



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Τομέας Ρευστών

Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος στη
Βελτιστοποίηση Αεροδυναμικών Μορφών με
Υπολογισμό της Οπισθέλκουσας στο Επ'
Άπειρον Όριο

Διπλωματική Εργασία

Τριανταφυλλιά-Μαρία Σιτέ

Επιβλέπων: Καθηγητής Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου

Αθήνα, 2022

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου για την βοήθεια και καθοδήγηση κατά την εκπόνηση της εργασίας, και για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε όλο αυτόν τον καιρό. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον διδάκτορα Βαγγέλη Παπουτσή-Κιαχαγιά, και τον υποψήφιο διδάκτορα στη ΜΠΥΡ&Β, Νικόλαο Γαλανό, για τις πολύτιμες συμβουλές τους.

Τέλος, θα ήθελα να αναφερθώ στους γονείς μου, Θεοφάνη και Παναγιώτα, και στους αδερφούς μου, Στέφανο και Γιώργο, οι οποίοι ήταν και είναι πάντα δίπλα μου σε κάθε βήμα και προσπάθεια, καθώς και στους φίλους μου για την υποστήριξή τους.

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Τομέας Ρευστών

Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής &
Βελτιστοποίησης



Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος στη Βελτιστοποίηση Αεροδυναμικών Μορφών με Υπολογισμό της Οπισθέλκουσας στο Επ' Άπειρον Όριο

Διπλωματική Εργασία

Τριανταφυλλιά-Μαρία Σιτέ

Επιβλέπων: Καθηγητής Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου

Αθήνα, 2022

Περίληψη

Αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας είναι η διερεύνηση της μεθόδου υπολογισμού της οπισθέλκουσας στο επ'άπειρο όριο, και η αξιοποίησή της στη συνεχή συζυγή μέθοδο για βελτιστοποίηση αεροδυναμικών μορφών. Μια νέα μαθηματική της διατύπωση εφαρμόζεται σε προβλήματα βελτιστοποίησης με συνάρτηση-στόχο την οπισθέλκουσα, τα οποία επιλύονται ώστε να εξακριβωθεί η αποτελεσματικότητά της.

Σε αντίθεση με τη συμβατική μέθοδο υπολογισμού της οπισθέλκουσας, η οποία περιλαμβάνει την ολοκλήρωση της πίεσης και των τάσεων πάνω στο αεροδυναμικό σώμα, η μελετούμενη διατύπωση ολοκληρώνει την πίεση, τις τάσεις, αλλά και την ταχύτητα στις επιφάνειες που διέπουν τα όρια του υπολογιστικού χωρίου. Οι δύο μέθοδοι θεωρούνται θεωρητικά ισοδύναμες, λόγω της διατήρησης ορμής συνολικά στο χωρίο υπολογισμού. Το πλεονέκτημα

της μελετούμενης μεθόδου, και ο λόγος για τον οποίο διερευνάται, είναι ότι στη μαθηματική διατύπωση υπάρχει απεμπλοκή του που ορίζεται η συνάρτηση-στόχος και ποια επιφάνεια παραμετροποιείται. Σε αυτήν την περίπτωση, η πολυπλοκότητα της έκφρασης των παραγώγων ευαισθησίας μειώνεται, καθώς εξαφανίζονται οι γεωμετρικές συνεισφορές, από την αλλαγή του τοιχώματος όπου θα οριζόταν η συνάρτηση-στόχος. Οι όροι που απαλείφονται περιλαμβάνουν δεύτερες χωρικές παραγώγους των τάσεων στην επιφάνεια του στερεού σώματος και περιέχουν αριθμητικό σφάλμα.

Με χρήση του αλγόριθμου SIMPLE, το μοντέλο τύρβης μιας εξίσωσης, Spalart-Allmaras, επιλύονται επαναληπτικά οι Reynolds Averaged Navier Stokes εξισώσεις γύρω από μεμονωμένη αεροτομή, ώστε να υπολογιστεί η οπισθέλκουσα και με τις δύο προσεγγίσεις. Για απόδειξη ανεξαρτησίας του προβλήματος από τις συνθήκες και το μέγεθος του χωρίου, δημιουργούνται πέντε περιπτώσεις χωρίων διαφορετικών διαστάσεων, και δοκιμάζονται δύο διαφορετικές τιμές ταχύτητας εισόδου της ροής. Καθώς και οι δύο διατυπώσεις προσεγγίζουν την ίδια τιμή σε όλες τις περιπτώσεις, επιδεικνύεται και υπολογιστικά πως η μέθοδος ολοκλήρωσης στο επ'άπειρο όριο μπορεί να επιλεγεί αντί της κοινώς αποδεκτής μεθόδου ολοκλήρωσης στο στερεό σώμα για τον υπολογισμό της οπισθέλκουσας.

Στη συνέχεια, η διερεύνηση επεκτείνεται στη βελτιστοποίηση με τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Η έκφραση της οπισθέλκουσας όπως εδώ ορίζεται, χρησιμοποιείται ως συνάρτηση-στόχος. Το λογισμικό της βελτιστοποίησης με χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου αναπτύχθηκε στη ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ, στο περιβάλλον του OpenFOAM.

Αρχικά εξετάζονται οι τιμές των παραγώγων ευαισθησίας σε περίπτωση διδιάστατης, στρωτής αλλά και τυρβώδους ροής γύρω από μεμονωμένη αεροτομή, χρησιμοποιώντας τη νέα συνάρτηση-στόχο. Χρησιμοποιείται η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών ως σημείο αναφοράς, αλλά και η SI, E-SI και FI συνεχής συζυγής μέθοδος για υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Σκοπός είναι η σύγκριση τους με τις αντίστοιχες τιμές των παραγώγων που υπολογίζονται με διατύπωση της οπισθέλκουσας με ολοκλήρωση στο στερεό όριο. Αυτή η δοκιμή έχει ως αποτέλεσμα ο υπολογισμός των παραγώγων με τη συνεχή συζυγή μέθοδο για τη μελετούμενη συνάρτηση-στόχο να αποκτά αξιοπιστία, στις περισσότερες περιπτώσεις οι τιμές των παραγώγων ευαισθησίας έχουν μικρότερη απόκλιση με τις αντίστοιχες των πεπερασμένων διαφορών.

Κατά την επόμενη διερεύνηση, συγκρίνεται η οπισθέλκουσα που παράγεται σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης μεταξύ των δύο διατυπώσεων της συνάρτησης-στόχου. Η ροή στην πρώτη δοκιμή θεωρείται στρωτή, και η μελέτη επεκτείνεται ώστε να περιλαμβάνει περαιτέρω συνθήκες, όπως διαφορετικές τιμές ταχύτητας εισόδου, τυρβώδη ροή, και διαφορετικές αεροτομές.

Τελικώς, εφαρμόζεται η μέθοδος ολοκλήρωσης στο επ'άπειρο όριο και σε τριδιάστατο πρόβλημα, και συγκεκριμένα, σε μια πτέρυγα, η οποία υποβάλλεται σε βελτιστοποίηση μορφής με χρήση ογκομετρικών καμπύλων B-Splines.

Η διπλωματική εργασία έπειτα από όλες τις παραπάνω παραμετρικές δοκιμές βελτιστοποίησης, καταλήγει στο ότι η διατύπωση με ολοκλήρωση στο επ'άπειρο όριο για τον ορισμό της οπισθέλκουσας είναι αποτελεσματική στη βελτιστοποίηση με τη συνεχή συζυγή μέθοδο.

National Technical University of Athens

School of Mechanical Engineering

Fluid Sector

Parallel CFD & Optimization Unit



The Continuous Adjoint Method in Aerodynamic Shape Optimization with Drag Computed Along the Far-Field Boundary

Diploma Thesis

Triantafyllia-Maria Site

Supervisor: Professor Kyriakos Ch. Giannakoglou

Athens, 2022

Abstract

The target of this diploma thesis is the assessment of a method that computes the drag on the far-field boundary and its utilization in the continuous adjoint method for shape optimization of aerodynamic bodies. The new objective function is applied to optimization cases, and these are solved to verify the effectiveness of the method.

In contrast to the conventional near-field method of computing drag, which involves the integration of pressure and stresses on the aerodynamic body, the new formulation integrates the pressure, stresses, and velocity on the boundary surfaces of the computational domain. The two methods are equivalent due to the conservation of momentum in the flow volume. The advantage of the far field method, as well as the reason for this investigation, is that, by using the far-field method to define drag, the parameterized surface and the objective function are kept apart. In this case, the complexity of the expression of the sensitivity derivatives is reduced, because there are no longer any geometric contributions, from the varying shape which the objective function is integrated on. These terms include the second spatial derivatives of stresses along the surface of the solid body and are prone to a numerical error. Using the SIMPLE algorithm and selecting the Spalart-Allmaras single-equation turbulence model, the Reynolds-

Averaged Navier Stokes equations around a wing are iteratively solved to compute the drag in both approaches. To demonstrate the independence of the problem from the conditions and size of the computational domain, five cases with different domain dimensions are created, and two different inlet velocities are tested. As both formulations converge to the same result in all cases, it is shown that the far-field method may be chosen instead of the commonly accepted near-field integration method for computing drag.

Next, the investigation extends to the optimization of an aerodynamic body utilizing the continuous adjoint method. The drag computed along the far-field boundary of the domain is used as the objective function. The optimization software using the continuous adjoint method was developed by the PCopt Unit of NTUA, in the OpenFOAM environment.

Initially, the values of the sensitivity derivatives are computed in the case of both laminar and turbulent flows around an isolated airfoil, by applying the far-field expression of the drag as the objective function. The finite difference method is used, but also the SI, E-SI and FI continuous adjoint methods, to compute the sensitivity derivatives. The purpose of these simulations is to compare them with the corresponding values of the derivatives computed with the (standard) formulation of the near field drag, to investigate whether the deviation between them is negligible. This test results in providing reliability to the computation of derivatives with the continuous adjoint method when using the far-field drag expression, as in most cases it is closer to the results of the finite difference method than the near field approach.

In the next investigation, the drag after each optimization cycle is compared between the two formulations of the objective function. The flow in the first test is considered laminar and this is then expanded upon to include different input velocity values, turbulent flow, and different airfoils.

Finally, the far-field method is applied to a 3D optimization case of a wing, which is subjected to shape optimization using B-Splines volumetric curves.

The diploma thesis, after all the above parametric investigations, concludes that the far-field drag computation is effective for use in the optimization of aerodynamic bodies utilizing the continuous adjoint method. It provides sensitivity derivatives close to finite differences, and a decrease in drag during shape optimization, that matches the results of the near-field approach.

Ακρωνύμια

ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
ΜΠΥΡΒ	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
2Δ	Διδιάστατος
3Δ	Τριδιάστατος
<hr/>	
NTUA	National Technical University of Athens
PCopt	Parallel CFD & Optimization unit
CFD	Computational Fluid Dynamics
OpenFOAM	Open Field Operation And Manipulation
SIMPLE	Semi Implicit Method Pressure-Linked Equations
RANS	Reynolds-Averaged Navier-Stokes
NACA	National Advisory Committee for Aeronautics
CAD	Computer-Aided Design
2D	Two-Dimensional
3D	Three-Dimensional

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή	1
1.1. Η Μέθοδος Ολοκλήρωσης στο Επ' Άπειρο Όριο	1
1.2. Η Συζυγής Μέθοδος στη Βελτιστοποίηση	2
1.3. Το Λογισμικό OpenFoam	3
1.4. Η Δομή της Διπλωματικής Εργασίας	4
2. Υπολογισμός της Οπισθέλκουσας στο Επ' Άπειρο Όριο	5
3. Το Πρωτεύον Πρόβλημα	7
3.1. Οι Εξισώσεις Navier Stokes	8
3.1.1. Η Εξίσωση Διατήρησης της Μάζας	8
3.1.2. Η Εξίσωση Διατήρησης της Ορμής	9
3.2. Μοντελοποίηση της Τύρβης	10
3.2.1. Περιγραφή του Φαινομένου	10
3.2.2. Το Μοντέλο Τύρβης Spalart-Allmaras	12
3.3. Ο Αλγόριθμος SIMPLE	14
4. Σύγκριση Μεθόδων Υπολογισμού της Οπισθέλκουσας σε Πτέρυγα	16
4.1. Γένεση Πλέγματος	18
4.1.1. Το Εργαλείο BlockMesh	18
4.1.2. Το Εργαλείο SnappyHexMesh	19
4.2. Σύγκριση Αποτελεσμάτων	21
4.3. Παραμετρική Μελέτη των Διαστάσεων του Χωρίου	22
5. Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος στη Βελτιστοποίηση	27
5.1. Περιγραφή της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου	27
5.2. Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος με Ολοκλήρωση στο Στερεό Όριο	29
5.2.1. Η Συνάρτηση-Στόχος	29
5.2.2. Σχηματισμός των Συζυγών Εξισώσεων	33
5.2.3. Οι Συζυγείς Οριακές Συνθήκες.....	38
5.2.4. Η Τελική Έκφραση των Παραγώγων Ευαισθησίας	43
5.3. Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος με Ολοκλήρωση στο Επ' Άπειρο Όριο	44
6. Σύγκριση των Παραγώγων Ευαισθησίας με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών σε Αεροτομή	49
6.1. Περιγραφή και Αποτελέσματα της Μελέτης	51

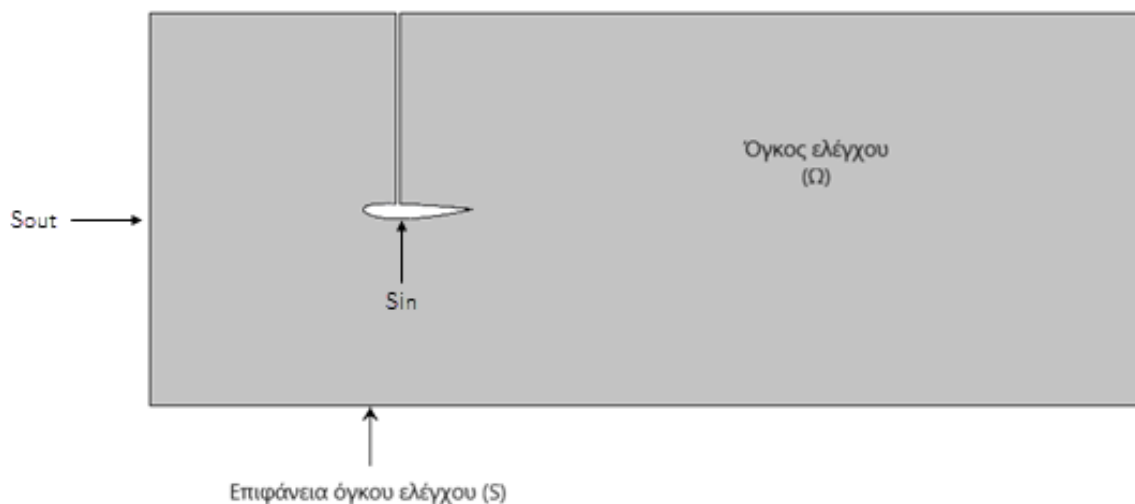
6.2. Στρωτή Ροή Γύρω από Αεροτομή.....	53
6.3. Τυρβώδης Ροή Γύρω από Αεροτομή.....	59
7. Εφαρμογή της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου σε Αεροτομή	63
7.1.Στρωτή Διδιάστατη Ροή Γύρω από Αεροτομή	63
7.2.Τυρβώδης Διδιάστατη Ροή Γύρω από Αεροτομή	64
7.2.1. Βελτιστοποίηση Μορφής με Ογκομετρικές Καμπύλες B-Splines	64
7.2.2. Παραμετρική Μελέτη Ταχύτητας	65
7.2.3. Μελέτη Προφίλ Αεροτομής	68
8. Εφαρμογή της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου σε Τριδιάστατη Πτέρυγα	71
8.1.Αποτελέσματα και Σύγκριση	72
9. Τελικές Παρατηρήσεις	73
9.1. Ανακεφαλαίωση	73
9.2. Συμπεράσματα	75
10.Βιβλιογραφία	76
Παράρτημα	79

1. Εισαγωγή

1.1 Η Μέθοδος Ολοκλήρωσης στο Επ' Άπειρο Όριο

Η διαχείριση της οπισθέλκουσας δύναμης που αναπτύσσεται από την κίνηση αεροδυναμικών σωμάτων σε ρευστό περιβάλλον αποτελεί μείζον θέμα μελέτης για τη βιομηχανία. Μάλιστα πρόκειται για ιδιαίτερα σημαντικό παράγοντα για την οικονομική αλλά και οικολογική επιτυχία των αεροσκαφών, και είναι μια εκ των πιο σημαντικών παραμέτρων κατά τον σχεδιασμό τους. Σύμφωνα με την Meredith, P. T.^[1], η μείωση της οπισθέλκουσας κατά μόνο 1 Newton σε συνθήκες πλεύσης ενός τυπικού επιβατηγού αεροσκάφος επιφέρει πλεονέκτημα 91 κιλών στο ωφέλιμο φορτίο.

Από τον κλασικό τρόπο υπολογισμού της οπισθέλκουσας, ο οποίος πραγματοποιείται με ολοκλήρωση των συνεκτικών τάσεων και των δυνάμεων πίεσης πάνω στην επιφάνεια του μελετούμενου σώματος, προκύπτει και μια εναλλακτική προσέγγιση υπολογισμού της οπισθέλκουσας. Πρόκειται για τη μέθοδο με ολοκλήρωση στο επ' άπειρο όριο, η οποία βασίζεται στην εξίσωση διατήρησης της ορμής στον όγκο ελέγχου. Για ροή γύρω από ένα αεροδυναμικό σώμα, S_W , η επιφάνεια ελέγχου S ($\partial\Omega$), και ο όγκος Ω παρουσιάζονται παρακάτω:



Σχήμα 1: Ο όγκος και η επιφάνεια ελέγχου

Θεωρώντας αμελητέα την επιρροή των εσωτερικών-βοηθητικών επιφανειών που ενώνουν την αεροτομή με το όριο του όγκου ελέγχου, καθώς αυτοαναιρούνται, η S μπορεί να διαχωριστεί σε εξωτερική (S_e), και εσωτερική (S_{in}) επιφάνεια.

Μέσω της εξίσωσης διατήρησης της ορμής, σχηματίζεται η έκφραση της οπισθέλκουσας με ολοκλήρωση στο επ'άπειρο όριο, η οποία παρουσιάζει μαθηματική ισοδυναμία με την κλασική διατύπωση της ολοκλήρωσης της πίεσης και των τάσεων πάνω στο στερεό όριο, όπως περιγράφεται στην Ενότητα 2.

1.2. Η Συζυγής Μέθοδος στη Βελτιστοποίηση

Η μέθοδος βελτιστοποίησης αποτελεί εργαλείο εύρεσης της βέλτιστης λύσης ενός προβλήματος υπό συγκεκριμένες συνθήκες και με περιορισμούς, μέσω μιας έξυπνης διαδικασίας. Σε αυτή τη διπλωματική εργασία, χρησιμοποιείται μια αιτιοκρατική μέθοδος (βασισμένη στην κλίση, gradient, της συνάρτησης στόχου), η οποία υποστηρίζεται από τη συνεχή συζυγή μέθοδο (continuous adjoint method)^[2] για τον υπολογισμό των παραγώγων. Στην ίδια κατηγορία με τη συνεχή συζυγή μέθοδο ανήκουν και οι εξής μέθοδοι υπολογισμού παραγώγων:

- Πεπερασμένες διαφορές (Finite Differences)
- Ευθεία διαφόριση (Direct Differentiation)
- Μέθοδος των μιγαδικών μεταβλητών (Complex Variable Methods)
- Μέθοδος της αυτόματης διαφόρισης (Automated Differentiation)

Πέρα από τις αιτιοκρατικές, υπάρχει και η κατηγορία των στοχαστικών μεθόδων βελτιστοποίησης, οι οποίες χρησιμοποιούν στοιχεία τυχαίας ή στρατηγικά τυχαίας αναζήτησης της βέλτιστης λύσης, με πιο δημοφιλείς αυτής της κατηγορίας, τους εξελικτικούς αλγόριθμους (evolutionary algorithms, EA)^[3].

Το πλεονέκτημα της συζυγούς μεθόδου έναντι άλλων μεθόδων υπολογισμού της παραγώγου είναι, το πολύ μικρό υπολογιστικό κόστος της, καθώς είναι ανεξάρτητη του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού, σε αντίθεση με άλλες μεθόδους υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας, όπως η ευθεία διαφόριση.

Η συζυγής μέθοδος χωρίζεται περαιτέρω σε δύο κατηγορίες, τη διακριτή (discrete adjoint method)^[4], και τη συνεχή (continuous adjoint method)^[5]. Κατά τη διακριτή συζυγή μέθοδο, η συνάρτηση στόχος και οι εξισώσεις του προβλήματος πρώτα διακριτοποιούνται και γραμμικοποιούνται και στη συνέχεια παράγονται οι, προς επίλυση, συζυγείς εξισώσεις. Αντίθετα, στη συνεχή συζυγή μέθοδο, οι συζυγείς μερικές διαφορικές εξισώσεις και οι οριακές συνθήκες τους προέρχονται από τις εξισώσεις του πρωτεύοντος προβλήματος, σε μορφή

διαφορικών εξισώσεων, και τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες του, και έπειτα διακριτοποιούνται και επιλύονται.

Τα τελευταία 20 χρόνια η Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών (ΜΠΥΡ& Β/ΕΘΣ) του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου ασχολείται με την ανάπτυξη συζυγών μεθόδων.

1.3. Το λογισμικό OpenFOAM

Το OpenFOAM[®] πρόκειται για ένα ελεύθερο λογισμικό ανοιχτού κώδικα το οποίο δημιουργήθηκε για να λύνει ένα μεγάλο εύρος σύνθετων προβλημάτων, με έμφαση στην Υπολογιστική Ρευστοδυναμική (Computational Fluid Dynamics). Περιλαμβάνει πληθώρα από επιλύτες, οι οποίοι διαχειρίζονται από πολύπλοκα προβλήματα ρευστών που περιλαμβάνουν χημικές αντιδράσεις, τύρβη και μεταφορά θερμότητας, έως θέματα ακουστικής, μηχανικής των στερεών σωμάτων και ηλεκτρομαγνητικής. Δημιουργήθηκε από τον Henry Weller το 1989 με το όνομα "FOAM" και κυκλοφόρησε ως "OpenFOAM" από τους Henry Weller, Chris Greenshields και Mattijs Janssens τον Δεκέμβριο του 2004. Από τότε, το OpenFOAM[®] συνεχίζει να αναπτύσσεται με νέες εκδόσεις κάθε χρόνο. Το 2014, η γραμμή ανάπτυξης του OpenFOAM, γνωστή ως "OpenFOAM-dev" κυκλοφόρησε δημόσια στο GitHub.

Περιέχει περίπου 250 εφαρμογές που βασίζονται σε πάνω από 100 βιβλιοθήκες λογισμικού. Κάθε εφαρμογή εκτελεί μια συγκεκριμένη λειτουργία. Για παράδειγμα, η εφαρμογή snappyHexMesh που χρησιμοποιείται σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, πραγματοποιεί γένεση πλέγματος ακόμα και για πολύπλοκες γεωμετρίες, όπως για ένα όχημα. Η εφαρμογή SIMPLE χρησιμοποιείται για προσομοίωση μόνιμης, ασυμπίεστης ροής γύρω από το όχημα.

Επίσης, είναι δυνατή η αξιοποίηση πολλών επεξεργαστών, συμβάλλοντας έτσι στην ταχύτερη επίλυση των προβλημάτων.

Ο κώδικας είναι γραμμένος στη γλώσσα προγραμματισμού C++, και, μιας και είναι ανοιχτός στο κοινό, οι χρήστες μπορούν να τον μεταποιήσουν, ώστε να ικανοποιεί τις δικές τους ανάγκες. Μάλιστα, είναι δυνατό να προγραμματίσουν απευθείας τις εξισώσεις που θέλουν να επιλυθούν και να διαλέξουν τύπο διακριτοποίησης από ένα σύνολο διαθέσιμων σχημάτων, χωρίς να αναγκασθούν να το προγραμματίσουν οι ίδιοι.

Στο OpenFOAM[®] χρησιμοποιείται η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων, και μέσω της διακριτοποίησης, οι τιμές των μεταβλητών ροής υπολογίζονται στα κέντρα των κελιών του υπολογιστικού χωρίου.

Τέλος, το OpenFOAM[®] κατά την επίλυση δημιουργεί αρχεία τα οποία είναι συμβατά με το εργαλείο ParaView, που επιτρέπει την απεικόνιση των αποτελεσμάτων, και την επεξεργασία

τους σε γραφικό περιβάλλον. Το τελευταίο χρησιμοποιείται και στη διπλωματική εργασία για την παρουσίαση των πεδίων ροής που προκύπτουν από τις μελέτες, των πλεγμάτων, και των αποτελεσμάτων της βελτιστοποίησης μορφής.

1.4. Η Δομή της Διπλωματικής Εργασίας

Στόχος της διπλωματικής εργασίας είναι η χρήση των εργαλείων του OpenFOAM, αλλά και η δημιουργία καινούργιων, για την εφαρμογή της μεθόδου ολοκλήρωσης στο επ' άπειρο όριο, με σκοπό τη μείωση της οπισθέλκουσας δύναμης που παράγεται από διδιάστατα και τριδιάστατα σώματα. Αυτό πραγματοποιείται με μια σειρά δοκιμών κατά τις οποίες συγκρίνονται τα παραγόμενα αποτελέσματα των μεθόδων ολοκλήρωσης στο στερεό σώμα, και στο επ' άπειρο όριο. Ταυτόχρονα, μελετάται η αποτελεσματικότητα της νέας προσέγγισης.

Η διπλωματική εργασία δομείται ως ακολούθως:

- Στο Κεφάλαιο 2 παρατίθεται η μαθηματική διατύπωση της οπισθέλκουσας με τη μέθοδο ολοκλήρωσης στο επ' άπειρο όριο.
- Στο Κεφάλαιο 3 καθορίζεται το φυσικό πρόβλημα το οποίο μελετάται καθώς και οι εξισώσεις που το διέπουν.
- Στο Κεφάλαιο 4 επιλύεται το πρωτεύον πρόβλημα και συγκρίνεται η παραγόμενη οπισθέλκουσα δύναμη από πτέρυγα, μεταξύ της μεθόδου ολοκλήρωσης στα όρια του υπολογιστικού χωρίου, και της μεθόδου ολοκλήρωσης πάνω στο στερεό όριο.
- Στο Κεφάλαιο 5 αναλύεται η συνεχής συζυγής μέθοδος, οι μερικές διαφορικές εξισώσεις, οι οριακές συνθήκες, και η έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας για τις μεθόδους ολοκλήρωσης στο στερεό σώμα και στο επ' άπειρον όριο.
- Στο Κεφάλαιο 6 υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού με χρήση της οπισθέλκουσας με ολοκλήρωση στο στερεό σώμα και στο επ' άπειρο όριο ως συνάρτηση στόχου. Εφαρμόζεται η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών, η SI, E-SI και FI συνεχής συζυγής μέθοδος σε αεροτομή, παραμετροποιημένη με πολυώνυμα Bezier-Bernstein και τα αποτελέσματα συγκρίνονται μεταξύ τους, για περίπτωση στρωτής αλλά και τυρβώδους ροής γύρω από αεροτομές.
- Στο Κεφάλαιο 7 πραγματοποιείται μια σειρά δοκιμών για διαφορετικά σετ συνθηκών και σχημάτων αεροτομής, ώστε να αποδειχθεί η αποτελεσματικότητας της βελτιστοποίησης μορφής με βάση τη μέθοδο ολοκλήρωσης στο επ' άπειρο όριο.
- Στο Κεφάλαιο 8 εφαρμόζεται βελτιστοποίηση μορφής σε πτέρυγα με ογκομετρικές καμπύλες B-Splines.
- Στο Κεφάλαιο 9 συνοψίζονται τα αποτελέσματα της διπλωματικής εργασίας και προτείνονται μελλοντικές διερευνήσεις πάνω στο θέμα.

2. Υπολογισμός της Οπισθέλκουσας στο Επ' Άπειρο Όριο

Σύμφωνα με την εξίσωση διατήρησης της ορμής στο χωρίο μελέτης, ισχύει πως:

$$\int_S \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_S p\vec{n} dS + \int_S ([\tau] \cdot \vec{n}) dS \quad (2.1)$$

όπου:

- Ω : ο όγκος ελέγχου
- S : το όριο του όγκου ελέγχου
- \vec{v} : το διάνυσμα της ταχύτητας,
- p : η στατική πίεση,
- τ : ο τανυστής των τάσεων,
- \vec{n} : το μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στις επιφάνειες του όγκου ελέγχου, με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του ρευστού,
- ∞ : συνθήκες αδιατάρακτης ροής

Σύμφωνα με τον διαχωρισμό της επιφάνειας ελέγχου, S , σε εσωτερική(S_{in}) και εξωτερική($S_{farfield}$), όπως φαίνεται στο Σχήμα 2, η εξίσωση (2.1) μπορεί να μετασχηματιστεί σε:

$$\int_{S_W} p\vec{n} dS - \int_{S_W} ([\tau] \cdot \vec{n}) dS = \int_{S_{farfield}} ([\tau] \cdot \vec{n} - p\vec{n} - \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n})) dS \quad (2.2)$$

Με την ονομασία S_W γίνεται αναφορά στο στερεό σώμα, δηλαδή την αεροτομή.

Ο κλασικός ορισμός της οπισθέλκουσας, $D_{nearfield}$, αποτελείται από το ολοκλήρωμα των δυνάμεων πίεσης και τάσεων πάνω στο αεροδυναμικό σώμα, στην κατεύθυνση i της αδιατάρακτης ροής:

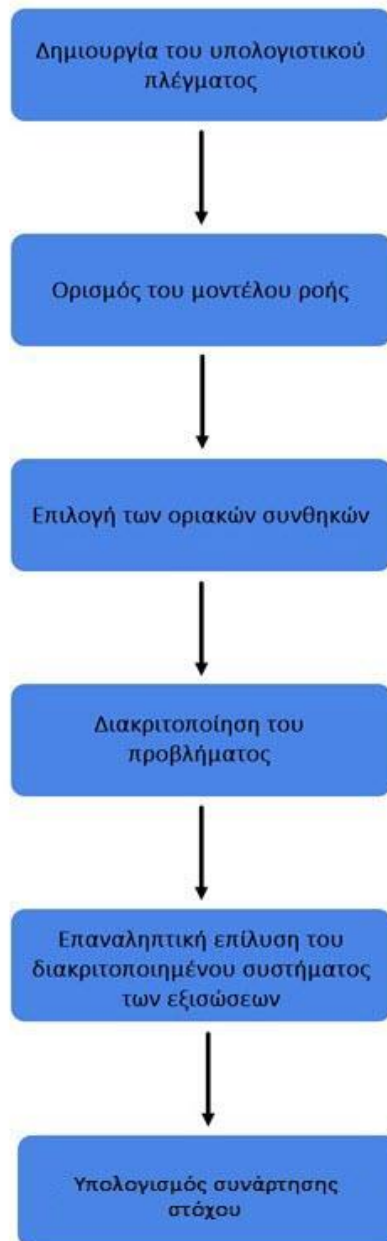
$$D_{nearfield} = \int_{S_W} p(\vec{n} \cdot \vec{i}) dS - \int_{S_W} ([\tau] \cdot \vec{n}) \cdot \vec{i} dS \quad (2.3)$$

Ορίζεται μέσω της (2.2) η οπισθέλκουσα με ολοκλήρωση στο επ' άπειρο όριο, $D_{farfield}$, ως:

$$D_{farfield} = \int_{S_e} (([\tau] \cdot \vec{n}) \cdot \vec{i} - p(\vec{n} \cdot \vec{i}) - \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{i}) \vec{r} dS \quad (2.4)$$

3. Το Πρωτεύον Πρόβλημα

Σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης στη μηχανική των ρευστών ως πρωτεύον ορίζεται το πρόβλημα υπολογιστικής ρευστοδυναμικής, κατά το οποίο προσομοιώνεται ροή ρευστού γύρω από ένα στερεό σώμα υπό συγκεκριμένες συνθήκες με σκοπό, εν τέλει, να υπολογιστεί η τιμή της συνάρτησης-στόχου. Ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:



Σχήμα 2: Η διαδικασία επίλυσης ενός πρωτεύοντος προβλήματος

Πιο αναλυτικά:

1. Δημιουργείται/ορίζεται το υπολογιστικό πλέγμα, με διάσπαση του όγκου μέσα στον οποίο θα κινηθεί το μελετούμενο ρευστό σε κελιά.
2. Επιλέγονται οι εξισώσεις ροής που θα επιλυθούν, καθώς και το μοντέλο της τύρβης, εφόσον χρειάζεται. Σκοπός είναι η επιλογή τους με τέτοιο τρόπο ώστε να περιγράψουν όσο πιο ρεαλιστικά γίνεται τις συνθήκες του προβλήματος.
3. Ορίζονται οι κατάλληλες οριακές συνθήκες του προβλήματος.
4. Εφαρμόζονται τα κατάλληλα σχήματα διακριτοποίησης στο πρόβλημα.
5. Εκτελείται επαναληπτική διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων στα κελιά του υπολογιστικού χωρίου, μέχρι να σταθεροποιηθούν οι τιμές των προς επίλυση πεδίων, και να θεωρηθεί πως το πρόβλημα έχει συγκλίνει.
6. Τελικώς, πραγματοποιείται ο υπολογισμός της συνάρτησης στόχου.

