



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής
Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

Η συνεχής συζυγής μέθοδος για περιοδικές ροές, με εφαρμογή της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών στην επίλυση του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος

Διπλωματική Εργασία

Νικόλαος Σημηριώτης

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2013

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η εφαρμογή και η πιστοποίηση της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών στην επίλυση τόσο του ευθέως όσο και του συζυγούς προβλήματος που προκύπτει από τη συνεχή συζυγή μέθοδο (*continuous adjoint method*) και στον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας για μία αεροτομή. Η πιστοποίηση της μεθόδου γίνεται για διαφορετικές εφαρμογές όπου η ροή ασυμπίεστου ρευστού που μελετάται παραμένει στρωτή και είναι περιοδικά μεταβαλλόμενη στο χρόνο.

Η συνεχής συζυγής μέθοδος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της κλίσης μίας αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Ως μεταβλητές σχεδιασμού στις εφαρμογές που περιλαμβάνονται στην εργασία αυτή τέθηκαν οι μετατοπίσεις των κόμβων της μελετούμενης αεροτομής κατά την κάθετη στο τοίχωμα της αεροτομής διεύθυνση. Οι συνεχείς συζυγείς εξισώσεις και οριακές συνθήκες, καθώς και οι παράγωγοι ευαισθησίας προκύπτουν από την παραγωγή της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης. Η τελευταία προκύπτει από την προς ελαχιστοποίηση συνάρτηση στην οποία προστίθενται τα χωρικά και χρονικά ολοκληρώματα των μη-μόνιμων εξισώσεων κατάστασης (*Navier-Stokes*) του ευθέως προβλήματος πολλαπλασιασμένες με τις συζυγείς μεταβλητές.

Τα δύο προβλήματα (ευθύ και συζυγές), καθότι περιοδικά, επιλύονται αφού πρώτα εφαρμοστεί η μέθοδος ισορροπίας των αρμονικών με την οποία οι χρονικά μη-μόνιμες εξισώσεις που περιγράφουν το κάθε πρόβλημα αντικαθίστανται από ένα σύστημα χρονικά μόνιμων εξισώσεων που είναι μεταξύ τους πεπλεγμένες. Τα συστήματα εξισώσεων διακριτοποιούνται και επιλύονται με έναν κοινό αλγόριθμο επίλυσης χρονικά μόνιμων προβλημάτων. Η συγκεκριμένη τεχνική αποσκοπεί στη μείωση του υπολογιστικού κόστους της επίλυσης χρονικά μη-μόνιμων ροών και στη μειωμένη δέσμευση

μνήμης, καθώς η επίλυση του συζυγούς προβλήματος απαιτεί αποθήκευση της λύσης του ευθέος προβλήματος.

Στην εργασία αυτή, η πιστοποίηση της μεθόδου επίλυσης του ευθέος προβλήματος γίνεται μέσω σύγκρισης των δυνάμεων άνωσης και αντίστασης που ασκούνται πάνω στην αεροτομή, όπως υπολογίζονται με τη χρήση της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών, με τις δυνάμεις που υπολογίζει ένας “κλασικός επιλύτης” χρονικά μη-μόνιμων ροών. Για το συζυγές πρόβλημα, η πιστοποίηση βασίζεται στη σύγκριση των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζονται με τις δύο μεθόδους. Η διερεύνηση της αξιοπιστίας της μεθόδου γίνεται για τρεις διαφορετικές εφαρμογές, όπου εξετάζεται κυρίως η επίδραση του αριθμού *Reynolds* της ροής και το πλάτος ταλάντωσης της γωνίας που σχηματίζει το διάνυσμα της επ’ άπειρον ροής με τη χορδή της αεροτομής.

Η εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας περιελάμβανε προγραμματισμό σε γλώσσα προγραμματισμού *C++* και τη χρήση του ελεύθερου λογισμικού *OpenFOAM* (για το οποίο η συζυγής μέθοδος έχει προγραμματιστεί στη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης) με το οποίο γίνονται και όλοι οι υπολογισμοί των ροϊκών μεγεθών.



National Technical University of Athens
School of Mechanical Engineering
Fluid Section
Lab of Thermal Turbomachines
Parallel CFD & Optimization Unit

**The continuous adjoint method for periodic flows via the
harmonic balance method for the solution of both the
primal and adjoint problems**

Diploma Thesis

Nikolaos S. Simiriotis

Advisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, 2013

Abstract

The aim of this diploma thesis is the application and validation of the harmonic balance method for solving both the primal and adjoint problems. The adjoint problem results from the application of the continuous adjoint. This thesis is primarily concerned with the successful calculation of the sensitivity derivatives of an airfoil. For the validation of the harmonic balance method, various cases are studied, in all of which the unsteadiness of the laminar flow of an incompressible fluid is the result of the periodical time variation of the flow conditions.

The continuous adjoint method is used in the calculation of the gradient of an objective function, with respect to the design variables. The normal (with respect to the shape skin) displacement of each point along the airfoil constitute the design variables of the optimization problem. The continuous adjoint equations, the

corresponding boundary conditions and sensitivity derivatives are derived using an objective function, the choice of which is not of a matter, augmented with the field and time integral of the product of the unsteady state equations (Navier-Stokes) that describe the primal problem, with the adjoint variables.

Both problems - the primal and the adjoint problems - are solved via the the harmonic balance method, provided that one of the boundary conditions varies periodically with time. With the application of the harmonic balance method, each equation of the unsteady problem is replaced with a system of coupled steady equations. The equations in the latter are discretized and both the primal and adjoint problems are solved with the corresponding boundary conditions and with the use of the same algorithm, suitable for solving steady problems. This technique aims at reducing the computational cost of solving an unsteady problem, as well as the required memory, provided that the solution of the adjoint problem requires the solution of the primal problem to be stored.

For the validation of the method, the results obtained by the use of the harmonic balance method are compared with those of a commonly used unsteady solver, i.e. the one that solves the flow equations in the time domain. Regarding the primal problem, validation is achieved by comparing the forces acting on the airfoil, while for the adjoint problem by comparing the sensitivity derivatives computed on the airfoil. Three different cases are studied, so as to examine mainly the effect of different values of Reynolds number as well as of the amplitude of the oscillation of the angle of attack.

The coding needed for this diploma thesis is done in C++. Moreover, OpenFOAM, a free, internet-distributed software (for which the adjoint method was programmed at the Parallel CFD & Optimization Unit of NTUA) was used.

Ευχαριστίες

Με την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας σηματοδοτείται το τέλος της πενταετούς φοίτησής μου στη σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Σε αυτό το σημείο μου δίνεται η ευκαιρία να ευχαριστήσω όλους εκείνους που βοήθησαν να ολοκληρωθεί η εργασία αυτή αλλά και όσους ήταν πάντα δίπλα μου καθόλη τη διάρκεια της φοίτησης μου.

Πρωτίστως θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Κ. Χ. Γιαννάκογλου. Η συνεχής του καθοδήγηση και οι γνώσεις του αποτέλεσαν τον βασικότερο οδηγό για την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Όντας πάντοτε διαθέσιμος για τυχόν απορίες και διευκρινήσεις, αφιέρωσε σημαντικό χρόνο στην συστηματική ενασχόληση και στην επιμελή διόρθωση της εργασίας αυτής, στοιχεία που αναμφίβολα συμβάλλουν στην επιτυχή ολοκλήρωση της. Τον ευχαριστώ που μου έδωσε τη δυνατότητα να ασχοληθώ με ένα θέμα που αποδείχθηκε ιδιαίτερα επιμορφωτικό, αλλά κυριότερα που από τα πρώτα έτη ως καθηγητής με ενέπνευσε να ασχοληθώ με αντικείμενα που παρουσιάζουν ξεχωριστό ενδιαφέρον για τους μηχανικούς.

Επιπλέον οφείλω να ευχαριστήσω όλα τα μέλη της ΜΠΥΡΕΒ του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών, των οποίων η συμβολή στην εκπόνηση της διπλωματικής αυτής εργασίας υπήρξε καθοριστικής σημασίας. Ιδιαίτερα πρέπει να ευχαριστήσω τους υποψήφιους διδάκτορες Γιάννη Καββαδία και Βαγγέλη Παπουτσή. Ειδικά ο πρώτος μου έδωσε σημαντική ώθηση στο ξεκίνημα της εργασίας και ήταν πάντοτε διαθέσιμος για τυχόν απορίες και πρόθυμος να βοηθήσει σε οποιοδήποτε πρόβλημα προέκυπτε, αφιερώνοντας σημαντικό χρόνο.

Σε καμία περίπτωση δεν θα μπορούσα να παραλείψω να ευχαριστήσω θερμά τους φίλους μου που ήταν πάντοτε δίπλα μου όλα αυτά τα χρόνια προσφέροντας μου υποστήριξη

και συντροφιά. Μη θέλοντας να παραλείψω κάποιον θα αποφύγω μία εκτενή αναφορά ονομάτων. Ωστόσο οφείλω να κάνω ειδική και ξεχωριστή μνεία στους Χρήστο Καπέλλο, Νίκο Μπεμπεδέλη και Πάνο Πυργολιό, και οι τρεις συμφοιτητές και καλοί φίλοι.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την οικογένεια μου. Η αμέριστη συμπαράσταση τους από την παιδική μου ηλικία μέχρι και το τέλος των σπουδών μου, και το ξεστό περιβάλλον το οποίο μου εξασφαλίζουν όλα αυτά τα χρόνια, συντελούν καταλυτικά σε οτιδήποτε έχω επιτύχει. Τους ευχαριστώ για την απεριόριστη υποστήριξη που μου προσέφεραν με κάθε δυνατό τρόπο και μέσο σε όλους τους τομείς, για την απόλυτη εμπιστοσύνη που μου δείχνουν όλα αυτά τα χρόνια και κυρίως γιατί μου παρείχαν τη δυνατότητα να ακολουθήσω τα όνειρα μου.

Στη μνήμη του Χαράλαμπου Χατζηαλέξη

Περιεχόμενα

1	Αιτιοκρατικές μέθοδοι βελτιστοποίησης & Υπολογιστική Ρευστοδυναμική	1
1.1	Εισαγωγή στη βελτιστοποίηση	2
1.2	Η συζυγής μέθοδος	4
1.2.1	Συνεχής συζυγής μέθοδος για χρονικά μη-μόνιμη ροή	6
1.2.2	Μειωμένη δέσμευση μνήμης με τη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών	7
1.3	Το λογισμικό OpenFOAM (Field Operation And Manipulation)	8
2	Αλγόριθμος PISO	11
2.1	Σύζευξη ταχύτητας-πίεσης και αλγόριθμος επίλυσης	11
3	Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών	15
3.1	Εισαγωγή	15
3.2	Μαθηματική θεμελίωση	17
3.2.1	Εφαρμογή της μεθόδου για δύο Αρμονικές	19
3.2.2	Γενίκευση για περισσότερες από δύο αρμονικές	29
3.3	Συμπεράσματα και παρατηρήσεις πάνω στη Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών	30
4	Η Συνεχής συζυγής μέθοδος για μη-μόνιμη, ασυμπίεστη, στρωτή ροή	33
4.1	Εξισώσεις ροής	33
4.2	Εισαγωγή των μεταβλητών του συζυγούς προβλήματος	35
4.3	Αντικειμενική συνάρτηση	38
4.3.1	Ελαχιστοποίηση της μέσης δύναμης αντίστασης	39

4.4	Διατύπωση των συζυγών πεδιακών εξισώσεων	40
4.5	Συζυγείς οριακές συνθήκες και παράγωγοι ευαισθησίας	45
4.5.1	Συζυγείς οριακές συνθήκες στο S_{In}	45
4.5.2	Συζυγείς οριακές συνθήκες στο S_{out}	47
4.5.3	Συζυγείς οριακές συνθήκες στα στερεά τοιχώματα S_w	48
4.5.4	Τελική έκφραση παραγώγων ευαισθησίας	50
4.6	Συνοπτική παράθεση εξισώσεων συζυγούς προβλήματος	51
5	Εφαρμογή της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών και δια-	
	κριτοποίηση των πεδιακών μερικών διαφορικών εξισώσεων -	
	Αλγόριθμος επίλυσης	53
5.1	Εξισώσεις ροής ευθέως και συζυγούς προβλήματος	54
5.2	Χρήση της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών	54
5.3	Γένεση πλέγματος στο χωρίο επίλυσης	56
5.4	Διακριτοποίηση με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων	58
5.4.1	Διακριτοποίηση της εξίσωσης της ορμής	59
5.4.1.1	Διακριτοποίηση του όρου μεταφοράς	61
5.4.1.2	Διακριτοποίηση του όρου διάχυσης	63
5.4.1.3	Διακριτοποίηση των όρων πηγής	64
5.4.2	Τελική έκφραση της εξίσωσης μεταφοράς-διάχυσης	64
5.5	Αλγόριθμος SIMPLE	65
6	Πιστοποίηση της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών	69
6.1	Περιγραφή του προβλήματος	70
6.1.1	Γεωμετρία του προβλήματος	72
6.2	Εφαρμογή της μεθόδου	73
6.2.1	Εφαρμογή για $Re=100$	76
6.2.2	Εφαρμογή για $Re=350$	86
6.2.3	Εφαρμογή για $Re=1000$	95
7	Ανακεφαλαίωση & Συμπεράσματα	103
	Βιβλιογραφία	107

Κεφάλαιο 1

Αιτιοκρατικές μέθοδοι βελτιστοποίησης & Υπολογιστική Ρευστοδυναμική

Η υπολογιστική ρευστοδυναμική (*Computational Fluid Dynamics, CFD*) είναι ο κλάδος της επιστήμης της μηχανικής των ρευστών όπου χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση και την ανάλυση προβλημάτων που αφορούν ροές ρευστών. Η ανάπτυξη της συνάδει με την ανάπτυξη των αριθμητικών μεθόδων και της επιστήμης των υπολογιστών και στοχεύει στην άρση των σημαντικών περιορισμών που η ρευστοδυναμική αντιμετώπιζε στις αρχές εξέλιξής της, λόγω των μειωμένων δυνατοτήτων αναλυτικής επίλυσης των εξισώσεων που περιγράφουν τη ροή ενός ρευστού.

Η ανάπτυξη της επιστήμης της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής είναι παράλληλη με εκείνη των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Ως εργαλείο, με την αυξανόμενη ισχύ και χρησιμότητα των ηλεκτρονικών υπολογιστών, καταφέρνει να δώσει λύσεις σε όλο και δυσκολότερα προβλήματα που αφορούν τη ρευστοδυναμική. Επιπλέον, με την περαιτέρω εξέλιξη των υπολογιστών και της υπολογιστικής ισχύος, είναι δυνατόν να εφαρμοστούν νέες μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης, που με τη σειρά τους είναι σε θέση να δώσουν ακριβέστερες λύσεις στα επιλυόμενα προβλήματα. Είναι προφανές επομένως ότι ο κλάδος της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής προοδεύει υποβοηθούμενος πάντοτε από την εξέλιξη στο πεδίο των ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Στην σύγχρονη εποχή η επίλυση των προβλημάτων δεν είναι αρκετή από μόνη της. Υπάρχει πλέον η ανάγκη να διερευνάται το κατά πόσο η κάθε λύση σε ένα πρόβλημα

είναι η βέλτιστη ή το κατά πόσο ο τρόπος με τον οποίο καταλήξαμε σε αυτή είναι βέλτιστος. Η αναγκαιότητα αυτή έφερε με τη σειρά της την ανάπτυξη των μεθόδων βελτιστοποίησης, οι οποίες καθιερώθηκαν ως ένα βασικό εργαλείο για έναν μηχανικό. Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης εφαρμόζονται σε πληθώρα προβλημάτων διαφορετικής φύσης, και αναμφισβήτητα συνεισφέρουν στην εύρεση της βέλτιστης λύσης και σε προβλήματα υπολογιστικής ρευστοδυναμική.

1.1 Εισαγωγή στη βελτιστοποίηση

Η βελτιστοποίηση είναι εκείνη η διαδικασία που ανιχνεύει το χώρο των υποψήφιων λύσεων ενός προβλήματος και οδηγεί στον εντοπισμό της βέλτιστης από όλες τις υποψήφιες λύσεις [1]. Η ταχύτητα με την οποία αυτό επιτυγχάνεται από μία μέθοδο βελτιστοποίησης είναι ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες, καθώς οι υποψήφιες λύσεις είναι συνήθως πολλαπλά άπειρες σε πλήθος.

Κατά την ανίχνευση του χώρου των υποψήφιων λύσεων απαιτείται υποστήριξη από ένα εργαλείο το οποίο θα αξιολογεί την κάθε υποψήφια λύση, ως προς τους στόχους που τέθηκαν. Στα προβλήματα αεροδυναμικής (όπως αυτό που εξετάζεται στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας) ειδικότερα, η ανάλυση ενός σώματος ως προς τα αεροδυναμικά της χαρακτηριστικά μπορεί να γίνει είτε με πειραματικές μετρήσεις είτε με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή και σχετικών υπολογιστικών μοντέλων. Σε ότι πρόκειται να ακολουθήσει, ας θεωρηθεί ότι η υποψήφια λύση αξιολογείται με τη βοήθεια υπολογιστικών μοντέλων και κωδίκων, με τη βοήθεια δηλαδή της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής.

Για ένα σύνθετο πρόβλημα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, ο μηχανικός πρέπει να έχει στη διάθεση του ένα σύνολο στοιχείων απαραίτητων για την επίλυση του. Οι στόχοι και οι ελεύθερες παράμετροι του προβλήματος πρέπει να είναι πλήρως καθορισμένοι. Στις παραμέτρους αυτές θα αποδοθούν τιμές που να εξασφαλίζουν την επιθυμητή αεροδυναμική συμπεριφορά, σύμφωνα με τους στόχους που τέθηκαν. Η αξιολόγηση της λύσης και η διαδικασία της βελτιστοποίησης γενικότερα μπορεί να επιτευχθεί με πολλές διαφορετικές μεθόδους, ανάλογα με τις ανάγκες ή τις ιδιαιτερότητες του προβλήματος ή ανάλογα ακόμα και με τα (υπολογιστικά) μέσα τα οποία

ο μηχανικός διαθέτει.

Οι πρώτες μέθοδοι που αναπτύχθηκαν γύρω από το βέλτιστο σχεδιασμό μίας αεροδυναμικής μορφής με σκοπό να πληρεί συγκεκριμένα αεροδυναμικά κριτήρια, στόχευαν στη διαμόρφωση μίας επιθυμητής κατανομής πίεσης ή ταχύτητας γύρω από την αεροδυναμική μορφή, οι οποίες ήταν γνωστό ότι οδηγούσαν στην επιθυμητή αεροδυναμική συμπεριφορά [2]. Η σωστή επιλογή των κατανομών στηριζόταν στην εμπειρία του μηχανικού. Με δεδομένες τις κατανομές αναζητείτο η γεωμετρία που αντιστοιχεί στην κατανομή αυτή για δεδομένες συνθήκες ροής. Επομένως, η σωστή επιλογή των κατανομών επηρέαζε κατά πολύ τη λύση στην οποία κατέληγε η διαδικασία βελτιστοποίησης.

Αξιοποιώντας πλέον τη ραγδαία αύξηση της υπολογιστικής ισχύος αλλά και τις σύγχρονες εξελίξεις στην υπολογιστική ρευστοδυναμική, η πρόσφατη τάση στην επίλυση προβλημάτων βέλτιστου σχεδιασμού αεροδυναμικών μορφών είναι η διατύπωση τους υπό τη μορφή προβλημάτων βελτιστοποίησης (ελαχιστοποίησης) μιας μαθηματικής συνάρτησης κόστους. Μέσω της συνάρτησης κόστους αποτιμάται η επίδοση της εκάστοτε γεωμετρίας (εφόσον αναφερόμαστε σε διαδικασία βέλτιστου σχεδιασμού) ως προς τα αεροδυναμικά κριτήρια που έχουν τεθεί. Η αποτίμηση αυτή γίνεται μέσω της επίλυσης των εξισώσεων κατάστασης του προβλήματος, δηλαδή των εξισώσεων ροής στα αεροδυναμικά προβλήματα. Το πρόβλημα βέλτιστου σχεδιασμού ανάγεται στο μαθηματικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης μίας αντικειμενικής συνάρτησης, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Ο τρόπος με τον οποίο θα επιτευχθεί η ελαχιστοποίηση αυτή ποικίλει, ανάλογα με τη μέθοδο που χρησιμοποιείται.

Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης τώρα, είναι δυνατόν να κατηγοριοποιηθούν σε δύο γενικές κατηγορίες, τις αιτιοκρατικές και τις στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης [1]. Μία αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης χρησιμοποιεί τη γενικευμένη έννοια της παραγώγου μίας αντικειμενικής συνάρτησης, τιμές τις οποίες απαιτείται να υπολογίσει ή εναλλακτικά να προσεγγίσει. Οι στοχαστικές μέθοδοι, αντιθέτως, χρησιμοποιούν στοιχεία τυχαίας ή οργανωμένα τυχαίας αναζήτησης της βέλτιστης λύσης σε ένα πεδίο πιθανών λύσεων. Οι στοχαστικοί αλγόριθμοι είναι γενικοί (με την έννοια ότι εύκολα προσαρμόζονται για την επίλυση διαφορετικών προβλημάτων), στη γενική πε-

ρίπτωση πιο αργοί από αντίστοιχους αιτιοκρατικούς και προσφέρουν τη δυνατότητα εύρεσης του καθολικού ακρότατου της αντικειμενικής συνάρτησης [26]. Παραδείγματα εφαρμογής στοχαστικών μεθόδων αποτελούν οι εξελικτικοί αλγόριθμοι [24], [25]. Η παρούσα διπλωματική εργασία δεν εξετάζει την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης με στοχαστικές μεθόδους.

Αντίθετα, στην παρούσα εργασία, υλοποιείται μια αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης, μια μέθοδος δηλαδή που βασίζεται όπως αναφέρθηκε στον υπολογισμό της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης. Τέτοιες μέθοδοι (*gradient-based methods*) απαιτούν τον υπολογισμό των πρώτων (συχνά και δεύτερων) παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης, ως προς τις ελεύθερες παραμέτρους του προβλήματος. Τουλάχιστον σε σύνθετα προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, το να υλοποιηθεί μία αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης απαιτεί σημαντικό χρόνο από πλευρά προγραμματισμού και μαθηματικής διατύπωσης ενώ αναμφίβολα είναι δυσκολότερα επεκτάσιμη σε άλλα παρεμφερή προβλήματα, τουλάχιστον σε σύγκριση με τις στοχαστικές μεθόδους. Επιπλέον, δεν εξασφαλίζουν ότι η λύση η οποία επιτυγχάνεται αποτελεί καθολικό ακρότατο της αντικειμενικής συνάρτησης και όχι ένα τοπικό, καθώς η λύση στην οποία καταλήγουν εξαρτάται άμεσα από το σημείο εκκίνησης της επίλυσης. Η σύγκλιση όμως των αιτιοκρατικών μεθόδων είναι ιδιαίτερα γρήγορη, σε σύγκριση πάντα με τις στοχαστικές μεθόδους [1].

Η ταχύτερη σύγκλιση της μεθόδου ενισχύεται εφαρμόζοντας κατάλληλες μεθόδους στον υπολογισμό των απαιτούμενων παραγώγων. Ο υπολογισμός των παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης γίνεται με τη χρήση της συζυγούς μεθόδου η οποία, όπως θα φανεί και στη συνέχεια, παρουσιάζει ιδιαίτερα σημαντικά πλεονεκτήματα.

1.2 Η συζυγής μέθοδος

Οι συζυγείς διατυπώσεις είναι μαθηματικά-υπολογιστικά εργαλεία υπολογισμού της κλίσης (*gradient*) μίας αντικειμενικής συνάρτησης, εξασφαλίζοντας ταυτόχρονα την ικανοποίηση των βασικών εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα που εξετάζεται. Τέτοιες εξισώσεις σε ένα πρόβλημα αεροδυναμικής για παράδειγμα, είναι οι εξισώσεις ροής (εξισώσεις *Euler*, εξισώσεις *Navier-Stokes*). Η μαθηματική διατύπωση της με-

θόδου βασίζεται στη λογική των πολλαπλασιαστών *Lagrange*. Επειδή, σε μία μέθοδο βελτιστοποίησης, η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης χρησιμοποιείται για να την οδηγήσει (λ.χ. με τη μέθοδο της απότομης καθόδου- *steepest descent*) στη λύση που εξασφαλίζει ελάχιστη τιμή αυτής, πολλές φορές όταν αναφέρονται οι συζυγείς μέθoδους υπολογισμού της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης περιλαμβάνεται και η διαδικασία ελαχιστοποίησής της.

Η ανάπτυξη των συζυγών μεθόδων αποσκοπεί στο να καταστεί το υπολογιστικό κόστος ανεξάρτητο του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος. Αυτό γίνεται ιδιαίτερα εμφανές στην περίπτωση που εξετάζεται βελτιστοποίηση της γεωμετρίας αεροδυναμικών μορφών, όπως συμβαίνει στις εφαρμογές της παρούσας διπλωματικής εργασίας, αλλά και γενικότερα σε προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης. Οι μεταβλητές, ως προς τις οποίες υπολογίζονται οι παράγωγοι των αντικειμενικών συναρτήσεων, είναι, στη γενική περίπτωση, πολλές σε αριθμό. Ωστόσο, η συζυγής μέθοδος απαιτεί για τον υπολογισμό των παραγώγων απλά την επίλυση του προβλήματος που μελετάται (ευθύ πρόβλημα) και του συζυγούς που προκύπτει. Έτσι, ανεξάρτητα από το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού, το υπολογιστικό κόστος της συζυγούς μεθόδου παραμένει το ίδιο με το κόστος για την επίλυση δύο πρωτεύοντων προβλημάτων. Ο συνδυασμός μιας αιτιοκρατικής μεθόδου με τη συζυγή μέθοδο για τον υπολογισμό των παραγώγων εξασφαλίζει την εξοικονόμηση σημαντικού υπολογιστικού χρόνου, σε σύγκριση για παράδειγμα με μια στοχαστική μέθοδο η οποία για ένα τόσο μεγάλο πλήθος μεταβλητών σχεδιασμού θα παρουσίαζε αρκετά αργή σύγκλιση.

Η ανάπτυξη των συζυγών μεθόδων για τον υπολογισμό των παραγώγων αντικειμενικών συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση, έχει αποτελέσει μία από τις κυριότερες δραστηριότητες της μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών (ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ). Η συγκεκριμένη μονάδα έχει παράξει πλήθος εργασιών που αφορούν την εφαρμογή της μεθόδου για μόνιμες και μη-μόνιμες, στρωτές και τυρβώδεις ροές, σε δομημένα και μη-δομημένα πλέγματα [9], [10], [13], [11], [12], [14].

Οι συζυγείς μέθοδοι χωρίζονται στη συνεχή και στη διακριτή συζυγή μέθοδο [1].

Και οι δύο μέθοδοι βασίζονται στη δημιουργία μίας επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης που προκύπτει από την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος με πρόσθεση όρων που περιλαμβάνουν τις εξισώσεις του προβλήματος πολλαπλασιασμένες με συζυγείς μεταβλητές. Στη διακριτή συζυγή μέθοδο, οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα και η αντικειμενική συνάρτηση πρώτα διακριτοποιούνται και γραμμικοποιούνται και, στη συνέχεια, μέσω κατάλληλης ανάλυσης, παράγονται οι συζυγείς εξισώσεις σε μητρική μορφή, έτοιμες για αριθμητική επίλυση. Αντίθετα, στη συνεχή συζυγή μέθοδο η διακριτοποίηση ακολουθεί την παραγωγή της συζυγούς εξίσωσης. Η επαυξημένη συνάρτηση προκύπτει από την αναλυτική έκφραση της αντικειμενικής συνάρτησης και των εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα και, επομένως, οι συζυγείς εξισώσεις προκύπτουν και αυτές σε αναλυτική μορφή. Με την επίλυση των συζυγών εξισώσεων προκύπτουν τα πεδία των συζυγών μεταβλητών. Με γνωστά τα πεδία των μεταβλητών ροής και των συζυγών μεταβλητών υπολογίζονται οι παράγωγοι της αντικειμενικής συνάρτησης. Στην παρούσα διπλωματική εργασία εφαρμόζεται αποκλειστικά η συνεχής συζυγής μέθοδος.

1.2.1 Συνεχής συζυγής μέθοδος για χρονικά μη-μόνιμη ροή

Στην εργασία αυτή χρησιμοποιείται η συνεχής συζυγής μέθοδος για χρονικά μη-μόνιμες ροές ασυμπίεστου ρευστού. Σε χρονικά μεταβαλλόμενα φαινόμενα ροής, η αντικειμενική συνάρτηση πρέπει να περιλαμβάνει και την επίδραση των χρονικών όρων, όπως ακριβώς συμβαίνει και με τις εξισώσεις ροής. Επομένως, οι συνεχείς συζυγείς εξισώσεις, που έχουν μορφή αντίστοιχη των εξισώσεων κατάστασης, θα περιλαμβάνουν και αυτές την επίδραση αυτή. Οι εξισώσεις ροής του ευθέως προβλήματος επιλύονται με χρονοπροέλαση (*time-marching*). Οι συζυγείς εξισώσεις επιλύονται επομένως με αντίστοιχο τρόπο, κινούμενοι όμως προς τα πίσω στο χρόνο. Επομένως, για κάθε χρονική στιγμή, στην επίλυση του συζυγούς προβλήματος, είναι απαραίτητη η γνώση ολόκληρου του πεδίου που έχει προκύψει από το ευθύ πρόβλημα [21]. Με τη λύση και του συζυγούς προβλήματος υπολογίζονται οι παράγωγοι και η νέα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Γίνεται αντιληπτό από τα προηγούμενα πως, σε περιπτώσεις που η διαθέσιμη μνήμη είναι περιορισμένη, δεν υπάρχει η δυνατότητα να ακολουθηθεί η παραπάνω διαδικασία,

καθώς είναι αδύνατον να αποθηκεύονται ολόκληρα τα πεδία ροής για κάθε χρονική στιγμή για την οποία το ευθύ πρόβλημα επιλύεται με τη χρήση κάποιου επιλύτη μη-μόνιμων προβλημάτων (ενός αλγορίθμου δηλαδή που εφαρμόζει την τεχνική της χρονοπροέλασης). Μία μέθοδος που χρησιμοποιείται για να ξεπεραστεί το εν λόγω πρόβλημα είναι η χρήση δεικτών μνήμης (*checkpointing*) [21]. Με τη μέθοδο αυτή γίνεται μερική, επιλεκτική αποθήκευση του πεδίου ροής σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Κατά την επίλυση του συζυγούς προβλήματος και πάλι με τον επιλύτη μη-μόνιμων ροών, για κάθε χρονικό βήμα για το οποίο δεν έχουν αποθηκευθεί οι λύσεις του ευθέως προβλήματος, γίνεται ξανά υπολογισμός του πεδίου ροής ξεκινώντας από την κοντινότερη αποθηκευμένη χρονική στιγμή [23].

1.2.2 Μειωμένη δέσμευση μνήμης με τη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών

Στην περίπτωση που το φαινόμενο που εξετάζεται είναι περιοδικό, είναι δυνατόν, να εφαρμοστεί η μέθοδος της ισορροπίας των αρμονικών (*harmonic balance method*) που παράγει ιδιαίτερα ικανοποιητικά αποτελέσματα, με υπολογιστικό κόστος μικρότερο από τη μέθοδο των δεικτών μνήμης και δεσμεύοντας, στη γενική περίπτωση, ακόμα λιγότερη μνήμη. Με τη μέθοδο αυτή οι μεταβλητές του ευθέως προβλήματος αναλύονται σε σειρές *Fourier* με πεπερασμένο πλήθος συντελεστών. Οι εξισώσεις του μη-μόνιμου προβλήματος αντικαθίστανται από τα αντίστοιχα συστήματα “μόνιμων” εξισώσεων που προκύπτουν από την ανάλυση. Με την επίλυση αυτών προκύπτει ένας πεπερασμένος αριθμός πεδίων ροής (χωρίς απόλυτη φυσική σημασία) σε ισαπέχοντα χρονικά διαστήματα, τα οποία με τη χρήση ενός αντίστροφου μετασχηματισμού δίνουν τις τιμές των μεγεθών κάθε χρονική στιγμή. Άμεση επίδραση στην ακρίβεια της μεθόδου έχει τόσο η συχνότητα του περιοδικού φαινομένου όσο και το πλήθος των αρμονικών που θα χρησιμοποιηθούν, το πλήθος των συντελεστών δηλαδή της σειράς *Fourier* που θα χρησιμοποιηθεί για προσέγγιση των μεταβλητών του προβλήματος.

Έχοντας με αυτόν τον τρόπο αποθηκευμένα πεπερασμένα στον αριθμό πεδία ροής είναι δυνατόν να ακολουθήσει η επίλυση του συζυγούς προβλήματος, το οποίο είναι δυνατόν να προκύψει μέσω δύο διαφορετικών αναλύσεων. Μία πρώτη επιλογή θα ήταν να εφαρμοστεί η συνεχής συζυγής μέθοδος με χρήση των χρονικά μόνιμων εξισώσεων

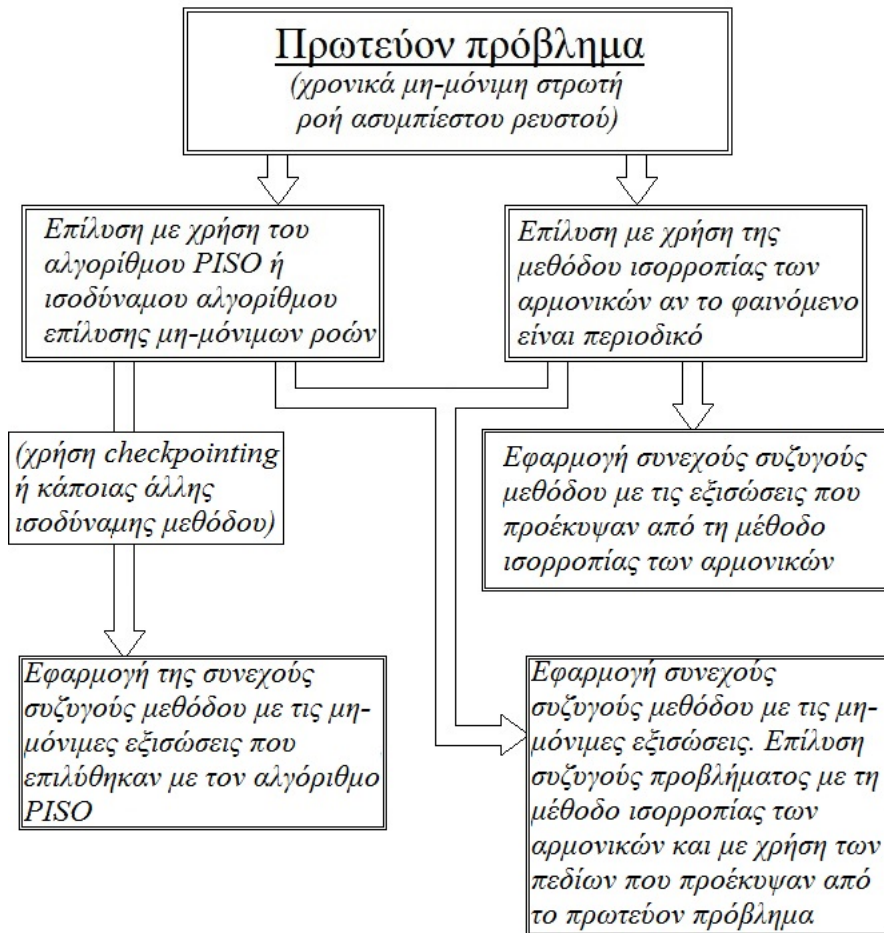
που προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών για το ευθύ πρόβλημα και επομένως να προκύψουν οι συζυγείς εξισώσεις. Οι τελευταίες επιλύονται χρησιμοποιώντας τα πεδία που προέκυψαν από την επίλυση του ευθέως προβλήματος. Εναλλακτικά, είναι δυνατόν να εφαρμοστεί η συνεχής συζυγής μέθοδος στις εξισώσεις του μη-μόνιμου προβλήματος που επιλύθηκε στο ευθύ πρόβλημα. Στις χρονικά μη-μόνιμες συζυγείς εξισώσεις, εφαρμόζεται εκ νέου η μέθοδος ισορροπίας των αρμονικών και προκύπτει το σύστημα των “μόνιμων” χρονικά συζυγών εξισώσεων, η επίλυση των οποίων αξιοποιεί τα διαθέσιμα από την επίλυση του ευθέως προβλήματος πεδία. Και οι δύο παραπάνω υλοποιήσεις παρουσιάζουν εξαιρετικό ενδιαφέρον και η διερεύνηση του κατά πόσο είναι δυνατόν να επιτευχθούν είναι ιδιαίτερα σημαντική.

Οι επιλογές που αναπτύχθηκαν παραπάνω παρουσιάζονται συγκεντρωμένες στο *Σχήμα 1.1*. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, οι εξισώσεις του συζυγούς προβλήματος προκύπτουν μέσω της συνεχούς συζυγούς μεθόδου από τις εξισώσεις ροής του μη-μόνιμου προβλήματος. Τα δύο μη-μόνιμα προβλήματα (ευθύ και συζυγές) επιλύονται με χρήση της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών για τον υπολογισμό των παραγώγων μίας αντικειμενικής συνάρτησης. Κατά την επίλυση του συζυγούς προβλήματος υπάρχουν αποθηκευμένα και χρησιμοποιούνται τα πεδία που προέκυψαν από την επίλυση του ευθέως προβλήματος, καθώς μόνο αυτά απαιτούνται.

1.3 Το λογισμικό OpenFOAM (Field Operation And Manipulation)

Στις εφαρμογές τις παρούσας διπλωματικής εργασίας γίνεται χρήση του *OpenFOAM*, ενός ελεύθερου πακέτου λογισμικού, ανεπτυγμένο από την OpenCFD, το οποίο παρέχει τη δυνατότητα επίλυσης φυσικών προβλημάτων. Αξίζει να σημειωθεί ακόμη πως το OpenFOAM είναι λογισμικό ανοιχτού πηγαίου κώδικα, γραμμένου σε γλώσσα προγραμματισμού *C++*. Επομένως προσφέρει στο χρήστη τη δυνατότητα τόσο να τροποποιήσει τους κώδικες ούτως ώστε να εξυπηρετούν τις ανάγκες του και τις ιδιαιτερότητες του προβλήματος που αντιμετωπίζει, όσο και να αναπτύξει νέους κώδικες χρησιμοποιώντας έτοιμα εργαλεία που το λογισμικό περιλαμβάνει.

Η ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ έχει ενεργή συμμετοχή στον προγραμματισμό και την προέκταση του πηγαίου κώδικα του εν λόγω λογισμικού. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, η



Σχήμα 1.1: Διαφορετικές επιλογές για εφαρμογή της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών. Διακρίνονται ως προς το αν το πρόβλημα επιλύεται στο πεδίο του χρόνου ή σε αυτό των συχνοτήτων.

χρήση του *OpenFOAM* την επίλυση μη-μόνιμων στρωτών ροών ασυμπίεστου ρευστού σε υπολογιστικά πλέγματα που αναπτύσσονται επίσης με το λογισμικό αυτό. Χρησιμοποιήθηκαν κώδικες που αναπτύχθηκαν ως προέκταση εκείνων που η ΜΠΥΡ&Β είχε ήδη δημιουργήσει. Η οπτικοποίηση των ροών που προλέγονται γίνεται με τη χρήση του γραφικού περιβάλλοντος του λογισμικού (*paraview*).

Κεφάλαιο 2

Αλγόριθμος PISO

Ένας συχνά χρησιμοποιούμενος επιλύτης χρονικά μη-μόνιμων προβλημάτων ροών ασυμπίεστου ρευστού είναι ο αλγόριθμος *PISO* (*Pressure Implicit with Splitting of Operators*) [22]. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος αποτελεί μία τυπική εφαρμογή της μεθόδου χρονοπροέλασης. Οι εξισώσεις *Navier-Stokes* που περιγράφουν το εν λόγω πρόβλημα γράφονται σε διανυσματική συντηρητική μορφή ως εξής:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2.0.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{U}) = -\nabla p \quad (2.0.2)$$

όπου με \mathbf{U} συμβολίζεται το διάνυσμα της ταχύτητας και με p το μέγεθος της πίεσης διαιρεμένο με την πυκνότητα. Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων είναι μη-γραμμικό. Απαιτείται γραμμικοποίηση του όρου μεταφοράς ενώ υπάρχει η ανάγκη επιβολής ενός τρόπου σύζευξης της ταχύτητας και της πίεσης.

