

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής &  
Βελτιστοποίησης (ΜΠΥΡ&Β)

**Συμβολή στην οικονομική εφαρμογή της συνεχούς  
συζυγούς μεθόδου για χρονικά μη-μόνιμα προβλήματα  
ροής**

Διπλωματική Εργασία

**Σάββας Α. Σάββα**

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Νοέμβριος 2013



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

## **Συμβολή στην οικονομική εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για χρονικά μη-μόνιμα προβλήματα ροής**

Διπλωματική Εργασία

**Σάββας Α. Σάββα**

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Νοέμβριος 2013

### **Περίληψη**

Στον αντίστροφο σχεδιασμό ή τη βελτιστοποίηση αεροδυναμικών μορφών για χρονικά μη-μόνιμα πεδία ροής, για την επίλυση των συζυγών εξισώσεων απαιτείται να είναι διαθέσιμα όλα τα στιγμιότυπα του πεδίου ροής. Άρα, φαίνεται να απαιτείται η πλήρης αποθήκευση των στιγμιότυπων του πεδίου ροής, εξαιτίας της αντίθετης χρονο-προέλασης της επίλυσης των συζυγών εξισώσεων. Όμως, η πλήρης αποθήκευση είναι συχνά ασύμφορη ή, ακόμη, και μη-εφικτή εξαιτίας του μεγάλου αποθηκευτικού χώρου που απαιτείται. Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η παρουσίαση και η συγκριτική αξιολόγηση μεθόδων, που στοχεύουν στην οικονομική εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου σε χρονικά μη-μόνιμα προβλήματα, ώστε να μην χρειάζεται η πλήρης αποθήκευση των στιγμιότυπων.

Μια από τις μεθόδους που παρουσιάζονται είναι η επιλεκτική κατανομή δεικτών μνήμης (checkpointing), με την οποία επιτυγχάνεται εξοικονόμηση αποθηκευτικού χώρου, αποθηκεύοντας μόνο μερικά στιγμιότυπα του πεδίου ροής. Από τα αποθηκευμένα στιγμιότυπα επαναυπολογίζονται τα υπόλοιπα, όταν αυτά χρειαστούν για την επίλυση των συζυγών εξισώσεων. Το τίμημα της μεθόδου checkpointing είναι η αύξηση του υπολογιστικού χρόνου εξαιτίας των επαναυπολογισμών. Όμως, τα στιγμιότυπα επιλέγονται με κατάλληλο αλγόριθμο έτσι ώστε να είναι βέλτιστα, με την έννοια ότι ελαχιστοποιούν τους επαναυπολογισμούς που θα χρειαστούν.

Στην άλλη μέθοδο που εδώ παρουσιάζεται, δεν αποθηκεύεται κανένα στιγμιότυπο του πεδίου ροής αλλά δημιουργείται, την ώρα που επιλύονται οι εξισώσεις ροής, ένα μοντέλο. Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται κατά την επίλυση των συζυγών εξισώσεων για να προσεγγίζει τις λύσεις του πεδίου ροής.

Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, η προσέγγιση των λύσεων του πεδίου ροής γίνεται με το ανάπτυγμα Fourier. Για την εφαρμογή του αναπτύγματος Fourier απαιτείται ο υπολογισμός και η αποθήκευση των συντελεστών του, αυτό γίνεται κατά την διάρκεια της επίλυσης των εξισώσεων του πεδίου ροής για όλο το χρονικό διάστημα. Σε μια τέτοια μέθοδο, που δεν είναι και η μοναδική, αυτό που αξίζει είναι να βρίσκεται η «χρυσή τομή» ανάμεσα στην οικονομία σε αποθήκευση που επιτυγχάνεται και στο σφάλμα λόγω της χρήσης του μοντέλου (δηλαδή μιας προσέγγισης).

Για τις ανάγκες αυτής της διπλωματικής εργασίας προσαρμόσθηκε ως προς τις υπό μελέτη μεθόδους, προϋπάρχοντας κώδικας ο οποίος διαχειρίζεται τους επιλύτες Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής για το πρόβλημα του αντίστροφου σχεδιασμού αγωγού με μοντέλο ψευδο-μονοδιάστατης ροής. Για την χρονική επίλυση του πεδίου ροής έγινε μετατροπή του αντίστοιχου επιλύτη ώστε αντί της χρήσης του 'διττού χρονικά βήματος', να χρησιμοποιείται η μέθοδος Runge-Kutta 3<sup>ης</sup> τάξης ακρίβειας. Επίσης, βασιζόμενο στο ανάπτυγμα Fourier αναπτύχθηκε το ομώνυμο προσεγγιστικό μοντέλο, του οποίου έγινε η εφαρμογή του σε αποτελέσματα διδιάστατου προβλήματος που αναλύθηκε με κώδικα προσομοίωσης χρονικά μη-μόνιμων ροών στην ΜΠΥΡ&B/E.Μ.Π..

National Technical University of Athens  
School of Mechanical Engineering  
Section of Fluids  
Laboratory of Thermal Turbomachines  
Parallel CFD& Optimization Unit (PCOpt)

## **On the parsimonious implementation of the continuous adjoint method for unsteady flow problems**

Diploma Thesis

**Savvas A.Savva**

Supervisor: Kyriakos C.Giannakoglou Professor NTUA

Athens, November 2013

### **Abstract**

In the inverse design or optimization of aerodynamic shapes, for time-dependent flow fields, when solving the adjoint equations, the snapshots of the flow solutions must be available. A typical solution to this problem is the full storage of the computed flow field snapshots, to be used during the backward-in-time marching of the solution of the adjoint equations. However, the full storage is impractical and sometimes not applicable due to large memory requirements. The aim of this diploma thesis is the presentation and evaluation of methods which have as a major target the memory-cost-efficient use of the continuous adjoint method, so that the storage of the total snapshots is not required.

One of the methods presented is the dynamic checkpointing, with which storage space saving is achieved by storing a portion of the total snapshots of the flow field. The snapshots that have not been stored are recalculated from the stored snapshots during the time-marching of the adjoint equations. The checkpointing method increases the computational time because of the recalculations. However, with given storage, checkpointing is optimal in the sense that re-computations are minimal.

The other proposed method suggests that snapshots of the flow field are not stored and a model, to be used during the solution of the adjoint equations, is built. Here, a Fourier transformation is used as model. For the application of the Fourier transformation, the calculation of Fourier coefficients and their storage is required, during the solution of the flow field equations for the entire time period. Associated with this method is the approximation error which is introduced in the result of the optimization problem.

For the purposes of this diploma thesis, an existing code was used. This code is based on the CFD solvers of the PCOpt/NTUA, in order to solve a duct inverse design

problem with a quasi-1D flow model. For the temporal resolution of the flow field, the corresponding solver was transformed so that instead of a 'dual stepping time', a 3<sup>rd</sup> order Runge-Kutta method could be used. In the second method, the model was developed based on the Fourier formulation and it was adjusted to the results of 2D flow field problem, which was resolved using a unsteady flows simulation code of the PCOpt/NTUA.

## **Ευχαριστίες**

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, Κυριάκο Γιαννάκογλου Καθηγητή ΕΜΠ, για την προτροπή του να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα και την καθοδήγηση του που ήταν πάντα παρούσα καθόλη την διάρκεια της όλης εκπόνησης.

Επίσης θέλω να ευχαριστήσω όλα τα μέλη της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του Εργαστηρίου Θερμικών στροβιλομηχανών για τις κατά καιρούς υποδείξεις τους.

*Αφιερώνω αυτήν την εργασία στους γονείς μου,*

*Φροσούλλα και Αντρέα.*





## Πίνακας περιεχομένων

1	Εισαγωγή.....	1
1.1	Αεροδυναμική βελτιστοποίηση .....	1
1.2	Μέθοδοι αεροδυναμικής βελτιστοποίησης.....	2
1.3	Υπολογισμός του $\nabla F$ .....	3
1.4	Η συζυγής μέθοδος για χρονικά μη-μόνιμα προβλήματα ροής. 6	
2	Πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού του ψευδο-1Δ αγωγού .....	8
2.1	Διατύπωση και επίλυση ευθέως προβλήματος.....	8
2.2	Διατύπωση και επίλυση του συζυγούς προβλήματος .....	16
2.2.1	Υπολογισμός των συζυγών μεταβλητών .....	20
2.2.2	Υπολογισμός της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης 24	
2.3	Αλγόριθμος αντίστροφου σχεδιασμού .....	25
3	Η Επιλεκτική κατανομή των δεικτών μνήμης.....	26
3.1	Η ιδέα του checkpointing. Επισκόπηση.....	26
3.2	Δυναμικός αλγόριθμος κατανομής δεικτών μνήμης.....	30
3.3	Αλγόριθμος αντίστροφου σχεδιασμού .....	34
4	Προσεγγιστικό μοντέλο Fourier για την οικονομική εφαρμογή της χρονικά μη μόνιμης συνεχούς συζυγούς μεθόδου .....	36
4.1	Εισαγωγή .....	36
4.2	Μαθηματική διατύπωση για την αριθμητική επίλυση .....	37
4.3	Η εκπαίδευση και η αριθμητική επίλυση του προσεγγιστικού μοντέλου Fourier .....	43
4.4	Αλγόριθμος αντίστροφου σχεδιασμού .....	45
5	Αποτελέσματα.....	47
5.1	Περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία ροής .....	48
5.2	Μη-περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία ροής.....	56

5.3 Εφαρμογή του προσεγγιστικού μοντέλου Fourier σε 2Δ πρόβλημα .....	60
6 Ανακεφαλαίωση-συμπεράσματα .....	69
Βιβλιογραφία .....	72

# 1 Εισαγωγή

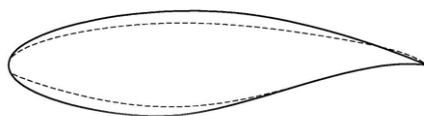
## 1.1 Αεροδυναμική βελτιστοποίηση

Το λεξικό (1) ορίζει ως βελτιστοποίηση (optimization) την επίτευξη του καλύτερου δυνατού αποτελέσματος σε κάποια ενέργεια. Στη μαθηματική βελτιστοποίηση, που είναι κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών, υπολογίζεται το μέγιστο ή το ελάχιστο μιας συνάρτησης (2). Τα οποία μέγιστα ή ελάχιστα αντιπροσωπεύουν την κατάσταση που επιθυμείται να έχει ένα σύστημα. Η εύρεση του μέγιστου ή ελάχιστου ισοδυναμεί με την εύρεση των τιμών των μεταβλητών αυτής της συνάρτησης (θα καλούνται μεταβλητές σχεδιασμού ή μεταβλητές βελτιστοποίησης) που μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν την τιμή της.

Σε αυτήν την παράγραφο θα δοθεί μία γενική μορφή των εφαρμογών της βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική. Ως σύστημα ορίζεται ένας χώρος ελέγχου, στον οποίο μέσα υπάρχει ένα στερεό σύνορο (πχ μία αεροτομή), με συγκεκριμένες συνθήκες ροής του ρευστού που διαρρέει τον επιλεγμένο χώρο. Ως μεταβλητές της βελτιστοποίησης ορίζονται, αυτές οι οποίες ρυθμίζουν τη γεωμετρία του στερεού συνόρου, (πχ αλλάζοντας τις τιμές τους, αλλάζει η αεροδυναμική μορφή της αεροτομής ή η θέση της). Ακολούθως 'δομείται' η συνάρτηση, στην οποία επιθυμείται να εντοπιστεί η μέγιστη ή η ελάχιστη της τιμή, την οποία τιμή δίνουν οι ζητούμενες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού. Καθώς υπάρχει συγκεκριμένη γεωμετρία στο χώρο συνεπάγεται συγκεκριμένο πεδίο ροής, ως αποτέλεσμα των δυνάμεων αντίδρασης που ασκεί το στερεό σύνορο στο ρευστό, και συγκεκριμένες δυνάμεις που ασκεί το ρευστό στο στερεό σύνορο.

Για την κατανόηση της γενικής μορφής των εφαρμογών της βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική διατυπώνεται ένα συγκεκριμένο πρόβλημα (3), που εστιάζει στον επανασχεδιασμό της μορφής μιας αεροτομής. Στο σύστημα υπάρχει η αεροτομή, γνωστή ως RAE 2822, η οποία εκτίθεται σε συνθήκες διηχητικής ροής, όπου ο αριθμός Mach και η γωνία της επ'άπειρο ροής είναι  $M_\infty = 0.73$ ,  $\alpha_\infty = 3^\circ$ . Εμφανίζεται κρουστικό κύμα στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής. Ο υπολογισμός της ροής γίνεται με τη χρήση μοντέλου ατριβούς ρευστού, στο οποίο εξαιτίας της οπισθέλκουσας είναι η εμφάνιση ισχυρού κύματος. Ο επανασχεδιασμός γίνεται με στόχο τη μείωση του συντελεστή οπισθέλκουσας ( $C_D$ ), διατηρώντας σταθερό τον συντελεστή άνωσης ( $C_L$ ). Φτιάχεται η συνάρτηση  $F=(C_L - C_{L, \text{desired}})^2 + bC_D$  (όπου  $C_{L, \text{desired}}$  είναι η γνωστή τιμή του συντελεστή άνωσης και  $b$  συντελεστής του οποίου η τιμή επιλέγει ο μηχανικός με κριτήριο τη σχετική βαρύτητα που θέλει να δώσει στους δύο επιμέρους στόχους), στο ελάχιστο της οποίας ικανοποιούνται και οι δύο στόχοι. Τα αποτελέσματα δίνουν μια λεπτότερη αεροτομή στην οποία ο  $C_L$  παρέμεινε

σταθερός, η τιμή του  $C_D$  μειώθηκε και δεν εμφανίζεται κρουστικό κύμα. Η αρχική και η βέλτιστη αεροτομή σχεδιάζονται στο σχήμα 1.1.



**Σχήμα 1.1:** Το περίγραμμα αρχικής με συνεχή γραμμή και της βέλτιστης με διακεκομμένη γραμμή (3).

## 1.2 Μέθοδοι αεροδυναμικής βελτιστοποίησης

Από την πλευρά των μεθόδων βασική είναι η διάκριση τους σε στοχαστικές και αιτιοκρατικές.

Στις στοχαστικές μεθόδους (3), ακολουθείται η αρχή της φυσικής επιλογής σε εξελικτικά στάδια ή γενιές, όπου τα ισχυρά δείγματα ενός πλήθους επιβιώνουν από στάδιο σε στάδιο ενώ τα αδύναμα αποκλείονται. Πλεονεκτήματα των στοχαστικών μεθόδων (4)(5) είναι ότι εντοπίζουν το καθολικό ακρότατο ανεξάρτητα από τις λύσεις που αρχικοποιούνται (αρκεί να τρέξουν για επαρκές χρόνο, αρκεί δηλαδή να αφεθούν να κάνουν επαρκή αριθμό αξιολογήσεων) και διαχειρίζονται προβλήματα πολλών στόχων παράγοντας το μέτωπο Pareto των μη-κυριαρχούμενων (βέλτιστων) λύσεων όπου πρέπει να ελαχιστοποιηθούν πολλές αντικειμενικές συναρτήσεις ταυτόχρονα. Επίσης, οι στοχαστικοί αλγόριθμοι εύκολα προσαρμόζονται για να λυθεί ένα διαφορετικό πρόβλημα. Όμως το υπολογιστικό κόστος που απαιτείται είναι μεγάλο, εξαιτίας των πολλών δειγμάτων σε ένα εξελικτικό στάδιο αφού πρέπει να γίνει αξιολόγηση για κάθε δείγμα. Βασικότεροι εκπρόσωποι των στοχαστικών μεθόδων είναι οι εξελικτικοί αλγόριθμοι (6) (evolutionary algorithms, EA), οι οποίοι χειρίζονται πληθυσμούς υποψήφιων λύσεων και όχι μία μεμονωμένη λύση ανά κύκλο βελτιστοποίησης.

Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι στηρίζονται στη θεωρία ελέγχου, κατά την οποία ελέγχεται η κατάσταση ενός συστήματος μεταβάλλοντας τις τιμές των παραμέτρων του. Σε αυτές τις μεθόδους χρησιμοποιείται η γενικευμένη έννοια της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης, τιμές τις οποίας καλείται να υπολογίσουν ή να προσεγγίσουν (3). Σε σχέση με τους στοχαστικούς αλγόριθμους, οι αιτιοκρατικοί απαιτούν για τη δημιουργία τους μεγαλύτερο χρόνο επένδυσης από την πλευρά του μηχανικού-προγραμματιστή (με τη βασική επένδυση να είναι η δημιουργία και ο προγραμματισμός μεθόδου υπολογισμού της κλίσης μιας αντικειμενικής συνάρτησης, υπό τον περιορισμό ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις ροής), επίσης είναι δυσκολότερα επεκτάσιμοι σε άλλα παρεμφερή προβλήματα. Οι αιτιοκρατικοί αλγόριθμοι συγκλίνουν γενικά γρήγορα σε ακρότατο, όμως με τον κίνδυνο να είναι τοπικό και όχι καθολικό.

Αυτό αντιμετωπίζεται συνήθως αλλάζοντας την αρχικοποίηση του προβλήματος.

### 1.3 Υπολογισμός του $\nabla F$

Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι χρησιμοποιούν τη γενικευμένη έννοια της παραγώγου. Συγκεκριμένα, σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, ως αιτιοκρατική μέθοδος χρησιμοποιείται η απότομη κάθοδος (steepest descent method), η οποία απαιτεί να υπολογιστούν οι πρώτες παράγωγοι της αντικειμενικής συνάρτησης  $F$  ως προς τους βαθμούς ελευθερίας (μεταβλητές σχεδιασμού)  $\vec{b}$ .

Οι πρώτες παράγωγοι θα μπορούσαν να υπολογιστούν με σχήμα πρόσω πεπερασμένων διαφορών, εξίσωση 1.1, ή με θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων (7), εξίσωση 1.2, όπου  $e$  σταθερά που καθορίζει ο χρήστης και  $N$  ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού.

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = \frac{F(b_1, b_2, \dots, b_i + e, \dots, b_N) - F(b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_N)}{e} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{\text{imag}(F(x + ie))}{e} \quad (1.2)$$

Από τις εξισώσεις 1.1 και 1.2, εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι για τον υπολογισμό κάθε παραγώγου θα έπρεπε να υπολογιστεί ξανά η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης  $F$ , πράγμα που σημαίνει κλήση του κώδικα ανάλυσης (πρωτεύον κώδικας, direct solver or primal solver) που υπολογίζει το πεδίο ροής, καθώς  $F = F(\vec{U}, \vec{b})$ , (όπου  $U$  η λύση του πεδίου ροής). Γενικά αυτές οι μέθοδοι έχουν μεγάλο υπολογιστικό κόστος, επειδή εξαρτάται από τον αριθμό των μεταβλητών σχεδιασμού  $N$ .

Η συζυγής μέθοδος [(3), (8), (9)] δίνει μια οικονομικότερη λύση για τον υπολογισμό των παραγώγων, εφόσον το σκεπτικό είναι να μην χρειαστεί να υπολογιστούν οι μεταβολές των ροϊκών μεγεθών ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και αντί αυτών να χρησιμοποιηθεί το πεδίο των συζυγών μεταβλητών. Έτσι εντοπίζοντας ποσότητες που πρέπει να μηδενισθούν, αυτό παράγει τις συζυγείς εξισώσεις με τις οριακές τους συνθήκες. Εν κατακλείδι επιλύονται από μία φορά δύο συστήματα εξισώσεων, της ροής και των συζυγών μεταβλητών της, αντί να επιλυόταν  $N$  φορές το σύστημα εξισώσεων της ροής. Έτσι το υπολογιστικό κόστος του υπολογισμού των παραγώγων είναι ανεξάρτητο του  $N$ . Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι εξαιτίας των συζυγών μεθόδων

οι αιτιοκρατικές μέθοδοι βελτιστοποίησης συγκλίνουν πιο γρήγορα από τις στοχαστικές μεθόδους.

Για την καλύτερη κατανόηση αυτών που ειπώθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο παρατίθεται ένα απλό παράδειγμα για ένα υποθετικό πρόβλημα βελτιστοποίησης στο οποίο εφαρμόζεται η συζυγής μέθοδος (10). Σε αυτό, ορίζεται η καταστατική εξίσωση τις σχέσης 1.1.3, με μεταβλητές σχεδιασμού το  $\alpha$  και  $\beta$  ( $\vec{b} = [\alpha, \beta]$ ), επίσης η οριακή συνθήκη του πρωτεύοντος προβλήματος δίνεται στην αρχή του διαστήματος του πεδίου ορισμού του.

$$u = u(t) \quad (1.1.3)$$

$$\frac{du}{dt} = at + \beta, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u(t = 0) = 1$$

Στόχος στο υποθετικό πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι να επιτευχθεί συγκεκριμένη κατανομή της μεταβλητής  $u$  σε όλο το πεδίο ορισμού,  $u_{tar} = const$ , και για να επιτευχθεί αυτό πρέπει να υπολογιστεί το κατάλληλο ζεύγος τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού. Στην συνέχεια ορίζεται η συνάρτηση στόχος που τίθεται προς ελαχιστοποίηση.

$$F = \frac{1}{2} \int_0^1 (u(t) - u_{tar})^2 dt \quad (1.1.4)$$

Ορίζεται η επαυξημένη συνάρτηση στόχος, όπου  $\Psi = \Psi(t)$  η συζυγής συνάρτηση και  $R = R(t) = \frac{du}{dt} - at - \beta = 0$ .

$$F_{aug} = \frac{1}{2} \int_0^1 (u(t) - u_{tar})^2 dt + \int_0^1 (\Psi R) dt \quad (1.1.5)$$

Η μεταβολή της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης, είναι

$$\delta F_{aug} = \int_0^1 (u(t) - u_{tar}) \delta u dt + \int_0^1 (\delta \Psi R + \Psi \delta R) dt \quad (1.1.6)$$

Όπου  $\delta \Psi R = 0$ ,  $\Psi \delta R = \Psi (\delta \frac{du}{dt} - \delta at - \delta \beta)$  και  $\delta \frac{du}{dt} = d \frac{\delta u}{dt}$ , οπότε

$$\delta F_{aug} = \int_0^1 (u(t) - u_{tar}) \delta u dt + \int_0^1 (\Psi \delta \frac{du}{dt} - \Psi \delta a t - \Psi \delta \beta) dt \quad (1.1.7)$$

Ο όρος  $\Psi \delta \frac{du}{dt}$  με βάση τον τύπο της παραγοντικής παραγώγισης

$$\Psi \delta \frac{du}{dt} = \frac{d(\Psi \delta u)}{dt} - \frac{d\Psi}{dt} \delta u$$

$$\delta F_{aug} = \int_0^1 (u(t) - u_{tar}) \delta u dt + \int_0^1 \left( \frac{d(\Psi \delta u)}{dt} - \frac{d\Psi}{dt} \delta u - \Psi \delta \alpha t - \Psi \delta \beta \right) dt \quad (1.1.8)$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα τον όρο  $\delta u$

$$\delta F_{aug} = \int_0^1 \left( u(t) - u_{tar} - \frac{d\Psi}{dt} \right) \delta u dt + \int_0^1 \left( \frac{d(\Psi \delta u)}{dt} \right) dt + \int_0^1 -\Psi \delta \alpha t - \Psi \delta \beta dt \quad (1.1.9)$$

$$\int_0^1 \left( \frac{d(\Psi \delta u)}{dt} \right) dt = \Psi \delta u \Big|_1 - \Psi \delta u \Big|_0 \quad (1.1.10)$$

Από την οριακή συνθήκη  $u(t=0) = 1$  συνεπάγεται ότι  $\delta u \Big|_0 = 0$ . Οπότε

$$\delta F_{aug} = \int_0^1 \underbrace{\left( u(t) - u_{tar} - \frac{d\Psi}{dt} \right)}_{AE} \delta u dt + \underbrace{\Psi \delta u \Big|_1}_{BC} + \int_0^1 -\Psi \delta \alpha t - \Psi \delta \beta dt \quad (1.1.11)$$

Οι τιμές της μεταβλητής  $\Psi$  υπολογίζονται έτσι ώστε να μηδενίζονται οι δύο πρώτοι όροι, τότε ο υπολογισμός της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού καθίσταται ανεξάρτητος της τιμής της μεταβολής  $\delta u$ . Έτσι από τον πρώτο όρο της 1.1.11 παράγεται η συζυγής εξίσωση  $AE$  (adjoint equation) και από τον δεύτερο όρο η οριακή της συνθήκη  $BC$  (boundary condition).

$$\frac{d\Psi}{dt} - u(t) + u_{tar} = 0 \quad (1.1.12)$$

$$\Psi(t=1) = 0$$

Εφόσον έχουν υπολογιστεί οι τιμές της συζυγής μεταβλητής, από τον όρο  $\int_0^1 -\Psi \delta \alpha t - \Psi \delta \beta dt$ , υπολογίζονται οι πρώτες παράγωγοι της αντικειμενικής συνάρτησης.

$$\frac{\delta F}{\delta \alpha} = \int_0^1 -\Psi t dt \quad (1.1.13)$$

$$\frac{\delta F}{\delta \beta} = \int_0^1 -\Psi dt$$



Η συζυγής μέθοδος έχει δύο εκδοχές, τη συνεχή (continuous adjoint method) και τη διακριτή (discrete adjoint method) [ (5), (11), (8), (9)]. Στη διακριτή συζυγή μέθοδο, αρχικά διακριτοποιούνται οι εξισώσεις ροής και η αντικειμενική συνάρτηση, από τις διακριτοποιημένες εξισώσεις της ροής παράγονται οι διακριτοποιημένες συζυγείς εξισώσεις για την αριθμητική επίλυση τους. Στη συνεχή συζυγή μέθοδο, οι συζυγείς διαφορικές εξισώσεις (μδε) παράγονται από τις διαφορικές εξισώσεις (μδε) της ροής και από την αναλυτική έκφραση της αντικειμενικής συνάρτησης, και ακολούθως διακριτοποιούνται για την αριθμητική τους επίλυση. Στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιείται αποκλειστικά η συνεχή συζυγής μέθοδος.

#### 1.4 Η συζυγής μέθοδος για χρονικά μη-μόνιμα προβλήματα ροής.

Σε αντίθεση με τις εξισώσεις ροής, οι συζυγείς εξισώσεις λύνονται με ανάποδη χρόνο-προέλαση, εξαιτίας του ότι η οριακή συνθήκη του συζυγούς προβλήματος είναι στο τέλος του πεδίου ορισμού του (σχέση 1.1.12). Αφού επιλυθούν αριθμητικά οι συζυγείς εξισώσεις για κάθε χρονική στιγμή 'j' υπολογίζεται η παράγωγος  $\frac{\partial F}{\partial b_i} \Big|_j$  για κάθε μεταβλητή σχεδιασμού 'i'. Στο τέλος της ανάποδης χρόνο-προέλασης ολοκληρώνοντας τις  $\frac{\partial F}{\partial b_i} \Big|_{j=1,\dots,n}$ , όπου 'n' το πλήθος όλων των χρονικών στιγμών, προκύπτουν για όλο το χρονικό διάστημα 'T' οι  $\frac{\partial F}{\partial b_i} \Big|_T$ . Μετά, με τη μέθοδο της απότομης καθόδου (steepest descent method), σχέση (1.4.1), οι  $\frac{\partial F}{\partial b_i} \Big|_T$  αφαιρούνται από τις προηγούμενες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού  $\vec{b}_{i,old}$ , πολλαπλασιασμένες με ένα συντελεστή 'η' ο οποίος ρυθμίζει τη βαρύτητα που μεταβάλλονται οι  $\vec{b}_i$ , έτσι προκύπτουν οι  $\vec{b}_{i,new}$ .

$$\vec{b}_{i,new} = \vec{b}_{i,old} - \eta \frac{\partial F}{\partial b_i} \Big|_T \quad (1.4.1)$$

Από την διατύπωση των συζυγών εξισώσεων στην σχέση 1.1.12, για τον υπολογισμό των μεταβλητών του, χρειάζονται οι λύσεις των καταστατικών εξισώσεων. Οπότε για τον υπολογισμό των συζυγών μεταβλητών σε κάθε χρονική στιγμή οι τιμές των μεταβλητών ροής  $\vec{U}$  τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή πρέπει να είναι διαθέσιμες. Όμως το να αποθηκευτούν όλες οι λύσεις της ροής για κάθε χρονική στιγμή (full storage) κοστίζει πάρα πολύ στον αποθηκευτικό χώρο του υπολογιστή, που πολλές φορές μπορεί να μην είναι διαθέσιμος.

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως σκοπό να μελετήσει και να αξιολογήσει συγκριτικά μεθόδους, στις οποίες για την επίλυση των συζυγών εξισώσεων, να μην χρειάζεται η πλήρης αποθήκευση όλων των στιγμιότυπων. Το τελευταίο επιτυγχάνεται με την μέθοδο της επιλεκτικής κατανομής των δεικτών μνήμης (checkpointing)[ (12) (13) (14)]. Κατά την οποία αποθηκεύονται συγκεκριμένα στιγμιότυπα της ροής από τα οποία επαναυπολογίζονται και τα άλλα στιγμιότυπα, όταν ο επιλύτης των συζυγών εξισώσεων τα χρειαστεί. Από την άλλη, αν επιλεγεί η μέθοδος checkpointing χρειάζεται περισσότερος υπολογιστικός χρόνος σε ένα κύκλο βελτιστοποίησης εξαιτίας των επαναυπολογισμών των στιγμιότυπων του πεδίου ροής. Οπότε η επιλογή των στιγμιότυπων που θα αποθηκευτούν αρχικά γίνεται με βέλτιστο τρόπο έτσι ώστε να προκύπτουν οι ελάχιστοι επαναυπολογισμοί.

Επίσης οικονομία υπολογιστικής μνήμης πετυχαίνεται χρησιμοποιώντας προσεγγιστικές μεθόδους για τον προσεγγιστικό υπολογισμό των στιγμιότυπων της ροής. Φτάνει το σφάλμα της προσέγγισης να είναι ανεκτό στα πλαίσια που βάζει ο μηχανικός, επειδή το σφάλμα εισάγεται στον υπολογισμό των συζυγών μεταβλητών και κατ' επέκταση στην λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης. Στην παρούσα διπλωματική εργασία το προσεγγιστικό μοντέλο που αναπτύχθηκε βασίσθηκε στην μαθηματική διατύπωση του αναπτύγματος Fourier. Στο οποίο προσεγγιστικό μοντέλο δεν αποθηκεύεται κανένα στιγμιότυπο αλλά οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier.

