



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Τομέας Ρευστών

Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής &
Βελτιστοποίησης

Ανάπτυξη Κώδικα Αριθμητικής Επίλυσης των Γραμμικοποιημένων Εξισώσεων Euler στην Αεροακουστική σε Επεξεργαστές Καρτών Γραφικών

Διπλωματική Εργασία

Ιωάννης Ν. Σπανός

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2019

Ευχαριστίες

Πριν αναφερθώ σε οτιδήποτε άλλο, θα ήθελα να αποδώσω τις ευχαριστίες μου σε κάποια πρόσωπα, η συμβολή των οποίων ήταν καθοριστική για την περάτωση αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή, κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου, για δύο λόγους. Πρώτα και κύρια γιατί με ενέπνευσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον αντικείμενο. Η πρώτη επαφή μου με τη διδασκαλία του στο μάθημα της Αεροδυναμικής Βελτιστοποίησης ήταν καθοριστική στο να αγαπήσω το χώρο της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής και του προγραμματισμού. Δευτερευόντως, αλλά εξίσου σημαντικά, για τη βοήθεια και την υπομονή που έδειξε καθ'όλη τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας. Γράφοντας τις τελευταίες προτάσεις, κοιτάζω προς τα πίσω όλη την πορεία που ακολούθησα, και τον ευχαριστώ γιατί μου έδωσε την ευκαιρία να μάθω πολλά περισσότερα από όσα είχα στο νου μου όταν συζητούσαμε αρχικά το θέμα.

Επιπλέον, δε θα γινόταν να παραλείψω από τις ευχαριστίες μου τα μέλη της ομάδας της ΜΠΤΡ&Β του Εργαστηρίου Θερμκών Στροβιλομηχανών. Η Δρ. Βαρβάρα Ασούτη, ο Δρ. Κωνσταντίνος Τσιάκας και ο Δρ. Ξενοφών Τρομπούκης ήταν δίπλα μου οποιαδήποτε στιγμή χρειάστηκα τη βοήθειά τους. Ο χρόνος που αφιέρωσαν, είτε με συμβουλές είτε με επεξηγήσεις, ήταν σε στέρηση του δικού τους και γι αυτό είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους δύο κοντινούς μου φίλους, Ανδρέα Μαργέτη και Στέργιο Μπάρμπα, γιατί μου στάθηκαν και με υποστήριξαν όχι μόνο στο τελευταίο εξάμηνο, αλλά σχεδόν σε όλη τη διάρκεια φοίτησής μου στη σχολή.



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής &
Βελτιστοποίησης

Ανάπτυξη Κώδικα Αριθμητικής Επίλυσης των Γραμμικοποιημένων Εξισώσεων Euler στην Αεροακουστική σε Επεξεργαστές Καρτών Γραφικών

Διπλωματική εργασία

Ιωάννης Ν. Σπανός

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2019

Η διπλωματική εργασία αποσκοπεί στη σχεδίαση και ανάπτυξη ενός δομοστοιχειωτού (modular) αντικειμενοστραφούς κώδικα, ο οποίος θα επιλύει ένα αεροακουστικό πρόβλημα σύμφωνα με το μοντέλο των Γραμμικοποιημένων Εξισώσεων Euler (Linearized Euler Equations, LEE). Η υλοποίηση του κώδικα θα γίνει σε ένα ανομοιογενές πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον, με χρήση μονάδων επεξεργασίας γραφικών (Graphics Processing Units, GPUs), ώστε να διαπιστωθεί η επιτάχυνση της επίλυσης, σε σχέση με τη σειριακή εκτέλεση σε κεντρικές μονάδες επεξεργασίας (Central Processing Units, CPUs).

Τα προβλήματα της Αεροακουστικής παρουσιάζουν συγκεκριμένες ιδιαιτερότητες κατά την περιγραφή τους, τη μαθηματική τους διατύπωση και την αριθμητική τους επίλυση. Η κλίμακα στην οποία εκπέμπει ηχητικά κύματα μια ακουστική πηγή είναι πολύ μικρότερη από αυτήν της επικρατούσας ροής και για το λόγο αυτό χρειάζεται ιδιαίτερη αντιμετώπιση και περιγράφεται από ένα σύνολο μικρών διαταραχών των βασικών μεταβλητών της ροής, γύρω από μια μέση ροϊκή τιμή.

Υπάρχουν διάφορα γραμμικοποιημένα μοντέλα για την επίλυση ενός αεροακουστικού προβλήματος (μοντέλο βαθμωτής κυματικής εξίσωσης, θερμοακουστικό μοντέλο, μοντέλο των γραμμικοποιημένων εξισώσεων Euler, μοντέλο των γραμμικοποιημένων εξισώσεων Navier-Stokes). Από αυτά επιλέχθηκε αυτό των LEE, για αυτή τη διπλωματική εργασία. Επίσης, πέραν των μοντέλων που επιλύουν την ακουστική εντός ενός πεδίου, είναι απαραίτητα συγκεκριμένα σχήματα διακριτοποίησης και οριακών συνθηκών, λόγω των ιδιαιτεροτήτων που παρουσιάζουν τα προβλήματα της Αεροακουστικής.

Μια τέτοια ιδιαιτερότητα είναι η απαιτούμενη ακρίβεια επίλυσης σε συνδιασμό με

την πολύ μικρή κλίμακα των ακουστικών μεταβλητών. Η τελευταία κάνει αναγκαία τη χρήση σχημάτων διακριτοποίησης υψηλής τάξης ακρίβειας. Τέτοια σχήματα, όμως, εισάγουν ένα σύνολο εσφαλμένων λύσεων που ανταποκρίνονται σε μη-υπαρκτά κύματα, που ονομάζονται παρασιτικά κύματα. Αυτά τα κύματα εισάγουν σφάλμα, καθολικά, στην επίλυση του ακουστικού πεδίου και για το λόγο αυτό είναι αναγκαία η απόσβεσή τους. Το χωρικό σχήμα διακριτοποίησης που χρησιμοποιήθηκε για να επιτευχθεί η απόσβεση των παρασιτικών κυμάτων ονομάζεται Σχήμα Διατήρησης της Σχέσης Διασποράς (Dispersion Relation Preserving scheme, DRP). Μια άλλη ιδιαιτερότητα των αεροακουστικών προβλημάτων είναι η διατύπωση των οριακών συνθηκών. Οι οριακές συνθήκες που χρησιμοποιούνται στα συνήθη προβλήματα της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής δεν επαρκούν για να περιγράψουν πλήρως τη φυσική στα όρια του υπολογιστικού χωρίου ενός αεροακουστικού προβλήματος. Η διάδοση των τριών ειδών κυμάτων που εμφανίζονται σε ένα τέτοιο πρόβλημα - ακουστικά, στροβιλότητας και εντροπίας - απαιτούν ειδικό χειρισμό ώστε να διαδοθούν τόσο από το εσωτερικό του χωρίου προς τα έξω, όσο και αντίστροφα.

Το σημαντικότερο τμήμα αυτής της διπλωματικής εργασίας και εκεί που δόθηκε η μεταλύτερη βαρύτητα ήταν η ανάπτυξη ενός παράλληλου αντικειμενοστραφούς κώδικα με δυνατότητες εύκολης επέκτασης, ο οποίος προγραμματίστηκε σε CUDA ώστε να λειτουργεί σε NVIDIA GPUs. Ο στόχος που τέθηκε ήταν διπλός: αφενός η δημιουργία των δομικών στοιχείων ενός κώδικα-πυρήνα που θα επιτρέψει την προσθήκη επιπλέον δομών χωρίς να επηρεάζεται ο εν λόγω πυρήνας (ορισμός του δομοστοιχειωτού σχεδιασμού ή modularity), αφετέρου δε η αποδοτική χρήση των πόρων μιας GPU, τόσο υπολογιστικά όσο και ενεργειακά. Ο γνώμονας με τον οποίον τέθηκαν οι παραπάνω στόχοι ήταν όχι απλά το να αναπτυχθεί ο κώδικας αυτός προς την επίλυση του προβλήματος-στόχου, αλλά να διέπεται από ένα σύνολο πρακτικών αρχών ενός λογισμικού που θα είχε εφαρμογή σε βιομηχανία.



National Technical University of Athens
School of Mechanical Engineering
Fluids Department
Parallel CFD & Optimization Unit

Development of a Code for the Numerical Solution of the Linearized Euler Equations on GPUs

Diploma Thesis

Ioannis N. Spanos

Advisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, 2019

Abstract

The purpose of this diploma thesis is to design and develop a modular, object-oriented code, capable of solving aeroacoustic problems, using the Linearized-Euler-Equations (LEE) model. The code is implemented in an inhomogeneous, multi-processor environment and makes use of Graphics Processing Units (GPUs). In doing so, the purpose extends to the assessment of the acceleration of the solution, when compared to a solution produced serially in Central Processing Units (CPUs).

The description, mathematical formulation and numerical solution of an aeroacoustic problem is quite unique. An acoustic source emits sound waves on a much smaller scale than that of the underlying flow and, for this reason, requires special treatment in its mathematical description. Thus, the concept of small perturbations of the mean flow variables is introduced.

There are several linearized models that solve an aeroacoustic problem (scalar wave equation model, thermoacoustics model, linearized Euler equations model, linearized Navier-Stokes equation model). The focus of this diploma thesis is on the linearized Euler equations model (LEE). Apart from the application of an aeroacoustics model, part of the special treatment mentioned above is the application of specific discretization schemes and boundary conditions.

The combination of the high accuracy of the solution and the very small scale of the acoustic variables is a problem that requires specific high-order discretization schemes. However, these schemes introduce spurious solutions of non-existing waves, that are called parasitic waves. Parasitic waves affect the entire acoustic field solution and, for this

reason, they must be dampened. The dampening of the parasitic waves is achieved with the use of a special discretization scheme called Dispersion Relation Preserving scheme (DRP). Apart from the introduction of special discretization schemes, there is a need of proper boundary conditions as well. The boundary conditions, that are usually applied to Fluid Mechanics problems, lack in their ability to describe the physics at the boundaries of an aeroacoustics field. There are three kinds of waves that are conveyed inside such a field - acoustic waves, vorticity waves and entropy waves - and they all require special treatment, so that their mathematical convection is in agreement with physics.

The most important part, and the main focus, of this diploma thesis is the design of a parallel object-oriented modular code that runs in GPUs. There were two targets that were set: on the one hand, the development of the modular blocks and structures of a core-code that would allow easy modifications (addition or subtraction of other structures) without being affected, on the other hand the effective use of the structural and calculative capabilities of a GPU, as well as the efficient use of its energy consumption. The concept under which those targets were set, was to develop a code that would not only solve a specific target-problem, but that would also have a set of practical formulations of a software targeted for industrial applications.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Περί Αεροακουστικής	1
1.2	Σκοπός της Διπλωματικής Εργασίας	5
1.3	Δομή της Διπλωματικής Εργασίας	8
2	Γραμμική Ακουστική - Αεροακουστική	11
2.1	Ακουστική Κυματική Εξίσωση	12
2.2	Η Συνάρτηση Green ως Λύση στην Ακουστική Κυματική Εξίσωση	14
2.3	Η Συνάρτηση Green στο Πεδίο των Συχνοτήτων	21
2.3.1	Αρμονική Εξάρτηση στο Χρόνο	21
2.3.2	Μετασχηματισμός Fourier	22
2.4	Γραμμικοποιημένες Εξισώσεις Euler (Linearized Euler Equations, LEE) .	25
3	Οριακές Συνθήκες και Σχήματα Διακριτοποίησης	29
3.1	Είδη Οριακών Συνθηκών	29
3.1.1	Οριακές Συνθήκες Ακτινοβολίας (Radiation) και Εξερχόμενης Ροής (Outflow)	31
3.1.2	Οριακές Συνθήκες Τοίχου (Wall)	34
3.2	Σχήματα Διακριτοποίησης των Εξισώσεων	36
3.2.1	Διακριτοποίηση στο Εσωτερικό του Πλέγματος	38
3.2.2	Διακριτοποίηση στα Όρια και στο Εσωτερικό Κοντά στα Όρια του Πλέγματος	43

3.3	Σχετικά Τεχνάσματα: Ο Όρος Απόσβεσης και η Σημασία του	46
4	Περί Αρχιτεκτονικής, Λειτουργίας και Προγραμματισμού σε GPUs	49
4.1	Αρχιτεκτονική και Πλεονεκτήματα Χρήσης της GPU	49
4.2	Λειτουργία, Ροή και Επεξεργασία Δεδομένων	51
4.3	Προγραμματισμός και Δόμηση GPU με Χρήση της Αρχιτεκτονικής CUDA	52
5	Κώδικας Επίλυσης	57
5.1	Πρώτο Επίπεδο	58
5.2	Δεύτερο Επίπεδο	60
5.3	Τρίτο Επίπεδο	66
6	Αποτελέσματα και Δυνατότητες Επέκτασης του Κώδικα	69
6.1	Αποτελέσματα: Ηχητική Πηγή Εντός και Εκτός Ομοιόμορφου Καρτε- σιανού Πλέγματος	69
6.1.1	Ηχητική Πηγή Εντός Πλέγματος	70
6.1.2	Ηχητική Πηγή Εκτός Πλέγματος	71
6.1.3	Επιτάχυνση της Επίλυσης των Εξισώσεων	73
6.1.4	Επίτευξη Δευτερεύοντος Σκοπού: Αποδοτική Χρήση των GPUs σε Ανομοιογενές Πολυεπεξεργαστικό Περιβάλλον	75
6.2	Δυνατότητες Επέκτασης του Κώδικα: Δομοστοιχειωτός Σχεδιασμός και Αντικειμενοστραφής Προγραμματισμός	76
7	Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα	79
Α΄	Ονοματολογία - Συμβολολογία	81
Α΄.1	Σύμβαση Συμβόλων, Υπερδείκτες, Υποδείκτες	81
Α΄.2	Μετασχηματισμός Fourier: Συμβολισμός και Ορισμός	82
Β΄	Τανυστική Γραφή	83
Γ΄	Κινηματικές Εξισώσεις Ρευστού	85
Γ΄.1	Εξίσωση Διατήρησης της Μάζας	85

Γ.2	Εξίσωση Διατήρησης της Ορμής	87
Γ.3	Θερμοδυναμικές Ποσότητες	88
Γ.4	Εξίσωση Διατήρησης της Ενέργειας	92
Δ	Χρήσιμες Μαθηματικές Σχέσεις	95
Ε	Συντελεστές για Stencils Κεντρικών και Πίσω Πεπερασμένων Διαφορών του Σχήματος DRP	97
Θ	Χαρακτηριστικά της CPU και GPU που Χρησιμοποιήθηκαν στον Κώδικα	99
	Βιβλιογραφία	101

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Περί Αεροακουστικής

Ως Αεροακουστική μπορεί να ορισθεί «η διάδραση ανάμεσα στην επικρατούσα ροή εντός ενός μέσου και το ακουστικό πεδίο θορύβου που προκύπτει από αυτή». Ο ορισμός αυτός θα εμπλουτιστεί στην πορεία, ώστε να γίνει κατανοητό το τι περιλαμβάνει ως επιστημονικός κλάδος.

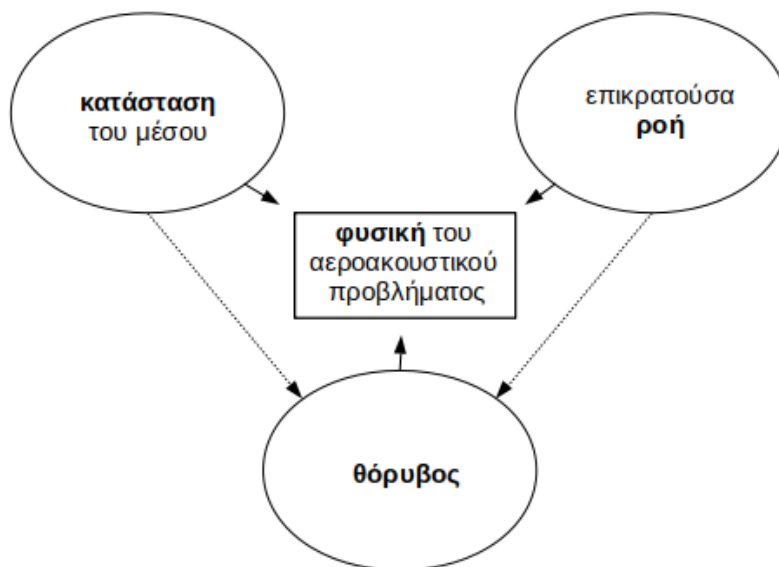
Η Αεροακουστική περιγράφει, γενικά, την παραγωγή και διάδοση του ήχου, που γεννάται από μία ροή - στρωτή ή τυρβώδη.

Τα τελευταία χρόνια έχει δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στον κλάδο της Αεροακουστικής με ενδιαφέρον σε μια ευρεία γκάμα εφαρμογών σε βιομηχανικούς τομείς, όπως: στην αεροδιαστημική/αεροναυτική βιομηχανία, στη βιομηχανία οχημάτων, σε κινητήρες, στροβιλομηχανές, ανεμογεννήτριες κλπ.

Ο σκοπός της Αεροακουστικής γίνεται φανερός επιστρέφοντας στον ορισμό που δόθηκε στην αρχή του Κεφαλαίου και περιλαμβάνει

- την περιγραφή, από φυσικής άποψης, του μέσου διάδοσης (αέρας κλπ), της επικρατούσας ροής και του θορύβου
- τη μαθηματική διατύπωση μέσω κατάλληλων διαφορικών εξισώσεων, η οποία να περιγράφει επαρκώς και με ακρίβεια όσα η φυσική υπαγορεύει
- τη δημιουργία υπολογιστικών μοντέλων, τα οποία διαχειρίζονται τις μαθηματικές εκφράσεις και επιλύουν υπολογιστικά το αεροακουστικό πρόβλημα.

Η κατάσταση του μέσου, η επικρατούσα ροή και ο θόρυβος είναι οι τρεις έν-



Σχήμα 1.1: Οι τρεις βασικές αρχές που διέπουν ένα αεροακουστικό πρόβλημα.

νοιες που περιγράφουν τη φυσική του αεροακουστικού προβλήματος. Ως μέσο ορίζεται το υλικό στο οποίο συμβαίνει ένα φαινόμενο - εν προκειμένω ένα αεροακουστικό φαινόμενο. Το υλικό αυτό, το οποίο στα φαινόμενα που μελετώνται σε αυτήν τη διπλωματική εργασία είναι ρευστό, διέπεται από μεγέθη, όπως πυκνότητα, συνεκτικότητα, θερμοκρασία, πίεση κλπ. Το σύνολο των μεγεθών αυτών και ο τρόπος που αυτά εκφράζονται ή μεταβάλλονται στο χώρο και στο χρόνο αποτελούν την κατάστασή του. Ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται η κατάσταση ενός μέσου καθορίζεται από την επικρατούσα ροή εντός αυτού. Χαρακτηριστικό της ροής είναι ότι μπορεί να είναι στρωτή ή τυρβώδης. Κάθε μία από τις δύο αυτές περιπτώσεις επιφέρει διαφορετική φυσική στο σύστημα και, επομένως, διαφορετικό τρόπο μαθηματικής διατύπωσης και μοντελοποίησης. Αυτό το οποίο ουσιαστικά περιγράφει η ροή είναι το πώς μεταφέρεται η μάζα (ή πυκνότητα), η ορμή και η ενέργεια εντός ενός πεδίου. Ο ακουστικός θόρυβος, που γεννάται από τη ροή, δημιουργείται με διάφορους μηχανισμούς, αλλά τελικά οφείλεται σε διαταραχές της ροής, οι οποίες εγείρουν ένα σύνολο ακουστικών πηγών καθ'όλη την έκταση της ροής. Οι μηχανισμοί γένεσης του θορύβου είναι:

- διαταραχές τάσης εντός της ροής (πχ. οι τάσεις Reynolds, φαινόμενα συνεκτικών τάσεων, μη-ισεντροπικά φαινόμενα) λειτουργούν ως πηγές τετράπολου
- διαταραχές της πίεσης σε στερεά τοιχώματα λειτουργούν ως πηγές δίπολου
- διαταραχές μάζας και θερμότητας λειτουργούν ως πηγές μονόπολου.

Τα ακουστικά κύματα του θορύβου είναι μόνο μια υποκατηγορία από τα κύματα που δημιουργούνται από τη ροή· δημιουργούνται επίσης κύματα στροβιλότητας και εντροπίας. Οι συγκεκριμένες δύο κατηγορίες κυμάτων μεταφέρονται μόνο από τη

ροή, ενώ τα ακουστικά κύματα διαδίδονται και σε σχέση με τη ροή, με την τοπική ταχύτητα του ήχου. Σε σύγκριση με άλλες διαταραχές, η ενέργεια που σχετίζεται με τα ακουστικά κύματα είναι συνήθως πολλές κλίμακες μεγέθους μικρότερη. Αυτό σημαίνει ότι μια άμεση μοντελοποίηση του ροϊκά παραγόμενου θορύβου είναι εξαιρετικά απαιτητική σε υπολογιστικούς πόρους, καθώς απαιτεί αριθμητικά σχήματα υψηλής τάξης ακρίβειας. Μια επιπλέον δυσκολία είναι ότι οι ακουστικές πηγές παράγουν κύματα στην κλίμακα πλάτους της τύρβης (ή γενικά σε πολύ μικρή κλίμακα, αν γίνεται μελέτη στρωτών ροών), γεγονός το οποίο δημιουργεί την ανάγκη χρήσης πολύ πυκνών υπολογιστικών πλεγμάτων.

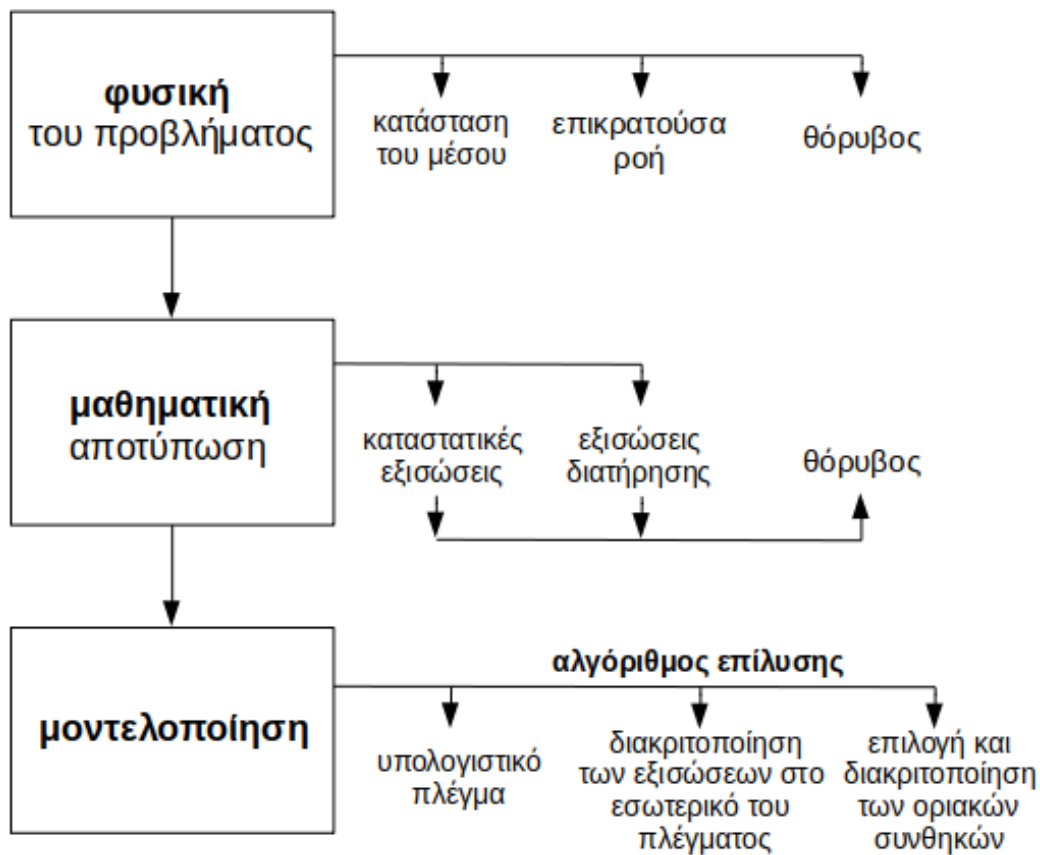
Έπειτα από την έκφραση της φυσικής των τριών εννοιών που αναλύθηκαν παραπάνω - της κατάστασης του μέσου, της επικρατούσας ροής και του θορύβου - ακολουθεί η μαθηματική διατύπωση μέσω εξισώσεων. Συγκεκριμένα: η κατάσταση του μέσου αναφέρεται σε ένα σύνολο καταστατικών εξισώσεων, οι οποίες εκφράζουν, ορίζουν ή προσεγγίζουν τις ιδιότητες του υλικού μέσου και πώς αυτό αποκρίνεται σε εξωτερικά ερεθίσματα. Η επικρατούσα ροή περιγράφει την οποιαδήποτε μεταβολή του μέσου εντός ενός πεδίου και περιλαμβάνει το σύνολο των εξισώσεων διατήρησης - διατήρηση της μάζας, της ορμής και της ενέργειας. Με κατάλληλη γραφή, μετατροπές και κάποιες παραδοχές γίνεται συνδυασμός των εξισώσεων κατάστασης και διατήρησης ώστε να περιγραφεί ο θόρυβος. Η διαδικασία που μόλις περιγράφηκε συνοπτικά θα παρουσιαστεί εκτενέστερα στο Κεφάλαιο 2.

Το τελευταίο βήμα στην υπολογιστική επίλυση του αεροακουστικού προβλήματος είναι η μοντελοποίηση.

Η πρώτη μορφή μοντελοποίησης έγινε μέσω εξισώσεων ακουστικού αναλόγου και προέκυψε από την αρχική μελέτη του J. Lighthill την δεκαετία του '50. Πρόκειται για ένα σύνολο εξισώσεων που διαχωρίζουν τις ακουστικές διαταραχές από τις ροϊκές. Η εξίσωση ακουστικού αναλόγου του Lighthill[1] προκύπτει αναδιατάσσοντας τις εξισώσεις Navier-Stokes. Το τελικό αποτέλεσμα είναι μια κυματική εξίσωση μεταφοράς της ακουστικής πίεσης στο αριστερό μέλος κι ένα δεξί μέλος το οποίο περιέχει όλους τους ροϊκούς όρους πηγής.

Εξισώσεις αναλογίας μπορούν επίσης να προκύψουν αναδιατάσσοντας τις ροϊκές εξισώσεις με άλλους τρόπους, έτσι ώστε να προκύψουν γραμμικοποιημένα μοντέλα. Έτσι, αντί να επιλύονται στο χρόνο οι εξισώσεις Navier-Stokes για το συμπιεστό ρευστό (όπου τα ακουστικά κύματα πίεσης θα ήταν μέρος της ροϊκής λύσης), γίνεται μια **προσέγγιση** - η πρώτη προσέγγιση ως αυτό το σημείο - όπου επιχειρείται **απεμπλεγμένη** επίλυση, τέτοια ώστε:

- επιλύεται η μέση ροή στο ρευστό μέσο (προσδιορισμός των πεδίων της μέσης ροής)
- επιλύονται οι ακουστικές διαταραχές (προσδιορισμός των ακουστικών μεταβλητών, με χρήση των υπολογισθέντων πεδίων της μέσης ροής)



Σχήμα 1.2: Η διαδικασία που ακολουθήθηκε από τη σύλληψη του αεροακουστικού προβλήματος μέχρι τη μοντελοποίηση.

Υπάρχουν διάφορα γραμμικοποιημένα μοντέλα. Τα μοντέλα αυτά προκύπτουν γραμμικοποιώντας τις **εξαρτημένες μεταβλητές**, ή **μεταβλητές εισόδου** (αφού είναι εισερχόμενες στον κώδικα επίλυσης, από την επιλυθείσα μέση ροή), γύρω από μια σταθερή κατάσταση επικρατούσα ροή (steady-state background flow) και κάνοντας ορισμένες **παραδοχές/προσεγγίσεις**. Οι μεταβλητές εισόδου αντιπροσωπεύουν τις διαταραχές, λχ. ακουστικά κύματα, ή κύματα εντροπίας, τα οποία υπερτίθενται στη ροή. Αναφορικά, τα διάφορα γραμμικοποιημένα μοντέλα που υπάρχουν είναι:

- μοντέλο με βαθμωτή κυματική εξίσωση (scalar wave equation model)[2]
- θερμοακουστικό μοντέλο (thermoacoustics model)
- μοντέλο των γραμμικοποιημένων εξισώσεων Euler (linearized Euler equation model, **LEE**)
- μοντέλο των γραμμικοποιημένων εξισώσεων Navier-Stokes (linearized Navier-Stokes equation model)[3],[4]

Από τα παραπάνω μοντέλα, αυτή η διπλωματική εργασία πραγματεύεται το μοντέλο

των LEE. Πρόκειται για μοντέλο στο οποίο οι μεταβλητές εισόδου, που αναφέρθηκαν παραπάνω, είναι η **πυκνότητα**, η **πίεση** και η **ταχύτητα** σε μια χρονικά σταθερή επικρατούσα μέση ροή. Η προσέγγιση που γίνεται στο μοντέλο αυτό αφορά την κατάσταση του μέσου, το οποίο προσεγγίζεται ως τέλειο αέριο. Στη γενική του μορφή, το μοντέλο των LEE υπολογίζει τόσο τα ακουστικά κύματα, όσο και τα κύματα στροβιλότητας και εντροπίας.

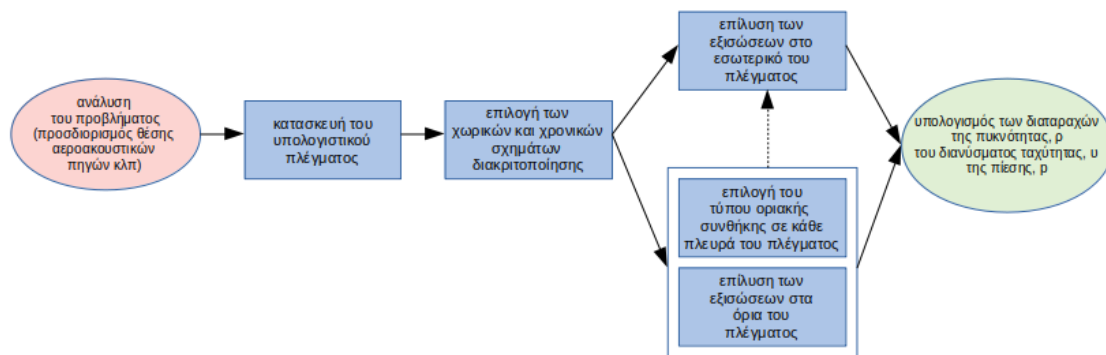
1.2 Σκοπός της Διπλωματικής Εργασίας

Ως το σημείο αυτό, έχει γίνει αναφορά στη **φυσική** του αεροακουστικού προβλήματος, όπου περιγράφηκαν οι συνιστώσες της - η κατάσταση του μέσου, η επικρατούσα ροή και ο θόρυβος - και το πώς η φυσική αυτή «μεταφράζεται» **μαθηματικά**, με τις καταστατικές εξισώσεις, τις εξισώσεις διατήρησης (μάζας, ορμής και ενέργειας) και το πώς αυτές οι δύο κατηγορίες αναδιατάσσονται για να εκφράσουν το θόρυβο.

Επίσης έγινε αναφορά στο πώς **μοντελοποιείται** ένα αεροακουστικό πρόβλημα. Πώς οι μαθηματικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα με κάποιες παραδοχές/προσεγγίσεις για την παραγωγή ενός μοντέλου το οποίο να περιγράφει και να αντιστοιχεί στην πραγματικότητα. Από τα διάφορα μοντέλα, επιλέχθηκε αυτό των LEE. Η έκφραση του αεροακουστικού μοντέλου έγινε με γνώμονα τον προσδιορισμό των μεταβλητών του θορύβου με

- εγκυρότητα
- ακρίβεια
- αποδοτικότητα

Οι τρεις αυτές έννοιες αποτέλεσαν τη βάση πάνω στην οποία δομήθηκε ο αλγόριθμος και ο κώδικας επίλυσης. Το πρώτο βήμα κατά τον προγραμματισμό είναι να ελεγχθεί η **εγκυρότητα** του κώδικα. Αυτή η διαδικασία περιλαμβάνει τη σύγκριση των αποτελεσμάτων του εν λόγω κώδικα με κάποια περίπτωση αναφοράς (benchmark case), ή, αν υπάρχει, με την αναλυτική λύση. Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία ακολουθήθηκε η δεύτερη μέθοδος, μιας και όπως θα φανεί στην πορεία, υπάρχει αναλυτική λύση του προβλήματος (χρήση της ακουστικής κυματικής εξίσωσης). Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις διακριτοποιούνται με πεπερασμένες διαφορές, μέσω αναπτύγματος Taylor, και μετατρέπονται σε αλγεβρικές, ώστε να μπορούν να επιλυθούν αριθμητικά. Η επιλογή του σημείου που θα γίνει η αποκοπή στο ανάπτυγμα Taylor στο σχήμα πεπερασμένων διαφορών καθορίζει το πόσοι κόμβοι χρειάζονται για τον υπολογισμό της παραγωγού, άρα και την τάξη ακρίβειάς της. Ο προσδιορισμός του σημείου αυτού είναι σημαντικός, διότι μικρή τάξη ακρίβειας σημαίνει λιγότεροι απαιτούμενοι κόμβοι, μικρότερη απαιτούμενη επεξεργαστική ισχύς και και ταχύτερη παραγωγή αποτελεσμάτων, που όμως περιέχουν μεγαλύτερο σφάλμα, ενώ μεγάλη τάξη ακρίβειας συνεπάγεται το αντίστροφο. Η **αποδοτικότητα** του κώδικα



Σχήμα 1.3: Ο αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος, ανεπτυγμένος σειριακά, χωρίς χρήση GPUs.

αναφέρεται στην παραγωγή της επιθυμητής λύσης, όσο το δυνατόν ταχύτερα και αποτελεσματικότερα λαμβάνοντας όμως υπόψη και την ακρίβεια. Γίνεται, έτσι, αντιληπτό ότι οι δύο όροι της ακρίβειας και της αποδοτικότητας είναι αντικρουόμενοι. Σε ότι αφορά τη φυσική αυτή καθαυτή, έγινε προσπάθεια παραγωγής αποτελεσμάτων ικανοποιητικής ακρίβειας, χωρίς όμως να θυσιάσει η αποδοτικότητα και ο χρόνος τρεξίματος του αλγορίθμου.

Κώδικας Επίλυσης

Η συνεισφορά αυτής της διπλωματικής εργασίας ήταν «η ανάπτυξη δομοστοιχειωτού κώδικα¹ παράλληλης επίλυσης ενός αεροακουστικού προβλήματος με χρήση GPUs, με σκοπό την επιτάχυνση παραγωγής της λύσης».

Όπως φαίνεται και στο Σχ.1.3, ο κώδικας ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

- Το **πρώτο** βήμα είναι προπαρασκευαστικό και αφορά την εισαγωγή στον κώδικα όσων μεγεθών απαιτούνται, βάσει της ανάλυσης της φυσικής του προβλήματος. Δίνονται, έτσι, ως εισερχόμενες στον κώδικα πληροφορίες για: τις ιδιότητες του υλικού μέσου (αέρας), τα καταστατικά μεγέθη (τοπική πίεση, πυκνότητα, ταχύτητα του ήχου, κλπ), τα χαρακτηριστικά της ροής (κατεύθυνση, αριθμός Mach, κλπ) και τα χαρακτηριστικά του θορύβου (αριθμός και θέση πηγών στο χωρίο, συχνότητα, κυματικός αριθμός και πλάτος του κύματος).
- Στο **δεύτερο** βήμα κατασκευάζεται το υπολογιστικό πλέγμα. Στα πλαίσια αυτής της ΔΕ κατασκευάστηκε μόνο 2Δ υπολογιστικό πλέγμα. Επιλέγεται η διακριτοποίηση κατά τις δύο κατευθύνσεις και υπολογίζονται όσα μεγέθη

¹Ως «δομοστοιχειωτός σχεδιασμός», ή modularity, ορίζεται η διαδικασία σχεδιασμού κώδικα με δυνατότητες εύκολης προσθαφαίρεσης και διαχείρισης δομών, με σκοπό την τροποποίηση ή επέκτασή του.

(μετρικές, Jacobian, κλπ) χρειάζονται, ώστε να γίνεται μεταφορά και επίλυση από το φυσικό πλέγμα στο μετασχηματισμένο. Στο τελευταίο στάδιο αυτού του βήματος, κατασκευάζεται ο απαιτούμενος αριθμός ψευδοκόμβων σε κάθε πλευρά του πλέγματος.

- Στο **τρίτο** βήμα, και αφού πλέον κατασκευάστηκαν οι κόμβοι του πλέγματος, επιλέγονται τα χωρικά και το χρονικό σχήμα διακριτοποίησης των εξισώσεων. Τα χωρικά σχήματα που χρησιμοποιούνται είναι ένα σύνηθες σχήμα κεντρικών διαφορών 4ης τάξης ακρίβειας και ένα σχήμα διατήρησης της σχέσης διασποράς (dispersion relation preserving scheme, DRP). Το χρονικό σχήμα που επιλέγεται, για την αξιοπιστία του, είναι η μέθοδος Runge-Kutta πέντε(5) βημάτων.
- Στο **τέταρτο** βήμα γίνεται η επιλογή του τύπου οριακής συνθήκης, ανάλογα με τις συνθήκες που επικρατούν στα όρια: τύπου Dirichlet, τύπου ακτινοβολίας (radiation) και τύπου στερεού τοιχώματος (wall). Ανάλογα με τον τύπο της οριακής συνθήκης:
 - οριακή συνθήκη τύπου Dirichlet: επιβάλλονται τιμές, οπότε είναι απαιτούμενη η επίλυση της αναλυτικής λύσης στα όρια και τους ψευδοκόμβους του πλέγματος. Προέκυψε από την επίλυση της ακουστικής κυματικής εξίσωσης και χρησιμοποιήθηκε για την επαλήθευση της ορθότητας των οριακών συνθηκών ακτινοβολίας
 - οριακή συνθήκη τύπου ακτινοβολίας (radiation): γίνεται επίλυση μιας εξίσωσης διαφορετικής από αυτές που λύνονται εσωτερικά του πλέγματος. Η παραγωγή και χρήση της εξίσωσης αυτής θα γίνει στο Κεφάλαιο 3. Σε αυτό το σημείο της σύντομης περιγραφής του αλγορίθμου είναι επαρκές να αναφερθεί ότι η εξίσωση αυτή προσδιορίζει τις ίδιες άγνωστες μεταβλητές του θορύβου - διακύμανση πυκνότητας, ταχυτήτων και πίεσης - χωρίς να επιλύονται τις LEE
 - οριακή συνθήκη τύπου τοίχου (wall): προγραμματίζεται μια τεχνική σύμφωνα με την οποία γίνεται δυνατή η «ανάκλαση» ενός κύματος σε μια πλευρά του υπολογιστικού πλέγματος, και όχι η ελεύθερη έξοδος του από αυτό

Ο αλγόριθμος που μόλις περιγράφηκε, ελέγχθηκε σε όλα τα σημεία του ώστε να είναι *έγκυρος και ακριβής*. Ο έλεγχος αυτός έγινε με χρήση της αναλυτικής λύσης της ακουστικής κυματικής εξίσωσης, κατά περίπτωση, τόσο στο εσωτερικό, όσο και στα όρια. Αυτές οι δύο έννοιες όμως αφορούν το πρώτο τμήμα του σκοπού της εργασίας. Το δεύτερο τμήμα αφορά την *αποδοτικότητα*, η οποία επιτυγχάνεται με χρήση GPUs.

