



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ

Ανάπτυξη Συζυγών Μεθόδων για τον Ακριβή
Υπολογισμό Ολοκληρωματικών Ποσοτήτων
στην Αεροδυναμική. Εφαρμογή σε
Στροβιλομηχανές.

Διπλωματική Εργασία

Βασιλόπουλος Ηλίας

Επιβλέπων: Κ.Χ. Γιαννάκογλου
Καθηγητής ΕΜΠ
Φεβρουάριος 2015

Ανάπτυξη Συζυγών Μεθόδων για τον Ακριβή Υπολογισμό
Ολοκληρωματικών Ποσοτήτων στην Αεροδυναμική. Εφαρμογή σε
Στροβιλομηχανές.

Διπλωματική Εργασία
του

Ηλία Βασιλόπουλου

Επιβλέπων: Κ.Χ. Γιαννάκογλου
Καθηγητής ΕΜΠ
Φεβρουάριος 2015

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στην ανάπτυξη νέων μεθόδων, με μικρό υπολογιστικό κόστος, για τον ακριβή υπολογισμό ολοκληρωματικών ποσοτήτων (όπως η άνωση και η αντίσταση σε προβλήματα της αεροδυναμικής), χρησιμοποιώντας είτε τη διακριτή (discrete) είτε τη συνεχή (continuous) συζυγή μέθοδο (adjoint method). Η λύση των συζυγών εξισώσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη βελτίωση της ακρίβειας της ολοκληρωματικής ποσότητας που ενδιαφέρει, σε σχέση με το αποτέλεσμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης των αποτελεσμάτων επίλυσης των εξισώσεων ροής (π.χ. Navier-Stokes).

Πιο συγκεκριμένα, όταν το υπολογιστικό πλέγμα που χρησιμοποιείται δεν είναι επαρκώς πυκνό ή όταν οι εξισώσεις του ευθέος προβλήματος δεν έχουν συγκλίνει πλήρως (π.χ. λόγω αριθμητικών δυσκολιών), η ολοκληρωματική ποσότητα που υπολογίζεται δεν έχει την επιθυμητή ακρίβεια. Η επιπλέον αριθμητική επίλυση των συζυγών εξισώσεων συσχετίζει το υπόλοιπο του ευθέος προβλήματος με το επαγόμενο σφάλμα στην τιμή του ολοκληρώματος. Συνεπώς, ο συνδυασμός της αριθμητικής συζυγούς λύσης με μια προσέγγιση του υπολοίπου του ευθέος προβλήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διόρθωση της ακρίβειας της ολοκληρωματικής ποσότητας.

Στην εργασία αυτή, η προτεινόμενη μέθοδος εφαρμόζεται χρησιμοποιώντας άλλοτε τη διακριτή και άλλοτε τη συνεχή συζυγή μέθοδο, για την πραγματοποίηση της διόρθωσης. Αρχικά, γίνεται εφαρμογή σε ένα γραμμικό μαθηματικό πρόβλημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ODEs), ενώ στη συνέχεια ακολουθούν δύο μη-γραμμικά προβλήματα: ένα ψευδο-1D πρόβλημα μη-συνεκτικής συμπιεστής ροής και ένα 2D πρόβλημα ροής σε γραμμική πτερύγωση συμπιεστή (linear compressor cascade), όπου χρησιμοποιήθηκαν οι κώδικες του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ.

**Development of Adjoint Methods for the Accurate Prediction of
Integral Quantities in Aerodynamics. Application in Turbomachines.**

Diploma Thesis
by

Ilias Vasilopoulos

Supervisor: K.C. Giannakoglou
Professor NTUA

February 2015

Abstract

The present diploma thesis focuses on the development of new methods, with low computational cost, for the accurate prediction of integral quantities (such as lift and drag in aerodynamic problems), by applying either the discrete or the continuous adjoint method. The solution of the adjoint equations can be used to increase the accuracy of the integral quantity of interest, comparing to the result of the numerical integration of quantities obtained from the solution of the flow equations (e.g. Navier-Stokes).

More specifically, when the computational domain is defined by using a coarse mesh or when the primal equations have not fully converged (e.g. due to numerical difficulties), the calculated integral quantity has not the desired accuracy. The additional numerical solution of the adjoint equations correlates the errors in approximating the primal solution to the corresponding error in the integral of interest. As a result, the numerical adjoint solution together with an approximate evaluation of the residual error of the primal problem may be combined to produce a correction to the computed integral quantity.

The proposed method of this thesis is applied by using the discrete and the continuous adjoint method (alternatively), in order to produce the desired correction. Applications include a linear ordinary differential equations (ODEs) problem, followed by two non-linear problems: a quasi-1D problem of inviscid compressible fluid flow and a 2D linear compressor cascade flow problem, where the codes of the Laboratory of Thermal Turbomachines of NTUA are used.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, με την οποία ολοκληρώνονται οι σπουδές μου στη Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ.

Πρωτίστως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα την εργασία Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητή ΕΜΠ, για τη δυνατότητα που μου προσέφερε να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο πρωτότυπο και ενδιαφέρον θέμα, για το χρόνο που μου αφιέρωσε και για την πολύτιμη καθοδήγησή του. Επιπλέον, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την εμπιστοσύνη που έδειξε στο πρόσωπό μου, καθώς και για το σημαντικό ρόλο που διαδραμάτισε στην ακαδημαϊκή εξέλιξή μου κατά τα τελευταία 5 χρόνια.

Παράλληλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη της ερευνητικής ομάδας της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του ΕΜΠ, για την προθυμία τους να βοηθήσουν στις όποιες δυσκολίες προέκυψαν κατά την εκπόνηση της εργασίας αυτής. Κυρίως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Διδάκτορες Βαγγέλη Παπουτσή Κιαχαγιά και Ξενοφώντα Τρομπούκη, για την άμεση ανταπόκρισή τους στα ερωτήματά μου και τις εύστοχες παρατηρήσεις τους, καθώς και για το χρόνο που μου διέθεσαν.

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη που νιώθω για την οικογένειά μου, η οποία μου συμπαραστάθηκε και μου παρείχε ένα σταθερό και ευνοϊκό περιβάλλον, καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος, δε θα μπορούσα να παραλείψω τις ευχαριστίες μου προς τους φίλους μου και, κυρίως, προς τους συμφοιτητές μου Παύλο Αλεξιά και Στέργιο Κατσανούλη, για τη στήριξή τους και την ευχάριστη παρέα τους όλα αυτά τα χρόνια.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Εισαγωγικά σχόλια	1
1.2	Η δομή της εργασίας	4
2	Παρουσίαση της Προτεινόμενης Μεθόδου	7
2.1	Γραμμική ανάλυση	7
2.2	Μαθηματικό 1D γραμμικό παράδειγμα	10
2.2.1	Περιγραφή και επίλυση του ευθέος προβλήματος	10
2.2.2	Διατύπωση και επίλυση του συζυγούς προβλήματος	16
2.2.3	Εφαρμογή της διορθωτικής μεθόδου και παραμετρική μελέτη	19
2.3	Επανάληψη της μελέτης χωρίς αναλυτικές παραγώγους	20
2.4	Επανάληψη του παραδείγματος αφήνοντας ασύγκλιτο το ευθύ πρόβλημα	22
2.5	Επανάληψη του παραδείγματος αφήνοντας ασύγκλιτο και το συζυγές πρόβλημα	26
3	Αριθμητική Επίλυση Ψευδο-1D Ροής σε Αγωγό	29
3.1	Εισαγωγικά σχόλια	29
3.2	Ευθύ 1D πρόβλημα ροής	29
3.3	Μαθηματική διατύπωση εξισώσεων ροής	30
3.4	Διακριτοποίηση ευθέος προβλήματος με ακρίβεια δεύτερης τάξης	33
3.5	Διακριτοποίηση οριακών συνθηκών	44
3.6	Αλγόριθμος επίλυσης ευθέος προβλήματος	48
4	Εφαρμογή της Μεθόδου στο Ψευδο-1D Πρόβλημα Ροής	51
4.1	Εισαγωγικά σχόλια	51
4.2	Εφαρμογή χρησιμοποιώντας τη Διακριτή Συζυγή Μέθοδο	54
4.2.1	Διατύπωση και επίλυση του συζυγούς προβλήματος	54
4.2.2	Αλγόριθμος εφαρμογής της διορθωτικής μεθόδου	56
4.2.3	Παραμετρική μελέτη και αποτελέσματα	57
4.3	Επανάληψη της μελέτης αφήνοντας ασύγκλιτο το ευθύ πρόβλημα	59
5	Παρουσίαση και Επίλυση 2D Προβλήματος Ροής σε Γραμμική Πτερύγωση Συμπιεστή	63
5.1	Εισαγωγικά σχόλια	63

5.2	Οι εξισώσεις <i>Euler</i>	64
5.2.1	Διατύπωση των εξισώσεων	64
5.2.2	Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων	65
5.3	Διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου	69
5.4	Διακριτοποίηση των εξισώσεων ροής	71
5.4.1	Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων	71
5.4.2	Υπολογισμός του διανύσματος ροής	72
5.4.3	Αύξηση της ακρίβειας του σχήματος	75
5.5	Επιβολή οριακών συνθηκών και διακριτοποίηση αυτών	76
5.5.1	Στερεό τοίχωμα	76
5.5.2	Είσοδος - Έξοδος του πεδίου ροής	78
5.5.3	Περιοδικά όρια	79
5.6	Επαναληπτικός αλγόριθμος επίλυσης	80
5.7	Αποτελέσματα αριθμητικής επίλυσης	83
6	Εφαρμογή της Μεθόδου στο 2D Πρόβλημα Ροής	89
6.1	Εισαγωγικά σχόλια	89
6.2	Εφαρμογή χρησιμοποιώντας τη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο	89
6.2.1	Γενική περίπτωση	89
6.2.2	Διατύπωση και επίλυση των συζυγών εξισώσεων του προβλήματος	93
6.2.3	Αλγόριθμος εφαρμογής της διορθωτικής μεθόδου και αποτέλεσμα	97
7	Συμπεράσματα - Επίλογος	101

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγικά σχόλια

Πολύ συχνά, σε αεροναυπηγικές εφαρμογές της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (CFD [5]), είναι επιθυμητός ο υπολογισμός με πολύ μεγάλη ακρίβεια ολοκληρωματικών ποσοτήτων, όπως η άνωση (lift) και η αντίσταση (drag) που ορίζονται ως επιφανειακά ολοκληρώματα πάνω στην πτέρυγα ή την άτρακτο του αεροσκάφους ([29]). Τα τοπικά χαρακτηριστικά του αναπτυσσόμενου πεδίου ροής (ταχύτητες, πιέσεις) ενδιαφέρουν σε μικρότερο βαθμό, καθώς ο βασικός στόχος είναι η αξιολόγηση της υπόψη γεωμετρίας (σε σχέση με πιθανές εναλλακτικές γεωμετρίες) έχοντας ως κριτήριο την υπολογισθείσα ολοκληρωματική ποσότητα.

Ολοκληρωματικές ποσότητες εμφανίζονται και σε άλλα επιστημονικά πεδία. Σε ηλεκτροχημικές προσομοιώσεις αισθητήρων, η ολοκληρωματική ποσότητα που ενδιαφέρει είναι η ολική ένταση του ρεύματος που διέρχεται από ένα ηλεκτρόδιο ([32]). Στον Ηλεκτρομαγνητισμό, τέτοιες ποσότητες χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των συντελεστών ακτινοβολίας ηλεκτρομαγνητικών συσκευών, όπως ο φούρνος μικροκυμάτων και οι συσκευές ακτινογραφίας (body scanners). Στη Μηχανική, ποσότητες όπως η ασκούμενη ολική δύναμη ή ροπή έχουν συνήθως τέτοια μορφή ([31]). Στις Στροβιλομηχανές, τέλος, ολοκληρώνοντας την πίεση που αναπτύσσεται γύρω από ένα πτερύγιο, προκύπτει η ασκούμενη σε αυτό δύναμη, η οποία καθορίζει την αντίστοιχη ροπή και άρα την ισχύ της μηχανής.

Ανεξάρτητα από το πεδίο εφαρμογής, όταν οι ολοκληρωματικές ποσότητες που ενδιαφέρουν βασίζονται στην αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων (PDE), ιδιαίτερη αξία έχει η εύρεση τρόπων για την βελτίωση της ακρίβειας με την οποία υπολογίζονται οι ποσότητες αυτές. Επομένως, στην παρούσα διπλωματική εργασία, εξετάζεται το πώς τα σφάλματα που οφείλονται στην αριθμητική (και όχι αναλυτική) επίλυση μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης επηρεάζουν την ακρίβεια της ολοκληρωματικής ποσότητας και κυρίως, το πώς μπορούν να εκτιμηθούν και να χρησιμοποιηθούν

για τη βελτίωση της ακρίβειας του ολοκληρώματος.

Το τελευταίο επιτυγχάνεται επιλύοντας τις συζυγείς (adjoint) μερικές διαφορικές εξισώσεις που αντιστοιχούν στο ολοκλήρωμα που ενδιαφέρει. Θαδειχθεί λοιπόν ότι, η λύση των συζυγών εξισώσεων συσχετίζει το υπόλοιπο (residual) των εξισώσεων του ευθέος (primal) προβλήματος, με το επαγόμενο σφάλμα στην τιμή του ολοκληρώματος που υπολογίζεται. Επομένως, ο συνδυασμός της προσεγγιστικής λύσης των συζυγών εξισώσεων, με μια προσέγγιση του υπολοίπου των εξισώσεων του ευθέος προβλήματος, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διόρθωση της ολοκληρωματικής ποσότητας. Μάλιστα, υπάρχει δυνατότητα το υπολειπόμενο σφάλμα (remaining error) να είναι ανάλογο του γινομένου των σφαλμάτων των λύσεων των πρωτεύουσών και συζυγών εξισώσεων (στην περίπτωση μας, πρωτεύουσες είναι οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα της ροής), και τότε θα είναι πολύ μικρό ως όρος ανώτερης τάξης (superconvergent result [18]).

Οι συζυγείς εξισώσεις προκύπτουν από την εφαρμογή της συζυγούς μεθόδου, η οποία διακρίνεται σε δύο είδη: στη συνεχή συζυγή μέθοδο (continuous adjoint method) και στη διακριτή συζυγή μέθοδο (discrete adjoint method) [2], [10], [11]. Κατά τη χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, οι συζυγείς εξισώσεις διαμορφώνονται από τις αντίστοιχες εξισώσεις του ευθέος προβλήματος σε αναλυτική μορφή και, έπειτα, διακριτοποιούνται προκειμένου να επιλυθούν αριθμητικά, ενώ ουσιαστικό είναι ότι η προκύπτουσα συζυγής εξίσωση δεν εξαρτάται από τη διακριτοποίηση του ευθέος προβλήματος ([12], [13], [14], [15], [16]). Από την άλλη πλευρά, στη διακριτή συζυγή μέθοδο, αφού προηγηθεί η διακριτοποίηση των εξισώσεων του ευθέος προβλήματος, στη συνέχεια, το συζυγές πρόβλημα διατυπώνεται απευθείας σε διακριτοποιημένη μορφή. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται ξεκάθαρο ότι, στη διακριτή συζυγή μέθοδο, η βάση της όλης ανάπτυξης είναι οι διακριτοποιημένες εξισώσεις του ευθέος προβλήματος.

Η χρήση της λύσης του συζυγούς προβλήματος για τον υπολογισμό ολοκληρωματικών ποσοτήτων, με την επιθυμητή ακρίβεια και το ελάχιστο δυνατό υπολογιστικό (CPU) κόστος, δεν αποτελεί καινούργια ιδέα, αλλά έχει απασχολήσει αρκετούς στο παρελθόν. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί μια ομάδα από το Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ ([9]), η οποία, πριν από 10 χρόνια, εργάστηκε στο κομμάτι της βέλτιστης προσαρμογής πλέγματος (optimal grid adaptation) με εκ των υστέρων ανάλυση σφάλματος (a posteriori error analysis), χρησιμοποιώντας τη διακριτή συζυγή μέθοδο.

Πιο συγκεκριμένα, στόχος ήταν η εύρεση ενός τρόπου για την επιλεκτική πύκνωση ενός αρχικά αραιού (coarse) υπολογιστικού πλέγματος, έτσι ώστε η επίλυση του ευθέος προβλήματος ροής στο τελικό πλέγμα που προκύπτει να οδηγεί στον υπολογισμό, με την επιθυμητή ακρίβεια, της ολοκληρωματικής ποσότητας που ενδιαφέρει. Με αυτόν τον τρόπο, αποφεύγεται η επίλυση των εξισώσεων σε ένα εξ' ολοκλήρου πυκνότερο από το αρχικό πλέγμα (τέτοιο ώστε το αποτέλεσμα της ολοκληρωματικής ποσότητας να έχει την ίδια ακρίβεια) και, συνεπώς, το απαιτούμενο υπολογιστικό κόστος μειώνεται.

Για την εύρεση των περιοχών του αραιού πλέγματος όπου χρειάζεται πυκνωση, χρησιμοποιείται ένα βαθμωτό πεδίο που λειτουργεί ως αισθητήρας. Το πεδίο αυτό προκύπτει από το συνδυασμό των ροϊκών και συζυγών μεταβλητών με τα αντίστοιχα υπόλοιπα των εξισώσεων (το συζυγές πρόβλημα επιλύεται και αυτό στο αρχικό αραιό πλέγμα), ο οποίος, όπως έχει ήδη αναφερθεί, μπορεί να οδηγήσει στην εκτίμηση της συνεισφοράς του κάθε κόμβου του πλέγματος στο συνολικό σφάλμα που επάγεται στην τιμή του ολοκληρώματος που υπολογίζεται ([19], [23], [24], [25], [26], [27]). Επομένως, στις περιοχές με τους μεγαλύτερους δείκτες ‘συνεισφοράς’ πραγματοποιείται πυκνωση του πλέγματος. Η προσαρμογή αυτή οδηγεί σε ένα νέο πλέγμα, όπου οι ροϊκές και συζυγείς εξισώσεις επιλύονται ξανά (το νέο πλέγμα δε διαφέρει πολύ από το προηγούμενο, με αποτέλεσμα η επίλυση των εξισώσεων, χρησιμοποιώντας για αρχικοποίηση τη λύση στο προηγούμενο πλέγμα, να μην αυξάνει κατά πολύ το συνολικό υπολογιστικό κόστος) και η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου να ‘εξαλειφθούν’ οι περιοχές που επάγουν σημαντικό σφάλμα, έτσι ώστε η τελική τιμή της ολοκληρωματικής ποσότητας να έχει την επιθυμητή ακρίβεια.

Μια ακόμα παλαιότερη μέθοδος για τη βελτίωση της ακρίβειας μιας ολοκληρωματικής ποσότητας, είναι η παρεκβολή (extrapolation) του Richardson, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση όπου η τάξη ακρίβειας της υπολογιζόμενης λύσης του προβλήματος είναι γνωστή σε περισσότερα από ένα πλέγματα ([28]). Σε αντίθεση με αυτή τη μέθοδο, στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζεται μια μέθοδος διόρθωσης της εκάστοτε ολοκληρωματικής ποσότητας που ενδιαφέρει, χρησιμοποιώντας τις συζυγείς τεχνικές, χωρίς προσαρμογή του πλέγματος. Η πρωτοτυπία (σε σχέση με αυτό που είθισται να γίνεται) έγκειται στο ότι, στη συγκεκριμένη εργασία, η διορθωτική μέθοδος εφαρμόζεται χρησιμοποιώντας, εκτός από τη διακριτή συζυγή μέθοδο (όπως έγινε στο [9]), και τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Οι δύο αυτές παραλλαγές θα παρουσιαστούν αναλυτικά.

Στόχος λοιπόν της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι ο ακριβής υπολογισμός ολοκληρωματικών ποσοτήτων, είτε σε αραιά υπολογιστικά πλέγματα είτε σε περιπτώσεις όπου οι εξισώσεις του ευθέως προβλήματος έχουν αφεθεί ασύγκλιτες. Η ιδέα για την αντιμετώπιση προβλημάτων της πρώτης κατηγορίας (αραιό πλέγμα) προέρχεται από [9], [18] και στη συνέχεια επεκτείνεται και εφαρμόζεται σε περιπτώσεις που εμπίπτουν στη δεύτερη κατηγορία (ασύγκλιτες εξισώσεις). Πιο συγκεκριμένα, όταν το πρωτεύον πρόβλημα αργεί ή αδυνατεί να συγκλίνει (φαινόμενο που συναντάται σε περίπλοκες γεωμετρίες, όταν στη ροή είναι παρούσες μικρές μη-μόνιμες χρονικές κλίμακες, small scale unsteadiness), η επίλυσή του διακόπτεται και αναλαμβάνει το συζυγές, προκειμένου η ολοκληρωματική ποσότητα να υπολογιστεί σε λιγότερο συνολικό χρόνο ή με μεγαλύτερη ακρίβεια. Σε κάθε περίπτωση, αυτό επιτυγχάνεται με την επιπλέον επίλυση των συζυγών εξισώσεων και τη χρήση της λύσης αυτών για τη διόρθωση του εκάστοτε ολοκληρώματος.

Στα επόμενα κεφάλαια, η προτεινόμενη αυτή μέθοδος εφαρμόζεται χρησιμοποιώντας άλλοτε τη διακριτή και άλλοτε τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Οι εφαρμογές αρχικά πε-

ριλαμβάνουν, απλά γραμμικά μαθηματικά προβλήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ODEs), τα οποία όμως είναι ιδανικά για μια πρώτη δοκιμή της μεθόδου. Στη συνέχεια, ακολουθούν μη-γραμμικά προβλήματα, όπου η μέθοδος εφαρμόζεται σε ένα ψευδο-1D πρόβλημα μη-συνεκτικής, συμπιεστής ροής και, τέλος, σε ένα 2D πρόβλημα ροής, με τα ίδια χαρακτηριστικά (μη-συνεκτική, συμπιεστή), σε γραμμική πτερύγωση συμπιεστή (linear compressor cascade), όπου χρησιμοποιήθηκαν οι κώδικες του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ ([17], [33]).

Το ψευδο-1D πρόβλημα ροής αντιμετωπίστηκε χρησιμοποιώντας προϋπάρχον λογισμικό ([6]) επίλυσης των 1D εξισώσεων Euler ([2]) με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων (finite-volume method [5]). Η χωρική διακριτοποίηση είναι 2ης τάξης ακρίβειας και πραγματοποιείται με εφαρμογή του σχήματος FVS (Flux Vector Splitting [20]). Όσον αφορά το 2D πρόβλημα ροής, ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε επιλύει τις 2D εξισώσεις Euler, υιοθετώντας κεντροκομβική διατύπωση (vertex centered formulation) και εφαρμόζοντας τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων, σε μη-δομημένο πλέγμα (unstructured grid), [17]. Τα μη-συνεκτικά διανύσματα ροής (fluxes) υπολογίζονται με βάση τον προσεγγιστικό Riemann επιλύτη του Roe ([21]), με 2ης τάξης χωρική ακρίβεια.

1.2 Η δομή της εργασίας

Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στην ανάπτυξη νέων (στη λεπτομέρειά τους) μεθόδων, με μικρό υπολογιστικό κόστος, για τον ακριβή υπολογισμό ολοκληρωματικών ποσοτήτων, χρησιμοποιώντας είτε τη διακριτή είτε τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Η δομή της εργασίας έχει ως εξής:

- **Κεφάλαιο 2**
Παρουσιάζεται αναλυτικά η προτεινόμενη διορθωτική μέθοδος, η οποία διατυπώνεται στη βάση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου ([18]). Επιπλέον, γίνεται εφαρμογή της μεθόδου σε ένα 1D γραμμικό πρόβλημα που διέπεται από την εξίσωση Poisson. Το παράδειγμα αυτό επαναλαμβάνεται με διάφορες παραλλαγές (π.χ. αφήνοντας ασύγκλιτη την εξίσωση του ευθέος προβλήματος ή και του συζυγούς), προκειμένου να γίνει επέκταση της μεθόδου σε ένα νέο πεδίο εφαρμογών (καινοτομία της παρούσας διπλωματικής εργασίας).
- **Κεφάλαιο 3**
Παρουσιάζεται αναλυτικά η αριθμητική επίλυση του ευθέος ψευδο-1D προβλήματος ροής σε αγωγό, χρησιμοποιώντας διακριτοποίηση δεύτερης τάξης ακρίβειας. Επιπλέον, περιγράφεται ο τρόπος επιβολής των οριακών συνθηκών (explicitly) που χρησιμοποιήθηκαν κατά την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ροής. Πολλά στοιχεία της ανάλυσης έχουν παρθεί από τη διπλωματική εργασία [6].

- **Κεφάλαιο 4**
Γίνεται εφαρμογή της προτεινόμενης διορθωτικής μεθόδου στο ψευδο- $1D$ πρόβλημα ροής. Εδώ, η προτεινόμενη μέθοδος διατυπώνεται στη βάση της διακριτής συζυγούς μεθόδου ([9]). Όπως έγινε στο Κεφάλαιο 2, έτσι και εδώ, εξετάζεται και η περίπτωση όπου οι εξισώσεις του ευθέος προβλήματος έχουν αφηθεί ασύγκλιτες.
 - **Κεφάλαιο 5**
Παρουσιάζεται αναλυτικά η αριθμητική επίλυση του $2D$ προβλήματος ροής σε γραμμική πτερύγωση συμπιεστή. Το πρόβλημα περιγράφεται από τις εξισώσεις Euler, οι οποίες επιλύονται σε μη-δομημένο πλέγμα, υιοθετώντας κεντροκομβική διατύπωση και εφαρμόζοντας τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων. Αρκετά στοιχεία της ανάλυσης έχουν παρθεί από τη διπλωματική εργασία [8]. Στο τέλος του κεφαλαίου, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος, τα οποία προέκυψαν χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο κώδικα του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ ([17], [33]).
 - **Κεφάλαιο 6**
Εφαρμόζεται η προτεινόμενη διορθωτική μέθοδος στο $2D$ πρόβλημα ροής, χρησιμοποιώντας τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Αρχικά, γίνεται η διατύπωση και η αριθμητική επίλυση των συζυγών εξισώσεων για το συγκεκριμένο πρόβλημα και, στη συνέχεια, παρουσιάζεται το αποτέλεσμα της εφαρμογής της διορθωτικής μεθόδου.
 - **Κεφάλαιο 7**
Συνοψίζονται τα συμπεράσματα της παρούσας διπλωματικής εργασίας και γίνεται αναφορά στο μελλοντικό έργο που θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί στο συγκεκριμένο πεδίο, με στόχο την περαιτέρω επέκταση της προτεινόμενης διορθωτικής μεθόδου.
-

Κεφάλαιο 2

Παρουσίαση της Προτεινόμενης Μεθόδου

2.1 Γραμμική ανάλυση

Σε προβλήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, η εξίσωση του ευθέος προβλήματος μπορεί να γραφεί στη γενική μορφή:

$$L(u) = f \quad (2.1)$$

όπου L ο γραμμικός τελεστής και u η λύση του ευθέος προβλήματος.

Πολλές φορές, ζητούμενο είναι ο ακριβής υπολογισμός ολοκληρωματικών ποσοτήτων της μορφής:

$$J = \int_{\Omega} gu \, d\Omega \quad (2.2)$$

όπου g μια γνωστή συνάρτηση και Ω το υπολογιστικό χωρίο.

Η ισοδύναμη δυαδική διατύπωση (dual formulation) του παραπάνω προβλήματος εισάγει τη συζυγή (adjoint) εξίσωση:

$$L^*(v) = g \quad (2.3)$$

που έχει παρόμοια μορφή με την (2.1). L^* είναι ο συζυγής τελεστής και v είναι η λύση της συζυγούς εξίσωσης.

Ο τελεστής L^* ορίζεται από τη σχέση:

$$\int_{\Omega} L^*(v)u \, d\Omega = \int_{\Omega} vL(u) \, d\Omega \quad (2.4)$$

που οδηγεί τελικά στην:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} gu \, d\Omega &= \int_{\Omega} vf \, d\Omega \Rightarrow \\ J &= \int_{\Omega} vf \, d\Omega \end{aligned} \quad (2.5)$$

Συνεπώς, η ολοκληρωματική ποσότητα J μπορεί εναλλακτικά να υπολογιστεί από την (2.5) αντί της (2.19), αρκεί να προηγηθεί η επίλυση της συζυγούς εξίσωσης.

Στο σημείο αυτό, αξίζει να σημειωθεί ότι η δυαδική διατύπωση που παρουσιάστηκε, εφαρμόζεται ευρέως σε προβλήματα βέλτιστου σχεδιασμού (optimal design). Εκεί, η συνάρτηση g είναι μοναδική και αντιστοιχεί στη συνάρτηση-στόχο (objective function) της βελτιστοποίησης. Αντίθετα, υπάρχουν περισσότερες από μία συναρτήσεις f που αντιστοιχούν στις διάφορες γεωμετρικές μεταβλητές σχεδιασμού. Επομένως, η δυαδική διατύπωση είναι πολύ πιο αποδοτική από υπολογιστικής άποψης, καθώς απαιτείται μόνο μία συζυγής επίλυση ανά κύκλο βελτιστοποίησης, σε αντίθεση με την ευθεία προσέγγιση, όπου χρειάζεται μία επίλυση ανά μεταβλητή σχεδιασμού ([2]). Η ύπαρξη λοιπόν, έτοιμων κωδίκων συζυγών μεθόδων για προβλήματα σχεδιασμού ([6], [7]), επιτρέπει την άμεση εφαρμογή των ιδεών που παρουσιάζονται στην παρούσα διπλωματική εργασία, για τη διόρθωση των ολοκληρωματικών ποσοτήτων που υπολογίζονται.

Επιστρέφοντας στην παραπάνω ανάλυση, οι εξισώσεις (2.1) και (2.3) επιλύονται αριθμητικά σε ένα σχετικά αραιό πλέγμα (προκειμένου να αποφευχθεί το υπολογιστικό κόστος επίλυσης σε ένα πυκνό) και λαμβάνονται οι προσεγγιστικές λύσεις u_H και v_H αντίστοιχα (ο δείκτης H θα χρησιμοποιείται γενικά για τις λύσεις στο αραιό πλέγμα). Στη συνέχεια, κάνοντας κάποιο είδος λείας παρεμβολής (smooth interpolation [1]), προκύπτουν τα αντίστοιχα πεδία u_h και v_h σε ένα πυκνό πλέγμα (όπου κανονικά θα έπρεπε να επιλυθούν οι εξισώσεις του προβλήματος αλλά, για τους προαναφερθέντες λόγους, αποφεύγεται), τα οποία έχουν αναλυτικές εκφράσεις (ο δείκτης h θα χρησιμοποιείται γενικά για τα πεδία που παρεμβάλλονται).

Με βάση τις εξισώσεις (2.1) και (2.3), ορίζονται και τα πεδία f_h και g_h ως εξής:

$$f_h = L(u_h) \quad , \quad g_h = L^*(v_h) \quad (2.6)$$

Εάν τα πεδία u_h και v_h ταυτίζονταν με τις αναλυτικές λύσεις u και v των εξισώσεων (2.1) και (2.3) αντίστοιχα (οι οποίες γενικά δεν είναι διαθέσιμες), τότε και τα πεδία f_h και g_h θα ταυτίζονταν με τις αναλυτικές εκφράσεις των f και g . Συνεπώς, το σφάλμα (residual error) $f_h - f$ ή $g_h - g$ είναι ένας υπολογίσιμος δείκτης του κατά πόσο το u_h ή v_h αντίστοιχα είναι η πραγματική λύση.

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς και τις ταυτότητες που αναφέρθηκαν παραπάνω, λαμβάνεται η ακόλουθη έκφραση για το ολοκλήρωμα J ([18]):

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{\Omega} gu \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(gu_h - g_h(u_h - u) + (g_h - g)(u_h - u) \right) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \left(gu_h - L^*(v_h)(u_h - u) + (g_h - g)(u_h - u) \right) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \left(gu_h - v_h L(u_h - u) + (g_h - g)(u_h - u) \right) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} gu_h \, d\Omega - \int_{\Omega} v_h(f_h - f) \, d\Omega + \int_{\Omega} (g_h - g)(u_h - u) \, d\Omega \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Στην έκφραση (2.7) εμφανίζονται οι εξής όροι:

- Ο πρώτος όρος

$$J_b = \int_{\Omega} gu_h \, d\Omega \quad (2.8)$$

είναι η βασική (basic) τιμή του ολοκληρώματος J , η οποία υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την προσεγγιστική λύση u_h , όπως γίνεται συνήθως για την εύρεση μιας προσέγγισης της πραγματικής τιμής του J .

- Ο δεύτερος όρος

$$\Delta J = \int_{\Omega} v_h(f_h - f) \, d\Omega \quad (2.9)$$

είναι ο διορθωτικός όρος (correction term) που θα χρησιμοποιηθεί και περιλαμβάνει το γινόμενο του σφάλματος $f_h - f$ με την προσεγγιστική συζυγή λύση v_h . Έτσι, η συζυγής λύση λειτουργεί πρακτικά ως συντελεστής βάρους (weighting factor), δείχνοντας το πώς συνεισφέρει το τοπικό σφάλμα, σε κάθε θέση του υπολογιστικού χωρίου, στο συνολικό σφάλμα του ολοκληρώματος J .

- Ο τελευταίος όρος

$$RE = \int_{\Omega} (g_h - g)(u_h - u) \, d\Omega \quad (2.10)$$

είναι το υπολειπόμενο σφάλμα (remaining error) που προκύπτει αφού γίνει η διόρθωση του ολοκληρώματος. Ο όρος αυτός μπορεί να αμεληθεί ως όρος ανώτερης τάξης, καθώς είναι ανάλογος του γινομένου δύο σφαλμάτων.

Επομένως, αφαιρώντας τον όρο ΔJ από τον όρο J_b , προκύπτει μια πολύ πιο ακριβής τιμή για το ολοκλήρωμα J .

Συνοψίζοντας, η μέθοδος εφαρμόζεται εκτελώντας τα παρακάτω βήματα:

- Βήμα 1:
Γίνεται αριθμητική επίλυση της εξίσωσης (2.1) σε σχετικά αραιό πλέγμα και η λύση u_H που προκύπτει, χρησιμοποιείται για τη "γένεση" του πεδίου u_h που παρεμβάλλεται με κάποια μέθοδο επαρκούς ακρίβειας.
- Βήμα 2:
Από τη σχέση (2.1), χρησιμοποιώντας το πεδίο u_h και εφαρμόζοντας κάποια αριθμητική μέθοδο ολοκλήρωσης ([1]), υπολογίζεται η βασική τιμή του ολοκληρώματος J_b .
- Βήμα 3:
Γίνεται αριθμητική επίλυση της εξίσωσης (2.3) και η λύση v_H που προκύπτει, χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του πεδίου v_h , μέσω κατάλληλης παρεμβολής.
- Βήμα 4:
Χρησιμοποιώντας το πεδίο u_h και τον ορισμό (2.6), υπολογίζεται το υπόλοιπο $f_h - f$ της εξίσωσης (2.1).
- Βήμα 5:
Γνωρίζοντας το v_h και το $f_h - f$, υπολογίζεται αριθμητικά ο διορθωτικός όρος ΔJ από τη σχέση (2.9).
- Βήμα 6:
Αφαιρώντας τον όρο ΔJ από τον όρο J_b , προκύπτει η καλύτερη προσέγγιση του ολοκληρώματος J .