2.1 Σύζευξη ταχύτητας-πίεσης και αλγόριθμος επίλυσης

Η εξίσωση της ορμής 2.0.2 είναι δυνατό να γραφεί σε ημι-διακριτή μορφή:

$$a_P \mathbf{U}_P = \mathbf{H}(\mathbf{U}) - \nabla p \quad (2.1.1)$$

Η διαδικασία διακριτοποίησης μέσω της οποίας προκύπτει η παραπάνω σχέση αποφεύγεται στο παρόν κεφάλαιο ωστόσο παρατίθεται αναλυτικά σε επόμενο κεφάλαιο

της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Αναφέρεται παρόλα αυτά ότι με με δείκτη P ορίζονται οι ταχύτητες στο κέντρο ενός μελετούμενου όγκου ελέγχου (ενός υπολογιστικού χωρίου διακριτοποιημένου με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων). Οι συντελεστές a_P και a_N είναι συναρτήσεις της ταχύτητας \mathbf{U} . Ο υπολογισμός των συντελεστών a_P και a_N γίνεται με τη χρήση ενός ήδη υπάρχοντος πεδίου ταχύτητας \mathbf{U} από προηγούμενη χρονική στιγμή.

Ο όρος $\mathbf{H}(\mathbf{U})$ αποτελείται από το μητρώο των συντελεστών για κάθε γειτονική κυψέλη, πολλαπλασιασμένο με τις αντίστοιχες ταχύτητες, που έχει προκύψει από τη διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς και διάχυσης και από το μητρώο με τους συντελεστές της διακριτοποίησης του χρονικού όρου, με κάποιο χρονικό βήμα, και κάθε όρου πηγής.

Η εξίσωση της συνέχειας διακριτοποιείται ως εξής:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \sum_{faces} \mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_f = 0 \quad (2.1.2)$$

Γράφοντας την εξίσωση 2.1.1 ως προς \mathbf{U}_P , προκύπτει

$$\mathbf{U}_P = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{U})}{a_P} - \frac{1}{a_P} \nabla p \quad (2.1.3)$$

Οι ταχύτητες στις έδρες του κάθε όγκου ελέγχου υπολογίζονται με παρεμβολή:

$$\mathbf{U}_f = \left(\frac{\mathbf{H}(\mathbf{U})}{a_P} \right)_f - \left(\frac{1}{a_P} \nabla p \right)_f \quad (2.1.4)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση 2.1.4 στην διακριτοποιημένη εξίσωση της συνέχειας 2.1.2, προκύπτει η εξίσωση της πίεσης:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{a_P} \nabla p \right) = \nabla \cdot \frac{\mathbf{H}(\mathbf{U})}{a_P} = \sum_{faces} \mathbf{S} \cdot \left(\frac{\mathbf{H}(\mathbf{U})}{a_P} \right)_f \quad (2.1.5)$$

Η διακριτοποιημένη μορφή του συστήματος των εξισώσεων Navier-Stokes, όπως προ-

έκυψε είναι:

$$a_P \mathbf{U}_P = \mathbf{H}(\mathbf{U}) - \sum_{faces} \mathbf{S}(p)_f \quad (2.1.6)$$

$$\sum_{faces} \mathbf{S} \cdot \left(\frac{1}{a_P} \nabla p \right)_f = \sum_{faces} \mathbf{S} \cdot \left(\frac{\mathbf{H}(\mathbf{U})}{a_P} \right)_f \quad (2.1.7)$$

Τέλος, η ροή μάζας σε κάθε έδρα δίνεται από τη σχέση:

$$F = \mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_f = \mathbf{S} \cdot \left[\left(\frac{\mathbf{H}(\mathbf{U})}{a_P} \right)_f - \left(\frac{1}{a_P} \nabla p \right)_f \right] \quad (2.1.8)$$

Ο αλγόριθμος επίλυσης *PISO* ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

- Επιλύεται η διακριτοποιημένη εξίσωση ορμής 2.1.6, με τη χρήση του ήδη υπάρχοντος πεδίου πίεσης, και προκύπτει μια εκτίμηση του πεδίου ταχύτητας.
- Με το πεδίο ταχύτητας του προηγούμενου βήματος, σχηματίζεται το μητρώο $\mathbf{H}(\mathbf{U})$ και επιλύεται η εξίσωση της πίεσης 2.1.7. Έτσι προκύπτει μια εκτίμηση του πεδίου πίεσης.
- Με το νέο πεδίο πίεσης και μέσω της σχέσης 2.1.8 υπολογίζεται η ροή μάζας σε κάθε έδρα των όγκων ελέγχου. Μέσω της σχέσης 2.1.3 διορθώνεται το πεδίο ταχύτητας.

Τα παραπάνω βήματα επαναλαμβάνονται μέχρι να ικανοποιηθεί κάποιο κριτήριο σύγκλισης. Σε περίπτωση που είναι επιθυμητή η επίλυση και του συζυγούς προβλήματος ακολουθείται αντίστοιχη ανάλυση και ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται είναι ο ίδιος. Η απαίτηση για γνώση του πεδίου ταχύτητας που προκύπτει από το ευθύ πρόβλημα στην επίλυση του συζυγούς καλύπτεται, όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, με τη μέθοδο *checkpointing* ή κάποια άλλη ισοδύναμη μέθοδο, [23].

Κεφάλαιο 3

Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών

3.1 Εισαγωγή

Η μέθοδος της ισορροπίας των αρμονικών (*harmonic balance*) [3] είναι μια μέθοδος που είναι δυνατόν να εφαρμοστεί για τη μελέτη μη-μόνιμων, περιοδικών φαινομένων ροής. Περιοδικά καλούνται τα φαινόμενα των οποίων η λύση αναμένεται να είναι μία περιοδική συνάρτηση του χρόνου. Τέτοιου είδους μη-μόνιμα (*unsteady*) προβλήματα προκύπτουν όταν κάποια από τις οριακές συνθήκες μεταβάλλεται με το χρόνο, όχι τυχαία αλλά περιοδικά. Αξίζει επιπλέον να σημειωθεί ότι στα προβλήματα που πρόκειται να εξετασθούν η μεταβολή των οριακών συνθηκών γίνεται εξαναγκασμένα, επιβάλλεται δηλαδή μία συγκεκριμένη συχνότητα ταλάντωσης, κάτι που θα γίνει φανερό και στις εφαρμογές της μεθόδου που θα ακολουθήσουν σε επόμενο κεφάλαιο.

Με την εφαρμογή της συγκεκριμένης μεθόδου οι εξισώσεις που περιγράφουν ένα μη-μόνιμο πρόβλημα αντικαθίστανται από ένα σύστημα εξισώσεων όπου δεν εμφανίζονται χρονικά μεταβαλλόμενοι όροι. Το νέο αυτό σύστημα χρονικά μόνιμων εξισώσεων επιλύεται παράγοντας πεδία τα οποία να μην έχουν απόλυτη φυσική σημασία, ωστόσο συνθέτουν μαζί μέσω μετασχηματισμών τη λύση του προβλήματος. Με αυτόν τον τρόπο δεν απαιτείται κάποια ανάλυση για το ποιο χρονικό βήμα θα χρησιμοποιηθεί, κάτι το οποίο θα ήταν απαραίτητο στην περίπτωση που γινόταν χρήση ενός επιλύτη μη-μόνιμων προβλημάτων. Το χρονικό βήμα επηρεάζει άμεσα την ευστάθεια της λύσης και είναι πάντοτε συνάρτηση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των

υπολογιστικών πλεγμάτων εντός των οποίων επιλύονται τα εκάστοτε προβλήματα.

Η συγκεκριμένη μέθοδος πρωτοχρησιμοποιήθηκε στη μελέτη ηλεκτρικών κυκλωμάτων [3] και συγκεκριμένα για την εύρεση της απόκρισης στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση, της κατάστασης ισορροπίας δηλαδή που επέρχεται μετά το πέρας των μεταβατικών φαινομένων. Αυτό είναι και το σημαντικότερο χαρακτηριστικό της μεθόδου αυτής. Δύναται, δηλαδή, να υπολογίσει τις επιθυμητές αποκρίσεις μόνο κατά το περιοδικό κομμάτι του προβλήματος, παρακάμπτοντας το μεταβατικό στάδιο που προηγείται της μόνιμης κατάστασης. Επομένως, αποφεύγεται ο υπολογισμός του μεταβατικού φαινομένου, κάτι που επιφέρει μεγάλο υπολογιστικό κέρδος στη μελέτη μη-μόνιμων φαινομένων.

Στη μόνιμη πλέον κατάσταση, οι άγνωστες μεταβλητές του εκάστοτε προβλήματος προσεγγίζονται με σειρές *Fourier*, καθώς είναι περιοδικές συναρτήσεις ως προς το χρόνο. Η κεντρική ιδέα της μεθόδου της ισορροπίας των αρμονικών είναι ότι λόγω των σειρών *Fourier*, οι άγνωστοι είναι πλέον οι πεπερασμένοι στον αριθμό συντελεστές της σειράς, οι οποίοι ισούνται σε πλήθος με το διπλάσιο του αριθμού των αρμονικών που χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση του φαινομένου, συν έναν ακόμη σταθερό όρο, που αποτελεί ουσιαστικά και το μέσο χρονικά όρο της συνάρτησης. Πλέον όμως, το πρόβλημα έχει μεταφερθεί στο πεδίο συχνοτήτων (*frequency domain*), και όχι στο πεδίο του χρόνου (*time domain*) όπου και είναι γνωστή η σύνδεση μεταξύ των μεταβλητών ροής μέσω των φυσικών νόμων που διέπουν το πρόβλημα [4]. Με κατάλληλους διακριτούς μετασχηματισμούς, οι οποίοι θα παρουσιαστούν αναλυτικότερα στα εδάφια που ακολουθούν, καθίσταται δυνατή η μετάβαση από το ένα πεδίο στο άλλο και αντίστροφα και, τελικά, η επίλυση του προβλήματος μέσω μίας τέτοιου τύπου επαναληπτικής διαδικασίας.

Ακολουθούν η μαθηματική θεμελίωση της μεθόδου και η εξαγωγή των βασικών τύπων που προκύπτουν από την μαθηματική ανάλυση, ενότητες που βασίζονται σε παλαιότερες εργασίες [3], [4], [6].

3.2 Μαθηματική θεμελίωση

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών, σε αντιδιαστολή με τη μέθοδο χρονοπροέλασης, γίνεται δυνατός ο απ' ευθείας υπολογισμός του περιοδικού φαινομένου που ενδιαφέρει, μέσω προσέγγισης της λύσης με άθροισμα πεπερασμένου αριθμού όρων σειράς Fourier.

Έστω ότι η διαφορική εξίσωση (ή το σύστημα διαφορικών εξισώσεων) που πρέπει να επιλυθεί, είναι της μορφής :

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mathbf{R}(\mathbf{U}(t)) = 0 \quad (3.2.1)$$

όπου $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$ είναι το πεδίο των μεταβλητών ροής που πρέπει να υπολογιστεί, όπως λ.χ. το διάνυσμα της ταχύτητας της ροής στην εξίσωση ορμής, η οποία επιλύεται στην εφαρμογή της παρούσας διπλωματικής εργασίας για την πρόλεξη της ροής ασυμπίεστου συνεκτικού ρευστού που μελετάται.

Ο διαφορικός τελεστής \mathbf{R} αντιπροσωπεύει το “χωρικό υπόλοιπο” (*spatial residual*) των εξισώσεων ροής και περιλαμβάνει τους χρονικά μόνιμους όρους της διαφορικής εξίσωσης η οποία επιλύεται. Κατά κανόνα, είναι μία συνάρτηση του \mathbf{U} , δηλαδή $\mathbf{R}=\mathbf{R}(\mathbf{U}(t))$. Προσεγγίζουμε τα χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία \mathbf{U} και \mathbf{R} μέσω σειρών *Fourier* με τη χρήση N_H συχνοτήτων, με τη χρήση δηλαδή N_H αρμονικών.

Οι όροι γράφονται:

$$\mathbf{U}(t) \doteq \hat{\mathbf{U}}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \left[\hat{\mathbf{U}}_{an} \cos(\omega nt) + \hat{\mathbf{U}}_{bn} \sin(\omega nt) \right] \quad (3.2.2)$$

$$\mathbf{R}(t) \doteq \hat{\mathbf{R}}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \left[\hat{\mathbf{R}}_{an} \cos(\omega nt) + \hat{\mathbf{R}}_{bn} \sin(\omega nt) \right]$$

όπου $\omega = \frac{2\pi}{T}$, με T την περίοδο του φαινομένου, πρακτικά δηλαδή την περίοδο διέγερσης. Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, παρατηρείται ότι είναι επαρκής ο υπολογισμός $2N_H + 1$ πεδίων $(\hat{\mathbf{U}}_0, \hat{\mathbf{U}}_{an}, \hat{\mathbf{U}}_{bn})$, εφόσον αναφερόμαστε συνολικά στη ροή που μελετάται σε όλο το χωρίο, για να προσεγγιστεί με ικανοποιητική ακρίβεια η

χρονικά μεταβαλλόμενη λύση \mathbf{U} του προβλήματος. Τονίζεται ότι τα πεδία $\hat{\mathbf{U}}_{an}$ και $\hat{\mathbf{U}}_{bn}$ που πρέπει να υπολογιστούν, είναι πραγματικά πεδία.

Υπολογίζεται:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \sum_{n=1}^{N_H} \left[-\hat{\mathbf{U}}_{an}\omega n \sin(\omega n t) + \hat{\mathbf{U}}_{bn}\omega n \cos(\omega n t) \right] \quad (3.2.3)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση 3.2.3 στη σχέση 3.2.1 παίρνουμε:

$$\hat{\mathbf{R}}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} (\hat{\mathbf{U}}_{bn}\omega n + \hat{\mathbf{R}}_{an}) \cos(\omega n t) + \sum_{n=1}^{N_H} (-\hat{\mathbf{U}}_{an}\omega n + \hat{\mathbf{R}}_{bn}) \sin(\omega n t) = 0 \quad (3.2.4)$$

Επειδή η παραπάνω σχέση (3.2.4) πρέπει να ικανοποιείται για κάθε χρονική στιγμή, πρέπει να ικανοποιούνται ταυτοτικά οι ακόλουθες $2N_H + 1$ εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_0 &= 0 \\ \hat{\mathbf{U}}_{bn}\omega n + \hat{\mathbf{R}}_{an} &= 0 \quad , \text{ για } n = 1, N_H \\ -\hat{\mathbf{U}}_{an}\omega n + \hat{\mathbf{R}}_{bn} &= 0 \quad , \text{ για } n = 1, N_H \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Από το σύστημα 3.2.5 τίθεται ως στόχος ο υπολογισμός των $\hat{\mathbf{U}}_{an}$ και $\hat{\mathbf{U}}_{bn}$. Η δυσκολία που συναντάται στην επίλυση του συστήματος 3.2.5 είναι ότι, ενώ στο πεδίο του χρόνου υπάρχει σχέση-εξίσωση που συνδέει τους όρους $\mathbf{R}(t)$ με τους αγνώστους $\mathbf{U}(t)$ της αντίστοιχης χρονικής στιγμής, κάτι τέτοιο δεν ισχύει για τα $\hat{\mathbf{R}}_{an}$ και τα $\hat{\mathbf{R}}_{bn}$ σε σχέση με τα $\hat{\mathbf{U}}_{an}$ και τα $\hat{\mathbf{U}}_{bn}$ τα οποία αναφέρονται στο πεδίο συχνοτήτων, αφού κάθε πραγματικό πεδίο $\hat{\mathbf{R}}_{an}$ ή $\hat{\mathbf{R}}_{bn}$ εξαρτάται από όλα τα $\hat{\mathbf{U}}_{an}$ και τα $\hat{\mathbf{U}}_{bn}$, λόγω της μη-γραμμικότητας της σχέσης $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{U})$.

Για να αποφευχθεί η δυσκολία του προσδιορισμού της σύνδεσης των παραπάνω συντελεστών ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία:

- Πραγματοποιείται διακριτοποίηση της λύσης \mathbf{U} και του υπολοίπου \mathbf{R} σε $N_T = 2N_H + 1$ ισομήχη χρονικά διαστήματα μέσα στην περίοδο.

Συγκεκριμένα:

$$\vec{\mathbf{U}}_{hb} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}(t_0) \\ \mathbf{U}(t_0 + \Delta t) \\ \vdots \\ \mathbf{U}(t_0 + T - \Delta t) \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{R}}_{hb} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(t_0) \\ \mathbf{R}(t_0 + \Delta t) \\ \vdots \\ \mathbf{R}(t_0 + T - \Delta t) \end{pmatrix}$$

όπου $\Delta t = \frac{T}{2N_H+1} = \frac{2\pi}{2N_H+1} \cdot \frac{1}{\omega} = \frac{\alpha}{\omega}$, όπου τέθηκε: $\alpha = \frac{2\pi}{2N_H+1}$

- Είναι δυνατό, για κάθε ένα από τα στοιχεία-πεδία \mathbf{U}_{hb} και \mathbf{R}_{hb} , για κάθε διακριτή χρονική στιγμή δηλαδή, να ικανοποιηθούν οι εξισώσεις της χρονικής σειράς *Fourier*. Με αυτόν τον τρόπο, δεδομένου ότι οι άγνωστοι συντελεστές *Fourier* είναι $2N_H + 1$ στον αριθμό, μπορεί να εκφραστεί καθένας συντελεστής $\hat{\mathbf{U}}$ και $\hat{\mathbf{R}}$ συναρτήσεως των άγνωστων τιμών των \mathbf{U} και \mathbf{R} αντίστοιχα, στις $2N_H + 1$ χρονικές στιγμές. Ουσιαστικά, δηλαδή, μέσω ενός διακριτού μετασχηματισμού *Fourier* (*Discrete Fourier Transformation - DFT*) πραγματοποιείται σκόπιμη μετάβαση από το πεδίο των συχνοτήτων και πάλι στο πεδίο του χρόνου για την επίλυση του προβλήματος [4], [6].
- Στη συνέχεια, γίνεται αντικατάσταση των εκφράσεων που θα προκύψουν από το δεύτερο βήμα στο σύστημα 3.2.5. Με αυτόν τον τρόπο, θα προκύψει τελικά ένα νέο σύστημα, διατυπωμένο στο πεδίο του χρόνου, όπου όμως θα συσχετίζει σε κάθε του εξίσωση τα \mathbf{U} και \mathbf{R} στις $2N_H + 1$ στιγμές μέσα στην περίοδο, για τα οποία όμως υπάρχει διαθέσιμη η συσχέτιση, μέσω της σχέσης $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{U})$. Με γνωστά τα πεδία \mathbf{U} και \mathbf{R} και με τη χρήση του αντίστροφου διακριτού μετασχηματισμού *Fourier*, προκύπτουν τα πραγματικά πεδία των συντελεστών που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση των μεγεθών σε σειρές *Fourier*.

3.2.1 Εφαρμογή της μεθόδου για δύο Αρμονικές

Ακολουθεί η διαδικασία η οποία περιγράφηκε σε μία εφαρμογή με δύο αρμονικές [3], δηλαδή για $N_H = 2$. Σε επόμενη παράγραφο θα παρουσιαστούν και οι γενικευμένοι τύποι, όπως προκύπτουν για περισσότερες αρμονικές. Για δύο αρμονικές ($N_H = 2$) προκύπτει $\Delta t = \frac{T}{5}$. Το πεδίο της ροϊκής λύσης $\mathbf{U}(t)$, προσεγγιζόμενο με σειρές

Fourier, γράφεται:

$$\mathbf{U}(t) = \hat{\mathbf{U}}_0 + \hat{\mathbf{U}}_{a1} \cos \omega t + \hat{\mathbf{U}}_{b1} \sin \omega t + \hat{\mathbf{U}}_{a2} \cos 2\omega t + \hat{\mathbf{U}}_{b2} \sin 2\omega t \quad (3.2.6)$$

Τελικά είναι αναγκαίο να υπολογιστούν πέντε (5) άγνωστοι, οι συντελεστές-πεδία $\hat{\mathbf{U}}_0$, $\hat{\mathbf{U}}_{a1}$, $\hat{\mathbf{U}}_{b1}$, $\hat{\mathbf{U}}_{a2}$ και $\hat{\mathbf{U}}_{b2}$. Σε μία περίοδο διακρίνουμε επίσης πέντε πεδία τιμών της λύσης \mathbf{U} , εφόσον άλλωστε $N_T = 2N_H + 1 = 5$, τα οποία, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως, είναι:

$$\vec{\mathbf{U}}_{hb} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}(t_0) \\ \mathbf{U}(t_0 + \Delta t) \\ \mathbf{U}(t_0 + 2\Delta t) \\ \mathbf{U}(t_0 + 3\Delta t) \\ \mathbf{U}(t_0 + 4\Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{U}_4 \end{pmatrix}$$

Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) &= \frac{e^{j\omega\Delta t} + e^{-j\omega\Delta t}}{2} \\ \cos(2\omega t) &= \frac{e^{j2\omega\Delta t} + e^{-j2\omega\Delta t}}{2} \\ \sin(\omega t) &= \frac{e^{j\omega\Delta t} - e^{-j\omega\Delta t}}{2j} = j \cdot \frac{e^{-j\omega\Delta t} - e^{j\omega\Delta t}}{2} \\ \sin(2\omega t) &= j \cdot \frac{e^{-j2\omega\Delta t} + e^{j2\omega\Delta t}}{2} \end{aligned}$$

Οπότε, η σχέση 3.2.6, μετά από πράξεις δίνει:

$$\mathbf{U}(t) = \tilde{\mathbf{U}}_{-2} e^{-j2\omega\Delta t} + \tilde{\mathbf{U}}_{-1} e^{-j\omega\Delta t} + \tilde{\mathbf{U}}_0 + \tilde{\mathbf{U}}_1 e^{j\omega\Delta t} + \tilde{\mathbf{U}}_2 e^{j2\omega\Delta t} \quad (3.2.7)$$

όπου τα μιγαδικά πεδία τιμών $\tilde{\mathbf{U}}_{-2}$, $\tilde{\mathbf{U}}_{-1}$, $\tilde{\mathbf{U}}_0$, $\tilde{\mathbf{U}}_1$ και $\tilde{\mathbf{U}}_2$ ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{-2} &= \frac{\hat{\mathbf{U}}_{a2} + j\hat{\mathbf{U}}_{b2}}{2}, \quad \tilde{\mathbf{U}}_{-1} = \frac{\hat{\mathbf{U}}_{a1} + j\hat{\mathbf{U}}_{b1}}{2}, \quad \tilde{\mathbf{U}}_0 = \hat{\mathbf{U}}_0, \\ \tilde{\mathbf{U}}_2 &= \frac{\hat{\mathbf{U}}_{a2} - j\hat{\mathbf{U}}_{b2}}{2}, \quad \tilde{\mathbf{U}}_1 = \frac{\hat{\mathbf{U}}_{a1} - j\hat{\mathbf{U}}_{b1}}{2} \end{aligned}$$

Θεωρώντας, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η χρονική αφετηρία είναι το μηδέν, δηλαδή ότι $t_0 = 0$, και ικανοποιώντας το άθροισμα *Fourier* για δύο αρμονικές, με κάθε ένα από τα πέντε χρονικά ισαπέχοντα πεδία τιμών της λύσης $[\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4]^T$, καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\left\{ \begin{array}{l} [0 \cdot \Delta t] : \mathbf{U}_0 = \tilde{\mathbf{U}}_{-2}e^{-j0\omega\Delta t} + \tilde{\mathbf{U}}_{-1}e^{-j0\omega\Delta t} + \tilde{\mathbf{U}}_0 + \tilde{\mathbf{U}}_1e^{j0\omega\Delta t} + \tilde{\mathbf{U}}_2e^{j0\omega\Delta t} \\ [1 \cdot \Delta t] : \mathbf{U}_1 = \tilde{\mathbf{U}}_{-2}e^{-j2\omega\Delta t} + \tilde{\mathbf{U}}_{-1}e^{-j\omega\Delta t} + \tilde{\mathbf{U}}_0 + \tilde{\mathbf{U}}_1e^{j\omega\Delta t} + \tilde{\mathbf{U}}_2e^{j2\omega\Delta t} \\ [2 \cdot \Delta t] : \mathbf{U}_2 = \tilde{\mathbf{U}}_{-2}e^{-j4\omega\Delta t} + \tilde{\mathbf{U}}_{-1}e^{-j2\omega\Delta t} + \tilde{\mathbf{U}}_0 + \tilde{\mathbf{U}}_1e^{j2\omega\Delta t} + \tilde{\mathbf{U}}_2e^{j4\omega\Delta t} \\ [3 \cdot \Delta t] : \mathbf{U}_3 = \tilde{\mathbf{U}}_{-2}e^{-j6\omega\Delta t} + \tilde{\mathbf{U}}_{-1}e^{-j3\omega\Delta t} + \tilde{\mathbf{U}}_0 + \tilde{\mathbf{U}}_1e^{j3\omega\Delta t} + \tilde{\mathbf{U}}_2e^{j6\omega\Delta t} \\ [4 \cdot \Delta t] : \mathbf{U}_4 = \tilde{\mathbf{U}}_{-2}e^{-j8\omega\Delta t} + \tilde{\mathbf{U}}_{-1}e^{-j4\omega\Delta t} + \tilde{\mathbf{U}}_0 + \tilde{\mathbf{U}}_1e^{j4\omega\Delta t} + \tilde{\mathbf{U}}_2e^{j8\omega\Delta t} \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} [0 \cdot \Delta t] : \mathbf{U}_0 = \tilde{\mathbf{U}}_{-2}\phi^0 + \tilde{\mathbf{U}}_{-1}\phi^0 + \tilde{\mathbf{U}}_0\phi^0 + \tilde{\mathbf{U}}_1\phi^0 + \tilde{\mathbf{U}}_2\phi^0 \\ [1 \cdot \Delta t] : \mathbf{U}_1 = \tilde{\mathbf{U}}_{-2}\phi^{-2} + \tilde{\mathbf{U}}_{-1}\phi^{-1} + \tilde{\mathbf{U}}_0\phi^0 + \tilde{\mathbf{U}}_1\phi^1 + \tilde{\mathbf{U}}_2\phi^2 \\ [2 \cdot \Delta t] : \mathbf{U}_2 = \tilde{\mathbf{U}}_{-2}\phi^{-4} + \tilde{\mathbf{U}}_{-1}\phi^{-2} + \tilde{\mathbf{U}}_0\phi^0 + \tilde{\mathbf{U}}_1\phi^2 + \tilde{\mathbf{U}}_2\phi^4 \\ [3 \cdot \Delta t] : \mathbf{U}_3 = \tilde{\mathbf{U}}_{-2}\phi^{-6} + \tilde{\mathbf{U}}_{-1}\phi^{-3} + \tilde{\mathbf{U}}_0\phi^0 + \tilde{\mathbf{U}}_1\phi^3 + \tilde{\mathbf{U}}_2\phi^6 \\ [4 \cdot \Delta t] : \mathbf{U}_4 = \tilde{\mathbf{U}}_{-2}\phi^{-8} + \tilde{\mathbf{U}}_{-1}\phi^{-4} + \tilde{\mathbf{U}}_0\phi^0 + \tilde{\mathbf{U}}_1\phi^4 + \tilde{\mathbf{U}}_2\phi^8 \end{array} \right. \quad (3.2.8)$$

όπου τέθηκε: $\phi = e^{j\omega\Delta t}$, $\phi^2 = e^{j2\omega\Delta t}$ και ούτω καθεξής.

Ισχύει γενικότερα:

$$\phi^{-q} = \phi^{-q \pm \rho(2N_H+1)} \quad (3.2.9)$$

και, επομένως, εδώ έχουμε:

$$\phi^{-1} = \phi^4, \quad \phi^{-2} = \phi^3, \quad \phi^{-8} = \phi^{-3} = \phi^2 = \phi^7 = \phi^{12} \quad \text{κ.ο.κ}$$

Για λόγους απλότητας στη γραφή, υιοθετείται η αλλαγή δεικτών:

$$\tilde{\mathbf{U}}_{-2} \equiv \tilde{\mathbf{U}}_3, \quad \tilde{\mathbf{U}}_{-1} \equiv \tilde{\mathbf{U}}_4$$

Έτσι, μετά την αλλαγή δεικτών και κάνοντας χρήση της ταυτότητας 3.2.9, το σύστημα 3.2.8 είναι δυνατό να γραφεί σε μητρώϊκή μορφή ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \phi^1 & \phi^2 & \phi^3 & \phi^4 \\ 1 & \phi^2 & \phi^4 & \phi^6 & \phi^8 \\ 1 & \phi^3 & \phi^6 & \phi^9 & \phi^{12} \\ 1 & \phi^4 & \phi^8 & \phi^{12} & \phi^{16} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_0 \\ \tilde{\mathbf{U}}_1 \\ \tilde{\mathbf{U}}_2 \\ \tilde{\mathbf{U}}_3 \\ \tilde{\mathbf{U}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{U}_4 \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

Υπενθυμίζεται, σε αυτό το σημείο, πως το μητρώο των συντελεστών και το διάνυσμα στο αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης (3.2.10) περιλαμβάνουν ως στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς, ενώ το γινόμενο τους, δηλαδή το μητρώο στο δεξί μέλος της εν λόγω εξίσωσης, περιλαμβάνει μόνο πραγματικούς αριθμούς, εφόσον περιέχει τα πεδία λύσεων \mathbf{U} της ροής στις πέντε χρονικές στιγμές στις οποίες αναλύεται το πρόβλημα. Είναι εύκολο να υπολογιστεί αναλυτικά ο αντίστροφος του μητρώου που αποτελεί το συντελεστή των αγνώστων $\tilde{\mathbf{U}}_i$, και επομένως να διατυπωθεί απευθείας η λύση του συστήματος. Η αντιστροφή του συγκεκριμένου μητρώου επιτυγχάνεται με τη χρήση δύο βασικών θεωρημάτων:

Θεώρημα 1. [3]

Έστω $\phi = e^{j\omega\Delta t} = e^{j2\pi\frac{\Delta t}{T}}$. Αποδεικνύεται ότι:

$$1 + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^{2N_H} = 0$$

Θεώρημα 2. [3]

Αν r και q ακέραιοι αριθμοί ($r, q \in \mathbb{Z}$) αποδεικνύεται ότι:

$$\sum_{\kappa=0}^{2N_H} \phi^{\kappa \cdot r} = \begin{cases} 0 & , \quad \alpha\nu \quad r \neq q \cdot (2N_H + 1) \\ 2N_H + 1 & , \quad \alpha\nu \quad r = q \cdot (2N_H + 1) \end{cases}$$

Ορίζουμε το μιγαδικό πίνακα M και το συζυγή του \overline{M} :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \phi^1 & \phi^2 & \phi^3 & \phi^4 \\ 1 & \phi^2 & \phi^4 & \phi^6 & \phi^8 \\ 1 & \phi^3 & \phi^6 & \phi^9 & \phi^{12} \\ 1 & \phi^4 & \phi^8 & \phi^{12} & \phi^{16} \end{bmatrix}, \quad \overline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \overline{\phi^1} & \overline{\phi^2} & \overline{\phi^3} & \overline{\phi^4} \\ 1 & \overline{\phi^2} & \overline{\phi^4} & \overline{\phi^6} & \overline{\phi^8} \\ 1 & \overline{\phi^3} & \overline{\phi^6} & \overline{\phi^9} & \overline{\phi^{12}} \\ 1 & \overline{\phi^4} & \overline{\phi^8} & \overline{\phi^{12}} & \overline{\phi^{16}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \phi^{-1} & \phi^{-2} & \phi^{-3} & \phi^{-4} \\ 1 & \phi^{-2} & \phi^{-4} & \phi^{-6} & \phi^{-8} \\ 1 & \phi^{-3} & \phi^{-6} & \phi^{-9} & \phi^{-12} \\ 1 & \phi^{-4} & \phi^{-8} & \phi^{-12} & \phi^{-16} \end{bmatrix}$$

όπου έγινε χρήση της ταυτότητας: $\overline{\phi^\kappa} = \phi^{-\kappa}$, με $\kappa \in \mathbb{Z}$, η οποία εύκολα αποδεικνύεται.

Είναι προφανές ότι ο γενικός τύπος για τα στοιχεία του M είναι: $M_{i,j} = \phi^{(i-1)(j-1)}$ και ομοίως ο αντίστοιχος γενικός τύπος για τα στοιχεία του συζυγούς του μητρώου είναι: $\overline{M}_{i,j} = \phi^{-(i-1)(j-1)}$, όπου $i, j \in N$ με $1 \leq i, j \leq N_T$. Υπενθυμίζεται ότι έχει οριστεί: $N_T = 2N_H + 1$. Για την εκτέλεση της πράξης του πολλαπλασιασμού μεταξύ των δύο μητρώων ($M \cdot \overline{M}$) ξεχωρίζουν οι εξής περιπτώσεις:

(i) πολλαπλασιασμός της i γραμμής του M με την i στήλη του M :

$$\sum_{\kappa=1}^{N_T} \phi^{(i-1)(\kappa-1)} \cdot \phi^{-(\kappa-1)(i-1)} = \sum_{\kappa=1}^{N_T} (\phi \cdot \overline{\phi})^{(i-1)(\kappa-1)} = N_T$$

(ii) πολλαπλασιασμός της i γραμμής του M με την j στήλη του M :

$$\sum_{\kappa=1}^{N_T} \phi^{(i-1)(\kappa-1)} \cdot \phi^{-(\kappa-1)(j-1)} = \sum_{\kappa=1}^{N_T} \phi^{(i-1)(\kappa-1)} \cdot \phi^{(\kappa-1)(-j+1)} = \sum_{\kappa=1}^{N_T} \phi^{(i-j)(\kappa-1)} = \sum_{\kappa=0}^{2N_H} \phi^{\kappa \cdot (i-j)} = 0$$

λόγω του Θεωρήματος 2 και επειδή: $|i - j| < N_T \implies (i - j) \neq q \cdot (2N_H + 1), \forall q \in \mathbb{Z}$.

Εκτελώντας τις πράξεις υπολογίζεται:

$$M \cdot \overline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \phi^1 & \phi^2 & \phi^3 & \phi^4 \\ 1 & \phi^2 & \phi^4 & \phi^6 & \phi^8 \\ 1 & \phi^3 & \phi^6 & \phi^9 & \phi^{12} \\ 1 & \phi^4 & \phi^8 & \phi^{12} & \phi^{16} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \overline{\phi^1} & \overline{\phi^2} & \overline{\phi^3} & \overline{\phi^4} \\ 1 & \overline{\phi^2} & \overline{\phi^4} & \overline{\phi^6} & \overline{\phi^8} \\ 1 & \overline{\phi^3} & \overline{\phi^6} & \overline{\phi^9} & \overline{\phi^{12}} \\ 1 & \overline{\phi^4} & \overline{\phi^8} & \overline{\phi^{12}} & \overline{\phi^{16}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

και, επομένως, είναι προφανές ότι:

$$M^{-1} = \frac{1}{5}\overline{M} \quad , \quad \text{ή στη γενική περίπτωση:} \quad M^{-1} = \frac{1}{N_T}\overline{M} \quad (3.2.11)$$

Τελικά, η εξίσωση 3.2.10 γράφεται:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_0 \\ \tilde{\mathbf{U}}_1 \\ \tilde{\mathbf{U}}_2 \\ \tilde{\mathbf{U}}_3 \\ \tilde{\mathbf{U}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \phi^{-1} & \phi^{-2} & \phi^{-3} & \phi^{-4} \\ 1 & \phi^{-2} & \phi^{-4} & \phi^{-6} & \phi^{-8} \\ 1 & \phi^{-3} & \phi^{-6} & \phi^{-9} & \phi^{-12} \\ 1 & \phi^{-4} & \phi^{-8} & \phi^{-12} & \phi^{-16} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{U}_4 \end{bmatrix} \quad (3.2.12)$$

Κατ' αντιστοιχία, τα υπόλοιπα των εξισώσεων ροής, εξαιρουμένων των χρονικών όρων (χάριν συντομίας, τα "χωρικά υπόλοιπα"), γράφονται αναλυμένα σε σειρές *Fourier*, με χρήση δύο αρμονικών, ως εξής:

$$\mathbf{R}(t) = \hat{\mathbf{R}}_0 + \hat{\mathbf{R}}_{a1} \cos \omega t + \hat{\mathbf{R}}_{b1} \sin \omega t + \hat{\mathbf{R}}_{a2} \cos 2\omega t + \hat{\mathbf{R}}_{b2} \sin 2\omega t \quad (3.2.13)$$

Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια διαδικασία που περιγράφηκε προηγουμένως, προκύπτει μία ακόμη εξίσωση, αντίστοιχη της 3.2.12, γραμμένη όμως για τα χωρικά υπόλοιπα \mathbf{R}_i :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_0 \\ \tilde{\mathbf{R}}_1 \\ \tilde{\mathbf{R}}_2 \\ \tilde{\mathbf{R}}_3 \\ \tilde{\mathbf{R}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \phi^{-1} & \phi^{-2} & \phi^{-3} & \phi^{-4} \\ 1 & \phi^{-2} & \phi^{-4} & \phi^{-6} & \phi^{-8} \\ 1 & \phi^{-3} & \phi^{-6} & \phi^{-9} & \phi^{-12} \\ 1 & \phi^{-4} & \phi^{-8} & \phi^{-12} & \phi^{-16} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_4 \end{bmatrix} \quad (3.2.14)$$

όπου έχουν οριστεί κατ' αντιστοιχία τα μιγαδικά πεδία τιμών:

$$\tilde{\mathbf{R}}_{-2} = \tilde{\mathbf{R}}_3 = \frac{\hat{\mathbf{R}}_{a2} + j\hat{\mathbf{R}}_{b2}}{2} \quad , \quad \tilde{\mathbf{R}}_{-1} = \tilde{\mathbf{R}}_4 = \frac{\hat{\mathbf{R}}_{a1} + j\hat{\mathbf{R}}_{b1}}{2} \quad , \quad \tilde{\mathbf{R}}_0 = \hat{\mathbf{R}}_0,$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_2 = \frac{\hat{\mathbf{R}}_{a2} - j\hat{\mathbf{R}}_{b2}}{2} \quad , \quad \tilde{\mathbf{R}}_1 = \frac{\hat{\mathbf{R}}_{a1} - j\hat{\mathbf{R}}_{b1}}{2}$$

Γνωρίζοντας τα διανύσματα των πεδίων των μεταβλητών ροής και των χωρικών υπο-

λοιπών των ισχυουσών εξισώσεων, και για τις πέντε χρονικές στιγμές που επιλέχθηκαν λόγω της χρήσης δύο αρμονικών, $\vec{\mathbf{U}} = [\mathbf{U}_0 , \mathbf{U}_1 , \mathbf{U}_2 , \mathbf{U}_3 , \mathbf{U}_4]^T$ και $\vec{\mathbf{R}} = [\mathbf{R}_0 , \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 , \mathbf{R}_3 , \mathbf{R}_4]^T$, και επιλύοντας τα συστήματα 3.2.12 και 3.2.14, υπολογίζονται απευθείας τα μιγαδικά πεδία $\tilde{\mathbf{U}}_i$ και $\tilde{\mathbf{R}}_i$.

