



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Δημιουργία Υποδομής για την Πρόλεξη Ροής σε
Στροβιλομηχανές Κύλισης χρησιμοποιούμενες σε
Υπερκρίσιμους Οργανικούς Κύκλους Rankine.
Προγραμματισμός Λογισμικού
Ανάλυσης-Βελτιστοποίησης των παραπάνω Κύκλων.

Διπλωματική Εργασία

Σαμούχος Κωνσταντίνος

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου , Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2013

στην οικογένειά μου

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας αυτή τη διπλωματική εργασία αισθάνομαι την ανάγκη να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε κάποιους ανθρώπους, των οποίων η συμβολή ήταν καθοριστικής σημασίας καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησής της. Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της παρούσας εργασίας, κύριο Κυριάκο Γιαννάκογλου, ο οποίος μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ με άκρως ενδιαφέροντα επιστημονικά θέματα. Επίσης, τον ευχαριστώ για το χρόνο που διέθεσε από την διατύπωση του θέματος της εργασίας μέχρι και την επιμελή διόρθωσή της.

Επιπροσθέτως, ευχαριστώ πολύ τους κύριους Δημήτρη Μανωλάκο, Λέκτορα στο Τμήμα Αξιοποίησης Φυσ. Πόρων & Γεωργ. Μηχανικής, Αγροτικών Κατασκευών & Γεωργικής Μηχανολογίας του Γεωπονικού Πανεπιστημίου Αθηνών, και Δρ. Γιώργο Κοσμάκη, για την παροχή βοήθειας και λοιπού υλικού σε θέματα κύκλων ORC.

Επιπλέον, ευχαριστώ θερμά όλα τα μέλη της ΜΠΥΡ&Β του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών, των οποίων η συμβολή στην εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας είναι αδιαμφισβήτητη. Ιδιαίτερα ευχαριστώ τη Δρ. Ευγενία Κοντολέοντος, η οποία διέθεσε πολύτιμο χρόνο και συνέβαλε ουσιαστικά στην ολοκλήρωση ενός μεγάλου μέρους αυτής της εργασίας. Επίσης, την ευχαριστώ για τη συμπαράστασή της, τις συμβουλές της και την ώθηση που μου έδωσε στο δύσκολο ξεκίνημα της εργασίας. Επιπροσθέτως, ευχαριστώ τον υποψήφιο διδάκτορα Κωνσταντίνο Τσιάκα και τους διδάκτορες Βαρβάρα Ασούτη και Ξενοφώντα Τρομπούκη, οι οποίοι ήταν πάντα πρόθυμοι να βοηθήσουν παρά το ιδιαίτερα βεβαρημένο ημερήσιο πρόγραμμα τους. Θα ήταν παράλειψη να μην ευχαριστήσω τους υποψήφιους διδάκτορες Γιάννη Καββαδία και Βαγγέλη Παπουτσή-Κιαχαγιά και τη συμφοιτήτριά μου Παυλίνα Χούντα για τις πολύτιμες συμβουλές τους αλλά και για την ευχάριστη συντροφιά τους.

Με αφορμή την ολοκλήρωση όχι μόνο της διπλωματικής εργασίας αλλά και της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου, που ανέκαθεν με στήριζε με όλους τους δυνατούς τρόπους υπομένοντας πολλές στερήσεις και μου προσέφερε τη δυνατότητα να ακολουθήσω τα όνειρά μου. Συγκεκριμένα ευχαριστώ τον παππού μου Χρήστο, τη γιαγιά μου Ελένη, τον πατέρα μου Δημήτρη, τη μητέρα μου Ειρήνη και τον αδελφό μου Χρήστο, οι οποίοι με καθόρισαν ως προσωπικότητα και με καθοδήγησαν σωστά όλα αυτά τα χρόνια.

Τέλος, ευχαριστώ θερμά τους Γιάννη Στασινόπουλο, Κίμωνα Βελιτζανίδη, Παναγιώτη Μελέτη και Κωνσταντίνο Ζάρναρη για όλη την υποστήριξη που μου προσέφεραν, όποτε την είχα ανάγκη, και για τη συντροφιά τους σε ευχάριστες αλλά και δύσκολες καταστάσεις.



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ
ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Δημιουργία Υποδομής για την Πρόλεξη Ροής σε Στροβιλομηχανές Κύλισης χρησιμοποιούμενες σε Υπερκρίσιμους Οργανικούς Κύκλους Rankine

Σαμούχος Κωνσταντίνος

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ
Αθήνα, Ιούλιος 2013

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία αφορά τη θερμοδυναμική ανάλυση και βελτιστοποίηση μιας εγκατάστασης παραγωγής ενέργειας η οποία λειτουργεί σύμφωνα με τον υπερκρίσιμο οργανικό κύκλο Rankine (ORC) και την περαιτέρω «εμβάθυνση» στη λειτουργία της στροβιλομηχανής κύλισης (Scroll), που χρησιμοποιείται σε αυτήν. Η εμβάθυνση φτάνει ένα βήμα πριν την πρόλεξη των χρονικά μη-μόνιμων πεδίων ροής μέσα στη μηχανή κύλισης με λογισμικό Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (Computational Fluid Dynamics, CFD). Η πλήρης αναλυτική περιγραφή της γεωμετρίας, της κίνησής τους, των χρονικά μεταβαλλόμενων σημείων επαφής τους αλλά και η διαδικασία γένεσης μη-δομημένου πλέγματος αποτελούν βασικά στοιχεία της παρούσας εργασίας.

Στην πρώτη φάση της εργασίας, πραγματοποιείται η θερμοδυναμική ανάλυση κάθε συνιστώσας της εγκατάστασης (συμπιεστής, ατμοποιητής, στρόβιλος, συμπυκνωτής) με σκοπό τον υπολογισμό του ολικού βαθμού απόδοσής της. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται ο σχεδιασμός και η βελτιστοποίηση μιας τυπικής τέτοιας διάταξης με χρήση εξελικτικών αλγορίθμων, με σκοπό την αύξηση της απόδοσής της και τη μείωση του κόστους.

Στη δεύτερη φάση της εργασίας, αναπτύσσεται το μαθηματικό μοντέλο περιγραφής της γεωμετρίας του στροβίλου Scroll. Αποδεικνύονται όλες οι σχέσεις που περιγράφουν τη γεωμετρία της μηχανής και προτείνεται ο τρόπος παραμετροποίησής της για χρήση κατά τη βελτιστοποίηση μορφής.

Στη συνέχεια, εντοπίζονται τα χωρία που σχηματίζονται κατά τη λειτουργία του Scroll και είναι υπεύθυνα για την αποτόνωση του ρευστού και την παραγωγή έργου. Εκτελείται η απαραίτητη γεωμετρική επεξεργασία τους και επιχειρείται γένεση μη-δομημένων πλεγμάτων σε αυτά. Επιπροσθέτως, δίνεται έμφαση στην παραμόρφωση, με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων, του δημιουργηθέντος πλέγματος κατά τη λειτουργία της μηχανής και αναλύονται διάφορες τεχνικές για τη βελτίωση της ποιότητάς του. Προ-

γραμματίζεται λογισμικό ικανό να εκτελεί την παραπάνω μοντελοποίηση και το οποίο οδηγεί στα τελικά χρονικά μεταβαλλόμενα πλέγματα.

Τέλος, πιστοποιείται έμμεσα η ορθότητα των παραπάνω τεχνικών, καθώς εφαρμόζονται στην περίπτωση ενός γεωμετρικά απλούστερου χρονικά μεταβαλλόμενου πεδίου ροής, με αποτέλεσμα την επιτυχή αριθμητική επίλυση των εξισώσεων συνεκτικής ροής σε αυτό. Εκτιμάται ότι, με την ολοκλήρωση της εργασίας αυτής έχει πλέον ανοίξει ο δρόμος για την ανάλυση των μηχανών κύλησης με χρήση κωδίκων CFD, η οποία έτσι κι αλλιώς είναι ιδιαίτερα σπάνια στη βιβλιογραφία.



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING
FLUIDS DEPARTMENT
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

Development of the Computational Tools for the Flow Simulation into Scroll Turbomachines, used in Supercritical Organic Rankine Cycles. Programming of Analysis-Optimization Software for the above Cycles.

Samouchos Konstantinos

Advisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, July 2013

Abstract

This diploma thesis is concerned with the thermodynamic analysis and optimization of a power production system, which operates according to the Supercritical Organic Rankine Cycle. An important component of the ORC installation is Scroll expander, the shape and operation of which is thoroughly scrutinized. This diploma thesis goes up to a step before employing a CFD code for the flow prediction in the Scroll expander; it includes the analytical description of the Scroll geometry, its motion, the time-varying contact points of the two spirals and, of course, the generation of unstructured grid for the flow simulation.

In the first phase of this work, the thermodynamical analysis of all components (compressor, evaporator, expander, condenser) is presented and software to compute its total efficiency is programmed. The design-optimization of such a device is performed based on Evolutionary Algorithms. The optimization targets are maximum efficiency and minimum cost.

In the second phase of this work, the mathematical model, of the Scroll geometry, is developed. The equations describing its geometry are presented, along with proofs whenever this is necessary, and the geometry parameterization for use in the corresponding shape optimization is provided. The domains created during Scroll's functioning are identified; these are responsible for the expansion of the working fluid and the energy production. Additionally, emphasis was laid to the deformation, via the torsional spring method, of the firstly generated grid and different techniques are analyzed, for improving its quality. Software for the above tasks was programmed and used.

Finally, a demonstration of the whole modeling in a simple case of a shape varying enclosure is performed, using in-house CFD codes for viscous flows. The final outcome of this diploma thesis is, in fact, a prerequisite for the CFD analysis of the Scroll expander.

Ακρωνύμια

ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΕΘΣ	Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
ΜΠΥΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική

CFD	Computational Fluid Dynamics
NTUA	National Technical University of Athens
ORC	Organic Rankine Cycle

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
1 Εισαγωγή	1
2 Θερμοδυναμική ανάλυση και βελτιστοποίηση οργανικού κύκλου Rankine	5
2.1 Περιγραφή της διάταξης ενός υπερκρίσιμου κύκλου Rankine	6
2.2 Θερμοδυναμική ανάλυση του οργανικού κύκλου Rankine	9
2.3 Υπολογισμός και βελτιστοποίηση ενός υπερκρίσιμου ORC σε πραγματικές συνθήκες	20
2.3.1 Διατύπωση και θερμοδυναμική ανάλυση του προβλήματος	21
2.3.2 Βελτιστοποίηση του υπερκρίσιμου ORC	28
3 Γεωμετρία του Scroll	33
3.1 Εξειλιγμένη καμπύλης	35
3.2 Η θεωρία της εξειλιγμένης εφαρμοσμένη στη μηχανή Scroll	38
3.3 Γεωμετρία της εσωτερικής και εξωτερικής περιοχής του Scroll	46
3.4 Σημεία επαφής του δρομέα με το στάτη.	54
4 Γένεση πλέγματος στα μεταβαλλόμενα χωρία του Scroll	67
4.1 Στρατηγική δημιουργίας πλέγματος	67
4.2 Παραμόρφωση πλεγμάτων με τη μέθοδο των ελατηρίων	69
4.3 Εφαρμογή της μεθόδου των ελατηρίων στο Scroll	75
4.3.1 Γένεση αρχικού πλέγματος	75
4.3.2 Παραγωγή πλέγματος σε όλα τα χωρία του Scroll	82

4.4	Αποτελέσματα της μεθόδου των ελατηρίων στο Scroll	89
5	Παράδειγμα επίλυση της ροής σε πλέγμα δημιουργημένο με τη μέθοδο των ελατηρίων.	105
5.1	Παρουσίαση του προβλήματος. Επίλυση της ροής.	106
6	Ανακεφαλαίωση, συμπεράσματα και προτάσεις για περαιτέρω μελέτη	109
	Βιβλιογραφία	113

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας στη σύγχρονη εποχή αποτελεί ένα μείζον τεχνολογικό πρόβλημα. Καθώς οι ανάγκες του ανθρώπου αυξάνονται, αναζητούνται συνεχώς νέες πηγές και νέες μέθοδοι παραγωγής ενέργειας. Οι περισσότερες από τις μεθόδους μαζικής παραγωγής ηλεκτρικής ισχύος, έχουν βλαπτικές περιβαλλοντικές επιπτώσεις, με αντίκτυπο στην καθημερινή ζωή των ανθρώπων. Για το λόγο αυτό, τα τελευταία χρόνια υπάρχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την εύρεση νέων μεθόδων, περισσότερο φιλικών προς το περιβάλλον. Οι τεχνολογίες, οι οποίες αναπτύσσονται σε αυτόν τον τομέα έχουν ως στόχο όχι μόνο την ολοένα και μεγαλύτερη αξιοποίηση των ανανεώσιμων πηγών ενέργειας, αλλά και τη βελτίωση των υπάρχοντων παλαιού τύπου εγκαταστάσεων. Μια σχετικά νέα ιδέα, που υλοποιείται τα τελευταία χρόνια που καλύπτει και τους δυο προαναφερθέντες στόχους είναι η εκμετάλλευση ενέργειας από εγκαταστάσεις, που λειτουργούν με βάση τον οργανικό κύκλο Rankine (Organic Rankine Cycle) ή εν συντομία ORC.

Οι εγκαταστάσεις ORC αποτελούν απλές διατάξεις, στις οποίες η ενέργεια εισέρχεται με τη μορφή θερμότητας και εξέρχεται με τη μορφή ηλεκτρικού ρεύματος. Η θερμότητα είναι από τις πιο κοινές μορφές ενέργειας, δίνοντας τη δυνατότητα χρήσης των εγκαταστάσεων αυτών σε πλείστες εφαρμογές. Η πηγή θερμότητας προέρχεται συνήθως από ηλιακή ενέργεια, γεωθερμία ή βιομάζα. Επίσης, είναι δυνατή η αξιοποίηση μη-ανανεώσιμων πηγών ενέργειας, όπως θερμικών απωλειών μεγάλων λιγνιτικών εγκαταστάσεων. Η μεγαλύτερη θερμική απώλεια των εργοστασίων αυτών είναι η εκπομπή θερμών καυσαερίων στο περιβάλλον. Με την εκμετάλλευση αυτής της θερμότητας, με σκοπό την περαιτέρω παραγωγή ενέργειας, αυξάνεται ο βαθμός απόδοσης των λιγνιτικών σταθμών. Χαρακτηριστικό μέγεθος των εγκαταστάσεων ORC είναι η ελάχιστη τιμή της θερμοκρασίας της πηγής θερμότητας, την οποία μπορούν να εκμεταλλευτούν. Όσο μικρότερη είναι αυτή η τιμή, τόσο αυξάνουν οι δυνατότητες χρήσης τέτοιων εγκαταστάσεων. Έτσι, η δυνατότητα εκμετάλλευσης πηγών θερμότητας με θερμοκρασία μικρότερη των 100°C αποτελεί μεγάλο πλεονέκτημα των εγκαταστάσεων ORC.

Μια εγκατάσταση ORC αποτελείται από τέσσερις κύριες συνιστώσες συνδεδεμένες στη σειρά, το συμπιεστή, τον ατμοποιητή, το στρόβιλο και τον συμπυκνωτή. Μέσα από αυτές τις μηχανές ρέει ένα οργανικό μέσο, το οποίο μπορεί να είναι κάποιο ψυκτικό υγρό. Η εισαγωγή της θερμότητας στην εγκατάσταση γίνεται μέσω του ατμοποιητή, αυξάνοντας την ενθαλπία του οργανικού μέσου, που τον διαρρέει. Στις υπάρχουσες τεχνολογίες το οργανικό μέσο εντός του ατμοποιητή βρίσκεται σε υποκρίσιμη κατάσταση. Όμως, η απόδοση των μηχανών ORC μπορεί να αυξηθεί πάνω από 20 %, εάν υπάρχει η δυνατότητα της δημιουργίας υπερκρίσιμου ρευστού κατά την πρόσδοση θερμότητας σε αυτό. Το γεγονός αυτό, απαιτεί ιδιαίτερη τεχνογνωσία και έρευνα γύρω από τη μεταφορά θερμότητας σε υπερκρίσιμες ροές. Η αυξημένη τους απόδοση και η σχετικά απλή κατασκευή των υπερκρίσιμων μηχανών τις κάνει ιδιαίτερα προσφιλείς για εμπορική χρήση, ιδιαίτερα στην περίπτωση όπου είναι ικανές να εκμεταλλευτούν πηγές θερμότητας χαμηλής θερμοκρασίας.

Η μελέτη των παραπάνω μηχανών αποτελεί το αντικείμενο του δεύτερου κεφαλαίου της παρούσας πτυχιακής εργασίας. Στην πρώτη ενότητα αυτού του κεφαλαίου περιγράφεται διεξοδικά η εγκατάσταση ενός υπερκρίσιμου ORC και εξηγείται η αρχή λειτουργίας του. Στη συνέχεια ακολουθεί η θερμοδυναμική ανάλυση του κύκλου, στη οποία όλες οι μηχανές, που λαμβάνουν μέρος σε αυτόν θεωρούνται ως black-box. Αυτό εξυπηρετεί τη μελέτη της εγκατάστασης σε μακροσκοπικό επίπεδο και τη διατύπωση των εξισώσεων που οδηγούν στον υπολογισμό της παραγόμενης ενέργειας και του συνολικού βαθμού απόδοσης της εγκατάστασης. Αφού παρουσιαστεί όλο το θεωρητικό υπόβαθρο εφαρμόζεται στη μελέτη μιας υπό κατασκευή μηχανής σε πραγματικές συνθήκες. Στην ενότητα αυτή γίνεται ένας πρώτος σχεδιασμός τέτοιων μηχανών γενικής χρήσης. Η επιλογή των παραμέτρων σχεδιασμού γίνεται με σκοπό την όσο το δυνατόν καλύτερη προσομοίωση της πραγματικότητας. Τέλος, εκτελείται η βελτιστοποίηση της συγκεκριμένης μηχανής με σκοπό την αύξηση του βαθμού απόδοσής της με την παράλληλη μείωση του κόστους κατασκευής της.

Η περαιτέρω ανάλυση και βελτιστοποίηση της μηχανής ORC απαιτεί τη μελέτη κάθε συσκευής, που λαμβάνει μέρος στη διαδικασία παραγωγής ενέργειας. Η συσκευή, που επιδέχεται τις περισσότερες βελτιώσεις και έχει μεγάλη επίδραση στο συνολικό βαθμό απόδοσης της μηχανής, είναι ο στρόβιλος. Ένα είδος στροβίλου χρησιμοποιούμενο συχνά για τέτοιες εφαρμογές είναι η στροβιλομηχανή κύλησης ή αλλιώς Scroll [1, 2, 3]. Η μηχανή αυτή χρησιμοποιείται κυρίως ως συμπιεστής. Το Scroll διαφέρει έντονα από τις υπόλοιπες στροβιλομηχανές, καθώς δεν αποτελείται από περιστρεφόμενα πτερύγια. Η αρχή λειτουργίας του βασίζεται στο γεγονός ότι, όταν ένα ρευστό υψηλής ενεργειακής στάθμης εγκλωβιστεί εντός ενός κλειστού χώρου, δύναται να μετατοπίσει τα τοιχώματά του αυξάνοντας τον όγκο του και παράγοντας έργο. Αυτή ακριβώς τη δυνατότητα προσφέρει η μηχανή Scroll. Το ρευστό εισάγεται σε αυτήν και παγιδεύεται εντός ενός κλειστού χώρου. Στην προσπάθειά του το ρευστό να μετακινήσει τα τοιχώματα του χώρου αυτού, ασκεί ροπή σε μια περιστρεφόμενη άτρακτο. Όσο αυξάνει ο όγκος του χωρίου, τόσο περιστρέφεται η άτρακτος. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου επιτραπεί η έξοδος του χαμηλής πλέον ενεργειακής στάθμης ρευστού από το χωρίο. Ταυτόχρονα μια νέα ποσότητα ρευστού εισάγεται στο στρόβιλο και η διαδικασία

επαναλαμβάνεται. Το Scroll παρουσιάζει πολλά πλεονεκτήματα στη διαχείριση μικρών ποσοτήτων ισχύος σε σχέση με τους κλασικούς στροβίλους. Αρχικά, η κατασκευή του είναι απλούστερη και φτηνότερη. Επίσης, το μέγεθός του είναι μικρό. Η λειτουργία του είναι πιο σταθερή, δεν πάσχει από ταλαντώσεις και δεν κάνει θόρυβο σε σχέση με τους στροβίλους, που έχουν πτερύγια. Ο ισεντροπικός βαθμός είναι περίπου 0.85 όσο και ο ηλεκτρομηχανικός. Τέλος, η συντήρησή ενός εκτονωτή Scroll είναι αρκετά ευκολότερη και πιο οικονομική. Οι παραπάνω λόγοι τους καθιστούν ιδανικούς για την εφαρμογή σε εγκαταστάσεις ORC, όπου επιθυμείται συνήθως να παραμένουν μικρές σε μέγεθος και οικονομικά συμφέρουσες.

Το πρώτο βήμα για τη μελέτη του Scroll είναι η μαθηματική μοντελοποίηση της γεωμετρίας του. Το Scroll που μελετάται αποτελείται από σύνθεση καμπυλών οι οποίες επιδέχονται ακριβείς αναλυτικές εκφράσεις. Η κυρίαρχη καμπύλη της μηχανής είναι η εξειλιγμένη κύκλου ενώ οι άλλες είναι κύκλοι και ευθύγραμμα τμήματα. Οι καμπύλες αυτές συνιστούν δύο έλικες, οι οποίες συνεργάζονται για να δημιουργήσουν τα χωρία που προαναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Στο κεφάλαιο 3, αποδεικνύονται οι αναλυτικές εκφράσεις των πιο πάνω καμπυλών και αποτυπώνονται σε μαθηματικές σχέσεις όλες οι χρήσιμες ιδιότητες της μηχανής για την περαιτέρω ανάλυση. Αποτέλεσμα αυτής της ανάλυσης είναι η παραμετροποίηση της γεωμετρίας των ελίκων, έτσι ώστε να είναι δυνατή η μελέτη οποιασδήποτε μηχανής αυτού του είδους. Στο τέλος του κεφαλαίου δίνεται έμφαση στον ακριβή υπολογισμό της γεωμετρίας των χωρίων εγκλωβισμού του ρευστού, κάτι που είναι απαραίτητο για οποιαδήποτε μετέπειτα ανάλυση.

Η εύρεση του πεδίου ροής μέσα στο Scroll μπορεί να γίνει με ποικίλες αριθμητικές μεθόδους. Μια από αυτές είναι η δημιουργία πλέγματος και η διακριτοποίηση των εξισώσεων Navier-Stokes στους κόμβους του πλέγματος. Ακολουθώντας τη μέθοδο αυτή εξετάζεται στο κεφάλαιο 4 η δυνατότητα γένεσης πλέγματος εντός των χωρίων του Scroll. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται όλα τα προβλήματα που προκύπτουν λόγω της ιδιαίτερης και απαιτητικής γεωμετρίας των χωρίων. Επίσης, εξετάζεται η δυνατότητα παραμόρφωσης των πλεγμάτων σύμφωνα με τις αλλαγές σχήματος του περιγράμματος. Το αποτέλεσμα της ανάλυσης αυτού του κεφαλαίου είναι η αφενός η προετοιμασία των χωρίων του Scroll για να μπορέσει να πραγματοποιηθεί η γένεση πλέγματος και αφετέρου η δημιουργία πλέγματος υψηλής ποιότητας σε καθένα από αυτά.

Μετά από τις εργασίες που γίνονται στο κεφάλαιο 4, είναι πλέον εφικτή η ρευστοδυναμική ανάλυση της μηχανής. Λόγω της μεγάλης ιδιαιτερότητας της γεωμετρίας της, εξετάζεται στο κεφάλαιο 5, μια απλούστερη γεωμετρία ενός παραμορφούμενου τετραπλεύρου. Το απλό αυτό μοντέλο επιλέχθηκε λόγω της μεγάλης ομοιότητας του, από άποψη δυσκολιών της επίλυσης της ροής και απαιτήσεων σε λογισμικό, με τα χωρία του Scroll. Στη νέα αυτή γεωμετρία εφαρμόζονται οι τεχνικές πλεγματοποίησης, που αναλύονται στο κεφάλαιο 4. Στη συνέχεια εκτελείται η επίλυση της ροής με οικείο λογισμικό και αξιολογούνται τα αποτελέσματα. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται φανερό πόσο αξιόπιστα αποτελέσματα εξάγει η μέθοδος γένεσης και παραμόρφωσης πλέγματος, που εφαρμόστηκε στο Scroll. Με αυτή τη δοκιμή φαίνεται πλέον η ικανότητα των

υπολογιστικών εργαλείων να αντιμετωπίσουν την περίπλοκη γεωμετρία του Scroll. Η ρευστοδυναμική ανάλυση της μηχανής ξεφεύγει από το πλαίσιο αυτής της εργασίας, καθώς έχει σκοπό τη δημιουργία ή τον έλεγχο όλων των οικείων λογισμικών στη δυνατότητά τους να αναλύσουν τη ροή εντός του στρόβιλου.

Συμπερασματικά, η παρούσα διπλωματική εργασία οργανώνεται στα παρακάτω κεφάλαια. Στο κεφάλαιο 2 γίνεται η θερμοδυναμική ανάλυση των εγκαταστάσεων ηλεκτροπαραγωγής, οι οποίες εργάζονται σύμφωνα με τον οργανικό κύκλο Rankine. Στη συνέχεια, φαίνεται ο αρχικός σχεδιασμός και η βελτιστοποίηση μια τέτοιας μονάδας. Στο κεφάλαιο 3 η προσοχή εστιάζεται στο στρόβιλο αυτής της εγκατάστασης, το Scroll, όπου γίνεται η γεωμετρική του ανάλυση και αποδεικνύονται χρήσιμες σχέσεις που αποτυπώνουν τη λειτουργία του. Στο κεφάλαιο 4 γίνεται η προετοιμασία των χωρίων για τη γένεση πλέγματος σε αυτά. Επίσης, εξετάζεται η δυνατότητα παραμόρφωσης των πλεγμάτων χωρίς να μειώνεται η ποιότητά τους. Τέλος στο κεφάλαιο 5 πραγματοποιείται η ρευστοδυναμική επίλυση της ροής σε μια απλούστερη, παρόμοια περίπτωση με αυτήν του Scroll, ώστε (τουλάχιστον εν μέρει) να διαπιστωθεί η χρησιμότητα της μεθόδου δημιουργίας πλέγματος, που παρουσιάζεται στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 2

Θερμοδυναμική ανάλυση και βελτιστοποίηση οργανικού κύκλου Rankine

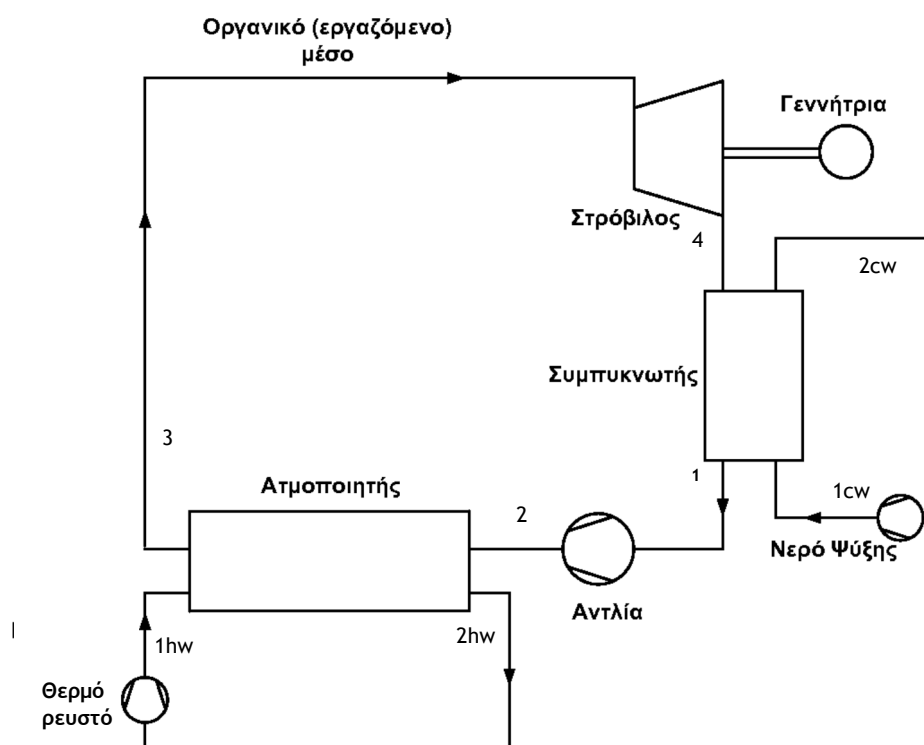
Στο παρόν κεφάλαιο περιγράφεται λεπτομερώς η διάταξη ενός οργανικού κύκλου Rankine και πραγματοποιείται η θερμοδυναμική ανάλυση της κάθε συνιστώσας του αναφέροντας τις αντίστοιχες εξισώσεις. Ύστερα, αναλύεται μια πραγματική εγκατάσταση ηλεκτροπαραγωγής. Στη συνέχεια, αναπτύσσεται η μέθοδος επίλυσής της και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων. Τέλος, αναλύεται η διαδικασία βελτιστοποίησης του κύκλου ως προς διάφορους στόχους, οι οποίοι έχουν άμεσο πρακτικό και οικονομικό αντίκτυπο. Για τα ανωτέρω, προγραμματίζεται λογισμικό ανάλυσης θερμοδυναμικών κύκλων, ώστε να πραγματοποιηθεί η ανάλυση σε οικείο-ελεγχόμενο και όχι με εμπορικό λογισμικό. Πιο αναλυτικά, στο πρώτο κεφάλαιο, περιγράφεται μια κλασική διάταξη οργανικού κύκλου, αναφέρονται οι συσκευές, που τον αποτελούν και το έργο, που επιτελούν. Επίσης εξηγείται συνεργασία των επιμέρους συσκευών με σκοπό την παραγωγή ηλεκτρικού ρεύματος. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι μαθηματικές εκφράσεις, που μοντελοποιούν την κάθε συνιστώσα του θερμοδυναμικού κύκλου και αναφέρονται όλες οι εξισώσεις, που απαιτούνται, για τη θερμοδυναμική επίλυση ενός οργανικού κύκλου Rankine [4, 5]. Στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζεται η ανάλυση και σχεδιασμός μιας πραγματικής εγκατάστασης. Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου χρησιμοποιείται η θεωρία της θερμοδυναμικής, που αναλύεται στο αντίστοιχο κεφάλαιο, έτσι ώστε να καθοριστούν όλες οι συνιστώσες της διάταξης. Στο δεύτερο μέρος, παρουσιάζεται η μέθοδος βελτιστοποίησης στο σχεδιασμό της εγκατάστασης, έτσι ώστε να έχει ικανοποιητική απόδοση με ταυτόχρονα χαμηλό κόστος κατασκευής.

2.1 Περιγραφή της διάταξης ενός υπερκρίσιμου κύκλου Rankine

Ο οργανικός κύκλος Rankine (ORC) αποτελεί ένα θερμοδυναμικό κύκλο, ο οποίος χρησιμοποιεί μια χαμηλής έντασης πηγή θερμότητας με σκοπό την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας. Όπως αναφέρεται και στο προηγούμενο κεφάλαιο, η θερμότητα προέρχεται από κάποια ανανεώσιμη πηγή ενέργειας. Αυτή μπορεί να είναι ηλιακή ενέργεια, γεωθερμία, θερμά καυσαέρια, τα οποία εκπέμπονται με τη μορφή πλουμίου από τις καμινάδες των εργοστασίων και άλλα. Η τελευταία περίπτωση μπορεί να μη θεωρείται 'ανανεώσιμη' με την ακριβή έννοια του όρου, αλλά διαθέτει, το πλεονέκτημα ότι τα θερμά καυσαέρια προϋπάρχουν, δηλαδή δεν παράγονται με σκοπό τη λειτουργία του οργανικού κύκλου και, αν δε χρησιμοποιηθούν από αυτόν, η θερμότητά τους θα παραμείνει ανεκμετάλλευτη.