## 2 Πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού του ψευδο-1Δ αγωγού

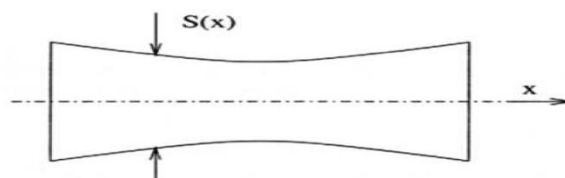
Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία ως πρόβλημα βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική, ορίζεται το πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού (inverse design problem) αγωγού χρησιμοποιώντας το μοντέλο της ψευδο-1Δ ροής [ (3), (11)]. Στο πρόβλημα αυτό εφαρμόζονται και μελετούνται οι μέθοδοι για την συμβολή στην οικονομική εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, για χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία ροής. Τα συμπεράσματα που απορρέουν από αποτελέσματα των μεθόδων στο ψευδο-μονοδιάστατο πρόβλημα είναι εξίσου αντιπροσωπευτικά για διδιάστατα (2Δ) και τριδιάστατα (3Δ) προβλήματα ροής. Επίσης η παραμετροποίηση της διαμήκου κατανομής της διατομής του αγωγού πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Bezier-Bernstein, δηλαδή μεταβλητές σχεδιασμού είναι οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου.

Σε ένα πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού στόχος ορίζεται μια επιθυμητή κατανομή πίεσης στο περίγραμμα του στερεού συνόρου για συγκεκριμένες συνθήκες ροής. Συγκεκριμένα στο ψευδο-1Δ πρόβλημα στόχος ορίζεται η επιθυμητή κατανομή πίεσης στο εσωτερικό του αγωγού. Ως στόχος θα μπορούσαν να τεθούν συγκεκριμένες τιμές των  $C_D$  και  $C_L$ , οι οποίες μπορούν να υπάρξουν από πολλές (άπειρες) κατανομές πιέσεων, άρα το να ορίζεται ως στόχος συγκεκριμένη κατανομή πίεσης είναι πολύ περιοριστικό. Όμως με αυτόν τον τρόπο ο σχεδιαστής-μηχανικός ελέγχει καλύτερα τις τοπικές επιβραδύνσεις της ροής, συνεπώς, ελέγχει ενδεχόμενες αποκολλήσεις και συνεπαγόμενες απώλειες της ροής.

Στα προβλήματα αυτής της διπλωματικής εργασίας, τίθεται ως στόχος συγκεκριμένη κατανομή πίεσης η οποία είναι σε συνάρτηση του χρόνου. Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει διατύπωση των εξισώσεων για την αριθμητική επίλυση, του ευθέος (direct) και συζυγούς (adjoint) προβλήματος. Επίσης θα περιγραφεί συνοπτικά ο αιτιοκρατικός αλγόριθμος βελτιστοποίησης για το εξεταζόμενο πρόβλημα.

### 2.1 Διατύπωση και επίλυση ευθέος προβλήματος

Ως ευθύ πρόβλημα ορίζεται ο υπολογισμός της ατριβούς, συμπιεστής ψευδο-μονοδιάστατης ροής μέσα στον αξονοσυμμετρικό αγωγό.



**Σχήμα 2.1:**Μορφή συγκλίνοντος-αποκλίνοντος αγωγού, με μεταβλητές σχεδιασμού γεωμετρικές ποσότητες που καθορίζουν την κατανομή της διατομής  $S(x)$  κατά την αξονική κατεύθυνση (3).

Για την επίλυση της παραπάνω ροής διατυπώνονται οι εξισώσεις διατήρησης ορμής, μάζας και ενέργειας (Euler) ως

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u S)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho u S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u S)}{\partial x} &= p \frac{dS}{dx} \\ \frac{\partial(\rho E S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u h_t S)}{\partial x} &= 0\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού,  $u$  η ταχύτητα,  $h_t = C_p T_t$  η ολική ενθαλπία. Από τη θερμοδυναμική ισχύει

$$\begin{aligned}\rho E &= \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \\ E &= h_t - \frac{p}{\rho} \\ \rho E &= \frac{\rho c^2}{(\gamma - 1)\gamma} + \frac{1}{2} \rho u^2 \\ p &= (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1)\left(\rho E - \frac{1}{2} \rho u^2\right)\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

όπου  $e = C_u T$  είναι η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας του ρευστού,  $\gamma$  ο εκθέτης ισεντροπικής μεταβολής για το τέλειο αέριο,  $C_u$  είναι ο συντελεστής θερμοχωρητικότητας υπό σταθερό όγκο (σταθερός για τέλεια αέρια),  $T$  η στατική θερμοκρασία και  $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$  η ταχύτητα του ήχου.

Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να εκφραστούν και στη συντηρητική τους μορφή

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \rho u \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} &= -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \rho u^2 \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u H)}{\partial x} &= -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \rho u H\end{aligned}\tag{2.1.3}$$

Η διανυσματική γραφή των (2.1.3) είναι

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \vec{q} \quad (2.1.4)$$

όπου  $\vec{U}$  είναι το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών της ροής,  $\vec{f}$  το διάνυσμα των ατριβών ροών ενώ ο μη-ομογενής όρος  $\vec{q}$  είναι το διάνυσμα της των όρων πηγής που σχετίζεται με τη μεταβολή της διατομής  $S$  του αγωγού κατά τη διαμήκη κατεύθυνση,

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E_t \end{bmatrix} \\ \vec{f} &= \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ u(\rho E + p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\gamma - 1)E_t + \frac{m^2}{\rho} \left( \frac{3 - \gamma}{2} \right) \\ \frac{m}{\rho} \left( \gamma E_t - (\gamma - 1) \frac{m^2}{2\rho} \right) \end{bmatrix} \\ \vec{q} &= -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ u(\rho E + p) \end{bmatrix} = -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \begin{bmatrix} \frac{m}{\rho} \\ \frac{m^2}{\rho} \\ \frac{m}{\rho} \left( \gamma E_t - (\gamma - 1) \frac{m^2}{2\rho} \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Με τη χρήση του κανόνα της αλυσίδας η εξίσωση 2.1.4 γράφεται

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{A} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{q} \quad (2.1.6)$$

όπου  $\vec{A}$  είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα που αντιστοιχεί στις συντηρητικές μεταβλητές

$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma - 3}{2} u^2 & (3 - \gamma)u & \gamma - 1 \\ -\gamma u E + (\gamma - 1)u^2 & \gamma E - \frac{\gamma - 1}{2} 3u^2 & \gamma u \end{bmatrix} \quad (2.1.7)$$

που διαθέτει τρεις πραγματικές ιδιοτιμές:  $\lambda_1 = u$ ,  $\lambda_2 = u + c$  και  $\lambda_3 = u - c$ .

Η εξίσωση (2.1.6), με τη συμβολική χρήση του τελεστή ροής  $\vec{R}$ , όπου  $\vec{R} = (\vec{U}, \vec{b})$ , γράφεται:

$$\vec{R} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{A} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} - \vec{q} = 0 \quad (2.1.8)$$

Εφαρμόζοντας χωρική και χρονική διακριτοποίηση η (2.1.8) γίνεται

$$\vec{R}_i^n(\vec{U}, \vec{b}) = \left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right)_i^n \Delta x_i + \left( A \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_i^n \Delta x_i - \vec{q}_i^n \Delta x_i \quad (2.1.9)$$

όπου 'i' χωρικός δείκτης και 'n' χρονικός δείκτης. Η 2.1.9 ισχύει για  $i = 2, \dots, np - 1$ , και  $n = 1, \dots, nm$ . Εδώ,  $np$  και  $nm$  είναι το πλήθος των χωρικών κόμβων και των χρονικών στιγμών, αντίστοιχα. Στην είσοδο  $i=1$  και έξοδο  $i=np$  επιβάλλονται οι χωρικές οριακές συνθήκες τις εξίσωσης για υποηχητική ροή  $M < 1$ ,

$$\begin{aligned} p_{t_1}^n &= const1 & p_{np}^n &= g(t) \\ T_{t_1}^n &= const2 & \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{np}^n &= 0 \\ \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_1^n &= 0 & \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right)_1^n &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Δηλαδή στην είσοδο επικρατούν σταθερές τιμές της ολικής πίεσης και ολικής θερμοκρασίας, καθώς και μια συνθήκη τύπου Neumann για τη στατική πίεση. Στην έξοδο έχουμε μία χρονικά μεταβαλλόμενη τιμή της στατικής πίεσης και δύο συνθήκες τύπου Neumann για τα υπόλοιπα μεγέθη της ροής. Οπότε σύμφωνα με τις (2.1.12)

$$\begin{aligned} \vec{R}_1^n &= \left[ p_{t_1}^n - const1, T_{t_1}^n - const2, \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_1^n \right] & n &= 1, 2 \dots nm \\ \vec{R}_{np}^n &= \left[ p_{np}^n - g(t), \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{np}^n, \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right)_{np}^n \right] & n &= 1, 2 \dots nm \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Η εξίσωση (2.1.8) του ευθέως προβλήματος επιλύεται από την μια χρονική στιγμή στην άλλη με την μέθοδο Range-Kutta 3ης τάξης ακρίβειας, όμως για αυτήν απαιτούνται οι αρχικές τιμές του προβλήματος ( $n = 0$ ), οι οποίες για να υπολογιστούν γίνεται παραδοχή της χρονικά μόνιμης ροής δηλαδή παραλείπεται ο όρος  $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$  από την 2.1.8, έτσι η 2.1.6 και η 2.1.12 μετατρέπονται σε

$$\vec{R}_i^0(\vec{U}, \vec{b}) = \left( A \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_i^0 \Delta x_i - \vec{q}_i^0 \Delta x_i \quad i = 2, \dots, np \quad (2.1.14)$$

$$p_{t_1}^0 = \text{const1}$$

$$p_{np}^0 = g(t = 0)$$

$$T_{t_1}^0 = \text{const2}$$

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{np}^0 = 0$$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_1^0 = 0$$

$$\left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right)_1^0 = 0$$

$$(2.1.15)$$

Για να ισχύουν οι εξισώσεις ροής πρέπει το υπόλοιπο να είναι μηδέν ( $\vec{R}_i^0 = 0$ ), επομένως πρέπει να υπολογιστεί το διάνυσμα  $\vec{U}_i^0$  που μηδενίζει το υπόλοιπο. Το  $\vec{U}_i^0$  υπολογίζεται με δέλτα-διατύπωση ( $\delta$ -formulation) (11), κατά την οποία

$$\left[ I \frac{\delta x}{\delta t} + \left[ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right]_i^0 \right] \delta \vec{U}_i^0 = -\vec{R}_i^0$$

$$(2.1.16)$$

όπου εισάγεται ο ψευδο-χρονικός όρος  $I \frac{\delta x}{\delta t}$ , παρόλο που η ροή θεωρείται χρονικά μόνιμη, για την εκμετάλλευση των ιδιοτήτων των υπερβολικών συστημάτων και για να εφαρμοστούν οι τεχνικές χρόνο-προέλασης (time-marching) για την επίλυση του πεδίου ροής. Τα εμπλεκόμενα διανύσματα στην (2.1.16) είναι

$$\vec{R}_i^o = [\vec{R}_1^o, \vec{R}_2^o, \dots, \dots, \vec{R}_{np-1}^o, \vec{R}_{np}^o]$$

$$\delta \vec{U}_i^o = [\delta \vec{U}_1^o, \delta \vec{U}_2^o, \dots, \dots, \delta \vec{U}_{np-1}^o, \delta \vec{U}_{np}^o]$$

$$\left[ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right]_i^o = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{R}_1^o}{\partial \vec{U}_1^o} & \dots & \frac{\partial \vec{R}_1^o}{\partial \vec{U}_{np}^o} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \vec{R}_{np}^o}{\partial \vec{U}_1^o} & \dots & \frac{\partial \vec{R}_{np}^o}{\partial \vec{U}_{np}^o} \end{bmatrix}$$

$$(2.1.17)$$

Η χωρική διακριτοποίηση του ευθέως προβλήματος για την 1<sup>η</sup> χρονική στιγμή γίνεται με σχήμα κεντρικών διαφορών δεύτερης τάξης ακρίβειας. Αρχικά

χρησιμοποιείται η μέθοδος διαχωρισμού των διανυσμάτων της ροής FVS (flux vector splitting) με σχήμα προεκβολής MUSCL (monotone upwind scheme for conversation laws) για τη διακριτοποίηση του τελεστή  $\vec{R}_i^0$ , όπου με βάση αυτόν υπολογίζεται, στη συνέχεια, το μητρώο  $\left[\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}\right]_i^0$  (11).

Στη δέλτα-διατύπωση γίνεται πρώτα μια αρχικοποίηση του διανύσματος της ροής  $\vec{U}_i^0 = \vec{U}_i^{0,j=0}$  από την οποία υπολογίζεται το υπόλοιπο της  $\vec{R}_i^{0,j=0}$ . Μετά υπολογίζεται το μητρώο  $\left[\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}\right]_i^{0,j=0}$ . Για τον ψευδο-χρονικό όρο  $I \frac{\delta x}{\delta t}$  ο οποίος επιλέγεται από τον χρήστη υπολογίζεται το  $\delta \vec{U}_i^{0,j=0}$ . Στη συνέχεια, ανανεώνεται το  $\vec{U}_i^0$  ανανεώνεται,  $\vec{U}_i^{0,j+1} = \vec{U}_i^{0,j} + \delta \vec{U}_i^{0,j}$ , η επαναληπτική μέθοδος σταματά όταν  $|\vec{R}_i^{0,j-1} - \vec{R}_i^{0,j}| < e$ , όπου  $e$  επιλέγεται από τον χρήστη. (Ο δείκτης  $j$  είναι ο εσωτερικός δείκτης της επαναληπτικής διαδικασίας.)

Στον προϋπάρχοντα κώδικα του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών, η επίλυση της χρονικά μη-μόνιμης ψευδο-μονοδιάστατης ροής, γίνονταν με την τεχνική του διττού χρονικού βήματος (dual time stepping) χρησιμοποιώντας το σχήμα της σχέσης 2.1.18 για δεύτερης τάξης ακρίβεια.

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\right)_i^{n+1} = \frac{-3\vec{U}_i^{n+1} + 4\vec{U}_i^n - \vec{U}_i^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (2.1.18)$$

Όπως φαίνεται στη σχέση 2.1.18, για να υπολογιστεί ο χρονικός όρος  $\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\right)_i^n$  της 2.1.9, απαιτείται η αποθήκευση δύο προηγούμενων στιγμιότυπων του πεδίου ροής. Στη συνέχεια θα φανεί ότι το προηγούμενο, ακυρώνει μερικώς τον σκοπό της εφαρμογής της μεθόδου της επιλεκτικής κατανομής των δεικτών μνήμης (checkpointing) για την οικονομία μνήμης, καθώς θα χρειαζόταν για τον επαναυπολογισμό ενός στιγμιότυπου να είναι αποθηκευμένα δύο συνεχόμενα στιγμιότυπα αντί ένα. Αντί λοιπόν της χρήσης του διττού χρονικά βήματος, χρησιμοποιείται η μέθοδος Runge-Kutta 3ης τάξης ακρίβειας (15) (16). Στη μέθοδο αυτή απαιτείται η αποθήκευση μόνο του προηγούμενου στιγμιότυπου. Ακολουθώντας τη γενική μορφή της μεθόδου Runge-Kutta, τύπος 2.1.19, υπολογίζεται το πεδίο ροής  $\vec{U}$  για την νέα χρονική στιγμή ( $t = n + 1$ ).

$$\vec{U}^{n+1} = \vec{U}^n + \Delta t(\omega_1 \vec{k}_1 + \omega_2 \vec{k}_2 + \omega_3 \vec{k}_3) \quad (2.1.19)$$

όπου:



$$\begin{aligned}
\vec{k}_1 &= \vec{R}(t^n, \vec{U}^n) \\
\vec{k}_2 &= \vec{R}(t^n + a_2 \Delta t, \vec{U}') \\
\vec{k}_3 &= \vec{R}(t^n + a_3 \Delta t, \vec{U}'') \tag{2.1.20}
\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις 2.1.19 και 2.1.20 προκύπτει η

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n}{\Delta t} &= \omega_1 \vec{R}(t^n, \vec{U}^n) + \omega_2 \vec{R}(t^n + a_2 \Delta t, \vec{U}') \\
&\quad + \omega_3 \vec{R}(t^n + a_3 \Delta t, \vec{U}'') \tag{2.1.21}
\end{aligned}$$

$\vec{U}'$  και  $\vec{U}''$  τα ενδιάμεσα βήματα για τον υπολογισμό της  $\vec{U}^{n+1}$ , όπου:

$$\begin{aligned}
\vec{U}' &= \vec{U}^n + \Delta t b_{21} \vec{k}_1 \\
\vec{U}'' &= \vec{U}^n + \Delta t b_{31} \vec{k}_1 + \Delta t b_{32} \vec{k}_2 \tag{2.1.22}
\end{aligned}$$

Το  $\vec{R}$  είναι το χρονικά μόνιμο υπόλοιπο της ροής όπως προκύπτει από τη σχέση 2.1.6:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -\vec{A} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \vec{q} = \vec{R} \tag{2.1.23}$$

οι  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha_1, \alpha_2, b_{21}, b_{31}, b_{32}$ , είναι σταθεροί συντελεστές της μεθόδου, οι οποίοι πρέπει να υπολογιστούν με γνώμονα την ακρίβεια της μεθόδου. Στη διαδικασία εύρεσης των συντελεστών, η οποία αναπτύσσεται στη διπλωματική εργασία του Αντώνιου Β. Τάτση (17), χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα Taylor 2<sup>ης</sup> τάξης του χρονικά μόνιμου υπόλοιπου της ροής  $\vec{R}$  και της λύσης της ροής  $\vec{U}$  και συνδυάζοντας τις σχέσεις 2.1.19 έως 2.1.22, προκύπτει το σύστημα 2.1.24.

$$\begin{aligned}
\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 &= 0 \\
\omega_3 \alpha_3 + \omega_2 \alpha_2 &= \frac{1}{2} \\
\omega_3 (b_{31} + b_{32}) + \omega_2 b_{21} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_3 \alpha_3^2 + \omega_2 \alpha_2^2 &= \frac{1}{3} \\
\omega_3 \alpha_3 (b_{31} + b_{32}) + \omega_2 \alpha_2 b_{21} &= \frac{1}{3} \\
\omega_3 (b_{31} + b_{32})^2 + \omega_2 b_{21}^2 &= \frac{1}{3} \\
\omega_3 \alpha_2 b_{32} &= \frac{1}{6} \\
\omega_3 b_{32} b_{31} &= \frac{1}{6}
\end{aligned} \tag{2.1.24}$$

Γενικά μπορούν να υπάρξουν άπειροι συνδυασμοί τιμών των συντελεστών που να το ικανοποιούν. Τελικά επιλέγεται το σχήμα που πρότειναν οι Nikitin-Dwight (15) (16).

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{1}{4} & \omega_2 &= 0 & \omega_3 &= \frac{3}{4} \\
\alpha_2 &= \frac{2}{3} & \alpha_3 &= \frac{2}{3} & & \\
b_{21} &= \frac{2}{3} & b_{31} &= \frac{1}{3} & b_{32} &= \frac{1}{3}
\end{aligned} \tag{2.1.25}$$

Στο σχήμα αυτό,  $\omega_2 = 0$ , και αυτό βοηθά στο να γίνει πιο οικονομικός ο υπολογισμός, δεσμεύοντας λιγότερη μνήμη, αφού σύμφωνα με την 2.1.21 δεν θα χρειαστεί να είναι αποθηκευμένες οι τιμές του 2<sup>ου</sup> όρου της.

Οι σχέσεις 2.1.19 και 2.1.22 σύμφωνα με το σχήμα που υιοθετήθηκε λαμβάνουν τη μορφή

$$\frac{\vec{U}' - \vec{U}^n}{\Delta t} = \frac{2}{3} \vec{R}(\vec{U}^n) \tag{2.1.26}$$

$$\frac{\vec{U}'' - \vec{U}^n}{\Delta t} = \frac{1}{3} \vec{R}(\vec{U}^n) + \frac{1}{3} \vec{R}(\vec{U}') \tag{2.1.27}$$

$$\frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n}{\Delta t} = \frac{1}{4} \vec{R}(\vec{U}^n) + \frac{3}{4} \vec{R}(\vec{U}'') \tag{2.1.28}$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο που ανέπτυξε ο R.Dwight στις εξισώσεις 2.1.26 έως 2.1.28 προστίθεται ένας ακόμη όρος, για λόγους υπολογιστικής ευστάθειας χωρίς να αυξάνεται το σφάλμα αποκοπής. Ο όρος αποτελείται από το γινόμενο

ενός συντελεστή βαρύτητας  $\gamma$ , από το ιακωβιανό μητρώο  $A$  και από τη διαφορά της τρέχουσας από την προηγούμενη λύση.

$$\frac{\vec{U}' - \vec{U}^n}{\Delta t} = \frac{2}{3} \vec{R}(\vec{U}^n) + \gamma \vec{A}(\vec{U}' - \vec{U}^n) \quad (2.1.29)$$

$$\frac{\vec{U}'' - \vec{U}^n}{\Delta t} = \frac{1}{3} \vec{R}(\vec{U}^n) + \frac{1}{3} \vec{R}(\vec{U}') + \gamma \vec{A}(\vec{U}'' - \vec{U}^n) \quad (2.1.30)$$

$$\frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n}{\Delta t} = \frac{1}{4} \vec{R}(\vec{U}^n) + \frac{3}{4} \vec{R}(\vec{U}'') + \gamma \vec{A}(\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n) \quad (2.1.31)$$

όπου

$$\vec{U}^{n+1} = \frac{3}{2} (a\vec{U}' + (1-a)\vec{U}'') - \frac{1}{2} \vec{U}^n \quad (2.1.32)$$

όπου  $a$  συντελεστής βαρύτητας.

## 2.2 Διατύπωση και επίλυση του συζυγούς προβλήματος

Ως στόχος του προβλήματος βελτιστοποίησης, το οποίο εφαρμόζονται οι μέθοδοι για την οικονομική εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, ορίζεται συγκεκριμένη κατανομή πίεσης κατά μήκος του μονοδιάστατου αγωγού και για όλες τις χρονικές στιγμές. Έτσι η συνάρτηση στόχος ή η αντικειμενική συνάρτηση που τίθεται προς ελαχιστοποίηση είναι:

$$F(\vec{U}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (p(x, t) - p_{tar}(x, t))^2 dx dt \quad (2.2.1)$$

στην οποία  $p(x, t)$  είναι η κατανομή πίεσης κατά μήκος του αγωγού για κάθε χρονική στιγμή,  $p_{tar}(x, t)$  η χωρο-χρονική κατανομή πίεσης-στόχου,  $L$  το μήκος του αγωγού και  $T$  η χρονική περίοδος.

Η μεταβολή (διακύμανση) της αντικειμενικής συνάρτησης έχει ως

$$\delta F(\vec{U}, \vec{b}) = \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} =$$

$$\int_0^T \int_0^L (p - p_{tar}) \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (p - p_{tar})^2 \delta(dx dt)$$
(2.2.2)

όπου, από την 2.1.2,

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{U}} = (\gamma - 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} u^2 & -u & 1 \end{pmatrix}$$
(2.2.3)

Ως επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση ορίζεται η

$$F_{aug} = F - \int_0^T \int_0^L \vec{\Psi}^T \vec{R} dx dt$$
(2.2.4)

όπου  $\vec{R} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} - \vec{q} = 0$ , και  $\vec{\Psi}$  το διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών. Η μεταβολή της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης, είναι

$$\delta F_{aug} = \delta F - \int_0^T \int_0^L \vec{\Psi}^T \delta(\vec{R}) dx dt$$
(2.2.5)

Ο δεύτερος όρος της 2.2.5,  $\int_0^T \int_0^L \vec{\Psi}^T \delta(\vec{R}) dx dt$ , αναλύεται εκτενέστερα ως

$$\int_0^T \int_0^L \vec{\Psi}^T \delta(\vec{R}) dx dt = \int_0^T \int_0^L \vec{\Psi}^T \delta \left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} - \vec{q} \right) dx dt$$

$$= \int_0^T \int_0^L \vec{\Psi}^T \left( \frac{\partial(\delta \vec{U})}{\partial t} + A \frac{\partial(\delta \vec{U})}{\partial x} - \delta \vec{q} \right) dx dt$$
(2.2.6)

όπου ο μη-ομογενής όρος  $\delta \vec{q}$  αναπτύχθηκε ως εξής

$$\delta \vec{q} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} = T_U \delta \vec{U} + T_b \delta \vec{b}$$
(2.2.7)

όπου  $T_U = \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{U}}$  και  $T_b = \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{b}}$ . Από την 2.2.6:

$$\int_0^T \int_0^L \bar{\Psi}^T \delta(\vec{R}) dxdt =$$

$$\int_0^T \int_0^L \bar{\Psi}^T \left( \frac{\partial(\delta\vec{U})}{\partial t} + A \frac{\partial(\delta\vec{U})}{\partial x} - T_U \delta\vec{U} - T_b \delta\vec{b} \right) dxdt =$$

$$\int_0^T \int_0^L \left( \bar{\Psi}^T \frac{\partial(\delta\vec{U})}{\partial t} + \bar{\Psi}^T A \frac{\partial(\delta\vec{U})}{\partial x} - \bar{\Psi}^T T_U \delta\vec{U} - \bar{\Psi}^T T_b \delta\vec{b} \right) dxdt \quad (2.2.8)$$

Οι όροι  $\bar{\Psi}^T \frac{\partial(\delta\vec{U})}{\partial t}$  και ομοίως  $\bar{\Psi}^T A \frac{\partial(\delta\vec{U})}{\partial x}$ , από τον τύπο της παραγοντικής παραγώγισης, αναπτύσσονται ως εξής:

$$\bar{\Psi}^T \frac{\partial(\delta\vec{U})}{\partial t} = \frac{\partial(\bar{\Psi}^T \delta\vec{U})}{\partial t} - \delta\vec{U}^T \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial t} \quad (2.2.9)$$

$$\bar{\Psi}^T A \frac{\partial(\delta\vec{U})}{\partial x} = \frac{\partial(\bar{\Psi}^T A \delta\vec{U})}{\partial x} - \delta\vec{U}^T A^T \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x} \quad (2.2.10)$$

Στη συνέχεια, η 2.2.8 γράφεται ως

$$\int_0^T \int_0^L \left( \frac{\partial(\bar{\Psi}^T \delta\vec{U})}{\partial t} - \delta\vec{U}^T \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\Psi}^T A \delta\vec{U})}{\partial x} - \delta\vec{U}^T A^T \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x} - \bar{\Psi}^T T_U \delta\vec{U} - \bar{\Psi}^T T_b \delta\vec{b} \right) dxdt \quad (2.2.11)$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, προκύπτει

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^L \bar{\Psi}^T \delta(\bar{R}) dxdt = \\
& \int_0^T [\bar{\Psi}^T A \delta \bar{U}]_0^L dt + \int_0^L [\bar{\Psi}^T \delta \bar{U}]_0^T dx - \\
& \int_0^T \int_0^L \left( \delta \bar{U}^T \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \delta \bar{U}^T A^T \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \bar{\Psi}^T T_U \delta \bar{U} + \bar{\Psi}^T T_b \delta \vec{b} \right) dxdt \quad (2.2.12)
\end{aligned}$$

Από τις 2.2.2, 2.2.5 και 2.2.12:

$$\begin{aligned}
\delta F_{aug} &= \int_0^T \int_0^L \left( \delta \bar{U}^T \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} + \delta \bar{U}^T A^T \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} + \bar{\Psi}^T T_U \delta \bar{U} + \bar{\Psi}^T T_b \delta \vec{b} \right. \\
&\quad \left. + (p - p_{tar}) \frac{\partial p}{\partial \bar{U}} \delta \bar{U} \right) dxdt + \\
& \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (p - p_{tar})^2 \delta(dxdt) + \int_0^T [\bar{\Psi}^T A \delta \bar{U}]_0^L dt - \int_0^L [\bar{\Psi}^T \delta \bar{U}]_0^T dx \\
\delta F_{aug} &= \\
&= \int_0^T \int_0^L \delta \bar{U}^T \underbrace{\left( A^T \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} + T_U^T \bar{\Psi} + (p - p_{tar}) \left( \frac{\partial p}{\partial \bar{U}} \right)^T \right)}_{AE} dxdt \\
&+ \underbrace{\int_0^T [\bar{\Psi}^T A \delta \bar{U}]_0^L dt + \int_0^L [\bar{\Psi}^T \delta \bar{U}]_0^T dx}_{AEBC} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (p - p_{tar})^2 \delta(dxdt) + \int_0^T \int_0^L \bar{\Psi}^T T_b \delta \vec{b} dxdt}_{SV} \quad (2.2.13)
\end{aligned}$$

Οι όροι που σημειώνονται με *AE* (Adjoint equation) δίνουν την πεδιακή συζυγή εξίσωση η οποία όταν διατυπωθεί και ικανοποιηθεί απαλείφονται οι όροι (στο

εσωτερικό του πεδίου) της 2.2.13 που περιέχουν την ποσότητα  $\delta\vec{U}$ . Έτσι επιτυγχάνεται και ο σκοπός της συζυγούς μεθόδου, η μεταβολή της τιμής της (επαυξημένης) συνάρτησης στόχου να γίνει ‘υπολογιστικά ανεξάρτητη’ της μεταβολής του πεδίου ροής. Τον ίδιο σκοπό που έχουν οι  $AE$  (Adjoint equation) έχουν και οι όροι που σημειώνονται με  $AEBC$  (adjoint equation boundary conditions), δίνοντας τις οριακές συνθήκες της συζυγούς εξίσωσης για τα χωρικά και χρονικά όρια. Οι όροι με  $SV$  (sensitivity derivatives), εφόσον υπολογιστούν οι συζυγείς μεταβλητές  $\vec{\Psi}$ , χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\frac{\partial F}{\partial \vec{b}_i}$ .