Αν και η χρήση GPUs έγινε σε όσα επιμέρους τμήματα του κώδικα ήταν δυνατό, αξίζει στο εισαγωγικό αυτό Κεφάλαιο να αναφερθεί η συμβολή τους σε δύο τέτοια τμήματα: στη **γένεση του υπολογιστικού πλέγματος** και στην **επίλυση των LEE εντός του πλέγματος**.

Για την **γένεση του υπολογιστικού πλέγματος** επιλέχθηκε ο αριθμός των κόμβων και η κλίμακα διακριτοποίησης για τις δύο διαστάσεις και έγινε γένεση του

πλέγματος.

Σε ότι αφορά στην **επίλυση των LEE**, αναφέρεται αρχικά ότι χρησιμοποιείται ένα ρητό (explicit) σχήμα διακριτοποίησης. Έτσι, σε κάθε τρέχουσα χρονική στιγμή N , όλη η πληροφορία που απαιτεί το δεξί μέλος των εξισώσεων είναι γνωστή από την προηγούμενη χρονική στιγμή $N - 1$. Με αυτό τον τρόπο γραφής των εξισώσεων κάθε κόμβος δεν απαιτεί πληροφορία από τους γειτονικούς του, για την τρέχουσα επανάληψη, οπότε μπορεί να επιλυθεί παράλληλα με τους υπόλοιπους.

Η **συμβολή των GPUs** περιέρχεται στο γεγονός ότι προσφέρουν τη δυνατότητα επίλυσης του κώδικα σε πάρα πολλούς πυρήνες μικρής επεξεργαστικής ισχύος, σε σχέση με την επίλυση στους λίγους αλλά ισχυρούς πυρήνες μιας CPU. Εκτενέστερη ανάλυση για την αρχιτεκτονική και λειτουργία των GPUs θα γίνει στο Κεφάλαιο 4.

1.3 Δομή της Διπλωματικής Εργασίας

Η δομή της διπλωματικής εργασίας έχει ως εξής:

- Στο **Κεφάλαιο 2** αναπτύσσεται η θεωρία της (γραμμικής) *ακουστικής* και των LEE. Συγκεκριμένα, παράγεται η *ακουστική κυματική εξίσωση* για μικρές διαταραχές και παρουσιάζονται τα γενικά χαρακτηριστικά της διάδοσης του ήχου. Εισάγεται, επίσης, η έννοια της *συνάρτησης Green* και των λύσεων της ακουστικής κυματικής εξίσωσης. Τέλος αποδεικνύεται ο τρόπος που προκύπτουν οι LEE.
- Στο **Κεφάλαιο 3** παρουσιάζονται οι τύποι οριακών συνθήκων που χρησιμοποιήθηκαν και οι εξισώσεις που επιλύονται στα όρια ανάλογα με την περίπτωση. Στη συνέχεια, γίνεται η διακριτοποίηση των εξισώσεων και παρουσιάζονται το χρονικό και τα χωρικά σχήματα διακριτοποίησης, εσωτερικά του χωρίου, στα όρια και στους ψευδοκόμβους. Γίνεται, τέλος, αναφορά σε ορισμένες πρακτικές παραδοχές που έγιναν στον αλγόριθμο (και στον κώδικα), προκειμένου να είναι αποτελεσματική η χρήση των παραπάνω.
- Στο **Κεφάλαιο 4** παρουσιάζεται ο τρόπος λειτουργίας των GPUs. Γίνεται εμβάθυνση στη δομή της αρχιτεκτονικής τους και στον τρόπο με τον οποίο η χρήση τους συνεισφέρει στην *αποδοτικότητα* ενός κώδικα.
- Αφού αναλύθηκαν οι LEE και η λειτουργία των GPUs, στο **Κεφάλαιο 5** παρουσιάζεται αναλυτικά ο κώδικας επίλυσης.
- Στο **Κεφάλαιο 6** παρουσιάζονται τα αποτελέσματα, ενώ στο τέλος απεικονίζονται και τα αποτελέσματα από τη σύγκριση του χρόνου τρεξίματος του κώδικα σε CPU και GPU, που είναι και ο σκοπός της διπλωματικής εργασίας. Στο τέλος του Κεφαλαίου, προτείνονται τρόποι επέκτασης του κώδικα.
- Το **Κεφάλαιο 7** περιέχει ανακεφαλαίωση της διπλωματικής εργασίας και

συμπεραίνει το κατά πόσο επιτεύχθηκαν οι στόχοι που τέθηκαν.

- Στα παραρτήματα θα παρουσιαστεί ο κύριος όγκος των μαθηματικών εργαλείων και εννοιών που χρησιμοποιήθηκαν στη διπλωματική εργασία.

Κεφάλαιο 2

Γραμμική Ακουστική - Αεροακουστική

Στο Κεφάλαιο αυτό αναλύονται οι βασικές έννοιες της γραμμικής ακουστικής. Αρχικά, παράγεται η **ακουστική κυματική εξίσωση** για μικρές γραμμικές διαταραχές εντός ρευστού σε ηρεμία (*stationary fluid*). Εισάγεται, στη συνέχεια, η **συνάρτηση Green** και οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης, που προκύπτουν με τη βοήθειά της, στο πεδίο του χρόνου. Λόγω του ότι ο θόρυβος είναι φαινόμενο ευρέος φάσματος, η ανάλυση αυτή επεκτείνεται και στο πεδίο των συχνοτήτων, μέσω ανάλυσης Fourier. Τέλος, παράγονται οι **γραμμικοποιημένες εξισώσεις Euler (LEE)**. Το μοντέλο των LEE, όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 1, είναι αυτό που επιλέχθηκε ώστε να επιλυθεί το αεροακουστικό πρόβλημα.

Στο Κεφάλαιο αυτό παρατίθεται ο μαθηματικός τρόπος με τον οποίον παράγονται οι εξισώσεις, ενώ όσα αφορούν την αριθμητική τους επίλυση αυτή καθαυτή (επίλυση στο εσωτερικό ενός υπολογιστικού πλέγματος, σχήματα διακριτοποίησης, κλπ.) θα αναλυθούν στο Κεφάλαιο 3.

Στη διπλωματική εργασία χρησιμοποιείται η συμβολολογία/σύμβαση η οποία είναι η πιο συχνά συναντούμενη στη βιβλιογραφία. Με γνώμονα τα παραπάνω, συμπεριλαμβάνεται το Παράρτημα Α' με τη συμβολολογία που ακολουθήθηκε. Όπως σημειώνεται και στο τέλος του Παραρτήματος Α', οποιαδήποτε απόκλιση από τα αναγραφόμενα θα καθορίζεται ρητά.

2.1 Ακουστική Κυματική Εξίσωση

Ξεκινώντας με την παραγωγή της ακουστικής κυματικής εξίσωσης, σημειώνεται ότι όλες οι απαραίτητες εξισώσεις και ποσότητες που αφορούν την κινηματική του ρευστού, αναλύονται διεξοδικά στο Παράρτημα Γ'.

Θεωρείται παραγωγή και διάδοση του ήχου εντός ενός **ρευστού μέσου εν ηρεμία (stagnant medium)**, ή με ροή που να θεωρείται ασήμαντα μικρή, και το οποίο βρίσκεται σε ένα **ομοιόμορφο πεδίο**, έχει δηλαδή ιδιότητες των οποίων οι χρονικά μέσες τιμές είναι χωρικά ομοιόμορφα κατανεμημένες. Με αυτές τις θεωρήσεις, τα ακουστικά κύματα είναι η μόνη πηγή διακύμανσης της πίεσης και της ταχύτητας.

Το πρώτο βήμα για την παραγωγή της γραμμικής ακουστικής κυματικής εξίσωσης είναι η υπόθεση μικρών διαταραχών της πυκνότητας, ρ' , γύρω από μια μέση τιμή ρ_0 , στην εξίσωση διατήρησης της μάζας, η οποία δίνεται από την Εξ.Γ'.4.

Αντικαθίσταται η πυκνότητα ρ από το άθροισμα μέσης τιμής και διαταραχής $\rho_0 + \rho'$ και υποτίθεται $\rho' \ll \rho_0$, όπου η μέση τιμή ρ_0 είναι **χρονικά και χωρικά σταθερή**, λόγω υπόθεσης ομοιόμορφου πεδίου, σε όλο το μέσο και έτσι προκύπτει

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_0 v_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial (\rho' v_i)}{\partial x_i} \approx \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \approx 0 \quad (2.1)$$

Σημειώνεται ότι η ταχύτητα v_i αντιπροσωπεύει **μόνο** διαταραχές ταχύτητας, αφού δεν υπάρχει μέση ροή (υπόθεση ρευστού μέσου εν ηρεμία). Επίσης, στην Εξ.2.1 έχουν παραληφθεί:

- όροι οι οποίοι είναι γινόμενα μικρών διαταραχών
- όροι οι οποίοι περιέχουν μερική χρονική ή χωρική παράγωγο μέσης τιμής μεταβλητής, πχ. $\rho' \frac{\partial u_0}{\partial x}$, διότι λόγω των υποθέσεων ομοιομορφίας του πεδίου ροής είναι μηδενικοί.

Τα παραπάνω χρησιμοποιούνται σε όλη την ανάλυση που ακολουθείται σε αυτή τη διπλωματική εργασία.

Έπειτα θεωρείται η εξίσωση διατήρησης της ορμής, η οποία δίνεται από την Εξ.Γ'.10.

Στην εξίσωση διατήρησης της ορμής (Εξ.Γ'.10) ο τανυστής p_{ij} ονομάζεται τανυστής τάσεων λόγω συμπίεσότητας (compressive stress tensor) και ισούται με $p_{ij} = p\delta_{ij} - \tau_{ij}$, όπου τ_{ij} είναι ο τανυστής των τάσεων, ο οποίος αποδίδει τη δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας σε κατεύθυνση j επαπτομενική στην επιφάνεια (η κατεύθυνση i είναι κάθετη στην επιφάνεια και προς τα έξω). Για στοιχειώδη επιφάνεια ελέγχου, όπως αυτή του Σχ.Γ'.1, η διατμητική τάση λόγω συνεκτικότητας γράφεται $\tau_{ij}n_j dS$.

Παρ'όλα αυτά οι διατμητικές δυνάμεις λόγω συνεκτικότητας είναι σπάνια σημαντικές στην αεροακουστική (σε αντίθεση με τη ροή που τις παράγει), οπότε αγνοούνται.

Εφαρμόζοντας την υπόθεση μικρών διαταραχών της πυκνότητας γράφεται

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j + p \delta_{ij})}{\partial x_j} \approx \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial(p_0 + p')}{\partial x_i} + \rho_0 \frac{\partial(v_i v_j)}{\partial x_j} \approx 0 \quad (2.2)$$

Ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος είναι εξαρτημένος από τις διαταραχές της ταχύτητας και ο δεύτερος όρος φαίνεται να εξαρτάται τόσο από την κλίση της μέσης τιμής της πίεσης όσο και από την κλίση της διαταραχής της πίεσης. Ωστόσο, σε ένα ρευστό εν ηρεμία η κλίση της μέσης τιμής της πίεσης είναι μηδενική και επηρεάζεται μόνο από βαρυτικές δυνάμεις, οι οποίες έχουν αγνοηθεί (Παράρτημα Γ'.2). Έτσι μπορεί να γραφτεί $\partial(p_0 + p')/\partial x_i = \partial p'/\partial x_i$, οπότε και ο δεύτερος όρος είναι γραμμικά εξαρτημένος από τις διαταραχές. Ο όρος $\partial(v_i v_j)/\partial x_j$ είναι μη-γραμμικός και περιλαμβάνει το γινόμενο δύο πολύ μικρών ποσοτήτων. Για να καθοριστεί η σημασία αυτού του όρου υποτίθεται ότι η διαταραχή έχει μια χρονική κλίμακα T_s και μια κλίμακα μήκους λ , έτσι ώστε λ/T_s να είναι κλίμακας μεγέθους της ταχύτητας του ήχου, c_0 . Από αυτό συνεπάγεται ότι $\partial(v_i v_j)/\partial x_j \sim v_i^2/\lambda$ και $\partial v_i/\partial t \sim v_i/T_s \sim v_i c_0/\lambda$. Έτσι, αν η διαταραχή της ταχύτητας, που σχετίζεται με το κύμα, είναι μικρή σε σχέση με την ταχύτητα του ήχου, τότε ο μη-γραμμικός όρος μπορεί να παραλειφθεί. Χρησιμοποιώντας αυτές τις παραδοχές παράγεται η γραμμικοποιημένη ακουστική εξίσωση της ορμής

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} \approx 0 \quad (2.3)$$

Τέλος, αφαιρείται η χρονικά παραγωγισμένη Εξ.2.3 από την χρονικά παραγωγισμένη Εξ.2.1, απαλείφεται η μικτή παράγωγος και παράγεται

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = 0 \quad (2.4)$$

Η βασικότερη υπόθεση που έχει γίνει ως τώρα είναι ότι η διάδοση του κύματος γίνεται **ισεντροπικά** (Παράρτημα Γ'.3), μιας και η μελέτη γίνεται για ροές χαμηλών αριθμών Mach, έτσι ώστε η σχέση μεταξύ των διαταραχών της πυκνότητας και της πίεσης να δίνονται από τις σχέσεις

$$p' = \rho' c_0^2 \quad c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (2.5)$$

όπου c_0 είναι η χρονικά και χωρικά σταθερή ταχύτητα του ήχου, η οποία ορίζεται από την ισεντροπική σταθερά συμπίεσης (isentropic bulk modulus) του ρευστού. Στο Παράρτημα Γ'.3 αναλύονται διεξοδικά οι λόγοι που κάνουν ικανή αυτήν την υπόθεση, ώστε να ισχύουν οι Εξ.2.5. Αναφέρεται, όμως και στο σημείο αυτό, ότι στα

ακουστικά κύματα η ροή της ορμής (momentum flux) ισορροπείται σχεδόν πλήρως από τις διακυμάνσεις της πίεσης και οι συνεκτικές επιδράσεις στην ακουστική διάδοση είναι μικρές. Επιπλέον, σε πολλές ροές ρευστών, η θερμοκρασία είναι σχετικά ομοιόμορφη, ή έχει μικρές μεταβολές κατά μήκος της κλίμακας διάδοσης του ακουστικού κύματος, οπότε τα φαινόμενα μετάδοσης θερμότητας δεν είναι σημαντικά. Έτσι, η υπόθεση ισεντροπικής ροής είναι ρεαλιστική, ανταποκρίνεται σε πλήθος εφαρμογών και, για τον λόγο, αυτό υιοθετήθηκε και σε αυτήν τη διπλωματική εργασία.

Χρησιμοποιώντας την Εξ.2.5 στην Εξ.2.4 προκύπτει η **γραμμική ακουστική κυματική εξίσωση** για τη διαταραχή της πίεσης

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = 0 \quad (2.6)$$

2.2 Η Συνάρτηση Green ως Λύση στην Ακουστική Κυματική Εξίσωση

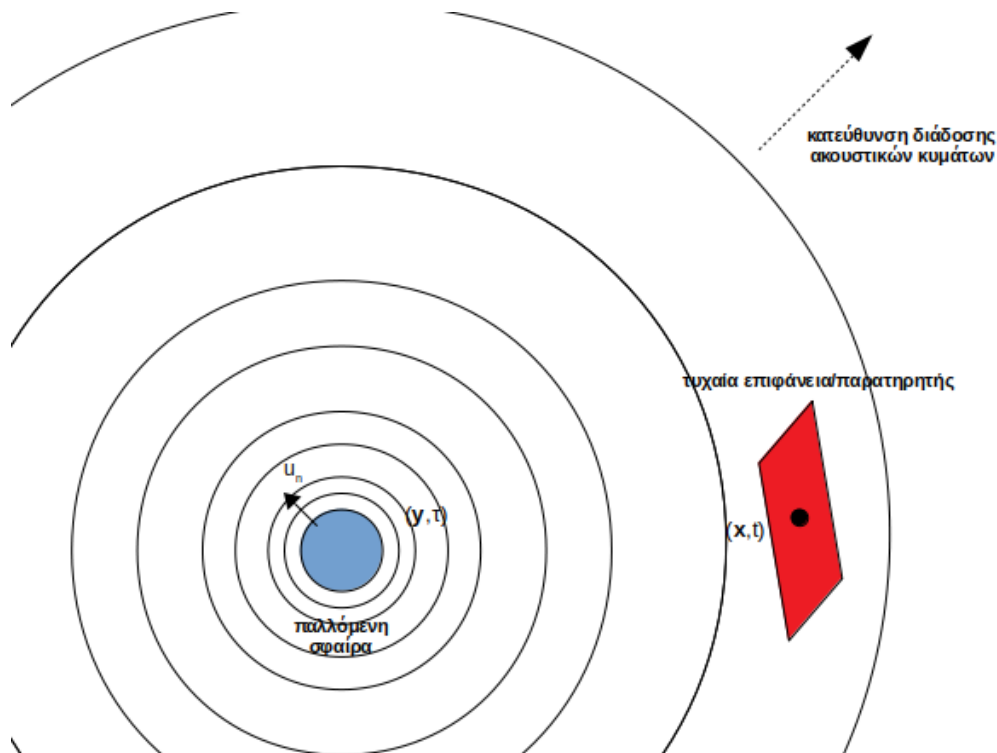
Στην προηγούμενη ενότητα παράχθηκε η γραμμική ακουστική κυματική εξίσωση. Επόμενο βήμα στη διαδικασία που τέθηκε στην αρχή του Κεφαλαίου είναι η εύρεση μιας γενικής λύσης στην κυματική εξίσωση. Η διαδικασία που ακολουθείται για την παραγωγή αυτής της λύσης είναι γνωστή ως **μέθοδος των συναρτήσεων Green**.

Θεωρείται ένα ομοιόμορφο μέσο εν ηρεμία στο οποίο η ακουστική διάδοση καθορίζεται από τη γραμμική κυματική εξίσωση (Εξ.2.6). Το μέσο μπορεί να περιλαμβάνει αντικείμενα ή/και άλλες επιφάνειες, οι οποίες μπορούν να αντανακλούν τον ήχο, όπως αυτή του Σχ.2.1.

Στόχος του Κεφαλαίου είναι ο προσδιορισμός της ακουστικής πίεσης $p'(x, t)$ στη θέση x του παρατηρητή, λόγω παραγωγής κύματος από ακουστική πηγή θέσης y . τ είναι η μεταβλητή του χρόνου και σχετίζεται με την πηγή, ενώ t είναι ο χρόνος που χρειάζεται το κύμα για διανύσει την απόσταση $|y - x|$. Για να επιτευχθεί αυτό γράφεται, αρχικά, η κυματική εξίσωση με τη χωρική μεταβλητή y και τη χρονική μεταβλητή τ

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'(\mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 p'(\mathbf{y}, \tau)}{\partial y_i^2} = 0 \quad (2.7)$$

και, στη συνέχεια, εισάγεται η συνάρτηση Green G , η οποία ορίζεται ως η λύση της



Σχήμα 2.1: Παραγωγή ακουστικών κυμάτων από παλλόμενη σφαίρα, θέσης \mathbf{y} τη χρονική στιγμή τ τα οποία φτάνουν σε μια τυχαία επιφάνεια/παρατηρητή, θέσης \mathbf{x} τη χρονική στιγμή t .

μη-ομογενούς κυματικής εξίσωσης

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial y_i^2} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \tau) \quad (2.8)$$

Η συνάρτηση Green κατανέμεται στο χώρο ως συνάρτηση των χωρικών συνιστωσών του χωρικού διανύσματος \mathbf{y} και της χρονικής μεταβλητής τ της πηγής, αλλά επίσης εξαρτάται και από τις συνιστώσες του διανύσματος \mathbf{x} και τον χρόνο t του παρατηρητή, για τον οποίο επιθυμείται η εύρεση λύσης. Έτσι, γράφεται με τη συναρτησιακή μορφή $G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau)$. Θα δειχθεί, στη συνέχεια, ότι η συνάρτηση Green συσχετίζει ένα ακουστικό πεδίο που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής για (\mathbf{x}, t) και η πηγή για (\mathbf{y}, τ) .

Οι συναρτήσεις στο δεξί μέλος της Εξ.2.8 είναι οι δέλτα συναρτήσεις Dirac. Σε 1Δ πρόβλημα, για το χρόνο, η συνάρτηση Dirac έχει την ιδιότητα

$$\begin{aligned} \delta(t - \tau) &= 0 \quad \text{όταν} \quad t \neq \tau \\ \int_{-T}^T \delta(t - \tau) d\tau &= 1 \quad \text{όταν} \quad -T < t < T \end{aligned} \quad (2.9)$$

ενώ για το χώρο ορίζεται ως

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad , \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

$$\int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \text{όταν το } \mathbf{x} \text{ ανήκει εντός του } V \\ 0 & \text{όταν το } \mathbf{x} \text{ δεν ανήκει εντός του } V \end{cases}$$

όπου γράφοντας $dV(\mathbf{y})$ εννοείται όγκος με κέντρο στο \mathbf{y} .

Για Καρτεσιανές συντεταγμένες, στον 3Δ χώρο, αυτό δίνεται ως

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta(x_1 - y_1) \delta(x_2 - y_2) \delta(x_3 - y_3) \quad (2.10)$$

Με δεδομένες αυτές τις ιδιότητες βρίσκεται λύση στην γραμμική ακουστική εξίσωση με την ακόλουθη προσέγγιση. Πολλαπλασιάζεται η εξίσωση Green (Εξ.2.8) με $p'(\mathbf{y}, \tau)$ και η γραμμική κυματική εξίσωση (Εξ.2.7) με $G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau)$ και αφαιρούνται κατά μέλη, οπότε προκύπτει

$$\frac{1}{c_0^2} \left(p' \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - G \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} \right) - \left(p' \frac{\partial^2 G}{\partial y_i^2} - G \frac{\partial^2 p'}{\partial y_i^2} \right) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \tau) p'(\mathbf{y}, \tau) \quad (2.11)$$

Αν ολοκληρωθεί το δεξί μέλος για χρονικό διάστημα $-T < \tau < T$ και όγκο $V(\mathbf{y})$ ο οποίος συμπεριλαμβάνει το \mathbf{x} , τότε προκύπτει η διαταραχή της πίεσης $p'(\mathbf{x}, t)$, η οποία είναι και το επιθυμητό αποτέλεσμα. Έτσι

$$\int_V \int_{-T}^T \left[\frac{1}{c_0^2} \left(p' \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - G \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} \right) - \left(p' \frac{\partial^2 G}{\partial y_i^2} - G \frac{\partial^2 p'}{\partial y_i^2} \right) \right] d\tau dV(\mathbf{y}) = p'(\mathbf{x}, t) \quad (2.12)$$

εφόσον το \mathbf{x} βρίσκεται εντός του V και $-T < t < T$. Για τον πρώτο όρο της ολοκληρωτέας ποσότητας αναδιατάσσονται τα διαφορικά ώστε

$$\left(p' \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - G \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(p' \frac{\partial G}{\partial \tau} - G \frac{\partial p'}{\partial \tau} \right) \quad (2.13)$$

όπου η διαταραχή της πίεσης p' δεν εξαρτάται από το τ , διότι αφορά την επιφάνεια-/παρατηρητή, και έτσι προκύπτει

$$\int_V \int_{-T}^T \frac{\partial}{\partial \tau} \left(p' \frac{\partial G}{\partial \tau} - G \frac{\partial p'}{\partial \tau} \right) d\tau dV(\mathbf{y}) = \int_V \left[p' \frac{\partial G}{\partial \tau} - G \frac{\partial p'}{\partial \tau} \right]_{\tau=-T}^{\tau=T} dV(\mathbf{y}) \quad (2.14)$$

Αν καθοριστούν αρχικές συνθήκες που να απαιτούν τα p' και $\partial p'/\partial \tau$ να είναι μηδέν για $\tau = -T$, τότε η ολοκληρωτέα ποσότητα της Εξ.2.14 είναι μηδέν στο κάτω όριό της. Αν, επιπλέον, εισαχθεί ως περιορισμός στη συνάρτηση Green ότι τα $\partial G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau)/\partial \tau$ και $\partial G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau)$ είναι μηδέν για $\tau \geq t$ τότε το πάνω όριο της

ολοκληρωτέας ποσότητας είναι μηδέν αν $t < T$. Αυτός ο περιορισμός καλείται *συνθήκη αιτιότητας* (*causality condition*) και εκφράζει ότι για να ακουστεί ένας ήχος τη χρονική στιγμή t πρέπει να έχει παραχθεί τη χρονική στιγμή $\tau < t$.

Μια παρόμοια ανάπτυξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον δεύτερο όρο της Εξ.2.12, και έτσι γράφεται

$$\int_V \left(p' \frac{\partial^2 G}{\partial y_i^2} - G \frac{\partial^2 p'}{\partial y_i^2} \right) dV(\mathbf{y}) = \int_V \frac{\partial}{\partial y_i} \left(p' \frac{\partial G}{\partial y_i} - G \frac{\partial p'}{\partial y_i} \right) dV(\mathbf{y}) \quad (2.15)$$

όπου τα y_i είναι οι συνιστώσες του \mathbf{y} σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (Εξ.2.10).

Σε αυτήν την εξίσωση η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι η απόκλιση ενός διανύσματος, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα της απόκλισης (θεώρημα Green-Gauss) ώστε να μετατραπεί το ογκικό ολοκλήρωμα σε επιφανειακό. Επιλέγεται ένα μοναδιαίο διάνυσμα n_i κάθετο στην επιφάνεια και με κατεύθυνση προς το εσωτερικό του όγκου. Η Εξ.2.12 γράφεται τότε

$$p'(\mathbf{x}, t) = \int_{-T}^T \int_S \left(p'(\mathbf{y}, \tau) \frac{\partial G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau)}{\partial y_i} - G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau) \frac{\partial p'(\mathbf{y}, \tau)}{\partial y_i} \right) n_i dS(\mathbf{y}) d\tau \quad (2.16)$$

όπου η επιφάνεια S συμπεριλαμβάνει τις επιφάνειες όλων των αντικειμένων εντός του όγκου V καθώς και την επιφάνεια που περικλείει τον όγκο V και αποτελεί το εξωτερικό του όριο. Σε εφαρμογές ελεύθερου πεδίου (*free field*)¹ εφαρμόζεται κάποιο είδος *οριακής συνθήκης ακτινοβολίας*, όπως η συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld[5] ή του Tam[6]. Αυτού του είδους οι οριακές συνθήκες έχουν την απαίτηση ύπαρξης μόνο εξερχόμενων κυμάτων από το χωρίο και δεν επιτρέπουν την ανάκλαση από το εξωτερικό όριο προς τον παρατηρητή. Με τον τρόπο αυτό επιτρέπουν τη διαχείριση ενός ελεύθερου πεδίου άπειρων διαστάσεων ως πεπερασμένο.

Τα αποτελέσματα που προκύπτει από την Εξ.2.16 δείχνει ότι ένα πεδίο ήχου, το οποίο ικανοποιεί τη γραμμική ακουστική κυματική εξίσωση, μπορεί να υπολογιστεί γνωρίζοντας την πίεση και την κλίση της πίεσης πάνω στις επιφάνειες/παρατηρητές (Σχ.2.1) που βρίσκονται εντός της περιοχής ενδιαφέροντος. Για να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα απαιτείται να είναι γνωστή η συνάρτηση Green, η οποία πρέπει να ικανοποιεί τη μη-ομογενή Εξ.2.8 και μια συνθήκη αιτιότητας, αλλά κατά τα άλλα δεν έχει άλλους περιορισμούς.

Χρειάζεται να προσδιοριστεί η συνάρτηση Green, οπότε αναλύονται οι δύο όροι της Εξ.2.16. Ο όρος κλίσης της διαταραχής της πίεσης μπορεί να υπολογιστεί από

¹Ελεύθερο πεδίο ονομάζεται ένα πεδίο του οποίου οι εξισώσεις κίνησης δίνονται από ένα σύνολο γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ). Τέτοιου είδους γραμμικές ΜΔΕ έχουν μοναδική λύση για μια δεδομένη αρχική συνθήκη.

την ακουστική εξίσωση διατήρησης της ορμής (Εξ.2.3), ως

$$\frac{\partial p'}{\partial y_i} n_i = \mathbf{n} \cdot \nabla p' = -\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial \tau} n_i \quad (2.17)$$

Η σημειακή ακουστική ταχύτητα κάθετη στην επιφάνεια, ενός στοιχείου της επιφάνειας αυτής, $v_i n_i$, θα είναι ίση με την κάθετη στην επιφάνεια ταχύτητα u_n η οποία επιβάλλεται από την οριακή συνθήκη, δίνοντας

$$p'(\mathbf{x}, t) = \int_{-T}^T \int_S \left(\rho_0 \frac{\partial u_n(\mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau) \right) dS(\mathbf{y}) d\tau + \int_{-T}^T \int_S \left(p'(\mathbf{y}, \tau) \frac{\partial G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau)}{\partial y_i} \right) n_i dS(\mathbf{y}) d\tau \quad (2.18)$$

Ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει τον ήχο που εκπέμπεται από μια παλλόμενη επιφάνεια και ο δεύτερος όρος αφορά τη συνεισφορά από τη δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας $p' n_i$ που ασκείται στο ρευστό από την επιφάνεια. Για να υπολογιστούν οι ολοκληρωτές ποσότητες χρειάζεται να οριστεί μια συνάρτηση Green. Αυτό θα γίνει συγκρίνοντας τη λύση της Εξ.2.18 με την αντίστοιχη λύση για μια παλλόμενη σφαίρα, κατά τον Rdzanek[7]. Στην ανάλυση του Rdzanek ορίζεται μια μικρή σφαιρική επιφάνεια με το κέντρο της στο $\mathbf{y} = 0$ και η κάθετη ταχύτητα στην επιφάνεια δίνεται από το πραγματικό μέρος της ($u_0 \exp(-i\omega t)$). Στη συνέχεια, επιτρέπεται η μείωση της ακτίνας της σφαίρας-πηγής σε σημείο που η χωρική εξάρτηση των G και $\partial G / \partial y_i$ να γίνει τόσο ασήμαντη που να μπορούν να βγουν εκτός του επιφανειακού ολοκληρώματος, δίνοντας

$$p'(\mathbf{x}, t) = Re \left[\int_{-T}^T [G]_{y_i=0} \int_S (-i\omega \rho_0 u_0 e^{-i\omega \tau}) dS(\mathbf{y}) d\tau \right] + \int_{-T}^T \left[\frac{\partial G}{\partial y_i} \right]_{y_i=0} \left\{ \int_S p' n_i dS(\mathbf{y}) \right\} d\tau$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα σε αυτή την εξίσωση εξαρτάται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα εντός των $\{ \}$, το οποίο αντιπροσωπεύει τη συνολική δύναμη που ασκείται στο ρευστό από τη σφαίρα και είναι μηδέν επειδή η πίεση είναι σταθερή στην επιφάνεια. Στον πρώτο όρο, η επιφανειακή ταχύτητα είναι επίσης σταθερή στην επιφάνεια κι έτσι το επιφανειακό ολοκλήρωμα ισούται απλώς με την επιφάνεια S επί την ολοκληρωτέα ποσότητα, δίνοντας

$$p'(\mathbf{x}, t) = Re \left[\int_{-T}^T (-i\omega \rho_0 u_0 S e^{-i\omega \tau}) \left[G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau)_{y_i=0} \right] d\tau \right] \quad (2.19)$$

Στην ανάλυση της παλλόμενης σφαίρας[7] η αντίστοιχη λύση για τη διαταραχή της

πίεσης βρέθηκε

$$p' = \text{Re} \left[-\frac{-i\omega\rho_0 u_0 S e^{-i\omega\tau + ikr}}{4\pi r} \right] \quad k = \omega/c_0 \quad r = |\mathbf{x}| \quad (2.20)$$

όπου k ο κυματικός αριθμός, ω η συχνότητα που πάλλεται η σφαίρα και c_0 η ταχύτητα του ήχου.

Συγκρίνοντας τα δύο αποτελέσματα φαίνεται ότι η συνάρτηση Green είναι

$$G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau) = \frac{\delta(t - r/c_0 - \tau)}{4\pi r} \quad (2.21)$$

Αυτή είναι γνωστή ως *συνάρτηση Green ελεύθερου πεδίου* επειδή καθορίζει την ακτινοβολία από μια απειροστά μικρή πηγή μετατόπισης σε ένα μη-φραγμένο πεδίο. Λόγω της σημασίας αυτής της συνάρτησης Green ελεύθερου πεδίου της αποδίδεται το σύμβολο G_0 . Στην παραπάνω θεώρηση η πηγή βρισκόταν στη θέση $\mathbf{y} = 0$. Αν, αντιθέτως, βρίσκεται σε τυχαία θέση \mathbf{y} , τότε χρησιμοποιείται ο όρος $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ και γράφεται

$$G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau) = \frac{\delta(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c_0 - \tau)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (2.22)$$

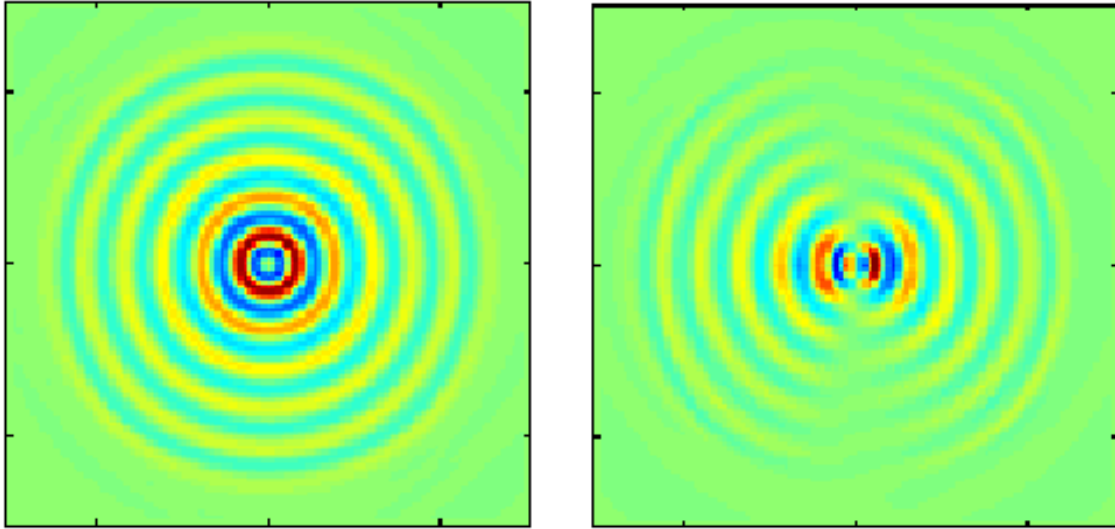
Η συνάρτηση Green είναι λύση της Εξ.2.8 όταν $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| > 0$ και απροσδιόριστη όταν $r = 0$, οπότε δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσει την πίεση πάνω στην επιφάνεια/παρατηρητή. Ωστόσο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσει την πίεση οπουδήποτε αλλού εκτός της επιφάνειας, με δεδομένη την πίεση και την κλίση της πίεσης στο όριο. Σημειώνεται επίσης ότι η συνάρτηση Green ελεύθερου πεδίου ικανοποιεί τη συνθήκη αιτιότητας για $r > 0$, επειδή $G_0 = 0$ και $\partial G_0 / \partial \tau = 0$ όταν $t < \tau < \tau + r/c_0$.

Για να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση G_0 στις Εξ.2.16 και 2.18 χρειάζεται να προσδιοριστεί η κλίση της, η οποία υπολογίζεται ως

$$\frac{\partial G_0}{\partial y_i} = \frac{(x_i - y_i)}{r} \left(\frac{\dot{\delta}(t - r/c_0 - \tau)}{4\pi r c_0} + \frac{\delta(t - r/c_0 - \tau)}{4\pi r^2} \right) \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (2.23)$$

όπου η τελεία πάνω από τη συνάρτηση Dirac αντιπροσωπεύει χρονική παράγωγο. Σημειώνεται ότι το πεδίο που παράγεται από αυτό τον όρο χαρακτηρίζεται από εγγενή συνημιτονοειδή κατευθυντικότητα (cosine directionality) (Σχ.2.2) και υπάρχει όρος τόσο για το κοντινό πεδίο (near field) όσο και για το μακρινό (far field).

Χρησιμοποιώντας αυτή τη μορφή της συνάρτησης Green υπολογίζονται τα χρονικά ολοκληρώματα της Εξ.2.18. Ολοκληρώνοντας τη χρονική παράγωγο της δέλτα



Σχήμα 2.2: Συνημιτονοειδής κατευθυντικότητα (*cosine directionality*) διάδοσης κυμάτων δίπολου (δεξιά), σε σχέση με την διάδοση προς όλες τις κατευθύνσεις (*omnidirectionality*) κυμάτων μονόπολου (αριστερά). (Πηγή:[8])

συνάρτησης Dirac προκύπτει

$$p'(\mathbf{x}, t) = \int_S \left[\rho_0 \frac{\partial u_n}{\partial \tau} \right]_{\tau=\tau^*} \frac{dS(\mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} + \int_S \left[\frac{\partial p'}{\partial \tau} n_i + \frac{p' n_i c_0}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right]_{\tau=\tau^*} \frac{(x_i - y_i) dS(\mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 c_0} \quad (2.24)$$

όπου $\tau^* = t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c_0$.

Οι ολοκληρωτέες ποσότητες του επιφανειακού ολοκληρώματος υπολογίζονται πλέον στον σωστό χρόνο τ^* , ο οποίος ονομάζεται και *χρόνος πηγής* ή *χρόνος εκπομπής*. Πρόκειται για τον χρόνο t του παρατηρητή μειωμένο κατά το χρόνο που χρειάζεται το κύμα για να διαδοθεί από το στοιχείο επιφάνειας της πηγής στον παρατηρητή, με την ταχύτητα του ήχου. Ο πρώτος όρος της Εξ.2.24 αντιπροσωπεύει τον ήχο που παράγεται από τη δόνηση της επιφάνειας και εξαρτάται από την επιτάχυνσή της. Ο δεύτερος όρος αφορά τον ήχο που παράγεται από το φορτίο της επιφάνειας και περιλαμβάνει τόσο μια συνιστώσα κοντινού πεδίου (*near field*) όσο και μία μακρινού πεδίου (*far field*). Αν θεωρηθεί μόνο το ακουστικό μακρινό πεδίο όπου $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{y}|$ τότε οι όροι τάξης $1/|\mathbf{x}|^2$ μπορούν να αγνοηθούν, διότι είναι μικροί σε σχέση με τους όρους τάξης $1/|\mathbf{x}|$, οπότε ισχύει

$$p'(\mathbf{x}, t) \approx \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \int_S \left[\rho_0 \frac{\partial u_n}{\partial \tau} \right]_{\tau=\tau^*} dS(\mathbf{y}) + \frac{x_i}{4\pi|\mathbf{x}|^2 c_0} \int_S \left[\frac{\partial p'}{\partial \tau} n_i \right]_{\tau=\tau^*} dS(\mathbf{y}) \quad (2.25)$$

Το αποτέλεσμα της παραπάνω εξίσωσης είναι ιδιαίτερα σημαντικό διότι δείχνει ότι στο ακουστικό μακρινό πεδίο, ο όρος της ταχύτητας, ο οποίος συχνά αναφέρεται

ως όρος **μονόπολου**, είναι εγγενώς πανκατευθυντικός (omnidirectional). Ο δεύτερος όρος έχει μια εγγενή συνημιτονοειδή κατευθυντικότητα (cosine directionality) και εμφανίζει μέγιστη τιμή στην κατεύθυνση της συνολικής δύναμη που ασκείται στο ρευστό, και αναφέρεται ως όρος **δίπολου** (Σχ.2.2).

