

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
Βελτιστοποίησης

A Posteriori και A Priori Χρήση των Τεχνικών Λήψη Απόφασης
TOPSIS και ELECTRE I σε Προβλήματα Πολυκριτηριακής
Βελτιστοποίησης με Εξελικτικούς Αλγορίθμους

Διπλωματική Εργασία

Μυρτώ Βουγιουκαλάκη

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2018

Ευχαριστίες

Πρώτα απ' όλα, θα ήθελα μέσα από την καρδιά μου να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για τη συνεχή στήριξη από την αρχή των σπουδών και κυρίως κατά τη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας. Ήταν τεράστια βοήθεια για εμένα ιδιαίτερα κατά την περίοδο που βρισκόμουν στα Χανιά. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τις φίλες μου που είναι πάντα μα πάντα εκεί για εμένα.

Θα ήθελα προφανώς να ευχαριστήσω τον Καθηγητή μου κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου για την οργάνωση, το χρόνο και την υπομονή του. Ήταν πάρα πολύ σημαντικό το ότι ήξερα από την αρχή της διπλωματικής εργασίας και σε κάθε στάδιό της τι πρέπει να κάνω και πώς. Επίσης, κάθε απορία μου λυνόταν άμεσα καθώς η επικοινωνία και η συνεννόηση ήταν ειλικρινά άψογες.

Για την υπομονή και τη βοήθεια θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον Υποψήφιο Διδάκτορα Δημήτρη Καψούλη καθώς δεν υπήρξε ούτε μία φορά που δεν ασχολήθηκε με κάποια δυσκολία μου ή δεν απάντησε σε e-mail ή τηλέφωνο ή οτιδήποτε. Έλυνε κάθε πρόβλημα κυριολεκτικά κατευθείαν και με αυτόν τον τρόπο προχωρούσε η διπλωματική εργασία.

Αξίζει να πω πως η οργάνωση και η βοήθεια τόσο του κ. Γιαννάκογλου όσο και του Δημήτρη με έκαναν περιόδους που με είχε κουράσει πάρα πολύ η σχολή να συνεχίζω να ασχολούμαι με τη διπλωματική μου εργασία.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον Κίμωνα Φράγκο και τον Τάσο Παπαγεωργίου για τη βοήθεια τον καιρό που διάβαζα στο Όμικρον.

Τέλος ένα μεγάλο ευχαριστώ στους φίλους και συμφοιτητές Χριστίνα Τζινάβα και Σπύρο Πέτσα για τα τελευταία δύο χρόνια.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ
ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

A Posteriori και A Priori Χρήση των Τεχνικών Λήψης Απόφασης TOPSIS και ELECTRE I σε Προβλήματα Πολυκριτηριακής Βελτιστοποίησης με Εξελικτικούς Αλγορίθμους

Διπλωματική Εργασία

Μυρτώ Βουγιουκαλάκη

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2018

Περίληψη

Η διπλωματική εργασία αφορά τεχνικές που σχετίζονται με διαδικασίες λήψης αποφάσεων σε προβλήματα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης, MCDM (Multiple Criteria Decision Making). Θεμελιώνονται, προγραμματίζονται και εφαρμόζονται σε προβλήματα MOO (Multi-Objective Optimization) δύο τεχνικές MCDM, οι TOPSIS (Technique for the Order of Preference by Similarity to the Ideal Solution) και ELECTRE I (ELimination Et Choix Traduisant la REalité I). Τα προβλήματα αυτά επιλύονται χρησιμοποιώντας εξελικτικούς αλγορίθμους (EA) ως βασική μέθοδο ανίχνευσης βέλτιστων λύσεων. Οι δύο τεχνικές ενσωματώνουν τις προτιμήσεις του λαμβάνοντος την απόφαση στις συναρτήσεις στόχους με τη μορφή βαρών και εφαρμόζονται στα προβλήματα βελτιστοποίησης εκ των υστέρων, 'a posteriori', και εκ των προτέρων, 'a priori'. Στην πρώτη περίπτωση, οι δύο τεχνικές εφαρμόζονται στις λύσεις του μετώπου Pareto ενός προβλήματος βελτιστοποίησης και επιλέγεται μία βέλτιστη λύση ενώ στη δεύτερη εφαρμόζονται στις λύσεις κάθε γενιάς του EA και υπολογίζεται ένα κατάλληλα εστιασμένο μέτωπο Pareto. Η επίλυση των προβλημάτων βελτιστοποίησης πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας το λογισμικό EASY (Evolutionary Algorithm SYstem). Αρχικά, οι τεχνικές TOPSIS και ELECTRE I εφαρμόζονται σε μαθηματικά και, στη συνέχεια, σε αεροδυναμικά προβλήματα βελτιστοποίησης. Τα τρία αεροδυναμικά προβλήματα που επιλύονται είναι η βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης διχηητικής αεροτομής, μίας σταθερής περύγωσης συμπίεστη και της μεμονωμένης διχηητικής πτέρυγας ONERA M6. Εξετάζονται η συνάφεια μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο τεχνικών και των προτιμήσεων του λαμβάνοντος την απόφαση.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING
FLUIDS DEPARTMENT
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

**A Posteriori and A Priori Implementation of the Multi-Criteria
Decision Making Techniques TOPSIS and ELECTRE I in
Evolutionary Algorithm Based Optimization**

Diploma Thesis
by

Myrto Vougioukalaki

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, September 2018

Abstract

This diploma thesis is concerned with techniques related to decision making processes in multi-objective optimization problems, MCDM (Multiple Criteria Decision Making). Two MCDM techniques, TOPSIS (Technique for the Order of Preference by Similarity to the Ideal Solution) and ELECTRE I (ELimination Et Choix Traduisant la REalité I) are presented, programmed and applied to multi-objective optimization problems. These problems are solved using evolutionary algorithms (EA) as the basic technique of tracking down optimal solutions. Both techniques incorporate the preferences of the decision maker concerning the objective functions as weights and are applied to optimization problems in retrospect, “a posteriori”, and in advance, “a priori”. In the first case, both MCDM techniques are applied to the solutions of the Pareto front of an optimization problem and one optimal solution is selected. In the second case, both techniques are applied to the solutions of each generation of the EA and an appropriately oriented Pareto front is determined. The optimization problems are solved using the software called EASY (Evolutionary Algorithm SYstem). Initially, both techniques TOPSIS and ELECTRE I are applied to mathematical minimization problems and subsequently in aerodynamic optimization problems. The three aerodynamic problems which are solved are the shape optimization of an isolated transonic airfoil, the shape optimization of a stator blade of a compressor and the shape optimization of the isolated transonic wing ONERA M6. The coherence between the results of these techniques and the preferences of the decision maker are examined.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

1	Εξελικτικοί Αλγόριθμοι και το Λογισμικό EASY	1
1.1	Προβλήματα Βελτιστοποίησης και ΕΑ	1
1.1.1	Τρόπος Λειτουργίας των ΕΑ	2
1.1.2	Κωδικοποίηση των Μεταβλητών Σχεδιασμού σε ΕΑ	5
1.1.3	Εξελικτικοί Τελεστές	5
1.1.4	Τεχνικές Βαθμολόγησης των Λύσεων στην Πολυκριτηριακή Βελτιστοποίηση	6
1.2	Το Λογισμικό Βελτιστοποίησης EASY	8
1.2.1	Πολυεπίπεδη Βελτιστοποίηση	8
1.2.2	Παράλληλη Επεξεργασία	9
1.2.3	Κατανεμημένοι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι	9
1.2.4	Χρήση Μεταπροτύπων	10
2	MCDM και Τεχνικές Υλοποίησης	11
2.1	‘Α posteriori’ και ‘a priori’ Τεχνικές MCDM	11
2.1.1	Παραδείγματα Τεχνικών MCDM	12
2.2	Η τεχνική TOPSIS	15
2.2.1	Περιγραφή της Τεχνικής TOPSIS	15
2.3	Η Τεχνική ELECTRE I	19
2.3.1	Περιγραφή της Τεχνικής ELECTRE I	19
2.4	Παράδειγμα Εφαρμογής των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I	21

3 Εφαρμογή των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I σε Μαθηματικά	
 Προβλήματα ΜΟΟ	29
3.1 ‘Α posteriori’ Εφαρμογή των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I	29
3.1.1 Μαθηματικά Προβλήματα Ελαχιστοποίησης Δύο Στόχων	30
3.1.2 Μαθηματικά Προβλήματα Ελαχιστοποίησης Τριών Στόχων . .	40
3.2 ‘Α priori’ Εφαρμογή των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I	54
3.2.1 Μαθηματικά Προβλήματα Ελαχιστοποίησης Δύο Στόχων	55
3.2.2 Μαθηματικά Προβλήματα Ελαχιστοποίησης Τριών Στόχων . .	60
4 Εφαρμογή των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I σε Αεροδυναμικά	
 Προβλήματα ΜΟΟ	71
4.1 Βελτιστοποίηση της Μορφής μίας Μεμονωμένης Διηχητικής Αεροτομής	73
4.1.1 ‘Α posteriori’ Εφαρμογή των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I	75
4.1.2 ‘Α priori’ Εφαρμογή των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I . .	79
4.2 Βελτιστοποίηση της Μορφής μιας Σταθερής Πτερύγωσης Συμπιεστή .	82
4.2.1 ‘Α posteriori’ Εφαρμογή των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I	84
4.2.2 ‘Α priori’ Εφαρμογή των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I . .	88
4.3 Βελτιστοποίηση της Μορφής της Μεμονωμένης Διηχητικής Πτέρυγας	
ONERA M6	91
4.3.1 ‘Α posteriori’ Εφαρμογή των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I	92
4.3.2 ‘Α priori’ Εφαρμογή των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I . .	97
5 Συμπεράσματα	101
Βιβλιογραφία	

Κεφάλαιο 1

Εξελικτικοί Αλγόριθμοι και το

Λογισμικό EASY

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται περιγραφή της θεωρίας των εξελικτικών αλγορίθμων (Evolutionary Algorithms, EA) και των βημάτων με τα οποία αυτή ενσωματώνεται στη διαδικασία βελτιστοποίησης. Επίσης, παρουσιάζεται το λογισμικό βελτιστοποίησης που κάνει πράξη την παραπάνω θεωρία και ονομάζεται EASY (Evolutionary Algorithm SYstem). Η παρουσίαση αυτή δεν αφορά μόνο τα χαρακτηριστικά που συνδέονται με τους EA, αλλά και τις επιπλέον δυνατότητες του EASY που επιταχύνουν την επίλυση προβλημάτων.

1.1 Προβλήματα Βελτιστοποίησης και EA

Η επίλυση μηχανολογικών προβλημάτων βελτιστοποίησης είναι ένας τομέας αναζήτησης και ανάπτυξης που απασχολεί ολοένα και περισσότερο τη σύγχρονη επιστημονική κοινότητα. Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης αφορά στην ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση ενός ή περισσότερων μεγεθών χρησιμοποιώντας αντίστοιχα συναρτήσεις κόστους ή καταλληλότητας F_j , ($j = 1, \dots, M_o$) [1]. Μία πιθανή λύση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης ορίζεται ως ένα διάνυσμα $\vec{x}_i = (x_1, x_2, \dots, x_{M_e})$ με M_e βαθμούς ελευθερίας (degrees of freedom) ή αλλιώς μεταβλητές σχεδιασμού (design variables). Η τιμή που προκύπτει από κάθε πιθανή λύση για καθεμιά από τις M_o συναρτήσεις κόστους ή καταλληλότητας συμβολίζεται με $y_j = F_j(\vec{x}_i)$. Για την επίτευξη των καλύτερων δυνατών τιμών των συναρτήσεων αυτών γίνεται βελτιστοποίηση είτε με στοχαστικές είτε με αιτιοκρατικές μεθόδους [2]. Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι χρησιμοποιούν παραγώγους των

συναρτήσεων στόχων και, συνήθως, οδηγούνται ταχύτερα σε σύγκλιση. Εγκλωβίζονται όμως εύκολα σε τοπικά ακρότατα, ανάλογα με την αρχική τους λύση, μη-οδηγώντας τελικά στο βέλτιστο αποτέλεσμα.

Την αδυναμία αυτή είναι σε θέση να ξεπεράσουν οι ΕΑ [3], οι οποίοι ανήκουν στις στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης. Έχουν απλό μη-μαθηματικό υπόβαθρο και δε διαχειρίζονται μεμονωμένες λύσεις αλλά πληθυσμούς υποψήφιας λύσεων. Διαθέτουν την ικανότητα διαχείρισης μίας ή περισσότερων συναρτήσεων κόστους ή καταλληλότητας και ενσωμάτωσης του λογισμικού αξιολόγησης στη διαδικασία βελτιστοποίησης αντιμετωπίζοντάς το ως ένα μαύρο κουτί. Επίσης, προσαρμόζονται εύκολα σε διαφορετικά προβλήματα χωρίς την απαίτηση τροποποιήσεων στη διαδικασία βελτιστοποίησης. Βασική τους όμως αδυναμία είναι ο μεγάλος χρόνος ολοκλήρωσης και, κατά συνέπεια, το υψηλό κόστος της βελτιστοποίησης καθώς οι ΕΑ απαιτούν μεγάλο αριθμό αξιολογήσεων. Ο αριθμός αυτός αυξάνεται με την αύξηση των μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος οδηγώντας σε μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Έτσι, παρόλο που πρωτοεμφανίστηκαν τη δεκαετία του 1960, χρησιμοποιούνται ευρέως ως μέσο επίλυσης προβλημάτων τα τελευταία είκοσι χρόνια λόγω του συνδυασμού μείωσης κόστους και βελτίωσης των δυνατοτήτων των υπολογιστών.

Οι ΕΑ βασίζονται στη θεωρία της φυσικής εξέλιξης του Δαρβίνου [4], σύμφωνα με την οποία τα άτομα ενός πληθυσμού συναγωνίζονται και τα καταλληλότερα, δηλαδή αυτά που προσαρμόζονται ευκολότερα και γρηγορότερα στις περιβάλλουσες συνθήκες συνεισφέρουν περισσότερους απογόνους στην επόμενη γενιά [5]. Αντίθετα, τα λιγότερο κατάλληλα δίνουν λιγότερους απογόνους από γενιά σε γενιά και, τελικά, τα χαρακτηριστικά τους ενδέχεται ακόμη και να εξαφανιστούν. Η διαδικασία αυτή οδηγεί στη διάδοση των ωφέλιμων στοιχείων των ατόμων σε περισσότερους απογόνους στις επόμενες γενιές, δηλαδή σε απογόνους καταλληλότερους από τους γονείς για το εκάστοτε περιβάλλον. Η φυσική αυτή θεωρία σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης αντιστοιχεί στην εξερεύνηση του χώρου των λύσεων και στην εκμετάλλευση των περιοχών αυτού που είναι πιο πολλά υποσχόμενες.

1.1.1 Τρόπος Λειτουργίας των ΕΑ

Οι ΕΑ επεξεργάζονται ένα σύνολο μ πιθανών λύσεων που αποκαλούνται γονείς (parents), από το οποίο προκύπτει ένα σύνολο λ νέων, πιθανά καλύτερων, λύσεων που αποκαλούνται απόγονοι (offsprings). Για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιείται στη συνέχεια, ο συμβολισμός (μ, λ) ΕΑ για έναν τέτοιο αλγόριθμο. Οι γονείς της επόμενης γενιάς προκύπτουν από τον πληθυσμό των απογόνων και, αν είναι επιθυμητό, και των γονέων της προηγούμενης γενιάς. Σε κάθε γενιά εντοπίζεται και αποθηκεύεται το σύνολο των καλύτερων τρεχουσών λύσεων, οι οποίες αποτελούν τον πληθυσμό των επιλέκτων (elites) για την υπόψη γενιά. Οι επίλεκτες λύσεις είναι

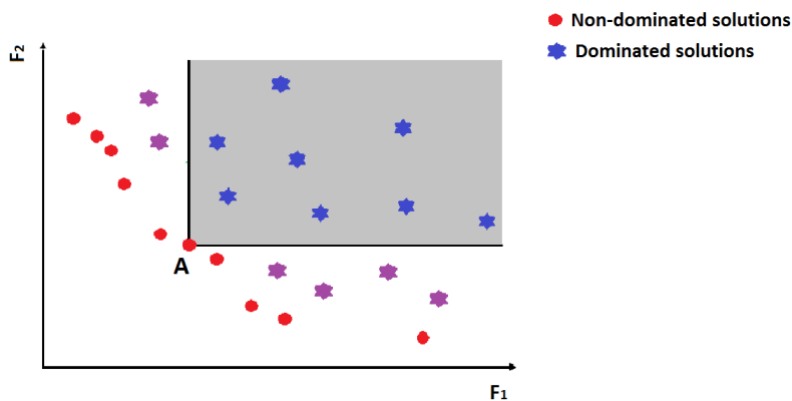
δυνατό να συμβάλλουν επίσης στη δημιουργία των γονέων της επόμενης γενιάς. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται από γενιά σε γενιά μέχρι τον τερματισμό του αλγορίθμου και την απόκτηση του τελικού συνόλου βέλτιστων λύσεων. Ο τερματισμός ενός ΕΑ συμβαίνει όταν γίνει υπέρβαση του μέγιστου αριθμού γενεών ή αξιολογήσεων κατά τις οποίες δεν εντοπίζεται καλύτερη λύση ή καλύτερες λύσεις από αυτές που περιέχει εκείνη η γενιά ή αν ολοκληρωθεί ο μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων που έχει ορίσει ο χρήστης. Τα κριτήρια αυτά είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν και συνδυαστικά.

Μια πιο αναλυτική περιγραφή ενός ΕΑ είναι η παρακάτω [6]. Ο αλγόριθμος αυτός αποτελείται από τρεις πληθυσμούς ατόμων σε κάθε γενιά g . Αυτές είναι οι γονείς $S_{g,\mu}$, οι απόγονοι $S_{g,\lambda}$ και οι ϵ καλύτερες ως εκείνη τη γενιά λύσεις που αποτελούν την ομάδα των επιλέκτων $S_{g,\epsilon}$. Τα σύνολα αυτά αλληλεπιδρούν μεταξύ τους μέσω των συντελεστών επιλογής γονέων (parent selection), διασταύρωσης (crossover-recombination), μετάλλαξης (mutation) και ελιτισμού (elitism) [7]. Οι πληθυσμοί ανανεώνονται από γενιά σε γενιά με αποτέλεσμα με τον τερματισμό του αλγορίθμου, το σύνολο των επιλέκτων να περιέχει τη βέλτιστη ή τις βέλτιστες λύσεις. Η βέλτιστη λύση σε περίπτωση βελτιστοποίησης ενός στόχου, SOO (Single Objective Optimization), δίνει την καλύτερη τιμή της συνάρτησης κόστους αν πρόκειται για πρόβλημα ελαχιστοποίησης ή της συνάρτησης καταλληλότητας αν πρόκειται για πρόβλημα μεγιστοποίησης. Αντίθετα, σε ένα πρόβλημα πολλών στόχων, MOO (Multi Objective Optimization), είναι το σύνολο μη-κυριαρχούμενων λύσεων που συνθέτουν το επονομαζόμενο μέτωπο Pareto [8]. Πιο συγκεκριμένα, ένα διάνυσμα \vec{x}_i κυριαρχεί ενός διανύσματος \vec{x}_j όταν ισχύει $F_j(\vec{x}_i) \leq F_j(\vec{x}_j)$ ή $F_j(\vec{x}_i) \geq F_j(\vec{x}_j)$ για όλους τους M_o στόχους ανάλογα με το αν πρόκειται για πρόβλημα ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης αντίστοιχα. Επιπλέον, οι παραπάνω ανισο-ισότητες πρέπει να ισχύουν στη μορφή ανισότητας για μία τουλάχιστον συνάρτηση. Οι έννοιες της κυριαρχίας και του μετώπου μη-κυριαρχούμενων λύσεων γίνονται αντιληπτές γραφικά χρησιμοποιώντας το σχήμα (1.1). Όπως φαίνεται, οι λύσεις του μετώπου Pareto δεν υπερτερούν η μία έναντι της άλλης επί του συνόλου των κριτηρίων, αλλά κάθε μία υστερεί ως προς κάποιους στόχους και υπερτερεί ως προς κάποιους άλλους.

Η κατά βήμα αποτύπωση του τρόπου λειτουργίας των (μ,λ) ΕΑ παρατίθεται παρακάτω, [6]:

Βήμα 1: Γίνεται επιλογή των μεγεθών μ , λ των πληθυσμών των γονέων και των απογόνων αντίστοιχα, τίθεται $g=0$ (μετρητής γενιών) και γίνεται τυχαία αρχικοποίηση του πληθυσμού λ της μηδενικής γενιάς εντός των ορίων μέσα στα οποία πρέπει να βρίσκονται οι μεταβλητές σχεδιασμού που συνθέτουν κάθε πιθανή λύση. Το σύνολο των επιλέκτων θεωρείται κενό. Σε περίπτωση που είναι διαθέσιμες κάποιες ενδιαφέρουσες λύσεις του συγκεκριμένου προβλήματος ή παρόμοιων προβλημάτων μπορούν να ενσωματωθούν στην αρχικοποίηση. Επιλέγεται η κωδικοποίηση των μεταβλητών σχεδιασμού και ο τύπος των εξελικτικών τελεστών που θα εφαρμοστεί.

Βήμα 2: Πραγματοποιείται κλήση του διαθέσιμου λογισμικού αξιολόγησης για



Σχήμα 1.1: Υπολογισμός των ατόμων στα οποία κυριαρχεί το άτομο A που ανήκει στο μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων.

κάθε άτομο του συνόλου $S^{g,\lambda}$. Εφόσον πρόκειται για πρόβλημα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης χρησιμοποιείται λογισμικό με μεγάλο υπολογιστικό κόστος λ.χ. λογισμικό που υλοποιεί την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes, κάνοντας αυτό το βήμα να φέρει πρακτικά ολόκληρο το κόστος των υπολογισμών. Τα άτομα που αξιολογούνται μαζί με τις τιμές των συναρτήσεων κόστους ή καταλληλότητας που προκύπτουν αποθηκεύονται σε μία βάση δεδομένων. Με αυτόν τον τρόπο, είναι δυνατή η επαναχρησιμοποίησή τους χωρίς την κλήση του λογισμικού αξιολόγησης.

Βήμα 3: Κάθε άτομο της γενιάς λαμβάνει μία τιμή Φ χρησιμοποιώντας μία συνάρτηση χρησιμότητας (utility function) ανάλογα με τις τιμές των συναρτήσεων κόστους ή καταλληλότητας που προκύπτουν από την αξιολόγηση σε σχέση με τα υπόλοιπα άτομα του πληθυσμού. Στην περίπτωση βελτιστοποίησης ενός στόχου η τιμή αυτή ταυτίζεται με την τιμή της συνάρτησης προς ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση. Στην περίπτωση πολλών στόχων χρησιμοποιούνται κριτήρια κυριαρχίας (dominance) και αποστάσεων (distance) ώστε από τις τιμές των συναρτήσεων κόστους ή καταλληλότητας να υπολογιστεί η τιμή του Φ .

Βήμα 4: Γίνεται προσδιορισμός των ατόμων που εντάσσονται στο σύνολο των επιλέκτων. Ο πληθυσμός αυτός προκύπτει συμπληρώνοντας συνολικά ϵ ή λιγότερα άτομα από τον πληθυσμό των απογόνων και από τον πληθυσμό των επιλέκτων της προηγούμενης γενιάς. Αντικαθίστανται, ουσιαστικά, τα ήδη υπάρχοντα άτομα του συνόλου των επιλέκτων που υστερούν σε σχέση με νέους απογόνους. Η επιλογή αυτή γίνεται με βάση την τιμή Φ που προκύπτει από το προηγούμενο βήμα. Στην περίπτωση βελτιστοποίησης ενός στόχου επιλέγεται η τρέχουσα βέλτιστη λύση ενώ στην αντίθετη περίπτωση ένα σύνολο βέλτιστων λύσεων, όπως ήδη αναφέρθηκε. Σημειώνεται πως ενδέχεται κανείς από τους νέους απογόνους να μην υπερτερεί έναντι των επιλέκτων και το σύνολο των ϵ ατόμων να παραμένει αμετάβλητο.

Βήμα 5: Εφαρμόζεται ο τελεστής ελιτισμού με αποτέλεσμα κάποια άτομα του συνόλου των απογόνων να αντικαθίστανται από κάποια του συνόλου των επιλέκτων.

Προς αντικατάσταση, ανάλογα με το χρησιμοποιούμενο σχήμα, μπορούν να επιλεγούν τόσο τα χειρότερα άτομα όσο και κάποια τυχαία.

Βήμα 6: Εφαρμόζεται ο τελεστής επιλογής γονέων στα σύνολα των απογόνων και ενδεχομένως και των γονέων ή των επιλέκτων με στόχο τη δημιουργία του πληθυσμού των γονέων της επόμενης γενιάς. Στη συνέχεια, από αυτούς προκύπτουν οι απόγονοι της νέας γενιάς με εφαρμογή τελεστών διασταύρωσης και μετάλλαξης μεταξύ δύο ή περισσότερων γονέων.

Βήμα 7: Γίνεται έλεγχος του κριτηρίου ή των κριτηρίων σύγκλισης. Σε περίπτωση όπου κανένα κριτήριο δεν ικανοποιείται, τίθεται $g \leftarrow g + 1$ και η διαδικασία επαναλαμβάνεται από το δεύτερο βήμα.

1.1.2 Κωδικοποίηση των Μεταβλητών Σχεδιασμού σε ΕΑ

Για την επίλυση ενός προβλήματος με τη χρήση ΕΑ χρησιμοποιούνται διαφορετικά είδη κωδικοποίησης των μεταβλητών σχεδιασμού. Αυτά είναι η πραγματική (real coding) [7], δυαδική (binary coding) ή δυαδική Gray (binary Gray coding) κωδικοποίηση [9]. Στην πρώτη περίπτωση, χρησιμοποιούνται πραγματικοί αριθμοί για την κωδικοποίηση των μεταβλητών σχεδιασμού. Κάθε λύση έχει τη μορφή του διανύσματος $\vec{x}_i = (x_1, x_2, \dots, x_{M_e})$, με τις συνιστώσες να αποτελούν τους M_e βαθμούς ελευθερίας. Στη δυαδική και στην Gray κωδικοποίηση, κάθε βαθμός ελευθερίας κωδικοποιείται με δυαδικά ψηφία. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, χρησιμοποιείται **αποκλειστικά πραγματική κωδικοποίηση** των μεταβλητών σχεδιασμού.

1.1.3 Εξελικτικοί Τελεστές

Παρακάτω περιγράφεται η λειτουργία των βασικών τελεστών που χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης με τη βοήθεια των ΕΑ.

Ο τελεστής επιλογής γονέων [10] βασίζεται στο σύνολο των απογόνων και αν είναι επιθυμητό και των γονέων ή των επιλέκτων της τρέχουσας γενιάς για τη σύνθεση του συνόλου των γονέων της επόμενης. Στόχος της επιλογής γονέων είναι η προώθηση των ατόμων με καλύτερα χαρακτηριστικά στο σύνολο των γονέων της επόμενης γενιάς. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται η τιμή Φ κάθε ατόμου.

Ο τελεστής διασταύρωσης [11] συνδυάζει τα άτομα του συνόλου των γονέων για τη δημιουργία απογόνων. Στην περίπτωση πραγματικής κωδικοποίησης και διασταύρωσης απλού σημείου επιλέγεται τυχαία μια μεταβλητή του διανύσματος που αντιπροσωπεύει κάποια λύση. Κατά την εφαρμογή του τελεστή διασταύρωσης οι δύο συνιστώσες του απογόνου προκύπτουν ως εξής: Οι μεταβλητές από την αρχή

ως την επιλεγείσα θα είναι ίδιες με του πρώτου γονέα, ενώ οι υπόλοιπες θα ταυτίζονται με τις μεταβλητές του δεύτερου. Η επιλεγείσα συνιστώσα στο νέο απόγονο αποκτά την τιμή

$$x = x^{(1)} + r(x^{(2)} - x^{(1)})$$

με $r \in [0, 1]$. Ανάλογη είναι η διαδικασία και στη διασταύρωση δύο σημείων. Ο τελεστής διασταύρωσης εφαρμόζεται με πιθανότητα διαφορετική αλλά όχι μακρινή της μονάδας (λ.χ. 90%) αφήνοντας μικρό ενδεχόμενο κάποιου απόγονου να ταυτίζονται με τους γονείς από τους οποίους προκύπτουν.

Ο τελεστής μετάλλαξης [12] εφαρμόζεται μετά τη διασταύρωση και θέτει μία πολύ μικρή πιθανότητα (λ.χ. 1%) επιπλέον αλλαγής του νέου ατόμου. Γίνεται επιλογή ενός τυχαίου αριθμού για κάθε συνιστώσα μίας λύσης και η αλλαγή πραγματοποιείται στη μεταβλητή όπου ο αριθμός είναι μικρότερος από την πιθανότητα μετάλλαξης.

1.1.4 Τεχνικές Βαθμολόγησης των Λύσεων στην Πολυκριτηριακή Βελτιστοποίηση

Όπως ήδη αναφέρθηκε στο τρίτο βήμα, στην περίπτωση προβλημάτων βελτιστοποίησης πολλών στόχων χρησιμοποιείται μία τιμή Φ για τη βαθμολόγηση και τη σύγκριση των ατόμων κάθε γενιάς. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται δύο από τις βασικότερες τεχνικές βαθμολόγησης των λύσεων ενός ΕΑ.

Η μέθοδος που χρησιμοποιείται σε αυτήν τη διπλωματική εργασία ονομάζεται SPEA (Strength Pareto EA) [13] και στηρίζεται στην έννοια της κυριαρχίας. Αρχικά εντοπίζονται τα $k_{dominated}$ άτομα στα οποία κυριαρχεί κάθε άτομο $i \in C$ του μετώπου μη-κυριαρχούμενων λύσεων (σχήμα (1.2)) και υπολογίζεται η ισχύς (strength) καθενός από αυτά από την παρακάτω σχέση,

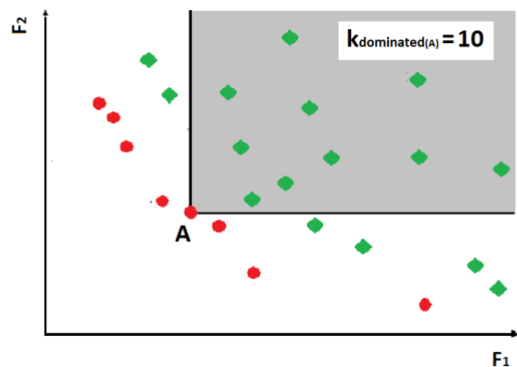
$$\Phi = \frac{k_{dominated}}{(\lambda + \mu + 1)}$$

Στη συνέχεια, υπολογίζεται η ένιαία τιμή κόστους (raw fitness) για κάθε λύση j της γενιάς που δεν ανήκει στο μέτωπο των μη-κυριαρχούμενων λύσεων. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιούνται οι λύσεις του υποσυνόλου C που κυριαρχούν σε κάθε άτομο (σχήμα (1.3)).

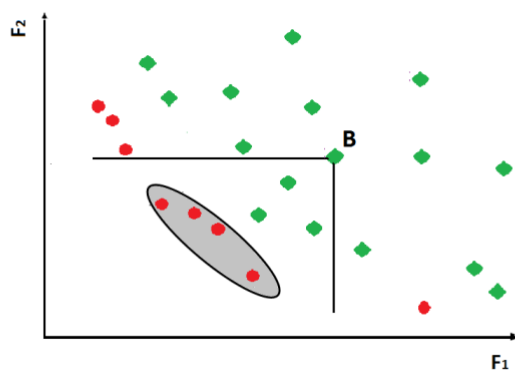
$$\Phi_j = 1 + \sum_{i \in C} \Phi_i$$

Η τελική κατάταξη γίνεται από το καλύτερο στο χειρότερο άτομο με αύξουσα σειρά της τιμής Φ .

Η δεύτερη μέθοδος ονομάζεται NSGA (Non-dominated Sorting Genetic



Σχήμα 1.2: Υπολογισμός των ατόμων στα οποία κυριαρχεί το άτομο A που ανήκει στο μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων.



Σχήμα 1.3: Υπολογισμός των ατόμων του μετώπου μη-κυριαρχούμενων λύσεων από τα οποία κυριαρχείται το άτομο B που δεν ανήκει στο μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων.

Algorithms) [14]. Αρχικά ανατίθεται η ίδια τιμή Φ_0 (λ.χ. 1) σε όλα τα άτομα του μετώπου μη-κυριαρχούμενων λύσεων της γενιάς. Στη συνέχεια, εντοπίζονται τα άτομα που θα αποτελούσαν τις βέλτιστες λύσεις χωρίς να λαμβάνονται υπόψη αυτά του προηγούμενου μετώπου και τους ανατίθεται μία μεγαλύτερη, κοινή για όλα αρχική τιμή. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου να αποκτήσουν τιμή όλα τα άτομα της γενιάς με βάση το επίπεδο κυριαρχίας. Σε δεύτερο στάδιο, οι τιμές διορθώνονται σύμφωνα με την απόσταση μεταξύ των N_f ατόμων κάθε επιπέδου κυριαρχίας. Ορίζεται μία ποσότητα σ η οποία αποτελεί την ελάχιστη επιτρεπτή απόσταση μεταξύ δύο ατόμων του ίδιου επιπέδου. Όταν για ένα άτομο i ισχύει η ανισότητα $d(i,j) < \sigma$, όπου με j συμβολίζεται ένα άτομο της ίδιας γενιάς

συμπεριλαμβανομένου και του i , υπολογίζεται το εξής άθροισμα

$$Sh_i = \sum_{j=1}^{N_f} \left(1 - \frac{d(i,j)}{\sigma}\right)$$

Η τιμή Φ κάθε ατόμου προκύπτει από τη σχέση

$$\Phi = \Phi_0 Sh_i$$

Τα κοντινά μέλη τιμωρούνται με μεγαλύτερες τιμές σε αντίθεση με τα πιο απομακρυσμένα. Η τελική κατάταξη γίνεται δίνοντας προτεραιότητα στα άτομα με μικρές τιμές Φ .

1.2 Το Λογισμικό Βελτιστοποίησης EASY

Μετά την παρουσίαση των ΕΑ και του τρόπου λειτουργίας τους, ακολουθεί η παρουσίαση του εργαλείου βελτιστοποίησης που κάνει τη θεωρία τους πράξη και ονομάζεται EASY [15]. Πρόκειται για λογισμικό που αναπτύχθηκε από τη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής & Βελτιστοποίησης του Τομέα Ρευστών του Ε.Μ.Π. και υλοποιεί στοχαστικές αλλά και υβριδικές μεθόδους βελτιστοποίησης, έχοντας όμως ως κύριο χαρακτηριστικό τη χρήση ΕΑ. Είναι κατάλληλο για προβλήματα με ή χωρίς περιορισμούς, ενός ή περισσότερων συναρτήσεων κόστους. Χρησιμοποιεί πραγματική, δυαδική ή δυαδική Gray κωδικοποίηση και τις μεθόδους SPEA και NSGA. Χειρίζεται προβλήματα ελαχιστοποίησης, γεγονός που συνεπάγεται πως κάθε πρόβλημα μεγιστοποίησης πρέπει να μετατραπεί σε ελαχιστοποίησης πριν ανατεθεί στον EASY. Επίσης, επιτρέπει την εύκολη σύνδεση με το λογισμικό αξιολόγησης ή κάποιο άλλο εξωτερικό λογισμικό. Παράλληλα, ο EASY είναι ένα εργαλείο που λαμβάνει υπόψη την ανάγκη μείωσης του χρόνου και του κόστους βελτιστοποίησης και την αντιμετωπίζει με διάφορους τρόπους. Παρέχει, συνεπώς, ανάλογα εργαλεία που χρησιμοποιούνται είτε μεμονωμένα είτε συνδυαστικά. Τα εργαλεία αυτά παρουσιάζονται παρακάτω.

1.2.1 Πολυεπίπεδη Βελτιστοποίηση

Ο EASY επιτρέπει το χωρισμό της διαδικασίας βελτιστοποίησης σε επίπεδα [16]. Τα επίπεδα αυτά είναι συνήθως δύο και αλληλεπιδρούν με στόχο τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης. Στην περίπτωση της 'πολυεπίπεδης αξιολόγησης' ('multilevel

evaluation) χρησιμοποιείται, στο πρώτο επίπεδο, λογισμικό με μικρότερο κόστος και ακρίβεια για την εξερεύνηση του χώρου των λύσεων [16]. Αντίθετα, στο υψηλότερο επίπεδο, χρησιμοποιείται το ακριβές λογισμικό αξιολόγησης, βελτιώνοντας ουσιαστικά τα αποτελέσματα του προηγούμενου επιπέδου. Στην 'πολυεπίπεδη αναζήτηση' ('multilevel search') χρησιμοποιείται διαφορετική μέθοδος βελτιστοποίησης σε κάθε επίπεδο [15]. Συνηθίζεται η χρήση ΕΑ για την εξερεύνηση του χώρου των λύσεων στο πρώτο και αιτιοκρατικών μεθόδων στο υψηλότερο. Τέλος, στην 'πολυεπίπεδη παραμετροποίηση' ('multilevel parameterization') στο πρώτο επίπεδο αντιμετωπίζεται μία απλούστερη μορφή του προβλήματος χρησιμοποιώντας λ.χ. λιγότερες μεταβλητές σχεδιασμού [15]. Το ακριβές πρόβλημα καλείται να αντιμετωπιστεί από το τελευταίο επίπεδο.

1.2.2 Παράλληλη Επεξεργασία

Μία άλλη δυνατότητα του EASY είναι η παράλληλη επεξεργασία [17]. Αυτή ουσιαστικά αντιμετωπίζει το χρονοβόρο τμήμα των ΕΑ καθώς οι αξιολογήσεις μοιράζονται μεταξύ των επεξεργαστών και γίνονται ταυτόχρονα πλέον και όχι διαδοχικά. Ακολουθείται η λογική του συντονιστή-εργάτη (master-worker), με κάθε συντονιστή υπολογιστή να συνδέεται με έναν αριθμό επεξεργαστών στους οποίους ορίζεται συγκεκριμένο πλήθος αξιολογήσεων. Κάθε επεξεργαστής αναλαμβάνει την αξιολόγηση ενός ατόμου της γενιάς ενώ, στην περίπτωση που οι επεξεργαστές είναι λιγότεροι, κάθε νέα αξιολόγηση ξεκινά όταν ολοκληρωθεί η προηγούμενη. Διαφορετικοί υπολογιστές μπορεί να έχουν διαφορετική υπολογιστική ισχύ και οι αξιολογήσεις διαφορετικές υπολογιστικές απαιτήσεις. Συνεπώς, ακόμη και στην περίπτωση που κάθε επεξεργαστής αναλαμβάνει τον ίδιο αριθμό αξιολογήσεων με τους υπολοίπους, ενδέχεται κάποιος να μην αξιοποιούνται περιμένοντας επεξεργαστές της ίδιας ομάδας να ολοκληρώσουν τις αξιολογήσεις.

1.2.3 Κατανομημένοι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι

Ο EASY εκτός από το διαχωρισμό σε επίπεδα παρέχει και τη δυνατότητα χρήσης των κατανομημένων ΕΑ (Distributed Evolutionary Algorithms, DEA), όπου τα άτομα χωρίζονται σε υποομάδες πληθυσμών (demes) σε κάθε γενιά [18]. Κάθε υποπληθυσμός μπορεί να έχει διαφορετικές παραμέτρους που αφορούν τους εξελικτικούς τελεστές. Επιπλέον, οι πληθυσμοί επικοινωνούν μεταξύ τους μέσω της μετανάστευσης ατόμων, τόσο των καλύτερων όσο και τυχαίων. Επιτυγχάνεται, με αυτόν τον τρόπο, ποικιλομορφία στις λύσεις με την πάροδο των γενεών καθώς οι ΕΑ χειρίζονται μικρότερου μεγέθους πληθυσμούς που συνδυάζουν ημι-αυτονομία αλλά όχι απομόνωση.

1.2.4 Χρήση Μεταπροτύπων

Ένας επιπλέον τρόπος αντιμετώπισης του υψηλού κόστους επίλυσης προβλημάτων με ΕΑ είναι η συνδυαστική χρήση του λογισμικού αξιολόγησης και ενός υποκατάστατου αυτού, των μεταπροτύπων (Metamodel-assisted EAs, MAEAs) [19-21]. Τα μεταπρότυπα αποτελούν ένα εργαλείο κατά προσέγγιση αξιολόγησης. Επιδιώκεται η τιμή της συνάρτησης κόστους που προβλέπει το μεταπρότυπο να είναι κατά το δυνατόν πλησιέστερη στην πραγματική τιμή, γεγονός που προϋποθέτει ένα επαρκές σύνολο ατόμων εκπαίδευσης και μία αποδοτική διαδικασία εκμάθησης. Με βάση αυτή τη διαδικασία, τα μεταπρότυπα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, αυτά που εκπαιδεύονται off-line (off-line trained metamodels) και αυτά που εκπαιδεύονται on-line (on-line trained metamodels). Τα πρώτα, μιας και δεν χρησιμοποιούνται από τον EASY περιγράφονται παρακάτω επιγραμματικά [6].

Σε αυτά, η εκπαίδευση του μεταπροτύπου γίνεται ξεχωριστά από τη βελτιστοποίηση. Αρχικά, χρησιμοποιείται το ακριβές λογισμικό για την αξιολόγηση των ατόμων τα οποία εντοπίστηκαν από δειγματοληψία στο χώρο των λύσεων και επιλέγεται μία διαδικασία εκμάθησης, βάσει της οποίας εκπαιδεύεται το μεταπρότυπο. Στη συνέχεια, χρησιμοποιείται το μεταπρότυπο ως λογισμικό αξιολόγησης, εντοπίζονται οι 'βέλτιστες' λύσεις και αξιολογούνται ξανά με το ακριβές λογισμικό. Ανάλογα με την απόκλιση των τιμών το μεταπρότυπο ενημερώνεται και επαναλαμβάνεται η ανίχνευση μέσω ΕΑ με το ανανεωμένο μεταπρότυπο ή η διαδικασία τερματίζεται.

Διαφορετική λογική ακολουθούν τα μεταπρότυπα που εκπαιδεύονται on-line και χρησιμοποιούνται από τον EASY [21]. Αρχικά, αξιολογούνται τα άτομα των πρώτων γενεών χρησιμοποιώντας το ακριβές λογισμικό αξιολόγησης και, στη συνέχεια, χρησιμοποιούνται για την εκπαίδευση τοπικών μεταπροτύπων. Πιο συγκεκριμένα, κάθε νέο άτομο της επόμενης γενιάς αξιολογείται χρησιμοποιώντας ένα μεταπρότυπο εκπαιδευμένο με βάση τα γειτονικά του άτομα, λ.χ. βάσει των ατόμων που απέχουν από αυτό τη μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση. Σε αντίθεση με τα off-line μεταπρότυπα, τα on-line επανεκπαιδεύονται παράλληλα με την εξέλιξη. Στον EASY χρησιμοποιούνται RBF δίκτυα (Radial Basis Function Networks) [22] ως μεταπρότυπα και οι MAEAs βασίζονται στη χαμηλού κόστους προαξιολόγηση (Low-cost Pre-Evaluation) [23, 24], με βάση την οποία ο χώρος των λύσεων εξερευνάται από τα μεταπρότυπα, εντοπίζονται οι καλύτερες λύσεις και μόνο αυτές αξιολογούνται από το ακριβές λογισμικό. Με αυτόν τον τρόπο, αποφεύγεται το κόστος που θα προέκυπτε από την ακριβή αξιολόγηση λύσεων οι οποίες δεν έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Κεφάλαιο 2

MCDM και Τεχνικές Υλοποίησης

Σε αυτό το τμήμα της διπλωματικής εργασίας παρατίθενται τεχνικές που σχετίζονται με διαδικασίες λήψης αποφάσεων στην πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση. Το υπόψη θέμα θα αναφέρεται συντομογραφικά ως MCDM (Multiple Criteria Decision Making). Περιγράφονται εννέα τεχνικές MCDM καθώς και οι δύο τρόποι με τους οποίους εφαρμόζονται σε ένα πρόβλημα MOO. Τέλος, αναλύονται εκτενώς δύο από αυτές, οι TOPSIS και ELECTRE I.

2.1 ‘A posteriori’ και ‘a priori’ Τεχνικές MCDM

Καταρχάς, υπενθυμίζεται ότι ο EASY χειρίζεται προβλήματα ελαχιστοποίησης. Συνεπώς, στο εξής, γίνεται αναφορά αποκλειστικά σε συναρτήσεις κόστους. Ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης MOO της μορφής $\min \vec{F}(\vec{x}) = \min_{f_1}(\vec{x}), \dots, \min_{f_{M_0}}(\vec{x})$ αποτελείται από διαφορετικούς και αλληλοσυγκρουόμενους στόχους. Κάθε συνάρτηση κόστους έχει διαφορετική βαρύτητα για τον DM (Decision Maker), ο οποίος αναζητά είτε μία λύση είτε ένα σύνολο λύσεων του προβλήματος MOO που ανταποκρίνονται στις προτιμήσεις του. Η εύρεση των λύσεων αυτών γίνεται μέσω εφαρμογής των τεχνικών MCDM [25] στο πρόβλημα MOO.

Δύο τρόποι με τους οποίους μπορούν να εφαρμοστούν οι τεχνικές MCDM είναι ‘εκ των υστέρων’ (‘a posteriori’) και ‘εκ των προτέρων’ (‘a priori’) [26]. Για την εφαρμογή τους είναι αναγκαία η γνώση των προτιμήσεων του DM σε σχέση με τις συναρτήσεις κόστους. Οι προτιμήσεις αυτές, στις περιπτώσεις των τεχνικών MCDM που παρουσιάζονται στη συνέχεια, ποσοτικοποιούνται με βάρη. Τα βάρη ορίζονται από τον DM, όταν αυτός είναι σε θέση να ποσοτικοποιήσει τις προτιμήσεις του. Σε αντίθετη περίπτωση, τα βάρη ορίζονται από το μηχανικό που αναλαμβάνει την

εύρεση της βέλτιστης λύσης για τον DM. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή ενός βάρους, τόσο μεγαλύτερη είναι η προτίμηση του DM στην αντίστοιχη συνάρτηση κόστους. Στην εφαρμογή των τεχνικών MCDM ‘a posteriori’, επιλύεται το πρόβλημα ελαχιστοποίησης χρησιμοποιώντας EAs ή MAEAs, και αποκτάται το μέτωπο Pareto. Στη συνέχεια, η τεχνική MCDM, βασιζόμενη στις προτιμήσεις του DM καταλήγει στην κατ’ αυτόν βέλτιστη, από τις μη-κυριαρχούμενες, λύση. Συνεπώς, οι επιθυμίες του DM δε λαμβάνονται υπόψη κατά τη διαδικασία βελτιστοποίησης, αλλά μόνο στο τέλος αυτής. Αντιθέτως, με την εφαρμογή των τεχνικών ‘a priori’, η βελτιστοποίηση πραγματοποιείται ενσωματώνοντας σε αυτήν τις προτιμήσεις του DM. Για τη βελτιστοποίηση χρησιμοποιούνται, όπως και στην εφαρμογή ‘a posteriori’, EAs ή λ.χ. MAEAs. Η γνώση των προτιμήσεων του DM είναι απαραίτητη πριν τη βελτιστοποίηση. Η τιμή Φ με την οποία βαθμολογούνται τα άτομα κάθε γενιάς υπολογίζεται εφαρμόζοντας κάποια τεχνική MCDM και όχι λ.χ. την τεχνική SPEA. Συνεπώς, η τιμή Φ υπολογίζεται με βάση τις προτιμήσεις του DM, καθώς αυτές εμπλέκονται στις τεχνικές MCDM που παρουσιάζονται παρακάτω, με τη μορφή βαρών. Η τεχνική MCDM επιδρά στην επιλογή γονέων και, τελικά, στην πορεία του EA καθοδηγώντας το μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων στις περιοχές που προτιμά περισσότερο ο DM. Προκύπτει, συνεπώς, μέτωπο Pareto διαφορετικό σε σχέση με αυτό που θα προέκυπτε χωρίς την εφαρμογή κάποιας τεχνικής MCDM.