Στο τέλος της επίλυσης, η διαδικασία αποδίδει την τιμή της συνάρτησης στόχου και το πεδίο ροής που θα χρησιμοποιηθεί κατά την επίλυση του συζυγούς προβλήματος.

3.1. Οι Εξισώσεις Navier-Stokes

Στη διπλωματική αυτή εργασία μελετώνται προβλήματα εξωτερικής ροής και χαμηλών ταχυτήτων, οπότε χρησιμοποιείται θεώρηση ασυμπίεστης ροής. Αυτό σημαίνει πως η μεταβολή της πυκνότητας είναι αμελητέα, διότι ο επ'άπειρο αριθμός Mach, ο οποίος ορίζεται ως ο λόγος της αδιατάρακτης ταχύτητας προς την ταχύτητα του ήχου, είναι μικρότερος του 0.3 για οποιαδήποτε από τις δοκιμές. Παράλληλα, το πρόβλημα είναι ανεξάρτητο του χρόνου.

3.1.1. Η Εξίσωση Διατήρησης της Μάζας

Η μάζα μέσα σε έναν όγκο ελέγχου δεν μπορεί ούτε να δημιουργηθεί ούτε να καταστραφεί. Η διατήρηση της μάζας δηλώνει ότι η διαφορά ροής μάζας σε όλο το σύστημα μεταξύ εισόδου και εξόδου είναι μηδενική και για ασυμπίεστο ρευστό:

$$R^p = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.1)$$

3.1.2. Η Εξίσωση Διατήρησης της Ορμής

Η ορμή σε έναν όγκο ελέγχου διατηρείται σταθερή, και εφόσον η πυκνότητα του ρευστού είναι σταθερή, προκύπτουν οι εξισώσεις Navier-Stokes, για ασυμπίεστη, τυρβώδη ροή ως:

$$R_i^v = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \nu_t) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0 \quad (3.2)$$

όπου

:

$$\tau_{ij} = (v + \nu_t) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.3)$$

- p : η στατική πίεση διαιρεμένη με τη σταθερή πυκνότητα του ρευστού.
- x_i : η καρτεσιανή συντεταγμένη ως προς την κατεύθυνση i .
- ν : η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού.
- ν_t : η τυρβώδης κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού.

Η εξίσωση (3.2) μαζί με την εξίσωση συνέχειας (3.1) και το σύνολο των εξισώσεων που προέρχονται από το μοντέλο τύρβης, αποτελούν το σύστημα των εξισώσεων που διέπουν το λεγόμενο πρωτεύον πρόβλημα.

3.2. Μοντελοποίηση της Τύρβης

3.2.1. Περιγραφή του Φαινομένου

Με τον όρο τύρβη περιγράφονται οι τυχαίες αναταραχές που αναπτύσσονται κατά την κίνηση των ρευστών, και κυριαρχούν της συνεκτικότητας. Αυτό το φαινόμενο της ροής είναι χαοτικό και μη-επαναλαμβανόμενο, και χαρακτηρίζεται από υψηλή μεταφορά και χαμηλή διάχυση ορμής, σε αντίθεση με τη στρωτή ροή, κατά την οποία τα στρώματα του ρευστού τείνουν να κινούνται παράλληλα.

Οι εξισώσεις RANS προκύπτουν έπειτα από μια διαδικασία λήψης μέσων χρονικά τιμών, το οποίο σημαίνει διακριτοποίηση μιας ποσότητας μεταξύ της μέσης τιμής της σε μεγάλη χρονική διάρκεια και της χρονικά εξαρτώμενης ταλάντωσής του γύρω από αυτήν την τιμή. Για μια μεταβλητή f , αυτό θα σήμαινε:

$$f(x, t) = \bar{f}(x) + f'(x, t) \quad (3.4)$$

Όπου:

- \bar{f} : η μέση τιμή της μεταβλητής.
- f' : η διαταραχή της f , δηλαδή η απόκλιση της από την μέση τιμή για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Οι μέσες εξισώσεις της ροής διαμορφώνονται ως:

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.5)$$

$$\bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{v_i' v_j'} \right] = 0 \quad (3.6)$$

Ο όρος $\overline{v_i' v_j'}$ πρόκειται για τις τάσεις κατά Reynolds, και ορίζεται σύμφωνα με την υπόθεση Boussinesq^[6] ως:

$$-\overline{v_i' v_j'} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - k \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (3.7)$$

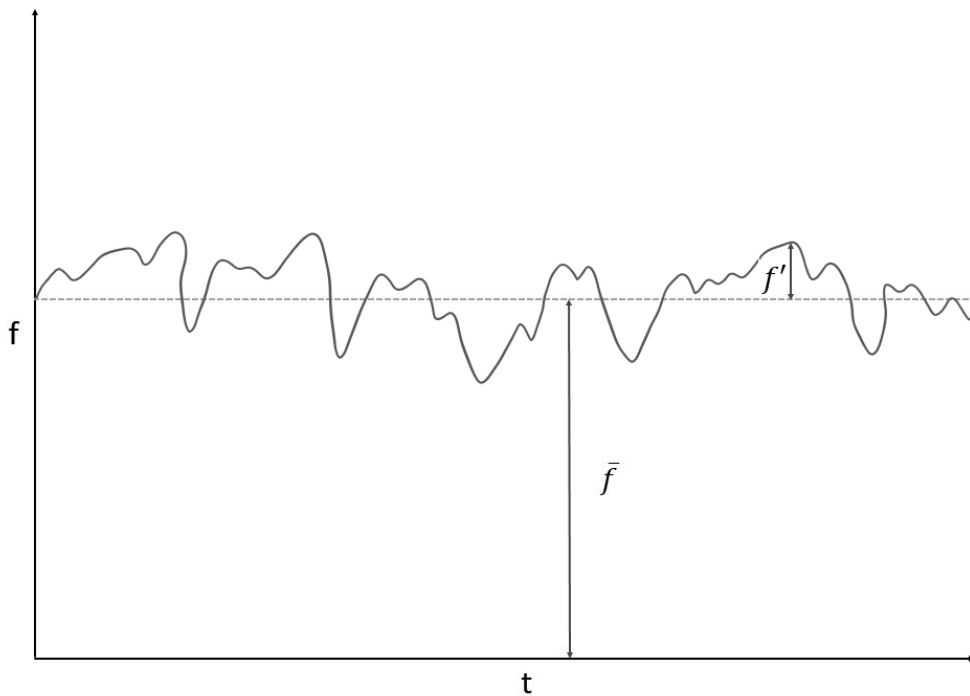
όπου:

- δ_{ij} : το δέλτα του Kronecker, το οποίο μηδενίζεται για $i \neq j$, και ισούται με 1 όταν $i = j$
- k : η τυρβώδης κινητική ενέργεια

$$k = \frac{1}{2} \overline{v_i'v_i'} = \frac{1}{2} (\overline{v_1'v_1'} + \overline{v_2'v_2'} + \overline{v_3'v_3'}) \quad (3.8)$$

Τελικώς, η εξίσωση (3.6) σχηματίζεται ως:

$$\bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0 \quad (3.9)$$



Σχήμα 3: Σε ένα χαοτικό φαινόμενο όπως η τύρβη, κάθε τιμή f προκύπτει ως το άθροισμα της μέσης τιμής, \bar{f} , και της διαταραχής, f' .

Σε προβλήματα εξωτερικής ροής, η διάκριση της παρουσίας τύρβης, πραγματοποιείται ανάλογα με τον αδιάστατο αριθμό Reynolds, ο οποίος εκφράζεται ως ο λόγος αδρανειακών προς τις συνεκτικές δυνάμεις, και ορίζεται ως:

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} \quad (3.10)$$

όπου:

- V : η ταχύτητα αδιατάρακτης ροής $\left(\frac{m}{s}\right)$
- L : ένα χαρακτηριστικό μέγεθος της γεωμετρίας η οποία μελετάται (m)
- μ : η δυναμική συνεκτικότητα του ρευστού $\left(\frac{kg}{m \cdot s}\right)$

Για αριθμό $Re \rightarrow \infty$, η επίδραση των συνεκτικών φαινομένων θεωρείται αμελητέα, ενώ για $Re \ll 1$, τα αδρανειακά φαινόμενα θεωρούνται αμελητέα και οι σχετικοί όροι στις RANS μπορούν να παραλειφθούν.

3.2.2. Το Μοντέλο Τύρβης Spalart-Allmaras

Το φαινόμενο της τύρβης εκφράζεται και εισάγεται στο πρωτεύον πρόβλημα μέσω της μοντελοποίησης του με μια σειρά εξισώσεων.

Έχει αναπτυχθεί πληθώρα μοντέλων, με πιο γνωστά τα μοντέλα δυο εξισώσεων k - ω , k - ϵ και k - ω SST^[7], καθώς και το μοντέλο μιας εξίσωσης Spalart-Allmaras, το οποίο χρησιμοποιείται σε αυτήν την εργασία.

Στο μοντέλο Spalart-Allmaras^[8] εισάγεται μια νέα μεταβλητή, η $\tilde{\nu}$, και σύμφωνα με αυτήν εκφράζεται ο συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας, ν_t , ως:

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1} \quad (3.11)$$

Στην εξίσωση του μοντέλου τύρβης δεν λαμβάνονται υπόψη οι όροι μετάβασης, και γράφεται ως:

$$R^{\tilde{\nu}} = \frac{\partial(v_j \tilde{\nu})}{\partial x_j} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] - \frac{c_{b2}}{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 - \tilde{\nu} P(\tilde{\nu}) + \tilde{\nu} D(\tilde{\nu}) \quad (3.12)$$

Οι όροι παραγωγής, $P(\tilde{\nu})$, και καταστροφής, $D(\tilde{\nu})$ δίνονται από τις παρακάτω εκφράσεις:

$$P(\tilde{\nu}) = c_{b1} \tilde{Y} \quad (3.13)$$

$$D(\tilde{\nu}) = c_{w1} f_w(\tilde{Y}) \frac{\tilde{\nu}}{\Delta^2} \quad (3.14)$$

όπου:

- $Y = \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \vec{t}_i \right|$ είναι το μέτρο της στροβιλότητας

- Δ : η απόσταση του υπόψη κόμβου από τον τοίχο
- $\tilde{Y} = Y f_{v3} + \frac{\tilde{v}}{\Delta^2 \kappa^2} f_{v2}$
- $f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}$
- $f_{v2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\chi}{c_{v2}}\right)^3}$
- $f_{v3} = \frac{(1 + \chi f_{v1})}{c_{v2}} \left[3 \left(1 + \frac{\chi}{c_{v2}}\right) + \left(\frac{\chi}{c_{v2}}\right)^2 \right] \left(1 + \frac{\chi}{c_{v2}}\right)^{-3}$
- $\chi = \frac{\tilde{v}}{v}$
- $f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{1 + c_{w3}^6} \right)^{\frac{1}{6}}$
- $g = r + c_{w2}(r^6 - r)$
- $r = \frac{\tilde{v}}{\tilde{Y} \Delta^2 \kappa^2}$

Οι σταθερές του μοντέλου είναι:

- $c_{b1} = 0.1355$
- $c_{b2} = 0.622$
- $\kappa = 0.4187$
- $\sigma = \frac{2}{3}$
- $c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1 + c_{b2})}{\sigma}$
- $c_{w2} = 0.3$
- $c_{w3} = 2$
- $c_{v1} = 7.1$
- $c_{v2} = 5$

Το σύμβολο Levi-Civita e_{ijk} , που χρησιμοποιείται στο μέτρο της στροβιλότητας, ορίζεται ως:

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1 & (i, j, k) \in (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & (i, j, k) \in (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3) \\ 0 & i = j, j = k, k = i \end{cases} \quad (3.15)$$

3.3. Ο Αλγόριθμος SIMPLE

Ο OpenFOAM πρόκειται για αλγόριθμο βασισμένο στην πίεση, ο οποίος χρησιμοποιεί την μέθοδο των πεπερασμένων όγκων με κεντροκυψελικό σύστημα αποθήκευσης για τη διακριτοποίηση των εξισώσεων. Το υπολογιστικό χωρίο διαμερίζεται σε έναν πεπερασμένο αριθμό όγκων ελέγχου, στους οποίους πραγματοποιείται η επίλυση των εξισώσεων. Κατά τη λειτουργία του SIMPLE για ασυμπίεστη τυρβώδη ροή, ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:

1. Επίλυση των διακριτοποιημένων εξισώσεων διατήρησης της ορμής, και υπολογισμός του πεδίου ταχύτητας, χρησιμοποιώντας μια αρχική πρόβλεψη ή το ήδη υπάρχον πεδίο από την προηγούμενη επανάληψη του αλγόριθμου για την κλίση της πίεσης,

$$\alpha_p u_{p,i}^* = \sum_{N=1}^{NB(P)} \alpha_N u_{N,i}^* - \frac{\partial p^*}{\partial x_i} + b_i^* \quad (3.16)$$

όπου

- P: ο δείκτης της κυψέλης στην οποία διακριτοποιούνται οι εξισώσεις διατήρησης της ορμής.
- NB(P): οι γειτονικές του κυψέλης.
- b: διάνυσμα που αναφέρεται σε όρους πηγής που ενδέχεται να υπάρχουν στις εξισώσεις ορμής.

2. Επίλυση της παρακάτω εξίσωσης για την πίεση, σύμφωνα με την εξίσωση διατήρησης της μάζας:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\alpha_p} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \widehat{u}_{p,i}}{\partial x_j} \quad (3.17)$$

όπου

$$\widehat{u}_{p,i} = \frac{1}{\alpha_p} H_{p,j}(v^*) \quad (3.18)$$

$$H_{p,j}(v^*) = \sum_{N=1}^{NB(P)} \alpha_N u_{N,j}^* + b_j^* \quad (3.19)$$

3. Διόρθωση του ροών στις 'πλευρές' των όγκων ελέγχου με χρήση της:

$$F^f = S \cdot v^f = S \left[\left(\frac{H(v)}{\alpha_p} \right)_f - \left(\frac{\nabla p}{\alpha_p} \right)_f \right] \quad (3.20)$$

όπου S είναι το κάθετο στην 'πλευρά' διάνυσμα με μέτρο ίσο με την επιφάνεια της 'πλευράς'.

4. Διόρθωση των ταχυτήτων με βάση τη νέα κατανομή πίεσης σύμφωνα με την εξίσωση:

$$u_{p,i} = \widehat{u}_{p,i} - \frac{1}{\alpha_p} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (3.21)$$

5. Ανανέωση των οριακών τιμών των ποσοτήτων της ροής.

6. Επανάληψη της διαδικασίας μέχρι τη σύγκλιση

Για την επίλυση της εξίσωσης πίεσης χρησιμοποιείται ο Γενικευμένος Πολυπλεγματικός Αλγόριθμος (Generalised Geometric-Algebraic Multi-Grid Solver, GAMG) του OpenFOAM. Σε κάθε επίπεδο πυκνώσης το σύστημα επιλύεται για έναν αριθμό επαναλήψεων, μέχρι να συγκλίνει το σύστημα.

Αντίστοιχα, η μέθοδος των Gauss-Seidel^[9] χρησιμοποιείται για την επίλυση των εξισώσεων υπολογισμού της ταχύτητας και των εξισώσεων του μοντέλου τύρβης.

Οι αποστάσεις από τον τοίχο υπολογίζονται μέσα από την επίλυση της εξίσωσης Hamilton-Jacobi^[5]:

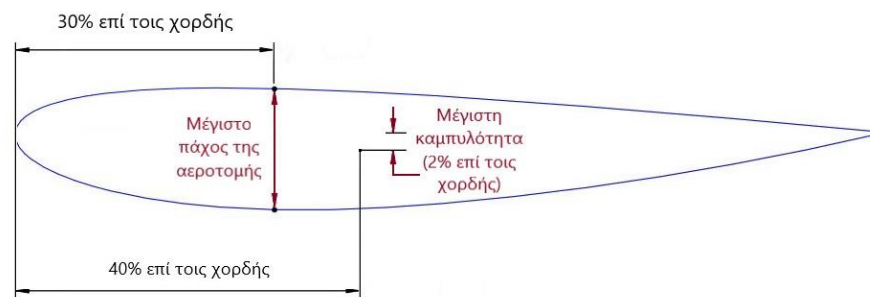
$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_j} \frac{\partial \Delta}{\partial x_j} = 1 \quad (3.22)$$

4. Σύγκριση Μεθόδων Υπολογισμού της Οπισθέλκουσας σε Πτέρυγα

Με στόχο την επαλήθευση συμβατότητας μεταξύ της μεθόδου ολοκλήρωσης στα όρια του υπολογιστικού χωρίου, και της μεθόδου ολοκλήρωσης πάνω στο στερεό σώμα, για διαφορετικές περιπτώσεις υπολογιστικών χωρίων και ταχυτήτων, πραγματοποιείται σύγκριση της παραγόμενης οπισθέλκουσας δύναμης σε πτέρυγα.

Η μέθοδος δοκιμάστηκε σε μια πτέρυγα με προφίλ NACA 2414. Σύμφωνα με την ονοματολογία των NACA 4-ψηφίων, αυτή χαρακτηρίζεται από :

- 2% καμπυλότητα
- 40% απόσταση από το σημείο πρόσπτωσης της μέγιστης καμπυλότητας.
- 14% ποσοστό επί τοις χρησιμοποιούμενης χορδής ως μέγιστο πάχος της αεροτομής. Η μορφή της αεροτομής είναι η εξής:



Σχήμα 4: Τα χαρακτηριστικά του προφίλ της αεροτομής με προφίλ NACA 2414.

Οι συντεταγμένες του περιγράμματος της αεροτομής προέρχονται από την ιστοσελίδα AirfoilTools^[10], και το μοντέλο το οποίο χρησιμοποιήθηκε στη δοκιμή σχεδιάστηκε με το λογισμικό SolidWorks, αποθηκεύτηκε σε μορφή STL.

Προσομοιώνεται τυρβώδης ροή με το μοντέλο Spalart Allmaras. Για τις ιδιότητες του μέσου (ατμοσφαιρικός αέρας) ισχύουν τα παρακάτω:

- Πυκνότητα: $\rho = 1.2047 \frac{kg}{m^3}$
- Δυναμική συνεκτικότητα: $\mu = 1.8205 \times 10^{-5} \frac{kg}{m \cdot s}$

Οριακές συνθήκες:

- Είσοδος (S_I):
 - Ταχύτητα: Συνθήκη Dirichlet $(x,y,z)=(6, 0, 0) \frac{m}{sec}$. Η χορδή της αεροτομής είναι τοποθετημένη κατά τον άξονα των x.
 - Πίεση: Μηδενική συνθήκη Neumann.
 - Μεταβλητή του μοντέλου Spalart-Allmaras, $\tilde{\nu}$: Υπολογίζεται από την εξίσωση του μοντέλου Spalart-Allmaras για τυρβώδη συνεκτικότητα ίση με 7.4×10^{-3} , που προκύπτει από τον τύπο:

$$v_t = \sqrt{\frac{3}{2}} (U_\infty I l) \quad (4.1)$$

όπου:

- V : η ταχύτητα σε συνθήκες αδιατάρακτης ροής $\left(\frac{m}{s}\right)$
- I : η ένταση της τύρβης (turbulence intensity) = 0.01
- l : η τυρβώδης κλίμακα μήκους (turbulent length scale) = 0.01

Οι τιμές των I και l προέρχονται ως προτεινόμενες για τις συνθήκες του προβλήματος από τη βιβλιογραφία. [11,12]

- Έξοδος (S_O):
 - Ταχύτητα: Μηδενική συνθήκη Neumann
 - Πίεση: Μηδενική συνθήκη Dirichlet
 - Μεταβλητή του μοντέλου Spalart-Allmaras, $\tilde{\nu}$: Μηδενική συνθήκη Neumann

- Στερεά τοιχώματα (S_W):
 - Ταχύτητα: Μηδενική συνθήκη Dirichlet $(0, 0, 0) \frac{m}{sec}$
 - Πίεση: Μηδενική συνθήκη Neumann.
 - Τυρβώδης κινηματική συνεκτικότητα, $\tilde{\nu}$: χρήση τοίχου (wall functions).
 - Τυρβώδης συνεκτικότητα, ν_t : Μηδενική συνθήκη Dirichlet

Στα όρια συμμετρίας του πεδίου, επιβάλλονται η κάθετη στο όριο συνιστώσα και κλίση της συζυγούς ταχύτητας να είναι ίσες με μηδέν. Στα υπόλοιπα όρια του υπολογιστικού εφαρμόζονται οι εξής συνθήκες:

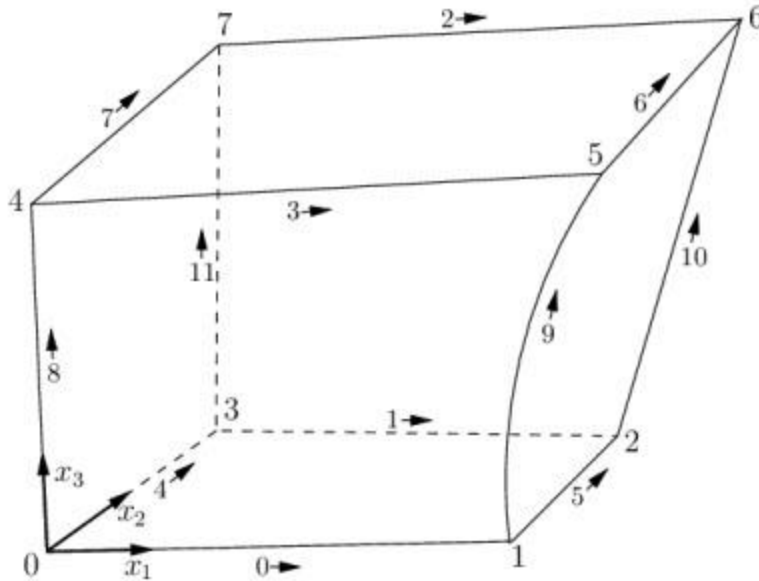
- Ταχύτητα: Συνθήκη ολίσθησης, που σημαίνει πως το κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα της ταχύτητας μηδενίζεται, και τα εφαπτόμενα στην επιφάνεια διανύσματα διατηρούν την ίδια τιμή με την ακριβώς προηγούμενη κυψέλη.
- Πίεση: Μηδενική συνθήκη Neumann.

4.1. Γένεση Πλέγματος

Η γένεση πλέγματος πραγματοποιήθηκε με χρήση των εργαλείων blockMesh και snappyHexMesh γύρω από το δεξί ήμισυ της αεροτομής λόγω συμμετρίας της γεωμετρίας.

4.1.1. Το Εργαλείο BlockMesh

Η αρχή πίσω από το εργαλείο του OpenFOAM, blockMesh, είναι ο διαχωρισμός του υπολογιστικού χωρίου σε ένα σύνολο μιας ή περισσότερων τριδιάστατων, εξάεδρων κυψελών, το πλέγμα.



Σχήμα 5: Κάθε κυψέλη ορίζεται από 8 κορυφές . Οι άκρες των κυψελών μπορούν να είναι ευθείες, τόξα ή γραμμές.

Πηγή: <https://www.openfoam.com/documentation/user-guide/4-mesh-generation-and-conversion/4.3-mesh-generation-with-the-blockmesh-utility>

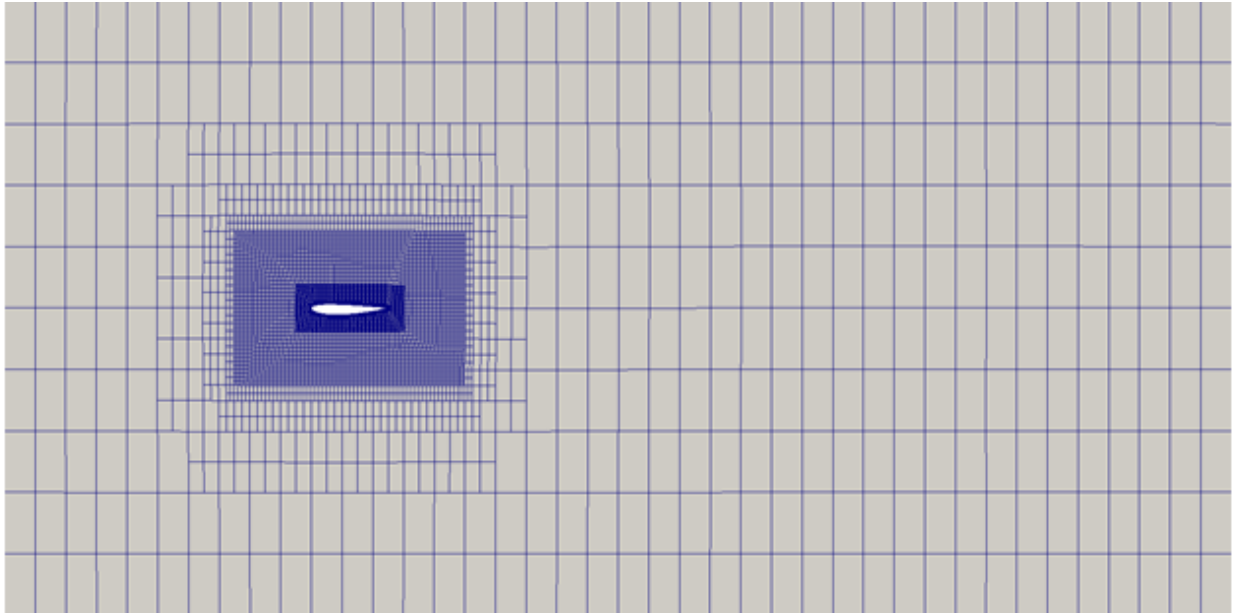
4.1.2. Το Εργαλείο SnappyHexMesh

Το SnappyHexMesh είναι ένα εργαλείο γένεσης πλέγματος στο λογισμικό ανοιχτού κώδικα OpenFOAM®, το οποίο δημιουργεί τριδιάστατα, μη-δομημένα ή υβριδικά πλέγματα που αποτελούνται από εξάεδρα κελιά. Ο αλγόριθμος αυτός λειτουργεί σε 4 διακριτές φάσεις:

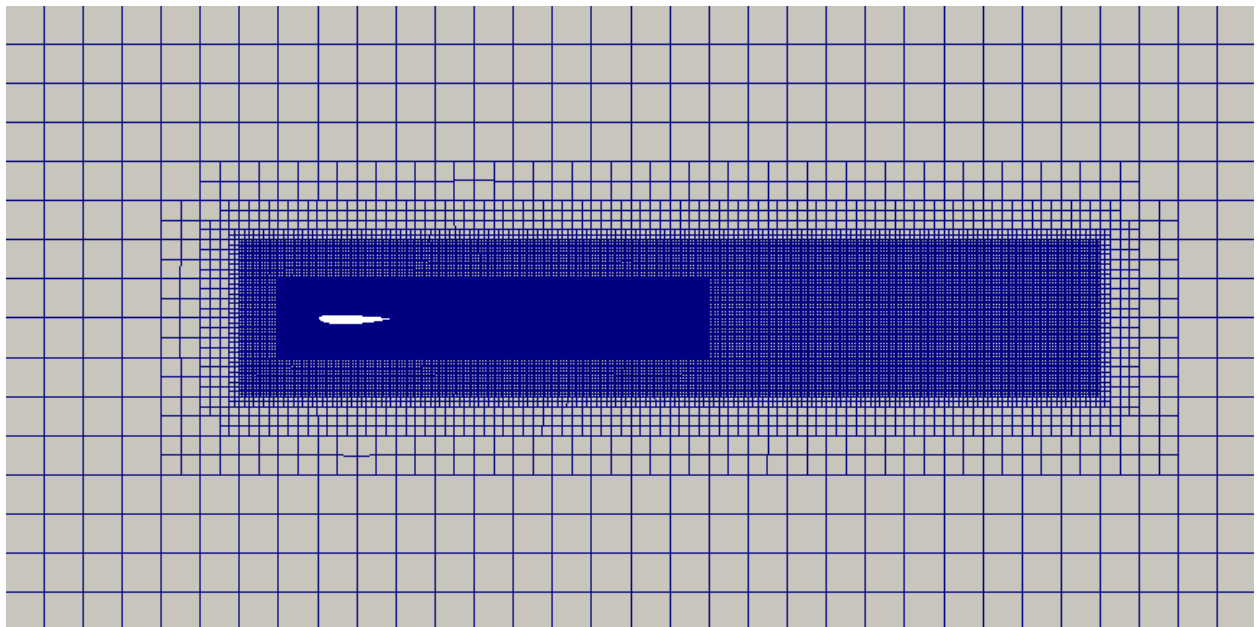
1. Μόλις ολοκληρωθεί η γένεση του αρχικού πλέγματος με το εργαλείο BlockMesh , ξεκινά μια διαδικασία κατά την οποία τα αρχικά κελιά στο στερεό όριο διασπώνται περαιτέρω.
2. Έπειτα ξεκινά μια επαναληπτική διαδικασία μέχρι να επιτευχθούν τα κριτήρια ποιότητας, κατά την οποία οι κορυφές των κελιών του πλέγματος μετατοπίζονται στην επιφάνεια του σώματος. Ακόμη, εκτελείται έλεγχος για ύπαρξη κελιών που παραβιάζουν τις παραμέτρους ποιότητας του πλέγματος.
3. Εφόσον έχει επιλεγεί από τους χρήστες, δημιουργούνται στρώματα σε επιλεγμένες επιφάνειες και προσαρμόζονται στο κύριο πλέγμα, ώστε να υπολογιστεί με μεγαλύτερη ακρίβεια η φυσική της ροής όταν αυτή έρχεται σε επαφή με το σώμα.
4. Στο πλαίσιο εξασφάλισης καλής ποιότητας πλέγματος, καθορίζονται από τον χρήστη κάποιες τιμές για διάφορα κριτήρια, τα οποία προκύπτουν από τα χαρακτηριστικά του. Εάν το πλέγμα παραβιάζει κάποια από τις οριακές τιμές που έχουν τεθεί, ο

αλγόριθμος επιχειρεί αυτόματα να εφαρμόσει ανανεωμένες ρυθμίσεις, ώστε να προκύψει τελικώς το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Δοκιμάζονται δύο τύποι πλέγματος, με διαφορετική πυκνωση:



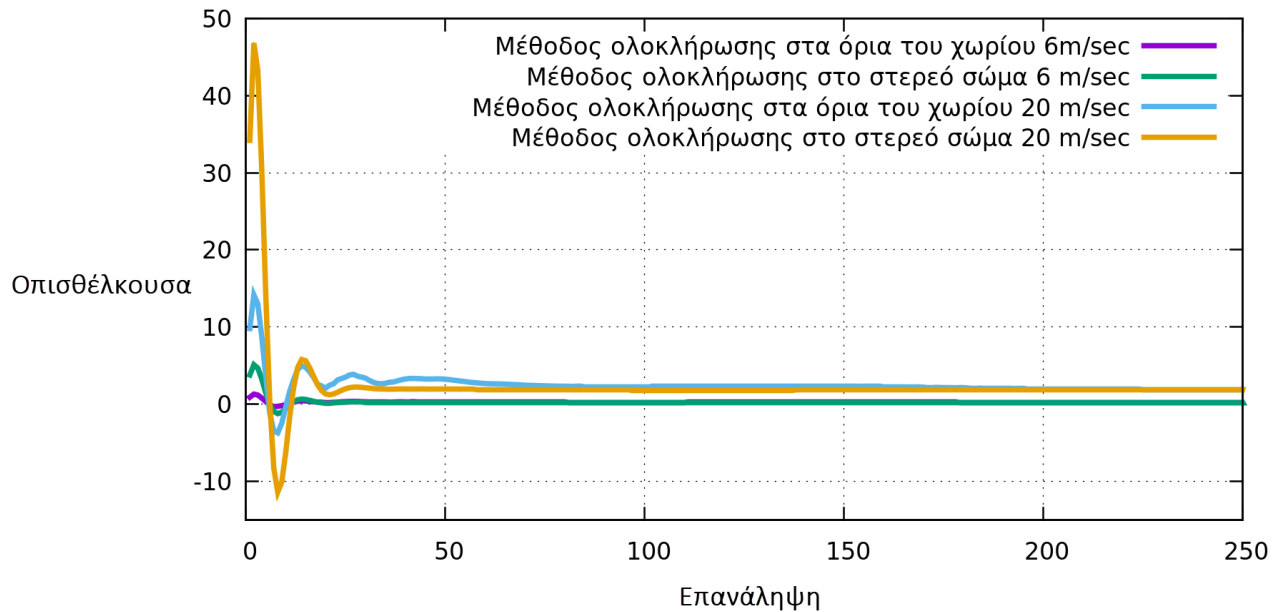
Σχήμα 6: Το πιο αραιό περιέχει ~800k κελιά εκ των οποίων τα ~73k δημιουργήθηκαν στην επιφάνεια της πτέρυγας.



