

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Διατομεακή Βελτιστοποίηση με Αιτιοκρατικές
Μεθόδους. Θεωρία και Εφαρμογές

Διπλωματική Εργασία

Σεφερλής Ηλίας

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2018

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία σηματοδοτεί την ολοκλήρωση των σπουδών μου στο ΕΜΠ και ένα νέο ξεκινά για μένα. Κρατώντας μια όμορφη ανάμνηση από αυτά τα πέντε χρόνια, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλους όσους στάθηκαν δίπλα μου και συνέβαλαν με τον δικό τους τρόπο στην επίτευξη των στόχων μου.

Πρωτίστως, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στον καθηγητή, κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση, που μου προσέφερε κατά την ενασχόλησή μου με την παρούσα διπλωματική εργασία. Είμαι πραγματικά ευγνώμων που μου έδωσε τη δυνατότητα να ασχοληθώ με ένα θέμα, στο οποίο βρίσκω τόσο μεγάλο επιστημονικό ενδιαφέρον. Επίσης, τον ευχαριστώ θερμά για την εμπιστοσύνη και την κατανόηση που μου έδειξε στις δυσκολίες που προέκυψαν κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη της ομάδας της ΜΠΥΡ&B του Τομέα Ρευστών για την αρμονική συνεργασία και το ευχάριστο κλίμα εργασίας που δημιούργησαν στο εργαστήριο. Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στον υποψήφιο διδάκτορα Δημήτριο Καψούλη για όλη τη βοήθεια και καθοδήγηση που μου προσέφερε, όποτε τη χρειάστηκα. Οι σημαντικές συμβουλές του και η διαρκής υποστήριξή του σε κάθε βήμα της διπλωματικής μου εργασίας υπήρξε καθοριστική στην ολοκλήρωσή της και τον ευχαριστώ θερμά.

Κλείνοντας, δε θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω πολύ την οικογένειά μου, που πάντα είναι δίπλα μου και με στηρίζουν σε όλες τις επιλογές μου, και τους φίλους μου, οι οποίοι με τον δικό τους τρόπο μετέτρεψαν αυτά τα πέντε χρόνια σε μία όμορφη εμπειρία. Χωρίς τη δική τους υποστήριξη, αγάπη και ενθάρρυνση τίποτα δε θα ήταν ίδιο στη μέχρι τώρα πορεία μου!

*Αφιερώνεται στη μητέρα μου,
και στην αδερφή μου*

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ
ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Διατομεακή Βελτιστοποίηση με Αιτιοκρατικές Μεθόδους. Θεωρία και Εφαρμογές

Διπλωματική Εργασία
του

Σεφερλή Ηλία

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2018

Περίληψη

Με την όλο και αυξανόμενη πολυπλοκότητα των μηχανολογικών συστημάτων και την απαίτηση για όλο και πιο αξιόπιστες λύσεις, γίνεται σχεδόν επιτακτική η ανάγκη για τη δημιουργία μιας καθολικής και ενσωματωμένης προσέγγισης των πεπλεγμένων προβλημάτων μέσω της ανάλυσης πολλών επιστημονικών πεδίων (disciplines). Η κύρια ιδέα είναι ότι με τη μελέτη πολλών επιστημονικών πεδίων ως ένα ενσωματωμένο σύστημα θα δώσει συνεργατικά μια καλύτερη λύση από ότι εάν το πρόβλημα λυνόταν χωριστά σε κάθε επιστημονικό πεδίο. Η διατομεακή βελτιστοποίηση (Multi-Disciplinary Optimization - MDO), συνεπώς, είναι ένα αναπτυσσόμενο πεδίο έρευνας που μελετά την εφαρμογή μεθόδων αριθμητικής βελτιστοποίησης στον σχεδιασμό πεπλεγμένων συστημάτων και διερευνά την αλληλεπίδραση των επιστημονικών πεδίων μεταξύ τους. Οι μέθοδοι MDO είναι ευρέως διαδεδομένες στην αεροναυπηγική και αεροδιαστημική βιομηχανία, επειδή εκείνες λαμβάνουν υπόψη και αξιοποιούν τη σύζευξη των πεδίων σε κάθε στάδιο σχεδιασμού.

Ο στόχος της εργασίας αυτής είναι να εισάγει και να αποσαφηνίσει μερικές από τις πιο βασικές αλλά σύνθετες έννοιες που χρησιμοποιούνται στις MDO μεθόδους και αρχιτεκτονικές, ενώ μέσα από εφαρμογές να δοκιμάσει την απόδοση μιας προτεινόμενης από τη βιβλιογραφία μεθόδου. Αρχικά, παρουσιάζεται μια ταξινόμηση όλων των διαθέσιμων MDO μεθόδων και αρχιτεκτονικών, με έμφαση στις αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης, ενώ διερευνώνται τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα τους σε θεωρητικό επίπεδο. Για την καλύτερη κατανόηση των πεπλεγμένων συστημάτων και του τρόπου, με τον οποίο συσχετίζονται μεταξύ τους, εισάγεται ένα νέο διάγραμμα, το οποίο δείχνει τόσο την εξάρτηση των πεδίων όσο και την εκτέλεση διεργασιών μεταξύ τους σε ένα διατομεακό σύστημα.

Η εργασία εστιάζει στις κατανομημένες αρχιτεκτονικές, οι οποίες αποσυνθέτουν το αρχικό πρόβλημα βελτιστοποίησης σε αρκετά υπο-προβλήματα που με τη σειρά τους

διαχειρίζονται και επιλύονται ευκολότερα. Βασικοί εκπρόσωποι των αρχιτεκτονικών αυτών είναι οι μέθοδοι CO (Collaborative Optimization), CSSO (Concurrent Subspace Optimization) και BLISS (Bi-Level Integrated System Synthesis). Στη συνέχεια, αυτές οι μέθοδοι περιγράφονται διεξοδικά μαζί με την ανάλυση ευαισθησίας (υπολογισμός παραγώγων), στην οποία βασίζεται κάθε αιτιοκρατική μέθοδος για την εκτέλεση της βελτιστοποίησης και την ανίχνευση της βέλτιστης λύσης στον χώρο σχεδιασμού.

Μέσα από διάφορες εφαρμογές που πραγματοποιούνται σε μια υλοποίηση της μεθόδου BLISS, δοκιμάζεται εκείνη ως προς τα χαρακτηριστικά της απόδοσης της. Τέτοιες εφαρμογές περιλαμβάνουν το πρόβλημα της ανθρώπινης καρδιάς – ένα αρκετά γνωστό μαθηματικό πρόβλημα – το οποίο με τις κατάλληλες τροποποιήσεις αναδιατυπώνεται σε ένα πρόβλημα MDO. Μια άλλη εφαρμογή είναι ο προκαταρκτικός σχεδιασμός ενός μικρού επιβατικού υπερηχητικού αεροσκάφους (Supersonic Business Jet), στο οποίο τα επιστημονικά πεδία της αεροδυναμικής, της δομικής και της πρόωσης αλληλεπιδρούν προς εύρεση του καθολικού βέλτιστου. Τέλος, εφαρμόζεται η μέθοδος και σε ένα αεροελαστικό πρόβλημα σχεδιασμού αεροτομής με δύο συμμετέχοντα επιστημονικά πεδία, την αεροδυναμική και τη δομική, τα οποία υλοποιούν προηγμένα εργαλεία ανάλυσης, όπως CFD στην αεροδυναμική και FEM στη δομική.

Τα αποτελέσματα από τις διάφορες εφαρμογές είναι πολλά υποσχόμενα, υποδεικνύοντας ότι η συγκεκριμένη μέθοδος πρέπει να μελετηθεί περαιτέρω και ίσως να συγκριθεί με άλλες μεθόδους MDO, καθώς εμφανίζει την ικανότητα αποδοτικής διαχείρισης ισχυρά πεπλεγμένων συστημάτων για την εύρεση του καθολικού βέλτιστου.

Λέξεις-Κλειδιά: Διατομεακή βελτιστοποίηση, Διεπιστημονική βελτιστοποίηση, Μέθοδος BLISS, Μέθοδος CO, Κατανεμημένη αρχιτεκτονική, Πολυεπίπεδη αρχιτεκτονική, Αποσύνθεση προβλημάτων.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING
FLUIDS DEPARTMENT
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

Multi-Disciplinary Optimization using Deterministic Methods. Theory and Applications

Diploma Thesis
by

Ilias Seferlis

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, 2018

Abstract

With the ever increasing complexity of engineering systems and the need for more reliable solutions, it has become more and more necessary to adopt a global and integrated approach through the study of multiple disciplines. Multi-Disciplinary Optimization (MDO) is an emerging field of research that studies the application of numerical optimization techniques to solve inherently coupled design problems involving multiple disciplines. MDO methods are widely used in aerospace and aircraft manufacturing industries because they enable the design of complex coupled systems, in which the synergistic effects of coupling between various interacting disciplines are explored and exploited at every stage of the design process. This is proven to be much more effective than optimizing the individual disciplinary problems sequentially.

The purpose of this thesis is to introduce some of the most basic but complex concepts involved in MDO methods and architectures and, consequently, to evaluate a certain method for its performance. At first, a classification and a brief overview of the various available MDO methods and architectures are presented, with emphasis on deterministic methods, while the merits and demerits of each architecture are discussed from theoretical perspective. To facilitate the understanding of coupled systems and how they relate to each other, a new diagram is introduced to show both data and process flow through the multi-disciplinary system.

This thesis is focused on distributed architectures, which decompose the original optimization problem into independent and autonomous optimization sub-problems that in turn are more easily handled and solved. Most common representatives of these architectures are the methods CO (Collaborative Optimization), CSSO (Concurrent Subspace Optimization) and BLISS (Bi-Level Integrated System Synthesis). These methods are described in detail along with the procedure of sensitivity analysis, upon which every gradient-based method relies in order to perform the optimization and trace the optimal solution in the design space.

Through several examples on one implementation of the BLISS method, its performance is evaluated. Such examples include the human heart dipole problem – a well-known mathematical problem – which is properly modified and reformulated to constitute an MDO problem. This problem is commonly used in the field of MDO for benchmarking MDO implementations due to its simple formulation and known solution. Another example is the conceptual-level design of a Supersonic Business Jet (SBJ) with the disciplines of aerodynamics, structures and propulsion tightly coupled. Lastly, the method is applied to an aeroelastic wing design problem with two participating disciplines, aerodynamics and structures, both of which implement advanced analysis tools, such as CFD in aerodynamics and CSM in structures.

The results from the various applications are much promising, indicating that this particular method should be studied further and perhaps compared with other MDO methods, as it shows great potential for handling with efficiency tightly coupled systems.

Keywords – Multi-Disciplinary Optimization, MDO, BLISS method, CO method, Distributed architecture, Multi-level architecture, Decomposition.

Ακρωνύμια

EMΠ Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΜΠΥΡ&Β Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής
Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

ΥΡΔ Υπολογιστική Ρευστοδυναμική

AAO All At Once

BLISS Bi-Level Integrated System Synthesis

CFD Computational Fluid Dynamics

CO Collaborative Optimization

CSM Computational Structural Mechanics

CSSO Concurrent Subspace Optimization

FEM Finite Element Model

GSE Global Sensitivity Equations

GPU Graphics Processing Unit

MDO Multi-Disciplinary Optimization

MDSA Multi-Disciplinary System Analysis

NTUA National Technical University of Athens

PCopt Parallel CFD & Optimization unit

SAND Simultaneous Analysis and Design

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	3
1.1	Γενικά Περί Διατομεακής Βελτιστοποίησης	3
1.2	Ορολογία και Μαθηματικός Συμβολισμός	4
1.3	Κατηγοριοποίηση των MDO Μεθόδων	8
1.4	Στόχος της Διπλωματικής Εργασίας	11
1.5	Δομή της Διπλωματικής Εργασίας	11
2	Συστημική Ανάλυση	13
2.1	Βασικές Έννοιες και Μέθοδοι Επίλυσης	13
2.1.1	Η Μέθοδος Jacobi	14
2.1.2	Η Μέθοδος Gauss-Seidel	15
2.1.3	Διάφορες Μέθοδοι	16
2.2	Διάγραμμα Δομής Σχεδιασμού	16
2.3	Ανάλυση Ευαισθησίας Συστήματος	19
2.3.1	Διατύπωση των Εξισώσεων	19
2.3.2	Υπολογιστικό Κόστος Παραγώγων	24
3	Κατανεμημένες Αρχιτεκτονικές Αιτιοκρατικών Μεθόδων	27
3.1	Αποσύνθεση Πεπλεγμένων Προβλημάτων	27

3.2	Η Μέθοδος CO	28
4	Η Μέθοδος BLISS	31
4.1	Γενική Επισκόπηση	31
4.2	Υποσυστημικές Βελτιστοποιήσεις	33
4.2.1	Τοπικοί Περιορισμοί	36
4.3	Ανάλυση Ευαισθησίας Βέλτιστων Λύσεων	37
4.3.1	Εκδοχή BLISS/A	38
4.3.2	Εκδοχή BLISS/B	41
4.3.3	Σύγκριση των Εκδοχών	45
4.4	Συστημική Βελτιστοποίηση	45
5	Εφαρμογή στο Πρόβλημα της Ανθρώπινης Καρδιάς	49
5.1	Περιγραφή του Προβλήματος	49
5.1.1	Αρχικό Πρόβλημα	49
5.1.2	Επαναδιατύπωση του Προβλήματος	52
5.2	Επίλυση του Συστήματος και Αποτελέσματα	56
5.2.1	Αναλυτική Λύση	56
5.2.2	Βέλτιστη Λύση	58
5.3	Συμπεράσματα	63
6	Εφαρμογή σε Υπερηχητικό Αεροσκάφος	65
6.1	Περιγραφή του Προβλήματος	65
6.2	Επίλυση και Αποτελέσματα	72
6.3	Συμπεράσματα	76
7	Εφαρμογή στον Σχεδιασμό Μορφής Αεροτομής	77

7.1	Περιγραφή του Προβλήματος	77
7.1.1	Αεροδυναμική Ανάλυση	78
7.1.2	Δομική Ανάλυση	80
7.2	Επίλυση και Αποτελέσματα	84
7.3	Συμπεράσματα	87
8	Συμπεράσματα και Προτάσεις	89
8.1	Ανακεφαλαίωση και Συμπεράσματα	89
8.2	Προτάσεις για Μελλοντική Μελέτη	91
	Βιβλιογραφία	93

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Γενικά Περί Διατομεακής Βελτιστοποίησης

Με την όλο και αυξανόμενη πολυπλοκότητα των μηχανολογικών συστημάτων και την απαίτηση για όλο και πιο αξιόπιστες λύσεις, γίνεται σχεδόν επιτακτική η ανάγκη για τη δημιουργία μιας καθολικής προσέγγισης των πεπλεγμένων προβλημάτων μέσω της ανάλυσης πολλών επιστημονικών πεδίων. Η κύρια ιδέα είναι ότι με τη μελέτη πολλών επιστημονικών πεδίων ως ένα ενσωματωμένο σύστημα θα δώσει συνεργατικά μια καλύτερη λύση από ότι εάν το πρόβλημα λυνόταν χωριστά σε κάθε επιστημονική περιοχή. Στη βελτιστοποίηση μηχανολογικών συστημάτων που περιλαμβάνουν διαφορετικά επιστημονικά πεδία, είναι γνωστό ότι η σειριακή βελτιστοποίηση (sequential optimization) αποτυγχάνει συχνά να εντοπίσει το καθολικό βέλτιστο (global optimum) του συστήματος. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιων προβλημάτων αποτελεί η βελτιστοποίηση σχεδιασμού της πτέρυγας ενός αεροσκάφους, όπου οι επιστήμες της αεροδυναμικής, της δομικής μηχανικής και του αυτομάτου ελέγχου είναι ισχυρά συνδεδεμένες και επηρεάζουν η μια την άλλη. Για τον λόγο αυτό, αναπτύχθηκαν διάφορες μέθοδοι διατομεακής βελτιστοποίησης (MDO - Multi Disciplinary Optimization), οι οποίες λαμβάνουν υπόψη τις αλληλεπιδράσεις ενός πεπλεγμένου προβλήματος και είναι ικανές να εντοπίσουν το καθολικό βέλτιστο του συστήματος.

Οι απαρχές της διατομεακής βελτιστοποίησης μπορούν να ανιχνευθούν στους Schmit [1, 2, 3] και Haftka [4], οι οποίοι επέκτειναν την εμπειρία και τη τεχνογνωσία τους στη βελτιστοποίηση δομικών προβλημάτων, ώστε εκείνη να συμπεριλαμβάνει και άλλους επιστημονικούς κλάδους. Συγκεκριμένα, μια από τις πρώτες εφαρμογές της MDO ήταν σε ένα σχεδιασμό πτέρυγας αεροσκάφους [5, 6]. Έκτοτε, οι εφαρμογές των MDO μεθόδων έχουν επεκταθεί σε ολόκληρο το αεροσκάφος [7, 8], καθώς και σε ένα ευρύ φάσμα μηχανολογικών συστημάτων, όπως σε γέφυρες [9], κτίρια [10], σιδηροδρομική άμαξα [11, 12], μικροσκοπία [13], επίγεια οχήματα [14, 15], πλοία [16, 17], ελικοφόρα αεροσκάφη [18, 19], ακόμα και σε διαστημικά οχήματα [20, 21].

Τις τελευταίες δύο δεκαετίες, έχουν πραγματοποιηθεί αρκετές συγκριτικές μελέτες στη διατομεακή βελτιστοποίηση, με τον Haftka et al. [22] να είναι από τους πρώτους που επιχειρήσαν να αξιολογήσουν την απόδοση των MDO μεθόδων. Τέλος, η διατομεακή βελτιστοποίηση συνεχίζει να αποτελεί ένα ενεργό και πολλά υποσχόμενο πεδίο έρευνας και αναπτύσσονται συνεχώς αρκετές νέες αρχιτεκτονικές MDO που έχουν εφαρμοστεί επιτυχώς στη βιομηχανία [23].

1.2 Ορολογία και Μαθηματικός Συμβολισμός

Προτού μπορεί να γίνει κατανοητή η διατύπωση των MDO προβλημάτων, πρέπει να εισαχθεί η ορολογία και ο μαθηματικός συμβολισμός που χρησιμοποιούνται στη διπλωματική εργασία. Αυτός ο συμβολισμός είναι χρήσιμος για την επεξήγηση των διαφόρων μεθόδων και αρχιτεκτονικών καθώς και για την αναγνώριση των παρόμοιων χαρακτηριστικών τους στη διαχείριση των μεταβλητών. Συγκεκριμένα, ο συμβολισμός περιγράφεται με συντομία στον Πίνακα (1.1). Επίσης, επεξηγούνται στη συνέχεια αρκετοί από τους όρους που εμπλέκονται στο ερευνητικό πεδίο των MDO προβλημάτων.

Συνήθως, με τον όρο επιστημονικά πεδία αναφέρονται οι γνωστικές περιοχές που διέπουν ένα πρόβλημα (όπως αεροδυναμική, δομική, πρόωση κ.ο.κ.). Με την ευρύτερη έννοια, ωστόσο, ένα επιστημονικό πεδίο μπορεί να συνιστά μια οποιαδήποτε διαμέριση ενός MDO προβλήματος. Για παράδειγμα, εάν ο δομικός σχεδιασμός ενός αεροσκάφους επιμεριστεί στον σχεδιασμό ανά συνιστώσα του αεροσκάφους – όπως πτέρυγα, ουρά και άτρακτος – τότε ο σχεδιασμός κάθε τέτοιας συνιστώσας θα μπορούσε να θεωρηθεί ως επιστημονικό πεδίο. Συνεπώς, ένα MDO πρόβλημα σε ένα βιομηχανικό περιβάλλον μπορεί να περιλαμβάνει εκατοντάδες επιστημονικά πεδία, ανάλογα με τη δομή και οργάνωση της εταιρείας.

Επιπλέον, μια μεταβλητή σχεδιασμού σε ένα πρόβλημα σχεδιασμού είναι πάντα υπο τον έλεγχο μιας μεθόδου βελτιστοποίησης. Στον σχεδιασμό συστημάτων, οι τιμές αυτών των μεταβλητών εντοπίζονται μέσω διαδικασιών βελτιστοποίησης και μπορεί να αφορούν τοπικά ένα μόνο επιστημονικό πεδίο ή μπορεί να μοιράζονται μεταξύ πολλών επιστημονικών πεδίων (όχι απαραίτητα μεταξύ όλων). Οι τοπικές μεταβλητές συμβολίζονται με το διάνυσμα \mathbf{X}_i για το επιστημονικό πεδίο i , ενώ οι κοινές με το διάνυσμα \mathbf{Z} . Το διάνυσμα των τοπικών μεταβλητών συνολικά συνιστά μια συγχώνευση των \mathbf{X}_i διανυσμάτων – $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1^T, \mathbf{X}_2^T, \dots, \mathbf{X}_N^T]^T$ για N επιστημονικά πεδία. Τέλος, πρέπει να επισημανθεί ότι όλα τα διανύσματα καθόλη την εργασία, συμβολίζονται με **έντονη** (bold) γραφή προς διάκρισή τους από τα βαθμωτά μεγέθη.

Η ανάλυση ενός πεδίου (discipline analysis) αναφέρεται στη μοντελοποίηση που υπολογίζει τη συμπεριφορά του προς σχεδιασμό σώματος σε ένα διατομεακό σύστημα. Η εκτέλεση μιας τέτοιας ανάλυσης περιλαμβάνει την επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων – όπως οι εξισώσεις Navier-Stokes στη ρευστομηχανική ή οι στατικές εξισώσεις

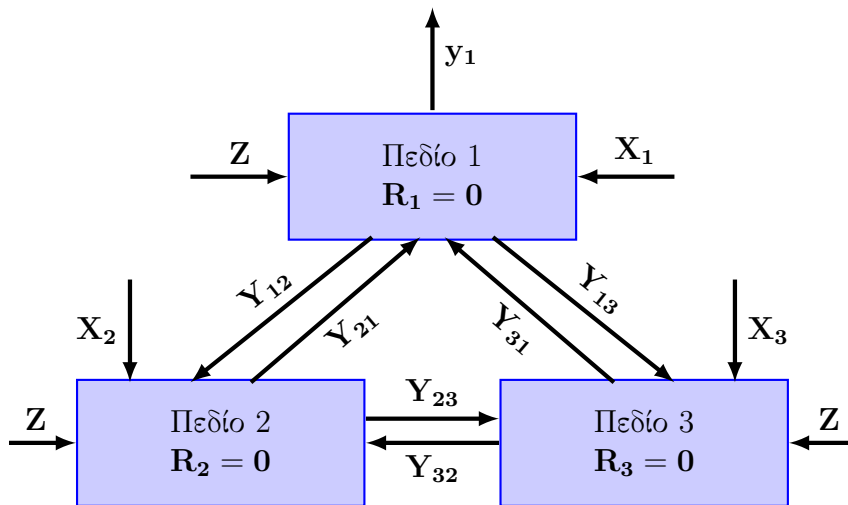
ισορροπίας στη δομική μηχανική – οι οποίες υπολογίζουν ένα σύνολο αποκρίσεων εντός του πεδίου (discipline responses), γνωστών ως μεταβλητών κατάστασης (state variables). Σε ένα πρόβλημα ροής, για παράδειγμα, οι μεταβλητές κατάστασης αποτελούν τα κινηματικά (ταχύτητες) και τα θερμοδυναμικά (πίεσεις, θερμοκρασίες κτλ) στοιχεία, τα οποία υπολογίζονται σε κάθε κόμβο του πλέγματος. Επίσης, είναι δυνατό να ελέγχονται οι μεταβλητές κατάστασης μέσα από τη διαδικασία της βελτιστοποίησης, ανάλογα με τη διατύπωση του προβλήματος και τη μέθοδο που χρησιμοποιείται. Οι μεταβλητές κατάστασης ενός i -πεδίου συμβολίζονται ως \mathbf{Y}_i , ενώ το σύνολο των καταστατικών εξισώσεων (governing equations) σε μορφή υπολοίπου ως \mathbf{R}_i , έτσι ώστε η έκφραση $\mathbf{R}_i = \mathbf{0}$ να αναπαριστά την ικανοποίηση των εξισώσεων, οι οποίες διέπουν την i -επιστημονική περιοχή που υπολογίζει τις μεταβλητές κατάστασης \mathbf{Y}_i .

Σε ένα διατομεακό σύστημα, τα περισσότερα πεδία ανταλλάσσουν **μεταβλητές σύζευξης** (coupling variables), οι οποίες χαρακτηρίζουν τις αλληλεπιδράσεις των πεδίων εντός του συστήματος. Συχνά, ο αριθμός των μεταβλητών που ανταλλάσσονται είναι αρκετά μικρότερος από τον συνολικό αριθμό των μεταβλητών κατάστασης \mathbf{Y}_i που υπολογίζονται σε ένα συγκεκριμένο πεδίο. Οι μεταβλητές σύζευξης αποτελούν, δηλαδή, ένα υποσύνολο των μεταβλητών κατάστασης \mathbf{Y}_i . Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο σχεδιασμός ενός αεροσκάφους, όπου πληροφορίες για τις συνθήκες της ροής – όπως ο αριθμός Mach, η γωνία πρόσπτωσης ή η πυκνότητα του αέρα – οι οποίες απαιτούνται για την αεροδυναμική ανάλυση, δεν είναι χρήσιμες στη δομική ανάλυση για την επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας. Αντί αυτού, μεταφέρονται μόνο τα αεροδυναμικά φορτία που δρουν στην επιφάνεια της πτέρυγας, ούτως ώστε να υπολογιστούν οι αντίστοιχες τάσεις και παραμορφώσεις. Συγκεκριμένα, οι μεταβλητές σύζευξης ενός **i -πεδίου**, οι οποίες χρησιμοποιούνται ως είσοδοι σε ένα **j -πεδίο** συμβολίζονται με \mathbf{Y}_{ij} . Επίσης, ένας ισοδύναμος όρος για τις μεταβλητές σύζευξης που απαντάται ευρέως στη βιβλιογραφία είναι ο όρος, μεταβλητές απόκρισης ή συμπεριφοράς (response or behavior variables), καθώς οι μεταβλητές αυτές περιγράφουν τη συμπεριφορά της ανάλυσης όπως επηρεάζεται από τις υπόλοιπες. Ωστόσο, στην εργασία αυτή, θα διατηρηθεί ο όρος μεταβλητές σύζευξης. Τέλος, δεν αποκλείεται το ενδεχόμενο κάποια στοιχεία των μεταβλητών κατάστασης \mathbf{Y}_i να μην εισέρχονται σε καμία από τις αναλύσεις. Αυτές οι μεταβλητές δεν πρέπει να συγχέονται με τις μεταβλητές σύζευξης, καθώς δεν επηρεάζουν τις υπόλοιπες αναλύσεις, αλλά επηρεάζονται από εκείνες. Ο λόγος που εξέρχονται από την ανάλυση, ενώ δεν είναι μεταβλητές σύζευξης, είναι συνήθως γιατί χρησιμοποιούνται από το λογισμικό βελτιστοποίησης ως αντικειμενικές συναρτήσεις ή περιορισμοί και συμβολίζονται με \mathbf{y}_i (με έναν δείκτη).

Ακολουθεί, στη συνέχεια, ένα τυπικό διάγραμμα – Σχήμα (1.1) – ενός πεπλεγμένου συστήματος με τρία επιστημονικά πεδία, για την καλύτερη κατανόηση όλων των παραπάνω συμβολισμών.

Πίνακας 1.1: Μαθηματικός Συμβολισμός των MDO προβλημάτων

Σύμβολο	Περιγραφή
F	Αντικειμενική Συνάρτηση (βαθμωτό μέγεθος)
\mathbf{X}	Διάνυσμα που αποτελεί συγχώνευση όλων των διανυσμάτων \mathbf{X}_i (τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού) – $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1^T, \mathbf{X}_2^T, \dots, \mathbf{X}_N^T]^T$ για N επιστημονικά πεδία
\mathbf{Z}	Διάνυσμα κοινών μεταβλητών σχεδιασμού (μεταξύ πολλών πεδίων, όχι απαραίτητα μεταξύ όλων)
\mathbf{Y}_i	Διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης που υπολογίζονται εντός του i -πεδίου
\mathbf{Y}_{ij}	Διάνυσμα μεταβλητών σύζευξης (υποσύνολο του \mathbf{Y}_i) που μεταφέρονται από το i -πεδίο στο j -πεδίο
\mathbf{y}_i	Διάνυσμα μεταβλητών (υποσύνολο του \mathbf{Y}_i) που δεν μεταφέρονται σε κανένα πεδίο
\mathbf{R}_i	Καταστατικές εξισώσεις σε μορφή υπολοίπου (υπολογίζονται στο κάθε πεδίο, ώστε $\mathbf{R}_i(\mathbf{Y}_i) = 0$)
\mathbf{Y}_{ij}^t	Διάνυσμα τιμών - στόχων (τιμές των μεταβλητών σύζευξης όπως προκύπτουν από το λογισμικό βελτιστοποίησης. Αποθηκεύονται και συγκρίνονται με τις αντίστοιχες τιμές που προκύπτουν από τις επιστημονικές αναλύσεις)
\mathbf{c}_i	Διάνυσμα περιορισμών συμβιβαστότητας ($\mathbf{c}_i = \mathbf{Y}_{ij}^t - \mathbf{Y}_{ij} = 0$)
\mathbf{G}	Διάνυσμα περιορισμών ανισότητας
\mathbf{h}	Διάνυσμα περιορισμών ισότητας
N	Αριθμός επιστημονικών πεδίων
$n()$	Μήκος ενός δεδομένου διανύσματος
$()_i$	Μεταβλητές ή συναρτήσεις που εφαρμόζονται μόνο στο i -πεδίο
$()_o$	Μεταβλητές ή συναρτήσεις στο τρέχον σημείο
$()^*$	Μεταβλητές ή συναρτήσεις στο βέλτιστο σημείο
$()_Z$	Μεταβλητές ή συναρτήσεις που επηρεάζονται μόνο από τις κοινές μεταβλητές σχεδιασμού (υπολογίζονται στο σύστημα)



Σχήμα 1.1: Περιγραφή ενός πεπλεγμένου συστήματος με τρία επιστημονικά πεδία.

Σε πολλές διατυπώσεις κάποιων MDO μεθόδων, απαιτείται να δημιουργηθούν ανεξάρτητα αντίγραφα των μεταβλητών σύζευξης \mathbf{Y}_{ij} , ώστε να είναι δυνατή η παράλληλη και αυτόνομη εκτέλεση των αναλύσεων και των βελτιστοποιήσεων. Αυτά τα αντίγραφα είναι γνωστά ως τιμές - στόχοι (target values) και συμβολίζονται με έναν εκθέτη t . Συγκεκριμένα, είναι τιμές που προέκυψαν από τη διαδικασία της βελτιστοποίησης στην αμέσως προηγούμενη επανάληψη και χρησιμοποιούνται για σύγκριση με τις τιμές που προκύπτουν από την εκτέλεση των επιστημονικών αναλύσεων στην τρέχουσα επανάληψη. Για τη διατήρηση της συνοχής μεταξύ της τιμής που 'προτείνει' το λογισμικό βελτιστοποίησης \mathbf{Y}_{ij}^t και εκείνης που υπολογίζεται στην επιστημονική ανάλυση \mathbf{Y}_{ij} , επιβάλλονται περιορισμοί συμβιβαστότητας (compatibility constraints) – $\mathbf{c}_i = \mathbf{Y}_{ij}^t - \mathbf{Y}_{ij} = 0$ – οι οποίοι προστίθενται στην αρχική μαθηματική διατύπωση του προβλήματος. Αυτοί οι περιορισμοί αναφέρονται συχνά ως πρόβλημα συντονισμού (coordination problem) της μεθόδου, διότι εκφράζουν ένα μέτρο του συμβιβασμού μεταξύ της ενημερωμένης βέλτιστης τιμής και της προκύπτουσας από την ανάλυση τιμής, ενώ αναλαμβάνουν να συντονίσουν τη διαδικασία της βελτιστοποίησης με εκείνη της ανάλυσης. Όλες οι μέθοδοι MDO που θα αναφερθούν, στη συνέχεια, προσπαθούν να αντιμετωπίσουν αυτό το πρόβλημα με διαφορετικό τρόπο. Τέλος, οι τιμές - στόχοι \mathbf{Y}_{ij}^t θεωρούνται σταθερές κατά τη διαδικασία ανάλυσης και ανανεώνονται στο τελευταίο βήμα κάθε κύκλου βελτιστοποίησης.

Όσον αφορά τους υπόλοιπους περιορισμούς του προβλήματος, εκείνοι μπορεί είναι ισότητας \mathbf{h} ή ανισότητας \mathbf{G} , καθώς και να ορίζονται σε κάθε πεδίο ξεχωριστά (τοπικοί περιορισμοί) ή σε ολόκληρο το σύστημα (συστημικοί περιορισμοί). Οι τοπικοί περιορισμοί συμβολίζονται με δείκτη i για να δηλώσουν το πεδίο στο οποίο υπολογίζονται, σε αντίθεση με τους συστημικούς περιορισμούς που συμβολίζονται με δείκτη $()_Z$, επειδή επηρεάζονται μόνο από τις κοινές μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{Z} και για αυτό υπολογίζονται στο σύστημα. Σε κάθε περίπτωση, η βέλτιστη λύση που προκύπτει πρέπει να ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ένα πρόβλημα MDO διατυπώνεται γενικά στην ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} && F(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}) \\
 & \text{with respect to} && \mathbf{X}, \mathbf{Z} \\
 & \text{such that} && \mathbf{R}_i(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_{ji}) = 0 \quad \forall j \neq i \\
 & && i = 1, 2, \dots, N \\
 & \text{subject to} && \mathbf{G}_i(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_{ji}) \geq 0 \\
 & && \mathbf{G}_z(\mathbf{Z}) \geq 0 \\
 & && \mathbf{h}_i(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_{ji}) = 0 \\
 & && \mathbf{h}_z(\mathbf{Z}) = 0 \\
 & && \mathbf{c}_i = \mathbf{Y}_{ij}^t - \mathbf{Y}_{ij} = 0
 \end{aligned}$$

όπου οι μεταβλητές σύζευξης \mathbf{Y}_{ji} είναι είσοδοι στο i -πεδίο, ενώ τα διανύσματα \mathbf{X} και \mathbf{Y} δηλώνουν την συγχώνευση των επιμέρους διανυσμάτων \mathbf{X}_i και \mathbf{Y}_i αντίστοιχα,

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1^T, \mathbf{X}_2^T, \dots, \mathbf{X}_N^T]^T$$

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_1^T, \mathbf{Y}_2^T, \dots, \mathbf{Y}_N^T]^T$$

Ενώ οι μεταβλητές κατάστασης \mathbf{Y}_i μπορούν να γραφούν ως διανυσματικές συναρτήσεις των μεταβλητών σχεδιασμού και σύζευξης, που συνιστούν τις εισόδους στο i -πεδίο

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}_i = \mathbf{Y}_i(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{ji}) \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N \\
 \forall i \neq j
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.3 Κατηγοριοποίηση των MDO Μεθόδων

Στο πεδίο έρευνας MDO κυριαρχούν οι αιτιοκρατικές μέθοδοι βελτιστοποίησης, οι οποίες βασίζονται στον υπολογισμό και τη χρήση παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης για την ανίχνευση της βέλτιστης λύσης στον χώρο σχεδιασμού, παρά στην τυχαία αναζήτηση του χώρου σχεδιασμού και την αξιολόγηση υποψήφιας λύσεων (στοχαστικές μέθοδοι). Έτσι, ένα πρόβλημα MDO δεν διαφέρει αρκετά από ένα συμβατικό μη-γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς. Όπως και στις

συμβατικές μεθόδους, ο στόχος μιας μεθόδου MDO αποτελεί την εύρεση εκείνων των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού που αποφέρουν την ελαχιστοποίηση ή τη μεγιστοποίηση μιας αντικειμενικής συνάρτησης. Η κύρια διαφορά έγκειται στη διαχείριση των δεδομένων σύζευξης μεταξύ των επιστημονικών πεδίων, ώστε να επιτρέπεται η παράλληλη ανάλυση και βελτιστοποίηση αυτών. Συνεπώς, ο όρος *αρχιτεκτονική* αναφέρεται σε μια ορισμένη στρατηγική που επιστρατεύεται για την οργάνωση των επιστημονικών αναλύσεων, αλλά και για τη μέθοδο και διατύπωση της βελτιστοποίησης που χρησιμοποιείται. Με βάση το επίπεδο ανάλυσης και βελτιστοποίησης, μπορούν να διακριθούν δύο MDO αρχιτεκτονικές μεθόδων, η *μονολιθική ή μονοεπίπεδη* (monolithic or single-level) και η *κατανεμημένη ή πολυεπίπεδη* (distributed or multi-level).

Ως μονολιθικές ορίζονται εκείνες οι μέθοδοι, στις οποίες επιλύεται ενιαίο πρόβλημα βελτιστοποίησης για όλα τα πεδία ταυτόχρονα. Βασικοί εκπρόσωποι τέτοιων αρχιτεκτονικών αποτελούν οι μέθοδοι AAO (All At Once) [24], IDF (Individual Discipline Feasible) [25, 26], MDF (Multi Discipline Feasible) [24] και SAND (Simultaneous Analysis and Design) [27]. Το κυριότερο πλεονέκτημα τους αποτελεί η δυνατότητα χρήσης εξακριβωμένων συμβατικών μεθόδων για τη βελτιστοποίηση του συστήματος. Εφόσον όλες οι αναλύσεις εμπλέκονται για να δημιουργήσουν ενιαίο σύστημα, τότε η βελτιστοποίηση του μπορεί να αντιμετωπιστεί, όπως σε κάθε άλλο αποζευγμένο σύστημα. Ωστόσο, τα μειονεκτήματα των μονολιθικών αρχιτεκτονικών γίνονται εμφανή καθώς η διάσταση του προβλήματος αυξάνεται, δηλαδή αυξάνεται ο συνολικός αριθμός μεταβλητών σύζευξης και σχεδιασμού. Εξαιτίας του σχηματισμού ενιαίου προβλήματος βελτιστοποίησης, το λογισμικό βελτιστοποίησης καλείται να διαχειριστεί πιθανόν χιλιάδες μεταβλητές και περιορισμούς που υπάρχουν σε ένα πρόβλημα MDO. Αυτό είναι υπολογιστικά αρκετά δαπανηρό και μπορεί να οδηγήσει σε αδυναμίες σύγκλισης ή μη-καθολικά βέλτιστες λύσεις. Την ίδια στιγμή, η αυτονομία κάθε ανάλυσης αναγκαστικά περιορίζεται, ούτως ώστε το λογισμικό βελτιστοποίησης να μπορεί να αποκτήσει πρόσβαση στις μεταβλητές και τους περιορισμούς της κάθε ανάλυσης ταυτόχρονα. Κάτι τέτοιο δεν αποτελεί μια ιδιαίτερα πρακτική προσέγγιση των πραγματικών προβλημάτων ενός βιομηχανικού περιβάλλοντος, όπου υπάρχουν αυτόνομες υπο-ομάδες υπεύθυνες για την ανεξάρτητη και ξεχωριστή βελτιστοποίηση των πεδίων τους. Τέλος, μπορεί να παρουσιάσουν προβλήματα, εάν κάποια πεδία έχουν περισσότερους περιορισμούς και μεταβλητές ή περισσότερο υπολογιστικά απαιτητικές αναλύσεις από τα υπόλοιπα. Για όλους αυτούς τους λόγους, λοιπόν, η χρήση αυτών των μεθόδων τείνει να εγκαταλειφθεί και η ερευνά εστιάζει στην ανάπτυξη στρατηγικών για κατανεμημένη βελτιστοποίηση σχεδιασμού.