Στις επόμενες ενότητες γίνεται εφαρμογή της μεθόδου αυτής, με διάφορες παραλλαγές, σε ένα παράδειγμα που πάρθηκε από [18] (σκόπιμα, προκειμένου να δοκιμαστεί αρχικά η μέθοδος) αλλά παρουσιάζεται πιο αναλυτικά.

2.2 Μαθηματικό 1D γραμμικό παράδειγμα

2.2.1 Περιγραφή και επίλυση του ευθέως προβλήματος

Η εξίσωση του ευθέως προβλήματος είναι η 1D εξίσωση Poisson:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f = x^3(1-x)^3 \quad (2.11)$$

ορισμένη στο μοναδιαίο διάστημα $[0, 1]$ και υπόκειται στις μηδενικές Dirichlet οριακές συνθήκες:

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (2.12)$$

Η εξίσωση (2.11) επιλύεται αριθμητικά σε ένα ομοιόμορφο 1D πλέγμα n κόμβων που απέχουν μεταξύ τους κατά $\Delta x_H = \frac{1}{n-1}$. Έτσι, στον i εσωτερικό κόμβο η (2.11) γράφεται:

$$\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)_i = f_i = x_i^3(1-x_i)^3 \quad (2.13)$$

όπου ο όρος $\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)_i$ προσεγγίζεται με κεντρικές πεπερασμένες διαφορές (2ης τάξης ακρίβειας) ως:

$$\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x_H^2} \quad (2.14)$$

Επομένως, η διακριτοποιημένη έκφραση της εξίσωσης (2.11) είναι της μορφής:

$$c_S u_{i-1} + c_P u_i + c_N u_{i+1} = f_i \quad , \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (2.15)$$

όπου $c_S = c_N = \frac{1}{\Delta x_H^2}$ και $c_P = \frac{-2}{\Delta x_H^2}$.

Οι οριακές συνθήκες (2.12) γράφονται στην παραπάνω μορφή ως:

$$c_P u_1 + c_N u_2 = f_1 \quad , \quad c_P = 1, c_N = f_1 = 0 \quad (2.16)$$

$$c_S u_{n-1} + c_P u_n = f_n \quad , \quad c_P = 1, c_S = f_n = 0 \quad (2.17)$$

Οι εξισώσεις (2.15), (2.16) και (2.17) αποτελούν ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα της μορφής:

$$A \vec{u}_H = \vec{f}_H \quad (2.18)$$

όπου το μητρώο A έχει την παρακάτω απλή τριδιαγώνια μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\Delta x_H^2} & \frac{-2}{\Delta x_H^2} & \frac{1}{\Delta x_H^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta x_H^2} & \frac{-2}{\Delta x_H^2} & \frac{1}{\Delta x_H^2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\Delta x_H^2} & \frac{-2}{\Delta x_H^2} & \frac{1}{\Delta x_H^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta x_H^2} & \frac{-2}{\Delta x_H^2} & \frac{1}{\Delta x_H^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα (2.18) επιλύεται χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Thomas ([1]) και έτσι υπολογίζεται το διάνυσμα \vec{u}_H που αποτελεί την αριθμητική λύση του ευθέως προβλήματος (2.11).

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις κομβικές τιμές του \vec{u}_H , εφαρμόζεται αριθμητική παρεμβολή με φυσικές κυβικές splines (για περισσότερες λεπτομέρειες στο [1]) και παράγεται το πεδίο $u_h(x)$ που έχει αναλυτική έκφραση.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν, για μια περίπτωση όπου χρησιμοποιήθηκαν $n = 17$ κόμβοι για τη διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου, φαίνονται στο Σχήμα 2.1.

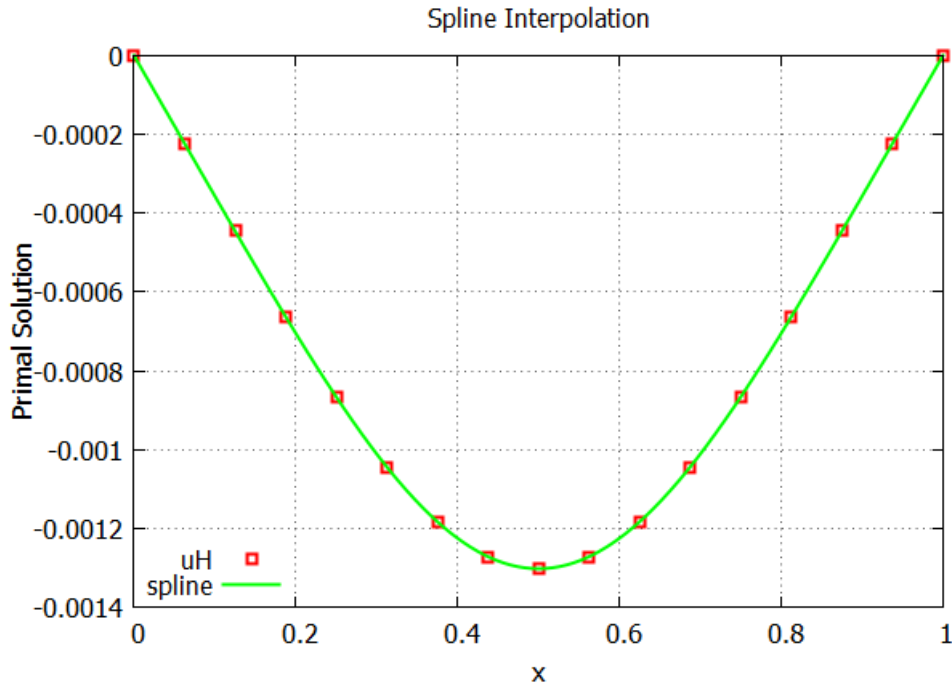
Στόχος του προβλήματος είναι ο υπολογισμός του ολοκληρώματος:

$$J = \int_0^1 gu \, dx = \int_0^1 \sin(\pi x)u \, dx \quad (2.19)$$

Ακολουθώντας την ανάλυση της ενότητας 2.1, στο σημείο αυτό υπολογίζεται η βασική τιμή του ολοκληρώματος J_b από τη σχέση:

$$J_b = \int_0^1 gu_h \, dx = \int_0^1 \sin(\pi x)u_h \, dx \quad (2.20)$$

Ο υπολογισμός έγινε στη συγκεκριμένη περίπτωση εφαρμόζοντας την αριθμητική μέθοδο ολοκλήρωσης Gauss-Legendre ([1]), όπου χρησιμοποιήθηκαν 3 σημεία (Gauss points)



Σχήμα 2.1: Αριθμητική λύση ευθέος προβλήματος u_H (με $\Delta x_H = \frac{1}{16}$) και πεδίο u_h που παρεμβάλλεται με κυβικές splines. Οριζόντιος άξονας: Υπολογιστικό χωρίο. Κατακόρυφος άξονας: Αριθμητική λύση εξίσωσης (2.11).

σε κάθε διάστημα. Υπενθυμίζεται ότι το ολοκλήρωμα I μιας συνάρτησης f σε ένα τυχαίο διάστημα $[\alpha, b]$ υπολογίζεται με τη μέθοδο αυτή από την έκφραση:

$$I = \int_{\alpha}^b f(x)dx = \frac{b-\alpha}{2} \int_{-1}^1 f(x)dx' \cong \frac{b-\alpha}{2} \sum_{i=1}^3 w^i f\left(\frac{x'_i(b-\alpha) + b + \alpha}{2}\right) \quad (2.21)$$

όπου χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός:

$$x_i = \frac{x'_i(b-\alpha) + b + \alpha}{2} \quad (2.22)$$

ενώ οι θέσεις των Gauss σημείων και οι τιμές των αντίστοιχων συντελεστών είναι:

$$x_1 = -\sqrt{3/5}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{3/5} \\ w^1 = 5/9, \quad w^2 = 8/9, \quad w^3 = 5/9$$

Έτσι, το J_b υπολογίστηκε τελικά από τη σχέση:

$$J_b = \frac{\Delta x_H}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^3 w^{i,j} u_h^{i,j} g^{i,j} \quad (2.23)$$

όπου το $w^{i,j}$ είναι ο Gauss συντελεστής βαρύτητας του i Gauss κόμβου στο j διάστημα. Αντίστοιχα ορίζονται και τα $u_h^{i,j}$, $g^{i,j}$, τα οποία υπολογίζονται εύκολα από τις αναλυτικές εκφράσεις των u_h και g .

Στη συνέχεια, για τον υπολογισμό του διορθωτικού όρου της μεθόδου ΔJ (σχέση (2.9)), θα χρειαστεί η απόκλιση $f_h - f$ που οφείλεται στη μη-αναλυτική λύση της (2.11). Το πεδίο f_h ορίζεται ως η 2η χωρική παράγωγος του u_h , δηλαδή:

$$f_h = \frac{d^2 u_h}{dx^2} \quad (2.24)$$

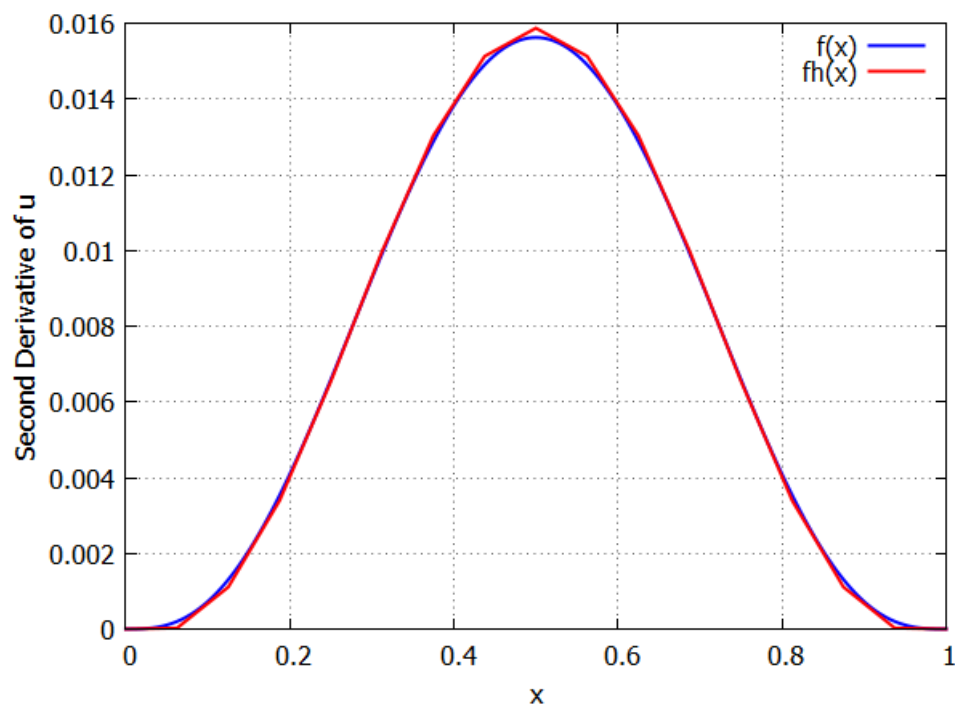
και υπολογίζεται αναλυτικά, από την αναλυτική έκφραση του u_h . Πιο συγκεκριμένα, επειδή το u_h έχει παραχθεί από κυβικές splines (3ου βαθμού πολυώνυμα), η 2η παράγωγός του (δηλαδή το f_h) είναι τμηματικά γραμμική (piecewise linear) και οι τιμές της στους κόμβους προκύπτουν άμεσα από τους συντελεστές των splines (επιλύοντας το γραμμικό σύστημα των M_i που παρουσιάζεται αναλυτικά στο [1]). Υπολογίζοντας λοιπόν τις κομβικές τιμές και εφαρμόζοντας στη συνέχεια γραμμική παρεμβολή σε κάθε τμήμα, προκύπτει η αναλυτική έκφραση του πεδίου $f_h(x)$.

Ο τύπος της συνάρτησης f είναι δεδομένος και ίσος με: $f(x) = x^3(1-x)^3$.

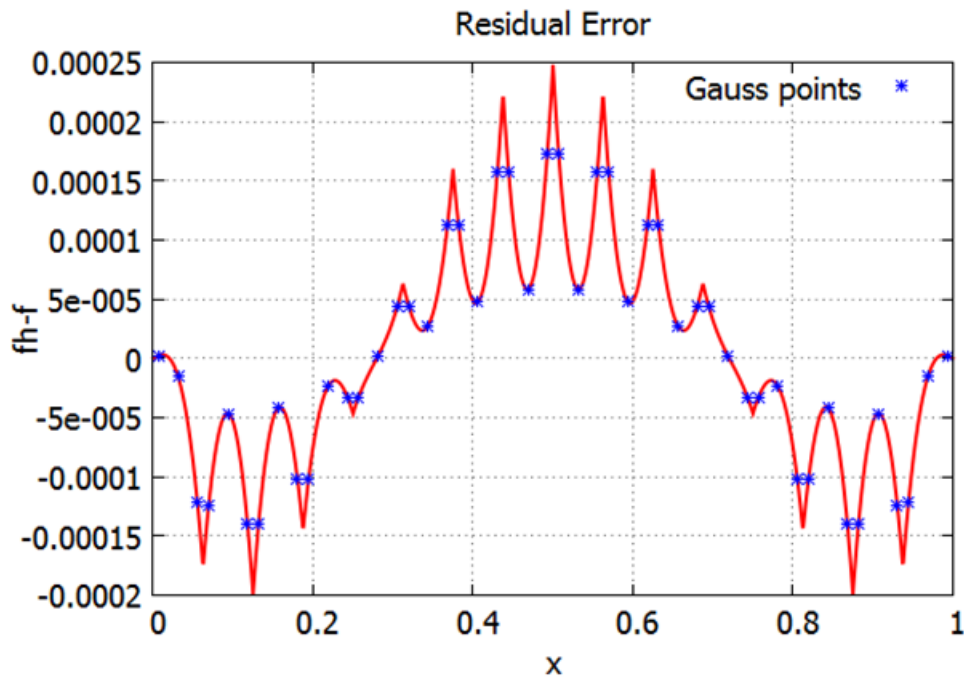
Στο Σχήμα 2.2 φαίνεται η καμπύλη f_h που προέκυψε για τη συγκεκριμένη διακριτοποίηση (17 κόμβοι), καθώς και η καμπύλη f . Όπως ήταν αναμενόμενο, η f_h είναι τμηματικά γραμμική.

Τέλος, αφαιρώντας τις δύο καμπύλες του σχήματος 2.2, προκύπτει η διαφορά $f_h - f$, η κατανομή της οποίας φαίνεται στο Σχήμα 2.3. Στο ίδιο σχήμα έχουν τοποθετηθεί και τα τρία Gauss σημεία κάθε διαστήματος, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν αργότερα στην αριθμητική ολοκλήρωση της σχέσης (2.9) για τον υπολογισμό του διορθωτικού όρου ΔJ .

Παρατηρούμε ότι τα σχήματα αυτά αναπαράγουν ακριβώς τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο paper [18].



Σχήμα 2.2: Σύγκριση του πεδίου $f_h = \frac{d^2 u_h}{dx^2}$ (κόκκινη καμπύλη) με την αναλυτική έκφραση της $f = \frac{d^2 u}{dx^2} = x^3(1-x)^3$ (μπλε καμπύλη). Οριζόντιος άξονας: Υπολογιστικό χωρίο. Κατακόρυφος άξονας: Δεύτερη παράγωγος του u ως προς x .



Σχήμα 2.3: Κατανομή του τοπικού υπολοίπου $f_h - f$ της εξίσωσης του ευθέος προβλήματος (2.11) και Gauss σημεία που θα χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του ΔJ . Οριζόντιος άξονας: Υπολογιστικό χωρίο. Κατακόρυφος άξονας: Υπόλοιπο (Residual).

2.2.2 Διατύπωση και επίλυση του συζυγούς προβλήματος

Υπενθυμίζεται ότι, σύμφωνα με την ανάλυση της ενότητας 2.1 (όπου χρησιμοποιείται η συνεχής συζυγής μέθοδος), η συζυγής εξίσωση θα είναι της μορφής:

$$L^*(v) = g \quad (2.25)$$

όπου στο συγκεκριμένο παράδειγμα $g = \sin(\pi x)$ και ο τελεστής L^* ορίζεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \int_0^1 L^*(v)u \, dx &= \int_0^1 vL(u) \, dx \Rightarrow \\ \int_0^1 L^*(v)u \, dx &= \int_0^1 v \frac{d^2u}{dx^2} \, dx \end{aligned} \quad (2.26)$$

Εφαρμόζοντας δύο φορές την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, το δεξί μέλος της εξίσωσης (2.26) αναπτύσσεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 v \frac{d^2 u}{dx^2} dx &= \left[v \frac{du}{dx} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx \\
&= \left[v \frac{du}{dx} \right]_0^1 - \underbrace{\left[\frac{dv}{dx} u \right]_0^1}_0 + \int_0^1 \frac{d^2 v}{dx^2} u dx \Rightarrow \\
\int_0^1 v \frac{d^2 u}{dx^2} dx &= \left[v \frac{du}{dx} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{d^2 v}{dx^2} u dx \quad (2.27)
\end{aligned}$$

όπου $\left[\frac{dv}{dx} u \right]_0^1 = 0$, λόγω των οριακών συνθηκών της εξίσωσης του ευθέως προβλήματος: $u(0) = u(1) = 0$.

Αντικαθιστώντας την (2.27) στην (2.26), προκύπτει ότι:

$$\int_0^1 L^*(v) u dx = \left[v \frac{du}{dx} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{d^2 v}{dx^2} u dx \quad (2.28)$$

και επιλέγοντας ως οριακές συνθήκες για τη συζυγή εξίσωση τις:

$$v(0) = v(1) = 0 \quad (2.29)$$

ο όρος $\left[v \frac{du}{dx} \right]_0^1$ μηδενίζεται, οπότε καταλήγουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 L^*(v) u dx &= \int_0^1 \frac{d^2 v}{dx^2} u dx \Rightarrow \\
L^*(v) &= \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Δηλαδή, στο συγκεκριμένο παράδειγμα, $L^* \equiv L \equiv \frac{d^2}{dx^2}$ (λόγω της γραμμικότητας του τελεστή L) και η συζυγής εξίσωση είναι τελικά η 1D εξίσωση Poisson:

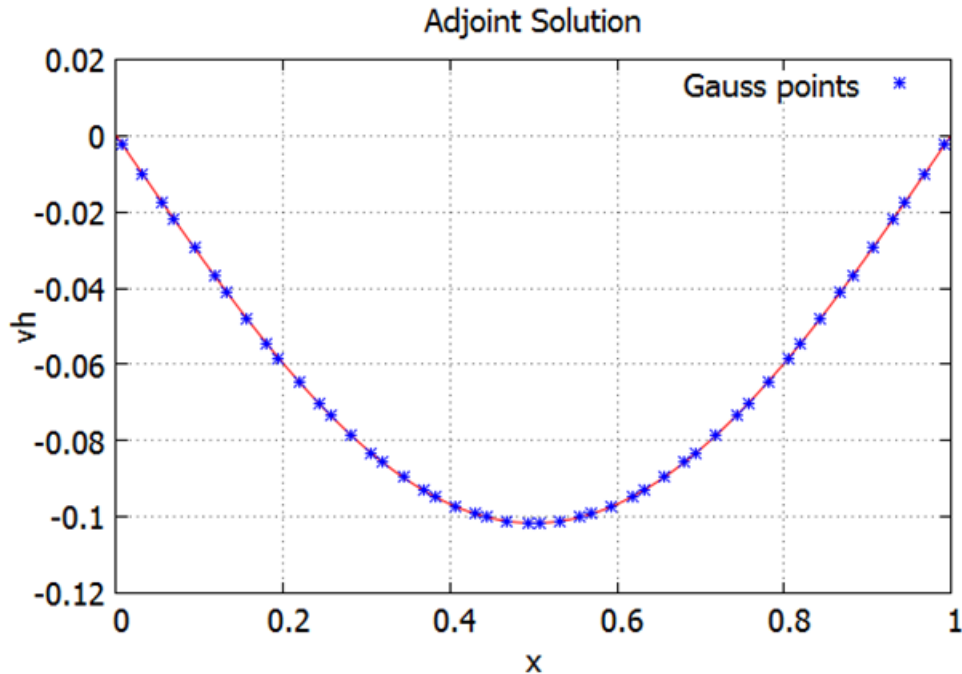
$$\frac{d^2 v}{dx^2} = g = \sin(\pi x) \quad (2.31)$$

με οριακές συνθήκες τις (2.29).

Η συζυγής εξίσωση (2.31) διακριτοποιείται και επιλύεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που έγινε προηγουμένως για την εξίσωση του ευθέος προβλήματος (2.11) και λαμβάνεται η αριθμητική συζυγής λύση \vec{v}_H (με χρήση του ίδιου επιλύτη τριδιαγώνιων μητρώων).

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις κομβικές τιμές του \vec{v}_H , εφαρμόζεται αριθμητική παρεμβολή με φυσικές κυβικές splines και παράγεται το πεδίο $v_h(x)$ που έχει αναλυτική έκφραση. Θυμίζουμε ότι το πεδίο αυτό είναι απαραίτητο (μαζί με τη διαφορά $f_h - f$) για τον υπολογισμό του διορθωτικού όρου ΔJ .

Το αποτέλεσμα που προέκυψε από την αριθμητική επίλυση της (2.31) φαίνεται στο Σχήμα 2.4. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η συζυγής λύση λειτουργεί ως συντελεστής βάρους και συνεπώς, το Σχήμα 2.4 αποκαλύπτει ότι η απόκλιση $f_h - f$ στο κέντρο του υπολογιστικού χωρίου είναι αυτό που συνεισφέρει περισσότερο στο σφάλμα που γίνεται κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος J_b . Με άλλα λόγια, εάν ήταν επιθυμητή η βελτίωση της τιμής του J_b χωρίς την εφαρμογή της διορθωτικής μεθόδου, ο καλύτερος τρόπος θα ήταν να αυξηθεί η ακρίβεια της λύσης του ευθέος προβλήματος στο κέντρο του χωρίου (π.χ. με τοπική πύκνωση του πλέγματος [19]).



Σχήμα 2.4: Πεδίο v_h που προκύπτει παρεμβάλλοντας κυβικές splines στην αριθμητική λύση του συζυγούς προβλήματος και Gauss σημεία που θα χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του ΔJ . Οριζόντιος άξονας: Υπολογιστικό χωρίο. Κατακόρυφος άξονας: Προσεγγιστική λύση εξίσωσης (2.31).

2.2.3 Εφαρμογή της διορθωτικής μεθόδου και παραμετρική μελέτη

Για την εύρεση μιας καλύτερης προσέγγισης του ολοκληρώματος J , είναι πλέον δυνατός ο υπολογισμός του διορθωτικού όρου ΔJ από τη σχέση:

$$\Delta J = \int_0^1 v_h(f_h - f) dx \quad (2.32)$$

Ο υπολογισμός έγινε, όπως και για το J_b , εφαρμόζοντας την αριθμητική μέθοδο ολοκλήρωσης Gauss-Legendre, όπου χρησιμοποιήθηκαν και πάλι 3 Gauss σημεία για κάθε διάστημα.

Αφαιρώντας λοιπόν τον όρο ΔJ από τον όρο J_b , προκύπτει μια καλύτερη προσέγγιση του ολοκληρώματος J ως:

$$J_{new} = J_b - \Delta J \quad (2.33)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημανθεί ότι, στο συγκεκριμένο παράδειγμα, είναι δυνατή η εύρεση της αναλυτικής λύσης της εξίσωσης του ευθέως προβλήματος (2.11), η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$u(x) = -\frac{x^8}{56} + \frac{x^7}{14} - \frac{x^6}{10} + \frac{x^5}{20} - \frac{x}{280} \quad (2.34)$$

Ως αποτέλεσμα, είναι δυνατός και ο αναλυτικός υπολογισμός του ολοκληρώματος J από τη σχέση (2.19) που οδηγεί τελικά στο αποτέλεσμα:

$$J = 144 \frac{(\pi^2 - 10)}{\pi^9} \quad (2.35)$$

Ορίζονται και υπολογίζονται τα εξής σφάλματα:

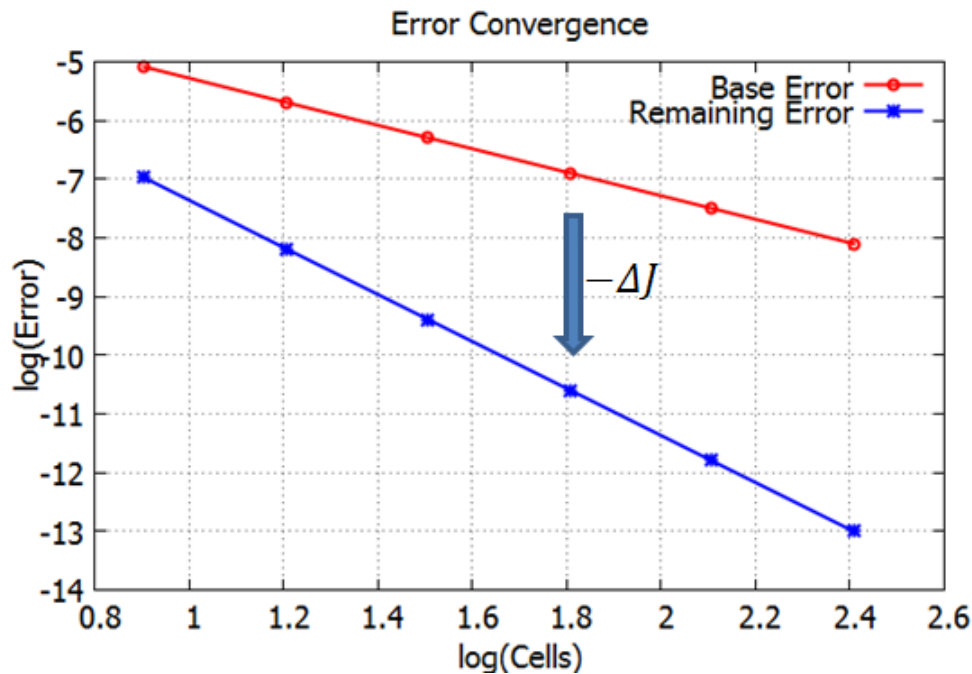
- Το σφάλμα πριν από τη διόρθωση (Base Error):

$$BE = |J - J_b| \quad (2.36)$$

- Το υπολειπόμενο σφάλμα μετά τη διόρθωση (Remaining Error):

$$RE = |J - J_{new}| \quad (2.37)$$

Προκειμένου να ελεγχθεί η συμπεριφορά της μεθόδου που παρουσιάστηκε, σε πυκνότερα ή αραιότερα πλέγματα, έγινε η παραμετρική μελέτη που φαίνεται στο Σχήμα 2.5. Το σχήμα αυτό δείχνει (πρακτικά σε διπλή λογαριθμική κλίμακα) το πώς μεταβάλλονται τα σφάλματα BE και RE , που υπολογίζονται από τις σχέσεις (2.36) και (2.37) αντίστοιχα, συναρτήσει του αριθμού των υποδιαίρεσεων του υπολογιστικού χωρίου. Οι ευθείες που φαίνονται έχουν κλίσεις -2 και -4 , το οποίο, αφενός επιβεβαιώνει ότι το αρχικό σφάλμα BE είναι 2ης τάξης και αφετέρου δείχνει ότι το υπολειπόμενο σφάλμα RE είναι τώρα 4ης τάξης. Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί ότι, ακόμα και στην περίπτωση όπου χρησιμοποιήθηκαν μόνο 8 υποδιαίρεσεις ($\Delta x_H = \frac{1}{8}$), το RE είναι περίπου 100 φορές μικρότερο από το αντίστοιχο BE , ενώ είναι μικρότερο και από το BE που θα είχαμε για 64 υποδιαίρεσεις (8 φορές πυκνότερο πλέγμα).



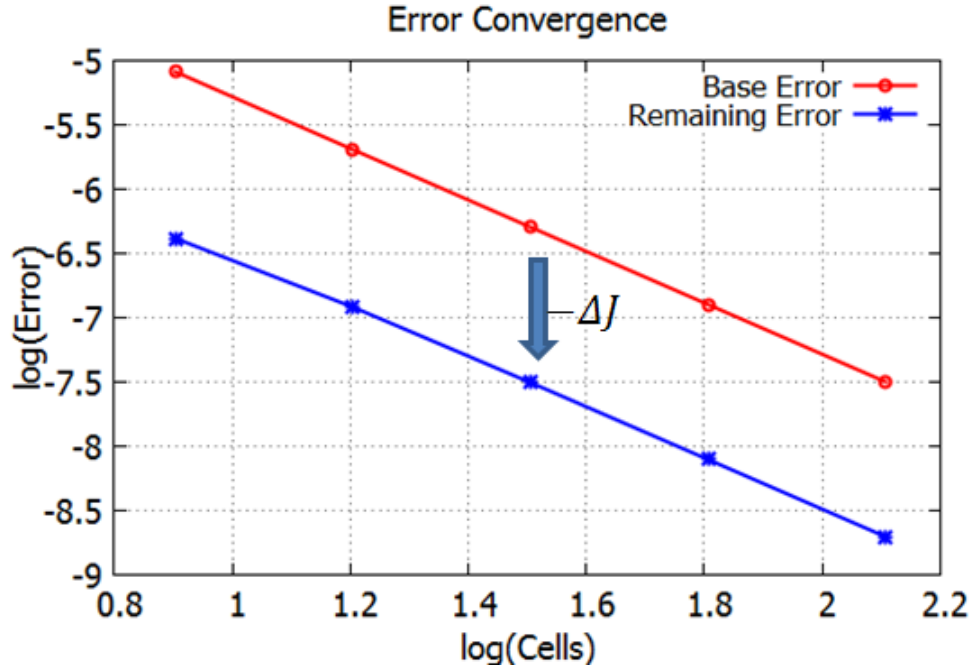
Σχήμα 2.5: Σύγκλιση του σφάλματος που αντιστοιχεί στη βασική τιμή του ολοκληρώματος J_b (κόκκινη καμπύλη) και του σφάλματος που αντιστοιχεί στη διορθωμένη τιμή J_{new} (μπλε καμπύλη). Οριζόντιος άξονας: Δεκαδικός λογάριθμος του εκάστοτε αριθμού των υποδιαίρεσεων (κελιών) του χωρίου. Κατακόρυφος άξονας: Δεκαδικός λογάριθμος του υπολογιζόμενου σφάλματος. Περίπτωση όπου χρησιμοποιήθηκαν αναλυτικές παράγωγοι για τον υπολογισμό του $f_h - f$.

2.3 Επανάληψη της μελέτης χωρίς αναλυτικές παραγώγους

Στην προηγούμενη ενότητα, ο διορθωτικός όρος ΔJ προσδιορίστηκε από την αριθμητική ολοκλήρωση της σχέσης (2.32), όπου το υπόλοιπο $f_h - f$ υπολογίστηκε στα

Gauss σημεία χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές εκφράσεις των f_h και f . Ωστόσο, σε πολλά προβλήματα δεν είναι εύκολος ο αναλυτικός υπολογισμός του υπολοίπου των εξισώσεων του ευθείας προβλήματος. Για το λόγο αυτό, έχει ενδιαφέρον να δούμε πώς αλλάζουν τα συνολικά αποτελέσματα της ενότητας 2.2, εάν το f_h προσδιοριστεί αριθμητικά.

Υπενθυμίζεται ότι το $f_h = \frac{d^2 u_h}{dx^2}$ προέκυψε χρησιμοποιώντας την αναλυτική έκφραση της 2ης παραγώγου του spline u_h , οι συντελεστές του οποίου δίνουν την τιμή της στους κόμβους. Στην ενότητα αυτή, ακολουθείται η διαδικασία της ενότητας 2.2, με μόνη διαφορά το ότι για τον προσδιορισμό του ΔJ (που εδώ έγινε με τη μέθοδο του τραπέζιου σε 4 φορές πυκνότερο πλέγμα από το εκάστοτε αρχικό), ο υπολογισμός του f_h στο πυκνό πλέγμα έγινε χρησιμοποιώντας κεντρικές πεπερασμένες διαφορές (2ης τάξης ακρίβεια). Η αριθμητική ολοκλήρωση της (2.32) έγινε με τη μέθοδο του τραπέζιου, έτσι ώστε το πυκνό πλέγμα (ισοδύναμο του Gauss πλέγματος της ενότητας 2.2) να αποτελείται από ισαπέχοντες κόμβους και να είναι απλή η έκφραση των πεπερασμένων διαφορών. Επαναλαμβάνοντας, λοιπόν, για αυτή την περίπτωση την παραμετρική μελέτη της υποενότητας 2.2.3, προκύπτουν τα αποτελέσματα που φαίνονται στο Σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6: Σύγκλιση του σφάλματος που αντιστοιχεί στη βασική τιμή του ολοκληρώματος J_b (κόκκινη καμπύλη) και του σφάλματος που αντιστοιχεί στη διορθωμένη τιμή J_{new} (μπλε καμπύλη). Οριζόντιος άξονας: Δεκαδικός λογάριθμος του εκάστοτε αριθμού των υποδιαίρεσεων (κελιών) του χωρίου. Κατακόρυφος άξονας: Δεκαδικός λογάριθμος του υπολογιζόμενου σφάλματος. Περίπτωση όπου χρησιμοποιήθηκαν πεπερασμένες διαφορές για τον υπολογισμό του $f_h - f$.

Το συμπέρασμα που προκύπτει από το Σχήμα 2.6 είναι ότι η διόρθωση του ολοκληρώματος είναι εφικτή και σε αυτή την περίπτωση, με τη διαφορά ότι το υπολειπόμενο σφάλμα είναι τώρα 2ης τάξης (κλίση -2 στο σχήμα) αντί για 4ης που ήταν προηγουμένως (όχι *superconvergent*). Το τελευταίο δεν σημαίνει ότι η μέθοδος παύει να είναι αποδοτική, καθώς η διόρθωση που επιτυγχάνεται συνεχίζει να είναι σημαντική.

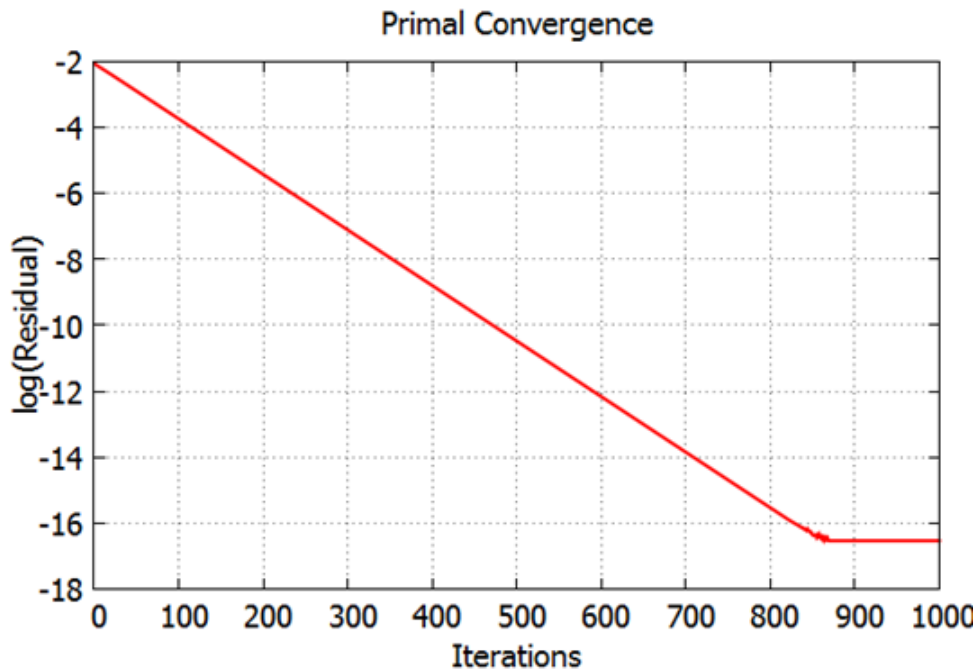
2.4 Επανάληψη του παραδείγματος αφήνοντας ασύγκλιτο το ευθύ πρόβλημα

Στην ενότητα αυτή, η μέθοδος που παρουσιάστηκε επεκτείνεται σε ένα νέο πεδίο εφαρμογών (καινοτομία της παρούσας διπλωματικής εργασίας). Μέχρι τώρα, η εξίσωση του ευθέος προβλήματος, μετά τη διακριτοποίηση, λυνόταν επακριβώς (πλήρης σύγκλιση). Ωστόσο, κάτι τέτοιο δεν είναι εύκολο (ορισμένες φορές αδύνατο) σε πολλά προβλήματα της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (π.χ. σε περίπλοκες γεωμετρίες όπου εμφανίζεται μια περιορισμένη μη-μονιμότητα στη ροή, η οποία δε μπορεί να αντιμετωπιστεί από χρονικά μόνιμους επιλύτες). Επομένως, έχει ενδιαφέρον ο έλεγχος της εφαρμογής της μεθόδου και σε τέτοιες περιπτώσεις, όπου η αριθμητική λύση της εξίσωσης του ευθέος προβλήματος δεν έχει συγκλίνει.