2.1.1 Παραδείγματα Τεχνικών MCDM

Οι τεχνικές MCDM είναι πολλές και διαφορετικές μεταξύ τους [27] καθώς το ίδιο ισχύει και για τα προβλήματα στα οποία καλούνται να εφαρμοστούν. Για την καλύτερη κατανόηση των τεχνικών MCDM επεξηγούνται προηγουμένως τα εξής.

Πίνακας απόφασης (Decision Matrix) ονομάζεται ο πίνακας \mathbf{P} κάθε στοιχείο του οποίου ποσοτικοποιεί την επίδοση της i λύσης του προβλήματος MOO ως προς την j συνάρτηση κόστους. Ο πίνακας απόφασης είναι διαστάσεων $M_e \times M_o$, με M_e τον αριθμό των λύσεων-ατόμων τα οποία συμμετέχουν στο πρόβλημα MOO και M_o τον αριθμό των συναρτήσεων κόστους της βελτιστοποίησης.

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,M_o} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{M_e,1} & \cdots & p_{M_e,M_o} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Στις τεχνικές MCDM που παρουσιάζονται χρησιμοποιείται πίνακας απόφασης στην κανονικοποιημένη του μορφή, ώστε να είναι συγκρίσιμες οι επιδόσεις των λύσεων για κάθε συνάρτηση κόστους. Συνεπώς, δημιουργείται ένας νέος πίνακας διαστάσεων $M_e \times M_o$, ο οποίος αποτελείται από τα κανονικοποιημένα στοιχεία του πίνακα \mathbf{P} της σχέσης (2.1). Για την κανονικοποίηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί μία από τις εξής

δύο σχέσεις,

$$r_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{M_e} p_{i,j}^2}} \quad (2.2)$$

$$q_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{\min_{k=1}^{M_e} p_{i,j}} \quad (2.3)$$

Συνεπώς, προκύπτουν οι πίνακες \mathbf{R} ή \mathbf{Q} αντίστοιχα. Για τη σχέση (2.3) χρησιμοποιούνται οι μη-μηδενικές ελάχιστες τιμές του πίνακα \mathbf{P} ($\min_{i=1}^{M_e} p_{i,j} \neq 0$).

Οι προτιμήσεις του DM σε σχέση με τις συναρτήσεις κόστους συνήθως ποσοτικοποιούνται με βάρη. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή ενός βάρους, τόσο μεγαλύτερη είναι η σημασία που δίνει ο DM στην αντίστοιχη συνάρτηση κόστους. Δημιουργείται είτε ο πίνακας \mathbf{V} είτε ο πίνακας \mathbf{Z} , διαστάσεων $M_e \times M_o$, από τον πολλαπλασιασμό των βαρών με τις τιμές του κανονικοποιημένου πίνακα απόφασης \mathbf{R} , εξ. (2.2) ή (2.3), αντίστοιχα [28],

$$V = \begin{bmatrix} r_{1,1}w_1 & \cdots & r_{1,M_o}w_{M_o} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{M_e,1}w_1 & \cdots & r_{M_e,M_o}w_{M_o} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$Z = \begin{bmatrix} q_{1,1}w_1 & \cdots & q_{1,M_o}w_{M_o} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{M_e,1}w_1 & \cdots & q_{M_e,M_o}w_{M_o} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Συνήθως, τίθεται, χωρίς βλάβη της γενικότητας, $\sum_{j=1}^{M_o} w_j = 1$.

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται εννέα δυνατές παραλλαγές τεχνικών MCDM στις οποίες οι λύσεις κατατάσσονται από την καλύτερη προς τη χειρότερη με βάση τα βάρη που ορίζει ο DM. Όπως ήδη αναφέρθηκε, στην περίπτωση εφαρμογής των τεχνικών 'a posteriori' σε προβλήματα MOO, επιλέγεται η μία βέλτιστη, κατά τον DM, λύση του υπολογισθέντος μετώπου Pareto. Αντίθετα, στην περίπτωση της εφαρμογής των τεχνικών 'a priori', κατά την εξέλιξη, προωθούνται διαρκώς λύσεις που ταιριάζουν περισσότερο στις προτιμήσεις του DM, ώστε τελικά να προκύψει ένα πιο εξειδικευμένο μέτωπο Pareto.

- TOPSIS (Technique for the Order of Preference by Similarity to the Ideal Solution) [29]: Η τεχνική αυτή αποτελεί βασικό τμήμα της διπλωματικής εργασίας και περιγράφεται εκτενώς σε επόμενη ενότητα.
- VIKOR (VlseKriterijuska Optimizacija I Komoromisno Resenje) [30]: Οι λύσεις κατατάσσονται με βάση την απόστασή τους από την ιδανική λύση. Ιδανική ονομάζεται η υποθετική λύση που συνδυάζει τις μικρότερες τιμές των

συναρτήσεων κόστους του πίνακα **Z**. Υπολογίζονται τρεις διαφορετικοί δείκτες που σχετίζονται με την απόσταση κάθε λύσης από την ιδανική χρησιμοποιώντας τις τιμές του πίνακα **Z**. Προτεραιότητα δίνεται στις λύσεις με τις μικρότερες τιμές των τριών δεικτών.

- COPRAS (multi-criteria COmplex PROportional ASsessment method) [31]: Κάθε λύση βαθμολογείται αντιστρόφως ανάλογα του αθροίσματος των τιμών των συναρτήσεων κόστους του πίνακα **V** που την αφορούν. Προτεραιότητα δίνεται στις λύσεις με τις μεγαλύτερες τιμές.
- WS (Weighted Sum) [32]: Υπολογίζεται το άθροισμα των τιμών του πίνακα **V** που αφορούν κάθε εναλλακτική λύση. Οι καλύτερες λύσεις αντιστοιχούν στις μικρότερες τιμές του αθροίσματος.
- WP (Weighted Product) [33]: Υπολογίζεται το γινόμενο των τιμών του πίνακα **V** που αφορούν κάθε εναλλακτική λύση. Η κατάταξη των λύσεων από την καλύτερη στη χειρότερη γίνεται με βάση τη μικρότερη τιμή.
- WASPAS (Weighted Aggregated Sum Product Assessment) [34]: Συνδυάζονται οι μέθοδοι WS και WP για τον υπολογισμό της τιμής της σχετικής σημασίας κάθε εναλλακτικής λύσης. Συνεπώς, προτεραιότητα δίνεται στις λύσεις με τη μικρότερη τιμή.
- ELECTRE I (ELimination Et Choix Traduisant la REalité I) [35]: Η τεχνική αυτή αποτελεί βασικό τμήμα της διπλωματικής εργασίας και περιγράφεται εκτενώς σε επόμενη ενότητα.
- AHP (Analytic Hierarchy Process) [36]: Χρησιμοποιείται συγκεκριμένη κλίμακα τιμών για τη βαθμολόγηση της προτεραιότητας που έχει για τον DM κάθε κριτήριο σε σχέση με κάποιο άλλο. Τα βάρη των συναρτήσεων κόστους υπολογίζονται με βάση τις τιμές αυτές και, στη συνέχεια, πολλαπλασιάζονται με τον πίνακα **R**. Υπολογίζεται το άθροισμα των τιμών του πίνακα **V** που αφορούν την κάθε εναλλακτική λύση και κατατάσσονται οι λύσεις από την καλύτερη στη χειρότερη βάσει της μικρότερης τιμής.
- PROMETHEE (Preference Ranking Organization METHod for Enrichment Evaluations) [37]: Οι εναλλακτικές λύσεις συγκρίνονται ανά ζεύγη χρησιμοποιώντας τον πίνακα **R**. Για κάθε ζεύγος υπολογίζονται οι βαθμοί προτίμησης των συναρτήσεων κόστους χρησιμοποιώντας μία συγκεκριμένη συνάρτηση προτίμησης, πολλαπλασιάζονται με τα αντίστοιχα βάρη που προκύπτουν από τις προτιμήσεις του DM και αθροίζονται σχηματίζοντας το συνολικό δείκτη προτίμησης κάθε δυάδας λύσεων. Δημιουργείται το άθροισμα των δεικτών που αφορούν τη διαφορά όλων των λύσεων από μία λύση και το άθροισμα των δεικτών που αφορούν τη διαφορά της ίδιας λύσης από τις υπόλοιπες. Η διαφορά του πρώτου αθροίσματος από το δεύτερο καθορίζει την κατάταξη των λύσεων. Προτεραιότητα δίνεται στις λύσεις που αντιστοιχούν σε μικρότερες τιμές.

2.2 Η τεχνική TOPSIS

Η τεχνική TOPSIS [29] αναπτύχθηκε από τους Hwang και Yoon για την εφαρμογή σε προβλήματα MOO. Είναι μία τεχνική που επιτρέπει την κατάταξη των λύσεων με βάση τις προτιμήσεις του DM, οι οποίες ποσοτικοποιούνται με βάρη που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις κόστους. Η τεχνική TOPSIS χρησιμοποιεί δύο σημεία αναφοράς στο χώρο των αντικειμενικών συναρτήσεων, αυτό που έχει ως συντεταγμένες τις καλύτερες τιμές του πίνακα \mathbf{V} και αυτό που έχει ως συντεταγμένες τις χειρότερες. Η Ευκλείδεια απόσταση των ατόμων του πίνακα \mathbf{V} από τα σημεία αυτά καθορίζει την κατάταξη των λύσεων του προβλήματος MOO.

2.2.1 Περιγραφή της Τεχνικής TOPSIS

Τα βήματα [38] από τα οποία συντίθεται η τεχνική TOPSIS είναι κοινά τόσο για την ‘a posteriori’ όσο και για την ‘a priori’ εφαρμογή της σε προβλήματα MOO και παρουσιάζονται παρακάτω. Στην πρώτη περίπτωση, η τεχνική εφαρμόζεται στις λύσεις του μετώπου Pareto και επιλέγεται βάσει των προτιμήσεων του DM η βέλτιστη από αυτές λύση. Στη δεύτερη περίπτωση, χρησιμοποιείται απλώς ΕΑ χωρίς την εφαρμογή της τεχνικής TOPSIS στις δύο πρώτες γενιές. Στη συνέχεια, εφαρμόζονται τα βήματα της τεχνικής στις λύσεις κάθε γενιάς του ΕΑ μέχρι τον τερματισμό του.

Βήμα 1: Δημιουργία του πίνακα απόφασης \mathbf{P} , εξ. (2.1).

Βήμα 2: Δημιουργία του κανονικοποιημένου πίνακα απόφασης \mathbf{R} , εξ. (2.2).

Βήμα 3: Ενσωμάτωση των βαρών που ορίζει ο DM στη διαδικασία δημιουργώντας τον πίνακα \mathbf{V} , εξ. (2.4).

Βήμα 4: Καθορισμός δύο ακραίων υποθετικών λύσεων, της θετικής (I^+) και της αρνητικής (I^-). Στην περίπτωση εφαρμογής της τεχνικής TOPSIS ‘a priori’, η θετική λύση αντιστοιχεί στις μικρότερες τιμές των συναρτήσεων κόστους του μετώπου Pareto και η αρνητική στις μεγαλύτερες, όπως φαίνεται στο σχήμα (2.1). Στην περίπτωση ‘a priori’ εφαρμογής της τεχνικής TOPSIS, η θετική λύση αντιστοιχεί στις μικρότερες τιμές των συναρτήσεων κόστους του μετώπου μη-κυριαρχούμενων λύσεων και η αρνητική στις μεγαλύτερες όπως φαίνεται στο σχήμα (2.2). Στην τελευταία περίπτωση, οι δύο ακραίες υποθετικές λύσεις μεταβάλλονται από γενιά σε γενιά όταν μεταβάλλεται και το αντίστοιχο μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων,

$$I^- = (max_i v_{i1}, max_i v_{i2}, \dots, max_i v_{iM_o}) = (v_1^+, v_2^+, \dots, v_{M_o}^+) \quad (2.6)$$

$$I^+ = (\min_i v_{i1}, \min_i v_{i2}, \dots, \min_i v_{iM_o}) = (v_1^-, v_2^-, \dots, v_{M_o}^-) \quad (2.7)$$

Βήμα 5: Υπολογισμός της Ευκλείδειας (στο χώρο των αντικειμενικών συναρτήσεων) απόστασης κάθε λύσης τόσο από τη θετική (2.6), όσο και από την αρνητική ακραία υποθετική λύση (2.7), όπως απεικονίζεται στο σχήμα (2.3) για την ‘a posteriori’ και στο σχήμα (2.4) για την ‘a priori’ περίπτωση εφαρμογής της τεχνικής TOPSIS σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης MOO,

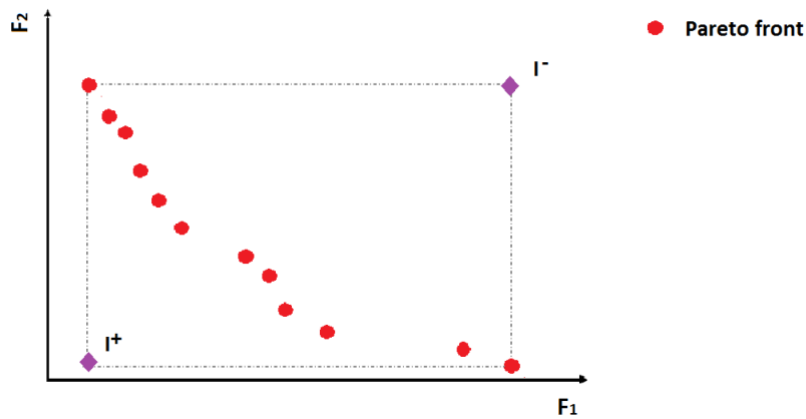
$$d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^{M_o} (v_{ij} - v_j^+)^2} \quad (2.8)$$

$$d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{M_o} (v_{ij} - v_j^-)^2} \quad (2.9)$$

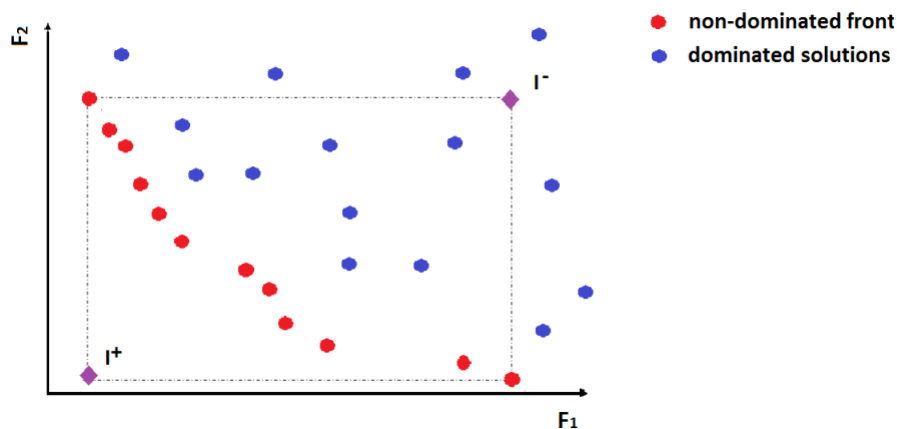
Βήμα 6: Υπολογισμός της σχετικής απόστασης κάθε λύσης από τη θετική, εξ. (2.6), και την αρνητική, εξ. (2.7) ακραία υποθετική λύση, εξ. (2.8), (2.9), στο χώρο των αντικειμενικών συναρτήσεων,

$$D_i = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^+} \quad (2.10)$$

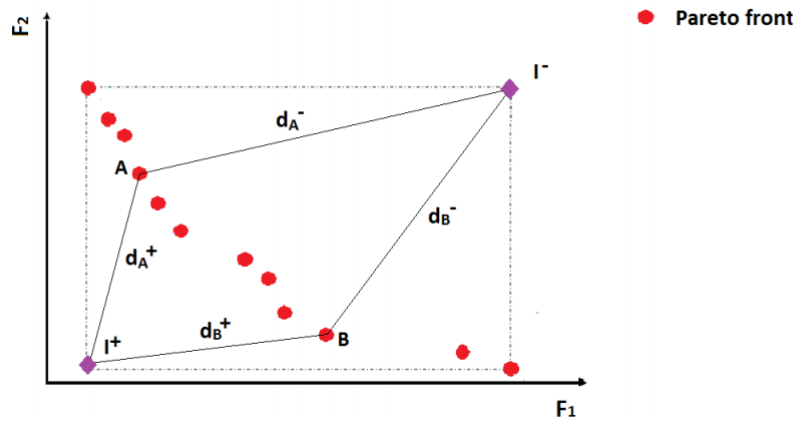
Βήμα 7: Κατάταξη των λύσεων με βάση τη σχετική απόσταση που υπολογίζεται από τη σχέση (2.10). Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της D_i , τόσο μεγαλύτερη προτίμηση έχει ο DM σε αυτήν τη λύση. Στην περίπτωση ‘a posteriori’ εφαρμογής, η βέλτιστη λύση αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη τιμή της D_i . Στην περίπτωση ‘a priori’ εφαρμογής, οι λύσεις κάθε γενιάς βαθμολογούνται και κατατάσσονται από την καλύτερη στη χειρότερη με φθίνουσα τιμή της D_i . Στη συνέχεια, επιλέγονται οι καλύτερες λύσεις βάσει των οποίων προκύπτουν τα άτομα της επόμενης γενιάς. Δίνεται, όμως, και ένα μικρό περιθώριο συμμετοχής κακών λύσεων με μικρή πιθανότητα στη δημιουργία απογόνων. Επαναλαμβάνονται τα παραπάνω βήματα μέχρι τον τερματισμό του EA, οπότε αποκτάται το επιθυμητό για τον DM μέτωπο Pareto από τις καλύτερες μη-κυριαρχούμενες λύσεις της τελευταίας γενιάς.



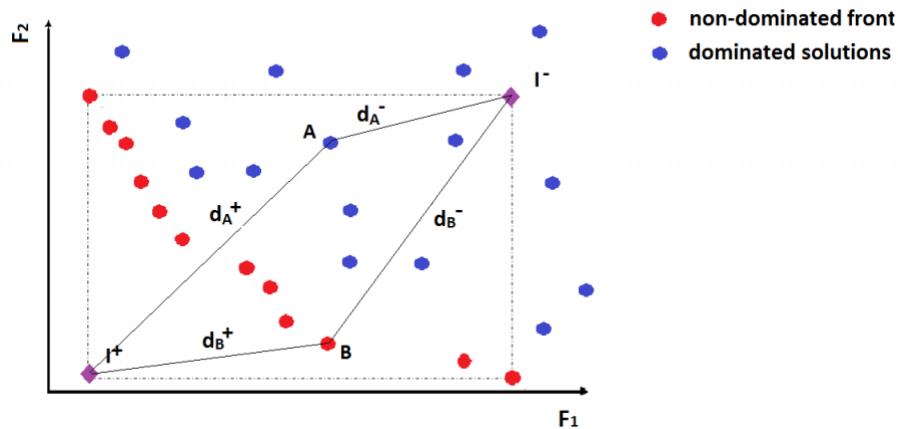
Σχήμα 2.1: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων: Προσδιορισμός της θετικής (I^+) και της αρνητικής (I^-) ακραίας υποθετικής λύσης στην περίπτωση εφαρμογής της τεχνικής TOPSIS 'a posteriori' χρησιμοποιώντας τα άτομα του μετώπου Pareto.



Σχήμα 2.2: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων: Προσδιορισμός της θετικής (I^+) και της αρνητικής (I^-) ακραίας υποθετικής λύσης στην περίπτωση εφαρμογής της τεχνικής TOPSIS 'a priori' χρησιμοποιώντας τα άτομα του μετώπου μη-κυριαρχούμενων λύσεων μιας γενιάς του EA. Οι δύο ακραίες υποθετικές λύσεις αλληλλάζουν από γενιά σε γενιά καθώς μεταβάλλεται το μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων.



Σχήμα 2.3: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων: Αποστάσεις, στο χώρο των αδιαστατοποιημένων αντικειμενικών συναρτήσεων, των σημείων A και B του μετώπου Pareto από τη θετική (I^+) και από την αρνητική (I^-) ακραία υποδετική λύση στην περίπτωση 'a posteriori' εφαρμογής της τεχνικής TOPSIS.



Σχήμα 2.4: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων: Αποστάσεις του κυριαρχούμενου ατόμου A και του μη-κυριαρχούμενου ατόμου B μιας γενιάς του EA από τη θετική (I^+) και από την αρνητική (I^-) ακραία υποδετική λύση στην περίπτωση 'a priori' εφαρμογής της τεχνικής TOPSIS.

2.3 Η Τεχνική ELECTRE I

Η τεχνική ELECTRE I [35] προτάθηκε από τον Bernard Roy και χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης. Χρησιμοποιεί την έννοια της υπεροχής μίας λύσης έναντι μίας άλλης. Πιο συγκεκριμένα, σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης της μορφής $\min \vec{F}(\vec{x}) = \min f_1(\vec{x}), \dots, \min f_j(\vec{x}), \dots, \min f_{M_o}(\vec{x})$, μία λύση i είναι καλύτερη ή το ίδιο καλή με μία άλλη i' ως προς ένα στόχο j , όταν ισχύει $f_j(\vec{x}_i) \leq f_j(\vec{x}_{i'})$. Σε περίπτωση κατά την οποία $f_j(\vec{x}_i) > f_j(\vec{x}_{i'})$, η λύση i είναι χειρότερη από τη λύση i' ως προς το στόχο j . Με τη μέθοδο ELECTRE I, εξετάζονται σε δύο ξεχωριστά σύνολα τα κριτήρια ως προς τα οποία μία λύση i υπερέχει μίας λύσης i' και ξεχωριστά τα υπόλοιπα.

2.3.1 Περιγραφή της Τεχνικής ELECTRE I

Στη συνέχεια, αναλύεται η τεχνική ELECTRE I, η οποία ακολουθεί τη λογική που περιγράφηκε από τον Bernard Roy [35] και εμπλουτίζεται με νέα στοιχεία από τους A. Delft και P. Nijkamp [28]. Τα βήματα που ακολουθούνται είναι κοινά τόσο για την 'a posteriori' όσο και για την 'a priori' εφαρμογή της τεχνικής σε προβλήματα ΜΟΟ. Στην πρώτη περίπτωση, η τεχνική εφαρμόζεται σε λύσεις του μετώπου Pareto και επιλέγεται βάσει των προτιμήσεων του DM η βέλτιστη από αυτές. Στη δεύτερη περίπτωση, εφαρμόζονται τα βήματα της τεχνικής στις λύσεις κάθε γενιάς του ΕΑ μέχρι τον τερματισμό του.

Βήμα 1: Σχηματισμός του πίνακα απόφασης **P**, εξ. (2.1).

Βήμα 2: Δημιουργία του κανονικοποιημένου πίνακα απόφασης **R**, εξ. (2.2).

Βήμα 3: Δημιουργία του πίνακα **V**, εξ. (2.4), βάσει των βαρών που ορίζει ο DM.

Βήμα 4: Προσδιορισμός του πίνακα συμφωνίας **C** (Concordance Matrix) διαστάσεων $M_e \times M_e$. Οι τιμές αυτού του πίνακα προκύπτουν από την κατά ζεύγη i, i' σύγκριση των λύσεων.

$$c_{i,i'} = \frac{\sum_{j \in C_{i,i'}} w_j}{\sum_{j=1}^{M_o} w_j} \quad (2.11)$$

Στον αριθμητή υπολογίζεται το άθροισμα των βαρών των συναρτήσεων κόστους για τις οποίες η λύση i είναι καλύτερη ή το ίδιο καλή με τη λύση i' . Στον παρονομαστή υπολογίζεται το άθροισμα των βαρών όλων των συναρτήσεων κόστους. Για αυτόν το δείκτη, ισχύει $0 \leq c_{i,i'} \leq 1$. Όσο πλησιέστερα στη μονάδα βρίσκεται η τιμή του, τόσο περισσότερο προτιμάται η λύση i έναντι της i' . Αφού υπολογιστούν όλοι οι δείκτες

σχηματίζεται ο πίνακας συμφωνίας,

$$C = \begin{bmatrix} - & c_{1,2} & \cdots & c_{1,M_e} \\ c_{2,1} & - & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{M_e,1} & \cdots & \cdots & - \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Βήμα 5: Προσδιορισμός του πίνακα διαφωνίας **D** (Discordance Matrix) διαστάσεων $M_e \times M_e$ από την κατά ζεύγη σύγκριση των λύσεων i, i' ,

$$d_{i,i'} = \frac{\max_{j \in D_{i,i'}} (v_{i,j} - v_{i',j})}{\max_{j \in D_{i,i'}(i,i')} (v_{i,j} - v_{i',j})} \quad (2.13)$$

Ο αριθμητής ισούται με τη μέγιστη διαφορά των τιμών των συναρτήσεων κόστους όπου η λύση i υστερεί σε σχέση με την i' . Στον παρονομαστή υπολογίζεται η μέγιστη διαφορά μεταξύ των τιμών των συναρτήσεων κόστους όλων των λύσεων. Όπως και στην περίπτωση του πίνακα συμφωνίας, για τις τιμές του δείκτη αυτού ισχύει $0 \leq d_{i,i'} \leq 1$. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του, τόσο λιγότερο προτιμάται η λύση i σε σχέση με την i' . Αφού υπολογιστούν όλοι οι δείκτες σχηματίζεται ο πίνακας διαφωνίας,

$$D = \begin{bmatrix} - & d_{1,2} & \cdots & d_{1,M_e} \\ d_{2,1} & - & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{M_e,1} & \cdots & \cdots & - \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Βήμα 6: Υπολογισμός του, αποτελούμενου από M_e στοιχεία πίνακα **A** από τις τιμές του πίνακα **C**, εξ. (2.12),

$$a_i = \sum_{i'=1, i' \neq i}^{M_e} c_{i,i'} - \sum_{i'=1, i' \neq i}^{M_e} c_{i',i} \quad (2.15)$$

Οι τιμές του πίνακα **A** δείχνουν το μέτρο υπεροχής μίας λύσης ως προς όλες τις υπόλοιπες. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή, τόσο περισσότερο προτιμάται η συγκεκριμένη λύση.

Βήμα 7: Υπολογισμός του πίνακα **B**, τα M_e στοιχεία του οποίου υπολογίζονται από τον πίνακα **D** της εξ. (2.14),

$$b_i = \sum_{i'=1, i' \neq i}^{M_e} d_{i,i'} - \sum_{i'=1, i' \neq i}^{M_e} d_{i',i} \quad (2.16)$$

Προτεραιότητα δίνεται στις λύσεις με τη μικρότερη τιμή.

Βήμα 8: Η κατάταξη των λύσεων από την καλύτερη στη χειρότερη γίνεται με βάση τις μεγαλύτερες τιμές του πίνακα **A**, εξ. (2.15) και με βάση τις μικρότερες τιμές του πίνακα **B**, εξ. (2.16). Στη συνέχεια, επιλέγεται ένα νέο κριτήριο κατάταξης που είτε συνδυάζει τις τιμές των δύο πινάκων, λ.χ. παράγοντας τη διαφορά τους, είτε βασίζεται στα αποτελέσματα του καθένα ξεχωριστά. Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, χρησιμοποιείται ως κριτήριο κατάταξης των λύσεων ο πίνακας **K** που προκύπτει από τη διαφορά του πίνακα **A** από τον πίνακα **B**. Τα M_e στοιχεία του νέου πίνακα **K** υπολογίζονται ως εξής:

$$k_i = b_i - a_i \quad (2.17)$$

Προτεραιότητα δίνεται στις λύσεις με τις μικρότερες τιμές k_i . Στην περίπτωση εφαρμογής της τεχνικής ELECTRE I 'a posteriori', η βέλτιστη λύση του μετώπου Pareto αντιστοιχεί στη μικρότερη τιμή του πίνακα **K**. Στην περίπτωση εφαρμογής της τεχνικής ELECTRE I 'a priori', οι λύσεις κάθε γενιάς βαθμολογούνται και κατατάσσονται από την καλύτερη στη χειρότερη με αύξουσα τιμή της k_i . Στη συνέχεια, επιλέγονται οι καλύτερες λύσεις βάσει των οποίων προκύπτουν τα άτομα της επόμενης γενιάς. Επαναλαμβάνονται τα παραπάνω βήματα μέχρι τον τερματισμό του ΕΑ, οπότε αποκτάται το επιθυμητό για τον DM μέτωπο Pareto από τις καλύτερες μη-κυριαρχούμενες λύσεις της τελευταίας γενιάς.

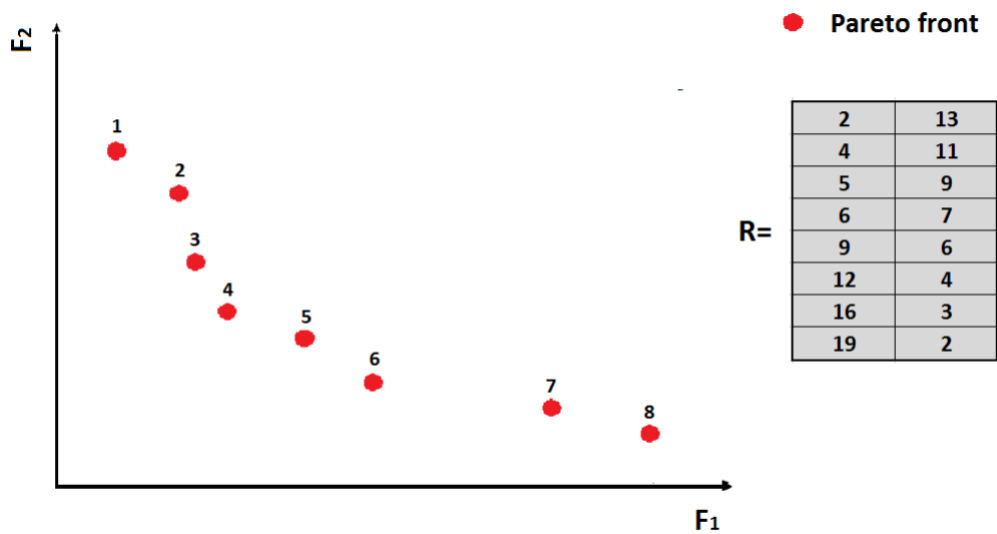
2.4 Παράδειγμα Εφαρμογής των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I

Για καλύτερη κατανόηση των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I, γίνεται 'a posteriori' εφαρμογή τους σε ένα διδιάστατο μέτωπο Pareto. Το αποτελούμενο από 8 άτομα μέτωπο Pareto και οι τιμές του πίνακα **R**, εξ. (2.2), για τα 8 μη-κυριαρχούμενα άτομα φαίνονται στο σχήμα (2.5). Οι δύο τεχνικές MCDM εφαρμόζονται χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.2$, $w_2 = 0.8$ και $w_1 = 0.8$, $w_2 = 0.2$. Ο πίνακας **V**, εξ. (2.4), απεικονίζεται για τους δύο συνδυασμούς βαρών στο σχήμα (2.6). Αναλυτικά παρουσιάζονται οι πράξεις σε δύο κελιά του πίνακα **V** για βάρη $w_1 = 0.2$, $w_2 = 0.8$.

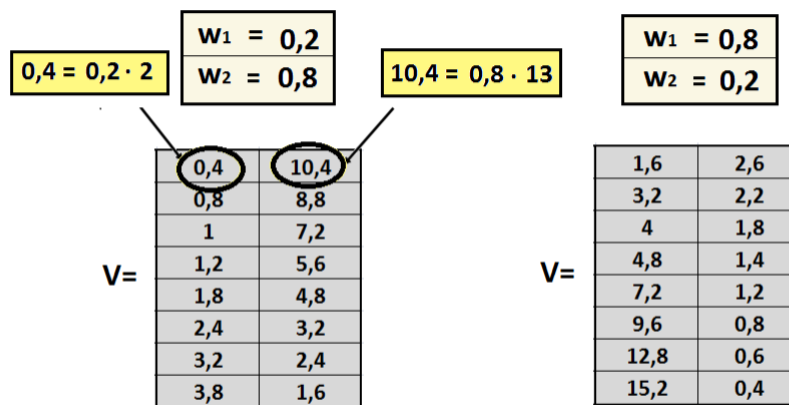
Τα αποτελέσματα των βημάτων της τεχνικής TOPSIS παρουσιάζονται στα σχήματα (2.7) και (2.8) για βάρη $w_1 = 0.2$, $w_2 = 0.8$ και $w_1 = 0.8$, $w_2 = 0.2$ αντίστοιχα. Σε κάθε σχήμα αναγράφονται οι τιμές του πίνακα **V** που αντιστοιχούν στη θετική (I^+) και στην αρνητική (I^-) ακαία υποθετική λύση. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τρεις πίνακες, οι οποίοι αντιστοιχούν στις τιμές των αποστάσεων d_1^+ , εξ. (2.8), d_1^- , εξ.

(2.9), D_i , εξ. (2.10). Κάθε γραμμή των πινάκων αντιστοιχεί σε ένα άτομο του μετώπου Pareto του σχήματος (2.5), με την πρώτη γραμμή να αφορά το μη-κυριαρχούμενο άτομο με αύξοντα αριθμό 1 και την όγδοη το μη-κυριαρχούμενο άτομο με αύξοντα αριθμό 8. Μαζί με τους πίνακες, για βάρη $w_1 = 0.2$, $w_2 = 0.8$, αναγράφονται αναλυτικά οι πράξεις που έγιναν για τον προσδιορισμό της θετικής και της αρνητικής ακραίας υποθετικής λύσης και για τον υπολογισμό της τιμής ενός κελιού κάθε πίνακα. Βέλτιστη θεωρείται η λύση με τη μεγαλύτερη τιμή της σχετικής απόστασης D_i . Για βάρη $w_1 = 0.2$, $w_2 = 0.8$, βέλτιστη είναι η λύση του μετώπου Pareto με αύξοντα αριθμό 6 και για βάρη $w_1 = 0.8$, $w_2 = 0.2$, βέλτιστη είναι η λύση με αύξοντα αριθμό 1, όπως φαίνεται στο σχήμα (2.11).

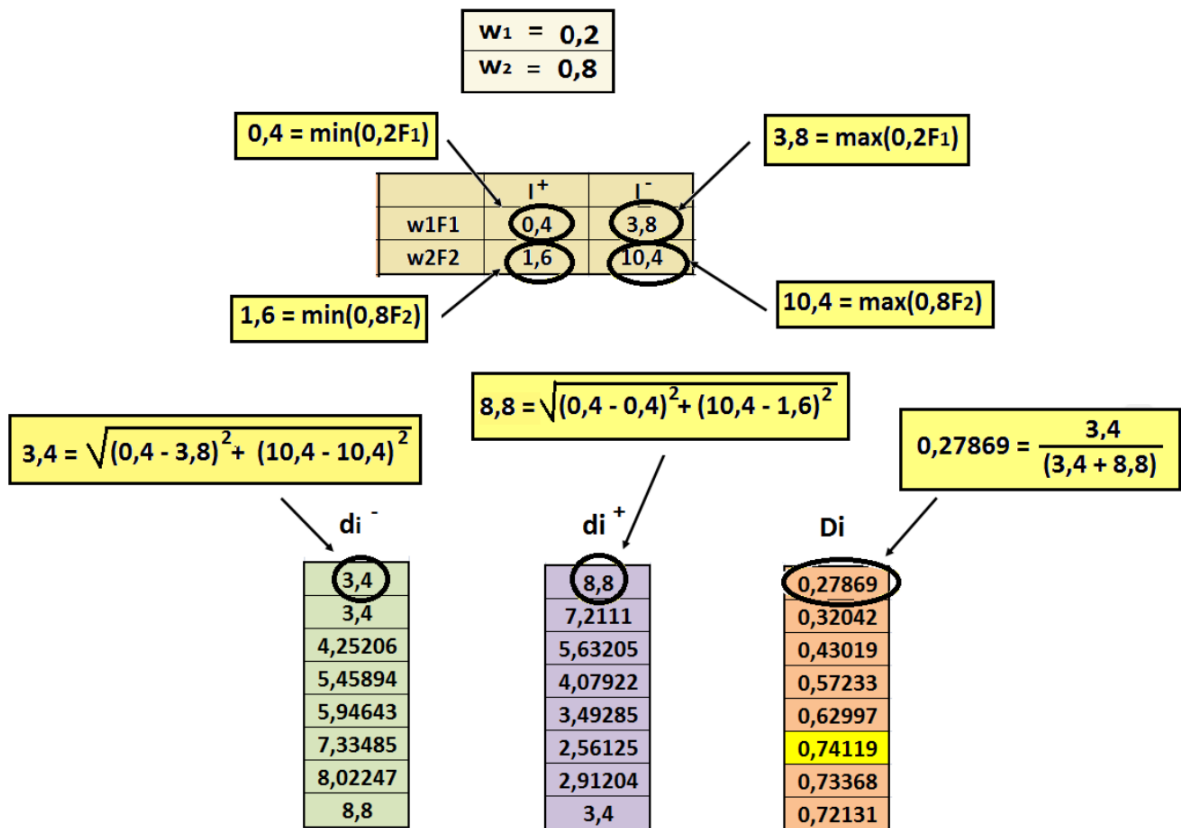
Τα αποτελέσματα των βημάτων της τεχνικής ELECTRE I παρουσιάζονται στο σχήμα (2.9) για βάρη $w_1 = 0.2$, $w_2 = 0.8$ και στο σχήμα (2.10) για βάρη $w_1 = 0.8$, $w_2 = 0.2$. Αρχικά, σχηματίζεται ο πίνακας **C**, εξ. (2.11), διαστάσεων 8×8 , (8 άτομα στο μέτωπο Pareto), χρησιμοποιώντας τα βάρη των συναρτήσεων κόστους. Στη συνέχεια, σχηματίζεται ο πίνακας **D**, εξ. (2.12), διαστάσεων 8×8 , χρησιμοποιώντας τις τιμές του πίνακα **V**. Από τον πίνακα **C** δημιουργείται ο πίνακας **A** και από τον πίνακα **D** δημιουργείται ο πίνακας **B**. Ο πίνακας **A** αφαιρείται από τον πίνακα **B** και προκύπτει ο πίνακας **K**. Η βέλτιστη λύση αντιστοιχεί στη μικρότερη τιμή του πίνακα **K**. Στους πίνακες **A**, **B** και **K** κάθε γραμμή αντιπροσωπεύει ένα άτομο του μετώπου Pareto του σχήματος (2.5), με την πρώτη γραμμή να αφορά το μη-κυριαρχούμενο άτομο με αύξοντα αριθμό 1 και την όγδοη το μη-κυριαρχούμενο άτομο με αύξοντα αριθμό 8. Μαζί με τους πίνακες, για βάρη $w_1 = 0.2$, $w_2 = 0.8$, αναγράφονται αναλυτικά οι πράξεις που έγιναν για τον υπολογισμό της τιμής ενός κελιού σε κάθε πίνακα. Για βάρη $w_1 = 0.2$, $w_2 = 0.8$, βέλτιστη είναι η λύση του μετώπου Pareto με αύξοντα αριθμό 8 και για βάρη $w_1 = 0.8$, $w_2 = 0.2$, βέλτιστη είναι η λύση με αύξοντα αριθμό 1. Η βέλτιστη λύση κάθε περίπτωσης βαρών της τεχνικής ELECTRE I σημειώνεται στο σχήμα (2.11), μαζί με τις βέλτιστες λύσεις της τεχνικής TOPSIS.



Σχήμα 2.5: Εικονικό παράδειγμα μετώπου Pareto με 8 άτομα: Οι κανονικοποιημένες τιμές των συναρτήσεων κόστους για όλες τις λύσεις του μετώπου Pareto αναγράφονται στον πίνακα **R**.



Σχήμα 2.6: Εικονικό παράδειγμα μετώπου Pareto με 8 άτομα: Πίνακας **V** για βάρη $w_1 = 0.2$, $w_2 = 0.8$ και $w_1 = 0.8$, $w_2 = 0.2$.



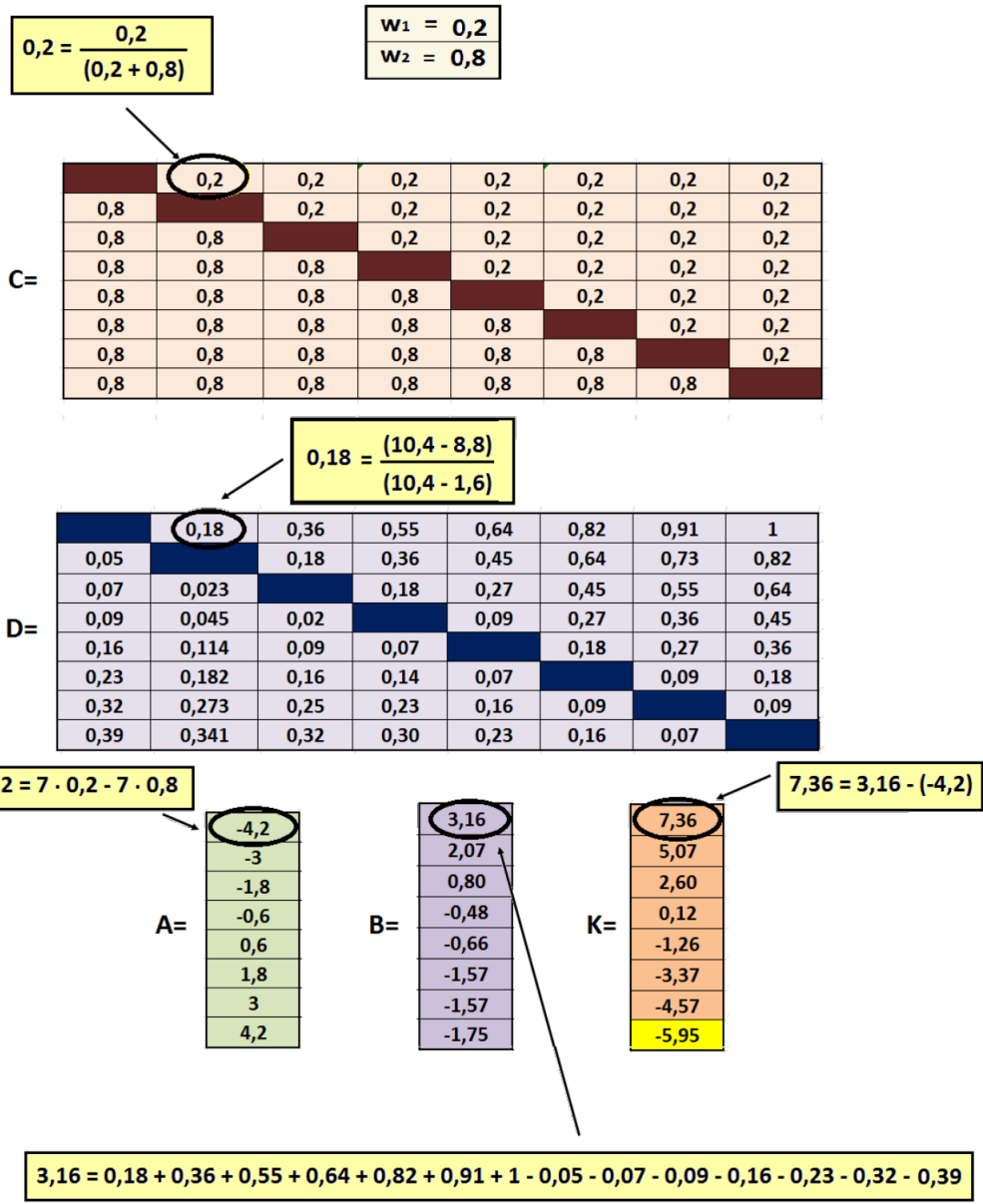
Σχήμα 2.7: Εικονικό παράδειγμα μειώπων Pareto με 8 άτομα: Αποτελέσματα από την εφαρμογή των βημάτων της τεχνικής TOPSIS ‘α posteriori’ μετά από επεξεργασία του πίνακα V για βάρη $w_1 = 0.2$, $w_2 = 0.8$.

$w_1 = 0,8$
$w_2 = 0,2$

	I^+	I^-
w1F1	1,6	15,2
w2F2	0,4	2,6

d_i^-	d_i^+	D_i
13,6	2,2	0,86076
12,0067	2,40832	0,83293
11,2285	2,77849	0,80164
10,469	3,35261	0,75744
8,12158	5,65685	0,58944
5,88218	8,00999	0,42342
3,1241	11,2018	0,21807
2,2	13,6	0,13924

Σχήμα 2.8: Εικονικό παράδειγμα μετώπου Pareto με 8 άτομα: Αποτελέσματα από την ‘α posteriori’ εφαρμογή των βημάτων της τεχνικής TOPSIS μετά από επεξεργασία του πίνακα V για βάρη $w_1 = 0.8$, $w_2 = 0.2$.



Σχήμα 2.9: Εικονικό παράδειγμα μειώπου Pareto με 8 άτομα: Αποτελέσματα από την 'a posteriori' εφαρμογή των βημάτων της τεχνικής ELECTRE I μετά από επεξεργασία του πίνακα **V** για βάρη $w_1 = 0.2$, $w_2 = 0.8$.

$w_1 = 0,8$
$w_2 = 0,2$

C=

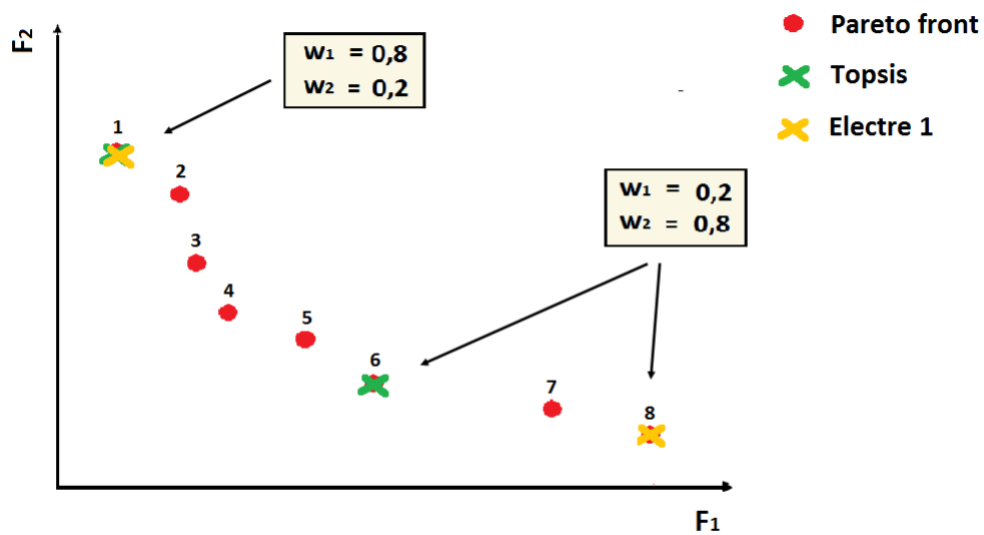
	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
0,2		0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
0,2	0,2		0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
0,2	0,2	0,2		0,8	0,8	0,8	0,8
0,2	0,2	0,2	0,2		0,8	0,8	0,8
0,2	0,2	0,2	0,2	0,2		0,8	0,8
0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2		0,8
0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	

D=

	0,03	0,06	0,09	0,10	0,13	0,15	0,16
0,12		0,03	0,06	0,07	0,10	0,12	0,13
0,18	0,06		0,03	0,04	0,07	0,09	0,10
0,24	0,12	0,06		0,01	0,04	0,06	0,07
0,41	0,29	0,24	0,18		0,03	0,04	0,06
0,59	0,47	0,41	0,35	0,18		0,01	0,03
0,82	0,71	0,65	0,59	0,41	0,24		0,01
1	0,88	0,82	0,76	0,59	0,41	0,18	

A=	4,2	B=	-2,63	K=	-6,83
	3		-1,93		-4,93
	1,8		-1,69		-3,49
	0,6		-1,46		-2,06
	-0,6		-0,16		0,44
	-1,8		1,01		2,81
	-3		2,78		5,78
	-4,2		4,07		8,27

Σχήμα 2.10: Εικονικό παράδειγμα μετώπου Pareto με 8 άτομα: Αποτελέσματα από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των βημάτων της τεχνικής ELECTRE I μετά από επεξεργασία του πίνακα V για βάρη $w_1 = 0.8$, $w_2 = 0.2$.