Οι κατανεμημένες αρχιτεκτονικές τροποποιούν τη σχέση της μη-ιεραρχικής δομής (non-hierarchical) των μονολιθικών αρχιτεκτονικών σε μια ιεραρχική δομή, με την αποσύνθεση του αρχικού προβλήματος σχεδιασμού σε πολλά αυτόνομα και απλούστερα υπο-προβλήματα, τα οποία περιέχουν ένα υποσύνολο των συνολικών μεταβλητών και περιορισμών. Τέτοιες αρχιτεκτονικές αναλύουν και βελτιστοποιούν τα υπο-προβλήματα ανεξάρτητα από το σύστημα, ενώ περιλαμβάνουν μεθόδους, όπως τη Μέθοδο Συνεργατικής Βελτιστοποίησης CO (Cooperative Optimization) [28, 29], τη Μέθοδο Ταυ-

τόχρονης Βελτιστοποίησης Υποχωρίων CSSO (Concurrent SubSpace Optimization) [30] και τη Μέθοδο Διεπίπεδης Σύνθεσης Ολοκληρωμένου Συστήματος BLISS (Bi-Level Integrated Systems Synthesis) [31]. Όλες οι παραπάνω μέθοδοι χρησιμοποιούν ανεξάρτητα και τοπικά (υποσυστημικά) λογισμικά βελτιστοποίησης, αλλά και ένα επιπρόσθετο συστημικό λογισμικό βελτιστοποίησης που αναλαμβάνει τη διαχείριση των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των αναλύσεων. Αυτή η προσέγγιση μιμείται περισσότερο τα προβλήματα ενός βιομηχανικού πλαισίου και επιτρέπει σε κάθε επιστημονικό πεδίο να λειτουργεί σχετικώς απομονωμένα, με βάση τις επιθυμητές τιμές στις μεταβλητές σχεδιασμού (target values) που ορίζει το συστημικό λογισμικό βελτιστοποίησης. Η απομόνωση των πεδίων αποτελεί το συγκριτικό πλεονέκτημα των κατανεμημένων αρχιτεκτονικών έναντι των μονολιθικών, διότι επιτρέπει τη χρήση τους χωρίς την απαίτηση για οποιαδήποτε παρέμβαση στη μοντελοποίηση των επιστημονικών αναλύσεων, ούτως ώστε να βελτιστοποιήσουν το σύστημα. Επιπλέον, τα συστήματα κατανεμημένης ανάλυσης μπορούν να αξιοποιήσουν την παράλληλη επεξεργασία πολλών ανεξάρτητων υπολογιστικών συστημάτων και να επιτρέψουν την εφαρμογή των MDO μεθόδων σε πραγματικά προβλήματα μεγάλης διάστασης (large-scale problems). Ωστόσο, ο συμβιβασμός μεταξύ της ανάγκης για αυτονομία κάθε υπο-προβλήματος και της ανάγκης του συστήματος να μπορεί να εποπτεύει το εκάστοτε υπο-πρόβλημα παραμένει μια πρόκληση. Για αυτό, κάθε μέθοδος κατανεμημένης αρχιτεκτονικής που έχει αναπτυχθεί μέχρι σήμερα, προσπαθεί να αντιμετωπίσει αυτή τη δυσκολία με διαφορετικό τρόπο.

Η επιλογή της κατάλληλης αρχιτεκτονικής μπορεί να μειώσει σημαντικά τον χρόνο επίλυσης και το υπολογιστικό κόστος της εφαρμογής. Αυτές οι μειώσεις προέρχονται από την επιλογή των μεθόδων βελτιστοποίησης για κάθε επιστημονικό πεδίο, τον βαθμό σύζευξης μεταξύ των πεδίων καθώς και τη δυνατότητα παραλληλοποίησης του συστήματος. Αυτά τα κριτήρια συνιστούν τη μαθηματική διατύπωση ενός προβλήματος (problem formulation) με το τελευταίο κριτήριο να αποκτά ιδιαίτερη σημασία, όταν ο σχεδιασμός γίνεται περισσότερο υπολογιστικά ακριβής και ο αριθμός των μεταβλητών (σχεδιασμού και σύζευξης) αλλά και των περιορισμών αυξάνεται. Επιπλέον, σε κάποια προβλήματα, μερικές μέθοδοι μπορεί να αποτύχουν να βρουν το βέλτιστο ή μπορεί να είναι ιδιαίτερα μη-αποδοτικές με αρκετές ανώφελες επαναλήψεις μέχρι να συγκλίνουν [32]. Τέλος, η σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ διαφόρων μελετών μπορεί να αποδειχθεί επίσης επίπονη διαδικασία, καθώς η απόδοση μιας μεθόδου MDO μπορεί να εξαρτάται από συγκεκριμένες λεπτομέρειες στην υλοποίηση της. Αυτό σημαίνει ότι ακόμα και εάν επιλεγεί μια κατάλληλη μέθοδος για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, παρουσιάζεται η δυσκολία ως προς την επιλογή εκείνης της υλοποίησης που είναι η πιο αποδοτική. Στην περίπτωση της μεθόδου Συνεργατικής Βελτιστοποίησης (CO) [29], υπάρχουν τουλάχιστον 4 παραλλαγές στην υλοποίηση της, οι οποίες παρουσιάζουν διαφορετική απόδοση στο ίδιο πρόβλημα. Συνεπώς, προς το παρόν αφήνεται στην ευχέρεια του αναγνώστη να αναζητήσει στη βιβλιογραφία την κατάλληλη μέθοδο και την αντίστοιχη υλοποίηση της για ένα δεδομένο πρόβλημα.

1.4 Στόχος της Διπλωματικής Εργασίας

Η διατομεακή βελτιστοποίηση είναι σε αρκετά πρώιμο ερευνητικό στάδιο και στη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετές περίπλοκες μέθοδοι και έννοιες. Η διπλωματική εργασία στοχεύει να εισάγει και να αποσαφηνίσει περαιτέρω αυτές τις έννοιες, ενώ συγχρόνως αναφέρονται μερικές διαθέσιμες MDO μέθοδοι και επισημαίνονται τα χαρακτηριστικά και οι διαφορές τους. Επίσης, μέσα από εφαρμογές σε διαφορετικά προβλήματα διερευνάται η βέλτιστη λύση σε συμφωνία είτε με συμβατικές υπολογιστικές μεθόδους είτε με αντίστοιχες αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης για επαλήθευση των αποτελεσμάτων. Στόχος είναι μέσα από αυτές τις εφαρμογές να εξαχθούν γενικότερα συμπεράσματα για τις MDO μεθόδους και την αποδοτικότητά τους στη βελτιστοποίηση μηχανολογικών συστημάτων.

1.5 Δομή της Διπλωματικής Εργασίας

Η παρούσα διπλωματική εργασία διαρθρώνεται ως εξής:

- Στο **Κεφάλαιο § 2** παρουσιάζεται η διατομεακή συστημική ανάλυση ως τεχνική επίλυσης ενός πεπλεγμένου συστήματος επιστημονικών αναλύσεων ενώ, στη συνέχεια, περιγράφεται ένας πιο ακριβής και ολοκληρωμένος τρόπος απεικόνισης των πεπλεγμένων προβλημάτων. Τέλος, διατυπώνονται οι εξισώσεις ευαισθησίας για τον υπολογισμό των παραγώγων, με έμφαση στις κατανεμημένες αρχιτεκτονικές και συζητείται το υπολογιστικό τους κόστος.
- Στο **Κεφάλαιο § 3** αναπτύσσεται ο τρόπος αποσύνθεσης των πεπλεγμένων συστημάτων και αναφέρονται συνοπτικά οι βασικές αρχές λειτουργίας μερικών μεθόδων κατανεμημένης αρχιτεκτονικής.
- Στο **Κεφάλαιο § 4** περιγράφεται διεξοδικά η μέθοδος αποσύνθεσης BLISS και παραλλαγές αυτής, ενώ εξετάζεται η επίδραση ορισμένων χαρακτηριστικών της στην απόδοση της.
- Στο **Κεφάλαιο § 5** διατυπώνονται οι εξισώσεις ενός μαθηματικού πεπλεγμένου προβλήματος, το οποίο απλοποιείται και μετατρέπεται σε ένα MDO πρόβλημα και επιλύεται μέσω βελτιστοποίησης, με σκοπό τη δοκιμή του αλγορίθμου που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.
- Στο **Κεφάλαιο § 6** διατυπώνεται και επιλύεται ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης σχεδιασμού ενός υπερηχητικού αεροσκάφους.
- Στο **Κεφάλαιο § 7** διατυπώνεται ένα αεροελαστικό πρόβλημα σχεδιασμού μορφής για μια πτέρυγα αεροσκάφους και βελτιστοποιείται σύμφωνα με τον αλγόριθμο που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο § 4.

- Στο **Κεφάλαιο § 8** εξάγονται συμπεράσματα σχετικά με την αποδοτικότητα των MDO μεθόδων και πιο συγκεκριμένα της μεθόδου BLISS ενώ σχολιάζεται η δυνατότητα περαιτέρω βελτίωσης κάποιων χαρακτηριστικών της.
-

Κεφάλαιο 2

Συστημική Ανάλυση

Καθώς ο σύγχρονος μηχανολογικός σχεδιασμός λαμβάνει υπόψη την εξάρτηση ενός επιστημονικού πεδίου από άλλα, είναι επιτακτική η ανάγκη για μια ανάλυση που μπορεί να επιλύει με αποδοτικό τρόπο το σύνολο των πεπλεγμένων μη-γραμμικών εξισώσεων και, κατά συνέπεια, να προσφέρει πιο αξιόπιστες προσομοιώσεις και βελτιστοποιήσεις των προβλημάτων. Η συστημική ανάλυση MDSA (Multi-Disciplinary System Analysis) λαμβάνει υπόψη τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των επιστημονικών πεδίων ενώ εκτελεί διαδοχικά και με επαναληπτικό τρόπο τις επιστημονικές αναλύσεις, με σκοπό τη σταθεροποίηση (σύγκλιση) των τιμών των μεταβλητών σύζευξης.

2.1 Βασικές Έννοιες και Μέθοδοι Επίλυσης

Όπως έχει αναφερθεί, οι επιστημονικές αναλύσεις αποτελούν μοντελοποιήσεις ενός προβλήματος και μπορεί να έχουν προγραμματιστεί σε εμπορικά λογισμικά ή σε ερασιτεχνικά προγράμματα, ανοιχτού ή κλειστού κώδικα. Σε κάθε περίπτωση, όμως, κάθε MDO μέθοδος που έχει αναπτυχθεί μέχρι σήμερα καλείται να υπερνικήσει τις δυσκολίες ενσωμάτωσης αταίριαστων μεταξύ τους προγραμμάτων, τα οποία συχνά παρουσιάζουν διαφορετικό βαθμό πολυπλοκότητας, ακρίβειας και απόδοσης. Αυτή την ενσωμάτωση αναλαμβάνει να επιλύσει η συστημική ανάλυση, ενώ παράλληλα αναλαμβάνει την πρόκληση επίλυσης του προβλήματος συντονισμού των μεταβλητών σύζευξης (coordination problem), μέσω επιβολής περιορισμών συμβιβαστότητας. Μάλιστα, η απόδοση μιας συστημικής ανάλυσης εξαρτάται ισχυρά από τη μαθηματική διατύπωση του εκάστοτε προβλήματος και είναι πολύ πιθανό να χρειαστούν πολλές επαναλήψεις για τη σύγκλιση του συστήματος, εάν υπάρχουν μη-γραμμικότητες στις καταστατικές εξισώσεις. Κάτι τέτοιο μπορεί να μειώσει σημαντικά την απόδοση ολόκληρης της μεθόδου MDO.

Στη βιβλιογραφία, απαντώνται διάφορες αριθμητικές μέθοδοι εκτέλεσης της συστημικής ανάλυσης για πεπλεγμένα μη-γραμμικά προβλήματα. Μια συνήθης μέθοδος είναι η επαναληπτική διαδικασία **Σταθερού Σημείου** (Fixed point iteration – FPI) [33], όπου χρησιμοποιεί τις αρχικές εξισώσεις ενός συστήματος ως επαναληπτικές συναρτήσεις, έχοντας γνωστή ή υποθέτοντας μια πρώτη προσέγγιση των τιμών των μεταβλητών σύζευξης. Βασικοί εκπρόσωποι αυτών των μεθόδων είναι η μέθοδος Jacobi και η μέθοδος διαδοχικών αντικαταστάσεων ή μέθοδος Gauss-Seidel.

2.1.1 Η Μέθοδος Jacobi

Η μέθοδος Jacobi χρησιμοποιεί τις τιμές των μεταβλητών σύζευξης από την προηγούμενη επανάληψη της συστημικής ανάλυσης για να αξιολογήσει τις μεταβλητές κατάστασης \mathbf{Y}_i , ώστε τα πεδία να μπορούν να εκτελεστούν **παράλληλα**. Η γενική της διατύπωση είναι

$$\mathbf{Y}_i^{(k+1)} = \mathbf{Y}_i(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{ji}^{(k)}) \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.1)$$

$$\forall i \neq j$$

όπου $(k + 1)$ είναι η τρέχουσα επανάληψη, οι $\mathbf{Y}_i^{(k+1)}$ είναι οι ενημερωμένες τιμές των μεταβλητών κατάστασης του i -πεδίου (συμπεριλαμβανομένου και των μεταβλητών σύζευξης $\mathbf{Y}_{ij}^{(k+1)}$), ενώ οι $\mathbf{Y}_{ji}^{(k)}$ είναι όλες οι μεταβλητές σύζευξης της προηγούμενης επανάληψης, που αποτελούν τις εισόδους στο i -πέδιο.

Για το παράδειγμα του σχήματος (1.1) με τα τρία επιστημονικά πεδία, η εξίσωση (2.1) θα μπορούσε να γραφεί σε αναπτυγμένη μορφή ως

$$\mathbf{Y}_1^{(k+1)} = \mathbf{Y}_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{21}^{(k)}, \mathbf{Y}_{31}^{(k)})$$

$$\mathbf{Y}_2^{(k+1)} = \mathbf{Y}_2(\mathbf{X}_2, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{12}^{(k)}, \mathbf{Y}_{32}^{(k)})$$

$$\mathbf{Y}_3^{(k+1)} = \mathbf{Y}_3(\mathbf{X}_3, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{13}^{(k)}, \mathbf{Y}_{23}^{(k)})$$

Εδώ, φαίνεται ξεκάθαρα ότι για την τρέχουσα επανάληψη $(k + 1)$, τα πεδία μοιάζουν αποζευγμένα (decoupled) και, συνεπώς, μπορούν να εκτελεστούν παράλληλα και αυτόνομα με τις τιμές των μεταβλητών σύζευξης της προηγούμενης επανάληψης.

Η μέθοδος αυτή προτιμάται σε μεγάλης διάστασης προβλήματα, όπου οι μεταβλητές σύζευξης και σχεδιασμού είναι αρκετές, με αποτέλεσμα να αυξάνουν το υπολογιστικό κόστος εκτέλεσης μιας συστημικής ανάλυσης. Αξιοποιώντας την υπολογιστική ισχύ παράλληλων υπολογιστικών συστημάτων, μπορεί να επιτευχθεί ταχεία επίλυση του πεπλεγμένου συστήματος εξισώσεων με σημαντική μείωση στο κόστος. Ωστόσο, αυτή η

μέθοδος ενέχει τον κίνδυνο απόκλισης του συστήματος, εάν υπάρχει ισχυρή σύζευξη μεταξύ των πεδίων, όπου μία αλλαγή στις τιμές σύζευξης ενός πεδίου επιφέρει σημαντικές αλλαγές στις τιμές ενός άλλου.

2.1.2 Η Μέθοδος Gauss-Seidel

Σε αντίθεση με τη μέθοδο Jacobi, η μέθοδος Gauss-Seidel χρησιμοποιεί τις πιο πρόσφατες τιμές των προηγούμενων αναλύσεων από την τρέχουσα επανάληψη, με αποτέλεσμα οι αναλύσεις να εκτελούνται καθεμία μετά το τέλος της άλλης.

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1^{(k+1)} &= \mathbf{Y}_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{j1}^{(k)}) & \forall j = 2, 3, \dots, N \\ \mathbf{Y}_2^{(k+1)} &= \mathbf{Y}_2(\mathbf{X}_2, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{12}^{(k+1)}, \mathbf{Y}_{j2}^{(k)}) & \forall j = 3, 4, \dots, N \\ \mathbf{Y}_3^{(k+1)} &= \mathbf{Y}_3(\mathbf{X}_3, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{13}^{(k+1)}, \mathbf{Y}_{23}^{(k+1)}, \mathbf{Y}_{j3}^{(k)}) & \forall j = 4, 5, \dots, N \\ &\vdots \\ \mathbf{Y}_N^{(k+1)} &= \mathbf{Y}_N(\mathbf{X}_N, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{jN}^{(k+1)}) & \forall j = 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις δηλώνουν αρχικά την εκτέλεση της πρώτης ανάλυσης για τις τιμές εισόδου της προηγούμενης επανάληψης. Στη συνέχεια, εκτελείται η δεύτερη ανάλυση με τις ανανεωμένες τιμές της πρώτης ανάλυσης και τις παλιές τιμές όλων των υπολοίπων κ.ο.κ., έως ότου αξιολογηθούν όλες **διαδοχικά**. Για καλύτερη κατανόηση, εφαρμόζεται ο παραπάνω τύπος για τρία επιστημονικά πεδία

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1^{(k+1)} &= \mathbf{Y}_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{21}^{(k)}, \mathbf{Y}_{31}^{(k)}) & \text{όπου } \{\mathbf{Y}_{12}^{(k+1)}, \mathbf{Y}_{13}^{(k+1)}\} \subseteq \mathbf{Y}_1^{(k+1)} \\ \mathbf{Y}_2^{(k+1)} &= \mathbf{Y}_2(\mathbf{X}_2, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{12}^{(k+1)}, \mathbf{Y}_{32}^{(k)}) & \text{όπου } \{\mathbf{Y}_{21}^{(k+1)}, \mathbf{Y}_{23}^{(k+1)}\} \subseteq \mathbf{Y}_2^{(k+1)} \\ \mathbf{Y}_3^{(k+1)} &= \mathbf{Y}_3(\mathbf{X}_3, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{13}^{(k+1)}, \mathbf{Y}_{23}^{(k+1)}) & \text{όπου } \{\mathbf{Y}_{31}^{(k+1)}, \mathbf{Y}_{32}^{(k+1)}\} \subseteq \mathbf{Y}_3^{(k+1)} \end{aligned}$$

Σε αυτό το παράδειγμα φαίνεται ότι κάθε ανάλυση επηρεάζεται **μόνο** από εκείνες τις αναλύσεις που έχουν **προηγηθεί** και όχι αυτές που την ακολουθούν. Αυτό σημαίνει ότι εάν αλλάξει η διάταξη με την οποία εκτελούνται οι αναλύσεις – για παράδειγμα να εκτελείται πρώτα η ανάλυση 3, μετά η ανάλυση 1 και 2 – τότε αυτό θα οδηγήσει σε ένα διαφορετικό σύστημα με το προηγούμενο, το οποίο μπορεί να έχει καλύτερες ή χειρότερες συνθήκες σύγκλισης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το κάθε επιστημονικό πεδίο έχει διαφορετική μοντελοποίηση, βαθμό πολυπλοκότητας και ακρίβειας, με αποτέλεσμα μια ανακρίβεια στη λύση του ενός να διαδοθεί και σε εκείνα που το

ακολουθούν. Υπάρχει το ενδεχόμενο, λοιπόν, η μέθοδος Gauss-Seidel να αποκλίνει ή να οδηγεί σε πολυάρηθμα σημεία σχεδιασμού [32, 34] μέχρι να συγκλίνει. Ωστόσο, στις περισσότερες περιπτώσεις, ο αλγόριθμος Gauss-Seidel μπορεί να συγκλίνει γρηγορότερα και είναι περισσότερο ευσταθής προς τη λύση από ότι ο αλγόριθμος Jacobi, καθώς οι πιο πρόσφατες τιμές από την τρέχουσα επανάληψη αποτελούν τις ακριβέστερες τιμές και κατ' επέκταση βρίσκονται πιο κοντά στη λύση. Για τον λόγο αυτό, στις εφαρμογές που ακολουθούν προτιμάται να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος Gauss-Seidel για τη συστημική ανάλυση.

2.1.3 Διάφορες Μέθοδοι

Άλλες μέθοδοι εκτέλεσης της συστημικής ανάλυσης αποτελούν οι Νευτώνειες Μέθοδοι [33] και παραλλαγές αυτής, οι οποίες μπορούν να επιτύχουν ταχύτερη σύγκλιση με την πληροφορία παραγώγων, όμως ενέχουν τον κίνδυνο της αδυναμίας σύγκλισης, όταν επιλέγεται ένα μη-υλοποιήσιμο (δεν ικανοποιεί τους περιορισμούς) αρχικό σημείο σχεδιασμού. Συχνά, αυτές οι μέθοδοι δεν επιλέγονται, διότι απαιτούν την επαναδιατύπωση των αρχικών καταστατικών εξισώσεων \mathbf{R}_i σε μορφή υπολοίπου, κάτι το οποίο δεν είναι πάντα εφικτό σε ένα βιομηχανικό πλαίσιο, όπου οι αναλύσεις αποτελούν 'μαύρα κουτιά'.

Τέλος, η **Μέθοδος των Μη-Γραμμικών Ελαχίστων τετραγώνων** (Non-linear least-squares-NLS) [35] θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια γενικής χρήσεως μέθοδος επίλυσης για πεπλεγμένα προβλήματα, συνδυάζοντας μερικά από τα πλεονεκτήματα των παραπάνω μεθόδων.

2.2 Διάγραμμα Δομής Σχεδιασμού

Ενώ η διατύπωση των MDO προβλημάτων χρησιμοποιώντας τον συνήθη μαθηματικό συμβολισμό είναι μια εύκολη διαδικασία, η περιγραφή της ακολουθίας των διεργασιών σε μια υλοποίηση με ένα κατανοητό τρόπο παρουσιάζει μια σημαντική πρόκληση στα MDO προβλήματα. Μερικοί συγγραφείς απλά παρουσιάζουν τη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος και αφήνουν στους αναγνώστες την επίπονη διαδικασία να κατανοήσουν την υλοποίηση από μόνοι τους. Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να είναι εφικτό για τις μονολιθικές αρχιτεκτονικές, οι οποίες είναι σχετικά απλοϊκές. Ωστόσο, σε μερικές από τις κατανεμημένες αρχιτεκτονικές η υλοποίηση δεν είναι πάντα τόσο ξεκάθαρη. Άλλοι συγγραφείς χρησιμοποιούν την περιγραφή ενός αλγορίθμου ή ενός διαγράμματος ροής ως βοηθήματα, αλλά συνήθως και αυτά αποτυγχάνουν να περιγράψουν επακριβώς την ανταλλαγή δεδομένων και τον βαθμό σύζευξης μεταξύ των πεδίων. Επιπλέον, περισσότερο περίπλοκες μέθοδοι με πολλούς βρόχους και παράλληλες διεργασίες είναι ιδιαίτερα δύσκολο να περιγραφούν με συντομία και σαφήνεια χρησιμοποιώντας τις παραπάνω τεχνικές. Συνεπώς, η έλλειψη ενός τυποποιημένου γραφικού τρόπου για την

αναπαράσταση της στρατηγικής εύρεσης της λύσης αποτελεί ένα σημαντικό εμπόδιο στην κατανόηση και σύγκριση των διαφόρων MDO μεθόδων.

Για όλους τους παραπάνω λόγους, δημιουργήθηκε ένα νέο διάγραμμα, το οποίο ονομάζεται XDSM (eXtended Design Structure Matrix) [36] και βασίζεται στο ήδη υπάρχον DSM [37, 38] που χρησιμοποιείται κυρίως στους κλάδους της μηχανικής των συστημάτων και της διαχείρισης έργων για τη μοντελοποίηση της δομής σύνθετων συστημάτων. Ένα συμβατικό διάγραμμα DSM παρουσιάζει τις υπολογιστικές συνιστώσες και τις διασυνδέσεις μεταξύ τους, όμως η σημασία των διασυνδέσεων δεν γίνεται ξεκάθαρη. Για την ακριβή περιγραφή MDO μεθόδων, απαιτούνται δύο είδη διασυνδέσεων: η εξάρτηση δεδομένων (data dependency) και η ροή δεδομένων (data flow). Συνεπώς, το διάγραμμα XDSM αναπτύχθηκε για να οπτικοποιήσει τις διασυνδέσεις μεταξύ των υπολογιστικών συνιστωσών μιας MDO μεθόδου και να περιγράψει ταυτόχρονα και με λεπτομερή τρόπο την εξάρτηση (data dependency) και τη ροή των δεδομένων (data flow) μεταξύ τους. Σε αυτή την εργασία, περιγράφεται με συντομία η δημιουργία ενός τέτοιου διαγράμματος, ενώ περισσότερες λεπτομέρειες για τις διάφορες ερμηνείες του καθώς και τις εφαρμογές του, παρουσιάζονται εκτενέστερα στη βιβλιογραφία από τους Lambe και Martins [36].

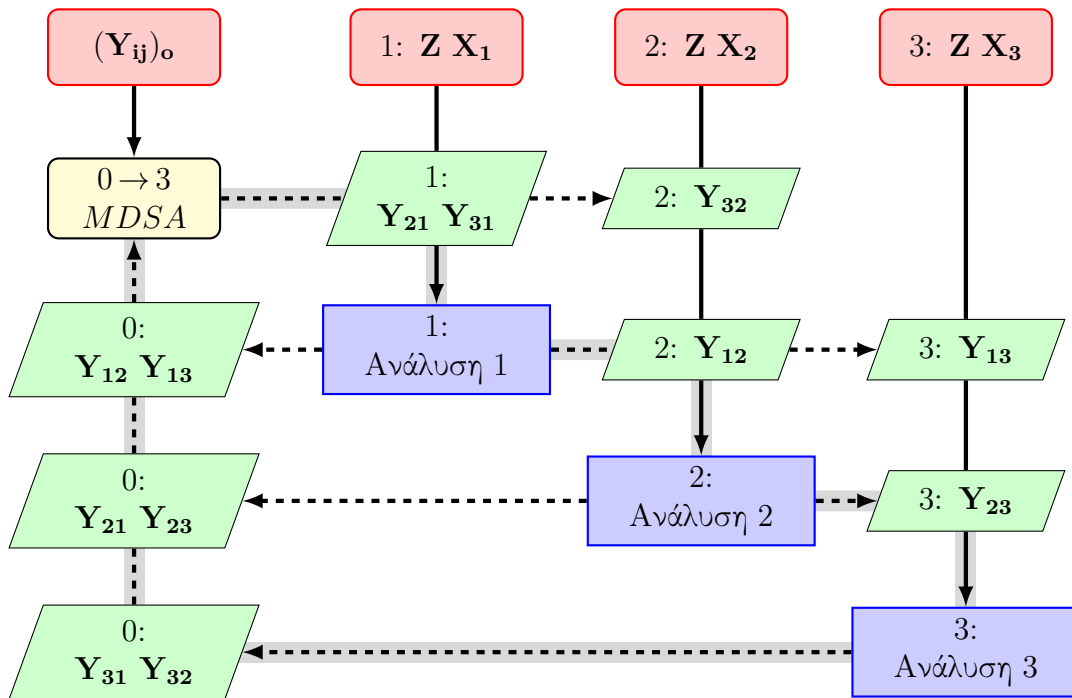
Το παράδειγμα του σχήματος (2.1) περιλαμβάνει μια συστημική ανάλυση MDSA μέσω της επαναληπτικής μεθόδου Gauss - Seidel για τρία επιστημονικά πεδία. Οι υπολογιστικές συνιστώσες του διαγράμματος αποτελούνται από τις επιμέρους επιστημονικές αναλύσεις (discipline analyses) των πεδίων και μια ειδική συνιστώσα, η οποία λέγεται οδηγός (driver) και αναλαμβάνει τη σύγκλιση της επαναληπτικής διαδικασίας. Επιπλέον, χρησιμοποιείται ένα αριθμημένο σύστημα για να περιγράψει την ακολουθία εκτέλεσης των συνιστωσών (process flow). Ο αλγόριθμος εκκινεί από τη μηδενική συνιστώσα (0) και συνεχίζει διαδοχικά στις υπόλοιπες (1 → 3), μέχρι να επιστρέψει πίσω στην αρχική.

Αρχικά, για τη δημιουργία ενός διαγράμματος XDSM, θεωρείται ένα νοητό τετραγωνικό μητρώο – όπως αυτό της εξίσωσης (2.2) – στο οποίο όλες οι υπολογιστικές συνιστώσες του συστήματος (\mathbf{Y}_{ii}) τοποθετούνται στην κύρια διαγώνιο, ενώ τα δεδομένα σύζευξης και οι ανεξάρτητες μεταβλητές τοποθετούνται στο μη-διαγώνιο κενό χώρο, ούτως ώστε οι είσοδοι σε μια συνιστώσα να βρίσκονται στην ίδια στήλη με τη συγκεκριμένη συνιστώσα, ενώ οι έξοδοι της στην ίδια γραμμή.

$$\mathbf{Y}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} & \dots & \mathbf{Y}_{1N} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} & \dots & \mathbf{Y}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{N1} & \mathbf{Y}_{N2} & \dots & \mathbf{Y}_{NN} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να επισημανθεί ότι τα στοιχεία του μητρώου (2.2) αποτελούν **διανύσματα** των μεταβλητών σύζευξης, το καθένα από τα οποία έχει διαφορετικό μήκος. Ενώ, τα διαγώνια στοιχεία \mathbf{Y}_{ii} δεν έχουν απολύτως καμία φυσική σημασία,

χρησιμοποιούνται όμως για την καλύτερη κατανόηση της δομής του διαγράμματος. Για τον λόγο αυτόν, το συγκεκριμένο μητρώο δεν μπορεί ούτε πρέπει να χρησιμοποιηθεί σε μαθηματική εξίσωση.



Σχήμα 2.1: Διάγραμμα XDSM μιας συστημικής ανάλυσης MDSA με την επαναληπτική μέθοδο Gauss-Seidel για την επίλυση ενός συστήματος τριών επιστημονικών πεδίων. Με κόκκινο χρώμα δηλώνονται οι ανεξάρτητες μεταβλητές εισόδου, ενώ με πράσινο οι μεταβλητές σύζευξης (εξαρτημένες). Οι δείκτες $0 \rightarrow 3$ αναφέρονται στην ακολουθία εκτέλεσης των αναλύσεων (γκρι χρώμα). Με συνεχόμενο βέλος δηλώνεται η ροή δεδομένων εισόδου σε μία συγκεκριμένη ανάλυση, ενώ με διακεκομμένο βέλος δηλώνεται η ροή πληροφοριών εξόδου.

Στη συνέχεια, οι ανεξάρτητες μεταβλητές εισόδου ή εξόδου των αναλύσεων τοποθετούνται στις ακραίες περιοχές του μητρώου, για να διαχωριστούν από τις εξαρτημένες μεταβλητές εσωτερικά του μητρώου. Στην περίπτωση του διαγράμματος (2.1), στις ακραίες περιοχές βρίσκονται οι μεταβλητές σχεδιασμού X , Z και οι αρχικές εκτιμήσεις $(Y_{ij})_0$ όλων των μεταβλητών σύζευξης, οι οποίες αποτελούν τις ανεξάρτητες εισόδους στην εκάστοτε συνιστώσα. Κάθε επιστημονική ανάλυση υπολογίζει το δικό της σύνολο καταστατικών εξισώσεων R_i και μεταφέρει διαδοχικά τις ενημερωμένες τιμές των μεταβλητών σύζευξης στις υπόλοιπες συνιστώσες (Βήμα $1 \rightarrow 3$). Στο τέλος των αξιολογήσεων όλων των αναλύσεων (Βήμα 3), όλες οι συνιστώσες επιστρέφουν τις ενημερωμένες τιμές των μεταβλητών σύζευξης πίσω στον οδηγό (Βήμα 0). Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι ικανοποίησης των περιορισμών συμβιβαστότητας (κριτήριο σύγκλισης). Τέλος, τα δεδομένα εισόδου αριθμούνται, ώστε να δηλώσουν τη σειρά με την οποία χρησιμοποιούνται από τις επιμέρους συνιστώσες.

2.3 Ανάλυση Ευαισθησίας Συστήματος

Κάθε αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης βασίζεται στον υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού για την ανίχνευση της βέλτιστης λύσης στον χώρο σχεδιασμού. Για τις κατανομημένες αρχιτεκτονικές, αυτό σημαίνει ότι η ανάλυση ευαισθησίας (διαδικασία υπολογισμού παραγώγων) συμβαίνει σε πολλά αυτόνομα επίπεδα (multi-level) λόγω της αποσύνθεσης του αρχικού προβλήματος σε υπο-προβλήματα. Το κάθε υπο-πρόβλημα βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση ανεξάρτητα ως προς τις δικές του τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{X}_i , ενώ το σύστημα – που εποπτεύει τις αλλαγές στα υπο-προβλήματα – βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση ως προς τις κοινές μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{Z} . Σε ένα αποζευγμένο σύστημα, ο υπολογισμός των παραγώγων ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, θα σήμαινε την ολοκλήρωση της ανάλυσης ευαισθησίας. Εξαιτίας της σύζευξης των επιστημονικών πεδίων, όμως, εμφανίζονται πρόσθετες μερικές παράγωγοι των μεταβλητών σύζευξης ενός πεδίου \mathbf{Y}_{ij} με τις μεταβλητές σύζευξης όλων των υπολοίπων \mathbf{Y}_{ji} . Συνεπώς, η ανάλυση ευαισθησίας στις MDO μεθόδους εξαρτάται κυρίως από τη διαθεσιμότητα αυτών των παραγώγων, όπου όλες οι καταστατικές εξισώσεις \mathbf{R}_i σε όλες τις επιστημονικές αναλύσεις απαιτείται να είναι τουλάχιστον πρώτου βαθμού διαφορίσιμες ως προς τις μεταβλητές σύζευξης.

2.3.1 Διατύπωση των Εξισώσεων

Σε μαθηματικό επίπεδο, οι μεταβλητές σύζευξης μπορούν να περιγραφούν ως **διανυσματικές συναρτήσεις** πολλών μεταβλητών

$$\mathbf{Y}_{ij} = \mathbf{Y}_{ij}(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{ji}) \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N \quad (2.3)$$

$$i \neq j$$

Στο παράδειγμα με τις τρεις επιστημονικές αναλύσεις η εξίσωση (2.3) μπορεί να γραφεί για κάθε πεδίο ξεχωριστά ως,

$$\mathbf{Y}_{1j} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{12}(\mathbf{X}_1, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{21}, \mathbf{Y}_{31}) \\ \mathbf{Y}_{13}(\mathbf{X}_1, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{21}, \mathbf{Y}_{31}) \end{bmatrix} \subseteq \mathbf{Y}_1 \quad \forall j = 2, 3 \quad (2.4)$$

$$\mathbf{Y}_{2j} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{21}(\mathbf{X}_2, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{12}, \mathbf{Y}_{32}) \\ \mathbf{Y}_{23}(\mathbf{X}_2, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{12}, \mathbf{Y}_{32}) \end{bmatrix} \subseteq \mathbf{Y}_2 \quad \forall j = 1, 3 \quad (2.5)$$

$$\mathbf{Y}_{3j} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{31}(\mathbf{X}_3, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{13}, \mathbf{Y}_{23}) \\ \mathbf{Y}_{32}(\mathbf{X}_3, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{13}, \mathbf{Y}_{23}) \end{bmatrix} \subseteq \mathbf{Y}_3 \quad \forall j = 1, 2 \quad (2.6)$$

όπου το διάνυσμα \mathbf{Y}_{1j} είναι συγχώνευση των διανυσματικών συναρτήσεων \mathbf{Y}_{12} και \mathbf{Y}_{13} με συνολικό μήκος (αριθμός στοιχείων) ίσο με $n(\mathbf{Y}_{12}) + n(\mathbf{Y}_{13})$. Ενώ αποτελεί ένα υποσύνολο του διανύσματος των μεταβλητών κατάστασης \mathbf{Y}_1 που υπολογίζονται στο πρώτο επιστημονικό πεδίο. Ομοίως, ισχύει και για τα υπόλοιπα δύο πεδία.

Συνεπώς, για την ανάλυση ευαισθησίας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού απαιτείται ο υπολογισμός του ολικού διαφορικού καθενιάς από τις εξισώσεις (2.4) - (2.6). Σύμφωνα με τη μαθηματική θεωρία, το ολικό διαφορικό μιας διανυσματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών προκύπτει μέσω πολλαπλασιασμού του Ιακωβιανού (Jacobian) μητρώου της συνάρτησης με το διάνυσμα των στοιχειωδών μεταβολών των ανεξάρτητων μεταβλητών της. Ως παράδειγμα για το πρώτο επιστημονικό πεδίο ισχύει

$$d\mathbf{Y}_{1j} = \begin{bmatrix} d\mathbf{Y}_{12} \\ d\mathbf{Y}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{12}[d\mathbf{X}_1, d\mathbf{Z}, d\mathbf{Y}_{21}, d\mathbf{Y}_{31}] \\ \mathbf{J}_{13}[d\mathbf{X}_1, d\mathbf{Z}, d\mathbf{Y}_{21}, d\mathbf{Y}_{31}] \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

όπου η Ιακωβιανή μιας διανυσματικής συνάρτησης ορίζεται ως το **μητρώο** όλων των μερικών παραγώγων πρώτης τάξεως της συνάρτησης

$$\mathbf{J}_{12} = \frac{\partial \mathbf{Y}_{12}}{\partial (\mathbf{X}_1, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{21}, \mathbf{Y}_{31})} = \left[\frac{\partial \mathbf{Y}_{12}}{\partial \mathbf{X}_1}, \frac{\partial \mathbf{Y}_{12}}{\partial \mathbf{Z}}, \frac{\partial \mathbf{Y}_{12}}{\partial \mathbf{Y}_{21}}, \frac{\partial \mathbf{Y}_{12}}{\partial \mathbf{Y}_{31}} \right] \quad (2.8)$$

Το μητρώο \mathbf{J}_{12} έχει συνολικό αριθμό γραμμών $n(\mathbf{Y}_{12})$, ενώ συνολικό αριθμό στηλών ίσο με το άθροισμα : $n(\mathbf{X}_1) + n(\mathbf{Z}) + n(\mathbf{Y}_{21}) + n(\mathbf{Y}_{31})$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας την εξίσωση (2.8) στην εξίσωση (2.7) και κάνοντας πολλαπλασιασμό πινάκων, για το διάνυσμα \mathbf{Y}_{12} προκύπτει

$$d\mathbf{Y}_{12} = \frac{\partial \mathbf{Y}_{12}}{\partial \mathbf{X}_1} d\mathbf{X}_1 + \frac{\partial \mathbf{Y}_{12}}{\partial \mathbf{Z}} d\mathbf{Z} + \frac{\partial \mathbf{Y}_{12}}{\partial \mathbf{Y}_{21}} d\mathbf{Y}_{21} + \frac{\partial \mathbf{Y}_{12}}{\partial \mathbf{Y}_{31}} d\mathbf{Y}_{31} \quad (2.9)$$

όπου οι όροι με τις μερικές παραγώγους αποτελούν τα υπο-μητρώα της Ιακωβιανής, το καθένα από τα οποία έχει σταθερό αριθμό γραμμών – $n(\mathbf{Y}_{12})$ – αλλά διαφορετικό αριθμό στηλών σε σύγκριση με τα υπόλοιπα.