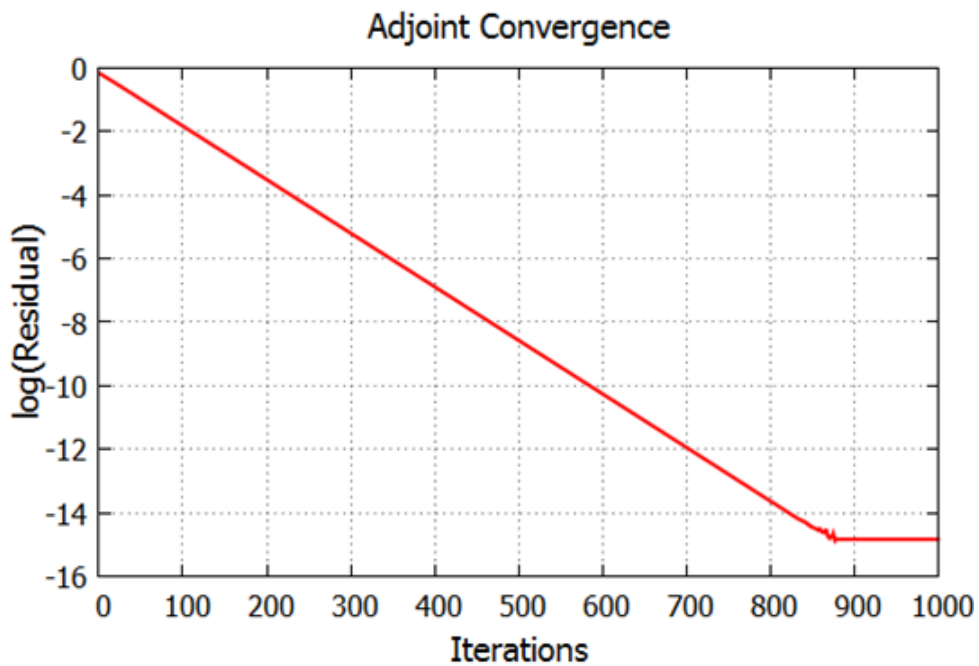
Αν και συνήθως η εξίσωση του ευθέος προβλήματος αφήνεται ασύγκλιτη εξαιτίας αριθμητικών δυσκολιών, στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης αυτής διακόπτεται **σκόπιμα** νωρίτερα και η λύση της συζυγούς εξίσωσης (που έχει συγκλίνει πλήρως) αναλαμβάνει τη διόρθωση του ολοκληρώματος που υπολογίζεται.

Υπενθυμίζεται ότι η διακριτοποίηση της εξίσωσης του ευθέος προβλήματος οδήγησε στο γραμμικό αλγεβρικό σύστημα (2.18), το οποίο στην ενότητα 2.2 επιλύθηκε επακριβώς χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Thomas. Αντ' αυτού, εδώ επιλέγεται η επαναληπτική μέθοδος επίλυσης Gauss-Seidel ([1]), η οποία δίνει τη δυνατότητα διακοπής της επίλυσης, σε έναν δεδομένο (από το χρήστη) αριθμό επαναλήψεων. Η ίδια μέθοδος χρησιμοποιείται και για την αριθμητική επίλυση της συζυγούς εξίσωσης, με τη διαφορά ότι εδώ ο αριθμός των επαναλήψεων είναι ο απαιτούμενος προκειμένου να έχουμε πλήρη σύγκλιση.

Στο Σχήμα 2.7 φαίνεται η σύγκλιση της εξίσωσης του ευθέος προβλήματος συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων της Gauss-Seidel μεθόδου, ενώ στο Σχήμα 2.8 φαίνεται η σύγκλιση της συζυγούς εξίσωσης. Το υπόλοιπο (residual) των εξισώσεων υπολογίζεται ως η RMS τιμή των τοπικών υπολοίπων. Τα αποτελέσματα προέκυψαν για μια περίπτωση όπου χρησιμοποιήθηκαν 17 κόμβοι, για τη διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου, ο αριθμός των οποίων δεν αλλάζει στους υπολογισμούς της ενότητας αυτής. Όπως φαίνεται, η πλήρης σύγκλιση των εξισώσεων επιτυγχάνεται κοντά στις 900 επαναλήψεις.

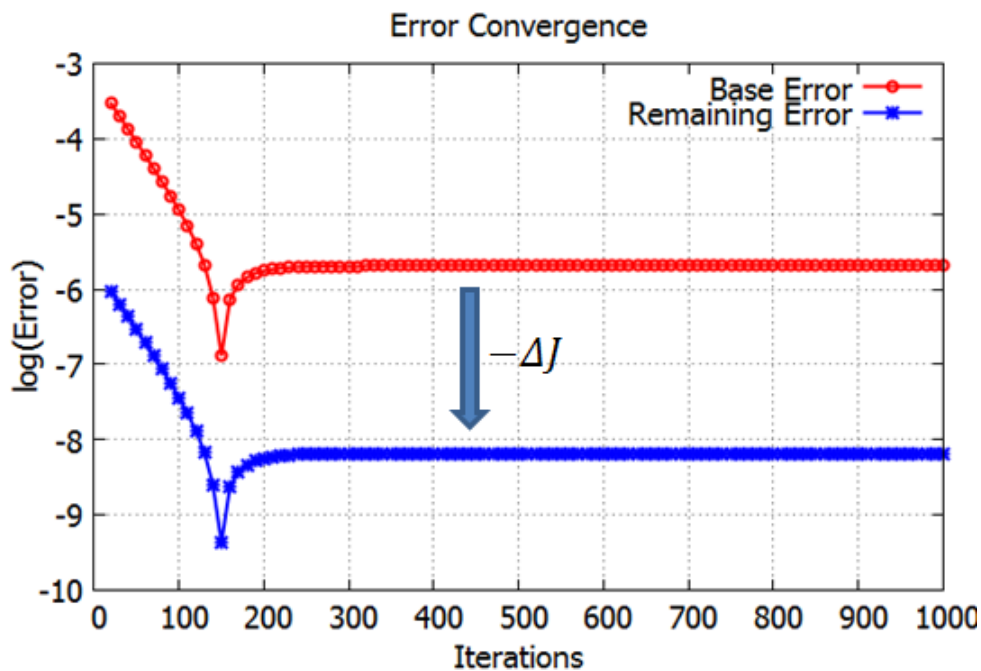


Σχήμα 2.7: Σύγκλιση της εξίσωσης του ευθέος προβλήματος, συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων. Οριζόντιος άξονας: Αριθμός επαναλήψεων Gauss-Seidel μεθόδου. Κατακόρυφος άξονας: Δεκαδικός λογάριθμος του υπολοίπου της εξίσωσης.



Σχήμα 2.8: Σύγκλιση της συζυγούς εξίσωσης, συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων. Οριζόντιος άξονας: Αριθμός επαναλήψεων Gauss-Seidel μεθόδου. Κατακόρυφος άξονας: Δεκαδικός λογάριθμος του υπολοίπου της εξίσωσης.

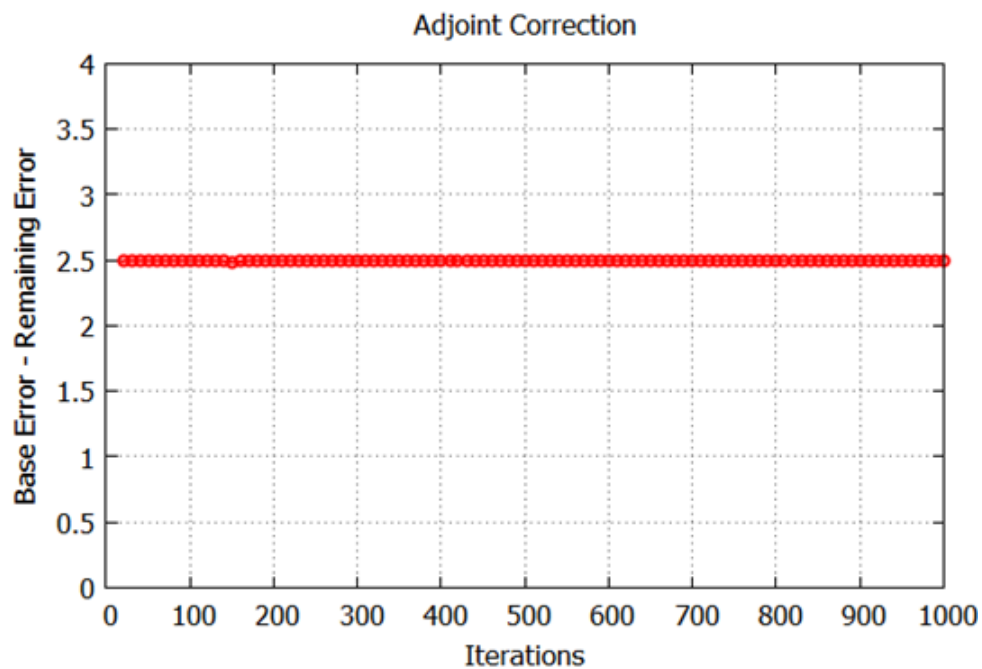
Στη συνέχεια, επαναλαμβάνεται η διαδικασία της ενότητας 2.2 για διάφορες τιμές του αριθμού των επαναλήψεων όπου διακόπτεται η επίλυση της εξίσωσης του ευθέος προβλήματος. Ο αριθμός αυτός χρησιμοποιείται δηλαδή ως παράμετρος. Σε κάθε περίπτωση, η συζυγής εξίσωση συγκλίνεται πλήρως. Τα αποτελέσματα της παραμετρικής αυτής μελέτης συνοψίζονται στο Σχήμα 2.9, όπου φαίνεται το πώς μεταβάλλονται τα σφάλματα BE και RE , συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων όπου διακόπηκε η επίλυση της εξίσωσης του ευθέος προβλήματος.



Σχήμα 2.9: Σύγκλιση του σφάλματος που αντιστοιχεί στη βασική τιμή του ολοκληρώματος J_b (κόκκινη καμπύλη) και του σφάλματος που αντιστοιχεί στη διορθωμένη τιμή J_{new} (μπλε καμπύλη). Οριζόντιος άξονας: Αριθμός επαναλήψεων όπου διακόπηκε η επίλυση της εξίσωσης του ευθέος προβλήματος. Κατακόρυφος άξονας: Δεκαδικός λογάριθμος του υπολογιζόμενου σφάλματος. Παράδειγμα για σταθερό πλέγμα με $\Delta x_H = \frac{1}{16}$.

Αφαιρώντας τις δύο καμπύλες του σχήματος 2.9, προκύπτει το Σχήμα 2.10, όπου η σταθερή ευθεία στην τιμή 2.5 δηλώνει ότι το υπολειπόμενο σφάλμα RE είναι διαρκώς περίπου 300 φορές μικρότερο από το αντίστοιχο αρχικό BE .

Το συμπέρασμα που προκύπτει από την ενότητα αυτή είναι ότι, ακόμα και σε περιπτώσεις όπου οι εξισώσεις του ευθέος προβλήματος αφήνονται ασύγκλιτες (το οποίο έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της ακρίβειας του υπολογιζόμενου ολοκληρώματος J_b), η μέθοδος που παρουσιάστηκε μπορεί να εφαρμοστεί και να διορθώσει την τιμή του ολοκληρώματος, χρησιμοποιώντας τη συζυγή λύση. Επιπλέον, η διόρθωση που επιτυγχάνεται φαίνεται να είναι σταθερή και ανεξάρτητη από το αν το ευθύ πρόβλημα έχει συγκλίνει ή όχι.

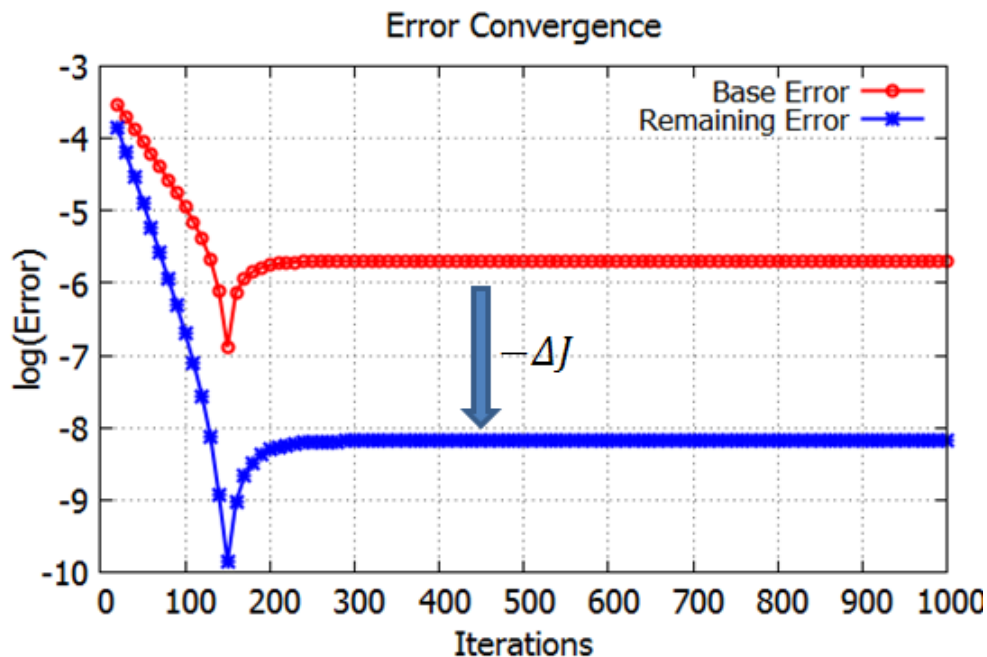


Σχήμα 2.10: Αποτέλεσμα της αφαίρεσης των δύο καμπυλών του σχήματος 2.9, ενδεικτικό του μεγέθους της διόρθωσης. Οριζόντιος άξονας: Αριθμός επαναλήψεων όπου διακόπηκε η επίλυση της εξίσωσης του ευθέως προβλήματος. Κατακόρυφος άξονας: Λογαριθμική διαφορά του υπολειπόμενου σφάλματος RE μετά τη διόρθωση, από το αντίστοιχο αρχικό BE .

2.5 Επανάληψη του παραδείγματος αφήνοντας ασύγκλιτο και το συζυγές πρόβλημα

Στην προηγούμενη ενότητα, η μέθοδος εφαρμόστηκε επιτυχώς σε μια περίπτωση όπου η εξίσωση του ευθέος προβλήματος αφέθηκε ασύγκλιτη, ενώ η συζυγής εξίσωση επιλύθηκε μέχρι πλήρους σύγκλισης. Ωστόσο, σε περιπτώσεις όπου το ευθύ πρόβλημα αντιμετωπίζει δυσκολίες σύγκλισης, το ίδιο συμβαίνει συνήθως και με το συζυγές πρόβλημα. Επομένως, προκειμένου η μέθοδος να γενικευτεί ακόμα περισσότερο, πρέπει να δοκιμαστεί και σε μια τέτοια περίπτωση, το οποίο γίνεται στην παρούσα ενότητα.

Επαναλαμβάνεται λοιπόν η παραμετρική μελέτη της προηγούμενης ενότητας, με τη διαφορά ότι τώρα διακόπτεται **σκόπιμα** η επίλυση και της συζυγούς εξίσωσης. Η παράμετρος είναι δηλαδή τώρα ο αριθμός των επαναλήψεων όπου διακόπηκε η επίλυση, τόσο της εξίσωσης του ευθέος προβλήματος όσο και της συζυγούς εξίσωσης (ίδιος αριθμός επαναλήψεων). Τα αποτελέσματα της παραμετρικής αυτής μελέτης συνοψίζονται στο Σχήμα 2.11, όπου φαίνεται το πώς μεταβάλλονται τα σφάλματα BE και RE , συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων όπου διακόπηκε η επίλυση των εξισώσεων.



Σχήμα 2.11: Σύγκλιση του σφάλματος που αντιστοιχεί στη βασική τιμή του ολοκληρώματος J_b (κόκκινη καμπύλη) και του σφάλματος που αντιστοιχεί στη διορθωμένη τιμή J_{new} (μπλε καμπύλη). Οριζόντιος άξονας: Αριθμός επαναλήψεων όπου διακόπηκε η επίλυση των εξισώσεων (πρωτεύουσας και συζυγούς). Κατακόρυφος άξονας: Δεκαδικός λογάριθμος του υπολογιζόμενου σφάλματος. Παράδειγμα για σταθερό πλέγμα με $\Delta x_H = \frac{1}{16}$.

Παρατηρούμε ότι η διόρθωση επιτυγχάνεται ακόμα και στην περίπτωση όπου η συζυγής λύση (που πρακτικά παρέχει τη διόρθωση) δεν έχει συγκλίνει πλήρως. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι η μέθοδος που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο αυτό μπορεί να εφαρμοστεί επιτυχώς και σε αρκετά πιο σύνθετα προβλήματα. Τέτοια προβλήματα αντιμετωπίζονται σε επόμενα κεφάλαια.

Κεφάλαιο 3

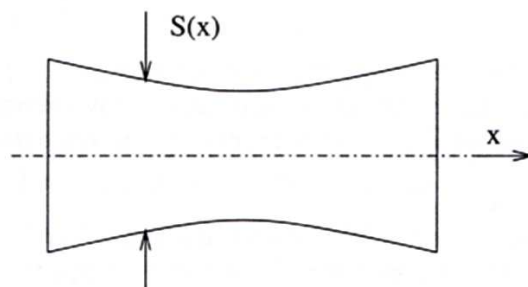
Αριθμητική Επίλυση Ψευδο-1D Ροής σε Αγωγό

3.1 Εισαγωγικά σχόλια

Η μέθοδος που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο θα εφαρμοστεί στο Κεφάλαιο 4 σε ένα ψευδο-1D πρόβλημα ροής. Για την εφαρμογή της μεθόδου είναι αρχικά απαραίτητη η αριθμητική επίλυση του ευθέος (primal) προβλήματος ροής, η οποία παρουσιάζεται στο παρόν κεφάλαιο.

3.2 Ευθύ 1D πρόβλημα ροής

Εξετάζεται ο υπολογισμός της ατμικής, συμπιεστής, ψευδο-1D ροής μέσα σε αγωγό. Θεωρείται δηλαδή ότι τα χαρακτηριστικά της ροής μεταβάλλονται μόνο κατά την αξονική κατεύθυνση του αγωγού. Η διατύπωση ως προς τον επιλύτη της χρονικά μόνιμης ροής που εξετάζεται, βασίζεται στη θεωρία των υπερβολικών συστημάτων, όπου εισάγεται ο ψευδοχρόνος με σκοπό την ενίσχυση της διαγώνιας κυριαρχίας.



Σχήμα 3.1: Ψευδο-1D ροή σε συγκλίνων - αποκλίνων αγωγό.

Η συνάρτηση $S(x)$ αντιστοιχεί στην κατανομή εμβαδού διατομής κατά μήκος του αγωγού και μπορεί να παρασταθεί ως μια παραμετρική καμπύλη Bezier ([1]).

3.3 Μαθηματική διατύπωση εξισώσεων ροής

Για το 1D πρόβλημα διατυπώνονται οι εξισώσεις (Euler) διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας ως ([2])

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u S)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho u S)}{\partial t} + \frac{\partial[(\rho u^2 + p)S]}{\partial x} &= p \frac{dS}{dx} \\ \frac{\partial(\rho E S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u H S)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

όπου ρ η πυκνότητα του ρευστού, u η ταχύτητα, E η ολική ενέργεια ανά μονάδα μάζας του ρευστού και H η ολική ενθαλπία, για τις οποίες ισχύουν οι χρήσιμες σχέσεις από τη θερμοδυναμική των τελείων αερίων:

$$\rho E = \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (3.2)$$

$$E = H - \frac{p}{\rho} \quad (3.3)$$

$$\rho E = \frac{\rho c^2}{\gamma(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (3.4)$$

$$p = (\gamma - 1) \rho e = (\gamma - 1) \left(\rho E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \quad (3.5)$$

και $e = c_v T$ είναι η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας του ρευστού, γ ο εκθέτης της ισεντροπικής μεταβολής τελείων αερίων, c_v ο συντελεστής θερμοχωρητικότητας υπό σταθερό όγκο, θεωρούμενος σταθερός για τέλεια αέρια, T η στατική θερμοκρασία και $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ η ταχύτητα του ήχου.

Οι εξισώσεις της ροής (3.1) μπορούν να διατυπωθούν στην ακόλουθη μορφή (συντηρητική γραφή):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \rho u \\
\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} &= -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \rho u^2 \\
\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u H)}{\partial x} &= -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \rho u H
\end{aligned} \tag{3.6}$$

ή, εισάγοντας διανυσματική γραφή,

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \vec{q} \tag{3.7}$$

όπου \vec{U} το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών, \vec{f} το διάνυσμα της ατριβούς ροής και \vec{q} το διάνυσμα των όρων πηγής που οφείλεται στη μεταβολή της διατομής S κατά μήκος του αγωγού, τα οποία ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E_t \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho E + p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ (\gamma - 1)E_t + \frac{m^2}{\rho} \left(\frac{3-\gamma}{2}\right) \\ \frac{m}{\rho} \left[\gamma E_t - (\gamma - 1) \frac{m^2}{2\rho} \right] \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

$$\vec{q} = -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ u(\rho E + p) \end{bmatrix} = -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \begin{bmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} \\ \frac{m}{\rho} \left[\gamma E_t - (\gamma - 1) \frac{m^2}{2\rho} \right] \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Οι εξισώσεις της ροής (3.7), χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγωγής, ξαναγράφονται ως:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{q} \tag{3.11}$$

όπου A το Ιακωβιανό μητρώο των συντηρητικών μεταβλητών

$$A = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ -\gamma u E + (\gamma-1)u^3 & \gamma E - \frac{3}{2}(\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

με τρεις πραγματικές ιδιοτιμές, τις $\lambda_1 = u$, $\lambda_2 = u + c$, $\lambda_3 = u - c$.

Ωστόσο, επειδή μας ενδιαφέρει η χρονικά μόνιμη ροή, απαλείφουμε από την εξίσωση (3.11) το χρονικό όρο και προχωρώντας, στη συνέχεια, σε χωρική διακριτοποίηση προκύπτει:

$$\vec{R}_i(\vec{U}) = \left[A \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right]_i \Delta x_i - \vec{q}_i \Delta x_i = 0 \quad , \forall i = 2, \dots, np - 1 \quad (3.13)$$

όπου με np συμβολίζεται ο αριθμός των κόμβων του πλέγματος, ενώ το σύμβολο \vec{R} παριστάνει το υπόλοιπο (residual) των εξισώσεων ροής. Οι οριακές συνθήκες στην είσοδο και την έξοδο (η παρουσίαση των οποίων γίνεται αναλυτικότερα στην ενότητα 3.5) γράφονται αντίστοιχα στη συμβολική γραφή:

$$\vec{R}_1 = 0 \quad , \quad \vec{R}_{np} = 0 \quad (3.14)$$

Όπως είναι προφανές, για να ικανοποιούνται οι εξισώσεις ροής, πρέπει ο τελεστής ροής \vec{R} σε κάθε κόμβο να είναι ίσος με 0. Επομένως, πρέπει να υπολογιστεί το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών \vec{U} για το οποίο μηδενίζεται το υπόλοιπο.

Η επίλυση του προβλήματος ροής γίνεται μέσω της δέλτα-διατύπωσης (δ -formulation). Δηλαδή:

$$\left[I \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right] \delta \vec{U} = -\vec{R} \quad (3.15)$$

όπου ο ψευδο-χρονικός όρος εισάγεται (παρόλο που η ροή θεωρείται χρονικά μόνιμη) ώστε να εκμεταλλευτούμε τις ιδιότητες των υπερβολικών συστημάτων και να εφαρμοστεί η τεχνική της χρονο-προέλασης (time-marching) για την επίλυση του πεδίου ροής. Επιπλέον, στην εξίσωση (3.15) τα εμπλεκόμενα διανύσματα είναι:

$$\vec{R} = \left[\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_{np-1}, \vec{R}_{np} \right]^T \quad (3.16)$$

$$\delta \vec{U} = \left[\delta \vec{U}_1, \delta \vec{U}_2, \dots, \delta \vec{U}_{np-1}, \delta \vec{U}_{np} \right]^T \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_1} & \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_2} & \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_3} & \cdots & \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_{np}} \\ \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_1} & \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_2} & \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_3} & \cdots & \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_{np}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_1} & \frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_2} & \frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_3} & \cdots & \frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np}} \\ \frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_1} & \frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_2} & \frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_3} & \cdots & \frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_{np}} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

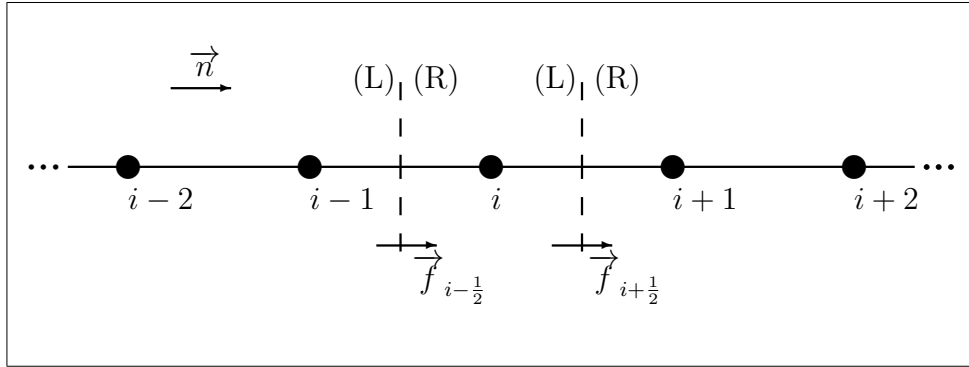
Τέλος, επειδή το δεξί μέλος της εξίσωσης (3.15) είναι αυτό που καθορίζει την ακρίβεια, μας ενδιαφέρει η διακριτοποίηση του \vec{R} να γίνει με ακρίβεια 2ης τάξης, ώστε η λύση που θα προκύψει να είναι ικανοποιητική. Ωστόσο, το μητρώο $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$ του αριστερού μέλους συναντάται στις συζυγείς εξισώσεις που θα παρουσιαστούν στο επόμενο κεφάλαιο. Συνεπώς, ενώ δεν είναι απαραίτητος ο υπολογισμός και αυτού με 2ης τάξης ακρίβεια για την επίλυση του ευθέος προβλήματος ροής, επιλέγεται αυτή η τάξη ακρίβειας ώστε να παραχθούν σωστότερα αποτελέσματα από τις συζυγείς εξισώσεις (Κεφάλαιο 4).

3.4 Διακριτοποίηση ευθέος προβλήματος με ακρίβεια δεύτερης τάξης

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστεί αναλυτικά η διακριτοποίηση του ευθέος προβλήματος (δηλαδή των εξισώσεων ροής) με δεύτερης τάξης ακρίβεια στους εσωτερικούς κόμβους. Αρχικά, χρησιμοποιείται η μέθοδος διαχωρισμού των διανυσμάτων ροής (Flux Vector Splitting ή FVS [20]) με σχήμα προεκβολής MUSCL (Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws) για τη διακριτοποίηση του τελεστή ροής \vec{R} , χωρίς όμως να εφαρμοστεί συνάρτηση περιορισμού ([30]). Στη συνέχεια, υπολογίζεται το μητρώο $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$ με ακρίβεια δεύτερης τάξης, ως αποτέλεσμα της παραγωγίσιμης του τελεστή ροής \vec{R} που προκύπτει από τη μέθοδο FVS.

Μια διαφορετική από την (3.13) έκφραση του διακριτοποιημένου τελεστή ροής είναι η:

$$\vec{R}_i(\vec{U}) = \left(\vec{f}_{i+\frac{1}{2}} - \vec{f}_{i-\frac{1}{2}} \right) - \vec{q}_i \Delta x_i = 0 \quad (3.19)$$



Σχήμα 3.2: Διακριτοποίηση δεύτερης τάξης ακρίβειας του διανύσματος της ατριβούς ροής με τη μέθοδο FVS.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τη μέθοδο FVS δεύτερης τάξης ακρίβειας, έχουμε για τα διανύσματα της ροής:

$$\vec{f}_{i+\frac{1}{2}} = \vec{f}^- \left(\vec{U}_{i+\frac{1}{2}}^R \right) + \vec{f}^+ \left(\vec{U}_{i+\frac{1}{2}}^L \right) \quad (3.20)$$

$$\vec{f}_{i-\frac{1}{2}} = \vec{f}^- \left(\vec{U}_{i-\frac{1}{2}}^R \right) + \vec{f}^+ \left(\vec{U}_{i-\frac{1}{2}}^L \right) \quad (3.21)$$

$$\mu\epsilon \quad \vec{f}^- (\vec{U}) = A^- \vec{U} \quad , \quad \vec{f}^+ (\vec{U}) = A^+ \vec{U} \quad (3.22)$$

όπου τα $\vec{U}_{i+\frac{1}{2}}^R$ και $\vec{U}_{i+\frac{1}{2}}^L$ αντιστοιχούν στις δεξιά (R=Right) και αριστερά (L=Left) καταστάσεις της διαχωριστικής γραμμής, στο μεσόκομβο του σχήματος 3.2 και υπολογίζονται εφαρμόζοντας το ανάπτυγμα Taylor, σύμφωνα με τις σχέσεις που ακολουθούν.

$$\vec{U}_{i+\frac{1}{2}}^L = \vec{U}_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_i (x_{i+1} - x_i) \quad (3.23)$$

Εφαρμόζοντας κεντρικές διαφορές (2ης τάξης ακρίβεια) για μη ισαπέχοντες κόμβους έχουμε:

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_i = d_i^A \vec{U}_{i-1} + d_i^B \vec{U}_i + d_i^C \vec{U}_{i+1} \quad (3.24)$$

όπου, ο κάτω δείκτης των συντελεστών d δηλώνει τον κόμβο του πλέγματος στον οποίο γίνεται η παραγωγή, ενώ ο πάνω δείκτης δηλώνει τον όρο τον οποίο πολλαπλασιάζει (οι συντελεστές αυτοί μπορούν να αναζητηθούν στο Παράρτημα A' της διπλωματικής εργασίας [6]).

Με την ίδια λογική το $\vec{U}_{i+\frac{1}{2}}^R$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\vec{U}_{i+\frac{1}{2}}^R = \vec{U}_{i+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_{i+1} (x_{i+1} - x_i) \quad (3.25)$$

όπου εφαρμόζοντας και πάλι κεντρικές διαφορές έχουμε:

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_{i+1} = d_{i+1}^A \vec{U}_i + d_{i+1}^B \vec{U}_{i+1} + d_{i+1}^C \vec{U}_{i+2} \quad (3.26)$$

Αντίστοιχα για τα $\vec{U}_{i-\frac{1}{2}}^R$ και $\vec{U}_{i-\frac{1}{2}}^L$ ισχύουν τα εξής:

$$\vec{U}_{i-\frac{1}{2}}^R = \vec{U}_i - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_i (x_i - x_{i-1}) \quad (3.27)$$

όπου το $\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_i$ υπολογίζεται από τη σχέση (3.24), ενώ

$$\vec{U}_{i-\frac{1}{2}}^L = \vec{U}_{i-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_{i-1} (x_i - x_{i-1}) \quad (3.28)$$

όπου εφαρμόζοντας κεντρικές διαφορές έχουμε:

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_{i-1} = d_{i-1}^A \vec{U}_{i-2} + d_{i-1}^B \vec{U}_{i-1} + d_{i-1}^C \vec{U}_i \quad (3.29)$$

Χρησιμοποιώντας τις ανωτέρω σχέσεις, η εξίσωση (3.20) μετασχηματίζεται στην

$$\begin{aligned} \vec{f}_{i+\frac{1}{2}} = & f^- \left[\vec{U}_{i+1} - \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(d_{i+1}^A \vec{U}_i + d_{i+1}^B \vec{U}_{i+1} + d_{i+1}^C \vec{U}_{i+2}) \right] \\ & + f^+ \left[\vec{U}_i + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(d_i^A \vec{U}_{i-1} + d_i^B \vec{U}_i + d_i^C \vec{U}_{i+1}) \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

και μετά από πράξεις

$$\begin{aligned}
\vec{f}_{i+\frac{1}{2}} &= \left[\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)d_i^A A_{i+\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_{i-1} \\
&+ \left[-\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)d_{i+1}^A A_{i+\frac{1}{2}}^- + \left(1 + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)d_i^B \right) A_{i+\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_i \\
&+ \left[\left(1 - \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)d_{i+1}^B \right) A_{i+\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)d_i^C A_{i+\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_{i+1} \\
&+ \left[-\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)d_{i+1}^C A_{i+\frac{1}{2}}^- \right] \vec{U}_{i+2}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Με τον ίδιο τρόπο, η σχέση (3.21) γράφεται

$$\begin{aligned}
\vec{f}_{i-\frac{1}{2}} &= \left[\frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})d_{i-1}^A A_{i-\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_{i-2} \\
&+ \left[-\frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})d_i^A A_{i-\frac{1}{2}}^- + \left(1 + \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})d_{i-1}^B \right) A_{i-\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_{i-1} \\
&+ \left[\left(1 - \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})d_i^B \right) A_{i-\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})d_{i-1}^C A_{i-\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_i \\
&+ \left[-\frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})d_i^C A_{i-\frac{1}{2}}^- \right] \vec{U}_{i+1}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (3.19) τις εκφράσεις των $\vec{f}_{i+\frac{1}{2}}$ και $\vec{f}_{i-\frac{1}{2}}$ από τις σχέσεις (3.31) και (3.32) αντίστοιχα, προκύπτει μια εξίσωση της ακόλουθης μορφής, η οποία ισχύει για τους κόμβους $i = 3 \dots np - 2$:

$$\begin{aligned}
\vec{R}_i(\vec{U}) &= \left[bbe f_i \vec{U}_{i-2} + be f_i \vec{U}_{i-1} + diag_i \vec{U}_i + aft_i \vec{U}_{i+1} + aaft_i \vec{U}_{i+2} \right] \\
&- \vec{q}_i \Delta x_i = 0
\end{aligned} \tag{3.33}$$

όπου οι συντελεστές κωδικοποιούνται με τα ευκολομνημόνευτα ονόματα *diag* (διαγώνιος), *aft*, *aaft* (επόμενοι δύο) και *bef*, *bbef* (προηγούμενοι δύο κόμβοι).

Ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Παράρτημα B' της [6] για τον τρόπο εύρεσης των μητρώων A^+ , A^- που συναντώνται στις σχέσεις (3.31) και (3.32). Τα ροϊκά μεγέθη που εμφανίζονται στον υπολογισμό αυτών των μητρώων αντιστοιχούν στο μέσο διάνυσμα του εκάστοτε μεσόκομβου, είναι δηλαδή για τους $A_{i+\frac{1}{2}}^{+/-}$:

$$\vec{U}_{mid} = \frac{\vec{U}_{i+\frac{1}{2}}^R + \vec{U}_{i+\frac{1}{2}}^L}{2} \quad (3.34)$$

ενώ αντίστοιχα, για τους $A_{i-\frac{1}{2}}^{+/-}$:

$$\vec{U}_{mid} = \frac{\vec{U}_{i-\frac{1}{2}}^R + \vec{U}_{i-\frac{1}{2}}^L}{2} \quad (3.35)$$

Από τις σχέσεις (3.31) έως (3.35) μπορεί να υπολογισθεί ο τελεστής της ροής \vec{R} . Ωστόσο, για την επίλυση της ροής με δ-διατύπωση είναι απαραίτητη η προσέγγιση και της παραγώγου $\frac{d\vec{R}}{d\vec{U}}$. Διαφορίζοντας τη σχέση (3.33) ως προς τις κομβικές τιμές των \vec{U} και γνωρίζοντας ότι (Παράρτημα Γ' της [7]):

$$\frac{\partial A}{\partial \vec{U}} \vec{U} = 0 \quad (3.36)$$

έχουμε για τους κόμβους $i = 3 \dots np - 2$ τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\frac{\partial \vec{R}_i}{\partial \vec{U}_{i-2}} = b b e f_i = -\frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})d_{i-1}^A A_{i-\frac{1}{2}}^+ \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial \vec{U}_{i-1}} &= b e f_i \\ &= \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)d_i^A A_{i+\frac{1}{2}}^+ \\ &\quad - \left[-\frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})d_i^A A_{i-\frac{1}{2}}^- + \left(1 + \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})d_{i-1}^B \right) A_{i-\frac{1}{2}}^+ \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{R}_i}{\partial \vec{U}_i} &= \text{diag}_i - \frac{\partial \vec{q}_i}{\partial \vec{U}_i} \Delta x_i \\
&= -\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) d_{i+1}^A A_{i+\frac{1}{2}}^- + \left(1 + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) d_i^B\right) A_{i+\frac{1}{2}}^+ \\
&\quad - \left[\left(1 - \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1}) d_i^B\right) A_{i-\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1}) d_{i-1}^C A_{i-\frac{1}{2}}^+ \right] \\
&\quad - \frac{\partial \vec{q}_i}{\partial \vec{U}_i} \Delta x_i
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{R}_i}{\partial \vec{U}_{i+1}} &= a f t_i \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) d_{i+1}^B\right) A_{i+\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) d_i^C A_{i+\frac{1}{2}}^+ \\
&\quad + \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1}) d_i^C A_{i-\frac{1}{2}}^-
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\frac{\partial \vec{R}_i}{\partial \vec{U}_{i+2}} = a a f t_i = -\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) d_{i+1}^C A_{i+\frac{1}{2}}^- \tag{3.41}$$

ενώ ισχύει ότι:

$$\frac{\partial \vec{R}_i}{\partial \vec{U}_j} = 0 \quad , \quad j \neq i-2, i-1, i, i+1, i+2 \tag{3.42}$$

Τέλος, ο όρος $\frac{\partial \vec{q}_i}{\partial \vec{U}_i}$ υπολογίζεται από παραγωγή της εξίσωσης (3.10). Έτσι έχουμε:

$$\frac{\partial \vec{q}_i}{\partial \vec{U}_i} = -\frac{1}{S_i} \left[\frac{dS}{dx} \right]_i \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 & 2u & 0 \\ -\gamma u E + (\gamma - 1)u^3 & \gamma E - \frac{3}{2}(\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix}_i \tag{3.43}$$

ενώ για $i \neq j$ είναι $\frac{\partial \vec{q}_i}{\partial \vec{U}_j} = 0$.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να επισημανθεί ότι ο τελεστής \vec{R} είναι δυνατό να υπολογισθεί από τη σχέση:

$$\vec{R}_i(\vec{U}) = \left(\vec{f}_{i+\frac{1}{2}} - \vec{f}_{(i-1)+\frac{1}{2}} \right) - \vec{q}_i \Delta x_i = 0 \quad (3.44)$$

αντί της (3.19), αποφεύγοντας δηλαδή τον υπολογισμό του $\vec{f}_{i-\frac{1}{2}}$. Ωστόσο, εδώ έγινε αναλυτική παρουσίαση για λόγους πληρότητας.

Επίσης, αν οι οριακές συνθήκες $\vec{R}_1 = 0$ και $\vec{R}_{np} = 0$ είναι διακριτοποιημένες με δεύτερης τάξης ακρίβεια και παραγωγιστούν, όπως θα αποδειχθεί και αναλυτικά στην ενότητα (3.5), θα έχουμε:

$$\frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_j} = 0 \quad , \forall j = 4, \dots, np \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_j} = 0 \quad , \forall j = 1, \dots, np - 3 \quad (3.46)$$

Επομένως, μένει η απόδειξη των σχέσεων για τους ειδικούς κόμβους $i = 2$ και $i = np - 1$. Για τον κόμβο $i = 2$ δεν υπάρχει προ-προηγούμενος κόμβος και έτσι η μορφή του τελεστή της ροής θα είναι:

$$\vec{R}_2 = \left[bef_2 \vec{U}_1 + diag_2 \vec{U}_2 + aft_2 \vec{U}_3 + aaft_2 \vec{U}_4 \right] - \vec{q}_2 \Delta x_2 = 0 \quad (3.47)$$

Εφαρμόζονται και πάλι οι σχέσεις (3.19) έως (3.22), καθώς και οι σχέσεις (3.23), (3.25), (3.27), (3.28) που δίνουν τα διανύσματα των συντηρητικών μεταβλητών στους μεσόκομβους. Ωστόσο, δεν είναι δυνατή η χρήση κεντρικών διαφορών για τον υπολογισμό της παραγώγου $\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_1$. Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα, χρησιμοποιείται πρόσω παραγωγή 2ης τάξης ακρίβειας (σχέσεις Παραρτήματος A' της [6]) και έχουμε:

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_1 = d_1^A \vec{U}_1 + d_1^B \vec{U}_2 + d_1^C \vec{U}_3 \quad (3.48)$$

Αντίστοιχα, στην εφαρμογή των σχέσεων για τον κόμβο $np - 1$, το πρόβλημα της μη ύπαρξης του μεθεπόμενου κόμβου εμφανίζεται στον υπολογισμό της παραγώγου $\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_{np}$ και αντιμετωπίζεται εφαρμόζοντας πίσω παραγωγή 2ης τάξης ακρίβειας (Παράρτημα A' της [6]), οπότε:

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_{np} = d_{np}^A \vec{U}_{np} + d_{np}^B \vec{U}_{np-1} + d_{np}^C \vec{U}_{np-2} \quad (3.49)$$

το οποίο οδηγεί στη διατύπωση του τελεστή της ροής στη μορφή:

$$\begin{aligned} \vec{R}_{np-1} &= \left[b b e f_{np-1} \vec{U}_{np-3} + b e f_{np-1} \vec{U}_{np-2} + \text{diag}_{np-1} \vec{U}_{np-1} + a f t_{np-1} \vec{U}_{np} \right] \\ &- \vec{q}_{np-1} \Delta x_{np-1} = 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Εφαρμόζοντας τις ανωτέρω εξισώσεις, καταλήγουμε στις ακόλουθες εκφράσεις των παραγώγων.

Κόμβος $i = 2$:

Η εξίσωση για το $\vec{f}_{i+\frac{1}{2}}$ είναι η (3.31) και γραμμένη στο συγκεκριμένο κόμβο δίνει

$$\begin{aligned} \vec{f}_{2+\frac{1}{2}} &= \left[\frac{1}{2}(x_3 - x_2) d_2^A A_{2+\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_1 \\ &+ \left[-\frac{1}{2}(x_3 - x_2) d_3^A A_{2+\frac{1}{2}}^- + \left(1 + \frac{1}{2}(x_3 - x_2) d_2^B \right) A_{2+\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_2 \\ &+ \left[\left(1 - \frac{1}{2}(x_3 - x_2) d_3^B \right) A_{2+\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_3 - x_2) d_2^C A_{2+\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_3 \\ &+ \left[-\frac{1}{2}(x_3 - x_2) d_3^C A_{2+\frac{1}{2}}^- \right] \vec{U}_4 \end{aligned} \quad (3.51)$$

ενώ για το $\vec{f}_{2-\frac{1}{2}}$, χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.48) αντί της (3.29), καταλήγουμε

$$\begin{aligned} \vec{f}_{2-\frac{1}{2}} &= \left[-\frac{1}{2}(x_2 - x_1) d_2^A A_{2-\frac{1}{2}}^- + \left(1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) d_1^A \right) A_{2-\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_1 \\ &+ \left[\left(1 - \frac{1}{2}(x_2 - x_1) d_2^B \right) A_{2-\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) d_1^B A_{2-\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_2 \\ &+ \left[-\frac{1}{2}(x_2 - x_1) d_2^C A_{2-\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) d_1^C A_{2-\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_3 \end{aligned} \quad (3.52)$$

Αντικαθιστώντας τέλος τις (3.51) και (3.52) στην (3.19) και παραγωγίζοντας ως προς \vec{U} έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_1} &= bef_2 \\
&= \left[\frac{1}{2}(x_3 - x_2)d_2^A A_{2+\frac{1}{2}}^+ \right] \\
&\quad - \left[-\frac{1}{2}(x_2 - x_1)d_2^A A_{2-\frac{1}{2}}^- + \left(1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)d_1^A \right) A_{2-\frac{1}{2}}^+ \right] \quad (3.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_2} &= diag_2 - \frac{\partial \vec{q}_2}{\partial \vec{U}_2} \Delta x_2 \\
&= \left[-\frac{1}{2}(x_3 - x_2)d_3^A A_{2+\frac{1}{2}}^- + \left(1 + \frac{1}{2}(x_3 - x_2)d_2^B \right) A_{2+\frac{1}{2}}^+ \right] \\
&\quad - \left[\left(1 - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)d_2^B \right) A_{2-\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)d_1^A A_{2-\frac{1}{2}}^+ \right] \\
&\quad - \frac{\partial \vec{q}_2}{\partial \vec{U}_2} \Delta x_2 \quad (3.54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_3} &= aft_2 \\
&= \left[\left(1 - \frac{1}{2}(x_3 - x_2)d_3^B \right) A_{2+\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_3 - x_2)d_2^C A_{2+\frac{1}{2}}^+ \right] \\
&\quad - \left[-\frac{1}{2}(x_2 - x_1)d_2^C A_{2-\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)d_1^C A_{2-\frac{1}{2}}^+ \right] \quad (3.55)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_4} = aaft_2 = -\frac{1}{2}(x_3 - x_2)d_3^C A_{2+\frac{1}{2}}^- \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_j} = 0 \quad , \quad j > 4 \quad (3.57)$$

Κόμβος $i = np - 1$:

Για το $\vec{f}_{(np-1)+\frac{1}{2}}$, χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.49) αντί της (3.26), έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{f}_{(np-1)+\frac{1}{2}} = & \left[-\frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np}^C A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np-1}^A A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_{np-2} \\ & + \left[-\frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np}^B A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^- + \left(1 + \frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np-1}^B \right) A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_{np-1} \\ & + \left[\left(1 - \frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np}^A \right) A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np-1}^C A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_{np} \end{aligned} \quad (3.58)$$

ενώ το $\vec{f}_{(np-1)-\frac{1}{2}}$ προκύπτει από τη σχέση (3.32) που για το συγκεκριμένο i δίνει

$$\begin{aligned} \vec{f}_{(np-1)-\frac{1}{2}} = & \left[\frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-2}^A A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_{np-3} \\ & + \left[-\frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-1}^A A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^- + \left(1 + \frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-2}^B \right) A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_{np-2} \\ & + \left[\left(1 - \frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-1}^B \right) A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-2}^C A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_{np-1} \\ & + \left[-\frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-1}^C A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^- \right] \vec{U}_{np} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Αντικαθιστώντας τέλος τις (3.58) και (3.59) στην (3.19) και παραγωγίζοντας ως προς \vec{U} έχουμε:

$$\frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np-3}} = b b e f_{np-1} = -\frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-2}^A A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^+ \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np-2}} = & b e f_{np-1} \\ = & \left[-\frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np}^C A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np-1}^A A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^+ \right] \\ & - \left[-\frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-1}^A A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^- + \left(1 + \frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-2}^B \right) A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^+ \right] \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np-1}} &= \text{diag}_{np-1} - \frac{\partial \vec{q}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np-1}} \Delta x_{np-1} \\
&= \left[-\frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np}^B A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^- + \left(1 + \frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np-1}^B\right) A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^+ \right] \\
&\quad - \left[\left(1 - \frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-1}^B\right) A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-2}^C A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^+ \right] \\
&\quad - \frac{\partial \vec{q}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np-1}} \Delta x_{np-1} \tag{3.62}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np}} &= \text{aft}_{np-1} \\
&= \left[\left(1 - \frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np}^A\right) A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np-1}^C A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^+ \right] \\
&\quad - \left[-\frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-1}^C A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^- \right] \tag{3.63}
\end{aligned}$$

Συμπερασματικά, το μητρώο $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$ είναι **block** πενταδιαγώνιο, όπου κάθε στοιχείο του αποτελεί έναν 3×3 πίνακα. Η μορφή του μητρώου δίνεται παρακάτω:

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_1} & \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_2} & \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_1} & \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_2} & \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_3} & \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_4} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \vec{R}_3}{\partial \vec{U}_1} & \frac{\partial \vec{R}_3}{\partial \vec{U}_2} & \frac{\partial \vec{R}_3}{\partial \vec{U}_3} & \frac{\partial \vec{R}_3}{\partial \vec{U}_4} & \frac{\partial \vec{R}_3}{\partial \vec{U}_5} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \vec{R}_4}{\partial \vec{U}_2} & \frac{\partial \vec{R}_4}{\partial \vec{U}_3} & \frac{\partial \vec{R}_4}{\partial \vec{U}_4} & \frac{\partial \vec{R}_4}{\partial \vec{U}_5} & \frac{\partial \vec{R}_4}{\partial \vec{U}_6} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np-3}} & \frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np-2}} & \frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np-1}} & \frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_{np-2}} & \frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_{np-1}} & \frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_{np}} \end{bmatrix}$$

3.5 Διακριτοποίηση οριακών συνθηκών

Στην ενότητα αυτή γίνεται η περιγραφή του τρόπου επιβολής των οριακών συνθηκών στο πρόβλημα της ροής και η παραγωγή τους ως προς τις μεταβλητές της ροής. Για υποηχητική ροή, οι οριακές συνθήκες στην είσοδο είναι:

$$p_{t1} = const_1 \quad (3.64)$$

$$T_{t1} = const_2 \quad (3.65)$$

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_1 = 0 \quad (3.66)$$

ενώ για την έξοδο έχουμε:

$$p_{np} = \frac{p_{t1}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{is(out)}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = const_3 \quad (3.67)$$

$$\left(\frac{d\rho}{dx}\right)_{np} = 0 \quad (3.68)$$

$$\left(\frac{d(\rho u)}{dx}\right)_{np} = 0 \quad (3.69)$$

Όπως είναι εμφανές από τις παραπάνω εξισώσεις, στην είσοδο καθορίζονται από το χρήστη σταθερές τιμές στα ολικά θερμοδυναμικά μεγέθη της ροής (p_t, T_t), ενώ στην έξοδο έχουμε σταθερή τιμή της στατικής πίεσης, η οποία καθορίζεται από τον αριθμό $M_{is(out)}$ και την ολική πίεση στην είσοδο, μιας και πρόκειται για ισεντροπική ροή (εξισώσεις Euler). Επιπλέον, επειδή η μορφολογία του αγωγού που αντιμετωπίζεται, στο πλαίσιο αυτής της διπλωματικής εργασίας, διαθέτει σταθερής διατομής S τμήματα στην είσοδο και την έξοδο, επιβάλλονται οριακές συνθήκες τύπου Neumann για τη στατική πίεση (είσοδος), καθώς και για την πυκνότητα και την ταχύτητα (έξοδος). Πιο αναλυτικά, για την είσοδο ισχύει $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, ενώ για την έξοδο έχουμε $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$. Η διακριτοποίηση των Neumann οριακών συνθηκών γίνεται με μονόπλευρες εκφράσεις, σύμφωνα με το Παράρτημα Α' της [6].

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν συνοπτικά να γραφούν μέσω του τελεστή ροής. Πιο συγκεκριμένα, για τον πρώτο κόμβο θα έχουμε:

$$\vec{R}_1 = [p_{t1} - const_1, T_{t1} - const_2, d_1^A p_1 + d_1^B p_2 + d_1^C p_3] \quad (3.70)$$

ενώ για τον τελευταίο κόμβο θα έχουμε:

$$\vec{R}_{np} = [p_{np} - const_3, d_{np}^C \rho_{np-2} + d_{np}^B \rho_{np-1} + d_{np}^A \rho_{np}, d_{np}^C (\rho u)_{np-2} + d_{np}^B (\rho u)_{np-1} + d_{np}^A (\rho u)_{np}] \quad (3.71)$$

Στη συνέχεια, οι παραπάνω εξισώσεις διαφορίζονται ώστε να υπολογιστούν οι όροι $\frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_j}$ και $\frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_j}$ $j = 1, \dots, np$.

Πιο αναλυτικά, χρησιμοποιώντας τη δέλτα-διατύπωση, έχουμε για τον πρώτο και τον τελευταίο κόμβο τις εξής εξισώσεις, οι οποίες προκύπτουν ύστερα από πράξεις πινάκων (σχέση (3.15)) αγνοώντας τον ψευδο-χρονικό όρο):

$$\frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_1} \delta \vec{U}_1 + \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_2} \delta \vec{U}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_{np-1}} \delta \vec{U}_{np-1} + \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_{np}} \delta \vec{U}_{np} = -\vec{R}_1 \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_1} \delta \vec{U}_1 + \frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_2} \delta \vec{U}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_{np-1}} \delta \vec{U}_{np-1} + \frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_{np}} \delta \vec{U}_{np} = -\vec{R}_{np} \quad (3.73)$$

Ωστόσο, όπως είναι φανερό από την (3.70), στην είσοδο υπάρχουν μεγέθη που εξαρτώνται από τις μεταβλητές της ροής μόνο των τριών πρώτων κόμβων. Αντίστοιχα στην έξοδο, από την (3.71) γίνεται φανερό ότι υπάρχει εξάρτηση μόνο από τους τρεις τελευταίους κόμβους. Δηλαδή, μας ενδιαφέρει να υπολογιστούν μόνο οι όροι $\frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_j}$ για $j = 1, 2, 3$ και $\frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_j}$ για $j = np - 2, np - 1, np$ ενώ οι μερικές παράγωγοι ως προς τα υπόλοιπα διανύσματα της ροής είναι μηδενικές.

Κατά τον υπολογισμό των ζητούμενων μερικών παραγώγων, χρήσιμες είναι οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} p &= (\gamma - 1) \left[\rho E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right] = (\gamma - 1) \left[E_t - \frac{1}{2} \frac{m^2}{\rho} \right] \\ \frac{\partial p}{\partial \rho} &= \frac{\gamma - 1}{2} u^2 \\ \frac{\partial p}{\partial m} &= -(\gamma - 1) u \\ \frac{\partial p}{\partial E_t} &= \gamma - 1 \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned}
T &= \frac{p}{\rho R} = \frac{\gamma - 1}{R} \left[\frac{E_t}{\rho} - \frac{1}{2} \frac{m^2}{\rho^2} \right] \\
\frac{\partial T}{\partial \rho} &= \frac{\gamma - 1}{R} \left[-\frac{E}{\rho} + \frac{u^2}{\rho} \right] \\
\frac{\partial T}{\partial m} &= -\frac{\gamma - 1}{R} \frac{u}{\rho} \\
\frac{\partial T}{\partial E_t} &= \frac{\gamma - 1}{\rho R}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned}
T_t &= T + \frac{u^2}{2cp} = \frac{p}{\rho R} + \frac{u^2}{2cp} = \frac{p}{\rho R} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma R} \frac{m^2}{\rho^2} \\
\frac{\partial T_t}{\partial \rho} &= -\frac{\gamma - 1}{R} \frac{E}{\rho} + \frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma R} \frac{u^2}{\rho} \\
\frac{\partial T_t}{\partial m} &= -\frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma R} \frac{u}{\rho} \\
\frac{\partial T_t}{\partial E_t} &= \frac{\gamma - 1}{\rho R}
\end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}
p_t &= p \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
\frac{\partial p_t}{\partial \rho} &= \frac{\partial p}{\partial \rho} \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + p \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\frac{\partial T_t}{\partial \rho} T - T_t \frac{\partial T}{\partial \rho}}{T^2} \\
\frac{\partial p_t}{\partial m} &= \frac{\partial p}{\partial m} \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + p \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\frac{\partial T_t}{\partial m} T - T_t \frac{\partial T}{\partial m}}{T^2} \\
\frac{\partial p_t}{\partial E_t} &= \frac{\partial p}{\partial E_t} \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + p \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\frac{\partial T_t}{\partial E_t} T - T_t \frac{\partial T}{\partial E_t}}{T^2}
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Αν ο τελεστής ροής του πρώτου κόμβου γραφεί στη μορφή $\vec{R}_1 = [R_1^1, R_1^2, R_1^3]$, τότε ισχύουν τα εξής:

$$\frac{\partial R_1^1}{\partial \vec{U}_1} \delta \vec{U}_1 = -R_1^1 \Rightarrow \left[\frac{\partial p_t}{\partial \rho}, \frac{\partial p_t}{\partial m}, \frac{\partial p_t}{\partial E_t} \right]_1 \delta \vec{U}_1 = -[p_t - const_1]_1 \tag{3.78}$$

$$\text{καθώς } \frac{\partial R_1^1}{\partial \vec{U}_2} = \frac{\partial R_1^1}{\partial \vec{U}_3} = [0, 0, 0]$$

$$\frac{\partial R_1^2}{\partial \vec{U}_1} \delta \vec{U}_1 = -R_1^2 \Rightarrow \left[\frac{\partial T_t}{\partial \rho}, \frac{\partial T_t}{\partial m}, \frac{\partial T_t}{\partial E_t} \right]_1 \delta \vec{U}_1 = -[T_t - const_2]_1 \quad (3.79)$$

$$\text{καθώς } \frac{\partial R_1^2}{\partial \vec{U}_2} = \frac{\partial R_1^2}{\partial \vec{U}_3} = [0, 0, 0]$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial R_1^3}{\partial \vec{U}_1} \delta \vec{U}_1 + \frac{\partial R_1^3}{\partial \vec{U}_2} \delta \vec{U}_2 + \frac{\partial R_1^3}{\partial \vec{U}_3} \delta \vec{U}_3 = -R_1^3 \Rightarrow \\ & d_1^A \frac{\partial p_1}{\partial \vec{U}_1} \delta \vec{U}_1 + d_1^B \frac{\partial p_2}{\partial \vec{U}_2} \delta \vec{U}_2 + d_1^C \frac{\partial p_3}{\partial \vec{U}_3} \delta \vec{U}_3 = -(d_1^A p_1 + d_1^B p_2 + d_1^C p_3) \end{aligned} \quad (3.80)$$

Ανάλογη είναι και η διαδικασία που ακολουθείται για τις οριακές συνθήκες στην έξοδο του αγωγού. Ο τελεστής ροής του τελευταίου κόμβου γράφεται στη μορφή $\vec{R}_{np} = [R_{np}^1, R_{np}^2, R_{np}^3]$, οπότε προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial R_{np}^1}{\partial \vec{U}_{np}} \delta \vec{U}_{np} = -R_{np}^1 \Rightarrow \\ & (\gamma - 1) \left[\frac{1}{2} u^2, -u, 1 \right]_{np} \delta \vec{U}_{np} = -[p - const_3]_{np} \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\text{καθώς } \frac{\partial R_{np}^1}{\partial \vec{U}_{np-1}} = \frac{\partial R_{np}^1}{\partial \vec{U}_{np-2}} = [0, 0, 0]$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial R_{np}^2}{\partial \vec{U}_{np-2}} \delta \vec{U}_{np-2} + \frac{\partial R_{np}^2}{\partial \vec{U}_{np-1}} \delta \vec{U}_{np-1} + \frac{\partial R_{np}^2}{\partial \vec{U}_{np}} \delta \vec{U}_{np} = -R_{np}^2 \Rightarrow \\ & [d_{np}^C, 0, 0] \delta \vec{U}_{np-2} + [d_{np}^B, 0, 0] \delta \vec{U}_{np-1} + [d_{np}^A, 0, 0] \delta \vec{U}_{np} = \\ & - (d_{np}^C \rho_{np-2} + d_{np}^B \rho_{np-1} + d_{np}^A \rho_{np}) \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial R_{np}^3}{\partial \vec{U}_{np-2}} \delta \vec{U}_{np-2} + \frac{\partial R_{np}^3}{\partial \vec{U}_{np-1}} \delta \vec{U}_{np-1} + \frac{\partial R_{np}^3}{\partial \vec{U}_{np}} \delta \vec{U}_{np} = -R_{np}^3 \Rightarrow \\ & [0, d_{np}^C, 0] \delta \vec{U}_{np-2} + [0, d_{np}^B, 0] \delta \vec{U}_{np-1} + [0, d_{np}^A, 0] \delta \vec{U}_{np} = \\ & - [d_{np}^C (\rho u)_{np-2} + d_{np}^B (\rho u)_{np-1} + d_{np}^A (\rho u)_{np}] \end{aligned} \quad (3.83)$$

3.6 Αλγόριθμος επίλυσης ευθέος προβλήματος

Όπως ήδη τονίστηκε στις προηγούμενες ενότητες, σκοπός του ευθέος προβλήματος είναι η επίλυση της εξίσωσης (3.15) με την τεχνική της χρονοπροέλασης. Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν, ο τελεστής ροής \vec{R} και η παράγωγός του ως προς το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$, διακριτοποιούνται με 2ης τάξης ακρίβεια έπειτα από ολοκλήρωση σε όγκους αναφοράς.

Η διακριτοποίηση αυτή οδηγεί σε ένα πενταδιαγώνιο σύστημα, κάθε στοιχείο του οποίου είναι ένα 3×3 μητρώο (μπλοκ). Η επίλυση του μπλοκ-πενταδιαγώνιου συστήματος γίνεται χρησιμοποιώντας τον τροποποιημένο αλγόριθμο Thomas, ο οποίος μπορεί να διαχειρίζεται, αντί για βαθμωτά μεγέθη, υποπίνακες 3×3 . Αυτό επιτυγχάνεται με διάσπαση των υποπινάκων διάστασης 3×3 σε πάνω και κάτω τριδιαγώνια μητρώα (παραγοντοποίηση LU [1]).

Άρα δημιουργείται ένας επαναληπτικός αλγόριθμος με επαναλήψεις ή ορθότερα ψευδο-χρονικά βήματα, όπου για κάθε ψευδοχρονική στιγμή οι διακριτοποιημένες εξισώσεις επιλύονται επακριβώς. Η ακριβής επίλυση ανά ψευδο-χρονικό βήμα, αποτελεί πλεονέκτημα του 1D προβλήματος.

Ο επαναληπτικός αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος ροής δίνεται παρακάτω:

- Βήμα 1:
Γίνεται αρχικοποίηση του διανύσματος των συντηρητικών μεταβλητών της ροής, \vec{U} , για κάθε κόμβο του πλέγματος. Για την αρχικοποίηση, η ροή μπορεί να θεωρηθεί ισοτροπική και ασυμπίεστη και άρα να δοθούν αρχικές τιμές στις κομβικές τιμές του \vec{U} .
- Βήμα 2:
Με το υπάρχον διάνυσμα \vec{U} υπολογίζεται το διάνυσμα του υπολοίπου \vec{R} , όπως παρουσιάστηκε στις ενότητες 3.4 και 3.5. Έπειτα, αθροίζονται όλα τα στοιχεία του \vec{R} (Residual) και το αποτέλεσμα συγκρίνεται με το κριτήριο σύγκλισης που έχει δώσει ο χρήστης. Αν το αποτέλεσμα είναι ικανοποιητικό, ο αλγόριθμος σταματά εδώ. (Η τιμή του κριτηρίου σύγκλισης είναι ιδιαίτερα μικρή, μιας και θεωρητικά, όταν ο αλγόριθμος συγκλίνει έχουμε $\vec{R} = 0$).
- Βήμα 3:
Υπολογίζεται το μητρώο $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$ με δεύτερης τάξης ακρίβεια, σύμφωνα με τις ενότητες 3.4 και 3.5.
- Βήμα 4:
Χρησιμοποιώντας τον τροποποιημένο αλγόριθμο του Thomas, λύνεται το πενταδιαγώνιο σύστημα (3.15), όπου η τιμή του ψευδοχρονικού όρου καθορίζεται από το χρήστη, και έτσι υπολογίζεται το διάνυσμα $\delta \vec{U}$.

- Βήμα 5:
Γίνεται ανανέωση του διανύσματος των συντηρητικών μεταβλητών σύμφωνα με τη σχέση $\vec{U}^{k+1} = \vec{U}^k + \delta \vec{U}^k$, όπου k η τρέχουσα επανάληψη του αλγόριθμου.
 - Βήμα 6:
Επιστροφή στο Βήμα 2.
-

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογή της Μεθόδου στο Ψευδο-1D Πρόβλημα Ροής

4.1 Εισαγωγικά σχόλια

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται εφαρμογή της προτεινόμενης μεθόδου (Κεφάλαιο 2) σε ένα μη-γραμμικό ψευδο-1D πρόβλημα ροής, η αριθμητική επίλυση των Euler εξισώσεων του οποίου, παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 3.

Ακολουθώντας λοιπόν την ανάλυση του προηγούμενου κεφαλαίου, οι εξισώσεις του ευθέως προβλήματος (3.11) διακριτοποιούνται σε ένα σχετικά αραιό πλέγμα και στη συνέχεια επιλύονται, χρησιμοποιώντας τον επαναληπτικό αλγόριθμο που παρουσιάστηκε στην ενότητα 3.6. Το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών \vec{U}_H που προκύπτει, αποτελείται από τα πεδία: $U_1^H = \rho_H$, $U_2^H = (\rho u)_H$ και $U_3^H = (\rho E)_H$.

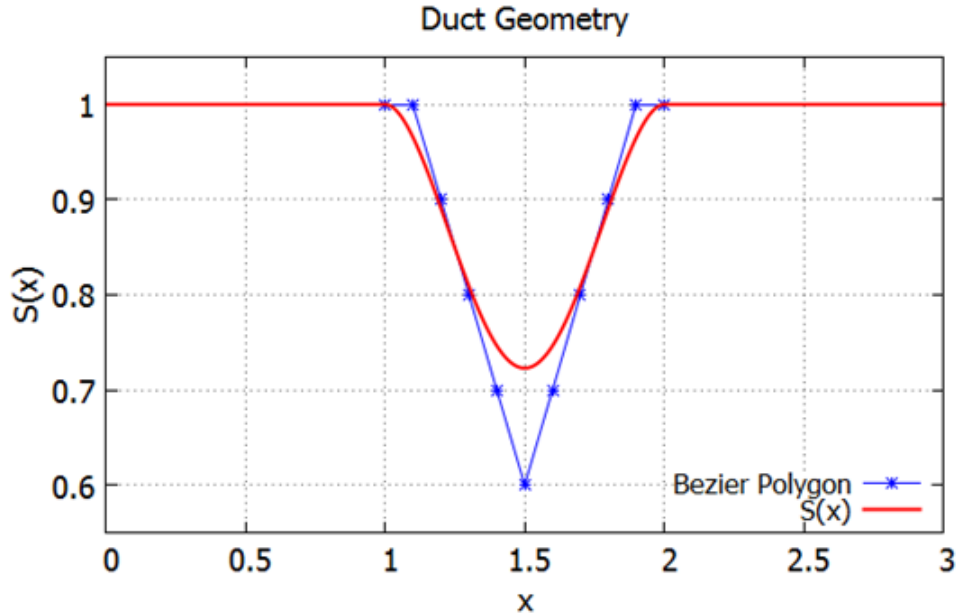
Για τις ανάγκες της μεθόδου, τα πεδία αυτά παρεμβάλλονται χρησιμοποιώντας κυβικές splines σε ένα πυκνότερο πλέγμα (π.χ. 4 φορές πυκνότερο από το αρχικό ή $\Delta x_h = \frac{\Delta x_H}{4}$), οπότε προκύπτουν τα πεδία: $U_1^h = \rho_h$, $U_2^h = (\rho u)_h$ και $U_3^h = (\rho E)_h$ αντίστοιχα. Τέλος, τα πεδία αυτά αποτελούν το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών στο πυκνό πλέγμα, το οποίο συμβολίζεται με \vec{U}_h .

Στόχος του προβλήματος είναι ο υπολογισμός του ολοκληρώματος:

$$J = \int_0^L p \, dx \quad (4.1)$$

όπου p η πίεση κατά το μήκος L του συγκλίνοντος-αποκλίνοντος αγωγού. Η γεωμετρία του αγωγού που χρησιμοποιήθηκε φαίνεται στο Σχήμα 4.1, όπου η διατομή $S(x)$

δίνεται από μια παραμετρική καμπύλη Bezier.



Σχήμα 4.1: Κατανομή εμβαδού διατομής κατά μήκος του αγωγού (κόκκινη καμπύλη) και πολύγωνο Bezier (μπλε καμπύλη). Οριζόντιος άξονας: Μήκος αγωγού (υπολογιστικό χωρίο). Κατακόρυφος άξονας: Εμβαδό διατομής αγωγού στη θέση x .

Αρχικά, υπολογίζεται η βασική τιμή του ολοκληρώματος J_b από τη σχέση:

$$J_b = \int_0^3 p_h dx \quad (4.2)$$

Ο υπολογισμός έγινε στη συγκεκριμένη περίπτωση εφαρμόζοντας την αριθμητική μέθοδο ολοκλήρωσης του τραπεζίου στο πυκνό πλέγμα, όπου το πεδίο p_h είναι δυνατό να προκύψει με τους εξής δύο τρόπους:

- 1ος τρόπος:

Χρησιμοποιώντας τα πεδία U_1^h, U_2^h, U_3^h και εφαρμόζοντας τη σχέση:

$$p_h = (\gamma - 1) \left[(\rho E)_h - \frac{1}{2} \frac{(\rho u)_h^2}{\rho_h} \right] \quad (4.3)$$

- 2ος τρόπος:

Υπολογίζοντας αρχικά το πεδίο p_H στο αραιό πλέγμα, χρησιμοποιώντας τα πεδία U_1^H, U_2^H, U_3^H και τη σχέση:

$$p_H = (\gamma - 1) \left[(\rho E)_H - \frac{1}{2} \frac{(\rho u)_H^2}{\rho_H} \right] \quad (4.4)$$

και στη συνέχεια, παρεμβάλλοντας με κυβικές splines τις τιμές του p_H στο πυκνό πλέγμα, οπότε προκύπτει το p_h .