Ο οργανικός κύκλος που μελετάται είναι δυαδικός, δηλαδή αποτελείται από δυο διαφορετικά κυκλώματα, όπου η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας γίνεται μόνο στο ένα. Ο κύκλος αυτός χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις όπου η παρεχόμενη σε αυτόν θερμότητα είναι αρκετά χαμηλή. Το ιδιαίτερο αυτό χαρακτηριστικό του κύκλου αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο προσδίδεται η θερμότητα σε αυτόν και αναλύεται, στη συνέχεια, διεξοδικά. Σε οποιοδήποτε κύκλο Rankine, που εκμεταλλεύεται κάποιας μορφής ενέργεια με σκοπό την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, απαιτείται μια πρώτη μετατροπή της σε θερμότητα, αποθηκευμένη σε κάποιο ρευστό, συνήθως το νερό. Για παράδειγμα, όταν η πηγή ενέργειας είναι η ηλιακή ακτινοβολία, χρησιμοποιούνται ηλιακοί συλλέκτες στους οποίους ζεσταίνεται νερό, για να χρησιμοποιηθεί, στη συνέχεια, σε έναν οργανικό κύκλο Rankine. Έτσι, θα θεωρείται ότι, οποιαδήποτε και αν είναι η αρχική πηγή ενέργειας, πάντα θα γίνεται η απαραίτητη διαδικασία, έτσι ώστε να προκύπτει διαθέσιμο θερμό νερό. Αν η θερμότητα που απορροφάται από το νερό είναι ικανή να το ατμοποιήσει, τότε είναι δυνατή η άμεση χρήση του από το στρόβιλο, με σκοπό την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας. Σε αντίθετη περίπτωση είναι απαραίτητη η προσαγωγή της θερμότητας από το νερό σε ένα άλλο ρευστό (εργαζόμενο μέσο), το οποίο δύναται να ατμοποιηθεί σε χαμηλότερες θερμοκρασίες. Το ρευστό αυτό στη συνέχεια μπορεί να αξιοποιηθεί από τον ORC, με σκοπό την ηλεκτροπαραγωγή, μέσω του στρόβιλου. Το εργαζόμενο μέσο μπορεί να είναι κάποιο ψυκτικό υγρό, το οποίο έχει χαμηλό σημείο ζέσης και υψηλή τάση ατμών σε χαμηλή θερμοκρασία. Συνεπώς, ατμοποιείται σε χαμηλότερες θερμοκρασίες από το νερό. Γνωστά τέτοια ψυκτικά μέσα είναι το R134a και το R410a. Παλαιότερα χρησιμοποιούνταν περισσότερο το ψυκτικό μέσο R12, αλλά κατηγορήθηκε για την επιδείνωση της κατάστασης της τρύπας του όζοντος και εγκαταλείφθηκε. Η μεταφορά της θερμότητας από το θερμό νερό στο ψυκτικό ρευστό γίνεται μέσω ενός εναλλάκτη (evaporator) Επομένως, ο οργανικός κύκλος Rankine που θα περιγραφεί, αποτελείται από δυο κυκλώματα, αυτό του θερμού νερού και αυτό του ψυκτικού υγρού ή αλλιώς εργαζόμενου μέσου.

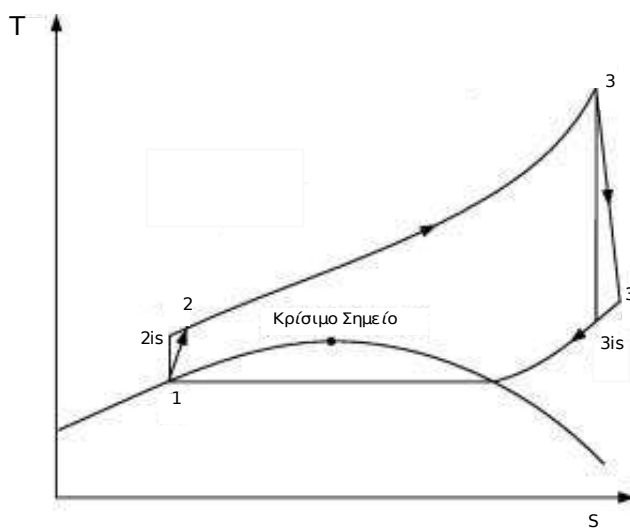
Το εργαζόμενο μέσο ξεκινά την εκτέλεση του θερμοδυναμικού κύκλου από την κατάσταση 1, ως υπόψυκτο ρευστό χαμηλής πίεσης και θερμοκρασίας της τάξης της μιας ατμόσφαιρας και $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με τον κύκλο Rankine, η πρόσδοση θερμότητας στο εργαζόμενο μέσο γίνεται σε υψηλή πίεση. Συνεπώς απαιτείται βοήθεια συμπιεστή, ο οποίος φέρνει το ρευστό στην κατάσταση 2. Το υψηλής πλέον πίεσης ρευστό εισέρχεται στον ατμοποιητή, σε αντιρροή με το θερμό νερό. Εκεί το νερό υψηλής ενεργειακής στάθμης μεταφέρει ένα μέρος της θερμότητάς του στο εργαζόμενο μέσο μεταβάλλοντάς τη φάση του, αυξάνοντάς την ενθαλπία του και μετατρέποντάς το πλήρως σε υπέρθερμο ατμό. Συνήθως προτιμάται ο τύπος του ατμοποιητή να είναι εναλλάκτης κελύφους αυλών. Αυτό συμβαίνει, επειδή η πίεση εντός του εναλλάκτη είναι πολύ υψηλή και οι πλακοειδείς εναλλάκτες δεν αντέχουν σε πιέσεις πάνω από 35 με 40 βαρ. Το υψηλού ενεργειακού περιεχομένου εργαζόμενο μέσο κατάστασης 3 εισέρχεται στο στρόβιλο, όπου αποτονώνεται εξαναγκάζοντάς τον να περιστραφεί. Ο στρόβιλος με τη σειρά του είναι συζευγμένος με γεννήτρια, ή οποία περιστρέφεται και παράγει ηλεκτρική ενέργεια. Το ψυκτικό μέσο κατάστασης 4, χαμηλής πίεσης και θερμοκρασίας, εισέρχεται στο συμπυκνωτή (condenser), για να αποβάλει θερμότητα σύμφωνα με το δεύτερο θερμοδυναμικό νόμο και να επανέλθει στην κατάσταση 1. Έτσι κλείνει ο θερμοδυναμικός κύκλος. Η όλη διάταξη του θερμοδυναμικού κύκλου παρουσιάζεται στο σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: Εγκατάσταση ενός οργανικού κύκλου Rankine

Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του οργανικού κύκλου Rankine που μελετάται, είναι το γε-

γονός ότι ο ατμοποιητής εργάζεται σε υπερκρίσιμη πίεση. Ο σχεδιασμός του ORC γίνεται με τέτοιο, τρόπο έτσι ώστε η αντλία να αυξάνει την πίεση του εργαζόμενου μέσου πάνω από την κρίσιμη πίεση του ψυκτικού μέσου που χρησιμοποιείται, όπως φαίνεται παραστατικά και στο σχήμα 2.2. Έτσι, η προσαγωγή θερμότητας, δηλαδή όλη η μεταβολή από την κατάσταση 2 στην κατάσταση 3, πραγματοποιείται χωρίς το ρευστό να περάσει από τη διφασική περιοχή. Το γεγονός αυτό είναι καθοριστικής σημασίας, καθώς αυξάνεται το ποσό ηλεκτρικής ενέργειας που παράγεται και βελτιώνεται ο βαθμός απόδοσης της εγκατάστασης. Όμως, απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή στο σωστό υπολογισμό και σχεδιασμό του ατμοποιητή. Λόγω του γεγονότος ότι στον ατμοποιητή πραγματοποιείται αλλαγή της φάσης του εργαζόμενου μέσου, και μάλιστα αιφνιδίως, χρησιμοποιείται εναλλάκτης κελύφους αυλών. Σε αυτούς τους εναλλάκτες το προς θέρμανση εργαζόμενο μέσο κινείται μέσα σε αυλούς, οι οποίοι περικλείονται εντός κελύφους στο οποίο ρέει το θερμό νερό. Αντίθετα, για το συμπυκνωτή χρησιμοποιείται πλακοειδής εναλλάκτης, λόγω της υψηλής απόδοσής του, καθώς φέρει τα δυο ρευστά σε στενή συνεργασία παρέχοντας παράλληλα μεγάλη επιφάνεια συναλλαγής. Στις περισσότερες εγκαταστάσεις, ως ψυκτικό μέσο χρησιμοποιείται νερό χαμηλής θερμοκρασίας, το οποίο εισέρχεται στον εναλλάκτη σε αντιροή. Το νερό αυτό είναι συνήθως σε αφθονία, καθιστώντας το ένα φτηνό μέσο ψύξης.



Σχήμα 2.2: Θερμοδυναμική απεικόνιση ενός υπερκρίσιμου οργανικού κύκλου Rankine. Πραγματικές και ισεντροπικές μεταβολές.

2.2 Θερμοδυναμική ανάλυση του οργανικού κύκλου Rankine

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματοποιείται η θερμοδυναμική μελέτη του ORC που περιγράφηκε και γράφονται οι εξισώσεις, οι οποίες διέπουν τη λειτουργία κάθε συνιστώσας του και καθορίζουν τη μεταξύ τους συνεργασία. Η ανάλυση του κύκλου ακολουθεί την πορεία του ψυκτικού μέσου από την κατάσταση 1 ως την κατάσταση 4. Επιπλέον θεωρείται ότι το ψυκτικό μέσο είναι καθαρή ουσία και όχι μίγμα. Συνεπώς, από το νόμο του Gibbs κάθε θερμοδυναμική κατάσταση ορίζεται πλήρως με τον καθορισμό δυο ανεξάρτητων θερμοδυναμικών μεγεθών. Συγκεκριμένα ισχύει:

$$F = C - P + 2 \quad (2.1)$$

όπου, F ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών, C ο αριθμός των συστατικών από τα οποία αποτελείται το εργαζόμενο μέσο και P ο αριθμός των φάσεων του ρευστού στη συγκεκριμένη κατάσταση. Όπως θα δειχθεί και στη συνέχεια, στις τέσσερις κομβικές καταστάσεις που ορίζουν το θερμοδυναμικό κύκλο, που θα μελετηθεί το εργαζόμενο μέσο είναι είτε πλήρως σε υγρή είτε σε αέρια κατάσταση. Άρα η μεταβλητή P ισούται με 1. Επιπλέον, λόγω της θεώρησης ότι το ψυκτικό υγρό που θα χρησιμοποιηθεί στην εγκατάσταση είναι καθαρή ουσία ισχύει $C = 1$. Επομένως, εύκολα προκύπτει ότι σε κάθε μια από τις τέσσερις καταστάσεις οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι δυο. Στο εξής θα θεωρείται ότι σε κάθε κατάσταση οι ανεξάρτητες μεταβλητές θα είναι η πίεση και η ενθαλπία.

Ξεκινώντας από την κατάσταση 1, το ρευστό όντας σε υγρή φάση, αρχικά συναντά την αντλία. Η ισχύς P_c , που δίνεται στην αντλία, μετατρέπεται μέσω αυτού σε αύξηση της ολικής ενθαλπίας του ρευστού που εκφράζεται μέσω του γνωστού ενεργειακού ισολογισμού.

$$P_c = \frac{1}{\eta_{m,c}} \dot{m}(h_{t2} - h_{t1}) \quad (2.2)$$

όπου $\eta_{m,c}$ ο μηχανικός βαθμός απόδοσης. Οι δείκτες των θερμοδυναμικών μεγεθών δείχνουν την αντίστοιχη κατάσταση (πρώτη έως τέταρτη), στην οποία αντιστοιχούν. Ο δείκτης t δηλώνει ότι η ενθαλπία είναι ολική, δηλαδή συμπεριλαμβάνει την κινητική ενέργεια του ρευστού (εξ. 2.3).

$$h_t = h + \frac{u^2}{2} \quad (2.3)$$

όπου u η ταχύτητα του ρευστού. Ο μηχανικός βαθμός απόδοσης είναι περίπου 0.75.

Επιπλέον ορίζεται και ο ισεντροπικός βαθμός απόδοσης της αντλίας ως η μεταβολή της ολικής ενθαλπίας που θα πραγματοποιούνταν σε ιδανική ισεντροπική λειτουργία της μηχανής προς τη μεταβολή της ενθαλπίας που πραγματικά συμβαίνει, δηλαδή,

$$\eta_{is,C} = \frac{h_{t2is} - h_{t1}}{h_{t2} - h_{t1}}$$

ή λύνοντας ως προς h_2 :

$$h_{t2} = h_{t1} + \frac{1}{\eta_{is,C}}(h_{t2is} - h_{t1}) \quad (2.4)$$

Όταν τα ψυκτικά μέσα βρίσκονται στην υγρή φάση η εντροπία τους μεταβάλλεται λίγο σε συνάρτηση με την ενθαλπία με παράμετρο την πίεση. Έτσι η παραπάνω σχέση μπορεί να απλοποιηθεί θεωρώντας τη μεταβολή 1-2 ισενθαλπική. Τέλος, ο λόγος πίεσης της αντλίας ορίζεται ως ο λόγος της πίεσης εξόδου προς την ολική πίεση εισόδου,

$$\pi_c = \frac{p_{t2}}{p_{t1}} \quad (2.5)$$

όπου η ολική πίεση προκύπτει από την εξίσωση 2.6:

$$p_t = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (2.6)$$

Μόλις το ρευστό περάσει από την αντλία και καταλήξει στην κατάσταση 2, εισέρχεται στον ατμοποιητή, δηλαδή στον εναλλάκτη, ο οποίος είναι υπεύθυνος για την ατμοποίηση. Η μελέτη του εναλλάκτη μπορεί να γίνει από δυο σκοπιές. Στην πρώτη περίπτωση, το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στη μεταβολή του ενεργειακού περιεχομένου των δυο ρευσμάτων. Πιο συγκεκριμένα, αναζητάται η μεταβολή της ολικής ενθαλπίας κάθε ρεύματος από τη στιγμή που εισέρχεται στον εναλλάκτη μέχρι την έξοδό του από αυτόν. Μόλις γίνουν αυτοί οι υπολογισμοί, μπορεί κανείς να συνεχίσει στη δεύτερη περίπτωση της μελέτης του εναλλάκτη. Εδώ δίδεται προσοχή στη διαστασιολόγηση του εναλλάκτη, και πιο συγκεκριμένα, στον υπολογισμό της επιφάνειας συναλλαγής θερμότητας που απαιτείται για να πραγματοποιηθεί η επιθυμητή μεταφορά θερμότητας. Ο βασικός νόμος που διέπει αυτή τη συσκευή είναι η αρχή διατήρησης της ενέργειας, δηλαδή η θεώρηση ότι όση ενέργεια δοθεί από το ένα ρεύμα ρευστού, τόση πρέπει να παραληφθεί από το άλλο χωρίς να χάνεται θερμότητα προς το περιβάλλον. Συνεπώς γίνεται η παραδοχή ότι τα τοιχώματα του εναλλάκτη, που επικοινωνούν με το περιβάλλον είναι αδιαβατικά.

$$\dot{m}_{hw}(h_{thw1} - h_{thw2}) = \dot{m}(h_{t3} - h_{t2}) \quad (2.7)$$

όπου \dot{m}_{hw} η παροχή μάζας του θερμού νερού (hot water), \dot{m} η παροχή του εργαζόμενου

μέσου, ενώ οι δείκτες hw1 και hw2 παριστάνουν την κατάσταση του θερμού ρευστού πριν την είσοδο στον εναλλάκτη και μετά την έξοδο από αυτόν αντίστοιχα. Η διόχτευση ενός ρευστού μέσα σε έναν εναλλάκτη συνοδεύεται πάντα από πτώση πίεσης. Καθώς όμως, σε έναν καλοσχεδιασμένο εναλλάκτη, η πτώση αυτή είναι πολύ μικρή και δεν επηρεάζει πολύ την απόδοση του κύκλου, θα αγνοηθεί. Η εξίσωση 2.8 μαζί με κάποιο γνωστό κατασκευαστικό μέγεθος του εναλλάκτη αρκούν για να καθοριστεί πλήρως η κατάσταση 3. Το μέγεθος αυτό, για παράδειγμα, μπορεί να είναι ο βαθμός απόδοσης του εναλλάκτη ή η ελάχιστη θερμοκρασιακή διαφορά που αναπτύσσεται μεταξύ των δυο ρευμάτων. Γνωρίζοντας επιπλέον τη θερμότητα συναλλαγής μεταξύ των δυο ρευμάτων είναι πλέον δυνατός ο υπολογισμός της επιφάνειας του ατμοποιητή. Η θερμότητα η οποία συναλλάσσεται μεταξύ των ρευμάτων θα είναι:

$$Q = \dot{m}(h_{t3} - h_{t2}) \quad (2.8)$$

Η επιφάνεια του εναλλάκτη (A) βρίσκεται εύκολα από την ακόλουθη εξίσωση, που προκύπτει από τη θεωρία LMTD για τους εναλλάκτες [6, 5]:

$$Q = UA\Delta T_{lm} \Leftrightarrow A = Q/(U\Delta T_{lm}) \quad (2.9)$$

όπου ΔT_{lm} είναι η μέση λογαριθμική διαφορά θερμοκρασιών και δίνεται από τον τύπο:

$$\Delta T_{lm} = \frac{\Delta T_a - \Delta T_b}{\ln \Delta T_a - \ln \Delta T_b} \quad (2.10)$$

με ΔT_a και ΔT_b να είναι διαφορά των θερμοκρασιών μεταξύ των ρευμάτων στην είσοδο και στην έξοδο του υπερθερμαντή αντίστοιχα. Το μέγεθος U είναι η ειδική θερμική διαπερατότητα, η οποία εκφράζει την ποιότητα του εναλλάκτη και εξαρτάται από την εσωτερική του διαμόρφωση, το υλικό του και τις συνθήκες ροής των δυο ρευμάτων. Ο συντελεστής αυτός, στην περίπτωση όπου το ένα ρευστό βρίσκεται εντός ενός αυλού και το άλλο τον περιβρέχει, δίνεται από την έκφραση:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_o} + \frac{\delta}{k} \frac{A_o}{A_{lm}} + \frac{1}{h_i} \frac{A_o}{A_i} + R_{f,o} + R_{f,i} \quad (2.11)$$

όπου h_o και h_i ο συντελεστής θερμικής συναγωγιμότητας του ρευστού που ρέει στο κέλυφος και του ρευστού που ρέει στους αυλούς. Αντίστοιχα A_o και A_i είναι η εξωτερική και η εσωτερική επιφάνεια των αυλών, μέσω των οποίων πραγματοποιείται η μεταφορά θερμότητας. Επίσης, η επιφάνεια A_{lm} είναι η μέση λογαριθμική επιφάνεια των A_o και A_i και δίνεται από τον τύπο:

$$A_{lm} = \frac{A_o - A_i}{\ln A_o - \ln A_i} \quad (2.12)$$

Ακόμα, δ είναι το πάχος του τοιχώματος του αυλού και k ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητάς του. Η εξίσωση 2.11 εκφράζει τη μεταφορά θερμότητας μέσω συναγωγής από το θερμό ρευστό, που κυκλοφορεί στο κέλυφος, στο τοίχωμα του αυλού, στη συνέχεια από την εξωτερική πλευρά του αυλού στην εσωτερική λόγω αγωγής και, τέλος, μέσω συναγωγής από το εσωτερικό τοίχωμα στο προς θέρμανση ρευστό. Τέλος, τα μεγέθη $R_{f,o}$ και $R_{f,i}$ μοντελοποιούν τη συνεισφορά των ανωμαλιών του τοιχώματος λόγω τραχύτητας ή επικαθίσεων του κελύφους και των αυλών, αντίστοιχα. Οι τιμές τους είναι τόσο μικρές σε σχέση με τους υπόλοιπους όρους, που μπορούν να παραλειφθούν χωρίς σημαντικό σφάλμα.

Εύκολα παρατηρεί κανείς, ότι η εξίσωση 2.11 είναι δύσχρηστη καθώς περιλαμβάνει τις επιφάνειες A_o και A_i , οι οποίες δεν είναι εκ των προτέρων γνωστές, αφού το μήκος των σωλήνων είναι συνήθως το ζητούμενο μέγεθος. Αντί της εξίσωσης 2.11 μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση 2.13, η οποία προκύπτει από τις εξισώσεις 2.11 και 2.12.

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_o} + \frac{r_o \ln(r_o/r_i)}{k} + \frac{r_o/r_i}{h_i} + R_{f,o} + R_{f,i} \quad (2.13)$$

όπου r_o και r_i είναι η εξωτερική και εσωτερική διάμετρος του αυλού αντίστοιχα.

Η δυσκολία στον υπολογισμό του U έγκειται στην ορθή προσέγγιση των συντελεστών συναγωγής h_o και h_i , μέσω ημιεμπειρικών και πειραματικών σχέσεων. Η τιμή τους εξαρτάται από το ρευστομηχανικό και θερμικό πεδίο που αναπτύσσεται κοντά στα τοιχώματα των αυλών. Συνεπώς ο ακριβής προσδιορισμός τους μπορεί να γίνει είτε με υπολογιστική προσομοίωση της ροής των δυο ρευστών μέσα στον εναλλάκτη, είτε με τη χρήση κατάλληλων πειραματικών τύπων. Εδώ ακολουθείται η δεύτερη διαδικασία. Σύμφωνα με αυτήν, οι συντελεστές συναγωγής προκύπτουν από τους αντίστοιχους αριθμούς Nusselt (Nu), οι οποίοι με τη σειρά τους προκύπτουν από ημιεμπειρικές σχέσεις. Αποδεικνύεται ότι, μέσω της αδιαστατοποίησης των εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα, ο μέσος αριθμός Nusselt αποτελεί συνάρτηση των αριθμών Reynolds (Re) και Prandtl (Pr). Έτσι ο υπολογισμός αυτών των αριθμών είναι απαραίτητος και γίνεται μέσω των εκφράσεων ορισμού τους:

$$Re = \frac{uD}{\nu}, \quad Pr = \frac{\mu c_p}{k}, \quad Nu = \frac{hD}{k} \quad (2.14)$$

όπου:

u : μέση ταχύτητα εσωτερικής ή εξωτερικής ροής

D : εσωτερική ή εξωτερική διάμετρος αυλών

ν : μέσο κινηματικό ιξώδες εσωτερικής ή εξωτερικής ροής

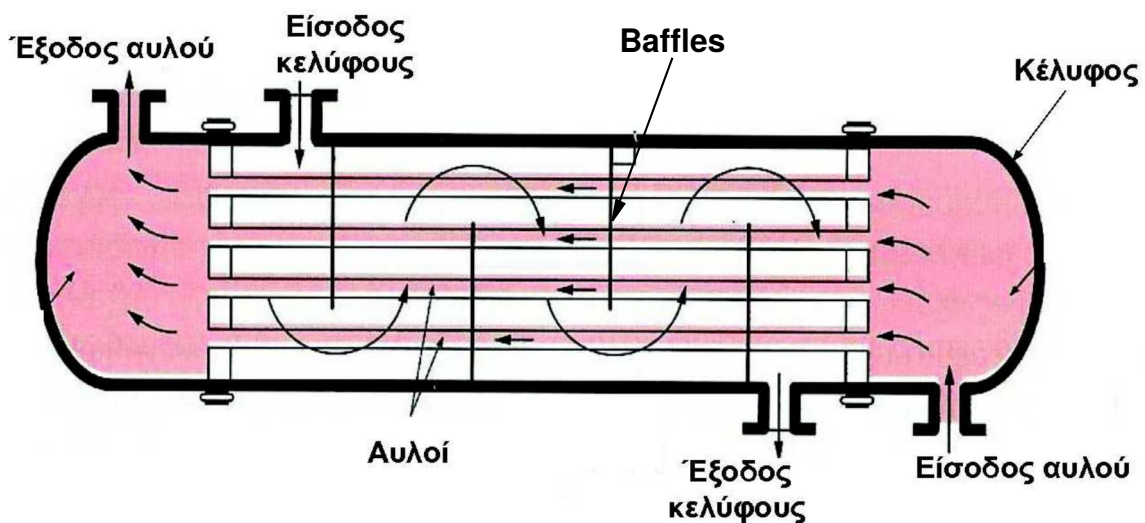
μ : μέσο δυναμικό ιξώδες εσωτερικής ή εξωτερικής ροής

c_p : μέση ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση

k : μέση ειδική θερμική αγωγιμότητα της εσωτερικής ή εξωτερικής ροής

Όταν υπολογίζεται το μέγεθος h_o , τα μεγέθη πρέπει να είναι αυτά της εξωτερικής ροής. Αντίστοιχα όταν υπολογίζεται το μέγεθος h_i , τα μεγέθη πρέπει να είναι αυτά της εσωτερικής ροής.

Αρχικά παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού του συντελεστή συναγωγής της ροής του θερμού ρευστού. Στις περισσότερες περιπτώσεις, οι εναλλάκτες κελύφους-αυλών είναι αντιρροής, έτσι ώστε να υποβοηθάται η μεταφορά θερμότητας μεταξύ των ρευμάτων. Επίσης τις περισσότερες φορές τα κελύφη των εναλλακτών είναι εφοδιασμένα με διάφορα εμπόδια (baffles), τα οποία αναγκάζουν το θερμό ρευστό να εκτελεί κυματοειδή κίνηση αντί της ευθύγραμμης (σχήμα 2.3). Από εδώ και στο εξής η ανάλυση του ατμοποιητή θα αφορά εναλλάκτη αντιρροής, εφοδιασμένο με baffles, λόγω της μεγαλύτερης απόδοσής τους.



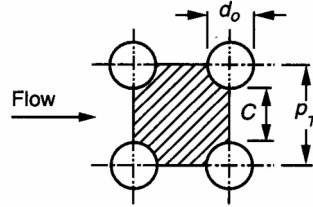
Σχήμα 2.3: Εναλλάκτης κελύφους αυλών [5].

Για το λόγο αυτό η ροή του θερμού ρευστού και η ροή του ψυκτικού μέσου δεν είναι σχεδόν ποτέ παράλληλες αλλά, αντίθετα, σε πολλά σημεία μπορεί να είναι και κάθετες. Έτσι αναζητείται μια εξίσωση που να δίνει το μέσο αριθμό Nusselt σε περίπτωση που η ροή είναι κάθετη ή σχεδόν κάθετη σε δέσμη αγωγών κυκλικής διαμέτρου. Μια τέτοια εξίσωση είναι η ακόλουθη.

$$Nu = CRe_{\infty}^m Pr_{\infty}^{0.36} \left(\frac{Pr_{\infty}}{Pr_s} \right)^{1/4} \quad (2.15)$$

όπου τα μεγέθη της επί άπειρου ροής λαμβάνονται προσεγγιστικά ίσα με αυτά της ροής στην είσοδο του εναλλάκτη. Ο αριθμός Prandtl με δείκτη s υπολογίζεται με τις ιδιότητες του ρευστού στη θερμοκρασία του τοιχώματος του αυλού, η οποία μεταβάλλεται κατά μήκος του. Σε κάθε σημείο του μπορεί να προσεγγιστεί από το μέσο όρο των θερμοκρασιών του θερμού νερού και του ψυκτικού μέσου, που υπάρχουν στην ίδια θέση. Η ακρίβεια της σχέσης βελτιώνεται αν ο αριθμός Re υπολογιστεί με βάση τη

μέγιστη ταχύτητα, που εμφανίζεται στο πεδίο ροής. Ο αριθμός αυτός μπορεί να συμβολιστεί ως Re_{max} . Έστω ότι το στοιχειώδες τμήμα του εναλλάκτη είναι τέσσερις αυλοί τοποθετημένοι στις κορυφές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.4.



Σχήμα 2.4: Διάταξη σωλήνων εντός εναλλάκτη κελύφους αυλών.

Σε αυτήν την περίπτωση η μέγιστη ταχύτητα εμφανίζεται στη διατομή μεταξύ των αγωγών και υπολογίζεται από την εξίσωση [7, 8]:

$$u_{max} = \frac{\dot{m}}{\rho(sid)(bfsp) \left(\frac{Sn-D}{Sn}\right)} \quad (2.16)$$

όπου (sid) είναι η εσωτερική διάμετρος του κελύφους (shell internal diameter), (bfsp) είναι η απόσταση μεταξύ δυο εμποδίων ((baffle spacing) και ρ η μέση πυκνότητα του νερού στον εναλλάκτη. Όταν χρησιμοποιηθεί στην εξίσωση 2.15 ο αριθμός Re_{max} , οι σταθερές C και m έχουν τιμές που φαίνονται στον πίνακα 2.1.

Re_{max}	C	m
$10^3 - 10^5$	0.27	0.63
$2 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^6$	0.021	0.84

Πίνακας 2.1: Τιμές των σταθερών C και m.

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα μπορεί να υπολογιστεί ο αριθμός Nusselt και, στη συνέχεια, από τη σχέση ορισμού του να βρεθεί ο συντελεστής συναγωγής.

Στη συνέχεια αναλύεται η μέθοδος υπολογισμού του συντελεστή συναγωγής από την πλευρά του ψυκτικού μέσου. Εδώ χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή καθώς το ρευστό αυτό ατμοποιείται σε υπερκρίσιμη πίεση, με αποτέλεσμα να μεταβάλλονται πολύ έντονα οι ιδιότητές του. Όπως και στην περίπτωση του θερμού νερού πρέπει πρώτα να υπολογιστεί ο αριθμός Nu. Σύμφωνα με πειράματα που έχουν γίνει σε ρευστά, τα οποία ρέουν σε αγωγούς κυκλικής διατομής σε υπερκρίσιμη κατάσταση, ο αριθμός Nu προσεγγίζεται αρκετά ικανοποιητικά από την εξίσωση 2.17 [9, 5].

$$Nu = 0.0183 Re_b^{0.82} Pr_b^{0.5} \left(\frac{\rho_w}{\rho_b}\right)^{0.3} \left(\frac{\bar{c}_p}{c_{pb}}\right)^n \quad (2.17)$$

όπου η σταθερά n δίνεται, ανάλογα με τις επικρατούσες συνθήκες από τον πίνακα 2.2

έκφραση του n	διάστημα τιμών
$n = 0.4$	$T_b < T_w < T_{pc}$ ή $1.2T_{pc} < T_b < T_w$
$n = 0.4 + 0.2 \left(\frac{T_w}{T_{pc}} - 1 \right)$	$T_b < T_{pc} < T_w$
$n = 0.4 + 0.2 \left(\frac{T_w}{T_{pc}} - 1 \right) \left[1 - 5 \left(\frac{T_b}{T_{pc}} - 1 \right) \right]$	$T_{pc} < T_b < 1.2T_{pc}$ και $T_b < T_w$

Πίνακας 2.2: Εκφράσεις της σταθεράς n .

Ο δείκτης b στα μεγέθη της εξίσωσης 2.17 δηλώνει ότι οι αντίστοιχες ιδιότητες του ρευστού υπολογίζονται στη θερμοκρασία T_b . Η θερμοκρασία αυτή ορίζεται ως η μέση θερμοκρασία της υπερκρίσιμης ροής σε κάθε διατομή. Η πυκνότητα ρ_w πρέπει να υπολογίζεται στη θερμοκρασία T_w του εσωτερικού τοιχώματος του αυλού. Επιπλέον το μέγεθος T_{pc} αντιστοιχεί στη θερμοκρασία του ψευδοκρίσιμου σημείου, στην πίεση που επικρατεί εσωτερικά του αυλού. Όπως προαναφέρθηκε οι φυσικές ιδιότητες του ρευστού μεταβάλλονται έντονα με τη θερμοκρασία T_b , η οποία αυξάνει κατά μήκος του αυλού στη διεύθυνση κίνησης του ρευστού. Συνεπώς κάθε αυλός πρέπει να διαμερίζεται κατά το μήκος του σε μικρότερα τμήματα, στα οποία θα θεωρείται ότι οι ιδιότητες του εργαζόμενου μέσου δεν μεταβάλλονται κάνοντας δυνατό τον υπολογισμό του τοπικού αριθμού Nu και κατ' επέκταση του τοπικού συντελεστή συναγωγής h_i . Καθώς το εργαζόμενο μέσο ατμοποιείται, μεταβάλλεται έντονα η πυκνότητά του, με αποτέλεσμα να αλλάζει η ταχύτητα με την οποία διαρρέει τους αυλούς. Καθώς η τελευταία μειώνεται σε κάθε στοιχειώδες τμήμα του εναλλάκτη, συνιστάται ο υπολογισμός του αριθμού Re με τη βοήθεια του τύπου 2.18, ο οποίος απαιτεί την παροχή μάζας αντί της ταχύτητας του ρευστού. Φυσικά, η νέα έκφραση του αριθμού Re είναι ακριβώς ισοδύναμη με αυτήν της εξίσωσης 2.14. Διευκολύνει, όμως, τη διαδικασία του υπολογισμού του h_i .

$$Re = \frac{4\dot{m}}{\pi D \mu} \quad (2.18)$$

Με τον τρόπο αυτό, σε κάθε στοιχειώδες τμήμα του αυλού, βρίσκεται η αντίστοιχη επιφάνεια που απαιτείται για τη συναλλαγή θερμότητας, με τη βοήθεια των εξισώσεων 2.12 και 2.11. Η συνολική επιφάνεια του εναλλάκτη είναι ίση με το άθροισμα όλων των επιμέρους επιφανειών κάθε τμήματος του αυλού. Έτσι ολοκληρώνεται η θερμοδυναμική ανάλυση του εναλλάκτη.