Εάν εφαρμοστεί η παραπάνω μεθοδολογία στο διάνυσμα \mathbf{Y}_{13} αλλά και στα υπόλοιπα πεδία ξεχωριστά, σύμφωνα με τις παραπάνω εξισώσεις, τότε προκύπτει ένα σύστημα εξισώσεων που σε συμπυγμένη μορφή γράφεται

$$\left\{ \begin{array}{l} d\mathbf{Y}_{1j} = \frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{X}_1} d\mathbf{X}_1 + \frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Z}} d\mathbf{Z} + \frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{21}} d\mathbf{Y}_{21} + \frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{31}} d\mathbf{Y}_{31} \quad \forall j = 2, 3 \\ d\mathbf{Y}_{2j} = \frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{X}_2} d\mathbf{X}_2 + \frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{Z}} d\mathbf{Z} + \frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{Y}_{12}} d\mathbf{Y}_{12} + \frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{Y}_{32}} d\mathbf{Y}_{32} \quad \forall j = 1, 3 \\ d\mathbf{Y}_{3j} = \frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{X}_3} d\mathbf{X}_3 + \frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{Z}} d\mathbf{Z} + \frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{Y}_{13}} d\mathbf{Y}_{13} + \frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{Y}_{23}} d\mathbf{Y}_{23} \quad \forall j = 1, 2 \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Προκειμένου να μπορέσει να επιλυθεί το παραπάνω σύστημα των εξισώσεων ως προς τα ζητούμενα διαφορικά $d\mathbf{Y}_{1j}$, $d\mathbf{Y}_{2j}$, $d\mathbf{Y}_{3j}$, απαιτείται να εμφανιστούν οι συγκεκριμένοι όροι στο δεξιό μέλος των εξισώσεων (2.10). Κάτι τέτοιο είναι δυνατό με χρήση των εξισώσεων (2.4) - (2.6), δηλαδή για την πρώτη εξίσωση ισχύει

$$\frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{21}} d\mathbf{Y}_{21} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{21}} & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{Y}_{21} \\ d\mathbf{Y}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{21}} & \emptyset \end{bmatrix} d\mathbf{Y}_{2j} \quad (2.11)$$

όπου \emptyset είναι το μηδενικό μητρώο της μερικής παραγώγου $\frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{23}}$. Το διάνυσμα σύζευξης \mathbf{Y}_{23} δεν αποτελεί είσοδο στο πρώτο επιστημονικό πεδίο, συνεπώς το μητρώο προκύπτει μηδενικό, με αριθμό γραμμών $n(\mathbf{Y}_{1j})$ και αριθμό στηλών $n(\mathbf{Y}_{23})$.

$$\frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{31}} d\mathbf{Y}_{31} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{31}} & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{Y}_{31} \\ d\mathbf{Y}_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{31}} & \emptyset \end{bmatrix} d\mathbf{Y}_{3j} \quad (2.12)$$

Όμοια με το διάνυσμα \mathbf{Y}_{23} , το μηδενικό μητρώο είναι σε αυτή την περίπτωση ο όρος $\frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{32}}$, με αριθμό στηλών $n(\mathbf{Y}_{32})$ και αριθμό γραμμών $n(\mathbf{Y}_{1j})$.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εξισώσεις στην πρώτη εξίσωση του συστήματος (2.10) και κάνοντας το ίδιο για τα υπόλοιπα πεδία προκύπτει τελικά το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} dY_{1j} = \frac{\partial Y_{1j}}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial Y_{1j}}{\partial Z} dZ + \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_{1j}}{\partial Y_{21}} & \emptyset \end{bmatrix} dY_{2j} + \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_{1j}}{\partial Y_{31}} & \emptyset \end{bmatrix} dY_{3j} \\ dY_{2j} = \frac{\partial Y_{2j}}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial Y_{2j}}{\partial Z} dZ + \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_{2j}}{\partial Y_{12}} & \emptyset \end{bmatrix} dY_{1j} + \begin{bmatrix} \emptyset & \frac{\partial Y_{2j}}{\partial Y_{32}} \end{bmatrix} dY_{3j} \\ dY_{3j} = \frac{\partial Y_{3j}}{\partial X_3} dX_3 + \frac{\partial Y_{3j}}{\partial Z} dZ + \begin{bmatrix} \emptyset & \frac{\partial Y_{3j}}{\partial Y_{13}} \end{bmatrix} dY_{1j} + \begin{bmatrix} \emptyset & \frac{\partial Y_{3j}}{\partial Y_{23}} \end{bmatrix} dY_{2j} \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

Στη συνέχεια, το σύστημα των εξισώσεων (2.13) διατυπώνεται ξεχωριστά για τις τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού X_1, X_2, X_3 θεωρώντας τις συστημικές μεταβλητές ως σταθερές ($dZ = 0$).

Ως προς τις μεταβλητές X_1

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dY_{1j}}{dX_1} = \frac{\partial Y_{1j}}{\partial X_1} \frac{dX_1}{dX_1} + \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_{1j}}{\partial Y_{21}} & \emptyset \end{bmatrix} \frac{dY_{2j}}{dX_1} + \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_{1j}}{\partial Y_{31}} & \emptyset \end{bmatrix} \frac{dY_{3j}}{dX_1} \\ \frac{dY_{2j}}{dX_1} = \frac{\partial Y_{2j}}{\partial X_2} \frac{dX_2}{dX_1} + \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_{2j}}{\partial Y_{12}} & \emptyset \end{bmatrix} \frac{dY_{1j}}{dX_1} + \begin{bmatrix} \emptyset & \frac{\partial Y_{2j}}{\partial Y_{32}} \end{bmatrix} \frac{dY_{3j}}{dX_1} \\ \frac{dY_{3j}}{dX_1} = \frac{\partial Y_{3j}}{\partial X_3} \frac{dX_3}{dX_1} + \begin{bmatrix} \emptyset & \frac{\partial Y_{3j}}{\partial Y_{13}} \end{bmatrix} \frac{dY_{1j}}{dX_1} + \begin{bmatrix} \emptyset & \frac{\partial Y_{3j}}{\partial Y_{23}} \end{bmatrix} \frac{dY_{2j}}{dX_1} \end{array} \right\} \quad (2.14)$$

όπου οι όροι $\frac{dX_2}{dX_1}, \frac{dX_3}{dX_1}$ είναι μηδενικοί, επειδή οι τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού X_1, X_2, X_3 είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Με αναδιάταξη των όρων της εξίσωσης (2.14), ώστε να εμφανιστούν τα προς υπολογισμό ολικά διαφορικά, προκύπτει το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} + \frac{dY_{1j}}{dX_1} - \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_{1j}}{\partial Y_{21}} & \emptyset \end{bmatrix} \frac{dY_{2j}}{dX_1} - \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_{1j}}{\partial Y_{31}} & \emptyset \end{bmatrix} \frac{dY_{3j}}{dX_1} = \frac{\partial Y_{1j}}{\partial X_1} \\ - \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_{2j}}{\partial Y_{12}} & \emptyset \end{bmatrix} \frac{dY_{1j}}{dX_1} + \frac{dY_{2j}}{dX_1} - \begin{bmatrix} \emptyset & \frac{\partial Y_{2j}}{\partial Y_{32}} \end{bmatrix} \frac{dY_{3j}}{dX_1} = \emptyset \\ - \begin{bmatrix} \emptyset & \frac{\partial Y_{3j}}{\partial Y_{13}} \end{bmatrix} \frac{dY_{1j}}{dX_1} - \begin{bmatrix} \emptyset & \frac{\partial Y_{3j}}{\partial Y_{23}} \end{bmatrix} \frac{dY_{2j}}{dX_1} + \frac{dY_{3j}}{dX_1} = \emptyset \end{array} \right\}$$

Τελικά, το σύστημα των εξισώσεων (2.14) μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη **μητρωϊκή μορφή**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_{n(\mathbf{Y}_{1j})} & - \left[\frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{21}} \quad \emptyset \right] & - \left[\frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{31}} \quad \emptyset \right] \\ - \left[\frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{Y}_{12}} \quad \emptyset \right] & I_{n(\mathbf{Y}_{2j})} & - \left[\emptyset \quad \frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{Y}_{32}} \right] \\ - \left[\emptyset \quad \frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{Y}_{13}} \right] & - \left[\emptyset \quad \frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{Y}_{23}} \right] & I_{n(\mathbf{Y}_{3j})} \end{bmatrix}}_{A_{n(\mathbf{Y}_{ij}) \times n(\mathbf{Y}_{ij})}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{Y}_{1j}}{d\mathbf{X}_1} \\ \frac{d\mathbf{Y}_{2j}}{d\mathbf{X}_1} \\ \frac{d\mathbf{Y}_{3j}}{d\mathbf{X}_1} \end{pmatrix}}_{\frac{d\mathbf{Y}_{ij}}{d\mathbf{X}_1} |_{n(\mathbf{Y}) \times n(\mathbf{X}_1)}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{X}_1} \\ \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

όπου

$n(\mathbf{Y}_{ij})$: συνολικός αριθμός όλων των μεταβλητών σύζευξης

$n(\mathbf{X}_i)$: το μήκος διανύσματος των τοπικών μεταβλητών σχεδιασμού του i -πεδίου ($i = 1, 2, 3$)

A : τετραγωνικό μητρώο ευαισθησίας μερικών παραγώγων ως προς τις μεταβλητές σύζευξης, διαστάσεων $[n(\mathbf{Y}_{ij}) \times n(\mathbf{Y}_{ij})]$

I : μοναδιαίο μητρώο ευαισθησίας διαστάσεων $[n(\mathbf{Y}_{1j})$ ή $n(\mathbf{Y}_{2j})$ ή $n(\mathbf{Y}_{3j})]$

\emptyset : μηδενικό μητρώο με αριθμό γραμμών ίσο με το μήκος του διανύσματος του αριθμητή και αριθμό στηλών ίσο με το μήκος διανύσματος του παρονομαστή

$\frac{d\mathbf{Y}_{1j}}{d\mathbf{X}_1}$: μητρώο ευαισθησίας ολικών παραγώγων ως προς τη μεταβλητή \mathbf{X}_1 , διαστάσεων $[n(\mathbf{Y}_{1j}) \times n(\mathbf{X}_1)]$ για $j = 2, 3$

$\frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{X}_1}$: μητρώο ευαισθησίας μερικών παραγώγων ως προς τη μεταβλητή \mathbf{X}_1 , διαστάσεων $[n(\mathbf{Y}_{1j}) \times n(\mathbf{X}_1)]$ για $j = 2, 3$

Οι ολικές παράγωγοι ως προς τη μεταβλητή \mathbf{X}_1 προσδιορίζονται από την επίλυση του συστήματος (2.15). Το παραπάνω γραμμικό σύστημα σε συνδυασμό με τα υπόλοιπα γραμμικά συστήματα ως προς τις μεταβλητές $\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ αλλά και ως προς τις μεταβλητές \mathbf{Z} συνθέτουν τις λεγόμενες **εξισώσεις ευαισθησίας** (GSE - Global Sensitivity Equations), όπως έχουν περιγραφεί από τον Sobieski [31]. Οι εξισώσεις ευαισθησίας διαφέρουν μεταξύ τους μόνο ως προς το δεξιό μέλος της εξίσωσης (2.15) και επιλύονται ανεξάρτητα για τον υπολογισμό των αντίστοιχων παραγώγων τους. Γενικά, αν N είναι ο αριθμός των επιστημονικών πεδίων του προβλήματος, τότε οι εξισώσεις ευαισθησίας αποτελούνται από $(N + 1)$ ανεξάρτητα γραμμικά συστήματα εξισώσεων.

Στη βιβλιογραφία, υπάρχει πληθώρα μεθόδων επίλυσης γραμμικών συστημάτων και έγκειται στην ευχέρεια του χρήστη να επιλέξει εκείνη που θα είναι η υπολογιστικά οικονομικότερη. Σε αυτή τη διπλωματική εργασία, έχει επιλεγεί μια μέθοδος αποσύνθεσης του μητρώου A , όπως η μέθοδος LU [39, 40]. Μια τέτοια μέθοδος αξιοποιεί το γεγονός ότι το μητρώο A χρειάζεται να υπολογιστεί μόνο μια φορά και παραμένει αμετάβλητο καθόλη τη διάρκεια της βελτιστοποίησης σε κάθε επανάληψη. Με αυτή τη μεθοδολογία, μπορεί να λυθούν παρόμοια συστήματα εξισώσεων με διαφορετικό δεξιό μέλος για κάθε μεταβλητή σχεδιασμού, χωρίς την ανώφελη και ακριβή αντιστροφή του μητρώου κάθε φορά.

2.3.2 Υπολογιστικό Κόστος Παραγώγων

Για την εύρεση των στοιχείων του μητρώου A αλλά και του δεξιού μέλους της εξίσωσης (2.15), μπορεί να χρησιμοποιηθούν είτε αναλυτικές μέθοδοι, αν είναι γνωστές οι μαθηματικές εκφράσεις των μεταβλητών σύζευξης, είτε υπολογιστικές μέθοδοι, όπως πεπερασμένες διαφορές [41, 42] ή μέθοδοι συζυγού βήματος [43, 44]. Η διαδικασία υπολογισμού του μητρώου είναι υπολογιστικά αρκετά ακριβής, καθώς απαιτεί την αξιολόγηση καθενός από τα επιστημονικά πεδία αρκετές φορές.

Συγκεκριμένα, με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών έχει βρεθεί ότι κάθε επιστημονικό i -πεδίο απαιτεί τόσες αξιολογήσεις ανά κύκλο της μεθόδου, όσες και ο αριθμός των μεταβλητών που εισέρχονται στο i -πεδίο, δηλαδή $(n(\mathbf{Y}_{ji}) + n(\mathbf{X}_i) + n(\mathbf{Z}))$ αξιολογήσεις ανά κύκλο. Στις αεροναυπηγικές εφαρμογές, η διάσταση των προβλημάτων είναι, συνήθως, αρκετά μεγάλη με πολλές μεταβλητές σύζευξης και σχεδιασμού, με αποτέλεσμα το υπολογιστικό κόστος να αυξάνεται ευθέως ανάλογα και να περιορίζει τη χρήση της μεθόδου σε πραγματικά προβλήματα. Συνεπώς, για τη μείωση του κόστους μπορεί να χρησιμοποιηθεί η συζυγής μέθοδος (adjoint), όπου προσφέρει το πλεονέκτημα της ανεξαρτησίας των αξιολογήσεων από τις ανεξάρτητες μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{X}_i και \mathbf{Z} . Αυτό σημαίνει ότι για κάθε πεδίο απαιτείται 1 αξιολόγηση για όλα τα \mathbf{X}_i και για όλα τα \mathbf{Z} ανά κύκλο. Ωστόσο, η συζυγής μέθοδος διατηρεί τις αξιολογήσεις των μεταβλητών σύζευξης \mathbf{Y}_{ji} , εφόσον εκείνες είναι εξαρτημένες μεταξύ τους και πρέπει να αναλυθούν ξεχωριστά. Αυτός ο περιορισμός στην περαιτέρω μείωση του κόστους δεν αποδίδεται στη χρήση της συζυγούς μεθόδου, αλλά στην εγγενή πεπλεγμένη φύση του συστήματος.

Στη συνέχεια, για λόγους πληρότητας, παρουσιάζονται τα συστήματα των εξισώσεων ως προς τις μεταβλητές $\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{Z}$, όπως αυτά έχουν προκύψει από την εφαρμογή της παραπάνω μεθοδολογίας.

Ως προς τις μεταβλητές \mathbf{X}_2

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_{n(\mathbf{Y}_{1j})} & - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{21}} & \emptyset \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{31}} & \emptyset \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{Y}_{12}} & \emptyset \end{bmatrix} & I_{n(\mathbf{Y}_{2j})} & - \begin{bmatrix} \emptyset & \frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{Y}_{32}} \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} \emptyset & \frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{Y}_{13}} \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} \emptyset & \frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{Y}_{23}} \end{bmatrix} & I_{n(\mathbf{Y}_{3j})} \end{bmatrix}}_{A_{n(\mathbf{Y}_{ij}) \times n(\mathbf{Y}_{ij})}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{Y}_{1j}}{d\mathbf{X}_2} \\ \frac{d\mathbf{Y}_{2j}}{d\mathbf{X}_2} \\ \frac{d\mathbf{Y}_{3j}}{d\mathbf{X}_2} \end{pmatrix}}_{\frac{d\mathbf{Y}_{ij}}{d\mathbf{X}_2}} = \begin{pmatrix} \emptyset \\ \frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{X}_2} \\ \emptyset \end{pmatrix}$$

Ως προς τις μεταβλητές \mathbf{X}_3

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_{n(\mathbf{Y}_{1j})} & - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{21}} & \emptyset \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{31}} & \emptyset \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{Y}_{12}} & \emptyset \end{bmatrix} & I_{n(\mathbf{Y}_{2j})} & - \begin{bmatrix} \emptyset & \frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{Y}_{32}} \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} \emptyset & \frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{Y}_{13}} \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} \emptyset & \frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{Y}_{23}} \end{bmatrix} & I_{n(\mathbf{Y}_{3j})} \end{bmatrix}}_{A_{n(\mathbf{Y}_{ij}) \times n(\mathbf{Y}_{ij})}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{Y}_{1j}}{d\mathbf{X}_3} \\ \frac{d\mathbf{Y}_{2j}}{d\mathbf{X}_3} \\ \frac{d\mathbf{Y}_{3j}}{d\mathbf{X}_3} \end{pmatrix}}_{\frac{d\mathbf{Y}_{ij}}{d\mathbf{X}_3}} = \begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{X}_3} \end{pmatrix}$$

Ως προς τις μεταβλητές \mathbf{Z}

Οι παράγωγοι ευαισθησίας ως προς τις συστημικές μεταβλητές υπολογίζονται με βάση την παραπάνω μεθοδολογία, θεωρώντας σταθερές αυτή τη φορά τις τοπικές μεταβλητές ($d\mathbf{X} = 0$)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_{n(\mathbf{Y}_{1j})} & - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{21}} & \emptyset \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{31}} & \emptyset \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{Y}_{12}} & \emptyset \end{bmatrix} & I_{n(\mathbf{Y}_{2j})} & - \begin{bmatrix} \emptyset & \frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{Y}_{32}} \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} \emptyset & \frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{Y}_{13}} \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} \emptyset & \frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{Y}_{23}} \end{bmatrix} & I_{n(\mathbf{Y}_{3j})} \end{bmatrix}}_{A_{n(\mathbf{Y}_{ij}) \times n(\mathbf{Y}_{ij})}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{Y}_{1j}}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{Y}_{2j}}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{Y}_{3j}}{d\mathbf{Z}} \end{pmatrix}}_{\frac{d\mathbf{Y}_{ij}}{d\mathbf{Z}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Z}} \\ \frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{Z}} \\ \frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{Z}} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Εφόσον έχουν υπολογιστεί τα ολικά διαφορικά όλων των μεταβλητών σχεδιασμού, μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια για την εκτέλεση των αντίστοιχων βελτιστοποιήσεων.

Κεφάλαιο 3

Κατανεμημένες Αρχιτεκτονικές Αιτιοκρατικών Μεθόδων

3.1 Αποσύνθεση Πεπλεγμένων Προβλημάτων

Οι μέθοδοι κατανεμημένων αρχιτεκτονικών που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο §1 αποσυνθέτουν και μετασχηματίζουν το σύνθετο αρχικό πρόβλημα βελτιστοποίησης σε αρκετά αυτόνομα υπο-προβλήματα βελτιστοποίησης. Προτιμάται ο όρος ‘κατανεμημένες’, σε αντιπαράθεση με το ‘ιεραρχικές’ ή ‘πολυεπίπεδες’, διότι αυτές οι αρχιτεκτονικές δεν δημιουργούν απαραίτητα μια ιεραρχία στα προβλήματα προς επίλυση. Επίσης, ούτε η οργάνωση των συστημάτων αλλά ούτε και της σχεδιαστικής ομάδας χρειάζεται να είναι ιεραρχική, ώστε να είναι εφαρμόσιμες αυτές οι αρχιτεκτονικές. Το πρωταρχικό κίνητρο για την αποσύνθεση των MDO προβλημάτων προέρχεται από την ανάγκη απλοποίησης της περίπλοκης δομής των μηχανολογικών συστημάτων. Μια συνήθης τακτική που χρησιμοποιείται στον μηχανολογικό σχεδιασμό είναι η επιμέριση ενός μεγάλου προβλήματος σε συγκεκριμένες ομάδες ανθρώπων. Αυτές οι ομάδες μπορεί να βρίσκονται σε διαφορετικές γεωγραφικές τοποθεσίες και μπορούν να επικοινωνούν μεταξύ τους περιστασιακά. Η ουσία, όμως, είναι ότι αυτές οι ομάδες προτιμούν να διατηρήσουν τον έλεγχο των δικών τους διαδικασιών σχεδιασμού και να χρησιμοποιήσουν τη δική τους τεχνογνωσία για την επιστημονική ανάλυση, από το να μεταφέρουν απλά τα αποτελέσματα σε έναν κεντρικό βελτιστοποιητή [45]. Συνεπώς, η αποσύνθεση μέσω των κατανεμημένων αρχιτεκτονικών επιτρέπει σε μεμονωμένες σχεδιαστικές ομάδες να λειτουργούν με σχετική απομόνωση και αυτονομία, ελέγχοντας το δικό τους σύνολο μεταβλητών σχεδιασμού, ενώ περιοδικά ενημερώνουν τις πληροφορίες από τις υπόλοιπες ομάδες, ώστε να συνεισφέρουν στον συνολικό σχεδιασμό. Αυτή η προσέγγιση στην επίλυση των προβλημάτων προσομοιάζει περισσότερο τις στρατηγικές που επιστρατεύονται στη βιομηχανία, από ότι οι μονολιθικές αρχιτεκτονικές.

Μερικές κατανεμημένες αρχιτεκτονικές εμφανίζουν αρκετές παραλλαγές της αρχικής

διατύπωσης της μεθόδου. Τέτοιες εκδοχές μπορεί να ενσωματώνουν υποκατάστατα μοντέλα – όπως επιφάνειες απόκρισης – των επιστημονικών πεδίων στο αρχικό πρόβλημα για μείωση του υπολογιστικού κόστους. Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν οι αρχικές διατυπώσεις των μεθόδων κατανεμημένων αρχιτεκτονικών, για καλύτερη κατανόηση της λειτουργίας τους.

$$\begin{array}{l}
 \text{minimize} \quad \sum_{i=1}^N F_i(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{ji}) \\
 \text{with respect to} \quad \mathbf{X}_i \mathbf{Z} \\
 \text{subject to} \quad \mathbf{G}_i(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_{ji}) \geq 0 \\
 \quad \quad \quad \mathbf{h}_i(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_{ji}) = 0 \\
 \quad \quad \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N \\
 \quad \quad \quad \forall i \neq j
 \end{array}$$

Σε αυτήν τη διατύπωση η αντικειμενική συνάρτηση εκφράζεται ως το άθροισμα τοπικών και ανεξάρτητων συναρτήσεων F_i , καθένα από τις οποίες εξαρτάται από κοινές \mathbf{Z} και τοπικές \mathbf{X}_i μεταβλητές σχεδιασμού καθώς και από τις μεταβλητές σύζευξης εισόδου στο πεδίο \mathbf{Y}_{ji} . Από την άλλη, οι περιορισμοί ορίζονται τοπικά και εξαρτώνται τόσο από τις μεταβλητές σχεδιασμού όσο και από τις μεταβλητές κατάστασης του πεδίου και τις μεταβλητές σύζευξης των υπολοίπων.

Στη βιβλιογραφία, έχουν προταθεί αρκετές στρατηγικές αποσύνθεσης για την επίλυση διατομεακών προβλημάτων. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν η βελτιστοποίηση μέσω γραμμικής αποσύνθεσης OLD (Optimization by Linear Decomposition) [46], η αποσύνθεση ψευδο-διαχωρίσιμων υποσυστημάτων QSD (Quasi-Separable subsystem Decomposition) [47], η Διεπίπεδη Σύνθεση Ολοκληρωμένου Συστήματος BLISS (Bi-Level Integrated System Synthesis) [31] και η συνεργατική βελτιστοποίηση CO (Collaborative Optimization) [29]. Οι τελευταίες δύο στρατηγικές, μάλιστα, βασίζονται στην αποσύνθεση του προβλήματος κατά επιστημονικό τομέα σε δύο επίπεδα. Το πρώτο επίπεδο (υποσυστημικό) συνεισφέρει τοπικά στη συνολική βελτιστοποίηση ενώ το δεύτερο (συστημικό) εποπτεύει τις αλλαγές στις μεταβλητές σχεδιασμού που προέκυψαν από το πρώτο.

Στη συνέχεια, περιγράφεται συνοπτικά η μέθοδος κατανεμημένης αρχιτεκτονικής CO, ενώ σε ξεχωριστό κεφάλαιο η μέθοδος BLISS.

3.2 Η Μέθοδος CO

Η μέθοδος της Συνεργατικής Βελτιστοποίησης (Collaborative Optimization) προτάθηκε για πρώτη φορά από τους Braun και Kroo (1997) και είναι μια από τις διεπίπε-

δες μεθόδους αποσύνθεσης. Η άλλη είναι η μέθοδος BLISS που θα αναπτυχθεί στη συνέχεια. Αυτή η μέθοδος έχει σχεδιαστεί, ώστε να παρέχει πλήρη αυτονομία μεταξύ των πεδίων με ταυτόχρονη επιβολή συμπληρωματικών συνθηκών συμβιβαστότητας (compatibility constraints) μεταξύ των πεδίων. Κάθε επιστημονική υπο-βελτιστοποίηση έχει τον έλεγχο των τοπικών μεταβλητών της και είναι υπεύθυνη για την ικανοποίηση των τοπικών περιορισμών της. Αυτό σημαίνει ότι καθόλη τη διάρκεια της συστημικής βελτιστοποίησης, κάθε βέλτιστη λύση του συστήματος ικανοποιεί τους τοπικούς περιορισμούς του προβλήματος. Ωστόσο, η προσθήκη των περιορισμών συμβιβαστότητας c_i εξασφαλίζει τη σταθεροποίηση (consistency) των τιμών των μεταβλητών, όταν το πρόβλημα έχει συγκλίνει σε μια συστημικά βέλτιστη λύση (καθολικό βέλτιστο).

Η συστημική ανάλυση αντικαθίσταται από συμπληρωματικές μεταβλητές και τις αντίστοιχες συνθήκες συμβιβαστότητας. Οι συμπληρωματικές μεταβλητές είναι αντίγραφα (target values) των τιμών των μεταβλητών σύζευξης και σχεδιασμού που προέκυψαν από τις επιστημονικές αναλύσεις. Συγκεκριμένα, το ανώτερο επίπεδο (σύστημα) ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση με τα αποτελέσματα από το κατώτερο επίπεδο (υποσύστημα) και καθορίζει τις επιθυμητές τιμές (target values) για κάθε πεδίο. Τέλος, το κατώτερο επίπεδο προσπαθεί να βρει έναν σχεδιασμό που να ικανοποιεί τους τοπικούς περιορισμούς καθώς και τις τιμές - στόχους που τέθηκαν από το ανώτερο επίπεδο.

Για καλύτερη κατανόηση, παρατίθενται στη συνέχεια, οι μαθηματικές διατυπώσεις για τα δύο επίπεδα

$$\begin{array}{c}
 \hline
 \text{Συστημικό Επίπεδο} \\
 \hline
 \textit{minimize} \quad F(\mathbf{Z}, \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_{ij}) \\
 \textit{with respect to} \quad \mathbf{Z} \quad \mathbf{Y}_{ij} \quad \mathbf{X}_i \\
 \textit{subject to} \quad \mathbf{c}_i = 0 \\
 \quad \quad \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \\
 \hline
 \end{array}$$

όπου c_i είναι οι περιορισμοί συμβιβαστότητας, οι οποίοι εκφράζουν ένα μέτρο του συμβιβασμού στις τιμές των μεταβλητών μεταξύ της ενημερωμένης τιμής που 'προτείνει' ο συστημικός βελτιστοποιητής (τιμή - στόχος) και της τιμής που προκύπτει από την επιστημονική ανάλυση (επίλυση καταστατικών εξισώσεων).

Υπάρχουν διάφορες παραλλαγές της μεθόδου και καθεμία από αυτές χρησιμοποιεί μια ελαφρώς διαφορετική μαθηματική έκφραση των περιορισμών συμβιβαστότητας. Μία από τις παραλλαγές της μεθόδου είναι η λεγόμενη CO₂, η οποία χρησιμοποιεί ως μαθηματική έκφραση των περιορισμών συμβιβαστότητας ένα άθροισμα από διαφορές τετραγώνων. Υπολογίζεται για κάθε πεδίο ξεχωριστά και σε αυτή την εκδοχή ορίζεται ως ακολούθως

όπου ο εκθέτης $()^t$ δηλώνει την τιμή - στόχο της μεταβλητής που προκύπτει από τη

 Υποσυστημικό Επίπεδο

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} \quad \mathbf{c}_i = \sum (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^t)^2 + \sum (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_i^t)^2 + \sum (\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{Y}_{ij}^t)^2 \\
 & \text{with respect to} \quad \mathbf{Z} \ \mathbf{X}_i \ \mathbf{Y}_{ij} \\
 & \text{subject to} \quad \mathbf{h}_i(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{ij}) = 0 \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{G}_i(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{ij}) \geq 0
 \end{aligned}$$

συστημική βελτιστοποίηση και θεωρείται σταθερή κατά τις υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις.

Κατά αυτόν τον τρόπο, το συστημικό επίπεδο αναλαμβάνει να ελαχιστοποιήσει την αντικειμενική συνάρτηση, ενώ το υποσυστημικό επίπεδο να ελαχιστοποιήσει τις αντιφάσεις των δύο επιπέδων.

Ένα από τα μεγαλύτερα πλεονεκτήματα της μεθόδου CO έναντι των μονολιθικών (ε-νός επιπέδου) προσεγγίσεων είναι ότι μιμείται την ιεραρχική πυραμίδα που εφαρμόζεται κατά κύριο λόγο σε μεγάλες εταιρείες της βιομηχανίας. Τα τμήματα έχουν μια μερική αυτονομία ως προς τη λήψη αποφάσεων για την επίλυση των υπο-προβλημάτων, γεγονός που επιτρέπει σε μια επιχείρηση να λειτουργεί όλα τα τμήματα της παράλληλα και αποδοτικά. Επίσης, δεν έχει καμία σημασία ποιος βελτιστοποιητής θα χρησιμοποιηθεί στα επιμέρους πεδία, εφόσον παρέχονται στο σύστημα οι παράγωγοι από την ανάλυση ευαισθησίας.

Το κυριότερο μειονέκτημα της, όμως, είναι ότι αύξηση στον αριθμό των μεταβλητών σύζευξης του προβλήματος προκαλεί ιδιαίτερο πρόβλημα στη συστημική βελτιστοποίηση, εφόσον ο βελτιστοποιητής διαχειρίζεται περισσότερες μεταβλητές. Αυτό συμβαίνει γιατί αυξάνεται ο αριθμός των μεταβλητών που εμπλέκονται στον υπολογισμό των περιορισμών συμβιβαστότητας. Επομένως, η μέθοδος CO τείνει να είναι πιο αποτελεσματική για προβλήματα με μικρό αριθμό μεταβλητών σύζευξης.

Κεφάλαιο 4

Η Μέθοδος BLISS

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η μέθοδος Διεπίπεδης Σύνθεσης Ολοκληρωμένου Συστήματος BLISS (Bi-Level Integrated System Synthesis) ως μια ιεραρχική μέθοδος αποσύνθεσης πεπλεγμένων προβλημάτων και περιγράφεται η διαδικασία – όπως παρουσιάζεται από τον Sobieski [31] – που ακολουθείται για την εύρεση του καθολικού βέλτιστου (global optimum). Επιπλέον, διατυπώνονται τρόποι υπολογισμού των παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης, ενώ εξετάζονται οι διάφορες εκδοχές της μεθόδου και η επακόλουθη επίδραση τους στην απόδοση της.

4.1 Γενική Επισκόπηση

Η μέθοδος BLISS αποτελεί μία μέθοδο κατανεμημένης αρχιτεκτονικής, η οποία διαχωρίζει τη βελτιστοποίηση ενός πεπλεγμένου προβλήματος σε δύο επίπεδα, το συστημικό επίπεδο (άνωτερο επίπεδο) και το τοπικό ή υποσυστημικό επίπεδο (κατώτερο επίπεδο). Η σειρά με την οποία παρουσιάζονται τα επίπεδα, στη συνέχεια, δεν είναι η σειρά με την οποία υλοποιείται ο αλγόριθμος BLISS. Η παρουσίαση και ο σχολιασμός γίνεται για προβλήματα ενός στόχου (βελτιστοποίηση μιας και μόνο αντικειμενικής συνάρτησης).

- Το **συστημικό επίπεδο** βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση ως προς τις συστημικές ή κοινές μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{Z} , οι οποίες μοιράζονται μεταξύ των επιστημονικών πεδίων. Ένα λογισμικό βελτιστοποίησης συστημικού επιπέδου, συνήθως, διαχειρίζεται μικρότερο αριθμό μεταβλητών σχεδιασμού, συγκριτικά με το πλήθος των τοπικών μεταβλητών σχεδιασμού κάθε πεδίου.
- Το **υποσυστημικό επίπεδο** βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση ως προς τις τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{X} , των οποίων η επίδραση περιορίζεται στο αντίστοιχο πεδίο. Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης του υποσυστημικού επιπέδου

μπορεί να λειτουργήσουν ανεξάρτητα και παράλληλα (ταυτόχρονα) μεταξύ τους, γεγονός που ενέχει μια καλή ευκαιρία για αξιοποίηση της παράλληλης επεξεργασίας και κατ' επέκταση τη βελτίωση της απόδοσης της μεθόδου.

Η μέθοδος BLISS, στην πρωτότυπη μορφή της [31], αποσυνθέτει το πρόβλημα με ιεραρχικό τρόπο, ώστε οι αποφάσεις (βελτιώσεις) που πάρθηκαν στο ανώτερο επίπεδο να διαδοθούν στο κατώτερο επίπεδο, το οποίο με τη σειρά του ενημερώνει το ανώτερο επίπεδο (ανάδραση). Συγκεκριμένα, σε κάθε κύκλο η συστημική βελτιστοποίηση (ανώτερο επίπεδο) διαδέχεται τις υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις (κατώτερο επίπεδο) και συνδέονται με δεδομένα ευαισθησίας, με σκοπό τη βελτίωση του τελικού σχεδιασμού. Η συστημική και οι υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις μπορούν να πραγματοποιηθούν με οποιαδήποτε μέθοδο βελτιστοποίησης. Έχοντας, λοιπόν, ως αρχικό σημείο σχεδιασμού μια καλή εκτίμηση, η μέθοδος βελτιώνει τον αρχικό σχεδιασμό επαναληπτικά μέσω ξεχωριστών, παράλληλων και ημι-αυτόνομων μεταξύ τους βελτιστοποιήσεων στο υποσυστημικό επίπεδο. Στην αντίθετη περίπτωση ενός αρχικού μη-υλοποιήσιμου (infeasible) σημείου σχεδιασμού, οι παραβιάσεις στους περιορισμούς μειώνονται, ενώ ελαχιστοποιείται ο ρυθμός αύξησης της συστημικής αντικειμενικής συνάρτησης. Περαιτέρω βελτίωση στο σχεδιασμό επιδιώκεται στο χώρο των συστημικών μεταβλητών μέσω της συστημικής βελτιστοποίησης. Τέλος, δεδομένα ευαισθησίας που υπολογίζονται στο τοπικό βέλτιστο σημείο σχεδιασμού — μετά τις υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις — συνδέουν τα δύο, κατά τα άλλα αυτόνομα, επίπεδα, παρέχοντας ταυτόχρονα τα απαραίτητα δεδομένα για την πραγματοποίηση της συστημικής βελτιστοποίησης.

Η μέθοδος συνοπτικά περιλαμβάνει τα εξής στάδια

- Τη **συστημική ανάλυση** MDSA (Multi Disciplinary System Analysis), όπου αναλαμβάνει την επίλυση του συνόλου των πεπλεγμένων εξισώσεων μέσω επαναληπτικής εκτέλεσης των αναλύσεων κάθε πεδίου (discipline analyses),
- Την **ανάλυση ευαισθησίας του συστήματος**, όπου υπολογίζονται οι απαραίτητες παράγωγοι (ευαισθησίας) μέσω επίλυσης των εξισώσεων ευαισθησίας για τις αντίστοιχες βελτιστοποιήσεις,
- Τις **υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις**, όπου γίνονται ημι-ανεξάρτητες και παράλληλες βελτιώσεις στον σχεδιασμό ως προς τις τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{X} , ικανοποιώντας ταυτόχρονα τους τοπικούς περιορισμούς,
- Την **ανάλυση ευαισθησίας βέλτιστων λύσεων**, όπου υπολογίζονται οι απαραίτητες παράγωγοι (ευαισθησίας) για τις βέλτιστες λύσεις που προέκυψαν από τις υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις, και
- Τη **συστημική βελτιστοποίηση**, όπου γίνεται περαιτέρω βελτίωση στον σχεδιασμό ως προς τις συστημικές μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{Z} , με χρήση των παραγώγων ευαισθησίας των βέλτιστων λύσεων. Τέλος, σε αυτό το στάδιο το

λογισμικό βελτιστοποίησης εξασφαλίζει την ικανοποίηση όλων των περιορισμών (τοπικών καθώς και συστημικών).

Η συστημική ανάλυση MDSA και η ανάλυση ευαισθησίας του συστήματος έχουν ήδη περιγραφεί στο Κεφάλαιο §2, και εφαρμόζονται σε αυτήν τη μέθοδο. Στο τέλος του κεφαλαίου, παρουσιάζεται το διάγραμμα ροής της μεθόδου.

4.2 Υποσυστημικές Βελτιστοποιήσεις

Η κυριότερη ιδέα της μεθόδου είναι η διατύπωση μιας συνάρτησης, μοναδικής για κάθε επιστημονικό πεδίο, ώστε με ελαχιστοποίηση αυτής της συνάρτησης για κάθε πεδίο, να προκύπτει η ελαχιστοποίηση της συστημικής αντικειμενικής συνάρτησης. Συνεπώς, στις υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις, γίνεται ο διαχωρισμός μεταξύ δύο ειδών συναρτήσεων, της τοπικής αντικειμενικής συνάρτησης και της συστημικής αντικειμενικής συνάρτησης.

- Ως **συστημική αντικειμενική συνάρτηση** ορίζεται μια οποιαδήποτε έξοδος από το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης \mathbf{Y}_i οποιοδήποτε επιστημονικού πεδίου που η βελτιστοποίηση της αποτελεί τον πραγματικό στόχο του προβλήματος και συμβολίζεται με F . Σε αυτό το σημείο, πρέπει να επισημανθεί ότι η F δεν είναι απαραίτητο να αποτελεί κάποιο στοιχείο από το διάνυσμα των μεταβλητών σύζευξης \mathbf{Y}_{ij} (βλ. Σχήμα (1.1)).
- Οι **τοπικές αντικειμενικές συναρτήσεις** ορίζονται ξεχωριστά για κάθε πεδίο και δεν είναι τίποτε άλλο παρά γραμμικοποιήσεις της συστημικής αντικειμενικής συνάρτησης F ως προς τις τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{X}_i . Εκείνες συμβολίζονται με $\Delta\Phi_i$ και εκφράζουν τη μείωση της F λόγω της ανάλυσης στο i -πεδίο.

Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα του πεπλεγμένου συστήματος με τα τρία επιστημονικά πεδία (βλ. Σχήμα (1.1)), εκφράζεται η F ως συνάρτηση των διανυσμάτων των μεταβλητών σχεδιασμού $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ μέσω του αναπτύγματος Taylor πρώτης τάξης (γραμμική μορφή).

$$\overbrace{F - (F)_o}^{\Delta F} \approx \underbrace{\left(\frac{dF}{d\mathbf{X}_1}\right) \Delta\mathbf{X}_1}_{\Delta\Phi_1} + \underbrace{\left(\frac{dF}{d\mathbf{X}_2}\right) \Delta\mathbf{X}_2}_{\Delta\Phi_2} + \underbrace{\left(\frac{dF}{d\mathbf{X}_3}\right) \Delta\mathbf{X}_3}_{\Delta\Phi_3} + \mathcal{O}(X^2) \quad (4.1)$$

όπου

F : η νέα τιμή της συστημικής αντικειμενικής συνάρτησης, όπως προκύπτει μετά το τέλος των υποσυστημικών βελτιστοποιήσεων

$(F)_o$: η πρέχουσα τιμή της συστημικής αντικειμενικής συνάρτησης, όπως προέκυψε από την προηγούμενη συστημική ανάλυση

$\Delta \mathbf{X}_i$: $= [\mathbf{X}_i - (\mathbf{X}_i)_o]$ διάνυσμα μεταβολών των τοπικών μεταβλητών \mathbf{X}_i , για $i = 1, 2, 3$

$\frac{dF}{d\mathbf{X}_i}$: διάνυσμα παραγώγων της F , διαστάσεων $[1 \times n(\mathbf{X}_i)]$. Προέκυψε από την αντίστοιχη γραμμή του μητρώου $\frac{d\mathbf{Y}_i}{d\mathbf{X}_i}$ στην ανάλυση ευαισθησίας του συστήματος και θεωρείται σταθερό για έναν κύκλο της μεθόδου

ΔF : μείωση (βελτίωση) της τιμής της συστημικής αντικειμενικής συνάρτησης

$\Delta \Phi_i$: τοπική αντικειμενική συνάρτηση του i -πεδίου ($i = 1, 2, 3$)

$\mathcal{O}(X^2)$: Αποκοπή όρων δεύτερης τάξεως ως προς X στο ανάπτυγμα *Taylor* (Τάξη Ακριβείας).