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν εφαρμόζοντας τους δύο αυτούς τρόπους έχουν ελάχιστη διαφορά μεταξύ τους, οπότε μπορεί να επιλεγεί οποιοσδήποτε από τους δύο για τον υπολογισμό του J_b .

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι, θεωρώντας ισεντροπική ροή, η πίεση p μπορεί να υπολογιστεί και αναλυτικά σε οποιαδήποτε θέση, ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία:

- Γνωρίζοντας τα ολικά μεγέθη p_{t1} , T_{t1} στην είσοδο και τη στατική πίεση p_{np} στην έξοδο, υπολογίζονται η ταχύτητα και τα υπόλοιπα στατικά μεγέθη στην έξοδο, καθώς και η παροχή μάζας, από τις σχέσεις:

$$T_{np} = T_{t1} \left(\frac{p_{np}}{p_{t1}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (4.5)$$

$$\rho_{np} = \frac{p_{np}}{R T_{np}} \quad (4.6)$$

$$u_{np} = \sqrt{2cp(T_{t1} - T_{np})} \quad (4.7)$$

$$\dot{m} = \rho_{np} u_{np} S_{np} \quad (4.8)$$

- Στην τυχαία θέση x_r όπου είναι γνωστό το εμβαδό διατομής S_r , η εξίσωση διατήρησης της παροχής γράφεται ([3]):

$$u_r = \frac{\dot{m} R T_{t1}}{p_{t1} S_r} \frac{1}{\left[1 - \frac{u_r^2}{2cp T_{t1}} \right]^{\frac{-1}{\gamma-1}}} \quad (4.9)$$

Η εξίσωση αυτή λύνεται επαναληπτικά (π.χ. με τη μέθοδο των διαδοχικών αντικαταστάσεων [1]), οπότε προκύπτει η ταχύτητα u_r στην τυχαία θέση.

- Υπολογίζεται η πυκνότητα και τέλος η πίεση στην τυχαία θέση από τις σχέσεις:

$$\rho_r = \frac{\dot{m}}{u_r S_r} \quad (4.10)$$

$$p_r = \frac{(T_{t1} \rho_r R)^\gamma}{p_{t1}^{\gamma-1}} \quad (4.11)$$

Ο αναλυτικός υπολογισμός της πίεσης επιτρέπει την ολοκλήρωση της σχέσης (4.1), όπου χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του τραpezίου με αρκετά μεγάλο αριθμό σημείων, επιτυγχάνεται η εύρεση της πραγματικής τιμής του ολοκληρώματος J . Στη συνέχεια, στόχος μας είναι η προσέγγιση της τιμής αυτής διορθώνοντας την τιμή του J_b , μιας και ο αναλυτικός υπολογισμός δεν είναι δυνατός σε όλα τα προβλήματα.

4.2 Εφαρμογή χρησιμοποιώντας τη Διακριτή Συζυγή Μέθοδο

4.2.1 Διατύπωση και επίλυση του συζυγούς προβλήματος

Η εύρεση του διορθωτικού όρου ΔJ που θα οδηγήσει στην καλύτερη προσέγγιση του ολοκληρώματος J , γίνεται ακολουθώντας την παρακάτω ανάλυση ([19]).

Οι εξισώσεις του ευθέος προβλήματος γράφονται στη μορφή:

$$\vec{R}(\vec{U}) = 0 \quad (4.12)$$

Ζητούμενο είναι η εύρεση της ευαισθησίας του ολοκληρώματος $J(\vec{U})$ ως προς το υπόλοιπο των εξισώσεων $\delta \vec{R}$.

Οι διακριτοποιημένες εξισώσεις του ευθέος προβλήματος γράφονται στη μορφή:

$$\vec{R}_H(\vec{U}_H) = 0 \quad (4.13)$$

όπου \vec{R}_H ο διακριτοποιημένος διαφορικός τελεστής σε ένα σχετικά αραιό πλέγμα (δείκτης H) και \vec{U}_H η αριθμητική λύση που προκύπτει στο πλέγμα αυτό (όπως έχει ήδη αναφερθεί).

Αποτέλεσμα της αριθμητικής επίλυσης είναι τα σφάλματα:

$$\delta \vec{U} = \vec{U}_H - \vec{U} \quad (4.14)$$

$$\delta \vec{R} = \vec{R}(\vec{U}_H) - \underbrace{\vec{R}(\vec{U})}_0 \Rightarrow$$

$$\delta \vec{R} = \vec{R}(\vec{U}_H) \quad (4.15)$$

$$\delta J = J(\vec{U}_H) - J(\vec{U}) \quad (4.16)$$

Γραμμικοποιώντας τις σχέσεις (4.15) και (4.16), προκύπτουν οι ακόλουθες 1ης τάξης προσεγγίσεις των σφαλμάτων:

$$\begin{aligned}\delta \vec{R} &= \left. \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right|_H (\vec{U}_H - \vec{U}) + H.O.T. \Rightarrow \\ \delta \vec{R} &\approx \left. \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right|_H \delta \vec{U}\end{aligned}\quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}\delta J &= \left. \frac{\partial J}{\partial \vec{U}} \right|_H (\vec{U}_H - \vec{U}) + H.O.T. \Rightarrow \\ \delta J &\approx \left. \frac{\partial J}{\partial \vec{U}} \right|_H \delta \vec{U}\end{aligned}\quad (4.18)$$

Γράφοντας την παρακάτω ισότητα:

$$\delta J - \vec{\Psi}^T \cdot \delta \vec{R} = \left(\left. \frac{\partial J}{\partial \vec{U}} \right|_H - \vec{\Psi}^T \cdot \left. \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right|_H \right) \cdot \delta \vec{U}\quad (4.19)$$

και επιλέγοντας τέτοιο $\vec{\Psi}$ ώστε το δεξί μέλος να μηδενίζεται, προκύπτει η συζυγής εξίσωση του προβλήματος:

$$\left[\left. \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right|_H \right]^T \cdot \vec{\Psi} = \left[\left. \frac{\partial J}{\partial \vec{U}} \right|_H \right]^T\quad (4.20)$$

η οποία είναι **γραμμική** ως προς $\vec{\Psi}$, αφού το μητρώο $\left[\left. \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right|_H \right]^T$ δε συναρτάται του $\vec{\Psi}$. Η εξίσωση αυτή επιλύεται αριθμητικά στο υπάρχον πλέγμα, οπότε λαμβάνεται η συζυγής λύση $\vec{\Psi}_H$.

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το σφάλμα δJ να δίνεται τελικά από την (4.19) ως:

$$\delta J = \vec{\Psi}_H^T \cdot \delta \vec{R} = \vec{\Psi}_H^T \cdot \vec{R}(\vec{U}_H)\quad (4.21)$$

Ωστόσο, το συνεχές υπόλοιπο $\vec{R}(\vec{U}_H)$ δεν είναι υπολογιστικά διαθέσιμο. Μια προσέγγιση αυτού μπορεί να γίνει υπολογίζοντας το διακριτό υπόλοιπο σε ένα πυκνότερο πλέγμα (δείκτης h), $\vec{R}_h(\vec{U}_h)$, όπου το \vec{U}_h έχει προκύψει παρεμβάλλοντας τις τιμές του \vec{U}_H στο πυκνό πλέγμα. Κάνοντας το ίδιο και για το $\vec{\Psi}_H$, υπολογίζεται τελικά ο διορθωτικός όρος της μεθόδου ΔJ (προσέγγιση του δJ) από τη σχέση:

$$\Delta J = \vec{\Psi}_h^T \cdot \vec{R}_h(\vec{U}_h)\quad (4.22)$$

Ας σημειωθεί ότι ο όρος ΔJ διαφέρει από το σφάλμα δJ λόγω των δύο προσεγγίσεων που γίνανε κατά την ανάλυση. Η πρώτη έγινε στη γραμμικοποίηση των \vec{R} και J (σχέσεις (4.17), (4.18)), ενώ η δεύτερη έγινε στην αντικατάσταση του μη-υπολογίσιμου συνεχούς υπολοίπου $\vec{R}(\vec{U}_H)$, από το διακριτό υπόλοιπο $\vec{R}_h(\vec{U}_h)$.

Για την επίλυση της συζυγούς εξίσωσης (4.20) είναι απαραίτητος ο υπολογισμός του μητρώου $\left[\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \Big|_H \right]^T$, το ανάστροφο του οποίου είναι γνωστό με δεύτερης τάξης ακρίβεια, από την επίλυση του ευθέως προβλήματος (Κεφάλαιο 3). Παράλληλα χρειάζεται η εύρεση του $\frac{\partial J}{\partial \vec{U}}$ (για το δεξί μέλος της εξίσωσης). Παραγωγίζοντας τη σχέση (4.1) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \vec{U}} &= \int_0^L \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} dx \Rightarrow \\ \frac{\partial J}{\partial \vec{U}_i} &= \frac{\partial p}{\partial \vec{U}_i} \Delta x_i \end{aligned} \quad (4.23)$$

όπου το $\frac{\partial p}{\partial \vec{U}_i}$ σύμφωνα με τη σχέση (3.5) θα ισούται με:

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{U}_i} = (\gamma - 1) \left[\frac{1}{2} u_i^2 \quad -u_i \quad 1 \right] \quad (4.24)$$

Τέλος, το μπλοκ-πενταδιαγώνιο σύστημα στο οποίο οδηγεί η συζυγής εξίσωση (4.20), επιλύεται χρησιμοποιώντας τον τροποποιημένο αλγόριθμο Thomas, όπως έγινε και στο ευθύ πρόβλημα, με τη διαφορά ότι εδώ δε χρειάζεται επαναληπτική διαδικασία (γραμμικό σύστημα).

4.2.2 Αλγόριθμος εφαρμογής της διορθωτικής μεθόδου

Η μέθοδος που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2 εφαρμόζεται στο συγκεκριμένο πρόβλημα ροής, ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία:

- Βήμα 1:

Επιλύεται αριθμητικά το ευθύ πρόβλημα, όπως παρουσιάστηκε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 3, οπότε προκύπτει το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών \vec{U}_H (λύση στο αραιό πλέγμα). Στη συνέχεια, τα πεδία που αποτελούν το διάνυσμα αυτό παρεμβάλλονται με κυβικές splines σε ένα πυκνότερο πλέγμα, οπότε λαμβάνεται το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών \vec{U}_h (λύση στο πυκνό πλέγμα).

- Βήμα 2:
Υπολογίζεται η βασική τιμή του ολοκληρώματος J_b από τη σχέση (4.2), όπου το p_h προκύπτει από το \vec{U}_h , όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 4.1.
- Βήμα 3:
Επιλύεται αριθμητικά το συζυγές πρόβλημα, το οποίο παρουσιάστηκε στην υποενότητα 4.2.1, οπότε προκύπτει το διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών στο αραιό πλέγμα $\vec{\Psi}_H$. Και πάλι, τα πεδία που αποτελούν το διάνυσμα αυτό παρεμβάλλονται με κυβικές splines στο πυκνό πλέγμα, οπότε λαμβάνεται το διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών $\vec{\Psi}_h$.
- Βήμα 4:
Υπολογίζεται ο διορθωτικός όρος ΔJ από τη σχέση (4.22), όπου το υπόλοιπο στο πυκνό πλέγμα $\vec{R}_h(\vec{U}_h)$ προκύπτει με εφαρμογή του γενικού (ανεξαρτήτου πλέγματος) τρόπου που παρουσιάστηκε στις ενότητες 3.4 και 3.5.
- Βήμα 5:
Διορθώνεται η μέχρι τώρα τιμή του ολοκληρώματος J_b στην:

$$J_{new} = J_b - \Delta J \quad (4.25)$$

Τέλος, επειδή η πραγματική τιμή του ολοκληρώματος J έχει υπολογιστεί, ορίζονται τα σχετικά σφάλματα BE και RE από τις σχέσεις:

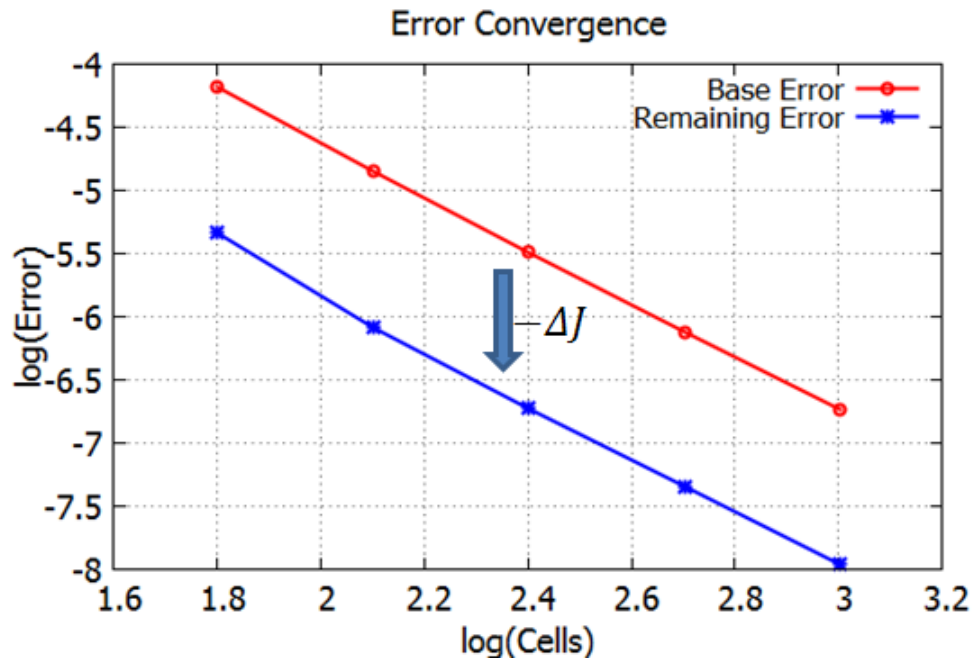
$$BE = \frac{|J - J_b|}{J} \quad (4.26)$$

$$RE = \frac{|J - J_{new}|}{J} \quad (4.27)$$

4.2.3 Παραμετρική μελέτη και αποτελέσματα

Όπως στο μαθηματικό γραμμικό παράδειγμα (Κεφάλαιο 2), έτσι και εδώ έγινε παραμετρική μελέτη, μεταβάλλοντας τον αριθμό των υποδιαιρέσεων του υπολογιστικού χωρίου και εφαρμόζοντας τη μέθοδο για τον υπολογισμό των σφαλμάτων BE και RE . Τα πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν είχαν όλα ισαπέχοντες κόμβους, ενώ σε κάθε εφαρμογή της μεθόδου, το πυκνό πλέγμα h ήταν 4 φορές πυκνότερο από το αντίστοιχο αραιό H . Τα αποτελέσματα που προέκυψαν φαίνονται στο Σχήμα 4.2, το οποίο δείχνει ότι η διόρθωση επιτυγχάνεται και σε αυτό το μη-γραμμικό πρόβλημα.

Οι ευθείες του σχήματος 4.2 έχουν και οι δύο κλίση -2, το οποίο σημαίνει ότι, τόσο το αρχικό όσο και το υπολειπόμενο σφάλμα είναι 2ης τάξης ακρίβειας (στο Κεφάλαιο



Σχήμα 4.2: Ψευδο-1D πρόβλημα ροής. Σύγκλιση του σφάλματος που αντιστοιχεί στη βασική τιμή του ολοκληρώματος J_b (κόκκινη καμπύλη) και του σφάλματος που αντιστοιχεί στη διορθωμένη τιμή J_{new} (μπλε καμπύλη). Οριζόντιος άξονας: Δεκαδικός λογάριθμος του ελάχιστου αριθμού των υποδιαιρέσεων του χωρίου (για το αραιό πλέγμα H). Κατακόρυφος άξονας: Δεκαδικός λογάριθμος του υπολογιζόμενου σφάλματος.

2 είδαμε ότι το υπολειπόμενο σφάλμα μπορεί να είναι 4ης τάξης). Αυτό μας θυμίζει την παραμετρική μελέτη της ενότητας 2.3, όπου το υπόλοιπο της εξίσωσης του ευθέος προβλήματος είχε υπολογιστεί με προσεγγιστικές παραγώγους. Έτσι και εδώ, η αντικατάσταση του συνεχούς υπολοίπου $\vec{R}(\vec{U}_H)$ από το διακριτό υπόλοιπο $\vec{R}_h(\vec{U}_h)$, για τον υπολογισμό του όρου ΔJ (σχέση (4.22)), αποτελεί μια προσέγγιση, στην οποία πιθανότατα οφείλεται αυτή η απώλεια ακρίβειας. Όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 2.3, αυτό δε σημαίνει σε καμία περίπτωση ότι η μέθοδος παύει να είναι αποδοτική (σε κάθε περίπτωση, το υπολειπόμενο σφάλμα είναι περίπου 15 φορές μικρότερο από το αντίστοιχο αρχικό).

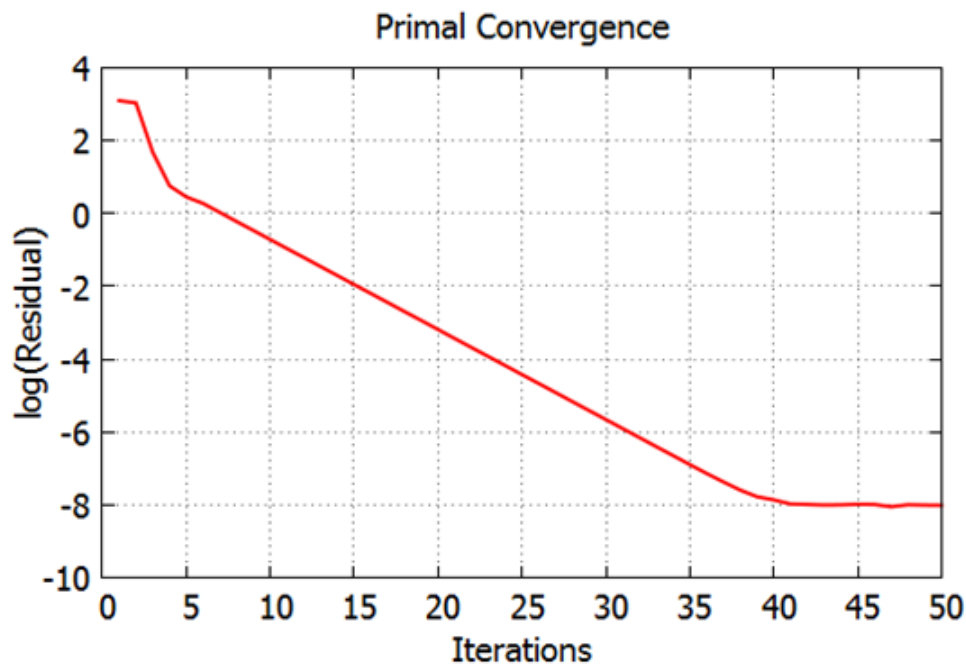
4.3 Επανάληψη της μελέτης αφήνοντας ασύγκλιτο το ευθύ πρόβλημα

Τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 4.2, αντιστοιχούν σε πλήρη σύγκλιση του ευθέος προβλήματος, η οποία επιτεύχθηκε χρησιμοποιώντας τον επαναληπτικό αλγόριθμο της ενότητας 3.6, μέχρι την ικανοποίηση ενός αυστηρού κριτηρίου σύγκλισης. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η εφαρμογή της μεθόδου και σε περιπτώσεις όπου οι εξισώσεις του ευθέος προβλήματος δεν έχουν συγχλίνει.

Στην ενότητα αυτή λοιπόν, ο επαναληπτικός αλγόριθμος επίλυσης του ευθέος προβλήματος διακόπτεται σε έναν δεδομένο (από το χρήστη) αριθμό επαναλήψεων και στη συνέχεια η μέθοδος εφαρμόζεται κανονικά (αλγόριθμος υποενότητας 4.2.2). Η συζυγής λύση (η οποία αναλαμβάνει τη διόρθωση της τιμής του υπολογιζόμενου ολοκληρώματος), ικανοποιεί επακριβώς (πλήρης σύγκλιση) το σύστημα στο οποίο οδηγεί η συζυγής εξίσωση (4.20), καθώς το σύστημα αυτό είναι γραμμικό και, επομένως, δεν χρειάζεται επαναληπτική διαδικασία για την επίλυσή του.

Στο Σχήμα 4.3 φαίνεται η σύγκλιση των εξισώσεων του ευθέος προβλήματος, συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων του αλγόριθμου επίλυσης. Το υπόλοιπο (residual) των εξισώσεων υπολογίστηκε ως η RMS τιμή των τοπικών υπολοίπων. Το αποτέλεσμα αναφέρεται σε μια περίπτωση όπου χρησιμοποιήθηκαν 253 κόμβοι για τη διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου (ομοιόμορφο πλέγμα με $\Delta x_H = \frac{1}{84}$), ο αριθμός των οποίων δεν αλλάζει στους υπολογισμούς της ενότητας αυτής. Όπως φαίνεται, η σύγκλιση του ευθέος προβλήματος επιτυγχάνεται κοντά στις 40 επαναλήψεις.

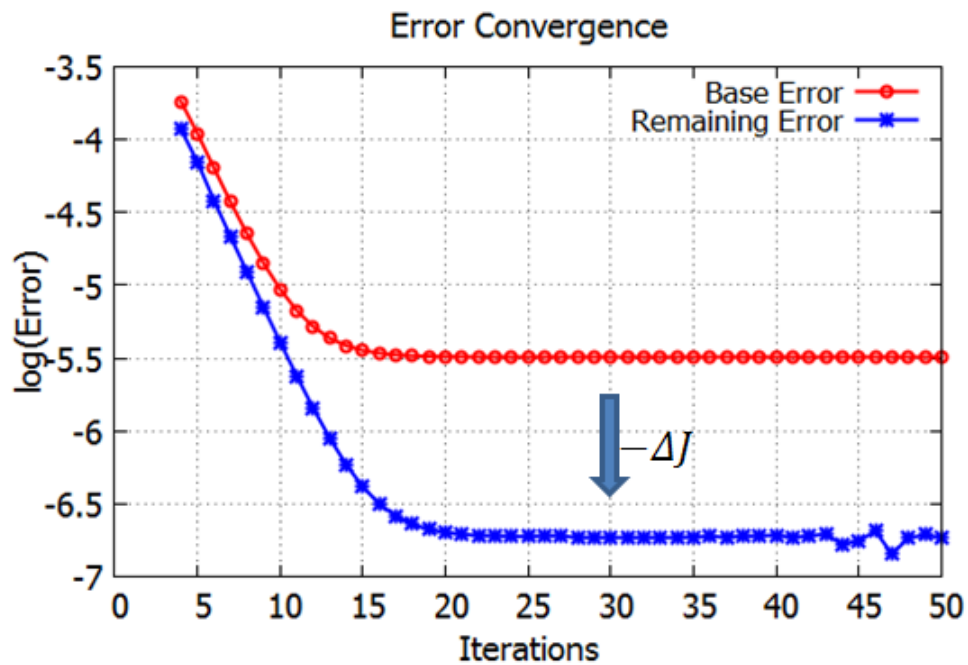
Στη συνέχεια, επαναλαμβάνεται ο αλγόριθμος της υποενότητας 4.2.2 για διάφορες τιμές του αριθμού των επαναλήψεων όπου διακόπτεται η επίλυση των εξισώσεων του ευθέος προβλήματος. Ο αριθμός αυτός χρησιμοποιείται δηλαδή τώρα ως παράμετρος. Τα αποτελέσματα της παραμετρικής αυτής μελέτης συνοψίζονται στο Σχήμα 4.4, όπου φαίνεται το πώς μεταβάλλονται τα σφάλματα BE και RE , συναρτήσει του αριθμού των



Σχήμα 4.3: Ψευδο-1D πρόβλημα ροής. Σύγκλιση των εξισώσεων του ευθέος προβλήματος, συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων. Οριζόντιος άξονας: Αριθμός επαναλήψεων αλγόριθμου επίλυσης. Κατακόρυφος άξονας: Δεκαδικός λογάριθμος του RMS υπολοίπου.

επαναλήψεων όπου διακόπηκε η επίλυση του ευθέος προβλήματος.

Από το Σχήμα 4.4 επιβεβαιώνεται αυτό που αναφέρθηκε στην ενότητα 2.4, ότι δηλαδή, ακόμα και σε περιπτώσεις όπου οι εξισώσεις του ευθέος προβλήματος αφήνονται ασύγκλιτες (το οποίο έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση της ακρίβειας του υπολογιζόμενου ολοκληρώματος J_b), η μέθοδος που προτείνεται μπορεί να εφαρμοστεί και να διορθώσει την τιμή του ολοκληρώματος, χρησιμοποιώντας τη συζυγή λύση. Βέβαια, όπως φαίνεται από το Σχήμα 4.4, η διόρθωση που επιτυγχάνεται είναι σημαντική από 15 επαναλήψεις και πάνω, δηλαδή για πολύ λίγες επαναλήψεις επίλυσης του ευθέος προβλήματος (αρκετά ασύγκλιτο) η εφαρμογή της μεθόδου δεν είναι αποδοτική. Ωστόσο, κάνοντας 15 επαναλήψεις και πραγματοποιώντας τη διόρθωση της μεθόδου, το υπολειπόμενο σφάλμα είναι περίπου 10 φορές μικρότερο από το σφάλμα που θα είχαμε χωρίς τη διόρθωση αλλά με το ευθύ πρόβλημα να έχει συγκλίνει πλήρως (40+ επαναλήψεις). Επομένως, συμπεραίνουμε ότι συμφέρει (και από άποψη υπολογιστικού κόστους, τουλάχιστον στο πρόβλημα που εξετάστηκε στο παρόν κεφάλαιο) η διακοπή της επίλυσης του ευθέος προβλήματος πριν αυτό συγκλίνει και η εφαρμογή της μεθόδου για την εύρεση πιο ακριβούς προσέγγισης του ολοκληρώματος.



Σχήμα 4.4: Ψευδο-1D πρόβλημα ροής. Σύγκλιση του σφάλματος που αντιστοιχεί στη βασική τιμή του ολοκληρώματος J_b (κόκκινη καμπύλη) και του σφάλματος που αντιστοιχεί στη διορθωμένη τιμή J_{new} (μπλε καμπύλη). Οριζόντιος άξονας: Αριθμός επαναλήψεων όπου διακόπηκε η επίλυση των εξισώσεων του ευθέως προβλήματος. Κατακόρυφος άξονας: Δεκαδικός λογάριθμος του υπολογιζόμενου σφάλματος. Παράδειγμα για σταθερό πλέγμα με $\Delta x_H = \frac{1}{84}$.

Κεφάλαιο 5

Παρουσίαση και Επίλυση $2D$ Προβλήματος Ροής σε Γραμμική Πτερύγωση Συμπιεστή

5.1 Εισαγωγικά σχόλια

Προκειμένου η προτεινόμενη μέθοδος της παρούσας διπλωματικής εργασίας να εφαρμοστεί και σε ένα παράδειγμα που σχετίζεται με τις στροβιλομηχανές, επιλέγεται ένα $2D$ πρόβλημα ροής σε γραμμική πτερύγωση συμπιεστή. Η $2D$ ανάλυση ερμηνεύει ικανοποιητικά τις συνθήκες που επικρατούν στη μέση ακτίνα της ροής ενώ η επέκταση στις 3 διαστάσεις μπορεί να γίνει σχεδόν άμεσα.

Σε μια θερμική στροβιλομηχανή η ροή είναι συμπιεστή και συνεκτική, οπότε διέπεται από τις εξισώσεις Navier-Stokes. Ωστόσο, εδώ η ροή θα θεωρηθεί για απλούστευση μη-συνεκτική, οπότε περιγράφεται από τις εξισώσεις Euler (όπως και στο ψευδο- $1D$ πρόβλημα ροής). Επιπλέον, η ροή θεωρείται χρονικά μόνιμη.

Επομένως, στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται τα εξής: Αρχικά, διατυπώνονται οι εξισώσεις Euler σε συντηρητική μορφή και αδιαστατοποιούνται κατάλληλα. Στη συνέχεια, εξετάζεται η διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου, των εξισώσεων ροής, καθώς και των οριακών συνθηκών που επιβάλλονται στο πρόβλημα. Έπειτα, γίνεται αναφορά στον αλγόριθμο της αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων, η οποία πραγματοποιείται με την τεχνική της χρονο-προέλασης (time-marching). Τέλος, παρουσιάζονται ορισμένα αποτελέσματα που προέκυψαν από τον αντίστοιχο κώδικα του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ ([17], [33]), τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στο επόμενο κεφάλαιο για την εφαρμογή της προτεινόμενης διορθωτικής μεθόδου.

Ας σημειωθεί ότι αρκετά στοιχεία της ανάλυσης που θα ακολουθήσει έχουν παρθεί από τη διπλωματική εργασία [8].

5.2 Οι εξισώσεις Euler

5.2.1 Διατύπωση των εξισώσεων

Οι εξισώσεις Euler εκφράζουν σε διαφορική μορφή τη διατήρηση της μάζας, της ορμής και της ενέργειας. Για 2D προβλήματα στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x, y) , οι εξισώσεις αυτές σε συντηρητική μορφή γράφονται:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} = 0 \quad (5.1)$$

Όπως ήδη αναφέρθηκε, οι εξισώσεις (5.1) θα επιλυθούν με την τεχνική της χρονο-προέλασης, λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες των υπερβολικών προβλημάτων στο χωρο-χρόνο. Για το λόγο αυτό, προστέθηκε ο ψευδο-χρονικός όρος $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$ στις εξισώσεις της μόνιμης ροής, προκειμένου να διευκολύνει τη σύγκλιση αυτών. \vec{U} είναι το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών και \vec{F} , \vec{G} είναι τα διανύσματα της ατρίβους ροής κατά τις κατευθύνσεις x, y αντίστοιχα. Τα διανύσματα αυτά δίνονται από τις σχέσεις:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E_t + p)u \end{bmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E_t + p)v \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

όπου ρ η πυκνότητα, u, v οι καρτεσιανές συνιστώσες της ταχύτητας \vec{u} του ρευστού και E_t η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου:

$$E_t = \rho e + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \quad (5.3)$$

όπου e η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας.

Όπως στο Κεφάλαιο 3, έτσι και εδώ γίνεται η παραδοχή του τελείου αερίου, οπότε η σχέση (5.3) τελικά γράφεται:

$$E_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \quad (5.4)$$

Επίσης, η ολική ενθαλπία δίνεται από τη σχέση:

$$h_t = \frac{E_t + p}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (5.5)$$

5.2.2 Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων

Σε πολλές περιπτώσεις, αφού διατυπωθούν οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα που μελετάται και πριν ξεκινήσει η αριθμητική επίλυση αυτών, ακολουθείται η πρακτική της αδιαστατοποίησης. Το βασικό πλεονέκτημα που προκύπτει από αυτή τη διαδικασία είναι ότι τα αποτελέσματα από μία επίλυση δεν αφορούν μόνο τη συγκεκριμένη εφαρμογή, αλλά μια ομάδα εφαρμογών που είναι όμοιες μεταξύ τους. Επιπλέον, μέσω της αδιαστατοποίησης προκύπτουν αδιάστατες παράμετροι που χαρακτηρίζουν τη φυσική του προβλήματος. Τυπικό παράδειγμα τέτοιων παραμέτρων είναι οι αριθμοί Reynolds και Prandtl που εμφανίζονται στις αδιάστατες εξισώσεις Navier-Stokes. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα που χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Euler, δε θα προκύψει κάποια τέτοια ποσότητα, καθώς τα μεγέθη αδιαστατοποίησης απλοποιούνται από τις εξισώσεις (όπως θα δειχθεί στη συνέχεια).

Επιλέγοντας λοιπόν κατάλληλα μεγέθη αναφοράς (reference), ορίζονται οι ακόλουθες αδιάστατες ποσότητες:

$$\check{x}_i = \frac{x_i}{L_{ref}}, \quad \check{u}_i = \frac{u_i}{U_{ref}}, \quad \check{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{ref}} \quad (5.6)$$

όπου με L_{ref} , U_{ref} και ρ_{ref} συμβολίζονται το μήκος, η ταχύτητα και η πυκνότητα αδιαστατοποίησης, ενώ το σύμβολο $\check{}$ χρησιμοποιείται για τα αδιάστατα μεγέθη. Επίσης επιλέγεται:

$$R_{ref} = c_v \Rightarrow \check{R} = \gamma - 1 \quad (5.7)$$

Για τα υπόλοιπα μεγέθη, τα αντίστοιχα μεγέθη αναφοράς δε θα τειθούν αυθαίρετα, αλλά συναρτήσει των παραπάνω μεγεθών, με κριτήριο η μορφή των αδιαστατοποιημένων εξισώσεων να μοιάζει με εκείνη των διαστατών.

Αδιαστατοποίηση πίεσης

$$p_t = p + \frac{1}{2}\rho U^2 \Rightarrow U = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_t - p)} \Rightarrow \check{U} = \frac{1}{U_{ref}} \sqrt{\frac{2 p_{ref}}{\check{\rho} \rho_{ref}}(\check{p}_t - \check{p})}$$

Όπως αναφέρθηκε, είναι επιθυμητό η μορφή της αρχικής σχέσης να παραμείνει ίδια και μετά την αδιαστατοποίηση, δηλαδή να ισχύει:

$$\check{U} = \sqrt{\frac{2}{\check{\rho}}(\check{p}_t - \check{p})}$$

το οποίο επιτυγχάνεται με την επιλογή:

$$U_{ref} = \sqrt{\frac{p_{ref}}{\rho_{ref}}} \Rightarrow p_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^2$$

Αδιαστατοποίηση θερμοκρασίας

Ακολουθώντας την ίδια λογική για την καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων, προκύπτει:

$$p = \rho RT \Rightarrow \check{p} = \left(\frac{\rho_{ref} R_{ref} T_{ref}}{p_{ref}} \right) \check{\rho} \check{R} \check{T} \longrightarrow \frac{\rho_{ref} R_{ref} T_{ref}}{p_{ref}} = 1 \Rightarrow T_{ref} = \frac{U_{ref}^2}{c_v}$$

Αδιαστατοποίηση θερμοχωρητικότητας

Από την εξίσωση της ολικής θερμοκρασίας προκύπτει:

$$\begin{aligned} T_t &= T + \frac{1}{2c_p} U^2 \Rightarrow U = \sqrt{2c_p (T_t - T)} \Rightarrow \check{U} = \sqrt{\left(\frac{(c_p)_{ref} T_{ref}}{U_{ref}^2} \right) 2\check{c}_p (\check{T}_t - \check{T})} \\ &\longrightarrow \left(\frac{(c_p)_{ref} T_{ref}}{U_{ref}^2} \right) = 1 \Rightarrow (c_p)_{ref} = \frac{U_{ref}^2}{T_{ref}} \Rightarrow (c_p)_{ref} = c_v \\ \gamma &= \frac{c_p}{c_v} \Rightarrow \gamma = \left(\frac{(c_p)_{ref}}{(c_v)_{ref}} \right) \frac{\check{c}_p}{\check{c}_v} \longrightarrow (c_v)_{ref} = c_v \end{aligned}$$

Αδιαστατοποίηση εσωτερικής ενέργειας

$$e = c_v T \Rightarrow \check{e} = \left(\frac{(c_v)_{ref} T_{ref}}{e_{ref}} \right) \check{c}_v \check{T} \longrightarrow e_{ref} = U_{ref}^2$$

Αδιαστατοποίηση ενθαλπίας

$$h = c_p T \Rightarrow \check{h} = \left(\frac{(c_p)_{ref} T_{ref}}{h_{ref}} \right) \check{c}_p \check{T} \longrightarrow h_{ref} = U_{ref}^2$$

Αδιαστατοποίηση ολικής ενέργειας

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho U^2 \Rightarrow \check{E}_t = \frac{1}{(E_t)_{ref}} \left[p_{ref} \frac{\check{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} (\rho_{ref} U_{ref}^2) \check{\rho} \check{U}^2 \right] \\ \Rightarrow \check{E}_t &= \frac{\rho_{ref} U_{ref}^2}{(E_t)_{ref}} \left(\frac{\check{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \check{\rho} \check{U}^2 \right) \longrightarrow (E_t)_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^2 \end{aligned}$$

Επομένως, η αδιαστατοποίηση των υπόλοιπων μεγεθών (πλην δηλαδή αυτών που φαίνονται στις σχέσεις (5.6)) έχει ως εξής:

$$\check{p} = \frac{p}{\rho_{ref} U_{ref}^2}, \quad \check{T} = \frac{T}{U_{ref}^2 / c_v}, \quad \check{e} = \frac{e}{U_{ref}^2}, \quad \check{h} = \frac{h}{U_{ref}^2}, \quad \check{E}_t = \frac{E_t}{\rho_{ref} U_{ref}^2}, \quad \check{c}_p = \gamma, \quad \check{c}_v = 1$$

Στη συνέχεια, ακολουθεί η διατύπωση των αδιάστατων εξισώσεων Euler.