Σχήμα 2.11: Εικονικό παράδειγμα μετώπου Pareto με 8 άτομα: Βέλτιστες λύσεις μετά την 'a posteriori' εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στο αποτελούμενο από 8 άτομα μέτωπο Pareto για βάρη $w_1 = 0.2, w_2 = 0.8$ και $w_1 = 0.8, w_2 = 0.2$.

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογή των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I σε Μαθηματικά Προβλήματα ΜΟΟ

Σε αυτό το κεφάλαιο πραγματοποιείται εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I, στην 'a posteriori' και 'a priori' λογική, όπως περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, σε μαθηματικά προβλήματα ΜΟΟ. Η επιλογή των προβλημάτων γίνεται με σκοπό τη μελέτη της συμπεριφοράς των δύο τεχνικών MCDM όταν εφαρμόζονται σε προβλήματα με διαφορετικές μορφές μετώπων μη-κυριαρχούμενων λύσεων, τόσο δύο όσο και τριών διαστάσεων.

3.1 'A posteriori' Εφαρμογή των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I

Καταρχάς, οι τεχνικές TOPSIS και ELECTRE I εφαρμόζονται 'a posteriori' σε μαθηματικά προβλήματα ελαχιστοποίησης που αποτελούνται από δύο συναρτήσεις κόστους και έχουν μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων κυρτά, μη-κυρτά ή διακοπτόμενα. Στη συνέχεια, εφαρμόζονται σε μαθηματικά προβλήματα ελαχιστοποίησης αποτελούμενα από τρεις συναρτήσεις κόστους. Η ποσοτικοποίηση των προτιμήσεων του DM γίνεται χρησιμοποιώντας τα βάρη του πίνακα 3.1.

	Δύο Στόχοι		Τρεις Στόχοι		
	w_1	w_2	w_1	w_2	w_3
1	0.3	0.7	0.7	0.1	0.2
2	0.5	0.5	0.3	0.6	0.1
3	0.6	0.4	0.1	0.1	0.8
4	0.7	0.3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Πίνακας 3.1: Συνδυασμοί βαρών για την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I σε μαθηματικά προβλήματα MOO.

3.1.1 Μαθηματικά Προβλήματα Ελαχιστοποίησης Δύο Στόχων

Κυρτά Μέτωπα Μη-κυριαρχούμενων Λύσεων

Αρχικά επιλύεται το πρόβλημα ZDT 1 [39]

$$Min \left[\begin{array}{l} f_1(x) = x_1 \\ f_2(x) = g(x)h(f_1(x), g(x)) \end{array} \right] \quad (3.1)$$

Οι συναρτήσεις $g(x)$ και $h(x)$ βάσει των οποίων υπολογίζεται η συνάρτηση κόστους f_2 ορίζονται ως εξής,

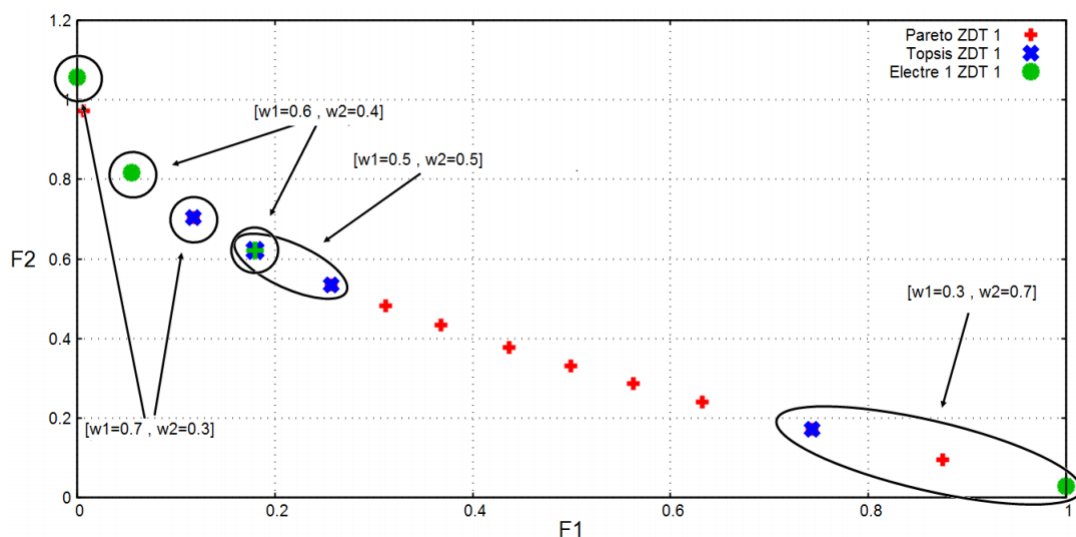
$$g(x) = 1 + \frac{9}{29} \sum_{i=2}^{30} x_i$$

$$h(f_1(x), g(x)) = 1 - \sqrt{\frac{f_1(x)}{g(x)}}$$

Το πρόβλημα αποτελείται από 30 μεταβλητές σχεδιασμού ($N=30$) για τις οποίες ισχύει $0 \leq x_i \leq 1$. Χρησιμοποιείται ένας $(\mu, \lambda)=(30, 60)$ ΕΑ με κριτήριο τερματισμού τις 5000 αξιολογήσεις και 15 λύσεις στο σύνολο των επιλέκτων. Μετά την επίλυση του προβλήματος MOO και τον υπολογισμό του μετώπου Pareto χρησιμοποιούνται τα βάρη του πίνακα 3.1 για την εφαρμογή των τεχνικών MCDM.

Στο σχήμα (3.1) απεικονίζονται τα αποτελέσματα εφαρμογής των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στο μέτωπο Pareto του προβλήματος ZDT 1. Χρησιμοποιώντας την τεχνική TOPSIS, αύξηση του βάρους w_1 οδηγεί σε μετατόπιση της βέλτιστης λύσης προς μικρότερες τιμές της συνάρτησης κόστους F_1 και μεγαλύτερες της F_2 . Αντίστοιχα, αύξηση του βάρους w_2 έχει ως συνέπεια τη μείωση της τιμής της F_2 και αύξηση της τιμής της F_1 στη βέλτιστη λύση. Εφαρμόζοντας την τεχνική ELECTRE I για βάρη $w_1 = 0.3$ και $w_2 = 0.7$, η βέλτιστη λύση παρουσιάζει τη μικρότερη τιμή της F_2 και τη μεγαλύτερη τιμή της F_1 . Όταν τα βάρη ισούνται με $w_1 = 0.7$ και $w_2 = 0.3$, η βέλτιστη λύση διαθέτει τη μικρότερη τιμή της συνάρτησης κόστους F_1 και τη μεγαλύτερη τιμή της συνάρτησης κόστους F_2 . Χρησιμοποιώντας τα βάρη

$w_1 = 0.6$ και $w_2 = 0.4$, οι βέλτιστες λύσεις βρίσκονται σε κεντρικότερα τμήματα του μετώπου Pareto σε σχέση με τις προηγούμενες περιπτώσεις. Οι πιο κεντρικές βέλτιστες λύσεις επιτυγχάνονται με τα βάρη $w_1 = 0.5$ και $w_2 = 0.5$. Τα άτομα του μετώπου Pareto που επιλέγονται από τις δύο τεχνικές για τον τελευταίο συνδυασμό βαρών είναι διαδοχικά.

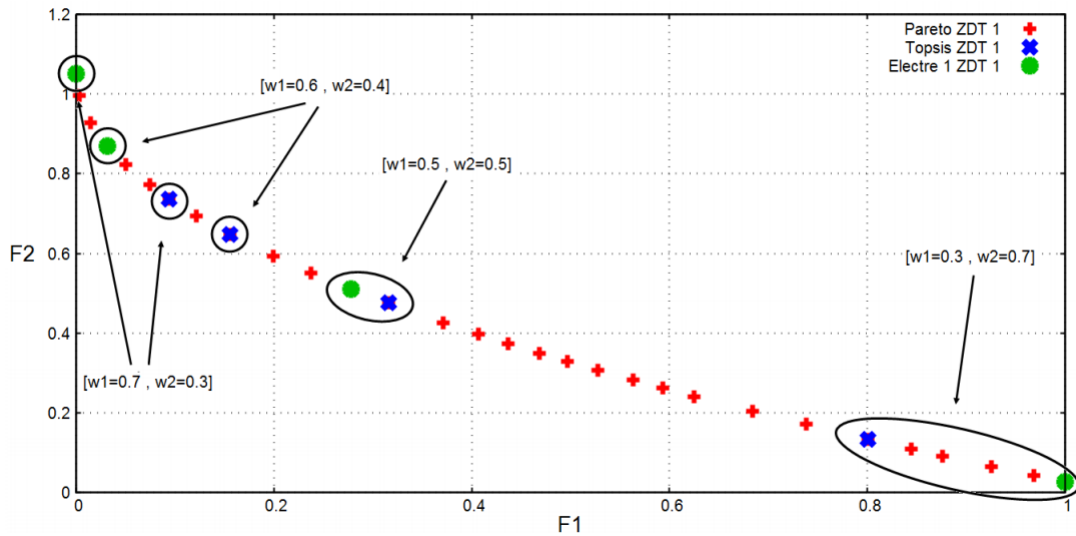


Σχήμα 3.1: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων ZDT 1: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στο αποτελούμενο από 15 άτομα μέτωπο Pareto για τα αναγραφόμενα βάρη.

Στη συνέχεια, επιλύεται το ίδιο πρόβλημα ορίζοντας 30 άτομα στο σύνολο των επιλέκτων. Όπως διακρίνεται στο σχήμα (3.2), χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.3$ και $w_2 = 0.7$, τα αποτελέσματα των δύο τεχνικών είναι αντίστοιχα αυτών που προέκυψαν για 15 επίλεκτες λύσεις. Εφαρμόζοντας την τεχνική TOPSIS για βάρη $w_1 = 0.7$ και $w_2 = 0.3$, επιλέγεται ως βέλτιστο κεντρικότερο άτομο του μετώπου Pareto σε σχέση με την τεχνική ELECTRE I, βάσει της οποίας βέλτιστη θεωρείται η ακραία λύση. Χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.5$ και $w_2 = 0.5$ και $w_1 = 0.6$ και $w_2 = 0.4$, οι βέλτιστες λύσεις απομακρύνονται από τα άκρα του μετώπου. Τα άτομα του μετώπου Pareto που επιλέγονται από τις δύο τεχνικές για ίσα βάρη είναι διαδοχικά.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I δείχνει πως κάθε τεχνική παρουσιάζει όμοια συμπεριφορά ανεξαρτήτως αριθμού ατόμων που συνθέτουν ένα μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων. Οι διαφορές που προκύπτουν στις λύσεις οφείλονται στη διαφορετική κατανομή των ατόμων σε κάθε μέτωπο.

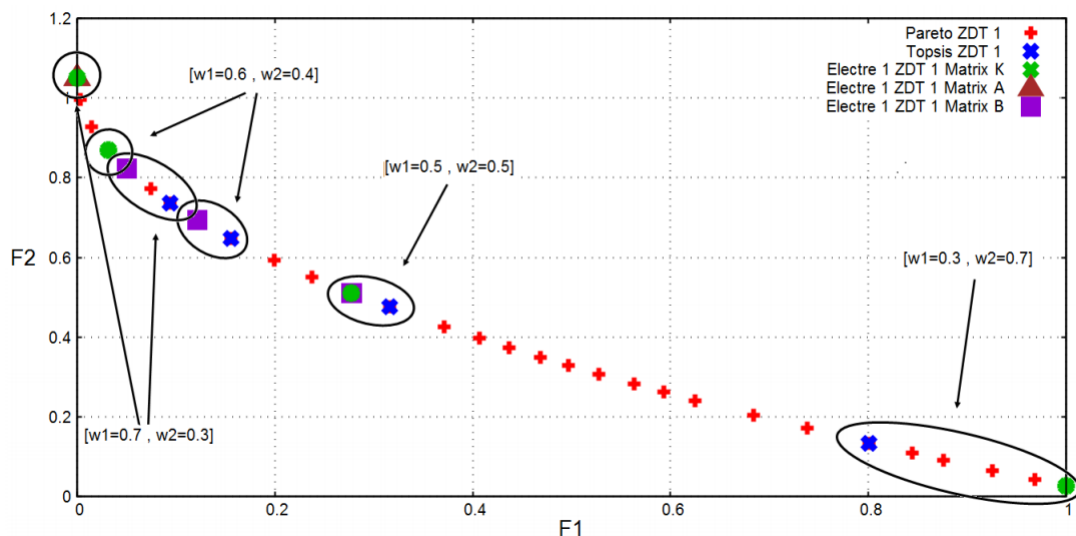
Στη συνέχεια, επαναχρησιμοποιείται το αποτελούμενο από 30 άτομα μέτωπο Pareto του προβλήματος ZDT 1. Εφαρμόζεται η τεχνική ELECTRE I χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικά κριτήρια επιλογής των βέλτιστων λύσεων. Ο πίνακας **A**, εξ. (2.15),



Σχήμα 3.2: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων ZDT 1: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στο αποτελούμενο από 30 άτομα μέτωπο Pareto για τα αναγραφόμενα βάρη.

αποτελεί το πρώτο κριτήριο επιλογής και ο πίνακας **B**, εξ. (2.16), αποτελεί το δεύτερο. Στο σχήμα (3.3) παρουσιάζονται οι διαφορές που προκύπτουν στις βέλτιστες λύσεις για τους τέσσερις συνδυασμούς βαρών του πίνακα 3.1. Χρησιμοποιώντας τα βάρη $w_1 = 0.3$ και $w_2 = 0.7$, παρατηρείται ότι σύμφωνα με τον πίνακα **A**, βέλτιστη θεωρείται η ακραία λύση του μετώπου Pareto με τη μικρότερη τιμή της συνάρτησης κόστους F_1 και τη μεγαλύτερη της F_2 . Σε αντίθεση με τον πίνακα **B**, ο υπολογισμός των τιμών του πίνακα **A** βασίζεται αποκλειστικά στα βάρη που ορίζει ο DM και όχι στις τιμές των συναρτήσεων κόστους. Συνεπώς, βάσει αυτού του πίνακα η βέλτιστη λύση ενός μετώπου μη-κυριαρχούμενων λύσεων σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης έχει πάντα τη μικρότερη τιμή της συνάρτησης κόστους που αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο βάρος. Σε περίπτωση ίσων βαρών, τα στοιχεία του πίνακα **A** αποκτούν μηδενικές τιμές με αποτέλεσμα ο πίνακας **B** να καθορίζει το αποτέλεσμα. Χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.7$, $w_2 = 0.3$ και $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$, οι βέλτιστες λύσεις βάσει του πίνακα **B** εντοπίζονται σε κεντρικότερα τμήματα του μετώπου Pareto σε σύγκριση με τις αντίστοιχες του πίνακα **K**. Επιπλέον, σε σχέση με τα βέλτιστα άτομα των πινάκων **A** και **K**, τα άτομα που επιλέγονται από τον πίνακα **B** βρίσκονται πιο κοντά στα αντίστοιχα που προκύπτουν χρησιμοποιώντας την τεχνική TOPSIS.

Συμπεραίνεται ότι, για κυρτή μορφή μετώπου μη-κυριαρχούμενων λύσεων, χρήση της τεχνικής ELECTRE I με διαφορετικά κριτήρια επιλογής της βέλτιστης λύσης οδηγεί σε διαφορετικά αποτελέσματα. Η βέλτιστη λύση που προκύπτει με βάση τον πίνακα **B** είναι καλύτερη για τον DM σε σχέση με αυτή που προκύπτει από τον πίνακα **A**. Επιπλέον, οι βέλτιστες λύσεις βάσει του πίνακα **B** είναι οι πλησιέστερες



Σχήμα 3.3: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων ZDT 1: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στο αποτελούμενο από 30 άτομα μέτωπο Pareto για τα αναγραφόμενα βάρη. Η βέλτιστη λύση της τεχνικής ELECTRE I προκύπτει βάσει των πινάκων **A**, **B** ή **K**.

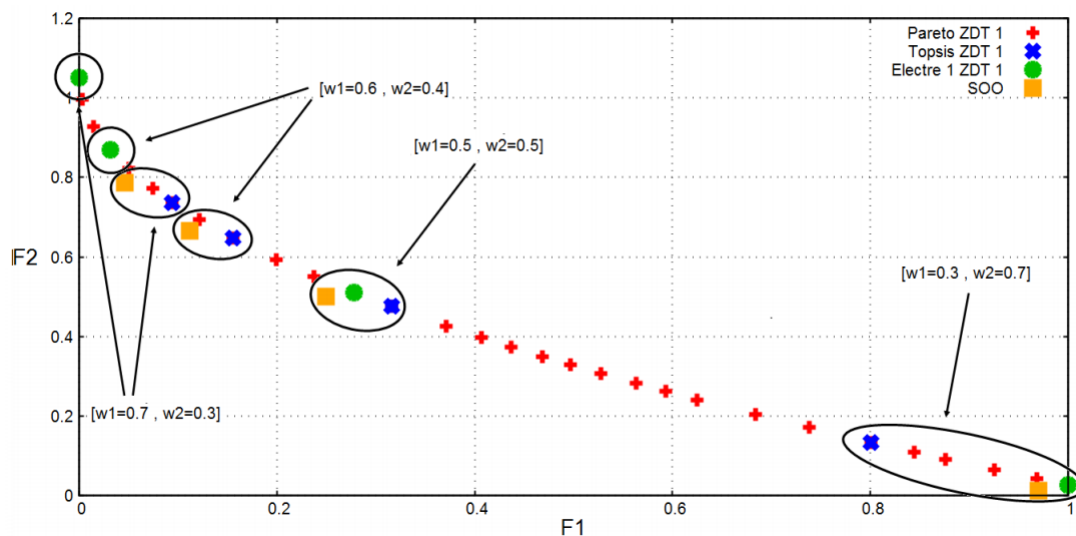
των βέλτιστων λύσεων της τεχνικής TOPSIS.

Η εύρεση της βέλτιστης, για τον DM, λύσης σε ένα πρόβλημα MOO απαιτεί την εφαρμογή τεχνικών MCDM. Η εφαρμογή αυτή μπορεί να αποφευχθεί μετατρέποντας το πρόβλημα MOO σε SOO. Οι συναρτήσεις κόστους πολλαπλασιάζονται με τα αντίστοιχα βάρη και αθροίζονται δημιουργώντας μία νέα συνάρτηση κόστους,

$$F = \sum_{j=1}^{M_o} w_j F_j \quad (3.2)$$

Επιλύεται το πρόβλημα SOO και προκύπτει μία βέλτιστη λύση. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, χρησιμοποιούνται η σχέση (3.2) και τα βάρη του πίνακα 3.1 για την επίλυση του προβλήματος ZDT 1. Κριτήριο τερματισμού για το πρόβλημα SOO είναι οι 5000 αξιολογήσεις. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τις βέλτιστες λύσεις των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στο αποτελούμενο από 30 άτομα μέτωπο Pareto. Πιο συγκεκριμένα, η λύση αυτή κυριαρχεί για βάρη $w_1 = 0.3$, $w_2 = 0.7$ και $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$, στη βέλτιστη λύση της τεχνικής ELECTRE I. Σε καμία όμως περίπτωση βαρών, η βέλτιστη λύση του προβλήματος SOO δεν κυριαρχείται από τη βέλτιστη λύση της τεχνικής ELECTRE I. Επιπλέον, για κανένα συνδυασμό βαρών η βέλτιστη λύση του προβλήματος SOO δεν κυριαρχείται από τη βέλτιστη λύση της τεχνικής TOPSIS.

Η διαφορά των δύο τρόπων αντιμετώπισης ενός προβλήματος MOO είναι η εξής. Οι δύο τεχνικές TOPSIS και ELECTRE I εφαρμοζόμενες ‘a posteriori’ στο πρόβλημα



Σχήμα 3.4: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων ZDT 1: Βέλτιστες λύσεις του προβλήματος SOO $F = w_1 F_1 + w_2 F_2$ σε σχέση με τις βέλτιστες λύσεις που προκύπτουν από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στο αποτελούμενο από 30 άτομα μέτωπο Pareto. Η επίλυση του προβλήματος SOO και η εφαρμογή των τεχνικών MCDM γίνεται για τα αναγραφόμενα βάρη.

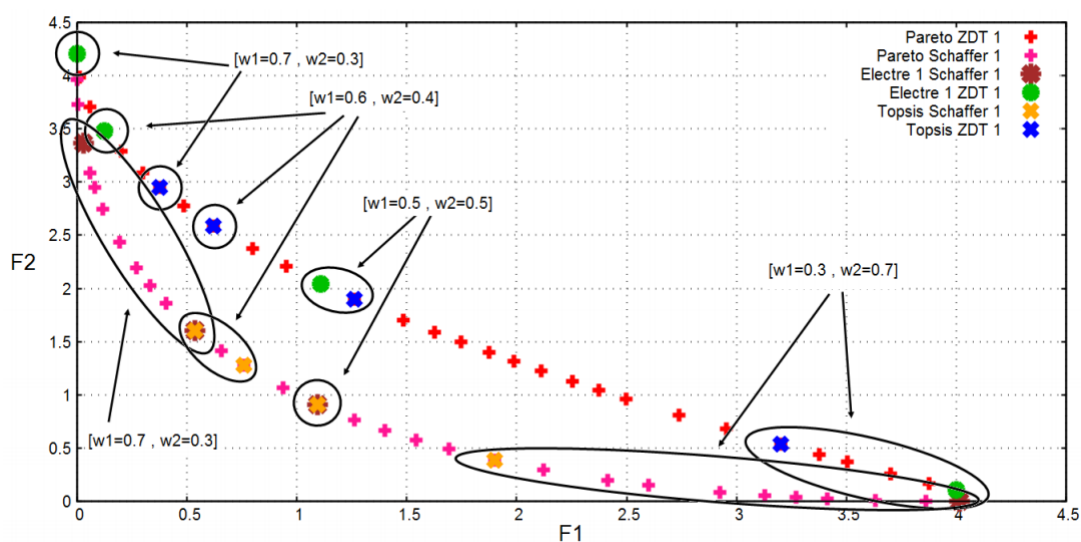
ΜΟΟ, εντοπίζουν τη βέλτιστη λύση σε ένα μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων χρησιμοποιώντας όσους συνδυασμούς βαρών ορίζει ο DM. Αντίθετα, το πρόβλημα SOO απαιτεί τόσες επιλύσεις, όσοι είναι και οι επιθυμητοί συνδυασμοί βαρών. Οδηγεί σε μία βέλτιστη λύση και απαιτεί γνώση των βαρών που ορίζει ο DM πριν ξεκινήσει η βελτιστοποίηση.

Η διερεύνηση αποτελεσμάτων σε κυρτά μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων συνεχίζεται πραγματοποιώντας συγκρίσεις των βέλτιστων λύσεων ανάλογα με την καμπυλότητα των μετώπων. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται ξανά το μέτωπο Pareto του προβλήματος ZDT 1 σε σύγκριση με το μέτωπο του προβλήματος Schaffer 1 [40], το οποίο περιγράφεται ως εξής:

$$\text{Min} \begin{bmatrix} f_1(x) = x^2 \\ f_2(x) = (x - 2)^2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Το πρόβλημα Schaffer 1 αποτελείται από μία μεταβλητή σχεδιασμού η οποία βρίσκεται εντός των ορίων $-10 \leq x \leq 10$. Για την επίλυση του χρησιμοποιείται ένας $(\mu, \lambda) = (30, 60)$ ΕΑ με κριτήριο τερματισμού τις 1000 αξιολογήσεις και 30 άτομα στο σύνολο των επιλέκτων. Το μέτωπο Pareto που προκύπτει είναι κυρτό και με καμπυλότητα μεγαλύτερη αυτού του προβλήματος ZDT 1. Οι τιμές και των δύο συναρτήσεων κόστους βρίσκονται μέσα στο διάστημα $[0, 4]$, γεγονός που οδηγεί στην ανάλογη προσαρμογή του εύρους των τιμών των συναρτήσεων κόστους του

προβλήματος ZDT 1. Με αυτόν τον τρόπο, είναι δυνατή η σύγκριση των αποτελεσμάτων εφαρμογής των τεχνικών MCDM στα δύο μέτωπα Pareto. Από το σχήμα (3.5) παρατηρείται πως οι λύσεις του προβλήματος Schaffer 1 που είναι οι βέλτιστες βάσει των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.6, w_2 = 0.4$ και $w_1 = 0.5, w_2 = 0.5$, βρίσκονται κεντρικότερα του μετώπου και πλησιέστερα μεταξύ τους σε σχέση με τις αντίστοιχες βέλτιστες λύσεις του προβλήματος ZDT 1. Αντίθετα, χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.3, w_2 = 0.7$ και $w_1 = 0.7, w_2 = 0.3$, οι βέλτιστες λύσεις που προκύπτουν από την τεχνική ELECTRE I για το πρόβλημα Schaffer 1 παραμένουν στα άκρα του μετώπου Pareto ενώ της τεχνικής TOPSIS μετατοπίζονται κεντρικότερα. Συνεπώς, στα βάρη αυτά υπάρχει μεγαλύτερη απόκλιση αποτελεσμάτων μεταξύ των δύο τεχνικών, σε σχέση με τα αποτελέσματα εφαρμογής τους στο πρόβλημα ZDT 1.



Σχήμα 3.5: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων ZDT 1 και Schaffer1: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στα αποτελούμενα από 30 άτομα μέτωπα Pareto για τα αναγραφόμενα βάρη.

Παρατηρείται πως η καμπυλότητα ενός κυρτού μετώπου μη-κυριαρχούμενων λύσεων επιδρά στη συμπεριφορά των δύο τεχνικών. Η τεχνική TOPSIS οδηγείται σε κεντρικότερες βέλτιστες λύσεις ενώ οι βέλτιστες λύσεις της τεχνικής ELECTRE I δεν απομακρύνονται πάντα από τα άκρα του μετώπου.

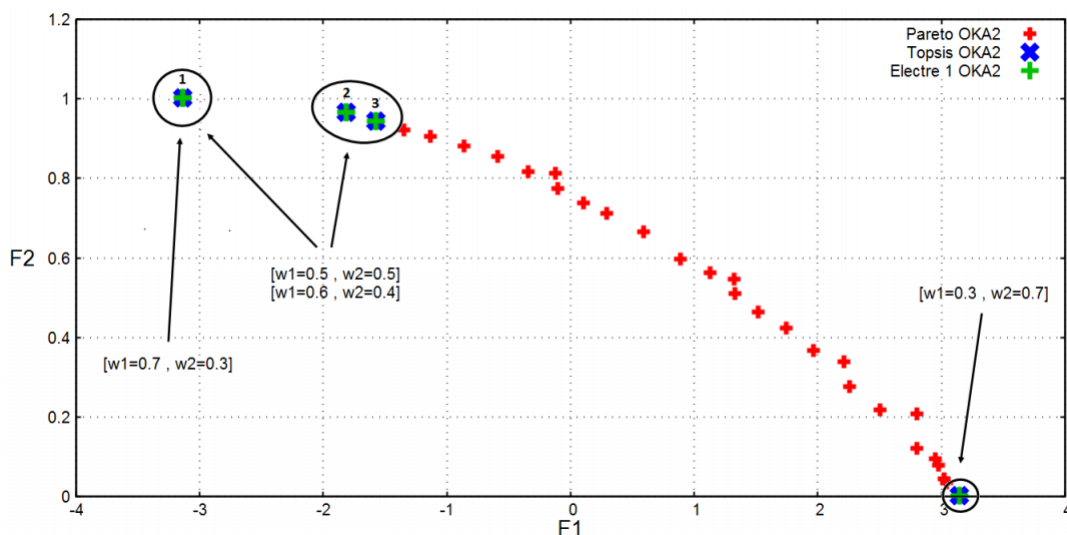
Μη-κυρτά Μέτωπα Μη-Κυριαρχούμενων Λύσεων

Σε αυτό το τμήμα της εργασίας γίνεται μελέτη της συμπεριφοράς των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I όταν εφαρμόζονται σε μη-κυρτά μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων. Επιλύεται το πρόβλημα OKA 2 [41] χρησιμοποιώντας

έναν $(\mu, \lambda) = (30, 60)$ ΕΑ με κριτήριο τερματισμού τις 5000 αξιολογήσεις και 30 άτομα στο σύνολο των επιλέκτων.

$$\text{Min} \left[\begin{array}{l} f_1(x) = x_1 \\ f_2(x) = 1 - \frac{1}{4\pi^2}(x_1 + \pi)^2 + |x_2 - 5\cos(x_1)|^{\frac{1}{3}} + |x_3 - 5\sin(x_1)|^{\frac{1}{3}} \end{array} \right] \quad (3.4)$$

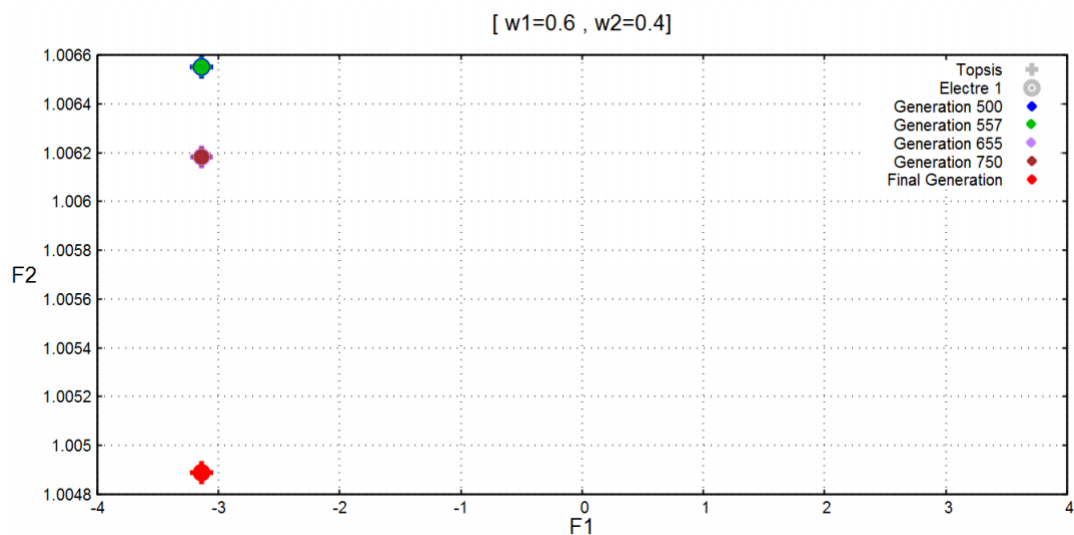
Το πρόβλημα αποτελείται από τρεις μεταβλητές σχεδιασμού ($N=3$) για τις οποίες ισχύει $-\pi \leq x_1 \leq \pi$, $-5 \leq x_2 \leq 5$ και $-5 \leq x_3 \leq 5$. Εφαρμόζοντας την τεχνική TOPSIS για τα βάρη του πίνακα 3.1 παρατηρείται από το σχήμα (3.6) πως οι μόνες λύσεις που εντοπίζονται είναι οι δύο ακραίες, δηλαδή αυτές με τη μικρότερη ή τη μεγαλύτερη τιμή των συναρτήσεων κόστους. Όμοια είναι τα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας την τεχνική ELECTRE I, οι βέλτιστες λύσεις της οποίας ταυτίζονται με αυτές της τεχνικής TOPSIS. Συνεπώς, στις περιπτώσεις όπου οι δύο στόχοι έχουν παρόμοια ή ίδια βαρύτητα για τον DM, η λύση δεν ανταποκρίνεται στις ανάγκες του. Για αυτόν το λόγο, εφαρμόζονται οι τεχνικές TOPSIS και ELECTRE I με στόχο τις τρεις καλύτερες λύσεις για βάρη $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$ και $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$. Οι βέλτιστες λύσεις κάθε τεχνικής αντιστοιχούν στις τρεις διαδοχικές λύσεις του άκρου του μετώπου Pareto με τις μικρότερες τιμές της συνάρτησης κόστους F_1 και τις μεγαλύτερες τιμές της συνάρτησης κόστους F_2 . Παρατηρείται, επομένως, ότι προτεραιότητα στην κατάταξη των λύσεων από τις δύο τεχνικές MCDM έχουν διαδοχικές ακραίες λύσεις του μετώπου Pareto.



Σχήμα 3.6: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων OKA 2: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στα αποτελούμενα από 30 άτομα μέτωπα Pareto για τα αναγραφόμενα βάρη. Απεικόνιση των τριών βέλτιστων λύσεων βάσει των δύο τεχνικών για βάρη $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$ και $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$.

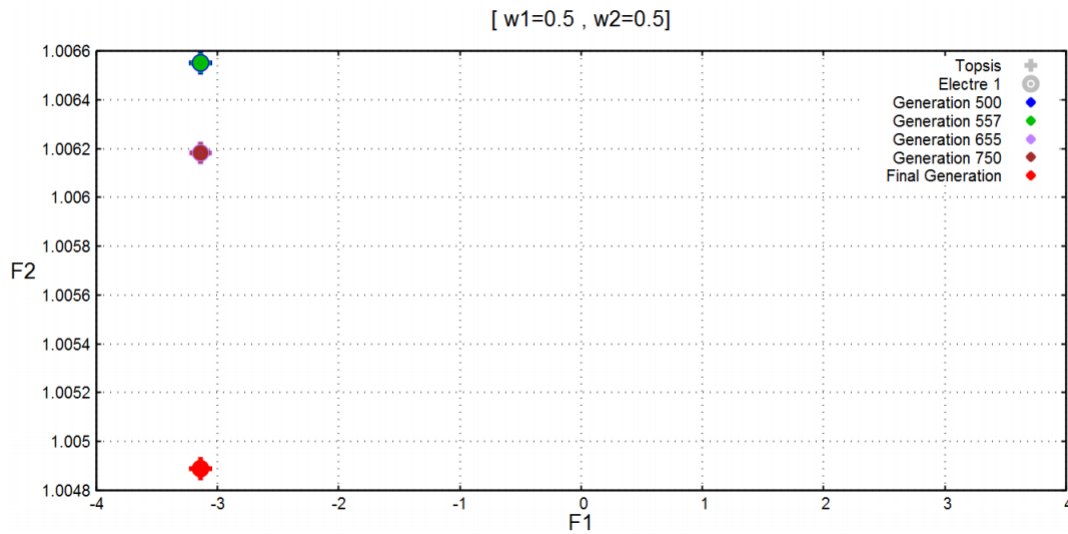
Με στόχο την περαιτέρω διερεύνηση εφαρμογής των τεχνικών σε μη-κυρτά μέτωπα

μη-κυριαρχούμενων λύσεων πραγματοποιείται η εξής διαδικασία. Επιπλέον του μετώπου Pareto εφαρμόζονται οι τεχνικές TOPSIS και ELECTRE I σε τέσσερα μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων ενδιάμεσων γενιών. Τα μέτωπα αυτά αποτελούνται επίσης από 30 άτομα. Η διερεύνηση εστιάζεται στην περίπτωση όπου οι δύο συναρτήσεις κόστους έχουν παρόμοια βαρύτητα. Όπως φαίνεται στα σχήματα (3.7) και (3.8), οι βέλτιστες λύσεις των μετώπων μη-κυριαρχούμενων λύσεων για βάρη $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$ και $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$ σχεδόν ταυτίζονται με τις βέλτιστες λύσεις των δύο τεχνικών για τα ίδια βάρη στο μετωπο Pareto της τελικής γενιάς. Συνεπώς, σε περιπτώσεις μη-κυρτών μετώπων μη-κυριαρχούμενων λύσεων οι βέλτιστες λύσεις που προκύπτουν βρίσκονται είτε στο ένα άκρο των μετώπων είτε στο άλλο ανεξαρτήτως αριθμού αξιολογήσεων.



Σχήμα 3.7: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων OKA 2: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στα μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων πέντε διαφορετικών γενιών. Εφαρμογή των τεχνικών για βάρη $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$.

Η διαφοροποίηση των μη-κυρτών από τα κυρτά μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων γίνεται αισθητή από τα παραπάνω αποτελέσματα. Σε μη-κυρτά μέτωπα οι βέλτιστες λύσεις των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I προσκολλώνται στα άκρα, σε αντίθεση με τα κυρτά όπου οι βέλτιστες λύσεις ανταποκρίνονται στις προτιμήσεις του DM.



Σχήμα 3.8: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων OKA 2: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στα μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων πέντε διαφορετικών γενιών. Εφαρμογή των τεχνικών για βάρη $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$.

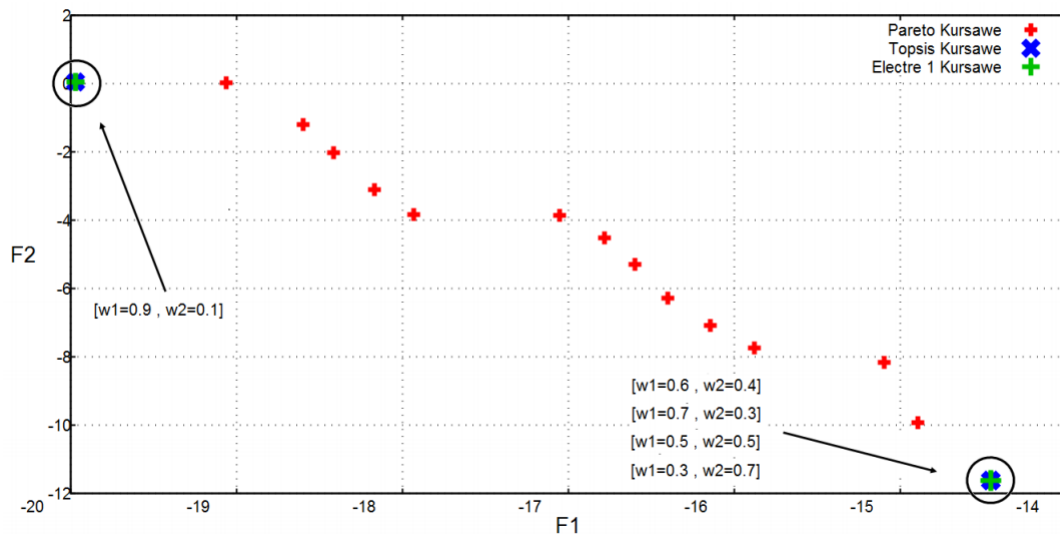
Διακοπτόμενα Μέτωπα Μη-Κυριαρχούμενων Λύσεων

Στη συνέχεια, επιλύεται το πρόβλημα Kursawe [42] το οποίο περιγράφεται ως εξής:

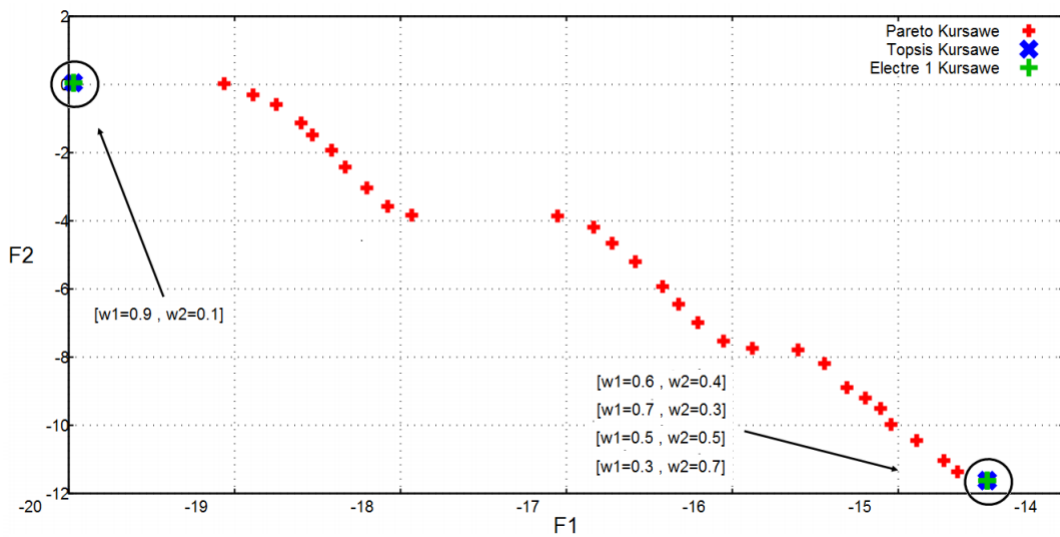
$$\text{Min} \begin{cases} f_1(x) = \sum_{i=1}^2 [-10 \exp(-0.2 \sqrt{x_i^2 + x_{i+1}^2})] \\ f_2(x) = \sum_{i=1}^3 [|x_i|^{0.8} + 5 \sin(x_i^3)] \end{cases} \quad (3.5)$$

Το πρόβλημα αποτελείται από τρεις μεταβλητές σχεδιασμού ($N=3$) για τις οποίες ισχύει $-5 \leq x_i \leq 5$. Χρησιμοποιείται ένας $(\mu, \lambda)=(30, 60)$ ΕΑ με κριτήριο τερματισμού τις 5000 αξιολογήσεις, τόσο με 15 όσο και με 30 άτομα στο σύνολο των επιλέκτων. Η επίλυση οδηγεί σε διακοπτόμενο μέτωπο Pareto στο οποίο εφαρμόζονται οι τεχνικές TOPSIS και ELECTRE I. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα σχήματα (3.9) και (3.10) είναι τα ακόλουθα: Χρησιμοποιώντας τους τέσσερις συνδυασμούς βαρών του πίνακα 3.1 η βέλτιστη λύση προσκολλάται στο ένα άκρο του μετώπου Pareto. Συγκεκριμένα, η βέλτιστη λύση αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη τιμή της συνάρτησης κόστους F_1 και στη μικρότερη τιμή της συνάρτησης κόστους F_2 . Χρειάζεται να δοθούν βάρη $w_1 = 0.9$ και $w_2 = 0.1$ για την επιλογή της λύσης του μετώπου Pareto με τη μικρότερη τιμή της συνάρτησης κόστους F_1 και τη μεγαλύτερη τιμή της συνάρτησης κόστους F_2 .

Παρατηρείται πως στην περίπτωση του διακοπτόμενου μετώπου μη-κυριαρχούμενων λύσεων η εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I καταλήγει σε ακραίες



Σχήμα 3.9: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων Kursawe: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στο αποτελούμενο από 15 άτομα μέτωπο Pareto για τα αναγραφόμενα βάρη.



Σχήμα 3.10: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων Kursawe: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στο αποτελούμενο από 30 άτομα μέτωπο Pareto για τα αναγραφόμενα βάρη.

βέλτιστες λύσεις που μπορεί να μην ανταποκρίνονται στις προτιμήσεις του DM.

3.1.2 Μαθηματικά Προβλήματα Ελαχιστοποίησης Τριών Στόχων

Στη συνέχεια, εφαρμόζονται οι τεχνικές TOPSIS και ELECTRE I σε μαθηματικά προβλήματα ελαχιστοποίησης τριών στόχων. Στην περίπτωση 3D μετώπων μη-κυριαρχούμενων λύσεων τίθεται το θέμα αναπαράστασης των ατόμων στον 3D χώρο. Η 3D απεικόνιση διαφέρει σε σχέση με τη 2D ως προς την ευκολία διάκρισης των τιμών των συναρτήσεων κόστους των λύσεων του προβλήματος MOO. Στη διπλωματική εργασία χρησιμοποιείται εκτός από τη 3D αναπαράσταση, η τεχνική απεικόνισης των παράλληλων συντεταγμένων [43]. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιεί τον 2D χώρο με τον εξής τρόπο. Σχηματίζονται τρία, κάθετα στον οριζόντιο άξονα, παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα. Καθένα από αυτά αντιστοιχεί σε μία συνάρτηση κόστους. Οι τιμές των συναρτήσεων κόστους προσαρμόζονται στο εύρος [0,1], με το 0 να αντιστοιχεί στην ελάχιστη και το 1 στη μέγιστη τιμή κάθε συνάρτησης κόστους. Στη συνέχεια, χαράσσονται δύο ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα ευθύγραμμα τμήματα των συναρτήσεων F_1 , F_2 και F_2 , F_3 στα σημεία που αντιστοιχούν στην τριάδα τιμών των συναρτήσεων κόστους κάθε λύσης. Οι βέλτιστες λύσεις των δύο τεχνικών σημειώνονται με έντονο χρώμα.

Εκτός του θέματος της απεικόνισης των ατόμων που συνθέτουν τα μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων σε προβλήματα βελτιστοποίησης τριών στόχων, αύξηση των διαστάσεων ενός προβλήματος MOO οδηγεί σε αύξηση της πολυπλοκότητας και συνεπώς του υπολογιστικού του κόστους. Για αυτόν το λόγο, διερευνάται η διαφοροποίηση των λύσεων κάθε τεχνικής ανάλογα με τον αριθμό αξιολογήσεων που χρησιμοποιούνται ως κριτήριο τερματισμού της βελτιστοποίησης. Εφαρμόζονται συνεπώς, οι τεχνικές MCDM σε μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων διαφορετικών γενιών πέραν της τελικής.