Ο κάθε όρος $\Delta \Phi_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) από την εξίσωση (4.1) εκφράζει τη **συνεισφορά** που έχει ο συγκεκριμένος όρος στην ελαχιστοποίηση του ΔF , δηλαδή στη μείωση της συστημικής αντικειμενικής συνάρτησης. Προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί η μείωση ΔF , πρέπει το κάθε επιστημονικό πεδίο να ελαχιστοποιήσει αυτόνομα και ανεξάρτητα τη δική του συνάρτηση $\Delta \Phi_i$.

$$\min(\Delta F) = \min(\Delta \Phi_1) + \min(\Delta \Phi_2) + \min(\Delta \Phi_3) \quad (4.2)$$

Καθεμία από τις υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις $\min(\Delta \Phi_i)$ της εξίσωσης (4.2), μπορεί να διατυπωθεί σε **αναπτυγμένη μορφή** για κάθε στοιχείο του διανύσματος \mathbf{X}_i . Για παράδειγμα

$$\begin{aligned} \min(\Delta \Phi_1) &= \min \left(\left(\frac{dF}{d\mathbf{X}_1} \right) \Delta \mathbf{X}_1 \right) = \min \left(\sum_{k=1}^{n(\mathbf{X}_1)} \frac{dF}{dX_{1,k}} \Delta X_{1,k} \right) \\ &= \min \left(\left(\frac{dF}{dX_{1,1}} \right) \Delta X_{1,1} + \left(\frac{dF}{dX_{1,2}} \right) \Delta X_{1,2} + \dots + \left(\frac{dF}{dX_{1,n(\mathbf{X}_1)}} \right) \Delta X_{1,n(\mathbf{X}_1)} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

όπου $\Delta \mathbf{X}_1$ είναι το διάνυσμα μεταβολών των μεταβλητών σχεδιασμού και $\Delta X_{1,k}$ για $k = 1, 2, \dots, n(\mathbf{X}_1)$ είναι το k -στοιχείο του διανύσματος.

Η εξίσωση (4.2) δηλώνει ότι η ελαχιστοποίηση της συστημικής αντικειμενικής συνάρτησης ΔF ως προς τις τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού μπορεί να θεωρηθεί ως μια πο-

λυκριτηριακή (multi-objective) συνάρτηση, με αντικρουόμενους στόχους τις σύνθετες συναρτήσεις $\Delta\Phi_1, \Delta\Phi_2, \Delta\Phi_3$. Ενώ, η εξίσωση (4.3) δηλώνει ότι κάθε **σύνθετη συνάρτηση** $\Delta\Phi_i$ είναι το άθροισμα των τοπικών μεταβλητών σχεδιασμού \mathbf{X}_i , οι οποίες έχουν ως συντελεστή βάρους την επίδραση της i -τοπικής αντικειμενικής συνάρτησης σε ολόκληρο το σύστημα (παράγωγοι ευαισθησίας). Αυτό σημαίνει ότι τα συμμετέχοντα επιστημονικά πεδία δεν θα έπρεπε να βελτιστοποιούν άμεσα τη συστημική αντικειμενική συνάρτηση F – όπως συμβαίνει στις συμβατικές μεθόδους βελτιστοποίησης – αλλά το άθροισμα των συνεισφορών τους $\Delta\Phi_i$ στο σύστημα.

Επίσης, η εξίσωση (4.3) δείχνει ότι οι τοπικές αντικειμενικές συναρτήσεις είναι ευθείες ως προς \mathbf{X} με σταθερή κλίση τις παραγώγους της συστημικής αντικειμενικής συνάρτησης. Κάτι τέτοιο συνεπάγεται ότι ελαχιστοποίηση των τοπικών αντικειμενικών συναρτήσεων $\Delta\Phi_i$ – χωρίς όρια στις μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{X} – οδηγεί σε απειρισμό της τιμής τους. Για τον λόγο αυτόν, η μέθοδος απαιτεί την επιβολή ορίων στις μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{X} .

Για την καλύτερη κατανόηση όλων των παραπάνω, διατυπώνεται η έκφραση της υποσυστημικής βελτιστοποίησης για το πρώτο επιστημονικό πεδίο.

$$\begin{array}{l} \text{Υποσυστημική Βελτιστοποίηση 1} \\ \hline \text{Given: } (\mathbf{X}_1)_o, \frac{dF}{d\mathbf{X}_1} \\ \text{Minimize: } \Delta\Phi_1 = \left(\frac{dF}{d\mathbf{X}_1} \right) (\mathbf{X}_1 - (\mathbf{X}_1)_o) \\ \text{with respect to: } \mathbf{X}_1 \\ \text{subject to: } \mathbf{G}_1 \leq 0 \\ \mathbf{h}_1 = 0 \\ \mathbf{X}_1^L \leq \mathbf{X}_1 \leq \mathbf{X}_1^U \\ \Delta\mathbf{X}_1^L \leq \Delta\mathbf{X}_1 \leq \Delta\mathbf{X}_1^U \end{array}$$

όπου \mathbf{G}_1 και \mathbf{h}_1 είναι τα διανύσματα όλων των τοπικών περιορισμών ανισότητας και ισότητας αντίστοιχα, το $(\mathbf{X}_1)_o$ είναι το διάνυσμα του τρέχοντος σημείου σχεδιασμού, τα $\mathbf{X}^L, \mathbf{X}^U$ είναι τα διανύσματα των ορίων (L: lower, U: upper) στις τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού.

Επίσης, στο πρόβλημα προστίθενται μέγιστες επιτρεπόμενες μεταβολές $\Delta\mathbf{X}^L, \Delta\mathbf{X}^U$ στις μεταβλητές σχεδιασμού. Εκείνες ορίζονται ως οι μέγιστες αλλαγές από το τρέχον σημείο σχεδιασμού $(\mathbf{X}_i)_o$ σε έναν κύκλο της μεθόδου και χρησιμοποιούνται για να δημιουργήσουν ομαλότερες συνθήκες σύγκλισης. Η τιμή τους είναι αυθαίρετη, αν και προτείνεται αυτή να κυμαίνεται περίπου στο 10% των ορίων των μεταβλητών σχεδιασμού $(\mathbf{X}^U - \mathbf{X}^L)$.

Ομοίως διατυπώνονται οι υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις και για τις υπόλοιπες τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού, από τις οποίες προκύπτουν οι **βέλτιστες τιμές** των τοπικών αντικειμενικών συναρτήσεων ($\Delta\Phi_1^*$, $\Delta\Phi_2^*$, $\Delta\Phi_3^*$) και κατ' επέκταση, μέσω της εξίσωσης (4.1), η βέλτιστη μείωση της συστημικής αντικειμενικής συνάρτησης ΔF^* ως προς τις τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού.

$$\begin{aligned}\Delta F^* &= F^* - (F)_o \\ &= \Delta\Phi_1^* + \Delta\Phi_2^* + \Delta\Phi_3^*\end{aligned}\quad (4.4)$$

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να επισημανθεί ότι η μέθοδος δεν υπολογίζει τη τιμή F^* (αν και θα μπορούσε), αλλά τη μείωση ΔF^* , για λόγους που θα γίνουν περισσότερο κατανοητοί, στη συνέχεια, στην ανάλυση ευαισθησίας βέλτιστων λύσεων.

Τέλος, εάν μια συστημική αντικειμενική συνάρτηση F απαιτείται να μεγιστοποιηθεί, αυτή η μέθοδος τη χειρίζεται όπως και στις συμβατικές μεθόδους, όπου απλά αλλάζει το πρόσημο της αντικειμενικής συνάρτησης σε αρνητικό.

4.2.1 Τοπικοί Περιορισμοί

Μετά το πέρας των υποσυστημικών βελτιστοποιήσεων, προκύπτουν οι **βέλτιστες** τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού (\mathbf{X}_1^* , \mathbf{X}_2^* , \mathbf{X}_3^*), οι οποίες πρέπει να βρίσκονται στην περιοχή των **αποδεκτών λύσεων**, δηλαδή πρέπει να ικανοποιούν όλους τους τοπικούς περιορισμούς ανισότητας \mathbf{G}_i και ισότητας \mathbf{h}_i . Η ικανοποίηση των περιορισμών εξασφαλίζεται, καθόλη τη διάρκεια των υποσυστημικών βελτιστοποιήσεων, με μια γραμμικοποίηση της συνάρτησης των περιορισμών, η οποία αξιολογείται κάθε φορά που το λογισμικό βελτιστοποίησης προτείνει μια νέα λύση \mathbf{X}_i .

Στη συνέχεια, η περιγραφή της μεθόδου θα αναφέρεται στους περιορισμούς ανισότητας, ενώ θα εννοείται ότι ισχύουν τα ίδια για τους περιορισμούς ισότητας. Η γενική μορφή της διανυσματικής συνάρτησης των περιορισμών για ένα i -πεδίο είναι ως ακολούθως

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{G}_i(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_{ji}) \leq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (4.5)$$

$$i \neq j$$

όπου \mathbf{Y}_{ji} είναι οι μεταβλητές σύζευξης που είναι είσοδοι στο i -πεδίο, ενώ \mathbf{Y}_i είναι οι μεταβλητές κατάστασης του i -πεδίου.

Σύμφωνα με την εξίσωση (4.5), το ολικό διαφορικό των περιορισμών για στοιχειώδεις μεταβολές των μεταβλητών προκύπτει

$$d\mathbf{G}_i = \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{X}_i}\right) d\mathbf{X}_i + \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{Z}}\right) d\mathbf{Z} + \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{Y}_i}\right) d\mathbf{Y}_i + \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{Y}_{ji}}\right) d\mathbf{Y}_{ji} \quad (4.6)$$

όπου οι όροι με τις μερικές παραγώγους συνιστούν **μητρώα** με σταθερό αριθμό γραμμών – ίσο με $n(\mathbf{G}_i)$ – και αριθμό στηλών που καθορίζεται από το μήκος των διανυσμάτων \mathbf{X}_i , \mathbf{Z} , \mathbf{Y}_i , \mathbf{Y}_{ji} αντίστοιχα.

Κατά τη διάρκεια των ανεξάρτητων υποσυστημικών βελτιστοποιήσεων, οι κοινές μεταβλητές \mathbf{Z} και οι μεταβλητές σύζευξης εισόδου \mathbf{Y}_{ji} σε ένα επιστημονικό πεδίο θεωρούνται σταθερές, δηλαδή $d\mathbf{Z} = 0$ και $d\mathbf{Y}_{ji} = 0$. Επομένως, από τη διατύπωση της εξίσωσης (1.1) των μεταβλητών κατάστασης, ισχύει $\mathbf{Y}_i = \mathbf{Y}_i(\mathbf{X}_i)$ – και με εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας προκύπτει τελικά

$$d\mathbf{G}_i = \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{X}_i} \right) d\mathbf{X}_i + \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{Y}_i} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{Y}_i}{\partial \mathbf{X}_i} \right) d\mathbf{X}_i$$

Ενώ για πεπερασμένες αλλαγές των μεταβλητών, η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{G}_i &= \mathbf{G}_i - (\mathbf{G}_i)_o \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{X}_i} \right) \Delta \mathbf{X}_i + \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{Y}_i} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{Y}_i}{\partial \mathbf{X}_i} \right) \Delta \mathbf{X}_i \end{aligned} \quad (4.7)$$

οι **παράγωγοι ευαισθησίας των περιορισμών** ως προς τις τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{X}_i , και ως προς τις μεταβλητές κατάστασης \mathbf{Y}_i υπολογίστηκαν στην ανάλυση ευαισθησίας του συστήματος και θεωρούνται σταθερές για έναν κύκλο της μεθόδου. Ενώ η τρέχουσα τιμή των περιορισμών $(\mathbf{G}_i)_o$ προκύπτει για τις τρέχουσες τιμές $(\mathbf{X}_i)_o$ μετά το τέλος της συστημικής ανάλυσης (εκτέλεση των πεδίων).

Κατά αυτόν τον τρόπο, εξασφαλίζεται ότι τα τοπικά βέλτιστα \mathbf{X}_i^* θα βρίσκονται πάντα μέσα στην περιοχή των αποδεκτών λύσεων, ακόμα και εάν η υποσυστημική βελτιστοποίηση διακοπεί πρόωρα.

$$\mathbf{G}_i^*(\Delta \mathbf{X}_i^*) \leq 0$$

4.3 Ανάλυση Ευαισθησίας Βέλτιστων Λύσεων

Η ανάλυση ευαισθησίας βέλτιστων λύσεων (Optimum Sensitivity Analysis–OSA) είναι μια τεχνική, η οποία επιτρέπει τη διερεύνηση της ευαισθησίας μιας βέλτιστης λύσης σε αλλαγές ορισμένων παραμέτρων του προβλήματος [48]. Αυτές οι παράμετροι είναι, στην ουσία, μεταβλητές που είχαν θεωρηθεί σταθερές κατά τις υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις. Μέχρι τώρα, η βελτίωση του σχεδιασμού γινόταν μέσω του χειρισμού των τοπικών μεταβλητών σχεδιασμού \mathbf{X} , θεωρώντας ως σταθερές τις συστημικές μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{Z} και τις μεταβλητές σύζευξης εισόδου \mathbf{Y}_{ji} σε ένα συγκεκριμένο πεδίο.

Είναι δυνατό να επιτευχθεί περαιτέρω βελτίωση στο σχεδιασμό ως προς τις συστημικές μεταβλητές, γνωρίζοντας τον βαθμό που επηρεάζουν οι μεταβλητές αυτές τη συστημική αντικειμενική συνάρτηση F . Στόχος, λοιπόν, της ανάλυσης είναι ο υπολογισμός της ολικής παραγώγου της συστημικής αντικειμενικής συνάρτησης $F^*(\mathbf{X}_1^*, \mathbf{X}_2^*, \mathbf{X}_3^*)$ στη τοπικά βέλτιστη λύση ως προς τις συστημικές μεταβλητές \mathbf{Z} .

Συγκεκριμένα, έχουν αναπτυχθεί δύο τρόποι υπολογισμού αυτών των παραγώγων δημιουργώντας έτσι δύο εκδοχές της μεθόδου, την BLISS/A και BLISS/B [31]. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούνται αυτές οι παράγωγοι στη συστημική βελτιστοποίηση για την εύρεση των βέλτιστων τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού \mathbf{Z}^* . Συνεπώς, η ανάλυση αυτή καλείται να συνδέσει τα δύο ημι-αυτόνομα επίπεδα (υποσυστημικό και συστημικό) και να επιλύσει το πρόβλημα της επικοινωνίας μεταξύ τους, αξιοποιώντας αυτές τις παραγώγους.

4.3.1 Εκδοχή BLISS/A

Η εκδοχή αυτή της μεθόδου υπολογίζει την ευαισθησία της συστημικής αντικειμενικής συνάρτησης (F^*) στη τοπικά βέλτιστη λύση ως προς τις συστημικές μεταβλητές \mathbf{Z} μέσω της τροποποίησης των εξισώσεων ευαισθησίας (modified GSE), όπως αυτές αναπτύχθηκαν στην ανάλυση ευαισθησίας του συστήματος § 2. Οι τροποποιημένες εξισώσεις ευαισθησίας θεωρούν τα τοπικά βέλτιστα σημεία σχεδιασμού \mathbf{X}_i^* ως συνάρτηση των μεταβλητών σύζευξης \mathbf{Y}_{ji} και των συστημικών μεταβλητών \mathbf{Z} , οι οποίες αποτελούν τις εισόδους σε ένα συγκεκριμένο πεδίο. Η συναρτησιακή αυτή σχέση εξηγείται από το γεγονός ότι κατά τις υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις το διάνυσμα της ολικής παραγώγου $\frac{dF}{d\mathbf{X}_i}$ θεωρείται σταθερό, ενώ στην πραγματικότητα εξαρτάται από τις συστημικές μεταβλητές σχεδιασμού και τις μεταβλητές σύζευξης μέσω της σχέσης (2.3). Η εξάρτηση αυτή μεταφέρεται, λοιπόν, στη βέλτιστη τιμή των τοπικών μεταβλητών σχεδιασμού \mathbf{X}_i^* και κατ' επέκταση στη βέλτιστη τιμή της συστημικής αντικειμενικής συνάρτησης F^* .

Σύμφωνα με τα παραπάνω, τα τοπικά βέλτιστα μπορούν να γραφούν ως διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών με την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1^* &= \mathbf{X}_1^*(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{21}, \mathbf{Y}_{31}) \\ \mathbf{X}_2^* &= \mathbf{X}_2^*(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{12}, \mathbf{Y}_{32}) \\ \mathbf{X}_3^* &= \mathbf{X}_3^*(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{13}, \mathbf{Y}_{23}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (4.8) είναι δυνατό να υπολογιστούν τα ολικά διαφορικά των τοπικών βέλτιστων με τον τρόπο που περιγράφηκε στην ανάλυση ευαισθησίας του συστήματος (§ 2),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{X}_1^*}{d\mathbf{Z}} = \frac{\partial \mathbf{X}_1^*}{\partial \mathbf{Z}} \frac{d\mathbf{Z}}{d\mathbf{Z}} + \frac{\partial \mathbf{X}_1^*}{\partial \mathbf{Y}_{21}} \frac{d\mathbf{Y}_{21}}{d\mathbf{Z}} + \frac{\partial \mathbf{X}_1^*}{\partial \mathbf{Y}_{31}} \frac{d\mathbf{Y}_{31}}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{X}_2^*}{d\mathbf{Z}} = \frac{\partial \mathbf{X}_2^*}{\partial \mathbf{Z}} \frac{d\mathbf{Z}}{d\mathbf{Z}} + \frac{\partial \mathbf{X}_2^*}{\partial \mathbf{Y}_{12}} \frac{d\mathbf{Y}_{12}}{d\mathbf{Z}} + \frac{\partial \mathbf{X}_2^*}{\partial \mathbf{Y}_{32}} \frac{d\mathbf{Y}_{32}}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{X}_3^*}{d\mathbf{Z}} = \frac{\partial \mathbf{X}_3^*}{\partial \mathbf{Z}} \frac{d\mathbf{Z}}{d\mathbf{Z}} + \frac{\partial \mathbf{X}_3^*}{\partial \mathbf{Y}_{13}} \frac{d\mathbf{Y}_{13}}{d\mathbf{Z}} + \frac{\partial \mathbf{X}_3^*}{\partial \mathbf{Y}_{23}} \frac{d\mathbf{Y}_{23}}{d\mathbf{Z}} \end{array} \right\} \quad (4.9)$$

όπου οι παραπάνω όροι συνιστούν μητρώα με αριθμό γραμμών ίσο με το μήκος διανύσματος του αριθμητή, ενώ αριθμό στηλών ίσο με το μήκος διανύσματος του παρονομαστή.

Ενώ, για καθένα από αυτά ισχύει ότι

$$\frac{d\mathbf{Y}_{ji}}{d\mathbf{Z}} \quad \frac{d\mathbf{X}_i^*}{d\mathbf{Z}} : \text{συνιστούν τους αγνώστους του συστήματος (4.9)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}_i^*}{\partial \mathbf{Z}} \quad \frac{\partial \mathbf{X}_i^*}{\partial \mathbf{Y}_{ji}} : \text{θεωρούνται γνωστά και υπολογίζονται μέσω του προσεγγιστικού αλγορίθμου Vanderplaats [49]}$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους της εξίσωσης, ώστε να σχηματιστούν τα μητρώα των αγνώστων ολικών παράγωγων στο αριστερό μέλος των εξισώσεων, το σύστημα των εξισώσεων γράφεται τελικά στην ακόλουθη μητρωϊκή μορφή,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \emptyset & -\frac{\partial \mathbf{X}_1^*}{\partial \mathbf{Y}_{21}} & -\frac{\partial \mathbf{X}_1^*}{\partial \mathbf{Y}_{31}} \\ -\frac{\partial \mathbf{X}_2^*}{\partial \mathbf{Y}_{12}} & \emptyset & -\frac{\partial \mathbf{X}_2^*}{\partial \mathbf{Y}_{32}} \\ -\frac{\partial \mathbf{X}_3^*}{\partial \mathbf{Y}_{13}} & -\frac{\partial \mathbf{X}_3^*}{\partial \mathbf{Y}_{23}} & \emptyset \end{bmatrix}}_{[M_{xy}]_{n(\mathbf{X}) \times n(\mathbf{Y})}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{Y}_{j1}}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{Y}_{j2}}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{Y}_{j3}}{d\mathbf{Z}} \end{pmatrix}}_{[M_{xx}]_{n(\mathbf{X}) \times n(\mathbf{X})}} + \underbrace{\begin{bmatrix} I_{n(\mathbf{X}_1)} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & I_{n(\mathbf{X}_2)} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & I_{n(\mathbf{X}_3)} \end{bmatrix}}_{[M_{xx}]_{n(\mathbf{X}) \times n(\mathbf{X})}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{X}_1^*}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{X}_2^*}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{X}_3^*}{d\mathbf{Z}} \end{pmatrix}}_{[M_{xx}]_{n(\mathbf{X}) \times n(\mathbf{X})}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{X}_1^*}{\partial \mathbf{Z}} \\ \frac{\partial \mathbf{X}_2^*}{\partial \mathbf{Z}} \\ \frac{\partial \mathbf{X}_3^*}{\partial \mathbf{Z}} \end{pmatrix}}_{[M_{xx}]_{n(\mathbf{X}) \times n(\mathbf{X})}} \quad (4.10)$$

όπου έχει τεθεί ως

$$\frac{d\mathbf{Y}_{j1}}{d\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{Y}_{21}}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{Y}_{31}}{d\mathbf{Z}} \end{bmatrix} \quad \frac{d\mathbf{Y}_{j2}}{d\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{Y}_{12}}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{Y}_{32}}{d\mathbf{Z}} \end{bmatrix} \quad \frac{d\mathbf{Y}_{j3}}{d\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{Y}_{13}}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{Y}_{23}}{d\mathbf{Z}} \end{bmatrix}$$

Το γραμμικό σύστημα της εξίσωσης (4.10) από μόνο του δεν είναι επιλύσιμο, επειδή ο αριθμός των αγνώστων υπερτερεί του αριθμού των εξισώσεων. Επομένως, ως επιπρόσθετο γραμμικό σύστημα εξισώσεων, διατυπώνονται τα ολικά διαφορικά των μεταβλητών σύζευξης \mathbf{Y}_{ij} ως προς τις συστημικές μεταβλητές \mathbf{Z} , με τον ίδιο τρόπο που περιγράφηκε στην ανάλυση ευαισθησίας του συστήματος (εξίσωση (2.10)).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{Y}_{1j}}{d\mathbf{Z}} = \frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{X}_1^*} \frac{d\mathbf{X}_1^*}{d\mathbf{Z}} + \frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Z}} \frac{d\mathbf{Z}}{d\mathbf{Z}} + \frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{21}} \frac{d\mathbf{Y}_{21}}{d\mathbf{Z}} + \frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{31}} \frac{d\mathbf{Y}_{31}}{d\mathbf{Z}} \quad \forall j = 2, 3 \\ \frac{d\mathbf{Y}_{2j}}{d\mathbf{Z}} = \frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{X}_2^*} \frac{d\mathbf{X}_2^*}{d\mathbf{Z}} + \frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{Z}} \frac{d\mathbf{Z}}{d\mathbf{Z}} + \frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{Y}_{12}} \frac{d\mathbf{Y}_{12}}{d\mathbf{Z}} + \frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{Y}_{32}} \frac{d\mathbf{Y}_{32}}{d\mathbf{Z}} \quad \forall j = 1, 3 \\ \frac{d\mathbf{Y}_{3j}}{d\mathbf{Z}} = \frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{X}_3^*} \frac{d\mathbf{X}_3^*}{d\mathbf{Z}} + \frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{Z}} \frac{d\mathbf{Z}}{d\mathbf{Z}} + \frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{Y}_{13}} \frac{d\mathbf{Y}_{13}}{d\mathbf{Z}} + \frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{Y}_{23}} \frac{d\mathbf{Y}_{23}}{d\mathbf{Z}} \quad \forall j = 1, 2 \end{array} \right. \quad (4.11)$$

όπου οι όροι

$$\frac{d\mathbf{Y}_{1j}}{d\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{Y}_{12}}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{Y}_{13}}{d\mathbf{Z}} \end{bmatrix} \quad \frac{d\mathbf{Y}_{2j}}{d\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{Y}_{21}}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{Y}_{23}}{d\mathbf{Z}} \end{bmatrix} \quad \frac{d\mathbf{Y}_{3j}}{d\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{Y}_{31}}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{Y}_{32}}{d\mathbf{Z}} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

αναφέρονται στις μεταβλητές σύζευξης που υπολογίζονται στα πεδία 1,2 και 3 αντίστοιχα. Οι μεταβλητές αυτές αποτελούν υποσύνολο των μεταβλητών κατάστασης \mathbf{Y}_i του i -πεδίου.

Ενώ, τα μητρώα

$$\frac{d\mathbf{Y}_{ij}}{d\mathbf{Z}} \quad \frac{d\mathbf{Y}_{ji}}{d\mathbf{Z}} \quad \frac{d\mathbf{X}_i^*}{d\mathbf{Z}} : \text{συνιστούν τους αγνώστους του συστήματος (4.11)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Y}_{ij}}{\partial \mathbf{Y}_{ji}} \quad \frac{\partial \mathbf{Y}_{ij}}{\partial \mathbf{Z}} \quad \frac{\partial \mathbf{Y}_{ij}}{\partial \mathbf{X}_i^*} : \text{θεωρούνται γνωστά, εφόσον έχουν προκύψει από την ανάλυση ευαισθησίας του συστήματος.}$$

Συνεπώς, το παραπάνω σύστημα μπορεί να γραφεί σε μητρική μορφή, ως ακολούθως

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_{n(\mathbf{Y}_1)} & -\frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{21}} & -\frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Y}_{31}} \\ -\frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{Y}_{12}} & I_{n(\mathbf{Y}_2)} & -\frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{Y}_{32}} \\ -\frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{Y}_{13}} & -\frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{Y}_{23}} & I_{n(\mathbf{Y}_3)} \end{bmatrix}}_{[M_{yy}]_{n(\mathbf{Y}) \times n(\mathbf{Y})}} \begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{Y}_{1j}}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{Y}_{2j}}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{Y}_{3j}}{d\mathbf{Z}} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{X}_1^*} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & -\frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{X}_2^*} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & -\frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{X}_3^*} \end{bmatrix}}_{[M_{yx}]_{n(\mathbf{Y}) \times n(\mathbf{X})}} \begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{X}_1^*}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{X}_2^*}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{X}_3^*}{d\mathbf{Z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}_{1j}}{\partial \mathbf{Z}} \\ \frac{\partial \mathbf{Y}_{2j}}{\partial \mathbf{Z}} \\ \frac{\partial \mathbf{Y}_{3j}}{\partial \mathbf{Z}} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (4.13) είναι παρόμοιο με αυτό της (2.16) από την ανάλυση ευαισθησίας του συστήματος, με τη μόνη διαφορά της ύπαρξης τοπικών μεταβλητών, οι οποίες είχαν θεωρηθεί σταθερές. Μάλιστα, το μητρώο M_{yy} είναι ακριβώς το ίδιο με το μητρώο A . Τελικά τα συστήματα των εξισώσεων (4.10) και (4.13) συνθέτουν ενιαίο τετραγωνικό μητρώο M , διαστάσεων $n(\mathbf{X}) + n(\mathbf{Y}_{ij})$, το οποίο αποτελεί γενίκευση των εξισώσεων ευαισθησίας GSE (Global Sensitivity Equations), δηλαδή λαμβάνει υπόψη και την επίδραση των συστημικών μεταβλητών \mathbf{Z} στις βέλτιστες λύσεις των τοπικών μεταβλητών \mathbf{X}^* .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{yy} & M_{yx} \\ M_{xy} & M_{xx} \end{bmatrix}}_M \begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{Y}_{ij}}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{X}^*}{d\mathbf{Z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}_{ij}}{\partial \mathbf{Z}} \\ \frac{\partial \mathbf{X}^*}{\partial \mathbf{Z}} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Με την επίλυση του συστήματος εξισώσεων (4.14) ως προς τα μητρώα $\frac{d\mathbf{Y}_{ij}}{d\mathbf{Z}}$ και $\frac{d\mathbf{X}^*}{d\mathbf{Z}}$, προσδιορίζεται το διάνυσμα της ολικής παραγωγού της συστημικής αντικειμενικής συνάρτησης $\frac{dF^*}{d\mathbf{Z}}$ από την αντίστοιχη γραμμή του μητρώου $\frac{d\mathbf{Y}_{ij}}{d\mathbf{Z}}$. Το διάνυσμα των παραγώγων $\frac{dF^*}{d\mathbf{Z}}$ χρησιμοποιείται, στη συνέχεια, για την εκτέλεση της συστημικής βελτιστοποίησης.

4.3.2 Εκδοχή BLISS/B

Αυτή η εκδοχή της μεθόδου αποφεύγει τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων των τοπικών βέλτιστων (\mathbf{X}_1^* , \mathbf{X}_2^* , \mathbf{X}_3^*), ως προς τις συστημικές μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{Z} και ως προς τις μεταβλητές σύζευξης Y_{ji} , οι οποίες είναι είσοδοι στο i -πεδίο. Προκειμένου να βρεθεί η ευαισθησία της τοπικά βέλτιστης συστημικής αντικειμενικής συνάρ-

τησης F^* σε μικρή αλλαγή των ανεξάρτητων συστημικών μεταβλητών σχεδιασμού \mathbf{Z} , παραγωγίζεται η εξίσωση (4.4) ως προς τις συστημικές μεταβλητές.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mathbf{Z}}(\Delta F^*) &= \frac{d}{d\mathbf{Z}}(F^*) - \frac{d}{d\mathbf{Z}}(F)_o \\ &= \frac{d}{d\mathbf{Z}}(\Delta\Phi_1^*) + \frac{d}{d\mathbf{Z}}(\Delta\Phi_2^*) + \frac{d}{d\mathbf{Z}}(\Delta\Phi_3^*) \end{aligned} \quad (4.15)$$

όπου $\frac{d}{d\mathbf{Z}}(F)_o$ είναι το διάνυσμα ολικών παραγώγων της συστημικής αντικειμενικής συνάρτησης, όπως υπολογίστηκε από την επίλυση του γραμμικού συστήματος (2.16) στην ανάλυση ευαισθησίας του συστήματος. Ενώ, ο υπολογισμός των όρων $\frac{d}{d\mathbf{Z}}(\Delta\Phi_i^*)$ επεξηγείται αναλυτικότερα, στη συνέχεια.

Σύμφωνα με τον ορισμό των τοπικών αντικειμενικών συναρτήσεων από την εξίσωση αναπτύγματος του Taylor (4.1), οι όροι $\Delta\Phi_i$ εξαρτώνται μόνο από τις τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού, ενώ όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές θεωρούνται σταθερές (συστημικές και σύζευξης). Προκειμένου να διερευνηθεί η επίδραση των συστημικών \mathbf{Z} και μεταβλητών σύζευξης εισόδου \mathbf{Y}_{ji} (για εφαρμογή τους στο i -πεδίο) στο τοπικό βέλτιστο \mathbf{X}_i^* , εκφράζεται το τοπικό βέλτιστο ως συνάρτηση μίας παραμέτρου \mathbf{P}_i (διάνυσμα), η οποία εξαρτάται από τις \mathbf{Z} και \mathbf{Y}_{ji} μεταβλητές και ορίζεται ξεχωριστά σε κάθε πεδίο.

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i(\mathbf{Y}_{ji}, \mathbf{Z}) \Rightarrow \mathbf{X}_i^* = \mathbf{X}_i^*(\mathbf{P}_i) \Rightarrow \Delta\Phi_i^* = \Delta\Phi_i^*(\mathbf{X}_i^*(\mathbf{P}_i)) \quad (4.16)$$

Από την εξίσωση (4.16), το ολικό διαφορικό των τοπικών αντικειμενικών συναρτήσεων, υπολογισμένων στα αντίστοιχα τοπικά βέλτιστα τους, προκύπτει από τον κανόνα της αλυσίδας

$$d(\Delta\Phi_i^*) = \left(\frac{\partial(\Delta\Phi_i^*)}{\partial\mathbf{X}_i^*} \right) d\mathbf{X}_i^* = \left(\frac{\partial(\Delta\Phi_i^*)}{\partial\mathbf{X}_i^*} \right) \left(\frac{\partial\mathbf{X}_i^*}{\partial\mathbf{P}_i} \right) d\mathbf{P}_i \quad (4.17)$$

Αμέσως μετά την ολοκλήρωση των υποσυστημικών βελτιστοποιήσεων υπολογίζονται οι πολλαπλασιαστές Lagrange στα τοπικά βέλτιστα – λ_i^* (διάνυσμα) – για ένα μη-γραμμικό πρόβλημα με περιορισμούς. Αυτοί οι πολλαπλασιαστές ικανοποιούν τις KKT (Karush-Kuhn-Tucker) συνθήκες βέλτιστης λύσης και εκφράζουν το κόστος που επιφέρουν οι αλλαγές στους περιορισμούς, λόγω αλλαγής της συνάρτησης \mathbf{P}_i , στη βέλτιστη τιμή της τοπικής αντικειμενικής συνάρτησης $\Delta\Phi_i^*$.

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}_i^*}(\Delta\Phi_i^*) = -\lambda_i^* \left(\frac{\partial\mathbf{G}_i^*}{\partial\mathbf{X}_i^*} \right) \quad (4.18)$$

όπου οι μη-γραμμικοί περιορισμοί \mathbf{G}_i^* αποτελούν ένα υποσύνολο των τοπικών περιορισμών, για τους οποίους οι πολλαπλασιαστές Lagrange είναι μη μηδενικοί – **ενεργοί περιορισμοί**. Επομένως, με αντικατάσταση της εξίσωσης (4.18) στην (4.17) προκύπτει

$$d(\Delta\Phi_i^*) = -\lambda_i^* \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i^*}{\partial \mathbf{X}_i^*} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{X}_i^*}{\partial \mathbf{P}_i} \right) d\mathbf{P}_i \quad (4.19)$$

Επιπλέον, σύμφωνα με τον ορισμό των τοπικών περιορισμών από την εξίσωση (4.5) και τον ορισμό της παραμέτρου \mathbf{P}_i από την εξίσωση (4.16), οι τοπικοί περιορισμοί στα τοπικά βέλτιστα διατυπώνονται ως

$$\mathbf{G}_i^* = \mathbf{G}_i^*(\mathbf{X}_i^*(\mathbf{P}), \mathbf{P}_i) \quad (4.20)$$

Τότε το ολικό διαφορικό τους είναι

$$d\mathbf{G}_i^* = \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i^*}{\partial \mathbf{P}_i} \right) d\mathbf{P}_i + \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i^*}{\partial \mathbf{X}_i^*} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{X}_i^*}{\partial \mathbf{P}_i} \right) d\mathbf{P}_i \quad (4.21)$$

Με αυτόν τον τρόπο, μέσω των εξισώσεων (4.19) και (4.21) έχει εκφραστεί η ευαισθησία των τοπικών αντικειμενικών συναρτήσεων και των τοπικών περιορισμών, ως προς την επίδραση της παραμέτρου \mathbf{P} . Ωστόσο, μία μικρή διαταραχή στην παράμετρο \mathbf{P} γύρω από την τιμή της στο τοπικό βέλτιστο πρέπει να είναι τέτοια, ώστε οι ενεργοί τοπικοί περιορισμοί να παραμένουν ενεργοί. Για τον λόγο αυτόν, επιβάλλεται η επιπρόσθετη συνθήκη $d\mathbf{G}_i^* = 0$ στην εξίσωση (4.21)

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i^*}{\partial \mathbf{P}_i} \right) d\mathbf{P}_i + \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i^*}{\partial \mathbf{X}_i^*} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{X}_i^*}{\partial \mathbf{P}_i} \right) d\mathbf{P}_i \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i^*}{\partial \mathbf{X}_i^*} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{X}_i^*}{\partial \mathbf{P}_i} \right) d\mathbf{P}_i = - \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i^*}{\partial \mathbf{P}_i} \right) d\mathbf{P}_i \end{aligned} \quad (4.22)$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας τη σχέση (4.22) στη (4.19) προκύπτει

$$d(\Delta\Phi_i^*) = \lambda_i^* \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i^*}{\partial \mathbf{P}_i} \right) d\mathbf{P}_i \quad (4.23)$$

Μέχρι τώρα, έχει εκφραστεί η ευαισθησία των τοπικών αντικειμενικών συναρτήσεων ως προς την παράμετρο \mathbf{P}_i . Ωστόσο, η συστημική βελτιστοποίηση απαιτεί την έκφραση των τοπικών αντικειμενικών συναρτήσεων ως προς τις ανεξάρτητες συστημικές μεταβλητές

\mathbf{Z} , όπως φαίνεται στην εξίσωση (4.15). Οπότε, από τον ορισμό της παραμέτρου \mathbf{P}_i στην εξίσωση (4.16), προκύπτει το ολικό διαφορικό αυτής

$$d\mathbf{P}_i = \left(\frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial \mathbf{Z}} \right) d\mathbf{Z} + \left(\frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial \mathbf{Y}_{ji}} \right) d\mathbf{Y}_{ji} \quad (4.24)$$

όπου οι μεταβλητές σύζευξης εισόδου \mathbf{Y}_{ij} εξαρτώνται αποκλειστικά από τις συστημικές μεταβλητές εντός του i -πεδίου, δηλαδή $\mathbf{Y}_{ji} = \mathbf{Y}_{ji}(\mathbf{Z})$

Με αντικατάσταση της εξίσωσης (4.24) στην (4.23) και αναδιάταξη των όρων, έρχεται στη μορφή

$$d(\Delta\Phi_i^*) = \lambda_i^* \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i^*}{\partial \mathbf{P}_i} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial \mathbf{Z}} \right) d\mathbf{Z} + \lambda_i^* \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i^*}{\partial \mathbf{P}_i} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial \mathbf{Y}_{ji}} \right) d\mathbf{Y}_{ji} \quad (4.25)$$

Τελικά, με απαλοιφή της παραμέτρου \mathbf{P} από την εξίσωση (4.25), η ολική παράγωγος ευαισθησίας των τοπικών αντικειμενικών συναρτήσεων ως προς τις συστημικές μεταβλητές εκφράζεται στη γενική μορφή

$$\frac{d}{d\mathbf{Z}}(\Delta\Phi_i^*) = \lambda_i^* \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i^*}{\partial \mathbf{Z}} \right) + \lambda_i^* \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i^*}{\partial \mathbf{Y}_{ji}} \right) \left(\frac{d\mathbf{Y}_{ji}}{d\mathbf{Z}} \right) \quad (4.26)$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (4.26) στην αρχική εξίσωση (4.15) για όλα τα πεδία ($i = 1, 2, 3$), προκύπτει η ζητούμενη ευαισθησία της συστημικής αντικειμενικής συνάρτησης

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mathbf{Z}}(F^*) = & + \frac{d}{d\mathbf{Z}}(F)_o + \left[\lambda_1^* \left(\frac{\partial \mathbf{G}_1^*}{\partial \mathbf{Z}} \right) + \lambda_1^* \left(\frac{\partial \mathbf{G}_1^*}{\partial \mathbf{Y}_{j1}} \right) \left(\frac{d\mathbf{Y}_{j1}}{d\mathbf{Z}} \right) \right] \\ & + \left[\lambda_2^* \left(\frac{\partial \mathbf{G}_2^*}{\partial \mathbf{Z}} \right) + \lambda_2^* \left(\frac{\partial \mathbf{G}_2^*}{\partial \mathbf{Y}_{j2}} \right) \left(\frac{d\mathbf{Y}_{j2}}{d\mathbf{Z}} \right) \right] \\ & + \left[\lambda_3^* \left(\frac{\partial \mathbf{G}_3^*}{\partial \mathbf{Z}} \right) + \lambda_3^* \left(\frac{\partial \mathbf{G}_3^*}{\partial \mathbf{Y}_{j3}} \right) \left(\frac{d\mathbf{Y}_{j3}}{d\mathbf{Z}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

όπου

$$\frac{d\mathbf{Y}_{j1}}{d\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{Y}_{21}}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{Y}_{31}}{d\mathbf{Z}} \end{bmatrix} \quad \frac{d\mathbf{Y}_{j2}}{d\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{Y}_{12}}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{Y}_{32}}{d\mathbf{Z}} \end{bmatrix} \quad \frac{d\mathbf{Y}_{j3}}{d\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{Y}_{13}}{d\mathbf{Z}} \\ \frac{d\mathbf{Y}_{23}}{d\mathbf{Z}} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

4.3.3 Σύγκριση των Εκδοχών

Η βασικότερη διαφορά των δύο εκδοχών βρίσκεται στον τρόπο υπολογισμού των ολικών παραγώγων $\frac{d\mathbf{Y}_{ji}}{d\mathbf{Z}}$. Η εκδοχή BLISS/B υπολογίζει αυτές τις παραγώγους στην ανάλυση ευαισθησίας του συστήματος μέσω της εξίσωσης (2.16), ενώ η εκδοχή BLISS/A στην ανάλυση ευαισθησίας βέλτιστων λύσεων μέσω της εξίσωσης (4.14).

