



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Προσαρμογή Υπολογιστικών Πλεγμάτων με Χρήση
Γράφων Delaunay – Εφαρμογές στη Βελτιστοποίηση με
Χρήση της Συζυγούς Μεθόδου

Διπλωματική Εργασία

Αλέξανδρος Γ. Τσολοβίκος

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2018

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους ανθρώπους που με βοήθησαν κατά τη διάρκεια της ενασχόλησής μου.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε με την ανάθεση ενός απαιτητικού θέματος, το οποίο κέντρισε αμέσως το ενδιαφέρον μου, αλλά και για τη συνεχή καθοδήγησή του σε όλη τη διάρκεια της εργασίας αυτής.

Ιδιαίτερα, ευχαριστώ τον Δρ. Ευάγγελο Παπουτσή-Κιαχαγιά για τη συνεχή υποστήριξη και τις συμβουλές του επάνω στα εξειδικευμένα θέματα της εργασίας αυτής. Η συμβολή του ήταν καθοριστική για τη γρήγορη ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας. Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα Κωνσταντίνο Γκαραγκούνη για την εκτενή εισαγωγή που μου έκανε επάνω στα διάφορα θέματα της συζυγούς μεθόδου, αλλά και τα υπόλοιπα μέλη στη ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ, που ήταν πάντα πρόθυμοι να με βοηθήσουν.

Ακόμα, είμαι ευγνώμων για την υποστήριξη και την ενθάρρυνση που μου παρείχαν οι φίλοι μου, συμφοιτητές και μη, κατά τη διάρκεια της ενασχόλησής μου με την εργασία αυτή και οι οποίοι έδειχναν πάντα κατανόηση όταν δεν είχα χρόνο γι' αυτούς.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, οι οποίοι πάντα πιστεύουν σε μένα και με υποστηρίζουν με κάθε τρόπο σε ότι κάνω.



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΕΩΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ
& ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Προσαρμογή Υπολογιστικών Πλεγμάτων με Χρήση Γράφων Delaunay – Εφαρμογές στη Βελτιστοποίηση με Χρήση της Συζυγούς Μεθόδου

Διπλωματική Εργασία
του

Αλέξανδρου Γ. Τσολοβίκου

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Φεβρουάριος 2018

Περίληψη

Στη διπλωματική αυτή εργασία προγραμματίζεται και αξιολογείται η μέθοδος παραμόρφωσης 2Δ και 3Δ υπολογιστικών πλεγμάτων με τη χρήση παραμετροποίησης γράφων Delaunay. Η μέθοδος αυτή αναπτύσσεται για χρήση στη διαδικασία αεροδυναμικής βελτιστοποίησης σχήματος με τη συζυγή μέθοδο ή με άλλες μεθόδους βελτιστοποίησης, όπως είναι οι εξελικτικοί αλγόριθμοι, ενώ μπορεί να χρησιμοποιηθεί εξίσου και σε άλλες εφαρμογές υπολογιστικής ρευστοδυναμικής που απαιτούν την παραμόρφωση πλεγμάτων, όπως είναι οι υπολογισμοί αεροελαστικότητας ή προβλήματα με κινούμενα όρια. Για την υλοποίηση της μεθόδου, αναπτύσσεται κατάλληλο λογισμικό σε περιβάλλον OpenFOAM[®], το οποίο δέχεται ως είσοδο το προς-παραμόρφωση πλέγμα και τις μετατοπίσεις των οριακών του κόμβων και δίνει ως έξοδο τις νέες θέσεις των πλεγματικών κόμβων, οι οποίες αντιστοιχούν στην αρχική τοπολογία του πλέγματος.

Στην εργασία αυτή, αρχικά, παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες και οι αλγόριθμοι τριγωνοποίησης και τετραεδροποίησης Delaunay, που αποτελούν τα βασικά εργαλεία της μεθόδου. Στη συνέχεια, αναλύονται τα βήματα της διαδικασίας παραμόρφωσης πλέγματος με βάση την παραμετροποίηση γράφων Delaunay. Για την επίδειξη της λειτουργίας και της στιβαρότητάς της, η μέθοδος που αναπτύσσεται εφαρμόζεται σε μία πληθώρα περιπτώσεων παραμόρφωσης 2Δ και 3Δ υπολογιστικών πλεγμάτων. Επιπλέον, για τις 2Δ, προτείνονται δύο βελτιώσεις της μεθόδου, που αφορούν τη διόρθωση του γράφου γύρω από μη-κυρτές γεωμετρίες και την παρεμβολή των πλεγματικών κόμβων σε περιπτώσεις μεγάλων περιστροφών της γεωμετρίας. Επίσης, παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζονται οι ακριβείς παράγωγοι ευαισθησίας της συνεχούς συζυγούς μεθόδου με τη χρήση της παραμετροποίησης γράφων Delaunay και ακολουθούν 2Δ εφαρμογές.



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING
FLUIDS DEPARTMENT
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

**Deformation of Computational Meshes Using Delaunay Graph
Parameterization – Applications in the Adjoint-Based Aerodynamic
Shape Optimization**

Diploma Thesis
by

Alexandros G. Tsolovikos

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, February 2018

Abstract

In this diploma thesis, a method for the displacement of 2D and 3D computational meshes based on the Delaunay graph parameterization is formulated, programmed and assessed. This method is developed for use in the aerodynamic shape optimization process with the adjoint method or other optimization methods, such as evolutionary algorithms, while it can similarly be used in other applications of computational fluid dynamics, such as aeroelastic calculations or problems involving moving boundaries. For the implementation of the method, a software is developed in the OpenFOAM[®] environment, which receives the computational mesh and the displacement of its boundary nodes as input and computes the new positions of the mesh nodes that correspond to the initial topology of the mesh as output.

In this thesis, first, the basic properties and the generation algorithms for the Delaunay triangulation and tetrahedralization, which are the basic tools of the displacement method, are presented. Then, the steps of the displacement method are analyzed, according to the Delaunay graph parameterization. For the demonstration of its operation and robustness, the method is implemented in the deformation of 2D and 3D computational meshes, in a variety of different deformation problems. Also, for the 2D method, two improvements of the method are suggested, regarding the correction of the graph around non-convex geometries and the interpolation of the mesh nodes in cases of large rotations of the geometry. In addition, the way in which the accurate sensitivity derivatives of the continuous adjoint method are computed using the Delaunay graph parameterization is presented and demonstrated in 2D cases.

Ακρωνύμια

ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΕΘΣ	Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
ΜΠΤΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
<hr/>	
2Δ	Δύο Διαστάσεων/Δισδιάστατο
3Δ	Τριών Διαστάσεων/Τρισδιάστατο
ΜΔΕ	Μερική Διαφορική Εξίσωση/Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις
<hr/>	
CFD	Computational Fluid Dynamics
NTUA	National Technical University of Athens
PCopt	Parallel CFD & Optimization unit
<hr/>	
FI	Field Integral
SI	Surface Integral
E-SI	Enhanced Surface Integral
FD	Finite Differences
RBF	Radial Basis Function
NURBS	Non-Uniform Rational B-Spline

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
1 Εισαγωγή	1
1.1 Περί Αεροδυναμικής Βελτιστοποίησης	1
1.2 Η Συζυγής Μέθοδος	3
1.3 Ανάγκη Παραμόρφωσης Πλέγματος	5
1.4 Μέθοδοι Παραμόρφωσης Πλέγματος	6
1.5 Η Μέθοδος Γράφων Delaunay	8
1.6 Στόχος και Δομή της Εργασίας	9
2 Ψηφιοποίηση Delaunay	11
2.1 Δομή της Ψηφιοποίησης κατά Delaunay	11
2.2 Ιδιότητες της Ψηφιοποίησης Delaunay	14
2.3 Γένεση της Ψηφιοποίησης Delaunay	17
2.3.1 Κατηγορίες Αλγορίθμων Τριγωνοποίησης Delaunay στις 2 Διαστάσεις	17
2.3.2 Ο Αλγόριθμος Green-Sibson	21
2.4 Αναζήτηση Σημείου στο Εσωτερικό της Τριγωνοποίησης Delaunay	25
3 Η Μέθοδος Παραμετροποίησης με Γράφους Delaunay	29
3.1 Η Βασική Ιδέα της Μεθόδου	29
3.2 Τα Βήματα της Μεθόδου	31
3.2.1 Γένεση του Γράφου Delaunay	31
3.2.2 Παραμετροποίηση των Κόμβων του Πλέγματος	32

3.2.3	Παραμόρφωση της Γεωμετρίας	36
3.2.4	Μετακίνηση των Κόμβων του Πλέγματος	37
3.3	Ο Αλγόριθμος της Μεθόδου Γράφων Delaunay	39
4	Η Μέθοδος Γράφων Delaunay στις 2 Διαστάσεις	43
4.1	Μετρικές Ποιότητας του Πλέγματος στις 2 Διαστάσεις	43
4.2	Εφαρμογή στην Αεροτομή NACA0012	45
4.2.1	Κάμψη της Μέσης Γραμμής της Αεροτομής	45
4.2.2	Συμπεράσματα	50
4.3	Περί Επιλογής των Μη-Ελεγχόμενων Ορίων του 2Δ Γράφου Delaunay	50
4.3.1	Το Μη-Ελεγχόμενο Ορίο με Βάση το Κυρτό Χωρίο της Γεωμε- τρίας	52
4.4	Ο Γράφος Delaunay σε Μη-Κυρτές Γεωμετρίες	57
4.4.1	Τροποποίηση της Τριγωνοποίησης Delaunay σε Μη-Κυρτές Γε- ωμετρίες	60
4.5	Η Μέθοδος Γράφων Delaunay με Παρεμβολή της Στροφής	62
4.6	Εφαρμογή στην Αεροτομή NACA 4412	66
4.6.1	Περιστροφή της Αεροτομής Χωρίς Ανανέωση του Γράφου	69
4.6.2	Περιστροφή της Αεροτομής με Ανανέωση του Γράφου	71
4.6.3	Ημιτονοειδής Παραμόρφωση της Αεροτομής	81
4.6.4	Συμπεράσματα	85
4.7	Εφαρμογή σε Αεροτομή με Flap	87
5	Η Μέθοδος Γράφων Delaunay στις 3 Διαστάσεις	91
5.1	Μετρικές Ποιότητας του Πλέγματος στις 3 Διαστάσεις	91
5.2	Εφαρμογή στην Πτέρυγα ONERA M6	93
5.2.1	Κάμψη της Πτέρυγας	93
5.2.2	Κάμψη και Στρέψη της Πτέρυγας	98
5.2.3	Συμπεράσματα	101
5.3	Εφαρμογές σε Πλέγματα Εσωτερικής Αεροδυναμικής	102

5.3.1	Απλός Αγωγός Ορθογωνικής Διατομής	102
5.3.2	Αγωγός Τύπου-S	105
5.3.3	Παραμόρφωση Αγωγού Πυκνού Πλέγματος	108
5.4	Εφαρμογή σε Αεροσκάφος Τύπου Blended Wing Body	112
5.5	Εφαρμογή στο Γενικευμένο Μοντέλο Αυτοκινήτου DrivAer	117
5.5.1	Συμπεράσματα	123
5.6	Εφαρμογή στην Πτέρυγα ONERA M6 με Πλέγμα Τύπου Low-Re	124
6	Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος σε χρήση με την Παραμετροποίηση Γράφων Delaunay	131
6.1	Παράγωγος Ευαισθησίας των Απωλειών Ολικής Πίεσης	132
6.2	Παραγωγή του Μοντέλου Παραμόρφωσης Πλέγματος	133
6.3	Εφαρμογή σε 2Δ Αγωγό	136
7	Ανακεφαλαίωση & Συμπεράσματα	141
7.1	Ανακεφαλαίωση	141
7.2	Συμπεράσματα	144
7.3	Προτάσεις για Μελλοντική Μελέτη	145
	Βιβλιογραφία	147

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Περί Αεροδυναμικής Βελτιστοποίησης

Στον τομέα της αεροδυναμικής και της μηχανικής των ρευστών, το πρόβλημα της ανάλυσης και της πρόλεξης των χαρακτηριστικών της ροής γύρω από αεροδυναμικά σώματα αποτελούσε ανέκαθεν βασικό πεδίο ενδιαφέροντος. Με την ανάπτυξη των θεωριών και τη διατύπωση των νόμων που διέπουν τη φυσική των ρευστών, επόμενο βήμα ήταν η ανάπτυξη κατάλληλων μεθόδων επίλυσης των εξισώσεων που διέπουν τις ροές, ώστε να προλέγονται τα χαρακτηριστικά της ροής γύρω από σώματα των οποίων η αεροδυναμική συμπεριφορά αποτελεί κρίσιμο παράγοντα σε τεχνολογικές εφαρμογές. Βασικό παράδειγμα τέτοιων εφαρμογών αποτελεί το αεροσκάφος, του οποίου η εξέλιξη ανέκαθεν ακολουθούσε τις εξελίξεις στον τομέα της αεροδυναμικής. Η γενική αδυναμία αναλυτικής επίλυσης των εξισώσεων που δέπουν τις ροές, δηλαδή των εξισώσεων συνέχειας, ορμής (γνωστές και ως εξισώσεις Navier-Stokes) και ενέργειας, οδήγησε στην ανάπτυξη του κλάδου της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (Computational Fluid Dynamics - CFD), που ασχολείται με την υλοποίηση μεθόδων για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων αυτών, με τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Εκτός, όμως, από την πρόλεξη της ροής γύρω από αεροδυναμικά σώματα, μεγάλο τεχνολογικό ενδιαφέρον παρουσιάζει και η δυνατότητα σχεδιασμού της βέλτιστης μορφής των σωμάτων αυτών, έτσι ώστε να ικανοποιούν τις σχετικές με την αεροδυναμική τους συμπεριφορά απαιτήσεις. Για παράδειγμα, η διαδικασία σχεδιασμού μπορεί να έχει ως στόχο την ελαχιστοποίηση της αντίστασης ενός σώματος σε εξωτερική ροή, τη μεγιστοποίηση της άνωσης ενός σώματος, την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης σε εσωτερική ροή ή τη μεγιστοποίηση του βαθμού απόδοσης της ροής σε μία πτερύγωση συμπιεστή ή στροβίλου. Τα προβλήματα αυτά είναι γνωστά και ως προβλήματα βέλτιστου σχεδιασμού (optimal design) ή βελτιστοποίησης σχήματος (shape

optimization). Για την ικανοποίηση της ανάγκης αυτής έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι βελτιστοποίησης, οι οποίες έχουν ως στόχο την ελαχιστοποίηση ή τη μεγιστοποίηση μίας ή περισσότερων συναρτήσεων, που είναι γνωστές και ως συναρτήσεις κόστους (cost functions) ή συναρτήσεις καταλληλότητας (fitness functions) ή αντικειμενικές συναρτήσεις (objective functions).

Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης μπορούν να διακριθούν σε στοχαστικές και αιτιοκρατικές μεθόδους [1]. Οι μέθοδοι στοχαστικής βελτιστοποίησης χαρακτηρίζονται από το ότι αναζητούν τη βέλτιστη λύση με τρόπο τυχαίο ή οργανωμένα τυχαίο. Οι αλγόριθμοι της κατηγορίας αυτής είναι γενικοί, δηλαδή μπορούν εύκολα να εφαρμοστούν για την επίλυση διαφορετικών προβλημάτων, ενώ μπορούν να εντοπίσουν το ολικό ακρότατο μιας αντικειμενικής συνάρτησης, ανεξάρτητα από την αρχικοποίησή τους. Όμως, έχουν το μειονέκτημα ότι απαιτούν την αξιολόγηση πολλών διαφορετικών λύσεων προτού καταλήξουν στη βέλτιστη, κάτι που τις καθιστά αργές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα στοχαστικών αλγορίθμων είναι οι εξελικτικοί αλγόριθμοι (Evolutionary Algorithms - EA) [1] [2] [3].

Από την άλλη, οι αλγόριθμοι αιτιοκρατικής βελτιστοποίησης βασίζονται στη γενικευμένη έννοια της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης για τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης, δηλαδή της λύσης που ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί την τιμή οποιασδήποτε αντικειμενικής συνάρτησης. Η ανάπτυξη μιας αιτιοκρατικής μεθόδου απαιτεί μεγάλη επένδυση σε χρόνο και επιπλέον ανάπτυξη και προγραμματισμό για να εφαρμοστεί σε παρεμφερή προβλήματα, αφού η αλλαγή, για παράδειγμα, της αντικειμενικής συνάρτησης απαιτεί αλλαγές στον εκάστοτε κώδικα υλοποίησης της μεθόδου. Το πλεονέκτημα των αιτιοκρατικών μεθόδων είναι ότι μπορούν να συγκλίνουν γρήγορα στη βέλτιστη λύση, όμως υπάρχει ο κίνδυνος να εντοπιστεί τοπικό ακρότατο, ανάλογα με το σημείο αρχικοποίησης. Το βασικό ζήτημα των μεθόδων αυτών είναι ο υπολογισμός των παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, γνωστές και ως παράγωγοι ευαισθησίας. Ενδεικτικές μέθοδοι υπολογισμού των παραγώγων αυτών είναι οι εξής:

- Πεπερασμένες Διαφορές (Finite Differences), [1].
- Ευθεία Διαφορίση (Direct Differentiation), [1], [4].
- Μέθοδος των Μιγαδικών Μεταβλητών (Complex Variable Method), [1].
- Μέθοδος της Αυτόματης Διαφορίσης (Automated Differentiation), [1].
- Συζυγής Μέθοδος (Adjoint Method), [1], [4].

Από τις παραπάνω μεθόδους υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας, η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη είναι η συζυγής μέθοδος (adjoint method). Βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι ότι το υπολογιστικό κόστος είναι ανεξάρτητο του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού, παράγοντας σημαντικός για την επίλυση των σύγχρονων προβλημάτων αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, στα οποία ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού μπορεί να είναι της τάξης του εκατομμυρίου. Σε μεγάλα προβλήματα, η χρήση στοχαστικών μεθόδων είναι ασύμφορη, έως αδύνατη, αφού το υπολογιστικό

κόστος είναι πολλαπλάσιο από αυτό των αιτιοκρατικών μεθόδων. Όμως, η υλοποίηση ενός αιτιοκρατικού αλγορίθμου βελτιστοποίησης με χρήση της συζυγούς μεθόδου απαιτεί την επαναδιατύπωση των εξισώσεων και των οριακών συνθηκών του προβλήματος, καθώς και τον προγραμματισμό του επιλύτη τους.

Σε όλες τις μεθόδους βελτιστοποίησης που αναφέρθηκαν παραπάνω, η αξιολόγηση της κάθε διαφορετικής λύσης απαιτεί την παραμετροποίηση της εκάστοτε γεωμετρίας ώστε να αναδειχτούν οι μεταβλητές σχεδιασμού (design variables) και, στη συνέχεια, τη γένεση υπολογιστικού πλέγματος (grid generation) το οποίο θα προσαρμόζεται με ακρίβεια στην κάθε διαφορετική γεωμετρία. Λόγω του κόστους γένεσης του πλέγματος, συχνά η διαδικασία βελτιστοποίησης ξεκινά με ένα πλέγμα γύρω από την αρχική γεωμετρία, το οποίο δεν ξαναδημιουργείται μετά από κάθε μεταβολή στη γεωμετρία – αφού κάτι τέτοιο θα είχε υψηλό υπολογιστικό κόστος – αλλά προσαρμόζεται σε κάθε νέο σχήμα, όπως αυτό προκύπτει από τη μέθοδο βελτιστοποίησης που χρησιμοποιείται. Για το λόγο αυτό, η μέθοδος παραμόρφωσης πλέγματος αποτελεί βασική συνιστώσα της διαδικασίας αεροδυναμικής βελτιστοποίησης.

1.2 Η Συζυγής Μέθοδος

Το βασικό πλεονέκτημα της συζυγούς μεθόδου, όπως αναφέρθηκε, είναι η ανεξαρτησία του υπολογιστικού κόστους από το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού, κάτι που την καθιστά ιδιαίτερα δημοφιλή σε εφαρμογές βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική, αλλά και σε άλλους τομείς, όπως είναι οι κατασκευές. Η συζυγής μέθοδος διακρίνεται στη διακριτή συζυγή μέθοδο (discrete adjoint method) [5] και στη συνεχή συζυγή μέθοδο (continuous adjoint method) [6]. Στην πρώτη μέθοδο, αρχικά διακριτοποιούνται οι εξισώσεις του εκάστοτε προβλήματος και στη συνέχεια διαφορίζονται, ενώ στη δεύτερη μέθοδο ακολουθεί η αντίστροφη διαδικασία. Οι δύο μέθοδοι είναι θεωρητικά ισοδύναμες, όμως μπορεί να οδηγήσουν στον υπολογισμό διαφορετικών παραγώγων ευαισθησίας, αν το πλέγμα που χρησιμοποιείται δεν είναι αρκετά πυκνό.

Στη ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ έχει δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην ανάπτυξη της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, για την οποία έχουν εξεταστεί οι διαφορετικές διατυπώσεις της. Οι διατυπώσεις αυτές οδηγούν σε διαφορετικές εκφράσεις για τις παραγώγους ευαισθησίας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού (όπως περιγράφεται και στο [7]).

Στη πρώτη διατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου που δημοσιεύτηκε [8], οι εκφράσεις των παραγώγων ευαισθησίας περιλαμβάνουν χωρικά ολοκληρώματα των μεταβολών των συντεταγμένων \vec{x} του πλέγματος ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού \vec{b} . Οι εκφράσεις της διατύπωσης αυτής, η οποία ονομάζεται Συζυγής Διατύπωση Χωρικών Ολοκληρωμάτων (Field Integrals - FI Adjoint), αν και οδηγούν στον ακριβή υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, έχουν υψηλό υπολογιστικό κόστος, αφού απαιτείται ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας του $\delta\vec{x}/\delta\vec{b}$. Ο υπολογισμός των όρων αυτών με τη χρήση πεπερασμένων διαφορών (Finite Differences - FD), οδηγεί σε υπο-

λογιστικό κόστος που είναι ανάλογο του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού, αφού απαιτείται η μετατόπιση του πλέγματος δύο φορές για κάθε μεταβλητή σχεδιασμού του διανύσματος \vec{b} [9]. Για μικρό αριθμό μεταβλητών σχεδιασμού, η διατύπωση αυτή έχει αποδεκτό κόστος, όμως, καθώς ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού αυξάνεται, το κόστος της διατύπωσης αυτής γίνεται απαγορευτικά μεγάλο.

Στη δεύτερη διατύπωση της συζυγούς μεθόδου που δημοσιεύτηκε [10] [11], οι εκφράσεις των παραγώγων ευαισθησίας περιλαμβάνουν μόνο επιφανειακά ολοκληρώματα στα όρια του υπολογιστικού χωρίου. Η διατύπωση αυτή, που ονομάζεται Συζυγής Διατύπωση Επιφανειακών Ολοκληρωμάτων (Surface Integrals - SI Adjoint), έχει πολύ χαμηλό υπολογιστικό κόστος σε σχέση με τη διατύπωση FI, αλλά μπορεί να οδηγήσει σε ανακριβείς υπολογισμούς των παραγώγων ευαισθησίας.

Στη ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ, στα πλαίσια της Διδακτορικής Διατριβής του Ι. Καββαδία [12], αναπτύχθηκε μία νέα διατύπωση της συζυγούς μεθόδου, η οποία χαρακτηρίζεται από το χαμηλό υπολογιστικό κόστος της διατύπωσης SI, ενώ παράλληλα έχει την ακρίβεια της FI. Η διατύπωση αυτή ονομάζεται Εμπλουτισμένη Διατύπωση Επιφανειακών Ολοκληρωμάτων (Enhanced Surface Integrals – E-SI). Στη διατύπωση αυτή, για να αποφευχθεί η ανάγκη υπολογισμού της παραγώγου $d\vec{x}/d\vec{b}$, επιλύονται οι συζυγείς εξισώσεις της μεθόδου μετατόπισης του πλέγματος, οι οποίες απαλείφουν τους χωρικούς όρους της παραγώγου αυτής. Στη γενική περίπτωση, οι νέες αυτές συζυγείς εξισώσεις είναι μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Από όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, γίνεται φανερός ο ρόλος της μεθόδου παραμόρφωσης του πλέγματος στον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας. Συγκεκριμένα, για τον ακριβή υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, όπου είναι αναγκαία η χρήση της διατύπωσης FI ή E-SI, η μέθοδος παραμόρφωσης του πλέγματος εμπλέκεται άμεσα στους υπολογισμούς. Για την πρώτη διατύπωση, απαιτείται η μετατόπιση του πλέγματος δύο φορές για κάθε μεταβλητή σχεδιασμού, ώστε να υπολογιστεί η παράγωγος $d\vec{x}/d\vec{b}$ με τη χρήση πεπερασμένων διαφορών, ενώ για τη δεύτερη διατύπωση απαιτείται η διαφορίση των εξισώσεων του μοντέλου μετατόπισης του πλέγματος και η επίλυση της συζυγούς εξίσωσης που προκύπτει.

Στη διπλωματική αυτή εργασία, η μέθοδος παραμόρφωσης πλεγμάτων με παραμετροποίηση γράφων Delaunay που αναπτύσσεται, η οποία είναι μία αλγεβρική μέθοδος που δεν απαιτεί την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων για τη μετακίνηση του πλέγματος, διαφορίζεται κατάλληλα, ώστε να υπολογιστούν με τρόπο άμεσο και οικονομικό οι όροι $d\vec{x}/d\vec{b}$ της διατύπωσης FI. Η διαφορίση του μοντέλου αυτού οδηγεί σε μία διατύπωση όμοια της E-SI, η οποία, όμως, περιλαμβάνει και χωρικά ολοκληρώματα τα οποία μπορούν να υπολογιστούν άμεσα.

1.3 Ανάγκη Παραμόρφωσης Πλέγματος

Η παραμόρφωση ή μετατόπιση ή προσαρμογή υπολογιστικών πλεγμάτων στην Υπολογιστική Ρευστομηχανική αποτελεί βασικό τμήμα της επίλυσης προβλημάτων που περιλαμβάνουν κινούμενα σώματα ή σώματα μεταβαλλόμενης γεωμετρίας. Παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων είναι τα μη-μόνιμα προβλήματα με σχετική κίνηση δύο ή περισσότερων σωμάτων – όπως είναι η επέκταση μίας υπεραντωτικής διάταξης (flap) και η μετακίνηση επιφανειών ελέγχου –, υπολογισμοί αεροελαστικότητας – που περιλαμβάνουν την παραμόρφωση πτερυγίων σύμφωνα με τα ασκούμενα αεροδυναμικά φορτία –, καθώς και εφαρμογές αεροδυναμικού σχεδιασμού, όπου η γεωμετρία αλλάζει μετά από κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Η αλλαγή της γεωμετρίας του εκάστοτε προβλήματος απαιτεί την προσαρμογή του υπολογιστικού πλέγματος στο νέο γεωμετρικό σύνορο, έτσι ώστε να μπορέσει να επιλυθεί εκ νέου η ροή. Η δημιουργία νέου πλέγματος γύρω από τη γεωμετρία θα αποτελούσε μία δαπανηρή επιλογή, αφού κάτι τέτοιο απαιτεί σημαντικό υπολογιστικό χρόνο. Για το λόγο αυτό, επιλέγεται η προσαρμογή του υπάρχοντος πλέγματος με βάση την παραμόρφωση της γεωμετρίας του προβλήματος. Η προσαρμογή αυτή γίνεται σε κάθε χρονικό βήμα (για μη-μόνιμα προβλήματα) ή σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης (για προβλήματα αεροδυναμικού σχεδιασμού), ενώ μετά από κάθε προσαρμογή, η προηγούμενη λύση της ροής μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αρχική τιμή της νέας επίλυσης (εφόσον διατηρείται η τοπολογία του πλέγματος), ώστε να επιτευχθεί γρηγορότερη σύγκλιση. Επομένως, είναι σημαντική η ανάπτυξη μίας μεθόδου μετατόπισης πλεγμάτων, η οποία θα διατηρεί την ποιότητα του πλέγματος σε κάθε βήμα, ενώ θα εκτελεί την προσαρμογή αυτή σε μικρό υπολογιστικό χρόνο.

Ο στόχος μιας μεθόδου παραμόρφωσης πλεγμάτων είναι η διάδοση της μετακίνησης του επιφανειακού (οριακού) πλέγματος στο εσωτερικό του υπολογιστικού χωρίου, έτσι ώστε να μετατοπιστούν όλοι εσωτερικοί κόμβοι και να προσαρμοστεί το πλέγμα στη νέα γεωμετρία. Η προσαρμογή αυτή μπορεί να γίνει είτε με αναγέννηση του πλέγματος στις περιοχές του νέου υπολογιστικού χωρίου που δεν παραμετροποιούνται σωστά από το υπάρχον πλέγμα, ή με παραμόρφωση του υπάρχοντος πλέγματος. Αν και η πρώτη μέθοδος εξασφαλίζει καλύτερα την ποιότητα του πλέγματος, προτιμάται η δεύτερη μέθοδος, αφού διατηρεί την τοπολογία του πλέγματος. Με χρήση κατάλληλης μεθόδου παραμόρφωσης, ένα πλέγμα μπορεί να διατηρήσει την ποιότητά του σε αποδεκτά επίπεδα, ακόμα και για μεγάλες παραμορφώσεις της εκάστοτε γεωμετρίας. Η μέθοδος προσαρμογής πλεγμάτων με παραμετροποίηση γράφων Delaunay, που αναπτύσσεται και παρουσιάζεται στη διπλωματική αυτή εργασία, όπως θα δειχθεί σε επόμενα κεφάλαια, μπορεί να διατηρήσει την ποιότητα του πλέγματος ακόμα και για μεγάλες μετατοπίσεις των οριακών κόμβων του πλέγματος, ενώ η προσαρμογή αυτή μπορεί να γίνει σε μικρό χρόνο.

Ένας από τους βασικούς λόγους για τους οποίους αναπτύσσεται η μέθοδος που παρουσιάζεται στη διπλωματική αυτή εργασία είναι για χρήση της σε προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης με χρήση της συζυγούς μεθόδου. Κατά τον υπολογισμό της βέλτιστης μορφής ενός σώματος, όπως είναι μία πτέρυγα αεροσκάφους, ένα πτερύγιο συμπίεστη στροβιλομηχανής ή ένα αυτοκίνητο, η διαδικασία βελτιστοποίησης ξεκινά

με μία δεδομένη γεωμετρία, γύρω από την οποία έχει κατασκευαστεί ένα υπολογιστικό πλέγμα. Μετά από κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, η γεωμετρία του σώματος, εν γένει, μεταβάλλεται, έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί μία ποσότητα (π.χ. οπισθέλκουσα). Πριν συνεχίσει η διαδικασία βελτιστοποίησης στον επόμενο κύκλο, είναι απαραίτητη η προσαρμογή του υπολογιστικού πλέγματος στη νέα γεωμετρία, έτσι ώστε να μπορέσουν να επιλυθούν οι εξισώσεις της ροής και οι συζυγείς τους.

Η μέθοδος προσαρμογής του πλέγματος αποτελεί βασικό τμήμα της διαδικασίας βελτιστοποίησης, για δύο λόγους: (α) η διατήρηση της ποιότητας του πλέγματος είναι απαραίτητη για τη σωστή αριθμητική επίλυση του προτεύοντος και του συζυγούς προβλήματος, και (β) η αδυναμία της μεθόδου να μετακινήσει το πλέγμα μπορεί να οδηγήσει στον τερματισμό της διαδικασίας βελτιστοποίησης, προτού επιτευχθεί η βέλτιστη γεωμετρία. Έτσι, η χρήση μίας γρήγορης και στιβαρής μεθόδου παραμόρφωσης πλεγμάτων είναι αναγκαία για την επίτευξη της βέλτιστης λύσης του εκάστοτε προβλήματος σχεδιασμού.

Σε όλη την εργασία, οι όροι παραμόρφωση ή μετατόπιση ή προσαρμογή υπολογιστικών πλεγμάτων χρησιμοποιούνται αδιακρίτως.

1.4 Μέθοδοι Παραμόρφωσης Πλέγματος

Στη βιβλιογραφία έχει εμφανιστεί πληθώρα μεθόδων παραμόρφωσης (ή μετατόπισης ή προσαρμογής) δομημένων και μη-δομημένων υπολογιστικών πλεγμάτων. Οι διάφορες τεχνικές παραμόρφωσης πλεγμάτων μπορούν να διακριθούν σε μεθόδους μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ), σε μεθόδους φυσικών αναλόγων (physical analogies), και σε αλγεβρικές μεθόδους, καθώς και συνδυασμό αυτών.

Οι μέθοδοι ΜΔΕ (partial differential equation - PDE - methods) υπολογίζουν τη μετακίνηση του πλέγματος μέσω της επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με κατάλληλες οριακές συνθήκες. Ο Λαπλασιανός [13] και ο διαρμονικός [14] τελεστής είναι δύο από τις μερικές διαφορικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται. Ο διαρμονικός τελεστής έχει το πλεονέκτημα, έναντι του Λαπλασιανού, να διατηρεί την ορθογωνικότητα του πλέγματος κοντά στα όρια. Η εφαρμογή των μεθόδων αυτών είναι σχετικά απλή, όμως έχουν περιορισμένη ευελιξία κατά τη μετακίνηση του πλέγματος και συχνά απαιτούν την εκτέλεση πολλών μικρότερων βημάτων, προτού φτάσουν στο τελικό, παραμορφωμένο πλέγμα. Γι' αυτό, οι μέθοδοι ΜΔΕ χρησιμοποιούνται κυρίως για προβλήματα που περιλαμβάνουν μικρές παραμορφώσεις.

Οι μέθοδοι φυσικών αναλόγων (physical analogies) είναι οι περισσότερο χρησιμοποιούμενες μέθοδοι παραμόρφωσης πλεγμάτων. Δύο από τις πιο διαδεδομένες και αξιόπιστες τεχνικές φυσικών αναλόγων είναι η μέθοδος ελατηρίων και η ελαστική μέθοδος. Στη μέθοδο ελατηρίων (spring analogy method) [15], ολόκληρο το υπολογιστικό χωρίο μοντελοποιείται σαν ένα σύστημα αποτελούμενο από γραμμικά ελατήρια, τα οποία

συνδέονται μεταξύ τους στους κόμβους του πλέγματος. Η παραμόρφωση του πλέγματος καθορίζεται από την επίλυση των εξισώσεων στατικής ισορροπίας του συνολικού συστήματος, αφού οι οριακοί κόμβοι μετακινήθουν σύμφωνα με την παραμόρφωση της γεωμετρίας. Αν και η μέθοδος των γραμμικών ελατηρίων εφαρμόζεται εύκολα, σε μεγάλες μετατοπίσεις και σε πυκνά πλέγματα εμφανίζει προβλήματα στιβαρότητας, οδηγώντας στην εμφάνιση αρνητικών όγκων στο πλέγμα. Βελτίωση της μεθόδου αυτής αποτελεί η προσέγγιση του Farhat [16], όπου προστίθενται μη-γραμμικά, στρεπτικά ελατήρια για την αποφυγή της εμφάνισης αρνητικών όγκων. Στην ελαστική μέθοδο (elastic analogy method) [17], ολόκληρο το υπολογιστικό χωρίο μοντελοποιείται ως ένα ελαστικό στερεό και η παραμόρφωση του πλέγματος καθορίζεται από τους κλασικούς νόμους της ελαστικής θεωρίας των στερεών. Η ελαστική μέθοδος εμφανίζει σημαντική ευελιξία, σε σχέση με τη μέθοδο των ελατηρίων, αλλά συνοδεύεται από μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος. Γενικά, τα φυσικά ανάλογα έχουν υψηλό υπολογιστικό κόστος για μεγάλα πλέγματα και δύσκολα παραλληλοποιούνται, αφού απαιτούν την επαναληπτική επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων της τάξης του αριθμού των πλεγματοκινητών κόμβων.

Η τρίτη κατηγορία μεθόδων παραμόρφωσης πλέγματος είναι οι αλγεβρικές μέθοδοι (algebraic methods). Οι μέθοδοι αυτοί καθορίζουν τη μετακίνηση κάθε πλεγματοκινητού κόμβου μέσω αλγεβρικών σχέσεων που εξαρτώνται από τη μετακίνηση των οριακών κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος και τη σχετική θέση του προς-μετακίνηση κόμβου. Οι μέθοδοι της κατηγορίας αυτής έχουν αναπτυχθεί σημαντικά τα τελευταία χρόνια, λόγω της μεγάλης ταχύτητας με την οποία εκτελούν τη μετατόπιση του πλέγματος. Γενικά, οι αλγεβρικές τεχνικές μετακίνησης πλέγματος δεν λαμβάνουν υπόψη την τοπολογία του πλέγματος, δηλαδή τον τρόπο σύνδεσης των πλεγματοκινητών κόμβων, και για το λόγο αυτό μπορούν εύκολα και αξιόπιστα να εφαρμοστούν σε τυχαίους τύπους πλεγμάτων, δομημένα ή μη-δομημένα, με πολυεδρικά στοιχεία ή με κελιά μεγάλου λόγου επιμήκους (aspect ratio) πλεγμάτων συνεκτικών ροών. Μία τέτοια μέθοδος είναι η παρεμβολή με χρήση συναρτήσεων ακτινικής βάσης (radial basis functions - RBF) [18], η οποία κατανέμει τη μετατόπιση των οριακών πλεγματοκινητών κόμβων στους εσωτερικούς, ανάλογα με την απόστασή τους από κάποια κέντρα. Η μέθοδος RBF μπορεί να εφαρμοστεί πολύ εύκολα ενώ παράγει πλέγματα καλής ποιότητας, που διατηρούν ικανοποιητικά την ορθογωνικότητα των κελιών κοντά στα όρια. Όμως, η άμεση εφαρμογή της μεθόδου αυτής σε μεγάλα 3D προβλήματα έχει υψηλό υπολογιστικό κόστος. Το κόστος αυτό μπορεί να μειωθεί με τη χρήση κατάλληλου προσταθεροποιητή. Μία άλλη αλγεβρική μέθοδος είναι αυτή των βαρών αντίστροφης απόστασης (inverse distance weighting - IDW) [19], στην οποία, το πλέγμα που βρίσκεται κοντά στο όριο είναι σχετικά άκαμπτο ενώ το πλέγμα που βρίσκεται μακριά είναι περισσότερο ευκίνητο και παραμορφώνεται εύκολα. Έτσι, η μέθοδος αυτή διατηρεί την ποιότητα του πλέγματος κοντά στα όρια.

Σε όλες τις μεθόδους παραμόρφωσης πλεγμάτων, η γεωμετρική πολυπλοκότητα, ο υπολογιστικός χρόνος και η αξιοπιστία της εκάστοτε μεθόδου αποτελούν αντικρουόμενους παράγοντες. Με τις μεθόδους ΜΔΕ, η παραμόρφωση υλοποιείται εύκολα, αλλά η ευελιξία τους είναι περιορισμένη. Με τις μεθόδους φυσικών αναλόγων, μεγάλες

παραμορφώσεις πολύπλοκων γεωμετριών μπορούν να υπολογιστούν με αξιοπιστία, αλλά με υψηλό υπολογιστικό κόστος. Με τις αλγεβρικές μεθόδους, η παραμόρφωση του πλέγματος μπορεί να γίνει γρήγορα, αλλά όχι αξιόπιστα για πολύπλοκες γεωμετρίες ή πολύπλοκες μετατοπίσεις.

Η μέθοδος παραμόρφωσης πλεγμάτων με παραμετροποίηση γράφων Delaunay (Delaunay graph mapping method) [20], που παρουσιάζεται και υλοποιείται στη διπλωματική αυτή εργασία, αποτελεί μία αλγεβρική μέθοδο, η οποία υπολογίζει άμεσα και γρήγορα τη μετατόπιση των πλεγματικών κόμβων, ανάλογα με τη σχετική τους θέση μέσα στο υπολογιστικό χωρίο και τη μετατόπιση των οριακών κόμβων. Η μέθοδος αυτή μπορεί να δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα, ακόμα και για μεγάλες παραμορφώσεις της γεωμετρίας, τόσο για 2Δ, όσο και για 3Δ δομημένα και μη-δομημένα πλέγματα.

1.5 Η Μέθοδος Γράφων Delaunay

Η μέθοδος παραμόρφωσης πλεγμάτων με παραμετροποίηση γράφων Delaunay (Delaunay graph mapping method), είναι μία αλγεβρική μέθοδος, η οποία προτάθηκε αρχικά από τον Liu [20] το 2005, ως μία γρήγορη και απλή μέθοδος μετακίνησης πλεγμάτων. Η παραμόρφωση του υπολογιστικού πλέγματος, σύμφωνα με τη μέθοδο γράφων Delaunay, απαιτεί αρχικά τη δημιουργία ενός αραιού πλέγματος (γράφου) τριγωνικών (2Δ) ή τετραεδρικών (3Δ) στοιχείων, το οποίο περιλαμβάνει στο εσωτερικό του τους προς μετακίνηση πλεγματικούς κόμβους. Οι κόμβοι αυτοί αποτυπώνονται ένας-προς-ένα στο γράφο αυτό μέσω των κεντροβαρικών τους συντεταγμένων ως προς το τρίγωνο ή τετράεδρο στο οποίο ανήκουν. Το στοιχείο στο οποίο ανήκει ο κάθε κόμβος, καθώς και η σχετική του θέση ως προς αυτό (δηλαδή οι κεντροβαρικές του συντεταγμένες) αποτυπώνουν πλήρως τη σχετική θέση του κόμβου μέσα στο γράφο. Με την παραμόρφωση της γεωμετρίας του προβλήματος (π.χ. μιας αεροτομής), ο γράφος με τον οποίο παραμετροποιήθηκε το υπολογιστικό χωρίο παραμορφώνεται, όμως η αποτύπωση των πλεγματικών κόμβων στο γράφο (δηλαδή η σχετική τους θέση μέσα στο γράφο) παραμένει αμετάβλητη. Έτσι, η νέα θέση των πλεγματικών κόμβων, μετά την προσαρμογή του γράφου στη νέα γεωμετρία, μπορεί να υπολογιστεί μέσω της ένα-προς-ένα παραμετροποίησης που έγινε. Με την προϋπόθεση ο γράφος να παραμένει έγκυρος μετά τη μετατόπιση των κορυφών του (δηλαδή να μην εμφανίζονται τρίγωνα ή τετράεδρα αρνητικού εμβαδού ή όγκου, αντίστοιχα), το νέο πλέγμα μπορεί να υπολογιστεί από τη νέα θέση των πλεγματικών του κόμβων, με την τοπολογία του να παραμένει αμετάβλητη.

Για την υλοποίηση της μεθόδου, απαιτείται η χρήση ενός γράφου (πλέγματος) τριγωνικών ή τετραεδρικών στοιχείων, ο οποίος προκύπτει από την τριγωνοποίηση ή τετραεδροποίηση, αντίστοιχα, ενός δεδομένου συνόλου σημείων (στο επίπεδο ή στο χώρο) που αντιπροσωπεύει τη γεωμετρία του προβλήματος, καθώς και τα όρια του υπολογιστικού πλέγματος. Έτσι, κάθε αλλαγή της γεωμετρίας του προβλήματος θα συνοδεύεται από την αντίστοιχη μετατόπιση των κορυφών του γράφου και, άρα, από

την αντίστοιχη παραμόρφωσή του. Όμως, για να μπορεί η μέθοδος που περιγράφηκε παραπάνω να εκτελεί μεγάλες παραμορφώσεις πλεγμάτων, πρέπει ο γράφος που θα παραχθεί από τα προς τριγωνοποίηση ή τετραεδροποίηση σημεία να έχει τη μέγιστη δυνατή ευελιξία κατά την παραμόρφωσή του. Αυτό σημαίνει ότι ο γράφος πρέπει να παραμένει έγκυρος για όσο το δυνατόν μεγαλύτερες μετατοπίσεις των κορυφών του. Αν ο γράφος αποτελείται από στοιχεία των οποίων οι μικρότερες γωνίες είναι πολύ μικρές (δηλαδή τα στοιχεία είναι «στενόμακρα»), τότε μικρές μετατοπίσεις των κορυφών των στοιχείων αυτών μπορούν εύκολα να οδηγήσουν σε αρνητικά εμβαδά ή αρνητικούς όγκους, καθιστώντας το γράφο μη-έγκυρο. Από την άλλη, αν στα στοιχεία αυτά η μικρότερη γωνία είναι η μέγιστη δυνατή, τότε απαιτούνται μεγαλύτερες μετακινήσεις, προτού ο γράφος καταστεί μη-έγκυρος.

Η απαίτηση αυτή οδηγεί στην επιλογή της τριγωνοποίησης ή τετραεδροποίησης Delaunay για τη γένεση του γράφου, αφού μία από τις βασικές ιδιότητές της είναι η μεγιστοποίηση της ελάχιστης γωνίας κάθε τριγώνου ή τετραέδρου. Η επιλογή της ψηφιοποίησης του χωρίου κατά Delaunay μεγιστοποιεί την ευελιξία του γράφου, και άρα τη στιβαρότητα της μεθόδου.

1.6 Στόχος και Δομή της Εργασίας

Η διπλωματική αυτή εργασία εστιάζεται στην υλοποίηση της μεθόδου παραμόρφωσης πλεγμάτων με γράφους Delaunay, για 2D και 3D προβλήματα. Συγκεκριμένα, η μέθοδος γράφων Delaunay προγραμματίζεται σε C++, στο περιβάλλον OpenFOAM®. Η αποτελεσματικότητα της μεθόδου εξετάζεται σε μία πληθώρα 2D και 3D εφαρμογών ενώ γίνεται σύζευξη της μεθόδου γράφων Delaunay με τη συνεχή συζυγή μέθοδο, για τον ακριβή υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας.

Η εργασία αυτή αποτελείται από τα εξής κεφάλαια:

Κεφάλαιο 2: Περιγράφεται η δομή και οι βασικές ιδιότητες της τριγωνοποίησης και τετραεδροποίησης Delaunay, που αποτελούν το βασικό εργαλείο της μεθόδου παραμόρφωσης πλέγματος με γράφους Delaunay, και δίνονται συνοπτικά οι βασικοί αλγόριθμοι γένεσης της ψηφιοποίησης Delaunay.

Κεφάλαιο 3: Αναλύονται τα επί μέρους βήματα της μεθόδου γράφων Delaunay και περιγράφεται η διαδικασία που ακολουθείται για την παραμετροποίηση και τη μετατόπιση του πλέγματος.

Κεφάλαιο 4: Γίνεται εφαρμογή της μεθόδου σε 2D πλέγματα και ελέγχεται η στιβαρότητά της σε μεγάλες παραμορφώσεις της γεωμετρίας. Επιπλέον, προτείνονται βελτιώσεις της κλασικής μεθόδου γράφων Delaunay.

Κεφάλαιο 5: Η μέθοδος εφαρμόζεται σε 3D προβλήματα παραμόρφωσης πλεγμάτων, απλών και σύνθετων γεωμετριών, ενώ παράλληλα εξετάζεται η ταχύτητα και η στιβαρότητα της μεθόδου.

Κεφάλαιο 6: Αναπτύσσεται η ακριβής διατύπωση των παραγώγων ευαισθησίας της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, όπως αυτή προκύπτει με τη χρήση της παραμετροποίησης γράφων Delaunay, για την απλή περίπτωση όπου η αντικειμενική συνάρτηση περιγράφει τις απώλειες ολικής πίεσης. Επίσης, γίνεται επίδειξη της ακρίβειας των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας σε μία απλή περίπτωση εσωτερικής αεροδυναμικής στις 2 διαστάσεις.

Κεφάλαιο 2

Ψηφιδοποίηση Delaunay

Η ψηφιδοποίηση Delaunay αποτελεί την τριγωνοποίηση (στις 2 διαστάσεις) ή τετραεδροποίηση (στις 3 διαστάσεις) ενός συνόλου σημείων, έτσι ώστε τα τρίγωνα ή τετράπλευρα που δημιουργούνται να ικανοποιούν τις κατά Delaunay ιδιότητες των τριγώνων ή τετραπλεύρων, αντίστοιχα. Η ψηφιδοποίηση Delaunay και ο δυαδικός σχηματισμός της, που είναι η ψηφιδοποίηση Voronoi, είναι από τα πιο σημαντικά εργαλεία στην υπολογιστική γεωμετρία και χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές όπως η γένεση μη δομημένων πλεγμάτων για χρήση με επιλύτες πεπερασμένων όγκων και πεπερασμένων στοιχείων, ο σχεδιασμός τροχιάς στη ρομποτική, κ.α. Λόγω της πρακτικής τους σημασίας, οι ιδιότητές τους και οι αλγόριθμοι κατασκευής τους είναι θέματα που έχουν καλυφθεί εκτενώς από πληθώρα βιβλίων, όπως τα [21] και [22], καθώς και δημοσιεύσεων (π.χ. η [23]), ενώ οι πρώτες δημοσιεύσεις επάνω στο θέμα αυτό είναι οι [24], [25] από τον Voronoi (περί το 1907) και οι [26], [27] από τον Delaunay (περί το 1932).

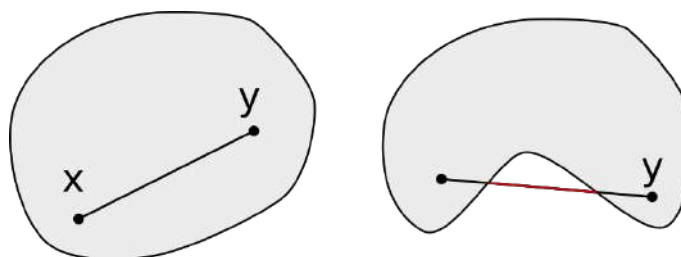
Στις δύο διαστάσεις, η τριγωνοποίηση Delaunay είναι ένα σύνολο από ακανόνιστα, μη επικαλυπτόμενα τρίγωνα τα οποία καλύπτουν πλήρως ένα 2Δ κυρτό κέλυφος (πολύπλευρο). Στις 3 διαστάσεις, η τετραεδροποίηση Delaunay είναι ένα σύνολο από ακανόνιστα, μη επικαλυπτόμενα τετράεδρα, τα οποία καλύπτουν πλήρως ένα 3Δ κυρτό κέλυφος (πολύεδρο). Η ψηφιδοποίηση αυτή αποτελεί το βασικό εργαλείο της μεθόδου παραμόρφωσης πλεγμάτων που παρουσιάζεται στη διπλωματική αυτή εργασία και οι βασικές ιδιότητες και αλγόριθμοι δημιουργίας της παρουσιάζονται στις επόμενες ενότητες.

2.1 Δομή της Ψηφιδοποίησης κατά Delaunay

Έστω ένα σύνολο \mathbb{P} που αποτελείται από n σημεία στις δύο ή στις τρεις διαστάσεις, η κατανομή των οποίων, εν γένει, είναι τυχαία. Η ψηφιδοποίηση των σημείων αυτών είναι ο σχηματισμός τριγώνων ή τετράεδρων (στις δύο και στις τρεις διαστάσεις, αντίστοιχα),

τα οποία σχηματίζονται από τα σημεία αυτά και καλύπτουν πλήρως το κυρτό κέλυφος του συνόλου αυτού.

Ορισμός 2.1.1. *Κυρτό Σύνολο (Convex Set) ονομάζεται το σύνολο στο Ευκλείδιο επίπεδο ή στον Ευκλείδιο χώρο, στο οποίο, για κάθε ζεύγος σημείων X και Y που ανήκουν στο σύνολο αυτό, όλα τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος XY που ενώνει το ζεύγος των σημείων βρίσκονται επίσης στο εσωτερικό του συνόλου. Στο σχήμα 2.1 δίνεται ένα παράδειγμα κυρτού και μη-κυρτού συνόλου στις 2 διαστάσεις.*

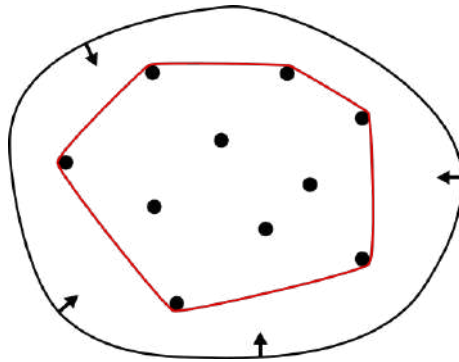


Σχήμα 2.1: Σχηματική αναπαράσταση ενός κυρτού συνόλου (αριστερά) κι ενός μη-κυρτού συνόλου (δεξιά), στις 2 διαστάσεις. Αριστερά: Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα δύο σημεία X και Y βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του συνόλου (με γκρι). Δεξιά: Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα δύο σημεία X και Y δεν βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του συνόλου. Ένα τμήμα του βρίσκεται έξω από το σύνολο (με ανοιχτό/κόκκινο χρώμα).

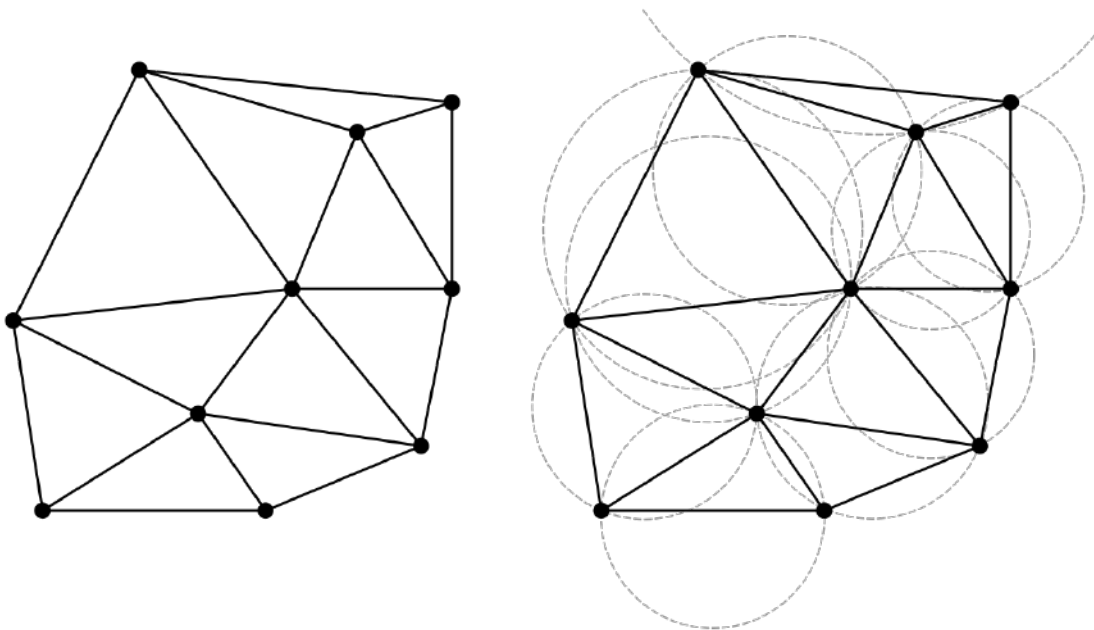
Ορισμός 2.1.2. *Κυρτό Χωρίο (Convex Hull) ενός συνόλου σημείων \mathbb{A} στο Ευκλείδιο επίπεδο ή στον Ευκλείδιο χώρο ονομάζεται το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει το σύνολο \mathbb{A} . Για παράδειγμα, όταν το σύνολο \mathbb{A} ανήκει στο επίπεδο και είναι φραγμένο, τότε μπορεί να απεικονιστεί ως ένα λάστιχο που περικλείει το \mathbb{A} .*

Αν τα σημεία του συνόλου \mathbb{P} ανήκουν στο επίπεδο, τότε η τριγωνοποίηση Delaunay $\mathbf{DT}_{\mathbb{P}}$ του συνόλου \mathbb{P} αποτελείται από ένα σύνολο τριγώνων, τα οποία σχηματίζονται από τα σημεία του \mathbb{P} με τον περιγεγραμμένο κύκλο οποιουδήποτε εξ αυτών να μην περιέχει οποιοδήποτε σημείο $p \in \mathbb{P}$ στο εσωτερικό του (σχήμα 2.3). Η τριγωνοποίηση αυτή καλύπτει πλήρως το κυρτό κέλυφος (πολύγωνο) που οριοθετείται από τα πιο απομακρυσμένα σημεία του συνόλου \mathbb{P} και διαιρεί το χωρίο αυτό σε τριγωνικά υποχωρία. Τα τρίγωνα αυτά, με εξαίρεση τα ακραία τρίγωνα, μοιράζονται κάθε ακμή με ένα γειτονικό τρίγωνο και κάθε κορυφή με ένα ή περισσότερα γειτονικά τρίγωνα.

Στις τρεις διαστάσεις, η τετραεδροποίηση Delaunay $\mathbf{DT}_{\mathbb{P}}$ του συνόλου \mathbb{P} των n σημείων στο χώρο αποτελεί ένα σύνολο τετραέδρων, τα οποία σχηματίζονται από τα σημεία του \mathbb{P} , και καθενός εκ των οποίων η περιγεγραμμένη σφαίρα δεν περιέχει κανένα άλλο σημείο $p \in \mathbb{P}$. Η τετραεδροποίηση αυτή καλύπτει το κυρτό 3Δ χωρίο (πολύεδρο) που οριοθετείται από τα πιο απομακρυσμένα σημεία του συνόλου \mathbb{P} . Τα τετράεδρα αυτά μοιράζονται κάθε έδρα τους με ένα γειτονικό τετράεδρο (εκτός από τις εξωτερικές έδρες



Σχήμα 2.2: Κυρτό κέλυφος ενός συνόλου πεπερασμένων σημείων στο επίπεδο. Το κυρτό κέλυφος (με ανοικτό/κόκκινο χρώμα) ενός συνόλου σημείων μπορεί να απεικονιστεί ως ένα (σφιχτό) λάστιχο που περικλείει τα σημεία αυτά. Είναι το ελάχιστο δυνατό κυρτό σύνολο το οποίο περικλείει τα σημεία αυτά, σε αντίθεση με κάθε άλλο κυρτό σύνολο το οποίο περικλείει τα σημεία αυτά αλλά δεν είναι το ελάχιστο (π.χ. το σύνολο με μαύρο χρώμα).



Σχήμα 2.3: Τριγωνοποίηση κατά Delaunay ενός συνόλου σημείων στο επίπεδο. Αριστερά: τα σχηματιζόμενα τρίγωνα Delaunay. Δεξιά: ικανοποίηση του κριτηρίου του περιγεγραμμένου κύκλου. (Gjacquepot, CC BY-SA 3.0, Wikimedia Commons, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php/?curid=30370476>)

των ακραίων τετραέδρων), κάθε ακμή τους με κάποια γειτονικά τετράεδρα και κάθε κορυφή τους με περισσότερα γειτονικά τετράεδρα.

Η ψηφιοποίηση Delaunay είναι επίσης ο γεωμετρικός δυαδικός σχηματισμός της ψηφιοποίησης Voronoi. Στις δύο διαστάσεις, το διάγραμμα Voronoi ενός συνόλου σημείων \mathbb{P} αποτελείται από τα κυρτά πολύγωνα που ορίζουν τις περιοχές των οποίων τα σημεία

βρίσκονται κοντινότερα στο σημείο $p \in \mathbb{P}$ που αντιστοιχεί στο πολύγωνο αυτό, απ' ότι σε κάθε άλλο σημείο p . Σε κάθε σημείο $p \in \mathbb{P}$ αντιστοιχεί ένα πολύγωνο, το οποίο σχηματίζεται από την τομή των ημιεπιπέδων που φράσσονται από τη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει το σημείο p με κάθε άλλο σημείο του συνόλου. Φυσικά, δεν συνεισφέρουν όλες οι μεσοκάθετες στο σχηματισμό του πολυγώνου κάθε σημείου, αλλά μόνο αυτές που αντιστοιχούν σε γειτονικά σημεία.

Με δεδομένη την τριγωνοποίηση Delaunay του συνόλου \mathbb{P} , το διάγραμμα Voronoi σχηματίζεται ενώνοντας τα κέντρα των περιγεγραμμένων κύκλων, έτσι ώστε κάθε ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα που θα προκύψουν να είναι επάνω στη μεσοκάθετη μιας ακμής ενός τριγώνου Delaunay. Σε κάθε ακμή του γράφου Delaunay αντιστοιχεί (μία-προς-μία) μία ακμή του διαγράμματος Voronoi, ενώ σε κάθε τρίγωνο Delaunay αντιστοιχεί ένας κόμβος του διαγράμματος Voronoi. Σε κάθε κόμβο Delaunay αντιστοιχεί μία περιοχή του επιπέδου στην οποία κάθε σημείο βρίσκεται κοντινότερα στον αντίστοιχο κόμβο απ' ότι σε κάθε άλλο κόμβο του διαγράμματος Delaunay. Ορίζονται, δηλαδή, οι περιοχές στις οποίες κυριαρχεί κάθε κόμβος Delaunay ως προς την απόσταση. Τα σημεία του επιπέδου που ισαπέχουν από τους δύο κοντινότερους κόμβους Delaunay ορίζουν τις ακμές του διαγράμματος Voronoi..

Σε πλήρη αντιστοιχία με τις 2 διαστάσεις, ο 3Δ γράφος Voronoi αποτελεί το σύνολο των πολυέδρων που σχηματίζονται από τα βαρύκεντρα των τετραέδρων της ψηφιοποίησης Delaunay, καθένα εκ των οποίων αντιστοιχεί σε μία κορυφή της ψηφιοποίησης Delaunay, και ορίζει τα υποχωρία στα οποία η πλησιέστερη κορυφή είναι αυτή στην οποία αντιστοιχεί.

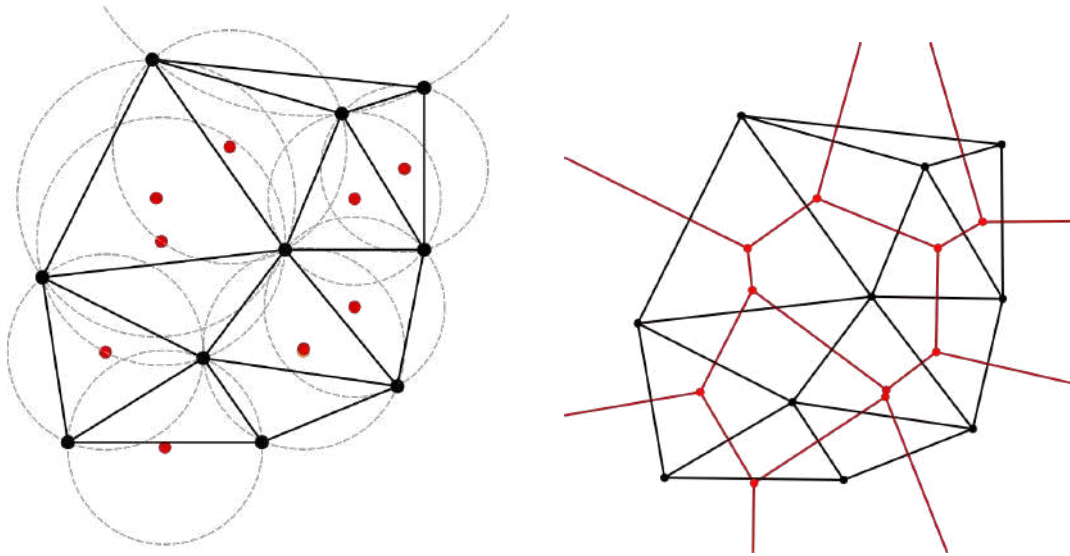
2.2 Ιδιότητες της Ψηφιοποίησης Delaunay

Η τριγωνοποίηση κατά Delaunay στις 2 διαστάσεις ικανοποιεί ορισμένες ιδιότητες, κάποιες από τις οποίες επεκτείνονται και στις 3 διαστάσεις. Μερικές από τις πιο σημαντικές είναι:

Κριτήριο του περιγεγραμμένου κύκλου (The Circumcircle Criterion):

Το βασικό χαρακτηριστικό των τριγώνων που προκύπτουν από την τριγωνοποίηση Delaunay ενός συνόλου σημείων \mathbb{P} είναι ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος κάθε τριγώνου δεν περιέχει κανένα σημείο $p \in \mathbb{P}$ στο εσωτερικό του. Η συνθήκη αυτή είναι ικανή και αναγκαία για να χαρακτηριστεί η τριγωνοποίηση ως Delaunay. Αν ένα σημείο περιέχεται στο εσωτερικό ενός περιγεγραμμένου κύκλου, τότε η τριγωνοποίηση διορθώνεται με αλλαγή της διαγωνίου (diagonal swapping), όπου προκύπτουν δύο νέα τρίγωνα τα οποία αυτή τη φορά ικανοποιούν το κριτήριο του περιγεγραμμένου κύκλου (σχήμα 2.5).