Ανακεφαλαιώνοντας, θεωρήθηκε ηχητική (ακτινική) εκπομπή από μια επιφάνεια εντός ενός ομοιόμορφου μέσου εν ηρεμία και παράχθηκε η γενική λύση της γραμμικής κυματικής ακουστικής εξίσωσης, χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις Green. Δείχθηκε ότι το ακουστικό πεδίο παράγεται από την παλλόμενη κίνηση των ορίων και από τις δυνάμεις που ασκούνται στην επιφάνεια. Η παλλόμενη μετατόπιση της επιφάνειας προκαλεί ακτινοβολία τύπου μονόπολου. Ο θόρυβος που οφείλεται στις δυνάμεις έχει μια εγγενή διπολική ή κατευθυντική φύση.

2.3 Η Συνάρτηση Green στο Πεδίο των Συχνοτήτων

Στις προηγούμενες ενότητες έγινε η ανάλυση της κυματικής εξίσωσης ενός αρμονικού κύματος *μίας* συχνότητας κι έπειτα βρέθηκε η γενική λύση της κυματικής εξίσωσης, εκφρασμένη ως προς τις διαταραχές της πίεσης. Η λύση βρέθηκε συναρτήσει της συνάρτησης Green $G(x, t|y, \tau)$ η οποία αντιπροσωπεύει τη διάδοση από την πηγή στη θέση y σε έναν παρατηρητή στη θέση x . Οι διαταραχές της πηγής στο χρόνο τ γίνονται αντιληπτές από τον παρατηρητή στο χρόνο t . Παρ'όλα αυτά, σε πολλές εφαρμογές υπάρχει ενδιαφέρον για την εύρεση πληροφορίας στο πεδίο των συχνοτήτων. Η ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων γίνεται με το μετασχηματισμό Fourier. Στην ενότητα αυτή θα δειχθεί ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός Fourier απευθείας στις διαταραχές της πηγής χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Green στο πεδίο των συχνοτήτων.

2.3.1 Αρμονική Εξάρτηση στο Χρόνο

Για να επιτευχθεί ο παραπάνω στόχος λαμβάνεται η χρονοσειρά ενός σήματος ως μία συχνότητα με αρμονική χρονική εξάρτηση. Αν η γωνιακή συχνότητα είναι ω rad/s, τότε η χρονική εξάρτηση ενός αρμονικού ημιτονοειδούς κύματος θα είναι $f(t) = A \cos(\omega t - \phi)$ και η λύση της ακουστικής εξίσωσης για σφαιρικά κύματα (σε σφαιρικές συντεταγμένες) θα είναι

$$p'(r, t) = \frac{A \cos(\omega t - \omega r/c_0 - \phi)}{r} \quad (2.26)$$

όπου A και ϕ είναι πραγματικές σταθερές οι οποίες καθορίζουν το πλάτος του κύματος και τη φάση του, αντίστοιχα. Είναι χρήσιμο να θεωρηθεί η αρμονική χρονοσειρά ως το πραγματικό μέλος ενός μιγαδικού εκθετικού με χρονική εξάρτηση $\exp(-i\omega t)$. Η επιλογή του μείον στο όρισμα του εκθετικού είναι σύμβαση και είναι σημαντική. Χρησιμοποιώντας τη σύμβαση $-i\omega t$ γράφεται

$$p'(r, t) = \text{Re} [\hat{p}(r) e^{-i\omega t}] = \text{Re} \left[\frac{\hat{A} e^{-i\omega t + ikr}}{r} \right] \quad (2.27)$$

όπου το σύμβολο $\hat{}$ δηλώνει το μιγαδικό πλάτος, που ορίζεται ως $\hat{A} = A \exp(i\phi)$. Έτσι, το μέγεθος $\hat{p}(r)$ είναι το μιγαδικό πλάτος της πίεσης στο χώρο. Το σύμβολο k είναι ο ακουστικός κυματικός αριθμός $k = \omega/c_0$. Για λόγους συντομίας, αφήνεται να εννοηθεί η αρμονική χρονική εξάρτηση, οπότε η Εξ.2.27 γράφεται απλώς ως

$$\hat{p}(r) = \frac{\hat{A} e^{ikr}}{r} \quad (2.28)$$

Σημειώνεται ότι, με αυτήν τη σύμβαση για το χρόνο, ένα κύμα το οποίο διαδίδεται στην κατεύθυνση r έχει θετική φάση η οποία εκφράζεται με τον όρο $\exp(ikr)$. Η χωρική εξάρτηση του ακουστικού πεδίου είναι επίσης αρμονική και ταλαντώνεται με κλίμακα μήκους που καθορίζεται από το ακουστικό μήκος κύματος λ . Ο κυματικός αριθμός συσχετίζεται με τον ακουστικό κυματικό αριθμό με μια επαναληψιμότητα του ακουστικού πεδίου, ανά 2π της φάσης kr , $kr + 2\pi n$ με $n \in \mathbb{N}$. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών του κύματος είναι ο κυματικός αριθμός, οπότε $k\lambda = 2\pi$ και $k = \omega/c_0 = 2\pi/\lambda$.

Γενικότερα, η γραμμική ακουστική κυματική εξίσωση μπορεί να γραφεί συναρτήσει του πλάτους της μιγαδικής πίεσης $\hat{p}(\mathbf{x})$, αντικαθιστώντας τη διαταραχή $p'(\mathbf{x}, t) = \text{Re} [\hat{p}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)]$, οπότε

$$\nabla^2 \hat{p} + k^2 \hat{p} = 0 \quad (2.29)$$

Η ακουστική εξίσωση διατήρησης της ορμής για ένα ακουστικό κύμα γράφεται κατά παρόμοιο τρόπο με την Εξ.2.3 ως

$$i\omega \rho_0 \hat{v} = \nabla \hat{p} \quad (2.30)$$

2.3.2 Μετασχηματισμός Fourier

Η συμβολολογία για το μετασχηματισμό Fourier, που χρησιμοποιείται σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, δίνεται αναλυτικά στο Παράρτημα Α'.

Μετασχηματίζεται η ακουστική εξίσωση (Εξ.2.7) της πηγής, ως προς τη χρονική μεταβλητή τ και λαμβάνεται η εξίσωση του Helmholtz η οποία ορίζεται ως

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}(\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i^2} + k^2 \tilde{p}(\mathbf{y}, \omega) = 0 \quad (2.31)$$

όπου $k = \omega/c_0$ είναι ο κυματικός αριθμός. Η εξίσωση αυτή είναι ακριβώς η ίδια με την Εξ.2.29. Για να βρεθεί λύση στην εξίσωση του Helmholtz χρησιμοποιείται η συνάρτηση Green που αποτελεί λύση της μη ομογενούς εξίσωσης

$$\frac{\partial^2 \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial y_i^2} + k^2 \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.32)$$

Σημειώνοντας τη διαφορά αυτής της εξίσωσης με την Εξ.2.8, παρατηρείται η εμφάνιση του μείον στη συνάρτηση Dirac, το οποίο απαιτείται ώστε αυτές οι δύο εξισώσεις να σχετίζονται.

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζεται η Εξ.2.31 με \tilde{G} και η Εξ.2.32 με $\tilde{p}(\mathbf{y}, \omega)$, ολοκληρώνονται στον όγκο V και αφαιρούνται, οπότε προκύπτει

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\mathbf{x}, \omega) &= - \int_V \left(\tilde{p}(\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial^2 \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial y_i^2} - \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \frac{\partial^2 \tilde{p}(\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i^2} \right) dV(\mathbf{y}) \\ &= - \int_V \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\tilde{p}(\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial y_i} - \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \frac{\partial \tilde{p}(\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i} \right) dV(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Χρησιμοποιείται το θεώρημα της απόκλισης για να υπολογιστεί το ογκικό ολοκλήρωμα. Επιλέγεται ένα μοναδιαίο διάνυσμα n_i , κάθετο στην επιφάνεια και το οποίο έχει κατεύθυνση προς το εσωτερικό του όγκου και μετατρέπεται το ογκικό ολοκλήρωμα σε επιφανειακό

$$\tilde{p}(\mathbf{x}, \omega) = \int_V \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\tilde{p}(\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial y_i} - \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \frac{\partial \tilde{p}(\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i} \right) n_i(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \quad (2.34)$$

Η εξίσωση αυτή είναι η λύση της κυματικής εξίσωσης στο πεδίο των συχνοτήτων και είναι η αντίστοιχη της Εξ.2.16 η οποία δίνει τη λύση στο πεδίο του χρόνου. Η αντιστοίχιση ανάμεσα σε αυτά τα δύο αποτελέσματα δημιουργείται εφαρμόζοντας τον ανάστροφο μετασχηματισμό στην Εξ.2.34 και αντικαθιστώντας στην εξίσωση μετασχηματισμού Fourier της πίεσης (Παράρτημα Α'), οπότε παράγεται

$$p'(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_S \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left(p'(\mathbf{y}, \tau) \left[\frac{\partial \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial y_i} \right]_{\omega} - \left[\tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \right]_{\omega} \frac{\partial p'(\mathbf{y}, \tau)}{\partial y_i} \right) n_i(\mathbf{y}) e^{-i\omega(t-\tau)} d\tau \right\} dS(\mathbf{y}) d\omega \quad (2.35)$$

όπου η συνάρτηση Green στο πεδίο των συχνοτήτων υπολογίζεται για τη συχνότητα ω .

Συγκρίνοντας την Εξ.2.35 με την Εξ.2.16 δίνεται η σχέση ανάμεσα στη συνάρτηση Green στο πεδίο του χρόνου και στην αντίστοιχη στο πεδίο των συχνοτήτων

$$G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \right]_{\omega} e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega \quad (2.36)$$

και η συνάρτηση Green στο πεδίο των συχνοτήτων παράγεται με το μετασχηματισμό Fourier στην $2\pi G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, 0)$

$$\tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \int_{-T}^T G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, 0) e^{i\omega t} dt$$

Με χρήση του αποτελέσματος της Εξ.2.22 παράγεται η *συνάρτηση Green ελεύθερου πεδίου* στο πεδίο των συχνοτήτων ως

$$\tilde{G}_0(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \quad (2.37)$$

Ανακεφαλαιώνοντας, σε αυτή την ενότητα παράχθηκε η συνάρτηση Green ελεύθερου πεδίου στο πεδίο των συχνοτήτων. Αυτή χρησιμοποιήθηκε, μαζί με την αντίστοιχη συνάρτηση στο πεδίο του χρόνου, ώστε να παραχθεί η διαταραχή της ακουστικής πίεσης. Η ακουστική πίεση που προέρχεται από την ανάλυση αυτή αποτελεί την **αναλυτική λύση** της γραμμικής ακουστικής κυματικής εξίσωσης και χρησίμευσε στην πορεία του αλγορίθμου επίλυσης του αεροακουστικού προβλήματος ως προς το να επιλυθεί μια ακουστική πηγή αλλά και ως περίπτωση αναφοράς (benchmark case) για να διαπιστωθεί μέσω **σύγκρισης** η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την αριθμητική επίλυση του προβλήματος.

2.4 Γραμμικοποιημένες Εξισώσεις Euler (Linearized Euler Equations, LEE)

Στην Παράγραφο αυτή παρουσιάζονται οι LEE για διδιάστατο πεδίο. Για τις εξισώσεις διατήρησης, σε συντηρητική μορφή, γράφεται

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0 \quad (2.38)$$

όπου

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Η πρώτη κατά γραμμή εξίσωση είναι η εξίσωση διατήρησης μάζας, οι δεύτερη και τρίτη είναι οι κατά x - και y - εξισώσεις διατήρησης της ορμής και η τέταρτη είναι η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας, με $E = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2)$. Οι μεταβλητές ροής είναι γραμμένες ως άθροισμα μέσης τιμής και διαταραχής, $\rho = \rho_0 + \rho'$, $u = u_0 + u'$, $v = v_0 + v'$ και $p = p_0 + p'$.

Κατά την απόδειξη των LEE ακολουθήθηκαν οι εξής διαδικασίες:

- ξεκινά η γραμμικοποίηση της εκάστοτε εξίσωσης διατήρησης με τις μεταβλητές ροής γραμμένες ως άθροισμα μέσης τιμής και διαταραχής
- τα γινόμενα διαταραχών που προκύπτουν (διαταραχή επί διαταραχή, ή διαταραχή επί παράγωγος διαταραχής) θεωρούνται πολύ μικρής κλίμακας και απαλοούνται
- απαλοούνται επίσης οι χρονικοί και χωρικοί όροι παραγώγων των μέσων τιμών των μεγεθών, διότι αφενός οι μέσες τιμές δε μεταβάλλονται με το χρόνο, αφετέρου δε το πεδίο είναι ομοιόμορφο
- ομαδοποιούνται οι όροι κατάλληλα, ώστε να προκύψουν όροι μέσης τιμής μεγέθους επί διαταραχή

Θα γίνει επίδειξη όλων των παραπάνω βημάτων με την εξίσωση διατήρησης της μάζας, ενώ οι υπόλοιπες εξισώσεις διατήρησης θα γραφούν συνομότερα.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + \rho' \frac{\partial u_0}{\partial x} + \rho' \frac{\partial u'}{\partial x} \\
& \quad + u_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + u' \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + u' \frac{\partial \rho'}{\partial x} \\
& \quad + \rho_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial y} + \rho' \frac{\partial v_0}{\partial y} + \rho' \frac{\partial v'}{\partial y} \\
& \quad + v_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + v_0 \frac{\partial \rho'}{\partial y} + v' \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + v' \frac{\partial \rho'}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \\
& \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_0 u')}{\partial x} + \frac{\partial (\rho' u_0)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_0 v')}{\partial y} + \frac{\partial (\rho' v_0)}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \\
& \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_0 u' + \rho' u_0)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_0 v' + \rho' v_0)}{\partial y} = 0 \quad (2.40)
\end{aligned}$$

Οι διαδικασίες που περιγράφηκαν παραπάνω εφαρμόστηκαν με την ανάπτυξη των μεταβλητών ροής ως $\rho = \rho_0 + \rho'$, $u = u_0 + u'$, $v = v_0 + v'$ και $p = p_0 + p'$, την απαλοιφή των γινομένων διαταραχών, την απαλοιφή των **όρων** με έντονη γραφή, ως των όρων μεταβολής μέσης τιμής και τέλος την ομαδοποίηση όσων όρων απομένουν. Παρατηρείται ότι η **γραμμικοποιημένη** εξίσωση διατήρησης μάζας έχει **ίδια μορφή** με τη μη-γραμμικοποιημένη.

Για την εξίσωση διατήρησης της x -ορμής γράφεται (συντομότερα):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u v)}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \\
& \rho_0 \frac{\partial u_0}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + \rho' \frac{\partial u_0}{\partial t} + \rho' \frac{\partial u'}{\partial t} + \\
& u_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho'}{\partial t} + u' \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + u' \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \\
& 2(\rho_0 + \rho')(u_0 + u') \frac{\partial (u_0 + u')}{\partial x} + (u_0 + u')^2 \frac{\partial (\rho_0 + \rho')}{\partial x} + \frac{\partial (p_0 + p')}{\partial x} + \\
& 2(\rho_0 + \rho')(u_0 + u') \frac{\partial v_0}{\partial y} + 2(\rho_0 + \rho')(u_0 + u') \frac{\partial v'}{\partial y} + \\
& 2(\rho_0 + \rho')(v_0 + v') \frac{\partial u_0}{\partial y} + 2(\rho_0 + \rho')(v_0 + v') \frac{\partial u'}{\partial y} + \\
& 2(u_0 + u')(v_0 + v') \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + 2(u_0 + u')(v_0 + v') \frac{\partial \rho'}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \\
& \frac{\partial (\rho_0 u')}{\partial t} + \left[\frac{\partial (\rho_0 u_0 u')}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial (\rho_0 u' v_0)}{\partial y} \right] + \left[(\rho_0 u' + \rho' u_0) \frac{\partial u_0}{\partial x} + (\rho_0 v' + \rho' v_0) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] = 0 \quad (2.41)
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα, για την εξίσωση διατήρησης της y -ορμής γράφεται:

$$\frac{\partial (\rho_0 v')}{\partial t} + \left[\frac{\partial (\rho_0 u_0 v')}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial (\rho_0 v' v_0)}{\partial y} + \frac{\partial p'}{\partial y} \right] + \left[(\rho_0 u' + \rho' u_0) \frac{\partial v_0}{\partial x} + (\rho_0 v' + \rho' v_0) \frac{\partial v_0}{\partial y} \right] = 0 \quad (2.42)$$

Τέλος, για την εξίσωση διατήρησης ενέργειας γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u (E + p)] + \frac{\partial}{\partial y} [v (E + p)] &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(u_0 + u') (E + p_0 + p')] + \frac{\partial}{\partial y} [(v_0 + v') (E + p_0 + p')] &= 0 \Rightarrow \\ E = \frac{p_0 + p'}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} (\rho_0 + \rho') [(u_0 + u')^2 + (v_0 + v')^2] \end{aligned}$$

Όπου μετά από πράξεις προκύπτει:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_0 p' + \gamma p_0 u') + \frac{\partial}{\partial y} (v_0 p' + \gamma p_0 v') + (\gamma - 1) \left[p' \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - u' \frac{\partial p_0}{\partial x} - v' \frac{\partial p_0}{\partial y} \right] = 0 \quad (2.43)$$

Συγκεντρώνοντας τις γραμμικοποιημένες LEE, σε μητρική μορφή, παρόμοια με αυτήν της Εξ.2.39, προκύπτει:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \mathbf{H} = 0 \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} \rho' \\ \rho_0 u' \\ \rho_0 v' \\ p' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho' u_0 + \rho_0 u' \\ u_0 \rho_0 u' + p' \\ u_0 \rho_0 v' \\ u_0 p' + \gamma p_0 u' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho' v_0 + \rho_0 v' \\ v_0 \rho_0 u' \\ v_0 \rho_0 v' + p' \\ v_0 p' + \gamma p_0 v' \end{bmatrix} \\ \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} 0 \\ (\rho_0 u' + \rho' u_0) \frac{\partial u_0}{\partial x} + (\rho_0 v' + \rho' v_0) \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ (\rho_0 u' + \rho' u_0) \frac{\partial v_0}{\partial x} + (\rho_0 v' + \rho' v_0) \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ (\gamma - 1) \left[p' \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - u' \frac{\partial p_0}{\partial x} - v' \frac{\partial p_0}{\partial y} \right] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ανακεφαλαιώνοντας, στο Κεφάλαιο αυτό παρατίθεται η διαδικασία κατά την οποία προκύπτουν οι LEE από τη συντηρητική μορφή των εξισώσεων διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας, για ένα διδιάστατο πεδίο ροής.

Κεφάλαιο 3

Οριακές Συνθήκες και Σχήματα

Διακριτοποίησης

Ένα φυσικό πρόβλημα ορίζεται μαθηματικά από ένα σύνολο **εξισώσεων** και **οριακών συνθηκών**. Οι εξισώσεις που επιλύονται στο εσωτερικό αναλύθηκαν στο Κεφάλαιο 2. Όταν αυτές οι εξισώσεις (Εξ.2.44) διακριτοποιούνται, ώστε να επιλυθούν αριθμητικά, οι πεπερασμένες διαφορές που προκύπτουν είναι συνήθως υψηλότερης τάξης από τις αρχικές μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ), διότι απαιτούνται **σχήματα υψηλής τάξης ακρίβειας**, ώστε να ελαχιστοποιηθεί η *αριθμητική διασπορά* (*numerical dispersion*). Οι Tam και Webb απέδειξαν ότι οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών υψηλής τάξης ακρίβειας εισάγουν εσφαλμένες λύσεις, οι οποίες δεν αποτελούν λύση των ΜΔΕ[6],[9]. Έτσι, πρέπει να οριστεί ένα σύνολο οριακών συνθηκών, τέτοιες ώστε όχι μόνο να αναπαράγουν τη φυσική των πραγματικών ορίων του χωρίου, αλλά επίσης να μειώνουν το πλάτος των εσφαλμένων λύσεων, αν αυτές παραχθούν. Στο Κεφάλαιο αυτό αναλύονται:

- το σύνολο των οριακών συνθηκών που εφαρμόζονται στα προβλήματα αεροακουστικής και όσες από αυτές προγραμματίστηκαν
- τα σχήματα διακριτοποίησης στο εσωτερικό και στα όρια του πλέγματος
- προσεγγίσεις και σχετικά «τεχνάσματα»

3.1 Είδη Οριακών Συνθηκών

Ένα υπολογιστικό χωρίο είναι αναγκαστικά πεπερασμένο σε διαστάσεις, άρα ένα τμήμα του φυσικού χωρίου παραμένει εκτός της αριθμητικής προσομοίωσης. Είναι,

λοιπόν, σημαντικό να υπάρχει ελάχιστη επιρροή στο εσωτερικό του χωρίου από όσα συμβαίνουν στο εξωτερικό, ή αν αυτή η επιρροή είναι απαραίτητη για την επίλυση του προβλήματος, να μεταφέρεται στο εσωτερικό με ένα σύνολο οριακών συνθηκών που να αντικατοπτρίζουν την εξωτερική φυσική.

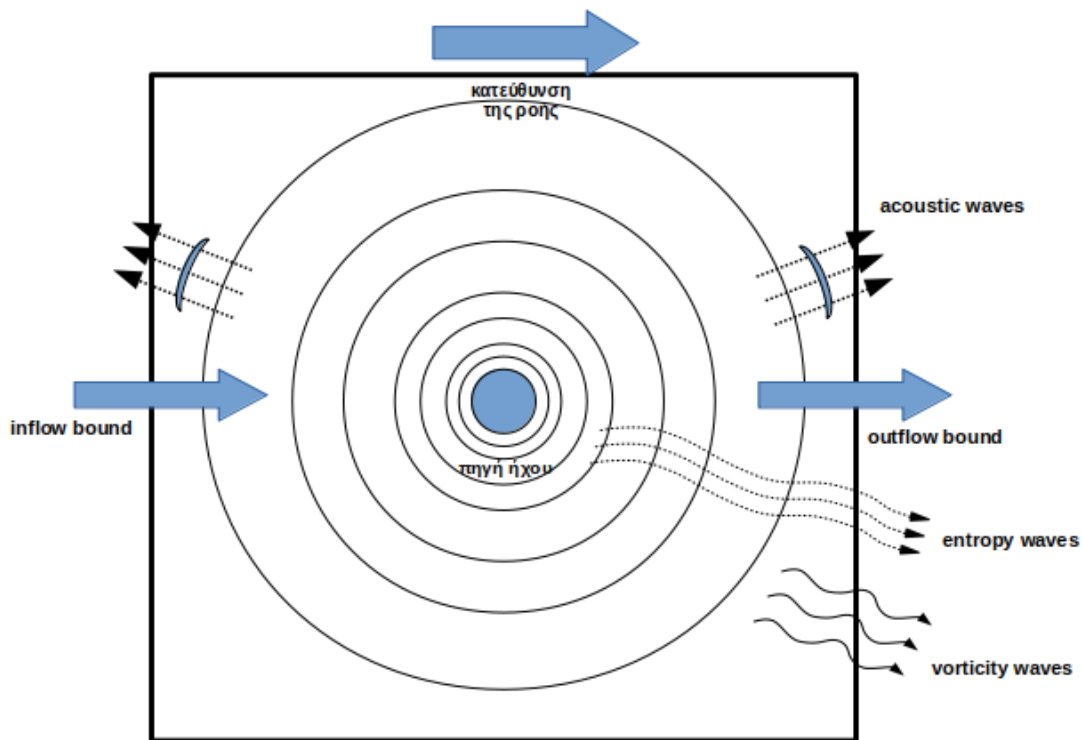
Οι οριακές συνθήκες που χρησιμοποιούνται σε προβλήματα Υπολογιστικής Αεροακουστικής κατηγοριοποιούνται, γενικά, σε έξι κατηγορίες[10]

- οριακές συνθήκες ακτινοβολίας (radiation boundary conditions)
- οριακές συνθήκες εξερχόμενης ροής (outflow boundary conditions)
- οριακές συνθήκες τοίχου (wall boundary conditions)
- οριακές συνθήκες εμπέδησης (impedance boundary conditions)
- οριακές συνθήκες ακτινοβολίας και εξερχόμενης ροής με εισερχόμενα ακουστικά κύματα και κύματα στροβιλότητας (radiation and outflow boundary conditions with incoming acoustic and vorticity waves)
- οριακές συνθήκες ακτινοβολίας για περιβάλλοντα αγωγών (radiation boundary conditions for ducted environments)

Οι τρεις πρώτες κατηγορίες οριακών συνθηκών απαιτούνται και σε συνήθη προβλήματα Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής και είναι αυτές οι οποίες προγραμματίστηκαν. Όμως, λόγω της φύσης των προβλημάτων της Υπολογιστικής Αεροακουστικής, οι τρεις αυτές οριακές συνθήκες έχουν αρκετές ιδιαιτερότητες στη διατύπωσή τους, όπως θα φανεί στη συνέχεια του Κεφαλαίου.

Σημειώνεται, επίσης, ότι προγραμματίστηκε και ένα σύνολο **οριακών συνθηκών Dirichlet**, οι οποίες επιδέχονται αναλυτική επίλυση από τη γραμμική ακουστική κυματική εξίσωση (Εξ.2.6). Αυτές χρησιμοποιήθηκαν ως *περίπτωση αναφοράς (benchmark case)* για τον έλεγχο ως προς την *ακρίβεια και αξιοπιστία* των αποτελεσμάτων που παρήγαγαν οι υπόλοιπες οριακές συνθήκες.

Στο Σχ.3.1 απεικονίζεται ένα αεροακουστικό πρόβλημα, όμοιο με αυτά που προγραμματίζονται στη συνέχεια, και φαίνεται η ανάγκη ύπαρξης των παραπάνω ιδιαίτερων οριακών συνθηκών. Διακρίνονται τα όρια του υπολογιστικού πλέγματος και στο κέντρο αυτού μια ηχητική πηγή, πχ. μια παλλόμενη σφαίρα όπως αυτή που αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 2 για την παραγωγή της λύσης της ακουστικής κυματικής εξίσωσης με τη βοήθεια της συνάρτησης Green. Διακρίνεται, επίσης, η κατεύθυνση μιας ομοιόμορφης ροής, σύμφωνα με την οποία το αριστερό όριο δέχεται ροή η οποία εισέρχεται στο πλέγμα (**inflow bound**), και η οποία εξέρχεται από το δεξί όριο (**outflow bound**). Τα πάνω και κάτω όρια θεωρούνται επίσης όρια εξόδου της ροής. Για λόγους απλοστευσης σχήματος η ροή είναι παράλληλη με το οριζόντιο επίπεδο. Διακρίνονται επίσης τα είδη των εξερχόμενων κυμάτων σε κάθε είδος ορίου.



Σχήμα 3.1: Διάδοση του ήχου από μια ηχητική πηγή εντός πλέγματος. Διακρίνεται η κατεύθυνση ροής, το όριο εισόδου της ροής (*inflow bound*), το όριο εξόδου της ροής (*outflow bound*) και τα είδη εξερχόμενων κυμάτων σε κάθε είδος ορίου.

3.1.1 Οριακές Συνθήκες Ακτινοβολίας (Radiation) και Εξερχόμενης Ροής (Outflow)

Σε μία ομοιόμορφη ροή όπως αυτή του Σχ.3.1 επιλύθηκαν οι LEE. Οι εξισώσεις αυτές παράγουν τρεις τύπους κυματικών διαταραχών:

- ακουστικά κύματα (*acoustic waves*)
- κύματα στροβιλότητας (*vorticity waves*)
- κύματα εντροπίας (*entropy waves*)

Στην Ενότητα αυτή περιγράφονται οι οριακές συνθήκες **ακτινοβολίας** (*radiation* ή **inflow boundary conditions**), οι οποίες επιβάλλονται στα όρια του πλέγματος στα οποία η ροή εισέρχεται (*inflow boundaries*) και οι οριακές συνθήκες **εξερχόμενης ροής** (**outflow boundary conditions**) που επιβάλλονται στα όρια από τα οποία η ροή εξέρχεται (*outflow boundaries*).

Τα **ακουστικά κύματα** διαδίδονται στο χώρο με την ταχύτητα του ήχου, όχι με την ταχύτητα της μέσης ροής. Τα **κύματα στροβιλότητας** και **εντροπίας** έχουν μια

«παγωμένη» κυματομορφή στο χώρο και μεταφέρονται κατάντι από τη μέση ροή[10]. Λόγω του διαφορετικού τρόπου με τον οποίο μεταφέρεται (convection) καθένα από αυτά τα είδη κυμάτων, οι οριακές συνθήκες κατά την είσοδο και κατά την έξοδο της ροής διαφέρουν σημαντικά. Σε ένα όριο όπου η ροή εισέρχεται (inflow), οι μόνες ηχητικές διαταραχές που εξέρχονται είναι αυτές των ακουστικών κυμάτων. Αντιθέτως, σε ένα όριο όπου η ροή εξέρχεται (outflow), πέραν των ακουστικών κυματικών διαταραχών, εξέρχονται και οι διαταραχές που οφείλονται στα κύματα στροβιλότητας και εντροπίας[10].

Οι Bayliss και Turkel[11][12], Hangstrom και Hariharan[13] και Tam και Webb[9] διατύπωσαν ένα σύνολο οριακών συνθηκών ακτινοβολίας και οριακών συνθηκών εξερχόμενης ροής βασισμένων στη μέθοδο των ασυμπτωτικών λύσεων των εξισώσεων που επιλύονται. Για την περίπτωση της ανάλυσης που έχει προηγηθεί, όπου μικρές διαταραχές πλάτους (συμβολιζόμενες με $'$) υπερτίθενται μιας μέσης ροής πυκνότητας ρ_0 , πίεσης p_0 και ταχύτητας στην x -διεύθυνση u_0 , οι LEE (Εξ.2.44) για ένα 2Δ πρόβλημα ξαναγράφονται, για λόγους πληρότητας[10]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho' \\ \rho_0 u' \\ \rho_0 v' \\ p' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho' u_0 + \rho_0 u' \\ u_0 \rho_0 u' + p' \\ u_0 \rho_0 v' \\ u_0 p' + \gamma p_0 u' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho' v_0 + \rho_0 v' \\ v_0 \rho_0 u' \\ v_0 \rho_0 v' + p' \\ v_0 p' + \gamma p_0 v' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ (\rho_0 u' + \rho' u_0) \frac{\partial u_0}{\partial x} + (\rho_0 v' + \rho' v_0) \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ (\rho_0 u' + \rho' u_0) \frac{\partial v_0}{\partial x} + (\rho_0 v' + \rho' v_0) \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ (\gamma - 1) \left[p' \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - u' \frac{\partial p_0}{\partial x} - v' \frac{\partial p_0}{\partial y} \right] \end{bmatrix}$$

Ο μη-ομογενής όρος \mathbf{Q} στο δεξιό μέλος της Εξ.2.44 αντιπροσωπεύει ένα σύνολο χρονικά μη-μόνιμων πηγών. Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς Fourier-Laplace, οι Tam και Webb[9] έδειξαν ότι πρόβλημα αρχικών συνθηκών της Εξ.2.44 έχει ασυμπτωτικές λύσεις, αποτελούμενες από ακουστικά κύματα, κύματα στροβιλότητας και κύματα εντροπίας, της μορφής

- ακουστικά κύματα

$$\begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix} \sim \frac{\phi \left(\frac{r}{V(\theta)} - t, \theta \right)}{r^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} \frac{1}{c_0^2} \\ \hat{u}(\theta) \\ \hat{v}(\theta) \\ 1 \end{bmatrix} + O \left(r^{-\frac{3}{2}} \right) \quad (3.1)$$

όπου (r, θ) είναι πολικές συντεταγμένες με κέντρο την ηχητική πηγή, $V(\theta) = u_0 \cos \theta + c_0 (1 - M^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}$, $M = \frac{u_0}{c_0}$, $c_0 = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}$ η ταχύτητα του ήχου, ενώ

με $\hat{}$ συμβολίζεται το μιγαδικό πλάτος των συνιστωσών της ταχύτητας.

- κύματα στροβιλότητας, $\rho = p = 0$

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{bmatrix} + O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right) \quad (3.2)$$

όπου

$$\psi = \begin{cases} \psi(x - u_0 t, y), & x \rightarrow +\infty \\ 0, & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

- κύματα εντροπίας, $u = v = p = 0$

$$\rho = \begin{cases} \chi(x - u_0 t, y), & x \rightarrow +\infty \\ 0, & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (3.3)$$

Στις Εξ.3.1 ως 3.3 οι συναρτήσεις ϕ, ψ, χ είναι συναρτήσεις που εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες (κατανομή/θέση των χρονικά μη-μόνιμων πηγών, τιμές των μεταβλητών της μέσης ροής, κλπ).

Οι οριακές συνθήκες εξόδου, αφορούν:

- έξοδο **μόνο** ακουστικών κυμάτων, από όριο στο οποίο η ροή εισέρχεται (radiation or inflow boundary conditions)
- έξοδο ακουστικών κυμάτων, κυμάτων στροβιλότητας και κυμάτων εντροπίας, από όριο/όρια στα οποία η ροή εξέρχεται (outflow boundary conditions)

Στα όρια όπου υπάρχουν μόνο εξερχόμενα ακουστικά κύματα, παράγεται ένα σύνολο οριακών συνθηκών ακτινοβολίας εξαλείφοντας την άγνωστη συνάρτηση F από την Εξ.3.1, παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο t και ως προς την απόσταση r . Προκύπτει τότε

$$\left(\frac{1}{V(\theta)} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right) \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix} = 0 + O\left(r^{-\frac{5}{2}}\right) \quad (3.4)$$

όπου $V(\theta) = c_0 \left[M \cos \theta + (1 - M^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \right]$.

Στα όρια όπου η ροή εξέρχεται οι εξερχόμενες διαταραχές αποτελούνται από ένα συνδιασμό ακουστικών κυμάτων και κυμάτων στροβιλότητας και εντροπίας, πχ. ένα άθροισμα των Εξ.3.1 ως 3.3. Οι άγνωστες συναρτήσεις ϕ, ψ και χ εξαλείφονται χρησιμοποιώντας τη γραμμικοποιημένη εξίσωση της ορμής[9], οπότε προκύπτουν

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial p'}{\partial x} &= \frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} u_0 \frac{\partial p'}{\partial x} \right) \\
\frac{\partial u'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u'}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \\
\frac{\partial v'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \\
\frac{1}{V(\theta)} \frac{\partial p'}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial p'}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{p'}{2r} &= 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

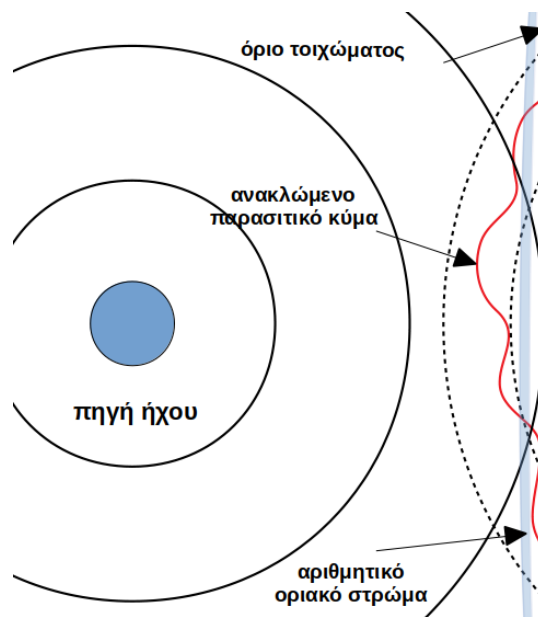
Οι Tam, Kurbašii και Fang[14] έκαναν έλεγχο της ακρίβειας των οριακών συνθηκών των Εξ.3.4 και 3.5 σε πολλά αριθμητικά προβλήματα και αυτές αποδείχθηκαν εξαιρετικά ικανοποιητικές, με την προϋπόθεση η πηγή να βρίσκεται επαρκώς μακριά από τα όρια του χωρίου. Όταν η πηγή βρίσκεται πολύ κοντά στα όρια η λύση αλοιώνεται σε έναν βαθμό.

3.1.2 Οριακές Συνθήκες Τοίχου (Wall)

Για να γίνει κατανοητό το πώς εφαρμόστηκαν και προγραμματίστηκαν οι οριακές συνθήκες τοίχου, θα χρειαστεί να προηγηθούν ορισμένα σημεία που αφορούν τα σχήματα διακριτοποίησης, τα οποία θα αναλυθούν στην αμέσως επόμενη Ενότητα αυτού του Κεφαλαίου.

Σε πολλές έρευνες[9],[10],[14],[15],[6],[16] της υπολογιστικής αεροακουστικής έχει αποδειχθεί ότι απαιτούνται σχήματα πεπερασμένων διαφορών υψηλής τάξης ακρίβειας, ώστε να επιτευχθούν ικανοποιητικά ακριβείς λύσεις της ακουστικής κυματικής εξίσωσης. Το πρόβλημα με τα σχήματα υψηλής τάξης ακρίβειας είναι ότι επιδέχονται και *λανθασμένες* λύσεις *άσχετες* με τις λύσεις των αρχικών μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ), οι οποίες αντιπροσωπεύουν ένα σύνολο λανθασμένων, μη-υπαρκτών κυμάτων. Μερικά από αυτά τα μη-υπαρκτά κύματα έχουν πολύ μικρό μήκος κύματος (ή υψηλή συχνότητα), διαδίδονται με εξαιρετικά υψηλές ταχύτητες και προκαλούν διακύμαση σε όλο το πλέγμα (grid oscillation)[9]. Άλλα πάλι από αυτά τείνουν να αποσβένονται τοπικά δημιουργώντας ένα είδος τοπικού οριακού στρώματος. Στη βιβλιογραφία όλα αυτά τα κύματα συχνά απαντώνται ως **παρασιτικά κύματα (parasitic waves)**. Γίνεται, συνεπώς, αντιληπτή η σημασία αποφυγής διέγερσης παρασιτικών κυμάτων.

