible, laminar flow solver. The convergence rate of the time-marching scheme decreases for flows at low Mach numbers, due to the increased spread of the characteristic speeds. The aforementioned solver discretizes the flow equations on a Cartesian grid, according to the Immersed Boundary Method. Interaction between boundaries and fluid cells is achieved through the Cut-Cell Method, adapting the grid to the examined geometries. The adjoint method is used shape optimization in aerodynamics and fluid dynamics. Hence, the adjoint equations for inviscid flow are presented and a low Mach preconditioning is programmed for them. Preconditioners for both the flow and adjoint equations are programmed using the MPI protocol.

In order to assess the selected preconditioner's performance for compressible, inviscid, steady or unsteady flow simulations, a series of test cases on isolated airfoils is presented. Furthermore, a tube with steep middle section divergence is also presented, expanding the test cases to steady, laminar flows. Finally, the suggested adjoint equations preconditioner is used to optimize the aerodynamic shape of an airfoil, demonstrating its consistency.

Ευχαριστίες

Με το πέρας της διπλωματικής εργασίας σηματοδοτείται η ολοκλήρωση των προπτυχιακών μου σπουδών στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, στη σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών. Θα ήταν λοιπόν παράλειψή μου να μην εκφράσω τις ευχαριστίες μου στα άτομα που με προετοίμασαν και βοήθησαν να ολοκληρώσω τις σπουδές μου.

Πρώτα απ' όλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Κ. Χ. Γιαννάκογλου για τη συνεχή καθοδήγησή του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την ευκαιρία που μου δόθηκε να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα, μέσα από το οποίο έλαβα αρκετές γνώσεις σε θέματα που με ενδιαφέρουν.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης όλα τα μέλη του ΜΠΥΡ&Β, που με τις συμβουλές συνέβαλαν και αυτοί στην ολοκλήρωση της εργασίας. Συγκεκριμένα, να ευχαριστήσω τον υπ. διδάκτορα Κωνσταντίνο Σαμούχο για όλο το χρόνο που αφιέρωσε. Ευχαριστώ επίσης, τους διδάκτορες Βέρα Ασούτη και Ξενοφώντα Τρομπούκη για όλες τις συμβουλές τους.

Να εκφράσω επίσης τις ευχαριστίες μου στον αδερφό μου Κωνσταντίνο, για την έμπρακτη βοήθειά του, καθώς και στους φίλους μου για τη στήριξή τους καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Ιδιαίτερα, να ευχαριστήσω την Ιωάννα για την υπομονή και την υποστήριξη που δείχνει όλα αυτά τα χρόνια.

Κλείνοντας, ευχαριστώ την οικογένεια μου που έδωσε αυτή τη δυνατότητα με την οικονομική και ηθική τους στήριξη.

Ακρωνύμια

ΕΜΠ Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΕΘΣ Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

ΜΠΤΡ&Β Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής
Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

ΥΡΔ Υπολογιστική Ρευστοδυναμική

ΜΔΕ Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

CFD Computational Fluid Dynamics

NTUA National Technical University of Athens

IBM Immersed Boundary Methods

MPI Message Passing Interface

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Μέθοδοι Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων	1
1.1.1	Επισκόπηση Σχετικής Βιβλιογραφίας	1
1.1.2	Κατηγορίες Μεθόδων Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων	3
1.2	Μεθόδοι Προσταθεροποίησης	5
1.3	Στόχος και Δομή της Εργασίας	5
2	Η Μέθοδος Τεμνομένων Κυψελών και οι Εξισώσεις Ροής	9
2.1	Εισαγωγή	9
2.2	Διακριτοποίηση του Υπολογιστικού Χωρίου	10
2.3	Διατύπωση των 2D Εξισώσεων Euler	18
2.4	Διατύπωση των 2D Εξισώσεων Navier-Stokes	19
2.5	Διακριτοποίηση των 2D Εξισώσεων Euler	20
2.5.1	Ολοκλήρωση σε Πεπερασμένους Όγκους	20
2.5.2	Διακριτοποίηση των Χρονικών Όρων	31
2.5.3	Οριακές Συνθήκες	31
2.6	Επαναληπτικός Αλγόριθμος Επίλυσης Εξισώσεων Euler	33
2.7	Διακριτοποίηση των 2D Εξισώσεων Navier-Stokes	39
3	Μεθόδοι Προσταθεροποίησης Χαμηλών Αριθμών Mach	41
3.1	Εισαγωγικά Σχόλια	41
3.2	Μέθοδοι Προσταθεροποίησης	43
3.2.1	Κριτήρια Σχεδιασμού Μητρώων Προσταθεροποίησης	44
3.2.2	Προσταθεροποίηση σε 1D Πρόβλημα	44
4	Διαδικασία Προσταθεροποίησης Χαμηλών Αριθμών Mach	47
4.1	Προσταθεροποίηση Χαμηλών Αριθμών Mach των Μόνιμων Εξισώσεων Euler	47
4.2	Προσταθεροποίηση των Μόνιμων Εξισώσεων Navier-Stokes	48
4.3	Επιλογή Μητρώου Προσταθεροποίησης	48
4.3.1	Ιδιοδιανυσματική Ανάλυση στο Προσταθεροποιημένο Ιδιοπρόβλημα	50

4.4	Εισαγωγή Μητρώου Προσταθεροποίησης στην Αριθμητική Μέθοδο Επίλυσης	55
4.4.1	Τροποποίηση του Ψευδοχρονικού Όρου	55
4.4.2	Τροποποίηση του Σχήματος Roe	55
4.4.3	Τροποποίηση του Τοπικού Ψευδοχρονικού Βήματος	56
5	Διερεύνηση Προσταθεροποίησης σε Χρονικά Μόνιμες και Μη-Μόνιμες Ροές	57
5.1	Εισαγωγικά Σχόλια	57
5.2	Διερεύνηση Προσταθεροποίησης σε Χρονικά Μόνιμη Ροή	59
5.3	Διερεύνηση Μόνιμης ροής γύρω από Αεροτομή με Flap	71
5.4	Διερεύνηση Μη-μόνιμης Ροής γύρω από την Αεροτομή NACA 0012	77
6	Διερεύνηση Προσταθεροποίησης σε Στρωτές Ροές	81
6.1	Εισαγωγή	81
6.2	Επίλυση Προσταθεροποιημένων Εξισώσεων σε Αγωγό	81
7	Προσταθεροποίηση Χαμηλών Αριθμών Mach στις Συζυγείς Εξισώσεις	85
7.1	Εισαγωγή	85
7.2	Βελτιστοποίηση Μορφής με τη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο	86
7.2.1	Συνάρτηση Κόστους	86
7.2.2	Διατύπωση Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου	87
7.3	Διαδικασία Προσταθεροποίησης των Συζυγών Εξισώσεων	92
7.4	Διερεύνηση Προσταθεροποίησης των Συζυγών Εξισώσεων	94
7.5	Βελτιστοποίηση Αεροτομής με και χωρίς Προσταθεροποίηση	96
8	Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα	99

Βιβλιογραφία

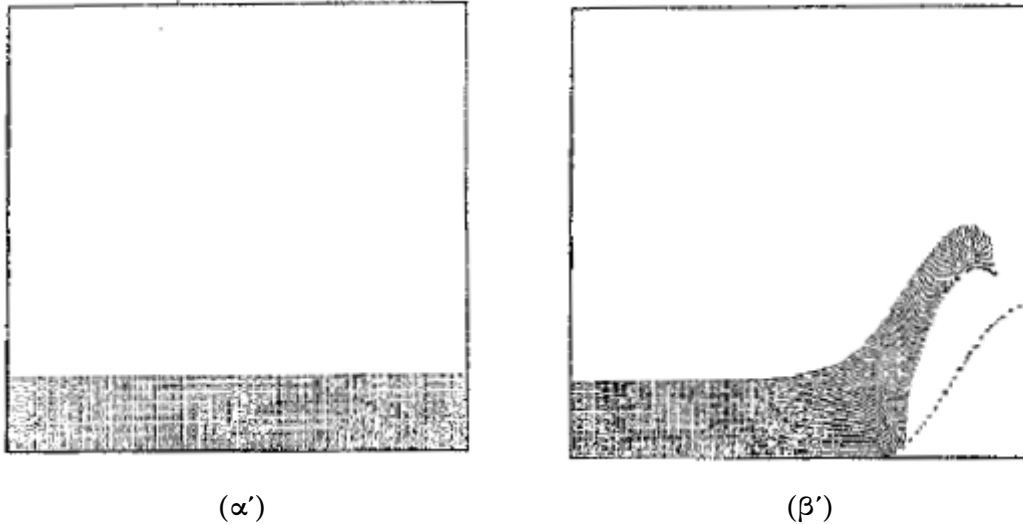
Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Μέθοδοι Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων

1.1.1 Επισκόπηση Σχετικής Βιβλιογραφίας

Η ανάπτυξη μεθόδων επίλυσης ροής σε καρτεσιανά πλέγματα ξεκινά το 1969 με την εισήγηση του *J. A. Viicelli*, [1], στην οποία εφαρμόζεται η μέθοδος ABMAC (Arbitrary Boundary Marker and Cell) για τη μελέτη της χρονικά μη-μόνιμης κίνησης υγρού σε ελεύθερες επιφάνειες, και την αλληλεπίδρασή του με κινούμενα στερεά όρια. Στη μέθοδο αυτή, ο υπολογισμός των ταχυτήτων στα σωματίδια γίνεται με παρεμβολή των τιμών των κόμβων του καρτεσιανού πλέγματος με τη θέση του κάθε σωματιδίου. Τα στερεά όρια αντιμετωπίζονται ως ελεύθερες επιφάνειες, όπου με την εφαρμογή κατάλληλης κατανομής πίεσης εξασφαλίζεται η παράλληλη κίνηση του ρευστού και, άρα, η συνθήκη μη-ολίσθησης. Στην περίπτωση κινούμενων ορίων, συσχετίζεται η ταχύτητα του ορίου με αυτήν των γειτονικών καρτεσιανών κελιών, ώστε τελικά να υπολογιστεί η πίεση που ασκείται στο ρευστό. Η πιο πάνω εργασία ήταν η πρώτη επιτυχής προσπάθεια έμμεσης υποβολής οριακών συνθηκών σε κινούμενα στερεά.



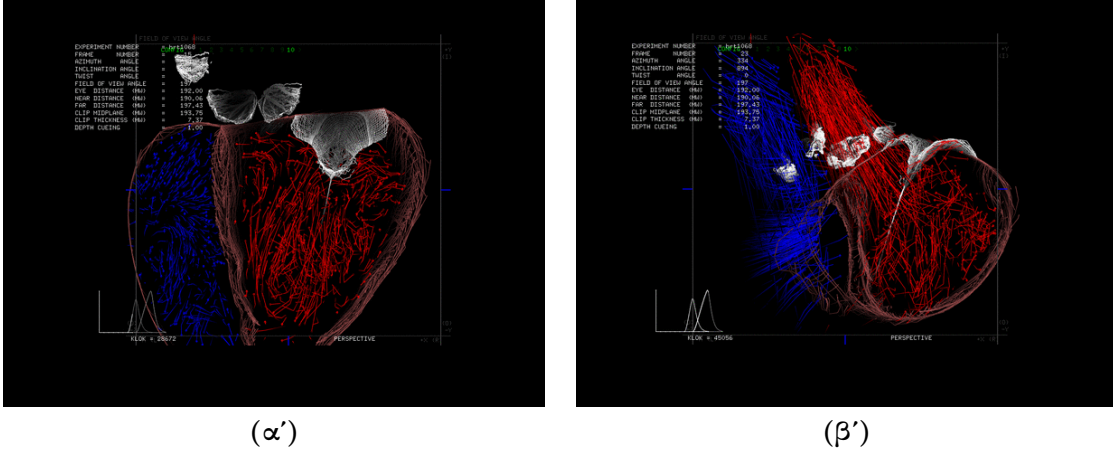
Σχήμα 1.1: Στιγμιότυπα από την μελέτη του *J. A. Viecelli* με την εφαρμογή της μεθόδου ABMAC για την παρακολούθηση της κίνησης του ρευστού, [1]. (α') Ρευστό σε ηρεμία. (β') Έκλυση κύματος προκαλούμενη από την κίνηση του στερεού ορίου.

Βασιζόμενος στην πιο πάνω ιδέα το 1971, ο *S. Peskin* πραγματοποιεί μελέτη και προσομοίωση της καρδιακής λειτουργίας, επιλύοντας τις τριδιάστατες (3D) εξισώσεις Navier-Stokes με τη χρήση της μεθόδου μη-οριόδετου πλέγματος (Immersed Boundary Method ή IBM) καθιστώντας τον, ιδρυτή της μεθόδου, [2]. Η προσομοίωση αυτή αποτέλεσε τομή στην ανάδειξη των δυνατοτήτων των μεθόδων μη-οριόδετων πλεγμάτων σε μη-μόνιμα πεδία ροής, με κινούμενα στερεά όρια. Στη μελέτη αυτή, τα κινούμενα όρια καθορίζουν το καμπυλόγραμμο σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων, ενώ είναι εμβαπτισμένα σε ένα καρτεσιανό χωρόδετο σύστημα, όπου επιλύεται η ροή. Η μεταφορά της πληροφορίας από το σωματόδετο στο χωρόδετο σύστημα συντεταγμένων γίνεται μέσω των δυνάμεων από την αλληλεπίδραση του ρευστού με τα ελαστικά τοιχώματα της καρδιάς, μέσω μιας τροποποιημένης συνάρτησης δ^1 , [3], που έχει ως στόχο να κατανέμει το πεδίο των δυνάμεων στο χωρόδετο σύστημα συντεταγμένων. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται δύο στιγμιότυπα από τη μελέτη του, όπου παρατηρείται το πεδίο ταχυτήτων στα δύο τμήματα τις καρδιάς.

¹Delta distribution

$$\delta[\phi] = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x)H(x)dx$$

$$\delta[\phi] = \phi(0)$$



Σχήμα 1.2: Στιγμιότυπα από την προσομοίωση της καρδιακής λειτουργίας του *C. S. Peskin* με την χρήση μεθόδου μη-οριόδετων πλεγμάτων, [2], [3], [4].

1.1.2 Κατηγορίες Μεθόδων Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων

Οι διαφοροποιήσεις που εμφανίζονται μεταξύ των μεθόδων μη-οριόδετων πλεγμάτων εντοπίζονται κυρίως στον τρόπο εφαρμογής των οριακών συνθηκών. Η μεγαλύτερη δυσκολία της μεθόδου αυτής έγκειται στο ότι οι οριακές συνθήκες δεν μπορούν να εφαρμοστούν άμεσα, όπως γίνεται στα οριόδετα πλέγματα. Έτσι, είναι αναγκαία η υλοποίηση μιας πιο περίπλοκης τεχνικής, ώστε η ροή να σέβεται τις οριακές συνθήκες που της επιβάλλονται. Συνεπώς, οι διαφορές μεταξύ των διάφορων IBM εμφανίζονται στον τρόπο επιβολής των οριακών συνθηκών. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται διάφορες διατυπώσεις IBM μέσω του ακόλουθου παραδείγματος.

Για ροή ασυμπίεστου ρευστού που διέπεται από τις εξισώσεις Navier-Stokes έχουμε

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) + \nabla p - \mu \nabla^2 \vec{u} = 0, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \text{στο } \Omega_f \quad (1.2)$$

$$\vec{u} = \vec{u}_\Gamma, \quad \text{στο } \Gamma_b \quad (1.3)$$

όπου $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ είναι η ταχύτητα του ρευστού, $\vec{p} = \vec{p}(\vec{x}, t)$ η πίεση του ρευστού, ρ η πυκνότητά του και μ η δυναμική συνεκτικότητά του ενώ με Ω_f συμβολίζεται ο όγκος που καταλαμβάνει το ρευστό και Γ_b είναι η επιφάνεια του στερεού σώματος, [5].

Στην πρώτη κατηγορία IBM, η λεγόμενη συνεχής προσέγγιση IBM (*Continuous forcing approach*) εισάγεται ένας κατάλληλος όρος πηγής στη συνεχή έκφραση των εξισώσεων σε όλο το χωρίο, και ακολούθως διακριτοποιούνται στο καρτεσιανό πλέγμα με σκοπό την επίλυση

τους. Η εξίσωση (1.1) γίνεται:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) + \nabla p - \mu \nabla^2 \vec{u} = \vec{f} \quad (1.4)$$

όπου για την επιλογή της κατάλληλης συνάρτησης \vec{f} έχουν αναπτυχθεί αρκετές μέθοδοι, με μια πιθανή διατύπωση να είναι ως ένα ελατήριο [3]. Συνεπώς, ορίζεται μία σταθερά ελατηρίου, μέσω της οποίας καθορίζονται οι τιμές της συνάρτησης \vec{f} ανάλογα με την απόστασή τους από τη γεωμετρία.

Η επίδραση της συνάρτησης \vec{f} είναι περιστασιακή, αφού σε περίπτωση όπου τα στερεά τοιχώματα θεωρούνται ελαστικά, η μεταφορά της πληροφορίας επιτυγχάνεται εύκολα ενώ, σε περίπτωση που τα στερεά όρια θεωρούνται άκαμπτα, η συνάρτηση αυτή επηρεάζει σημαντικά την ευστάθεια του αριθμητικού σχήματος, λόγω των υπερακοντίσεων που ενδέχεται να εμφανιστούν.

Στη δεύτερη κατηγορία IBM, η λεγόμενη διακριτή (ή άμεση) προσέγγιση IBM (*Discrete Forcing Approach*), οι εξισώσεις διακριτοποιούνται χωρίς να συμπεριληφθεί η επιφάνεια του ορίου, δηλαδή η εξίσωση (1.3), και ακολούθως καθορίζονται τα στερεά όρια μέσω κάποιας μεθόδου παρεμβολής, [6]. Η πιο διαδεδομένη διακριτή μέθοδος είναι η μέθοδος ψευδο-κυψελών (*Ghost-Cell IBM*), η οποία επιλύει τις εξισώσεις ροής για τις κυψέλες τόσο εντός, όσο και εκτός του στερεού ορίου, εξ ου ο όρος *Ghost*. Στη συνέχεια, συσχετίζοντας τις ταχύτητες των ψευδο-κυψελών (εντός του στερεού ορίου) με αυτές εκτός, επιβάλλεται η οριακή συνθήκη.

Τέλος, μια τροποποιημένη διακριτή μέθοδος IBM, η οποία είναι και η μέθοδος επίλυσης που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία, είναι η μέθοδος τεμνομένων κυψελών. Η κύρια διαφορά της συγκεκριμένης μεθόδου είναι ότι το καρτεσιανό πλέγμα που παράγεται, προσαρμόζεται στα στερεά όρια. Αυτό επιτυγχάνεται, με την τομή των κυψελών στα σημεία επαφής τους με το στερεό όριο, αλλάζοντας έτσι το σχήμα τους και το μέγεθός τους. Το κυριότερο πλεονέκτημα της μεθόδου τεμνομένων κυψελών είναι το γεγονός ότι η συντηρητική ιδιότητα των ροϊκών μεγεθών διατηρείται, λόγω της προσέγγισης πεπερασμένων όγκων. Επιπρόσθετα, το υπολογιστικό κόστος μειώνεται, αφού στη μέθοδο αυτή δεν επιλύονται οι εξισώσεις στις στερεές κυψέλες, σε αντίθεση με τη μέθοδο ψευδο-κυψελών, που αναφέρθηκε πιο πάνω.

Ανακεφαλαιώνοντας, οι μέθοδοι IBM, συνεχείς και διακριτές εξίσου, έχουν αρκετά πλεονεκτήματα ως προς τα οριόδετα πλέγματα. Τα βασικότερα εκ αυτών είναι, η ευκολία που εμφανίζεται στη γένεση πλέγματος και η μικρή εξάρτησή τους από την πολυπλοκότητα της γεωμετρίας. Συνεπώς, είναι δυνατή η προσομοίωση πολύ περίπλοκων γεωμετριών χωρίς την ανάγκη εξειδικευμένων πλεγματοποιητών ή την επίβλεψη του χρήστη, ώστε να προκύψει ένα πλέγμα καλής ποιότητας. Επιπροσθέτως, το κυριότερο πλεονέκτημα των μεθόδων μη-οριόδετων πλεγμάτων εμπεριέχεται στη μελέτη μη-μόνιμων ροών με κινούμενα στερεά

όρια. Αυτό γιατί, σε αυτές τις περιπτώσεις, το πλέγμα παράγεται μια φορά, σε αντίθεση με την περίπτωση των οριζόμετων πλεγμάτων που επιβάλλεται η επαναπλεγματοποίηση είτε εξ' ολοκλήρου, είτε παραμορφώνοντας το για κάθε χρονικό βήμα, [7], και έτσι το υπολογιστικό κόστος μειώνεται σημαντικά.

Σχετικά με τα μειονεκτήματά τους, το κυριότερο είναι ο τρόπος επιβολής των οριακών συνθηκών, ο οποίος σε συνδυασμό με αυξημένης περιπλοκότητας γεωμετρίες και τυρβώδης ροές ενδέχεται να αλλοιώσουν τη συντηρητική ιδιότητα των εξισώσεων και, τελικά, την ακρίβεια της επίλυσης. Παρόλα αυτά, μέθοδοι για την αντιμετώπιση του μειονεκτήματος αυτού συνεχώς αναπτύσσονται, [8].

1.2 Μέθοδοι Προσταθεροποίησης

Οι μέθοδοι προσταθεροποίησης χρησιμοποιούνται για την επιτάχυνση σύγκλισης της επίλυσης διάφορων προβλημάτων. Οι μέθοδοι αυτοί διαφοροποιούνται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, ανάλογα με το επίπεδο που επιδρούν στο πρόβλημα.

Η πρώτη κατηγορία αφορά μεθόδους οι οποίες επιδρούν μόνο στην αριθμητική επίλυση και δεν επεμβαίνουν στο προς επίλυση πρόβλημα. Με τον μετασχηματισμό του γραμμικού συστήματος σε μητρικό επίπεδο, αποφεύγεται η επίλυση ενός κακά ορισμένου (*ill-conditioned*) συστήματος επιταχύνοντας, έτσι, τη σύγκλιση. Για παράδειγμα, κατά την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος της μορφής $(\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b})$, λόγω του ότι είτε το μητρώο \mathbf{A} είτε το διάνυσμα \vec{b} είναι κακά ορισμένο, το σύστημα μετασχηματίζεται στη μορφή $\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b}) = 0$, με το μητρώο \mathbf{P}^{-1} να είναι το μητρώο προσταθεροποίησης. Στην περίπτωση αυτή, οι λύσεις του προβλήματος και στις δύο περιπτώσεις προκύπτουν ταυτόσημες.

Η δεύτερη κατηγορία, που είναι και το αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας, αφορά την προσταθεροποίηση που εφαρμόζεται στο επίπεδο των υπερβολικού τύπου Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (ΜΔΕ) και έχουν ως στόχο να επέμβουν στον τρόπο που διαδίδεται η πληροφορία, ώστε να επιταχύνουν την επίτευξη της τελικής λύσης στο χρονικά μόνιμο πρόβλημα. Ο μηχανισμός με τον οποίο συμβαίνει αυτό, αναλύεται εκτενέστερα στο κεφάλαιο 3.

1.3 Στόχος και Δομή της Εργασίας

Στόχος της διπλωματικής εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός λογισμικού επιτάχυνσης της αριθμητικής επίλυσης του μόνιμου προβλήματος συμπιεστής, ατριβούς ή στρωτής ροής, με την εφαρμογή προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach, με τη μέθοδο των μη-οριζόμετων

πλεγμάτων. Συγκεκριμένα, το παράλληλο λογισμικό [9], [10], [11], χρησιμοποιεί τη μέθοδο των τεμνομένων κυφελών για την αλληλεπίδραση του ρευστού με τα στερεά όρια. Η υπολογιστική προσομοίωση συμπιεστών ροών σε χαμηλούς αριθμούς Mach είναι προβληματική, αφού το λογισμικό καθυστερεί να συγκλίνει, κάνοντας έτσι αναγκαία την εισαγωγή προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach .

Η δομή της εργασίας έχει ως εξής:

- Κεφάλαιο 2

Παρουσιάζεται η μέθοδος τεμνομένων κυφελών καθώς και ο τρόπος γένεσης πλέγματος. Διατυπώνονται οι διδιάστατες μη-μόνιμες εξισώσεις Euler και Navier-Stokes ενώ, στη συνέχεια, παρουσιάζεται ο τρόπος διακριτοποίησης των εξισώσεων Euler σε πεπερασμένους όγκους. Τέλος, αναλύεται ο επαναληπτικός αλγόριθμος που χρησιμοποιείται για την επίλυση της ροής.

- Κεφάλαιο 3

Γίνεται αναφορά στις μεθόδους προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach, παρουσιάζεται η πρώτη σχετική εισήγηση του Turkel, [12], οι λόγοι για τους οποίους οι μέθοδοι προσταθεροποίησης είναι αποτελεσματικές και, τελικά, το πρόβλημα που παρουσιάζει το ήδη υπάρχον λογισμικό ΥΡΔ σε χαμηλές ταχύτητες ροής.

- Κεφάλαιο 4

Διατυπώνεται ο τρόπος κατασκευής των προσταθεροποιημένων ΜΔΕ, Euler και Navier-Stokes, όπως επίσης και το μητρώο προσταθεροποίησης που επιλέχθηκε. Ακολούθως, αναφέρονται οι απαραίτητες τροποποιήσεις στο υπάρχον λογισμικό για την επίλυση των προσταθεροποιημένων εξισώσεων.

- Κεφάλαιο 5

Πιστοποιείται ο επιλύτης των προσταθεροποιημένων εξισώσεων σε αεροτομές, μια NACA 0012 και μια αεροτομή με τα flap σε έκταση. Η NACA 0012 επιλύεται σε ένα εύρος συνθηκών ροής, ώστε να διαπιστωθεί η αξιοπιστία των προσταθεροποιημένων αποτελεσμάτων. Επιπροσθέτως, μελετάται η αεροτομή με τα flap σε έκταση, ώστε να παρατηρηθεί η συμπεριφορά των προσταθεροποιημένων εξισώσεων σε ροές με περισσότερα από ένα σώματα. Τέλος, πραγματοποιείται πρόλεξη σε μη-μόνιμες ροές στην αεροτομή τύπου NACA 0012, ώστε να διαπιστωθεί η επίδραση της προσταθεροποίησης στην περίπτωση μη-μόνιμων ροών.

- Κεφάλαιο 6

Εφαρμόζεται προσταθεροποίηση χαμηλών ταχυτήτων σε έναν αγωγό σε πολύ χαμηλές ταχύτητες, ώστε διαπιστωθεί η εγκυρότητα του επιλύτη σε στρωτές ροές. Ο αγωγός είναι κατάλληλα διαμορφωμένος, με ένα απότομο μεσαίο άνοιγμα, ώστε να προκαλείται ανακυκλοφορία.

- Κεφάλαιο 7

Διατυπώνεται η συνεχής συζυγής μέθοδος των μόνιμων εξισώσεων Euler και, ακολούθως, εφαρμόζεται προσταθεροποίηση χαμηλών αριθμών Mach στις συζυγείς εξισώσεις, με στόχο την επιτάχυνση σύγκλισης του συζυγούς προβλήματος. Πραγματοποιείται βελτιστοποίηση της δύναμης της άνωσης σε μια αεροτομή, με και χωρίς την εφαρμογή προσταθεροποίησης, ώστε να συγκριθούν τα αποτελέσματα.

- Κεφάλαιο 8

Παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της διπλωματικής εργασίας και γίνεται αναφορά σε πιθανά πεδία επέκτασης με στόχο την περαιτέρω βελτίωση και ανάπτυξη του λογισμικού.

Κεφάλαιο 2

Η Μέθοδος Τεμνομένων Κυψελών και οι Εξισώσεις Ροής

2.1 Εισαγωγή

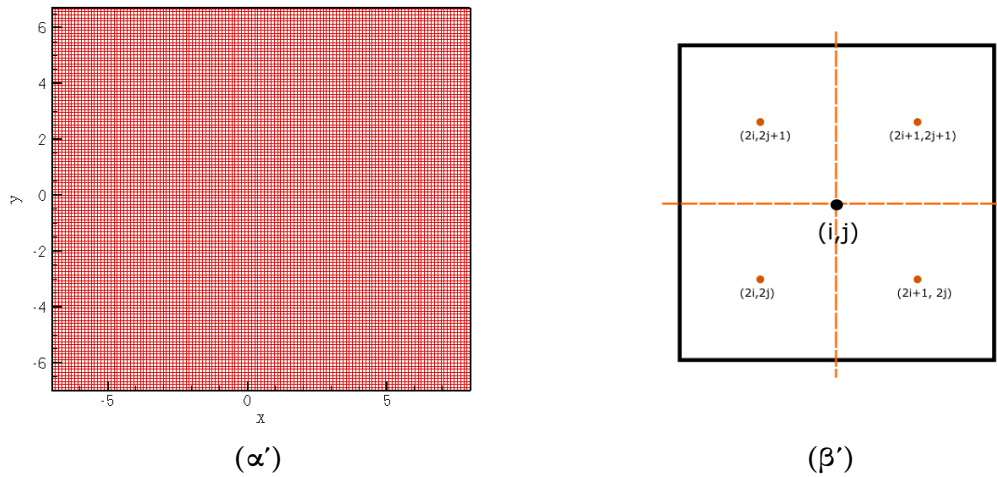
Η μέθοδος των τεμνομένων κυψελών εφαρμόζεται με σκοπό την επίλυση των διδιάστατων (2D) μη-μόνιμων εξισώσεων συμπιεστής ατρίβους ή στρωτής ροής σε ένα καρτεσιανό (χωρόδετο) πλέγμα, το οποίο πυκνώνει προοδευτικά μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας κοντά στα στερεά όρια. Καθώς το πλέγμα εκτείνεται τόσο εντός του πεδίου της ροής όσο και εντός των στερεών σωμάτων, σχηματίζονται κυψέλες, οι οποίες τέμνονται από τα στερεά όρια, επιτρέποντας ένα τμήμα τους να βρίσκεται εντός της ροής και ένα άλλο εντός του στερεού. Το σχήμα του «ρευστού» μέρους της τεμνόμενης κυψέλης μπορεί να είναι είτε τριγωνικό, είτε τετραπλευρικό, είτε πενταπλευρικό, ενώ είναι μέσω αυτής γίνεται η έμμεση επιβολή των οριακών συνθηκών. Οι περιπτώσεις τομής, καθώς και ο τρόπος χειρισμού των προκυπτόντων πολύγωνων θα αναλυθούν εκτενέστερα στη συνέχεια. Το πλεονέκτημα της συγκεκριμένης IBM ως προς τις υπόλοιπες, συνεχείς ή διακριτές προσεγγίσεις, είναι η δυνατότητα ικανοποίησης των νόμων διατήρησης σε τοπικό και συνολικό επίπεδο [5], όπως επίσης και η μείωση του υπολογιστικού κόστους, αφού το πλέγμα εντός των στερεών σωμάτων αγνοείται κατά τη διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων ροής. Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλυθεί ο τρόπος γένεσης πλέγματος, οι μηχανισμοί επιβάλλουν την τοπική πύκνωση, και ο τρόπος διακριτοποίησης των μη-μόνιμων, εξισώσεων Euler και Navier-Stokes συμπιεστής ροής. Τέλος, παρουσιάζονται διαγραμματικά οι επαναληπτικοί αλγόριθμοι πλεγματοποίησης και επίλυσης των εξισώσεων.

2.2 Διακριτοποίηση του Υπολογιστικού Χωρίου

Η διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου είναι απαραίτητη καθώς στα σημεία της διακριτοποίησης αποθηκεύονται οι τιμές των ροϊκών μεγεθών που προκύπτουν κατά την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων που επιλύονται κάθε φορά. Η επίλυση με IBM παρέχει τη δυνατότητα αξιοποίησης της δενδρικής δομής quadtree¹ με σκοπό την αποθήκευση των δεδομένων του πλέγματος, μειώνοντας έτσι την απαιτούμενη μνήμη. Συγκεκριμένα, στη μέθοδο αυτή, η διαδικασία της πλεγματοποίησης ξεκινά με ένα μεγάλο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το οποίο οριοθετεί το υπολογιστικό χωρίο.

Ο αλγόριθμος πλεγματοποίησης ακολουθεί μια σειριακή διαδικασία με αρκετούς μηχανισμούς ώστε να παραχθεί ένα ομαλό και καλής ποιότητας πλέγμα. Αρχικά, δημιουργείται ένα ομοιόμορφο πλέγμα αγνοώντας την ύπαρξη της γεωμετρίας. Συνεπώς, το πρώτο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που έχει οριοθετήσει το υπολογιστικό χωρίο διασπάται σε τέσσερα ισεμβαδικά μικρότερα ορθογώνια παραλληλόγραμμο (σχήμα 2.1β'), τα οποία έχουν κοινό σημείο το βαρύκεντρο του αρχικού, δημιουργώντας έτσι τέσσερις νέες κυψέλες με ίδιες αναλογίες των γεωμετρικών χαρακτηριστικών τους ως προς το αρχικό. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται και για τις καινούριες κυψέλες, ονομαζόμενες «παιδιά», μέχρι ένα κριτήριο τερματισμού. Το κριτήριο αυτό ορίζεται από τον χρήστη και αφορά το μέγιστο εμβαδόν (V_{max}) των τελευταίων παιδιών στη δενδρική δομή. Με τον τερματισμό της διαδικασίας αυτής, το υπολογιστικό χωρίο αποτελείται πλέον από 4^{x-1} κυψέλες (σχήμα 2.1α'), όπου x ο αριθμός των επιπέδων στη δενδρική δομή με $x = 1$ το πρώτο επίπεδο.

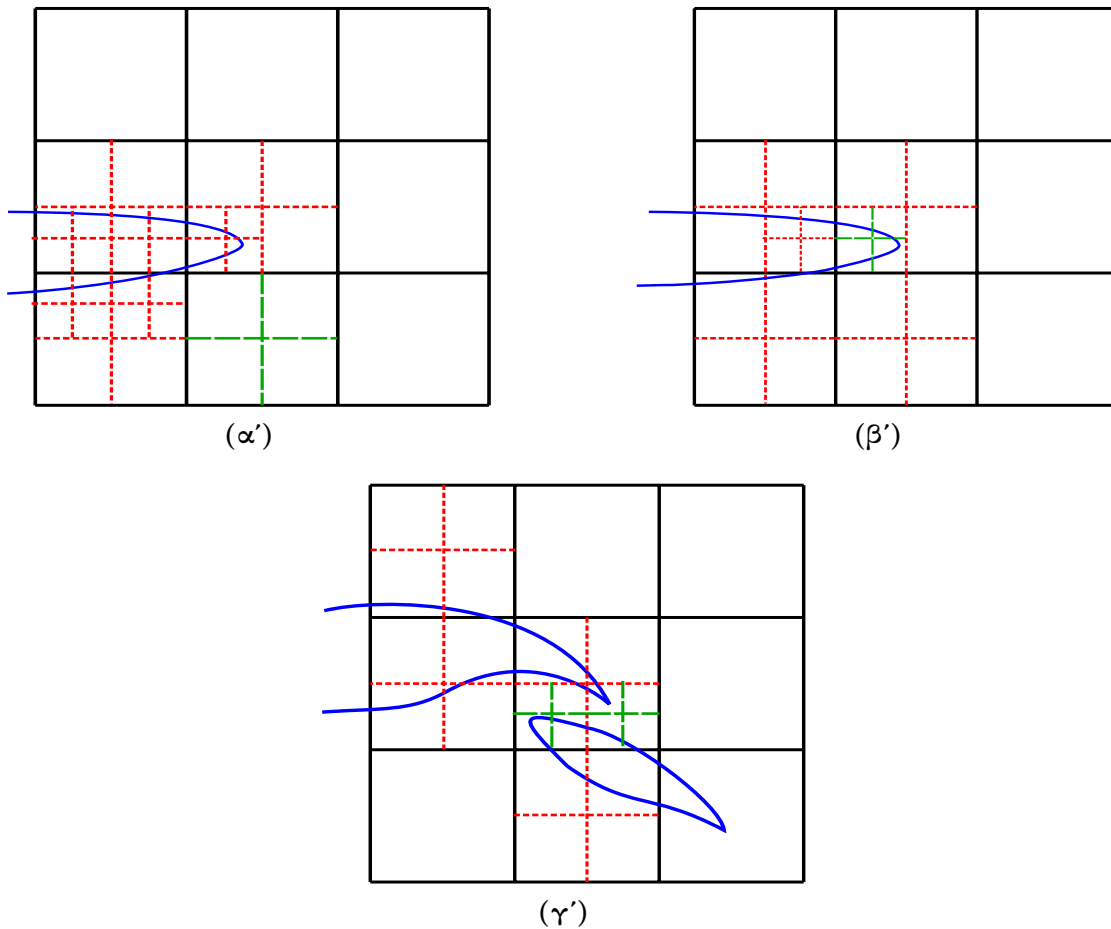
¹Πρόκειται για μια δενδρική δομή δεδομένων όπου, εκτός από τη χρήση της για κατασκευή καρτεσιανών πλεγμάτων, χρησιμοποιείται ευρύτατα στον τομέα ανάλυσης εικόνων (*Image processing*) λόγω της δυνατότητας ταχείας αναζήτησης δεδομένων και ευφύων τρόπων αποθήκευσης.