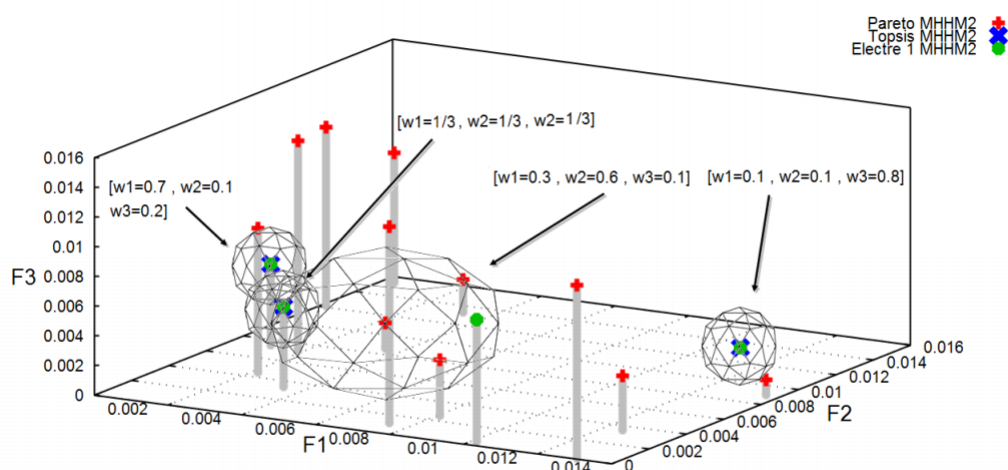
Πρόβλημα ΜΗΗΜ 2

Αρχικά, επιλύεται το πρόβλημα ΜΗΗΜ 2 [44],

$$\text{Min} \begin{bmatrix} f_1(x) = (x_1 - 0.8)^2 + (x_2 - 0.6)^2 \\ f_2(x) = (x_1 - 0.85)^2 + (x_2 - 0.7)^2 \\ f_3(x) = (x_1 - 0.9)^2 + (x_2 - 0.6)^2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

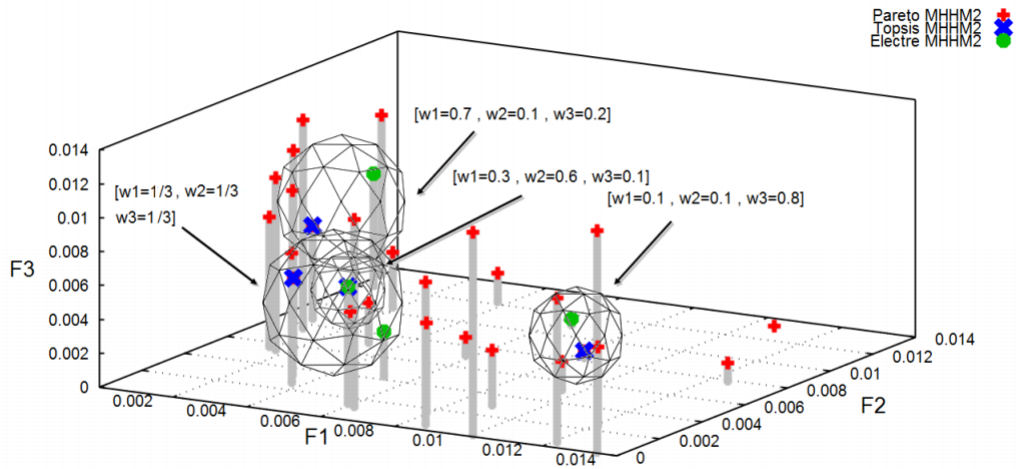
Το συγκεκριμένο πρόβλημα αποτελείται από δύο μεταβλητές σχεδιασμού (N=2) για τις οποίες ισχύει $0 \leq x_i \leq 1$. Χρησιμοποιείται ένας (30,60) ΕΑ με κριτήριο τερματισμού τις 5000 αξιολογήσεις. Στα σχήματα (3.11), (3.12) παρουσιάζονται, χρησιμοποιώντας τη 3D απεικόνιση, οι βέλτιστες λύσεις βάσει των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I για 15 και για 30 άτομα στο μέτωπο Pareto αντίστοιχα. Για

μεγαλύτερη κατανόηση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιείται η τεχνική των παράλληλων συντεταγμένων στο αποτελούμενο από 15 άτομα μέτωπο Pareto (σχήμα (3.13)). Παρατηρώντας το σχήμα (3.13), φαίνεται πως για κάθε συνδυασμό βαρών του πίνακα 3.1 εκτός του $w_1 = 0.3, w_2 = 0.1, w_3 = 0.1$, οι βέλτιστες λύσεις από την εφαρμογή των δύο τεχνικών ταυτίζονται. Επιπλέον, οι βέλτιστες λύσεις για βάρη $w_1 = 0.7, w_2 = 0.1, w_3 = 0.2$ και $w_1 = 0.1, w_2 = 0.1, w_3 = 0.8$, παρουσιάζουν μικρότερη τιμή της συνάρτησης κόστους με το μεγαλύτερο βάρος σε σχέση με τις υπόλοιπες συναρτήσεις. Χρησιμοποιώντας τα βάρη $w_1 = 0.3, w_2 = 0.6, w_3 = 0.1$, η βέλτιστη λύση βάσει της τεχνικής ELECTRE I αντιστοιχεί στη δεύτερη μικρότερη τιμή της συνάρτησης κόστους F_2 ενώ η βέλτιστη λύση βάσει της τεχνικής TOPSIS ταυτίζεται με αυτή για ίσα βάρη των συναρτήσεων κόστους.

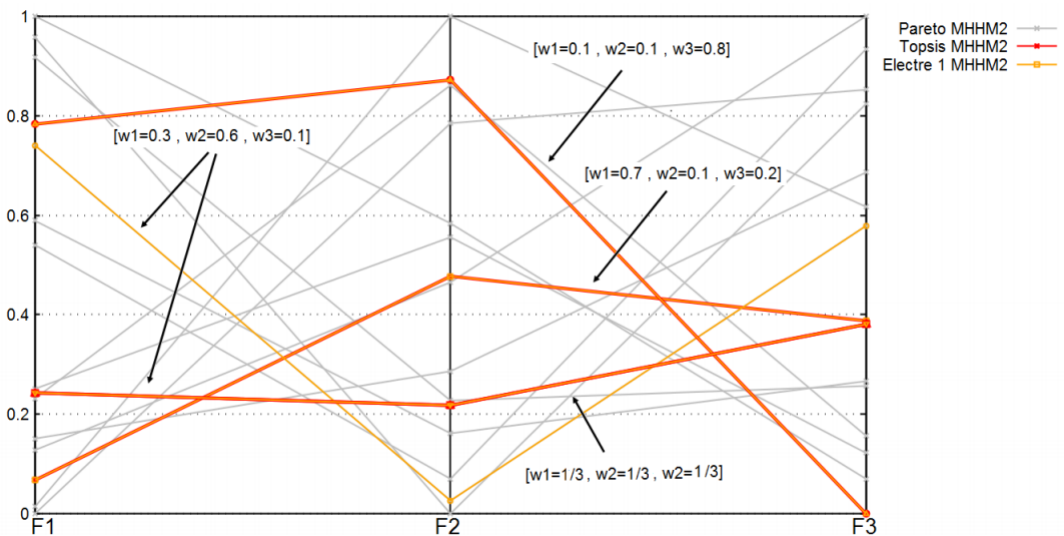


Σχήμα 3.11: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων MHHM 2: Βέλτιστες λύσεις από την εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I ‘a posteriori’ στο αποτελούμενο από 15 άτομα μέτωπο Pareto για τα αναγραφόμενα βάρη.

Στη συνέχεια, επιλύοντας το ίδιο πρόβλημα εξετάζεται η μεταβολή των βέλτιστων λύσεων των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I όταν αυτές εφαρμόζονται σε μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων διαφορετικών γενιών. Ορίζονται 15 άτομα στο σύνολο των επιλέκτων, χρησιμοποιούνται οι μη-κυριαρχούμενες λύσεις τεσσάρων ενδιάμεσων γενιών και οι λύσεις του μετώπου Pareto της τελευταίας γενιάς. Η αναπαράσταση γίνεται τόσο με τον 3D τρόπο όσο και με την τεχνική των παράλληλων συντεταγμένων. Παρατηρώντας τα σχήματα (3.14), (3.15) και (3.16) σε σύγκριση με το σχήμα (3.11), διακρίνεται πως στις βέλτιστες λύσεις η συνάρτηση κόστους που προτιμάται κάθε φορά από τον DM παρουσιάζει πολύ μικρές μεταβολές από γενιά σε γενιά. Όταν τα βάρη ισούνται με $w_1 = 0.7, w_2 = 0.1, w_3 = 0.2$, στο 3D σχήμα (3.14) οι τιμές του άξονα της F_1 είναι μία τάξη μεγέθους μικρότερες από τις τιμές της ίδιας συνάρτησης κόστους στο μέτωπο Pareto (3.11).



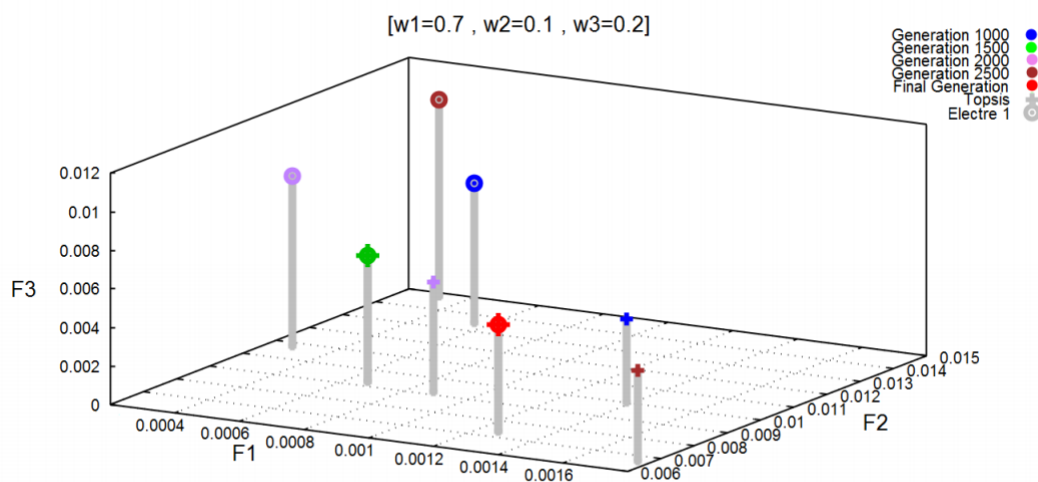
Σχήμα 3.12: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων ΜΗΗΜ 2: Βέλτιστες λύσεις από την εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I ‘a posteriori’ στο αποτελούμενο από 30 άτομα μέτωπο Pareto για τα αναγραφόμενα βάρη.



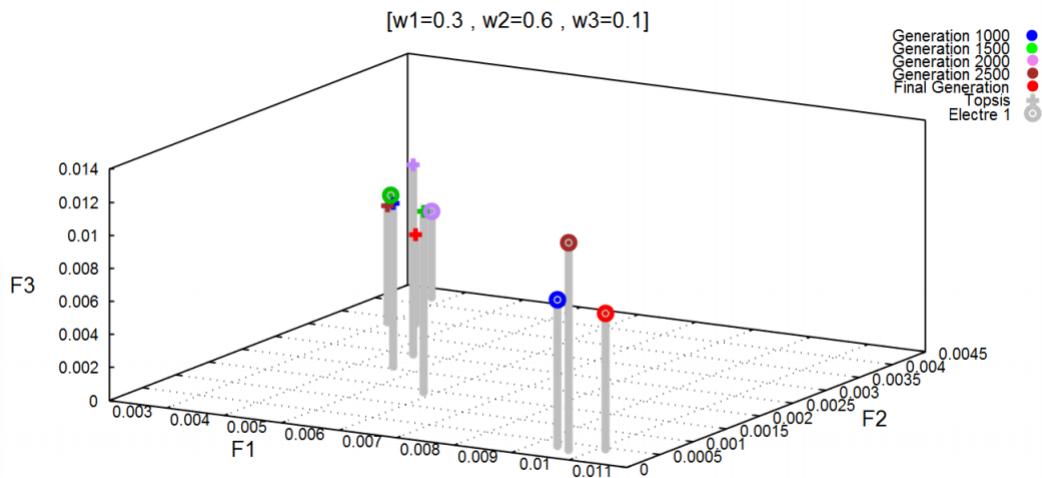
Σχήμα 3.13: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων ΜΗΗΜ 2: Απεικόνιση με την τεχνική των παράλληλων συντεταγμένων του αποτελούμενου από 15 άτομα μετώπου Pareto και των βέλτιστων, σε αυτό, λύσεων από την εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I ‘a posteriori’ για τα αναγραφόμενα βάρη.

Ομοίως, χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.3$, $w_2 = 0.6$, $w_3 = 0.1$ και $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.8$ (σχήματα (3.15) και (3.16) αντίστοιχα) οι τιμές των συναρτήσεων κόστους στις οποίες έχει προτίμηση ο DM μεταβάλλονται στις βέλτιστες λύσεις σε

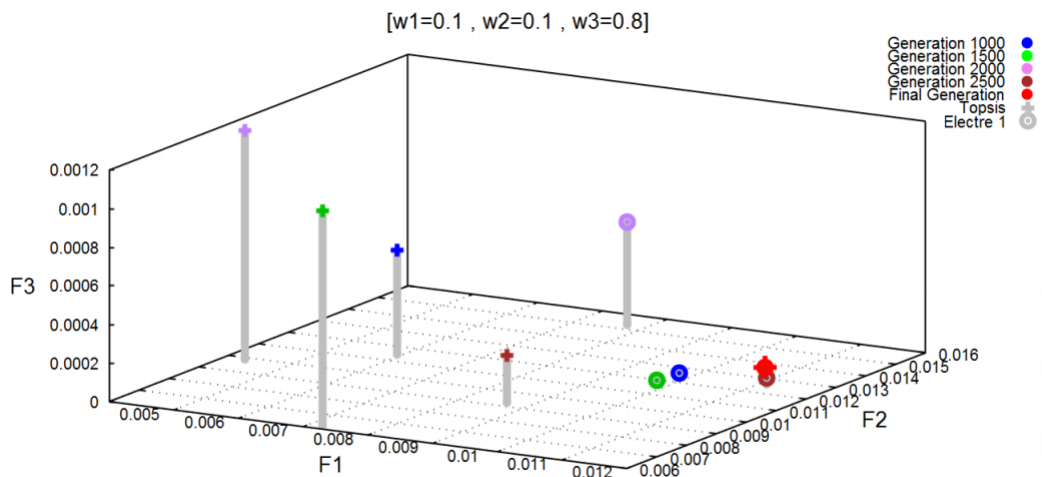
εύρος μίας τάξης μεγέθους μικρότερο από το εύρος μεταβολής τους στο μέτωπο Pareto του σχήματος (3.11). Παρατηρείται διαφορετική συμπεριφορά των αποτελεσμάτων στην τελευταία περίπτωση του σχήματος (3.17), όπου όλοι οι στόχοι έχουν την ίδια βαρύτητα για τον DM. Σε αυτήν την περίπτωση, τα εύρη μεταβολής των τιμών των συναρτήσεων κόστους των βέλτιστων λύσεων δεν αλλάζουν τάξη μεγέθους συγκριτικά με τα αντίστοιχα εύρη μεταβολής στο μέτωπο Pareto του σχήματος (3.11). Συνεπώς, οι τελικές λύσεις παρουσιάζουν μεγαλύτερες διαφορές από γενιά σε γενιά σε σχέση με τις προηγούμενες περιπτώσεις. Τα ίδια συμπεράσματα προκύπτουν και με την τεχνική των παράλληλων συντεταγμένων, όπου από τα σχήματα (3.18), (3.19) και (3.20) γίνεται εμφανής η μικρότερη μεταβολή της τιμής της συνάρτησης μεγαλύτερου ενδιαφέροντος για τον DM σε σχέση με τις υπόλοιπες στη βέλτιστη λύση. Επιπλέον, στο σχήμα (3.21), επαληθεύεται πως, για ίσα βάρη, οι μεταβολές των τιμών των συναρτήσεων κόστους των βέλτιστων λύσεων είναι συγκρίσιμες.



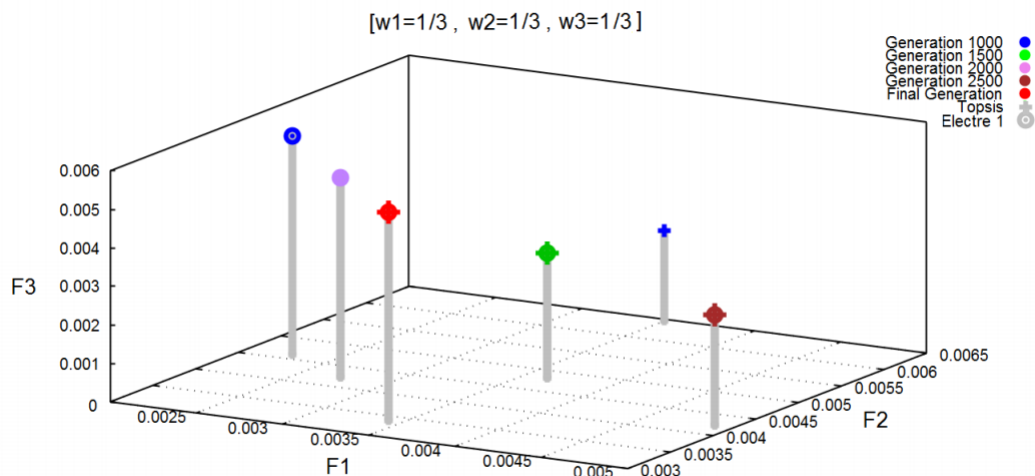
Σχήμα 3.14: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων ΜΗΗΜ 2: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στα αποτελούμενα από 15 άτομα μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων πέντε διαφορετικών γενιών για βάρη $w_1 = 0.7$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.2$.



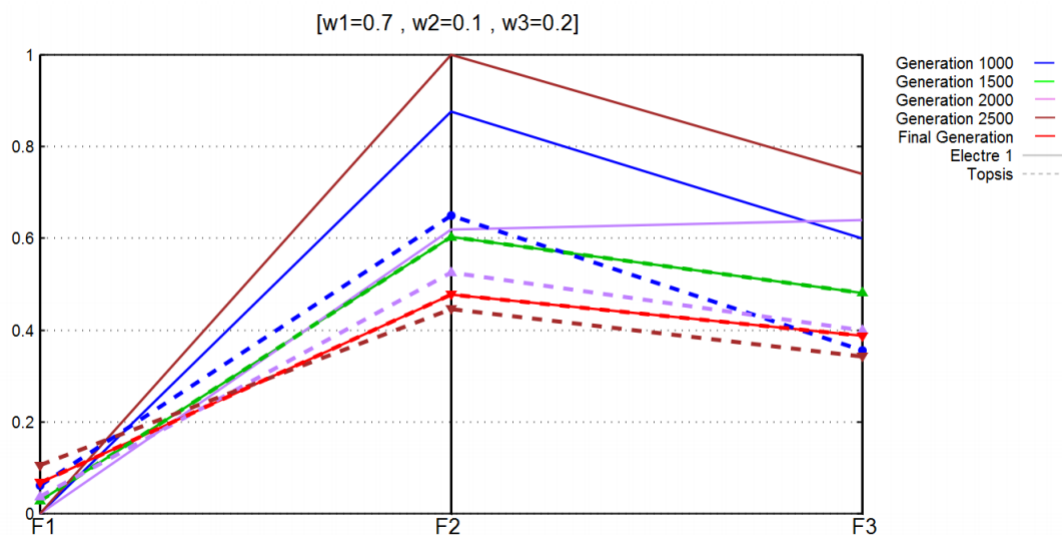
Σχήμα 3.15: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων ΜΗΗΜ 2: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στα αποτελούμενα από 15 άτομα μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων πέντε διαφορετικών γενιών για βάρη $w_1 = 0.3$, $w_2 = 0.6$, $w_3 = 0.1$.



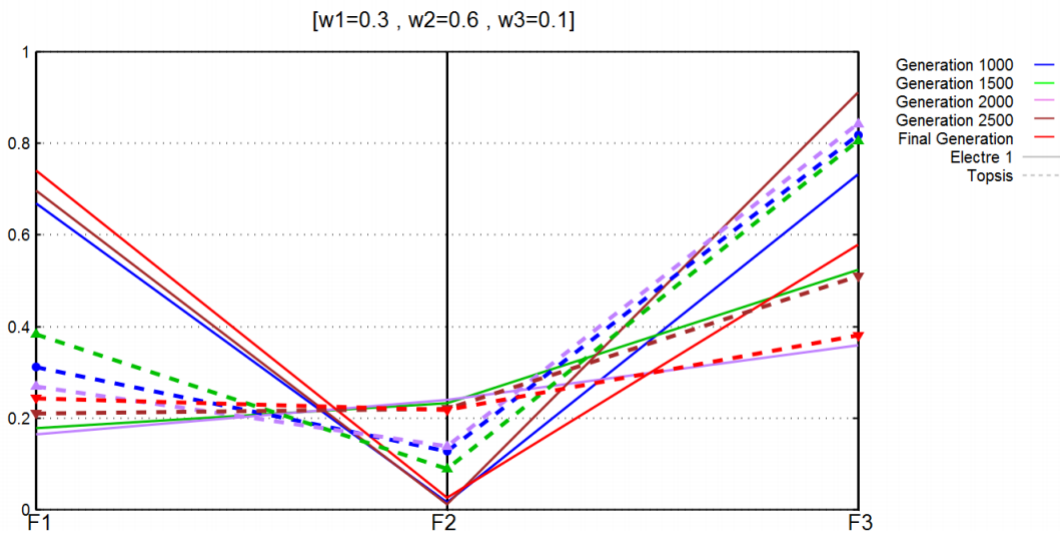
Σχήμα 3.16: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων ΜΗΗΜ 2: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στα αποτελούμενα από 15 άτομα μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων πέντε διαφορετικών γενιών για βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.8$.



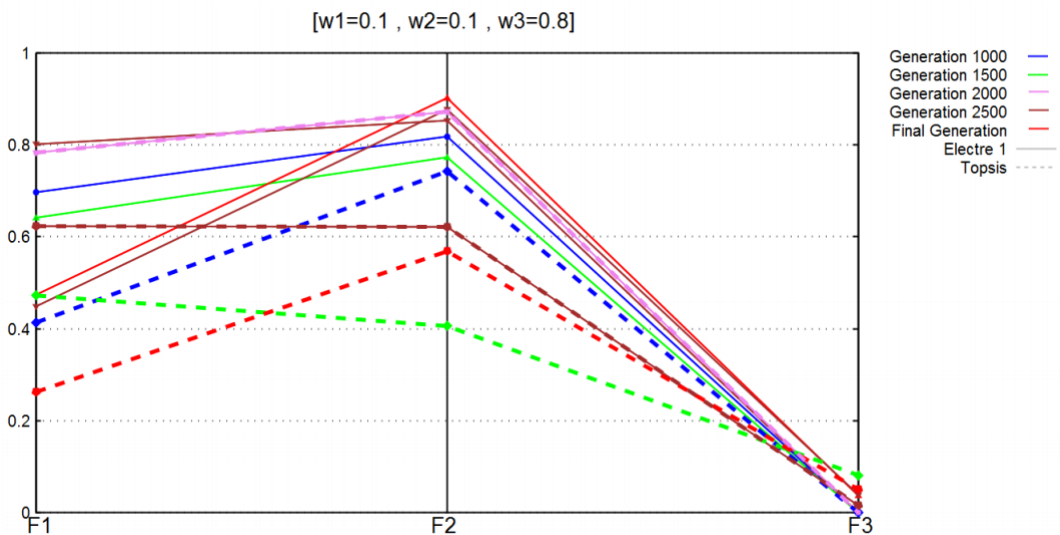
Σχήμα 3.17: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων ΜΗΗΜ 2: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στα αποιεθούμενα από 15 άτομα μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων πέντε διαφορετικών γενιών για βάρη $w_1 = \frac{1}{3}$, $w_2 = \frac{1}{3}$, $w_3 = \frac{1}{3}$.



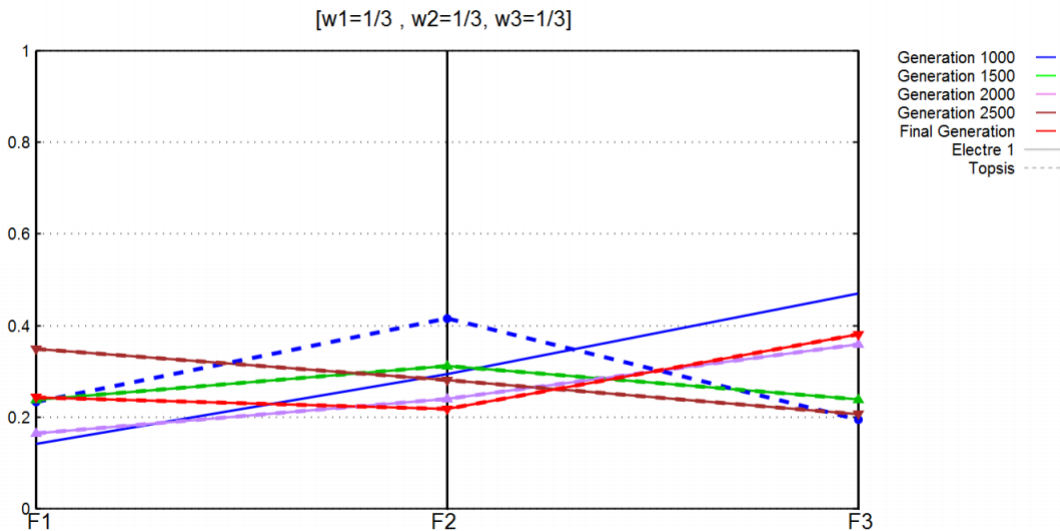
Σχήμα 3.18: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων ΜΗΗΜ 2: Απεικόνιση με την τεχνική των παράλληλων συντεταγμένων των βέλτιστων λύσεων από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I. Εφαρμογή των δύο τεχνικών MCDM σε πέντε μη-κυριαρχούμενα μέτωπα διαφορετικών γενιών για βάρη $w_1 = 0.7$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.2$.



Σχήμα 3.19: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων ΜΗΗΜ 2: Απεικόνιση με την τεχνική των παράλληλων συντεταγμένων των βέλτιστων λύσεων από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I. Εφαρμογή των δύο τεχνικών MCDM σε πέντε μη-κυριαρχούμενα μέτωπα διαφορετικών γενιών για βάρη $w_1 = 0.3$, $w_2 = 0.6$, $w_3 = 0.1$.



Σχήμα 3.20: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων ΜΗΗΜ 2: Απεικόνιση με την τεχνική των παράλληλων συντεταγμένων των βέλτιστων λύσεων από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I. Εφαρμογή των δύο τεχνικών MCDM σε πέντε μη-κυριαρχούμενα μέτωπα διαφορετικών γενιών για βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.8$.



Σχήμα 3.21: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων ΜΗΗΜ 2: Απεικόνιση με την τεχνική των παράλληλων συντεταγμένων των βέλτιστων λύσεων από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I. Εφαρμογή των δύο τεχνικών MCDM σε πέντε μη-κυριαρχούμενα μέτωπα διαφορετικών γενιών για βάρη $w_1 = \frac{1}{3}$, $w_2 = \frac{1}{3}$, $w_3 = \frac{1}{3}$.

Συμπεραίνεται πως οι δύο τεχνικές λειτουργούν αποδοτικά στη συγκεκριμένη μορφή μετώπου μη-κυριαρχούμενων λύσεων. Ο αριθμός των αξιολογήσεων μπορεί να συγκρατείται σε χαμηλότερα επίπεδα και, ταυτόχρονα, να επιτυγχάνεται βέλτιστη λύση με τιμή της προτιμώμενης από τον DM συνάρτησης κόστους κοντινή σε αυτή που θα αντιστοιχούσε σε περισσότερες αξιολογήσεις.

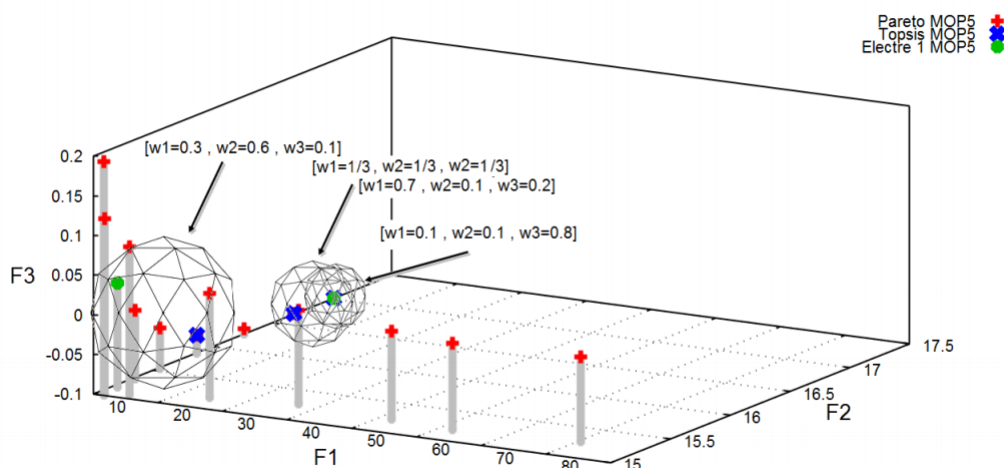
Πρόβλημα MOP 5

Ακολουθεί η επίλυση του προβλήματος MOP 5 [45],

$$\text{Min} \begin{bmatrix} f_1(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \sin(x_1^2 + x_2^2) \\ f_2(x) = \frac{1}{8}(3x_1 - 2x_2 + 4)^2 + \frac{1}{27}(x_1 - x_2 + 1)^2 + 15 \\ f_3(x) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)} - 1.1 \exp(-x_1^2 - x_2^2) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

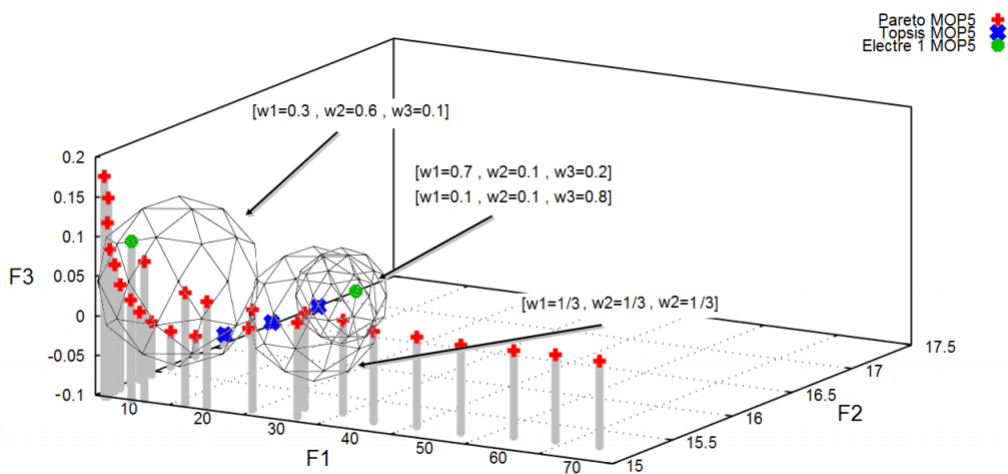
Το πρόβλημα αποτελείται από δύο μεταβλητές σχεδιασμού (N=2), για τις οποίες ισχύει $-30 \leq x_i \leq 30$. Χρησιμοποιείται ένας (30,60) ΕΑ με κριτήριο τερματισμού τις 5000 αξιολογήσεις. Εφαρμόζοντας τις δύο τεχνικές TOPSIS και ELECTRE I στο μέτωπο Pareto, παρατηρείται από τα σχήματα (3.22) και (3.23) πως οι βέλτιστες λύσεις δεν παρουσιάζουν πάντα λογική αντιστοιχία με τα βάρη του πίνακα 3.1. Το ίδιο παρατηρείται και από το σχήμα (3.24) που απεικονίζει τη βέλτιστη λύση του

προβλήματος για 30 επίλεκτα άτομα με την τεχνική των παράλληλων συντεταγμένων. Πιο συγκεκριμένα, στο σχήμα (3.24) διακρίνονται τα εξής: Τόσο στην περίπτωση των 15 όσο και στην περίπτωση των 30 επιλέκτων, η τεχνική TOPSIS οδηγείται κάθε φορά σε βέλτιστες λύσεις με τις μικρότερες τιμές των συναρτήσεων κόστους F_1 και F_3 . Η τιμή της συνάρτησης κόστους F_2 της βέλτιστης λύσης παραμένει υψηλή, παρουσιάζοντας μικρότερη τιμή για βάρη $w_1 = 0.3$, $w_2 = 0.6$, $w_3 = 0.1$. Οι ίδιες παρατηρήσεις ισχύουν και για την τεχνική ELECTRE I με εξαίρεση τα βάρη $w_1 = 0.3$, $w_2 = 0.6$, $w_3 = 0.1$. Σε αυτήν την περίπτωση, η βέλτιστη λύση παρουσιάζει τη μικρότερη τιμή της συνάρτησης κόστους F_2 και μεγαλύτερες τιμές των συναρτήσεων κόστους F_1 και F_3 . Συνεπώς, υπάρχει μία δυσκολία στη βελτίωση της τιμής της συνάρτησης κόστους F_2 σε σχέση με τις υπόλοιπες συναρτήσεις κόστους.

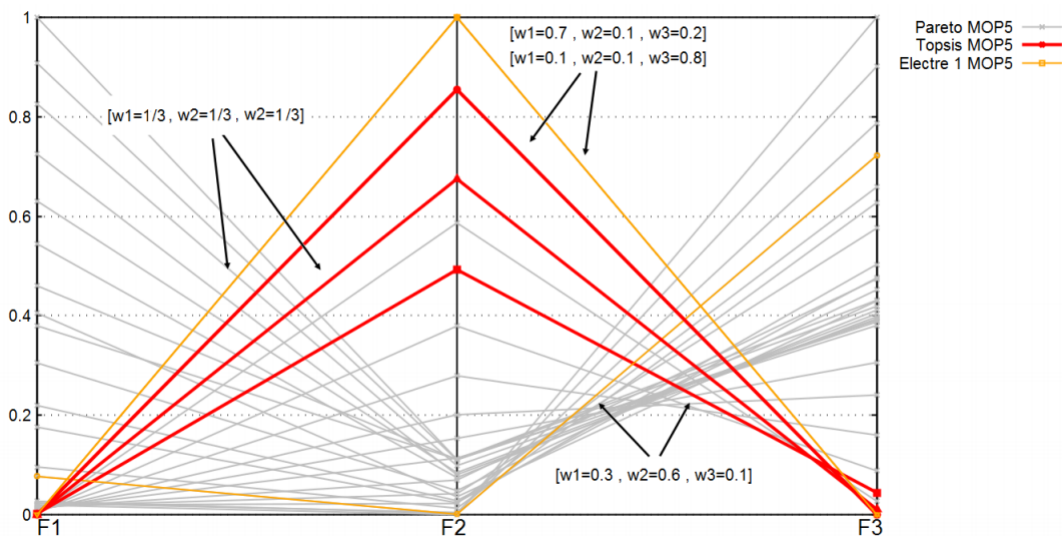


Σχήμα 3.22: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων MOP 5: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στο αποτελούμενο από 15 άτομα μέτωπο Pareto για τα αναγραφόμενα βάρη.

Στη συνέχεια, ακολουθείται διαδικασία αντίστοιχη με αυτήν του προβλήματος ΜΗΜ 2 για τη μελέτη των αποτελεσμάτων της εφαρμογής των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I σε μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων ενδιάμεσων γενιών. Παρακολουθώντας τη μεταβολή των βέλτιστων λύσεων σε πέντε διαφορετικές γενιές, συμπεριλαμβανομένης και της τελικής, με τη βοήθεια των σχημάτων (3.29), (3.31) και (3.32) διακρίνεται σταθερή συμπεριφορά ως προς τις τιμές των συναρτήσεων κόστους των βέλτιστων λύσεων. Οι συναρτήσεις F_1 και F_3 παρουσιάζουν διαρκώς μικρές τιμές, σε αντίθεση με τη συνάρτηση κόστους F_2 . Παρόμοιες είναι οι παρατηρήσεις χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.3$, $w_2 = 0.6$, $w_3 = 0.1$ (σχήμα (3.30)) στην περίπτωση της τεχνικής TOPSIS, με τη διαφορά ότι οι βέλτιστες λύσεις έχουν μικρότερες τιμές της συνάρτησης κόστους F_2 σε σχέση με τις βέλτιστες λύσεις χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα βάρη. Εξαίρεση αποτελεί η τεχνική ELECTRE I



Σχήμα 3.23: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων MOP 5: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στο αποτελούμενο από 30 άτομα μέτωπο Pareto για τα αναγραφόμενα βάρη.

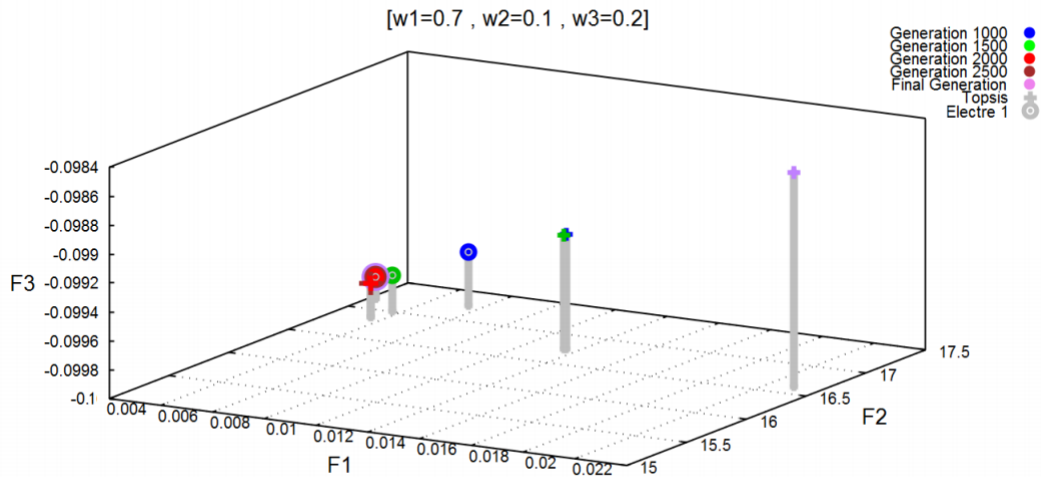


Σχήμα 3.24: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων MOP 5: Απεικόνιση με την τεχνική των παράλληλων συντεταγμένων του αποτελούμενου από 30 άτομα μετώπου Pareto και των βέλτιστων, σε αυτό, λύσεων από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I για τα αναγραφόμενα βάρη.

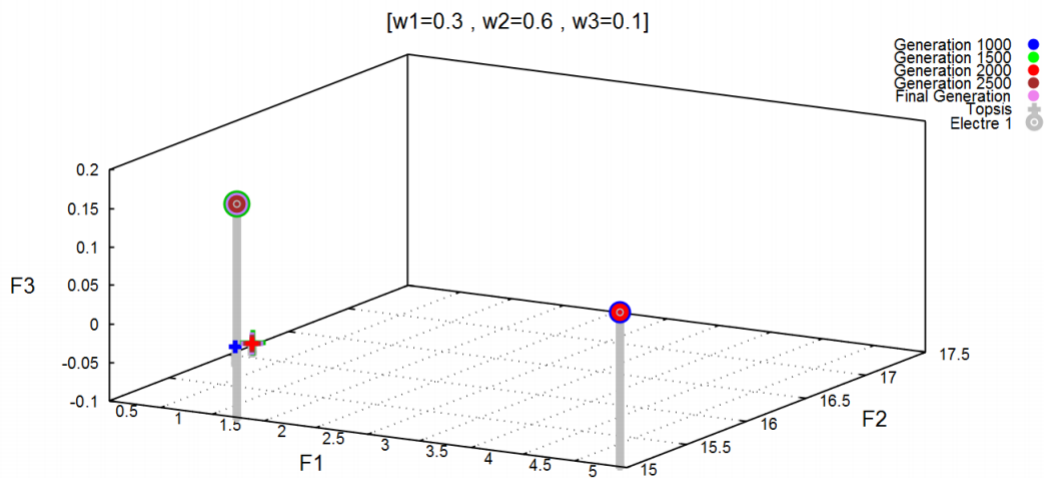
καθώς, για τα συγκεκριμένα βάρη, η βέλτιστη λύση αντιστοιχεί στις προτιμήσεις του DM σε όλες τις γενιές όπως φαίνεται στο σχήμα (3.30). Στα σχήματα (3.25), (3.26), (3.27) και (3.28) όπου παρουσιάζονται οι λύσεις των δύο τεχνικών στον 3D

χώρο επαληθεύονται οι παραπάνω παρατηρήσεις.

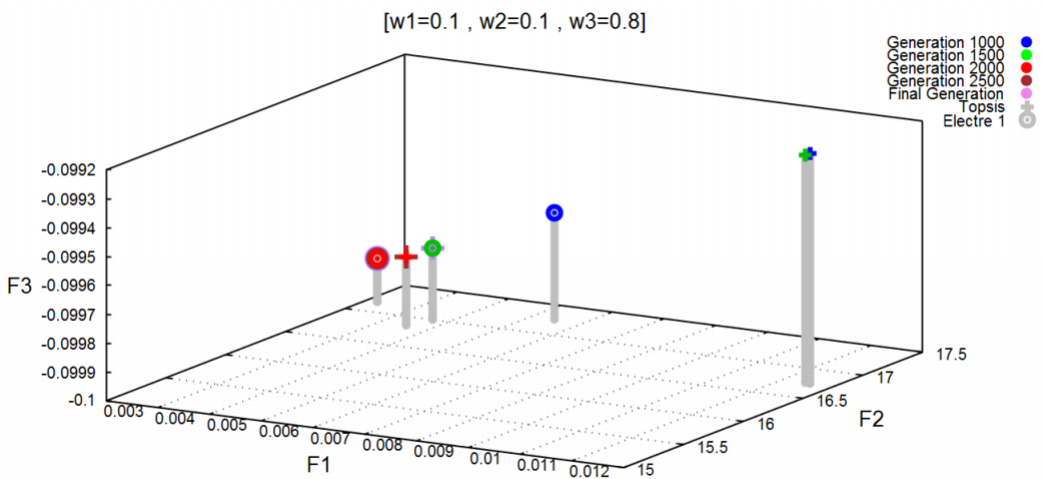
Από τα προηγούμενα αποτελέσματα φαίνεται η σημασία της μορφής του μετώπου μη-κυριαρχούμενων λύσεων στη λειτουργία των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I, καθώς, στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι προτιμήσεις του DM και οι βέλτιστες λύσεις δεν παρουσιάζουν τη λογική αντιστοιχία του 3D προβλήματος ΜΗΗΜ 2.



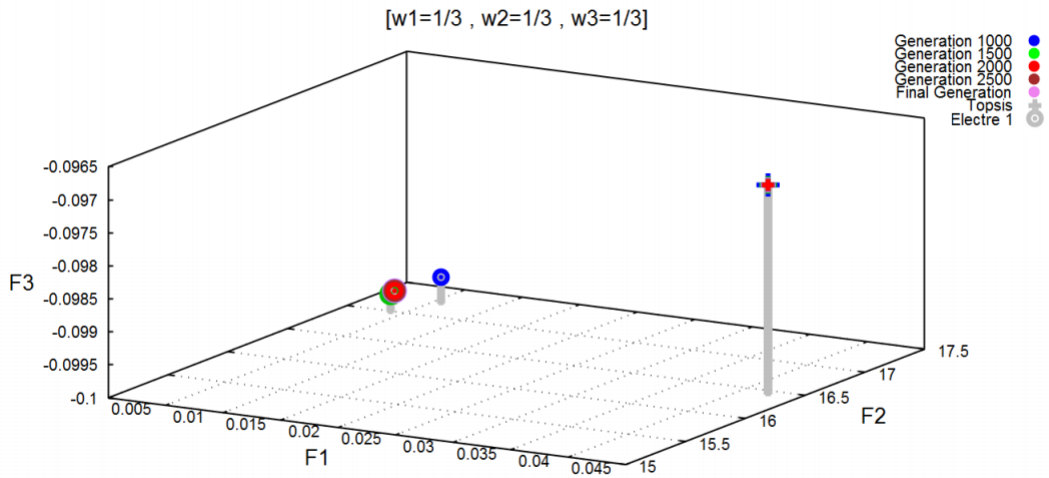
Σχήμα 3.25: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων MOP 5: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στα αποτελούμενα από 15 άτομα μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων πέντε διαφορετικών γενιών για βάρη $w_1 = 0.7$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.2$.



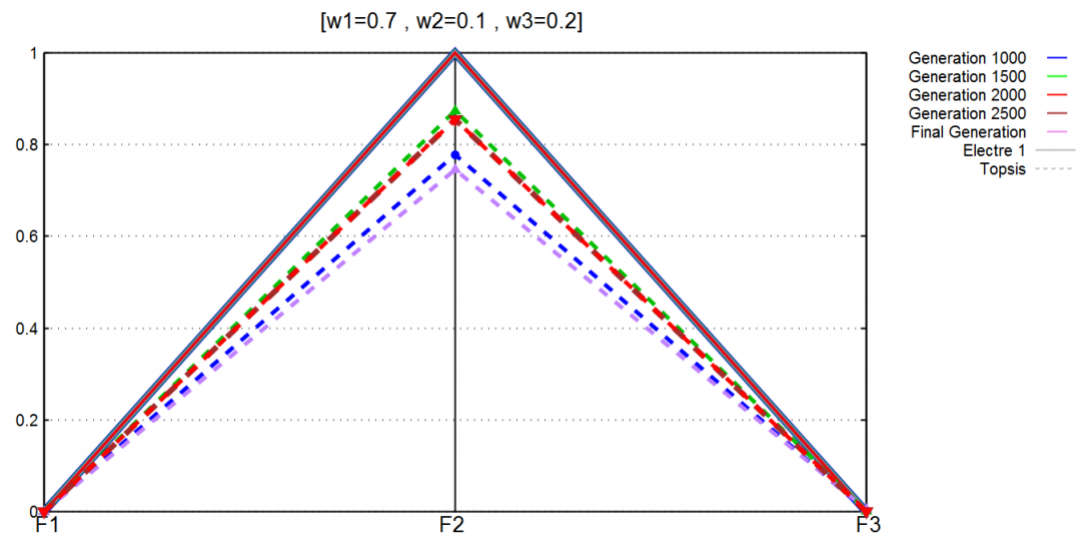
Σχήμα 3.26: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων MOP 5: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στα αποτελούμενα από 15 άτομα μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων πέντε διαφορετικών γενιών για βάρη $w_1 = 0.3$, $w_2 = 0.6$, $w_3 = 0.1$.



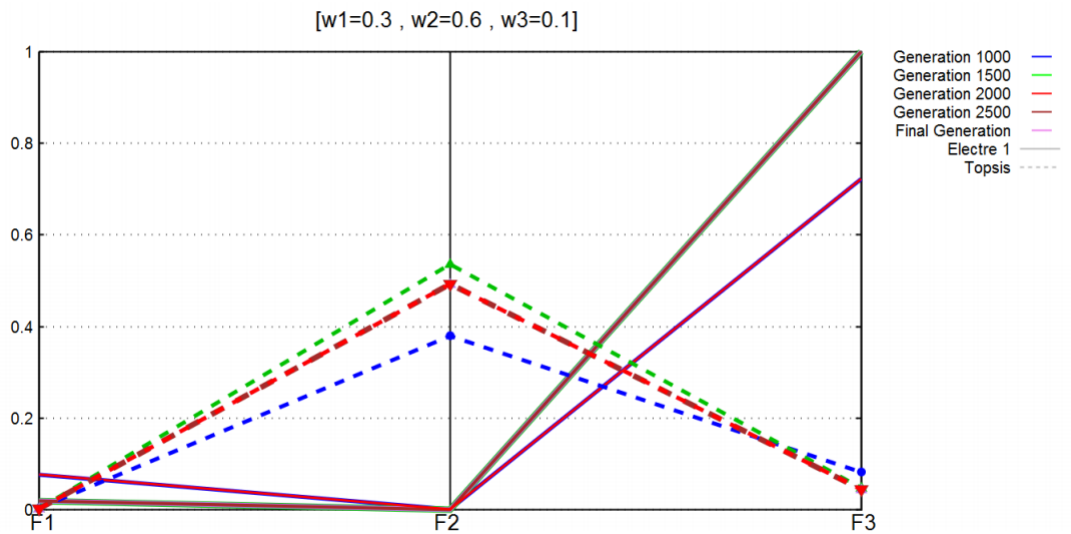
Σχήμα 3.27: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων MOP 5: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στα αποτελούμενα από 15 άτομα μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων πέντε διαφορετικών γενιών για βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.8$.