Συνεχίζοντας, το εργαζόμενο μέσο, μετά την έξοδό του από τον ατμοποιητή, εισέρχεται στο στρόβιλο, σε κατάσταση 3. Ο στρόβιλος είναι υπεύθυνος για τη μετατροπή της

ενέργειας του ρευστού σε ενέργεια περιστροφής μιας ατράκτου, η οποία στη συνέχεια θα μετατραπεί από την ηλεκτρογεννήτρια σε ηλεκτρική ενέργεια. Η εξίσωση, που εκφράζει αυτή τη μετατροπή, είναι η:

$$P_T = \eta_{m,t} \dot{m} (h_{t3} - h_{t4}) \quad (2.19)$$

όπου P_T η ισχύς που παράγει ο στρόβιλος στον άξονά του και $\eta_{m,t}$ ο μηχανικός βαθμός απόδοσής του. Ο μηχανικός βαθμός απόδοσης είναι περίπου 0,85. Η ισχύς που παράγει τελικά η γεννήτρια υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση, όπου η_g είναι ο βαθμός απόδοσής της.

$$P_g = \eta_g P_T \quad (2.20)$$

Μόλις βρεθεί η ισχύς, που αποδίδει ο κύκλος είναι πάντα επιθυμητό να βρεθεί ο ολικός βαθμός απόδοσης του κύκλιου. Αυτός εκφράζει το ποσοστό της ενέργειας που προσφέρει ο εναλλάκτης στον κύκλο σε σχέση με την ισχύ που παράγει η γεννήτρια. Έτσι ορίζεται:

$$\eta_{total} = \frac{P_g}{\dot{m}(h_{thw1} - h_{thw2})} \quad (2.21)$$

Χαρακτηριστικό μέγεθος του στροβίλου είναι ο λόγος πίεσης του, που ορίζεται στη σχέση 2.22. Στην ιδανική περίπτωση που εξετάζεται, όπου δεν υπάρχουν απώλειες ολικής πίεσης στις σωληνώσεις της διάταξης και στο εσωτερικό των εναλλακτών, ο λόγος πίεσης του στροβίλου είναι ίσος με το λόγο πίεσης του συμπιεστή.

$$\pi_T = \frac{p_{t3}}{p_{t4}} \quad (2.22)$$

Γνωρίζοντας την πίεση εισόδου και εξόδου του στροβίλου, καθώς και τις συνθήκες εισόδου του ρευστού σε αυτόν, μπορεί να βρεθεί η ενθαλπία εξόδου μέσω του ισεντροπικού βαθμού

$$\eta_{is,T} = (h_{t3} - h_{t4}) / (h_{t3} - h_{t4is}) \Leftrightarrow h_{t4} = h_{t3} - \eta_{is,T} (h_{t3} - h_{t4is}) \quad (2.23)$$

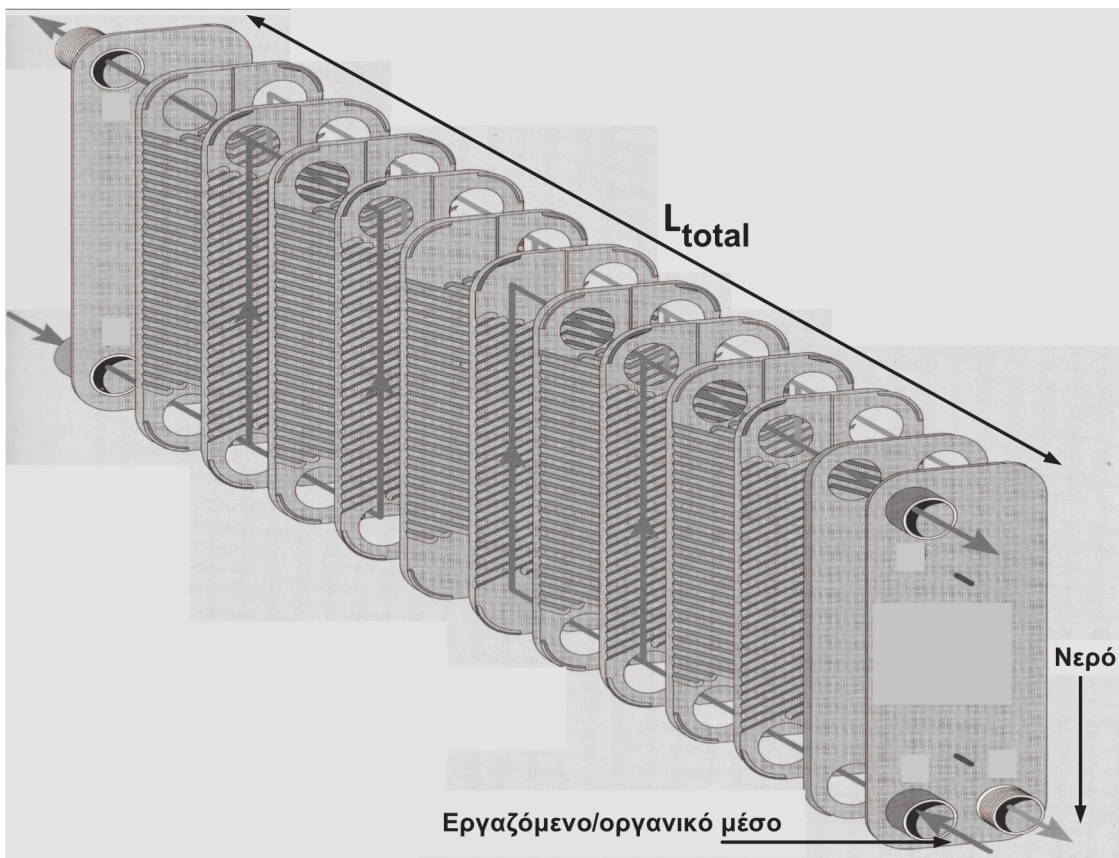
Τελικά, το ρευστό χαμηλής ενθαλπίας και πίεσης περνά από το συμπυκνωτή (μεταβολή 4 έως 1). Η διαδικασία υπολογισμού του συμπυκνωτή είναι παρόμοια με αυτήν του υπερθερμαντή. Πρώτα, πρέπει να γίνει η χρήση της ενεργειακής εξίσωσης του συμπυκνωτή μαζί με κάποιο κατασκευαστικό στοιχείο, έτσι ώστε να οριστούν πλήρως οι συνθήκες εισόδου και εξόδου του και των δυο ρευστών. Η ενεργειακή εξίσωση εκφράζεται ως ακολούθως:

$$\dot{m}_{cw}(h_{cw2} - h_{cw1}) = \dot{m}(h_{t4} - h_{t1}) \quad (2.24)$$

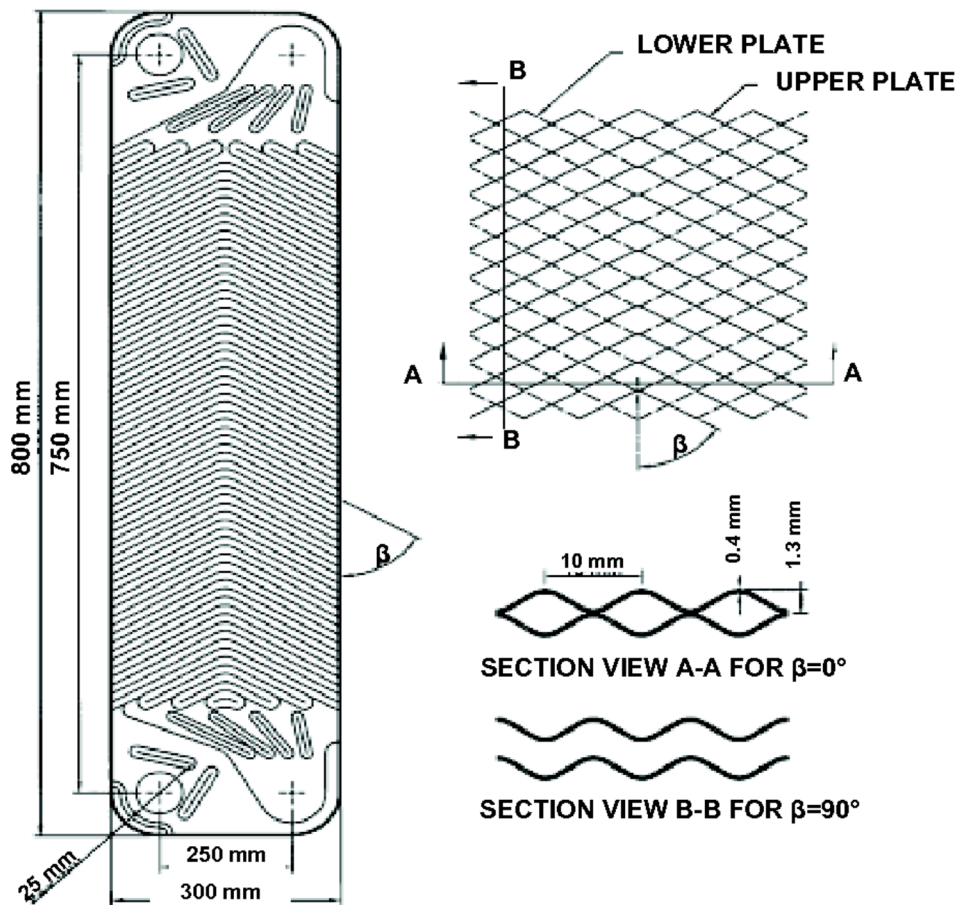
Στη συνέχεια, απαιτείται η εύρεση της επιφάνειας του πλακοειδούς εναλλάκτη, έτσι ώστε να είναι δυνατή η μεταφορά της συγκεκριμένης παροχής θερμικής ισχύος, η οποία δίνεται από την εξίσωση 2.25.

$$Q = \dot{m}(h_{t4} - h_{t1}) \quad (2.25)$$

Ακολούθως μέσω των σχέσεων 2.12 και 2.11 υπολογίζεται η επιφάνεια, αφού βρεθούν οι αντίστοιχοι συντελεστές συναγωγής. Η ιδιομορφία που έχει ο συμπυκνωτής στην περίπτωση που μελετάται είναι ότι είναι πλακοειδής και όχι κελύφους αυλών, όπως ο υπερθερμαντής. Παρόλα αυτά στους περισσότερους πλακοειδείς εναλλάκτες του εμπορίου, τα ρευστά που συναλλάσσουν θερμότητα εξαναγκάζονται σε συνεργασία μέσω πλακών εφοδιασμένων με εσοχές. Το φαινόμενο της ροής του ρευστού μέσα σε αυτές τις εσοχές μπορεί να προσομοιαστεί με ροή σε σωλήνα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα πλακοειδούς εναλλάκτη παρουσιάζεται στις εικόνες 2.5 και 2.6.



Σχήμα 2.5: Σχηματικό διάγραμμα ενός πλακοειδούς εναλλάκτη θερμότητας[5].



Σχήμα 2.6: Σχηματικό διάγραμμα πλάκας ενός πλακοειδούς εναλλάκτη θερμότητας [5].

Επομένως, μπορούν ορθώς να χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις 2.7 έως 2.12. Αντίθετα, οι σχέσεις 2.15 και 2.17 δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν καθώς αναφέρονται σε ροή σε αρκετά διαφορετικές συνθήκες. Πιο συγκεκριμένα, το νερό ψύξης δεν ρέει στην εξωτερική επιφάνεια παράλληλων αυλών, αλλά μέσα σε σωλήνωση. Κατάλληλος ημιεμπειρικός τύπος για τον υπολογισμό του αριθμού Nu σε αυτήν την περίπτωση είναι ο ακόλουθος [5, 6]:

$$Nu = 0.023Re^{0.8}Pr^{0.4} \quad (2.26)$$

Καθώς οι θερμοδυναμικές ιδιότητες του νερού ψύξης παραμένουν περίπου σταθερές, οι αριθμοί Re και Pr μπορούν να υπολογιστούν στη μέση θερμοκρασία εισόδου, εξόδου του νερού από τον εναλλάκτη. Οι συνθήκες κάτω από τις οποίες συμφωνεί η εξίσωση 2.26 με τα πειραματικά δεδομένα είναι:

$$0.7 < Pr < 167$$

$$Re > 10000$$

$$L/D > 60$$

τυρβώδης ροή

λείος αγωγός

Η μέση τιμή της ειδικής συναγωγιμότητας της ροής του ψυκτικού μέσου πρέπει να υπολογιστεί μέσω της εξίσωσης 2.27, η οποία αφορά συμπύκνωση ρευστού σε αγωγό κυκλικής διατομής [6].

$$h_m = 0.555 \left[\frac{g\rho_l(\rho_l - \rho_u)k_l^3 h'_{fg}}{\mu_l(T_{sat} - T_s)D} \right]^{1/4} \quad (2.27)$$

στην οποία

$$h'_{fg} = h_{fg} + \frac{3}{8}c_{pl}(T_{sat} - T_s) \quad (2.28)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις ο δείκτης I δείχνει ότι το αντίστοιχο μέγεθος αφορά την κατάσταση κορεσμένου υγρού. Ομοίως, ο δείκτης u δηλώνει ότι το μέγεθος που συνοδεύει, αφορά την κατάσταση κορεσμένου ατμού. Αναλυτικότερα, τα μεγέθη τα οποία συμμετέχουν στην εξίσωση είναι τα εξής:

g: επιτάχυνση της βαρύτητας

ρ_l : πυκνότητα ψυκτικού μέσου σε κατάσταση κορεσμένου ατμού

ρ_u : πυκνότητα ψυκτικού μέσου σε κατάσταση κορεσμένου υγρού

k_l : θερμική αγωγιμότητα του εργαζόμενου μέσου σε κατάσταση κορεσμένου υγρού

T_{sat} : θερμοκρασία κορεσμού του εργαζόμενου μέσου

T_s : θερμοκρασία του τοιχώματος του αγωγού

μ_l : δυναμική συνεκτικότητα του ψυκτικού μέσου σε κατάσταση κορεσμένου υγρού

D: εσωτερική διάμετρος του αγωγού

h_{fg} : θερμότητα ατμοποίησης του ψυκτικού μέσου

c_{pl} : συντελεστής θερμοχωρητικότητας υπό σταθερή πίεση για το υγρό ψύξης

Η χρήση της εξίσωσης 2.27 ισχύει μόνο για ροή χαμηλών ταχυτήτων με $Re < 35000$, ο οποίος υπολογίζεται στην αρχή του αγωγού. Εδώ πρέπει να δοθεί έμφαση σε μια σημαντική λεπτομέρεια. Το ρευστό που εισάγεται στον εναλλάκτη σπάνια βρίσκεται σε κατάσταση κορεσμού. Επίσης λίγες είναι οι περιπτώσεις όπου το ρευστό εξέρχεται από αυτόν ως κορεσμένο υγρό. Επομένως, η θερμική διεργασία μέσα στον εναλλάκτη μπορεί να επιμεριστεί σε τρεις διαφορετικές φάσεις. Στην πρώτη φάση ο ατμός εισέρ-

χεται στον εναλλάκτη και ψύχεται μέχρι να φτάσει σε κατάσταση κορεσμένου ατμού. Στη συνέχεια λαμβάνει χώρα η κύρια φάση της συμπύκνωσης, όπου συναλλάσσεται το μεγαλύτερο μέρος της θερμότητας. Όταν το ρευστό φτάσει στην κορεσμένη κατάσταση ξεκινά η τρίτη φάση, αυτή της υπόψυξης. Στα προβλήματα που αναλύονται εδώ η πρώτη φάση δεν είναι ποτέ σημαντική και μπορεί να αγνοηθεί. Το αντίθετο συμβαίνει στην τρίτη φάση, όπου για να πραγματοποιηθεί η επιθυμητή υπόψυξη απαιτούνται αρκετά παραπάνω τετραγωνικά εναλλάκτη. Για να υπολογιστεί αυτή η επιπλέον επιφάνεια, απαιτείται νέος τρόπος υπολογισμού του συντελεστή συναγωγής του ψυκτικού μέσου. Συγκεκριμένα μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση 2.26, που προτάθηκε για τη ροή του νερού. Ο λόγος για τον οποίο είναι επιθυμητή η υπόψυξη είναι για να εξασφαλίζει σε κάθε περίπτωση μονοφασική ροή στην κατάσταση 1, έτσι ώστε να διασφαλίζεται η σωστή λειτουργία του συμπιεστή.

Γνωρίζοντας πλέον τους δυο συντελεστές συναγωγής των δυο ρευμάτων μπορεί πολύ εύκολα να υπολογιστεί η επιφάνεια του συμπυκνωτή. Με αυτόν τον τρόπο ολοκληρώνεται η διαδικασία υπολογισμού του θερμοδυναμικού κύκλου και των επιφανειών των δυο εναλλακτών. Η σειρά με την οποία χρησιμοποιούνται οι παραπάνω εξισώσεις, εξαρτάται από το εκάστοτε πρόβλημα, που αρκούν για να το επιλύσουν, εάν αυτό είναι καλά ορισμένο.

2.3 Υπολογισμός και βελτιστοποίηση ενός υπερκρίσιμου ORC σε πραγματικές συνθήκες

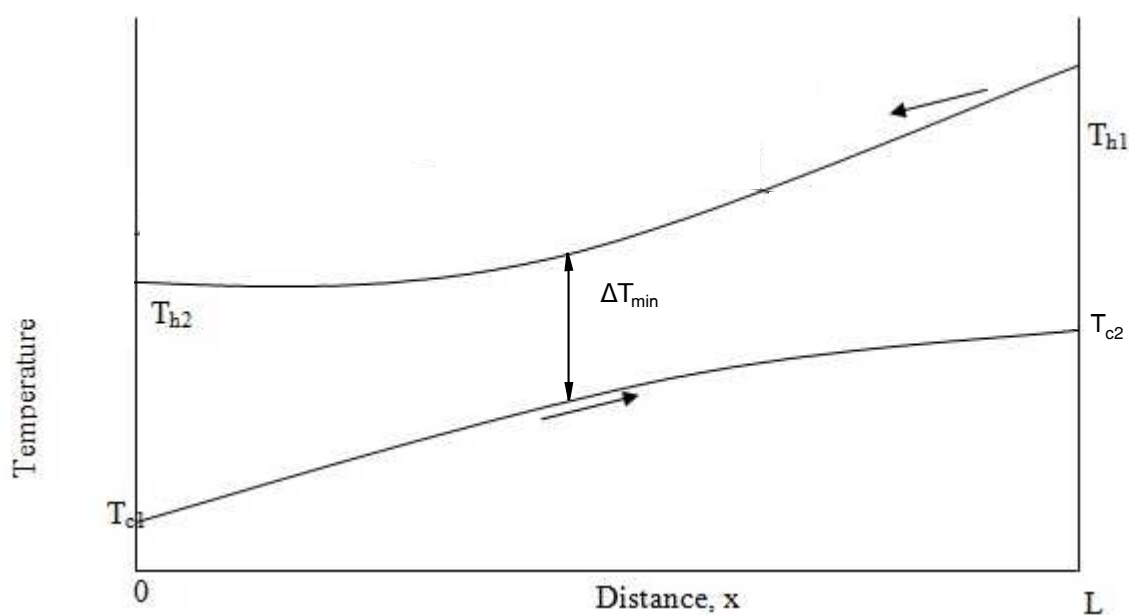
Όπως έχει προαναφερθεί, κάθε πρόβλημα έχει τις δικές του ιδιαιτερότητες και πρέπει να αντιμετωπίζεται διαφορετικά. Στο κεφάλαιο αυτό τίθεται σε εφαρμογή η θερμοδυναμική ανάλυση, που προηγήθηκε, με σκοπό τον υπολογισμό των φυσικών μεγεθών με ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην περίπτωση της κατασκευής μιας διάταξης ORC για την παραγωγή ηλεκτρικού ρεύματος. Κατά τη μελέτη της πραγματικής διάταξης παρουσιάζεται η παραμετροποίηση του θερμοδυναμικού προβλήματος. Συγκεκριμένα αναζητούνται εκείνα τα μεγέθη (παράμετροι), τα οποία προσδιορίζουν πλήρως την εγκατάσταση και οδηγούν στον υπολογισμό οποιουδήποτε άλλου θερμοδυναμικού μεγέθους. Επιπλέον, σημαντικό μέρος αυτού του κεφαλαίου καταλαμβάνει η διαδικασία βέλτιστου σχεδιασμού της εγκατάστασης. Σε κάθε εγκατάσταση ORC υπάρχουν μεγέθη με ιδιαίτερο οικονομικό ενδιαφέρον, όπου πάντα καταβάλλεται ιδιαίτερη προσπάθεια για τη μείωση ή την αύξηση της τιμής τους. Για παράδειγμα στόχοι κατά το σχεδιασμό μιας εγκατάστασης οργανικού κύκλου είναι η αύξηση του βαθμού απόδοσής της, η αύξηση της ηλεκτρικής ισχύος, που παράγεται και η μείωση των επιφανειών του ατμοποιητή και του συμπυκνωτή. Συνεπώς, σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η εύρεση της τιμής των παραμέτρων ή αλλιώς μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος που βελτιστοποιούν την εγκατάστασης προς τα ανωτέρω κριτήρια-στόχους.

2.3.1 Διατύπωση και θερμοδυναμική ανάλυση του προβλήματος

Σε αυτό το υποκεφάλαιο πραγματοποιείται η θερμοδυναμική ανάλυση μιας εγκατάστασης, που βρίσκεται σε στάδιο σχεδιασμού. Η εγκατάσταση αυτή θα σχεδιαστεί με σκοπό τη δυνατότητα εκμετάλλευσης θερμικής ενέργειας χαμηλής θερμοκρασίας. Επίσης η εγκατάσταση οφείλει να είναι μικρή σε μέγεθος αυξάνοντας έτσι την πιθανότητα χρήσης της σε περισσότερες εφαρμογές. Το πρώτο βήμα για την κατασκευή ενός οργανικού κύκλου Rankine, είναι η μελέτη της συμπεριφοράς του σε μακροσκοπικό επίπεδο, έτσι ώστε να διαπιστωθεί η ακριβής λειτουργία του και να τεκμηριωθεί η οικονομική απόδοση μιας τέτοιας επένδυσης σε μεγάλη κλίμακα. Το κύριο χαρακτηριστικό μιας τέτοιας εγκατάστασης είναι η χαμηλή απόδοση ισχύος του κύκλου, καθώς εδώ ο στόχος δεν είναι η μαζική παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, αλλά η εκμετάλλευση μικρών ανεκμετάλλευτων ποσοτήτων αυτής. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή είναι επιθυμητή η παραγωγή ηλεκτρικής ισχύος της τάξης των 5 έως 10 kW. Ο στόχος αυτός, όπως είναι αναμενόμενο επηρεάζει όλες τις συνθήκες κάτω από τις οποίες θα λειτουργήσει η εγκατάσταση. Όπως έχει ήδη αναλυθεί η πηγή ενέργειας του κύκλου είναι νερό σχετικά υψηλής θερμοκρασίας. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το νερό θερμαίνεται σχεδόν στους 100°C , ενώ η παροχή θερμότητας επιλέγεται στα 100 kW. Επίσης, για τις συνθήκες που μελετώνται η παροχή του νερού θεωρείται σταθερή και ίση με 2 kg/s. Εάν κανείς επιθυμεί θερμοκρασία νερού πάνω από τους 100°C , πρέπει να αυξήσει την πίεσή του πάνω από την ατμοσφαιρική, έτσι ώστε να αποφύγει την ατμοποίησή του και, κατά συνέπεια, τη μείωση της απόδοσης του ατμοποιητή. Το ψυκτικό μέσο που θα επιλεγεί πρέπει να είναι τέτοιο, ώστε σε υπερκρίσιμη πίεση να ατμοποιείται σε θερμοκρασία μικρότερη των 100°C μέσω της διαθέσιμης παροχής θερμότητας. Ένα τέτοιο κατάλληλο ψυκτικό μέσο είναι το R404, το οποίο είναι μίγμα των τριών συστατικών R125, R143a, R134a με σύσταση κατ' όγκο 0.358, 0.604 και 0.004 αντίστοιχα. Το συγκεκριμένο ψυκτικό μέσο έχει επίσης το πλεονέκτημα ότι είναι αρκετά φτηνό. Παρόλα αυτά έχει το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό ότι παρουσιάζει ελαφρά ζεοτροπική συμπεριφορά. Αυτό συνεπάγεται ότι κατά την αλλαγή φάσης του η πίεση δεν παραμένει σταθερή. Το γεγονός αυτό μπορεί να αγνοηθεί χωρίς να προκύψει ιδιαίτερο σφάλμα στους υπολογισμούς και έτσι θεωρώντας το εργαζόμενο μέσο ως καθαρή ουσία, να τεθεί σε εφαρμογή η θεωρία του προηγούμενου κεφαλαίου.

Συνεχίζοντας την ανάλυση του ατμοποιητή, απαιτείται να είναι γνωστό ένα επιπλέον κατασκευαστικό μέγεθός του που να μαρτυρά την απόδοση με την οποία γίνεται η μεταφορά θερμότητας μεταξύ των δυο ρευμάτων. Ένα τέτοιο μέγεθος είναι ο βαθμός απόδοσης του εναλλάκτη, ο οποίος ορίζεται ως ο λόγος της θερμότητας που μεταφέρεται προς τη μέγιστη θερμότητα που θα μπορούσε να μεταφερθεί σε ιδανικές συνθήκες. Ένα τέτοιο μέγεθος είναι δύσκολο να υπολογιστεί εκ των προτέρων. Επίσης, σε περίπτωση που απλώς γίνει κάποια υπόθεση ενέχει κίνδυνος μεγάλης απόκλισης από τις πραγματικές συνθήκες, στις οποίες εργάζεται η εγκατάσταση. Ένα άλλο μέγεθος που μπορεί να υποτεθεί με μεγαλύτερη ασφάλεια είναι το ακόλουθο. Όπως είναι γνωστό, σε

έναν ατμοποιητή το νερό εισέρχεται σε υψηλή θερμοκρασία και, στη συνέχεια, αρχίζει να ψύχεται προσφέροντας την ενέργειά του στο ψυκτικό μέσο. Αυτό εισέρχεται στον εναλλάκτη σε χαμηλή θερμοκρασία και καθώς τον διατρέχει, σταδιακά την αυξάνει. Συνεπώς, καθώς τα δυο ρεύματα κινούνται αντίρροπα το ένα παράλληλα με το άλλο, η διαφορά θερμοκρασιών τους σε κάθε θέση μεταβάλλεται. Είναι λοιπόν λογικό να υποθεθεί, ότι θα υπάρχει ένα σημείο εντός του εναλλάκτη και όχι απαραίτητα στο άκρο του, στο οποίο αυτή η θερμοκρασιακή διαφορά θα είναι ελάχιστη (pinch point). Η διαφορά αυτή είναι κατασκευαστικό στοιχείο του εναλλάκτη. Όσο μικρότερη είναι η ελάχιστη διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ δυο ρευμάτων, για σταθερή παροχή θερμότητας τόσο μεγαλύτερη είναι η απαιτούμενη για τη μεταφορά θερμότητας επιφάνεια. Από την άλλη όταν η διαφορά θερμοκρασίας είναι μεγάλη ο εναλλάκτης γίνεται μη αποδοτικός. Συνεπώς, σε έναν καλοσχεδιασμένο εναλλάκτη η διαφορά αυτή πρέπει να κινείται εντός ενός εύρους, που ορίζεται από τον κατασκευαστή. Ένα εμπειρικό κριτήριο, το οποίο υπαγορεύει τη σωστή μεταφορά θερμότητας είναι η ελάχιστη θερμοκρασιακή μεταφορά μεταξύ των ρευμάτων να είναι μεγαλύτερη των 10 Kelvin. Στο σχήμα 2.7 φαίνεται ακριβώς το φαινόμενο που περιγράφηκε, όπου σημειώνεται και το σημείο, όπου εμφανίζεται η ελάχιστη θερμοκρασιακή διαφορά.



Σχήμα 2.7: Σχηματική αναπαράσταση της μεταβολής της θερμοκρασίας δυο ρευμάτων κατά μήκος του εναλλάκτη. Με το δείκτη h χαρακτηρίζεται το θερμό ρεύμα και με το δείκτη c το ψυχρό ρεύμα.

Αντίστοιχα μεγέθη είναι γνωστά και για τη θερμοδυναμική ανάλυση του συμπυκνωτή. Για να μπορέσει να γίνει η ψύξη του εργαζόμενου μέσου χρησιμοποιείται νερό χαμηλής θερμοκρασίας το οποίο υπάρχει στο περιβάλλον και δεν απαιτεί περαιτέρω μείωση της θερμοκρασίας του με κατανάλωση ενέργειας. Το νερό που βρίσκεται διαθέσιμο σε αυτήν την εφαρμογή έστω ότι είναι 15°C . Επίσης η παροχή μάζας του μπορεί εύκολα να ρυθμιστεί και γι' αυτό το λόγο θεωρείται γνωστή. Συγκεκριμένα θα παραμένει συνεχώς

σταθερή και ίση με 5 kg/s. Επιπλέον, για να λειτουργεί σωστά ο εναλλάκτης, δηλαδή να δημιουργεί μεγάλο ρεύμα θερμότητας από το θερμό ρευστό στο ψυχρό, πρέπει η ελάχιστη θερμοκρασιακή διαφορά μεταξύ των δυο ρευμάτων να είναι μεγαλύτερη των 10 Kelvin. Επιβάλλοντας μια τέτοια συνθήκη κατά την επίλυση του προβλήματος, θα προκύψουν όλα τα μεγέθη της ροής του εργαζόμενου μέσου με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε, όταν τελικά κατασκευαστεί η διάταξη με αυτές τις συνθήκες, να σέβεται τον περιορισμό της διαφοράς των 10 Kelvin στους δυο εναλλάκτες.

Για να μπορέσει να επιλυθεί το πρόβλημα του θερμοδυναμικού κύκλου απαιτούνται κάποια επιπλέον δεδομένα, τα οποία χαρακτηρίζουν τη λειτουργία του συμπιεστή και του στροβίλου και θεωρούνται σταθερά κατά τη λειτουργία του κύκλου. Αυτά τα μεγέθη είναι ο ισεντροπικός και ο μηχανικός βαθμός απόδοσης των δυο στροβιλομηχανών, οι τιμές των οποίων δίνονται από τους κατασκευαστές. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, όπως θα φανεί και στη συνέχεια, οι συνθήκες εισόδου και εξόδου αυτών των μηχανών δεν μεταβάλλονται πολύ με αποτέλεσμα να μην αλλάζουν έντονα οι βαθμοί απόδοσής τους. Συνεπώς, είναι λογική η υπόθεση να θεωρούνται ως δεδομένα του προβλήματος. Επίσης, πρέπει να είναι γνωστή η επιθυμητή υπόψυξη μετά τη συμπύκνωση, έτσι ώστε να διασφαλίζεται η μονοφασική ροή εντός του συμπιεστή. Εδώ επιλέγεται υπόψυξη ίση με 5 Kelvin. Όλα τα δεδομένα του προβλήματος που έχουν παρουσιαστεί δεν αφορούν το ψυκτικό μέσο αυτό καθαυτό, αλλά προέρχονται από την επιλογή των συσκευών του θερμοδυναμικού κύκλου και από τα χαρακτηριστικά της συναλλαγής ενέργειας μέσω των εναλλακτών σε αυτόν. Τα μεγέθη που χαρακτηρίζουν τον κύκλο και αφορούν το ψυκτικό μέσο είναι αυτά που ορίζουν πλήρως καθεμιά από τις τέσσερις καταστάσεις που τον προδιαγράφουν. Σύμφωνα με το νόμο του Gibbs, όπως αυτός παρουσιάστηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, για να οριστεί μια θερμοδυναμική κατάσταση κάθε καθαρής ουσίας απαιτείται η γνώση δυο ανεξάρτητων θερμοδυναμικών μεγεθών, έστω της πίεσης και της θερμοκρασίας. Άρα, για να βρεθεί ο κύκλος απαιτείται ο υπολογισμός τεσσάρων πιέσεων και τεσσάρων θερμοκρασιών, δηλαδή ένα ζεύγος πίεσης και θερμοκρασίας για κάθε μια από τις τέσσερις καταστάσεις. Συνεπώς, οι άγνωστες ποσότητες του προβλήματος είναι οκτώ. Όπως θα δειχθεί στη συνέχεια τα δεδομένα που ήδη έχουν παρουσιαστεί δεν αρκούν για την επίλυση του προβλήματος. Όμως, αν υποθεθεί κάποιο από τα οκτώ άγνωστα προαναφερθέντα μεγέθη, τότε το πρόβλημα είναι ορθά ορισμένο, δηλαδή υπάρχουν ακριβώς όσα δεδομένα απαιτούνται για να είναι δυνατός ο υπολογισμός οποιουδήποτε θερμοδυναμικού μεγέθους του κύκλου. Επομένως το πρόβλημα έχει μια ελεύθερη παράμετρο. Ως τέτοια κατάλληλη παράμετρος θεωρείται η κοινή πίεση των καταστάσεων 2 και 3 του κύκλου (υψηλή πίεση), δηλαδή η πίεση των καταστάσεων 2 και 3. Η πίεση αυτή μπορεί κάλλιστα να αποτελέσει τη μεταβλητή σχεδιασμού του παρόντος προβλήματος. Προς το παρόν η μεταβλητή σχεδιασμού μπορεί να θεωρηθεί γνωστή, έτσι ώστε να μπορέσει να πραγματοποιηθεί η επίλυση του κύκλου και στη συνέχεια στην επόμενη ενότητα θα αναλυθεί ο τρόπος της ακριβούς εύρεσής της μέσω της διαδικασίας της βελτιστοποίησης. Στον πίνακα 2.3 φαίνονται τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος σε πιο εποπτική μορφή.