Με γνωστά τα μιγαδικά πεδία $\tilde{\mathbf{U}}_i$ και $\tilde{\mathbf{R}}_i$ και χωρίζοντάς τα σε πραγματικό και φανταστικό μέρος είναι δυνατόν να υπολογιστούν τα πραγματικά διανύσματα:

$$\hat{\vec{\mathbf{U}}} = (\hat{\mathbf{U}}_0, \hat{\mathbf{U}}_{a1}, \hat{\mathbf{U}}_{b1}, \hat{\mathbf{U}}_{a2}, \hat{\mathbf{U}}_{b2})^T \text{ και } \hat{\vec{\mathbf{R}}} = (\hat{\mathbf{R}}_0, \hat{\mathbf{R}}_{a1}, \hat{\mathbf{R}}_{b1}, \hat{\mathbf{R}}_{a2}, \hat{\mathbf{R}}_{b2})^T$$

Αυτό που ενδιαφέρει ωστόσο είναι να διατυπωθούν δύο συστήματα που θα εκφράζουν απευθείας τα $\hat{\vec{\mathbf{U}}}$ και $\hat{\vec{\mathbf{R}}}$ συσχετισμένα με τα πεδία της λύσης και των χωρικών υπολοίπων $\vec{\mathbf{U}}$ και $\vec{\mathbf{R}}$. Παρατίθενται, εδώ, ξανά οι σχέσεις που δίνουν τα μιγαδικά πεδία τιμών στην περίπτωση που έχουν χρησιμοποιηθεί δύο αρμονικές:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_3 &= \frac{\hat{\mathbf{U}}_{a2} + j\hat{\mathbf{U}}_{b2}}{2} , & \tilde{\mathbf{U}}_4 &= \frac{\hat{\mathbf{U}}_{a1} + j\hat{\mathbf{U}}_{b1}}{2} , & \tilde{\mathbf{U}}_0 &= \hat{\mathbf{U}}_0, \\ \tilde{\mathbf{U}}_2 &= \frac{\hat{\mathbf{U}}_{a2} - j\hat{\mathbf{U}}_{b2}}{2} , & \tilde{\mathbf{U}}_1 &= \frac{\hat{\mathbf{U}}_{a1} - j\hat{\mathbf{U}}_{b1}}{2} \end{aligned}$$

Ισχύει ότι οι μιγαδικοί $\tilde{\mathbf{U}}_2$ και $\tilde{\mathbf{U}}_3$ έχουν το ίδιο πραγματικό μέρος και αντίθετο φανταστικό μέρος ούτως ώστε να καταλήγουμε σε υπολογισμό ίδιων $\hat{\mathbf{U}}_{a2}$ και $\hat{\mathbf{U}}_{b2}$. Αντίστοιχα, το ίδιο ισχύει και για τους μιγαδικούς $\tilde{\mathbf{U}}_1$ και $\tilde{\mathbf{U}}_4$. Ακολουθεί μία διερεύνηση για τους μιγαδικούς $\tilde{\mathbf{U}}_2$ και $\tilde{\mathbf{U}}_3$, η οποία σε τίποτα δεν διαφέρει από μία αντίστοιχη για τους μιγαδικούς αριθμούς $\tilde{\mathbf{U}}_1$ και $\tilde{\mathbf{U}}_4$, και η οποία πιστοποιεί την παραπάνω πρόταση. Υπολογίζουμε:

$$5\tilde{\mathbf{U}}_2 = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_1\phi^{-2} + \mathbf{U}_2\phi^{-4} + \mathbf{U}_3\phi^{-6} + \mathbf{U}_4\phi^{-8}$$

$$5\tilde{\mathbf{U}}_3 = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_1\phi^{-3} + \mathbf{U}_2\phi^{-6} + \mathbf{U}_3\phi^{-9} + \mathbf{U}_4\phi^{-12}$$

Θέτουμε: $\alpha = \omega\Delta t = \frac{2\pi}{T}\Delta t$. Ισχύει ότι: $\frac{5\Delta t}{T} = 1 \implies \frac{\Delta t}{T} = \frac{1}{5} \implies 5\alpha = 2\pi$. Αναλύουμε τους μιγαδικούς $5\tilde{\mathbf{U}}_2$ και $5\tilde{\mathbf{U}}_3$ σε πραγματικό και μιγαδικό μέρος.

Είναι:

$$\begin{aligned}
Re(5\tilde{\mathbf{U}}_2) &= \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_1 \cos(-2\alpha) + \mathbf{U}_2 \cos(-4\alpha) + \mathbf{U}_3 \cos(-6\alpha) + \mathbf{U}_4 \cos(-8\alpha) \\
&= \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_1 \cos(3\alpha) + \mathbf{U}_2 \cos(6\alpha) + \mathbf{U}_3 \cos(9\alpha) + \mathbf{U}_4 \cos(12\alpha) \\
&= \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_1 \cos(-3\alpha) + \mathbf{U}_2 \cos(-6\alpha) + \mathbf{U}_3 \cos(-9\alpha) + \mathbf{U}_4 \cos(-12\alpha) \\
&= Re(5\tilde{\mathbf{U}}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Im(5\tilde{\mathbf{U}}_2) &= \mathbf{U}_1 \sin(-2\alpha) + \mathbf{U}_2 \sin(-4\alpha) + \mathbf{U}_3 \sin(-6\alpha) + \mathbf{U}_4 \sin(-8\alpha) \\
&= \mathbf{U}_1 \sin(3\alpha) + \mathbf{U}_2 \sin(6\alpha) + \mathbf{U}_3 \sin(9\alpha) + \mathbf{U}_4 \sin(12\alpha) \\
&= -\mathbf{U}_1 \sin(-3\alpha) - \mathbf{U}_2 \sin(-6\alpha) - \mathbf{U}_3 \sin(-9\alpha) - \mathbf{U}_4 \sin(-12\alpha) \\
&= Im(5\tilde{\mathbf{U}}_3)
\end{aligned}$$

Επομένως, καθίσταται προφανές, πως είτε με τον υπολογισμό από το $\tilde{\mathbf{U}}_2$ είτε με τον υπολογισμό από το $\tilde{\mathbf{U}}_3$, υπολογίζονται οι ίδιες ακριβώς τιμές των συντελεστών $\hat{\mathbf{U}}_{a2}$, $\hat{\mathbf{U}}_{b2}$ της σειράς *Fourier*. Χρησιμοποιώντας τις τρεις πρώτες εξισώσεις του συστήματος 3.2.10, δηλαδή $N_H + 1$ εξισώσεις στη γενική περίπτωση, προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_0 \\ \hat{\mathbf{U}}_{a1} \\ \hat{\mathbf{U}}_{b1} \\ \hat{\mathbf{U}}_{a2} \\ \hat{\mathbf{U}}_{b2} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 \cos(\alpha) & 2 \cos(2\alpha) & 2 \cos(3\alpha) & 2 \cos(4\alpha) \\ 0 & 2 \sin(\alpha) & 2 \sin(2\alpha) & 2 \sin(3\alpha) & 2 \sin(4\alpha) \\ 2 & 2 \cos(2\alpha) & 2 \cos(4\alpha) & 2 \cos(6\alpha) & 2 \cos(8\alpha) \\ 0 & 2 \sin(2\alpha) & 2 \sin(4\alpha) & 2 \sin(6\alpha) & 2 \sin(8\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{U}_4 \end{bmatrix}$$

Ορίζεται, επομένως, το μητρώο μετασχηματισμού (*transformation matrix*), από το οποίο προκύπτουν τα πραγματικά πεδία $\hat{\mathbf{U}}$, E :

$$E = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 \cos(\alpha) & 2 \cos(2\alpha) & 2 \cos(3\alpha) & 2 \cos(4\alpha) \\ 0 & 2 \sin(\alpha) & 2 \sin(2\alpha) & 2 \sin(3\alpha) & 2 \sin(4\alpha) \\ 2 & 2 \cos(2\alpha) & 2 \cos(4\alpha) & 2 \cos(6\alpha) & 2 \cos(8\alpha) \\ 0 & 2 \sin(2\alpha) & 2 \sin(4\alpha) & 2 \sin(6\alpha) & 2 \sin(8\alpha) \end{bmatrix}$$

Για την ειδική περίπτωση των δύο αρμονικών, το σύστημα 3.2.5 , γράφεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{R}}_0 = 0 \\ -\hat{\mathbf{U}}_{b1}\omega = \hat{\mathbf{R}}_{a1} \\ \hat{\mathbf{U}}_{a1}\omega = \hat{\mathbf{R}}_{b1} \\ -2\hat{\mathbf{U}}_{b2}\omega = \hat{\mathbf{R}}_{a2} \\ 2\hat{\mathbf{U}}_{a2}\omega = \hat{\mathbf{R}}_{b2} \end{array} \right.$$

ή, εναλλακτικά, σε μητρική μορφή:

$$\omega \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_0 \\ \hat{\mathbf{U}}_{a1} \\ \hat{\mathbf{U}}_{b1} \\ \hat{\mathbf{U}}_{a2} \\ \hat{\mathbf{U}}_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_0 \\ \hat{\mathbf{R}}_{a1} \\ \hat{\mathbf{R}}_{b1} \\ \hat{\mathbf{R}}_{a2} \\ \hat{\mathbf{R}}_{b2} \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \omega A \cdot \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{R}} \quad (3.2.15)$$

όπου ορίστηκε το μητρώο A ως:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως είναι: $\hat{\mathbf{U}} = E\vec{\mathbf{U}}$, και κατ' αντιστοιχία: $\hat{\mathbf{R}} = E\vec{\mathbf{R}}$. Η εξίσωση 3.2.15 τελικά γράφεται:

$$\begin{aligned} \omega AE\vec{\mathbf{U}} &= E\vec{\mathbf{R}} \implies \\ \implies \omega E^{-1}AE\vec{\mathbf{U}} &= \vec{\mathbf{R}} \implies \\ \implies \boxed{\omega D\vec{\mathbf{U}} + \vec{\mathbf{R}} = 0} & \quad (3.2.16) \end{aligned}$$

όπου ορίστηκε ότι $D = -E^{-1}AE$.

Η εξίσωση 3.2.16 είναι η βασική **εξίσωση ισορροπίας των αρμονικών** (*harmonic balance equation*) και είναι αντίστοιχη των αρχικών διαφορικών εξισώσεων 3.2.1. Απομένει να προσδιοριστεί το μητρώο D όπως διατυπώνεται για την περίπτωση που χρησιμοποιούνται δύο αρμονικές. Από τις εξισώσεις 3.2.3, γραμμένες για δύο αρμονικές, και για $\alpha = \frac{2\pi}{T}\Delta t$, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{U}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ 1 & \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) & \cos(4\alpha) & \sin(4\alpha) \\ 1 & \cos(3\alpha) & \sin(3\alpha) & \cos(6\alpha) & \sin(6\alpha) \\ 1 & \cos(4\alpha) & \sin(4\alpha) & \cos(8\alpha) & \sin(8\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_0 \\ \hat{\mathbf{U}}_{a1} \\ \hat{\mathbf{U}}_{b1} \\ \hat{\mathbf{U}}_{a2} \\ \hat{\mathbf{U}}_{b2} \end{bmatrix}$$

Ορίζεται το αντίστροφο μητρώο μετασχηματισμού E^{-1} :

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ 1 & \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) & \cos(4\alpha) & \sin(4\alpha) \\ 1 & \cos(3\alpha) & \sin(3\alpha) & \cos(6\alpha) & \sin(6\alpha) \\ 1 & \cos(4\alpha) & \sin(4\alpha) & \cos(8\alpha) & \sin(8\alpha) \end{bmatrix}$$

Υπολογίζεται:

$$E^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 2\sin(2\alpha) & -2\cos(2\alpha) \\ 0 & \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) & 2\sin(4\alpha) & -2\cos(4\alpha) \\ 0 & \sin(3\alpha) & -\cos(3\alpha) & 2\sin(6\alpha) & -2\cos(6\alpha) \\ 0 & \sin(4\alpha) & -\cos(4\alpha) & 2\sin(8\alpha) & -2\cos(8\alpha) \end{bmatrix}$$

Μιας και $D = -E^{-1}AE$, εκτελώντας τις απαραίτητες πράξεις, αποδεικνύεται ότι [3] ο γενικός τύπος από τον οποίο προκύπτουν τα στοιχεία του μητρώου, για την περίπτωση των δύο αρμονικών ($N_H = 2$), είναι ο ακόλουθος:

$$D_{i,j} = \frac{2}{5} \{ \sin[\alpha(j-i)] + 2\sin[2\alpha(j-i)] \}$$

3.2.2 Γενίκευση για περισσότερες από δύο αρμονικές

Ακολουθεί η γενίκευση όσων προηγήθηκαν [3], στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται παραπάνω από δύο αρμονικές ($N_H \geq 2$) στην προσέγγιση των μεγεθών με σειρές *Fourier*. Θεωρώντας, και πάλι χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $t_0 = 0$, προκύπτουν οι ακόλουθοι γενικοί τύποι:

$$E = \frac{1}{N_T} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 \cos(\alpha) & 2 \cos(2\alpha) & \dots & 2 \cos[(N_T - 1)\alpha] \\ 0 & 2 \sin(\alpha) & 2 \sin(2\alpha) & \dots & 2 \sin[(N_T - 1)\alpha] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 \cos(N_H \alpha) & 2 \cos(2N_H \alpha) & \dots & 2 \cos[(N_T - 1)N_H \alpha] \\ 0 & 2 \sin(N_H \alpha) & 2 \sin(2N_H \alpha) & \dots & 2 \sin[(N_T - 1)N_H \alpha] \end{bmatrix} \quad (3.2.17)$$

Και, αντίστοιχα, το αντίστροφο μητρώο μετασχηματισμού:

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & \dots & \cos(N_H \alpha) & \sin(N_H \alpha) \\ 1 & \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) & \dots & \cos(N_H 2\alpha) & \sin(N_H 2\alpha) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(4\alpha) & \sin(4\alpha) & \dots & \cos[N_H(N_T - 1)\alpha] & \sin[N_H(N_T - 1)\alpha] \end{bmatrix} \quad (3.2.18)$$

Ο γενικός τύπος που δίνει τα στοιχεία του μητρώου D είναι ο ακόλουθος:

$$D_{i,j} = \frac{2}{N_T} \sum_{\kappa=1}^{N_H} \kappa \sin[\alpha \kappa(j - i)] \quad (3.2.19)$$

Τέλος, το μητρώο A προκύπτει, ανάλογα με το πλήθος των αρμονικών, ως εξής:

$$A_{i,j} = \begin{cases} -n & , \text{ για } i=2n \text{ και } j=2n+1 \\ n & , \text{ για } i=2n+1 \text{ και } j=2n \\ 0 & , \text{ για κάθε άλλο συνδυασμό} \end{cases} \quad (3.2.20)$$

για $n \in N$ με: $1 \leq n \leq N_H$.

3.3 Συμπεράσματα και παρατηρήσεις πάνω στη Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών

Σύμφωνα με τη μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών τελικά δεν επιλύονται οι εξισώσεις του χρονικά μη-μόνιμου προβλήματος (εξίσωση 3.2.1) στο πεδίο του χρόνου, αλλά αντίθετα το σύστημα 3.2.16:

$$\omega D\vec{U} + \vec{R} = 0$$

όπου είναι δυνατό να προστεθεί επιπλέον μία ψευδοχρονική παράγωγος $\frac{d\vec{U}}{d\tau}$, όπου τ ο ψευδοχρόνος, με σκοπό να διευκολύνει την αριθμητική σύγκλιση. Καταλήγοντας στην παραπάνω εξίσωση, αποδείχθηκε ουσιαστικά, πως εάν προσεγγίσουμε τη λύση ενός προβλήματος \vec{U} με πεπερασμένους όρους σειράς *Fourier*, τότε η προσέγγιση της χρονικής παραγώγου του \vec{U} γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \omega D\vec{U} \quad , \quad \text{με } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ όπου } T \text{ η περίοδος.} \quad (3.3.1)$$

Σύμφωνα με όλα όσα προηγήθηκαν, ακολουθείται η παρακάτω μεθοδολογία για τον προσδιορισμό ολόκληρου του πεδίου \vec{U} σε κάθε χρονική στιγμή:

- (i) Επιλύεται το σύστημα 3.2.16 των N_T εξισώσεων και υπολογίζεται το πεδίο ροής \vec{U} για τις N_T ισαπέχουσες χρονικές στιγμές.
- (ii) Πολλαπλασιάζοντας το διάνυσμα \vec{U} που προέκυψε με το μητρώο μετασχηματισμού E υπολογίζονται οι συντελεστές *Fourier*, σύμφωνα με τον τύπο:

$$\hat{\vec{U}} = E \cdot \vec{U} \quad (3.3.2)$$

- (iii) Το πεδίο \vec{U} υπολογίζεται την επιθυμητή χρονική στιγμή μέσα στην περίοδο, βάσει του τύπου *Fourier* για N_H αρμονικές, από τη σχέση 3.2.3.

Αξίζει εδώ να σημειωθεί πως η αριθμητική επίλυση του προβλήματος γίνεται στο πεδίο του χρόνου, παρότι ολόκληρη η ανάλυση των εξισώσεων γίνεται στο πεδίο συχνοτήτων. Μέσω του μετασχηματισμού προκύπτουν οι συντελεστές της σειράς *Fourier* και, τελικά, η λύση του προβλήματος. Η επιλογή τώρα, του πλήθους των αρμονικών που

θα χρησιμοποιηθούν για την προσέγγιση της λύσης του προβλήματος, εξαρτάται από τη συχνότητα διέγερσης. Αυτή είναι πάντοτε γνωστή, καθώς, όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου, η μέθοδος ισορροπίας των αρμονικών είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί μόνο σε προβλήματα εξαναγκασμένης ταλάντωσης. Οι μεγαλύτερες συχνότητες απαιτούν περισσότερες αρμονικές ούτως ώστε να προσεγγιστούν καλύτερα. Για υψηλές συχνότητες όμως, για φαινόμενα δηλαδή που χαρακτηρίζονται από μικρή περίοδο, καθίσταται δυσκολότερο να προσεγγιστεί η χρονική παράγωγος της λύσης $\frac{d\vec{U}}{dt}$.

Παρατηρώντας τα στοιχεία του μητρώου D , όπως προκύπτουν μετά από πράξεις, διαπιστώνεται πως εκείνα που αντιστοιχούν στην κύρια διαγώνιο του μητρώου είναι πάντοτε μηδενικά. Αυτό σημαίνει πως η επίδραση καθενός πεδίου \mathbf{U} από τα N_T στα πεδία των υπόλοιπων χρονικών στιγμών, μπορεί να αθροιστεί και να αποτελέσει ένα επιπλέον όρο πηγής της προς επίλυση εξίσωσης, κάτι που θα φανεί και παρακάτω.

Ακόμη, αναφέρεται, ότι το άθροισμα των στοιχείων του μητρώου D σε μία γραμμή ισούται με το μηδέν. Αυτό ενδιαφέρει επειδή, τελικά, η μέθοδος είναι δυνατό να εφαρμοστεί και σε χρονικά σταθερές συναρτήσεις, θεωρώντας τις οριακά περιοδικές, και να δώσει το ακριβές αποτέλεσμα στην προσέγγιση της χρονικής παραγωγού της λύσης $\frac{d\vec{U}}{dt} = 0$.

Με τη χρήση της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών αποφεύγουμε τελικά την επίλυση των εξισώσεων ροής μη-μόνιμων (*unsteady*) προβλημάτων. Αντ' αυτού επιλύονται $2N_H + 1$ χρονικά μόνιμα (*steady*) προβλήματα, τα οποία όμως είναι μεταξύ τους πεπλεγμένα (*coupled*). Η επίλυση εξισώσεων, στις οποίες δεν εμφανίζονται χρονικά μη-μόνιμοι όροι, είναι σημαντικά οικονομικότερη, από άποψη υπολογιστικού κόστους. Παρόλα αυτά, η επίλυση $2N_H + 1$ προβλημάτων, αντί για ένα, έχει ως αποτέλεσμα την ανάγκη να δεσμευτεί αρκετή μνήμη (ουσιαστικά $2N_H + 1$ φορές περισσότερη από εκείνη που απαιτείται για το κάθε πρόβλημα) καθώς πλέον ο κώδικας που χρησιμοποιείται για την επίλυση διαχειρίζεται $2N_H + 1$ διαφορετικά πεδία μεταβλητών ροής. Επομένως, η απαιτούμενη μνήμη είναι πάντοτε ένας από τους παράγοντες που πρέπει να ληφθούν υπόψη όταν αποφασίζεται η χρήση της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών.

Κεφάλαιο 4

Η Συνεχής συζυγής μέθοδος για μη-μόνιμη, ασυμπίεστη, στρωτή ροή

4.1 Εξισώσεις ροής

Οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα της ροής, η οποία μελετάται στην παρούσα διπλωματική εργασία, είναι οι εξισώσεις *Navier-Stokes*, όπως αυτές γράφονται στην περίπτωση του ασυμπίεστου, Νευτώνιου ρευστού [2]. Η ροή που μελετάται παραμένει στρωτή ενώ δεν λαμβάνονται υπόψη οι όροι μετάδοσης θερμότητας. Οι ισχύουσες εξισώσεις για προβλήματα δύο ή τριών διαστάσεων, σε ταυστική γραφή, διατυπώνονται ως εξής:

$$R^p = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (4.1.1)$$

$$R_i^v = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0, \quad i = 1, 2(3) \quad (4.1.2)$$

όπου με v_i συμβολίζονται οι συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας της ροής και με p η στατική πίεση διαιρεμένη με την σταθερή πυκνότητα του ρευστού (θα ονομάζεται απλά “στατική πίεση” σε ότι ακολουθεί). Με ν συμβολίζεται η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού, η οποία λαμβάνεται σταθερή. Ορίζονται, για τη συνέχεια, τα ακόλουθα:

- το $\mathbf{U} = [p, v_i]^T$ είναι το διάνυσμα μεταβλητών της ροής.

- για τα υπόλοιπα των διακριτοποιημένων εξισώσεων ροής ισχύει η αντιστοιχία

$$R_1^U = R^p \text{ και } R_{i+1}^U = R_i^v$$

Οι εξισώσεις ροής συμπληρώνονται από τις αρχικές και οριακές συνθήκες του προβλήματος. Για εξωτερικές ροές, όπως αυτή που μελετάται στην εφαρμογή της παρούσας διπλωματικής εργασίας και η οποία παρατίθεται σε ξεχωριστό κεφάλαιο, οι οριακές συνθήκες οι οποίες κλείνουν μαθηματικά το σύστημα των εξισώσεων ροής, στα όρια του πεδίου ροής, είναι οι εξής:

Περιοχή του περιβάλλοντος ορίου όπου γίνεται είσοδος της ταχύτητας S_{In}

- συνθήκη *Dirichlet* για την ταχύτητα, διαφορετική όμως για κάθε χρονική στιγμή μιας και η επ' άπειρον ταχύτητα αλλάζει,
- μηδενική συνθήκη *Neumann* για την πίεση.

Περιοχή του περιβάλλοντος ορίου όπου γίνεται έξοδος της ταχύτητας S_{Out}

- μηδενική συνθήκη *Neumann* για την ταχύτητα,
- μηδενική συνθήκη *Neumann* για την πίεση συσχετιζόμενη όμως με μία πίεση αναφοράς στο σύνορο του χωρίου.

Στερεά τοιχώματα αεροδυναμικών σωμάτων S_w

- μηδενική συνθήκη *Dirichlet* για την ταχύτητα,
- μηδενική συνθήκη *Neumann* για την πίεση.

Κρίνεται απαραίτητο εδώ να σημειωθεί ότι η επιλογή να γίνει διαχωρισμός του επάπειρον ορίου σε δύο ξεχωριστά τμήματα (ένα απ' όπου εισέρχεται η ροή και ένα απ' όπου εξέρχεται) οφείλεται σε ιδιαιτερότητα του λογισμικού *OpenFOAM* που χρησιμοποιείται. Το εν λόγω λογισμικό για να αντιμετωπιστεί ένα πρόβλημα εξωτερικής

αεροδυναμικής, όπως αυτό που μελετάται εδώ, τίθενται οριακές συνθήκες σε δύο τμήματα (εισόδου και εξόδου της ροής), τα οποία όμως στην πραγματικότητα αποτελούν ενιαίο σύνορο.

4.2 Εισαγωγή των μεταβλητών του συζυγούς προβλήματος

Η επίλυση ενός προβλήματος μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης της αεροδυναμικής μορφής ενός σώματος, ως προς ένα προκαθορισμένο κριτήριο, εκφρασμένο από μία συνάρτηση κόστους/στόχο $F_{obj} = F_{obj}(\mathbf{U}(\mathbf{b}), \mathbf{b})$, υλοποιείται μέσω της ελαχιστοποίησης της συνάρτησης αυτής, στο χώρο των μεταβλητών σχεδιασμού \mathbf{b} [1]. Στην περίπτωση του βέλτιστου σχεδιασμού μορφής, οι μεταβλητές σχεδιασμού προκύπτουν είτε από σημεία πάνω στο ίδιο το αεροδυναμικό σώμα είτε, τις περισσότερες φορές τουλάχιστον, από συντελεστές που έχουν προκύψει από κάποια τεχνική παραμετροποίησης της προς σχεδιασμό μορφής. Το διάνυσμα $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_M)$ περιλαμβάνει το σύνολο των M μεταβλητών σχεδιασμού.

Η αντικειμενική συνάρτηση του εκάστοτε προβλήματος, εκφράζεται μαθηματικά από τη συνάρτηση $F_{obj} = F_{obj}(\mathbf{U}(\mathbf{b}), \mathbf{b})$ επειδή ακριβώς συσχετίζεται τόσο με τις μεταβλητές σχεδιασμού όσο και με τις μεταβλητές της ροής \mathbf{U} . Η εξάρτηση της συνάρτησης από τις γεωμετρικές ποσότητες του χωρίου είναι διττή. Οι γεωμετρικές ποσότητες του χωρίου, που είναι κατά κανόνα άρρηκτα συνδεδεμένες με τις μεταβλητές σχεδιασμού σε προβλήματα βελτιστοποίησης μορφής, επιδρούν άμεσα στην αντικειμενική συνάρτηση. Εκτός τούτου όμως, επιδρούν και στη ροϊκή λύση \mathbf{U} , εφόσον αυτή αλλάζει καθώς μεταβάλλονται οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού \mathbf{b} , καθώς μεταβάλλεται δηλαδή η γεωμετρία της προς σχεδιασμό μορφής, και ικανοποιούνται οι εξισώσεις ροής στο τροποποιημένο χωρίο. Με αυτόν τον τρόπο οι μεταβλητές σχεδιασμού επιδρούν στην αντικειμενική συνάρτηση (και) έμμεσα.

Για τη διατύπωση του συζυγούς προβλήματος ορίζεται η **επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση** (*augmented objective function*) F_{aug} , η οποία προκύπτει προσθέτοντας στην αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος μηδενικούς όρους πολλαπλασιαζόμενους με πολλαπλασιαστές *Lagrange*. Οι μηδενικοί όροι R_i^v και R^p που

χρησιμοποιούνται εδώ, είναι οι εξισώσεις ροής για το μη-μόνιμο πρόβλημα, και δίνονται από τις εξισώσεις 4.1.1 και 4.1.2 οι οποίες έχουν ικανοποιηθεί για το πρόβλημα που εξετάζεται. Οι πολλαπλασιαστές *Lagrange* ταυτίζονται με τα πεδία των **συζυγών μεταβλητών** (*adjoint variables*). Η επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση ορίζεται [2]:

$$F_{aug} = F_{obj} + \int_T \int_{\Omega} \Psi_l R_l^U d\Omega dt = F_{obj} + \int_T \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega dt - \int_T \int_{\Omega} q R^p d\Omega dt \quad (4.2.1)$$

όπου το διάνυσμα συζυγών μεταβλητών $\Psi = [q, \mathbf{u}]^T$ περιλαμβάνει τα αντίστοιχα συζυγή μεγέθη για την πίεση (q) και το διάνυσμα της ταχύτητας (u). Ο δεύτερος όρος ($\int_T \int_{\Omega} q R^p d\Omega dt$) αφαιρείται, αντί να προτίθεται. Αυτό επιλέγεται ούτως ώστε, όταν θα προκύψουν οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις, να υπάρχει αντιστοιχία αυτών με τις ροϊκές εξισώσεις του προβλήματος. Είναι χαρακτηριστικό ότι η ποσότητα $\Psi_l R_l^U$ ολοκληρώνεται σε όλο το χωρίο ροής Ω , αλλά και στο πεδίο του χρόνου, για μία περίοδο, καθώς οι εξισώσεις ροής είναι γραμμένες για την περίπτωση της μη-μόνιμης ροής.

Σκοπός της συζυγούς μεθόδου είναι ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας $\frac{\delta F_{obj}}{\delta b_m}$ οι οποίες εκφράζουν τις μεταβολές της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβολές των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού. Επειδή, όμως, όλοι οι επιπλέον όροι της 4.2.1 είναι εξ ορισμού μηδενικοί, οι παράγωγοι ευαισθησίας $\frac{\delta F_{obj}}{\delta b_m}$ ταυτίζονται με τις παραγώγους ευαισθησίας της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m}$. Διαφορίζοντας [2], [7], [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \frac{\delta F_{obj}}{\delta b_m} + \int_T \int_{\Omega} \frac{\delta u_i}{\delta b_m} R_i^v d\Omega dt + \int_T \int_{\Omega} u_i \frac{\delta R_i^v}{\delta b_m} d\Omega dt \\ &- \int_T \int_{\Omega} \frac{\delta q}{\delta b_m} R^p d\Omega dt - \int_T \int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta b_m} d\Omega dt + \int_T \int_{\Omega} (u_i R_i^v - q R^p) \frac{\delta d\Omega}{\delta b_m} \end{aligned}$$

και τελικά :

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = \frac{\delta F_{obj}}{\delta b_m} + \int_T \int_{\Omega} u_i \frac{\delta R_i^v}{\delta b_m} d\Omega dt - \int_T \int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta b_m} d\Omega dt + \int_T \int_{\Omega} (u_i R_i^v - q R^p) \frac{\delta d\Omega}{\delta b_m} \quad (4.2.2)$$

δεδομένου ότι ισχύει εκ ταυτότητας: $R_i^u = R^p = 0$.

Ο ολικός ρυθμός μεταβολής $\frac{\delta\Phi}{\delta b_m}$ μίας οποιασδήποτε ποσότητας Φ , προκύπτει ως άθροισμα της άμεσης επίδρασης των μεταβλητών σχεδιασμού και της μετακίνησης της θέσης του υπόψη σημείου λόγω, ουσιαστικά, μετακίνησης του πλέγματος. Έτσι είναι δυνατόν να γραφεί:

$$\frac{\delta\Phi}{\delta b_m} = \frac{\partial\Phi}{\partial b_m} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \quad (4.2.3)$$

Για κάθε κόμβο του πλέγματος, ο όρος $\frac{\partial\Phi}{\partial b_m}$ εκφράζει το ρυθμό μερικής μεταβολής της τιμής της ποσότητας Φ λόγω της μεταβολής του b_m , θεωρώντας ότι η θέση του κόμβου δεν επηρεάζεται από τη μεταβολή του b_m . Ο όρος $\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m}$ εκφράζει την επιπλέον μεταβολή της τιμής της ποσότητας Φ σε κάποιον κόμβο, ακριβώς λόγω της μετατόπισης του κόμβου αυτού. Είναι φανερό πως εμπλέκονται τόσο η χωρική παράγωγος της ποσότητας Φ , προτού η γεωμετρία μεταβληθεί, όσο και ο ρυθμός μεταβολής της θέσης του κόμβου. Επιπλέον ισχύει η ταυτότητα [7]:

$$\frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) d\Omega \quad (4.2.4)$$

Λόγω των σχέσεων 4.2.3 και 4.2.4, η 4.2.2 γράφεται στην ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \frac{\delta F_{obj}}{\delta b_m} + \int_T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} d\Omega dt - \int_T \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_m} d\Omega dt \\ &+ \int_T \int_{\Omega} \left(u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial x_k} - q \frac{\partial R^p}{\partial x_k} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} d\Omega dt \\ &+ \int_T \int_{\Omega} (u_i R_i^v - q R^p) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) d\Omega dt \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα *Green-Gauss*, το τελευταίο ολοκλήρωμα της εξίσωσης 4.2.5, μετασχηματίζεται:

$$\begin{aligned} \int_T \int_{\Omega} (u_i R_i^v - q R^p) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) d\Omega dt &= \int_T \int_S (u_i R_i^v - q R^p) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS dt \\ &- \int_T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} R_i^v - \frac{\partial q}{\partial x_k} R^p \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} d\Omega dt \\ &- \int_T \int_{\Omega} \left(u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial x_k} - q \frac{\partial R^p}{\partial x_k} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} d\Omega dt \end{aligned}$$

και τελικά:

$$\begin{aligned} \int_T \int_{\Omega} (u_i R_i^v - q R^p) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) d\Omega dt &= \int_T \int_S (u_i R_i^v - q R^p) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS dt \\ &- \int_T \int_{\Omega} \left(u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial x_k} - q \frac{\partial R^p}{\partial x_k} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} d\Omega dt \end{aligned}$$

όπου S το όριο του πεδίου ροής Ω . Η σχέση 4.2.5, μετά από αμοιβαίες απαλοιφές όρων, γίνεται:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = \frac{\delta F_{obj}}{\delta b_m} + \int_T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} d\Omega dt - \int_T \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_m} d\Omega dt + \int_T \int_S (u_i R_i^v - q R^p) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS dt \quad (4.2.6)$$

Σημειώνεται πως το ολοκλήρωμα που περιλαμβάνει τους όρους $\frac{\partial R_i^v}{\partial x_k}$ ήταν δυνατό να απολειφθεί από την εξίσωση 4.2.5. Όπως φάνηκε όμως, κάτι τέτοιο δεν ήταν αναγκαίο, καθώς απαλείφθηκε αμοιβαία με τους το δεύτερο ολοκλήρωμα που προέκυψε από το μετασχηματισμό του $\int_T \int_{\Omega} (u_i R_i^v - q R^p) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) d\Omega dt$.

4.3 Αντικειμενική συνάρτηση

Η αντικειμενική συνάρτηση προβλημάτων αεροδυναμικής βελτιστοποίησης αποτελείται συνήθως από ολοκληρώματα ροϊκών ποσοτήτων στο εσωτερικό του πεδίου ροής Ω ή/και τα όρια του πεδίου S [2]. Μία τέτοια συνάρτηση γράφεται στη μορφή:

$$F_{obj} = \int_S f_s dS + \int_{\Omega} f_{\Omega} d\Omega \quad (4.3.1)$$

όπου με f_s και f_{Ω} συμβολίζονται οι προς ολοκλήρωση ποσότητες στο όριο, ή σε τμήμα του ορίου, και στο εσωτερικό του χωρίου αντίστοιχα. Η παράγωγος της συνάρτησης της σχέσης 4.3.1 γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{obj}}{\delta b_m} &= \int_S \frac{\partial f_s}{\partial b_m} dS + \int_S \frac{\partial f_s}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_S f_s \frac{\delta(dS)}{\delta b_m} \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial f_{\Omega}}{\partial b_m} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial f_{\Omega}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} d\Omega + \int_{\Omega} f_{\Omega} \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m} \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα *Green-Gauss*, το τελευταίο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης γράφεται:

$$\int_{\Omega} f_{\Omega} \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m} = \int_S f_{\Omega} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS - \int_{\Omega} \frac{\partial f_{\Omega}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} d\Omega$$

Επομένως, τελικά οδηγούμαστε στη μορφή:

$$\frac{\delta F_{obj}}{\delta b_m} = \int_S \frac{\partial f_s}{\partial b_m} dS + \int_S \left(\frac{\partial f_s}{\partial x_k} + f_{\Omega} n_k \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS dt + \int_S f_s \frac{\delta(dS)}{\delta b_m} + \int_{\Omega} \frac{\partial f_{\Omega}}{\partial b_m} d\Omega$$

Καθίσταται φανερό πως με τη χρήση του θεωρήματος *Green-Gauss* επιλέγεται να αντικαθίστανται τα χωρικά ολοκληρώματα από τα αντίστοιχα συνοριακά. Η συγκεκριμένη τεχνική αποσκοπεί στη μείωση υπολογιστικού κόστους καθώς αποφεύγονται οι υπολογισμοί ολοκληρωμάτων που εξαρτώνται από τις μεταβολές σε ολόκληρο το πεδίο ροής. Επιπλέον, ενισχύεται και η ακρίβεια με την οποία υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας. Στη συνέχεια, ακολουθεί η αντικειμενική συνάρτηση η οποία χρησιμοποιείται στην εφαρμογή της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

4.3.1 Ελαχιστοποίηση της μέσης δύναμης αντίστασης

Στόχος του προβλήματος βελτιστοποίησης αεροδυναμικής μορφής που εξετάζεται στην παρούσα διπλωματική εργασία, είναι η ελαχιστοποίηση της χρονικά μέσης τιμής της αεροδυναμικής αντίστασης που ασκείται σε ολόκληρο το σώμα σε μία περίοδο. Η συγκεκριμένη εφαρμογή δε διαφοροποιείται στη λογική από μία αντίστοιχη, για τη μεγιστοποίηση της άνωσης παραδείγματος χάριν, εκτός από το γεγονός ότι θα είχαμε ελαφρώς διαφορετική αντικειμενική συνάρτηση $F_{obj} = F_{obj}(\mathbf{U}(\mathbf{b}), \mathbf{b})$. Η μεθοδολογία και η ακολουθία των πράξεων ωστόσο θα ήταν κοινή σε κάθε περίπτωση. Η αντικειμενική συνάρτηση που επιλέχθηκε δίνεται από τη σχέση:

$$(min) \quad F_{obj} = \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} f dS_w dt \quad (4.3.2)$$

όπου f είναι η δύναμη που ασκείται σε κάθε σημείο του αεροδυναμικού σώματος λόγω της ροής. Ολοκληρώνοντας την σε όλο το στερεό σύνορο S_w (στα στερεά τοιχώματα), προκύπτει η συνολική δύναμη που ασκείται σε ολόκληρο το σώμα. Η ολοκλήρωση στο χρόνο θα δώσει τη συνολική δύναμη που δέχεται το σώμα στη

διάρκεια μίας περιόδου. Η f υπολογίζεται και δίνεται από τον τύπο:

$$f = \left[-\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + p n_i \right] r_i$$

όπου r_i οι συνιστώσες ενός μοναδιαίου διανύσματος παράλληλου στο διάνυσμα της επ' άπειρον ταχύτητας στην περίπτωση που μελετάται η ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας. Ξεχωρίζουν στην παραπάνω σχέση δύο όροι, το άθροισμα των οποίων δίνει τη συνολική δύναμη. Ο πρώτος αφορά τις συνεκτικές δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο σώμα ενώ ο δεύτερος αναφέρεται στις δυνάμεις λόγω πίεσης. Η παράγωγος ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης, ακολουθώντας μία διαδικασία αντίστοιχη με εκείνη που περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο, δίνεται από την έκφραση:

$$\frac{\delta F_{obj}}{\delta b_m} = \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \frac{\partial f}{\partial b_m} dS_w dt + \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial b_m} dS_w dt + \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} f \frac{\delta(dS_w)}{\delta b_m} dt$$

η οποία, αντικαθιστώντας τον τύπο από τον οποίο υπολογίζεται η f , γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{obj}}{\delta b_m} &= \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + \frac{\partial p}{\partial b_m} n_i \right] r_i dS_w dt \\ &+ \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + \frac{\partial p}{\partial x_k} n_i \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} r_i dS_w dt \\ &+ \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \left[-\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta}{\delta b_m} (n_j dS_w) + p \frac{\delta}{\delta b_m} (n_i dS_w) \right] r_i dt \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

4.4 Διατύπωση των συζυγών πεδριακών εξισώσεων

Οι συζυγείς εξισώσεις στο πεδίο ροής προκύπτουν από περαιτέρω ανάπτυξη της σχέσης 4.2.6 [2]. Στην εν λόγω σχέση εμφανίζονται οι άμεσες μεταβολές των χωρικών υπολοίπων των εξισώσεων ροής $\frac{\partial R_i^U}{\partial b_m}$. Για τη διατύπωση των συζυγών εξισώσεων, τα υπόλοιπα πρέπει να αντικατασταθούν από τις αναλυτικές τους εκφράσεις, όπως αυτές δίνονται από τις εξισώσεις ροής 4.1.1 και 4.1.2. Σημειώνεται εδώ πως, επειδή αχρι-

βώς υπάρχει εμπλοκή μόνο των άμεσων μεταβολών $\frac{\partial}{\partial b_m}$, και όχι των ολικών $\frac{\delta}{\delta b_m}$, μετά την αντικατάσταση των αναλυτικών εκφράσεων, επιτρέπεται η εναλλαγή της σειράς παραγωγίσης, στις μεταβλητές της ροής στις οποίες εμφανίζεται η μικτή παράγωγος ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και τις χωρικές συντεταγμένες, εφόσον άλλωστε η άμεση $\frac{\partial}{\partial b_m}$ μεταβολή είναι απεμπλεγμένη από οποιαδήποτε χωρική μετατόπιση δx_k . Για κάθε ποσότητα Φ ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial b_m} \right)$$

Οι εξισώσεις ροής, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν, γράφονται:

$$\frac{\partial R^p}{\partial b_m} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \quad (4.4.1)$$

και:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial b_m} \right) \\ &- \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right], \quad i = 1, 2(3) \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Με τη χρήση του θεωρήματος *Green-Gauss* αναπτύσσονται, ξεχωριστά, τα ολοκληρώματα του δεξιού μέλους της εξίσωσης 4.2.6, [8]:

- Το χωρικό ολοκλήρωμα της συζυγούς πίεσης δίνει:

$$\begin{aligned} - \int_T \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_m} d\Omega dt &= - \int_T \int_{\Omega} q \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) d\Omega dt = - \int_T \int_S q \frac{\partial v_j}{\partial b_m} n_j dS dt \\ &+ \int_T \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_m} d\Omega dt \end{aligned}$$

- Οι μη-συνεκτικοί όροι του έτερου χωρικού ολοκληρώματος $\left(\int_T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} \right)$ γρά-

φονται:

$$\int_T \int_\Omega u_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) d\Omega dt = \int_T \int_S u_i v_j n_j \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS dt - \int_T \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i v_j) \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega dt$$

$$\int_T \int_\Omega u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial b_m} \right) d\Omega dt = \int_T \int_S u_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_m} dS dt - \int_T \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial b_m} d\Omega dt$$

ενώ ο όρος $\int_T \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega dt$ θα χρησιμοποιηθεί ως έχει, και ως εκ τούτου δεν μετασχηματίζεται.