Σχήμα 2.1: (α') Αρχικό στάδιο πλεγματοποίησης όπου δεν λαμβάνεται υπόψη η ύπαρξη στερεών ορίων και περιορισμών. (β') Τρόπος αποθήκευσης των παραγόμενων κυψελών κατά τη διάσπαση των κυψελών με τη δένδρική δομή *Quadtree*.

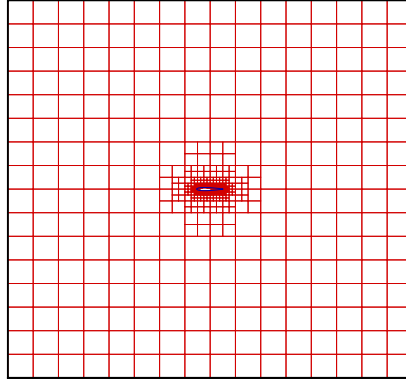
Σε αντίθεση με τη γένεση πλέγματος χωρίς την ύπαρξη γεωμετρίας, που προφανώς δεν επιδέχεται κάποιας χρησιμότητας στην ΥΡΔ, η ύπαρξη στερεών ορίων περιπλέκει την πλεγματοποίηση. Με την εμφάνιση στερεών ορίων, ξεκινούν να διασπώνται οι κυψέλες που τέμνονται από αυτά, διαταράσσοντας έτσι το μέχρι στιγμής ομοιογενές πλέγμα με εμβαδό κυψελών κοντά, αλλά μικρότερο, από το V_{max} που έχει κατασκευαστεί. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι το εμβαδόν των τεμνομένων κυψελών να φτάσει κοντά στο V_{min} , αφού στη γενική περίπτωση το V_{min} δεν θα έχει λόγο αναλογίας 4 με το αρχικό εμβαδόν. Με το πέρας της διαδικασίας αυτής, το υπολογιστικό χωρίο αποτελείται πλέον από τις κυψέλες με εμβαδά λίγο μικρότερα από V_{max} , τις κυψέλες που έχουν διασπαστεί λόγω του στερεού ορίου με εμβαδά μεταξύ (V_{max}, V_{min}) και τις τεμνόμενες κυψέλες με εμβαδά κοντά αλλά μικρότερα του V_{min} .

Με σκοπό την κατασκευή πλέγματος χωρίς απότομες μεταβολές στα εμβαδά γειτονικών κυψελών, που μπορούν να προκαλέσουν σφάλμα κατά την επίλυση, εισάγονται κριτήρια ώστε να αναγκάζουν το σπάσιμο κάποιων κυψελών, που βρίσκονται σε ειδικές περιπτώσεις. Η πρώτη περίπτωση κυψελών, που απαιτείται να διασπαστούν, είναι αυτές που συνορεύουν με κυψέλες οι οποίες απέχουν δύο ή περισσότερα επίπεδα διάσπασης από αυτές. Φυσικά, αυτό εννοεί ότι κάθε ακμή κυψέλης μπορεί να συνορεύει με το πολύ δύο κυψέλες (σχήμα 2.2α'). Η δεύτερη περίπτωση είναι κυψέλες στις οποίες το στερεό όριο τέμνει μια τους ακμή δύο φορές, δηλαδή υπάρχει είσοδος και έξοδος του στερεού ορίου από την ίδια ακμή. Ο λόγος που διασπώνται οι κυψέλες της δεύτερης περίπτωσης είναι για να αποφευχθεί η δημιουργία κυψελών περίπλοξης γεωμετρίας και, έτσι, διασπώνται μέχρις ότου τα στερεά όρια να τέμνουν την κάθε ακμή μόνο μια φορά (σχήμα 2.2β'). Η τρίτη και τελευταία περίπτωση αφορά κυψέλες οι οποίες τέμνονται



Σχήμα 2.2: (α') Περίπτωση που επιβάλλεται η διάσπαση της κυψέλης ώστε να προκύψουν αυτές με πράσινο χρώμα λόγω του περιορισμού που αφορά το επίπεδο των γειτονικών κυψελών. (β') Περίπτωση που η διάσπαση της κυψέλης ώστε να παραχθεί αυτή με πράσινο χρώμα γίνεται εξαιτίας του ότι η γεωμετρία εισέρχεται και εξέρχεται της κυψέλης από την ίδια ακμή. (γ') Περίπτωση που οι κυψέλες διασπώνται σ' αυτές με πράσινο χρώμα λόγω του ότι η κυψέλη τέμνεται περισσότερο από δύο φορές από τα στερεά όρια, δηλαδή και από τις δύο γεωμετρίες.

από στερεά όρια περισσότερο από 2 φορές σε όλες τις ακμές της κυψέλης (σχήμα 2.2γ'). Λόγω του αυξημένου ρευστοδυναμικού ενδιαφέροντος που υπάρχει στις περιοχές αυτές, οι κυψέλες διασπώνται, ώστε να υπάρχει μεγαλύτερη ακρίβεια και να μπορεί το πλέγμα να αποτυπώνει με ακρίβεια τα φαινόμενα καθώς εξελίσσονται. Με την εφαρμογή των παραπάνω κριτηρίων, κατασκευάζεται πλέον ένα πλέγμα στο οποίο είναι δυνατή η επίλυση των διακριτοποιημένων εξισώσεων.



Σχήμα 2.3: Πλέγμα χωρίς προοδευτική πύκνωση. Παρατηρείται ότι η παρουσία της γεωμετρίας επηρεάζει το εμβαδόν ενός πολύ μικρού αριθμού κυψελών, συγκεκριμένα διασπώνται (οι περισσότερες άνω της μιας φορές) μόνο 12 από τις 256 αρχικές κυψέλες.

Για να είναι δυνατή η επίλυση πιο περίπλοκων γεωμετριών με αυξημένη ακρίβεια, χωρίς να αυξάνεται το υπολογιστικό κόστος ανεξέλεγκτα, απαιτείται η προοδευτική, προς τη γεωμετρία, πύκνωση του πλέγματος (*Mesh Refinement*). Η ομαλή αυτή πύκνωση εφαρμόζεται μέσω μια σιγμοειδούς συνάρτησης (f)¹, μέσω της οποίας ορίζεται η κατανομή των εμβαδών κάθε κυψέλης ανάλογα με την απόστασή της από το πλησιέστερο στερεό όριο. Η σιγμοειδής συνάρτηση επιλέχθηκε ώστε να διασφαλίζεται συνέχεια πρώτης παραγώγου και, άρα, ένα πιο ομαλής πύκνωσης πλέγμα. Όσο πιο μακριά από το στερεό όριο βρίσκεται η κυψέλη, τόσο μεγαλύτερη προκύπτει η τιμή της σιγμοειδούς συνάρτησης και το μέγιστο επιτρεπτό εμβαδόν της κυψέλης. Έτσι, στην περίπτωση που το εμβαδόν της κυψέλης είναι μεγαλύτερο από το κρίσιμο εμβαδόν (V_{crit}) το κριτήριο δεν εξασφαλίζεται και η κυψέλη διασπάται. Στο τέλος του πιο πάνω ελέγχου, ο πλεγματοποιητής έχει κατασκευάσει ένα πλέγμα καλής ποιότητας με προοδευτική πύκνωση και τη δυνατότητα να επιλύει περίπλοκες γεωμετρίες μέσω μιας αυτοματοποιημένης διαδικασίας και χωρίς την απαίτηση εξειδικευμένων γνώσεων πλεγματοποίησης από τον χρήστη.

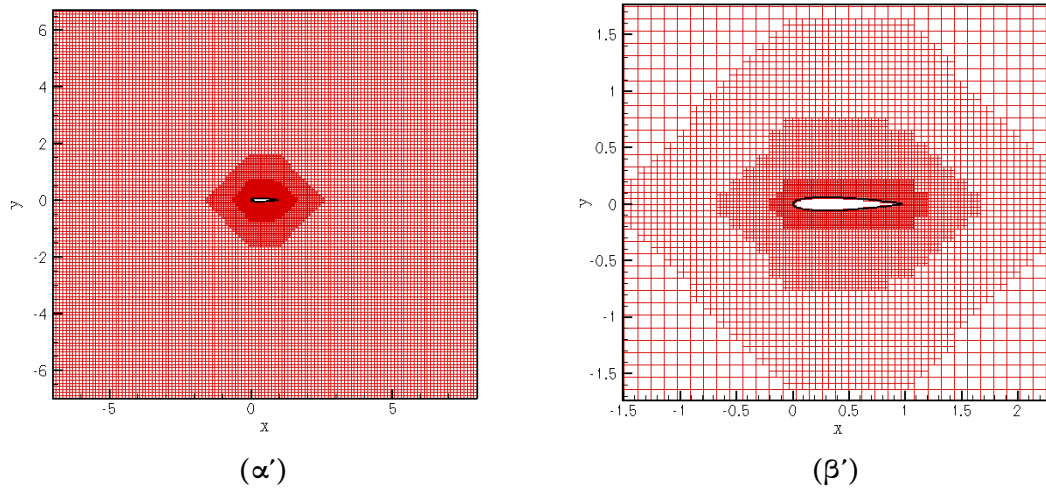
1

$$x = \frac{d}{d_{max}},$$

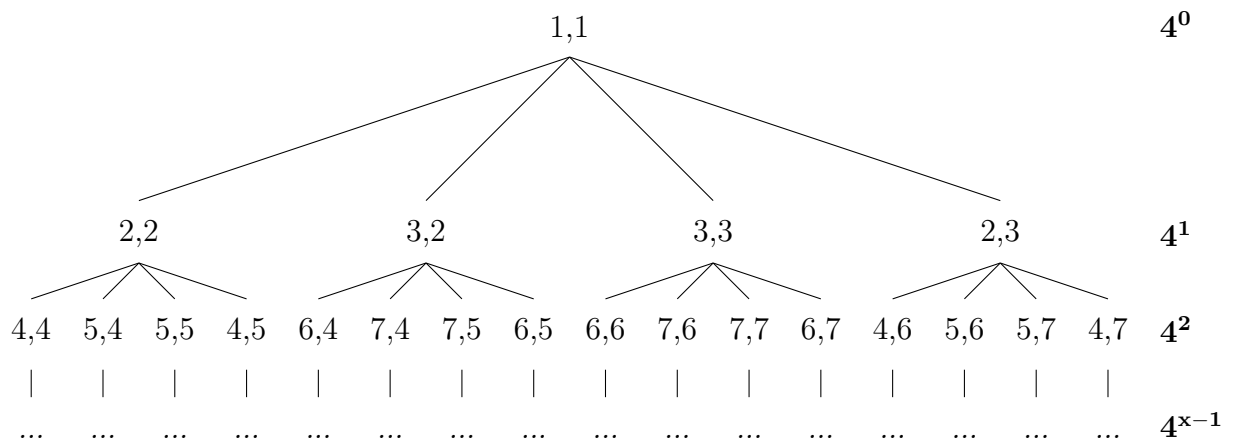
$$f = \begin{cases} 1, & \text{if } x > 1 \\ -2x^3 + 3x^2, & \text{if } 0 < x < 1 \end{cases},$$

$$V_{crit} = f V_{max} + (1 - f) V_{min}$$

if ($V_{cell} > V_{crit}$) Divide



Σχήμα 2.4: (α') Τελικό πλέγμα όπου γίνεται η επίλυση των εξισώσεων Euler με τη μέθοδο Cut-Cell γύρω από μονωμένη αεροτομή. (β') Μεγένθυση στο σημείο που βρίσκεται η γεωμετρία. Οι «στερεές» κυψέλες έχουν αφαιρεθεί αφού δεν γίνεται επίλυση των εξισώσεων στις κυψέλες αυτές.



Σχήμα 2.5: Τυπική μορφή δενδρικής δομής Quadtree και ο μονοσήμαντος τρόπος αρίθμησης των κυψελών κάθε επιπέδου, όπως ορίζεται στο σχήμα 2.1β', [9]. Η δεξιά στήλη του σχήματος αναφέρει τον συνολικό αριθμό κυψελών ανά επίπεδο.

Στο σχήμα 2.5 παρατηρείται ο μονοσήμαντος ορισμός αρίθμησης των κυψελών (i,j) μέσω της δενδρικής δομής. Με γνωστούς του μετρητές αυτούς, είναι δυνατός ο υπολογισμός όλων των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της κάθε κυψέλης, χωρίς την ανάγκη συσχέτισης με οποιαδήποτε άλλη κυψέλη εκτός της αρχικής. Έτσι, η δομή αποθήκευσης των δεδομένων του πλέγματος (*Data Structure*) απλοποιείται και, τελικά, η απαιτούμενη μνήμη προκύπτει ελάχιστη, σε αντίθεση με την περίπτωση των οριόδετων πλεγμάτων. Τα δεδομένα του

πλέγματος που πρέπει να αποθηκευτούν, ώστε να μπορεί να γίνει αναδόμηση του πλέγματος είναι οι μετρητές (i,j) κάθε κυψέλης, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της πρώτης κυψέλης και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των κυψελών που τέμνονται από στερεά όρια.

Ο υπολογισμός του επιπέδου της κάθε κυψέλης, [9], μπορεί να προκύψει ως:

$$L = \lfloor (\log_2 i + 1) \rfloor = \lfloor (\log_2 j + 1) \rfloor \quad (2.1)$$

όπου παρατηρείται η συμμετρία των εξισώσεων ως προς τους μετρητές (i,j) . Με γνωστό το επίπεδο της κυψέλης μπορούν, στη συνέχεια, να υπολογιστούν τα μήκη των πλευρών της κάθε κυψέλης, [9], ως:

$$\Delta x = \frac{\Delta X_{(1,1)}}{2^{L-1}} \quad (2.2)$$

$$\Delta y = \frac{\Delta Y_{(1,1)}}{2^{L-1}} \quad (2.3)$$

όπου $(\Delta X_{(1,1)}, \Delta Y_{(1,1)})$ τα αντίστοιχα μήκη των πλευρών της αρχικής κυψέλης ενώ μπορούν επίσης να υπολογιστούν και τα εμβαδά της κάθε κυψέλης ως:

$$V = \frac{V_{(1,1)}}{(2^{L-1})^2} = \frac{V_{(1,1)}}{4^{L-1}} \quad (2.4)$$

Ο υπολογισμός των συντεταγμένων του βαρύκεντρου της κάθε κυψέλης γίνεται μέσω της σχέσης:

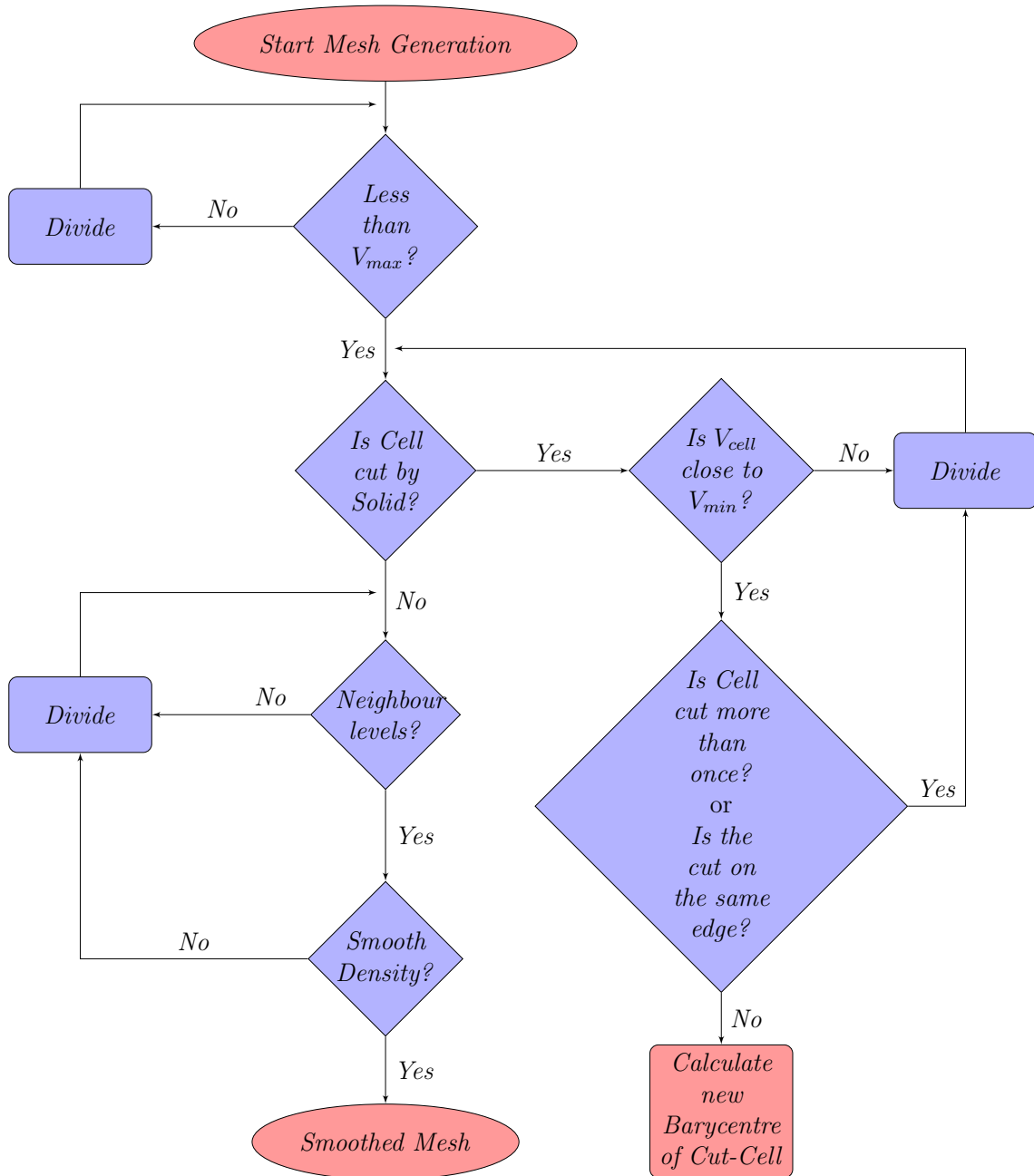
$$x = X_{(1,1)} - \frac{3}{2} \Delta X_{(1,1)} + (i + \frac{1}{2}) \frac{\Delta X_{(1,1)}}{2^{L-1}} \quad (2.5)$$

$$y = Y_{(1,1)} - \frac{3}{2} \Delta Y_{(1,1)} + (j + \frac{1}{2}) \frac{\Delta Y_{(1,1)}}{2^{L-1}} \quad (2.6)$$

με $(X_{(1,1)}, Y_{(1,1)})$ τα σημεία του κέντρου της αρχικής κυψέλης. Παρατηρείται ότι για τον υπολογισμό των γεωμετρικών χαρακτηριστικών κάθε κυψέλης, οι πράξεις που χρειάζονται είναι απλές και όμοιες κατά τις δύο κατευθύνσεις, κάτι που οφείλεται στο καρτεσιανό πλέγμα που έχει κατασκευαστεί. Με την εφαρμογή των αναφερθέντων μηχανισμών πύκνωσης και περιορισμών αντίστοιχα, είναι δυνατό να κατασκευαστεί πλέγμα υψηλής ακρίβειας γρήγορα και χωρίς την απαίτηση αποθήκευσης τεράστιου όγκου δεδομένων. Στην περίπτωση κινούμενων γεωμετριών οι τροποποιήσεις που απαιτούνται σε κάθε χρονικό βήμα είναι ελάχιστες, σε αντίθεση με τα οριόδετα πλέγματα που απαιτούν είτε την επαναπλεγματοποίηση είτε την εφαρμογή τεχνικών παραμόρφωσης πλέγματος (λ.χ με στρεπτικά ελατήρια, [7]), εξοικονομώντας έτσι υπολογιστική ισχύ. Στον αντίποδα όμως, βρίσκεται η δυσκολία επιβολής οριακών συνθηκών στα στερεά όρια με ακρίβεια, λόγω της απαίτησης προεκβολής των

συντηρητικών μεγεθών στα σημεία του στερεού ορίου.

Ανακεφαλαιώνοντας, παρουσιάζεται το πλέγμα που κατασκευάζεται για την επίλυση των εξισώσεων Euler γύρω από μια μεμονωμένη αεροτομή NACA 0012, ώστε να σχηματιστεί μια εποπτική εικόνα της μεθόδου πλεγματοποίησης (σχήμα 2.4 (α')-(β')) και του τελικού πλέγματος που κατασκευάζεται. Τέλος, παρουσιάζεται ένα απλοποιημένο διάγραμμα του αλγόριθμου που χρησιμοποιείται για τη διαδικασία κατασκευής του πλέγματος μέχρι το τελικό στάδιο (σχήμα 2.6).



Σχήμα 2.6: Διάγραμμα ροής πλεγματοποιητή για τη μέθοδο τεμνομένων κυψελών όπου φαίνονται οι λήψεις αποφάσεων που σχετίζονται με τους περιορισμούς που επιβάλλονται για τη γένεση πλέγματος καλής ποιότητας, [9].

2.3 Διατύπωση των 2D Εξισώσεων Euler

Οι μη-μόνιμες εξισώσεις Euler είναι ένα σύστημα υπερβολικού τύπου μερικών διαφορικών εξισώσεων που αφορούν αδιαβατική και ατριβή ροή. Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις περιγράφουν τους νόμους διατήρησης της μάζας, ορμής και ενέργειας ενός ρευστού στο χώρο. Ανάλογα με τις διαστάσεις που μελετώνται, το σύστημα μπορεί να περιλαμβάνει από τρεις (1D) έως πέντε (3D) εξισώσεις. Για διδιάστατη συμπιεστή ροή οι εξισώσεις είναι τέσσερις και σε συντηρητική διανυσματική μορφή γράφονται ως:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} = \vec{0} \quad (2.7)$$

ή αλλιώς

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} = \vec{0} \quad (2.8)$$

όπου $\mathbf{A}_x = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}}$, $\mathbf{A}_y = \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{U}}$ τα Ιακωβιανά μητρώα. Το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών \vec{U} στην εξίσωση (2.7) ορίζεται ως:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

ενώ τα διανύσματα ατριβούς ροής στις δύο διευθύνσεις (x και y) \vec{f} και \vec{g} υπολογίζονται ως:

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E_t + p) \end{bmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E_t + p) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

όπου ρ η πυκνότητα του ρευστού, u και v οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά τους άξονες x και y αντίστοιχα, p η στατική πίεση και E_t η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού.

Για τη σύνδεση των θερμοδυναμικών μεγεθών που εμφανίζονται στις εξισώσεις Euler το ρευστό θεωρείται τέλει αέριο και, έτσι, με αφετηρία την καταστατική εξίσωση προκύπτουν οι

ακόλουθες βοηθητικές σχέσεις:

$$p = \rho R_g T \quad (2.11)$$

$$E_t = \rho E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (2.12)$$

$$E = e + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (2.13)$$

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (2.14)$$

$$h_t = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \quad (2.15)$$

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} \quad (2.16)$$

R_g η σταθερά τελείων αερίων,

T η στατική θερμοκρασία,

T_t η ολική θερμοκρασία,

h_t η ολική ενθαλπία ($h_t = c_p T_t$),

e η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας του ρευστού ($e = c_v T$),

γ ο εκθέτης της ισεντροπικής μεταβολής τελείων αερίων,

c η ταχύτητα του ήχου

2.4 Διατύπωση των 2D Εξισώσεων Navier-Stokes

Η διανυσματική μορφή των διδιάστατων μη-μόνιμων εξισώσεων Navier-Stokes συμπιεστού ρευστού γράφονται ως:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} = \vec{0} \quad (2.17)$$

όπου τα διανύσματα ροής (\vec{F} , \vec{G}) αποτελούνται από τα διανύσματα ατρίβους ροής και τα συνεκτικά διανύσματα δηλαδή:

$$\vec{F} = \vec{f}^{inv} - \vec{f}^{vis} \quad (2.18)$$

$$\vec{G} = \vec{g}^{inv} - \vec{g}^{vis} \quad (2.19)$$

Τα διανύσματα των συνεκτικών όρων ορίζονται ως:

$$\vec{f}_k^{vis} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{1k} \hat{n}_k \\ \tau_{2k} \hat{n}_k \\ u_i \tau_{i,k} \hat{n}_k + q_k \hat{n}_k \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

με $\vec{f}_k^{vis} = (\vec{f}^{vis}, \vec{g}^{vis})$, $\tau_{i,k}$ οι συνιστώσες του τανυστή τάσεων, \vec{q} το διάνυσμα ροής της θερμότητας και τους επαναλαμβανόμενους δείκτες i και k να δηλώνουν άθροιση κατά τη σύμβαση του Einstein.

Ο τανυστής των τάσεων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\tau_{i,j} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \quad (2.21)$$

όπου το δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker και το μ ο συντελεστής δυναμικής συνεκτικότητας.

Ο υπολογισμός του διανύσματος ροής θερμότητας υπολογίζεται μέσω της σχέσης:

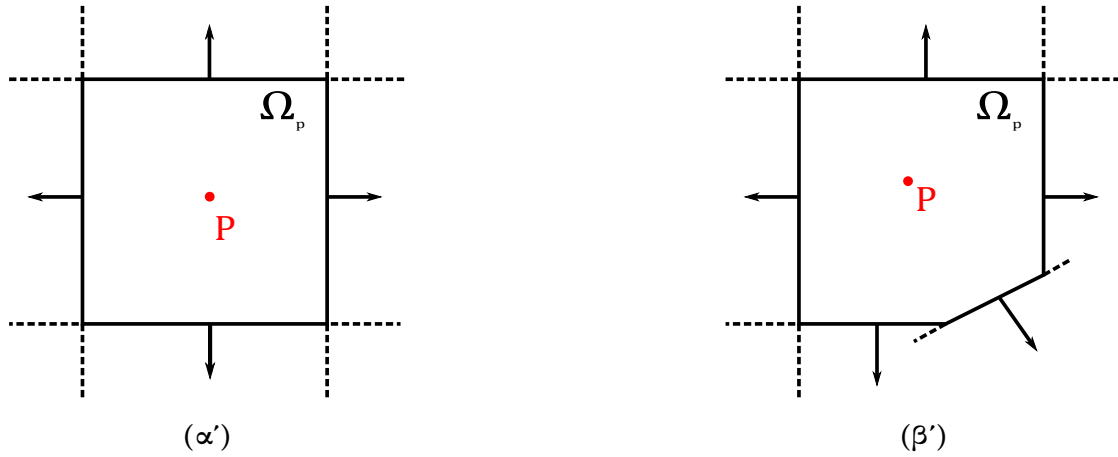
$$\vec{q} = -k \nabla T = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.22)$$

με k τον συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας.

2.5 Διακριτοποίηση των 2D Εξισώσεων Euler

2.5.1 Ολοκλήρωση σε Πεπερασμένους Όγκους

Η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (2.7) και (2.8) γίνεται με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων. Συνεπώς, το σύστημα εξισώσεων επιλύεται σε κεντροκυβελικούς όγκους ελέγχου, οι οποίοι ταυτίζονται με τις κυψέλες του πλέγματος, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.7. Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις (2.7), προκύπτει η διατύπωση του υπολοίπου των εξισώσεων της ροής για κάθε κυψέλη, όπου φαίνεται η συμβολή του χρονικού και των χωρικών όρων, ξεχωριστά.



Σχήμα 2.7: (α') Όγκος ελέγχου Ω_P που ταυτίζεται με την κυψέλη P του πλέγματος μαζί με τα κάθετα διανύσματα στο όριό του. (β') Όγκος ελέγχου Ω_P σε κυψέλη που τέμνεται από τη γεωμετρία μαζί με τα μοναδιαία κάθετα διανύσματά του

$$\int_{\Omega_P} \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} \right] d\Omega = \vec{0} \quad (2.23)$$

ή

$$\vec{R}_P := \underbrace{\int_{\Omega_P} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega}_{\text{temporal}} + \underbrace{\int_{\Omega_P} \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} \right] d\Omega}_{\text{inviscid}} = \vec{0} \quad (2.24)$$

Με την κεντροκυβελική διατύπωση στους όγκους ελέγχου Ω_P μιας τυχαίας κυψέλης, η εξίσωση (2.7) μετασχηματίζεται σε (2.24). Ακολουθώντας, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους χωρικούς όρους και εφαρμόζοντας το θεώρημα Green (*Divergence Theorem*) το επιφανειακό (χωρικό) ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται σε επικαμπύλιο, δηλαδή,

$$\int_{\Omega_P} \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} \right) d\Omega = \oint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{n} dS \quad \vec{n} = [\hat{n}_x, \hat{n}_y]^T \quad (2.25)$$

και έτσι οι εξισώσεις επιλύονται πλέον στα όρια του όγκου ελέγχου.

Θεωρώντας πως η πυκνότητα ροής ($\vec{\mathbf{F}} = (\vec{f}, \vec{g})$) είναι σταθερή κατά μήκος κάθε πλευράς του όγκου ελέγχου, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της εξίσωσης (2.25) προσεγγίζεται ως:

$$\oint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{n} dS = \oint_S [\vec{f} \cdot \vec{n}_x + \vec{g} \cdot \vec{n}_y] dS \approx \sum \vec{\Phi}_{edges} \Delta S \quad (2.26)$$

όπου *edges* είναι οι πλευρές των κυψελών, ΔS το μήκος κάθε πλευράς ενώ

$$\vec{\Phi} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} \rho(\vec{u} \cdot \vec{n}) \\ \rho u(\vec{u} \cdot \vec{n}) + p n_x \\ \rho v(\vec{u} \cdot \vec{n}) + p n_y \\ (E_t + p)(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Πρόβλημα Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων

Με σκοπό να μελετηθεί ο τρόπος μεταφοράς της πληροφορίας στο χώρο γίνεται η ιδιοδιανυσματική ανάλυση του Ιακωβιανού μητρώου (\mathbf{A}) των εξισώσεων Euler. Μέσω αυτής, υπολογίζονται οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα και έτσι γίνεται «αποσύζευξη» της συμβολής κάθε εξίσωσης. Με αυτόν τον τρόπο, είναι δυνατή η χρήση ευσταθών σχημάτων διακριτοποίησης, όπως το σχήμα Roe, [13], που χρησιμοποιείται στη διπλωματική εργασία.

Για την ιδιοδιανυσματική ανάλυση χρησιμοποιείται η διατύπωση της εξίσωσης Euler με τα Ιακωβιανά μητρώα (2.8), και με την άθροισή τους προκύπτει το μητρώο \mathbf{A} που ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &:= \mathbf{A}_i n_i = \mathbf{A}_x n_x + \mathbf{A}_y n_y \Leftrightarrow \\ \mathbf{A} &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}} n_x + \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{U}} n_y \Leftrightarrow \\ \mathbf{A} &= \frac{\partial (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{n})}{\partial \vec{U}} = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \vec{U}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ο υπολογισμός του Ιακωβιανού μητρώου (\mathbf{A}) μπορεί να προκύψει με δύο τρόπους. Είτε πραγματοποιώντας την παραγωγή (2.28) που αφορά τα συντηρητικά μεγέθη και απαιτεί αρκετές πράξεις, είτε μεταβαίνοντας στις **μη-συντηρητικές μεταβλητές** ($\vec{V} = [\rho, u, v, p]^T$) και συσχετίζοντας τα αντίστοιχα Ιακωβιανά μητρώα ($\overline{\mathbf{A}}_x, \overline{\mathbf{A}}_y$) με το Ιακωβιανό μητρώο \mathbf{A} . Η μετάβαση από συντηρητικές σε μη-συντηρητικές μεταβλητές παρατίθεται στη συνέχεια αναλυτικά με σημείο αναφοράς τις χρονικά μη-μόνιμες εξισώσεις Euler στη

συντηρητική τους μορφή (2.7).

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} = \vec{0} \\
& \Leftrightarrow \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{V}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{V}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{V}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = \vec{0} \\
& (\times \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{U}}) \Leftrightarrow \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{V}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{V}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{V}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = \vec{0} \\
& \Leftrightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{V}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{V}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{V}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = \vec{0} \\
& \Leftrightarrow \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}_x \mathbf{M} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}_y \mathbf{M} \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = \vec{0} \\
& \text{ή} \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \bar{\mathbf{A}}_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \bar{\mathbf{A}}_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = \vec{0}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

όπου χρησιμοποιούνται οι σχέσεις μετατροπής που συνδέουν τα Ιακωβιανά μητρώα συντηρητικών και μη-συντηρητικών μεταβλητών:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_x &= \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{V}} \bar{\mathbf{A}}_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{U}} = \mathbf{M} \bar{\mathbf{A}}_x \mathbf{M}^{-1} \\
\mathbf{A}_y &= \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{V}} \bar{\mathbf{A}}_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{U}} = \mathbf{M} \bar{\mathbf{A}}_y \mathbf{M}^{-1}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Τα Ιακωβιανά μητρώα των μη-συντηρητικών μεταβλητών προκύπτουν εύκολα ως:

$$\bar{\mathbf{A}}_x = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{V}} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & u \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}}_y = \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{V}} = \begin{bmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & \rho c^2 & v \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

ενώ το μητρώο μετασχηματισμού από συντηρητικές σε μη-συντηρητικές μεταβλητές \mathbf{M} ισούται

με

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 \\ \frac{\vec{u}^2}{2} & \rho u & \rho v & \frac{1}{\gamma-1} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ (\gamma-1)\frac{\vec{u}^2}{2} & (1-\gamma)u & (1-\gamma)v & \gamma-1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Τελικά, το μητρώο \mathbf{A} , που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\vec{\Phi} = \mathbf{A}\vec{U} \quad (2.34)$$

υπολογίζεται ως:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(:, 1) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -u(\vec{u} \cdot \vec{n}) + \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2) n_x \\ -v(\vec{u} \cdot \vec{n}) + \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2) n_y \\ \left(-\gamma\frac{E}{\rho} + (\gamma-1)(u^2 + v^2)\right) (\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}(:, 2) &= \begin{bmatrix} n_x \\ \vec{u} \cdot \vec{n} + (2-\gamma)un_x \\ vn_x - (\gamma-1)un_y \\ \left(\frac{\gamma E}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2)\right) n_x - (\gamma-1)u(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}(:, 3) &= \begin{bmatrix} n_y \\ un_y - (\gamma-1)vn_x \\ \vec{u} \cdot \vec{n} + (2-\gamma)vn_y \\ \left(\frac{\gamma E}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2)\right) n_y - (\gamma-1)v(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}(:, 4) &= \begin{bmatrix} 0 \\ (\gamma-1)n_x \\ (\gamma-1)n_y \\ \gamma(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.35)$$

ενώ οι ιδιοτιμές υπολογίζονται ως:

$$|\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}| = 0 \quad (2.36)$$

και προκύπτουν:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \vec{u} \cdot \vec{n} \\ \lambda_2 &= \vec{u} \cdot \vec{n} \\ \lambda_3 &= \vec{u} \cdot \vec{n} + c \\ \lambda_4 &= \vec{u} \cdot \vec{n} - c \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ακολούθως, υπολογίζονται και τα δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα μέσω των σχέσεων:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \vec{r}^{(i)} = \vec{0} \quad (2.38)$$

$$\vec{l}^{(i)T} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = \vec{0} \quad (2.39)$$

Με τον υπολογισμό των ιδιοδιανυσμάτων μπορούν πλέον να κατασκευαστούν τα μητρώα (\mathbf{P} , \mathbf{P}^{-1}) που διαγωνοποιούν το μητρώο \mathbf{A} σύμφωνα με τη σχέση:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{\Lambda} &= \text{Diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \} \end{aligned} \quad (2.40)$$

όπου

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \vec{r}_3 & \vec{r}_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \\ \vec{l}_3 \\ \vec{l}_4 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Τα ιδιοδιανύσματα υπολογίζονται ως

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & u & v & \frac{1}{2}|u| \end{bmatrix}^T \\ \vec{r}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \rho n_y & -\rho n_x & \rho(n_y u - n_x v) \end{bmatrix}^T \\ \vec{r}_3 &= \begin{bmatrix} \frac{\rho}{2c} & \frac{\rho}{2c}(u + n_x) & \frac{\rho}{2c}(v + n_y) & \frac{\rho}{2c}(h_t + c \vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix}^T \\ \vec{r}_4 &= \begin{bmatrix} \frac{\rho}{2c} & \frac{\rho}{2c}(u - n_x) & \frac{\rho}{2c}(v - n_y) & \frac{\rho}{2c}(h_t - c \vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}
\vec{l}_1 &= \left[1 - \frac{(\gamma-1)(M^2)}{2} \quad \frac{(\gamma-1)u}{c^2} \quad \frac{(\gamma-1)v}{c^2} \quad -\frac{(\gamma-1)}{c^2} \right] \\
\vec{l}_2 &= \left[\frac{n_x v - n_y u}{\rho} \quad \frac{n_y}{\rho} \quad \frac{-n_x}{\rho} \quad 0 \right] \\
\vec{l}_3 &= \left[\frac{c}{\rho} \left\{ \frac{\gamma-1}{2} M^2 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{c} \right\} \quad \frac{1}{\rho} \{ n_x - (\gamma-1) \frac{u}{c} \} \quad \frac{1}{\rho} \{ n_y - (\gamma-1) \frac{v}{c} \} \quad \frac{(\gamma-1)}{\rho c} \right] \\
\vec{l}_4 &= \left[\frac{c}{\rho} \left\{ \frac{\gamma-1}{2} M^2 + \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{c} \right\} \quad -\frac{1}{\rho} \{ n_x + (\gamma-1) \frac{u}{c} \} \quad -\frac{1}{\rho} \{ n_y + (\gamma-1) \frac{v}{c} \} \quad \frac{(\gamma-1)}{\rho c} \right]
\end{aligned} \tag{2.43}$$

ενώ, χάριν πληρότητας, η σχέση που συνδέει τα μητρώα που διαγωνοποιούν το μη-συντηρητικό Ιακωβιανό μητρώο (\mathbf{L} , \mathbf{L}^{-1}) με τα μητρώα (\mathbf{P} , \mathbf{P}^{-1}), είναι:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{-1} &= \mathbf{L}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \\
\mathbf{P} &= \mathbf{M} \mathbf{L} \\
\bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{L} \mathbf{\Lambda} \mathbf{L}^{-1}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Επιπλέον, ορίζεται το μητρώο $|\mathbf{A}|$ που συμβάλλει στον όρο καταστροφής (Dissipation) του σχήματος Roe μέσω της εξίσωσης:

$$|\mathbf{A}| = \mathbf{P} |\mathbf{\Lambda}| \mathbf{P}^{-1} \tag{2.45}$$

Διατύπωση του σχήματος Roe

Η επίλυση εξισώσεων σε πλέγματα, δηλαδή σε διακριτοποιημένα υπολογιστικά χωρία, έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση ασυνεχειών μεταξύ κάθε κυψέλης. Η επίλυση συντηρητικών εξισώσεων με τοπική ασυνέχεια σε προβλήματα με αρχικές συνθήκες χαρακτηρίζει ένα πρόβλημα Riemann. Χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός προβλήματος Riemann είναι οι σωλήνες κρούσης (*Shock Tubes*), όπου στην κατάσταση ηρεμίας το κεντρικό διάφραγμα χωρίζει τα ρευστά σε δύο διαφορετικές καταστάσεις και με το σπάσιμο του, ξεκινά η αλληλεπίδραση των δύο ρευστών και η εμφάνιση της ασυνέχειας στα ροϊκά μεγέθη. Στις μεθόδους κεντροκυβελικής διατύπωσης και, γενικά, μεθόδων πεπερασμένων όγκων η ασυνέχεια εμφανίζεται λόγω του ότι τα μεγέθη που υπολογίζονται στα κέντρα των κυψελών προκύπτουν ως η μέση τιμή στον όγκο ελέγχου, απαιτώντας έτσι την επίλυση τοπικών προβλημάτων Riemann, ώστε να υπολογιστεί το διάνυσμα ροής (*Flux*) στις πλευρές των κυψελών, σε αντίθεση με τις μεθόδους πεπερασμένων διαφορών που θεωρούνται «σημειακές».