### 2.2.1 Υπολογισμός των συζυγών μεταβλητών

Για τον υπολογισμό των συζυγών μεταβλητών η ‘ $AE$ ’ γράφεται με τη χρήση του τελεστή  $\vec{R}_\psi$  :

$$\vec{R}_\psi = A^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} + T_U^T \vec{\Psi} + (p(x, t) - p_{tar}(x, t)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T \quad (2.2.14)$$

Εφαρμόζοντας χωρική και χρονική διακριτοποίηση στην 2.2.14 προκύπτει

$$\begin{aligned} \vec{R}_{\psi_i}^n = & \left( A^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x} \right)_i^n + \left( \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} \right)_i^n + (T_U^T \vec{\Psi})_i^n \\ & + (p(x_i, t_n) - p_{tar}(x_i, t_n)) \left( \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T \right)_i^n \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

όπου ‘ $i$ ’ χωρικός δείκτης και ‘ $n$ ’ χρονικός δείκτης. Η 2.2.15 ισχύει για  $i = 2, \dots, np - 1$ , και  $n = 1, \dots, nm$ ,  $np$  και  $nm$  πλήθη των χωρικών και χρονικών κόμβων αντίστοιχα. Στην είσοδο  $i=1$  και έξοδο  $i=np$  ισχύουν οι χωρικές οριακές συνθήκες. Οι χωρικές οριακές συνθήκες που επιβάλλονται στο συζυγές πρόβλημα προέρχονται από μηδενισμό του πρώτου όρου των  $AEBC$  της σχέσης 2.2.13 :

$$\int_0^T [\vec{\Psi}^T A \delta \vec{U}]_0^L dt = 0 \quad (2.2.18)$$

Οπότε για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή ‘ $n$ ’ είναι:

$$[\vec{\Psi}^T A \delta \vec{U}]_0^L = 0 \quad (2.2.19)$$

Η σχέση 2.2.19 γράφεται:

$$[\vec{\Psi}^T A \delta \vec{U}]_{out} - [\vec{\Psi}^T A \delta \vec{U}]_{in} = 0 \quad (2.2.20)$$

Η διαχείριση των όρων της 2.2.20 γίνεται με διαφορετικό τρόπο, αφού στην είσοδο και έξοδο έχουμε διαφορετικές συνθήκες ροής. Όμως η ανάπτυξη τους είναι κοινή.

$$[\delta\rho \quad \delta(\rho u) \quad \delta(\rho E)] \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma-3}{2}u^2 & -\gamma u E + (\gamma-1)u^3 \\ 1 & (3-\gamma) & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}3u^2 \\ 0 & \gamma-1 & \gamma u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.2.21)$$

Στη συνέχεια:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\gamma-3}{2}u^2\Psi_2 + (-\gamma u E + (\gamma-1)u^3)\Psi_3 \right] \delta\rho + \\ & \left[ \Psi_1 + (3-\gamma)u\Psi_2 + \left( \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}3u^2 \right) \Psi_3 \right] \delta(\rho u) + \\ & \left[ (\gamma-1)\Psi_2 + \gamma u \Psi_3 \right] \delta(\rho E) \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Στην είσοδο επιβάλλονται σταθερά θερμοδυναμικά μεγέθη της ροής σταθερή ολική και πίεση και θερμοκρασία ( $p_t$ ,  $T_t$ ), διαφορίζοντας τις σχέσεις ισεντροπικής μεταβολής, προκύπτουν οι συσχετίσεις των μεταβολών:

$$\delta p = -\rho u \delta u \quad (2.2.23)$$

$$\delta \rho = -\frac{\rho u}{c^2} \delta u \quad (2.2.24)$$

Στις σχέσεις 2.2.23-4 υπάρχει συσχέτιση των μεταβολών της πίεσης και της πυκνότητας με μόνο μια μεταβολή ποσότητας, αυτή της ταχύτητας. Από αυτές τις σχέσεις προκύπτουν οι μεταβολές της 2ης και της 3ης συντηρητικής μεταβλητής των εξισώσεων της ροής:

$$\delta(\rho u) = u\delta\rho + \rho\delta u = \rho \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \delta u \quad (2.2.25)$$



$$\delta(\rho E) = \frac{\delta p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \delta(\rho u^2) = \rho u \left( \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1} - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} \right) \delta u \quad (2.2.26)$$

Με αντικατάσταση των 2.2.24-26 στην 2.2.22 και με απαλοιφή της μεταβολής της ταχύτητας  $\delta u$ , προκύπτει η

$$\begin{aligned} \rho \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \Psi_1 + \rho u \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \Psi_2 \\ + \rho u^2 \left( -\frac{u^2}{2c^2} + \frac{\gamma - 3}{2(\gamma - 1)} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{c^2}{u^2} \right) \Psi_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

Η 2.2.27 είναι η αλγεβρική σχέση-περιορισμός που πρέπει να διέπει τις τρεις συνιστώσες του  $\vec{\Psi}$ . Ωστόσο για τον υπολογισμό του  $\vec{\Psi}$  θα χρειαστεί να γίνει προεκβολή των δύο από των τριών συνιστωσών του  $\vec{\Psi}$ . Στην συνέχεια γίνεται ο υπολογισμός της τρίτης συνιστώσας που απέμεινε από την σχέση 2.2.27. Όποτε οι χωρικές οριακές συνθήκες στην είσοδο έχουν ως εξής:

$$\Psi_{11} = \left( \frac{u^2 \left( \frac{u^2}{2c^2} - \frac{\gamma - 3}{2(\gamma - 1)} - \frac{1}{\gamma - 1} \frac{c^2}{u^2} \right) \Psi_{31} + u \left( \frac{u^2}{c^2} - 1 \right) \Psi_{21}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right)$$

$$\Psi_{21} = \Psi_{22}$$

$$\Psi_{31} = \Psi_{32}$$

(2.2.28)

Η διατύπωση των χωρικών οριακών συνθηκών για την έξοδο ακολουθεί την αντίστοιχη διαδικασία με την είσοδο. Για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή  $n$  υπάρχει συγκεκριμένη τιμή στατικής πίεσης οπότε  $\delta p = 0$ , έτσι από τη σχέση 2.1.2 ισχύει:

$$\delta p = (\gamma - 1) \left( \delta(\rho E) - u \delta(\rho u) + \frac{1}{2} u^2 \delta \rho \right) = 0 \quad (2.2.29)$$

Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό στην 2.2.29 προκύπτει

$$\delta(\rho E) = u \delta(\rho u) - \frac{1}{2} u^2 \delta \rho \quad (2.2.30)$$

Με αντικατάσταση στην 2.2.22, της 2.2.29:

$$\begin{aligned} & \left[ -u^2\Psi_2 + \left[ -\gamma uE + \frac{\gamma-2}{2}u^3 \right] \Psi_3 \right] \delta\rho \\ & + \left[ \Psi_1 + 2u\Psi_2 + \left[ \gamma E - \frac{\gamma-3}{2}u^2 \right] \Psi_3 \right] \delta(\rho u) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

Η 2.2.31 επιβάλλει στις συζυγείς μεταβλητές την ικανοποίηση δύο σχέσεων:

$$-u^2\Psi_2 + \left[ -\gamma uE + \frac{\gamma-2}{2}u^3 \right] \Psi_3 = 0 \quad (2.2.32)$$

$$\Psi_1 + 2u\Psi_2 + \left[ \gamma E - \frac{\gamma-3}{2}u^2 \right] \Psi_3 = 0 \quad (2.2.33)$$

οπότε στην έξοδο μια από τις τρεις συνιστώσες του  $\vec{\Psi}$  υπολογίζεται μέσω παρεκβολής από το εσωτερικό του πεδίου, και οι υπόλοιπες δύο προκύπτουν από τις σχέσεις 2.2.32-33. Έτσι οι χωρικές οριακές συνθήκες στην έξοδο έχουν ως εξής:

$$\Psi_{1np} = \Psi_{1np-1}$$

$$\Psi_{2np} = \frac{\Psi_{1np}((\gamma-2)u^2 - 2\gamma E)}{2u(\gamma E + \frac{u^2}{2}(\gamma-1))}$$

$$\Psi_{3np} = \frac{\Psi_{1np}}{\gamma E + \frac{u^2}{2}(\gamma-1)} \quad (2.2.34)$$

Συνοπτικά οι οριακές συνθήκες στην έξοδο και είσοδο για το συζυγές πρόβλημα:

$$\vec{R}_{\psi_1}^n = \begin{bmatrix} \Psi_{11} - \left( \frac{u^2 \left( \frac{u^2}{2c^2} - \frac{\gamma-3}{2(\gamma-1)} - \frac{1}{\gamma-1} \frac{c^2}{u^2} \right) \Psi_{31} + u \left( \frac{u^2}{c^2} - 1 \right) \Psi_{21} \right)}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\ \Psi_{21} - \Psi_{22} \\ \Psi_{31} - \Psi_{32} \end{bmatrix} \quad (2.2.36)$$

$$\vec{R}_{\psi_{np}}^n = \begin{bmatrix} \Psi_{1np} - \Psi_{1np-1} \\ \Psi_{2np} - \frac{\Psi_{1np}((\gamma - 2)u^2 - 2\gamma E)}{2u(\gamma E + \frac{u^2}{2}(\gamma - 1))} \\ \Psi_{3np} - \frac{\Psi_{1np}}{\gamma E + \frac{u^2}{2}(\gamma - 1)} \end{bmatrix} \quad (2.2.37)$$

Η επίλυση της μη-μόνιμης συζυγής εξίσωσης από την μια χρονική στιγμή στην άλλη γίνεται με διττό χρονικό βήμα (dual time stepping) χρησιμοποιώντας το σχήμα της σχέσης 2.2.41 για δεύτερης τάξης ακρίβεια. Όπως παρατηρείται απαιτείται η αποθήκευση των δύο προηγούμενων στιγμιότυπων των συζυγών μεταβλητών.

$$\left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t}\right)_i^{n-1} = \frac{-3\bar{\Psi}_i^{n-1} + 4\bar{\Psi}_i^n - \bar{\Psi}_i^{n+1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (2.2.41)$$

Η επίλυση της συζυγούς εξίσωσης για κάθε χρονική στιγμή γίνεται με δέλτα-διατύπωση:

$$\left[ I \frac{\delta x}{\delta t} + \left[ \frac{\partial \vec{R}_{\psi}}{\partial \bar{\Psi}} \right]_i \right] \delta \vec{R}_{\psi_i}^n = -\vec{R}_{\psi_i}^n \quad (2.2.42)$$

όπου το  $\vec{R}_{\psi_i}^n$  περιλαμβάνει και τον χρονικό όρο  $\left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t}\right)_i^n$ , αφού θα υπολογιστεί από την 2.2.41. Για τις τελικές τιμές της συζυγούς εξίσωσης  $n=nm$  (αρχικές τιμές της επίλυσης του συζυγούς προβλήματος αφού λύνεται με αντίθετη χρόνο-προέλαση), γίνεται η παραδοχή ότι είναι χρονικά μόνιμη. Δηλαδή παραλείπεται ο χρονικός όρος  $\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t}$  από τη συζυγή εξίσωση.

## 2.2.2 Υπολογισμός της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης

Εφόσον έχει επιλυθεί αριθμητικά η συζυγής εξίσωση επιβάλλοντας τις οριακές συνθήκες, στην εξίσωση της σχέσης 2.2.13 απομένουν μόνο τα δύο τελευταία ολοκληρώματα σημειωμένα ως  $SV$ .

$$\delta F = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (p - p_{tar})^2 \delta(dxdt) + \int_0^T \int_0^L \bar{\Psi}^T T_b \delta \vec{b} dxdt \quad (2.2.43)$$

όπου ο όρος  $\delta(dxdt)$  του πρώτου χρόνο-χωρικού ολοκληρώματος αναπτύσσεται ως εξής:

$$\delta(dxdt) = dt\delta(dx) + dx\delta(dt)$$

$\delta(dt) = 0$ , επειδή το βήμα  $dt$  είναι σταθερό. Επίσης γίνεται η παραδοχή  $\delta(dx) = 0$ , πάνω στην οποία δομείται η παραμετροποίηση της γεωμετρικής μορφής (3), συγκεκριμένα οι συντεταγμένες- $x$  των σημείων Bezier-Bernstein παραμένουν σταθερές κατά τη βελτιστοποίηση. Οπότε το πρώτο χρόνο-χωρικό ολοκλήρωμα μηδενίζεται και η παράγωγος της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{\delta F}{\delta \vec{b}_i} = \int_0^T \int_0^L \vec{\Psi}^T T_b dxdt \quad (2.2.44)$$

### 2.3 Αλγόριθμος αντίστροφου σχεδιασμού

Βήμα 1<sup>ο</sup>: Δίνεται η αρχική τιμή στον μετρητή των κύκλων  $n=0$  βελτιστοποίησης και η αρχική λύση, δηλαδή ένα σύνολο αρχικών τιμών των  $N$  μεταβλητών σχεδιασμού  $\vec{b}^n$ , το  $\vec{b}^{n=0}$ , όπου  $n$  ο δείκτης του κύκλου βελτιστοποίησης.

Βήμα 2<sup>ο</sup>: Χρησιμοποιείται το πολυώνυμο Bezier-Bernstein για να υπολογιστεί η κατανομή της διατομής  $S(x)^n$  του αγωγού για το τρέχον διάνυσμα  $\vec{b}^n$ .

Βήμα 3<sup>ο</sup>: Επιλύεται το ευθύ πρόβλημα, για όλες τις χρονικές στιγμές, για την τρέχουσα κατανομή διατομής του αγωγού  $S(x)^n$ , και μεταξύ άλλων υπολογίζεται και η κατανομή πίεσης  $p(x,t)$  η οποία εμπλέκεται στην αντικειμενική συνάρτηση.

Βήμα 4<sup>ο</sup>: Σύμφωνα με την τρέχουσα λύση του ευθέως προβλήματος υπολογίζεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Βήμα 5<sup>ο</sup>: Επιλύεται το συζυγές πρόβλημα, για όλες τις χρονικές στιγμές, για την τρέχουσα κατανομή διατομής  $S(x)^n$  και την τρέχουσα λύση του ευθέως προβλήματος  $\vec{U}^n$ . Στην συνέχεια, υπολογίζεται η πρώτη παράγωγος της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\left(\frac{\delta F}{\delta \vec{b}^n}\right)^n$ .

Βήμα 6<sup>ο</sup>: Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της απότομης καθόδου, διορθώνονται οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού από τη σχέση

$$\vec{b}^{n+1} = \vec{b}^n - \eta \left(\frac{\delta F}{\delta \vec{b}^n}\right)^n \quad 2.3.1$$

Βήμα 7<sup>ο</sup>: Ένας νέος κύκλος ξεκινά από το βήμα 2, θέτοντας  $n=n+1$ .

### 3 Η Επιλεκτική κατανομή των δεικτών μνήμης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιασθεί η μέθοδος της επιλεκτικής κατανομής των δεικτών μνήμης (checkpointing)[ (12) (14) (13)] .

#### 3.1 Η ιδέα του checkpointing. Επισκόπηση

Για τον υπολογισμό των συζυγών μεταβλητών σε ένα χρονικό βήμα χρησιμοποιείται η υπολογισθείσα λύση του πεδίου ροής (το πεδίο τιμών των μεταβλητών του ευθέος προβλήματος) την ίδια χρονική στιγμή. Όμως, όπως έχει προαναφερθεί, δεν είναι επιθυμητή η αποθήκευση όλων των στιγμιότυπων των πεδίων λύσεων του πρωτεύοντος προβλήματος εξαιτίας μεγάλου χώρου αποθήκευσης που απαιτείται. Μια ιδέα για την αντιμετώπιση του προβλήματος της μνήμης είναι η αποθήκευση μερικών επιλεγμένων στιγμιότυπων του πεδίου ροής και ο επαναυπολογισμός των υπόλοιπων στιγμιότυπων όταν αυτό χρειαστεί. Η ιδέα αυτή υλοποιείται με τη χρήση δεικτών μνήμης που υποδεικνύουν σε ποια χρονικά βήματα είναι αποθηκευμένα τα στιγμιαία πεδία ροής (λύσεις του πρωτεύοντος προβλήματος), αυτοί οι δείκτες ονομάζονται 'checkpoints'.

Για την κατανόηση της αρχικής ιδέας θα διατυπωθεί ένα παράδειγμα, στο οποίο γίνεται μια αναπαράσταση της επίλυσης του χρονικά μη-μόνιμου συζυγούς προβλήματος. Το συγκεκριμένο πρόβλημα διακριτοποιείται σε δέκα χρονικές στιγμές ( $n=10$ ). Επίσης χρησιμοποιούνται τέσσερις δείκτες μνήμης (checkpoints) ( $\delta=4$ ), το οποίο προφανώς αποτελεί απόφαση του χρήστη/σχεδιαστή. Ο αριθμός των checkpoints, ισοδυναμεί με το μέγιστο αριθμό στιγμιότυπων-λύσεων του πεδίου ροής, που σύμφωνα με τον χρήστη, μπορεί να είναι αποθηκευμένα στη μνήμη του υπολογιστή. Η αναπαράσταση της επίλυσης ξεκινά από το στάδιο που έχει επιλυθεί το ευθύ πρόβλημα για όλες τις χρονικές στιγμές. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι χρονικές στιγμές 'n'.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Κλήση του:
1	⊙	•	•	⊙	•	•	•	•	•	⊙	⊙	

Οι χρονικές στιγμές στις οποίες έχουν τοποθετηθεί τα checkpoints, συμβολίζονται με '⊙'. Οι χρονικές στιγμές που δεν έχουν αποθηκευτεί τα αντίστοιχα στιγμιότυπα τους, συμβολίζονται με '•'. Κάθε χρονική στιγμή που έχουν επιλυθεί οι συζυγείς εξισώσεις συμβολίζεται με '<'. Η 1<sup>η</sup> στήλη δείχνει τα στάδια της επίλυσης, και η τελευταία στήλη ποιος από τους δύο επιλύτες, του ευθέος (direct) ή του συζυγούς (adjoint) προβλήματος, έχει κληθεί στο αντίστοιχο στάδιο. Αναγκαστικά πρέπει να είναι αποθηκευμένο το στιγμιότυπο στον αρχικό κόμβο  $n=0$ , για να μην χαθεί η αρχικοποίηση του ευθέος προβλήματος. Επίσης αποθηκευμένο πρέπει να είναι και το τελευταίο στιγμιότυπο αφού απαιτείται για την επίλυση του συζυγούς προβλήματος στον

τελευταίο κόμβο (το οποίο, έτσι κι αλλιώς, μόλις έχει υπολογιστεί, άρα είναι εύκολα διαθέσιμο), αφού όπως προαναφέρθηκε η επίλυση του συζυγούς προβλήματος ξεκινά από το τέλος. Τα άλλα δύο στιγμιότυπα που είναι τοποθετημένα τα checkpoints έχουν επιλεγεί αυθαίρετα από τον χρήστη, και είναι στους χρονικούς κόμβους 3 και 9. Στη συνέχεια επιλύονται οι συζυγείς εξισώσεις για την τελευταία χρονική στιγμή, με την κλήση του αντίστοιχου επιλύτη χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές του πεδίου ροής 'U<sub>10</sub>'.

2	⊙	•	•	⊙	•	•	•	•	•	⊙	◁	ADJ(Ψ <sub>10</sub> ,U <sub>10</sub> )
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--

Αφού έχουν επιλυθεί οι συζυγείς εξισώσεις, στην τελευταία χρονική στιγμή απελευθερώνεται το αντίστοιχο checkpoint που ήταν τοποθετημένο, επίσης αυτό σημαίνει ότι διαγράφεται από τη μνήμη του υπολογιστή το τελευταίο στιγμιότυπο 'U<sub>10</sub>', έτσι γίνεται κάθε φορά που επιλύονται οι συζυγείς εξισώσεις σε οποιονδήποτε χρονική στιγμή. Το ίδιο συμβαίνει και στο 3<sup>ο</sup> στάδιο όπου επιλύονται οι συζυγείς εξισώσεις για την 9<sup>η</sup> χρονική στιγμή.

3	⊙	•	•	⊙	•	•	•	•	•	◁	◁	ADJ(Ψ <sub>9</sub> , Ψ <sub>10</sub> ,U <sub>10</sub> )
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Για την 8<sup>η</sup> χρονική στιγμή δεν υπάρχει αποθηκευμένο το στιγμιότυπο του πεδίου ροής 'U<sub>8</sub>', οπότε αρχίζουν οι επαναυπολογισμοί των στιγμιότυπων των πεδίων ροής από την πιο πρόσφατη χρονική στιγμή που έχει τοποθετημένο checkpoint. Τα στιγμιότυπα που επαναυπολογίζονται ('U<sub>4</sub>, U<sub>5</sub>'), αποθηκεύονται στις κενές θέσεις μνήμης, οι οποίες προέκυψαν από την απομάκρυνση των δύο checkpoints από την 10<sup>η</sup> και 9<sup>η</sup> χρονική στιγμή.

4	⊙	•	•	⊙	⊙	•	•	•	•	◁	◁	DIR(U <sub>4</sub> ,U <sub>3</sub> )
5	⊙	•	•	⊙	⊙	⊙	•	•	•	◁	◁	DIR(U <sub>5</sub> ,U <sub>4</sub> )

Όταν όλες οι θέσεις μνήμης είναι κατειλημμένες (δεν υπάρχει ελεύθερο checkpoint), τότε το πιο πρόσφατο στιγμιότυπο 'n' διαγράφεται και τη θέση μνήμης του καταλαμβάνει το καινούργιο στιγμιότυπο 'n+1' που έχει υπολογιστεί, αυτός είναι και ο τρόπος, που επιλέχτηκε από τον χρήστη ώστε να ξανά ανακατανέμονται τα checkpoints. Οπότε στο στάδιο 6 για να προχωρήσει η επίλυση του ευθέως προβλήματος διαγράφεται το 'U<sub>5</sub>' και στην θέση του αποθηκεύεται το 'U<sub>6</sub>', ομοίως προχωρά η διαδικασία και στα στάδια 7 και 8.

6	⊙	•	•	⊙	⊙	•	⊙	•	•	◁	◁	DIR(U <sub>6</sub> ,U <sub>5</sub> )
7	⊙	•	•	⊙	⊙	•	•	⊙	•	◁	◁	DIR(U <sub>7</sub> ,U <sub>6</sub> )
8	⊙	•	•	⊙	⊙	•	•	•	⊙	◁	◁	DIR(U <sub>7</sub> ,U <sub>6</sub> )

Στο 9<sup>ο</sup> στάδιο, αφού έχει υπολογιστεί το 'U<sub>8</sub>', επιλύονται οι συζυγείς εξισώσεις για την 8<sup>η</sup> χρονική στιγμή.

9	⊙	•	•	⊙	⊙	•	•	•	◁	◁	◁	ADJ(Ψ <sub>8</sub> , Ψ <sub>9</sub> , U <sub>8</sub> )
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--

Κατά τον ίδιο τρόπο συνεχίζεται η διαδικασία επίλυσης μέχρι το στάδιο 25 όπου ολοκληρώνεται για όλες τις χρονικές στιγμές η επίλυση του συζυγούς προβλήματος.

10	⊙	•	•	⊙	⊙	⊙	•	•	◁	◁	◁	DIR(U <sub>5</sub> , U <sub>4</sub> )
11	⊙	•	•	⊙	⊙	•	⊙	•	◁	◁	◁	DIR(U <sub>6</sub> , U <sub>5</sub> )
12	⊙	•	•	⊙	⊙	•	•	⊙	◁	◁	◁	DIR(U <sub>7</sub> , U <sub>6</sub> )
13	⊙	•	•	⊙	⊙	•	•	◁	◁	◁	◁	ADJ(Ψ <sub>7</sub> , Ψ <sub>8</sub> , U <sub>7</sub> )
14	⊙	•	•	⊙	⊙	⊙	•	◁	◁	◁	◁	DIR(U <sub>5</sub> , U <sub>4</sub> )
15	⊙	•	•	⊙	⊙	•	⊙	◁	◁	◁	◁	DIR(U <sub>6</sub> , U <sub>5</sub> )
16	⊙	•	•	⊙	⊙	•	◁	◁	◁	◁	◁	ADJ(Ψ <sub>6</sub> , Ψ <sub>7</sub> , U <sub>6</sub> )
17	⊙	•	•	⊙	⊙	⊙	◁	◁	◁	◁	◁	DIR(U <sub>5</sub> , U <sub>4</sub> )
18	⊙	•	•	⊙	⊙	◁	◁	◁	◁	◁	◁	ADJ(Ψ <sub>5</sub> , Ψ <sub>6</sub> , U <sub>5</sub> )
19	⊙	•	•	⊙	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	ADJ(Ψ <sub>4</sub> , Ψ <sub>5</sub> , U <sub>4</sub> )
20	⊙	•	•	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	ADJ(Ψ <sub>3</sub> , Ψ <sub>4</sub> , U <sub>3</sub> )
21	⊙	⊙	•	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	DIR(U <sub>1</sub> , U <sub>0</sub> )
22	⊙	⊙	⊙	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	DIR(U <sub>2</sub> , U <sub>1</sub> )
23	⊙	⊙	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	ADJ(Ψ <sub>2</sub> , Ψ <sub>1</sub> , U <sub>2</sub> )
24	⊙	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	ADJ(Ψ <sub>1</sub> , Ψ <sub>0</sub> , U <sub>1</sub> )
25	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	ADJ(Ψ <sub>0</sub> , Ψ <sub>1</sub> , U <sub>0</sub> )

Συνοψίζοντας, στο παράδειγμα για την επίλυση των συζυγών εξισώσεων σε όλους τους χρονικούς κόμβους, χρησιμοποιώντας τέσσερα checkpoints, χρειάστηκαν δεκατρείς επαναυπολογισμοί του ευθέως προβλήματος. Βέβαια αυτό ήταν ως αποτέλεσμα της συγκεκριμένης αρχικής κατανομής των checkpoints και του συγκεκριμένου τρόπου ανακατανομής τους;

Για να απαντηθεί το ερώτημα της προηγούμενης παραγράφου, παρατίθεται στο ίδιο πρόβλημα (για δέκα χρονικές στιγμές ( $n=10$ ) και για τέσσερις δείκτες μνήμης (checkpoints) ( $\delta=4$ )) μια διαφορετική περίπτωση στην οποία επιλέγεται μια διαφορετική αρχική κατανομή και ένα διαφορετικός τρόπος ανακατανομής των checkpoints. Η διαφορετική αρχική κατανομή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Κλήση του:
1	⊙	•	•	⊙	•	•	•	⊙	•	•	⊙	

όπου αντί να τοποθετηθεί checkpoint στην 9<sup>η</sup> τοποθετείται στην 7<sup>η</sup> χρονική στιγμή. Στη συνέχεια, αρχίζει η επίλυση του συζυγούς προβλήματος από την 10<sup>η</sup> χρονική στιγμή.

2	⊙	•	•	⊙	•	•	•	⊙	•	•	◁	ADJ( $\Psi_{10}, U_{10}$ )
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----------------------------

Στο 2<sup>ο</sup> στάδιο έχει απελευθερωθεί το checkpoint και τοποθετείται στην 8<sup>η</sup> χρονική στιγμή όπου και αρχίζουν οι επαναυπολογισμοί του ευθέως προβλήματος μέχρι να υπολογιστεί το πεδίο ροής της 9<sup>ης</sup> χρονικής στιγμής.

3	⊙	•	•	⊙	•	•	•	⊙	⊙	•	◁	DIR( $U_8, U_7$ )
4	⊙	•	•	⊙	•	•	•	⊙	•	⊙	◁	DIR( $U_9, U_8$ )

Κατά τον ίδιο τρόπο της 1<sup>ης</sup> περίπτωσης συνεχίζεται η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος μέχρι και το 10<sup>ο</sup> στάδιο

5	⊙	•	•	⊙	•	•	•	⊙	•	◁	◁	ADJ( $\Psi_9, \Psi_{10}, U_9$ )
6	⊙	•	•	⊙	•	•	•	⊙	⊙	◁	◁	DIR( $U_8, U_7$ )
7	⊙	•	•	⊙	•	•	•	⊙	◁	◁	◁	ADJ( $\Psi_8, \Psi_9, U_8$ )
8	⊙	•	•	⊙	•	•	•	◁	◁	◁	◁	ADJ( $\Psi_7, \Psi_8, U_7$ )
9	⊙	•	•	⊙	⊙	•	•	◁	◁	◁	◁	DIR( $U_4, U_3$ )
10	⊙	•	•	⊙	⊙	⊙	•	◁	◁	◁	◁	DIR( $U_5, U_4$ )

Στο 11<sup>ο</sup> στάδιο φαίνεται ο διαφορετικός τρόπος ανακατανομής των checkpoints στην 2<sup>η</sup> περίπτωση, όπου όταν όλες οι θέσεις μνήμης είναι κατειλημμένες (δεν υπάρχει ελεύθερο checkpoint), τότε το προηγούμενο 'n-1' του πιο πρόσφατου στιγμιότυπου 'n' διαγράφεται και τη θέση μνήμης του καταλαμβάνει το καινούργιο στιγμιότυπο 'n+1' που έχει υπολογιστεί, οπότε

11	⊙	•	•	⊙	•	⊙	⊙	◁	◁	◁	◁	DIR( $U_6, U_5$ )
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-------------------

Μετά συνεχίζεται, με τον ίδιο τρόπο της 1<sup>ης</sup> περίπτωσης, η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος μέχρι το τέλος

12	⊙	•	•	⊙	•	⊙	◁	◁	◁	◁	◁	ADJ( $\Psi_6, \Psi_7, U_6$ )
13	⊙	•	•	⊙	•	◁	◁	◁	◁	◁	◁	ADJ( $\Psi_5, \Psi_6, U_5$ )
14	⊙	•	•	⊙	⊙	◁	◁	◁	◁	◁	◁	DIR( $U_4, U_3$ )
15	⊙	•	•	⊙	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	ADJ( $\Psi_4, \Psi_5, U_4$ )
16	⊙	•	•	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	ADJ( $\Psi_3, \Psi_4, U_3$ )
17	⊙	⊙	•	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	DIR( $U_1, U_0$ )
18	⊙	⊙	⊙	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	DIR( $U_2, U_1$ )
19	⊙	⊙	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	ADJ( $\Psi_2, \Psi_3, U_2$ )
20	⊙	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	◁	ADJ( $\Psi_1, \Psi_2, U_1$ )





### Δυναμικός καταμερισμός των checkpoints

Δεδομένο το πλήθος των checkpoints  $\delta > 0$  (ορίζεται από τον χρήστη)

**Αποθήκευση** του πεδίου ροής για την αρχική στιγμή  $n=0$ , δώσε στο αντίστοιχο επίπεδο του checkpoint την τιμή  $l = \infty$

**For**  $n=1,2,3,\dots,nm$  **do**

**If** ο αριθμός των είδη χρησιμοποιημένων checkpoints  $\leq \delta$  **Then**

**Αποθήκευση** της λύσης του ευθέως προβλήματος της χρονικής στιγμής  $n$  και αντιστοίχιση του με checkpoint επιπέδου  $l = 0$

**Else if** τουλάχιστον ένα από τα είδη τοποθετημένα checkpoint είναι αναλώσιμο **then**

**Διαγραφή** του αναλώσιμου checkpoint που αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο χρονικό βήμα

**Αποθήκευση** του πεδίου ροής που υπολογίστηκε στο βήμα  $n$  και αντιστοίχιση του με το checkpoint επιπέδου  $l = 0$

**Else**

**Μετακίνηση** του checkpoint επιπέδου  $l_{n-1}$  από το χρονικό βήμα  $n-1$

**Αποθήκευση** του πεδίου ροής που υπολογίστηκε στο χρονικό βήμα  $n$  και αντιστοίχιση του με checkpoint επιπέδου  $l = l_{n-1} + 1$

**End if**

**Επίλυση** των συζυγών εξισώσεων για το χρονικό βήμα  $n$ , με αφετηρία το χρονικό βήμα  $n+1$  και το αποθηκευμένο πεδίο ροής στη θέση  $n$ .