• Εξίσωση συνέχειας

Η εξίσωση της συνέχειας αποτελεί την πρώτη γραμμή των εξισώσεων (5.1) και γράφεται ως:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{(U_1)_{ref}}{t_{ref}} \frac{\partial \check{U}_1}{\partial \check{t}} + \frac{(F_1)_{ref}}{L_{ref}} \frac{\partial \check{F}_1}{\partial \check{x}} + \frac{(G_1)_{ref}}{L_{ref}} \frac{\partial \check{G}_1}{\partial \check{y}} = 0$$

Με βάση τον ορισμό των \vec{U} , \vec{F} και \vec{G} (σχέσεις (5.2)) ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} U_1 = \rho &\longrightarrow (U_1)_{ref} = \rho_{ref} \\ F_1 = \rho u &\longrightarrow (F_1)_{ref} = \rho_{ref} U_{ref} \\ G_1 = \rho v &\longrightarrow (G_1)_{ref} = \rho_{ref} U_{ref} \end{aligned}$$

Επομένως, με αντικατάσταση προκύπτει:

$$\left(\frac{L_{ref}}{U_{ref} t_{ref}} \right) \frac{\partial \check{U}_1}{\partial \check{t}} + \frac{\partial \check{F}_1}{\partial \check{x}} + \frac{\partial \check{G}_1}{\partial \check{y}} = 0 \quad (5.8)$$

Θέτοντας λοιπόν ίση με τη μονάδα την ποσότητα που βρίσκεται μπροστά από το χρονικό όρο της εξίσωσης (5.8), ορίζεται το χρονικό μέγεθος αναφοράς t_{ref} , ενώ παράλληλα η μορφή της εξίσωσης της συνέχειας, πριν και μετά την αδιαστατοποίηση, παραμένει αναλλοίωτη.

$$t_{ref} = \frac{L_{ref}}{U_{ref}} \quad , \quad \check{t} = \frac{t}{L_{ref}/U_{ref}}$$

- **Εξισώσεις ορμής**

Οι εξισώσεις διατήρησης της ορμής είναι η δεύτερη και η τρίτη γραμμή των εξισώσεων (5.1), οι οποίες αντιστοιχούν στις δύο συνιστώσες x , y της ορμής. Θα ακολουθήσει η εξαγωγή μόνο της αδιάστατης κατά x εξίσωσης της ορμής, καθώς η κατά y προκύπτει με εντελώς όμοιο τρόπο.

Εξίσωση ορμής κατά x :

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{(U_2)_{ref}}{t_{ref}} \frac{\partial \check{U}_2}{\partial \check{t}} + \frac{(F_2)_{ref}}{L_{ref}} \frac{\partial \check{F}_2}{\partial \check{x}} + \frac{(G_2)_{ref}}{L_{ref}} \frac{\partial \check{G}_2}{\partial \check{y}} = 0$$

Όπου:

$$\begin{aligned} U_2 = \rho u &\quad \longrightarrow (U_2)_{ref} = \rho_{ref} U_{ref} \\ F_2 = \rho u^2 + p &\quad \longrightarrow (F_2)_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^2 \\ G_2 = \rho uv &\quad \longrightarrow (G_2)_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^2 \end{aligned}$$

Επομένως, η αδιάστατη εξίσωση της ορμής κατά x παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial \check{U}_2}{\partial \check{t}} + \frac{\partial \check{F}_2}{\partial \check{x}} + \frac{\partial \check{G}_2}{\partial \check{y}} = 0 \quad (5.9)$$

- **Εξίσωση ενέργειας**

$$\frac{\partial U_4}{\partial t} + \frac{\partial F_4}{\partial x} + \frac{\partial G_4}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{(U_4)_{ref}}{t_{ref}} \frac{\partial \check{U}_4}{\partial \check{t}} + \frac{(F_4)_{ref}}{L_{ref}} \frac{\partial \check{F}_4}{\partial \check{x}} + \frac{(G_4)_{ref}}{L_{ref}} \frac{\partial \check{G}_4}{\partial \check{y}} = 0$$

Όπου:

$$\begin{aligned} U_4 = E_t & \longrightarrow (U_4)_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^2 \\ F_4 = (E_t + p)u & \longrightarrow (F_4)_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^3 \\ G_4 = (E_t + p)v & \longrightarrow (G_4)_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^3 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν τα παραπάνω μεγέθη στην εξίσωση της ενέργειας, προκύπτει η αδιάστατη μορφή της εξίσωσης αυτής, η οποία είναι ίδια με την αρχική διαστατή (όπως και οι υπόλοιπες εξισώσεις Euler).

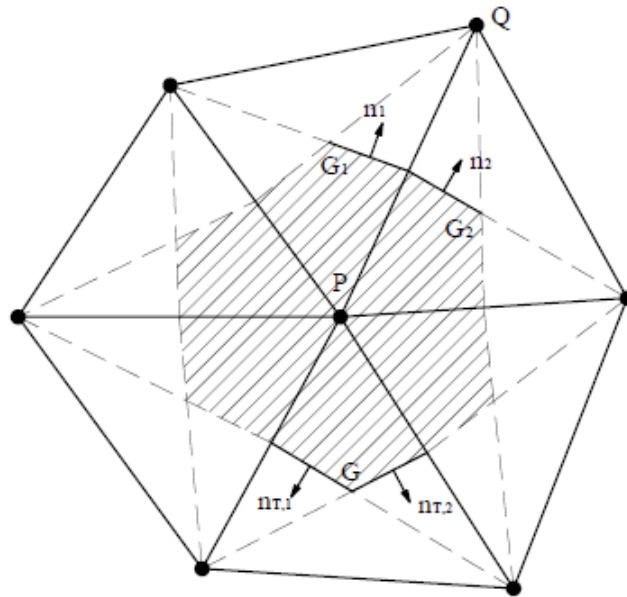
$$\frac{\partial \check{U}_4}{\partial \check{t}} + \frac{\partial \check{F}_4}{\partial \check{x}} + \frac{\partial \check{G}_4}{\partial \check{y}} = 0 \quad (5.10)$$

Ας σημειωθεί ότι το τελικό σύστημα των αδιάστατων εξισώσεων δεν διαφέρει σε τίποτα από το αρχικό. Συνεπώς, οποιαδήποτε αναφορά στις εξισώσεις, από εδώ και πέρα, θα αναφέρεται στις αδιάστατες εξισώσεις, από τις οποίες για λόγους απλότητας θα παραλείπεται το σύμβολο $\check{}$. Στη συνέχεια, θα ακολουθήσει η διακριτοποίηση των εξισώσεων αυτών, που είναι απαραίτητη προκειμένου να γίνει εφικτή η επίλυσή τους στον υπολογιστή.

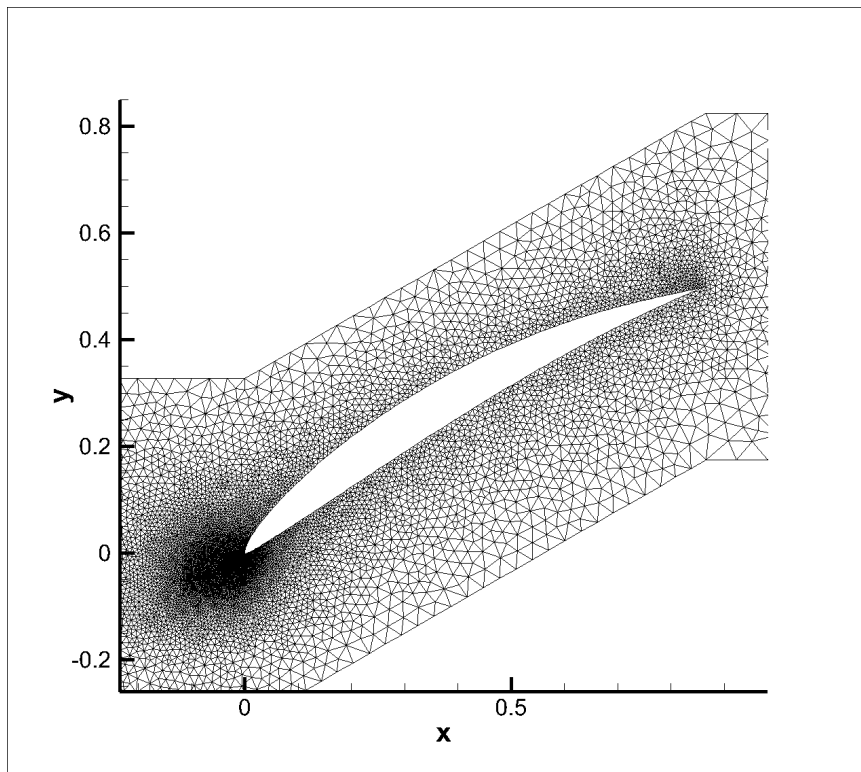
5.3 Διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου

Όπως ήδη αναφέρθηκε, για την επίλυση του προβλήματος της ροής χρησιμοποιήθηκε κώδικας που έχει αναπτυχθεί από το Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ. Για τη διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου, ο κώδικας αυτός χρησιμοποιεί **μη-δομημένο πλέγμα** (unstructured grid), αποτελούμενο από τριγωνικά και τετραεδρικά στοιχεία (στην περίπτωση μας χρησιμοποιήθηκαν μόνο τριγωνικά). Υιοθετείται **κεντροκομβική διατύπωση** (vertex centered formulation) και το χωρίο διακρίνεται σε υποπεριοχές (**κυψέλες ελέγχου-cells**), όπου ολοκληρώνονται οι εξισώσεις της ροής, εφαρμόζοντας τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει τελικά ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, με αγνώστους τα μεγέθη της ροής στους κόμβους του πλέγματος.

Για τη σχεδίαση μιας κυψέλης ελέγχου γύρω από έναν κόμβο (έστω P), αρκεί η ένωση των μέσων των ευθύγραμμων τμημάτων στα οποία ανήκει ο κόμβος, με τα βαρύκεντρα των αντίστοιχων τριγώνων που συντρέχουν στον κόμβο αυτόν, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1: Κυψέλη ελέγχου με κέντρο τον κόμβο P . Με Q συμβολίζονται οι γειτονικοί κόμβοι και με G τα βαρύκεντρα των τριγώνων.



Σχήμα 5.2: 2D πρόβλημα ροής σε γραμμική πτερύγωση συμπίεστη. Μη-δομημένο πλέγμα υπολογιστικού χωρίου.

Στο Σχήμα 5.2 φαίνεται ένα μέρος του μη-δομημένου πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του προβλήματος ροής που αντιμετωπίζεται στην παρούσα διπλωματική εργασία. Όπως φαίνεται, είναι απαραίτητη η πύκνωση του πλέγματος γύρω από την αεροτομή και, κυρίως, στην ακμή πρόσπτωσης, όπου οι κλίσεις των μεγεθών της ροής είναι πολύ μεγάλες. Μακριά από την αεροτομή δεν υπάρχει ανάγκη για πυκνό πλέγμα. Η δυνατότητα πύκνωσης συγκεκριμένης περιοχής του πλέγματος, ανεξάρτητα από το υπόλοιπο, αποτελεί βασικό πλεονέκτημα των μη-δομημένων πλεγμάτων.

5.4 Διακριτοποίηση των εξισώσεων ροής

5.4.1 Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων

Θεωρώντας ως συνισταμένο διάνυσμα ροής το:

$$\underline{\vec{F}} = (\vec{F}, \vec{G}) \quad (5.11)$$

οι εξισώσεις Euler (5.1) γράφονται στη μορφή:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{\vec{F}} = 0 \quad (5.12)$$

Ολοκληρώνοντας την (5.12) στην κυψέλη ελέγχου ενός τυχαίου εσωτερικού κόμβου P του υπολογιστικού χωρίου, προκύπτει:

$$\int_{\text{cell}} \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{\vec{F}} \right] dx dy = 0 \quad (5.13)$$

Θεωρώντας ότι:

$$\int_{\text{cell}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} dx dy = \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right)_P A_{\text{cell}}$$

όπου A_{cell} το εμβαδόν της κυψέλης και εφαρμόζοντας το θεώρημα *Green – Gauss*, η (5.13) γράφεται:

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right)_P A_{\text{cell}} + \int_{C_P} \underline{\vec{F}} \cdot \vec{n} d\gamma = 0 \quad (5.14)$$

όπου $\vec{\hat{n}}$ το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην περίμετρο της κυψέλης C_P με φορά προς το εξωτερικό αυτής και $d\gamma$ το στοιχειώδες μήκος της περιμέτρου. Θέτοντας:

$$\vec{H} = \vec{F} \cdot \vec{\hat{n}} = \vec{F} \hat{n}_x + \vec{G} \hat{n}_y \quad (5.15)$$

η (5.14) παίρνει τη μορφή:

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right)_P A_{\text{cell}} + \int_{C_P} \vec{H} d\gamma = 0$$

ή

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right)_P A_{\text{cell}} + \sum_{Q \in \text{nei}(P)} \vec{\Phi}_{PQ} = 0 \quad (5.16)$$

όπου Q οι γειτονικοί κόμβοι του P και $\vec{\Phi}_{PQ}$ το διάνυσμα ροής που ορίζεται ως:

$$\vec{\Phi}_{PQ} = \int_{\partial C_{PQ}} \vec{H} d\gamma \quad (5.17)$$

Το μήκος ολοκλήρωσης ∂C_{PQ} πρόκειται για το κοινό όριο των κυψελών ελέγχου του κόμβου P και του εκάστοτε γειτονικού Q , το οποίο φαίνεται με έντονη γραμμή στο Σχήμα 5.1, εκατέρωθεν δηλαδή της ακμής PQ .

5.4.2 Υπολογισμός του διανύσματος ροής

Το διάνυσμα ροής $\vec{\Phi}$ υπολογίζεται σε κάθε ακμή και έπειτα αφαιρείται ή προστίθεται ανάλογα, στον ισολογισμό της κυψέλης στην οποία αναφέρεται. Ο υπολογισμός του γίνεται σύμφωνα με τις τιμές των συντηρητικών μεταβλητών εκατέρωθεν του μέσου της ακμής PQ , οι οποίες προκύπτουν συναρτήσει των αντίστοιχων τιμών στους κόμβους P και Q . Επίσης, συνυπολογίζεται και το διάνυσμα \vec{n}_{PQ} που είναι το διανυσματικό άθροισμα των \vec{n}_1, \vec{n}_2 (βλέπε Σχήμα 5.1), τα οποία έχουν μέτρο ίσο με αυτό των αντίστοιχων ευθύγραμμων τμημάτων. Ισχύει δηλαδή:

$$\vec{n}_{PQ} = \vec{n}_1 + \vec{n}_2 \quad (5.18)$$

Κατ' αντιστοιχία με την (5.15), ορίζεται (για $\vec{n} = \vec{n}_{PQ}$) το διάνυσμα:

$$\vec{H} = \vec{F} \cdot \vec{n} = \vec{F}n_x + \vec{G}n_y \quad (5.19)$$

το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μια προσέγγιση του ολοκληρώματος της σχέσης (5.17) που δίνει το $\vec{\Phi}_{PQ}$. Όπως αναφέρθηκε ήδη, για τον υπολογισμό του \vec{H} χρησιμοποιούνται οι τιμές των συντηρητικών μεταβλητών δεξιά (\vec{U}_{PQ}^R) και αριστερά (\vec{U}_{PQ}^L) του μέσου της ακμής PQ . Συνεπώς, το διάνυσμα ροής $\vec{\Phi}_{PQ}$ προκύπτει τελικά ως:

$$\vec{\Phi}_{PQ} = \vec{f} \left(\vec{U}_{PQ}^L, \vec{U}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ} \right) \quad (5.20)$$

Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητος ο ορισμός του ιακωβιανού μητρώου του διανύσματος \vec{F} ως προς τις συντηρητικές μεταβλητές \vec{U} . Ορίζεται λοιπόν:

$$\underline{A} \hat{=} (A_x, A_y) \quad \text{όπου} \quad A_x \hat{=} \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{U}}, \quad A_y \hat{=} \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{U}} \quad (5.21)$$

και

$$\begin{aligned} \underline{A} \hat{=} \underline{A} \cdot \vec{n} &= A_x n_x + A_y n_y \Rightarrow \underline{A} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{U}} n_x + \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{U}} n_y = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{U}} \cdot \vec{n} \\ &\Rightarrow \underline{A} = \frac{\partial (\vec{F} \cdot \vec{n})}{\partial \vec{U}} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{U}} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Από τον ορισμό του \vec{H} (σχέση (5.19)) και τις σχέσεις (5.2), προκύπτει:

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) \\ \rho u (\vec{u} \cdot \vec{n}) + p n_x \\ \rho v (\vec{u} \cdot \vec{n}) + p n_y \\ (E_t + p) (\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Παραγωγίζοντας το \vec{H} ως προς τις συντηρητικές μεταβλητές της ροής \vec{U} , προκύπτει το 4×4 μητρώο \underline{A} (περισσότερες λεπτομέρειες στην [8]). Κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις, μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι ισχύει η εξίσωση:

$$\vec{H} = \underline{A} \vec{U} \quad (5.24)$$

Ακόμα ισχύει ότι:

$$\vec{F} = A_x \vec{U} \quad , \quad \vec{G} = A_y \vec{U} \quad (5.25)$$

Οι ιδιοτιμές του μητρώου \underline{A} έχουν ως εξής:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \vec{u} \cdot \vec{n} \\ \lambda_2 &= \vec{u} \cdot \vec{n} \\ \lambda_3 &= \left(\vec{u} \cdot \vec{n} + c \right) |\vec{n}| \\ \lambda_4 &= \left(\vec{u} \cdot \vec{n} - c \right) |\vec{n}| \end{aligned} \quad (5.26)$$

Τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του μητρώου \underline{A} πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση $(A - \lambda_k I) r_k = 0$, ενώ τα αριστερά την $l_k (A - \lambda_k I) = 0$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας. Κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις, τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν ως εξής ([8]):

$$\begin{aligned} r_1 &= \left[1 \quad u \quad v \quad \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right]^T \\ r_2 &= \left[0 \quad \hat{n}_y \quad -\hat{n}_x \quad \hat{n}_y u - \hat{n}_x v \right]^T \\ r_3 &= \left[\frac{1}{c} \quad \frac{u}{c} + \hat{n}_x \quad \frac{v}{c} + \hat{n}_y \quad \frac{1}{2c}(u^2 + v^2) + \frac{c}{\gamma-1} + \vec{u} \cdot \vec{n} \right]^T \\ r_4 &= \left[\frac{1}{c} \quad \frac{u}{c} - \hat{n}_x \quad \frac{v}{c} - \hat{n}_y \quad \frac{1}{2c}(u^2 + v^2) + \frac{c}{\gamma-1} - \vec{u} \cdot \vec{n} \right]^T \\ \\ l_1 &= \left[1 - \frac{(\gamma-1)(u^2+v^2)}{2c^2} \quad \frac{(\gamma-1)u}{c^2} \quad \frac{(\gamma-1)v}{c^2} \quad -\frac{(\gamma-1)}{c^2} \right] \\ l_2 &= \left[\hat{n}_x v - \hat{n}_y u \quad \hat{n}_y \quad -\hat{n}_x \quad 0 \right] \\ l_3 &= \left[-\frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{2} + \frac{(\gamma-1)(u^2+v^2)}{4c} \quad \frac{\hat{n}_x}{2} - \frac{(\gamma-1)u}{2c} \quad \frac{\hat{n}_y}{2} - \frac{(\gamma-1)v}{2c} \quad \frac{\gamma-1}{2c} \right] \\ l_4 &= \left[\frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{2} + \frac{(\gamma-1)(u^2+v^2)}{4c} \quad -\frac{\hat{n}_x}{2} - \frac{(\gamma-1)u}{2c} \quad -\frac{\hat{n}_y}{2} - \frac{(\gamma-1)v}{2c} \quad \frac{\gamma-1}{2c} \right] \end{aligned}$$

Γνωρίζοντας λοιπόν τα παραπάνω, το μητρώο \underline{A} μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\underline{A} = P \Lambda P^{-1} \quad (5.27)$$

όπου Λ διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τις ιδιοτιμές του \underline{A} και

$$P = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{bmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Επίσης, ορίζονται τα μητρώα:

$$\underline{A}^+ = P\Lambda^+P^{-1} \quad , \quad \underline{A}^- = P\Lambda^-P^{-1} \quad (5.29)$$

$$|\underline{A}| = \underline{A}^+ - \underline{A}^- \quad (5.30)$$

όπου το μητρώο Λ^+ περιέχει τις θετικές ιδιοτιμές, ενώ το Λ^- τις αρνητικές.

Επιστρέφοντας στον υπολογισμό του διανύσματος ροής $\vec{\Phi}_{PQ}$, χρησιμοποιείται το σχήμα του *Roe* ([21]), σύμφωνα με το οποίο:

$$\vec{\Phi}_{PQ} = \frac{1}{2} \left[\vec{H} \left(\vec{U}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ} \right) + \vec{H} \left(\vec{U}_{PQ}^L, \vec{n}_{PQ} \right) \right] - \frac{1}{2} |\tilde{\underline{A}}_{PQ}| \left(\vec{U}_{PQ}^R - \vec{U}_{PQ}^L \right) \quad (5.31)$$

όπου $|\tilde{\underline{A}}_{PQ}|$ το μητρώο που προκύπτει από τις απόλυτες τιμές των ιδιοτιμών του \underline{A} (σχέση (5.30)), υπολογισμένο όμως με βάσει τις κατά *Roe* μέσες τιμές των πρωτευουσών μεταβλητών. Αυτές δίνονται παρακάτω:

$$\vec{V}_{PQ} = [\tilde{\rho} \quad \tilde{u} \quad \tilde{v} \quad \tilde{p}]^T \quad (5.32)$$

Οι τρεις πρώτες συνιστώσες του \vec{V}_{PQ} υπολογίζονται άμεσα από τη σχέση:

$$\vec{V}_{PQ} = \frac{\sqrt{\rho_L} \vec{V}_L + \sqrt{\rho_R} \vec{V}_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (5.33)$$

ενώ για τον υπολογισμό της μέσης τιμής της πίεσης, υπολογίζεται πρώτα η μέση τιμή κατά *Roe* της ολικής ενθαλπίας χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.33) και, στη συνέχεια, από αυτήν προκύπτει η μέση τιμή της πίεσης (σχέση (5.5)).

Για τον υπολογισμό του διανύσματος ροής $\vec{\Phi}_{PQ}$, θα μπορούσε εναλλακτικά να χρησιμοποιηθεί το σχήμα *FVS* (όπως έγινε στο ψευδο-1D πρόβλημα ροής του κεφαλαίου 3). Ωστόσο, η επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος έγινε με υπολογιστικό κώδικα που χρησιμοποιεί το σχήμα *Roe*.

5.4.3 Αύξηση της ακρίβειας του σχήματος

Στην ανάλυση που προηγήθηκε για τον υπολογισμό του διανύσματος ροής $\vec{\Phi}_{PQ}$, προέκυψαν οι τιμές των συντηρητικών μεταβλητών εκατέρωθεν του μέσου της ακμής *PQ*.

Η επιλογή των τιμών αυτών σχετίζεται άμεσα με την επιθυμητή ακρίβεια της χωρικής διακριτοποίησης των εξισώσεων της ροής. Θα μπορούσε να θεωρηθεί $\vec{U}_L = \vec{U}_P$ και $\vec{U}_R = \vec{U}_Q$, το οποίο αντιστοιχεί σε χωρική διακριτοποίηση 1ης τάξης. Εντούτοις, εφαρμόζοντας το θεώρημα του *Taylor* στις πρωτεύουσες μεταβλητές και έπειτα υπολογίζοντας τις τιμές των \vec{U}_L , \vec{U}_R , επιτυγχάνεται αύξηση της τάξης της χωρικής διακριτοποίησης. Η σχέση του *Taylor*, με αποκομμένους τους όρους δεύτερης τάξης και πάνω, γράφεται για τις πρωτεύουσες μεταβλητές ως:

$$\begin{aligned}\vec{V}_{PQ}^L &= \vec{V}_P + \frac{1}{2}\vec{PQ} \cdot (\nabla \vec{V})_P \\ \vec{V}_{PQ}^R &= \vec{V}_Q - \frac{1}{2}\vec{PQ} \cdot (\nabla \vec{V})_Q\end{aligned}\quad (5.34)$$

Από τις τιμές αυτές των μη-συντηρητικών μεταβλητών, υπολογίζονται στη συνέχεια οι τιμές των συντηρητικών. Με τον τρόπο αυτό αυξάνεται η ακρίβεια του σχήματος χωρικής διακριτοποίησης σε 2ης τάξης.

5.5 Επιβολή οριακών συνθηκών και διακριτοποίηση αυτών

Στην ανάλυση που προηγήθηκε, είχε θεωρηθεί τυχαίος κόμβος P στο εσωτερικό του υπολογιστικού χωρίου. Όταν όμως ο εν λόγω κόμβος βρίσκεται στο όριο του χωρίου, πρέπει επιπλέον να υπολογιστεί το διάνυσμα ροής που εξέρχεται από την κυψέλη του κόμβου αυτού προς το εξωτερικό περιβάλλον. Συνεπώς, η ολοκλήρωση των εξισώσεων *Euler* σε κυψέλη οριακού κόμβου δίνει (σε σχέση με την (5.16)):

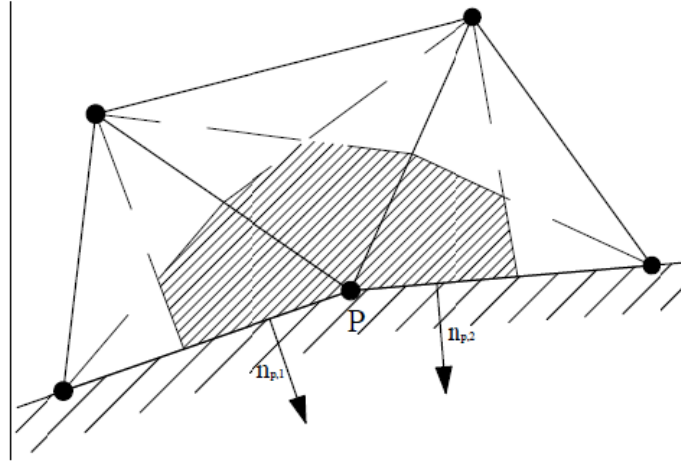
$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\right)_P A_{cell} + \sum_{Q \in nei(P)} \vec{\Phi}_{PQ} + \vec{\Phi}_{\partial C} = 0 \quad (5.35)$$

όπου ∂C το όριο του υπολογιστικού χωρίου.

Στη συνέχεια, θα αναφερθεί ο υπολογισμός του διανύσματος ροής όταν ο οριακός κόμβος P αποτελεί κόμβο τοιχώματος, εισόδου ή εξόδου, ή ανήκει σε περιοδικό όριο.

5.5.1 Στερεό τοίχωμα

Στο Σχήμα 5.3 φαίνεται η κυψέλη ελέγχου ενός κόμβου που βρίσκεται πάνω στο τοίχωμα. Στην περίπτωση αυτή, το διάνυσμα ροής που εξέρχεται από το τοίχωμα $\vec{\Phi}_{wall}$ υπολογίζεται ως:



Σχήμα 5.3: Κυψέλη κόμβου τοιχώματος.

$$\vec{\Phi}_{wall} = \vec{H}(\vec{U}_P, \vec{n}_P) \quad (5.36)$$

όπου $\vec{n}_P = \vec{n}_{P,1} + \vec{n}_{P,2}$ (βλέπε Σχήμα 5.3).

Από τη σχέση (5.23) προκύπτει:

$$\vec{\Phi}_{wall} = \begin{bmatrix} \rho(\vec{u} \cdot \vec{n}) \\ \rho u(\vec{u} \cdot \vec{n}) + pn_x \\ \rho v(\vec{u} \cdot \vec{n}) + pn_y \\ (E_t + p)(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix}_P \quad (5.37)$$

Όμως, για τους κόμβους του τοιχώματος ισχύει η συνθήκη μη-εισχώρησης, η οποία υπαγορεύει στο ρευστό να κινείται εφαπτομενικά του τοιχώματος, δηλαδή:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad (5.38)$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν την (5.38) στην (5.37), το διάνυσμα ροής που εξέρχεται από το τοίχωμα παίρνει τη μορφή:

$$\vec{\Phi}_{wall} = \begin{bmatrix} 0 \\ pn_x \\ pn_y \\ 0 \end{bmatrix}_P \quad (5.39)$$

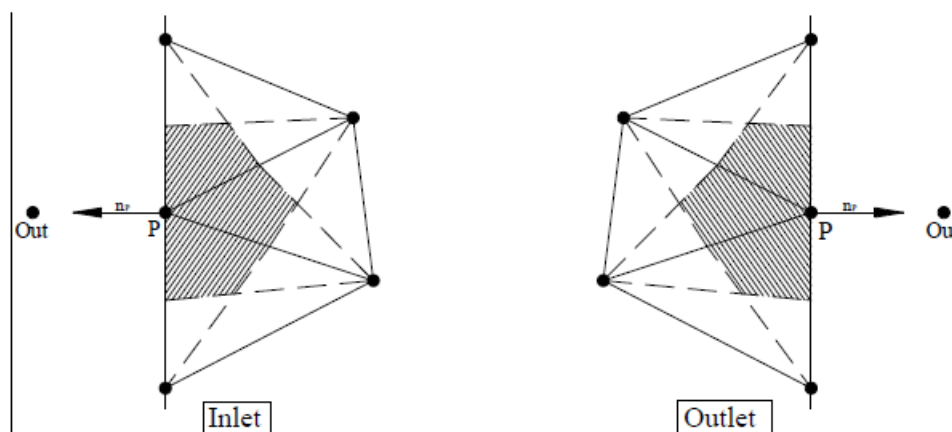
5.5.2 Είσοδος - Έξοδος του πεδίου ροής

Έχει αποδειχθεί ότι το πρόσημο των ιδιοτιμών του μητρώου \underline{A} (5.26) καθορίζει την κατεύθυνση μεταφοράς της ‘πληροφορίας’. Όπως φαίνεται, οι τρεις πρώτες ιδιοτιμές έχουν θετικό πρόσημο, το οποίο σημαίνει ότι η αντίστοιχη ‘πληροφορία’ ταξιδεύει κατά την κατεύθυνση της ροής. Το πρόσημο της τέταρτης ιδιοτιμής εξαρτάται από το αν η ροή είναι υποηχητική ή υπερηχητική. Στο πρόβλημά μας η ροή είναι υποηχητική, οπότε η τέταρτη ιδιοτιμή προκύπτει αρνητική και, συνεπώς, η τέταρτη πρωτεύουσα μεταβλητή της ροής (δηλαδή η πίεση) μεταφέρεται αντίθετα από τις υπόλοιπες. Επομένως, για το κλείσιμο του συστήματος των εξισώσεων ροής απαιτούνται τρία γνωστά μεγέθη στην είσοδο του υπολογιστικού χωρίου και ένα στην έξοδο. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, επιλέγονται η ολική πίεση (p_t) και θερμοκρασία (T_t) στην είσοδο της ροής, η γωνία που σχηματίζει ως προς την αξονική διεύθυνση η ταχύτητα του ρευστού στην είσοδο και ο ισηντροπικός αριθμός $Mach$ της ροής στην έξοδο, από όπου υπολογίζεται η στατική πίεση στη θέση αυτή.

Το διάνυσμα ροής που εξέρχεται από τις εξεταζόμενες κυψέλες ελέγχου υπολογίζεται σύμφωνα με το ανάντι σχήμα των *Steger – Warming* [22] (ακρίβεια πρώτης τάξης):

$$\vec{\Phi}_{I/O} = \underline{A}_P^+ \vec{U}_P + \underline{A}_P^- \vec{U}_{out} \quad (5.40)$$

όπου με *out* συμβολίζεται ένας υποθετικός κόμβος εξωτερικά του πεδίου ροής, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.4. Οι συντηρητικές μεταβλητές στον κόμβο αυτό υπολογίζονται από τις οριακές συνθήκες του προβλήματος. Με τον τρόπο αυτό, επιβάλλονται έμμεσα (implicitly) οι οριακές συνθήκες εισόδου - εξόδου στο προς επίλυση σύστημα.



Σχήμα 5.4: Κυψέλες ελέγχου κόμβων εισόδου-εξόδου.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, για υποηχητική ροή, χρειάζεται να δοθούν τρία μεγέθη στην είσοδο (p_t, T_t, α_1) και ένα στην έξοδο (M_{is}). Τα υπόλοιπα στοιχεία των θεωρητικών κόμβων προκύπτουν από το εσωτερικό του πεδίου ροής.