Μοναδικότητα (Uniqueness): Η τριγωνοποίηση Delaunay είναι μοναδική για κάθε σύνολο σημείων το οποίο δεν περιέχει κανένα υποσύνολο τεσσάρων σημείων τα οποία να ανήκουν επάνω στον ίδιο κύκλο. Αν στο σύνολο \mathbb{P} υπάρχει



(α') Βήμα 1: Εντοπισμός των κέντρων των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων De -γεγραμμένων κύκλων μέσω των μεσοκάθετων των πλευρών κάθε τριγώνου. Με κόκκινο: το διάγραμμα Voronoi. Με μαύρο: η τριγωνοποίηση Delaunay.

Σχήμα 2.4: Σχηματισμός του διαγράμματος Voronoi (δεξιά, με κόκκινο χρώμα) από μία υπάρχουσα τριγωνοποίηση Delaunay (με μαύρο χρώμα).

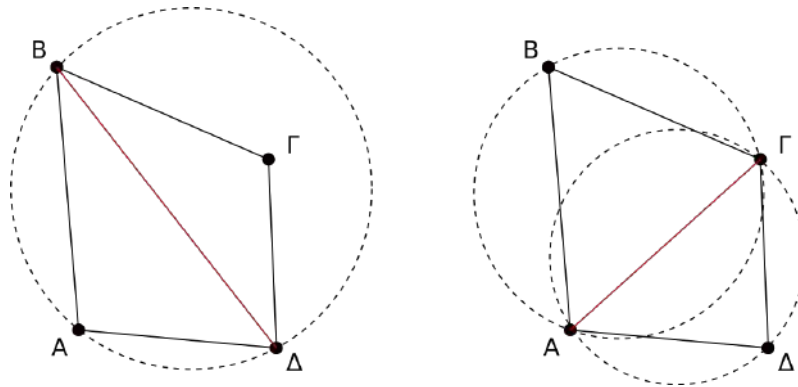
ένα ή περισσότερα υποσύνολα τεσσάρων ή περισσότερων σημείων, τα οποία ανήκουν στον ίδιο κύκλο, τότε η τριγωνοποίηση Delaunay δεν είναι μοναδική, αλλά υπάρχουν δύο ή περισσότερες τριγωνοποιήσεις Delaunay, οι οποίες είναι ισοδύναμες (σχήμα 2.6). Στην περίπτωση αυτή, τα τρίγωνα που σχηματίζονται από τα σημεία των υποσυνόλων αυτών μοιράζονται τον ίδιο περιγεγραμμένο κύκλο (circumcircle).

Στις τρεις διαστάσεις, η ύπαρξη ενός ή περισσότερων υποσυνόλων πέντε ή περισσότερων σημείων τα οποία ανήκουν στην επιφάνεια ίδιας σφαίρας (circumsphere) οδηγεί σε διαφορετικές, αλλά ισοδύναμες ψηφιοποιήσεις των σημείων αυτών, οι οποίες ικανοποιούν τα κριτήρια της ψηφιοποίησης Delaunay. Όμως, σε αντίθεση με την τριγωνοποίηση Delaunay στις δύο διαστάσεις, η μοναδικότητα της τετραεδροποίησης Delaunay ενός συνόλου τυχαία κατανεμημένων σημείων στο χώρο και με κανένα υποσύνολο πέντε ή περισσότερων από τα σημεία αυτά να βρίσκεται επάνω στον ίδιο περιγεγραμμένο κύκλο δεν είναι εγγυημένη.

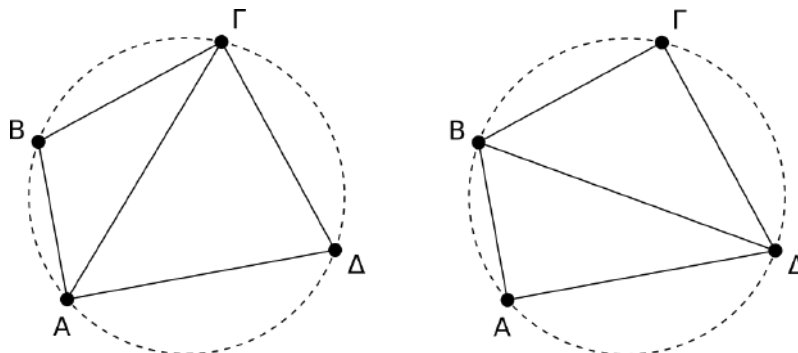
Η ιδιότητα των ίσων γωνιών (Equiangularity Property): Η τριγωνοποίηση Delaunay μεγιστοποιεί την ελάχιστη γωνία κάθε τριγώνου που μπορεί να προκύψει από τους διάφορους πιθανούς συνδυασμούς τριγωνοποιήσεων των σημείων του συνόλου \mathbb{P} . Για το λόγο αυτό, η τριγωνοποίηση Delaunay ονομάζεται και τριγωνοποίηση MinMax. Με λίγα λόγια, η τριγωνοποίηση αυτή δημιουργεί τρίγωνα τα οποία είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στα «ιδανικά» τρίγωνα, δηλα-

δή τα ισόπλευρα. Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική για την εφαρμογή της μεθόδου παραμόρφωσης πλεγμάτων με χρήση γράφων Delaunay, που παρουσιάζεται στη διπλωματική αυτή εργασία, γιατί αυξάνει την ευελιξία του γράφου κατά την παραμόρφωση της γεωμετρίας.

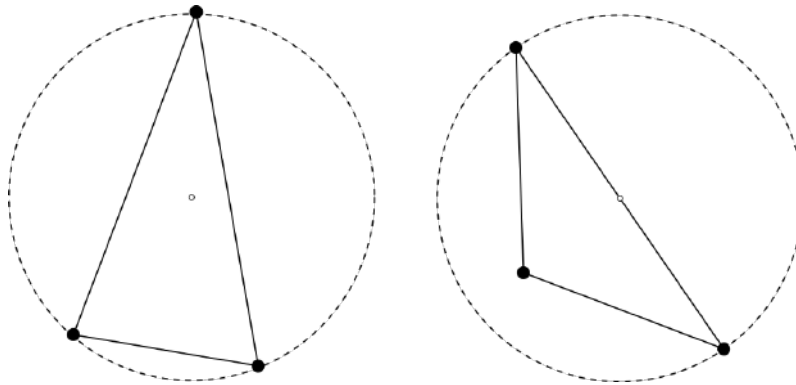
Η ιδιότητα του ελάχιστου κύκλου που εμπεριέχει το τρίγωνο (Minimum Containment Circle): Η τριγωνοποίηση Delaunay ελαχιστοποιεί τον ελάχιστο κύκλο που περιέχει τα τρίγωνα, για ολόκληρη την τριγωνοποίηση. Ο ελάχιστος κύκλος που περιέχει ένα τρίγωνο δίνεται στο σχήμα 2.7. Για οξυγώνια και ορθογώνια τρίγωνα, ο κύκλος αυτός ταυτίζεται με τον περιγεγραμμένο κύκλο. Για αμβλυγώνια τρίγωνα, ο ελάχιστος κύκλος είναι αυτός με διάμετρο τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ενώ η κορυφή που αντιστοιχεί στην αμβλεία γωνία βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου.



Σχήμα 2.5: Αλλαγή της διαγωνίου (*diagonal swapping*) ενός τετραπλεύρου που σχηματίζεται από δύο τρίγωνα, για την ικανοποίηση του κριτηρίου του περιγεγραμμένου κύκλου από τα νέα τρίγωνα που θα προκύψουν.



Σχήμα 2.6: Μοναδικότητα της τριγωνοποίησης Delaunay. Τέσσερα ή περισσότερα σημεία στο επίπεδο που ανήκουν στον ίδιο περιγεγραμμένο κύκλο οδηγούν σε τριγωνοποίηση που δεν είναι μοναδική. Οι δύο διαφορετικές τριγωνοποιήσεις είναι ισοδύναμες, αφού ικανοποιούν το κριτήριο του περιγεγραμμένου κύκλου.



Σχήμα 2.7: Η ιδιότητα του ελάχιστου κύκλου. Ο ελάχιστος κύκλος που περιέχει ένα τρίγωνο, στην τριγωνοποίηση Delaunay ελαχιστοποιείται. Όταν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, τότε ο ελάχιστος κύκλος ταυτίζεται με τον περιγεγραμμένο κύκλο (αριστερά). Όταν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο, ο ελάχιστος κύκλος είναι αυτός με διάμετρο τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου (δεξιά).

2.3 Γένεση της Ψηφιοποίησης Delaunay

Λόγω της μεγάλης πρακτικής χρησιμότητας της ψηφιοποίησης Delaunay, έχει εμφανιστεί στη βιβλιογραφία ένας μεγάλος αριθμός διαφορετικών αλγορίθμων, οι οποίοι πραγματοποιούν την τριγωνοποίηση ή τετραεδροποίηση αυτή για ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο ή στο χώρο. Οι βασικές κατηγορίες των αλγορίθμων τριγωνοποίησης Delaunay στις 2 διαστάσεις αναλύονται στο κεφάλαιο [2.3.1](#).

Για τη γένεση του γράφου Delaunay της μεθόδου που προγραμματίστηκε για τη διπλωματική αυτή εργασία, χρησιμοποιήθηκε η βιβλιοθήκη υπολογιστικής γεωμετρίας CGAL (Computational Geometry Algorithms Library). Η βιβλιοθήκη αυτή παράγει την τριγωνοποίηση και τετραεδροποίηση ενός συνόλου σημείων στις 2 και στις 3 διαστάσεις, αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο των Green-Sibson [\[28\]](#). Ο αλγόριθμος αυτός για τις 2 διαστάσεις παρουσιάζεται στο κεφάλαιο [2.3.2](#).

2.3.1 Κατηγορίες Αλγορίθμων Τριγωνοποίησης Delaunay στις 2 Διαστάσεις

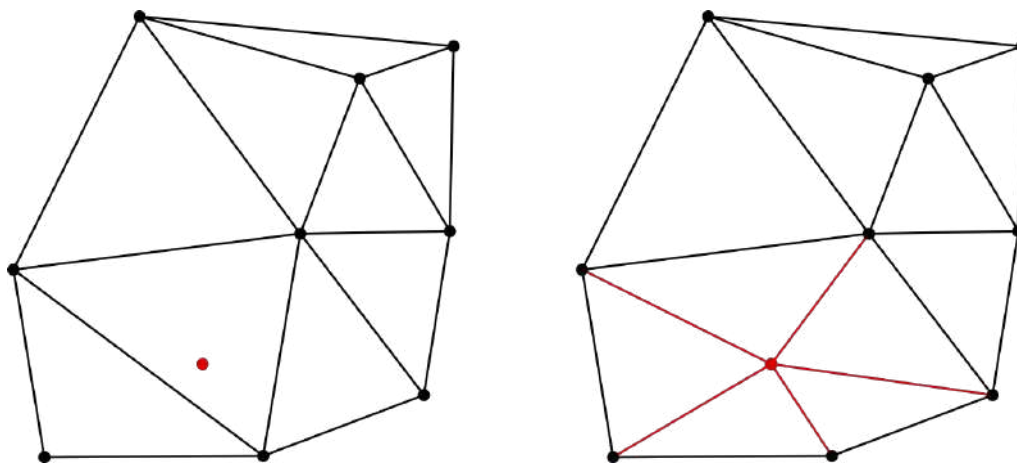
Οι αλγόριθμοι τριγωνοποίησης και τετραεδροποίησης Delaunay ενός συνόλου σημείων \mathbb{P} μπορούν να ταξινομηθούν σε διάφορες κατηγορίες, ανάλογα με την πορεία που ακολουθούν για την κατασκευή της ψηφιοποίησης. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι βασικές κατηγορίες των αλγορίθμων της 2D τριγωνοποίησης Delaunay, οι οποίες, εν γένει, επεκτείνονται και στους αλγόριθμους της 3D ψηφιοποίησης.

Μία μεγάλη κατηγορία είναι οι *Αλγόριθμοι Βηματικής Εισαγωγής* (Incremental Insertion Algorithms). Το βασικό χαρακτηριστικό των αλγορίθμων της κατηγορίας

2.3. Γένεση της Ψηφιοποίησης Delaunay

αυτής είναι ότι τα προς τριγωνοποίηση σημεία του συνόλου \mathbb{P} εισάγονται στον γράφο ένα-προς-ένα, ανανεώνοντας κάθε φορά την τριγωνοποίηση, έτσι ώστε να ικανοποιεί τις ιδιότητες της τριγωνοποίησης Delaunay. Οι αλγόριθμοι αυτοί προϋποθέτουν την ύπαρξη μιας αρχικής τριγωνοποίησης Delaunay η οποία περιέχει στο εσωτερικό της τα σημεία που πρόκειται να εισαχθούν. Επιπλέον, απαιτείται η εύρεση του τριγώνου Delaunay στο οποίο ανήκει το σημείο το οποίο εισάγεται στο εκάστοτε βήμα.

Οι πιο βασικοί αλγόριθμοι της κατηγορίας αυτής είναι του Green-Sibson [28], του Watson [29] και του Bowyer [30]. Ο τρόπος με τον οποίο λειτουργούν αυτοί οι αλγόριθμοι είναι παρόμοιος. Για την εισαγωγή ενός σημείου σε μία υπάρχουσα τριγωνοποίηση, αρχικά εντοπίζεται το τρίγωνο Delaunay στο οποίο ανήκει. Με την εισαγωγή του νέου σημείου, το τρίγωνο αυτό (του οποίου ο περιγεγραμμένος κύκλος προφανώς θα περιέχει στο εσωτερικό του το νέο σημείο) παύει να είναι Delaunay. Το ίδιο μπορεί να συμβεί και σε κάποια από τα γειτονικά τρίγωνα. Μετά την εισαγωγή του σημείου αυτού, τα νέα τρίγωνα που σχηματίζονται, καθώς και τα γειτονικά τους, ελέγχονται ως προς την ικανοποίηση του κριτηρίου του περιγεγραμμένου κύκλου. Αν κάποιο από τα τρίγωνα που ελέγχονται δεν ικανοποιεί το κριτήριο αυτό, τότε η μη-έγκυρη ακμή του τριγώνου αυτού διαγράφεται και αντικαθίσταται με την άλλη διαγώνιο του τετραπλεύρου που θα σχηματιστεί μετά από τη διαγραφή αυτή (diagonal swapping). Ο έλεγχος αυτός συνεχίζεται μέχρις ότου όλα τα τρίγωνα της τριγωνοποίησης Delaunay να είναι έγκυρα, δηλαδή να ικανοποιούν το κριτήριο του περιγεγραμμένου κύκλου (σχήμα 2.8). Μετά την ολοκλήρωση της διόρθωσης αυτής, η διαδικασία συνεχίζεται με την εισαγωγή του επόμενου σημείου.



Σχήμα 2.8: Αλγόριθμος Βηματικής Εισαγωγής. Το νέο σημείο (με κόκκινο χρώμα) εισάγεται σε μία υπάρχουσα τριγωνοποίηση, η οποία ανανεώνεται ώστε να ικανοποιηθούν τα κριτήρια της τριγωνοποίησης Delaunay.

Μία άλλη κατηγορία τεχνικών τριγωνοποίησης κατά Delaunay είναι οι Αλγόριθμοι Ολικής Εναλλαγής Ακμών (Global Edge Swapping). Ο πιο βασικός αλγόριθμος της κατηγορίας αυτής είναι του Lawson [31].

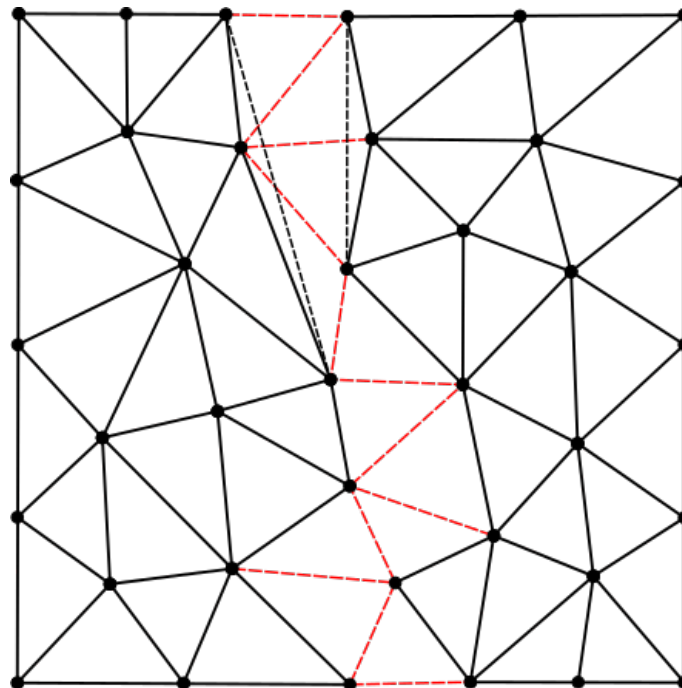
Ο αλγόριθμος αυτός δέχεται ως είσοδο μία υπάρχουσα, τυχαία τριγωνοποίηση, και την

τροποποιεί έτσι ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο της τριγωνοποίησης Delaunay, δηλαδή τη μη-ύπαρξη σημείου στο εσωτερικό των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων. Συγκεκριμένα, σαρώνονται μία-προς-μία οι εσωτερικές ακμές του γράφου και θεωρούνται ως διαγώνιοι των τετραπλεύρων που σχηματίζονται από τα τρίγωνα στα οποία ανήκει η ακμή αυτή. Στη συνέχεια, ελέγχεται αν το κάθε γειτονικό τρίγωνο ικανοποιεί το κριτήριο του περιγεγραμμένου κύκλου. Αν το κριτήριο αυτό δεν ικανοποιείται, τότε η ακμή αυτή διαγράφεται και εισάγεται η άλλη διαγώνιος του τετραπλεύρου ως ακμή του γράφου. Τότε, τα δύο νέα τρίγωνα που σχηματίζονται θα είναι Delaunay (βλ. ενότητα 2.2).

Μία τρίτη κατηγορία είναι οι *Αλγόριθμοι τύπου Διαίρει-και-Κυρίευε* (Divide-and-Conquer Algorithms), όπως ο [23]. Οι αλγόριθμοι αυτοί χωρίζουν το σύνολο των σημείων που πρόκειται να τριγωνοποιηθούν σε υποομάδες ίσου πλήθους και πραγματοποιούν την τριγωνοποίηση Delaunay χωριστά σε κάθε υποομάδα. Στη συνέχεια, οι επιμέρους τριγωνοποιήσεις ενώνονται μεταξύ τους, έτσι ώστε τα επιπλέον τρίγωνα που θα προκύψουν από την ένωση τους να είναι Delaunay (σχήμα 2.9).

Οι αλγόριθμοι των παραπάνω κατηγοριών διαφέρουν, εν γένει, ως προς τον υπολογιστικό χρόνο που απαιτούν. Στο επίπεδο, ο ελάχιστος υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται για την τριγωνοποίηση n σημείων είναι ανάλογος του $O(n \log n)$ [32]. Κάποιοι αλγόριθμοι τύπου Ολικής Εναλλαγής Ακμών [33] και Διαίρει-και-Κυρίευε [23] μπορούν να πιάσουν αυτήν την τάξη μεγέθους υπολογιστικού χρόνου. Όμως, οι κώδικες αυτών των τεχνικών παραμένουν αρκετά περίπλοκοι, παρά τη σημαντική πρόοδο που έχει σημειωθεί προς την απλοποίησή τους. Για το λόγο αυτό, σε πολλές εφαρμογές προτιμούνται οι αλγόριθμοι που εισάγουν ένα σημείο κάθε φορά και ανανεώνουν το γράφο. Οι αλγόριθμοι Βηματικής Εισαγωγής μπορεί να φτάσουν σε υπολογιστικό χρόνο της τάξης του $O(n^2)$, όμως, αν τα σημεία εισάγονται με τυχαία σειρά, το κόστος μπορεί να μειωθεί σε $O(n \log n)$.

Άλλοι αλγόριθμοι τριγωνοποίησης Delaunay είναι ο αλγόριθμος Tanemura-Merriam ([34], [35]) και η τριγωνοποίηση MinMax ενώ υπάρχουν και διάφορες ευριστικές (heuristic) μέθοδοι τριγωνοποίησης, οι οποίες όμως προσεγγίζουν την τριγωνοποίηση Delaunay.



Σχήμα 2.9: Αλγόριθμος Διαιρεί-και-Κυρίευε. Η τριγωνοποίηση πραγματοποιείται ξεχωριστά σε κάθε υποσύνολο των σημείων (εδώ σε δύο υποσύνολα, δεξιά και αριστερά, γραμμές με μαύρο χρώμα). Στη συνέχεια, οι ξεχωριστές τριγωνοποιήσεις ενώνονται (διακεκομμένες γραμμές με ανοιχτό/κόκκινο χρώμα).

2.3.2 Ο Αλγόριθμος Green-Sibson

Ο αλγόριθμος βηματικής εισαγωγής Green-Sibson δημοσιεύτηκε το 1978 [28], για τη δημιουργία του δυαδικού γράφου Voronoi. Όμως, η εφαρμογή του, όπως θα περιγραφεί στη συνέχεια, βασίζεται στον ψευδοκώδικα που αναπτύχθηκε από τον Guibas [23], [32] (περί το 1985).

Στο λογισμικό που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της διπλωματικής αυτής εργασίας για την υλοποίηση της μεθόδου παραμόρφωσης πλέγματος με γράφους Delaunay, η γένεση της ψηφιοποίησης Delaunay γίνεται με τη χρήση των αντίστοιχων αλγορίθμων της βιβλιοθήκης υπολογιστικής γεωμετρίας CGAL (Computational Geometry Algorithms Library), η οποία εφαρμόζει τον αλγόριθμο των Green-Sibson για την παραγωγή της τριγωνοποίησης και της τετραεδροποίησης.

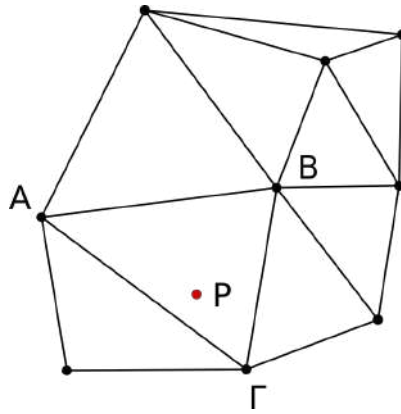
Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζεται ο αλγόριθμος Green-Sibson για τις 2 διαστάσεις. Ο αλγόριθμος αυτός υπολογίζει την τριγωνοποίηση Delaunay \mathbf{DT}_P ενός συνόλου n σημείων \mathbb{P} στο επίπεδο, ενώ επεκτείνεται και στην ψηφιοποίηση Delaunay ενός συνόλου σημείων στο χώρο.

Η ιδέα του αλγορίθμου αυτού είναι η εξής:

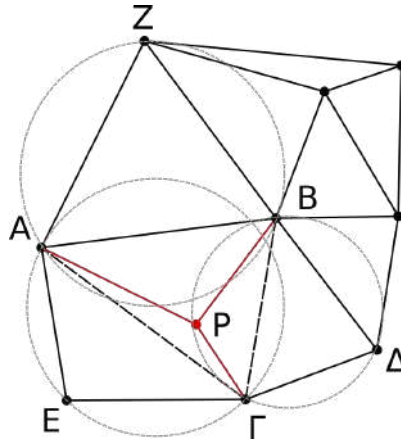
Έστω ότι έχουν ήδη εισαχθεί j σημεία του συνόλου \mathbb{P} , τα οποία σχηματίζουν την τριγωνοποίηση Delaunay \mathbf{DT}_j και πρόκειται να εισαχθεί στην υπάρχουσα τριγωνοποίηση το $(j + 1)$ -στό σημείο $P \in \mathbb{P}$, το οποίο είναι ένα οποιοδήποτε από τα προς τριγωνοποίηση σημεία που δεν έχει εισαχθεί προηγουμένως στην τριγωνοποίηση ($P \notin \mathbf{DT}_j$). Έστω, επίσης, ότι είναι γνωστό το τρίγωνο $AB\Gamma$ (της υπάρχουσας τριγωνοποίησης Delaunay) το οποίο περιέχει το σημείο P (σχήμα 2.10α'). Η ανανέωση της τριγωνοποίησης μετά την εισαγωγή του νέου σημείου είναι άμεση: το σημείο P συνδέεται με τις τρεις κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$, και κάθε ακμή $e = \{AB, B\Gamma, \Gamma A\}$ του τριγώνου ελέγχεται ως προς το αν είναι έγκυρη ακμή Delaunay. Για τον έλεγχο αυτό, αρκεί να ελεγχθεί αν το σημείο P βρίσκεται στο εσωτερικό του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου eP' που βρίσκεται στην άλλη πλευρά της ακμής e (σχήμα 2.10β'). Αν όχι, τότε η ακμή e διατηρείται. Αλλιώς, η ακμή e διαγράφεται και το σημείο P ενώνεται με την τρίτη κορυφή του τριγώνου eP' . Δηλαδή, εφαρμόζεται η αλλαγή διαγωνίου (diagonal swapping) ώστε να προκύψουν δύο νέα τρίγωνα, τα οποία θα ικανοποιούν το κριτήριο του περιγεγραμμένου κύκλου (βλ. ενότητα 2.2). Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι όλες οι (γειτονικές) ακμές να ικανοποιούν τα κριτήρια της τριγωνοποίησης Delaunay.

Στην ειδική περίπτωση που το νέο σημείο P βρίσκεται επάνω σε μία ακμή e του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε η ακμή αυτή διαγράφεται και το σημείο P ενώνεται με τις τέσσερις κορυφές του τετραπλεύρου Π που προκύπτει, σχηματίζοντας έτσι τέσσερα νέα τρίγωνα. Κάθε ακμή e του τετραπλεύρου Π ελέγχεται ως προς το αν είναι έγκυρη ακμή Delaunay και, αν δεν είναι, τότε διορθώνεται όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, με αλλαγή διαγωνίου.

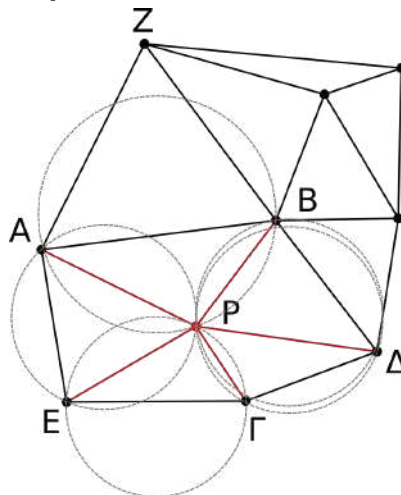
Αν το νέο σημείο βρίσκεται έξω από το κυρτό κέλυφος της υπάρχουσας τριγωνοπο-



(α') Εισαγωγή του νέου σημείου P (με ανοικτό/κόκκινο χρώμα) στην τριγωνοποίηση και εντοπισμός του τριγώνου $AB\Gamma$ στο εσωτερικό του οποίου βρίσκεται.

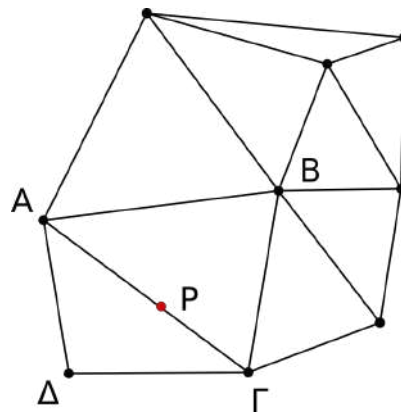


(β') Σχηματίζονται τα (προσωρινά) τρίγωνα ABP , $B\Gamma P$ και ΓAP . Ελέγχονται τα γειτονικά τρίγωνα ως προς το αν ικανοποιούν τη συνθήκη του περιγεγραμμένου κύκλου. Εδώ, τα τρίγωνα $A\Gamma E$ και $B\Delta\Gamma$ δεν είναι Delaunay.

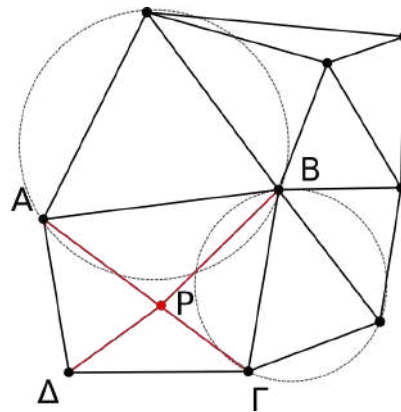


(γ') Τα τρίγωνα των οποίων ο περιγεγραμμένος κύκλος περιέχει το νέο σημείο αντικαθίστανται με τη μέθοδο αλλαγής διαγωνίου (*diagonal swapping*). Σβήνονται οι ακμές $A\Gamma$ και $B\Gamma$, και αντικαθίστανται από τις ακμές EP και ΔP , αντίστοιχα. Πλέον, όλα τα τρίγωνα είναι Delaunay.

Σχήμα 2.10: Ο αλγόριθμος βηματικής εισαγωγής Green-Sibson.



(α') Το νέο σημείο P (με ανοικτό/κόκκινο χρώμα) βρίσκεται επάνω στην ακμή $A\Gamma$ της υπάρχουσας τριγωνοποίησης.



(β') Σχηματίζονται τα (προσωρινά) τρίγωνα ABP , $B\Gamma P$, $\Gamma\Delta P$ και ΔAP . Ελέγχονται τα γειτονικά τρίγωνα ως προς το αν ικανοποιούν τη συνθήκη του περιγεγραμμένου κύκλου. Εδώ, όλα τα τρίγωνα είναι Delaunay.

Σχήμα 2.11: Ειδική περίπτωση του αλγόριθμου βηματικής εισαγωγής Green-Sibson.

ίησης, τότε απαιτούνται προσαρμογές στον παραπάνω αλγόριθμο. Για να αποφευχθεί αυτή η ειδική περίπτωση, προστίθενται στο σύνολο \mathbb{P} τρία εικονικά σημεία, $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, τα οποία σχηματίζουν τρίγωνο που περιλαμβάνει στο εσωτερικό του όλα τα σημεία του αρχικού συνόλου \mathbb{P} . Έτσι, ξεκινώντας την τριγωνοποίηση έχοντας ως αρχικό τρίγωνο το $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ (τριγωνοποίηση \mathbf{DT}_0), κάθε σημείο που εισάγεται θα βρίσκεται πάντα στο εσωτερικό της υπάρχουσας τριγωνοποίησης.

Ο αλγόριθμος της παραπάνω διαδικασίας έχει ως εξής:

Αλγόριθμος 1 Ο αλγόριθμος βηματικής εισαγωγής Green-Sibson

- 1: \langle Αρχικοποίηση της τριγωνοποίησης με το τρίγωνο $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ \rangle ;
 - 2: **Για** ($k = 1, k \leq n, k++$)
 - 3: \langle Επιλογή ενός (τυχαίου) σημείου $P \in \mathbb{P}$ το οποίο δεν έχει επιλεγεί προηγουμένως \rangle ;
 - 4: \langle Αναζήτηση του τριγώνου $AB\Gamma$ που περιέχει το P \rangle ;
 - 5: \langle Αντικατάσταση του $AB\Gamma$ από τα τρίγωνα $PAB, PB\Gamma, P\Gamma A$ \rangle ;
 - 6: $X \leftarrow A$;
 - 7: **Αρχή επανάληψης**
 - 8: \langle Έστω Y η τρίτη κορυφή του τριγώνου στα δεξιά του PX , στην υπάρχουσα τριγωνοποίηση \rangle ;
 - 9: συνέχισε \leftarrow αληθές;
 - 10: **Αν** (X και Y δεν είναι και τα δύο infinite) **τότε**
 - 11: \langle Αναζήτηση του σημείου $Z \neq P$ τέτοιου ώστε το ZUQ να ανήκει στην υπάρχουσα τριγωνοποίηση \rangle ;
 - 12: **Αν** (το P περιέχεται στον περιγεγραμμένο κύκλου του XYZ) **τότε**
 - 13: \langle Αλλαγή διαγωνίου των τριγώνων PXY και ZYX , έτσι ώστε να προκύψουν τα τρίγωνα PXZ και PZY \rangle ;
 - 14: συνέχισε \leftarrow ψευδές;
 - 15: **Τέλος**
 - 16: **Τέλος**
 - 17: **Αν** συνέχισε **τότε** $X \leftarrow Y$;
 - 18: **Μέχρις Ότου** ($X = A$ και συνέχισε)
 - 19: **Τέλος**
-

2.4 Αναζήτηση Σημείου στο Εσωτερικό της Τριγωνοποίησης Delaunay

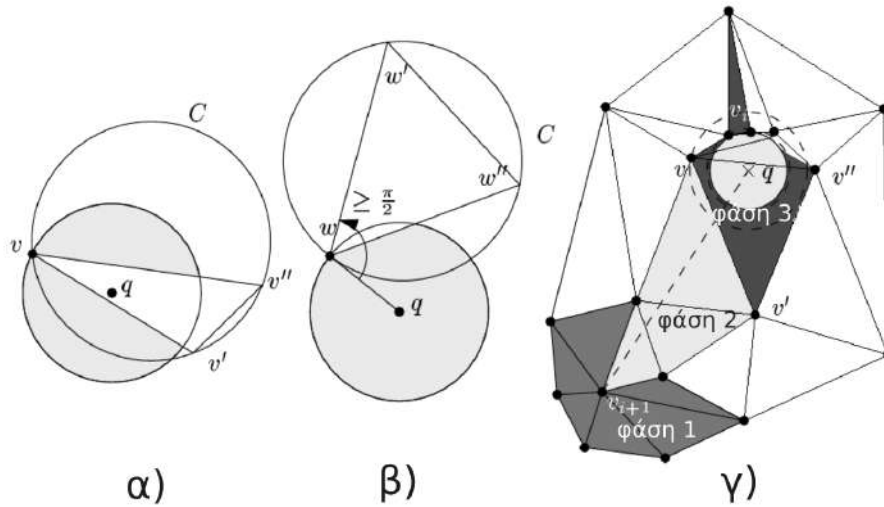
Ένα πολύ βασικό βήμα της γένεσης της τριγωνοποίησης Delaunay με χρήση των αλγορίθμων βηματικής εισαγωγής, αλλά και κατά τη χρήση του γράφου αυτού σε διάφορες εφαρμογές (όπως η μέθοδος παραμόρφωσης πλεγμάτων που παρουσιάζεται στη διπλωματική αυτή εργασία) είναι ο γρήγορος εντοπισμός του στοιχείου Delaunay που περιέχει το τυχαίο σημείο q . Μία μεγάλη κατηγορία αλγορίθμων αναζήτησης είναι αυτοί που βασίζονται στα δένδρα αναζήτησης (search trees). Τα δένδρα αυτά είναι δομές δεδομένων που ιεραρχούν ένα σύνολο στοιχείων με βάση κανόνες και διευκολύνουν την αναζήτηση των στοιχείων της δομής αυτής.

Μία γρήγορη μέθοδος εντοπισμού του τριγώνου στο οποίο ανήκει ένα σημείο είναι η ιεραρχική αναζήτηση [36], όπου η αναζήτηση πραγματοποιείται σε διαδοχικά επίπεδα τριγωνοποιήσεων, καθένα από τα οποία περιλαμβάνει ένα υποσύνολο της τριγωνοποίησης του αμέσως επόμενου επιπέδου. Συγκεκριμένα, η δομή της τριγωνοποίησης αποτελείται από ένα σύνολο $k + 1$ τριγωνοποιήσεων \mathbf{DT}_i , όπου το χαμηλότερο επίπεδο \mathbf{DT}_0 ταυτίζεται με την τελική τριγωνοποίηση των σημείων του συνόλου \mathbb{P} ενώ κάθε υψηλότερο επίπεδο αποτελεί την τριγωνοποίηση ενός υποσυνόλου των σημείων του προηγούμενου επιπέδου, έτσι ώστε:

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_0 \supseteq \mathbb{P}_1 \supseteq \mathbb{P}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathbb{P}_{k-1} \supseteq \mathbb{P}_k \quad (2.1)$$

Η αναζήτηση ενός σημείου q γίνεται με τη διαδοχική προέλαση κάθε επιπέδου τριγωνοποίησης i για τον εντοπισμό της κορυφής $v_i = \{v_i \in P_i, v_i \notin P_{i+1}\}$ του επιπέδου i που βρίσκεται κοντινότερα στο σημείο q , μέχρι το επίπεδο $i = 0$, στο οποίο και θα εντοπιστεί το τρίγωνο το οποίο περιέχει το q . Κάθε σημείο $p \in P$ τέτοιο, ώστε $p \in P_i \subseteq \dots \subseteq P_0, p \notin P_{i+1}$ αποτελεί κορυφή του επιπέδου i ενώ για κάθε τέτοιο σημείο αποθηκεύεται στη δομή δεδομένων δείκτης προς ένα τρίγωνο κάθε τριγωνοποίησης $\mathbf{DT}_j, 0 \leq j \leq i$ του οποίου είναι κορυφή. Επίσης, κάθε τρίγωνο της \mathbf{DT}_i διαθέτει δείκτη προς τις κορυφές του καθώς και προς τους γείτονές του.

Για τον εντοπισμό ενός σημείου q , ο αλγόριθμος αναζήτησης ξεκινά από μία γνωστή (συνήθως τυχαία) κορυφή $v_{k+1} \in P_k$ του υψηλότερου επιπέδου k , στο οποίο αναζητάται η κορυφή v_k της τριγωνοποίησης \mathbf{DT}_k που βρίσκεται πλησιέστερα στο q . Στη συνέχεια, εφόσον η κορυφή v_k ανήκει και στην τριγωνοποίηση του επιπέδου $k - 1$, όμοια αναζήτηση γίνεται για το αμέσως επόμενο επίπεδο $k - 1$, ξεκινώντας από την v_k και ψάχνοντας την κορυφή $v_{k-1} \in P_{k-1}$ πλησιέστερα στο q . Η αναζήτηση αυτή συνεχίζεται για κάθε επόμενο επίπεδο i , μέχρι το τελευταίο επίπεδο $i = 0$, το οποίο ταυτίζεται με την τελική τριγωνοποίηση \mathbf{DT}_P . Στο τελευταίο επίπεδο, έχοντας την πλησιέστερη στο σημείο q κορυφή, το στοιχείο Delaunay που περιέχει το q εντοπίζεται εύκολα.



Σχήμα 2.12: Αναζήτηση της κορυφής v_i που βρίσκεται πλησιέστερα στο σημείο q . (α) Έλεγχος των κορυφών του τριγώνου $uv''v'$ που περιέχει το q . (β) Έλεγχος της απόστασης των κορυφών των γειονικών τριγώνων από το q . (γ) Οι τρεις φάσεις της αναζήτησης της κορυφής v_i (Dewillers [36]).

Σε κάθε επίπεδο i , η αναζήτηση της πλησιέστερης κορυφής v_i πραγματοποιείται σε τρεις φάσεις (σχήμα 2.12):

Πρώτη φάση: από την κορυφή v_{i+1} , γνωρίζουμε τα τρίγωνα της \mathbf{DT}_i που έχουν ως κορυφή την v_{i+1} . Από τα τρίγωνα αυτά, αναζητάται εκείνο που περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα (ή ένα μέρος του) $v_{i+1}q$.

Δεύτερη φάση: όλα τα τρίγωνα της \mathbf{DT}_i που τέμνονται από το ευθύγραμμο τμήμα $v_{i+1}q$ ελέγχονται, μέχρι να βρεθεί το τρίγωνο T_i που περιέχει το q .

Τρίτη φάση: Ελέγχονται τα γειτονικά τρίγωνα του T_i μέχρι να εντοπιστεί η κοντινότερη στο σημείο q κορυφή v_i . Αν $uv''v'$ είναι οι τρεις κορυφές του τριγώνου T_i και v είναι η κορυφή του τριγώνου πλησιέστερα στο q , τότε η v_i είτε είναι η v ή βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου με κέντρο το q , που διέρχεται από το v . Επομένως, η αναζήτηση του v_i πρέπει να γίνει μόνο στην κατεύθυνση των γειτόνων του T_i στις πλευρές uv' και uv'' ενώ το γειτονικό τρίγωνο της πλευράς $v''v'$ μπορεί να αγνοηθεί. Για κάθε τρίγωνο το οποίο ελέγχεται, υπολογίζεται η απόσταση του q από τη νέα κορυφή και αποθηκεύεται η πλησιέστερη κορυφή. Για ένα τέτοιο τρίγωνο $ww'w''$ στο οποίο η κορυφή w είναι η πλησιέστερη στο q μεταξύ των $ww'w''$, το γειτονικό τρίγωνο μέσω της πλευράς ww' (αντίστοιχα ww'') ελέγχεται μόνο αν η γωνία $qw'w$ είναι μικρότερη από $\pi/2$.

Για την πραγματοποίηση της ιεραρχικής αναζήτησης απαιτείται η αποθήκευση μίας επιπλέον δομής δεδομένων, η οποία έχει ιεραρχική μορφή (hierarchical data structure)

και δημιουργείται εύκολα κατά την τριγωνοποίηση μέσω βηματικής εισαγωγής. Ο αλγόριθμος αναζήτησης αποτελεί βασικό τμήμα κάθε αλγορίθμου βηματικής εισαγωγής, ενώ μία γρήγορη μέθοδος αναζήτησης, όπως η ιεραρχική, μπορεί να οδηγήσει σε χρόνο κατασκευής της τριγωνοποίησης της τάξης του $O(n \log n)$. Η απόδοση της ιεραρχικής δομής δεδομένων γίνεται βέλτιστη για την περίπτωση της τριγωνοποίησης Delaunay ενώ ο βέλτιστος χρόνος κατασκευής και αναζήτησης με χρήση της δομής αυτής επιτυγχάνεται με την τυχαία διάταξη των κόμβων στη δομή δεδομένων. Τελικά, ο αλγόριθμος ιεραρχικής αναζήτησης έχει πολυπλοκότητα της τάξης του $O(\log n)$.

Κεφάλαιο 3

Η Μέθοδος Παραμετροποίησης με Γράφους Delaunay

Η μέθοδος παραμόρφωσης πλεγμάτων με χρήση γράφων Delaunay είναι μία απλή και γρήγορη μέθοδος μετακίνησης υπολογιστικών πλεγμάτων, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην επίλυση προβλημάτων που περιλαμβάνουν ροές με παραμόρφωση της γεωμετρίας, σχετική μετακίνηση σωμάτων ή αλλαγή της γεωμετρίας λόγω αεροδυναμικής βελτιστοποίησης.

Αρχικά, δημιουργείται ένας γράφος Delaunay που καλύπτει το προς μετακίνηση υπολογιστικό χωρίο και ο οποίος μπορεί εύκολα να μετακινηθεί με την αλλαγή της γεωμετρίας ή της θέσης των στερεών σωμάτων, ακόμα και για μεγάλες παραμορφώσεις. Στη συνέχεια, οι κόμβοι του πλέγματος αποτυπώνονται ένας-προς-ένα στο γράφο Delaunay, και η αποτύπωση αυτή διατηρείται κατά την παραμόρφωση του γράφου. Έτσι, οι νέες θέσεις των κόμβων του πλέγματος, μετά την παραμόρφωση, μπορούν εύκολα να υπολογιστούν μέσω της ένα-προς-ένα παραμετροποίησης, ενώ η τοπολογία του πλέγματος παραμένει ίδια.

Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζονται τα βασικά βήματα της μεθόδου και γίνεται επίδειξη του τρόπου δημιουργίας του γράφου, της αποτύπωσης των πλεγματικών κόμβων, και της δημιουργίας του νέου πλέγματος.

3.1 Η Βασική Ιδέα της Μεθόδου

Οι μη-αλγεβρικές μέθοδοι παραμόρφωσης πλεγμάτων που συχνά χρησιμοποιούνται είναι επαναληπτικές μέθοδοι οι οποίες απαιτούν την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσε-

ων ή συστημάτων γραμμικών εξισώσεων για την παραμόρφωση του πλέγματος. Σε αντίθεση με τις μεθόδους αυτές, η μέθοδος γράφων Delaunay είναι μη-επαναληπτική, αφού η παραμετροποίηση των κόμβων του πλέγματος γίνεται άμεσα μέσω αλγεβρικών σχέσεων, και έτσι είναι πολύ γρήγορη. Επίσης, η μέθοδος αυτή προσφέρει μεγάλη ευελιξία κατά την παραμόρφωση του πλέγματος, σε σχέση με άλλες μεθόδους.

Η μέθοδος γράφων Delaunay παρουσιάστηκε αρχικά από τον Liu [20] το 2005 και έχει εφαρμοστεί με επιτυχία σε πολλά προβλήματα που απαιτούν παραμόρφωση πλέγματος. Για παράδειγμα, ο Van der Burg [37] εφάρμοσε τη μέθοδο σε πρόβλημα αεροελαστικότητας που περιλάμβανε τη μετακίνηση πλέγματος με 7 εκατομμύρια κυψέλες. Ο Wang [38], στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση για τον έλεγχο του κύματος κρούσης, ενώ ο Milli [39], σε ένα βιομηχανικό πακέτο γένεσης πλέγματος, εκμεταλλεύομενος την απλότητα της μεθόδου.

Το πρώτο βήμα της μεθόδου γράφων Delaunay είναι η δημιουργία ενός «αραιού» πλέγματος (γράφου) τριγωνικών (2Δ) ή τετραεδρικών (3Δ) στοιχείων, τα οποία σχηματίζονται από τους οριακούς κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος και περιλαμβάνουν στο εσωτερικό τους τους κόμβους που πρέπει να μετατοπιστούν. Οι πλεγματικοί κόμβοι παραμετροποιούνται ένας-προς-ένα στο γράφο Delaunay μέσω των βαρυκεντρικών τους συντεταγμένων ως προς το τρίγωνο (ή τετράεδρο) Delaunay στο οποίο ανήκουν. Η σχετική τους θέση ως προς το στοιχείο Delaunay στο οποίο ανήκουν (δηλαδή οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του κάθε κόμβου) αποθηκεύεται και παραμένει αμετάβλητη κατά την παραμόρφωση του γράφου. Οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες κάθε κόμβου, μαζί με τις θέσεις των κορυφών του τριγώνου ή τετραέδρου στο οποίο ανήκει, καθορίζουν πλήρως τη θέση του κόμβου αυτού. Υπάρχει, δηλαδή, μία ένα-προς-ένα αποτύπωση των κόμβων στο γράφο. Στη συνέχεια, οι κόμβοι του γράφου Delaunay μετατοπίζονται σύμφωνα με την αλλαγή της βασικής γεωμετρίας (π.χ. μίας αεροτομής) και ο γράφος παραμορφώνεται. Μετά την παραμόρφωση της γεωμετρίας, η τοπολογία του γράφου δεν μεταβάλλεται ενώ η νέα ψηφιοποίηση (με την παλιά τοπολογία αλλά με τις νέες θέσεις των κόμβων Delaunay), στη γενική περίπτωση, δεν θα ικανοποιεί τις ιδιότητες της ψηφιοποίησης Delaunay.

Μετά την παραμόρφωση του γράφου, οι νέες θέσεις των πλεγματικών κόμβων προκύπτουν από την ένα-προς-ένα παραμετροποίηση που υπολογίστηκε πριν τη μετακίνηση. Αν η τριγωνοποίηση παραμένει έγκυρη (valid) μετά την παραμόρφωση του γράφου, δηλαδή τα τρίγωνα δεν αλληλοεπικαλύπτονται μετά τη μετακίνηση των κορυφών τους, τότε θα είναι δυνατή η αποτύπωση των νέων θέσεων των κόμβων του – παραμορφωμένου, πλέον – πλέγματος, χωρίς να εμφανίζονται αρνητικοί όγκοι στο υπολογιστικό πλέγμα.

Η ανάγκη δημιουργίας ενός ευέλικτου γράφου τριγωνικών ή τετραεδρικών στοιχείων (στις 2 και στις 3 διαστάσεις, αντίστοιχα), ο οποίος θα παραμένει έγκυρος (δηλαδή τα στοιχεία του δεν θα αλληλοεπικαλύπτονται) ακόμη και για μεγάλες παραμορφώσεις, οδηγεί στην επιλογή της κατά Delaunay ψηφιοποίησης για την παραμετροποίηση του υπολογιστικού χωρίου.

Αρχικά, υπάρχει η ανάγκη για τη δημιουργία ενός «αραιού» πλέγματος από ένα σύνολο σημείων, στο οποίο θα είναι εύκολη η αποτύπωση οποιουδήποτε σημείου στο εσωτερικό του (π.χ. μέσω των βαρυκεντρικών συντεταγμένων). Η αποτύπωση αυτή διευκολύνεται με τα τριγωνικά στοιχεία. Με μία πρώτη ματιά, όμως, φαίνεται ότι θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε τριγωνοποίηση καλύπτει το προς μετακίνηση υπολογιστικό χωρίο. Όμως, κατά τη μετακίνηση των κόμβων του γράφου, είναι πολύ εύκολο δύο ή περισσότερα τρίγωνα να αλληλοεπικαλυφθούν, καθιστώντας την τριγωνοποίηση μη έγκυρη. Η πιθανότητα αλληλοεπικάλυψης (δηλαδή εμφάνισης αρνητικών όγκων ή εμβαδών) ελαχιστοποιείται με την κατά Delaunay τριγωνοποίηση, αφού μία από τις βασικές ιδιότητες της τριγωνοποίησης αυτής είναι η μεγιστοποίηση της ελάχιστης γωνίας κάθε τριγώνου. Αυτό σημαίνει ότι τα τρίγωνα Delaunay είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στα «ιδανικά» τρίγωνα, δηλαδή τα ισόπλευρα. Λογική συνέπεια της ιδιότητας αυτής είναι ότι απαιτείται μεγαλύτερη μετακίνηση των κορυφών των τριγώνων για να προκύψει αρνητικός όγκος, άρα αυξάνεται η ευελιξία του γράφου, αφού μπορεί να παραμένει έγκυρος ακόμα και για μεγάλες παραμορφώσεις.

3.2 Τα Βήματα της Μεθόδου

Η μέθοδος γράφων Delaunay περιλαμβάνει τέσσερα βήματα: (α) γένεση του γράφου Delaunay, (β) αποτύπωση των κόμβων του πλέγματος, (γ) παραμόρφωση της γεωμετρίας, και (δ) μετακίνηση των κόμβων του πλέγματος. Τα βήματα αυτά εκτελούνται σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 2.

3.2.1 Γένεση του Γράφου Delaunay

Ο γράφος Delaunay που παραμετροποιεί το υπολογιστικό χωρίο ορίζεται από τα **ελεγχόμενα όρια** (π.χ. το περίγραμμα μίας αεροτομής), τα οποία αντιπροσωπεύουν το «στερεό όριο» του υπολογιστικού πλέγματος, και από τα **μη-ελεγχόμενα όρια**, τα οποία μπορεί να είναι κάποια από τα εξωτερικά όρια του πλέγματος (π.χ. επίπεδο συμμετρίας, περιοδικό όριο, κ.λπ.) ή μία αυθαίρετη επιλογή σημείων, τέτοιων ώστε ο γράφος που θα προκύψει να περιέχει στο εσωτερικό του τους πλεγματοκίτους κόμβους που θα μετακινήθούν. Για την μετατόπιση του πλέγματος, είναι αναγκαία η δημιουργία ενός γράφου Delaunay ο οποίος θα μπορεί να ακολουθήσει πλήρως την παραμόρφωση της γεωμετρίας και θα περιλαμβάνει στο εσωτερικό του τους πλεγματοκίτους κόμβους που πρόκειται να μετακινήθούν μετά από την παραμόρφωση αυτή. Έτσι, για τη δημιουργία του γράφου, επιλέγονται αντιπροσωπευτικά σημεία των ορίων της γεωμετρίας, ώστε να ικανοποιούνται οι παραπάνω απαιτήσεις.

Αρχικά, επιλέγονται τα σημεία του ελεγχόμενου ορίου το οποίο παραμορφώνεται, «παρασέρνοντας» μαζί του το υπολογιστικό πλέγμα. Για να αποτυπωθεί η παραμόρφωση αυτή με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια, επιλέγονται όλα τα σημεία που ορίζουν την

παραμορφούμενη γεωμετρία (π.χ. όλα τα σημεία μίας αεροτομής). Έπειτα, επιλέγονται τα μη-ελεγχόμενα όρια του γράφου έτσι, ώστε να αυτός να περιλαμβάνει στο εσωτερικό του το υποσύνολο του υπολογιστικού πλέγματος – ή και όλο το πλέγμα – το οποίο θα μετακινήθει. Συνήθως, για μικρές παραμορφώσεις, η μετακίνηση του πλέγματος μπορεί να περιοριστεί στους κόμβους που βρίσκονται κοντά στο ελεγχόμενο όριο, επιλέγοντας τα μη-ελεγχόμενα όρια του γράφου να είναι κοντά στη βασική γεωμετρία. Αντίθετα, για μεγάλες παραμορφώσεις, είναι επιθυμητή η διάδοση της κίνησης του ελεγχόμενου ορίου κοντά, αλλά και μακριά από το όριο αυτό. Στην περίπτωση αυτή, ως μη-ελεγχόμενο όριο του γράφου μπορεί να επιλεγεί το μη-ελεγχόμενο όριο του υπολογιστικού χωρίου. Μία τέτοια επιλογή ορίων για τη γένεση του γράφου δίνεται στο σχήμα 3.1α'.

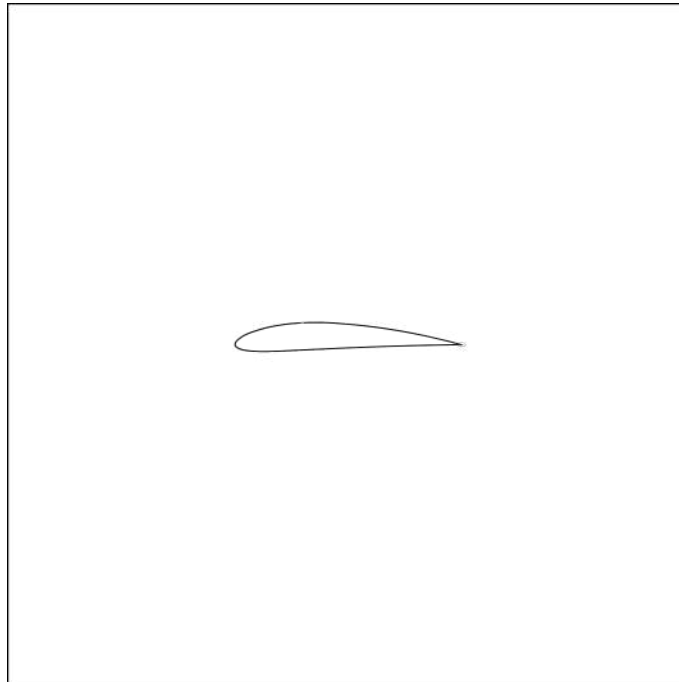
Αφού επιλεγούν τα σημεία (δηλαδή τα όρια) του γράφου Delaunay, επόμενο βήμα είναι η γένεση της τριγωνοποίησης. Για το σύνολο των σημείων αυτών, υπάρχει πάντα τριγωνοποίηση (στις 2 διαστάσεις) ή τετραεδροποίηση (στις 3 διαστάσεις), που ικανοποιεί τα κριτήρια Delaunay (σχήμα 3.1β'). Η γένεση του γράφου μπορεί να γίνει με οποιονδήποτε αλγόριθμο τριγωνοποίησης κατά Delaunay, όπως αυτοί που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 2.3.

Ο γράφος Delaunay που δημιουργείται από την παραπάνω διαδικασία, περιλαμβάνει στο εσωτερικό του όλους τους προς μετακίνηση κόμβους. Επιπλέον, είναι πολύ σύνηθες να εμφανίζονται τρίγωνα στο εσωτερικό της γεωμετρίας (για προβλήματα εξωτερικής αεροδυναμικής), τα οποία βρίσκονται εκτός του υπολογιστικού χωρίου και που δεν περιλαμβάνουν κανέναν πλεγματοκόμβο στο εσωτερικό τους (σχήμα 3.1β'). Τέτοια τρίγωνα δεν συμμετέχουν στη διαδικασία παραμόρφωσης του πλέγματος, αφού δεν περιέχουν κανέναν κόμβο, αλλά σχηματίζονται πάντα, έτσι ώστε να «κλείσει» η τριγωνοποίηση (ή τετραεδροποίηση) Delaunay.

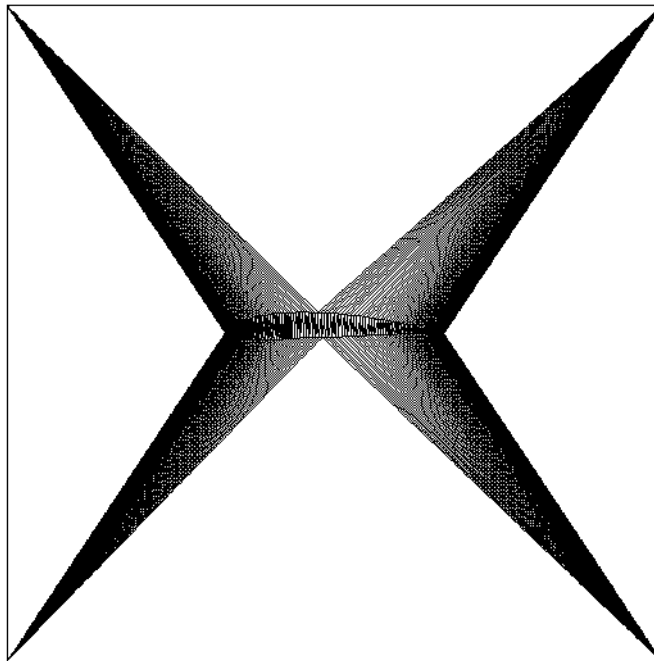
Ο γράφος που σχηματίζεται αποτελείται από τρίγωνα (ή τετράεδρα) των οποίων η ελάχιστη γωνία είναι η μέγιστη δυνατή, σύμφωνα με τις ιδιότητες της ψηφιοποίησης Delaunay (βλ. ενότητα 2.2), μειώνοντας έτσι την πιθανότητα τα τρίγωνα που δημιουργούνται να αλληλοεπικαλυφθούν μετά τη μετακίνηση των κορυφών τους.

3.2.2 Παραμετροποίηση των Κόμβων του Πλέγματος

Έχοντας δημιουργήσει το γράφο Delaunay του υπολογιστικού χωρίου, επόμενο βήμα είναι η αποτύπωση (ή παραμετροποίηση) των πλεγματοκόμβων σε αυτόν. Για την αποτύπωση αυτή, αρχικά απαιτείται ο εντοπισμός του τριγώνου (ή τετραέδρου) Delaunay που περιέχει τον προς-παραμετροποίηση κόμβο. Η χρήση ενός γρήγορου αλγόριθμου αναζήτησης είναι σημαντική για την επιτάχυνση της συνολικής διαδικασίας μετακίνησης του πλέγματος. Στην εργασία αυτή, γίνεται χρήση της μεθόδου ιεραρχικής αναζήτησης, που περιγράφηκε στην ενότητα 2.4.



(α') Το ελεγχόμενο (αεροτομή) και μη-ελεγχόμενο (τετραγωνικό περίγραμμα) όριο του γράφου *Delaunay*.



(β') Ο γράφος *Delaunay* που σχηματίζεται από τα σημεία της αεροτομής και από τις τέσσερις κορυφές του μη-ελεγχόμενου τετραγωνικού ορίου. Τα τέσσερα μεγάλα τρίγωνα που σχηματίζονται από τις ακμές του τετραγώνου είναι κι αυτά τρίγωνα *Delaunay*. Στο εσωτερικό της αεροτομής σχηματίζονται επιπλέον τρίγωνα *Delaunay*, τα οποία όμως βρίσκονται εκτός του υπολογιστικού χωρίου και δεν περιέχουν κανέναν πλεγματικό κόμβο στο εσωτερικό τους.

Σχήμα 3.1: Η γένεση του γράφου *Delaunay* για το υπολογιστικό χωρίο γύρω από μία αεροτομή. Παράδειγμα στις 2 διαστάσεις.

Αφού εντοπιστεί το στοιχείο Delaunay που περιέχει τον κόμβο, ακολουθεί η παραμετροποίηση του κόμβου αυτού στον γράφο. Η παραμετροποίηση μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Η μόνη απαίτηση που υπάρχει είναι η αποτύπωση αυτή να είναι μοναδική (ένα-προς-ένα) για κάθε πλεγματοκόμβο. Στη βιβλιογραφία έχουν εμφανιστεί διάφοροι τρόποι παραμετροποίησης των πλεγματοκόμβων, όπως για παράδειγμα με χρήση των συναρτήσεων radial basis function (RBF) (Wang, [40]), όπου οι συναρτήσεις βάσης εφαρμόζονται σε κάθε πλεγματοκόμβο για την κατασκευή ενός μητρώου μετακίνησης (3×3 για τις δύο διαστάσεις) που προσδιορίζει τη νέα θέση του κόμβου μετά την παραμόρφωση. Επίσης, για την παραμετροποίηση αυτή έχει χρησιμοποιηθεί και η μέθοδος inverse distance weighting (IDW) για την παρεμβολή των κόμβων (Wang, [41]). Στη διπλωματική αυτή εργασία, η παραμετροποίηση γίνεται με τη χρήση των βαρυκεντρικών συντεταγμένων του κάθε κόμβου ως προς το τρίγωνο (ή τετράπλευρο) στο οποίο ανήκει.

Σε κάθε κόμβο αντιστοιχούν τρεις (για 2Δ πλέγματα) ή τέσσερις (για 3Δ πλέγματα) βαρυκεντρικές συντεταγμένες. Οι συντεταγμένες αυτές υπολογίζονται πριν από την παραμόρφωση της γεωμετρίας και παραμένουν αμετάβλητες κατά την παραμόρφωση του γράφου, αφού αποτελούν την ένα-προς-ένα αποτύπωση μεταξύ του γράφου Delaunay και του υπολογιστικού χωρίου.

Οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες ενός σημείου N στις 2 διαστάσεις, που ανήκει στο τρίγωνο $\mathbf{T} = P_0P_1P_2$, υπολογίζονται ως εξής:

$$w_i = \frac{S_i}{S}, \quad i = 0, 1, 2 \quad (3.1)$$

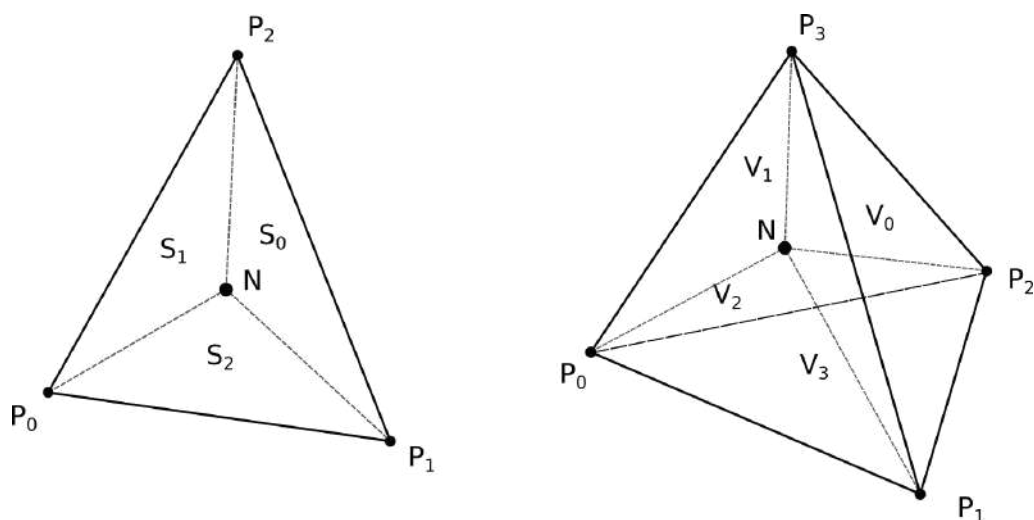
όπου με S_i συμβολίζεται το εμβαδόν του τριγώνου $NP_{c_i^1}P_{c_i^2}$ (δηλαδή το τρίγωνο που σχηματίζεται από το σημείο N και από τις άλλες δύο κορυφές του τριγώνου T , εξαιρούμενης της κορυφής P_i), ενώ με S συμβολίζεται το εμβαδόν του τριγώνου T . Με c_i^k συμβολίζεται η k -οστή κορυφή του τριγώνου που βρίσκεται αντιωρολογιακά της κορυφής i και, στη γενική περίπτωση, δίνεται από τη σχέση:

$$c_i^k = (i + k) \bmod (D + 1), \quad D = 2, 3 \quad (3.2)$$

όπου D ο αριθμός των χωρικών διαστάσεων της τριγωνοποίησης ($D = 2$ ή 3 , για τις 2 και τις 3 διαστάσεις, αντίστοιχα).