Με σκοπό τη μείωση του μεγάλου υπολογιστικού κόστους που απαιτεί η αναλυτική επίλυση ενός προβλήματος Riemann αναπτύχθηκαν προσεγγίσεις οι οποίες, προσφέρουν ικανοποιητική ακρίβεια σε σαφώς μικρότερο κόστος (περίπου 2.5 φορές φθηνότερα), [14]. Μία από τις

προσεγγίσεις, το σχήμα Roe, προτείνει τον υπολογισμό των διανυσμάτων ατριβούς ροής, [13], μέσω τοπικής προσέγγισης ως εξής:

$$\vec{\Phi}_{PQ}^{inv} = \frac{1}{2} \left(\vec{\Phi}_{PQ}^L + \vec{\Phi}_{PQ}^R \right) - \frac{1}{2} \left| \tilde{\mathbf{A}}_{PQ} \right| \left(\vec{U}_{PQ}^R - \vec{U}_{PQ}^L \right) \quad (2.46)$$

όπου το μητρώο $\left| \tilde{\mathbf{A}}_{PQ} \right|$, το οποίο ονομάζεται και μητρώο τεχνητής συνεκτικότητας (*artificial-viscosity matrix*), υπολογίζεται στην κοινή πλευρά δυο γειτονικών κυψελών (P , Q) και προκύπτει βάσει του γεωμετρικού μέσου όρου των πρωτεύουσών μεταβλητών (*convex linear combination*). Το διάνυσμα μέσων τιμών κατά Roe ορίζεται ως:

$$\vec{V} = \left[\tilde{\rho} \quad \tilde{u} \quad \tilde{v} \quad \tilde{p} \right]^T \quad (2.47)$$

Ο υπολογισμός της, κατά Roe, μέσης τιμής της πυκνότητας προκύπτει ως:

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_R \rho_L} \quad (2.48)$$

Κατ' αντιστοιχία, οι μέσες τιμές των ταχυτήτων υπολογίζονται μέσω των σχέσεων

$$\tilde{u}_{RL} = \frac{\sqrt{\rho_R} u_R + \sqrt{\rho_L} u_L}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}} \quad (2.49)$$

$$\tilde{v}_{RL} = \frac{\sqrt{\rho_R} v_R + \sqrt{\rho_L} v_L}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}} \quad (2.50)$$

και, ομοίως, προκύπτει η εξίσωση υπολογισμού της μέσης τιμής της ειδικής ολικής ενθαλπίας ως:

$$\tilde{h}_{t,RL} = \frac{\sqrt{\rho_R} h_{t,R} + \sqrt{\rho_L} h_{t,L}}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}} \quad (2.51)$$

Οι πιο πάνω εξισώσεις προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος:

$$\Phi(\vec{U}_R) - \Phi(\vec{U}_L) = \mathbf{A}_{RL}(\vec{U}_R - \vec{U}_L) \quad (2.52)$$

και θεωρώντας τέλειο αέριο μπορεί να προκύψει η σχέση υπολογισμού της εξίσωσης της ταχύτητας του ήχου, στις κατά Roe μέσες τιμές, ως:

$$\tilde{c}_{RL}^2 = (\gamma - 1) \left(\tilde{h}_{t,RL} - \frac{1}{2} \tilde{v}_{RL}^2 \right) \quad (2.53)$$

και, τελικά, η κατά Roe καταστατική εξίσωση τελείων αερίων, κλείνοντας έτσι την ανάλυση

στις κατά Roe μέσες τιμές.

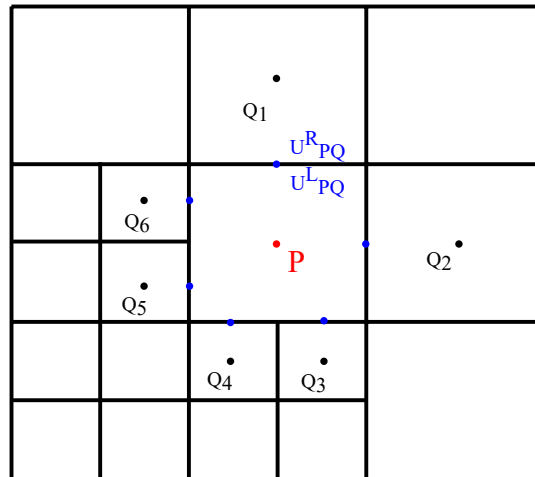
$$\tilde{\rho}_{RL} = \frac{\tilde{\rho}_{RL} \tilde{c}_{RL}^2}{\gamma} \quad (2.54)$$

Χωρική Διακριτοποίηση 2ης Τάξης

Η χρήση του σχήματος διακριτοποίησης κατά Roe απαιτεί τον υπολογισμό των μεγεθών ροής στα όρια του πεπερασμένου όγκου (κατάσταση L και R). Τα \vec{U}_L , \vec{U}_R υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις τιμές και τις παραγώγους των μεγεθών ροής τα οποία έχουν αποθηκευτεί στο βαρύκεντρό του. Με την εφαρμογή αναπτύγματος Taylor και λαμβάνοντας τους όρους πρώτης τάξης, προεκβάλλονται οι τιμές των συντηρητικών μεγεθών στα μέσα της κοινής πλευράς των γειτονικών κυψελών,

$$\begin{aligned} \vec{U}_{PQ}^L &= \vec{U}_P + \overline{PM} \cdot (\nabla U)_P \\ \vec{U}_{PQ}^R &= \vec{U}_Q + \overline{QM} \cdot (\nabla U)_Q \end{aligned} \quad (2.55)$$

όπου $(\nabla U)_P = \left(\frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x}, \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \right)$, $(\nabla U)_Q = \left(\frac{\partial \vec{U}_Q}{\partial x}, \frac{\partial \vec{U}_Q}{\partial y} \right)$ και M το μέσο της κοινής πλευράς των κυψελών P και Q .



Σχήμα 2.8: Η κυψέλη P όπου γίνεται υπολογισμός των χωρικών παραγώγων λαμβάνοντας υπόψη τη συμβολή όλων των γειτόνων της. Ανάλογα με τη θέση κάθε κυψέλης, ο αριθμός των γειτονικών κυψελών ποικίλλει από δύο, στις γωνιακές κυψέλες, μέχρι οκτώ, στην περίπτωση όπου όλες οι γειτονικές κυψέλες είναι μεγαλύτερου επιπέδου. Η προεκβολή γίνεται στο μέσο της κοινής ακμής της κυψέλης με κάθε γείτονα.

Ο υπολογισμός των απαιτούμενων παραγώγων γίνεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, ορίζοντας μια συνάρτηση σφάλματος προς ελαχιστοποίηση. Η συνάρτηση

σφάλματος επιλέγεται ώστε με την προεκβολή των ροϊκών μεγεθών στις γειτονικές κυψέλες με τη χρήση των χωρικών παραγώγων, οι τιμές των ροϊκών μεγεθών των γειτονικών κελιών να εκτιμούνται όσο το δυνατόν καλύτερα. Για τον σκοπό αυτόν, υπολογίζονται τα μεγέθη κάθε συντηρητικής μεταβλητής του κάθε γείτονα μέσω του αναπτύγματος Taylor ώστε να προκύψουν οι χωρικές παράγωγοι ως άγνωστοι, δηλαδή:

$$\begin{aligned}\vec{U}_Q &\cong \vec{U}_P + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} (x_Q - x_P) + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} (y_Q - y_P) \\ &= \vec{U}_P + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \Delta y \Leftrightarrow \\ &\frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \Delta y + \Delta \vec{U} \cong 0\end{aligned}\quad (2.56)$$

Ακολούθως, ορίζεται η συνάρτηση σφάλματος προς ελαχιστοποίηση ως:

$$E = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \Delta y_i - \Delta \vec{U}_i \right)^2 \quad (2.57)$$

όπου οι γείτονες (\mathbb{N}) κάθε κυψέλης ποικίλλουν ανάλογα με τη θέση που βρίσκονται και, λόγω των περιορισμών που επιβάλλονται κατά την πλεγματοποίηση, κυμαίνονται από δυο ως οκτώ, ανάλογα με το επίπεδο των γειτονικών κυψελών (σχήμα 2.8). Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση σφάλματος και θέτοντας την μηδέν προκύπτει ένα σύστημα 2×2 με αγνώστους τις μερικές παραγώγους των χωρικών μεταβλητών, ώστε να υπολογιστούν οι προεκβεβλημένες μεταβλητές.

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial \left(\frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \right)} &= \sum_{i=1}^N 2 \left(\frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \Delta y_i - \Delta \vec{U}_i \right) \Delta x_i = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial \left(\frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \right)} &= \sum_{i=1}^N 2 \left(\frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \Delta y_i - \Delta \vec{U}_i \right) \Delta y_i = 0\end{aligned}\quad (2.58)$$

Επαναδιατυπώνοντας τη σχέση (2.58) προκύπτει το σύστημα δύο εξισώσεων:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \sum_{i=1}^N \Delta x_i \Delta x_i + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \sum_{i=1}^N \Delta x_i \Delta y_i &= \sum_{i=1}^N \Delta x_i \Delta \vec{U}_i \\ \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \sum_{i=1}^N \Delta x_i \Delta y_i + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \sum_{i=1}^N \Delta y_i \Delta y_i &= \sum_{i=1}^N \Delta y_i \Delta \vec{U}_i\end{aligned}\quad (2.59)$$

ενώ σε μητρωϊκή γραφή γράφεται ως:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \Delta x_i \Delta x_i & \sum_{i=1}^N \Delta x_i \Delta y_i \\ \sum_{i=1}^N \Delta x_i \Delta y_i & \sum_{i=1}^N \Delta y_i \Delta y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \\ \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \Delta x_i \Delta \vec{U}_i \\ \sum_{i=1}^N \Delta y_i \Delta \vec{U}_i \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Η ανάγκη χωρικής διακριτοποίησης ενισχύεται από το γεγονός ότι το πλέγμα στο οποίο επιλύονται οι εξισώσεις ροής δεν είναι προσανατολισμένο κατά την εκ των πραγμάτων άγνωστη διεύθυνση της ροής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η αριθμητική διάχυση (*Numerical Diffusion*) να είναι αυξημένη και, έτσι, γίνεται αναγκαία η υλοποίηση αυξημένης ακρίβειας.

Περιοριστής

Το σύστημα (2.60) που προκύπτει, λόγω των μικρών συντελεστών και την ευαισθησία του σε μικρές αλλαγές, μπορεί να προκαλέσει μεγάλες υπερακοντίσεις στις τιμές των χωρικών παραγώγων [15]. Για την αντιμετώπιση του φαινομένου αυτού γίνεται χρήση περιοριστή (limiter). Ο περιοριστής που χρησιμοποιήθηκε αναπτύχθηκε από τους Barth & Jespersen, [16], ενώ ο Venkatakrishnan εισήγαγε μια διόρθωση στο σχήμα, [17], έτσι ώστε η συνάρτηση του περιοριστή να είναι παραγωγίσιμη σε όλη της την έκτασή της. Το σχήμα τους διατυπώνεται ως εξής:

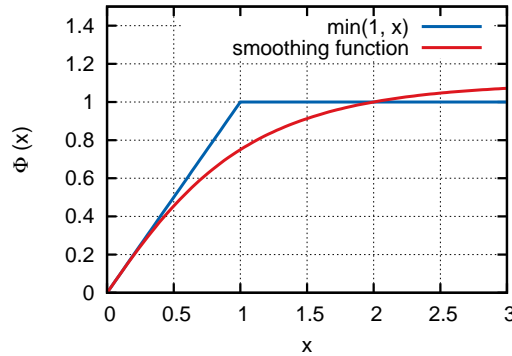
$$\left(\vec{U}_{PQ}^L \right)^* = \vec{U}_P + \Pi_P \overline{PM} \cdot \left(\nabla \vec{U} \right)_P \quad (2.61)$$

Υπολογίζοντας τις ακόλουθες ποσότητες,

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \vec{U}_{PQ}^L \\ \vec{U}_{min} &= \min \left(\vec{U}, \vec{U}_{Q_i} \right) \\ \vec{U}_{max} &= \max \left(\vec{U}, \vec{U}_{Q_i} \right) \\ \Phi(x) &= \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x + 2} \end{aligned} \quad (2.62)$$

η τιμή του συντελεστή χαλάρωσης Π_P καθορίζεται ανάλογα με τις τιμές των γειτόνων ως:

$$\Pi_{P,j} = \begin{cases} 1 & , \tilde{U}_j = U_{P,j} \\ \Phi \left(\frac{U_{max,j} - U_{P,j}}{\tilde{U}_j - U_{P,j}} \right) & , \tilde{U}_j > U_{P,j} \\ \Phi \left(\frac{U_{min,j} - U_{P,j}}{\tilde{U}_j - U_{P,j}} \right) & , \tilde{U}_j < U_{P,j} \end{cases} , j = 1, 2, 3, 4 \quad (2.63)$$



Σχήμα 2.9: Σύγκριση της συνεχούς, παντού παραγωγίσιμης συνάρτησης που εισήγαγε ο Venkatakrishnan, [17], με την εισήγηση του περιοριστή των Barth & Jespersen, [15].

2.5.2 Διακριτοποίηση των Χρονικών Όρων

Για τον χειρισμό του χρονικού όρου της εξίσωσης (2.24) γίνεται εφαρμογή του κανόνα Leibnitz. Συνεπώς, ο χρονικός όρος μετατρέπεται σε,

$$\int_{\Omega_P^{k+1}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_P^{k+1}} \vec{U} d\Omega - \int_{\partial\Omega_P^{k+1}} \vec{u}_{grid}^{k+1} \cdot \vec{n}^{k+1} \vec{U} d(\partial\Omega) \quad (2.64)$$

ενώ ο όρος που αφορά κινούμενες γεωμετρίες μηδενίζεται, λόγω του ότι στην εργασία αυτή δεν πραγματοποιείται μελέτη με κινούμενα όρια. Τελικά, εφαρμόζοντας χρονική διακριτοποίηση 2ης τάξης ακρίβειας προκύπτει η εξίσωση

$$\int_{\Omega_P} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega \simeq \frac{\Omega_P}{2\Delta t} (3\vec{U}_P^{k+1} - 4\vec{U}_P^k + \vec{U}_P^{k-1}) \quad (2.65)$$

όπου Ω_P ο όγκος της κυψέλης, \vec{U}_P το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών και t^{k+1} η χρονική στιγμή που αναζητάμε. Όπως παρατηρείται, στην περίπτωση 2ης τάξης χρονικής ακρίβειας, είναι απαραίτητες οι τιμές των συντηρητικών μεγεθών κάθε κυψέλης των δύο τελευταίων χρονικών στιγμών t^k, t^{k-1} ώστε να υπολογιστεί η νέα.

2.5.3 Οριακές Συνθήκες

Οι οριακές συνθήκες που αναλύονται είναι οι τύπων στερεού ορίου και επ' άπειρον ροής.

Στερεά Όρια

Η οριακή συνθήκη που επιβάλλεται στα στερεά όρια στην περίπτωση ατρίβους ροής είναι η συνθήκη μη-εισχώρησης και επιβάλλει το μηδενισμό της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας, δηλαδή:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.66)$$

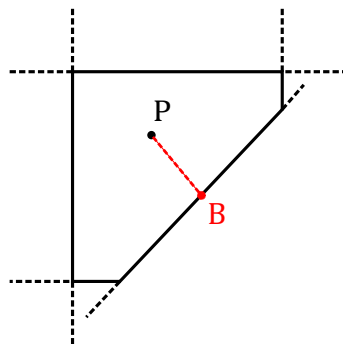
Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.27), ο υπολογισμός του διανύσματος ροής στα στερεά όρια μετατρέπεται στη μορφή:

$$\vec{\Phi}_{wall}^{inv} = \begin{bmatrix} 0 \\ pn_x \\ pn_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Η εφαρμογή της σχέσης (2.67) γίνεται έμμεσα, λόγω του ότι οι τιμές των συντηρητικών μεταβλητών στο στερεό όριο δεν υπάρχουν. Συνεπώς, η εφαρμογή της συνθήκης μη-εισχώρησης γίνεται με την προεκβολή, με παρόμοιο τρόπο όπως και στην περίπτωση της χωρικής διακριτοποίησης 2ης τάξης, των τιμών των συντηρητικών μεγεθών στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που τέμνει την κυψέλη (σχήμα 2.10).

$$\vec{U}_B = \vec{U}_P + \vec{PB} \cdot (\nabla \vec{U})_P \quad (2.68)$$

όπου με τον υπολογισμό του διανύσματος \vec{U}_B μπορεί πλέον να εφαρμοστεί η σχέση (2.67) και άρα η συνθήκη μη-εισχώρησης.



Σχήμα 2.10: Παράδειγμα τεμνομένης κυψέλης στην οποία έχει υπολογιστεί το νέο μετατοπισμένο βαρύκεντρο και, ακολούθως, προεκβάλλονται οι τιμές στο σημείο B , ώστε να επιβληθεί η συνθήκη μη-εισχώρησης

Συνθήκες στα επ' άπειρον όρια

Με τον όρο οριακές συνθήκες στα επ' άπειρο όρια, εννοείται ο τύπος των οριακών συνθηκών που επιβάλλεται, κατά τη μελέτη ροής μεμονωμένων γεωμετριών, με τη θεώρηση ότι τα όρια του υπολογιστικού χωρίου δεν επηρεάζονται από την ύπαρξη της γεωμετρίας, λόγω της μεγάλης απόστασης που απέχουν από αυτήν. Θεωρητικά, η πιο πάνω παραδοχή δεν ισχύει, παρόλα αυτά σε αποστάσεις μερικών χορδών από τη γεωμετρία (λ.χ 10) το σφάλμα που συνεισφέρουν είναι αμελητέο. Βέβαια, αυξανόμενου του υπολογιστικού χωρίου, αυξάνεται και το υπολογιστικό κόστος γι' αυτό και γίνεται αντιστάθμιση μεταξύ των δύο. Η τεχνική που χρησιμοποιείται, για την επιβολή της οριακής συνθήκης τύπου Dirichlet, χρησιμοποιεί ψευδόκομβους, στους οποίους ορίζονται οι τιμές των πρωτεύουσών μεταβλητών και τοποθετούνται έξω από τα όρια του υπολογιστικού χωρίου. Ακολουθώντας, δρούν ως βοηθητικοί κόμβοι στους οποίους, ενώ δεν επιλύεται η ροή σ' αυτούς, κάνουν δυνατό τον υπολογισμό του διανύσματος ροής στις πλευρές των κυψελών.

2.6 Επαναληπτικός Αλγόριθμος Επίλυσης Εξισώσεων Euler

Για την αριθμητική επίλυση των μη-μόνιμων εξισώσεων Euler συμπιεστής ροής, δηλαδή του συστήματος εξισώσεων (2.24), λαμβάνεται το σύστημα εξισώσεων σε διακριτή μορφή βάση της ανάλυσης που προηγήθηκε. Η διακριτοποιημένη μορφή των εξισώσεων διατυπώνεται ως:

$$\vec{R}_P = \sum_{Q \in \mathbb{N}} \vec{\Phi}_{PQ}^k \Delta s + \frac{\Omega_P}{2\Delta t} \left(3\vec{U}_P^{k+1} - 4\vec{U}_P^k + \vec{U}_P^{k-1} \right) = \vec{0} \quad (2.69)$$

όπου \mathbb{N} όλοι οι γείτονες της κάθε κυψέλης και t ο πραγματικός χρόνος.

Για την επίλυση του συστήματος εξισώσεων η μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι αυτή του διπλού χρονικού βήματος (Dual time stepping) και ονομάζεται έτσι λόγω του ότι προστίθεται ακόμη ένας όρος στην εξίσωση (2.24), ο ψευδοχρονικός, ώστε να ενισχυθεί η διαγώνια κυριαρχία.

Η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείται για την επίλυση του μη-γραμμικού συστήματος εξισώσεων (2.69) είναι η Δέλτα διατύπωση (Δ - formulation). Εφαρμόζοντας ανάπτυγμα Taylor στην εξίσωση (2.69) γύρω από την άγνωστη, μέχρι στιγμής, λύση του πεδίου \vec{U}^* ,

προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
\vec{R}_P(\vec{U}^*) &= \vec{0} \Leftrightarrow \\
\vec{R}_P(\vec{U} + \Delta\vec{U}) &= \vec{0} \Leftrightarrow \\
\vec{R}_P(\vec{U}) + \frac{\partial \vec{R}_P}{\partial \vec{U}} \Delta\vec{U} + \mathcal{O}(\Delta\vec{U}^2) &= \vec{0} \Rightarrow \\
\frac{\partial \vec{R}_P}{\partial \vec{U}} \Delta\vec{U} &= -\vec{R}_P(\vec{U})
\end{aligned} \tag{2.70}$$

όπου \vec{U} το τρέχον πεδίο για το οποίο οι πεδιακές εξισώσεις δεν ικανοποιούνται και $\Delta\vec{U}$ η διανυσματική διαφορά των δυο πεδίων.

Η εξίσωση (2.70) εμφανίζεται συχνά κατά την επίλυση συστημάτων εξισώσεων με αριθμητικές μεθόδους και έχει καθιερωθεί ως:

$$\boxed{[NUMERICS] \Delta\vec{U} = [PHYSICS]}$$

όπου το αριστερό μέρος (LHS) καθορίζει τον τρόπο σύγκλισης, ενώ το δεξί (RHS) αφορά την ακρίβεια της επιτευχθείσας λύσης. Η δυνατότητα επέμβασης στον όρο του $[NUMERICS]$ εναπόκειται στο χρήστη και, εντός λογικών πλαισίων, δίνει τη δυνατότητα επίτευξης ταχύτερων επιλύσεων σε μεγαλύτερο εύρος προβλημάτων ροής.

Μια από τις επεμβάσεις που πραγματοποιούνται στο $[NUMERICS]$ και εφαρμόζεται σε αυτόν τον αλγόριθμο επίλυσης είναι η προθήκη του ψευδοχρόνου. Ο όρος που προστίθεται τροποποιεί τις εξισώσεις Euler (2.7) ως:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} = \vec{0} \tag{2.71}$$

όπου t ο πραγματικός χρόνος και τ ο ψευδοχρόνος, ενώ θεωρώντας κεντροκυψελική διατύπωση στους όγκους ελέγχου καταλήγουμε,

$$\int_{\Omega_P} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} d\Omega = \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} \right)_P^{n+1} \Omega_P \tag{2.72}$$

όπου n ο μετρητής των ψευδοχρονικών επαναλήψεων.

Διακριτοποιώντας τη χρονική παράγωγο με ακρίβεια πρώτης τάξης ο ψευδοχρονικός όρος

γίνεται:

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau}\right)_P^{n+1} \Omega_P = \frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n}{\Delta \tau} \Omega_P \Big|_P = \frac{\Delta \vec{U}^{n+1}}{\Delta \tau} \Omega_P \Big|_P \quad (2.73)$$

Για την περαιτέρω ενίσχυση της ταχύτητας σύγκλισης το ψευδοχρονικό βήμα $\Delta \tau$ δεν είναι καθολικό αλλά διαφοροποιείται για κάθε κυψέλη. Έτσι, κυψέλες που μπορούν να αντέξουν μεγάλα ψευδοχρονικά βήματα, χωρίς απώλεια ευστάθειας, «προπορεύονται» στον ψευδοχρόνο διευκολύνοντας τη γενικότερη σύγκλιση του πεδίου. Η τεχνική αυτή εφαρμόζεται μέσω της συνθήκης *Courant–Friedrichs–Lewy*, [18], που διατυπώνεται ως:

$$\Delta \tau_P = CFL \frac{\Omega_P}{C} \quad (2.74)$$

όπου *CFL* είναι ο αριθμός *Courant–Friedrichs–Lewy* και ο όρος *C* υπολογίζεται από τη σχέση:

$$C = (|u_i^P| + c^P) S_i^P \quad (2.75)$$

$$S_i^P = \frac{1}{2} \sum_{Q \in \mathbb{N}} |n_i^{PQ}| * \Delta S_i \quad (2.76)$$

όπου S_i^P είναι η προβολή όλων των τμημάτων που απαρτίζουν τα όρια του όγκου ελέγχου της κυψέλης P κατά την κατεύθυνση i και u_i η αντίστοιχη ταχύτητα.

Ο υπολογισμός των διαγώνιων και μη-διαγώνιων όρων γίνεται παραγωγίζοντας τη συνάρτηση (2.69). Με την αντικατάσταση του διανύσματος ροής (2.46), αυτή γίνεται:

$$\begin{aligned} \vec{R}_P &= \sum_{Q \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{2} \left(\vec{\Phi}_{PQ}^L + \vec{\Phi}_{PQ}^R \right) - \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{A}}_{PQ}| \left(\vec{U}_{PQ}^R - \vec{U}_{PQ}^L \right) \right] \Delta s \\ &\quad + \frac{\Omega_P}{2\Delta t} \left(3\vec{U}_P^{k+1} - 4\vec{U}_P^k + \vec{U}_P^{k-1} \right) = \vec{0} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Τα διαγώνια 4×4 μητρώα προκύπτουν με την προσθήκη της παραγώγου του ψευδοχρονικού όρου (2.73) ως:

$$[D]_P^n \triangleq \frac{\partial \vec{R}_P}{\partial \vec{U}_P^{n+1}} = \sum_{Q \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} \left(\mathbf{A}_P + |\tilde{\mathbf{A}}_{PQ}| \right) \Delta s_{PQ} + \frac{3\Omega_P}{2\Delta t} \mathbf{I}_{4 \times 4} + \frac{\Omega_P}{\Delta \tau} \mathbf{I}_{4 \times 4} \quad (2.78)$$

ενώ τα μη-διαγώνια μητρώα,

$$[offD]_{PQ}^n \triangleq \frac{\partial \vec{R}_P}{\partial \vec{U}_Q^{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{A}_Q - |\tilde{\mathbf{A}}_{PQ}| \right) \Delta s_{PQ} \quad (2.79)$$

Τελικά, το σύστημα που επιλύεται σε μητρωική γραφή διατυπώνεται ως:

$$\begin{bmatrix} [D]_1^n & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & [offD]_{PQ}^n & \cdots & [D]_P^n & \cdots & [offD]_{PQ'}^n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & [D]_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \vec{U}_1^{n+1} \\ \vdots \\ \Delta \vec{U}_P^{n+1} \\ \vdots \\ \Delta \vec{U}_m^{n+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \vec{R}_1^n \\ \vdots \\ \vec{R}_P^n \\ \vdots \\ \vec{R}_m^n \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

όπου m ο συνολικός αριθμός κυψελών και $n+1$ η ψευδοχρονική στιγμή που υπολογίζεται. Το μητρώο $[NUMERICS]$ απαρτίζεται κυρίως από μηδενικά στοιχεία, καθώς τα μη-μηδενικά στοιχεία προκύπτουν από τη συμβολή των γειτόνων (\mathbb{N}). Άρα σε κάθε γραμμή μπορούν να υπάρχουν μέχρι και εννέα μη-μηδενικά στοιχεία (συμπεριλαμβανόμενου και του διαγώνιου στοιχείου). Για την εξοικονόμηση της απαιτούμενης μνήμης τα μη-μηδενικά στοιχεία αποθηκεύονται ως ένα διάνυσμα για κάθε κυψέλη ενώ τα μηδενικά στοιχεία αγνοούνται.

Ο υπολογισμός των διανυσμάτων $\Delta \vec{U}_i$ γίνεται με την επαναληπτική μέθοδο Jacobi, αρχικά λόγω του υψηλού κόστους αντιστροφής του μητρώου συντελεστών και επιπρόσθετα, λόγω του ότι η θέση των μη-διαγώνιων μητρώων στην εξίσωση (2.80) δεν είναι διατεταγμένη με αποτέλεσμα να μην μπορούν να χρησιμοποιηθούν τεχνικές ταχείας επίλυσης τέτοιων συστημάτων.[19]

Η επαναδιατύπωση της εξίσωσης, προκειμένου να επιλυθεί με τη μέθοδο αυτή, δίνει:

$$[D]_P \Delta \vec{U}_P^{new} = -\vec{R}_P - \sum_{Q \in \mathbb{N}} [offD]_{PQ} \Delta \vec{U}_Q^{old} \quad (2.81)$$

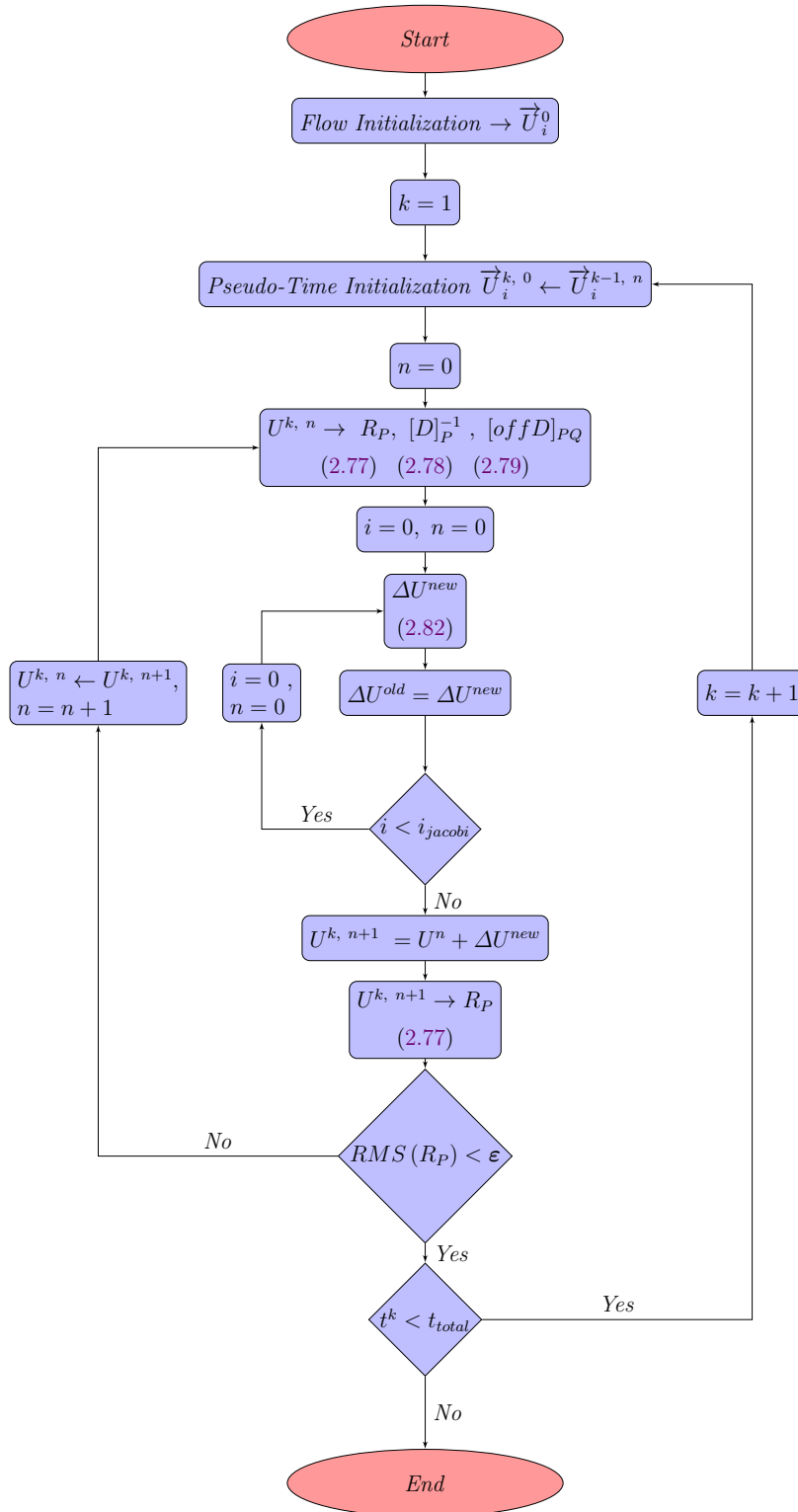
ή

$$\Delta \vec{U}_P^{new} = [D]_P^{-1} \left[-\vec{R}_P - \sum_{Q \in \mathbb{N}} [offD]_{PQ} \Delta \vec{U}_Q^{old} \right] \quad (2.82)$$

όπου τα μητρώα $[D]_P^{-1}$, \vec{R}_P και $[offD]_{PQ}$ υπολογίζονται στην τρέχουσα ψευδο-χρονική στιγμή n .

Ανακεφαλαιώνοντας, η επίλυση του προβλήματος γίνεται μέσω μιας τριπλής επαναληπτικής διαδικασίας. Ο εσωτερικός βρόχος επαναλήψεων βασίζεται στη μέθοδο Jacobi για την επίλυση του συστήματος (2.80) και τον υπολογισμό της διόρθωσης του διανύσματος συντηρητικών μεταβλητών ($\Delta \vec{U}$). Ο ενδιάμεσος βρόχος επαναλήψεων πραγματοποιείται στον ψευδοχρόνο, όπου ανανεώνονται οι τιμές του πεδίου για την τρέχουσα χρονική στιγμή, και τέλος ο εξωτερικός βρόχος επαναλήψεων που ορίζει τα πραγματικά χρονικά βήματα για τα οποία πραγματοποιείται η επίλυση. Το κριτήριο τερματισμού της επαναληπτικής μεθόδου Jacobi ορίζεται ως ένας αριθμός επαναλήψεων (i_{jacobi}). Ο αριθμός αυτός επιλέγεται κατάλληλα ώστε να εξασφαλίζει ότι η διόρθωση $\Delta \vec{U}_P^{new}$ που προκύπτει, να κατευθύνει το πεδίο προς τη σωστή κατεύθυνση, αφού τα αντίστοιχα μητρώα $[D]_P^{-1}$, R_P , $[offD]_{PQ}$ δεν ικανοποιούν τις πεδιακές εξισώσεις και, συνεπώς, στην επόμενη επανάληψη πρέπει και αυτά τα μητρώα να ανανεωθούν εκ νέου. Οι ψευδοχρονικές επαναλήψεις πραγματοποιούνται μέχρι σύγκλισης του χρονικά μόνιμου προβλήματος και, τέλος, οι επαναλήψεις στον πραγματικό χρόνο πραγματοποιούνται μέχρι το πέρας της χρονικής διάρκειας μελέτης που μας ενδιαφέρει.

Στο σχήμα 2.11 φαίνεται το διάγραμμα ροής του αλγόριθμου επίλυσης ώστε να γίνει πιο εύκολα κατανοητή η επαναληπτική διαδικασία που πραγματοποιείται.



Σχήμα 2.11: Διάγραμμα ροής αλγορίθμου επίλυσης των χρονικά μη-μόνιμων εξισώσεων Euler με την προσθήκη ψευδοχρόνου και τη χρήση της μεθόδου *Jacobi* για τον υπολογισμό της διόρθωσης της Δ έλτα-διατύπωσης.