Για μη-συνεκτικές ροές η πιο γνωστή *οριακή συνθήκη* που εφαρμόζεται σε ένα *στερεό τοίχωμα* είναι ο μηδενισμός της κάθετης στον τοίχο ταχύτητας (*συνθήκη μη-εισχώρησης*). Αυτή η συνθήκη είναι επαρκής για τον προσδιορισμό μιας μοναδικής λύσης των εξισώσεων Euler. Όμως, κατά τη διακριτοποίηση των εξισώσεων με σχήματα υψηλής τάξης ακρίβειας, οι αλγεβρικές εξισώσεις που προκύπτουν έχουν



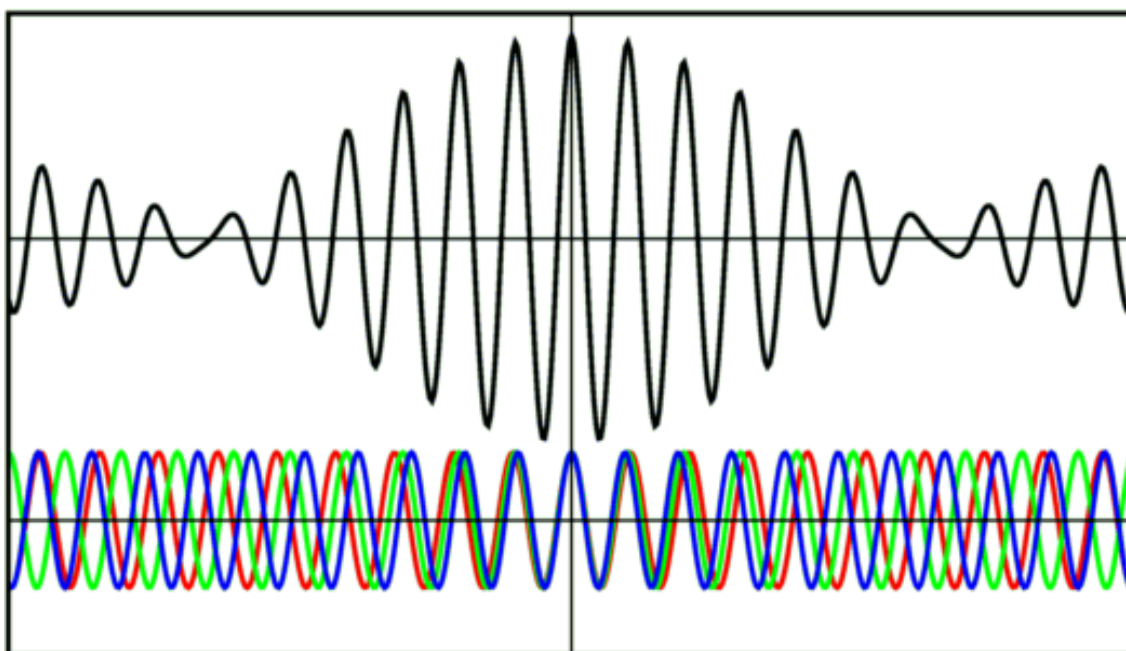
Σχήμα 3.2: Ανάκλαση κύματος σε στερεό τοίχωμα. Διακρίνεται με σκούρα μπλε γραμμή το πραγματικό όριο του πλέγματος, με διαφανές μπλε το αριθμητικά γεννώμενο οριακό στρώμα και με κόκκινο ένα ανακλώμενο παρασιτικό κύμα.

μεγαλύτερη τάξη από τις αρχικές ΜΔΕ. Για το λόγο αυτό απαιτούν επιπλέον αριθμό πλεγματικών κόμβων για να επιλυθούν, οπότε η συνθήκη μη-εισχώρησης δεν είναι επαρκής για τον προσδιορισμό μοναδικής λύσης στο όριο και πρέπει να επιβληθούν επιπλέον συνθήκες. Δυστυχώς, η επιβολή αυτών των επιπλέον συνθηκών οδηγεί στην εισαγωγή λύσεων που αντιστοιχούν σε παρασιτικά κύματα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την υποβάθμιση της συνολικής ποιότητας της αριθμητικής επίλυσης. Η υποβάθμιση αυτή περιέρχεται σε τρία σημεία και απεικονίζεται στο Σχ.3.2

- στη μη τέλεια ανάκλαση ενός ακουστικού κύματος στον τοίχο, δηλαδή στην παραγωγή ανακλώμενου κύματος με πλάτος διαφορετικό από το αρχικό
- στην ανάκλαση των παρασιτικών κυμάτων από τον τοίχο
- στην ανάπτυξη ενός επιπλέον αριθμητικά δημιουργούμενου ορίου πλησίον του κανονικού τοιχώματος, λόγω των αποσβεννόμενων κυμάτων

Οι Tam και Webb[9] ανέπτυξαν ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών χωρικής προσπέλασης (space marching) υψηλής τάξης ακρίβειας ειδικά για αεροακουστικά προβλήματα. Χαρακτηριστικό του σχήματος αυτού, το οποίο θα αναλυθεί εκτενέστερα στην επόμενη ενότητα, είναι ότι διατηρεί τα κύματα με μεγάλο μήκος κύματος αναλλοίωτα, ενώ αποσβένει τα παρασιτικά κύματα, με μικρό μήκος κύματος. Το σχήμα αυτό ονομάστηκε Σχήμα Διατήρησης της Σχέσης Διασποράς (Dispersion-Relation Preserving scheme, DRP)¹. Κατά την ανάπτυξη των πεπερασμένων διαφορών στο

¹Ως διασπορά, στα διδιάστατα κύματα, ορίζεται το φαινόμενο εκείνο κατά το οποίο κύματα της ίδιας «οικογένειας» ή «πακέτου» κυμάτων (wave family ή wave packet) διαδίδονται με διαφορετικές ταχύτητες. Για τον λόγο αυτό τα κύματα της οικογένειας τείνουν να διασπείρονται στον χώρο με



Σχήμα 3.3: Διασπορά των κυμάτων με διαφορετικούς κυματικούς αριθμούς διδιάστατης οικογένειας κυμάτων. Επάνω, με μαύρη γραμμή διακρίνεται η κυματική οικογένεια στο πεδίο του χρόνου. Κάτω, έπειτα από ανάλυση Fourier διακρίνεται χωριστά κάθε κύμα της οικογένειας. Ανάλογα με τη συχνότητά του, κάθε κύμα τείνει να διαφέρει στη συχνότητα διάδοσής του, σε σχέση με τη συχνότητα διάδοσης της οικογένειας κυμάτων, φαινόμενο το οποίο καλείται κυματική διασπορά (*wave dispersion*).

DRP σχήμα οι χωρικές μερικές παράγωγοι προσεγγίζονται από κεντρικές διαφορές με βέλτιστους συντελεστές. Η τάξη του σχήματος είναι αυθαίρετη και εξαρτάται από τη χωρική διακριτοποίηση που είναι επιθυμητή. Οι Tam και Webb υιοθέτησαν ένα χωρικό σχήμα 4ης τάξης ακρίβειας (stencil εφτά(7) σημείων) και αυτό υιοθετήθηκε και σε αυτήν τη διπλωματική εργασία.

3.2 Σχήματα Διακριτοποίησης των Εξισώσεων

Σύμφωνα με τους Tam και Webb[9] τα σχήματα πεπερασμένων διαφορών που χρησιμοποιούνται στα περισσότερα χρονικά ανεξάρτητα προβλήματα Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής δεν είναι επαρκή για χρονικά εξαρτώμενα προβλήματα, όπως τα προβλήματα αερακουστικής. Ένα ευσταθές και καλά συγκλίνον σχήμα πεπερασμένων διαφορών υψηλής τάξης ακρίβειας δεν εγγυάται καλή ακρίβεια κατά την αριθμητική επίλυση της ακουστικής κυματικής εξίσωσης.

τρόπο παρόμοιο με αυτόν που φαίνεται στο Σχ.3.3.

Όπως αναλύθηκε στην προηγούμενη παράγραφο οι LEE επιδέχονται λύσεις τριών τύπων κυμάτων: τα ακουστικά κύματα, τα κύματα στροβιλότητας και τα κύματα εντροπίας[6],[16]. Τα ακουστικά κύματα είναι ιστροπικά (isotropic), μη διασπειρόμενα (non-dispersive), μη διαχεόμενα (non-dissipative) και διαδίδονται με την ταχύτητα του ήχου. Τα κύματα στροβιλότητας και εντροπίας είναι μη διασπειρόμενα, μη διαχεόμενα και εξαιρετικά κατευθυντικά. Διαδίδονται, ή μεταφέρονται (convected) στην κατεύθυνση της μέσης ροής με την ίδια ταχύτητα με αυτήν της ροής. Είναι κατανοητό, λοιπόν, ότι τα σχήματα πεπερασμένων διαφορών που χρησιμοποιούνται σε προβλήματα Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής δεν υποστηρίζουν αυτές τις ιδιότητες. Για τον λόγον αυτό, εισάγεται η σχέση διασποράς.

Σύμφωνα με τη θεωρία της κυματικής διάδοσης[17] τα **χαρακτηριστικά διάδοσης** των κυμάτων, που διέπονται από ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων, «κωδικοποιούνται» στη **σχέση διασποράς** της συχνότητας και του χωρικού κυματικού αριθμού. Η σχέση διασποράς είναι μια συναρτησιακή σχέση μεταξύ της γωνιακής συχνότητας των κυμάτων και των κυματικών αριθμών των χωρικών μεταβλητών. Η σχέση αυτή παράγεται μετασχηματίζοντας τις LEE (ή τις εκάστοτε διέπουσες εξισώσεις) κατά Fourier στο χώρο και στο χρόνο. Η σχέση διασποράς περιγράφει:

- τη δυνατότητα διασποράς (dispersiveness)
- το ρυθμός απόσβεσης (damping rate)
- την ιστροπία ή ανιστροπία
- την ταχύτητα και φάση τόσο της κυματικής «οικογένειας» όσο και όλων των κυμάτων που την αποτελούν.

Με βάση τα παραπάνω, απαιτείται ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών το οποίο να έχει την ίδια, ή σχεδόν την ίδια, σχέση διασποράς με αυτή των αρχικών μερικών διαφορικών εξισώσεων. Κατά τη διακριτοποίηση του συστήματος των LEE απαιτούνται τουλάχιστον πέντε(5) πλεγματικοί κόμβοι για να ορίσουν μια περίοδο ενός ημιτονοειδούς κύματος. Το παραπάνω εφαρμόζεται σε κύματα με κυματικούς αριθμούς α, β έτσι ώστε $\alpha\Delta x, \beta\Delta y \leq \pi/2$ (δηλαδή κύματα με μήκη κύματος μεγαλύτερα ή ίσα με τέσσερα(4) πλεγματικά κενά), όπου $\Delta x, \Delta y$ η πλεγματική διακριτοποίηση στις x, y κατευθύνσεις αντίστοιχα. Αυτά τα σχήματα πεπερασμένων διαφορών αναφέρονται ως σχήματα **Διατήρησης της Σχέσης Διασποράς (Dispersion Relation Preserving schemes, DRP)**.

Σε ότι αφορά, γενικά, στη διατύπωση ενός σχήματος πεπερασμένων διαφορών, η συνήθης διαδικασία που ακολουθείται είναι η προσέγγιση των μερικών παραγώγων με ένα ανάπτυγμα Taylor, το οποίο αποκόπτεται σε ένα σημείο, ανάλογα με την τάξη ακρίβειας που είναι επιθυμητή. Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή και εφαρμόζεται εκτενώς σε όλα τα προβλήματα της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής. Διαπιστώνεται όμως ότι σε προβλήματα αεροακουστικής η διαδικασία αυτή δεν είναι απαραίτητα η καλύτερη και αυτό διότι ο σκοπός που τέθηκε είναι η διατήρηση της σχέσης διασπο-

ράς. Αυτό πρέπει να αντικατοπτρίζει και το σχήμα διακριτοποίησης, δηλαδή: «την ανάπτυξη ενός σχήματος πεπερασμένων διαφορών του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier να αντιστοιχεί σε αυτόν των αρχικών ΜΔΕ».

Στην προηγούμενη ενότητα, κατά την περιγραφή των οριακών συνθηκών τοίχου, έγινε μια πρώιμη αναφορά στο DRP σχήμα. Αναφέρθηκε - αυθαίρετα σε εκείνο το σημείο - ότι απαιτούνται σχήματα υψηλής τάξης ακρίβειας. Στην ενότητα αναλύθηκε ο λόγος που αυτά χρησιμοποιούνται για την επίλυση ενός αεροακουστικού προβλήματος. Το σημαντικό με αυτά τα σχήματα πεπερασμένων διαφορών είναι ότι επιδέχονται και λανθασμένες λύσεις, οι οποίες αντιστοιχούν στα λεγόμενα «παρασιτικά κύματα». **Σκοπός** του DRP σχήματος είναι η αποφυγή διέγερσης αυτών των παρασιτικών κυμάτων. Με την επιλογή κατάλληλων αριθμητικών συντελεστών τα παρασιτικά κύματα αποσβέννυνται ταχύτατα και δεν προλαβαίνουν να επηρεάσουν τη λύση.

3.2.1 Διακριτοποίηση στο Εσωτερικό του Πλέγματος

Ακολουθεί η απόδειξη για τον προσδιορισμό των βέλτιστων συντελεστών των όρων του σχήματος χωρικής διακριτοποίησης DRP.

Θεωρείται η προσέγγιση της πρώτης παραγώγου $\partial f/\partial x$ στον l κόμβο ενός ομοιόμορφου πλέγματος. Έστω ότι χρησιμοποιούνται M τιμές της f δεξιά και N τιμές της f αριστερά από αυτόν τον κόμβο για να σχηματιστεί η προσέγγιση πεπερασμένης διαφοράς της μερικής παραγώγου

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_l \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-N}^M \alpha_j f_{l+j} \quad (3.6)$$

Η συνήθης διαδικασία που ακολουθείται είναι η ανάπτυξη σε σειρά Taylor του Δx στο δεξί μέλος της Εξ.3.6, ώστε να προσδιοριστούν οι συντελεστές α_j , εξισώνοντας τους συντελεστές ίδιας δύναμης του Δx . Τα σχήματα πεπερασμένων διαφορών που κατασκευάζονται με αυτόν τον τρόπο θα αναφέρονται από εδώ και στο εξής ως **καινά σχήματα**. Οι συντελεστές α_j για το DRP σχήμα προσδιορίζονται απαιτώντας το μετασχηματισμένο κατά Fourier δεξί μέλος της Εξ.3.6 να είναι μια καλή προσέγγιση του αντίστοιχου των ΜΔΕ στο αριστερό μέλος.

Η παραπάνω εξίσωση πεπερασμένων διαφορών είναι μια ειδική περίπτωση της παρακάτω εξίσωσης, για συνεχές x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-N}^M \alpha_j f(x + j\Delta x) \quad (3.7)$$

αφού η Εξ.3.6 μπορεί να παραχθεί από την Εξ.3.7 θέτοντας $x = l\Delta x$. Σύμφωνα με το μετασχηματισμό Fourier που ορίστηκε στο Παράρτημα Α', μετασχηματίζεται το αριστερό και δεξί μέλος της Εξ.3.6 ως

$$i\alpha\tilde{f} \approx \left(\frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-N}^M \alpha_j e^{i\alpha_j \Delta x} \right) \tilde{f} \quad (3.8)$$

Επιλύοντας την Εξ.3.8 ως προς α , και συμβολίζοντάς τον με $\bar{\alpha}$, προκύπτει

$$\bar{\alpha} = -i \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-N}^M \alpha_j e^{i\alpha_j \Delta x} \quad (3.9)$$

Ο $\bar{\alpha}$ είναι ο κυματικός αριθμός του μετασχηματισμού Fourier του σχήματος πεπερασμένων διαφορών της Εξ.3.7 ή 3.6 και ονομάζεται **υπολογιστικός κυματικός αριθμός**. Η ποσότητα $\bar{\alpha}\Delta x$ είναι μια περιοδική συνάρτηση του $\alpha\Delta x$ με περίοδο 2π . Για να εξασφαλιστεί ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σχήματος πεπερασμένων διαφορών προσεγγίζει ικανοποιητικά τη μερική παράγωγο σε ένα διάστημα επιθυμητών κυματικών αριθμών (κύματα με μήκος κύματος μεγαλύτερο από τέσσερα(4) διαστήματα Δx , ή $|\alpha\Delta x| < \pi/2$) είναι απαραίτητο οι συντελεστές α_j να επιλεγούν έτσι ώστε να ελαχιστοποιούν το ολοκληρωμένο σφάλμα E

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\eta}^{\eta} |\alpha\Delta x - \bar{\alpha}\Delta x|^2 d(\alpha\Delta x) \\ &= \int_{-\eta}^{\eta} |k + i \sum_{j=-N}^M \alpha_j e^{ijk}|^2 dk \end{aligned} \quad (3.10)$$

όπου $\eta = 1.1$ σύμφωνα με τον Tam[6] και κατά το Σχ.3.4.

Οι συνθήκες κατά τις οποίες το E ελαχιστοποιείται είναι

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_j} = 0, \quad j = -N, \dots, M \quad (3.11)$$

και αποτελούν ένα σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με βάση τις οποίες καθορίζονται οι συντελεστές α_j .

Ενδιαφέρον έχει η ειδική περίπτωση που $N = M$. Στην περίπτωση αυτή ο υπολογιστικός κυματικός αριθμός $\bar{\alpha}$ είναι πραγματικός και το δεξί μέλος της Εξ.3.9 είναι μια ημιτονοειδής σειρά Fourier. Με άλλα λόγια, το σχήμα πεπερασμένων διαφορών προσεγγίζει τη μερική παράγωγο με μια ημιτονοειδή σειρά Fourier του χωρικού κυματικού αριθμού. Αν τα N και M δεν είναι ίσα (το stencil είναι ασύμμετρο) ο $\bar{\alpha}$ είναι μιγαδικός. Αποδεικνύεται ότι η χρήση ασύμμετρου stencil σε ένα μεγάλο διάστημα

οδηγεί σε χωρικά αυξανόμενες κυματικές λύσεις, οπότε, για την αποφυγή τέτοιου είδους ασταθειών υιοθετήθηκαν από τους Tam και Webb[9] σχήματα κεντρικών πεπερασμένων διαφορών για το εσωτερικό του πλέγματος. Ασύμμετρα stencils μπορούν να υιοθετηθούν τοπικά (πχ. στα όρια) χωρίς να γίνεται συσσώρευση αριθμητικών ασταθειών.

Σύμφωνα με όσα περιγράφηκαν παραπάνω, γίνεται μια αντιστοίχιση της προσέγγισης με ανάπτυγμα Taylor και της προσέγγισης του χωρικού κυματικού αριθμού. Για παράδειγμα, αν $N = M = 3$ μπορεί να εφαρμοστεί ακρίβεια τέταρτης τάξης, $(\Delta x)^4$, στην Εξ.3.7. Με τον τρόπο αυτό προσδιορίζονται οι επτά(7) συντελεστές του stencil.

Η διαδικασία με την οποία προκύπτουν οι συντελεστές του σχήματος DRP ακολουθεί όπως παρακάτω:

Από την Εξ.3.10 γράφεται

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-\eta}^{\eta} |k + i \sum_{j=-3}^{-1} \alpha_j e^{ijk} + \alpha_0 i e^0 + i \sum_{j=1}^3 \alpha_j e^{ijk}|^2 dk \\
 &= \int_{-\eta}^{\eta} |k + i \sum_{j=1}^3 (-\alpha_j) e^{ijk} + \alpha_0 i + i \sum_{j=1}^3 \alpha_j e^{ijk}|^2 dk \quad (3.12) \\
 &= \int_{-\eta}^{\eta} |k + i \sum_{j=1}^3 \alpha_j (e^{ijk} - e^{-ijk}) + \alpha_0 i|^2 dk
 \end{aligned}$$

Από τον τύπο του Euler (Παράρτημα Δ'), γράφεται

$$e^{ijk} - e^{-ijk} = \cos(jk) + i \sin(jk) - \cos(-jk) - i \sin(-jk)$$

όπου για $j \in \mathbb{Z}$ και $k = \alpha \Delta x \in \mathbb{R}$ το $jk \in \mathbb{R}$, οπότε $e^{ijk} - e^{-ijk} = 2i \sin(jk)$.

Η Εξ.3.12 γράφεται τότε

$$E = \int_{-\eta}^{\eta} |k - 2 \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sin(jk) + \alpha_0 i|^2 dk \quad (3.13)$$

όπου το πραγματικό μέρος είναι το $k - 2 \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sin(jk)$ και το φανταστικό είναι το $\alpha_0 i$.

Για έναν μιγαδικό $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ ή $|z|^2 = Real^2(z) + Imag^2(z)$. Η

Εξ.3.13 γίνεται

$$E = \int_{-\eta}^{\eta} \left[\left(k - 2 \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sin(jk) \right)^2 + \alpha_0^2 \right] dk \quad (3.14)$$

Επιθυμώντας την ελαχιστοποίηση του ολοκληρωμένου σφάλματος E , παραγωγίζεται μερικώς η Εξ.3.14 ως προς α_0 , α_1 , α_2 και α_3 και τίθεται ίση με μηδέν, ήτοι

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_0} = \int_{-\eta}^{\eta} 2\alpha_0 dk = 2\alpha_0 \cdot 2\eta = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_1} = \int_{-\eta}^{\eta} 2 \left[k - 2 \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sin(jk) \right] 2 \sin k dk \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_2} = \int_{-\eta}^{\eta} 2 \left[k - 2 \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sin(jk) \right] 2 \sin k dk \quad (3.17)$$

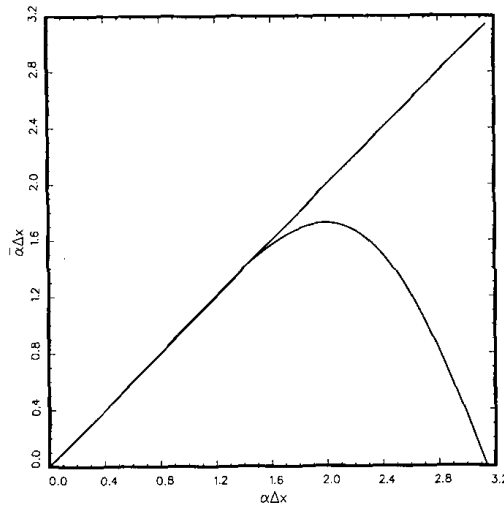
$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_3} = \int_{-\eta}^{\eta} 2 \left[k - 2 \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sin(jk) \right] 2 \sin k dk \quad (3.18)$$

Χρησιμοποιώντας τις ολοκληρωματικές σχέσεις τριγωνομετρικών μεγεθών του Παραρτήματος Δ', γράφεται για τις παραπάνω εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{\partial E}{\partial \alpha_1} &= (-2\eta \cos \eta + 2 \sin \eta) - 2\alpha_1 \left(\eta - \frac{1}{2} \sin 2\eta \right) \\ &\quad - 2\alpha_2 \left(\sin \eta - \frac{1}{3} \sin 3\eta \right) - 2\alpha_3 \left(\frac{1}{2} \sin 2\eta - \frac{1}{4} \sin 4\eta \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{\partial E}{\partial \alpha_2} &= \left(-\eta \cos 2\eta + \frac{1}{2} \sin 2\eta \right) - 2\alpha_1 \left(\sin \eta - \frac{1}{3} \sin 3\eta \right) \\ &\quad - 2\alpha_2 \left(\eta - \frac{1}{4} \sin 4\eta \right) - 2\alpha_3 \left(\sin \eta - \frac{1}{5} \sin 5\eta \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{\partial E}{\partial \alpha_3} &= \left(-\frac{2}{3} \eta \cos 3\eta + \frac{2}{9} \sin 3\eta \right) - 2\alpha_1 \left(\frac{1}{2} \sin 2\eta - \frac{1}{4} \sin 4\eta \right) \\ &\quad - 2\alpha_2 \left(\sin \eta - \frac{1}{5} \sin 5\eta \right) - 2\alpha_3 \left(\eta - \frac{1}{6} \sin 6\eta \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$



Σχήμα 3.4: Σύγκριση του $\bar{\alpha}\Delta x$ και $\alpha\Delta x$ για το βελτιστοποιημένο σχήμα κεντρικών διαφορών ($N = M = 3$). (πηγή:[9]σελ.265)

Για $\eta = 1.1$ (Tam[6], Σχ.3.4), προκύπτει το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1.3915036 & 1.8875785 & 1.2842974 \\ 1.8875785 & 2.6758010 & 2.0646309 \\ 1.2842974 & 2.0646309 & 2.0961529 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7845032 \\ 1.0515994 \\ 0.6890972 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Οι συντελεστές που, τελικά, προκύπτουν είναι

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0 \\ \alpha_1 &= -\alpha_{-1} = 0.770882380518 \\ \alpha_2 &= -\alpha_{-2} = -0.166705904415 \\ \alpha_3 &= -\alpha_{-3} = 0.020843142770 \end{aligned}$$

Αυτοί συμπεριλαμβάνονται, συγκεντρωμένα μαζί με όλους τους υπόλοιπους συντελεστές που χρησιμοποιήθηκαν στη διπλωματική εργασία, στο Παράρτημα Ε'.

Το Σχ.3.4 δείχνει τη σχέση μεταξύ των $\bar{\alpha}\Delta x$ και $\alpha\Delta x$ για χρονικό διάστημα περιόδου $[0, \pi]$ κάνοντας χρήση των παραπάνω συντελεστών. Για $\alpha\Delta x$ μέχρι 1.45 η καμπύλη είναι σχεδόν ίδια με την ευθεία $\bar{\alpha} = \alpha$. Έτσι, το σχήμα πεπερασμένων διαφορών μπορεί να παρέχει επαρκή προσέγγιση της μερικής παραγώγου για κύματα με μήκος κύματος μεγαλύτερο από 4.5 πλεγματικά διαστήματα. Για $\alpha\Delta x$ μεγαλύτερα από 2.0 η καμπύλη $\bar{\alpha}(\alpha)$ αποκλίνει σημαντικά από την ευθεία. Αυτός είναι και ο λόγος που τα χαρακτηριστικά διάδοσης των κυματικών συνιστωσών με μικρό μήκος κύματος μιας οικογένειας κυμάτων είναι πολύ διαφορετικά από αυτά των αρχικών μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Ανακεφαλαιώνοντας, αναφέρθηκαν οι λόγοι χρήσης ενός ειδικού χωρικού σχήματος πεπερασμένων διαφορών υψηλής τάξης ακρίβειας, που ονομάζεται σχήμα Διατήρησης της Σχέσης Διασποράς (Dispersion Relation Preserving scheme, DRP), σε προβλήματα που περιλαμβάνουν κύματα υψηλών συχνοτήτων (ή μικρού μήκους κύματος). Τα παρασιτικά αυτά κύματα εισάγουν σφάλμα στη λύση και χρειάζεται να αποσβεστούν.

3.2.2 Διακριτοποίηση στα Όρια και στο Εσωτερικό Κοντά στα Όρια του Πλέγματος

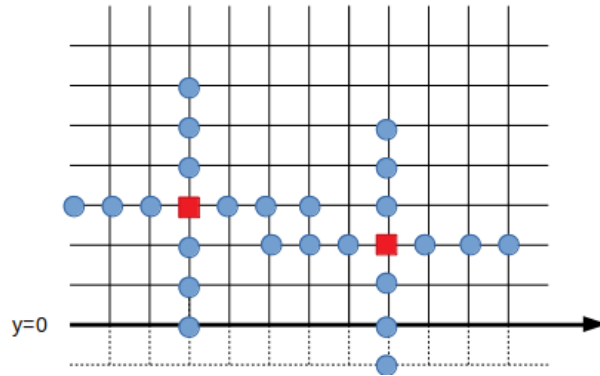
Η εξασφάλιση της ακρίβειας των λύσεων, καθολικά, σε ένα πρόβλημα υπολογιστικής αεροακουστικής απαιτεί τα όρια του υπολογιστικού χωρίου να είναι «διαπερατά» σε όλα τα εξερχόμενα κύματα, δηλαδή να μην προκαλούν αριθμητική, τεχνητή ανάκλαση προς το εσωτερικό.

Για τις LEE σε ένα πεδίο ομοιόμορφης ροής, η ανάκλαση αυτή αφορά τα ακουστικά κύματα για τα όρια στα οποία η ροή εισέρχεται (inflow boundaries), ενώ αντίθετα στα όρια από τα οποία η ροή εξέρχεται (outflow boundaries), αφορά έναν συνδιασμό ακουστικών κυμάτων, κυμάτων στροβιλότητας και κυμάτων εντροπίας (Σχ.3.1). Οι οριακές συνθήκες που διαχειρίζονται αυτού του είδους τα όρια αναπτύχθηκαν στην Ενότητα 3.1.1 και είναι οι **οριακές συνθήκες ακτινοβολίας ή εισερχόμενης ροής** και οι **οριακές συνθήκες εξερχόμενης ροής**[10],[14]. Επίσης, στην Ενότητα 3.1.2 περιγράφηκε ο τρόπος με τον οποίο έγινε η διαχείριση ενός ορίου-τοιχώματος[15]. Οι εξισώσεις που επιλύονται για τις οριακές συνθήκες ακτινοβολίας και εξερχόμενης ροής είναι οι Εξ.3.4 και 3.5 αντίστοιχα, ενώ για την περίπτωση του τοίχου επιλύονται οι LEE.

Η ανάλυση που ακολουθεί έγινε από τους Tam και Dong[15]. Σύμφωνα με αυτήν, έγινε χρήση του DRP σχήματος και με βάση αυτό διακριτοποιήθηκαν οι LEE στα όρια με ένα stencil εφτά(7) σημείων.

Θεωρούνται διδιάστατες ακουστικές διαταραχές οι οποίες υπερτίθενται μιας μέσης ομοιόμορφης ροής, πυκνότητας ρ_0 , πίεσης p_0 και ταχύτητας στη x -κατεύθυνση u_0 . Στις LEE, οι οποίες δίνονται από τις Εξ.2.44, ο όρος Q αντιπροσωπεύει ένα σύνολο ακουστικών πηγών. Έχουν αγνοηθεί όροι συνεκτικότητας, καθώς δεν είναι σημαντικοί στα περισσότερα ακουστικά προβλήματα.

Έστω ότι το επίπεδο $x - y$ διακριτοποιείται με ένα ορθογώνιο ομοιόμορφο πλέγμα ισαπεχόντων διαστημάτων Δx και Δy στις x - και y -κατευθύνσεις, αντίστοιχα. Η διακριτοποιημένη μορφή των LEE (Εξ.2.44) σύμφωνα με το DRP σχήμα είναι



Σχήμα 3.5: Stencil εφτά(7) σημείων για εσωτερικό κόμβο του πλέγματος (αριστερά) και για κόμβο που απαιτεί ψευδόκομβους για να υπολογιστεί (δεξιά).

$$\mathbf{K}_{i,j}^{(n)} = -\frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-3}^3 \alpha_k \mathbf{E}_{i+k,j}^{(n)} - \frac{1}{\Delta y} \sum_{k=-3}^3 \alpha_k \mathbf{F}_{i,j+k}^{(n)} + \mathbf{Q}_{i,j}^{(n)} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^{(n+1)} = \mathbf{U}_{i,j}^{(n)} + \Delta t \sum_{k=0}^4 \beta_k \mathbf{K}_{i,j}^{(n-k)} \quad (3.24)$$

όπου i, j είναι οι δείκτες των πλεγματικών κόμβων και ο υπερδείκτης n ανταποκρίνεται στη χρονική επανάληψη. Οι β_k είναι οι συντελεστές της Runge-Kutta πέντε(5) βημάτων και οι α_k είναι οι συντελεστές του DRP σχήματος (Παράρτημα Ε'). Αν $\mathbf{U} = \mathbf{U}_{initial}$ στη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι η αρχική συνθήκη των LEE, οι αρχικές συνθήκες για το DRP σχήμα είναι

$$\mathbf{U}_{i,j}^{(0)} = \mathbf{U}_{initial}, \quad \mathbf{U}_{i,j}^{(n)} = 0 \quad n < 0 \quad (3.25)$$

Έστω ότι υπάρχει στερεό τοίχωμα στο πλέγμα του Σχ.3.5, στο $y = 0$. Για τους κόμβους που απέχουν τρεις(3) ή περισσότερες σειρές από το τοίχωμα, το υπολογιστικό stencil έγκειται εξ ολοκλήρου εντός του φυσικού χωρίου. Οι κόμβοι αυτοί αναφέρονται ως *εσωτερικοί*. Για τις πρώτες τρεις(3) γραμμές κόμβων πλησίον του τοίχου, το stencil εφτά(7) σημείων επεκτείνεται εκτός του φυσικού χωρίου. Οι κόμβοι που βρίσκονται εκτός του υπολογιστικού χωρίου αναφέρονται ως *ψευδόκομβοι*.

Οι ψευδόκομβοι είναι ένα φανταστικό δημιούργημα χωρίς φυσική υπόσταση, αλλά είναι απαραίτητοι για τα σχήματα υψηλής τάξης ακρίβειας. Σκοπός τους είναι να συμπληρώσουν το σύνολο των συνθηκών που απαιτούνται για την επίλυση των διακριτοποιημένων εξισώσεων². Παρόλα αυτά πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι λειτουργούν με τον ίδιο τρόπο που λειτουργεί ένα οποιοδήποτε όριο του υπολογιστικού χωρίου σε ένα πρόβλημα αεροακουστικής: εισάγουν την πιθανότητα εμφάνισης εσφαλμένων

²Έχει ήδη αναφερθεί ότι οι διακριτοποιημένες εξισώσεις με χρήση ενός σχήματος υψηλής τάξης ακρίβειας είναι υψηλότερης τάξης από τις αρχικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, οπότε απαιτούν και περισσότερες συνθήκες για την επίλυσή τους.

λύσεων που ανταποκρίνονται σε παρασιτικά κύματα, οπότε πρέπει να αντιμετωπιστούν με τρόπο παρόμοιο με αυτόν που αντιμετωπίστηκαν τα όρια στις οριακές συνθήκες ακτινοβολίας και εξερχόμενης ροής[14].

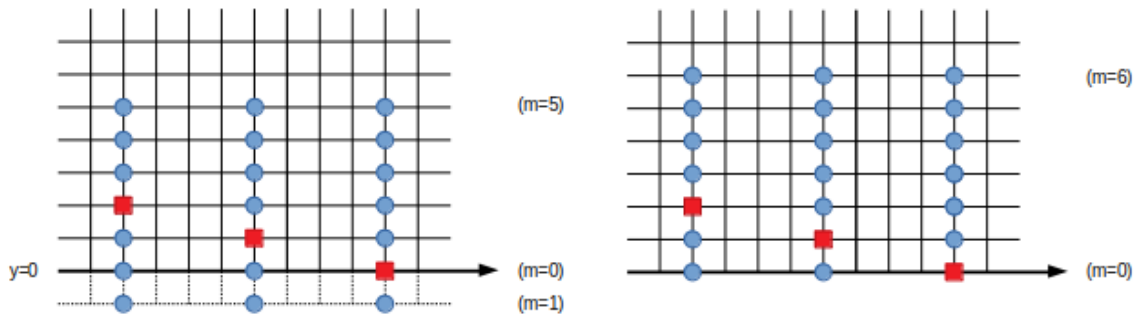
Έστω, λοιπόν, ένα μη-συντεκτικό ρευστό το οποίο περιγράφεται από τις εξισώσεις Euler, όμοια με όσα έχουν ήδη αναφερθεί. Στο Σχ.3.5 διακρίνεται ένα στερεό τοίχωμα για $y = 0$. Η οριακή συνθήκη για την περίπτωση αυτή είναι η συνθήκη μη-εισχώρησης, όπου η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας είναι μηδέν, $v' = 0$. Αφού υπάρχει μόνο μία οριακή συνθήκη, ένας είναι και ο ψευδόκομβος που απαιτείται για κάθε οριακό κόμβο στο τοίχωμα. Από άποψη φυσικής, το τοίχωμα ασκεί πίεση στο ρευστό με μέτρο τέτοιο ώστε η κάθετη ταχύτητα πάνω στην επιφάνειά του να είναι μηδέν, $v' = 0$. Αφού χρησιμοποιείται ένας ψευδόκομβος, το σχήμα πεπερασμένων διαφορών για την y -παράγωγο στο όριο πρέπει να τροποποιηθεί. Σύμφωνα με τους Tam και Dong[15] υιοθετείται ένα σχήμα πίσω πεπερασμένων διαφορών (Σχ.3.6), και αυτό υιοθετήθηκε και προγραμματίστηκε και σε αυτήν τη διπλωματική εργασία.

Όσα περιγράφουν στη συνέχεια αφορά τη διατύπωση του stencil επτά(7) σημείων με χρήση του πρώτου ψευδόκομβου, με συμβολισμό με τον υπερδείκτη ⁵¹, αλλά όμοια επεκτείνεται και για τους δύο επόμενους (Σχ.3.6). Σύμφωνα με το σχήμα πίσω πεπερασμένων διαφορών των Tam και Dong οι μερικές παράγωγοι $\partial p' / \partial y$, $\partial u' / \partial y$, $\partial v' / \partial y$ υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τιμές των μεταβλητών εσωτερικά του χωρίου. Για την y -παράγωγο της πίεσης p' τα stencils επεκτείνονται στον αμέσως επόμενο κόμβο μετά τον τοίχο (πρώτος ψευδόκομβος). Η τιμή της πίεσης στον ψευδόκομβο ($i, -1$) ή $p'_{i,-1}^{(n)}$ επιλέγεται έτσι ώστε $v'_{i,0}^{(n)}$ για όλα τα n . Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της διακριτοποιημένης εξίσωσης της y -ορμής (η τρίτη εξίσωση της Εξ.2.44, η οποία χρησιμοποιείται για να υπολογίσει τις τιμές της ταχύτητας v' την επόμενη χρονική στιγμή). Χρησιμοποιώντας το σχήμα πίσω πεπερασμένων διαφορών του Σχ.3.6 η y -ορμή στο τοίχωμα ($i, 0$) γράφεται

$$v'_{i,0}^{(n+1)} = v'_{i,0}^{(n)} + \Delta t \sum_{k=0}^4 \beta_k K_{i,0}^{n-k} \quad (3.26)$$

$$K_{i,0}^{n-k} = -\frac{u_0}{\Delta x} \sum_{m=-3}^3 \alpha_m v'_{i+m,0}^{(n-k)} - \frac{1}{\rho_0 \Delta y} \sum_{m=-1}^5 \alpha_m^{51} p'_{i,m}^{(n-k)} \quad (3.27)$$

όπου α_m^{51} είναι οι βελτιστοποιημένοι συντελεστές του σχήματος πίσω πεπερασμένων διαφορών και β_k είναι οι συντελεστές της Runge-Kutta πέντε(5) βημάτων. Οι παραπάνω εξισώσεις χρησιμοποιούνται για να υπολογιστεί η ταχύτητα $v'_{i,0}^{(n+1)}$ την επόμενη χρονική στιγμή $n + 1$, αφού υπολογιστούν όλες οι φυσικές ποσότητες τη χρονική στιγμή n , πλην της πίεσης $p'_{i,-1}^n$ στον ψευδόκομβο. Η πίεση $p'_{i,-1}^n$ υπολογίζε-



Σχήμα 3.6: Stencil επτά(7) σημείων για τον υπολογισμό (α) της κατά y -παραγώγου της διαταραχής της πίεσης p' και (β) της κατά y -παραγώγου της διαταραχής της πυκνότητας ρ' και των συνιστωσών της ταχύτητας u' και v' στο όριο τοιχώματος, $y = 0$.