Τα παραπάνω εμβαδά δίνονται από τις σχέσεις:

$$S_i^N = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_N & y_N & 1 \\ x_{c_i^1} & y_{c_i^1} & 1 \\ x_{c_i^2} & y_{c_i^2} & 1 \end{vmatrix} \quad (3.3)$$



Σχήμα 3.2: Οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του σημείου N στις 2 διαστάσεις (αριστερά, τρίγωνο $P_0P_1P_2$) και στις 3 διαστάσεις (δεξιά, τετράεδρο $P_0P_1P_2P_3$)

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

Οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες ενός σημείου N στις 3 διαστάσεις, που ανήκει στο τετράπλευρο $\mathbf{T} = P_0P_1P_2P_3$, υπολογίζονται ως εξής:

$$w_i = \frac{V_i}{V}, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

όπου με V_i συμβολίζεται ο όγκος του τετραπλεύρου $NP_{c_i^1}P_{c_i^2}P_{c_i^3}$ (δηλαδή το τετράπλευρο που σχηματίζεται από το σημείο N και από τις άλλες τρεις κορυφές του T , εξαιρούμενης της κορυφής P_i), ενώ με V συμβολίζεται ο όγκος του τετραπλεύρου T . Οι όγκοι των παραπάνω τετραπλεύρων δίνονται από τις σχέσεις:

$$V_i^N = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_N & y_N & z_N & 1 \\ x_{c_i^1} & y_{c_i^1} & z_{c_i^1} & 1 \\ x_{c_i^2} & y_{c_i^2} & z_{c_i^2} & 1 \\ x_{c_i^3} & y_{c_i^3} & z_{c_i^3} & 1 \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

Η παραμετροποίηση των πλεγματικών κόμβων μέσω των βαρυκεντρικών συντεταγμένων αποτελεί έναν κυρτό συνδυασμό (convex combination) των κορυφών του στοιχείου Delaunay στο οποίο ανήκει. Δηλαδή:

$$\vec{r}_N = w_i \vec{r}_i \quad (3.8)$$

όπου $\vec{r}_N = (x_N, y_N, z_N)$, η θέση του σημείου N και $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ η θέση της κορυφής P_i του τριγώνου το οποίο περιέχει το N . Οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες συνεπάγονται άθροιση.

Οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες ικανοποιούν τα κριτήρια του κυρτού συνδυασμού:

$$w_i \geq 0 \quad (3.9)$$

$$\sum_i w_i = 1 \quad (3.10)$$

Η ικανοποίηση των παραπάνω συνθηκών (εξισώσεις (3.9), (3.10)) είναι αναγκαία, ώστε το σημείο N να βρίσκεται στο εσωτερικό του στοιχείου Delaunay.

3.2.3 Παραμόρφωση της Γεωμετρίας

Έχοντας δημιουργήσει το γράφο Delaunay που καλύπτει το προς μετακίνηση υπολογιστικό πλέγμα και αφού παραμετροποιηθούν οι πλεγματικοί κόμβοι επάνω στο γράφο, όπως περιγράφηκε στην ενότητα 3.2.2, το επόμενο βήμα είναι η παραμόρφωση του γράφου Delaunay.

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα (3.2.1), ο γράφος Delaunay σχηματίζεται από τους οριακούς (μη-ελεγχόμενους) κόμβους, που ορίζουν το κυρτό χωρίο στο εσωτερικό του οποίου βρίσκονται οι προς μετακίνηση πλεγματικοί κόμβοι, και από τους ελεγχόμενους κόμβους, οι οποίοι αναπαριστούν τη γεωμετρία του προβλήματος. Για την αποτύπωση της γεωμετρίας με τη μέγιστη ακρίβεια, συνήθως επιλέγονται όλοι οι οριακοί κόμβοι που ορίζουν τη γεωμετρία του πλέγματος. Στη γενική περίπτωση, με την παραμόρφωση της γεωμετρίας (π.χ. μίας αεροτομής), οι ελεγχόμενοι κόμβοι, που αποτελούν τους οριακούς κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος CFD και παράλληλα είναι κόμβοι του γράφου, μετακινούνται, ενώ οι μη-ελεγχόμενοι κόμβοι παραμένουν σταθεροί. Έτσι, τα τρίγωνα ή τετράεδρα του γράφου Delaunay παραμορφώνονται με την αλλαγή της γεωμετρίας, αφού οι ελεγχόμενοι κόμβοι του γράφου, που είναι και κορυφές των στοιχείων Delaunay, μετατοπίζονται. Η μόνη αλλαγή στο γράφο αφορά τις θέσεις των κόμβων που τον αποτελούν και όχι την τοπολογία του γράφου.

Μετά τη μετακίνηση της γεωμετρίας, ο γράφος είναι πολύ πιθανό να πάψει να ικανοποιεί τα κριτήρια της τριγωνοποίησης Delaunay. Όμως, κάτι τέτοιο δεν επηρεάζει τη διαδικασία παραμόρφωσης του πλέγματος, αφού η μόνη απαίτηση που υπάρχει, για να μπορέσουν να υπολογιστούν οι νέες θέσεις των κόμβων του πλέγματος με βάση την παραμετροποίηση που έγινε πριν τη μετατόπιση των οριακών κόμβων, είναι η τριγωνοποίηση να παραμείνει έγκυρη. Αυτό σημαίνει ότι δεν πρέπει να εμφανιστούν αρνητικά εμβαδά ή όγκοι μεταξύ των στοιχείων Delaunay του γράφου. Με άλλα λόγια, τα τρίγωνα δεν πρέπει να αλληλοεπικαλύπτονται. Αν θεωρήσουμε ότι οι κορυφές κάθε στοιχείου Delaunay αριθμούνται αντιωρολογιακά και υπολογίσουμε τον όγκο (ή το εμβαδόν) του στοιχείου με τη χρήση της εξ. (3.7) (αντίστοιχα, εξ. (3.4)), τότε το πρόσημο του όγκου (ή εμβαδού) ενός στοιχείου θα προκύψει αρνητικό, αν και μόνον αν το στοιχείο αυτό πάψει να είναι έγκυρο. Αν ο γράφος μετά την παραμόρφωση περιέχει τέτοια στοιχεία, τότε η μετακίνηση είναι μη-έγκυρη (invalid) και ο γράφος παύει να είναι έγκυρος.

Σε μία τέτοια περίπτωση (συνήθως για μεγάλες μετακινήσεις ή σε πολύ πυκνά πλέγματα) ο υπολογισμός των νέων θέσεων των πλεγματικών κόμβων, με βάση την παραμετροποίηση που έγινε πριν την παραμόρφωση, δεν μπορεί να γίνει επί μακρόν και η μετακίνηση πρέπει να διαιρεθεί σε μικρότερες, ώστε να μην προκύψει μη-έγκυρος γράφος μετά τη μετακίνηση αυτή. Η διαίρεση της μετακίνησης σε μικρότερες απαιτεί την αναγέννηση του γράφου μετά από κάθε βήμα, αφού η διατήρηση του αρχικού γράφου για τις επόμενες μετακινήσεις θα οδηγούσε αναπόφευκτα σε μη-έγκυρη μετακίνηση. Η χρήση του γράφου Delaunay ελαχιστοποιεί την πιθανότητα να εμφανιστούν αρνητικοί όγκοι μετά τη μετακίνηση, αφού μεγιστοποιούνται οι εσωτερικές γωνίες των τριγώνων Delaunay. Γενικά, η διαίρεση των μεγάλων μετατοπίσεων σε μικρότερες και η αναγέννηση του γράφου μετά από κάθε μετακίνηση μπορεί να αυξήσει την ευελιξία της μεθόδου (όπως θα δειχθεί και σε επόμενα κεφάλαια), καθώς και να διατηρήσει την ποιότητα του πλέγματος κοντά στην αρχική (πριν τη μετακίνηση). Όμως, η βηματική μετακίνηση του πλέγματος συνοδεύεται από αυξημένο υπολογιστικό κόστος, που είναι ανάλογο του αριθμού των βημάτων. Η τελική επιλογή του αριθμού των βημάτων αποτελεί έναν συμβιβασμό μεταξύ της επιθυμητής ποιότητας του παραμορφωμένου πλέγματος και του υπολογιστικού κόστους.

3.2.4 Μετακίνηση των Κόμβων του Πλέγματος

Μετά την παραμόρφωση της γεωμετρίας και τη μετακίνηση των κόμβων του γράφου Delaunay, το τελικό βήμα είναι ο προσδιορισμός της νέας θέσης των πλεγματικών κόμβων, που προκύπτει από την παραμόρφωση αυτή. Οι κόμβοι του αρχικού/απαραμόρφωτου πλέγματος αποτυπώθηκαν ένας-προς-έναν, μέσω των βαρυκεντρικών τους συντεταγμένων (εξ. (3.1) ή (3.5)) στον απαραμόρφωτο γράφο Delaunay. Μετά τη μετακίνηση του γράφου, οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες (δηλαδή η σχετική θέση του κόμβου ως προς το τρίγωνο στο οποίο ανήκει) παραμένουν αμετάβλητες ενώ οι θέσεις \vec{r}_i των κορυφών P_i που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες w_i στην γενική περίπτωση

3.2. Τα Βήματα της Μεθόδου

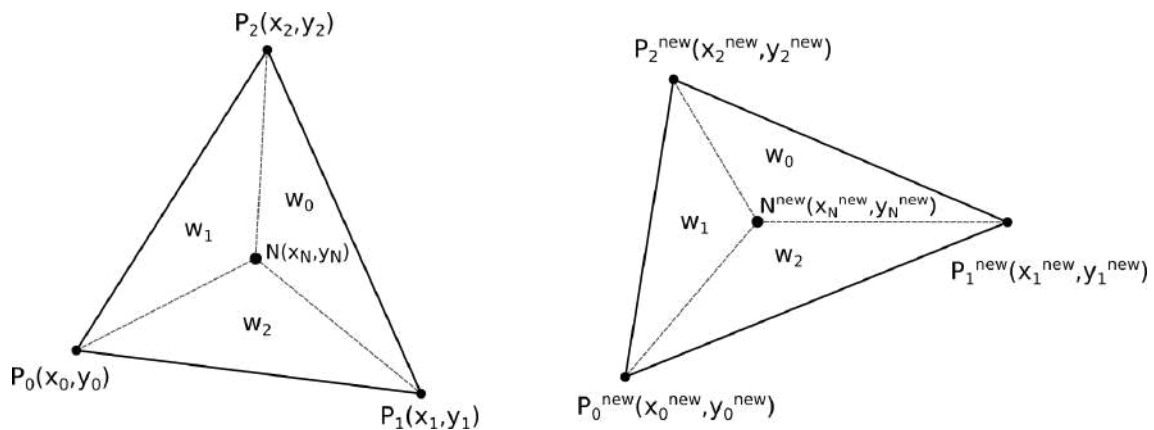
θα αλλάξουν.

Αν ο γράφος παραμείνει έγκυρος μετά τη μετακίνησή του, τότε η νέα θέση \vec{r}_N ενός κόμβου N είναι:

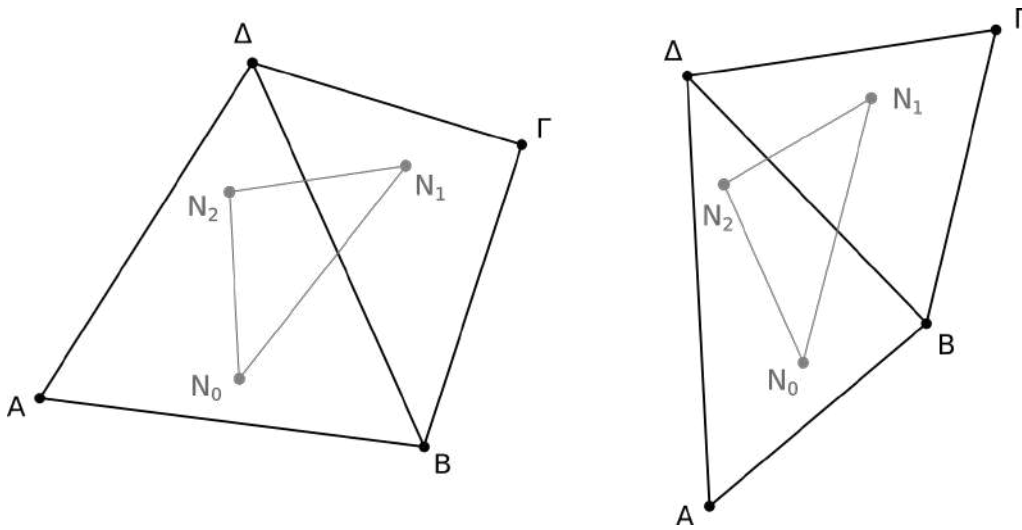
$$\vec{r}_N^{new} = w_i \vec{r}_i^{new} \quad (3.11)$$

όπου \vec{r}_i^{new} η νέα θέση της κορυφής P_i του τριγώνου στο οποίο ανήκει ο κόμβος N . Με την παρεμβολή αυτή, η σχετική θέση του κόμβου N μέσα στο τρίγωνο παραμένει σταθερή και εκφράζεται από τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες w_i (σχήμα 3.3).

Η μέθοδος γράφων Delaunay μετακινεί τους κόμβους του πλέγματος, χωρίς να αλλάζει η τοπολογία του. Είναι, δηλαδή, μία μέθοδος μετακίνησης πλέγματος, η οποία δεν «βλέπει» το πλέγμα, αλλά μόνο τα σημεία του. Με την τοπολογία αμετάβλητη, η αλλαγή της θέσης των κόμβων του πλέγματος οδηγεί στην παραμόρφωσή του. Στο σχήμα 3.4 δίνεται μία απλή περίπτωση παραμόρφωσης ενός ευθύγραμμου τμήματος, το οποίο έχει σταθερή τοπολογία (ο κόμβος N_1 συνδέεται με τον κόμβο N_2), ενώ οι θέσεις των κορυφών του μετακινούνται με την παραμόρφωση των τριγώνων $AB\Delta$, $B\Gamma\Delta$ στο εσωτερικό των οποίων βρίσκονται.



Σχήμα 3.3: Οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες w_0, w_1, w_2 του σημείου N στο εσωτερικό του τριγώνου $P_0P_1P_2$. Η σχετική θέση του N μέσα στο τρίγωνο (δηλαδή οι βαρυκεντρικές του συντεταγμένες) παραμένει σταθερή.



Σχήμα 3.4: Παραμόρφωση του τριγώνου $N_0N_1N_2$ μετά τη μετατόπιση των κόμβων του γράφου $AB\Gamma\Delta$. Η παραμόρφωση του $N_0N_1N_2$ αντιστοιχεί στη μετατόπιση των κορυφών N_0 , N_1 και N_2 λόγω της παραμόρφωσης των τριγώνων στα οποία ανήκουν.

3.3 Ο Αλγόριθμος της Μεθόδου Γράφων Delaunay

Συνοπτικά, η μέθοδος μετακίνησης πλέγματος με τη χρήση γράφων Delaunay περιλαμβάνει τα εξής βήματα:

Βήμα 1: Επιλογή των κόμβων που θα σχηματίσουν το γράφο Delaunay. Οι κόμβοι αυτοί περιλαμβάνουν τους κόμβους του ελεγχόμενου ορίου του υπολογιστικού πλέγματος και επιπλέον μη-ελεγχόμενους οριακούς κόμβους (που μπορεί να είναι και πλεγματικοί κόμβοι), τέτοιους ώστε το κυρτό όριο του γράφου Delaunay που σχηματίζεται να περιέχει στο εσωτερικό του τα προς μετακίνηση σημεία του πλέγματος.

Βήμα 2: Γένεση του γράφου Delaunay των επιλεγμένων κόμβων και αποτύπωση των σημείων του πλέγματος στο γράφο. Για κάθε σημείο του πλέγματος: αναζήτηση του στοιχείου του γράφου Delaunay που περιέχει το σημείο αυτό και αποθήκευση των βαρυκεντρικών του συντεταγμένων.

Βήμα 3: Μετακίνηση του γράφου Delaunay σύμφωνα με την παραμόρφωση του ελεγχόμενου ορίου.

Βήμα 4: Έλεγχος της εγκυρότητας του γράφου. Αν ο γράφος δεν είναι έγκυρος, δηλαδή κάποια στοιχεία του αλληλοεπικαλύπτονται, τότε η μετακίνηση υποδιαιρείται και η διαδικασία συνεχίζεται από το Βήμα 3.

Βήμα 5: Υπολογισμός της νέας θέσης των σημείων του πλέγματος από τις βαρυκε-

3.3. Ο Αλγόριθμος της Μεθόδου Γράφων Delaunay

ντρικές συντεταγμένες και τις νέες θέσεις των κόμβων του γράφου Delaunay, σύμφωνα με την εξ. (3.11).

Η διαδικασία της μετακίνησης πλεγμάτων με χρήση γράφων Delaunay δίνεται σε μορφή ψευδοκώδικα στον αλγόριθμο 2.

Η μετακίνηση του ελεγχόμενου ορίου του υπολογιστικού πλέγματος μπορεί να γίνεται σε κάθε χρονικό βήμα (για μη-μόνιμα προβλήματα που περιλαμβάνουν παραμορφώσεις ή μετακινήσεις σωμάτων με το χρόνο) ή μετά από κάθε κύκλο βελτιστοποίησης της μορφής της γεωμετρίας. Ανεξάρτητα από την περίπτωση στην οποία χρησιμοποιείται, η μέθοδος αυτή δέχεται ως είσοδο το υπολογιστικό πλέγμα και τη μετατόπιση των οριακών πλεγματικών κόμβων και δίνει ως έξοδο τις νέες θέσεις των κόμβων του πλέγματος (διατηρώντας την τοπολογία του αρχικού πλέγματος). Ανάλογα με το μέγεθος της μετατόπισης και την πυκνότητα του πλέγματος, η μετακίνηση των πλεγματικών κόμβων στη νέα τους θέση μπορεί να γίνει σε ένα ή περισσότερα βήματα. Γενικά, μεγαλύτερος αριθμός βημάτων οδηγεί σε καλύτερη ποιότητα του τελικού πλέγματος, αλλά ο υπολογιστικός χρόνος αυξάνεται γραμμικά με τον αριθμό των βημάτων. Ο τελικός αριθμός βημάτων καθορίζεται κατά περίπτωση.

Η διαδικασία υπολογισμού της μετακίνησης του πλέγματος είναι μη-επαναληπτική και γι' αυτό είναι γρήγορη, ακόμα και για πολύ μεγάλα πλέγματα (όπως θα φανεί και στις εφαρμογές που παρουσιάζονται στα επόμενα κεφάλαια). Επίσης, μπορεί να εφαρμοστεί με ευκολία σε 2Δ και 3Δ πλέγματα, χωρίς σημαντικές διαφορές στον κώδικα της εκάστοτε περίπτωσης, ενώ η εφαρμογή της μεθόδου είναι η ίδια για δομημένα και μη-δομημένα πλέγματα.

Αλγόριθμος 2 Ο αλγόριθμος της μεθόδου γράφων Delaunay.

```

1: Κόμβοι Γράφου Delaunay ← Ελεγχόμενοι Κόμβοι + Μη-Ελεγχόμενοι Κόμβοι;
2: Υπόλοιπο ← Συνολική Μετατόπιση των Ελεγχόμενων Κόμβων του Γράφου;
3: Αρχή επανάληψης
4:   ⟨Γένεση του Γράφου Delaunay⟩;
5:   Για ( $j = 1; j \leq \text{Αριθμός Πλεγματικών Κόμβων}; j++$ )
6:      $Q \leftarrow N[j];$  //  $N[j]$  : ο  $j$  κόμβος του πλέγματος
7:     ⟨Αναζήτηση του στοιχείου Delaunay που περιέχει το σημείο  $Q$ ⟩;
8:     ⟨Υπολογισμός των βαρυκεντρικών συντεταγμένων  $w_i^j$  του κόμβου  $Q$ ⟩;
9:     Τέλος
10:     $\delta x \leftarrow \text{Υπόλοιπο};$ 
11:    ⟨Μετακίνηση των ελεγχόμενων κόμβων του γράφου Delaunay κατά  $\delta x$ ⟩;
12:    Αρχή επανάληψης
13:       $\acute{\epsilon}\gamma\kappa\upsilon\rho\omicron\varsigma \leftarrow \text{αληθές};$ 
14:       $i \leftarrow 1;$ 
15:      Όσο ( $i \leq \text{Αριθμός Στοιχείων Delaunay}$ ) και ( $\acute{\epsilon}\gamma\kappa\upsilon\rho\omicron\varsigma$ ) επανάλαβε
16:         $V_1 = \text{Εμβαδόν ή όγκος του στοιχείου } i;$ 
17:        Αν ( $V_i < 0$ ) τότε
18:           $\delta x \leftarrow \delta x/2;$ 
19:          ⟨Μετακίνηση των ελεγχόμενων κόμβων του γράφου Delaunay κατά  $-\delta x$ ⟩;
20:           $\acute{\epsilon}\gamma\kappa\upsilon\rho\omicron\varsigma \leftarrow \text{ψευδές};$ 
21:          Τέλος
22:           $i \leftarrow i + 1;$ 
23:          Τέλος
24:        Μέχρις Ότου ( $\acute{\epsilon}\gamma\kappa\upsilon\rho\omicron\varsigma$ )
25:        Για ( $j = 1; j \leq \text{Αριθμός Πλεγματικών Κόμβων}; j++$ )
26:           $Q \leftarrow N[j];$ 
27:          ⟨Ανάκτηση του δείκτη του στοιχείου Delaunay που περιέχει το σημείο  $Q$ ⟩;
28:          ⟨Ανάκτηση των νέων συντεταγμένων των κορυφών του στοιχείου Delaunay που περιέχει το  $Q$ ⟩;
29:          ⟨Ανάκτηση των βαρυκεντρικών συντεταγμένων του σημείου  $Q$ ⟩;
30:          ⟨Υπολογισμός των νέων συντεταγμένων του σημείου  $Q$ ⟩;
31:          Τέλος
32:           $\text{Υπόλοιπο} \leftarrow \text{Υπόλοιπο} - \delta x;$ 
33:        Μέχρις Ότου ( $\text{Υπόλοιπο} == 0$ )

```

Κεφάλαιο 4

Η Μέθοδος Γράφων Delaunay

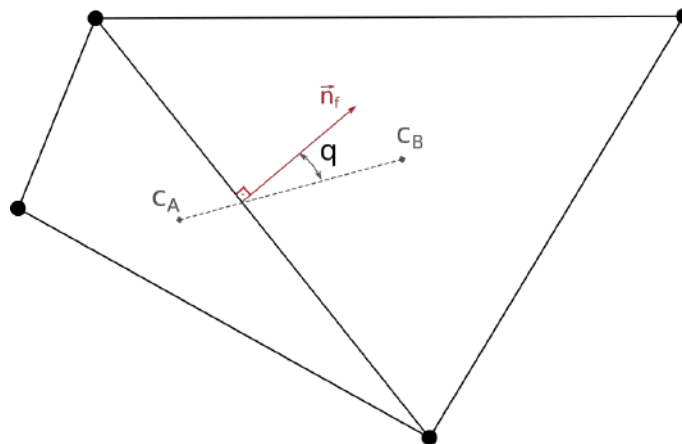
στις 2 Διαστάσεις

Στο κεφάλαιο αυτό, γίνεται χρήση του λογισμικού μετακίνησης πλεγμάτων με γράφους Delaunay, που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο αυτής της διπλωματικής εργασίας, για την παραμόρφωση 2D πλεγμάτων. Το λογισμικό αυτό προγραμματίστηκε σε περιβάλλον OpenFOAM[®], ενώ τα πλέγματα των προβλημάτων που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό είναι επίσης σε αντίστοιχη μορφή. Τα πλέγματα παραμορφώνονται έτσι, ώστε να φανεί η ευελιξία της μεθόδου, καθώς και να διαπιστωθούν τα όριά της. Γενικά, όμως, οι παραμορφώσεις της γεωμετρίας σε κάθε μία από τις περιπτώσεις που παρουσιάζονται είναι κατά πολύ μεγαλύτερες από αυτές που συνήθως συναντώνται σε μία διαδικασία βελτιστοποίησης.

4.1 Μετρικές Ποιότητας του Πλέγματος στις 2 Διαστάσεις

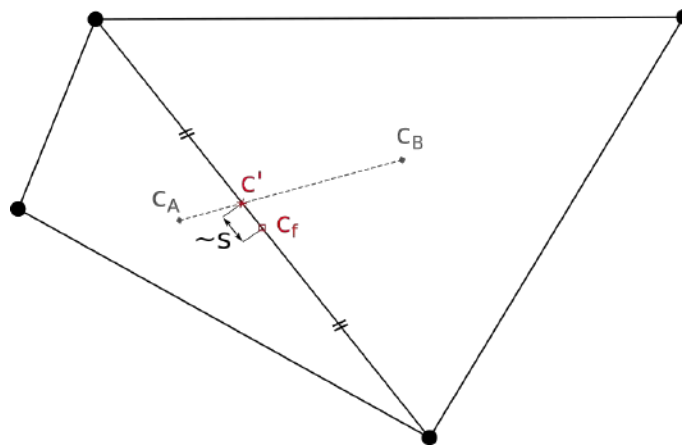
Για την αξιολόγηση της ποιότητας του εκάστοτε πλέγματος, γίνεται χρήση δύο μετρικών, της μη-ορθογωνικότητας (non-orthogonality) \mathbf{q} και της στρεβλότητας (skewness) \mathbf{s} , οι οποίες ορίζονται ως εξής:

Ορισμός 4.1.1. Μη-Ορθογωνικότητα (Non-Orthogonality) \mathbf{q} : ορίζεται ως η γωνία (σε $^{\circ}$) μεταξύ της ευθείας που ενώνει τα κέντρα δύο γειτονικών κελιών και της κάθετης στην κοινή πλευρά των κελιών ευθείας (σχήμα 4.1). Η ιδανική τιμή είναι 0° .



Σχήμα 4.1: Η μη-ορθογωνικότητα q της πλευράς μεταξύ δύο κελιών ορίζεται ως η γωνία του ευθύγραμμου τμήματος c_{ACB} που ενώνει τα κέντρα των δύο κελιών με το κάθετο στη μεταξύ τους πλευρά διάνυσμα \vec{n}_f .

Ορισμός 4.1.2. Στρεβλότητα (Skewness) s : ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ της τομής της ευθείας που ενώνει τα κέντρα δύο γειτονικών κελιών με την κοινή πλευρά τους και του κέντρου της πλευράς αυτής, αδιαστατοποιημένη με την απόσταση μεταξύ των κέντρων των δύο κελιών (σχήμα 4.2). Η ιδανική τιμή είναι 0.



Σχήμα 4.2: Η στρεβλότητα s της πλευράς μεταξύ δύο κελιών ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ της τομής c' του ευθύγραμμου τμήματος $c_{a c_b}$ που ενώνει τα κέντρα των δύο κελιών και του κέντρου c_f της κοινής τους πλευράς, αδιαστατοποιημένη με την απόσταση c_{ACB} .

Επειδή οι παραπάνω μετρικές υπολογίζονται για κάθε κελί του πλέγματος, η ποιότητα του συνολικού πλέγματος περιγράφεται από τη μέση τιμή (\bar{q} , \bar{s}), την τυπική απόκλιση (σ_q , σ_s), και τη μέγιστη τιμή (q_{max} , s_{max}) των παραπάνω μετρικών.

4.2 Εφαρμογή στην Αεροτομή NACA0012

Για την επίδειξη της μεθόδου μετακίνησης πλέγματος με γράφους Delaunay στις 2Δ, αρχικά παρουσιάζεται η παραμόρφωση δομημένου πλέγματος τύπου-C γύρω από μία αεροτομή NACA 0012. Το αρχικό πλέγμα δίνεται στα σχήματα 4.3α' και 4.3β'. Το πλέγμα αποτελείται από 76806 κόμβους και 37800 κελιά (τετράπλευρα) ενώ κοντά στο τοίχωμα είναι αρκετά πυκνό, αφού προορίζεται για χρήση με μοντέλα τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds της τύρβης.

4.2.1 Κάμψη της Μέσης Γραμμής της Αεροτομής

Η παραμορφωση της γεωμετρίας που επιλέγεται είναι η κάμψη της μέσης γραμμής και η νέα θέση των σημείων του ελεγχόμενου ορίου δίνεται από μία σχέση της μορφής:

$$x = x_0, \quad y = y_0 - \alpha x_0^2 \quad (4.1)$$

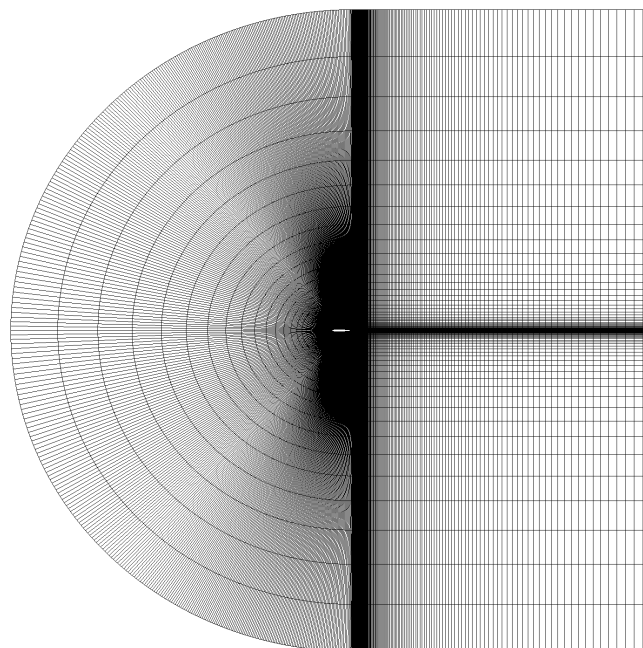
όπου x_0, y_0 οι αρχικές θέσεις των σημείων του πλέγματος και x, y οι αντίστοιχες νέες θέσεις.

Για την κατασκευή του γράφου, χρησιμοποιούνται ως ελεγχόμενο όριο όλοι οι κόμβοι που σχηματίζουν τη γεωμετρία της αεροτομής, ενώ ως μη-ελεγχόμενο όριο επιλέγονται όλοι οι κόμβοι του εξωτερικού ορίου (farfield), χωρίς τη διαχωριστική γραμμή (split line) του δομημένου πλέγματος. Με την επιλογή όλων των κόμβων του εξωτερικού ορίου ως μη-ελεγχόμενο όριο, ο γράφος Delaunay καλύπτει ολόκληρο το υπολογιστικό χωρίο, ενώ είναι αρκετά πυκνός, ώστε η ποιότητα του πλέγματος να διατηρηθεί και μετά την παραμόρφωση (σχήματα 4.4α', 4.4β'). Επίσης, στο σχήμα 4.4α' φαίνεται ότι σχεδόν όλα τα τρίγωνα Delaunay του γράφου έχουν μικρή ελάχιστη γωνία, ενώ σχηματίζονται και δύο τρίγωνα μεγαλύτερου εμβαδού (στον ομόρροο της αεροτομής) τα οποία καλύπτουν σημαντικά μεγαλύτερη επιφάνεια σε σχέση με τα υπόλοιπα τρίγωνα. Στη γενική περίπτωση, τέτοιες ανομοιομορφίες στο μέγεθος των τριγώνων δεν προκαλούν προβλήματα, εφόσον η γεωμετρία της αεροτομής έχει αποτυπωθεί ικανοποιητικά.

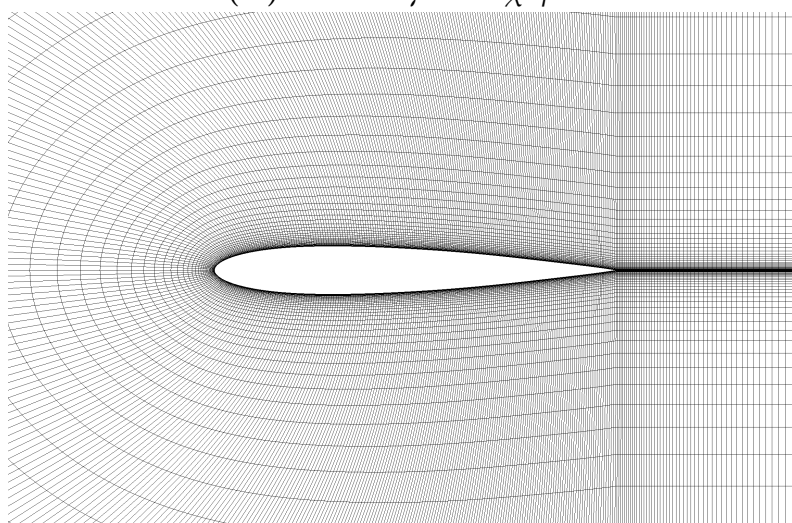
Μετά την αρχική δημιουργία του γράφου, η αεροτομή παραμορφώνεται διαδοχικά, για διάφορες τιμές του συντελεστή α της εξ. (4.1), ενώ ο γράφος δεν ανανεώνεται μετά από κάθε βήμα.

Στο παράδειγμα αυτό, η ποιότητα του πλέγματος φαίνεται να διατηρείται για μεγάλες παραμορφώσεις (σχήμα 4.5α'), ενώ ο γράφος παραμένει έγκυρος για μεγάλες μετακινήσεις των σημείων του (σχήμα 4.5β'). Στο σχήμα 5.8 δίνεται το διάγραμμα της μέσης τιμής και της μέγιστης μη-ορθογωνικότητας του πλέγματος σε σχέση με τον συντελεστή α της εξίσωσης παραμόρφωσης (εξ. (4.1)).

Η μέση μη-ορθογωνικότητα $\bar{\alpha}$ διατηρείται σε χαμηλά επίπεδα ενώ η μέγιστη τιμή της



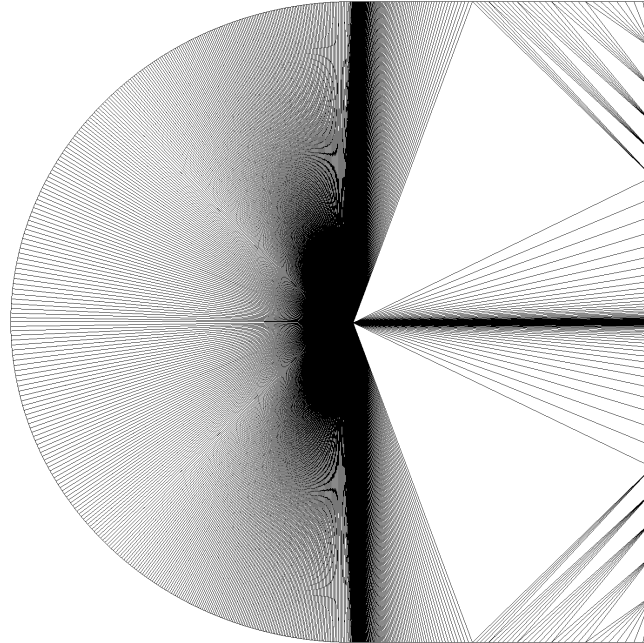
(α') Το υπολογιστικό χωρίο.



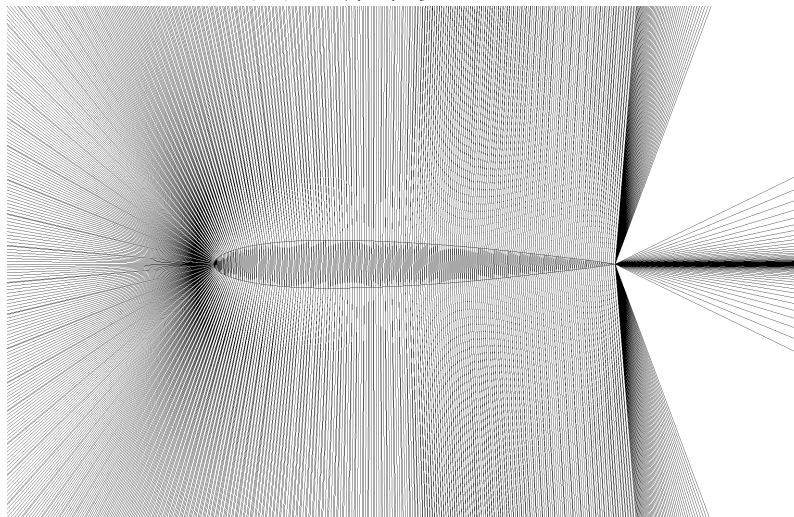
(β') Το υπολογιστικό πλέγμα κοντά στην αεροτομή.

Σχήμα 4.3: Εφαρμογή στην αεροτομή NACA 0012. Το δομημένο πλέγμα τύπου-C γύρω από την αεροτομή.

q_{max} αυξάνεται με την αύξηση της παραμόρφωσης, χωρίς όμως να φτάνει σε τιμές που θα καθιστούσαν το πλέγμα μη-έγκυρο. Οι μεγάλες τιμές της μη-ορθογωνικότητας εμφανίζονται κυρίως κοντά στο τοίχωμα της αεροτομής, όπου το πλέγμα είναι πιο πυκνό.

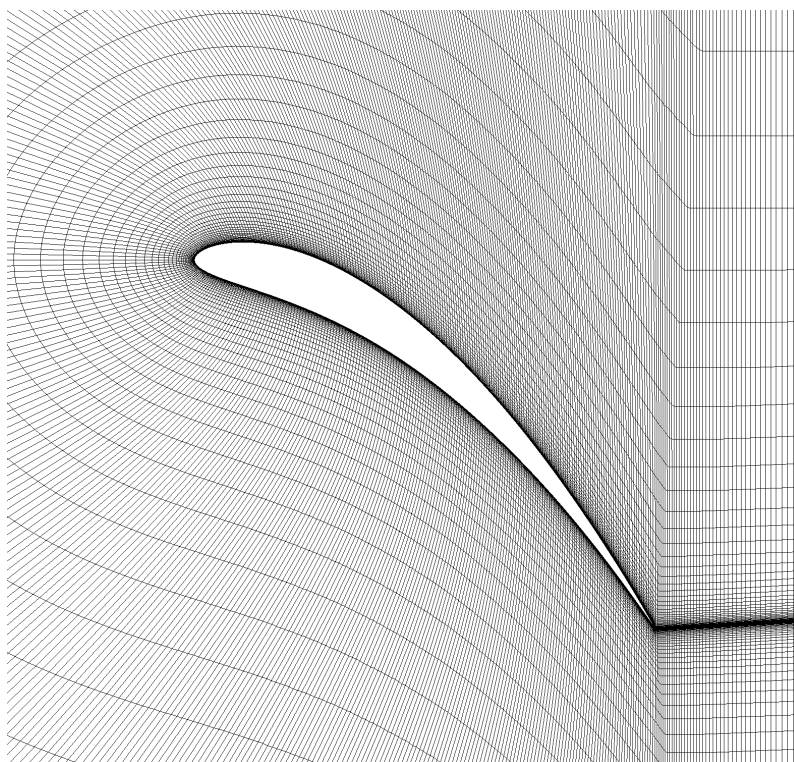


(α') Ο γράφος Delaunay.

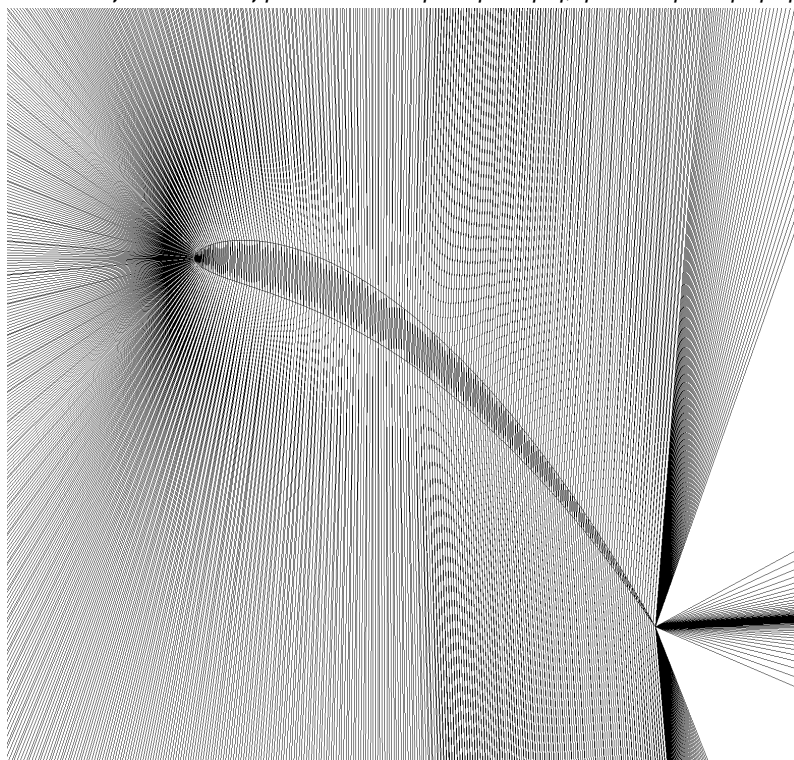


(β') Ο γράφος Delaunay κοντά στην αεροτομή.

Σχήμα 4.4: Εφαρμογή στην αεροτομή NACA 0012. Ο γράφος Delaunay του υπολογιστικού χωρίου της αεροτομής που σχηματίζεται από τα σημεία της αεροτομής (ελεγχόμενο όριο) και τα σημεία του ορίου του υπολογιστικού χωρίου (μη-ελεγχόμενο όριο).

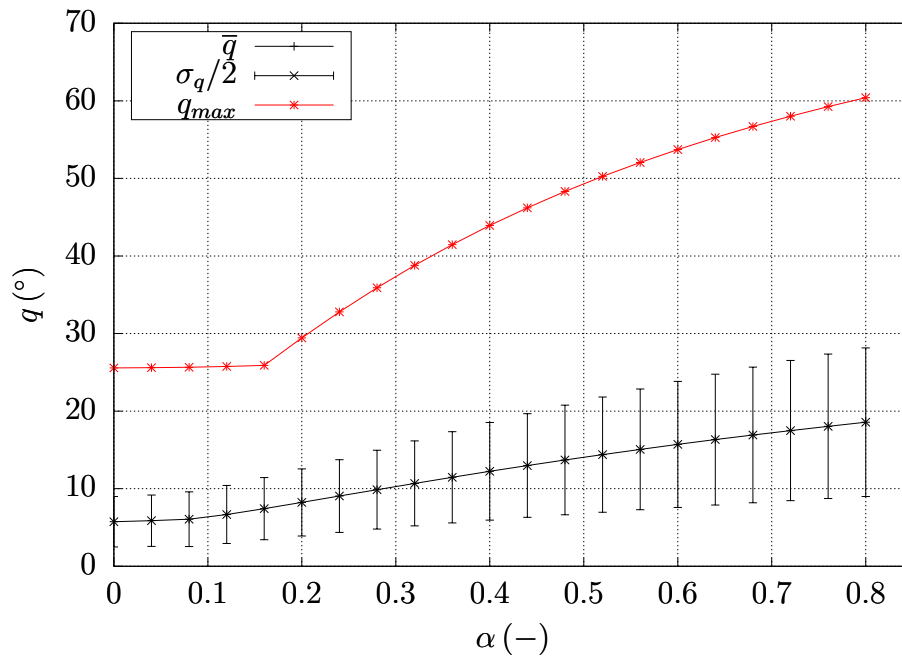


(α') Το υπολογιστικό πλέγμα κοντά στην αεροτομή, μετά την παραμόρφωση.

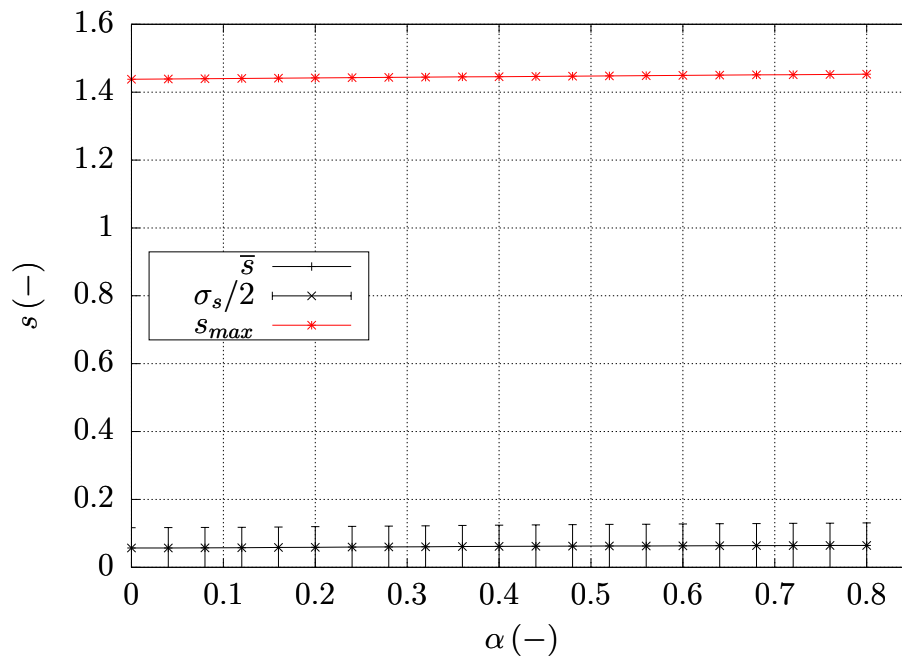


(β') Ο γράφος Delaunay κοντά στην αεροτομή, μετά την παραμόρφωση.

Σχήμα 4.5: Εφαρμογή στην αεροτομή NACA 0012. Κάμψη της αεροτομής. Η παραμόρφωση του πλέγματος γύρω από την αεροτομή, χωρίς αναγέννηση του γράφου Delaunay.



Σχήμα 4.6: Εφαρμογή στην αεροτομή NACA 0012. Κάμψη της αεροτομής. Η μέση τιμή \bar{q} και η μέγιστη τιμή q_{max} της μη-ορθογωνικότητας του πλέγματος, με την αύξηση της παραμόρφωσης α , χωρίς αναγέννηση του γράφου.



Σχήμα 4.7: Εφαρμογή στην αεροτομή NACA 0012. Κάμψη της αεροτομής. Η μέση τιμή \bar{s} και η μέγιστη τιμή s_{max} της στρεβλότητας του πλέγματος, με την αύξηση της παραμόρφωσης α , χωρίς αναγέννηση του γράφου.

4.2.2 Συμπεράσματα

Στο παράδειγμα που παρουσιάστηκε παραπάνω, η αεροτομή NACA 0012 παραμορφώθηκε σε κάμψη, σε διαδοχικές θέσεις που περιγράφονται από την εξ. (4.1), για τους διάφορους συντελεστές α . Το βασικό χαρακτηριστικό της περίπτωσης αυτής είναι ότι ο γράφος Delaunay δημιουργήθηκε για την παραμόρφωτη γεωμετρία και διατηρήθηκε για κάθε παραμόρφωση (δηλαδή διαφορετικούς συντελεστές α) που επιβλήθηκε στη γεωμετρία. Δηλαδή, ο αρχικός γράφος προσαρμόστηκε στην εκάστοτε νέα γεωμετρία, χωρίς να καταστεί μη-έγκυρος. Το γεγονός αυτό δείχνει τη μεγάλη ευελιξία που έχει, εν γένει, ο γράφος Delaunay.

Αφού ο γράφος παραμένει έγκυρος σε κάθε περίπτωση παραμόρφωσης (δηλαδή για κάθε τιμή που δόθηκε στο συντελεστή α), οι νέες θέσεις των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος υπολογίζονται με βάση τις νέες θέσεις των κόμβων του γράφου και τα αντίστοιχα βάρη που υπολογίστηκαν πριν την παραμόρφωση (εξ. (3.11)). Με μία πρώτη ματιά, στην ακραία περίπτωση παραμόρφωσης ($\alpha = 0.8$), το πλέγμα φαίνεται να διατηρεί ικανοποιητικά την ποιότητά του (σχήμα 4.5α'), ενώ ο γράφος καλύπτει ικανοποιητικά το υπολογιστικό χωρίο (σχήμα 4.5β'). Για την καλύτερη αξιολόγηση της ποιότητας του πλέγματος, στα σχήματα 5.8 και 4.7 παρουσιάζονται οι μεταβολές των μετρικών του πλέγματος, δηλαδή της μη-ορθογωνικότητας q και της στρεβλότητας s , αντίστοιχα, για κάθε περίπτωση παραμόρφωσης. Η μετρική που επηρεάζεται, κυρίως, από την κάμψη της αεροτομής είναι η μη-ορθογωνικότητα, q , της οποίας η μέση τιμή, \bar{q} , αυξάνει, αλλά παραμένει σε αποδεκτά επίπεδα, ενώ η μέγιστη τιμή q_{max} αυξάνει ακόμα περισσότερο και στην ακραία περίπτωση παραμόρφωσης φτάνει σε τιμές κοντά στο 60 (από την αρχική τιμή των 25). Παρά τη μεγάλη αύξηση, η q_{max} παραμένει σε αποδεκτά επίπεδα. Αντίθετα, η στρεβλότητα s δεν φαίνεται να αλλάζει με την κάμψη της αεροτομής, αφού η μέση και η μέγιστη τιμή της παραμένουν σχεδόν σταθερές.

Γενικά, στην απλή αυτή περίπτωση παραμόρφωσης, η μέθοδος γράφων Delaunay μετακινεί το πλέγμα με σχετική ευκολία, ενώ διατηρεί την ποιότητά του σε αποδεκτά επίπεδα.

4.3 Περί Επιλογής των Μη-Ελεγχόμενων Ορίων του 2Δ Γράφου Delaunay

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 3.2.1, τα σημεία που σχηματίζουν το γράφο Delaunay αποτελούν κόμβους του ελεγχόμενου ορίου του πλέγματος (π.χ. μιας αεροτομής) και ενός μη-ελεγχόμενου ορίου, το οποίο ορίζεται έτσι, ώστε ο γράφος που θα δημιουργηθεί να περιλαμβάνει στο εσωτερικό του τους πλεγματοειδείς κόμβους που θα μετακινηθούν.

Οι κόμβοι του ελεγχόμενου ορίου επιλέγονται έτσι, ώστε να παραμετροποιείται η γε-

ωμετρία του προβλήματος με τη μέγιστη ακρίβεια. Ως κόμβοι του ελεγχόμενου ορίου επιλέγονται όλοι οι κόμβοι του πλέγματος στην επιφάνεια της γεωμετρίας, δηλαδή οι κόμβοι που θα μετακινηθούν κατά την παραμόρφωση της εκάστοτε γεωμετρίας και των οποίων η παραμόρφωση θα μετακινήσει το γράφο Delaunay και, κατά συνέπεια, το υπολογιστικό πλέγμα. Η μετακίνηση των κόμβων αυτών επιβάλλεται εξωτερικά (π.χ. από μία διαδικασία βελτιστοποίησης) και δεν υπολογίζεται από τη μέθοδο παραμόρφωσης πλέγματος, όπως συμβαίνει με τη μετακίνηση των υπόλοιπων πλεγματικών κόμβων. Δηλαδή, η μετακίνησή τους αποτελεί την «οριακή συνθήκη» που καθορίζει την παραμόρφωση του πλέγματος. Έτσι, σε κάθε πρόβλημα, οι κόμβοι αυτοί είναι δεδομένοι.

Αντίθετα με τους κόμβους του ελεγχόμενου ορίου, οι μη-ελεγχόμενοι κόμβοι πρέπει να επιλεγθούν με τρόπο τέτοιο, ώστε ο γράφος που θα σχηματιστεί να καλύπτει ικανοποιητικά το υπολογιστικό χωρίο. Ανάλογα με το μέγεθος της παραμόρφωσης, η διάδοση της μετακίνησης των ελεγχόμενων κόμβων μπορεί να γίνει στο σύνολο του υπολογιστικού πλέγματος ή να περιοριστεί στους κόμβους που βρίσκονται κοντά στη γεωμετρία του προβλήματος. Στην πρώτη περίπτωση, το μη-ελεγχόμενο όριο πρέπει να επιλεγθεί έτσι, ώστε ο γράφος να περιλαμβάνει στο εσωτερικό του το σύνολο του υπολογιστικού πλέγματος. Η περίπτωση αυτή είναι επιθυμητή όταν η παραμόρφωση της γεωμετρίας είναι μεγάλη. Στη δεύτερη περίπτωση, επιλέγεται ένα μικρότερο όριο, δηλαδή οριακοί κόμβοι που βρίσκονται κοντά στην αεροτομή, ώστε να σχηματιστεί ένας μικρότερος γράφος, που θα περιλαμβάνει στο εσωτερικό του τη γεωμετρία και το υποσύνολο των πλεγματικών κόμβων που θα μετακινηθούν. Αυτή η επιλογή δίνει καλά αποτελέσματα για μικρές παραμορφώσεις της γεωμετρίας σε πολύ πυκνά πλέγματα.

Στα σχήματα 4.4α' και 4.4β' του παραδείγματος που παρουσιάστηκε στην ενότητα 4.2, ο γράφος σχηματίστηκε χρησιμοποιώντας ως μη-ελεγχόμενα όρια τα αντίστοιχα όρια του υπολογιστικού πλέγματος (farfield). Επειδή τα σημεία του ορίου στην περίπτωση αυτή είναι σε μεγάλη απόσταση από τη γεωμετρία, τα τρίγωνα που σχηματίζονται έχουν πολύ μικρή ελάχιστη γωνία (δηλαδή είναι «στενόμακρα»). Το γεγονός αυτό περιορίζει την ευελιξία του γράφου, αφού ένας τέτοιος γράφος μπορεί εύκολα να καταστεί μη-έγκυρος μετά την παραμόρφωση (βλ. ενότητα 1.5).

Στη γενική περίπτωση, είναι επιθυμητό ο γράφος που θα παραχθεί να έχει μεγάλη ευελιξία κατά την παραμόρφωσή του, για να μπορεί να μετακινεί το εκάστοτε πλέγμα χωρίς να απαιτούνται πολλά βήματα αναγέννησής του και άρα περισσότερος υπολογιστικός χρόνος. Για την παραγωγή ενός περισσότερο ευέλικτου γράφου, τα μη-ελεγχόμενα όρια μπορούν να επιλεγούν κοντά στη γεωμετρία. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με διάφορους τρόπους. Μία λύση είναι να επιλεγούν από το χρήστη κατάλληλα σημεία, τα οποία θα αποτελέσουν το μη-ελεγχόμενο όριο. Αυτή η λύση δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να ελέγξει με ακρίβεια τα όρια του γράφου, αλλά απαιτεί την επιλογή των σημείων αυτών με μη-αυτόματο τρόπο, γεγονός που αυξάνει την πολυπλοκότητα χρήσης του κώδικα που εκτελεί τη μετακίνηση του πλέγματος.

Για παράδειγμα, για την κατασκευή του γράφου της αεροτομής NACA 0012 που παρουσιάστηκε στην ενότητα 4.2, μπορούν να επιλεγούν τέσσερα σημεία, τα οποία θα σχηματίζουν ένα τετράπλευρο γύρω από τη γεωμετρία, μέσα στο οποίο θα παραχθεί ο

γράφος. Ένα τέτοιο παράδειγμα δίνεται στο σχήμα 4.8, όπου έχουν επιλεγεί τέσσερα σημεία, τα οποία σχηματίζουν ένα τετράγωνο γύρω από την αεροτομή NACA 0012 του πλέγματος που παρουσιάστηκε στην ενότητα 4.2.

Μία άλλη λύση είναι να παραχθούν τα μη-ελεγχόμενα όρια με βάση τη γεωμετρία του εκάστοτε προβλήματος. Είναι επιθυμητό τα μη-ελεγχόμενα όρια του γράφου να καλύπτουν τη γεωμετρία με τρόπο ομοιόμορφο, έτσι ώστε τα τρίγωνα του γράφου να έχουν συγκρίσιμα εμβαδά (να είναι περίπου ίδια). Ένας τέτοιος γράφος μπορεί να παραμορφώσει το πλέγμα με ομαλό τρόπο. Σε αυτή τη διπλωματική εργασία, προτείνεται ένας τρόπος για να παραχθεί κατάλληλο μη-ελεγχόμενο όριο με βάση το κυρτό κέλυφος των σημείων της γεωμετρίας.

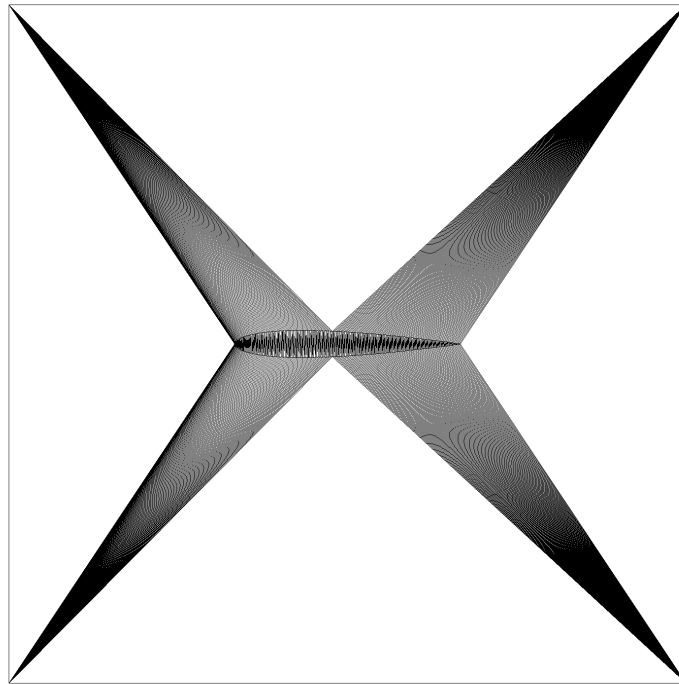
4.3.1 Το Μη-Ελεγχόμενο Όριο με Βάση το Κυρτό Χωρίο της Γεωμετρίας

Σε προβλήματα παραμόρφωσης πλέγματος, όπου οι παραμορφώσεις της γεωμετρίας είναι μικρές, η μετατόπιση των πλεγματικών κόμβων μπορεί να περιοριστεί κοντά στη γεωμετρία με κατάλληλη επιλογή του μη-ελεγχόμενου ορίου. Μία επιλογή είναι να επιλεγούν από το χρήστη τα σημεία του μη-ελεγχόμενου ορίου με τρόπο μη-αυτόματο. Όμως, μία τέτοια επιλογή αυξάνει την πολυπλοκότητα χρήσης του κώδικα παραμόρφωσης του πλέγματος. Στην ενότητα αυτή, προτείνεται ένας τρόπος για την αυτόματη παραγωγή του μη-ελεγχόμενου ορίου με βάση τη γεωμετρία του προβλήματος, διευκολύνοντας, έτσι, τη χρήση του κώδικα παραμόρφωσης με γράφους Delaunay που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο αυτής της διπλωματικής εργασίας.

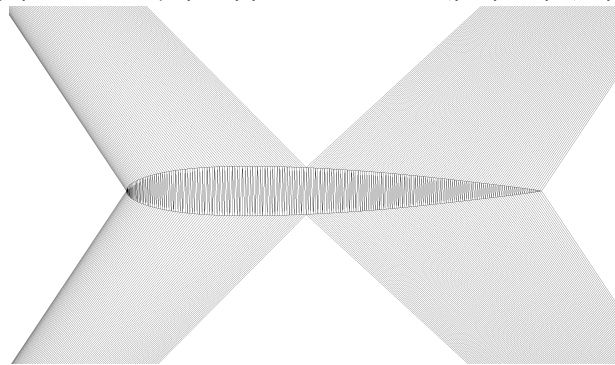
Η επιλογή του μη-ελεγχόμενου ορίου πρέπει να οδηγεί στη δημιουργία ενός γράφου Delaunay που θα καλύπτει το υπολογιστικό χωρίο με τρόπο τέτοιο, ώστε τα τρίγωνα του γράφου να έχουν μέγεθος συγκρίσιμο με τα γειτονικά τους. Ένας τέτοιος γράφος, ο οποίος σχηματίζεται από τρίγωνα συγκρίσιμου και όχι ανομοιόμορφου μεγέθους, είναι περισσότερο ευέλικτος, αφού η επιφάνεια που καλύπτει κατανέμεται ομοιόμορφα σε όλα τα τρίγωνα, με αποτέλεσμα να υπάρχουν λιγότερα «μικρά» (ή «στενόμακρα») τρίγωνα, τα οποία είναι τα πιο επιρρεπή στο να αποκτήσουν αρνητικό εμβαδό μετά την παραμόρφωση της γεωμετρίας. Δηλαδή, μεγιστοποιείται το εμβαδόν των μικρότερων τριγώνων.

Επιπλέον, είναι επιθυμητό τα τρίγωνα του γράφου να σχηματίζονται τόσο από ελεγχόμενους, όσο και από μη-ελεγχόμενους κόμβους. Το χαρακτηριστικό αυτό είναι σημαντικό για την ικανοποιητική παραμετροποίηση του πλέγματος, αφού ένα τρίγωνο που σχηματίζεται από σταθερούς (μη-ελεγχόμενους) και κινούμενους (ελεγχόμενους) κόμβους μπορεί να διαδώσει την πληροφορία της παραμόρφωσης της γεωμετρίας στους εσωτερικούς πλεγματικούς του κόμβους και μέχρι τα όρια του γράφου Delaunay.

Ένα τέτοιο όριο μπορεί να παραχθεί με βάση το κυρτό κέλυφος (convex hull) του



(α') Ο συνολικός γράφος γύρω από την αεροτομή. Τα τέσσερα σημεία του μη-ελεγχόμενου ορίου σχηματίζουν ένα τετράγωνο, μέσα στο οποίο παράγεται ο γράφος. Τα τέσσερα μεγάλα τρίγωνα που φαίνονται εντός του τετραγωνικού ορίου είναι κι αυτά τρίγωνα Delaunay, τα οποία περιέχουν στο εσωτερικό τους ένα μεγάλο υποσύνολο του υπολογιστικού χωρίου, σε σύγκριση με τα υπόλοιπα (μικρότερα) τρίγωνα Delaunay.

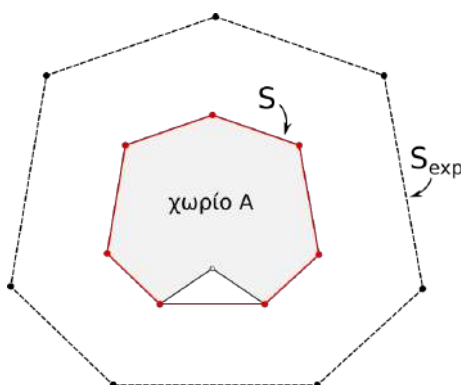


(β') Ο γράφος κοντά στην αεροτομή. Κάθε κόμβος της αεροτομής συνδέεται με ένα ή δύο από τα τέσσερα σημεία του μη-ελεγχόμενου ορίου, σχηματίζοντας τα τρίγωνα Delaunay. Στο εσωτερικό της αεροτομής, σχηματίζονται επίσης τρίγωνα Delaunay, τα οποία, όμως, δεν περιέχουν στο εσωτερικό τους κανέναν πλεγματοκόμβο και άρα δεν συμμετέχουν στην παραμόρφωση του πλέγματος.

Σχήμα 4.8: Ο γράφος Delaunay γύρω από την αεροτομή NACA 0012 που σχηματίζεται από τέσσερα σημεία μακριά από τη γεωμετρία και από το σύνολο των κόμβων της αεροτομής.

συνόλου των σημείων της γεωμετρίας (βλ. ορισμό 2.1.2). Συγκεκριμένα, αφού σχηματιστεί το κυρτό κέλυφος, αυτό μπορεί να «μεγαλώσει» με τέτοιο τρόπο, ώστε εκτός από τα σημεία της γεωμετρίας, να περιλαμβάνει στο εσωτερικό του και το υποσύνολο του πλέγματος το οποίο θα μετακινηθεί. Επειδή η γεωμετρία του εκάστοτε προβλήματος περιγράφεται από τα σημεία τα οποία την αποτελούν, το σύνορο του κυρτού κελύφους του συνόλου των σημείων αυτών, στις 2 διαστάσεις, θα είναι ένα κυρτό πολύγωνο με κόμβους ένα υποσύνολο των σημείων της γεωμετρίας (αν αυτή είναι μη-κυρτή) ή και όλα τα σημεία αυτής (για κυρτές γεωμετρίες). Το πολύγωνο αυτό μπορεί να επεκταθεί (δηλαδή να «μεγαλώσει») με κατάλληλο τρόπο, ώστε να προκύψει ένα νέο κυρτό πολύγωνο, οι κορυφές του οποίου θα αποτελέσουν τους κόμβους του μη-ελεγχόμενου ορίου του γράφου.

Η παραπάνω διαδικασία παρουσιάζεται στο σχήμα 4.9 για την απλή περίπτωση ενός συνόλου 8 σημείων. Αν η γεωμετρία σχηματίζεται από τα σημεία του μη-κυρτού (στη γενική περίπτωση) συνόλου \mathbb{A} , το κυρτό κέλυφος του \mathbb{A} θα έχει σαν σύνορο το πολύγωνο \mathbf{S} . Για να καλυφθεί ομοιόμορφα ο χώρος γύρω από τη γεωμετρία αυτή, το πολύγωνο \mathbf{S} επεκτείνεται στο \mathbf{S}_{exp} , μετά από κατάλληλη «μεγέθυνσή» του. Οι κόμβοι του νέου πολυγώνου \mathbf{S}_{exp} μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το μη-ελεγχόμενο όριο του γράφου Delaunay.