2.7 Διακριτοποίηση των 2D Εξισώσεων Navier-Stokes

Στην περίπτωση που μελετώνται στρωτές ροές, είναι απαραίτητη και η διακριτοποίηση των συνεκτικών όρων. Συνεπώς, για τον υπολογισμό του διανύσματος πυκνότητας ροής (εξίσωση (2.20)) των συνεκτικών όρων στις πλευρές κάθε κυψέλης, είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των χωρικών παραγώγων των ταχυτήτων και της θερμοκρασίας. Λόγω του ότι οι χωρικές παράγωγοι των συντηρητικών μεταβλητών στα βαρύκεντρα είναι γνωστές, οι όροι $\frac{\partial v_k}{\partial x_k}$ και $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ υπολογίζονται μέσω του κανόνα της αλυσίδας, δηλαδή:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_k} \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} = \frac{\partial T}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_k} \quad (2.84)$$

Έπειτα, είναι απαραίτητη η παρεμβολή των χωρικών παραγώγων από τα κέντρα των κυψελών στις αντίστοιχες πλευρές τους. Αυτό επιτυγχάνεται με την εφαρμογή μιας ορθογωνικής διόρθωσης (orthogonal correction) μέσω της σχέσης:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} |_f = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} + PQ_k \left(\frac{v_k^Q - v_k^P}{\|PQ\|} - \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} PQ_k \right) \quad (2.85)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} |_f = \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} + PQ_k \left(\frac{T^Q - T^P}{\|PQ\|} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} PQ_k \right) \quad (2.86)$$

όπου οι τιμές ταχύτητας (\bar{v}_k) και θερμοκρασίας (\bar{T}) υπολογίζονται ως οι σταθμισμένες μέσες τιμές των αντίστοιχων μεγεθών ανάμεσα σε δυο κυψέλες και (\vec{PQ}) το μοναδιαίο διάνυσμα μεταξύ των δύο βαρύκεντρων.

Απαραίτητη είναι επίσης η αλλαγή της οριακής συνθήκης στα στερεά όρια. Η οριακή συνθήκη που επιβάλλεται επιπλέον είναι η συνθήκη μη-ολίσθησης με αποτέλεσμα να απαιτείται ο μηδενισμός και των δυο συνιστωσών της ταχύτητας στο στερεό όριο, δηλαδή:

$$\vec{v} = \vec{0} \quad (2.87)$$

Κεφάλαιο 3

Μεθόδοι Προσταθεροποίησης Χαμηλών Αριθμών Mach

3.1 Εισαγωγικά Σχόλια

Οι μέθοδοι προσταθεροποίησης (*Preconditioning*) χαμηλών αριθμών Mach εφαρμόστηκαν με σκοπό την επιτάχυνση της σύγκλισης των εξισώσεων ασυμπίεστης ροής στο χρονικά μόνιμο πρόβλημα πρώτη φορά από τους Choi & Merkel το 1985, [20], ενώ ακολούθως επεκτάθηκαν και στις εξισώσεις που αφορούν συμπίεστη ροή σε χαμηλούς αριθμούς Mach. Η εφαρμογή προσταθεροποίησης στις εξισώσεις συμπίεστης ροής ωφελεί περαιτέρω την επιτάχυνση της σύγκλισης, αφού σε χαμηλές ταχύτητες ροής, ο χρόνος σύγκλισης αυξάνει σημαντικά, λόγω της μεγάλης διαφοράς μεταξύ των ακουστικών κυμάτων και των κυμάτων που οφείλονται στην ταχύτητα του ρευστού. Όταν οι χαμηλές ταχύτητες ροής κυριαρχούν σε μια πολύ μικρή περιοχή του υπολογιστικού χωρίου (λ.χ κοντά στο σημείο ανακοπής μιας μεμονωμένης αεροτομής) ο χρόνος σύγκλισης δεν επηρεάζεται, ενώ η επίλυση των μη-προσταθεροποιημένων εξισώσεων Euler, όταν οι χαμηλές ταχύτητες ροής κυριαρχούν σε μεγάλη περιοχή του υπολογιστικού χωρίου, καθιστούν το υπολογιστικό κόστος απαγορευτικό.

Η αδυναμία των εξισώσεων συμπίεστης ροής να συγκλίνουν γρήγορα σε περιοχές όπου κυριαρχούν οι χαμηλές ταχύτητες μπορεί να αντιμετωπισθεί με δύο τρόπους. Είτε με την επίλυση των εξισώσεων που αφορούν ασυμπίεστη ροή, αν υπάρχει δυνατότητα, είτε με την προσταθεροποίηση των εξισώσεων συμπίεστης ροής ώστε να μειωθεί ο αυξημένος χρόνος σύγκλισης που προκαλείται λόγω της μεγάλης διαφοράς των μέτρων των ιδιοτιμών. Παρόλα αυτά, η μετάβαση σε επιλύτη εξισώσεων ασυμπίεστης ροής μπορεί να μην είναι δυνατή, όπως

συμβαίνει στις περιπτώσεις όπου η πυκνότητα μεταβάλλεται λόγω προσθήκης θερμότητας ή σε περιπτώσεις που η ροή επιταχύνεται απότομα. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι, ένα απότομα συγκλίνον ακροφύσιο, που οι ταχύτητες στην έξοδο είναι πολύ υψηλές και, συνεπώς, η ροή συμπεριφέρεται ως συμπιεστή, ενώ στην είσοδο, λόγω των χαμηλών ταχυτήτων που επικρατούν, η ροή θεωρείται πρακτικά ασυμπίεστη, [21], και σε προβλήματα καύσης, όπου γίνεται ανάμιξης καυσίμου με ακίνητο ρευστό στο θάλαμο καύσης, [22].

Οι μέθοδοι προσταθεροποίησης εισάγονται με σκοπό να ελέγξουν τις ιδιοτιμές των μόνιμων εξισώσεων και να μειώσουν τη μεγάλη διαφορά μεταξύ των ιδιοτιμών που οφείλονται στα ακουστικά κύματα και των ιδιοτιμών που οφείλονται στην ταχύτητα του ρευστού, που εμφανίζεται σε χαμηλούς αριθμούς Mach. Στη διατύπωση του Turkel, όπου θεωρείται η ροή ασυμπίεστη, γίνεται με την εισαγωγή μεταβλητών στον χρονικό όρο των τριών εξισώσεων με σκοπό να ελέγξουν τις ιδιοτιμές και, ταυτόχρονα, να ορίσουν ένα καλά ορισμένο Ιακωβιανό μητρώο (*well-conditioned*). Η μητρική γραφή των προσταθεροποιημένων εξισώσεων που προτείνει ο Turkel, [12], είναι:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha u}{\beta^2} & 1 & 0 \\ \frac{\alpha v}{\beta^2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix}_x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & v & 0 \\ 1 & 0 & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix}_y = \vec{0} \quad (3.1)$$

Οι ιδιοτιμές του πιο πάνω συστήματος (3.1) προκύπτουν ως:

$$\lambda_1 = \vec{v} \cdot \vec{n} \quad (3.2)$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \left\{ (1 - \alpha) \vec{v} \cdot \vec{n} \pm \sqrt{[(1 - \alpha) \vec{v} \cdot \vec{n}]^2 + 4\beta^2} \right\} \quad (3.3)$$

Παρατηρείται λοιπόν ότι, με τον κατάλληλο προσδιορισμό των μεταβλητών α και β , είναι δυνατό να ορισθούν οι ιδιοτιμές που αφορούν τις ταχύτητες διάδοσης των ακουστικών κυμάτων του συστήματος. Τελικά, η μεταβλητή β επιλέγεται ώστε, για δεδομένο α , να προκύπτει όσο το δυνατό μικρότερη διαφορά μεταξύ των ακουστικών κυμάτων. Έτσι, παραμένει ως ελεύθερη μεταβλητή μόνο η μεταβλητή α , ενώ ο προσδιορισμός της βέλτιστης τιμής της προκύπτει με δοκιμές σε κάθε πρόβλημα που επιλύεται.

Στην περίπτωση που η ροή θεωρείται συμπιεστή, το μητρώο προσταθεροποίησης εξαρτάται από το σύστημα των μεταβλητών που επιλύεται. Στην περίπτωση που επιλύεται το σύστημα ως προς τις μεταβλητές (p, u, v, S) , λόγω του ότι η εξίσωση της εντροπίας μπορεί να αποσυζευχθεί, το σύστημα μειώνεται σε σύστημα τριών εξισώσεων, και η εξίσωση της εντροπίας δεν προσταθεροποιείται. Στην περίπτωση που επιλύεται το σύστημα ως προς τις μεταβλητές (p, u, v, ρ) , η εξίσωση της εντροπίας δεν μπορεί να αποσυζευχθεί λόγω της

σχέσης μεταξύ της πυκνότητας και της πίεσης:

$$d\rho = \frac{1}{c^2} (dp - p dS) \quad (3.4)$$

που εισάγει ακόμη έναν όρο στη χρονική παράγωγο της εντροπίας και, συνεπώς, την ανάγκη επίλυσης συστήματος τεσσάρων εξισώσεων. Παρόλα αυτά, η επίλυση του συστήματος μεταβλητών (p, u, v, ρ) και η προσταθεροποίηση της επιπλέον εξίσωσης της πυκνότητας που εισάγεται, δίνει ένα μητρώο προσταθεροποίησης πιο απλής μορφής σε σχέση με το σύστημα που λαμβάνεται ως επιπλέον άγνωστος η εντροπία (S) .

3.2 Μέθοδοι Προσταθεροποίησης

Με αφετηρία τη μελέτη του Turkel, [12], αρκετοί ερευνητές (Van Leer, Choi, Eriksson, Lee, Roe) επιδίωξαν να σχεδιάσουν το βέλτιστο μητρώο προσταθεροποίησης και να λειτουργεί σ' όλο το εύρος αριθμών Mach, με αποτέλεσμα στη βιβλιογραφία να υπάρχουν πολλές προτάσεις ([24], [21], [22]).

Στόχος τους, ήταν η κατασκευή ενός μητρώου προσταθεροποίησης ώστε ο δείκτης κατάστασης (*Condition number*) του προκύπτοντος συστήματος να είναι όσο το δυνατό μικρότερος και, έτσι, η ελαχιστοποίηση της κατ' απόλυτη τιμή διαφοράς των μέτρων των ιδιοτιμών. Πέραν της επιτάχυνσης της σύγκλισης, η προσταθεροποίηση των εξισώσεων επέφερε επιπλέον θετικά αποτελέσματα. Το κυριότερο από αυτά είναι η αύξηση της ακρίβειας που προκαλούν κατά την επίλυση των διακριτοποιημένων εξισώσεων. Επιπρόσθετα, η ακρίβεια αυτή διατηρείται καθώς ο αριθμός Mach τείνει στο μηδέν ($M \rightarrow 0$), σε αντίθεση με τις μη-προσταθεροποιημένες εξισώσεις. Αυτό οφείλεται στην επίδραση της προσταθεροποίησης στον όρο της τεχνητής συνεκτικότητας (*artificial viscosity*), που εμφανίζεται κατά τη διακριτοποίηση των εξισώσεων λόγω του σφάλματος αποκοπής, [25].

Ένα από τα αρνητικά των μεθόδων προσταθεροποίησης είναι η ευαισθησία τους κοντά στα σημεία ανακοπής όταν ο αριθμός Mach τείνει στο μηδέν, που μπορεί να προκαλέσει αστάθειες στη σύγκλιση, [26]. Για τον λόγο αυτόν, ο κατάλληλος ορισμός του μητρώου προσταθεροποίησης επηρεάζει σημαντικά την απόδοσή του.

3.2.1 Κριτήρια Σχεδιασμού Μητρώων Προσταθεροποίησης

Για να είναι δυνατή η προσταθεροποίηση των εξισώσεων με σκοπό να προκύψει ένα ευσταθές σύστημα, πρέπει να ληφθούν υπόψη κάποια κριτήρια κατά το σχεδιασμό του μητρώου. Τα κριτήρια αυτά έχουν ως στόχο να ορίζουν διαφορετικές ιδιότητες, ενώ η ικανοποίηση όλων δεν είναι δυνατή, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να ορισθεί ένα βέλτιστο μητρώο, αλλά να εξαρτάται κάθε φορά από το πρόβλημα που επιλύεται, [25]. Τα σημαντικότερα κριτήρια είναι, [27]:

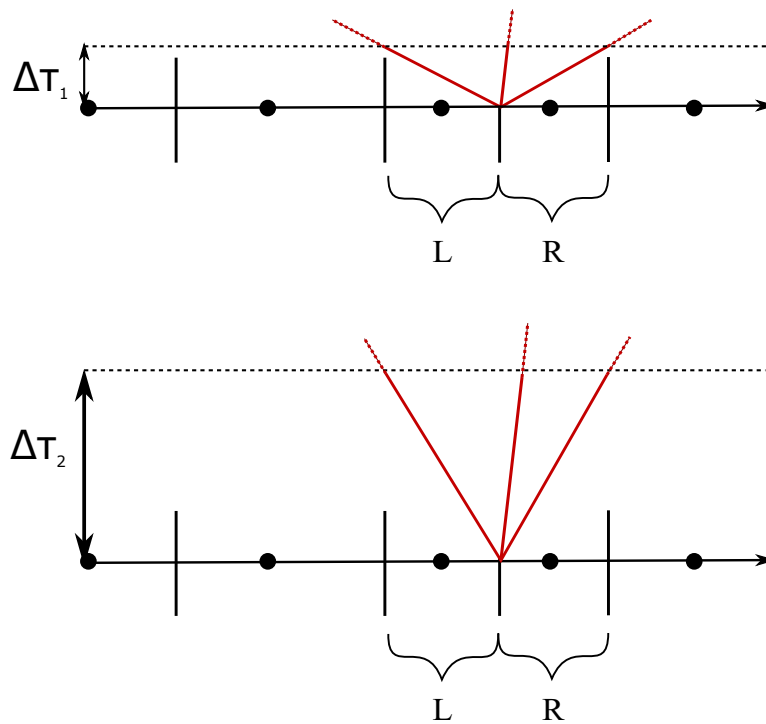
- 1) το μητρώο πρέπει να είναι θετικά ορισμένο ώστε να σέβεται τις οριακές συνθήκες,
- 2) ορθογωνιότητα ιδιοδιανυσμάτων, ώστε να επιτυγχάνεται ευστάθεια της επίλυσης,
- 3) έλεγχος των ιδιοτιμών του συστήματος σε όλο το εύρος αριθμών Mach, ώστε να επιταχύνεται η σύγκλιση,
- 4) διατήρηση της ακρίβειας και μείωση της ευαισθησίας από τη γωνία ροής για $M \rightarrow 0$

3.2.2 Προσταθεροποίηση σε 1D Πρόβλημα

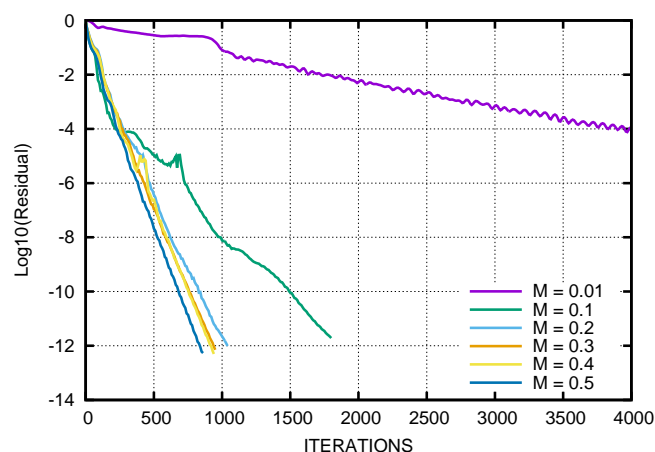
Η επίδραση της προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach στον τρόπο επιτάχυνσης της σύγκλισης μπορεί να γίνει αντιληπτή μέσω της σχηματικής απεικόνισης της προσέγγισης της λύσης του τοπικού προβλήματος Riemann κατά την επίλυση των μονοδιάστατων (1D) εξισώσεων Euler συμπιεστής ροής, με και χωρίς προσταθεροποίηση.

Το τοπικό ψευδοχρονικό βήμα υπολογίζεται έτσι ώστε να αποτρέπεται η διάδοση των κυμάτων εκτός της κυψέλης, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.1. Σε περίπτωση όπου η πληροφορία εξέρχεται της κυψέλης, το σύστημα θεωρείται πλέον ασταθές, αφού η κυψέλη δεν προλαβαίνει να παραλάβει την πληροφορία. Με την εφαρμογή προσταθεροποίησης στο σύστημα, η διαφορά των μέτρων των ιδιοτιμών, και άρα των κυμάτων μειώνεται, αφού η κλίση των κυμάτων είναι ανάλογη των ιδιοτιμών της κυψέλης. Συνεπώς, δίνεται η δυνατότητα αύξησης του βήματος των κυψελών στο ψευδοχρόνο, με αποτέλεσμα να απαιτούνται λιγότερα ενδιάμεσα βήματα για την επίλυση του χρονικά μόνιμου προβλήματος.

Στο σχήμα 3.2 παρουσιάζονται τα διαγράμματα σύγκλισης του λογισμικού επίλυσης σε μη-οριόδετα πλέγματα της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ, [9], πριν την εφαρμογή προσταθεροποίησης σε μεμονωμένη αεροτομή NACA 0012 για διάφορες τιμές M_∞ . Παρατηρείται ότι, όσο ο αριθμός M_∞ μειώνεται, η σύγκλιση καθυστερεί όλο και περισσότερο. Αυτό οφείλεται στο ότι, για μικρές τιμές M_∞ , εμφανίζεται μεγάλη διαφορά μεταξύ των ακουστικών κυμάτων και, έτσι, το ψευδοχρονικό βήμα λαμβάνει μικρότερες τιμές, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1: Προεγγιστική λύση του προβλήματος Riemann που επιλύεται σε κάθε πλευρά (L, R) κατά την επίλυση του συστήματος εξισώσεων Euler, με (πάνω σχήμα) και χωρίς (κάτω σχήμα) την εφαρμογή της προσταθεροποίησης. Τα κύματα που εμφανίζονται στο πρόβλημα Riemann έχουν κλίση σχετική με τις ιδιοτιμές του προβλήματος. Με την προσταθεροποίηση χαμηλών αριθμών Mach, η απόσταση μεταξύ των κυμάτων είναι μικρότερη το ψευδοχρονικό βήμα γίνεται μεγαλύτερο, χωρίς τα κύματα να εξέρχονται των κυψελών στις καταστάσεις (L, R).



Σχήμα 3.2: Διαγράμματα σύγκλισης της εξίσωσης συνέχειας ροής γύρω από μεμονωμένη αεροτομή NACA 0012 σε διαφορετικές τιμές Mach με γωνία της επ' άπειρο ροής $\alpha_\infty = 0$. Σε χαμηλές τιμές M_∞ οι απαιτούμενες επαναλήψεις αυξάνονται σημαντικά, ενώ σε τιμές $Mach < 0.1$ ο λογισμικό επίλυσης σε μη-οριόδετα πλέγματα, [9], αδυνατεί να συγχλίνει σε κάποια λύση με αποδεκτό υπόλοιπο.

Κεφάλαιο 4

Διαδικασία Προσταθεροποίησης Χαμηλών Αριθμών Mach

4.1 Προσταθεροποίηση Χαμηλών Αριθμών Mach των Μόνιμων Εξισώσεων Euler

Με την προσθήκη του μητρώου προσταθεροποίησης στη συντηρητική μορφή των εξισώσεων Euler (2.7), λαμβάνεται η προσταθεροποιημένη τους μορφή ως:

$$\mathbf{\Gamma}^{-1} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} = \vec{0} \quad (4.1)$$

όπου $\mathbf{\Gamma}$ το μητρώο προσταθεροποίησης.

Στο χρονικά μόνιμο πρόβλημα, που εξετάζεται εδώ, ο χρονικός όρος δεν υπάρχει, ενώ η προσταθεροποίηση εφαρμόζεται στον ψευδοχρονικό όρο, ώστε να επιταχυνθεί η σύγκλιση.

Στις μη-συντηρητικές μεταβλητές, ο ορισμός του μητρώου προσταθεροποίησης είναι πιο απλός και γι' αυτό η ανάλυση θα πραγματοποιηθεί στις σε αυτή τη γραφή. Η εξίσωση (4.1) μετασχηματίζεται στις μη-συντηρητικές μεταβλητές και έτσι προκύπτει:

$$\bar{\mathbf{\Gamma}}^{-1} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \tau} + \bar{\mathbf{A}}_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \bar{\mathbf{A}}_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = \vec{0} \quad (4.2)$$

όπου $\bar{\mathbf{\Gamma}}^{-1} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{M}$.

4.2 Προσταθεροποίηση των Μόνιμων Εξισώσεων Navier-Stokes

Η εφαρμογή της προσταθεροποίησης στις 2D μόνιμες εξισώσεις Navier-Stokes γίνεται όπως και στις εξισώσεις Euler. Η μόνη διαφορά είναι ότι το διάνυσμα συνεκτικών όρων θεωρείται πλέον ως ένας όρος πηγής ο οποίος δεν συμβάλλει στην ανάλυση της προσταθεροποίησης. Αυτό συνάδει με το ότι οι συνεκτικοί όροι δεν επηρεάζουν τις ιδιοτιμές του προβλήματος. Συνεπώς, οι προσταθεροποιημένες μόνιμες εξισώσεις Navier-Stokes λαμβάνουν τη μορφή:

$$\mathbf{\Gamma}^{-1} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} = \vec{0} \quad (4.3)$$

όπου το μητρώο $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ στις συντηρητικές μεταβλητές ορίζεται κατ' αναλογία με την περίπτωση των εξισώσεων Euler (4.10), ενώ μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως:

$$\mathbf{\Gamma}^{-1} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial \vec{f}_k^{inv}}{\partial x_k} = \frac{\partial \vec{f}_k^{vis}}{\partial x_k} \quad (4.4)$$

Για τον λόγο αυτό, στη συνέχεια παρουσιάζεται η μέθοδος προσταθεροποίησης των εξισώσεων Euler, ενώ η αναγωγή της μεθόδου στις εξισώσεις Navier-Stokes γίνεται βάση των πιο πάνω.

4.3 Επιλογή Μητρώου Προσταθεροποίησης

Το μητρώο προσταθεροποίησης που εφαρμόστηκε στην εργασία με σκοπό την προσταθεροποίηση των εξισώσεων Euler σε χαμηλούς αριθμούς Mach είναι η διατύπωση που προτείνει ο Eriksson, [22], [28], βασική ιδέα του οποίου ήταν ο καθορισμός του μητρώου προσταθεροποίησης έτσι ώστε να επιβάλλεται μείωση του ρυθμού μεταβολής της πίεσης κατά έναν παράγοντα α , δηλαδή βάσει της έκφρασης:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)^{new} = \alpha \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)^{old} \quad (4.5)$$

όπου α ο παράγοντας μείωσης της μεταβολής της πίεσης και πρέπει να είναι μικρότερος της μονάδας, ενώ η τιμή του ορίζεται στη συνέχεια.

Με την εφαρμογή της σχέσης (4.5) είναι απαραίτητη η διόρθωση του ρυθμού μεταβολής της

πυκνότητας έτσι ώστε να διατηρείται η εντροπία, δηλαδή:

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right)^{new} - \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right)^{old} = \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^{new} - \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^{old} \right] \quad (4.6)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right)^{new} = \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right)^{old} - \frac{1-\alpha}{c^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^{old} \quad (4.7)$$

$$\bar{\mathbf{\Gamma}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1-\alpha}{c^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{\Gamma}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1-\alpha}{\alpha c^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Οι εξισώσεις (4.5), (4.7) σε μητρώϊκή μορφή ορίζουν το μητρώο προσταθεροποίησης στην εξίσωση (4.8) για τις μη-συντηρητικές μεταβλητές, ενώ ταυτόχρονα παρατίθεται το αντίστροφο μητρώο για λόγους πληρότητας. Στις συντηρητικές μεταβλητές, το μητρώο προσταθεροποίησης $\mathbf{\Gamma}$, και ο αντίστροφός του, προκύπτουν μέσω του μητρώου μετασχηματισμού ως:

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{M} \bar{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{M}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma-1}{2} \vec{v}^2 \beta & -(\gamma-1)u \beta & -(\gamma-1)v \beta & (\gamma-1)\beta \\ \frac{\gamma-1}{2} \vec{v}^2 \beta u & 1 - (\gamma-1)u^2 \beta & -(\gamma-1)u v \beta & (\gamma-1)u \beta \\ \frac{\gamma-1}{2} \vec{v}^2 \beta v & -(\gamma-1)u v \beta & 1 - (\gamma-1)v^2 \beta & (\gamma-1)v \beta \\ \frac{|\vec{v}|^2}{2} [(\gamma-1)\delta - 1] & -u[(\gamma-1)\delta - 1] & -v[(\gamma-1)\delta - 1] & (\gamma-1)\delta \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{\Gamma}^{-1} = \mathbf{M} \bar{\mathbf{\Gamma}}^{-1} \mathbf{M}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\gamma-1}{2\alpha} \vec{v}^2 \beta & \frac{(\gamma-1)}{\alpha} u \beta & \frac{(\gamma-1)}{\alpha} v \beta & -\frac{(\gamma-1)}{\alpha} \beta \\ -\frac{\gamma-1}{2\alpha} \vec{v}^2 \beta u & 1 + \frac{(\gamma-1)}{\alpha} u^2 \beta & \frac{(\gamma-1)}{\alpha} u v \beta & -\frac{(\gamma-1)}{\alpha} u \beta \\ -\frac{\gamma-1}{2\alpha} \vec{v}^2 \beta v & \frac{(\gamma-1)}{\alpha} u v \beta & 1 + \frac{(\gamma-1)}{\alpha} v^2 \beta & -\frac{(\gamma-1)}{\alpha} v \beta \\ \frac{|\vec{v}|^2}{2} [(\gamma-1)\varepsilon - 1] & -u[(\gamma-1)\varepsilon - 1] & -v[(\gamma-1)\varepsilon - 1] & (\gamma-1)\varepsilon \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

όπου

$$\beta = \frac{\alpha - 1}{c^2} \quad (4.11)$$

$$\delta = \frac{|\vec{v}|^2}{2} \beta + \frac{\alpha}{\gamma - 1} \quad (4.12)$$

$$\varepsilon = \frac{|\vec{v}|^2}{2\alpha} \beta + \frac{1}{\alpha(\gamma - 1)} \quad (4.13)$$

Η εισαγωγή του μητρώου γίνεται με σκοπό τον έλεγχο των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων. Συνεπώς, εφαρμόζοντας ιδιοδιανυσματική ανάλυση στο προσταθεροποιημένο πλέον σύστημα εξισώσεων μπορούν να διαπιστωθούν οι αλλαγές που επιφέρει η προσταθεροποίηση.

4.3.1 Ιδιοδιανυσματική Ανάλυση στο Προσταθεροποιημένο Ιδιοπρόβλημα

Το μετασχηματισμένο, κατά την προσταθεροποίηση, ιδιοπρόβλημα προκύπτει μέσω της εξίσωσης (4.2), αφού πολλαπλασιαστεί με το μητρώο προσταθεροποίησης, ώστε να προκύψουν τα μετασχηματισμένα Ιακωβιανά μητρώα και, τελικά, η Ιακωβιανή ορίζουσα:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{-1} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \tau} + \bar{\mathbf{A}}_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \bar{\mathbf{A}}_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial \tau} + \bar{\Gamma} \bar{\mathbf{A}}_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \bar{\Gamma} \bar{\mathbf{A}}_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial \tau} + \bar{\mathbf{A}}_{\Gamma x} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \bar{\mathbf{A}}_{\Gamma y} \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (4.14)$$

ενώ η ιακωβιανή ορίζουσα υπολογίζεται ως $\bar{\mathbf{A}}_{\Gamma} = \bar{\mathbf{A}}_{\Gamma x} n_x + \bar{\mathbf{A}}_{\Gamma y} n_y$.

Διερεύνηση Ιδιοτιμών

Οι προσταθεροποιημένες ιδιοτιμές υπολογίζονται κατ' αναλογία με το υποκεφάλαιο (2.5.1) ως:

$$|\bar{\mathbf{A}}_{\Gamma} - \lambda_i \mathbf{I}| = 0 \quad (4.15)$$

και προκύπτουν ως:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \vec{u} \cdot \vec{n} \\
 \lambda_2 &= \vec{u} \cdot \vec{n} \\
 \lambda_3 &= \frac{1}{2} \left\{ (1 + \alpha) \vec{u} \cdot \vec{n} + \sqrt{[(1 - \alpha) \vec{u} \cdot \vec{n}]^2 + 4\alpha c^2 |\vec{n}|^2} \right\} \\
 \lambda_3 &= \frac{1}{2} \left\{ (1 + \alpha) \vec{u} \cdot \vec{n} - \sqrt{[(1 - \alpha) \vec{u} \cdot \vec{n}]^2 + 4\alpha c^2 |\vec{n}|^2} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Συγκρίνοντας τις προκύπτουσες ιδιοτιμές με αυτές των αρχικών εξισώσεων (2.37) παρατηρείται ότι οι ιδιοτιμές που αφορούν την ταχύτητα του ρευστού είναι ίδιες, ενώ οι ιδιοτιμές που αφορούν την ταχύτητα των ακουστικών κυμάτων διαφέρουν ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου α . Στην περίπτωση όπου η παράμετρος αυτή ορισθεί ίση με τη μονάδα ($\alpha = 1$), οι ιδιοτιμές επιστρέφουν στις αρχικές.

Για την προσταθεροποίηση των χαμηλών αριθμών Mach, η παράμετρος α επιλέγεται κατάλληλα, ώστε οι τέσσερις ιδιοτιμές να είναι της ίδιας τάξης. Έτσι, η παράμετρος α ορίζεται ανάλογη του τοπικού αριθμού Mach, και συγκεκριμένα ως,

$$\alpha = \frac{u^2 + v^2}{c^2} = M^2 \tag{4.17}$$

Επιπρόσθετα, για τη δυνατότητα επίλυσης υπερηχητικών ροών, όπου η προσταθεροποίηση δεν πρέπει να εφαρμόζεται, εισάγεται ένα κριτήριο το οποίο απενεργοποιεί το μητρώο προσταθεροποίησης στις υπερηχητικές περιοχές.

$$\alpha = \min(1, M^2) \tag{4.18}$$

Κατά συνέπεια, το μητρώο προσταθεροποίησης στις υπερηχητικές περιοχές είναι ανενεργό, στις περιοχές μεσαίων ταχυτήτων επιδρά ελάχιστα στις ιδιοτιμές και, τελικά, στις περιοχές χαμηλών ταχυτήτων, όπου η παράμετρος α λαμβάνει πολύ χαμηλές τιμές, ενεργοποιείται επιβραδύνοντας τις ταχύτητες των ακουστικών κυμάτων και επιταχύνοντας σημαντικά τη σύγκλιση. Το συμπέρασμα αυτό, γίνεται πιο ευκρινές αφού μελετηθεί και η επίδραση της προσταθεροποίησης στα ιδιοδιανύσματα του προσταθεροποιημένου συστήματος.

Διερεύνηση Ιδιοδιανυσμάτων

Ο υπολογισμός των προσταθεροποιημένων ιδιοδιανυσμάτων γίνεται στις μη-συντηρητικές μεταβλητές λόγω της πιο απλής μορφής του μητρώου $\bar{\mathbf{A}}$ (2.31) σε σχέση με το μητρώο \mathbf{A} στις συντηρητικές μεταβλητές (2.35) ώστε, στη συνέχεια, να μετασχηματιστούν στις συντηρητικές

μεταβλητές μέσω των μητρώων μετασχηματισμού (\mathbf{M} , \mathbf{M}^{-1}).

Επομένως, τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν μέσω των σχέσεων:

$$(\overline{\mathbf{A}}_{\Gamma} - \lambda_i \mathbf{I}) \vec{r}^{(i)} = \vec{0} \quad (4.19)$$

$$\vec{l}^{(i)T} (\overline{\mathbf{A}}_{\Gamma} - \lambda_i \mathbf{I}) = \vec{0} \quad (4.20)$$

Με τον υπολογισμό των δεξιών και αριστερών ιδιοδιανυσμάτων μπορούν πλέον να κατασκευαστούν τα μητρώα που διαγωνοποιούν το προσταθεροποιημένο μητρώο $\overline{\mathbf{A}}_{\Gamma}$ στις μη-συντηρητικές μεταβλητές μέσω της σχέσης:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{A}}_{\Gamma} &= \mathbf{L}_{\Gamma} \mathbf{\Lambda} \mathbf{L}_{\Gamma}^{-1} \\ \mathbf{\Lambda} &= \text{Diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \} \end{aligned} \quad (4.21)$$

όπου τα μητρώα \mathbf{L}_{Γ} , \mathbf{L}_{Γ}^{-1} τελικά υπολογίζονται ως:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\Gamma} &= \begin{bmatrix} \vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \vec{r}_3 & \vec{r}_4 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \mathbf{L}_{\Gamma} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\alpha \rho |\vec{n}|}{\lambda_3 - \lambda_4} & \frac{\alpha \rho |\vec{n}|}{\lambda_3 - \lambda_4} \\ 0 & \hat{n}_y & \frac{\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_4}{\lambda_3 - \lambda_4} \hat{n}_x & \frac{\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_4} \hat{n}_x \\ 0 & -\hat{n}_x & \frac{\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_4}{\lambda_3 - \lambda_4} \hat{n}_y & \frac{\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_4} \hat{n}_y \\ 0 & 0 & \frac{\alpha c^2 \rho |\vec{n}|}{\lambda_3 - \lambda_4} & \frac{\alpha c^2 \rho |\vec{n}|}{\lambda_3 - \lambda_4} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.22)$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\Gamma}^{-1} &= \begin{bmatrix} \vec{l}_1 & \vec{l}_2 & \vec{l}_3 & \vec{l}_4 \end{bmatrix}^T \\ \Leftrightarrow \mathbf{L}_{\Gamma}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & \hat{n}_y & -\hat{n}_x & 0 \\ 0 & \hat{n}_x & \hat{n}_y & -\frac{\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_3}{\alpha c^2 \rho |\vec{n}|} \\ 0 & -\hat{n}_x & -\hat{n}_y & \frac{\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_4}{\alpha c^2 \rho |\vec{n}|} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις μετασχηματισμού (2.44) μπορούν να προκύψουν τα μητρώα που διαγωνοποιούν το προσταθεροποιημένο μητρώο \mathbf{A}_{Γ} των συντηρητικών μεταβλητών μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{A}_{\Gamma} = \mathbf{P}_{\Gamma} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}_{\Gamma}^{-1} \quad (4.24)$$

με

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_\Gamma(:, 1) &= \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ \frac{|\vec{v}|^2}{2} \end{bmatrix} \\
\mathbf{P}_\Gamma(:, 2) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \varrho \hat{n}_y \\ -\varrho \hat{n}_x \\ \varrho(u \hat{n}_y - v \hat{n}_x) \end{bmatrix} \\
\mathbf{P}_\Gamma(:, 3) &= \begin{bmatrix} \frac{\alpha \varrho |\vec{n}|}{\lambda_3 - \lambda_4} \\ \frac{\alpha \varrho |\vec{n}|}{\lambda_3 - \lambda_4} v + \varrho \hat{n}_y \frac{\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_4}{\lambda_3 - \lambda_4} \\ \frac{\alpha \varrho |\vec{n}|}{\lambda_3 - \lambda_4} v + \varrho \hat{n}_y \frac{\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_4}{\lambda_3 - \lambda_4} \\ \varrho \vec{v} \cdot \vec{\hat{n}} \frac{\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_4}{\lambda_3 - \lambda_4} + \frac{\alpha \varrho |\vec{n}|}{\lambda_3 - \lambda_4} \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} \right) \end{bmatrix} \\
\mathbf{P}_\Gamma(:, 4) &= \begin{bmatrix} \frac{\alpha \varrho |\vec{n}|}{\lambda_3 - \lambda_4} u + \varrho \hat{n}_x \frac{\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_4} \\ \frac{\alpha \varrho |\vec{n}|}{\lambda_3 - \lambda_4} u + \varrho \hat{n}_x \frac{\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_4} \\ \frac{\alpha \varrho |\vec{n}|}{\lambda_3 - \lambda_4} v + \varrho \hat{n}_y \frac{\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_4} \\ \varrho \vec{v} \cdot \vec{\hat{n}} \frac{\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_4} + \frac{\alpha \varrho |\vec{n}|}{\lambda_3 - \lambda_4} \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} \right) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

και

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_\Gamma^{-1}(:, 1) &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{\gamma-1}{2c^2} |\vec{v}|^2 \\ \frac{1}{\rho} (-u\hat{n}_y + v\hat{n}_x) \\ -\frac{1}{\rho} \left\{ \vec{v} \cdot \vec{\hat{n}} + \frac{\gamma-1}{2} \frac{\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_3}{\alpha c^2 |\vec{n}|} |\vec{v}|^2 \right\} \\ \frac{1}{\rho} \left\{ \vec{v} \cdot \vec{\hat{n}} + \frac{\gamma-1}{2} \frac{\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_4}{\alpha c^2 |\vec{n}|} |\vec{v}|^2 \right\} \end{bmatrix} \\
\mathbf{P}_\Gamma^{-1}(:, 2) &= \begin{bmatrix} \frac{\gamma-1}{c^2} u \\ \frac{\hat{n}_y}{\rho} \\ \frac{1}{\rho} \left\{ \hat{n}_x + \frac{\gamma-1}{\alpha c^2 \rho |\vec{n}|} (\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_3) u \right\} \\ -\frac{1}{\rho} \left\{ \hat{n}_x + \frac{\gamma-1}{\alpha c^2 \rho |\vec{n}|} (\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_4) u \right\} \end{bmatrix} \\
\mathbf{P}_\Gamma^{-1}(:, 3) &= \begin{bmatrix} \frac{\gamma-1}{c^2} v \\ -\frac{\hat{n}_x}{\rho} \\ \frac{1}{\rho} \left\{ \hat{n}_y + \frac{\gamma-1}{\alpha c^2 \rho |\vec{n}|} (\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_3) v \right\} \\ -\frac{1}{\rho} \left\{ \hat{n}_y + \frac{\gamma-1}{\alpha c^2 \rho |\vec{n}|} (\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_4) v \right\} \end{bmatrix} \\
\mathbf{P}_\Gamma^{-1}(:, 4) &= \begin{bmatrix} -\frac{\gamma-1}{c^2} \\ 0 \\ -\frac{\gamma-1}{\alpha c^2 \rho |\vec{n}|} (\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_3) \\ \frac{\gamma-1}{\alpha c^2 \rho |\vec{n}|} (\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_4) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Συγκρίνοντας τα μητρώα \mathbf{P}_Γ , \mathbf{P}_Γ^{-1} με τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα που προκύπτουν στο μη-προσταθεροποιημένο σύστημα (2.42), (2.43) διαπιστώνεται ότι, θέτοντας $\alpha = 1$ και επαναυπολογίζοντας τις ιδιοτιμές μέσω της σχέσης (4.16), αυτά προκύπτουν ίδια. Συνεπώς, στην περίπτωση όπου μελετάται υπερηχητική ροή (4.18), το μητρώο προσταθεροποίησης (4.8)/(4.9) μετατρέπεται σε μοναδιαίο μητρώο (\mathbf{I}) καθιστώντας την προσταθεροποίηση ανενεργή, το οποίο επαληθεύει το συμπέρασμα που προέκυψε από την διερεύνηση των ιδιοτιμών.