Σχήμα 7: Το πιο πυκνό πλέγμα περιέχει ~4.3M κελιά εκ των οποίων τα ~300 είναι επιφανειακά.

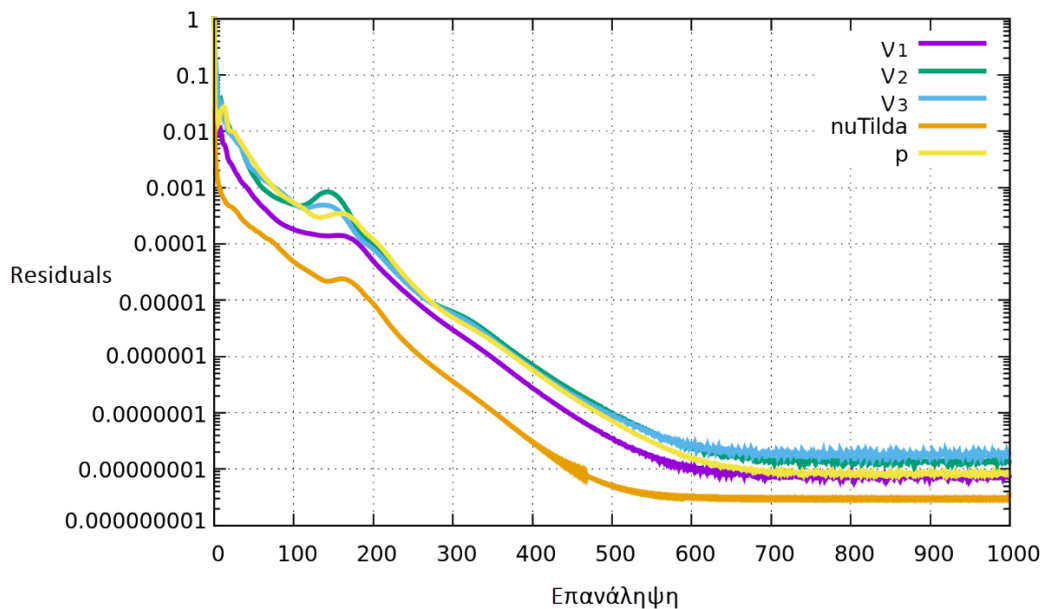
4.2. Σύγκριση Αποτελεσμάτων

Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των πρώτων 150 επαναλήψεων για το πιο αραιό πλέγμα. Στις επόμενες υποενότητες θα παρουσιαστεί για κάθε χωρίο η εξέλιξη των τιμών έπειτα από 1000 επαναλήψεις, ώστε να φανεί η ταύτιση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων.



Σχήμα 8: Η εξέλιξη της τιμής της οπισθέλκουσας με την κάθε μέθοδο, για δύο διαφορετικούς αριθμούς Reynolds, που αντιστοιχούν σε ταχύτητες εισόδου ροής 6 και $20 \frac{m}{sec}$. Μόνο οι 250 αρχικές επαναλήψεις από τις 1000 συμπεριλαμβάνονται για λόγους ευκρίνειας.

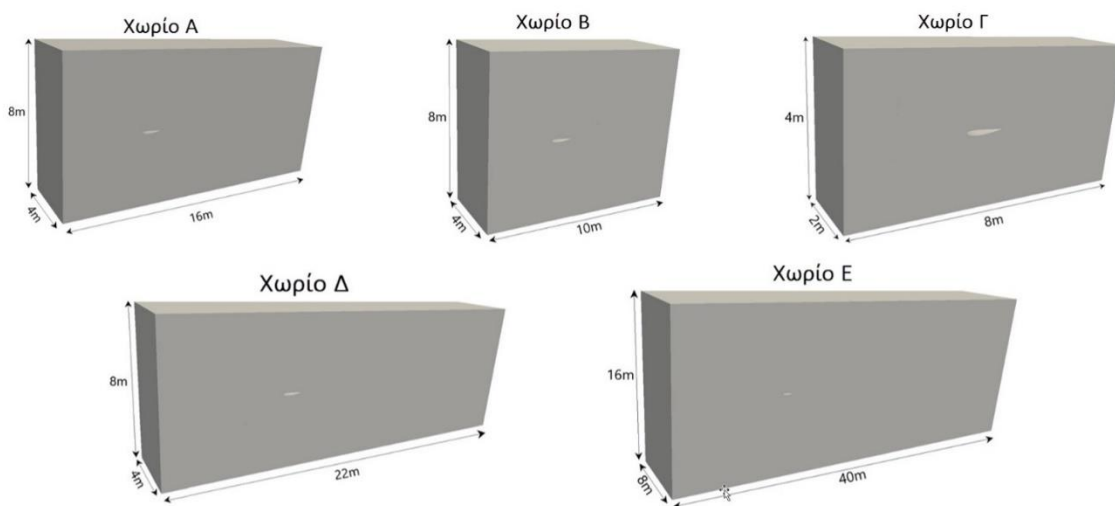
Επισημαίνεται πως για κάθε προσομοίωση, ελέγχθηκε η σύγκλιση των ροϊκών μεταβλητών, ώστε να αποδειχθεί ότι τα αποτελέσματα προέρχονται από μελέτες που έχουν συγκλίνει. Παρακάτω εμφανίζεται το διάγραμμα σύγκλισης για το Χωρίο A με το πιο αραιό πλέγμα:



Σχήμα 9: Λογαριθμικό διάγραμμα σύγκλισης των ροϊκών παραμέτρων v_1 , v_2 , v_3 , $\nu Tilda$ και ρ για την προσομοίωση στο χωρίο A.

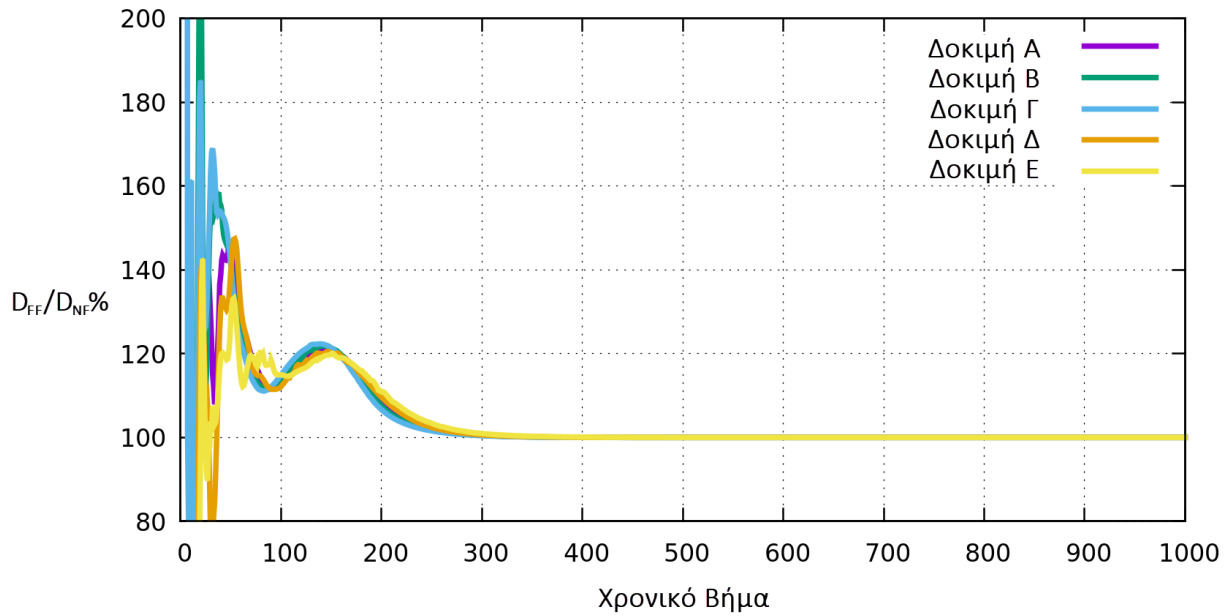
4.3. Παραμετρική Μελέτη των Διαστάσεων του Χωρίου

Προσομοιώθηκαν πέντε υπολογιστικά χωρία διαφορετικών διαστάσεων, ώστε να διερευνηθεί η ανεξαρτησία της αποτελεσματικότητας της μεθόδου ολοκλήρωσης στα όρια του χωρίου, από το μέγεθός του.

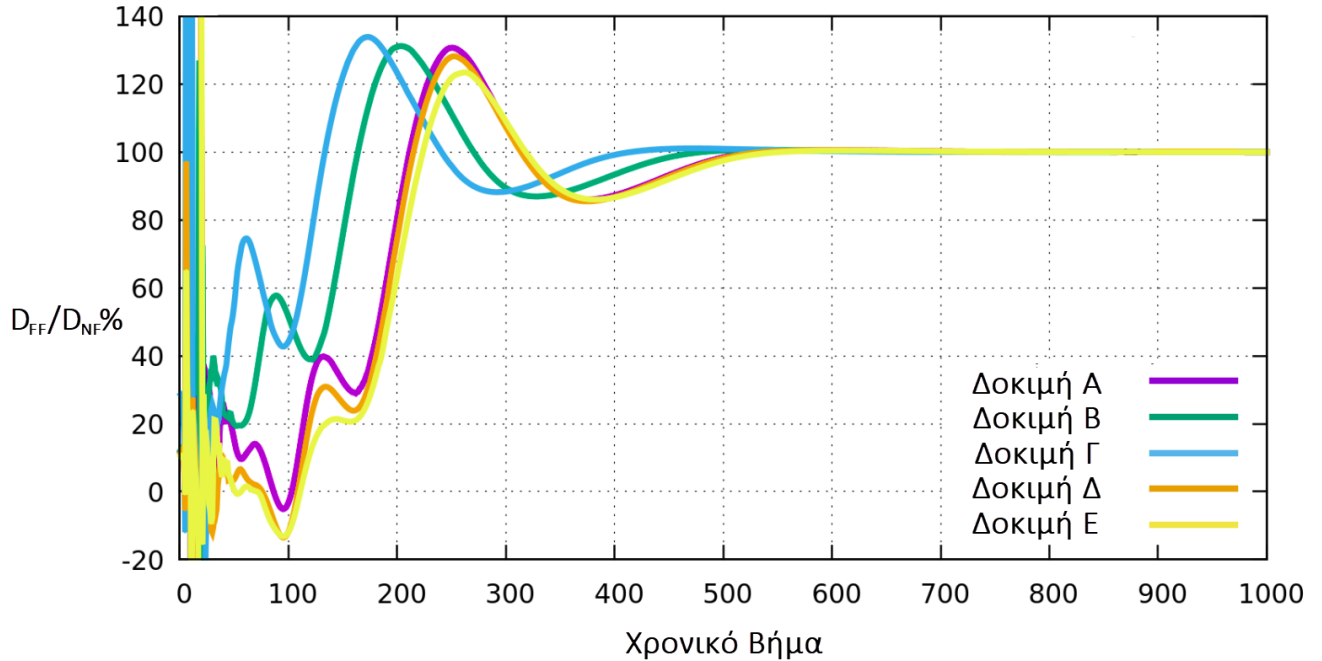


Σχήμα 10: Οι διαστάσεις των χωρίων που χρησιμοποιήθηκαν στη διερεύνηση. Ως βασικό θεωρείται το χωρίο Α.

Κάθε χωρίο προσομοιώθηκε και με τους δύο τύπους πλέγματος, και για 6 αλλά και $20 \frac{m}{sec}$. Και οι είκοσι σε σύνολο μελέτες, ανεξάρτητα από το πλέγμα, τις διαστάσεις του χωρίου, και τον αριθμό Reynolds, φτάνουν στην 100% συμβατότητα των αποτελεσμάτων μεταξύ των δύο μεθόδων:



Σχήμα 11: Μετά από 1000 επαναλήψεις με τον αλγόριθμο SIMPLE, και οι δύο μέθοδοι συγκλίνουν στην ίδια τιμή παραγόμενης οπισθέλκουσας για ταχύτητα εισόδου $6 \frac{m}{sec}$ με το αραιό πλέγμα.



Σχήμα 12: Μετά από 1000 επαναλήψεις με τον αλγόριθμο SIMPLE, και οι δύο μέθοδοι συγκλίνουν στην ίδια τιμή παραγόμενης οπισθέλκουσας για ταχύτητα εισόδου $6 \frac{m}{sec}$ και με το πιο πυκνό πλέγμα το οποίο παρουσιάζεται στο Σχήμα 7.

Παρακάτω παρουσιάζεται η εξέλιξη της οπισθέλκουσας σε συγκεκριμένους αριθμούς επαναλήψεων:

	Χωρίο Α		Χωρίο Β		Χωρίο Γ		Χωρίο Δ		Χωρίο Ε	
Επανάληψη	Ολοκλήρωση στο Επ'Άπειρο Όριο	Ολοκλήρωση στο Στερεό Σώμα	Ολοκλήρωση στο Επ'Άπειρο Όριο	Ολοκλήρωση στο Στερεό Σώμα	Ολοκλήρωση στο Επ'Άπειρο Όριο	Ολοκλήρωση στο Στερεό Σώμα	Ολοκλήρωση στο Επ'Άπειρο Όριο	Ολοκλήρωση στο Στερεό Σώμα	Ολοκλήρωση στο Επ'Άπειρο Όριο	Ολοκλήρωση στο Στερεό Σώμα
1000	0.20594	0.20594	0.20622	0.20622	0.20592	0.20592	0.2058	0.2058	0.20583	0.20583

Πίνακας 1: Οι δύο μέθοδοι συγκλίνουν στην ίδια τιμή από νωρίς, ανεξάρτητα από τις διαστάσεις του υπολογιστικού χωρίου.

	Χωρίο Α		Χωρίο Β		Χωρίο Γ		Χωρίο Δ		Χωρίο Ε	
Επανάληψη	Ολοκλήρωση στο Επ'Άπειρο Όριο	Ολοκλήρωση στο Στερεό Σώμα	Ολοκλήρωση στο Επ'Άπειρο Όριο	Ολοκλήρωση στο Στερεό Σώμα	Ολοκλήρωση στο Επ'Άπειρο Όριο	Ολοκλήρωση στο Στερεό Σώμα	Ολοκλήρωση στο Επ'Άπειρο Όριο	Ολοκλήρωση στο Στερεό Σώμα	Ολοκλήρωση στο Επ'Άπειρο Όριο	Ολοκλήρωση στο Στερεό Σώμα
1000	1.83185	1.83185	1.83466	1.83466	1.83106	1.83106	1.83058	1.83058	1.83125	1.83125

Πίνακας 2: Τα αποτελέσματα με το αραιό πλέγμα για ταχύτητα εισόδου $20 \frac{m}{sec}$.

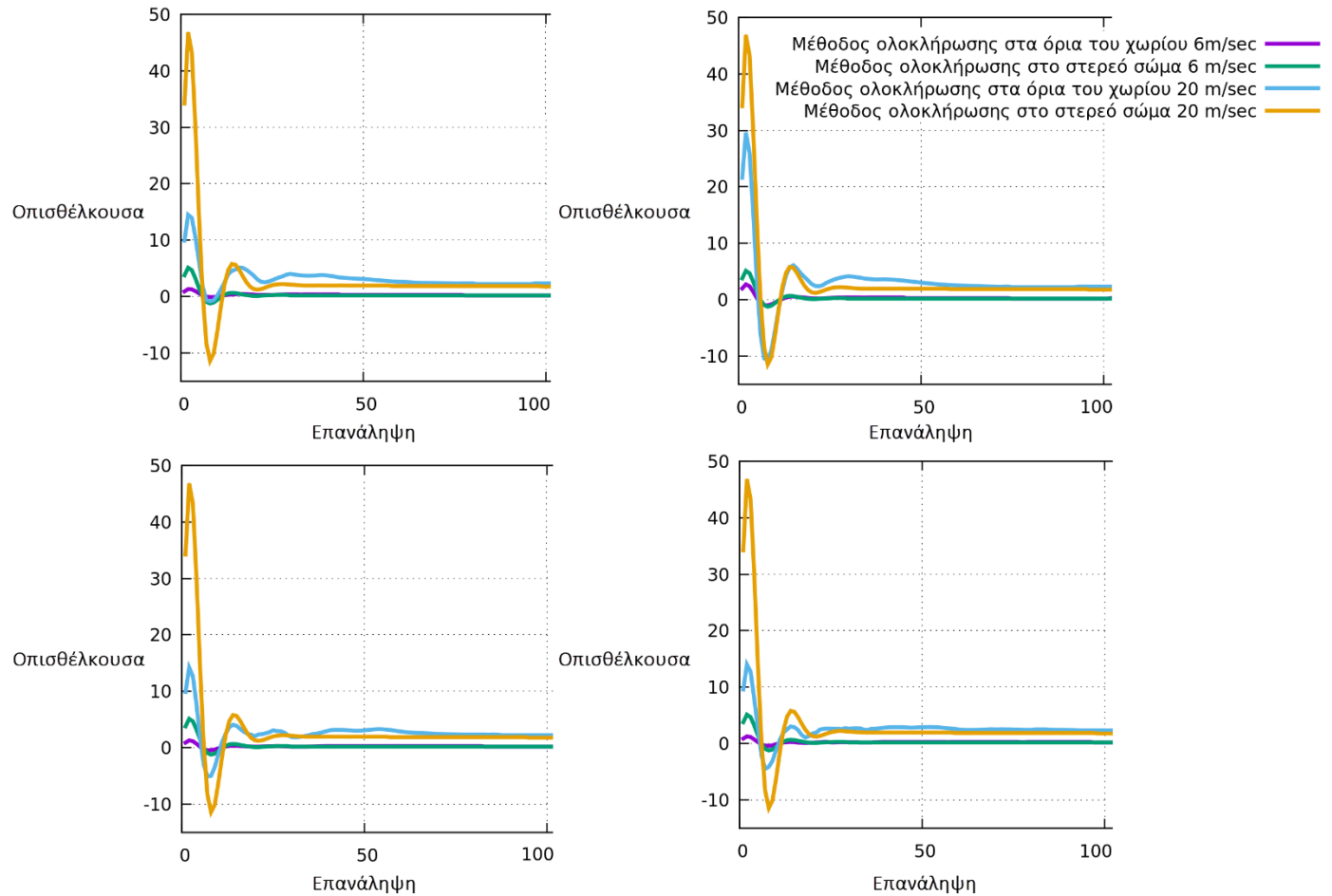
	Χωρίο Α		Χωρίο Β		Χωρίο Γ		Χωρίο Δ		Χωρίο Ε	
Επανάληψη	Ολοκλήρωση στο Επ'Άπειρο Όριο	Ολοκλήρωση στο Στερεό Σώμα	Ολοκλήρωση στο Επ'Άπειρο Όριο	Ολοκλήρωση στο Στερεό Σώμα	Ολοκλήρωση στο Επ'Άπειρο Όριο	Ολοκλήρωση στο Στερεό Σώμα	Ολοκλήρωση στο Επ'Άπειρο Όριο	Ολοκλήρωση στο Στερεό Σώμα	Ολοκλήρωση στο Επ'Άπειρο Όριο	Ολοκλήρωση στο Στερεό Σώμα
1000	0.21855	0.21855	0.21879	0.21879	0.21910	0.21910	0.21844	0.21844	0.21836	0.21836

Πίνακας 3: Τα αποτελέσματα με το πυκνό πλέγμα για ταχύτητα εισόδου $6 \frac{m}{sec}$. Σε αυτήν την περίπτωση, η μέθοδος με ολοκλήρωση στο επ' άπειρον όριο φτάνει πιο αργά στην τελική τιμή.

	Χωρίο Α		Χωρίο Β		Χωρίο Γ		Χωρίο Δ		Χωρίο Ε	
Επανάληψη	Ολοκλήρωση στο Επ'Άπειρο Όριο	Ολοκλήρωση στο Στερεό Σώμα	Ολοκλήρωση στο Επ'Άπειρο Όριο	Ολοκλήρωση στο Στερεό Σώμα	Ολοκλήρωση στο Επ'Άπειρο Όριο	Ολοκλήρωση στο Στερεό Σώμα	Ολοκλήρωση στο Επ'Άπειρο Όριο	Ολοκλήρωση στο Στερεό Σώμα	Ολοκλήρωση στο Επ'Άπειρο Όριο	Ολοκλήρωση στο Στερεό Σώμα
1000	1.80829	1.80829	1.81041	1.81041	1.81614	1.81614	1.80736	1.80736	1.80659	1.80659

Πίνακας 4: Τα αποτελέσματα με το πυκνό πλέγμα για ταχύτητα εισόδου $20 \frac{m}{sec}$.

Αντίστοιχα με το Σχήμα 9, παρουσιάζεται και η εξέλιξη της τιμής της οπισθέλκουσας για κάθε ένα από τα χωρία, η οποία φαίνεται να σταθεροποιείται από νωρίς, ανεξάρτητα από την απόσταση της πτέρυγας από το επ' άπειρο όριο:



Σχήμα 13: Η εξέλιξη της τιμής της οπισθέλκουσας με κάθε μέθοδο, για το χωρίο Β(άνω αριστερά), Γ(άνω δεξιά), Δ(κάτω αριστερά), και Ε(κάτω δεξιά), για ταχύτητες εισόδου ροής 6 και $20 \frac{m}{sec}$ στο αραιό πλέγμα. Όμοια είναι και τα αποτελέσματα με το πιο πυκνό πλέγμα του Σχήματος 8.

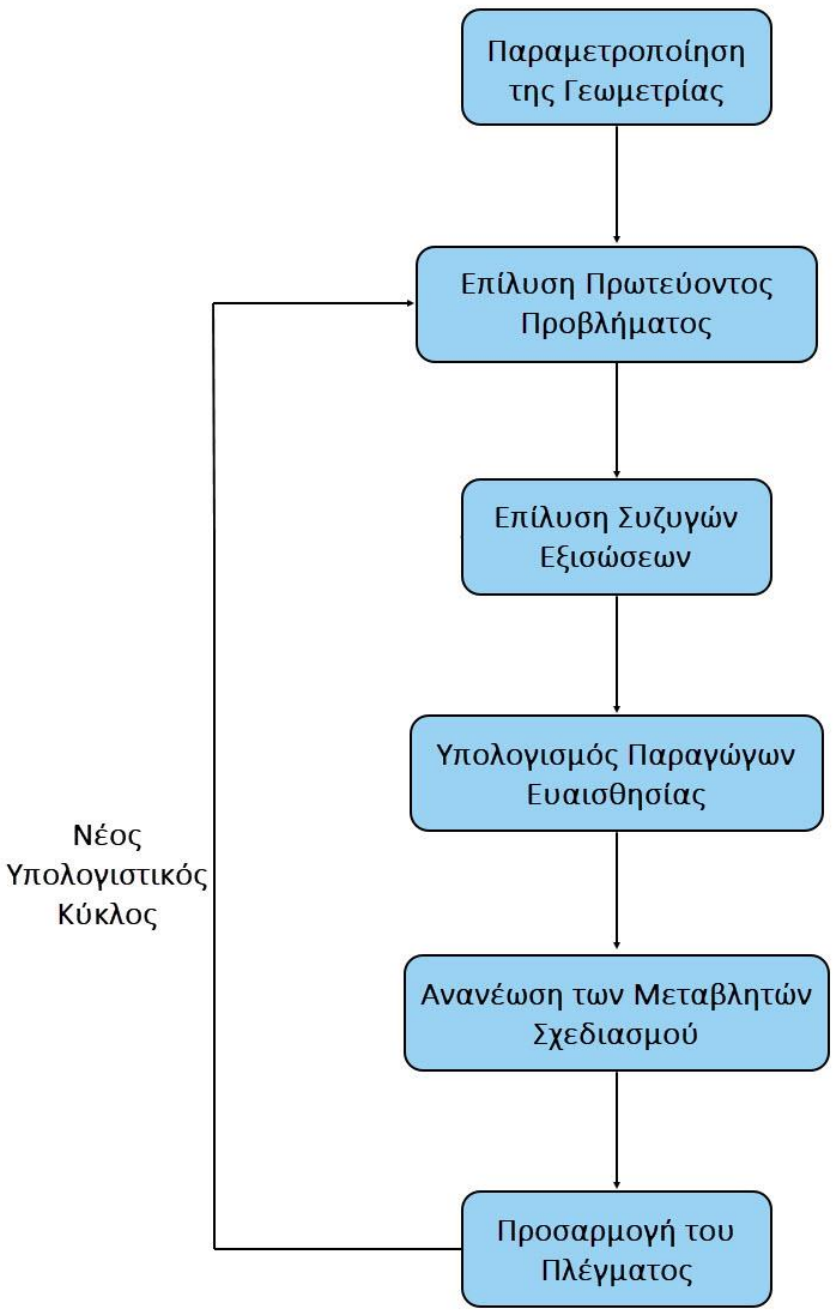
5. Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος στη Βελτιστοποίηση

5.1. Περιγραφή της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου

Στόχος της μεθόδου είναι ο υπολογισμός της κλίσης μιας συνάρτησης στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Η διαδικασία ξεκινά με τον προσδιορισμό της συνάρτησης στόχου, F . Τελικός σκοπός της διαδικασίας της βελτιστοποίησης είναι η ελαχιστοποίηση του παραπάνω βαθμωτού μεγέθους. Έτσι, τροποποιούνται αναλόγως οι μεταβλητές σχεδιασμού, b , στις οποίες γίνεται αναφορά στη συνέχεια.

Η διαδικασία της συζυγούς βελτιστοποίησης ξεκινά με την επίλυση των εξισώσεων ροής, και στη συνέχεια, πραγματοποιείται επίλυση των συζυγών εξισώσεων και υπολογίζονται οι παράγωγοι με τις οποίες μεταβάλλονται οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού. Οι χρήστες επιλέγουν πόσες φορές θα επαναληφθεί η διαδικασία, ή αλλιώς, τον αριθμό των κύκλων βελτιστοποίησης.

Αφού λυθούν οι συζυγείς εξισώσεις, υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας. Σε προβλήματα εξωτερικής ροής, το πιο διαδεδομένο μέγεθος το οποίο ο χρήστης προσπαθεί να μειώσει είναι ο συντελεστής αεροδυναμικής αντίστασης, C_d , με ολοκλήρωση πάνω στο στερεό σώμα. Παρόλα αυτά σε αυτήν την εργασία χρησιμοποιείται η οπισθέλκουσα δύναμη, η οποία υπολογίζεται μέσω ολοκληρώσεων στο επ' άπειρο όριο του υπολογιστικού χωρίου, οπότε αργότερα οι εκφράσεις θα διαμορφωθούν αντίστοιχα. Η επιλογή της οπισθέλκουσας αντί του αδιάστατου συντελεστή δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα της εργασίας.



Σχήμα 14: Η διαδικασία βελτιστοποίησης μέσω της συζυγούς μεθόδου, με βελτιστοποίηση μορφής η οποία λαμβάνει ως δεδομένα τις παραγώγους ευαισθησίας.

5.2. Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος με Ολοκλήρωση στο Στερεό Σώμα

5.2.1. Η Συνάρτηση-Στόχος

Στην περίπτωση όπου η συνάρτηση-στόχος βασίζεται στη μέθοδο ολοκλήρωσης στο στερεό σώμα για τον υπολογισμό της οπισθέλκουσας δύναμης, δηλαδή στην ολοκλήρωση των δυνάμεων πίεσης και συνεκτικών τάσεων οι οποίες ασκούνται στο στερεό όριο με προβολή της συνισταμένης δύναμης στην κατεύθυνσή της αδιατάρακτης ροής, αυτή εξαρτάται από:

- **Το υποσύνολο του V** , το οποίο περιλαμβάνει το σύνολο των διανυσμάτων της ταχύτητας, v_i , την πίεση, p , και τις μεταβλητές του μοντέλου τύρβης που προκύπτουν από την επίλυση των εξισώσεων ροής πάνω στο στερεό όριο.
- **Τις μεταβλητές σχεδιασμού.** Η οπισθέλκουσα ολοκληρώνεται πάνω στο σώμα και περιέχει το κάθετο και εφαπτόμενο στην επιφάνεια διάνυσμα σε κάθε οριακή επιφάνεια του πλέγματος.

Ισχύει λοιπόν πως:

$$F = F(\vec{b}, \vec{x}(b), \vec{U}(\vec{x}(b), \vec{b})) \quad (5.1)$$

όπου \vec{x} οι συντεταγμένες των κόμβων του πλέγματος, και η συνάρτηση-στόχος είναι η οπισθέλκουσα εκφρασμένη με τη μέθοδο ολοκλήρωσης στο στερεό σώμα:

$$F = \int_{S_w} (p\delta_j^i - \tau_{i,j})n_j r_i dS \quad (5.2)$$

Το r_i πρόκειται για το διάνυσμα κατεύθυνσης της δύναμης, και στην περίπτωση της οπισθέλκουσας είναι το μοναδιαίο διάνυσμα $(1, 0, 0)$ επειδή η ταχύτητα είναι οριζόντια. Για παράδειγμα, σε περίπτωση υπολογισμού της άνωσης αντί της οπισθέλκουσας, το μοναδιαίο διάνυσμα τίθεται κάθετα στην κατεύθυνση της ροής.

Αρχικά ορίζεται η F_{aug} :

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega + \int_{\Omega} q R^p d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{v}_\alpha R^v d\Omega \quad (5.3)$$

Διευκρινίζεται ότι:

- Ω είναι το υπολογιστικό χωρίο,
- u_i είναι οι συνιστώσες της συζυγούς ταχύτητας,
- q είναι η συζυγής στατική πίεση,
- \tilde{v}_α είναι η συζυγής μεταβλητή του μοντέλου τύρβης.