Η διαδικασία επίλυσης του προαναφερθέντος προβλήματος παρουσιασμένη σε διακριτά βήματα, δηλαδή η εύρεση των επτά υπόλοιπων αγνώστων με βάση τη θεωρία, είναι η

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	
T_{c1}	θερμοκρασία νερού ψύξης στη είσοδο του συμπυκνωτή
\dot{m}_c	παροχή μάζας νερού ψύξης
T_{h1}	θερμοκρασία θερμού νερού στη είσοδο του ατμοποιητή
\dot{m}_h	παροχή μάζας θερμού νερού
Q	θερμότητα, που παρέχεται από το θερμό νερό στο ψυκτικό μέσο
ΔT_{min}	ελάχιστη θερμοκρασιακή διαφορά στο εσωτερικό των δυο εναλλακτών
ΔT_{sub}	υπόψυξη
$\eta_{is,C}$	ισεντροπικός βαθμός απόδοσης συμπιεστή
$\eta_{m,C}$	μηχανικός βαθμός απόδοσης συμπιεστή
$\eta_{is,T}$	ισεντροπικός βαθμός απόδοσης στροβίλου
$\eta_{m,T}$	μηχανικός βαθμός απόδοσης στροβίλου
p_2	πίεση στην κατάσταση 2
ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ	
p_1, T_1	πίεση και θερμοκρασία στην κατάσταση 1
T_2	θερμοκρασία στην κατάσταση 2
p_3, T_3	πίεση και θερμοκρασία στην κατάσταση 3
p_4, T_4	πίεση και θερμοκρασία στην κατάσταση 4
$P_T - P_C$	ωφέλιμη ισχύς του κύκλου
η_{total}	ολικός βαθμός απόδοσης της εγκατάστασης

Πίνακας 2.3: Δεδομένα και ζητούμενα του θερμοδυναμικού προβλήματος της σχεδιαζόμενης εγκατάστασης

ακόλουθη.

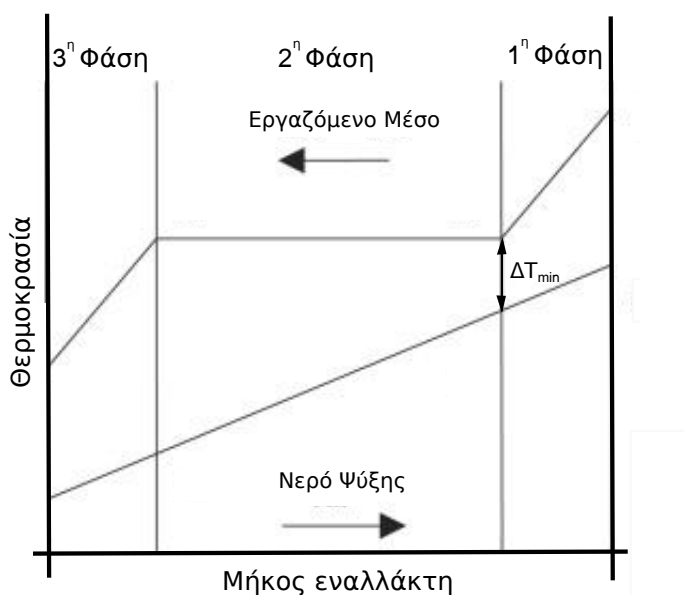
- Αρχικά γίνεται κάποια υπόθεση για τη χαμηλή πίεση του κύκλου. Η πίεση πρέπει να είναι μικρότερη της κρίσιμης πίεσης και μεγαλύτερη από την πίεση εκείνη της οποίας η θερμοκρασία κορεσμού μειωμένη κατά την υπόψυξη να είναι μεγαλύτερη

απίτη θερμοκρασία εισόδου του νερού ψύξης στο συμπυκνωτή. Με δεδομένη την πίεση στην κατάσταση 1 (p_1) μπορεί εύκολα να βρεθεί η θερμοκρασία κορεσμού στη χαμηλή πίεση (T_{1sat}) και μέσω της υπόψυξης των 5 K, να υπολογιστεί η θερμοκρασία της κατάστασης 1

$$T_1 = T_{1sat} + \Delta T_{sub} \quad (2.29)$$

Από εδώ και στο εξής για λόγους απλότητας ο δείκτης t των ολικών θερμοδυναμικών μεγεθών θα παραλείπεται. Μέσα στο συμπυκνωτή, κατά τη διαδικασία αλλαγής φάσης του εργαζόμενου μέσου, η θερμοκρασία του παραμένει σταθερή. Καθώς το νερό ρέει σε αντιρροή και θερμαίνεται, παρατηρείται ότι η ελάχιστη θερμοκρασιακή διαφορά μεταξύ των δυο ρευμάτων θα βρίσκεται στην αρχή της συμπύκνωσης. Έστω ότι, σε εκείνο το σημείο, μέσα στο συμπυκνωτή η θερμοκρασία του νερού είναι T'_{cw1} . Η θερμοκρασία του εργαζόμενου μέσου θα είναι φυσικά η θερμοκρασία κορεσμού. Άρα, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.8 θα ισχύει:

$$T'_{cw1} = T_{1sat} + \Delta T_{min} \quad (2.30)$$



Σχήμα 2.8: Σχηματική αναπαράσταση της μεταβολής της θερμοκρασίας δυο ρευμάτων κατά μήκος του εναλλάκτη.

Έτσι υπολογίζεται η θερμοκρασία και άρα η ενθαλπία του νερού σε εκείνο το σημείο. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ενδιάμεσο και πρόκειται να βοηθήσει στον υπολογισμό της παροχής μάζας του ψυκτικού μέσου (\dot{m}), όπως θα φανεί στο επόμενο βήμα.

- Για να βρεθεί η τελευταία, αρκεί να εκτελεστεί ένας ισολογισμός ενέργειας στο τμήμα του συμπυκνωτή που περιλαμβάνει το τμήμα της συμπύκνωσης και της υπόψυξης. Σύμφωνα με την εξίσωση 2.31 ο ισολογισμός γράφεται:

$$\dot{m}_{cw}(h'_{cw1} - h_{cw1}) = \dot{m}(h_4 - h_{1sat}) \Leftrightarrow \dot{m} = \frac{h'_{cw1} - h_{cw1}}{h_4 - h_{1sat}} \quad (2.31)$$

όπου η h_{1sat} αντιστοιχεί στη θερμοκρασία κορεσμού. Αφού έχουν βρεθεί η πίεση και η θερμοκρασία στην κατάσταση 1, μπορεί να βρεθεί και οποιοδήποτε μέγεθος της ίδιας κατάστασης.

- Στη συνέχεια, υπολογίζεται η ενθαλπία της ισεντροπικής μεταβολής (h_{2is}) γνωρίζοντας ότι στο σημείο 2is η πίεση είναι ίση με p_2 και η εντροπία ίση με s_1 , και έπειτα μέσω της σχέσης 2.4, να βρεθεί η ενθαλπία της κατάστασης 2. Γνωρίζοντας δυο μεγέθη αυτής της κατάστασης, μπορεί να βρεθεί μέσω του χάρτη του ρευστού οποιοδήποτε θερμοδυναμικό μέγεθος.
- Μετά, γνωρίζοντας τη θερμότητα ανά επιφάνεια (Q), που συναλλάσσεται στον εναλλάκτη, βρίσκεται άμεσα η ενθαλπία της κατάστασης 3 από την εξίσωση 2.8. Πλέον είναι δυνατό να βρεθεί η θερμοκρασία των δυο ρευμάτων του εναλλάκτη σε κάθε διατομή. Διαμερίζοντας τον εναλλάκτη σε τμήματα με τέτοιο τρόπο, ώστε σε κάθε ένα από αυτά να αυξάνει η ενθαλπία του κατά μια σταθερή, γνωστή ποσότητα dh , και εφαρμόζοντας την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας σε καθένα από αυτά, προκύπτει η εξίσωση

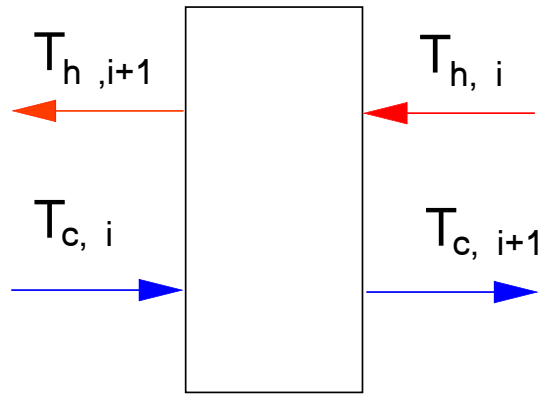
$$m_{hw}(h_{hw_i} - h_{hw_{i+1}}) = m \delta h$$

Έτσι ξεκινώντας από την αρχή του εναλλάκτη, όπου το εργαζόμενο μέσο έχει ενθαλπία h_2 και το νερό h_{hw_2} , γνωρίζοντας στην αρχή κάθε στοιχειώδους χωρίου, το οποίο παρουσιάζεται στο σχήμα 2.9 τα μεγέθη h_i και $h_{hw_{i+1}}$, μπορεί κανείς να βρει τα αντίστοιχα μεγέθη στο τέλος του χωρίου από τις εξισώσεις:

$$h_{i+1} = h_i + \delta h \quad (2.32)$$

$$h_{i+1} = h_{hw_{i+1}} + \frac{\dot{m}}{\dot{m}_{hw}} \delta h \quad (2.33)$$

Θεωρώντας ότι η πίεση είναι σταθερή κατά μήκος του εναλλάκτη, υπολογίζονται οι θερμοκρασίες $T_{hw_{i+1}}$ και T_{i+1} και, συνεπώς, η θερμοκρασιακή διαφορά $\Delta T_i = T_{hw_{i+1}} - T_{i+1}$.



Σχήμα 2.9: Στοιχειώδες τμήμα εναλλάκτη. Με το δείκτη h χαρακτηρίζεται το θερμό ρεύμα και με το δείκτη c το ψυχρό ρεύμα.

- Η μικρότερη θερμοκρασιακή διαφορά που προκύπτει στο εσωτερικό του εναλλάκτη, οφείλει να είναι μεγαλύτερη των $10^{\circ}C$. Σε αντίθετη περίπτωση, υποτίθεται μια άλλη αρχική πίεση p_1 και επαναλαμβάνεται η διαδικασία μέχρι η ελάχιστη θερμοκρασιακή διαφορά στον εναλλάκτη να είναι αποδεκτή. Καθώς αυτή η διαδικασία είναι αρκετά χρονοβόρα, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τη μέθοδο της τέμνουσας, όπου κάθε νέα τιμή της p_1 προκύπτει ως συνάρτηση δυο παλαιότερων υποθέσεων της πίεσης μέσω του αναδρομικού τύπου 2.34:

$$p_1^n = p_1^{n-1} - \frac{(\Delta T_{min}^{n-1} - 10)(p_1^{n-1} - p_1^{n-2})}{\Delta T_{min}^{n-1} - \Delta T_{min}^{n-2}} \quad (2.34)$$

όπου ο δείκτης n δηλώνει τον αριθμό των επαναλήψεων. Επίσης, το μέγεθος ΔT_{min}^n αντιστοιχεί στην ελάχιστη θερμοκρασιακή διαφορά, που προκύπτει στον εναλλάκτη στην αντίστοιχη επανάληψη n .

- Μόλις βρεθεί η σωστή πίεση, γνωρίζοντας ότι μόνο μια τιμή της επαληθεύει τις συνθήκες του προβλήματος, συνεχίζεται ο υπολογισμός της κατάστασης 4. Αυτό γίνεται εύκολα, γνωρίζοντας ότι η πίεση της είναι ίση με τη χαμηλή πίεση του κύκλου (p_1) και χρησιμοποιώντας την εξίσωση 2.23. Στο σημείο αυτό είναι πολύ σημαντικό να ελεγχθεί αν η προκύπτουσα κατάσταση 4 αντιστοιχεί σε ατμό ή διφασική ροή. Εάν το σημείο 4 στο χάρτη του εργαζόμενου μέσου βρίσκεται μέσα στην περιοχή διφασικού μίγματος, η πίεση της κατάστασης 2, που είχε αρχικά υποτεθεί, δεν πληροί τις προϋποθέσεις του συγκεκριμένου προβλήματος και πρέπει να απορρίπτεται. Καθώς η p_2 αυξάνει, το σημείο 4 πλησιάζει κοντά στην περιοχή διφασικής ροής. Συνεπώς, υπάρχει κάποια τιμή της πίεσης, την οποία δεν μπορεί να υπερβεί. Εκτός από αυτό το άνω όριο, υπάρχει πάντα και το κάτω όριο της p_2 , το οποίο είναι η κρίσιμη πίεση του ψυκτικού μέσου, που χρησιμοποιείται. Η υψηλή πίεση πρέπει πάντα να επιλέγεται εντός του προαναφερθέντος πεδίου τιμών. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, τα δεδομένα έχουν τέτοιες τιμές, σε συνδυασμό με το εργαζόμενο μέσο που χρησιμοποιείται, έτσι ώστε το εύρος

τιμών, το οποίο μπορεί να λάβει η p_2 , να είναι αρκετά στενό.

Σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση, υποθέτοντας μια τιμή της υψηλής πίεσης εντός του πεδίου τιμών της, είναι δυνατός ο υπολογισμός του κύκλου κατά μοναδικό τρόπο. Συνεπώς, το πρόβλημα έχει μια ελεύθερη παράμετρο, η οποία θα μπορούσε να είναι η υψηλή πίεση. Στη συνέχεια είναι δυνατός ο υπολογισμός του βαθμού απόδοσης και της ισχύος που αποδίδει ο κύκλος από τις σχέσεις 2.19, 2.20 και 2.21 αντίστοιχα. Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της επιφάνειας των εναλλακτών με τη βοήθεια των σχέσεων 2.12 έως 2.18 και 2.26 έως 2.28, όπως έχει περιγραφεί σε προηγούμενο κεφάλαιο. Έτσι τελειώνει η θερμοδυναμική ανάλυση του κύκλου.

2.3.2 Βελτιστοποίηση του υπερκρίσιμου ORC

Όπως έχει προαναφερθεί ο τελικός στόχος της ανάλυσης ενός οργανικού κύκλου Rankine δεν είναι απλώς ο υπολογισμός των θερμοδυναμικών και κατασκευαστικών μεγεθών της εγκατάστασης, όπως αυτός παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αλλά κυρίως η μελέτη των βέλτιστων συνθηκών λειτουργίας του. Στο σχεδιασμό και στη μελέτη μιας εγκατάστασης ηλεκτροπαραγωγής με χρήση θερμοδυναμικού κύκλου, το κύριο ενδιαφέρον επικεντρώνεται, στην όσο το δυνατόν καλύτερη απόδοσή του και στο χαμηλότερο δυνατό κόστος εγκατάστασης. Σε οργανικούς κύκλους διαχείρισης χαμηλής ενέργειας, όπως αυτός που μελετάται, η κύρια πηγή κόστους είναι η αγορά των εναλλακτών θερμότητας. Επομένως το κόστος εγκατάστασης μειώνεται αρκετά στην περίπτωση που γίνει προσπάθεια μείωσης του μεγέθους του ατμοποιητή και του συμπυκνωτή. Συμπερασματικά, μπορεί κανείς να ορίσει τρεις στόχους προς βελτιστοποίηση. Αυτοί είναι:

- η αύξηση του βαθμού απόδοσης του θερμοδυναμικού κύκλου
- η μείωση της επιφάνειας του ατμοποιητή
- η μείωση της επιφάνειας του συμπυκνωτή.

Εδώ μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι αυτοί οι στόχοι είναι αντιφατικοί καθώς, όταν επιδιώκεται αύξηση το βαθμού απόδοσης της εγκατάστασης, απαιτείται όσο το δυνατόν καλύτερη συναλλαγή θερμότητας στους εναλλάκτες και συνεπώς μεγαλύτερη επιφάνειά τους. Έτσι, σκοπός της βελτιστοποίησης είναι η ταυτόχρονη επίτευξη αυτών των στόχων με την κατάλληλη επιλογή των μεταβλητών σχεδιασμού. Όπως αποδείχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η μόνη μεταβλητή σχεδιασμού του προβλήματος είναι η υψηλή πίεση p_2 . Όπως είναι λογικό δεν υπάρχει μια τιμή της πίεσης, η οποία να ελαχιστοποιεί και τους τρεις στόχους της βελτιστοποίησης καθώς αυτοί είναι αντικρουόμενοι. Αυτό το γεγονός οδηγεί στη δημιουργία του μετώπου μη-κυριαρχούμενων λύσεων (μέτωπο Pareto), δηλαδή του συνόλου των τιμών της πίεσης που αυξάνουν όσο το δυνατόν το βαθμό απόδοσης επιτρέποντας παράλληλα την ύπαρξη μικρών εναλλακτών.

Η διαδικασία της βελτιστοποίησης πραγματοποιήθηκε μέσω της βοήθειας του εξελικτικού αλγορίθμου που έχει αναπτυχθεί στο ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ και ονομάζεται E.A.SY [10, 11, 12, 13, 14, 5]. Το πρόγραμμα αυτό συνεργάζεται άμεσα με το πρόγραμμα επίλυσης του θερμοδυναμικού κύκλου, το οποίο εκτελεί τον αλγόριθμο που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Πρόκειται για λογισμικό βελτιστοποίησης βασισμένο στους εξελικτικούς αλγορίθμους (EA), που μπορεί να χρησιμοποιήσει ως οποιοδήποτε κλειστό λογισμικό αξιολόγησης και να χειριστεί πολύπλοκα προβλήματα πολλών στόχων, με περιορισμούς. Σε κάθε γενιά χειρίζεται τρεις πληθυσμούς, αυτούς των γονέων (parents), των απογόνων (offspring) και των επίλεκτων (elites), οι οποίοι ανανεώνονται χρησιμοποιώντας τελεστές εξέλιξης (evolution operators) (επιλογή γονέων (parent selection), διασταύρωση (recombination), μετάλλαξη (mutation) και ελιτισμού (elitism)). Κάθε υποψήφια λύση αξιολογείται από το πρόγραμμα επίλυσης του θερμοδυναμικού κύκλου, έτσι ώστε να ποσοτικοποιηθεί η απόδοσή της με βάση τα τιθέμενα κριτήρια-στόχους και τους περιορισμούς του προβλήματος. Ο εξελικτικός αλγόριθμος αναζητά τη βέλτιστη λύση του προβλήματος στέλνοντας διάφορες τιμές της πίεσης για αξιολόγηση στο πρόγραμμα επίλυσης του κύκλου, ο οποίος με βάση αυτήν την τιμή υπολογίζει τις τιμές των συναρτήσεων στόχων της βελτιστοποίησης. Στη συνέχεια ενημερώνει τον εξελικτικό αλγόριθμο, για τις τιμές που υπολογίστηκαν, έτσι ώστε να αποφασιστεί η νέα τιμή της πίεσης και να ξεκινήσει νέα αξιολόγηση. Με τον τρόπο αυτό υπολογίζονται συνεχώς καλύτερες τιμές της p_2 .

Σημαντικό βήμα κατά τη βελτιστοποίηση είναι η εύρεση του πεδίου ορισμού της μεταβλητής σχεδιασμού. Ο εξελικτικός αλγόριθμος στην αναζήτησή του για τη βέλτιστη λύση μπορεί να θέσει οποιαδήποτε τιμή για στην υψηλή πίεση του κύκλου. Το μεγαλύτερο μέρος των τιμών της πίεσης οδηγούν σε μη επιθυμητές καταστάσεις για τον ORC που μελετάται, ή ακόμα και σε καταστάσεις φυσικά μη αποδεκτές. Συνεπώς πρέπει να τίθενται πάντα κάποιοι περιορισμοί, που να διαφυλάττουν, ότι η λύση που θα παράξει η διαδικασία της βελτιστοποίησης θα έχει φυσικό νόημα. Οι περιορισμοί αυτοί, καθώς και η εξήγησή τους, φαίνονται στον πίνακα 2.4.

Οι παραπάνω περιορισμοί εξασφαλίζουν την ομαλή λειτουργία των εναλλακτών και τη σωστή θέση των πιέσεων στο θερμοδυναμικό χάρτη. Έτσι κάθε φορά που ο εξελικτικός αλγόριθμος βρίσκει μια τιμή της πίεσης που προκαλεί την παραβίαση κάποιων από τους παραπάνω περιορισμούς, απορρίπτεται.

Με βάση τα παραπάνω, το μέτωπο Pareto, που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο πρόβλημα φαίνεται στο σχήμα 2.10.

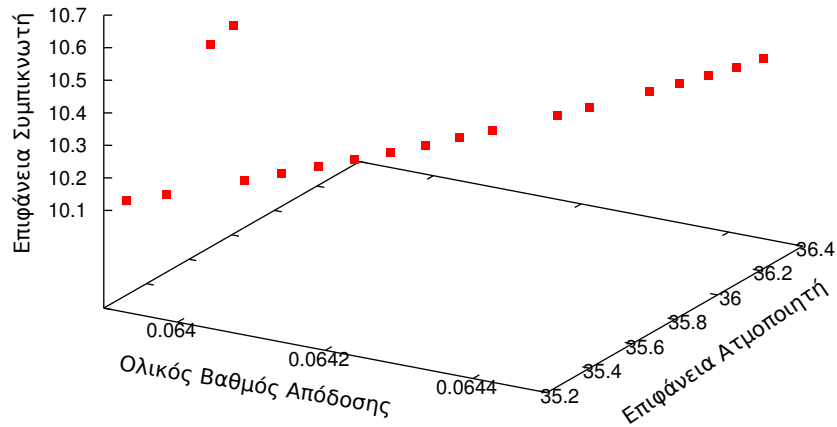
Το πρώτο που μπορεί να παρατηρήσει κανείς είναι, ότι όλες οι βέλτιστες λύσεις κινούνται εντός ενός πολύ στενού ορίου τιμών του βαθμού απόδοσης και της επιφάνειας των εναλλακτών. Αυτό δείχνει ότι η φύση του προβλήματος και οι περιορισμοί του πίνακα 2.4 είναι τέτοιοι έτσι ώστε το εύρος των δυνατών λύσεων του προβλήματος να είναι εξαιρετικά μικρό, τείνοντας προς μια μοναδική λύση. Το δεύτερο φαινόμενο που φαίνεται να παρουσιάζεται στο μέτωπο Pareto, είναι ότι όλες οι βέλτιστες λύσεις βρίσκονται σε μια καμπύλη στον τριδιάστατο χώρο. Το γεγονός αυτό εξηγείται εύκολα, αφού το θερμοδυναμικό πρόβλημα είναι μονοπαραμετρικό με παράμετρο την υψηλή

περιορισμός	επεξήγηση
$p_1 < p_{crit}$	Η χαμηλή πίεση του κύκλου πρέπει να είναι μικρότερη από την κρίσιμη πίεση του εργαζόμενου μέσου
$t_{cw1} < t_1$	Η θερμοκρασία εξόδου του εργαζόμενου μέσου από το συμπυκνωτή δεν μπορεί να είναι χαμηλότερη από τη θερμοκρασία εισόδου του νερού ψύξης σε αυτόν, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.8.
$p_{crit} < p_2$	Η υψηλή πίεση του κύκλου πρέπει να είναι μεγαλύτερη της κρίσιμης πίεσης του εργαζόμενου μέσου, καθώς ο κύκλος που αναλύεται είναι υπερκρίσιμος.
$t_2 < t_{hw2}$	Η θερμοκρασία εισόδου του εργαζόμενου μέσου στον ατμοποιητή δεν μπορεί να είναι υψηλότερη από τη θερμοκρασία εξόδου του θερμού νερού από αυτόν, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.7.
$t_3 < t_{hw1}$	Η θερμοκρασία εξόδου του εργαζόμενου μέσου από τον ατμοποιητή δεν μπορεί να είναι υψηλότερη από τη θερμοκρασία εισόδου του θερμού νερού σε αυτόν, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.7.
$t_{cw2} < t_4$	Η θερμοκρασία εισόδου του εργαζόμενου μέσου στο συμπυκνωτή δεν μπορεί να είναι χαμηλότερη από τη θερμοκρασία εξόδου του νερού ψύξης από αυτόν, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.8.
$t'_5 < t_5$	Η θερμοκρασία εξόδου από το στρόβιλο πρέπει να είναι μεγαλύτερη από τη θερμοκρασία κορεσμένου ατμού στην ίδια πίεση. Έτσι εξασφαλίζεται το γεγονός ότι δε θα υπάρξει διφασική ροή κατά τη λειτουργία του στρόβιλου.

Πίνακας 2.4: Περιορισμοί που οφείλει να σέβεται ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης.

πίεση p_2 . Συνεπώς τόσο ο βαθμός απόδοσης όσο και οι επιφάνειες των εναλλακτών αποτελούν συνάρτηση της p_2 . Επομένως στον τριδιάστατο χώρο, με βάση τις τρεις προαναφερθείσες μεταβλητές, όλες οι λύσεις βρίσκονται πάνω σε μια μονοπαραμετρική καμπύλη. Συγκεκριμένα στο μέτωπο Pareto φαίνονται τα τμήματα της καμπύλης, που αποτελούν τις βέλτιστες μη κυριαρχούμενες λύσεις.

Ενδεικτικά παρουσιάζονται στον πίνακα 2.5 τα μεγέθη του θερμοδυναμικού κύκλου μιας εκ των λύσεων του μετώπου, όπως αυτά υπολογίζονται με τη διαδικασία του προηγούμενου κεφαλαίου. Τα αποτελέσματα αυτά μεταβάλλονται ελάχιστα στις υπόλοιπες λύσεις.



Σχήμα 2.10: Μη κυριαρχούμενες λύσεις που υπολογίστηκαν με τη βοήθεια του προγράμματος βελτιστοποίησης E.A.SY και αφορούν τη λειτουργία της εγκατάστασης που αναλύεται.

ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ	$p(kPa)$	$T(^{\circ}C)$	$h(kJ/kg)$
1	1387.5	23.9	233.0
2	3972.5	26.3	235.9
3	3972.5	89.8	406.2
4	1387.5	39.5	388.8
παροχή μάζας ψυκτικού μέσου (kg/s)			0.587
ισχύς συμπιεστή (kW)			2.247
ισχύς στροβίλου (kW)			8.694
ολικός βαθμός απόδοσης (%)			6.447
επιφάνεια υπερθερμαντή (m^2)			36.33
επιφάνεια συμπυκνωτή (m^2)			10.39

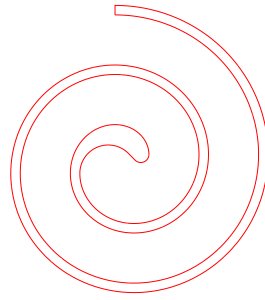
Πίνακας 2.5: Αναλυτική λύση του θερμοδυναμικού προβλήματος για υψηλή πίεση $p_2 = 3972.549 kPa$.

Κεφάλαιο 3

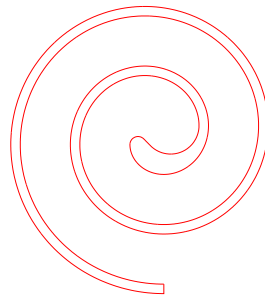
Γεωμετρία του Scroll

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύεται η γεωμετρία της μηχανής Scroll. Scroll, όπως έχει προαναφερθεί, είναι μια μηχανή η οποία εκτονώνει ή συμπιέζει ρευστό δίνοντας ή λαμβάνοντας έργο από μια περιστρεφόμενη άτρακτο. Η λειτουργία του στηρίζεται στη σχετική κίνηση δύο ελίκων, των οποίων η γεωμετρία βασίζεται στην εξειλιγμένη καμπύλη (involute) του κύκλου (σχήμα 3.2). Η μια έλικα μπορεί να ονομαστεί στάτης, καθώς παραμένει ακίνητη καθ' όλη τη διάρκεια της λειτουργίας του Scroll, ενώ η δεύτερη μπορεί να ονομαστεί δρομέας καθώς εκτελεί ομαλή κυκλική (και όχι περιστροφική) κίνηση γύρω από το στάτη [15, 16, 1, 17, 18].

Η αρχή λειτουργίας του είναι η ακόλουθη: Κατά την περιστροφή του δρομέα γύρω από το στάτη εισάγεται ρευστό εντός της μηχανής και εγκλωβίζεται σε έναν κλειστό χώρο, που σχηματίζεται μεταξύ των δύο ελίκων. Στη συνέχεια, το χωρίο αυτό παραμορφώνεται μεταβάλλοντας τον όγκο του. Όταν το Scroll λειτουργεί ως συμπιεστής, το χωρίο μετακινείται προς το κέντρο των ελίκων μειώνοντας τον όγκο του και αναγκάζοντας το ρευστό που περιέχει να συμπιεστεί. Η αντίθετη διαδικασία πραγματοποιείται κατά την εκτόνωση. Το ρευστό εισάγεται στο Scroll στο κέντρο των ελικώσεων και αποσυμπιέζεται, αυξάνοντας τον όγκο του χωρίου που το περιλαμβάνει και προκαλώντας την κίνηση του δρομέα. Μόλις ολοκληρωθεί η διαδικασία της συμπίεσης ή εκτόνωσης, το ρευστό απελευθερώνεται από τους θύλακες που σχηματίζονται μεταξύ στάτη και δρομέα και εξέρχεται από τη μηχανή. Για να μοντελοποιηθεί η γεωμετρία και η κίνηση του Scroll, δίνονται στην ενότητα 3.1 τα απαραίτητα στοιχεία διαφορικής γεωμετρίας. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι ιδιότητες της εξειλιγμένης καμπύλης, οι οποίες είναι απαραίτητες για τη μετέπειτα μελέτη του Scroll. Στην ενότητα 3.2 αποδεικνύονται χρήσιμες ιδιότητες της κίνησης του. Στην ενότητα 3.3 παρουσιάζεται η ιδιαίτερη γεωμετρία της εσωτερικής περιοχής της μηχανής και αναλύονται οι ιδιομορφίες της. Στο τέλος αυτής της ενότητας γίνονται διαθέσιμες όλες οι εξισώσεις που περιγράφουν τη γεωμετρία της μηχανής. Τέλος, στην ενότητα 3.4 αναλύεται διεξοδικά η θεωρία, με την οποία υπολογίζονται τα περιγράμματα των χωρίων, που εσωκλείουν το ρευστό.

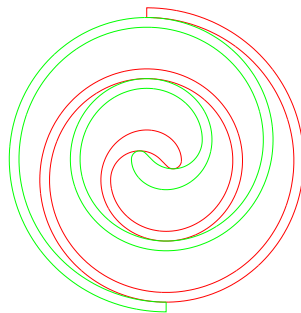


(α) Στάτης



(β') Δρομέας

Σχήμα 3.1: Γεωμετρική απεικόνιση των δύο ελίκων που αποτελούν το scroll.



Σχήμα 3.2: Συνεργασία των δύο ελίκων.

Ο υπολογισμός αυτός είναι απαραίτητος καθώς θα ακολουθήσει σε επόμενο κεφάλαιο η γένεση πλέγματος εντός των χωρίων. Στο σχήμα 3.3 φαίνεται το εσωτερικό μιας πραγματικής μηχανής.