ται θέτοντας $v'_{i,0}^{(n+1)} = 0$ στις παραπάνω εξισώσεις, ως

$$p'_{i,-1}^{(n)} = -\frac{1}{\alpha_{-1}^{51}} \sum_{m=0}^5 \alpha_m^{51} p'_{i,m}^{(n)} \quad (3.28)$$

Αντίστοιχα υπολογίζονται και τα σχήματα των υπόλοιπων δύο ψευδόκομβων. Οι τιμές των συντελεστών α_j του σχήματος πίσω πεπερασμένων διαφορών και για τους τρεις(3) ψευδόκομβους βρίσκονται συγκεντρωμένα στο Παράρτημα Ε'.

3.3 Σχετικά Τεχνάσματα: Ο Όρος Απόσβεσης και η Σημασία του

Η ανάλυση που έγινε για τα σχήματα διακριτοποίησης πεπερασμένων διαφορών επικεντρώθηκε στην αντιμετώπιση των παρασιτικών κυμάτων. Το σχήμα DRP[9] το οποίο περιγράφηκε, τόσο για το εσωτερικό όσο και για τα όρια του υπολογιστικού χωρίου, αποσβένει τα κύματα αυτά και αποτρέπει την εισαγωγή σφάλματος στην καθολική λύση των εξισώσεων. Παρ'όλα αυτά, βρέθηκε ότι δεν είναι αρκετό ώστε να εξαλείψει πλήρως την επιρροή των παρασιτικών κυμάτων. Το ρόλο αυτό υποβοηθά η χρήση του λεγόμενου **όρου απόσβεσης**.

Η ιδέα χρήσης όρων απόσβεσης που εξομαλύνουν το μέτωπο ενός κύματος κρούσης δεν είναι νέα[18],[19]. Οι Tam, Webb και Dong[20],[6] ανέπτυξαν μια μέθοδο σύμφωνα με την οποία προσάρμωσαν έναν τέτοιο όρο για προβλήματα αεροακουστικής. Σε αυτή τη μέθοδο τα κύματα με μεγάλο μήκος κύματος ($\alpha \Delta x < 1.0$, Σχ.3.4) παραμένουν πρακτικά αναλλοίωτα.

Θεωρείται η γραμμικοποιημένη εξίσωση της x -ορμής (η δεύτερη εξίσωση της Εξ.2.44) διακριτοποιημένη σε ένα υπολογιστικό πλέγμα με διάστημα Δx στον x -άξονα. Έστω ότι προστίθεται ένα γραμμικός όρος απόσβεσης στο δεξί μέλος της εξίσωσης της ορμής και ότι ο όρος αυτός αποτελείται από τιμές της ταχύτητας u' του stencil εφτά(7) σημείων του DRP σχήματος. Για τον τυχαίο πλεγματοκόμβο i η διακριτοποιημένη εξίσωση γράφεται ως³

$$\frac{du_i}{dt} + \dots = -\frac{v_\alpha}{(\Delta x)^2} \sum_{k=-3}^3 d_k u_{i+k} \quad (3.29)$$

όπου $v_\alpha/(\Delta x)^2$ είναι ο συντελεστής απόσβεσης. Ο μετασχηματισμός Fourier της Εξ.3.29 είναι

$$\frac{d\tilde{u}_i}{dt} + \dots = -\frac{v_\alpha}{(\Delta x)^2} D(\alpha\Delta x) \tilde{u} \quad (3.30)$$

όπου

$$D(\alpha\Delta x) = \sum_{j=-3}^3 d_j e^{-ij\alpha\Delta x} \quad (3.31)$$

Οι Εξ.3.30 και 3.31 δείχνουν ότι το μέγεθος της απόσβεσης εξαρτάται από τον κυματικό αριθμό. Με τον τρόπο αυτό, εισάγοντας **τεχνητά** τον όρο απόσβεσης με κατάλληλη επιλογή των συντελεστών d_j , είναι δυνατό να αποσβεστούν μόνο τα παρασιτικά κύματα με μικρό μήκος κύματος (ή μεγάλο κυματικό αριθμό). Οι συντελεστές αυτοί υπολογίζονται στα [20] και [21] και συμπεριλαμβάνονται στο Παράρτημα Ε'.

Ανακεφαλαιώνοντας, στο Κεφάλαιο αυτό αναλύονται οι «ιδιαιτερότητες» ενός αεροακουστικού προβλήματος και πώς αυτές επηρεάζουν τις οριακές συνθήκες και τα σχήματα διακριτοποίησης που πρέπει να χρησιμοποιηθούν, κατά την αριθμητική του επίλυση. Από τη μία πλευρά, λοιπόν, πρέπει να ληφθεί υπόψη η μετάδοση/μεταφορά, με σωστό τρόπο, των εμφανιζόμενων *ακουστικών κύματων, κύματων στροβιλότητας και κύματων εντροπίας*, τόσο από το εξωτερικό του υπολογιστικού χωρίου προς το εσωτερικό όσο και αντίστροφα. Η ιδιαιτερότητα αυτή ρυθμίζεται με κατάλληλες οριακές συνθήκες. Από την άλλη πλευρά, η επιθυμητή ακρίβεια στην επίλυση σε συνδιασμό με την πολύ μικρή κλίμακα των διαταραχών των ακουστικών μεταβλητών, επιβάλλει τη χρήση σχημάτων χωρικής διακριτοποίησης υψηλής τάξης ακρίβειας. Αυτά με τη σειρά τους προκαλούν την εμφάνιση των λεγόμενων *παρασιτικών κυμάτων* στα όρια, τα οποία αν δεν αποσβεστούν άμεσα, επηρεάζουν τη λύση καθολικά. Για την αντιμετώπιση αυτής της ιδιαιτερότητας, αναπτύχθηκε το σχήμα χωρικής διακριτοποίησης DRP.

³Ο ' παραλείπεται από τα μεγέθη, αλλά εννοούνται διαταραχές.

Κεφάλαιο 4

Περί Αρχιτεκτονικής, Λειτουργίας και Προγραμματισμού σε GPUs

4.1 Αρχιτεκτονική και Πλεονεκτήματα Χρήσης της GPU

Η κύρια λειτουργία των **μονάδων επεξεργασίας γραφικών (graphical processing units, GPUs)** είναι ο υπολογισμός και η απεικόνιση (rendering) τριδιάστατων αντικειμένων και η δημιουργία γραφικού περιβάλλοντος σε ένα υπολογιστικό σύστημα.

Παρά το γεγονός ότι οι GPUs κατασκευάστηκαν αρχικά για τη δημιουργία γραφικών, έχουν γνωρίσει εκτεταμένη χρήση, ειδικά την τελευταία δεκαετία, στον τομέα της έρευνας και ανάπτυξης παγκοσμίως. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην υπολογιστική επιτάχυνση (computational acceleration) που παρέχουν, σε σχέση με τις **κεντρικές μονάδες επεξεργασίας (central processing units, CPUs)**.

Όμοια με τις CPUs, οι GPUs είναι συσκευές που αποτελούνται από επεξεργαστή ενός chip (single-chip processor). Ωστόσο, μια GPU έχει εκατοντάδες πυρήνες σε σχέση με τους τέσσερις ή οχτώ που έχει μια συνήθης CPU. Η εξέλιξη των GPUs, με τα χρόνια, κατευθύνεται προς την καλύτερη απόδοση και ακρίβεια πραγματικών αριθμών (floating point, flop).

Η NVIDIA ήταν ο πρώτος οργανισμός, το 2006-2007, που εισήγαγε την μαζικά πα-

CPU	GPU
Πολύ γρήγορη cache memory ¹	Πολλές λογικές και αριθμητικές μονάδες.
Ισχυρή διακλαδωτική διασπορά δεδομένων ²	Ταχεία πρόσβαση στη μνήμη του chip (chip onboard memory).
Υψηλή απόδοση σε παραλληλοποίηση διεργασιών.	Υψηλή απόδοση σε παραλληλοποίηση επεξεργασίας δεδομένων.

¹ Πρόκειται για μνήμη που αποθηκεύει προσωρινά δεδομένα ώστε να είναι άμεσα προσβάσιμα από μελλοντικές κλήσεις.

² Διακλαδωτική διασπορά δεδομένων (data branching granularity) ονομάζεται στον παράλληλο προγραμματισμό το μέτρο της υπολογιστικής ισχύος που απαιτείται για μία διεργασία (task ή grain).

Πίνακας 4.1: Πλεονεκτήματα και σύγκριση των CPU και GPU.

ραλληλοποιημένη αρχιτεκτονική στις GPUs της, με χρήση της **CUDA (Compute Unified Device Architecture)**. Η CUDA είναι ένα μοντέλο προγραμματιστικής διεπιφάνειας (application programming interface, API) το οποίο λειτουργεί ως πλατφόρμα παράλληλου προγραμματισμού και άλλαξε τελείως τον τρόπο με τον οποίο γινόταν ο ως τότε προγραμματισμός σε GPUs γενικευμένης χρήσης (general-purpose GPU, GPGPU)¹. Η αρχιτεκτονική CUDA δίνει πρόσβαση σε έναν αριθμό επεξεργαστικών πυρήνων, οι οποίοι συνεργάζονται μεταξύ τους με τρόπο που τους δίνει τη δυνατότητα παράλληλου χειρισμού και επεξεργασίας ενός μεγάλου όγκου δεδομένων. Το μοντέλο του προγραμματισμού σε GPUs περιλαμβάνει την ταυτόχρονη χρήση CPUs και GPUs σε ένα υπολογιστικό σύστημα το οποίο ονομάζεται *ετερογενές*. Σε ένα τέτοιο σύστημα το σειριακό τμήμα μιας εφαρμογής εκτελείται στην CPU ενώ το υπολογιστικά απαιτητικό τμήμα εκτελείται στην GPU προσφέροντας αυξημένη επιτάχυνση εκτέλεσης της εφαρμογής.

Πριν αναλυθεί η λειτουργία και ο προγραμματισμός σε GPUs χρειάζεται να αναφερθεί ότι καθεμία από τις δύο συσκευές επεξεργασίας (CPUs και GPUs) έχει πλεονεκτήματα σε τομείς που δεν έχει η άλλη (Πίνακας 4.1). Σκοπός του προγραμματιστή είναι να αναγνωρίσει τα πλεονεκτήματα αυτά και να εκμεταλλευτεί και τις δύο συσκευές ώστε να παράγει το βέλτιστο αποτέλεσμα.

Σημειώνεται, τέλος, ότι η GPU η οποία χρησιμοποιήθηκε σε αυτήν τη διπλωματική εργασία είναι η NVIDIA TESLA M2050, αρχιτεκτονικής Fermi[22].

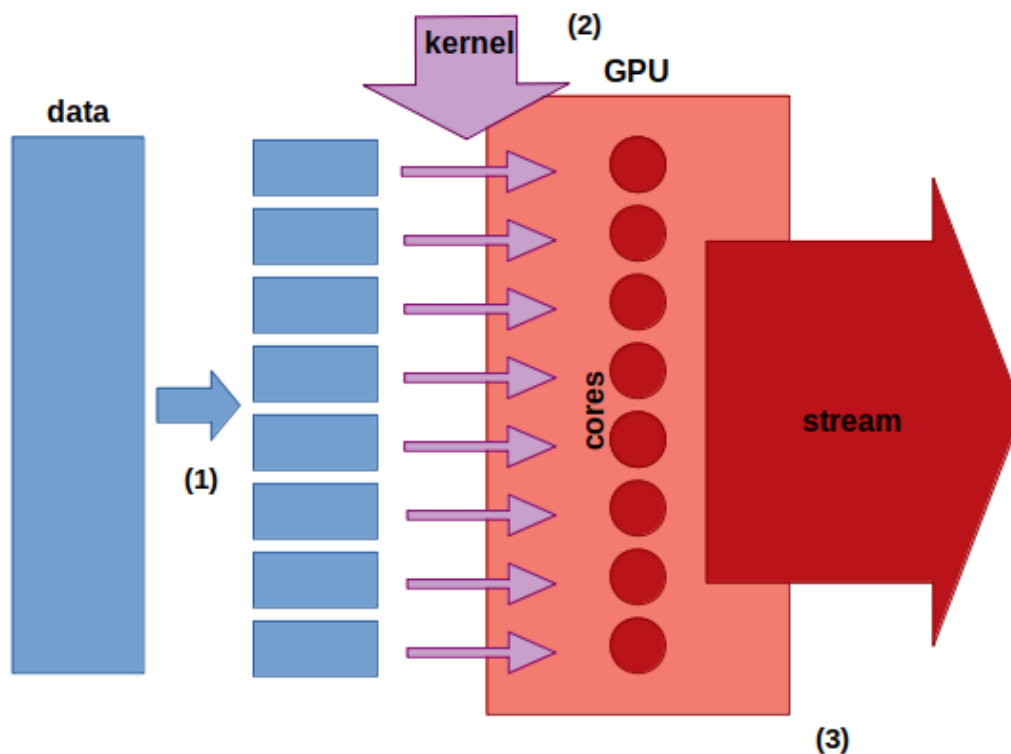
¹ Η GPGPU είναι μια μονάδα επεξεργασίας γραφικών η οποία πραγματοποιεί μη-εξειδικευμένους υπολογισμούς, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε εφαρμογές πέραν της παραγωγής γραφικών.

4.2 Λειτουργία, Ροή και Επεξεργασία Δεδομένων

Ξεκινώντας την ενότητα αυτή χρειάζεται να διευκρινιστούν δύο όροι της δομής και λειτουργίας μιας GPU, που θα αναφερθούν σε αρκετά σημεία στο κείμενο της διπλωματικής εργασίας: **core** και **kernel**. Σημειώνεται ότι επειδή και οι δύο όροι αποδίδονται στα Ελληνικά ως *πυρήνας*, αφού οριστούν, θα χρησιμοποιείται η Αγγλική ορολογία, για λόγους σαφήνειας.

Στην προηγούμενη ενότητα αναφέρθηκε ο όρος GPGPU. Πρόκειται για κάρτες γραφικών γενικής (μη-εξειδικευμένης) χρήσης, οι οποίες χρησιμοποιούνται για παραλληλοποιήσιμες εφαρμογές που απαιτούν μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Η λειτουργία των GPGPUs απεικονίζεται στο Σχ.4.1 και έχει όπως παρακάτω

- Αρχικά, απεικονίζεται ένα σετ δεδομένων. Τα δεδομένα αυτά μπορεί να είναι οποιασδήποτε ακρίβειας δεκαδικού ψηφίου (integer, double, float, complex, κλπ)[23], όμως λόγω του τρόπου κατασκευής τους, οι GPUs μπορούν να χειριστούν δεδομένα floating point με εξαιρετική ακρίβεια[24]. Η CPU «σπάει» το αρχικό σετ δεδομένων (dataset) σε μικρότερα υποσύνολα δεδομένων (*data subsets*) (Σχ.4.1(1)), τα οποία απαντώνται στη βιβλιογραφία ως *κόκκοι* (*grains*) ή *ίχνη* (*fragments*) δεδομένων[25]. Για παράδειγμα, τέτοιου είδους δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν στον κώδικα επίλυσης είναι: το σετ συντεταγμένων και οι μετρικές του πλέγματος ή οι τιμές των μεταβλητών (ταχύτητα, πίεση, κλπ) του μέσου πεδίου ροής σε κάθε κόμβο. Τα δεδομένα αυτά έχουν το χαρακτηριστικό ότι είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, οπότε κάνουν χρήση των πλεονεκτημάτων της GPU, που παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.1, και αφορούν την υψηλή απόδοση σε παράλληλη επεξεργασία δεδομένων και τη χρήση του πλήθους αριθμητικών και λογικών μονάδων (arithmetic & logic units, ALUs).
- Το σύνολο των δεδομένων έχει σπάσει με τέτοιο τρόπο σε ίχνη, ώστε τα «πακέτα» αυτά να τα επεξεργάζονται οι *πυρήνες* (*cores*) της κάρτας. Την εντολή για να γίνει η λογική/αριθμητική επεξεργασία των δεδομένων δίνει μια *συνάρτηση-πυρήνας* που ονομάζεται *kernel*[26] (Σχ.4.1(2)). Το kernel αντιστοιχεί στις συναρτήσεις (functions) άλλων γλωσσών προγραμματισμού, όπως η Fortran ή η C++, καθώς επιτελεί πρακτικά την ίδια λειτουργία με αυτές: δίνει την εντολή στον πυρήνα μιας μονάδας επεξεργασίας στο να διαχειριστεί με κάποιο τρόπο ένα ίχνος δεδομένων. Το χαρακτηριστικό του kernel είναι ότι «αντιγράφει» τις εντολές του σε κάθε core και δρα ταυτόχρονα και παράλληλα σε όλα τα ίχνη δεδομένων. Ο τρόπος με τον οποίον αυτό επιτυγχάνεται θα γίνει καλύτερα κατανοητός στην επόμενη ενότητα και στο Κεφάλαιο 5, όπου αναλύεται ο κώδικας. Τέλος, το σύνολο των cores πάνω στους οποίους δρα το ίδιο αντίγραφο ενός kernel (Σχ.4.1(3)) ονομάζεται *ρεύμα επεξεργασίας* (*processing stream*).



Σχήμα 4.1: Ροή και επεξεργασία δεδομένων σε μία GPU.

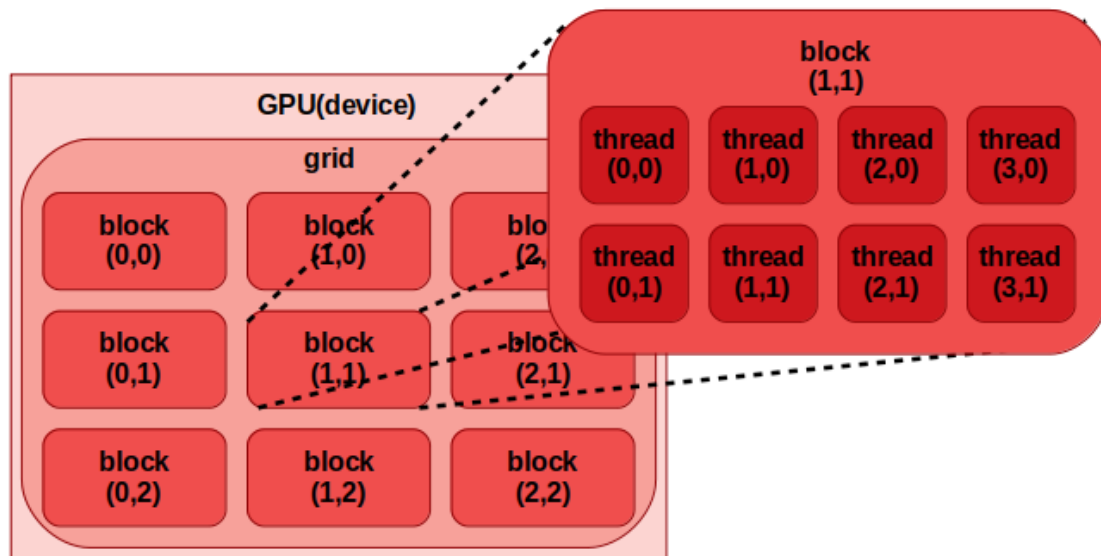
4.3 Προγραμματισμός και Δόμηση GPU με Χρήση της Αρχιτεκτονικής CUDA

Σημειώνεται ότι στην ενότητα αυτή, πολλοί από τους όρους που θα αναλυθούν θα αποδίδονται στα Αγγλικά, καθώς με αυτή την ορολογία έχουν καθιερωθεί στην παγκόσμια βιβλιογραφία.

Η αρχιτεκτονική CUDA ([27], [28]) δομεί ιεραρχικά την GPU σε

- **grid**
- **blocks**
- **threads**

Όπως φαίνεται στο Σχ.4.2 η ιεράρχηση ξεκινά από τη μικρότερη δομική μονάδα που είναι το **threads**, με αυτή δομεί τα **blocks** και αυτά καταλήγουν να δομούν το **grid**. Παρά το γεγονός ότι αντιτίθεται στην ιεραρχική δόμηση που μόλις αναφέρθηκε, η **βασική δομική μονάδα** της αρχιτεκτονικής είναι το **block**, ενώ η **βασική μονάδα**

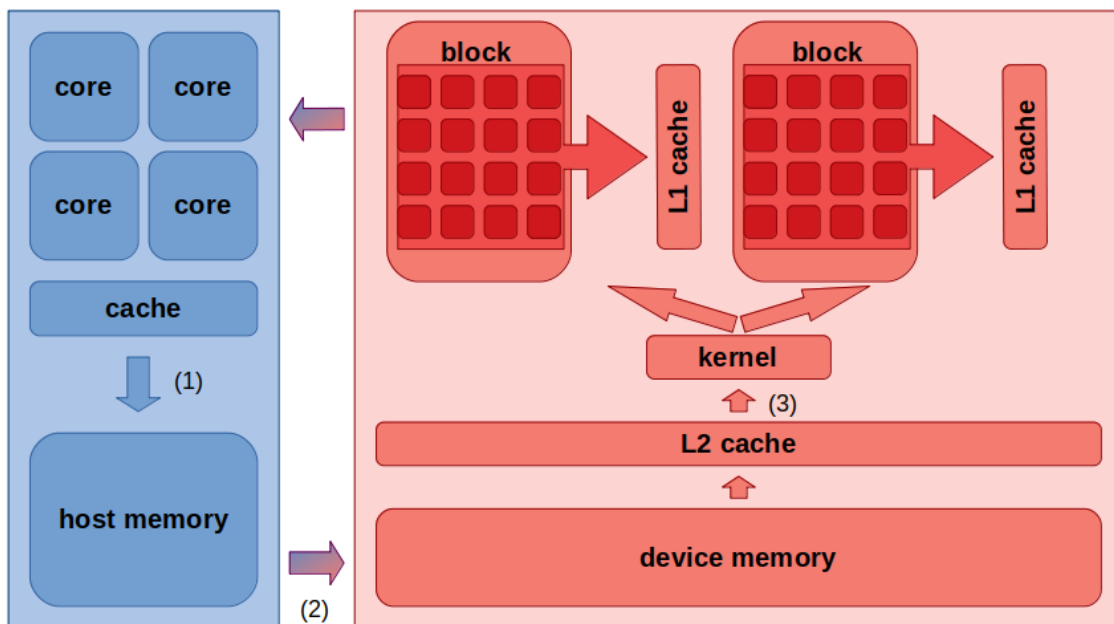


Σχήμα 4.2: Ιεραρχική δομή της αρχιτεκτονικής CUDA.

εκτέλεσης κώδικα είναι το **thread**. Αναλυτικότερα:

- τα threads αριθμούνται από τον προγραμματιστή με ένα χαρακτηριστικό αναγνωριστικό (identifier, ID), το οποίο εξαρτάται από τη διάσταση του block στο οποίο ανήκουν. Πχ. για τα blocks δύο(2) διαστάσεων του Σχ.4.2, τα threads έχουν ID δύο μεταβλητών. Συνήθως υπάρχουν 512 threads ανά block, ενώ οι πιο σύγχρονες GPUs έχουν μέχρι 1024
- τα blocks, έχουν ως βασική μονάδα δόμησης τα threads. Μπορούν να δομηθούν μέχρι και σε τρεις(3) διαστάσεις. Πχ. ένα τριδιάστατο block μπορεί να γίνει αντιληπτό ως ένας πίνακας τριών(3) διαστάσεων, καθεμία από τις οποίες αποτελείται από ένα σύνολο threads με ID τριών(3) μεταβλητών. Συνήθως υπάρχουν 65.520 blocks σε μια GPU
- τέλος, το grid δομείται από blocks και μπορεί να λάβει μέχρι δύο(2) διαστάσεις. Αυτό σημαίνει ότι ο προγραμματισμός σε CUDA επιτρέπει τη χρήση μέχρι πέντε(5) διαστάσεων: ένα διδιάστατο grid αποτελούμενο από τριδιάστατα blocks. Οι πέντε(5) διαστάσεις είναι ίσως πολύ περισσότερες από όσες χρειάζονται στα συνήθη προβλήματα της Υπολογιστικής Μηχανικής, αλλά παρά ταύτα υπάρχει η δυνατότητα χρήσης τους, αν αυτό είναι επιθυμητό

Έπειτα από την παραπάνω ανάλυση, αναφέρεται ότι στον κώδικα που αναπτύχθηκε σε αυτήν τη διπλωματική εργασία έγινε χρήση **μονοδιάστατου grid** αποτελούμενο από **διδιάστατα blocks**. Υπάρχουν και άλλοι δυνατοί συνδυασμοί, φυσικά, αλλά ο λόγος που έγινε αυτή η επιλογή αναλύεται στο Κεφάλαιο 5. Η NVIDIA TESLA M2050 που χρησιμοποιήθηκε, έχει χαρακτηριστικά που φαίνονται στο Παράρτημα D'.



Σχήμα 4.3: Ροή, διαχείριση και επεξεργασία δεδομένων από τη μνήμη της CPU (**host memory**) στη μνήμη της GPU (**device memory**).

Το τελευταίο τμήμα αυτής της ενότητας αφορά τον προγραμματισμό συνολικά σε ένα ανομοιογενές επεξεργαστικό περιβάλλον και απεικονίζεται στο Σχ.4.3.

Αρχικά γίνεται ο διαχωρισμός της CPU και της μνήμης του συστήματος, που συλλογικά αναφέρεται ως **host**, και της GPU και της ενσωματωμένης (onboard) μνήμης της, που συλλογικά αναφέρεται ως **device**.

Το **πρώτο** βήμα εκτελείται αποκλειστικά στον host. Ένα σύνολο δεδομένων επεξεργάζεται από τους επεξεργαστές της CPU και αποθηκεύεται προσωρινά στη μνήμη cache και στη συνέχεια στη μνήμη του host. Η διαδικασία δεν είναι πλήρως σειριακή, καθώς οι δύο αυτές μνήμες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Τα δεδομένα χωρίζονται σε υποσύνολα, τα οποία στην προηγούμενη ενότητα ονομάστηκαν ίχνη (fragments). Τα ίχνη, αποθηκεύονται προσωρινά σε «πακέτα» στη μνήμη cache. Όταν η μνήμη cache είναι σχεδόν πλήρης, ένα τέτοιο σύνολο πακέτων δεδομένων μεταφέρεται στη μνήμη του host και ταυτόχρονα ίχνη δεδομένων «ρέουν» από την CPU στη μνήμη cache (Σχ.4.3(1)).

Η GPU, ή, όπως ονομάστηκε στην αρχή της ενότητας, device, έχει δύο(2) επίπεδα μνήμης cache, τα L1 και L2 του Σχ.4.3. Στο **δεύτερο** βήμα γίνεται αντιγραφή των δεδομένων από τη host μνήμη στην μνήμη device (Σχ.4.3(2)). Εκτός από την αντιγραφή των δεδομένων γίνεται και η δόμηση της GPU σε grid, blocks και threads. Τα δεδομένα και η δόμηση περνούν ως πληροφορίες στο δεύτερο επίπεδο cache μνήμης (device L2 cache memory), όπου αποθηκεύονται προσωρινά.

Αφού έχει δομηθεί η αρχιτεκτονική της GPU, εκτελείται ένα σύνολο λογικών ή/και αριθμητικών υπολογισμών, που περιγράφεται από το kernel (Σχ.4.3(3)). Το kernel «αντιγράφεται» σε κάθε thread σε όλα τα blocks, κι έτσι το σύνολο των διεργασιών που ορίζει εκτελείται παράλληλα από όλα τα threads. Όταν περατωθούν οι διεργασίες του kernel γίνεται αντιγραφή των αποτελεσμάτων πίσω στην κύρια μνήμη του host.

Ανακεφαλαιώνοντας, περιγράφηκε η αρχιτεκτονική και ο τρόπος λειτουργίας μιας GPU, ως μέρος ενός ανομοιογενούς πολυεπεξεργαστικού συστήματος, και αναλύθηκε το πώς αυτή δομείται με χρήση της CUDA. Στο Κεφάλαιο 5 οι διαδικασίες αυτές θα αναλυθούν πάνω στον κώδικα επίλυσης των LEE.

Κεφάλαιο 5

Κώδικας Επίλυσης

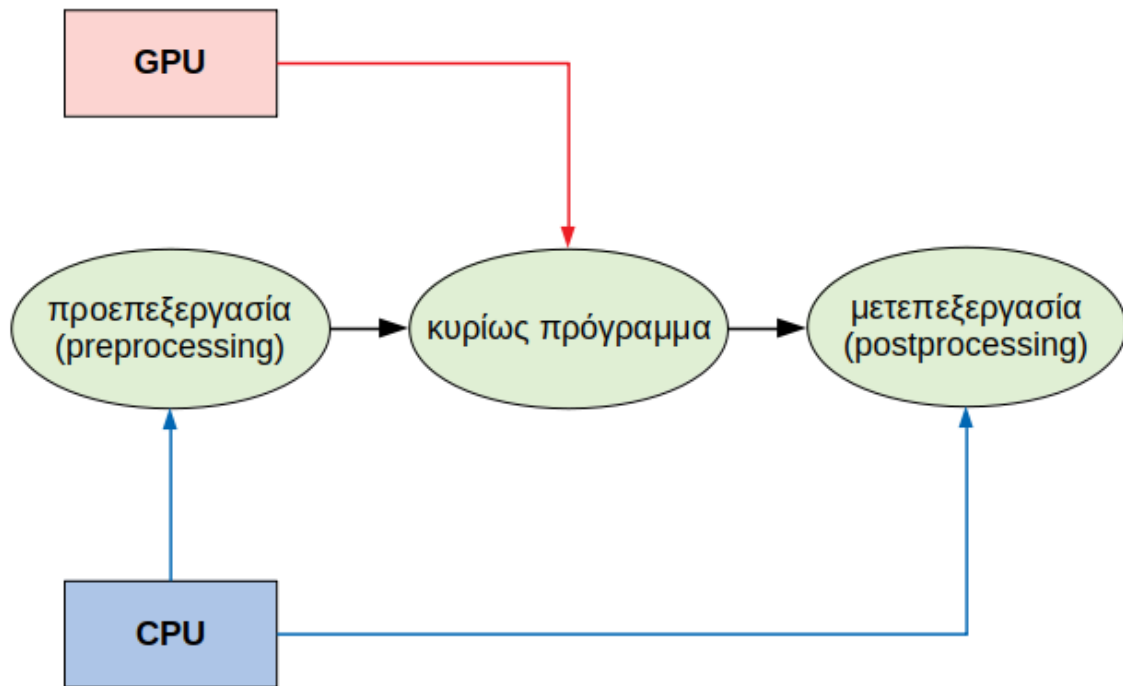
Ο σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας, όπως ήδη αναφέρθηκε, είναι «ο **σχεδιασμός δομοστοιχειωτού κώδικα** αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού σε παράλληλο επεξεργαστικό περιβάλλον», που θα επιλύει το αεροακουστικό πρόβλημα με τις LEE (όπως αυτό περιγράφηκε στα Κεφάλαια 2 και 3)[29]. Στο Κεφάλαιο αυτό περιγράφεται αναλυτικά όλη τη διαδικασία που ακολουθήθηκε.

Ο κώδικας έχει τρία(3) επίπεδα.

- Το **πρώτο** επίπεδο καθορίζει ποιες διεργασίες εκτελούνται από τους δύο διαφορετικού είδους επεξεργαστές του συστήματος και τη σειρά με την οποία αυτές εκτελούνται (Σχ.5.1).
- Το **δεύτερο** επίπεδο εμβαθύνει σε κάθε μία από τις γενικές αυτές κατηγορίες και αναλύει τις επιπλέον διεργασίες που τις απαρτίζουν.
- Το **τρίτο** επίπεδο αφορά τη δόμηση των διεργασιών και θα αναφερθεί περιγραφικά και μόνο όπου κρίνεται απαραίτητο, ώστε να αποφευχθεί η υπερβολική φόρτωση του κειμένου με τεχνική ορολογία σε θέματα όπως η ιδιαίτερη δομή των γλωσσών προγραμματισμού που χρησιμοποιήθηκαν (C++, NVIDIA CUDA), οι δυνατότητες σε πρόσβαση και διαχείριση των διαφορετικών ειδών μνήμης και αποθηκευτικού χώρου, κλπ.

Σημειώνεται ότι σε ένα *ανομοιογενές πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον*¹ δίνεται η δυνατότητα παραλληλοποίησης μεταξύ των ανομοιογενών επεξεργαστών, οι οποίοι για το περιβάλλον (high-processing cluster) στο οποίο υλοποιήθηκε ο κώδικας είναι οι CPU και GPU. Το χαρακτηριστικό αυτό, επιτρέπει ένα επιπλέον επίπεδο παραλληλοποίησης, το οποίο όχι μόνο απλά επιδιώκεται, αλλά επιβάλλεται, δεδομένου

¹Πρόκειται για υπολογιστικό περιβάλλον με παραπάνω από ένα είδος επεξεργαστή. Τα διαφορετικά είδη επεξεργαστών, τα οποία ονομάζονται ανομοιογενή, δύνανται μεν να επικοινωνούν μεταξύ τους με κοινή μνήμη, αλλά στην γενική περίπτωση δεν ισχύει αυτό.



Σχήμα 5.1: Διάγραμμα ροής του κώδικα. Η προεπεξεργασία (preprocessing) των δεδομένων και των δομών γίνεται από την CPU, ενώ η εκτέλεση του κυρίως προγράμματος γίνεται από την GPU. Η μετεπεξεργασία (postprocessing) γίνεται παράλληλα με την εκτέλεση του κυρίως προγράμματος από την CPU.

του γεγονότος ότι η όλη διαδικασία του προγραμματισμού σε GPUs γίνεται για την αύξηση της αποδοτικότητας του κώδικα.

5.1 Πρώτο Επίπεδο

Στο Σχ.5.1 παρουσιάζεται σε διάγραμμα ροής το **πρώτο** επίπεδο του κώδικα. Τα στάδια επεξεργασίας και εκτέλεσης περιλαμβάνουν την προεπεξεργασία (preprocessing), την εκτέλεση του κυρίως προγράμματος και την μετεπεξεργασία (postprocessing).

- Το στάδιο της **προεπεξεργασίας** αφορά την εκτέλεση κώδικα στην **CPU**. Εκτελείται μία φορά στην αρχή του προγράμματος και είναι υπεύθυνο για την κατασκευή των κλάσεων, των βασικών δομών και των πυρήνων (kernels) των GPUs που θα εκτελέσουν τον κώδικα στο επόμενο στάδιο. Στο στάδιο της προεπεξεργασίας γίνεται επίσης και η αρχικοποίηση των μεταβλητών του πεδίου. Καθόλη τη διαδικασία τρεξίματος του κώδικα στη **CPU**, η **GPU** είναι πρακτικά ανενεργή (**χρήση** $\sim 8\%$ της συνολικής μνήμης της GPU).
- Το εκτενέστερο τμήμα του κώδικα αφορά το **κυρίως πρόγραμμα** και αποτελεί

τον «θεμέλιο λίθο» αυτής της διπλωματικής εργασίας. Εκτελείται σε όλη την έκτασή του σε **GPU** και είναι εξ ολοκλήρου γραμμένος σε NVIDIA CUDA. Η ιδιαίτερη δόμησή του αποτελείται από τους **πυρήνες (kernels)**, όπως αυτοί έχουν αναλυθεί στο Κεφάλαιο 4. Σκοπός του κυρίως προγράμματος είναι να δεχτεί όλα τα δεδομένα που έχουν δομηθεί στο στάδιο της **προεπεξεργασίας**, να επιλύσει τις LEE στο εσωτερικό του πλέγματος, τις εξισώσεις στα όρια και στους ψευδοκόμβους και να φροντίσει τόσο για την παραγωγή αποτελεσμάτων, όσο και για την πρόσβασή τους από τον χρήστη. Η **χρήση** της συνολικής μνήμης της GPU ήταν $\sim 92\%$).

- Το στάδιο της **μετεπεξεργασίας** είναι το απλούστερο. Εκτελείται αποκλειστικά από την CPU - μιας και οι GPUs έχουν τη δυνατότητα τύπωσης αποτελεσμάτων μόνο στην οθόνη και όχι σε αρχεία.

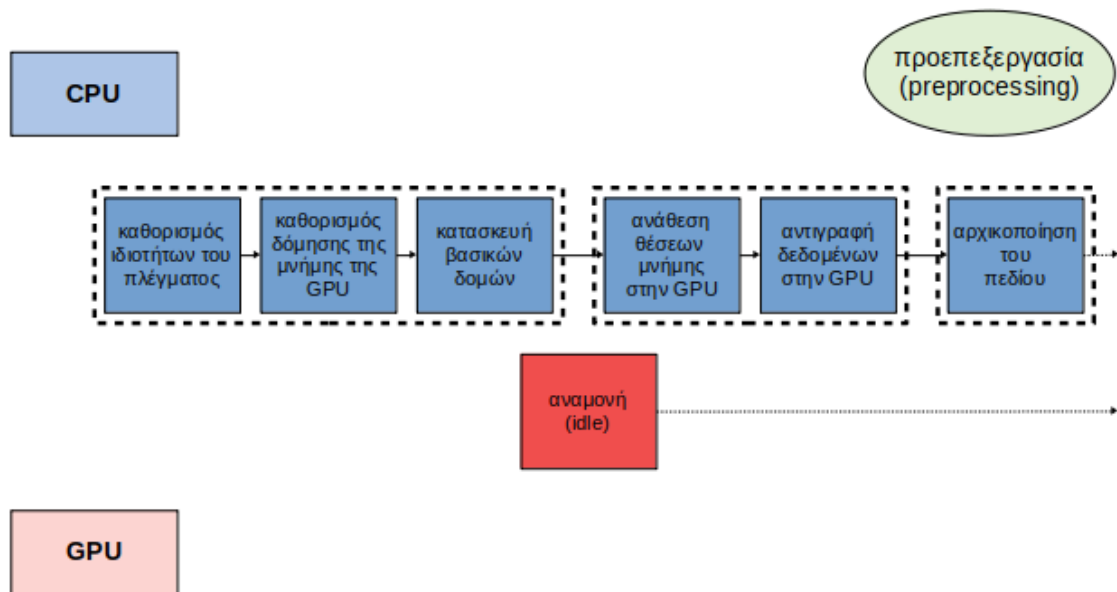
Τα στάδια του **κυρίως προγράμματος** και της **μετεπεξεργασίας** εκτελούνται παράλληλα, με γνώμονα όσα ειπώθηκαν παραπάνω για τον προγραμματισμό σε *ανομοιογενή πολυεπεξεργαστικά περιβάλλοντα*. Το υπολογιστικό περιβάλλον της ΜΠΥΡ&Β του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών προσέφερε αυτή τη δυνατότητα με αρχιτεκτονική δόμησης τέτοια ώστε οι CPU και GPU να έχουν διαφορετική και ανεξάρτητη μνήμη μεταξύ τους. Η εκτέλεση έγινε σε

- CPU: **Intel Xeon E5620**
- GPU: **NVIDIA TESLA M2050**²

Στο σημείο αυτό, και πριν ξεκινήσει η περιγραφή του δεύτερου επιπέδου, χρειάζεται να επισημανθεί κι ένας *δεύτερος* σκοπός που τέθηκε κατά την υλοποίηση του κώδικα: «η όσο το δυνατό αποτελεσματικότερη κατανάλωση υπολογιστικών και ενεργειακών πόρων». Οι GPUs, παρά την παραλληλοποίηση και την επιτάχυνση που προσφέρουν, έχουν μεγάλη κατανάλωση ρεύματος. Ενδεικτικά, η **Intel Xeon E5620** έχει κατανάλωση 80W, ενώ η **NVIDIA TESLA M2050** έχει αντίστοιχα 225W. Έτσι, ένας κώδικας γραμμένος για GPUs, που έχει μεγάλους νεκρούς (idle) χρόνους ή χαμηλή χρήση της κάρτας ($< 80\%$) θεωρείται μη-αποδοτικός όχι μόνο απλώς γιατί δεν κάνει σωστή και πλήρη χρήση των υπολογιστικών πόρων, αλλά γιατί επίσης αυξάνει τη χρήση των ενεργειακών (ηλεκτρική κατανάλωση). Το γεγονός αυτό μπορεί να φαίνεται ασήμαντο για μία μεμονωμένη GPU ή ένα HPC επιπέδου «2»³, σε clusters όμως με πολλά nodes με κάρτες γραφικών, οι καταναλώσεις είναι σημαντικές. Για τον λόγο αυτό, έγινε προσπάθεια μείωσης των νεκρών χρόνων και της αύξησης του ποσοστού της μνήμης της GPU, κάνοντας τον κώδικα πιο αποδοτικό.