4.4 Εισαγωγή Μητρώου Προσταθεροποίησης στην Αριθμητική Μέθοδο Επίλυσης

Η ένταξη του μητρώου προσταθεροποίησης στις διακριτοποιημένες εξισώσεις Euler, γίνεται με την τροποποίηση μερικών μεγεθών που υπολογίζονται στο κεφάλαιο (2), ώστε να ληφθεί υπόψη η προσταθεροποίηση στο αριθμητικό σχήμα επίλυσης. Επιγραμματικά οι τροποποιήσεις είναι:

- ⇒ Πολλαπλασιασμός του ψευδοχρονικού όρου με το μητρώο προσταθεροποίησης.
- ⇒ Τροποποίηση του σχήματος Roe.
- ⇒ Τροποποίηση του τοπικού ψευδοχρονικού βήματος.

4.4.1 Τροποποίηση του Ψευδοχρονικού Όρου

Ο ψευδοχρόνος που εισάγεται επιδρά στον υπολογισμό των διαγώνιων μητρώων μέσω της εξίσωσης (2.78). Η εξίσωση υπολογισμού του μητρώου των διαγώνιων όρων τροποποιείται και μετατρέπεται σε:

$$[D]_P^n \triangleq \frac{\partial \vec{R}_P}{\partial \vec{U}_P^{n+1}} = \sum_{Q \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} \left(\mathbf{A}_P + \left| \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_{PQ}} \right| \right) \Delta s_{PQ} + \frac{3\Omega_P}{2\Delta t} \mathbf{I}_{4 \times 4} + \mathbf{\Gamma}_P^{-1} \frac{\Omega_P}{\Delta \tau} \mathbf{I}_{4 \times 4} \quad (4.27)$$

Δηλαδή, η επίδραση της προσταθεροποίησης προστίθεται μέσω του ψευδοχρονικού όρου σε όλους τους όρους του διαγώνιου μητρώου.

4.4.2 Τροποποίηση του Σχήματος Roe

Η τροποποίηση στο σχήμα Roe επιδρά και στο δεξί και στο αριστερό μέλος του αριθμητικού σχήματος επίλυσης και γίνεται με σκοπό να αυξηθεί το εύρος ευστάθειας και, συνεπώς, η δυνατότητα αύξησης του ψευδοχρονικού βήματος, [24]. Η τροποποίηση αφορά το δεύτερο τμήμα του σχήματος Roe (εξίσωση (2.46)) και συγκεκριμένα το μητρώο τεχνητής

συνεκτικότητας $|\tilde{\mathbf{A}}_{PQ}|$. Ειδικότερα, γίνεται η ακόλουθη παραδοχή:

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathbf{A}}_{PQ}| \Delta \vec{U}_{PQ} &= |\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{PQ}^{-1} \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{PQ} \tilde{\mathbf{A}}_{PQ}| \Delta \vec{U}_{PQ} \\ &\simeq \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{PQ}^{-1} |\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{PQ} \tilde{\mathbf{A}}_{PQ}| \Delta \vec{U}_{PQ} \\ &\simeq \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{PQ}^{-1} |\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_{PQ}}| \Delta \vec{U}_{PQ} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Έτσι, το νέο διάνυσμα πυκνότητας ροής που προκύπτει ορίζεται ως:

$$\vec{\Phi}_{PQ}^{inv} = \frac{1}{2} \left(\vec{\Phi}_{PQ}^L + \vec{\Phi}_{PQ}^R \right) - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{PQ}^{-1} |\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_{PQ}}| \left(\vec{U}_{PQ}^R - \vec{U}_{PQ}^L \right) \quad (4.29)$$

ενώ ο υπολογισμός του μητρώου $|\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_{PQ}}|$ γίνεται με τα μητρώα ιδιοδιανυσμάτων που υπολογίστηκαν στην προηγούμενη ενότητα (4.25), (4.26) στις κατά Roe μέσες τιμές και άρα,

$$|\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_{PQ}}| = \tilde{\mathbf{P}}_{\Gamma_{PQ}} |\mathbf{\Lambda}| \tilde{\mathbf{P}}_{\Gamma_{PQ}}^{-1} \quad (4.30)$$

4.4.3 Τροποποίηση του Τοπικού Ψευδοχρονικού Βήματος

Σε χαμηλούς αριθμούς Mach η μέθοδος προσταθεροποίησης, που είναι απαραίτητη, άρα και πιο ενεργή, εξασφαλίζει ότι οι ακουστικές ταχύτητες και η ταχύτητα του ρευστού είναι της ίδιας τάξης. Έτσι, η τιμή του ψευδοχρονικού βήματος πρέπει να μεταβληθεί κατάλληλα ώστε οι κυψέλες να «προλαβαίνουν» να λαμβάνουν την πληροφορία. Στον ορισμό του ψευδοχρονικού βήματος, ως παρονομαστής θεωρείται η μέγιστη κατ' απόλυτο τιμή ιδιοτιμή του συστήματος που επιλύεται,

$$\Delta \tau_P = CFL \frac{\Omega_P}{(|u_i^P| + c^P) S_i^P} \quad (4.31)$$

άρα, με την εφαρμογή της προσταθεροποίησης, και λαμβάνοντας τη μέγιστη κατ' απόλυτο τιμή ιδιοτιμή (4.16) το ψευδοχρονικό βήμα τροποποιείται ως εξής:

$$\Delta \tau_P = CFL \frac{\Omega_P}{\frac{1}{2} \left\{ (1 + \alpha) \vec{u} \cdot \vec{n} + \sqrt{[(1 - \alpha) \vec{u} \cdot \vec{n}]^2 + 4\alpha c^2 |\vec{n}|^2} \right\} S_i^P} \quad (4.32)$$

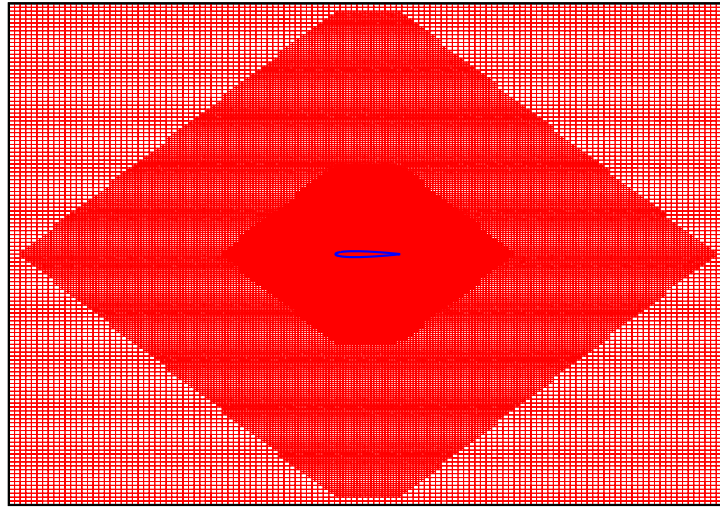
Κεφάλαιο 5

Διερεύνηση Προσταθεροποίησης σε Χρονικά Μόνιμες και Μη-Μόνιμες Ροές

5.1 Εισαγωγικά Σχόλια

Στην ενότητα αυτή, αρχικά γίνεται εφαρμογή της μεθόδου προσταθεροποίησης στον επιλύτη των χρονικά μόνιμων εξισώσεων Euler σε μεμονωμένη αεροτομή NACA 0012 σε δυο περιπτώσεις. Η πρώτη περίπτωση αφορά μηδενική γωνία της επ' άπειρο ροής ($a_\infty = 0$) για διάφορες τιμές M_∞ , ενώ η δεύτερη περίπτωση αφορά μη-μηδενική γωνία ($a_\infty = 2^\circ$) για $M_\infty = 0.1$. Ακολούθως, μελετάται η περίπτωση μόνιμης ροής γύρω από αεροτομή με flap και, τέλος, η περίπτωση χρονικά μη-μόνιμης ροής σε μεμονωμένη αεροτομή NACA 0012, όπου η γωνία της επ' άπειρο ροής μεταβάλλεται περιοδικά.

Η σύγκριση των διαγραμμάτων σύγκλισης γίνεται με βάση τον αριθμό επαναλήψεων που απαιτούνται για την επίτευξη της σύγκλισης, έστω και αν το κόστος κάθε επανάληψης, στην περίπτωση που εφαρμόζεται προσταθεροποίηση, είναι ελάχιστα ακριβότερο.



Σχήμα 5.1: Το υπολογιστικό χωρίο που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση των εξισώσεων Euler για το χρονικό μόνιμο πρόβλημα. Το ελάχιστο εμβαδόν των κυψελών, ώστε η λύση να είναι ανεξάρτητη του πλέγματος, προέκυψε ως $V_{min} = 1 \times 10^{-4}$, οι συνολικές κυψέλες 55.000, ενώ το υπολογιστικό χωρίο έχει διαστάσεις 14×14 για μοναδιαία χορδή.

Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με την περίπτωση όπου δεν χρησιμοποιείται προσταθεροποίηση και παρουσιάζονται τα διαγράμματα σύγκλισης των εξισώσεων Euler. Στις περιπτώσεις όπου οι ταχύτητες του πεδίου είναι αρκετά χαμηλές, και είναι μεγαλύτερο το ενδιαφέρον σύγκρισης, παρατίθενται επίσης τα πεδία τιμών Mach και πίεσης, ώστε να μπορούν να συγκριθούν τα πεδία μεταξύ τους καθώς και η κατανομή του συντελεστή πίεσης στην επιφάνεια της αεροτομής.

Για τον υπολογισμό του συντελεστή πίεσης, χρησιμοποιούνται οι χωρικές παραγωγές που υπολογίζονται κατά την εφαρμογή της χωρικής διακριτοποίησης 2ης τάξης, 2.5.1, ώστε να προεκβληθούν οι πιέσεις στα σημεία της αεροτομής. Έπειτα, ο συντελεστής πίεσης υπολογίζεται βάσει της σχέσης:

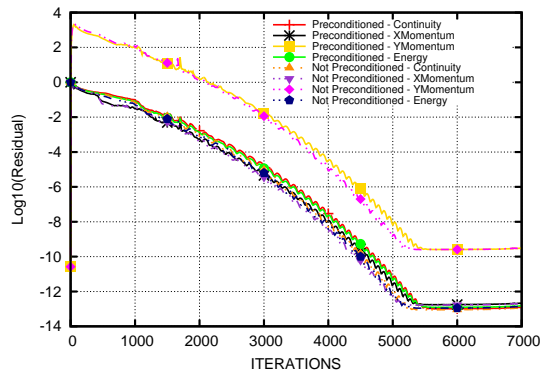
$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} \quad (5.1)$$

Στην περίπτωση της χρονικά μη-μόνιμης ροής, παρουσιάζονται και σχολιάζονται τα διαγράμματα $(C_L - a_\infty)$ και $(C_L - t)$.

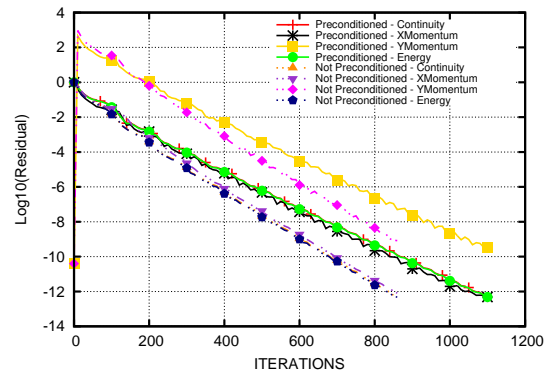
5.2 Διερεύνηση Προσταθεροποίησης σε Χρονικά Μόνιμη Ροή

(Α') Περιπτώσεις $M_\infty=0.8$, $a_\infty=0^\circ$ και $M_\infty=0.5$, $a_\infty=0^\circ$

Για τις δύο πρώτες περιπτώσεις που παρουσιάζονται, επιλέγονται μεγάλες ταχύτητες ροής (με την πρώτη να είναι διχηητική), ώστε να δειχθεί η μικρή επίδραση της προσταθεροποίησης σ' αυτές τις ταχύτητες.



(α') $M_\infty=0.8$



(β') $M_\infty=0.5$

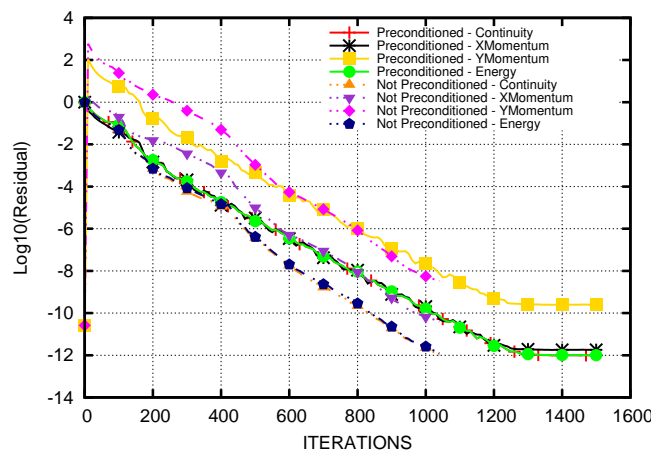
Σχήμα 5.2: NACA 0012, $a_\infty=0^\circ$: Διαγράμματα σύγκλισης των τεσσάρων ΜΔΕ με και χωρίς την εφαρμογή προσταθεροποίησης. Στην περίπτωση που εφαρμόζεται προσταθεροποίηση χαμηλών αριθμών Mach, σε αυτές τις ταχύτητες, η σύγκλιση είναι της ίδιας τάξης.

Στα σχήματα, 5.2α', 5.2β', παρατηρείται ότι σε υψηλές ταχύτητες ροής η προσταθεροποίηση δεν επηρεάζει ιδιαίτερα τη σύγκλιση, αφού αυτή παρουσιάζει παρόμοια συμπεριφορά και στις δύο περιπτώσεις. Σχετικά με το σχήμα 5.2α', οι αυξημένες επαναλήψεις οφείλονται στο γεγονός ότι η ροή είναι διχηητική, ενώ όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1 δεν έχει εφαρμοστεί επιπλέον πύκνωση στις περιοχές που εμφανίζεται το κύμα κρούσης. Σε περιπτώσεις υπερηχητικής ροής, όπως έχει ήδη αναφερθεί, η προσταθεροποίηση απενεργοποιείται εντελώς.

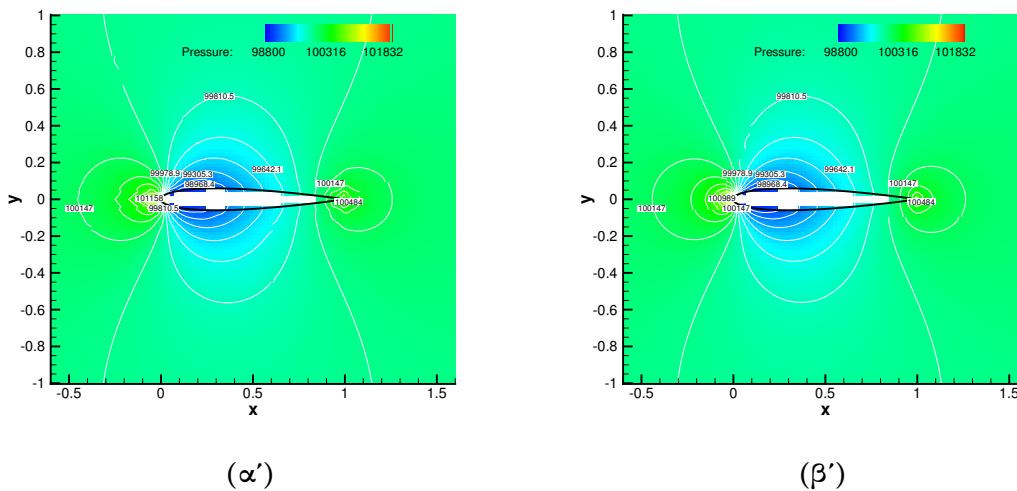
(B') Περίπτωση $M_\infty=0.2, a_\infty=0^\circ$

Στην πρώτη περίπτωση χαμηλών ταχυτήτων ροής που παρουσιάζεται, επιλέγεται η τιμή του αριθμού Mach στα επ' άπειρο όρια ίση με 0.2. Η ροή σε αυτές τις ταχύτητες μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστη, αφού οι μεταβολές του πεδίου της πυκνότητας είναι της τάξης του 1%.

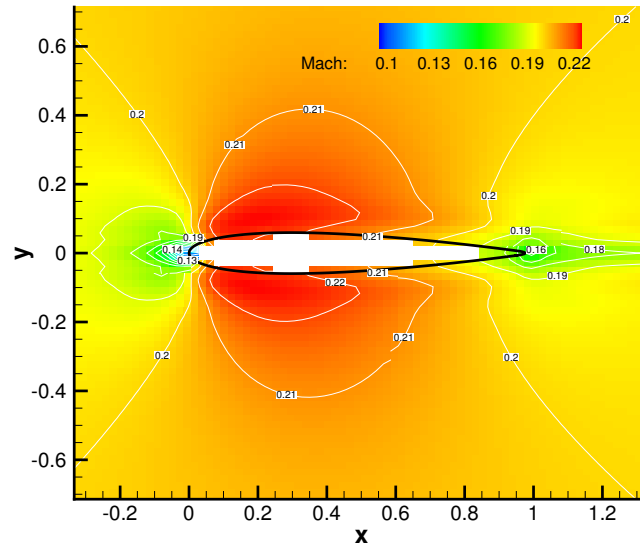
Συγκρίνοντας τα διαγράμματα σύγκλισης του συστήματος εξισώσεων Euler του σχήματος 5.3, παρατηρείται ότι η σύγκλιση έχει παρόμοια συμπεριφορά με την περίπτωση μεγαλύτερων ταχυτήτων ροής.



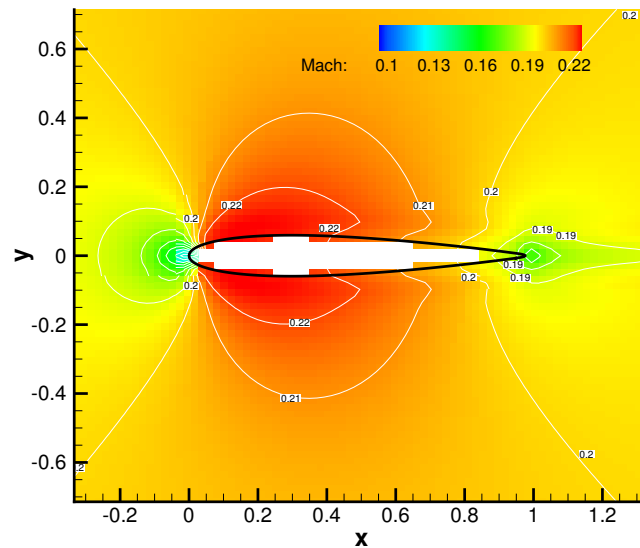
Σχήμα 5.3: NACA 0012, $M_\infty=0.2, a_\infty=0^\circ$: Διαγράμματα σύγκλισης των τεσσάρων ΜΔΕ με και χωρίς την εφαρμογή προσταθεροποίησης.



Σχήμα 5.4: NACA 0012, $M_\infty=0.2, a_\infty=0^\circ$: Πεδία πίεσης (α') χωρίς και (β') με την εφαρμογή προσταθεροποίησης.

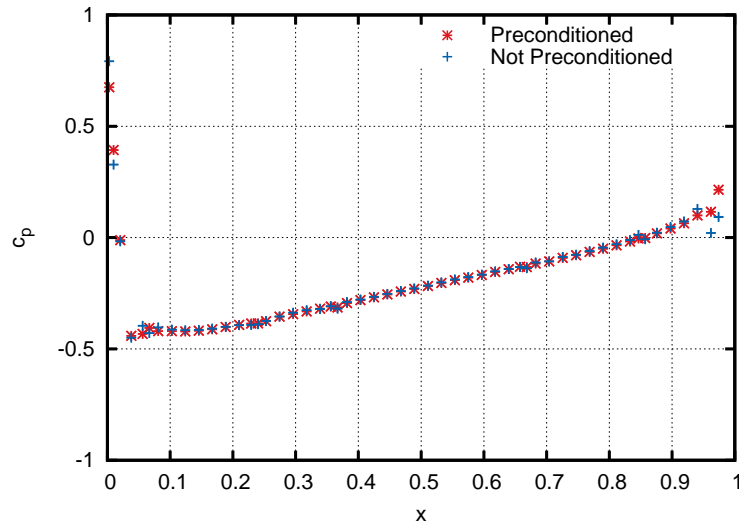


(α')



(β')

Σχήμα 5.5: NACA 0012, $M_\infty = 0.2$, $a_\infty = 0^\circ$: Πεδία αριθμού Mach (α') χωρίς και (β') με την εφαρμογή προσταθεροποίησης.



Σχήμα 5.6: NACA 0012, $M_\infty = 0.2$, $\alpha_\infty = 0^\circ$: Κατανομή συντελεστή πίεσης στην επιφάνεια της αεροτομής με και χωρίς την εφαρμογή προσταθεροποίησης. Στην περίπτωση που εφαρμόζεται η προσταθεροποίηση, οι υπερακοντίσεις κοντά στα σημεία ανακοπής της αεροτομής δεν παρατηρούνται. Λόγω του ότι η αεροτομή που μελετάται είναι συμμετρική και η διεύθυνση της ροής κατά μήκος της χορδής της αεροτομής, οι κατανομές του συντελεστή πίεσης στην πλευρά υποπίεσης και υπερπίεσης συμπίπτουν και, έτσι, ο συντελεστής άνωσης προκύπτει μηδενικός.

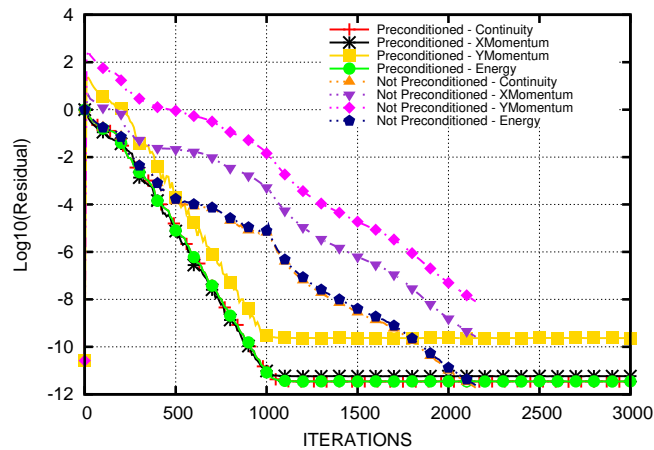
Παρατηρώντας τα παραπάνω πεδία (Mach και πίεσης), χωρίς και με την εφαρμογή προσταθεροποίησης (σχήματα 5.5, 5.4), διαπιστώνεται ότι, στην περίπτωση που εφαρμόζεται προσταθεροποίηση, οι ισογραμμές αριθμού Mach προκύπτουν πιο ομαλές, σε αντίθεση με την περίπτωση που δεν εφαρμόζεται προσταθεροποίηση. Αυτό γίνεται αντιληπτό και στην κατανομή του συντελεστή πίεσης, στο σχήμα 5.6 όπου, όταν δεν εφαρμόζεται προσταθεροποίηση, παρατηρούνται υπερακοντίσεις στην πίεση κατά το μήκος της αεροτομής, και κυρίως στα δύο σημεία ανακοπής μπροστά και πίσω.

Πίνακας 5.1: Ενδεικτικές τιμές ροικών μεγεθών για NACA 0012, $M_\infty=0.2$, $\alpha_\infty=0^\circ$.

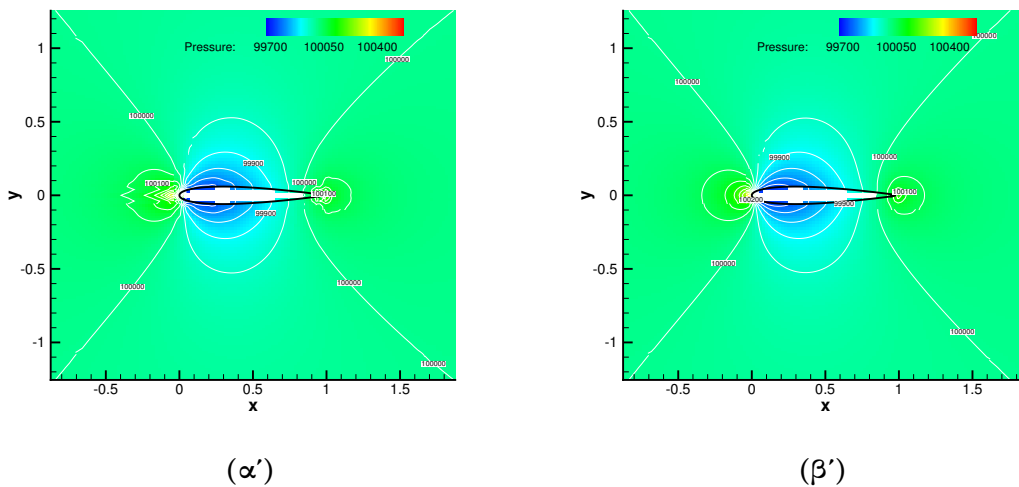
Μεγέθη	Με Προσταθεροποίηση	Χωρίς Προσταθεροποίηση
Μέγιστη τιμή πίεσης [Pa]	101915	102207
$C_p (x=0^+)$	0.675	0.792
Μέγιστη τιμή Mach	0.2320	0.2304
C_L	1.6×10^{-4}	1.1×10^{-4}

(Γ') Περίπτωση $M_\infty = 0.1$, $a_\infty = 0^\circ$

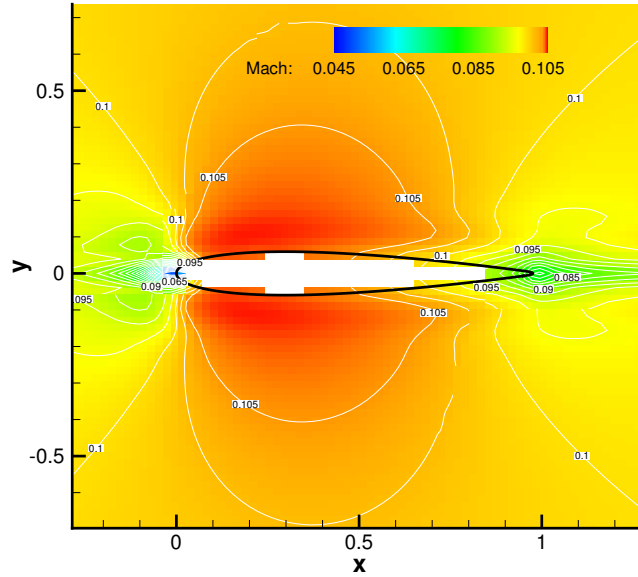
Στη δεύτερη περίπτωση χαμηλών ταχυτήτων ροής που παρουσιάζεται, επιλέγεται $M_\infty = 0.1$ και έχει ως στόχο να δείξει την επιτάχυνση της σύγκλισης σε χαμηλές τιμές του αριθμού Mach που επιφέρει η εφαρμογή της προσταθεροποίησης. Στο σχήμα 5.7 παρουσιάζονται τα διαγράμματα σύγκλισης των συντηρητικών μεταβλητών του συστήματος εξισώσεων Euler.



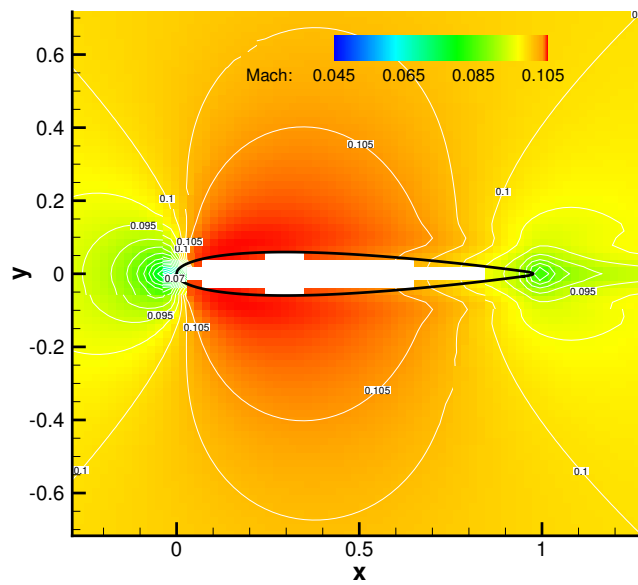
Σχήμα 5.7: NACA 0012, $M_\infty = 0.1$, $a_\infty = 0^\circ$: Διαγράμματα σύγκλισης των τεσσάρων ΜΔΕ με και χωρίς την εφαρμογή προσταθεροποίησης.



Σχήμα 5.8: NACA 0012, $M_\infty = 0.1$, $a_\infty = 0^\circ$: Πεδία πίεσης (α') χωρίς και (β') με την εφαρμογή προσταθεροποίησης.



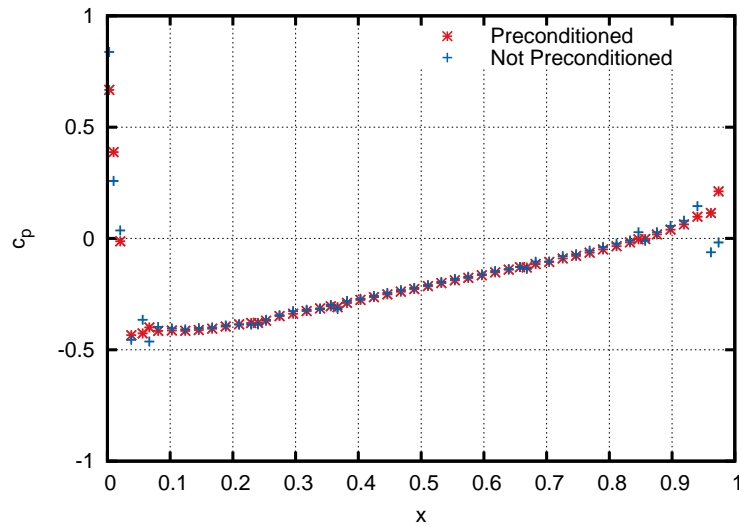
(α')



(β')

Σχήμα 5.9: NACA 0012, $M_\infty = 0.1$, $\alpha_\infty = 0^\circ$: Πεδία αριθμού Mach (α') χωρίς και (β') με την εφαρμογή προσταθεροποίησης.

Στο σχήμα 5.7 παρατηρείται ότι, στην περίπτωση που εφαρμόζεται η προσταθεροποίηση, το σύστημα συγκλίνει στις 1000 επαναλήψεις, μειώνοντας το σφάλμα κατά 11 τάξεις, ενώ στην περίπτωση που δεν εφαρμόζεται προσταθεροποίηση, το σφάλμα μειώνεται κατά 5 τάξεις μόνο. Συνεπώς, η εφαρμογή της προσταθεροποίησης επιτάχυνε τη σύγκλιση περίπου δυο φορές στη συγκεκριμένη πρόλεξη.



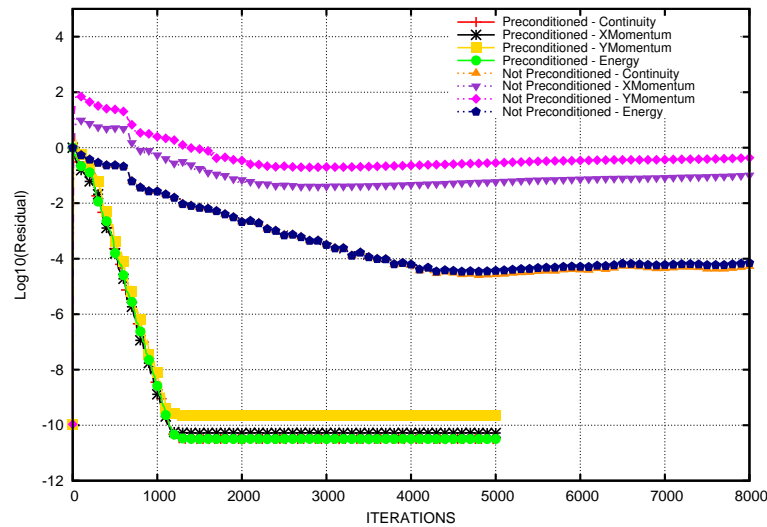
Σχήμα 5.10: NACA 0012, $M_\infty = 0.1$, $\alpha_\infty = 0^\circ$: Κατανομή συντελεστή πίεσης στην επιφάνεια της αεροτομής με και χωρίς την εφαρμογή προσταθεροποίησης.

Πίνακας 5.2: Ενδεικτικές τιμές ροικών μεγεθών για NACA 0012, $M_\infty=0.1$, $\alpha_\infty=0^\circ$.

Μεγέθη	Με Προσταθεροποίηση	Χωρίς Προσταθεροποίηση
Μέγιστη τιμή πίεσης [Pa]	100473	100585
$C_p (x=0^+)$	0.66	0.83
Μέγιστη τιμή Mach	0.1153	0.1141
C_L	1.1×10^{-4}	1.17×10^{-4}

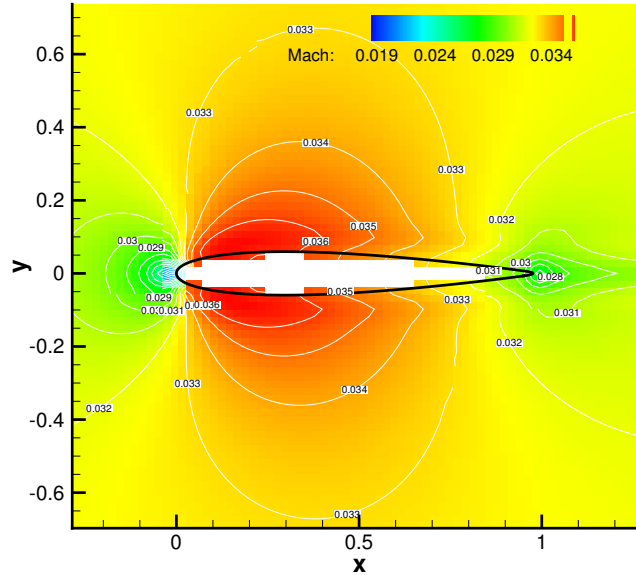
(Δ') Περίπτωση $M_\infty=0.03$, $a_\infty=0$

Για την τρίτη περίπτωση πολύ χαμηλών ταχυτήτων ροής, επιλέγεται $M_\infty = 0.03$ ώστε να δειχθεί η διατήρηση της ακρίβειας του επιλύτη, καθώς ο αριθμός Mach τείνει στο μηδέν. Στο διάγραμμα σύγκλισης των εξισώσεων (σχήμα 5.11) παρατηρείται η αδυναμία του μη-προσταθεροποιημένου επιλύτη να συγκλίνει σε ένα αποδεκτό υπόλοιπο ενώ, αντιθέτως, η εφαρμογή προσταθεροποίησης μειώνει το υπόλοιπο κατά 10 τάξεις σε περίπου 1300 επαναλήψεις.