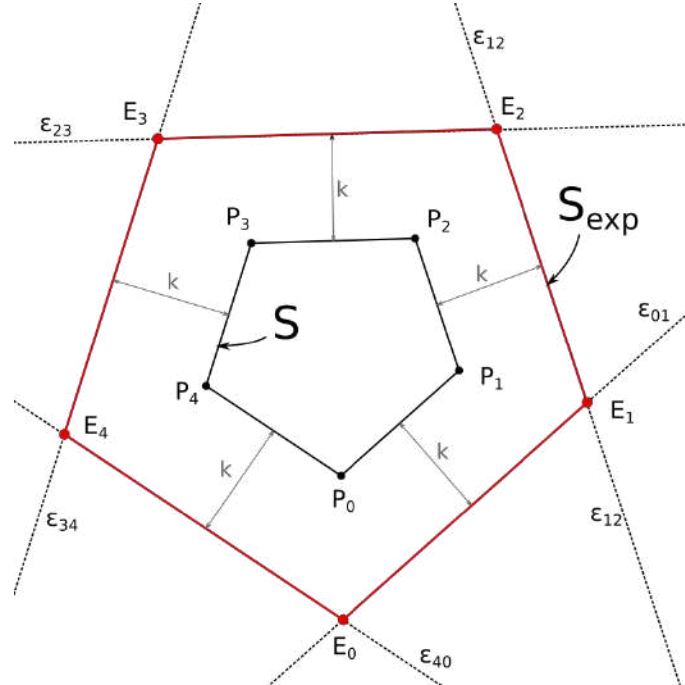
Σχήμα 4.9: Το κυρτό κέλυφος ενός συνόλου σημείων \mathbb{A} και η επέκτασή του. Το μη-κυρτό κέλυφος \mathbb{A} (με ανοιχτό/γκρι χρώμα) αποτελείται από σημεία, τα οποία αντιπροσωπεύουν τη γεωμετρία του προβλήματος. Το πολύγωνο \mathbf{S} σχηματίζεται από τα όρια του κυρτού κελύφους του συνόλου \mathbb{A} ενώ το πολύγωνο \mathbf{S}_{exp} έχει προκύψει από την επέκταση του \mathbf{S} και έχει σχηματιστεί με βάση τη γεωμετρία του \mathbb{A} .

Η διαδικασία με την οποία προσδιορίζεται το πολύγωνο \mathbf{S}_{exp} είναι η εξής:

Βήμα 1: Από το σύνολο $\mathbb{A} = \{N_0, N_1, \dots, N_n\}$ των κόμβων της γεωμετρίας, παράγεται το κυρτό κέλυφος του συνόλου αυτού, το οποίο περικλείεται από το πολύγωνο $P_0P_1 \dots P_m$, με $\{P_0, P_1, \dots, P_m\} \subseteq \mathbb{A}$ και $m \leq n$. Το κυρτό κέλυφος του συνόλου των σημείων αυτών μπορεί να υπολογιστεί με τη χρήση διάφορων αλγόριθμων, όπως είναι η Σάρωση κατά Graham [42].

Βήμα 2: Για κάθε ευθύγραμμο τμήμα P_iP_{i+1} σχηματίζεται η ευθεία $\epsilon_{i,i+1} \parallel P_iP_{i+1}$, η οποία βρίσκειται σε απόσταση k από αυτό.

Βήμα 3: Προσδιορίζονται τα σημεία τομής Π_i των ευθειών $\epsilon_{i,i+1}$, τα οποία τελικά σχηματίζουν το πολύγωνο $\mathbf{S}_{\text{exp}} = \Pi_0\Pi_1 \dots \Pi_m$ (σχήμα 4.10).



Σχήμα 4.10: Η επέκταση του κυρτού πολυγώνου \mathbf{S} (με μαύρο χρώμα) στο \mathbf{S}_{exp} (με κόκκινο χρώμα). Για κάθε ευθύγραμμο τμήμα $P_i P_{i+1}$ σχηματίζεται η ευθεία $\epsilon_{i,i+1}$, η οποία είναι παράλληλη σε αυτό και σε απόσταση k από αυτό. Το νέο πολύγωνο $\mathbf{S}_{\text{exp}} = \Pi_0\Pi_1 \dots \Pi_m$ περιλαμβάνει στο εσωτερικό του το αρχικό χωρίο \mathbf{S} , καθώς και τμήμα του χωρίου που βρίσκεται γύρω από αυτό.

Η τομή Π_{i+1} δύο ευθειών που είναι παράλληλες στα ευθύγραμμα τμήματα $P_i P_{i+1}$ και $P_{i+1} P_{i+2}$ και βρίσκονται σε απόσταση k από αυτά, υπολογίζεται ως εξής:

- Αρχικά προσδιορίζονται δύο σημεία c και c' τα οποία βρίσκονται επάνω στη μεσοκάθετο των $P_i P_{i+1}$ και $P_{i+1} P_{i+2}$, αντίστοιχα, και σε απόσταση k από αυτά. Τα σημεία αυτά θα ανήκουν στις ευθείες $\epsilon_{i,i+1}$ και $\epsilon_{i+1,i+2}$, αντίστοιχα.
- Στη συνέχεια, προσδιορίζεται η εξίσωση των δύο ευθειών, για τις οποίες ισχύει:

$$\epsilon_{i,i+1} \parallel P_i P_{i+1}, c \in \epsilon_{i,i+1} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{i,i+1} : y - y_c = \lambda(x - x_c) \quad (4.2)$$

$$\epsilon_{i+1,i+2} \parallel P_{i+1} P_{i+2}, c' \in \epsilon_{i+1,i+2} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{i+1,i+2} : y - y_{c'} = \lambda'(x - x_{c'}) \quad (4.3)$$

όπου

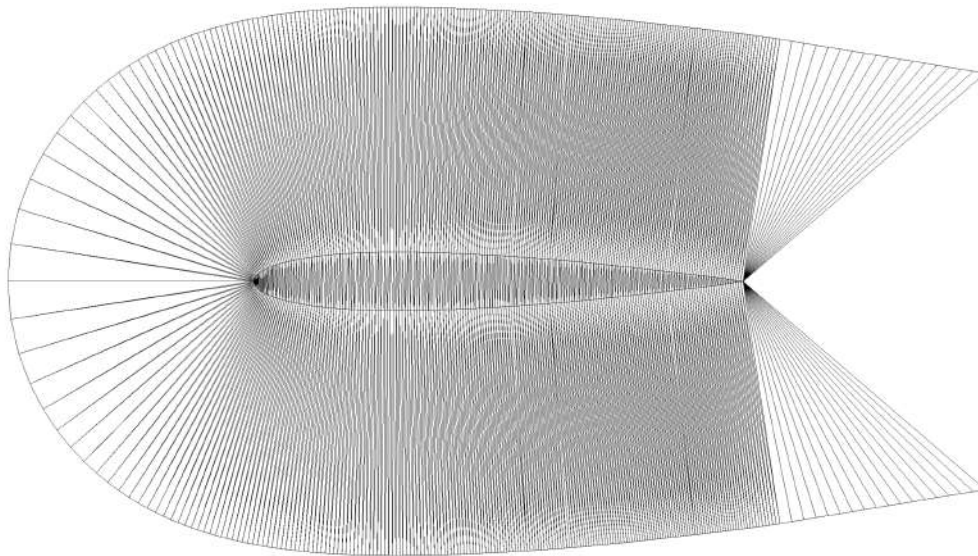
$$\lambda = \frac{y_{p_{i+1}} - y_{p_i}}{x_{p_{i+1}} - x_{p_i}}, \quad \lambda' = \frac{y_{p_{i+2}} - y_{p_{i+1}}}{x_{p_{i+2}} - x_{p_{i+1}}}$$

- Το σημείο Π_{i+1} προκύπτει από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων των δύο ευθειών:

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda' & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_c - y_c \\ \lambda' x_{c'} - y_{c'} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (4.4)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\Pi_{i+1}} = \frac{1}{\lambda' - \lambda} \begin{bmatrix} \lambda' x_{c'} - y_{c'} - \lambda x_c + y_c \\ \lambda'(\lambda x_c - y_c) + \lambda(\lambda' x_{c'} - y_{c'}) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Η εφαρμογή της παραπάνω διαδικασίας στην περίπτωση της αεροτομής NACA 0012 της ενότητας 4.1, οδηγεί στο σχηματισμό ενός πολύ μικρότερου γράφου, ο οποίος καλύπτει μόνο το χωρίο που βρίσκεται κοντά στην αεροτομή. Όμως, ο γράφος που έχει παραχθεί αποτελείται από ομοιόμορφα τρίγωνα, τα οποία έχουν σχετικά μεγάλες ελάχιστες γωνίες, φτιάχνοντας έτσι μία ευέλικτη παραμετροποίηση.



Σχήμα 4.11: Ο γράφος Delaunay γύρω από την αεροτομή NACA 0012 που σχηματίζεται μετά την δημιουργία κυρτού πολυγώνου με βάση τη γεωμετρία (δηλαδή την αεροτομή). Τα σημεία που σχηματίζουν το εξωτερικό όριο του γράφου Delaunay αποτελούν τους μη-ελεγχόμενους (σταθερούς) κόμβους του γράφου και έχουν παραχθεί με βάση τη διαδικασία που περιγράφεται στην ενότητα 4.3.1. Όλα τα τρίγωνα του γράφου (με εξαίρεση το μεγάλο τρίγωνο που βρίσκεται στον ομόρροο της αεροτομής) έχουν μέγεθος συγκρίσιμο με τα γειτονικά τους.

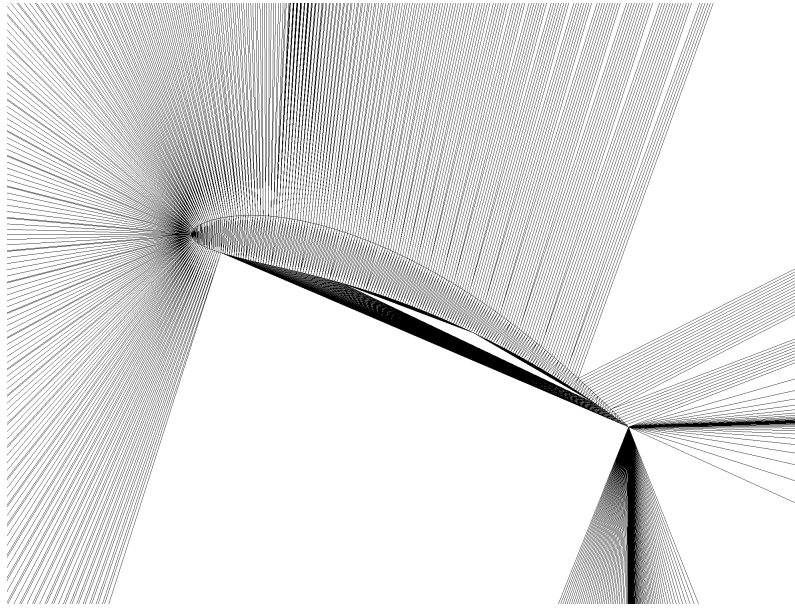
4.4 Ο Γράφος Delaunay σε Μη-Κυρτές Γεωμετρίες

Μία ειδική περίπτωση της μεθόδου παραμόρφωσης πλεγμάτων με γράφους Delaunay που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι η εφαρμογή της σε πλέγματα γύρω από μη-κυρτές γεωμετρίες. Ενώ ο γράφος Delaunay που παράγεται γύρω από κυρτές γεωμετρίες (βλ. ορισμός 2.1.1) παραμετροποιεί το υπολογιστικό χωρίο με ικανοποιητική ακρίβεια (όπως φάνηκε στην εφαρμογή της ενότητας 4.2), η τριγωνοποίηση Delaunay σε μη-κυρτές γεωμετρίες παρουσιάζει κάποιες ιδιαιτερότητες που μπορούν να επιδεινώσουν την ποιότητα του πλέγματος που προκύπτει μετά την παραμόρφωση.

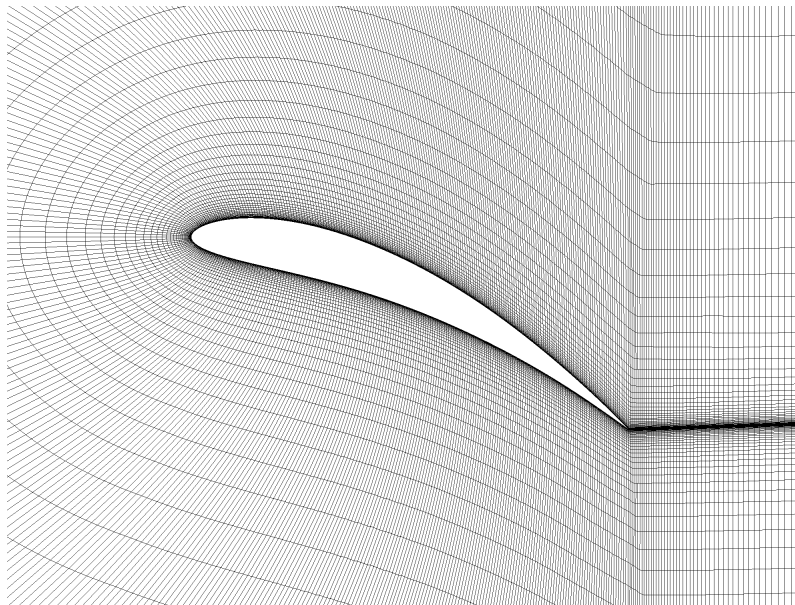
Η ιδιαιτερότητα οφείλεται στο γεγονός ότι σχηματίζονται τρίγωνα, τα οποία βρίσκονται μέσα στο υπολογιστικό χωρίο και των οποίων οι κορυφές είναι αποκλειστικά κόμβοι του ελεγχόμενου ορίου. Για την καλύτερη μετακίνηση των πλεγματικών κόμβων, είναι επιθυμητό κάθε τρίγωνο να σχηματίζεται από έναν ή δύο κόμβους του ελεγχόμενου ορίου – ώστε να μπορεί να διαδοθεί η κίνησή τους (δηλαδή η επιβαλλόμενη παραμόρφωση της γεωμετρίας) στους πλεγματικούς κόμβους εντός του τριγώνου – και από δύο ή έναν κόμβο, αντίστοιχα, του μη-ελεγχόμενου ορίου – ώστε η μετακίνηση των ελεγχόμενων κόμβων να διαδοθεί μέχρι τα εξωτερικά όρια του γράφου.

Ένα παράδειγμα τριγωνοποίησης μη-κυρτής γεωμετρίας δίνεται στο σχήμα 4.12. Στο παράδειγμα αυτό, έχει παραχθεί ο γράφος Delaunay γύρω από την ήδη παραμορφωμένη αεροτομή NACA 0012, με παραμόρφωση που προέκυψε από τη σχέση 4.1 της ενότητας 4.2. Επειδή η – παραμορφωμένη, πλέον – γεωμετρία είναι μη-κυρτή, στην πλευρά υποπίεσης εμφανίζονται πολύ στενά τρίγωνα, τα οποία σχηματίζονται αποκλειστικά από κόμβους της αεροτομής. Παρ' όλο που η τριγωνοποίηση αυτή είναι Delaunay, η παραμετροποίηση του χωρίου δεν οδηγεί σε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Το πλέγμα γύρω από τη μη-κυρτή αεροτομή δίνεται στο σχήμα 4.13.

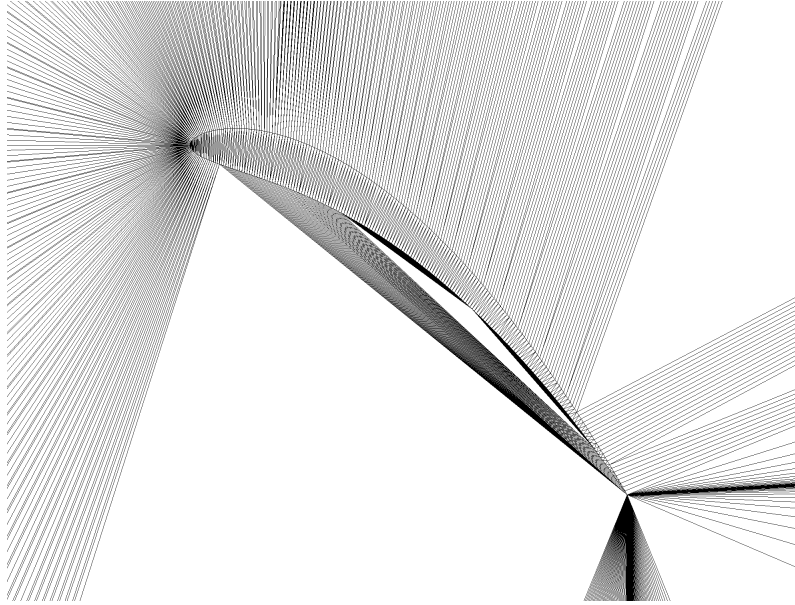
Αν η αεροτομή αυτή παραμορφωθεί περαιτέρω, το πλέγμα που θα προκύψει θα είναι εμφανώς αρνητικά επηρεασμένο από τη μορφή της τριγωνοποίησης. Αυτό συμβαίνει, επειδή ο τρόπος που παραμορφώνονται τα στενά αυτά τρίγωνα κάτω από την πλευρά υποπίεσης δεν είναι κατάλληλος για να διαδώσει την παραμόρφωση της γεωμετρίας στο εσωτερικό του υπολογιστικού πλέγματος (σχήμα 4.14). Συγκεκριμένα, η εναλλαγή από τα πολύ μικρά τρίγωνα (που συνδέονται μόνο με την αεροτομή) στο πολύ μεγάλο (κάτω από τα τρίγωνα αυτά, που σχηματίζεται από δύο κόμβους της αεροτομής και έναν του μη-ελεγχόμενου ορίου) συνοδεύεται και από αντίστοιχη αλλαγή στην ποιότητα του πλέγματος. Έτσι, το πλέγμα που βρίσκεται εντός των τριγώνων αυτών έχει παραμορφωθεί εμφανώς ανομοιόμορφα σε σχέση με την παραμόρφωση του υπόλοιπου πλέγματος (σχήμα 4.15).



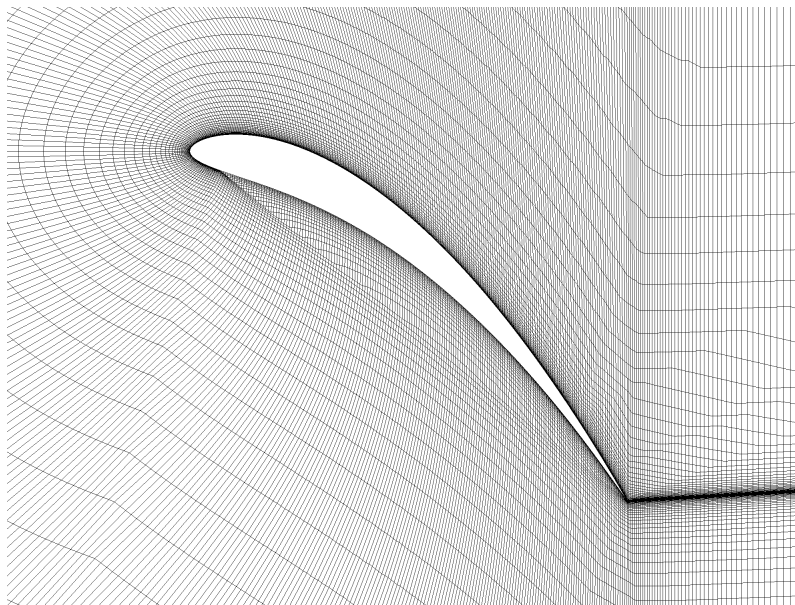
Σχήμα 4.12: Αεροτομή NACA 0012 σε κάμψη. Ο γράφος Delaunay γύρω από την παραμορφωμένη αεροτομή, η οποία είναι, πλέον, μη-κυρτή. Στην πλευρά υποπίεσης σχηματίζονται στενά τρίγωνα, τα οποία αποτελούνται αποκλειστικά από ελεγχόμενους κόμβους, γεγονός που επηρεάζει αρνητικά την παραμετροποίηση που γίνεται. Επιπλέον, στην πλευρά υποπίεσης σχηματίζεται ένα πολύ μεγάλο τρίγωνο, το οποίο καλύπτει ένα ανομοιόμορφα μεγάλο υποσύνολο του υπολογιστικού χωρίου.



Σχήμα 4.13: Αεροτομή NACA 0012 σε κάμψη. Το υπολογιστικό πλέγμα γύρω από την παραμορφωμένη αεροτομή, η οποία, πλέον, είναι μη-κυρτή. Το αρχικό αυτό πλέγμα είναι καλής ποιότητας.



Σχήμα 4.14: Αεροτομή NACA 0012 σε κάμψη. Ο γράφος Delaunay μετά την παραμόρφωση της μη-κυρτής γεωμετρίας. Τα στενά τρίγωνα που σχηματίστηκαν κάτω από την πλευρά υποπίεσης δεν διαδίδουν ικανοποιητικά την παραμόρφωση της γεωμετρίας στο εσωτερικό του υπολογιστικού χωρίου.



Σχήμα 4.15: Αεροτομή NACA 0012 σε κάμψη. Το υπολογιστικό πλέγμα μετά την παραμόρφωση της μη-κυρτής γεωμετρίας. Οι πλεγματικές γραμμές κάτω από την πλευρά υποπίεσης είναι εμφανώς επηρεασμένες από τη μορφή της τριγωνοποίησης Delaunay.

4.4.1 Τροποποίηση της Τριγωνοποίησης Delaunay σε Μη-Κυρτές Γεωμετρίες

Για την καλύτερη παραμετροποίηση του υπολογιστικού χωρίου σε περιπτώσεις μη-κυρτών γεωμετριών, σε αυτήν τη διπλωματική εργασία προτείνεται ένας τρόπος διόρθωσης/τροποποίησης της τριγωνοποίησης Delaunay, έτσι ώστε ο τελικός γράφος που θα προκύψει να μπορεί να μετακινεί το πλέγμα διατηρώντας την αρχική ποιότητά του.

Η απαίτηση που τίθεται για το σχηματισμό των τριγώνων είναι η εξής: καθένα από τα τρίγωνα του γράφου πρέπει να σχηματίζεται από έναν κόμβο του μη-ελεγχόμενου ορίου και δύο διαδοχικούς ελεγχόμενους κόμβους ή από δύο κόμβους του μη-ελεγχόμενου ορίου και έναν ελεγχόμενο κόμβο ή από τρεις κόμβους του μη-ελεγχόμενου ορίου.

Η ικανοποίηση της παραπάνω απαίτησης οδηγεί σε σημαντικά καλύτερη παραμετροποίηση του υπολογιστικού χωρίου, σε σύγκριση με κάποια τριγωνοποίηση που δεν ικανοποιεί την απαίτηση αυτή.

Αν η τριγωνοποίηση Delaunay ενός δεδομένου συνόλου (ελεγχόμενων και μη-ελεγχόμενων) σημείων οδηγήσει σε τρίγωνα που δεν ικανοποιούν την παραπάνω απαίτηση, τότε η τριγωνοποίηση Delaunay τροποποιείται ως εξής:

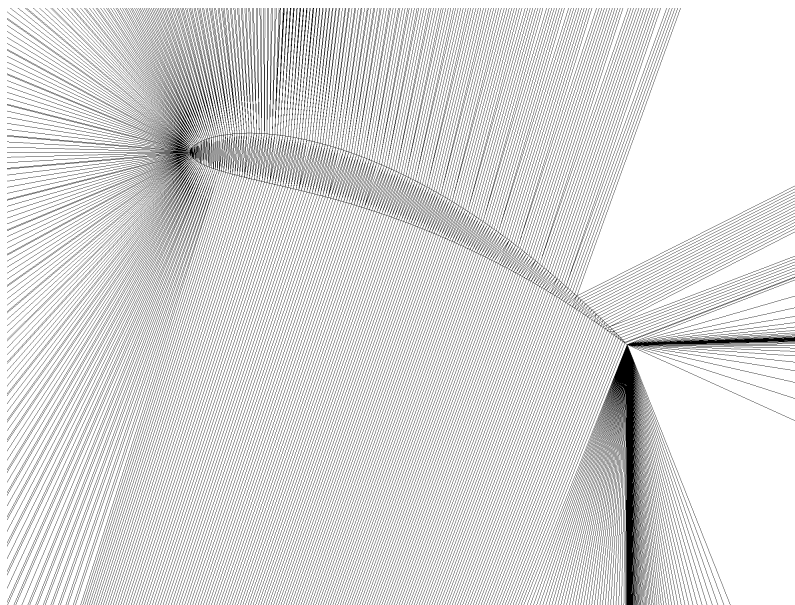
Βήμα 1: Αρχικά, εντοπίζεται το τρίγωνο αυτό, το οποίο σχηματίζεται από έναν μη-ελεγχόμενο κόμβο και από δύο μη-διαδοχικούς κόμβους της γεωμετρίας. Το τρίγωνο αυτό, στην πλευρά των γεωμετρικών (ελεγχόμενων) κόμβων, πρέπει να συνδέεται με τρίγωνο το οποίο σχηματίζεται αποκλειστικά από ελεγχόμενους κόμβους (με τουλάχιστον δύο από τους τρεις κόμβους να είναι διαδοχικοί).

Βήμα 2: Στα δύο αυτά τρίγωνα εκτελείται αλλαγή της διαγωνίου (diagonal swapping, βλ. ενότητα 2.2). Μετά την αλλαγή της διαγωνίου, τα τρίγωνα αυτά παύουν να ικανοποιούν τις συνθήκες της τριγωνοποίησης Delaunay αλλά τουλάχιστον ένα από τα δύο νέα τρίγωνα που θα προκύψουν θα σχηματίζεται από δύο διαδοχικούς ελεγχόμενους κόμβους και έναν μη-ελεγχόμενο κόμβο – θα ικανοποιεί, δηλαδή, την απαίτηση που τέθηκε προηγουμένως.

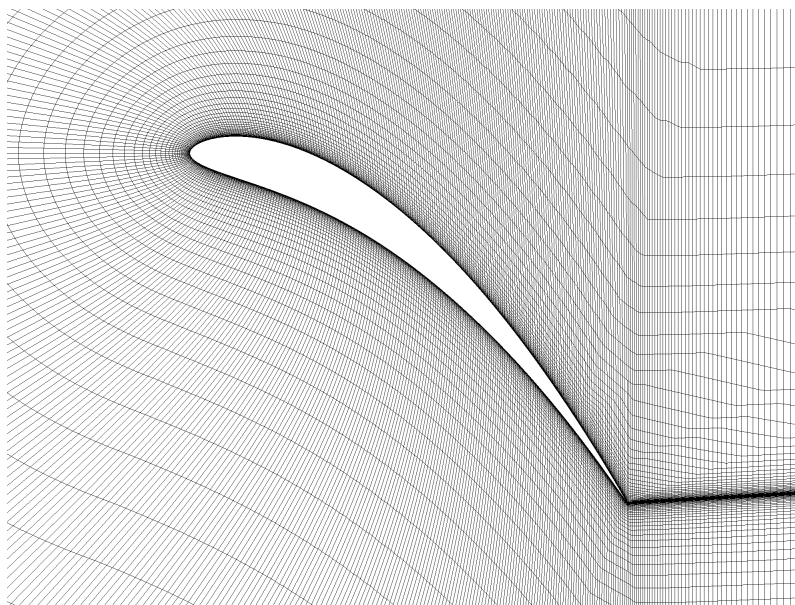
Βήμα 3: Επαναλαμβάνονται τα βήματα 1 και 2 μέχρις ότου όλα τα τρίγωνα του γράφου να ικανοποιούν την απαίτηση που τέθηκε.

Η παραπάνω διαδικασία τροποποίησης του γράφου Delaunay προγραμματίστηκε και ενσωματώθηκε στο λογισμικό παραμόρφωσης 2Δ πλεγμάτων που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της εργασίας αυτής, για τη βελτίωση των γράφων Delaunay που παραμετροποιούν υπολογιστικά χωρία γύρω από μη-κυρτές γεωμετρίες.

Μετά την παραπάνω διόρθωση, ο γράφος της μη-κυρτής αεροτομής που παρουσιάστηκε στο σχήμα 4.12 τροποποιείται σε αυτόν του σχήματος 4.16. Η μετακίνηση του πλέγματος με τη χρήση του διορθωμένου γράφου οδηγεί στο πλέγμα του σχήματος 4.17, το οποίο είναι εμφανώς καλύτερης ποιότητας.



Σχήμα 4.16: Αεροτομή NACA 0012 σε κάμψη. Ο διορθωμένος γράφος Delaunay γύρω από την παραμορφωμένη (μη-κυρτή) αεροτομή.



Σχήμα 4.17: Αεροτομή NACA 0012 σε κάμψη. Το υπολογιστικό πλέγμα μετά την παραμόρφωση της μη-κυρτής γεωμετρίας, με τη χρήση του διορθωμένου γράφου. Το παραμορφωμένο αυτό πλέγμα έχει εμφανώς καλύτερη ποιότητα από αυτό που προκύπτει με τη χρήση του αρχικού (μη-διορθωμένου) γράφου Delaunay (σχήμα 4.15).

4.5 Η Μέθοδος Γράφων Delaunay με Παρεμβολή της Στροφής

Μέχρι τώρα, οι νέες θέσεις των πλεγματικών κόμβων προέκυπταν από την παρεμβολή των νέων θέσεων των κορυφών του τριγώνου στα οποία ανήκει ο κάθε κόμβος, με τη χρήση των βαρυκεντρικών συντεταγμένων που αντιστοιχούν στον κόμβο αυτό (σχέση (3.11)). Στη γενική περίπτωση παραμόρφωσης της βασικής γεωμετρίας, η παρεμβολή αυτή οδηγεί σε ένα νέο πλέγμα ικανοποιητικής ποιότητας. Όμως, σε περιπτώσεις μεγάλων στροφών της γεωμετρίας, η ποιότητα του πλέγματος κοντά στα τοιχώματα δεν διατηρείται. Αυτό συμβαίνει, επειδή η παρεμβολή αυτή λαμβάνει υπόψη μόνο τη μετατόπιση των ελεγχόμενων κόμβων του πλέγματος ενώ η στροφή των πλευρών που σχηματίζουν τη γεωμετρία (δηλαδή των ευθύγραμμων τμημάτων που σχηματίζονται από δύο διαδοχικούς ελεγχόμενους κόμβους) αγνοείται.

Για τη βελτίωση της ποιότητας του πλέγματος κοντά στη γεωμετρία, εκτός από τη μετατόπιση των κόμβων της γεωμετρίας, μπορεί να ληφθεί υπόψη και η στροφή τους (όπως προτείνεται στο [40]). Σε αυτή τη διπλωματική εργασία, προτείνεται μία εναλλακτική παρεμβολή, η οποία λαμβάνει υπόψη της και την στροφή της γεωμετρίας λόγω της παραμόρφωσης (δηλαδή την αλλαγή της κλίσης της καμπύλης που σχηματίζει τη γεωμετρία).

Για τη νέα αυτή παρεμβολή, ακολουθούνται τα εξής βήματα:

Βήμα 1: Αρχικά, υπολογίζεται η στροφή του κάθε κόμβου της γεωμετρίας, μετά από την παραμόρφωσή της. Ως στροφή ενός κόμβου λαμβάνεται η γωνία στροφής του μοναδιαίου διανύσματος που εφάπτεται της γεωμετρίας στον κόμβο αυτό, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.18. Για κάθε ελεγχόμενο κόμβο i , η γωνία αυτή προκύπτει ως εξής:

$$\delta\alpha_i = \tan^{-1}\left(\frac{\hat{t}_{i,y}^{new}}{\hat{t}_{i,x}^{new}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\hat{t}_{i,y}}{\hat{t}_{i,x}}\right) \quad (4.6)$$

όπου \hat{t}_i και \hat{t}_i^{new} τα εφαπτόμενα στη γεωμετρία μοναδιαία διανύσματα, υπολογιζόμενα με προσέγγιση δεύτερης τάξης:

$$\hat{t}_i = \frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_{i-1}}{\|\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_{i-1}\|}, \quad \hat{t}_i^{new} = \frac{\vec{r}_{i+1}^{new} - \vec{r}_{i-1}^{new}}{\|\vec{r}_{i+1}^{new} - \vec{r}_{i-1}^{new}\|} \quad (4.7)$$

Για τους κόμβους του μη-ελεγχόμενου ορίου του γράφου, η στροφή $\delta\alpha_i$ λαμβάνεται ίση με μηδέν.

Βήμα 2: Έχοντας υπολογίσει τη γωνία στροφής του κάθε κόμβου του γράφου, η νέα

θέση των πλεγματικών κόμβων προκύπτει από τη σχέση:

$$\vec{r}_N^{new} = w_i \vec{r}_i^{new} + w_j \mathbf{R}_{\theta_i} (w_j \vec{r}_j^{new} - \vec{r}_i^{new}) \quad (4.8)$$

όπου \mathbf{R}_{θ_i} το μητρώο περιστροφής κατά γωνία θ_i :

$$\mathbf{R}_{\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

με

$$\theta_i = \delta\alpha_i \phi\left(\frac{\|w_j \vec{r}_j^{new} - \vec{r}_i^{new}\|}{R_{RBF}}\right) \quad (4.10)$$

τη γωνία περιστροφής του κόμβου N γύρω από τον κόμβο i του τριγώνου στο οποίο ανήκει, η οποία αντιστοιχεί στη γωνία στροφής $\delta\alpha_i$ του κόμβου i , πολλαπλασιασμένη με τη συνάρτηση ακτινικής βάσης (RBF) ακτίνας R_{RBF} , η οποία εδώ επιλέγεται να είναι η Wendland's C2:

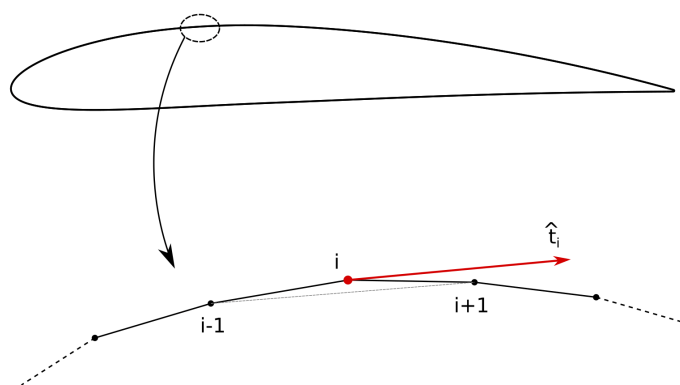
$$\phi(\xi) = (1 - \xi)^4(4\xi + 1) \quad (4.11)$$

Με την παρεμβολή αυτή, ο κάθε πλεγματικός κόμβος, αφού μετακινηθεί στη νέα του θέση, σύμφωνα με την παρεμβολή της σχέσης (3.11), στη συνέχεια περιστρέφεται γύρω από καθεμία από τις τρεις κορυφές του τριγώνου στο οποίο ανήκει, κατά γωνία ανάλογη της γωνίας στροφής του κόμβου της κορυφής αυτής, η οποία, όμως, αποσβένυται με τη χρήση κατάλληλης συνάρτησης ακτινικής βάσης (RBF), έτσι ώστε η περιστροφή αυτή να περιορίζεται μόνο στους κόμβους που βρίσκονται κοντά στη γεωμετρία. Οι μη-ελεγχόμενοι κόμβοι του γράφου έχουν μηδενική γωνία στροφής, άρα δεν προκαλούν περιστροφή του πλεγματικού κόμβου γύρω από αυτούς, ενώ η κάθε «διορθωτική» περιστροφή πολλαπλασιάζεται και με το αντίστοιχο βάρος w_i για καλύτερο έλεγχο της ποιότητας του πλέγματος που προκύπτει.

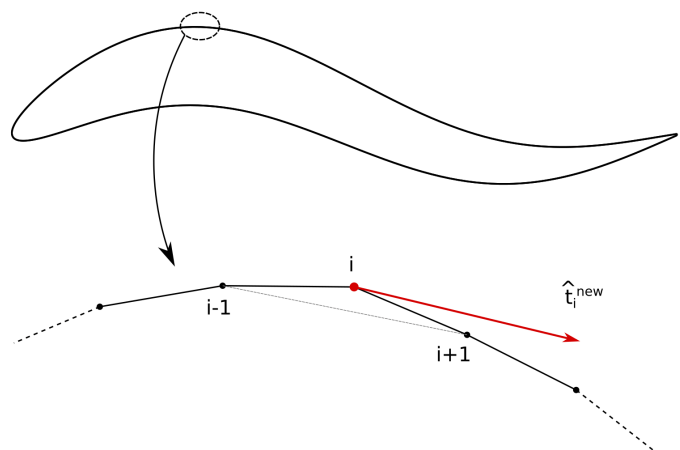
Ένα απλοποιημένο παράδειγμα του τρόπου λειτουργίας της παρεμβολής αυτής δίνεται στο σχήμα 4.19. Στο παράδειγμα του σχήματος αυτού, η πλεγματική γραμμή (με γκρι χρώμα) δεν ακολουθεί τη στροφή της γεωμετρίας, όταν η παρεμβολή της στροφής παραλείπεται. Αντίθετα, με την παρεμβολή της στροφής, η πλεγματική γραμμή «αντιλαμβάνεται» τη στροφή της γεωμετρίας και μετακινείται, έτσι ώστε κοντά στο τοίχωμα να διατηρήσει την καθετότητά της. Το τρίγωνο Delaunay μέσα στο οποίο ανήκει αυτή η πλεγματική γραμμή (δηλαδή οι κόμβοι που την αποτελούν, αφού η μέθοδος βλέπει μόνο σημεία και όχι τοπολογία) παραμένει ουσιαστικά απαραμόρφωτο μετά τη μετακίνηση της γεωμετρίας. Ο ελεγχόμενος κόμβος του τριγώνου αυτού δεν μετακινείται σημαντικά, όμως η κλίση της καμπύλης της γεωμετρίας (που αριθμητικά αποτελεί ένα

πολύγωνο) στη θέση του κόμβου αυτού έχει αλλάξει. Η αλλαγή αυτής της κλίσης λαμβάνεται υπόψη από την παρεμβολή της στροφής που προτάθηκε (σχέση (4.8)) και η θέση των πλεγματικών κόμβων διορθώνεται κατάλληλα με την περιστροφή τους κατά κατάλληλη γωνία γύρω από τον ελεγχόμενο κόμβο.

Στην ενότητα 4.6 παρουσιάζεται ένα πρόβλημα περιστροφής μίας αεροτομής, στο οποίο εφαρμόζεται η παρεμβολή της στροφής, οδηγώντας σε σημαντική βελτίωση της ποιότητας του πλέγματος.

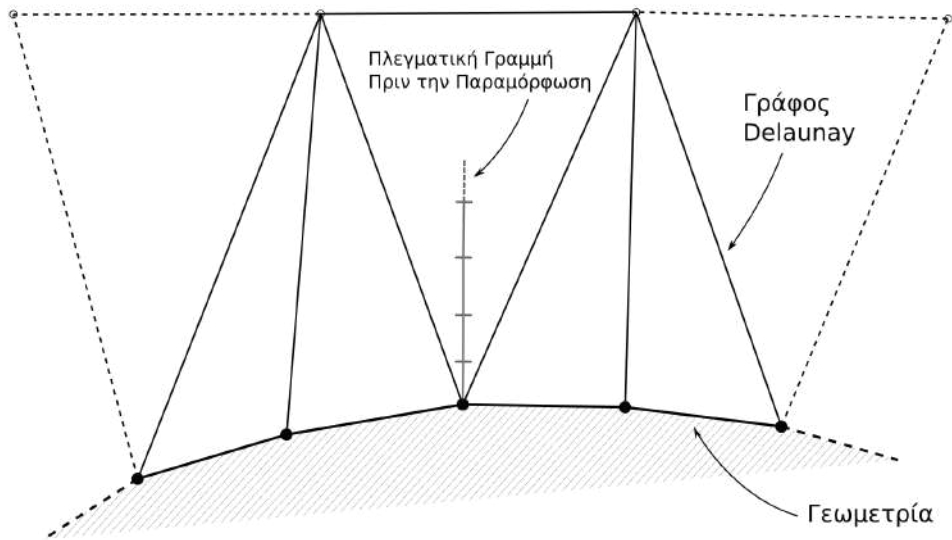


(α') Το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{t}_i πριν την παραμόρφωση της γεωμετρίας.

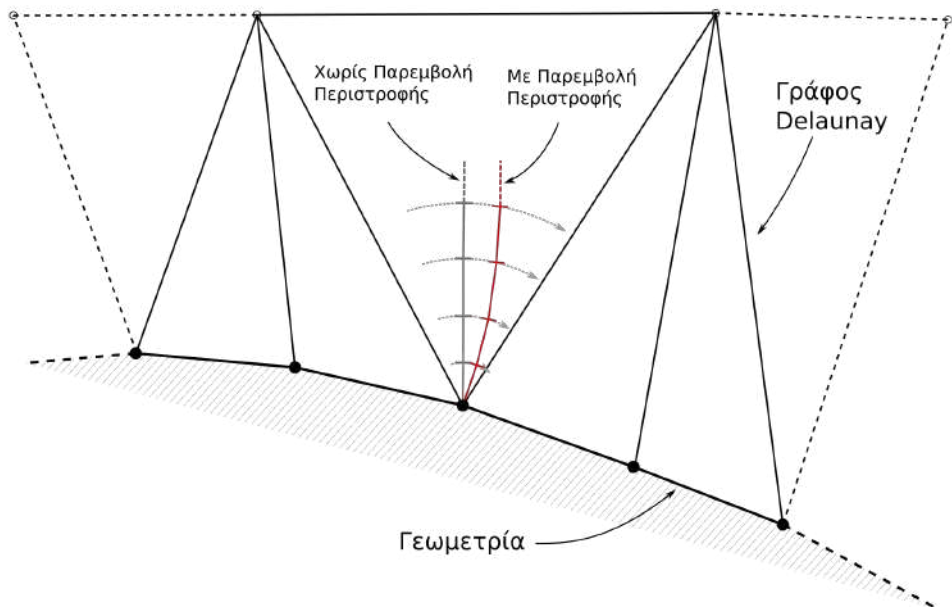


(β') Το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{t}_i μετά την παραμόρφωση της γεωμετρίας.

Σχήμα 4.18: Παρεμβολή της στροφής. Υπολογισμός της γωνίας στροφής του εφαιπτόμενου στη γεωμετρία μοναδιαίου διανύσματος \hat{t}_i , στον κόμβο i .



(α') Η πλεγματική γραμμή (με γκρι/ανοικτό χρώμα) πριν την παραμόρφωση της γεωμετρίας.



(β') Η πλεγματική γραμμή μετά την παραμόρφωση της γεωμετρίας. Με γκρι χρώμα δίνεται η πλεγματική γραμμή που προκύπτει χωρίς την παρεμβολή της στροφής, ενώ με κόκκινο χρώμα δίνεται η πλεγματική γραμμή που προκύπτει με την παρεμβολή της στροφής.

Σχήμα 4.19: Παρεμβολή της στροφής. Απλοποιημένο παράδειγμα εφαρμογής της παρεμβολής της στροφής.

4.6 Εφαρμογή στην Αεροτομή NACA 4412

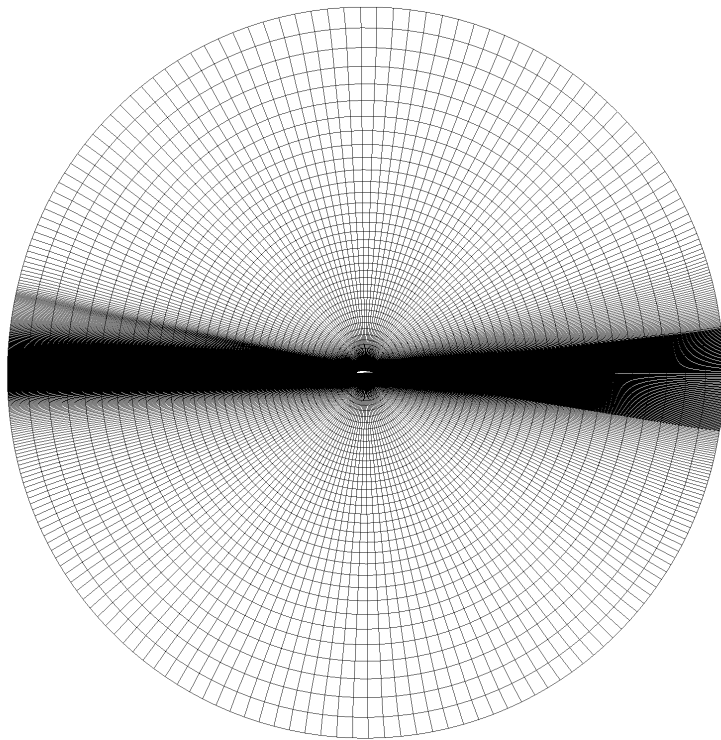
Στην ενότητα αυτή, γίνεται εφαρμογή της μεθόδου γράφων Delaunay στην παραμόρφωση δομημένου πλέγματος τύπου-O γύρω από την αεροτομή NACA 4412, η οποία έχει καμπυλότητα. Το αρχικό πλέγμα δίνεται στο σχήμα 4.20. Το πλέγμα αποτελείται από 121992 κόμβους και 60398 κελιά, ενώ κοντά στα τοιχώματα έχει κατάλληλη πυκνωση για χρήση με μοντέλα τύρβης τύπου Low-Re.

Στο παράδειγμα αυτό, εφαρμόζονται δύο παραμορφώσεις. Στην πρώτη εφαρμογή, η αεροτομή περιστρέφεται γύρω από την ακμή πρόσπτωσης ενώ στη δεύτερη η αεροτομή παραμορφώνεται ημιτονοειδώς.

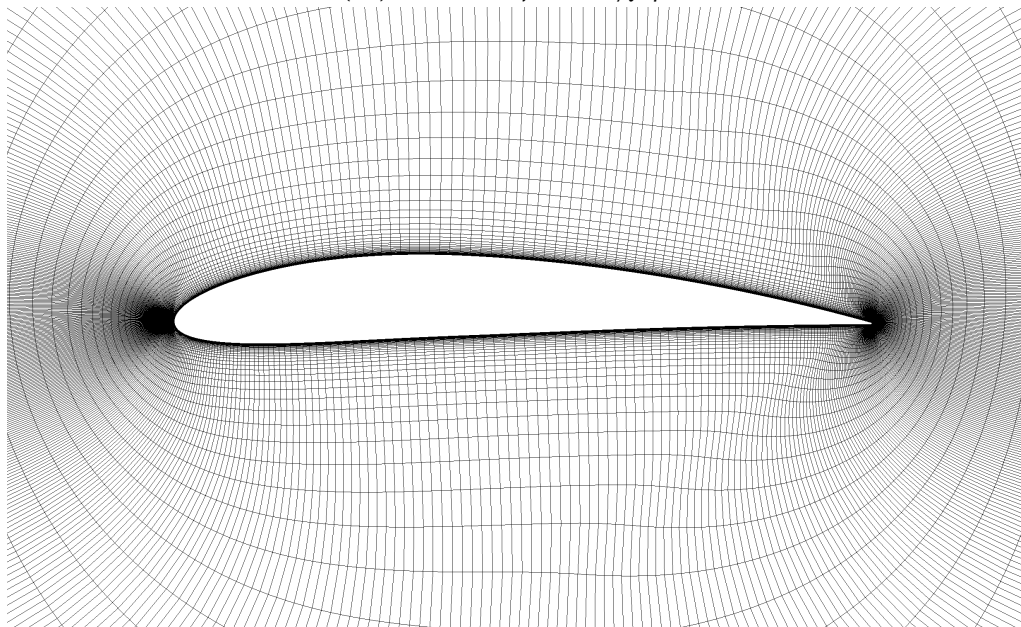
Στην πρώτη εφαρμογή, γίνεται χρήση της απλής παρεμβολής (εξ. (3.11)) και της παρεμβολής της στροφής (εξ. (4.8)), ώστε να συγκριθούν τα αποτελέσματα των δύο αυτών παρεμβολών. Επίσης, συγκρίνεται το πλέγμα που προκύπτει όταν η αεροτομή περιστρέφεται απευθείας στην τελική της θέση, χωρίς ενδιάμεση ανανέωση του γράφου Delaunay, με το πλέγμα που προκύπτει με ενδιάμεση ανανέωση του γράφου.

Στη δεύτερη εφαρμογή, η παραμορφωμένη γεωμετρία είναι εξαιρετικά μη-κυρτή. Για το λόγο αυτό, γίνεται διόρθωση του γράφου, όπως αυτή περιγράφηκε στην ενότητα 4.4.1, ενώ τα αποτελέσματα του διορθωμένου γράφου συγκρίνονται με αυτά του αρχικού γράφου Delaunay.

Επειδή η αρχική αεροτομή έχει καμπυλότητα, που την καθιστά ελαφρώς μη-κυρτή, ο γράφος που χρησιμοποιείται για την περιστροφή της αεροτομής τροποποιείται σύμφωνα με τη διαδικασία που περιγράφεται στην ενότητα 4.4.1. Ο γράφος γύρω από την αρχική γεωμετρία, που προκύπτει μετά τη διόρθωση, δίνεται στο σχήμα 4.21.

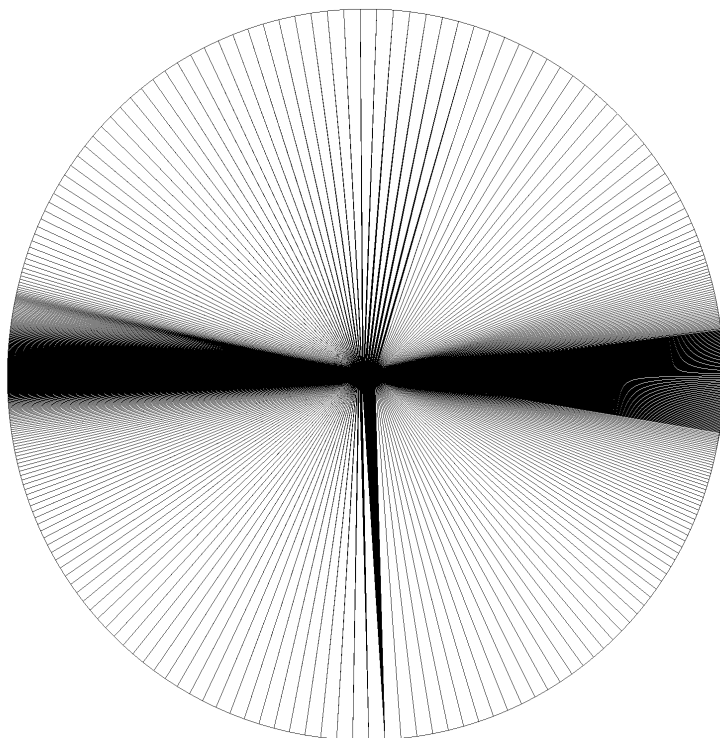


(α') Το υπολογιστικό χωρίο.

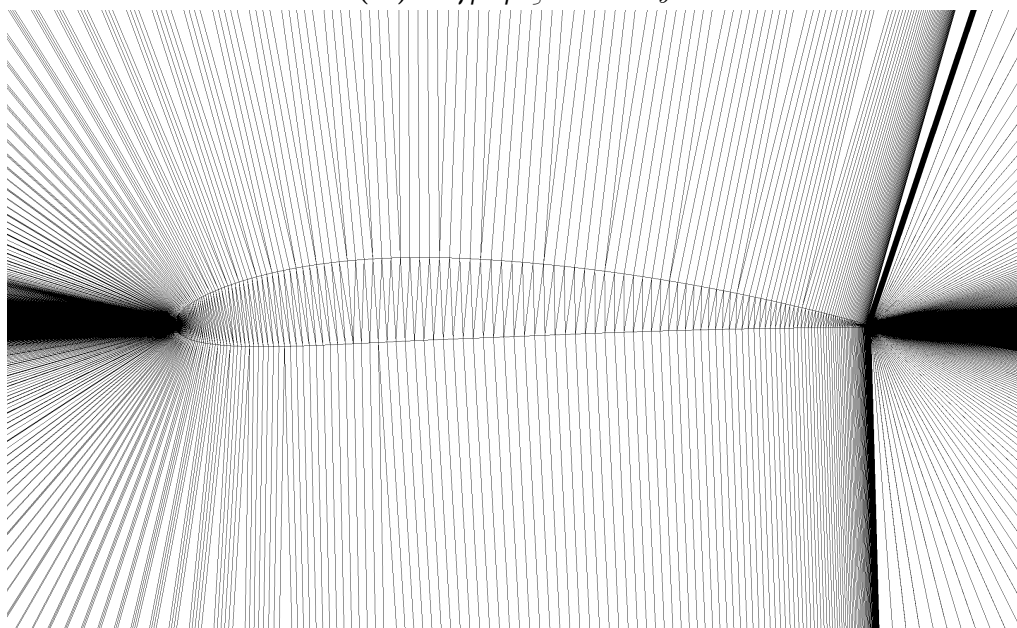


(β') Το υπολογιστικό πλέγμα κοντά στην αεροτομή.

Σχήμα 4.20: Εφαρμογή στην αεροτομή NACA 4412. Το δομημένο πλέγμα τύπου-O γύρω από την αεροτομή.



(α') Ο γράφος Delaunay.



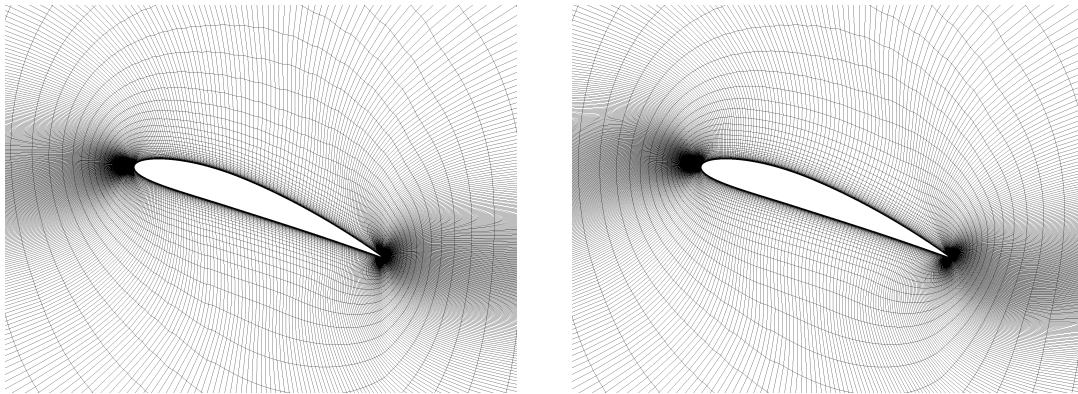
(β') Ο γράφος Delaunay κοντά στην αεροτομή.

Σχήμα 4.21: Εφαρμογή στην αεροτομή NACA 4412. Ο γράφος του υπολογιστικού χωρίου της αεροτομής. Ο γράφος αυτός έχει προκύψει μετά από διόρθωση του γράφου Delaunay για μη-κυρτές γεωμετρίες, αφού η αεροτομή έχει μία ελαφρά καμπυλότητα.

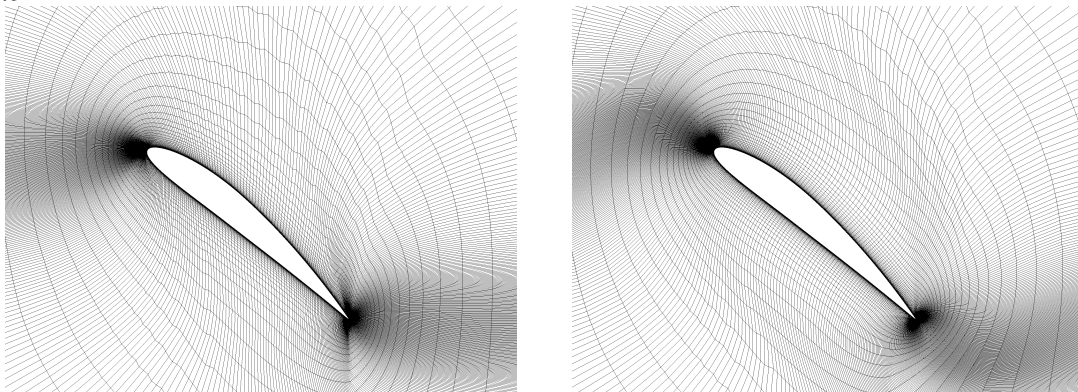
4.6.1 Περιστροφή της Αεροτομής Χωρίς Ανανέωση του Γράφου

Η αεροτομή περιστρέφεται ωρολογιακά γύρω από την ακμή πρόσπτωσης (με συντεταγμένες $(0, 0)$), σε γωνία α από 0° έως 40° , με βήμα 5° .

Σε κάθε βήμα, υπολογίζεται το πλέγμα από τον αρχικό γράφο Delaunay, που σχηματίστηκε από την αρχική γεωμετρία ($\alpha = 0^\circ$), δηλαδή ο γράφος δεν ανανεώνεται μετά από κάθε βήμα. Σε κάθε νέα θέση υπολογίζονται οι μετρικές ποιότητας του πλέγματος q και s . Η παραμόρφωση του πλέγματος με την περιστροφή της αεροτομής γίνεται με την απλή παρεμβολή (εξ. (3.11)) και με την παρεμβολή της στροφής (εξ. (4.8)). Τα αποτελέσματα των δύο παρεμβολών συγκρίνονται ως προς τις μετρικές ποιότητες του πλέγματος.

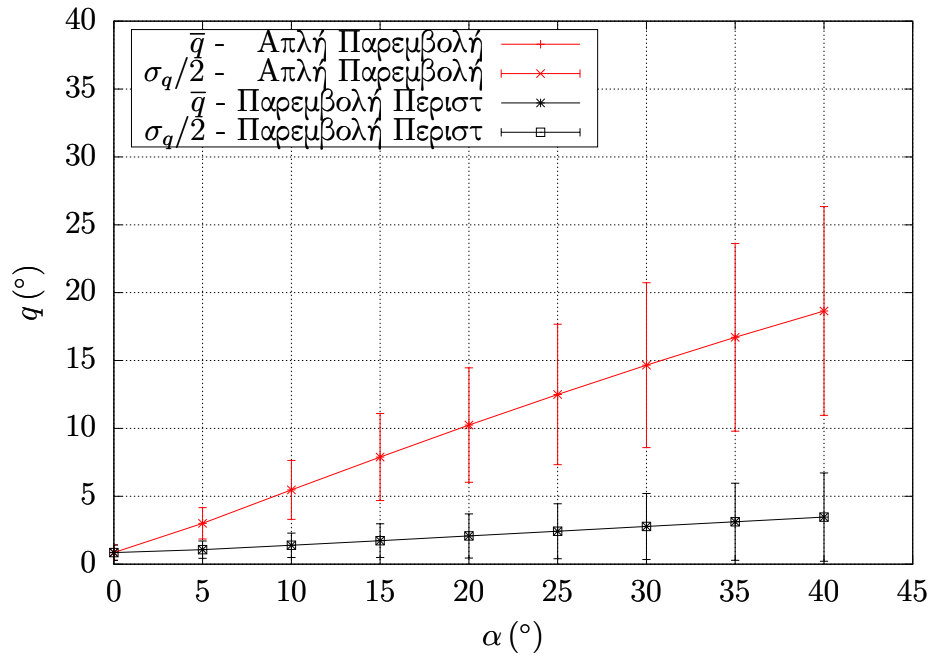


(α') $\alpha = 20^\circ$. Χωρίς Παρεμβολή Περιστροφής. (β') $\alpha = 20^\circ$. Με Παρεμβολή Περιστροφής.

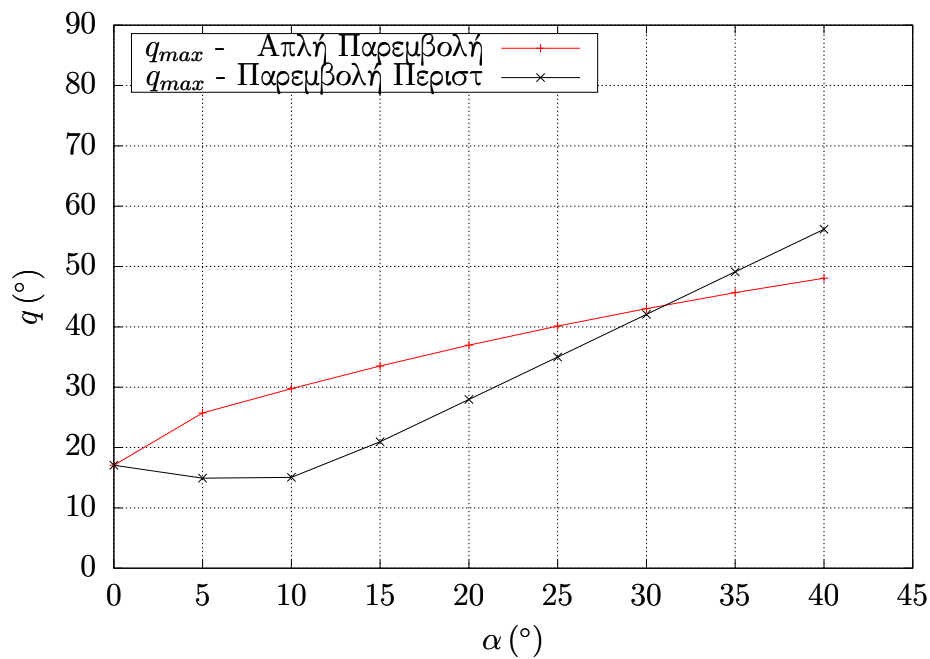


(γ') $\alpha = 40^\circ$. Χωρίς Παρεμβολή Περιστροφής. (δ') $\alpha = 40^\circ$. Με Παρεμβολή Περιστροφής.

Σχήμα 4.22: Περιστροφή της αεροτομής NACA 4412 χωρίς ανανέωση του γράφου. Με απλή παρεμβολή (αριστερά) και με παρεμβολή της στροφής (δεξιά). Το παραμορφωμένο πλέγμα γύρω από την αεροτομή, για γωνίες περιστροφής 20° και 40° ως προς την αρχική θέση.

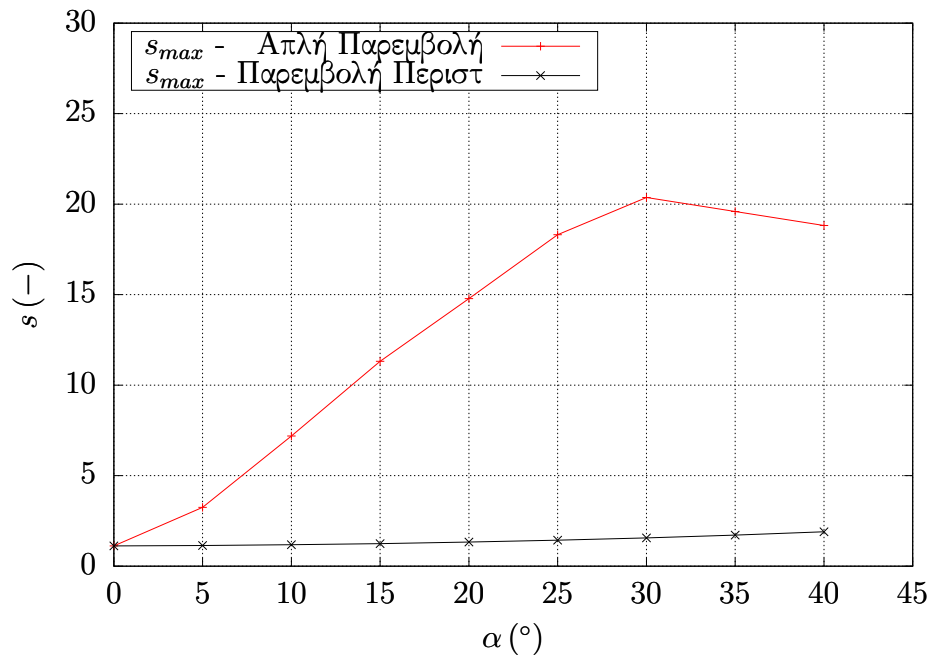


(α') Η μεταβολή της μέσης τιμής \bar{q} της μη-ορθογωνικότητας.



(β') Η μεταβολή της μέγιστης τιμής q_{max} της μη-ορθογωνικότητας.

Σχήμα 4.23: Περιστροφή της αεροτομής NACA 4412 χωρίς ανανέωση του γράφου. Με απλή παρεμβολή και με παρεμβολή στροφής. Σύγκριση της μεταβολής της μέσης τιμής \bar{q} και της μέγιστης τιμής q_{max} της μη-ορθογωνικότητας του πλέγματος, με την αύξηση της γωνίας περιστροφής α .



Σχήμα 4.24: Περιστροφή της αεροτομής NACA 4412 χωρίς ανανέωση του γράφου. Με απλή παρεμβολή και με παρεμβολή στροφής. Σύγκριση της μεταβολής της μέγιστης τιμής s_{max} της στρεβλότητας του πλέγματος, με την αύξηση της γωνίας περιστροφής α .