- Και αντίστοιχα, οι συνεκτικοί όροι του τελευταίου ολοκληρώματος δίνουν:

$$- \int_T \int_\Omega \nu u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) \right] d\Omega dt = - \int_T \int_S \nu u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) n_j dS dt$$

$$+ \int_T \int_\Omega \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) d\Omega dt$$

$$= - \int_T \int_S \nu u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} n_j dS dt + \int_T \int_S \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} n_j dS dt$$

$$- \int_T \int_\Omega \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega dt$$

και ομοίως:

$$- \int_T \int_\Omega \nu u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] d\Omega dt = - \int_T \int_S \nu u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) n_j dS dt$$

$$+ \int_T \int_\Omega \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) d\Omega dt$$

$$= - \int_T \int_S \nu u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) n_j dS dt + \int_T \int_S \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_m} n_i dS dt$$

$$- \int_T \int_\Omega \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_m} d\Omega dt$$

- Τέλος, ο χρονικός όρος του ολοκληρώματος $\int_T \int_\Omega u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_m}$ μετασχηματίζεται:

$$\begin{aligned} \int_T \int_\Omega u_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) d\Omega dt &= \int_T \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} \left(u_i \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) d\Omega dt - \int_T \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega dt \\ &= \int_\Omega \left[\left(u_i \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) \right]_0^T d\Omega - \int_T \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega dt = - \int_T \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega dt \end{aligned}$$

εφόσον άλλωστε οι δύο χρονικές αυτές στιγμές, η αρχή ($t = 0$) και το τέλος της περιόδου ($t = T$), ταυτίζονται.

Αντικαθιστώντας όλα τα παραπάνω αναπτύγματα στην εξίσωση 4.2.6, όπως επίσης και τη σχέση 4.3.3 στην οποία καταλήξαμε σε προηγούμενη παράγραφο, και ομαδοποιώντας κατάλληλα τους όρους, η παράγωγος της επαυξημένης συνάρτησης, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + \frac{\partial p}{\partial b_m} n_i \right] r_i dS_w dt \\ &+ \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + \frac{\partial p}{\partial x_k} n_i \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} r_i dS_w dt \\ &+ \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \left[-\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta}{\delta b_m} (n_j dS_w) + p \frac{\delta}{\delta b_m} (n_i dS_w) \right] r_i dt \\ &+ \int_T \int_S \left[u_i v_j n_j - q n_i + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial u_i}{\partial b_m} dS dt \\ &+ \int_T \int_\Omega \left[-\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial (u_i v_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial q}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial u_i}{\partial b_m} d\Omega dt \\ &+ \int_T \int_S u_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_m} dS dt - \int_T \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial b_m} d\Omega dt \\ &- \int_T \int_S \nu u_i \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j dS dt \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

όπου απαλείφθηκε το ολοκλήρωμα $\int_T \int_S (u_i R_i^v - q R^p) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS dt$ μιας και οι όροι R^p και R_i^v είναι εκ ταυτότητος μηδενικοί.

Παρατηρώντας την παραπάνω εξίσωση (4.4.3) είναι φανερό πως οι όροι έχουν ομαδοποιηθεί βάσει δύο ειδών μεταβολών, των άμεσων μεταβολών των ροϊκών μεταβλητών $(\frac{\delta p}{\delta b_m}, \frac{\delta v_i}{\delta b_m})$, τόσο στο εσωτερικό όσο και στα όρια του πεδίου ροής, και των γεωμετρικών μεταβολών $(\frac{\delta x_k}{\delta b_m}, \frac{\delta(dS)}{\delta b_m})$ στα όρια του πεδίου ροής. Η συζυγής μέθοδος υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας αποσκοπεί ακριβώς στο να μην υπολογίζονται οι μεταβολές των ροϊκών μεταβλητών λόγω του ότι το υπολογιστικό κόστος για κάτι τέτοιο είναι ιδιαίτερα υψηλό. Αντίθετα, οι μεταβολές των γεωμετρικών ποσοτήτων είναι υπολογίσιμες με πολύ μικρό υπολογιστικό κόστος. Με την απαλοιφή επομένως των ολοκληρωμάτων που εμπεριέχουν εκείνες τις μεταβολές που δεν είναι επιθυμητό να υπολογιστούν, επιτυγχάνεται η έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας συναρτήσει μόνο των εύκολα υπολογίσιμων μεγεθών.

Απαλείφοντας τα χωρικά ολοκληρώματα που εμπεριέχουν τις μεταβολές των μεταβλητών ροής, προκύπτουν οι συζυγείς πεδριακές εξισώσεις:

$$R^q = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (4.4.4)$$

και:

$$R_i^u = -\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial(u_i v_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial q}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0$$

ενώ κάνοντας χρήση της εξίσωσης της συνέχειας: $\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$, η προηγούμενη εξίσωση γράφεται:

$$R_i^u = -\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0, \quad i = 1, 2(3) \quad (4.4.5)$$

Η επίλυση των συζυγών εξισώσεων έχει υπολογιστικό κόστος αντίστοιχο με αυτό της επίλυσης των ροϊκών εξισώσεων του προβλήματος. Ακόμη, η συζυγής λύση που προκύπτει είναι κοινή και ανεξάρτητη του πόσες και ποιες είναι οι μεταβλητές σχεδιασμού.

4.5 Συζυγείς οριακές συνθήκες και παράγωγοι ευαισθησίας

Ικανοποιώντας τις συζυγείς πεδιακές εξισώσεις 4.4.4 και 4.4.5, οι παράγωγοι ευαισθησίας καθίστανται ανεξάρτητες των μεταβολών των ροϊκών ποσοτήτων ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, στο εσωτερικό του πεδίου ροής. Η παράγωγος της επαυξημένης συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, γράφεται στην παρακάτω, απλοποιημένη μορφή:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + \frac{\partial p}{\partial b_m} n_i \right] r_i dS_w dt \\
&+ \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + \frac{\partial p}{\partial x_k} n_i \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} r_i dS_w dt \\
&+ \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \left[-\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta}{\delta b_m} (n_j dS_w) + p \frac{\delta}{\delta b_m} (n_i dS_w) \right] r_i dt \\
&+ \int_T \int_S \left[u_i v_j n_j - q n_i + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS dt \\
&+ \int_T \int_S u_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_m} dS dt - \int_T \int_S \nu u_i \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j dS dt \quad (4.5.1)
\end{aligned}$$

Για να προκύψει η τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας πρέπει να ληφθούν υπόψη οι οριακές συνθήκες του προβλήματος ροής που εξετάζεται. Από αυτές, και απαλείφοντας τους όρους εκείνους που πολλαπλασιάζονται με τις μεταβολές των ροϊκών μεγεθών, στα ολοκληρώματα στα όρια του πεδίου ροής, προκύπτουν οι οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος.

4.5.1 Συζυγείς οριακές συνθήκες στο S_{In}

Στα όρια εισόδου του χωρίου S_{In} δεν μεταβάλλεται η γεωμετρία του χωρίου ροής. Ισχύει επομένως:

$$\frac{\delta x_k}{\delta b_m} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\delta(dS)}{\delta b_m} = 0 \quad (4.5.2)$$

Στην είσοδο του πεδίου ροής επιβάλλεται καθορισμένη κατανομή ταχύτητας (συνθήκη *Dirichlet*). Επομένως, η τιμή της ταχύτητας είναι πλήρως ανεξάρτητη από τις μεταβλητές σχεδιασμού και, αυτονόητα, η ολική μεταβολή του διανύσματος της ταχύτητας, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, θα είναι μηδενική. Ισχύει:

$$\frac{\delta v_i}{\delta b_m} = 0 \implies \frac{\partial v_i}{\partial b_m} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} = 0 \quad (4.5.3)$$

και, τελικά, λόγω της σχέσης 4.5.2 προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial v_i}{\partial b_m} = 0 \quad (4.5.4)$$

Για τη στατική πίεση στην είσοδο ισχύει η μηδενική συνθήκη *Neumann*. Οι όροι που απομένουν στον τύπο της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης είναι:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = \int_T \int_{S_{In}} u_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_m} dS_{In} dt - \int_T \int_{S_{In}} \nu u_i \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j dS_{In} dt$$

Για να απαλειφθούν οι δύο παραπάνω όροι, αρκεί να επιβληθούν στην είσοδο οι εξής οριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} u_i n_i &= 0 \\ u_i \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j &= 0 \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται [2] ότι οι παραπάνω συνθήκες ισοδυναμούν με το να επιβληθεί στην είσοδο του πεδίου ροής η συνθήκη:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{<n>} = 0 \\ u_{<t>} = 0 \end{array} \right\} \implies u_i = 0 \quad (4.5.5)$$

όπου $u_{<n>}$, $u_{<t>}$ η κάθετη και η εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας στο όριο, αντίστοιχα. Τελικά, δηλαδή, και όλες οι συνισταμένες της συζυγούς ταχύτητας είναι μηδενικές. Η συνθήκη για τη συζυγή πίεση είναι η μηδενική *Neumann* και η τιμή της υπολογίζεται συσχετιζόμενη με τη συζυγή στατική πίεση στο εσωτερικό του χωρίου.

4.5.2 Συζυγείς οριακές συνθήκες στο S_{out}

Στα όρια εξόδου του χωρίου s_{out} , επίσης, δεν μεταβάλλεται η γεωμετρία του πεδίου. Ισχύει και πάλι επομένως:

$$\frac{\delta x_k}{\delta b_m} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\delta(dS)}{\delta b_m} = 0$$

Στην έξοδο του πεδίου ροής η πίεση συσχετίζεται με μία πίεση αναφοράς έτσι ώστε να προσαρμόζει τη ροή κατάλληλα. Επομένως, είναι ανεξάρτητη από τις μεταβολές των μεταβλητών σχεδιασμού. Αντίστοιχα με προηγουμένως, η ολική μεταβολή της στατικής πίεσης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού θα είναι:

$$\frac{\delta p}{\delta b_m} = 0 \implies \frac{\partial p}{\partial b_m} + \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} = 0 \quad (4.5.6)$$

και τελικά λόγω της σχέσης 4.5.2 προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial p}{\partial b_m} = 0 \quad (4.5.7)$$

Οι όροι που απομένουν στον τύπο της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \int_T \int_{S_{out}} \left[u_i v_j n_j - q n_i + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS_{out} dt \\ &\quad - \int_T \int_{S_{out}} \nu u_i \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j dS_{out} dt \end{aligned}$$

Για να απαλειφθούν οι δύο παραπάνω όροι, αρκεί να επιβληθούν στην έξοδο οι εξής οριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} u_i v_j n_j - q n_i + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j &= 0 \\ \nu u_i \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j &= 0 \end{aligned}$$

Η δεύτερη από τις δύο εξισώσεις πρακτικά ισχύει “αυτόματα” στην έξοδο ενός πεδίου ροής, αν το πεδίο ταχύτητας διακρίνεται από ικανοποιητική ομοιογένεια, και ως

εκ τούτου η χωρική παράγωγος της ταχύτητας είναι μηδενική. Η πρώτη συνθήκη ξαναγράφεται, αναλυόμενη σε δύο συνιστώσες, μία κάθετη και μία εφαπτομενική:

$$q = u_i n_i v_j n_j + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j \quad (4.5.8)$$

$$0 = u_i t_i v_j n_j + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) t_i n_j \quad (4.5.9)$$

Χρησιμοποιώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις προσδιορίζονται πλήρως τα ροϊκά μεγέθη στην έξοδο του πεδίου ροής. Παίρνοντας πληροφορία για μία συνιστώσα της ταχύτητας από το εσωτερικό του χωρίου, παρεκβάλλοντάς την για παράδειγμα στο όριο της εξόδου, υπολογίζεται η δεύτερη συνιστώσα χρησιμοποιώντας τη σχέση 4.5.9. Από τη σχέση 4.5.8 υπολογίζεται τελικά και η συζυγής στατική πίεση με βάση τις τιμές των συζυγών μεγεθών που είχαν υπολογιστεί σε προηγούμενη επανάληψη ενός επαναληπτικού αλγορίθμου.

4.5.3 Συζυγείς οριακές συνθήκες στα στερεά τοιχώματα S_w

Επισημαίνεται εξ αρχής ότι ο όρος “στερεά τοιχώματα” αναφέρεται αποκλειστικά, στην παρούσα διπλωματική εργασία, στα όρια της προς βελτιστοποίηση αεροδυναμικής μορφής. Στα στερεά τοιχώματα ισχύει η συνθήκη μη-ολίσθησης $v_i = 0$. Επομένως, η τιμή της ταχύτητας είναι και σε αυτήν την περίπτωση πλήρως ανεξάρτητη από τις μεταβλητές σχεδιασμού. Η ολική μεταβολή του διανύσματος της ταχύτητας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού θα είναι και εδώ μηδενική:

$$\frac{\delta v_i}{\delta b_m} = 0 \implies \frac{\partial v_i}{\partial b_m} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} = 0 \implies \frac{\partial v_i}{\partial b_m} = - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \quad (4.5.10)$$

αφού το στερεό σύνορο αναμένεται να κινηθεί ($\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \neq 0$). Με βάση τα παραπάνω η σχέση 4.5.1 απλοποιείται περαιτέρω, και η επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση

γράφεται:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + \frac{\partial p}{\partial b_m} n_i \right] r_i dS_w dt \\
&+ \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + \frac{\partial p}{\partial x_k} n_i \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} r_i dS_w dt \\
&+ \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \left[-\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta}{\delta b_m} (n_j dS_w) + p \frac{\delta}{\delta b_m} (n_i dS_w) \right] r_i dt \\
&- \int_T \int_{S_w} \left[-qn_i + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial b_m} dS_w dt \\
&+ \int_T \int_{S_w} u_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_m} dS_w dt - \int_T \int_{S_w} \nu u_i \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j dS_w dt
\end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + \frac{\partial p}{\partial x_k} n_i \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} r_i dS_w dt \\
&+ \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \left[-\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta}{\delta b_m} (n_j dS_w) + p \frac{\delta}{\delta b_m} (n_i dS_w) \right] r_i dt \\
&+ \int_T \int_{S_w} \left[qn_i - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial b_m} dS_w dt \\
&+ \int_T \int_{S_w} \left(u_i n_i + \frac{1}{T} n_i r_i \right) \frac{\partial p}{\partial b_m} dS_w dt \\
&- \int_T \int_{S_w} \nu \left(u_i n_j + \frac{1}{T} n_j r_i \right) \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS_w dt
\end{aligned}$$

Για να απαλειφθούν τα ολοκληρώματα στα οποία εμφανίζονται εκείνοι οι όροι, των οποίων ο υπολογισμός πρέπει να αποφευχθεί, δηλαδή οι $\frac{\partial p}{\delta b_m}$ και $\frac{\partial}{\delta b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, επιβάλλονται οι εξής οριακές συνθήκες στα στερεά τοιχώματα:

$$u_i n_i + \frac{1}{T} n_i r_i = 0 \quad \text{και} \quad u_i n_j + \frac{1}{T} n_j r_i = 0$$

Τελικά, η οριακή συνθήκη, για το διάνυσμα της συζυγούς ταχύτητας στα στερεά τοιχώματα, προκύπτει:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i n_i = -\frac{1}{T} n_i r_i \\ u_i n_j = -\frac{1}{T} n_j r_i \end{array} \right\} \implies u_i = -\frac{1}{T} r_i \quad (4.5.11)$$

Υπενθυμίζεται ότι με r_i συμβολίζονται οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος, παράλληλου στην κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας, όπως εισέρχεται από την είσοδο του χωρίου, στην περίπτωση που στόχος της βελτιστοποίησης είναι η μείωση της αεροδυναμικής αντίστασης. Για τη συζυγή στατική πίεση χρησιμοποιείται η μηδενική μηδενική *Neumann*.

4.5.4 Τελική έκφραση παραγώγων ευαισθησίας

Με την απαλοιφή όλων των παραπάνω όρων, για την ανάπτυξη των συζυγών πεδιακών εξισώσεων, αλλά και των αντίστοιχων οριακών συνθηκών, προέκυψε η τελική, σημαντικά απλοποιημένη έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας, από τους εναπομείναντες όρους:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + \frac{\partial p}{\partial x_k} n_i \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} r_i dS_w dt \\ &+ \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \left[-\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta}{\delta b_m} (n_j dS_w) + p \frac{\delta}{\delta b_m} (n_i dS_w) \right] r_i dt \\ &+ \int_T \int_{S_w} \left[q n_i - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial b_m} dS_w dt \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

Είναι χαρακτηριστικό πως όλα τα ολοκληρώματα υπολογίζονται κατά μήκος των στέρεων τοιχωμάτων, καθώς με την προηγούμενη ανάλυση έχουν απαλειφθεί όλοι οι ολοκληρωματικοί όροι είτε στο εσωτερικό του χωρίου είτε στα υπόλοιπα όριά του. Επιλύοντας, τώρα, τις εξισώσεις της συζυγούς ροής και υπολογίζοντας τις συζυγείς μεταβλητές, ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας είναι άμεσος. Οι μεταβολές των καθαρά γεωμετρικών ποσοτήτων $\frac{\delta}{\delta b_m} (n_i dS_w)$ και $\frac{\delta x_k}{\delta b_m}$, εξαρτώνται από την παρα-

μετροποίηση που έχει προηγηθεί και είναι επομένως και αυτές εύκολα υπολογίσιμες.

4.6 Συνοπτική παράθεση εξισώσεων συζυγούς προβλήματος

Παρατίθενται σε αυτό το σημείο, όλες οι σχέσεις στις οποίες κατέληξε η συνεχής συζυγής ανάλυση που πραγματοποιήθηκε στις προηγούμενες παραγράφους, ξεκινώντας από τις μερικές διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα της μη-μόνιμης, στρωτής ροής για ασυμπίεστο ρευστό. Οι εξισώσεις αυτές (4.1.1 και 4.1.2) καθώς και οι αντίστοιχες συζυγείς που προέκυψαν θα επιλυθούν με τη χρήση της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών, μέσω ανάλυσης που ακολουθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Συζυγείς πεδιακές εξισώσεις

$$R^q = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

$$R_i^u = -\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0, \quad i = 1, 2(3)$$

Οριακές συνθήκες συζυγούς προβλήματος

- για την περιοχή του περιβάλλοντος χωρίου απ' όπου εισέρχεται η ροή

$$\begin{aligned} u_i &= 0 \\ \frac{\partial q}{\partial x_i} n_i &= 0 \end{aligned}$$

- για την περιοχή του περιβάλλοντος χωρίου απ' όπου εξέρχεται η ροή

$$q = u_i n_i \cdot v_j n_j + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j$$

$$0 = u_i t_i \cdot v_j n_j + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) t_i n_j$$

- για τα στερεά τοιχώματα του χωρίου ροής

$$u_i = -\frac{1}{T}r_i$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_i}n_i = 0$$

Παράγωγοι Ευαισθησίας

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + \frac{\partial p}{\partial x_k} n_i \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} r_i dS_w dt \\ &+ \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \left[-\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta}{\delta b_m} (n_j dS_w) + p \frac{\delta}{\delta b_m} (n_i dS_w) \right] r_i dt \\ &+ \int_T \int_{S_w} \left[q n_i - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial b_m} dS_w dt \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογή της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών και διακριτοποίηση των πεδιακών μερικών διαφορικών εξισώσεων - Αλγόριθμος επίλυσης

Στον παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται αναλυτικά η μέθοδος με την οποία διακριτοποιούνται οι πεδιακές εξισώσεις, τόσο του ευθέος όσο και του συζυγούς προβλήματος, καθώς και το χωρίο επίλυσης του προβλήματος. Σε πρώτη φάση, παρατίθενται ξανά οι προς επίλυση εξισώσεις ροής των δύο προβλημάτων, οι οποίες διακριτοποιούνται, χωρικά, με τη χρήση της μεθόδου πεπερασμένων όγκων. Επιπλέον χρησιμοποιείται η μέθοδος ισορροπίας των αρμονικών, η οποία αναλύθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, ούτως ώστε οι χρονικά μη-μόνιμοι όροι να αντικατασταθούν από το γινόμενο του μητρώου D με το διάνυσμα των πεδίων των ροϊκών μεταβλητών. Τέλος, γίνεται αναφορά στον (κοινό) αλγόριθμο επίλυσης του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος.

Η διακριτοποίηση, η χρήση της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών και ο αλγόριθμος επίλυσης δεν απαιτούν διαφορετική διαχείριση για τα δύο προβλήματα, κάτι το οποίο θα γίνει φανερό στη συνέχεια του κεφαλαίου. Αυτό άλλωστε είναι και ένα από τα βασικά προτερήματα της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, η οποία χρησιμοποιήθηκε στην ανάλυση με την οποία προέκυψαν οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις και οριακές συνθήκες.

5.1 Εξισώσεις ροής ευθέος και συζυγούς προβλήματος

Οι πεδιακές εξισώσεις του ευθέος προβλήματος παρατέθηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο (2.0.1 και 2.0.2) σε διαφορική συντηρητική μορφή [18], όπως αυτές γράφονται στην περίπτωση στρωτής ροής, χωρίς μετάδοση θερμότητας, ασυμπίεστου συνεκτικού ρευστού. Στις συγκεκριμένες σχέσεις αμελούνται οι βαρυτικές δυνάμεις ενώ υπενθυμίζεται ότι με p συμβολίζεται η πίεση του ρευστού διαιρεμένη με τη σταθερή πυκνότητα αυτού.

Σε αντίστοιχη μορφή γράφονται οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις, στις οποίες κατέληξε η συνεχής συζυγής μέθοδος που εφαρμόστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τα δύο συστήματα εξισώσεων παρατίθενται μαζί:

Ευθύ πρόβλημα

Εξίσωση Συνέχειας

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Εξίσωση Ορμής

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}\vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\nu \nabla \vec{v})$$

Συζυγές πρόβλημα

Εξίσωση Συνέχειας

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

Εξίσωση Ορμής

$$-\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{v}\vec{u}) + (\vec{u}\nabla) \cdot \vec{v} = -\nabla q + \nabla \cdot (\nu \nabla \vec{u})$$

Είναι χαρακτηριστικό πως τα δύο προβλήματα είναι αντίστοιχα, με τη διαφορά ότι στο συζυγές πρόβλημα εμφανίζεται ένας ακόμη όρος μεταφοράς $(\vec{u}\nabla) \cdot \vec{v}$.

5.2 Χρήση της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών

Η συγκεκριμένη μέθοδος αναλύθηκε εκτενώς σε προηγούμενο κεφάλαιο όπου αναπτύχθηκαν οι σχέσεις με τις οποίες εφαρμόζεται. Με τη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών επιχειρείται η προσέγγιση της χρονικής παραγωγού, από τη σχέση 3.3.1,

που προέκυψε μέσω μαθηματικής ανάλυσης προηγουμένως:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \omega D\vec{U}$$

όπου $\omega = \frac{2\pi}{T}$ με T τη περίοδο του φαινομένου. Τα στοιχεία του πίνακα D δίνονται από τη σχέση 3.2.19.

Το χρονικά μη-μόνιμο πρόβλημα επομένως, αντικαθίσταται από $N_T = 2N_H + 1$ πεπλεγμένα χρονικά μόνιμα προβλήματα, όπου N_H το πλήθος των αρμονικών που επιλέχθηκε για την προσέγγιση της παραγώγου, τα οποία αποτελούν ένα σύστημα εξισώσεων. Οι εξισώσεις του εν λόγω συστήματος είναι δυνατόν να επιλυθούν είτε πεπλεγμένα (*implicitly*) είτε ρητά (*explicitly*). Στη δεύτερη περίπτωση, οι εξισώσεις παραμένουν πεπλεγμένες (*coupled*), επιλύονται όμως σε ξεχωριστό βήμα η καθεμιά. Εφαρμόζεται η προσέγγιση στις ροϊκές εξισώσεις των δύο προβλημάτων ούτως ώστε να απαλειφθούν οι χρονικές παράγωγοι στην εξίσωση ορμής του ευθέως προβλήματος και στη συζυγή της:

Ευθύ πρόβλημα

Εξίσωση Συνέχειας

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Εξίσωση Ορμής

$$\begin{aligned} \omega D\vec{V} + \nabla \cdot (\vec{V}\vec{V}) &= -\nabla P + \nabla \cdot (\nu \nabla \vec{V}) \\ \nabla \cdot (\vec{V}\vec{V}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \vec{V}) &= -\nabla P - \omega D\vec{V} \end{aligned}$$

Συζυγές πρόβλημα

Εξίσωση Συνέχειας

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0$$

Εξίσωση Ορμής

$$\begin{aligned} -\omega D\vec{U} - \nabla \cdot (\vec{V}\vec{U}) + (\vec{U}\nabla) \cdot \vec{V} &= -\nabla Q + \nabla \cdot (\nu \nabla \vec{U}) \\ -\nabla \cdot (\vec{V}\vec{U}) + (\vec{U}\nabla) \cdot \vec{V} - \nabla \cdot (\nu \nabla \vec{U}) &= -\nabla Q + \omega D\vec{U} \end{aligned}$$

Κρίνεται εδώ σκόπιμο να επαναληφθεί το εξής: καθεμιά ξεχωριστά από τις παραπάνω εξισώσεις, στην πραγματικότητα, αποτελεί ένα σύστημα $N_T = 2N_H + 1$ εξισώσεων. Τα \vec{V} , \vec{U} , P και Q είναι διανύσματα που περιλαμβάνουν τα πεδία για την ταχύτητα, τη

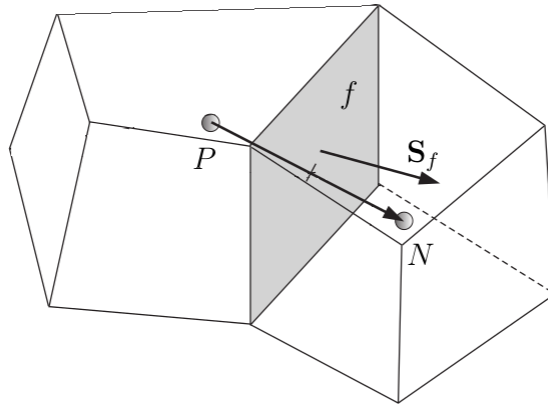
συζυγή ταχύτητα, τη στατική πίεση και τη συζυγή στατική πίεση στις N_T χρονικές στιγμές. Επιπλέον, υπενθυμίζεται ότι, επειδή η διαγώνιος του μητρώου D περιλαμβάνει μόνο μηδενικά στοιχεία, η ταχύτητα της οποίας η εξίσωση επιλύεται κάθε φορά δεν εμπλέκεται στο άθροισμα που προσεγγίζει τη χρονική μερική παράγωγο. Επομένως, οι όροι $\omega D \vec{V}$ και $\omega D \vec{U}$ μεταφέρονται στο δεξιό μέλος της εξίσωσης καθώς, όπως θα φανεί και στις παραγράφους που ακολουθούν, είναι δυνατόν να αντιμετωπιστούν σε κάθε εξίσωση ως επιπλέον όροι πηγής.

Καθεμιά από τις παραπάνω εξισώσεις που αντιστοιχεί σε μία από τις N_T χρονικές στιγμές πρέπει να διακριτοποιηθεί και να επιλυθεί. Η λύση όλων των εξισώσεων θα δώσει τα πεδία για τις χρονικές στιγμές αυτές. Με κατάλληλο μετασχηματισμό, όπως περιγράφηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο (σχέση 3.3.2), θα υπολογιστούν τελικά οι αντίστοιχοι συντελεστές των σειρών *Fourier* και επομένως θα προσδιοριστεί η λύση των δύο προβλημάτων, ευθέως και συζυγούς δηλαδή, για τις επιθυμητές χρονικές στιγμές.

5.3 Γένεση πλέγματος στο χωρίο επίλυσης

Η διακριτοποίηση του χωρίου επίλυσης παράγει ένα υπολογιστικό πλέγμα εντός του οποίου επιλύονται οι διαφορικές εξισώσεις και υπολογίζονται οι μεταβλητές του προβλήματος. Καθορίζει τη θέση κάθε σημείου του χώρου και καθορίζει τα σύνορα του χωρίου ροής.

Σύμφωνα με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων [17], [15] το χωρίο διακριτοποιείται σε μικρές υπολογιστικές κυψέλες, ή όπως αναφέρονται στη συγκεκριμένη μέθοδο, σε όγκους ελέγχου. Οι όγκοι δεν υπερκαλύπτονται ποτέ και συμπληρώνουν ολόκληρο το υπολογιστικό χωρίο. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι όγκοι στη γενική περίπτωση είναι πολύεδρα σχήματα. Αυτό συνεπάγεται ότι γειτονεύουν με πολλούς ακόμη όγκους σχηματίζοντας, πάντοτε στη γενική περίπτωση, μη-δομημένα πλέγματα, παρέχοντας μεγάλη ελευθερία στην ανάπτυξη πλεγμάτων που περιλαμβάνουν περίπλοκες γεωμετρίες. Ένας τυπικός όγκος ελέγχου παρουσιάζεται στο *Σχήμα* 5.2. Το σημείο P όπου γίνονται όλοι οι υπολογισμοί για έναν όγκο, τοποθετείται στο



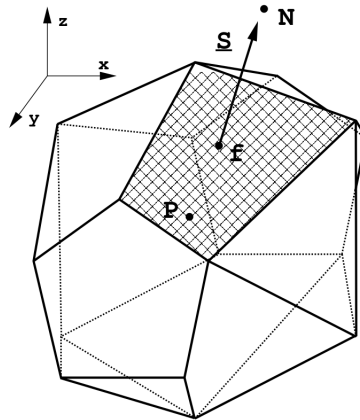
Σχήμα 5.1: Εξαεδρικοί όγκοι ελέγχου [15].

κέντρο αυτού, ούτως ώστε:

$$\int_{V_P} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) dV = 0 \quad (5.3.1)$$

Στις εφαρμογές της παρούσας διπλωματικής εργασίας χρησιμοποιούνται δομημένα πλέγματα που αναπτύσσονται γύρω από μία αεροδυναμική μορφή. Τα συγκεκριμένα δομημένα πλέγματα χρησιμοποιούν εξαεδρικούς όγκους και ως εκ τούτου είναι τριδιάστατα. Σημειώνεται ωστόσο πως το λογισμικό *OpenFOAM* χειρίζεται τα δομημένα πλέγματα ως μη-δομημένα. Η διαφοροποίηση έγκειται στον τρόπο με τον οποίο αποθηκεύονται οι κόμβοι του πλέγματος. Ο διδιάστατος χαρακτήρας προσδίδεται στο πρόβλημα μέσω κατάλληλης διακριτοποίησης κατά τη διεύθυνση του βάρους, όπως θα φανεί και παρακάτω. Τυπικοί εξαεδρικοί όγκοι ελέγχου παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.1.

Ένας όγκος ελέγχου οριοθετείται από ένα σύνολο επίπεδων εδρών (*faces*) τις οποίες μοιράζεται με γειτονικούς όγκους. Το κέντρο ενός γειτονικού όγκου N φαίνεται στο Σχήμα 5.2. Οι έδρες αυτές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τις εσωτερικές έδρες (*internal faces*), οι οποίες βρίσκονται μεταξύ δύο γειτονικών όγκων, και τις οριακές έδρες (*boundary faces*), τα οποία μοιράζεται ο όγκος ελέγχου με τα σύνορα του υπολογιστικού χωρίου. Το κάθετο διάνυσμα σε μία έδρα S_f ορίζεται πάντοτε να έχει



Σχήμα 5.2: Τυπικός όγκος ελέγχου [20].

φορά προς το εξωτερικό του όγκου με τη μικρότερη αρίθμηση, όπως αυτή ορίζεται από τη διαδικασία διακριτοποίησης και μέτρο ίσο με την επιφάνεια της αντίστοιχης έδρας. Αντίστοιχα, τα κάθετα διανύσματα στα οριακά μέτωπα έχουν φορά προς το εξωτερικό του υπολογιστικού χωρίου.

5.4 Διακριτοποίηση με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων

Η διαδικασία της διακριτοποίησης έχει στόχο να μετατρέψει μία μερική διαφορική εξίσωση σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, για την αριθμητική επίλυση της. Στη γενική περίπτωση η διαδικασία περιλαμβάνει τη διακριτοποίηση του χωρίου επίλυσης και τη διακριτοποίηση των χωρικών και χρονικών διαφορών των εν λόγω εξισώσεων [20].

Η διακριτοποίηση του χωρίου επίλυσης παρέχει μία αριθμητική περιγραφή του χωρίου όπου γίνονται οι υπολογισμοί. Το χωρίο διαιρείται σε πεπερασμένο αριθμό υπολογιστικών κυψελών, στην ουσία μικρότερων διακριτών τμημάτων. Έτσι καθίσταται πλήρως γνωστή η θέση κάθε σημείου στην οποία υπολογίζεται η λύση και περιγράφονται πλήρως τα όρια του χωρίου. Για μη-μόνιμα χρονικά φαινόμενα, το πεδίο του χρόνου διακριτοποιείται αντίστοιχα σε πεπερασμένο αριθμό χρονικών βημάτων.

Η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων περιλαμβάνει συγκεκριμένα βήματα, τα οποία εδώ περιγράφονται, και ακολουθούνται στις επόμενες παραγράφους. Σε πρώτη φάση, οι διαφορικές εξισώσεις, οι εξισώσεις ροής για το πρόβλημα που αντιμετωπίζεται στην παρούσα διπλωματική εργασία, ολοκληρώνονται σε κάθε πεπερασμένο όγκο, που ταυτίζεται ουσιαστικά με την υπολογιστική κυψέλη, όπως ορίζεται στη διακριτοποίηση του χωρίου επίλυσης. Στη συνέχεια, οι ολοκληρωματικές εξισώσεις διακριτοποιούνται ώστε να ικανοποιούνται οι φυσικοί νόμοι που διέπουν το πρόβλημα, όπως είναι η διατήρηση της μάζας και της ορμής, και σε διακριτό επίπεδο. Απαιτείται βέβαια το σύστημα συντεταγμένων να είναι αναλλοίωτο με το χρόνο και το πλέγμα του χωρίου επίλυσης να μην μεταβάλλεται. Οι πεπερασμένοι όγκοι, στη γενική περίπτωση, έχουν πολυεδρικό σχήμα, κάτι που κάνει τη μέθοδο κατάλληλη τόσο για δομημένα (*structured*) όσο και για μη-δομημένα (*unstructured*) πλέγματα.

Όπως και συμβαίνει και με τις περισσότερες μεθόδους διακριτοποίησης, οι μη-γραμμικές διαφορικές εξισώσεις απαιτούν γραμμικοποίηση πριν τη διακριτοποίησή τους. Με τη διαδικασία αυτή οι μη-γραμμικοί θεωρούνται “παγωμένοι” (*frozen*) στην τρέχουσα επανάληψη ενός αλγόριθμου επίλυσης, γνωστοί δηλαδή από προηγούμενη επανάληψη, και χρησιμοποιούνται για τους αριθμητικούς υπολογισμούς.

Στις επόμενες παραγράφους περιγράφεται η διαδικασία διακριτοποίησης του υπολογιστικού χωρίου και των χωρικών διαφορών των ροϊκών εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα που μελετάται. Σημειώνεται πως δεν εφαρμόζεται κάποια διακριτοποίηση στο πεδίο του χρόνου καθώς με τη χρήση της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών η χρονική παράγωγος προσεγγίζεται διακριτοποιώντας την ουσιαστικά σε N_T χρονικές στιγμές.

5.4.1 Διακριτοποίηση της εξίσωσης της ορμής

Για καθεμιά από τις N_T χρονικές στιγμές, η εξίσωση της ορμής για το ευθύ πρόβλημα, αλλά και η συζυγής της, γράφονται:

Εξίσωση Ορμής

$$\nabla \cdot (\vec{V}_i V_i) - \nabla \cdot (\nu \nabla V_i) = -\nabla P_i - \omega \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{V}$$

Συζυγής της Εξίσωσης Ορμής

$$-\nabla \cdot (\vec{U}_i V_i) - \nabla \cdot (\nu \nabla U_i) = -\nabla Q_i - (\vec{U}_i \nabla) \cdot \vec{V}_i + \omega \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{U}$$

με $1 \leq i \leq N_T$, όπου με \mathbf{D}_i συμβολίζονται όλα τα στοιχεία μίας σειράς του μητρώου D . Τα V_i, U_i είναι βαθμωτά μεγέθη που αντιστοιχούν σε μία από τις συνιστώσες της ταχύτητας του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος αντίστοιχα, ανάλογα με τη διεύθυνση ως προς την οποία γράφεται η εξίσωση της ορμής. Ο επιπλέον όρος μεταφοράς της συζυγούς εξίσωσης μεταφέρεται στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης, καθώς πρόκειται να αντιμετωπιστεί και αυτός ως όρος πηγής, ούτως ώστε να διευκολυνθεί η αριθμητική σύγκλιση του προβλήματος.

Οι δύο εξισώσεις είναι αντίστοιχες. Για αυτόν ακριβώς το λόγο, η ανάλυση που ακολουθεί δεν επαναλαμβάνεται και για τις δύο εξισώσεις. Αντ' αυτού εφαρμόζεται σε μία εξίσωση μεταφοράς-διάχυσης για μία βαθμωτή μεταβλητή u_k , έστω για μία από τις συνιστώσες της ταχύτητας, που αποτελεί γενική μορφή των προηγούμενων δύο:

$$\nabla \cdot (\vec{u} u_k) - \nabla \cdot (\nu \nabla u_k) = S(u_k) \quad (5.4.1)$$

όπου με $S(\cdot)$ συμβολίζονται οι όροι πηγής της εξίσωσης. Στη γενική περίπτωση η $S(\cdot)$ είναι συνάρτηση του βαθμωτού μεγέθους u_k . Η παραπάνω είναι μία μη-γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης.