Το σημαντικότερο πλεονέκτημα της εκδοχής BLISS/B είναι η απλούστερη υλοποίηση της έναντι της εκδοχής BLISS/A, καθώς αφαιρεί το υπολογιστικό κόστος ενός γραμμικού προγραμματισμού ανά παράμετρο \mathbf{Y}_{ji} και \mathbf{Z} [31], εξαιτίας της αποφυγής υπολογισμού των παραγώγων των \mathbf{X}_i^* . Για τον λόγο αυτό, η δεύτερη εκδοχή προτιμάται για μεγάλης διάστασης εφαρμογές, όπου το υπολογιστικό κόστος αποτελεί έναν αρκετά κρίσιμο παράγοντα. Από την άλλη, το συγκριτικό πλεονέκτημα της εκδοχής BLISS/A αποτελεί η γενικότητα της χρήσης της σε ένα μεγάλο εύρος διαφορετικών προβλημάτων και εφαρμογών. Συγκεκριμένα, η εκδοχή BLISS/B βασίζεται αποκλειστικά στην ύπαρξη μη-γραμμικών ενεργών περιορισμών, όπου οι πολλαπλασιαστές Lagrange δεν είναι μηδενικοί, ώστε να υπολογιστούν οι παράγωγοι ευαισθησίας. Δεν είναι λίγες, όμως, οι περιπτώσεις που οι περισσότεροι περιορισμοί, αν όχι όλοι, είναι ανενεργοί ($\lambda_i^* = 0$), εξαλείφοντας έτσι την επίδραση των παραγώγων στη συστημική βελτιστοποίηση. Τέλος, αφήνεται στην κρίση των μηχανικών να επιλέξουν εκείνη την εκδοχή που είναι περισσότερο κατάλληλη για τη συγκεκριμένη εφαρμογή.

4.4 Συστημική Βελτιστοποίηση

Στη συστημική βελτιστοποίηση επιδιώκεται περαιτέρω βελτίωση του σχεδιασμού μέσω του χειρισμού των συστημικών μεταβλητών σχεδιασμού \mathbf{Z} , αξιοποιώντας τις παραγώγους ευαισθησίας που προέκυψαν από την ανάλυση ευαισθησίας βέλτιστων λύσεων. Σε αυτό το στάδιο, οι τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{X} και οι μεταβλητές σύζευξης εισόδου \mathbf{Y}_{ji} στο i -πεδίο θεωρούνται σταθερές, ενώ βελτιστοποιείται η αντικειμενική συνάρτηση μόνο ως προς την επίδραση των συστημικών μεταβλητών.

Η συστημική αντικειμενική συνάρτηση, σύμφωνα με τις ολικές παραγώγους ευαισθησίας των βέλτιστων λύσεων από τις εξισώσεις (4.14) και (4.27) για τις εκδοχές BLISS/A και BLISS/B αντίστοιχα, προσεγγίζεται μέσω ανάντι διαφόρισης (forward differentiation) πρώτης τάξης για μικρή μεταβολή των συστημικών μεταβλητών.

$$\frac{dF^*}{d\mathbf{Z}} \approx \frac{F - (F)_o}{\mathbf{Z} - (\mathbf{Z})_o} + \mathcal{O}(Z) \quad (4.29)$$

όπου $(F)_o$ είναι η τρέχουσα τιμή της συστημικής αντικειμενικής συνάρτησης, όπως προκύπτει από τη συστημική ανάλυση.

Από την εξίσωση (4.29) η καθολικά βέλτιστη τιμή (global optimum) της συστημικής αντικειμενικής συνάρτησης λόγω της επίδρασης των συστημικών μεταβλητών υπολογίζεται από

$$F \approx (F)_o + \left(\frac{dF^*}{d\mathbf{Z}} \right) \Delta\mathbf{Z} \quad (4.30)$$

Επίσης, όμοια με τις υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις, θέτονται όρια στις συστημικές μεταβλητές σχεδιασμού ($\mathbf{Z}^L, \mathbf{Z}^U$), καθώς η εξίσωση (4.30) συνιστά μία ευθεία ως προς τις μεταβλητές \mathbf{Z} με σταθερή κλίση $\left(\frac{dF^*}{d\mathbf{Z}} \right)$ και χωρίς όρια στα \mathbf{Z} , η τιμή της απειρίζεται. Τέλος, προστίθενται μέγιστες επιτρεπόμενες μεταβολές των συστημικών μεταβλητών ($\Delta\mathbf{Z}^L, \Delta\mathbf{Z}^U$) για τη δημιουργία ομαλότερων συνθηκών σύγκλισης.

Συνεπώς, όλα τα παραπάνω μπορούν να συνοψισθούν στην ακόλουθη μορφή

Συστημική Βελτιστοποίηση	
<i>Given</i>	$(\mathbf{Z})_o \quad (F)_o \quad \left(\frac{dF^*}{d\mathbf{Z}} \right)$
<i>Minimize</i>	$F = (F)_o + \left(\frac{dF^*}{d\mathbf{Z}} \right) (\mathbf{Z} - (\mathbf{Z})_o)$
<i>with respect to</i>	\mathbf{Z}
<i>subject to</i>	$(\mathbf{G}_i)_\mathbf{Z} \leq 0$
	$(\mathbf{h}_i)_\mathbf{Z} = 0$
	$\mathbf{Z}^L \leq \mathbf{Z} \leq \mathbf{Z}^U$
	$\Delta\mathbf{Z}^L \leq \Delta\mathbf{Z} \leq \Delta\mathbf{Z}^U$

όπου οι περιορισμοί $(\mathbf{G}_i)_\mathbf{Z}$ και $(\mathbf{h}_i)_\mathbf{Z}$ είναι οι περιορισμοί ανισότητας και ισότητας αντίστοιχα, οι οποίοι αποτελούν ένα υποσύνολο των τοπικών περιορισμών \mathbf{G}_i και \mathbf{h}_i , το οποίο δεν εξαρτάται από τις τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{X}_i , παρα μόνο από τις συστημικές μεταβλητές \mathbf{Z} .

Αυτού του είδους οι περιορισμοί ονομάζονται συστημικοί περιορισμοί και προφανώς δεν μπορούν να ικανοποιηθούν μεταβάλλοντας τις τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού στις υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις. Συνεπώς, ελέγχονται αποκλειστικά στο συστημικό επίπεδο, ενώ επιδρούν σημαντικά στην ανάλυση ευαισθησίας των βέλτιστων λύσεων για την εκδοχή BLISS/B. Κατά αυτό τον τρόπο, εξασφαλίζεται η ικανοποίησή τους και κατ' επέκταση ότι η τελική λύση (global optimum) θα είναι υλοποιήσιμη (feasible).

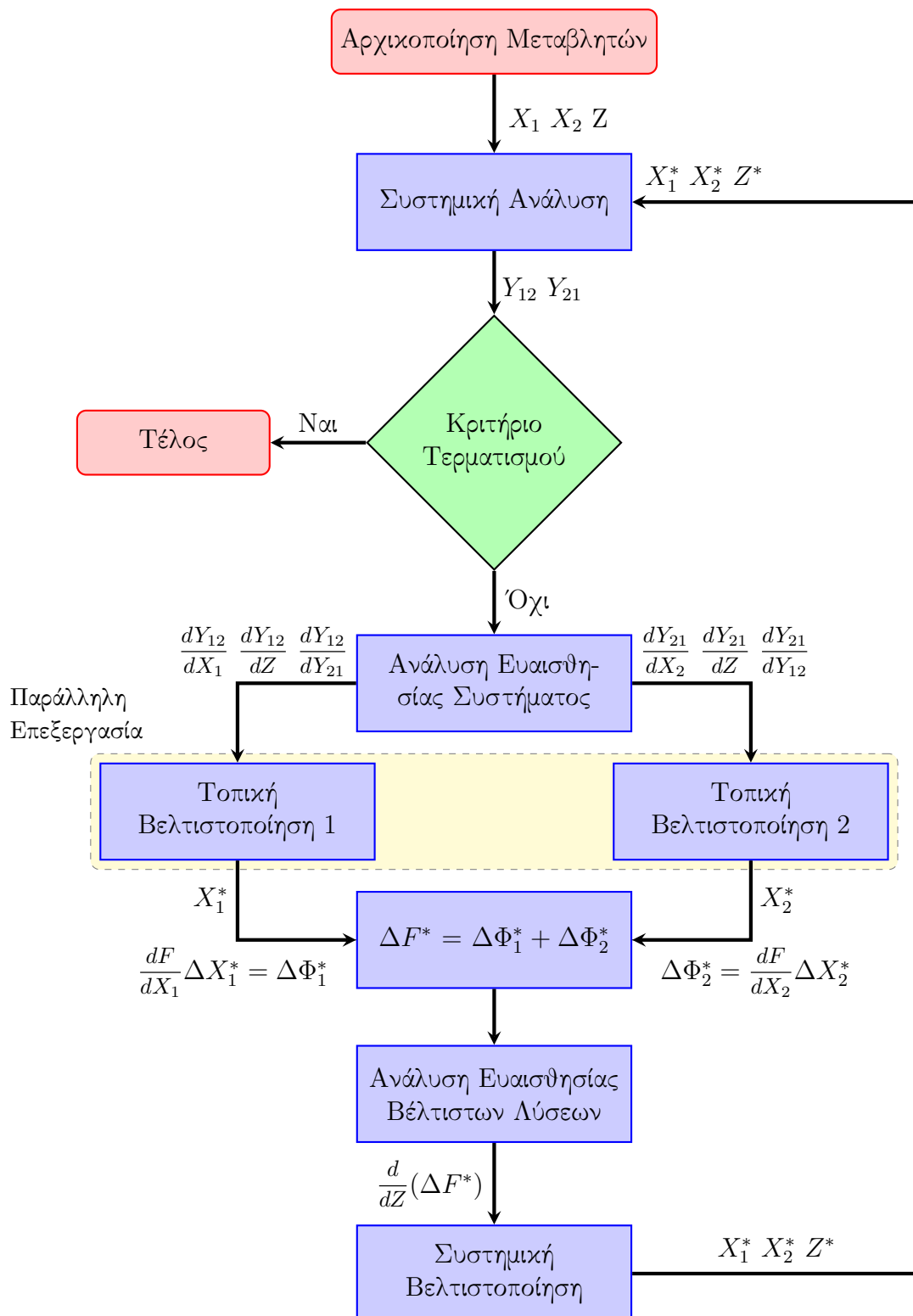
Αντίστοιχα με την εξίσωση (4.6) των υποσυστημικών βελτιστοποιήσεων, το ολικό διαφορικό των συστημικών περιορισμών για πεπερασμένες μεταβολές των \mathbf{Z} είναι

$$\Delta(\mathbf{G}_i)_{\mathbf{z}} = \left(\frac{\partial(\mathbf{G}_i)_{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} \right) \Delta \mathbf{z} + \left(\frac{\partial(\mathbf{G}_i)_{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{Y}_{ji}} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{Y}_{ji}}{\partial \mathbf{z}} \right) \Delta \mathbf{z} \quad (4.31)$$

όπου οι παράγωγοι ευαισθησίας των περιορισμών ως προς τις μεταβλητές σύζευξης \mathbf{Y}_{ji} και σχεδιασμού \mathbf{z} έχουν υπολογιστεί από την ανάλυση ευαισθησίας του συστήματος και θεωρούνται σταθερές για ένα κύκλο της μεθόδου.

Στο τέλος της συστημικής βελτιστοποίησης προκύπτουν οι βέλτιστες τιμές των συστημικών μεταβλητών \mathbf{z}^* και σε συνδυασμό με τις τοπικά βέλτιστες τιμές \mathbf{X}^* από τις υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις, χρησιμοποιούνται για την εκκίνηση μιας νέας επανάληψης της μεθόδου. Στην αρχή της επανάληψης, εκτελείται η συστημική ανάλυση, η οποία αξιολογεί τα αποτελέσματα των επιμέρους βελτιστοποιήσεων και επιτρέπει τον τερματισμό της συνολικής διαδικασίας βελτιστοποίησης, όποτε το απαιτούν το υπολογιστικό κόστος και οι χρονικοί περιορισμοί. Μάλιστα, στην περίπτωση πρόωρης διακοπής, χρησιμοποιούνται τα δεδομένα (μεταβλητές σύζευξης και σχεδιασμού) από την προηγούμενη συστημική ανάλυση, ώστε να συνεχίσει η βελτιστοποίηση από το σημείο που διακόπηκε και να εξοικονομηθεί υπολογιστικός χρόνος. Τελικά, η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι ικανοποίησης ενός κριτηρίου τερματισμού, το οποίο συνήθως εξασφαλίζει τη σταθεροποίηση (σύγκλιση) της συστημικής αντικειμενικής συνάρτησης F μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων της μεθόδου.

Καταληκτικά, η μέθοδος δημιουργεί μία διαδρομή καθοδηγούμενη από παραγώγους (gradient-guided path), εναλλάσσοντας μεταξύ του συνόλου των τοπικών μεταβλητών και των συστημικών μεταβλητών σχεδιασμού. Κάθε τμήμα της διαδρομής έχει ως αποτέλεσμα ένα βελτιωμένο σημείο σχεδιασμού, ώστε εάν κανείς αρχίσει από ένα αποδεκτό (feasible) σημείο σχεδιασμού, να διατηρείται η ικανοποίηση των τοπικών περιορισμών (feasibility), καθώς η συστημική αντικειμενική συνάρτηση μειώνεται. Αντιθέτως, στην περίπτωση ενός αρχικού μη-αποδεκτού (infeasible) σημείου σχεδιασμού, οι παραβιάσεις στους περιορισμούς μειώνονται ενώ ελαχιστοποιείται ο ρυθμός αύξησης της συστημικής αντικειμενικής συνάρτησης.



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα ροής του αλγορίθμου BLISS/B σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με δύο επιστημονικά πεδία.

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογή στο Πρόβλημα της Ανθρώπινης Καρδιάς

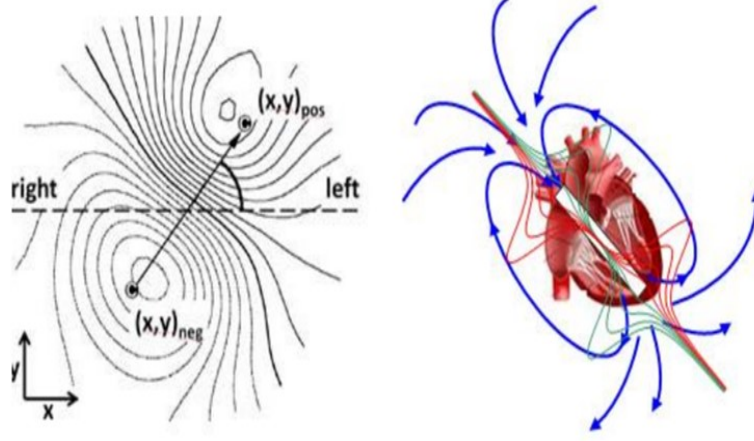
5.1 Περιγραφή του Προβλήματος

5.1.1 Αρχικό Πρόβλημα

Το συγκεκριμένο πρόβλημα βασίζεται σε πειράματα που χρησιμοποιούν δύο τεχνητά δίπολα (ηλεκτρόδια) πάνω σε ένα κυκλικό δίσκο, ώστε να προσδιορίσουν τη μαγνητική διπολική ροπή (dipole moment) της ανθρώπινης καρδιάς. Η διπολική ροπή είναι εκείνη που ευθύνεται για τους καρδιακούς παλμούς και ο προσδιορισμός της οδηγεί σε πιο αξιόπιστα αποτελέσματα ενός ηλεκτροκαρδιογραφήματος (ECG). Συγκεκριμένα, μετρούνται οι διαφορές δυναμικών (potential) μεταξύ των ηλεκτροδίων γύρω από το σύνορο του δίσκου και χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Gabor-Nelson [50, 51] για τον καθορισμό του μέτρου της μαγνητικής διπολικής ροπής, αλλά και της τοποθεσίας των δύο ανεξάρτητων δίπολων πάνω στο δίσκο (Πίνακας (5.2)). Η λύση στο πρόβλημα μέσω συμβατικών μεθόδων [52] προκύπτει από την επίλυση ενός συνόλου μη-γραμμικών εξισώσεων με 8 αγνώστους, χρησιμοποιώντας 8 παραμέτρους – οι οποίες είναι αποτέλεσμα μετρήσεων – και τις μαθηματικές εκφράσεις των εξισώσεων (5.1) - (5.8). Τέλος, το πρόβλημα αυτό είναι μια απλοποιημένη μαθηματικά εκδοχή ενός πραγματικού προβλήματος (Σχήμα (5.1)), του οποίου η λύση είναι γνωστή και χρησιμοποιείται συχνά στο πεδίο MDO, με σκοπό να ελέγξει τη λειτουργικότητα μεθόδων και υλοποιήσεων.

Στο πρόβλημα αυτό, ζητούμενο είναι η αριθμητική επίλυση ενός συστήματος 8 μη-γραμμικών εξισώσεων με 8 αγνώστους (αρχικό πρόβλημα). Ουσιαστικά δεν υφίσταται πρόβλημα βελτιστοποίησης με την αυστηρή έννοια του όρου. Προκειμένου να δοκιμαστεί, όμως, η υλοποίηση της μεθόδου BLISS/B, η επίλυση του συστήματος μετουσιώνεται τεχνητά σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης (επαναδιατύπωση του προβλήματος),

στην ίδια λογική με την οποία η επίλυση της $f(x) = 0$ ως προς x μπορεί να αντιμετωπισθεί ως η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης $F = f(x)^2$.



Σχήμα 5.1: Το μοντέλο της ανθρώπινης καρδιάς ως μαγνητικό δίπολο [53].

$$f_1 = x_1 + x_2 - d_{mx} = 0 \quad (5.1)$$

$$f_2 = x_3 + x_4 - d_{my} = 0 \quad (5.2)$$

$$f_3 = x_5x_1 + x_6x_2 - x_7x_3 - x_8x_4 - d_A = 0 \quad (5.3)$$

$$f_4 = x_7x_1 + x_8x_2 + x_5x_3 + x_6x_4 - d_B = 0 \quad (5.4)$$

$$f_5 = x_1(x_5^2 - x_7^2) - 2x_3x_5x_7 + x_2(x_6^2 - x_8^2) - 2x_4x_6x_8 - d_C = 0 \quad (5.5)$$

$$f_6 = x_3(x_5^2 - x_7^2) + 2x_1x_5x_7 + x_4(x_6^2 - x_8^2) + 2(x_2x_6x_8) - d_D = 0 \quad (5.6)$$

$$f_7 = x_1x_5(x_5^2 - 3x_7^2) + x_3x_7(x_7^2 - 3x_5^2) + x_2x_6(x_6^2 - 3x_8^2) + x_4x_8(x_8^2 - 3x_6^2) - d_E = 0 \quad (5.7)$$

$$f_8 = x_3x_5(x_5^2 - 3x_7^2) - x_1x_7(x_7^2 - 3x_5^2) + x_4x_6(x_6^2 - 3x_8^2) - x_2x_8(x_8^2 - 3x_6^2) - d_F = 0 \quad (5.8)$$

όπου οι $\{d_{mx} \ d_{my} \ d_A \ d_B \ d_C \ d_D \ d_E \ d_F\}$ προσδιορίζονται πειραματικά και αποτελούν τις παραμέτρους του προβλήματος, οι οποίες θεωρούνται ως σταθερές κατά την εκτέλεση της μεθόδου. Για τη συγκεκριμένη υλοποίηση της μεθόδου BLISS/B, χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές του Πίνακα (5.1). Επίσης, οι μεταβλητές x δηλώνουν το μέτρο της μαγνητικής διπολικής ροπής και την τοποθεσία των δύο διπόλων (ηλεκτροδίων) κατά τον οριζόντιο και τον κάθετο άξονα (Πίνακας (5.2)).

Παράμετρος	Τιμή	Παράμετρος	Τιμή
d_{mx}	0.485	d_C	0.105
d_{my}	-0.0019	d_D	0.0406
d_A	-0.581	d_E	0.167
d_B	0.015	d_F	-0.399

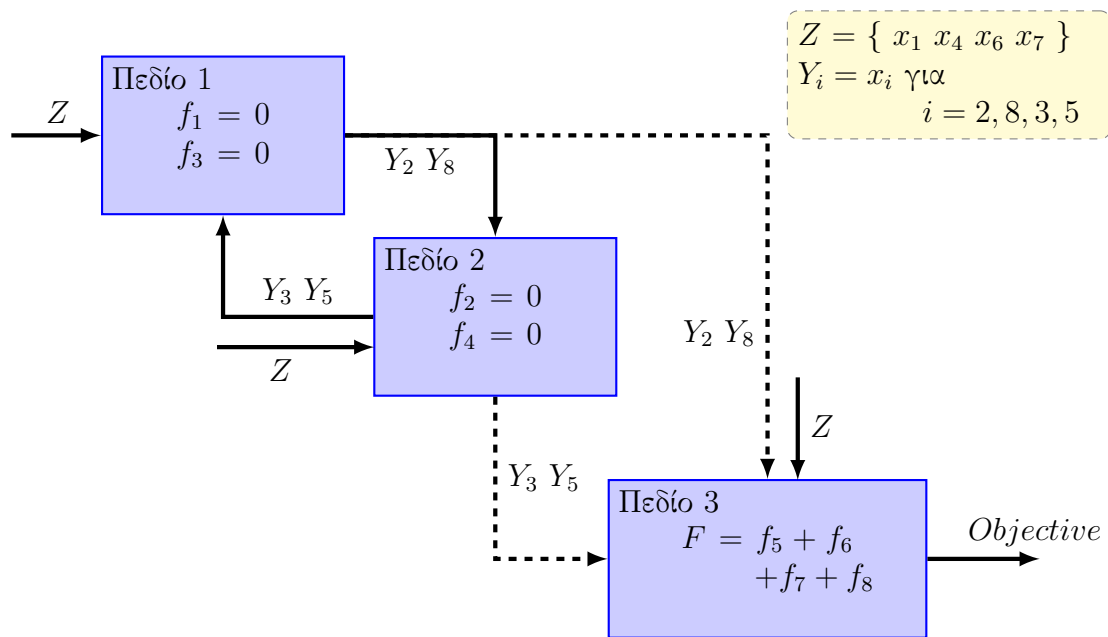
Πίνακας 5.1: Ορισμός των παραμέτρων του προβλήματος (πειραματικές μετρήσεις)

Μεταβλητή	Περιγραφή
x_1	Μέτρο μαγνητικής διπολικής ροπής ως προς τον x -άξονα (M_x) για το δίπολο 1
x_2	Μέτρο μαγνητικής διπολικής ροπής ως προς τον x -άξονα (M_x) για το δίπολο 2
x_3	Μέτρο μαγνητικής διπολικής ροπής ως προς τον y -άξονα (M_y) για το δίπολο 1
x_4	Μέτρο μαγνητικής διπολικής ροπής ως προς τον y -άξονα (M_y) για το δίπολο 2
x_5	Συντεταγμένη του διπόλου 1 στον x -άξονα
x_6	Συντεταγμένη του διπόλου 2 στον x -άξονα
x_7	Συντεταγμένη του διπόλου 1 στον y -άξονα
x_8	Συντεταγμένη του διπόλου 2 στον y -άξονα

Πίνακας 5.2: Περιγραφή της φυσικής ερμηνείας των μεταβλητών του συστήματος

5.1.2 Επαναδιατύπωση του Προβλήματος

Επειδή αυτά τα δίπολα θεωρούνται ως δύο αυτόνομα υποσυστήματα, το πρόβλημα μπορεί να μετατραπεί σε ένα πρόβλημα διατομεακής βελτιστοποίησης, όπως φαίνεται στο Σχήμα (5.2). Το αρχικό πρόβλημα επαναδιατυπώνεται, ώστε να περιλαμβάνει δύο επεξεργασμένα αλληλεπιδρώντα πεδία που εμπλέκουν τις πρώτες τέσσερις εξισώσεις του συστήματος (5.1)-(5.4), και ένα τρίτο πεδίο που περιέχει τις υπόλοιπες τέσσερις εξισώσεις.



Σχήμα 5.2: Σχεδιάγραμμα της επαναδιατύπωσης του αρχικού συστήματος σε ένα πρόβλημα MDO. Τα πεδία 1 και 2 ανταλλάσσουν δεδομένα μεταξύ τους αλλά και με το πεδίο 3, ενώ το πεδίο 3 δέχεται μόνο δεδομένα και υπολογίζει τις αντίστοιχες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης (F).

Τα πρώτα δύο πεδία αναλαμβάνουν να επιλύσουν ένα σύστημα εξισώσεων 2×2 , ενώ το τρίτο πεδίο να υπολογίσει ξεχωριστά τις τιμές των εξισώσεων f_5, f_6, f_7, f_8 με αντικατάσταση των δεδομένων από τα υπόλοιπα πεδία. Οι τιμές αυτών των εξισώσεων θα είναι διάφορες του μηδενός (υπόλοιπα), καθώς δεν επιλύονται αλλά υπολογίζονται. Ελαχιστοποίηση των υπολοίπων από τη μέθοδο BLISS/B υπό τους περιορισμούς αυτά να είναι μη-αρνητικά (≥ 0), θα οδηγήσει στην ικανοποίηση των αντίστοιχων εξισώσεων και στη συνεπακόλουθη επίλυση όλου του συστήματος. Το μέγεθος F (άθροισμα υπολοίπων) θα αποτελέσει, λοιπόν, την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος βελτιστοποίησης.

Επίσης, για την αποσύνθεση του προβλήματος, επιλέγονται οι μεταβλητές σχεδιασμού και στη συνέχεια εκφράζονται οι μεταβλητές σύζευξης ως προς αυτές τις μεταβλητές σχεδιασμού. Επιλέγησαν οι μεταβλητές x_1, x_4, x_6, x_7 ως μεταβλητές σχεδιασμού εξαιτίας της εύκολης έκφρασης των μεταβλητών σύζευξης ως προς εκείνες από τις πρώτες

τέσσερις εξισώσεις. Τελικά, εφόσον όλες οι μεταβλητές σχεδιασμού φαίνεται να συμμετέχουν σε αρκετές (αν όχι όλες) από τις εξισώσεις, πρέπει να κατηγοριοποιηθούν ως κοινές μεταβλητές σχεδιασμού.

Για τη διατήρηση των συμβολισμών που έχουν προταθεί στον Πίνακα (1.1), κρίνεται αναγκαίο οι μεταβλητές x_k των εξισώσεων (5.1) – (5.8) που δηλώνουν σύζευξη μεταξύ των πεδίων, να συμβολίζονται με Y , ενώ εκείνες που αποτελούν τις κοινές μεταβλητές σχεδιασμού, με Z . Τέλος, για την αποφυγή σύγχυσης, οι δείκτες των μεταβλητών διατηρούνται όπως παρουσιάζονται στις αρχικές εξισώσεις. Αυτό σημαίνει ότι οι μεταβλητές σύζευξης και σχεδιασμού, εδώ, δεν είναι διανύσματα, αλλά μεμονωμένες τιμές.

Ανάλυση 1

Το πρώτο πεδίο ορίζεται από την επίλυση των εξισώσεων (5.1) και (5.3) ως προς τις μεταβλητές x_2 και x_8 , οι οποίες αποτελούν τις μεταβλητές σύζευξης του πεδίου και συνεπώς συμβολίζονται ως Y_2 και Y_8 (μεμονωμένες τιμές) αντίστοιχα.

$$Y_2 = x_2 = d_{mx} - Z_1 \quad (5.9)$$

$$Y_8 = x_8 = \frac{(Y_5 Z_1 + Z_6 Y_2 - Z_7 Y_3 - d_A)}{Z_4} \quad (5.10)$$

όπου Y_5 και Y_3 είναι οι μεταβλητές σύζευξης που λαμβάνονται από το δεύτερο πεδίο, ενώ οι μεταβλητές Z είναι οι κοινές μεταβλητές σχεδιασμού.

Συνοπτικά, η πρώτη ανάλυση μπορεί να διατυπωθεί με ένα σύνολο σειριακών εντολών.

Ανάλυση 1: Περιγραφή	
<i>Given</i>	$Z_1 \ Z_4 \ Z_6 \ Z_7 \ Y_3 \ Y_5$
<i>Compute</i>	Y_2 και Y_8
<i>such that</i>	$f_1 = 0$ και $f_3 = 0$

Ανάλυση 2

Για τη διατύπωση του δεύτερου πεδίου, επιλύονται οι εξισώσεις (5.2) και (5.4) ως προς τις μεταβλητές x_3 και x_5 αντίστοιχα,

$$Y_3 = x_3 = d_{my} - Z_4 \quad (5.11)$$

$$Y_5 = x_5 = \frac{(d_B - Z_7 Z_1 - Y_8 Y_2 - Z_6 Z_4)}{Y_3} \quad (5.12)$$

Ανάλυση 2: Περιγραφή

Given $Z_1 Z_4 Z_6 Z_7 Y_2 Y_8$

Compute Y_3 και Y_5

such that $f_2 = 0$ και $f_4 = 0$

Ανάλυση 3

Τέλος, για το τρίτο πεδίο υπολογίζονται οι τιμές των εξισώσεων (5.5) έως (5.8) με αντικατάσταση των δεδομένων από τα υπόλοιπα πεδία, ενώ στη συνέχεια αθροίζονται οι τιμές τους (άθροισμα υπολοίπων).

Για λόγους κατανόησης, οι αρχικές εξισώσεις επαναδιατυπώνονται με τους νέους συμβολισμούς των μεταβλητών στις εξισώσεις (5.13) - (5.16).

$$f_5 = Z_1(Y_5^2 - Z_7^2) - 2Y_3Y_5Z_7 + Y_2(Z_6^2 - Y_8^2) - 2Z_4Z_6Y_8 - d_C \quad (5.13)$$

$$f_6 = Y_3(Y_5^2 - Z_7^2) + 2Z_1Y_5Z_7 + Z_4(Z_6^2 - Y_8^2) + 2(Y_2Z_6Y_8) - d_D \quad (5.14)$$

$$f_7 = Z_1Y_5(Y_5^2 - 3Z_7^2) + Y_3Z_7(Z_7^2 - 3Y_5^2) + Y_2Z_6(Z_6^2 - 3Y_8^2) + Z_4Y_8(Y_8^2 - 3Z_6^2) - d_E \quad (5.15)$$

$$f_8 = Y_3Y_5(Y_5^2 - 3Z_7^2) - Z_1Z_7(Z_7^2 - 3Y_5^2) + Z_4x_6(x_6^2 - 3Y_8^2) - Y_2Y_8(Y_8^2 - 3Z_6^2) - d_F \quad (5.16)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η τρίτη ανάλυση διατυπώνεται ως ακολούθως

Ανάλυση 3: Περιγραφή

Given $Z_1 Z_4 Z_6 Z_7 Y_2 Y_8 Y_3 Y_5$

Compute $f_5 f_6 f_7 f_8$ από (5.13) - (5.16)

Compute $F = f_5 + f_6 + f_7 + f_8$

Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

Η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος υπολοίπων F θα αποτελέσει την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος βελτιστοποίησης υπό τους περιορισμούς τα υπόλοιπα (f_5, f_6, f_7, f_8) να είναι μη-αρνητικά (≥ 0). Ενώ, η ελάχιστη τιμή της (μηδενική τιμή) θα αποτελέσει τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (5.1)-(5.8).

Όπως έχει περιγραφεί στο Κεφάλαιο § 4, η μέθοδος BLISS/B διαχειρίζεται τη βελτιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, όχι άμεσα όπως στις συμβατικές μεθόδους αλλά μέσω της γραμμικοποίησής αυτής με χρήση παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Αυτές οι παράγωγοι υπολογίζονται στην ανάλυση ευαισθησίας του συστήματος και η τιμή τους θεωρείται σταθερή κατά τη βελτιστοποίηση.

Επίσης, επειδή δεν υπάρχουν τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{X} , στο συγκεκριμένο πρόβλημα, δεν πραγματοποιείται καμία υποσυστημική βελτιστοποίηση ούτε ανάλυση ευαισθησίας βέλτιστων λύσεων. Βελτίωση στην αντικειμενική συνάρτηση προκύπτει μόνο από τη συνεισφορά της συστημικής βελτιστοποίησης (ανώτερο επίπεδο), χειρίζοντας το διάνυσμα των κοινών μεταβλητών σχεδιασμού \mathbf{Z} . Το πρόβλημα βελτιστοποίησης διατυπώνεται, συνεπώς, ως ακολούθως

$$\begin{array}{l} \text{Συστημική Βελτιστοποίηση} \\ \hline \textit{Given} \quad (F)_o \quad (\mathbf{Z})_o \quad \frac{dF}{d\mathbf{Z}} \\ \textit{Minimize} \quad F = (F)_o + \frac{dF}{d\mathbf{Z}}(\mathbf{Z} - (\mathbf{Z})_o) \\ \textit{with respect to} \quad \mathbf{Z} \\ \textit{subject to} \quad f_5 \geq 0 \quad f_6 \geq 0 \\ \quad \quad \quad f_7 \geq 0 \quad f_8 \geq 0 \\ \quad \quad \quad -0.05 \leq \Delta\mathbf{Z} \leq 0.05 \end{array}$$

όπου $(F)_o$ είναι η τρέχουσα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, όπως προέκυψε από τη συστημική ανάλυση, $(\mathbf{Z})_o$ είναι το **διάνυσμα** όλων των μεταβλητών σχεδιασμού στο τρέχον σημείο σχεδιασμού, δηλαδή ισχύει $\mathbf{Z} = [Z_1 \ Z_4 \ Z_6 \ Z_7]$. Ενώ προστίθενται μέγιστες επιτρεπόμενες μεταβολές $\Delta\mathbf{Z}$ στις μεταβλητές σχεδιασμού, ώστε να αποτρέψουν τον απειρισμό της αντικειμενικής συνάρτησης και να δημιουργήσουν ομαλότερες συνθήκες σύγκλισης.

5.2 Επίλυση του Συστήματος και Αποτελέσματα

5.2.1 Αναλυτική Λύση

Το αρχικό σύστημα των εξισώσεων, φυσικά και μπορεί να λυθεί με μια επαναληπτική αριθμητική μέθοδο, ωστόσο οι Morgan et al. [54] επεδίωξαν να το προσεγγίσουν μέσω μαθηματικής ανάλυσης. Συγκεκριμένα, στη δημοσίευσή τους έδειξαν ότι η επίλυση του παραπάνω συστήματος μπορεί να αναχθεί στην επίλυση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

$$k_1x^2 - k_1k_5x + (k_2k_5 - k_3) = 0 \quad (5.17)$$

όπου οι σταθερές k_1 έως k_5 αποτελούνται από όλες τις παραμέτρους του προβλήματος – σε μιγαδική μορφή – και ορίζονται σύμφωνα με το Πίνακα (5.3), ενώ η μεταβλητή x είναι ένας μιγαδικός αριθμός της μορφής, $x = a + bi$. Το i είναι η φανταστική μονάδα και ισούται με $\sqrt{-1}$, ενώ οι μεταβλητές a και b αποτελούν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των λύσεων.

Σταθερά	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
Εξίσωση	$d_{mx} + id_{my}$	$d_A + id_B$	$d_C + id_D$	$d_E + id_F$	$\frac{k_1k_4 - k_2k_3}{k_1k_3 - k_2^2}$

Πίνακας 5.3: Ορισμός των σταθερών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Από την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης προκύπτουν δύο λύσεις, x_1, x_2 – σε μιγαδική μορφή – οι οποίες χρησιμοποιούνται, στη συνέχεια, για την εύρεση των μεταβλητών των εξισώσεων (5.1) - (5.8) μέσω της πίσω αντικατάστασης (back substitution) στις ακόλουθες εξισώσεις.

$$\begin{aligned} y_4 &= x \\ y_3 &= -y_4 + k_5 \\ y_2 &= \frac{k_2 - k_1y_3}{y_4 - y_3} \\ y_1 &= -y_2 + k_1 \end{aligned}$$

Τελικά, αυτές οι εξισώσεις εμπλέκουν μιγαδικούς αριθμούς, των οποίων το πραγματικό και το φανταστικό μέρος συνιστούν το σύνολο των αγνώστων μεταβλητών του συστήματος. Συγκεκριμένα, ισχύουν οι σχέσεις

$$y_1 = x_1 + ix_3 \quad (5.18)$$

$$y_2 = x_2 + ix_4 \quad (5.19)$$

$$y_3 = x_5 + ix_7 \quad (5.20)$$

$$y_4 = x_6 + ix_8 \quad (5.21)$$

Για την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές των παραμέτρων από τον Πίνακα (5.1). Ενώ οι αναλυτικές λύσεις που προέκυψαν παρουσιάζονται στον Πίνακα (5.4),

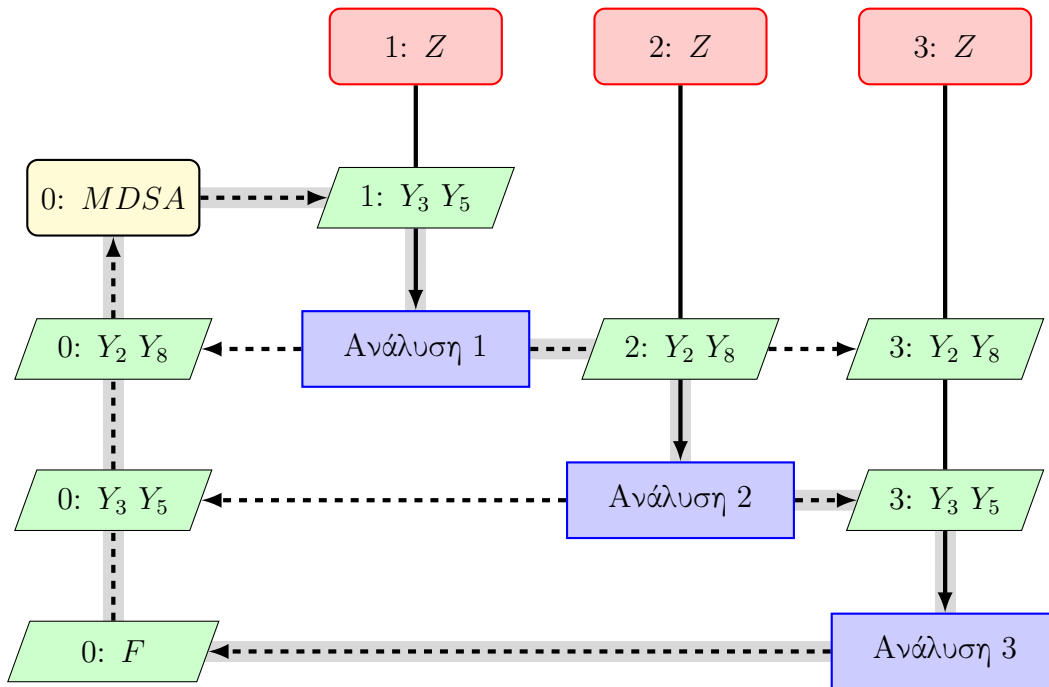
Πίνακας 5.4: Αναλυτικές λύσεις από την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Μεταβλητή	Τιμή	Μεταβλητή	Τιμή
x_1	0.41884	x_5	-0.66383
x_2	0.06616	x_6	0.10042
x_3	-0.20434	x_7	-0.49865
x_4	0.20244	x_8	1.02610

Οι λύσεις μπορούν να επιβεβαιωθούν και με αριθμητική επίλυση του συστήματος των εξισώσεων, ωστόσο χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στην επιλογή του αρχικού σημείου λόγω της ύπαρξης δύο λύσεων. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε η υπορουτίνα 'fsolve' της MATLAB, η οποία εφάρμοσε τον αλγόριθμο των Levenberg-Marquardt [55, 56], ο οποίος βασίζεται στις τεχνικές των μη-γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων (non-linear least squares) και της ανίχνευσης κατά γραμμής (line search). Μάλιστα, εκείνος κατέληξε στο ίδιο αποτέλεσμα με τις αναλυτικές λύσεις μετά από 14 επαναλήψεις.