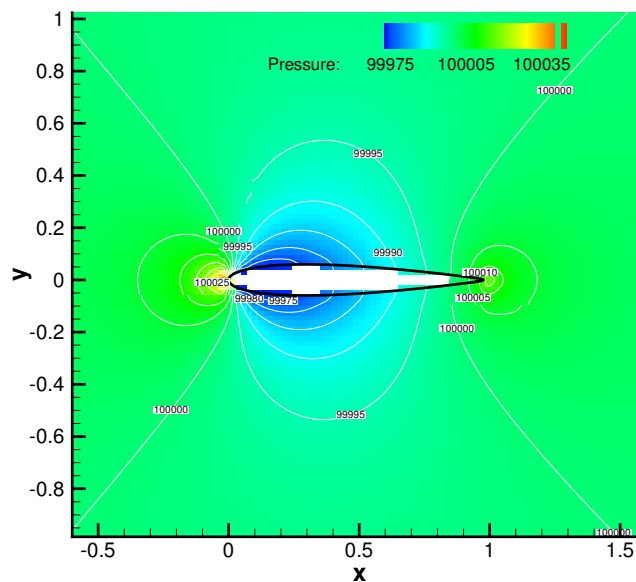


Σχήμα 5.11: NACA 0012, $M_\infty = 0.03$, $a_\infty = 0^\circ$: Διαγράμματα σύγκλισης των τεσσάρων ΜΔΕ με και χωρίς την εφαρμογή προσταθεροποίησης. Η σύγκλιση των εξισώσεων χωρίς την εφαρμογή προσταθεροποίησης θεωρείται μη-αποδεκτή λόγω του μεγάλου υπόλοιπου που παραμένει χωρίς, όπως φαίνεται, να υπάρχει προοπτική να μειωθεί ακόμη περισσότερο.

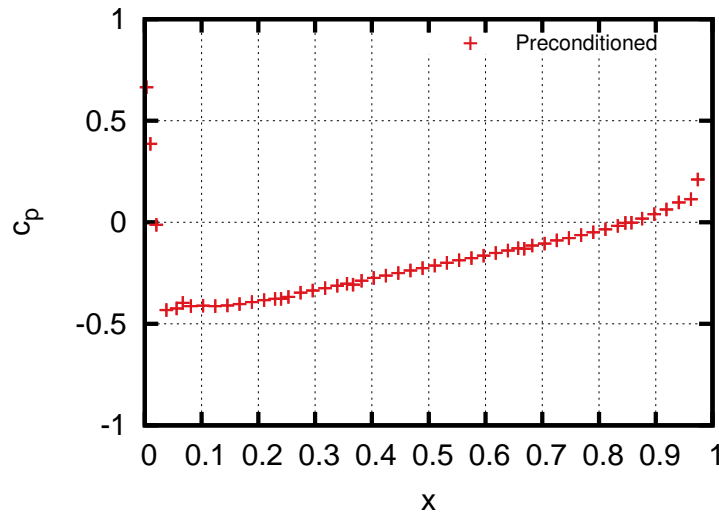
Συγκρίνοντας το διάγραμμα σύγκλισης για $M_\infty = 0.03$ (σχήμα 5.11) με αυτό για $M_\infty = 0.1$ (σχήμα 5.7) παρατηρείται ότι το τελικό υπόλοιπο είναι ελάχιστα μεγαλύτερο (-11.5 στην περίπτωση που $M_\infty = 0.1$ και -10.5 στην περίπτωση που $M_\infty = 0.03$). Μειώνοντας περαιτέρω την τιμή M_∞ το τελικό υπόλοιπο αυξάνεται. Η μείωση της τελικής ακρίβειας των προλέξεων οφείλεται κυρίως σε πράξεις και στη στρογγυλοποίηση υπολογιστή (*Roundoff Error*), λόγω του ότι η κινητική ενέργεια είναι πολύ πιο μικρή από την εσωτερική ενέργεια και κατά τον υπολογισμό των διανυσμάτων ατρίβους ροής ($\vec{f}(2)$ και $\vec{g}(3)$) να εισάγεται αυτό το σφάλμα, [24].



Σχήμα 5.12: NACA 0012, $M_\infty = 0.03$, $\alpha_\infty = 0^\circ$: Πεδίο αριθμού Mach με την εφαρμογή προσταθεροποίησης.



Σχήμα 5.13: NACA 0012, $M_\infty = 0.03$, $\alpha_\infty = 0^\circ$: Πεδίο πίεσης με την εφαρμογή προσταθεροποίησης. Επειδή οι ταχύτητες της ροής είναι πολύ χαμηλές παρατηρείται ότι οι μεταβολές στην πίεση είναι πάρα πολύ μικρές, συγκεκριμένα της τάξης των $25Pa$.



Σχήμα 5.14: NACA 0012, $M_\infty = 0.03$, $\alpha_\infty = 0^\circ$: Κατανομή συντελεστή πίεσης στην επιφάνεια της αεροτομής με την εφαρμογή προσταθεροποίησης.

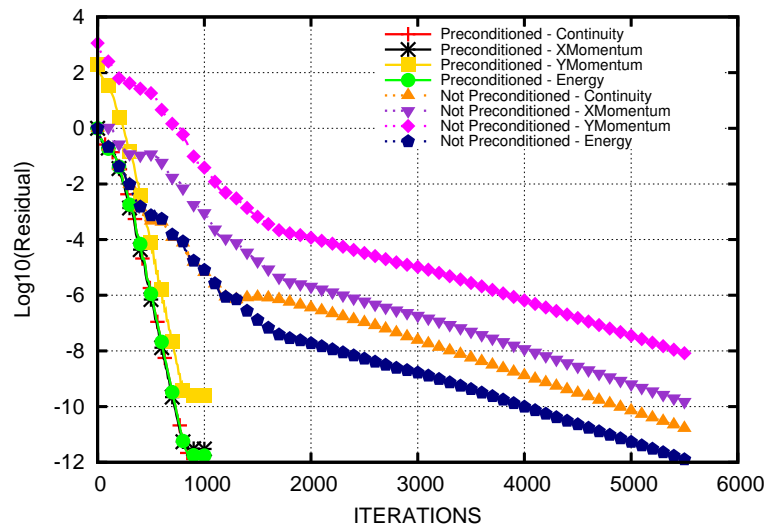
Πίνακας 5.3: Ενδεικτικές τιμές ροικών μεγεθών για NACA 0012, $M_\infty=0.03$, $\alpha_\infty=0^\circ$.

Μεγέθη	Με Προσταθεροποίηση	Χωρίς Προσταθεροποίηση
Μέγιστη τιμή πίεσης [Pa]	100049	Μη-αποδεκτή σύγκλιση
Ελάχιστη τιμή πίεσης [Pa]	99969	Μη-αποδεκτή σύγκλιση
$C_p(x=0^+)$	0.66	Μη-αποδεκτή σύγκλιση
Μέγιστη τιμή Mach	0.0371	Μη-αποδεκτή σύγκλιση
C_L	1.1×10^{-4}	Μη-αποδεκτή σύγκλιση

(Ε') Περίπτωση $M_\infty=0.1$, $\alpha_\infty=2^\circ$

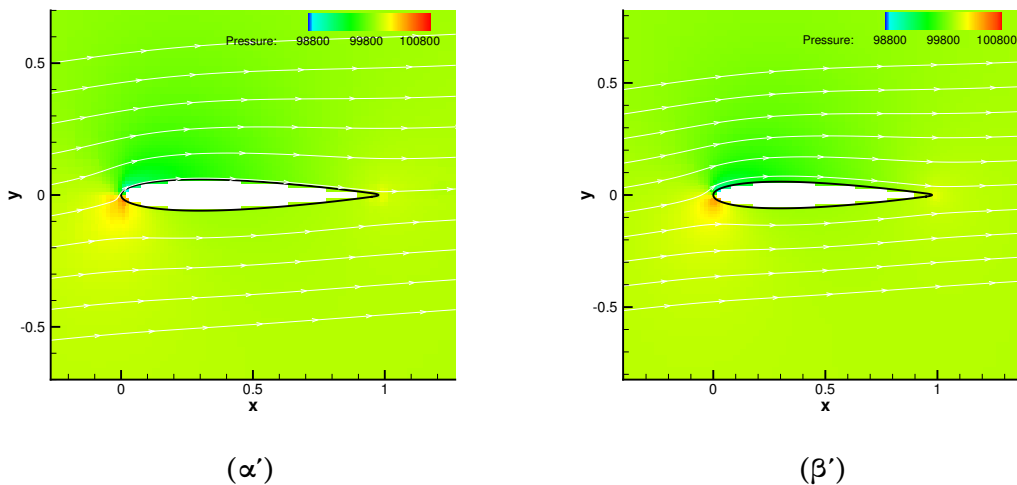
Για να διερευνηθεί η εφαρμογή προσταθεροποίησης σε μη-μηδενικές γωνίες ροής εξετάζεται η περίπτωση όπου θεωρείται μόνιμη ροή και $\alpha_\infty = 2^\circ$ και $M_\infty = 0.1$. Όπως έχει παρουσιαστεί και στην προηγούμενη ενότητα, για $M_\infty = 0.1$ η προσταθεροποίηση ενεργοποιείται επαρκώς ώστε να επιταχύνει τη σύγκλιση ενώ το μη-προσταθεροποιημένο αν και πιο αργό συγκλίνει και αυτό ώστε να μπορεί να γίνει σύγκριση μεταξύ των δύο επιλύτων.

Στο σχήμα 5.15, που παρουσιάζονται τα διαγράμματα σύγκλισης και στις δυο περιπτώσεις, παρατηρείται η εντυπωσιακή επιτάχυνση που επιφέρει η εφαρμογή της προσταθεροποίησης.

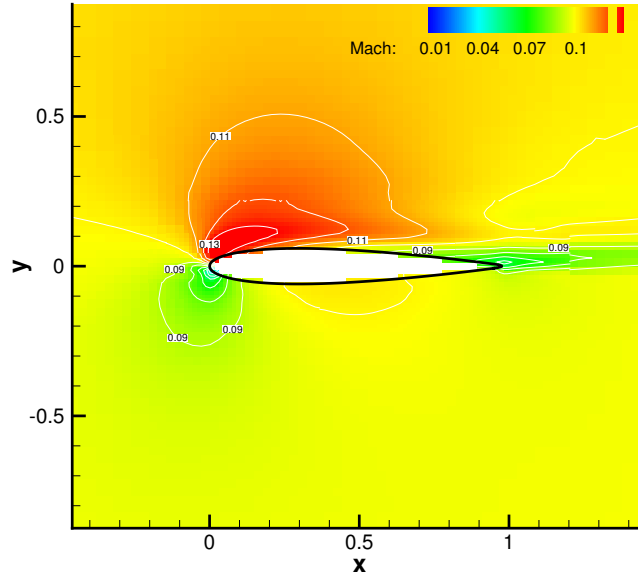


Σχήμα 5.15: NACA 0012, $M_\infty = 0.1$, $a_\infty = 2^\circ$: Διαγράμματα σύγκλισης των τεσσάρων ΜΔΕ με και χωρίς την εφαρμογή προσταθεροποίησης.

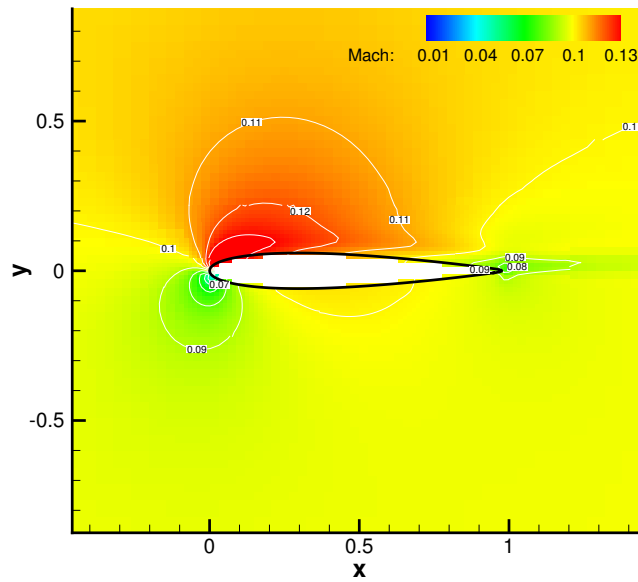
Παρατηρείται ότι, στην περίπτωση που η γωνία της επ' άπειρο ροής είναι μη-μηδενική το κέρδος της εφαρμογής προσταθεροποίησης αυξάνεται ακόμη περισσότερο, αφού η σύγκλιση επιταχύνεται περίπου πέντε φορές.



Σχήμα 5.16: NACA 0012, $M_\infty = 0.1$, $a_\infty = 2^\circ$: Πεδία πίεσης (α') χωρίς και (β') με την εφαρμογή προσταθεροποίησης.

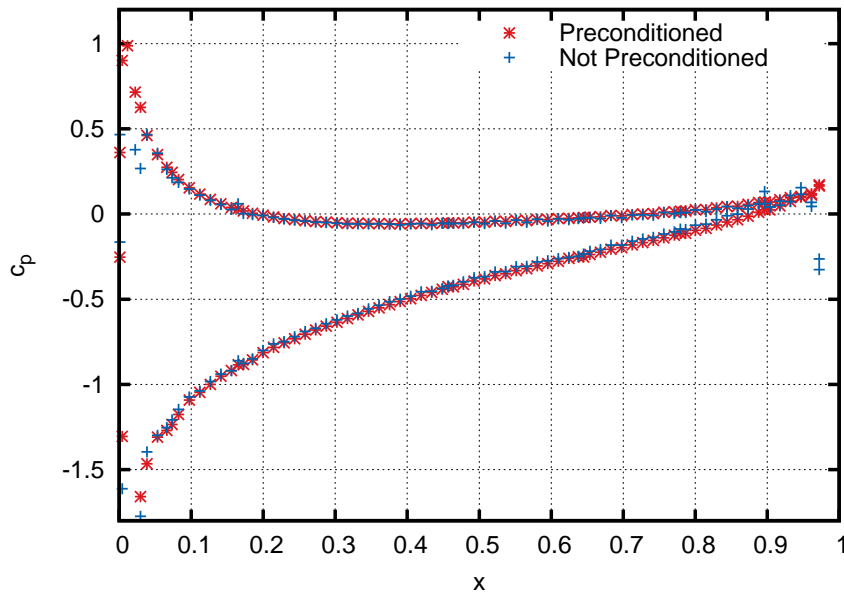


(α')



(β')

Σχήμα 5.17: NACA 0012, $M_\infty = 0.1$, $a_\infty = 2^\circ$: Πεδία αριθμού Mach χωρίς(α') και με(β') την εφαρμογή προσταθεροποίησης.



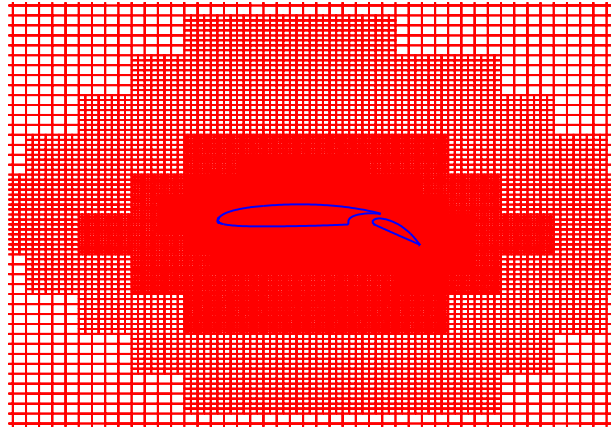
Σχήμα 5.18: NACA 0012, $M_\infty = 0.1$, $\alpha_\infty = 2^\circ$: Κατανομή συντελεστή πίεσης στην επιφάνεια της αεροτομής με και χωρίς την εφαρμογή προσταθεροποίησης.

Πίνακας 5.4: Ενδεικτικές τιμές ροικών μεγεθών για NACA 0012, $M_\infty = 0.1$, $\alpha_\infty = 2^\circ$.

Μεγέθη	Με Προσταθεροποίηση	Χωρίς Προσταθεροποίηση
Μέγιστη τιμή πίεσης [Pa]	100672	101163
$C_p (x=0^+)$	0.36	0.46
Μέγιστη τιμή Mach	0.145	0.138
C_L	0.52	0.51

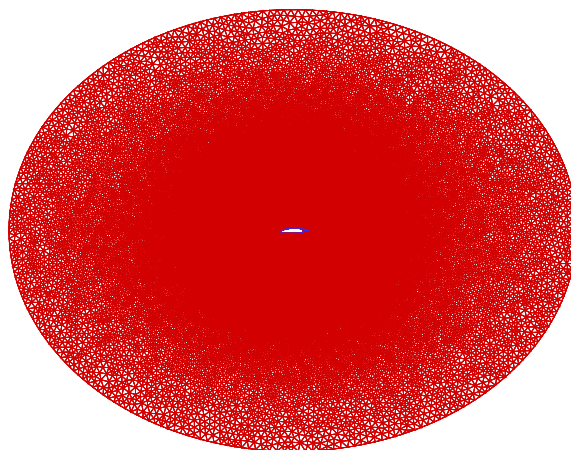
5.3 Διερεύνηση Μόνιμης ροής γύρω από Αεροτομή με Flap

Για να μελετηθεί η επίδραση της προσταθεροποίησης σε περιπτώσεις όπου μελετώνται γεωμετρίες με περισσότερο από ένα σώματα, γίνεται διερεύνηση σε μια αεροτομή η οποία βρίσκεται με το flap σε πλήρη έκταση.

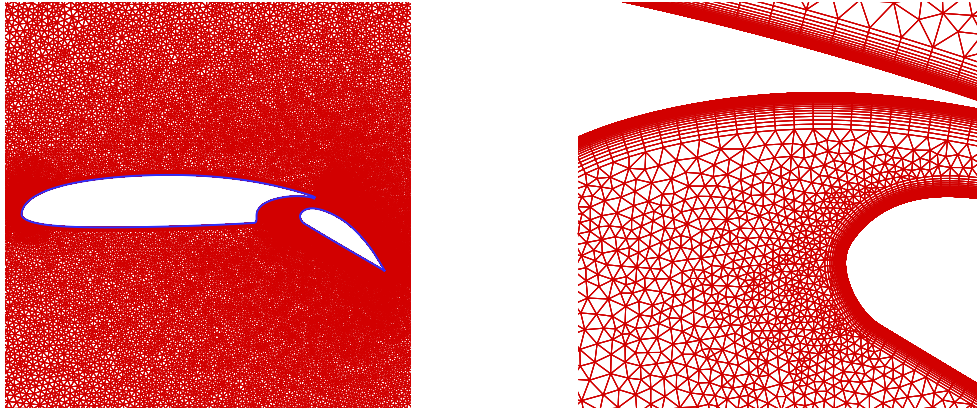


Σχήμα 5.19: Αεροτομή με flap, $M_\infty = 0.05$, $a_\infty = 0^\circ$: Το καρτεσιανό πλέγμα που δημιουργείται για την επίλυση του συστήματος αεροτομής - flap με την προοδευτική πύκνωση σε μεγένθυση. Το ελάχιστο εμβαδόν στις κυψέλες για λύση ανεξάρτητη του πλέγματος προκύπτει ίση με $\Omega_{min} = 5 \times 10^{-6}$ και οι συνολικές κυψέλες ίσες με 80.000, ενώ το υπολογιστικό χωρίο έχει πλέον διαστάσεις 18×18 με τη χορδή του κύριου σώματος της αεροτομής να είναι ίση με μονάδα.

Λόγω της διαφοράς μεταξύ των λύσεων που προέκυψε με και χωρίς προσταθεροποίηση έγινε επαλήθευση των αποτελεσμάτων με επιλύτη, [29], [30], και πάλι προγραμματισμένο από τη ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ σε υβριδικό πλέγμα, δηλαδή το πλέγμα κοντά στη γεωμετρία να είναι δομημένο, ενώ σε κάποια απόσταση από αυτή γίνεται μη-δομημένο.



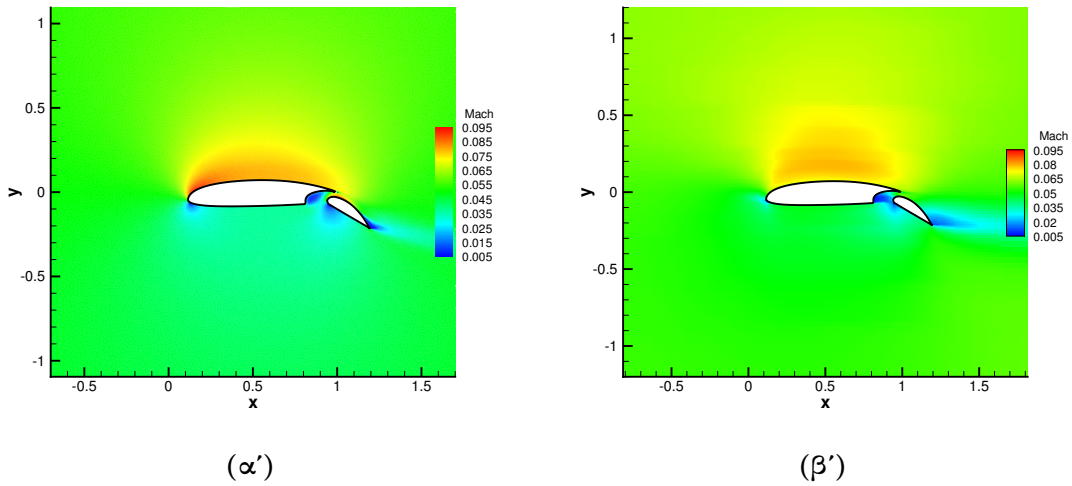
Σχήμα 5.20: Αεροτομή με flap, $M_\infty = 0.05$, $a_\infty = 0^\circ$: Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση για την επίλυση του συστήματος αεροτομής - flap με τον επιλύτη οριόδετων πλεγμάτων της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ. Αποτελείται από 150.000 κελιά και το υπολογιστικό χωρίο έχει ακτίνα 9 χορδές του κύριου σώματος της αεροτομής.



(α')

(β')

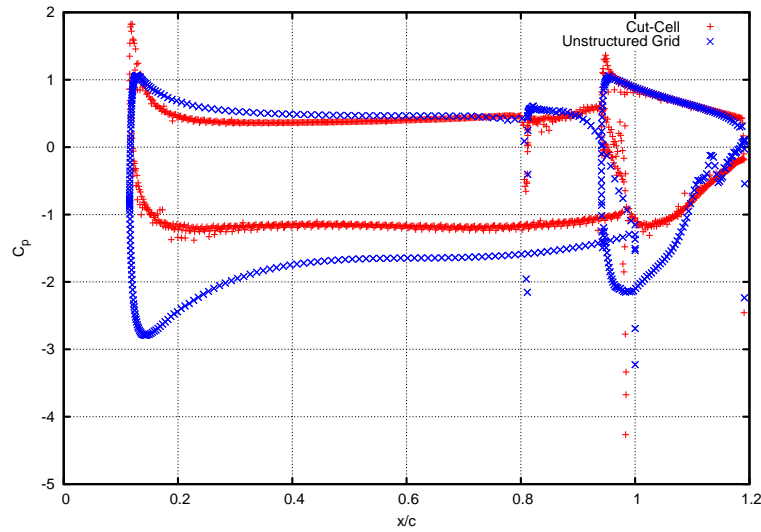
Σχήμα 5.21: Αεροτομή με flap, $M_\infty = 0.05$, $a_\infty = 0^\circ$: (α') Μεγέθυνση του σχήματος 5.20. (β') Περαιτέρω μεγέθυνση στην ενδιάμεση περιοχή αεροτομής και flap. Παρατηρείται η μετάβαση από δομημένο σε μη-δομημένο πλέγμα.



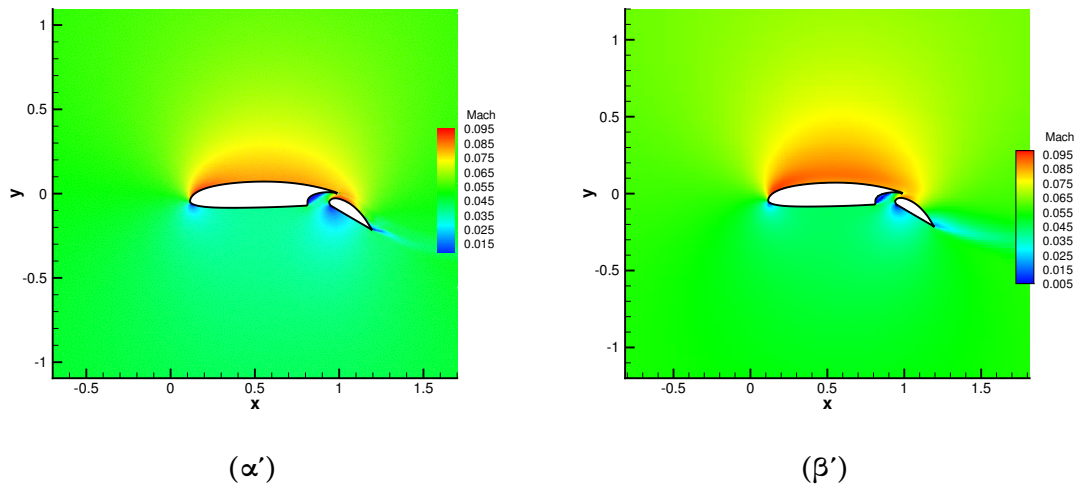
(α')

(β')

Σχήμα 5.22: Αεροτομή με flap, $M_\infty = 0.05$, $a_\infty = 0^\circ$: Σύγκριση των πεδίων Mach (α') με τον επιλύτη οριόδετων πλεγμάτων της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ και (β') του επιλύτη που προγραμματίστηκε σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, χωρίς τη χρήση προσταθεροποίησης.



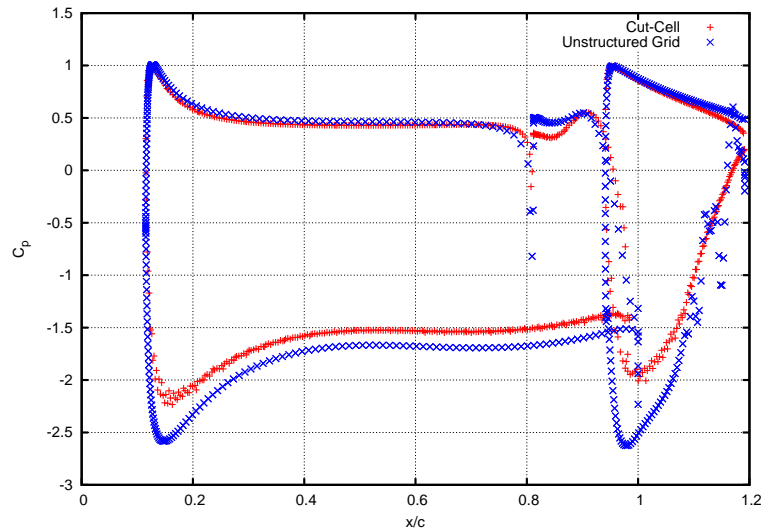
Σχήμα 5.23: Αεροτομή με flap, $M_\infty = 0.05$, $\alpha_\infty = 0^\circ$: Σύγκριση της κατανομής πίεσης επιλύτη οριόδετων πλεγμάτων της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ (Unstructured Grid) και του επιλύτη με τη μέθοδο τεμνομένων κυψελών που προγραμματίστηκε σε αυτήν τη διπλωματική εργασία (Cut-Cell), στην περίπτωση που δεν γίνεται εφαρμογή προσταθεροποίησης.



Σχήμα 5.24: Αεροτομή με flap, $M_\infty = 0.05$, $\alpha_\infty = 0^\circ$: Σύγκριση των πεδίων Mach (α') με τον επιλύτη οριόδετων πλεγμάτων της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ και (β') του επιλύτη που προγραμματίστηκε σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, με τη χρήση προσταθεροποίησης.

Συγκρίνοντας τα δύο σχήματα, 5.22, 5.24, παρατηρείται ότι η χρήση προσταθεροποίησης διορθώνει τις περιοχές πολύ χαμηλών ταχυτήτων, όπου παρατηρούνται υπερακοντίσεις στην κατανομή πίεσης. Έτσι, οι περιοχές αυτές «μαζεύονται» με αποτέλεσμα να μειώνονται και οι

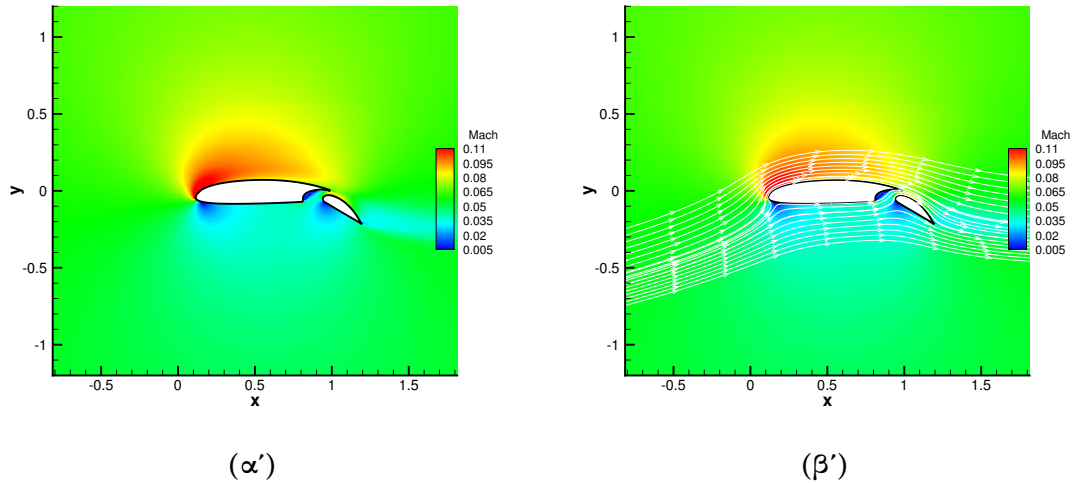
υπερακοντίσεις αυτές. Σχετικά με τη πλευρά υποπίεσης, οι διαφορές οφείλονται κυρίως στο πυκνότερο πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε από τον επιλύτη του ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ.



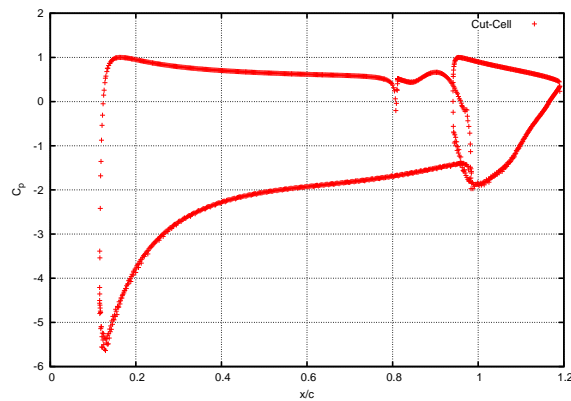
Σχήμα 5.25: Αεροτομή με flap, $M_\infty = 0.05$, $a_\infty = 0^\circ$: Σύγκριση της κατανομής πίεσης επιλύτη οριόδετων πλεγμάτων της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ (Unstructured Grid) και του επιλύτη με τη μέθοδο τεμνομένων κυφελών που προγραμματίστηκε σε αυτήν τη διπλωματική εργασία (Cut-Cell), στην περίπτωση που εφαρμόζεται προσταθεροποίηση.

Στα σχήματα 5.23, 5.25, όπου παρουσιάζονται οι σύγκρισεις των κατανομών πίεσης μεταξύ των δύο επιλύτων, με και χωρίς την εφαρμογή της προσταθεροποίησης, γίνεται πιο ευκρινής η βελτίωση που επιφέρει η χρήση της προσταθεροποίησης. Παράλληλα, στην περίπτωση του επιλύτη οριόδετων πλεγμάτων της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ (Unstructured Grid), παρατηρείται ότι λόγω του πυκνότερου πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε οι διαφορές με και χωρίς τη χρήση προσταθεροποίησης είναι αρκετά μικρότερες.

Βάσει των παραπάνω, επιλύεται η ροή γύρω από την αεροτομή του σχήματος 5.19, με $a_\infty = 8^\circ$ με τον επιλύτη με τη μέθοδο τεμνομένων κυφελών που προγραμματίστηκε σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, προσομοιώνοντας έτσι τη φάση προσέγγισης ενός αεροσκάφους, όπου για την πιο ομαλή προσγείωση εκτείνεται το flap, αυξάνοντας τον συντελεστή άνωσης και παράλληλα τον συντελεστή αντίστασης, επιβραδύνοντας έτσι το αεροσκάφος.



Σχήμα 5.26: Αεροτομή με flap, $M_\infty = 0.05$, $a_\infty = 8^\circ$: Πεδίων Mach με την επίλυση των προσταθεροποιημένων εξισώσεων σε μεγάλη γωνία της επ' άπειρο ροής, προσομοιώνοντας τη φάση προσγείωσης σε ένα αεροσκάφος.



Σχήμα 5.27: Αεροτομή με flap, $M_\infty = 0.05$, $a_\infty = 8^\circ$: Η κατανομή συντελεστή πίεσης που προκύπτει κατά την επίλυση των προσταθεροποιημένων εξισώσεων Euler. Παρατηρείται ότι η συμβολή του flap στο κομμάτι της άνωσης είναι σημαντική (κοντά στο 18%).

Πίνακας 5.5: Ενδεικτικές τιμές ροικών μεγεθών για Αεροτομή με flap, $M_\infty=0.05$, $a_\infty=8^\circ$.

Μεγέθη	Τεμνομένων κυψελών με Προσταθεροποίηση
Μέγιστη τιμή πίεσης [Pa]	100240
Μέγιστη τιμή Mach	0.13
C_L	2.95

5.4 Διερεύνηση Μη-μόνιμης Ροής γύρω από την Αεροτομή NACA 0012

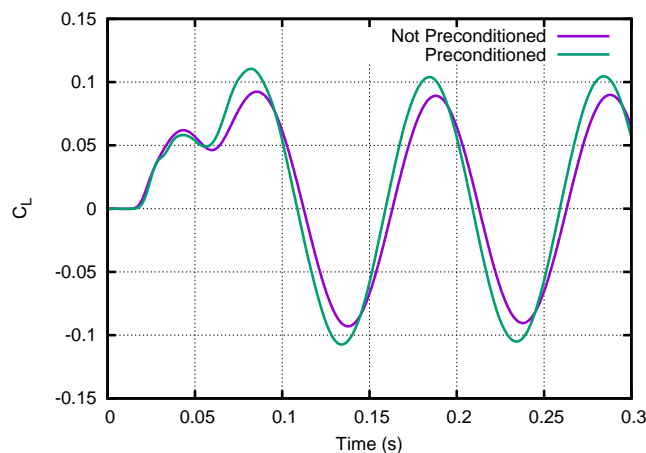
Στην ενότητα αυτή εφαρμόζεται προσταθεροποίηση σε χρονικά μη-μόνιμα προβλήματα. Η ύπαρξη μη-μονιμότητας στο πεδίο εξασφαλίζεται μέσω της περιοδικής μεταβολής της γωνίας ροής στα επ' άπειρο όρια. Συνεπώς, αλλάζοντας περιοδικά τη γωνία ροής στο όριο, μεταβάλλεται η διεύθυνση της ταχύτητας και, άρα, τα ροϊκά μεγέθη όλου του πεδίου συναρτῆσει του χρόνου.

Η συνάρτηση που ορίζει τη μεταβολή στη γωνία της επ' άπειρο ροής είναι:

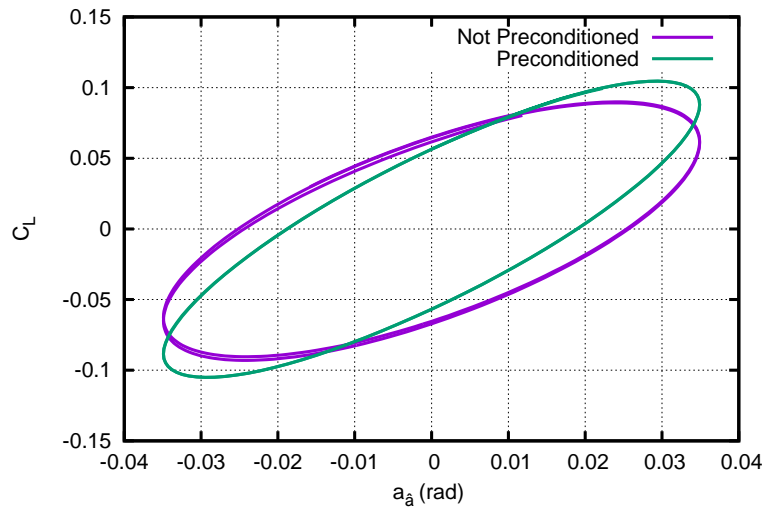
$$\alpha_{\infty}(t) = \alpha_m + A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad (5.2)$$

όπου α_m η μέση τιμή της επ' άπειρο γωνίας ροής, A το πλάτος και T η περίοδος της ταλάντωσης.

Η περίπτωση που παρουσιάζεται στο σχήμα 5.28, για τη διέγερση ορίστηκε για την ταλάντωση $A=2^\circ$, $T=0.1s$ και $\alpha_m=0^\circ$, ενώ η επίλυση του μη-μόνιμου προβλήματος πραγματοποιήθηκε για $T_{total} = 0.3s$ και χρονικό βήμα $\Delta t = 0.002s$, ώστε να εξασφαλιστεί η περιοδικότητα της ροής. Η μη-μόνιμη περίπτωση που παρουσιάζεται αφορά τιμή του $M_{\infty} = 0.35$, και παρουσιάζονται τα συγκριτικά διαγράμματα συντελεστή άνωσης ως προς το χρόνο και ως προς τη επ' άπειρο γωνία $\alpha_{\infty}(t)$ με και χωρίς τη χρήση προσταθεροποίησης.