Η εξίσωση 5.4.1, σε ολοκληρωματική μορφή, πρέπει να ικανοποιείται σε κάθε όγκο ελέγχου V_P γύρω από το κάθε σημείο P . Ολοκληρώνοντας:

$$\int_{V_P} \nabla \cdot (\vec{u} u_k) dV - \int_{V_P} \nabla \cdot (\nu \nabla u_k) dV = \int_{V_P} S(u_k) dV \quad (5.4.2)$$

Η διακριτοποίηση των χωρικών όρων της εξίσωσης 5.4.2 επιτυγχάνεται με χρήση του θεωρήματος *Gauss*. Ακολουθεί απλή παράθεση των βασικών σχέσεων που χρησιμο-

ποιούνται, χωρίς περαιτέρω ανάλυση [20]:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \oint_{\partial V} d\mathbf{S}_f \cdot \mathbf{a} \quad (5.4.3)$$

$$\int_V \nabla a dV = \oint_{\partial V} d\mathbf{S}_f a \quad (5.4.4)$$

$$\int_V \nabla \mathbf{a} dV = \oint_{\partial V} d\mathbf{S}_f \mathbf{a} \quad (5.4.5)$$

όπου ∂V η κλειστή επιφάνεια που περικλείει έναν όγκο V και $d\mathbf{S}_f$ το απειροστό στοιχείο επιφάνειας πολλαπλασιασμένο με το κάθετο στην επιφάνεια μοναδιαίο διάνυσμα με φορά προς το εξωτερικό της. Στις παραπάνω σχέσεις χρησιμοποιούνται: ένα βαθμωτό μέγεθος και \mathbf{a} ένα διανυσματικό. Τα παραπάνω επικαμπύλια ολοκληρώματα μετασχηματίζονται σε αθροίσματα στο σύνολο των μετώπων f του όγκου.

Η διακριτοποίηση της 5.4.2 θα εξεταστεί ξεχωριστά για κάθε όρο [20].

5.4.1.1 Διακριτοποίηση του όρου μεταφοράς

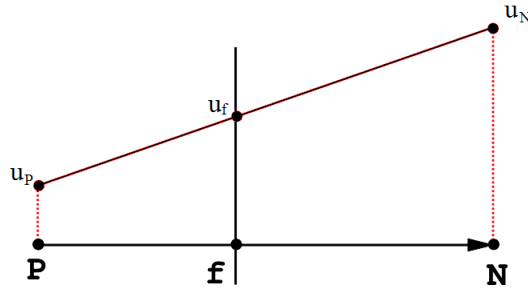
Η διακριτοποίηση του όρου μεταφοράς επιτυγχάνεται με χρήση της εξίσωσης 5.4.3:

$$\int_{V_P} \nabla \cdot (\vec{u}u_k) dV = \oint_{\partial V_P} d\mathbf{S}_f \cdot (\vec{u}u_k)_f = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot (\vec{u})_f (u_k)_f = \sum_f \varphi(u_k)_f \quad (5.4.6)$$

όπου το βαθμωτό μέγεθος φ αντιπροσωπεύει τη ροή μάζας (*mass flux*) διαμέσου κάθε μετώπου f . Η συγκεκριμένη εφαρμογή είναι απαραίτητη προκειμένου να γραμμικοποιηθεί ο μη-γραμμικός όρος που εμφανίζεται στην εξίσωση ορμής του ευθέως προβλήματος.

Η τιμή της μεταβλητής u στην κάθε έδρα f , υπολογίζεται μέσω παρεμβολής στις τιμές της μεταβλητής από τα κέντρα δύο γειτονικών όγκων, όπως παρουσιάζεται καλύτερα στο Σχήμα 5.3.

Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται γραμμική παρεμβολή μεταξύ των κέντρων των



Σχήμα 5.3: Σχηματική παράσταση της γραμμικής παρεμβολής για τον προσδιορισμό της τιμής σε ένα μέτωπο [20].

δύο όγκων, η τιμή της u στο μέτωπο υπολογίζεται από τη σχέση:

$$(u_k)_f = f_x(u_k)_P + (1 - f_x)(u_k)_N$$

όπου το f_x ορίζεται ως ο λόγος των παρακάτω αποστάσεων:

$$f_x = \frac{|\vec{fN}|}{|\vec{PN}|}$$

Η παραπάνω ανάλυση είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα κεντρικών διαφορών (*central differencing*). Ωστόσο, η χρήση κεντρικών διαφορών δεν εξασφαλίζει σε καμία περίπτωση σύγκλιση του αλγορίθμου, λόγω του ότι προκαλούν ταλάντωση της λύσης για τον όρο μεταφοράς. Στην εφαρμογή της παρούσας διπλωματικής εργασίας χρησιμοποιήθηκαν σχήματα πρώτης και δεύτερης τάξης στα οποία η τιμή της μεταβλητής u καθορίζεται ανάλογα με τη κατεύθυνση της ροής. Εδώ παρατίθεται ενδεικτικά ένα τέτοιο σχήμα πρώτης τάξης (*first order upwind differencing*):

$$(u_k)_f = \begin{cases} (u_k)_P & , \text{ για } \varphi \geq 0 \\ (u_k)_N & , \text{ για } \varphi < 0 \end{cases}$$

5.4.1.2 Διακριτοποίηση του όρου διάχυσης

Η διακριτοποίηση του όρου διάχυσης επιτυγχάνεται αντίστοιχα με τη χρήση του θεωρήματος *Green*:

$$\int_{V_P} \nabla \cdot (\nu \nabla u_k) dV = \oint_{\partial V_P} d\mathbf{S}_f \cdot (\nu \nabla u_k)_f = \sum_f \nu \mathbf{S}_f \cdot (\nabla u_k)_f \quad (5.4.7)$$

Στη γενική περίπτωση τα πλέγματα δεν χρειάζεται να είναι ορθογώνια. Το αποτέλεσμα του εσωτερικού γινομένου $\mathbf{S}_f \cdot (\nabla \varphi)_f$ χωρίζεται σε δύο μέρη:

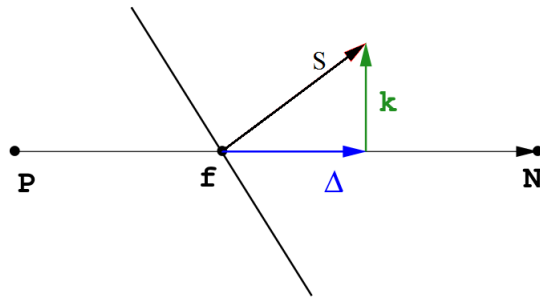
$$\mathbf{S}_f \cdot (\nabla u_k)_f = \Delta \cdot (\nabla u_k)_f + \mathbf{k} \cdot (\nabla u_k)_f \quad (5.4.8)$$

Ο πρώτος από τους δύο παραπάνω όρους αναφέρεται στην ορθογώνια συμβολή του γινομένου ενώ ο δεύτερος αποτελεί απλά μία διόρθωση λόγω της μη-ορθογωνικότητας. Τα δύο διανύσματα της εξίσωσης 5.4.8 πρέπει να ικανοποιούν την παρακάτω συνθήκη:

$$\mathbf{S}_f = \Delta + \mathbf{k}$$

Το διάνυσμα Δ επιλέγεται παράλληλο στην ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα δύο γειτονικών όγκων και, επομένως, απομένει μόνο η κατάλληλη επιλογή του διανύσματος \mathbf{k} , ανάλογα με την τεχνική διόρθωσης που χρησιμοποιείται.

Η τελική διακριτοποιημένη μορφή του όρου διάχυσης δίνεται από την ακόλουθη



Σχήμα 5.4: Σχηματική παράσταση της τομής μίας έδρας f με το επίπεδο στο οποίο κείται το διάνυσμα \mathbf{PN} για ένα μη-ορθογωνικό πλέγμα, και ανάλυση του κάθετου στην έδρα διανύσματος \mathbf{S}_f σε δύο συνιστώσες.

σχέση:

$$\mathbf{S} \cdot (\nabla u_k)_f = |\Delta| \cdot \frac{(u_k)_N - (u_k)_P}{|\overrightarrow{PN}|} + \mathbf{k} \cdot (\nabla u_k)_f \quad (5.4.9)$$

όπου ο όρος $(\nabla u)_f$ προσεγγίζεται, για την συμβολή της μη-ορθογωνιότητας, εναλλακτικά από τη σχέση:

$$(\nabla u_k)_f = f_x (\nabla u_k)_P + (1 - f_x) (\nabla u_k)_N \quad , \quad \text{όπου: } (\nabla u_k)_P = \frac{1}{V_P} \sum_f \mathbf{S}(u_k)_f$$

Εάν το πλέγμα χαρακτηρίζεται από ικανοποιητική ορθογωνιότητα και, επομένως, δεν υπάρχει ανάγκη μη-ορθογωνικής διόρθωσης, το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{S} \cdot (\nabla \varphi)_f$ διακριτοποιείται με την ακόλουθη έκφραση:

$$\mathbf{S} \cdot (\nabla \varphi)_f = |\mathbf{S}| \cdot \frac{\varphi_N - \varphi_P}{|\overrightarrow{PN}|}$$

5.4.1.3 Διακριτοποίηση των όρων πηγής

Αναλύθηκε προηγουμένως ποιοι όροι σε κάθε εξίσωση αντιμετωπίζονται ως όροι πηγής, μιας και δεν είναι δυνατό να γραφούν ως μεταφορικοί όροι ή όροι διάχυσης. Η γραμμικοποίηση του όρου πηγής προηγείται της διακριτοποίησής του. Έτσι ο όρος πηγής αναλύεται:

$$S(u_k) = S_u(u_k) + S_p(u_k) \cdot u$$

Η ολοκλήρωση στον όγκο ελέγχου δίνει:

$$\int_{V_P} S(u_k) dV = S_{u_k} V_P + S_p V_P (u_k)_P \quad (5.4.10)$$

5.4.2 Τελική έκφραση της εξίσωσης μεταφοράς-διάχυσης

Διακριτοποιώντας όλους τους παραπάνω όρους, η τελική έκφραση της εξίσωσης μεταφοράς 5.4.1 που μελετάται στο παρούσα παράγραφο, και κατ' αντιστοιχία της εξίσωσης ορμής του ευθέως προβλήματος που αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο

αλλά και της συζυγούς της, είναι δυνατό να γραφεί σε ημι-διακριτή μορφή ως εξής:

$$\alpha_P(u_k)_P - H(u_k) = -\nabla p \quad (5.4.11)$$

όπου $H(u_k) = -\sum_N \alpha_N(u_k)_N$. Υπενθυμίζεται ότι με τον δείκτη P ορίζεται η τιμή της μεταβλητής στο κέντρο του όγκου ελέγχου, και με το δείκτη N οι τιμές της μεταβλητής στα κέντρα των γειτονικών όγκων. Οι συντελεστές α_P και α_N ορίζονται και αυτοί συναρτήσει της μεταβλητής u_k , καθώς η εξίσωση, όπως αναφέρθηκε ήδη, είναι μη-γραμμική. Οι συγκεκριμένοι όροι προέκυψαν από τη διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς, διάχυσης και των όρων πηγών της μεταφορικής εξίσωσης.

Ακολουθεί ο αλγόριθμος που περιγράφει τη διαδικασία επίλυσης της παραπάνω εξίσωσης (5.4.11) και ο οποίος χρησιμοποιήθηκε στην εφαρμογή της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Όπως θα φανεί παρακάτω, οι συντελεστές α_P και α_N υπολογίζονται με τις υπάρχουσες τιμές της μεταβλητής u , από προηγούμενο βήμα του αλγορίθμου, ακριβώς λόγω της ανάγκης να ξεπεραστεί το πρόβλημα της μη-γραμμικότητας της εξίσωσης.

5.5 Αλγόριθμος SIMPLE

Παρατίθεται ο αλγόριθμος ο οποίος ακολουθείται για την επίλυση του προβλήματος [19]. Ο αλγόριθμος *SIMPLE* είναι ένας ευρέως χρησιμοποιούμενος επιλύτης χρονικά μόνιμων προβλημάτων. Βασικό στοιχείο του είναι η διαδικασία που ακολουθεί για τον υπολογισμό της στατικής πίεσης μέσω της τεχνικής της “διόρθωσης πίεσης (*pressure correction*)”. Η συγκεκριμένη τεχνική χρησιμοποιείται καθώς δεν υπάρχει ξεχωριστή, ρητή έκφραση για τον υπολογισμό της πίεσης.

Η εξίσωση της ορμής γράφεται σε ημι-διακριτή μορφή σύμφωνα με τη σχέση 5.4.11, κατ’ αντιστοιχία δηλαδή με την εξίσωση μεταφοράς της προηγούμενης ενότητας. Η εξίσωση 5.4.11, σε διανυσματική μορφή, γράφεται:

$$\vec{v}_P = \frac{H(\vec{v})}{\alpha_P} - \frac{\nabla p}{\alpha_P} \quad (5.5.1)$$

Υπενθυμίζεται ότι οι συντελεστές α_P και α_N θεωρούνται γνωστοί καθώς υπολογί-

στηκαν με τιμές του πεδίου u από προηγούμενο βήμα. Μέσω παρεμβολής στη σχέση 5.5.1, υπολογίζεται η τιμή της u σε κάθε μέτωπο του όγκου ελέγχου ως εξής:

$$\vec{v}_f = \left(\frac{H(\vec{v})}{\alpha_P} \right)_f - \left(\frac{\nabla p}{\alpha_P} \right)_f \quad (5.5.2)$$

Διακριτοποιείται η εξίσωση της συνέχειας:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot \vec{v}_f = 0 \quad (5.5.3)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση 5.5.2 στη διακριτοποιημένη εξίσωση συνέχειας, καταλήγουμε στην απαιτούμενη επιπλέον εξίσωση για τον υπολογισμό της στατικής πίεσης:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p}{\alpha_P} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{H(\vec{v})}{\alpha_P} \right) = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot \left(\frac{H(\vec{v})}{\alpha_P} \right)_f \quad (5.5.4)$$

Τελικά, το σύστημα των δύο εξισώσεων, της συνέχειας και της ορμής (ή των συζυγών τους), γράφεται σε διακριτοποιημένη μορφή ως εξής:

$$\alpha_P \vec{v}_P = H(\vec{v}) - \sum_f \mathbf{S}_f p \quad (5.5.5)$$

$$\sum_f \mathbf{S}_f \cdot \left(\frac{\nabla p}{\alpha_P} \right) = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot \left(\frac{H(\vec{v})}{\alpha_P} \right)_f \quad (5.5.6)$$

Ο επαναληπτικός αλγόριθμος επίλυσης του παραπάνω συστήματος ακολουθεί τα εξής βήματα:

- Ανακτώνται τα δεδομένα της προηγούμενης επανάληψης του αλγορίθμου. Σημειώνεται πως οι επαναλήψεις αυτές αναφέρονται σε επαναλήψεις για σύγκλιση του αλγορίθμου και δεν αποτελούν χρονικά βήματα καθώς επιλύονται χρονικά μόνιμα προβλήματα.
- Επιλύεται η εξίσωση 5.5.5 χρησιμοποιώντας τις τιμές πίεσης της προηγούμενης επανάληψης, για μία πρώτη εκτίμηση του πεδίου ταχύτητας.
- Υπολογίζονται οι συντελεστές α_P ολόκληρου του πεδίου και η τιμή της \vec{v} χωρίς όμως τη διόρθωση της πίεσης.

- Με την παραπάνω τιμή της \vec{v} υπολογίζεται η ροή μάζας μέσω παρεμβολής.
- Επιλύεται η εξίσωση 5.5.6, γνωρίζοντας τη ροή μάζας σε όλο το πεδίο, και προκύπτει το διορθωμένο πεδίο στατικής πίεσης.
- Με τη διόρθωση της πίεσης υπολογίζεται η νέα διορθωμένη τιμή της ταχύτητας και της ροής μάζας.
- Τα παραπάνω βήματα επαναλαμβάνονται έως ότου επιτευχθεί σύγκλιση.

Επαναλαμβάνεται ακόμη πως η επίλυση του καθενός από τα N_T συστήματα εξισώσεων, για καθεμία από τις N_T χρονικές στιγμές αντίστοιχα, γίνεται σε ξεχωριστό βήμα στην ίδια επανάληψη σύγκλισης του αλγορίθμου. Η παραπάνω διαδικασία ακολουθείται επακριβώς για την επίλυση της συζυγούς εξίσωσης ορμής.

Κεφάλαιο 6

Πιστοποίηση της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών

Στον παρόν κεφάλαιο γίνεται η πιστοποίηση της μεθόδου στους υπολογισμούς για το ευθύ και συζυγές πρόβλημα. Για το ευθύ πρόβλημα, αυτό επιτυγχάνεται μέσω σύγκρισης της άνωσης και της δύναμης της αντίστασης που ασκούνται σε μία αεροτομή, όπως υπολογίζεται με τη μέθοδο ισορροπίας των αρμονικών και από τον ήδη πιστοποιημένο κώδικα επίλυσης στο πεδίο του χρόνου (με χρήση της μεθόδου χρονοπροέλασης). Για το συζυγές πρόβλημα, συγκρίνονται οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίζονται με χρήση της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών, με εκείνες που υπολογίζονται αντίστοιχα με την “κλασική” μέθοδο.

Η πιστοποίηση γίνεται για τρεις ξεχωριστές περιπτώσεις ροών γύρω από την ίδια αεροτομή, όπου διαφοροποιούνται οι τιμές για το εύρος ταλάντωσης της γωνίας που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας όπως εισέρχεται στο χωρίο με τη χορδή της αεροτομής και η συχνότητα με την οποία αυτή ταλαντώνεται, ο αριθμός *Reynolds* της ροής αλλά και το πλήθος των αρμονικών που χρησιμοποιούνται. Οι τρεις αυτές περιπτώσεις καθίστανται επαρκείς να πιστοποιήσουν την εγκυρότητα της μεθόδου αλλά και να αναδείξουν τυχόν αδυναμίες της. Η πρόλεξη της ροής σε κάθε εφαρμογή γίνεται με χρήση του ελεύθερου λογισμικού *OpenFOAM* και η πιστοποίηση της μεθόδου γίνεται σε σύγκριση με τα αποτελέσματα που υπολογίζει ο επιλύτης *pisoFoam*, ένας επιλύτης του *OpenFOAM* που εφαρμόζει τον αλγόριθμο *PISO*.

6.1 Περιγραφή του προβλήματος

Στις εφαρμογές που θα ακολουθήσουν, εξετάζεται το πρόβλημα διδιάστατης στρωτής ροής ασυμπίεστου ρευστού γύρω από μία αεροτομή. Οι πεδιακές εξισώσεις για το συγκεκριμένο πρόβλημα παρατέθηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο. Από αυτές τις εξισώσεις ροής αναπτύχθηκαν οι πεδιακές εξισώσεις και του συζυγούς προβλήματος. Τα δύο προβλήματα (ευθύ και συζυγές) μαζί με τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο, επιλύονται για καθεμιά από τις τρεις περιπτώσεις για τις οποίες γίνεται η πιστοποίηση της μεθόδου.

Στο πρόβλημα το οποίο μελετάται, το διάνυσμα της επ' άπειρον ταχύτητας δεν σχηματίζει σταθερή γωνία με τη χορδή της αεροτομής καθόλη τη διάρκεια του φαινομένου. Αντίθετα, η γωνία που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα ταλαντώνεται εξαναγκασμένα ημιτονοειδώς με το χρόνο γύρω από την τιμή μηδέν, οδηγώντας έτσι το φαινόμενο να αποκτήσει μη-μόνιμο χαρακτήρα. Το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας της αδιατάρακτης ροής παραμένει σταθερό. Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι συνιστώσες του διανύσματος της επ' άπειρον ταχύτητας υπολογίζονται κάθε χρονική στιγμή από τον τύπο:

$$\vec{v}_{inf} = (|\vec{v}_{inf}| \cdot \cos \vartheta, |\vec{v}_{inf}| \cdot \sin \vartheta) \quad (6.1.1)$$

με:

$$\vartheta = \vartheta_{ampl} \cdot \sin(2\pi ft) \quad (6.1.2)$$

όπου: f η συχνότητα ταλάντωσης, ϑ_{ampl} το πλάτος ταλάντωσης της γωνίας και $|\vec{v}_{in}|$ το σταθερό μέτρο της επ' άπειρον ταχύτητας.

Ο υπολογισμός των δυνάμεων που ασκούνται πάνω στην αεροτομή κάθε χρονική στιγμή, γίνεται με χρήση της σχέσης:

$$D = \int_{S_w} f dS_w \quad (6.1.3)$$

όπου f είναι η δύναμη που ασκείται σε ένα σημείο του αεροδυναμικού σώματος και

υπολογίζεται αντίστοιχα από τον τύπο:

$$f = \left[-\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + p n_i \right] d_i$$

όπου d_i είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος, παράλληλου στην ευθεία που ορίζει η χορδή της αεροτομής όταν υπολογίζεται η αεροδυναμική αντίσταση και κάθετου στην ευθεία που ορίζει η χορδή της αεροτομής όταν υπολογίζεται η άνωση¹.

Παρατίθενται οι παράγωγοι ευαισθησίας που προκύπτουν για την ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας όπως αυτές προέκυψαν από την ανάλυση προηγούμενου κεφαλαίου:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + \frac{\partial p}{\partial x_k} n_i \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} r_i dS_w dt \\ &+ \frac{1}{T} \int_T \int_{S_w} \left[-\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta}{\delta b_m} (n_j dS_w) + p \frac{\delta}{\delta b_m} (n_i dS_w) \right] r_i dt \\ &+ \int_T \int_{S_w} \left[q n_i - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial b_m} dS_w dt \end{aligned}$$

Ως μεταβλητές σχεδιασμού για τις εφαρμογές που θα ακολουθήσουν, χρησιμοποιήθηκαν οι μετατοπίσεις, κατά τη κάθετη στο τοίχωμα διεύθυνση, κάθε κόμβου που αποτελεί και σημείο της αεροτομής. Όταν ένας κόμβος της αεροτομής μετακινείται, τα υπόλοιπα σημεία της επιφάνειάς της παραμένουν σταθερά. Συνεπώς, για έναν κόμβο μ του τοιχώματος της αεροτομής, με συντεταγμένες x_k^μ και με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη θέση αυτή το n_k^μ , θα ισχύει ότι:

$$\frac{\delta x_k^\mu}{\delta b_m} = \begin{cases} \frac{\delta x_k^\mu}{\delta b_m} = 0 & , \text{ για } \mu \neq m \\ \frac{\delta x_k^\mu}{\delta b_m} = n_k^m & , \text{ για } \mu = m \end{cases} \quad (6.1.4)$$

¹Σημειώνεται πως οι δυνάμεις που υπολογίζονται και συγκρίνονται εδώ δεν είναι οι μέγιστες δυνάμεις που ασκούνται πάνω στην αεροδυναμική μορφή κάθε χρονική στιγμή καθώς η ευθεία πάνω στην οποία προβάλλονται έχει σταθερή στο χρόνο διεύθυνση και δεν ακολουθεί το διάνυσμα της ταχύτητας.

Γράφοντας το διακριτό ισοδύναμο της σχέσης με την οποία υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας, προκύπτει η παρακάτω έκφραση:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \sum_{\mu=1}^M \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + \frac{\partial p}{\partial x_k} n_i \right]_{\mu} n_k^{\mu} r_i \|S_{\mu}\| \Delta t \\ &+ \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \sum_{\mu=1}^M \left[-\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)_{\mu} \frac{\delta}{\delta b_m} (n_j^{\mu} \|S_{\mu}\|) + p_{\mu} \frac{\delta}{\delta b_m} (n_i^{\mu} \|S_{\mu}\|) \right] r_i \Delta t \\ &+ \sum_{t=0}^T \sum_{\mu=1}^M \left[q n_i - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right]_{\mu} \frac{\partial v_i}{\partial x_k^{\mu}} n_k^{\mu} \|S_{\mu}\| \Delta t \end{aligned}$$

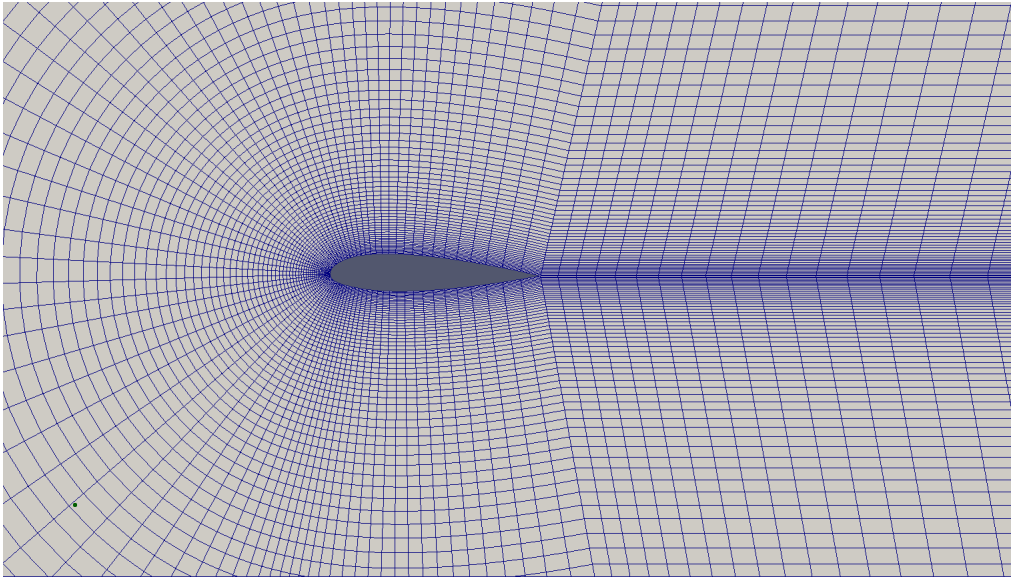
όπου με $\|S_{\mu}\|$ συμβολίζεται το στοιχειώδες τμήμα επιφάνειας της αεροτομής. Η παραπάνω σχέση απλοποιείται περαιτέρω με χρήση της εξίσωσης 6.1.4 και λαμβάνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + \frac{\partial p}{\partial x_k} n_i \right]_m n_k^m r_i \|S_m\| \Delta t \\ &+ \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \left[-\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)_m \frac{\delta}{\delta b_m} (n_j^m \|S_m\|) + p_m \frac{\delta}{\delta b_m} (n_i^m \|S_m\|) \right] r_i \Delta t \\ &+ \sum_{t=0}^T \left[q n_i - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right]_m \frac{\partial v_i}{\partial x_k^m} n_k^m \|S_m\| \Delta t \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

Η τελευταία εξίσωση (6.1.5) χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των παραγώγων ευαισθησίας, που τελικά συνθέτουν το χάρτη ευαισθησίας.

6.1.1 Γεωμετρία του προβλήματος

Όπως αναφέρθηκε, μελετάται η ροή γύρω από μία αεροτομή. Η αεροτομή έχει χορδή ίση με $c = 0.035m$ και είναι μη-συμμετρική. Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε αποτελείται από 14060 υπολογιστικές κυψέλες και παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.1. Πρέπει να τονιστεί εδώ πως, επειδή το συγκεκριμένο λογισμικό επιλύει μόνο τριδιάστατα προβλήματα, το πλέγμα αποτελείται από εξαεδρικούς όγκους. Η ροή ωστόσο αποκτά τον επιθυμητό, για το πρόβλημα που εξετάζεται, διδιάστατο χαρακτήρα θέτοντας κα-



Σχήμα 6.1: C-type πλέγμα γύρω από τη μελετούμενη αεροτομή.

τάλληλες συνθήκες συμμετρίας και διακριτοποιώντας στην τρίτη διεύθυνση (σε αυτή του βάθος) μόνο με μία υπολογιστική κυψέλη.

6.2 Εφαρμογή της μεθόδου

Ακολουθούν οι τρεις εφαρμογές τις μεθόδου που πραγματοποιήθηκαν σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις ροών. Σε καθεμιά από τις εφαρμογές επιλέγονται διαφορετικές τιμές του πλάτους της ταλάντωσης της γωνίας που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας με τον οριζόντιο άξονα. Επιπλέον η ταλάντωση γίνεται με διαφορετική συχνότητα βάση της οποίας καθορίζεται και το πλήθος των αρμονικών που θα χρησιμοποιηθούν. Ιδιαίτερο βάρος, ωστόσο, δίνεται στο εάν οι τιμές του αριθμού *Reynolds* και του πλάτους της ταλάντωσης της γωνίας που σχηματίζει η επ' άπειρον ταχύτητα με τη χορδή της αεροτομής επηρεάζουν άμεσα την ικανότητα της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών να εκτελέσει ακριβείς υπολογισμούς. Η διερεύνηση αυτή γίνεται δικαιολογημένα καθώς η επίδραση της συχνότητας ταλάντωσης έχει μελετηθεί σε παλαιότερη εργασία [3]. Οι τρεις εφαρμογές ταξινομούνται ανάλογα με τον αριθμό *Reynolds* της ροής, ανοιγμένο στη χορδή της αεροτομής, και παρατίθενται συνοπτικά στον Πίνακα 6.1.

	Case 1	Case 2	Case 3
Reynolds number	100	350	1000
frequency (Hz)	1	2	1
ϑ_{ampl}	2°	5°	3°
$ \vec{v}_{inf} $ (m/s)	10	1	1

Πίνακας 6.1: Παράθεση των βασικών χαρακτηριστικών της ροής για τις τρεις εφαρμογές.

Σε όλες τις εφαρμογές ακολουθείται παρόμοια διαδικασία. Επιλέγεται ο κατάλληλος αριθμός αρμονικών για την εφαρμογή της μεθόδου. Το ευθύ πρόβλημα επιλύεται με τις οριακές συνθήκες που προκύπτουν από τα χαρακτηριστικά της εκάστοτε εφαρμογής. Με την επίλυση του ευθέως προβλήματος προκύπτουν τα πεδία της ταχύτητας και της στατικής πίεσης. Το πλήθος των πεδίων που προκύπτουν εξαρτάται από το πλήθος των αρμονικών που χρησιμοποιούνται ($N_T = 2N_H + 1$). Από τα πεδία με χρήση της σχέσης 3.3.2 προκύπτουν οι συντελεστές των σειρών *Fourier*. Με τους συντελεστές αυτούς είναι δυνατόν να υπολογιστούν τα πεδία ταχύτητας και στατικής πίεσης κάθε χρονική στιγμή.

Έχοντας πλήρως διαθέσιμο το πεδίο της ταχύτητας και της στατικής πίεσης σε κάθε χρονική στιγμή της περιόδου ταλάντωσης της γωνίας, υπολογίζονται οι δυνάμεις που ασκούνται στην αεροδυναμική μορφή, ως προς τον σταθερά οριζόντιο άξονα και τον κάθετο σε αυτόν. Με τις δυνάμεις αυτές υπολογίζονται οι αδιάστατοι αεροδυναμικοί συντελεστές. Αυτοί προκύπτουν με την αδιαστατοποίηση των δυνάμεων (ανά μονάδα βάθους πεδίου b) που υπολογίζονται, για χαρακτηριστικό μήκος ίσο με το μήκος της χορδής της αεροτομής c και σταθερή πυκνότητα ρευστού ίση με $\rho = 1.2\text{kg/m}^3$, από τις σχέσεις:

$$c_L = \frac{L/b}{\frac{1}{2}\rho u_{inf}^2 c} \quad , \quad c_D = \frac{D/b}{\frac{1}{2}\rho u_{inf}^2 c}$$

Το ευθύ πρόβλημα επιλύεται με τον αλγόριθμο *PISO*. Οι αεροδυναμικοί συντελεστές που προκύπτουν με τη μέθοδο ισορροπίας των αρμονικών και με τον αλγόριθμο *PISO* παρατίθενται σε κοινά διαγράμματα. Οι τιμές των συντελεστών συγκρίνονται μέσω της ποσοστιαίας σχετικής απόκλισης που παρουσιάζουν οι τιμές που υπολογίζονται με τη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών (HB από αυτό το σημείο και έπειτα) από

εκείνες που υπολογίζονται με τον αλγόριθμο *PISO*. Η σχετική απόκλιση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$var = \left\| \frac{forces|_{HB} - forces|_{PISO}}{forces|_{PISO}} \right\| \quad (6.2.1)$$

Έχοντας πλήρως προσδιορισμένα και αποθηκευμένα τα $N_T = 2N_H + 1$ πεδία της ταχύτητας και της στατικής πίεσης επιλύεται και το συζυγές πρόβλημα. Οι οριακές συνθήκες του προβλήματος είναι εκείνες που εξήχθησαν και περιγράφηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο. Η συζυγής ταχύτητα πάνω στο σύνορο της αεροτομής τίθεται $u_i = -f_i r_i$ (m/s), όπου r_i είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος παράλληλου (εφόσον ενδιαφερόμαστε για βελτιστοποίηση με στόχο τη μείωση της αεροδυναμικής αντίστασης) στο διάνυσμα της ταχύτητας της αδιατάραχτου ροής κάθε χρονική στιγμή. Επομένως η διεύθυνση του r_i θα ταλαντώνεται ημιτονοειδώς με συχνότητα $f = 1Hz$ και πλάτος ταλάντωσης ϑ_{amp} γύρω από την τιμή μηδέν, όπως ακριβώς και το διάνυσμα της αδιατάραχτου ροής για το ευθύ πρόβλημα. Για την επίλυση του συζυγούς προβλήματος χρησιμοποιείται ίδιο πλήθος αρμονικών με το ευθύ πρόβλημα.

Με την επίλυση του συζυγούς προβλήματος προκύπτουν τα αντίστοιχα N_T πεδία των συζυγών μεταβλητών. Από τα πεδία και με χρήση της σχέσης 3.3.2 προκύπτουν οι αντίστοιχοι συντελεστές των σειρών *Fourier*. Με τους συντελεστές αυτούς είναι δυνατό να υπολογιστούν τα πεδία συζυγούς ταχύτητας και συζυγούς στατικής πίεσης κάθε χρονική στιγμή.

Με πλήρως προσδιορισμένα τα πεδία της συζυγούς ταχύτητας και συζυγούς στατικής πίεσης κάθε χρονική στιγμή, αλλά και εκείνα της ταχύτητας και της στατικής πίεσης από το ευθύ πρόβλημα, είναι δυνατό να προσδιοριστούν οι παράγωγοι ευαισθησίας, με χρήση της σχέσης 6.1.5. Οι παράγωγοι ευαισθησίας συνθέτουν με τη σειρά τους το χάρτη ευαισθησίας, μία κατανομή δηλαδή πάνω στην αεροτομή που δηλώνει ποιοτικά το πόσο θα επηρεάσει η μετατόπιση του κάθε κόμβου τη μείωση της αεροδυναμικής αντίστασης που ασκείται πάνω στην αεροτομή. Αρνητική τιμή της παραγωγού ευαισθησίας δηλώνει ότι ο κόμβος πρέπει να μετακινηθεί προς το εσωτερικό της αεροτομής ούτως ώστε να μειωθεί η αεροδυναμική αντίσταση που ασκείται στην αεροτομή, ενώ αντίθετα, θετική τιμή δηλώνει την ανάγκη για μετατόπιση προς το εξωτερικό της

αεροτομής.

Το συζυγές πρόβλημα επιλύεται, και από, με χρήση του αλγορίθμου *PISO*. Με χρήση της μεθόδου *checkpointing* υπολογίζονται οι μεταβλητές της ροής που προέκυψαν από την επίλυση του ευθέως προβλήματος, η γνώση των οποίων απαιτείται στην επίλυση του συζυγούς. Η κατανομή των παραγώγων ευαισθησίας, κατά μήκος των κόμβων της αεροτομής, που προκύπτει με τη χρήση του *PISO* παρατίθεται σε κοινό διάγραμμα με εκείνη που υπολογίστηκε με χρήση της μεθόδου *HB*. Η σύγκριση των δύο κατανομών συγκρίνονται με τον υπολογισμό και πάλι της ποσοστιαίας σχετικής απόκλισης που παρουσιάζουν οι τιμές των παραγώγων ευαισθησίας όπως υπολογίζονται με χρήση της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών, από τις αντίστοιχες που υπολογίζονται με τον αλγόριθμο *PISO*. Η σχετική απόκλιση δίνεται:

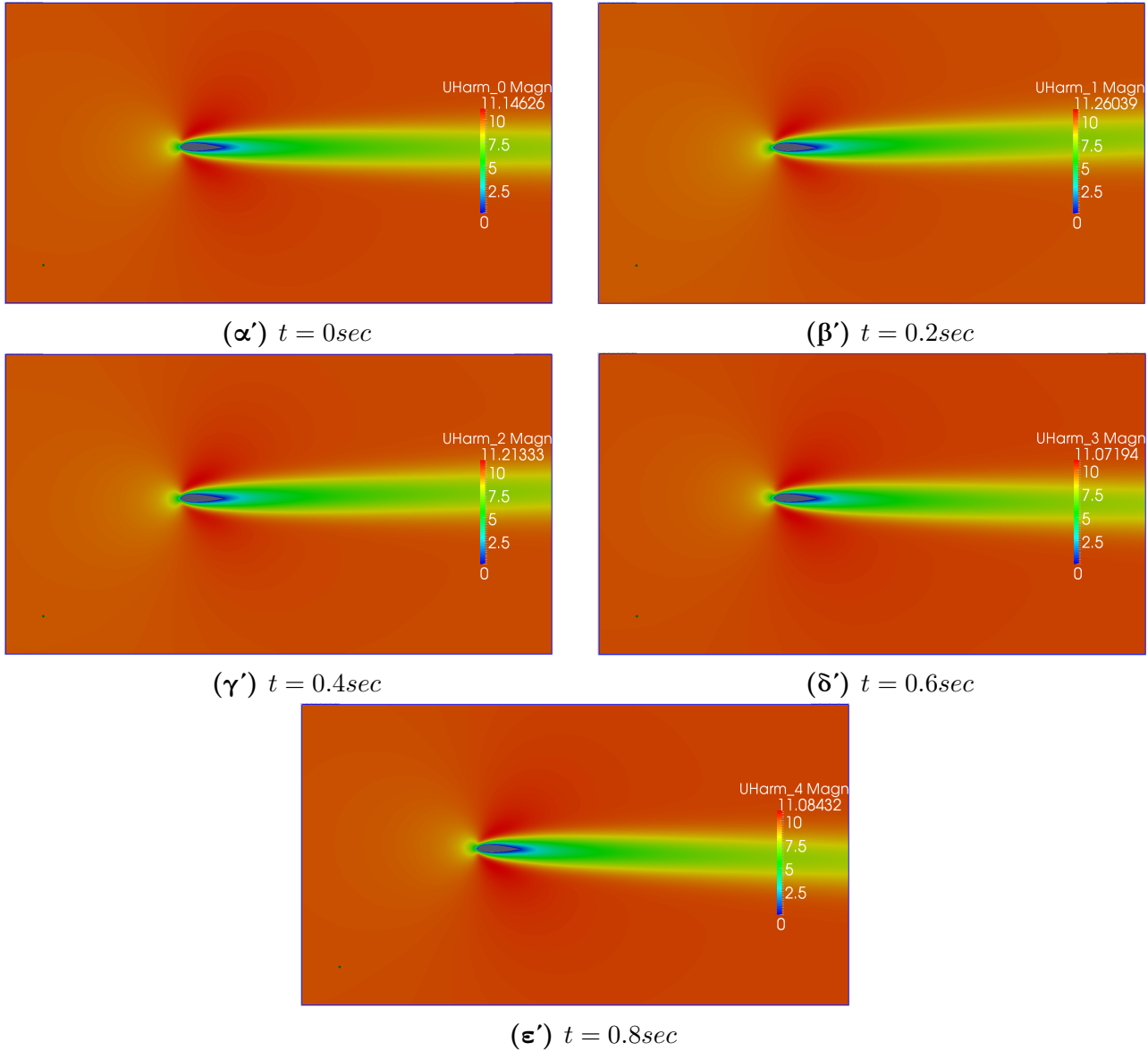
$$var = \left\| \frac{\left. \frac{dF}{db_m} \right|_{HB} - \left. \frac{dF}{db_m} \right|_{PISO}}{\left. \frac{dF}{db_m} \right|_{PISO}} \right\| \quad (6.2.2)$$

6.2.1 Εφαρμογή για $Re=100$

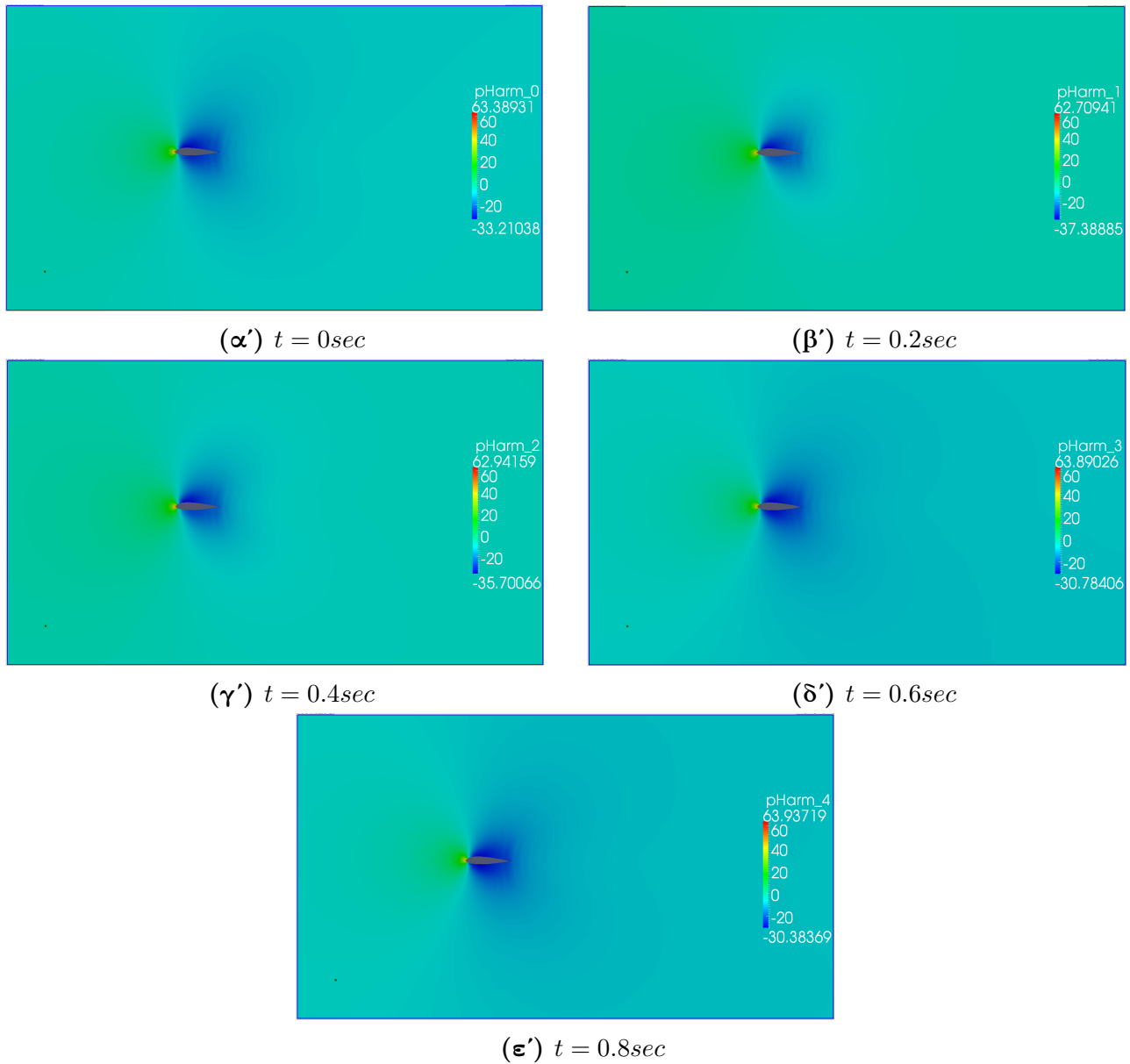
Στην παρούσα εφαρμογή χρησιμοποιήθηκαν δύο αρμονικές οι οποίες κρίθηκαν επαρκείς για την ικανοποιητική πρόλεξη της ροής. Στα *Σχήματα* 6.2 και 6.3 παρουσιάζονται τα πεδία της ταχύτητας και της στατικής πίεσης που προκύπτουν από την πρόλεξη της ροής για το ευθύ πρόβλημα. Παρατίθενται τα πεδία για τις πέντε ($N_T = 2N_H + 1 = 5$) χρονικές στιγμές μέσα σε μία περίοδο ταλάντωσης ($T = 1sec$), που προκύπτουν από τη χρήση δύο αρμονικών. Στα *Σχήματα* 6.4α' και 6.4β' παρουσιάζεται η μεταβολή των αεροδυναμικών συντελεστών με το χρόνο για μία περίοδο.