Μιας και ισχύει πως $R_i^v = R^p = R^{\tilde{v}} = 0$, τότε $F_{aug} = F$. Διαφορίζοντας τη σχέση (5.3) ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού b_n , προκύπτει:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = \frac{\delta F}{\delta b_n} + \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega + \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} q R^p d\Omega + \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} \tilde{v}_\alpha R^{\tilde{v}} d\Omega \quad (5.4)$$

όπου για μια ποσότητα Q , ο λόγος $\frac{\delta Q}{\delta b_n}$ εκφράζει την ολική διαφορά στο Q λόγω των αλλαγών των b_n , ενώ η μερική παράγωγος $\frac{\partial Q}{\partial b_n}$ αντιπροσωπεύει τη διαφορά στο Q που προκαλείται λόγω αλλαγών στις μεταβλητές σχεδιασμού, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η επιρροή της αλλαγής της γεωμετρίας στην μεταβολή της ποσότητας Q . Η σχέση μεταξύ της ολικής και της μερικής παραγώγου μπορεί να διατυπωθεί ως εξής [13]:

$$\frac{\delta Q}{\delta b_n} = \frac{\partial Q}{\partial b_n} + \frac{\partial Q}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \quad (5.5)$$

και αν υπολογίζεται η ποσότητα Q πάνω σε επιφάνεια, προστίθενται και τα κάθετα διανύσματα n_k και n_m :

$$\frac{\delta Q}{\delta b_n} = \frac{\partial Q}{\partial b_n} + \frac{\partial Q}{\partial x_k} n_k \frac{\delta x_m}{\delta b_n} n_m \quad (5.6)$$

Άρα εφαρμόζοντας το θεώρημα Leibniz για διαφόριση χωρικών ολοκληρωμάτων στην εξίσωση (5.4) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = & \frac{\delta F}{\delta b_n} + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{v}_\alpha \frac{\partial R^{\tilde{v}}}{\partial b_n} d\Omega \\ & + \int_S (u_i R_i^v + q R^p + \tilde{v}_\alpha R^{\tilde{v}}) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \end{aligned} \quad (5.7)$$

όπου S το σύνολο των επιφανειών του όγκου ελέγχου. Η μόνη επιφάνεια η οποία δέχεται μορφοποιήσεις και εξαρτάται από τις μεταβλητές σχεδιασμού, είναι η επιφάνεια του σώματος, S_W . Οι υπόλοιπες επιφάνειες είναι καθορισμένες εξαρχής οπότε ο όρος $\frac{\delta x_k}{\delta b_n}$ ισούται με το μηδέν για αυτές. Συνεπώς, η εξίσωση (5.7) γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = & \frac{\delta F}{\delta b_n} + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{v}_\alpha \frac{\partial R^{\tilde{v}}}{\partial b_n} d\Omega \\ & + \int_S (u_i R_i^v + q R^p + \tilde{v}_\alpha R^{\tilde{v}}) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \end{aligned} \quad (5.8)$$

Όρος Α
Όρος Β
Όρος Γ
Όρος Δ

Όρος Ε

Η συνάρτηση-στόχος περιέχει επιφανειακά ολοκληρώματα, και μπορεί να γραφτεί ως:

$$F = \int_S F_S dS = \int_S F_{S_i} n_i dS \quad (5.9)$$

Μιας και η συνάρτηση-στόχος αφορά την οπισθέλκουσα, ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα, ο χωρικός όρος $\int_{\Omega} F_{\Omega} d\Omega$ μπορεί να παραλειφθεί από την (5.9).

Συνεπώς, με διαφορισμό ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού b_n :

$$\frac{\delta F}{\delta b_n} = \frac{\delta}{\delta b_n} \int_S F_{S_i} n_i dS = \int_S \frac{\delta F_{S_i}}{\delta b_n} n_i dS + \int_S F_{S_i} \frac{\delta n_i}{\delta b_n} dS + \int_S F_{S_i} n_i \frac{\delta(dS)}{\delta b_n} \quad (5.10)$$

όπου:

$$\int_S \frac{\delta F_{S_i}}{\delta b_n} n_i dS = \int_S \frac{\partial F_{S_i}}{\partial b_n} n_i dS + \int_S \frac{\partial F_S}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k dS \quad (5.11)$$

και εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας, σύμφωνα με τον ορισμό (5.1) της οπισθέλκουσας με ολοκλήρωμα στο στερεό όριο :

$$\frac{\partial F_{S_i}}{\partial b_n} = \frac{\partial F_{S_i}}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial b_n} + \frac{\partial F_{S_i}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial b_n} + \frac{\partial F_{S_i}}{\partial \tau_{kj}} \frac{\partial \tau_{kj}}{\partial b_n} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_n} = & \int_S \frac{\partial F_{S_i}}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial b_n} n_i dS + \int_S \frac{\partial F_{S_i}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial b_n} n_i dS + \int_S \frac{\partial F_{S_i}}{\partial \tau_{kj}} \frac{\partial \tau_{kj}}{\partial b_n} n_i dS + \int_S n_i \frac{\partial F_{S_i}}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k dS \\ & + \int_S F_{S_i} \frac{\delta n_i}{\delta b_n} dS + \int_S F_{S_i} n_i \frac{\delta(dS)}{\delta b_n} \quad (5.13) \end{aligned}$$

Ισχύει πως για τις επιφάνειες του υπολογιστικού χωρίου, οι ποσότητες $\frac{\delta x_k}{\delta b_n}$, $\frac{\delta n_i}{\delta b_n}$ και $\frac{\delta(dS)}{\delta b_n}$ μηδενίζονται μιας και οι επιφάνειες είναι αναλλοίωτες. Άρα, η τελική έκφραση του όρου $\frac{\delta F}{\delta b_n}$ είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_n} = & \int_S \frac{\partial F_{S_i}}{\partial v_k} n_i \frac{\partial v_k}{\partial b_n} dS + \int_S \frac{\partial F_{S_i}}{\partial p} n_i \frac{\partial p}{\partial b_n} dS + \int_S \frac{\partial F_{S_i}}{\partial \tau_{kj}} n_i \frac{\partial \tau_{kj}}{\partial b_n} dS + \int_{S_W} n_i \frac{\partial F_{S_i}}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k dS \\ & + \int_{S_W} F_{S_i} \frac{\delta n_i}{\delta b_n} dS + \int_{S_W} F_{S_i} n_i \frac{\delta(dS)}{\delta b_n} \quad (5.14) \end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση περιέχει τις μερικές παραγώγους των μεταβλητών της ροής ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, $\frac{\partial v}{\partial b_n}$, $\frac{\partial p}{\partial b_n}$ και $\frac{\partial \tau_{kj}}{\partial b_n}$. Εάν οι παραπάνω δεν απαλειφθούν, είναι αναγκαία η επίλυση N συστημάτων εξισώσεων, όπου N ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού. Τη λύση στο παραπάνω πρόβλημα, δίνει η συζυγής μέθοδος, η οποία μειώνει το κόστος του προβλήματος κάνοντάς το ανεξάρτητο του N .

5.2.2. Σχηματισμός των Συζυγών Εξισώσεων

Το επόμενο βήμα είναι το ανάπτυγμα των όρων $\frac{\partial R^p}{\partial b_n}$, $\frac{\partial R_i^v}{\partial b_n}$ και $\frac{\partial R^{\tilde{v}}}{\partial b_n}$ της εξίσωσης (5.8).

Μιας και η μερική παράγωγος $\frac{\partial Q}{\partial b_n}$ αφορά τη μεταβολή του Q σχετικά με την αλλαγή της γεωμετρίας, χωρίς να συνυπολογίζει την επιρροή του πεδίου της ροής, επιτρέπεται η εξής αμοιβαία μετάθεση των παραγώγων:

$$\frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial Q}{\partial b_n} \right) \quad (5.15)$$

η οποία όμως δεν ισχύει και για το ολικό διαφορικό, δηλαδή:

$$\frac{\delta}{\delta b_n} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_j} \right) \neq \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta Q}{\delta b_n} \right) \quad (5.16)$$

Συνεπώς, οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial R^p}{\partial b_n}$, $\frac{\partial R_i^v}{\partial b_n}$ και $\frac{\partial R^{\tilde{v}}}{\partial b_n}$ γίνονται:

$$\frac{\partial R^p}{\partial b_n} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_n} \right) \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} = & \frac{\partial v_j}{\partial b_n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial b_n} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + v_t) \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial v_t}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad i = 1,2,3 \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^{\tilde{v}}}{\partial b_n} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_n} \tilde{v} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v_j \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} \right) - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \tilde{v}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} \right) \right] - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right) \\ & - 2 \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} \right) + \tilde{v} \left(- \frac{\partial P}{\partial b_n} + \frac{\partial D}{\partial b_n} \right) + (-P + D) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Στην (5.16) ο τελευταίος όρος προέρχεται από τη μεταβολή της τυρβώδους συνεκτικότητας, $\frac{\partial v_t}{\partial b_n}$, για την οποία ισχύει:

$$\frac{\partial v_t}{\partial b_n} = \frac{\delta v_t}{\delta \tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} \quad (5.20)$$

Θεωρείται σταθερή μοριακή συνεκτικότητα ν .

Οπότε, με χρήση του θεωρήματος Green-Gauss, οι παρακάτω όροι αναλύονται ως:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_n} d\Omega \\ &= \int_S \left[u_i v_j n_j + (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS + \int_S u_j n_j \frac{\partial p}{\partial b_n} dS \\ & - \int_S u_i n_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial b_n} dS \\ & + \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial q}{\partial x_i} - v_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\delta v_t}{\delta \tilde{v}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} d\Omega \quad (5.21) \end{aligned}$$

Ο όρος $\frac{\delta v_t}{\delta \tilde{v}}$ υπολογίζεται ως:

$$\frac{\delta v_t}{\delta \tilde{v}} = \frac{\delta}{\delta \tilde{v}} (f_{v1} \tilde{v}) = \frac{\delta f_{v1}}{\delta \tilde{v}} \tilde{v} + f_{v1} = \frac{\tilde{v}}{\nu} \frac{\delta}{\delta \chi} \left(\frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} \right) + f_{v1} = \frac{\tilde{v}}{\nu} \frac{3c_{v1}^3 \chi^2}{(\chi^3 + c_{v1}^3)^2} + f_{v1} \quad (5.22)$$

Το ολοκλήρωμα $\int_{\Omega} \tilde{v}_{\alpha} \frac{\partial R^{\tilde{v}}}{\partial b_n} d\Omega$ της εξίσωσης χωρίζεται σε έξι επιμέρους όρους:

Όρος 1:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \tilde{v}_{\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_n} \tilde{v} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v_j \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} \right) \right] d\Omega \\
&= \int_S \tilde{v}_{\alpha} \tilde{v} n_j \frac{\partial v_j}{\partial b_n} dS - \int_{\Omega} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}_{\alpha}}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_n} d\Omega + \int_S \tilde{v}_{\alpha} v_j n_j \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} dS \\
&\quad - \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{v}_{\alpha}}{\partial x_j} v_j \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} d\Omega
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Όρος 2:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \tilde{v}_{\alpha} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \tilde{v}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} \right) \right] d\Omega \\
&= - \int_S \tilde{v}_{\alpha} \frac{1}{\sigma} (v + \tilde{v}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} \right) n_j dS + \int_S \frac{1}{\sigma} (v + \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}_{\alpha}}{\partial x_j} v_j \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} dS \\
&\quad - \int_{\Omega} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}_{\alpha}}{\partial x_j} \right] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} d\Omega
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Όπου:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} \right) n_j = \frac{\delta}{\delta b_n} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right) n_j - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \frac{\delta n_j}{\delta b_n} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x_j \partial x_k} n_j \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \tag{5.25}$$

Συνεπώς η (5.24) διαμορφώνεται ως:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \tilde{v}_{\alpha} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \tilde{v}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} \right) \right] d\Omega \\
&= \frac{1}{\sigma} \left\{ - \int_S \tilde{v}_{\alpha} (v + \tilde{v}) \frac{\delta}{\delta b_n} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} n_j \right) dS + \int_S \tilde{v}_{\alpha} (v + \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \frac{\delta n_j}{\delta b_n} dS \right. \\
&\quad + \int_S \tilde{v}_{\alpha} (v + \tilde{v}) \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x_j \partial x_k} n_j \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}_{\alpha}}{\partial x_j} \right] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} d\Omega \\
&\quad \left. + \int_S (v + \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}_{\alpha}}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} dS \right\}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Όρος 3:

$$- \frac{1}{\sigma} \int_{\Omega} \tilde{v}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right) d\Omega = \frac{1}{\sigma} \left\{ - \int_S \tilde{v}_{\alpha} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} dS + \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{v}_{\alpha}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} d\Omega \right\} \tag{5.27}$$

Όρος 4:

$$-\frac{2c_{b2}}{\sigma} \int_{\Omega} \tilde{v}_{\alpha} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} \right) d\Omega = \frac{2c_{b2}}{\sigma} \left\{ - \int_S \tilde{v}_{\alpha} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} dS + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{v}_{\alpha} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} d\Omega \right\} \quad (5.28)$$

Όρος 5 ^[14]:

$$- \int_{\Omega} \tilde{v}_{\alpha} \tilde{v} \left(-\frac{\partial P}{\partial b_n} + \frac{\partial D}{\partial b_n} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{v}_{\alpha} \tilde{v} \left(C_Y(\tilde{v}) \frac{\partial Y}{\partial b_n} + C_{\tilde{v}}(\tilde{v}, \vec{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} + C_{\Delta}(\tilde{v}, \vec{v}) \frac{\partial \Delta}{\partial b_n} \right) d\Omega \quad (5.29)$$

Οι συναρτήσεις της (3.35), $C_Y(\tilde{v})$, $C_{\tilde{v}}(\tilde{v}, \vec{v})$ και $C_{\Delta}(\tilde{v}, \vec{v})$, αναλύονται περαιτέρω:

$$C_Y(\tilde{v}) = \left(-c_{b1} - c_{w1} C(\tilde{v}) \frac{r}{\bar{Y}} \right) f_{v3} \quad (5.30)$$

$$C_{\Delta}(\tilde{v}, \vec{v}) = -\frac{2}{3} \left[c_{w1} r C(\tilde{v}) \left(\frac{1}{d} - \frac{\tilde{v}}{\kappa^2} f_{v2} \right) + c_{w1} f_w \tilde{v} - c_{b1} \frac{f_{v2}}{\kappa^2} \tilde{v} \right] \quad (5.31)$$

$$C_{\tilde{v}}(\tilde{v}, \vec{v}) = \left(-c_{b1} - c_{w1} C(\tilde{v}) \frac{r}{\bar{Y}} \right) \left(\frac{\delta f_{v3}}{\delta \tilde{v}} Y + \frac{1}{\kappa^2 \Delta^2} f_{v2} + \frac{\delta f_{v2}}{\delta \tilde{v}} \frac{\tilde{v}}{\kappa^2 \Delta^2} \right) + c_{w1} C(\tilde{v}) \frac{r}{\bar{v}} + c_{w1} \frac{f_w}{\Delta^2} \quad (5.32)$$

Και για τις παραγώγους $\frac{\delta f_{v2}}{\delta \tilde{v}} = \frac{1}{v} \frac{\delta f_{v2}}{\delta \chi}$ και $\frac{\delta f_{v3}}{\delta \tilde{v}} = \frac{1}{v} \frac{\delta f_{v3}}{\delta \chi}$ ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\frac{\delta f_{v2}}{\delta \chi} = \frac{-3}{c_{v2} \left(1 + \frac{x}{c_{v2}} \right)^4} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta f_{v3}}{\delta \chi} = & \left(f_{v1} + \chi \frac{\delta}{\delta \chi} \right) \frac{3 \left(1 + \frac{x}{c_{v2}} \right) + \left(\frac{x}{c_{v2}} \right)^2}{c_{v2} \left(1 + \frac{x}{c_{v2}} \right)^3} + \frac{(1 + \chi f_{v1}) \left(3 + 2 \frac{x}{c_{v2}} \right)}{c_{v2}^2 \left(1 + \frac{x}{c_{v2}} \right)^3} \\ & - 3(1 + \chi f_{v1}) \frac{3 \left(1 + \frac{x}{c_{v2}} \right) + \left(\frac{x}{c_{v2}} \right)^2}{c_{v2}^2 \left(1 + \frac{x}{c_{v2}} \right)^4} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Επιπλέον, για τη μεταβολή της στροβιλικότητας $\frac{\partial Y}{\partial b_n}$ ισχύει:

$$\frac{\partial Y}{\partial b_n} = \frac{1}{Y} e_{mjk} e_{mli} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) \quad (5.35)$$

Ο όρος 6 δεν δέχεται αλλαγές. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, η εξίσωση (5.8) διαμορφώνεται ως:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{\text{aug}}}{\delta b_n} = & \int_S \left[u_i v_j n_j + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \tilde{v}_\alpha \tilde{v} C_Y(\tilde{v}) \frac{1}{Y} e_{mjk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} e_{mli} n_l \right. \\ & + \left. \frac{\partial F_{S_k}}{\partial v_i} n_k \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS + \int_S \left(u_j n_j + \frac{\partial F_{S_i}}{\partial p} n_i \right) \frac{\partial p}{\partial b_n} dS \\ & + \int_S \left[\tilde{v}_\alpha v_j n_j + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial x_j} n_j - \frac{\tilde{v}_\alpha}{\sigma} (1 + 2C_{b2}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} n_j + \frac{\partial F_{S_k}}{\partial \tilde{v}} n_i \right] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} dS \\ & + \int_S \left(-u_i n_j + \frac{\partial F_{S_i}}{\partial \tau_{ij}} n_k \right) \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial b_n} dS - \int_S \tilde{v}_\alpha \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right) n_j dS \\ & + \int_{S_w} n_i \frac{\partial F_{S_i}}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k dS + \int_{S_w} F_{S_i} \frac{\delta n_i}{\delta b_n} dS + \int_{S_w} F_{S_i} n_i \frac{\delta(dS)}{\delta b_n} \\ & + \int_{S_w} (u_i R_i^v + q R^p + \tilde{v}_\alpha R^{\tilde{v}}) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_\Omega \tilde{v}_\alpha \tilde{v} C_Y(\tilde{v}) \frac{\partial Y}{\partial b_n} d\Omega \\ & + \int_\Omega R_i^u \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega + \int_\Omega R^q \frac{\partial p}{\partial b_n} d\Omega + \int_\Omega R^{\tilde{v}_\alpha} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} d\Omega \end{aligned} \quad (5.36)$$

Τα χωρικά ολοκληρώματα της παραπάνω εξίσωσης μπορούν να παραλειφθούν, μηδενίζοντας τους εξής όρους^[15]:

$$R^q = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (5.37)$$

$$R_i^u = \frac{\partial q}{\partial x_i} + u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i v_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} R^{\tilde{v}_\alpha} = & -\frac{\partial (v_j \tilde{v}_\alpha)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} + \frac{2C_{b2}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{v}_\alpha \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right) + \tilde{v}_\alpha \tilde{v} C_{\tilde{v}} \\ & + \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + (-P + D) \tilde{v}_\alpha = 0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

Αυτές δεν είναι άλλες από τις συζυγείς εξισώσεις μέσης ροής με τη διατύπωση SI^[5]. Απομένει:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{\text{aug}}}{\delta b_n} = & \int_S \left[u_i v_j n_j + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \tilde{v}_\alpha \tilde{v} C_Y(\tilde{v}) \frac{1}{\gamma} e_{mjk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} e_{mli} n_l \right. \\
& + \left. \frac{\partial F_{S_k}}{\partial v_i} n_k \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS + \int_S \left(u_j n_j + \frac{\partial F_{S_i}}{\partial p} n_i \right) \frac{\partial p}{\partial b_n} dS \\
& + \int_S \left(-u_i n_j + \frac{\partial F_{S_i}}{\partial \tau_{ij}} n_k \right) \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial b_n} dS \\
& + \int_S \left[\tilde{v}_\alpha v_j n_j + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial x_j} n_j - \frac{\tilde{v}_\alpha}{\sigma} (1 + 2C_{b2}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} n_j + \frac{\partial F_{S_k}}{\partial \tilde{v}} n_i \right] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} dS \\
& - \int_S \tilde{v}_\alpha \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right) n_j dS + \int_{S_w} n_i \frac{\partial F_{S_i}}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k dS + \int_{S_w} F_{S_i} \frac{\delta n_i}{\delta b_n} dS \\
& + \int_{S_w} F_{S_i} n_i \frac{\delta(dS)}{\delta b_n} + \int_{S_w} (u_i R_i^v + q R^p + \tilde{v}_\alpha R^{\tilde{v}}) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \\
& + \int_\Omega \tilde{v}_\alpha C_Y(\tilde{v}) \frac{\partial Y}{\partial b_n} d\Omega \tag{5.40}
\end{aligned}$$

5.2.3. Οι Συζυγείς Οριακές Συνθήκες

Η λογική πίσω από τη συζυγή μέθοδο είναι η εξάλειψη των όρων της συνάρτησης στόχου με μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Τέτοιοι όροι είναι η κλίση της ταχύτητας, της πίεσης, του ταυυστή των τάσεων και του \tilde{v} ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού ($\frac{\partial v_i}{\partial b_n}$, $\frac{\partial p}{\partial b_n}$, $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial b_n}$ και $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n}$ αντίστοιχα). Αυτό επιτυγχάνεται με μηδενισμό των συντελεστών τους μέσω των παρακάτω οριακών συνθηκών:

- **Επιφάνεια εισόδου της ροής, S_I**

Στην επιφάνεια εισόδου της ροής, S_I , εφαρμόζεται συνθήκη Dirichlet για τις συνιστώσες των ταχυτήτων, και συνθήκη Neumann μηδενικής τιμής για την πίεση. Η δε επιφάνεια είναι

καθορισμένη στο χώρο, συνεπώς $\frac{\delta x_k}{\delta b_n} = 0$, άρα και $\frac{\delta v_i}{\delta b_n} = 0$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση των όρων της $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n}$.

Ο δεύτερος και ο τρίτος όρος της (5.40) μπορεί να απαλειφθεί θέτοντας:

$$u_j n_j = u_{(n)} = -\frac{\partial F_{S_{l,i}}}{\partial p} n_i \quad (5.41)$$

$$u_{(t)}^I = \frac{\partial F_{S_{l,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_i^I n_j + \frac{\partial F_{S_{l,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_j^I n_i \quad (5.42)$$

$$u_{(t)}^{II} = \frac{\partial F_{S_{l,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_i^{II} n_j + \frac{\partial F_{S_{l,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_j^{II} n_i \quad (5.43)$$

όπου:

- t_i^I & t_i^{II} : οι συνιστώσες του εφαπτόμενου στην επιφάνεια μοναδιαίου διανύσματος.
- $u_{(t)}^I$ & $u_{(t)}^{II}$: οι συνιστώσες της συζυγούς ταχύτητας στις κατευθύνσεις t_i^I & t_i^{II} αντίστοιχα.

Εάν η συνάρτηση στόχος F δεν ορίζεται σε κάποια επιφάνεια, τότε τα στοιχεία της συζυγούς ταχύτητας έχουν μηδενική τιμή σε αυτήν την επιφάνεια. Συνεπώς, αν η οπισθέλκουσα καθορίζεται ολοκληρώνοντας κατά μήκος του περιγράμματος του στερεού σώματος, πάνω στην επιφάνεια εισόδου ισχύει ότι:

$$u_i = 0, i = 1,2$$

Και τέλος, αφού δεν προκύπτει κάποια οριακή συνθήκη από την απαλοιφή των επιφανειακών ολοκληρωμάτων, ορίζεται ως συνθήκη της συζυγούς πίεσης, q , συνθήκη Neumann μηδενικής τιμής.

Για να γίνει η (5.40) ανεξάρτητη από τον όρο $\frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} \right)$ εφαρμόζεται συνθήκη Dirichlet στη μεταβλητή \tilde{v}_α :

$$\tilde{v}_\alpha = 0$$

- **Επιφάνεια εξόδου της ροής, S_o**

Σε αυτήν την επιφάνεια, εφαρμόζεται συνθήκη Dirichlet στην πίεση, και συνθήκη Neumann μηδενικής τιμής στις συνιστώσες της ταχύτητας. Επίσης, όπως και η επιφάνεια εισόδου της ροής, και η έξοδος είναι καθορισμένη στον χώρο, συνεπώς ισχύει ότι $\frac{\delta p}{\delta b_n} = \frac{\partial p}{\partial b_n} = 0$. Συνεπώς, υφίσταται η απαλοιφή του δεύτερου όρου της εξίσωσης (5.40), και λόγω της απόστασης της εξόδου της ροής από το σώμα, η χωρική κατανομή της ταχύτητας θεωρείται ομογενής, άρα και ο τρίτος όρος της μπορεί να αμεληθεί.

Για τον μηδενισμό του πρώτου ολοκληρώματος όμως, τίθεται ο πολλαπλασιαστής της ποσότητας $\frac{\delta v_i}{\delta b_n}$ ίσος με το μηδέν:

$$u_i v_j n_j + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \tilde{v}_\alpha \tilde{v} C_Y(\tilde{v}) \frac{1}{\Gamma} e_{mjk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} e_{mli} n_l + \frac{\partial F_{S_k}}{\partial v_i} n_k = 0 \quad (5.44)$$

Σε περίπτωση 3D ροής, η (5.44) περιλαμβάνει τέσσερα άγνωστα μεγέθη, τα τρία διανύσματα της συζυγούς ταχύτητας και τη συζυγή πίεση. Συνεπώς, σε ένα από αυτά πρέπει να γίνει προεκβολή (extrapolation) από το εσωτερικό του όγκου ελέγχου, και συγκεκριμένα, επιλέγεται το κάθετο διάνυσμα της συζυγούς ταχύτητας, $u_{\langle n \rangle}$. Πολλαπλασιάζοντας την (5.44) με το κάθετο στην επιφάνεια μοναδιαίο διάνυσμα, η συζυγής πίεση μετατρέπεται σε:

$$q = u_{\langle n \rangle} v_{\langle n \rangle} + 2(v + v_t) \frac{\partial u_{\langle n \rangle}}{\partial n} + \frac{\partial F_{S_k}}{\partial v_i} n_i n_k + \tilde{v}_\alpha \tilde{v} C_Y(\tilde{v}) \frac{1}{\Gamma} e_{mjk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} e_{mli} n_l n_i = 0 \quad (5.45)$$

Τα επαπτόμενα διανύσματα της συζυγούς ταχύτητας μπορούν να υπολογιστούν έπειτα από πολλαπλασιασμό της (5.44) με τα επαπτόμενα στην επιφανειακά μοναδιαία διανύσματα t^I και t^{II} , και επίλυση της συνθήκης Robin:

$$u_{\langle t \rangle} v_n + 2(v + v_t) \left(\frac{\partial u_{\langle t \rangle}}{\partial n} + \frac{\partial u_{\langle n \rangle}}{\partial t_i^I} \right) + \frac{\partial F_{S_k}}{\partial v_i} n_k t_i^I - \tilde{v}_\alpha \tilde{v} C_Y(\tilde{v}) \frac{1}{\Gamma} e_{mjk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} e_{mli} n_z t_i^I = 0 \quad (5.46)$$

Συνθήκη Robin εφαρμόζεται στη μεταβλητή \widetilde{v}_α έπειτα από μηδενισμό του όρου $\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial b_n}$:

$$\widetilde{v}_\alpha v_j n_j + \left(\nu + \frac{\widetilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \widetilde{v}_\alpha}{\partial x_j} n_j + \frac{\partial F_{S_k}}{\partial \widetilde{v}} n_i = 0 \quad (5.47)$$

- **Μεταβαλλόμενες στερεές επιφάνειες με παραμετροποίηση(Fixed Wall), S_{WP}**

Ισχύει πως $\frac{\delta v_i}{\delta b_n} = v_i = 0$ πάνω στην επιφάνεια S_{WP} . Παρ' όλα αυτά, η γεωμετρία της είναι πιθανό να αλλάξει κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης, άρα $\frac{\delta x_k}{\delta b_n} \neq 0$.

$$\frac{\partial v_i}{\partial b_n} = - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} n_k \frac{\delta x_m}{\delta b_n} n_m \quad (5.48)$$

Συνεπώς, το πρώτο ολοκλήρωμα της (3.40) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\begin{aligned} & \int_{S_{WP}} \left[u_i v_{(n)} + (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_{S_{WP,k}}}{\partial v_i} n_k \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS \\ &= - \int_{S_{WP}} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial F_{S_{WP,k}}}{\partial v_i} n_k \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} n_k \frac{\delta x_m}{\delta b_n} n_m dS \quad (5.49) \end{aligned}$$

Μιας και το παραπάνω ολοκλήρωμα περιέχει μόνο ροϊκά και συζυγή πεδία ροής, καθώς και την μεταβολή της επιφάνειας, αυτό μπορεί να υπολογιστεί και έπειτα να προστεθεί στους υπόλοιπους όρους της έκφρασης των παραγώγων ευαισθησίας.

Το δεύτερο και το τρίτο ολοκλήρωμα μπορεί να απαλειφθεί θέτοντας:

$$u_{\langle n \rangle} = -\frac{\partial F_{S_{WP,i}}}{\partial p} n_i \quad (5.50)$$

$$u_{\langle t \rangle}^I = \frac{\partial F_{S_{WP,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_i^I n_j + \frac{\partial F_{S_{WP,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_j^I n_i \quad (5.51)$$

$$u_{\langle t \rangle}^{II} = \frac{\partial F_{S_{WP,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_i^{II} n_j + \frac{\partial F_{S_{WP,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_j^{II} n_i \quad (5.52)$$

Στη συζυγή πίεση εφαρμόζεται μηδενική συνθήκη Neumann, ενώ η μεταβλητή \widetilde{v}_α δέχεται συνθήκη Dirichlet μηδενικής τιμής.

- **Επιφάνειες ολίσθησης της ροής (άνω, κάτω, και δεξιά επιφάνεια του υπολογιστικού χωρίου)**

Στις συγκεκριμένες επιφάνειες, εφαρμόζονται οι ίδιες συνθήκες των εξισώσεων ροής όπως και στην επιφάνεια εισόδου της ροής, οπότε οι οριακές συζυγείς συνθήκες διαμορφώνονται ως:

$$u_{\langle n \rangle} = -\frac{\partial F_{S_{WP,i}}}{\partial p} n_i \quad (5.53)$$

$$u_{\langle t \rangle}^I = \frac{\partial F_{S_{WP,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_i^I n_j + \frac{\partial F_{S_{WP,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_j^I n_i \quad (5.54)$$

$$u_{\langle t \rangle}^{II} = \frac{\partial F_{S_{WP,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_i^{II} n_j + \frac{\partial F_{S_{WP,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_j^{II} n_i \quad (5.55)$$

Η μεταβλητή \widetilde{v}_α ορίζεται μέσω συνθήκης Dirichlet μηδενικής τιμής, και στη συζυγή πίεση εφαρμόζεται συνθήκη Neumann μηδενικής τιμής^[16].