Σχήμα 3.3: Πραγματική μηχανή Scroll. Στα αριστερά διακρίνεται ο στάτης και στα δεξιά ο δρομέας.

3.1 Εξειλιγμένη καμπύλης

Έστω παραμετρική καμπύλη με εξίσωση $\vec{x} = \vec{x}(t)$, με παράμετρο την πραγματική μεταβλητή t , όπου είναι συνεχής, παραγωγίσιμη τουλάχιστον μια φορά και με συνεχή παράγωγο. Η παράμετρος t μπορεί να αντικατασταθεί γενικά από μια άλλη παράμετρο s μόνο αν η συνάρτηση $t = t(s)$ είναι παραγωγίσιμη, με μη μηδενική παράγωγο και συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της. Έστω συνάρτηση $t = t(s)$ τέτοια ώστε

$$s = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| dt \quad (3.1)$$

Η συνάρτηση s είναι ίση με το μήκος της καμπύλης μεταξύ των σημείων $\vec{x}(t_0)$ και $\vec{x}(t)$. Η αντικατάσταση της παραμέτρου t από την s είναι πολλές φορές επιθυμητή, λόγω των πολλών ιδιοτήτων της τελευταίας. Η χρησιμότητά της θα φανεί στη συνέχεια της ενότητας. Η συνάρτηση s είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, που δίνεται από τον ακόλουθο τύπο [19, 20]

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| dt = \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| \quad (3.2)$$

Συνοπώς, η μεταβλητή s πληροί τις προϋποθέσεις για να αντικαταστήσει το t ως παράμετρο. Άρα μπορεί κανείς να γράψει ότι $\vec{x} = \vec{x}(s)$. Μια χρήσιμη ιδιότητα του μήκους τόξου s είναι ότι

$$\left| \frac{d\vec{x}}{ds} \right| = \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| \left| \frac{dt}{ds} \right| = \frac{|d\vec{x}/dt|}{|ds/dt|} = \frac{|d\vec{x}/dt|}{|d\vec{x}/dt|} = 1 \quad (3.3)$$

Το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα της καμπύλης $\vec{x}(s)$ σε κάθε σημείο συμβολίζεται με \vec{t} δίνεται από τον παρακάτω τύπο.

$$\vec{t} = \frac{d\vec{x}}{ds} \quad (3.4)$$

Το κάθετο διάνυσμα στην εφαπτομένη της καμπύλης συμβολίζεται με \vec{k} και αποδεικνύεται ότι είναι ίσο με

$$\vec{k} = \frac{d\vec{t}}{ds} \quad (3.5)$$

Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα συμβολίζεται με \vec{n} και ορίζεται με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε να είναι παράλληλο με το διάνυσμα \vec{k} και φορά τέτοια ώστε να παραμένει πάντα συνεχές κατά μήκος της καμπύλης. Όταν η καμπύλη δεν έχει κάποιο σημείο καμπής το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε αυτήν ορίζεται όπως φαίνεται στη εξίσωση 3.6.

$$\vec{n} = \frac{d\vec{t}/ds}{|d\vec{t}/ds|} \quad (3.6)$$

Με βάση αυτόν τον ορισμό, εκατέρωθεν ενός σημείου καμπής, το διάνυσμα \vec{n} θα αλλάζει φορά. Για να αποφύγει κανείς αυτήν την ασυνέχεια μπορεί να ορίσει μια σχέση μεταξύ των δύο διανυσμάτων \vec{k} και \vec{n} , έτσι ώστε να ισχύει

$$\vec{k}(s) = \kappa(s)\vec{n}(s) \quad (3.7)$$

όπου $\kappa(s)$ είναι πραγματική βαθμωτή συνάρτηση και ίση με $\left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right|$ ή $-\left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right|$ όταν $\vec{k} \neq \vec{0}$ και 0 όταν $\vec{k} = \vec{0}$.

Όπως προκύπτει από τα προαναφερθέντα, τα διανύσματα \vec{n} και \vec{t} είναι κάθετα. Έτσι θα ισχύει ότι

$$\vec{n}(s) \cdot \vec{t}(s) = 0 \quad (3.8)$$

Ο ορισμός των παραπάνω διανυσμάτων είναι απαραίτητος για τη διατύπωση της εξίσωσης της εξειλιγμένης, που ακολουθεί. Έστω παραμετρική καμπύλη με εξίσωση

$\vec{x} = \vec{x}(s)$. Ως εξειλιγμένη αυτής της καμπύλης ορίζεται η καμπύλη, η οποία βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια, που ορίζουν οι φορείς των εφαπτομενικών διανυσμάτων της $\vec{x} = \vec{x}(s) \forall s$, και παραμένει πάντα κάθετη σε αυτούς (σχήμα 3.4). Η εξειλιγμένη της καμπύλης \vec{x} θα συμβολίζεται με \vec{x}^* . Έστω σημείο πάνω στην καμπύλη \vec{x} και t το εφαπτομενικό διάνυσμα στο σημείο αυτό. Ο φορέας του t τέμνει κάθετα την εξειλιγμένη στο σημείο \vec{x}^* . Το διάνυσμα $\vec{x} - \vec{x}^*$ θα είναι παράλληλο με το t . Αυτή η ιδιότητα εκφράζεται ως

$$\vec{x}^* - \vec{x} = g(s)\vec{t} \quad (3.9)$$

όπου $g(s)$ είναι βαθμωτή συνάρτηση της μεταβλητής s της αρχικής καμπύλης. Επομένως, αναζητείται μια έκφραση για τη συνάρτηση $g(s)$, έτσι ώστε να βρεθεί η παραμετρική εξίσωση της εξειλιγμένης. Η εξίσωση, η οποία δίνει την $g(s)$, προκύπτει από το γεγονός, ότι ο φορέας του εφαπτομενικού διανύσματος του σημείου \vec{x} τέμνει κάθετα το εφαπτομενικό διάνυσμα της εξειλιγμένης στο σημείο \vec{x}^* . Σύμφωνα με την εξίσωση 3.4, το εφαπτομενικό αυτό διάνυσμα εκφράζεται ως $\frac{d\vec{x}^*}{ds}$. Έτσι, θα ισχύει

$$\frac{d\vec{x}^*}{ds} \cdot \vec{t} = 0 \quad (3.10)$$

Η παράγωγος $\frac{d\vec{x}^*}{ds}$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη σχέση 3.9. Έτσι προκύπτει

$$\frac{d\vec{x}^*}{ds} = \frac{d\vec{x}}{ds} + \frac{dg}{ds}\vec{t} + g\frac{d\vec{t}}{ds} \quad (3.11)$$

όπου, με τη βοήθεια της 3.4, 3.6 και της 3.7, γίνεται

$$\frac{d\vec{x}^*}{ds} = \left(1 + \frac{dg}{ds}\right)\vec{t} + g\kappa\vec{n} \quad (3.12)$$

Η σχέση 3.12 δίνει μια έκφραση της παραγώγου, που μπορεί να αντικατασταθεί στην εξίσωση 3.10. Μετά την αντικατάσταση προκύπτει

$$\left(1 + \frac{dg}{ds}\right)(\vec{t} \cdot \vec{t}) + g\kappa(\vec{n} \cdot \vec{t}) = 0 \quad (3.13)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το διάνυσμα \vec{t} είναι μοναδιαίο και την εξίσωση 3.8 προκύπτει ότι

$$1 + \frac{dg}{ds} = 0 \Leftrightarrow g(s) = -s + c \quad (3.14)$$

με c σταθερά. Αντικαθιστώντας την έκφραση της $g(s)$ στη σχέση 3.9, προκύπτει η εξίσωση της εξειλιγμένης καμπύλης [20], η οποία είναι

$$\vec{x}^* = \vec{x} + (c - s)\vec{t} \quad (3.15)$$

Το μέγεθος $c - s$ έχει εξαιρετική φυσική σημασία. Όπως έχει προαναφερθεί, η μεταβλητή s μετρά το μήκος της καμπύλης \vec{x} από ένα σημείο αναφοράς μέχρι το σημείο $\vec{x}(s)$. Από την εξίσωση 3.15, προκύπτει ότι υπάρχει ένα σημείο στο χώρο, τέτοιο ώστε οι καμπύλες \vec{x} και \vec{x}^* να τέμνονται και μάλιστα κάθετα. Έστω ότι στο σημείο αυτό, η παράμετρος s είναι ίση με s_0 . Άρα θα ισχύει $\vec{x}(s_0) = \vec{x}^*(s_0)$. Αν η καμπύλη \vec{x} δεν έχει σημείο καμπής, τότε το σημείο $\vec{x}^*(s_0)$ είναι η αφετηρία της εξειλιγμένης. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 3.15 προκύπτει ότι $c = s_0$. Συνεπώς, η σταθερά c είναι ίση με το μήκος τόξου της καμπύλης \vec{x} από το σημείο αναφοράς μέχρι το σημείο τομής της καμπύλης αυτής με την εξειλιγμένη της, απ' όπου προκύπτει το συμπέρασμα ότι $c - s > 0$. Τέλος, η διαφορά $c - s$ είναι ίση με το μήκος της καμπύλης από το σημείο $\vec{x}(s)$ μέχρι το σημείο $\vec{x}(s_0)$. Όμως από την εξίσωση 3.15 προκύπτει ότι

$$|\vec{x}^* - \vec{x}| = |(c - s)\vec{t}| = c - s \quad (3.16)$$

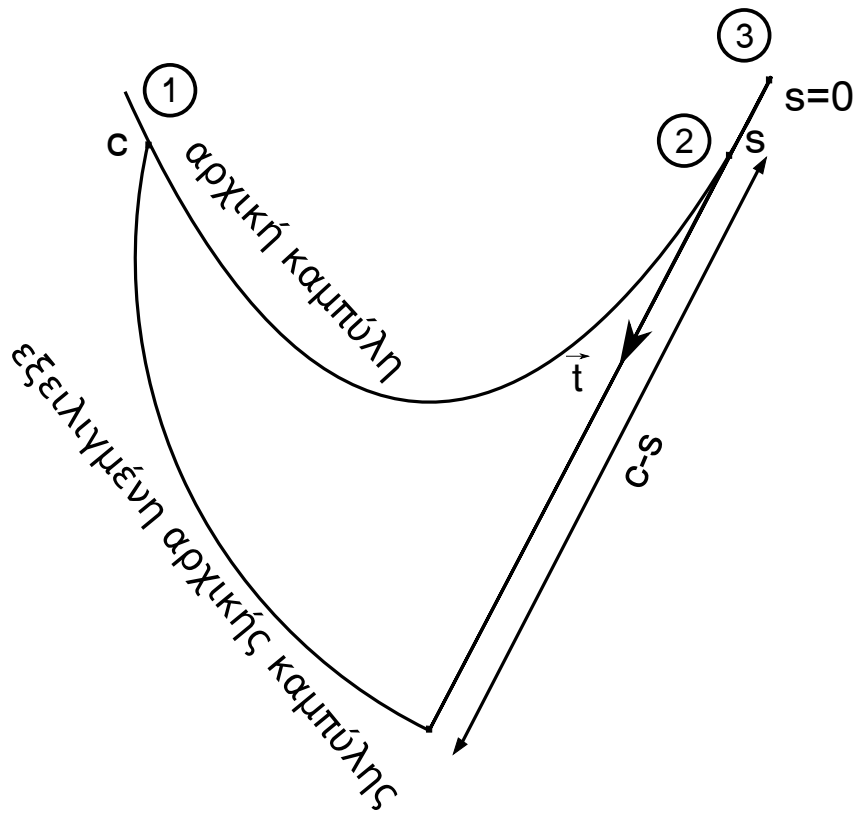
Επομένως, προκύπτει η ακόλουθη χρήσιμη ιδιότητα της εξειλιγμένης: Η απόσταση των σημείων $\vec{x}(s)$ και $\vec{x}^*(s)$ μιας καμπύλης και της εξειλιγμένης της είναι ίση με το μήκος της καμπύλης \vec{x} από το σημείο εκκίνησης της εξειλιγμένης μέχρι το σημείο $\vec{x}(s)$ και ίση με $c - s$. Αυτή η ιδιότητα απεικονίζεται στο σχήμα 3.4.

3.2 Η θεωρία της εξειλιγμένης εφαρμοσμένη στη μηχανή Scroll

Όπως έχει προαναφερθεί η εξειλιγμένη που προκύπτει από τον κύκλο, αποτελεί την κύρια καμπύλη πάνω στην οποία κατασκευάζεται το Scroll. Με βάση τα παραπάνω η εξίσωση της εξειλιγμένης του κύκλου βρίσκεται ως ακολούθως: Αρχικά, διατυπώνεται η παραμετρική εξίσωση του κύκλου.

$$\vec{x}(\phi) = r_b \cos\phi \vec{i} + r_b \sin\phi \vec{j} \quad (3.17)$$

όπου r_b η ακτίνα του κύκλου και ϕ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα \vec{x} με τον οριζόντιο άξονα. Το μήκος s είναι προφανώς ίσο με



Σχήμα 3.4: Εξειλιγμένη, προερχόμενη από τυχαία καμπύλη και γεωμετρική ερμηνεία του μεγέθους $c - s$. Το σημείο 3 είναι η αρχή μέτρησης του μήκους της καμπύλης. Τα σημεία 1 και 2 απέχουν μήκος καμπύλης c και s από αυτό αντίστοιχα.

$$s = r_b \phi \quad (3.18)$$

Όμοια ισχύει

$$c = r_b \phi_0 \quad (3.19)$$

όπου ϕ_0 είναι η γωνία του κύκλου από την οποία ξεκινά η εξειλιγμένη. Σύμφωνα με την εξίσωση 3.4, το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα του κύκλου (\vec{t}) υπολογίζεται ως εξής

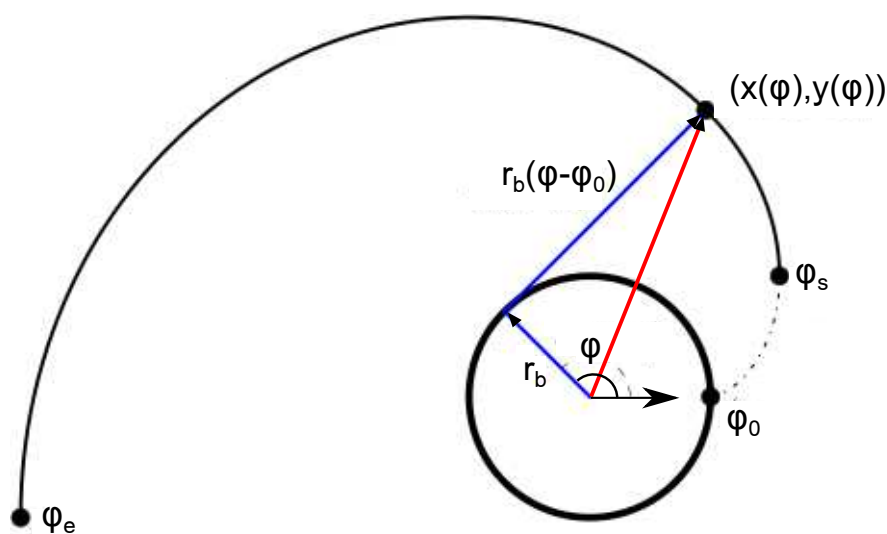
$$\vec{t} = \frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{d\vec{x}}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\vec{x}/d\phi}{ds/d\phi} = \frac{1}{r_b} (-r_b \sin\phi, r_b \cos\phi) = (-\sin\phi, \cos\phi) \quad (3.20)$$

Αντικαθιστώντας όλα τα παραπάνω μεγέθη στην εξίσωση της εξειλιγμένης (εξ. 3.15) προκύπτει η αναλυτική έκφραση των συντεταγμένων της εξειλιγμένης κύκλου. Απο εδώ και στο εξής χάριν απλότητας του συμβολισμού, θα παραλείπεται η αστερίσκος (*)

στην εξίσωση της εξειλιγμένης.

$$\begin{aligned} x(\phi) &= r_b(\cos\phi + (\phi - \phi_0)\sin\phi) \\ y(\phi) &= r_b(\sin\phi - (\phi - \phi_0)\cos\phi) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Η γεωμετρική ερμηνεία της εξίσωσης φαίνεται στο σχήμα 3.5



Σχήμα 3.5: Εξειλιγμένη προερχόμενη από κύκλο. Αρχικό σχήμα από εργασία [15]

Σε πολλές περιπτώσεις είναι χρήσιμο να μπορεί κανείς να βρίσκει την παράμετρο ϕ γνωρίζοντας τις συντεταγμένες του σημείου. Εάν υψώσει κανείς τις εξισώσεις 3.21 στο τετράγωνο και τις προσθέσει, βρίσκει τη σχέση 3.22. Η σχέση αυτή προκύπτει απευθείας και από το σχήμα 3.5.

$$x^2 + y^2 = r_b^2 + r_b^2(\phi - \phi_0)^2 \Leftrightarrow \phi = \sqrt{\left(\frac{|\vec{x}|}{r_b}\right)^2 - 1} + \phi_0 \quad (3.22)$$

και σε πολικές συντεταγμένες

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{r}{r_b}\right)^2 &= (\phi - \phi_0)^2 + 1 \\ \vartheta &= \phi - \tan(\phi - \phi_0) \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Η εξειλιγμένη του κύκλου ή αλλιώς η σπείρα του Αρχιμήδη αποτελεί την τροχιά που

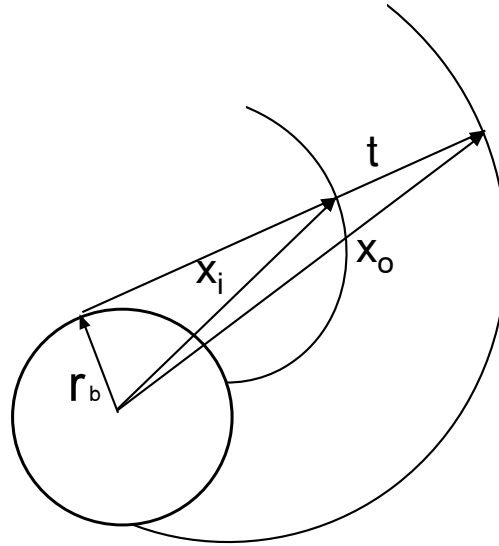
εκτελεί ένα σώμα καθώς κινείται στο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος της εφαπτομένης ενός κύκλου, όταν αυτή στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Επίσης, εάν τυλίξει κανείς ένα σχοινί γύρω από ένα κύκλο και αρχίσει να το ξετυλίγει επιβάλλοντας πάντα τάση στο σχοινί, τότε η άκρη του θα διαγράψει μια εξειλιγμένη προερχόμενη από κύκλο. Αυτό το φαινόμενο δικαιολογείται από τη φυσική ερμηνεία του μεγέθους $c - s$, που αναλύθηκε παραπάνω. Ένα πολύ χρήσιμο συμπέρασμα είναι ότι η απόσταση μεταξύ των περιελίξεων είναι ίση με την περίμετρο του κύκλου, δηλαδή ίση με $2\pi r_b$. Έτσι η ακτίνα του κύκλου ορίζει πόσο πυκνή θα είναι η σπείρα της εξειλιγμένης. Από τις εξισώσεις 3.21 προκύπτει ότι οι εξειλιγμένες ενός κύκλου με ακτίνα r_b είναι άπειρες. Όμως προσδιορίζονται πλήρως αν δοθεί η γωνία του κύκλου ϕ_0 , από την οποία ξεκινούν. Ο κύκλος, από τον οποίο προκύπτει μια εξειλιγμένη, θα λέγεται βασικός κύκλος.

Η εξειλιγμένη του κύκλου ξεκινά από τη γωνία ϕ_0 και συνεχίζει θεωρητικά μέχρι το άπειρο, πραγματοποιώντας περιελίξεις. Η έλικα που σχηματίζεται αποτελεί το στάτη ή το δρομέα του Scroll. Καθώς ο στάτης και, όμοια, ο δρομέας είναι έλικες που πραγματοποιούν ένα ορισμένο αριθμό περιελίξεων, πρέπει να υπάρχει μια γωνία ϕ_e , η οποία σηματοδοτεί το τελευταίο σημείο της εξειλιγμένης, που θα χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή του στάτη. Επίσης, η έλικα του στάτη δεν ξεκινά από την αρχική γωνία της εξειλιγμένης ϕ_0 , αλλά από μια μεγαλύτερη, που συμβολίζεται με ϕ_s . Αυτό συμβαίνει για το λόγο ότι, αν ο στάτης και ο δρομέας κατασκευάζονταν από την αρχική γωνία της εξειλιγμένης, θα υπήρχε περίπτωση να μην μπορούν να τοποθετηθούν εντός του Scroll και να περιστραφούν. Επομένως, σε μια εξειλιγμένη υπάρχουν οι τρεις χαρακτηριστικές γωνίες ϕ_0 , ϕ_s και ϕ_e , που φαίνονται στο σχήμα 3.5.

Όπως θα επισημανθεί και στη συνέχεια, ο δρομέας είναι συμμετρικός ως προς σημείο με το στάτη. Συνεπώς, όποια γεωμετρική ανάλυση γίνεται στο στάτη, αυτή θα ισχύει και στο δρομέα. Χάρην απλότητας, στο εξής θα γίνεται αναφορά μόνο στο στάτη.

Καθώς ο στάτης και ο δρομέας αποτελούν τριδιάστατα σχήματα, πρέπει να δοθούν στις αντίστοιχες εξειλιγμένες πάχος και ύψος. Στην παρούσα διπλωματική εργασία το Scroll μελετάται ως διδιάστατο σχήμα. Η επέκταση στις τρεις διαστάσεις γίνεται εύκολα όσον αφορά τη γεωμετρία, αφού πραγματοποιείται με εξύψωση του διδιάστατου σχήματος στην τρίτη διάσταση. Για να δοθεί πάχος στο στάτη χρησιμοποιούνται δύο εξειλιγμένες καμπύλες, μια εσωτερική (\vec{x}_i) και μια εξωτερική (\vec{x}_o) (σχήμα 3.6). Από εδώ και στο εξής όποια μεγέθη έχουν ως δείκτη το γράμμα i , θα αντιστοιχούν στην εσωτερική εξειλιγμένη, ενώ όσα έχουν το γράμμα o , θα αντιστοιχούν στην εξωτερική. Ως πάχος ορίζεται η κάθετη απόσταση της εξωτερικής από την εσωτερική εξειλιγμένη. Η απόσταση αυτή έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης του βασικού κύκλου λόγω του ορισμού της εξειλιγμένης καμπύλης, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.6.

Το πάχος θα συμβολίζεται με t και είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος \vec{t}_w του σχήματος. Το διάνυσμα του πάχους έχει ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά με το εφαπτομενικό διάνυσμα του βασικού κύκλου, το οποίο υπολογίζεται στην εξίσωση 3.20. Έτσι θα ισχύει



Σχήμα 3.6: Γεωμετρική κατασκευή με σκοπό την εύρεση της απόστασης δύο εξειλιγμένων.

$$\vec{t}_w = t_w \sin\phi \vec{i} - t_w \cos\phi \vec{j} \quad (3.24)$$

Επίσης από το σχήμα 3.6 προκύπτει η σχέση 3.25.

$$\vec{x}_o = \vec{x}_i + \vec{t}_w \quad (3.25)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση της εξειλιγμένης στη σχέση 3.25, προκύπτει

$$\left. \begin{aligned} \cos\phi + (\phi - \phi_{o0})\sin\phi &= \cos\phi + (\phi - \phi_{i0})\sin\phi + \frac{t_w}{r_b}\sin\phi \\ \sin\phi + (\phi - \phi_{o0})\cos\phi &= \sin\phi - (\phi - \phi_{i0})\cos\phi + \frac{t_w}{r_b}\cos\phi \end{aligned} \right\} \iff \quad (3.26)$$

$$t_w = r_b(\phi_{i0} - \phi_{o0}) \quad (3.27)$$

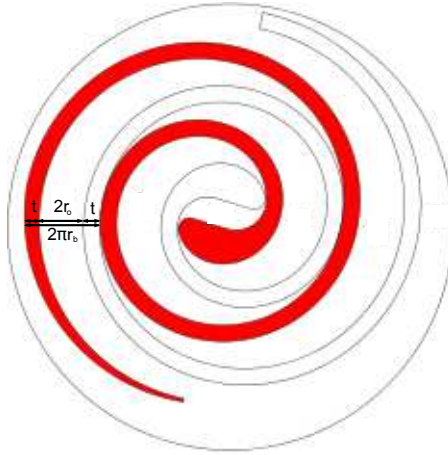
Η παραπάνω σχέση [15] είναι εξαιρετικά χρήσιμη καθώς συνδέει το πάχος του στάτη με τις χαρακτηριστικές γωνίες των εξειλιγμένων, που τον περιβάλλουν.

Από τη σχέση 3.24 προκύπτει ότι το πάχος είναι σταθερό κατά μήκος κάθε έλικας. Για να βρει κανείς τις εξισώσεις, που περιγράφουν τη γεωμετρία του δρομέα αρκεί να γνωρίζει ότι ο δρομέας είναι συμμετρικός ως προς το σημείο της αρχής των αξόνων με το στάτη και μετατοπισμένος κατά μήκος r_0 , έτσι ώστε να έρθει σε επαφή μαζί του. Τα μεγέθη, που αντιστοιχούν στη γεωμετρία του στάτη, θα έχουν το δείκτη s , ενώ αυτά που αντιστοιχούν στο δρομέα, τον δείκτη r . Σε όποιο μέγεθος δεν υπάρχει δείκτης θα σημαίνει ότι αναφέρεται είτε στο στάτη είτε στο δρομέα. Η συμμετρική καμπύλη της εσωτερικής εξειλιγμένης είναι μια εξειλιγμένη με $\phi_{ri0} = \phi_{si0} + \pi$. Η απόσταση μεταξύ τους υπολογίζεται από τη σχέση 3.24 και είναι ίση με $r_b\pi$. Συνεπώς, αν ο δρομέας και ο στάτης, σε μια ιδανική κατάσταση, δεν είχαν πάχος, για να έρθουν σε επαφή θα αρκούσε να μετακινηθεί ο δρομέας κατά $r_b\pi$. Συνεπώς θα ίσχυε $r_0 = r_b\pi$. Στην πραγματικότητα ο δρομέας πρέπει να μετακινηθεί λιγότερο από την ιδανική κατάσταση καθώς ένα τμήμα της απόστασης $r_b\pi$ το καταλαμβάνει το πάχος t . Όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.7, ισχύει ότι

$$r_0 = r_b\pi - t_w = r_b(\pi - \phi_{i0} + \phi_{o0}) \quad (3.28)$$

Παρατηρεί κανείς από την εξίσωση 3.28 ότι η μετατόπιση r_0 είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου ϕ . Συνεπώς, κάθε σημείο του δρομέα έχει δυνατότητα μετακίνησης κατά r_0 προς οποιαδήποτε κατεύθυνση. Το γεγονός αυτό μπορεί να μην ισχύει για τα αρχικά σημεία της εξειλιγμένης. Γι' αυτό το λόγο, οι δύο έλικες κατασκευάζονται από τη γωνία ϕ_s και μετά. Έτσι, συμπεραίνει κανείς ότι κατά τη λειτουργία του Scroll, κάθε σημείο του δρομέα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ακτίνα r_0 , το οποίο έχει προαναφερθεί και στην αρχή του κεφαλαίου.

Το επόμενο βήμα για την εύρεση των εξισώσεων του δρομέα είναι η εύρεση του διάνυσματος της μετατόπισής του από την αρχική του θέση. Έχει ήδη αποδειχθεί, ότι το διάνυσμα αυτό έχει μέτρο ίσο με r_0 . Επομένως, πρέπει να υπολογιστεί και η κατεύθυνσή του. Ο υπολογισμός θα γίνει με τη βοήθεια του σχήματος 3.8. Έστω ένα σημείο τομής του στάτη με το δρομέα. Επειδή το σημείο αυτό είναι μέρος των εξειλιγμένων και του στάτη και του δρομέα, είναι δυνατή η χάραξη ευθείας, που να εφάπτεται και στους δύο βασικούς κύκλους και ταυτόχρονα να περνά από το σημείο επαφής, όπου να τέμνει τις δύο καμπύλες κάθετα. Το διάνυσμα της μετατόπισης είναι παράλληλο σε αυτήν την ευθεία, αφού οι ακτίνες των δύο κύκλων είναι ίσες και κάθετες σε αυτήν. Η γωνία που σχηματίζει τόσο η ευθεία, όσο και το διάνυσμα της μετατόπισης με τον οριζόντιο άξονα, είναι ίση με $\phi - \frac{\pi}{2}$. Συνεπώς, το διάνυσμα της μετατόπισης έχει την έκφραση



Σχήμα 3.7: Απαιτούμενο μήκος μετατόπισης του δρομέα προς οποιαδήποτε κατεύθυνση, έτσι ώστε να έρθει σε επαφή με το στάτη. Αρχικό σχήμα από εργασία [15].

$$\vec{r}_0 = r_0 \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + r_0 \sin\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)\vec{j} = r_0 \sin(\phi)\vec{i} - r_0 \cos(\phi)\vec{j} \quad (3.29)$$

Εδώ είναι επιθυμητό να οριστεί ένα νέο μέγεθος, το οποίο είναι χρήσιμο για τη συνέχεια. Το μέγεθος αυτό συμβολίζεται με θ και χαρακτηρίζει τα σημεία επαφής του στάτη και του δρομέα. Στο κεφάλαιο 3.4 επεκτείνεται το μέγεθος θ σε κλαδική συνάρτηση. Εάν το Scroll δουλεύει ως συμπιεστής, δηλαδή το ρευστό εισέρχεται από την περιφέρεια, σημαίνει ότι το πρώτο σημείο τομής που μας ενδιαφέρει κατά την αρχική θέση του δρομέα είναι το σημείο A του σχήματος 3.9.

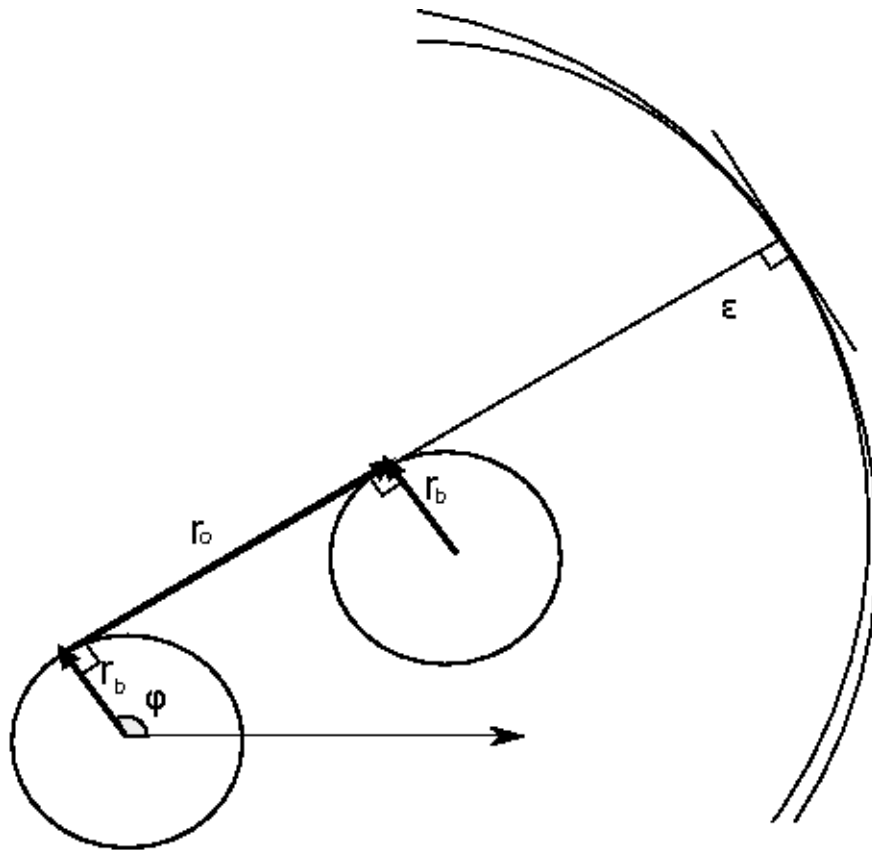
Έτσι ορίζεται ότι το σημείο A έχει $\theta = 0$. Άρα το μέγεθος θ αποτελεί τη γωνία η οποία σχηματίζει η ευθεία, που περνά από το σημείο επαφής και είναι εφαπτόμενη στο βασικό κύκλο, με τον κατακόρυφο άξονα. Καθώς το σημείο επαφής μετακινείται δεξιόστροφα με σταθερή ακτινική και αξονική ταχύτητα, αυξάνει τη γωνία θ με τον ίδιο ρυθμό με τον οποίο μειώνεται η παράμετρος ϕ . Έτσι ισχύει ότι

$$\theta = \phi_{ie} - \phi \quad (3.30)$$

Με τη βοήθεια αυτής της νέας παραμέτρου το διάνυσμα μετατόπισης γράφεται ως εξής

$$\vec{r}_0 = r_0 \cos\left(\phi_{ie} - \frac{\pi}{2} - \theta\right)\vec{i} + r_0 \sin\left(\phi_{ie} - \frac{\pi}{2} - \theta\right)\vec{j} \quad (3.31)$$

Οι δύο εξειλιγμένες, που ορίζουν το δρομέα, ικανοποιούν τη σχέση 3.33 [15].