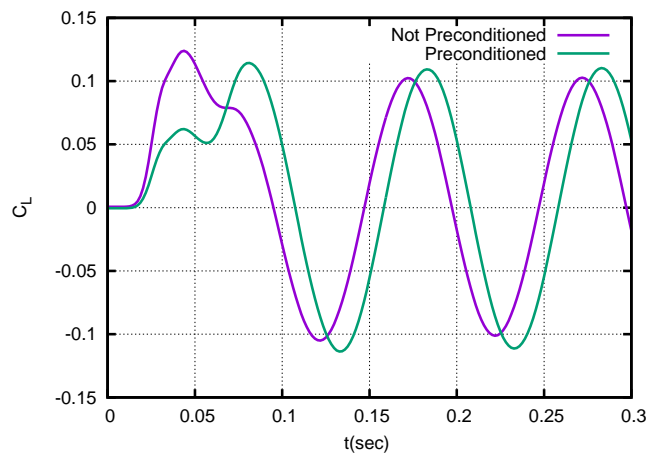


Σχήμα 5.28: NACA 0012, $M_{\infty} = 0.35$, $\alpha_{\infty} = \alpha_{\infty}(t)$: Διαγράμματα συντελεστή άνωσης ως προς το χρόνο με και χωρίς την εφαρμογή προσταθεροποίησης. Παρατηρείται ότι η περίοδος και στις δύο περιπτώσεις παραμένει ίδια, όμως υπάρχει μια οριζόντια μετατόπιση των μέγιστων τιμών των συντελεστών άνωσης.



Σχήμα 5.29: NACA 0012, $M_\infty = 0.35$, $a_\infty = a_\infty(t)$: Διαγράμματα συντελεστή άνωσης ως προς την επ' άπειρο γωνία ροής με και χωρίς την εφαρμογή προσταθεροποίησης. Η αριστερόστροφη στροφή της έλλειψης είναι οφείλεται στη διαφορά φάσης σε σχέση με τη μη-προσταθεροποιημένη, ενώ η διαφορά στο μέγεθος της έλλειψης στη μεγαλύτερη τιμή του συντελεστή.

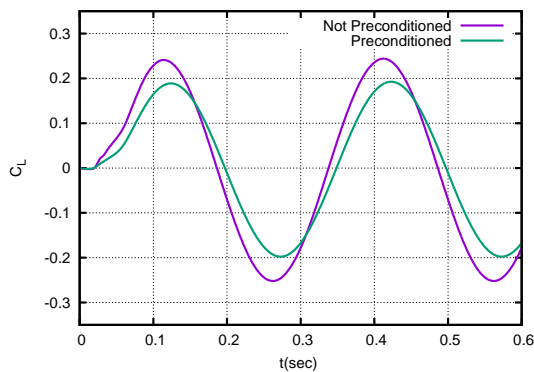
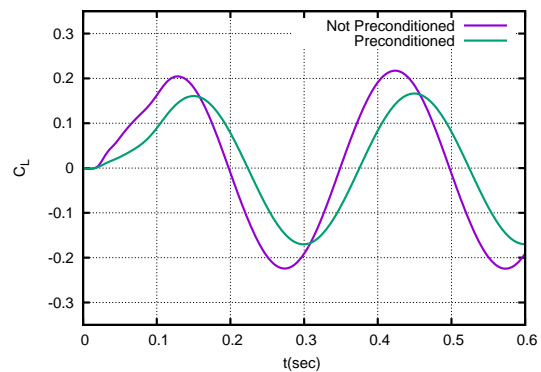
Στα σχήματα 5.28, 5.29, παρατηρείται διαφορά φάσης μεταξύ των προλέξεων με και χωρίς τη χρήση προσταθεροποίησης. Για να διαπιστωθεί αν η διαφορά φάσης προκαλείται από τον επιλύτη μη-οριόδων πλεγμάτων ή αν αυτή οφείλεται στο μητρώο προσταθεροποίησης, η ροή επιλύθηκε με τη χρήση του ίδιου, με την προηγούμενη περίπτωση, λογισμικού που προγραμματίστηκε από τη ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ, [29], [30], αφού στον προγραμματισμό του χρησιμοποιήθηκε το ίδιο μητρώο προσταθεροποίησης που χρησιμοποιήθηκε και σε αυτή την διπλωματική εργασία και έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων.



Σχήμα 5.30: NACA 0012, $M_\infty = 0.35$, $a_\infty = a_\infty(t)$: Διαγράμματα συντελεστή άνωσης ως προς το χρόνο με και χωρίς την εφαρμογή προσταθεροποίησης, όπως προέκυψε από τον επιλύτη οριόδων πλεγμάτων, [29], [30], της ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ.

Παρατηρείται ότι η διαφορά φάσης εμφανίζεται και σε αυτή την περίπτωση, καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι η διαφορά αυτή δεν προκαλείται από τον επιλύτη μη-οριόδετων πλεγμάτων αλλά οφείλεται στην επίδραση του μητρώου προσταθεροποίησης.

Στις περιπτώσεις που μελετήθηκαν, η οριζόντια μετατόπιση φαίνεται εντονότερη όσο μειώνεται ο αριθμός Mach. Στις δυο περιπτώσεις που παρουσιάζονται στο σχήμα 5.31, ορίστηκε για την ταλάντωση $A = 2^\circ$, $T = 0.3s$ και $\alpha_m = 0^\circ$, ενώ ο αριθμός Mach στη μια περίπτωση ορίστηκε ίσος με $M_\infty = 0.35$ και στη δεύτερη περίπτωση $M_\infty = 0.24$.

(α') $M_\infty = 0.35$ (β') $M_\infty = 0.24$

Σχήμα 5.31: NACA 0012, $a_\infty = a_\infty(t)$: Διάγραμμα συντελεστή άνωσης με και χωρίς την εφαρμογή προσταθεροποίησης. Σε χαμηλότερους αριθμούς Mach η οριζόντια (χρονική) μετατόπιση γίνεται εντονότερη.

Κεφάλαιο 6

Διερεύνηση Προσταθεροποίησης σε Στρωτές Ροές

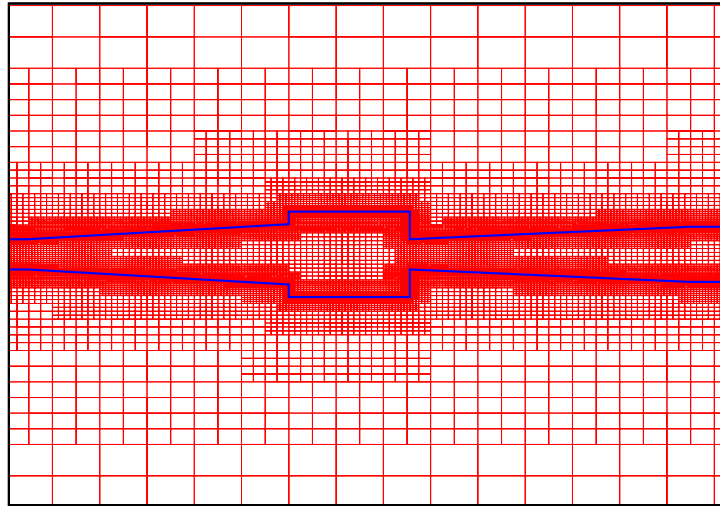
6.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται διερεύνηση της εφαρμογής προσταθεροποίησης σε συμπιεστό ρευστό σε μόνιμες, διδιάστατες, στρωτές ροές. Πραγματοποιείται επίλυση των προσταθεροποιημένων εξισώσεων εντός ενός αγωγού, στον οποίο υπάρχει μια ενδιάμεση απότομη διεύρυνση. Λόγω των πολύ χαμηλών ταχυτήτων που παρατηρούνται, εντός της απότομης διεύρυνσης, επιλέγεται η επίλυση των προσταθεροποιημένων εξισώσεων προσταθεροποίηση χαμηλών αριθμών Mach.

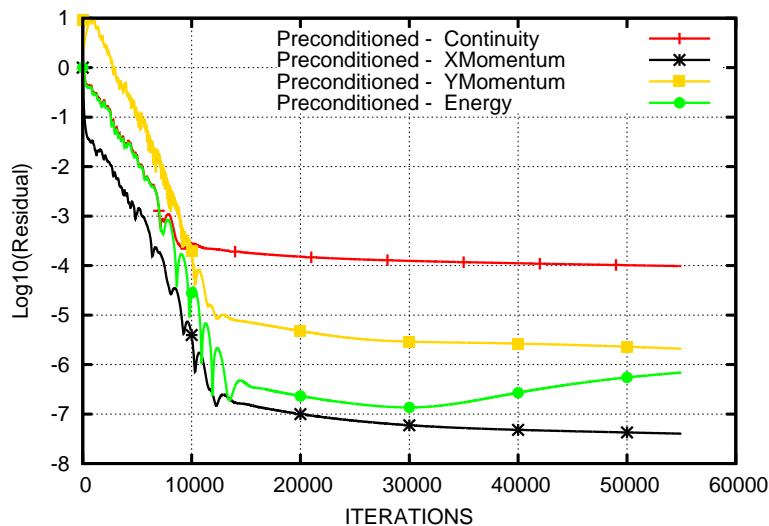
6.2 Επίλυση Προσταθεροποιημένων Εξισώσεων σε Αγωγό

Για την διερεύνηση των προσταθεροποιημένων εξισώσεων Navier-Stokes γίνεται πρόλεξη σε έναν αγωγό. Ο συγκεκριμένος αγωγός είναι μια διδιάστατη απεικόνιση του κελύφους μιας διαφραγματικής αντλίας που χρησιμοποιείται για ιατρικούς σκοπούς και, συγκεκριμένα, για την έγχυση ινσουλίνης. Συνεπώς, η παροχή εντός του αγωγού αναμένεται να είναι πολύ μικρή, ενώ η απαίτηση ακρίβειας αυξημένη. Λόγω των πολύ χαμηλών ταχυτήτων της ροής (μέγιστο μέτρο ταχύτητας $3.6 \frac{m}{s}$) και των στροβιλισμών που εμφανίζονται, η επίλυση της ροής

εντός του αγωγού είναι δύσκολη περίπτωση. Οι οριακές συνθήκες που θεωρούνται είναι ολική πίεση και θερμοκρασία στην είσοδο του αγωγού ίση με $P_t = 1 \text{ bar}$, $T_t = 300 \text{ K}$ και στατική πίεση στην έξοδο ίση με $P_s = 0.98 \text{ bar}$.



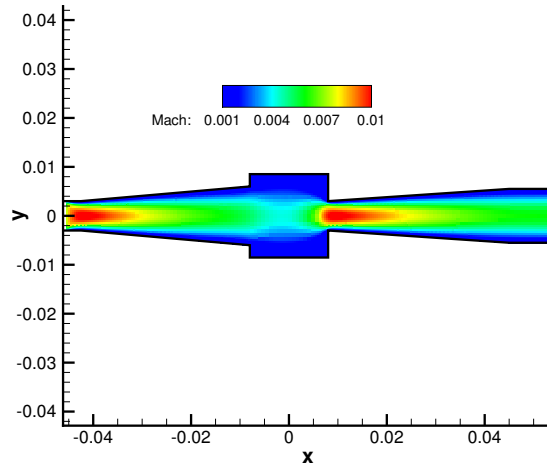
Σχήμα 6.1: Ροή σε αγωγό με διεύρυνση: Το πλέγμα που παράγεται για την επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes. Οι κυψέλες που είναι εκτός του αγωγού, θεωρούνται στερεές με αποτέλεσμα να μην επιλύονται οι εξισώσεις ροής σε αυτές. Το αρχικό υπολογιστικό χωρίο ορίστηκε εκτός του αγωγού, ώστε οι κυψέλες που θα παραχθούν να είναι καλής ποιότητας, δηλαδή να έχουν λόγο διαστάσεων κοντά στη μονάδα.



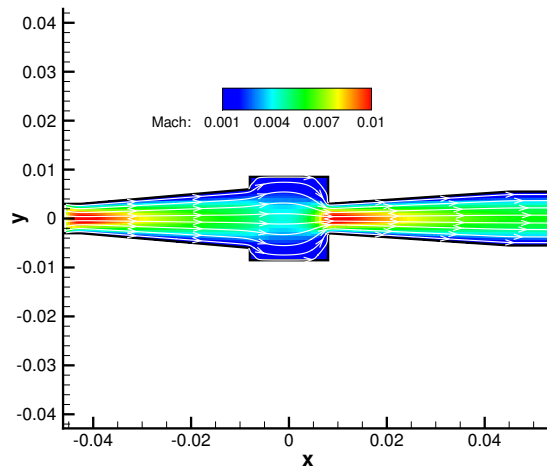
Σχήμα 6.2: Ροή σε αγωγό με διεύρυνση: Διάγραμμα σύγκλισης των εξισώσεων Navier-Stokes στρωτής ροής εντός του αγωγού.

Στο ακόλουθο σχήμα 6.3α' παρατηρείται το πεδίο τιμών του αριθμού Mach, ο οποίος στην

περιοχή που δημιουργείται ο λαμμός λαμβάνει μέγιστη τιμή, όπως και είναι αναμενόμενο. Στην ορθογωνική διεύρυνση, που γίνεται η αποκόλληση της ροής, δημιουργούνται τέσσερις θύλακες ανακυκλοφορίας της ροής που παρουσιάζονται στα σχήματα 6.4 (α'), (β').

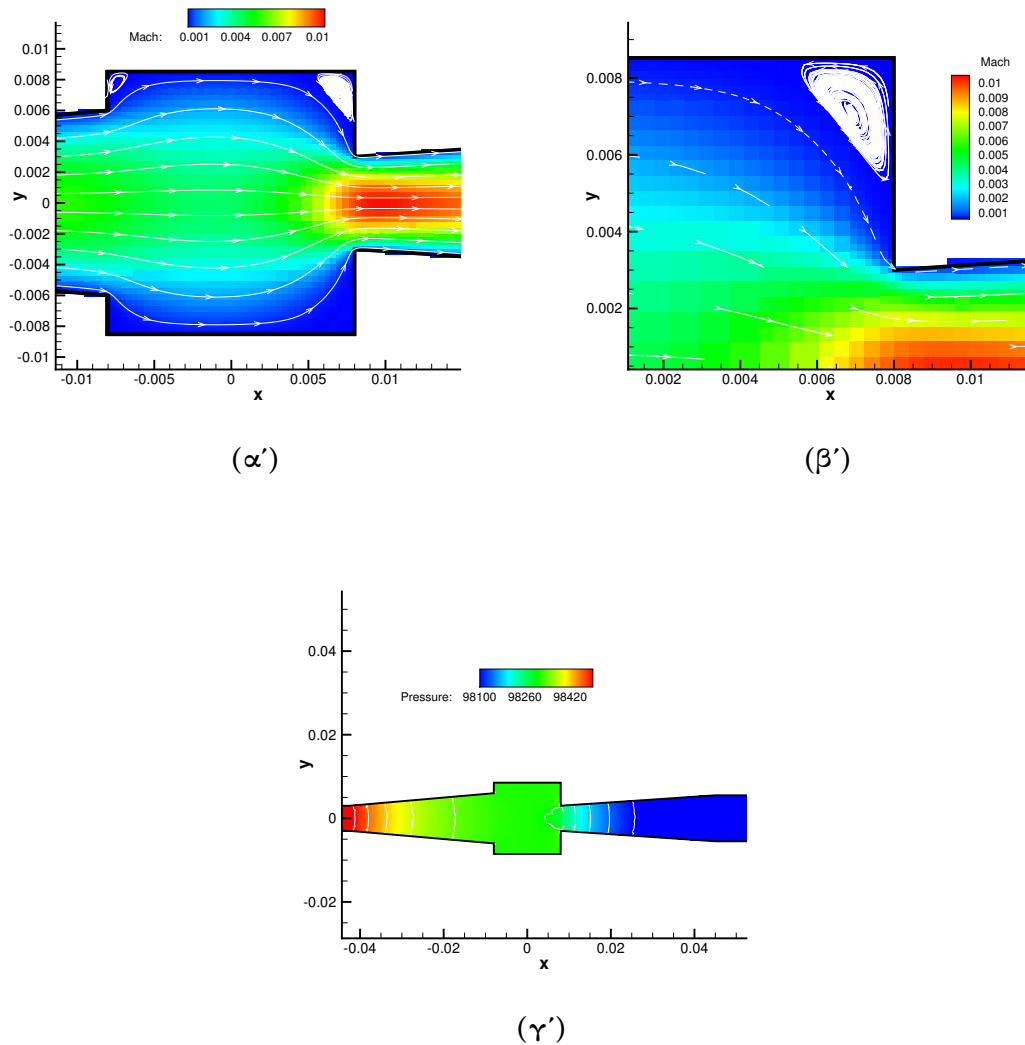


(α')



(β')

Σχήμα 6.3: Ροή σε αγωγό με διεύρυνση: (α') Πεδίο τιμών αριθμού Mach. (β') Πεδίο τιμών αριθμού Mach και οι γραμμές ροής κατά μήκος του αγωγού.



Σχήμα 6.4: Ροή σε αγωγό με διεύρυνση: (α') Μεγέθυνση στη διαμόρφωση του αγωγού όπου παρατηρούνται οι περιοχές ανακυκλοφορίας της ροής. (β') Περαιτέρω μεγέθυνση στην μεγάλη περιοχή ανακυκλοφορίας της ροής. Το μεγαλύτερο μέγεθος ανακυκλοφορίας της ροής οφείλεται στην πιο απότομη μεταβολή της γεωμετρίας σε σχέση με την είσοδο στην ορθογωνική διεύρυνση. (γ') Κατανομή της πίεσης κατά μήκος του αγωγού

Κεφάλαιο 7

Προσταθεροποίηση Χαμηλών Αριθμών Mach στις Συζυγείς Εξισώσεις

7.1 Εισαγωγή

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζεται η συνεχής συζυγής διατύπωση των μόνιμων διδιάστατων (2D) μη-προσταθεροποιημένων εξισώσεων Euler. Η συζυγής μέθοδος θα εφαρμοστεί στη βελτιστοποίηση μορφής μιας αεροτομής παραμετροποιημένης με καμπύλες Bézier, με σκοπό τη μεγιστοποίηση της δύναμης της άνωσης. Βασικό πλεονέκτημα της συζυγούς μεθόδου είναι ότι το κόστος υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας της συνάρτησης κόστους (δύναμη άνωσης) ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού (συντεταγμένες των σημείων ελέγχου της καμπύλης Bézier) είναι ανεξάρτητο του πλήθους τους. Στον αντίποδα έγκειται, όμως, η ανάγκη επαναδιατύπωσης των συζυγών εξισώσεων ανάλογα με το πρόβλημα και τη συνάρτηση κόστους. Οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίζονται χρησιμοποιούνται από τη μέθοδο απότομης καθόδου με σκοπό την εύρεση των μεταβλητών σχεδιασμού που βελτιώνουν τη συνάρτηση κόστους.

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η μαθηματική ανάπτυξη της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, [9], [31], [28], [32], όπου προκύπτουν οι συζυγείς εξισώσεις (*Field Adjoint-Equations* (FAE)), οι συζυγείς οριακές συνθήκες (*Adjoint Boundary Conditions* (ABC)) και οι παράγωγοι ευαισθησίας (*Sensitivity Derivatives* (SD)). Ακολούθως, γίνεται προσταθεροποίηση των συζυγών εξισώσεων και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα με και χωρίς την εφαρμογή προσταθεροποίησης στο προαναφερθέν πρόβλημα βελτιστοποίησης.

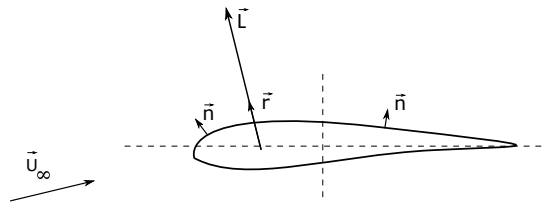
7.2 Βελτιστοποίηση Μορφής με τη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο

7.2.1 Συνάρτηση Κόστους

Η συνάρτηση κόστους που επιλέχθηκε προς βελτιστοποίηση είναι η δύναμη της άνωσης, που προκαλείται από τη γεωμετρία της αεροτομής. Στόχος της βελτιστοποίησης είναι η μεγιστοποίηση της δύναμης της άνωσης μετατοπίζοντας προεπιλεγμένα σημεία ελέγχου Bézier τα οποία παραμετροποιούν το περίγραμμά της. Οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου (X, Y) ορίζουν τις μεταβλητές σχεδιασμού (\vec{b}), αφού μετατοπίζοντάς τα αλλάζει το σχήμα της αεροτομής, και τελικά, η συνολική άνωση που ασκείται. Συγκεκριμένα, η συνάρτηση κόστους ορίζεται ως:

$$F = \int_{S_w} p \hat{n}_k \hat{r}_k dS \quad (7.1)$$

όπου p η στατική πίεση, \vec{r} το μοναδιαίο διάνυσμα κατεύθυνσης του διανύσματος της δύναμης της άνωσης και \vec{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε κάθε σημείο της επιφάνειας της αεροτομής.



Για τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης κόστους χρησιμοποιείται η μέθοδος απότομης ανόδου (*steepest ascent*), που διατυπώνεται ως:

$$b_n^{new} = b_n^{old} + \eta \frac{\delta F}{\delta b_n}, \quad \eta > 0 \quad (7.2)$$

όπου η ρυθμίζει το μέγεθος της μεταβολής της μεταβλητής σχεδιασμού.

7.2.2 Διατύπωση Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου

Η χρήση αιτιοκρατικής μεθόδου βελτιστοποίησης απαιτεί τον προσδιορισμό της ολικής παραγώγου της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού.

Η μεταβολή κάθε ροϊκού μεγέθους Φ ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού είναι είτε έμμεση είτε άμεση. Η σχέση εξάρτησης του Φ ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού ορίζεται ως:

$$\Phi = \Phi(\vec{b}, \vec{x}(\vec{b})) \quad (7.3)$$

Συνεπώς, η ολική μεταβολή του ροϊκού μεγέθους Φ ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, [32], διατυπώνεται ως:

$$\frac{\delta\Phi}{\delta b_n} = \frac{\partial\Phi}{\partial b_n} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \quad (7.4)$$

όπου ο όρος $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial b_n}\right)$ αφορά την άμεση εξάρτηση, δηλαδή το πως μεταβάλλεται το ροϊκό μέγεθος Φ για κάθε μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού, ενώ ο όρος $\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n}$ αφορά την έμμεση εξάρτηση, δηλαδή το πως η μετατόπιση των κόμβων της σχεδιαζόμενης γεωμετρίας επιδρά στο ροϊκό μέγεθος.

Ο υπολογισμός των παραγώγων της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού γίνεται ως:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_n} &= \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{S_w} p \hat{n}_k \hat{r}_k dS \\ &= \int_{S_w} \frac{\delta p}{\delta b_n} \hat{n}_k \hat{r}_k dS + \int_{S_w} p \frac{\delta}{\delta b_n} (\hat{n}_k \hat{r}_k dS) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Παρατηρείται ότι, για την εύρεση των παραγώγων αυτών είναι απαραίτητος ο υπολογισμός του όρου $\left(\frac{\delta p}{\delta b_n}\right)$, κάτι που όπως φαίνεται και από τη σχέση (7.4), προϋποθέτει τον υπολογισμό της άμεσης εξάρτησης της πίεσης σ' όλο το στερεό όριο από κάθε μεταβλητή σχεδιασμού. Η εύρεση αυτού του όρου είναι πολύ ακριβή και, έτσι, για την αποφυγή του υπολογισμού του, επιλέγεται η ανάπτυξη της συνεχούς συζυγούς μεθόδου.

Με βάση τη συγκεκριμένη θεωρία, ορίζεται η επαυξημένη συνάρτηση (F_{aug}) ως:

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} \Psi_i R_i d\Omega \quad (7.6)$$

όπου ο επαναλαμβανόμενος δείκτης (i) υποδηλώνει άθροιση για τα αντίστοιχα στοιχεία των διανυσμάτων $\vec{\Psi}$, \vec{R} . Η F_{aug} ταυτίζεται με τη συνάρτηση κόστους, καθώς το υπόλοιπο των εξισώσεων είναι μηδενικό.

Η μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης από τις μεταβλητές σχεδιασμού b_n , με βάση το θεώρημα Leibnitz, προκύπτει ως:

$$\begin{aligned}\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \frac{\delta F}{\delta b_n} + \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} \Psi_i R_i d\Omega \\ &= \frac{\delta F}{\delta b_n} + \int_{\Omega} \frac{\partial (\Psi_i R_i)}{\partial b_n} d\Omega + \int_S \Psi_i R_i \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \hat{n}_k dS\end{aligned}\quad (7.7)$$

Εφόσον οι πεδριακές εξισώσεις ικανοποιούνται στο χωρίο (δηλαδή $\vec{R}|_{\Omega} = \vec{0}$), η σχέση (7.7) μπορεί να διατυπωθεί ως:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = \underbrace{\frac{\delta F}{\delta b_n}}_{T1} + \underbrace{\int_{\Omega} \Psi_i \frac{\partial R_i}{\partial b_n} d\Omega}_{T2} + \underbrace{\int_S \Psi_i R_i \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \hat{n}_k dS}_{SD}\quad (7.8)$$

όπου το επιφανειακό ολοκλήρωμα της σχέσης (7.8) δείχνει τη μεταβολή των συντεταγμένων των κόμβων της σχεδιαζόμενης γεωμετρίας για κάθε μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού στα όρια και, ως επακόλουθο, συμμετέχει στην έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας. Ο όρος T2, που αναπτύσσεται στη συνέχεια, περιγράφει τις μεταβολές των ροϊκών μεγεθών σε όλο το χωρίο.

Ο όρος T1 της εξίσωσης (7.8), όπως προέκυψε από την εξίσωση (7.5) ισούται με:

$$T1 := \frac{\delta F}{\delta b_n} = \underbrace{\int_{S_w} \frac{\delta p}{\delta b_n} \hat{n}_k \hat{r}_k dS}_{ABC} + \underbrace{\int_{S_w} p \frac{\delta}{\delta b_n} (\hat{n}_k \hat{r}_k dS)}_{SD}$$

Ο πρώτος όρος, που αφορά τη μεταβολή των ροϊκών μεγεθών στο στερεό όριο της αεροτομής, συμμετέχει στη διατύπωση των συζυγών οριακών συνθηκών ενώ ο δεύτερος όρος, που αφορά τη μεταβολή των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του σώματος ως προς τη μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού, συμμετέχει στην έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας.

Για την ανάπτυξη του όρου T2 σε χρονικά μόνιμα προβλήματα λαμβάνονται μόνο οι χωρικοί όροι, συγκεκριμένα, η σχέση (2.25). Εφαρμόζοντας το θεώρημα Green-Gauss ο όρος T2 αναλύεται ως:

$$\begin{aligned}T2 &:= \int_{\Omega} \Psi_i \frac{\partial R_i}{\partial b_n} d\Omega = \int_{\Omega} \Psi_i \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \Psi_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f_{ik}}{\partial b_n} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_n} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_n} d\Omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_S \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_n} \hat{n}_k dS - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f_{ik}}{\partial U_j} \frac{\partial U_j}{\partial b_n} \right) d\Omega \\
&= \underbrace{\int_S \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_n} \hat{n}_k dS}_{T3} + \underbrace{\int_{\Omega} \left(-\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} \mathbf{A}_{ijk} \right) \frac{\partial U_j}{\partial b_n} d\Omega}_{FAE} \quad (7.9)
\end{aligned}$$

ο όρος T3 αναπτύσσεται στη συνέχεια ξεχωριστά, ενώ ο όρος FAE (συμπεριλαμβανομένου και του πρόσημου) ορίζει τις συζυγείς εξισώσεις. Μέσω του μηδενισμού του όρου AE, αποφεύγεται ο κοστοβόρος υπολογισμός των παραγώγων $\left(\frac{\partial U_j}{\partial b_n}\right)$.

Η επιφάνεια S αποτελείται από τα στερεά και τα επ' άπειρο όρια του υπολογιστικού χωρίου, δηλαδή ισχύει ότι $S = S_{\infty} \cup S_w$. Αναδιατυπώνοντας τον όρο T3 της εξίσωσης (7.9), ώστε να ληφθεί ξεχωριστά η συμβολή κάθε ορίου, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
T3 &:= \int_S \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_n} \hat{n}_k dS = \int_{S_{\infty} \cup S_w} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_n} \hat{n}_k dS \\
&= \underbrace{\int_{S_{\infty}} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_n} \hat{n}_k dS}_{ABC} + \underbrace{\int_{S_w} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_n} \hat{n}_k dS}_{T4} \quad (7.10)
\end{aligned}$$

Ο όρος T4, αναπτύσσεται μέσω της σχέσης (7.4), ώστε να ληφθούν οι όροι που αφορούν τα ροϊκά και τα γεωμετρικά μεγέθη στο στερεό όριο ξεχωριστά, δηλαδή:

$$\begin{aligned}
T4 &= \int_{S_w} \Psi_i \frac{\delta f_{ik}}{\delta b_n} \hat{n}_k dS - \int_{S_w} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_m} \frac{\delta x_m}{\delta b_n} \hat{n}_k dS \\
&= \underbrace{\int_{S_w} \Psi_i \frac{\delta}{\delta b_n} (f_{ik} \hat{n}_k) dS}_{(2.67)} - \int_{S_w} \Psi_i f_{ik} \frac{\delta \hat{n}_k}{\delta b_n} dS - \int_{S_w} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_m} \frac{\delta x_m}{\delta b_n} \hat{n}_k dS \\
&= \int_{S_w} \Psi_2 \frac{\delta}{\delta b_n} (p \hat{n}_x) dS + \int_{S_w} \Psi_3 \frac{\delta}{\delta b_n} (p \hat{n}_y) dS - \int_{S_w} \Psi_i f_{ik} \frac{\delta \hat{n}_k}{\delta b_n} dS - \int_{S_w} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_m} \frac{\delta x_m}{\delta b_n} \hat{n}_k dS \\
&= \int_{S_w} \Psi_{k+1} \frac{\delta}{\delta b_n} (p \hat{n}_k) dS - \int_{S_w} \Psi_i f_{ik} \frac{\delta \hat{n}_k}{\delta b_n} dS - \int_{S_w} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_m} \frac{\delta x_m}{\delta b_n} \hat{n}_k dS \\
&= \underbrace{\int_{S_w} \Psi_{k+1} \frac{\delta p}{\delta b_n} \hat{n}_k dS}_{ABC} + \underbrace{\int_{S_w} \Psi_{k+1} p \frac{\delta \hat{n}_k}{\delta b_n} dS}_{SD} - \underbrace{\int_{S_w} \Psi_i f_{ik} \frac{\delta \hat{n}_k}{\delta b_n} dS}_{SD} - \underbrace{\int_{S_w} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_m} \frac{\delta x_m}{\delta b_n} \hat{n}_k dS}_{SD} \quad (7.11)
\end{aligned}$$

Με το πέρας της μαθηματικής ανάλυσης έχει κατηγοριοποιηθεί κάθε ολοκλήρωμα στις τρεις ομάδες FAE, ABC και SD. Ακολουθεί ανάλυση της κάθε ομάδας ξεχωριστά.

Συζυγείς Πεδιακές Εξισώσεις (FAE)

Από την ανάλυση που προηγήθηκε προκύπτει ότι οι πεδιακές συζυγείς εξισώσεις (FAE) των μόνιμων εξισώσεων Euler (2.25), ισούται με:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} \mathbf{A}_{ijk} = 0 &\Leftrightarrow -\mathbf{A}_{jik} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_k} = 0 \\ &\Leftrightarrow -\mathbf{A}_{ijk}^T \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_k} = 0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

Συγκρίνοντας τις συζυγείς εξισώσεις με τις εξισώσεις του ευθέος προβλήματος (Primal) παρατηρείται η ομοιότητα μεταξύ τους, με την κύρια διαφορά να είναι ότι οι συζυγείς εξισώσεις είναι γραμμικές. Επιπλέον, οι ιδιοτιμές του συζυγούς προβλήματος είναι αντίθετες με τις αντίστοιχες στο ευθύ πρόβλημα.

$$\begin{aligned} -\mathbf{A}(\vec{U})_{ijk}^T \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_k} &= 0 \\ \mathbf{A}(\vec{U})_{ijk} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} &= 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

Συζυγείς Οριακές Συνθήκες (ABC)

Συγκεντρώνοντας τους όρους που αφορούν τα όρια του χωρίου επίλυσης, προκύπτουν οι οριακές συνθήκες για το συζυγές πρόβλημα, δηλαδή:

$$\begin{aligned} ABC &:= \int_{S_\infty} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_n} \hat{n}_k dS + \int_{S_w} \Psi_{k+1} \frac{\delta p}{\delta b_n} \hat{n}_k dS + \int_{S_w} \frac{\delta p}{\delta b_n} \hat{n}_k \hat{r}_k dS \\ &= \int_{S_\infty} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_n} \hat{n}_k dS + \int_{S_w} \frac{\delta p}{\delta b_n} (\Psi_{k+1} \hat{n}_k + \hat{n}_k \hat{r}_k) dS \end{aligned} \quad (7.14)$$

Οι οριακές συνθήκες επιβάλλονται κατάλληλα ώστε να αποφευχθεί ο υπολογισμός της μεταβολής των ροϊκών μεγεθών ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού $\left(\frac{\partial f_{ik}}{\partial b_n}, \frac{\delta p}{\delta b_n}\right)$.

Για τα επ' άπειρο όρια (S_∞) προκύπτει ότι:

$$ABC|_{S_\infty} := \vec{\Psi}|_{S_\infty} = \vec{0} \quad (7.15)$$

ενώ για τα στερεά όρια (S_w) ισχύει ότι:

$$ABC|_{S_w} := \Psi_{k+1}|_{S_w} \hat{n}_k + \hat{n}_k \hat{r}_k = 0 \quad (7.16)$$

Η περαιτέρω ανάλυση της οριακής συνθήκης απαιτεί πρωτίστως τη διατύπωση της φυσικής ερμηνείας των συζυγών μεταβλητών. Έστω ότι σε έναν όγκο ελέγχου τοποθετείται ένας όρος πηγής μάζας, ορμής ή ενέργειας (S_i , $i = 1, 4$). Η αντίστοιχη εξίσωση λαμβάνει τη μορφή:

$$R_i = -S_i \quad (7.17)$$

Η συζυγής μεταβλητή που αντιστοιχεί στη συζυγή εξίσωση ποσοτικοποιεί την ευαισθησία της συνάρτησης κόστους ως προς τη μεταβλητή S_i βάσει της εξίσωσης:

$$\frac{\partial F}{\partial S_i} = \Psi_i \Delta\Omega \quad (7.18)$$

όπου $\Delta\Omega$ ο όγκος ελέγχου της κυψέλης.

Για να γίνει πιο σαφής η μορφή της οριακής συνθήκης, λαμβάνεται στην απλουστευμένη περίπτωση όπου η εξίσωση (7.16) εφαρμόζεται στο οριζόντιο τμήμα της αεροτομής. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} \Psi_3 \hat{n}_y + \hat{r}_y \hat{n}_y &= 0 \\ \Psi_3 &= -\hat{r}_y \end{aligned} \quad (7.19)$$

Από την εξίσωση (7.19) παρατηρείται ότι η τιμή της Ψ_3 είναι αρνητική (αφού $\hat{r}_y = 1$), είτε η συνθήκη εφαρμόζεται στην πλευρά υπερπίεσης είτε στην πλευρά υποπίεσης. Συνεπώς, σύμφωνα με την εξίσωση (7.18), η μεγιστοποίηση της συνάρτησης κόστους απαιτεί τη μείωση της S_3 .

Το δεξί μέλος της εξίσωσης (7.17) αυξάνει, προκαλώντας αύξηση της ορμής κατά τη Y διεύθυνση. Κάτι τέτοιο, μπορεί να προκληθεί κυρτώνοντας τη μέση γραμμή της αεροτομής. Περαιτέρω κύρτωση της αεροτομής αυξάνει τη δύναμη της άνωσης που της ασκείται, επαληθεύοντας έτσι την μαθηματική θεμελίωση της συζυγούς μεθόδου.

Κατ' αναλογία, η συζυγής μεταβλητή Ψ_2 , όπως θα φανεί και στα σχήματα 7.1γ'/7.1δ', παρατηρείται ότι στην πλευρά υποπίεσης έχει αρνητική τιμή, με αποτέλεσμα να απαιτείται και εδώ μείωση του S_2 και, συνεπώς, το δεξί μέλος της εξίσωσης (7.17) αυξάνει. Αυτό μπορεί να προκληθεί με την επιτάχυνση της ροής στην πλευρά αυτή. Αντιθέτως, στην πλευρά υπερπίεσης η τιμή της είναι θετική και έτσι απαιτείται αύξηση του S_2 και, άρα, μειώνεται το δεξί μέλος της εξίσωσης (7.17), το οποίο σημαίνει επιβράδυνση της ροής. Αντιστοίχως, η πίεση στη πλευρά υποπίεσης τείνει να μειωθεί ενώ στην πλευρά υπερπίεσης να αυξηθεί, κάτι το οποίο προκαλεί αύξηση της δύναμης της άνωσης.