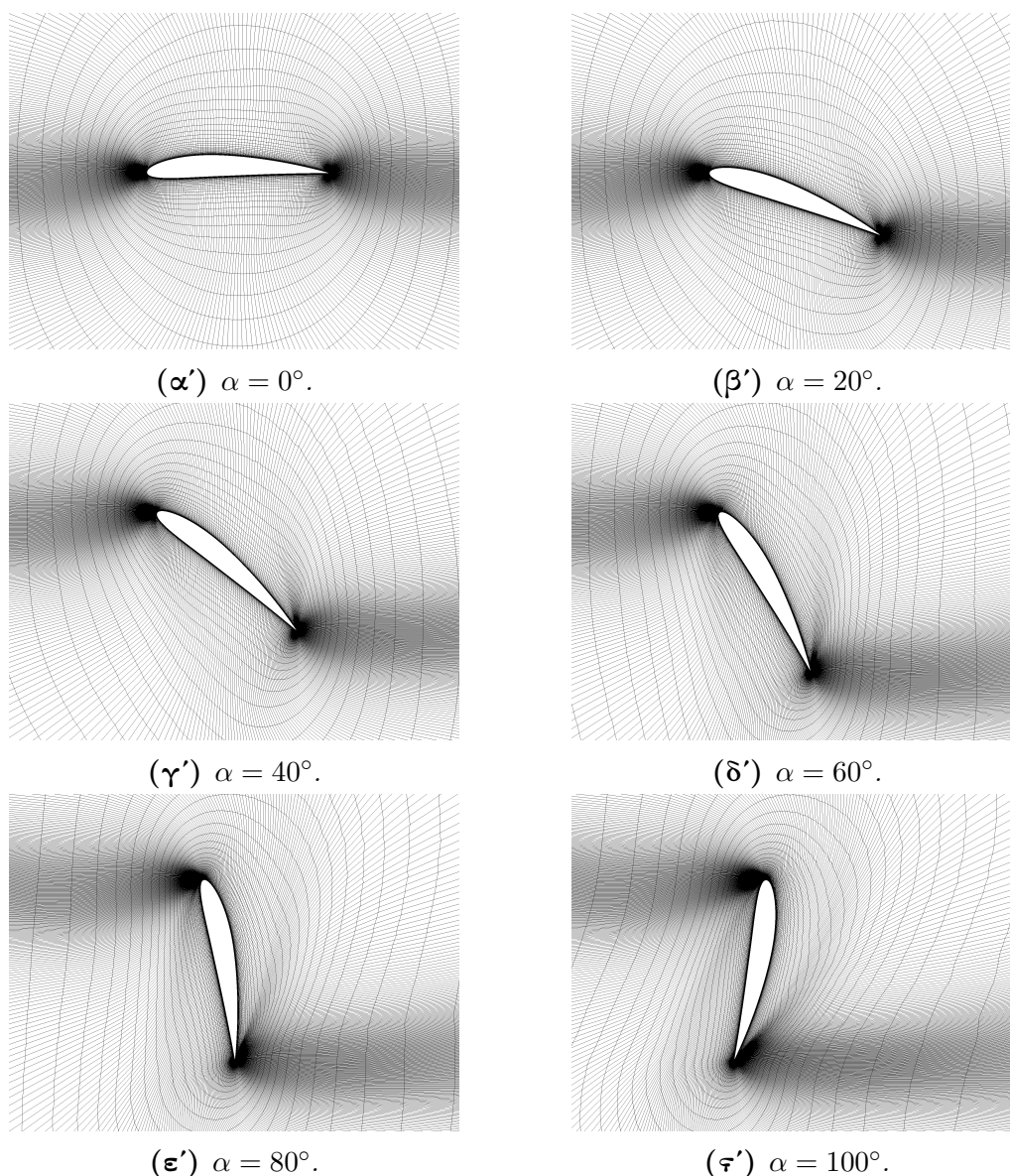
4.6.2 Περιστροφή της Αεροτομής με Ανανέωση του Γράφου

Η αεροτομή περιστρέφεται ωρολογιακά γύρω από την ακμή πρόσπτωσης (με συντεταγμένες $(0, 0)$), σε γωνίες $\alpha = 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ και 100° . Σε αντίθεση με την προηγούμενη εφαρμογή, ο γράφος ανανεώνεται σε ενδιάμεσες θέσεις, ενώ πάλι υπολογίζονται οι μετρικές της ποιότητας του πλέγματος q και s . Η ανανέωση του γράφου γίνεται ανά $5^\circ, 10^\circ$ και 20° , ενώ συγκρίνονται οι μετρικές που προκύπτουν για τα διαφορετικά βήματα ανανέωσης του γράφου.

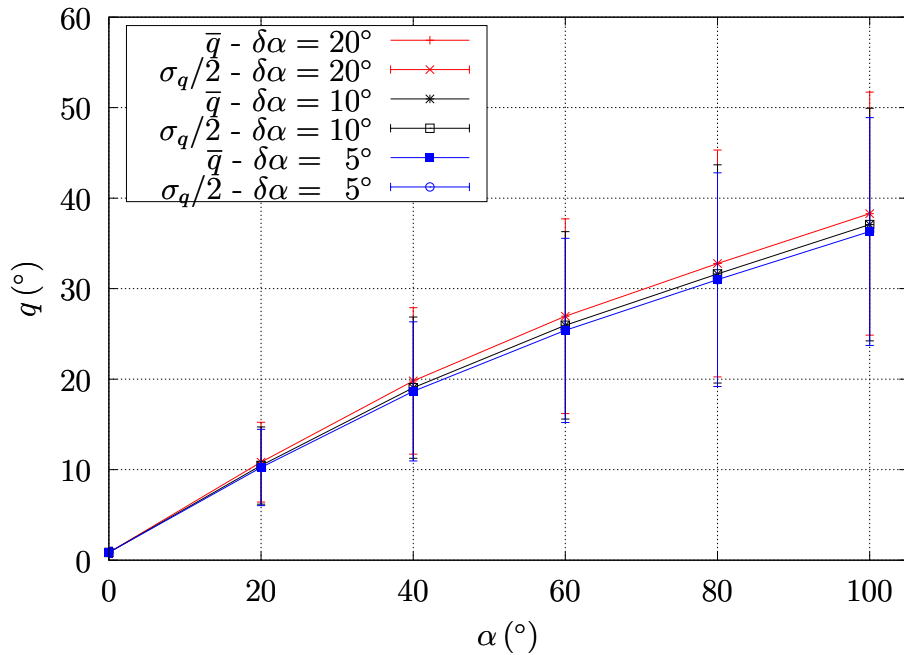
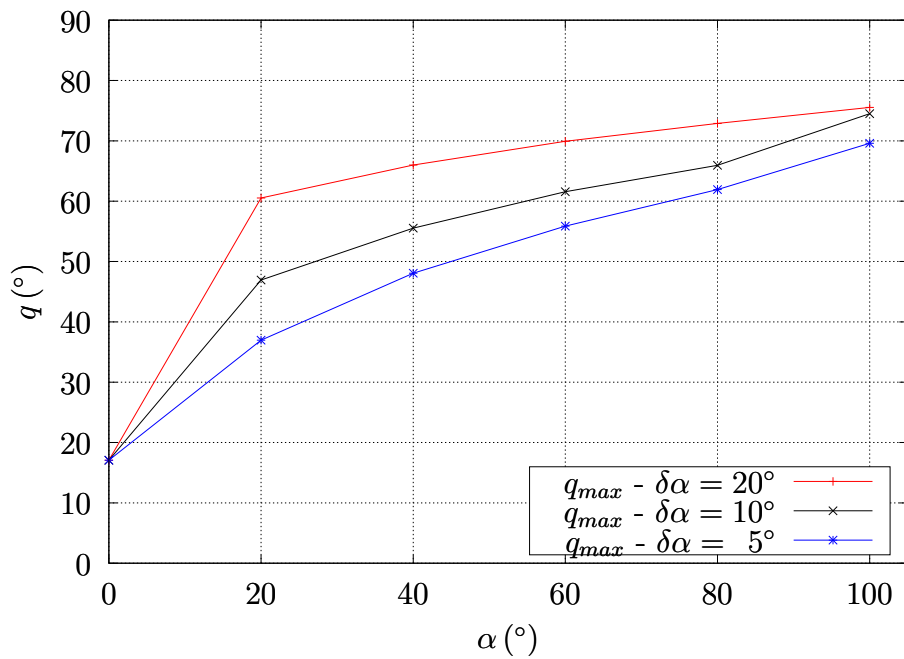
Και σε αυτήν την εφαρμογή, η παραμόρφωση του πλέγματος γίνεται με απλή παρεμβολή (εξ. (3.11)) και με παρεμβολή της στροφής (εξ. (4.8)), ενώ τα αποτελέσματα των δύο παρεμβολών συγκρίνονται ως προς τις μετρικές ποιότητας του πλέγματος.

Εφαρμογή της Απλής Παρεμβολής

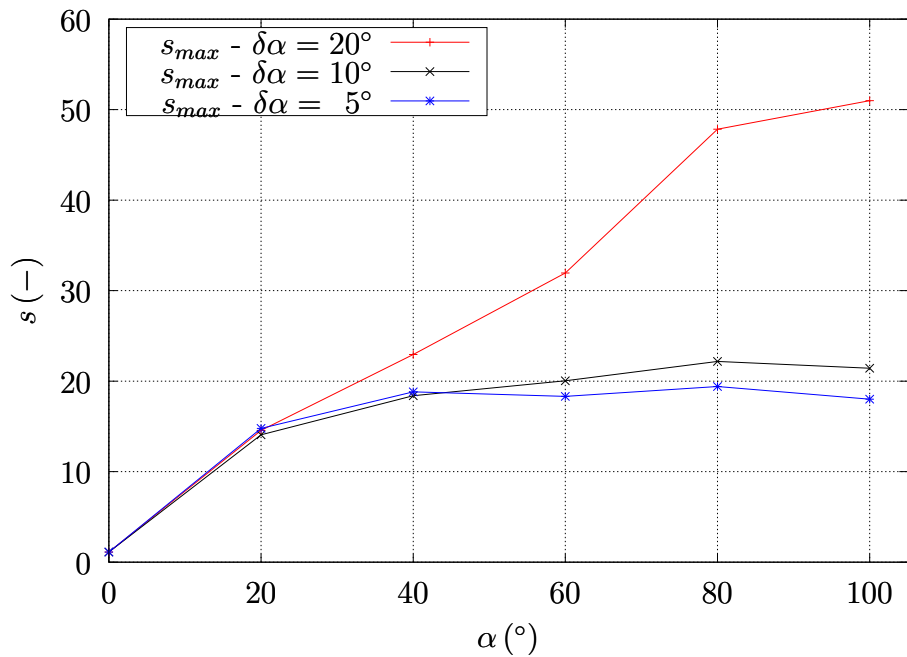
Αρχικά, εφαρμόζεται η απλή παρεμβολή για τη μετατόπιση των πλεγματικών κόμβων. Η αεροτομή περιστρέφεται στις προκαθορισμένες θέσεις, ενώ εξετάζονται οι τρεις περιπτώσεις ανανέωσης του γράφου: ανά 5° , 10° και 20° . Ενδεικτικά, δίνεται το πλέγμα που προκύπτει με ανανέωση του γράφου ανά 10° (σχήμα 4.25). Οι μετρικές του πλέγματος για τα διάφορα βήματα συγκρίνονται στα σχήματα 4.26 και 4.27.



Σχήμα 4.25: Περιστροφή της αεροτομής NACA 4412 με ανανέωση του γράφου. Εφαρμογή της απλής παρεμβολής. Το παραμορφωμένο πλέγμα γύρω από την αεροτομή, για διάφορες γωνίες περιστροφής. Ο γράφος ανανεώνεται ανά 10° .

(α') Η μέση τιμή \bar{q} της μη-ορθογωνικότητας.(β') Η μέγιστη τιμή q_{max} της μη-ορθογωνικότητας.

Σχήμα 4.26: Περιστροφή της αεροτομής NACA 4412 με ανανέωση του γράφου. Εφαρμογή της απλής παρεμβολής. Η μέση τιμή \bar{q} και η μέγιστη τιμή q_{max} της μη-ορθογωνικότητας του πλέγματος, με την αύξηση της γωνίας περιστροφής α , για ανανέωση του γράφου ανά 5° , 10° και 20° .

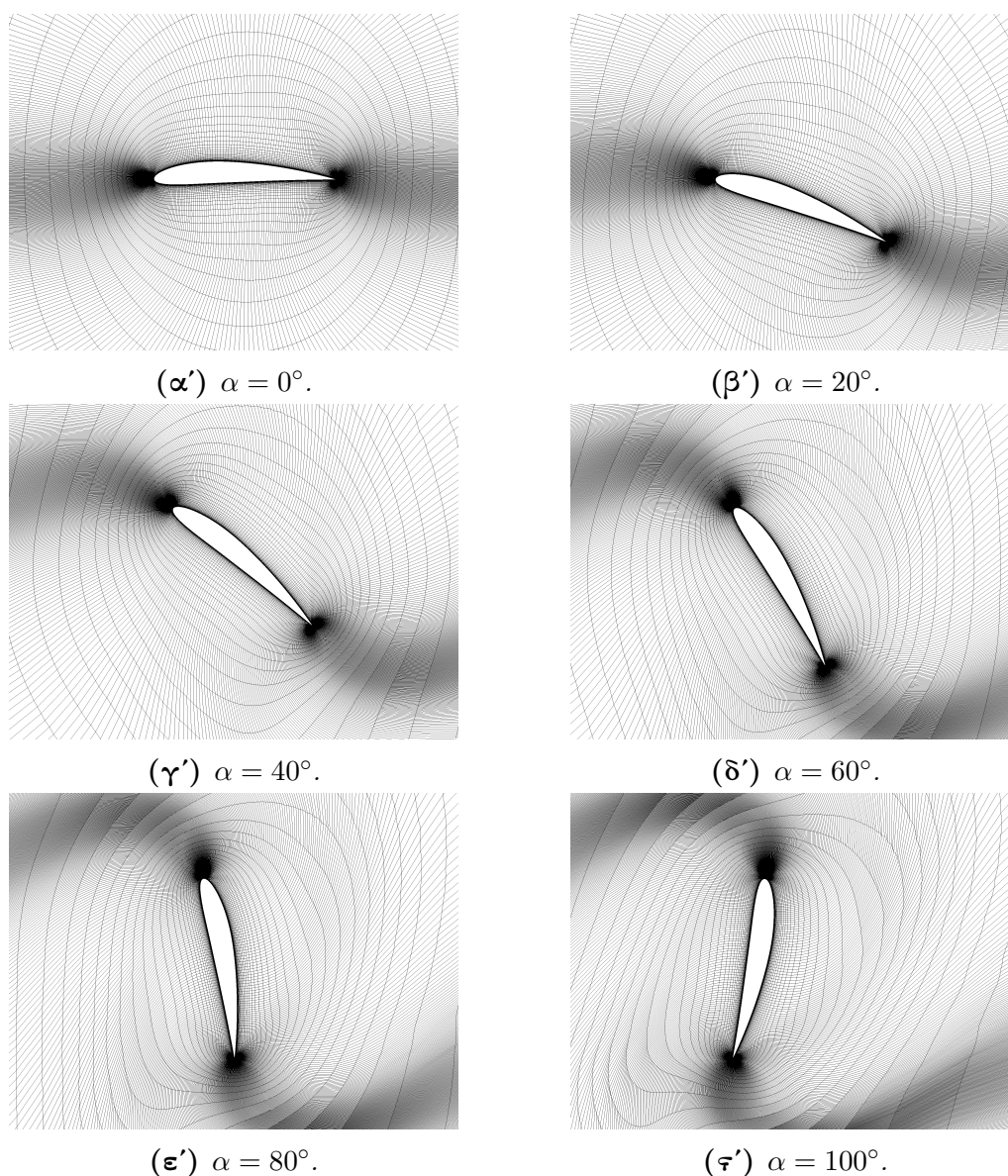


Σχήμα 4.27: Περιστροφή της αεροτομής NACA 4412 με ανανέωση του γράφου. Εφαρμογή της απλής παρεμβολής. Η μέγιστη τιμή s_{max} της στρεβλότητας του πλέγματος, με την αύξηση της γωνίας περιστροφής α , για ανανέωση του γράφου ανά 5° , 10° και 20° .

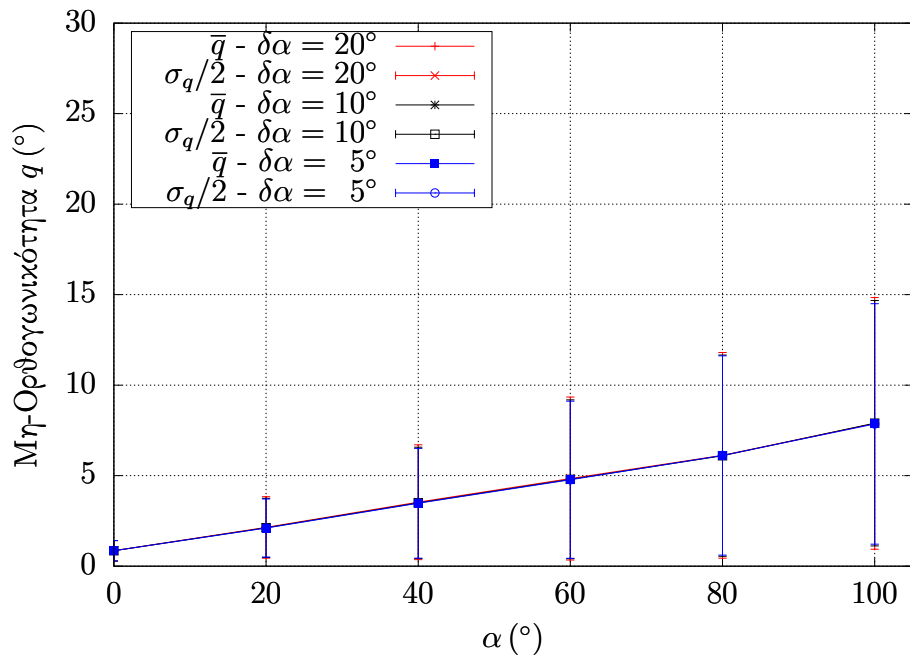
Από τη διερεύνηση αυτή ως προς την επίδραση του βήματος ανανέωσης του γράφου στις μετρικές ποιότητας του πλέγματος, συμπεραίνεται ότι συχνότερη ανανέωση του γράφου επιφέρει μείωση στις μέγιστες τιμές της μη-ορθογωνικότητας, q_{max} , και της στρεβλότητας, s_{max} , ενώ η μέση τιμή \bar{q} δεν επηρεάζεται σημαντικά. Επειδή το πλέγμα καθίσταται μη-έγκυρο όταν οι μέγιστες τιμές των μετρικών ξεπεράσουν κάποια δεδομένα όρια, φαίνεται ξεκάθαρα ότι με την αύξηση των βημάτων της παραμόρφωσης, το πλέγμα μπορεί να φτάσει σε μεγαλύτερες τιμές παραμόρφωσης. Αυξάνεται, δηλαδή, η στιβαρότητα της μεθόδου, με την ανάλογη, όμως, αύξηση του υπολογιστικού κόστους.

Εφαρμογή της Παρεμβολής της Περιστροφής

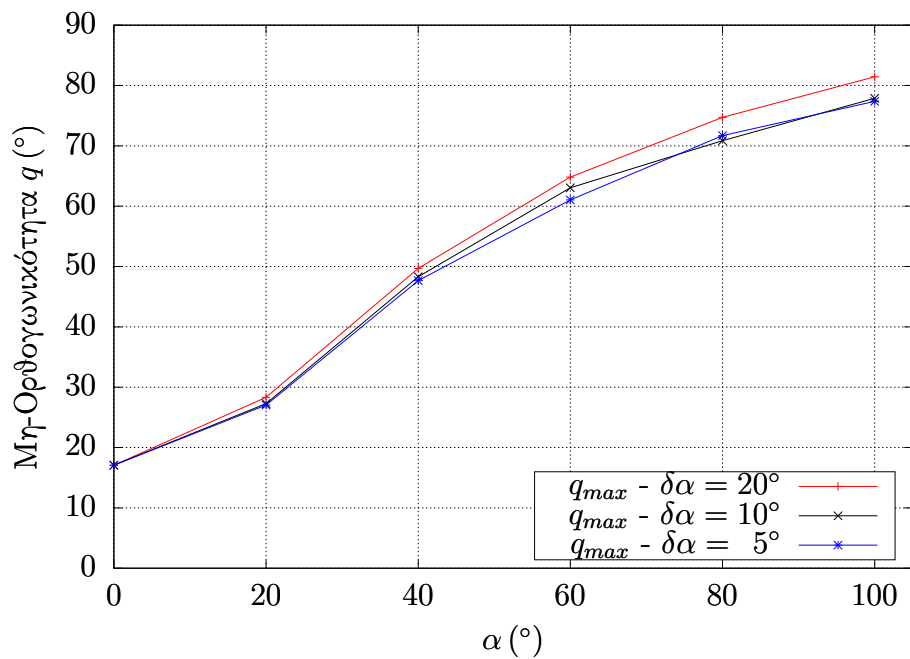
Στη συνέχεια, εφαρμόζεται η παρεμβολή της στροφής για τη μετατόπιση των πλεγματοκόν κόμβων. Όπως και πριν, η αεροτομή περιστρέφεται στις προκαθορισμένες θέσεις, ενώ εξετάζονται οι τρεις περιπτώσεις ανανέωσης του γράφου: ανά 5° , 10° και 20° . Ενδεικτικά, δίνεται το πλέγμα που προκύπτει με ανανέωση του γράφου ανά 10° (σχήμα 4.28). Οι μετρικές του πλέγματος για τα διάφορα βήματα συγκρίνονται στα σχήματα 4.29 και 4.30.



Σχήμα 4.28: Περιστροφή της αεροτομής NACA 4412 με ανανέωση του γράφου. Εφαρμογή της παρεμβολής της στροφής. Το παραμορφωμένο πλέγμα γύρω από την αεροτομή, για διάφορες γωνίες περιστροφής. Ο γράφος ανανεώνεται ανά 10° .

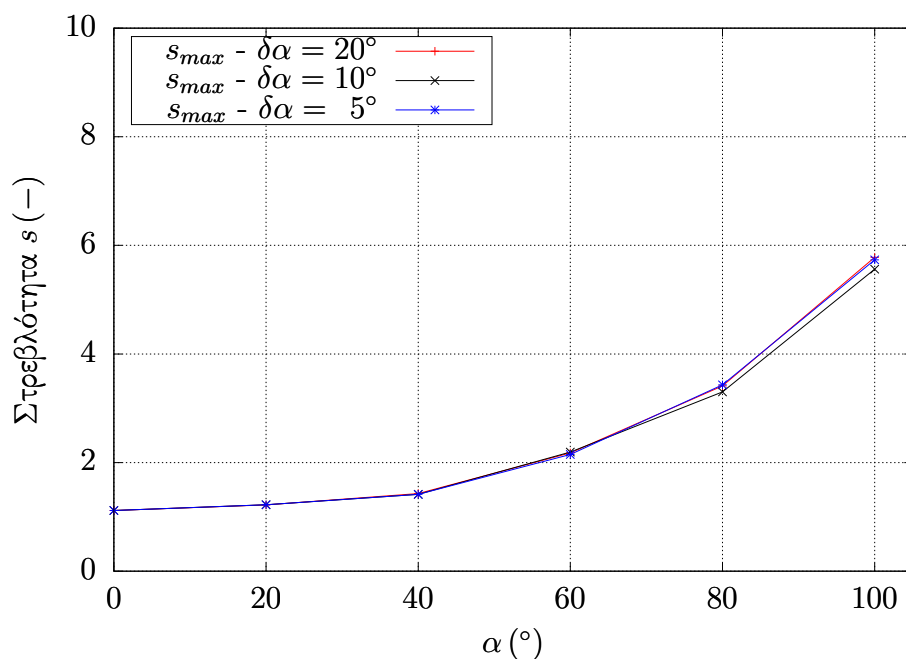


(α') Η μέση τιμή \bar{q} της μη-ορθογωνικότητας.



(β') Η μέγιστη τιμή q_{max} της μη-ορθογωνικότητας.

Σχήμα 4.29: Περιστροφή της αεροτομής NACA 4412 με ανανέωση του γράφου. Εφαρμογή της παρεμβολής της στροφής. Η μέση τιμή \bar{q} και η μέγιστη τιμή q_{max} της μη-ορθογωνικότητας του πλέγματος, με την αύξηση της γωνίας περιστροφής α , για ανανέωση του γράφου ανά 5° , 10° και 20° .



Σχήμα 4.30: Περιστροφή της αεροτομής NACA 4412 με ανανέωση του γράφου. Εφαρμογή της παρεμβολής της στροφής. Η μέγιστη τιμή s_{max} της στρεβλότητας του πλέγματος, με την αύξηση της γωνίας περιστροφής α , για ανανέωση του γράφου ανά 5° , 10° και 20° .

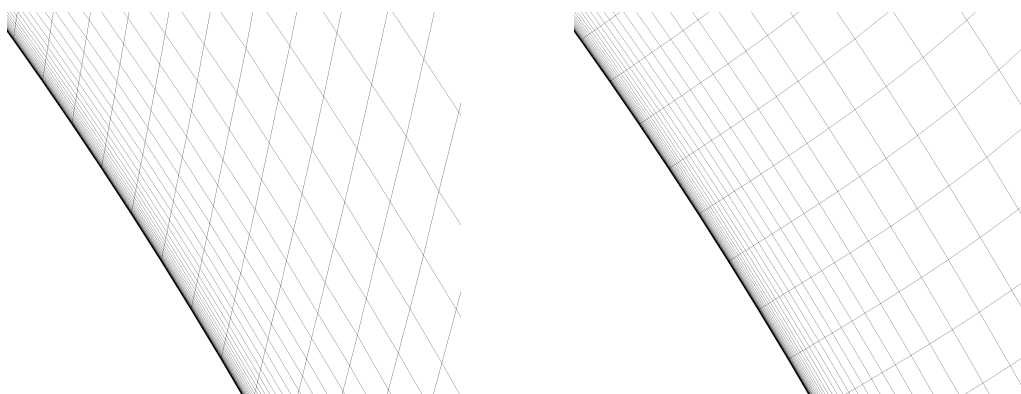
Στην περίπτωση της παρεμβολής της στροφής, τα διαφορετικά βήματα ανανέωσης του γράφου έχουν μικρή επίδραση στις μετρικές ποιότητας του πλέγματος, σε αντίθεση με την περίπτωση της απλής παρεμβολής. Επειδή τα διαφορετικά βήματα ανανέωσης του γράφου δίνουν περίπου την ίδια ποιότητα πλέγματος, σύμφωνα με τις υπολογιζόμενες μετρικές q και s , συμπεραίνεται ότι μπορεί να επιτευχθεί η ίδια παραμόρφωση με λιγότερα βήματα (π.χ. ανανέωση του γράφου ανά 20° έναντι 5°), άρα αυξάνεται μειώνεται ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτεί η παραμόρφωση του πλέγματος.

Σύγκριση της Απλής Παρεμβολής και της Παρεμβολής της Περιστροφής

Διερευνώντας την επίδραση της παρεμβολής της στροφής (βλ. ενότητα 4.5) στην ποιότητα του παραγόμενου πλέγματος, σε περιπτώσεις μεγάλων περιστροφών, συμπεραίνεται ότι η παρεμβολή αυτή διατηρεί τη μέση μη-ορθογωνικότητα, \bar{q} (σχήμα 4.32α'), και τη μέγιστη στρεβλότητα, s_{max} (σχήμα 4.33), σε χαμηλά επίπεδα, σε σχέση με την απλή παρεμβολή. Τα οφέλη της παρεμβολής αυτής φαίνονται, επίσης, και στη μέγιστη μη-ορθογωνικότητα, q_{max} (σχήμα 4.32β'), η οποία διατηρείται σε τιμές χαμηλότερες από αυτές της απλής παρεμβολής, όμως για ένα εύρος γωνιών περιστροφής μέχρι τις 80°. Μετά από τη γωνία αυτή, οι τιμές γίνονται ελαφρώς μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες τιμές της απλής παρεμβολής.

Το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει από τη διερεύνηση αυτή είναι ότι με την παρεμβολή της στροφής μπορεί να επιτευχθεί πλέγμα καλύτερης ποιότητας, χωρίς να απαιτούνται πολλά βήματα ανανέωσης του γράφου. Ενδεικτικά, η χρήση της παρεμβολής της στροφής με ανανέωση του γράφου ανά 20° δίνει καλύτερα αποτελέσματα από την απλή παρεμβολή με ανανέωση του γράφου ανά 5° – δηλαδή με τέσσερις φορές περισσότερα βήματα, άρα και με τέσσερις φορές περισσότερο υπολογιστικό χρόνο.

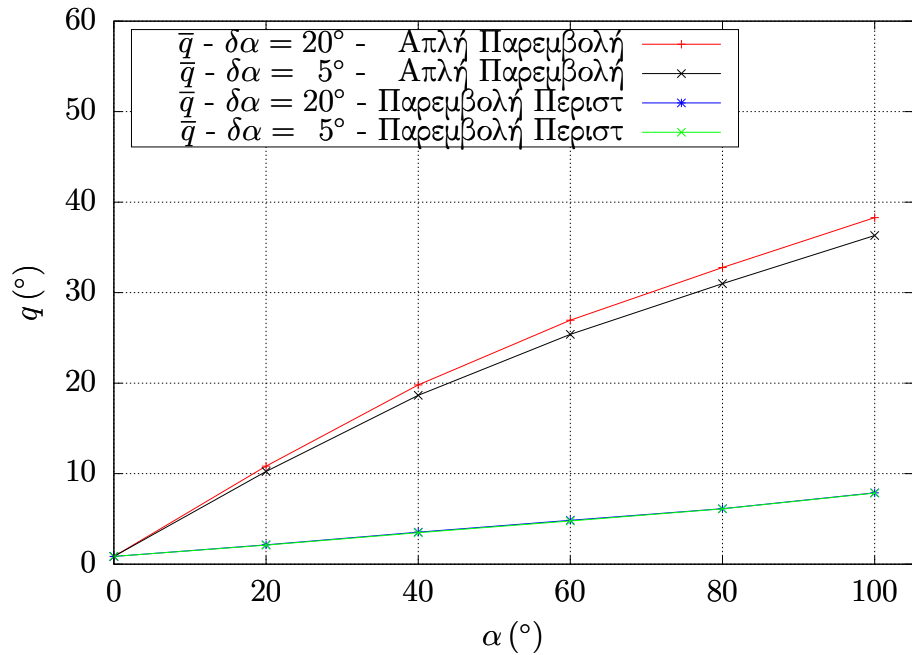
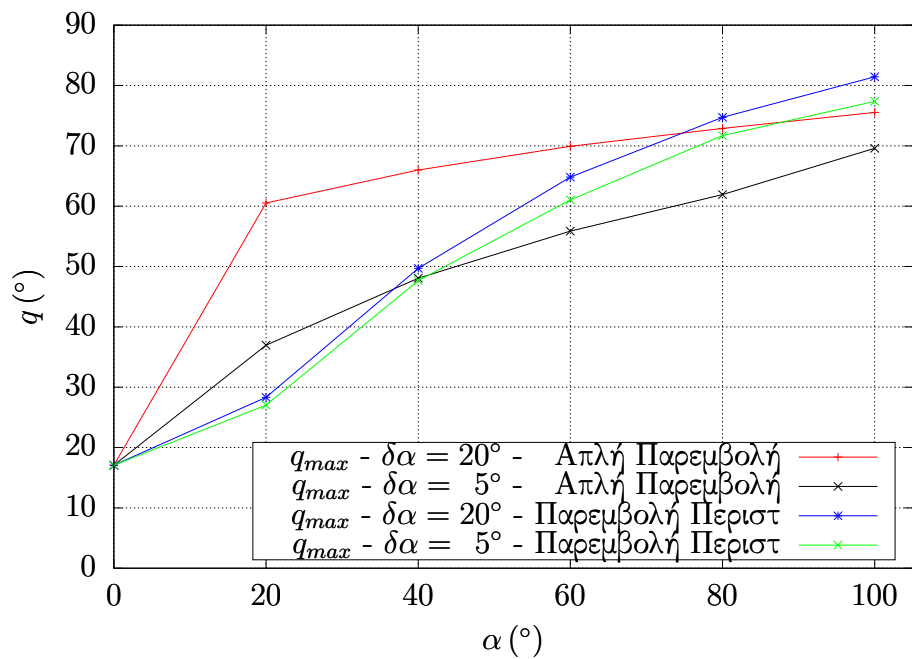
Επίσης, η θετική επίδραση της παρεμβολής της στροφής φαίνεται και στο σχήμα 4.31, όπου δίνεται λεπτομέρεια του παραμορφωμένου πλέγματος κοντά στο τοίχωμα της αεροτομής. Με την παρεμβολή της στροφής, οι πλεγματικές γραμμές κοντά στο τοίχωμα παραμένουν περίπου κάθετες σε αυτό, γεγονός που μπορεί να εξηγήσει τη μικρότερη μη-ορθογωνικότητα του πλέγματος, αφού τα κελιά κοντά στο τοίχωμα είναι τα πιο πιθανά να αποκτήσουν μεγάλη μη-ορθογωνικότητα.



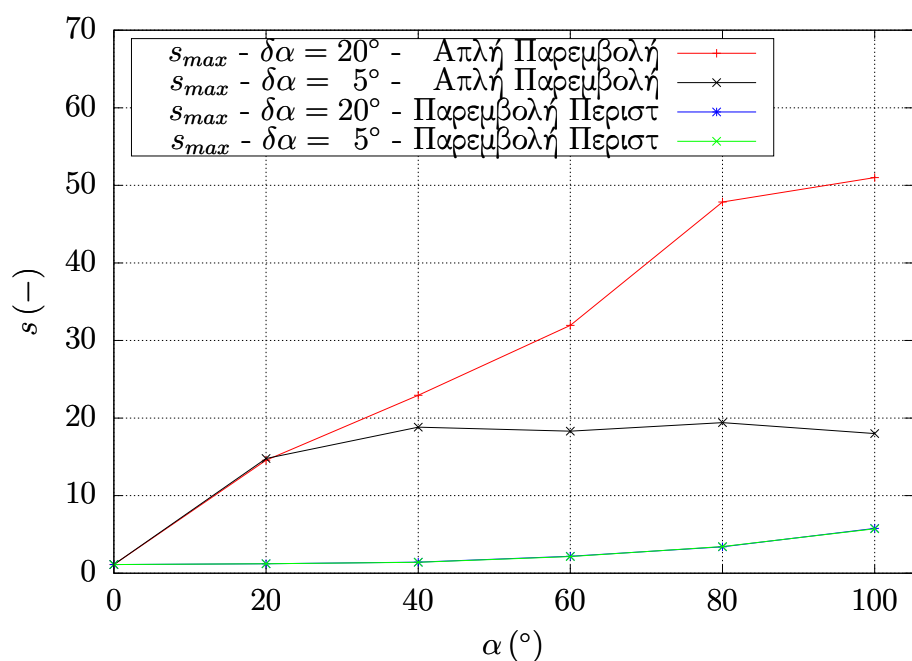
(α') Με απλή παρεμβολή.

(β') Με παρεμβολή της στροφής.

Σχήμα 4.31: Περιστροφή της αεροτομής NACA 4412 με ανανέωση του γράφου. Το παραμορφωμένο πλέγμα κοντά στο τοίχωμα, μετά από περιστροφή 60°. Αριστερά: το πλέγμα που προκύπτει χωρίς παρεμβολή της στροφής. Δεξιά: το πλέγμα που προκύπτει με παρεμβολή της στροφής. Στην πρώτη περίπτωση, οι πλεγματικές γραμμές δεν διατηρούν την καθετότητά τους στο τοίχωμα, ενώ στη δεύτερη, είναι σχεδόν κάθετες σε αυτό.

(α') Η μέση τιμή \bar{q} της μη-ορθογωνικότητας.(β') Η μέγιστη τιμή q_{max} της μη-ορθογωνικότητας.

Σχήμα 4.32: Περιστροφή της αεροτομής NACA 4412 με ανανέωση του γράφου. Σύγκριση της απλής παρεμβολής και της παρεμβολής της στροφής. Η μέση τιμή \bar{q} και η μέγιστη τιμή q_{max} της μη-ορθογωνικότητας του πλέγματος, με την αύξηση της περιστροφής α , για ανανέωση του γράφου ανά 5° και 20° .



Σχήμα 4.33: Περιστροφή της αεροτομής NACA 4412 με ανανέωση του γράφου. Σύγκριση της απλής παρεμβολής και της παρεμβολής της στροφής. Η μέγιστη τιμή s_{max} της στρεβλότητας του πλέγματος, με την αύξηση της περιστροφής α , για ανανέωση του γράφου ανά 5° και 20° .

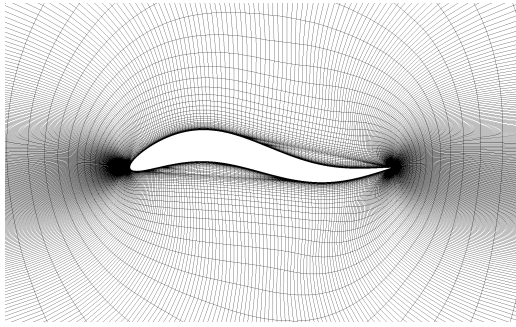
4.6.3 Ημιτονοειδής Παραμόρφωση της Αεροτομής

Στην αρχική γεωμετρία, εφαρμόζεται παραμόρφωση που περιγράφεται από τη σχέση:

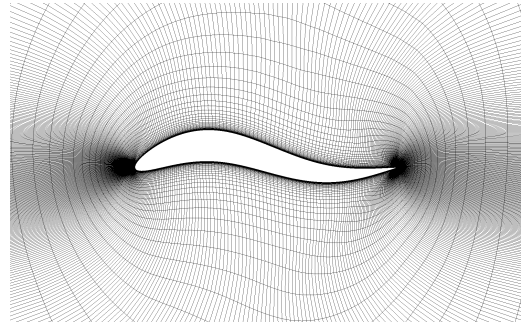
$$\begin{aligned}x &= x_0 \\y &= y_0 + \alpha \sin(2\pi x)\end{aligned}\tag{4.12}$$

όπου x_0 , y_0 οι αρχικές θέσεις των σημείων του πλέγματος και x , y οι αντίστοιχες νέες θέσεις. Η παραμόρφωση που επιβάλλει η σχέση (4.12) δίνει στην αεροτομή ένα ημιτονοειδές σχήμα. Η παραμόρφωση αυξάνεται με την αύξηση του συντελεστή α , ο οποίος παίρνει τιμές από 0 έως 0.20 με βήμα 0.01.

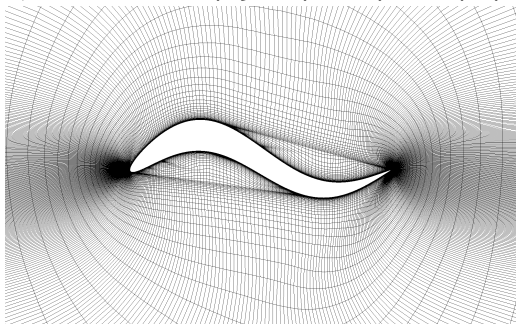
Επειδή η γεωμετρία που προκύπτει με την ημιτονοειδή παραμόρφωση είναι μη-κυρτή, η περίπτωση αυτή αποτελεί μία καλή ευκαιρία για την επίδειξη της βελτίωσης που μπορεί να επιφέρει στο αποτέλεσμα της παραμόρφωσης η τροποποίηση του γράφου για μη-κυρτές γεωμετρίες, όπως αυτή περιγράφηκε στην ενότητα 4.4.1. Συγκεκριμένα, η παραμόρφωση γίνεται με διόρθωση της τριγωνοποίησης και χωρίς, έτσι ώστε να συγκριθούν οι διαφορές των δύο μεθόδων (σχήμα 4.35).



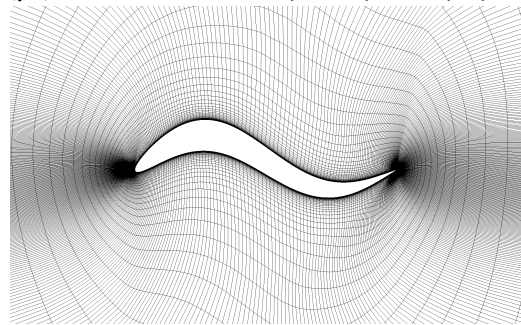
(α') $\alpha = 0.05$. Χωρίς Διόρθωση του Γράφου.



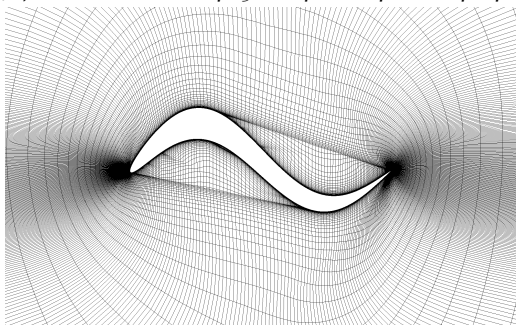
(β') $\alpha = 0.05$. Με Διόρθωση του Γράφου.



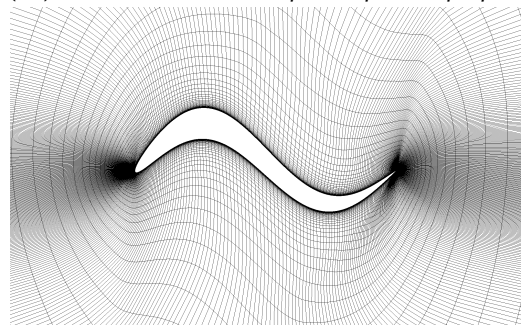
(γ') $\alpha = 0.10$. Χωρίς Διόρθωση του Γράφου.



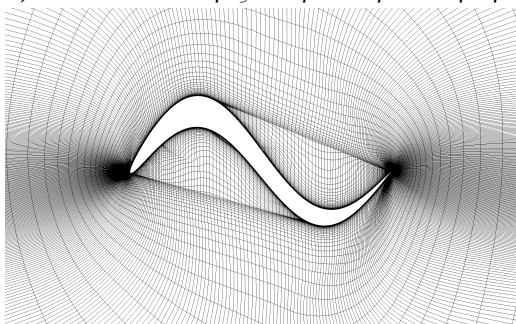
(δ') $\alpha = 0.10$. Με Διόρθωση του Γράφου.



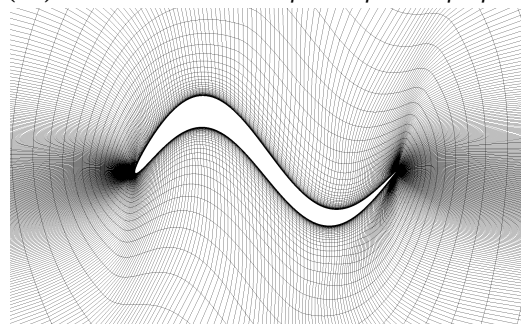
(ε') $\alpha = 0.15$. Χωρίς Διόρθωση του Γράφου.



(ϕ') $\alpha = 0.15$. Με Διόρθωση του Γράφου.

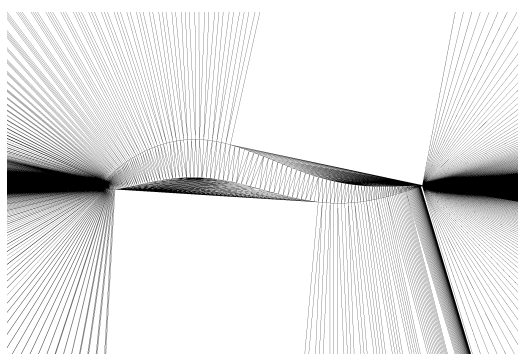


(ζ') $\alpha = 0.20$. Χωρίς Διόρθωση του Γράφου.

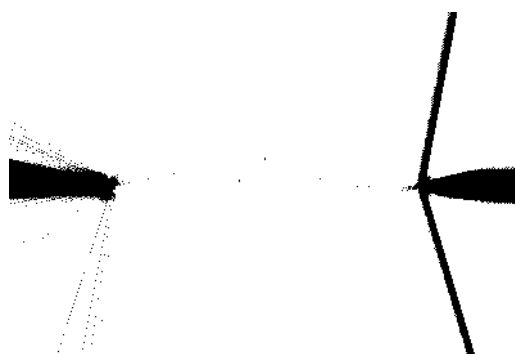


(η') $\alpha = 0.20$. Με Διόρθωση του Γράφου.

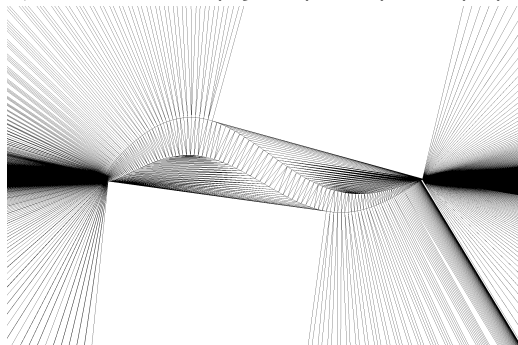
Σχήμα 4.34: Ημιτονοειδής παραμόρφωση της αεροτομής NACA 4412. Με διόρθωση του γράφου για τη μη-κυρτότητα της γεωμετρίας (δεξιά) και χωρίς (αριστερά). Το παραμορφωμένο πλέγμα γύρω από την αεροτομή, για τιμές του συντελεστή $\alpha = 0.05, 0.10$ και 0.15 .



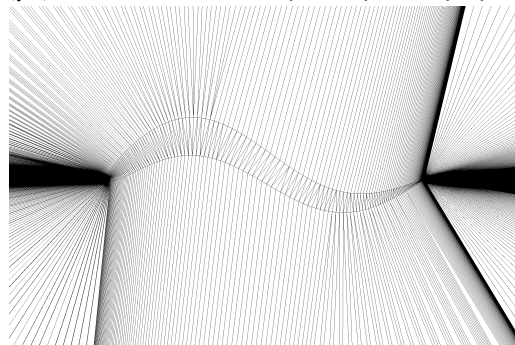
(α') $\alpha = 0.05$. Χωρίς Διόρθωση του Γράφου.



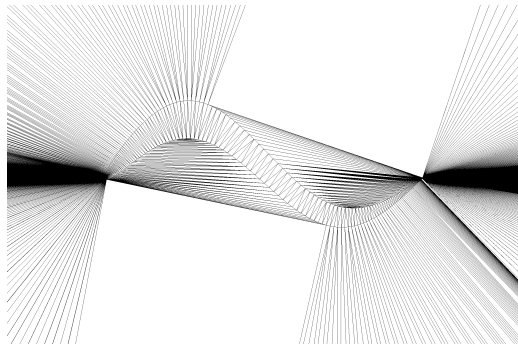
(β') $\alpha = 0.05$. Με Διόρθωση του Γράφου.



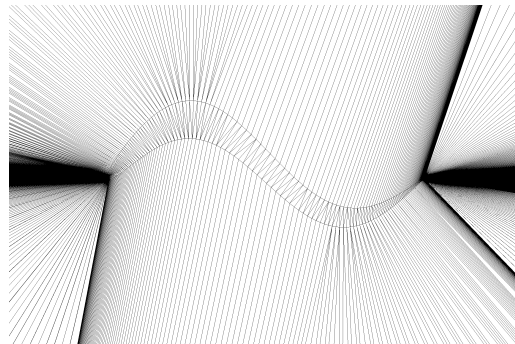
(γ') $\alpha = 0.10$. Χωρίς Διόρθωση του Γράφου.



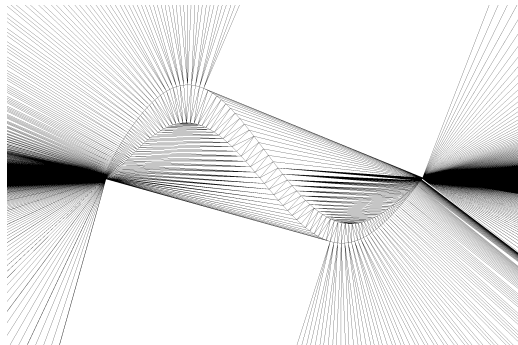
(δ') $\alpha = 0.10$. Με Διόρθωση του Γράφου.



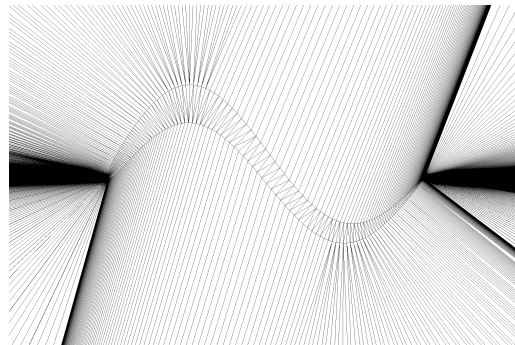
(ε') $\alpha = 0.15$. Χωρίς Διόρθωση του Γράφου.



(Ϝ') $\alpha = 0.15$. Με Διόρθωση του Γράφου.

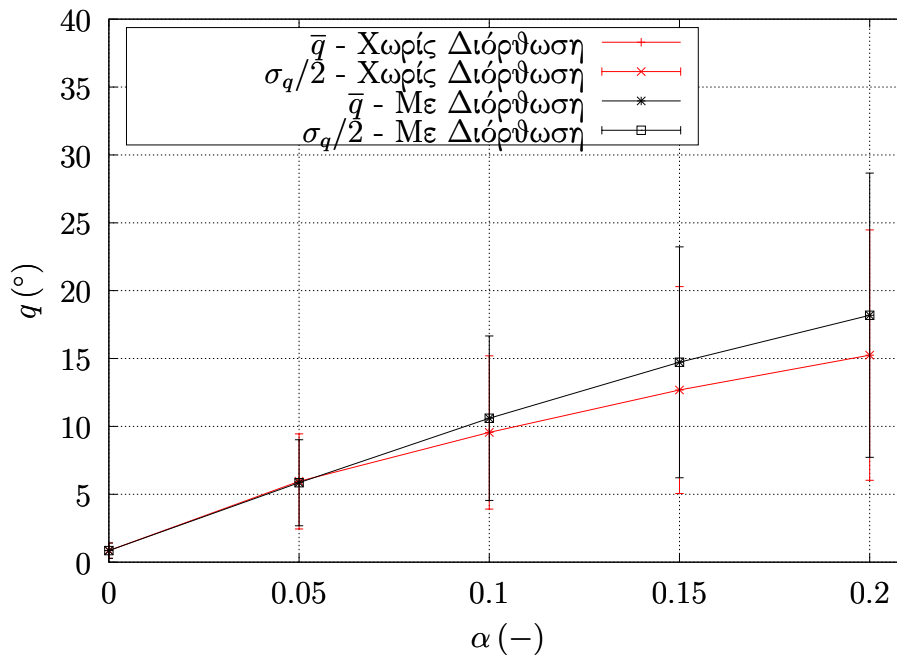


(ζ') $\alpha = 0.20$. Χωρίς Διόρθωση του Γράφου.

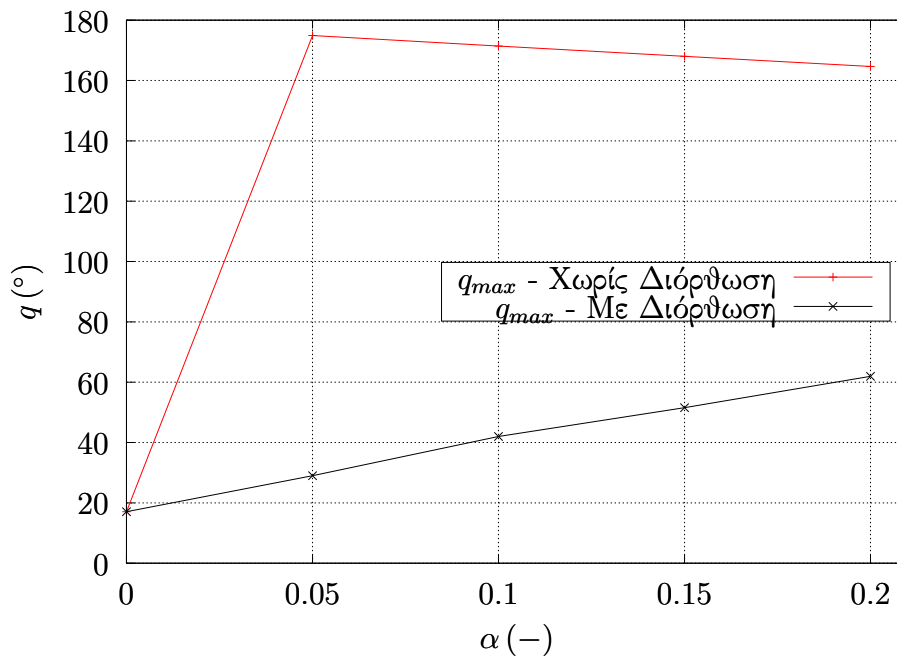


(η') $\alpha = 0.20$. Με Διόρθωση του Γράφου.

Σχήμα 4.35: Ημιτονοειδής παραμόρφωση της αεροτομής NACA 4412. Με διόρθωση του γράφου για τη μη-κυρτότητα της γεωμετρίας (δεξιά) και χωρίς (αριστερά). Ο - ανανεωμένος μετά από κάθε βήμα - γράφος Delaunay για τιμές του συντελεστή $\alpha = 0.05, 0.10$ και 0.15 .

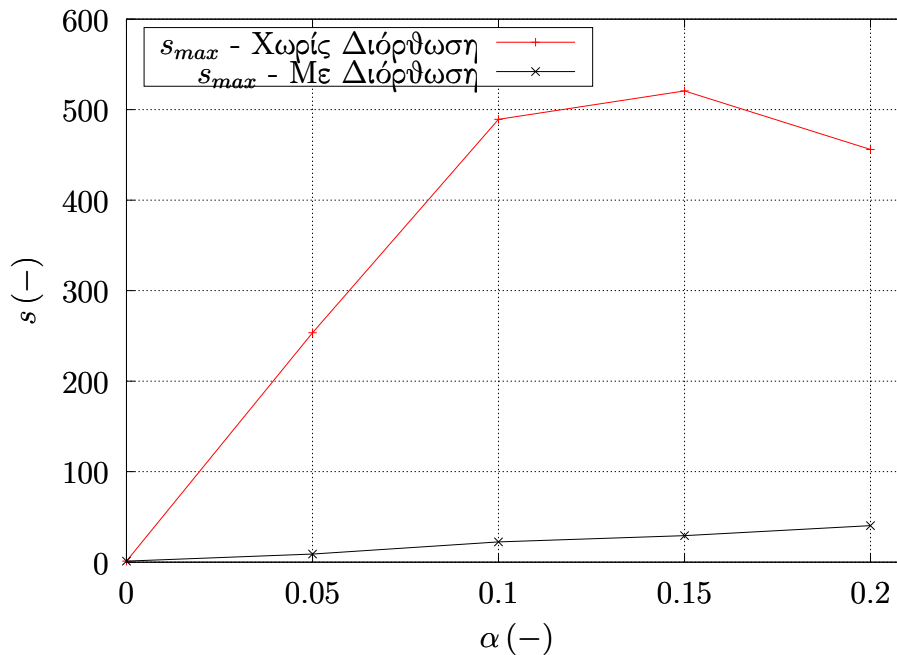


(α') Η μεταβολή της μέσης τιμής \bar{q} της μη-ορθογωνικότητας.



(β') Η μεταβολή της μέγιστης τιμής q_{max} της μη-ορθογωνικότητας.

Σχήμα 4.36: Ημιτονοειδής παραμόρφωση της αεροτομής NACA 4412. Με διόρθωση του γράφου για τη μη-κυρτότητα της γεωμετρίας και χωρίς. Σύγκριση της μεταβολής της μέσης τιμής \bar{q} και της μέγιστης τιμής q_{max} της μη-ορθογωνικότητας του πλέγματος, με την αύξηση του συντελεστή παραμόρφωσης α . Ο γράφος ανανεώνεται ανά $d\alpha = 0.01$.



Σχήμα 4.37: Ημιτονοειδής παραμόρφωση της αεροτομής NACA 4412. Με διόρθωση του γράφου για τη μη-κυρτότητα της γεωμετρίας και χωρίς. Σύγκριση της μεταβολής της μέγιστης τιμής s_{max} της στρεβλότητας του πλέγματος, με την αύξηση του συντελεστή παραμόρφωσης α . Ο γράφος ανανεώνεται ανά $\delta\alpha = 0.01$.

4.6.4 Συμπεράσματα

Από τις τρεις περιπτώσεις που εξετάστηκαν σε αυτή την εφαρμογή, γίνεται φανερή η στιβαρότητα της μεθόδου γράφων Delaunay, ενώ επιβεβαιώνεται η αποτελεσματικότητα των δύο βελτιώσεων που προτάθηκαν για τη μέθοδο αυτή στις 2Δ , δηλαδή της παρεμβολής της στροφής και της τροποποίησης του γράφου σε μη-κυρτές γεωμετρίες.

Στην πρώτη περίπτωση, εξετάστηκαν τα όρια του γράφου ως προς την παραμόρφωση της γεωμετρίας και διαπιστώθηκε ότι το νέο πλέγμα μπορεί να υπολογιστεί ικανοποιητικά ακόμα και μετά από μεγάλη παραμόρφωση του γράφου (π.χ. περιστροφή κατά $\alpha = 40^\circ$). Όμως, η μη-ορθογωνικότητα, q , και η στρεβλότητα, s , του παραμορφωμένου πλέγματος αυξάνονται σημαντικά, γι' αυτό και είναι αναγκαία η ανανέωση του γράφου σε ενδιάμεσες θέσεις, έτσι ώστε η ποιότητα του πλέγματος να διατηρείται ακόμα και μετά από μεγάλες παραμορφώσεις.

Στη δεύτερη περίπτωση που εξετάστηκε, η αεροτομή περιστράφηκε σε μεγάλες γωνίες, έως και 100° , με το γράφο να ανανεώνεται σε ενδιάμεσες θέσεις (ανά 5° , 10° και 20°), σε αντίθεση με την πρώτη εφαρμογή. Εξετάστηκε η επίδραση του βήματος ανανέωσης του γράφου στην ποιότητα του παραγόμενου πλέγματος, για τις δύο περιπτώσεις παρεμβολών που εφαρμόστηκαν, δηλαδή την απλή παρεμβολή (εξ. (3.11)) και την παρεμβολή

της στροφής (εξ. (4.8)).

Για την απλή παρεμβολή, διαπιστώθηκε ότι η μείωση του βήματος ανανέωσης του γράφου (δηλαδή η αύξηση του αριθμού των βημάτων) οδηγεί σε σημαντικά μικρότερες μέγιστες τιμές της μη-ορθογωνικότητας και της στρεβλότητας, ενώ η επίδραση στη μέση τιμή της μη-ορθογωνικότητας είναι μικρή. Για την παρεμβολή της στροφής, η αλλαγή του βήματος ανανέωσης του γράφου έχει μικρή επίδραση στις μετρικές του πλέγματος, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε μικρότερο αριθμό βημάτων και άρα σε μικρότερο υπολογιστικό χρόνο. Μεταξύ των δύο παρεμβολών, η παρεμβολή της στροφής δίνει σημαντικά μικρότερες τιμές των μέσων τιμών των μετρικών q και s , αλλά και μικρότερη μέγιστη μη-ορθογωνικότητα, q_{max} για ένα μεγάλο εύρος γωνιών. Άρα, η νέα αυτή παρεμβολή μπορεί να οδηγήσει σε πλέγμα καλύτερης ποιότητας, με παράλληλη μείωση του υπολογιστικού κόστους.

Στην τρίτη εφαρμογή εξετάστηκε η επίδραση που έχει η τροποποίηση του γράφου Delaunay γύρω από μη-κυρτές γεωμετρίες, όπως αυτή περιγράφηκε στην ενότητα 4.4.1. Επειδή η ημιτονοειδής παραμόρφωση που επιβάλλεται στην αεροτομή οδηγεί σε εξαιρετικά μη-κυρτή γεωμετρία, αποτελεί ένα καλό παράδειγμα για την επίδειξη της διόρθωσης του γράφου Delaunay. Συγκεκριμένα, η παραμόρφωση χωρίς τη διόρθωση του γράφου οδηγεί στην εμφάνιση αρνητικών όγκων και κελιών μεγάλης μη-ορθογωνικότητας, q , και στρεβλότητας, s . Αντίθετα, με τη διόρθωση του γράφου επιτυγχάνεται σημαντική βελτίωση του παραγόμενου πλέγματος, το οποίο, πλέον, είναι αποτεκτής ποιότητας. Εκτός από την επίδραση στις μετρικές ποιότητας q και s , η παραμετροποίηση χωρίς διόρθωση του γράφου οδηγεί σε πλέγμα το οποίο είναι εμφανώς επηρεασμένο από το γράφο αυτό (σχήμα 4.35).

Φυσικά, όλες οι παραπάνω περιπτώσεις παραμόρφωσης της γεωμετρίας είναι σημαντικά μεγαλύτερες από αυτές που συνήθως συναντούνται σε πραγματικές εφαρμογές της μηχανικής των ρευστών, αλλά επιλέχθηκαν έτσι ώστε να φανεί η στιβαρότητα της μεθόδου γράφων Delaunay.

4.7 Εφαρμογή σε Αεροτομή με Flap

Στο παράδειγμα αυτό, γίνεται παραμόρφωση του υπολογιστικού πλέγματος γύρω από αεροτομή με flap, το οποίο περιστρέφεται. Το πλέγμα είναι μη-δομημένο (σχήμα 4.38) και αποτελείται κυρίως από τριγωνικά κελιά, ενώ κοντά στο τοίχωμα τα κελιά είναι τετραπλευρικά και αρκετά πυκνά. Ο αριθμός των κόμβων είναι 169396, ενώ ο αριθμός των κελιών είναι 158355.

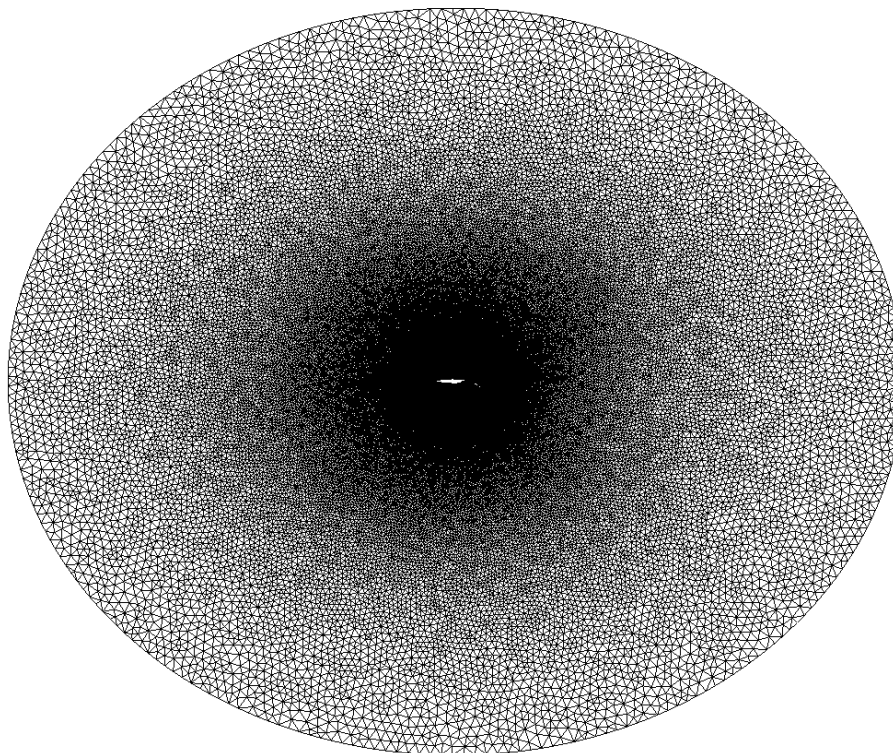
Η παραμόρφωση που επιβάλλεται στη γεωμετρία είναι η περιστροφή του flap, ενώ η υπόλοιπη αεροτομή παραμένει ακίνητη. Το flap περιστρέφεται γύρω από την ακμή πρόσπτωσης του, σε γωνίες $\alpha = 20^\circ$ και $\alpha = 40^\circ$, ενώ ο γράφος ανανεώνεται μετά από κάθε βήμα 10° . Για την κατασκευή του γράφου γίνεται διόρθωσή του για τη μη-κυρτότητα της γεωμετρίας, ενώ μεταξύ της αεροτομής και του flap προστίθενται επιπλέον σημεία του μη-ελεγχόμενου ορίου, ώστε να σχηματιστούν τρίγωνα μεταξύ των σημείων αυτών και του flap, τα οποία θα διαδώσουν την παραμόρφωση στους κόμβους μεταξύ των δύο σωμάτων. Ο γράφος που χρησιμοποιείται δίνεται στο σχήμα 4.39.