Παρατηρώντας τα *Σχήματα* 6.4α' και 6.4β' είναι εμφανής η ικανοποιητική ακρίβεια με την οποία οι δυνάμεις υπολογίζονται, σε σχέση με τους υπολογισμούς που γίνονται από τον "κλασικό" επιλύτη για τα μη-μόνιμα προβλήματα. Οι τιμές των μεγεθών που υπολογίζονται είναι παραπλήσιες, ενώ είναι ιδιαίτερα σημαντικό ότι και με τις δύο μεθόδους τα μεγέθη παρουσιάζουν πανομοιότυπη ταλαντωτική συμπεριφορά. Οι υπολογισμοί για την δύναμη αντίστασης φαίνονται να απέχουν, ωστόσο αυτό οφείλεται καθαρά στην κλίμακα του κατακόρυφου άξονα. Ο συντελεστής άνωσης ταλαντώνεται με την περίοδο του φαινομένου, ενώ ο συντελεστής αντίστασης με τη μισή. Ο λόγος

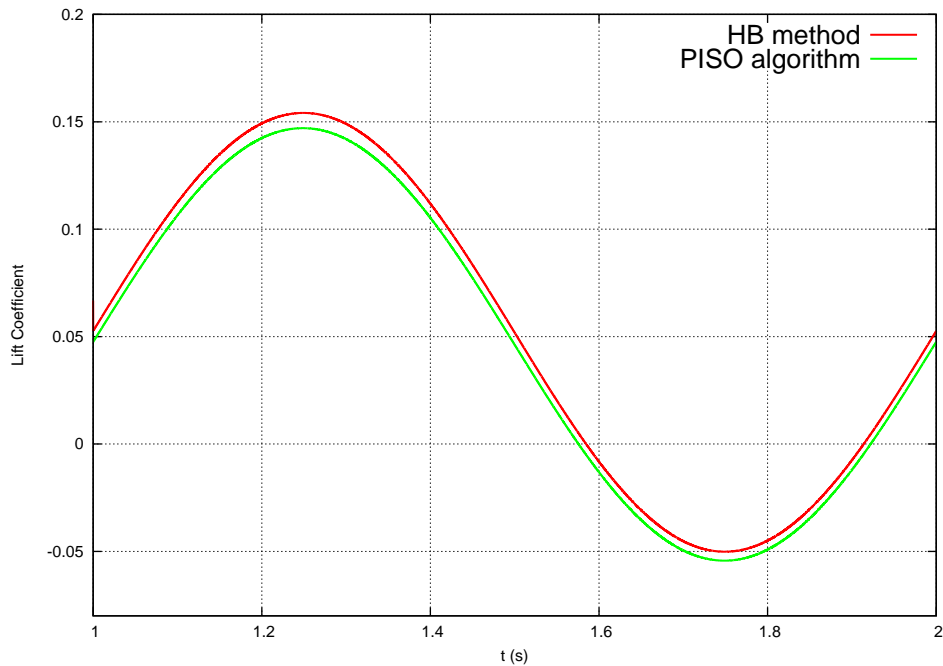
που συμβαίνει αυτό είναι προφανής. Η δύναμη άνωσης προβάλλεται στον κάθετο στην χορδή άξονα,



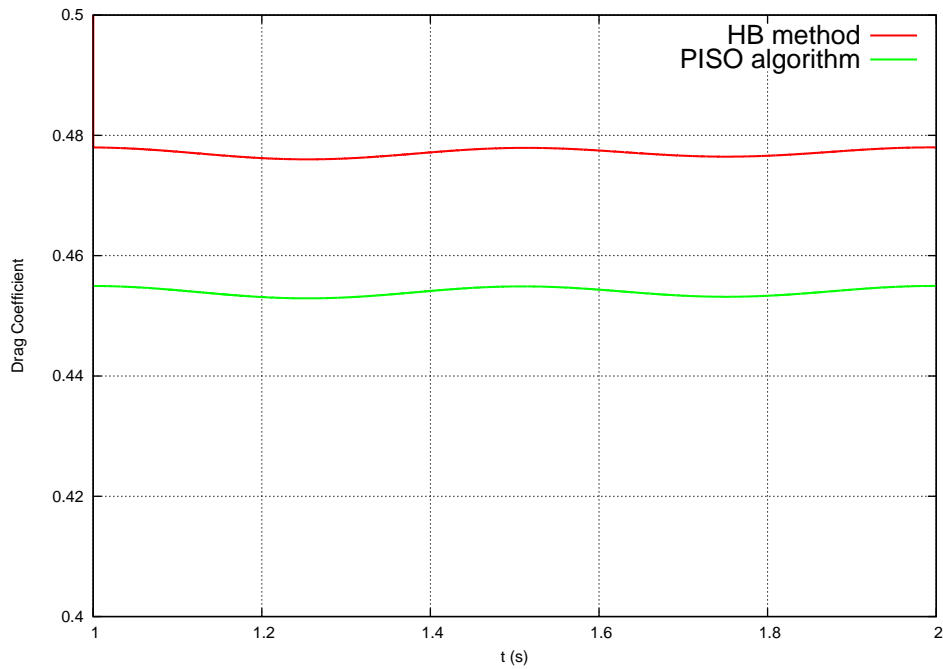
Σχήμα 6.2: Εφαρμογή για $Re=100$, πεδίο ταχύτητας υπολογισμένο με τη μέθοδο HB, για τις 5 χρονικές στιγμές που προκύπτουν από τη χρήση δύο αρμονικών.



Σχήμα 6.3: Εφαρμογή για $Re=100$, πεδίο στατικής πίεσης υπολογισμένο με τη μέθοδο HB, για τις 5 χρονικές στιγμές που προκύπτουν από τη χρήση δύο αρμονικών.

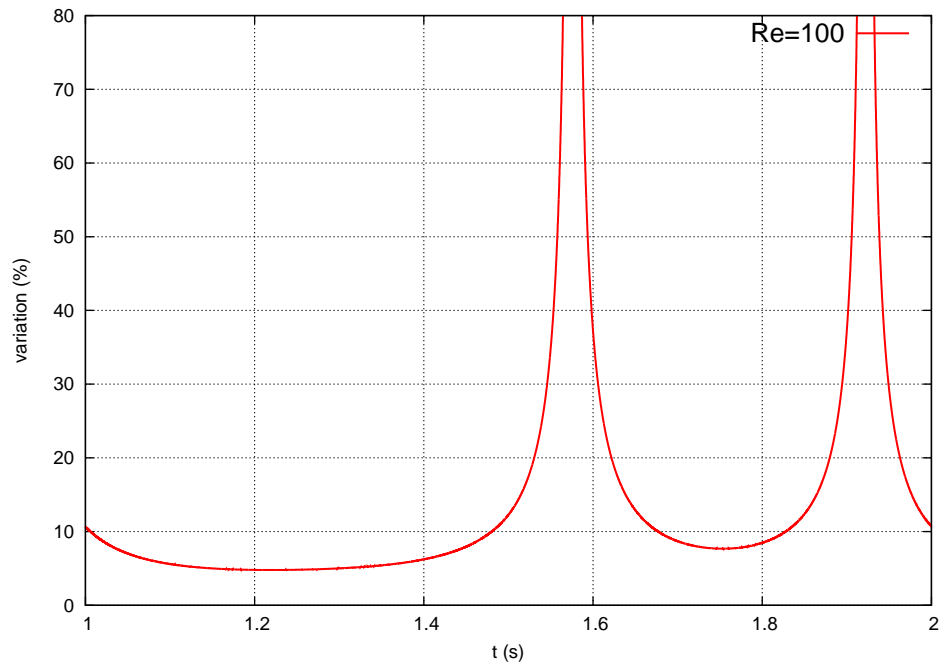


(α') Μεταβολή του συντελεστή άνωσης της αεροτομής με το χρόνο.

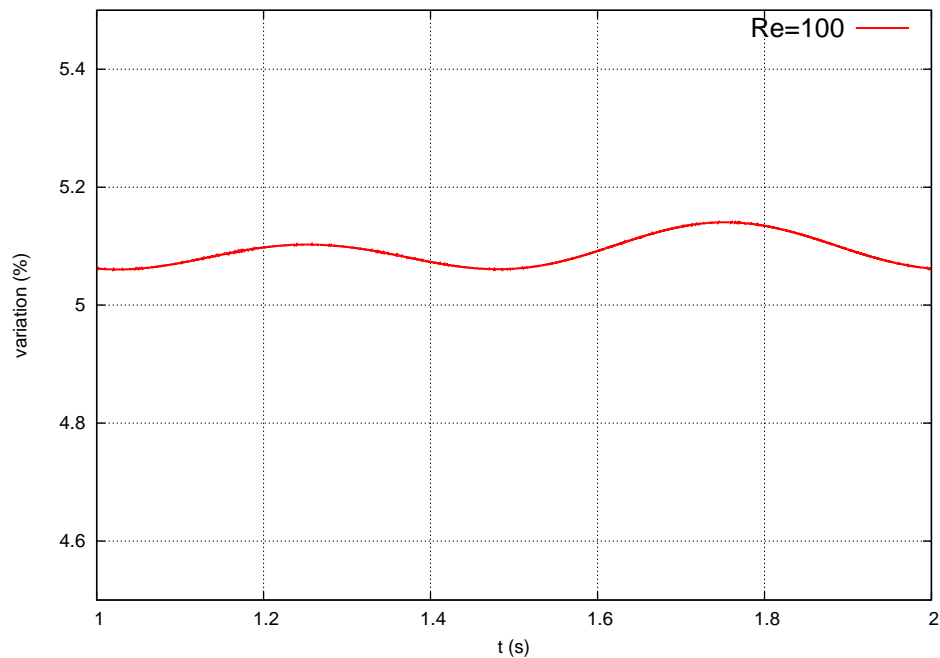


(β') Μεταβολή του συντελεστή αντίστασης της αεροτομής με το χρόνο.

Σχήμα 6.4: Μεταβολή των αεροδυναμικών συντελεστών της αεροτομής με το χρόνο, για $Re = 100$ και πλάτος ταλάντωσης της γωνίας $\vartheta_{ampl} = 2^\circ$, όπως υπολογίζεται από τις δύο μεθόδους.



(α') Ποσοστιαία απόκλιση του συντελεστή άνωσης της αεροτομής.



(β') Ποσοστιαία απόκλιση του συντελεστή αντίστασης της αεροτομής.

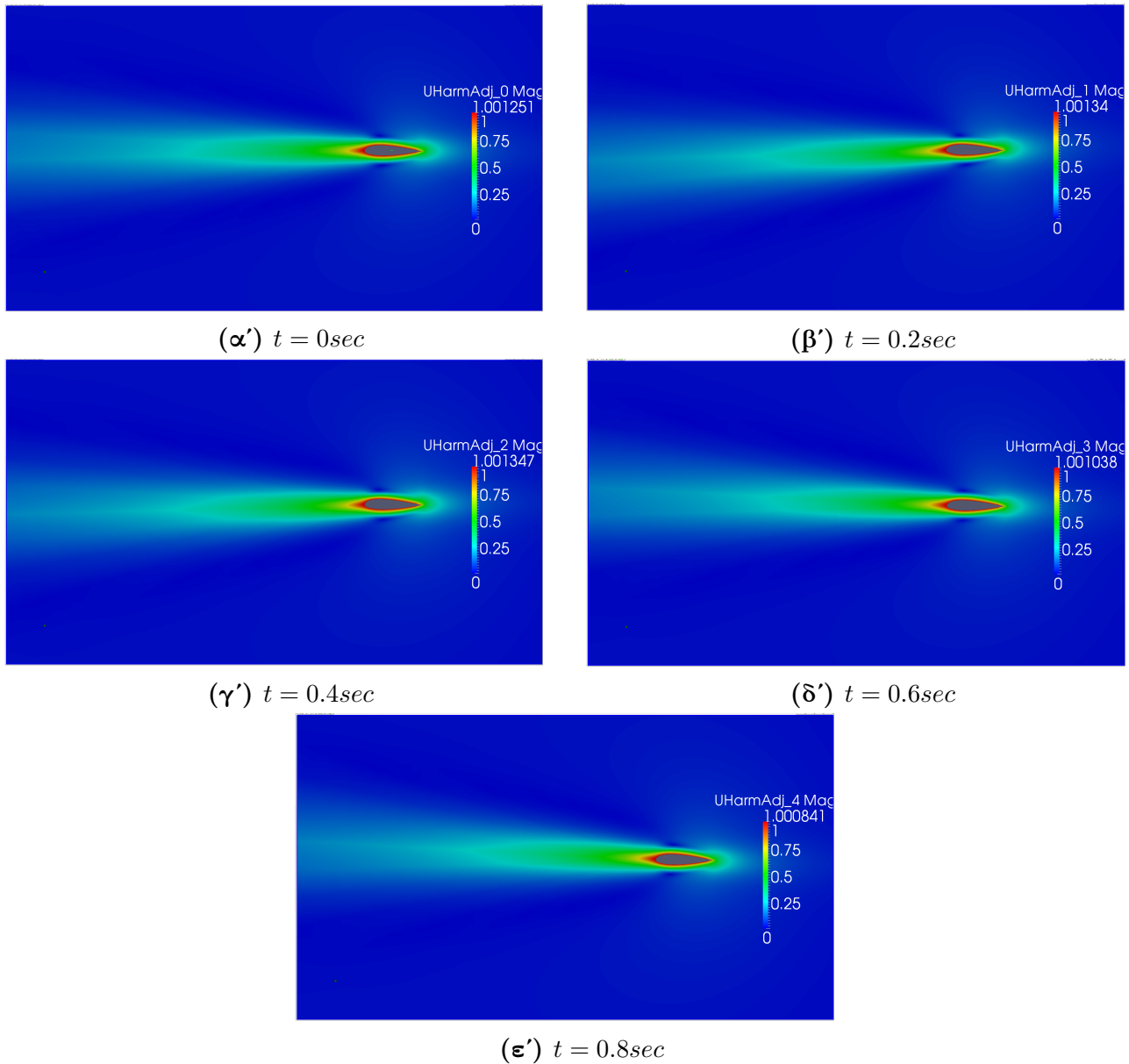
Σχήμα 6.5: Ποσοστιαία απόκλιση των αεροδυναμικών συντελεστών όπως υπολογίζονται με τη μέθοδο HB, από τα αποτελέσματα του αλγορίθμου PISO.

επομένως, καθώς το διάνυσμα ταχύτητας ταλαντώνεται και η κάθετη συνιστώσα του παίρνει αρνητικές τιμές, η άνωση θα πάρει και αυτή αρνητικές τιμές. Μέσα στην ίδια περίοδο όμως, η αντίσταση, που προβάλλεται πάντοτε στον οριζόντιο άξονα, δεν θα πάρει αρνητικές τιμές αφού η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας παραμένει πάντα θετική και ως εκ τούτου θα εκτελέσει άλλη μία ταλάντωση μέσα στην ίδια περίοδο.

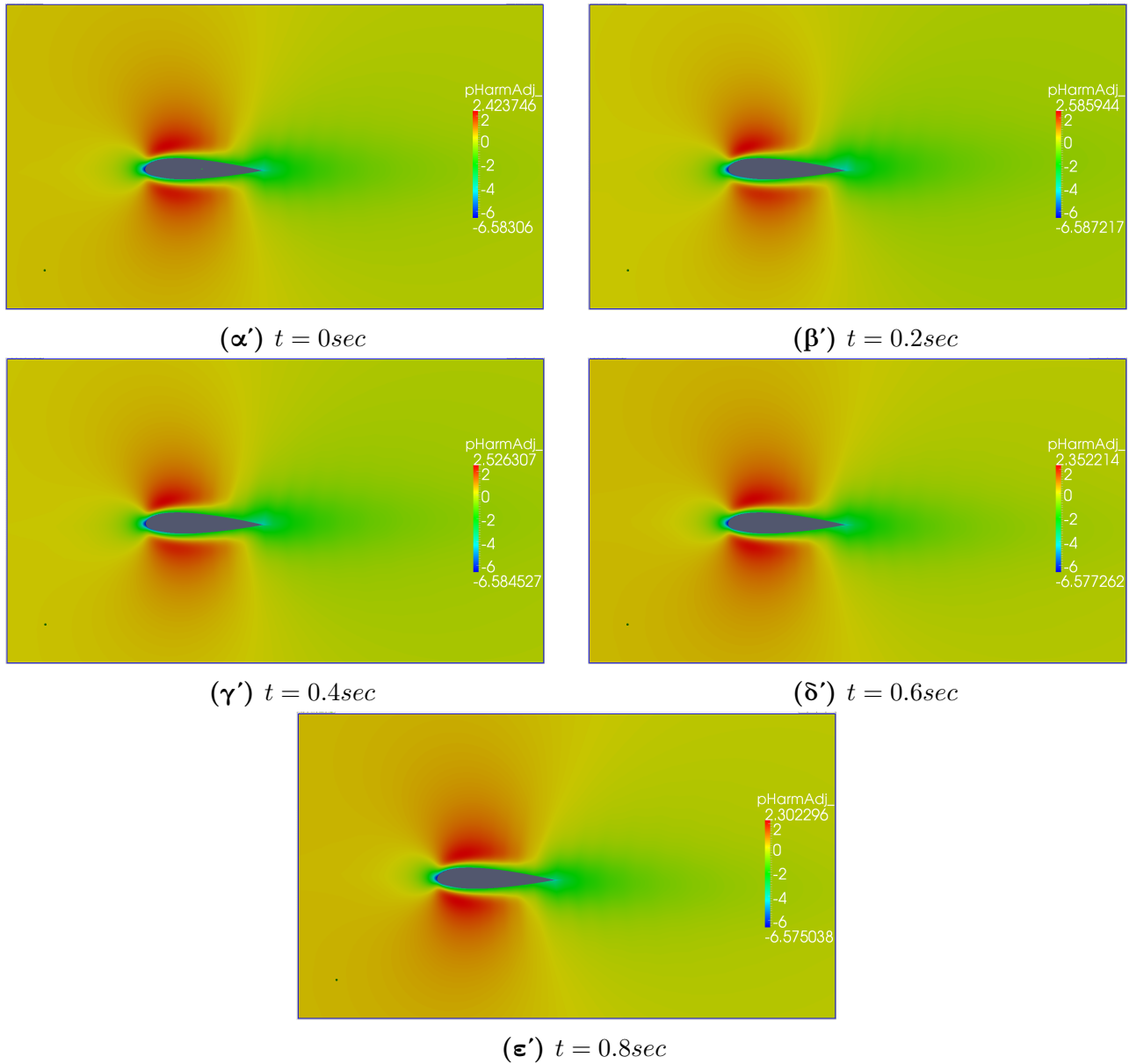
Η ακρίβεια με την οποία υπολογίζονται οι δυνάμεις καθίσταται ακόμη περισσότερο εμφανής μέσω των *Σχημάτων* 6.5α' και 6.5β' που ακολουθούν, όπου παρουσιάζεται η σχετική ποσοστιαία απόκλιση των δυνάμεων, όπως υπολογίζονται από τη μέθοδο HB, από τις δυνάμεις που υπολογίζονται από τον κώδικα για τα μη-μόνιμα φαινόμενα. Η σχετική απόκλιση παίρνει μικρές τιμές (ελάχιστα μεγαλύτερη του 5%) στον υπολογισμό της δύναμης αντίστασης (*Σχήμα* 6.5β') καθόλη τη διάρκεια του φαινομένου. Το ίδιο φαίνεται να ισχύει και για την υπολογιζόμενη άνωση. Οι παραπλανητικά υψηλές τιμές που εμφανίζονται στο *Σχήμα* 6.5α' οφείλονται στο ότι σε εκείνες τις χρονικές στιγμές ($t_1 = 1.6\text{sec}$, $t_2 = 1.9\text{sec}$) η δύναμη άνωσης μηδενίζεται, και ως εκ τούτου η σχετική απόκλιση, υπολογιστικά, απειρίζεται. Στις υπόλοιπες χρονικές στιγμές όμως παραμένει σε τιμές σημαντικά μικρότερες του 10%.

Στα *Σχήματα* 6.6 και 6.7 παρουσιάζονται τα πεδία της συζυγούς ταχύτητας και της συζυγούς στατικής πίεσης που προκύπτουν από την πρόλεξη της ροής για το συζυγές πρόβλημα. Παρατίθενται τα πεδία για τις πέντε ($N_T = 2N_H + 1 = 5$) χρονικές στιγμές μέσα σε μία περίοδο ταλάντωση που προκύπτουν από τη χρήση δύο αρμονικών. Οι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογίζονται και συνθέτουν με τη σειρά τους το χάρτη ευαισθησίας (*Σχήμα* 6.8).

Αυτό που απομένει είναι να συγκριθούν οι τιμές των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζονται με τη μέθοδο HB, με τις αντίστοιχες που υπολογίζονται με χρήση “κλασικού” του επιλύτη μη-μόνιμων προβλημάτων. Η σύγκριση γίνεται μέσω του *Σχήματος* 6.9α'. Στο εν λόγω σχήμα παρουσιάζονται οι τιμές των παραγώγων ευαισθησίας, όπως υπολογίζονται και με τις δύο μεθόδους, για κάθε κόμβο της αεροτομής. Οι κόμβοι παρατίθενται με τη σειρά που το λογισμικό γένεσης πλέγματος τους έχει αριθμήσει.

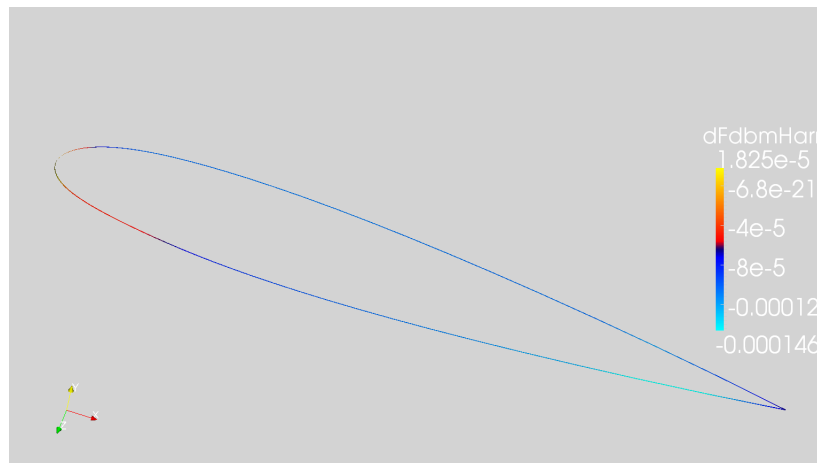


Σχήμα 6.6: Εφαρμογή για $Re=100$, πεδίο συζυγούς ταχύτητας υπολογισμένο με τη μέθοδο HB, για τις 5 χρονικές στιγμές που προκύπτουν από τη χρήση δύο αρμονικών.



Σχήμα 6.7: Εφαρμογή για $Re=100$, πεδίο συζυγούς στατικής πίεσης υπολογισμένο με τη μέθοδο HB, για τις 5 χρονικές στιγμές που προκύπτουν από τη χρήση δύο αρμονικών.

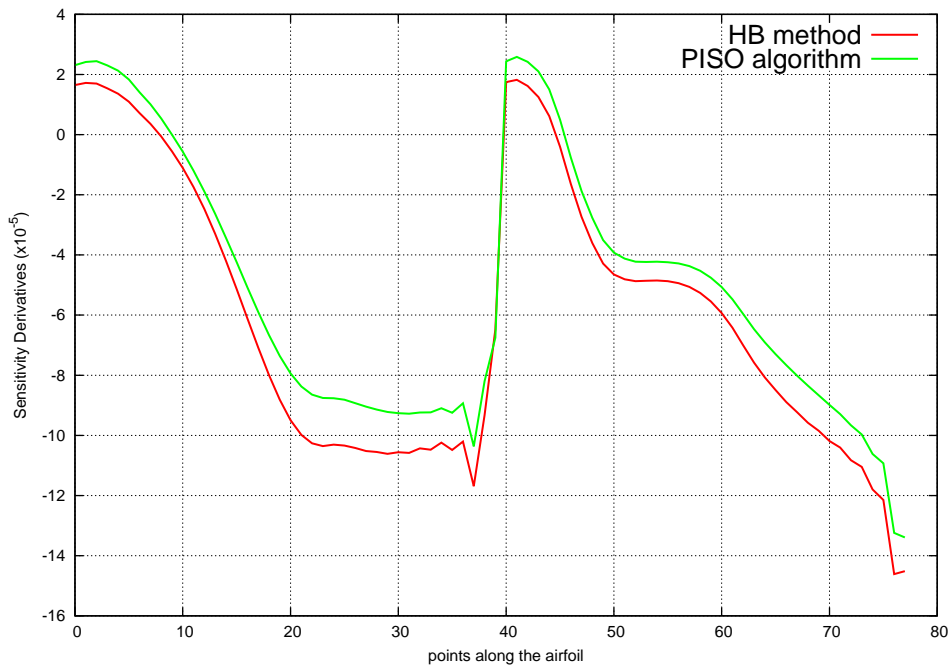
Οι δύο κατανομές παρουσιάζουν παραπλήσιες τιμές. Η κατανομή που προκύπτει από τον κώδικα για την επίλυση μη-μόνιμων φαινομένων είναι ελαφρώς μετατοπισμένη προς τα επάνω σε σχέση με την αντίστοιχη που προκύπτει με τη μέθοδο HB. Ωστόσο, και οι δύο κατανομές μεταβάλλονται με παρόμοιο τρόπο, κάτι ιδιαίτερα σημαντικό καθώς φανερώνει πως, ποιοτικά τουλάχιστον, οι δύο μέθοδοι παράγουν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα. Αυτό πιστοποιείται εξετάζοντας επιπλέον το *Σχήμα 6.9β'* όπου παρουσιάζεται η ποσοστιαία απόκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων.



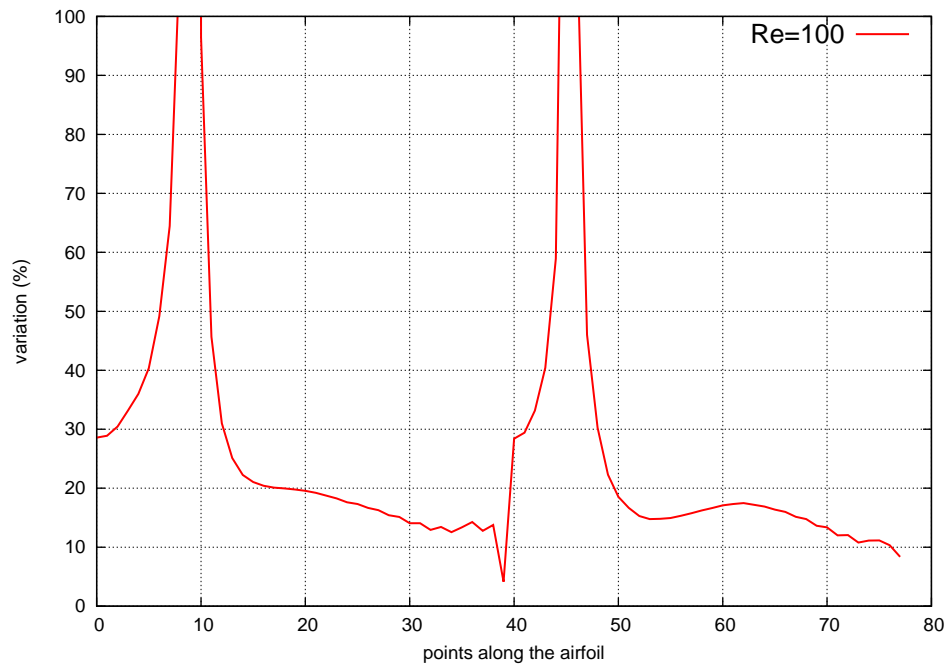
Σχήμα 6.8: Χάρτης ευαισθησίας πάνω στην αεροτομή, με μεταβλητές σχεδιασμού τη μετατόπιση του κάθε κόμβου κατά την κάθετη στον κόμβο διεύθυνση, για $Re = 100$ και πλάτος ταλάντωσης της γωνίας $\vartheta_{ampl} = 2^\circ$.

Η ποσοστιαία απόκλιση μεταξύ των τιμών που υπολογίζονται με τις δύο μεθόδους, παραμένει μικρότερη του 20% σχεδόν σε όλα τα σημεία της αεροτομής. Στις περιοχές που φαίνεται η απόκλιση να παίρνει μεγάλες τιμές η τιμή των παραγώγων ευαισθησίας τείνουν προς το μηδέν. Επομένως, όπως και με τις δυνάμεις οι τιμές αυτές είναι πλασματικές. Πρόκειται στην ουσία για υπολογιστικά σφάλματα και δεν αντικατοπτρίζουν την απόκλιση σε εκείνες τις περιοχές, η οποία, παρατηρώντας και το *Σχήμα 6.9α'* κυμαίνεται σε φυσιολογικά επίπεδα.

Ένας σημαντικός παράγοντας στον οποίο οφείλεται η απόκλιση των παραγώγων ευαισθησίας είναι η όποια διαφορά σημειώνεται στους υπολογισμούς για το ευθύ πρόβλημα και γίνεται φανερή από την εξέταση των δυνάμεων.



(α') Παράγωγοι εναισθησίας με μεταβλητές σχεδιασμού την κάθετη στο κάθε σημείο της αεροτομής διεύθυνση.



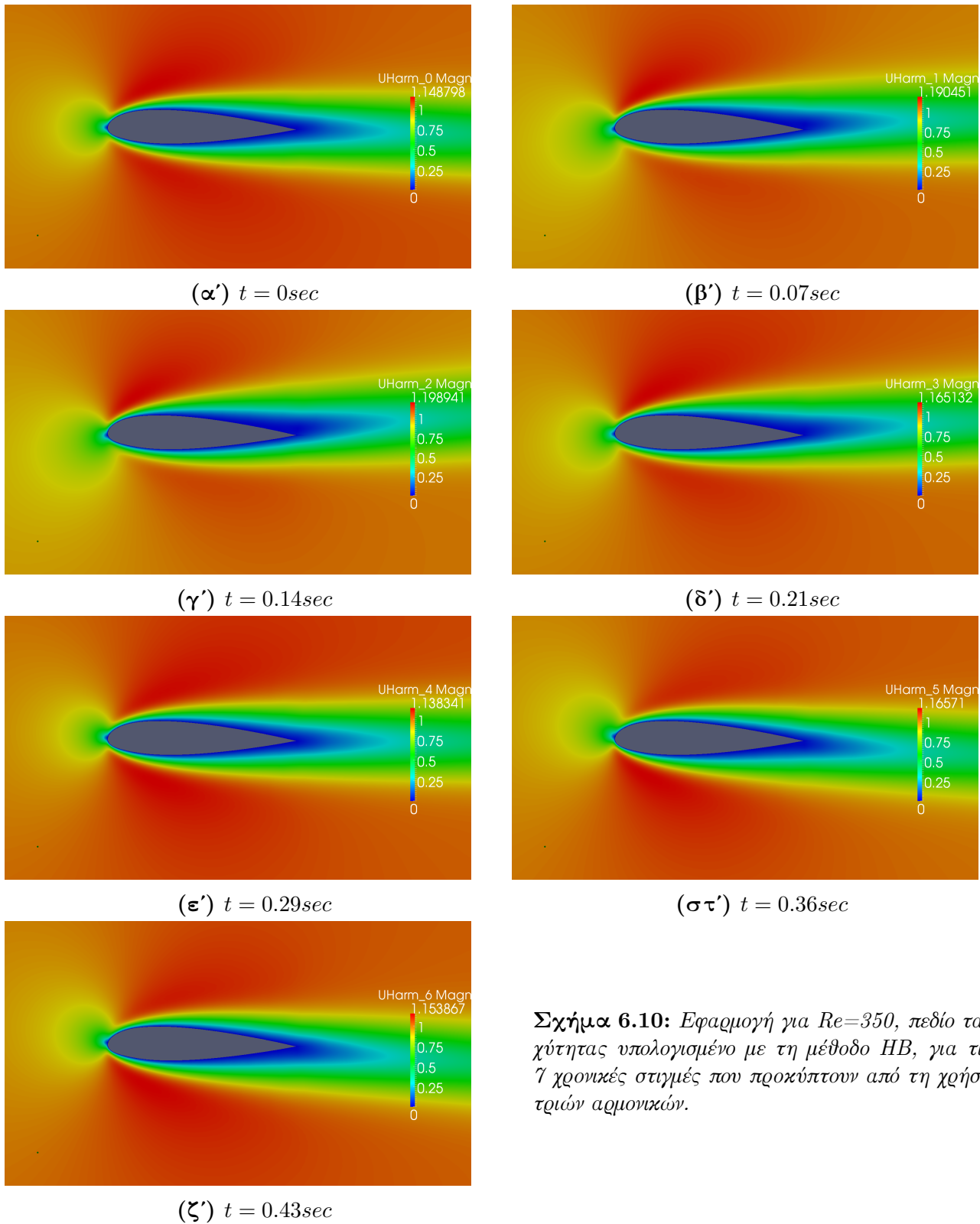
(β') Ποσοστιαία απόκλιση των παραγώγων εναισθησίας.

Σχήμα 6.9: Παράγωγοι εναισθησίας της μέσης αντίστασης για $Re = 100$, όπως υπολογίζονται με τις δύο μεθόδους και ποσοστιαία απόκλιση των τιμών που η μέθοδος HB υπολογίζει από εκείνες που υπολογίζονται με τον αλγόριθμο PISO.