²Χαρακτηριστικά για την CPU και την GPU δίνονται στο Παράρτημα Δ'.

³Συνοπτικά: high performance computer επιπέδου «0», ή superclusters, είναι τα εφτά(7) μεγαλύτερα σε όλο τον κόσμο, επιπέδου «1» είναι εθνικά (πχ. το Ελληνικό HPC «ARIS»), μεγάλων εταιριών (αυτοβιομηχανιών, αεροπορικών βιομηχανιών, κλπ.), επιπέδου «2» είναι πανεπιστημίων και ιδρυμάτων, κοκ.[30]



Σχήμα 5.2: Διάγραμμα ροής του σταδίου προεπεξεργασίας του κώδικα. Το σύνολο των επιμέρους διεργασιών εκτελούνται από την CPU, ενώ η GPU βρίσκεται σε αναμονή (idle).

5.2 Δεύτερο Επίπεδο

Τα Σχ.5.2 και 5.3 απεικονίζουν διαγράμματα ροής του **δευτέρου** επιπέδου του κώδικα. Σε καθένα από τα τρία(3) στάδια που αναφέρθηκαν, διακρίνονται οι επιμέρους διεργασίες που τα απαρτίζουν.

Στάδιο Προεπεξεργασίας

Το στάδιο της προεπεξεργασίας, όπως φαίνεται και στο Σχ.5.2 ομαδοποιείται σε τρεις(3) γενικότερες κατηγορίες διεργασιών: στη δημιουργία των βασικών δομών (δόμηση μνήμης CPU, δομές δεδομένων, κλπ.), στη δόμηση και προετοιμασία της GPU και στην αρχικοποίηση όσων μεταβλητών του κώδικα απαιτείται. Αναλυτικότερα:

- Αρχικά καθορίζονται οι **ιδιότητες του πλέγματος**. Οι μεταβλητές που δίνονται από τον χρήστη είναι: ο αριθμός των κόμβων, η επιθυμητή διακριτοποίηση και η πιθανή γωνία στροφής του πλέγματος⁴. Αναφέρεται ξανά εδώ, για λόγους πληρότητας, ότι το πλέγμα το οποίο υλοποιήθηκε η διπλωματική εργασία ήταν **διδιάστατο**. Οι μεταβλητές που μόλις αναφέρθηκαν είναι επαρκείς

⁴Αναφερόμενοι σε δομημένο Καρτεσιανό πλέγμα, πρόκειται για τη γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του πλέγματος και της ροής.

ώστε να κατασκευαστεί το πλέγμα που αντιστοιχεί στο φυσικό χωρίο. Η επίλυση, όμως, των LEE και όσων άλλων εξισώσεων χρησιμοποιούνται γίνεται στο μετασχηματισμένο χωρίο. Έτσι, σε αυτήν τη διεργασία, αφού έχει κατασκευαστεί το φυσικό πλέγμα, υπολογίζονται οι μετρικές του μετασχηματισμού του και η *Jacobian*. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζεται από την CPU και το μετασχηματισμένο πλέγμα.

- Στη συνέχεια, η CPU καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο θα **δομηθεί η μνήμη της GPU**. Στο Κεφάλαιο 4 αναλύθηκε η αρχιτεκτονική των GPUs: το πώς γίνεται η ιεράρχηση των δομών από τα threads στα blocks και από τα blocks στο grid. Με γνώμονα όσα αναφέρθηκαν, επιλέγεται ο αριθμός των threads σε κάθε διάσταση και, στη συνέχεια, επιλέγεται πόσα threads θα έχει κάθε block. Το σύνολο των threads ανά block πολλαπλασιασμένο με τον συνολικό αριθμό των blocks πρέπει, προφανώς, να ισούται τουλάχιστον με τον αριθμό των κόμβων, σε κάθε διάσταση. Έτσι:

$$\frac{threads}{block} \cdot (blocks) \geq (side\ dimension) \quad (5.1)$$

- Έχοντας χτίσει το πλέγμα και έχοντας καθορίσει τον τρόπο με τον οποίο θα δομηθεί η επίλυση στην GPU, κλείνει η πρώτη ομάδα του σταδίου της προεπεξεργασίας με την **κατασκευή των βασικών δομών** στη CPU. Το πλέγμα, το οποίο πλέον ταυτίζεται με θέσεις μνήμης στη CPU, λειτουργεί σα βάση πάνω στην οποία χτίζονται οι προαναφερθείσες δομές:
 - ιδιότητες της ροής (τιμές του μέσου πεδίου ροής και η αναλυτική λύση σε κάθε κόμβο/θέση μνήμης της CPU, κλπ)
 - ιδιότητες του περιβάλλοντος (farfield) και του υλικού μέσου (medium) (πυκνότητα και πίεση, ταχύτητα του ήχου, κλπ)
 - ιδιότητες του ήχου (κυκλική συχνότητα, κυματικός αριθμός, θέση και σχετική ταχύτητα πηγής, κλπ)
- Η δεύτερη ομάδα του σταδίου της προεπεξεργασίας εκκινείται με την **ανάθεση της μνήμης στην GPU**. Οι δομές που θα χρησιμοποιηθούν (threads, blocks, κλπ) καθορίστηκαν σε προηγούμενο βήμα από την CPU και πλέον δίνονται ως οδηγία υλοποίησης στην GPU. Η χρήση της GPU, η οποία ως τώρα ήταν πρακτικά ανενεργή (idle), αυξάνεται στιγμιαία (~ 20%), καθώς γίνεται η λήψη των οδηγιών δομής και ανατίθεται η μνήμη που θα χρησιμοποιηθεί.
- Αμέσως μετά ακολουθεί μια διαδικασία δύο βημάτων: δημιουργείται στην GPU το σύνολο των προσωρινών μεταβλητών οι οποίες θα χρειαστούν για την επίλυση του προβλήματος κατά την εκτέλεση του κυρίως προγράμματος και έπειτα **αντιγράφονται σε αυτές οι μεταβλητές** από την CPU, δηλαδή, **θέση μνήμης της CPU προς θέση μνήμης της GPU**.
- Στην τελευταία επιμέρους διεργασία της προεπεξεργασίας γίνεται η **αρχικοποίηση** του πεδίου. Οι μεταβλητές του θορύβου αρχικοποιούνται με βάση την αναλυτική λύση, ενώ γίνεται αρχικοποίηση και των τιμών των μεταβλητών αυ-

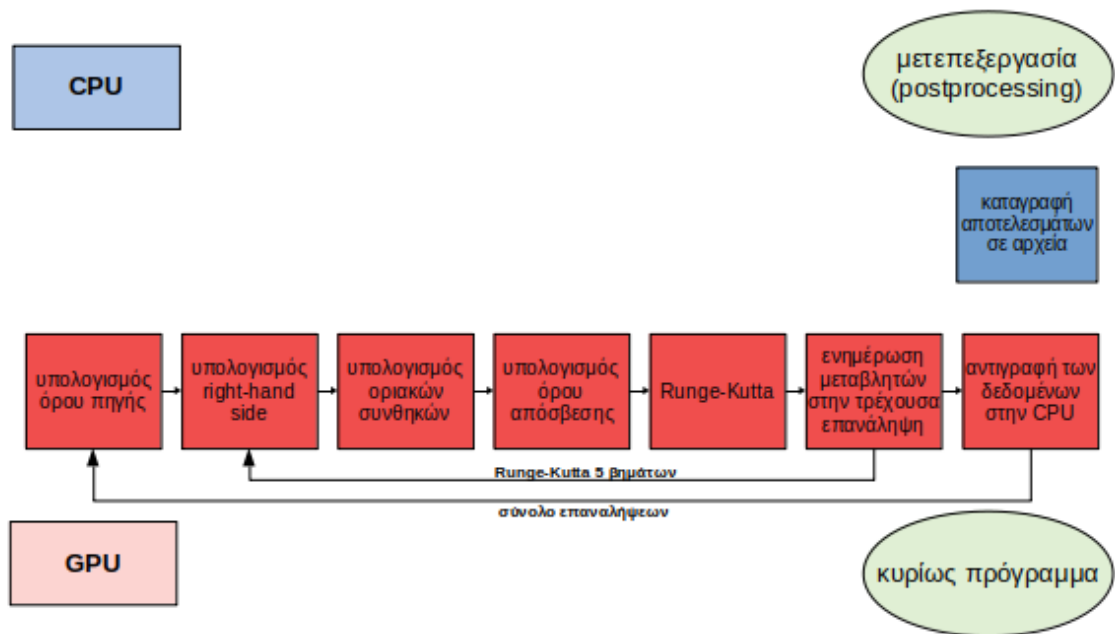
τών για το «προηγούμενο» χρονικό βήμα, το οποίο είναι, ουσιαστικά, εικονικό. Οι τιμές αυτές είναι απαραίτητο να υπάρχουν διότι χρησιμοποιούνται στην πρώτη επανάληψη του αλγορίθμου για χρονική ολοκλήρωση με Runge-Kutta. Οι μεταβλητές του «προηγούμενου» βήματος μπορούν να αρχικοποιηθούν, πρακτικά, με οποιαδήποτε τιμή και τελικά θα συγκλίνουν προς τη λύση έπειτα από κάποιο αριθμό επαναλήψεων. Βρέθηκε όμως ότι αν αυτές αρχικοποιηθούν με τις τιμές του μέσου πεδίου ροής η επίλυση είναι *ακριβής* από το πρώτο κίόλας χρονικό βήμα.

Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα, η εκτέλεση όλων των διαδικασιών του σταδίου της προεπεξεργασίας γίνεται στην CPU. Η GPU ενεργοποιείται ελάχιστα στο στάδιο αυτό και μόνο για να λάβει οδηγίες για το πώς θα δομηθεί η μνήμη της για τις διεργασίες που θα εκτελέσει στο κυρίως πρόγραμμα. Η GPU σε κατάσταση αναμονής κάνει χρήση $\sim 5\%$ της μνήμης της και φτάνει το 20% , στιγμιαία, οπότε η καθαρή χρήση της μνήμης ανέρχεται, τελικά, στο $\sim 8\%$.

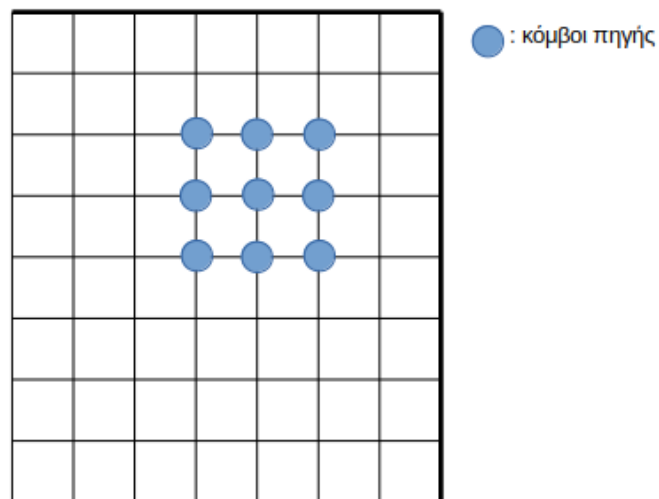
Στάδιο Κυρίως Προγράμματος - Στάδιο Μετεπεξεργασίας

Το στάδιο εκτέλεσης του κυρίως προγράμματος παρουσιάζεται στο Σχ.5.3. Ο σκοπός που επιτελεί το κυρίως πρόγραμμα είναι η επίλυση των διακριτοποιημένων εξισώσεων για έναν ορισμένο από τον χρήστη αριθμό επαναλήψεων. Σύμφωνα με την ομαδοποίηση που έγινε στο προηγούμενο στάδιο, έτσι κι εδώ μπορεί να γίνει διάκριση μεταξύ δύο ομάδων επιμέρους διεργασιών. Πρόκειται για δύο εμφωλευμένους (nested) επαναληπτικούς κύκλους: ο εσωτερικός κύκλος ανταποκρίνεται στην επίλυση της Runge-Kutta για μία επανάληψη του αλγορίθμου και ο εξωτερικός κάνει χρήση των υπολογισμών από τη Runge-Kutta μεταβλητών του ήχου και ανανεώνει κάποιους όρους του αλγορίθμου σε κάθε χρονική στιγμή. Αναλυτικότερα:

- Ο εξωτερικός επαναληπτικός κύκλος εκκινείται με τον **υπολογισμό του όρου πηγής**. Με τα δεδομένα της πηγής (θέση, ταχύτητα, κλπ) να έχουν καθοριστεί στο προηγούμενο στάδιο, η διεργασία αυτή χρησιμοποιεί την δομή της αναλυτικής λύσης και υπολογίζει τις μεταβλητές του ήχου σε ένα τμήμα του πλέγματος το οποίο λειτουργεί ως πηγή. Σημειώνεται ότι αν και οι πηγές διάδοσης ήχου είναι σημειακές, γίνεται η *προσέγγιση* ότι ο ήχος προέρχεται από ένα (μικρό) σύνολο κόμβων, όπως στο Σχ.5.4, για να ανταποκρίνεται ο κώδικας πιο πιστά σε πραγματικά προβλήματα. Άλλωστε, το υπολογιστικό πλέγμα είναι αρκετό πυκνό ώστε ο συνολικός χώρος που καταλαμβάνει η πηγή να είναι πρακτικά σημειακός.
- Παραλείποντας τις διεργασίες του εσωτερικού επαναληπτικού κύκλου, αναφέρεται, προς το παρόν, ότι αυτές παράγουν τη λύση για τις μεταβλητές του ήχου σε όλο το πλέγμα. Η δεύτερη επιμέρους διεργασία του εξωτερικού κύκλου, υλοποιεί την **αντίστροφη διαδικασία αντιγραφής, από την GPU στη CPU**. Σε αντίθεση με το αντίστοιχο βήμα του σταδίου της προεπεξεργασίας,



Σχήμα 5.3: Επίλυση των LEE εντός του πλέγματος με χρήση GPUs.



Σχήμα 5.4: Επιλογή κόμβων στους οποίους υπολογίζεται όρος πηγής.

η διαδικασία αντιγραφής είναι ταχύτερη για δύο(2) λόγους:

- Οι μεταβλητές (προσωρινές και μη) ήδη υπάρχουν και δεν χρειάζεται να δημιουργηθούν από την αρχή. Γίνεται απλώς αντιγραφή των νέων τιμών στις θέσεις μνήμης τους.
 - Τόσο η κύρια μνήμη του συστήματος, όσο και της GPU δεν παραμένει δεσμευμένη με χρήση πινάκων, αλλά χρησιμοποιούνται μεταβλητές τύπου *pointer*. Δε θα γίνει διεξοδική ανάλυση για το πώς οι *pointers* επιτυγχάνουν κάτι τέτοιο. Κρίθηκε παρ'όλα αυτά σκόπιμο να αναφερθεί, λόγω της αξίας του.
- Ο εσωτερικός επαναληπτικός κύκλος περιλαμβάνει ένα σύνολο επιμέρους διεργασιών που αφορά την επίλυση των εξισώσεων με τη μέθοδο Runge-Kutta πέντε(5) βημάτων, όπως φαίνεται και στο Σχ.5.3. Αρχικά **υπολογίζεται το δεξί μέλος των εξισώσεων**, ήτοι: οι LEE έχουν γραφτεί σε *ρητή (explicit)* μορφή. Το αριστερό μέλος της εξίσωσης περιέχει την προς επίλυση μεταβλητή στην τρέχουσα χρονική στιγμή. Το δεξί μέλος είναι συνάρτηση της συγκεκριμένης μεταβλητής στην προηγούμενη χρονική στιγμή και ενός συνόλου όρων πηγής. Για παράδειγμα, για την ταχύτητα ενός τυχαίου κόμβου (i, j) , τη χρονική στιγμή n , γράφεται:

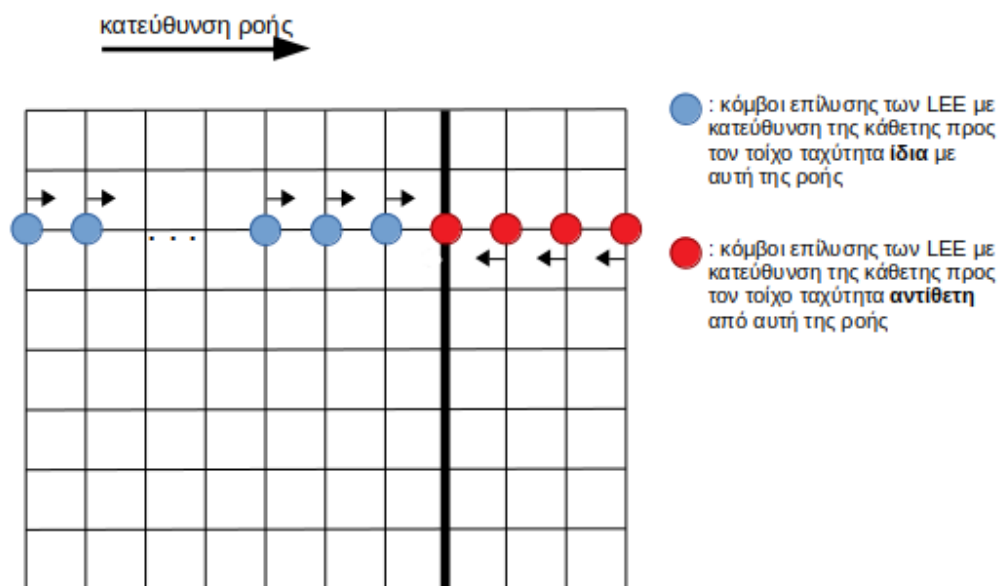
$$u_{i,j}^n = f \left(u_{i,j}^{n-1}, \sum S \right) \quad (5.2)$$

όπου S οι όροι πηγής, οι οποίοι αθροίζονται λόγω της γραμμικοποιημένης φύσης των εξισώσεων.

- Η επόμενη διεργασία επιλέγει και **υπολογίζει τις οριακές συνθήκες** σε κάθε πλευρά του πλέγματος. Οι οριακές συνθήκες αναλύθηκαν στο Κεφάλαιο 3, και αναφέρονται και εδώ για λόγους πληρότητας, είναι:
 - οριακή συνθήκη Dirichlet
 - οριακή συνθήκη ακτινοβολίας ή εισερχόμενης ροής (radiation ή inflow) και οριακή συνθήκη εξερχόμενης ροής (outflow)
 - οριακή συνθήκη τοίχου (wall)

Η επιλογή τους γίνεται a priori και όχι κατά το τρέξιμο (runtime) του κώδικα. Ο υπολογισμός τους περιλαμβάνει την επίλυση της αναλυτικής λύσης της ακουστικής κυματικής εξίσωσης στα όρια για την οριακή συνθήκη Dirichlet, την επίλυση της Εξ.3.4 για την οριακή συνθήκη ακτινοβολίας, την επίλυση της Εξ.3.5 για την οριακή συνθήκη εξερχόμενης ροής, ή τις LEE σε όλο το πλέγμα μέχρι το όριο (Κεφάλαιο 3.2.2). Στο όριο η ταχύτητα είναι μηδέν ενώ κάθε ψευδοκόμβος έχει τιμή ίση και αντίθετη με τον «αντικατοπτρικό» του πλεγματοκόμβο (Σχ.5.5).

- Ο όρος απόσβεσης αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 3.3. Αναφέρεται ξανά, για λόγους πληρότητας, ότι ο **ρόλος** του όρου απόσβεσης είναι η αντιμετώπιση του σφάλματος που εισάγουν στη λύση τα κύματα του θορύβου με μεγάλο υπολογιστικό κυματικό αριθμό. Ο υπολογισμός του όρου απόσβεσης είναι απαραίτητος, πριν την επίλυση των LEE.



Σχήμα 5.5: Αναστροφή της ταχύτητας και υπολογισμός των LEE στο όριο και στους ψευδοκόμβους, κατά την επίλυση της οριακής συνθήκης τοίχου.

- Η επόμενη διεργασία είναι η σημαντικότερη του εσωτερικού επαναληπτικού κύκλου και αφορά την **επίλυση των LEE με Runge-Kutta**.

$$u^n = u^{n-1} + dt \cdot coef_{RK}^i \cdot rhs(u) - D^{n-1} \quad (5.3)$$

Η ταχύτητα u , για παράδειγμα, στη χρονική στιγμή n γράφεται παραστατικά όπως στην Εξ.5.3, και είναι συνάρτηση της ταχύτητας u την προηγούμενη στιγμή $n - 1$, του δεξιού μέλους της εξίσωσης της ταχύτητας $rhs(u)$, που υπολογίστηκε σε προηγούμενη διεργασία, πολλαπλασιασμένο με το χρονικό βήμα dt και τον συντελεστή της Runge-Kutta $coef_{RK}^i$ (με $i = [1 \div 5]$ για κάθε βήμα της Runge-Kutta) και του όρου απόσβεσης D , ο οποίος παραστατικά απεικονίζεται ως D^{n-1} , διότι υπολογίζεται με τις μεταβλητές της προηγούμενης στιγμής.

- Στην τελευταία διεργασία του εσωτερικού κύκλου γίνεται **ανανέωση των μεταβλητών επίλυσης στην τρέχουσα στιγμή**. Πρακτικά, οι μεταβλητές του θορύβου, που έχουν επιλυθεί πλέον σε όλο το πλέγμα, αποθηκεύονται σε ένα άλλο σύνολο προσωρινών μεταβλητών, ώστε οι θέση μνήμης που καταλαμβάνουν να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην επόμενη στιγμή, γεγονός το οποίο συμβάλλει στη γενικότερη οικονομία μνήμης και στην **αποδοτικότητα** του κώδικα.

Στο στάδιο εκτέλεσης του κυρίως προγράμματος, η εκτέλεση όλων των επιμέρους διεργασιών γίνεται στην GPU, εκπληρώνοντας τον αρχικό **σκοπό** της διπλωματικής εργασίας. Σε αντίθεση με ότι συνέβαινε στην GPU στο στάδιο της προεπεξεργασίας,

η CPU δε βρίσκεται σε κατάσταση αναμονής στο στάδιο του κυρίως προγράμματος. Επίσης, όπως αναφέρθηκε και στην αρχή του Κεφαλαίου, παράλληλα με την εκτέλεση του σταδίου του κυρίως προγράμματος γίνεται και η μετεπεξεργασία των δεδομένων από την CPU. Έτσι επιτυγχάνεται και το επιπλέον επίπεδο παραλληλοποίησης, που είναι επιθυμητό.

Η μέση χρήση της μνήμης της GPU στο στάδιο αυτό ανέρχεται στο $\sim 92\%$.

5.3 Τρίτο Επίπεδο

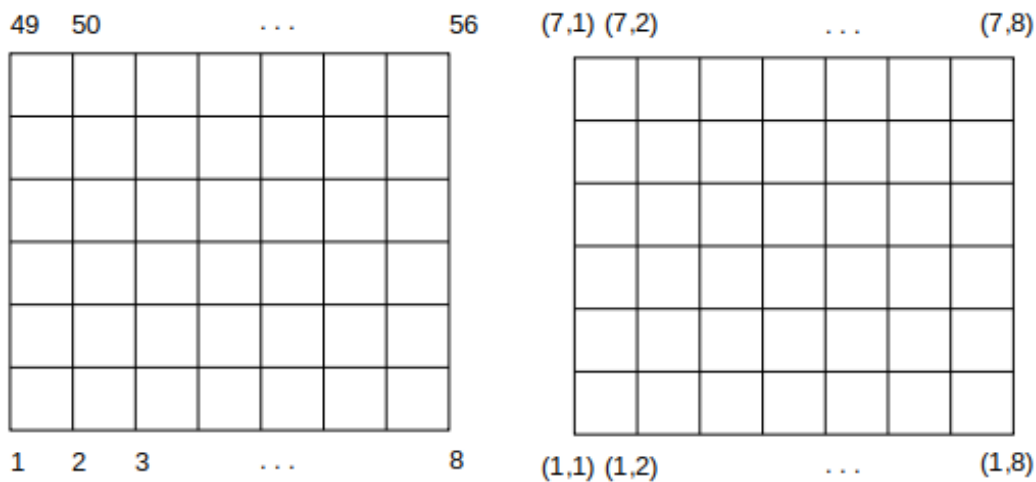
Στην εισαγωγή του Κεφαλαίου αναφέρθηκε ότι θα γίνει μια αναφορά σε αυτό που ορίστηκε ως «τρίτο επίπεδο» του κώδικα. Αφορά κυρίως χαρακτηριστικά των γλωσσών προγραμματισμού που χρησιμοποιήθηκαν στον προγραμματισμό των διεργασιών κάθε σταδίου, καθώς και του περιβάλλοντος και της αρχιτεκτονικής μιας GPU. Για να μην επιβαρυνθεί το κείμενο με εξεζητημένη τεχνική ορολογία, η αναφορά αυτή θα είναι σύντομη.

Στάδιο Προεπεξεργασίας

Στο στάδιο της προεπεξεργασίας, θα γίνει αρχικά αναφορά στον τρόπο με τον οποίο καθορίστηκε η **αρίθμηση και δόμηση του πλέγματος** και των επιμέρους δομών, που στηρίχθηκαν σε αυτό.

Όπως φαίνεται στο Σχ.5.6, υπάρχουν δύο πρακτικές στη δόμηση ενός διδιάστατου πλέγματος (που επεκτείνονται και στο τριδιάστατο): η *αρίθμηση με μια αναγνωριστική μεταβλητή* (*identifying variable* ή *identifier*) και η *αρίθμηση με ζεύγος αναγνωριστικών μεταβλητών* για κάθε κόμβο. Η παραλληλοποίηση είναι επιτεύξιμη, φυσικά, και με τις δύο πρακτικές. Ο τρόπος με τον οποίο όμως είναι φτιαγμένη η CUDA, προσφέρει *παραλληλοποίηση* μέχρι και σε πέντε(5) διαστάσεις. Επίσης, κάθε διάσταση κατασκευάστηκε ως *αντικείμενο* μιας κλάσης (χαρακτηριστικό του αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού της C++ και της CUDA) και όχι ως διάσταση ενός πίνακα. Τα δύο αυτά χαρακτηριστικά συνέβαλαν στη δημιουργία μιας τελικής δομής η οποία χρησιμοποιεί **ζεύγος αναγνωριστικών μεταβλητών** και η οποία έχει τα εξής πλεονεκτήματα:

- δημιουργείται ταχύτερα
- έχει πιο γρήγορη και άμεση πρόσβαση στη μνήμη της GPU
- εκτελείται με αυξημένο βαθμό παραλληλοποίησης.



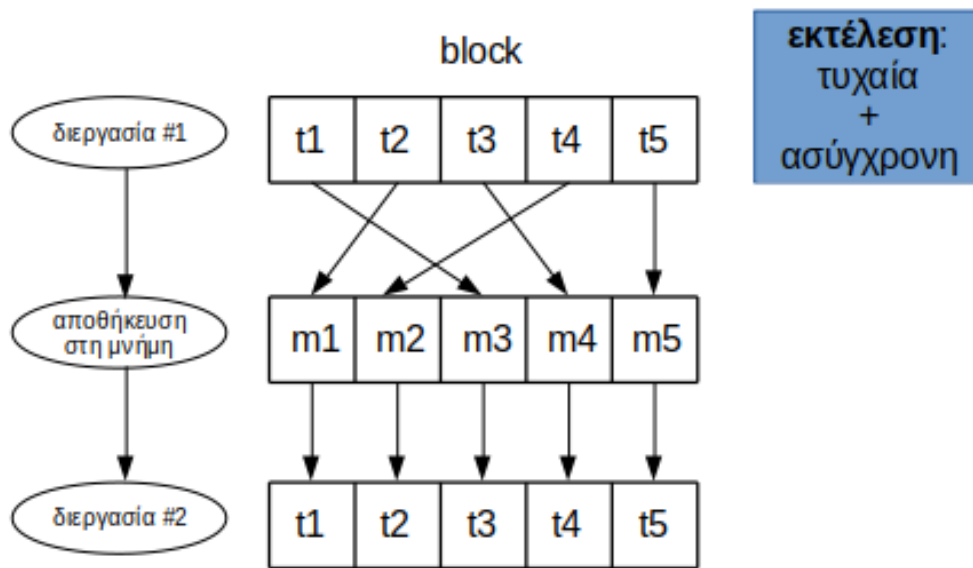
Σχήμα 5.6: Αρίθμηση και δόμηση διδιάστατου πλέγματος με ένα αναγνωριστικό (*identifier*), ή με ζεύγος αναγνωριστικών.

Αναφέρεται, επίσης, ότι αν και η εσωτερική **δόμηση των blocks** δύναται να γίνει με τυχαίο αριθμό threads ανά διάσταση, υπάρχει **βέλτιστος αριθμός**: ανά **32 threads** ή όπως ονομάζεται, ανά **warp**. Αυτό έχει να κάνει καθαρά με την αρχιτεκτονική της κάρτας και το πόσα threads ανά block έχουν πρόσβαση στην **κοινή μνήμη** (*shared memory*) του block (Κεφάλαιο 4).

Στάδιο Κυρίως Προγράμματος

Κατά την εκτέλεση του κυρίως προγράμματος η εκτέλεση του κώδικα οργανώνεται σε **πυρήνες** (*kernels*). Πρέπει να γίνει αντιληπτό ότι η εκτέλεση κάθε thread μέσα σε ένα block εκτελείται τυχαία και ασύγχρονα με όλα τα υπόλοιπα, εντός του block. Έτσι, η αποθήκευση στη μνήμη της GPU γίνεται με τη σειρά εκτέλεσης του thread και όχι με το αναγνωριστικό (*identifier*) του (Σχ.5.7). Για τον λόγο αυτό οι πυρήνες είναι συναρτήσεις (*functions*) που εκτελούν πράξεις μόνο για ένα σύνολο μεταβλητών, που **δεν εξαρτώνται** μεταξύ τους.

Σε διαφορετική περίπτωση, αν ο πυρήνας περιέχει παραπάνω από μία διεργασίες, πχ. με τις μεταβλητές της δεύτερης να εξαρτάται από την πρώτη, η δεύτερη αποκτά πρόσβαση σε θέσεις μνήμης με λανθασμένα δεδομένα. Η μνήμη απαιτεί αυτό που ονομάζεται **συγχρονισμός**. Από πυρήνα σε πυρήνα ο συγχρονισμός της μνήμης σύμφωνα με τα σωστά *identifiers* γίνεται αυτόματα. Αυτός ο συγχρονισμός γίνεται να επιτευχθεί τεχνητά και εντός του ίδιου του πυρήνα, όμως είναι εξαιρετικά μη αποδοτικός τρόπος συγχρονισμού της μνήμης και ο κώδικας χάνει σε **αποδοτικότητα**.



Σχήμα 5.7: Ασύγχρονη εκτέλεση των threads σε ένα block και αποθήκευσή τους στη μνήμη της GPU. Η πρόσβαση της επόμενης διεργασίας στη μνήμη έχει λανθασμένα δεδομένα, αφού η μνήμη δεν έχει συγχρονιστεί με τα σωστά αναγνωριστικά (identifiers).

Στάδιο Μετεπεξεργασίας

Το στάδιο της μετεπεξεργασίας αφορά την αντιγραφή των αποτελεσμάτων σε αρχεία και εκτελείται αποκλειστικά από την CPU. Η αντιγραφή εκτελείται *σειριακά*, ανά μία θέση μνήμης τη φορά. Η ταχύτητα εγγραφής στον δίσκο δεν αφορά μόνο τη συχνότητα λειτουργίας της CPU, αλλά προφανώς και τις δυνατότητες εγγραφής του δίσκου. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι δημιουργείται μια «στενωπός (bottleneck)» στη ροή των δεδομένων, η οποία καθορίζεται από τον σκληρό δίσκο. Χαρακτηριστικά αναφέρεται ότι το τρέξιμο του ίδιου κώδικα με και χωρίς εγγραφή δεδομένων, έχει τεράστια διαφορά στο χρόνο εκτέλεσης, κάτι που θα απεικονιστεί και στα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 6.

Κεφάλαιο 6

Αποτελέσματα και Δυνατότητες Επέκτασης του Κώδικα

Το Κεφάλαιο αυτό χωρίζεται σε δύο τμήματα:

- πρώτον, στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων από τον έλεγχο δύο περιπτώσεων («σενάρια») ροής. Οι περιπτώσεις αυτές αποτέλεσαν παράγοντα ελέγχου του κώδικα ως προς την *εγκυρότητα* και την *ακρίβεια* των αποτελεσμάτων, καθώς και ως προς την *αποδοτικότητα* του ίδιου του κώδικα και την επιτάχυνση που προσφέρει σε σχέση με έναν σειριακά δομημένο κώδικα, γραμμένο σε C++.
- δεύτερον, στις δυνατότητες επέκτασης του κώδικα. Ως σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας τέθηκε «η ανάπτυξη δομοστοιχειωτού κώδικα επίλυσης ενός αεροακουστικού προβλήματος με χρήση των LEE σε GPUs με στόχο την τελική επιτάχυνση της επίλυσης». Έχοντας δημιουργήσει όλες τις απαραίτητες δομές που επιτυγχάνουν αυτό το σκοπό, θα αναφερθούν οι δυνατότητες επέκτασης του κώδικα.

6.1 Αποτελέσματα: Ηχητική Πηγή Εντός και Εκτός Ομοιόμορφου Καρτεσιανού Πλέγματος

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή του Κεφαλαίου, έγινε έλεγχος σε δύο περιπτώσεις/σενάρια πεδίων ροής, τα αποτελέσματα των οποίων κρίθηκαν ως προς τις τρεις *αρχές* που τέθηκαν στο Κεφάλαιο 1.2. Οι περιπτώσεις αυτές δημιουργήθηκαν

από εσωτερικές δομές του κώδικα και δεν δόθηκαν εξωτερικά, ανταποκρίνονται σε ένα σύνολο ιδανικών συνθηκών και αφορούν:

- διάδοση κυμάτων από ακουστική πηγή σε πεδίο ροής μηδενικής ταχύτητας
- διάδοση κυμάτων από ακουστική πηγή σε

. Η αντιμετώπιση πραγματικών περιπτώσεων είναι αντικείμενο του δεύτερου μέρους αυτού του Κεφαλαίου, που αφορά στην επέκταση του κώδικα.

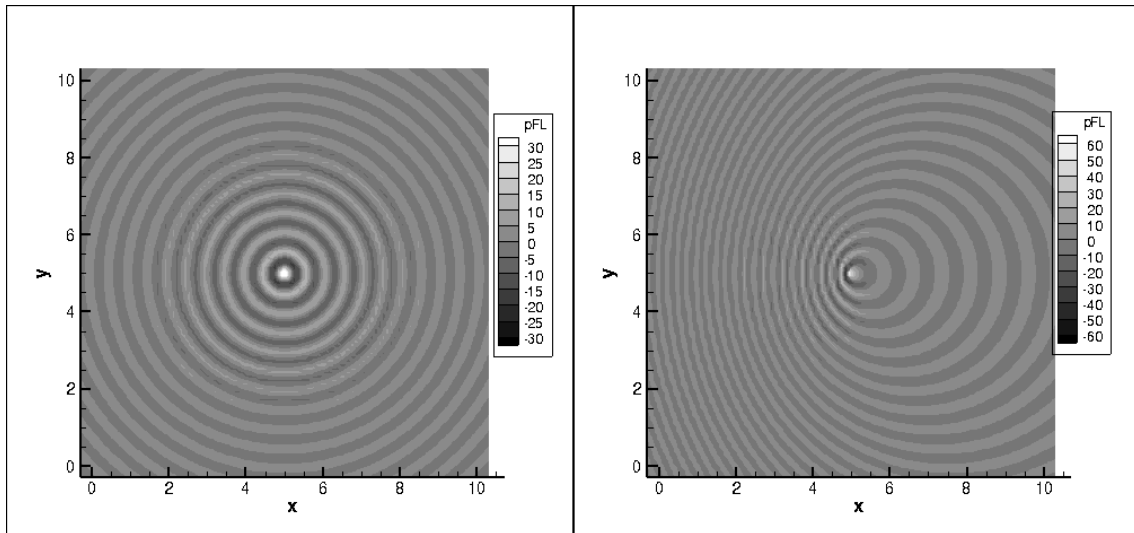
Σημειώνεται ότι τα πλέγματα τα οποία κατασκεύασε ο κώδικας ήταν ομοιόμορφα Καρτεσιανά διαστάσεων 200×200 .

6.1.1 Ηχητική Πηγή Εντός Πλέγματος

Τα πρώτα αποτελέσματα που παρατίθενται αφορούν ηχητική πηγή εντός ομοιόμορφου Καρτεσιανού πλέγματος. Το ίδιο το πλέγμα, καθώς και όλες οι ποσότητες που απαιτούνται για την επίλυση των εξισώσεων (διακριτοποίηση πλέγματος στις δύο διαστάσεις, υπολογισμός μετρικών, υπολογισμός Jacobian, κλπ), όπως αυτές περιγράφονται στο Κεφάλαιο 5, κατασκευάζονται από τον ίδιο τον κώδικα.

Αρχικά, παρουσιάζονται στο Σχ.6.1 παραγόμενα αποτελέσματα για σύγκριση της ανταπόκρισης του πεδίου σε μηδενική και ομοιόμορφη ροή. Στο αριστερό τμήμα του σχήματος έχει παραχθεί πεδίο με μηδενικό αριθμό Mach, ενώ στο δεξιό τμήμα στο πεδίο εισάγεται ταχύτητα παράλληλη στον x -άξονα, τέτοια ώστε $M_x = 0.5$. Οι εξισώσεις που επιλύονται είναι οι LEE (Εξ.2.44) στο εσωτερικό και η γραμμική ακουστική κυματική εξίσωση στα όρια (Εξ.2.6)(οριακές συνθήκες Dirichlet). Σκοπός αυτής της περίπτωσης ήταν η εξακρίβωση ότι οι LEE επιλύονται για μη μηδενικούς Mach.