5.2.4. Η Τελική Έκφραση των Παραγώγων Ευαισθησίας

Για τον υπολογισμό των μεταβλητών σχεδιασμού, b_n , μεταξύ δύο υπολογιστικών κύκλων, χρησιμοποιείται η μέθοδος της απότομης καθόδου,

$$b_n|^{new} = b_n|^{old} - \eta \frac{\delta F}{\delta b_n} \quad (5.56)$$

όπου $\frac{\delta F}{\delta b_n}$ οι παράγωγοι ευαισθησίας και “ η ” το βήμα. Με τη χρήση της SI (Surface Integral) συζυγούς μεθόδου και την ικανοποίηση των παραπάνω συνθηκών και εξισώσεων, προκύπτει η εξής έκφραση για τις παραγώγους ευαισθησίας έχοντας ως συνάρτηση-στόχο την οπισθέλκουσα υπολογισμένη στο στερεό σώμα:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \int_{S_w} \left((v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_{S_w,k}}{\partial v_i} n_i \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_n} \frac{\delta x_m}{\delta b_n} dS \\ &+ \int_{S_w} \frac{\partial F_{S_w,i}}{\partial x_m} n_i \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_w} F_{S_w,p} n_i \frac{\delta(dS)}{\delta b_n} \\ &- \int_{S_w} \left(-u_k n_k + \frac{\partial F_{S_w,k}}{\partial \tau_{lz}} n_k n_l n_z \right) \left[\tau_{ij} \frac{\delta(n_i n_j)}{\delta b_n} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_m} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_i n_j \right] dS \\ &- \int_{S_w} \frac{\partial F_{S_w,k}}{\partial \tau_{lz}} n_k t_i^l t_z^l \left[\frac{\delta(t_i^l t_j^l)}{\delta b_n} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} t_i^l t_j^l \right] dS \\ &- \int_{S_w} \left[\frac{\partial F_{S_w,k}}{\partial \tau_{lz}} n_k (t_i^{ll} t_z^l + t_i^l t_z^{ll}) \right] \left[\tau_{ij} \frac{\delta(t_i^{ll} t_j^l)}{\delta b_n} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} t_i^{ll} t_j^l \right] dS \\ &- \int_{S_w} \left(\frac{\partial F_{S_w,k}}{\partial \tau_{lz}} n_k t_i^{ll} t_z^{ll} \right) \left[\tau_{ij} \frac{\delta(t_i^{ll} t_j^{ll})}{\delta b_n} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} t_i^{ll} t_j^{ll} \right] dS \\ &= \int_{S_w} \left((v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_{S_w,k}}{\partial v_i} n_i \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_n} \frac{\delta x_m}{\delta b_n} dS \\ &+ \int_{S_w} \frac{\partial F_{S_w,i}}{\partial x_m} n_i \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_w} F_{S_w,p} n_i \frac{\delta(dS)}{\delta b_n} \end{aligned} \quad (5.57)$$

5.3. Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος με Ολοκλήρωση στο Επ' Άπειρο Όριο

Στην περίπτωση όπου η συνάρτηση-στόχος βασίζεται σε ολοκλήρωση στο επ' άπειρο όριο, χρησιμοποιείται η εξίσωση (2.8) :

$$F = \int_{S_e} ([\tau] \cdot \vec{n} - p\vec{n} - v(\vec{v} \cdot \vec{n})) \cdot \vec{r} dS$$

Αφαιρείται η άμεση επιρροή των μεταβλητών b στην συνάρτηση στόχου F , διότι πλέον η ολοκλήρωση πραγματοποιείται στις εξωτερικές επιφάνειες του υπολογιστικού χωρίου (S_e).

Οι συζυγείς εξισώσεις μέσης ροής με τη διατύπωση SI παραμένουν ίδιες, όπως περιγράφονται από την (5.40) σε προηγούμενη υπο-ενότητα. Οι αλλαγές που προκύπτουν από την εφαρμογή της εναλλακτικής διατύπωσής της οπισθέλκουσας συναντώνται στις οριακές συνθήκες οι οποίες εφαρμόζονται για τον μηδενισμό των συντελεστών των $\frac{\partial v_i}{\partial b_n}$, $\frac{\partial p}{\partial b_n}$ και $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial b_n}$, καθώς και στην τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας.

Όπως και στην υπο-ενότητα (5.2.2), στόχος είναι και πάλι η απαλοιφή των ολοκληρωμάτων:

$$A. \quad \int_S \left[u_i v_j n_j + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \tilde{v}_\alpha \tilde{v}_\gamma C_Y(\tilde{v}) \frac{1}{\gamma} e_{mjk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} e_{mli} n_l + \frac{\partial F_{S_k}}{\partial v_i} n_k \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS$$

$$B. \quad \int_S \left(u_j n_j + \frac{\partial F_{S_i}}{\partial p} n_i \right) \frac{\partial p}{\partial b_n} dS$$

$$Γ. \quad \int_S \left(-u_i n_j + \frac{\partial F_{S_i}}{\partial \tau_{ij}} n_k \right) \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial b_n} dS$$

$$Δ. \quad \int_S \left[\tilde{v}_\alpha v_j n_j + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial x_j} n_j - \frac{\tilde{v}_\alpha}{\sigma} (1 + 2C_{b2}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} n_j + \frac{\partial F_{S_k}}{\partial \tilde{v}} n_i \right] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_n} dS$$

Τα οποία περιλαμβάνονται στην εξίσωση (5.40), ώστε να μειωθεί αποτελεσματικά το κόστος υπολογισμού.

	Είσοδος*1	Έξοδος	Επιφάνεια Στερεού Σώματος
$u_{\langle n \rangle}$	$-\frac{\partial F_{S_{I,i}}}{\partial p} n_i$	Extrapolation από το εσωτερικό του πεδίου	$-\frac{\partial F_{S_{WP,i}}}{\partial p} n_i$
$u_{\langle I \rangle}$	$\frac{\partial F_{S_{I,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_i^I n_j$ $+\frac{\partial F_{S_{I,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_j^I n_i$	Προκύπτουν από εφαρμογή συνθήκης Robin στην:	$\frac{\partial F_{S_{WP,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_i^I n_j$ $+\frac{\partial F_{S_{WP,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_j^I n_i$
$u_{\langle II \rangle}$	$\frac{\partial F_{S_{I,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_i^{II} n_j$ $+\frac{\partial F_{S_{I,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_j^{II} n_i$	$u_{\langle t \rangle} v_n + 2(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_{\langle t \rangle}^I}{\partial n} + \frac{\partial u_{\langle n \rangle}}{\partial t_i^I} \right) +$ $\frac{\partial F_{S_k}}{\partial v_i} n_k t_i^I - \tilde{\nu}_\alpha \tilde{\nu} C_Y(\tilde{\nu}) \frac{1}{\gamma} e_{mjk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} e_{mli} n_z t_i^I = 0$	$\frac{\partial F_{S_{WP,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_i^{II} n_j$ $+\frac{\partial F_{S_{WP,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_j^{II} n_i$
q	Συνθήκη Neumann μηδενικής τιμής	$q = u_{\langle n \rangle} v_{\langle n \rangle} + 2(\nu + \nu_t) \frac{\partial u_{\langle n \rangle}}{\partial n} + \frac{\partial F_{S_k}}{\partial v_i} n_i n_k$ $+ \tilde{\nu}_\alpha \tilde{\nu} C_Y(\tilde{\nu}) \frac{1}{\gamma} e_{mjk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} e_{mli} n_l n_i$ $= 0$	Συνθήκη Neumann μηδενικής τιμής
$\tilde{\nu}_\alpha$	Συνθήκη Dirichlet μηδενικής τιμής	Προκύπτει από εφαρμογή συνθήκης Robin στην:	Συνθήκη Dirichlet μηδενικής τιμής
		$\tilde{\nu}_\alpha v_j n_j + \left(\nu + \frac{\tilde{\nu}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}_\alpha}{\partial x_j} n_j + \frac{\partial F_{S_k}}{\partial \tilde{\nu}} n_i = 0$	

Πίνακας 5: Οι γενικές σχέσεις των συζυγών οριακών συνθηκών παραμένουν ίδιες, καθώς ο σκοπός τους είναι η απαλοιφή των όρων A, B, Γ και Δ από την εξίσωση (5.40). Οι τιμές των μερικών παραγώγων της F όμως αλλάζουν, σύμφωνα με τον Πίνακα 6.

*1 Και λουιές επιφάνειες του υπολογιστικού χωρίου δεξιά, αριστερή, άνω και κάτω επιφάνεια)

Αν η συνάρτηση-στόχος εκφραστεί με τη διατύπωση της οπισθέλκουσας στο επ' άπειρο όριο, τότε δεν θα αφήσει συνεισφορές στις τελικές παραγώγους ευαισθησίας διότι οι όροι $\frac{\partial F_{SW,k}}{\partial v_i}$, $\frac{\partial F_{SW,i}}{\partial x_m}$ και $\frac{\partial F_{SW,k}}{\partial \tau_{lz}}$ δεν ορίζονται στις επιφάνειες του όγκου ελέγχου. Οι διαφορές μεταξύ των μερικών παραγώγων που εμφανίζονται στις οριακές συνθήκες, παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

	Μέθοδος ολοκλήρωσης στο στερεό σώμα			Μέθοδος ολοκλήρωσης στο επ' άπειρο όριο		
	Είσοδος* ¹	Έξοδος	Επιφάνεια Στερεού Σώματος	Είσοδος* ¹	Έξοδος	Επιφάνεια Στερεού Σώματος
$\frac{\partial F_{S,i}}{\partial p} n_i$	0	0	$r_i n_i$	$-r_i n_i$	$-r_i n_i$	0
$\frac{\partial F_{S,k}}{\partial v_i} n_k$	0	0	0	$-r_i v_k n_k - v_j r_j n_k \delta_{ki}$	$-r_i v_k n_k - v_j r_j n_k \delta_{ki}$	0
$\frac{\partial F_{S,i}}{\partial \tau_{l,m}} n_i$	0	0	$-r_l n_i \delta_{mi}$	$r_l n_i \delta_{mi}$	$r_l n_i \delta_{mi}$	0
$\frac{\partial F_{S,i}}{\partial x_k} n_i$	0	0	$\frac{\partial p}{\partial x_k} n_i r_i - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} n_j r_i$	0	0	0

Πίνακας 6: Ο σχηματισμός των μερικών παραγώγων της συνάρτησης-στόχου ανάλογα με την μέθοδο υπολογισμού της οπισθέλκουσας .

Σύμφωνα με την εξίσωση (5.9), η συνάρτηση-στόχος μπορεί να γραφτεί ως ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$F = \int_{S_e} F_{S_i} n_i dS$$

Και μόλις παραγωγισθεί, λαμβάνει την εξής μορφή:

$$\frac{\delta F}{\delta b_n} = \int_{S_e} \frac{\partial F_{S_i}}{\partial b_n} n_i dS + \int_{S_e} \frac{\partial F_{S_i}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_i dS + \int_{S_e} F_{S_i} \frac{\delta(n_i dS)}{\delta b_n} \quad (5.59)$$

Καθώς η επιφάνεια του επ' άπειρου ορίου δεν μεταβάλλεται εάν μεταβληθούν οι μεταβλητές σχεδιασμού, το μεσαίο και τελευταίο ολοκλήρωμα στην εξίσωση (5.59) απαλείφονται.

	Μέθοδος ολοκλήρωσης στο στερεό σώμα			Μέθοδος ολοκλήρωσης στο επ' άπειρο όριο		
	Είσοδος*1	Έξοδος	Επιφάνεια Στερεού Σώματος	Είσοδος*1	Έξοδος	Επιφάνεια Στερεού Σώματος
$u_{<n>}$	0	0	$-r_i n_i$	$r_i n_i$	Extrapolation από τον όγκο ελέγχου	0
$u_{<I>}$	0	0	$-r_i t_i^I$	$r_i t_i^I$	Συνθήκη Robin	0
$u_{<II>}$	0	0	$-r_i t_i^{II}$	$r_i t_i^{II}$	Συνθήκη Robin	0
q	Συνθήκη Neumann μηδενικής τιμής	Συνθήκη Robin	Συνθήκη Neumann μηδενικής τιμής	Συνθήκη Neumann μηδενικής τιμής	Συνθήκη Robin	Συνθήκη Neumann μηδενικής τιμής
\tilde{v}_α	0	Συνθήκη Robin	0	0	Συνθήκη Robin	0

Πίνακας 7: Με τις νέες οριακές συνθήκες, οι τιμές των παραμέτρων στις διάφορες επιφάνειες διαμορφώνονται αναλόγως.

Τελικώς, η τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας με ολοκλήρωση στο επ' άπειρον όριο θα διαμορφωθεί ως:

$$\frac{\delta F_{\text{farfield}}}{\delta b_n} = \int_{S_w} \left((v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_n} \frac{\delta x_m}{\delta b_n} dS \quad (5.60)$$

Παρατηρείται αρχικά λοιπόν πως οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις παραμένουν ίδιες και στις δύο περιπτώσεις, διότι δεν επηρεάζονται από τον τρόπο διατύπωσης της συνάρτησης-στόχου, αλλά από την αρχή διατήρησης της ορμής, την εξίσωση της συνέχειας, και το μοντέλο τύρβης, τα οποία παραμένουν ίδια.

Οπότε ενώ το φυσικό πρόβλημα παραμένει το ίδιο, αυτό που αλλάζει είναι το πρόβλημα βελτιστοποίησης, με τις αλλαγές που προκύπτουν να συναντώνται στις συζυγείς οριακές συνθήκες και στις παραγώγους ευαισθησίας. Αφαιρείται η άμεση επιρροή των μεταβλητών σχεδιασμού στη συνάρτηση, διότι πλέον η ολοκλήρωση πραγματοποιείται στο επ' άπειρον όριο

του υπολογιστικού χωρίου, και όχι στην παραμετροποιημένη επιφάνεια. Η νέα διατύπωση θα αφήσει λιγότερες συνεισφορές στις παραγώγους ευαισθησίας διότι μερικοί όροι δεν ορίζονται στις επιφάνειες του όγκου ελέγχου και εξαλείφονται.

Έτσι, η πολυπλοκότητα της έκφρασης των παραγώγων ευαισθησίας μειώνεται, επειδή εξαλείφονται οι γεωμετρικές συνεισφορές, με την απαλοιφή των όρων που περιλαμβάνουν δεύτερες χωρικές παραγώγους των τάσεων πάνω στο στερεό σώμα να μειώνει και το αριθμητικό σφάλμα.

6. Σύγκριση των Παραγώγων Ευαισθησίας σε Αεροτομή

Στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας εξετάζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού με τη διατύπωση της οπισθέλκουσας υπολογισμένη στο επ' άπειρο όριο ως συνάρτηση-στόχος. Σκοπός είναι η σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα της μεθόδου υπολογισμού της οπισθέλκουσας με ολοκλήρωση στο στερεό σώμα, ώστε να διαπιστωθεί η επίδραση των ων οριακών συνθηκών και της έκφρασης των παραγώγων ευαισθησίας. Οι παράγωγοι υπολογίζονται με την SI, E-SI και FI συζυγή μέθοδο, και με πεπερασμένες διαφορές. Συγκεκριμένα, οι πεπερασμένες διαφορές χρησιμοποιούνται ως σημείο αναφοράς, διότι θεωρούνται ιδιαίτερα ακριβείς, οπότε όσο μικρότερη είναι η απόκλιση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου από αυτές, τόσο πιο αξιόπιστα τα αποτελέσματα της εκάστοτε μεθόδου.

- Πεπερασμένες διαφορές

Η παράγωγος της συνάρτησης στόχου ως προς την n-οστή μεταβλητή σχεδιασμού υπολογίζεται ως εξής με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών με κεντρικές διαφορές:

$$\frac{\delta F}{\delta b_n} = \frac{F(b_1, \dots, b_n + \varepsilon, \dots, b_n) - F(b_1, \dots, b_n - \varepsilon, \dots, b_n)}{2\varepsilon} \quad (6.1)$$

όπου:

ε: μια πολύ μικρή σταθερά θετικής τιμής.

Πρόκειται για μια ακριβή σε κόστος μέθοδο σε ότι αφορά το υπολογιστικό κόστος, μιας και απαιτούνται δύο τιμές σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης ώστε να υπολογιστεί η παράγωγος.

- Διατύπωση με Χωρικά Ολοκληρώματα (FI διατύπωση)

Η διατύπωση εμπλέκει χωρικά ολοκληρώματα που περιέχουν την παράγωγο της μεταβολής της θέσης των κόμβων του πλέγματος, ως προς τη μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού (λ.χ. των συντεταγμένων των σημείων ελέγχου της γεωμετρίας με NURBS).

Το πλεονέκτημα της συγκεκριμένης μεθόδου είναι η επίτευξη ακρίβειας στον υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας. Λόγω της ανάγκης υπολογισμού, με πεπερασμένες διαφορές,

ποσοτήτων που αντιστοιχούν στη μετατόπιση των κόμβων του πλέγματος ως προς κάθε μεταβλητή σχεδιασμού και ανά κατεύθυνση, σε όλο το χωρίο, αυξάνεται σημαντικά το υπολογιστικό κόστος.

- «Ελλιπής» Διατύπωση με Επιφανειακά Ολοκληρώματα (SI διατύπωση)

Σε αυτήν τη διατύπωση χρησιμοποιούνται αποκλειστικά επιφανειακά ολοκληρώματα στο όριο, και συνεπώς έχει μικρότερες απαιτήσεις σε υπολογιστικό κόστος έναντι της προηγούμενης μεθόδου. Ενώ η FI αναπτύσσεται ως προς τις ολικές παραγώγους των ροϊκών μεγεθών, και λαμβάνει υπόψη την αλλαγή της γεωμετρίας εξαιτίας της μεταβολής των μεταβλητών σχεδιασμού, η SI αναπτύσσεται με χρήση των μερικών παραγώγων των ροϊκών μεγεθών, και η μετατόπιση της γεωμετρίας υπεισέρχεται στον όρο Leibniz.

Σε ό,τι αφορά τις εξισώσεις της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, οι FI και SI διατυπώσεις είναι μαθηματικά ισοδύναμες, και οδηγούν στις ίδιες συζυγείς ροϊκές εξισώσεις και οριακές συνθήκες.

Στον όρο του Leibniz εμπεριέχονται και πρώτες παράγωγοι των τάσεων, δηλαδή δεύτερες παράγωγοι της ταχύτητας πάνω στο στερεό τοίχωμα, και πάντα εισάγεται σφάλμα στον αριθμητικό υπολογισμό τους. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, ακόμα και αν συμπεριλαμβανόταν ως έχει ο όρος αυτός στην έκφραση παραγώγων με διατύπωση SI, τότε να μην ήταν σίγουρο ότι θα επιτυγχανόταν ίδια ακρίβεια υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας με τις πεπερασμένες διαφορές. Αυτές οι αμφιβολίες περί ακρίβειας υπολογισμού του όρου του Leibniz αντιμετωπίζονται, όταν αντί της διατύπωσης SI με τον όρο του Leibniz ως έχει, χρησιμοποιηθεί η διατύπωση E-SI, όπου ο όρος του Leibniz αντικαθίσταται το επιφανειακό ολοκλήρωμα μια νέας συζυγούς μεταβλητής που προκύπτει υποθέτοντας ένα Λαπλασιανό μοντέλο μετατόπισης πλέγματος^[15].

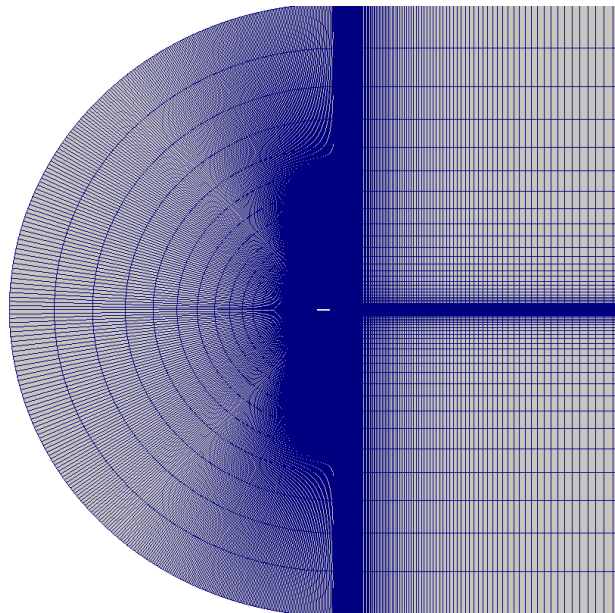
- «Πλήρης» Διατύπωση με Επιφανειακά Ολοκληρώματα (E-SI διατύπωση)

Χαρακτηρίζεται από χαμηλό υπολογιστικό κόστος, αντίστοιχα με την διατύπωση SI, διότι η παράγωγος κατά E-SI αποτελείται αποκλειστικά από επιφανειακά ολοκληρώματα, και στόχος της μεθόδου είναι η αποφυγή του υπολογισμού των παραγώγων $\frac{\delta x_k}{\delta b_n}$ στο εσωτερικό του πεδίου.

Όπως και με τη μέθοδο FI, επιτυγχάνεται υψηλή ακρίβεια στον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας η οποία οφείλεται στην αντικατάσταση του όρου του Leibniz με επιφανειακό όρο που προκύπτει από την ενσωμάτωση, στην επαυξημένη συνάρτηση, και στη συνέχεια την παραγωγή, ενός χωρικού ολοκληρώματος για τον νόμο μετατόπισης πλέγματος.

6.1. Περιγραφή των Μελετών

Ο υπολογισμός πραγματοποιήθηκε για ροή γύρω από αεροτομή παραμετροποιημένη με πολυώνυμα Bezier. Μόνο ένα κελί έχει σχηματιστεί προς την διεύθυνση z, οπότε οι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογίστηκαν για τις κατευθύνσεις x και y.



Σχήμα 15: Το πλέγμα για την μελέτη στρωτής ροής γύρω από αεροτομή NACA 0012.

Οι καμπύλες Bezier - Bernstein αποτελούν έναν τρόπο προσέγγισης μιας γεωμετρική μορφής χρησιμοποιώντας έναν περιορισμένο αριθμό σημείων ελέγχου. Η καμπύλη Bezier τάξης N που θα προκύψει από τα $N + 1$ σημεία ελέγχου ξεκινά από το πρώτο και καταλήγει στο τελευταίο σημείο της αλληλουχίας και το ζεύγος των δύο πρώτων και των δύο τελευταίων σημείων καθορίζει την κλίση της καμπύλης στο πρώτο και στο τελευταίο σημείο της. Τα πολυώνυμα

Bezier δημιουργούνται με βάση τον αλγόριθμο de Casteljau. Κάθε σημείο \vec{r}_N της καμπύλης Bezier εκφράζεται με μητρική μορφή ως:

$$\vec{r}_N(t) = \sum_{i=0}^N \vec{r}_i C_i(t) \quad (6.2)$$

συνεπώς

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=0}^N x_i C_i(t) \\ y(t) &= \sum_{i=0}^N y_i C_i(t) \\ z(t) &= \sum_{i=0}^N z_i C_i(t) \end{aligned} \quad (6.3)$$

όπου

$$\begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \\ \vdots \\ C_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} & \dots & m_{0,N} \\ m_{1,0} & m_{1,1} & \dots & m_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{N,0} & m_{N,1} & \dots & m_{N,N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^0 \\ t^1 \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$m_{i,j} = (-1)^{j-1} \binom{N}{j} \binom{j}{i} \quad (6.5)$$

Οι όροι $\binom{N}{j}$ και $\binom{j}{i}$ αναπτύσσονται σύμφωνα με την σχέση:

$$\binom{a}{i} = \frac{a!}{i! (a-i)!} \quad (6.6)$$

Κάθε σημείο της καμπύλης Bezier αντιστοιχεί σε μία τιμή της παραμέτρου t , και ανήκει στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$. Στην τιμή $t = 0$ αντιστοιχεί το πρώτο σημείο ελέγχου και αντίστοιχα στην τιμή $t = 1$ το τελευταίο σημείο ελέγχου της καμπύλης. Τα σημεία ελέγχου μιας καμπύλης Bezier λειτουργούν ως πόλοι έλξης της καμπύλης. Μετακινώντας ένα οποιοδήποτε σημείο ελέγχου υπάρχει επίδραση σε ολόκληρη την καμπύλη ενώ η τάση είναι, η καμπύλη να μετακινείται (κυρίως τοπικά) προς τη νέα θέση του σημείου ελέγχου που μετακινήθηκε.

6.2. Στρωτή Ροή Γύρω από Αεροτομή

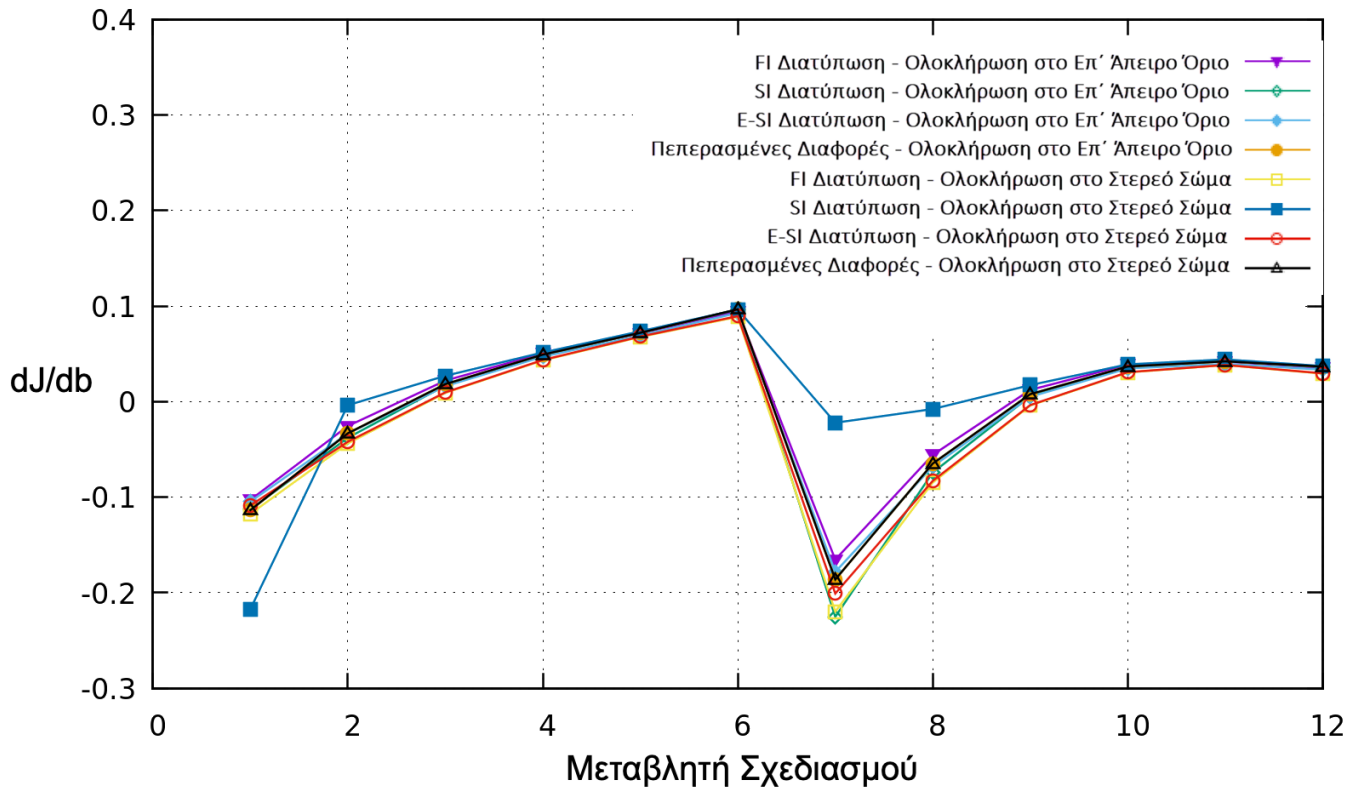
Η πρώτη μελέτη των παραγώγων ευαισθησίας αφορά διδιάστατη, στρωτή, και ασυμπιεστη ροή γύρω από αεροτομή. Ο αριθμός Reynolds της ροής ισούται με 1000, και η ροή εισέρχεται στο υπολογιστικό χωρίο με κλίση 2° . Οι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογίζονται και συγκρίνονται σε δώδεκα σημεία ελέγχου. Το πρώτο και τελευταίο σημείο κάθε καμπύλης δεν λαμβάνεται υπόψη καθώς παραμένουν ακίνητα κατά τη βελτιστοποίηση.

Χρησιμοποιούνται και οι τρεις συζυγείς διατυπώσεις, SI, E-SI και FI, παρόλα αυτά, πρέπει να σημειωθεί πως σκοπός αυτής της επιλογής δεν είναι η σύγκριση μεταξύ τους. Η ύπαρξη τους βοηθά στη δημιουργία ενός πιο σφαιρικού συμπεράσματος σχετικά με την επιρροή της μελετούμενης μεθόδου στην εγκυρότητα των παραγώγων ευαισθησίας, ανεξάρτητα από το πως αυτές προκύπτουν.

Η οπισθέλκουσα υπολογίζεται και με τις δύο διατυπώσεις, και προκύπτει ισοδυναμία:

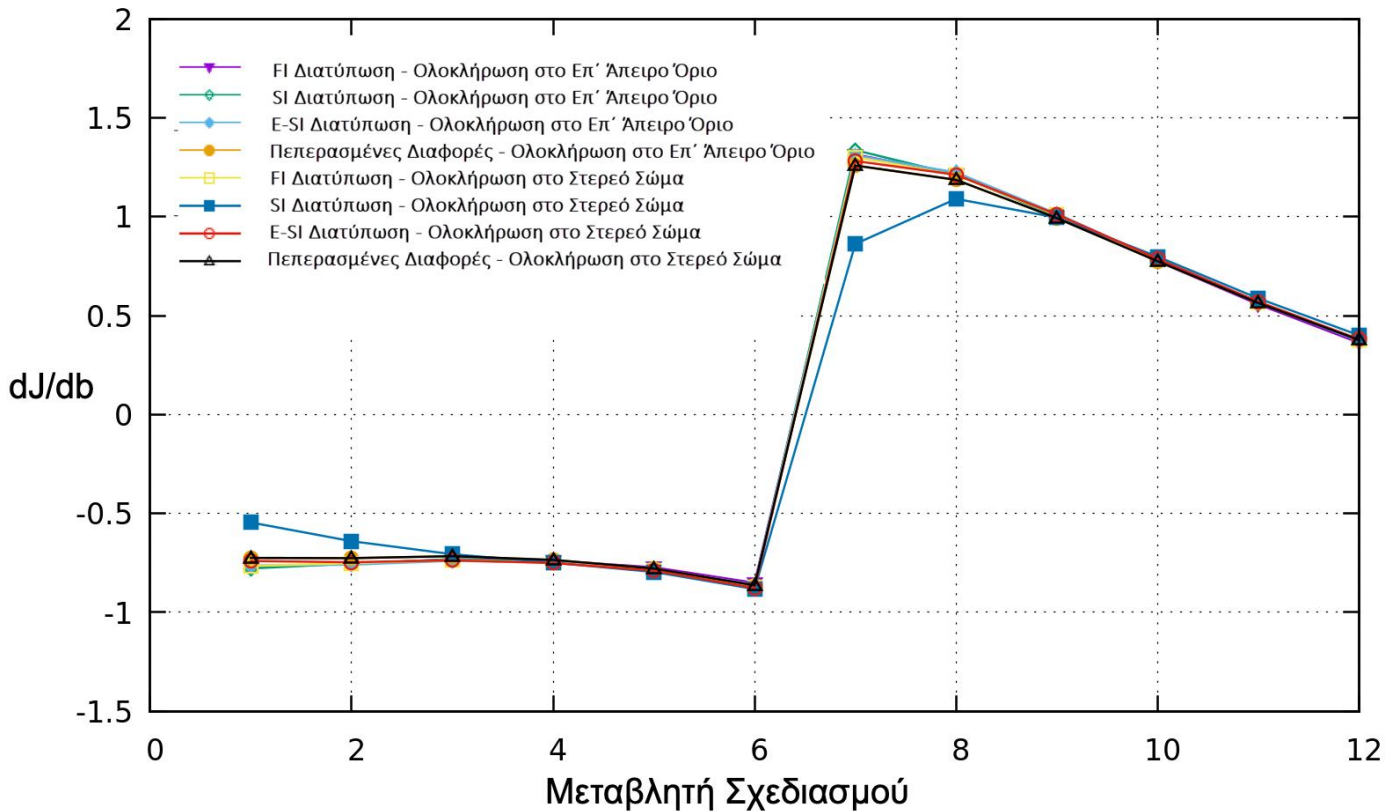
$$Drag_{FF} = Drag_{NF} = 2.1704 \text{ N}$$

Παρακάτω εμφανίζονται τα διαγράμματα που περιλαμβάνουν τις τιμές των παραγώγων ευαισθησίας ως προς τις x και y συντεταγμένες των καμπύλων Bezier:



Σχήμα 16: Σύγκριση των παραγώγων των συναρτήσεων-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού της αεροτομής, υπολογισμένων με την FI, SI και E-SI συζυγή διατύπωση και με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Παρουσιάζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας ως προς τις x συντεταγμένες των καμπύλων Bezier.