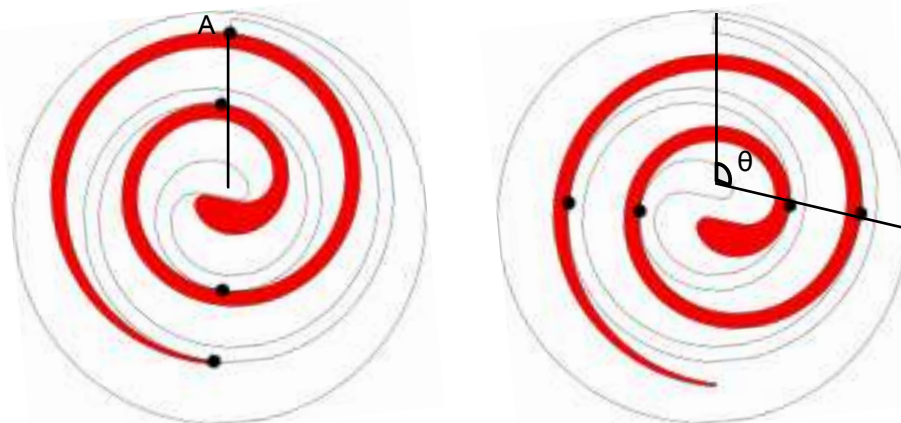


Σχήμα 3.8: Γεωμετρική κατασκευή με σκοπό την εύρεση του διανύσματος μετατόπισης \vec{r}_0 του δρομέα.

$$\vec{x}_r = -\vec{x}_s + \vec{r}_0 \quad (3.32)$$

ή, σε αναλυτική γραφή,

$$\left. \begin{aligned} x_r &= \cos\phi + (\phi - \phi_0)\sin\phi + r_0\cos\left(\phi_{ie} - \frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ y_r &= \sin\phi + (\phi - \phi_0)\cos\phi + r_0\sin\left(\phi_{ie} - \frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$



(α') Αρχική θέση του δρομέα ($\theta = 0$)

(β') Τυχαία θέση του δρομέα.

Σχήμα 3.9: Ορισμός της γωνίας θ . Αρχικό σχήμα από εργασία [15].

3.3 Γεωμετρία της εσωτερικής και εξωτερικής περιοχής του Scroll

Από την περιγραφή του Scroll της προηγούμενης ενότητας φαίνεται ότι ο στάτης και ο δρομέας οριοθετούνται από δύο εξειλιγμένες ο κάθε ένας. Όπως επίσης αποδείχθηκε, οι δύο εξειλιγμένες δεν τέμνονται σε κανένα σημείο, αλλά η απόστασή τους (t_w) παραμένει πάντα σταθερή. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η ανάγκη της εισαγωγής επιπλέον καμπυλών, έτσι ώστε να προκύψει ένα ενιαίο κλειστό περίγραμμα για το στάτη και το δρομέα. Καθώς ο δρομέας είναι όμοιος με το στάτη, η ανάλυση που ακολουθεί εφαρμόζεται, για οικονομία, μόνο στο στάτη.

Αρχικά θα παρουσιαστεί η γεωμετρία της εσωτερικής περιοχής του στάτη. Ως τέτοια ορίζεται η καμπύλη, η οποία ξεκινά από το σημείο της εσωτερικής εξειλιγμένης με γωνία ϕ_{is} και καταλήγει στο σημείο της εξωτερικής εξειλιγμένης με γωνία ϕ_{os} . Η μηχανή Scroll λειτουργεί πιο αποδοτικά, όταν επιβάλλεται πλήρης επαφή του στάτη με το δρομέα στην εσωτερική περιοχή. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο επαφής που μετακινείται πάνω στην εξειλιγμένη κατά την περιστροφή, θα συνεχίσει να κινείται και στην καμπύλη της εσωτερικής περιοχής. Έτσι, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.10, όταν το σημείο επαφής βρίσκεται, από την πλευρά του στάτη, στο σημείο με παράμετρο ϕ_{sis} , πρέπει να ταυτίζεται με το σημείο του δρομέα με παράμετρο ϕ_{ros} . Επίσης ταυτόχρονα θα πρέπει να υπάρχει ένα άλλο σημείο επαφής πάνω στην εξωτερική εξειλιγμένη του στάτη με παράμετρο ϕ_{sos} , το οποίο θα συμπίπτει με το αντίστοιχο σημείο του δρομέα με παράμετρο ϕ_{ris} . Από αυτό προκύπτει ότι

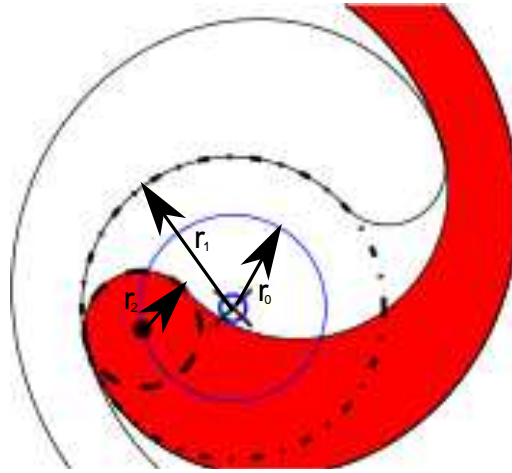
$$\begin{aligned}\phi_{sis} &= \phi_{ros} \\ \phi_{ris} &= \phi_{sos}\end{aligned}\quad (3.34)$$

Καθώς όμως ο δρομέας αποτελεί έναν ανεστραμμένο στάτη, ισχύει επίσης ότι

$$\begin{aligned}\phi_{sis} &= \phi_{ris} + \pi \\ \phi_{sos} &= \phi_{ros} + \pi\end{aligned}\quad (3.35)$$

Από τις εξισώσεις 3.34 και 3.35 προκύπτει η αναγκαία συνθήκη 3.36 για την ύπαρξη σημείου επαφής εντός της εσωτερικής περιοχής, η οποία ισχύει και για το στάτη και για το δρομέα.

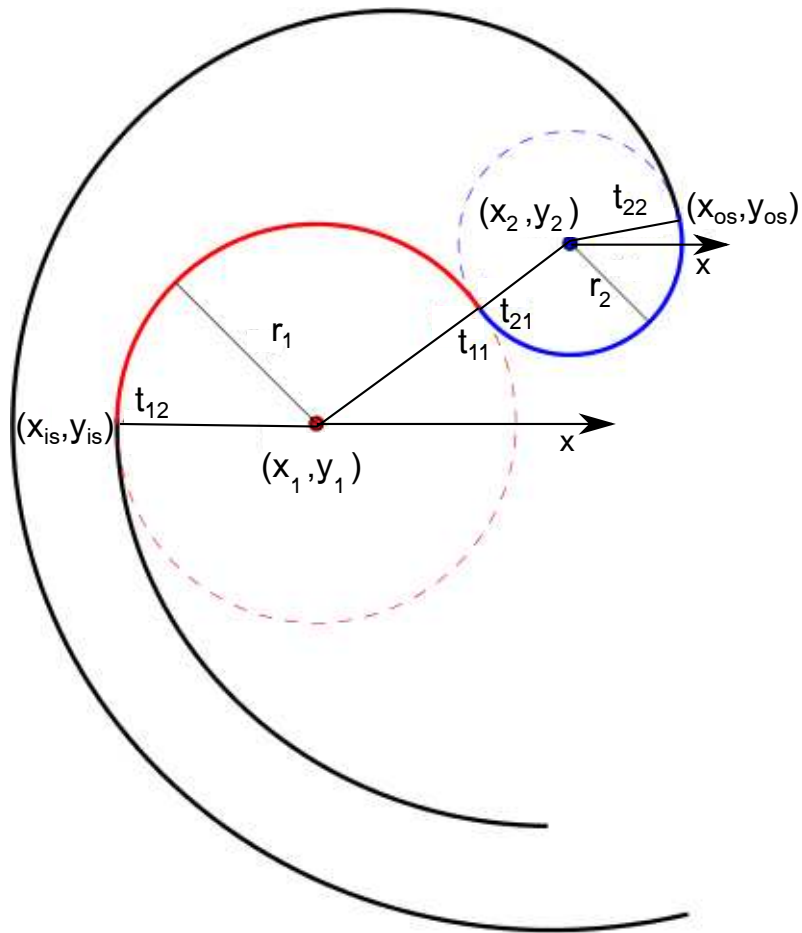
$$\phi_{is} = \phi_{os} + \pi \quad (3.36)$$



Σχήμα 3.10: Εσωτερική περιοχή κατά την ολίσθηση του δρομέα πάνω στο στάτη. Αρχικό σχήμα από εργασία [15].

Η διαμόρφωση της εσωτερικής περιοχής ποικίλει από μηχανή σε μηχανή. Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζονται δύο διαφορετικές γεωμετρίες, όπου όμως η μια είναι ειδική περίπτωση της άλλης [15]. Ξεκινώντας από την ειδική περίπτωση, ως απλούστερη, θεωρείται ότι η εσωτερική περιοχή αποτελείται από δύο εφαπτόμενους κύκλους, τον O_1 και τον O_2 , όπως φαίνεται στο σχήμα 3.12.

Σκοπός της ανάλυσης που ακολουθεί είναι ο υπολογισμός των συντεταγμένων των κέντρων και των ακτίνων των κύκλων. Όπως έχει ήδη αποδειχθεί κάθε σημείο του



Σχήμα 3.11: Διαμόρφωση εσωτερικής περιοχής στην απλή εκδοχή της. Αρχικό σχήμα από εργασία [15].

δρομέα, είτε ανήκει στην περιφέρεια είτε είναι εσωτερικό, εκτελεί περιστροφική κίνηση. Έτσι, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.10 το κέντρο του ενός κύκλου του δρομέα με συντεταγμένες κέντρου (x_2, y_2) περιστρέφεται σε κύκλο ακτίνας r_0 και ταυτόχρονα εφάπτεται στον κύκλο με συντεταγμένες κέντρου (x_1, y_1) . Οι κύκλοι ακτίνας r_0 και r_1 είναι ομόκεντροι, αφού κάθε σημείο του εσωτερικού κύκλου απέχει απόσταση ίση με r_2 από τον εξωτερικό. Έτσι προκύπτει ότι οι ακτίνες των δύο κύκλων, που αποτελούν την εσωτερική περιοχή, δεν είναι ανεξάρτητες αλλά ικανοποιούν την παρακάτω σχέση.

$$r_1 = r_2 + r_0 \quad (3.37)$$

Έστω ευθεία εφαπτόμενη στο βασικό κύκλο, η οποία διέρχεται από το σημείο της εξειλιγμένης με παράμετρο ϕ_{is} . Το σημείο αυτό συμβολίζεται κατ' αναλογία ως \vec{x}_{is} . Η ευθεία τέμνει την εξειλιγμένη κάθετα, λόγω του ορισμού της τελευταίας. Όμως, το σημείο \vec{x}_{is} , είναι και σημείο του κύκλου O_1 . Επίσης, είναι επιθυμητό στη σύνδεση των δύο καμπυλών να υπάρχει συνέχεια της παραγώγου. Συνεπώς, η ευθεία ϵ του

σχήματος 3.12 τέμνει κάθετα όχι μόνο την εφαπτομένη της εξειλιγμένης στο σημείο \vec{x}_{is} , αλλά και την εφαπτομένη στον κύκλο στο ίδιο σημείο. Επομένως η ευθεία ε περνά από το κέντρο του κύκλου O_1 . Συνεπώς, μπορεί να γραφτεί η ακόλουθη εξίσωση

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_{is} - \vec{r}_1 \quad (3.38)$$

Με τη βοήθεια του σχήματος 3.12 βρίσκεται η έκφραση του διανύσματος \vec{r}_1 .

$$\vec{r}_1 = -r_1 \sin \phi_{is} \vec{i} + r_1 \cos \phi_{is} \vec{j} \quad (3.39)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση 3.39 στην εξίσωση 3.38 προκύπτει η έκφραση των συντεταγμένων του κέντρου του κύκλου O_1 συναρτήσει της άγνωστης ακόμα ακτίνας του,

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_{is} - r_1 \sin(\phi_{is}) \\ y_1 &= y_{is} + r_1 \cos(\phi_{is}) \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτουν και οι αντίστοιχες εκφράσεις για τον κύκλο O_2 ,

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_{os} - r_2 \sin(\phi_{os}) \\ y_2 &= y_{os} + r_2 \cos(\phi_{os}) \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

Επαναλαμβάνεται ότι όλα τα μεγέθη της εξίσωσης αντιστοιχούν στο σάτιη. Για να οριστούν πλήρως οι δύο κύκλοι, αρκεί να βρεθεί η ακτίνα του ενός από αυτούς, έστω του O_1 . Τότε από την εξίσωση 3.37, μπορεί να βρεθεί η r_2 . Γνωρίζοντας τις ακτίνες των κύκλων υπολογίζονται οι συντεταγμένες των κέντρων τους από τις εξισώσεις 3.40 και 3.41. Έστω D η διάκεντρος των δύο κύκλων. Άρα

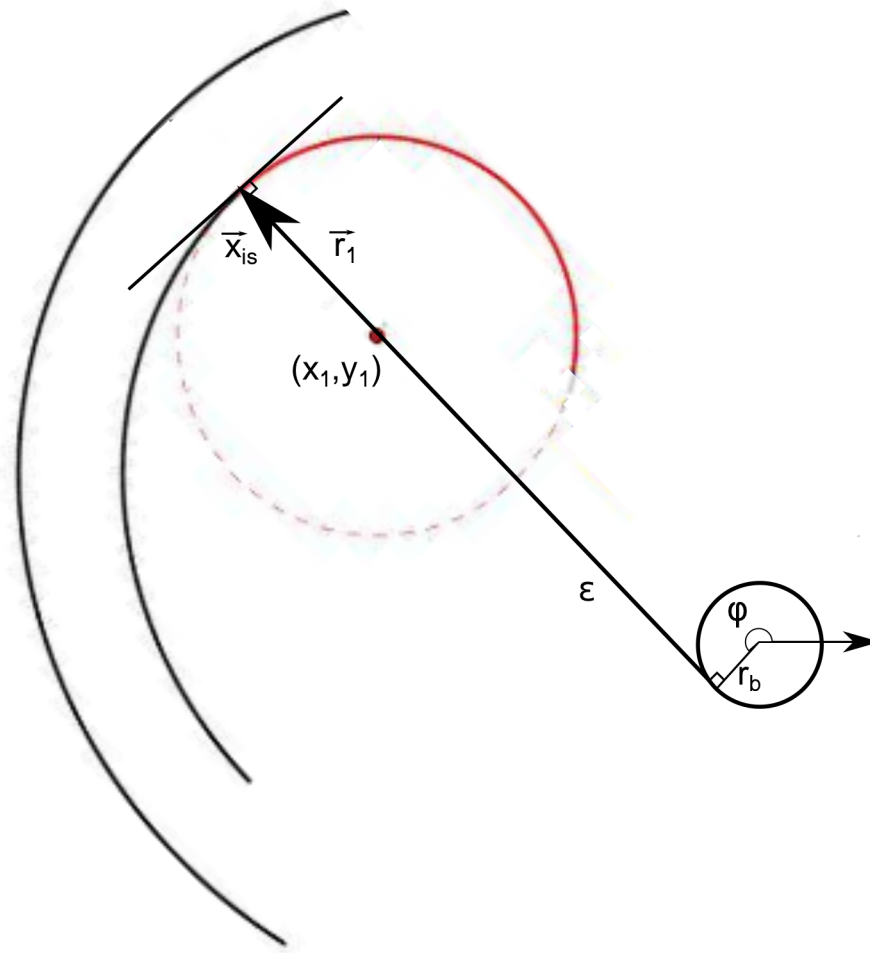
$$D = r_1 + r_2 \Leftrightarrow D = 2r_1 - r_0 \Leftrightarrow r_1 = \frac{1}{2}(D + r_0) \quad (3.42)$$

Αφαιρώντας τις εξισώσεις κατά μέλη προκύπτει

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 &= x_{is} - x_{os} - D \sin(\phi_{os}) \\ y_1 - y_2 &= y_{is} - y_{os} + D \cos(\phi_{os}) \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

Η απόσταση των δύο κέντρων των κύκλων εκφράζεται στην εξίσωση 3.44,

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = D^2 \quad (3.44)$$



Σχήμα 3.12: Γεωμετρική κατασκευή με σκοπό την εύρεση της έκφρασης, που υπολογίζει το κέντρο του κύκλου O_1 .

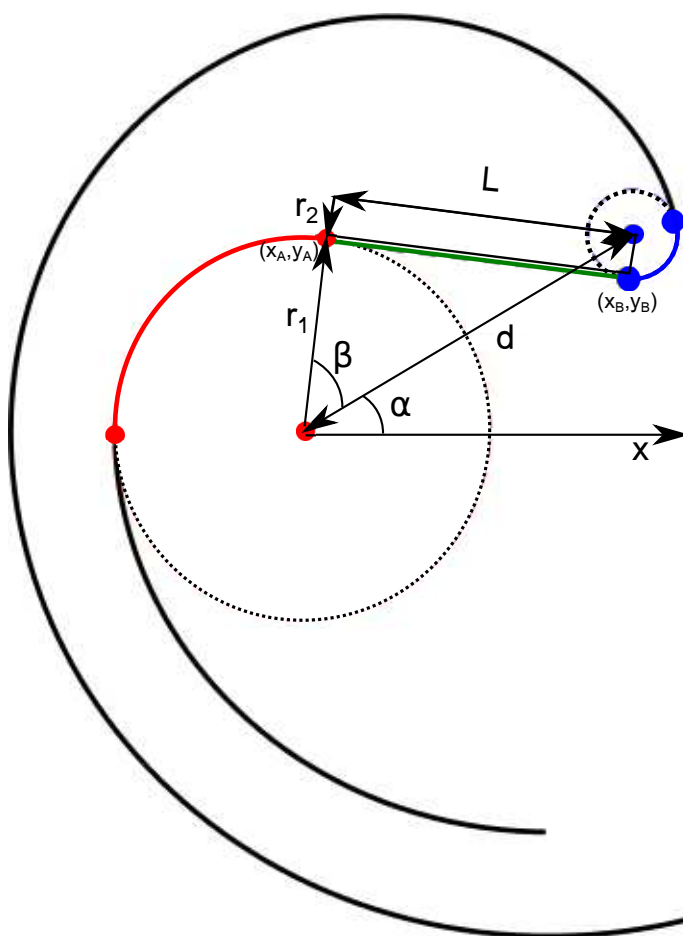
Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις 3.43 στην εξίσωση 3.44, προκύπτει μια σχέση υπολογισμού της διακέντρου.

$$D^2 = (x_{is} - x_{os} - D\sin(\phi_{os}))^2 + (y_{is} - y_{os} + D\cos(\phi_{os}))^2 \Leftrightarrow \quad (3.45)$$

$$D = \frac{1}{2} \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{(x_1 - x_2)\sin\phi_{is} - (y_1 - y_2)\cos\phi_{is}} \quad (3.46)$$

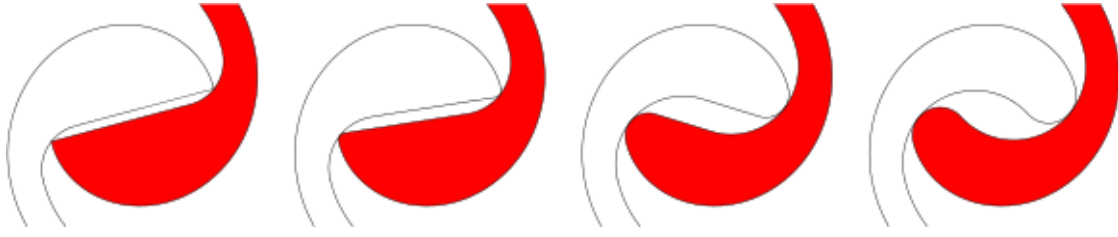
Αφού υπολογιστεί η διάκεντρος D από τη σχέση 3.46, βρίσκεται η ακτίνα r_1 από τη σχέση 3.42. Από τη διαδικασία αυτή φαίνεται ότι, εάν έχουν οριστεί τα όρια των εξειλιγμένων, η γεωμετρία της εσωτερικής περιοχής προκύπτει κατά μοναδικό τρόπο. Τέλος, στο σχήμα 3.12, φαίνονται οι γωνίες t_{11} , t_{12} , t_{21} και t_{22} . Οι γωνίες αυτές σηματοδοτούν την αρχή και το τέλος των κύκλων O_1 και O_2 και είναι χρήσιμες στην ανάλυση του επόμενου κεφαλαίου.

Γενικεύοντας την περίπτωση που μόλις αναλύθηκε, είναι δυνατό οι κύκλοι O_1 και O_2 , να μην εφάπτονται. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορούν να ενωθούν με μια κοινή εφαπτομένη, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.13.



Σχήμα 3.13: Διαμόρφωση εσωτερικής περιοχής στη γενικότερη περίπτωση. Αρχικό σχήμα από εργασία [15].

Η ευθεία αυτή τέμνει τον κύκλο O_1 στο σημείο (x_A, y_A) και τον κύκλο O_2 στο σημείο (x_B, y_B) . Η απόσταση μεταξύ των δύο σημείων συμβολίζεται με L . Εδώ, σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση, υπάρχει ένας βαθμός ελευθερίας στο γεωμετρικό σύστημα. Ως τέτοιος επιλέγεται το μήκος L , το οποίο θα θεωρείται γνωστή ποσότητα. Διάφορες γεωμετρίες με διαφορετικό μήκος L φαίνονται στο σχήμα 3.14.



Σχήμα 3.14: Γενική διαμόρφωση για διάφορες τιμές του μήκους L [15].

Εδώ το μέγεθος D ορίζεται πάλι από την εξίσωση 3.42, αλλά δεν είναι πλέον διάκεντρος. Σε αυτήν την περίπτωση η διάκεντρος συμβολίζεται με d . Έτσι θα ισχύει

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = d^2 \quad (3.47)$$

Επιπλέον επισημαίνεται ότι οι σχέσεις 3.40 και 3.41 εξακολουθούν να ισχύουν. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 3.43 στη σχέση 3.44 προκύπτει

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + D^2 - 2D[(x_1 - x_2)\sin\phi_{is} - (y_1 - y_2)\cos\phi_{is}] = d^2 \quad (3.48)$$

Όμως από το σχήμα 3.13 προκύπτει ότι ισχύει

$$d^2 = L^2 + D^2 \quad (3.49)$$

Απαλείφοντας το μέγεθος d από τις εξισώσεις 3.48 και 3.49, καταλήγει κανείς στην σχέση υπολογισμού του D ,

$$D = \frac{1}{2} \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - L^2}{(x_1 - x_2)\sin\phi_{is} - (y_1 - y_2)\cos\phi_{is}} \quad (3.50)$$

Φυσικά, όταν το μήκος L γίνει 0, η σχέση 3.50 εμπίπτει στην πρώτη περίπτωση που εξετάστηκε, δηλαδή στη σχέση 3.46. Με γνωστό το D είναι δυνατή η εύρεση των ακόλουθων μεγεθών

$$r_1 = \frac{1}{2}(D + r_0) \quad (3.51)$$

$$r_2 = \frac{1}{2}(D - r_0) \quad (3.52)$$

$$d = \sqrt{L^2 + D^2} \quad (3.53)$$

Τέλος, παρουσιάζονται στις επόμενες δύο σχέσεις οι παραμετρικές εξισώσεις των κύκλων O_1 και O_2 .

$$\begin{aligned}x &= x_1 + r_1 \cos \phi_1 \\y &= y_1 + r_1 \sin \phi_1\end{aligned}\tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}x &= x_2 + r_2 \cos \phi_2 \\y &= y_2 + r_2 \sin \phi_2\end{aligned}\tag{3.55}$$

όπου ϕ_1 και ϕ_2 είναι οι παράμετροι των παραμετρικών εξισώσεων των κύκλων O_1 και O_2 αντίστοιχα.

Στη συνέχεια, για να βρεθεί η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των δύο κύκλων, είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των σημείων (x_A, y_A) και (x_B, y_B) . Για τον σκοπό αυτό, ορίζονται δύο γωνίες α και β , όπως στο σχήμα 3.13. Η α είναι η γωνία μεταξύ της διακέντρου και του οριζόντιου άξονα, ενώ η β είναι η γωνία μεταξύ της διακέντρου και της ακτίνας του κύκλου O_1 . Ο υπολογισμός τους γίνεται εύκολα από τις εξισώσεις

$$\tan \alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\tag{3.56}$$

$$\cos \beta = \frac{D}{d}\tag{3.57}$$

Από το σχήμα 3.13, προκύπτουν οι διανυσματικές σχέσεις

$$\vec{x}_A = \vec{x}_1 + \vec{r}_1\tag{3.58}$$

$$\vec{x}_B = \vec{x}_2 + \vec{r}_2\tag{3.59}$$

ή σε αναλυτική μορφή

$$\begin{aligned}x_A &= x_1 + r_1 \cos(\alpha + \beta) \\y_A &= y_1 + r_1 \sin(\alpha + \beta)\end{aligned}\tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}x_B &= x_A + L \sin(\alpha + \beta) \\y_B &= y_A - L \cos(\alpha + \beta)\end{aligned}\tag{3.61}$$

Τελικά η εξίσωση της ευθείας είναι

$$\frac{y - y_B}{x_B - x} = \frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} \Leftrightarrow y = \cot(\alpha + \beta)(x_A - x) + y_A \quad (3.62)$$

Η γεωμετρία της εξωτερικής είναι αρκετά απλούστερη από αυτήν της εσωτερικής περιοχής, για το λόγο ότι δεν υπάρχουν σημεία επαφής του δρομέα με το στάτη σε αυτήν. Ως τέτοια περιοχή ορίζεται η καμπύλη, η οποία ξεκινά από το σημείο της εσωτερικής εξειλιγμένης με παράμετρο ϕ_{ie} και τελειώνει στο σημείο της εξωτερικής εξειλιγμένης με παράμετρο ϕ_{oe} . Ως τέτοια καμπύλη συνήθως προτιμάται η απλή λύση της της σύνδεσης των δύο προαναφερθέντων σημείων με ευθεία. Η κλίση της ευθείας μπορεί να είναι οποιαδήποτε διευκολύνει την είσοδο ή την έξοδο του ρευστού από το Scroll. Σε πολλές περιπτώσεις η ευθεία έχει κλίση η με του διανύσματος \vec{t}_w . Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει η σχέση 3.63.

$$\phi_{oe} = \phi_{ie} \quad (3.63)$$

Η εξίσωση της ευθείας παρουσιάζεται στην παρακάτω σχέση.

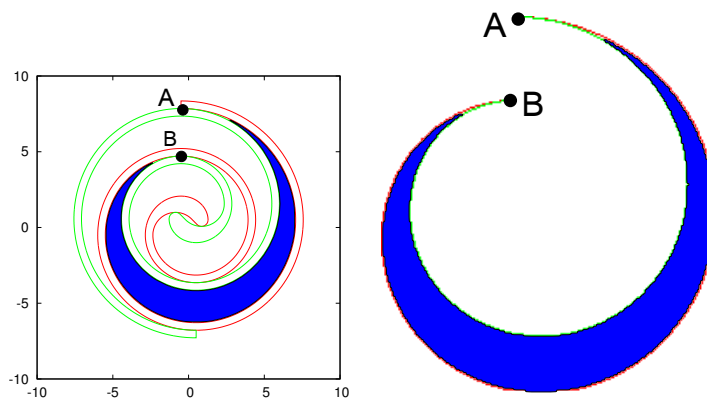
$$y = \frac{y_{oe} - y_{ie}}{x_{oe} - x_{ie}}(x - x_{ie}) + y_{ie} \quad (3.64)$$

Ολοκληρώνοντας τη γεωμετρική μοντελοποίηση διαπιστώνει κανείς ότι οι παράμετροι που καθορίζουν πλήρως τη γεωμετρία του Scroll είναι 6. Οι μεταβλητές που προτείνονται εδώ είναι οι r_b , ϕ_{i0} , ϕ_{is} , ϕ_{ie} , t , L λόγω της ξεκάθαρης φυσικής σημασίας τους. Η μεταβολή της τιμής της μεταβλητής ϕ_{i0} προκαλεί απλή περιστροφή της συνολικής μηχανής χωρίς να μεταβάλλει τη γεωμετρία της. Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας κατά τη μελέτη οποιουδήποτε Scroll μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή και να πάψει να θεωρείται παράμετρος της γεωμετρίας.

3.4 Σημεία επαφής του δρομέα με το στάτη.

Όπως έχει προαναφερθεί, κατά τη λειτουργία του Scroll δημιουργούνται χώροι εγκλωβισμού του ρευστού, οι οποίοι αυξάνονται σε όγκο και είναι υπεύθυνοι για την αποσυμπίεση του ρευστού. Κάθε τέτοιος χώρος προκύπτει από την επαφή του δρομέα στο στάτη σε δύο σημεία. Για παράδειγμα, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.15, τα σημεία A και B δημιουργούν το χωρίο που φαίνεται δεξιά στο ίδιο σχήμα. Προκειμένου να γίνει ρευστομηχανική ανάλυση στο Scroll, είναι απαραίτητη η γνώση της γεωμετρίας αυτών των χωρίων. Έτσι προκύπτει η ανάγκη υπολογισμού των συντεταγμένων των σημείων επαφής των δύο ελίκων.

Τα χωρία μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο κατηγορίες, αυτά που περιλαμβάνουν στο πε-



(α') Μηχανή Scroll με χρωματισμένο το πρώτο χωρίο, που δημιουργείται κατά τη συμπίεση
 (β') Το περίγραμμα του πρώτου χωρίου, όπως αυτό ορίζεται από τα σημεία A και B

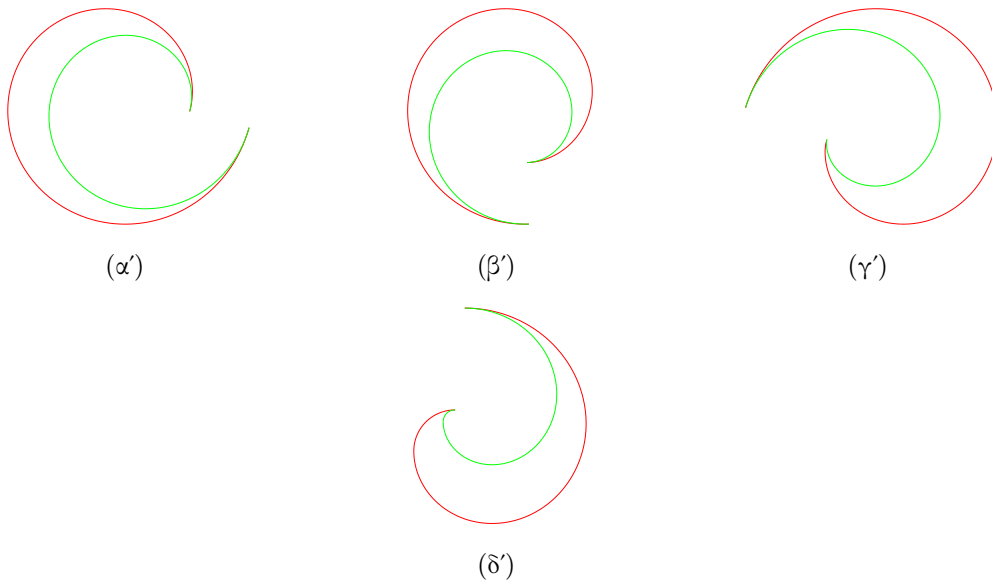
Σχήμα 3.15: Το πρώτο χωρίο που δημιουργείται κατά τη λειτουργία του Scroll ως συμπίεστή.