5.2.2 Βέλτιστη Λύση

Η βέλτιστη λύση στο MDO πρόβλημα προέκυψε από την εφαρμογή της μεθόδου BLISS/B που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο §4. Πρωτίστως, για τη σταθεροποίηση των τιμών των μεταβλητών σύζευξης με δεδομένες τις μεταβλητές σχεδιασμού Z , εκτελείται η συστημική ανάλυση με τον αλγόριθμο Gauss-Seidel (βλ. §2.1.2) για το συγκεκριμένο πρόβλημα (Σχήμα (5.2)).



Σχήμα 5.3: Αναπαράσταση της εκτέλεσης της συστημικής ανάλυσης με τον αλγόριθμο Gauss-Seidel (βλ. §2.1.2). Το μητρώο XDSM (βλ. §2.2) δημιουργείται με τέτοιο τρόπο, ώστε στις στήλες του να εμφανίζονται όλες οι εισοδοί (συνεχόμενο βέλος) σε ένα πεδίο, ενώ στις γραμμές του, όλες οι έξοδοι (διακεκομμένο βέλος) από ένα πεδίο. Οι δείκτες $0 \rightarrow 3$ αναφέρονται τόσο στην ακολουθία (γκρι χρώμα) εκτέλεσης των πεδίων (αναλύσεις), όσο και στον χρόνο στον οποίο εισάγονται τα δεδομένα στις αναλύσεις. Οι έξοδοι των αναλύσεων αποτελούν τις ανανεωμένες τιμές των μεταβλητών σύζευξης, οι οποίες τροφοδοτούνται στην επόμενη επανάληψη (κουτί MDSA) μέχρι ικανοποίησης ενός κριτηρίου σύγκλισης.

Σε κάθε κύκλο της μεθόδου, το νέο σημείο σχεδιασμού καθοδηγείται από το λογισμικό βελτιστοποίησης με χρήση παραγώγων ευαισθησίας. Η ανάλυση ευαισθησίας που πραγματοποιήθηκε είναι εκείνη που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο §2, επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων GSE. Ενώ, οι μερικές παράγωγοι των μεταβλητών σύζευξης υπολογίστηκαν με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών πρώτης τάξεως με βήμα 10^{-3} . Κατά αυτόν τον τρόπο, η μέθοδος BLISS/B παράγει βελτιώσεις (μειώσεις) στην αντικειμενική συνάρτηση, οι οποίες τροφοδοτούνται στη συστημική ανάλυση σε κάθε κύκλο, ώστε να υπολογιστούν οι αντίστοιχες ανανεωμένες τιμές των μεταβλητών σύζευξης. Τελικά, η αντικειμενική συνάρτηση θα μειωθεί σε μια θετική τιμή αρκε-

τά κοντά στο μηδέν, η οποία καθορίζεται από την ανοχή του κριτηρίου τερματισμού (convergence tolerance). Στην εφαρμογή αυτή, ως κριτήριο τερματισμού, τέθηκε το σχετικό σφάλμα μεταξύ δύο διαδοχικών κύκλων της μεθόδου να είναι

$$\epsilon_r = \frac{|F^{(k+1)} - F^{(k)}|}{F^{(k)}} \leq 10^{-7}$$

Χρησιμοποιώντας ως αρχικό σημείο

$$x_o = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 0.8 & 0.57 & 0.67 & 0.8 & 4.3 & 0.6 & -1.2 & 2.87 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

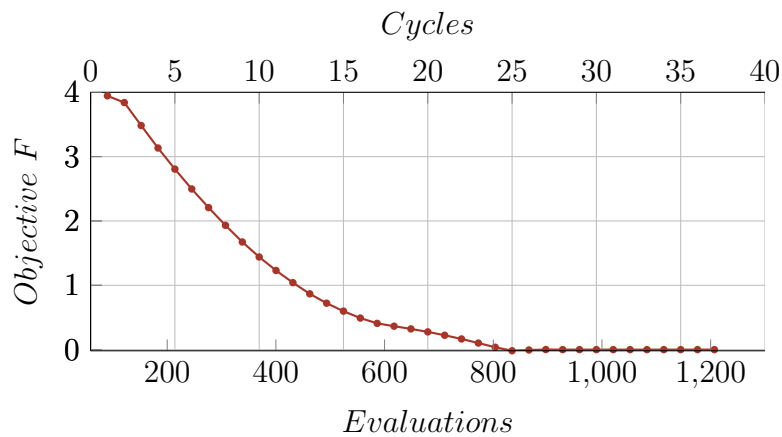
ο αλγόριθμος συνέκλινε στους 37 κύκλους με 1301 συνολικές αξιολογήσεις όλων των πεδίων.

Επειδή δεν υπάρχουν τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{X} και τυχαίνει, εδώ, να συμπίπτει ο αριθμός των μεταβλητών σύζευξης των δύο πρώτων πεδίων (Ανάλυση 1 και 2), οι αξιολογήσεις για το καθένα πεδίο σε κάθε κύκλο της μεθόδου είναι **ίδιες**.

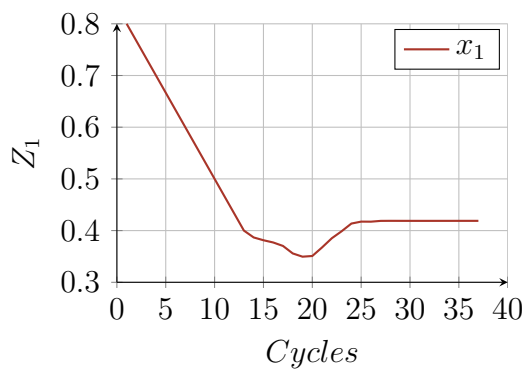
Συγκεκριμένα, με χρήση της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών για τον υπολογισμό των παραγώγων, τα δύο πρώτα πεδία απαιτούν 6 (2 μετ. σύζευξης εισόδου στο πεδίο + 4 μετ. σχεδιασμού) αξιολογήσεις ανά κύκλο της μεθόδου, ενώ το τρίτο πεδίο απαιτεί 8 (4 μετ. σύζευξης εισόδου στο πεδίο + 4 μετ. σχεδιασμού) αξιολογήσεις. Συνολικά, δηλαδή, απαιτούνται 20 ($2 \times 6 + 8$) αξιολογήσεις όλων των πεδίων ανά κύκλο της μεθόδου μόνο για την ανάλυση ευαισθησίας, ενώ οι υπόλοιπες αξιολογήσεις οφείλονται στη συστημική ανάλυση, όπου όλα τα πεδία εκτελούνται τις ίδιες φορές.

Είναι φανερό ότι, εάν είχε χρησιμοποιηθεί μια περισσότερο αποδοτική μέθοδος υπολογισμού των παραγώγων, όπως η συζυγής (adjoint) μέθοδος, θα είχε μειωθεί σημαντικά το κόστος ανά κύκλο. Συγκεκριμένα, έχει υπολογιστεί ότι οι αξιολογήσεις ανά κύκλο για το πρώτο πεδίο ανέρχονται στις 3 (2 για τις $Y_3, Y_5 + 1$ για όλες τις \mathbf{Z}), για το δεύτερο πεδίο επίσης στις 3 (2 για τις $Y_2, Y_8 + 1$ για όλες τις \mathbf{Z}), ενώ τελικά, για το τρίτο πεδίο στις 5 (4 για τις $Y_2, Y_8, Y_3, Y_5 + 1$ για όλες τις \mathbf{Z}). Συνολικά, δηλαδή, απαιτούνται 11 αξιολογήσεις ανά κύκλο της μεθόδου μόνο για την ανάλυση ευαισθησίας, μειώνοντας σχεδόν στο μισό το υπολογιστικό κόστος συγκριτικά με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

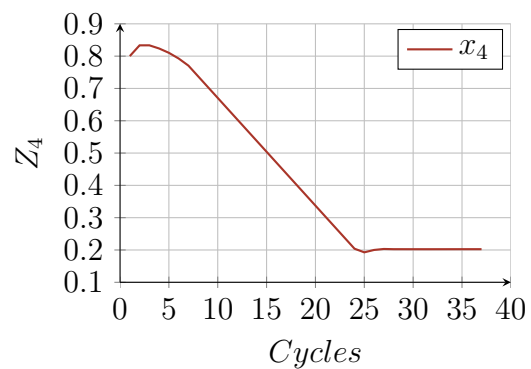
Στα σχήματα (5.4) και (5.5) - (5.6), παρουσιάζονται τα διαγράμματα ιστορικού της αντικειμενικής συνάρτησης και των μεταβλητών σχεδιασμού αντίστοιχα.



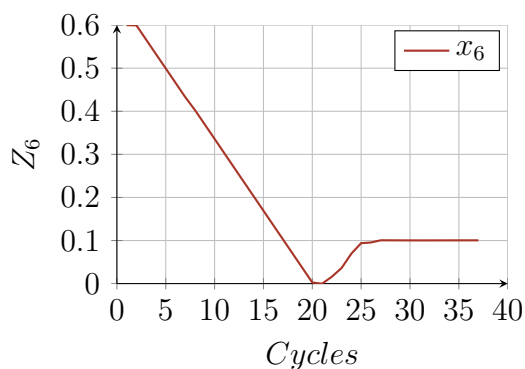
Σχήμα 5.4: Η αντικειμενική συνάρτηση F (έξοδος τρίτου πεδίου) με τις συνολικές αξιολογήσεις (κάτω άξονας) και τους κύκλους της μεθόδου (πάνω άξονας). Η αντικειμενική συνάρτηση συγκλίνει στους 37 κύκλους με συνολικά 1301 αξιολογήσεις των πεδίων.



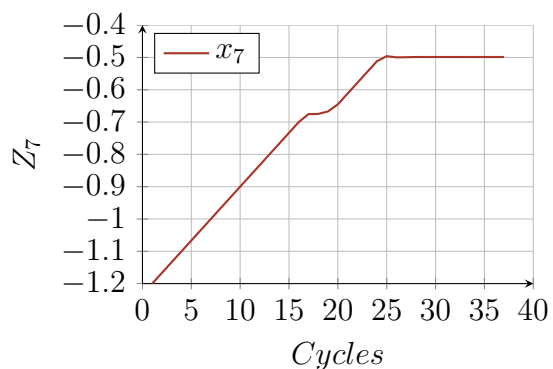
(α')



(β')

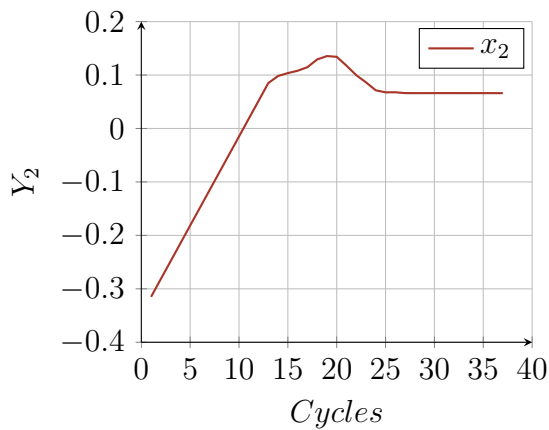


(γ')

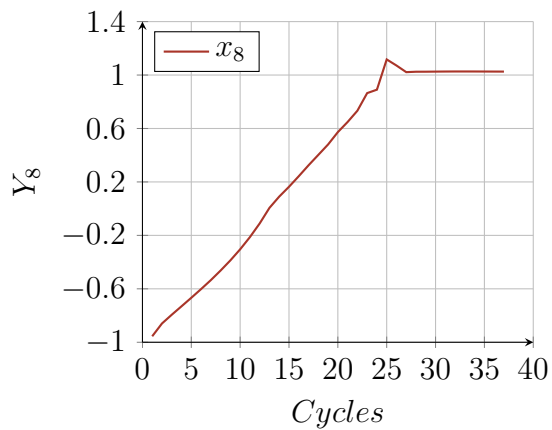


(δ')

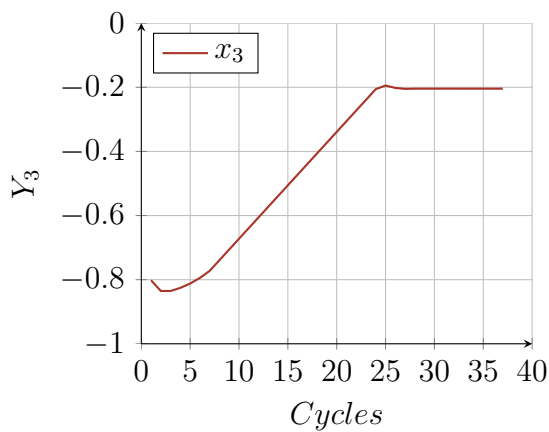
Σχήμα 5.5: Ιστορικά σύγκλισης των μεταβλητών σχεδιασμού. Το (α') αντιστοιχεί στην μεταβλητή x_1 , το (β') στη μεταβλητή x_4 , το (γ') στη μεταβλητή x_6 και το (δ') στη μεταβλητή x_7 . Όλες οι μεταβλητές συγκλίνουν στις αναλυτικές τιμές τους μετά τον 25ο κύκλο της μεθόδου.



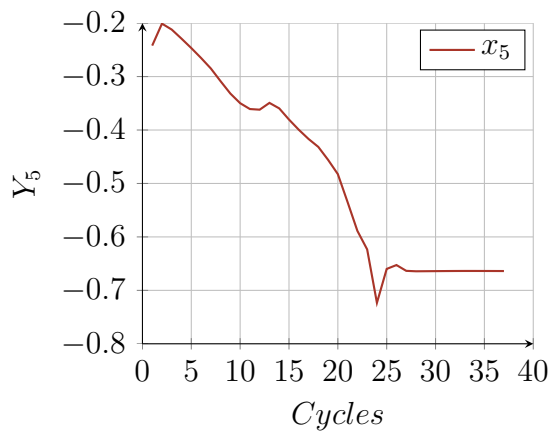
(α') Έξοδος Πεδίου 1



(β') Έξοδος Πεδίου 1



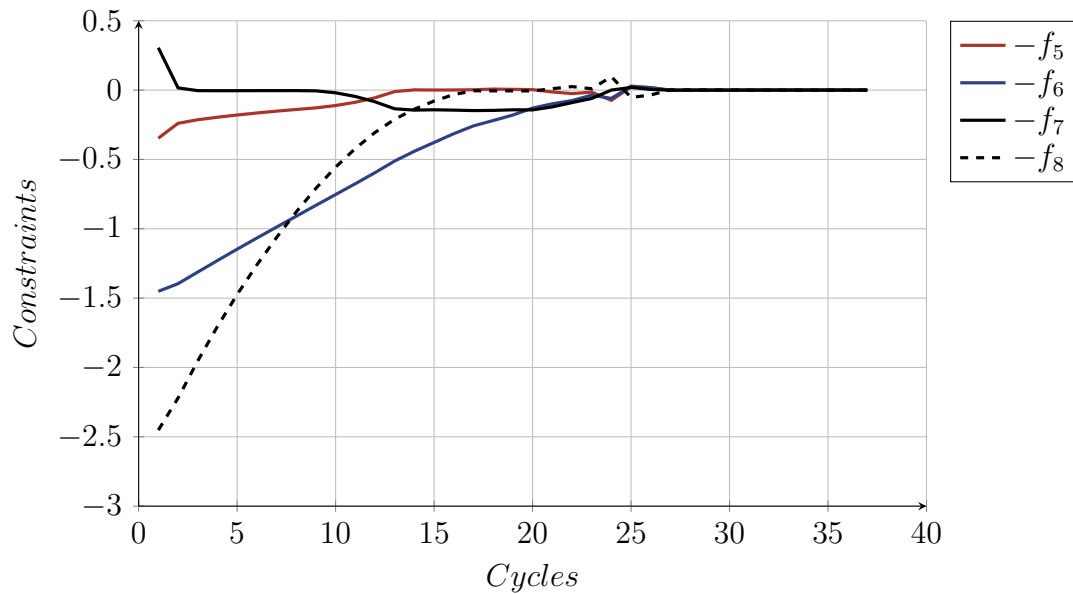
(γ') Έξοδος Πεδίου 2



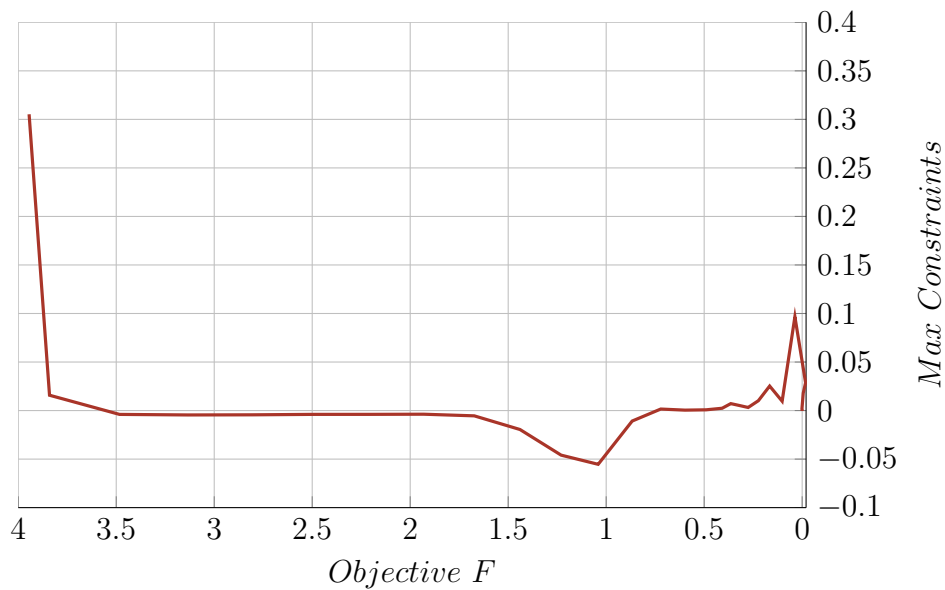
(δ') Έξοδος Πεδίου 2

Σχήμα 5.6: Ιστορικά σύγκλισης των μεταβλητών σύζευξης. Τα (α') και (β') αντιστοιχούν στις εξόδους του πρώτου πεδίου, ενώ τα (γ') και (δ') στις εξόδους του δεύτερου πεδίου. Όπως και στα διαγράμματα των μεταβλητών σχεδιασμού, φαίνεται οι μεταβλητές σύζευξης να συγκλίνουν μετά τον 25ο κύκλο της μεθόδου.

Ένα άλλο μέτρο της σύγκλισης ενός συστήματος είναι ένα διάγραμμα της μέγιστης τιμής όλων των περιορισμών σε κάθε κύκλο, σε συνάρτηση με τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης. Η μέγιστη τιμή των περιορισμών (maximum constraint violation) εκφράζει πόσο μακριά είναι η τρέχουσα λύση από την περιοχή των αποδεκτών λύσεων. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, όπου η ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι η μηδενική, πρέπει τόσο η μέγιστη τιμή περιορισμών όσο και η αντικειμενική συνάρτηση να πλησιάζουν πολύ κοντά στο μηδέν (Σχήμα (5.8)).



Σχήμα 5.7: Οι περιορισμοί ως συνάρτηση των κύκλων του αλγορίθμου. Το αρχικό σημείο σχεδιασμού είναι ελαφρώς στην περιοχή των μη-αποδεκτών λύσεων, καθώς ικανοποιεί τους περιορισμούς $-f_5 \leq 0, -f_6 \leq 0, -f_8 \leq 0$ αλλά όχι και τον $-f_7 \leq 0$.



Σχήμα 5.8: Διάγραμμα της μέγιστης τιμής όλων των περιορισμών (κάθετος άξονας) στον τρέχων κύκλο με την αντικειμενική συνάρτηση (οριζόντιος άξονας). Στο αρχικό σημείο σχεδιασμού, η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει την τιμή 4, ενώ ο σχεδιασμός βρίσκεται στην περιοχή των μη-αποδεκτών λύσεων (Θετικός κάθετος άξονας). Σταδιακά, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μειώνεται, ελαττώνοντας τη μέγιστη παραβίαση στους περιορισμούς (μερικοί ικανοποιούνται, όχι όλοι). Η βέλτιστη λύση θα έχει βρεθεί, όταν η αντικειμενική συνάρτηση και η μέγιστη παραβίαση στους περιορισμούς μηδενιστούν (ικανοποίηση όλων των περιορισμών).

5.3 Συμπεράσματα

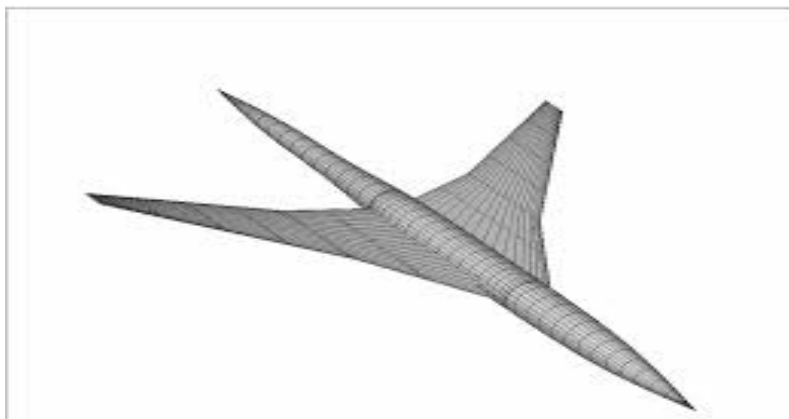
Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι χρήσιμο για τη δοκιμή της μεθόδου, μιας και η ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι γνωστή, όμως εμφανίζει τη δυσκολία επίλυσης του συστήματος, για διάφορες τιμές των παραμέτρων που προέκυψαν από τις πειραματικές μετρήσεις. Όπως φαίνεται και από τον Πίνακα (5.3), εάν οι παράμετροι λάβουν τέτοιες τιμές, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη $k_1 k_3 - k_2^2 = 0$, τότε το πρόβλημα δεν έχει λύση και ο αλγόριθμος εμφανίζει αρκετές ταλαντώσεις ή ακόμα και τεράστιες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης (της τάξεως των 10^{30}). Τέλος, η επιλογή του αρχικού σημείου σχεδιασμού είναι, επίσης, ιδιαίτερα σημαντική, καθώς μια καλή εκτίμηση μπορεί να επιταχύνει τη σύγκλιση και να μειώσει ιδιαίτερα το υπολογιστικό κόστος, ενώ μια εσφαλμένη εκτίμηση μπορεί να οδηγήσει σε αδυναμία σύγκλισης ή σε ανακριβή αποτελέσματα.

Κεφάλαιο 6

Εφαρμογή σε Υπερηχητικό Αεροσκάφος

6.1 Περιγραφή του Προβλήματος

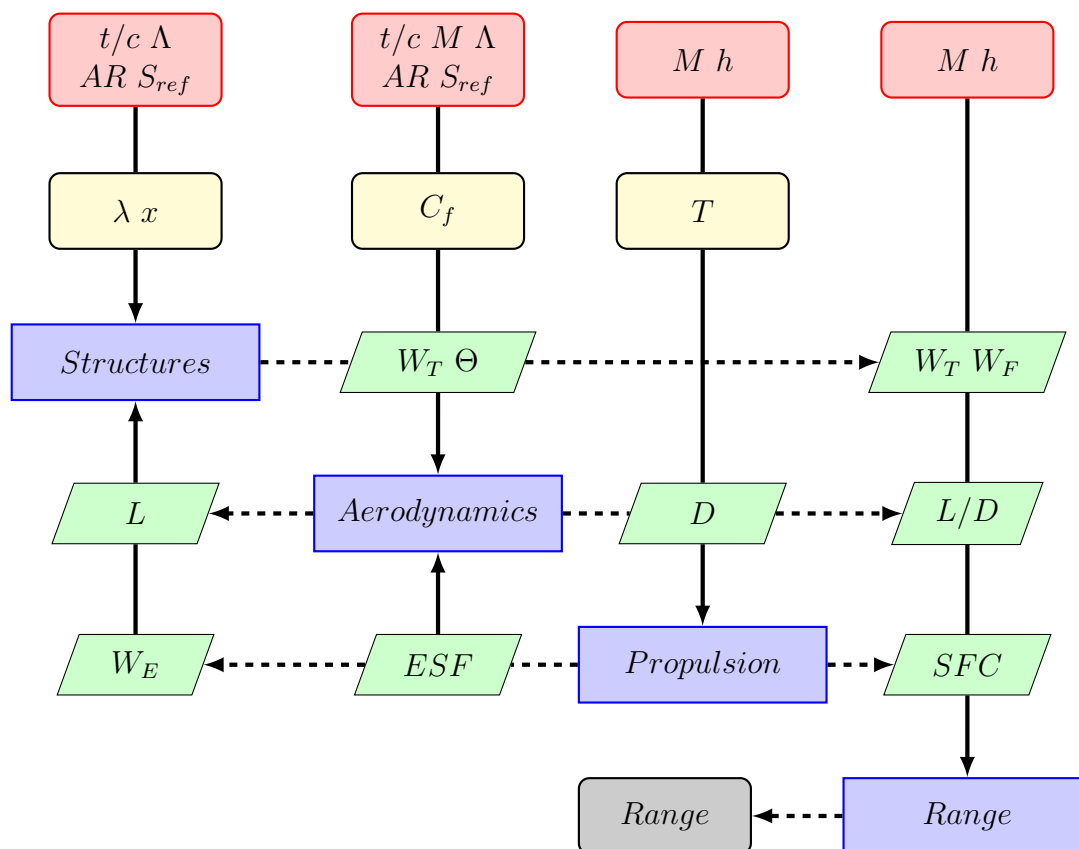
Η συγκεκριμένη εφαρμογή αφορά τη βελτιστοποίηση προκαταρκτικού σχεδιασμού ενός μικρού επιβατικού υπερηχητικού αεροσκάφους (Supersonic Business Jet – Σχήμα (6.1)) με δυνατότητα μεταφοράς έως 12 ατόμων που έχει προταθεί από τη NASA και χρησιμοποιήθηκε για να περιγράψει τη μέθοδο BLISS [31]. Επιλέχθηκε ως δοκιμή του αλγορίθμου, διότι αποτελεί ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα της πρώιμης φάσης σχεδιασμού ενός αεροσκάφους. Στόχος είναι η εύρεση της μέγιστης εμβέλειας (Range) ενός υπερηχητικού αεροσκάφους, η οποία θα ικανοποιεί τους τοπικούς περιορισμούς των πεδίων και τα άνω και κάτω όρια των μεταβλητών σχεδιασμού.



Σχήμα 6.1: Μοντέλο ενός υπερηχητικού επιβατικού αεροσκάφους (SBJ) [57]

Αποτελείται από ένα σύστημα με τέσσερα επιστημονικά πεδία, τα οποία αναπαριστούν τις επιστήμες της Δομικής (Structures), της Αεροδυναμικής (Aerodynamics), της

Πρόωσης (Propulsion) και της Εμβέλειας (Range) ενός αεροσκάφους, όλα τους σε πολύ απλουστευμένη εκδοχή. Τα πρώτα τρία πεδία παρουσιάζουν ισχυρή σύζευξη, εφόσον μοιράζονται κοινές μεταβλητές σχεδιασμού και ανταλλάσσουν δεδομένα σύζευξης. Το τέταρτο πεδίο αντλεί δεδομένα από τις υπόλοιπες για να αξιολογήσει την εμβέλεια στο τρέχον σημείο σχεδιασμού, ενώ δεν επηρεάζει τις υπόλοιπες με όρους σύζευξης. Το πεδίο της Δομικής επηρεάζει το πεδίο της Αεροδυναμικής, καθώς τα αεροδυναμικά φορτία προκαλούν παραμορφώσεις στην επιφάνεια της πτέρυγας, αλλάζοντας τα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά της και κατ' επέκταση τα ίδια τα αεροδυναμικά φορτία. Παρόμοια σύζευξη εμφανίζουν και τα πεδία της Δομικής και της Πρόωσης, όπου η απαιτούμενη για την πτήση ώση εξαρτάται από το συνολικό βάρος του αεροσκάφους, στο οποίο συμπεριλαμβάνεται το βάρος του κινητήρα και το οποίο μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση της ώσης. Μια λεπτομερής περιγραφή του παραπάνω συστήματος παρουσιάζεται στο Σχήμα (6.2).



Σχήμα 6.2: Αναπαράσταση του πεπλεγμένου συστήματος ενός υπερηχητικού αεροσκάφους με 4 επιστημονικά πεδία. Με κόκκινο χρώμα δηλώνονται οι κοινές μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{Z} . Με κίτρινο, οι τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{X} του κάθε πεδίου. Ενώ, με πράσινο οι μεταβλητές σύζευξης \mathbf{Y}_{ij} μεταξύ των πεδίων. Όλες οι είσοδοι (συνεχόμενο βέλος) σε ένα πεδίο απεικονίζονται **κατακόρυφα** (κατά στήλη) στο πεδίο, ενώ όλες οι έξοδοι (διακεκομμένο βέλος) απεικονίζονται **οριζόντια** (κατά γραμμή) στο πεδίο. Το πεδίο που υπολογίζει την εμβέλεια (*Range*) του αεροσκάφους δεν έχει μεταβλητές σύζευξης και αντλεί μόνο δεδομένα από τα υπόλοιπα πεδία για τον υπολογισμό της αντικειμενικής συνάρτησης.

Το πρόβλημα αποτελείται από 10 μεταβλητές σχεδιασμού, τέσσερις από τις οποίες είναι τοπικές \mathbf{X} και οι υπόλοιπες είναι κοινές \mathbf{Z} . Αξίζει να σημειωθεί ότι το πεδίο της Εμβέλειας δεν έχει τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού και λαμβάνει ως εισόδους μόνο τις συστημικές μεταβλητές σχεδιασμού και τις μεταβλητές σύζευξης από τα υπόλοιπα πεδία. Αυτό σημαίνει ότι το συγκεκριμένο πεδίο δεν συμμετέχει στις υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις, παρά μόνο στη συστημική βελτιστοποίηση. Στον Πίνακα (6.1) παρουσιάζεται ο συμβολισμός, η περιγραφή τους, καθώς και τα όρια που τους έχουν ανατεθεί.

Πίνακας 6.1: Ορισμός μεταβλητών σχεδιασμού

Μεταβλητή	Περιγραφή	$M.M.^*$	Τύπος
$0.1 \leq \lambda \leq 0.4$	Λόγος εκλέπτυνσης πτέρυγας (taper ratio)	[-]	Τοπική (Structures)
$0.75 \leq x \leq 1.25$	Πάχος πτέρυγας	[-]	Τοπική (Structures)
$0.75 \leq C_f \leq 1.25$	Συντ/τής τριβής	[-]	Τοπική (Aerodynam.)
$0.1 \leq T \leq 1$	Ρύθμιση της στραγγαλιστικής βαλβίδας (Throttle)**	[-]	Τοπική (Propulsion)
$2.5 \leq AR \leq 8.5$	Λόγος επιμήκους πτέρυγας (Aspect Ratio)	[-]	Κοινή
$40 \leq \Lambda \leq 70$	Γωνία οπισθόκλισης πτέρυγας (wing sweep)	[deg]	Κοινή
$500 \leq S \leq 1500$	‘Βρεχόμενη’ επιφάνεια πτέρυγας	[ft ²]	Κοινή
$0.01 \leq t/c \leq 0.09$	Λόγος πάχους προς μήκος χορδής	[-]	Κοινή
$1.4 \leq M \leq 1.8$	Αριθμός Mach πτήσης	[-]	Κοινή
$30000 \leq h \leq 60000$	Υψόμετρο πτήσης	[ft]	Κοινή

* Μονάδες Μέτρησης

** 0 – πλήρως κλειστή, 1 – πλήρως ανοικτή

Επιπλέον, το πρόβλημα αποτελείται από συνολικά 9 μεταβλητές σύζευξης για τα πεδία της Αεροδυναμικής, της Δομικής και της Πρόωσης. Η περιγραφή τους φαίνεται στον Πίνακα (6.2) για το κάθε επιστημονικό πεδίο ξεχωριστά.

Πίνακας 6.2: Ορισμός μεταβλητών σύζευξης

Πεδίο	Έξοδοι	<i>M.M.*</i>	Περιγραφή
<i>Aerodynamics</i>	<i>L</i>	[<i>lbf</i>]	Άνωση
	<i>D</i>	[<i>lbf</i>]	Οπισθέλκουσα
	<i>L/D</i>	[–]	Λόγος Άνωσης/Οπισθέλκουσας
<i>Structures</i>	<i>W_T</i>	[<i>lb</i>]	Συνολικό βάρος αεροσκάφους
	<i>W_F</i>	[<i>lb</i>]	Βάρος καυσίμου
	Θ	[<i>rad</i>]	Γωνία συστροφής πτέρυγας (wing twist)
<i>Propulsion</i>	<i>W_E</i>	[<i>lb</i>]	Βάρος κινητήρα
	<i>ESF**</i>	[–]	Συντ/τής κλίμακας κινητήρα (Engine Scale Factor)
	<i>SFC</i>	$\left[\frac{lb/hr}{lbf} \right]$	Ειδική κατανάλωση καυσίμου (Specific Fuel Consumption)
<i>Range</i>	<i>R</i>	[<i>NM</i>]	Εμβέλεια αεροσκάφους

* Μονάδες Μέτρησης

** Ο λόγος ώσεων (Thrust) ως προς έναν κινητήρα αναφοράς, $T_{design}/T_{reference}$

Τέλος, διατυπώνονται και οι τοπικοί περιορισμοί του κάθε πεδίου και παρουσιάζονται στον Πίνακα (6.3). Μιας και το πεδίο της Εμβέλειας δεν έχει τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού, δεν μπορεί να έχει και τοπικούς περιορισμούς.

Πίνακας 6.3: Ορισμός περιορισμών προβλήματος

Πεδίο	Περιορισμοί	Περιγραφή
<i>Aerodynamics</i>	$dp/dx \leq 1.04$	Διαμήκης κλίση πίεσης της πτέρυγας
<i>Structures</i>	$\sigma \leq 1.09$	Αναπτυσσόμενες τάσεις στην επιφάνεια της πτέρυγας
	$0.96 \leq \Theta \leq 1.04$	Γωνία συστροφής πτέρυγας
<i>Propulsion</i>	$0.5 \leq ESF \leq 1.5$	Συντ/τής κλίμακας κινητήρα
	$Temp \leq 1.02$	Λόγος θερμοκρασιών κινητήρα

Υποσυστημικές Βελτιστοποιήσεις

Στη συνέχεια, διατυπώνονται οι υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις για κάθε πεδίο ξεχωριστά, για την καλύτερη κατανόηση της λειτουργίας της μεθόδου BLISS/B. Κάθε υποσυστημική βελτιστοποίηση, δέχεται ως δεδομένα τις τρέχουσες τιμές των τοπικών μεταβλητών σχεδιασμού $(\mathbf{X}_i)_o$ – οι οποίες έχουν προκύψει από την εκτέλεση των υποσυστημικών βελτιστοποιήσεων του προηγούμενου κύκλου – καθώς και τις παραγώγους της αντικειμενικής συνάρτησης (Εμβέλεια) ως προς τις \mathbf{X}_i , οι οποίες προέκυψαν από την ανάλυση ευαισθησίας του συστήματος (βλ. § 2.3). Με αυτά τα δεδομένα, κάθε πεδίο αναλαμβάνει να ελαχιστοποιήσει τη δική του τοπική αντικειμενική συνάρτηση (βλ. § 4.2) υπό τους τοπικούς περιορισμούς (Πίνακας (6.3)) και τα όρια των τοπικών μεταβλητών σχεδιασμού (Πίνακας (6.1)). Επίσης, προστίθενται στους περιορισμούς μέγιστες επιτρεπόμενες μεταβολές ($\Delta \mathbf{X}^L \ \Delta \mathbf{X}^U$) των μεταβλητών σχεδιασμού, με σκοπό τη δημιουργία ομαλότερων συνθηκών σύγκλισης. Οι τιμές αυτών είναι αυθαίρετες, ενώ στο συγκεκριμένο πρόβλημα επιλέχθηκε ως μέγιστη μεταβολή το $\frac{\mathbf{X}^U - \mathbf{X}^L}{20}$ από το τρέχον σημείο σχεδιασμού $(\mathbf{X})_o$.

Τέλος, εφόσον είναι επιθυμητή η μεγιστοποίηση της Εμβέλειας, το πρόβλημα αντιμετωπίζεται ως ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης της συνάρτησης της Εμβέλειας με αρνητικό πρόσημο. Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω, οι υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις διατυπώνονται ως ακολούθως

Βελτιστοποίηση Πεδίου Δομικής (Structures)

$$\begin{aligned} \text{Given} \quad & (x)_o \quad (\lambda)_o \quad \frac{dR}{d\lambda} \quad \frac{dR}{dx} \\ \text{Minimize} \quad & \Delta R_1 = - \left[\frac{dR}{dx}(x - (x)_o) + \frac{dR}{d\lambda}(\lambda - (\lambda)_o) \right] \\ \text{with respect to} \quad & x \ \lambda \\ \text{subject to} \quad & \sigma \leq 1.09 \quad 0.96 \leq \Theta \leq 1.04 \\ & 0.75 \leq x \leq 1.25 \quad 0.1 \leq \lambda \leq 0.4 \\ & (x)_o - \frac{1.25 - 0.75}{20} \leq \Delta x \leq (x)_o + \frac{1.25 - 0.75}{20} \\ & (\lambda)_o - \frac{0.4 - 0.1}{20} \leq \Delta \lambda \leq (\lambda)_o + \frac{0.4 - 0.1}{20} \end{aligned}$$

όπου

- $(x)_o \quad (\lambda)_o$ – από την αντίστοιχη υποσυστημική βελ/ση του προηγούμενου κύκλου
 - $\frac{dR}{d\lambda} \quad \frac{dR}{dx}$ – από την ανάλυση ευαισθησίας του συστήματος
 - ΔR_1 – είναι η βελτίωση (αύξηση) στην Εμβέλεια. Εκφράζει τη συνεισφορά του συγκεκριμένου πεδίου στον σχεδιασμό.
-

Επίσης, η ικανοποίηση όλων των τοπικών περιορισμών εξασφαλίζεται με τη γραμμικοποίησή τους, με χρήση παραγώγων που υπολογίστηκαν στην ανάλυση ευαισθησίας του συστήματος, σύμφωνα με τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην Παράγραφο § 4.2.1.