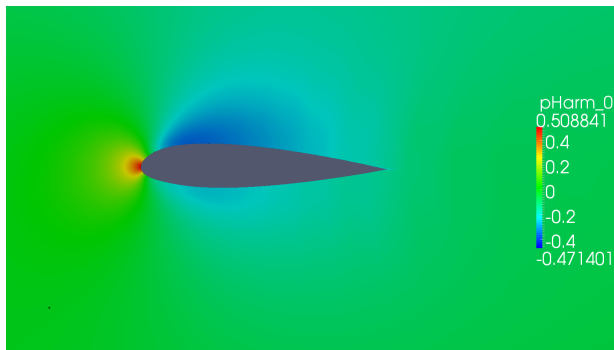
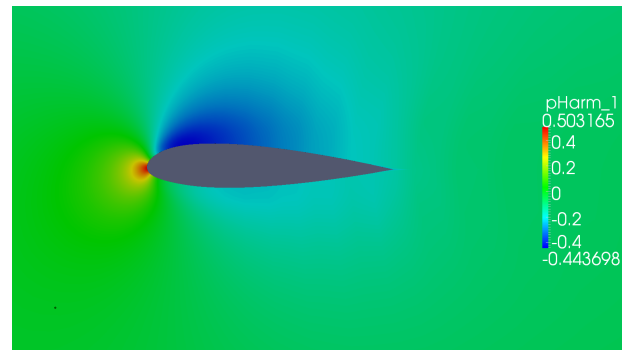
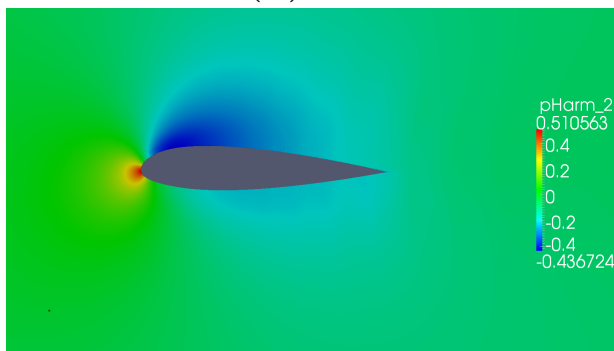
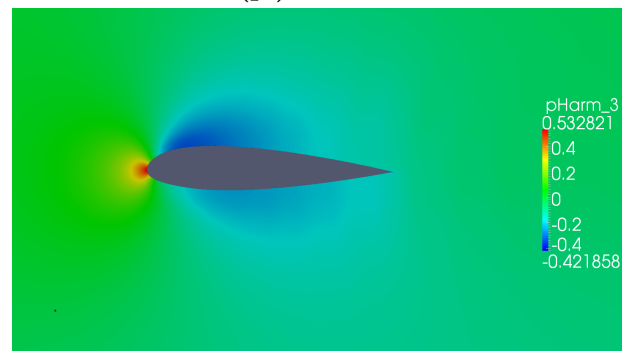
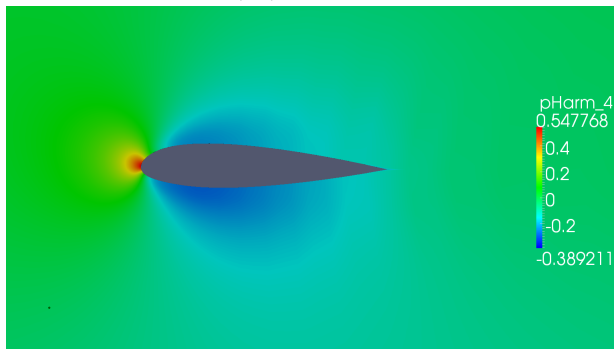
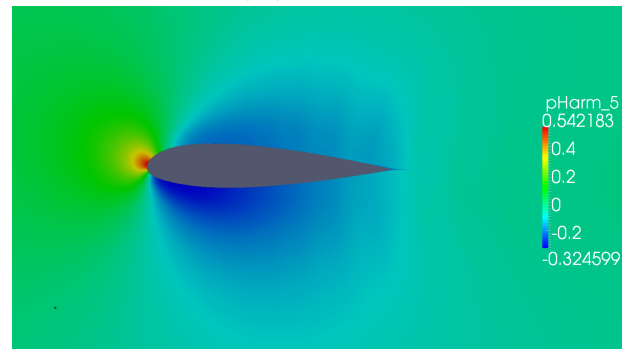
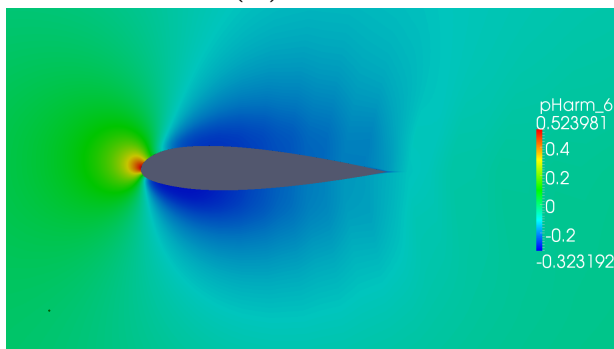
6.2.2 Εφαρμογή για $Re=350$

Στην παρούσα εφαρμογή χρησιμοποιήθηκαν τρεις αρμονικές οι οποίες κρίθηκαν επαρκείς για την ικανοποιητική πρόλεξη της ροής. Στα Σχήματα 6.10 και 6.11 παρουσιάζονται τα πεδία της ταχύτητας και της στατικής πίεσης που προκύπτουν από την πρόλεξη της ροής για το ευθύ πρόβλημα. Παρατίθενται τα πεδία για τις επτά ($N_T = 2N_H + 1 = 7$) χρονικές στιγμές μέσα σε μία περίοδο ταλάντωσης ($T = 0.5sec$), που προκύπτουν από τη χρήση τριών αρμονικών.

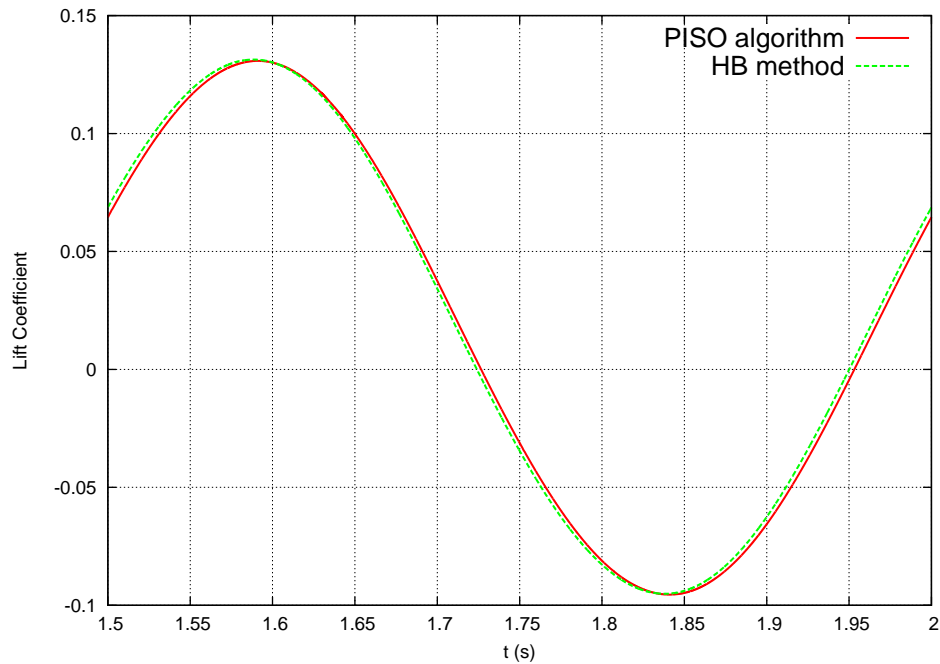
Στα Σχήματα 6.12α' και 6.12β' παρουσιάζεται η μεταβολή των αεροδυναμικών συντελεστών με το χρόνο για μία περίοδο. Παρατηρώντας τα εν λόγω σχήματα είναι εμφανής η ακρίβεια με την οποία οι δυνάμεις υπολογίζονται, σε σχέση με τους υπολογισμούς που γίνονται από τον "κλασικό" επιλύτη για τα μη-μόνιμα προβλήματα. Οι τιμές των μεγεθών που υπολογίζονται σχεδόν ταυτίζονται κάτι που γίνεται ακόμη περισσότερο εμφανές εξετάζοντας τα Σχήματα 6.13α' και 6.13β' που ακολουθούν. Στα τελευταία, παρουσιάζεται η σχετική ποσοστιαία απόκλιση των δυνάμεων, όπως υπολογίζονται από τις δύο μεθόδους. Η σχετική απόκλιση για τον υπολογισμό της άνωσης (Σχήμα 6.13α') κυμαίνεται σε τιμές μικρότερες του 10% ενώ η απόκλιση για την υπολογιζόμενη αντίσταση (Σχήμα 6.13β') είναι ιδιαίτερα μικρή (τιμές χαμηλότερες του 0.5%). Τονίζεται ξανά πως στις χρονικές στιγμές κοντά στις οποίες η άνωση μηδενίζεται η σχετική απόκλιση απειρίζεται αριθμητικά. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να εμφανίζονται οι παραπλανητικά υψηλές τιμές της απόκλισης τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1.73sec$ και $t_2 = 1.95sec$.



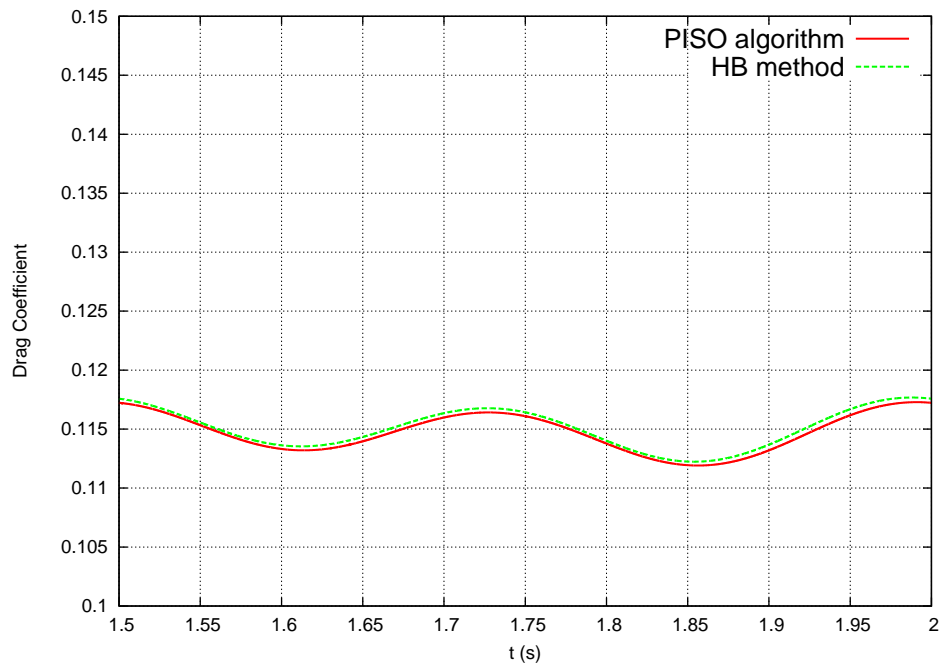
Σχήμα 6.10: Εφαρμογή για $Re=350$, πεδίο ταχύτητας υπολογισμένο με τη μέθοδο HB, για τις 7 χρονικές στιγμές που προκύπτουν από τη χρήση τριών αρμονικών.

(α') $t = 0\text{sec}$ (β') $t = 0.07\text{sec}$ (γ') $t = 0.14\text{sec}$ (δ') $t = 0.21\text{sec}$ (ε') $t = 0.29\text{sec}$ (στ') $t = 0.36\text{sec}$ (ζ') $t = 0.43\text{sec}$

Σχήμα 6.11: Εφαρμογή για $Re=350$, πεδίο στατικής πίεσης υπολογισμένο με τη μέθοδο HB, για τις 7 χρονικές στιγμές που προκύπτουν από τη χρήση τριών αρμονικών.

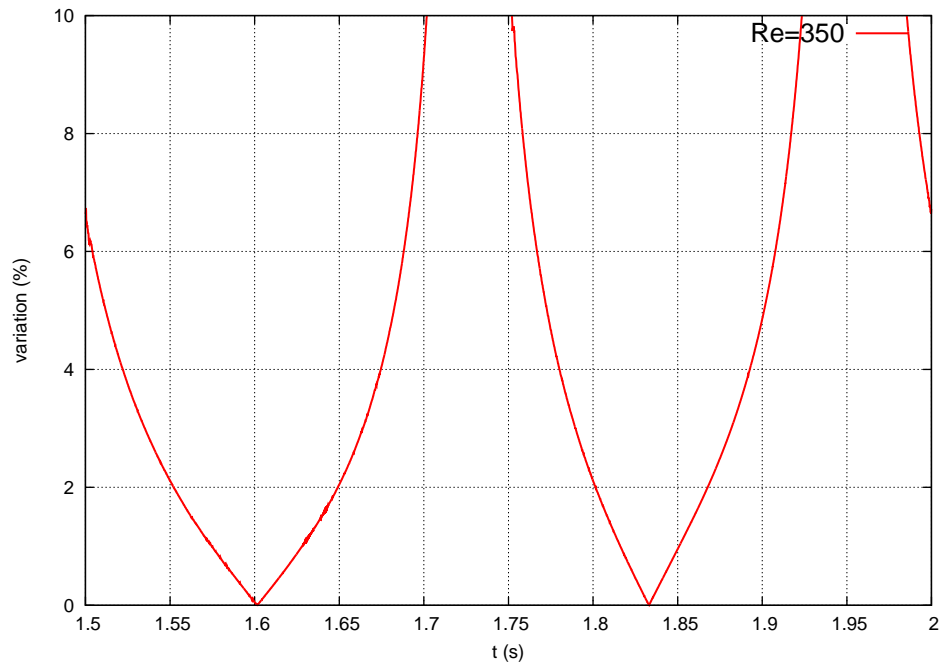


(α') Μεταβολή του συντελεστή άνωσης της αεροτομής με το χρόνο.

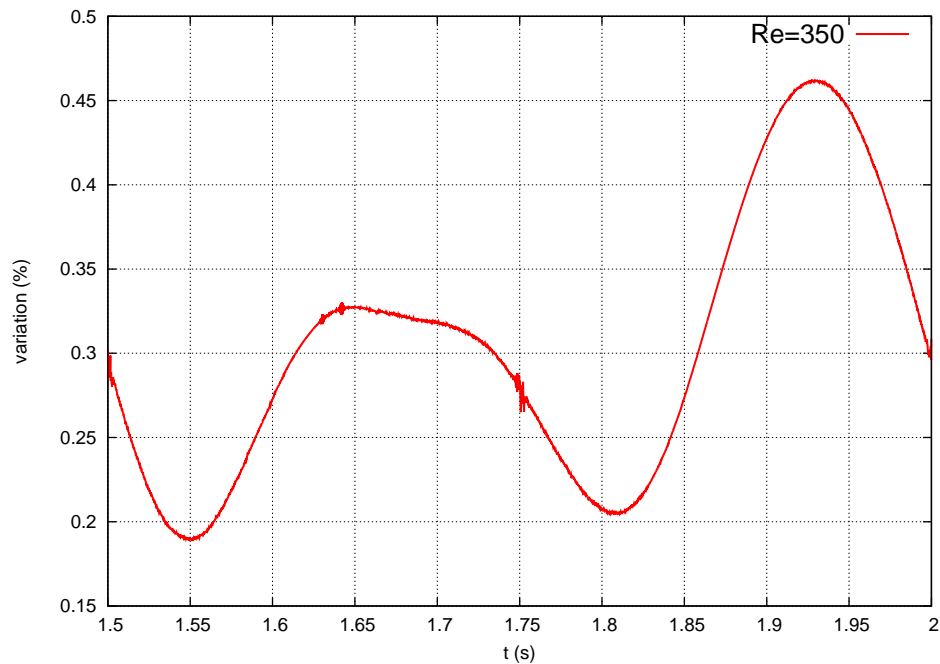


(β') Μεταβολή του συντελεστή αντίστασης της αεροτομής με το χρόνο.

Σχήμα 6.12: Μεταβολή των αεροδυναμικών συντελεστών της αεροτομής με το χρόνο, για $Re = 350$ και πλάτος ταλάντωσης της γωνίας $\vartheta_{ampl} = 5^\circ$, όπως υπολογίζεται από τις δύο μεθόδους.



(α') Ποσοστιαία απόκλιση του συντελεστή άνωσης της αεροτομής.



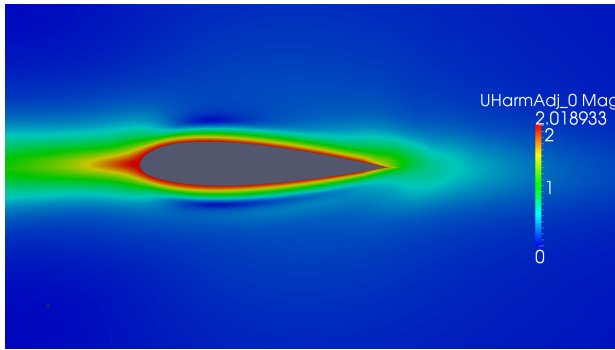
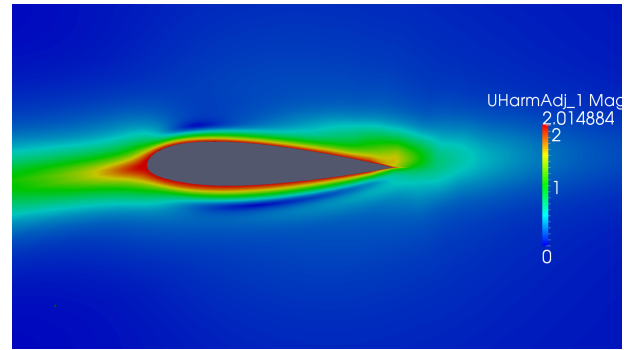
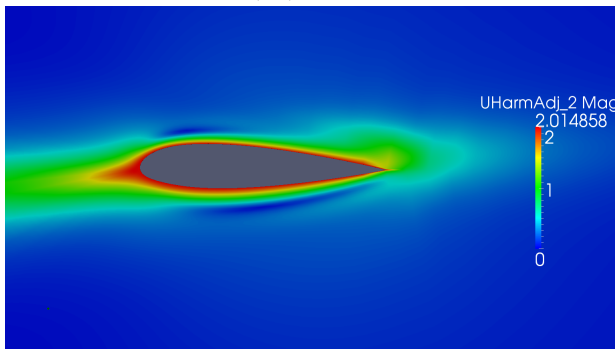
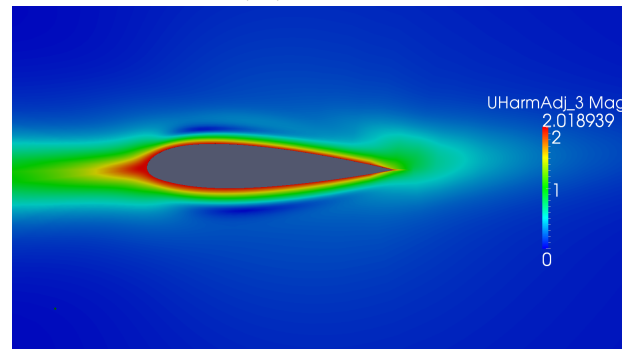
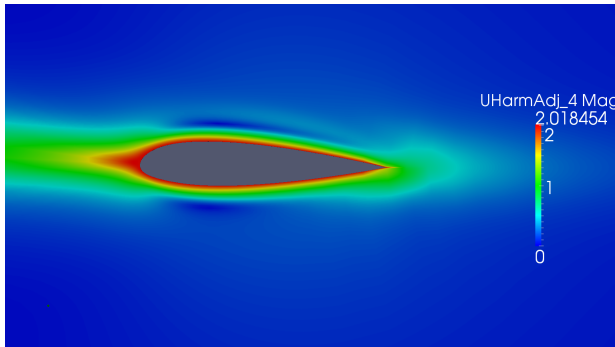
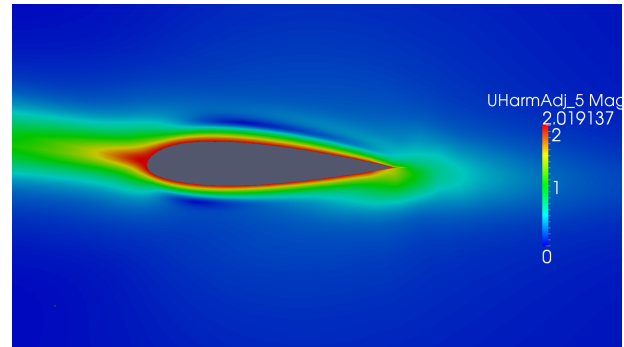
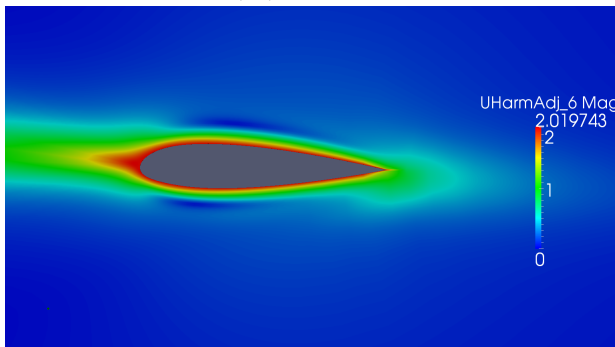
(β') Ποσοστιαία απόκλιση του συντελεστή αντίστασης της αεροτομής.

Σχήμα 6.13: Ποσοστιαία απόκλιση των αεροδυναμικών συντελεστών όπως υπολογίζονται με τη μέθοδο HB, από τα αποτελέσματα του αλγορίθμου PISO.

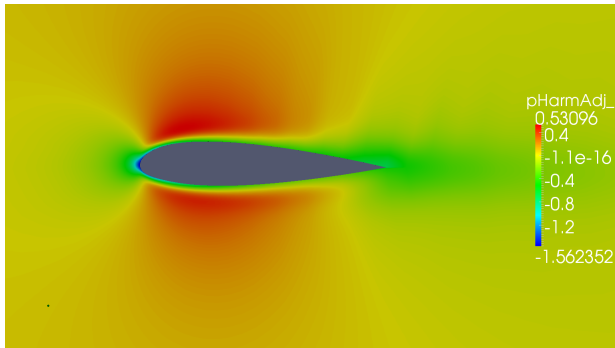
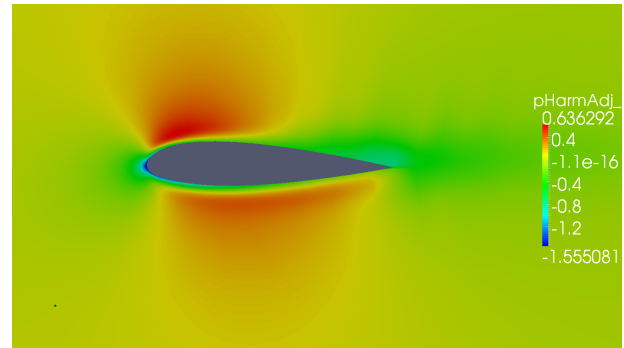
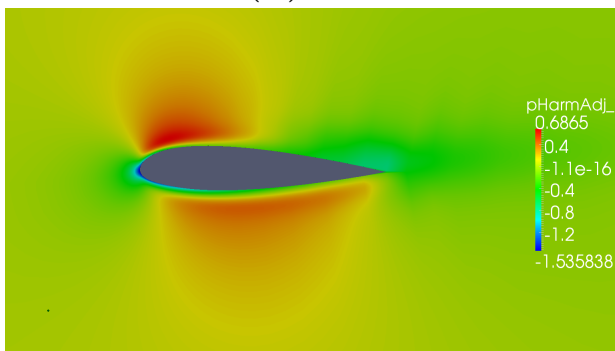
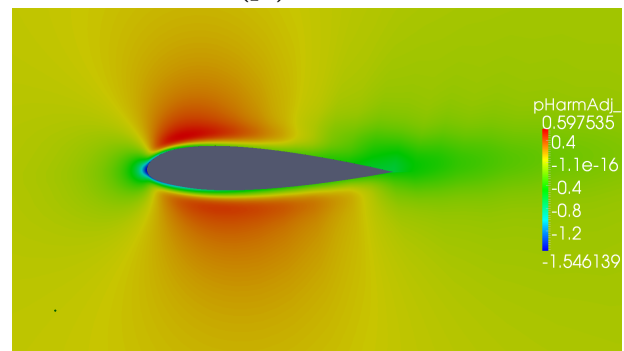
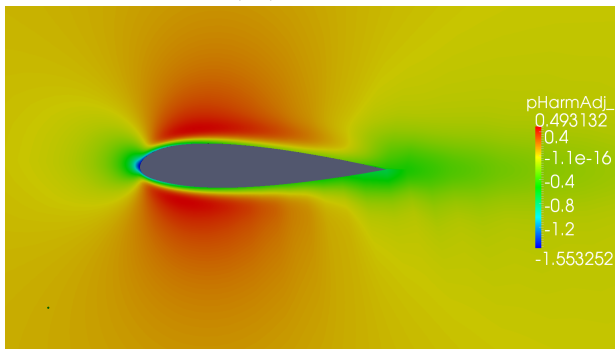
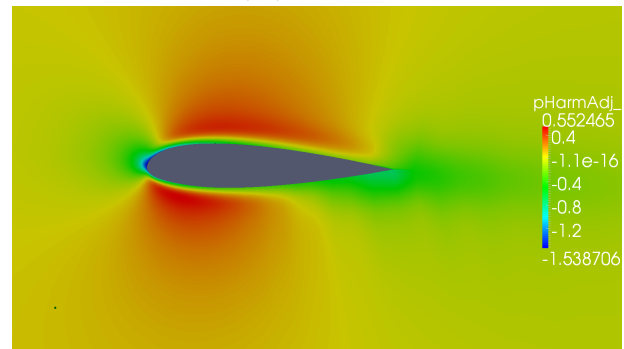
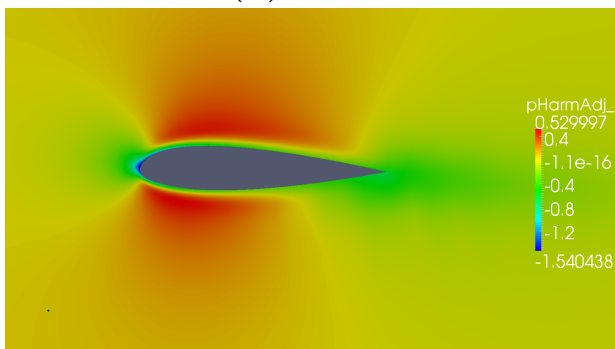
Στα Σχήματα 6.14 και 6.15 παρουσιάζονται τα πεδία της συζυγούς ταχύτητας και της συζυγούς στατικής πίεσης που προκύπτουν από την πρόλεξη της ροής για το συζυγές πρόβλημα. Παρατίθενται τα πεδία για τις επτά ($N_T = 2N_H + 1 = 7$) χρονικές στιγμές, μέσα σε μία περίοδο ταλάντωσης, που προκύπτουν από τη χρήση τριών αρμονικών. Οι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογίζονται και συνθέτουν με τη σειρά τους το χάρτη ευαισθησίας (Σχήμα 6.17).

Ακολουθεί η σύγκριση των τιμών των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζονται με τη μέθοδο HB με τις αντίστοιχες που υπολογίζονται με χρήση του αλγορίθμου PISO. Η σύγκριση γίνεται μέσω του Σχήματος 6.16α' όπου παρουσιάζονται οι τιμές των παραγώγων ευαισθησίας, όπως υπολογίζονται και με τις δύο μεθόδους, για κάθε κόμβο της αεροτομής.

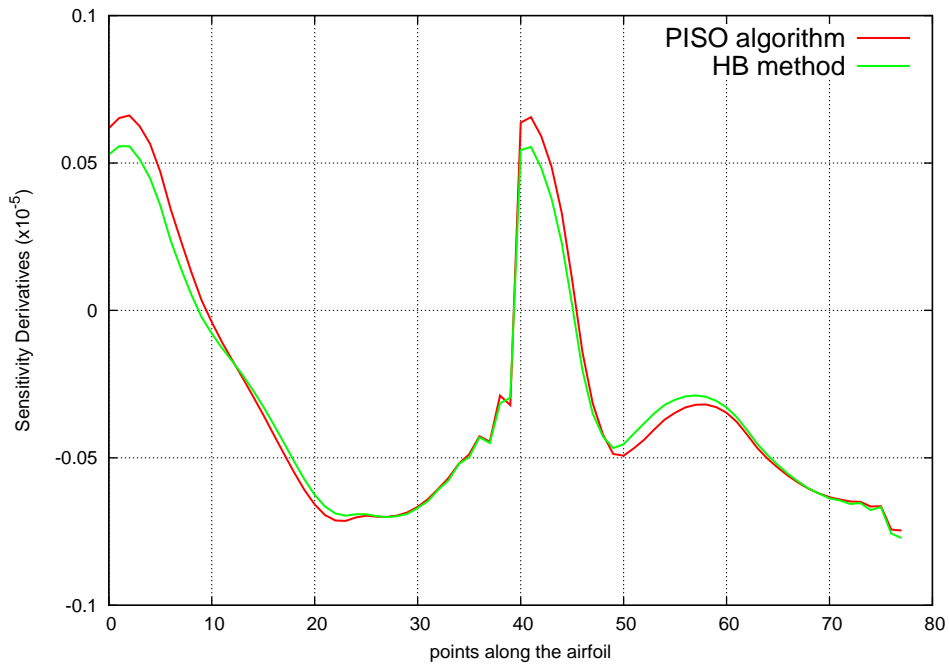
Οι δύο κατανομές σχεδόν ταυτίζονται. Η μέθοδος HB φαίνεται να υποεκτιμά τις παραγώγους ευαισθησίας σε κάποιους κόμβους πάνω στην αεροτομή. Αυτό πιστοποιείται εξετάζοντας και την ποσοστιαία απόκλιση των δύο κατανομών (Σχήμα 6.16β'). Η ποσοστιαία απόκλιση μεταξύ των τιμών που υπολογίζονται με τις δύο μεθόδους (εξαιρουμένου πάντα των σημείων όπου οι παράγωγοι μηδενίζονται και τα αποτελέσματα είναι τελείως παραπλανητικά) κυμαίνεται σε τιμές μικρότερες του 10%, ενώ σε κάποιες περιοχές εμφανίζονται αποκλίσεις σχεδόν μηδενικές.

 (α') $t = 0\text{sec}$  (β') $t = 0.07\text{sec}$  (γ') $t = 0.14\text{sec}$  (δ') $t = 0.21\text{sec}$  (ϵ') $t = 0.29\text{sec}$  $(\sigma\tau')$ $t = 0.36\text{sec}$  (ζ') $t = 0.43\text{sec}$

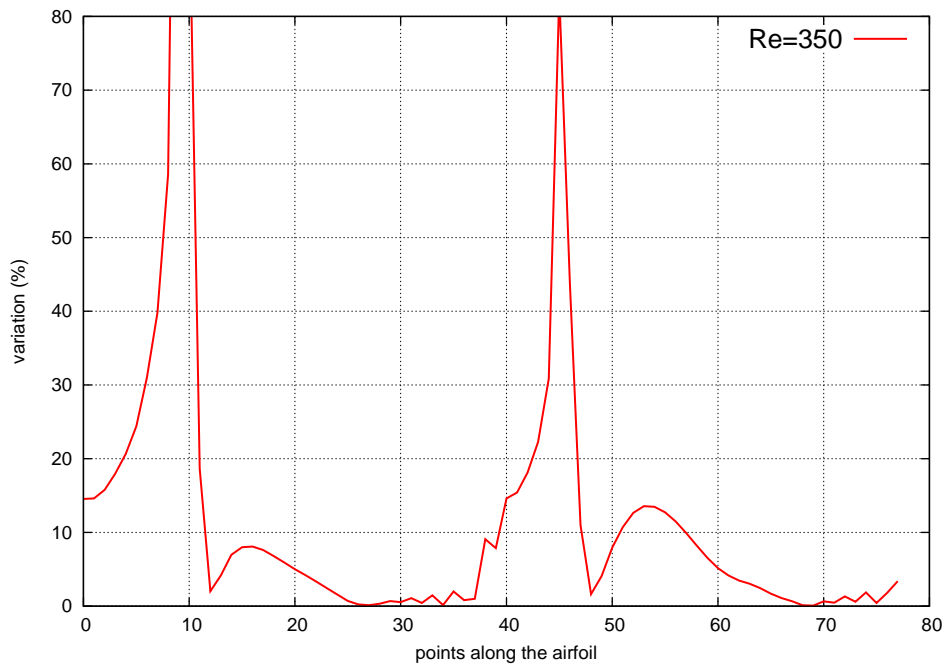
Σχήμα 6.14: Εφαρμογή για $Re=350$, πεδίο συζυγούς ταχύτητας υπολογισμένο με τη μέθοδο HB, για τις 7 χρονικές στιγμές που προκύπτουν από τη χρήση τριών αρμονικών.

 (α') $t = 0\text{sec}$  (β') $t = 0.07\text{sec}$  (γ') $t = 0.14\text{sec}$  (δ') $t = 0.21\text{sec}$  (ϵ') $t = 0.29\text{sec}$  $(\sigma\tau')$ $t = 0.36\text{sec}$  (ζ') $t = 0.43\text{sec}$

Σχήμα 6.15: Εφαρμογή για $Re=350$, πεδίο συζυγούς στατικής πίεσης υπολογισμένο με τη μέθοδο HB, για τις 7 χρονικές στιγμές που προκύπτουν από τη χρήση τριών αρμονικών.

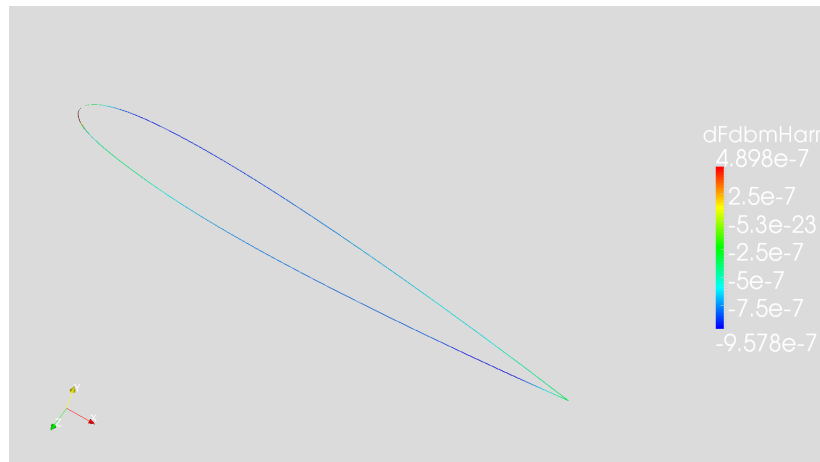


(α') Παράγωγοι εναισθησίας με μεταβλητές σχεδιασμού την κάθετη στο κάθε σημείο της αεροτομής διεύθυνση.



(β') Ποσοστιαία απόκλιση των παραγώγων εναισθησίας.

Σχήμα 6.16: Οι κατανομές των παραγώγων εναισθησίας της μέσης αντίστασης για $Re = 350$ και η ποσοστιαία απόκλιση των τιμών που η μέθοδος HB υπολογίζει από εκείνες που υπολογίζονται με τον αλγόριθμο PISO.



Σχήμα 6.17: Χάρτης ευαισθησίας πάνω στην αεροτομή, με μεταβλητές σχεδιασμού τη μετατόπιση του κάθε κόμβου κατά την κάθετη στον κόμβο διεύθυνση διεύθυνση, για $Re = 350$ και πλάτος ταλάντωσης της γωνίας $\theta_{amp} = 5^\circ$.

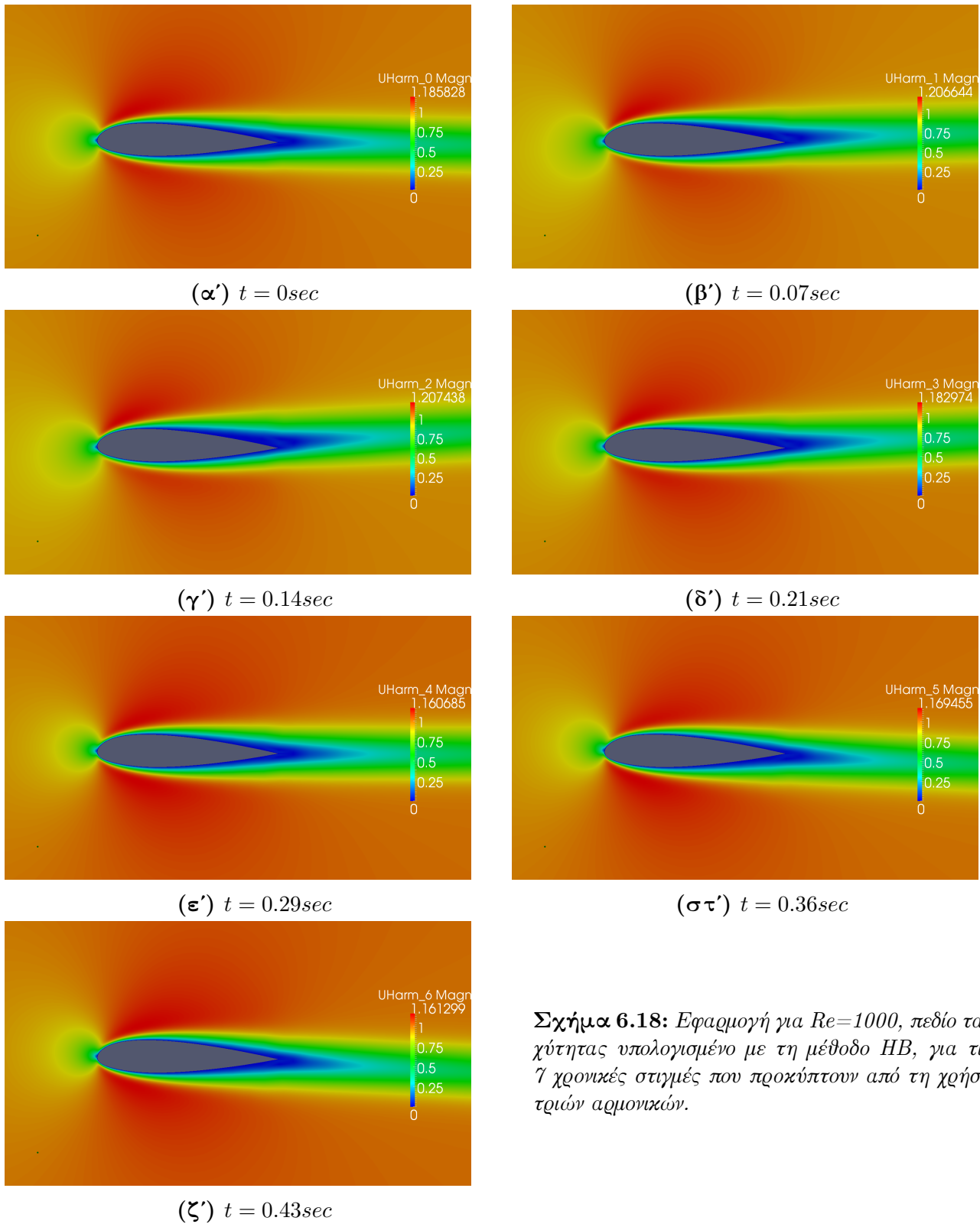
6.2.3 Εφαρμογή για $Re=1000$

Στην παρούσα εφαρμογή χρησιμοποιήθηκαν και πάλι τρεις αρμονικές. Στα Σχήματα 6.18 και 6.19 παρουσιάζονται τα πεδία της ταχύτητας και της στατικής πίεσης που προκύπτουν από την πρόλεξη της ροής για το ευθύ πρόβλημα. Παρατίθενται τα πεδία για τις επτά ($N_T = 2N_H + 1 = 7$) χρονικές στιγμές μέσα σε μία περίοδο ταλάντωσης ($T = 1sec$), που προκύπτουν από τη χρήση τριών αρμονικών.