- **Είσοδος**

$$\begin{aligned} p_{out} &= p_P \\ T_{out} &= T_t \left(\frac{p_{out}}{p_t} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\ |\vec{u}_{out}| &= \sqrt{2\gamma(T_t - T_{out})} \\ u_{out} &= |\vec{u}_{out}| \cos \alpha_1 \\ v_{out} &= |\vec{u}_{out}| \sin \alpha_1 \end{aligned}$$

Επομένως:

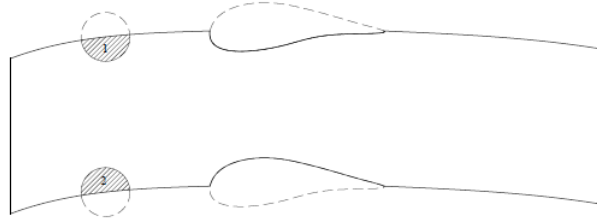
$$\begin{aligned} \rho_{out} &= \frac{p_{out}}{(\gamma - 1) T_{out}} \\ (\rho u)_{out} &= \rho_{out} u_{out} \\ (\rho v)_{out} &= \rho_{out} v_{out} \\ (E_t)_{out} &= \frac{p_{out}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho_{out} |\vec{u}_{out}|^2 \end{aligned}$$

- **Έξοδος**

$$\begin{aligned} p_{out} &= p_t \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{is}^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \rho_{out} &= \rho_P \\ (\rho u)_{out} &= (\rho u)_P \\ (\rho v)_{out} &= (\rho v)_P \\ (E_t)_{out} &= \frac{p_{out}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho_P (u_P^2 + v_P^2) \end{aligned}$$

5.5.3 Περιοδικά όρια

Το υπολογιστικό χωρίο που χρησιμοποιείται στην παρούσα διπλωματική εργασία (Σχήμα 5.2) αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα χωρίου με περιοδικά όρια. Οι κυψέλες ελέγχου του ενός περιοδικού ορίου συμπληρώνονται από τις κυψέλες των αντίστοιχων κόμβων του άλλου περιοδικού ορίου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.5. Το πάνω και το κάτω όριο του χωρίου (εκτός των τοιχωμάτων των αεροτομών) αποτελούν τα περιοδικά όρια, καθώς το εν λόγω χωρίο επαναλαμβάνεται προς τα πάνω και προς τα κάτω,



Σχήμα 5.5: Περιοδικό χωρίο ροής.

έτσι ώστε να συμπληρωθεί η επιφάνεια της στροβιλομηχανής (που στην προκειμένη περίπτωση είναι συμπίεστης). Εφόσον το χωρίο επαναλαμβάνεται, το εξερχόμενο από το όριο του χωρίου διάνυσμα ροής στην κυψέλη 1 ισούται με το άθροισμα των υπολογιζόμενων διανυσμάτων ροής γύρω από την κυψέλη 2, και αντιστρόφως. Επομένως, δεν είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των εξερχόμενων διανυσμάτων ροής από τα περιοδικά όρια του χωρίου, καθώς στις οριακές κυψέλες προστίθενται και τα διανύσματα των αντίστοιχων κυψελών του άλλου περιοδικού ορίου.

5.6 Επαναληπτικός αλγόριθμος επίλυσης

Υπενθυμίζεται ότι η διακριτή μορφή των εξισώσεων Euler (ολοκληρωμένων σε έναν πεπερασμένο όγκο με κέντρο το P) προέκυψε (σχέση (5.16)):

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\right)_P A_{cell} + \sum_{Q \in nei(P)} \vec{\Phi}_{PQ} = 0 \quad (5.41)$$

Αν και το πρόβλημα αναφέρεται σε μόνιμη ροή, ο ψευδο-χρονικός όρος έχει εισαχθεί προκειμένου το αλγεβρικό σύστημα που θα προκύψει (γράφοντας την εξίσωση (5.41) για όλους τους κόμβους του πλέγματος) να επιλυθεί με την τεχνική της χρονοπροέλασης (time-marching), όπως παρουσιάζεται στη συνέχεια. Χρησιμοποιώντας λοιπόν τον δείκτη k για τις ψευδο-χρονικές στιγμές, η παράγωγος του \vec{U} ως προς τον ψευδο-χρόνο, με σχήμα ακρίβειας 1ης τάξης, γράφεται:

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\right)_P^{k+1} = \frac{\vec{U}^{k+1} - \vec{U}^k}{\Delta t} \Big|_P = \frac{\Delta \vec{U}^{k+1}}{\Delta t} \Big|_P \quad (5.42)$$

Επειδή το διάνυσμα ροής $\vec{\Phi}_{PQ}$ είναι μη-γραμμική συνάρτηση του \vec{U} (σχέση (5.31)), ο δεύτερος όρος της εξίσωσης (5.41) γραμμικοποιείται ως:

$$\sum_{Q \in \text{nei}(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^{k+1} = \sum_{Q \in \text{nei}(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^k + \sum_{Q \in \text{nei}(P)} \left. \frac{\partial \vec{\Phi}_{PQ}}{\partial \vec{U}} \right|^k \cdot \Delta \vec{U}^{k+1} \quad (5.43)$$

Αντικαθιστώντας, λοιπόν, τις (5.42) και (5.43) στην (5.41), προκύπτει:

$$\left. \frac{\Delta \vec{U}^{k+1}}{\Delta t} \right|_P A_{\text{cell}} + \sum_{Q \in \text{nei}(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^k + \sum_{Q \in \text{nei}(P)} \left. \frac{\partial \vec{\Phi}_{PQ}}{\partial \vec{U}} \right|^k \cdot \Delta \vec{U}^{k+1} = 0 \quad (5.44)$$

Η εξίσωση (5.44) αποτελεί τις τέσσερις εξισώσεις ροής γραμμένες την ψευδο-χρονική στιγμή $k + 1$ στον κόμβο P . Ο όρος $\sum_{Q \in \text{nei}(P)} \left. \frac{\partial \vec{\Phi}_{PQ}}{\partial \vec{U}} \right|^k \cdot \Delta \vec{U}^{k+1}$ εξαρτάται τόσο από το \vec{U}_P όσο και από τα \vec{U}_Q , οπότε μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\sum_{Q \in \text{nei}(P)} \left. \frac{\partial \vec{\Phi}_{PQ}}{\partial \vec{U}} \right|^k \cdot \Delta \vec{U}^{k+1} = [\text{diag}]_P^k \cdot \Delta \vec{U}_P^{k+1} + \sum_{Q \in \text{nei}(P)} [\text{zm}]_Q^k \cdot \Delta \vec{U}_Q^{k+1} \quad (5.45)$$

όπου το $[\text{diag}]$ και το $[\text{zm}]$ είναι 4×4 μητρώα, οι τιμές των οποίων συναρτώνται των \vec{U}_P και \vec{U}_Q αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας την (5.45) στην (5.44) και κρατώντας στο αριστερό μέλος τις άγνωστες ποσότητες $\Delta \vec{U}^{k+1}$, προκύπτει:

$$\left[\frac{A_{\text{cell}}}{\Delta t} I_{4 \times 4} + [\text{diag}]_{4 \times 4} \right]_P^k \cdot \Delta \vec{U}_P^{k+1} + \sum_{Q \in \text{nei}(P)} [\text{zm}]_Q^k \cdot \Delta \vec{U}_Q^{k+1} = [\text{res}]_{4 \times 1}^k \quad (5.46)$$

όπου:

$$[\text{res}]_{4 \times 1}^k = - \sum_{Q \in \text{nei}(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^k \quad (5.47)$$

Παρατηρούμε ότι το $[\text{res}]$ είναι το υπόλοιπο (residual) της εξίσωσης (5.41), το οποίο εκφράζει τη φυσική του προβλήματος. Όταν για κάθε κόμβο ισχύει $[\text{res}] = 0$ (με το 'ίσον' να σημαίνει πρακτικά την επιθυμητή από το χρήστη ακρίβεια του υπολογιστή), η λύση του αντίστοιχου ψευδο-χρονικού βήματος επαληθεύει την (5.41) και επομένως το πρόβλημα έχει λυθεί. Αυτό φαίνεται και από την (5.46), όπου όταν $[\text{res}] \rightarrow 0 \forall$ κόμβο P , το αλγεβρικό σύστημα των εξισώσεων τείνει να γίνει ομογενές (η λύση του οποίου είναι η μηδενική), οπότε $\Delta \vec{U} \rightarrow 0 \forall P$ και, συνεπώς, η επαναληπτική διαδικασία έχει συγκλίνει.

Γράφοντας την εξίσωση (5.46) σε κάθε κόμβο του πλέγματος, προκύπτουν N_s τετράδες εξισώσεων για μια συγκεκριμένη ψευδο-χρονική στιγμή. Προκειμένου να γίνει η μετάβαση στην επόμενη ψευδο-χρονική στιγμή, πρέπει να βρεθούν οι N_s τετράδες αγνώστων $\Delta \vec{U}$. Επομένως, πρέπει να επιλυθεί αριθμητικά ένα γραμμικό σύστημα της μορφής:

$$[B]_{4N_s \times 4N_s} \cdot \Delta \vec{U}_{4N_s \times 1} = [C]_{4N_s \times 1} \quad (5.48)$$

Η επίλυση του συστήματος αυτού με απ' ευθείας αντιστροφή του μητρώου $[B]$ είναι απαγορευτική από πλευράς υπολογιστικού κόστους, εξαιτίας του μεγάλου μεγέθους του μητρώου (π.χ. 50000×50000). Επιπλέον, πάρα πολλά από τα στοιχεία του μητρώου αυτού είναι μηδενικά, καθώς ο κάθε κόμβος επηρεάζεται άμεσα μόνο από τους γειτονικούς του και όχι από όλους τους κόμβους του πλέγματος. Ωστόσο, επειδή το πλέγμα που χρησιμοποιείται είναι μη-δομημένο, το μητρώο δεν έχει μπλοκ-διαγώνια μορφή (δηλαδή τα μη-μηδενικά στοιχεία δεν είναι διατεταγμένα σε διαγωνίους) και, επομένως, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο τροποποιημένος αλγόριθμος Thomas (όπως έγινε για την επίλυση του ψευδο-1D προβλήματος ροής στο Κεφάλαιο 3). Για τους παραπάνω λόγους, χρησιμοποιείται ο επαναληπτικός αλγόριθμος Jacobi.

Για το σκοπό αυτό, η εξίσωση (5.46) γράφεται:

$$[DIAG]_P \cdot \Delta \vec{U}_P^{new} = [res]_{4 \times 1} - \sum_{Q \in nei(P)} [zm]_Q \cdot \Delta \vec{U}_Q^{old}$$

όπου:

$$[DIAG]_P = \left[\frac{A_{cell}}{\Delta t} I_{4 \times 4} + [diag]_{4 \times 4} \right]_P$$

και τελικά:

$$\Delta \vec{U}_P^{new} = [DIAG]_P^{-1} \cdot \left[[res]_{4 \times 1} - \sum_{Q \in nei(P)} [zm]_Q \cdot \Delta \vec{U}_Q^{old} \right] \quad (5.49)$$

όπου τα $[zm]$, $[res]$ και $[DIAG]^{-1}$ υπολογίζονται στην τρέχουσα ψευδο-χρονική στιγμή k .

Ο επαναληπτικός αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος έχει λοιπόν ως εξής:

- Βήμα 1:
Γίνεται αρχικοποίηση του διανύσματος των συντηρητικών μεταβλητών της ροής \vec{U}^0 για κάθε κόμβο του πλέγματος.
- Βήμα 2:
Έναρξη της ψευδο-χρονικής επαναληπτικής διαδικασίας ($k \leftarrow 1$) με $\vec{U}^k = \vec{U}^0$.

- Βήμα 3:
Χρησιμοποιώντας το τρέχον \vec{U}^k , υπολογίζονται τα $[zm]$, $[res]$ και $[DIAG]^{-1} \forall$ κόμβο P , ενώ τίθεται $\Delta \vec{U}^{old} = 0$.
- Βήμα 4:
Έναρξη της Jacobi (εσωτερικής) επαναληπτικής διαδικασίας ($n \leftarrow 1$).
- Βήμα 5:
Εφαρμόζοντας τη σχέση (5.49) \forall κόμβο P (όπου χρησιμοποιείται το τρέχον $\Delta \vec{U}^{old}$), υπολογίζονται τα $\Delta \vec{U}^{new}$.
- Βήμα 6:
Αν $n < n_{jacobi}$, τότε: $\Delta \vec{U}^{old} \leftarrow \Delta \vec{U}^{new}$, $n \leftarrow n + 1$ και επιστροφή στο Βήμα 5.
- Βήμα 7:
Τερματισμός της Jacobi και ανανέωση του διανύσματος των συντηρητικών μεταβλητών σύμφωνα με τη σχέση $\vec{U}^{k+1} = \vec{U}^k + \Delta \vec{U}^{new}$.
- Βήμα 8:
Χρησιμοποιώντας το \vec{U}^{k+1} , υπολογίζονται τα τοπικά υπόλοιπα $[res]$ (\forall κόμβο P) και στη συνέχεια η RMS τιμή τους, η οποία συγκρίνεται με το κριτήριο σύγκλισης που έχει δώσει ο χρήστης. Αν το αποτέλεσμα δεν είναι ικανοποιητικό, τότε: $\vec{U}^k \leftarrow \vec{U}^{k+1}$, $k \leftarrow k + 1$ και επιστροφή στο Βήμα 3.
- Βήμα 9:
Τερματισμός αλγορίθμου.

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω αλγόριθμο, για την επίλυση του προβλήματος πραγματοποιείται διπλή επαναληπτική διαδικασία. Μια εσωτερική (Jacobi) για τον υπολογισμό του $\Delta \vec{U}$ και μια εξωτερική στον ψευδο-χρόνο. Το n_{jacobi} είναι ένας αριθμός που έχει οριστεί από το χρήστη εκ των προτέρων και αποτελεί τον αριθμό των εσωτερικών επαναλήψεων που θα πραγματοποιήσει ο αλγόριθμος, σε κάθε ψευδο-χρονικό βήμα. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει κάποιο εσωτερικό κριτήριο σύγκλισης, αλλά εκτελείται συγκεκριμένος αριθμός επαναλήψεων (15 στην περίπτωση μας). Το \vec{U}^{k+1} που λαμβάνεται στον τερματισμό αποτελεί τη λύση του προβλήματος.

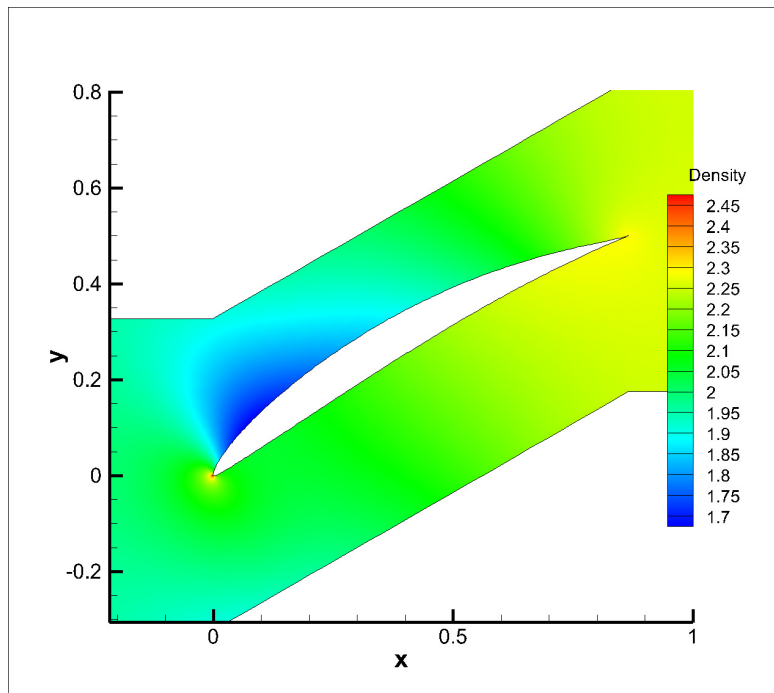
5.7 Αποτελέσματα αριθμητικής επίλυσης

Η αριθμητική επίλυση του προβλήματος που παρουσιάστηκε στις προηγούμενες ενότητες πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο κώδικα του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ ([17], [33]). Το σχετικά αραιό μη-δομημένο πλέγμα

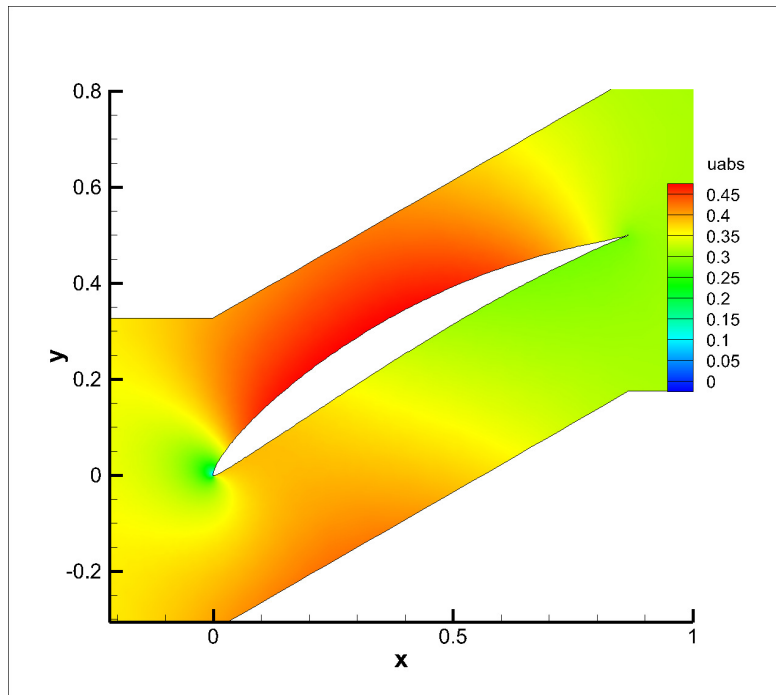
που επιλέχθηκε για τη διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου (Σχήμα 5.2) αποτελείται από $N_s = 11544$ κόμβους. Ο κώδικας επιλύει τις αδιάστατες εξισώσεις Euler (Υποενότητα 5.2.2), χρησιμοποιώντας ως κλίμακες αδιαστατοποίησης: $p_{ref} = p_{t(in)}$ και $T_{ref} = T_{t(in)}$. Επομένως, τα αντίστοιχα αδιάστατα μεγέθη στην είσοδο είναι εκ των προτέρων: $\check{p}_{t(in)} = 1$ και $\check{T}_{t(in)} = 1$. Οι υπόλοιπες οριακές συνθήκες του προβλήματος επιλέχθηκαν στη συγκεκριμένη περίπτωση ως:

$$\alpha_{(in)} = 45^\circ, \quad M_{is(out)} = 0.4557$$

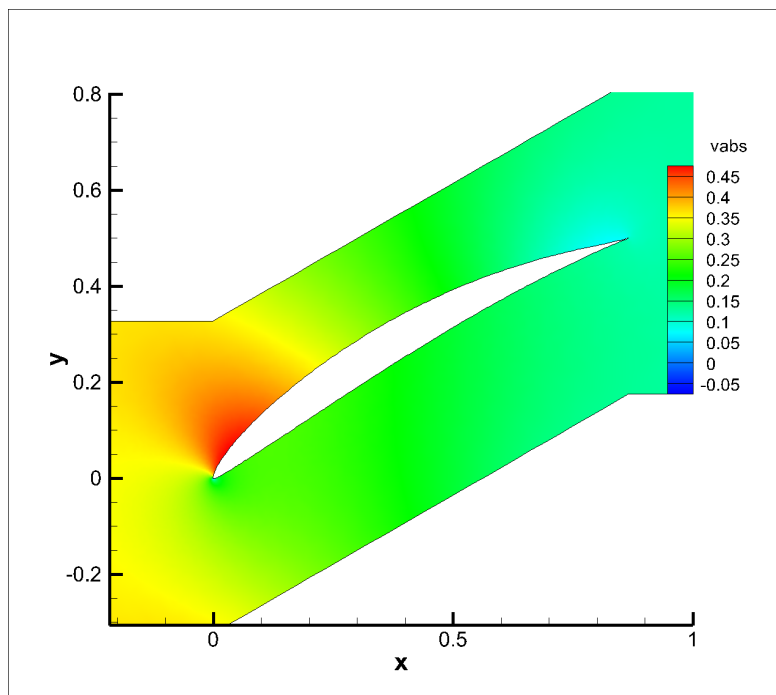
Τέλος, προκειμένου να επιτευχθεί πλήρης σύγκλιση των εξισώσεων του προβλήματος, ο αριθμός των επαναλήψεων (ψευδο-χρονικών βημάτων) που πραγματοποιήθηκαν ήταν κοντά στις 5000. Στα σχήματα που ακολουθούν φαίνονται τα πεδία που προέκυψαν για τις πρωτεύουσες μεταβλητές της ροής (ρ , u , v , p) και για τον τοπικό αριθμό $Mach$.



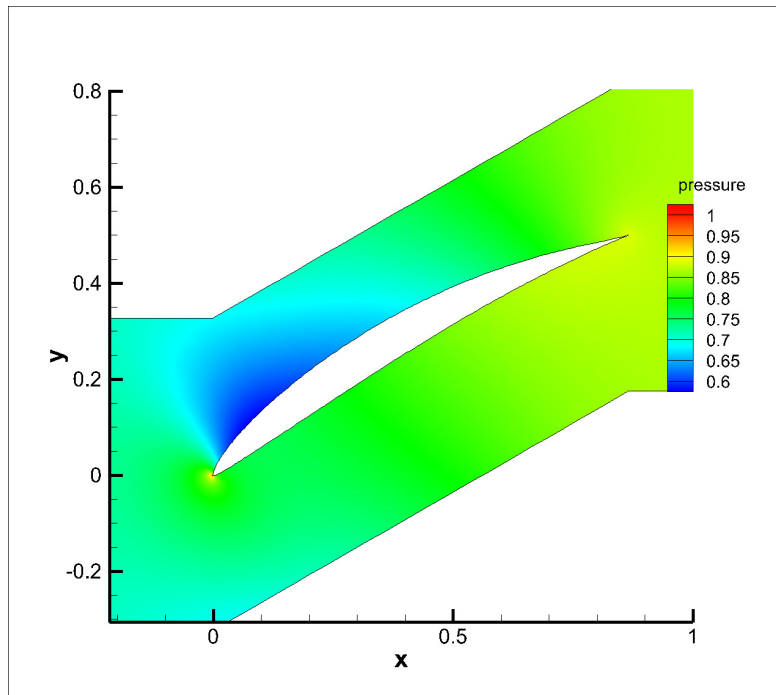
Σχήμα 5.6: 2D πρόβλημα ροής σε γραμμική πτερύγωση συμπίεστη. Πεδίο κατανομής της πυκνότητας (ρ) του ρευστού.



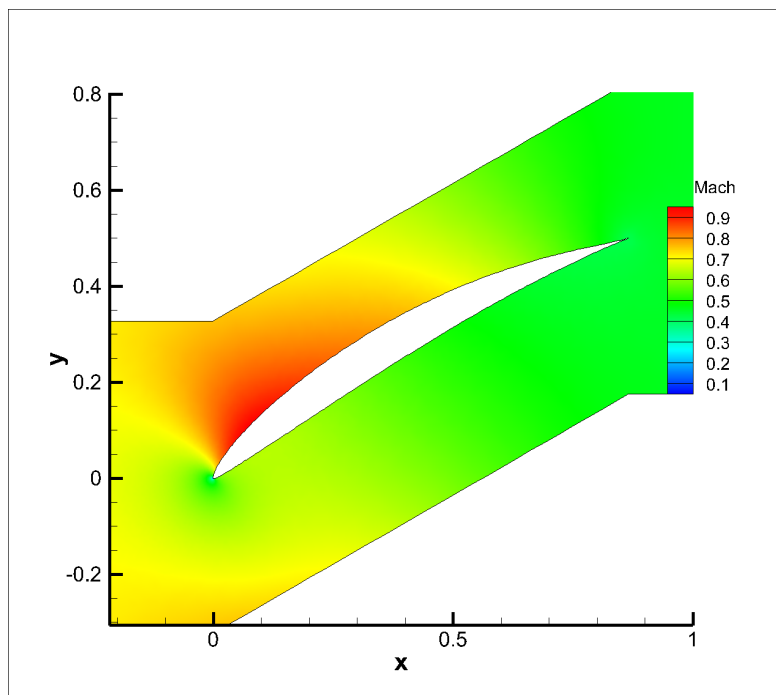
Σχήμα 5.7: 2D πρόβλημα ροής σε γραμμική πτερύγωση συμπίεστη. Πεδίο κατανομής της απόλυτης τιμής της x -συνιστώσας της ταχύτητας ($|u|$) του ρευστού.



Σχήμα 5.8: 2D πρόβλημα ροής σε γραμμική πτερύγωση συμπίεστη. Πεδίο κατανομής της απόλυτης τιμής της y -συνιστώσας της ταχύτητας ($|v|$) του ρευστού.



Σχήμα 5.9: 2D πρόβλημα ροής σε γραμμική πτερύγωση συμπίεστη. Πεδίο κατανομής της στατικής πίεσης (p) του ρευστού.



Σχήμα 5.10: 2D πρόβλημα ροής σε γραμμική πτερύγωση συμπίεστη. Πεδίο κατανομής του τοπικού αριθμού $Mach$ της ροής.

Η πυκνότητα και η πίεση του ρευστού (Σχήμα 5.6 και 5.9 αντίστοιχα) εμφανίζουν όμοια συμπεριφορά, όπως ήταν άλλωστε αναμενόμενο. Η μέγιστη τιμή τους παρατηρείται στην ακμή πρόσπτωσης του πτερυγίου (σημείο ανακοπής) και η ελάχιστη στην πλευρά υποπίεσης αυτού. Τόσο η πυκνότητα όσο και η πίεση στην έξοδο είναι αυξημένες σε σχέση με την είσοδο, το οποίο είναι άλλωστε και ο ρόλος του διαχύτη του συμπιεστή.

Αντίθετη συμπεριφορά παρουσιάζει η ταχύτητα του ρευστού, οι συνιστώσες της οποίας φαίνονται στα σχήματα 5.7 και 5.8. Παρατηρείται μηδενισμός και των δύο συνιστωσών στην ακμή πρόσπτωσης και μεγιστοποίηση αυτών στην πλευρά υποπίεσης. Πιο αντιπροσωπευτικός της ταχύτητας είναι ο τοπικός αριθμός *Mach* (Σχήμα 5.10), ο οποίος από 0.7 στην είσοδο, φτάνει στο 0.9 τοπικά στην πλευρά υποπίεσης και στην έξοδο πέφτει στο 0.5. Επομένως, αν και η ροή στο συμπιεστή συνολικά επιβραδύνεται, υπάρχει κίνδυνος εμφάνισης κρουστικών κυμάτων στην πλευρά υποπίεσης των πτερυγίων, ακόμα και όταν η ροή στην είσοδο είναι υποηχητική.

Κεφάλαιο 6

Εφαρμογή της Μεθόδου στο 2D Πρόβλημα Ροής

6.1 Εισαγωγικά σχόλια

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται εφαρμογή της προτεινόμενης μεθόδου (Κεφάλαιο 2) στο 2D πρόβλημα ροής σε γραμμική πτερύγωση συμπιεστή, η αριθμητική επίλυση των Euler εξισώσεων του οποίου πραγματοποιήθηκε στο Κεφάλαιο 5.

Αρχικά, θα προηγηθεί η παρουσίαση της προτεινόμενης μεθόδου στη γενική της μορφή, για 2D ή και 3D προβλήματα. Ας σημειωθεί ότι εδώ χρησιμοποιείται η συνεχής συζυγής μέθοδος (continuous adjoint method), ως εναλλακτική της διακριτής που εφαρμόστηκε στο Κεφάλαιο 4. Στη συνέχεια, θα γίνει η διατύπωση και η επίλυση των συζυγών εξισώσεων για το συγκεκριμένο 2D πρόβλημα ροής και τέλος, θα παρουσιαστεί η διαδικασία εφαρμογής της διορθωτικής μεθόδου στο πρόβλημα αυτό, καθώς και το αποτέλεσμα που προέκυψε.

6.2 Εφαρμογή χρησιμοποιώντας τη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο

6.2.1 Γενική περίπτωση

Οι εξισώσεις Euler, για μόνιμη ροή σε 2D ή 3D προβλήματα, γράφονται στη γενική συντηρητική μορφή:

$$\vec{R}(\vec{U}) = \frac{\partial \vec{F}_i}{\partial x_i}(\vec{U}) = 0 \quad (6.1)$$

όπου ο επαναλαμβανόμενος δείκτης i υπονοεί άθροιση. Επιπλέον, ορίζονται τα μητρώα:

$$A_i(\vec{U}) = \frac{\partial \vec{F}_i}{\partial \vec{U}}(\vec{U}) \quad (6.2)$$

Οι διακριτοποιημένες εξισώσεις Euler γράφονται στη μορφή:

$$\vec{R}_H(\vec{U}_H) = 0 \quad (6.3)$$

όπου \vec{R}_H ο διακριτοποιημένος διαφορικός τελεστής σε ένα σχετικά αραιό πλέγμα (δείκτης H) και \vec{U}_H η αριθμητική λύση που προκύπτει στο πλέγμα αυτό.

Ας υποτεθεί ότι η ολοκληρωματική ποσότητα που ενδιαφέρει σε τέτοιου είδους προβλήματα, γράφεται στη γενική μορφή:

$$J(\vec{U}) = \int_S M(\vec{U}) dS + \int_\Omega P(\vec{U}) d\Omega \quad (6.4)$$

όπου Ω το υπολογιστικό χωρίο και S το όριο αυτού. Με άλλα λόγια, ζητούμενο είναι ο υπολογισμός του ολοκληρώματος J , το οποίο εξαρτάται από τη ροή, τόσο στο εσωτερικό όσο και στο όριο του χωρίου.

Αποτέλεσμα της αριθμητικής επίλυσης της (6.3), αντί της (6.1), είναι τα σφάλματα:

$$\delta \vec{U} = \vec{U}_H - \vec{U} \quad (6.5)$$

$$\delta \vec{R} = \vec{R}(\vec{U}_H) - \underbrace{\vec{R}(\vec{U})}_0 \Rightarrow$$

$$\delta \vec{R} = \vec{R}(\vec{U}_H) \quad (6.6)$$

$$\delta J = J(\vec{U}_H) - J(\vec{U}) \Rightarrow$$

$$\delta J = \int_S (M(\vec{U}_H) - M(\vec{U})) dS + \int_\Omega (P(\vec{U}_H) - P(\vec{U})) d\Omega \quad (6.7)$$

Γραμμικοποιώντας τις συναρτήσεις M , P , χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του Taylor ακρίβειας 1ης τάξης, προκύπτει:

$$M(\vec{U}) = M(\vec{U}_H) + \left. \frac{\partial M}{\partial \vec{U}} \right|_{\vec{U}_H} (\vec{U} - \vec{U}_H) \Rightarrow M(\vec{U}_H) - M(\vec{U}) = \left. \frac{\partial M}{\partial \vec{U}} \right|_{\vec{U}_H} \delta \vec{U} \quad (6.8)$$

$$P(\vec{U}) = P(\vec{U}_H) + \left. \frac{\partial P}{\partial \vec{U}} \right|_{\vec{U}_H} (\vec{U} - \vec{U}_H) \Rightarrow P(\vec{U}_H) - P(\vec{U}) = \left. \frac{\partial P}{\partial \vec{U}} \right|_{\vec{U}_H} \delta \vec{U} \quad (6.9)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.8), (6.9) στην (6.7), το σφάλμα του ολοκληρώματος J γίνεται:

$$\delta J = \int_S \left. \frac{\partial M}{\partial \vec{U}} \right|_{\vec{U}_H} \delta \vec{U} dS + \int_{\Omega} \left. \frac{\partial P}{\partial \vec{U}} \right|_{\vec{U}_H} \delta \vec{U} d\Omega \quad (6.10)$$

Στη συνέχεια, κατασκευάζεται το συζυγές ολοκλήρωμα:

$$\int_{\Omega} \vec{\Psi}^T \delta \vec{R} d\Omega = \int_{\Omega} \vec{\Psi}^T \delta \left(\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{\Psi}^T \frac{\partial (\delta \vec{F}_i)}{\partial x_i} d\Omega \quad (6.11)$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα της παραγοντικής ολοκλήρωσης, σε συνδυασμό με το θεώρημα Green-Gauss, ο τελευταίος όρος της (6.11) γράφεται:

$$\int_{\Omega} \vec{\Psi}^T \frac{\partial (\delta \vec{F}_i)}{\partial x_i} d\Omega = \int_S \vec{\Psi}^T \delta \vec{F}_i n_i dS - \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{\Psi}^T}{\partial x_i} \delta \vec{F}_i d\Omega \quad (6.12)$$

όπου \vec{n} το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο στοιχειώδες τμήμα του ορίου dS .

Γραμμικοποιώντας το \vec{F}_i και χρησιμοποιώντας τον ορισμό (6.2), το $\delta \vec{F}_i$ γράφεται:

$$\delta \vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{U}_H) - \vec{F}_i(\vec{U}) = \left. \frac{\partial \vec{F}_i}{\partial \vec{U}} \right|_{\vec{U}_H} \delta \vec{U} = A_i(\vec{U}_H) \delta \vec{U} \quad (6.13)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.12) και (6.13) στην (6.11), τελικά προκύπτει:

$$\int_{\Omega} \vec{\Psi}^T \delta \vec{R} d\Omega = \int_S \vec{\Psi}^T A_i(\vec{U}_H) n_i \delta \vec{U} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{\Psi}^T}{\partial x_i} A_i(\vec{U}_H) \delta \vec{U} d\Omega \quad (6.14)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (6.10) και (6.14), λαμβάνεται:

$$\begin{aligned} \delta J - \int_{\Omega} \vec{\Psi}^T \delta \vec{R} d\Omega &= \int_S \left(\left. \frac{\partial M}{\partial \vec{U}} \right|_{\vec{U}_H} - \vec{\Psi}^T A_i(\vec{U}_H) n_i \right) \delta \vec{U} dS \\ &+ \int_{\Omega} \left(\left. \frac{\partial P}{\partial \vec{U}} \right|_{\vec{U}_H} + \frac{\partial \vec{\Psi}^T}{\partial x_i} A_i(\vec{U}_H) \right) \delta \vec{U} d\Omega \end{aligned} \quad (6.15)$$

Επιλέγοντας τέτοιο $\vec{\Psi}$ ώστε η ολοκληρωτέα στο υπολογιστικό χωρίο Ω ποσότητα της (6.15) να μηδενίζεται, προκύπτουν οι συζυγείς εξισώσεις του προβλήματος:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \vec{U}} \right|_{\vec{U}_H} + \frac{\partial \vec{\Psi}^T}{\partial x_i} A_i(\vec{U}_H) = 0 \Rightarrow A_i^T(\vec{U}_H) \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x_i} = - \left. \frac{\partial P}{\partial \vec{U}} \right|_{\vec{U}_H}^T \quad (6.16)$$

Οι οριακές συνθήκες των συζυγών εξισώσεων προκύπτουν από την απαίτηση και η ολοκληρωτέα στο σύνορο S του χωρίου ποσότητα της (6.15) να είναι μηδέν, δηλαδή στο S να ισχύει:

$$\left(\left. \frac{\partial M}{\partial \vec{U}} \right|_{\vec{U}_H} - \vec{\Psi}^T A_i(\vec{U}_H) n_i \right) \cdot \delta \vec{U} = 0 \Rightarrow A_i^T(\vec{U}_H) n_i \vec{\Psi} = \left. \frac{\partial M}{\partial \vec{U}} \right|_{\vec{U}_H}^T \quad (6.17)$$

Υπενθυμίζεται ότι το $A_i n_i$ έχει ορισθεί στο Κεφάλαιο 5 ως:

$$A_i n_i = \underline{A} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{U}} \quad (6.18)$$

όπου $\vec{H} = \vec{F}_i n_i$.