Ομοίως διατυπώνονται και οι υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις για τα υπόλοιπα πεδία

Βελτιστοποίηση Πεδίου Αεροδυναμικής (Aerodynamics)

$$\text{Given } (C_f)_o \quad \frac{dR}{dC_f}$$

$$\text{Minimize } \Delta R_2 = - \left[\frac{dR}{dC_f} (C_f - (C_f)_o) \right]$$

with respect to C_f

$$\text{subject to } dp/dx \leq 1.04$$

$$0.75 \leq C_f \leq 1.25$$

$$(C_f)_o - \frac{1.25 - 0.75}{20} \leq \Delta C_f \leq (C_f)_o + \frac{1.25 - 0.75}{20}$$

Βελτιστοποίηση Πεδίου Πρόωσης (Propulsion)

$$\text{Given } (T)_o \quad \frac{dR}{dT}$$

$$\text{Minimize } \Delta R_3 = - \left[\frac{dR}{dT} (T - (T)_o) \right]$$

with respect to T

$$\text{subject to } 0.5 \leq ESF \leq 1.5 \quad Temp \leq 1.02$$

$$0.1 \leq T \leq 1$$

$$(T)_o - \frac{1 - 0.1}{20} \leq \Delta T \leq (T)_o + \frac{1 - 0.1}{20}$$

Μετά το πέρας των υποσυστημικών βελτιστοποιήσεων, προκύπτουν οι βέλτιστες αυξήσεις ΔR_1^* , ΔR_2^* , ΔR_3^* της Εμβέλειας υπολογισμένες στα αντίστοιχα τοπικά βέλτιστα σημεία σχεδιασμού, σύμφωνα με τη μέθοδο BLISS/B, ενώ αθροίζονται στη συνέχεια για την εκτέλεση της ανάλυσης ευαισθησίας βέλτιστων λύσεων και για τη συστημική βελτιστοποίηση, δηλαδή ισχύει

$$\Delta R^* = \Delta R_1^* + \Delta R_2^* + \Delta R_3^*$$

Συστημική Βελτιστοποίηση

Προτού μπορέσει να εκτελεστεί η συστημική βελτιστοποίηση, χρειάζεται να προηγηθεί η ανάλυση ευαισθησίας βέλτιστων λύσεων (βλ. § 4.3.2), όπου διερευνάται η ευαισθησία των τοπικά βέλτιστων αυξήσεων της Εμβέλειας ΔR^* σε αλλαγές των κοινών μεταβλητών σχεδιασμού \mathbf{Z} . Υπολογίζεται, δηλαδή, η παράγωγος $\frac{d\Delta R^*}{d\mathbf{Z}}$ (διάνυσμα) σύμφωνα με τη μεθοδολογία που περιγράφηκε στην παράγραφο BLISS/B. Με δεδομένα, λοιπόν, το διάνυσμα των παραγώγων, αλλά και τις τρέχουσες τιμές της Εμβέλειας $(R)_o$ και των μεταβλητών σχεδιασμού $(\mathbf{Z})_o$, η συστημική βελτιστοποίηση διατυπώνεται ως ακολούθως,

Συστημική Βελτιστοποίηση	
<i>Given</i>	$(R)_o \quad (\mathbf{Z})_o \quad \frac{d\Delta R^*}{d\mathbf{Z}}$
<i>Minimize</i>	$R = - \left[(R)_o + \frac{d\Delta R^*}{d\mathbf{Z}} (\mathbf{Z} - (\mathbf{Z})_o) \right]$
<i>with respect to</i>	\mathbf{Z}
<i>subject to</i>	$dp/dx \leq 1.04$
	$\mathbf{Z}^L \leq \mathbf{Z} \leq \mathbf{Z}^U$
	$\Delta \mathbf{Z}^L \leq \Delta \mathbf{Z} \leq \Delta \mathbf{Z}^U$

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να επισημανθεί ότι ο τοπικός περιορισμός $dp/dx \leq 1.04$ από το πεδίο της Αεροδυναμικής δεν εξαρτάται από τη τοπική μεταβλητή του πεδίου C_f . Δεν είναι δυνατή η ικανοποίησή του, λοιπόν, στην υποσυστημική βελτιστοποίηση του πεδίου, μεταβάλλοντας τις τιμές της C_f . Για τον λόγο αυτόν, προστίθεται ως περιορισμός στη συστημική βελτιστοποίηση και ονομάζεται συστημικός περιορισμός (βλ. § 4.4).

6.2 Επίλυση και Αποτελέσματα

Ο αλγόριθμος της μεθόδου BLISS/B προγραμματίστηκε και εκτελέστηκε στο προγραμματιστικό περιβάλλον της MATLAB v.9, χρησιμοποιώντας ως λογισμικό βελτιστοποίησης τόσο του συστημικού επιπέδου όσο και των ανεξάρτητων υποσυστημικών, τον αλγόριθμο SQP της υπορουτίνας ‘fmincon’ για μη-γραμμικά προβλήματα βελτιστοποίησης με περιορισμούς. Στην ουσία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε εξακριβωμένο λογισμικό βελτιστοποίησης, χωρίς να έχει καμία επίδραση στο υπολογιστικό κόστος (αξιολογήσεις των πεδίων), παρά μόνο στον χρόνο εκτέλεσης της μεθόδου.

Για την εκτέλεση της συστημικής ανάλυσης, επιλέχθηκε ο αλγόριθμος Gauss-Seidel – που αναπτύχθηκε στην Παράγραφο § 2.1.2 – διότι εμφανίζει καλύτερες συνθήκες σύγκλισης από τον αλγόριθμο Jacobi, ενώ είναι πιο εύκολος στην υλοποίηση από τον αλγόριθμο Newton.

Η ανάλυση ευαισθησίας πραγματοποιήθηκε, όπως περιγράφηκε στο Κεφάλαιο § 2, επilύοντας το σύστημα των εξισώσεων GSE (Global Sensitivity Equations) για τις τοπικές και τις κοινές μεταβλητές σχεδιασμού ξεχωριστά. Ενώ, για τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων, χρησιμοποιήθηκε ανάντι διαφορίση (forward differentiation) πρώτης τάξεως με σταθερό βήμα 0.001.

Τελικά, ο αλγόριθμος συνέκλιε μετά από 16 κύκλους με βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης – $Range = 3307NM$ (Nautical Miles), η οποία μπορεί να επιβεβαιωθεί από το άρθρο [31]. Ως κριτήριο τερματισμού τέθηκε το σχετικό σφάλμα της εμβέλειας να είναι

$$\epsilon_r = \frac{|R^{(k+1)} - R^{(k)}|}{R^{(k)}} \leq 10^{-6} \quad (6.1)$$

όπου $(k + 1)$ είναι ο τρέχων κύκλος της μεθόδου.

Στα σχήματα (6.3) και (6.4), παρουσιάζονται τα ιστορικά της αντικειμενικής συνάρτησης και των αξιολογήσεων για το κάθε πεδίο ξεχωριστά. Ενώ στους Πίνακες (6.4) και (6.5) συγκρίνεται το αρχικό με το βέλτιστο σημείο σχεδιασμού.

Τέλος, στο Σχήμα (6.5) παρουσιάζεται η μέγιστη παραβίαση στους περιορισμούς, η οποία εκφράζει ένα μέτρο σύγκλισης της μεθόδου, και στο Σχήμα (6.6) φαίνεται το ιστορικό των συνεισφορών του κάθε πεδίου στον τελικό σχεδιασμό.

Μεταβλητή Σχεδιασμού	M.M.*	Αρχικό Σημείο	Βέλτιστο Σημείο
λ	[-]	0.25	0.145
x	[-]	1	0.75
C_f	[-]	1	0.75
T	[-]	0.5	0.1659
t/c	[-]	0.05	0.06
h	[ft]	45000	58517
M	[-]	1.6	1.4
AR	[-]	5.5	2.5
Λ	[deg]	55	70
S	[ft ²]	1000	1500

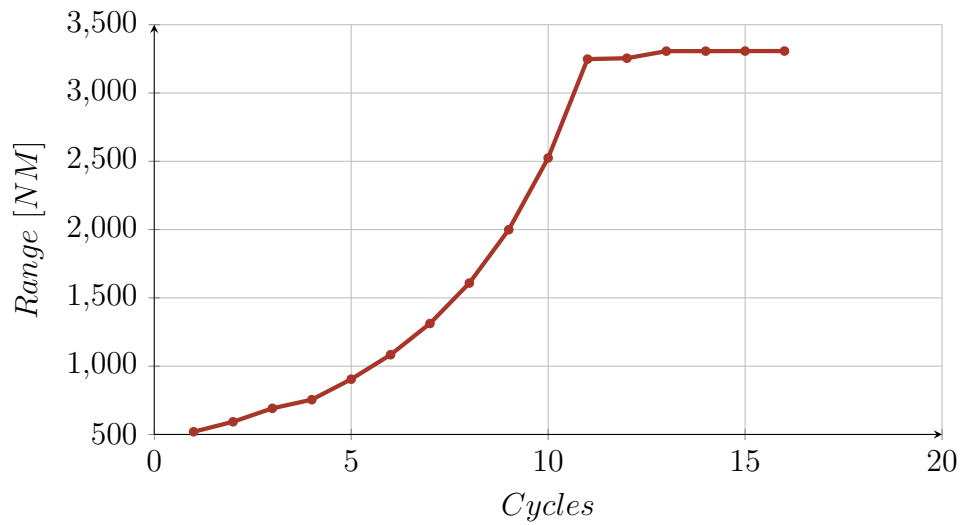
* Μονάδες Μέτρησης

Πίνακας 6.4: Σύγκριση των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού στο αρχικό και στο βέλτιστο σημείο σχεδιασμού. Οι πρώτες τέσσερις γραμμές είναι οι τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού, ενώ οι υπόλοιπες είναι οι συστημικές.

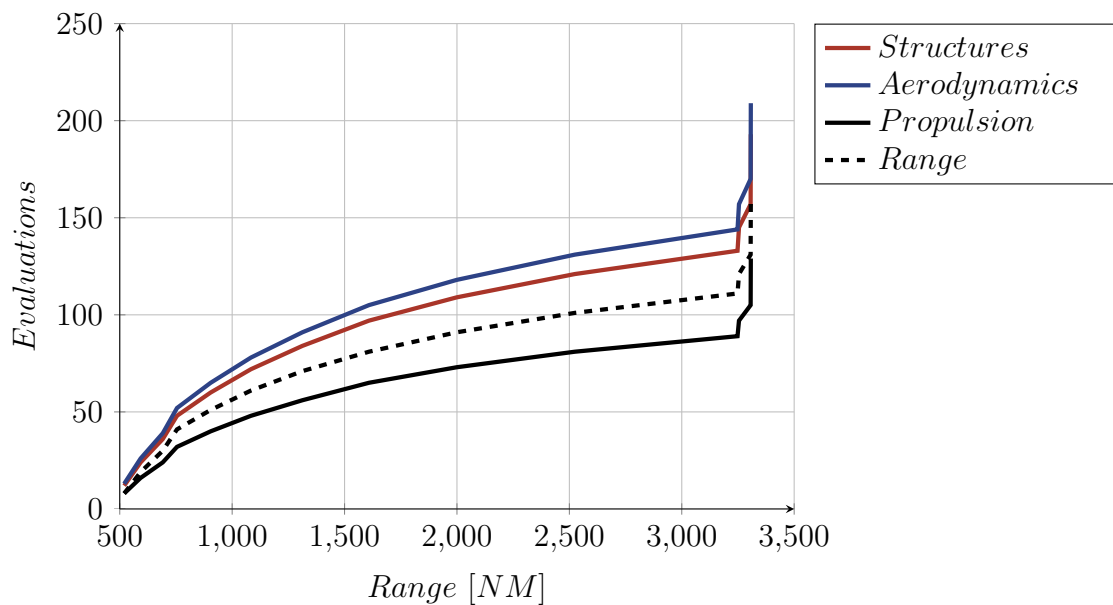
Πεδίο	Έξοδοι	M.M.*	Αρχικό Σημείο	Βέλτιστο Σημείο
<i>Aerodynamics</i>	L	[lbf]	50851	45536
	D	[lbf]	12566	6417
	L/D	[-]	4.05	7.09
<i>Structures</i>	W_T	[lb]	50851	45536
	W_F	[lb]	7306	19351
	Θ	[rad]	0.999	0.992
<i>Propulsion</i>	W_E	[lb]	6558	10310
	ESF	[-]	0.52	0.797
	SFC	$\left[\frac{lb/hr}{lbf} \right]$	1.1075	0.9514

* Μονάδες Μέτρησης

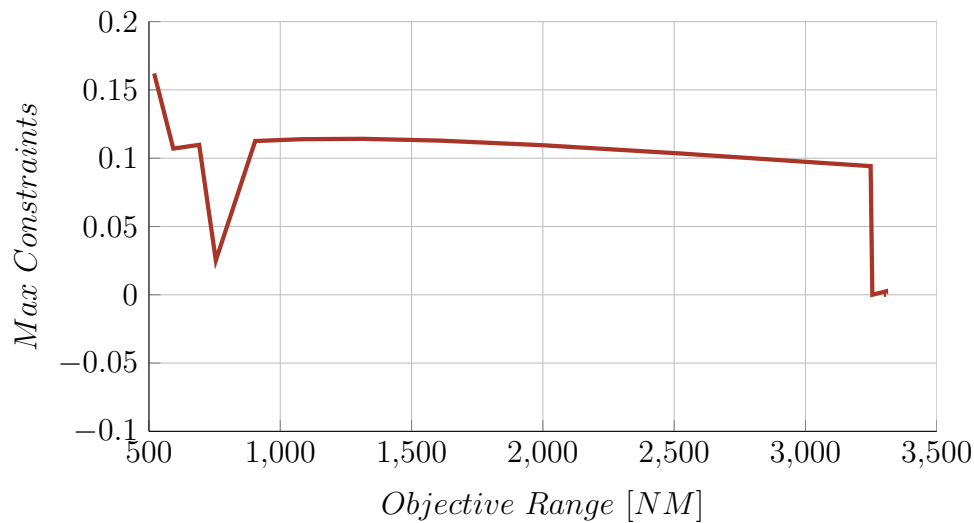
Πίνακας 6.5: Σύγκριση των τιμών των μεταβλητών σύζευξης στο αρχικό και στο βέλτιστο σημείο σχεδιασμού.



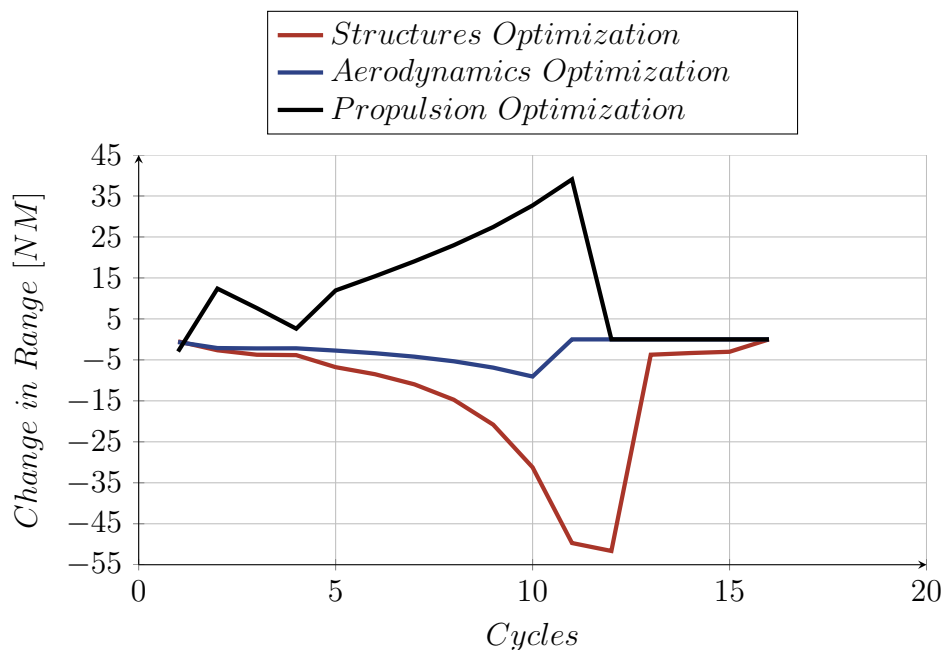
Σχήμα 6.3: Διάγραμμα του ιστορικού εξέλιξης της αντικειμενικής συνάρτησης. Ο αλγόριθμος συγκλίνει στους 16 κύκλους με βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης 3307 NM.



Σχήμα 6.4: Αξιολογήσεις όλων των πεδίων με την αντικειμενική συνάρτηση. Οι συνολικές αξιολογήσεις στο βέλτιστο σημείο σχεδιασμού για το κάθε πεδίο ξεχωριστά είναι: Structures = 193, Aerodynamics = 209, Propulsion = 129, Range = 161. Οι περισσότερες οφείλονται στον υπολογισμό παραγώγων με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, ενώ οι υπόλοιπες στη συστηματική ανάλυση, όπου εκτελούνται όλα τα πεδία τις ίδιες φορές.



Σχήμα 6.5: Διάγραμμα μέγιστης τιμής περιορισμών (παραβίαση των περιορισμών) με τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης στην τρέχουσα επανάληψη. Δείχνει ότι το αρχικό σημείο σχεδιασμού είναι μη-αποδεκτό, ενώ σταδιακά μειώνεται η τιμή του, έως ότου μηδενιστεί όταν το πρόβλημα έχει συγκλίνει. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή, μάλιστα, προσεγγίζει τη βέλτιστη λύση αποκλειστικά από την περιοχή των μη-αποδεκτών λύσεων (αποκλειστικά θετικές τιμές). Επίσης, ο περιορισμός που παρουσιάζει τη μέγιστη παραβίαση είναι κυρίως οι αναπτυσσόμενες τάσεις στην επιφάνεια της πτέρυγας.



Σχήμα 6.6: Διάγραμμα αλλαγής της αντικειμενικής συνάρτησης (Εμβέλεια) λόγω της συνεισφοράς του κάθε πεδίου στον σχεδιασμό από τις υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις. Στη βέλτιστη λύση πρέπει οι συνεισφορές όλων των πεδίων να μηδενίζονται.

6.3 Συμπεράσματα

Ως μια προκαταρκτική δοκιμή της μεθόδου, η διάσταση του προβλήματος περιορίστηκε σε έναν σχετικά μικρό αριθμό μεταβλητών σχεδιασμού και σύζευξης, ώστε να είναι δυνατή η ταχεία αξιολόγηση της μεθόδου, προτού δαπανηθούν περισσότεροι υπολογιστικοί πόροι για περαιτέρω μελέτη. Η μέθοδος απέδωσε, όπως αναμενόταν [31], καθώς οι συνεισφορές των πεδίων πρέπει να μηδενίζονται όσο προσεγγίζεται η βέλτιστη λύση, όπως φαίνεται στο Σχήμα (6.6). Αυτό σημαίνει ότι όλα τα επιστημονικά πεδία δεν έχουν να προσδώσουν καμία άλλη βελτίωση στον σχεδιασμό, και κατά συνέπεια προκύπτει η βέλτιστη λύση. Επίσης, στο συγκεκριμένο παράδειγμα το αρχικό σημείο σχεδιασμού βρίσκεται στην περιοχή των μη-αποδεκτών λύσεων (Σχήμα (6.5)), ενώ σταδιακά μειώνεται η τιμή της μέγιστης παραβίασης των περιορισμών, έως ότου μηδενιστεί στη βέλτιστη λύση (ικανοποίηση όλων των περιορισμών). Ξεκινώντας, λοιπόν, από ένα μη-αποδεκτό σημείο σχεδιασμού η μέθοδος αύξησε τον ρυθμό με τον οποίο μειώνεται η αντικειμενική συνάρτηση (Εμβέλεια) λόγω μη-ικανοποίησης των περιορισμών.

Τέλος, οι περισσότερες αξιολογήσεις των επιστημονικών πεδίων οφείλονται στη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών (Σχήμα (6.4)) για τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Συγκεκριμένα, το υπολογιστικό κόστος ανά κύκλο της μεθόδου ανέρχεται για το πεδίο της Δομικής στις 8 αξιολογήσεις (2 για μετ. σύζευξης εισόδου + 2 για X + 4 για Z), για το πεδίο της Αεροδυναμικής στις 9 (3 για μετ. σύζευξης εισόδου + 1 για X + 5 για Z), για το πεδίο της Πρόωσης στις 4 (1 για μετ. σύζευξης εισόδου + 1 για X + 2 για Z), ενώ τελικά για το πεδίο της Εμβέλειας στις 6 (4 για μετ. σύζευξης εισόδου + 2 για Z). Συνολικά, δηλαδή, απαιτούνται 27 αξιολογήσεις ανά κύκλο της μεθόδου μόνο για την ανάλυση ευαισθησίας, ενώ οι υπόλοιπες αξιολογήσεις οφείλονται στη συστημική ανάλυση, όπου όλα τα πεδία αξιολογούνται τις ίδιες φορές.

Εάν είχε χρησιμοποιηθεί η συζυγής μέθοδος (adjoint) για τον υπολογισμό των παραγώγων, έχει εκτιμηθεί ότι το κόστος ανά κύκλο ανέρχεται για το πεδίο της Δομικής στις 3 αξιολογήσεις (2 για μετ. σύζευξης εισόδου + 1 για όλα τα X και για όλα τα Z), για το πεδίο της Αεροδυναμικής στις 4 (3 για μετ. σύζευξης εισόδου + 1 για όλα τα X και για όλα τα Z), για το πεδίο της Πρόωσης στις 2 (1 για μετ. σύζευξης εισόδου + 1 για όλα τα X και για όλα τα Z), ενώ τελικά για το πεδίο της Εμβέλειας στις 5 (4 για μετ. σύζευξης εισόδου + 1 για όλα τα Z). Συνολικά, δηλαδή, απαιτούνται 14 αξιολογήσεις ανά κύκλο, οδηγώντας σε μείωση του υπολογιστικού κόστους σχεδόν στο μισό συγκριτικά με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Συνεπώς, το σημαντικότερο πλεονέκτημα που προσφέρει η συζυγής μέθοδος είναι η ανεξαρτησία των αξιολογήσεων από τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών σχεδιασμού \mathbf{X} και \mathbf{Z} . Ωστόσο, η συζυγής μέθοδος διατηρεί τις αξιολογήσεις για τις μεταβλητές σύζευξης εισόδου στο πεδίο (\mathbf{Y}_{ji}), καθώς εκείνες είναι εξαρτημένες μεταξύ τους και για αυτό πρέπει να αναλυθούν ξεχωριστά. Αυτός ο περιορισμός στην περαιτέρω μείωση του κόστους δεν αποδίδεται στη χρήση της συζυγούς μεθόδου, αλλά στην εγγενή πεπλεγμένη φύση του συστήματος.

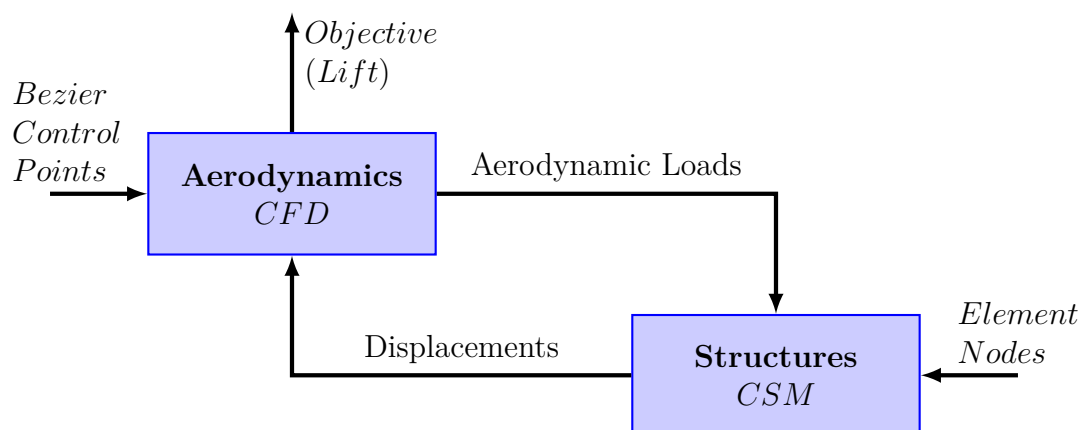
Κεφάλαιο 7

Εφαρμογή στον Σχεδιασμό Μορφής Αεροτομής

7.1 Περιγραφή του Προβλήματος

Σε ένα διδιάστατο μοντέλο πτέρυγας, εκτελέστηκε μια ενσωματωμένη βελτιστοποίηση σχεδιασμού, η οποία περιλαμβάνει δύο επιστημονικά πεδία, την αεροδυναμική και τη δομική. Τα αεροδυναμικά φορτία που δρουν στην πτέρυγα εξαρτώνται από τη μορφή της πτέρυγας, ενώ συγχρόνως αναπτύσσονται τάσεις και παραμορφώσεις στην επιφάνεια της, με αποτέλεσμα να μεταβάλλουν το σχήμα της. Αυτή η σύζευξη μεταξύ των αναλύσεων είναι αρκετά ισχυρή, για αυτό τον λόγο δεν μπορούν να μελετηθούν ως ξεχωριστά αντικείμενα, αλλά ως ένα ενσωματωμένο σύστημα. Το συγκεκριμένο πρόβλημα αναφέρεται συχνά ως πρόβλημα αεροελαστικότητας. Ο στόχος της εφαρμογής αυτής είναι να βρεθεί η μέγιστη άνωση υπο επιτρεπόμενα κατασκευαστικά όρια που τίθενται από τις ιδιότητες του υλικού της πτέρυγας (όρια τάσεων και μετατοπίσεων). Χρησιμοποιήθηκαν προηγμένα εργαλεία ανάλυσης σε κάθε πεδίο – όπως CFD για την αεροδυναμική ανάλυση και αντίστοιχα 1Δ μοντέλο δοκού για τη δομική (CSM, Computational Structural Mechanics) – τα οποία αναπτύχθηκαν από τη ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ του Τομέα Ρευστών. Ωστόσο, κώδικας από το προγραμματιστικό περιβάλλον της MATLAB – ο οποίος αναπτύχθηκε σύμφωνα με τη μέθοδο BLISS/B του Κεφαλαίου § 4 – ανέλαβε την ενσωμάτωση των δύο αναλύσεων, τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας και τη βελτιστοποίηση του συστήματος, ενώ ταυτόχρονα εξασφάλισε την αυτονομία τους.

Το διάγραμμα της δομής του προβλήματος παρουσιάζεται στο Σχήμα (7.1), όπου φαίνονται οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των αντικειμένων και η εξάρτησή τους.

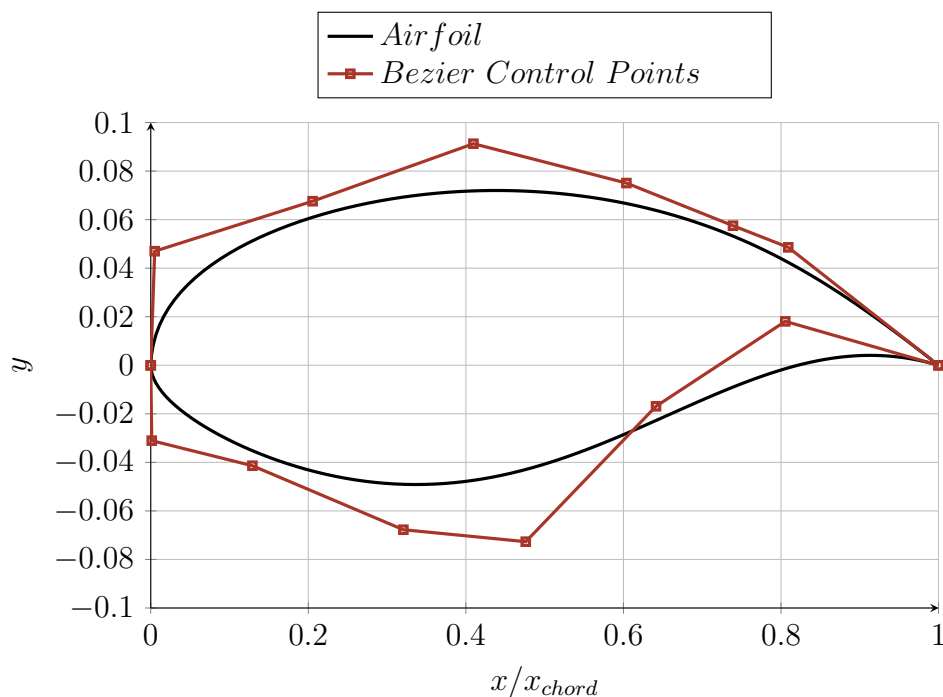


Σχήμα 7.1: Περιγραφή ενός προβλήματος αεροελαστικότητας με δύο πεπλεγμένα επιστημονικά πεδία, την Αεροδυναμική και τη Δομική. Η Αεροδυναμική δέχεται ως ανεξάρτητη είσοδο τις συντεταγμένες (x,y) των σημείων ελέγχου *Bezier* (μεταβλητές σχεδιασμού), αλλά και τις κομβικές μετατοπίσεις $(dx,dy,d\theta)$ από τη Δομική (μεταβλητές σύζευξης). Η Δομική, από την άλλη, δέχεται ως ανεξάρτητες μεταβλητές τις συντεταγμένες των κόμβων των πεπερασμένων στοιχείων, ενώ ως εξαρτημένες τα αεροδυναμικά φορτία $(L D M_z)$

7.1.1 Αεροδυναμική Ανάλυση

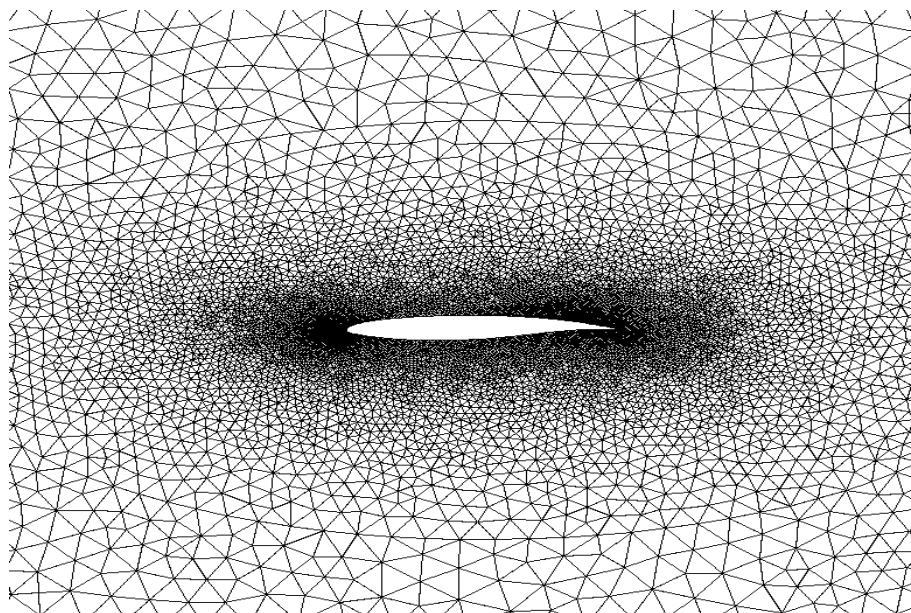
Όπως αναφέρθηκε, για την επίλυση της ροής γύρω από την αεροτομή χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό PUMA (Parallel Unstructured Multigrid Adapted-grid) της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ σε συνθήκες διηχητικής ροής και για δεδομένες τις συνθήκες της επί άπειρο ροής: $M_\infty = 0.725$ και $\alpha_\infty = 2.72^\circ$. Το υπολογιστικό μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση της ροής ήταν οι εξισώσεις Euler στις δύο διαστάσεις, δηλαδή η ροή θεωρήθηκε ατρίβης, ενώ το σχήμα διακριτοποίησης του επιλύτη είναι δεύτερης τάξης. Σε συμφωνία με τα παραπάνω, το σχήμα της αεροτομής παραμετροποιείται χρησιμοποιώντας δύο καμπύλες *Bezier*, μια για την πλευρά υποπίεσης (suction side) και μια για την πλευρά υπερπίεσης (pressure side). Κάθε καμπύλη *Bezier* δημιουργείται από 8 σημεία ελέγχου (control points) που αναπαρίστανται στο επίπεδο με τη χρήση δύο συντεταγμένων, οι οποίες αποτελούν τις τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{X}_1 του αεροδυναμικού πεδίου. Ένα τέτοιο πρόβλημα διαχειρίζεται συνολικά 32 ($2 \text{ sides} \times 2 \text{ coord.} \times 8 \text{ CP}$) τοπικές μεταβλητές σχεδιασμού – μόνο για την αεροδυναμική ανάλυση – γεγονός που αυξάνει δραματικά το υπολογιστικό κόστος της εφαρμογής. Στη συγκεκριμένη εργασία, δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στη διερεύνηση της ενσωμάτωσης και της αλληλεπίδρασης των δύο αναλύσεων, παρα στην εξαιρετική ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Για αυτό τον λόγο, έγιναν ορισμένες απλοποιήσεις και παραδοχές στις μεταβλητές σχεδιασμού, ώστε να μειωθεί το υπολογιστικό κόστος. Συγκεκριμένα, καθόλη τη διάρκεια της βελτιστοποίησης, τα σημεία ελέγχου μπορούν να μεταβάλλονται μόνο κατά την κάθετη στη χορδή κατεύθυνση. Ενώ, γίνεται η υπόθεση ότι το μήκος της χορδής της αεροτομής διατηρείται σταθερό, θεωρώντας ακίνητα το πρώτο και τελευταίο σημείο ελέγχου, τα οποία αντιστοιχούν στην ακμή προσβολής και εκφυγής αντίστοιχα. Λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις παραδοχές, ο συνολικός αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού

μειώνεται στις **12** (Πίνακας (7.1)), γεγονός που απλοποιεί αρκετά το πρόβλημα, χωρίς να αφαιρεί ιδιαίτερα από την αξιοπιστία ή την πρακτικότητα της τελικής λύσης. Το Σχήμα (7.2) δείχνει την αρχική μορφή της αεροτομής πριν τη βελτιστοποίηση, αλλά και τα σημεία ελέγχου Bezier.



Σχήμα 7.2: Αρχική μορφή της αεροτομής. Δημιουργείται από 8 σημεία ελέγχου Bezier σε κάθε πλευρά (υποπίεση και υπερπίεση). Τα πρώτα και τελευταία σημεία ελέγχου που αντιστοιχούν στις ακμές προσβολής και εκφυγής παραμένουν ακίνητα κατά τη βελτιστοποίηση, ενώ συμπίπτουν για την πάνω και κάτω πλευρά. Οι αεροτομές σχεδιάζονται χωρίς κοινή κλίμακα στους δύο άξονες.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το προκύπτον υπολογιστικό πλέγμα επίλυσης της ροής αποτελείται από 20000 κόμβους και η δημιουργία του (meshing) απαιτεί περίπου 30 δευτερόλεπτα σε έναν επεξεργαστή κάρτας γραφικών (GPU) NVIDIA K20 που διαθέτει η ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ. Ο σκοπός του πλέγματος είναι να παρέχει λεπτομερείς υπολογισμούς σε περιοχές, όπου οι κλίσεις της πίεσης και της ταχύτητας της ροής είναι αξιοσημείωτες. Αυτές οι πληροφορίες βελτιώνουν το επίπεδο ανάλυσης και υπολογισμού των δυνάμεων και ροπών στον σχεδιασμό της αεροτομής. Μέσα από την ανάλυση, λοιπόν, δημιουργείται ένα διάγραμμα 12 στοιχείων ($3 \text{ loads} \times 4 \text{ element nodes}$) με τιμές τα αεροδυναμικά φορτία ($L D M_z$), τα οποία χρησιμοποιούνται ως είσοδοι (μεταβλητές σύζευξης) στη δομική ανάλυση για τον υπολογισμό των αντίστοιχων τάσεων και παραμορφώσεων. Το υπολογιστικό πλέγμα φαίνεται στο Σχήμα (7.3).



Σχήμα 7.3: Πρόβλημα βέλτιστου σχεδιασμού αεροτομής, με στόχο τη μεγιστοποίηση του συντελεστή άνωσης C_L σε διηχητικές συνθήκες ροής. Παρουσιάζεται το υπολογιστικό πλέγμα που χρειάζεται ο επιλύτης των εξισώσεων ροής, ώστε να υπολογίσει, μεταξύ άλλων, τα αεροδυναμικά φορτία (μεταβλητές σύζευξης).

7.1.2 Δομική Ανάλυση

Για τη δομική ανάλυση χρησιμοποιήθηκε ένα πρόγραμμα που υλοποιεί το 1Δ μοντέλο μιας μονόπακτης δοκού (CSM). Η δοκός αποτελείται από 3 ελαστικά τμήματα (elements) και 4 κόμβους (nodes). Οι μεταβλητές σχεδιασμού αποτελούν τις συντεταγμένες των κόμβων κατά την οριζόντια και κατακόρυφη κατεύθυνση (Πίνακας (7.2)), μεταβολές των οποίων έχουν ως αποτέλεσμα την εμφάνιση μετατοπίσεων ($dx dy d\theta$) στη μορφή της αεροτομής. Ο αριθμός τους σύμφωνα με τα παραπάνω είναι 8 ($4 nodes \times 2 coord.$), ενώ η μεταφορά των μετατοπίσεων (displacements) μεταξύ CFD και CSM πραγματοποιείται με παρεμβολές NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) καμπύλων, οι οποίες αποτελούν τις μεταβλητές σύζευξης του πεδίου δομικής ανάλυσης και συνολικά είναι 12 ($4 nodes \times 3 displ.$).

Πίνακας 7.1: Ορισμός μεταβλητών σχεδιασμού του πεδίου Αεροδυναμικής

Μεταβλητή	Περιγραφή
$-0.0413 \leq X_{1,1} \leq -0.0213$	y -συντ/μένη σημείου ελέγχου 2 στην πλευρά υπερπίεσης
$-0.0614 \leq X_{1,2} \leq -0.0414$	y -συντ/μένη σημείου ελέγχου 3 στην πλευρά υπερπίεσης
$-0.0877 \leq X_{1,3} \leq -0.06767$	y -συντ/μένη σημείου ελέγχου 4 στην πλευρά υπερπίεσης
$-0.0927 \leq X_{1,4} \leq -0.07267$	y -συντ/μένη σημείου ελέγχου 5 στην πλευρά υπερπίεσης
$-0.0363 \leq X_{1,5} \leq -0.01631$	y -συντ/μένη σημείου ελέγχου 6 στην πλευρά υπερπίεσης
$0.00077 \leq X_{1,6} \leq 0.018768$	y -συντ/μένη σημείου ελέγχου 7 στην πλευρά υπερπίεσης
$0.03259 \leq X_{1,7} \leq 0.05259$	y -συντ/μένη σημείου ελέγχου 2 στην πλευρά υποπίεσης
$0.04762 \leq X_{1,8} \leq 0.06762$	y -συντ/μένη σημείου ελέγχου 3 στην πλευρά υποπίεσης
$0.07142 \leq X_{1,9} \leq 0.09142$	y -συντ/μένη σημείου ελέγχου 4 στην πλευρά υποπίεσης
$0.05514 \leq X_{1,10} \leq 0.07514$	y -συντ/μένη σημείου ελέγχου 5 στην πλευρά υποπίεσης
$0.0376 \leq X_{1,11} \leq 0.0576$	y -συντ/μένη σημείου ελέγχου 6 στην πλευρά υποπίεσης
$0.0288 \leq X_{1,12} \leq 0.04883$	y -συντ/μένη σημείου ελέγχου 7 στην πλευρά υποπίεσης

Πίνακας 7.2: Ορισμός μεταβλητών σχεδιασμού του πεδίου Δομικής

Μεταβλητή	Περιγραφή
$0 \leq X_{2,1} \leq 0.002$	x -συντ/μένη κόμβου 1
$0 \leq X_{2,2} \leq 0.002$	y -συντ/μένη κόμβου 1
$0.3 \leq X_{2,3} \leq 0.5$	x -συντ/μένη κόμβου 2
$0.02 \leq X_{2,4} \leq 0.05$	y -συντ/μένη κόμβου 2
$0.5 \leq X_{2,5} \leq 0.7$	x -συντ/μένη κόμβου 3
$0.02 \leq X_{2,6} \leq 0.05$	y -συντ/μένη κόμβου 3
$1 \leq X_{2,7} \leq 1.002$	x -συντ/μένη κόμβου 4
$0 \leq X_{2,8} \leq 0.002$	y -συντ/μένη κόμβου 4

Υποσυστημικές Βελτιστοποιήσεις

Στη συνέχεια, διατυπώνονται οι υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις για κάθε πεδίο ξεχωριστά, για την καλύτερη κατανοήση της λειτουργίας της μεθόδου BLISS/B στη συγκεκριμένη εφαρμογή. Κάθε υποσυστημική βελτιστοποίηση, δέχεται ως δεδομένα τις τρέχουσες τιμές των τοπικών μεταβλητών σχεδιασμού (\mathbf{X}_i)_ο – οι οποίες έχουν προκύψει από την εκτέλεση των υποσυστημικών βελτιστοποιήσεων του προηγούμενου κύκλου – καθώς και τις παραγώγους της αντικειμενικής συνάρτησης (Συντελεστής Άνωσης C_L) ως προς τις \mathbf{X}_i , οι οποίες προέκυψαν από την ανάλυση ευαισθησίας του συστήματος (βλ. § 2.3). Με αυτά τα δεδομένα, κάθε πεδίο αναλαμβάνει να ελαχιστοποιήσει τη δική του τοπική αντικειμενική συνάρτηση (βλ. § 4.2) υπό τους περιορισμούς στα όρια των τοπικών μεταβλητών σχεδιασμού (Πίνακες (7.1) και (7.2)). Επίσης, προστίθενται στους περιορισμούς μέγιστες επιτρεπόμενες μεταβολές ($\Delta \mathbf{X}^L$ $\Delta \mathbf{X}^U$) των μεταβλητών σχεδιασμού, με σκοπό τη δημιουργία ομαλότερων συνθηκών σύγκλισης. Οι τιμές αυτών είναι αυθαίρετες, ενώ στο συγκεκριμένο πρόβλημα επιλέχθηκε ως μέγιστη μεταβολή το $\frac{\mathbf{X}^U - \mathbf{X}^L}{150}$ από το τρέχον σημείο σχεδιασμού (\mathbf{X})_ο.