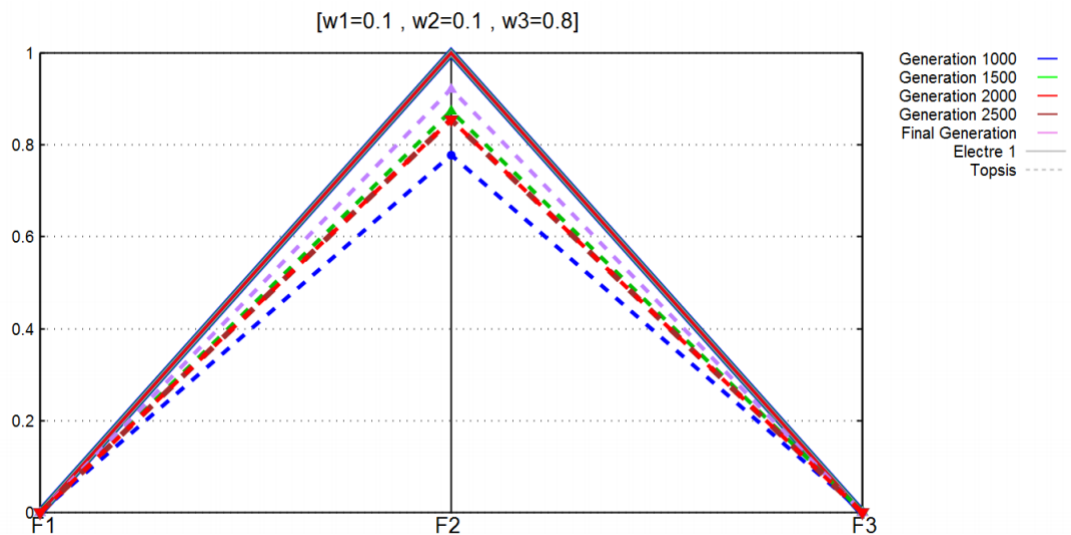
Σχήμα 3.28: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων MOP 5: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στα αποιεθούμενα από 15 άτομα μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων πέντε διαφορετικών γενιών για βάρη $w_1 = \frac{1}{3}$, $w_2 = \frac{1}{3}$, $w_3 = \frac{1}{3}$.



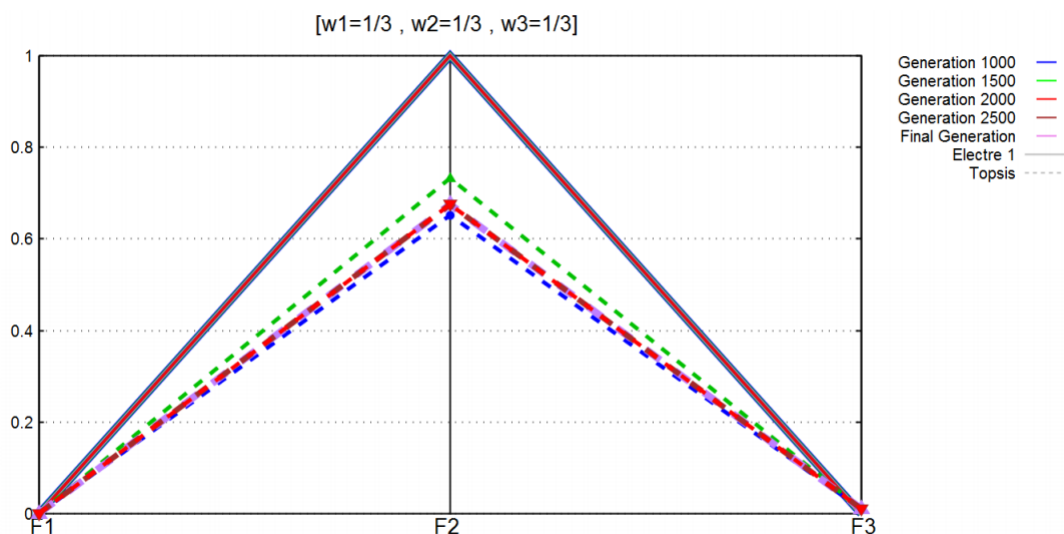
Σχήμα 3.29: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων MOP 5: Απεικόνιση με την τεχνική των παράλληλων συντεταγμένων των βέλτιστων λύσεων από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I. Εφαρμογή των δύο τεχνικών MCDM σε πέντε μη-κυριαρχούμενα μέτωπα διαφορετικών γενιών για βάρη $w_1 = 0.7$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.2$.



Σχήμα 3.30: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων MOP 5: Απεικόνιση με την τεχνική των παράλληλων συντεταγμένων των βέλτιστων λύσεων από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I. Εφαρμογή των δύο τεχνικών MCDM σε πέντε μη-κυριαρχούμενα μέτωπα διαφορετικών γενιών για βάρη $w_1 = 0.3$, $w_2 = 0.6$, $w_3 = 0.1$.



Σχήμα 3.31: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων MOP 5: Απεικόνιση με την τεχνική των παράλληλων συντεταγμένων των βέλτιστων λύσεων από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I. Εφαρμογή των δύο τεχνικών MCDM σε πέντε μη-κυριαρχούμενα μέτωπα διαφορετικών γενιών για βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.8$.



Σχήμα 3.32: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων MOP 5: Απεικόνιση με την τεχνική των παράλληλων συντεταγμένων των βέλτιστων λύσεων από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I. Εφαρμογή των δύο τεχνικών MCDM σε πέντε μη-κυριαρχούμενα μέτωπα διαφορετικών γενιών για βάρη $w_1 = \frac{1}{3}$, $w_2 = \frac{1}{3}$, $w_3 = \frac{1}{3}$.

3.2 ‘A priori’ Εφαρμογή των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I

Σε αυτήν την ενότητα, γίνεται ‘a priori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I σε μαθηματικά προβλήματα MOO. Όπως ήδη εξηγήθηκε, στην περίπτωση εφαρμογής των τεχνικών MCDM ‘a priori’ η βελτιστοποίηση πραγματοποιείται βασισμένη στις προτιμήσεις του DM. Απαιτείται, συνεπώς, γνώση των προτιμήσεων του DM πριν τη βελτιστοποίηση. Στη συνέχεια της εργασίας, η τιμή Φ με την οποία βαθμολογούνται τα άτομα κάθε γενιάς ενός EA, υπολογίζεται είτε χρησιμοποιώντας την τεχνική TOPSIS, είτε χρησιμοποιώντας την τεχνική ELECTRE I. Με αυτόν τον τρόπο, τα βάρη των συναρτήσεων κόστους επιδρούν στην επιλογή γονέων και το μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων οδηγείται προς τα τμήματα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων που παρουσιάζουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τον DM. Συνεπώς, το αποτέλεσμα ‘a priori’ εφαρμογής μίας τεχνικής MCDM είναι ένα μέτωπο Pareto διαφορετικό από αυτό που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA. Στόχος της ‘a priori’ εφαρμογής των τεχνικών MCDM είναι το νέο μέτωπο Pareto να αποτελείται από άτομα που εντοπίζονται κυρίως στα τμήματα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων που ενδιαφέρουν τον DM και είναι καλύτερα, κυριαρχούν δηλαδή σε αυτά του μετώπου που υπολογίζεται από τον απλό EA. Αντίθετα, στα τμήματα του χώρου των

	Δύο Στόχοι		Τρεις Στόχοι		
	w_1	w_2	w_1	w_2	w_3
1	0.1	0.9	0.8	0.1	0.1
2	0.5	0.5	0.1	0.8	0.1
3	0.9	0.1	0.1	0.1	0.8

Πίνακας 3.2: Συνδυασμοί βαρών για την ‘a priori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I σε μαθηματικά προβλήματα MOO.

αντικειμενικών συναρτήσεων που δεν αποτελούν προτεραιότητα για τον DM μη-κυριαρχούμενες λύσεις χειρότερες από αυτές του απλού ΕΑ δεν αποτελούν πρόβλημα.

Στη συνέχεια, οι τεχνικές TOPSIS και ELECTRE I εφαρμόζονται ‘a priori’ στα προβλήματα ελαχιστοποίησης ZDT 1, OKA 2, Kursawe και MHHM 2 που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Τα βάρη που αντιστοιχούν στις προτιμήσεις του DM είναι τα εξής:

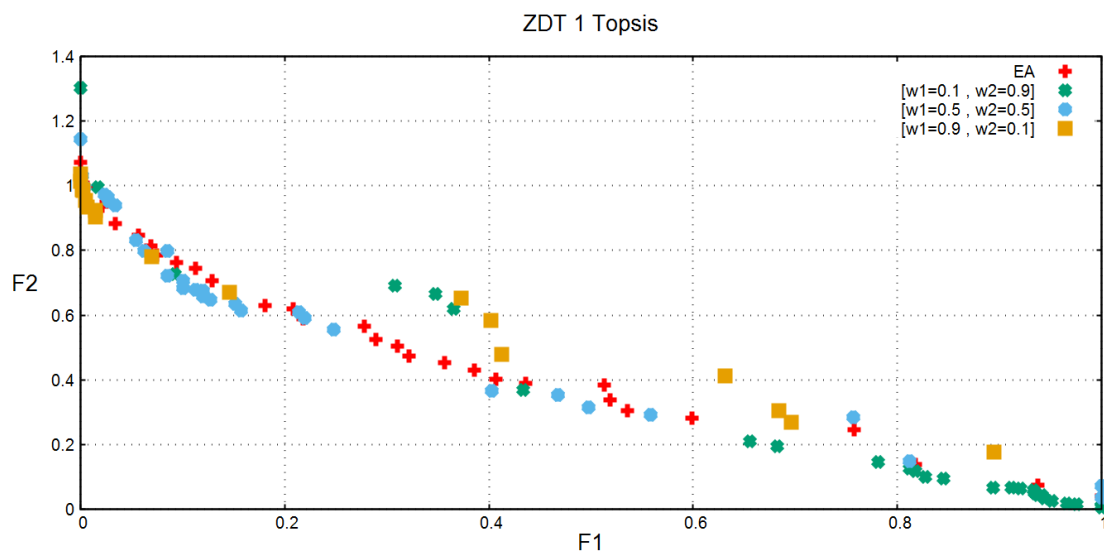
3.2.1 Μαθηματικά Προβλήματα Ελαχιστοποίησης Δύο Στόχων

Κυρτά Μέτωπα Μη-Κυριαρχούμενων Λύσεων

Αρχικά επιλύεται το πρόβλημα ZDT 1, (3.1), χρησιμοποιώντας έναν (10,20) ΕΑ με 30 άτομα στο σύνολο των επιλέκτων. Ως κριτήριο τερματισμού της βελτιστοποίησης ορίζονται οι 500 αξιολογήσεις.

Τα αποτελέσματα εφαρμογής της τεχνικής TOPSIS παρουσιάζονται στο σχήμα (3.33) για τους τρεις συνδυασμούς βαρών του πίνακα 3.2, σε σύγκριση με το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό ΕΑ. Παρατηρείται ότι για βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.9$, τα περισσότερα άτομα που υπολογίζονται χαρακτηρίζονται από μεγάλες τιμές της συνάρτησης κόστους F_1 και μικρές τιμές της συνάρτησης κόστους F_2 . Παράλληλα, οι λύσεις κυριαρχούν στα γειτονικά άτομα του μετώπου Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό ΕΑ. Για βάρη $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$, τα άτομα του μετώπου Pareto εκτείνονται περισσότερο στο χώρο των αντικειμενικών συναρτήσεων σε σχέση με αυτά των προηγούμενων βαρών. Εντοπίζονται, όμως, κυρίως στα τμήματα του χώρου με ενδιάμεσες τιμές των συναρτήσεων κόστους ή μικρότερες τιμές της F_1 και μεγαλύτερες της F_2 . Στις περιοχές αυτές τα περισσότερα άτομα κυριαρχούν στα αντίστοιχα που υπολογίζονται από τον απλό ΕΑ. Τέλος, για βάρη $w_1 = 0.9$, $w_2 = 0.1$, λύσεις καλύτερες από αυτές του απλού ΕΑ συγκεντρώνονται στο άκρο του μετώπου Pareto που χαρακτηρίζεται από τις μικρότερες τιμές της F_1 και τις μεγαλύτερες τιμές της F_2 , όπως είναι επιθυμητό.

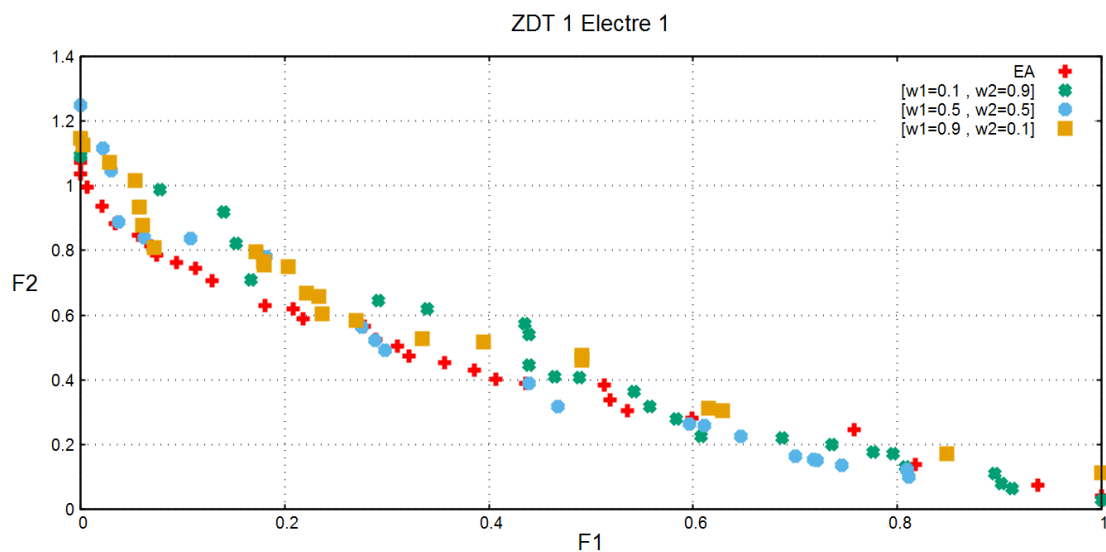
Στο σχήμα (3.34) παρουσιάζονται τα μέτωπα Pareto που υπολογίζονται από την



Σχήμα 3.33: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων ZDT 1: Μέτωπα Pareto από την ‘α priori’ εφαρμογή της τεχνικής TOPSIS για τα αναγραφόμενα βάρη. Σύγκριση με το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA.

εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I. Για βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.9$, άτομα που δεν κυριαρχούνται από αυτά του απλού EA χαρακτηρίζονται από τις μικρότερες τιμές της συνάρτησης κόστους F_2 και τις μεγαλύτερες τιμές της συνάρτησης κόστους F_1 . Παρόλα αυτά, οι λύσεις αυτές είναι λιγότερες από αυτές της τεχνικής TOPSIS. Χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$, οι λύσεις που είναι καλύτερες αυτών που υπολογίζονται από τον απλό EA βρίσκονται κεντρικότερα αυτών της προηγούμενης περίπτωσης βαρών και με προσανατολισμό προς το άκρο του μετώπου Pareto με μικρότερες τιμές της F_2 και μεγαλύτερες τιμές της F_1 . Τέλος, για βάρη $w_1 = 0.9$, $w_2 = 0.1$, τα αποτελέσματα δεν ανταποκρίνονται στις προτιμήσεις του DM. Παρόλο που παρατηρείται μετατόπιση του μετώπου Pareto συνολικά προς μικρότερες τιμές της F_1 και μεγαλύτερες της F_2 , τα άτομα που το συνθέτουν κυριαρχούνται από τις λύσεις που υπολογίζονται από τον απλό EA.

Συμπεραίνεται, ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η τεχνική TOPSIS είναι πιο αποδοτική από την τεχνική ELECTRE I, καθώς με αυτήν υπολογίζονται για όλες τις προτιμήσεις του DM λύσεις καλύτερες από τις λύσεις του απλού EA, οι οποίες αντιστοιχούν στις ανάγκες του.



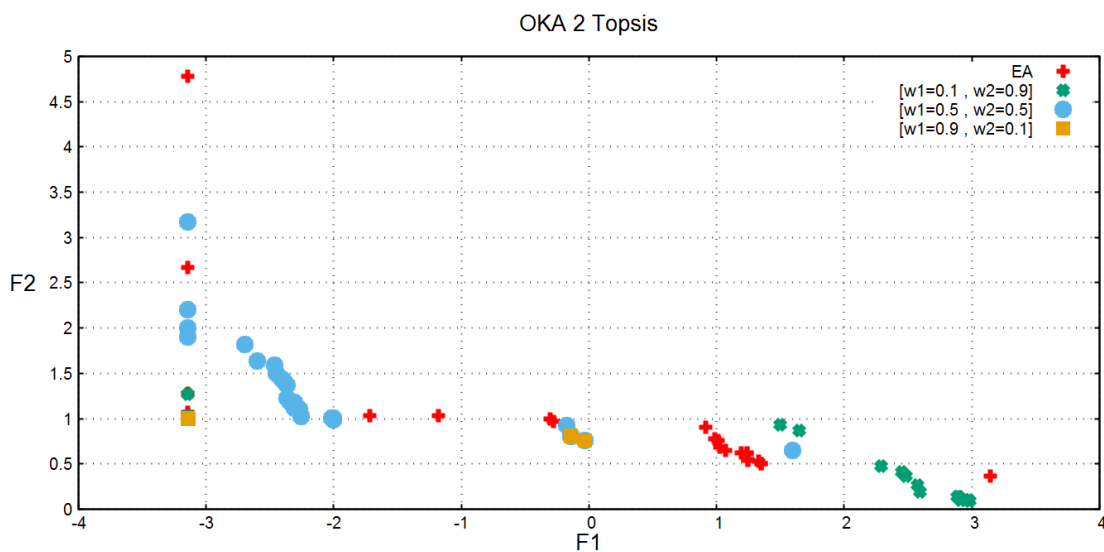
Σχήμα 3.34: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων ZDT 1: Μέτωπα Pareto από την ‘a priori’ εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I για τα αναγραφόμενα βάρη. Σύγκριση με το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA.

Μη-κυρτά Μέτωπα Μη-Κυριαρχούμενων Λύσεων

Στη συνέχεια, επιλύεται το πρόβλημα OKA 2, (3.4). Για το πρόβλημα αυτό χρησιμοποιείται ένας (12,24) EA με κριτήριο τερματισμού τις 1000 αξιολογήσεις. Το σύνολο των επιλέκτων αποτελείται από 30 άτομα.

Αρχικά, εφαρμόζεται η τεχνική TOPSIS, όπως φαίνεται στο σχήμα (3.35), χρησιμοποιώντας τα βάρη του πίνακα 3.2. Για βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.9$, παρατηρείται ότι σχεδόν όλα τα άτομα του μετώπου Pareto συσσωρεύονται στο τμήμα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων με τις μεγαλύτερες και τις μικρότερες τιμές των F_1 και F_2 αντίστοιχα. Επιπλέον, οι λύσεις αυτές εκτός από δύο κυριαρχούν στη μία ακραία λύση του μετώπου Pareto που υπολογίζεται από τον απλό EA. Χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$, το μέτωπο Pareto μετατοπίζεται προς μικρότερες τιμές της συνάρτησης κόστους F_1 και μεγαλύτερες τιμές της συνάρτησης κόστους F_2 , καλύπτοντας και κεντρικότερα τμήματα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων. Από τις λύσεις αυτές, 6 δεν κυριαρχούνται από τα άτομα που υπολογίζονται χρησιμοποιώντας απλό EA. Τέλος, για βάρη $w_1 = 0.9$, $w_2 = 0.1$, το μέτωπο Pareto συντίθεται από τρία άτομα, εκ των οποίων τα δύο σχεδόν ταυτίζονται με δύο άτομα που υπολογίζονται για ίσα βάρη. Η τρίτη λύση βρίσκεται στο άκρο του μετώπου Pareto και παρουσιάζει τη μικρότερη τιμή της συνάρτησης κόστους F_1 . Επιπλέον, είναι καλύτερη από τις γειτονικές λύσεις που υπολογίζονται από τον απλό EA.

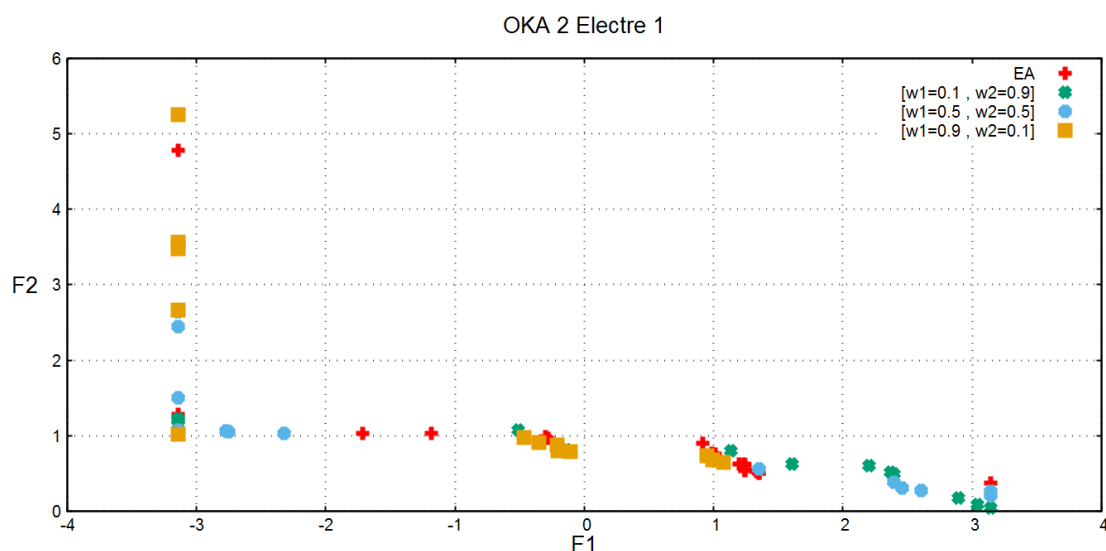
Ακολουθεί η εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I, τα αποτελέσματα της οποίας παρουσιάζονται στο σχήμα (3.36). Χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.9$, οι



Σχήμα 3.35: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων OKA 2: Μέτωπα Pareto από την ‘a priori’ εφαρμογή της τεχνικής TOPSIS για τα αναγραφόμενα βάρη. Σύγκριση με το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA.

περισσότερες μη-κυριαρχούμενες λύσεις αντιστοιχούν σε μικρότερες τιμές της συνάρτησης κόστους F_2 και σε μεγαλύτερες τιμές της συνάρτησης κόστους F_1 . Τρεις από τις λύσεις αυτές κυριαρχούν στην ακραία λύση του μετώπου Pareto που υπολογίζεται από τον απλό EA. Για βάρη $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$, τα μη-κυριαρχούμενα άτομα που υπολογίζονται δεν εντοπίζονται σε κεντρικό τμήμα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων, αλλά κοντά στα δύο άκρα του. Τέλος, για βάρη $w_1 = 0.9$, $w_2 = 0.1$, προκύπτουν περισσότερες μη-κυριαρχούμενες λύσεις σε σχέση με την τεχνική TOPSIS. Οι λύσεις αυτές εντοπίζονται σε κεντρικά τμήματα του μετώπου Pareto, όπου δεν κυριαρχούνται από τις αντίστοιχες λύσεις του απλού EA. Η ακραία λύση που αντιστοιχεί στη μικρότερη τιμή της F_1 και έχει τη μικρότερη τιμή της F_2 σε σχέση με τις άλλες τέσσερις ταυτίζεται με αυτήν που υπολογίζεται από την τεχνική TOPSIS.

Συμπεραίνεται πως στην περίπτωση του παραπάνω μη-κυρτού προβλήματος, τόσο η τεχνική TOPSIS όσο και η τεχνική ELECTRE I είναι σε θέση να παρέχουν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Όπως και στην περίπτωση του κυρτού προβλήματος που εξετάστηκε, παρατηρείται ότι τα αποτελέσματα των δύο τεχνικών MCDM διαφοροποιούνται κυρίως για ίσα βάρη, καθώς για τις υπόλοιπες προτιμήσεις του DM οι μη-κυριαρχούμενες λύσεις προσανατολίζονται προς κοινά τμήματα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων.



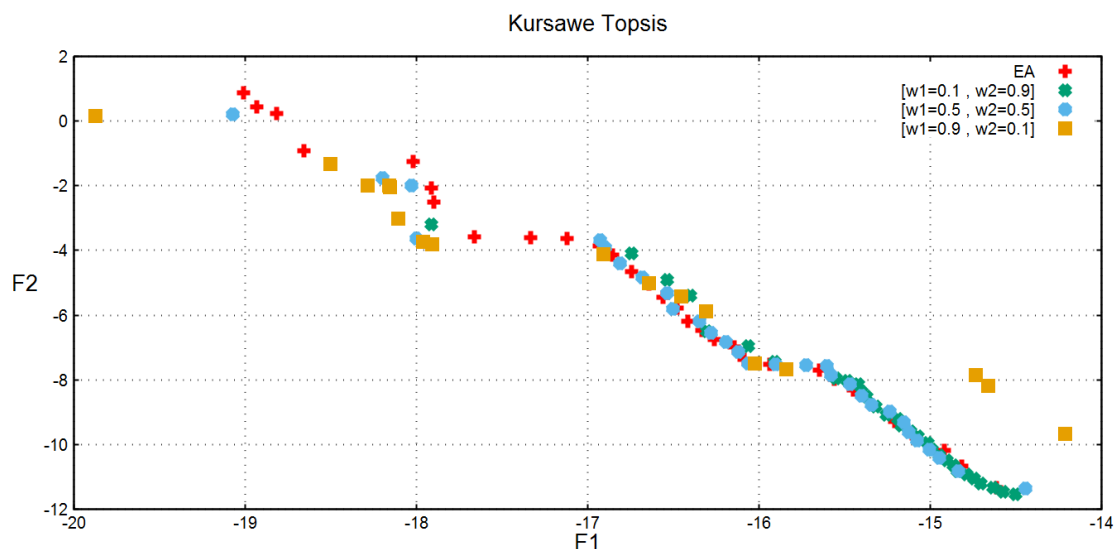
Σχήμα 3.36: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων OKA 2: Μέτωπα Pareto από την ‘a priori’ εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I για τα αναγραφόμενα βάρη. Σύγκριση με το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA.

Διακοπτόμενα Μέτωπα Μη-Κυριαρχούμενων Λύσεων

Στη συνέχεια, επιλύεται το πρόβλημα Kursawe, (3.5), το οποίο χαρακτηρίζεται από διακοπτόμενο μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων. Για το πρόβλημα αυτό χρησιμοποιείται ένας (8,16) EA με 30 άτομα στο σύνολο των επιλέκτων και 1000 αξιολογήσεις ως κριτήριο τερματισμού.

Τα μέτωπα Pareto που υπολογίζονται από την τεχνική TOPSIS παρουσιάζονται στο σχήμα (3.37). Με μεγαλύτερη προτίμηση του DM στη συνάρτηση κόστους F_2 και βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.9$, παρατηρείται συσσώρευση των περισσότερων λύσεων σε μικρότερες τιμές της F_2 και μεγαλύτερες της F_1 . Οι λύσεις αυτές είναι περισσότερες από τις αντίστοιχες του απλού EA σε αυτήν την περιοχή, με τις πιο ακραίες να είναι επιπλέον και καλύτερες. Για ίσα βάρη, οι λύσεις μετατοπίζονται προς κεντρικότερο τμήμα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων, καλύπτοντας ακόμη τμήμα του χώρου όπου εντοπίζονταν οι λύσεις της προηγούμενης περίπτωσης βαρών. Δεν είναι όμως καλύτερες από αυτές του απλού EA, με εξαίρεση μερικές που βρίσκονται κοντά στο άκρο του μετώπου. Παράλληλα, τέσσερις λύσεις υπολογίζονται κοντά στο άλλο άκρο του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων και είναι καλύτερες από τις γειτονικές λύσεις του απλού EA. Τέλος, για βάρη $w_1 = 0.9$, $w_2 = 0.1$, τα άτομα του μετώπου Pareto εκτίνονται στο χώρο των αντικειμενικών συναρτήσεων και κυριαρχούν στα άτομα που υπολογίζονται από τον απλό EA στο κέντρο και προς τα αριστερά του χώρου. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τα βάρη αυτά υπολογίζεται λύση με εμφανώς μικρότερη τιμή της F_1 σε σχέση με τα υπόλοιπα τρία μέτωπα Pareto.

Στο σχήμα (3.38) απεικονίζονται τα αποτελέσματα της τεχνικής ELECTRE I.



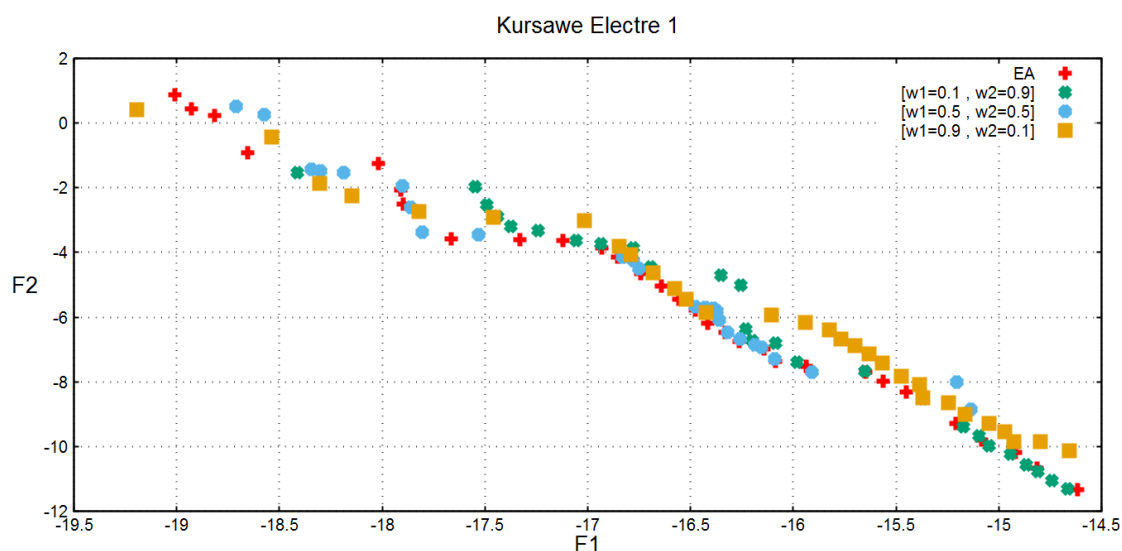
Σχήμα 3.37: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων Kursawe: Μέτωπα Pareto από την ‘a priori’ εφαρμογή της τεχνικής TOPSIS για τα αναγραφόμενα βάρη. Σύγκριση με το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA.

Χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.9$, οι λύσεις που υπολογίζονται δεν είναι τόσο συσσωρευμένες στο άκρο του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων όσο στην περίπτωση εφαρμογής της τεχνικής TOPSIS. Για βάρη $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$, οι λύσεις του μετώπου Pareto βρίσκονται κεντρικά και προς το άκρο του χώρου με μικρότερες τιμές της F_1 και μεγαλύτερες της F_2 , με τις περισσότερες να κυριαρχούνται από τις λύσεις του απλού EA. Τέλος, για βάρη $w_1 = 0.9$, $w_2 = 0.1$, τα άτομα που υπολογίζονται εκτείνονται σε όλο το χώρο των αντικειμενικών συναρτήσεων, με τα περισσότερα να συσσωρεύονται προς το αντίθετο άκρο του μετώπου Pareto από αυτό που αναμένεται. Στο τμήμα, όμως, αυτό είναι χειρότερες από τις λύσεις που υπολογίζονται από τον απλό EA, σε αντίθεση με τρεις λύσεις κοντά στο άλλο άκρο του χώρου που υπερτερούν σε σχέση με αυτές του απλού EA.

Φαίνεται, πως στην περίπτωση του διακοπόμενου μετώπου μη-κυριαρχούμενων λύσεων η τεχνική TOPSIS υπερτερεί σε σχέση με την τεχνική ELECTRE I, καθώς τα αποτελέσματα που παρέχει και ικανοποιούν τις προτιμήσεις του DM είναι περισσότερα.

3.2.2 Μαθηματικά Προβλήματα Ελαχιστοποίησης Τριών Στόχων

Στη συνέχεια, εφαρμόζονται οι τεχνικές TOPSIS και ELECTRE I σε ένα μαθηματικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων. Όπως ήδη αναφέρθηκε, υπάρχει δυσκολία διάκριση των τιμών των συναρτήσεων κόστους των ατόμων των 3D



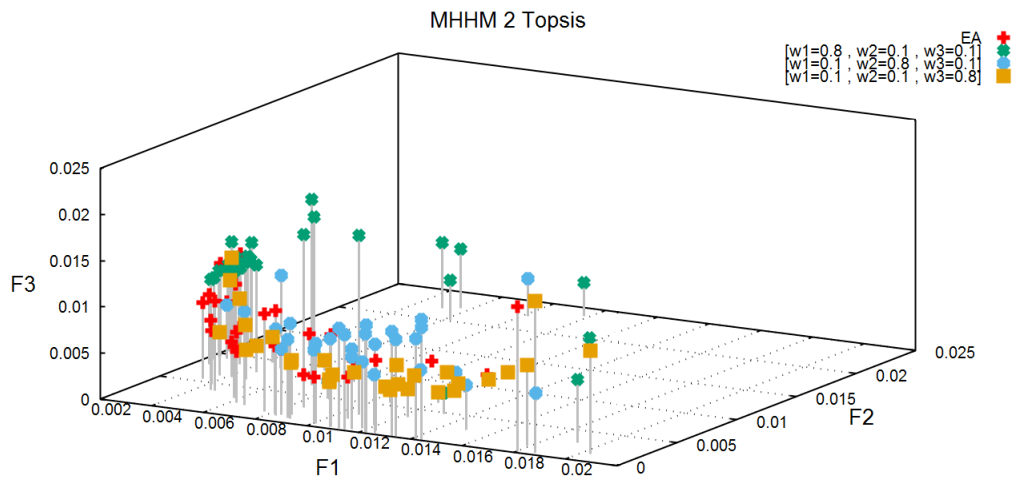
Σχήμα 3.38: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων Kursawe: Μέτωπα Pareto από την ‘a priori’ εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I για τα αναγραφόμενα βάρη. Σύγκριση με το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA.

μετώπων μη-κυριαρχούμενων λύσεων. Εξαιτίας αυτής της δυσκολίας, στην περίπτωση ‘a posteriori’ εφαρμογής των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I χρησιμοποιείται η τεχνική των παράλληλων συντεταγμένων. Η τεχνική αυτή δε μπορεί να διευκολύνει την απεικόνιση των αποτελεσμάτων στην περίπτωση ‘a priori’ εφαρμογής των τεχνικών MCDM, καθώς υπολογίζονται μέτωπα Pareto και όχι μία βέλτιστη λύση. Για αυτό το λόγο, παρουσιάζεται στη συνέχεια, εκτός από την 3D απεικόνιση και η εξής 2D αναπαράσταση των αποτελεσμάτων. Χρησιμοποιούνται οι προβολές των λύσεων σε δύο επίπεδα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων. Η συνάρτηση κόστους στην οποία έχει τη μεγαλύτερη προτίμηση ο DM αποτελεί τον οριζόντιο άξονα κάθε επιπέδου και μία από τις άλλες δύο συναρτήσεις κόστους τον κατακόρυφο. Συνεπώς, για κάθε συνδυασμό βαρών και τεχνική MCDM δημιουργούνται δύο σχήματα με τις προβολές των αποτελεσμάτων σε δύο επίπεδα, σε σύγκριση με τις προβολές των λύσεων που υπολογίζονται από τον απλό EA.

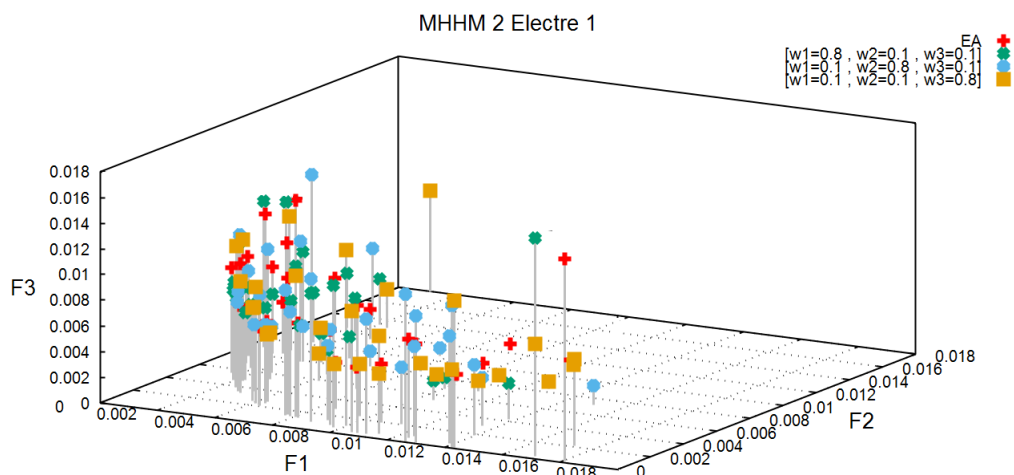
Πρόβλημα ΜΗΗΜ 2

Επιλύεται το πρόβλημα ΜΗΗΜ 2,(3.6), χρησιμοποιώντας έναν (10,20) EA με 30 άτομα στο σύνολο των επιλέκτων και κριτήριο τερματισμού τις 500 αξιολογήσεις. Στα σχήματα (3.39) και (3.40) απεικονίζονται τα 3D μέτωπα Pareto που υπολογίζονται από τις τεχνικές TOPSIS και ELECTRE I αντίστοιχα, μαζί με το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται από τον απλό EA.

Για καλύτερη κατανόηση των αποτελεσμάτων της τεχνικής TOPSIS παρουσιάζονται τα αντίστοιχα 2D σχήματα. Για βάρη $w_1 = 0.8$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.1$, διακρίνεται από



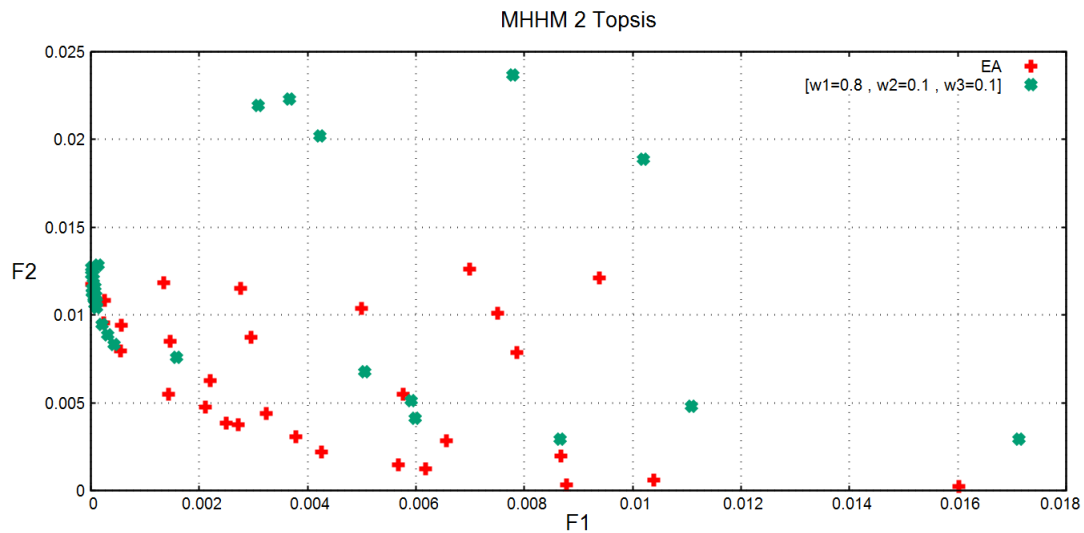
Σχήμα 3.39: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων ΜΗΜΜ 2: Μέτωπα Pareto από την ‘a priori’ εφαρμογή της τεχνικής TOPSIS για τα αναγραφόμενα βάρη. Σύγκριση με το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό ΕΑ.



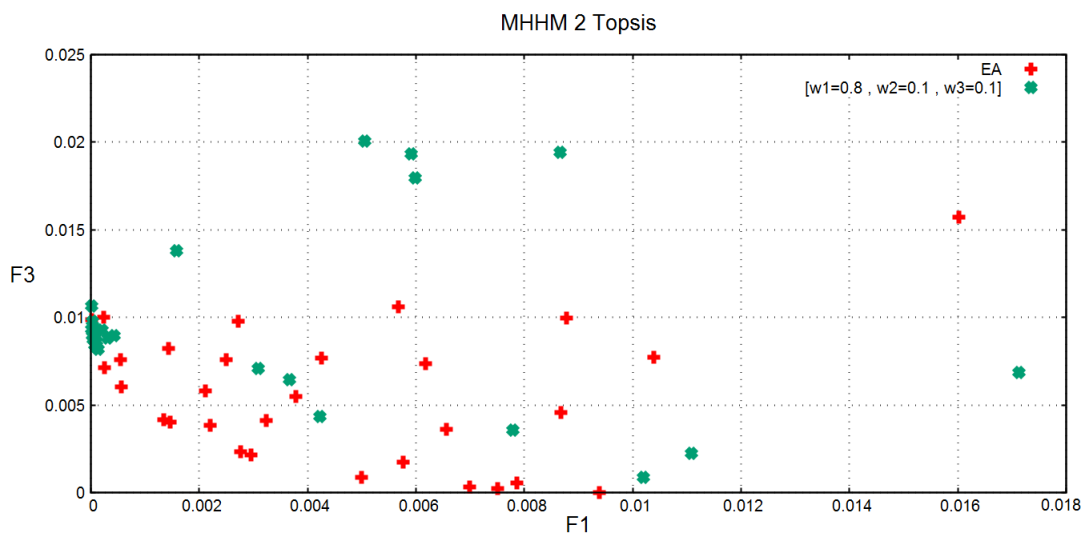
Σχήμα 3.40: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων ΜΗΜΜ 2: Μέτωπα Pareto από την ‘a priori’ εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I για τα αναγραφόμενα βάρη. Σύγκριση με το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό ΕΑ.

τα σχήματα (3.41), (3.42) πως οι λύσεις μετατοπίζονται προς μικρότερες τιμές της συνάρτησης κόστους F_1 . Ταυτόχρονα, κάποιες από τις λύσεις αυτές υπερέχουν σε σχέση με τις γειτονικές του απλού ΕΑ ως προς τις συναρτήσεις κόστους F_2 και F_3 . Χρησιμοποιώντας τα βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.8$, $w_3 = 0.1$, όπως φαίνεται στα σχήματα (3.43), (3.44) οι λύσεις εντοπίζονται κυρίως στο τμήμα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων με μικρότερες τιμές της συνάρτησης κόστους F_2 . Όπως παρατηρήθηκε και στην προηγούμενη περίπτωση βαρών, υπάρχουν λύσεις

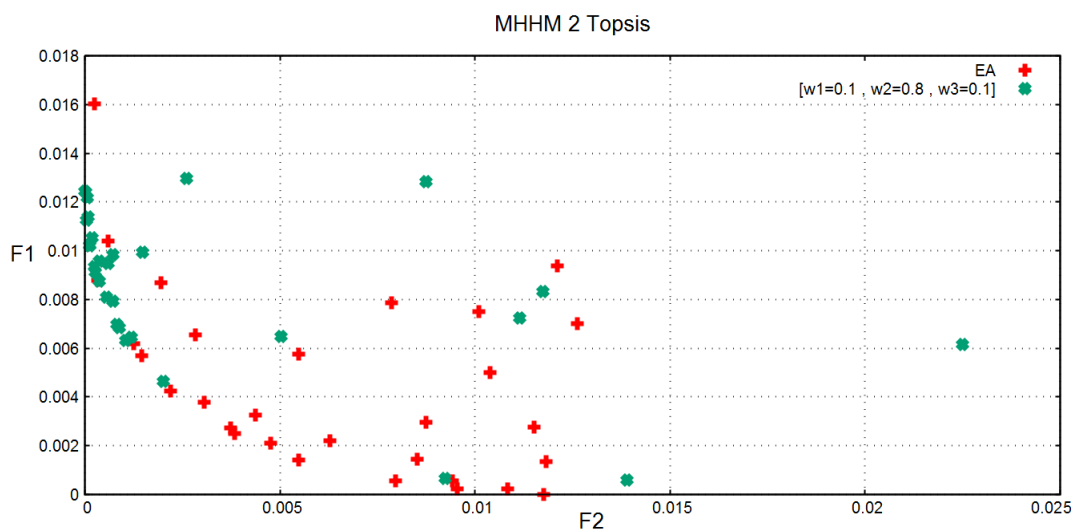
που παρουσιάζουν επιπλέον μικρότερες τιμές των συναρτήσεων κόστους F_1 και F_3 . Τέλος, για βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.8$, στα σχήματα (3.45) και (3.46) φαίνεται η μετατόπιση των λύσεων προς μικρότερες τιμές της F_3 , σε σχέση με τις λύσεις που υπολογίζονται από τον απλό ΕΑ. Οι τιμές της συνάρτησης κόστους F_1 έχουν παρόμοια συμπεριφορά με αυτές του απλού ΕΑ, ενώ μικρή βελτίωση παρουσιάζουν στις καλύτερες για τον DM λύσεις του μετώπου οι τιμές της F_2 .



Σχήμα 3.41: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων MHMM 2: Προβολές των λύσεων των μετώπων Pareto από την ‘α priori’ εφαρμογή της τεχνικής TOPSIS για βάρη $w_1 = 0.8$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.1$ στο επίπεδο $F_1 F_2$. Σύγκριση με τις αντίστοιχες προβολές των λύσεων του μετώπου Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό ΕΑ.

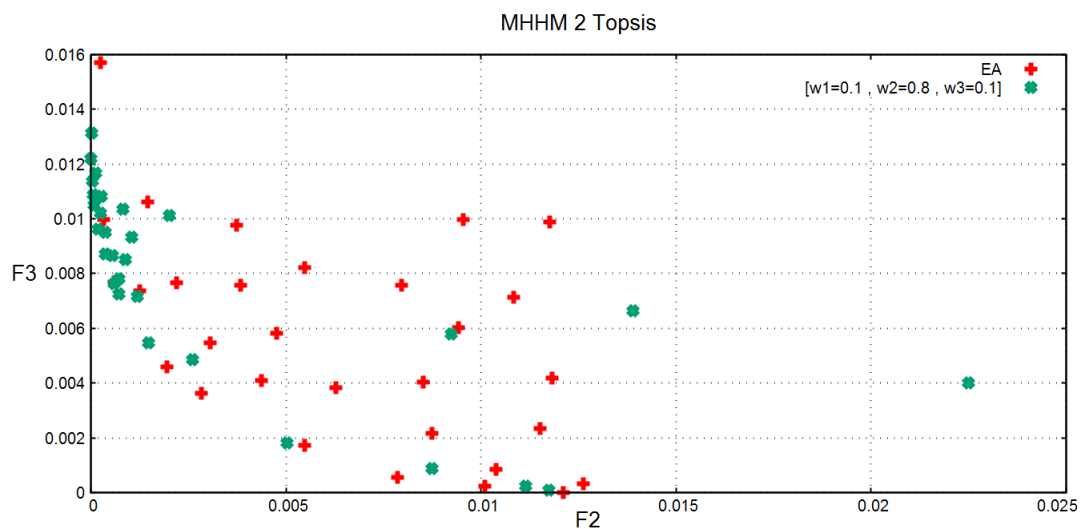


Σχήμα 3.42: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων MHMM 2: Προβολές των λύσεων των μετώπων Pareto από την ‘α priori’ εφαρμογή της τεχνικής TOPSIS για βάρη $w_1 = 0.8$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.1$ στο επίπεδο $F_1 F_3$. Σύγκριση με τις αντίστοιχες προβολές των λύσεων του μετώπου Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA.