Παρατηρείται μικρή απόκλιση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου από τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, καθώς και μεταξύ των δύο προσεγγίσεων για τη συνάρτηση-στόχο, και ομοίως διαμορφώνεται το αντίστοιχο γράφημα ως προς τον y άξονα:



Σχήμα 17: Σύγκριση των παραγώγων των συναρτήσεων-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού της αεροτομής, υπολογισμένων με την FI, SI και E-SI συζυγή διατύπωση και με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Παρουσιάζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας ως προς τις γ συντεταγμένες των καμπύλων Bezier.

Μετά τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας με τη συνεχή συζυγή μέθοδο, ελέγχθηκαν οι αποκλίσεις των αποτελεσμάτων με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, αλλά και με τα αντίστοιχα της μεθόδου ολοκλήρωσης στο στερεό σώμα. Τα αποτελέσματα των πεπερασμένων διαφορών θεωρούνται αξιόπιστα, οπότε όσο πιο κοντά τους βρεθούν οι υπολογισμοί με τη μέθοδο ολοκλήρωσης στο επ' άπειρο όριο, τόσο μικρότερο το σφάλμα. Στον παρακάτω πίνακα έχουν καταγραφεί αναλυτικά τα αποτελέσματα για καθένα εκ των σημείων ελέγχου, κατά τον άξονα x και y . Έπειτα από έναν κύκλο η οπισθέλκουσα που προέκυψε παρέμεινε σταθερή για κάθε μια από τις μεθόδους που δοκιμάστηκαν για την εύρεση των παραγώγων.

# Σημείου Ελέγχου	Μέθοδος ολοκλήρωσης στο επ' άπειρο όριο				Μέθοδος ολοκλήρωσης στο στερεό σώμα			
	FI	SI	E-SI	Πεπερασμένες Διαφορές	FI	SI	E-SI	Πεπερασμένες Διαφορές
1	-0.10274	-0.11269	-0.10459	-0.11351	-0.11745	-0.21716	-0.10858	-0.11346
2	-0.02551	-0.03788	-0.03332	-0.03314	-0.0438	-0.00371	-0.04197	-0.03314
3	0.022003	0.016833	0.016219	0.018349	0.009175	0.027071	0.009716	0.01835
4	0.050609	0.04889	0.047087	0.04923	0.043169	0.051417	0.043674	0.049231
5	0.071466	0.072189	0.069265	0.072006	0.067673	0.073591	0.068181	0.072005
6	0.094663	0.096354	0.092876	0.096656	0.088713	0.09647	0.08955	0.096656
7	-0.16534	-0.22519	-0.17819	-0.1861	-0.21966	-0.02205	-0.2008	-0.1861
8	-0.05572	-0.07422	-0.06777	-0.06486	-0.08468	-0.00776	-0.08288	-0.06486
9	0.01227	0.005665	0.005082	0.007857	-0.00403	0.017328	-0.00364	0.007855
10	0.038739	0.036396	0.034762	0.036759	0.030537	0.038998	0.030813	0.036759
11	0.041865	0.042321	0.039518	0.042146	0.038222	0.04415	0.038419	0.042145
12	0.035161	0.036123	0.033453	0.036721	0.029298	0.037205	0.029594	0.036721

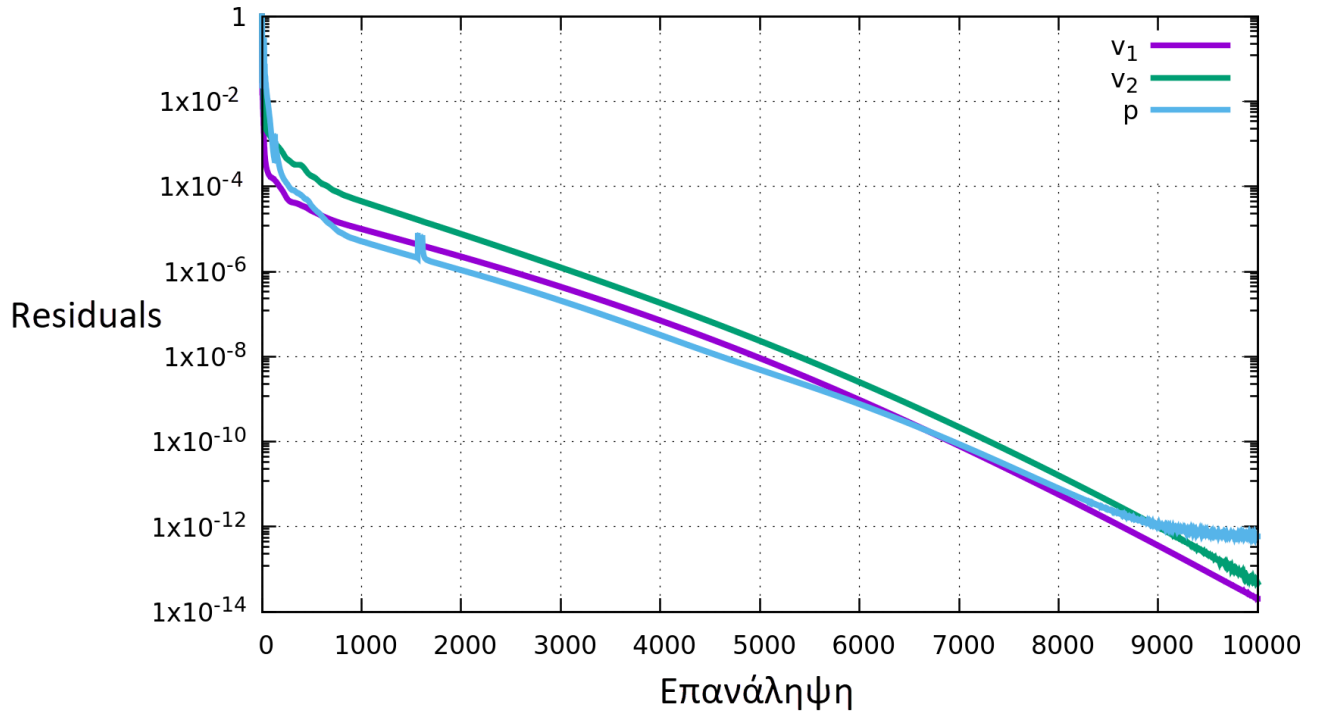
Πίνακας 8: Καταγραφή των αποτελεσμάτων των παραγώγων ευαισθησίας ως προς τις x συντεταγμένες των καμπύλων Bezier.

# Σημείου Ελέγχου	Μέθοδος ολοκλήρωσης στο επ' άπειρο όριο				Μέθοδος ολοκλήρωσης στο στερεό σώμα			
	FI	SI	E-SI	Πεπερασμένες Διαφορές	FI	SI	E-SI	Πεπερασμένες Διαφορές
1	-0.76982	-0.77793	-0.76241	-0.72441	-0.76528	-0.54563	-0.74049	-0.72441
2	-0.75404	-0.75299	-0.75869	-0.72585	-0.75095	-0.64007	-0.74664	-0.72585
3	-0.73056	-0.73148	-0.73914	-0.71583	-0.73591	-0.70589	-0.73714	-0.71583
4	-0.73782	-0.74496	-0.74733	-0.73491	-0.74851	-0.74839	-0.75027	-0.73491
5	-0.77207	-0.7844	-0.78155	-0.77805	-0.78714	-0.7956	-0.78873	-0.77805
6	-0.85054	-0.86618	-0.85862	-0.86297	-0.87473	-0.88196	-0.87629	-0.86297
7	1.31458	1.33625	1.30979	1.25885	1.30104	0.862654	1.28192	1.25885
8	1.21497	1.2121	1.2241	1.18676	1.2109	1.09049	1.21243	1.18676
9	1.00316	1.00282	1.01515	0.992907	1.00846	0.995977	1.01199	0.992908
10	0.774857	0.779558	0.786725	0.775073	0.784403	0.798342	0.786928	0.775074
11	0.557027	0.565471	0.568063	0.563708	0.569407	0.587498	0.571319	0.563707
12	0.363262	0.374338	0.372161	0.376774	0.379668	0.400505	0.380751	0.376774

Πίνακας 9: Καταγραφή των αποτελεσμάτων των παραγώγων ευαισθησίας ως προς τις y συντεταγμένες των καμπύλων Bezier.

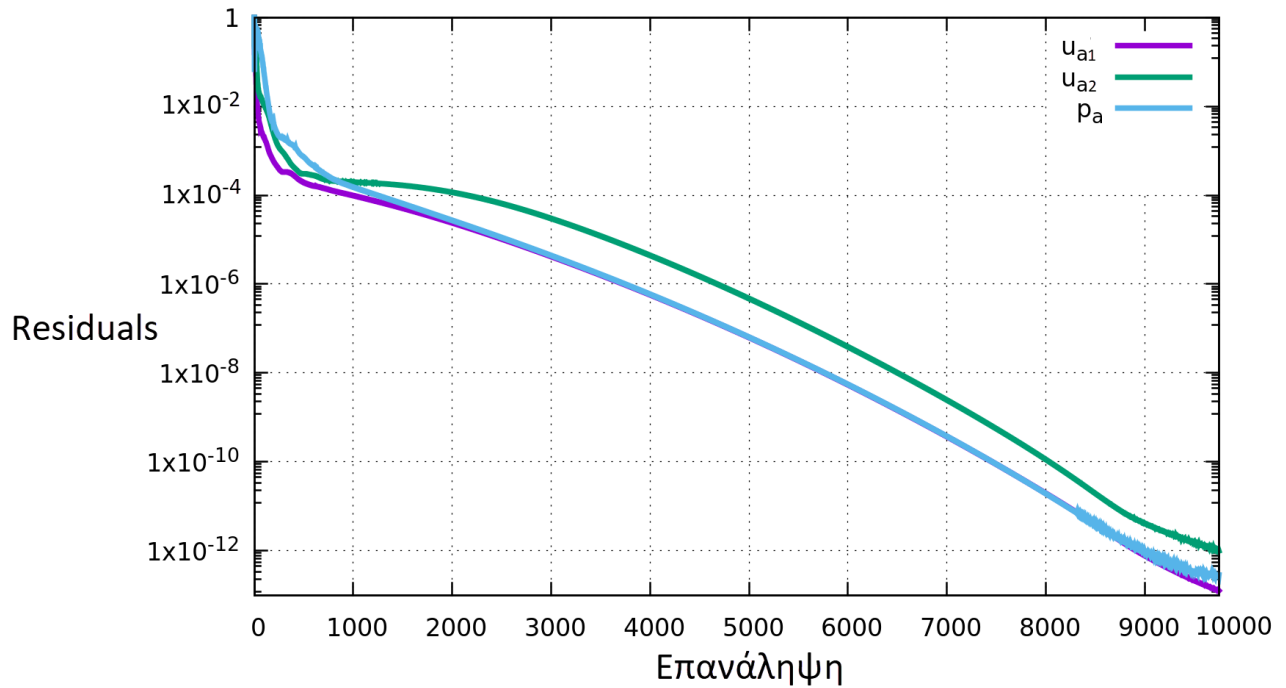
Οι αποκλίσεις είναι σχεδόν αμελητέες μεταξύ τους, αξίζει όμως να σημειωθεί πως η μικρότερη απόκλιση των συνεχών συζυγών μεθόδων από τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών προκύπτει με τη νέα διατύπωση της συνάρτησης στόχου. Γεγονός που πιθανόν να οφείλεται στην ανεξαρτητοποίησή της από την επιφάνεια του στερεού σώματος.

Τα αποτελέσματα λαμβάνονται έπειτα από καλή σύγκλιση των ποσοτήτων:



Σχήμα 18: Λογαριθμικό διάγραμμα σύγκλισης των ροϊκών ποσοτήτων v_1 , v_2 και ρ για την προσομοίωση αεροτομής με χρήση της μεθόδου ολοκλήρωσης στο επ'άπειρο όριο.

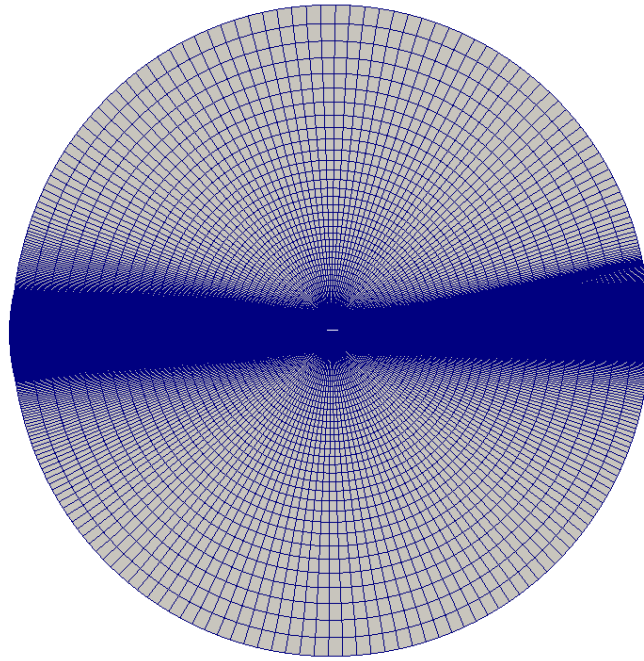
Παρομοίως για τις συζυγείς εξισώσεις:



Σχήμα 19: Λογαριθμικό διάγραμμα σύγκλισης των συζυγών ποσοτήτων u_{a1} , u_{a2} και ρ_a για την προσομοίωση αεροτομής με χρήση της μεθόδου ολοκλήρωσης στο επ'άπειρο όριο.

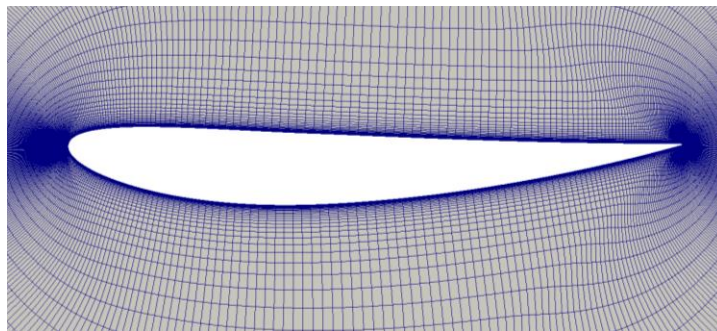
6.3. Τυρβώδης Ροή Γύρω από Αεροτομή

Η μελέτη επεκτείνεται και στην τυρβώδη ροή, όπου για αριθμό Reynolds 100000 υπολογίζονται και συγκρίνονται ξανά οι παράγωγοι ευαισθησίας. Χρησιμοποιούνται καμπύλες Bezier με 11 σημεία η καθεμία, εκ των οποίων το πρώτο και τελευταίο πάλι δεν λαμβάνονται υπόψη:



Σχήμα 20: Για την νέα προσομοίωση χρησιμοποιείται πλέγμα τύπου O.

Αυτή τη φορά προσομοιώνεται αεροτομή NACA 4412

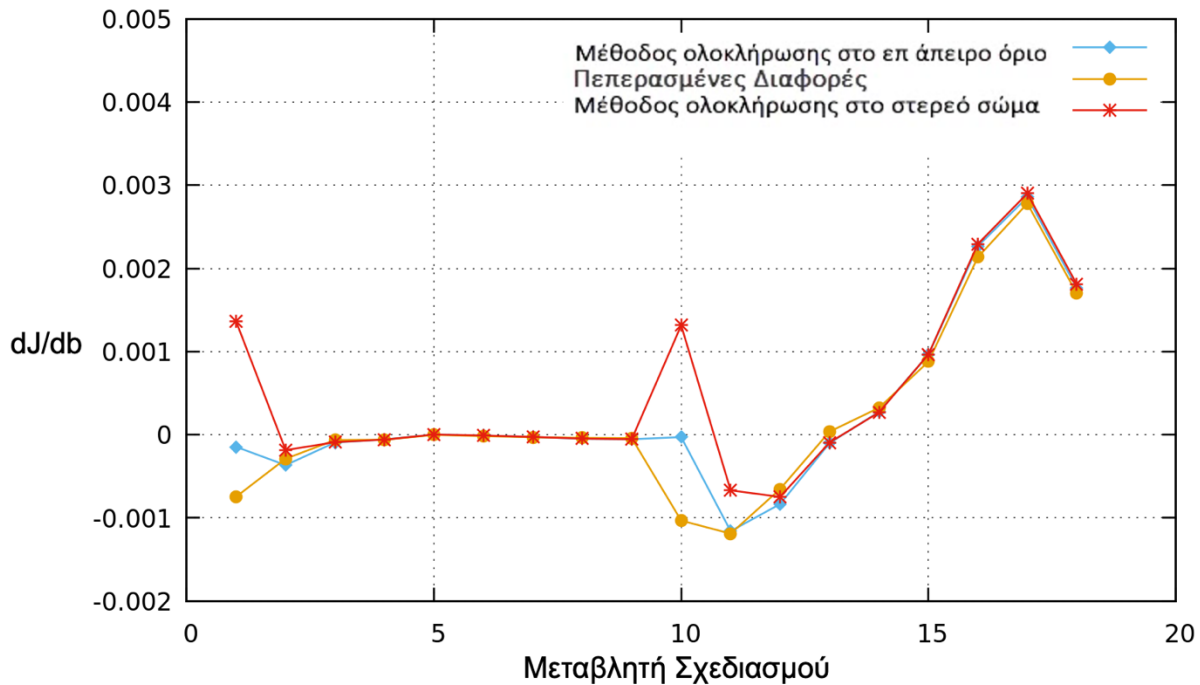


Σχήμα 21: Όπως περιγράφεται και στην Ενότητα 4, ο κωδικός 4412 αντιστοιχεί σε μια αεροτομή με 4% καμπυλότητα, 40% απόσταση από το σημείο πρόσπτωσης της μέγιστης καμπυλότητας, και 12% ποσοστό επί τοις χρησιμοποιούμενης χορδής ως μέγιστο πάχος του προφίλ.

Η οπισθέλκουσα υπολογίζεται και με τις δύο διατυπώσεις, και προκύπτει ταύτιση στα αποτελέσματα:

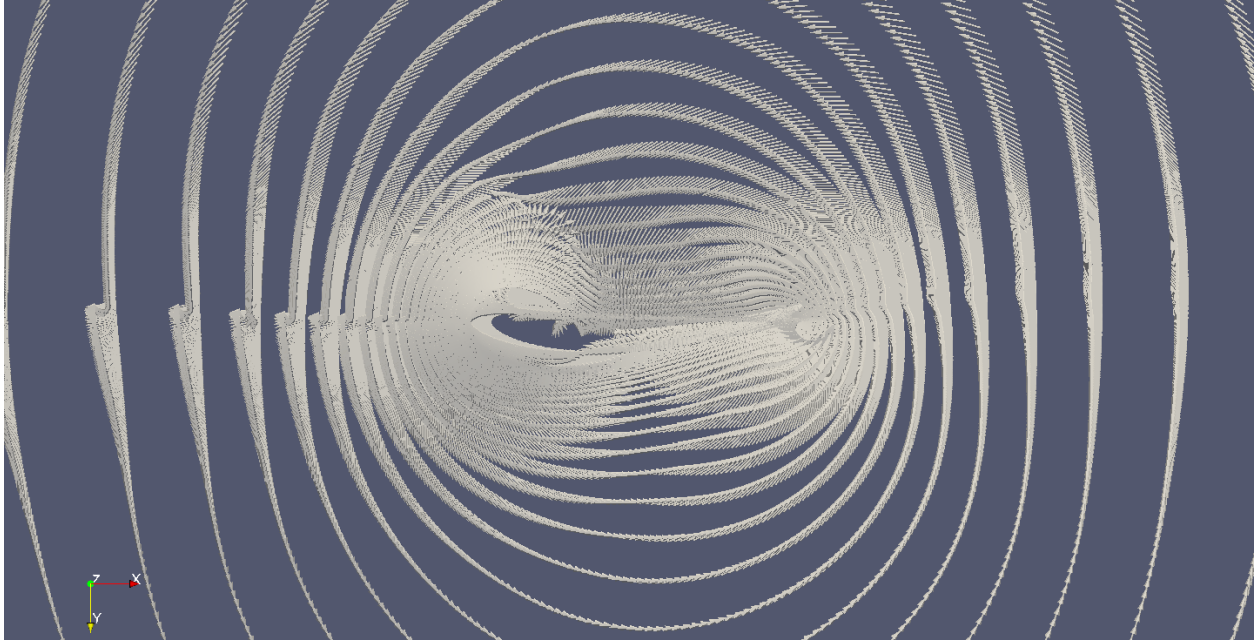
$$Drag_{FF} = Drag_{NF} = 0.00914511 \text{ N}$$

Όπως και προηγουμένως, οι παράγωγοι ευαισθησίας διατυπώνονται σε ένα γράφημα:

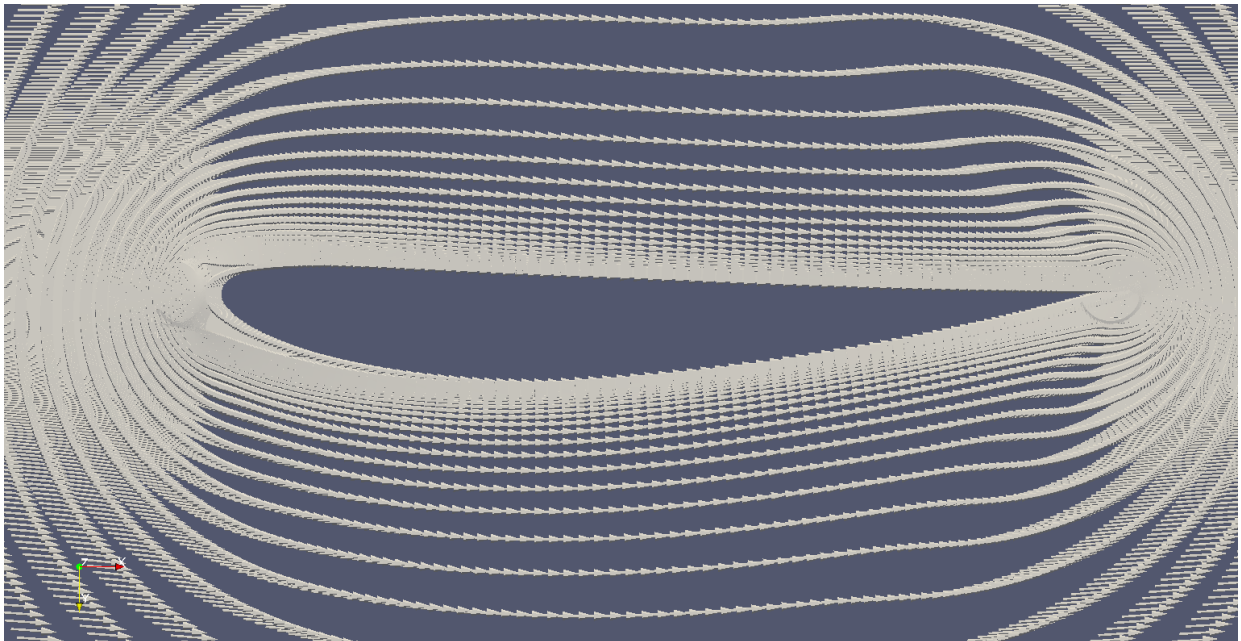


Σχήμα 22: Με χρήση της SI διατύπωσης παρουσιάζεται κατά πόσο οι δύο μέθοδοι προσεγγίζουν τις τιμές αναφοράς που προκύπτουν από την χρήση πεπερασμένων διαφορών.

Μια ιδιαίτερη εικόνα δημιουργείται κατά την οπτικοποίηση των διανυσμάτων ταχύτητας, όπου είναι εμφανής η επίδραση των διαφορετικών συζυγών οριακών συνθηκών. Όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 5.3., με τη συνεχή συζυγή μέθοδο πραγματοποιείται η εξάλειψη των όρων της συνάρτησης στόχου με μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Τέτοιοι όροι είναι η κλίση της ταχύτητας, της πίεσης, και του τανυστή των τάσεων ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού ($\frac{\partial v_i}{\partial b_n}$, $\frac{\partial p}{\partial b_n}$ και $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial b_n}$ αντίστοιχα). Αυτό επιτυγχάνεται με μηδενισμό των συντελεστών τους μέσω των οριακών συνθηκών. Καθώς οι δύο διατυπώσεις ορίζονται σε διαφορετικές επιφάνειες, οι οριακές συνθήκες, αλλά και οι παράγωγοι ευαισθησίας διαφέρουν, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 7. Ενδεικτικά είναι τα παρακάτω σχήματα τα οποία απεικονίζουν τα διανύσματα της ταχύτητας για κάθε περίπτωση.

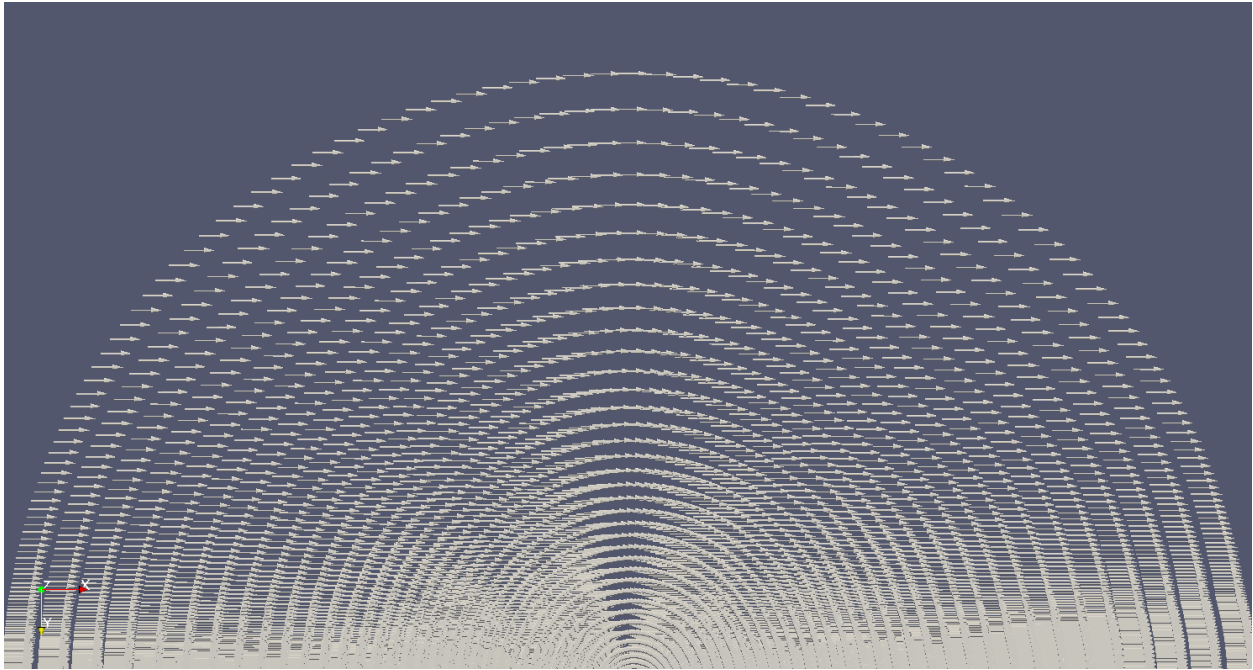


Σχήμα 23: Στη μέθοδο ολοκλήρωσης στο στερεό σώμα η συζυγής ταχύτητα πάνω στο στερεό όριο μηδενίζεται δημιουργώντας



Σχήμα 24: Η χρήση της μεθόδου ολοκλήρωσης στο επ'άπειρο όριο συνεπάγεται στο να μην ορίζεται η συνάρτηση στόχος πάνω στην επιφάνεια της αεροτομής, και συνεπώς οι παράμετροι μηδενίζονται.

Στην περίπτωση της εφαρμογής της μελετούμενης μεθόδου λοιπόν, παρατηρείται ο μηδενισμός της συζυγούς ταχύτητας στα όρια της αεροτομής, όμως στο επ'άπειρο όριο η συζυγής ταχύτητα αναπτύσσεται χωρίς να εφαρμόζεται συνθήκη μηδενισμού:



Σχήμα 25: Η ροή της συζυγούς ταχύτητας διαφέρει μεταξύ των μεθόδων και στο επ'άπειρο όριο, λόγω των περιορισμών από τις οριακές συνθήκες.

Το ίδιο φαινόμενο παρατηρείται και με τα πεδία της συζυγούς ταχύτητας στο Παράρτημα.

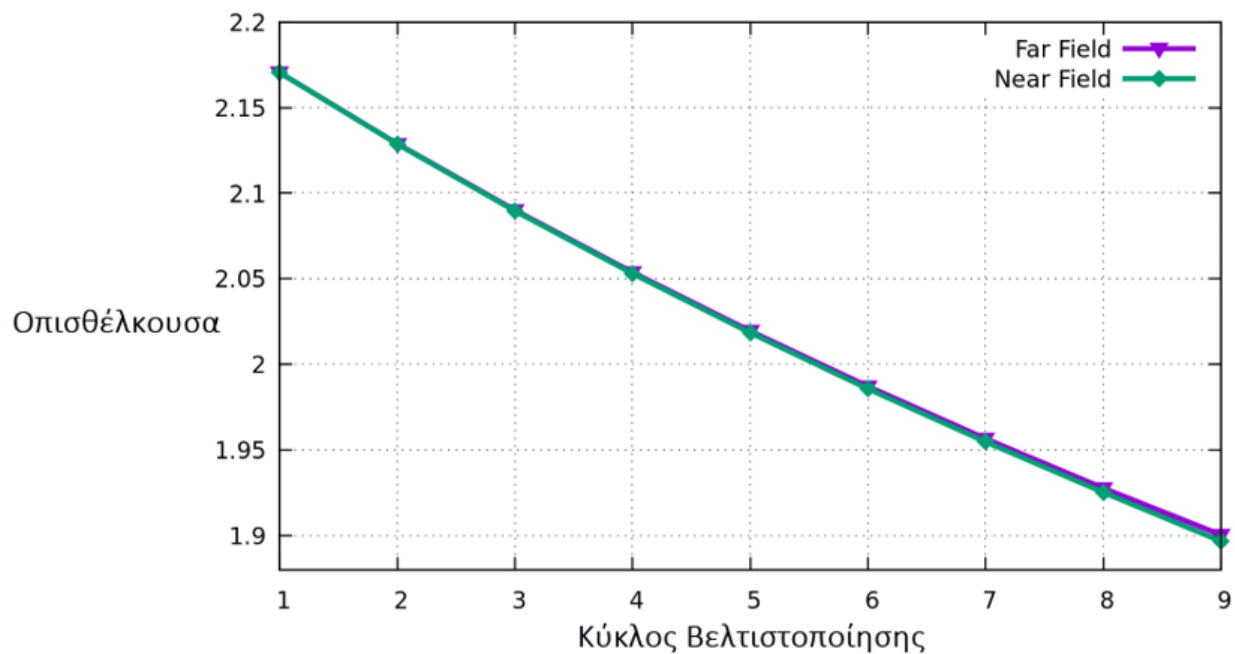
7. Εφαρμογή της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου σε Αεροτομή

Σε αυτήν την ενότητα διερευνάται η ανεξαρτησία της αποτελεσματικότητας της μεθόδου ολοκλήρωσης στο επ' άπειρο όριο από τις συνθήκες ροής και τη μορφή της αεροτομής, με μια σειρά δοκιμών. Οι μελέτες πραγματοποιούνται και με τις δύο διατυπώσεις, ώστε να προσδιορισθεί η μεταξύ τους συμφωνία. Για τον υπολογισμό των μεταβλητών σχεδιασμού, b_n , μεταξύ δύο υπολογιστικών κύκλων, χρησιμοποιείται η μέθοδος της απότομης καθόδου.

7.1. Στρωτή Ροή Γύρω από Αεροτομή

Σε συνέχεια της προηγούμενης μελέτης με την αεροτομή NACA 0012, πραγματοποιούνται εννιά κύκλοι βελτιστοποίησης μορφής με τη συζυγή συνεχή μέθοδο και παραμετροποίηση με πολυώνυμα Bezier-Bernstein.