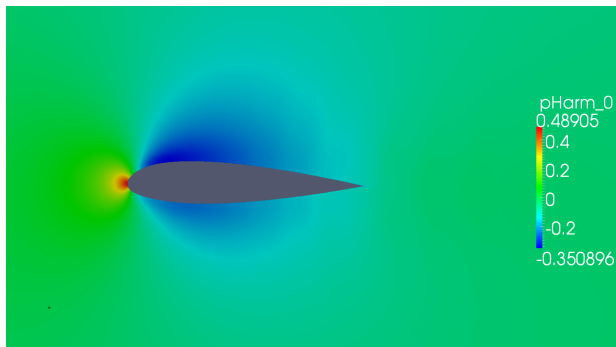
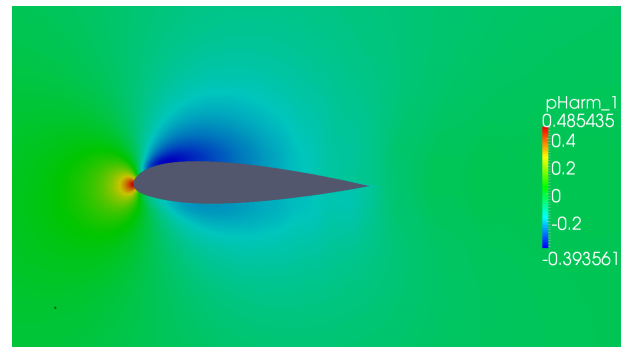
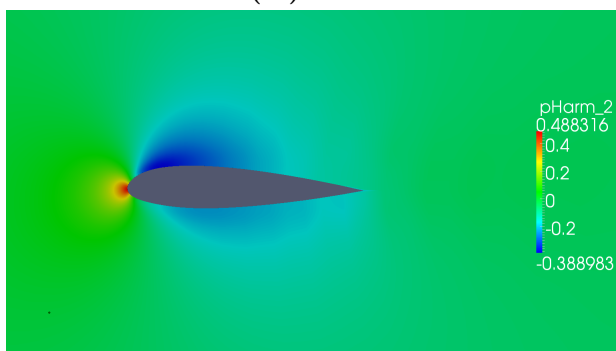
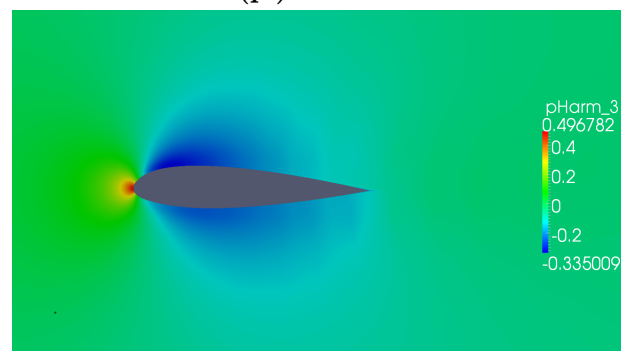
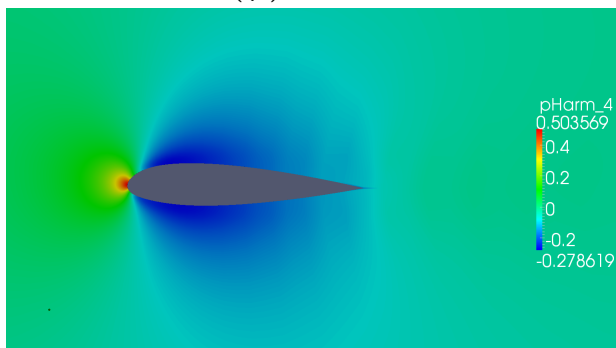
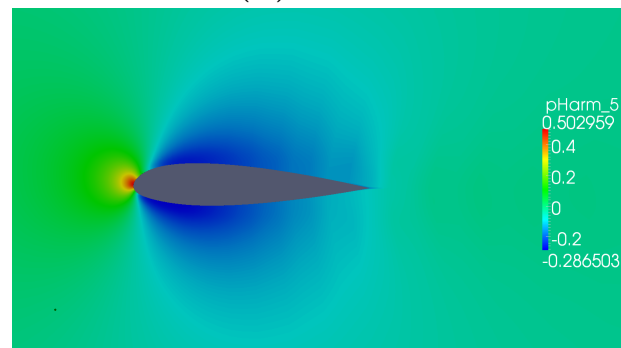
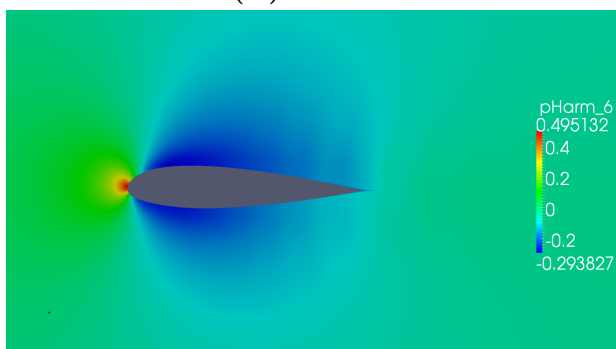
Στα Σχήματα 6.20α' και 6.20β' παρουσιάζεται η μεταβολή των αεροδυναμικών συντελεστών με το χρόνο για μία περίοδο. Παρατηρώντας τα προαναφερθέντα σχήματα είναι εμφανές πως οι αποκλίσεις μεταξύ των δυνάμεων παραμένουν μικρές. Στον υπολογισμό της άνωσης εμφανίζονται οι μεγαλύτερες διαφορές, χωρίς ωστόσο να είναι ιδιαίτερα έντονες. Η προσέγγιση της δύναμης αντίστασης ωστόσο (Σχήμα 6.20β') παραμένει εξαιρετική, αν αναλογιστεί κανείς και την κλίμακα του κατακόρυφου άξονα.

Στα Σχήματα 6.21 και 6.22 παρουσιάζονται τα πεδία της συζυγούς ταχύτητας και της συζυγούς στατικής πίεσης που προκύπτουν από την πρόλεξη της ροής για το συζυγές πρόβλημα της τρίτης εφαρμογής. Παρατίθενται τα πεδία για τις επτά ($N_T = 2N_H + 1 = 7$) χρονικές στιγμές μέσα στην περίοδο ταλάντωσης που προκύπτουν από τη χρήση τριών αρμονικών.

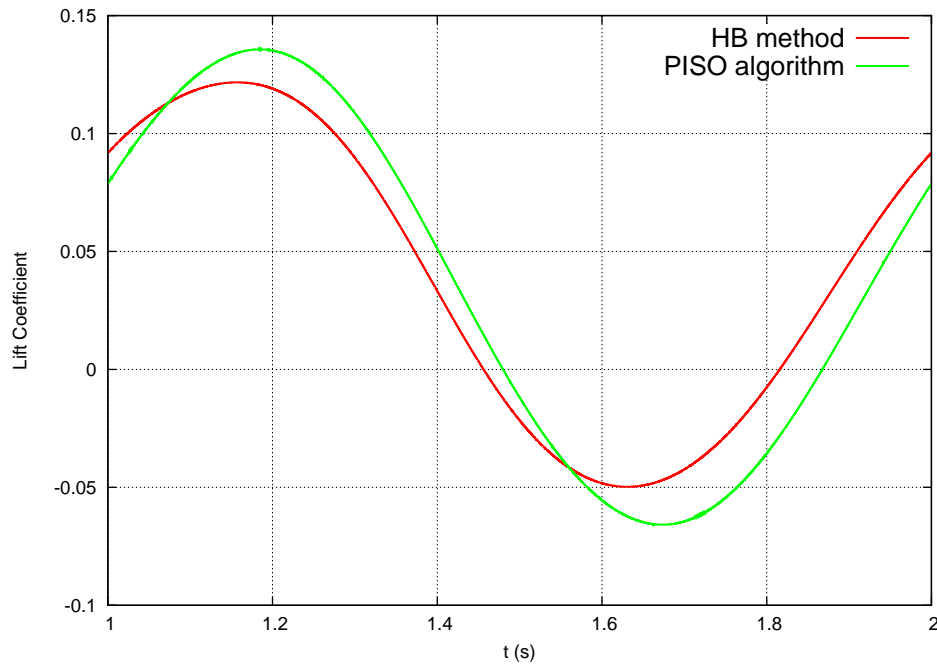
Η σύγκριση των τιμών των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζονται με τη μέθοδο HB με τις αντίστοιχες που υπολογίζονται με τον αλγόριθμο *PISO*, γίνεται μέσω των σχημάτων 6.23α' και 6.23β'. Είναι φανερό πως οι τιμές των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζονται από τις δύο μεθόδους έχουν σημαντικά μικρή απόκλιση. Υπάρχουν περιοχές στην αεροτομή που η σχετική απόκλιση μεταξύ των παραγώγων που υπολογίζονται με τις δύο μεθόδους αυξάνεται, στο μεγαλύτερο μέρος τους ωστόσο οι δύο κατανομές είναι αρκετά κοντά (αποκλίσεις μικρότερες του 20%).



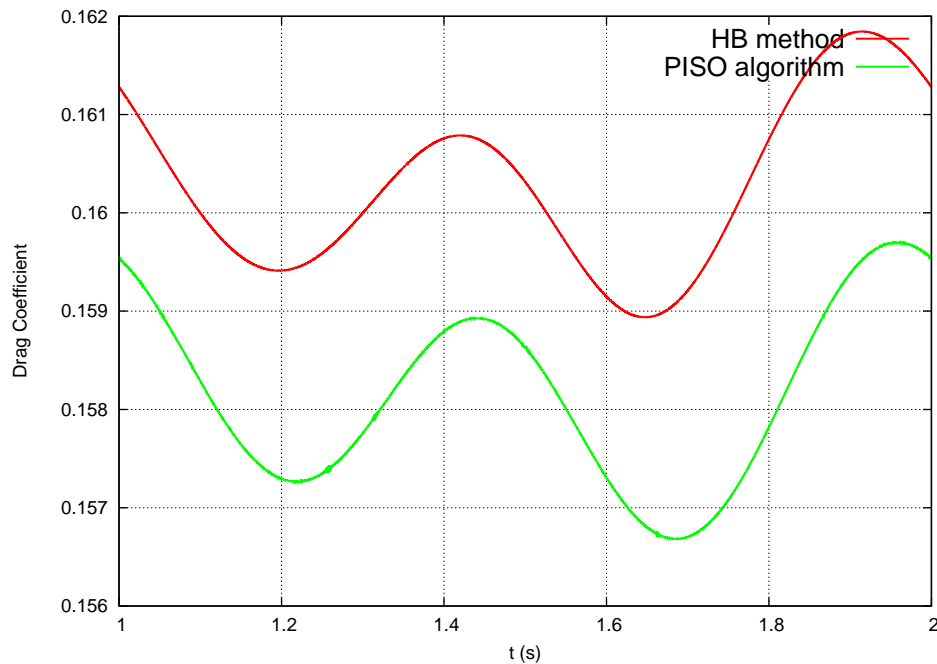
Σχήμα 6.18: Εφαρμογή για $Re=1000$, πεδίο ταχύτητας υπολογισμένο με τη μέθοδο HB, για τις 7 χρονικές στιγμές που προκύπτουν από τη χρήση τριών αρμονικών.

(α') $t = 0 \text{ sec}$ (β') $t = 0.07 \text{ sec}$ (γ') $t = 0.14 \text{ sec}$ (δ') $t = 0.21 \text{ sec}$ (ε') $t = 0.29 \text{ sec}$ (στ') $t = 0.36 \text{ sec}$ (ζ') $t = 0.43 \text{ sec}$

Σχήμα 6.19: Εφαρμογή για $Re=1000$, πεδίο στατικής πίεσης υπολογισμένο με τη μέθοδο HB, για τις 7 χρονικές στιγμές που προκύπτουν από τη χρήση τριών αρμονικών.

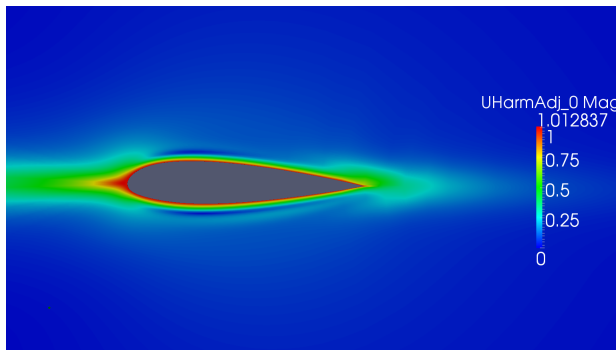
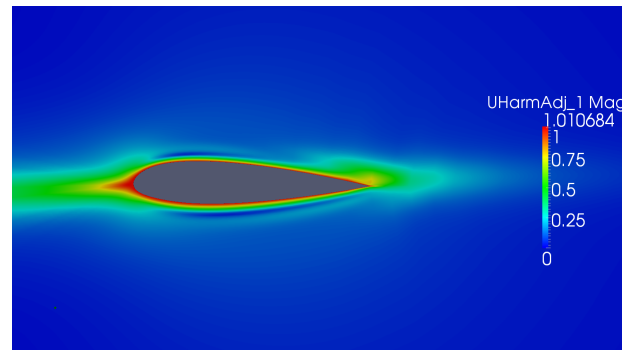
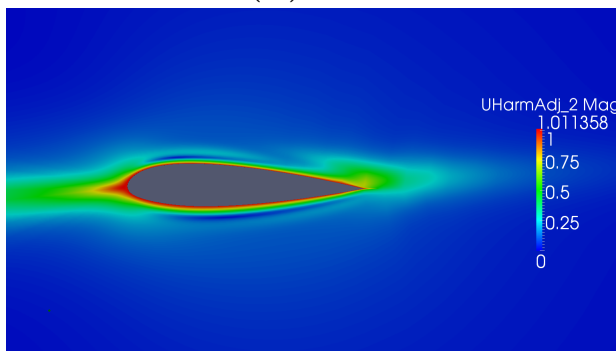
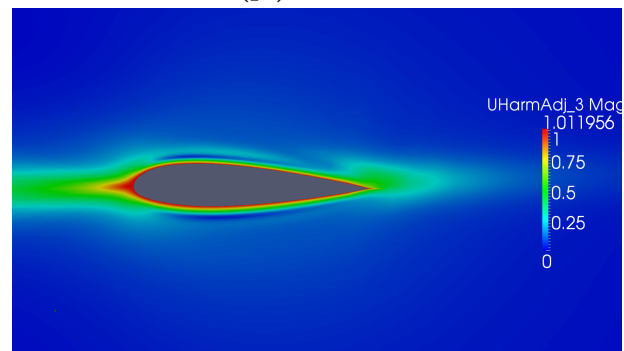
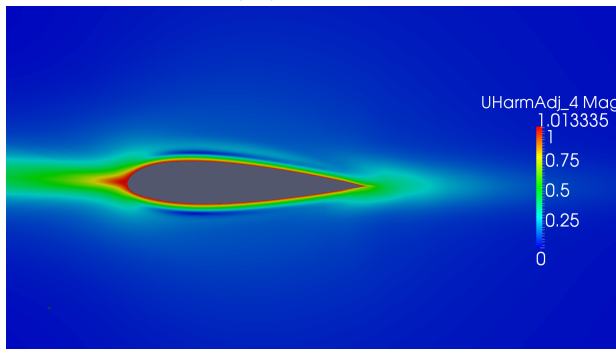
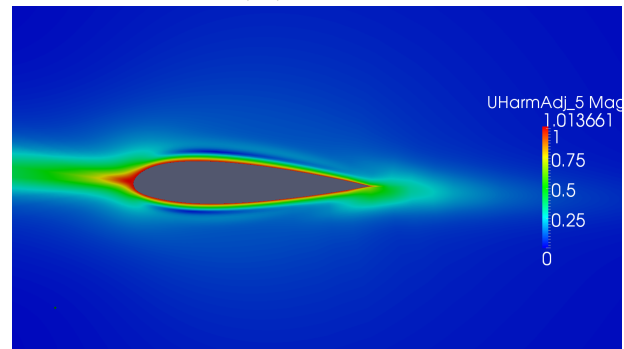
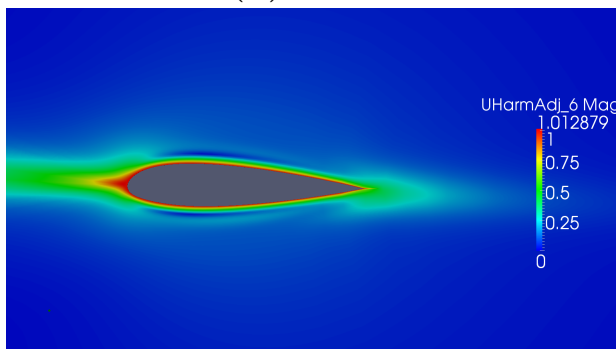


(α') Μεταβολή του συντελεστή άνωσης της αεροτομής με το χρόνο.

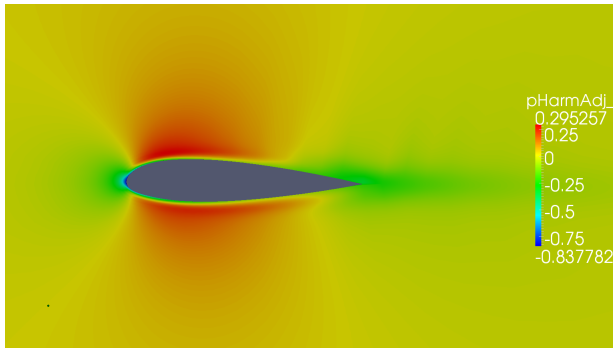
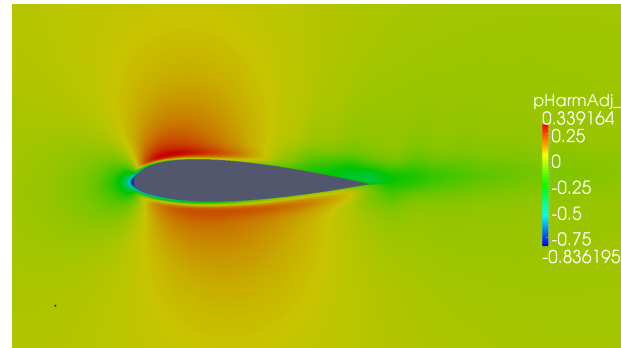
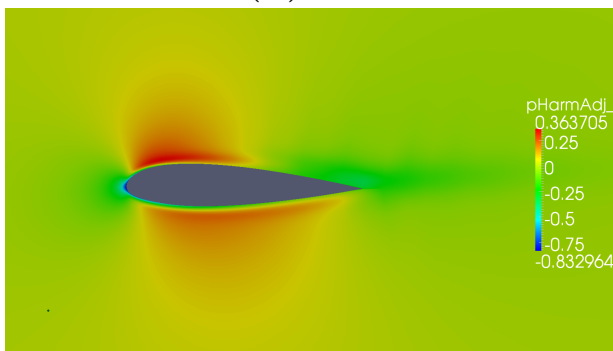
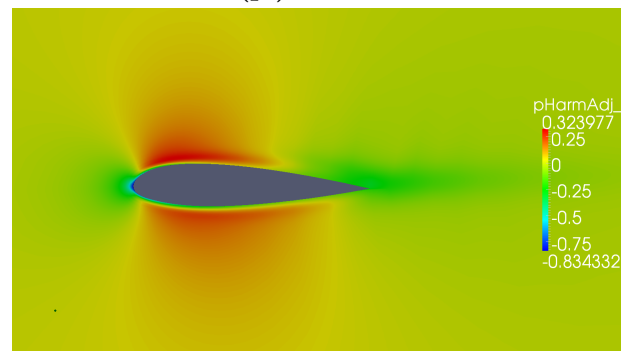
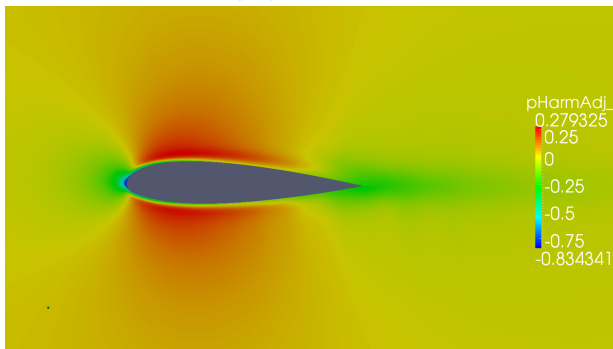
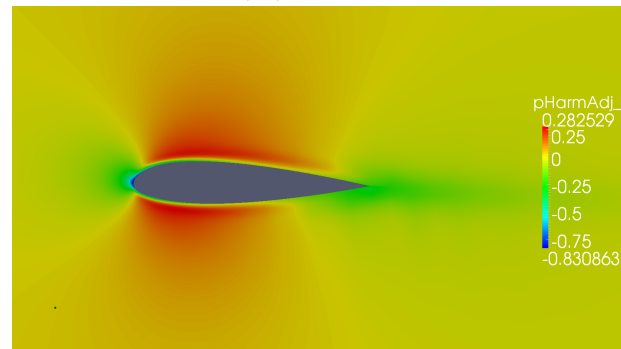
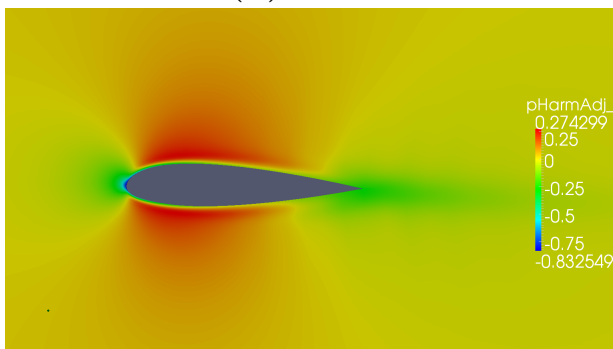


(β') Μεταβολή του συντελεστή αντίστασης της αεροτομής με το χρόνο.

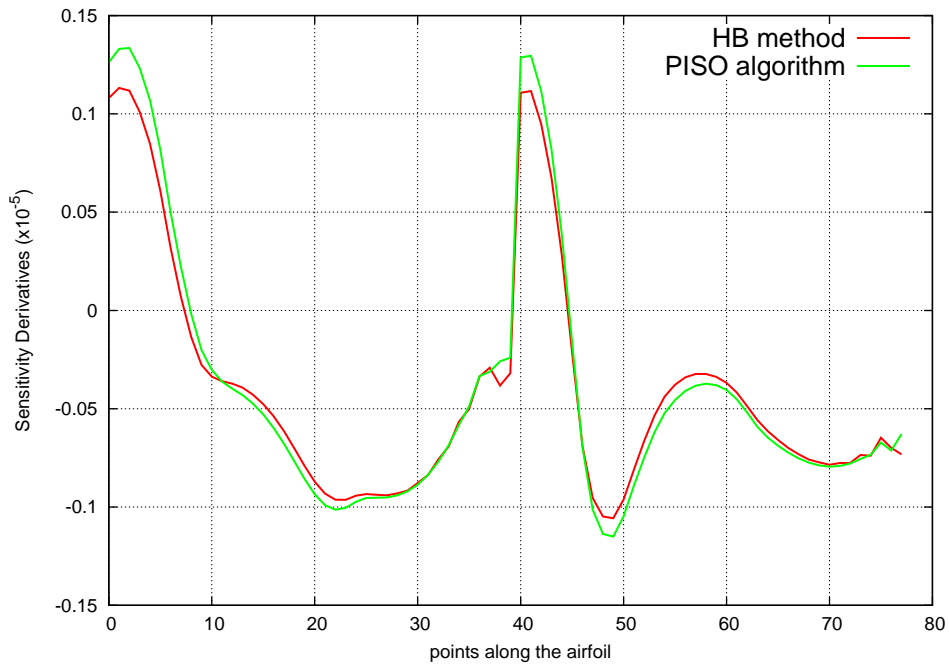
Σχήμα 6.20: Μεταβολή των αεροδυναμικών συντελεστών της αεροτομής με το χρόνο, για $Re = 1000$ και πλάτος ταλάντωσης της γωνίας $\vartheta_{ampl} = 3^\circ$, όπως υπολογίζεται από τις δύο μεθόδους.

 (α') $t = 0 \text{ sec}$  (β') $t = 0.07 \text{ sec}$  (γ') $t = 0.14 \text{ sec}$  (δ') $t = 0.21 \text{ sec}$  (ϵ') $t = 0.29 \text{ sec}$  $(\sigma\tau')$ $t = 0.36 \text{ sec}$  (ζ') $t = 0.43 \text{ sec}$

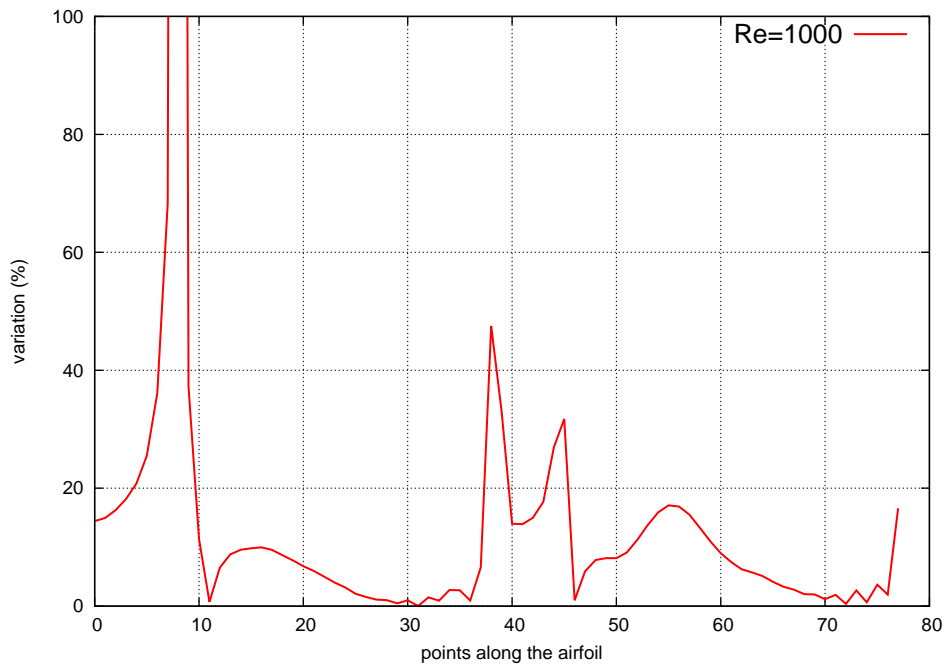
Σχήμα 6.21: Εφαρμογή για $Re=1000$, πεδίο συζυγούς ταχύτητας υπολογισμένο με τη μέθοδο HB, για τις 7 χρονικές στιγμές που προκύπτουν από τη χρήση τριών αρμονικών.

 (α') $t = 0\text{sec}$  (β') $t = 0.07\text{sec}$  (γ') $t = 0.14\text{sec}$  (δ') $t = 0.21\text{sec}$  (ϵ') $t = 0.29\text{sec}$  $(\sigma\tau')$ $t = 0.36\text{sec}$  (ζ') $t = 0.43\text{sec}$

Σχήμα 6.22: Εφαρμογή για $Re=1000$, πεδίο συζυγούς στατικής πίεσης υπολογισμένο με τη μέθοδο HB, για τις 7 χρονικές στιγμές που προκύπτουν από τη χρήση τριών αρμονικών.



(α') Παράγωγοι εναισθησίας με μεταβλητές σχεδιασμού την κάθετη στο κάθε σημείο της αεροτομής διεύθυνση.



(β') Ποσοστιαία απόκλιση των παραγώγων εναισθησίας.

Σχήμα 6.23: Παράγωγοι εναισθησίας της μέσης αντίστασης για $Re = 1000$, όπως υπολογίζονται με τις τρεις μεθόδους και ποσοστιαία απόκλιση των τιμών που η μέθοδος HB υπολογίζει από εκείνες που υπολογίζονται με τις άλλες δύο μεθόδους.

Κεφάλαιο 7

Ανακεφαλαίωση & Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκε η συνεχής συζυγής μέθοδος για περιοδική ροή στον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας με χρήση της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών (HB) στην επίλυση τόσο του ευθέως όσο και του συζυγούς προβλήματος, που προκύπτει έπειτα από κατάλληλη ανάλυση. Στόχος της εργασίας ήταν ο επιτυχής συνδυασμός των δύο αυτών μαθηματικών εργαλείων-μεθόδων για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας αλλά και η πιστοποίηση της αξιοπιστίας της μεθόδου HB στη συγκεκριμένη διαδικασία. Η χρήση της μεθόδου HB προσφέρει μία εναλλακτική λύση στο πρόβλημα δέσμευσης μνήμης (σε περιπτώσεις όπου η ροή είναι περιοδική), ένα πρόβλημα το οποίο πηγάζει από το γεγονός ότι τα πεδία των μεταβλητών της πρωτεύουσας ροής πρέπει να παραμένουν αποθηκευμένα καθώς είναι απαραίτητα κατά την επίλυση του συζυγούς προβλήματος.

Η μελέτη έγινε για στρωτή περιοδική ροή ασυμπίεστου ρευστού γύρω από μία αεροτομή. Η συνεχής συζυγής μέθοδος εφαρμόστηκε στις εξισώσεις ροής που περιγράφουν το μη-μόνιμο πρόβλημα. Η αντικειμενική συνάρτηση ήταν το χρονικό και χωρικό ολοκλήρωμα της αεροδυναμικής αντίστασης που δέχεται η αεροτομή, στην ουσία δηλαδή η μέση τιμή της αεροδυναμικής αντίστασης. Ως μεταβλητές σχεδιασμού επιλέχθηκαν οι μετατοπίσεις κάθε κόμβου της αεροτομής κατά την κάθετη στον κάθε κόμβο διεύθυνση. Το γεγονός ότι επιλέχθηκε να μελετηθεί συγκεκριμένη αεροτομή και έγιναν οι παραπάνω επιλογές για την εφαρμογή της συνεχούς συζυγής μεθόδου δεν επηρεάζει την αξιολόγηση της μεθόδου. Διαφορετική επιλογή αντικειμενικής συνάρτησης και μεταβλητών σχεδιασμού δεν θα πρόσφερε τίποτα το διαφορετικό στη διερεύνηση της εργασίας αυτής.

Η μέθοδος ισορροπίας των αρμονικών εφαρμόστηκε στο ευθύ και στο συζυγές πρόβλημα. Η εφαρμογή της μεθόδου μετασχημάτισε τα περιοδικά αυτά προβλήματα σε σύστημα συζευγμένων χρονικά μόνιμων προβλημάτων. Η επίλυση του συστήματος των μόνιμων προβλημάτων που αντιστοιχούν στο ευθύ πρόβλημα οδήγησε στον προσδιορισμό πεπερασμένου πλήθους πεδίων ροϊκών μεγεθών της πρωτεύουσας ροής. Έχοντας αποθηκευμένα τα πεδία αυτά (καθώς μόνο αυτά απαιτούνται) πραγματοποιείται και η επίλυση του συζυγούς προβλήματος από την οποία προκύπτουν ίδια στο πλήθος αντίστοιχα συζυγή πεδία.

Μία πρώτη πτυχή της μεθόδου εμφανίστηκε στα παραπάνω. Η επίλυση του συζυγούς προβλήματος ως γνωστών απαιτεί να υπάρχουν αποθηκευμένα τα πεδία της πρωτεύουσας ροής. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι όταν το μη-μόνιμο πρόβλημα επιλύεται με τη μέθοδο χρονοπροέλασης τα πεδία κάθε χρονικής στιγμής πρέπει να παραμένουν στην μνήμη, κάτι το οποίο βέβαια δεν είναι δυνατόν. Επιπλέον, μέθοδοι όπως εκείνη της αποθήκευσης δεικτών μνήμης (*checkpointing*) απαιτούν την ανά διαστήματα επίλυση του ευθέως προβλήματος, ξανά, κατά την επίλυση του συζυγούς, με αποτέλεσμα την αύξηση του υπολογιστικού κόστους. Επιπλέον, απαιτούν δέσμευση περισσότερης μνήμης κατά τη διάρκεια της επίλυσης, σε σχέση πάντα με τη μέθοδο HB. Επιπλέον, η μέθοδος HB προσφέρει τη δυνατότητα να υπάρχει πλήρως αποθηκευμένο το πεδίο μόνιμα, με την έννοια ότι έχοντας αποθηκευμένα λίγα στο πλήθος πεδία, με έναν μετασχηματισμό υπολογίζονται ανά πάσα στιγμή οι μεταβλητές της μη-μόνιμης ροής οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Σημειώνεται ωστόσο, ότι απαιτείται αρκετός χρόνος για τη σύγκλιση του αλγορίθμου που εφαρμόζει τη μέθοδο HB, συγκριτικά πάντοτε με τον αλγόριθμο *PISO*, που αποτελεί ένα “κλασικό” επιλύτη μη-μόνιμων προβλημάτων και χρησιμοποιείται στην παρούσα διπλωματική εργασία σε σύγκριση με τη μέθοδο HB. Συγκεκριμένα, ο HB κώδικας με την υπάρχουσα δομή, δεν είναι ταχύτερος του *PISO*, κάτι που πιθανώς οφείλεται στον τρόπο με τον οποίο επιλύονται οι εξισώσεις. Υπενθυμίζεται ότι οι χρονικοί όροι αντιμετωπίζονται ως όροι πηγής, τόσο για το ευθύ όσο και για το συζυγές πρόβλημα. Επομένως, το πεπλεγμένο (*coupled*) σύστημα εξισώσεων δίνει τη θέση του σε εξισώσεις που επιλύονται ξεχωριστά η μία από την άλλη (*segregated*).

Εάν ωστόσο ο αλγόριθμος τροποποιηθεί ούτως ώστε να επιλύεται το πεπλεγμένο σύστημα (οι επιδράσεις των υπόλοιπων χρονικών όρων να μην αντιμετωπίζονται ως όροι πηγής δηλαδή) τότε είναι δυνατόν να επιτευχθεί ταχύτερη σύγκλιση.

Επιπλέον αξίζει να σημειωθεί ότι η μέθοδος HB προσφέρεται για τη μείωση του υπολογιστικού χρόνου που απαιτεί ένας αλγόριθμος βελτιστοποίησης. Επιλύοντας ευθύ και συζυγές πρόβλημα από μία φορά, προσδιορίζονται τα πεδία των μεταβλητών της ροής και της συζυγούς ροής. Αυτά, παραμένουν αποθηκευμένα και είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν για την αρχικοποίηση των μεταβλητών των δύο προβλημάτων σε κάθε επόμενο βήμα βελτιστοποίησης, μειώνοντας έτσι τον χρόνο που απαιτείται για σύγκλιση του κάθε προβλήματος σε ίδιο βήμα.

Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκε αξιολόγηση της μεθόδου στον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας. Οι συγκρίσεις έγιναν με τα αποτελέσματα ενός “κλασικού” αλγορίθμου επίλυσης με χρονοπροέλαση που χρησιμοποιούσε τη μέθοδο *checkpointing*. Κατέστη φανερό ότι σημαντικός ρόλο για ικανοποιητικά αποτελέσματα στον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας έπαιζε η όσο το δυνατόν ακριβέστερη πρόλεξη της ροής με τη μέθοδο HB, για το ευθύ πρόβλημα. Επομένως ακολούθησε διερεύνηση για την αξιοπιστία της μεθόδου όχι μόνο στον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας αλλά και στον υπολογισμό των δυνάμεων που ασκούνται στην αεροδυναμική μορφή. Λόγω του ότι διερεύνηση με βάση τη μεταβολή της συχνότητας του προβλήματος είχε προηγηθεί σε παλαιότερη διπλωματική εργασία [3], προτιμήθηκε να γίνει διερεύνηση που να εξετάζει κυρίως τον αριθμό *Reynolds* της ροής και το πλάτος ταλάντωσης της γωνίας που η επ’ άπειρον ροή σχηματίζει με τη χορδή της αεροτομής. Εξετάστηκαν τρεις περιπτώσεις.

Για την πιστοποίηση της μεθόδου υπολογίστηκαν οι αποκλίσεις των δυνάμεων που υπολογίζονται με τη μέθοδο HB, από τις αντίστοιχες που υπολογίζει ο αλγόριθμος *PISO*. Αντίστοιχα, υπολογίζονται οι αποκλίσεις των παραγώγων ευαισθησίας. Και στις τρεις εφαρμογές διαπιστώθηκε πως η μέθοδος δύναται να υπολογίσει τις δυνάμεις που ασκούνται στην αεροτομή και τις παραγώγους ευαισθησίας με μεγάλη ακρίβεια. Ως εκ τούτου, πιστοποιήθηκε η αξιοπιστία της μεθόδου στην επίλυση τόσο του ευθέως όσο και του συζυγούς προβλήματος.

Προτάσεις για μελλοντική εργασία

Το ενδιαφέρον της παρούσας διπλωματικής εργασίας έγκειται τόσο στο ότι δύο μαθηματικές μέθοδοι-εργαλεία συνδυάζονται στην επίλυση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης, όσο και στο γεγονός ότι είναι δυνατόν να ακολουθήσει περαιτέρω σχετική εργασία.

Μία πρώτη επιλογή θα ήταν να επιχειρηθεί ανάλυση για τυρβώδη ροή. Κάτι τέτοιο θα απαιτούσε βέβαια και το κατάλληλο μοντέλο τύρβης που θα εισήγαγε επιπλέον εξισώσεις ροής. Η μέθοδος της ισορροπίας των αρμονικών θα εφαρμοζόταν και στις επιπλέον εξισώσεις. Αντίστοιχη διαδικασία ήταν δυνατόν να ακολουθηθεί και στην επίλυση του συζυγούς προβλήματος, όπου και πάλι θα προέκυπταν επιπλέον συζυγείς εξισώσεις.

Επιπλέον, ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα παρουσίαζε μια διερεύνηση ως προς το πώς η μέθοδος της ισορροπίας των αρμονικών εφαρμόζεται στην επίλυση του συζυγούς προβλήματος. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, όπως έχει γίνει αντιληπτό, η συνεχής συζυγής μέθοδος εφαρμόζεται με τις εξισώσεις της μη-μόνιμης ροής και η μέθοδος ισορροπίας των αρμονικών εφαρμόζεται στις συζυγείς μη-μόνιμες εξισώσεις εκ των υστέρων. Εναλλακτικά λοιπόν, θα ήταν ενδιαφέρον να εξεταστεί η εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου επί των εξισώσεων που προκύπτουν από τη μέθοδο HB, όταν αυτή εφαρμόζεται στο ευθύ πρόβλημα.

Βιβλιογραφία

- [1] Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική, Αθήνα 2006.
- [2] Α.Σ. Ζυμάρης, Συζυγείς μέθοδοι για το σχεδιασμό μορφών με βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά σε στρωτές και τυρβώδεις ροές, Διδακτορική Διατριβή, Αθήνα 2010.
- [3] Γ.Δ. Κανέλλης, Θεμελίωση και προγραμματισμός της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών στην αριθμητική επίλυση περιοδικών πεδίων ροής, Διπλωματική εργασία, Αθήνα 2011.
- [4] A. Da Ronch, M. Ghoreysky, K.J. Badcock, S. Gortz, M. Windhalm, R.P. Dwight, Linear frequency domain and harmonic balance predictions of dynamic derivatives, 2006.
- [5] Nakhla Michel S., Vlach Jiri, A piecewise harmonic balance technique for determination of periodic response of nonlinear systems, IEEE Transactions on Circuit and Systems, February 1976.
- [6] Siva K. Nadarajah, Matthew S. McMullen and Antony Jameson, Non-Linear frequency domain based optimum shape design for unsteady three-dimensional flows, 2006.
- [7] Δ. Παπαδημητρίου, Συζυγείς (Adjoint) διατυπώσεις για την ανάλυση - σχεδίαση πτερυγώσεων στροβιλομηχανών και τη βέλτιστη προσαρμογή πλέγματος με a posteriori εκτίμηση σφάλματος, Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, 2006.
- [8] Evangelos M. Papoutsis-Kiachagias, Adjoint Methods for Turbulent Flows, Applied to Shape or Topology Optimization and Robust Design, PhD Thesis, Lab of Thermal Turbomachines, Athens 2013.

-
- [9] D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, “Compressor Blade Optimization using a Continuous Adjoint Formulation”, ASME Paper GT-2006/90466, 2006.
- [10] D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, “A Continuous Adjoint Formulation with Emphasis to Aerodynamic-Turbomachinery Optimization”, ECCOMAS CFD 2006 Conference, Egmond Aan Zee, Sept. 2006.
- [11] D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, “A continuous adjoint method with objective function derivatives based on the boundary integrals for inviscid and viscous flows”, *Computer & Fluids*, 36, 325-341, 2007.
- [12] D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, “Aerodynamic Shape Optimization using Adjoint and Direct Approaches, Archives of Computational Methods in Engineering”, Vol.15(4), pp. 447-448, 2008.
- [13] A.S. Zymaris, D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, C. Othmer, “Continuous Adjoint Approach to the Spalart-Allmaras Turbulence Model for Incompressible Flows”, *Computers & Fluids*, 38, 1528-1538, 2009.
- [14] I.S. Kavvadias, G. Karpouzas, E.M. Papoutsis-Kiachagias, D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, “ ”, EUROGEN 2013, Las Palmas de Gran Canaria, Spain, October 2013.
- [15] OpenFOAM, Programmer’s guide, Version 1.6, July 2009.
- [16] OpenFOAM, User guide, Version 1.6, July 2009.
- [17] Κ. Μπεργελές, Υπολογιστική Ρευστομηχανική, 4^η έκδοση, Αθήνα 2006.
- [18] Σ. Τσαγγάρης, Μηχανική των Ρευστών, εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2005.
- [19] J.H. Ferziger, M. Peric, Computational Methods for fluid Dynamics, Springer, 3rd Edition, 2001.
- [20] F. Juretic, Error Analysis in Finite Volume CFD, PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Imperial college, London, 2004.
- [21] Α.Β. Τάτσης, Βελτιστοποίηση αεροδυναμικής μορφής σε χρονικά μη-μόνιμες ροές με τη συνεχή συζυγή μέθοδο και checkpointing, Διπλωματική εργασία, Αθήνα 2012.
-

-
- [22] R.I. Issa, Solution of the implicitly discretized fluid flow equations by operator-splitting, *J. Comp. Physics*, 62:40-65, 1986.
- [23] Q. Wang, P. Moin, Minimal repetition dynamic checkpointing algorithm for unsteady adjoint calculation, 2008, Center for Turbulence Research Annual Research Briefs 2008.
- [24] D.E. Goldberg, Genetic algorithms in search, optimization & machine learning, Addison-Wesley, 1989.
- [25] V.G. Asouti, K.C. Giannakoglou, Aerodynamic optimization using a parallel asynchronous evolutionary algorithm controlled by strongly interacting demes, *Engineer Optimization*, 41(3):241-257, 2009.
- [26] K.C. Giannakoglou, Design of optimal aerodynamic shapes using stochastic optimization methods and computational intelligence, *Progress in Aerospace Sciences*, 38(1):43-76, 2002.
-