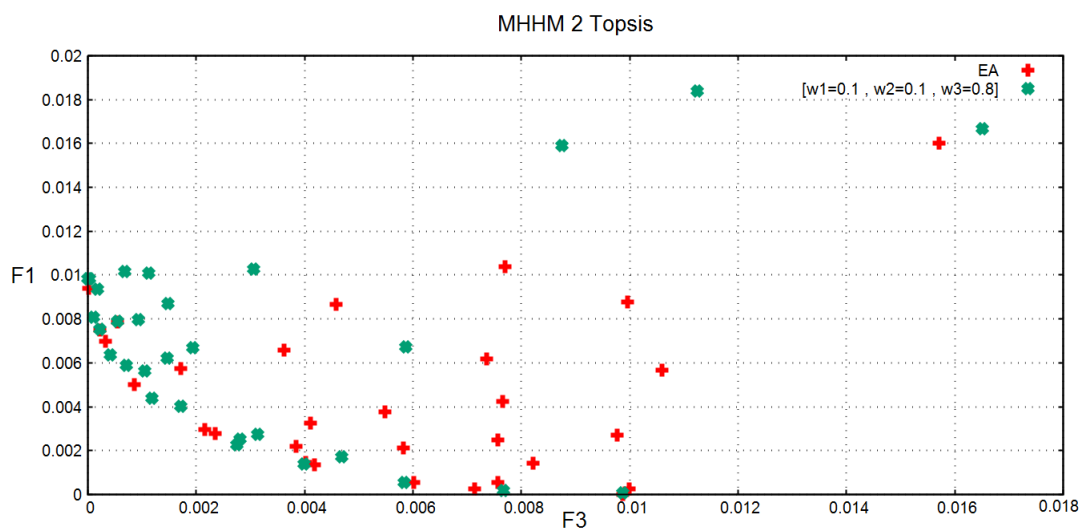


Σχήμα 3.43: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων MHMM 2: Προβολές των λύσεων των μετώπων Pareto από την ‘α priori’ εφαρμογή της τεχνικής TOPSIS για βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.8$, $w_3 = 0.1$ στο επίπεδο $F_2 F_1$. Σύγκριση με τις αντίστοιχες προβολές των λύσεων του μετώπου Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA.

Ακολουθούν οι 2D απεικονίσεις των αποτελεσμάτων της τεχνικής ELECTRE I. Στο σχήμα (3.47) φαίνεται πως το μέτωπο Pareto για βάρη $w_1 = 0.8$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.1$, μετατοπίζεται προς το τμήμα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων με μικρότερες τιμές της F_1 . Το ίδιο παρατηρείται και στο σχήμα (3.48). Οι συναρτήσεις κόστους F_2 και F_3 έχουν παρόμοια συμπεριφορά με αυτή των

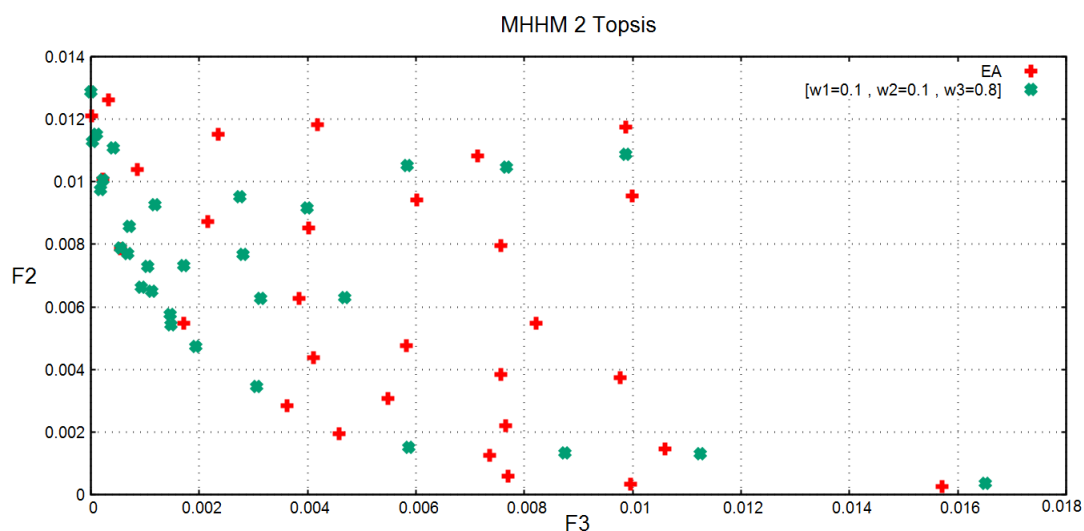


Σχήμα 3.44: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων MHMM 2: Προβολές των λύσεων των μετώπων Pareto από την ‘α priori’ εφαρμογή της τεχνικής TOPSIS για βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.8$, $w_3 = 0.1$ στο επίπεδο F_2F_3 . Σύγκριση με τις αντίστοιχες προβολές των λύσεων του μετώπου Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA.



Σχήμα 3.45: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων MHMM 2: Προβολές των λύσεων των μετώπων Pareto από την ‘α priori’ εφαρμογή της τεχνικής TOPSIS για βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.8$ στο επίπεδο F_3F_1 . Σύγκριση με τις αντίστοιχες προβολές των λύσεων του μετώπου Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA.

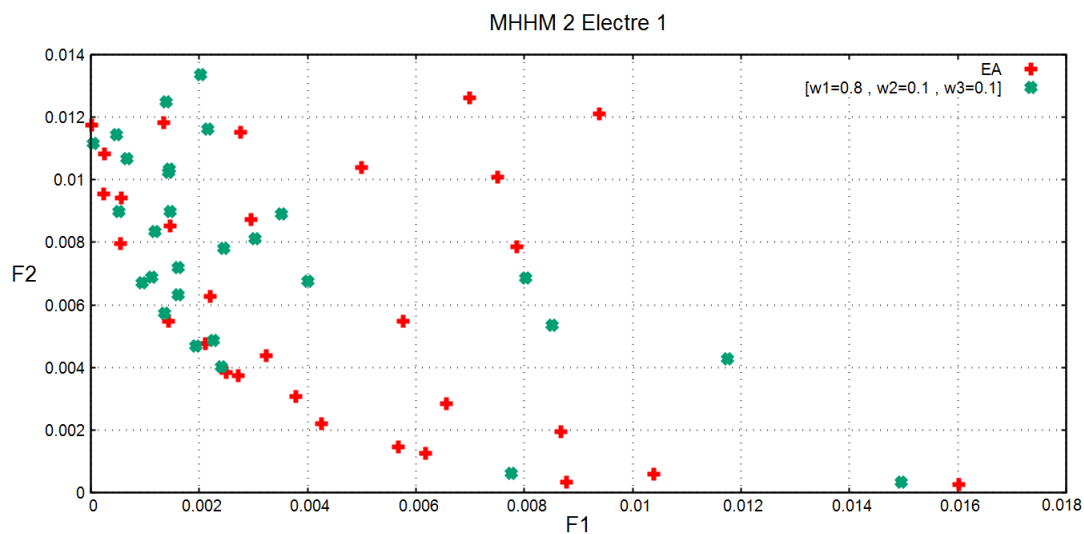
γειτονικών ατόμων που υπολογίζονται από τον απλό EA. Χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.8$, $w_3 = 0.1$, τα άτομα που υπολογίζονται εφαρμόζοντας την τεχνική ELECTRE I παρουσιάζουν κατανομή στο χώρο των αντικειμενικών συναρτήσεων που μοιάζει με αυτή των λύσεων του απλού EA. Δεν παρατηρείται, δηλαδή, στα σχήματα (3.49) και (3.50) προσανατολισμός των λύσεων ανάλογα με



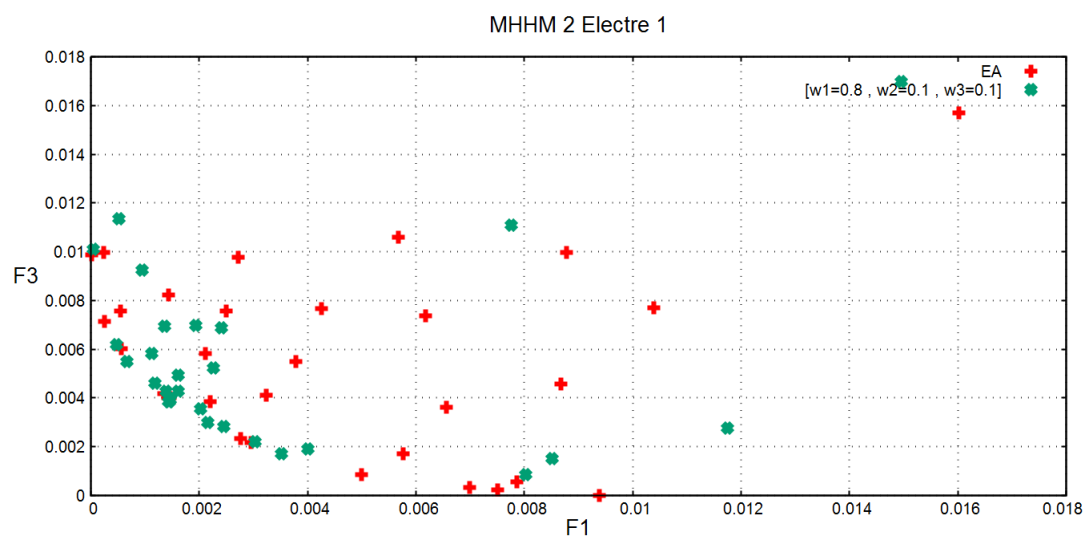
Σχήμα 3.46: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων MHMM 2: Προβολές των λύσεων των μειώπων Pareto από την ‘α priori’ εφαρμογή της τεχνικής TOPSIS για βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.8$ στο επίπεδο $F_3 F_2$. Σύγκριση με τις αντίστοιχες προβολές των λύσεων του μειώπου Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA.

τις προτιμήσεις του DM. Οι ίδιες παρατηρήσεις ισχύουν και για την περίπτωση βαρών $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.8$, όπως φαίνεται στα σχήματα (3.51) και (3.52).

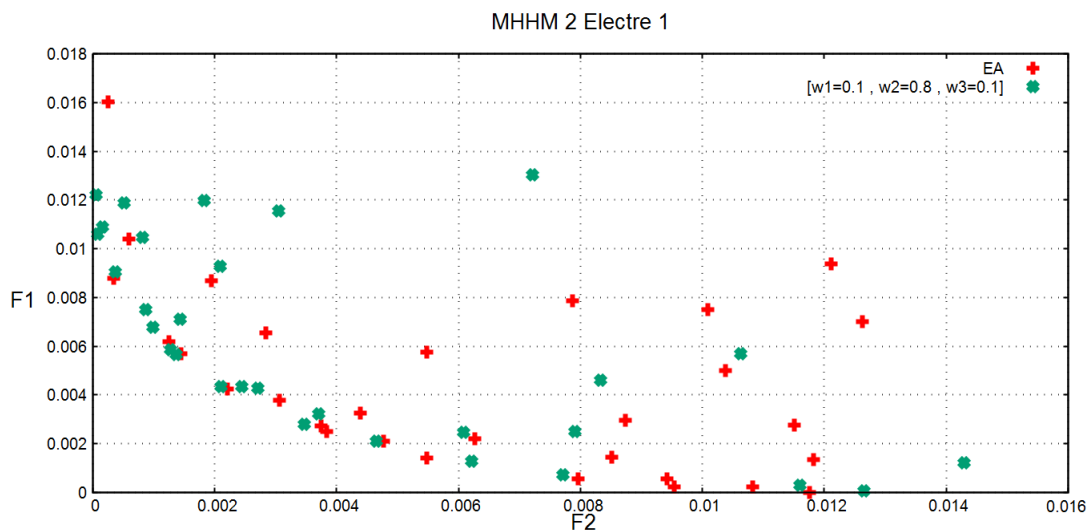
Συμπεραίνεται, ότι στην παραπάνω περίπτωση προβλήματος τριών στόχων η τεχνική TOPSIS οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα από την τεχνική ELECTRE I, καθώς η τελευταία δεν ανταποκρίνεται στις διαφορετικές προτιμήσεις του DM. Αντίθετα, η τεχνική TOPSIS είναι σε θέση να οδηγήσει σε καλύτερα αποτελέσματα από τον απλό EA



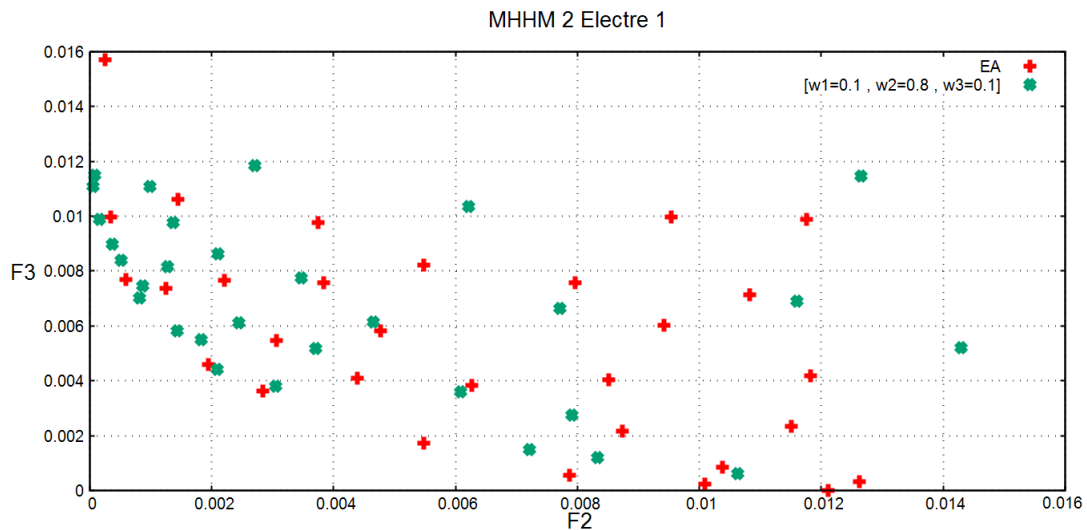
Σχήμα 3.47: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων ΜΗΜΜ 2: Προβολές των λύσεων των μετώπων Pareto από την ‘α priori’ εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I για βάρη $w_1 = 0.8$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.1$ στο επίπεδο $F_1 F_2$. Σύγκριση με τις αντίστοιχες προβολές των λύσεων του μετώπου Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό ΕΑ.



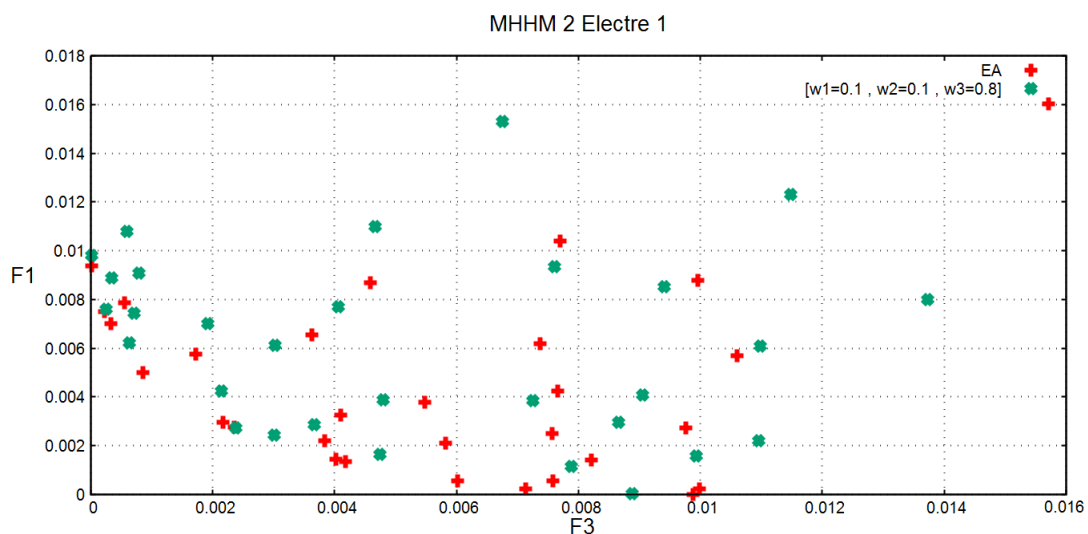
Σχήμα 3.48: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων ΜΗΜΜ 2: Προβολές των λύσεων των μετώπων Pareto από την ‘α priori’ εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I για βάρη $w_1 = 0.8$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.1$ στο επίπεδο $F_1 F_3$. Σύγκριση με τις αντίστοιχες προβολές των λύσεων του μετώπου Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό ΕΑ.



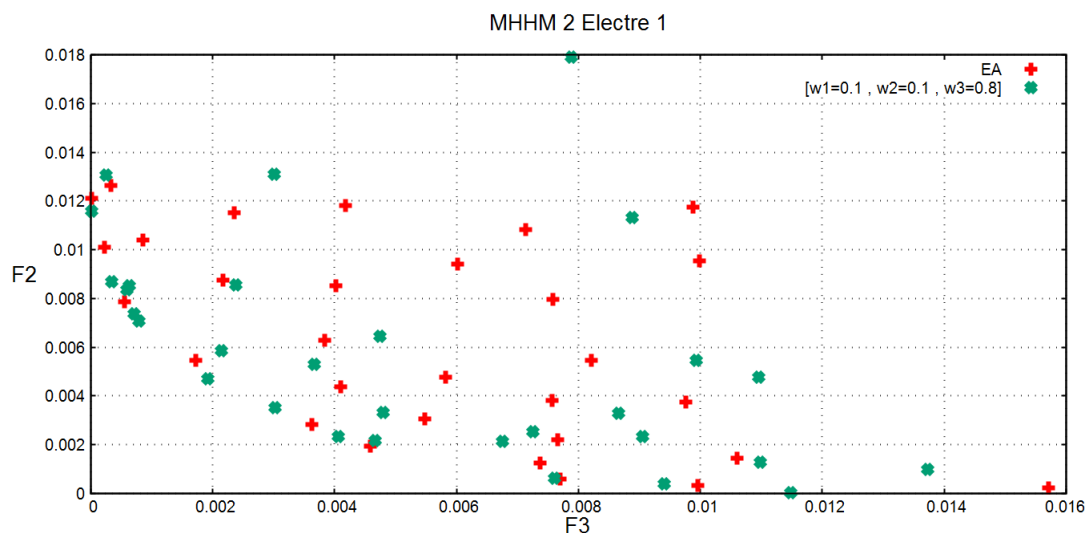
Σχήμα 3.49: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων ΜΗΗΜ 2: Προβολές των λύσεων των μετώπων Pareto από την ‘α priori’ εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I για βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.8$, $w_3 = 0.1$ στο επίπεδο F_2F_1 . Σύγκριση με τις αντίστοιχες προβολές των λύσεων του μετώπου Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA.



Σχήμα 3.50: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων ΜΗΗΜ 2: Προβολές των λύσεων των μετώπων Pareto από την ‘α priori’ εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I για βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.8$, $w_3 = 0.1$ στο επίπεδο F_2F_3 . Σύγκριση με τις αντίστοιχες προβολές των λύσεων του μετώπου Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA.



Σχήμα 3.51: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων ΜΗΜ 2: Προβολές των λύσεων των μετώπων Pareto από την ‘α priori’ εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I για βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.8$ στο επίπεδο $F_3 F_1$. Σύγκριση με τις αντίστοιχες προβολές των λύσεων του μετώπου Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό ΕΑ.



Σχήμα 3.52: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης τριών στόχων ΜΗΜ 2: Προβολές των λύσεων των μετώπων Pareto από την ‘α priori’ εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I για βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.8$ στο επίπεδο $F_3 F_2$. Σύγκριση με τις αντίστοιχες προβολές των λύσεων του μετώπου Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό ΕΑ.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογή των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I σε Αεροδυναμικά Προβλήματα ΜΟΟ

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται ‘a posteriori’ και ‘a priori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I σε προβλήματα βελτιστοποίησης αεροδυναμικής μορφής δύο στόχων. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζονται τα εξής προβλήματα :

- Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης διηχητικής αεροτομής
- Βελτιστοποίηση της μορφής μίας σταθερής πτερύγωσης συμπίεστή
- Βελτιστοποίηση της μορφής της μεμονωμένης διηχητικής πτέρυγας ONERA M6

Τα προβλήματα αυτά αποτελούνται από μία συνάρτηση κόστους προς ελαχιστοποίηση και μία συνάρτηση καταλληλότητας προς μεγιστοποίηση, η οποία μετασχηματίζεται σε συνάρτηση κόστους ώστε να προσαρμόζεται στις ανάγκες του EASY.

Οι προτιμήσεις του DM στις συναρτήσεις κόστους αναγράφονται στον πίνακα 4.1, τόσο για την ‘a posteriori’ όσο και για την ‘a priori’ περίπτωση εφαρμογής των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I.

	w_1	w_2
1	0.1	0.9
2	0.5	0.5
3	0.9	0.1

Πίνακας 4.1: Συνδυασμοί βαρών για την ‘a posteriori’ και ‘a priori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I σε αεροδυναμικά προβλήματα MOO δύο στόχων.

Σε κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης που παρουσιάζεται, εφαρμόζονται αρχικά οι τεχνικές TOPSIS και ELECTRE I ‘a posteriori’. Υπενθυμίζεται ότι στην περίπτωση εφαρμογής της τεχνικής ELECTRE I χρησιμοποιείται ως κριτήριο κατάταξης των λύσεων από την καλύτερη στη λιγότερο κατάλληλη για τον DM ο πίνακας **K**, εξ. (2.17). Ο πίνακας **K** προκύπτει από την αφαίρεση του πίνακα **A**, εξ. (2.15), από τον πίνακα **B**, εξ. (2.16). Στα αεροδυναμικά προβλήματα που ακολουθούν στην περίπτωση εφαρμογής της τεχνικής ELECTRE I ‘a posteriori’ παρουσιάζεται αρχικά στο μέτωπο Pareto η βέλτιστη για τον DM λύση βάσει του πίνακα **K**. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται επιπλέον η κατάταξη όλων των λύσεων βάσει των πινάκων **A** και **B** ξεχωριστά. Σύμφωνα με τον πίνακα **A** καλύτερη είναι η λύση που αντιστοιχεί στο κελί με τη μεγαλύτερη τιμή και σύμφωνα με τον πίνακα **B** καλύτερη είναι η λύση που αντιστοιχεί στο κελί με τη μικρότερη. Για την απεικόνιση της κατάταξης των λύσεων χρησιμοποιούνται τα βάρη του πίνακα 4.1 εκτός από τα βάρη $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$ καθώς για ίσα βάρη οι τιμές του πίνακα **A** μηδενίζονται και οι λύσεις δεν μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον πίνακα **A**. Η τελική κατάταξη των λύσεων για ίσα βάρη βασίζεται αποκλειστικά στον πίνακα **B**, για τον υπολογισμό του οποίου, σε αντίθεση με τον πίνακα **A**, συνυπολογίζονται οι τιμές του πίνακα **V**.

Ένα παράδειγμα απεικόνισης της κατάταξης των λύσεων χρησιμοποιώντας τους πίνακες **A** και **B** φαίνεται στο σχήμα (4.1). Η δεξιά στήλη αντιστοιχεί στην κατάταξη των λύσεων σύμφωνα με τον πίνακα **B** και η αριστερή σύμφωνα με τον πίνακα **A**. Τα προβλήματα που επιλύονται αποτελούνται από μία συνάρτηση κόστους και μία συνάρτηση καταλληλότητας, η οποία μετασχηματίζεται σε συνάρτηση κόστους. Η αρίθμηση των λύσεων ξεκινά με το άτομο που παρουσιάζει τις μεγαλύτερες τιμές των συναρτήσεων κόστους (αύξων αριθμός 1) και τελειώνει με το άτομο που παρουσιάζει τις μικρότερες. Όταν ένα άτομο του μετώπου Pareto καταλαμβάνει την ίδια θέση και στους δύο πίνακες, αυτοί συνδέονται με ένα παράλληλο ευθύγραμμο τμήμα. Αντίθετα, όταν υπάρχει διαφωνία μεταξύ των δύο πινάκων το ευθύγραμμο τμήμα είναι αρκετά κεκλιμένο. Για τη σύγκριση των πινάκων **A** και **B** ως προς την κατάταξη των λύσεων χρησιμοποιείται επίσης ένας δείκτης σύγκρισης R ο οποίος υπολογίζεται ως εξής:

$$R = \frac{1}{M_e} \sqrt{\sum_{i=1}^{M_e} (\theta_i^A - \theta_i^B)^2}$$

Με θ_i^A και θ_i^B συμβολίζονται οι αύξοντες αριθμοί των στοιχείων που βρίσκονται στη

θέση i των πινάκων \mathbf{A} και \mathbf{B} αντίστοιχα. Με M_e συμβολίζεται ο αριθμός των ατόμων που συνθέτουν το μέτωπο Pareto.



$$R = \frac{1}{5} \sqrt{((1-3)^2 + (2-4)^2 + (3-2)^2 + (4-1)^2 + (5-5)^2)} = 0.84$$

Σχήμα 4.1: Κατάταξη των 5 λύσεων ενός εικονικού μετώπου Pareto βάσει της τεχνικής ELECTRE I και των πινάκων \mathbf{A} και \mathbf{B} . Η δεξιά στήλη αντιστοιχεί στην κατάταξη των λύσεων σύμφωνα με τον πίνακα \mathbf{B} και η αριστερή σύμφωνα με τον πίνακα \mathbf{A} . Αρίθμηση των λύσεων από το άτομο με τις μεγαλύτερες τιμές των συναρτήσεων κόστους (αύξων αριθμός 1) προς το άτομο με τις μικρότερες (αύξων αριθμός 5).

Μετά την εφαρμογή των τεχνικών MCDM ‘a posteriori’, αυτές εφαρμόζονται ‘a priori’ στο ίδιο αεροδυναμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Για το σκοπό αυτό η τεχνική βαθμολόγησης των λύσεων κάθε γενιάς SPEA αντικαθίσταται αρχικά από την τεχνική TOPSIS και στη συνέχεια από την τεχνική ELECTRE I, όπως ήδη περιγράφηκε.

4.1 Βελτιστοποίηση της Μορφής μίας Μεμονωμένης Διηχητικής Αεροτομής

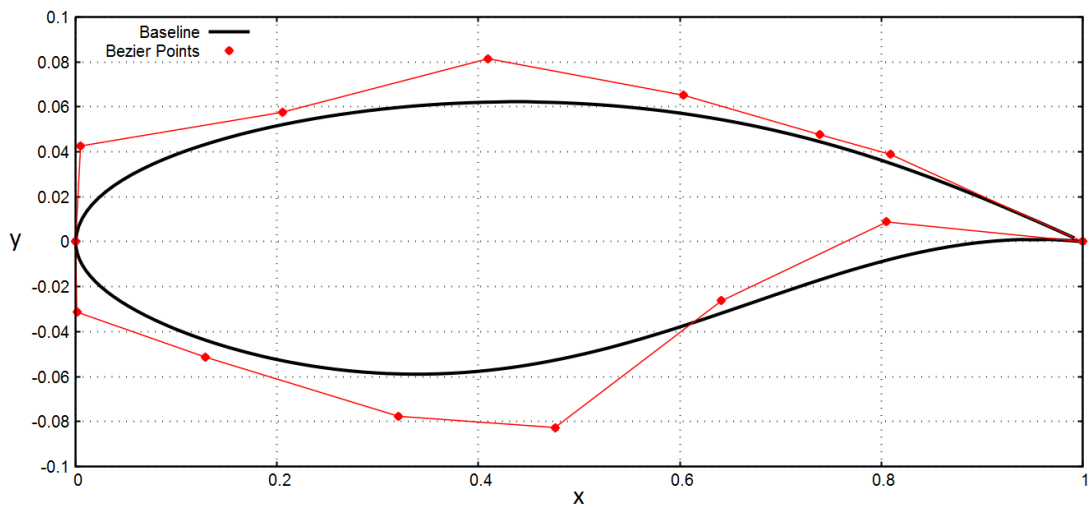
Στη συνέχεια, εφαρμόζονται οι τεχνικές TOPSIS και ELECTRE I ‘a posteriori’ στο πρόβλημα βελτιστοποίησης της μορφής μίας μεμονωμένης διηχητικής αεροτομής. Το συγκεκριμένο πρόβλημα αποτελείται από δύο στόχους, οι οποίοι είναι η μεγιστοποίηση της άνωσης ($\max C_L$) και η ελαχιστοποίηση της αντίστασης ($\min C_D$). Με δεδομένο ότι ο EASY χειρίζεται αποκλειστικά προβλήματα ελαχιστοποίησης, οι συναρτήσεις κόστους που ελαχιστοποιούνται ορίζονται ως εξής:

$$F_1 = -C_L$$

$$F_2 = C_D$$

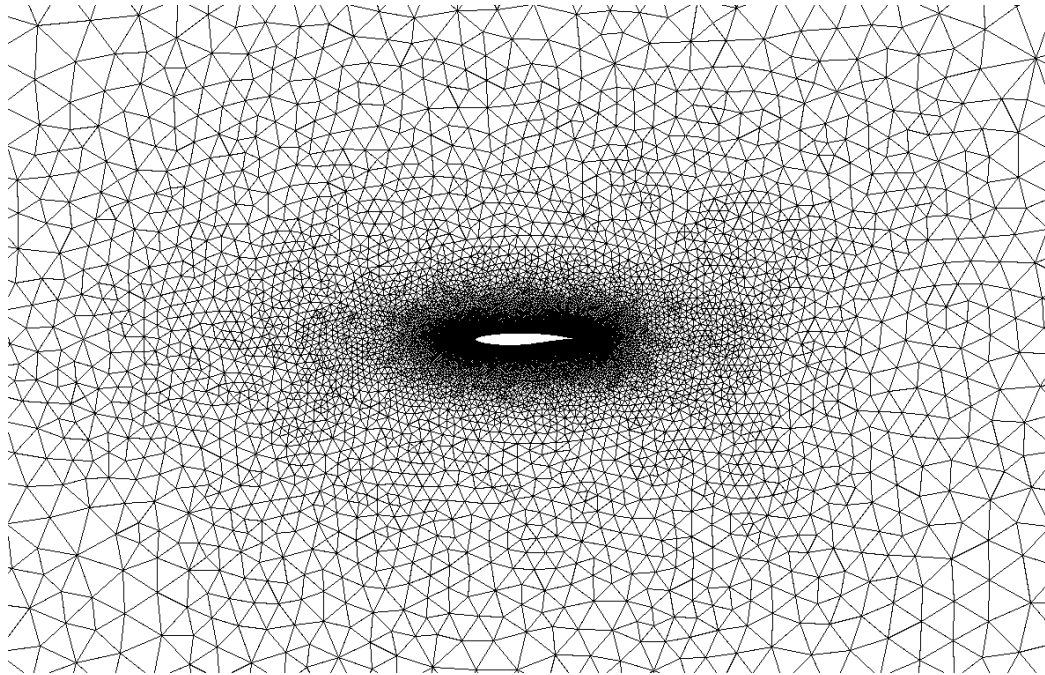
Επιλύονται οι εξισώσεις Euler για συμπιεστή και ατριβή ροή, η οποία χαρακτηρίζεται από επ’ άπειρον αριθμό Mach $M_\infty = 0.725$ και γωνία επ’ άπειρο ροής $\alpha_\infty = 2.72 \text{ deg}$.

Για την παραμετροποίηση της μορφής της αεροτομής χρησιμοποιούνται δύο καμπύλες Bezier, όπως φαίνεται στο σχήμα (4.2). Η μία αφορά την πλευρά υποπίεσης της αεροτομής και η άλλη την πλευρά υπερπίεσης. Καθεμία αποτελείται από 8 σημεία ελέγχου (control points), 6 από τα οποία είναι ελεύθερα να μετατοπίζονται κατά την κατεύθυνση του άξονα y . Το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου κάθε καμπύλης (σημεία προσβολής και εκφυγής) παραμένουν σταθερά στα σημεία $(0,0)$ και $(1,0)$ αντίστοιχα με αποτέλεσμα το πρόβλημα να αποτελείται από συνολικά 12 μεταβλητές σχεδιασμού.



Σχήμα 4.2: Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης διχητικής αεροτομής: Απεικόνιση της αρχικής αεροτομής μαζί με τις 2 καμπύλες Bezier, μία για την πλευρά υπερπίεσης και μία για την πλευρά υποπίεσης. Κάθε καμπύλη Bezier αποτελείται από 8 σημεία ελέγχου. Οι άξονες δεν είναι σε κλίμακα.

Το μη-δομημένο υπολογιστικό πλέγμα που απεικονίζεται στο σχήμα (4.3) αποτελείται από $\sim 20K$ κόμβους και μία επίλυση των εξισώσεων Euler σε μία NVIDIA K20 GPU διαρκεί περίπου 10sec.

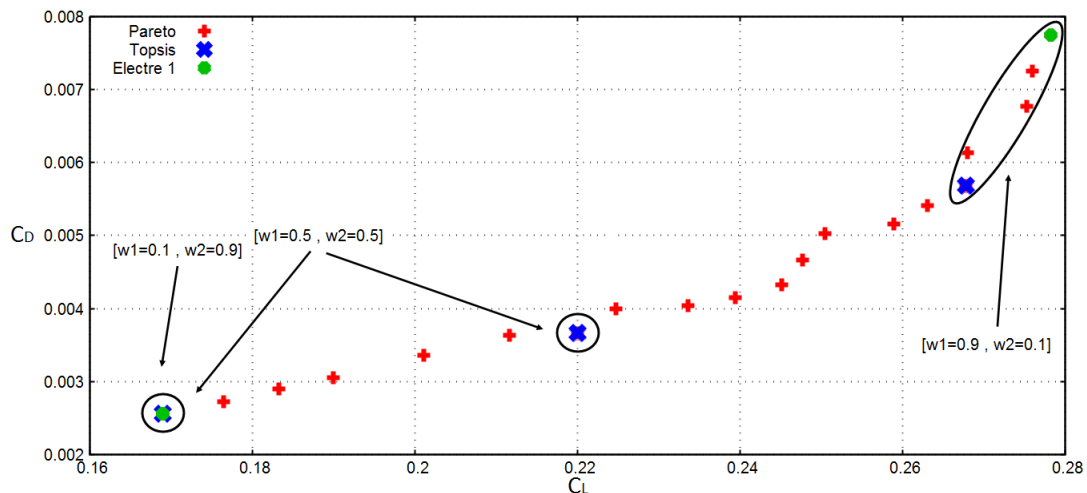


Σχήμα 4.3: Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης διηχητικής αεροτομής: Απεικόνιση του μη-δομημένου υπολογιστικού πλέγματος.

4.1.1 ‘A posteriori’ Εφαρμογή των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I

Αρχικά, οι τεχνικές TOPSIS και ELECTRE I εφαρμόζονται ‘a posteriori’ στο μέτωπο Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας έναν (20,40) ΕΑ με 20 άτομα στο σύνολο των επιλέκτων και κριτήριο τερματισμού τις 1000 αξιολογήσεις. Τα αποτελέσματα των δύο τεχνικών MCDM για τα βάρη του πίνακα 4.1 φαίνονται στο σχήμα (4.4). Χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.9$, και οι δύο τεχνικές επιλέγουν ως βέλτιστο το ακραίο άτομο του μειώπου Pareto που χαρακτηρίζεται από τις μικρότερες τιμές των συντελεστών άνωσης και αντίστασης. Ίδιο παραμένει το αποτέλεσμα εφαρμόζοντας την τεχνική ELECTRE I για βάρη $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$, σε αντίθεση με την τεχνική TOPSIS βάσει της οποίας βέλτιστη θεωρείται μία περίπου κεντρική λύση του μειώπου Pareto. Τέλος, χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.9$, $w_2 = 0.1$, η βέλτιστη λύση της τεχνικής TOPSIS μετατοπίζεται προς το άκρο του μειώπου Pareto με τις μεγαλύτερες τιμές των συντελεστών C_L και C_D . Η βέλτιστη λύση της τεχνικής ELECTRE I για τα ίδια βάρη αποτελείται από τις μεγαλύτερες τιμές των συντελεστών άνωσης και αντίστασης.

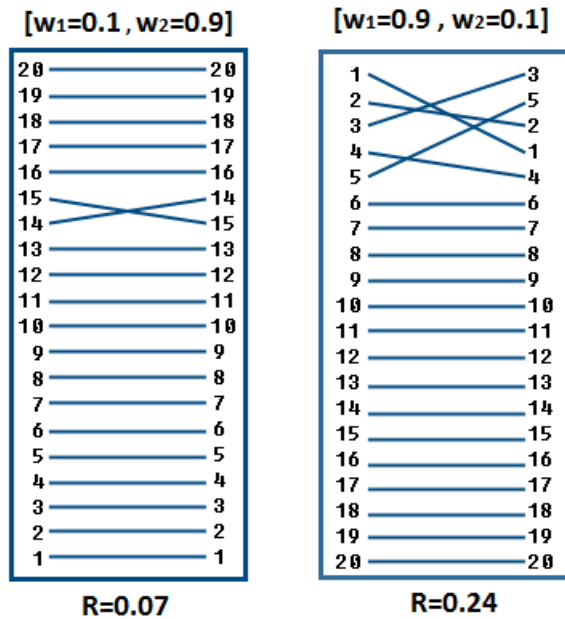
Στη συνέχεια, στο σχήμα (4.5) παρουσιάζεται η κατάταξη των λύσεων του μειώπου Pareto από την καλύτερη στη χειρότερη βάσει της τεχνικής ELECTRE I και των πινάκων **A** και **B**. Υπενθυμίζεται ότι με αύξοντα αριθμό 1 συμβολίζεται το άτομο του μειώπου με τις μεγαλύτερες τιμές των συναρτήσεων κόστους και με αύξοντα αριθμό



Σχήμα 4.4: Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης διηχητικής αεροτομής: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στο αποτελούμενο από 20 άτομα μέτωπο Pareto για τα αναγραφόμενα βάρη.

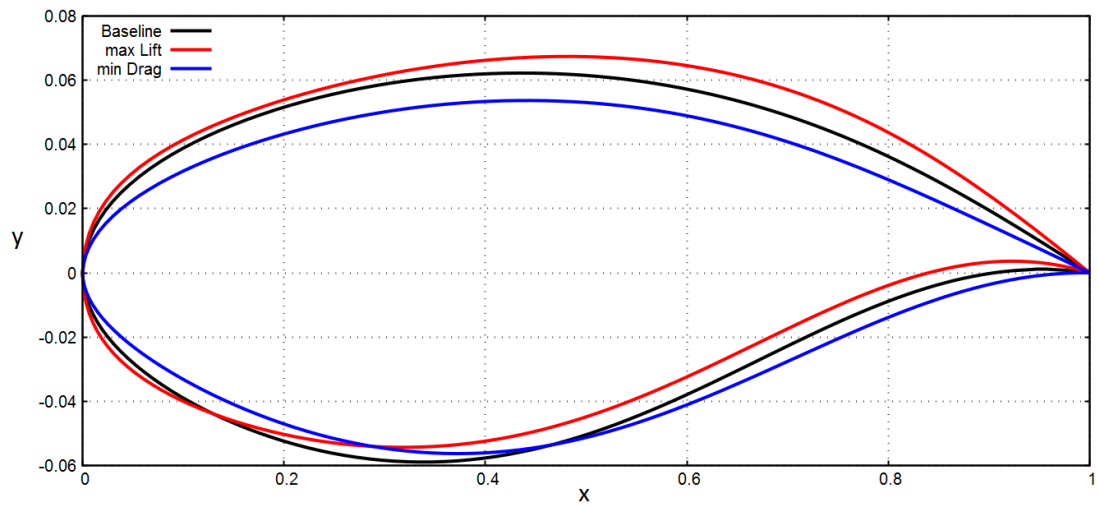
20 το άτομο με τις μικρότερες. Για βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.9$, παρατηρείται ότι οι δύο πίνακες κατατάσσουν ως βέλτιστη τη λύση με αύξοντα αριθμό 20 και διαφέρουν μόνο ως προς την κατάταξη των λύσεων 14 και 15. Για αυτόν το λόγο ο δείκτης R έχει μικρή τιμή, $R = 0.07$. Για βάρη $w_1 = 0.9$, $w_2 = 0.1$, οι πέντε πρώτες καλύτερες λύσεις κάθε πίνακα είναι διαφορετικές, ενώ οι υπόλοιπες είναι κοινές. Στον πίνακα **A** πρώτη κατατάσσεται η λύση με αύξοντα αριθμό 1, ενώ στον πίνακα **B** η λύση με αύξοντα αριθμό 13. Ο δείκτης σύγκρισης της κατάταξης των λύσεων μεταξύ των δύο πινάκων ισούται με $R = 0.24$.

Στο σχήμα (4.6) παρουσιάζονται οι μεταβολές της μορφής της αεροτομής σε σχέση με την αρχική της μορφή χρησιμοποιώντας δύο λύσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή των τεχνικών MCDM. Οι λύσεις αυτές αντιστοιχούν σε μέγιστη άνωση και σε ελάχιστη αντίσταση. Παρατηρείται ότι στην περίπτωση μέγιστης άνωσης το πάχος στο τμήμα προσβολής και η καμπυλότητα της αεροτομής αυξάνονται. Αντίθετα, στην περίπτωση ελάχιστης αντίστασης η αεροτομή έχει μικρότερη καμπυλότητα και το πάχος της μειώνεται στο τμήμα προσβολής. Οι μεταβολές της αεροτομής σε σχέση με την αρχική της μορφή έχουν ως αποτέλεσμα μεταβολές του πεδίου ροής γύρω από την αεροτομή. Στα σχήματα (4.7), (4.8) και (4.9), παρουσιάζονται οι μεταβολές του αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή για τις περιπτώσεις της αρχικής αεροτομής, της αεροτομής μέγιστης άνωσης και της αεροτομής ελάχιστης αντίστασης αντίστοιχα. Παρατηρείται ότι στην περίπτωση ελάχιστης αντίστασης το κύμα κρούσης στην πλευρά υποπίεσης εξασθενεί καθώς εκεί η αεροτομή έχει μικρότερη καμπυλότητα. Η εξασθένιση αυτή οδηγεί σε μείωση της αντίστασης και αύξηση της στατικής πίεσης στην πλευρά υποπίεσης. Υπενθυμίζεται ότι η ροή είναι ατριβής και υπάρχει μόνο αντίσταση μορφής, άρα η μείωση της αντίστασης εξαρτάται αποκλειστικά από τη μείωση του κρουστικού κύματος. Η αύξηση της

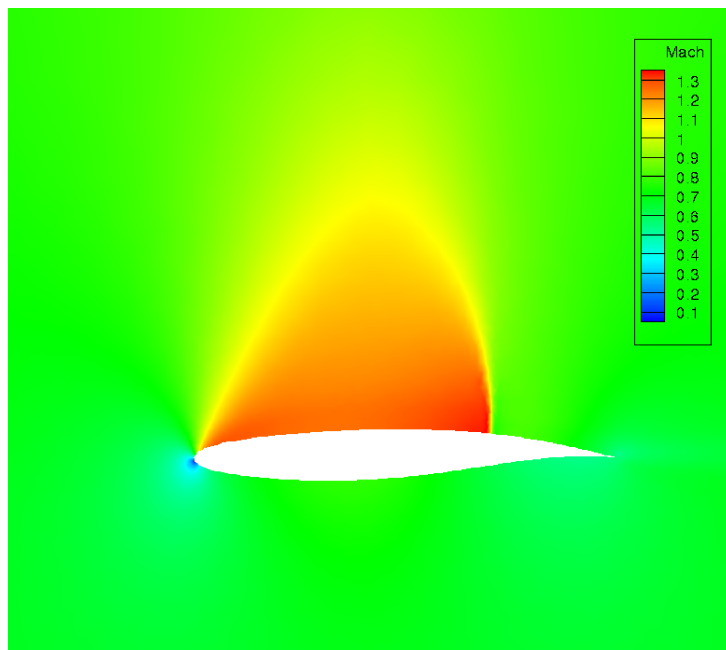


Σχήμα 4.5: Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης διηχητικής αεροτομής: Κατάταξη των ρύσεων του μετώπου Pareto βάσει της τεχνικής ELECTRE I και των πινάκων **A** και **B** για τα αναγραφόμενα βάρη. Η δεξιά στήλη αντιστοιχεί στην κατάταξη των ρύσεων σύμφωνα με τον πίνακα **B** και η αριστερή σύμφωνα με τον πίνακα **A**. Αρίθμηση των ρύσεων από το άτομο με τις μεγαλύτερες τιμές των συναρτήσεων κόστους (αύξων αριθμός 1) προς το άτομο με τις μικρότερες (αύξων αριθμός 20).

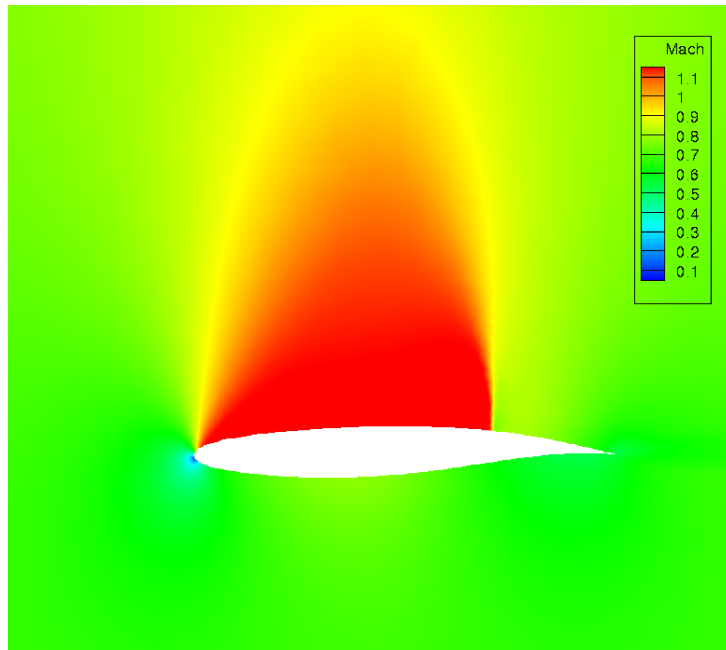
στατικής πίεσης έχει ως αποτέλεσμα ελάττωση της άνωσης. Αντίθετα, στην περίπτωση μέγιστης άνωσης το κύμα κρούσης στην πλευρά υποπίεσης γίνεται εντονότερο οδηγώντας σε αύξηση της αντίστασης. Επιπλέον, η αύξηση της καμπυλότητας οδηγεί σε αύξηση της διαφοράς στατικής πίεσης μεταξύ των πλευρών υπερπίεσης και υποπίεσης και τελικά σε μέγιστη άνωση.



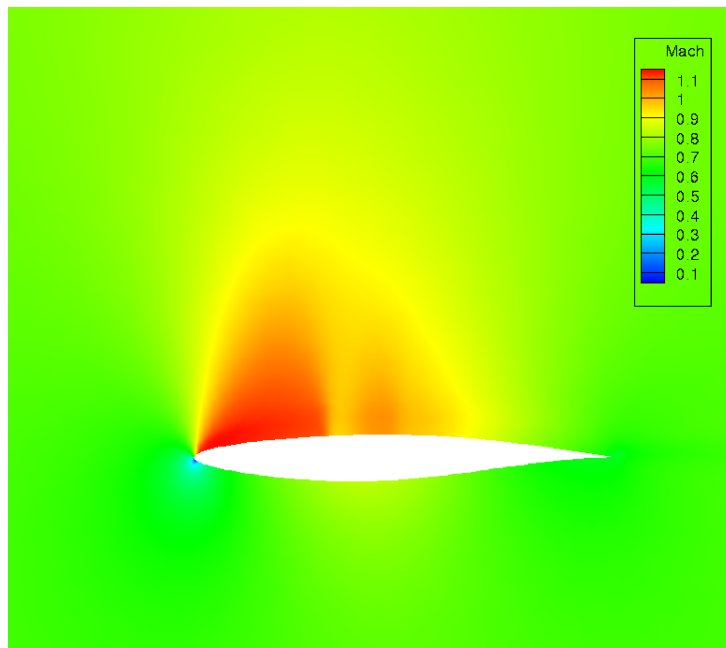
Σχήμα 4.6: Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης διηχητικής αεροτομής: Αρχική μορφή της αεροτομής και μεταβολές της για επίτευξη μέγιστης άνωσης ή ελάχιστης αντίστασης. Οι άξονες δεν είναι σε κλίμακα.