Το παραμορφωμένο πλέγμα που προκύπτει για τις δύο θέσεις του flap δίνεται στο σχήμα 4.40. Επίσης, για τις δύο θέσεις περιστροφής του flap υπολογίζονται οι μετρικές της ποιότητας του πλέγματος q και s , οι οποίες συγκρίνονται με αυτές του αρχικού πλέγματος στον πίνακα 4.1.

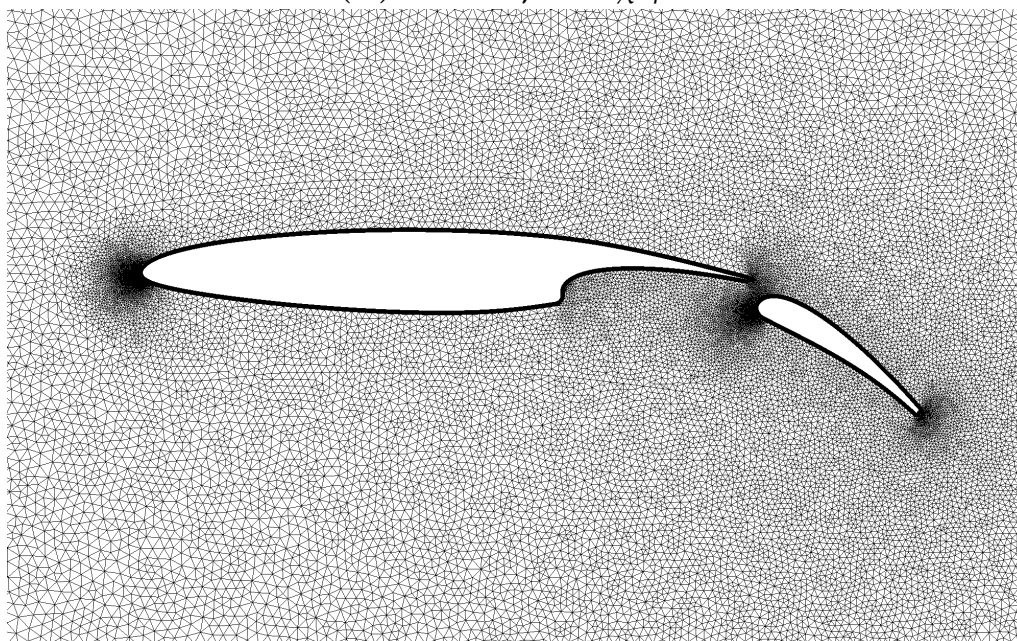
Μετρική		Πριν	$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 40^\circ$
Μη-ορθογωνικότητα	\bar{q}	4.83	6.52	10.20
	q_{max}	82.58	82.57	82.55
Στρεβλότητα	s_{max}	0.79	0.79	0.78
Πλήθος κελιών με $q > 70$		3	3	14

Πίνακας 4.1: Μετρικές ποιότητας του πλέγματος πριν της περιστροφή του flap και για περιστροφή κατά 20° και 40° .

Από τον πίνακα 4.1 φαίνεται ότι η ποιότητα του πλέγματος διατηρείται κοντά στην αρχική, για τις δύο γωνίες περιστροφής. Η μετρική που επηρεάζεται από την περιστροφή του flap είναι η μη-ορθογωνικότητα, q , της οποίας η μέση τιμή αυξάνεται με την αύξηση της γωνίας, αλλά παραμένει σε αποδεκτά επίπεδα. Επίσης, για γωνία 40° , το πλήθος των κελιών με μεγάλη μη-ορθογωνικότητα ($q > 70$) αυξάνεται στα 14, από τα 3 του αρχικού πλέγματος. Όμως, αυτή η αύξηση μπορεί να θεωρηθεί αποδεκτή, εφόσον δεν εμφανίζονται αρνητικοί όγκοι στο πλέγμα.

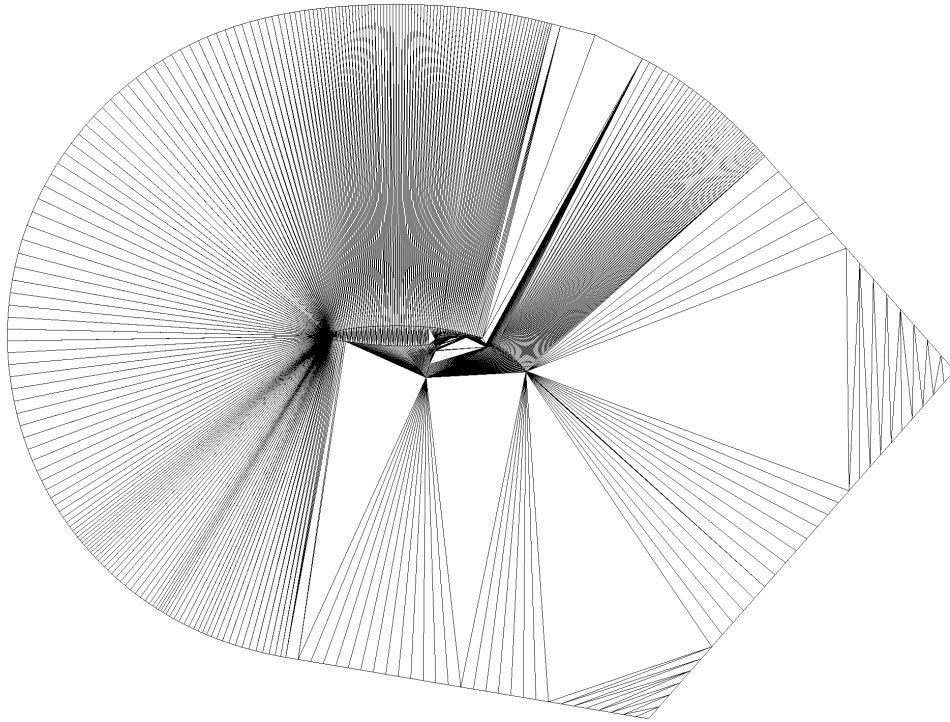


(α') Το υπολογιστικό χωρίο.

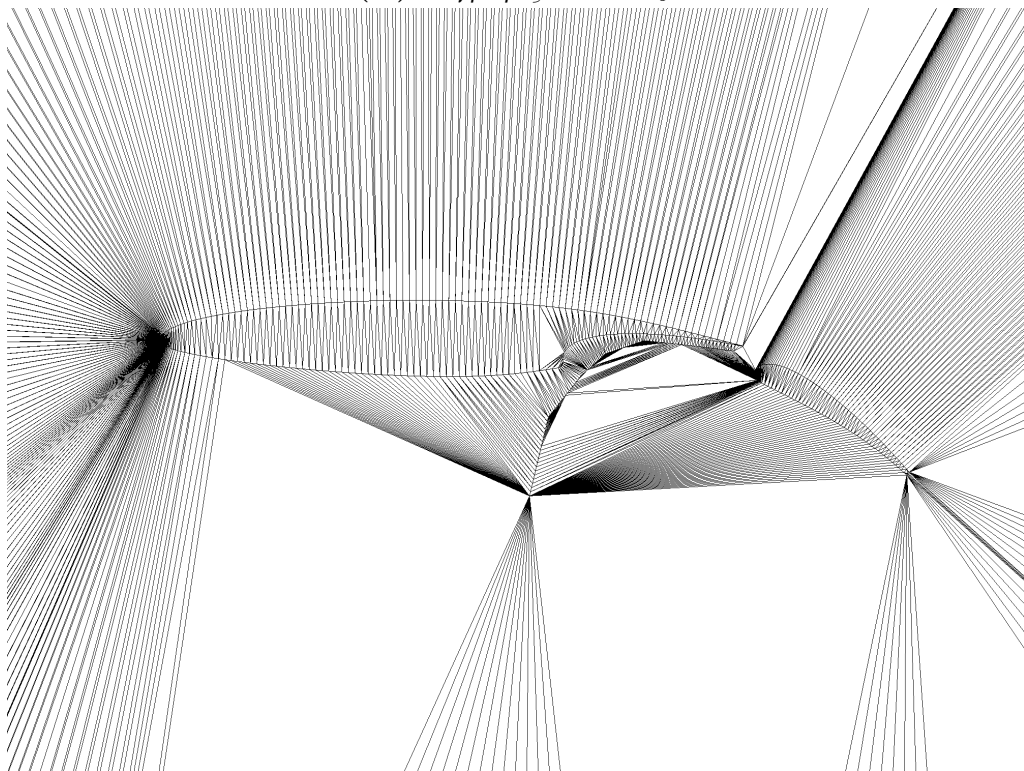


(β') Ο πλέγμα κοντά στην αεροτομή.

Σχήμα 4.38: Εφαρμογή σε αεροτομή με flap. Το αρχικό μη-δομημένο πλέγμα γύρω από την αεροτομή.

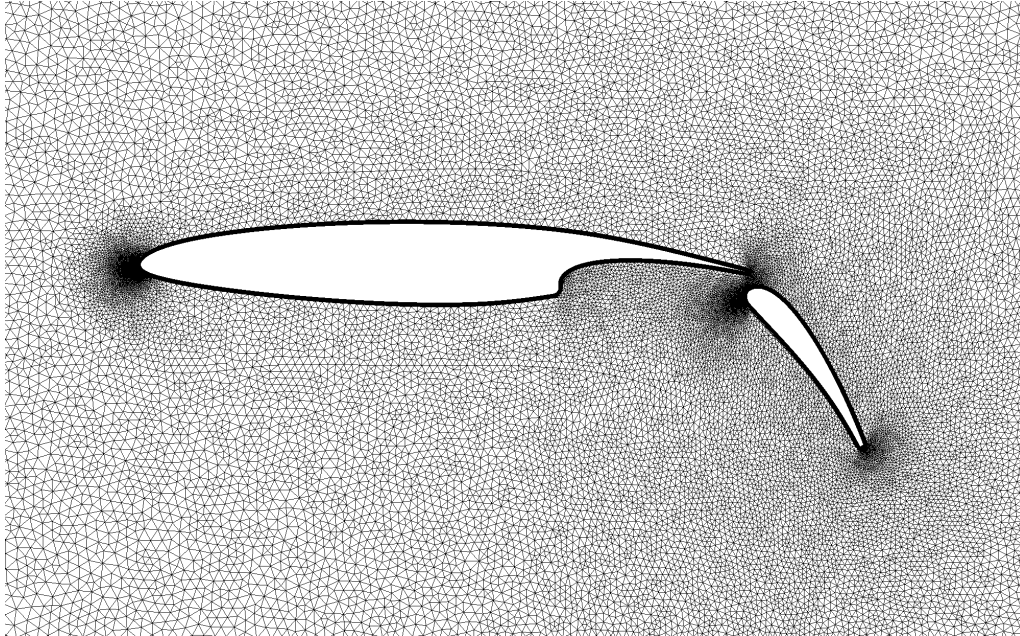


(α') Ο γράφος Delaunay.

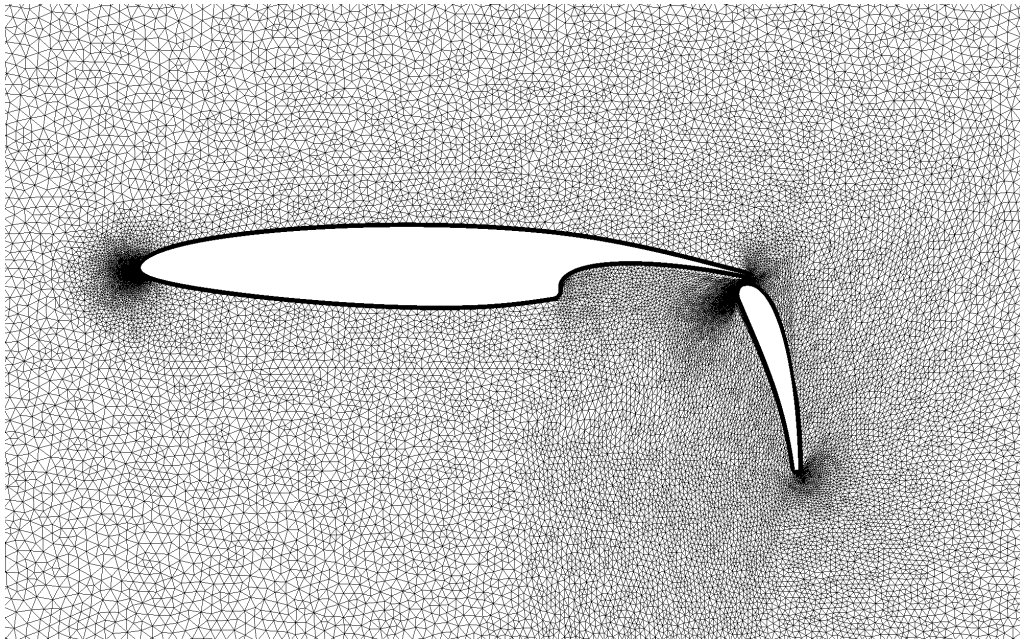


(β') Ο γράφος Delaunay κοντά στην αεροτομή.

Σχήμα 4.39: Εφαρμογή σε αεροτομή με flap. Το διορθωμένος γράφος Delaunay γύρω από την αεροτομή. Μεταξύ των δύο σωμάτων έχουν προστεθεί επιπλέον σημεία στο μη-ελεγχόμενο όριο, για την ομαλότερη διάδοση της παραμόρφωσης της γεωμετρίας.



(α') $\alpha = 20^\circ$.



(β') $\alpha = 40^\circ$.

Σχήμα 4.40: Εφαρμογή σε αεροτομή με flap. Το παραμορφωμένο πλέγμα γύρω από την αεροτομή, μετά από περιστροφή του flap κατά γωνία $\alpha = 20^\circ$ και 40° .

Κεφάλαιο 5

Η Μέθοδος Γράφων Delaunay στις 3 Διαστάσεις

Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζεται η μέθοδος μετακίνησης πλεγμάτων με γράφους Delaunay στις 3 διαστάσεις. Συγκεκριμένα, γίνεται χρήση του λογισμικού παραμόρφωσης πλεγμάτων, το οποίο αναπτύχθηκε στο πλαίσιο αυτής της διπλωματικής εργασίας σε περιβάλλον OpenFOAM[®] και που αποτελεί παραλλαγή του αντίστοιχου λογισμικού παραμόρφωσης 2Δ πλεγμάτων, το οποίο παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 4. Γίνεται επίδειξη των δυνατοτήτων και της ταχύτητας της μεθόδου στην παραμόρφωση πλεγμάτων γύρω από απλές 3Δ γεωμετρίες (π.χ. μία πτέρυγα), αλλά και πιο σύνθετες (π.χ. ένα αυτοκίνητο και ένα αεροσκάφος τύπου Blended Wing Body), ενώ παρουσιάζονται και εφαρμογές σε πλέγματα εσωτερικής ροής.

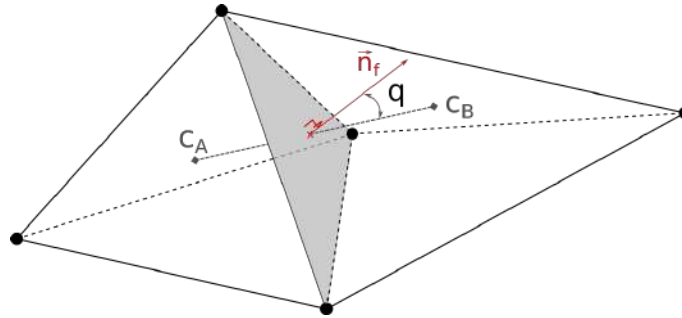
Σε πολλές από τις περιπτώσεις που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό, οι παραμορφώσεις είναι κατά πολύ μεγαλύτερες από αυτές που συνήθως συναντώνται κατά τη διαδικασία μίας βελτιστοποίησης μορφής. Όμως, έχουν επιλεγθεί κατάλληλα, έτσι ώστε να φανεί η ευελιξία της μεθόδου γράφων Delaunay.

5.1 Μετρικές Ποιότητας του Πλέγματος στις 3 Διαστάσεις

Και σε αυτό το κεφάλαιο, η ποιότητα των πλεγμάτων αξιολογείται με τη χρήση των δύο μετρικών που παρουσιάστηκαν και στο κεφάλαιο 4, δηλαδή της *μη-ορθογωνικότητας*

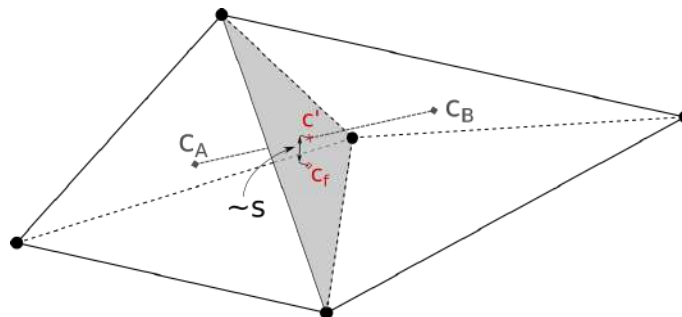
(non-orthogonality) q και της στρεβλότητας (skewness) s . Στις 3 διαστάσεις, οι μετρικές αυτές ορίζονται ως εξής:

Ορισμός 5.1.1. Μη-Ορθογωνικότητα (Non-Orthogonality) q : ορίζεται ως η γωνία (σε $^\circ$) μεταξύ της ευθείας που ενώνει τα κέντρα δύο γειτονικών κελιών και της κάθετης στην κοινή επιφάνεια των κελιών ευθείας (σχήμα 5.1). Η ιδανική τιμή είναι 0° .



Σχήμα 5.1: Η μη-ορθογωνικότητα q της επιφάνειας μεταξύ δύο κελιών ορίζεται ως η γωνία του ευθύγραμμου τμήματος c_{ACB} που ενώνει τα κέντρα των δύο κελιών με το κάθετο στη μεταξύ τους επιφάνεια διάνυσμα \vec{n}_f .

Ορισμός 5.1.2. Στρεβλότητα (Skewness) s : ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ της τομής της ευθείας που ενώνει τα κέντρα δύο γειτονικών κελιών με την κοινή επιφάνειά τους και του κέντρου της επιφάνειας αυτής, αδιαστατοποιημένη με την απόσταση μεταξύ των κέντρων των δύο κελιών (σχήμα 5.2). Η ιδανική τιμή είναι 0.



Σχήμα 5.2: Η στρεβλότητα s της επιφάνειας μεταξύ δύο κελιών ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ της τομής c' του ευθύγραμμου τμήματος c_{ACB} που ενώνει τα κέντρα των δύο κελιών και του κέντρου c_f της μεταξύ τους επιφάνειας, αδιαστατοποιημένη με την απόσταση c_{ACB} .

Επειδή οι παραπάνω μετρικές υπολογίζονται για κάθε κελί του πλέγματος, η ποιότητα του συνολικού πλέγματος περιγράφεται από τη μέση τιμή (\bar{q} , \bar{s}), την τυπική απόκλιση (σ_q , σ_s), και τη μέγιστη τιμή (q_{max} , s_{max}) των παραπάνω μετρικών.

5.2 Εφαρμογή στην Πτέρυγα ONERA M6

Ως πρώτη εφαρμογή της μεθόδου στις 3 διαστάσεις, επιλέγεται ένα μη-δομημένο πλέγμα τετραεδρικών στοιχείων γύρω από την πτέρυγα ONERA M6. Το πλέγμα αποτελείται από 72791 κόμβους και 341797 τετράεδρα και δίνεται στο σχήμα 5.3.

Επειδή το πλέγμα αυτό είναι αρκετά αραιό, επιλέγεται μία μεγάλη παραμόρφωση της γεωμετρίας, έτσι ώστε να φανεί η ευελιξία του 3Δ γράφου Delaunay. Στην πρώτη περίπτωση παραμόρφωσης, η πτέρυγα κάμπτεται κατά το εκπέτασμά της (άξονας z). Στη δεύτερη περίπτωση παραμόρφωσης, συνδυάζεται η κάμψη της πτέρυγας με στρέψη γύρω από το διαμήκη άξονα.

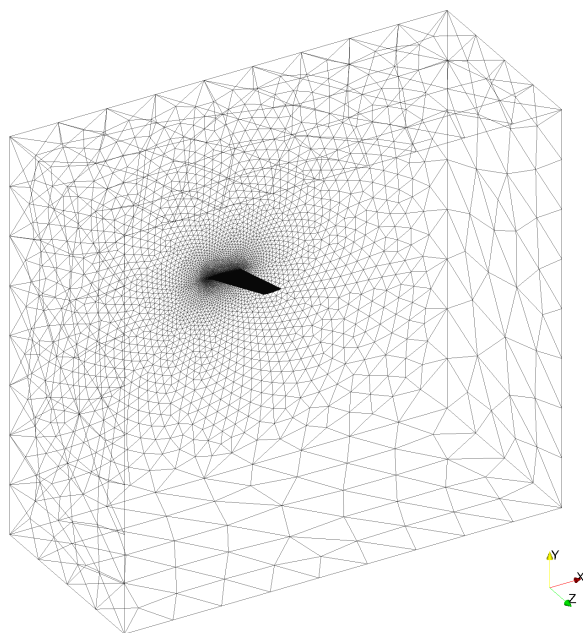
Ως ελεγχόμενο όριο του γράφου επιλέγεται ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, το οποίο περιέχει στο εσωτερικό του την πτέρυγα και ένα υποσύνολο των πλεγματοκτικών κόμβων, που βρίσκονται κοντά σε αυτή. Οι κόμβοι του μη-ελεγχόμενου ορίου είναι κατανεμημένοι στις πλευρές του παραλληλεπιπέδου. Ο γράφος Delaunay δίνεται στο σχήμα 5.4.

5.2.1 Κάμψη της Πτέρυγας

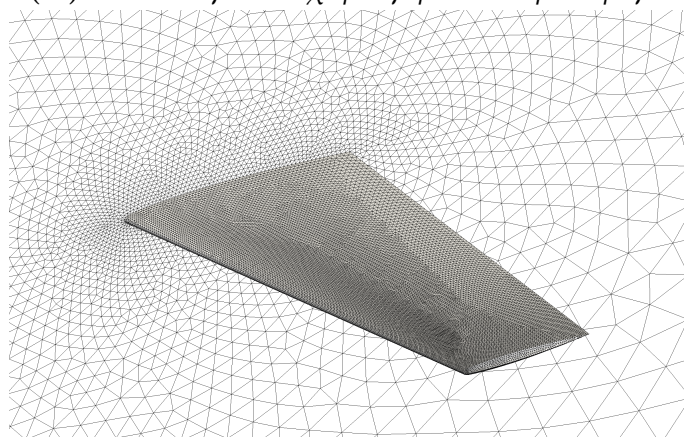
Η παραμόρφωση της γεωμετρίας που επιλέγεται είναι η κάμψη της πτέρυγας κατά το εκπέτασμα. Η νέα θέση των σημείων του ελεγχόμενου ορίου δίνεται από μία σχέση της μορφής:

$$x = x_0, \quad y = y_0 + \alpha z_0^2, \quad z = z_0 \quad (5.1)$$

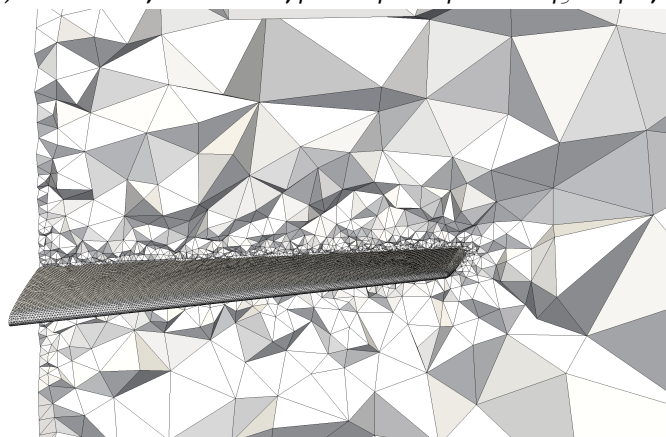
όπου x_0, y_0, z_0 οι αρχικές θέσεις των σημείων του πλέγματος και x, y, z οι αντίστοιχες νέες θέσεις. Η πτέρυγα παραμορφώνεται για τιμές του α από 0.05 έως 0.5 με βήμα $\delta\alpha = 0.05$. Ενδεικτικά, αναφέρεται ότι ο αριθμός των βημάτων που απαιτήθηκαν για να μετακινηθεί το πλέγμα από το αρχικό σε αυτό που αντιστοιχεί σε τιμές της παραμέτρου $\alpha = 0.25$ και $\alpha = 0.50$ είναι 5 και 7 βήματα, αντίστοιχα.



(α') Το υπολογιστικό χωρίο γύρω από την πτέρυγα.

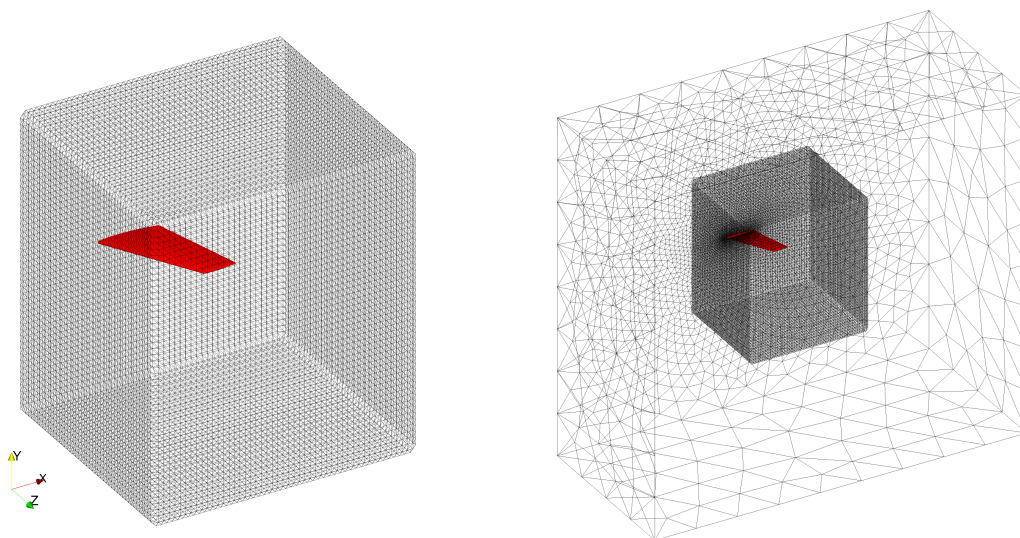


(β') Το υπολογιστικό πλέγμα στην επιφάνεια της πτέρυγας.

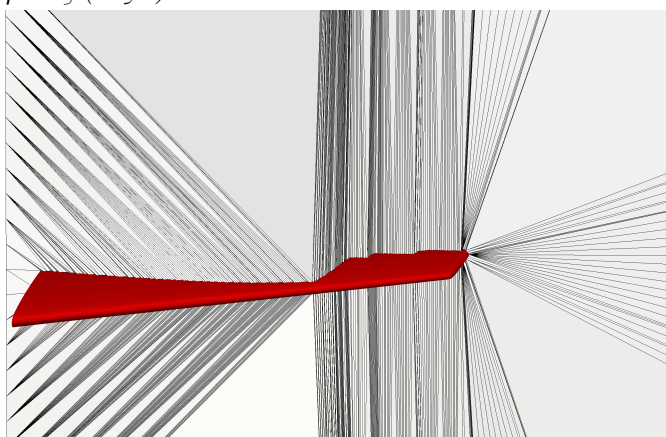


(γ') Το υπολογιστικό πλέγμα γύρω από την πτέρυγα.

94 **Σχήμα 5.3:** Εφαρμογή στην πτέρυγα ONERA M6. Το μη-δομημένο πλέγμα τετράε-



(α') Το μη-ελεγχόμενο όριο του γράφου Delaunay (αριστερά) και ο γράφος Delaunay στο εσωτερικό του πλέγματος (δεξιά).

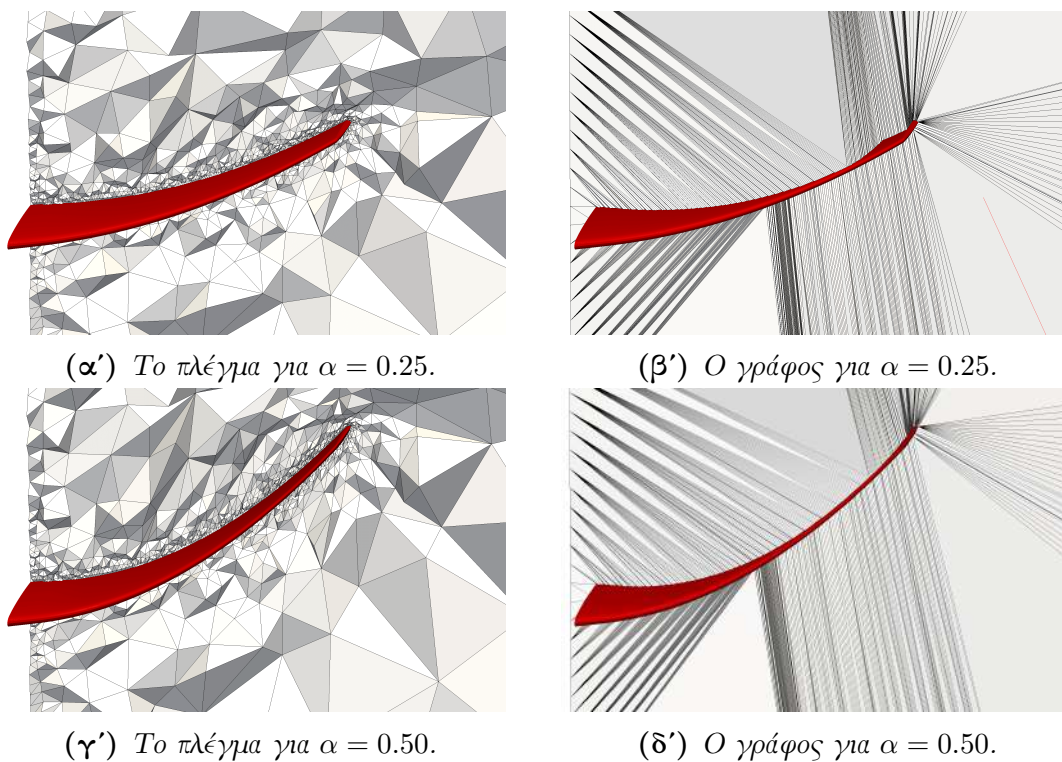


(β') Ο γράφος Delaunay κοντά στην πτέρυγα.

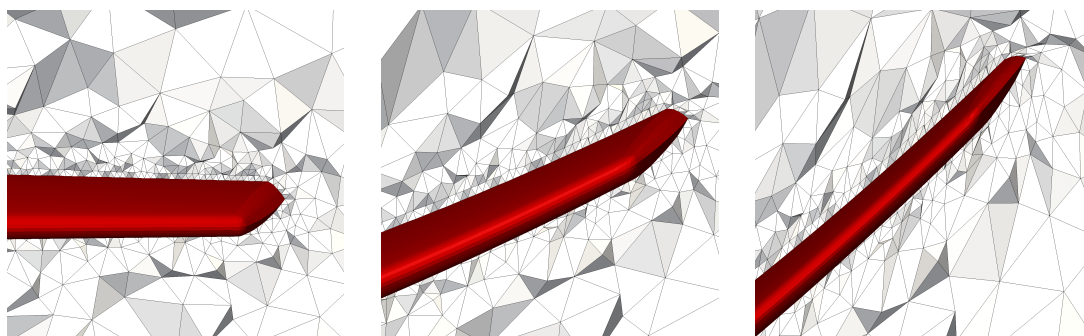
Σχήμα 5.4: Εφαρμογή στην πτέρυγα ONERA M6. Ο γράφος Delaunay του υπολογιστικού χωρίου γύρω από την πτέρυγα, που σχηματίζεται από τους κόμβους της πτέρυγας και από ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που την περιέχει. Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο αποτελεί το μη-ελεγχόμενο όριο του γράφου και περιέχει κόμβους τόσο στις κορυφές όσο και στις πλευρές του.



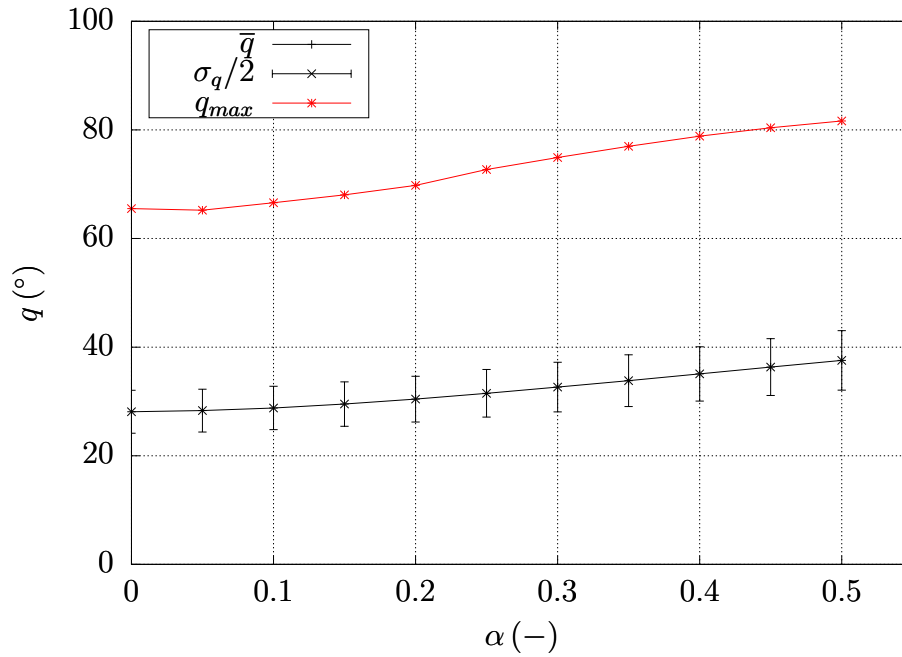
Σχήμα 5.5: Κάμψη της πτέρυγα ONERA M6. Το σχήμα της αρχικής πτέρυγας (αριστερά) και της παραμορφωμένης πτέρυγας, σε δύο διαφορετικές θέσεις (κέντρο, δεξιά).



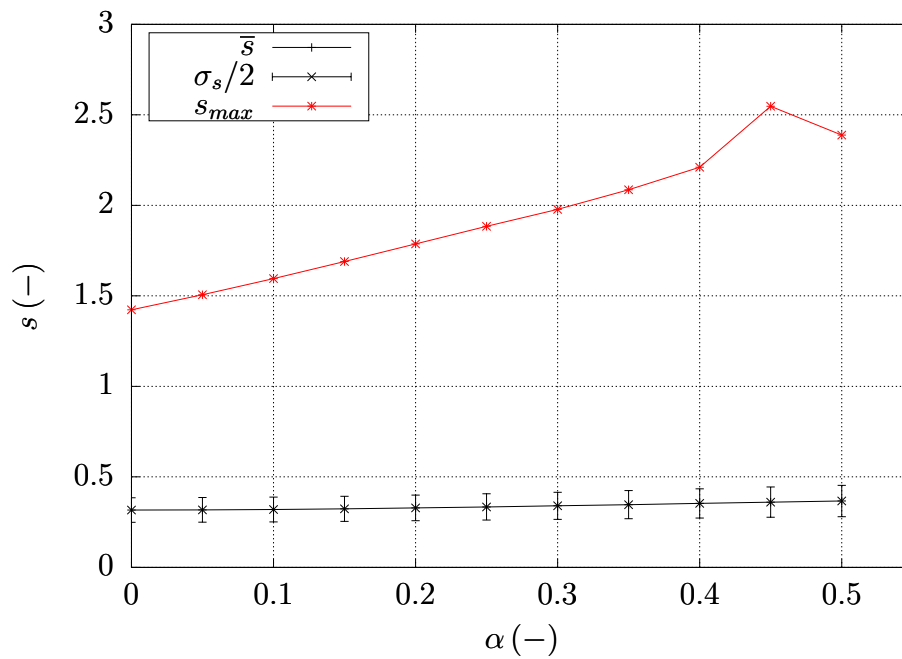
Σχήμα 5.6: Κάμψη της πτέρυγα ONERA M6. Το παραμορφωμένο πλέγμα (αριστερά) και ο γράφος Delaunay (δεξιά) κοντά στην πτέρυγα, μετά την κάμψη της κατά το εκπέτασμα, για τιμές του συντελεστή παραμόρφωσης $\alpha = 0.25$ και $\alpha = 0.50$.



Σχήμα 5.7: Κάμψη της πτέρυγα ONERA M6. Λεπτομέρεια του πλέγματος κοντά στην πτέρυγα, πριν και μετά την παραμόρφωση.



Σχήμα 5.8: Κάμψη της πτέρυγα ONERA M6. Η μέση τιμή \bar{q} και η μέγιστη τιμή q_{max} της μη-ορθογωνικότητας του πλέγματος, με την αύξηση της παραμόρφωσης α .



Σχήμα 5.9: Κάμψη της πτέρυγα ONERA M6. Η μέση τιμή \bar{s} και η μέγιστη τιμή s_{max} της στρεβλότητας του πλέγματος, με την αύξηση της παραμόρφωσης α .

5.2.2 Κάμψη και Στρέψη της Πτέρυγας

Ως μία πιο δύσκολη περίπτωση παραμόρφωσης, επιλέγεται η κάμψη της πτέρυγας κατά το εκπέτασμα (όπως έγινε στην εφαρμογή 5.2.1) με ταυτόχρονη στρέψη της γύρω από τον ίδιο άξονα (άξονας z). Η νέα θέση των σημείων του ελεγχόμενου ορίου δίνεται από μία σχέση της μορφής:

$$\begin{aligned}x &= \cos\phi(x_0 - x_r) - \sin\phi(y_0 - y_r) + x_r \\y &= \cos\phi(y_0 - y_r) + \sin\phi(x_0 - x_r) + y_r + \alpha z_0^2 \\z &= z_0\end{aligned}\quad (5.2)$$

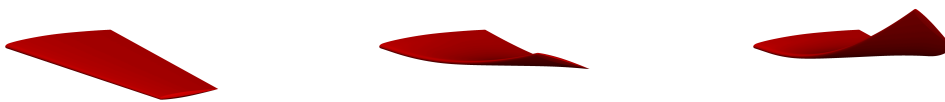
με

$$\begin{aligned}x_r &= 5.25 + 0.45z_0 \\y_r &= 5.0\end{aligned}$$

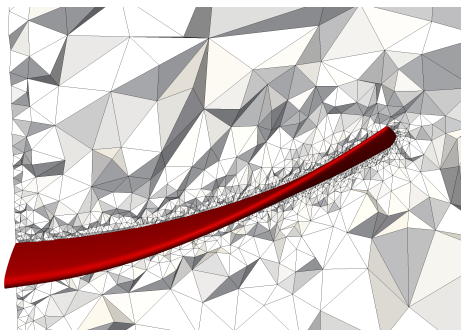
και

$$\phi = \alpha z_0^2$$

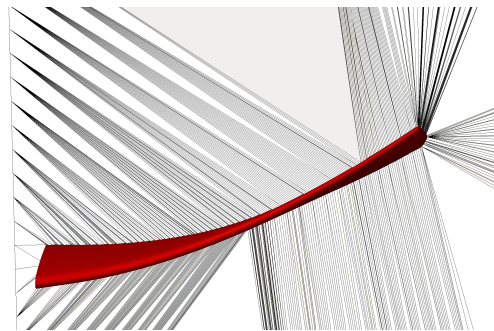
όπου x_0, y_0, z_0 οι αρχικές θέσεις των σημείων του πλέγματος, x_r, y_r το σημείο γύρω από το οποίο περιστρέφεται η κάθε αεροτομή (δηλαδή τα σημεία με ίδια συντεταγμένη z), και x, y, z οι αντίστοιχες νέες θέσεις. Η πτέρυγα παραμορφώνεται για τιμές του α από 0.05 έως 0.5 με βήμα $\delta\alpha = 0.05$. Ενδεικτικά, αναφέρεται ότι ο αριθμός των βημάτων που απαιτήθηκαν για να μετακινηθεί το πλέγμα από το αρχικό σε αυτό που αντιστοιχεί σε τιμές της παραμέτρου $\alpha = 0.25$ και $\alpha = 0.50$, για την περίπτωση της ταυτόχρονης κάμψης και στρέψης, είναι 7 και 11, αντίστοιχα.



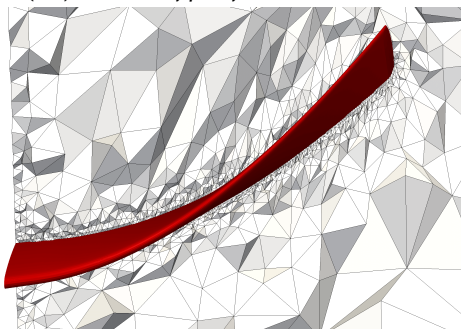
Σχήμα 5.10: Κάμψη και ταυτόχρονη στρέψη της πτέρυγα ONERA M6. Το σχήμα της αρχικής πτέρυγας (αριστερά) και της παραμορφωμένης πτέρυγας, σε δύο διαφορετικές θέσεις (κέντρο, δεξιά).



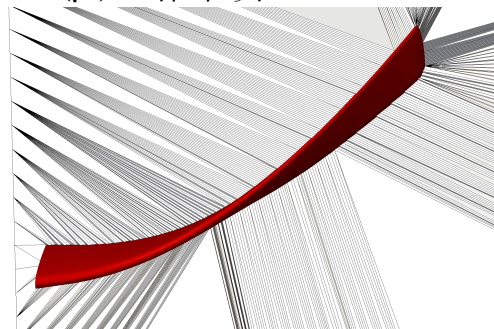
(α') Το πλέγμα για $\alpha = 0.25$.



(β') Ο γράφος για $\alpha = 0.25$.

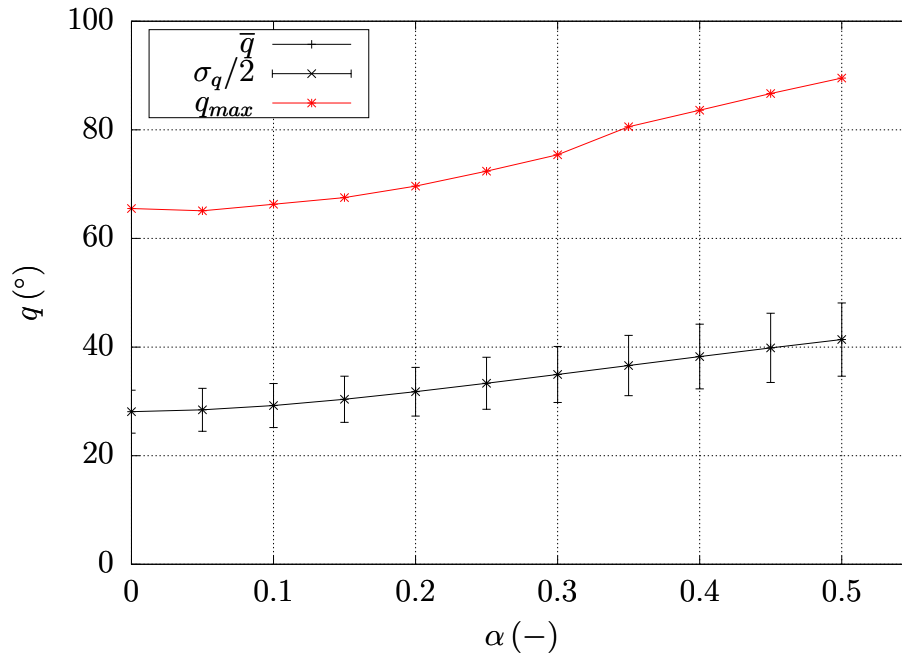


(γ') Το πλέγμα για $\alpha = 0.50$.

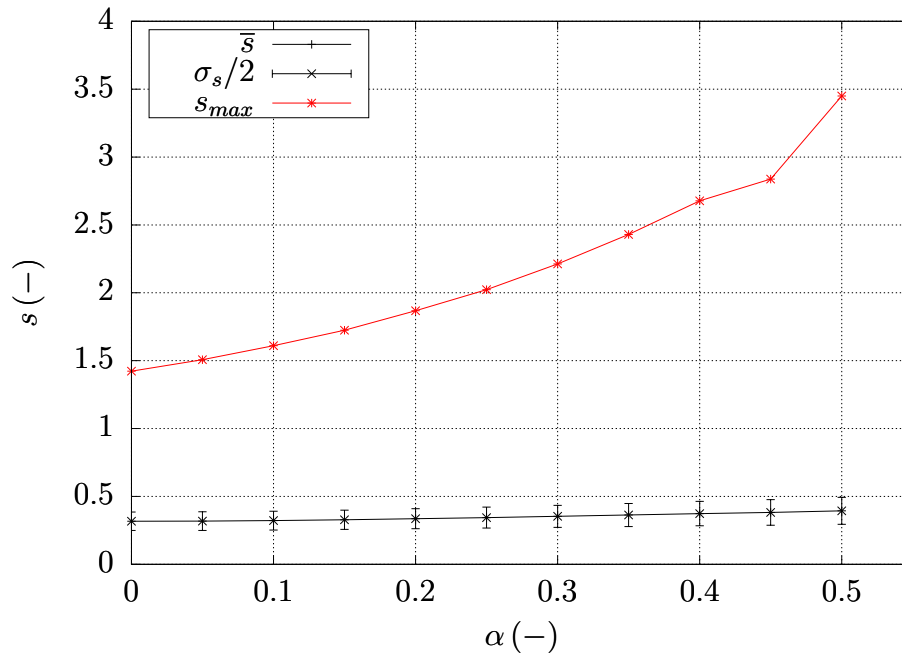


(δ') Ο γράφος για $\alpha = 0.50$.

Σχήμα 5.11: Κάμψη και ταυτόχρονη στρέψη της πτέρυγα ONERA M6. Το παραμορφωμένο πλέγμα (αριστερά) και ο γράφος Delaunay (δεξιά) κοντά στην πτέρυγα, μετά την ταυτόχρονη κάμψη και στρέψη της, για τιμές του συντελεστή παραμόρφωσης $\alpha = 0.25$ και $\alpha = 0.50$.



Σχήμα 5.12: Κάμψη και ταυτόχρονη στρέψη της πτέρυγα ONERA M6. Η μέση τιμή \bar{q} και η μέγιστη τιμή q_{max} της μη-ορθογωνικότητας του πλέγματος, με την αύξηση της παραμόρφωσης α .



Σχήμα 5.13: Κάμψη και ταυτόχρονη στρέψη της πτέρυγα ONERA M6. Η μέση τιμή \bar{s} και η μέγιστη τιμή s_{max} της στρεβλότητας του πλέγματος, με την αύξηση της παραμόρφωσης α .

5.2.3 Συμπεράσματα

Στην εφαρμογή αυτή, χρησιμοποιήθηκε ένα σχετικά αραιό 3D πλέγμα τύπου Euler γύρω από την πτέρυγα ONERA M6, έτσι ώστε να γίνει επίδειξη της μεθόδου γράφων Delaunay στις 3 διαστάσεις. Επειδή το πλέγμα που παραμορφώθηκε είναι αραιό, οι παραμορφώσεις που εφαρμόστηκαν ήταν μεγάλες, έτσι ώστε να φανεί η στιβαρότητα και η ευελιξία της μεθόδου.

Κατά την κάμψη της πτέρυγας, η ποιότητα του πλέγματος διατηρήθηκε σε ικανοποιητικά επίπεδα για τιμές του συντελεστή παραμόρφωσης α έως 0.25. Για μεγαλύτερη κάμψη, η μέγιστη τιμή της μη-ορθογωνικότητας γίνεται σημαντικά μεγάλη (> 70), παρόλο που η μέση τιμή της μη-ορθογωνικότητας $\bar{\alpha}$ και η στρεβλότητα s παραμένουν σε αποδεκτά επίπεδα. Όμως, η παραμόρφωση με συντελεστή $\alpha = 0.25$ είναι ικανοποιητικά μεγάλη, ενώ η ποιότητα του παραμορφωμένου πλέγματος μπορεί να βελτιωθεί, αν χρησιμοποιηθούν περισσότερα βήματα κατά τη μετακίνησή του.

Ως μία πιο απαιτητική περίπτωση παραμόρφωσης επιλέχθηκε η ταυτόχρονη κάμψη και στρέψη της πτέρυγας, κατά την οποία η ποιότητα του πλέγματος παρέμεινε σε αποδεκτά επίπεδα για τιμές του συντελεστή παραμόρφωσης α έως και 0.25. Και σε αυτήν την περίπτωση, για μεγαλύτερες παραμορφώσεις, η μέγιστη μη-ορθογωνικότητα αγγίζει μη-αποδεκτά επίπεδα και γι' αυτό το λόγο, το πλέγμα δεν μπορεί να θεωρηθεί έγκυρο. Παρ' όλα αυτά, ακόμα και για παραμόρφωση με $\alpha = 0.25$, η μέθοδος ανταποκρίνεται ικανοποιητικά στη μετακίνηση του πλέγματος. Επίσης, όπως ήταν αναμενόμενο, για κάθε τιμή του συντελεστή α απαιτούνται περισσότερα βήματα, σε σχέση με την απλή κάμψη της πτέρυγας. Ενδεικτικά, για $\alpha = 0.25$, χρειάζονται 5 βήματα για την κάμψη και 7 βήματα για την ταυτόχρονη κάμψη και στρέψη.

Τέλος, σημαντικό παράγοντα στην ποιότητα του παραγόμενου πλέγματος αποτελεί και η επιλογή του μη-ελεγχόμενου ορίου του γράφου Delaunay. Με κατάλληλη επιλογή του ορίου αυτού, μπορεί να επιτευχθεί σημαντικά καλύτερη ποιότητα πλέγματος. Η επίδραση της επιλογής του μη-ελεγχόμενου ορίου στην ποιότητα του παραμορφωμένου πλέγματος γίνεται περισσότερο εμφανής στις εφαρμογές που ακολουθούν.

5.3 Εφαρμογές σε Πλέγματα Εσωτερικής Αεροδυναμικής

Μέχρι τώρα, έχουν καλυφθεί κυρίως θέματα που αφορούν την παραμόρφωση πλεγμάτων εξωτερικών ροών (δηλαδή αεροτομές και πτέρυγες). Όμως, η μέθοδος μετακίνησης πλεγμάτων με γράφους Delaunay μπορεί να εφαρμοστεί εξ ίσου εύκολα και σε περιπτώσεις πλεγμάτων εσωτερικών ροών, όπως είναι οι αγωγοί (ducts). Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζεται η μετακίνηση τριών πλεγμάτων που αφορούν τέτοιου είδους περιπτώσεις.

Σε πλέγματα εσωτερικών ροών, το εξωτερικό όριο του γράφου Delaunay θα ταυτίζεται, εν γένει, με το ελεγχόμενο όριο του προβλήματος, δηλαδή τα τοιχώματα της εκάστοτε γεωμετρίας. Χρησιμοποιώντας μόνο τους κόμβους του ελεγχόμενου ορίου και χωρίς να οριστούν επιπλέον μη-ελεγχόμενοι κόμβοι (όπως γίνεται σε περιπτώσεις πλεγμάτων εξωτερικής ροής), μπορεί να κατασκευαστεί μία κατά Delaunay ψηφιοποίηση των κόμβων αυτών, η οποία θα καλύπτει εξ ολοκλήρου το υπολογιστικό χωρίο (το οποίο βρίσκεται εσωτερικά της γεωμετρίας). Δηλαδή, δεν είναι αναγκαία η επιλογή μη-ελεγχόμενων κόμβων. Όμως, όπως θα φανεί και στην τρίτη κατά σειρά εφαρμογή της ενότητας αυτής, η κατάλληλη προσθήκη σημείων στο εσωτερικό του υπολογιστικού χωρίου (δηλαδή στο εσωτερικό του αγωγού) μπορεί να οδηγήσει σε πλέγμα σημαντικά καλύτερης ποιότητας, καθώς και να επιταχύνει τη διαδικασία παραμόρφωσης του πλέγματος.

Και στις τρεις εφαρμογές της ενότητας αυτής, η παραμόρφωση των αγωγών έχει προκύψει από μία διαδικασία βελτιστοποίησης με χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου. Αποτελούν, δηλαδή, ρεαλιστικές περιπτώσεις εφαρμογής της μεθόδου που αναπτύχθηκε στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας, μιας και ο στόχος της εργασίας αυτής είναι να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος γράφων Delaunay στη μετακίνηση πλεγμάτων κατά την αεροδυναμική βελτιστοποίηση μορφής με τη χρήση της συζυγούς μεθόδου.

5.3.1 Απλός Αγωγός Ορθογωνικής Διατομής

Η πρώτη εφαρμογή σε εσωτερική ροή γίνεται σε έναν απλό αγωγό ορθογωνικής διατομής, ο οποίος παραμορφώνεται/διαστέλλεται κατάλληλα, ώστε να μειωθούν οι απώλειες πίεσης. Το πλέγμα αποτελείται από 372264 κόμβους και 334882 κελιά, τα οποία είναι κυρίως εξαεδρικά. Ο αγωγός μαζί με το επιφανειακό πλέγμα δίνονται στο σχήμα 5.14. Ο γράφος Delaunay σχηματίζεται από τους επιφανειακούς κόμβους του πλέγματος και μόνο. Δεν περιλαμβάνει, δηλαδή, μη-ελεγχόμενους κόμβους.

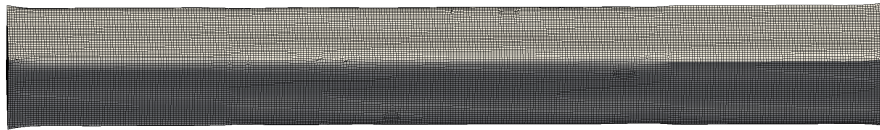
Στον αγωγό επιβάλλεται παραμόρφωση που διαστέλλει τα τοιχώματά του, όπως προέκυψε από μία διαδικασία βελτιστοποίησης. Το πλέγμα μετακινείται σε 10 βήματα, ενώ μετά από κάθε βήμα ο γράφος ανανεώνεται σύμφωνα με τον αλγόριθμο 2. Η παραμορ-

φωμένη, πλέον, γεωμετρία και το νέο πλέγμα δίνονται στο σχήμα 5.16. Οι μετρικές q και s του αρχικού και του παραμορφωμένου πλέγματος δίνονται στον πίνακα 5.1.

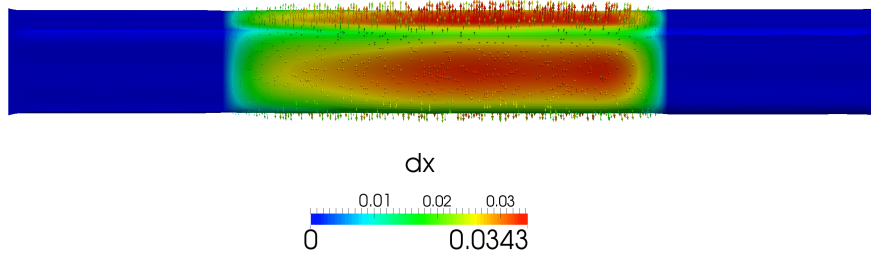
Μετρική		Πριν	Μετά
Μη-ορθογωνικότητα	\bar{q} (°)	3.66	13.18
	q_{max} (°)	58.90	64.50
Στρεβλότητα	s_{max} (-)	2.43	2.44

Πίνακας 5.1: Εφαρμογή σε απλό αγωγό ορθογωνικής διατομής. Μετρικές ποιότητας του πλέγματος πριν και μετά την παραμόρφωση.

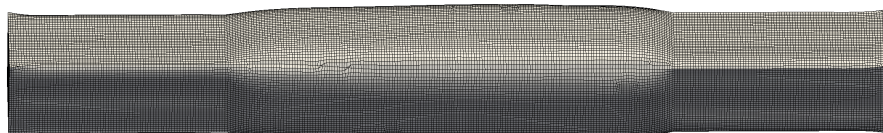
Από τον πίνακα 5.1 φαίνεται ότι η μετρική που επηρεάζεται από την παραμόρφωση του πλέγματος είναι η μη-ορθογωνικότητα q . Συγκεκριμένα, η μέση τιμή της, \bar{q} , αυξάνεται σημαντικά, αλλά παραμένει σε αποδεκτά επίπεδα, ενώ η μέγιστη τιμή q_{max} επίσης αυξάνεται ελαφρά, χωρίς να φτάνει σε μη-αποδεκτές τιμές. Αντίθετα, η μέγιστη στρεβλότητα, s_{max} δεν μεταβάλλεται. Γενικά, το παραμορφωμένο πλέγμα είναι καλής ποιότητας, παρά τη μεγάλη παραμόρφωση της γεωμετρίας.



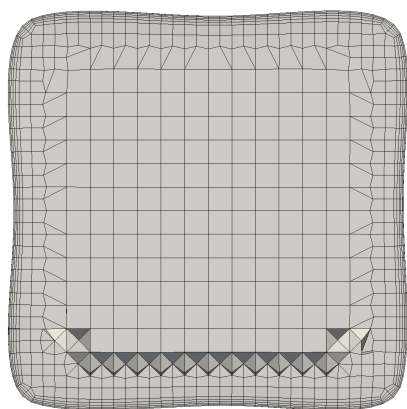
Σχήμα 5.14: Εφαρμογή σε απλό αγωγό ορθογωνικής διατομής. Το υπολογιστικό πλέγμα στην απαραμόρφωτη επιφάνεια του αγωγού.



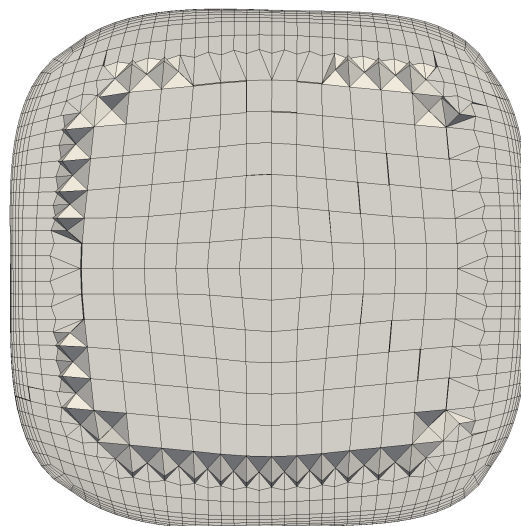
Σχήμα 5.15: Εφαρμογή σε απλό αγωγό ορθογωνικής διατομής. Το μέγεθος της μετατόπισης των κόμβων της επιφάνειας της γεωμετρίας. Η κατεύθυνση της μετατόπισης απεικονίζεται από τα αντίστοιχα διανύσματα.



Σχήμα 5.16: Εφαρμογή σε απλό αγωγό ορθογωνικής διατομής. Το νέο πλέγμα που προκύπτει μετά τη μετατόπιση της γεωμετρίας.



(α') Πριν την παραμόρφωση.



(β') Μετά την παραμόρφωση.

Σχήμα 5.17: Εφαρμογή σε απλό αγωγό ορθογωνικής διατομής. Ο υπολογιστικό πλέγμα σε μία διατομή στο μέσο του αγωγού, πριν και μετά την παραμόρφωση.

5.3.2 Αγωγός Τύπου-S

Στην εφαρμογή αυτή, ο αγωγός έχει σχήμα-S, ενώ κάθε διατομή του κατά το μήκος του είναι προσεγγιστικά ορθογωνική. Ο αγωγός παραμορφώνεται κατάλληλα, ώστε να μειωθούν οι απώλειες ολικής πίεσης της ροής στο εσωτερικό του. Το πλέγμα αποτελείται από 479688 κόμβους και 465976 εξαεδρικά κελιά. Ο αγωγός μαζί με το επιφανειακό πλέγμα δίνονται στο σχήμα 5.18. Για την κατασκευή του γράφου Delaunay εξετάζονται δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση, ο γράφος αποτελείται εξ ολοκλήρου από τους κόμβους της γεωμετρίας, ενώ δεν περιέχει κανέναν μη-ελεγχόμενο κόμβο. Στη δεύτερη περίπτωση, εισάγονται επιπλέον κόμβοι (μη-ελεγχόμενοι) κατά μήκος το αγωγού και στα κέντρα των διατομών έτσι ώστε να σχηματιστούν μικρότερα και πιο ευέλικτα τετράεδρα.

Περίπτωση 1: Ο γράφος αποτελείται εξ ολοκλήρου από τους κόμβους της γεωμετρίας, δηλαδή της επιφάνειας του αγωγού, ενώ δεν περιέχει κανένα μη-ελεγχόμενο κόμβο.

Περίπτωση 2: Ο γράφος αποτελείται από τους κόμβους της γεωμετρίας, αλλά και από μη-ελεγχόμενους κόμβους οι οποίοι εισάγονται κατά μήκος του αγωγού και στα κέντρα των διατομών του, έτσι ώστε να σχηματιστούν μικρότερα και πιο ευέλικτα τετράεδρα.

Όπως και πριν, επιβάλλεται στον αγωγό παραμόρφωση που διαστέλλει τα τοιχώματά του και η οποία προέκυψε από μία διαδικασία βελτιστοποίησης. Το πλέγμα μετακινείται σε 10 βήματα, ενώ μετά από κάθε βήμα ο γράφος ανανεώνεται, σύμφωνα με τον αλγόριθμο 2. Η παραμορφωμένη, πλέον, γεωμετρία και το νέο πλέγμα δίνονται στο σχήμα 5.20. Οι μετρικές q και s του αρχικού και του παραμορφωμένου πλέγματος, για τις δύο περιπτώσεις γράφων, δίνονται στον πίνακα 5.2.

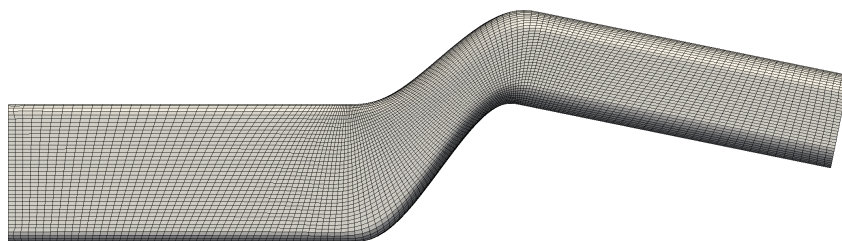
Μετρική		Πρίν	Περίπτωση 1	Περίπτωση 2
Μη-ορθογωνικότητα	\bar{q} (°)	18.83	22.50	21.92
	q_{max} (°)	63.89	64.65	64.85
Στρεβλότητα	s_{max} (-)	0.46	0.87	1.19

Πίνακας 5.2: Εφαρμογή σε αγωγό τύπου-S. Μετρικές ποιότητας του πλέγματος πριν και μετά την παραμόρφωση, για τις περιπτώσεις 1 και 2.

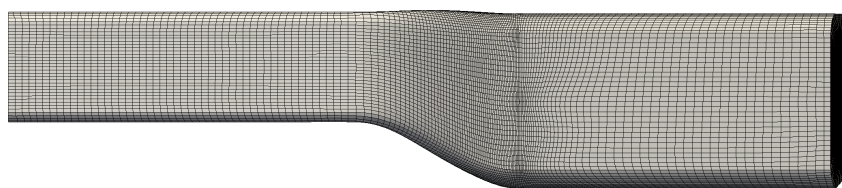
Από τον πίνακα 5.2 φαίνεται ότι οι μετρικές της μη-ορθογωνικότητας και της στρεβλότητας δεν αλλάζουν σημαντικά. Συγκεκριμένα, η μέση μη-ορθογωνικότητα, \bar{q} , αυξάνεται σε σχέση με το αρχικό πλέγμα, με την περίπτωση 1 δίνει λίγο μεγαλύτερη τιμή από την περίπτωση 2. Οι μέγιστες τιμές της μη-ορθογωνικότητας, q_{max} , παραμένουν σχεδόν αμετάβλητες, ενώ η μέγιστη στρεβλότητα, s_{max} αυξάνεται ελαφρά, με την περίπτωση 2 να δίνει λίγο μεγαλύτερη τιμή από την περίπτωση 1. Αν ληφθεί υπόψη ότι η μέση τιμή της μη-ορθογωνικότητας είναι μία ποσότητα που εκφράζει τη συνολική ποιότητα του πλέγματος, σε αντίθεση με τις μέγιστες τιμές, οι οποίες μπορεί αφορούν μόνο ένα κελί

5.3. Εφαρμογές σε Πλέγματα Εσωτερικής Αεροδυναμικής

του πλέγματος, συμπεραίνεται ότι η περίπτωση 1, όπου ο γράφος δεν περιλαμβάνει τα επιπλέον σημεία, οδηγεί σε ελαφρώς χειρότερης ποιότητας πλέγμα. Όμως, η διαφορά των δύο γράφων είναι μικρή για να φανεί η επίδραση που έχει η εισαγωγή επιπλέον σημείων στο μη-ελεγχόμενο όριο του γράφου Delaunay. Στην επόμενη εφαρμογή, η επίδραση αυτή γίνεται περισσότερο εμφανής.