**End for**

Στη διατύπωση του αλγόριθμου του δυναμικού καταμερισμού των checkpoints εισήχθησαν δύο καινούργιες έννοιες, η αναλωσιμότητα (dispensability) και το επίπεδο (level) του checkpoint. «Αναλώσιμο» είναι ένα checkpoint όταν είναι σε θέση να απομακρυνθεί ή να ανατοποθετηθεί κατά το επόμενο χρονικό βήμα της χρόνο-προέλασης του ευθέος προβλήματος ή της αντίθετης χρόνο-προέλασης του συζύγου προβλήματος. Το στιγμιότυπο που αντιστοιχεί σε ένα αναλώσιμο checkpoint, πρόκειται να διαγραφεί από τη θέση μνήμης όταν το checkpoint απομακρυνθεί. Το πότε ένα checkpoint είναι αναλώσιμο θα παρουσιαστεί στη συνέχεια. Επίσης το επίπεδο ενός checkpoint είναι μία τιμή που χαρακτηρίζει το συγκεκριμένο checkpoint. Το checkpoint, που θα αυξηθεί κατά μία μονάδα το επίπεδο του, είναι τοποθετημένο στην τελευταία χρονική στιγμή που έχει επιλυθεί το ευθύ πρόβλημα, και καθώς δεν έχει κάποιο αναλώσιμο checkpoint, τότε το συγκεκριμένο τοποθετείται στο επόμενο χρονικό βήμα, και το επίπεδο του αυξάνεται κατά μία μονάδα. Τα επίπεδα είναι απαραίτητα για την εκτέλεση του αλγόριθμου, επειδή η αναλωσιμότητα προκύπτει με σύγκριση των επιπέδων των checkpoints, εξαιτίας αυτού στο 1<sup>ο</sup> checkpoint που υποδεικνύει την αρχικοποίηση του ευθέος προβλήματος, δίνεται στο επίπεδο του η τιμή 'άπειρο'.

Στη συνέχεια, θα διατυπωθεί ένα παράδειγμα, στο οποίο γίνεται μια αναπαράσταση της επίλυσης με χρόνο- προέλαση του ευθέος προβλήματος και, μετά, με αντίθετη χρόνο-προέλαση η επίλυση του συζυγούς προβλήματος. Για να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων (των επαναυπολογισμών του ευθέος προβλήματος) που δίνει ο δυναμικός αλγόριθμος κατανομής δεικτών με τις μεθοδολογίες που χρησιμοποιήθηκαν στα παραδείγματα του προηγούμενου υποκεφαλαίου αναπαριστάται το ίδιο πρόβλημα, δηλαδή έχει διακριτοποιηθεί σε δέκα χρονικούς κόμβους, και χρησιμοποιούνται τέσσερα checkpoints. Επίσης οι συμβολισμοί που χρησιμοποιήθηκαν στα προηγούμενα σχήματα είναι οι ίδιοι, με επιπλέον τους κάτω δείκτες στα checkpoint να συμβολίζουν το επίπεδο τους.

Αρχικά ξεκινάει με χρόνο-προέλαση η επίλυση του ευθέος προβλήματος.

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Κλήση του:
1	$\odot_{\infty}$	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
2	$\odot_{\infty}$	$\odot_0$	•	•	•	•	•	•	•	•	•	DIR( $U_1, U_0$ )
3	$\odot_{\infty}$	$\odot_0$	$\odot_0$	•	•	•	•	•	•	•	•	DIR( $U_2, U_1$ )
4	$\odot_{\infty}$	$\odot_0$	$\odot_0$	$\odot_0$	•	•	•	•	•	•	•	DIR( $U_3, U_2$ )

Για να αποθηκευτεί το στιγμιότυπο της 4<sup>ης</sup> χρονικής στιγμής πρέπει κάποιο από τα είδη αποθηκευμένα να διαγραφεί, όμως όλα τα checkpoints είναι στο ίδιο

επίπεδο, οπότε αναλώσιμο είναι το checkpoint που είναι στο μεγαλύτερο χρονικό βήμα, δηλαδή στην 3<sup>η</sup> χρονική στιγμή. Επίσης το επίπεδο του checkpoint αυξάνεται κατά ένα.

5	$\odot_\infty$	$\odot_0$	$\odot_0$	•	$\odot_1$	•	•	•	•	•	•	DIR( $U_4, U_3$ )
---	----------------	-----------	-----------	---	-----------	---	---	---	---	---	---	-------------------

Στη συνέχεια, πάλι, κάποιο στιγμιότυπο πρέπει να διαγραφεί για να αποθηκευτεί το στιγμιότυπο που θα υπολογιστεί. Σε αυτή τη φάση υπάρχει ένα checkpoint με μεγαλύτερο επίπεδο από όλα τα άλλα, οπότε αναλώσιμο είναι το checkpoint που αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο χρονικό βήμα και που βρίσκεται αριστερά του checkpoint με το μεγαλύτερο επίπεδο.

6	$\odot_\infty$	$\odot_0$	•	•	$\odot_1$	$\odot_0$	•	•	•	•	•	DIR( $U_5, U_4$ )
---	----------------	-----------	---	---	-----------	-----------	---	---	---	---	---	-------------------

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι αν ο επιλύτης του ευθέως προβλήματος χρησιμοποιούσε διττό χρονικό βήμα (dual time stepping) και όχι τη μέθοδο Range-Kata 3<sup>ης</sup> τάξης, θα χρειαζόνταν η διπλάσια μνήμη από αυτήν που θα υποδείκνυε ο αριθμός των checkpoints. Αφού πχ για τον υπολογισμό του στιγμιότυπου στη χρονική στιγμή 5 'U<sub>5</sub>' θα χρειαζόνταν το 'U<sub>4</sub>' αλλά και το 'U<sub>3</sub>'.

7	$\odot_\infty$	•	•	•	$\odot_1$	$\odot_0$	$\odot_0$	•	•	•	•	DIR( $U_6, U_5$ )
---	----------------	---	---	---	-----------	-----------	-----------	---	---	---	---	-------------------

Στο 7<sup>ο</sup> στάδιο δεν υπάρχει άλλο checkpoint αριστερά του checkpoint με το μεγαλύτερο επίπεδο, οπότε αναλώσιμο είναι το checkpoint του μεγαλύτερου χρονικά βήματος που βρίσκεται δεξιά του που επίσης το επίπεδο του αυξάνεται κατά ένα.

8	$\odot_\infty$	•	•	•	$\odot_1$	$\odot_0$	•	$\odot_1$	•	•	•	DIR( $U_7, U_6$ )
9	$\odot_\infty$	•	•	•	$\odot_1$	•	•	$\odot_1$	$\odot_0$	•	•	DIR( $U_8, U_7$ )
10	$\odot_\infty$	•	•	•	$\odot_1$	•	•	$\odot_1$	•	$\odot_1$	•	DIR( $U_9, U_8$ )
11	$\odot_\infty$	•	•	•	$\odot_1$	•	•	$\odot_1$	•	•	$\odot_2$	DIR( $U_{10}, U_9$ )

Μέχρι εδώ, έχει επιλυθεί με χρόνο-προέλαση το ευθύ πρόβλημα ως την τελευταία χρονική στιγμή, τα αποθηκευμένα στιγμιότυπα είναι αυτά που υποδεικνύει η κατανομή των checkpoints, οπότε μπορεί να ξεκινήσει η επίλυση του συζύγου προβλήματος.

12	$\odot_\infty$	•	•	•	$\odot_1$	•	•	$\odot_1$	•	•	◀	ADJ( $\Psi_{10}, U_{10}$ )
----	----------------	---	---	---	-----------	---	---	-----------	---	---	---	----------------------------

Έχει απελευθερωθεί το checkpoint που ήταν στην τελευταία χρονική στιγμή, επίσης για να συνεχιστεί η επίλυση του συζυγούς προβλήματος ξεκινά ο επιλύτης του ευθέος προβλήματος από εκεί που είναι τοποθετημένο το τελευταίο checkpoint, τα ελεύθερα checkpoints ανακατανέμονται ξανά με τον ίδιο τρόπο.

13	$\odot_\infty$	•	•	•	$\odot_1$	•	•	$\odot_1$	$\odot_0$	•	$\triangleleft$	DIR( $U_8, U_7$ )
14	$\odot_\infty$	•	•	•	$\odot_1$	•	•	$\odot_1$	•	$\odot_1$	$\triangleleft$	DIR( $U_9, U_8$ )
15	$\odot_\infty$	•	•	•	$\odot_1$	•	•	$\odot_1$	•	$\triangleleft$	$\triangleleft$	ADJ( $\Psi_9, \Psi_{10}, U_9$ )
16	$\odot_\infty$	•	•	•	$\odot_1$	•	•	$\odot_1$	$\odot_0$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	DIR( $U_8, U_7$ )
17	$\odot_\infty$	•	•	•	$\odot_1$	•	•	$\odot_1$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	ADJ( $\Psi_8, \Psi_9, U_8$ )
18	$\odot_\infty$	•	•	•	$\odot_1$	•	•	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	ADJ( $\Psi_7, \Psi_8, U_7$ )
19	$\odot_\infty$	•	•	•	$\odot_1$	$\odot_0$	•	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	DIR( $U_5, U_4$ )
20	$\odot_\infty$	•	•	•	$\odot_1$	$\odot_0$	$\odot_0$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	DIR( $U_6, U_5$ )
21	$\odot_\infty$	•	•	•	$\odot_1$	$\odot_0$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	ADJ( $\Psi_6, \Psi_7, U_6$ )
22	$\odot_\infty$	•	•	•	$\odot_1$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	ADJ( $\Psi_5, \Psi_6, U_5$ )
23	$\odot_\infty$	•	•	•	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	ADJ( $\Psi_4, \Psi_5, U_4$ )
24	$\odot_\infty$	$\odot_0$	•	•	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	DIR( $U_1, U_0$ )
25	$\odot_\infty$	$\odot_0$	$\odot_0$	•	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	DIR( $U_2, U_1$ )
26	$\odot_\infty$	$\odot_0$	$\odot_0$	$\odot_0$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	DIR( $U_3, U_2$ )
27	$\odot_\infty$	$\odot_0$	$\odot_0$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	ADJ( $\Psi_3, \Psi_4, U_3$ )
28	$\odot_\infty$	$\odot_0$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	ADJ( $\Psi_2, \Psi_3, U_2$ )
29	$\odot_\infty$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	ADJ( $\Psi_1, \Psi_2, U_1$ )
30	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	ADJ( $\Psi_0, \Psi_1, U_0$ )

Όπως διαπιστώνεται, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του δυναμικού καταμερισμού των δεικτών μνήμης χρειάστηκαν 8 επαναυπολογισμοί του ευθέος προβλήματος, έναντι 13 και 9 που χρειάστηκαν στις περιπτώσεις του ίδιου προβλήματος που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο υποκεφάλαιο.

### 3.3 Αλγόριθμος αντίστροφου σχεδιασμού

Σε προηγούμενη ενότητα έχει γίνει περιγραφή των βημάτων του αλγορίθμου αντίστροφου σχεδιασμού. Αφού όμως ο αλγόριθμος του δυναμικού καταμερισμού των δεικτών μνήμης λειτουργεί ταυτόχρονα με τον επιλύτη του ευθέος προβλήματος, τότε τα βήματα του αλγορίθμου του αντίστροφου σχεδιασμού τροποποιούνται ανάλογα.

Βήμα 1<sup>ο</sup> : Δίνεται η αρχική τιμή στον μετρητή των κύκλων  $n=0$  βελτιστοποίησης και η αρχική λύση, δηλαδή ένα σύνολο αρχικών τιμών των  $N$  μεταβλητών

σχεδιασμού  $\vec{b}^n$ , το  $\vec{b}^{n=0}$ , όπου  $n$  ο δείκτης του κύκλου βελτιστοποίησης. Δίνεται από τον χρήστη ο αριθμός των checkpoints.

Βήμα 2<sup>ο</sup>: Χρησιμοποιείται το πολυώνυμο Bezier-Bernstein, ως μοντέλο παραμετροποίησης της γεωμετρίας, για να υπολογιστεί η κατανομή της διατομής  $S(x)^n$  του αγωγού για το τρέχον διάνυσμα  $\vec{b}^n$ .

Βήμα 3<sup>ο</sup>: Επιλύεται το ευθύ πρόβλημα με χρόνο-προέλαση, για όλες τις χρονικές στιγμές, για την τρέχουσα κατανομή διατομής του αγωγού  $S(x)^n$ , επίσης μεταξύ άλλων υπολογίζεται και η κατανομή πίεσης  $p(x,t)$ . Κάθε φορά που υπολογίζεται η λύση στην τρέχουσα χρονική στιγμή αυτή αποθηκεύεται στη θέση που είχε αποθηκευτεί μία λύση προηγούμενης χρονικής στιγμής, δηλαδή γίνεται μία ανακατανομή των checkpoints.

Βήμα 4<sup>ο</sup>: Επιλύεται το συζυγές πρόβλημα, για όλες τις χρονικές στιγμές, με αντίθετη χρόνο-προέλαση, για την τρέχουσα κατανομή διατομής  $S(x)^n$  και την τρέχουσα λύση του ευθέως προβλήματος  $\vec{U}^n$ . Στη συνέχεια, υπολογίζεται η πρώτη παράγωγος της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\left(\frac{\delta F}{\delta \vec{b}^n}\right)^n$ . Όταν ο συζυγής επιλύτης φθάσει σε χρονική στιγμή που δεν έχει αποθηκευμένη τη λύση του ευθέως προβλήματος, τότε ο αλγόριθμος επιστρέφει στο 3<sup>ο</sup> βήμα.

Βήμα 5<sup>ο</sup>: Χρησιμοποιώντας την απότομη κάθοδο ως αιτιοκρατική μέθοδο, διορθώνονται οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού από τη σχέση:

$$\vec{b}^{n+1} = \vec{b}^n - \eta \left( \frac{\delta F}{\delta \vec{b}^n} \right)^n \quad 2.3.1$$

Βήμα 6<sup>ο</sup>: ένας νέος κύκλος ξεκινά από το βήμα 2, θέτοντας  $n=n+1$ .

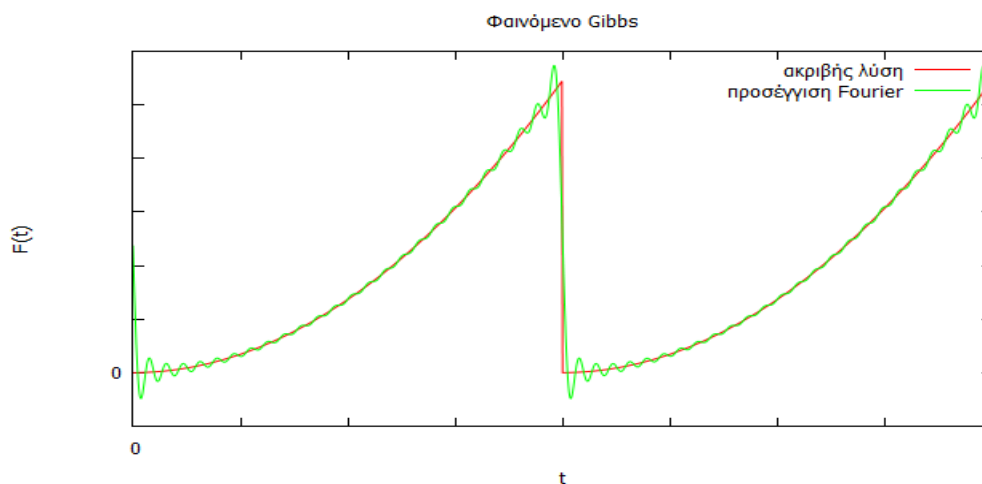
## 4 Προσεγγιστικό μοντέλο Fourier για την οικονομική εφαρμογή της χρονικά μη μόνιμης συνεχούς συζυγούς μεθόδου

### 4.1 Εισαγωγή

Ο Γάλλος μαθηματικός J. Fourier υποστήριξε ότι οποιαδήποτε συνάρτηση μπορεί να αντιπροσωπευτεί από ένα άθροισμα ημιτονοειδών και συνημιτονοειδών όρων με τους κατάλληλους συντελεστές (2). Στην πραγματικότητα αυτό που υποστήριξε δεν ισχύει για όλες τις συναρτήσεις ή μπορεί να ισχύσει για όλες υπό προϋποθέσεις. Συγκεκριμένα, η έκφραση του αναπτύγματος Fourier (σχέση 4.1.1) εξαιτίας των τριγωνομετρικών όρων που εμπεριέχει, δίνει στην  $F(t)$  μια περιοδική συνεχής και λεία λύση σε όλο το  $\mathbb{R}$ , οπότε αν η συνάρτηση  $F(t)$  έχει τα προηγούμενα τρία χαρακτηριστικά τότε το ανάπτυγμα Fourier της  $F(t)$  συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα προς αυτήν (18).

$$F(t) \sim F_0 + \sum_{n=1}^{N_H} F_{an} \cos(\omega n t) + F_{bn} \sin(\omega n t) \quad (4.1.1)$$

Όταν όμως η  $F(t)$  δεν είναι περιοδική συνάρτηση, τότε η έκφραση του αναπτύγματος Fourier εφαρμόζεται στην περιοδική επέκταση της. Η περιοδική επέκταση της  $F(t)$  διατυπώνεται από τη σχέση  $F(t + kT) = F(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , όπου  $T$  το πεδίο ορισμού της  $F(t)$ , δηλαδή αναπαράγεται περιοδικά το υπό μελέτη τμήμα της  $F(t)$  στο πεδίο της μεταβλητής  $t$ . Όμως η περιοδική επέκταση μίας συνάρτησης παρουσιάζει στα άκρα κάθε διαστήματος  $T$  ασυνέχεια ή μη λεία επιφάνεια, εξαιτίας αυτού παρουσιάζεται το φαινόμενο Gibbs (σχήμα 4.1), όπου το ανάπτυγμα Fourier δεν προσεγγίζει αρκετά καλά την  $F(t + T)$  κοντά στα σημεία ασυνέχειας.



**Σχήμα 4.1:** Το φαινόμενο Gibbs για την  $F(t) = b + at^2$ . Στο σχήμα φαίνεται η ακριβής λύση και η προσέγγιση της με ανάπτυγμα Fourier, η οποία προσέγγιση δεν είναι αρκετά καλή στο σημείο ασυνέχειας.

Με βάση το ανάπτυγμα Fourier της συνάρτησης  $F(t)$  αναπτύχθηκε το μοντέλο, στο οποίο υπολογίζονται προσεγγιστικά οι λύσεις του πεδίου ροής για τη χρονική στιγμή που επιλύονται οι συζυγείς εξισώσεις. Η συμβολή του στην εφαρμογή της μη-μόνιμης συνεχούς συζυγούς μεθόδου είναι ότι επιτυγχάνεται οικονομία στην μνήμη του υπολογιστή αφού δεν χρειάζεται να αποθηκευτούν οι λύσεις του ευθέως προβλήματος, ωστόσο το τελευταίο επιλύεται για να υπολογιστούν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier. Στο επόμενο εδάφιο θα γίνει η μαθηματική διατύπωση για τον υπολογισμό των συντελεστών Fourier.

## 4.2 Μαθηματική διατύπωση για την αριθμητική επίλυση

Η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης του πεδίου ροής  $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{A} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{q}$ , εξαρτάται από το χρόνο και το χώρο,  $\vec{U}(t, x)$ . Για λόγους συντομίας στη γραφή της μαθηματικής διατύπωσης, το διάνυσμα της λύσης της διαφορικής εξίσωσης θα γράφεται ' $\vec{U}(t)$ ' όπου ένα στοιχείο του θα περιλαμβάνει όλες τις τιμές των συντηρητικών μεταβλητών για όλους τους χωρικούς κόμβους, τη χρονική στιγμή 't'. Εφόσον η χρονική απόκριση της λύσης  $\vec{U}(t)$  είναι περιοδική ή τουλάχιστον έτσι αυτή αναπαράγεται, τότε μπορεί να εκφραστεί με τους κατάλληλους συντελεστές ως ένα πεπερασμένο άθροισμα τριγωνομετρικών όρων.

$$\vec{U}(t) = \vec{U}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \vec{U}_{an} \cos(\omega n t) + \vec{U}_{bn} \sin(\omega n t) \quad (4.2.1)$$

Όπου  $\vec{U}_0, \vec{U}_{an}, \vec{U}_{bn}$  οι άγνωστοι συντελεστές της σειράς Fourier και  $N_H$  αριθμός των συχνοτήτων του πεδίου που γίνεται η απεικόνιση της λύσης από το πεδίο του χρόνου. Ισχύουν οι σχέσεις

$$\cos(\omega n t) = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} \quad (4.2.2)$$

$$\sin(\omega n t) = j \frac{e^{-jn\omega t} - e^{jn\omega t}}{2} \quad (4.2.3)$$

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές σχέσεις 4.2.2-3 η 4.2.1 γράφεται ως εξής:

$$\vec{U}(t) = \vec{U}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \vec{U}_{an} \left( \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} \right) + \vec{U}_{bn} \left( j \frac{e^{-jn\omega t} - e^{jn\omega t}}{2} \right) \quad (4.2.4)$$



όπου  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  και  $T$  η περίοδος του φαινομένου. Εκτενέστερα η 4.2.4 γράφεται ως:

$$\begin{aligned}\vec{U}(t) &= \vec{U}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \frac{\check{U}_{an} e^{jn\omega t}}{2} + \frac{\check{U}_{an} e^{-jn\omega t}}{2} + \frac{j\check{U}_{bn} e^{-jn\omega t}}{2} - \frac{j\check{U}_{bn} e^{jn\omega t}}{2} \\ \vec{U}(t) &= \vec{U}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} e^{jn\omega t} \left( \frac{\check{U}_{an} - j\check{U}_{bn}}{2} \right) + e^{-jn\omega t} \left( \frac{\check{U}_{an} + j\check{U}_{bn}}{2} \right) \\ \vec{U}(t) &= \vec{U}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} e^{jn\omega t} \check{U}_n + e^{-jn\omega t} \check{U}_{-n}\end{aligned}\quad (4.2.5)$$

Όπου:

$$\check{U}_n = \frac{\check{U}_{an} - j\check{U}_{bn}}{2} \quad \check{U}_{-n} = \frac{\check{U}_{an} + j\check{U}_{bn}}{2} \quad \check{U}_0 = \vec{U}_0 \quad (4.2.6)$$

Πραγματοποιείται χρονική διακριτοποίηση της λύσης  $\vec{U}(t)$  σε  $N_T = 2N_H + 1$  ισαπέχουσες χρονικές στιγμές μέσα στην περίοδο, με βήμα  $\Delta t = \frac{T}{N_T}$ .

Συγκεκριμένα:

$$\vec{U}(t) = \begin{bmatrix} \vec{U}(t=0) \\ \vec{U}(t=\Delta t) \\ \vec{U}(t=2\Delta t) \\ \vec{U}(t=3\Delta t) \\ \vdots \\ \vec{U}(t=(N_T-1)\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{U}_0 \\ \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{U}_3 \\ \vdots \\ \vec{U}_{N_T-1} \end{bmatrix} \quad (4.2.7)$$

Οπότε αναπτύσσεται το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{U}_0 = \tilde{U}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \tilde{U}_n + \tilde{U}_{-n} \\ \vec{U}_1 = \tilde{U}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} e^{jn\omega\Delta t} \tilde{U}_n + e^{-jn\omega\Delta t} \tilde{U}_{-n} \\ \vec{U}_2 = \tilde{U}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} e^{jn\omega 2\Delta t} \tilde{U}_n + e^{-jn\omega 2\Delta t} \tilde{U}_{-n} \\ \vec{U}_3 = \tilde{U}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} e^{jn\omega 3\Delta t} \tilde{U}_n + e^{-jn\omega 3\Delta t} \tilde{U}_{-n} \\ \vdots \\ \vec{U}_{N_T-1} = \tilde{U}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} e^{jn\omega(N_T-1)\Delta t} \tilde{U}_n + e^{-jn\omega(N_T-1)\Delta t} \tilde{U}_{-n} \end{array} \right.$$

(4.2.8)

Θέτοντας,  $\varphi = e^{j\omega\Delta t}$ , το σύστημα 4.2.8 γίνεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{U}_0 = \tilde{U}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \tilde{U}_n + \tilde{U}_{-n} \\ \vec{U}_1 = \tilde{U}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \varphi^n \tilde{U}_n + \varphi^{-n} \tilde{U}_{-n} \\ \vec{U}_2 = \tilde{U}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \varphi^{2n} \tilde{U}_n + \varphi^{-2n} \tilde{U}_{-n} \\ \vec{U}_3 = \tilde{U}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \varphi^{3n} \tilde{U}_n + \varphi^{-3n} \tilde{U}_{-n} \\ \vdots \\ \vec{U}_{N_T-1} = \tilde{U}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \varphi^{n(N_T-1)} \tilde{U}_n + \varphi^{-n(N_T-1)} \tilde{U}_{-n} \end{array} \right.$$

(4.2.9)

Επίσης αναπτύσσοντας το άθροισμα, γράφοντας πιο αναλυτικά τους όρους εντός του αθροίσματος, το σύστημα εξισώσεων 4.2.9 διατυπώνεται ως:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{U}_0 = \tilde{U}_0 + \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 \cdots \tilde{U}_{N_H} + \tilde{U}_{-N_H} \cdots + \tilde{U}_{-1} + \tilde{U}_{-2} \\ \vec{U}_1 = \tilde{U}_0 + \varphi^1 \tilde{U}_1 + \varphi^2 \tilde{U}_2 \cdots \varphi^{N_H} \tilde{U}_{N_H} + \varphi^{-N_H} \tilde{U}_{-N_H} \cdots \varphi^{-2} \tilde{U}_{-2} + \varphi^{-1} \tilde{U}_{-1} \\ \vec{U}_2 = \tilde{U}_0 + \varphi^2 \tilde{U}_1 + \varphi^4 \tilde{U}_2 \cdots \varphi^{2N_H} \tilde{U}_{N_H} + \varphi^{-2N_H} \tilde{U}_{-N_H} \cdots \varphi^{-4} \tilde{U}_{-2} + \varphi^{-2} \tilde{U}_{-1} \\ \vec{U}_3 = \tilde{U}_0 + \varphi^3 \tilde{U}_1 + \varphi^6 \tilde{U}_2 \cdots \varphi^{3N_H} \tilde{U}_{N_H} + \varphi^{-3N_H} \tilde{U}_{-N_H} \cdots \varphi^{-6} \tilde{U}_{-2} + \varphi^{-3} \tilde{U}_{-1} \\ \vdots \\ \vec{U}_{N_T-1} = \tilde{U}_0 + \varphi^{(N_T-1)} \tilde{U}_1 + \varphi^{2(N_T-1)} \tilde{U}_2 \cdots \varphi^{(N_T-1)N_H} \tilde{U}_{N_H} + \varphi^{-(N_T-1)N_H} \tilde{U}_{-N_H} \\ \cdots + \varphi^{-2(N_T-1)} \tilde{U}_{-2} + \varphi^{-(N_T-1)} \tilde{U}_{-1} \end{array} \right. \quad (4.2.10)$$

Η μητρική γραφή του συστήματος 4.2.10 αναπτύσσεται εκτενέστερα ως:

$$M\tilde{U} = \vec{U} \quad (4.2.11)$$

Όπου:

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \varphi^1 & \varphi^2 & \cdots & \varphi^{N_H} & \varphi^{-N_H} & \cdots & \varphi^{-2} & \varphi^{-1} \\ 1 & \varphi^2 & \varphi^4 & \cdots & \varphi^{2N_H} & \varphi^{-2N_H} & \cdots & \varphi^{-4} & \varphi^{-2} \\ 1 & \varphi^3 & \varphi^6 & \cdots & \varphi^{3N_H} & \varphi^{-3N_H} & \cdots & \varphi^{-6} & \varphi^{-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \varphi^{(N_T-1)} & \varphi^{2(N_T-1)} & \cdots & \varphi^{(N_T-1)N_H} & \varphi^{-(N_T-1)N_H} & \cdots & \varphi^{-2(N_T-1)} & \varphi^{-(N_T-1)} \end{array} \right] = M$$

$$\tilde{U} = [\tilde{U}_0 \quad \tilde{U}_1 \quad \tilde{U}_2 \quad \cdots \quad \tilde{U}_{N_H} \quad \tilde{U}_{-N_H} \quad \cdots \quad \tilde{U}_{-2} \quad \tilde{U}_{-1}]^T$$

$$\vec{U} = [\vec{U}_0 \quad \vec{U}_1 \quad \vec{U}_2 \quad \vec{U}_3 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \vec{U}_{N_T-2} \quad \vec{U}_{N_T-1}]^T$$

Όπως παρατηρείτε στο σύστημα 4.2.11, τα στοιχεία των πινάκων στο αριστερό μέλος του είναι μιγαδικοί αριθμοί. Ωστόσο δεν λύνεται το σύστημα 4.2.11, αντί αυτού γίνεται προσπάθεια εύρεσης του αντίστροφου του μητρώου  $M$ , ώστε να διατυπωθεί απευθείας η λύση του συστήματος. Αυτό θα γίνει με χρήση των ακόλουθων ιδιοτήτων και θεωρημάτων των μιγαδικών αριθμών που διατυπώνονται στη συνέχεια.