Για την εξαγωγή των οριακών συνθηκών των συζυγών εξισώσεων (όπως θα φανεί στην επόμενη υποενότητα), είναι πιο βολική η γραφή της (6.17) στη μορφή ([19]):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial M}{\partial \vec{U}} \right|_{\vec{U}_H} \delta \vec{U} - \vec{\Psi}^T A_i(\vec{U}_H) n_i \delta \vec{U} &= 0 \Rightarrow \\ \left. \frac{\partial M}{\partial \vec{U}} \right|_{\vec{U}_H} \delta \vec{U} - \vec{\Psi}^T \left. \frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{U}} \right|_{\vec{U}_H} \delta \vec{U} &= 0 \Rightarrow \\ \delta M - \vec{\Psi}^T \delta \vec{H} &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\vec{\Psi}^T \delta \vec{H} = \delta M \quad \text{στο } S \quad (6.19)$$

όπου:

$$\begin{aligned} \delta \vec{H} &= \vec{H}(\vec{U}_H) - \vec{H}(\vec{U}) \\ \delta M &= M(\vec{U}_H) - M(\vec{U}) \end{aligned}$$

Με βάση λοιπόν τις (6.16) και (6.17), το δεξί μέλος της (6.15) μηδενίζεται, οπότε το σφάλμα του ολοκληρώματος J προκύπτει ως:

$$\delta J - \int_{\Omega} \vec{\Psi}^T \delta \vec{R} d\Omega = 0 \Rightarrow \delta J = \int_{\Omega} \vec{\Psi}^T \vec{R}(\vec{U}_H) d\Omega \quad (6.20)$$

Ζητούμενο είναι ο υπολογισμός του σφάλματος αυτού δJ , προκειμένου να διορθωθεί η εκτίμηση που έχει γίνει για το ολοκλήρωμα $J(\vec{U}_H)$ από την επίλυση της ροής στο πλέγμα H και εν τέλει να βρεθεί μια καλύτερη προσέγγιση της πραγματικής τιμής του ολοκληρώματος αυτού.

Στη γενική της μορφή, η διαδικασία εφαρμογής της προτεινόμενης διορθωτικής μεθόδου έχει λοιπόν ως εξής:

- Επιλύονται αριθμητικά οι εξισώσεις του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος (σχέσεις (6.1) και (6.16) αντίστοιχα) σε ένα σχετικά αραιό πλέγμα H , οπότε προκύπτουν τα πεδία \vec{U}_H και $\vec{\Psi}_H$. Από το \vec{U}_H γίνεται μια πρώτη εκτίμηση της τιμής του ολοκληρώματος, δηλαδή υπολογίζεται το $J(\vec{U}_H)$.
- Τα πεδία \vec{U}_H και $\vec{\Psi}_H$ παρεμβάλλονται σε ένα πυκνότερο πλέγμα h , χρησιμοποιώντας κάποιο είδος (κατά προτίμηση λείας) παρεμβολής, οπότε λαμβάνονται τα πεδία \vec{U}_h και $\vec{\Psi}_h$.
- Επειδή το συνεχές υπόλοιπο $\vec{R}(\vec{U}_H)$, που εμφανίζεται στη σχέση υπολογισμού του δJ (6.20), δεν είναι υπολογιστικά διαθέσιμο, αντ' αυτού υπολογίζεται το διακριτό υπόλοιπο στο πυκνό πλέγμα $\vec{R}_h(\vec{U}_h)$. Συνεπώς, το δJ προσεγγίζεται τελικά από τη σχέση:

$$\delta J = \int_{\Omega} \vec{\Psi}_h^T \vec{R}_h(\vec{U}_h) d\Omega \quad (6.21)$$

- Τέλος, διορθώνεται η τιμή του ολοκληρώματος σύμφωνα με τη σχέση:

$$J^{new} = J(\vec{U}_H) - \delta J \quad (6.22)$$

6.2.2 Διατύπωση και επίλυση των συζυγών εξισώσεων του προβλήματος

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα που αντιμετωπίζεται στο παρόν Κεφάλαιο, η ολοκληρωματική ποσότητα που ενδιαφέρει είναι η κατακόρυφη δύναμη F_y που αναπτύσσεται στο πτερύγιο του συμπιεστή. Η δύναμη αυτή είναι αντιπροσωπευτική της ροπής (και κατ' επέκταση της ισχύος) που απαιτείται για την περιστροφή του συμπιεστή και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F_y = \int_{S_w} p n_y dS \quad (6.23)$$

όπου S_w το όριο του στερεού τοιχώματος του υπολογιστικού χωρίου, ή αλλιώς, το περίγραμμα της αεροτομής.

Όπως είναι φανερό, η F_y δεν εξαρτάται από τη ροή στο εσωτερικό του υπολογιστικού χωρίου, οπότε, σύμφωνα με την ανάλυση της προηγούμενης υποενότητας, στη σχέση (6.4) θα είναι $P = 0$ και $M = pn_y$. Επομένως, οι συζυγείς εξισώσεις (6.16), στην προκειμένη περίπτωση γράφονται:

$$-A_i^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x_i} = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad (6.24)$$

Με οριακές συνθήκες που, όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη υποενότητα (σχέση (6.19)), μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$\vec{\Psi}^T \delta \vec{H} = \delta M \quad \text{στο } S \quad (6.25)$$

Το σύνορο S αποτελείται από το όριο του στερεού τοιχώματος S_w και από το όριο εισόδου-εξόδου $S_{I/O}$ (το περιοδικό όριο του χωρίου παραλείπεται, καθώς δε λαμβάνει κάποια συζυγή οριακή συνθήκη, αλλά αντιμετωπίζεται όπως ακριβώς και στο ευθύ πρόβλημα). Από την εξίσωση (6.23), είναι προφανές ότι η F_y είναι ανεξάρτητη από τις τιμές της ροής στο $S_{I/O}$, δηλαδή $\delta M|_{S_{I/O}} = 0$. Επομένως, η (6.25) δίνει:

$$\vec{\Psi} = 0 \quad \text{στο } S_{I/O} \quad (6.26)$$

Τόσο η ακριβής λύση του ευθέως προβλήματος \vec{U} όσο και η αριθμητική λύση \vec{U}_H , ικανοποιούν τη συνθήκη μη-εισχώρησης στο στερεό τοίχωμα, η οποία, όπως έχει αποδειχθεί (σχέση (5.39) κεφαλαίου 5), οδηγεί στο ακόλουθο διάνυσμα ροής:

$$\vec{H}_w(\vec{U}) = p \begin{bmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \vec{H}_w(\vec{U}_H) = p_H \begin{bmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

Επομένως:

$$\delta \vec{H}_w = \delta p \begin{bmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } \delta p = p_H - p \quad (6.28)$$

Αντικαθιστώντας την (6.28) στην (6.25) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\delta M = n_y \delta p$, προκύπτει η οριακή συνθήκη στο στερεό τοίχωμα για το $\vec{\Psi}$ (με απαλοιφή του δp):

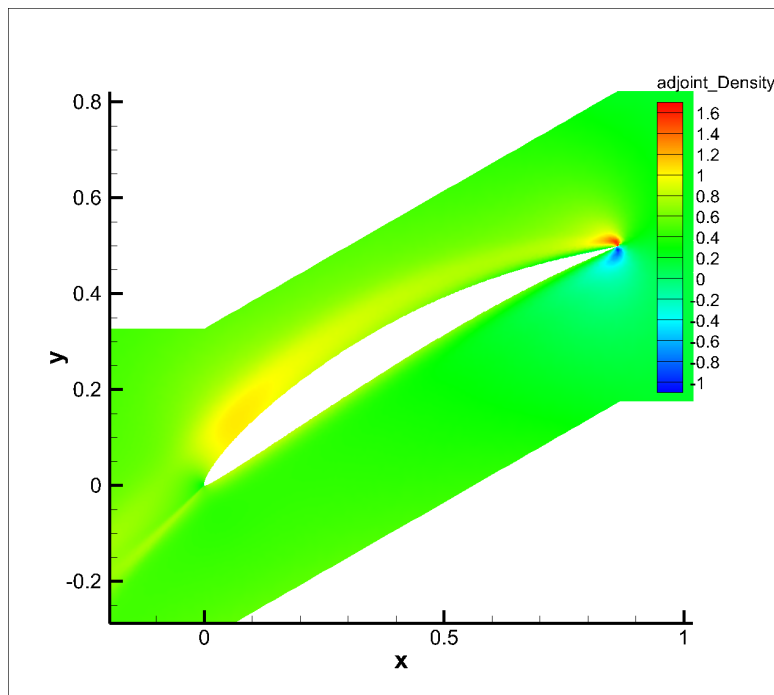
$$\vec{\Psi}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = n_y \Leftrightarrow \quad (6.29)$$

$$\Psi_2 n_x + \Psi_3 n_y = n_y \quad \text{στο } S_w$$

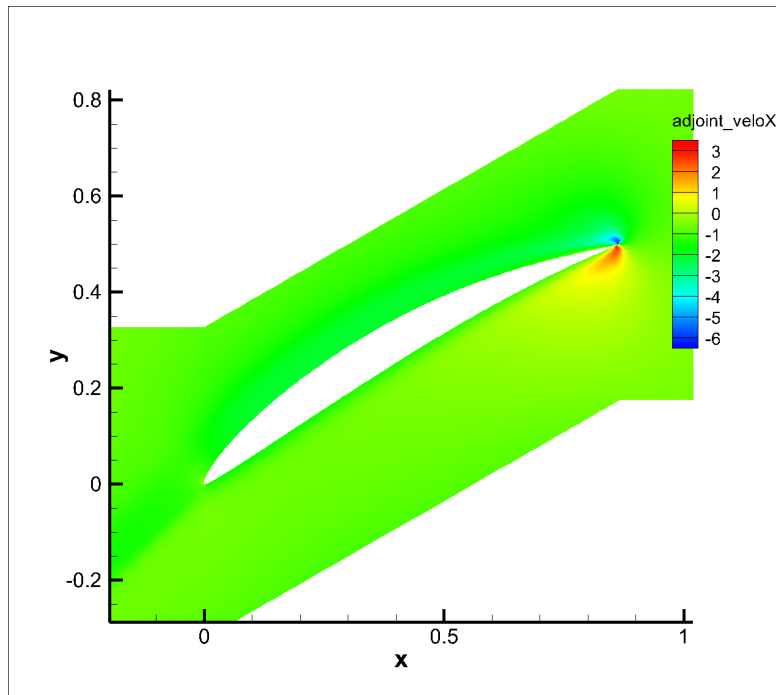
Επομένως, η διατύπωση του συζυγούς προβλήματος που πρέπει να επιλυθεί έχει τελικά ως εξής:

$$\begin{cases} -A_i^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x_i} = 0, & \text{στο } \Omega \\ \vec{\Psi} = 0, & \text{στο } S_{I/O} \\ \Psi_2 n_x + \Psi_3 n_y = n_y, & \text{στο } S_w \end{cases} \quad (6.30)$$

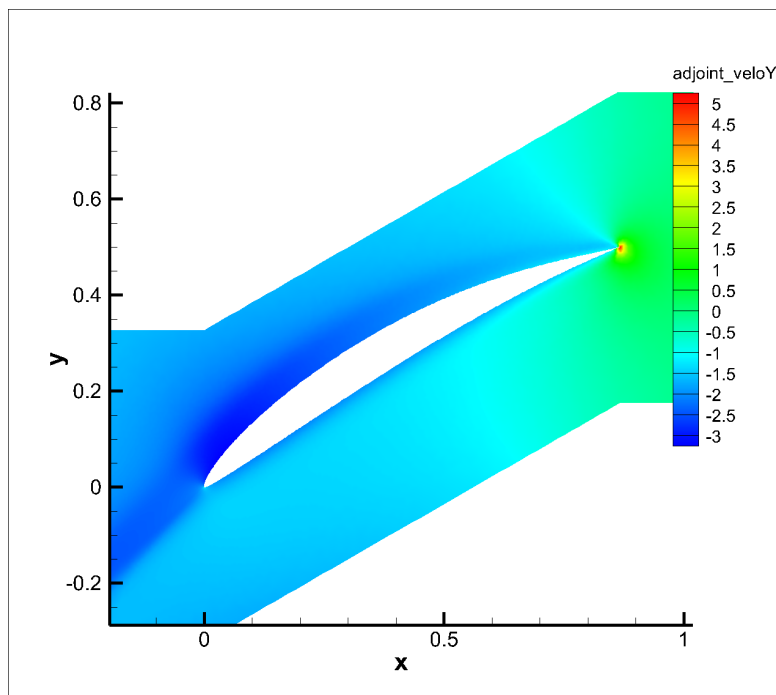
Το παραπάνω πρόβλημα επιλύθηκε στο υπολογιστικό χωρίο του σχήματος 5.2, χρησιμοποιώντας κώδικα του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ (όπως έγινε και για το αντίστοιχο ευθύ πρόβλημα). Τα πεδία των συζυγών μεταβλητών ροής που προέκυψαν φαίνονται στα ακόλουθα σχήματα.



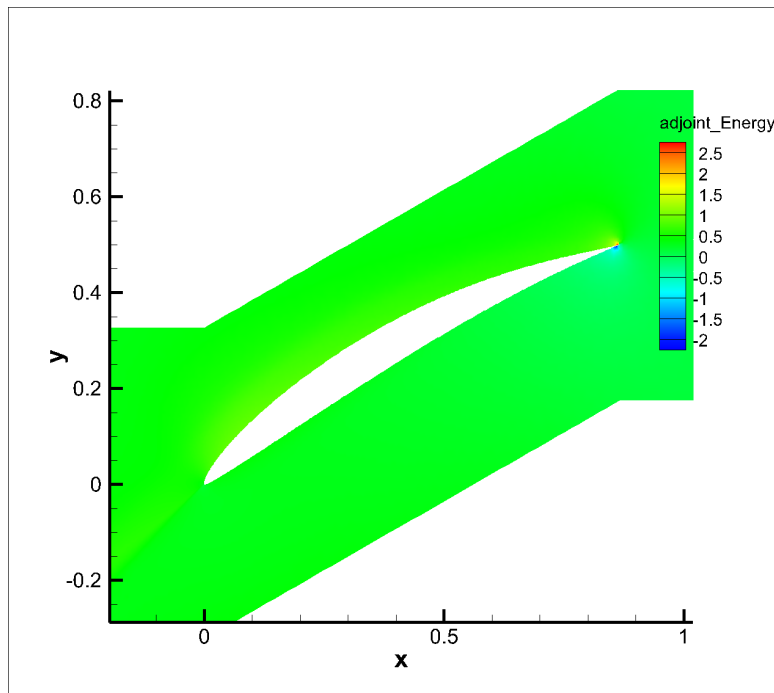
Σχήμα 6.1: 2D συζυγές πρόβλημα ροής σε γραμμική πτερύγωση συμπιεστή. Πεδίο κατανομής της συζυγούς πυκνότητας.



Σχήμα 6.2: 2D συζυγές πρόβλημα ροής σε γραμμική πτερύγωση συμπιεστή. Πεδίο κατανομής της συζυγούς ταχύτητας κατά την κατεύθυνση x .



Σχήμα 6.3: 2D συζυγές πρόβλημα ροής σε γραμμική πτερύγωση συμπιεστή. Πεδίο κατανομής της συζυγούς ταχύτητας κατά την κατεύθυνση y .



Σχήμα 6.4: 2D συζυγές πρόβλημα ροής σε γραμμική πτερυγώση συμπιεστή. Πεδίο κατανομής της συζυγούς ενέργειας.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί σε προηγούμενα κεφάλαια, η συζυγής λύση λειτουργεί ως ένδειξη του πώς συνεισφέρουν τα τοπικά σφάλματα που γίνονται κατά την αριθμητική επίλυση του ευθέος προβλήματος, στο συνολικό σφάλμα της ολοκληρωματικής ποσότητας που υπολογίζεται (της F_y στην προκειμένη περίπτωση). Όπως φαίνεται από τα παραπάνω σχήματα, οι συζυγείς μεταβλητές εμφανίζουν τις μέγιστες (κατ' απόλυτο) τιμές τους στην ακμή εκφυγής του πτερυγίου του συμπιεστή. Επομένως, μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι οι εκεί κόμβοι 'ευθύνονται' κυρίως για το σφάλμα δF_y που επάγεται στην τιμή του ολοκληρώματος.

6.2.3 Αλγόριθμος εφαρμογής της διορθωτικής μεθόδου και αποτέλεσμα

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε, προκειμένου να εφαρμοστεί η προτεινόμενη διορθωτική μέθοδος στο συγκεκριμένο πρόβλημα που αντιμετωπίζεται στο παρόν Κεφάλαιο, έχει λοιπόν ως εξής:

- Βήμα 1:
Από τη λύση του ευθέος προβλήματος στο αραιό πλέγμα H (Κεφάλαιο 5), υπολογίζεται η τιμή της F_y^{coarse} . Αυτή είναι η τιμή που θα προέκυπτε για τη δύναμη, λύνοντας στο δεδομένο πλέγμα, χωρίς την εφαρμογή της διορθωτικής μεθόδου.

- Βήμα 2:
Γίνεται ‘γένεση’ πυκνότερου πλέγματος h , βασιζόμενη στο αραιό H . Πιο συγκεκριμένα, κάθε τριγωνικό στοιχείο του πλέγματος H διαιρείται σε 4 μικρότερα, ενώνοντας τα μέσα των πλευρών του τριγώνου μεταξύ τους. Συνεπώς, το πυκνό πλέγμα έχει τετραπλάσιο αριθμό στοιχείων από το αραιό.
- Βήμα 3:
Επιλύεται το συζυγές πρόβλημα στο πλέγμα H (όπως παρουσιάστηκε στο παρόν Κεφάλαιο) και, στη συνέχεια, τα πεδία \vec{U}_H και $\vec{\Psi}_H$ παρεμβάλλονται στο πυκνό πλέγμα h , χρησιμοποιώντας γραμμική παρεμβολή, οπότε λαμβάνονται τα πεδία \vec{U}_h και $\vec{\Psi}_h$ αντίστοιχα. Αν και το αποτέλεσμα θα ήταν καλύτερο στην περίπτωση που γινόταν κάποιο είδος λείας παρεμβολής (π.χ. *splines*), η γραμμική παρεμβολή επιλέχθηκε λόγω της απλότητας στην εφαρμογή της.
- Βήμα 4:
Εισάγοντας στον κώδικα επίλυσης του ευθέως προβλήματος το πεδίο \vec{U}_h και δίνοντας εντολή για μία επανάληψη, λαμβάνεται το υπόλοιπο (*residual*) των εξισώσεων στους κόμβους του πυκνού πλέγματος $\vec{R}_h(\vec{U}_h)$.
- Βήμα 5:
Προσεγγίζεται το σφάλμα δF_y , το οποίο αποτελεί τον διορθωτικό όρο της μεθόδου, από τη σχέση:

$$\delta F_y = \int_{\Omega} \vec{\Psi}_h^T \vec{R}_h(\vec{U}_h) d\Omega \quad (6.31)$$
 όπου το ολοκλήρωμα υπολογίζεται αριθμητικά, αθροίζοντας για όλες τις κυψέλες ελέγχου (ισοδύναμα με τη μέθοδο του τραπεζίου στα 1D προβλήματα).
- Βήμα 6:
Υπολογίζεται η διορθωμένη τιμή της δύναμης, σύμφωνα με τη σχέση:

$$F_y^{corr} = F_y^{coarse} - \delta F_y \quad (6.32)$$

Προκειμένου να διαπιστωθεί ότι η μέθοδος πράγματι διορθώνει την τιμή της F_y , το ευθύ πρόβλημα επιλύεται στο πυκνό πλέγμα h και λαμβάνεται η τιμή της δύναμης, η οποία θεωρείται ότι προσεγγίζει πολύ καλύτερα την ακριβή τιμή F_y^{exact} . Στη συνέχεια, υπολογίζονται τα εξής σχετικά σφάλματα:

$$BE = \frac{|F_y^{coarse} - F_y^{exact}|}{F_y^{exact}} \quad \text{και} \quad RE = \frac{|F_y^{corr} - F_y^{exact}|}{F_y^{exact}} \quad (6.33)$$

όπου BE το σχετικό σφάλμα πριν την εφαρμογή της μεθόδου και RE το σχετικό σφάλμα μετά. Επομένως, αν $RE < BE$, τότε επιτυγχάνεται διόρθωση της ολοκληρωματικής ποσότητας, δηλαδή η διορθωμένη τιμή της δύναμης είναι πλησιέστερα στην

πραγματική (η εύρεση της οποίας θεωρείται από πολύ δύσκολη έως και αδύνατη, καθώς προϋποθέτει την αναλυτική επίλυση των $2D$ εξισώσεων Euler).

Εφαρμόζοντας λοιπόν τη διαδικασία που παρουσιάστηκε παραπάνω, τα σχετικά σφάλματα προέκυψαν:

$$BE = 1.4\% \quad \text{και} \quad RE = 0.4\%$$

Όπως φαίνεται, το υπολειπόμενο σφάλμα RE είναι 3.5 φορές μικρότερο από το αρχικό BE , αποτέλεσμα ικανοποιητικό αν λάβουμε υπόψη μας ότι, για τη μεταφορά της 'πληροφορίας' από το αραιό πλέγμα στο πυκνό, χρησιμοποιήθηκε γραμμική παρεμβολή, η οποία έχει ως αποτέλεσμα απώλεια στην ακρίβεια. Επομένως, εάν είχε χρησιμοποιηθεί κάποιο άλλο είδος λείας παρεμβολής, το αποτέλεσμα θα ήταν μάλλον αρκετά καλύτερο.

Το συμπέρασμα που προκύπτει λοιπόν από το παρόν Κεφάλαιο είναι ότι, ακόμα και σε $2D$ μη-γραμμικά προβλήματα, η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί και να διορθώσει σε ικανοποιητικό βαθμό τις ολοκληρωματικές ποσότητες που ενδιαφέρουν. Με τον τρόπο αυτό, επιτυγχάνεται σημαντική μείωση στο απαιτούμενο υπολογιστικό κόστος, καθώς, ενώ η επίλυση των εξισώσεων πραγματοποιείται σε αραιό πλέγμα, η τελική τιμή της ολοκληρωματικής ποσότητας που υπολογίζεται μπορεί να είναι το ίδιο ακριβής με εκείνη που θα προέκυπτε από την επίλυση σε ένα αρκετά πυκνότερο πλέγμα.

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα - Επίλογος

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας ήταν ο υπολογισμός ολοκληρωματικών ποσοτήτων, με υψηλή ακρίβεια και το ελάχιστο δυνατό υπολογιστικό κόστος, είτε σε αραιά υπολογιστικά πλέγματα είτε σε περιπτώσεις όπου οι εξισώσεις του ευθέος προβλήματος έχουν αφεθεί ασύγκλιτες. Τέτοια προβλήματα που ανήκουν στην πρώτη κατηγορία (αραιό πλέγμα) είθισται να αντιμετωπίζονται με εκ των υστέρων ανάλυση σφάλματος (a posteriori error analysis), χρησιμοποιώντας τη διακριτή συζυγή μέθοδο ([9]). Στην παρούσα εργασία, αναπτύχθηκε μια παρόμοια μέθοδος εκτίμησης σφάλματος, η οποία όμως διατυπώθηκε τόσο με τη διακριτή όσο και με τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Επιπλέον, καινοτομία της εργασίας αποτελεί κυρίως το γεγονός ότι η μέθοδος επεκτάθηκε και σε περιπτώσεις όπου οι εξισώσεις του ευθέος προβλήματος αφέθηκαν ασύγκλιτες, προκειμένου να διαπιστωθεί εάν οι ολοκληρωματικές ποσότητες μπορούν να διορθωθούν ακόμα και σε προβλήματα όπου οι πρωτεύουσες εξισώσεις είναι αδύνατο να συγκλίνουν. Έπειτα, λοιπόν, από την εφαρμογή της προτεινόμενης αυτής μεθόδου, στα τρία διαφορετικά προβλήματα που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Επιβεβαιώθηκε ότι η λύση του συζυγούς προβλήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διόρθωση και την αύξηση της ακρίβειας με την οποία υπολογίζονται οι ολοκληρωματικές ποσότητες που ενδιαφέρουν σε προβλήματα της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (CFD), ανεξάρτητα από το είδος του προβλήματος (γραμμικό ή μη-γραμμικό, μονοδιάστατο ή διδιάστατο).
- Επιβεβαιώθηκε ότι υπάρχει δυνατότητα (εφόσον χρησιμοποιηθεί λεία παρεμβολή και το υπόλοιπο των εξισώσεων του ευθέος προβλήματος υπολογιστεί με βάση την αναλυτική έκφραση της παρεμβολής αυτής), μετά την εφαρμογή της μεθόδου και τη διόρθωση της ολοκληρωματικής ποσότητας, το υπολειπόμενο σφάλμα να είναι όρος ανώτερης τάξης (superconvergent result [18]).
- Δείχθηκε ότι ακόμα και σε περιπτώσεις όπου οι εξισώσεις του ευθέος προβλήματος έχουν αφεθεί ασύγκλιτες (είτε λόγω αριθμητικών δυσκολιών είτε για τη μείωση του υπολογιστικού κόστους), το οποίο έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση

της ακρίβειας της υπολογιζόμενης ολοκληρωματικής ποσότητας, η λύση του συζυγούς προβλήματος συνεχίζει να παρέχει την επιθυμητή διόρθωση. Επιπλέον, (σε ορισμένες περιπτώσεις) η διόρθωση που επιτυγχάνεται φαίνεται να είναι σταθερή και ανεξάρτητη από το αν το ευθύ πρόβλημα έχει συγκλίνει πλήρως ή όχι. Επομένως, χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη μέθοδο, δεν υπάρχει η ανάγκη για 'βαθιά' σύγκλιση του ευθέος προβλήματος.

- Επειδή, σε περιπτώσεις όπου το ευθύ πρόβλημα αντιμετωπίζει δυσκολίες σύγκλισης, το ίδιο συμβαίνει συνήθως και με το συζυγές πρόβλημα, αποδείχθηκε ότι η διόρθωση μπορεί να επιτευχθεί ακόμα και στην περίπτωση όπου, τόσο το ευθύ όσο και το συζυγές πρόβλημα, δεν έχουν συγκλίνει πλήρως (Κεφάλαιο 2). Κατά συνέπεια, η προτεινόμενη μέθοδος επεκτείνεται έτσι και σε νέα πεδία εφαρμογών.
- Διαπιστώθηκε, τέλος, ότι η μέθοδος που παρουσιάστηκε μπορεί να εφαρμοστεί με επιτυχία, ανεξάρτητα από το αν χρησιμοποιείται η διακριτή (Κεφάλαιο 4) ή η συνεχής συζυγής μέθοδος (Κεφάλαιο 6).

Ολοκληρώνοντας την παρούσα διπλωματική εργασία, αξίζει να επισημανθεί η κατεύθυνση ως προς την οποία θα μπορούσε να γίνει περαιτέρω μελέτη, χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα που προέκυψαν. Συγκεκριμένα, η προτεινόμενη διορθωτική μέθοδος θα μπορούσε να δοκιμαστεί και σε $2D$ ή $3D$ προβλήματα, όπου οι πρωτεύουσες (ή και οι συζυγείς) εξισώσεις έχουν αφεθεί ασύγκλιτες (υπενθυμίζεται ότι στο $2D$ πρόβλημα που αντιμετωπίστηκε στο Κεφάλαιο 6 οι εξισώσεις επιλύθηκαν μέχρι πλήρους σύγκλισης). Επιπλέον, ξεφεύγοντας από τις Euler ροές, η μέθοδος θα μπορούσε να επεκταθεί και σε προβλήματα που αντιμετωπίζουν πιο ρεαλιστικές ροές, όπως είναι οι συνεκτικές και, κυρίως, οι τυρβώδεις ροές. Τέτοια προβλήματα αντιμετωπίζονται από την ερευνητική ομάδα της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του ΕΜΠ, όπου γίνεται πρωτοποριακή δουλειά στην ανάπτυξη συζυγών μεθόδων σε μοντέλα τύρβης ([34], [35], [36]).

Βιβλιογραφία

- [1] Κ.Χ. Γιαννάκογλου. *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς*. ΕΜΠ, 2003.
- [2] Κ.Χ. Γιαννάκογλου. *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. ΕΜΠ, 2006.
- [3] Κ.Δ. Παπαηλιού, Κ.Μ. Μαθιουδάκης και Κ.Χ. Γιαννάκογλου. *Εισαγωγή στις Θερμικές Στροβιλομηχανές*. ΕΜΠ, 2000.
- [4] Κ.Χ. Γιαννάκογλου. *Συνεκτικές Ροές στις Στροβιλομηχανές*. ΕΜΠ, 2004.
- [5] Γ. Μπεργελές. *Υπολογιστική Ρευστομηχανική*. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2012.
- [6] Ε. Παπουτσής Κιαχαγιάς. *Συζυγείς Μέθοδοι για το Στιβαρό Σχεδιασμό Αεροδυναμικών Μορφών με Υπολογισμό Τρίτων Παραγώγων. Εφαρμογή σε Μονοδιάστατους Αγωγούς. Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών. Αθήνα 2009.*
- [7] Π. Γαρυφαλάκης. *Επαναδιατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου στη βάση της διακριτής. Μια νέα ιδέα με εφαρμογή σε ψευδο-1Δ προβλήματα βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική. Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών. Αθήνα 2013.*
- [8] Ξ. Τρομπούκης. *Υπολογιστική ανάλυση και παραμετρική διερεύνηση της τεχνικής συνεχούς αναρρόφησης για τον έλεγχο οριακών στρωμάτων. Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών. Αθήνα 2007.*
- [9] Κ.Ν. Gkagkas, D.I. Papadimitriou and K.C. Giannakoglou. *Optimal Grid Adaptation Through A Posteriori Error Analysis*. 5th GRACM International Congress on Computational Mechanics, Limassol, 29 June - 1 July, 2005.
- [10] D.I. Papadimitriou, A.S. Zymaris and K.C. Giannakoglou. *Discrete and Continuous Adjoint Formulations for Turbomachinery Applications*. EUROGEN 2005, Munich, September 12-1.
- [11] V.G. Asouti, A.S. Zymaris, D.I. Papadimitriou and K.C. Giannakoglou. *Continuous and Discrete Adjoint Approaches for Aerodynamic Shape Optimization with Low Number preconditioning*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 57, pp. 1485-1504, 2008.

-
- [12] D.I. Papadimitriou and K.C. Giannakoglou. *A Continuous Adjoint Method with Objective Function Derivatives Based on Boundary Integrals for Inviscid and Viscous Flows*. Computers and Fluids, Vol. 36, pp. 325-341, 2007.
- [13] D.I. Papadimitriou and K.C. Giannakoglou. *Total Pressure Losses Minimization in Turbomachinery Cascades, Using a New Continuous Adjoint Formulation*. Proc. IMechE, Part A: Journal of Power and Energy (Special Issue on Turbomachinery), Vol. 221, pp. 865-872, 2007.
- [14] D.I. Papadimitriou and K.C. Giannakoglou. *A Continuous Adjoint Method for the Minimization of Losses in Cascade Viscous Flows*. 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting, AIAA-2006-0116, Reno, NV, USA, January 9-11, 2006.
- [15] D.I. Papadimitriou and K.C. Giannakoglou. *Compressor Blade Optimization using a Continuous Adjoint Formulation*. ASME Paper GT-2006/90466, ASME Gas Turbine and Aeroengine Technical Congress and Exposition, Barcelona, Spain, May 8-11, 2006.
- [16] D.I. Papadimitriou and K.C. Giannakoglou. *Formulation and Application of the Continuous Adjoint Method in Aerodynamics and Turbomachinery*. Von-Karman Institute Lecture Series, 2006.
- [17] D.G. Koubogiannis, L.C. Poussoulidis, D.V. Rovas and K.C. Giannakoglou. *Solution of Flow Problems Using Unstructured Grids on Distributed Memory Platforms*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 160, pp. 89-100, 1998.
- [18] N.A. Pierce and M.B. Giles. *Adjoint Recovery of Superconvergent Functionals from PDE Approximations*, SIAM REVIEW, Vol. 42, No. 2, 2000, pp. 247-264.
- [19] L. Yi Li, Y. Allaneau and A. Jameson. *Continuous Adjoint Approach for Adaptive Mesh Refinement*, 20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, 27-30 June 2011, Honolulu, Hawaii.
- [20] B. van Leer. *Flux Vector Splitting for the Euler Equations*, Lecture Notes in Physics, Vol. 170, 405-512, 1982.
- [21] P. Roe. *Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes*, J. of Comp. Phys., 43, 357-372, 1981.
- [22] A. Bermudez and M.E. Vazquez. *Upwind Methods for Hyperbolic Conservation Laws with Source Terms*, Journal: Computers & Fluids, Vol. 23, no. 8, pp. 1049-1071, November 1994.
- [23] M.B. Giles. *On Adjoint Equations for Error Analysis and Optimal Grid Adaptation in CFD*, tech. rep., Oxford University Computing Laboratory, Numerical Analysis Group, Wolfson Building, Parks Road, Oxford, England, Report no. 97/11, September 1997.
- [24] D.A. Venditti and D.L. Darmofal. *A Multilevel Error Estimation and Grid Adaptive Strategy for Improving the Accuracy of Integral Outputs*, AIAA 99-3292, 1999.
-

-
- [25] D.A. Venditti and D.L. Darmofal. *Adjoint Error Estimation and Grid Adaptation for Functional Outputs: Application to Quasi-One-Dimension Flow*, Journal of Computational Physics, Vol. 164, pp. 204-227, 2000.
- [26] D.A. Venditti and D.L. Darmofal. *A Grid Adaptive Technology for Functional Outputs of Compressible Flow Simulations*, AIAA 2001-2659, 2001.
- [27] D.A. Venditti and D.L. Darmofal. *Grid Adaptation for Functional Outputs: Application to Two-Dimensional Inviscid Flows*, Journal of Computational Physics, Vol. 176, pp. 40-69, 2002.
- [28] L. Richardson and J. Gaunt. *The Deferred Approach to the Limit*, Trans. Roy. Soc. London Ser. A, 226 (1927), pp. 299-361.
- [29] J. Moran. *An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics*, John Wiley, New York, 1984.
- [30] C. Hirsch. *Numerical Computation of internal and external flows. Volume 2: Computational methods for inviscid and viscous flows*, 1990.
- [31] J. Peraire and A. Patera. *Bounds for linear-functional outputs of coercive partial differential equations: Local indicators and adaptive refinement*, in New Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics, P. Ladeveze and J. Oden, eds., Elsevier, New York, 1997.
- [32] J. Alden and R. Compton. *A general method for electrochemical simulations. Part 1: Formulation of the strategy for two-dimensional simulations*, J. Phys. Chem. B, 101 (1997), pp. 8941-8954.
- [33] V.G. Asouti, X.S. Trompoukis, I.C. Kampolis and K.C. Giannakoglou. *Unsteady CFD Computations Using Vertex-Centered Finite Volumes for Unstructured Grids on Graphics Processing Units*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 67(2), pp. 232-246, 2011.
- [34] E.M. Papoutsis-Kiachagias, A.S. Zymaris, I.S. Kavvadias, D.I. Papadimitriou and K.C. Giannakoglou. *The Continuous Adjoint Approach to the $k-\epsilon$ Turbulence Model for Shape Optimization and Optimal Active Control of Turbulent Flows*, Engineering Optimization, Vol. 47(3), pp. 370-389, 2015.
- [35] I.S. Kavvadias, E.M. Papoutsis-Kiachagias, G. Dimitrakopoulos and K.C. Giannakoglou. *The Continuous Adjoint Approach to the $k-\omega$ Turbulence Model with Applications in Shape Optimization*, Engineering Optimization, to appear, 2015.
- [36] E.M. Papoutsis-Kiachagias and K.C. Giannakoglou. *Continuous Adjoint Methods for Turbulent Flows, Applied to Shape and Topology Optimization: Industrial Applications*, Archives of Computational Methods in Engineering, to appear, 2015.
-