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται στο Σχ.6.2 αποτελέσματα, που παράχθηκαν, για έλεγχο των οριακών συνθηκών εξερχόμενης ροής (outflow boundary condition), σε πεδίο μηδενικής ταχύτητας. Και στα δύο πεδία επικρατεί $M = 0$. Στο αριστερό πεδίο επιλύεται η γραμμική ακουστική κυματική εξίσωση (αναλυτική λύση, Εξ.2.6) τόσο στο εσωτερικό όσο και στα όρια, ενώ στο δεξί επιλύονται οι LEE στο εσωτερικό με οριακές συνθήκες εξερχόμενης ροής σε όλα τα όρια. Ως μέτρο σύγκρισης επιλέγεται ο ίδιος πλεγματικός κόμβος (με μπλε και κόκκινο για κάθε περίπτωση). Αν οι οριακές συνθήκες εξερχόμενης ροής (outflow boundary condition) υπολογίζονταν λανθασμένα, τότε στη δεύτερη περίπτωση (δεξιά εικόνα Σχ. 6.2) τα εξερχόμενα κύματα (ακουστικά, στροβιλότητας, εντροπίας) δεν θα ανταποκρίνονταν στα κύματα που επιλύονται εσωτερικά του πεδίου. Η χρονοσειρά ανταπόκρισης του οριακού πλεγματικού κόμβου στις δύο περιπτώσεις είναι πρακτικά ταυτόσημη, με διαφορές στο πέμπτο σημαντικό ψηφίο. Με την παραγωγή των παραπάνω αποτελεσμάτων, αποδεικνύεται ότι οι οριακές συνθήκες εξόδου ανταποκρίνεται όπως είναι αναμε-



Σχήμα 6.1: Διαταραχή της πίεσης με ηχητική πηγή στο κέντρο ομοιόμορφου Καρτεσιανού πλέγματος. Αριστερά διακρίνεται πεδίο με μέση ομοιόμορφη ροή $M_x = 0$. Δεξιά διακρίνεται πεδίο με μέση ομοιόμορφη $M_x = 0.5$.

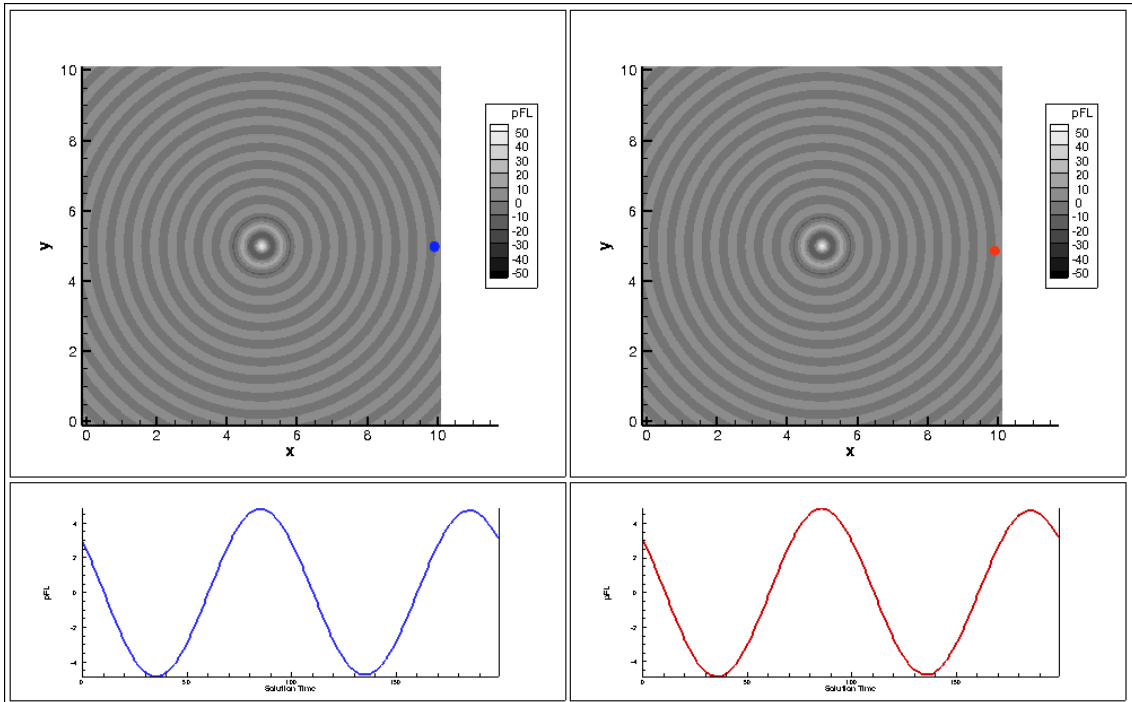
νόμενο.

Τέλος, στο Σχ.6.3 παράχθηκε η ανάκλαση κύματος από στερεό τοίχωμα. Σκοπός αυτής της περίπτωσης ήταν ναδειχθεί ότι, αφού οι LEE επιλύονται επιτυχώς και οι οριακές συνθήκες εξερχόμενης ροής (outflow) είναι ακριβείς, ένα όριο του πλέγματος μπορεί να λειτουργήσει ως στερεό τοίχωμα και σε αυτό να γίνει ανάκλαση ενός κύματος, χωρίς τα αρνητικά των παρασιτικών κυμάτων (ανάπτυξη επιπλέον «αριθμητικού» οριακού στρώματος, ανάκλαση παρασιτικών κυμάτων, ανάκλαση ακουστικών κυμάτων με πλάτος διαφορετικό από το αρχικό). Οι δύο πλεγματικοί κόμβοι που επιλέχθηκαν στον κώδικα, βρίσκονται πλησίον του ελεύθερου ορίου (κόκκινος) και του τοίχου (πράσινος), αντίστοιχα. Η χρονοσειρά που τους περιγράφει είναι ακριβώς η ίδια, με τη διαφορά ότι στον κόμβο που δέχεται την ανάκλαση το ανακλώμενο κύμα υπερτίθεται του διαδιδόμενου. Με τα αποτελέσματα του Σχ.6.3 αποδεικνύεται ότι η ανάκλαση γίνεται ορθά, τα ακουστικά κύματα ανακλώνται προς το εσωτερικό του πεδίου, όπως αναμένεται, ενώ τα παρασιτικά κύματα δεν εισάγουν «θόρυβο» στη λύση.

6.1.2 Ηχητική Πηγή Εκτός Πλέγματος

Ο σκοπός των παραγόμενων αποτελεσμάτων της περίπτωσης που απεικονίζεται στο Σχ.6.4 είναι τριπλός:

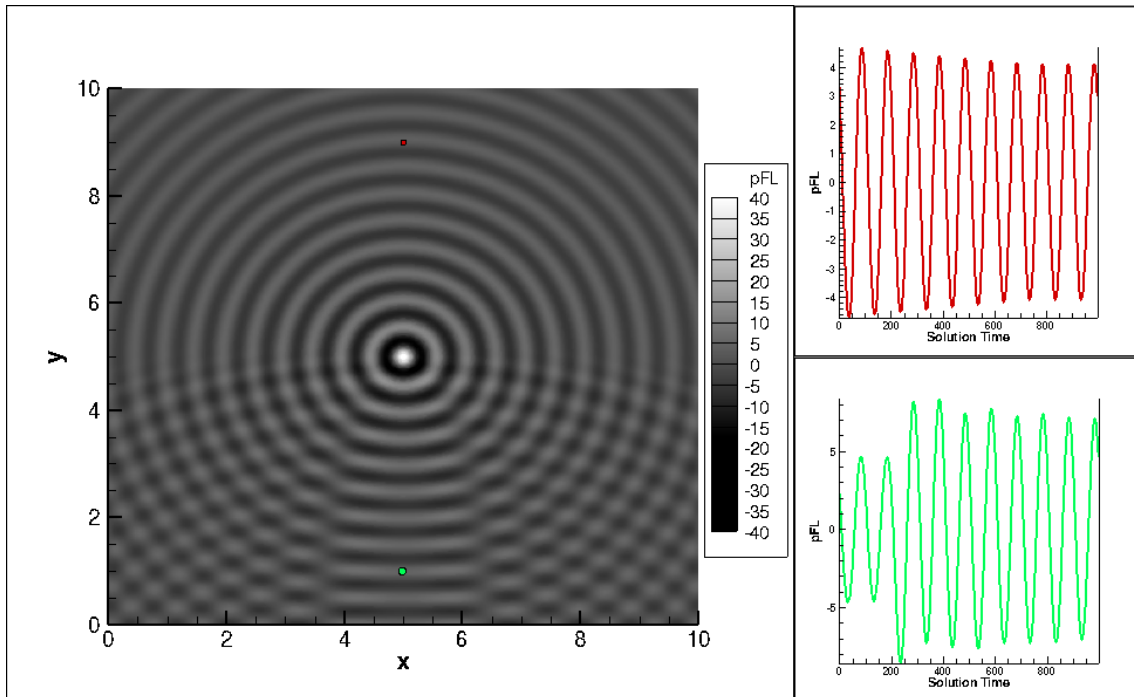
- ο έλεγχος του κατά πόσο τα κύματα μιας ηχητικής πηγής που βρίσκεται **εκτός** του υπολογιστικού χωρίου μεταφέρονται εντός αυτού



Σχήμα 6.2: Διαταραχή της πίεσης με ηχητική πηγή στο κέντρο ομοιόμορφου Καρτεσιανού πλέγματος. Αριστερά διακρίνεται πεδίο όπου επιλύεται η ακουστική κυματική εξίσωση (αναλυτική λύση) τόσο στο εσωτερικό όσο και στα όρια. Δεξιά διακρίνεται πεδίο με επίλυση των LEE στο εσωτερικό και οριακές συνθήκες εξερχόμενης ροής (out-flow). Η χρονοσειρά συγκρίνει τους χρωματισμένους οριακούς πλεγματοκύκλους κάθε πεδίου.

- ο έλεγχος του κατά πόσο τα κύματα αυτά μεταφέρονται **σωστά**. Αυτό περιέρχεται στο
 - αν οι οριακές συνθήκες ακτινοβολίας (radiation boundary conditions) ή εισερχόμενης ροής (inflow boundary conditions) επιτρέπουν την είσοδο της ροής και των ακουστικών κυμάτων
 - αν οι οριακές συνθήκες εξερχόμενης ροής (outflow boundary conditions) επιτρέπουν την έξοδο της ροής και των ακουστικών κυμάτων
- ο έλεγχος του αν τα παραπάνω ανταποκρίνονται σωστά τόσο σε ροές μηδενικού, όσο και σε ροές μη μηδενικού αριθμού Mach

Το αριστερό τμήμα του Σχ.6.4 αποτελεί περίπτωση αναφοράς (benchmark case) για τη διακρίβωση και τον έλεγχο του δεξιού. Και στις δύο περιπτώσεις: επιλύονται οι LEE στο εσωτερικό, επιβάλλονται οριακές συνθήκες εισερχόμενης ροής στο αριστερό πλεγματοκύκλο όριο και ακτινοβολίας και εξερχόμενης ροής σε όλα τα άλλα όρια, ενώ τίθεται $M_x = 0$ για το αριστερό σχήμα και $M_x = 0.5$ για το δεξί. Με την παράθεση αυτών των αποτελεσμάτων, οι οριακές συνθήκες εισερχόμενης ροής, που προγραμματίστηκαν, ανταποκρίνονται σε όσα περιγράφει η θεωρία, με το κύμα να εισέρχεται και να εξέρχεται από το πεδίο χωρίς διαταραχές (distortions) ή παλινδρο-



Σχήμα 6.3: Διαταραχή της πίεσης με ηχητική πηγή στο κέντρο ομοιόμορφου Καρτεσιανού πλέγματος, το κάτω άκρο του οποίου προσομοιώνει στερεό τοίχωμα. Επιλύονται οι LEE στο εσωτερικό και επικρατούν οριακές συνθήκες εξερχόμενης ροής (outflow) στα πλαϊνά και στο πάνω όριο. Διακρίνεται το ανακλώμενο κύμα το οποίο έχει διαδοθεί ως το κέντρο του πεδίου. Με κόκκινο και πράσινο χρώμα διακρίνονται δύο αντιδιαμετρικοί πλεγματικοί κόμβοι, των οποίων η χρονοσειρά διακρίνεται στα δεξιά του σχήματος. Με πράσινο διακρίνεται ο κόμβος ο οποίος επηρεάστηκε από την ανάκλαση.

μήσεις (oscillations), λόγω παρασιτικών κυμάτων ή άλλων παραγόντων.

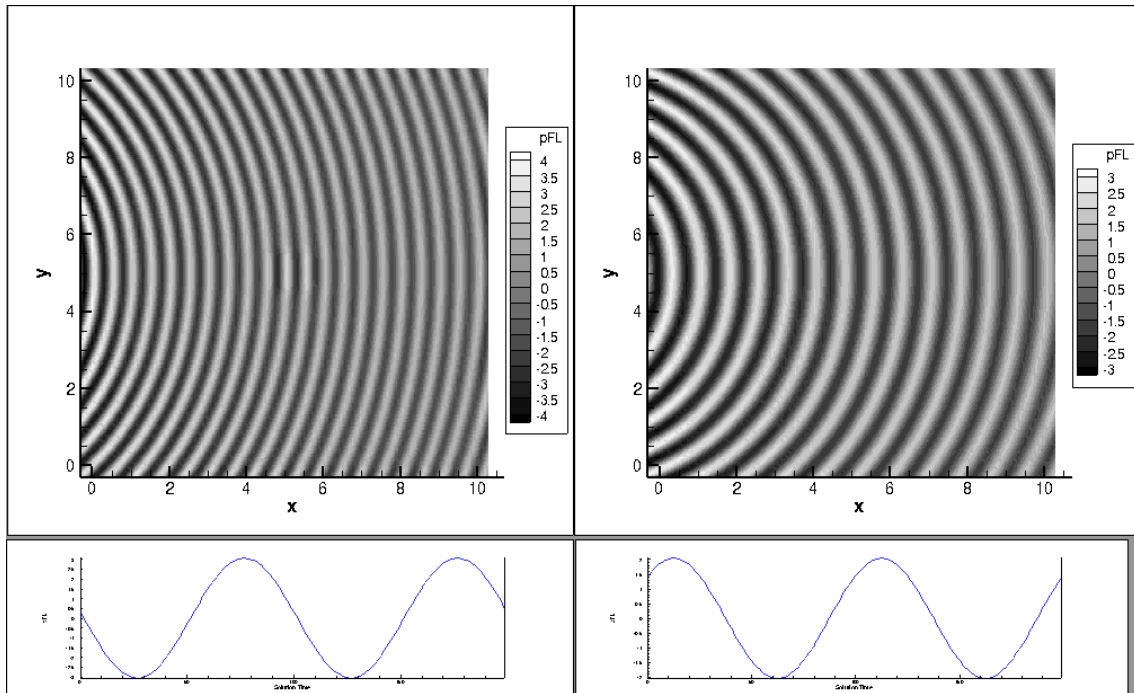
6.1.3 Επιτάχυνση της Επίλυσης των Εξισώσεων

Δεύτερος σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας ήταν η επιτάχυνση της επίλυσης του αερακουστικού προβλήματος με χρήση καρτών γραφικών. Στο Σχ.6.5 απεικονίζονται συγκρίσεις για διάφορα μεγέθη πλεγμάτων μεταξύ τρεξίματος του κώδικα αποκλειστικά σε CPU (με πράσινο χρώμα), σε ανομοιογενές επεξεργαστικό περιβάλλον με χρήση GPU (με μωβ χρώμα).

Σημειώνεται ότι οι CPU και GPU που χρησιμοποιήθηκαν είναι:

- CPU: **Intel Xeon E5620**
- GPU: **NVIDIA TESLA M2050**

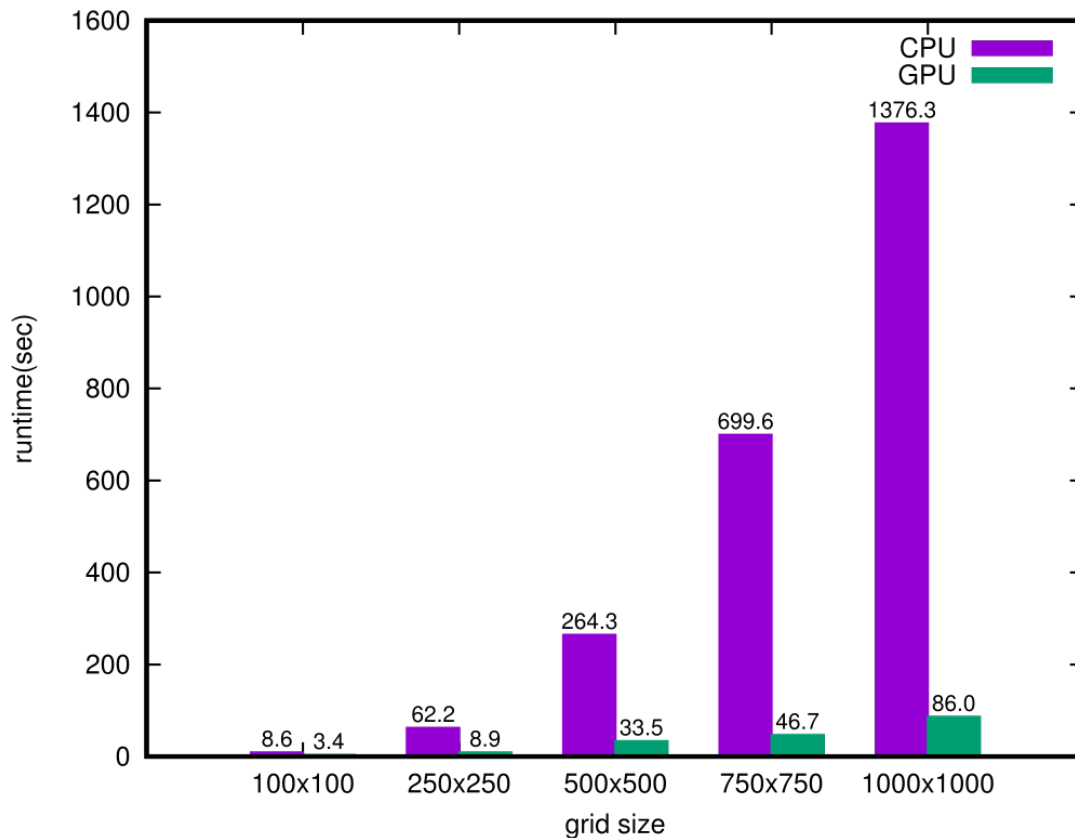
Τα χαρακτηριστικά τους δίνονται στο Παράρτημα D'.



Σχήμα 6.4: Διαταραχή της πίεσης με ηχητική πηγή εκτός ενός ομοιόμορφου Καρτεσιανού πλέγματος. Αριστερά διακρίνεται πεδίο με μέση ομοιόμορφη ροή $M_x = 0$. Δεξιά διακρίνεται πεδίο με μέση ομοιόμορφη $M_x = 0.5$.

Τα κύρια πλέγματα στα οποία έγινε σύγκριση είναι 250×250 , 500×500 , 750×750 και 1000×1000 . Πρόκειται ουσιαστικά για το ίδιο χωρίο, στο οποίο γίνεται πύκνωση του πλέγματος. Παρατίθεται, επίσης και μια σύγκριση σε πλέγμα 100×100 για να αναφερθεί ότι αν και υπάρχει κέρδος, η χρήση GPUs για επιτάχυνση της επίλυσης σε πολύ μικρά πλέγματα δεν ενδείκνυται. Η αντιγραφή δεδομένων από την CPU στην GPU και πίσω καταλαμβάνει πλέον σημαντικό τμήμα του χρόνου τρεξίματος, οπότε ο σκοπός της χρήσης GPUs χάνει την αξία του.

Περνώντας όμως στα μεγαλύτερα πλέγματα, η επιτάχυνση και το κέρδος σε χρόνο επίλυσης είναι εμφανέστατη. Ξεκινώντας από κέρδος χρόνου εκτέλεσης 7 : 1 για πλέγμα 250×250 , καταλήγει σε κέρδος 16 : 1 για πλέγμα 1000×1000 . Φυσικά, όσο μεγαλύτερο το πλέγμα, τόσο μεγαλύτερο το κέρδος της παράλληλης επίλυσης.



Σχήμα 6.5: Σύγκριση χρόνου τρεξίματος, για υπολογιστικά πλέγματα διαφόρων μεγεθών, μεταξύ CPU (Intel Xeon E5620) και GPU (NVIDIA TESLA M2050).

6.1.4 Επίτευξη Δευτερεύοντος Σκοπού: Αποδοτική Χρήση των GPUs σε Ανομοιογενές Πολυεπεξεργαστικό Περιβάλλον

Ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης για το μεγαλύτερο πλέγμα (1000×1000) κόμβων που χρησιμοποιήθηκε ήταν $86sec$ (Σχήμα 6.5). Έγινε προσπάθεια μείωσης του χρόνου κατάστασης αναμονής (idle state) της GPU με δύο τρόπους: αφενός με την ανάθεση στην CPU μόνο των αυστηρά απαραίτητων διεργασιών και όχι υπολογισμών στο στάδιο της προεπεξεργασίας (preprocessing), αφετέρου δε με παράλληλη χρήση της CPU και της GPU στο στάδιο της μετεπεξεργασίας, γεγονός το οποίο εξάλειψε πρακτικά πλήρως το νεκρό χρόνο στο στάδιο αυτό. Συγκεκριμένα, η GPU ήταν σε κατάσταση αναμονής, με μέση χρήση 8% της συνολικής της μνήμης, για μόλις το 4.3% του συνολικού χρόνου τρεξίματος, ενώ για το υπόλοιπο 95.7% του χρόνου έγινε μέση χρήση 92%. Έτσι, εκπληρώθηκε σε ικανοποιητικό βαθμό και ο **δευτερεύων σκοπός** που τέθηκε.

	Χρόνος (sec)	Χρόνος (%)	Χρήση Μνήμης (%)
Στάδιο Προεπεξεργασίας	3.7	4.3	8
Στάδιο Κυρίως Προγράμματος	82.3	95.7	92

Πίνακας 6.1: Χρόνος και κατανάλωση υπολογιστικών πόρων της GPU (NVIDIA TESLA M2050) για πλέγμα 1000×1000 κόμβων.

6.2 Δυνατότητες Επέκτασης του Κώδικα: Δομοστοιχειωτός Σχεδιασμός και Αντικειμενοστραφής Προγραμματισμός

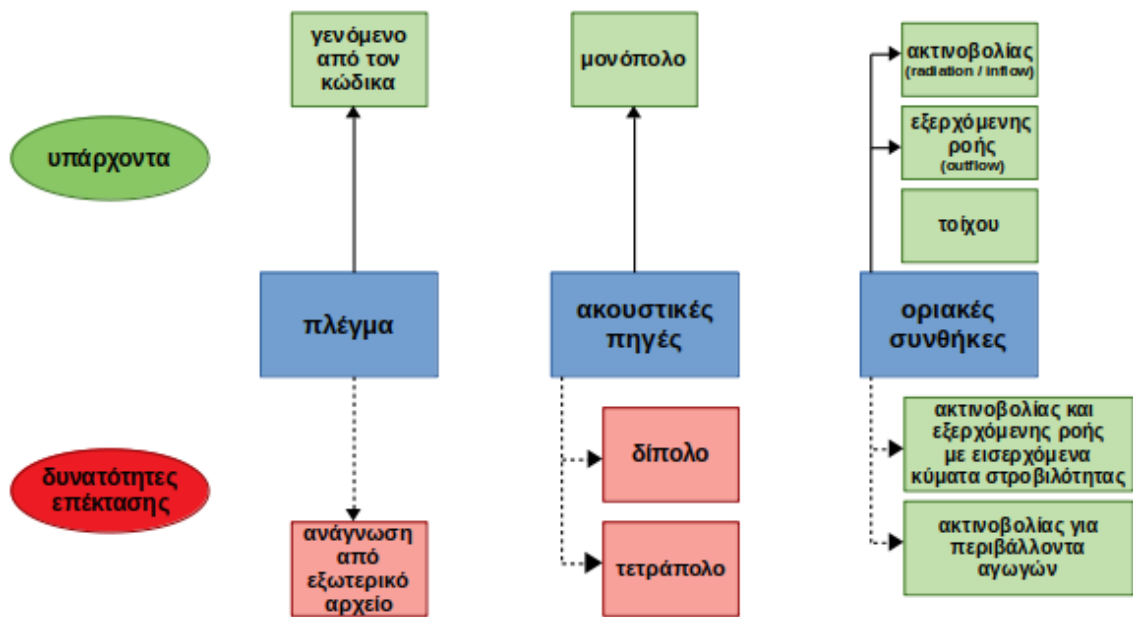
Στο δεύτερο μέρος αυτού του Κεφαλαίου αναφέρονται ιδέες σχετικά με την επέκταση του κώδικα (Σχ.6.6).

Αρχικά, δύναται να προστεθεί μια επιπλέον δομή στο δομικό στοιχείο που κατασκευάζει το πλέγμα. Αυτή η δομή αντί να κατασκευάζει το υπολογιστικό πλέγμα και να υπολογίζει τις απαραίτητες μεταβλητές του, θα τις αναγνωρίζει από ένα αρχείο δεδομένων, το οποίο θα περιέχει τα χαρακτηριστικά ενός πλέγματος από κάποιο πρόγραμμα πλεγματοποίησης. Με τον τρόπο αυτό γίνεται δυνατή η εκτέλεση του κώδικα σε πιο περίπλοκες γεωμετρίες.

Κατά την ανάλυση των ακουστικών πηγών έγινε ο διαχωρισμός των ακουστικών όρων σε μονόπολο, δίπολο και τετράπολο. Από αυτά προγραμματίστηκε το μονόπολο. Πάνω στη δομή του μονόπολου μπορούν να προστεθούν δύο επιπλέον δομές που θα αφορούν το δίπολο και το τετράπολο και από αυτές να επιλέγονται όσες αναμένεται να έχουν αξία, ανάλογα με τη φύση του προβλήματος.

Τέλος, από τις διάφορες οριακές συνθήκες, που περιγράφηκαν στο Κεφάλαιο 3, προγραμματίστηκαν οι οριακές συνθήκες ακτινοβολίας (ή εισερχόμενης ροής), εξερχόμενης ροής και τοίχου, μαζί με ένα σύνολο οριακών συνθηκών Dirichlet για λόγους ελέγχου των αποτελεσμάτων. Στο δομικό στοιχείο των οριακών συνθηκών μπορούν να προστεθούν οι οριακές συνθήκες ακτινοβολίας και εξερχόμενης ροής με εισερχόμενα κύματα στροβιλότητας, και οι οριακές συνθήκες ακτινοβολίας σε περιβάλλοντα αγωγών.

Συμπεραίνοντας, αναπτύχθηκε ένα σύνολο δομικών στοιχείων που απαρτίζουν τον κώδικα επίλυσης ενός αεροακουστικού προβλήματος, με το μοντέλο των LEE. Ο **δομοστοιχειωτός σχεδιασμός** του επιτρέπει την προσάρτηση επιπρόσθετων τέτοιων δομικών στοιχείων, χωρίς να αλλοιωθεί ο πυρήνας του κυρίως προγράμματος. Επιπλέον, η **αντικειμενοστραφής** φύση της C++ και της CUDA προσδίδουν μεγάλη



Σχήμα 6.6: Δυνατότητες επέκτασης του κώδικα.

ευελιξία σε θέματα διαχείρισης και δόμησης μνήμης, εξασφαλίζοντας απλούστερες τελικές δομές, οι οποίες εκτελούνται ταχύτερα, παρά την πολυπλοκότητά τους σε ότι αφορά τον προγραμματισμό τους. Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι εξαιρετικά επιθυμητά όχι μόνο για την επίλυση ενός προβλήματος Υπολογιστικής Αεροακουστικής, ή Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής, αλλά γενικά σε κώδικες που προορίζονται για μακροχρόνια χρήση από διαφορετικούς προγραμματιστές.

Κεφάλαιο 7

Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα

Κλείνοντας αυτή τη διπλωματική εργασία, αναφέρεται ξανά ο *πρωτεύων* και ο *δευτερεύων* σκοπός της

- ο **δομοστοιχειωτός σχεδιασμός αντικειμενοστραφούς κώδικα**, που θα επιλύει ένα αεροακουστικό πρόβλημα (χαρακτηριστικά του οποίου περιγράφηκαν στα Κεφάλαια 2 και 3) με το μοντέλο των LEE και η **υλοποίησή του σε παράλληλο επεξεργαστικό περιβάλλον GPUs**
- η όσο το δυνατό **αποτελεσματικότερη κατανάλωση** των υπολογιστικών και ενεργειακών πόρων της GPU κατά την επίλυση του προβλήματος

Η ανάλυση του μοντέλου έγινε διεξοδικά - από την παραγωγή, τη διακριτοποίηση και την επίλυση των εξισώσεων, τόσο εντός του πλέγματος, όσο και στα όρια και στους ψευδοκόμβους, μέχρι τα είδη των οριακών συνθηκών που χρησιμοποιήθηκαν και τις ιδιαιτερότητες αυτών, καθώς και τις σχετικές παραδοχές και προσεγγίσεις που απαιτήθηκαν σε όλη την παραγωγή του αλγορίθμου. Η «μετάφραση» του αλγορίθμου σε κώδικα ήταν επιτυχής, όπως φάνηκε και από τα αποτελέσματα. Αναλύθηκε καθεμία από τις παραπάνω συνιστώσες και ελέγχθηκε με την αναλυτική λύση, ώστε να εξασφαλιστεί η *εγκυρότητα* του κώδικα και η *ακρίβεια* των αποτελεσμάτων.

Ο κώδικας έκανε χρήση του παράλληλου περιβάλλοντος των GPUs της ΜΠΥΡ&Β του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών, συμβάλλοντας έτσι στην επιτάχυνση παραγωγής των αποτελεσμάτων και εκπληρώνοντας τον **πρωτεύοντα σκοπό** της διπλωματικής εργασίας. Το γεγονός αυτό φαίνεται αφενός από τις συγκρίσεις, με την αναλυτική λύση, των αποτελεσμάτων που παράχθηκαν από την επίλυση των LEE και των οριακών συνθηκών που μελετήθηκαν και αφαιτέρου από το Σχ. 6.5, όπου διακρίνεται η σύγκριση στο χρόνο τρεξίματος μεταξύ CPU (Intel Xeon E5620) και GPU (NVIDIA TESLA M2050).

Ο **δευτερεύων σκοπός** αφορά στην *αποδοτικότητα* ή *αποτελεσματικότητα* του κώδικα, δηλαδή, στο να μπορέσει να εκμεταλλευτεί τους υπολογιστικούς πόρους της GPU όσο δυνατό καλύτερα. Ο σκοπός αυτός, αν και δεν ήταν απαραίτητος για την υλοποίηση και επίλυση του προβλήματος, θεωρήθηκε σημαντικός, δεδομένης της μεγάλης ενεργειακής κατανάλωσης που έχουν οι GPUs σε μεγάλες μονάδες (high-processing clusters, HPCs). Στο Κεφάλαιο 5 αναφέρονται συγκεντρωτικά τα δεδομένα χρήσης της GPU, μαζί με τους χρόνους εκτέλεσης (Πίνακας 6.1). Είναι εμφανές ότι από τα ποσοστά χρήσης της GPU επιτεύχθηκε και ο δευτερεύων σκοπός.

Τέλος, αναγνωρίζεται το γεγονός ότι ο κώδικας που αναπτύχθηκε για αυτήν τη διπλωματική εργασία, αποτελεί τη **βάση** πάνω στην οποία δομήθηκε ο αλγόριθμος επίλυσης ενός αεροακουστικού προβλήματος. Αν και το πρόβλημα αυτό είναι ορισμένο με κάποιους περιορισμούς, οι δυνατότητες επέκτασης είναι εκτενείς, όπως περιγράφηκε και στο Κεφάλαιο 6. Η παραλληλοποίηση σε περιβάλλον GPU, με χρήση της CUDA, είναι αναμφισβήτητα επιθυμητή, αν όχι απαραίτητη, στα προβλήματα που θέτει η Υπολογιστική Ρευστομηχανική. Επίσης η C++ μέσω της ίδιας της δομής της με κλάσεις και αντικείμενα, προσφέρει δυνατότητες εύκολης προσαρμογής, αλλαγής, αφαίρεσης ή προσθήκης επιμέρους συστατικών στον κώδικα¹, όπως πχ. η προσθήκη επιπλέον οριακών συνθηκών, τύπων πλέγματος ή είδους πεδίου. Με αυτόν τον τρόπο, ο κώδικας όχι μόνο έχει δυνατότητες επέκτασης, αλλά οι δυνατότητες αυτές υλοποιούνται εύκολα πάνω στο ήδη υπάρχον πρόγραμμα.

¹Τα χαρακτηριστικά που ορίζονται συλλογικά ως «δομοστοιχειωτός σχεδιασμός» ή modularity.

Παράρτημα Α΄

Ονοματολογία - Συμβολολογία

Α΄.1 Σύμβαση Συμβόλων, Υπερδείκτες, Υποδείκτες

Τα διανύσματα συμβολίζονται χρησιμοποιώντας έντονη γραμματοσειρά, πχ **u** για το διάνυσμα της ταχύτητας, ή με όρους των Καρτεσιακών συνιστωσών τους, πχ. x_1, x_2, x_3 ή x_i . Οι ταυιστές συμβολίζονται με όρους των Καρτεσιανών συνιστωσών τους χρησιμοποιώντας διπλό υποδείκτη, πχ σ_{ij} για τον ταυιστή των τάσεων. Περισσότερα για την ταυιστική γραφή στο Παράρτημα Β΄

Γενικά η μέση τιμή μιας μεταβλητής συμβολίζεται χρησιμοποιώντας τον υποδείκτη «ο», πχ p_o για τη μέση πίεση, ή με μια παύλα πάνω από τη μεταβλητή, πχ. \bar{p} . Η διακύμανση μιας μεταβλητής συμβολίζεται χρησιμοποιώντας τον τόνο, πχ. $p' = p - p_o$ για τη διακύμανση της πίεσης. Η μερική παράγωγος ως προς τον χρόνο συμβολίζεται με τελεία πάνω από τη μεταβλητή, πχ. \dot{u}_i για την πρώτη μερική παράγωγο της ταχύτητας.

Το μιγαδικό πλάτος συμβολίζεται με «καπέλο» πάνω από τη μεταβλητή, πχ. \hat{p} για πλάτος της πίεσης ενός αρμονικού κύματος όπου $p' = \hat{p}e^{-i\omega t}$.

A'.2 Μετασχηματισμός Fourier: Συμβολισμός και Ορισμός

Ο μετασχηματισμός *Fourier* συμβολίζεται με χρήση του συμβόλου tilde και ο μετασχηματισμός κυματικού αριθμού συμβολίζεται με διπλό tilde.

Ορίζεται ο μετασχηματισμός *Fourier* για μια χρονοσειρά ως

$$\tilde{p}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T p'(t) e^{i\omega t} dt \quad (A'.1)$$

όπου το T τείνει στο άπειρο, και ο ανάστροφος μετασχηματισμός *Fourier* ως

$$p'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (A'.2)$$

όπου ω είναι η κυκλική συχνότητα. Χρησιμοποιείται το σύμβολο i ως η τετραγωνική ρίζα του -1 . Ορίζεται ο μονοδιάστατος μετασχηματισμός *Fourier* για μεταβολή ενός μεγέθους στον χώρο ως

$$\tilde{f}(k_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-R_\infty}^{R_\infty} f(x_1) e^{-ik_1 x_1} dx_1 \quad (A'.3)$$

όπου συμβολίζεται χωρικά το διάστημα $-R_\infty$ έως R_∞ , ώστε να περικλείει ολόκληρη τη χωρική μεταβολή, και ο ανάστροφος μετασχηματισμός ως

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k_1) e^{ik_1 x_1} dk_1 \quad (A'.4)$$

με τους 2Δ και 3Δ μετασχηματισμούς να συνεπάγονται από την επαναλαμβανόμενη εφαρμογή των παραπάνω δύο εκφράσεων. Εδώ, k_1 είναι ο κυματικός αριθμός στην κατεύθυνση x_1 . Σημειώνεται ότι ο εκθέτης είναι θετικός στον ευθύ μετασχηματισμό στον χρόνο και αρνητικός στον ευθύ μετασχηματισμό στον χώρο. Συνολικά, ο μετασχηματισμός *Fourier* μιας μεταβλητής a στον χώρο και στον χρόνο υπολογίζεται ως

$$\tilde{a}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-R_\infty}^{R_\infty} \int_{-R_\infty}^{R_\infty} \int_{-R_\infty}^{R_\infty} \int_{-T}^T a(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dt dx_1 dx_2 dx_3 \quad (A'.5)$$

Σημείωση: Οποιαδήποτε διαφορετική χρήση διαφορετικών συμβολισμών, από τα παραπάνω, θα αναφέρεται ρητά.

Παράρτημα Β΄

Τανυστική Γραφή

Η Καρτεσιανή τανυστική γραφή είναι χρήσιμη στην αεροακουστική διότι δίνει τη δυνατότητα παράστασης τανυστικών γινομένων με σχετικά απλές εκφράσεις.