Μια διαφορετική γραφή του μιγαδικού αριθμού  $\varphi$ :

$$\varphi = \alpha + jb \quad (4.2.12)$$

Ως συζυγής του μιγαδικού αριθμού  $\varphi$ :

$$\bar{\varphi} = \alpha - jb \quad (4.2.13)$$

Εφόσον:

$$\varphi = e^{j\frac{2\pi\Delta t}{T}} = \cos\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right) \quad (4.2.14)$$

Τότε:

$$\bar{\varphi} = \cos\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right) - j\sin\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right) \quad (4.2.15)$$

Ο αντίστροφος του μιγαδικού αντίστροφος του μιγαδικού αριθμού  $\varphi$  αναπτύσσεται ως:

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right)}$$

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi \bar{\varphi}} = \frac{\cos\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right) - j\sin\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right)}{\underbrace{\cos^2\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right)}_{=1}}$$

όποτε

$$\varphi^{-1} = \bar{\varphi} \quad (4.2.16)$$

Η 4.2.16 εύκολα γενικεύεται για όλες τις χρονικές στιγμές και για όλες τις συχνότητες

$$\varphi^{-\lambda} = \bar{\varphi}^{\lambda}, \quad \varphi^{\lambda} = \bar{\varphi}^{-\lambda} \quad (4.2.16)$$

**Θεώρημα 1:** Όπως στους πραγματικούς αριθμούς, έτσι και στους μιγαδικούς ισχύει η ταυτότητα (19) (20):

$$1 + \varphi^1 + \varphi^2 + \varphi^3 + \dots + \varphi^{2N_H} = \frac{1 - \varphi^{2N_H+1}}{1 - \varphi} \quad (4.2.17)$$

Όμως επειδή  $\varphi^{2N_H+1} = e^{j\frac{2\pi(2N_H+1)\Delta t}{T}} = e^{j2\pi} = 1$ , τότε η ταυτότητα στην 4.2.17 γράφεται:

$$1 + \varphi^1 + \varphi^2 + \varphi^3 + \dots + \varphi^{2N_H} = 0 \quad (4.2.18)$$

**Θεώρημα 2:** Επίσης, αν  $r$  και  $s$  είναι δύο ακέραιοι αριθμοί, τότε ισχύει [13] :

$$\sum_{k=0}^{2N_H} \varphi^{(kr-ks)} = \begin{cases} 0 & r \neq s \\ 2N_H + 1 & r = s \end{cases} \quad (4.2.19)$$

Διατυπώνεται ο συζυγής μιγαδικός πίνακας του  $M$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{\varphi^1} & \frac{1}{\varphi^2} & \dots & \frac{1}{\varphi^{N_H}} & \frac{1}{\varphi^{-N_H}} & \dots & \frac{1}{\varphi^{-2}} & \frac{1}{\varphi^{-1}} \\ 1 & \frac{1}{\varphi^2} & \frac{1}{\varphi^4} & \dots & \frac{1}{\varphi^{2N_H}} & \frac{1}{\varphi^{-2N_H}} & \dots & \frac{1}{\varphi^{-4}} & \frac{1}{\varphi^{-2}} \\ 1 & \frac{1}{\varphi^3} & \frac{1}{\varphi^6} & \dots & \frac{1}{\varphi^{3N_H}} & \frac{1}{\varphi^{-3N_H}} & \dots & \frac{1}{\varphi^{-6}} & \frac{1}{\varphi^{-3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{\varphi^{(N_T-1)}} & \frac{1}{\varphi^{2(N_T-1)}} & \dots & \frac{1}{\varphi^{(N_T-1)N_H}} & \frac{1}{\varphi^{-(N_T-1)N_H}} & \dots & \frac{1}{\varphi^{-2(N_T-1)}} & \frac{1}{\varphi^{-(N_T-1)}} \end{bmatrix} = \bar{M}$$

Σύμφωνα με 4.2.16 ο πίνακας  $\bar{M}$  γράφεται ως:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \varphi^{-1} & \varphi^{-2} & \dots & \varphi^{-N_H} & \varphi^{N_H} & \dots & \varphi^2 & \varphi^1 \\ 1 & \varphi^{-2} & \varphi^{-4} & \dots & \varphi^{-2N_H} & \varphi^{2N_H} & \dots & \varphi^4 & \varphi^2 \\ 1 & \varphi^{-3} & \varphi^{-6} & \dots & \varphi^{-3N_H} & \varphi^{3N_H} & \dots & \varphi^6 & \varphi^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & \varphi^{-(N_T-1)} & \varphi^{-2(N_T-1)} & \dots & \varphi^{-(N_T-1)N_H} & \varphi^{(N_T-1)N_H} & \dots & \varphi^{2(N_T-1)} & \varphi^{(N_T-1)} \end{bmatrix} = \bar{M}$$

Κάνοντας χρήση των σχέσεων 4.2.18-19, το γινόμενο των πινάκων  $M$  και  $\bar{M}$  διαμορφώνεται ως εξής:

$$M\bar{M} = (2N_H + 1)I \quad (4.2.20)$$

Όπου  $I$  ο μοναδιαίος πίνακας, ο οποίος αντικαθιστάται στην 4.2.20 ως  $MM^{-1}$ .

$$M\bar{M} = (2N_H + 1)MM^{-1} \quad (4.2.21)$$

Με διαγραφή του  $M$  δίνεται η έκφραση του  $M^{-1}$ :

$$M^{-1} = \frac{1}{(2N_H + 1)}\bar{M} \quad (4.2.22)$$

Οπότε το σύστημα εξισώσεων  $M\tilde{U} = \vec{U}$  μετατρέπεται ως:

$$\tilde{U} = \frac{1}{(2N_H + 1)}\bar{M}\vec{U} \quad (4.2.23)$$

Και από το σύστημα στην 4.2.23 υπολογίζονται στοιχεία του πίνακα  $\tilde{U}$  και κατά επέκταση χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 4.2.6 υπολογίζονται οι συντελεστές τις σειράς Fourier  $\tilde{U}_0, \tilde{U}_{an}, \tilde{U}_{bn}$ .

### 4.3 Η εκπαίδευση και η αριθμητική επίλυση του προσεγγιστικού μοντέλου Fourier

Ο υπολογισμός των συντελεστών Fourier γίνεται χρησιμοποιώντας τα στιγμιότυπα (δηλαδή τις λύσεις των εξισώσεων) του πεδίου ροής. Οπότε, για να έχει νόημα η εφαρμογή του μοντέλου στην οικονομική εφαρμογή της συζύγου μεθόδου για χρονικά μη-μόνιμα πεδία ροής, πρέπει να είναι εφικτή η on-line εκπαίδευση του ώστε να μην χρειάζεται να έχει αποθηκευτεί το σύνολο των στιγμιότυπων. Δηλαδή, τη στιγμή που υπολογίζεται ένα στιγμιότυπο του πεδίου ροής, ταυτοχρόνως να χρησιμοποιείται για των υπολογισμό των συντελεστών Fourier και, αμέσως μετά, να διαγράφεται από τη μνήμη.

Για να επεξηγηθεί η εκπαίδευση και η αριθμητική επίλυση του προσεγγιστικού μοντέλου Fourier θα διατυπωθεί ένα παράδειγμα με συγκεκριμένη χρονική διακριτοποίηση της λύσης  $\vec{U}(t)$  για 5 χρονικές στιγμές ( $N_T = 5, N_H = 2$ ), όπου το σύστημα της σχέσης 4.2.23 γράφεται ως εξής :

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_0 \\ \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_{-2} \\ \tilde{U}_{-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varphi^{-1} & \varphi^{-2} & \varphi^2 & \varphi^1 \\ 1 & \varphi^{-2} & \varphi^{-4} & \varphi^4 & \varphi^2 \\ 1 & \varphi^{-3} & \varphi^{-6} & \varphi^6 & \varphi^3 \\ 1 & \varphi^{-4} & \varphi^{-8} & \varphi^8 & \varphi^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{U}_3 \\ \vec{U}_4 \\ \vec{U}_5 \end{bmatrix} \quad (4.2.24)$$

Κάνοντας τις πράξεις στο δεξί μέλος:

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_0 \\ \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_{-2} \\ \tilde{U}_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\vec{U}_1}{5} + \frac{\vec{U}_2}{5} + \frac{\vec{U}_3}{5} + \frac{\vec{U}_4}{5} + \frac{\vec{U}_5}{5} \\ \frac{\vec{U}_1}{5} + \frac{\varphi^{-1}\vec{U}_2}{5} + \frac{\varphi^{-2}\vec{U}_3}{5} + \frac{\varphi^2\vec{U}_4}{5} + \frac{\varphi^{-1}\vec{U}_5}{5} \\ \frac{\vec{U}_1}{5} + \frac{\varphi^{-2}\vec{U}_2}{5} + \frac{\varphi^{-4}\vec{U}_3}{5} + \frac{\varphi^4\vec{U}_4}{5} + \frac{\varphi^2\vec{U}_5}{5} \\ \frac{\vec{U}_1}{5} + \frac{\varphi^{-3}\vec{U}_2}{5} + \frac{\varphi^{-6}\vec{U}_3}{5} + \frac{\varphi^6\vec{U}_4}{5} + \frac{\varphi^3\vec{U}_5}{5} \\ \frac{\vec{U}_1}{5} + \frac{\varphi^{-4}\vec{U}_2}{5} + \frac{\varphi^{-8}\vec{U}_3}{5} + \frac{\varphi^8\vec{U}_4}{5} + \frac{\varphi^4\vec{U}_5}{5} \end{bmatrix} \quad (4.2.25)$$

Παρατηρείται ότι οι συντελεστές  $\tilde{U}$  προκύπτουν από την άθροιση όρων, που ο καθένας όρος από αυτούς εξαρτάται μόνο από ένα στιγμιότυπο του πεδίου ροής. Οπότε είναι εφικτός ο υπολογισμός των συντελεστών  $\tilde{U}$  χωρίς την αποθήκευση όλων των στιγμιότυπων, δηλαδή είναι εφικτή η εκπαίδευση του μοντέλου. Για κάθε χρονική στιγμή που ο επιλύτης του ευθέως προβλήματος υπολογίζει την λύση του πεδίου ροής, υπολογίζονται οι όροι που αντιστοιχούν στον κάθε συντελεστή  $\tilde{U}$  πολλαπλασιάζοντας τις τιμές των μεταβλητών του πεδίου ροής με το μιγαδικό αριθμό  $\varphi$  ο οποίος θα είναι υψωμένος στην αντίστοιχη δύναμη και στην συνέχεια θα διαιρούνται με τον αριθμό  $N_T = 2N_H + 1$ . Μετά οι τιμές των όρων θα αθροίζονται με τις τιμές των συντελεστών  $\tilde{U}$ . Στη συνέχεια, η λύση του ευθέως προβλήματος για την συγκεκριμένη χρονική στιγμή, διαγράφεται.

Για τον υπολογισμό των άγνωστων συντελεστών Fourier  $\tilde{U}_{an}$ ,  $\tilde{U}_{bn}$  και  $\tilde{U}_0$  χρησιμοποιούνται οι σχέσεις 4.2.6.

$$\tilde{U}_n = \frac{\tilde{U}_{an} - j\tilde{U}_{bn}}{2} \quad \tilde{U}_{-n} = \frac{\tilde{U}_{an} + j\tilde{U}_{bn}}{2} \quad \tilde{U}_0 = \tilde{U}_0$$

Όπου οι πρώτες 2 είναι μιγαδικές εξισώσεις, χρησιμοποιώντας μόνο μία λ.χ. την 1<sup>η</sup> από αυτές υπολογίζεται το ζεύγος  $\tilde{U}_{an}$ ,  $\tilde{U}_{bn}$  για κάθε συχνότητα, αφού εξισώνονται το πραγματικό και φανταστικό μέρος του δεξιού μέλους της με το πραγματικό και φανταστικό μέρος του συντελεστή  $\tilde{U}_n$ . Γίνεται αντιληπτό ότι υπολογισμός των  $\tilde{U}_{-n}$  είναι περιττός, οπότε δεν πραγματοποιείται. Το σύστημα εξισώσεων 4.2.24 του παραδείγματος μετατρέπεται:

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_0 \\ \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varphi^{-1} & \varphi^{-2} & \varphi^2 & \varphi^1 \\ 1 & \varphi^{-2} & \varphi^{-4} & \varphi^4 & \varphi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{U}_3 \\ \vec{U}_4 \\ \vec{U}_5 \end{bmatrix} \quad (4.2.26)$$

Στο όπιο σύστημα εξισώσεων υπολογίζονται οι  $\tilde{U}_0, \tilde{U}_1$  και  $\tilde{U}_2$ , χρησιμοποιώντας την 1<sup>η</sup> εξίσωση της 4.2.6 υπολογίζονται οι συντελεστές Fourier ( $\tilde{U}_0, \tilde{U}_{a1}, \tilde{U}_{b1}, \tilde{U}_{a2}, \tilde{U}_{b2}$ ). Έτσι η λύση του χρονικά μεταβαλλόμενου πεδίου ροής διατυπώνεται ως εξής:

$$\vec{U}(t) = \tilde{U}_0 + \tilde{U}_{a1} \cos(\omega t) + \tilde{U}_{b1} \sin(\omega t) + \tilde{U}_{a2} \cos(2\omega t) + \tilde{U}_{b2} \sin(2\omega t)$$

Σύμφωνα με την χρονική διακριτοποίηση που επιλέχθηκε, η παραπάνω διατύπωση δίνει τον ακριβή υπολογισμό των λύσεων του πεδίου ροής για κάθε χρονική στιγμή. Όμως η συγκεκριμένη διατύπωση δεν είναι οικονομική και δεν έχει νόημα να γίνει, για τον λόγο ότι χρειάζεται να είναι αποθηκευμένες οι τιμές των συντελεστών ( $\tilde{U}_0, \tilde{U}_{a1}, \tilde{U}_{b1}, \tilde{U}_{a2}, \tilde{U}_{b2}$ ). Ο χώρος που απαιτείται στην μνήμη του υπολογιστή είναι ακριβώς ίδιος με το να ήταν αποθηκευμένες όλες οι λύσεις του πεδίου ροής ( $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3, \vec{U}_4, \vec{U}_5$ ). Αντί αυτού, για να επιτευχθεί εξοικονόμηση μνήμης, προτιμάται μια προσεγγιστική διατύπωση της λύσης του χρονικά μεταβαλλόμενου πεδίου ροής, στην οποία ο χρήστης επιλέγει τον αριθμό των συχνοτήτων  $N_H$ , δηλαδή έμμεσης επιλέγει τον αριθμό των συντελεστών Fourier  $\tilde{U}$  που θα πρέπει να έχουν αποθηκευτεί για τον προσεγγιστικό υπολογισμό των λύσεων του πεδίου ροής για κάθε χρονική στιγμή. Έτσι στο παράδειγμα με την επιλογή  $N_H = 1$  υπολογίζονται και αποθηκεύονται μόνο 3 συντελεστές, η προσέγγιση του χρονικά μεταβαλλόμενου πεδίου ροής διατυπώνεται ως εξής:

$$\vec{U}(t) \cong \tilde{U}_0 + \tilde{U}_{a1} \cos(\omega t) + \tilde{U}_{b1} \sin(\omega t)$$

#### 4.4 Αλγόριθμος αντίστροφου σχεδιασμού

Στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο έχει γίνει περιγραφή της γενικής μορφής του αλγόριθμου του αντίστροφου σχεδιασμού ψευδο-μονοδιάστατου αγωγού όμως για την εφαρμογή του προσεγγιστικού μοντέλου Fourier χρειάζεται τροποποίηση του αλγορίθμου ως εξής:

Βήμα 1<sup>ο</sup>: Δίνεται η αρχική τιμή στον μετρητή των κύκλων  $n=0$  βελτιστοποίησης και η αρχική λύση, δηλαδή ένα σύνολο αρχικών τιμών των  $N$  μεταβλητών



σχεδιασμού  $\vec{b}^n$ , το  $\vec{b}^{n=0}$ , όπου  $n$  ο δείκτης του κύκλου βελτιστοποίησης. Επίσης, δίνεται ο αριθμός των συχνοτήτων  $N_H$  που θα χρησιμοποιηθούν για τον προσεγγιστικό υπολογισμό των στιγμιότυπων του πεδίου ροής.

Βήμα 2<sup>ο</sup>: Χρησιμοποιείται το πολυώνυμο Bezier-Bernstein, ως συνάρτηση παρεμβολής, για να υπολογιστεί η κατανομή της διατομής  $S(x)^n$  του αγωγού για το τρέχον διάνυσμα  $\vec{b}^n$ .

Βήμα 3<sup>ο</sup>: Επιλύεται το ευθύ πρόβλημα για την τρέχουσα κατανομή διατομής του αγωγού  $S(x)^n$ , για κάθε χρονική στιγμή που υπολογίζεται το πεδίο ροής δομούνται οι συντελεστές Fourier, στη συνέχεια η λύση του πεδίου ροής δεν διαγράφεται. Στο τέλος έχουν υπολογιστεί και αποθηκευτεί στην μνήμη του υπολογιστή οι συντελεστές Fourier.

Βήμα 4<sup>ο</sup>: Επιλύεται το συζυγές πρόβλημα, για όλες τις χρονικές στιγμές. Για κάθε χρονική στιγμή υπολογίζεται προσεγγιστικά το στιγμιότυπο του πεδίου ροής χρησιμοποιώντας την έκφραση της διατύπωσης Fourier  $\vec{U}(t) = \vec{U}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \vec{U}_{an} \cos(\omega nt) + \vec{U}_{bn} \sin(\omega nt)$ . Στη συνέχεια υπολογίζεται η πρώτη παράγωγος της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\left(\frac{\delta F}{\delta \vec{b}^n}\right)^n$ .

Βήμα 6<sup>ο</sup>: Χρησιμοποιώντας την απότομη κάθοδο ως αιτιοκρατική μέθοδο, διορθώνονται οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού από τη σχέση:

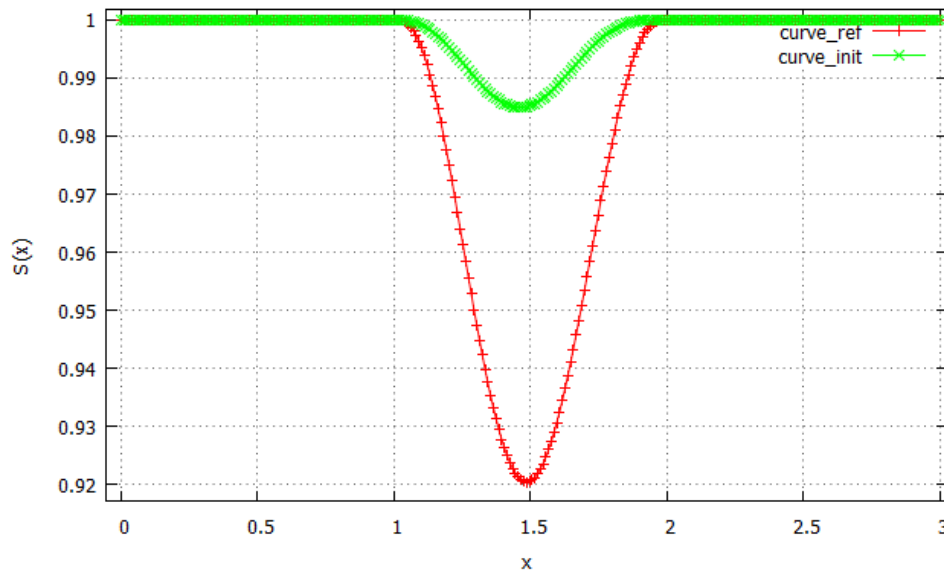
$$\vec{b}^{n+1} = \vec{b}^n - \eta \left(\frac{\delta F}{\delta \vec{b}^n}\right)^n \quad 2.3.1$$

Βήμα 7<sup>ο</sup>: Ένας νέος κύκλος ξεκινά από το βήμα 2, θέτοντας  $n=n+1$ .

## 5 Αποτελέσματα

Η συγκριτική αξιολόγηση των μεθόδων, checkpointing και προσεγγιστικού μοντέλου Fourier, για τη συμβολή στην οικονομική εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου βελτιστοποίησης, έγινε στην εφαρμογή τους σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις ως προς την χρονική μεταβολή του πεδίου ροής. Οι τρεις διαφορετικές περιπτώσεις είναι η περιοδικά συνεχής, η περιοδικά ασυνεχής και η μη-περιοδική χρονική μεταβολή του πεδίου ροής. Σε κάθε περίπτωση, η χρονική απόκριση του πεδίου ροής δίνεται από τη συνάρτηση της μεταβαλλόμενης πίεσης ως προς τον χρόνο στην έξοδο του αγωγού ( $p_i^n = g(t)$ ). Επίσης οι εξεταζόμενες μέθοδοι συγκρίνονται με την επιλογή να αποθηκεύονται όλα τα στιγμιότυπα του πεδίου ροής (full storage), η οποία θα είναι σημείο αναφοράς για την συγκριτική αξιολόγηση.

Όλες οι εφαρμογές αφορούσαν τον αντίστροφο σχεδιασμό του ίδιου μονοδιάστατου αγωγού. Όπως έχει προαναφερθεί, στόχος στο συγκεκριμένο πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι συγκεκριμένη κατανομή πίεσης σε συνάρτηση του χρόνου και κατά το μήκος του μονοδιάστατου αγωγού, η οποία προκύπτει από συγκεκριμένη κατανομή 'αναφοράς' της διατομής κατά μήκος του αγωγού. Έτσι σε όλες τις εφαρμογές των μεθόδων τέθηκε η ίδια κατανομή αναφοράς της διατομής του αγωγού καθώς και η ίδια αρχικοποίηση της στο πρόβλημα του αντίστροφου σχεδιασμού (σχήμα 5.1).



**Σχήμα 5.1:** Η κατανομή αναφοράς (curve\_ref) και η αρχική κατανομή (curve\_initial) της διατομής κατά το μήκος του αγωγού.

Τα κριτήρια της συγκριτικής αξιολόγησης των μεθόδων για κάθε περίπτωση που τέθηκαν είναι ο αποθηκευτικός χώρος στη μνήμη του υπολογιστή, ο χρόνος

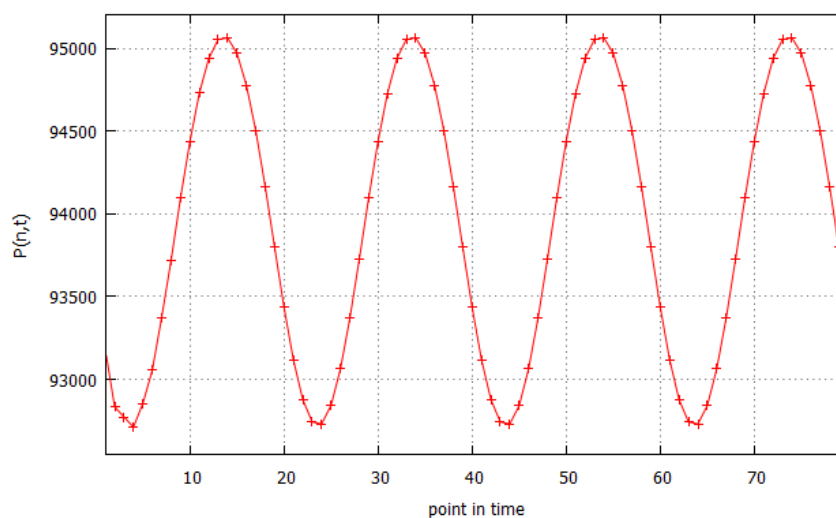
επίλυσης του προβλήματος και η ακρίβεια του αποτελέσματος. Μονάδα μέτρησης του αποθηκευτικού χώρου θεωρήθηκε η μνήμη που χρειάζεται για την αποθήκευση ενός στιγμιότυπου του πεδίου ροής. Ως προς τον χρόνο επίλυσης του προβλήματος μονάδα μέτρησης θεωρείται ο επαναυπολογισμός ενός στιγμιότυπου του πεδίου ροής, καθώς ο αριθμός των επαναυπολογισμών είναι η κύρια συνιστώσα του συνολικού χρόνου επίλυσης του προβλήματος. Για να αξιολογηθεί η ακρίβεια του αποτελέσματος παρατίθενται οι τελικές κατανομές των διατομών του αγωγού που δίνει η κάθε μέθοδος αλλά και οι τιμές της συνάρτησης στόχου  $F(\vec{U}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (p(x, t) - p_{tar}(x, t))^2 dx dt$ .

Επίσης σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εφαρμογής του προσεγγιστικού μοντέλου Fourier σε αποτελέσματα διδιάστατου προβλήματος. Το διδιάστατο πρόβλημα αναλύθηκε με κώδικα προσομοίωσης χρονικά μη-μόνιμων ροών στην Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης.

## 5.1 Περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία ροής

### 1<sup>η</sup> Περίπτωση

Σε αυτή την περίπτωση εξετάζονται οι μέθοδοι για την περιοδικά συνεχής (ημιτονοειδή) χρονική μεταβολή του πεδίου ροής. Όπου οι τιμές της πίεσης στην έξοδο για κάθε χρονική στιγμή φαίνονται στο σχήμα 5.2.



**Σχήμα 5.2:** Οι τιμές της πίεσης στην έξοδο για κάθε χρονική στιγμή

Όλο το φαινόμενο έχει διάρκεια τεσσάρων περιόδων και κάθε περίοδος διακριτοποιήθηκε σε είκοσι χρονικές στιγμές. Επιλέχθηκε η διάρκεια των τεσσάρων περιόδων για να δοθεί χρόνος στο σύστημα διαφορικών εξισώσεων του πεδίου ροής (2.1.6) και στο σύστημα εξισώσεων των συζυγών μεταβλητών (2.2.13), ώστε η απόκριση των λύσεων τους  $\vec{U}$  και  $\vec{\Psi}$  να είναι περιοδική και σε σταθερή κατάσταση, εφόσον και τα δυο συστήματα δέχονται ως είσοδο μια περιοδική συνάρτηση (21). Οπότε για τον υπολογισμό των συζυγών μεταβλητών και της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης, λαμβάνονται υπόψη μόνο τα στιγμιότυπα της τελευταίας περιόδου του πεδίου ροής και των συζυγών μεταβλητών του αντίστοιχα.

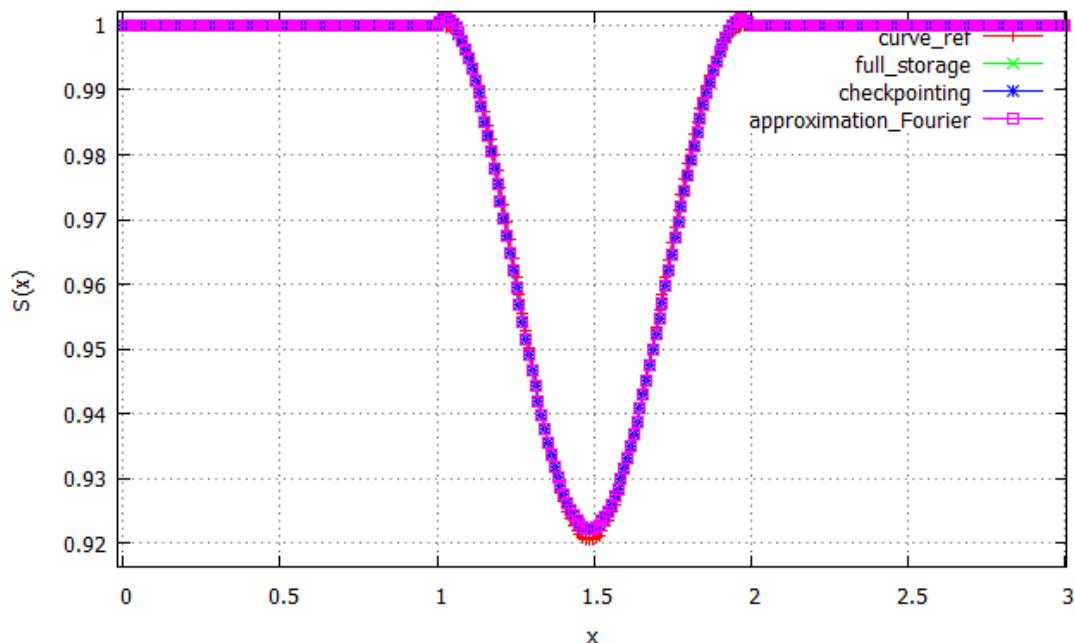
Εφόσον για τον υπολογισμό των συζυγών μεταβλητών λαμβάνονται υπόψη τα στιγμιότυπα της τελευταίας περιόδου, τότε στην μέθοδο επιλεκτικής κατανομής δεικτών μνήμης (checkpointing), ο δυναμικός αλγόριθμος τίθεται σε λειτουργία όταν η επίλυση του ευθέως προβλήματος (direct) φθάσει στην τελευταία περίοδο. Αναγκαστικά πρέπει να χρησιμοποιηθεί διπλάσια μνήμη από αυτήν που υποδεικνύεται από τον αριθμό των checkpoints για την διπλή αποθήκευση των στιγμιότυπων που επέλεξε ο αλγόριθμος. Επειδή κατά την επίλυση του συζυγούς προβλήματος στη 1<sup>η</sup> περίοδο τα στιγμιότυπα που είχαν επιλεγεί διαγράφονται και στην θέση του αποθηκεύονται άλλα και έτσι χάνεται η βέλτιστη κατανομή, ώστε αυτή μετά να επαναληφθεί στην συνέχεια. Οπότε στις εφαρμογές της μεθόδου της επιλεκτικής κατανομής δεικτών μνήμης (checkpointing) για τα περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία ροής, καθώς επιλέγηκαν πέντε δείκτες μνήμης (checkpoints) καταλήφθηκε χώρος μνήμης για δέκα στιγμιότυπα. Επίσης οι επαναυπολογισμοί στην εφαρμογή του checkpointing έφθασαν τους 100, εφόσον είναι 25 για κάθε περίοδο.