Η μέθοδος ολοκλήρωσης στα όρια του υπολογιστικού χωρίου φέρει σχετική διαφορά 0.198% από την μέθοδο ολοκλήρωσης στην επιφάνεια της αεροτομής.

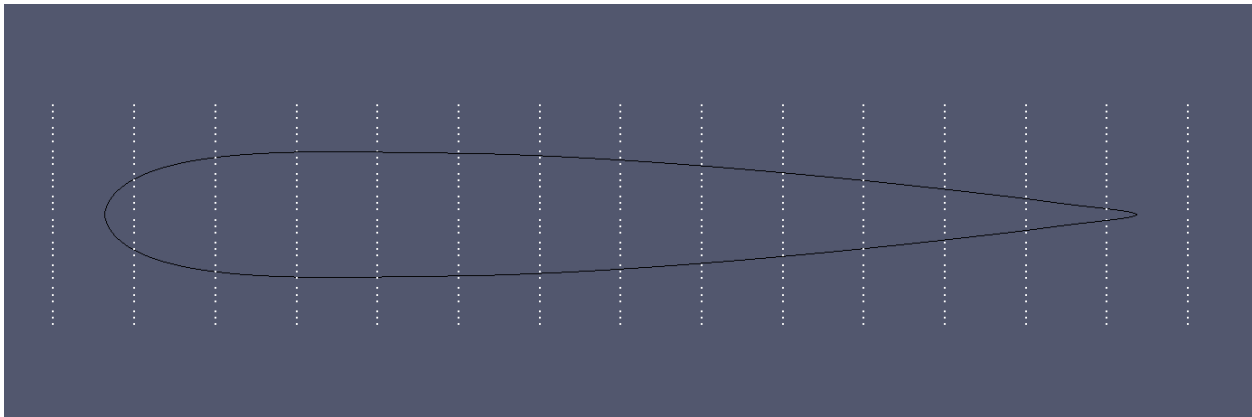


Σχήμα 26: Η διαφορά στη οπισθέλκουσα μεταξύ των 2 μεθόδων έπειτα από 9 κύκλους βελτιστοποίησης είναι αμελητέα.

7.2. Τυρβώδης Ροή Γύρω από Αεροτομή

Σε αντίθεση με την Ενότητα 6.1., τα υπολογιστικά χωρία που χρησιμοποιήθηκαν δεν έχουν έτοιμο παραμετροποιημένο πλέγμα, αλλά δημιουργήθηκαν με τη διαδικασία που περιγράφεται στη Ενότητα 4.3. Το ίδιο πλέγμα χρησιμοποιήθηκε, αλλά για την μοντελοποίηση διδιάστατης γεωμετρίας, μόνο μια κυψέλη προστέθηκε στην κατεύθυνση y .

Ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας με τη συνεχή συζυγή μέθοδο FI, και η βελτιστοποίηση μορφής με ογκομετρικές καμπύλες B-Splines. Στην Ενότητα 6 χρησιμοποιήθηκαν οι καμπύλες Bezier, διότι τα πλέγματα και η παραμετροποιήσεις ήταν ήδη έτοιμες.



Σχήμα 27: Η τοποθέτηση σημείων γύρω από την αεροτομή NACA 0012.

7.2.1. Βελτιστοποίηση Μορφής με Ογκομετρικές Καμπύλες B-Splines

Η βελτιστοποίηση μορφής με ογκομετρικές καμπύλες B-Splines αποτελεί μια τεχνική αριθμητικής προσέγγισης καμπυλών και επιφανειών, κατά την οποία το μελετούμενο αεροδυναμικό σώμα μορφοποιείται ταυτόχρονα με τα σημεία του υπολογιστικού πλέγματος που έχουν παραμετροποιηθεί.

Έστω b_m^{ijk} οι καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων ελέγχου του υπολογιστικού πλέγματος. Για τη χρήση ογκομετρικών καμπύλων B-Splines, οι καρτεσιανές συντεταγμένες $x = [x, y, z]^T$ ορίζονται ως:

$$x_m(v_1, v_2, v_3) = U_{i,pv_1}(v_1)V_{p,v_2}(v_2)W_{p,v_3}(v_3)b_m^{ijk} \quad (7.1)$$

Όπου:

- U, V, W : οι συναρτήσεις βάσης.
- pv_1, pv_2, pv_3 : οι βαθμοί των U, V και W αντίστοιχα.
- $v = [v_1, v_2, v_3]^T$: οι παραμετρικές συντεταγμένες του εκάστοτε σημείου του υπολογιστικού πλέγματος.

Εφόσον είναι γνωστές οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου, των διανυσμάτων κόμβων και οι βαθμοί των συναρτήσεων βάσης, για ένα σημείο $r = [x_r, y_r, z_r]^T$ οι παραμετρικές συντεταγμένες ενός σημείου υπολογίζονται έπειτα από επίλυση του ακόλουθου συστήματος:

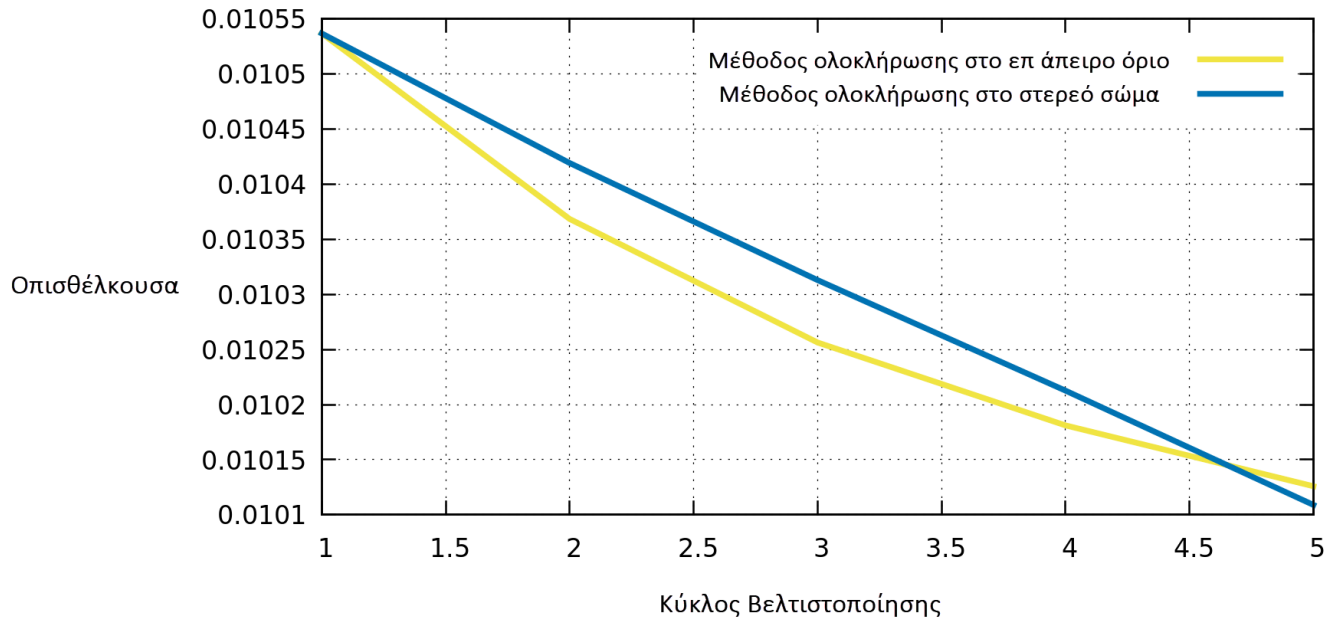
$$R(v_1, v_2, v_3) = \begin{bmatrix} x(v_1, v_2, v_3) - x_r = 0 \\ y(v_1, v_2, v_3) - y_r = 0 \\ z(v_1, v_2, v_3) - z_r = 0 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

Οι τιμές των $x_m(v_1, v_2, v_3)$ προέρχονται από την (7.1), με δεδομένες τις τιμές των b_m^{ijk} . Υπολογίζεται το Ιακωβιανό μητρώο $\frac{\partial x_m}{\partial v_j}$, αντιστρέφεται, και έπειτα, με την χρήση της μεθόδου Newton-Raphson, επιλύεται το 3×3 σύστημα της (7.2) για κάθε σημείο του υπολογιστικού πλέγματος, με διαφόριση της (7.1) ως προς τις συνιστώσες (v_1, v_2, v_3) .

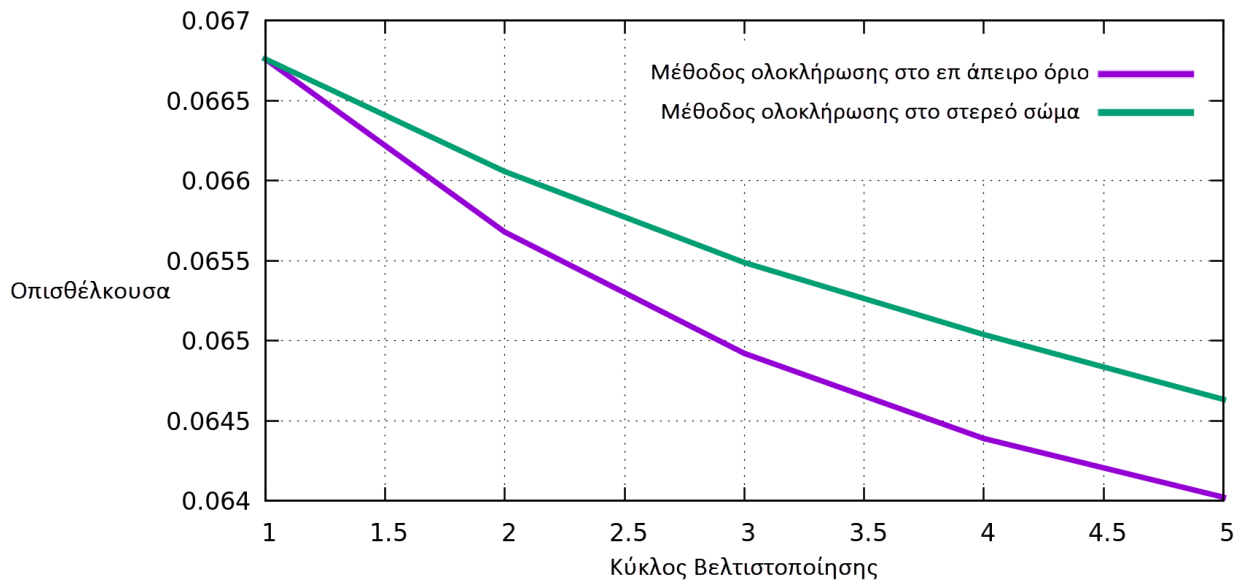
Έπειτα από την μετακίνηση των σημείων ελέγχου, και με δεδομένο τις ίδιες τιμές των παραμετρικών συντεταγμένων, οι καρτεσιανές συντεταγμένες x_m κάθε σημείου του πλέγματος υπολογίζονται από την (7.1). Με βάση την εξίσωση (7.1), με δεδομένες τις παραμετρικές συντεταγμένες, v , οι καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων του πλέγματος, x_m , είναι γραμμική συνάρτηση των σημείων ελέγχου. Αυτό είναι ένα μεγάλο πλεονέκτημα της παραμετροποίησης με ογκομετρικές B-splines, καθώς η ποιότητα πλέγματος είναι η ίδια.

7.2.2. Παραμετρική Μελέτη Ταχύτητας

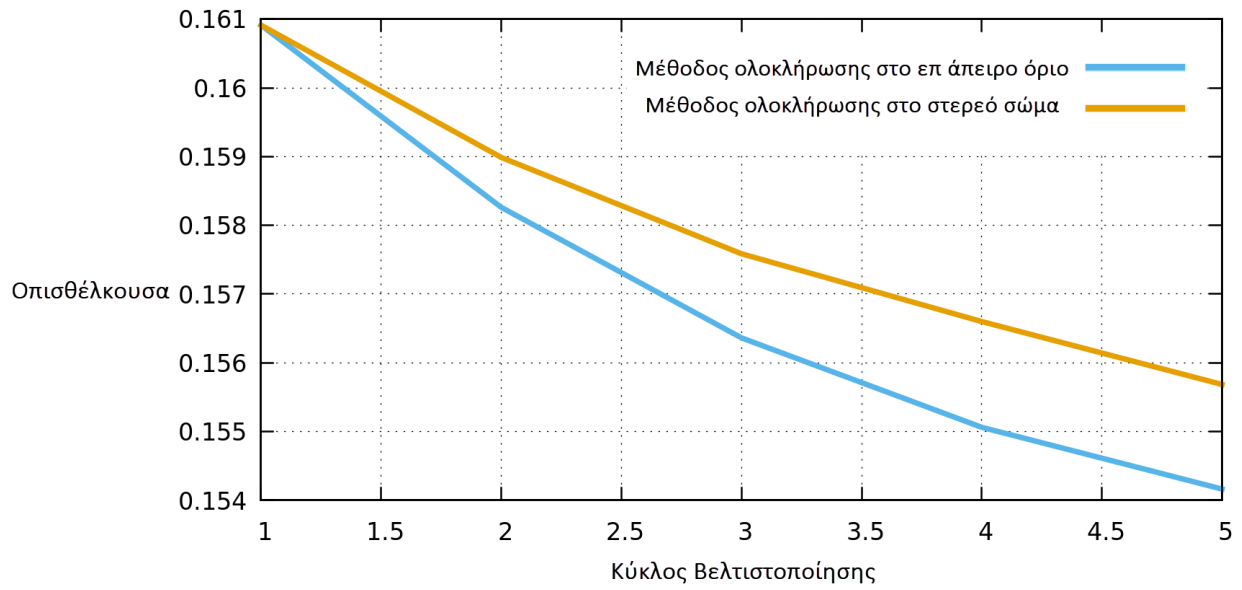
Ολοκληρώνονται πέντε κύκλοι βελτιστοποίησης γύρω από αεροτομή NACA 0012, με καρτεσιανό υπολογιστικό χωρίο, δημιουργημένο με το snappyHexMesh, για τυρβώδη ροή με τέσσερις περιπτώσεις διαφορετικών τιμών ταχύτητας εισόδου, 6, 8, 10 και $20 \frac{m}{sec}$. Στόχος είναι η παρακολούθηση και σύγκριση της μείωσης της οπισθέλκουσας μεταξύ των δύο διατυπώσεων συνάρτησης-στόχου, για διαφορετικούς αριθμούς Reynolds.



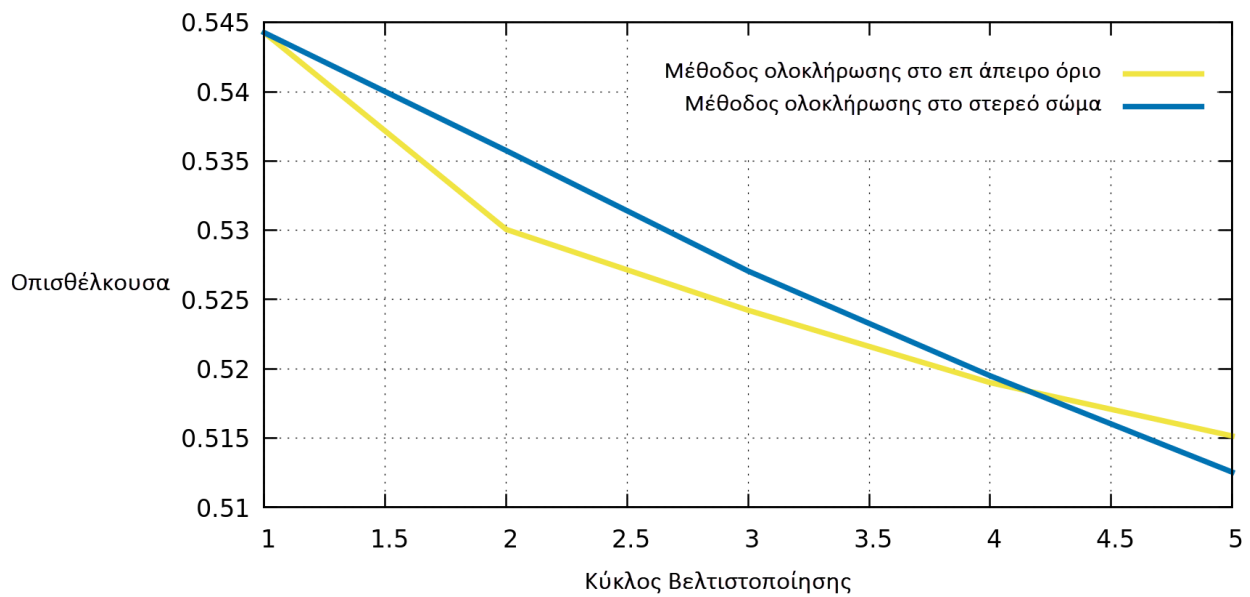
Σχήμα 28: Η διαφορά στη οπισθέλκουσα μεταξύ των 2 μεθόδων έπειτα από 10 κύκλους βελτιστοποίησης, για ταχύτητα εισόδου $2 \frac{m}{sec}$.



Σχήμα 29 : Η διαφορά στην οπισθέλκουσα μεταξύ των 2 μεθόδων έπειτα από 10 κύκλους βελτιστοποίησης, για ταχύτητα εισόδου $6 \frac{m}{sec}$.



Σχήμα 30: Η διαφορά στην οπισθέλκουσα μεταξύ των 2 μεθόδων έπειτα από 10 κύκλους βελτιστοποίησης, για ταχύτητα εισόδου $10 \frac{m}{sec}$.



Σχήμα 31: Η διαφορά στη οπισθέλκουσα μεταξύ των 2 μεθόδων έπειτα από 10 κύκλους βελτιστοποίησης, για ταχύτητα εισόδου $20 \frac{m}{sec}$.

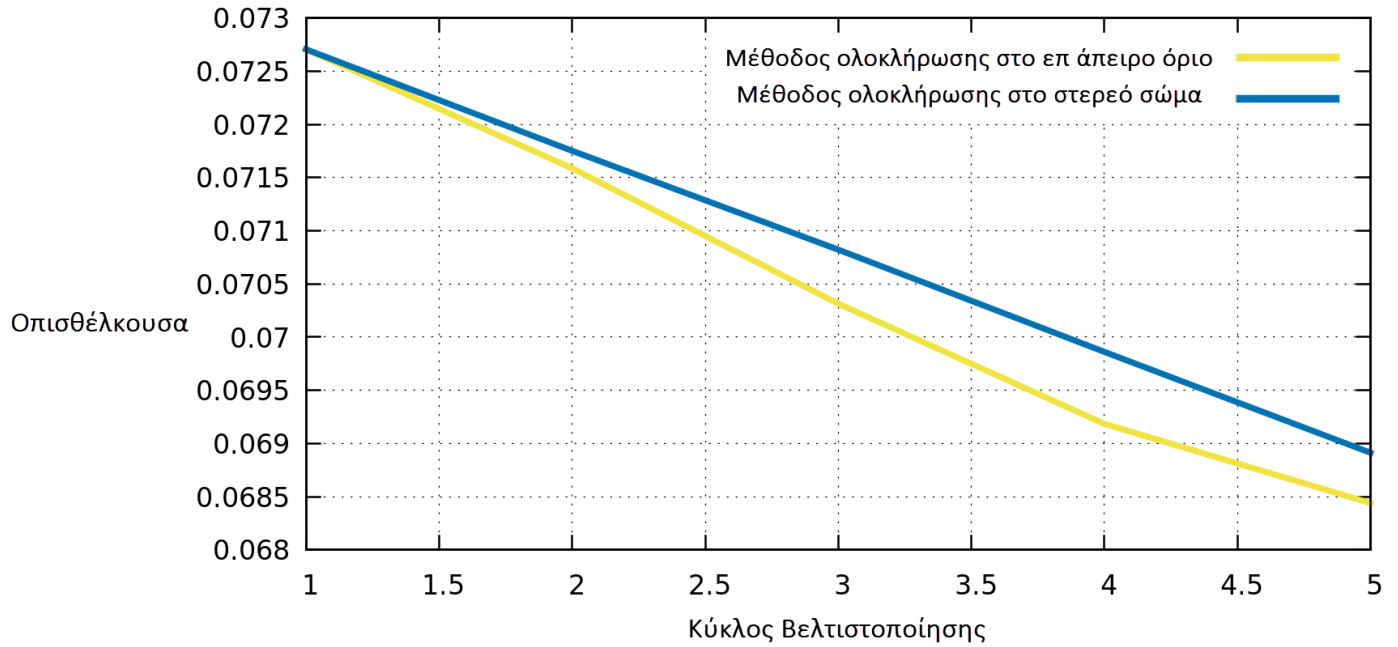
	$2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$	$6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$	$10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$	$20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$
1 ^{ος} κύκλος	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2 ^{ος} κύκλος	0.4876	0.5719	0.4573	1.0619
3 ^{ος} κύκλος	0.5488	0.8656	0.7767	0.5366
4 ^{ος} κύκλος	0.3084	0.9983	0.9828	0.0951
5 ^{ος} κύκλος	-0.1682	0.9458	0.9776	-0.5080

Πίνακας 10: Καταγραφή της σχετικής διαφοράς $\frac{D_{NF}-D_{FF}}{D_{NF}} \%$.

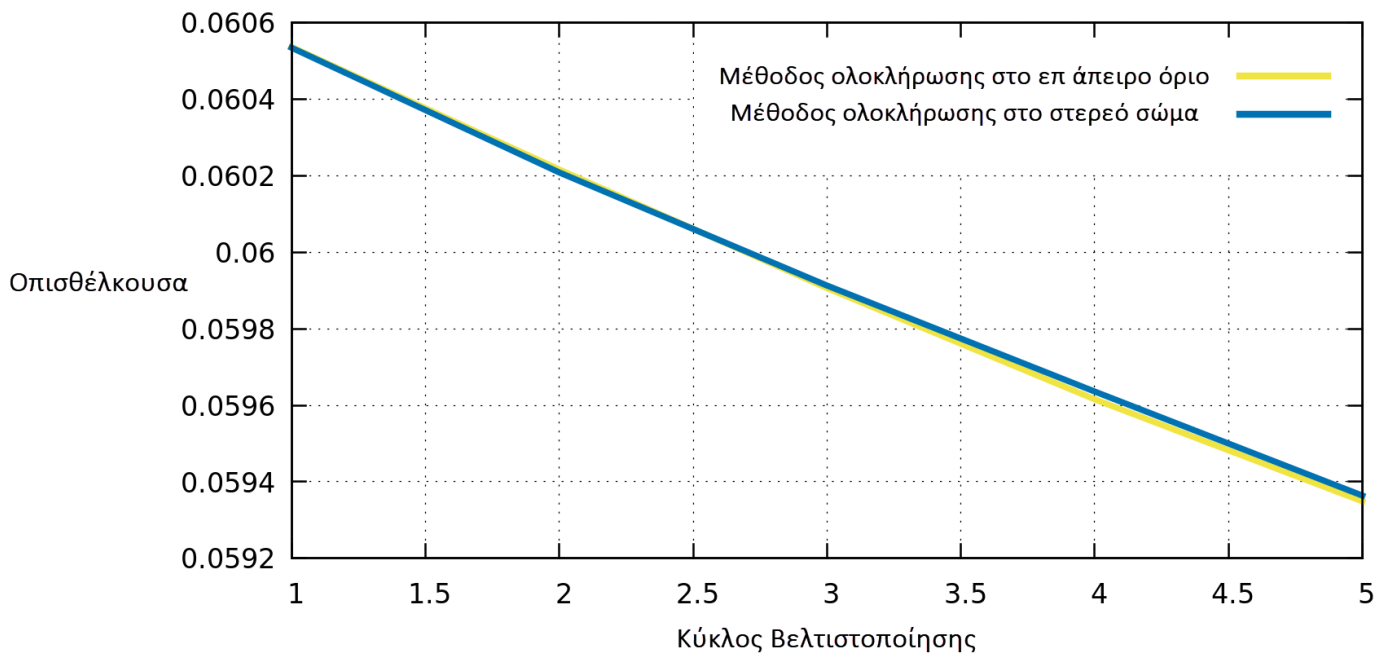
Επισημαίνεται πως με D_{FF} συμβολίζεται η οπισθέλκουσα δύναμη που παράγεται από τη μέθοδο ολοκλήρωσης στο επ' άπειρο όριο, και D_{NF} η αντίστοιχη για τη μέθοδο ολοκλήρωσης στο στερεό σώμα.

7.2.3. Μελέτη Μορφών Αεροτομής

Εκτός από την αεροτομή NACA0012, βελτιστοποιούνται και συγκρίνονται δύο ακόμη αεροτομές της NACA σειράς τεσσάρων ψηφίων, η NACA 2414 ΚΑΙ η NACA 1410. Εφαρμόζεται περιορισμός στην μετατόπιση των ακραίων σημείων ελέγχου, που ορίζουν την περιοχή η οποία δέχεται παραμόρφωση.



Σχήμα 32: Η διαφορά στη οπισθέλκουσα μεταξύ των 2 μεθόδων έπειτα από 10 κύκλους βελτιστοποίησης, για ταχύτητα εισόδου $6 \frac{m}{sec}$ και αεροτομή NACA 2414.



Σχήμα 33: Η διαφορά στη οπισθέλκουσα μεταξύ των 2 μεθόδων έπειτα από 5 κύκλους βελτιστοποίησης, για ταχύτητα εισόδου $6 \frac{m}{sec}$ και αεροτομή NACA 1410.

	NACA 2414	NACA 1410
1 ^{ος} κύκλος	0.0000	0.0000
2 ^{ος} κύκλος	0.22982	-0.012789
3 ^{ος} κύκλος	0.71701	0.01152
4 ^{ος} κύκλος	0.96807	0.03421
5 ^{ος} κύκλος	0.68753	0.02544

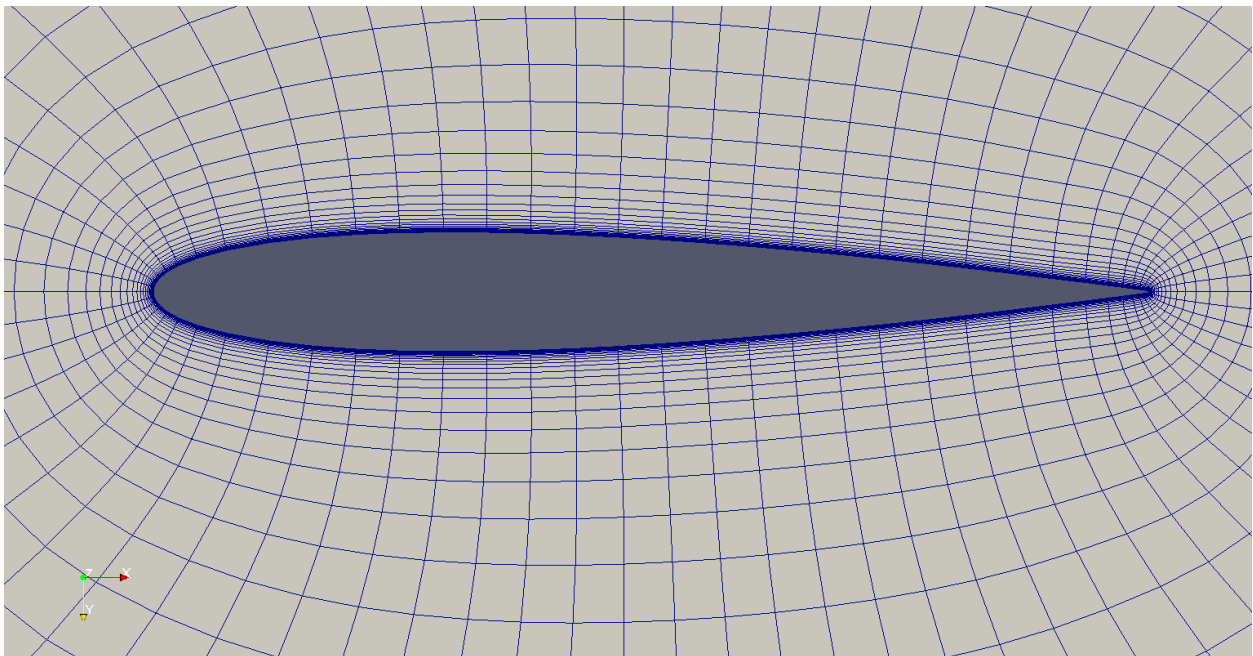
Πίνακας 11: Καταγραφή της σχετικής διαφοράς $\frac{D_{NF}-D_{FF}}{D_{NF}}$ % μεταξύ δύο διαφορετικών μορφών αεροτομής NACA.

Παρατηρείται λοιπόν πως για δύο διαφορετικές μορφές αεροτομής, η μέθοδος ολοκλήρωσης στο επ' άπειρο όριο είναι αποτελεσματική στη μείωση της οπισθέλκουσας, και συμβαδίζει με τη μέθοδο ολοκλήρωσης στο στερεό σώμα. Ενώ παρατηρείται υπεροχή της μεθόδου ολοκλήρωσης στο επ' άπειρο όριο στη μείωση του στους πρώτους κύκλους βελτιστοποίησης, δεν προκύπτει κάποιο συγκεκριμένο πόρισμα σχετικά με την υπεροχή κάποιας εκ των δύο διατυπώσεων. Βέβαια σημαντικό ρόλο στην αποτελεσματικότητα μιας μεθόδου πέρα από τις παραγώγους ευαισθησίας έχει και ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζονται οι νέες μεταβλητές σχεδιασμού. Η μέθοδος της απότομης καθόδου, που χρησιμοποιείται σε όλες τις περιπτώσεις βελτιστοποίησης μορφής σε αυτήν την εργασία, η οποία δεν εξασφαλίζει απαραίτητα πως ακριβέστεροι παράγωγοι θα επιφέρουν και μεγαλύτερη μείωση της οπισθέλκουσας.

8. Εφαρμογή της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου σε Πτέρυγα

Πραγματοποιήθηκε βελτιστοποίηση μορφής σε πτέρυγα, με χρήση της μεθόδου ολοκλήρωσης στο επ' άπειρο όριο για τον ορισμό της συνάρτησης στόχου.

Το δομημένο πλέγμα βελτιστοποίησης περιέχει 640 σημεία ελέγχου, και είναι ελεύθερο να κινηθεί προς όλες τις κατευθύνσεις, κρατώντας την χορδή σταθερή. Ο αριθμός Reynolds υπολογίζεται περίπου στα 3.3M, και η γωνία εισόδου ροής ανέρχεται στις 3 μοίρες.

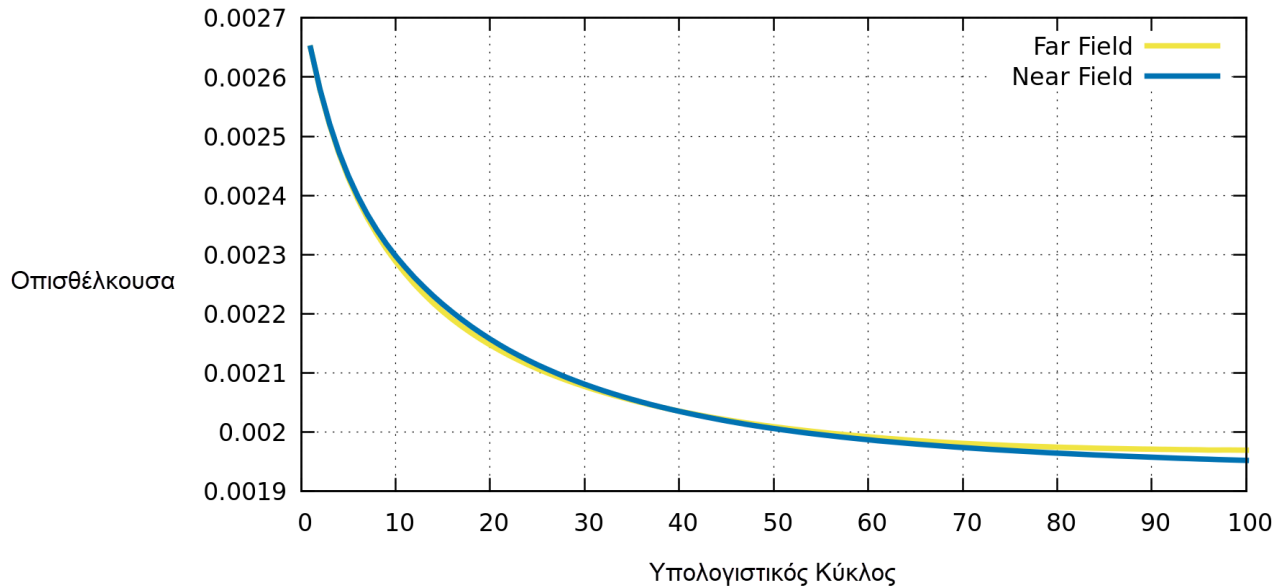


Σχήμα 34: Η πτέρυγα προσομοιώθηκε ολόκληρη χωρίς επιφάνεια συμμετρίας, και χωρίς περιορισμούς στη μετατόπιση των σημείων ελέγχου.