Σχήμα 4.7: Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης διηχητικής αεροτομής: Κατανομή του αριθμού Mach γύρω από την αρχική αεροτομή.



Σχήμα 4.8: Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης διχηητικής αεροτομής: Κατανομή του αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή στην περίπτωση μέγιστης άνωσης.



Σχήμα 4.9: Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης διχηητικής αεροτομής: Κατανομή του αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή στην περίπτωση ελάχιστης αντίστασης.

4.1.2 'Α priori' Εφαρμογή των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE

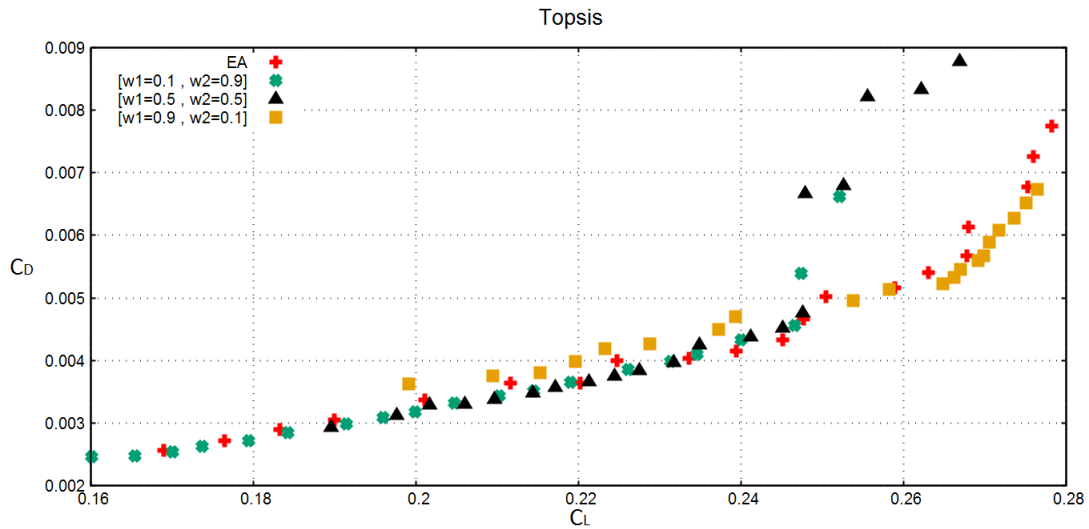
I

Στη συνέχεια, εφαρμόζονται 'α priori' οι τεχνικές TOPSIS και ELECTRE I στο πρόβλημα βελτιστοποίησης της μορφής της ίδιας μεμονωμένης διχηητικής

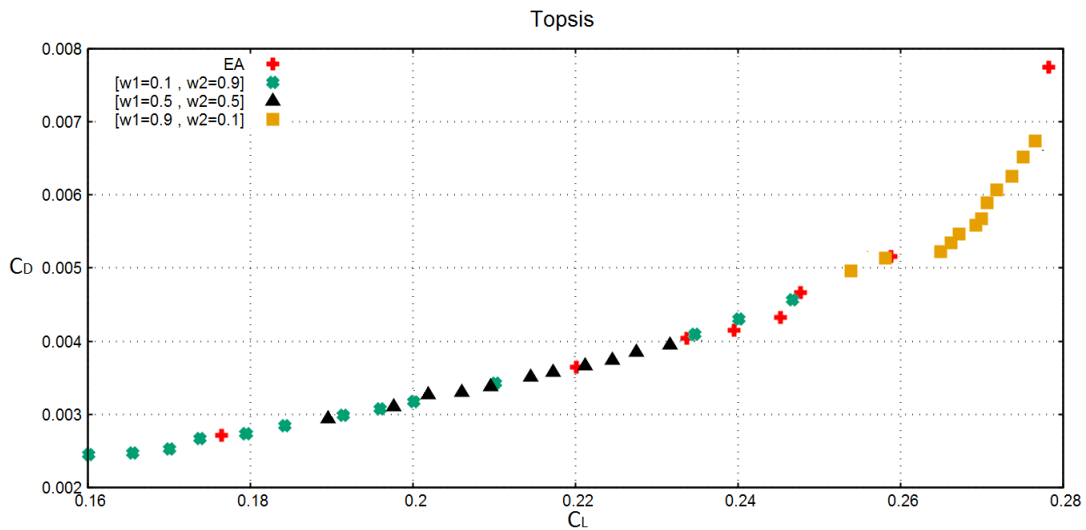
αεροτομής. Χρησιμοποιείται ένας (20,40) ΕΑ με 20 άτομα στο σύνολο των επιλέκτων και κριτήριο τερματισμού τις 1000 αξιολογήσεις. Οι προτιμήσεις του DM ποσοτικοποιούνται με τα βάρη του πίνακα 4.1 και τα μέτωπα Pareto που υπολογίζονται από κάθε τεχνική συγκρίνονται με αυτό που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό ΕΑ.

Στο σχήμα (4.10) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα εφαρμογής της τεχνικής TOPSIS. Χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.9$, παρατηρείται πως το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται αποτελείται από λύσεις που κυριαρχούν στις γειτονικές που υπολογίζονται από τον απλό ΕΑ στο τμήμα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων που ενδιαφέρει τον DM. Αντίθετα, οι λύσεις που αντιστοιχούν σε μεγαλύτερες τιμές της άνωσης και της αντίστασης είναι χειρότερες από αυτές του απλού ΕΑ. Για βάρη $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$, οι περισσότερες λύσεις του μετώπου Pareto συγκεντρώνονται σε κεντρικό τμήμα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων, με λίγες από αυτές να κυριαρχούνται από τις λύσεις του απλού ΕΑ. Επίσης, οι λύσεις αυτές έχουν παρόμοια συμπεριφορά στο τμήμα αυτό με τις λύσεις που υπολογίζονται για βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.9$, με ορισμένες όμως να είναι καλύτερες από τις δεύτερες. Τέλος, χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.9$, $w_2 = 0.1$, παρατηρείται συσσώρευση λύσεων που κυριαρχούν στις λύσεις του απλού ΕΑ στο τμήμα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων που χαρακτηρίζεται από μεγαλύτερες τιμές των συντελεστών άνωσης και αντίστασης. Επιπλέον, οι λύσεις από την εφαρμογή της τεχνικής TOPSIS στο τμήμα αυτό είναι περισσότερες από τις λύσεις που υπολογίζονται από τον απλό ΕΑ. Τα μη-κυριαρχούμενα άτομα των προηγούμενων τεσσάρων μετώπων Pareto απεικονίζονται στο σχήμα (4.11), όπου διακρίνονται τα τμήματα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων στα οποία το καθένα αποτελείται από καλύτερες λύσεις.

Στη συνέχεια, εφαρμόζεται 'a priori' στο ίδιο πρόβλημα η τεχνική ELECTRE I, χρησιμοποιώντας τα βάρη του πίνακα 4.1. Τα αποτελέσματα εφαρμογής της τεχνικής σε σχέση με αυτά του απλού ΕΑ απεικονίζονται στα σχήματα (4.12) και (4.13). Στην περίπτωση μεγαλύτερης προτίμησης του DM σε μικρότερες τιμές της αντίστασης, δηλαδή για βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.9$, οι λύσεις που υπολογίζονται εντοπίζονται κυρίως στο κέντρο και προς το τμήμα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων με τις μικρότερες τιμές των συντελεστών άνωσης και αντίστασης. Παρατηρείται ότι υπολογίζονται κυρίως λύσεις που δεν κυριαρχούν στις αντίστοιχες του απλού ΕΑ αλλά ούτε κυριαρχούνται από αυτές. Οι λύσεις αυτές αντιστοιχούν σε μεγαλύτερες τιμές του συντελεστή άνωσης και σχεδόν ίδιες τιμές του συντελεστή αντίστασης και βρίσκονται κοντινότερα στο αριστερό άκρο των μετώπων. Χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$, υπολογίζονται λύσεις σε κεντρικό τμήμα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων. Από αυτές, οι λύσεις με μικρότερες τιμές της άνωσης και της αντίστασης είναι καλύτερες από αυτές του απλού ΕΑ, παρατήρηση που ισχύει και για τα αποτελέσματα της τεχνικής TOPSIS. Τέλος, για βάρη $w_1 = 0.9$, $w_2 = 0.1$, πέντε από τις λύσεις που υπολογίζονται από την εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I κυριαρχούν στις λύσεις του απλού ΕΑ και χαρακτηρίζονται από μεγαλύτερες τιμές των συντελεστών άνωσης και αντίστασης.

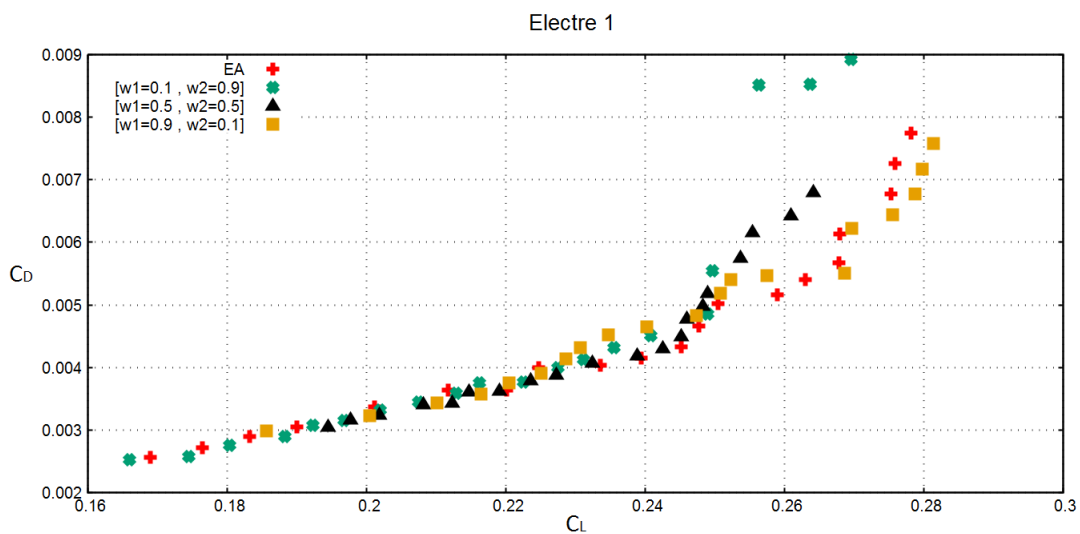


Σχήμα 4.10: Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης διχητικής αεροτομής: Μέτωπα Pareto από την ‘α priori’ εφαρμογή της τεχνικής TOPSIS για τα αναγραφόμενα βάρη. Σύγκριση με το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA.

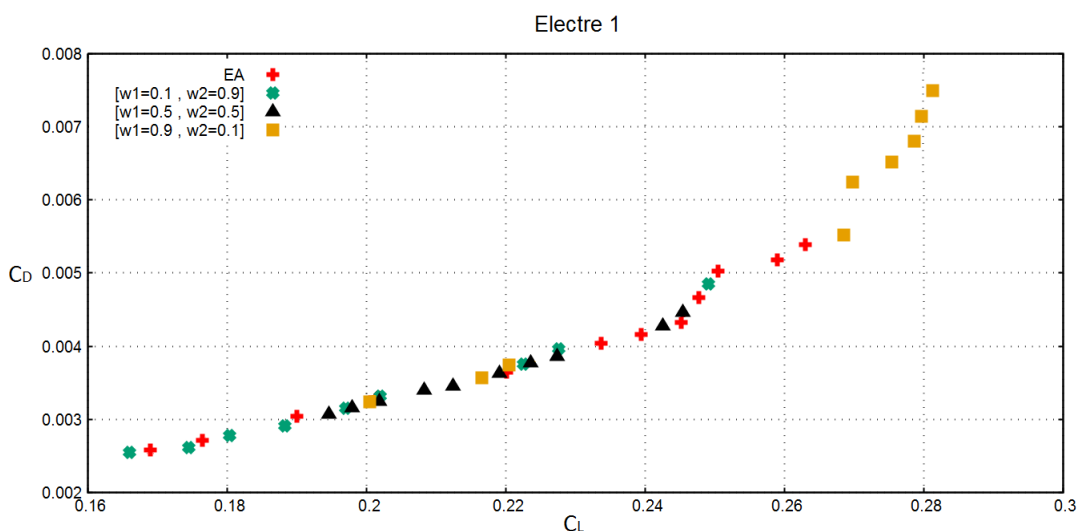


Σχήμα 4.11: Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης διχητικής αεροτομής: Μη κυριαρχούμενα άτομα των μετώπων Pareto από τη χρήση απλού EA και από την ‘α priori’ εφαρμογή της τεχνικής TOPSIS για τα αναγραφόμενα βάρη.

Συμπεραίνεται, πως τόσο η τεχνική TOPSIS όσο και η τεχνική ELECTRE I μπορούν να οδηγήσουν σε αποτελέσματα ικανοποιητικά για τον DM. Στην περίπτωση μεγαλύτερης σημασίας βελτίωσης του συντελεστή αντίστασης προτιμάται η τεχνική TOPSIS, καθώς οδηγεί σε αποτελέσματα καλύτερα από τον απλό EA. Στην αντίθετη περίπτωση, με την τεχνική ELECTRE I υπολογίζονται λύσεις με μεγαλύτερες τιμές του συντελεστή άνωσης σε σχέση με αυτές της τεχνικής TOPSIS, με αποτέλεσμα οι πρώτες να ανταποκρίνονται περισσότερο στις προτιμήσεις του DM.



Σχήμα 4.12: Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης διχητικής αεροτομής: Μέτωπα Pareto από την ‘α priori’ εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I για τα αναγραφόμενα βάρη. Σύγκριση με το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA.



Σχήμα 4.13: Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης διχητικής αεροτομής: Μη κυριαρχούμενα άτομα των μετώπων Pareto από τη χρήση απλού EA και από την ‘α priori’ εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I για τα αναγραφόμενα βάρη.

4.2 Βελτιστοποίηση της Μορφής μιας Σταθερής Πτερύγωσης Συμπιεστή

Το δεύτερο πρόβλημα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης που επιλύεται είναι αυτό της βελτιστοποίησης της μορφής μιας σταθερής πτερύγωσης συμπιεστή. Το

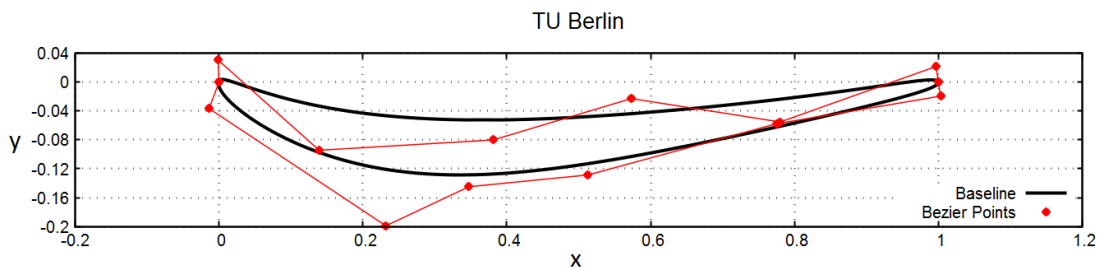
πρόβλημα αποτελείται από δύο στόχους, τη μεγιστοποίηση της γωνίας στροφής της ροής ($\max\Delta_\alpha$) και την ελαχιστοποίηση της πτώσης ολικής πίεσης ($\min\Delta_{pt}$). Συνεπώς, ορίζονται οι εξής συναρτήσεις κόστους:

$$F_1 = \alpha_1 - \alpha_2$$

$$F_2 = \Delta_{pt}$$

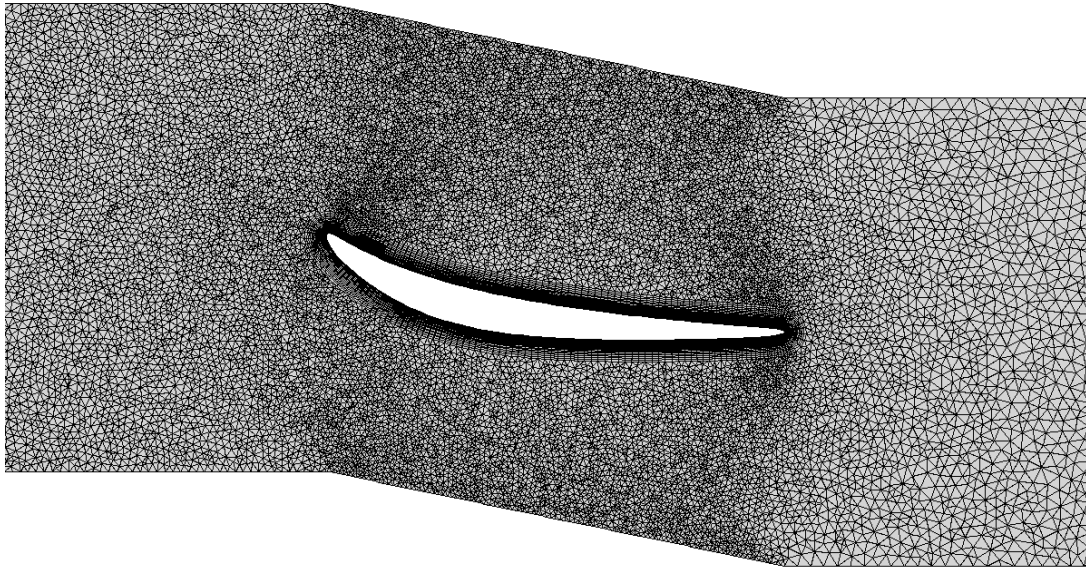
Ως λογισμικό αξιολόγησης χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Navier-Stokes. Η ροή είναι ασυμπίεστη, τυρβώδης και χαρακτηρίζεται από επ' άπειρον αριθμό Mach $M_\infty = 0.10$, γωνία εισόδου της ροής στην περύγωση ίση με $\alpha_1 = -42 \text{ deg}$ και γωνία κλίσης $\alpha_{st} = -12 \text{ deg}$. Ο αριθμός Reynolds της ροής βασισμένος στη χορδή ισούται με $Re = 3.58 \times 10^6$ και χρησιμοποιείται το μοντέλο τύρβης των Spalart Allmaras.

Στο σχήμα (4.14) απεικονίζονται οι δύο καμπύλες Bezier με τις οποίες παραμετροποιείται το σχήμα της περύγωσης. Η μία χρησιμοποιείται για την παραμετροποίηση της πλευράς υποπίεσης και η άλλη για την παραμετροποίηση της πλευράς υπερπίεσης. Κάθε καμπύλη αποτελείται από 6 σημεία ελέγχου, τα οποία είναι ελεύθερα να μετατοπίζονται κατά την κατεύθυνση του άξονα y και από 2 σημεία ελέγχου που παραμένουν σταθερά. Συνεπώς, το πρόβλημα αποτελείται από 12 μεταβλητές σχεδιασμού.



Σχήμα 4.14: Βελτιστοποίηση της μορφής μιας σταθερής περύγωσης συμπίεστη: Απεικόνιση της αρχικής μορφής της σταθερής περύγωσης μαζί με τις 2 καμπύλες Bezier, μία για την πλευρά υπερπίεσης και μία για την πλευρά υποπίεσης. Κάθε καμπύλη Bezier αποτελείται από 8 σημεία ελέγχου. Οι άξονες είναι σε κλίμακα.

Το μη-δομημένο υπολογιστικό πλέγμα που απεικονίζεται στο σχήμα (4.15) αποτελείται από $\sim 30K$ κόμβους, και μία επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes σε μία NVIDIA K20 GPU διαρκεί περίπου 30sec.

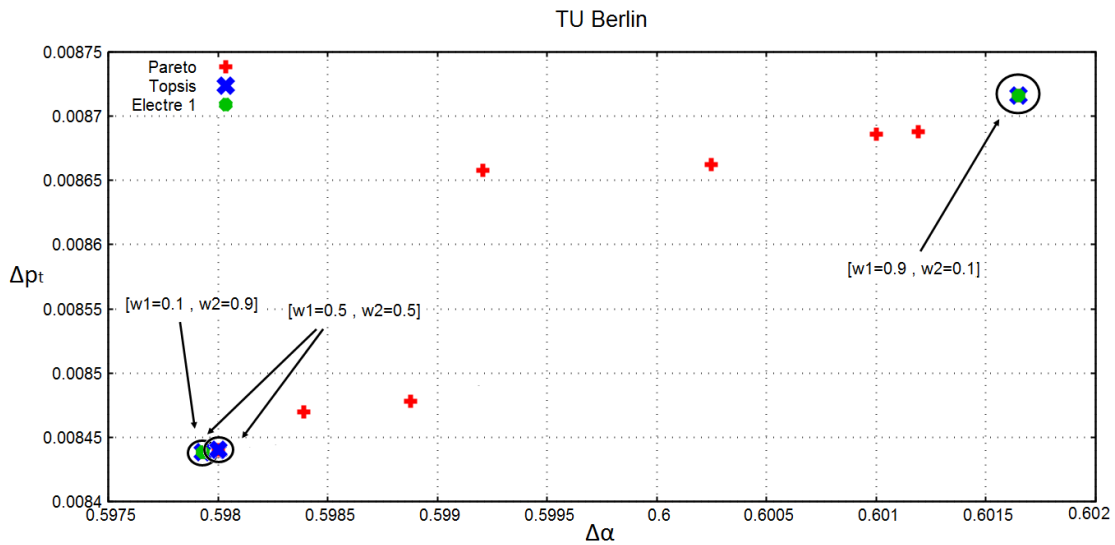


Σχήμα 4.15: Βελτιστοποίηση της μορφής μιας σταθερής περύγωσης συμπιεστή:
Απεικόνιση του μη-δομημένου υπολογιστικού πλέγματος.

4.2.1 ‘A posteriori’ Εφαρμογή των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I

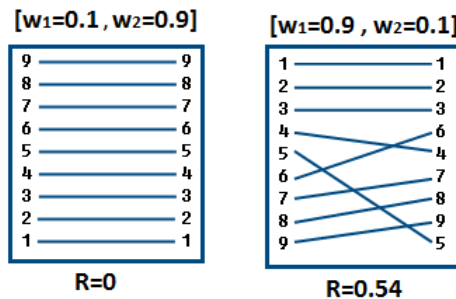
Για την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I χρησιμοποιείται ένας (15,30) ΕΑ με 20 άτομα στο σύνολο των επιλέκτων και κριτήριο τερματισμού τις 600 αξιολογήσεις. Οι δύο τεχνικές MCDM εφαρμόζονται για τους τρεις συνδυασμούς βαρών του πίνακα 4.1 και οι βέλτιστες λύσεις που προκύπτουν σε κάθε περίπτωση φαίνονται στο σχήμα (4.16). Χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.9$, τα αποτελέσματα τωσ δύο τεχνικών ταυτίζονται και βέλτιστη θεωρείται η ακραία λύση του μειώπου Pareto με τις μικρότερες τιμές των συναρτήσεων κόστους. Ίδια παραμένει η βέλτιστη λύση της τεχνικής ELECTRE I για ίσα βάρη, σε αντίθεση με αυτήν της τεχνικής TOPSIS, η οποία είναι η διαδοχική της προηγούμενης ακραίας. Παρατηρείται ότι το μέτωπο Pareto είναι διακοπτόμενο, γεγονός που δικαιολογεί την προσκόλληση των βέλτιστων λύσεων στα άκρα του, όπως διαπιστώθηκε από την εφαρμογή των τεχνικών στο αντίστοιχο μαθηματικό πρόβλημα βελτιστοποίησης Kursawe, εξ. (3.5). Τέλος, χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.9$, $w_2 = 0.1$, οι βέλτιστες λύσεις των δύο τεχνικών αντιστοιχούν στην ακραία λύση του μειώπου Pareto με τις μεγαλύτερες τιμές της γωνίας στροφής της ροής και της πτώσης ολικής πίεσης.

Στο σχήμα (4.17) παρουσιάζεται η κατάταξη των λύσεων από την καλύτερη στη



Σχήμα 4.16: Βελτιστοποίηση της μορφής μιας σταθερής περύγωσης συμπιεστή: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στο αποτελούμενο από 9 άτομα μέτωπο Pareto για τα αναγραφόμενα βάρη.

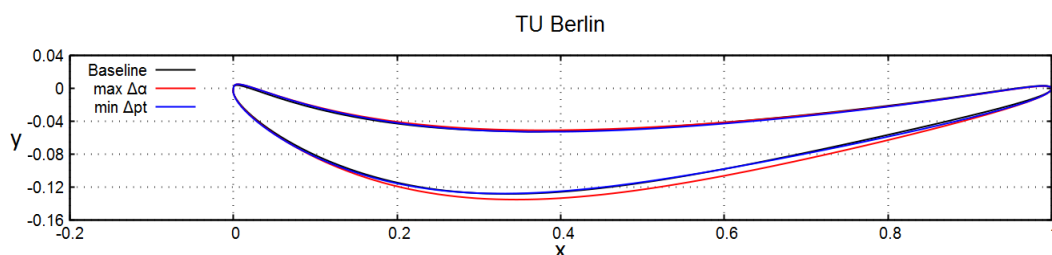
χειρότερη βάσει της τεχνικής ELECTRE I χρησιμοποιώντας τους πίνακες **A** και **B**. Παρατηρείται ότι στην περίπτωση βαρών $w_1 = 0.1, w_2 = 0.9$ η κατάταξη των λύσεων του μετώπου Pareto είναι κοινή και για τους δύο πίνακες. Η λύση με αύξοντα αριθμό 9 είναι η καταλληλότερη για τον DM και ισχύει $R = 0$. Χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.9, w_2 = 0.1$, βέλτιστη είναι η λύση με αύξοντα αριθμό 1 είτε βάσει του πίνακα **A** είτε βάσει του πίνακα **B**. Ο δείκτης R ισούται με $R = 0.54$.



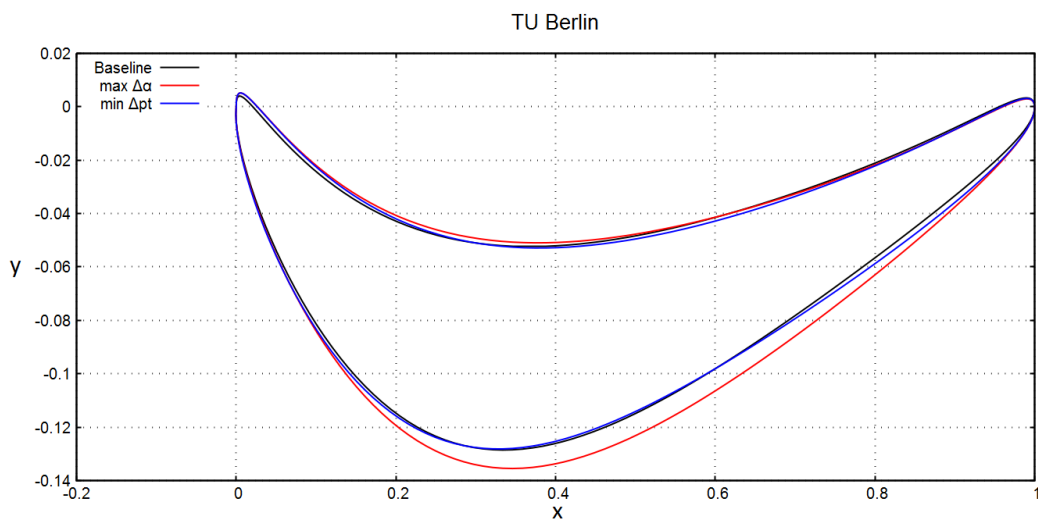
Σχήμα 4.17: Βελτιστοποίηση της μορφής μιας σταθερής περύγωσης συμπιεστή: Κατάταξη των λύσεων του μετώπου Pareto βάσει της τεχνικής ELECTRE I και των πινάκων **A** και **B** για τα αναγραφόμενα βάρη. Η δεξιά στήλη αντιστοιχεί στην κατάταξη των λύσεων σύμφωνα με τον πίνακα **B** και η αριστερή σύμφωνα με τον πίνακα **A**. Αρίθμηση των λύσεων από το άτομο με τις μεγαλύτερες τιμές των συναρτήσεων κόστους (αύξων αριθμός 1) προς το άτομο με τις μικρότερες (αύξων αριθμός 9).

Μετά την εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I, επιλέγονται δύο από τις

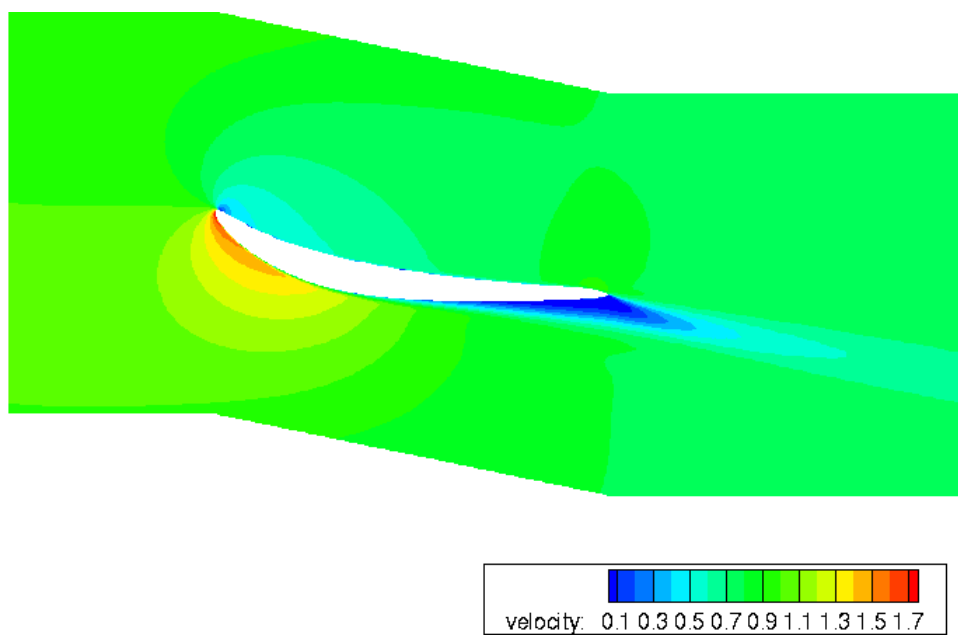
βέλτιστες λύσεις του σχήματος (4.16) για την απεικόνιση των μεταβολών της σταθερής περύγωσης. Οι λύσεις αυτές αντιστοιχούν στη μεγιστοποίηση της γωνίας στροφής της ροής και στην ελαχιστοποίηση της πτώσης ολικής πίεσης. Η σύγκριση με την αρχική μορφή της σταθερής περύγωσης γίνεται στα σχήματα (4.18), (4.19). Παρατηρείται ότι στην περίπτωση μεγιστοποίησης της στροφής της ροής η καμπυλότητα στο τμήμα υπερπίεσης και το πάχος της σταθερής περύγωσης αυξάνονται. Στην περίπτωση ελαχιστοποίησης της πτώσης ολικής πίεσης διακρίνονται μικρότερες μεταβολές στη μορφή της περύγωσης σε σχέση με τη μορφή της πριν τη βελτιστοποίηση. Στα σχήματα (4.20), (4.21) και (4.22) απεικονίζεται η κατανομή της ταχύτητας στο πεδίο ροής γύρω από τη σταθερή περύγωση για την αρχική της μορφή και για τις περιπτώσεις μέγιστης γωνίας στροφής και ελάχιστης πτώσης ολικής πίεσης. Παρατηρείται ότι σε σχέση με την αρχική γεωμετρία παρουσιάζεται μεγαλύτερη αποκόλληση της ροής στην περίπτωση μέγιστης γωνίας στροφής και μέγιστης πτώσης ολικής πίεσης. Αντίθετα, στην περίπτωση της ελάχιστης πτώσης ολικής πίεσης η αποκόλληση μειώνεται και συνεπώς μειώνεται η γωνία στροφής της ροής.



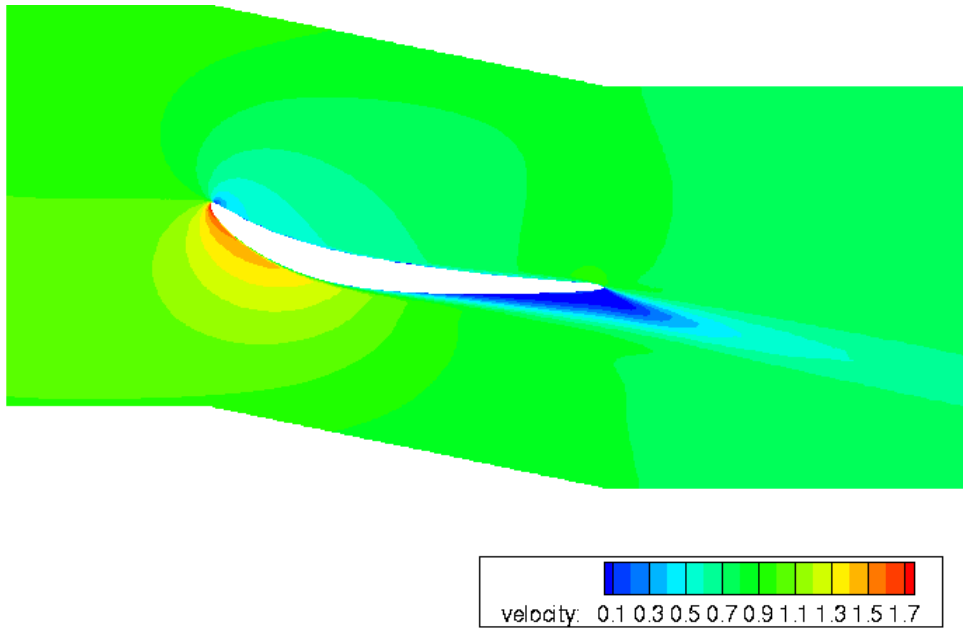
Σχήμα 4.18: Βελτιστοποίηση της μορφής μιας σταθερής περύγωσης συμπίεστη: Μεταβολή της μορφής της αεροτομής της σταθερής περύγωσης για την επίτευξη μέγιστης γωνίας στροφής της ροής ή ελάχιστης πτώσης ολικής πίεσης. Οι άξονες είναι σε κλίμακα.



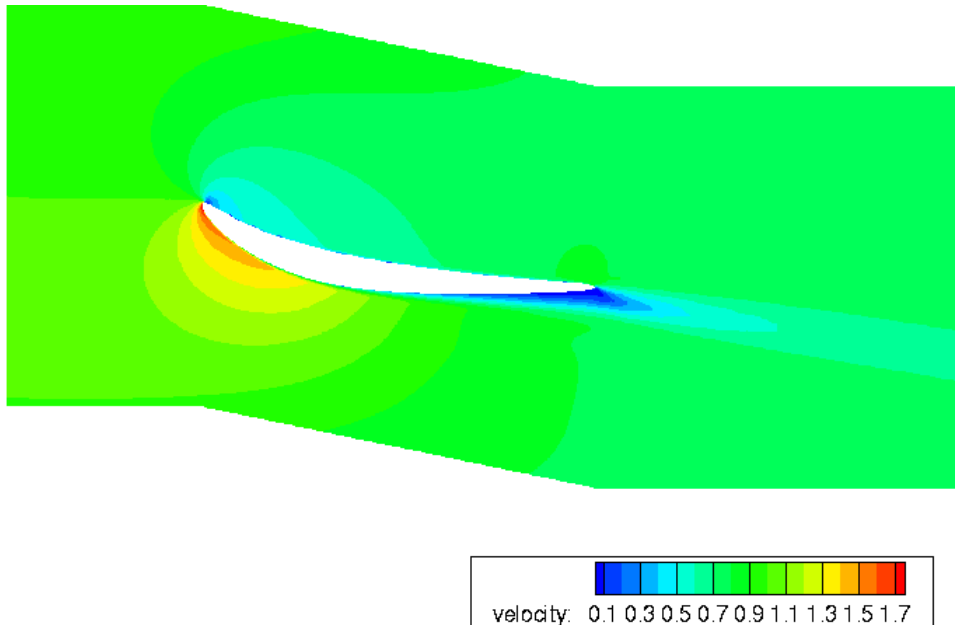
Σχήμα 4.19: Βελτιστοποίηση της μορφής μιας σταθερής περύγωσης συμπιεστή: Μεταβολή της μορφής της αεροτομής της σταθερής περύγωσης για την επίτευξη μέγιστης γωνίας στροφής της ροής ή ελάχιστης πτώσης ολικής πίεσης. Οι άξονες δεν είναι σε κλίμακα.



Σχήμα 4.20: Βελτιστοποίηση της μορφής μιας σταθερής περύγωσης συμπιεστή: Κατανομή της ταχύτητας γύρω από την αρχική σταθερή περύγωση.



Σχήμα 4.21: Βελτιστοποίηση της μορφής μιας σταθερής περύγωσης συμπιεστή: Κατανομή της ταχύτητας γύρω από τη σταθερή περύγωση στην περίπτωση μέγιστης γωνίας στροφής της ροής.



Σχήμα 4.22: Βελτιστοποίηση της μορφής μιας σταθερής περύγωσης συμπιεστή: Κατανομή της ταχύτητας γύρω από τη σταθερή περύγωση στην περίπτωση ελάχιστης πτώσης ολικής πίεσης.

4.2.2 ‘Α priori’ Εφαρμογή των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE

I

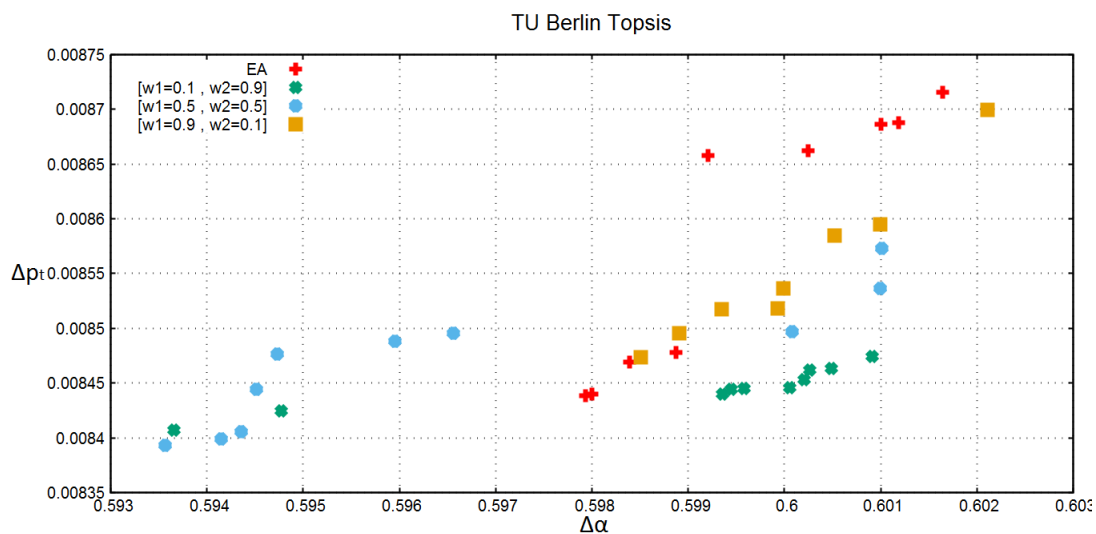
Μετά την εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I στο πρόβλημα βελτιστοποίησης της μορφής μιας σταθερής περύγωσης συμπιεστή, ακολουθεί η

εφαρμογή τους στο ίδιο πρόβλημα στην ‘a priori’ λογική. Χρησιμοποιείται ένας (15,30) ΕΑ με 20 άτομα στο σύνολο των επιλέκτων. Ως κριτήριο τερματισμού του ΕΑ ορίζονται οι 600 αξιολογήσεις. Τα αποτελέσματα των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I για τα βάρη του πίνακα 4.1 παρουσιάζονται στα παρακάτω σχήματα.

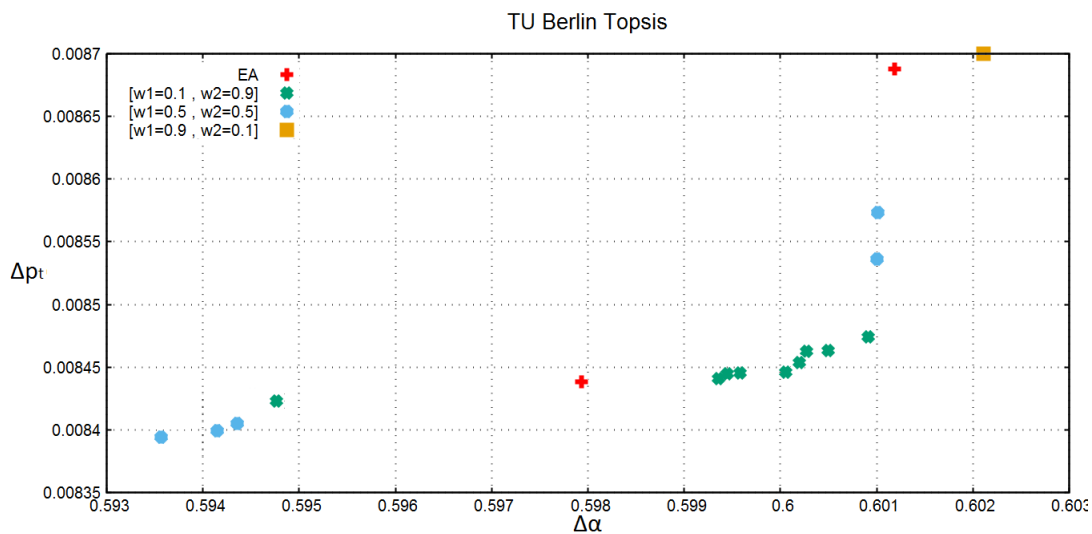
Στο σχήμα (4.23) απεικονίζονται τα μέτωπα Pareto που υπολογίζονται από την εφαρμογή της τεχνικής TOPSIS, σε σύγκριση με το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται από τον απλό ΕΑ. Επίσης, στο σχήμα (4.24) απεικονίζονται τα μη-κυριαρχούμενα άτομα των μετώπων που υπολογίζονται από τον απλό ΕΑ και εφαρμόζοντας την τεχνική TOPSIS. Χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.9$, παρατηρείται ότι οι περισσότερες λύσεις βρίσκονται συσσωρευμένες στο τμήμα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων που χαρακτηρίζεται από μικρότερες τιμές της πώσης ολικής πίεσης και ενδιάμεσες τιμές της γωνίας στροφής της ροής. Οι λύσεις αυτές κυριαρχούν σε τρεις από τις τέσσερις γειτονικές λύσεις του απλού ΕΑ, καθώς και σε δύο ακόμη λύσεις που αντιστοιχούν σε μεγαλύτερες τιμές της στροφής της ροής και της πώσης ολικής πίεσης. Οι δύο λύσεις που υπολογίζονται για αυτά τα βάρη και έχουν τις μικρότερες τιμές των δύο συναρτήσεων στόχων δεν κυριαρχούν ούτε κυριαρχούνται από τις λύσεις του απλού ΕΑ. Χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$, το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται αποτελείται από τρεις λύσεις καλύτερες από αυτές του απλού ΕΑ, οι οποίες αντιστοιχούν σε κεντρικότερες τιμές των συναρτήσεων στόχων. Οι υπόλοιπες λύσεις χαρακτηρίζονται από μικρότερες τιμές των δύο συναρτήσεων στόχων, με τέσσερις από αυτές να είναι χειρότερες από αυτές του απλού ΕΑ. Τέλος, για βάρη $w_1 = 0.9$, $w_2 = 0.1$, επιτυγχάνεται λύση που κυριαρχεί στη λύση του απλού ΕΑ με τις μεγαλύτερες τιμές στροφής της ροής και πώσης ολικής πίεσης και πέντε ακόμα λύσεις που είναι καλύτερες από αυτές του απλού ΕΑ στο επιθυμητό τμήμα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων.

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται στο σχήμα (4.25) και (4.26) τα αποτελέσματα εφαρμογής της τεχνικής ELECTRE I. Χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.9$, το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται αποτελείται από συνολικά τρεις λύσεις, οι οποίες κυριαρχούν σε όλες τις λύσεις του απλού ΕΑ, εκτός από δύο. Οι δύο μη-κυριαρχούμενες λύσεις βρίσκονται στο τμήμα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων που ενδιαφέρει περισσότερο τον DM. Παρατηρείται βελτίωση κυρίως των τιμών της στροφής της ροής και λιγότερο των τιμών της πώσης ολικής πίεσης στις λύσεις που υπολογίζονται, αποτέλεσμα που θα αναμενόταν για $w_2 > 0.1$. Χρησιμοποιώντας ίσα βάρη, υπολογίζεται μέτωπο Pareto που περιορίζεται σε κεντρικότερο τμήμα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων και κυριαρχεί σε μία μόνο λύση του απλού ΕΑ. Τέλος, για βάρη $w_1 = 0.9$, $w_2 = 0.1$, υπολογίζονται λύσεις που κυριαρχούν στις λύσεις του απλού ΕΑ για μεγαλύτερες τιμές της γωνίας στροφής της ροής, ικανοποιώντας τις προτιμήσεις του DM.

Συμπεραίνεται πως τόσο η τεχνική TOPSIS όσο και η τεχνική ELECTRE I οδηγούν σε λύσεις ανάλογες με τις προτιμήσεις του DM, παρόλο που οι λύσεις αυτές είναι διαφορετικές σε αριθμό και κατανέμονται διαφορετικά στο χώρο των αντικειμενικών

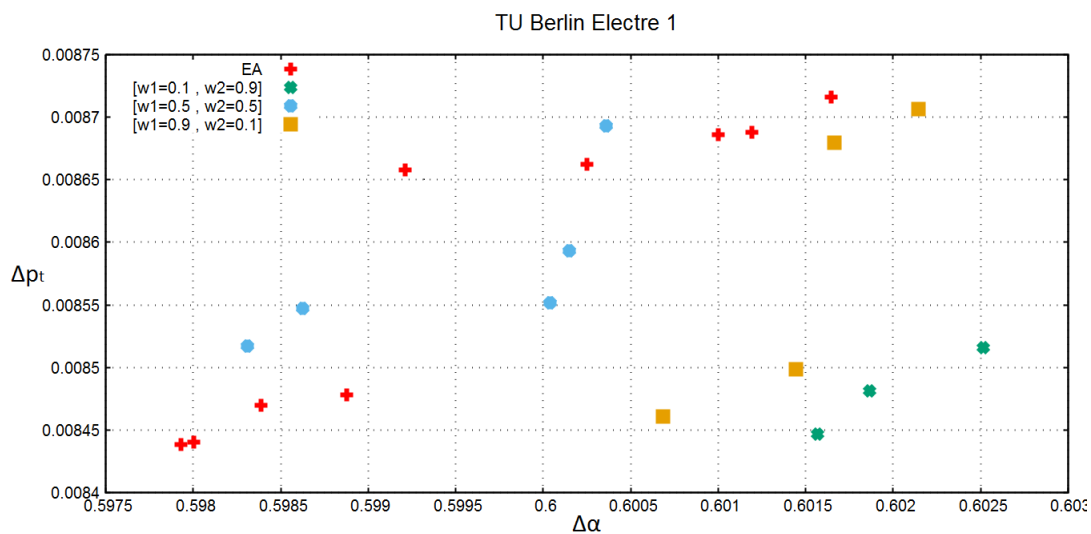


Σχήμα 4.23: Βελτιστοποίηση της μορφής μιας σταθερής περύγωσης συμπίεστη: Μέτωπο Pareto από την εφαρμογή της τεχνικής TOPSIS ‘α priori’ για τα αναγραφόμενα βάρη. Σύγκριση με το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA.