Ομοίως στη εφαρμογή του προσεγγιστικού μοντέλου Fourier υπολογίζονται οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τα στιγμιότυπα της τελευταίας περιόδου. Επίσης, στην εφαρμογή του μοντέλου επιλέγεται ο αριθμός των δύο αρμονικών ( $N_H = 2$ ) του πεδίου συχνοτήτων στο οποίο γίνεται η απεικόνιση της λύσης από το πεδίο του χρόνου. Το σύνολο των συντελεστών του αναπτύγματος Fourier που θα υπολογιστούν είναι πέντε ( $N_T = 1 + 2N_H = 5$ ) και όπως έχει προαναφερθεί ότι η αποθήκευση ενός συντελεστή Fourier ισοδυναμεί με την αποθήκευση ενός στιγμιότυπου του πεδίου ροής, άρα καταλαμβάνετε μνήμη για πέντε στιγμιότυπα.

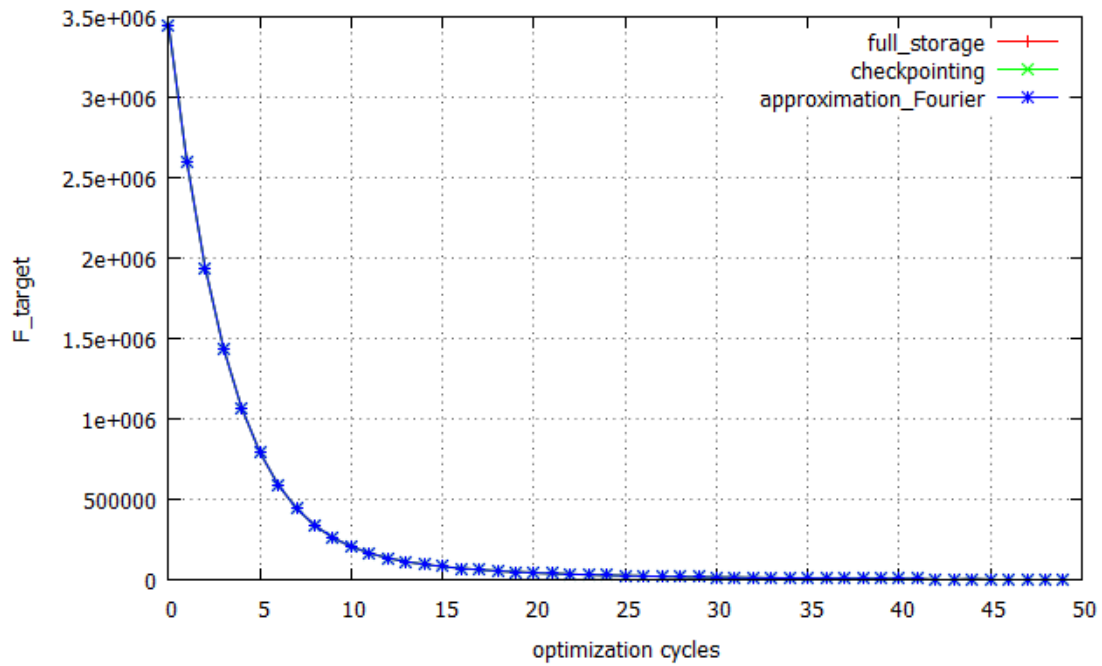
Από την εφαρμογή των μεθόδων στον αντίστροφο σχεδιασμό του μονοδιάστατου αγωγού για την περιοδικά συνεχής (ημιτονοειδής) χρονικά μεταβαλλόμενη πίεση εξόδου του αγωγού, για πενήντα κύκλους του προβλήματος βελτιστοποίησης χρησιμοποιώντας ως μέθοδο βελτιστοποίησης την απότομη κάθοδο (steepest descent method), πάρθηκαν τα ακόλουθα αποτελέσματα, που παρουσιάζονται στον πίνακα 1 και σχήματα 5.1 και 5.2.

	<u>Καταλαμβανόμενη μνήμη υπολογιστή</u> (Αποθηκευμένα στιγμιότυπα)	<u>Υπολογιστικός χρόνος</u> (Επαναυπολογισμοί στιγμιότυπων ανά κύκλο βελτιστοποίησης)	<u>Τελική τιμή συνάρτησης στόχου</u>
Πλήρης αποθήκευση	20	0	3564.47
Επιλεκτική κατανομή δεικτών μνήμης	10	100	3564.47
Προσεγγιστικό μοντέλο Fourier	5	0	3563.39

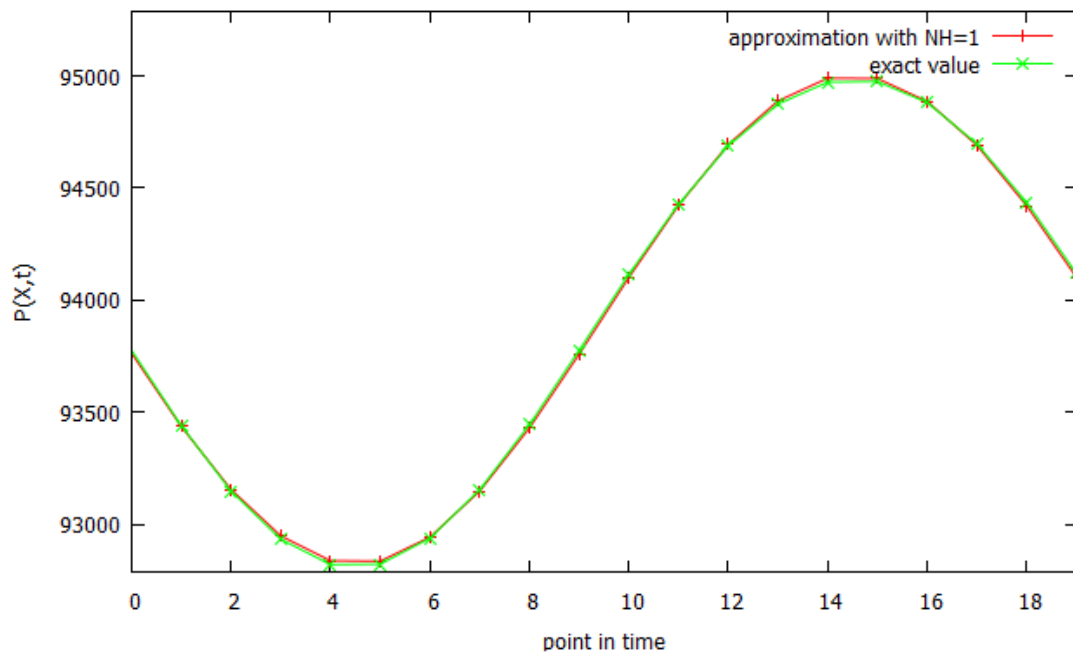
**Πίνακας 1 :** Αποτελέσματα για την περίπτωση της περιοδικά ημιτονοειδής χρονικά μεταβαλλόμενης πίεσης στην έξοδο του αγωγού, για πενήντα κύκλους του προβλήματος βελτιστοποίησης. Οριζόντια οι εξεταζόμενες μέθοδοι και κάθετα τα κριτήρια αξιολόγησης.



**Σχήμα 5.3:** Οι κατανομές της διατομής για τον μονοδιάστατο αγωγό, που δίνει η κάθε μέθοδος και η κατανομή αναφοράς του προβλήματος βελτιστοποίησης.



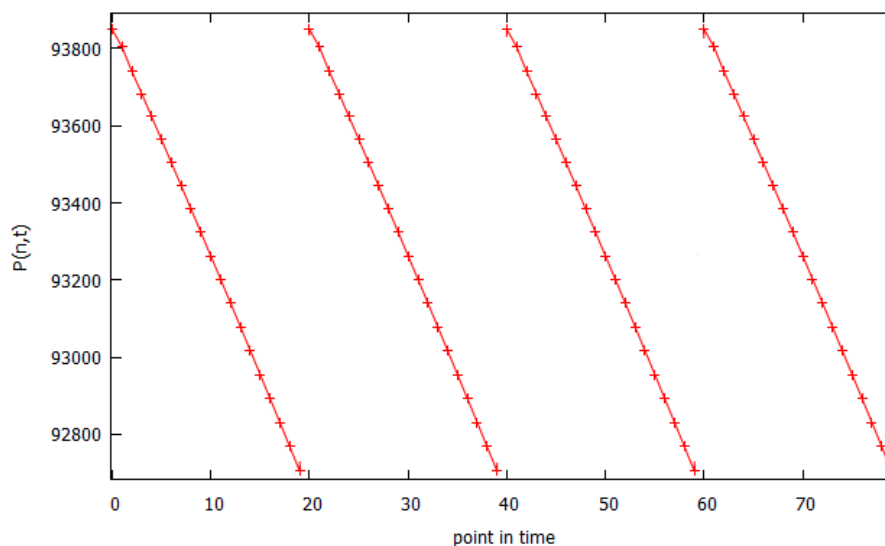
**Σχήμα 5.4:** Η τιμή της συνάρτησης κόστους σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, που δίνει η εφαρμογή κάθε μεθόδου.



**Σχήμα 5.5:** Η κατανομή στον χρόνο της πίεσης για ένα συγκεκριμένο σημείο του μονοδιάστατου αγωγού (exact value) και η προσέγγιση της για  $N_H=1$ .

## 2<sup>η</sup> Περίπτωση

Σε αυτή την περίπτωση εξετάζονται οι μέθοδοι στην περιοδικά ασυνεχή χρονική μεταβολή της πίεσης στην έξοδο του αγωγού, όπου οι τιμές τις για κάθε χρονική στιγμή φαίνονται στο σχήμα 5.6

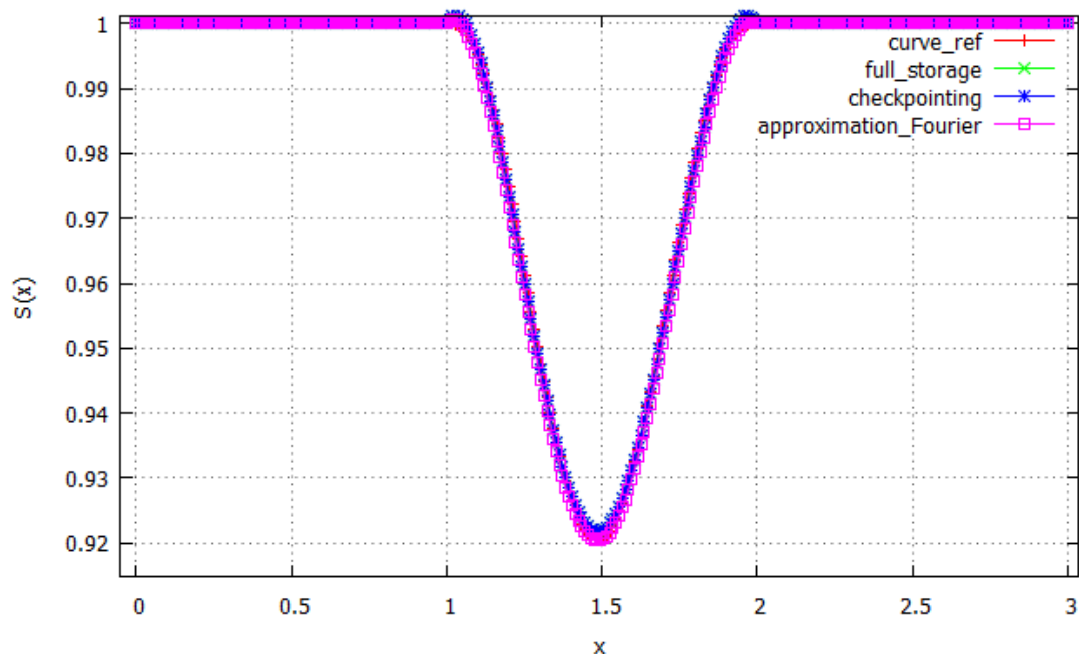


**Σχήμα 5.6:** Οι τιμές της πίεσης στην έξοδο για κάθε χρονική στιγμή

Εφόσον και σε αυτή την περίπτωση το πεδίο ροής μεταβάλλεται περιοδικά, στις εφαρμογές των μεθόδων επιλέγεται η διάρκεια των 4 περιόδων για τους ίδιους λόγους που επιλέχθηκαν στην 1<sup>η</sup> περίπτωση. Ομοίως για τον δυναμικό αλγόριθμο των checkpoints και τον υπολογισμό των συντελεστών Fourier λαμβάνεται υπόψη η τελευταία περίοδος. Επίσης κάθε περίοδος διακριτοποιήθηκε σε 20 χρονικές στιγμές, για την μέθοδο checkpointing επιλεχθήκαν 5 checkpoints και στο προσεγγιστικό μοντέλο Fourier επιλέχθηκαν δύο αρμονικές ( $N_H = 2$ ) του πεδίου συχνότητων. Τα αποτελέσματα, για πενήντα κύκλους και χρησιμοποιώντας την απότομη κάθοδο ως μέθοδο βελτιστοποίησης, φαίνονται στα σχήματα 5.7-5.8 και στον πίνακα 2.

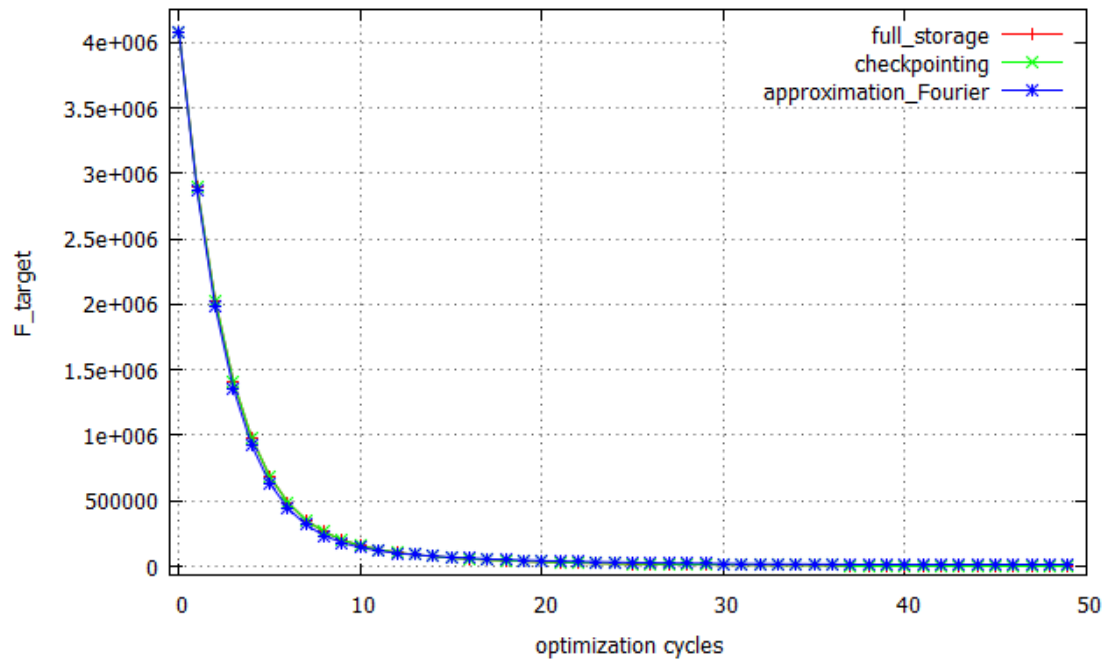
	Καταλαμβανόμενη μνήμη υπολογιστή (Αποθηκευμένα στιγμιότυπα)	Υπολογιστικός χρόνος (Επαναυπολογισμοί στιγμιότυπων ανά κύκλο βελτιστοποίησης)	Τελική τιμή συνάρτησης στόχου
Πλήρης αποθήκευση	20	0	2726.42
Επιλεκτική κατανομή δεικτών μνήμης	10	100	2726.42
Προσεγγιστικό μοντέλο Fourier	5	0	9173.43

**Πίνακας 2:** Αποτελέσματα για την περίπτωση της περιοδικά ασυνεχούς χρονικά μεταβαλλόμενης πίεσης στην έξοδο του αγωγού, για πενήντα κύκλους του προβλήματος βελτιστοποίησης. Οριζόντια οι εξεταζόμενες μέθοδοι και κάθετα τα κριτήρια αξιολόγησης.

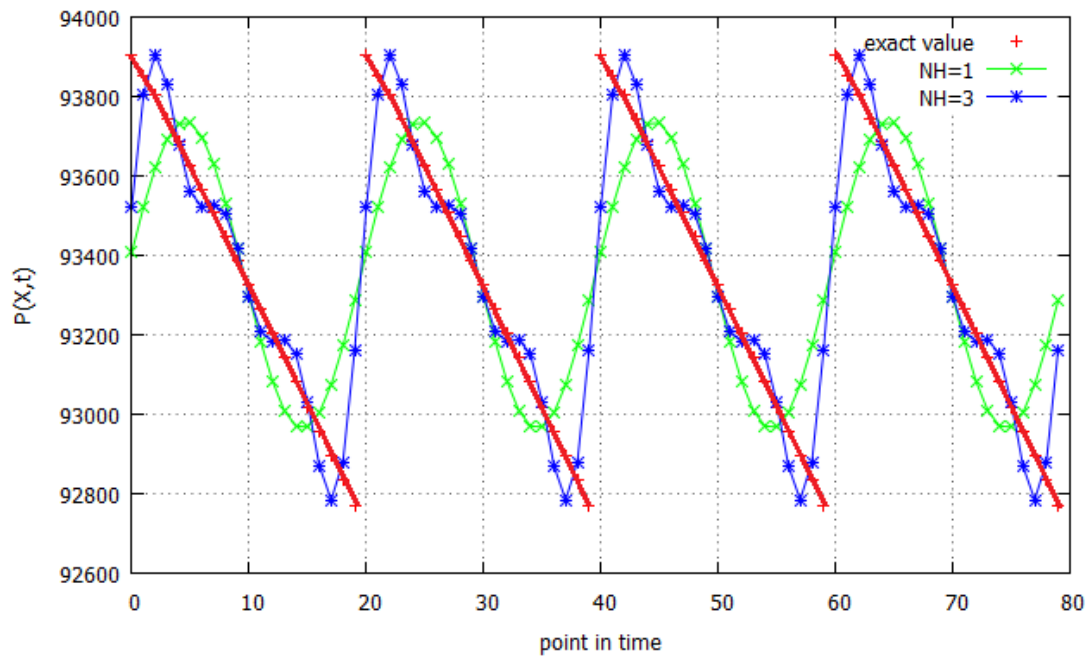


**Σχήμα 5.7:** Οι κατανομές της διατομής για τον μονοδιάστατο αγωγό, που δίνει η κάθε μέθοδος και η κατανομή στόχος του προβλήματος βελτιστοποίησης.

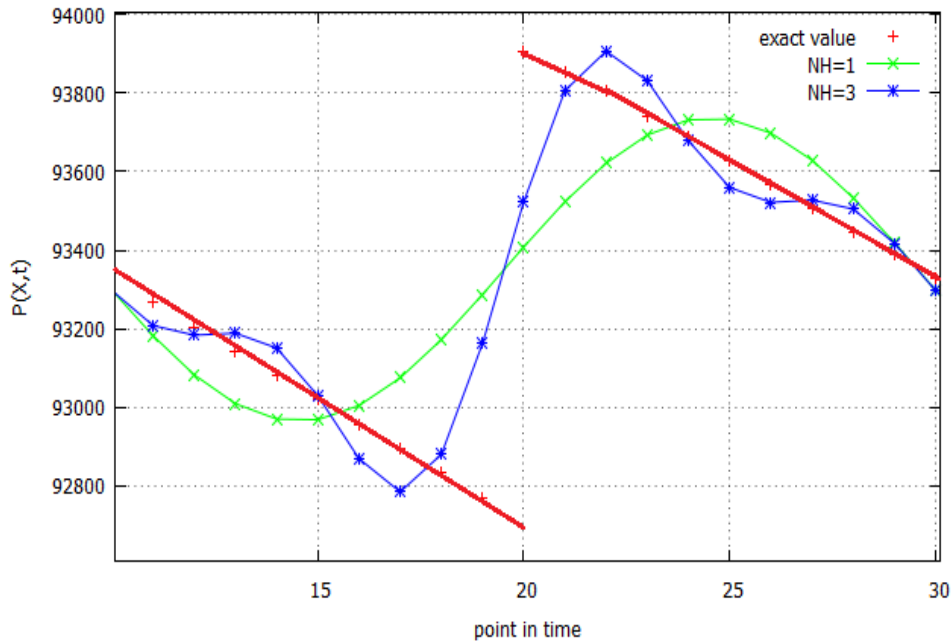




**Σχήμα 5.8:** Η τιμή της συνάρτησης κόστους σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, που δίνει η εφαρμογή κάθε μεθόδου.



**Σχήμα 5.9:** Η κατανομή στον χρόνο της πίεσης για ένα συγκεκριμένο σημείο του μονοδιάστατου αγωγού (exact value) και η προσέγγιση της για  $N_H=1$  και  $N_H=3$ .



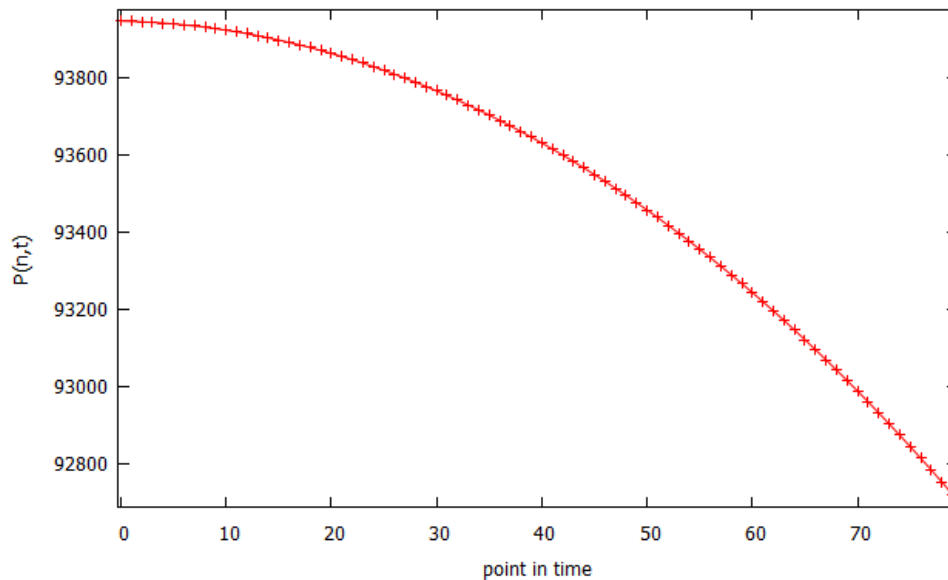
**Σχήμα 5.10:** Η κατανομή της πίεσης την 20<sup>η</sup> χρονική στιγμή για ένα συγκεκριμένο σημείο του μονοδιάστατου αγωγού (exact value) και η προσέγγιση της για  $N_H=1$  και  $N_H=3$ .

Όπως παρατηρείται από τα αποτελέσματα και για τις δυο περιπτώσεις, η μέθοδος επιλεκτικής κατανομής δεικτών μνήμης (checkpointing) δίνει με την ίδια ακρίβεια στη λύση που δίνει και η επιλογή της πλήρους αποθήκευσης (full storage) τόσο στον τελευταίο όσο και στους προηγούμενους κύκλους βελτιστοποίησης χωρίς να αποθηκεύονται όλα τα στιγμιότυπα. Αλλά με το τίμημα των επαναυπολογισμών τους, που εξαιτίας της περιοδικότητας των φαινομένων αυξάνονται ακόμα περισσότερο. Επίσης είναι μη πρακτικό, στην μέθοδο checkpointing, το γεγονός της διπλής αποθήκευσης των στιγμιότυπων που επιλέγονται από τον δυναμικό αλγόριθμο.

Το προσεγγιστικό μοντέλο Fourier δίνει ένα πάρα πολύ καλό αποτέλεσμα, που όπως φαίνεται και από τα σχήματα 5.7 και 5.3, η κατανομή της διατομής που υπολογίζεται στον τελευταίο κύκλο βελτιστοποίησης, σχεδόν ταυτίζεται με την κατανομή διατομής της επιλογής της πλήρους αποθήκευσης. Ακόμα καλύτερο είναι το αποτέλεσμα της εφαρμογής του προσεγγιστικού μοντέλου για την περιοδικά ημιτονοειδής χρονική μεταβολή του πεδίου ροής (1<sup>η</sup> περίπτωση), εξαιτίας της πολύ καλής προσέγγισης (σχήμα 5.5). Τουναντίον στην 2<sup>η</sup> περίπτωση η προσέγγιση του μοντέλου, που φαίνεται στα σχήματα 5.9 και 5.10, δεν είναι τόσο καλή, που εξαιτίας της ασυνέχειας της απόκρισης εμφανίζεται το φαινόμενο Gibbs.

## 5.2 Μη-περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία ροής

Σε αυτή την περίπτωση εξετάστηκαν οι μέθοδοι για τη μη-περιοδικά χρονική μεταβαλλόμενη πίεση στην έξοδο του αγωγού. Το εξεταζόμενο χρονικό διάστημα διακριτοποιήθηκε σε 80 χρονικές στιγμές. Η τιμές της πίεσης εξόδου του αγωγού φαίνονται για κάθε χρονική στιγμή στο σχήμα 5.11.

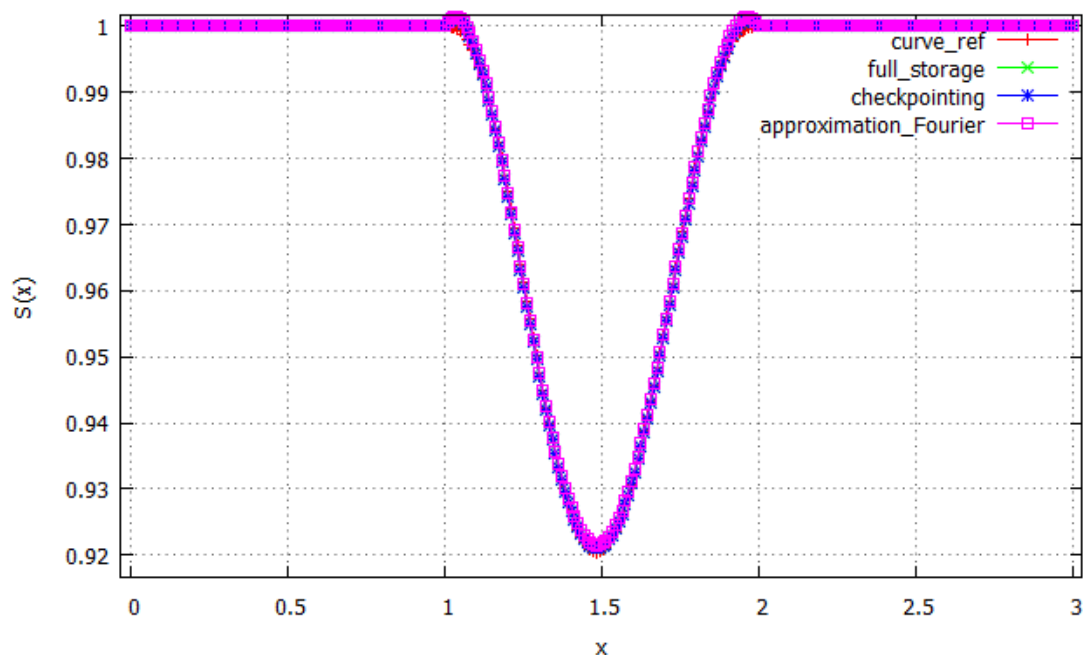


**Σχήμα 5.11:** Οι τιμές της πίεσης εξόδου του αγωγού για κάθε χρονική στιγμή

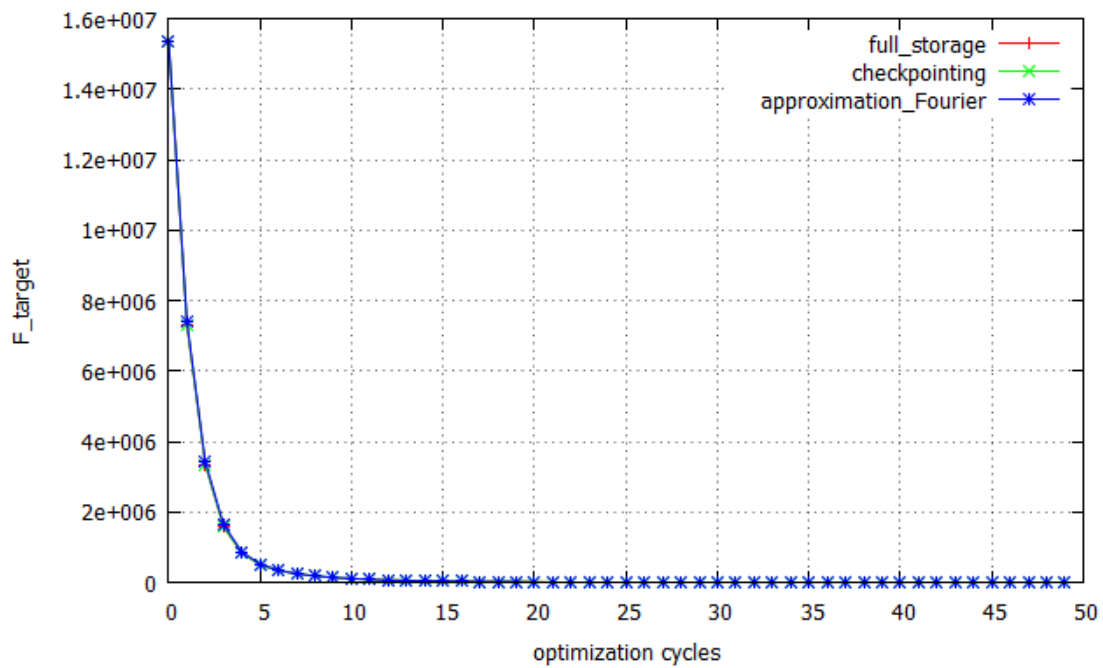
Στην εφαρμογή της μεθόδου επιλεκτικής κατανομής δεικτών μνήμης (checkpointing) επιλέγησαν 17 checkpoints, δηλαδή αποθηκεύονταν 17 στιγμιότυπα του πεδίου ροής, σε αυτή την περίπτωση δεν αποθηκευόταν διπλά τα στιγμιότυπα όπως τις προηγούμενες περιπτώσεις επειδή δεν είναι περιοδικό το φαινόμενο. Για την εφαρμογή του προσεγγιστικού μοντέλου Fourier επιλέχθηκαν οκτώ αρμονικές ( $N_H = 8$ ) του πεδίου συχνοτήτων, δηλαδή το σύνολο των συντελεστών του αναπτύγματος Fourier που θα υπολογιστούν και θα αποθηκευτούν είναι 17 ( $N_T = 1 + 2N_H = 17$ ). Τα αποτελέσματα που πάρθηκαν για 50 κύκλους βελτιστοποίησης, φαίνονται στα σχήματα 5.12-5.13 και στον πίνακα 3, που ακολουθούνται. Επίσης στο σχήμα 5.14 φαίνονται τα αποτελέσματα του προβλήματος βελτιστοποίησης με την χρήση του προσεγγιστικού μοντέλου Fourier για διάφορους αριθμούς αρμονικών συχνοτήτων  $N_H$ .