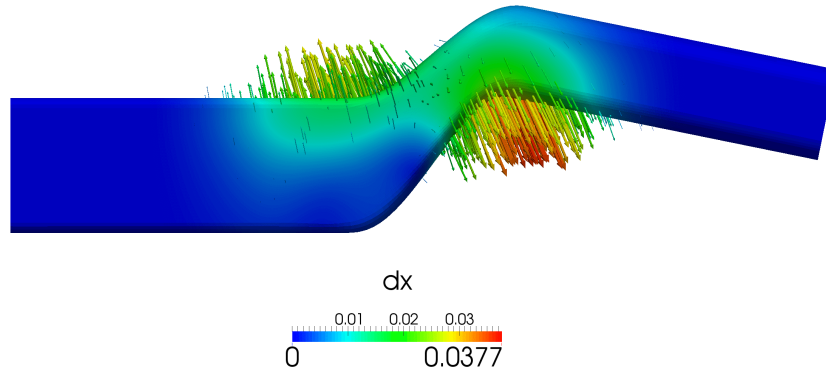


(α') Πλάγια όψη.

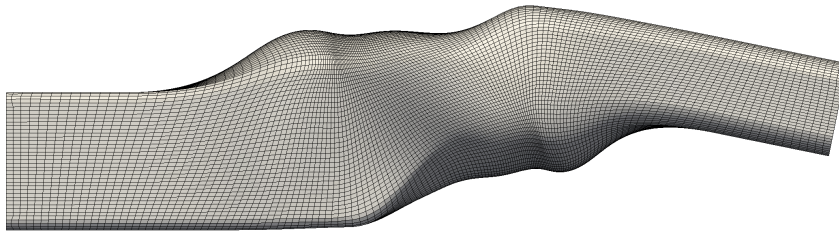


(β') Κάτω όψη.

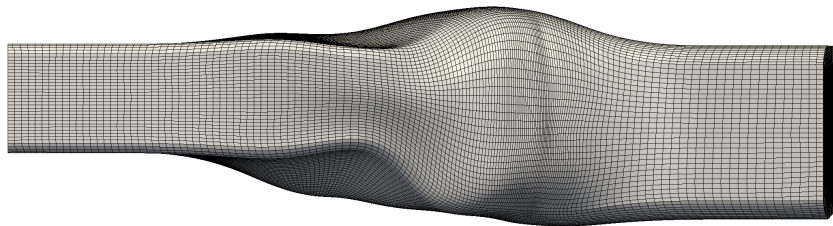
Σχήμα 5.18: Εφαρμογή σε αγωγό τύπου-S. Το υπολογιστικό πλέγμα στην επιφάνεια του αγωγού, πριν την παραμόρφωση της γεωμετρίας.



Σχήμα 5.19: Εφαρμογή σε αγωγό τύπου-S. Το μέγεθος της μετατόπισης των κόμβων της επιφάνειας της γεωμετρίας. Η κατεύθυνση της μετατόπισης απεικονίζεται από τα αντίστοιχα διανύσματα. Πλάγια όψη.



(α') Πλάγια όψη.



(β') Κάτω όψη.

Σχήμα 5.20: Εφαρμογή σε αγωγό τύπου-S. Το παραμορφωμένο υπολογιστικό πλέγμα στην επιφάνεια του αγωγού.

5.3.3 Παραμόρφωση Αγωγού Πυκνού Πλέγματος

Η τρίτη εφαρμογή σε πλέγμα εσωτερικής ροής γίνεται σε έναν αγωγό, ο οποίος στην είσοδο και την έξοδό του είναι ορθογωνικής διατομής, ενώ στο μέσω του η επιφάνειά του είναι κυκλικής (προσεγγιστικά) διατομής, μεγαλύτερου εμβαδού. Το πλέγμα του αγωγού αυτού αποτελείται από 745685 κόμβους και 661327 κελιά, τα οποία είναι κυρίως εξαεδρικά. Ο αγωγός μαζί με το επιφανειακό πλέγμα δίνονται στο σχήμα 5.21.

Αν και το μέγεθος της παραμόρφωσης που επιβάλλεται στην επιφάνεια της γεωμετρίας είναι πολύ μικρό σε σχέση με τις διαστάσεις του αγωγού, η μετακίνηση του πλέγματος είναι ιδιαίτερα απαιτητική. Η δυσκολία στην παραμόρφωση του πλέγματος οφείλεται στο ότι αυτό είναι πολύ πυκνό κοντά στα τοιχώματα, καθώς και στο ότι η επιφάνεια του αγωγού που παραμορφώνεται είναι παραμετροποιημένη με διαφορετικές επιφάνειες NURBS, οι οποίες, στα σημεία που ενώνονται, δυσχεραίνουν τη μετατόπιση του πλέγματος. Προκύπτει ότι, μετά την παραμόρφωση, τα κακής ποιότητας κελιά του παραμορφωμένου πλέγματος εμφανίζονται κοντά στις περιοχές που ενώνονται οι επιφάνειες αυτές.

Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, στην επιφάνεια του αγωγού επιβάλλεται παραμόρφωση που κινεί τα τοιχώματά του και η οποία έχει προκύψει από μία διαδικασία βελτιστοποίησης σχήματος.

Για την κατασκευή του γράφου Delaunay εξετάζονται τρεις περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση, ο γράφος αποτελείται εξ ολοκλήρου από τους κόμβους της γεωμετρίας, ενώ δεν περιέχει κανέναν μη-ελεγχόμενο κόμβο. Στη δεύτερη και τρίτη περίπτωση, εισάγονται επιπλέον κόμβοι εσωτερικά του τοιχώματος και κοντά σε αυτό, οι οποίοι είναι διατεταγμένοι στις επιφάνειες ενός ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου κι ενός κυλίνδρου, αντίστοιχα, έτσι ώστε να σχηματιστούν πιο ευέλικτα τετράεδρα.

Περίπτωση 1: Ο γράφος αποτελείται εξ ολοκλήρου από τους κομβους της γεωμετρίας, δηλαδή της επιφάνειας του αγωγού, ενώ δεν περιέχει κανένα μη-ελεγχόμενο κόμβο.

Περίπτωση 2: Ο γράφος αποτελείται από τους κόμβους της γεωμετρίας, αλλά και από μη-ελεγχόμενους κόμβους, οι οποίοι είναι κατανομημένοι στην επιφάνεια ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, το οποίο βρίσκεται εσωτερικά και κοντά στην επιφάνεια του αγωγού.

Περίπτωση 3: Ο γράφος αποτελείται από τους κόμβους της γεωμετρίας, αλλά και από μη-ελεγχόμενους κόμβους, οι οποίοι είναι κατανομημένοι στην επιφάνεια κυλίνδρου, ο οποίος βρίσκεται εσωτερικά και κοντά στην επιφάνεια του αγωγού.

Ανάλογα με το γράφο που επιλέγεται για την εκάστοτε περίπτωση, το πλέγμα μετακινείται σε διαφορετικό αριθμό βημάτων, που προκύπτουν σύμφωνα με τον αλγόριθμο 2. Το μέγεθος της μετακίνησης της επιφάνειας δίνεται με ανάλογο χρωματισμό στο σχήμα 5.22. Το παραμορφωμένο πλέγμα σε μία διατομή του αγωγού δίνεται στο σχήμα 5.24. Οι μετρικές q και s του αρχικού και του παραμορφωμένου πλέγματος, για τις

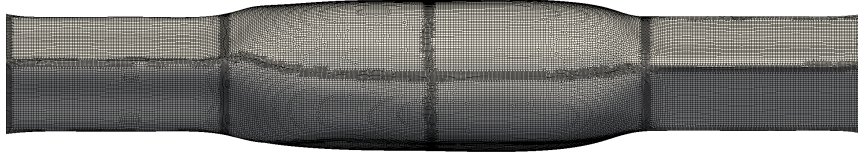
τρεις περιπτώσεις που εξετάζονται, δίνονται στον πίνακα 5.3.

Μετρική		Πρίν	Περ. 1	Περ. 2	Περ. 3
Μη-ορθογωνικότητα	\bar{q} (°)	7.44	9.79	7.92	7.97
	q_{max} (°)	65.84	88.62	79.74	80.15
Στρεβλότητα	s_{max} (-)	2.47	3.43	2.73	2.70
Πλήθος κελιών με $q > 70$		0	3656	102	65

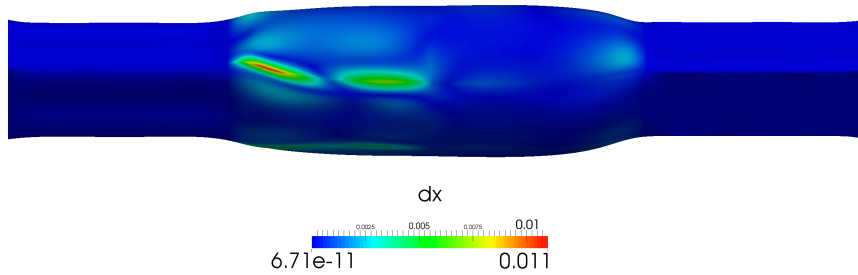
Πίνακας 5.3: Παραμόρφωση αγωγού πυκνού πλέγματος. Μετρικές ποιότητας του πλέγματος πριν και μετά την παραμόρφωση, για τις περιπτώσεις 1 και 2.

Από τον πίνακα 5.3 φαίνεται ότι οι περιπτώσεις 2 και 3, όπου χρησιμοποιούνται επιπλέον σημεία για την κατασκευή του γράφου, δίνουν σημαντικά καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με την περίπτωση 1. Συγκεκριμένα, η χρήση μόνο των σημείων της επιφάνειας του πλέγματος για την κατασκευή του γράφου οδηγεί σε πολύ μεγαλύτερες τιμές της μη-ορθογωνικότητας, ενώ 3656 κελιά έχουν μη-ορθογωνικότητα μεγαλύτερη από 70. Ένα τέτοιο πλέγμα θεωρείται κακής ποιότητας. Αντίθετα, η εισαγωγή επιπλέον μη-ελεγχόμενων κόμβων οδηγεί σε μικρότερη μέση μη-ορθογωνικότητα, \bar{q} , αλλά και μέγιστη, q_{max} , ενώ ο αριθμός των κελιών με $q > 70$ είναι σημαντικά μικρότερος. Μεταξύ των περιπτώσεων 2 και 3, όπου στην πρώτη χρησιμοποιείται γράφος με μη-ελεγχόμενο όριο σθρογώνιου παραλληλεπίπεδου σχήματος, ενώ στη δεύτερη το όριο αυτό είναι κυλινδρικό, εμφανίζονται επίσης διαφορές. Αν και οι συνολικές τιμές της μη-ορθογωνικότητας, \bar{q} και q_{max} , είναι σχεδόν ίδιες, ο αριθμός των κελιών με $q > 70$ είναι διαφορετικός, με την περίπτωση 3 να εμφανίζει λιγότερα κελιά μεγάλης μη-ορθογωνικότητας. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός ότι το κυλινδρικό όριο περιβάλλεται ομοιόμορφα από τα τοιχώματα της γεωμετρίας, η οποία είναι επίσης κυλινδρική (προσεγγιστικά) στο τμήμα που παραμορφώνεται. Τέλος, μικρή, αλλά εμφανής, είναι η επίδραση των τριών διαφορετικών γράφων στη μέγιστη στρεβλότητα, s_{max} .

Από τις τρεις περιπτώσεις που εξετάστηκαν, φαίνεται ότι η επιλογή του μη-ελεγχόμενου ορίου παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην ποιότητα του πλέγματος που προκύπτει μετά την παραμόρφωση. Αν και οι μετατοπίσεις της εφαρμογής αυτής είναι μικρές, η παραμόρφωση του πλέγματος είναι ιδιαίτερα δύσκολη. Όμως, με κατάλληλη επιλογή του μη-ελεγχόμενου ορίου του γράφου, η ποιότητα του παραγόμενου πλέγματος και ο χρόνος που απαιτείται για τον υπολογισμό του μπορούν να βελτιωθούν.



Σχήμα 5.21: Παραμόρφωση αγωγού πυκνού πλέγματος. Το υπολογιστικό πλέγμα στην απαραμόρφωτη επιφάνεια του αγωγού.



Σχήμα 5.22: Παραμόρφωση αγωγού πυκνού πλέγματος. Το μέγεθος της μετατόπισης των κόμβων της επιφάνειας της γεωμετρίας. Οι μεγαλύτερες τιμές της μετατόπισης εμφανίζονται στα σημεία που ενώνονται οι επιφάνειες NURBS.

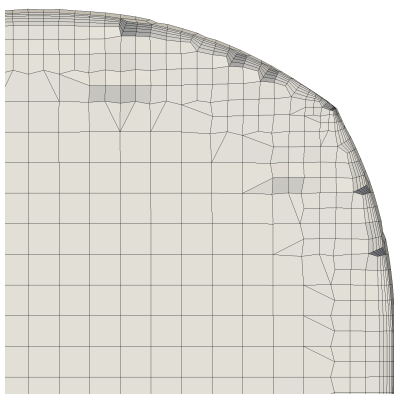


(α') Περίπτωση 2: Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που ορίζει το μη-ελεγχόμενο όριο του γράφου Delaunay (με μαύρο χρώμα) που βρίσκεται εσωτερικά της επιφάνειας του πλέγματος (με ανοικτό/γκρι χρώμα).

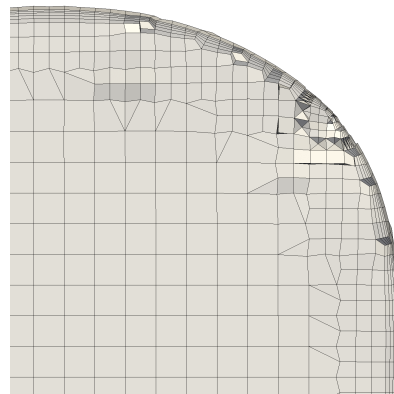


(β') Περίπτωση 3: Ο κύλινδρος που ορίζει το μη-ελεγχόμενο όριο του γράφου Delaunay (με μαύρο χρώμα) που βρίσκεται εσωτερικά της επιφάνειας του πλέγματος (με ανοικτό/γκρι χρώμα).

Σχήμα 5.23: Παραμόρφωση αγωγού πυκνού πλέγματος. Τα μη-ελεγχόμενα όρια των γράφων Delaunay για τις περιπτώσεις 2 και 3. Και στις δύο περιπτώσεις, οι κόμβοι που μετακινούνται είναι αυτοί που βρίσκονται μεταξύ του μη-ελεγχόμενου ορίου του γράφου και της επιφάνειας της γεωμετρίας, ενώ αυτοί που βρίσκονται στο εσωτερικό του μη-ελεγχόμενου ορίου δεν μετατοπίζονται.



(α') Πριν την παραμόρφωση.

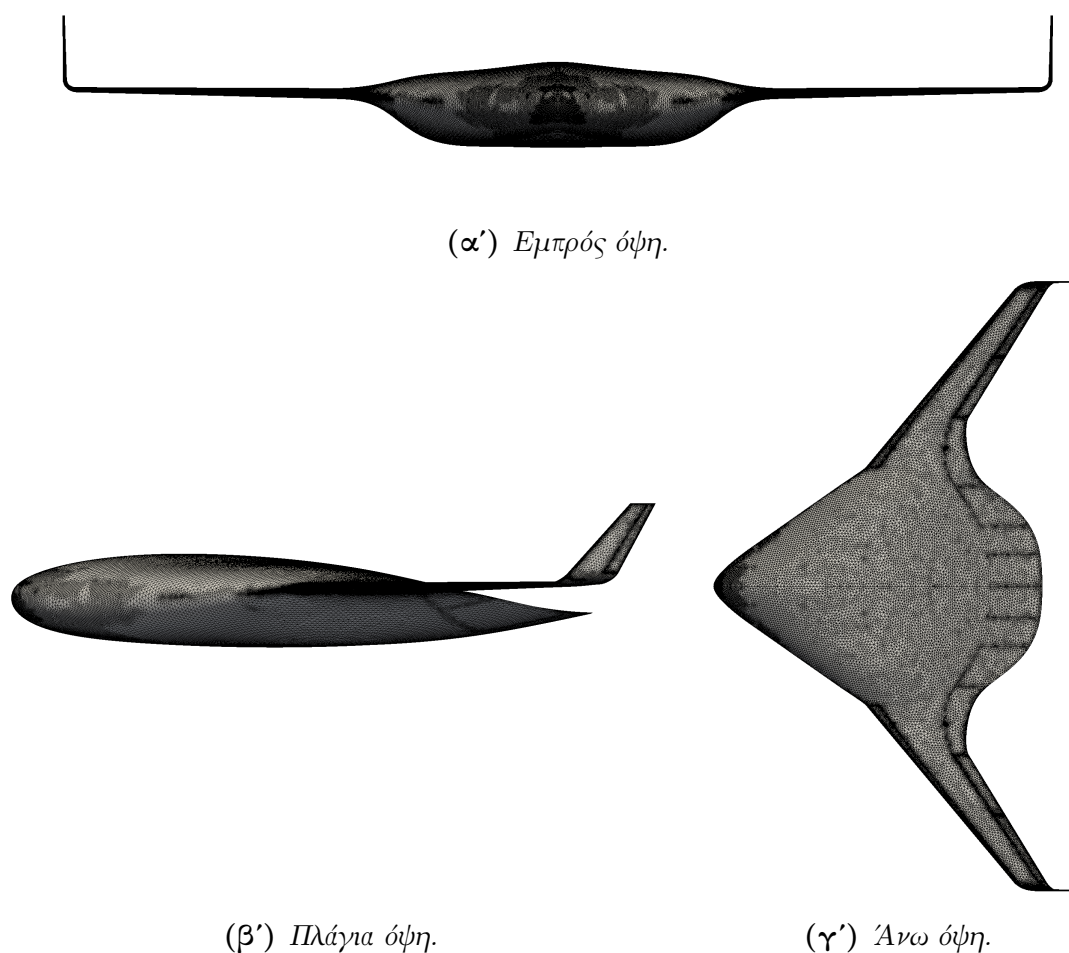


(β') Μετά την παραμόρφωση.

Σχήμα 5.24: Παραμόρφωση αγωγού πυκνού πλέγματος. Λεπτομέρεια του υπολογιστικού πλέγματος σε μία διατομή του αγωγού όπου σημειώνεται μεγάλη μετακίνηση της γεωμετρίας, πριν και μετά την παραμόρφωση. Η παραμόρφωση είναι πολύ μικρή και σημειώνεται κυρίως στα κελιά που βρίσκονται πάνω και δεξιά στη διατομή.

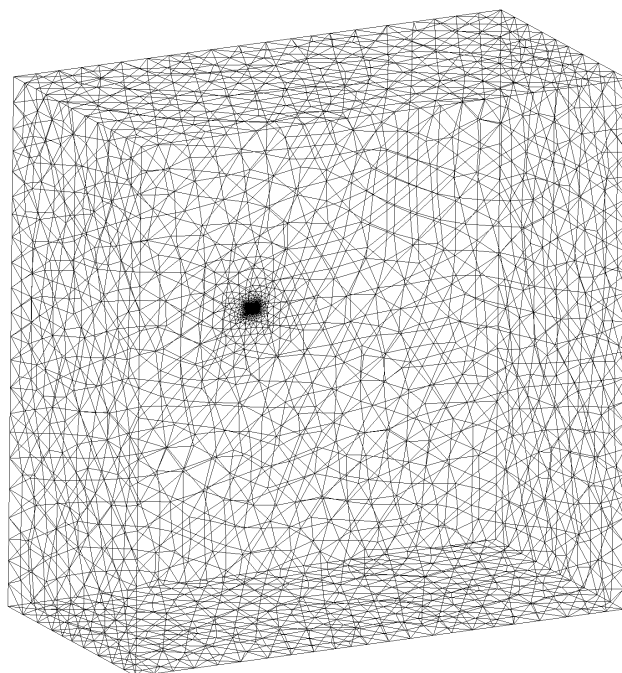
5.4 Εφαρμογή σε Αεροσκάφος Τύπου Blended Wing Body

Στην εφαρμογή αυτή, γίνεται μετακίνηση πλέγματος γύρω από αεροσκάφος τύπου Blended Wing Body. Το πλέγμα είναι κατάλληλο για την προσομοίωση ατριστών ροών και αποτελείται από 692617 κόμβους και 3554525 τετράεδρα. Η γεωμετρία του αεροσκάφους δίνεται στο σχήμα 5.25. Το υπολογιστικό χωρίο καλύπτει τη μία πλευρά του επιπέδου συμμετρίας του αεροσκάφους αλλά, για λόγους εποπτείας, στα σχήματα εμφανίζονται και οι δύο πλευρές του πλέγματος και της γεωμετρίας. Η γεωμετρία του αεροσκάφους και το αρχικό πλέγμα δίνονται στα σχήματα 5.25 και 5.26.

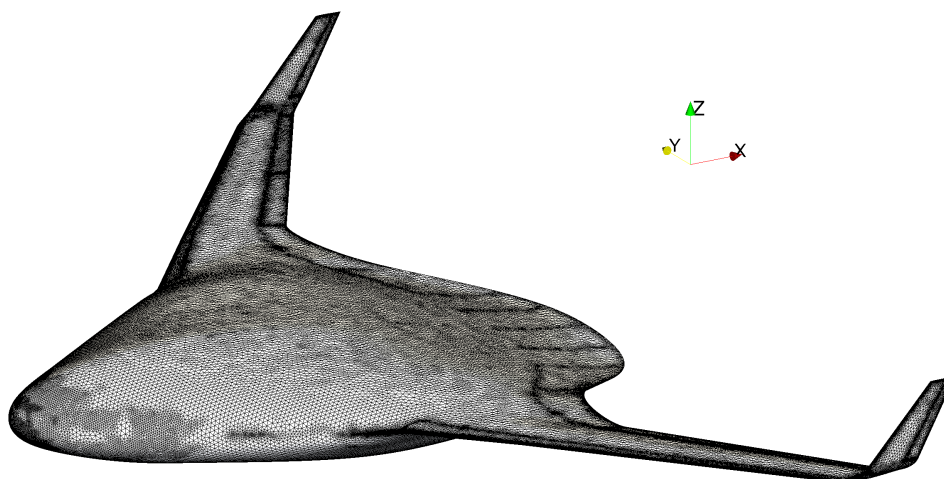


Σχήμα 5.25: Εφαρμογή σε αεροσκάφος τύπου *Blended Wing Body*. Η γεωμετρία του αεροσκάφους και το επιφανειακό πλέγμα επάνω σε αυτό.

Η παραμόρφωση που επιλέγεται είναι η κάμψη της πτέρυγας κατά το εκπέτασμα, σύμ-



(α') Το υπολογιστικό χωρίο.



(β') Το πλέγμα επάνω στην επιφάνεια του αεροσκάφους.

Σχήμα 5.26: Εφαρμογή σε αεροσκάφος τύπου *Blended Wing Body*. Το υπολογιστικό πλέγμα τετράεδρων κελιών γύρω από το αεροσκάφος.

φωνα με μία σχέση της μορφής:

$$x = x_0, \quad y = y_0 + \alpha z_0^2, \quad z = z_0 \quad (5.3)$$

5.4. Εφαρμογή σε Αεροσκάφος Τύπου Blended Wing Body

όπου x_0, y_0, z_0 οι αρχικές θέσεις των σημείων του πλέγματος και x, y, z οι αντίστοιχες νέες θέσεις.

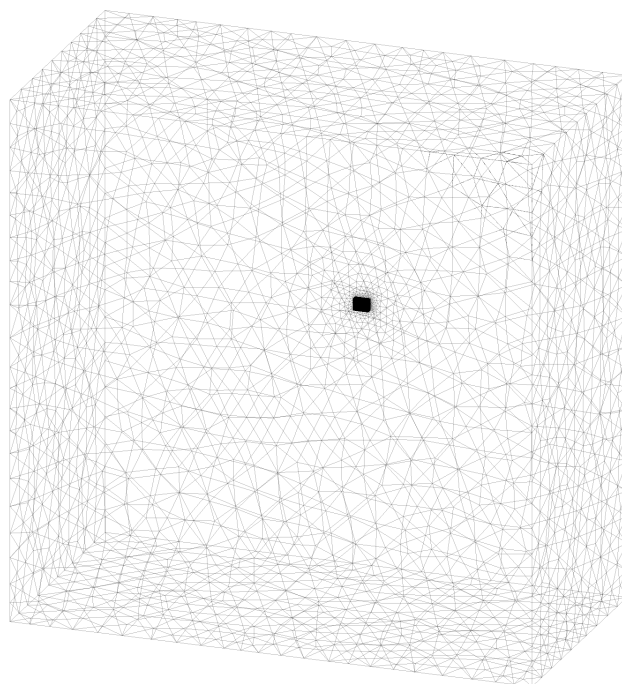
Επειδή το πλέγμα εκτείνεται πολύ μακριά από τη γεωμετρία (100 μήκη εκπετάσματος), ο γράφος Delaunay σχηματίζεται σε ένα μικρότερο χωρίο γύρω από τη γεωμετρία, το οποίο ορίζεται από ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με μήκη πλευρών 2 μήκη εκπετάσματος και κόμβους σε όλη την έκταση των πλευρών του (σχήμα 5.27). Οι κόμβοι αυτοί συγκροτούν το μη-ελεγχόμενο όριο του γράφου. Το νέο πλέγμα, μετά την κάμψη της πτέρυγας του αεροσκάφους, δίνεται στο σχήμα 5.29.

Οι μετρικές της μη-ορθογωνικότητας, q , και της στρεβλότητας, s , μετά την παραμόρφωση του πλέγματος συγκρίνονται με αυτές του αρχικού πλέγματος στον πίνακα 5.4.

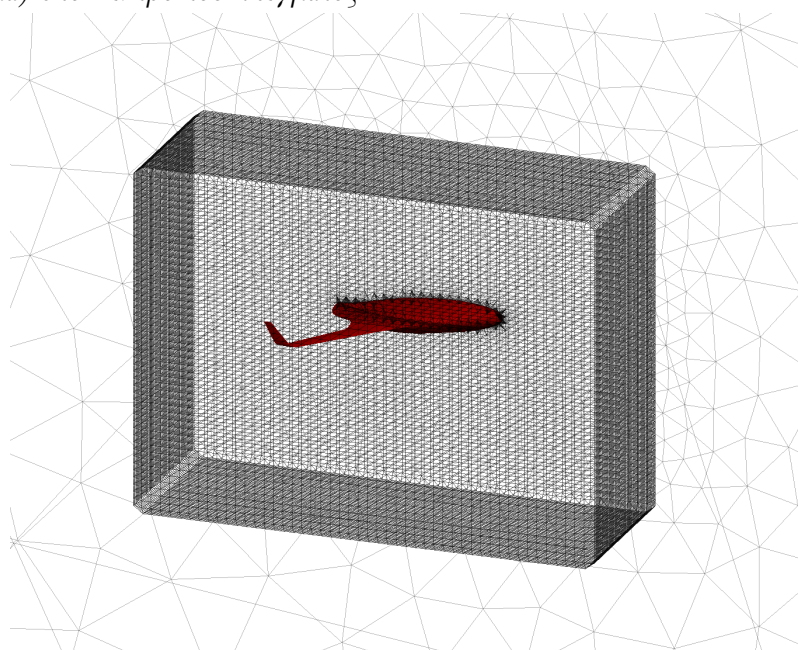
Μετρική		Πριν	Μετά
Μη-ορθογωνικότητα	\bar{q} (°)	16.15	18.74
	q_{max} (°)	64.83	67.86
Στρεβλότητα	s_{max} (-)	1.30	1.30

Πίνακας 5.4: Εφαρμογή σε αεροσκάφος τύπου Blended Wing Body. Μετρικές ποιότητας του πλέγματος πριν και μετά την παραμόρφωση.

Διαπιστώνεται ότι, παρά τη μεγάλη κάμψη της πτέρυγας, η ποιότητα του πλέγματος δεν μεταβάλλεται σημαντικά, αφού η μη-ορθογωνικότητα, q , αυξάνεται ελαφρά (αλλά παραμένει εντός αποδεκτών τιμών), ενώ η μέγιστη στρεβλότητα, s_{max} , δεν μεταβάλλεται. Δηλαδή, το παραμορφωμένο πλέγμα είναι αποδεκτής ποιότητας.

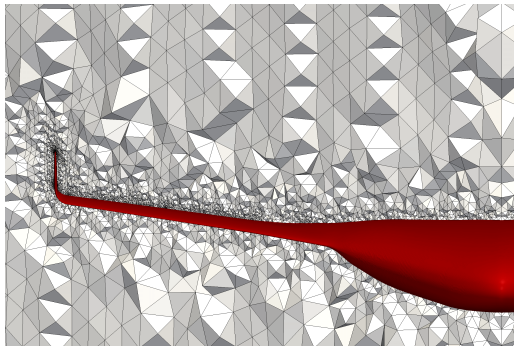


(α') Το υπολογιστικό χωρίο (με ανοικτό/γκρί χρώμα) και ο γράφος Delaunay (με σκούρο/μαύρο χρώμα) στο κέντρο του πλέγματος.

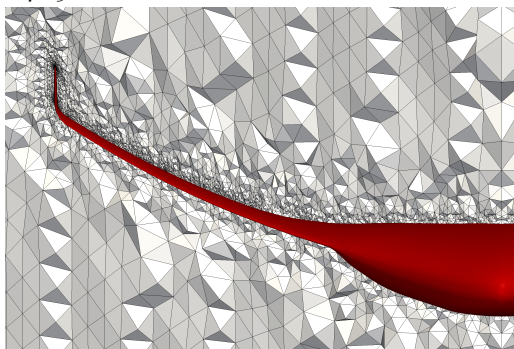


(β') Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο μη-ελεγχόμενο όριο του γράφου Delaunay, το οποίο περιέχει στο εσωτερικό του τη γεωμετρία (με κόκκινο χρώμα).

Σχήμα 5.27: Εφαρμογή σε αεροσκάφος τύπου *Blended Wing Body*. Ο γράφος Delaunay γύρω από το αεροσκάφος. Οι διαστάσεις του γράφου είναι πολύ μικρότερες από αυτές του συνολικού υπολογιστικού χωρίου, έτσι ώστε η παραμόρφωση του πλέγματος να περιορίζεται κοντά στην γεωμετρία του αεροσκάφους που παραμορφώνεται.

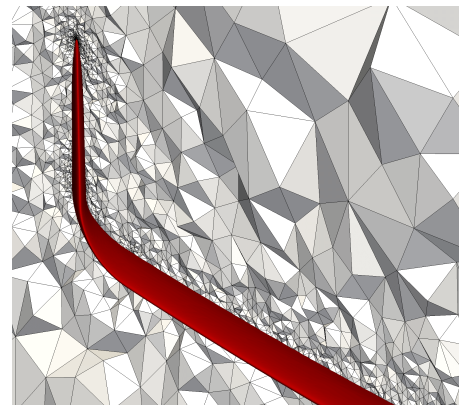
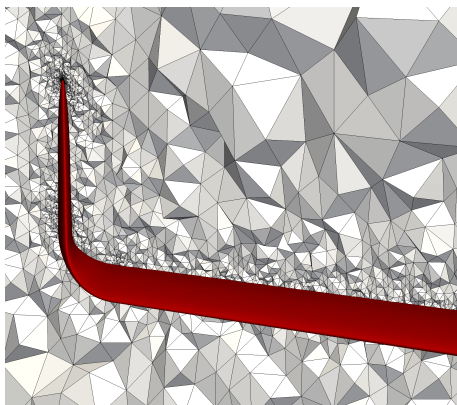


(α') Το αρχικό πλέγμα γύρω από το αερο- (β') Η αρχική γεωμετρία του αεροσκάφους.



(γ') Το παραμορφωμένο πλέγμα γύρω από το (δ') Η παραμορφωμένη γεωμετρία του αεροσκάφους, για $\alpha = 0.50$.

Σχήμα 5.28: Εφαρμογή σε αεροσκάφος τύπου *Blended Wing Body*. Το αρχικό και το παραμορφωμένο πλέγμα γύρω από το αεροσκάφος. Αριστερά: το πλέγμα κοντά στο αεροσκάφος. Δεξιά: η γεωμετρία του αεροσκάφους.



(α') Πριν την παραμόρφωση.

(β') Μετά την παραμόρφωση.

Σχήμα 5.29: Εφαρμογή σε αεροσκάφος τύπου *Blended Wing Body*. Λεπτομέρεια του πλέγματος κοντά στο ακροπτερύλιο. Αριστερά: πριν την παραμόρφωση. Δεξιά: μετά την παραμόρφωση.

5.5 Εφαρμογή στο Γενικευμένο Μοντέλο Αυτοκινήτου DrivAer

Μία πιο απαιτητική εφαρμογή αποτελεί η παραμόρφωση του πλέγματος γύρω από μία συνθετη γεωμετρία, όπως είναι αυτή του γενικευμένου μοντέλου αυτοκινήτου DrivAer. Η γεωμετρία αυτή περιλαμβάνει το μισό αυτοκίνητο (αριστερό τμήμα), μαζί με όλες τις εξωτερικές επιφάνειες αυτού, όπως είναι οι τροχοί και οι καθρέφτες. Το πλέγμα γύρω από τη γεωμετρία αποτελείται από 4199337 κόμβους και 3777481 κελιά (κυρίως εξαέδρα), ενώ έχει κατάλληλη πύκνωση κοντά στις στερεές επιφάνειες (αυτοκίνητο και δρόμος). Η γεωμετρία του αυτοκινήτου και το αρχικό πλέγμα δίνονται στα σχήματα 5.30 και 5.31.

Σε αυτή την εφαρμογή, η μετακίνηση των κόμβων της γεωμετρίας έχει προκύψει από μία διαδικασία βελτιστοποίησης με χρήση της συζυγούς μεθόδου (όπως εφαρμόζεται, για παράδειγμα, στο [43]), που οδηγεί στη μείωση του συντελεστή οπισθέλκουσας C_d . Η μετακίνηση των πλεγματικών κόμβων περιορίζεται στην περιοχή κοντά στη γεωμετρία, που ορίζεται από το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που φαίνεται στο σχήμα 5.32α'. Οι μη-ελεγχόμενοι κόμβοι του γράφου αποτελούνται από τις κορυφές του παραλληλεπιπέδου και από σημεία, τα οποία βρίσκονται κατανεμημένα στις έδρες του παραλληλεπιπέδου αυτού. Φυσικά, ο γράφος που κατασκευάζεται καλύπτει μόνο ένα υποσύνολο των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος. Επειδή η μετακίνηση των οριακών κόμβων της γεωμετρίας είναι μικρή και το πλέγμα εκτείνεται σε μεγάλη απόσταση από το αυτοκίνητο, η παραμόρφωση του πλέγματος μπορεί με ασφάλεια να περιοριστεί κοντά στη γεωμετρία, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.32β'. Η παραμόρφωση του πλέγματος γίνεται σε 10 βήματα, με ανανέωση του γράφου μετά από κάθε βήμα. Η παραμόρφωση της γεωμετρίας δίνεται στο σχήμα 5.34, ενώ το παραμορφωμένο πλέγμα κοντά στο πίσω μέρος του αυτοκινήτου δίνεται στο σχήμα 5.35.

Οι μετρικές της μη-ορθογωνικότητας, q , και της στρεβλότητας, s , μετά την παραμόρφωση του πλέγματος συγκρίνονται με αυτές του αρχικού πλέγματος στον πίνακα 5.5.

Μετρική		Πριν	Μετά
Μη-ορθογωνικότητα	\bar{q} (°)	6.80	7.40
	q_{max} (°)	64.91	69.94
Στρεβλότητα	s_{max} (—)	3.50	3.50

Πίνακας 5.5: Εφαρμογή στο αυτοκίνητο DrivAer. Μετρικές ποιότητας του πλέγματος πριν και μετά την παραμόρφωση.

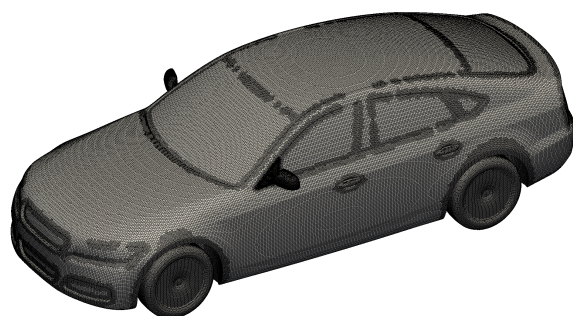
Μετά την παραμόρφωση, η ποιότητα του πλέγματος, όπως αυτή εκφράζεται από τις μετρικές του πίνακα 5.5, παραμένει σε ικανοποιητικά επίπεδα. Η μέση μη-ορθογωνικότητα, \bar{q} , αυξάνεται ελαφρά, ενώ η μέγιστη τιμή της, q_{max} , παραμένει σε αποδεκτές τιμές μετά από μικρή της αύξηση. Η μέγιστη στρεβλότητα, s_{max} , δεν επηρεάζεται σχεδόν

καθόλου. Όπως φαίνεται και από το σχήμα 5.36, η μη-ορθογωνικότητα των κελιών κοντά στα τοιχώματα του αυτοκινήτου που μετακινούνται περισσότερο είναι αυτή που επηρεάζεται περισσότερο κατά την παραμόρφωσή τους. Όμως, το μέγεθος της μετατόπισης είναι πολύ μικρό, κι έτσι η τιμή της μη-ορθογωνικότητας δεν αυξάνεται σε απαγορευτικά επίπεδα, παρά το ότι το πλέγμα κοντά στη γεωμετρία είναι πολύ πυκνό.

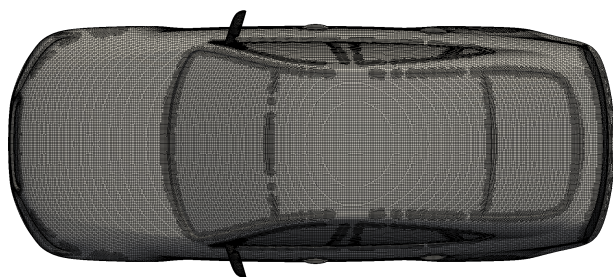
Ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι χρόνοι οι οποίοι απαιτούνται για τη μετατόπιση του πλέγματος. Οι χρόνοι εκτέλεσης των επιμέρους βημάτων της μεθόδου αλλά και ο συνολικός χρόνος που απαιτείται για την παραμόρφωση του πλέγματος δίνονται στον πίνακα 5.6.

Περιγραφή	Σειριακά	Παράλληλα
Αριθμός πυρήνων	1	2
Γένεση γράφου Delaunay	3.2 s	3.3 s
Αποτύπωση κόμβων στο γράφο	4.6 s	2.3 s
Υπολογισμός νέας θέσης των κομβων	0.4 s	0.4 s
Αριθμός βημάτων	10	10
Συνολικός χρόνος	95.1 s	73.2 s

Πίνακας 5.6: Εφαρμογή στο αυτοκίνητο DrivAer. Οι υπολογιστικοί χρόνοι που απαιτούνται για την εκτέλεση των επί μέρους βημάτων της μεθόδου παραμόρφωσης πλέγματος, για σειριακή και παράλληλη εκτέλεση, σε επεξεργαστή Intel Core i7-6500U.



(α') Πλάγια όψη.

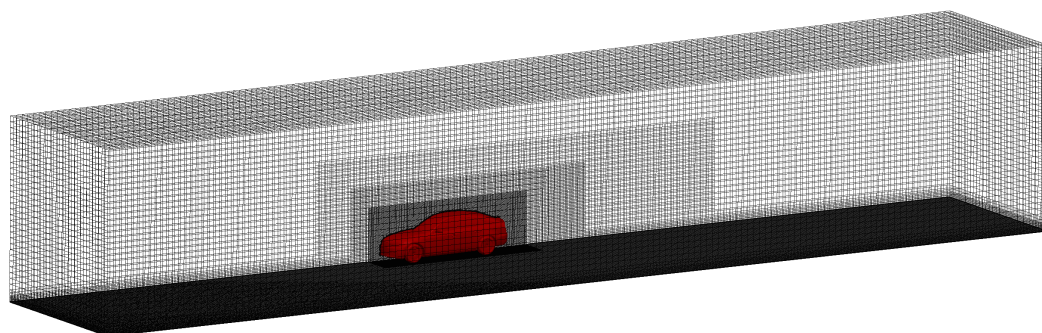


(β') Άνω όψη.

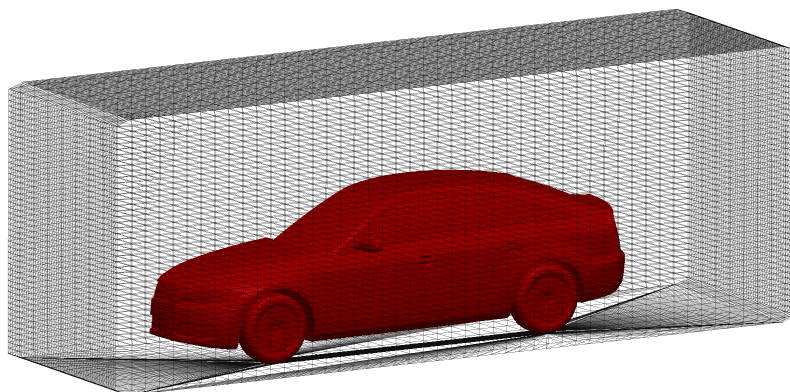


(γ') Εμπρός όψη.

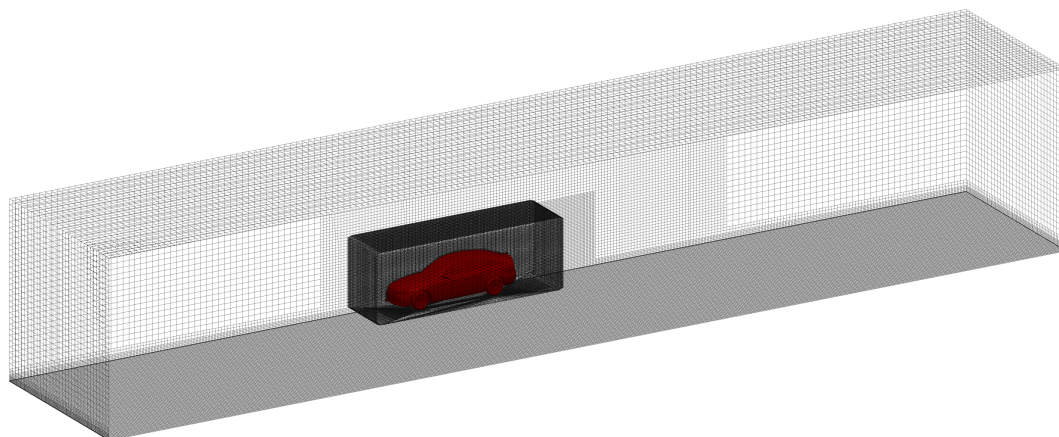
Σχήμα 5.30: Εφαρμογή στο αυτοκίνητο DrivAer. Η γεωμετρία του αυτοκινήτου και το επιφανειακό πλέγμα.



Σχήμα 5.31: Εφαρμογή στο αυτοκίνητο DrivAer. Το υπολογιστικό χωρίο γύρω γύρω από το αυτοκίνητο.

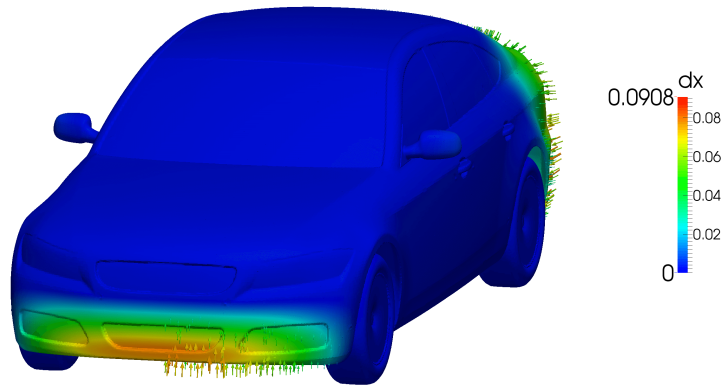


(α') Το μη-ελεγχόμενο όριο του γράφου Delaunay.

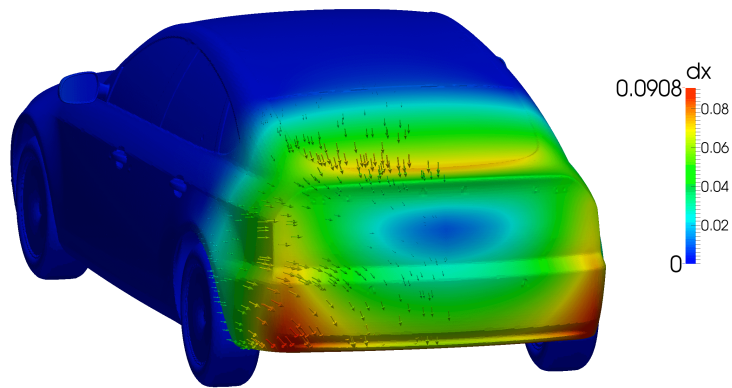


(β') Το μη-ελεγχόμενο όριο του γράφου Delaunay (με σκούρο/μαύρο χρώμα) εντός του υπολογιστικού χωρίου (με ανοιχτό/γκρί χρώμα).

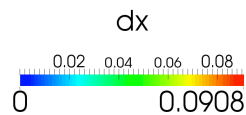
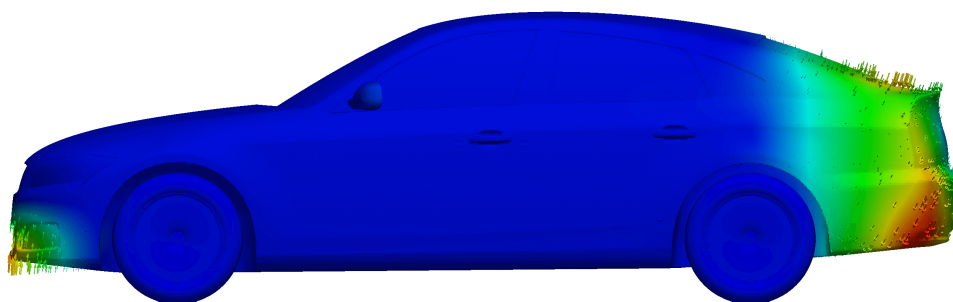
Σχήμα 5.32: Εφαρμογή στο αυτοκίνητο DrivAer. Ο γράφος Delaunay γύρω από το αυτοκίνητο.



(α') Η μετατόπιση της πρόσοψης του αυτοκινήτου.

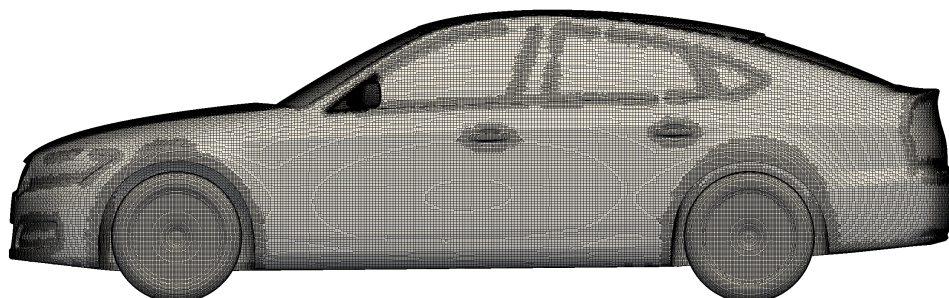


(β') Η μετατόπιση του πίσω μέρους του αυτοκινήτου.

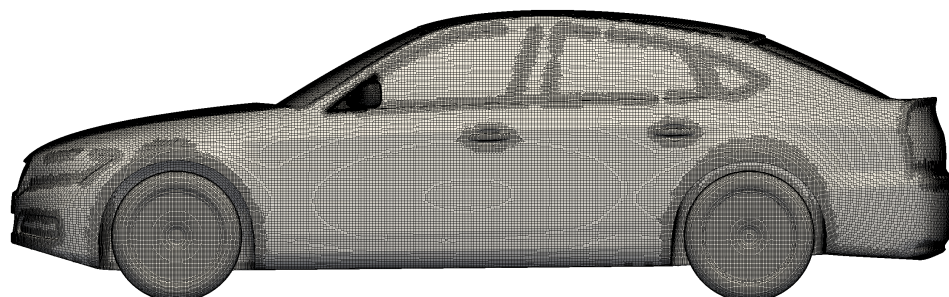


(γ') Πλάγια όψη.

Σχήμα 5.33: Εφαρμογή στο αυτοκίνητο DrivAer. Το μέγεθος της μετατόπισης της αρχικής γεωμετρίας, όπως προέκυψε από μία διαδικασία βελτιστοποίησης.

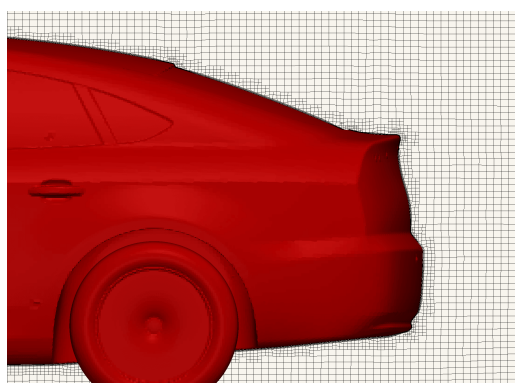


(α') Πριν την παραμόρφωση.

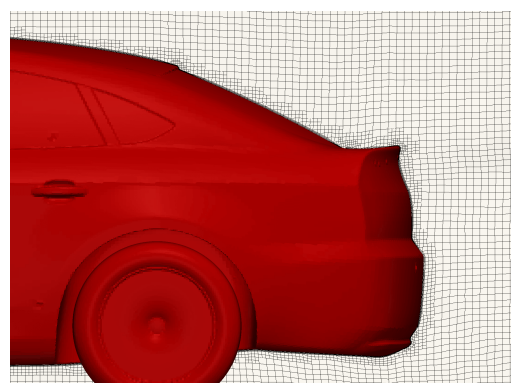


(β') Μετά την παραμόρφωση.

Σχήμα 5.34: Εφαρμογή στο αυτοκίνητο *DrivAer*. Το αρχικό και το παραμορφωμένο πλέγμα στην επιφάνεια της γεωμετρίας.

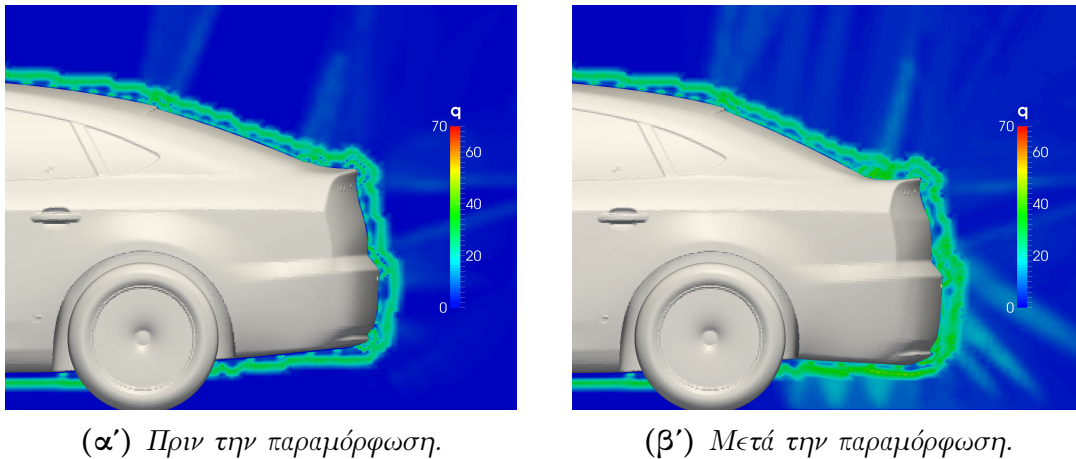


(α') Πριν την παραμόρφωση.



(β') Μετά την παραμόρφωση.

Σχήμα 5.35: Εφαρμογή στο αυτοκίνητο *DrivAer*. Λεπτομέρεια του πλέγματος κοντά στο πίσω μέρος του αυτοκινήτου.



Σχήμα 5.36: Εφαρμογή στο αυτοκίνητο DrivAer. Η μη-ορθογωνικότητα, q , των κελιών κοντά στο πίσω μέρος του αυτοκινήτου.

5.5.1 Συμπεράσματα

Ο βασικός παράγοντας που καθορίζει τη δυνατότητα της μεθόδου να μετακινήσει το πλέγμα αλλά και την ποιότητα του παραμορφωμένου πλέγματος, όπως και σε όλες τις εφαρμογές που παρουσιάστηκαν, είναι η επιλογή του μη-ελεγχόμενου ορίου. Σε εφαρμογές πλεγμάτων τύπου Euler, όπως αυτό της πτέρυγας M6 (ενότητα 5.2) και του αεροσκάφους τύπου Blended Wing Body (ενότητα 5.4), τα οποία είναι σχετικά αραιά, η ποιότητα του παραγόμενου πλέγματος έχει μικρή εξάρτηση από την επιλογή του μη-ελεγχόμενου ορίου. Όμως, σε πολύ πυκνά πλέγματα και σε πιο περίπλοκες γεωμετρίες, το όριο του γράφου επηρεάζει σημαντικά την ποιότητα του νέου πλέγματος, ενώ λανθασμένη επιλογή του μπορεί εύκολα να οδηγήσει σε μη-έγκυρο πλέγμα. Για παράδειγμα, αν επιλεγούν ως όρια του γράφου τα όρια του υπολογιστικού χωρίου, τότε στο νέο πλέγμα εμφανίζονται αρνητικοί όγκοι, ακόμα και μετά από 25 βήματα (σε σύγκριση με τα 10 βήματα που χρειάστηκε ο μικρότερος γράφος του σχήματος 5.32), ενώ η γένεση της κατά Delaunay ψηφιδοποίησης απαιτεί περισσότερο υπολογιστικό χρόνο, αφού ο γράφος αποτελείται από πολύ περισσότερους κόμβους. Η σημασία του επιλεγόμενου μη-ελεγχόμενου ορίου φαίνεται ακόμα καλύτερα στην εφαρμογή που παρουσιάζεται στη συνέχεια.

5.6 Εφαρμογή στην Πτέρυγα ONERA M6 με Πλέγμα Τύπου Low-Re

Στην εφαρμογή αυτή, εξετάζεται πάλι η παραμόρφωση πλέγματος γύρω από την πτέρυγα ONERA M6, αλλά το πλέγμα στην περίπτωση αυτή είναι πολύ πυκνότερο από αυτό της εφαρμογής που παρουσιάστηκε στην ενότητα 5.2. Συγκεκριμένα, το πλέγμα αποτελείται από 1323101 κόμβους και 2384107 κελιά (κυρίως εξάεδρα), ενώ είναι πολύ πυκνό κοντά στην επιφάνεια της πτέρυγας, για χρήση με μοντέλα τύρβης τύπου low-Re. Το αρχικό πλέγμα δίνεται στο σχήμα 6.1.

Και σε αυτήν την εφαρμογή, η μετατόπιση των κόμβων της γεωμετρίας έχει προκύψει από μία διαδικασία βελτιστοποίησης με χρήση της συζυγούς μεθόδου. Η μετατόπιση αυτή είναι πολύ μικρή σε σχέση με το εκπέτασμα της πτέρυγας (περίπου τρεις τάξεις μεγέθους μικρότερη από το εκπέτασμα) και σημειώνεται κυρίως στην ακμή πρόσπτωσης της πτέρυγας (σχήμα 5.39). Παρά το μικρό μέγεθος της μετατόπισης, το πλέγμα αυτό είναι δύσκολο να παραμορφωθεί, αφού κοντά στην επιφάνεια είναι εξαιρετικά πυκνό και μπορούν εύκολα να εμφανιστούν κελιά αρνητικού όγκου, ακόμα και μετά από μικρές μετατοπίσεις. Για να προκύψει ένα πλέγμα καλής ποιότητας μετά την παραμόρφωση, πρέπει να επιλεχθεί κατάλληλο μη-γεωμετρικό όριο για το γράφο Delaunay. Εξετάζονται δύο περιπτώσεις γράφων:

Περίπτωση 1: Το μη-ελεγχόμενο όριο του γράφου σχηματίζεται από ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που περιέχει στο εσωτερικό του την πτέρυγα (σχήμα 5.38α').

Περίπτωση 2: Το μη-ελεγχόμενο όριο σχηματίζεται από επιφάνεια η οποία περικλείει την πτέρυγα και της οποίας η κάθετη απόσταση από την επιφάνεια της πτέρυγας είναι σταθερή (σχήμα 5.38β').

Φυσικά, η παραμόρφωση του πλέγματος περιορίζεται στο εσωτερικό του γράφου. Αν και οι γράφοι που επιλέγονται στις δύο περιπτώσεις που εξετάζονται περιέχουν ένα μικρό υποσύνολο του υπολογιστικού χωρίου, η επιλογή αυτή είναι επαρκής, αφού η παραμόρφωση της γεωμετρίας είναι μικρή. Για καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις, το πλέγμα μετακινείται σε διαφορετικό αριθμό βημάτων και υπολογίζονται οι μετρικές της μη-ορθογωνικότητας, q , και της στρεβλότητας, s . Επιπλέον, καταγράφεται ο αριθμός των κελιών που παρουσιάζουν μεγάλη μη-ορθογωνικότητα ($q > 70$). Το αρχικό πλέγμα περιλαμβάνει τέτοια κελιά, των οποίων το πλήθος συγκρίνεται με αυτό που προκύπτει μετά την παραμόρφωση του πλέγματος, για κάθε περίπτωση. Τα αποτελέσματα της παραμόρφωσης του πλέγματος δίνονται στον πίνακα 5.7.

Και στις δύο περιπτώσεις παραμόρφωσης, οι μετρικές \bar{q} , q_{max} και s_{max} παραμένουν σχεδόν αμετάβλητες. Όμως, το πλήθος των κελιών με μεγάλη μη-ορθογωνικότητα ($q > 70$) αυξάνεται και στις δύο περιπτώσεις. Τα κελιά αυτά είναι συγκεντρωμένα κοντά στην επιφάνεια της πτέρυγας, στο πυκνό τμήμα του πλέγματος, όπου υπολογίζεται το οριακό στρώμα. Αν και η περίπτωση 1 (με τον ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο γράφο) οδηγεί σε λιγότερα κελιά με $q > 70$, παρ' όλα αυτά εμφανίζονται επιφάνειες με

5.6. Εφαρμογή στην Πτέρυγα ONERA M6 με Πλέγμα Τύπου Low-Re

Μετρική		Πρίν	Περίπτωση 1	Περίπτωση 2
Μη-ορθογωνικότητα	\bar{q} (°)	13.63	13.70	13.73
	q_{max} (°)	89.41	89.41	89.41
Στρεβλότητα	s_{max} (-)	2.85	2.85	2.85
Πλήθος κελιών με $q > 70$		4743	4971	5213
Αριθμός επιφανειών με λάθος προσανατολισμό		0	34	0

Πίνακας 5.7: Παραμόρφωση της πτέρυγας ONERA M6. Μετρικές ποιότητας του πλέγματος πριν και μετά την παραμόρφωση, για τις περιπτώσεις 1 και 2.

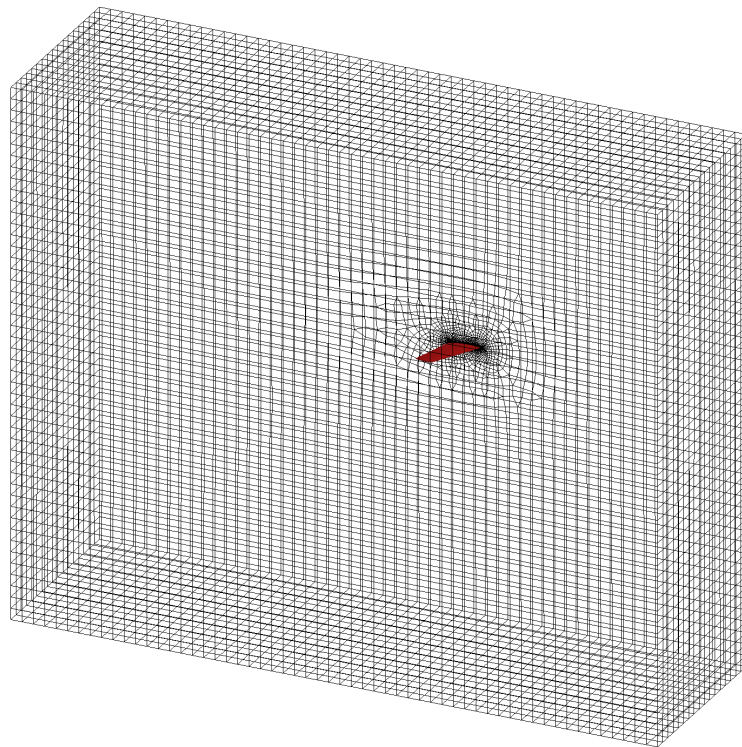
λάθος προσανατολισμό και έτσι το πλέγμα θεωρείται μη-έγκυρο. Κάτι τέτοιο, όμως δεν συμβαίνει στην περίπτωση 2.

Λεπτομέρεια του πλέγματος κοντά στην ακμή προσβολής της πτέρυγας, πριν και μετά την παραμόρφωσή του, δίνεται στο σχήμα 5.41. Η πτέρυγα στο σημείο αυτό συρρικνώνεται και το πλέγμα ακολουθεί αυτή την αλλαγή. Αν και η μετατόπιση είναι μικρή, η παραμόρφωση του πλέγματος στην περιοχή αυτή είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη λόγω του πολύ πυκνού πλέγματος.

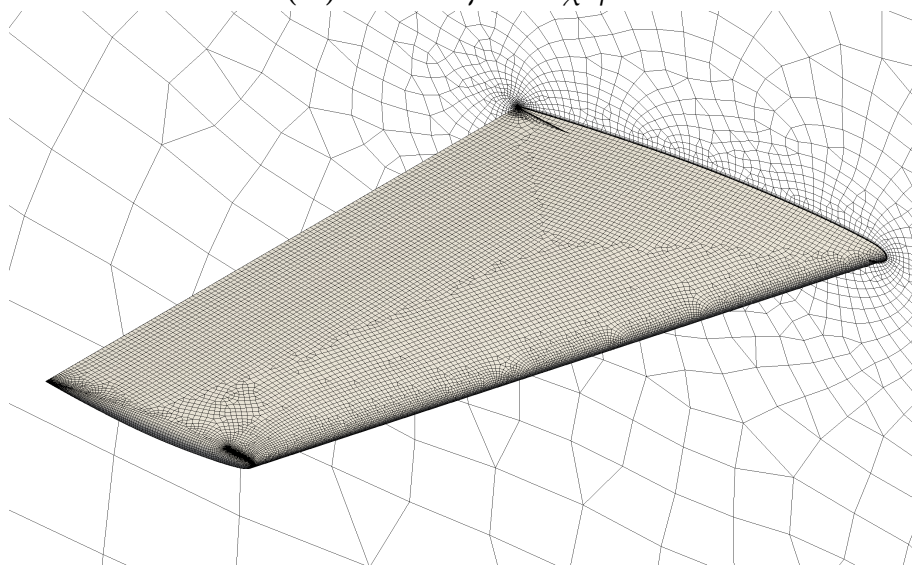
Οι χρόνοι που απαιτούνται για τη μετατόπιση του πλέγματος, για τις δύο περιπτώσεις, δίνονται στον πίνακα 5.8. Αν και η περίπτωση 1 απαιτεί λιγότερο υπολογιστικό χρόνο, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, οδηγεί στην εμφάνιση επιφανειών με λάθος προσανατολισμό και άρα δεν είναι αποδεκτό το παραμορφωμένο πλέγμα της περίπτωσης αυτής.

Περιγραφή	Περίπτωση 1	Περίπτωση 2
Αριθμός πυρήνων	2	2
Γένεση γράφου Delaunay	1.4 s	0.9 s
Αποτύπωση κόμβων στο γράφο	1.7 s	2.1 s
Υπολογισμός νέας θέσης των κομβών	0.2 s	0.2 s
Αριθμός βημάτων	13	15
Συνολικός χρόνος	46.2 s	52.5 s

Πίνακας 5.8: Παραμόρφωση της πτέρυγας ONERA M6. Οι υπολογιστικοί χρόνοι που απαιτούνται για εκτέλεση των επί μέρους τμημάτων της μεθόδου παραμόρφωσης πλέγματος, για τις περιπτώσεις 1 και 2, σε επεξεργαστή Intel Core i7-6500U.