ρίγραμμα τους την ευθεία της εξίσωσης 3.62. Σε περίπτωση που αυτή δεν υπάρχει, ο διαχωρισμός μπορεί να γίνει σε χωρία, στα οποία εμπεριέχεται στο περίγραμμά τους το σημείο επαφής των κύκλων O_1 και O_2 και σε αυτά που δεν εμπεριέχεται. Χωρία της πρώτης κατηγορίας, στα οποία δεν συμπεριλαμβάνεται η εξίσωση 3.62, έχουν σχήμα ημισελήνου (C). Κατά τη λειτουργία της μηχανής τα χωρία αυτά σχηματίζονται πάντα σε ζεύγη συμμετρικά ως προς σημείο. Το ένα αποτελείται από την εσωτερική εξειλιγμένη του στάτη και της εξωτερική εξειλιγμένη του δρομέα, ενώ το άλλο αποτελείται από την εξωτερική εξειλιγμένη του στάτη και την εσωτερική εξειλιγμένη του δρομέα. Η ανάλυση των χωρίων μπορεί να περιοριστεί στην εύρεση του περιγράμματος του πρώτου, σε σειρά αναφοράς, από τα δύο σχηματιζόμενα χωρία, αφού ο εντοπισμός του δεύτερου είναι ακριβώς ανάλογος. Τέτοια χωρία παρουσιάζονται στο σχήμα 3.16.

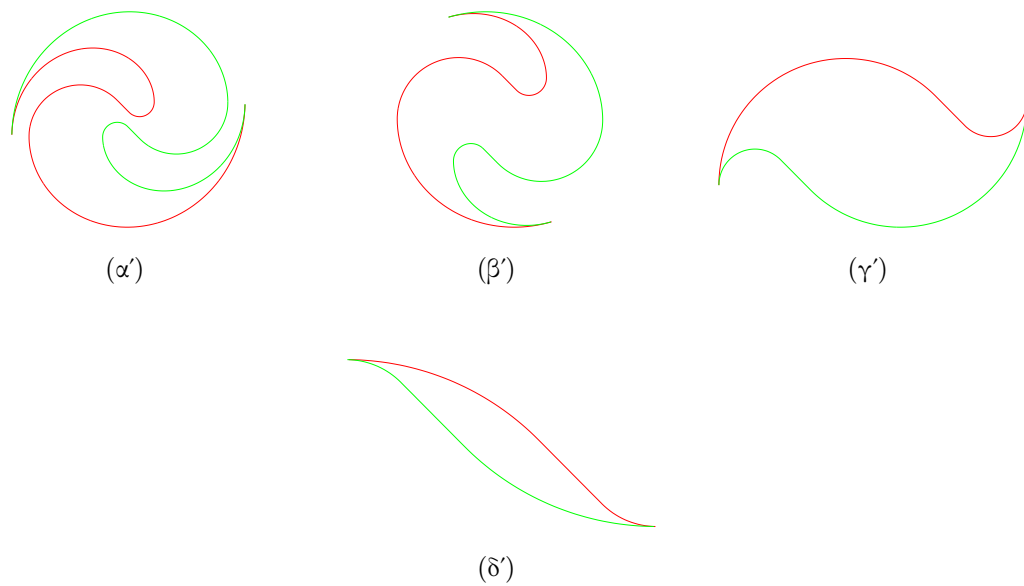
Τα χωρία της δεύτερης κατηγορίας έχουν σιγμοειδές σχήμα (S) και φαίνονται στο σχήμα 4.12.

Υπάρχει ένας σημαντικός λόγος για να γίνει αυτή η διάκριση. Στα χωρία τύπου S , ο στάτης και ο δρομέας είναι συμμετρικοί ως προς σημείο. Στα χωρία τύπου C δεν ισχύει κάτι τέτοιο. Εκεί το τμήμα του δρομέα, που αποτελεί τη μια πλευρά του χωρίου, προκύπτει από σημεία με μικρότερες τιμές της παραμέτρου ϕ , απ' ό,τι τα αντίστοιχα σημεία του στάτη. Η ανάλυση που ακολουθεί έχει σκοπό την εύρεση των δύο σημείων επαφής, που δημιουργούν οποιοδήποτε χωρίο. Για κάθε σημείο επαφής πρέπει να βρεθούν δύο σημεία, ένα πάνω στην καμπύλη του στάτη και ένα πάνω στην καμπύλη του δρομέα.

Ξεκινώντας την ανάλυση από τα χωρία τύπου C , μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι λόγω της μετακίνησης του δρομέα κατά $\vec{\pi}_0$, όταν τα σημεία επαφής είναι σημεία της εξειλιγμένης, τότε οι παράμετροι ϕ θα διαφέρουν κατά 2π . Καθώς ο δρομέας και ο στάτης είναι συμμετρικά σχήματα, φαίνεται ότι, και για τα σημεία επαφής, που βρίσκονται πάνω στην εξειλιγμένη του στάτη ισχύει η ίδια συνθήκη. Συνεπώς, από την εξίσωση 3.30



Σχήμα 3.16: Χωρία τύπου C .



Σχήμα 3.17: Χωρία τύπου S .

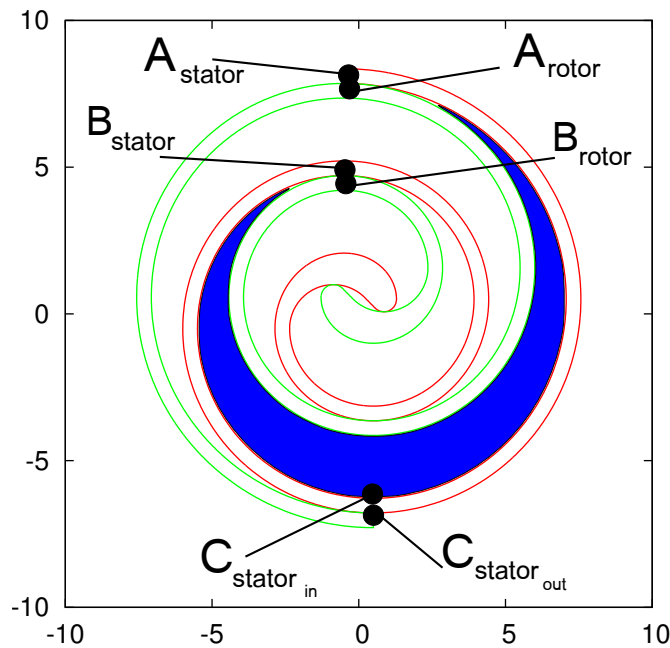
προκύπτει ότι και για της γωνίες θ ισχύει η ίδια συνθήκη. Επίσης, παρατηρεί κανείς ότι σε όλα τα χωρία η εσωτερική εξειλιγμένη του στάτη (\vec{x}_{si}) εφάπτεται με την εξωτερική εξειλιγμένη του δρομέα (\vec{x}_{ro}). Όμοια ισχύει ότι η εξωτερική εξειλιγμένη του στάτη (\vec{x}_{so}) εφάπτεται με την εσωτερική εξειλιγμένη του δρομέα (\vec{x}_{ri}). Για να ισχύει αυτό το γινόμενο και στις καμπύλες της εσωτερικής περιοχής, θεωρείται ότι ο κύκλος O_1 είναι συνέχεια της εσωτερικής εξειλιγμένης του στάτη ή του δρομέα αντίστοιχα και μαζί αποτελούν την εσωτερική καμπύλη της σπείρας. Όμοια στην εξωτερική καμπύλη ανήκει η εξωτερική εξειλιγμένη και ο κύκλος O_2 . Έστω το χωρίο του σχήματος 3.18. Το χωρίο αποτελείται από την εσωτερική εξειλιγμένη του στάτη από το σημείο A μέχρι το σημείο B και την εξωτερική εξειλιγμένη του δρομέα με όρια τα ίδια σημεία. Η τελευταία προκύπτει από τη μετατόπιση στο επίπεδο της εξωτερικής εξειλιγμένης του στάτη με όρια τα σημεία C και B. Οι παράμετροι των σημείων B και C σε κάθε χωρίο αυτού του τύπου διαφέρουν κατά π . Συνεπώς, αν γνωρίζει κανείς την παράμετρο του σημείου A του χωρίου πάνω στο στάτη, μπορεί να το ορίσει πλήρως μέσω της παρακάτω διαδικασίας. Αρχικά, υπολογίζεται η παράμετρος του σημείου B του στάτη αφαιρώντας από την παράμετρο του A ποσότητα ίση με 2π . Στη συνέχεια, υπολογίζεται η παράμετρος του σημείου C αφαιρώντας από την παράμετρο του A, ποσότητα ίση με π . Τέλος, μετακινείται το τμήμα της εξωτερικής εξειλιγμένης από το σημείο A μέχρι το σημείο C με τη βοήθεια της εξίσωσης 3.38.

Η ανάλυση των χωρίων τύπου S είναι ευκολότερη καθώς μόλις βρεθούν τα σημεία A και B πάνω στο στάτη, δηλαδή η αρχή και το τέλος του χωρίου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας η εξίσωση 3.38 για τον υπολογισμό του δρομέα, χωρίς την εισαγωγή ενδιάμεσου σημείου C. Σε αυτά τα χωρία εάν οριστεί ένα σημείο A της εσωτερικής εξειλιγμένης του στάτη, το σημείο B της εξωτερικής εξειλιγμένης προκύπτει αν αφαιρεθεί από την παράμετρο του A η ποσότητα π .

Η παραπάνω μέθοδος για τον υπολογισμό των χωρίων γίνεται πολύ πολύπλοκη όταν τα σημεία επαφής παύουν να είναι σημεία εξειλιγμένων καμπυλών, αλλά σημεία των υπόλοιπων καμπυλών, που αποτελούν το στάτη. Για να αποφευχθεί αυτή η δυσκολία χρησιμοποιείται το μέγεθος θ , το οποίο ορίστηκε στη εξίσωση 3.30. Εδώ θα προστεθούν κάποιες επιπλέον ιδιότητες στο μέγεθος αυτό, έτσι ώστε να διευκολυνθεί με τη χρήση του η εύρεση των σημείων επαφής. Καθώς κάθε σημείο του Scroll, εκτός της εξωτερικής περιοχής, θα αποτελέσει σημείο επαφής κάποια στιγμή κατά τη λειτουργία της μηχανής, συνεπάγεται ότι κάθε σημείο έχει τη δική του τιμή του μεγέθους θ . Συνεπώς, το θ είναι μια συνάρτηση με μεταβλητή την παράμετρο κάθε καμπύλης. Η πρώτη ιδιότητα, που πρέπει να έχει αυτή η συνάρτηση είναι η συνέχειά της στη μετάβασή της από τη μια καμπύλη στην άλλη. Ακόμα, ορίζεται η παρακάτω ιδιότητα: Έστω ένα οποιοδήποτε σημείο του στάτη. Αν αυτό μετακινηθεί μέσω της εξίσωσης 3.38, θα γίνει σημείο του δρομέα. Ορίζεται ότι δύο τέτοια σημεία έχουν το ίδιο θ . Επίσης ορίζεται ότι ένα σημείο του στάτη και ένα σημείο του δρομέα, τα οποία εφάπτονται έχουν ίδια τιμή της συνάρτησης θ . Από την τελευταία ιδιότητα φαίνεται, ότι η συνάρτηση θ δεν μπορεί να έχει τον ίδιο τύπο ορισμού μεταξύ της εσωτερικής και της εξωτερικής εξειλιγμένης. Έτσι ορίζεται ότι ο τύπος 3.30 ισχύει μόνο για την εσωτερική εξειλιγμένη του στάτη.

Η έκφραση του θ για την εξωτερική εξειλιγμένη προκύπτει από την ανάλυση που έγινε στις δύο προηγούμενες παραγράφους. Στα χωρία τύπου C , όπως αυτό του σχήματος 3.18, το σημείο A του στάτη εφάπτεται με το σημείο A του δρομέα. Άρα έχουν ίδια τιμή της συνάρτησης θ . Επίσης, το σημείο C στην εξωτερική πλευρά του στάτη έχει ίδια τιμή του θ αυτήν του σημείου A του δρομέα. Επιπλέον, το σημείο C από την εσωτερική πλευρά του στάτη έχει παράμετρο ϕ κατά π μικρότερη από αυτήν του A στην εσωτερική πλευρά του στάτη. Από τον ορισμό του θ στην εσωτερική εξειλιγμένη προκύπτει ότι το θ του C εσωτερικά είναι κατά π μικρότερο από το θ του A εσωτερικά. Έτσι προκύπτει ότι στη θέση C , υπάρχουν δύο σημεία, ένα πάνω στη εσωτερική εξειλιγμένη και ένα πάνω στην εξωτερική εξειλιγμένη, τα οποία έχουν ίσες τις παραμέτρους ϕ , αλλά με θ που διαφέρουν κατά π . Ειδικότερα, το σημείο της εσωτερικής εξειλιγμένης έχει θ μεγαλύτερο κατά π από αυτό της εξωτερικής εξειλιγμένης. Έτσι, αποδεικνύεται η παρακάτω σχέση για τον υπολογισμό της συνάρτησης θ στην εξωτερική εξειλιγμένη,

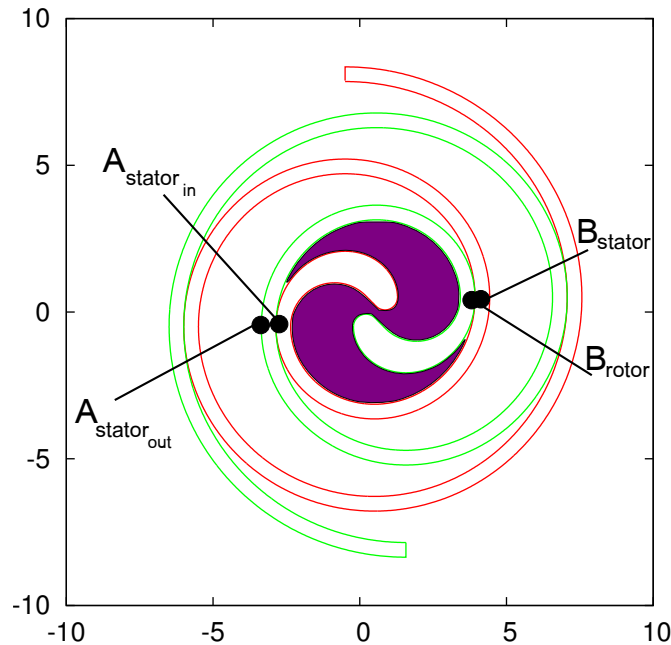
$$\theta = \phi_{ie} - \phi - \pi \quad (3.65)$$



Σχήμα 3.18: Χωρίο τύπου C , όπου φαίνονται τα βοηθητικά σημεία της απόδειξης της εξίσωσης 3.65.

Στη συνέχεια, αποδεικνύεται ότι η σχέση 3.65 ισχύει και στην περίπτωση των χωρίων τύπου S . Εδώ, τα σημεία A εξωτερικά του στάτη και B εσωτερικά του στάτη του σχήματος 3.19 έχουν ίδια τιμή της συνάρτησης θ . Επίσης το σημείο B εσωτερικά του στάτη έχει παράμετρο ϕ μεγαλύτερη κατά π από του σημείου A της εσωτερικής εξειλιγμένης του στάτη. Από την εξίσωση 3.30 προκύπτει ότι στις θέσεις αυτές η συνάρτηση θ έχει επίσης διαφορά ίση με π . Συνεπώς, στη θέση A υπάρχουν δύο σημεία, ένα στην εσωτερική εξειλιγμένη και ένα στην εξωτερική εξειλιγμένη του στάτη. Αυτά

τα δύο σημεία έχουν ίσες γωνίες ϕ , αλλά το σημείο της εσωτερικής εξειλιγμένης έχει μεγαλύτερη τιμή της θ από το σημείο της εξωτερικής εξειλιγμένης κατά π . Συνεπώς, τα σημεία της εξωτερικής εξειλιγμένης ικανοποιούν την εξίσωση 3.65 και στους δύο τύπους χωρίων.



Σχήμα 3.19: Χωρίο τύπου S , όπου φαίνονται τα βοηθητικά σημεία της απόδειξης της εξίσωσης 3.65.

Στη συνέχεια αποδεικνύεται η σχέση, που συνδέει τη συνάρτηση θ με την τιμή της παραμέτρου ϕ του κύκλου O_1 . Τονίζεται ότι η παράμετρος του κύκλου ϕ είναι διαφορετική από την παράμετρο ϕ των εξειλιγμένων. Η ζητούμενη σχέση θα βρεθεί με τη βοήθεια του σχήματος 3.10, όπου φαίνεται ο δρομέας να στρέφεται αριστερόστροφα εκτελώντας συμπίεση. Όπως έχει προαναφερθεί κάθε σημείο του δρομέα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Στο σχήμα 3.10 το κέντρο του κύκλου ακτίνας r_2 εκτελεί επίσης ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα εφαπτόμενη στον κύκλο ακτίνας r_0 . Καθώς ο δρομέας στρέφεται, το σημείο επαφής των δύο ελίκων κινείται στην περιφέρεια του κύκλου ακτίνας r_1 και έχει ταχύτητα εφαπτόμενη σε αυτόν καθώς και στον κύκλο ακτίνας r_2 . Συνεπώς, υπάρχει ευθεία, η οποία τέμνει τις δύο ταχύτητες κάθετα και περνά από τα κέντρα όλων των κύκλων. Άρα, η ταχύτητα του σημείου επαφής είναι σταθερή σε μέτρο. Συνεπώς, καθώς η παράμετρος ϕ μειώνεται με σταθερό ρυθμό η γωνία θ , η οποία εξορισμού ακολουθεί την κίνηση του σημείου τομής και αυξάνει με τη μετακίνησή του καθώς κινείται προς το κέντρο της ελίκωσης, αυξάνει επίσης με σταθερό ρυθμό. Αυτό οδηγεί στην εξίσωση

$$\dot{\theta} = -\dot{\phi} \Leftrightarrow \theta = -\phi + b \quad (3.66)$$

Η σταθερά b υπολογίζεται από τη συνθήκη συνέχειας της συνάρτησης θ κατά τη με-

τάβαση από την εσωτερική εξειλιγμένη στον κύκλο ακτίνας O_1 . Από την εξίσωση 3.30 προκύπτει, ότι στο σημείο επαφής των δύο καμπυλών, όπου η γωνία της εξειλιγμένης είναι ίση με ϕ_{is} , η συνάρτηση θ ισούται με $\phi_{ie} - \phi_{is}$. Ταυτόχρονα η παράμετρος του κύκλου είναι ίση με t_{12} . Αντικαθιστώντας τις γωνίες θ και ϕ στην εξίσωση 3.66, προκύπτει

$$\phi_{ie} - \phi_{is} = -t_{12} + b \quad (3.67)$$

Λύνοντας ως προς b την εξίσωση 3.67 και αντικαθιστώντας στην εξίσωση 3.66, βρίσκουμε την έκφραση της συνάρτησης θ των σημείων του κύκλου O_1 .

$$\theta = t_{12} - \phi - \phi_{ie} - \phi_{is} \quad (3.68)$$

Ακολούθως παρουσιάζεται η έκφραση της συνάρτησης θ για τα σημεία του κύκλου O_2 . Από το σχήμα 3.10 φαίνεται ότι καθώς το σημείο επαφής διαγράφει τροχιά με σταθερή ταχύτητα στην περιφέρεια του κύκλου ακτίνας r_1 , κινείται με επίσης σταθερή ταχύτητα και στην περιφέρεια του κύκλου με ακτίνα r_2 . Επομένως, με το ρυθμό που μειώνεται η παράμετρος ϕ του κύκλου O_2 , αυξάνει η συνάρτηση θ . Συνεπώς, ισχύει

$$\dot{\theta} = -\dot{\phi} \Leftrightarrow \theta = -\phi + d \quad (3.69)$$

Η άγνωστη σταθερά d υπολογίζεται με τη βοήθεια της συνέχειας της συνάρτησης θ μεταξύ της εξωτερικής εξειλιγμένης και του κύκλου O_2 . Όμοια με την προηγούμενη περίπτωση στο όριο μεταξύ των δύο καμπυλών η παράμετρος ϕ είναι ίση με t_{22} . Επίσης από τη σχέση 3.65 προκύπτει ότι στο ίδιο σημείο η συνάρτηση θ έχει τιμή $\phi_{ie} - \phi_{os} - \pi$. Αντικαθιστώντας στη σχέση 3.69, προκύπτει

$$\phi_{ie} - \phi_{os} - \pi = -t_{22} + d \quad (3.70)$$

Λύνοντας την εξίσωση 3.70 ως προς d και αντικαθιστώντας στην εξίσωση 3.69, καταλήγει κανείς στην έκφραση της συνάρτησης θ .

$$\theta = t_{22} - \phi + \phi_{ie} - \phi_{os} - \pi \quad (3.71)$$

Τελειώνοντας πρέπει να βρεθεί η έκφραση της συνάρτησης θ στο ευθύγραμμο τμήμα μήκους L , το οποίο ενώνει τους δύο κύκλους O_1 και O_2 . Στο τμήμα αυτό το σημείο επαφής δε μπορεί να κινηθεί, καθώς ο δρομέας δεν εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση. Έτσι ο δρομέας εφάπτεται ταυτόχρονα καθ' όλο το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος του στάτη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, τα σημεία, που αποτελούν το ευθύγραμμο τμήμα να έχουν την ίδια τιμή θ . Καθώς η συνάρτηση θ είναι συνεχής, η τιμή της εντός του

ευθύγραμμου τμήματος πρέπει να είναι ίση με την τιμή, που λαμβάνει στα άκρα του. Από την πλευρά του κύκλου O_1 η τιμή της θ δίνεται από τη σχέση 3.68.

$$\theta = t_{12} - t_{11} - \phi_{ie} - \phi_{is} \quad (3.72)$$

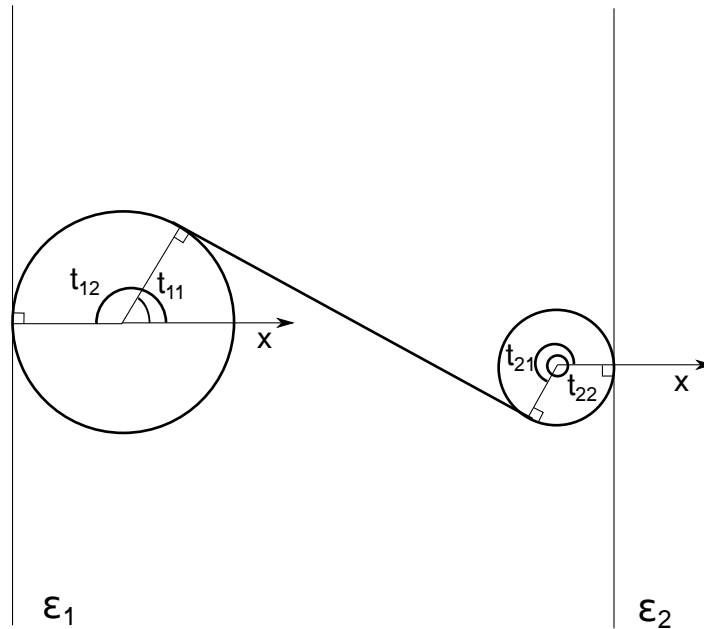
Από την πλευρά του κύκλου O_2 η τιμή της θ δίνεται από την εξίσωση 3.71.

$$\theta = t_{22} - t_{21} + \phi_{ie} - \phi_{os} - \pi \quad (3.73)$$

Οι δύο τιμές της θ από τις εξισώσεις 3.72 και 3.73 πρέπει να είναι ίσες. Από το σχήμα 3.20 φαίνεται ότι οι πλευρές των γωνιών t_{11} και t_{21} καθώς και των γωνιών t_{12} και t_{22} είναι μεταξύ τους παράλληλες. Επισημαίνεται ότι οι δύο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες λόγω της συνθήκης 3.36. Άρα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$t_{21} = t_{11} + \pi \quad (3.74)$$

$$t_{22} = t_{12} + \pi \quad (3.75)$$



Σχήμα 3.20: Γεωμετρική κατασκευή για την απόδειξη των σχέσεων 3.74 και 3.75.

Αντικαθιστώντας κανείς τις εξισώσεις 3.36, 3.74 και 3.75 στην εξίσωση 3.73 βρίσκει την έκφραση

$$\theta = (t_{12} + \pi) - (t_{11} + \pi) + \phi_{ie} - (\phi_{is} - \pi) - \pi = t_{12} - t_{11} - \phi_{ie} - \phi_{is} \quad (3.76)$$

Συνεπώς, οι εκφράσεις των εξισώσεων 3.72 και 3.73 είναι ακριβώς ισοδύναμες. Έτσι, η συνάρτηση θ έχει μια έκφραση, για να υπολογίζεται σε κάθε σημείο, εκτός της εξωτερικής περιοχής, όπου ο ορισμός της είναι ανούσιος. Αν το σημείο επαφής κινείται από το σημείο \vec{x}_{sie} προς το εσωτερικό της έλικας, η γωνία ϕ μειώνεται, είτε πρόκειται για την εσωτερική εξειλιγμένη είτε για τον κύκλο O_1 , κάνοντας τη συνάρτηση θ να αυξάνεται. Φτάνοντας το σημείο επαφής στο ευθύγραμμο τμήμα και συνεχίζοντας την κίνησή του στην περιφέρεια του κύκλου O_2 και, στη συνέχεια, στην εξωτερική εξειλιγμένη, προκαλεί αύξηση της γωνίας ϕ , και συνεπώς μείωση της συνάρτησης θ . Έτσι η συνάρτηση θ , κατά τη φορά διαγραφής του στάτη που περιγράφηκε, είναι αύξουσα στο εσωτερικό του και φθίνουσα στο εξωτερικό του τμήμα, όπως αυτά έχουν ήδη οριστεί. Συνεπώς η τιμή της θ , που υπολογίστηκε για το ευθύγραμμο τμήμα είναι η μέγιστη δυνατή. Έτσι σύμφωνα με τα προηγούμενα ισχύει

$$\theta_{max} = t_{12} - t_{11} - \phi_{ie} - \phi_{is} = t_{22} - t_{21} + \phi_{ie} - \phi_{os} - \pi \quad (3.77)$$

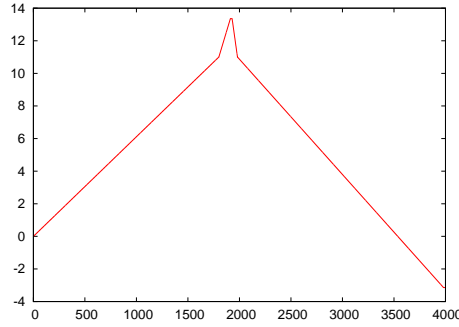
Συμπερασματικά, μετά την ανάλυση που προηγήθηκε η συνάρτηση θ έχει την ακόλουθη μορφή

$$\theta(\phi) = \begin{cases} \phi_{ie} - \phi & \text{εσωτερική εξειλιγμένη} \\ t_{12} - \phi + \phi_{ie} - \phi_{is} & \text{κύκλος } O_1 \\ \theta_{max} & \text{ευθύγραμμο τμήμα} \\ t_{22} - \phi + \phi_{ie} - \phi_{os} - \pi & \text{κύκλος } O_2 \\ \phi_{ie} - \phi - \pi & \text{εσωτερική εξειλιγμένη} \end{cases}$$

Η συνάρτηση θ απεικονίζεται στο γράφημα 3.21 για κάποιες τυπικές τιμές των γεωμετρικών παραμέτρων. Στον άξονα x φαίνονται 40000 σημεία από τα οποία αποτελείται το περίγραμμα του στάτη. Η διάταξή τους είναι η εξής: Το πρώτο σημείο ανήκει στην εσωτερική εξειλιγμένη και έχει παράμετρο ϕ ίση με ϕ_{ie} . Στη συνέχεια φαίνονται όλα τα σημεία, με σειρά μείωσης της παραμέτρου ϕ έως τον κόμβο με ϕ_{is} . Ακολουθούν τα σημεία που ανήκουν στον κύκλο O_1 , τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος και του κύκλου O_2 . Στο τέλος του άξονα υπάρχουν τα σημεία της εξωτερικής εξειλιγμένης διατεταγμένα από τη μικρότερη παράμετρο ϕ στη μεγαλύτερη.

Με βάση την παραπάνω συνάρτηση, η εύρεση των σημείων επαφής γίνεται πολύ απλή. Εάν κανείς επιθυμεί να ακολουθήσει την πορεία εξέλιξης του χωρίου από τη θέση α του σχήματος 3.22, όπου έχει και τη μεγαλύτερη χωρητικότητα μέχρι και την τελευταία θέση του σχήματος 3.22, όπου το χωρίο έχει το μικρότερο όγκο, τότε ακολουθεί την παρακάτω διαδικασία.

Η μετακίνηση του δρομέα γύρω από το στάτη πραγματοποιείται, σύμφωνα με την εξίσωση 3.33, με τη μεταβολή της γωνίας-συνάρτησης θ . Έτσι η διαδικασία ξεκινά δίνοντας



Σχήμα 3.21: Γραφική απεικόνιση της συνάρτησης θ κάθε σημείου του περιγράμματος του Scroll.