	<u>Καταλαμβανόμενη μνήμη υπολογιστή</u> (Αποθηκευμένα στιγμιότυπα)	<u>Υπολογιστικός χρόνος</u> (Επαναυπολογισμοί στιγμιότυπων ανά κύκλο βελτιστοποίησης)	<u>Τελική τιμή συνάρτησης στόχου</u>
Πλήρης αποθήκευση	80	0	4193.29
Επιλεκτική κατανομή δεικτών μνήμης	17	63	4193.29
Προσεγγιστικό μοντέλο Fourier	17	0	7192.09

**Πίνακας 3:** Αποτελέσματα για την περίπτωση της μη-περιοδικής χρονικά μεταβαλλόμενης πίεσης στην έξοδο του αγωγού, για πενήντα κύκλους του προβλήματος βελτιστοποίησης. Οριζόντια οι εξεταζόμενες μέθοδοι και κάθετα τα κριτήρια αξιολόγησης.



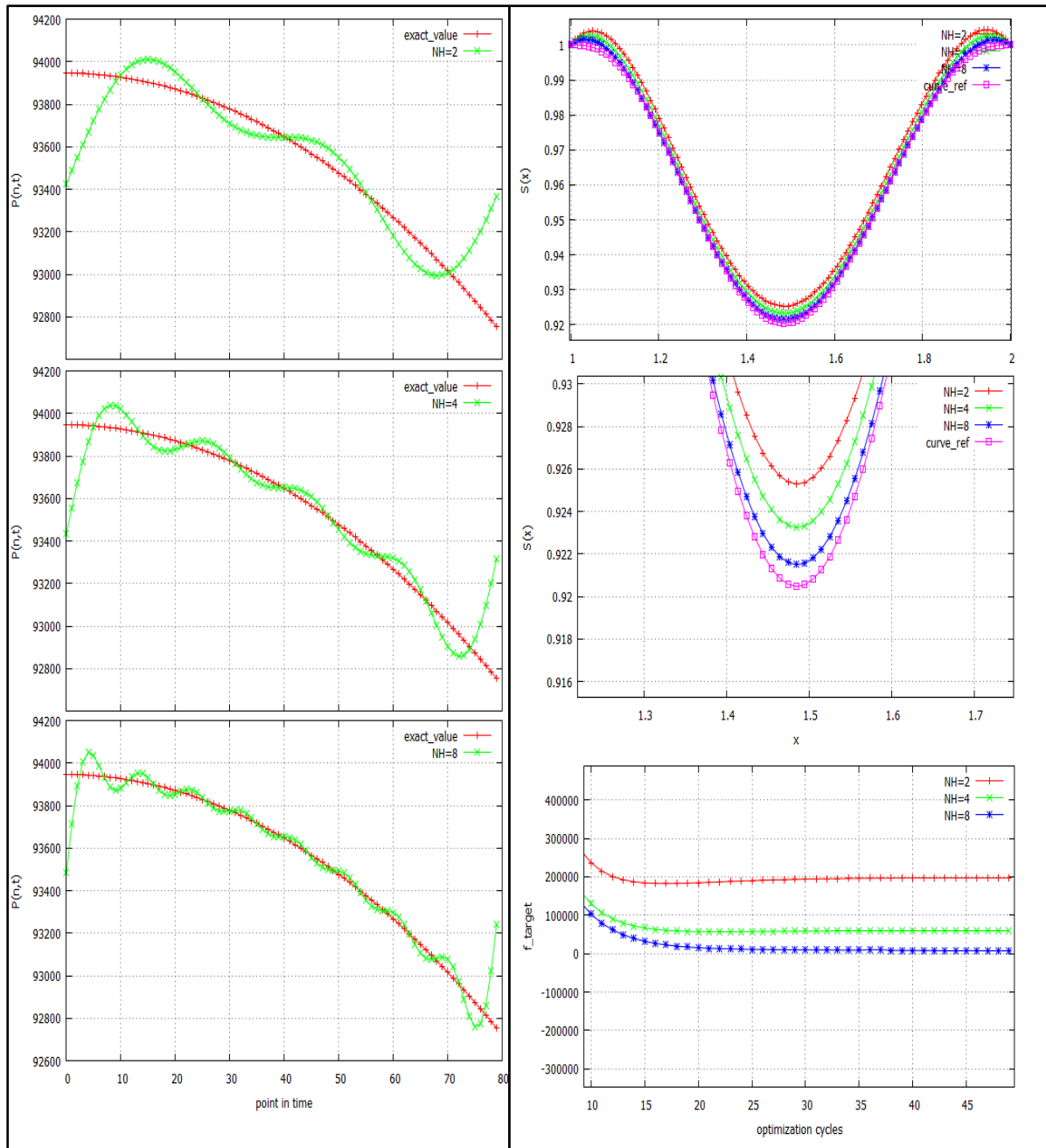
**Σχήμα 5.12:** Οι κατανομές της διατομής για τον μονοδιάστατο αγωγό, που δίνει για πενήντα κύκλους, η κάθε μέθοδος και η κατανομή στόχος του προβλήματος βελτιστοποίησης.



**Σχήμα 5.13:** Η τιμή της συνάρτησης κόστους σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, που δίνει η εφαρμογή κάθε μεθόδου.

Η εφαρμογή της επιλεκτικής κατανομής δεικτών μνήμης (checkpointing) στην περίπτωση για τα μη-περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία ροής είναι πολύ καλύτερη, σε σχέση με τις προηγούμενες περιπτώσεις επειδή εξαιτίας του ότι δεν είναι περιοδικό το φαινόμενο ο αριθμός των αποθηκευμένων στιγμιότυπων ισούται με τον αριθμό των δεικτών μνήμης.

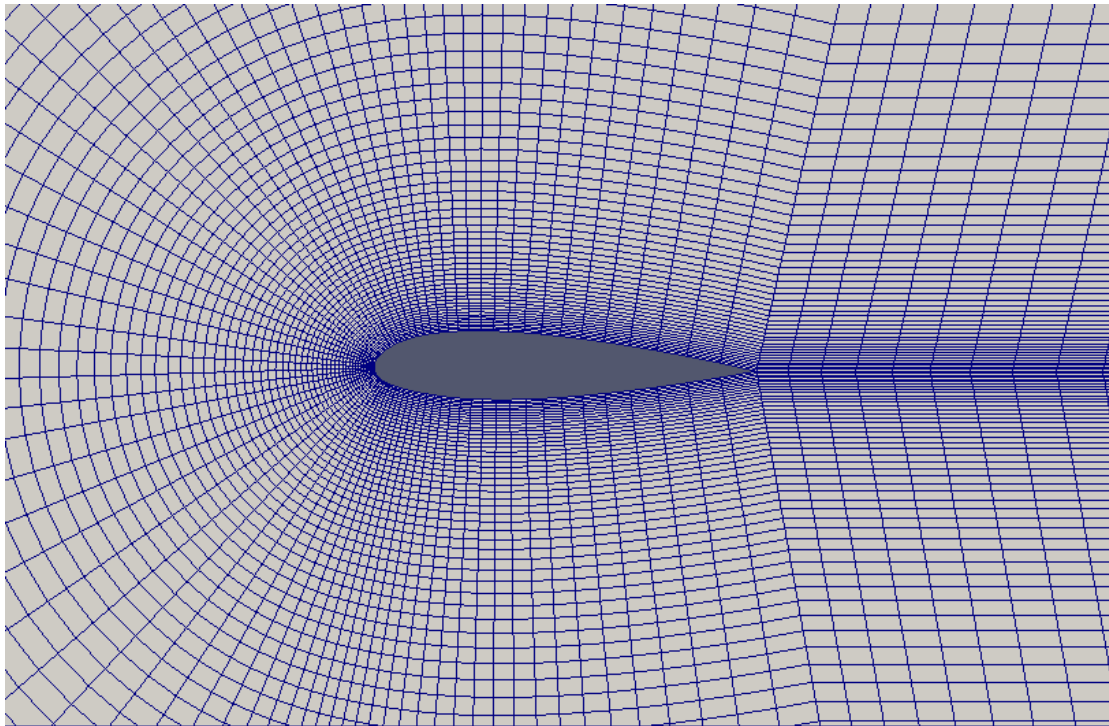
Όπως παρατηρείται από τα σχήματα 5.12-5.14, η εφαρμογή του προσεγγιστικού μοντέλου Fourier δίνει αρκετά καλά αποτελέσματα παρότι της προσέγγισης της λύσης του πεδίου ροής.



**Σχήμα 5.14:** Αριστερά φαίνεται η προσέγγιση της κατανομής της πίεσης στον χρόνο για ένα σημείο στο εσωτερικό του αγωγού και οι προσεγγίσεις αυτής για  $N_H = 8, 4, 2$ . Στα δεξιά το 1<sup>ο</sup> σχήμα δείχνει για τα διάφορα  $N_H$  τις κατανομές της διατομής του μονοδιάστατου αγωγού στην συγκλίνουσα και αποκλίνουσα περιοχή, το 2<sup>ο</sup> την μεγέθυνση του στο σημείο του λαιμού για 50 κύκλους βελτιστοποίησης. Το 3<sup>ο</sup> σχήμα δεξιά, φαίνεται η τιμή της συνάρτησης κόστους στους τελευταίους κύκλους βελτιστοποίησης για κάθε  $N_H$ .

### 5.3 Εφαρμογή του προσεγγιστικού μοντέλου Fourier σε 2Δ πρόβλημα

Για την επαλήθευση του προσεγγιστικού μοντέλου Fourier που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας, έγινε η εφαρμογή του στα αποτελέσματα δισδιάστατου προβλήματος που αναλύθηκε με κώδικα προσομοίωσης χρονικά μη-μόνιμων ροών στην Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης. Το συγκεκριμένο πρόβλημα αφορά την επίλυση του μεταβαλλόμενου χρονικά πεδίου ροής γύρω από την αεροτομή του σχήματος 5.15.



**Σχήμα 5.14:** Η αεροτομή του διδιάστατου προβλήματος

Το μοντέλο της ροής σε αυτή την περίπτωση διαμορφώθηκε για συνεκτικό ασυμπίεστο ρευστό, χωρίς την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων και μετάδοση θερμότητας. Έτσι επιλέγονται οι εξισώσεις Navier-Stokes για διδιάστατο πεδίο ροής με τις κατάλληλες παραδοχές, δηλαδή με τις παραλήψεις διάφορων όρων.

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -grad p + \rho \nu \Delta \vec{v} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad 5.3.1$$

Όπου  $\vec{v} = (u, v)$  το διάνυσμα της ταχύτητας,  $\Delta$  ο τελεστής Laplace ( $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ) και  $\nu$  η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού η οποία θεωρείται σταθερή.

Στην είσοδο του πεδίου επιβάλλονται οι συνθήκες Dirichlet για κάθε συνιστώσα της ταχύτητας και μηδενική Neumann για την στατική πίεση, στην έξοδο του πεδίου ροής επιβάλλονται μηδενική συνθήκη Neumann για τις συνιστώσες τις ταχύτητας και συνθήκη Dirichlet για την πίεση.

$$\begin{aligned}
 u_{in} &= U \cos \alpha & \frac{\partial u}{\partial x_{out}} &= 0 \\
 v_{in} &= U \sin \alpha & \frac{\partial v}{\partial y_{out}} &= 0 \\
 \frac{\partial p}{\partial S_{in}} &= 0 & p_{out} &= const
 \end{aligned}
 \tag{5.3.2}$$

Όπου 'α' η γωνία της επ'άπειρο ροής, η οποία γωνιά μεταβάλλεται περιοδικά στον χρόνο καθιστώντας το πεδίο ροής χρονικά μεταβαλλόμενο. Εξαιτίας της μη-ολίσθησης και της μη-εισχώρησης του ρευστού στην αεροτομή, επιβάλλεται μηδενική συνθήκη Dirichlet για την ταχύτητα και μηδενική συνθήκη Neumann για την πίεση στο τοίχωμα.

$$\begin{aligned}
 u_w &= 0 \\
 v_w &= 0 \\
 \frac{\partial p}{\partial S_w} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.3.3}$$

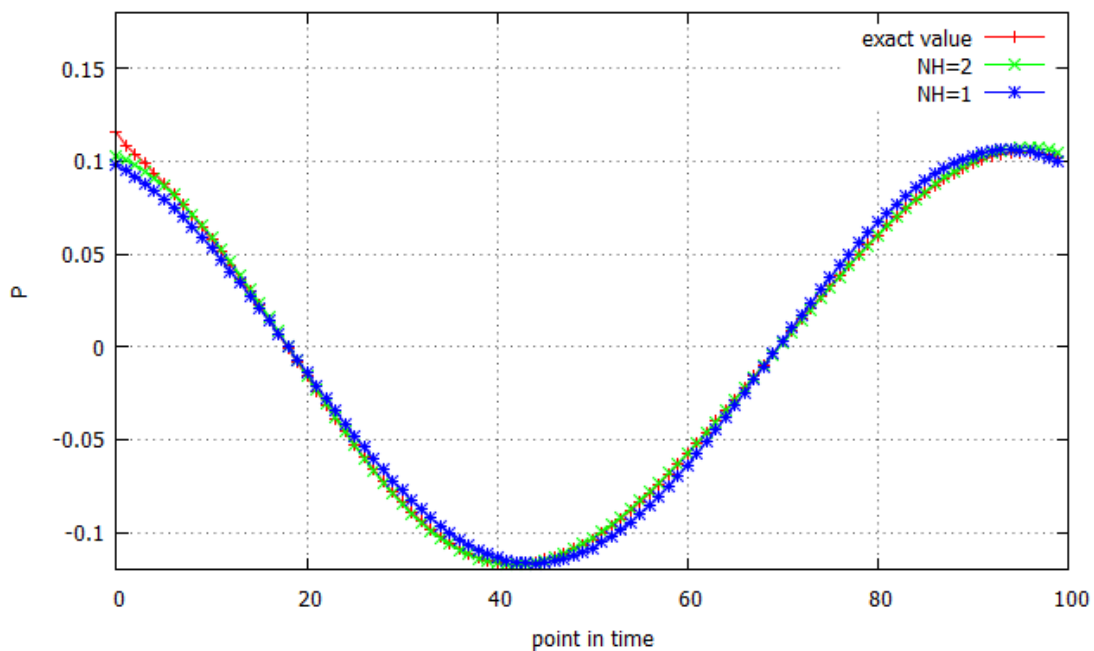
Με τις εξισώσεις ορμής και συνέχειας του πεδίου ροής και με τις οριακές συνθήκες συμπληρώνονται οι πρωτεύουσες εξισώσεις του προβλήματος.

Η επίλυση του προβλήματος, έγινε με την χρήση πακέτου λογισμικού υπολογιστικής ρευστοδυναμικής ανοιχτού κώδικα Open FOAM. Για την εύρεση της λύσης του πεδίου ροής για κάθε χρονική στιγμή χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος PISO. Όπου στη χρονική επίλυση του προβλήματος η περίοδος (διάρκειας 0.1s) διακριτοποιήθηκε σε 100 χρονικές στιγμές ( $dt=0.001s$ ).

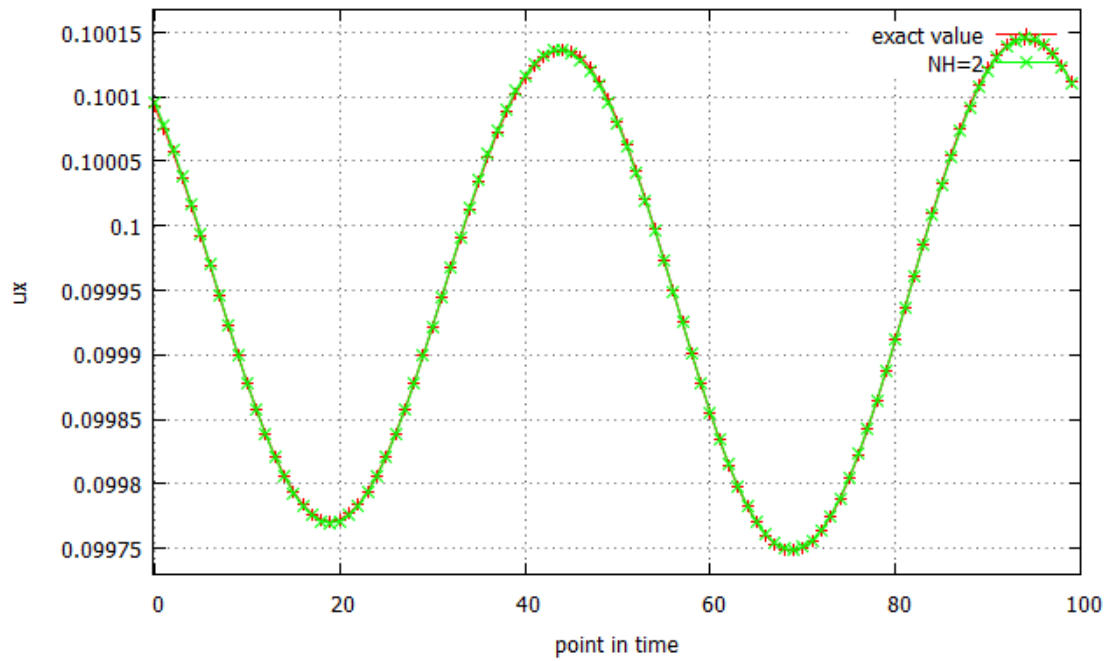
Η εφαρμογή του προσεγγιστικού μοντέλου έγινε στα αποτελέσματα των μεγεθών τις πίεσης και συνιστωσών της ταχύτητας για διάφορους κόμβους. Επιλέγηκαν δύο κόμβοι οι οποίοι βρίσκονται κοντά και εκατέρωθεν στο τοίχωμα της αεροτομής, εξαιτίας του ότι εκεί παρουσιάζεται μεγάλη μεταβολή στον χρόνο των μεγεθών του πεδίου ροής. Επίσης επιλέγηκε και ένα τρίτος κόμβος ο οποίος βρίσκεται μακριά από την αεροτομή. Στα σχήματα 5.16-5.24



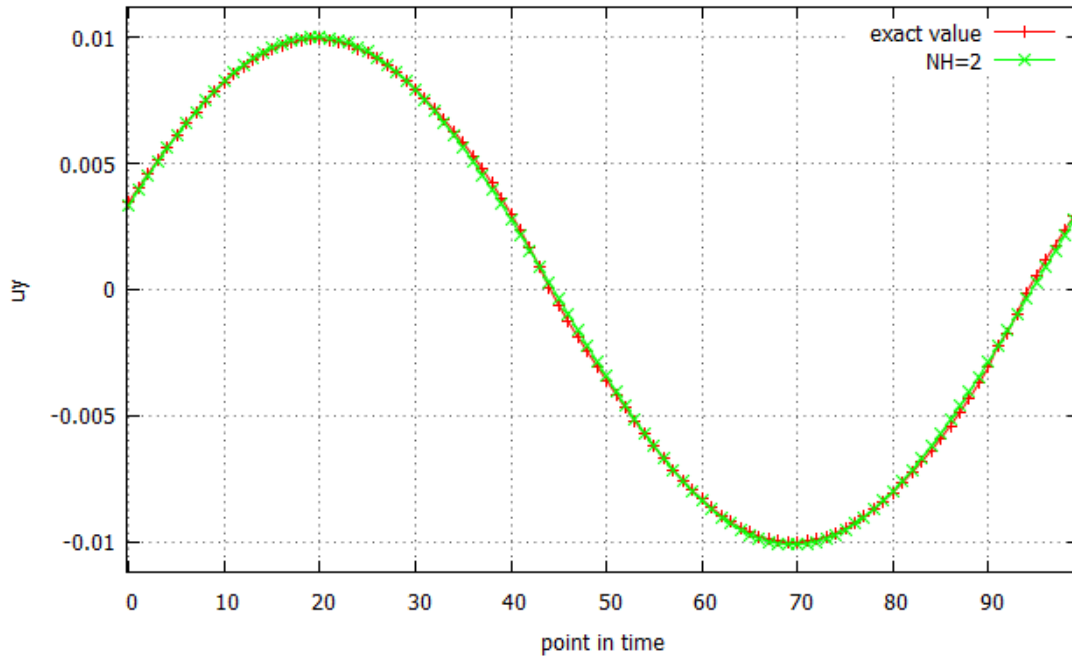
παρουσιάζονται οι κατανομές στον χρόνο των μεταβλητών του πεδίου ροής μαζί με τις προσεγγίσεις τους. Στον πίνακα 4 παρουσιάζονται για κάθε αριθμό αρμονικών  $N_H$  που επιλέγεται, η αντίστοιχη μνήμη υπολογιστή που απαιτείται για την αποθήκευση των συντελεστών Fourier. Όπως προαναφέρθηκε ο αριθμός των συντελεστών Fourier προκύπτει από τη σχέση  $N_T = 1 + 2N_H$  και η αποθήκευση ενός συντελεστή Fourier ανά κόμβο του πλέγματος ισοδυναμεί με την αποθήκευση ενός στιγμιότυπου του πεδίου ροής. Επίσης στους πίνακες 4-6 παρουσιάζεται η τιμή της συνάρτησης  $F = \int_0^T (\vec{U}(t)_{exact} - \vec{U}(t)_{approximate})^2 dt$  στην οποία  $\vec{U} = [P, u_x, u_y]$ . Η τιμή της συνάρτησης  $F$  υποδεικνύει πόσο πλησιάζει η προσέγγιση την ακριβή λύση για κάθε  $N_H$  που επιλέγεται.



**Σχήμα 5.15:** Για τον 1<sup>ο</sup> κόμβο κοντά στο τοίχωμα της αεροτομής, η κατανομή της πίεσης στο χρόνο (exact value) και οι προσεγγίσεις της για  $N_H=1$  και  $N_H=2$ .



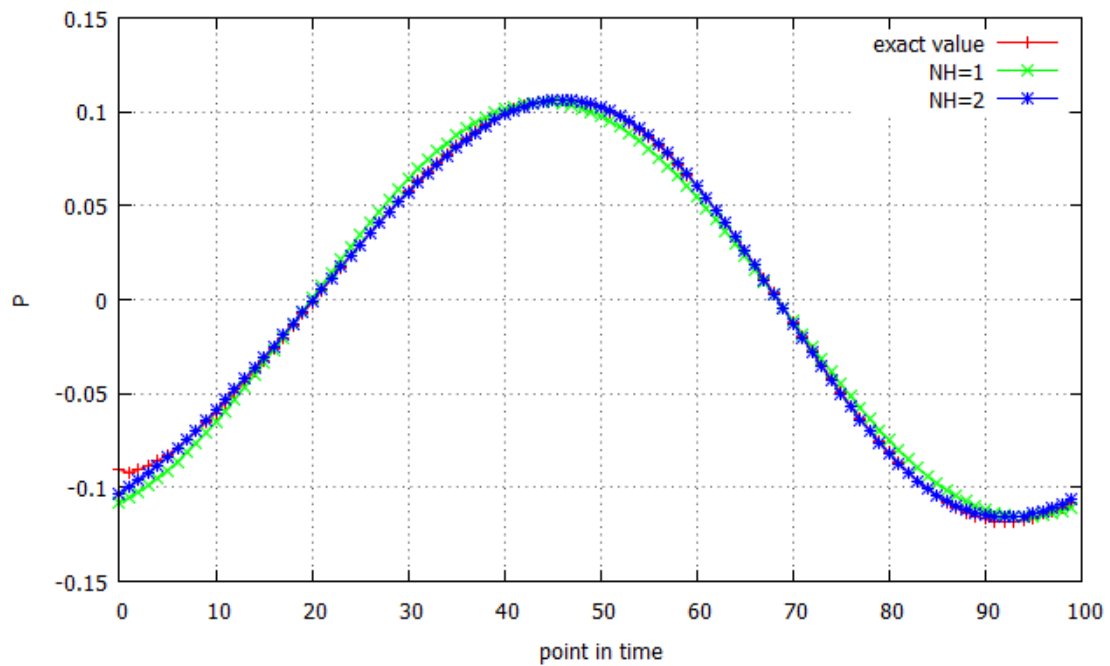
**Σχήμα 5.16:** Για τον 1<sup>ο</sup> κόμβο κοντά στο τοίχωμα της αεροτομής, η κατανομή της συνιστώσας της ταχύτητας κατά των x-άξονα στο χρόνο (exact value) και η προσέγγιση της για  $N_H=2$ .



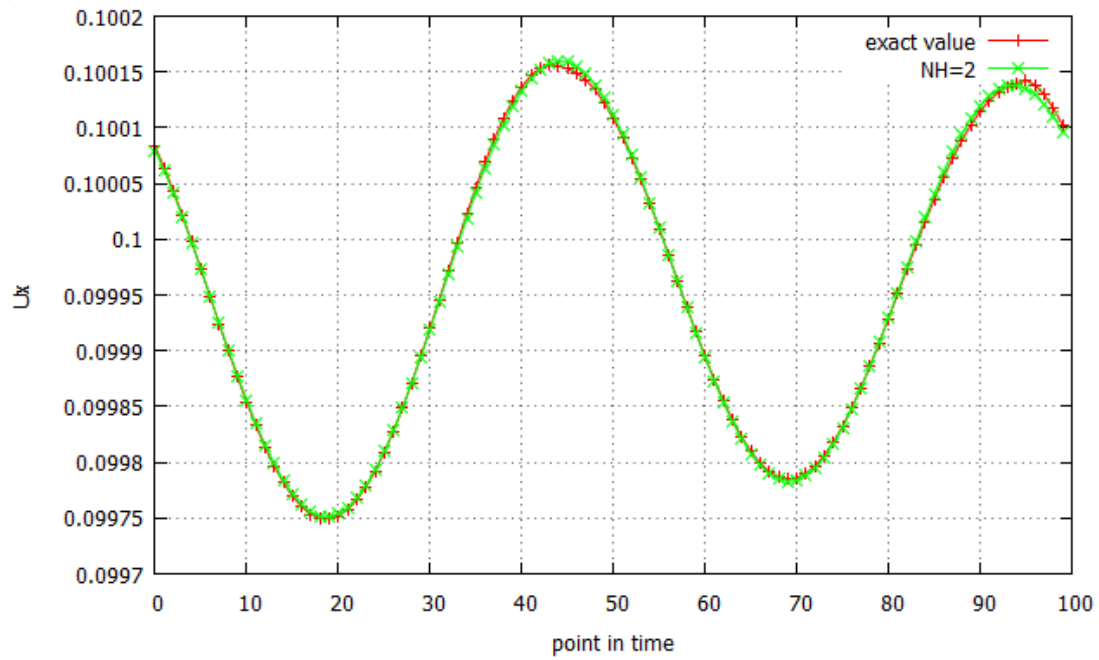
**Σχήμα 5.17:** Για τον 1<sup>ο</sup> κόμβο κοντά στο τοίχωμα της αεροτομής, η κατανομή της συνιστώσας της ταχύτητας κατά των x-άξονα στο χρόνο (exact value) και η προσέγγιση της για  $N_H=2$ .