Τέλος, εφόσον είναι επιθυμητή η μεγιστοποίηση του συντελεστή άνωσης, το πρόβλημα αντιμετωπίζεται ως ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης της συνάρτησης του συντελεστή άνωσης με αρνητικό πρόσημο. Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω, οι υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις διατυπώνονται ως ακολούθως

 Βελτιστοποίηση Πεδίου Αεροδυναμικής (Aerodynamics)

$$\text{Given } (\mathbf{X}_1)_o \frac{dC_L}{d\mathbf{X}_1}$$

$$\text{Minimize } \Delta C_{L,1} = - \left[\frac{dC_L}{d\mathbf{X}_1} (\mathbf{X}_1 - (\mathbf{X}_1)_o) \right]$$

with respect to \mathbf{X}_1

$$\text{subject to } \mathbf{X}_1^L \leq \mathbf{X}_1 \leq \mathbf{X}_1^U \text{ από Πίνακα (7.1)}$$

$$\Delta \mathbf{X}_1^L \leq \Delta \mathbf{X}_1 \leq \Delta \mathbf{X}_1^U$$

 Βελτιστοποίηση Πεδίου Δομικής (Structures)

$$\text{Given } (\mathbf{X}_2)_o \frac{dC_L}{d\mathbf{X}_2}$$

$$\text{Minimize } \Delta C_{L,2} = - \left[\frac{dC_L}{d\mathbf{X}_2} (\mathbf{X}_2 - (\mathbf{X}_2)_o) \right]$$

with respect to \mathbf{X}_2

$$\text{subject to } \mathbf{X}_2^L \leq \mathbf{X}_2 \leq \mathbf{X}_2^U \text{ από Πίνακα (7.2)}$$

$$\Delta \mathbf{X}_2^L \leq \Delta \mathbf{X}_2 \leq \Delta \mathbf{X}_2^U$$

Επειδή τα πεδία της Αεροδυναμικής και της Δομικής δεν μοιράζονται ανεξάρτητες μεταβλητές σχεδιασμού (απουσία \mathbf{Z}), δεν πραγματοποιείται ούτε ανάλυση ευαισθησίας βέλτιστων λύσεων ούτε συστημική βελτιστοποίηση, όπως αυτές περιγράφηκαν στο Κεφάλαιο της μεθόδου BLISS/B § 4.3.2.

Συνεπώς, μετά το πέρας των υποσυστημικών βελτιστοποιήσεων, προκύπτουν οι τοπικά βέλτιστες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού \mathbf{X}_1^* και \mathbf{X}_2^* , οι οποίες χρησιμοποιούνται στη συνέχεια για την εκκίνηση ενός νέου κύκλου της μεθόδου.

7.2 Επίλυση και Αποτελέσματα

Η επίλυση της ροής και της δομικής ανάλυσης εκτελέστηκε σε επεξεργαστή κάρτας γραφικών (GPU) NVIDIA K20 που διαθέτει η ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ. Για τη συστημική ανάλυση, χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος Gauss-Seidel που αναπτύχθηκε στην Παράγραφο § 2.1.2, διότι εξασφαλίζει καλύτερες συνθήκες σύγκλισης σε σχέση με τον αλγόριθμο Jacobi, ενώ είναι εύκολος στην υλοποίηση.

Επίσης, για την ανάλυση ευαισθησίας επιλύθηκαν οι εξισώσεις ευαισθησίας που διατυπώθηκαν στο Κεφάλαιο § 2, ενώ για τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων των μεταβλητών σύζευξης και σχεδιασμού χρησιμοποιήθηκε ανάντι διαφορίση (forward differentiation) πρώτης τάξεως με βήμα 10^{-7} .

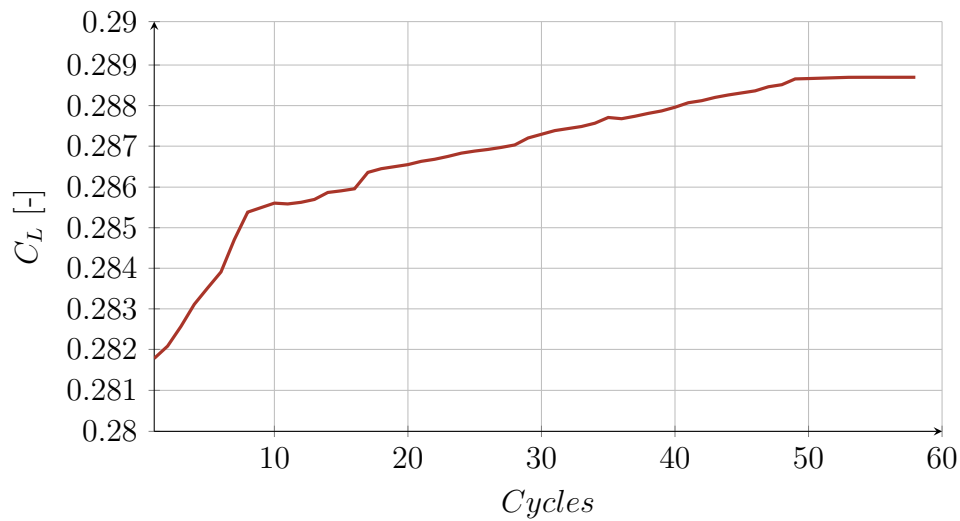
Το λογισμικό βελτιστοποίησης που χρησιμοποιήθηκε τόσο για τη συστημική όσο και για τις ανεξάρτητες υποσυστημικές βελτιστοποιήσεις βασίστηκε στη μέθοδο SQP (Sequential Quadratic Programming). Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε ο αντίστοιχος αλγόριθμος από την υπορουτίνα 'fmincon' της MATLAB για βελτιστοποίηση μη γραμμικών προβλημάτων με περιορισμούς. Στην ουσία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε εξακριβωμένο λογισμικό βελτιστοποίησης, χωρίς να έχει καμία επίδραση στο υπολογιστικό κόστος (αξιολογήσεις των πεδίων), παρα μόνο στον χρόνο εκτέλεσης της μεθόδου.

Τέλος, ο αλγόριθμος συνέκλινε μετά από 58 κύκλους της μεθόδου και τελική τιμή του συντελεστή άνωσης (αντικειμενική συνάρτηση) $-C_L = 0.2886$. Ως κριτήριο τερματισμού τέθηκε το σχετικό σφάλμα του συντελεστή άνωσης C_L να είναι

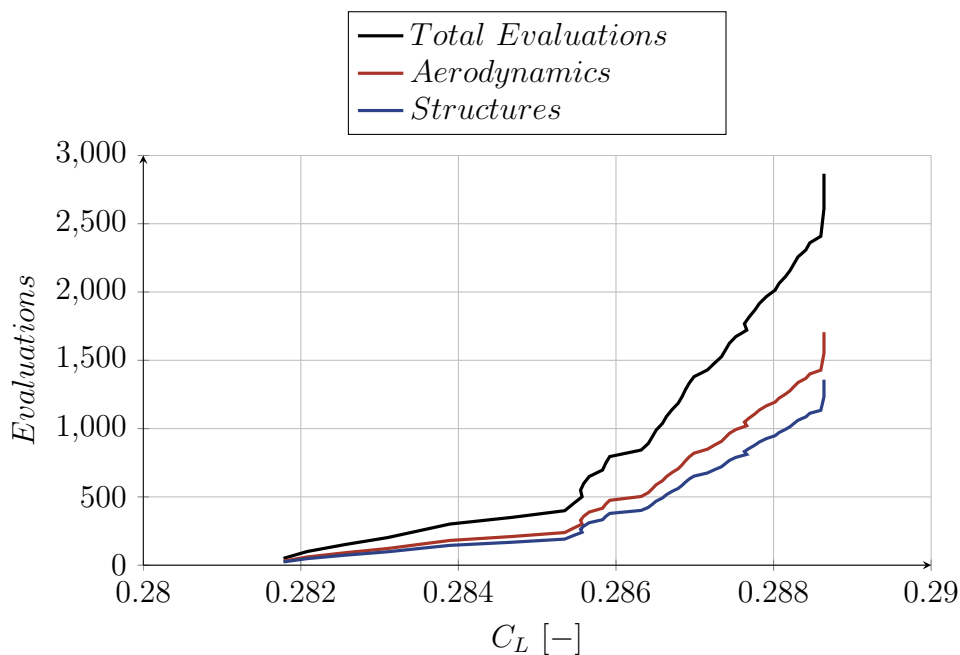
$$\epsilon_r = \frac{|C_L^{(k+1)} - C_L^{(k)}|}{C_L^{(k)}} \leq 10^{-7}$$

όπου $(k + 1)$ είναι ο τρέχων κύκλος.

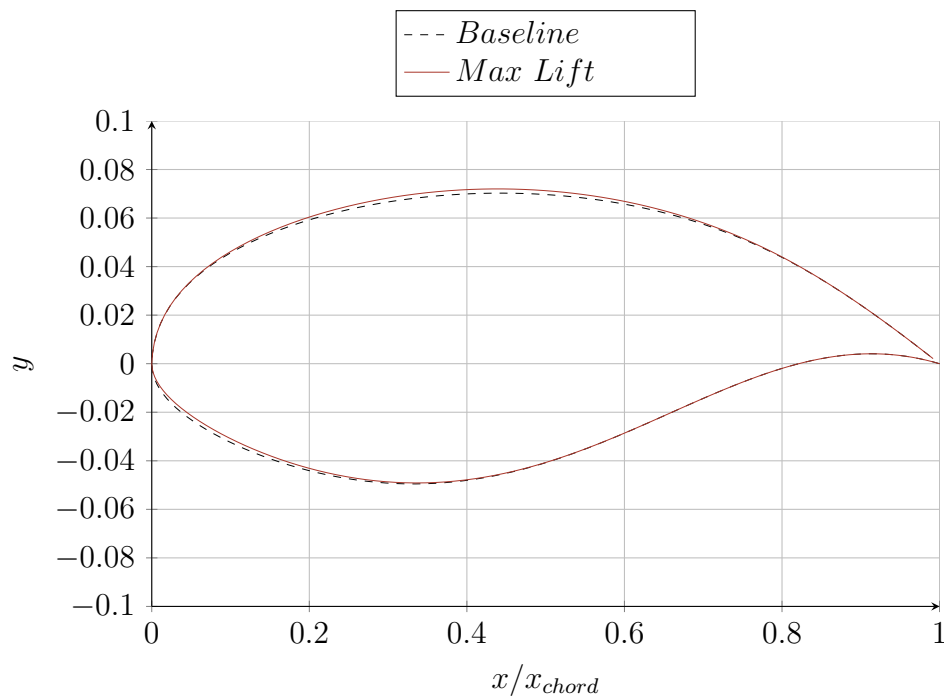
Στα σχήματα (7.4) και (7.5) παρουσιάζονται τα ιστορικά της αντικειμενικής συνάρτησης και των αξιολογήσεων, ενώ στα σχήματα (7.6) και (7.7) γίνονται συγκρίσεις του βέλτιστου με το αρχικό σημείο σχεδιασμού.



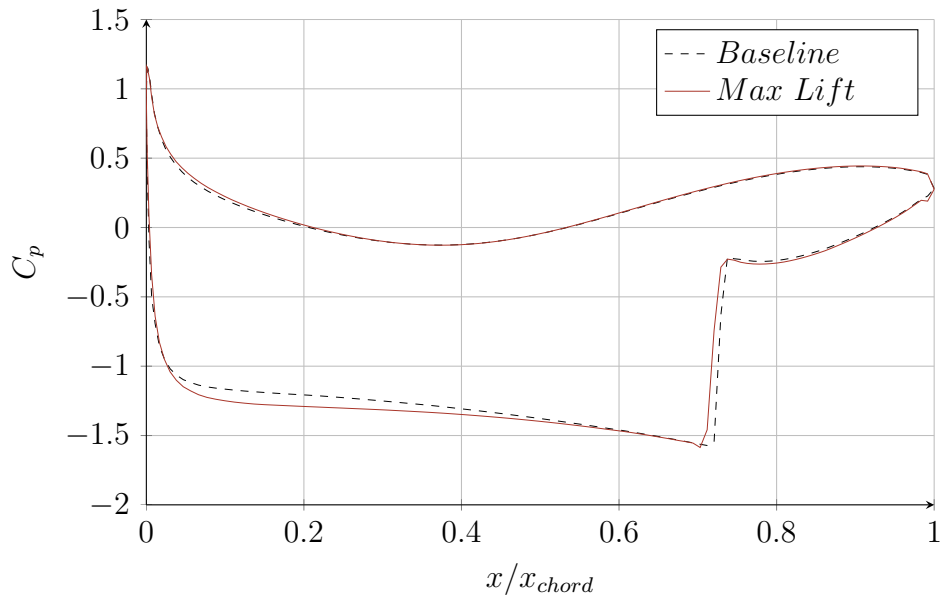
Σχήμα 7.4: Διάγραμμα της αντικειμενικής συνάρτησης με τους κύκλους του αλγορίθμου (α') και τις αξιολογήσεις (β'). Η αντικειμενική συνάρτηση συγκλίνει ομαλά προς τη τιμή 0.2886 μετά από 58 κύκλους της μεθόδου. Συγκεκριμένα, η βελτίωση στην αντικειμενική συνάρτηση είναι της τάξεως του 2.5% από το αρχικό σημείο σχεδιασμού.



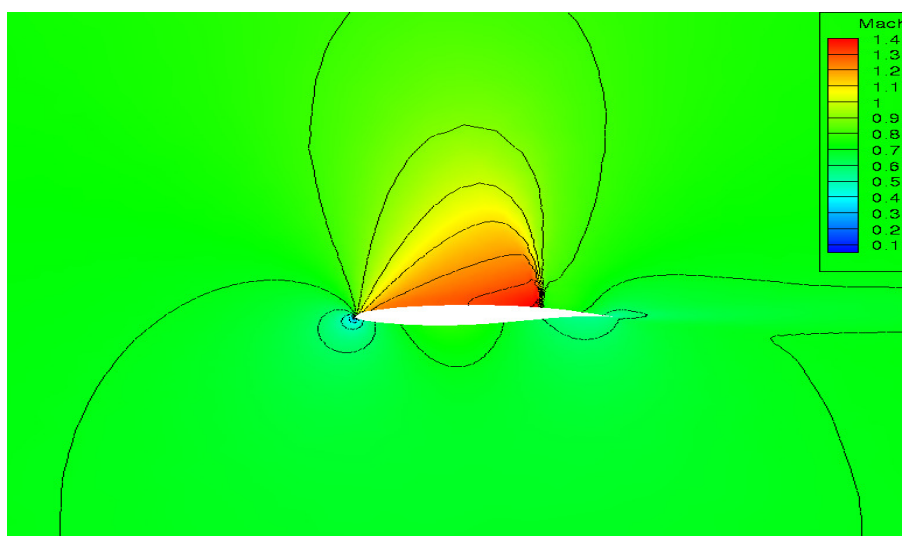
Σχήμα 7.5: Διάγραμμα αριθμού αξιολογήσεων με την αντικειμενική συνάρτηση. Παρουσιάζονται ξεχωριστά οι αξιολογήσεις του κάθε πεδίου κατά την εκτέλεση της μεθόδου. Οι συνολικές αξιολογήσεις για το πεδίο της Αεροδυναμικής είναι 1706, ενώ για το πεδίο της Δομικής 1474. Οι περισσότερες αξιολογήσεις οφείλονται στην ανάλυση ευαισθησίας, ενώ οι υπόλοιπες στη συστηματική ανάλυση, όπου όλα τα πεδία εκτελούνται τις ίδιες φορές.



Σχήμα 7.6: Η τελική μορφή της αεροτομής, όπως προέκυψε από την βελτιστοποίηση, συγκριτικά με την μορφή της στο αρχικό σημείο σχεδιασμού. Οι αεροτομές σχεδιάζονται χωρίς κοινή κλίμακα στους δύο άξονες.



Σχήμα 7.7: Διάγραμμα συντελεστή στατικής πίεσης C_p κατά μήκος της χορδής της αεροτομής για το βέλτιστο και αρχικό σημείο σχεδιασμού. Εδώ, φαίνεται ξεκάθαρα η μείωση της στατικής πίεσης στην πλευρά υποπίεσης στη βέλτιστη λύση και η συνεπακόλουθη αύξηση της άνωσης.



Σχήμα 7.8: Το πρόβλημα βέλτιστου επανασχεδιασμού της αεροτομής, με στόχο τη μεγιστοποίηση του C_L σε διηχητικές συνθήκες ροής. Σχεδιάζονται οι ισοϋψείς του αριθμού Mach, ώστε να φανεί το κρουστικό κύμα στην πλευρά υποπίεσης λόγω των συνθηκών διηχητικής ροής αλλά και της αύξησης της άνωσης.

7.3 Συμπεράσματα

Στο πρόβλημα αυτό δεν υπάρχουν συστημικές μεταβλητές σχεδιασμού Z , συνεπώς δεν πραγματοποιείται καμία συστημική βελτιστοποίηση ούτε ανάλυση ευαισθησίας τοπικών βελτιστών, όπως αυτές περιγράφηκαν στο Κεφάλαιο §4. Ωστόσο, κάτι τέτοιο δεν αφαιρεί ιδιαίτερα από την πολυπλοκότητα του προβλήματος, καθώς αυτό περιλαμβάνει δύο επιστημονικά πεδία με ισχυρή σύζευξη και συνθέτες αναλύσεις – CFD και 1-Δ μοντέλο δοκού. Μέσα από αυτήν την εφαρμογή, λοιπόν, η μέθοδος BLISS/B είναι κατάλληλη για ισχυρά πεπλεγμένα προβλήματα, καθώς μπορεί να διαχειριστεί αποδοτικά τις βελτιστοποιήσεις και να εντοπίσει το βέλτιστο σημείο σχεδιασμού.

Στα σχήματα (7.6) και (7.7) φαίνεται ο βέλτιστος επανασχεδιασμός της αεροτομής για μέγιστο συντελεστή άνωσης C_L , όπου διακρίνεται η αύξηση στην καμπυλότητα της πάνω πλευράς (πλευρά υποπίεσης) και η συνεπακόλουθη μείωση της στατικής πίεσης, με αποτέλεσμα την αύξηση της διαφοράς πίεσεως μεταξύ πλευράς υποπίεσης και υπερπίεσης (αύξηση άνωσης). Οι μετακινήσεις του σχήματος (7.6) είναι πολύ μικρές, παρόλα αυτά το κέρδος στην άνωση είναι εμφανές. Συγκεκριμένα, η βελτίωση της αντικειμενικής συνάρτησης είναι της τάξεως του 2.5% από την αρχική αεροτομή, γεγονός αρκετά σημαντικό στις αεροναυπηγικές εφαρμογές. Επίσης, σε διηχητικές συνθήκες ροής (όπως αυτές του προβλήματος) είναι αρκετά δύσκολο να αποφευχθεί ο σχηματισμός κρουστικού κύματος στην πλευρά υποπίεσης (Σχήμα (7.8)), ενώ η μείωση της στατικής πίεσης στην πλευρά υποπίεσης δεν συμβάλλει στην εξάλειψή του.

Τέλος, έγινε χρήση της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών (Σχήμα (7.5)) για τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Το κόστος του κάθε πεδίου ανά κύκλο της μεθόδου υπολογίστηκε ότι είναι 20 αξιολογήσεις για το πεδίο της Δομικής (12 για μετ. σύζευξης εισόδου + 8 για X), ενώ για το πεδίο της Αεροδυναμικής 24 (12 για μετ. σύζευξης εισόδου + 12 για X). Απαιτούνται, συνεπώς, συνολικά 44 αξιολογήσεις ανά κύκλο της μεθόδου μόνο για την ανάλυση ευαισθησίας. Το κόστος αυτό μπορεί να μειωθεί σημαντικά με χρήση μιας αποδοτικότερης μεθόδου εύρεσης των παραγώγων. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της συζυγούς μεθόδου, εκτιμάται ότι το συνολικό κόστος ανά κύκλο μειώνεται κατά 41% συγκριτικά με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Συγκεκριμένα, έχει βρεθεί ότι τα πεδία της Δομικής και της Αεροδυναμικής τυχαίνει να απαιτούν τον ίδιο αριθμό αξιολογήσεων ανά κύκλο, εξαιτίας του ίδιου αριθμού μεταβλητών σύζευξης που ανταλλάσσουν – δηλαδή 13 αξιολογήσεις (12 για μετ. σύζευξης εισόδου + 1 για όλα τα X) – οδηγώντας σε 26 συνολικά αξιολογήσεις των πεδίων ανά κύκλο. Παρόλο που τα πεδία εμφανίζουν τον ίδιο αριθμό αξιολογήσεων με τη συζυγή μέθοδο, ο χρόνος εκτέλεσης των πεδίων είναι αρκετά διαφορετικός, καθώς μία αξιολόγηση του κώδικα αεροδυναμικής ανάλυσης είναι αρκετές τάξεις μεγαλύτερη (με χρονικούς όρους) από την αντίστοιχη της δομικής ανάλυσης.

Κεφάλαιο 8

Συμπεράσματα και Προτάσεις

Σε αυτό κεφάλαιο συνοψίζονται τα βασικότερα σημεία της μελέτης που παρουσιάστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια και διατυπώνονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν. Επίσης, γίνεται αναφορά σε ορισμένες ιδέες για περαιτέρω μελέτη και εμβάθυνση στο θέμα.

8.1 Ανακεφαλαίωση και Συμπεράσματα

Η διπλωματική εργασία ασχολήθηκε με τη διατομεακή βελτιστοποίηση (MDO) – ένα πεδίο έρευνας που περιλαμβάνει αρκετά πεπλεγμένα επιστημονικά πεδία. Συγκεκριμένα, συνοψίστηκαν και κατηγοριοποιήθηκαν όλες οι διαθέσιμες αιτιοκρατικές μέθοδοι και αρχιτεκτονικές MDO. Ενώ, για την καλύτερη κατανόηση των πεπλεγμένων συστημάτων, έγινε χρήση του διαγράμματος XDSM, το οποίο δείχνει τόσο την εξάρτηση των πεδίων όσο και την εκτέλεση των διαφόρων διεργασιών ανάλυσης ή βελτιστοποίησης μεταξύ τους. Επίσης, περιγράφηκε η διαδικασία της συστημικής ανάλυσης που χρησιμοποιεί η πλειονότητα των MDO μεθόδων και διατυπώθηκαν διάφορες αριθμητικές μέθοδοι προς επίλυσή της, και τελικά, εκείνες συγκρίθηκαν και αξιολογήθηκαν ως προς την απόδοσή τους. Στη συνέχεια, διατυπώθηκαν οι μαθηματικές εξισώσεις που διέπουν την ανάλυση ευαισθησίας, με έμφαση στις κατανεμημένες αρχιτεκτονικές, και συζητήθηκε το υπολογιστικό τους κόστος. Ακολούθως, περιγράφηκαν οι μέθοδοι CO και BLISS ως μέθοδοι αποσύνθεσης των προβλημάτων, με ιδιαίτερη βαρύτητα στην τελευταία και τις διάφορες παραλλαγές της. Η υλοποίηση της μεθόδου BLISS/B πραγματοποιήθηκε για ποικίλες εφαρμογές είτε καθαρά μαθηματικής φύσεως με στόχο τη δοκιμή του αλγορίθμου είτε σε απλά αεροναυπηγικά προβλήματα, ώστε να δοκιμαστεί εκείνη σε πραγματικά προβλήματα μεγάλης διαστάσεως. Σε κάθε περίπτωση, παρουσιάστηκε η μαθηματική διατύπωση των προβλημάτων, η διαδικασία επίλυσης και τα αποτελέσματά τους.

Ακολουθούν τα βασικά συμπεράσματα όπως προέκυψαν από την ανωτέρω μελέτη

- Η μέθοδος BLISS επέδειξε την ικανότητα διαχείρισης ισχυρά πεπλεγμένων προβλημάτων και την επιτυχή εύρεση του καθολικού βέλτιστου στον χώρο σχεδιασμού. Ακόμα και εάν η αρχική εκτίμηση είναι στην περιοχή των μη-αποδεκτών λύσεων, η μέθοδος εξασφαλίζει τη σταδιακή βελτίωση στον σχεδιασμό με ταυτόχρονη μείωση στην παραβίαση των περιορισμών.
- Η επιλογή της μεθόδου εκτέλεσης της συστημικής ανάλυσης είναι κρίσιμης σημασίας, καθώς μπορεί να καθορίσει τόσο τις συνθήκες σύγκλισης και υπολογιστικού κόστους, όσο και την ακρίβεια των τελικών αποτελεσμάτων. Συγκεκριμένα, εάν υπάρχουν αρκετές μη-γραμμικότητες στις καταστατικές εξισώσεις των πεδίων ή ισχυρή σύζευξη μεταξύ τους, θα πρέπει να αντιμετωπιστούν κατάλληλα για να μειωθεί το προκύπτον υπολογιστικό κόστος. Για παράδειγμα, εάν χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος Gauss-Seidel, κάτι τέτοιο σημαίνει την αναδιάταξη αξιολόγησης των πεδίων.
- Η μέθοδος BLISS βασίζεται στη γραμμικοποίηση πιθανόν μη-γραμμικών βελτιστοποιήσεων, επομένως η απόδοση της εξαρτάται από τον βαθμό μη-γραμμικότητας του εκάστοτε προβλήματος. Στις διάφορες εφαρμογές, είναι εμφανές το υπολογιστικό κόστος και η σύγκλιση από ένα απλό μαθηματικό σε ένα σύνθετο αεροναυπηγικό πρόβλημα με ισχυρή σύζευξη. Επίσης, το υπολογιστικό κόστος αξιολόγησης των πεδίων μπορεί να μειωθεί σημαντικά με τη χρήση μιας αποδοτικής μεθόδου υπολογισμού των παράγωγων της αντικειμενικής συνάρτησης.
- Η επιβολή μέγιστων επιτρεπόμενων μεταβολών στις μεταβλητές σχεδιασμού βελτιώνει τις συνθήκες σύγκλισης, ωστόσο αυξάνει ελαφρώς το υπολογιστικό κόστος της εφαρμογής. Η επιλογή της τιμής τους αφήνεται στην ευχέρεια του μηχανικού να διερευνήσει τις κατάλληλες τιμές που πρέπει να έχουν για ένα δεδομένο πρόβλημα.
- Τέλος, ένα από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα της μεθόδου είναι ότι επιτρέπει την ανθρώπινη παρέμβαση σε κάθε στάδιο της διαδικασίας, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα στην ομάδα των μηχανικών να αξιολογήσει τα αποτελέσματα και, αν κρίνει απαραίτητο, να διακόψει έγκαιρα τη διαδικασία της βελτιστοποίησης, προτού δαπανηθούν περισσότεροι υπολογιστικοί πόροι. Παράλληλα, επιτρέπει τη σχετική αυτονομία μεταξύ των πεδίων, γεγονός που δίνει τη δυνατότητα βελτιστοποίησης καθενός πεδίου με οποιαδήποτε εξακριβωμένη, συμβατική μέθοδο βελτιστοποίησης, καθώς και την αξιοποίηση της παράλληλης επεξεργασίας για μείωση του χρόνου εκτέλεσης της μεθόδου.

8.2 Προτάσεις για Μελλοντική Μελέτη

Ακολουθούν ορισμένες προτάσεις για περαιτέρω εφαρμογές και διερευνήσεις στην MDO

- Η εργασία εστιάζει στην αιτιοκρατική συστημική ανάλυση και βελτιστοποίηση και δεν περιλαμβάνει παράγοντες αβεβαιότητας στα μηχανολογικά προβλήματα. Ως μελλοντική μελέτη, προτείνεται να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος BLISS σε μηχανολογικά συστήματα, που οι μεταβλητές είσοδοί τους είναι ευαίσθητες σε αβεβαιότητες.
 - Συνίσταται η απόδοση της μεθόδου BLISS να συγκριθεί με εκείνη άλλων μεθόδων κατανεμημένης αρχιτεκτονικής σε ένα προκαθορισμένο σύνολο προβλημάτων, και τα αποτελέσματα να επιβεβαιωθούν ανεξάρτητα. Επιπλέον, η ανάπτυξη νέων MDO προβλημάτων για πιο εμπειριστατωμένη δόκιμη των μεθόδων θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο για τη σύγκρισή τους.
 - Η συγκεκριμένη εργασία περιορίστηκε στη σειριακή εκτέλεση των αναλύσεων και των βελτιστοποιήσεων των επιστημονικών πεδίων για τις υλοποιήσεις της μεθόδου BLISS και η παράλληλη επεξεργασία, ενώ έχει αναφερθεί ως τρόπος βελτίωσης της μεθόδου, δεν έχει εφαρμοστεί. Προτείνεται, λοιπόν, να χρησιμοποιηθούν οι διαθέσιμοι υπολογιστικοί πόροι για παράλληλη επεξεργασία, με σκοπό τη βελτίωση της απόδοσης τόσο της συστημικής ανάλυσης όσο και των επιμέρους υποσυστημικών βελτιστοποιήσεων.
 - Τέλος, οι εφαρμογές στην υλοποίηση της μεθόδου BLISS/B διεξήχθησαν με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών για τον υπολογισμό των παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης. Για μελλοντική μελέτη της μεθόδου, συνίσταται να χρησιμοποιηθεί μια αποδοτικότερη μέθοδος υπολογισμού των παραγώγων. Μια τέτοια μέθοδος θα μπορούσε να ήταν η συζυγής μέθοδος (Adjoint Method), της οποίας το υπολογιστικό κόστος σε αεροναυπηγικά προβλήματα ισούται με το κόστος επίλυσης εξίσωσης της ροής.
-

Βιβλιογραφία

- [1] Schmit, L. A.: Structural Design by Systematic Synthesis. 2nd Conference on Electronic Computation, ASCE, New York, NY, 1960.
- [2] Schmit, L. A. and Thornton, W. A.: Synthesis of an Airfoil at Supersonic Mach Number. Tech. Rep. CR 144, NASA, Jan 1965.
- [3] Schmit, L. A.: Structural synthesis — precursor and catalyst. Recent experiences in multidisciplinary analysis and optimization. Tech. Rep. CP-2337, NASA, 1984.
- [4] Haftka, R. T.: Automated Procedure for Design of Wing Structures to Satisfy Strength and Flutter Requirements. Tech.Rep. TN D-7264, NASA Langley Research Center, Hampton, VA, 1973.
- [5] Kroo, I. M., Altus S. Braun R. Gage P. and Sobieski, I.: Multi Disciplinary Optimization Methods for Aircraft Preliminary Design. 5th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, 1994.
- [6] Manning, V. M.: Large-Scale Design of Supersonic Aircraft via Collaborative Optimization. PhD thesis, Stanford University, 1999.
- [7] Grossman, B., Gurdal Z. Strauch G. J. Eppard W. M. and Haftka, R. T.: Integrated Aerodynamic-Structural Design of a Sailplane Wing, volume 25, No. 9. Journal of Aircraft, 1988.
- [8] Livne, E.: Integrated Aeroservoelastic Optimization: Status and Direction, volume 36, No. 1. Journal of Aircraft, 1999.
- [9] Balling, R. and Rawlings, M. R.: Collaborative Optimization with Disciplinary Conceptual Design, volume 20, No. 3. Structural and Multi-disciplinary Optimization, 2000.
- [10] Geyer, P.: Component-oriented Decomposition for Multidisciplinary Design Optimization in Building Design, volume 23, No. 1,. Advanced Engineering Informatics, 2009.

-
- [11] He, Y. and Mcphee, J.: Multidisciplinary Optimization of Multibody Systems with Application to the Design of Rail Vehicles, volume 14, No. 2. *Multibody System Dynamics*, 2005.
- [12] Enblom, R.: Two-Level Numerical Optimization of Ride Comfort in Railway Vehicles, volume 220, No. 1. *Journal of Rail and Rapid Transit*, 2006.
- [13] Potsaid, B., Bellouard Y. and Wen, J. T. Y.: A Multidisciplinary Design and Optimization Methodology for the Adaptive Scanning Optical Microscope (ASOM), volume 6289. *Proceedings of the SPIE*, 2010.
- [14] McAllister, C. D. and Simpson, T. W.: Multidisciplinary Robust Design Optimization of an Internal Combustion Engine, volume 125, No. 1. *Journal of Mechanical Design*, March 2003.
- [15] Kokkolaras, M., Louca L. S. Delagrammatikas G. J. Michelena N. F. Filipi Z. S. Papalambros P. Y. Stein J. L. and Assanis D. N.: Simulation-based Optimal Design of Heavy Trucks by Model-based Decomposition: an Extensive Analytical Target Cascading Case Study, volume 11. *International Journal of Heavy Vehicle Systems*, 2004.
- [16] Peri, D. and Campana, E. F.: Multidisciplinary Design Optimization of a Naval Surface Combatant, volume 47, No. 1. *Journal of Ship Research*, 2003.
- [17] Kalavalapally, R., Penmetsa R. and Grandhi, R.: Multidisciplinary optimization of a lightweight torpedo structure subjected to an underwater explosion, volume 43, No. 2. *Finite Elements in Analysis and Design*, December 2006.
- [18] Ganguli, R.: Survey of Recent Developments in Rotorcraft Design Optimization, volume 41, No. 3,. *Journal of Aircraft*, 2004.
- [19] Glaz, B., Friedmann P. P. and Liu, L.: Helicopter Vibration Reduction throughout the Entire Flight Envelope Using Surrogate-Based Optimization, volume 54,. *Journal of the American Helicopter Society*, 2009.
- [20] Braun, R. D., Moore A. A. and Kroo, I. M.: Collaborative Approach to Launch Vehicle Design, volume 34, No. 4. *Journal of Spacecraftand Rockets*, July 1997.
- [21] Cai, G., Fang J. Zheng Y. Tong X. Chen J. and Wang, J.: Optimization of System Parameters for Liquid Rocket Engineswith Gas-Generator Cycles, volume 26, No. 1. *Journal of Propulsion and Power*, 2010.
- [22] Haftka, R. T., Sobieszczanski Sobieski J. and Padula, S. L.: On Options for Interdisciplinary Analysis and Design Opti-mization, volume 4. *Structural Optimization*, 1992.
-

-
- [23] Agte, J., de Weck O. Sobieszczanski Sobieski J. Arendsen P. Morris A. and Spieck, M.: MDO: Assessment and Direction for Advancement — an Opinion of One International Group, volume 40. Structural and Multi Disciplinary Optimization, 2010.
- [24] Cramer, E. J., Dennis Jr J. E. Frank P. D. Lewis R. M. and Shubin, G. R.: Problem Formulation for Multidisciplinary Optimization, volume 4, No. 4. SIAM Journal on Optimization, 1994.
- [25] E. J. Cramer, J. Dennis, P. D. Frank R. M. Lewis and Shubin, G. R.: Problem formulation for multidisciplinary optimization. SIAM Journal on Optimization, vol. 4, no. 4, pp. 754–776, 1994.
- [26] Alexandrov, N. M. and Lewis, R. M.: Analytical and Computational Aspects of Collaborative Optimization for Multidisciplinary Design, volume 40, No. 2. AIAA Journal, 2002.
- [27] Haftka, R. T.: Simultaneous Analysis and Design, volume 23, No. 7. AIAA Journal, 1985.
- [28] Braun, R. D.: Collaborative Optimization: An Architecture for Large-Scale Distributed Design. PhD thesis, Stanford University, Ann Arbor, Michigan, USA, 1996.
- [29] R. Braun, I. Kroo: Development and application of the collaborative optimization architecture in a multi-disciplinary design environment. Multi-disciplinary Design Optimization, SIAM, Philadelphia, PA, 1997.
- [30] R. S. Sellar, S. M. Batill and Renaud, J. E.: Response surface based, concurrent subspace optimization for multidisciplinary system design. in Proceedings of the 34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996.
- [31] J. Sobieszczanski-Sobieski, J. S. Agte and Jr., R. R. Sandusky: Bilevel integrated system synthesis. AIAA Journal, vol. 38, no. 1, pp. 164–172, 2000.
- [32] Arian, E.: Convergence Estimates for Multidisciplinary Analysis and Optimization. PhD thesis, Institute for Computer Applications in Science and Engineering ICASE, 1997.
- [33] J. H. Mathews, K. D. Fink: Numerical methods using MATLAB. Prentice hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1999.
- [34] J. T. Allison, M. Kokkolaras and Papalambros, P. Y.: On selecting single-level formulations for complex system design optimization. Journal of Mechanical Design, 2007.
-

-
- [35] K. Madsen, H. B. Nielsen and Tingleff, O.: Methods for Non-Linear Least Squares Problems. 2nd ed, 2004.
- [36] Lambe, A. B. and Martins: Extensions to the Design Structure Matrix for the Description of Multidisciplinary Design, Analysis, and Optimization Processes. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2012.
- [37] Steward, D. V.: The Design Structure Matrix: A Method for Managing the Design of Complex Systems, volume 28. IEEE Transactions on Engineering Management, 1981.
- [38] Browning, T. R.: Applying the Design Structure Matrix to System Decomposition and Integration Problems: A Review and New Directions, volume 48, No. 3,. IEEE Transactions on Engineering Management, 2001.
- [39] Bunch, James and Hopcroft, John: Triangular factorization and inversion by fast matrix multiplication. Mathematics of ComputationAMS Journal, 1974.
- [40] Okunev, Pavel and Johnson, Charles R.: Necessary And Sufficient Conditions For Existence of the LU Factorization of an Arbitrary Matrix. Cornel University, 2005.
- [41] Strikwerda, John: Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations. 2nd Ed., 2004.
- [42] Smith, G. D.: Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. Oxford University Press, 3rd ed., 1985.
- [43] Joaquim R. R. A. Martins, Peter Sturdza and Alonso, Juan J.: The Complex-Step Derivative Approximation. ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 29, No. 3, 2003.
- [44] H.T. Banks, Kidist Bekele-Maxwell, Lorena Bociu Marcella Noorman and Tillman, Kristen: The complex-step method for sensitivity analysis of non-smooth problems arising in biology. Center for Research in Scientific Computation Department of Mathematics, North Carolina State University, 2015.
- [45] Kroo, I. M.: MDO for Large-Scale Design, volume 48, No. 3,. Multidisciplinary Design Optimization: State-of-the-Art, 1997.
- [46] J. Sobieszczanski-Sobieski, B. James, A. Dovi: Structural optimization by multilevel decomposition. AIAA J., 23 , pp. 124-142, 1985.
- [47] R. Haftka, L. Watson: Multidisciplinary design optimization with quasiseparable subsystems. Optim. Eng., 6, pp. 9-20, 2005.
- [48] Barthelemy, Jean Francois M. and Sobieszczanski-Sobieski, Jaroslaw: Optimum Sensitivity Derivatives of Objective Functions in Nonlinear Programming. AIAA JOURNAL, 1983.
-

-
- [49] Vanderplaats, G.N. and Cai, H.D.: Alternative Methods for Calculating Sensitivity of Optimized Designs to Problem Parameters. NASA Langley Research Center, Hampton, Proceedings of the Conference on Sensitivity Analysis in Engineering, 1986.
- [50] Ph.D, Clifford V.Nelson and M.D., J.Troquet: Magnitude and location of a dipole in a circular ring with non-insulating boundaries, volume 19, Issue 4. Journal of Electrocardiology, 1986.
- [51] Gabor, D. and Nelson, C. V.: Determination of the Resultant Dipole of the Heart from Measurements on the Body Surface, volume 25, Issue 4. Article in Journal of Applied Physics, May 1954.
- [52] J.E. Dennis, David M. Gay and Vu, Phuong Ahn: A New Nonlinear Equations Test Problem. January, 1986.
- [53] Octavian, B. and Carmina, R. M.: Experimental trials concerning the simulation of a heart-generated biomagnetic signal. 8TH INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON ADVANCED TOPICS IN ELECTRICAL ENGINEERING, 2013.
- [54] Morgan, A. P., Sommese A. and Watson, L. T.: Mathematical reduction of a heart dipole model, volume 27(3). Journal of Computational and Applied Mathematics, 1989.
- [55] Levenberg, K.: A Method for the Solution of Certain Problems in Least Squares, volume 2. Quarterly of Applied Mathematics, 1944.
- [56] Marquardt, D.: An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters, volume 11. SIAM Journal of Applied Mathematics, 1963.
- [57] Seongim Choi, Juan J. Alonso and Kroo, Ilan M.: Two-Level Multifidelity Design Optimization Studies for Supersonic Jets, volume 46, No. 3. Journal of Aircraft, 2009.
-