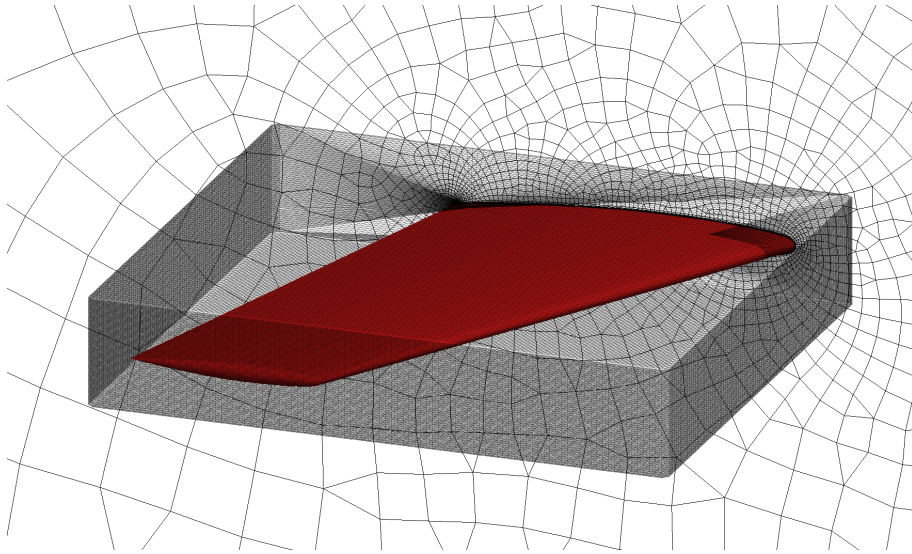


(α') Το υπολογιστικό χωρίο.

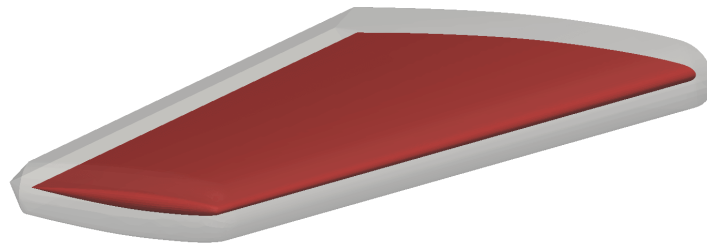
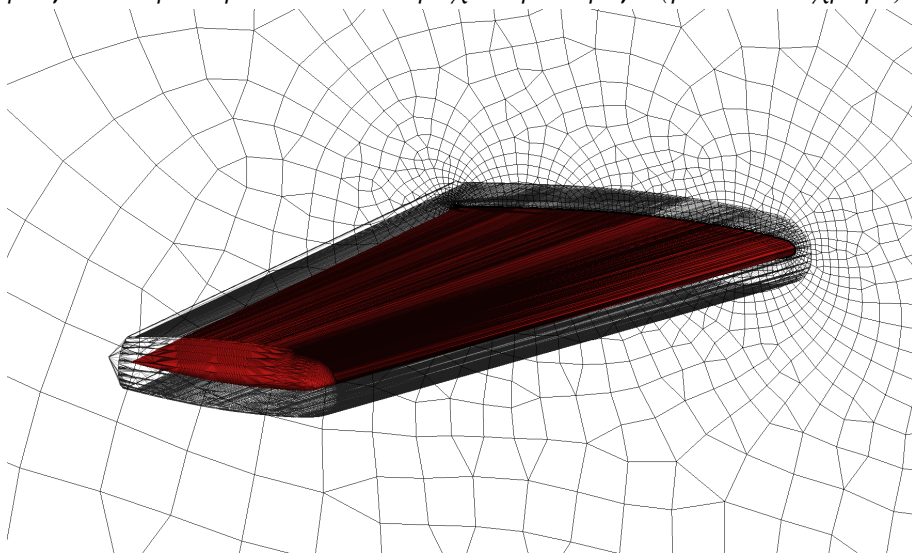


(β') Το πλέγμα στην επιφάνεια της πτέρυγας.

Σχήμα 5.37: Παραμόρφωση της πτέρυγας ONERA M6. Το πλέγμα γύρω από την πτέρυγα.

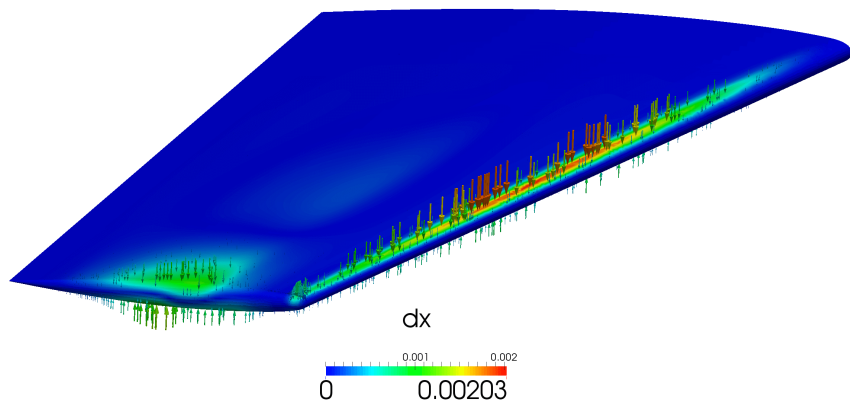


(α') Ο γράφος Delaunay της περίπτωσης 1. Το μη-ελεγχόμενο όριο του γράφου σχηματίζεται από ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που περιέχει την πτέρυγα (με κόκκινο χρώμα).

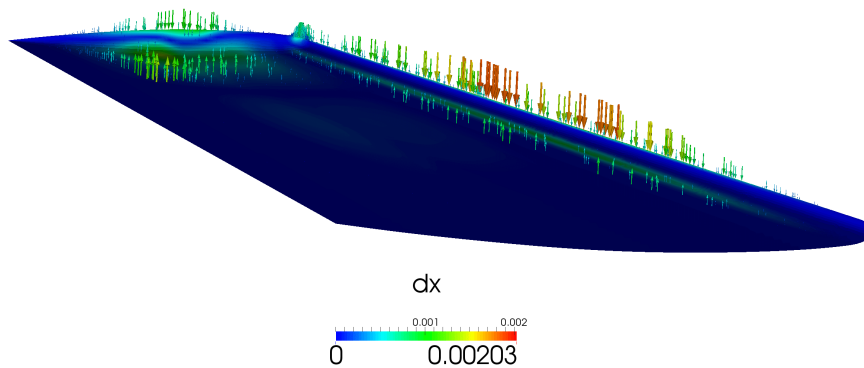


(β') Ο γράφος Delaunay της περίπτωσης 2. Το μη-ελεγχόμενο όριο του γράφου σχηματίζεται από επιφάνεια που περικλείει την πτέρυγα και της οποίας η κάθετη απόσταση από την επιφάνεια της πτέρυγας είναι σταθερή.

Σχήμα 5.38: Παραμόρφωση της πτέρυγας ONERA M6. Ο γράφος Delaunay γύρω από την πτέρυγα, για τις δύο περιπτώσεις που εξετάζονται.

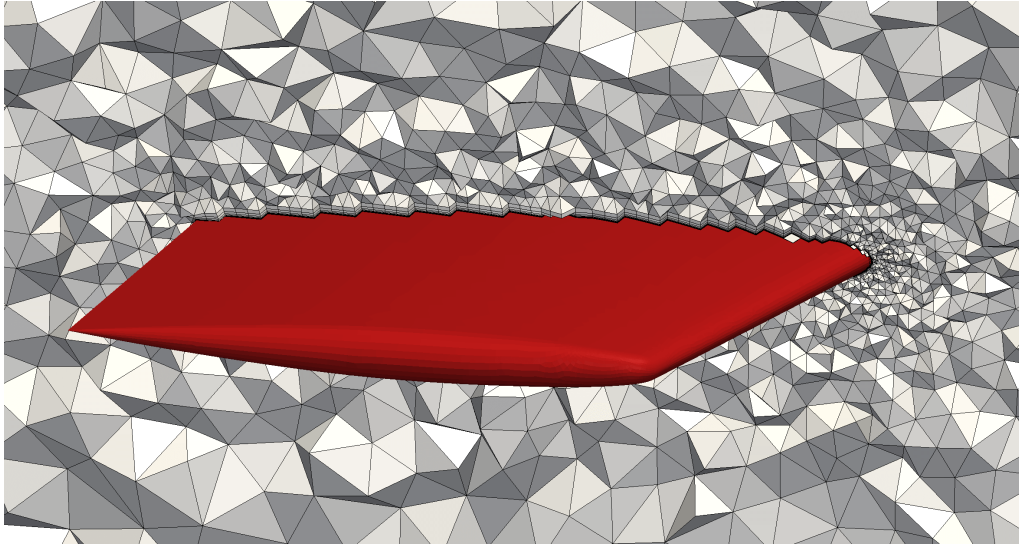


(α') Πλευρά υποπίεσης.

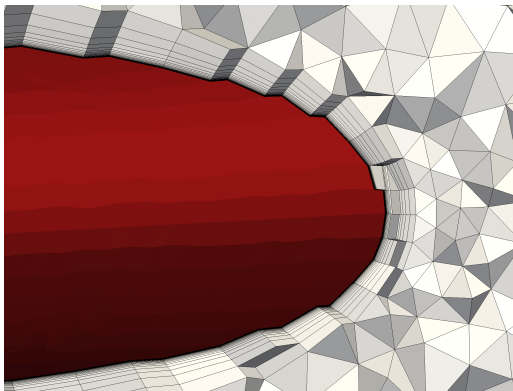


(β') Πλευρά υπερπίεσης.

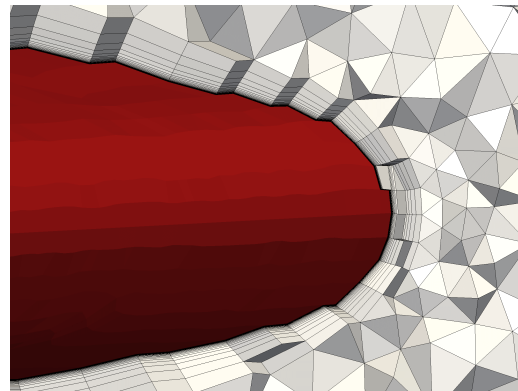
Σχήμα 5.39: Παραμόρφωση της πτέρυγας ONERA M6. Το μέγεθος της μετατόπισης των κόμβων της γεωμετρίας, όπως έχει προκύψει από μία διαδικασία βελτιστοποίησης.



Σχήμα 5.40: Παραμόρφωση της πτέρυγας ONERA M6. Το πλέγμα κοντά στην επιφάνεια της πτέρυγας (πριν την παραμόρφωση).



(α') Πριν την παραμόρφωση.



(β') Μετά την παραμόρφωση.

Σχήμα 5.41: Παραμόρφωση της πτέρυγας ONERA M6. Λεπτομέρεια του πλέγματος κοντά στην επιφάνεια της πτέρυγας, πριν και μετά την παραμόρφωσή του.

Κεφάλαιο 6

Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος σε χρήση με την Παραμετροποίηση Γράφων Delaunay

Ένας από τους βασικούς λόγους που αναπτύχθηκε η μέθοδος παραμόρφωσης πλεγμάτων με παραμετροποίηση γράφων Delaunay στο πλαίσιο της διπλωματικής αυτής εργασίας, εκτός των άλλων, είναι για χρήση στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση σχήματος με τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Σε μία διαδικασία βελτιστοποίησης σχήματος, όπως είναι η συζυγής μέθοδος, μετά από κάθε κύκλο βελτιστοποίησης υπάρχει η ανάγκη για προσαρμογή του υπολογιστικού πλέγματος γύρω από τη νέα γεωμετρία, προτού η διαδικασία αυτή προχωρήσει στον επόμενο κύκλο βελτιστοποίησης. Όμως, όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 1.2, η μέθοδος παραμόρφωσης πλέγματος πρέπει, επίσης, να χρησιμοποιηθεί για το γρήγορο και ακριβή υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας της συνεχούς συζυγούς μεθόδου.

Στο κεφάλαιο αυτό, αναπτύσσεται η διατύπωση των παραγώγων ευαισθησίας που προκύπτει με τη χρήση του αλγεβρικού μοντέλου μετατόπισης του πλέγματος με παραμετροποίηση γράφων Delaunay, για την απλή περίπτωση όπου η αντικειμενική συνάρτηση περιγράφει τις απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ της εισόδου και της εξόδου ενός αγωγού, και γίνεται εφαρμογή της διατύπωσης αυτής για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας της ροής σε ένα 2Δ αγωγό.

6.1 Παράγωγος Ευαισθησίας των Απωλειών Ολικής Πίεσης

Για την επίδειξη του τρόπου που αναπτύσσεται η συνεχής διατύπωση της συζυγούς μεθόδου με τη χρήση της παραμετροποίησης γράφων Delaunay, επιλέγεται ως αντικειμενική συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση η έκφραση των ογκικά-μέσων απωλειών ολικής πίεσης (volume-averaged total pressure losses), η οποία στη συνέχεια θα αναφέρεται ως απώλειες p_t , που ορίζεται ως:

$$J_{p_t} = \int_{S_{I,O}} \left[- \left(p + \frac{1}{2} v_i^2 \right) v_j \right] n_j dS \quad (6.1)$$

όπου με $S_{I,O}$ συμβολίζονται οι επιφάνειες εισόδου (inlet) και εξόδου (outlet) της ροής.

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης αφορά τον προσδιορισμό του βέλτιστου συνόλου τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού b_n και περιορίζεται από τις εξισώσεις κατάστασης $R_i = 0$. Σύμφωνα με τη συνεχή συζυγή μέθοδο, η επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση (augmented objective function ή Lagrangian) του προβλήματος, για την ελαχιστοποίηση των απωλειών p_t (εξ. (6.1)), είναι:

$$L_{p_t} = J_{p_t} + \int_{\Omega} \Psi_i R_i d\Omega \quad (6.2)$$

όπου Ψ_i είναι τα πεδία των συζυγών μεταβλητών και Ω το υπολογιστικό χωρίο.

Η παραγωγή της εξ. (6.2) ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού b_n , με την ταυτόχρονη ικανοποίηση των εξισώσεων κατάστασης και των συζυγών τους εξισώσεων, όπως αυτή αναπτύσσεται στο [9], οδηγεί στην έκφραση της παραγωγού ευαισθησίας:

$$\frac{\delta J_{p_t}}{\delta b_n} = \int_{\Omega} A_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) \delta\Omega \quad (6.3)$$

με

$$A_{jk} = \left\{ - u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} - \tau_{ij}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right\} \quad (6.4)$$

όπου u_i είναι οι συζυγείς των συνισταμένων v_i της ταχύτητας, τ_{ij}^a ο συζυγής του τανυστή τάσεων τ_{ij} και p η πίεση. Τα πεδία των u_i , v_i , τ_{ij} , τ_{ij}^a και p έχουν προκύψει από την επίλυση των εξισώσεων κατάστασης και των συζυγών τους, ενώ οι παράγωγοι $\delta x_k / \delta b_n$ εκφράζουν τη μεταβολή των συντεταγμένων x_k του πλέγματος ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού b_n και θα αναφέρονται ως παράγωγοι ευαισθησίας του πλέγματος. Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 1.2, ο υπολογισμός των όρων $\delta x_k / \delta b_n$ είναι αναγκαίος

για τον ακριβή υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, όμως συχνά συνοδεύεται από υψηλό υπολογιστικό κόστος, αφού συνήθως οι παράγωγοι αυτοί υπολογίζονται με τη χρήση πεπερασμένων διαφορών (FD), οδηγώντας σε κόστος ανάλογο του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού. Αν, μάλιστα, οι παράγωγοι ευαισθησίας του πλέγματος χρειάζονται όχι μόνο στο όριο, αλλά και στο εσωτερικό του πεδίου, τότε το κόστος αυξάνει πολύ, αφού απαιτείται είτε επαναπλεγματοποίηση ή προσαρμογή του πλέγματος στα μεταβαλλόμενα όρια.

Με χρήση του θεωρήματος Green-Gauss, η εξ. (6.3) δίνει:

$$\frac{\delta J_{pt}}{\delta b_n} = \underbrace{\int_S A_{jk} n_j \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \delta S}_{\text{SIterm}} - \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{jk}) \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \delta \Omega}_{\text{Vterm}} \quad (6.5)$$

Στη διατύπωση αυτή των παραγώγων ευαισθησίας, ο όρος SIterm περιλαμβάνει γνωστές ποσότητες στα όρια του υπολογιστικού χωρίου και υπολογίζεται άμεσα, ενώ ο όρος Vterm, ο οποίος περιλαμβάνει το χωρικό ολοκλήρωμα των παραγώγων ευαισθησίας του πλέγματος, συχνά παραλείπεται, αφού θεωρητικά έχει μηδενική τιμή (συζυγής διατύπωση SI - βλέπε [9]). Έτσι, ο υπολογισμός των παραγώγων γίνεται με μικρό υπολογιστικό κόστος, χωρίς να απαιτείται ο υπολογισμός των παραγώγων $\delta x_k / \delta b_n$ σε όλο το υπολογιστικό χωρίο, αλλά μόνο στα όρια, όπου οι παράγωγοι ευαισθησίας του πλέγματος μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά από την παραμετροποίηση των ορίων. Η παράλειψη του όρου Vterm μπορεί να οδηγήσει σε ανακρίβειες στον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, όπως αποδεικνύεται στο [9].

6.2 Παραγωγή του Μοντέλου Παραμόρφωσης Πλέγματος

Για τον ακριβή υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας είναι απαραίτητος ο υπολογισμός του όρου Vterm, το κόστος υπολογισμού του οποίου εξαρτάται άμεσα από τη μέθοδο παραμόρφωσης του πλέγματος, λόγω της ύπαρξης των παραγώγων $\delta x_k / \delta b_n$ στο χωρικό ολοκλήρωμα. Εδώ γίνεται η ρεαλιστική παραδοχή ότι αποφεύγεται η επαναπλεγματοποίηση και προτιμάται η προσαρμογή του πλέγματος στα νέα όρια. Έτσι, για το γρήγορο και ακριβή υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, η χρησιμοποιούμενη μέθοδος παραμόρφωσης πλέγματος αποτελεί βασικό παράγοντα και πρέπει να ληφθεί υπόψη κατά την ανάπτυξη της ακριβούς διατύπωσης των παραγώγων.

Το μοντέλο παραμόρφωσης πλέγματος με παραμετροποίηση γράφων Delaunay έχει το πλεονέκτημα ότι εκφράζει τις θέσεις των πλεγματικών κόμβων μέσω αλγεβρικών σχέσεων, οι οποίες μπορούν να παραγωγιστούν και να δώσουν αναλυτικές εκφράσεις

των παραγώγων ευαισθησίας του πλέγματος. Έτσι, έχοντας αναλυτικές εκφράσεις για τις παραγώγους $\delta x_k / \delta b_n$, ο όρος Vterm μπορεί να υπολογιστεί άμεσα.

Υπενθυμίζεται ότι, στη μέθοδο γράφων Delaunay, οι συντεταγμένες x_k των πλεγματικών κόμβων παραμετροποιούνται ως εξής:

$$x_k = w^{bp} x_k^{bp} \quad (6.6)$$

όπου x_k^{bp} οι συντεταγμένες των τριών (ή τεσσάρων) κορυφών του τριγώνου (ή τετραέδρου) Delaunay στο οποίο ανήκει ο εκάστοτε κόμβος και w^{bp} οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του κόμβου που αντιστοιχούν σε κάθε κορυφή του στοιχείου Delaunay.

Υπενθυμίζεται ότι οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες συνεπάγονται άθροιση.

Οι κορυφές x_k^{bp} των τριγώνων ή τετραέδρων Delaunay αποτελούν κόμβους του ελεγχόμενου ορίου, το οποίο ταυτίζεται με το παραμορφούμενο-ελεγχόμενο όριο του υπολογιστικού χωρίου και το οποίο παραμορφώνεται σύμφωνα με κάποια παραμετροποίηση (π.χ. επιφάνειες Bézier), καθώς και του μη-ελεγχόμενου ορίου, το οποίο παραμένει σταθερό κατά την παραμόρφωση του πλέγματος. Οι οριακοί, αυτοί, κόμβοι (ελεγχόμενοι και μη-ελεγχόμενοι) συμβολίζονται με bp (boundary points).

Επειδή οι θέσεις των οριακών κόμβων συνήθως υπολογίζονται από αναλυτική συνάρτηση των μεταβλητών σχεδιασμού (π.χ. σημεία ελέγχου Bézier), οι εκφράσεις των παραγώγων $\delta x_k^{bp} / \delta b_n$ είναι επίσης αναλυτικές και προκύπτουν από την παραγωγή των συναρτήσεων αυτών.

Με την παραμετροποίηση της εξ. (6.6), οι αναλυτικές εκφράσεις των παραγώγων $\delta x_k / \delta b_n$ μπορούν να επεκταθούν και στους εσωτερικούς κόμβους του πλέγματος, πέραν των οριακών. Η παραγωγή της εξ. (6.6) ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού δίνει:

$$\frac{\delta x_k}{\delta b_n} = w^{bp} \frac{\delta x_k^{bp}}{\delta b_n} \quad (6.7)$$

όπου οι κεντροβαρικές συντεταγμένες w^{bp} παραμένουν σταθερές κατά την παραμόρφωση του πλέγματος.

Για λόγους συντομίας, ορίζεται η ποσότητα:

$$m_k^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{jk}) \quad (6.8)$$

έτσι ώστε η έκφραση του όρου $Vterm$ να γίνει:

$$Vterm = - \int_{\Omega} m_k^{\alpha} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \delta \Omega \quad (6.9)$$

Από την έκφραση του όρου $Vterm$ της εξ. (6.9), η ποσότητα m_k^{α} είναι γνωστή από την επίλυση των εξισώσεων κατάστασης και των συζυγών τους ενώ η παράγωγος $\delta x_k / \delta b_n$ μπορεί, πλέον, να υπολογιστεί αναλυτικά από την παραμετροποίηση Delaunay, σύμφωνα με τη σχέση (6.7). Με γνωστές τις παραπάνω ποσότητες σε όλο το Ω , ο όρος $Vterm$ μπορεί να υπολογιστεί άμεσα και με ακρίβεια.

Για τον υπολογισμό του όρου $Vterm$ με την παραμετροποίηση γράφων Delaunay, προγραμματίστηκε κατάλληλη συνάρτηση σε περιβάλλον OpenFOAM[®], για χρήση με επιλύτες κεντροκυφελικής διακριτοποίησης πεπερασμένων όγκων σε μη-δομημένα πλέγματα. Για τον υπολογισμό του όρου $Vterm$ με γνωστό το διανυσματικό πεδίο m_k^{α} στα κέντρα των κελιών χρειάζεται ο υπολογισμός των μετατοπίσεων των κέντρων των κελιών x_k^c ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού b_n . Όμως, η παραμετροποίηση γράφων Delaunay υπολογίζει τις μετατοπίσεις των πλεγματικών κόμβων (x_k^{vp}). Έτσι, ο αριθμητικός υπολογισμός του ολοκληρώματος της εξ. (6.9) γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} Vterm &= - \int_{\Omega} m_k^{\alpha} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \delta \Omega \\ &\approx - \sum_{\forall c \in \Omega} \left[m_k^{\alpha} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \Delta \Omega \right]^c \\ &= - \sum_{\forall c \in \Omega} \left[m_k^{\alpha} \Delta \Omega \frac{\delta x_k}{\delta x_m^{vp}} \frac{\delta x_m^{vp}}{\delta b_n} \right]^c \\ &= - \sum_{\forall vp \in \Omega} \underbrace{\left[m_k^{\alpha} \Delta \Omega \right]^c}_{T_1} \underbrace{\frac{\delta x_k^c}{\delta x_m^{vp}}}_{T_2} \underbrace{w^{bp} \frac{\delta x_m^{bp}}{\delta b_n}}_{T_3} \end{aligned} \quad (6.10)$$

όπου με c συμβολίζονται τα κέντρα των κελιών (cell centers), με vp οι ποσότητες στους πλεγματικούς κόμβους (εσωτερικούς και οριακούς) (volume points) και με bp οι ποσότητες στους οριακούς κόμβους (boundary points). Οι όροι του αθροίσματος της εξ. (6.10) έχουν ως εξής:

T₁: Ο όρος m_k^{α} υπολογίζεται στο κέντρο κάθε κελιού μετά την επίλυση των εξισώσεων κατάστασης και των συζυγών εξισώσεων, σύμφωνα με τις σχέσεις (6.4) και (6.8). Με $\Delta \Omega$ συμβολίζεται ο όγκος του κάθε κελιού, ο οποίος είναι γνωστός.

T₂: Η παράγωγος $\frac{\delta x_k^c}{\delta x_m^{vp}}$ εκφράζει τη μεταβολή των συντεταγμένων x_k^c του κέντρου του κελιού c ως προς τη μετατόπιση των πλεγματικών κόμβων vp από τους οποίους σχηματίζεται το κελί αυτό. Με δεδομένες τις κορυφές ενός πολύεδρου (στη γενική περίπτωση) κελιού, το κέντρο του υπολογίζεται μέσω μίας διαδικασίας πρισματοποίησης του κελιού αυτού. Αρχικά, υπολογίζεται ένα προσεγγιστικό κέντρο (ως οι μέσες τιμές των συντεταγμένων των κορυφών που το αποτελούν), με βάση το οποίο σχηματίζονται πρίσματα με κορυφή το προσεγγιστικό κέντρο και με πλευρά μία επιφάνεια του κελιού αυτού. Στη συνέχεια, οι συντεταγμένες του κέντρου του κελιού υπολογίζονται ως το σταθμισμένο – με βάση τον όγκο των πρισμάτων – άθροισμα των συντεταγμένων των κέντρων των πρισμάτων.

Με βάση την παραπάνω διαδικασία, οι συντεταγμένες των κέντρων των κελιών x_k^c υπολογίζονται αναλυτικά ως συνάρτηση των συντεταγμένων x_m^{vp} των πλεγματικών κόμβων που το αποτελούν. Η παραγωγή των σχέσεων αυτών οδηγεί σε μία αναλυτική έκφραση για την παράγωγο $\frac{\delta x_k^c}{\delta x_m^{vp}}$ και άρα η ποσότητα T_1 υπολογίζεται άμεσα.

T₃: Η παράγωγος $\frac{\delta x_m^{bp}}{\delta b_n}$ των συντεταγμένων x_m^{bp} (οι οποίες αντιστοιχούν σε οριακούς κόμβους του πλέγματος) των κορυφών του τριγώνου (ή τετραέδρου) Delaunay στο οποίο ανήκει ο πλεγματικός κόμβος vp ως προς τη μεταβλητή σχεδιασμού b_n , στη γενική περίπτωση, είναι γνωστή μέσω αναλυτικής σχέσης που προκύπτει από την παραγωγή των σχέσεων της παραμετροποίησης των ορίων του πλέγματος (π.χ. επιφάνειες Bézier). Η παράγωγος αυτή πολλαπλασιάζεται με τη βαρυκεντρική συντεταγμένη w^{bp} του εσωτερικού κόμβου vp που αντιστοιχεί στην κορυφή bp του στοιχείου Delaunay.

Με τις ποσότητες T_1 , T_2 και T_3 να είναι γνωστές, ο όρος $Vterm$ μπορεί να υπολογιστεί άμεσα για κάθε μεταβλητή σχεδιασμού b_n , με ελάχιστο υπολογιστικό κόστος, αφού δεν απαιτείται ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας του πλέγματος μέσω πεπερασμένων διαφορών (όπως συμβαίνει συνήθως στη διατύπωση FI), αλλά ούτε και η επίλυση των συζυγών εξισώσεων του μοντέλου μετακίνησης του πλέγματος (όπως συμβαίνει στη διατύπωση E-SI [9]).

6.3 Εφαρμογή σε 2Δ Αγωγό

Στην ενότητα αυτή, γίνεται επίδειξη της διαδικασίας υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας που περιγράφηκε στην ενότητα 6.2. Συγκεκριμένα, υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας των απωλειών ολικής πίεσης p_t (εξ. (6.1)) για την περίπτωση εσωτερικής αεροδυναμικής σε 2Δ αγωγό. Για την επίδειξη της ακρίβειας υπολογισμού του όρου $Vterm$, υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας για δύο περιπτώσεις ροών: (α) για στρωτή ροή (με αριθμό $Re = 1000$) και (β) για τυρβώδη ροή (με αριθμό

$Re = 25333$), όπου χρησιμοποιείται το μοντέλο τύρβης Spalart-Allmaras [44], το οποίο διαφορίζεται και επιλύεται η συζυγής του εξίσωση.

Ο όρος $Vterm$ της παραμετροποίησης γράφων Delaunay υπολογίστηκε με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού, το οποίο προγραμματίστηκε για τους σκοπούς της εργασίας αυτής σε περιβάλλον OpenFOAM®.

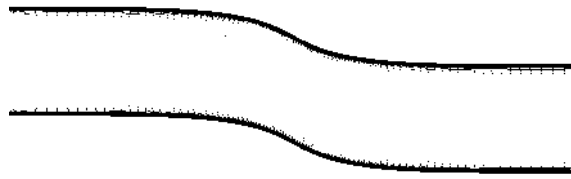
Το πλέγμα του αγωγού αποτελείται από 48642 κόμβους και 24000 τετράπλευρα. Η παραμετροποίηση της ελεγχόμενης γεωμετρίας (δηλαδή των τοιχωμάτων) της εφαρμογής αυτής γίνεται με τη χρήση καμπυλών Bézier-Bernstein. Οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου (control points) είναι οι μεταβλητές σχεδιασμού b_n ως προς τις οποίες υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας. Επειδή η περίπτωση αυτή είναι 2Δ, οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι διπλάσιες του πλήθους των σημείων ελέγχου, δηλαδή οι συντεταγμένες των σημείων αυτών στις δύο κατευθύνσεις. Ο αγωγός σχεδιάζεται με τη χρήση δύο καμπυλών Bézier-Bernstein, διαφορετικές για το άνω και κάτω τοίχωμα του αγωγού. Κάθε καμπύλη ελέγχεται από 12 σημεία ελέγχου, με το πρώτο και το τελευταίο σημείο κάθε καμπύλης να είναι σταθερό. Στα διαγράμματα των παραγώγων ευαισθησίας που παρουσιάζονται, σχεδιάζονται τέσσερις διαφορετικές καμπύλες, οι οποίες αντιστοιχούν στις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου με την εξής σειρά: (α) άνω πλευρά, συντεταγμένες x , (β) κάτω πλευρά, συντεταγμένες x , (γ) άνω πλευρά, συντεταγμένες y και (δ) κάτω πλευρά, συντεταγμένες y .

Στην εφαρμογή αυτή, οι εξισώσεις της ροής και οι συζυγείς τους έχουν επιλυθεί σε προηγούμενο βήμα και θεωρούνται δεδομένες. Έτσι, γίνεται υπολογισμός μόνο των παραγώγων ευαισθησίας, για τη διατύπωση όπου αμελείται ο όρος $Vterm$ (διατύπωση SI) και για τη διατύπωση στην οποία ο όρος αυτός υπολογίζεται με τη χρήση της παραμετροποίησης γράφων Delaunay (διατύπωση FI). Οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίζονται με τη συζυγή μέθοδο συγκρίνονται με αυτές που υπολογίζονται μέσω πεπερασμένων διαφορών (FD), ως ένα μέτρο αναφοράς της ακρίβειας των υπολογιζόμενων παραγώγων.

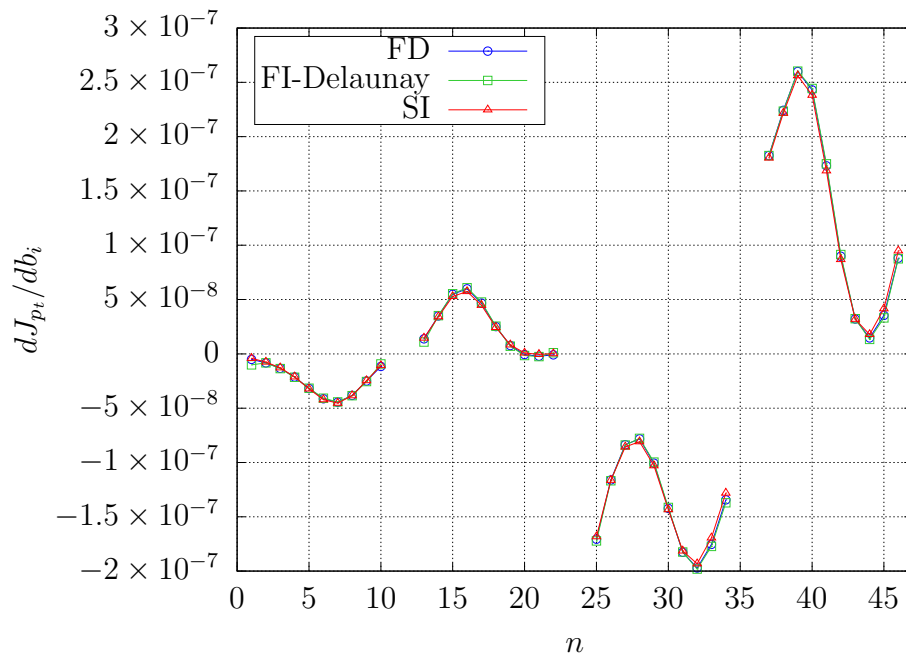
Στην περίπτωση της στρωτής ροής, οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίζονται με τη διατύπωση FI και παραμετροποίηση Delaunay ταιριάζουν αυτές που υπολογίζονται με τις πεπερασμένες διαφορές (FD). Όμως, και οι παράγωγοι που υπολογίζονται με τη διατύπωση SI, δηλαδή με την παράλειψη του όρου $Vterm$, είναι πολύ κοντά στις παραγώγους που υπολογίζονται με FD. Αυτό συμβαίνει επειδή ο όρος $Vterm$ είναι όντως πολύ μικρός (τάξης μεγέθους 10^{-9}) και θα μπορούσε, ίσως, να αμεληθεί, για μείωση του υπολογιστικού κόστους.

Από την άλλη, στην περίπτωση της τυρβώδους ροής, η διαφορά των παραγώγων που προκύπτουν με τις διατυπώσεις FI και SI είναι μεγάλη. Ενώ οι παράγωγοι που υπολογίζονται με τη διατύπωση FI και παραμετροποίηση Delaunay ταιριάζει με αυτές των FD, η διαφορά των παραγώγων της διατύπωσης SI από αυτές που προκύπτουν με τις FD είναι πολύ μεγάλη. Αυτό οφείλεται στις μεγάλες τιμές που λαμβάνει ο όρος $Vterm$ για την περίπτωση της τυρβώδους ροής. Αν και το πλέγμα είναι αρκετά πυκνό κοντά στο τοίχωμα, κατάλληλο για χρήση με μοντέλα τύρβης χαμηλού αριθμού Rey-

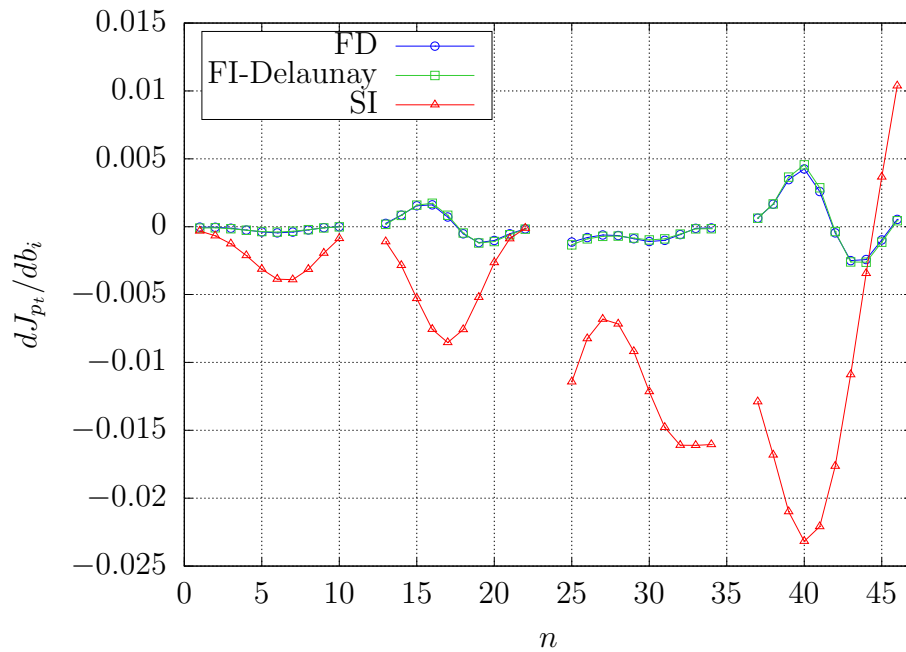
nolds της τύρβης, όπως είναι το μοντέλο Spalart-Allmaras που χρησιμοποιείται στην περίπτωση αυτή, η διαφορά των παραγώγων με SI από αυτές με FI είναι μεγάλη. Αν και συνήθως ο υπολογισμός των ακριβών παραγώγων με FI έχει υψηλό υπολογιστικό κόστος, στην περίπτωση αυτή, όπου χρησιμοποιήθηκε η παραμετροποίηση γράφων Delaunay, ο υπολογισμός της ακριβούς παραγώγου έγινε άμεσα, αφού όλες οι ποσότητες του όρου V_{term} ήταν γνωστές, ενώ δεν απαιτήθηκε η επίλυση κάποιας επιπλέον διαφορικής εξίσωσης, όπως για παράδειγμα απαιτείται από τη διατύπωση E-SI [9], η οποία έχει αναπτυχθεί στη ΜΠΥΡ&Β ΕΜΠ και η οποία υπολογίζει τη μετατόπιση των πλεγματικών κόμβων μέσω της επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων τύπου Laplace.



Σχήμα 6.1: Εφαρμογή σε 2Δ αγωγό εσωτερικής αεροδυναμικής. Το υπολογιστικό πλέγμα του τμήματος του αγωγού στο οποίο οι άνω και κάτω επιφάνειες παραμετροποιούνται με τη χρήση καμπυλών *Bézier-Bernstein*



Σχήμα 6.2: Εφαρμογή σε 2Δ αγωγό. Στρωτή ροή ($Re = 1000$). Οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίζονται με πεπερασμένες διαφορές (FD, με τη διατύπωση χωρικών ολοκληρωμάτων και παραμετροποίηση γράφων Delaunay (FI) και με τη διατύπωση χωρικών ολοκληρωμάτων, για τις μεταβλητές σχεδιασμού b_n . Οι παράγωγοι που υπολογίζονται με FD θεωρούνται αποτελέσματα αναφοράς και χρησιμοποιούνται για την επιβεβαίωση των υπολογιζόμενων παραγώγων με FI και SI.



Σχήμα 6.3: Εφαρμογή σε 2Δ αγωγό. Τυρβώδης ροή ($Re = 25333$). Οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίζονται με πεπερασμένες διαφορές (FD, με τη διατύπωση χωρικών ολοκληρωμάτων και παραμετροποίηση γράφων Delaunay (FI) και με τη διατύπωση χωρικών ολοκληρωμάτων, για τις μεταβλητές σχεδιασμού b_n . Οι παράγωγοι που υπολογίζονται με FD θεωρούνται αποτελέσματα αναφοράς και χρησιμοποιούνται για την επιβεβαίωση των υπολογιζόμενων παραγώγων με FI και SI.

Κεφάλαιο 7

Ανακεφαλαίωση & Συμπεράσματα

7.1 Ανακεφαλαίωση

Στην εργασία αυτή, παρουσιάστηκε και αναπτύχθηκε η μέθοδος παραμόρφωσης 2Δ και 3Δ υπολογιστικών πλεγμάτων με τη χρήση παραμετροποίησης γράφων Delaunay, για χρήση, μεταξύ άλλων, κατά τη διαδικασία αεροδυναμικής βελτιστοποίησης σχήματος με τη συζυγή μέθοδο, αλλά και με άλλες μεθόδους βελτιστοποίησης, όπως είναι οι εξελικτικοί αλγόριθμοι. Αρχικά, παρουσιάστηκαν οι βασικές ιδιότητες και οι αλγόριθμοι γένεσης της τριγωνοποίησης και τετραεδροποίησης Delaunay, που αποτελούν τα βασικά εργαλεία της μεθόδου παραμόρφωσης πλεγμάτων. Στη συνέχεια, αναλύθηκαν τα βήματα της διαδικασίας παραμόρφωσης πλέγματος, όπως αυτή εφαρμόζεται με την παραμετροποίηση γράφων Delaunay. Για την επίδειξη της λειτουργίας και της στιβαρότητάς της, η μέθοδος που αναπτύχθηκε εφαρμόστηκε σε περιπτώσεις παραμόρφωσης 2Δ και 3Δ υπολογιστικών πλεγμάτων, για μία πληθώρα διαφορετικών προβλημάτων παραμόρφωσης. Επιπλέον, για τις 2Δ, προτάθηκαν δύο βελτιώσεις της μεθόδου, που αφορούν τη διόρθωση του γράφου γύρω από μη-κυρτές γεωμετρίες και την παρεμβολή των πλεγματικών κόμβων σε περιπτώσεις μεγάλων παραμορφώσεων της γεωμετρίας. Επίσης, παρουσιάστηκε ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζονται γρήγορα οι ακριβείς παράγωγοι ευαισθησίας της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, με τη χρήση της παραμετροποίησης γράφων Delaunay ενώ έγινε και επίδειξη της ακρίβειας των υπολογισμών αυτών.

Συγκεκριμένα, στην εργασία αυτή παρουσιάστηκαν τα εξής:

- Στο **Κεφάλαιο 2** παρουσιάστηκε η δομή και οι βασικές ιδιότητες της ψηφιοποίησης Delaunay, καθώς και οι διάφοροι αλγόριθμοι γένεσης της ψηφιοποίησης αυτής. Η βασική ιδιότητα της ψηφιοποίησης, την οποία εκμεταλλεύεται η μέθοδος παραμόρφωσης πλεγμάτων που αναπτύχθηκε είναι αυτή της μεγιστοποίησης

την ελάχιστης γωνίας των στοιχείων Delaunay, αφού κάτι τέτοιο μεγιστοποιεί την ευελιξία του παραγόμενου γράφου. Επίσης, η ψηφιοποίηση αυτή είναι κατάλληλη για την παραμετροποίηση του υπολογιστικού πλέγματος, γιατί καλύπτει πλήρως με τριγωνικά ή τετραεδρικά στοιχεία το υποσύνολο του υπολογιστικού χωρίου που παραμορφώνεται, καθιστώντας την αποτύπωση των πλεγματικών κόμβων άμεση, μέσω των κεντροβαρικών τους συντεταγμένων ως προς τα στοιχεία αυτά.

Για τη γένεση της τριγωνοποίησης και τετραεδροποίησης Delaunay, παρουσιάστηκε αναλυτικά ο αλγόριθμος Green-Sibson (αλγόριθμος 1), με βάση τον οποίο γίνεται η γένεση της ψηφιοποίησης στο λογισμικό παραμόρφωσης πλεγμάτων που αναπτύχθηκε.

- Στο **Κεφάλαιο 3** αναλύθηκαν τα βήματα της μεθόδου παραμόρφωσης, τα οποία είναι τα εξής: (α) ψηφιοποίηση του υπολογιστικού χωρίου, (β) αποτύπωση των πλεγματικών κόμβων επάνω στο γράφο, (γ) παραμόρφωση του γράφου με βάση τη μετατόπιση των οριακών κόμβων του πλέγματος και (δ) υπολογισμός της νέας θέσης των πλεγματικών κόμβων, με βάση την αποτύπωση που έγινε στο βήμα (β).

Η αναλυτική διαδικασία εκτέλεσης της μεθόδου παρουσιάζεται σε μορφή ψευδοκώδικα στον αλγόριθμο 2.

- Στο **Κεφάλαιο 4** έγινε εφαρμογή της μεθόδου σε διάφορες περιπτώσεις παραμόρφωσης 2Δ πλεγμάτων (κάμψη, περιστροφή, ημιτονοειδής παραμόρφωση) εξωτερικής αεροδυναμικής, ενός (αεροτομές NACA) και δύο (αεροτομή με flap) σωμάτων. Επίσης, προτάθηκαν δύο βελτιώσεις της μεθόδου στις 2Δ , οι οποίες αφορούν: (α) τη διόρθωση του γράφου γύρω από μη-κυρτές γεωμετρίες, έτσι ώστε η τριγωνοποίηση που παραμετροποιεί το πλέγμα να μπορεί να διαδώσει την πληροφορία της παραμόρφωσης των ορίων του πλέγματος σε όλους τους εσωτερικούς κόμβους και όχι μόνο σε αυτούς που βρίσκονται κοντά στη γεωμετρία και (β) τη βελτίωση της παρεμβολής της γεωμετρίας σε περιπτώσεις μεγάλων παραμορφώσεων και κυρίως μεγάλων στροφών, όπου, εκτός από τη μετατόπιση των οριακών κόμβων, λαμβάνεται υπόψη και η αλλαγή της κλίσης του ορίου (στροφή) στον εκάστοτε οριακό κόμβο.
- Στο **Κεφάλαιο 5** η μέθοδος εφαρμόστηκε σε διάφορες περιπτώσεις παραμόρφωσης 3Δ υπολογιστικών πλεγμάτων εξωτερικής και εσωτερικής αεροδυναμικής, απλών και σύνθετων γεωμετριών. Οι παραμορφώσεις αυτές περιελάμβαναν μεγάλες μετατοπίσεις της γεωμετρίας (π.χ. κάμψη μιας πτέρυγας) αλλά και μικρότερες μετατοπίσεις που προέκυψαν από μία διαδικασία βελτιστοποίησης.
- Στο **Κεφάλαιο 6** αναπτύχθηκε η διατύπωση των παραγώγων ευαισθησίας της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, όπως αυτή εφαρμόζεται με τη χρήση της παραμετροποίησης γράφων Delaunay, για την περίπτωση όπου η αντικειμενική συνάρτηση περιγράφει τις απώλειες ολικής πίεσης. Με τη διατύπωση που προκύπτει από την παραμετροποίηση αυτή, ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας

γίνεται με ακρίβεια και με ελάχιστο υπολογιστικό κόστος. Για την επίδειξη της ακρίβειας των υπολογιζόμενων παραγώγων, η διατύπωση αυτή εφαρμόστηκε σε μία περίπτωση εσωτερικής αεροδυναμικής, για στρωτή και τυρβώδη ροή.

Ένα πολύ βασικό τμήμα της διπλωματικής αυτής εργασίας αποτελεί το λογισμικό παραμόρφωσης πλέγματος που αναπτύχθηκε για την εφαρμογή της μεθόδου και χρησιμοποιήθηκε στις εφαρμογές που παρουσιάστηκαν. Συγκεκριμένα, το λογισμικό παραμόρφωσης πλεγμάτων με τη χρήση γράφων Delaunay προγραμματίστηκε σε περιβάλλον OpenFOAM[®], σε γλώσσα προγραμματισμού C++. Το λογισμικό αυτό αναπτύχθηκε τόσο για 2Δ όσο και 3Δ πλέγματα ενώ εφαρμόζεται με τον ίδιο τρόπο σε δομημένα και μη-δομημένα πλέγματα.

Κατά την ανάπτυξη του λογισμικού παραμόρφωσης πλέγματος, προγραμματίστηκαν τα εξής:

- Ανάγνωση του πλέγματος και της επιβαλλόμενης παραμόρφωσης των οριακών κόμβων, όπως αυτή προκύπτει, για παράδειγμα, σε κάθε κύκλο μίας διαδικασίας βελτιστοποίησης, η οποία αποτελεί την οριακή συνθήκη για την παραμόρφωση του πλέγματος. Το πλέγμα αποτελεί στοιχείο της αντίστοιχης κλάσης του OpenFOAM[®].
- Επιλογή των ελεγχόμενων και μη-ελεγχόμενων ορίων του γράφου Delaunay. Τα ελεγχόμενα όρια ταυτίζονται με τα παραμορφούμενα όρια του πλέγματος ενώ η επιλογή των μη-ελεγχόμενων ορίων μπορεί να γίνει χειροκίνητα από το χρήστη, με επιλογή οριακών (και σταθερών) κόμβων του πλέγματος ή αυτόματα, όπου το όριο παράγεται με βάση το κυρτό χωρίο της γεωμετρίας (όπως παρουσιάζεται στην ενότητα 4.3.1). Οι κόμβοι των ορίων αυτών είναι ο κόμβοι που χρησιμοποιούνται για τη γένεση της ψηφιοποίησης Delaunay σε επόμενο βήμα.
- Γένεση της τριγωνοποίησης και τετραεδροποίησης Delaunay από τους ελεγχόμενους και μη-ελεγχόμενους οριακούς κόμβους. Η γένεση αυτή γίνεται με τη χρήση της αντίστοιχης κλάσης της βιβλιοθήκης υπολογιστικής γεωμετρίας CGAL.
- Για κάθε κόμβο, αναζήτηση του στοιχείου Delaunay στο οποίο ανήκει (μέσω της αντίστοιχης κλάσης της βιβλιοθήκης CGAL) και υπολογισμός των βαρυκεντρικών του συντεταγμένων.
- Παραμόρφωση του γράφου Delaunay σύμφωνα με τη μετατόπιση των οριακών κόμβων.
- Υπολογισμός των νέων θέσεων των πλεγματικών κόμβων.

Επιπλέον, για τις περιπτώσεις 2Δ πλεγμάτων, προγραμματίστηκαν:

- Η διαδικασία διόρθωσης του γράφου γύρω από μη-κυρτές γεωμετρίες (βλέπε ενότητα 4.4.1).
- Η διαδικασία υπολογισμού της παρεμβολής της στροφής (βλέπε ενότητα 4.5).

Συνολικά, αναπτύχθηκαν δύο επιλύτες μετακίνησης του πλέγματος (που ανήκουν στην κλάση `motionSolver` του `OpenFOAM`[®]), για τις 2 και τις 3 διαστάσεις, αντίστοιχα. Κάθε επιλύτης δέχεται ως είσοδο το πλέγμα και τη μετατόπιση των οριακών του κόμβων και επιστρέφει τις νέες θέσεις των πλεγματικών κόμβων, που αντιστοιχούν στην αρχική τοπολογία του πλέγματος. Επίσης, οι επιλύτες έχουν τη δυνατότητα παράλληλης εκτέλεσης της μετατόπισης του πλέγματος, με όλα τα υποσύνολα στα οποία χωρίζεται το πλέγμα να χρησιμοποιούν τον ίδιο γράφο `Delaunay`.

Τέλος, προγραμματίστηκε συνάρτηση που υπολογίζει τη συνεισφορά της μεθόδου παραμόρφωσης του πλέγματος στις υπολογιζόμενες παραγωγούς ευαισθησίας της συνεχούς συζυγούς μεθόδου.

7.2 Συμπεράσματα

Με την εκτενή ανάλυση που έγινε στην εργασία αυτή, φαίνεται ότι η μέθοδος παραμόρφωσης πλεγμάτων με τη χρήση παραμετροποίησης γράφων `Delaunay` είναι μία γρήγορη, στιβαρή και αξιόπιστη μέθοδος. Σε όλες τις εφαρμογές που παρουσιάστηκαν, η μέθοδος αυτή έδωσε ικανοποιητικής ποιότητας πλέγματα, ακόμα και για μεγάλες παραμορφώσεις της εκάστοτε γεωμετρίας, ενώ το υπολογιστικό κόστος ήταν σημαντικά χαμηλό, ακόμα και για περιπτώσεις μεγάλων πλεγμάτων (όπως το πλέγμα του αυτοκινήτου `DrivAer`, που διαθέτει πάνω από 4 εκατομμύρια κόμβους).

Συνοπτικά, τα βασικά συμπεράσματα που προκύπτουν από την ανάλυση που έγινε στη διπλωματική αυτή εργασία, ως προς τη χρήση και την εφαρμογή της μεθόδου γράφων `Delaunay`, είναι τα εξής:

- Η επιλογή των ορίων του γράφου `Delaunay` πρέπει να γίνεται έτσι ώστε: (α) τα ελεγχόμενα όρια να περιλαμβάνουν όλους τους οριακούς κόμβους του πλέγματος οι οποίοι μετατοπίζονται κατά την παραμόρφωση της γεωμετρίας και των οποίων η μετατόπιση αποτελεί την οριακή συνθήκη για την παραμόρφωση του πλέγματος και (β) τα μη-ελεγχόμενα όρια να ορίζονται έτσι ώστε μεταξύ ελεγχόμενων και μη-ελεγχόμενων ορίων να βρίσκονται οι κόμβοι του πλέγματος που θα μετακινηθούν με την παραμόρφωση της γεωμετρίας, ενώ υπάρχει μία σχετική ελευθερία ως προς την επιλογή τους.
- Σε περιπτώσεις πολύ πυκνών πλεγμάτων όπου οι μετατοπίσεις των οριακών κόμβων είναι μικρές, η παραμόρφωση του πλέγματος μπορεί να περιοριστεί στους πλεγματικούς κόμβους που βρίσκονται κοντά στην παραμορφούμενη γεωμετρία με κατάλληλη επιλογή του μη-γεωμετρικού ορίου.
- Η μέθοδος γράφων `Delaunay` μπορεί να εφαρμοστεί με τον ίδιο τρόπο σε 2D και 3D πλέγματα εσωτερικής και εξωτερικής αεροδυναμικής, για τη γρήγορη παραμόρφωσή τους.

- Σε περιπτώσεις μη-κυρτών 2D γεωμετριών, όπως φάνηκε στην ενότητα 4.4, η παραμετροποίηση του υπολογιστικού χωρίου μπορεί να βελτιωθεί με κατάλληλη διόρθωση της τριγωνοποίησης Delaunay.
- Σε περιπτώσεις μεγάλων παραμορφώσεων, η παρεμβολή των πλεγματικών κόμβων με βάση τις βαρυκεντρικές τους συντεταγμένες, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις μετατοπίσεις των οριακών κόμβων, δίνει πλέγματα ικανοποιητικής ποιότητας. Όμως, η ποιότητα των παραγόμενων πλεγμάτων μπορεί να βελτιωθεί ακόμα περισσότερο αν κατά την παραμόρφωση της γεωμετρίας ληφθεί υπόψη και η στροφή των οριακών κόμβων (δηλαδή η αλλαγή της κλίσης του ορίου στη θέση του κόμβου αυτού), με βάση την παρεμβολή της στροφής που παρουσιάστηκε στην ενότητα 4.5.
- Η μέθοδος που αναπτύχθηκε μπορεί να εφαρμοστεί με την ίδια ευκολία τόσο σε περιπτώσεις αεροδυναμικής βελτιστοποίησης με τη συζυγή μέθοδο ή με άλλες μεθόδους βελτιστοποίησης, όπως είναι οι εξελικτικοί αλγόριθμοι, όσο και σε μη-μόνιμα προβλήματα ΥΡΔ που περιλαμβάνουν κινούμενα όρια ή υπολογισμούς αεροελαστικότητας.
- Η μέθοδος παραμόρφωσης πλεγμάτων με γράφους Delaunay, εκτός από την προσαρμογή πλεγμάτων γύρω από παραμορφούμενες γεωμετρίες, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για το γρήγορο και ακριβή υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, όπου αξιοποιείται η αναλυτική παραμετροποίηση των πλεγματικών κόμβων με βάση το γράφο Delaunay του πλέγματος για τον άμεσο υπολογισμό των ακριβών παραγώγων ευαισθησίας.

Η μέθοδος που αναπτύχθηκε εντάχθηκε στη διαδικασία αεροδυναμικής βελτιστοποίησης σχήματος με τη συνεχή συζυγή μέθοδο τόσο για την προσαρμογή των πλεγμάτων γύρω από τις νέες γεωμετρίες που προκύπτουν μετά από κάθε κύκλο βελτιστοποίησης όσο και για τον ακριβή υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας.

7.3 Προτάσεις για Μελλοντική Μελέτη

Εν κατακλείδι, μερικά θέματα για περαιτέρω έρευνα και προγραμματισμό σχετικά με τη μέθοδο παραμόρφωσης πλεγμάτων με γράφους Delaunay, ως συνέχεια της εργασίας αυτής, θα μπορούσαν να είναι τα εξής:

- Η μέθοδος θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στην επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης με τη συζυγή μέθοδο ή με άλλες μεθόδους βελτιστοποίησης, όπως οι εξελικτικοί αλγόριθμοι, έτσι ώστε να πιστοποιηθεί η αποτελεσματικότητα και η ταχύτητά της στο πλαίσιο μίας διαδικασίας βελτιστοποίησης.
- Στην εργασία αυτή, η παραμετροποίηση γράφων Delaunay χρησιμοποιήθηκε για τον ακριβή υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης που περιγράφει τις απώλειες ολικής πίεσης σε έναν αγωγό στις 2D. Ως

θέμα μελλοντικής μελέτης, θα μπορούσαν να αναπτυχθούν οι διατυπώσεις των παραγώγων ευαισθησίας με βάση την παραμετροποίηση αυτή και για άλλες αντικειμενικές συναρτήσεις, όπως είναι οι δυνάμεις που ασκούνται σε σώματα, και να πιστοποιηθεί η ακρίβειά τους.

- Οι διορθώσεις-βελτιώσεις της μεθόδου στις 2Δ που προτάθηκαν στο κεφάλαιο 4 θα μπορούσαν να επεκταθούν και στις 3Δ, για τη βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων πλεγμάτων και την αύξηση της ευελιξίας της μεθόδου.

Βιβλιογραφία

- [1] Γιαννάκογλου, Κ. Χ.: *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Ε.Μ.Π., 2006.
- [2] Annicchiarico, W., Periaux, J., Cerrolaza, M., and Winter, G.: *Evolutionary Algorithms and Intelligent Tools in Engineering Optimization*. CIMNE Series of Handbooks, 2005.
- [3] Giannakoglou, K.C., Papadimitriou, D.I., and Kampolis, I.C.: *Aerodynamic shape design using evolutionary algorithms and new gradient-assisted meta-models*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195(44-47):6312–6329, 2006.
- [4] Kepler, J.: *Sensitivity Analysis: the Direct and Adjoint Method*. Universitat Linz., 2010.
- [5] Asouti, V. G., Zymaris, A. S., Papadimitriou, D. I., and Giannakoglou, K. C.: *Continuous and discrete adjoint approaches for aerodynamic shape optimization with low mach number preconditioning*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 57(10):1485–1504, 2008.
- [6] Papadimitriou, D. I. and Giannakoglou, K. C.: *A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals for inviscid and viscous flows*. Computers & Fluids, 36(2):325–341, 2007.
- [7] Γκαραγκούνης, Κ.: *Διερεύνηση Διαφορετικών Διατυπώσεων της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου για τον Υπολογισμό Παραγώγων Ευαισθησίας στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση με Ακρίβεια. Εφαρμογές*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2016.
- [8] Jameson, A.: *Aerodynamic design via control theory*. Journal of Scientific Computing, 3:233–260, 1988.
- [9] Kavvadias, I.S., Papoutsis-Kiachagias, E.M., and Giannakoglou, K.C.: *On the proper treatment of grid sensitivities in continuous adjoint methods for shape optimization*. Journal of Computational Physics, 301:1–18, 2015, ISSN 0021-9991.

- [10] Anderson, W. and Venkatakrishnan, V.: *Aerodynamic design optimization on unstructured grids with a continuous adjoint formulation*. Computers & Fluids, 28:443–480, 1999.
- [11] Jameson, A. and Kim, S.: *Reduction of the adjoint gradient formula in the continuous limit*. 41th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, AIAA paper 2003-0040, 2003.
- [12] Καββαδίας, Ι.: *Η συνεχής συζυγής μέθοδος για μόνιμες και μη-μόνιμες τυρβώδεις ροές με έμφαση στην ακρίβεια των παραγώγων ευαισθησίας*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2015.
- [13] Burg, C.: *Analytic study of 2d and 3d grid motion using modified laplacian*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 52(2):163–197, 2006.
- [14] Helenbrook, B.T.: *Mesh deformation using the biharmonic operator*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 56(7):1007–1021, 2003.
- [15] Blom, F.J.: *Considerations on the spring analogy*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 32(6):647–668, 2000.
- [16] Farhat, C., Degand, C., Koobus, B., and Lesoinne, M.: *Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 163:231–245, 1998.
- [17] Stein, K., Tezduyar, T., and Benney, R.: *Mesh moving techniques for fluid-structure interactions with large displacements*. Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME, 70(1):58–63, 2003.
- [18] Boer, A. de, Schoot, M.S. van der, and Bijl, H.: *Mesh deformation based on radial basis function interpolation*. Computers and Structures, 85:784–795, 2007.
- [19] Witteveen, J.A.S. and Bijl, H.: *Explicit mesh deformation using inverse distance weighting interpolation*. 19th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, San Antonio, Texas, AIAA-2009-3996, 2009.
- [20] Liu, X., Qin, N., and Xia, H.: *Fast dynamic grid deformation based on Delaunay graph mapping*. Journal of Computational Physics, 211:405–423, 2006.
- [21] Edelsbrunner, H.: *Algorithms in Combinatorial Geometry*. Springer-Verlag, 1987.
- [22] Preparata, F. and Shamos, M.: *Computational Geometry - An Introduction*. Springer-Verlag, 1985.
- [23] Guibas, L. and Stolfi, J.: *Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of Voronoi diagrams*. ACM Transactions on Graphics, 4(2):74–123, 1985.

- [24] Voronoi, G.: *Nouvelles applications des parametres continus a la theorie des formes quadratiques. premier memoire: Sur quelques proprietees des formes quadratiques positives parfaites.* J. Reine Angew. Math., 133:97–178, 1907.
- [25] Voronoi, G.: *Nouvelles applications des parametres continus a la theorie des formes quadratiques. deuxieme memoire: Recherches sur les paralleloedres primitifs.* J. Reine Angew. Math., 134:198–287, 1908.
- [26] Delaunay, B.: *Neue darstellung der geometrischen krystallographie.* Z. Kryst., 84:109–149, 1932.
- [27] Delaunay, B.: *Sur la sphere vide.* Izv. Akad. Nauk SSSR. Otdel. Mat. Estestv. Nauk, 7:793–800, 1934.
- [28] Green, P. J. and Sibson, R.: *Computing Dirichlet tessellations in the plane.* Computer Journal, 21(2):168–173, 1978.
- [29] Watson, D. F.: *Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes.* The Computer Journal, 24(2):167–172, 1981.
- [30] Bowyer, A.: *Computing Dirichlet tessellations.* The Computer Journal, 24(2):162–166, 1981.
- [31] Lawson, C. L.: *Generation of a triangular grid with applications to contour plotting.* Technical Memo., 299, 1972.
- [32] Guibas, L. J., Knuth, D. E., and Sharir, M.: *Randomized incremental construction of Delaunay and Voronoi diagrams.* In Proc. 17th Int. Colloq. — Automata, Languages, and Programming, volume 443 of Springer-Verlag LNCS, pages 414-431, Berlin, 1990, 1990.
- [33] Fortune, S.: *A sweepline algorithm for Voronoi diagrams.* Algorithmica, 2:153–174, 1987.
- [34] Tanemura, M., Ogawa, T., and Ogita, N.: *A new algorithm for three-dimensional Voronoi tessellation,* 1983.
- [35] Merriam, M. L.: *An efficient advancing-front algorithm for Delaunay triangulation.* AIAA, 91-0792, 1991.
- [36] Devillers, O.: *Improved incremental randomized Delaunay triangulation.* RR-3298, INRIA, 1997.
- [37] Burg, J.W. Van Der, Geyr, H. Freiherr Von, Heinrich, R., Eliasson, P., Delille, T., and Krier, J.: *Geometrical installation and deformation effects in high-lift flows.* AIAA J., 47:60–70, 2009.
- [38] Wang, H., Leskinen, J., and Lee, D.: *Active flow control of airfoil using mesh/meshless methods coupled to hierarchical genetic algorithms for drag reduction design.* Eng. Comput., 30(4):562–580, 2013.

- [39] Milli, A. and Shahpar, S.: *PADRAM: parametric design and rapid meshing system for complex turbomachinery configurations*. ASME Turbo Expo 2012: Turbine Technical Conference and Exposition, Copenhagen, Denmark, in: Proceedings of the ASME Turbo Expo, 8:2135–2148, 2012.
- [40] Wang, Y., Qin, N., and Zhao, N.: *Delaunay graph and radial basis function for fast quality mesh deformation*. Journal of Computational Physics, 294(Supplement C):149 – 172, 2015, ISSN 0021-9991.
- [41] Wang, Y., Qin, N., and Zhao, N.: *Delaunay graph based inverse distance weighting for fast dynamic meshing*. Communications in Computational Physics, 21(5):1282–1309, 2017.
- [42] Graham, R. L.: *An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set*. Information Processing Letters, 1:132–133, 1972.
- [43] Karpouzas, G.K., Papoutsis-Kiachagias, E.M., Schumacher, T., Villiers, E., Giannakoglou, K.C., and Othmer, C.: *Adjoint optimization for vehicle external aerodynamics*. International Journal of Automotive Engineering, 7(1):1–7, 2016.
- [44] Spalart, P. and Allmaras, S.: *A one-equation turbulence model for aerodynamic flows*. AIAA Paper 1992-439, 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, USA, January 6–9 1992.