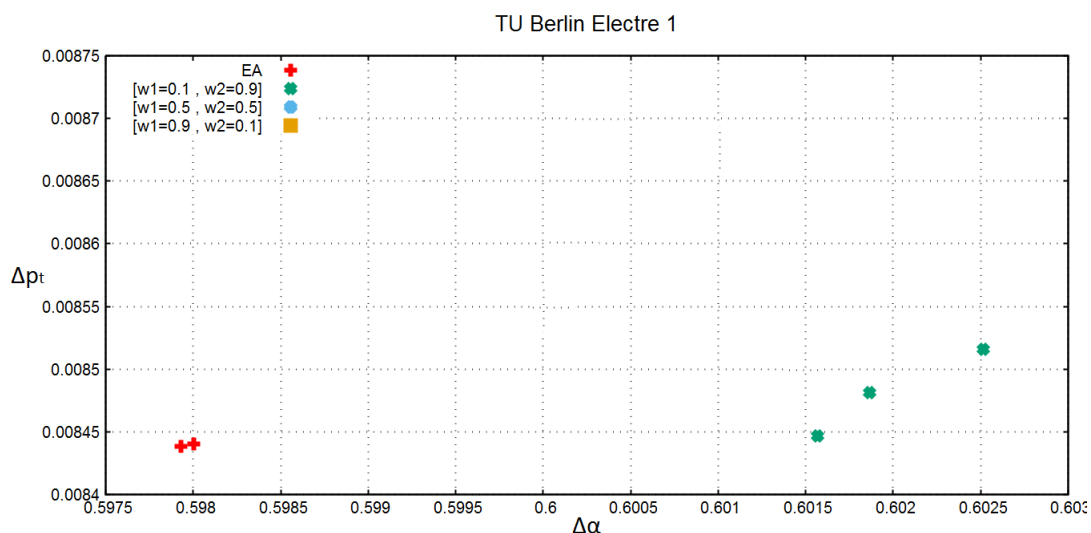


Σχήμα 4.24: Βελτιστοποίηση της μορφής μιας σταθερής περύγωσης συμπίεστη: Μη κυριαρχούμενα άτομα των μετώπων Pareto από τη χρήση απλού EA και από την εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I ‘α priori’ για τα αναγραφόμενα βάρη.

συναρτήσεων. Στην περίπτωση μεγαλύτερης προτίμησης του DM στη βελτίωση της γωνίας στροφής της ροής, η τεχνική TOPSIS αντιστοιχεί σε καλύτερα αποτελέσματα, ενώ σε αντίθετη περίπτωση προτιμώνται οι λύσεις της τεχνικής ELECTRE I.



Σχήμα 4.25: Βελτιστοποίηση της μορφής μιας σταθερής περύγωσης συμπίεστη: Μέτωπα Pareto από την εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I ‘a priori’ για τα αναγραφόμενα βάρη. Σύγκριση με το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA.



Σχήμα 4.26: Βελτιστοποίηση της μορφής μιας σταθερής περύγωσης συμπίεστη: Μη κυριαρχούμενα άτομα των μειώπων Pareto από τη χρήση απλού EA και από την εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I ‘a priori’ για τα αναγραφόμενα βάρη.

4.3 Βελτιστοποίηση της Μορφής της Μεμονωμένης Διηχητικής Πτέρυγας ONERA M6

Το τελευταίο αεροδυναμικό πρόβλημα που παρουσιάζεται είναι αυτό της βελτιστοποίησης της μορφής της μεμονωμένης διηχητικής πτέρυγας ONERA M6.

Το συγκεκριμένο πρόβλημα αποτελείται από δύο στόχους, τη μεγιστοποίηση του συντελεστή άνωσης, $\max C_L$, και την ελαχιστοποίηση του συντελεστή αντίστασης, $\min C_D$. Βάσει των στόχων αυτών ορίζονται οι εξής συναρτήσεις κόστους:

$$F_1 = -C_L$$

$$F_2 = C_D$$

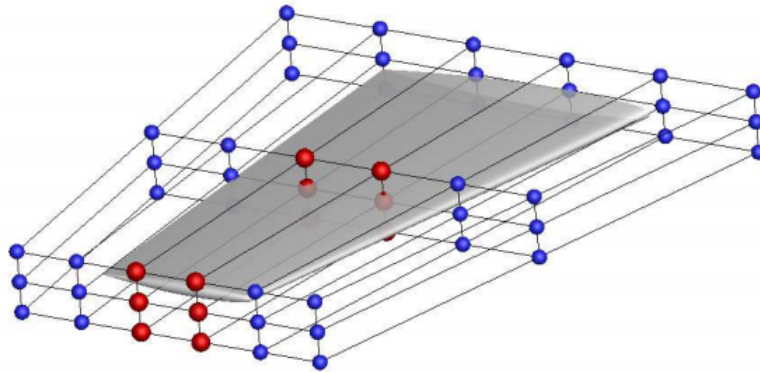
Ως λογισμικό αξιολόγησης για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Euler για συμπιεστό ρευστό. Η ροή χαρακτηρίζεται από επ' άπειρον αριθμό Mach $M_\infty = 0.84$ και γωνίες pitch και yaw $\alpha_{pitch} = 3.06 \text{ deg}$ και $\alpha_{yaw} = 0 \text{ deg}$ αντίστοιχα.

Η παραμετροποίηση της επιφάνειας της 3D πτέρυγας γίνεται χρησιμοποιώντας την τεχνική μορφοποίησης των μη-ομοιόμορφων λογικών B-Splines, NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) (σχήμα (4.27)) και το υπολογιστικό πλέγμα προσαρμόζεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ελατηρίων. Οι NURBS ορίζονται από ένα δομημένο πλέγμα σημείων ελέγχου, από ένα κομβικό διάνυσμα και ένα βαθμό ελευθερίας σε κάθε παραμετρική κατεύθυνση. Οι παραμετρικές συντεταγμένες όλων των κόμβων του πλέγματος που βρίσκονται μέσα στον όγκο ελέγχου υπολογίζονται μία φορά, αποθηκεύονται και χρησιμοποιούνται για τον ορισμό της νέας θέσης κάθε άλλου κόμβου του πλέγματος. Το πλέγμα ελέγχου είναι διαστάσεων $6 \times 3 \times 3$ όπως φαίνεται στο σχήμα (4.27). Το πρόβλημα αποτελείται από συνολικά 24 μεταβλητές σχεδιασμού, καθώς μόνο 12 από τους 54 κόμβους επιτρέπεται να μετατοπίζονται κατά μήκος της πτέρυγας και κάθετα σε αυτήν.

Το υπολογιστικό πλέγμα αποτελείται από στοιχεία σε σχήματα τετραέδρων, πρισμάτων, πυραμίδων και εξαέδρων. Η επίλυση των εξισώσεων Euler σε μία NVIDIA K40 GPU διαρκεί περίπου 50sec.

4.3.1 'A posteriori' Εφαρμογή των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I

Καταρχάς, οι τεχνικές TOPSIS και ELECTRE I εφαρμόζονται 'a posteriori' για τα βάρη του πίνακα (4.1). Για την εφαρμογή τους χρησιμοποιείται το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας έναν (10,20) EA με 20 άτομα στο σύνολο των

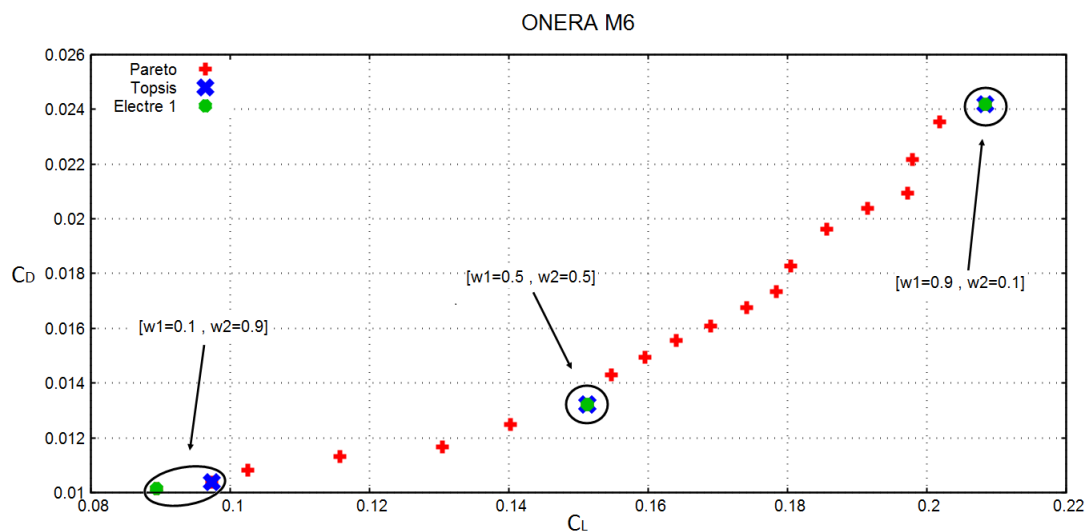


Σχήμα 4.27: Βελτιστοποίηση της μορφής της μεμονωμένης διηχητικής πτέρυγας ONERA M6: Παραμετροποίηση της πτέρυγας χρησιμοποιώντας την τεχνική μορφοποίησης NURBS. Με κόκκινο χρώμα απεικονίζονται τα σημεία ελέγχου που επιτρέπεται να κινούνται και με μπλε αυτά που παραμένουν σταθερά.

επιλέκτων και κριτήριο τερματισμού τις 500 αξιολογήσεις. Τα αποτελέσματα των δύο τεχνικών φαίνονται στο σχήμα (4.28). Χρησιμοποιώντας τα βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.9$, παρατηρείται ότι η τεχνική ELECTRE I επιλέγει ως βέλτιστη τη λύση με τις μικρότερες τιμές των συντελεστών άνωσης και αντίστασης. Η λύση που επιλέγεται βάσει της τεχνικής TOPSIS είναι και πάλι ακραία και διαδοχική αυτής της τεχνικής ELECTRE I. Για ίσα βάρη των συναρτήσεων κόστους παρατηρείται ότι και οι δύο τεχνικές MCDM καταλήγουν σε βέλτιστη λύση στο κεντρικό τμήμα του μετώπου Pareto. Τέλος, για βάρη $w_1 = 0.9$, $w_2 = 0.1$, τα αποτελέσματα των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I ταυτίζονται, με τη βέλτιστη λύση να βρίσκεται στο άκρο του μετώπου Pareto που έχει τις μεγαλύτερες τιμές των συντελεστών άνωσης και αντίστασης.

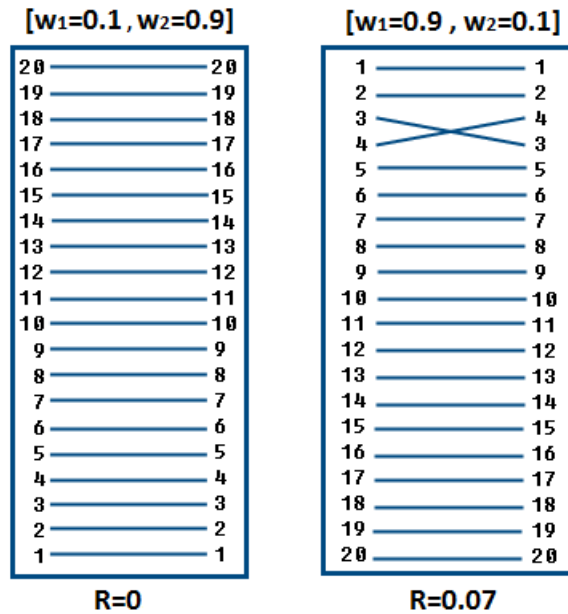
Στο σχήμα (4.29) παρουσιάζεται η κατάταξη των λύσεων του μετώπου Pareto από τη βέλτιστη στη χειρότερη με βάση τους πίνακες **A** και **B**. Παρατηρείται ότι στην περίπτωση μεγαλύτερης προτίμησης του DM στη μείωση της αντίστασης οι δύο πίνακες ταυτίζονται απόλυτα, με αποτέλεσμα ο δείκτης R να ισούται με $R = 0$. Η βέλτιστη και για τους δύο πίνακες λύση έχει αύξοντα αριθμό 20. Χρησιμοποιώντας βάρη $w_1 = 0.9$, $w_2 = 0.1$, βέλτιστη και για τους δύο πίνακες είναι η λύση με αύξοντα αριθμό 1. Η κατάταξη των υπόλοιπων λύσεων είναι κοινή και για τους δύο πίνακες, με εξαίρεση τις λύσεις με αύξοντα αριθμό 3 και 4. Η τιμή του δείκτη συμφωνίας στην κατάταξη των λύσεων ισούται με $R = 0.07$.

Στα σχήματα που ακολουθούν, παρουσιάζονται οι μεταβολές στη γεωμετρία της πτέρυγας στην περίπτωση μέγιστης άνωσης και ελάχιστης αντίστασης. Παράλληλα, για τις ίδιες περιπτώσεις απεικονίζεται η κατανομή του αριθμού Mach στην πλευρά υποπίεσης της πτέρυγας. Η σύγκριση γίνεται σε σχέση με την αρχική πτέρυγα και το αντίστοιχο πεδίο ροής. Παρατηρείται, από τα σχήματα (4.31) και (4.32), ότι σε αντίθεση με την αρχική πτέρυγα στην οποία παρουσιάζονται δύο κύματα κρούσης, η πτέρυγα μέγιστης άνωσης οδηγεί σε ένα εντονότερο κύματα κρούσης στο τμήμα

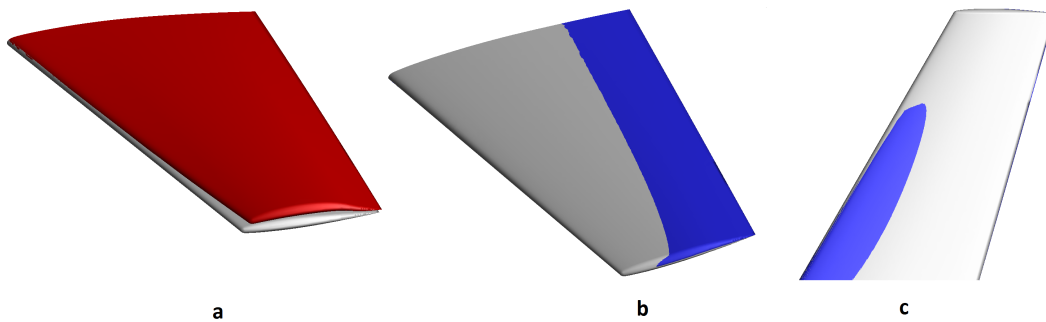


Σχήμα 4.28: Βελτιστοποίηση της μορφής της μεμονωμένης διχητικής πτέρυγας ONERA M6: Βέλτιστες λύσεις από την εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I ‘a posteriori’ στο αποτελούμενο από 20 άτομα μέτωπο Pareto για τα αναγραφόμενα βάρη.

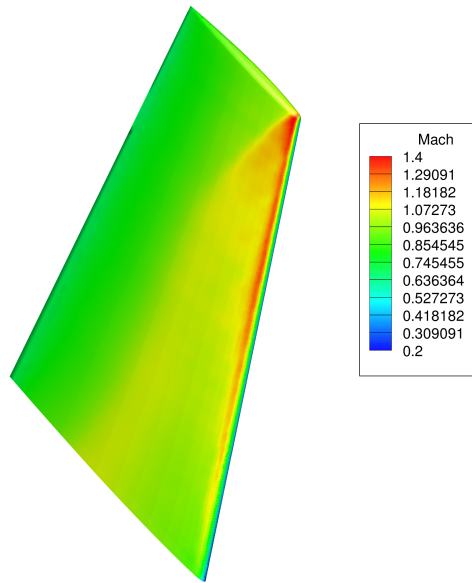
μικρότερης καμπυλότητας, γεγονός που δικαιολογεί την αύξηση της αντίστασης. Επιπλέον, στο σχήμα (4.30) απεικονίζεται η αύξηση της καμπυλότητας και της κλίσης της πτέρυγας, οι οποίες οδηγούν σε αύξηση της διαφοράς πίεσης μεταξύ των πλευρών υπερπίεσης και υποπίεσης και συνεπώς και σε αύξηση της άνωσης. Στην περίπτωση ελάχιστης αντίστασης, η πτέρυγα παρουσιάζει μειωμένο πάχος στο τμήμα μικρότερης καμπυλότητας, όπως απεικονίζεται στο σχήμα (4.30). Επιπλέον, το κύμα κρούσης που παρουσιάζεται στην πλευρά υποπίεσης είναι εξασθενημένο και μετατοπισμένο προς το τμήμα προσβολής της πτέρυγας, όπως φαίνεται στο σχήμα (4.33). Για τους παραπάνω λόγους η γεωμετρία αυτή χαρακτηρίζεται από ελάχιστη αντίσταση.



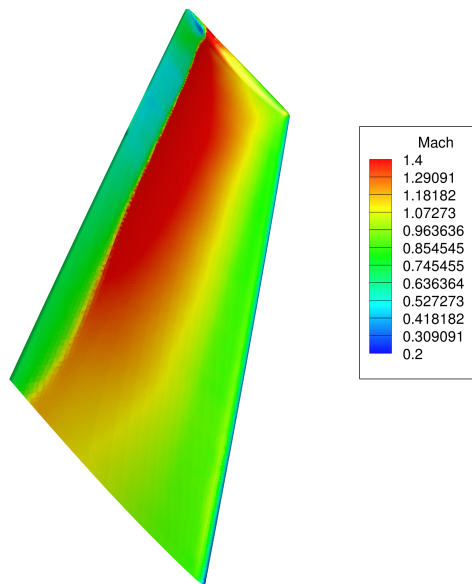
Σχήμα 4.29: Βελτιστοποίηση της μορφής της μεμονωμένης διηχητικής πτέρυγας ONERA M6: Κατάταξη των λύσεων του μετώπου Pareto βάσει της τεχνικής ELECTRE I και των πινάκων **A** και **B** για τα αναγραφόμενα βάρη. Η δεξιά στήλη αντιστοιχεί στην κατάταξη των λύσεων σύμφωνα με τον πίνακα **B** και η αριστερή σύμφωνα με τον πίνακα **A**. Αρίθμηση των λύσεων από το άτομο με τις μεγαλύτερες τιμές των συναρτήσεων κόστους (αύξων αριθμός 1) προς το άτομο με τις μικρότερες (αύξων αριθμός 20).



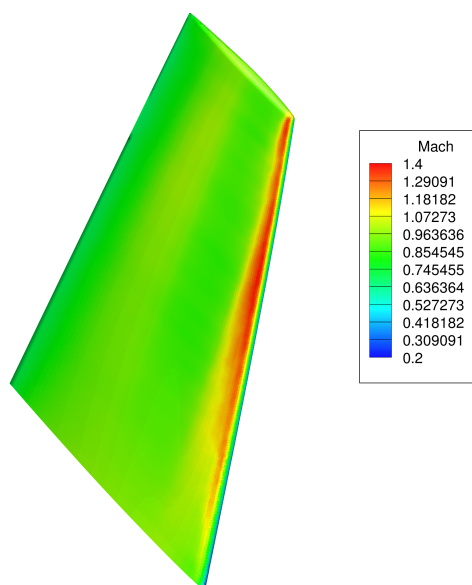
Σχήμα 4.30: Βελτιστοποίηση της μορφής της μεμονωμένης διηχητικής πτέρυγας ONERA M6: Μεταβολή της μορφής της πτέρυγας για την επίτευξη μέγιστης άνωσης (a) και ελάχιστης αντίστασης (b,c). Με γκρι χρώμα απεικονίζεται η αρχική μορφή της πτέρυγας, με κόκκινο η πτέρυγα για μέγιστη άνωση και με μπλε η πτέρυγα για ελάχιστη αντίσταση (σχήμα b πλευρά υποπίεσης και σχήμα c πλευρά υπερπίεσης). Στα σχήματα b,c τα τμήματα πτέρυγας ελάχιστης αντίστασης που δε διακρίνονται καλύπτονται από την αρχική πτέρυγα.



Σχήμα 4.31: Βελτιστοποίηση της μορφής της μεμονωμένης διχητικής πτέρυγας ONERA M6: Κατανομή του αριθμού Mach στην πλευρά υποπίεσης της αρχικής πτέρυγας.



Σχήμα 4.32: Βελτιστοποίηση της μορφής της μεμονωμένης διχητικής πτέρυγας ONERA M6: Κατανομή του αριθμού Mach στην πλευρά υποπίεσης της πτέρυγας για μέγιστη άνωση.



Σχήμα 4.33: Βελτιστοποίηση της μορφής της μεμονωμένης διηχητικής πτέρυγας ONERA M6: Κατανομή του αριθμού Mach στην πλευρά υποπίεσης της πτέρυγας για ελάχιστη αντίσταση.

4.3.2 ‘Α priori’ Εφαρμογή των Τεχνικών TOPSIS και ELECTRE

I

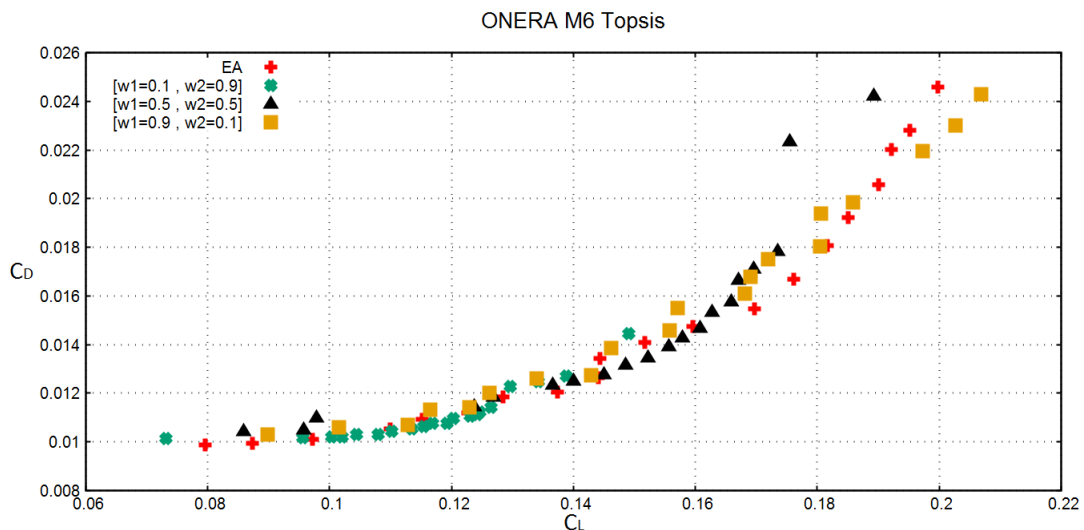
Στη συνέχεια, εφαρμόζονται οι τεχνικές TOPSIS και ELECTRE I στην ‘α priori’ λογική στο πρόβλημα βελτιστοποίησης της μορφής της μεμονωμένης διηχητικής πτέρυγας ONERA M6. Χρησιμοποιείται ένας (10,20) ΕΑ με 20 άτομα στο σύνολο των επιλέκτων και κριτήριο τερματισμού τις 500 αξιολογήσεις.

Εφαρμόζοντας την τεχνική TOPSIS για τα βάρη του πίνακα 4.1, υπολογίζονται τα μέτωπα Pareto του σχήματος (4.34). Επίσης, στο σχήμα (4.35) απεικονίζονται τα μη-κυριαρχούμενα άτομα των μετώπων του απλού ΕΑ και της τεχνικής TOPSIS για τις τρεις περιπτώσεις βαρών. Χρησιμοποιώντας τα βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.9$, υπολογίζονται λύσεις που χαρακτηρίζονται από μικρές τιμές των δύο συναρτήσεων στόχων. Οι λύσεις αυτές κυριαρχούν σε κάποιες γειτονικές λύσεις του απλού ΕΑ, κυριαρχούνται όμως από τις προηγούμενες στο τμήμα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων με τις μικρότερες τιμές των δύο συντελεστών. Για βάρη $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$, οι περισσότερες λύσεις καλύπτουν κεντρικό τμήμα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων. Επιπλέον, κάποιες από αυτές κυριαρχούνται από τις λύσεις του απλού ΕΑ και κάποιες άλλες κυριαρχούν σε αυτές. Τέλος, για βάρη $w_1 = 0.9$, $w_2 = 0.1$, υπολογίζονται τρεις λύσεις καλύτερες από αυτές του απλού ΕΑ, οι οποίες χαρακτηρίζονται από τις μεγαλύτερες τιμές των συντελεστών άνωσης και αντίστασης. Οι υπόλοιπες λύσεις εκτείνονται στο χώρο των αντικειμενικών συναρτήσεων και οι περισσότερες υστερούν σε σχέση με τις γειτονικές λύσεις του

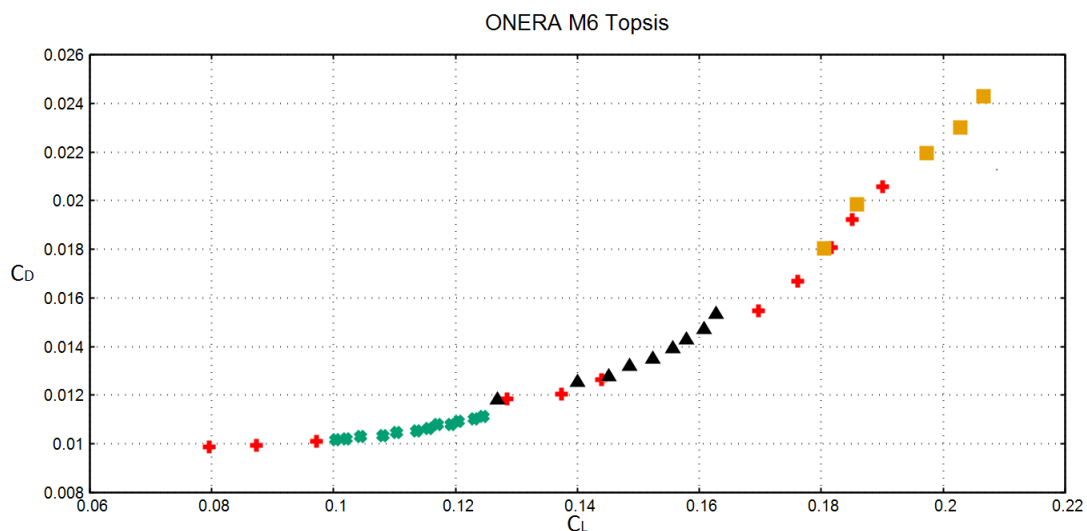
απλού ΕΑ.

Στα σχήματα (4.36) και (4.37) απεικονίζονται τα αποτελέσματα εφαρμογής της τεχνικής ELECTRE I στο ίδιο πρόβλημα. Παρατηρείται ότι, σε αντίθεση με τις λύσεις της τεχνικής TOPSIS, οι λύσεις του σχήματος (4.36) είναι χειρότερες από αυτές του απλού ΕΑ για όλα τα χρησιμοποιούμενα βάρη. Παρόλο που τα τρία μέτωπα Pareto συγκρινόμενα μεταξύ τους φαίνεται να έχουν την τάση για μετατόπιση προς τα επιθυμητά για τον DM τμήματα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων, δεν είναι βελτιωμένα σε σχέση με το μέτωπο Pareto του απλού ΕΑ.

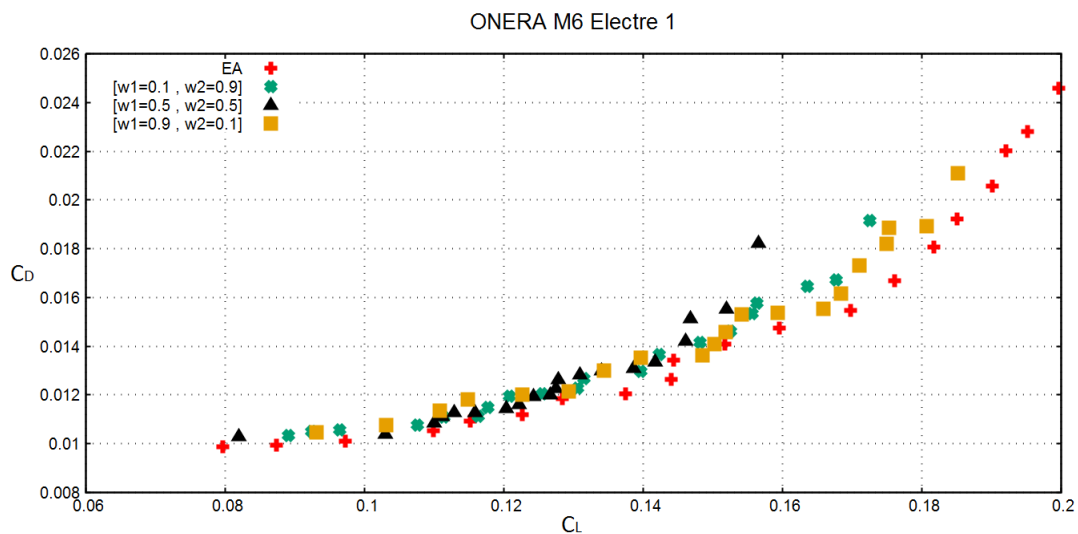
Συμπεραίνεται πως στο συγκεκριμένο πρόβλημα βελτιστοποίησης, μόνο η τεχνική TOPSIS ανταποκρίνεται στις ανάγκες του DM σε όλες τις περιπτώσεις βαρών. Αντίθετα, από την εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I δεν υπολογίζονται λύσεις ανάλογες των βαρών των συναρτήσεων στόχων.



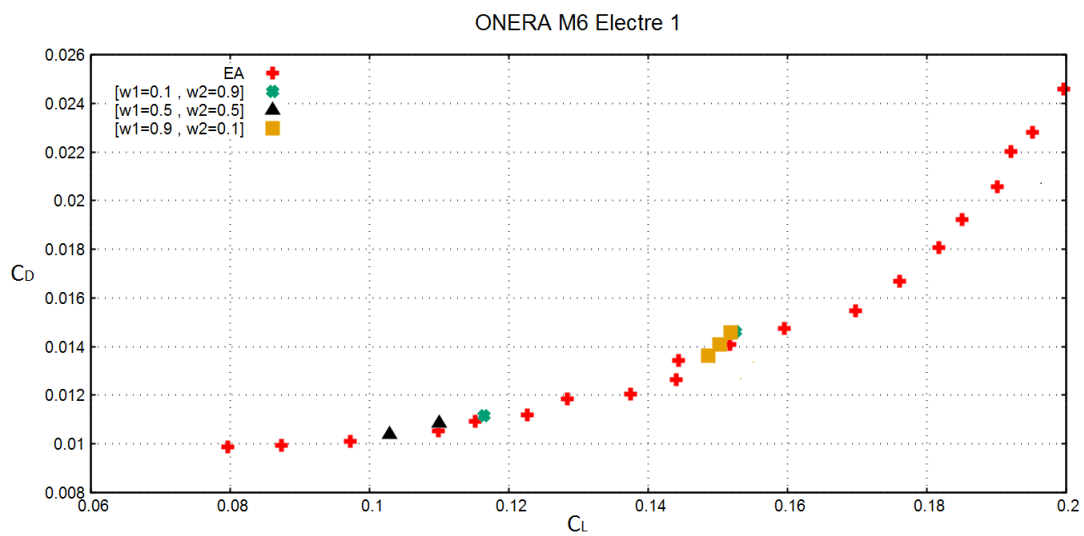
Σχήμα 4.34: Βελτιστοποίηση της μορφής της μεμονωμένης διχητικής πτέρυγας ONERA M6: Μέτωπα Pareto από την ‘a priori’ εφαρμογή της τεχνικής TOPSIS για τα αναγραφόμενα βάρη. Σύγκριση με το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό ΕΑ.



Σχήμα 4.35: Βελτιστοποίηση της μορφής της μεμονωμένης διχητικής πτέρυγας ONERA M6: Μη-κυριαρχούμενα άτομα των μετώπων Pareto από τη χρήση απλού EA και από την ‘α priori’ εφαρμογή της τεχνικής TOPSIS ‘ για τα αναγραφόμενα βάρη.



Σχήμα 4.36: Βελτιστοποίηση της μορφής της μεμονωμένης διχητικής πτέρυγας ONERA M6: Μέτωπα Pareto από την ‘α priori’ εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I για τα αναγραφόμενα βάρη. Σύγκριση με το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA.



Σχήμα 4.37: Βελτιστοποίηση της μορφής της μεμονωμένης διχητικής πτέρυγας ONERA M6: Μη-κυριαρχούμενα άτομα των μετώπων Pareto από τη χρήση απλού EA και από την ‘a priori’ εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I για τα αναγραφόμενα βάρη.

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Στόχος αυτής της διπλωματικής εργασίας ήταν η αποτελεσματική ένταξη τεχνικών που σχετίζονται με διαδικασίες λήψης αποφάσεων, MCDM, σε προβλήματα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, διερευνήθηκε η αποτελεσματικότητα 'a posteriori' και 'a priori' εφαρμογής των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I σε προβλήματα MOO που επιλύονται χρησιμοποιώντας ΕΑ.

Παρατηρήθηκε πως τόσο η 'a posteriori' όσο και η 'a priori' εφαρμογή των δύο τεχνικών MCDM στην πλειοψηφία προβλημάτων MOO που επιλύθηκαν οδήγησε σε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Στις περισσότερες περιπτώσεις βαρών που χρησιμοποιήθηκαν για την 'a posteriori' εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I προσδιορίστηκε από ένα σύνολο μη-κυριαρχούμενων ατόμων βέλτιστη λύση αντίστοιχη των προτιμήσεων του DM. Συνεπώς, και οι δύο τεχνικές MCDM μπόρεσαν στην 'a posteriori' λογική να ανταποκριθούν στις ανάγκες του DM. Όσον αφορά την 'a priori' εφαρμογή τους παρατηρήθηκε ότι στην πλειοψηφία των δοκιμών που πραγματοποιήθηκαν ο ΕΑ μπόρεσε να εστιάσει στα κατάλληλα τμήματα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων. Υπολογίστηκε, δηλαδή, ένα σύνολο βέλτιστων λύσεων ανάλογο των προτιμήσεων του DM. Το γεγονός αυτό εξυπηρετεί τον DM, καθώς έτσι αυτός μπορεί να επιλέξει ανάμεσα στις λύσεις αυτές όποια επιθυμεί. Επιπλέον, οι λύσεις από την 'a priori' εφαρμογή των δύο τεχνικών MCDM ήταν στις περισσότερες περιπτώσεις καλύτερες από τις λύσεις του απλού ΕΑ για τον ίδιο αριθμό αξιολογήσεων. Συνεπώς, με γνωστές τις προτιμήσεις του DM πριν τη βελτιστοποίηση υπάρχει όφελος από την 'a priori' εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται πιο ειδικά συμπεράσματα σε σχέση με τις δύο τεχνικές:

Όσον αφορά την 'a posteriori' λογική, παρατηρήθηκαν τα εξής:

- Οι τεχνικές TOPSIS και ELECTRE I αποδίδουν αποτελέσματα σύμφωνα με τις προτιμήσεις του DM όταν εφαρμόζονται σε κυρτά 2D μέτωπα Pareto. Τα

αποτελέσματά τους διαφοροποιούνται ανάλογα με την καμπυλότητα των μετώπων και ανάλογα με τον αριθμό των λύσεων από τις οποίες αποτελούνται τα μέτωπα, παρουσιάζοντας όμως συμπεριφορά σύμφωνη με τις προτιμήσεις του DM. Εξαιρέση αποτελεί η περίπτωση ίσων βαρών όπου προτιμάται η χρήση της τεχνικής TOPSIS καθώς η τεχνική ELECTRE I δεν οδηγεί πάντα σε ικανοποιητικά αποτελέσματα, τουλάχιστον με βάση τις δοκιμές που έγιναν εδώ.

- Οι βέλτιστες λύσεις που επιλέγονται βάσει των δύο τεχνικών MCDM στην περίπτωση μη-κυρτών και διακοπτόμενων 2D μετώπων Pareto δεν συνάδουν με τις προτιμήσεις του DM όταν τα βάρη των συναρτήσεων στόχων είναι παρεμφερή. Παρατηρείται προσκόλληση των βέλτιστων λύσεων στα άκρα των μετώπων Pareto, αποτέλεσμα που παραπέμπει σε μεγαλύτερη προτίμηση του DM σε μία εκ των δύο συναρτήσεων στόχων.
- Η αποτελεσματικότητα εφαρμογής των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I σε 3D μέτωπα Pareto συνδέεται άμεσα με τη μορφή των μετώπων. Εξετάστηκε πρόβλημα όπου οι δύο τεχνικές ανταποκρίθηκαν ανάλογα με τις προτιμήσεις του DM και πρόβλημα όπου τα αποτελέσματα δεν ήταν τα αναμενόμενα για ορισμένους συνδυασμούς βαρών.

Όσον αφορά την ‘a priori’ λογική, παρατηρήθηκαν τα εξής:

- Η τεχνική TOPSIS παρουσιάζει καλύτερη συμπεριφορά από την τεχνική ELECTRE I στις περισσότερες περιπτώσεις προβλημάτων, είτε αυτά είναι δύο είτε τριών συναρτήσεων στόχων. Παρατηρείται βελτίωση των λύσεων που υπολογίζονται σε σχέση με τον απλό EA στο τμήμα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων που αφορά τον DM. Παρόλα αυτά, εξετάστηκαν επίσης προβλήματα όπου η τεχνική ELECTRE I ήταν πιο αποτελεσματική από την τεχνική TOPSIS για ορισμένες περιπτώσεις βαρών.
- Με την εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I ‘a priori’, σε αντίθεση με την ‘a posteriori’ λογική, παρατηρούνται ικανοποιητικά αποτελέσματα σε περιπτώσεις ίσων βαρών σε μη-κυρτά και σε διακοπτόμενα μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων. Επίσης, εξετάστηκε τριδιάστατο πρόβλημα όπου η εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I ‘a priori’ δεν ήταν αποτελεσματική, ενώ η εφαρμογή της ‘a posteriori’ ήταν. Συνεπώς, ενδέχεται μία τεχνική MCDM να έχει διαφορετική αποτελεσματικότητα ανάλογα με τον τρόπο εφαρμογής της.

Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

- Μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί σε σχέση με την ‘a priori’ εφαρμογή της τεχνικής ELECTRE I. Η τεχνική αυτή αποτελείται από δύο κριτήρια βαθμολόγησης των λύσεων τα οποία συνδυάζονται σε ένα

(πίνακας **K**, εξ. (2.17)) για την εφαρμογή της στη διπλωματική εργασία. Με αυτόν τον τρόπο παρατηρήθηκε αδυναμία ανταπόκρισης της τεχνικής στις προτιμήσεις του DM στην 'a priori' λογική σε ορισμένα προβλήματα. Συνεπώς, θα μπορούσαν να εξεταστούν νέοι τρόποι συνδυασμού των κριτηρίων της τεχνικής ELECTRE I.

- Έχοντας μελετήσει ήδη την εφαρμογή των τεχνικών TOPSIS και ELECTRE I σε προβλήματα MOO, η μελέτη θα μπορούσε να επεκταθεί και σε άλλες τεχνικές MCDM, όπως λ.χ. σε κάποιες που περιγράφηκαν επιγραμματικά στο δεύτερο κεφάλαιο. Με αυτόν τον τρόπο περισσότερες τεχνικές MCDM θα μπορούσαν ανάλογα με το πρόβλημα στο οποίο εφαρμόζονται να οδηγήσουν σε καλύτερα αποτελέσματα.

Βιβλιογραφία

- [1] Zitzler, E. and Thiele, L.: *Multiobjective optimization using evolutionary algorithms - a comparative case study*. *Parallel Problem Solving from Nature*, 5:292-301, 1998.
- [2] Salomon, R.: *Evolutionary algorithms and gradient search: Similarities and differences*. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2(2):45-55, 1998.
- [3] Bäck, T.: *Evolutionary Algorithms in Theory and Practice: Evolution Strategies, Evolutionary Programming, Genetic Algorithms (1st Edition)*. Oxford University Press, 1996.
- [4] Darwin, C.: *On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or, the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life (6th edition)*. London: J. Murray, 1859.
- [5] Bäck, T. and Hoffmeister, F.: *Extended selection mechanisms in genetic algorithms*. In *ICGA*, pages 92-99, 1991.
- [6] Giannakoglou, K., Asouti, V., Kapsoulis, D., and Tsiakas, K.: *Low cost evolutionary algorithms for engineering applications*. Von Karman Institute Lectures Series on Introduction to Optimization and Multidisciplinary Design, 2016.
- [7] Herrera, F., Lozano, M., and Verdegay, J.: *Tackling real-coded genetic algorithms: Operators and tools for behavioural analysis*. *Artificial Intelligence Review*, 12:265-319, 1998.
- [8] Hu, X., Wang, M., and E, Paolo: *Calculating complete and exact Pareto front for multiobjective optimization: A new deterministic approach for discrete problems*. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 43:1088-1101, 2013.
- [9] Chakraborty, U. and Janikow, C.: *An analysis of Gray versus binary encoding in genetic search*. *International Journal of Computer Science and Information Technologies*, 156(3-4):253-269, 2003.
- [10] Jebari, K. and Madiafi, M.: *Selection methods for genetic algorithms*. *International Journal of Emerging Sciences*, 3(4):2222-4254, 2013.

- [11] Doerr, B., Happ, E., and Klein, C.: *Crossover can provably be useful in evolutionary computation*. Theoretical Computer Science, 425:17–33, 2012.
- [12] Soni, N. and Kumar, T.: *Study of various mutation operators in genetic algorithms*. International Journal of Computer Science and Information Technologies, 5(3):4519–4521, 2014.
- [13] Zitzler, E. and Thiele, L.: *Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength Pareto approach*. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 3:257–271, 1999.
- [14] Deb, K., Agrawal, S., Pratap, A., and Meyarivan, T.: *A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II*. In M. S. et al. (Ed.) *Parallel Problem Solving from Nature-PPSN VI*, pages 849–858. Springer, Berlin, 2000.
- [15] National Technical University of Athens, School of Mechanical Engineering, Parallel CFD and Optimization Unit: *The Evolutionary Algorithm SYstem, User's Manual*, 2.0 edition, 2008.
- [16] El-Beltagy, M. and Keane, A.: *Optimization for multilevel problems: A comparison of various algorithms*. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 12(5):639–654, 1999.
- [17] Bäck, T.: *Parallel optimization of evolutionary algorithms*. Lecture Notes in Computer Science, 866:418–427, 2005.
- [18] Gong, Y., Chen, W., Zhan, Z., Zhang, J., Li, Y., Zhang, Q., and Li, J.: *Distributed evolutionary algorithms and their models: A survey of the state-of-the-art*. Applied Soft Computing, 34:286–300, 2015.
- [19] Jin, Y.: *Surrogate-assisted evolutionary computation: Recent advances and future challenges*. Swarm and Evolutionary Computation, 1:61–70, 2011.
- [20] Ong, Y., Nair, P., and Keane, A.: *Evolutionary optimization of computationally expensive problems via surrogate modeling*. AIAA Journal, 41:687–696, 2003.
- [21] Giannakoglou, K. and Karakasis, M.: *On the use of metamodel-assisted, multi-objective evolutionary algorithms*. Engineering Optimization, 38:941–957, 2006.
- [22] Haykin, S.: *Neural Networks: A Comprehensive Foundation (2nd Edition)*. Prentice Hall, 1998.
- [23] Giannakoglou, K., Giotis, A., and Karakasis, M.: *Low-cost genetic optimization based on inexact pre-evaluations and the sensitivity analysis of design parameters*. Inverse Problems in Engineering, 9(4):389–412, 2007.
- [24] Bull, L.: *On model-based evolutionary computation*. Soft Computing-A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications, 3(2):76–82, 1999.

- [25] Kolios, A., Mytilinou, V., Minguez, E., and Salonitis, K.: *A comparative study of multiple-criteria decision-making methods under stochastic inputs*. *Energies*, 9(7):566, 2016.
- [26] Kapsoulis, D., Tsiakas, K., Trompoukis, X., Asouti, V., and Giannakoglou, K.: *Evolutionary multi-objective optimization assisted by metamodels, kernel PCA and multi-criteria decision making techniques with applications in aerodynamics*. *Applied Soft Computing*, 64:1-13, 2017.
- [27] Mardani, A., Jusoh, A., Zavadskas, E., Cavallaro, F., and Khalifah, Z.: *Sustainable and renewable energy: An overview of the application of multiple criteria decision making techniques and approaches*. *Sustainability*, 7(10):13947-13984, 2015.
- [28] Delft, A and Nijkamp, P.: *A multi-objective decision model for regional development, environmental quality control and industrial land use*. *Regional Science Association*, 36(1):35-58, 1976.
- [29] Hwang, C. and Yoon, K.: *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*. Springer, Heidelberg, 1981.
- [30] Opricovic, S.: *Multicriteria Optimization of Civil Engineering Systems*. PhD thesis, Faculty of Civil Engineering, Belgrade, 1998.
- [31] Zavadskas, E. and Kaklauskas, A.: *Multiple criteria evaluation of buildings*. Vilnius: Technika, 1996.
- [32] Bridgman, W.: *Dimensional Analysis*. New Haven: Yale University Press, 1967.
- [33] Fishburn, P.: *Additive Utilities with Incomplete Product Set: Applications to Priorities and Assignments*. Operations Research Society of America (ORSA), Baltimore, 1972.
- [34] Zavadskas, E., Turskis, Z., Antucheviciene, J., and Zakarevicius, A.: *Optimization of weighted aggregated sum product assessment*. *Elektronika IR Electrotechnika*, 122(6):3-6, 2012.
- [35] Roy, B.: *Multicriteria Methodology for Decision Aiding*. Springer, Berlin, 1996.
- [36] Saaty, T.: *The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resources Allocation*. McGraw-Hill: New York, 1980.
- [37] Brans, J. and Vincke, P.: *A preference ranking organization method: The PROMETHEE method for multiple criteria decision-making*. *Management Science*, 31(6):647-656, 1985.
- [38] Mendez, M., Galvan, B., Salazar, D., and Greiner, D.: *Multiple-objective genetic algorithm using the multiple criteria decision making method TOPSIS*. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 618:145-154, 2009.

- [39] Zitzler, E., Deb, K., and Thiele, L.: *Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results*. *Evolutionary Computation*, 8:173–195, 2000.
- [40] Schaffer, D.: *Some experiments in machine learning using vector evaluated genetic algorithms (artificial intelligence, optimization, adaptation, pattern recognition)*. PhD thesis, Vanderbilt University, 1984.
- [41] Okabe, T., Jin, Y., Olhofer, M., and Sendhoff, B.: *On test functions for evolutionary multi-objective optimization*. In *Lecture Notes in Computer Science*, pages 792–802. Springer, 2004.
- [42] Kursawe, F.: *A variant of evolution strategies for vector optimization*. In *PPSN I, Vol 496 Lecture Notes in Computer Science*, pages 193–197. Springer, 1991.
- [43] Inselberg, A.: *The plane with parallel coordinates*. *The Visual Computer*, 1:69–91, 1985.
- [44] Mao, J., Hirasawa, K., Hu, J., and Murata, J.: *Genetic symbiosis algorithm for multiobjective optimization problem*. In *9th IEEE International Workshop on Robot and Human Interactive Communication*, pages 137–142. IEEE, 2000.
- [45] Viennet, R., Fonteix, C., and Marc, I.: *Multicriteria optimization using a genetic algorithm for determining a Pareto set*. *International Journal of Systems Science*, 27:255–260, 1996.