Γενικά, ενδιαφέρει η χρήση της σε διανύσματα θέσης, όπως τα x και y , τα οποία περιγράφουν τη θέση των παρατηρητών και των πηγών αντίστοιχα, και σε ροϊκές μεταβλητές, όπως το διάνυσμα ταχύτητας v , το οποίο ορίζει την ταχύτητα ενός ρευστοστοιχείου σε μια συγκεκριμένη θέση στο χώρο. Σε Καρτεσιανές συντεταγμένες αυτά τα διανύσματα έχουν τρεις συνιστώσες. Αν χρησιμοποιηθεί η τανυστική γραφή κάθε συνιστώσα συμβολίζεται με τον υποδείκτη i , ο οποίος παίρνει τις τιμές 1, 2, 3. Έτσι το διάνυσμα $x = (x_1, x_2, x_3)$ συμβολίζεται ως x_i . Χρησιμοποιώντας αυτήν την προσέγγιση, ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ δύο διανυσμάτων q και v ως

$$q \cdot v = \sum_{i=1}^3 q_i v_i = q_1 v_1 + q_2 v_2 + q_3 v_3 \quad (\text{B'.1})$$

Για λόγους ευκολίας γραφής, χρησιμοποιείται η σύμβαση Einstein, όπου το σύμβολο του αθροίσματος εννοείται και παραλείπεται

$$q_i v_i = \sum_{i=1}^3 q_i v_i \quad (\text{B'.2})$$

Η τανυστική γραφή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στον ορισμό της παραγώγου ενός βαθμού μεγέθους ϕ

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \mathbf{k} \quad (\text{B'.3})$$

όπου τα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στις τρεις διευθύνσεις. Ομοίως, η

απόκλιση της ταχύτητας v είναι

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad (\text{B'.4})$$

Η προσέγγιση αυτή είναι πλέον χρήσιμη στο χειρισμό ταχυστών. Για παράδειγμα, το γινόμενο $S_{ij} = v_i v_j$ είναι ένας ταχυστής, ο οποίος αντιπροσωπεύει ένα μητρώο με εννέα στοιχεία που αντιστοιχεί στους δείκτες $i = 1, 2, 3$ και $j = 1, 2, 3$.

$$\begin{bmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_2 v_1 & v_2^2 & v_2 v_3 \\ v_3 v_1 & v_3 v_2 & v_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B'.5})$$

Μια κοινά εμφανιζόμενη έκφραση στις εξισώσεις κίνησης είναι του ταχυστή της παραγώγου της ταχύτητας $\partial v_i / \partial x_j$, η οποία αναπτύσσεται ως

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (\text{B'.6})$$

Τελευταίο στην ταχυστική γραφή αναφέρεται το δέλτα του *Kronecker*, δ_{ij} , το οποίο ορίζεται ως μηδέν όταν $i \neq j$ και μονάδα, διαφορετικά. Οι πράξεις με το δέλτα του *Kronecker* ορίζονται ως εξής

$$p \delta_{ij} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \quad \delta_{ik} \delta_{kj} = \sum_{k=1}^3 \delta_{ik} \delta_{kj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \xi_{ij} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 S_{ij} \delta_{ij} = S_{ii} \quad (\text{B'.7})$$

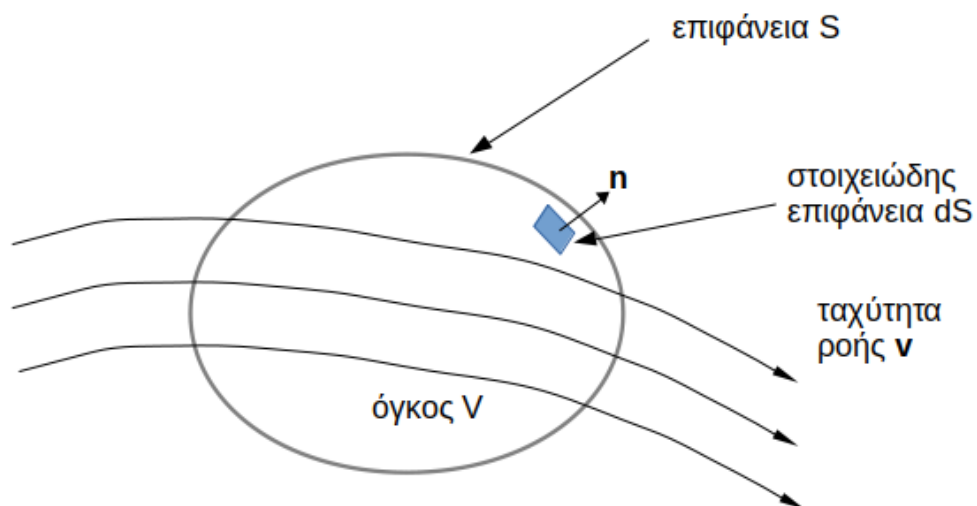
Παράρτημα Γ'

Κινηματικές Εξισώσεις Ρευστού

Στο Παράρτημα Γ' αναφέρονται οι βασικές εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση ενός συμπιεστού ρευστού.

Γ'.1 Εξίσωση Διατήρησης της Μάζας

Η έννοια της διατήρησης της μάζας προϋποθέτει ότι η μάζα δεν δημιουργείται ούτε καταστρέφεται σε οποιοδήποτε ρευστοστοιχείο.



Σχήμα Γ'.1: Όγκος ελέγχου V εντός επιφάνειας S με ροή ρευστού διανύσματος ταχύτητας v .

Στο Σχ.Γ'.1 διακρίνεται ένας όγκος ρευστού V , γνωστός ως *όγκος ελέγχου*, περιβαλλόμενος από μια επιφάνεια S . Το κάθετο στην επιφάνεια μοναδιαίο διάνυσμα, με κατεύθυνση προς τα έξω, συμβολίζεται με \mathbf{n} . Εντός του όγκου ελέγχου διέρχεται ρευστό ταχύτητας \mathbf{v} . Για σταθερό όγκο ελέγχου, πυκνότητας $\rho(\mathbf{x}, t)$, η μάζα γράφεται $\int_V \rho dV$.

Η ροή μεταφέρει ρευστό εκτός και εντός του όγκου ελέγχου και η ροή (flux) μάζας που εξέρχεται ή εισέρχεται από τον ή στον όγκο από τη στοιχειώδη επιφάνεια dS , σε κάθε χρονική στιγμή, είναι $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$.

Ο ρυθμός με τον οποίο ο όγκος ελέγχου χάνει μάζα πρέπει να είναι ίσος με τη συνολική εξερχόμενη ροή μάζας από την επιφάνεια ελέγχου S

$$\int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (\Gamma'.1)$$

Χρησιμοποιώντας το *θεώρημα της απόκλισης* το οποίο μετατρέπει ένα ογκικό ολοκλήρωμα σε επιφανειακό

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

απλοποιείται το ολοκλήρωμα σε

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0 \quad (\Gamma'.2)$$

Το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο του όγκου V , οπότε το ολοκλήρωμα είναι ταυτοτικά μηδέν όταν η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι μηδέν. Προκύπτει έτσι η εξίσωση διατήρησης της μάζας σε διαφορική μορφή ως

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (\Gamma'.3)$$

Σε τανυστική γραφή η εξίσωση γράφεται ως

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (\Gamma'.4)$$

Γ'.2 Εξίσωση Διατήρησης της Ορμής

Η ισορροπία ορμής σε ένα ρευστό καθορίζεται από την αρχή: ο χρονικός ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός ρευστού είναι ίσος με τη συνολική δύναμη που του ασκείται. Εφαρμόζοντας αυτή την αρχή στον όγκο ελέγχου του Σχ.Γ'.1, γράφεται για την ορμή

$$\int_V \rho \mathbf{v} dV = 0 \quad (\Gamma'.5)$$

Σύμφωνα με τη διατήρηση της ορμής, ο ρυθμός μεταβολής αυτής της ποσότητας ισούται με τη δύναμη \mathbf{F} που ασκείται στον όγκο ελέγχου, μειωμένη κατά το ρυθμό με τον οποίο η ορμή εξέρχεται από τον όγκο, λόγω της κίνησης του ρευστού στην επιφάνειά του. Στην προηγούμενη ενότητα γράφτηκε ο ρυθμός μεταβολής της μάζας σε μια στοιχειώδη επιφάνεια ως $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$. Η ρυθμός μεταβολής της ορμής που χάνεται είναι $(\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS) \mathbf{v}$.

Έτσι, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής για τον σταθερό όγκο ελέγχου γράφεται

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \mathbf{F} - \int_S (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v} dS \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{dt} dV \quad (\Gamma'.6)$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον όγκο ελέγχου είναι τριών ειδών:

- δυνάμεις του σώματος του ρευστού, όπως πχ. βαρυτικές, οι οποίες είναι ασήμαντες σε αεροακουστικές εφαρμογές και θα αγνοηθούν
- δυνάμεις πίεσης που ασκούν συνολική δύναμη $-p \mathbf{n} dS$ σε κάθε στοιχειώδη επιφάνεια
- δυνάμεις που οφείλονται στις διατμητικές τάσεις. Οι διατμητικές τάσεις είναι σπάνια σημαντικές στην αεροακουστική, ενώ το αντίθετο συμβαίνει για τη ροή που την παράγει. Οι τάσεις αυτές εκφράζονται με τη χρήση του τανυστή τάσεων σ_{ij} , ο οποίος αποδίδει τη δύναμη ανά μονάδα επιφανείας σε κατεύθυνση j επαπτομενική στην επιφάνεια (η κατεύθυνση i είναι κάθετη στην επιφάνεια και προς τα έξω). Για τη στοιχειώδη επιφάνεια ελέγχου η διατμητική τάση λόγω συνεκτικότητας γράφεται $\sigma_{ij} n_j dS$. Για τις συνήθεις εφαρμογές οι δυνάμεις πίεσης και οι διατμητικές τάσεις συνδιάζονται συνήθως στον τανυστή $p_{ij} = p \delta_{ij} - \sigma_{ij}$, που ονομάζεται τανυστής τάσεων λόγω συμπίεσότητας (compressive stress tensor) και χρησιμοποιείται, συνήθως, στην αεροακουστική για να αντικαταστήσει τον τανυστή $\tau_{ij} = -p_{ij}$, ο οποίος απαντάται πιο συχνά σε κείμενα της δυναμικής των ρευστών.

Σημειώνεται ότι σε αυτή την διπλωματική εργασία γίνεται **παραδοχή μη-συνεκτικού ρευστού**, οπότε οι **συνεκτικές τάσεις αγνοούνται**, κρίθηκε όμως σκόπιμο να γίνει η παραπάνω ανάλυση για λόγους πληρότητας.

Τα παραπάνω επιτρέπουν τη γραφή της δύναμης \mathbf{F} , που ασκείται στο ρευστό, ως

$$F_i = - \int_S p_{ij} n_j dS \quad (\Gamma'.7)$$

Συνδιάζοντας την παραπάνω εξίσωση με την Εξ.Γ'.6 γράφεται σε ταυνοστική γραφή

$$\int_V \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV = - \int_S (\rho v_i v_j + p_{ij}) n_j dS \quad (\Gamma'.8)$$

και εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης προκύπτει

$$\int_V \left[\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j + p_{ij})}{\partial x_j} \right] dV = 0 \quad (\Gamma'.9)$$

Όπως και με την εξίσωση διατήρησης της μάζας, έτσι κι εδώ, το ολοκλήρωμα είναι ταυτοτικά μηδέν, αν η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι επίσης μηδέν. Έτσι, προκύπτει η εξίσωση διατήρησης της ορμής σε διαφορική μορφή

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j + p_{ij})}{\partial x_j} = 0 \quad (\Gamma'.10)$$

Γ'.3 Θερμοδυναμικές Ποσότητες

Τα ακουστικά κύματα είναι αποτέλεσμα φαινομένων συμπιεστότητας του ρευστού, τα οποία προκαλούν μικρές διαταραχές της τοπικής πίεσης. Για το λόγο αυτό είναι σημαντικό να αποδοθεί το πώς οι μεταβολές της πίεσης σχετίζονται με τις μεταβολές της πυκνότητας και της θερμοκρασίας. Γίνεται η υπόθεση ότι ένα ακουστικό κύμα είναι μια θερμοδυναμική διαδικασία η οποία δεν περιλαμβάνει συναλλαγή ή απώλεια θερμότητας. Στην περίπτωση αυτή, η διαταραχή της πίεσης p' γύρω από μια μέση τιμή p_0 εξαρτάται αναλογικά από τη διαταραχή της πυκνότητας ρ' γύρω από μια μέση τιμή ρ_0 , με συντελεστή αναλογίας την *ισεντροπική σταθερά συμπίεσης* (*isentropic bulk modulus*) $(dp/d\rho)_S$

$$p' = \rho' \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \equiv c_0^2 \quad (\Gamma'.11)$$

Θα δειχθεί παρακάτω ότι η ισεντροπική σταθερά συμπίεσης ταυτίζεται με το τετράγωνο της ταχύτητας c_0 με την οποία τα κύματα διαδίδονται στο ρευστό μέσο.

Η υπόθεση που έγινε παραπάνω, ότι δηλαδή τα ακουστικά κύματα δεν περιλαμβάνουν συναλλαγή ή απώλεια θερμότητας, δεν ισχύει για τη ροή η οποία τα πα-

ράγει. Για το λόγο αυτό παρατίθενται θερμοδυναμικές ιδιότητες του αερίου μέσου (ενθαλπία, εντροπία, πίεση, πυκνότητα, εσωτερική και κινητική ενέργεια, θερμοκρασία) οι οποίες ορίζουν την **κατάσταση** του μέσου.

Το Α'Θερμοδυναμικό Αξίωμα αναφέρει ότι η ενέργεια ενός συστήματος μπορεί να αλλάξει με την προσθήκη θερμότητας ή έργου στο σύστημα. Εν προκειμένω το σύστημα είναι ένα ρευστοστοιχείο, το οποίο κινείται σύμφωνα με τη ροή και έχει σταθερή μάζα. Η μεταβολή της ειδικής εσωτερικής ενέργειας του ρευστοστοιχείου de δίνεται από το άθροισμα της ειδικής θερμότητας δq που προστίθεται και του ειδικού έργου δw προσδίδεται στο σύστημα

$$de = \delta q + \delta w \quad (\Gamma'.12)$$

Σημειώνεται ότι η εσωτερική ενέργεια αντιπροσωπεύει την κατάσταση του ρευστοστοιχείου και είναι ανεξάρτητη του τρόπου με τον οποίον η ενέργεια αυτή έχει αυτήν την τιμή, σε αντίθεση με τη θερμότητα και το έργο.

Αρχικά, θεωρείται η περίπτωση διόγκωσης του στοιχείου από όγκο V σε όγκο $V + dV$. Το έργο που αποδίδεται στο γειτονικό ρευστό δίνεται από τη δύναμη που ασκείται στο γειτονικό μέσο επί την απόσταση που το στοιχείο διανύει κατά τη διόγκωσή του. Για επιφάνεια S που περικλείει τον όγκο V , η δύναμη σε κάθε στοιχειώδη επιφάνεια dS είναι $p dS$ και η απόσταση που το ρευστοστοιχείο διανύει είναι Δx , οπότε το συνολικό έργο που παράγεται από το ρευστοστοιχείο είναι

$$\int_S p \Delta x dS$$

Το ρευστοστοιχείο είναι πολύ μικρό, οπότε η πίεση θεωρείται σταθερή στην επιφάνεια. Επίσης γράφεται

$$dV = \int_S \Delta x dS$$

οπότε το έργο που παράγεται από το σύστημα στο περιβάλλον είναι $p dV$. Αυτό αντιπροσωπεύει μια απώλεια ενέργειας στο σύστημα, οπότε η Εξ.Γ'.12 γίνεται

$$de = \delta q - p dv \quad (\Gamma'.13)$$

Σε αυτήν την εξίσωση ο όρος dv αντιπροσωπεύει μια ειδική μεταβολή όγκου. Στην παραπάνω περίπτωση θεωρήθηκε ογκομετρική μεταβολή υπό σταθερή πίεση. Σε άλλη περίπτωση χρειάζεται να γίνει θεώρηση μεταβολής της πίεσης υπό σταθερό όγκο, όπου το στοιχείο αυξάνει τη **δυνατότητά του να αποδώσει έργο**. Η δυνατότητα αυτή μπορεί να οριστεί χρησιμοποιώντας την καταστατική μεταβλητή της **ενθαλπίας**, η οποία συσχετίζεται με την εσωτερική ενέργεια ως $h = e + pv$, ή

διαφορικά ως $dh = de + vdp + pdv$. Έτσι, από τη Σχ.Γ'.13 γράφεται για μεταβολή υπό σταθερό όγκο

$$dh = \delta q + vdp = \delta q + \frac{dp}{\rho} \quad (\Gamma'.14)$$

Με προσθήκη θερμότητας στο σύστημα, είτε με σταθερό όγκο είτε με σταθερή πίεση, η θερμοκρασία T_e του συστήματος αυξάνεται. Προκύπτουν, έτσι, δύο σταθερές ευαισθησίας που ορίζονται ως σταθερές ειδικής θερμότητας για σταθερό όγκο ή για σταθερή πίεση

$$c_V = \left(\frac{\partial q}{\partial T_e} \right)_V \quad c_P = \left(\frac{\partial q}{\partial T_e} \right)_P \quad (\Gamma'.15)$$

Έτσι, η θέρμανση υπό σταθερό όγκο έχει ως αποτέλεσμα μεταβολή της κινητικής ενέργειας, η οποία με χρήση της Εξ.Γ'.13 γράφεται

$$\left(\frac{\partial e}{\partial T_e} \right)_V = \left(\frac{\partial q}{\partial T_e} \right)_V = c_V$$

Αντιθέτως, για θέρμανση υπό σταθερή πίεση και με χρήση της Εξ.Γ'.14

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T_e} \right)_P = \left(\frac{\partial q}{\partial T_e} \right)_P = c_P$$

Αν οι ποσότητες e και h είναι συναρτήσεις μόνο της θερμοκρασίας (υπόθεση τελείου αερίου), τότε οι παραπάνω δύο εκφράσεις γράφονται $de = c_V dT_e$ και $dh = c_P dT_e$. Αφαιρώντας την Εξ.Γ'.13 από την Εξ.Γ'.14 και κάνοντας χρήση αυτών των σχέσεων, προκύπτει η σχέση

$$dh - de = pdv + vdp$$

ή

$$d(pv) = (c_P - c_V) dT_e$$

η οποία ολοκληρούμενη δίνει το νόμο των τελείων αερίων $p = \rho RT_e$, με $R = (c_P - c_V)$.

Για ένα τέλειο αέριο η εσωτερική ενέργεια και η ενθαλπία γράφονται

$$e = c_V T_e \quad h = c_P T_e \quad (\Gamma'.16)$$

Στη συνέχεια, χρειάζεται ο ορισμός της εντροπίας ενός συστήματος, η οποία περιγράφει την κατάσταση της αταξίας του. Η εντροπία είναι μια ακόμα καταστατική

μεταβλητή του αερίου. Αυξάνεται με την πρόσδοση θερμότητας και γενικά από οποιαδήποτε μη-αναστρέψιμη μεταβολή. Το Β'Θερμοδυναμικό Αξίωμα αποδίδει την εντροπία ως

$$ds = \frac{\delta q_{rev}}{T_e} \quad (\Gamma'.17)$$

όπου η ποσότητα δq_{rev} ονομάζεται *αναστρέψιμη προσθήκη θερμότητας*. Αυτή είναι μια φανταστική ποσότητα, καθώς η θερμότητα δεν μπορεί να προστεθεί με τρόπο αναστρέψιμο, αφού η προσθήκη συνοδεύεται πάντα από διαδικασίες απωλειών, οι οποίες αυξάνουν περαιτέρω την αταξία. Έτσι, η δq_{rev} είναι η ποσότητα θερμότητας που θα έπρεπε να προστεθεί, απουσία διαδικασιών απωλειών, για να αντισταθμίσει τις θερμοδυναμικές μεταβολές που συμβαίνουν λόγω μη-αναστρέψιμων διαδικασιών και οποιασδήποτε προσθήκης θερμότητας. Χρησιμοποιώντας το Α'Θερμοδυναμικό Αξίωμα και την Εξ.Γ'.17 γράφεται για την εντροπία, συναρτήσει άλλων καταστατικών μεταβλητών

$$de = T_e ds - pd(1/\rho) dh = T_e ds + dp/\rho$$

όπου $T_e ds = \delta q = \delta q_{rev}$ και $v = 1/\rho$. Αναδιατάσσοντας τις Εξ.Γ'.18 και με χρήση της Εξ.Γ'.16 γράφεται

$$\frac{T_e ds - pd(1/\rho)}{c_V} = \frac{T_e ds + dp/\rho}{c_p}$$

και με χρήση του νόμου των τελείων αερίων

$$ds = c_V \frac{dp}{p} - c_p \frac{d\rho}{\rho} \quad (\Gamma'.18)$$

από όπου προκύπτει ότι η ειδική εντροπία είναι

$$s = c_V \ln(Cp/\rho^\gamma)$$

όπου C σταθερά ολοκλήρωσης και $\gamma = c_p/c_V$ είναι ο λόγος ισεντροπικής μεταβολής του αερίου. Για σταθερή εντροπία προκύπτει

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = const \quad (\Gamma'.19)$$

Διαφορίζοντας αυτή τη σχέση, προκύπτει η ισεντροπική σταθερά συμπίεσης

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{\gamma p}{\rho}$$

Αυτή η έκφραση, όπως αναφέρθηκε και στην αρχή της ενότητας, ισούται με το τετράγωνο της ταχύτητας του ήχου. Ωστόσο, στα ακουστικά κύματα οι διακυμάνσεις της πίεσης p' και της πυκνότητας ρ' είναι πολύ μικρότερες από τις μέσες τιμές τους, έτσι, στην παραπάνω σχέση, μπορούν να αντικατασταθούν οι μέσες τιμές και να προκύψει

$$c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \quad (\Gamma'.20)$$

Τέλος, ορίζεται και η *ομοεντροπική* (*homoeotropic*) ροή, δηλαδή η ροή όπου συμβαίνουν μόνο ισεντροπικές μεταβολές και η εντροπία σε όλα τα σημεία έχει την ίδια αρχική τιμή. Στην περίπτωση αυτή, ισχύει $ds = 0$ και από την Εξ.Γ'.18

$$0 = c_V \frac{p'}{p_0} - c_p \frac{\rho'}{\rho_0}$$

απ'όπου προκύπτει $p' = \rho' c_0^2$, η οποία είναι η έκφραση της Εξ.Γ'.11.

Η ανάλυση που έγινε απαιτείται για την προσέγγιση ισεντροπικής ροής και τον προσδιορισμό των καταστικών ποσοτήτων που θα χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη της ακουστικής κυματικής εξίσωσης.

Γ'.4 Εξίσωση Διατήρησης της Ενέργειας

Οι *καταστατικές εξισώσεις*, οι οποίες ορίζουν την ταχύτητα διάδοσης του ήχου, αποδείχθηκε ότι είναι εξαρτώμενες από τις θερμοδυναμικές ιδιότητες του αερίου μέσου και μπορούν να απλουστευθούν αν υποθεθεί ισεντροπική ή ομοεντροπική ροή. Χρειάζεται, λοιπόν, να καθοριστούν οι συνθήκες που επιτρέπουν μια τέτοια προσέγγιση. Αυτό επιτυγχάνεται με τον καθορισμό του ρυθμού μεταβολής της ενέργειας ενός ρευστοστοιχείου. Η συνολική ειδική ενέργεια e_T ενός ρευστοστοιχείου δίνεται ως το άθροισμα της ειδικής εσωτερικής ενέργειας e και της ειδικής κινητικής ενέργειας $\frac{1}{2}v_i^2$. Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του ρευστοστοιχείου γράφεται τότε

$$m \frac{De_T}{Dt} = 0 \quad (\Gamma'.21)$$

όπου m είναι η μάζα του στοιχείου και D/Dt η υλική παράγωγος. Από το Α'Θερμοδυναμικό Αξίωμα η ενέργεια του στοιχείου αλλάζει μόνο αν αποδίδει έργο στο γειτονικό ρευστό ή αν δέχεται θερμότητα. Αν το στοιχείο καταλαμβάνει όγκο $V(t)$ τη χρονική στιγμή t , τότε ο ρυθμός του παραγόμενου έργου καθορίζεται από τις τάσεις στην επιφάνεια $S(t)$ που περικλείει το στοιχείο και την ταχύτητα στην επιφάνεια, και είναι το αρνητικό της ποσότητας $-\int_{S(t)} v_j p_{ij} n_i dS$, όπου n_{ij} είναι το προς τα έξω μο-

ναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια. Συμβολίζοντας τη ροή θερμότητας ανά μονάδα επιφανείας με το διανυσματικό πεδίο Q , γράφεται για το ρυθμό ροής της θερμικής ενέργειας στο στοιχείο

$$- \int_{S(t)} Q_i n_i dS = 0$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της απόκλισης μετατρέπονται τα δύο παραπάνω ολοκληρώματα σε ογκικά. Ο ρυθμός πρόσδοσης ενέργειας στο στοιχείο γράφεται

$$- \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial x_i} (v_j p_{ij} + Q_i) dV = 0 \quad (\Gamma'.22)$$

Εξισώνοντας την Εξ.Γ'.22 με τη συνολική αύξηση της ενέργειας από την Εξ.Γ'.21 προκύπτει

$$m \frac{De_T}{Dt} = - \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial x_i} (v_j p_{ij} + Q_i) dV \quad (\Gamma'.23)$$

Το ρευστοστοιχείο είναι πολύ μικρό, οπότε μπορεί να υποτεθεί ότι η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι σταθερή σε όλον τον όγκο. Για πυκνότητα $\rho = m/V(t)$, προκύπτει η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας

$$\rho \frac{De_T}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} (v_j p_{ij} + Q_i) = 0 \quad (\Gamma'.24)$$

Αυτή η εξίσωση συνδέει το ρυθμό μεταβολής της συνολικής ενέργειας του ρευστοστοιχείου με το ρυθμό του παραγόμενου έργου λόγω επιφανειακών τάσεων και προσθήκης θερμότητας.

Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας μπορεί επίσης να προκύψει απευθείας από εξισώσεις της προηγούμενης ενότητας(Γ'.3). Ξαναγράφοντας την Εξ.Γ'.18 με όρους υλικών παραγώγων

$$\frac{De}{Dt} = T_e \frac{Ds}{Dt} - p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

Η παραπάνω γραφή επιτρέπεται διότι οι ρυθμοί μεταβολής των θερμοδυναμικών μεταβλητών, όπως αυτοί γίνονται αντιληπτοί από ένα ρευστοστοιχείο στο χρόνο, αποτελούν μια θερμοδυναμική διεργασία μη εξαρτώμενη από την κίνηση του ρευστοστοιχείου και οποιαδήποτε πρόκληση θερμότητας λόγω συνεκτικότητας θεωρείται αμελητέα. Εισάγοντας την ειδική συνολική ενέργεια και πολλαπλασιάζοντας με την

πυκνότητα προκύπτει

$$\rho \frac{De_T}{Dt} = \rho T_e \frac{Ds}{Dt} - \rho p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v_i^2}{2} \right) \quad (\Gamma'.25)$$

Ο δεύτερος όρος απλοποιείται με χρήση της εξίσωσης διατήρησης της μάζας και ο τρίτος όρος με χρήση της εξίσωσης διατήρησης της ορμής, εκφρασμένες με υλικές παραγώγους

$$\rho \frac{De_T}{Dt} = \rho T_e \frac{Ds}{Dt} - p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} \quad (\Gamma'.26)$$

Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας εκφρασμένη με όρους εντροπίας αντί για το διάνυσμα της ροής θερμότητας. Αφαιρώντας την Εξ.Γ'.26 από την Εξ.Γ'.24 προκύπτει

$$\rho T_e \frac{Ds}{Dt} = \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial x_i} \quad (\Gamma'.27)$$

Η παραπάνω εξίσωση δείχνει ότι, αν αγνοηθούν οι συνεκτικές επιδράσεις και η συναλλαγή θερμότητας, τότε η ροή μπορεί να θεωρηθεί *ισεντροπική* και έτσι να γίνει η χρήση των σχέσεων της Ενότητας Γ'.3. Αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα διότι ανταποκρίνεται στην **παραδοχή** που έγινε στη διπλωματική εργασία, δηλαδή το να αγνοηθούν οι συνεκτικές επιδράσεις.

Τέλος, γράφεται η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας, χωρίς της χρήση της υλικής παραγώγου

$$\frac{\partial (\rho e_T)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho e_T v_i + v_j p_{ij} + Q_i) = 0 \quad (\Gamma'.28)$$

Παράρτημα Δ'

Χρήσιμες Μαθηματικές Σχέσεις

Παρακάτω παρατίθεται ένα σύνολο μαθηματικών τύπων και σχέσεων που χρειάζονται σε αποδείξεις της ΔΕ.

Τύπος του Euler: $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, $y \in \mathbb{R}$.

Ολοκληρωματικές πράξεις με τριγωνομετρικά μεγέθη (οι οποίες εμφανίζονται κατά την παραγωγή των συντελεστών του σχήματος DRP):

$$\begin{aligned}\int_{-\eta}^{\eta} k \sin k dk &= - \int_{-\eta}^{\eta} k (\cos k)' dk \\ &= - [k \cos k]_{-\eta}^{\eta} + \int_{-\eta}^{\eta} \cos k dk \\ &= -\eta \cos \eta + (-\eta) \cos(-\eta) + [\sin k]_{-\eta}^{\eta} \\ &= -\eta \cos \eta - \eta \cos \eta + \sin \eta - \sin(-\eta) \\ &= -2\eta \cos \eta + 2 \sin \eta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\eta}^{\eta} \sin k \sin k dk &= \int_{-\eta}^{\eta} \sin^2 k dk \\ &= \int_{-\eta}^{\eta} \frac{1 - \cos 2k}{2} dk \\ &= \frac{1}{2} 2\eta - \left[\frac{1}{4} \sin 2k \right]_{-\eta}^{\eta} \\ &= \eta - \left[\frac{1}{4} \sin 2\eta - \frac{1}{4} \sin(-2\eta) \right] \\ &= \eta - \frac{1}{2} \sin 2\eta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\eta}^{\eta} \sin k \sin 2k dk &= \int_{-\eta}^{\eta} \frac{1}{2} [\cos k - \cos 3k] dk \\
&= \left[\frac{1}{2} \sin k - \frac{1}{6} \sin 3k \right]_{-\eta}^{\eta} \\
&= \sin \eta - \frac{1}{3} \sin 3\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\eta}^{\eta} \sin 2k \sin 2k dk &= \int_{-\eta}^{\eta} \frac{1}{2} (1 - \cos 4k) dk \\
&= \eta - \left[\frac{1}{8} \sin 4k \right]_{-\eta}^{\eta} \\
&= \eta - \frac{1}{4} \sin 4\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\eta}^{\eta} \sin 2k \sin 3k dk &= \int_{-\eta}^{\eta} \frac{1}{2} (\cos k - \cos 5k) dk \\
&= \left[\frac{1}{2} \sin k \right]_{-\eta}^{\eta} - \left[\frac{1}{10} \sin 5k \right]_{-\eta}^{\eta} \\
&= \sin \eta - \frac{1}{5} \sin 5\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\eta}^{\eta} \sin 3k \sin 3k dk &= \int_{-\eta}^{\eta} \frac{1}{2} (1 - \cos 6k) dk \\
&= \eta - \frac{1}{6} \sin 6\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\eta}^{\eta} \sin 3k \sin k dk &= \int_{-\eta}^{\eta} (\cos 2k - \cos 4k) dk \\
&= \frac{1}{2} \sin 2\eta - \frac{1}{4} \sin 4\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\eta}^{\eta} k \sin 3k dk &= - \int_{-\eta}^{\eta} k \left(\frac{1}{3} \cos 3k \right)' dk \\
&= \left[-\frac{1}{3} k \cos 3k \right]_{-\eta}^{\eta} + \int_{-\eta}^{\eta} \frac{1}{3} \cos 3k dk \\
&= -\frac{2}{3} \eta \cos 3\eta + \frac{2}{9} \sin 3\eta
\end{aligned}$$

Παράρτημα Ε΄

Συντελεστές για Stencils Κεντρικών και Πίσω Πεπερασμένων Διαφορών του Σχήματος DRP

Οι συντελεστές του σχήματος χρονικής προσπέλασης πέντε(5) βημάτων Runge-Kutta είναι[9] (Εξ.3.24)

$$\alpha_1 = 1/5, \quad \alpha_2 = 1/4, \quad \alpha_3 = 1/3, \quad \alpha_4 = 1/2, \quad \alpha_5 = 1$$

Οι συντελεστές του stencil επτά(7) σημείων κεντρικών πεπερασμένων διαφορών είναι[9] (Εξ.3.23):

$$\begin{aligned}\beta_0 &= 0, \\ \beta_1 &= -\beta_{-1} = 0.770882380518, \\ \beta_2 &= -\beta_{-2} = -0.166705904415, \\ \beta_3 &= -\beta_{-3} = 0.020843142770\end{aligned}$$

Οι συντελεστές των διάφορων stencils επτά(7) σημείων πίσω πεπερασμένων διαφορών είναι[9]:

- stencil με δύο(2) κόμβους εμπρός και τέσσερις(4) πίσω

$$\alpha_4^{42} = -0.026369431,$$

$$\alpha_3^{42} = 0.166138533,$$

$$\alpha_2^{42} = -0.518484526,$$

$$\alpha_1^{42} = 1.273274737,$$

$$\alpha_0^{42} = -0.474760914,$$

$$\alpha_{-1}^{42} = -0.468840357,$$

$$\alpha_{-2}^{42} = 0.049041958$$

- stencil με έναν(1) κόμβο εμπρός και πέντε(5) πίσω

$$\alpha_5^{51} = 0,048230454,$$

$$\alpha_4^{51} = -0.281814650,$$

$$\alpha_3^{51} = 0.768949766,$$

$$\alpha_2^{51} = -1.388928322,$$

$$\alpha_1^{51} = 2.147776050,$$

$$\alpha_0^{51} = -1.084875676,$$

$$\alpha_{-1}^{51} = -0.209337622$$

- stencil με μηδέν(0) κόμβους εμπρός και έξι(6) πίσω

$$\alpha_6^{60} = -0.203876371,$$

$$\alpha_5^{60} = 1.128328861,$$

$$\alpha_4^{60} = -2.833498741,$$

$$\alpha_3^{60} = 4.461567104,$$

$$\alpha_2^{60} = -5.108851915,$$

$$\alpha_1^{60} = 4.748611401,$$

$$\alpha_0^{60} = -2.192280339$$

Οι συντελεστές του σχήματος που περιγράφει τον όρο απόσβεσης είναι[20] (Εξ.3.31):

$$d_0 = 0.287392842460,$$

$$d_1 = -d_{-1} = -0.226146951809,$$

$$d_2 = -d_{-2} = 0.106303578770,$$

$$d_3 = -d_{-3} = -0.023853048191$$

Παράρτημα Δ'

Χαρακτηριστικά της CPU και GPU που Χρησιμοποιήθηκαν στον Κώδικα

Στους Πίνακες Δ'.1 και Δ'.2 παρατίθενται τα τεχνικά χαρακτηριστικά της CPU και GPU της ΜΠΥΡ&Β του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών, οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν στη διπλωματική εργασία:

Intel Xeon E5620	
Architecture	Xeon
Core count	4
Core threads	8
CPU clock	2.4 GHz
Energy consumption	25 W

Πίνακας Δ'.1: Τεχνικά χαρακτηριστικά της CPU Intel Xeon E5620.

NVIDIA TESLA M2050	
Architecture	Fermi
Generation	Tesla
Core count	448 CUDA cores(515 Gigafllops double-precision)
Memory	3 GB GDDR5
Memory bandwidth	148.4 GB/s
GPU clock	575 MHz
Memory clock	773 MHz(3092 MHz effective)
CUDA version	2.0
Energy consumption	225 W

Πίνακας Δ'.2: Τεχνικά χαρακτηριστικά της GPU NVIDIA TESLA M2050.

Βιβλιογραφία

- [1] Lighthill, M. J.: *A General Introduction to Aeroacoustics and Atmospheric Sounds*. Springer, 1992.
- [2] Yang Liu, Mrinal K. Sen: *Scalar wave equation modeling with time-space domain dispersion-relation-based staggered-grid finite-difference schemes*. Bulletin of the Seismological Society of America, 101(1), 2011.
- [3] Axel Kierkegaard, Susann Boij: *A frequency domain linearized navier–stokes equations approach to acoustic propagation in flow ducts with sharp edges*. The Journal of the Acoustical Society of America, 127(2):710–719, 2011.
- [4] H. Q. Yang, Z. J. Chen, Andrzej Przekwas: *High-order pressure-based solver for aeroacoustics simulations*. 19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2013.
- [5] Sommerfeld, A.: *Partial Differential Equations in Physics*. Academic Press, 1949.
- [6] Tam, C. K. W.: *Computational aeroacoustics: Issues and methods*. AIAA, 33(10):1788–1796, 1995.
- [7] Rdzanek, W. P.: *Sound radiation of a pulsating sphere in the outlet of a hard/soft semi-spherical cavity in a flat screen*. Archives of Acoustics, 41:75–96, 2016.
- [8] Βιλβαο, Στεφαν και Χαμilton, Βριαν: *Διρεστιοναλ σουρσε μοδελινγ ιν ωαε-βασεδ ροομ αρουστις σιμυλατιον*. 2017 IEEE Ωορκσηοπ ον Αππλιςατιονς οφ Σιγναλ Προσεσσιγ το Αυδιο ανδ Αρουστις (ΩΑΣΠΑΑ), σελίδες 121–125, 2017.
- [9] Tam, C. K. W. and Webb, J. C.: *Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics*. Journal of Computational Physics, 107:262–281, 1993.
- [10] Tam, C. K. W.: *Advances in numerical boundary conditions for computational aeroacoustics*. Journal of Computational Physics, 6:377–402, 1998.
- [11] Bayliss, A. and Turkel, E.: *Radiation boundary conditions for wavelike equations*. Communications on Pure and Applied Mathematics, 33:707–725, 1980.
- [12] Bayliss, A. and Turkel, E.: *Far field boundary conditions for compressible flows*. J. Comput. Phys., 48:182–199, 1982.

- [13] Hangstrom, T. and Hariharan, S. I.: *Accurate boundary conditions for exterior problems in gas dynamics*. Mathematics of Computation, 51:581–597, 1988.
- [14] C. K. W. Tam, K. Kurbatskii and Fang, J.: *Numerical boundary conditions for computational aeroacoustics benchmark problems*. Second Computational Aeroacoustics Workshop on Benchmark Problems, 1997.
- [15] Tam, C. K. W. and Dong, Z.: *Wall boundary conditions for high-order finite-difference schemes in computational aeroacoustics*. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 6:303–322, 1994.
- [16] Tam, C. K. W.: *Computational aeroacoustics: An overview*. Developments in Computational Aero- and Hydro-Acoustics.
- [17] Whitham, G. B.: *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley-Interscience, New York.
- [18] Neumann, J. Von and Richtmyer, R. D.: *A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks*. Journal of Applied Physics, 21:232–237, 1950.
- [19] A. Jameson, W. Schmidt and Turkel, E.: *Numerical solutions of the euler equations by finite volume methods using runge-kutta time stepping schemes*. AIAA, 81, 1981.
- [20] C. K. W. Tam, J. C. Webb and Dong, Z.: *A study of the short wave components in computational acoustics*. Journal of Computational Acoustics, 1:1–30, 1993.
- [21] Tam, C. K. W. and Shen, H.: *Direct computation of nonlinear acoustic pulses using high-order finite difference schemes*. AIAA, 93, 1993.
- [22] *Fermi architecture, webpage*. http://www.nvidia.com/object/fermi_architecture.html.
- [23] *Variables and data types, webpage*. <http://www.cplusplus.com/doc/tutorial/variables/>.
- [24] *Floating Point and IEEE 754 Compliance for NVIDIA GPUs, webpage*. <https://docs.nvidia.com/cuda/floating-point/index.html>.
- [25] Gustavson, S.: *OpenGL and GPU Programming - a mental model for programmers*, April 2015.
- [26] Sanders, J. and Kandrot, E.: *CUDA by example: An introduction to General-Purpose GPU Programming*. Addison–Wesley, 2010.
- [27] Τρομπούκης, Ξ.: *Αριθμητική επίλυση προβλημάτων αεροδυναμικής-αεροελαστικότητας σε επεξεργαστές καρτών γραφικών*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2012.
- [28] Ασούτη, Β.: *Μέθοδοι αεροδυναμικής ανάλυσης και σχεδιασμού για ροές υψηλών και χαμηλών ταχυτήτων, σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2009.

- [29] Kambolis I.C., Trompoukis X.S., Asouti V.G. Giannakoglou K.C.: *Cfd-based analysis and two-level aerodynamic optimization on graphics processing units*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199:712–722, 2010.
- [30] *Computer cluster categorization*. https://en.wikipedia.org/wiki/Computer_cluster.