Σκοπός είναι η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης-στόχου, με τη διαδικασία απότομης καθόδου (steepest descent). Πραγματοποιείται βελτιστοποίηση μορφής με χρήση ογκομετρικών καμπύλων B-Splines.

8.1. Αποτελέσματα και Σύγκριση

Στο Σχήμα 34 παρατηρείται μείωση της οπισθέλκουσας κατά 25.64% έπειτα από 100 κύκλους βελτιστοποίησης. (Από 2.05368 σε 1.70117 N)



Σχήμα 35: Η σταδιακή πτώση της οπισθέλκουσας ανά κύκλο.

Η άνιση κατανομή του πάχους έπειτα από τον 100στο κύκλο οφείλεται στην ύπαρξη της επιφάνειας συμμετρίας στην μια πλευρά της, καθώς τα ακραία σημεία ελέγχου παραμένουν σταθερά κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης:



Σχήμα 36: Η βελτιστοποίηση σχήματος μεταξύ 1ου (πάνω) και 100ου (κάτω) κύκλου στο μπροστινό μέρος της πτέρυγας.

9. Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα

9.1. Ανακεφαλαίωση

Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, αναλύθηκε και διερευνήθηκε η μέθοδος στο επ' άπειρον όριο για τον υπολογισμό της οπισθέλκουσας δύναμης η οποία παράγεται από αεροδυναμικά σώματα μέσα σε μόνιμη, ασυμπίεστη ροή. Ακόμη, μελετήθηκε η αποτελεσματικότητα της χρήσης της μεθόδου ως συνάρτησης στόχου σε προβλήματα βελτιστοποίησης με τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Η διαδικασία παρουσιάζεται βήμα προς βήμα, μαζί με τα αποτελέσματα σε κάθε δοκιμή.

- **Επιλογή και δημιουργία των μελετούμενων αεροδυναμικών σωμάτων.**

Κατά τη διερεύνηση, χρησιμοποιήθηκαν αεροτομές της σειράς NACA 4 ψηφίων και μια πτέρυγα, όπου είτε σχεδιάστηκαν μέσω του εργαλείου CAD, SolidWorks, είτε προϋπήρχαν με έτοιμο πλεγματοποιημένο υπολογιστικό χωρίο.

- **Γένεση πλέγματος.**

Για κάθε δοκιμή όπου ήταν αναγκαία η γένεση πλέγματος, χρησιμοποιήθηκαν τα εργαλεία blockMesh και SnappyHexMesh. Για τον έλεγχο των χαρακτηριστικών του εκάστοτε πλέγματος, αξιοποιήθηκε ο αλγόριθμος checkMesh. Δημιουργήθηκαν περιοχές πύκνωσης για τη βελτίωση της ποιότητας.

- **Δημιουργία του κώδικα για χρήση ως συνάρτησης στόχου, της εξίσωσης της οπισθέλκουσας σύμφωνα με την μέθοδο ολοκλήρωσης στο επ' άπειρο όριο.**

Ο κώδικας μπορεί να πραγματοποιήσει βελτιστοποίηση μορφής με την έκφραση της οπισθέλκουσας σύμφωνα με τη μέθοδο με ολοκλήρωση στο επ' άπειρο όριο, όπως περιγράφεται στην Ενότητα 5.3.

- **Σύγκριση των αποτελεσμάτων του πρωτεύοντος προβλήματος μεταξύ των δύο μεθόδων (ολοκλήρωση στο στερεό σώμα, και στο επ' άπειρο όριο).**

Υπολογίστηκε η οπισθέλκουσα που παράγεται από πτέρυγα με προφίλ NACA 2414 και με τις δύο μεθόδους για πέντε διαφορετικές περιπτώσεις υπολογιστικών χωρίων, τα οποία σχεδιάστηκαν με διαφορετικές διαστάσεις. Οι δοκιμές επαναλήφθηκαν και για ταχύτητα εισόδου $20 \frac{m}{sec}$, πέρα από την αρχική των $6 \frac{m}{sec}$, καθώς και για δύο τύπους πλέγματος, αραιό και πυκνό. Αποδείχθηκε πως σε κάθε μια εκ των 20 προσομοιώσεων, οι δύο μέθοδοι συγκλίνουν στην ίδια τιμή οπισθέλκουσας. Παρατηρείται μάλιστα, πως ενώ η μέθοδος ολοκλήρωσης στο στερεό όριο φτάνει πιο γρήγορα στην τελική τιμή, παρουσιάζει και τις μεγαλύτερες ταλαντώσεις στις πρώτες επαναλήψεις. Χαρακτηριστικά, η βασική δοκιμή η οποία παρουσιάζεται στην Ενότητα 4.4 (χωρίο A, ταχύτητα εισόδου $6 \frac{m}{sec}$) έχει κατά τις πρώτες επαναλήψεις μέγιστη τιμή τέσσερις φορές

μεγαλύτερη από την αντίστοιχη που παρουσιάζει η μέθοδος ολοκλήρωσης στο επ'άπειρο όριο.

- **Υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας με τις συνεχείς συζυγείς μεθόδους FI, SI και E-SI, και με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών για την έκφραση με ολοκλήρωση στο επ'άπειρο όριο.**

Χρησιμοποιήθηκαν δώδεκα σημεία ελέγχου σε παραμετροποιημένη με πολυώνυμα Bezier-Bernstein αεροτομή για στρωτή ροή, και ελέγχθηκαν οι αποκλίσεις των αποτελεσμάτων των συνεχών συζυγών μεθόδων και των πεπερασμένων διαφορών με τα αντίστοιχα της μεθόδου ολοκλήρωσης στο στερεό σώμα. Η διαδικασία επαναλήφθηκε για τυρβώδη ροή γύρω από καμπύλη NACA 4412. Και στις δύο περιπτώσεις τα αποτελέσματα με τη μελετούμενη μέθοδο παρουσιάζουν μικρή απόκλιση σε σχέση με τις πεπερασμένες διαφορές, που χρησιμοποιούνται ως σημείο αναφοράς. Στις περισσότερες περιπτώσεις μάλιστα βρίσκονται πιο κοντά από ότι τα αντίστοιχα αποτελέσματα με τη μέθοδο ολοκλήρωσης στην επιφάνεια του στερεού σώματος.

- **Σύγκριση της πτώσης της οπισθέλκουσας με τη συνεχή συζυγή μέθοδο μεταξύ των δύο μεθόδων (ολοκλήρωση στο στερεό σώμα, και στο επ'άπειρο όριο).**

Αρχικά ολοκληρώθηκαν δέκα υπολογιστικοί κύκλοι για στρωτή ροή γύρω από αεροτομή με προφίλ NACA 0012, με το έτοιμο πλέγμα από το tutorial του OpenFOAM.

Για όλες τις υπόλοιπες δοκιμές, η γένεση διδιάστατου πλέγματος πραγματοποιήθηκε με τον SnappyHexMesh. Η σύγκριση επαναλήφθηκε για τυρβώδη ροή γύρω από αεροτομή NACA 0012, για τέσσερις διαφορετικές ταχύτητες, 2, 6, 10 και $20 \frac{m}{sec}$, και η βελτιστοποίηση μορφής πραγματοποιήθηκε με ογκομετρικές καμπύλες B-Splines για πρώτη φορά σε αυτήν την εργασία. Για ταχύτητα εισόδου $6 \frac{m}{sec}$ συγκρίθηκαν και τα αποτελέσματα για τυρβώδη ροή γύρω από τις αεροτομές NACA 1410 και 2414, και τα αποτελέσματα δείχνουν ξανά συμβατότητα μεταξύ των δύο διατυπώσεων. Στο τέλος των πέντε υπολογιστικών κύκλων, δεν μπορεί να βγει κάποιο συμπέρασμα περί υπεροχής μεθόδου στην μείωση της οπισθέλκουσας, αλλά παράγοντας σε αυτό είναι και η επιλογή υπολογισμού των νέων μεταβλητών σχεδιασμού.

- **Εφαρμογή της μεθόδου ολοκλήρωσης στο επ'άπειρο όριο για βελτιστοποίηση μορφής πτέρυγας.**

Σκοπός ήταν η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης-στόχου, με τη διαδικασία απότομης καθόδου (steepest descent), χρησιμοποιώντας την μέθοδο ολοκλήρωσης στο επ'άπειρον όριο για τον ορισμό της συνάρτησης στόχου. Η βελτιστοποίηση μορφής εκτελέστηκε με χρήση ογκομετρικών καμπύλων B-Splines. Κατέληξε σε μείωση της οπισθέλκουσας κατά 25.64% έπειτα από 100 κύκλους βελτιστοποίησης, και είχε μικρή απόκλιση όταν πραγματοποιήθηκε και με την μέθοδο ολοκλήρωσης στην επιφάνεια του στερεού σώματος.

9.2. Συμπεράσματα

Σύμφωνα με τις δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν στη διπλωματική εργασία, η μέθοδος ολοκλήρωσης στο επ' άπειρο όριο είναι έγκυρη και μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί της κλασικής προσέγγισης με ολοκλήρωση στο στερεό όριο για τον υπολογισμό της οπισθέλκουσας, αλλά και για βελτιστοποίηση μορφής με στόχο την ελαχιστοποίηση της.

Ενώ οι πεδιακές συζυγείς εξισώσεις παραμένουν ίδιες, κατά τον σχεδιασμό των οριακών συνθηκών και μετέπειτα των παραγώγων ευαισθησίας, το πρόβλημα βελτιστοποίησης αλλάζει. Οι όροι που περιλαμβάνουν δεύτερες χωρικές παραγώγους των τάσεων υπολογισμένες στον τοίχο εξαλείφονται από τις παραγώγους ευαισθησίας. Αφαιρείται λοιπόν το ανάλογο αριθμητικό σφάλμα, και η πολυπλοκότητα της έκφρασης μειώνεται, διότι δεν υπάρχει πλέον άμεση επιρροή των μεταβλητών σχεδιασμού στη συνάρτηση, καθώς η ολοκλήρωση δεν πραγματοποιείται στην παραμετροποιημένη επιφάνεια.

Σε κάθε περίπτωση, το σχετικό σφάλμα μεταξύ της βελτιστοποιημένης λύσης με την τυπική και με την μελετούμενη μέθοδο ήταν μικρότερο του 1%.

Μιας και πρόκειται για μια νέα μέθοδο, η οποία δεν έχει δοκιμαστεί πλήρως, μερικά πιθανά σημεία προς εξέταση παρατίθενται παρακάτω:

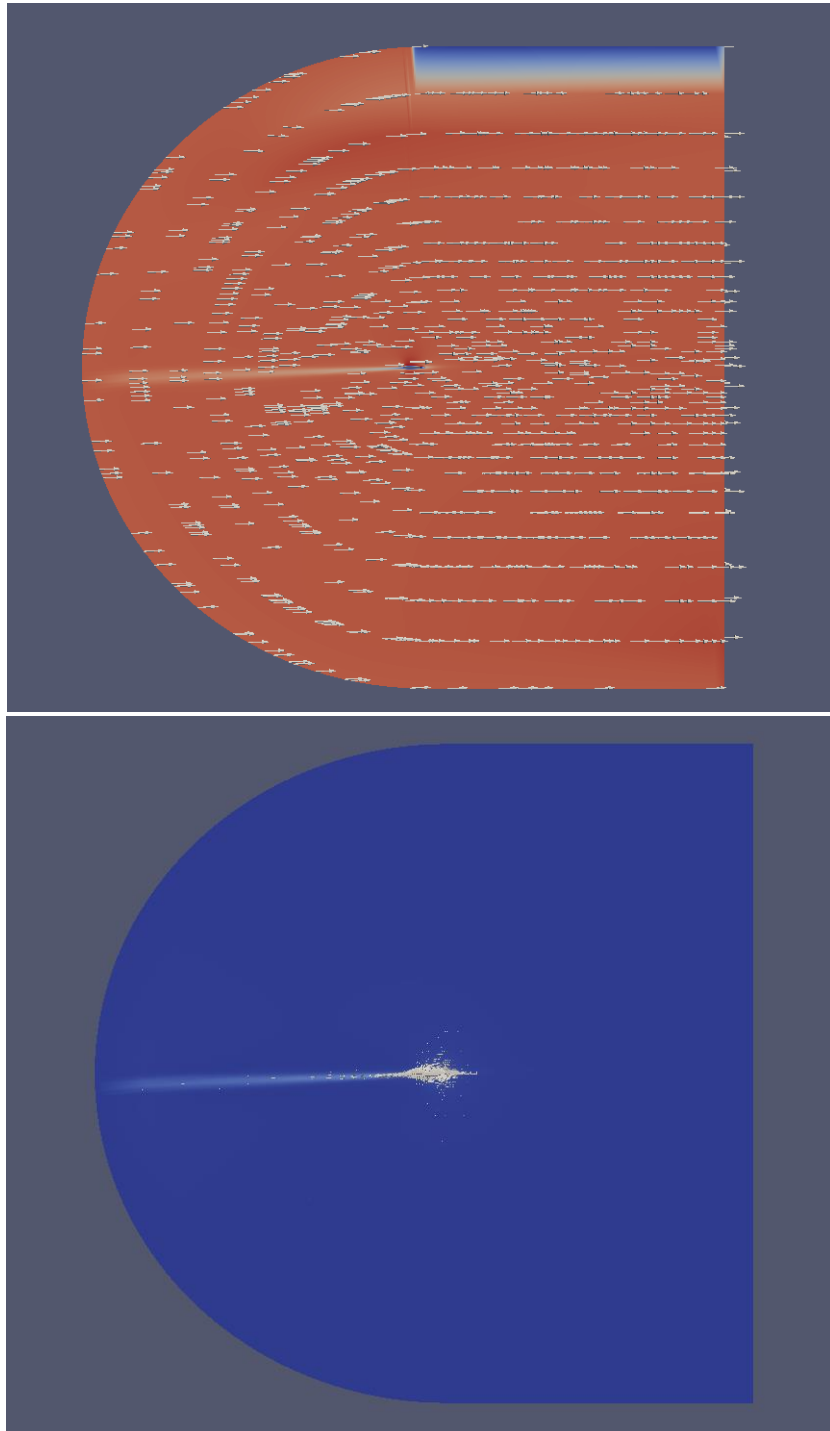
- Ευαισθησία της μεθόδου ολοκλήρωσης στο επ' άπειρο όριο στον αριθμό των σημείων ελέγχου, στην τοποθέτησή τους, καθώς και στους περιορισμούς της μετατόπισης, με στόχο την εύρεση των συνθηκών για τις οποίες προσφέρει καλύτερα αποτελέσματα από την μέθοδο ολοκλήρωσης στο στερεό σώμα.
- Εύρεση των κατάλληλων κριτηρίων για την ποιότητα πλέγματος, και ιδιαίτερα πως ο αριθμός των επιφανειακών κελιών στο επ' άπειρο όριο μπορεί να επηρεάσει την αποτελεσματικότητά της.
- Μια συγκριτική μελέτη με χρήση διαφορετικών μεθόδων υπολογισμού των νέων μεταβλητών σχεδιασμού ανά βήμα, εκτός της απότομης καθόδου, θα μπορούσε να προσφέρει κάποια συμπεράσματα σχετικά με την αποτελεσματικότητα στην μείωση της οπισθέλκουσας.
- Η εργασία επικεντρώνεται σε ασυμπίεστες ροές και στο περιβάλλον OpenFOAM, όμως η μελετούμενη μέθοδος πρόκειται για μια μέθοδο που εφαρμόζεται και σε συμπίεστες ροές^[1], με μεγάλο βιβλιογραφικό ενδιαφέρον, και εφαρμογή στην βιομηχανία.

10. Βιβλιογραφία

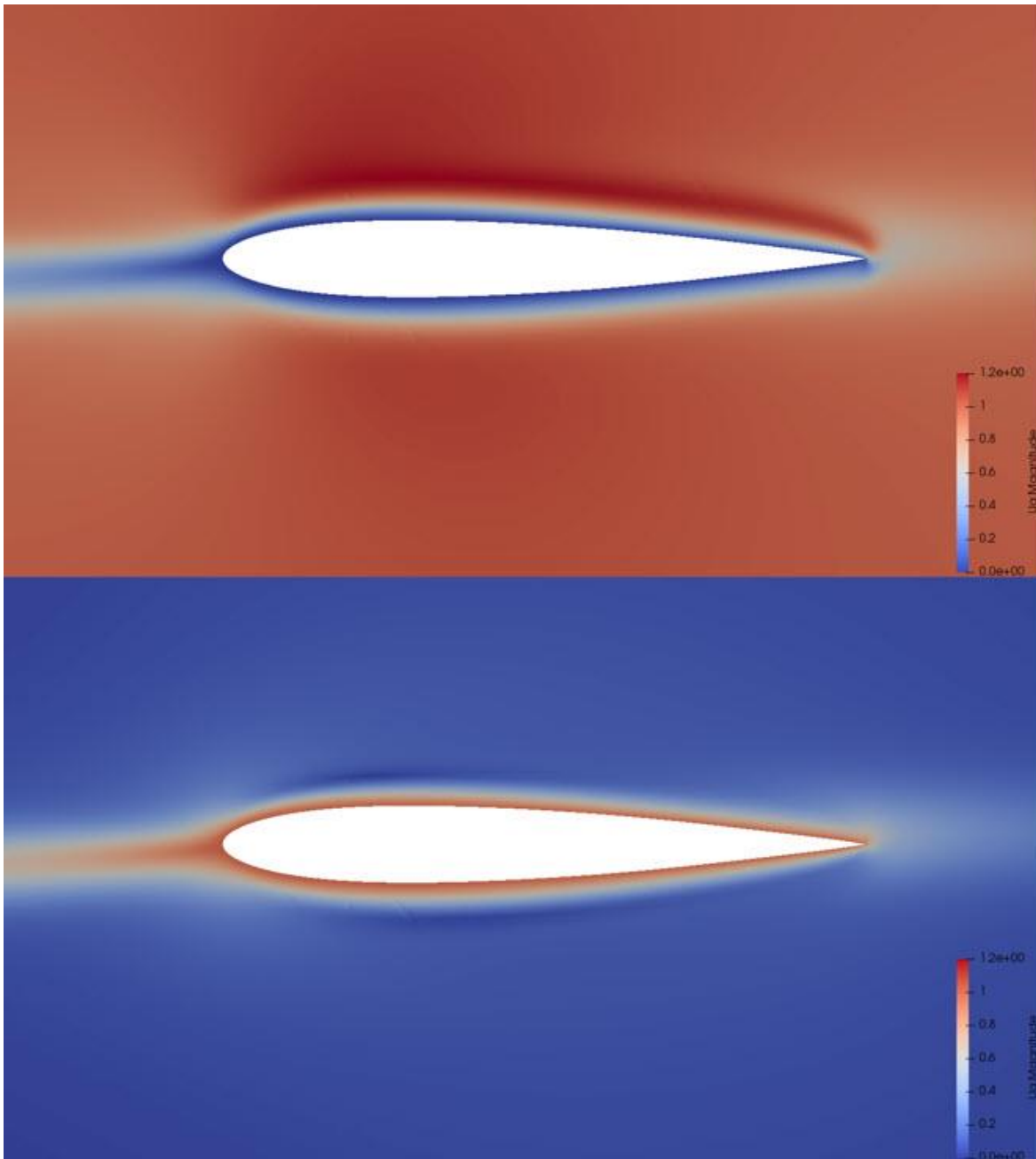
- [1] Meredith, P. T., “Viscous Phenomenon Affecting High-Lift Systems and Suggestions for Future CFD Development,” AGARD CP-315, High-Lift Systems Aerodynamics, Sept. 1993, pp. 19-1–19-8
- [2] Giannakoglou, K.C. “Μέθοδοι Βελτιστοποίησης Στην Αεροδυναμική” (Optimization Methods In Aerodynamics) 4th Edition, National University Of Athens Press, Athens, 2006
- [3] Karpoulis, I.C. and Giannakoglou, K.C.: Distributed evolutionary algorithms with hierarchical evaluation. *Engineering Optimization*, 41(11):1037-1049, 2009.
- [4] Mavriplis, D.: Discrete adjoint-based approach for optimization problems on three-dimensional unstructured meshes. *AIAA Journal*, 45(4):740–752, 2007.
- [5] Papoutsis-Kiachagias, E.M., Giannakoglou, K.C.: “Continuous adjoint methods for turbulent flows, applied to shape and topology optimization: Industrial applications”, *Archives of Computational Methods in Engineering*
- [6] Schmitt, F.G: “About Boussinesq’s turbulent viscosity hypothesis: historical remarks and a direct evaluation of 29 its validity”, *Comptes Rendus Mecanique*, (335):617–627, 2007
- [7] Versteeg, H. K., Malalasekera W. : “An Introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite Method, second edition”, Pearson Education Limited 1995, 2007
- [8] Spalart, Ph., Allmaras, S.: “A one-equation turbulence model for air flows”, *AIAA Paper 1992-439*, 30th 30 Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, USA, January 6–9 1992
- [9] Γιαννάκογλου, Κ.Χ, Ι. Αναγνωστόπουλος, και Γ. Μπεργελές: Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς. Αθήνα, 2003.
- [10]
- [11] CFD-Online (1). (n.d.). Turbulence Intensity. Retrieved from CFD-Online: Turbulence intensity -- CFD-Wiki, the free CFD reference
- [12] CFD-Online (2). (n.d.). Turbulence Length Scale. Retrieved from CFD-Online: Turbulence Length Scale -- CFD-Wiki, the free CFD reference
- [13] Karpouzas, G.K., Papoutsis-Kiachagias, E.M., Schumacher, T., de Villiers, E., Giannakoglou, K.C.: Othmer, C.: 40
- [14] Zymaris, A.S, Papadimitriou, D.I., Giannakoglou, K.C., Othmer, C.: “Continuous adjoint approach to the Spalart-Allmaras turbulence model for incompressible flows”, *Computers & Fluids*

- [15] Giannakoglou, K.C., Papoutsis-Kiachagias, E.M., Kavvadias, I.S., Gkaragkounis, K.T.: 'Continuous Adjoint in Shape & Topology Optimization – Recent Developments & Applications', NAFEMS Seminar on Adjoint CFD Methods in Industry and Research, October 24-25, 2016.
- [16] Παπουτσής-Κιαχαγιάς, Ε.: Συζυγείς μέθοδοι χαμηλού υπολογιστικού κόστους για τυρβώδεις ροές στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση. Διδακτορική Διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα 2013.
- [17] Deng Y., Zhang Y., Chen H., “Drag prediction and decomposition of a real aircraft based on middle-field and far-field methods”, 7th European Conference for Aeronautics and Space Sciences (EUCASS), DOI: 10.13009/EUCASS2017-380, School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing, 100084, China
- [18] Paparone L, Tognaccini R. Computational Fluid Dynamics-Based Drag Prediction and Decomposition[J]. AIAA Journal, 2003, 41(9):1647-1657
- [19] Destarac D, Vooren J V D. Drag/thrust analysis of jet-propelled transonic transport aircraft; Definition of physical drag components[J]. Aerospace Science & Technology, 2004, 8(6):545-556
- “Adjoint Optimization for Vehicle External Aerodynamics”, 2015
- [20] Athadkar, M., Desai, S. S., “Importance of The Extent of Far-Field Boundaries and of The Grid Topology In The CFD Simulation of External Flows” International Journal of Mechanical And Production Engineering, ISSN: 2320-2092, Volume- 2, Issue-9, Siddaganga Institute of Technology, Tumkur, Sept.-2014
- [21] Giannakoglou, K., Papoutsis Kiachagias, E., Kavvadias, I., Gkaragkounis, K., “adjointOptimization, an OpenFOAM-based optimization tool”, User Manual, Prepared by the Parallel CFD & Optimization Unit, School of Mechanical Engineering, NTUA, Athens, 2018
- [22] Kavvadias, I.S.: Continuous adjoint methods for steady and unsteady turbulent flows with emphasis on the accuracy of sensitivity derivatives. PhD thesis, National Technical University of Athens, 2013.
- [23] Fan Y., Li W., “Review of Far-Field Drag Decomposition Methods for Aircraft Design”, Journal of Aircraft, DOI: 10.2514/1.C034781, Shanghai Jiao Tong University, 200240 Shanghai, China
- [24] Kühl N. , Müller P.M., Stück A., Hinze M., “Decoupling of Control and Force Objective in Adjoint-Based Fluid Dynamic Shape Optimization”, Hamburg University of Technology, Am Schwarzenberg-Campus 4, D-21075 Hamburg
- [25] <https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/doc/guide-applications-solvers-simple.html>
- [26] <https://www.simscale.com/docs/simwiki/numerics-background/what-are-the-navier-stokes-equations/>

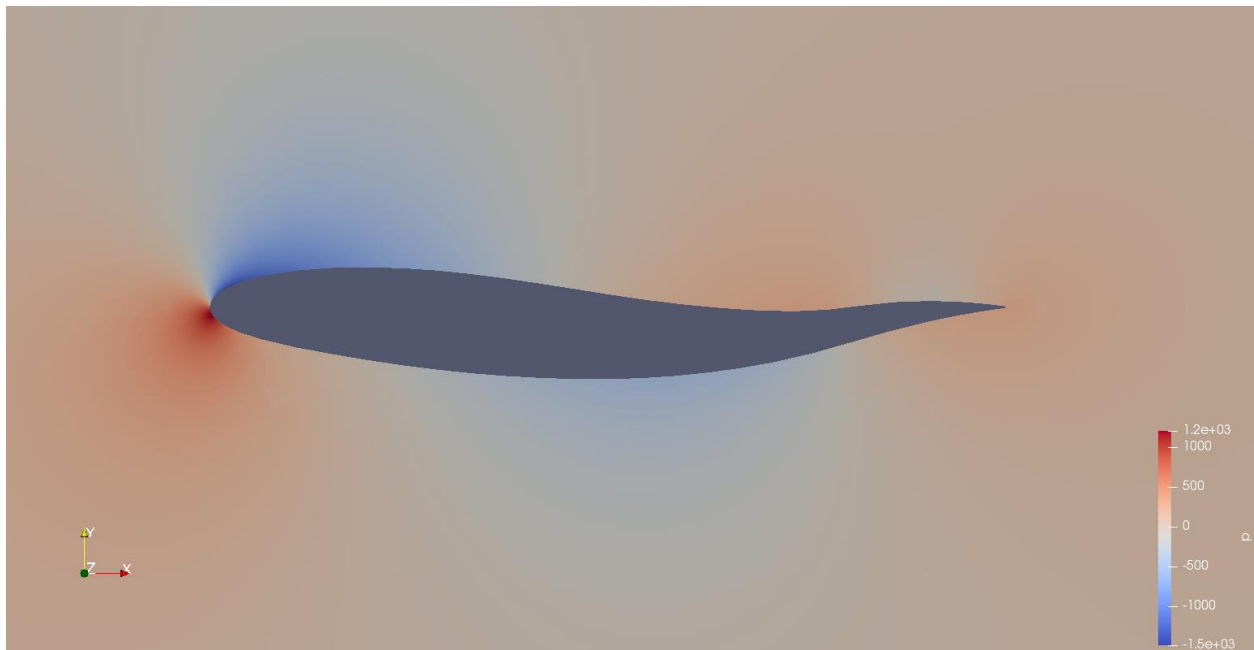
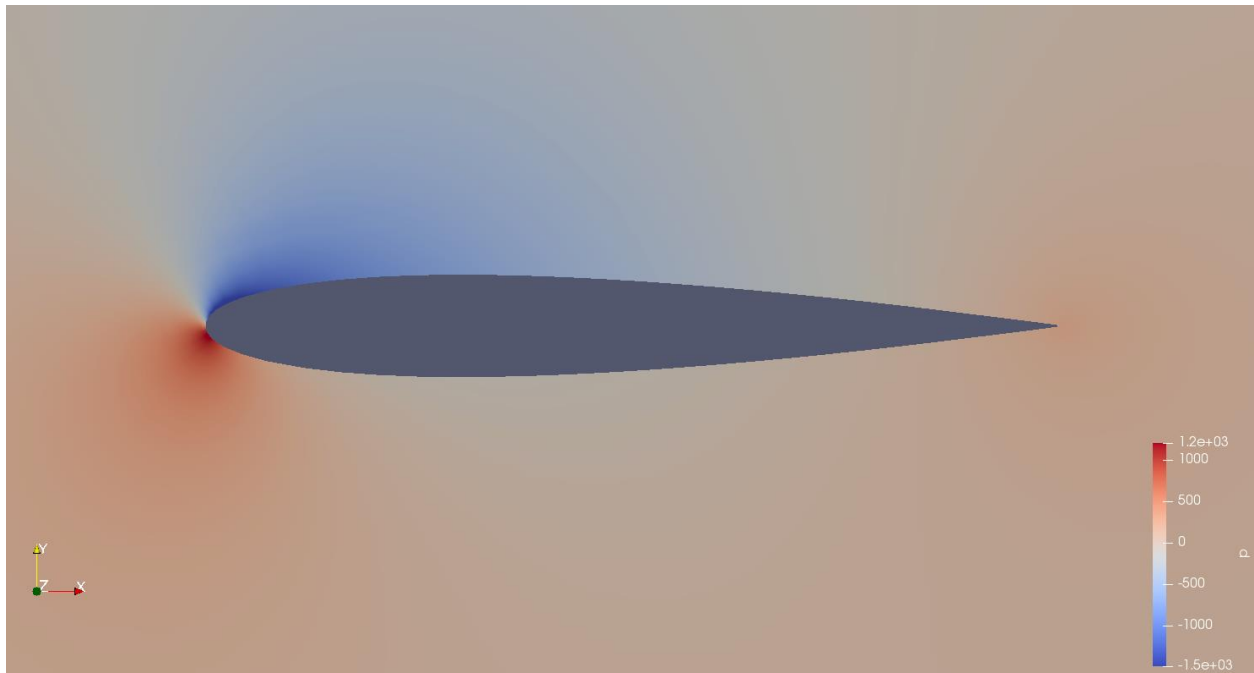
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ



Σχήμα A.1: Σύγκριση των πεδίων της συζυγούς ταχύτητας, U_α , μεταξύ της μεθόδου ολοκλήρωσης στο επ' άπειρο όριο (πάνω) και της μεθόδου ολοκλήρωσης στο στερεό σώμα (κάτω). Με την μελετούμενη μέθοδο η U_α δεν μηδενίζεται πάνω στο επ' άπειρο όριο.



Σχήμα Α.2: Σύγκριση των πεδίων της συζυγούς ταχύτητας, U_α , μεταξύ της μεθόδου ολοκλήρωσης στο επ' άπειρο όριο (πάνω) και της μεθόδου ολοκλήρωσης στο στερεό σώμα (κάτω). Με την μελετούμενη μέθοδο η U_α μηδενίζεται πάνω στην παραμετροποιημένη επιφάνεια.



Σχήμα Α.3: Η βελτιστοποίηση σχήματος μεταξύ 1ου (πάνω) και 100ου (κάτω) κύκλου επιφέρει αλλαγή στην καμπυλότητα επηρεάζοντας την ροή γύρω από την πτέρυγα.