	Καταλαμβανόμενη μήμη υπολογιστή (συντελεστές Fourier $N_T$ )	Τιμή συνάρτησης F για $U = [P]$	Τιμή συνάρτησης F για $U = [u_x]$	Τιμή συνάρτησης F για $U = [u_y]$
Ακριβής λύση	100	0	0	0
$N_H=1$	3	$2,88 \times 10^{-6}$	$1,82 \times 10^{-9}$	$1,89 \times 10^{-9}$
$N_H=2$	5	$3,77 \times 10^{-7}$	$1,45 \times 10^{-13}$	$1,88 \times 10^{-9}$
$N_H=3$	7	$3,08 \times 10^{-7}$	$4,95 \times 10^{-14}$	$7,29 \times 10^{-10}$
$N_H=4$	9	$2,56 \times 10^{-7}$	$4,52 \times 10^{-14}$	$7,26 \times 10^{-10}$
$N_H=5$	11	$2,18 \times 10^{-7}$	$2,64 \times 10^{-14}$	$2,71 \times 10^{-10}$
$N_H=10$	21	$1,25 \times 10^{-7}$	$1,38 \times 10^{-14}$	$6,05 \times 10^{-11}$

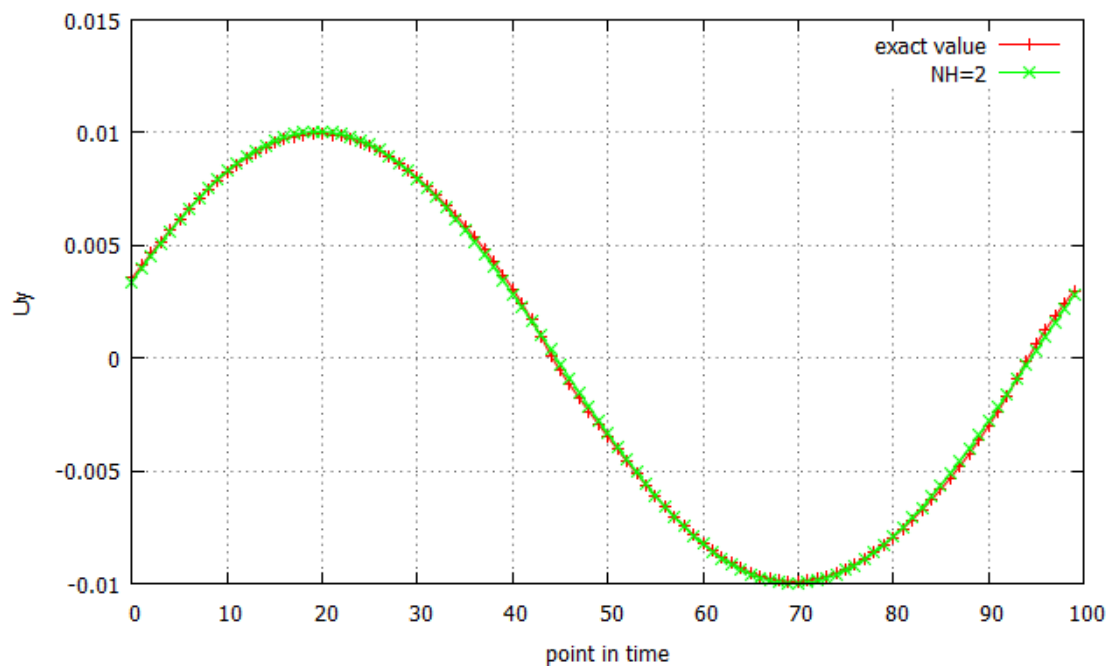
**Πίνακας 4:** Για τον 1<sup>ο</sup> κόμβο κοντά στο τοίχωμα της αεροτομής, η καταλαμβανόμενη μήμη υπολογιστή από τους συντελεστές Fourier  $N_T$  και η τιμή της συνάρτησης F, για κάθε  $N_H$ .



**Σχήμα 5.18:** Για τον 2<sup>ο</sup> κόμβο κοντά στο τοίχωμα της αεροτομής, η κατανομή της πίεσης στο χρόνο (exact value) και οι προσεγγίσεις της για  $N_H=1$  και  $N_H=2$ .



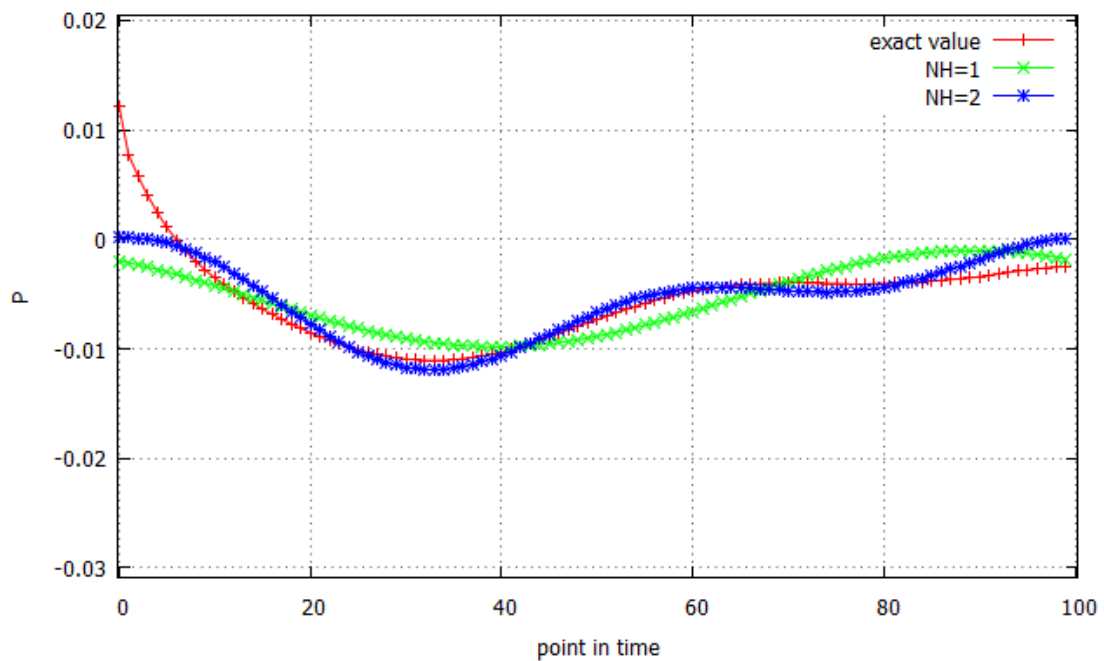
**Σχήμα 5.19:** Για τον 2<sup>ο</sup> κόμβο κοντά στο τοίχωμα της αεροτομής, η κατανομή της συνιστώσας της ταχύτητας κατά των x-άξονα στο χρόνο (exact value), και η προσέγγιση της για  $N_H=2$ .



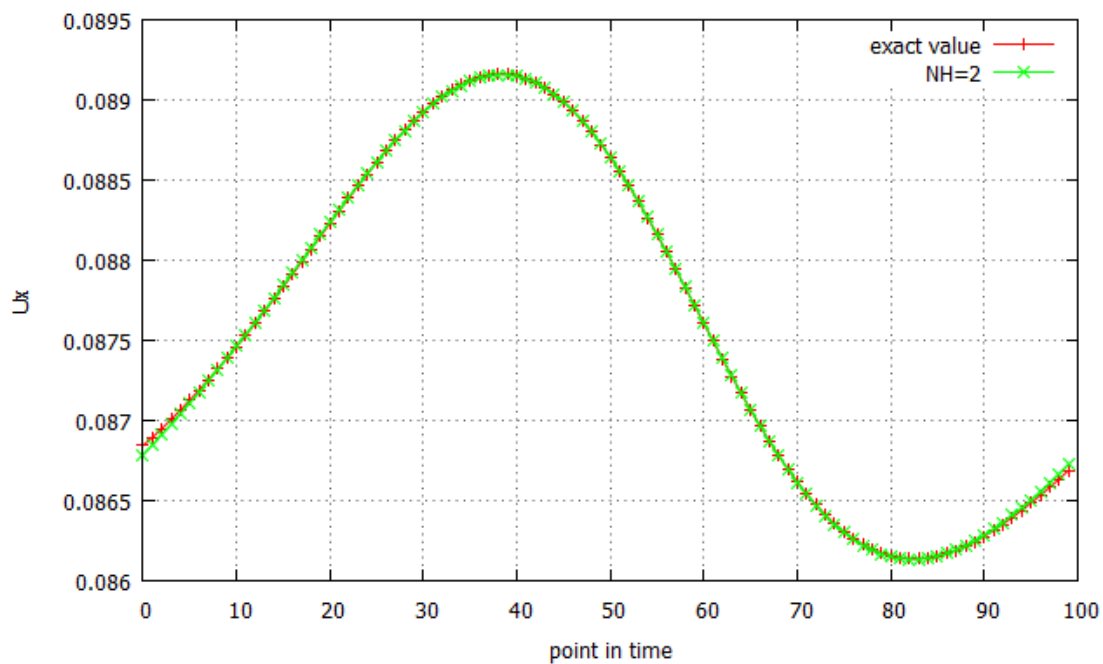
**Σχήμα 5.20:** Για τον 2<sup>ο</sup> κόμβο κοντά στο τοίχωμα της αεροτομής, η κατανομή της συνιστώσας της ταχύτητας κατά των x-άξονα στο χρόνο (exact value), και η προσέγγιση της για  $N_H=2$ .

	Καταλαμβανόμενη μνήμη υπολογιστή (συντελεστές Fourier $N_T$ )	Τιμή συνάρτησης F για $U = [P]$	Τιμή συνάρτησης F για $U = [u_x]$	Τιμή συνάρτησης F για $U = [u_y]$
Ακριβής λύση	100	0	0	0
$N_H=1$	3	$2,90 \times 10^{-6}$	$1,82 \times 10^{-9}$	$1,93 \times 10^{-9}$
$N_H=2$	5	$3,73 \times 10^{-7}$	$1,05 \times 10^{-12}$	$1,93 \times 10^{-9}$
$N_H=3$	7	$2,92 \times 10^{-7}$	$4,04 \times 10^{-13}$	$7,49 \times 10^{-10}$
$N_H=4$	9	$2,39 \times 10^{-7}$	$3,97 \times 10^{-13}$	$7,48 \times 10^{-10}$
$N_H=5$	11	$2,01 \times 10^{-7}$	$1,43 \times 10^{-13}$	$2,78 \times 10^{-10}$
$N_H=10$	21	$1,21 \times 10^{-7}$	$2,57 \times 10^{-14}$	$4,91 \times 10^{-11}$

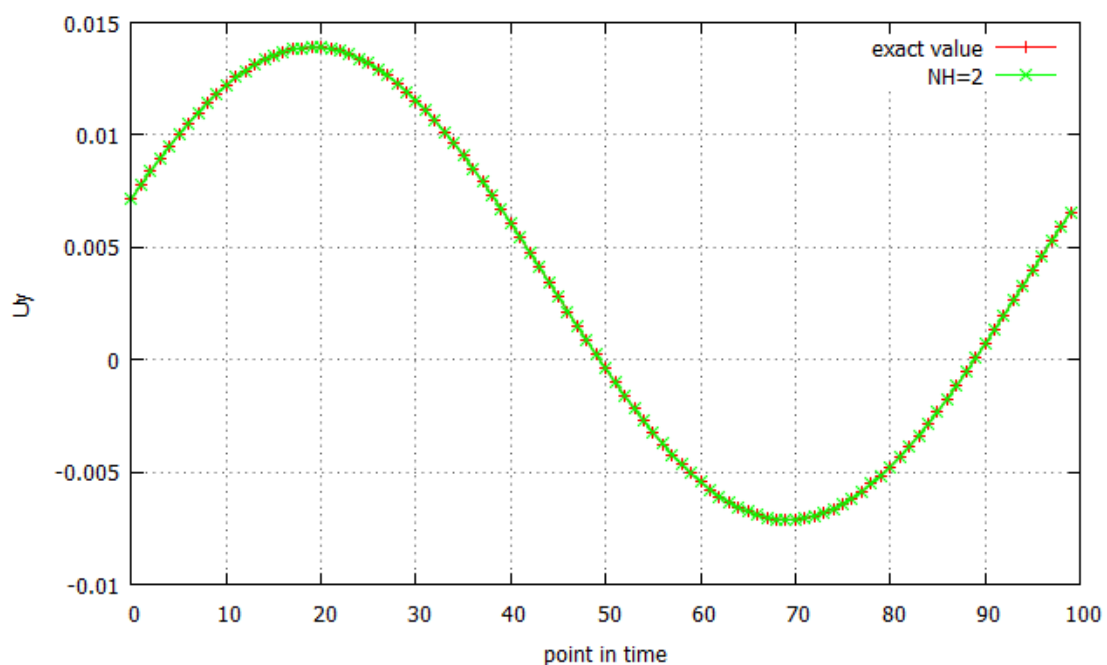
**Πίνακας 5:** Για τον 2<sup>ο</sup> κόμβο κοντά στο τοίχωμα της αεροτομής, η καταλαμβανόμενη μνήμη υπολογιστή από τους συντελεστές Fourier  $N_T$  και η τιμή της συνάρτησης F, για κάθε  $N_H$ .



**Σχήμα 5.21:** Για τον κόμβο μακριά από το τοίχωμα της αεροτομής, η κατανομή της πίεσης στο χρόνο (exact value), και οι προσεγγίσεις της για  $N_H=1$  και  $N_H=2$ .



**Σχήμα 5.22:** Για τον κόμβο μακριά από το τοίχωμα της αεροτομής, η κατανομή της συνιστώσας της ταχύτητας κατά των x-άξονα στο χρόνο (exact value) και η προσέγγιση της για  $N_H=2$ .



**Σχήμα 5.23:** Για τον κόμβο μακριά από το τοίχωμα της αεροτομής, η κατανομή της συνιστώσας της ταχύτητας κατά των y-άξονα στο χρόνο (exact value) και η προσέγγιση της για  $N_H=2$ .

	<u>Καταλαμβανόμενη μήμη υπολογιστή (συντελεστές Fourier <math>N_T</math>)</u>	<u>Τιμή συνάρτησης F για <math>U = [P]</math></u>	<u>Τιμή συνάρτησης F για <math>U = [u_x]</math></u>	<u>Τιμή συνάρτησης F για <math>U = [u_y]</math></u>
Ακριβής λύση	100	0	0	0
$N_H=1$	3	$4,04 \times 10^{-7}$	$1,30 \times 10^{-9}$	$1,08 \times 10^{-12}$
$N_H=2$	5	$3,52 \times 10^{-7}$	$1,62 \times 10^{-11}$	$4,50 \times 10^{-13}$
$N_H=3$	7	$2,61 \times 10^{-7}$	$1,29 \times 10^{-11}$	$3,18 \times 10^{-13}$
$N_H=4$	9	$2,07 \times 10^{-7}$	$1,05 \times 10^{-11}$	$3,12 \times 10^{-13}$
$N_H=5$	11	$1,61 \times 10^{-7}$	$9,07 \times 10^{-12}$	$2,06 \times 10^{-13}$
$N_H=10$	21	$8,54 \times 10^{-8}$	$4,94 \times 10^{-12}$	$1,12 \times 10^{-13}$

**Πίνακας 6:** Για τον κόμβο μακριά από το τοίχωμα της αεροτομής, η καταλαμβανόμενη μήμη υπολογιστή από τους συντελεστές Fourier  $N_T$  και η τιμή της συνάρτησης F, για κάθε  $N_H$ .

Από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι οι κατανομές στον χρόνο των μεγεθών του πεδίου ροής για τα συγκεκριμένα σημεία προσεγγίζονται αρκετά καλά χρησιμοποιώντας ακόμα και 1 ή 2 αρμονικές συχνότητες  $N_H$ . Το προηγούμενο ήταν αναμενόμενο εξαιτίας της περιοδικά χρονικής μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας στη είσοδο του πεδίου ροής, έτσι επιβεβαιώνεται το προσεγγιστικό μοντέλο Fourier. Αυτό σημαίνει ότι τα στιγμιότυπα του πεδίου ροής μπορούν να προσεγγίζονται αρκετά καλά καταλαμβάνοντας πολύ πιο λίγη μήμη υπολογιστή, από το να αποθηκεύονται όλα.

## 6 Ανακεφαλαίωση-συμπεράσματα

Στον αντίστροφο σχεδιασμό αεροτομής για χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία ροής χρησιμοποιείται η συζυγής μέθοδος, κατά την οποία διατυπώνονται και επιλύονται οι χρονικά μη-μόνιμες εξισώσεις για το συζυγές πεδίο ροής. Από την διατύπωση των συζυγών εξισώσεων προκύπτει η οριακή χρονική συνθήκη να εφαρμόζεται στην τελευταία στιγμή του χρονικού διαστήματος που μελετάται. Το προηγούμενο έχει ως αποτέλεσμα η επίλυση του συζυγούς προβλήματος να υλοποιείται με αντίθετη προέλαση στον χρόνο (από το τέλος του χρόνου προς την αρχή). Επίσης, οι συζυγείς μεταβλητές εξαρτώνται από τις μεταβλητές του πεδίου ροής, δηλαδή για τον υπολογισμό τους σε μία χρονική στιγμή πρέπει να είναι διαθέσιμη η λύση του πεδίου ροής για τη στιγμή αυτή. Οπότε, μόνο όταν οι εξισώσεις του πεδίου ροής επιλυθούν και για την τελευταία χρονική στιγμή μπορεί να αρχίσει η επίλυση του συζυγούς προβλήματος και να συνεχίσει για κάθε χρονική στιγμή έχοντας διαθέσιμο το αντίστοιχο στιγμιότυπο (δηλαδή τη λύση των εξισώσεων) του πεδίου ροής.

Βασικό πρόβλημα του σχεδιαστή-μηχανικού στην εφαρμογή της συζυγούς μεθόδου σε χρονικά μη-μόνιμα πεδία ροής, είναι η διαθεσιμότητα των στιγμιότυπων του πεδίου ροής για κάθε χρονική στιγμή που επιλύονται οι συζυγείς εξισώσεις. Δύο ανεπιθύμητες και ακραίες επιλογές είναι να είναι όλα τα στιγμιότυπα αποθηκευμένα ή να επαναυπολογίζονται όταν αυτό χρειαστεί. Η επιλογή να είναι όλα τα στιγμιότυπα του πεδίου ροής αποθηκευμένα είναι (πολύ) ακριβή σε μνήμη υπολογιστή, αλλά η καλύτερη σε υπολογιστικό χρόνο εξαιτίας της παντελούς έλλειψης επαναυπολογισμών. Αντιθέτως, η επιλογή της μη-αποθήκευσης στιγμιότυπων του πεδίου ροής είναι προφανώς η καλύτερη σε μνήμη υπολογιστή (πρακτικά, μηδενική αποθήκευση) αλλά η χειρότερη σε υπολογιστικό χρόνο (πολλαπλοί επαναυπολογισμοί).

Τη χρυσή τομή μεταξύ υπολογιστικού χρόνου και αποθηκευτικού χώρου στην λύση, δίνει η μέθοδος της επιλεκτικής κατανομής δεικτών μνήμης (checkpointing). Σε αυτήν, επιτυγχάνεται εξοικονόμηση αποθηκευτικού χώρου, αποθηκεύοντας μερικά επιλεγμένα στιγμιότυπα του πεδίου ροής και, στη συνέχεια, από αυτά επαναυπολογίζονται τα υπόλοιπα στιγμιότυπα όταν χρειαστούν. Εξαιτίας των επαναυπολογισμών αυξάνεται ο υπολογιστικός χρόνος. Για τον λόγο αυτό, δεν επιλέγονται τυχαία τα στιγμιότυπα που αποθηκεύονται, αλλά συγκεκριμένα στιγμιότυπα που προκύπτουν από τη βέλτιστη κατανομή που υποδεικνύει η μέθοδος checkpointing, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται ο αριθμός των επαναυπολογισμών.

Μια διαφορετική ιδέα για την εξοικονόμηση αποθηκευτικού χώρου και υπολογιστικού χρόνου, είναι η χρήση κάποιου προσεγγιστικού μοντέλου (Proper Orthogonal Decomposition, splines, Fourier και άλλα). Με τη χρήση του μοντέλου, προσεγγίζεται η λύση του πεδίου ροής για τη χρονική στιγμή που θα



επιλυθούν οι συζυγείς εξισώσεις. Δηλαδή, το μοντέλο αναπαράγει με αξιοπιστία, αλλά σίγουρα προσεγγιστικά, το χρονικά μεταβαλλόμενο πεδίο ροής. Επίσης εφόσον έχει δομηθεί το προσεγγιστικό μοντέλο, η μνήμη που καταλαμβάνει είναι τραγικά λιγότερη από τη μνήμη που θα απαιτούσε η πλήρης αποθήκευση των στιγμιότυπων του πεδίου ροής.

Ένα προσεγγιστικό μοντέλο δομείται χρησιμοποιώντας τα στιγμιότυπα (δηλαδή τις λύσεις των εξισώσεων) του πεδίου ροής. Οπότε, για να έχει νόημα η εφαρμογή του μοντέλου στην οικονομική εφαρμογή της συζύγου μεθόδου για χρονικά μη-μόνιμα πεδία ροής, πρέπει να είναι εφικτή η on-line εκπαίδευση του ώστε να μην χρειάζεται να έχει αποθηκευτεί ήδη το σύνολο των στιγμιότυπων. Δηλαδή, τη στιγμή που υπολογίζεται ένα στιγμιότυπο του πεδίου ροής, ταυτοχρόνως να χρησιμοποιείται για τη δόμηση του μοντέλου και, αμέσως μετά, να διαγράφεται από τη μνήμη.

Στο πλαίσιο της παρούσα διπλωματικής εργασίας έγιναν οι εφαρμογές των εξεταζόμενων μεθόδων για την οικονομική συμβολή της εφαρμογής της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για χρονικά μη-μόνιμα προβλήματα ροής. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης αφορούσε τον αντίστροφο σχεδιασμό (inverse design problem) αγωγού χρησιμοποιώντας το μοντέλο της ψευδο-1D ροής. Το προηγούμενο έγινε για τρεις διαφορετικές περιπτώσεις ως προς τη χρονική μεταβολή του πεδίου ροής, την περιοδικά συνεχή, την περιοδικά ασυνεχή και για την μη-περιοδική.

Το προσεγγιστικό μοντέλο αναπτύχθηκε με βάση το ανάπτυγμα Fourier και ακολούθησε η εκπαίδευση του για την εφαρμογή του. Στην εφαρμογή του, τα αποτελέσματα του προβλήματος βελτιστοποίησης σχεδόν ταυτίζονταν με αυτά της επιλογής της πλήρους αποθήκευσης των στιγμιότυπων και για τα τρία είδη χρονικής μεταβολής. Αλλά αισθητά πιο πολύ ταυτίζονται με την περιοδικά συνεχή περίπτωση, εξαιτίας του ότι οι άλλες χρονικές μεταβολές παρουσίαζαν ασυνέχειες, με αποτέλεσμα να εισάγεται επιπλέον σφάλμα λόγω του φαινομένου του Gibbs. Επίσης δεν έγινε κανένας επαναυπολογισμός και μειώθηκε σημαντικά η καταλαμβανόμενη μνήμη. Επιπλέον, το μοντέλο που βασίζεται στις σειρές Fourier δοκιμάστηκε σε 2D-πρόβλημα περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενου πεδίου ροής, δίνοντας πολύ καλή προσέγγιση των αποτελεσμάτων του ακόμα και μειώνοντας την τάξη μεγέθους της καταλαμβανόμενης μνήμης από την επιλογή της πλήρους αποθήκευσης.

Τα αποτελέσματα του προβλήματος βελτιστοποίησης που προκύπτουν από την της εφαρμογής της μεθόδου checkpointing, είναι ακριβώς τα ίδια με την επιλογή της πλήρους αποθήκευσης των στιγμιότυπων. Επίσης αυξήθηκαν οι επαναυπολογισμοί και μειώθηκε η καταλαμβανόμενη μνήμη όπως ήταν αναμενόμενο.

Οι δυο μέθοδοι, checkpointing και προσεγγιστικό μοντέλο Fourier, είναι ανόμοιες μεταξύ τους. Εξαιτίας αυτού δεν μπορεί παρά η συγκριτική αξιολόγηση τους να είναι του τύπου, πια μέθοδος συμφέρει του σχεδιαστή-μηχανικού να χρησιμοποιήσει ανάλογα με την χρονική μεταβολή του πεδίου ροής.

Οπότε για την περιοδικά χρονική μεταβολή του πεδίου ροής προτείνεται η χρήση του προσεγγιστικού μοντέλου Fourier, εξαιτίας της πολύ καλής προσέγγισης των λύσεων των εξισώσεων του πεδίου ροής, αλλά και της 'μη πρακτικότητας' της χρήσης της μεθόδου checkpointing στα περιοδικά φαινόμενα. 'Μη πρακτικότητα' επειδή χρησιμοποιείται διπλάσια μνήμη από αυτήν που υποδεικνύεται από τον αριθμό των checkpoints, για την διπλή αποθήκευση των στιγμιότυπων που επέλεξε ο αλγόριθμος. Το τελευταίο απορρέει εξαιτίας της περιοδικότητας του φαινομένου, καθώς χρειάζεται για την επίλυση των συζυγών εξισώσεων η αναπαραγωγή του για μερικές περιόδους ώστε να περάσει από την μεταβατική στην μόνιμη κατάσταση.

Για την περίπτωση της μη περιοδικής χρονικής μεταβολής του πεδίου ροής δεν μπορεί εκ του ασφαλούς να προταθεί η χρήση του προσεγγιστικού μοντέλου Fourier, ασχέτως των καλών αποτελεσμάτων της εφαρμογής του στην παρούσα διπλωματική εργασία. Αυτό επειδή η ακρίβεια της προσέγγισης πέρα των αριθμό των αρμονικών συχνοτήτων  $N_H$ , εξαρτάται και από το είδος της χρονικής μεταβολής.

Προτείνεται για μελλοντική εργασία η διερεύνηση της χρήσης του προσεγγιστικού μοντέλου Fourier για μη-περιοδικές χρονικές μεταβολές και επέκταση του για την γενικοποίηση της εφαρμογής του για οποιαδήποτε περίπτωση χρονικής μεταβολής.

## Βιβλιογραφία

1. Λεξικό της κοινής νεοελληνικής. [συγγρ. βιβλίου] Ινστιτούτο νεοελληνικών σπουδών, Ίδρυμα Μανόλη Τριανταφυλλίδη Α.Π.Θ. *Λεξικό της κοινής νεοελληνικής*. 2009.
2. **C. F. Gerald, P. O. Wheatley.** *Applied Numerical Analysis (7th Edition)*. 2004.
3. **K.X. Γιαννάκογλου, Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.** *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική (4η έκδοση)*. Αθήνα, 2006.
4. **V.G. Asouti, K.C. Giannakoglou.** *Aerodynamic Optimization Using a Parallel Asynchronous Evolutionary Algorithm Controlled by Strongly Interacting*. s.l. : Engineering Optimization, Vol. 41, No. 3, pp. 241-257, 2009.
5. **Β. Ασούτη.** *Μέθοδοι αεροδυναμικής ανάλυσης και σχεδιασμού για ροές υψηλών και χαμηλών ταχυτήτων, σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον. Διδακτορική διατριβή Ε.Μ.Π..* Αθήνα, 2009.
6. **Σ. Κυριάκου.** *Μέθοδοι Σχεδιασμού-Βελτιστοποίησης στις Στροβιλομηχανές βασισμένες στους Εξελικτικούς Αλγορίθμους. Διδακτορική διατριβή Ε.Μ.Π..* 2013.
7. **W. Squire, G. Trap.** *Using Complex Variables to Estimate Derivatives of Real Functions. Society for Industrial and Applied Mathematics.* 1988.
8. **I.X. Μυραλίδη.** *Η διακριτή και η συνεχής συζυγής μέθοδος για τον υπολογισμό πρώτων και δεύτερων παραγώγων ευαισθησίας. Εφαρμογές στον αντίστροφο σχεδιασμό αγωγού. Διπλωματική εργασία Ε.Μ.Π..* 2008.
9. **Δ. Παπαδημητρίου.** *Συζυγείς (Adjoint) Διατυπώσεις για την ανάλυση - σχεδίαση πτερυγώσεων στροβιλομηχανών και τη βέλτιστη προσαρμογή πλέγματος με a posteriori εκτίμηση σφάλματος. Διδακτορική διατριβή Ε.Μ.Π..* 2007.
10. **N. K. Yamaleev, B. Diskin, E. J. Nielsen.** *Local-in-time Adjoint-based Method for Design Optimization of Unsteady Compressible Flows.* 2009.
11. **Ε. Παπουτσής-Κιαχαγιάς.** *Συζυγείς Μέθοδοι για το Στιβαρό Σχεδιασμό Αεροδυναμικών Μορφών, με Υπολογισμό Τρίτων Παραγώγων, εφαρμογή σε Μονοδιάστατους Αγωγούς. Διπλωματική εργασία Ε.Μ.Π..* 2009.
12. **A. Griewank.** *Achieving logarithmic growth of temporal and spatial complexity in reverse automatic differentiation.* Illinois : Mathematics and computer science, 1992.

13. **Q. Wang, P. Moin.** *Minimal repetition dynamic checkpointing algorithm for unsteady adjoint calculation.* s.l. : Center for Turbulence Research Annual Research Briefs, 2008.
14. **A. Walther, A. Griewank.** Algorithm 799: Revolve: An Implementation of Checkpointing for the Reverse or Adjoint Mode of Computational Differentiation. *ACM Transactions on Mathematical Software.* 2000, volume 26, 1.
15. **N. Nikitin.** *Third-order-accurate semi-implicit Runge-Kutta scheme for incompressible Navier-Stokes equations.* (www.interscience.wiley.com), 2005, volume 51, pages 221-233.
16. **U. Mayer, R.P. Dwight.** *A Fourth Order Semi-Implicit Runge-Kutta Method for the Compressible Euler Equations.* 2007.
17. **A. Τάτσης.** *Βελτιστοποίηση αεροδυναμικής μορφής σε χρονικά μη-μόνιμες ροές με τη συνεχή συζυγή μέθοδο και checkpointing.* Διπλωματική εργασία Ε.Μ.Π.. 2012.
18. **J.W. Brown, R. Churchill.** *Fourier Series and Boundary Value Problems(5th edition).* 1993.
19. **E. Chu, A. George.** *Inside the FFT Black Box: Serial and parallel fast Fourier transform algorithms.* 2000.
20. **Γ. Κανέλλης.** *Θεμελίωση και προγραμματισμός της μεθόδου της ισορροπίας των αρμονικών στην αριθμητική επίλυση περιόδων πεδίων ροής.* Διπλωματική εργασία Ε.Μ.Π.. 2011.
21. **Α.Δ. Λαμπρόπουλος.** *Προγραμματισμός της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών για χρονικά περιοδικές στρωτές ροές.* Διπλωματική εργασία Ε.Μ.Π.. 2012.
22. **Α. Γιώτης.** *Χρήση εξελικτικών τεχνικών, υπολογιστικής ευφυΐας και μεθόδων υπολογιστικής ρευστομηχανικής στη βελτιστοποίηση - αντίστροφη σχεδίαση πτερυγώσεων στροβιλομηχανών, μέσω παράλληλης επεξεργασίας.* Διδακτορική διατριβή Ε.Μ.Π.. 2003.