Παράγωγοι Ευαισθησίας (SD)

Αθροίζοντας όλους τους μη-μηδενικούς όρους (SD) προκύπτει η μεταβολή της συνάρτησης κόστους ως προς τη μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \int_S \Psi_i R_i \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \hat{n}_k dS - \int_{S_w} \Psi_i f_{ik} \frac{\delta \hat{n}_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_w} \Psi_{k+1} p \frac{\delta \hat{n}_k}{\delta b_n} dS \\ &+ \int_{S_w} p \frac{\delta}{\delta b_n} (\hat{n}_k \hat{r}_k dS) - \int_{S_w} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_m} \frac{\delta x_m}{\delta b_n} \hat{n}_k dS \end{aligned} \quad (7.20)$$

Ο όρος $\left(\frac{\delta x_k}{\delta b_n}\right)$ περιγράφει τη σχέση μεταξύ των συντεταγμένων των κόμβων της γεωμετρίας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και, γι' αυτό, στις κυψέλες που δεν τέμνονται από τα στερεά όρια ο όρος αυτός μηδενίζεται. Τελικά, ο πρώτος όρος της εξίσωσης (7.20), βάσει της πιο πάνω παρατήρησης, αφορά μόνο τα στερεά όρια ($S|_w$). Έτσι, οι παράγωγοι ευαισθησίας προκύπτουν ως:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \int_{S_w} \Psi_i R_i \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \hat{n}_k dS + \int_{S_w} (\Psi_{k+1} p - \Psi_i f_{ik}) \frac{\delta \hat{n}_k}{\delta b_n} dS \\ &+ \int_{S_w} p \frac{\delta}{\delta b_n} (\hat{n}_k \hat{r}_k dS) - \int_{S_w} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_m} \frac{\delta x_m}{\delta b_n} \hat{n}_k dS \end{aligned} \quad (7.21)$$

7.3 Διαδικασία Προσταθεροποίησης των Συζυγών Εξισώσεων

Η διαδικασία που ακολουθείται για την προσταθεροποίηση των συζυγών ΜΔΕ είναι όμοια με την περίπτωση του ευθέος προβλήματος. Εισάγοντας τον ψευδοχρονικό όρο και το μητρώο προσταθεροποίησης στις συζυγείς εξισώσεις (7.12) προκύπτει το προς επίλυση συζυγές πρόβλημα:

$$-\mathbf{D}^{-1} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \tau} - \mathbf{A}^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x_k} = 0 \quad (7.22)$$

όπου \mathbf{A} το ιακωβιανό μητρώο των εξισώσεων Euler (2.35), $\vec{\Psi}$ οι συζυγείς μεταβλητές και \mathbf{D} το μητρώο προσταθεροποίησης.

Ως μητρώο προσταθεροποίησης λαμβάνεται το ανάστροφο μητρώο που επιλέχθηκε στο ευθύ πρόβλημα αξιοποιώντας τη δυαδικότητα που υπάρχει μεταξύ των συζυγών εξισώσεων και των εξισώσεων του ευθέος προβλήματος, [28]. Συνεπώς, το μητρώο προσταθεροποίησης των

συζυγών εξισώσεων υπολογίζεται ως:

$$\mathbf{D} = \mathbf{\Gamma}^T \quad (7.23)$$

όπου το μητρώο $\mathbf{\Gamma}$ αφορά τις συντηρητικές μεταβλητές και υπολογίζεται μέσω της σχέσης (4.9).

Τελικά, οι προσταθεροποιημένες συζυγείς εξισώσεις λαμβάνουν τη μορφή:

$$-\mathbf{\Gamma}^{-T} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \tau} - \mathbf{A}^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x_k} = 0 \quad (7.24)$$

Κατά αναλογία με το υποκεφάλαιο 4.4.2, με την ένταξη του μητρώου προσταθεροποίησης είναι απαραίτητη η τροποποίηση του σχήματος Roe, ώστε να είναι συμβατός με το συζυγές πρόβλημα. Ακολουθώντας τη λογική της δυαδικότητας μεταξύ των δύο προβλημάτων, ευθέως και συζυγούς, το προσταθεροποιημένο σχήμα του Roe για το συζυγές πρόβλημα λαμβάνει την ακόλουθη μορφή,

$$\vec{\Phi}_{PQ}^A = \frac{1}{2} \left(\vec{\Phi}_{PQ}^{A,L} + \vec{\Phi}_{PQ}^{A,R} \right) - \frac{1}{2} \left(\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{PQ}^{-1} \left| \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{PQ} \tilde{\mathbf{A}}_{PQ} \right| \right)^T \left(\vec{\Psi}_{PQ}^R - \vec{\Psi}_{PQ}^L \right) \quad (7.25)$$

όπου $\vec{\Phi}^A$ το συζυγές διάνυσμα πυκνότητας ροής.

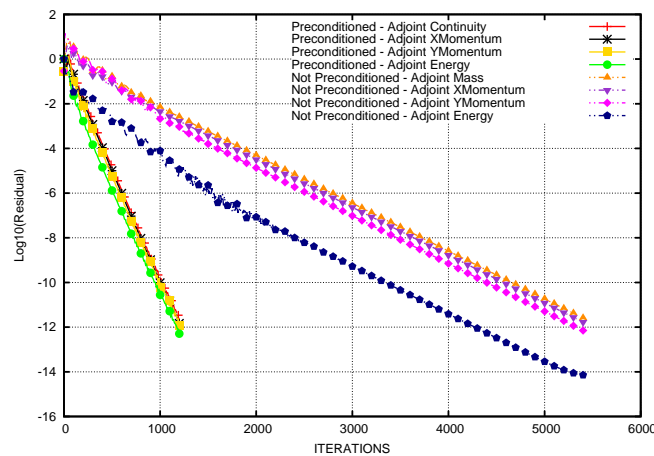
Συνεπώς, ο όρος της καταστροφής του σχήματος Roe γίνεται,

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{PQ}^{-1} \left| \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{PQ} \tilde{\mathbf{A}}_{PQ} \right| \right)^T \left(\vec{\Psi}_{PQ}^R - \vec{\Psi}_{PQ}^L \right) &= \left| \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{PQ} \tilde{\mathbf{A}}_{PQ} \right|^T \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{PQ}^{-T} \left(\vec{\Psi}_{PQ}^R - \vec{\Psi}_{PQ}^L \right) \\ &= \left| \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma PQ}^T \right| \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{PQ}^{-T} \left(\vec{\Psi}_{PQ}^R - \vec{\Psi}_{PQ}^L \right) \end{aligned} \quad (7.26)$$

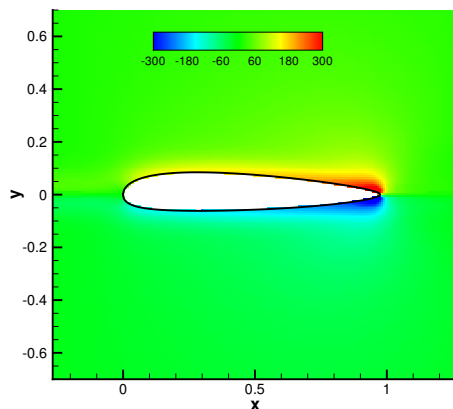
7.4 Διερεύνηση Προσταθεροποίησης των Συζυγών Εξισώσεων

Η περίπτωση που επιλέχθηκε να παρουσιαστεί για τη διερεύνηση των προσταθεροποιημένων συζυγών εξισώσεων σε χαμηλούς αριθμούς Mach είναι η μεμονωμένη αεροτομή NACA 0012 με $M_\infty = 0.1$ και $\alpha_\infty = 0$. Για την επίλυση του συζυγούς προβλήματος είναι απαραίτητη η επίλυση του ευθέως προβλήματος.

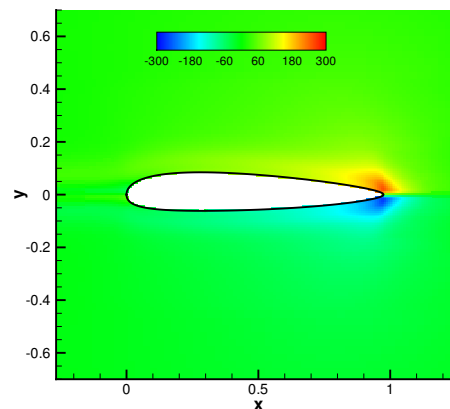
Παρατίθενται τα διαγράμματα σύγκλισης των συζυγών μεταβλητών με και χωρίς την εφαρμογή προσταθεροποίησης στις συζυγείς εξισώσεις. Επιπρόσθετα, παρουσιάζονται τα πεδία τιμών των συζυγών μεταβλητών, αντίστοιχα.



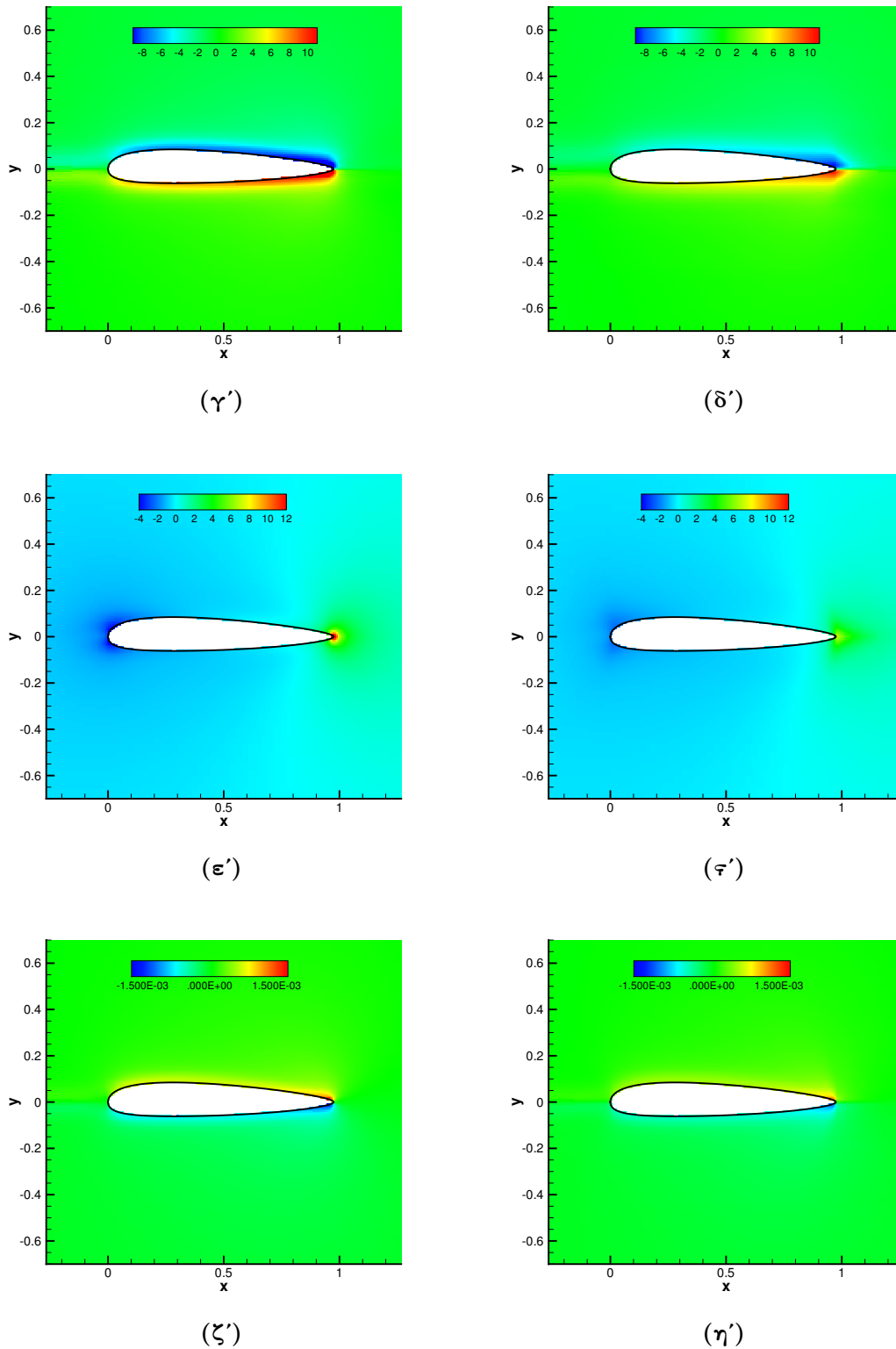
Σχήμα 7.1: NACA 0012, $M_\infty = 0.1$, $\alpha_\infty = 0^\circ$: Διαγράμματα σύγκλισης των τεσσάρων συζυγών εξισώσεων ροής ατρίβους ρευστού με και χωρίς την εφαρμογή προσταθεροποίησης.



(α')



(β')



Σχήμα 7.1: NACA 0012, $M_\infty = 0.1$, $\alpha_\infty = 0^\circ$: Πεδία συζυγών μεταβλητών με την εφαρμογή προσταθεροποίησης στα αριστερά, και χωρίς στα δεξιά. Οι συζυγές μεταβλητές που παρουσιάζονται είναι η «συζυγής πυκνότητα» Ψ_1 ((α')-(β')), η «συζυγής ορμή» Ψ_2 κατά τη X κατεύθυνση ((γ')-(δ')), η «συζυγής ορμή» Ψ_3 κατά τη Y κατεύθυνση ((ε')-(Ϝ')) και η «συζυγής ενέργεια» Ψ_4 ((ζ')-(η')).

7.5 Βελτιστοποίηση Αεροτομής με και χωρίς Προσταθεροποίηση

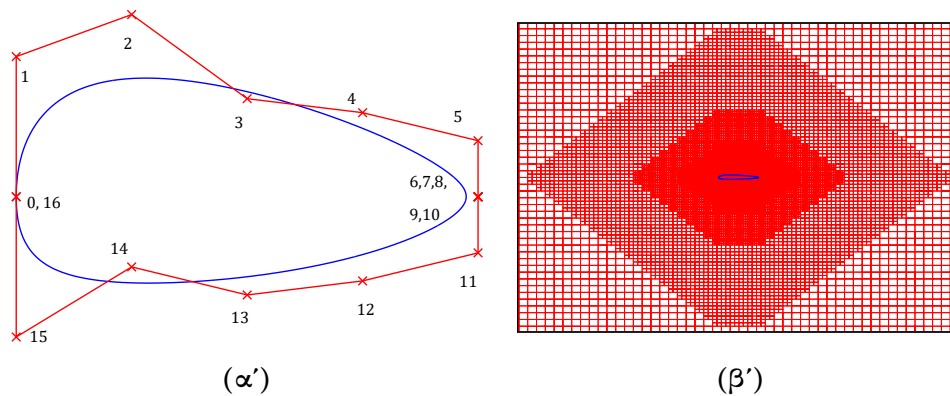
Στην ενότητα αυτή επιχειρείται μεγιστοποίηση της συνάρτησης κόστους, δηλαδή της δύναμης της άνωσης που παράγεται από τη γεωμετρία, με και χωρίς την εφαρμογή προσταθεροποίησης σε χαμηλούς αριθμούς Mach ($M_\infty=0.1$ και $\alpha_\infty=0^\circ$). Για σκοπούς διερεύνησης της επίδρασης της προσταθεροποίησης μελετώνται δύο περιπτώσεις με σκοπό την σύγκρισή τους.

Η πρώτη περίπτωση αφορά την επίλυση των προσταθεροποιημένων εξισώσεων στο ευθύ πρόβλημα και στις συζυγείς εξισώσεις, ενώ η δεύτερη περίπτωση αφορά την επίλυση των μη-προσταθεροποιημένων ευθέων και συζυγών εξισώσεων. Συνεπώς, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα μπορούν να προκύψουν συγκριτικά σχόλια και συμπεράσματα ως προς την επίδραση της προσταθεροποίησης στις παραγωγούς ευαισθησίας.



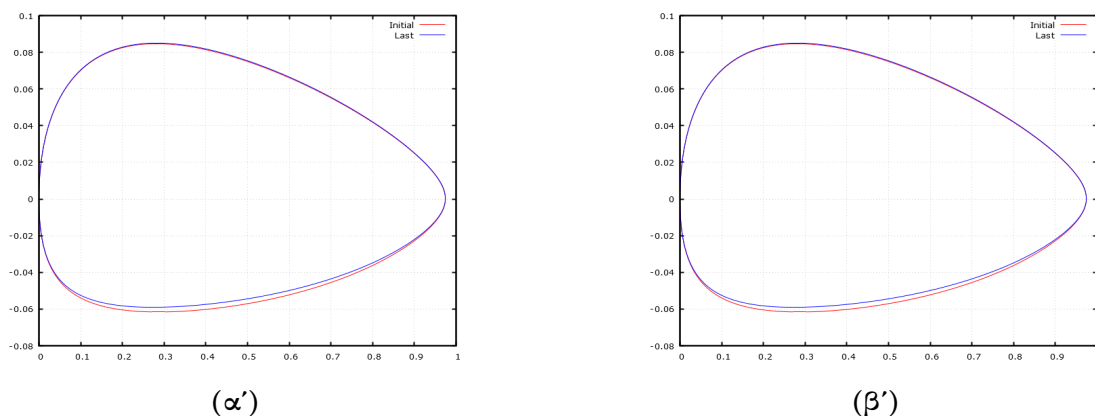
Σχήμα 7.2: Η αρχική μορφή της αεροτομής που βελτιστοποιείται.

Η παραμετροποίηση της γεωμετρίας γίνεται με 17 σημεία ελέγχου Bézier και, έτσι, η γεωμετρία της καμπύλης αρχικά έχει την μορφή του σχήματος 7.2. Η βελτιστοποίηση της γεωμετρίας της αεροτομής γίνεται με τη μετατόπιση των σημείων ελέγχου Bézier, ώστε να προκύψει μια νέα, που να παράγει μεγαλύτερη δύναμη άνωσης. Επιλέγοντας τα σημεία ελέγχου, στα οποία επιτρέπεται η μετατόπιση, ορίζονται οι μεταβλητές σχεδιασμού.



Σχήμα 7.3: Αεροτομή παραμετροποιημένη με καμπύλη Bézier, $M_\infty = 0.1$, $a_\infty = 0^\circ$:
 (α') Η προκύπτουσα αεροτομή μαζί με τα σημεία ελέγχου Bézier που την παραμετροποιούν.
 (β') Το καρτεσιανό πλέγμα που κατασκευάστηκε για τη βελτιστοποίηση μαζί με την αεροτομή. Η ανεξαρτησία πλέγματος επιτυγχάνεται με το ελάχιστο εμβαδόν της κυψέλης ίσο με $\Omega_{min} = 1 \times 10^{-4}$ και συνολικό αριθμό κυψελών 40.000 για υπολογιστικό χωρίο διάστασης 12×12 και μοναδιαία χορδή.

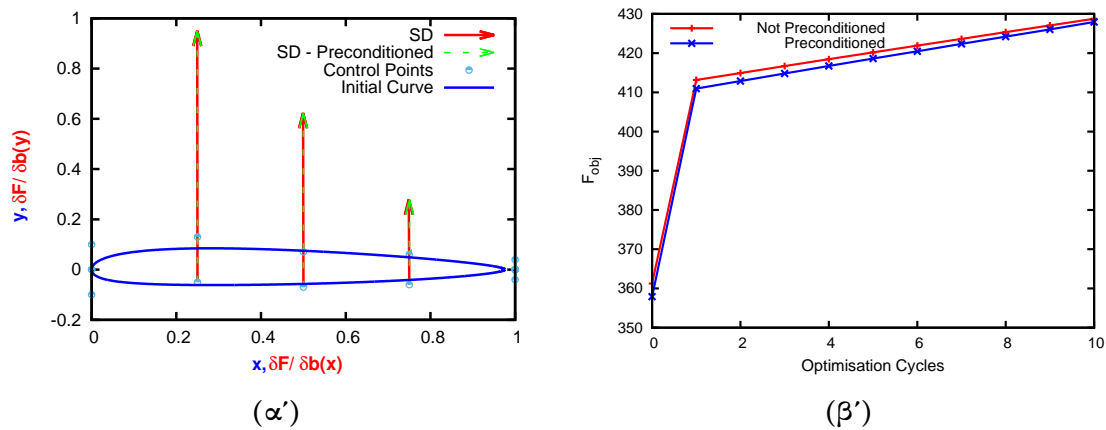
Για να αποφευχθεί η στροφή της αεροτομής και η αύξηση της δύναμης της άνωσης μέσω της γωνίας πρόσπτωσης, τα σημεία ελέγχου που επιλέγονται ως μεταβλητές σχεδιασμού είναι τα σημεία που βρίσκονται μακριά από την ακμή πρόσπτωσης και εκφυγής, δηλαδή τα σημεία (2, 3, 4, 12, 13, 14) στο σχήμα 7.3α'. Επιπροσθέτως, λόγω του ότι μελετάται ατριβής ροή χωρίς περιορισμούς, η συνάρτηση κόστους είναι συνεχώς αύξουσα με αποτέλεσμα η συνάρτηση να συνεχίζει να αυξάνεται σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης χωρίς να εντοπίζει κάποιο ακρότατο. Έτσι, η διαδικασία επιλέγεται να σταματήσει με το πέρας 10 κύκλων.



Σχήμα 7.4: Αεροτομή παραμετροποιημένη με καμπύλη Bézier (χωρίς κλίμακα), $M_\infty = 0.1$, $a_\infty = 0^\circ$: (α') Σύγκριση αρχικής και τελικής γεωμετρίας μετά το πέρας δέκα κύκλων βελτιστοποίησης με την επίλυση των προσταθεροποιημένων εξισώσεων στο ευθύ και συζυγές πρόβλημα. (β') Σύγκριση αρχικής και τελικής γεωμετρίας μετά το πέρας δέκα κύκλων βελτιστοποίησης με την επίλυση των μη-προσταθεροποιημένων εξισώσεων στο ευθύ και συζυγές πρόβλημα.

Με το πέρας των δέκα (10) κύκλων βελτιστοποίησης, η αρχική γεωμετρία μεταβάλλεται όπως φαίνεται στα σχήματα 7.4α', 7.4β'. Παρατηρείται ότι, για τη μεγιστοποίηση της άνωσης ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης τείνει να μεταβάλει τη μορφή της γεωμετρίας στην πλευρά υπερπίεσης. Αυτό γιατί, μειώνοντας την καμπυλότητα της γεωμετρίας μειώνεται η επιτάχυνση της ροής που προκαλείται από τη γεωμετρία και, έτσι, αυξάνεται η στατική πίεση ώστε τελικά να αυξηθεί η συνολική δύναμη άνωσης. Συγκρίνοντας τις δύο γεωμετρίες, παρατηρείται ότι οι διαφορές μεταξύ των τελικών γεωμετριών είναι στο τρίτο σημαντικό ψηφίο.

Στα σχήματα 7.5α' και 7.5β' παρουσιάζονται συγκριτικά διαγράμματα των παραγώγων ευαισθησίας και της συνάρτησης κόστους που προκύπτει και στις δύο περιπτώσεις.



Σχήμα 7.5: Αεροτομή παραμετροποιημένη με καμπύλη Bézier, $M_\infty = 0.1$, $a_\infty = 0^\circ$: (α') Συγκριτικό διάγραμμα των διανυσμάτων των κανονικοποιημένων παραγώγων ευαισθησίας (ως προς το μέτρο του μεγαλύτερου) σε κάθε σημείο ελέγχου Bézier κατά την επίλυση των προσταθεροποιημένων και μη εξισώσεων. Λόγω του ότι οι παράγωγοι ευαισθησίας στην πλευρά υπερπίεσης είναι δυο τάξεις μεγαλύτερες απ' ότι στην πλευρά υποπίεσης διακρίνονται μόνο αυτές που βρίσκονται στην πλευρά υπερπίεσης. (β') Οι τιμές της συνάρτησης κόστους που προκύπτουν σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Στην περίπτωση των προσταθεροποιημένων εξισώσεων παρατηρείται μια διαφορά στους πρώτους κύκλους βελτιστοποίησης η οποία μειώνεται όσο αυξάνονται οι κύκλοι βελτιστοποίησης.

Συνεπώς, με την εφαρμογή προσταθεροποίησης είναι δυνατή η επιτάχυνση της επίλυσης των συζυγών εξισώσεων σε χαμηλούς αριθμούς Mach, χωρίς να επηρεάζεται η ακρίβεια υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας, τελικά, να μπορεί πραγματοποιηθεί βελτιστοποίηση μορφής στη γεωμετρία της αεροτομής.

Κεφάλαιο 8

Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα

Ανακεφαλαιώνοντας, η διπλωματική εργασία πραγματεύεται τον προγραμματισμό, τη δοκιμή και πιστοποίηση ενός προσταθεροποιητή χαμηλών αριθμών Mach, επεκτείνοντας έτσι υπάρχον λογισμικό επίλυσης διδιάστατων συμπιεστών ροών σε μη-οριόδετα πλέγματα. Αρχικά, αναλύεται ο τρόπος διακριτοποίησης και επίλυσης των εξισώσεων ροής με τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών (Cut-Cell) ενώ, στη συνέχεια, παρουσιάζεται το επιλεγέν μητρώο προσταθεροποίησης μαζί με τις απαραίτητες τροποποιήσεις για τον προγραμματισμό του στο σχήμα επίλυσης. Στη συνέχεια, διατυπώνονται οι συζυγείς εξισώσεις των μόνιμων εξισώσεων Euler με τη συνεχή συζυγή μέθοδο καθώς και η διαδικασία προσταθεροποίησής τους.

Το λογισμικό βάσης, υλοποιημένο στη γλώσσα προγραμματισμού C++, είχε τη δυνατότητα να επιλύει διδιάστατες συμπιεστές και στρωτές ροές για μόνιμα και μη-μόνιμα πεδία. Αρχικά, τροποποιήθηκε κατάλληλα, ώστε να προγραμματιστεί η προσταθεροποίηση χαμηλών αριθμών Mach για την επίλυση μόνιμων και ατριβών ροών. Ακολούθως, διερευνήθηκε η προσταθεροποίηση των χρονικά μη-μόνιμων ατριβών ροών. Για το λόγο αυτό, προγραμματίστηκε χρονική διακριτοποίηση 2ης τάξης με στόχο την αύξηση της ακρίβειας στο χρόνο. Έπειτα, προγραμματίστηκε η μέθοδος προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach και για τον επιλύτη του συζυγούς πεδίου. Σχετικά με τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης, ο προγραμματισμός του είχε αρχικά πραγματοποιηθεί με σειριακό τρόπο και, έτσι, παραλληλοποιήθηκε, ώστε να συμβαδίζει με τον υπόλοιπο κώδικα.

Σχετικά με τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν, αρχικά επιλέχθηκαν μόνιμες και ατριβείς ροές γύρω από μεμονωμένη αεροτομή NACA 0012 για ένα εύρος αριθμών Mach και μόνιμη, ατριβή ροή σε μια υπεραντωτική διάταξη (αεροτομή με flap σε έκταση). Ακολούθως, μελετήθηκε η αεροτομή NACA 0012 σε μη-μόνιμη ροή. Κατόπιν, έγινε πρόβλεξη σε αγωγό με ενδιάμεση απότομη διεύρυνση για μόνιμη, στρωτή ροή. Τέλος, πραγματοποιήθηκε βελτιστοποίηση μορφής μιας αεροτομής με τη συνεχή συζυγή μέθοδο για μόνιμη και ατριβή ροή με τη χρήση

των προσταθεροποιητών που προγραμματίστηκαν.

Οι περιπτώσεις που μελετήθηκαν συγκρίθηκαν είτε με τον επιλύτη που υπήρχε πριν την εφαρμογή προσταθεροποίησης, [9], είτε με λογισμικό της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ που χρησιμοποιεί οριόδετα μη-δομημένα πλέγματα, ώστε να διακριβωθεί η επίδραση της προσταθεροποίησης και να εξαχθούν συμπεράσματα. Τα κυριότερα αυτών είναι:

- ⇒ Στην περίπτωση που μελετώνται μόνιμες ροές, ατριβείς ή στρωτές, παρατηρήθηκε ότι η χρήση της προσταθεροποίησης στον επιλύτη με μη-οριόδετα πλέγματα είναι ωφέλιμη, ως προς την επιτάχυνση, στο εύρος ταχυτήτων $M_\infty < 0.2$. Παράλληλα, διαπιστώθηκε ότι κατά την επίλυση των προσταθεροποιημένων εξισώσεων, τα υπόλοιπα που προκύπτουν διαφέρουν από αυτά όταν επιλύονται οι μη-προσταθεροποιημένες εξισώσεις, κυρίως στα σημεία ανακοπής όπου ο προσταθεροποιητής είναι έντονα ενεργοποιημένος και τα ροϊκά μεγέθη παρουσιάζουν τις μεγαλύτερες διαφορές. Επιπροσθέτως, στην περίπτωση της υπεραντωτικής διάταξης (υποκεφάλαιο 5.3) διαπιστώθηκε ότι η χρήση προσταθεροποιητή στον επιλύτη μη-οριόδετων πλεγμάτων βελτίωσε σημαντικά την ακρίβεια της λύσης. Στον επιλύτη της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ η βελτίωση αυτή φαίνεται πιο μικρή αφού η μη-προσταθεροποιημένη είχε πιο μικρές διαφορές, λόγω του πολύ πυκνού πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε.
- ⇒ Στην περίπτωση που μελετώνται μη-μόνιμες ροές, παρατηρήθηκε διαφορά φάσης μεταξύ των δύο λύσεων. Η συμπεριφορά αυτή επαληθεύτηκε με άλλο επιλύτη μη-δομημένων οριόδετων πλεγμάτων του ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ, [30], στον οποίο έγινε προσταθεροποίηση με το ίδιο μητρώο. Η προσταθεροποίηση μη-μόνιμων ροών και η επίδραση των μητρώων προσταθεροποίησης σε αυτές παρουσιάζει αρκετό ενδιαφέρον ως προς τη διερεύνηση, η οποία απαιτεί περαιτέρω ανάλυση, ίσως σε μια νέα διπλωματική εργασία.
- ⇒ Στην περίπτωση προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach στις συζυγείς εξισώσεις, παρατηρήθηκε επιτάχυνση σύγκλισης μέχρι και 5 φορές, χωρίς να παρουσιάζονται μεγάλες διαφορές στις παραγώγους ευαισθησίας, με αποτέλεσμα οι βέλτιστες γεωμετρίες να προκύψουν πρακτικά ίδιες.

Λαμβάνοντας υπόψη τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν και τα προβλήματα που παρουσιάστηκαν θα ήταν παράλειψη να γίνουν προτάσεις με σκοπό την περαιτέρω ανάπτυξη και επέκταση του λογισμικού μη-οριόδετων πλεγμάτων. Αρχικά, με την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας το λογισμικό έχει πλέον την απαραίτητη υποδομή, προγραμματιστικά, ώστε να είναι δυνατή η μελέτη διαφόρων μητρώων προσταθεροποίησης, [23], και, τελικά, να πραγματοποιηθεί μια συγκριτική μελέτη μεταξύ αυτών. Παράλληλα, θα μπορούσε να υλοποιηθεί η πιο πάνω μέθοδος και στον παράλληλο κώδικα που είναι προγραμματισμένος σε επεξεργαστές καρτών γραφικών, [11]. Ενδιαφέρον θα είχε επίσης, όπως έχει αναφερθεί, η περαιτέρω διερεύνηση, ως προς την επίδραση των μητρώων προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach, σε χρονικά μη-μόνιμες

ροές και η σύγκριση των αποτελεσμάτων με πειραματικά δεδομένα. Τέλος, προς μια άλλη κατεύθυνση, η προσθήκη ενός επιπλέον τύπου οριακών συνθηκών, των περιοδικών, θα έδινε τη δυνατότητα μελέτης πτερυγώσεων, στροβίλων και συμπιεστών, αντίστοιχα.

Βιβλιογραφία

- [1] Vieceili, J. A.: *A computing method for incompressible flows bounded by moving walls*. Journal of Computational Physics 8,119-143, 1971.
- [2] Peskin, C.: *Flow patterns around heart valves: A numerical method*. Journal of Computational Physics, 10:252–271, 1972.
- [3] Peskin, C.: *The immersed boundary method*. Acta Numerica, pages 479–517, 2002.
- [4] *Heart animations computed by the immersed boundary method*. <http://www.math.nyu.edu/faculty/peskin/myo3D/index.html>.
- [5] Bandringa, H.: *Immersed boundary methods*. Master Thesis in Applied Mathematics. Institute of Mathematics and Computing Science, University of Groningen, 2010.
- [6] Udaykumar, H.S., Mittal, R., Rampunggoon, P., and Khanna, A.: *A sharp interface cartesian grid method for simulating flows with complex moving boundaries*. Journal of Computational Physics, 174(1):345 – 380, 2001, ISSN 0021-9991.
- [7] Αποστόλου, Π.: *Μετακίνηση-Προσαρμογή 2Δ και 3Δ Μη-Δομημένων Πλεγμάτων με την Τεχνική των Στρεπτικών Ελατηρίων*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2015.
- [8] Kang, Seongwon, Iaccarino, Gianluca, Ham, Frank, and Moin, Parviz: *Prediction of wall-pressure fluctuation in turbulent flows with an immersed boundary method*. Journal of Computational Physics, 228(18):6753 – 6772, 2009, ISSN 0021-9991.
- [9] Σαμούχος, Κ.: *Η συνεχής συζυγής μέθοδος σε μη-οριόδετα πλέγματα για τη βελτιστοποίηση στροβιλομηχανών*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, σε εξέλιξη.
- [10] Κατσανούλης, Σ.: *Προγραμματισμός Λογισμικού για την Επίλυση Μη-Μόνιμων Πεδίων Ροής με Κινούμενα Στερεά Όρια με τη Μέθοδο των Τεμνόμενων Κυψελών*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2015.
- [11] Αμαρτωλός, Ν.: *Προγραμματισμός Επιλύτη Εξισώσεων Euler σε Διδιάστατη Ροή με τη Μέθοδο των Τεμνόμενων Κυψελών (Cut-Cells) σε Επεξεργαστές Καρτών Γραφικών*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2015.
- [12] Turkel, E.: *Preconditioned methods for solving the Incompressible and low speed Compressible equations*. Journal of Computational Physics, 72:277–298, 1987.

- [13] Roe, P.: *Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*. Journal of Computational Physics, 43(2):357–372, 1981.
- [14] Laney, C.B.: *Computational Gasdynamics*. Cambridge University Press, 1998, ISBN 9781107393608. <https://books.google.gr/books?id=pcwLAQAAQBAJ>.
- [15] Michalak K., Ollivier Gooch C.: *Limiters for unstructured higher-order accurate solutions of the euler equations*. 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, January 2008.
- [16] Barth T. J., Jespersen D. C.: *The design and application of upwind schemes on unstructured meshes*. AIAA paper 89-0366, January 1989.
- [17] Venkatakrishnan, V.: *On the accuracy of limiters and convergence to steady state solutions*. AIAA JOURNAL, 1993, ISSN 0021-9991. Computer Sciences Corp., Aerospace Sciences Meetings.
- [18] Courant R., Friedrichs K., Lewy H.: *Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik*. Mathematische Annalen, 100:32–74, 1928.
- [19] Γιαννάκογλου, Κ.Χ.: *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς*. ΕΜΠ, 2003.
- [20] Choi, D. and Merkle, C.L.: *Application of time-iterative schemes to incompressible flow*. AIAA JOURNAL, 23(10):1518–1524, 1985.
- [21] Choi, Y.H. and Merkle, C.L.: *The application of preconditioning in viscous flows*. Journal of Computational Physics, 105:207–223, 1993.
- [22] Eriksson, L. E.: *A preconditioned Navier-Stokes Solver for low mach number flows*. Computational Fluid Dynamics, 1996.
- [23] Turkel, E.: *Review of preconditioning methods for fluid dynamics*. Applied Numerical Mathematics, 12(1):257 – 284, 1993, ISSN 0168-9274.
- [24] Leer, W.-T. Lee, P. Roe B. van: *Characteristic time-stepping or local preconditioning of the euler equations*. 10th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, pages 260–282, 1991. <http://hdl.handle.net/2027.42/76764>.
- [25] Dohyung, L.: *Local Preconditioning of the Euler and Navier-Stokes equations*. Doctor of Philosophy in Aerospace Engineering. University of Michigan, 1996.
- [26] Darmofal, D.L and Schmidt, P.J.: *The importance of eigenvectors for local preconditioners of the euler equations*. Journal of Computational Physics, 127:346–362, 1996.
- [27] Dohyung, L.: *Design criteria for local Euler Preconditioning*. Journal of Computational Physics, 144(2):423–459, 1998.
- [28] Ασοῦτη, Β.: *Μέθοδοι αεροδυναμικής ανάλυσης και σχεδιασμού για ροές υψηλών και χαμηλών ταχυτήτων, σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2009.
-

- [29] Asouti, V., Trompoukis, X., Kampolis, I., and Giannakoglou, K.: *Unsteady CFD computations using vertex-centered finite volumes for unstructured grids on Graphics Processing Units*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 67(2):232–246, May 2011.
 - [30] Trompoukis, X., Asouti, V., Kampolis, I., and Giannakoglou, K.: *CUDA implementation of vertex-centered, finite volume CFD methods on unstructured grids with flow control applications*. In *GPU Computing Gems*, chapter 17, pages 207–224. Addison-Wesley Professional, 2011.
 - [31] Γιαννάκογλου, Κ.Χ.: *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στις Στροβιλομηχανές*. ΕΜΠ, 2006.
 - [32] Παπαδημητρίου, Δ.: *Συζυγείς (Adjoint) διατυπώσεις για την ανάλυση-σχεδίαση περυγώσεων στροβιλομηχανών και τη βέλτιστη προσαρμογή πλέγματος με a posteriori εκτίμηση σφάλματος*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2007.
-