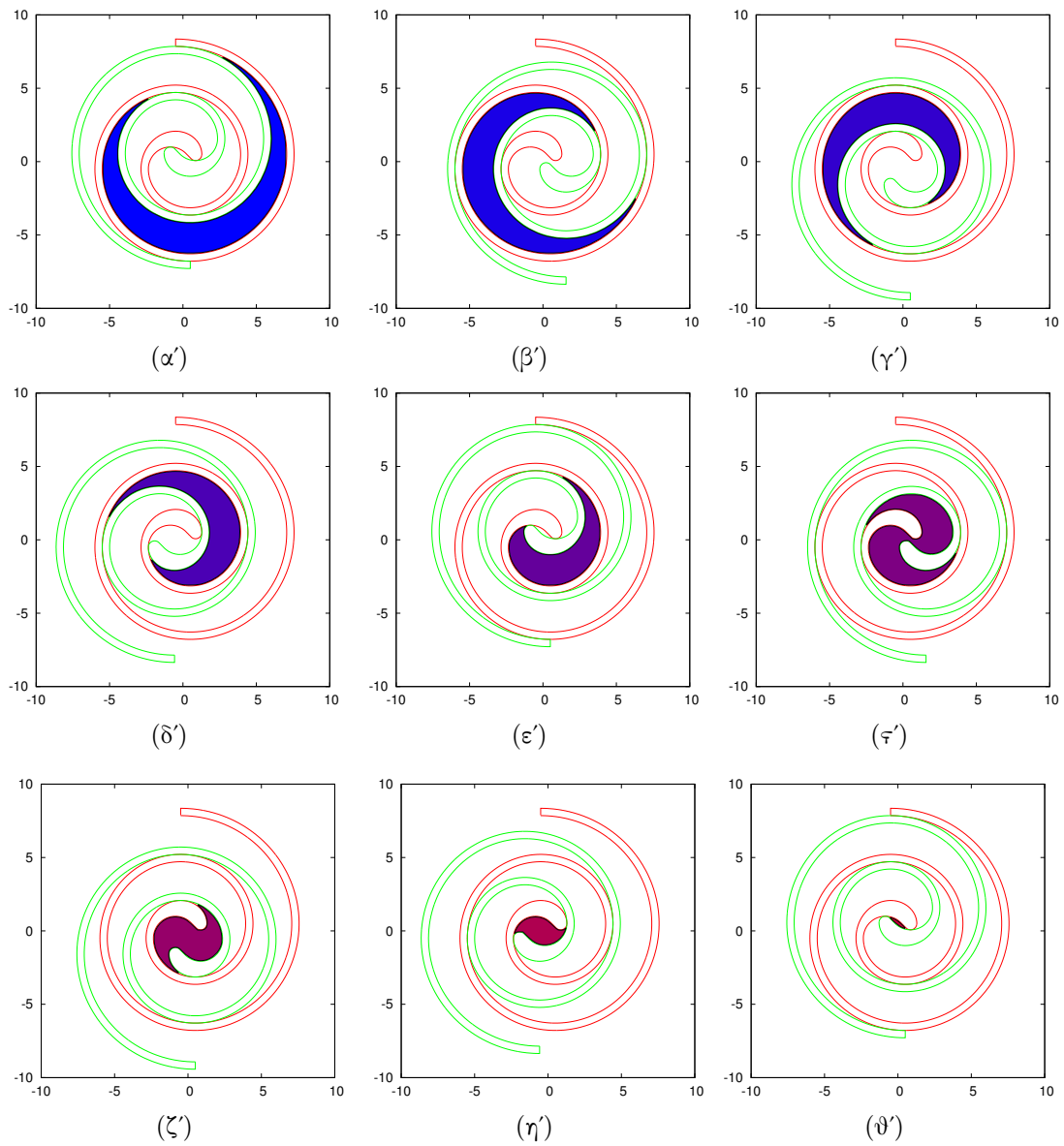
διαδοχικές τιμές στη συνάρτηση αυτή. Για κάθε τιμή που λαμβάνει η θ , ο δρομέας έχει συγκεκριμένη θέση και επομένως τα χωρία, σύμφωνα με τις προηγούμενες εξισώσεις, έχουν οριστεί πλήρως. Η διαδικασία αύξησης της συνάρτησης θ σταματά, όταν πάψει να ισχύει η συνθήκη $\theta < \theta_{max}$. Για τις πρώτες τιμές της συνάρτησης, τα χωρία που σχηματίζονται είναι του τύπου C . Σε αυτά, τα δύο σημεία τομής, A για το αρχικό και B για το τελικό, ισχύει σύμφωνα με τα προηγούμενα η επόμενη σχέση.

$$\theta_B = \theta_A + 2\pi \quad (3.78)$$

Συνεπώς, μπορεί να διατυπωθεί το ακόλουθο κριτήριο: Όταν $\theta + 2\pi < \theta_{max}$, τότε το χωρίο είναι τύπου C . Σε αντίθετη περίπτωση είναι τύπου S . Στα χωρία τύπου C υπάρχουν δύο περιπτώσεις. Το πρώτο σημείο επαφής (A) ανήκει πάντα στην εσωτερική εξειλιγμένη, ενώ το δεύτερο σημείο επαφής (B) ανήκει αρχικά στην εσωτερική εξειλιγμένη και στη συνέχεια μεταβαίνει στον κύκλο O_1 . Για κάθε τιμή της θ , υπολογίζει κανείς σε ποια κατηγορία βρίσκεται με το ακόλουθο κριτήριο, που προκύπτει από την προηγούμενη ανάλυση. Αν $\theta + 2\pi < \phi_{ie} - \phi_{is}$ το σημείο B βρίσκεται εντός της εσωτερικής εξειλιγμένης. Σε αντίθετη περίπτωση, το σημείο B βρίσκεται στην περιφέρεια του κύκλου O_1 . Είναι απαραίτητο να γνωρίζει κανείς σε ποια καμπύλη βρίσκονται τα σημεία A και B , έτσι ώστε να επιλέξει τη σωστή σχέση από την κλαδική συνάρτηση θ . Όταν το χωρίο είναι τύπου S , μεταξύ των σημείων επαφής ισχύει η σχέση

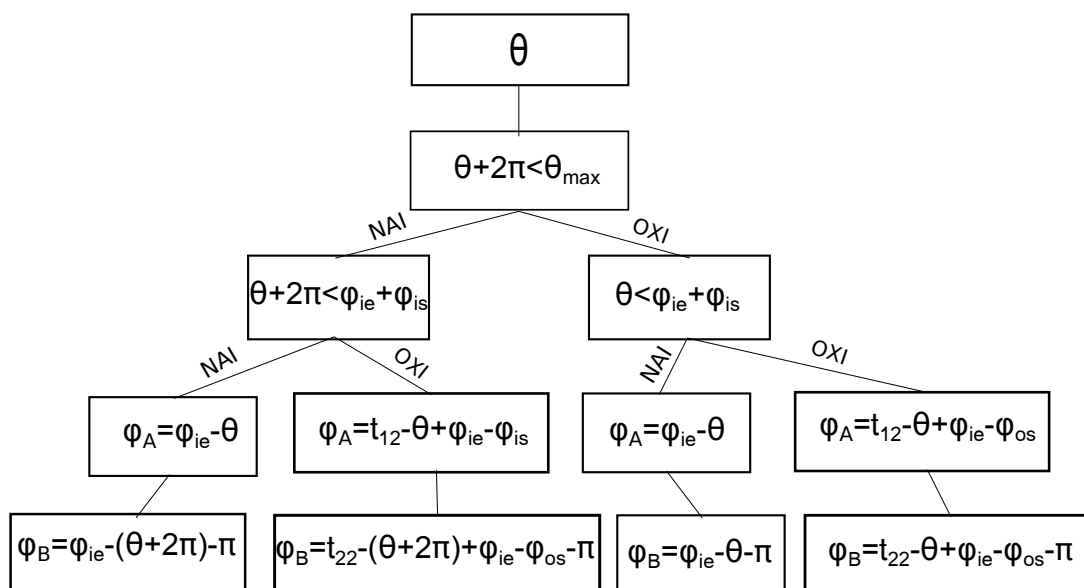
$$\theta_B = \theta_A \quad (3.79)$$

Αυτό συμβαίνει για το λόγο ότι τα χωρία S είναι συμμετρικά σε αντίθεση με τα χωρία C . Σε αυτά τα χωρία υπάρχουν πάλι δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση τα σημεία A και B (αρχή και τέλος του χωρίου) βρίσκονται στην εσωτερική και εξωτερική εξειλιγμένη. Στη δεύτερη περίπτωση τα σημεία A και B βρίσκονται στους κύκλους O_1 και O_2 αντίστοιχα. Σε αυτήν την περίπτωση το κριτήριο για το διαχωρισμό των περιπτώσεων, σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση είναι το ακόλουθο. Αν $\theta < \phi_{ie} - \phi_{is}$, τότε το χωρίο έχει τη μορφή της πρώτης περίπτωσης. Αντίθετα ανήκει στη δεύτερη



Σχήμα 3.22: Παραμόρφωση του χωρίου του Scroll σε μια περίοδο, όπου ο δρομέας εκτελεί δύο πλήρεις περιστροφές.

περίπτωση. Η συνολική διαδικασία με τον έλεγχο των διάφορων κριτηρίων φαίνεται εποπτικά στο σχήμα 3.23. Όπως προαναφέρθηκε, μόλις καθοριστεί σε ποια καμπύλη ανήκουν τα σημεία επαφής, υπολογίζεται μέσω της συνάρτησης θ η παράμετρος ϕ . Από αυτήν, μέσω των παραμετρικών εξισώσεων της κάθε καμπύλης που παρουσιάστηκαν, υπολογίζονται τελικά οι συντεταγμένες των σημείων επαφής. Επίσης, γνωρίζοντας την παράμετρο ϕ των οριακών σημείων A και B, εύκολα βρίσκει κανείς την τιμή της παραμέτρου ϕ για όλα τα εσωτερικά σημεία του δρομέα και του στάτη και, συνεπώς, τις συντεταγμένες κάθε σημείου του περιγράμματος του χωρίου. Εδώ υπενθυμίζεται ότι τα σημεία επαφής του στάτη και τα αντίστοιχα σημεία επαφής του δρομέα έχουν ίδιες τιμές της θ . Η συνολική διαδικασία παρουσιάζεται στο σχήμα 3.23.



Σχήμα 3.23: Λογικό διάγραμμα της μεθόδου υπολογισμού των σημείων επαφής.

Κεφάλαιο 4

Γένεση πλέγματος στα μεταβαλλόμενα χωρία του Scroll

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζεται η διαδικασία της προετοιμασίας των χωρίων του Scroll με σκοπό τη μετέπειτα αριθμητική επίλυση του πεδίου ροής. Συγκεκριμένα, θα παρουσιαστεί αρχικά η διαδικασία της δημιουργίας πλέγματος στα χωρία του Scroll με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου και στη συνέχεια η θεωρία των ελατηρίων με σκοπό την παραμόρφωσή τους.

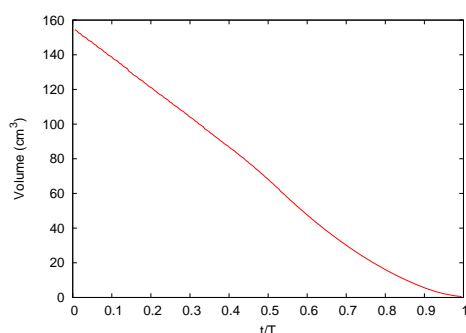
4.1 Στρατηγική δημιουργίας πλέγματος

Όπως έχει προαναφερθεί, κατά τη λειτουργία του Scroll, ο δρομέας ολισθαίνει πάνω στο στάτη πραγματοποιώντας μια ομαλή μεταφορική κίνηση. Κατά την κίνηση αυτή, δημιουργούνται χωρία που εγκλωβίζουν το ρευστό και το εξαναγκάζουν να συμπιεστεί ή να εκτονωθεί. Σε πραγματικές συνθήκες, τα γειτονικά χωρία επικοινωνούν μεταξύ τους μέσω διακένων. Τα διάκενα αυτά δημιουργούνται από το γεγονός ότι δεν μπορεί να επιτευχθεί απόλυτη στεγανότητα στα σημεία επαφής του δρομέα με το στάτη. Σε αυτά τα σημεία διαφεύγει το εργαζόμενο μέσο από το χωρίο υψηλής πίεσης στο χωρίο χαμηλής πίεσης μαζί με λάδι, που τοποθετείται για τη μείωση της τριβής μεταξύ των δύο ελίκων. Επίσης, στην πραγματική τριδιάστατη μηχανή, όλα τα χωρία που συνυπάρχουν ταυτόχρονα σε μια χρονική στιγμή, επικοινωνούν μεταξύ τους από το διάκενο που σχηματίζεται μεταξύ των δύο ελίκων και των καπακιών στεγανοποίησης της μηχανής. Για αυτούς τους λόγους, η μάζα του ρευστού είναι ενιαία εντός της μηχανής και συνεπώς, η γένεση πλέγματος και η ανάλυση της ροής πρέπει να γίνεται ταυτόχρονα σε όλα τα χωρία του Scroll. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, για να αποφευχθεί αυτή

η δυσκολία, γίνεται η παραδοχή ότι τα χωρία του Scroll είναι στεγανά και δεν υπάρχει καμία εισροή ή διαρροή ρευστού σε ή από αυτά. Αυτό επιτρέπει την εξέταση του κάθε χωρίου ξεχωριστά, ανεξάρτητα από όλα τα άλλα. Έτσι, οδηγείται κανείς στο συμπέρασμα ότι μπορεί να δημιουργήσει πλέγμα στο πρώτο χωρίο τύπου C που σχηματίζεται και να ακολουθήσει τη διαδρομή του προς το εσωτερικό των ελίκων [21]. Την ίδια κίνηση εκτελεί αντιδιαμετρικά και το συμμετρικό του χωρίο, πλησιάζοντας το ένα το άλλο, μέχρι τη στιγμή της ένωσής τους και τη δημιουργία ενός χωρίου τύπου S. Καθώς το χωρίο μετατοπίζεται, το ρευστό έρχεται σε επαφή με διαφορετικά σημεία του δρομέα και του σάτη. Παρόλ' αυτά σε επίπεδο γένεσης πλέγματος μπορεί να θεωρηθεί, ότι το περίγραμμα του χωρίου είναι απλά ένα παραμορφούμενο πλαίσιο αποτελούμενο πάντα από τα ίδια εσωτερικά και εξωτερικά σημεία, ανεξάρτητα από τα σημεία του σάτη και του δρομέα, στα οποία εφάπτεται.

Λόγω του ιδιαίτερου σχήματος των χωρίων του Scroll, επιλέγεται η δημιουργία μη-δομημένου πλέγματος, το οποίο είναι πιο ευέλικτο σε γεωμετρικά περίπλοκες κατασκευές απ' ότι το δομημένο [22, 23]. Έτσι, κάθε χωρίο πρέπει να πληρωθεί με πλέγμα από τριγωνικά στοιχεία ομοιόμορφα σε όλη την έκτασή του. Με αυτόν τον τρόπο δε γίνεται κάποια ιδιαίτερη πλεγματοποίηση του χώρου κοντά στα τοιχώματα, καθιστώντας έτσι το πλέγμα ιδανικό μόνο για την επίλυση μη συνεκτικών πεδίων ροής. Για τη γένεση πλέγματος στα χωρία χρησιμοποιείται η μέθοδος του προελαύνοντος μετώπου. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, δοθέντος του περιγράμματος ενός χωρίου αποτελούμενου από κόμβους, δημιουργούνται τριγωνικά στοιχεία, τα οποία αποτελούνται από κόμβους του περιγράμματος και πρωτοεμφανιζόμενους εσωτερικούς κόμβους. Στη συνέχεια, τα στοιχεία εξαπλώνονται προς το εσωτερικό, δημιουργώντας συνεχώς νέους κόμβους μέχρι να καλυφθεί ολόκληρο το χωρίο. Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί σε όλα τα δημιουργούμενα χωρία κατά τη λειτουργία του Scroll. Κάτι τέτοιο όμως, δεν εξυπηρετεί τη μετέπειτα ρευστοδυναμική ανάλυση. Καθώς το φαινόμενο είναι μη-μόνιμο καθίσταται απαραίτητος ο υπολογισμός της μεταβολής της ταχύτητας κάθε σημείου του χωρίου μεταξύ δύο διαδοχικών παραμορφώσεων του. Για να συμβεί αυτό, πρέπει κάθε κόμβος του πλέγματος να αντιστοιχεί σε κάποιον άλλον πριν την παραμόρφωση, έτσι ώστε με γνωστές τις ταχύτητές τους πριν και μετά να υπολογιστεί η χρονική επιτάχυνση. Έτσι, κάθε κόμβος πρέπει να έχει μια πορεία μέσα σε όλα τα προηγούμενα χωρία. Συνεπώς, είναι απαραίτητο, οι κόμβοι των πλεγμάτων να παραμένουν ίδιοι σε αριθμό. Το γεγονός αυτό, απαγορεύει την εκ νέου γένεση πλέγματος με την παραπάνω μέθοδο, καθώς έτσι διακόπτεται η συνέχεια της αντιστοίχισης των κόμβων του παλιού πλέγματος με το νέο. Επομένως, πρώτα πρέπει να δημιουργηθεί ένα αρχικό πλέγμα σε κάποιο χωρίο και ύστερα να ακολουθήσει την παραμόρφωση του περιγράμματός του, έτσι ώστε να προκύψουν τα κατάλληλα πλέγματα στα νέα χωρία. Έτσι, αν δημιουργηθεί πλέγμα στο πρώτο χωρίο που σχηματίζεται κατά τη λειτουργία του Scroll ως συμπίεστη, τότε καθώς στρέφεται ο δρομέας και παραμορφώνει αυτό το χωρίο, θα συμπίεζει και το πλέγμα που έχει δημιουργηθεί στο εσωτερικό του. Με αυτόν τον τρόπο, ο αριθμός των κόμβων του πλέγματος θα παραμένει σταθερός και θα είναι δυνατή η παρακολούθηση της πορείας κάθε κόμβου και ο υπολογισμός της χρονικής μεταβολής της ταχύτητάς του. Επίσης, κατά τη ρευστοδυναμική επίλυση, κάθε συνο-

ριακός κόμβος οφείλει να διατηρεί τις ίδιες οριακές συνθήκες. Συγκεκριμένα, οι κόμβοι του στάτη έχουν μηδενική ταχύτητα ενώ οι κόμβοι του δρομέα έχουν την ίδια ταχύτητα με αυτόν. Συνεπώς, δεν είναι δυνατόν να μετακινείται ένας κόμβος από το στάτη στο δρομέα κατά την παραμόρφωση του χωρίου. Επομένως, οι κόμβοι του δρομέα και οι κόμβοι του στάτη πρέπει να παραμένουν σταθεροί σε αριθμό. Μια από τις μεθόδους, που επιτρέπει την παραμόρφωση των πλεγμάτων είναι η μέθοδος των ελατηρίων, η οποία αναλύεται στη συνέχεια. Για να φανεί σε πόσο απαιτητικές συνθήκες πρέπει να ανταπεξέλθει αυτή η μέθοδος, παρουσιάζεται το διάγραμμα της μεταβολής του όγκου ενός χωρίου κατά τη μετακίνησή του μέσα στο Scroll, απ' όπου διαπιστώνεται η έντονη αλλαγή της γεωμετρίας του.

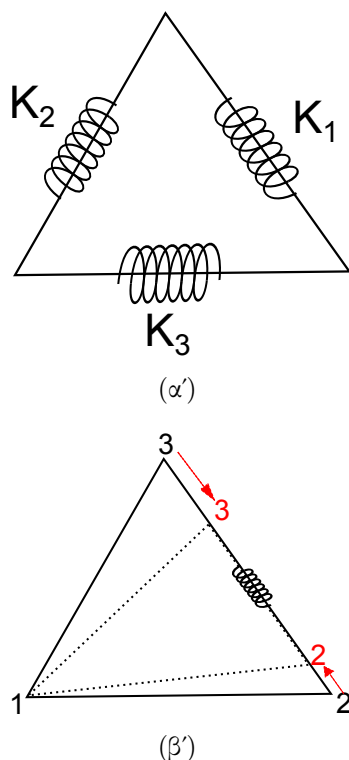


Σχήμα 4.1: Μεταβολή του όγκου ενός χωρίου κατά τη συμπίεση συναρτήσεως του χρόνου, αδιαστατοποιημένου με την περίοδο.

4.2 Παραμόρφωση πλεγμάτων με τη μέθοδο των ελατηρίων

Η μέθοδος των ελατηρίων αποτελεί μια μέθοδο υπολογισμού της μετατόπισης των κόμβων του αρχικού πλέγματος με σκοπό την αναπροσαρμογή του στο νέο περίγραμμα [24]. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή θεωρείται ότι μεταξύ δύο γειτονικών κόμβων, που ενώνονται με ακμή του πλέγματος, ασκούνται ελαστικές δυνάμεις από ελατήρια τα οποία τοποθετούνται είτε πάνω στους κόμβους, είτε στις μεταξύ τους αποστάσεις. Οι ελαστικές δυνάμεις είναι τόσο μεγάλες όσο πιο παραμορφωμένα είναι τα τριγωνικά στοιχεία του πλέγματος. Σκοπός της μεθόδου είναι η ελαχιστοποίηση της συνισταμένης δύναμης, η οποία ασκείται σε έναν κόμβο από όλους τους γειτονικούς του. Έτσι, οι κόμβοι μετατοπίζονται συνεχώς στο πλαίσιο μιας επαναληπτικής μεθόδου σύμφωνα με τη συνισταμένη δύναμη, η οποία ασκείται σε αυτούς, προκειμένου να τοποθετηθούν τελικά στη θέση ισορροπίας τους. Τότε τα τριγωνικά στοιχεία επανέρχονται σε αποδεκτά σχήματα και αποφεύγονται όλες οι έντονες παραμορφώσεις και τα σημεία αναδίπλωσης του πλέγματος.

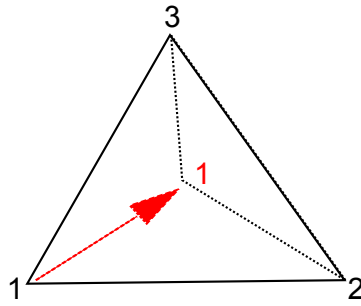
Υπάρχουν δύο παραλλαγές της μεθόδου που μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Στην πρώτη περίπτωση τοποθετούνται γραμμικά ελατήρια μεταξύ δύο γειτονικών κόμβων, όπως στο σχήμα 4.2,



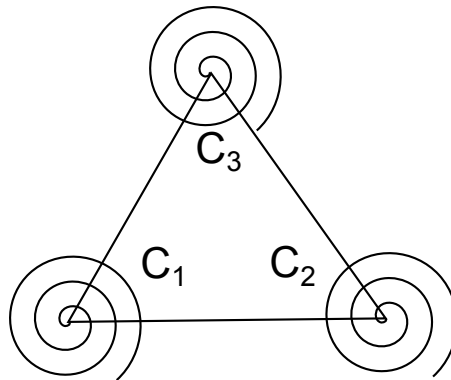
Σχήμα 4.2: Τοποθέτηση γραμμικών ελατηρίων στις πλευρές του τριγωνικού πλεγματικού στοιχείου [24].

Σε αυτήν την περίπτωση οι κόμβοι ενός τριγώνου απωθούνται μεταξύ τους, προκειμένου να μην ταυτιστούν. Παρόλ' αυτά δεν απαγορεύουν τη μετατόπιση ενός κόμβου προς την απέναντι πλευρά ενός τριγώνου. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.3, ο κόμβος 1 έχει τη δυνατότητα να πλησιάσει στην πλευρά 12 με κίνδυνο να την ξεπεράσει και να προκληθεί αναδίπλωση του τριγώνου και καταστροφή του δημιουργούμενου πλέγματος. Για να αποφευχθεί αυτό το φαινόμενο, εναλλακτικά τοποθετούνται στις κορυφές κάθε τριγώνου στρεπτικά ελατήρια (σχήμα 4.4). Αυτά ασκούν ροπές, ανάλογες με τη γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των πλευρών του τριγώνου. Έτσι όταν ο κόμβος 1 πλησιάσει στην πλευρά 12, θα δεχτεί ροπή τέτοια ώστε να τον επαναφέρει στην προηγούμενη θέση του. Λόγω αυτής της ιδιότητάς τους τα στρεπτικά ελατήρια, προτιμώνται έναντι των γραμμικών.

Η βασικότερη παράμετρος που πρέπει κανείς να επιλέξει είναι η σκληρότητα των ελατηρίων. Στην εργασία αυτή συνιστάται η χρήση του τετραγώνου του ημιτόνου της γωνίας του τριγώνου, στην οποία τοποθετείται το κάθε ελατήριο. Έτσι, η έκφραση για τη σκληρότητα του ελατηρίου κόμβου 1 είναι η ακόλουθη



Σχήμα 4.3: Προσέγγιση του κόμβου 1 στην απέναντι πλευρά 23.



Σχήμα 4.4: Τοποθέτηση στρεπτικών ελατηρίων στους κόμβους του τριγωνικού πλεγματοειδούς στοιχείου [24].

$$C_1 = \sin^2 \phi_1 = \frac{l_{12}^2 l_{13}^2}{4A^2} \quad (4.1)$$

Όμοια για τους άλλους δύο κόμβους ισχύουν οι σχέσεις

$$C_2 = \sin^2 \phi_2 = \frac{l_{21}^2 l_{23}^2}{4A^2} \quad C_3 = \sin^2 \phi_3 = \frac{l_{31}^2 l_{32}^2}{4A^2} \quad (4.2)$$

όπου l_{ij} είναι η πλευρά μεταξύ των κόμβων i και j και A είναι το εμβαδόν του τριγώνου. Οι δυνάμεις

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vec{f}_3 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

που ασκούνται σε κάθε κόμβο του τριγώνου μπορούν να γραφτούν στη μορφή

$$\underline{f} = \underline{K} \underline{u} \quad (4.4)$$

όπου \underline{u} (σχέση 4.5) είναι το διάνυσμα των δυνατών μετατοπίσεων και \underline{K} το μητρώο δυσκαμψίας,

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\delta x_1 \ \delta y_1]^T \\ [\delta x_2 \ \delta y_2]^T \\ [\delta x_3 \ \delta y_3]^T \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Το μητρώο δυσκαμψίας είναι συμμετρικό και υπολογίζεται ως

$$\underline{K} = \underline{R}^T \underline{C} \underline{R} \quad (4.6)$$

όπου

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

και

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{13} - \hat{y}_{12} & -\hat{x}_{13} + \hat{x}_{12} & \hat{y}_{12} & -\hat{x}_{12} & -\hat{y}_{13} & \hat{x}_{13} \\ -\hat{y}_{21} & \hat{x}_{21} & \hat{y}_{21} - \hat{y}_{23} & -\hat{x}_{21} + \hat{x}_{23} & \hat{y}_{23} & -\hat{x}_{23} \\ \hat{y}_{31} & -\hat{x}_{31} & -\hat{y}_{32} & \hat{x}_{32} & \hat{y}_{32} - \hat{y}_{31} & -\hat{x}_{32} + \hat{x}_{31} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

με

$$\hat{x}_{ij} = \frac{x_j - x_i}{l_{ij}^2}, \quad \hat{y}_{ij} = \frac{y_j - y_i}{l_{ij}^2} \quad (4.9)$$

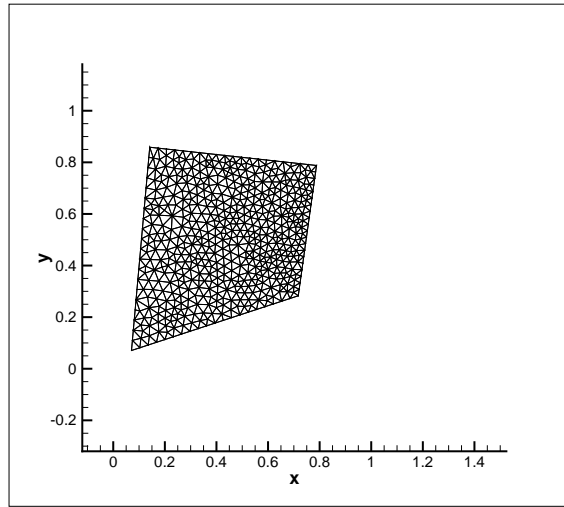
Επίσης, το μητρώο δυσκαμψίας ενός τριγωνικού στοιχείου μπορεί να γραφεί με τη συμπυκνωμένη γραφή ενός σύνθετου πίνακα 3×3 .

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

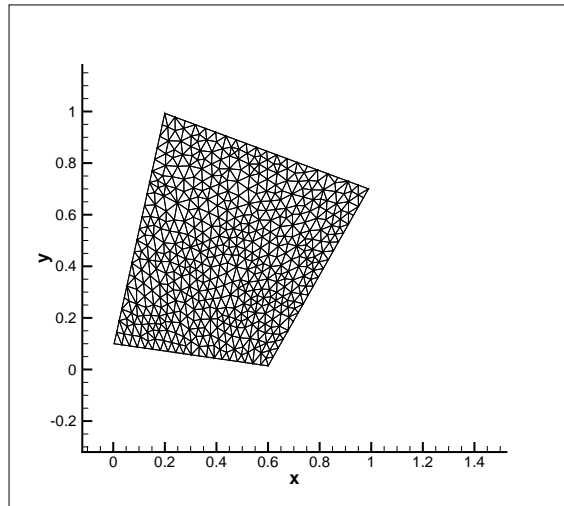
όπου τα μητρώα K^{ij} έχουν διάσταση 2×2 και ισχύει η ιδιότητα $[K^{ij}] = [K^{ji}]^T$.

Το νέο παραμορφωμένο πλέγμα προκύπτει από την επίλυση του συστήματος 4.4 θέτοντας το αριστερό μέλος ίσο με το μηδέν. Ως οριακές συνθήκες δίνονται οι μετατοπίσεις των κόμβων του περιγράμματος. Αφού υπολογιστούν οι μετατοπίσεις των κόμβων του πλέγματος, βρίσκεται η νέα θέση τους, γνωρίζοντας το αρχικό πλέγμα.

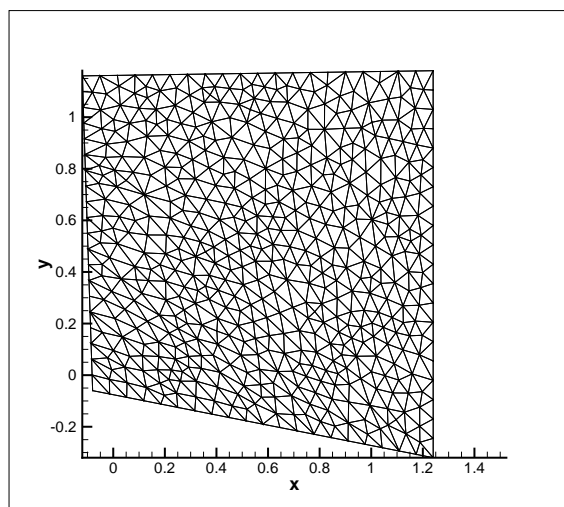
Στη συνέχεια, εφαρμόζεται η μέθοδος των ελατηρίων σε ένα απλό παράδειγμα. Έστω τέσσερις κύκλοι διαφορετικής ακτίνας, των οποίων τα κέντρα τοποθετούνται στο επίπεδο, έτσι ώστε να σχηματίζουν τετράπλευρο. Στην περιφέρεια κάθε κύκλου μπορεί να μετακινείται ένα σημείο, το οποίο ξεκινά την κίνησή του από συγκεκριμένη γωνία. Τα τέσσερα σημεία που κινούνται στην περιφέρεια των κύκλων έχουν ίδια ταχύτητα αλλά ξεκινούν από διαφορετική γωνία το κάθε ένα. Τα τέσσερα κινούμενα σημεία σχηματίζουν στο επίπεδο ένα τετράπλευρο, το οποίο μπορεί να παραμορφώνεται στο χρόνο. Αρχικά ισομοιράστηκαν 20 κόμβοι σε κάθε πλευρά του τετραπλεύρου. Οι κόμβοι του περιγράμματος εισήχθησαν στον οικείο γενέτη πλέγματος, δημιουργώντας μη δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων σε όλο τον εσωτερικό χώρο του τετραπλεύρου (σχήμα 4.5). Στη συνέχεια επιτράπηκε η κίνηση των γωνιών του τετραπλεύρου πάνω στην περιφέρεια των κύκλων κατά $\pi/4$ rad. Στο νέο περίγραμμα εφαρμόστηκε η θεωρία των στρεπτικών ελατηρίων, έτσι ώστε να δημιουργηθεί πλέγμα στη νέα παραμορφωμένη γεωμετρία. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 4.5. Από το σχήμα αυτό φαίνεται, πώς οι κόμβοι του πλέγματος μετακινήθηκαν στις νέες τους θέσεις προκειμένου να ελαχιστοποιηθούν οι δυνάμεις που δέχονται και πώς αυτό το γεγονός οδήγησε σε καλής ποιότητας πλέγμα. Επίσης, δοκιμάστηκε και μια πιο έντονη μεταβολή της γεωμετρίας επιτρέποντας την κίνηση των κορυφών του τετραπλεύρου συνολικά κατά π rad. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 4.5, όπου παρατηρείται ότι παρά τη μεγάλη διαστολή και στροφή του περιγράμματος, το πλέγμα είναι ικανό να ακολουθήσει τη γεωμετρία. Το τελικό πλέγμα θεωρείται πολύ καλής ποιότητας αποδεικνύοντας την καταλληλότητα της μεθόδου για την εφαρμογή στα παραμορφούμενα χωρία του Scroll.



(α') Γέννηση πλέγματος σε τετράπλευρο



(β') Παραμόρφωση του τετραπλεύρου και δημιουργία πλέγματος με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων.



(γ') Έντονη παραμόρφωση του τετραπλεύρου και δημιουργία πλέγματος με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων.

Σχήμα 4.5: Δημιουργία πλέγματος σε τρεις φάσεις του τετραπλεύρου είτε με γέννηση είτε με τη μέθοδο των ελατηρίων.

4.3 Εφαρμογή της μεθόδου των ελατηρίων στο Scroll

4.3.1 Γένεση αρχικού πλέγματος

Στο κεφάλαιο αυτό χρησιμοποιείται η μέθοδος των ελατηρίων για τη δημιουργία πλέγματος σε κάθε χωρίο που δημιουργείται κατά τη λειτουργία του Scroll, σεβόμενη πάντα τις ιδιαιτερότητες της συγκεκριμένης γεωμετρίας. Αρχικά, είναι απαραίτητη γένεση πλέγματος εντός ενός χωρίου, από το οποίο με την παραμόρφωση του περιγράμματός του προκύπτουν όλα τα υπόλοιπα. Η ποιότητα των πλεγμάτων, που προκύπτουν από την παραμόρφωση εξαρτάται έντονα από την επιλογή του αρχικού χωρίου, στο οποίο πραγματοποιείται η γένεση πλέγματος με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου. Η επιλογή του βέλτιστου αρχικού χωρίου θα διερευνηθεί στη συνέχεια. Προκειμένου να δημιουργηθεί το αρχικό χωρίο χρειάζεται μια αρχική επεξεργασία. Η σωστή επιλογή της θέσεις των κόμβων, που αποτελούν το περίγραμμα είναι βαρύνουσας σημασίας. Είναι συχνά επιθυμητό, οι κόμβοι του περιγράμματος να είναι ισαπέχοντες. Με αυτό τον τρόπο αποφεύγονται τοπικές πυκνώσεις του δημιουργούμενου πλέγματος, οι οποίες δυσχεραίνουν τη μετέπειτα επίλυση της ροής. Επίσης είναι απαραίτητο, οι κόμβοι αυτοί να είναι σταθεροί σε αριθμό μεταξύ των χωρίων. Ο ισομοιρασμός των κόμβων του περιγράμματος γίνεται με τη βοήθεια διαφορετικών μαθηματικών τύπων για κάθε καμπύλη, που αποτελεί το χωρίο. Η καμπύλη που κυριαρχεί στο σχηματισμό των χωρίων είναι η εξειλιγμένη καμπύλη του κύκλου. Ο μαθηματικός τύπος που υπολογίζει το μήκος τόξου μεταξύ δύο σημείων της βρίσκειται από τη σχέση 3.1 Παραγωγίζοντας κανείς την παραμετρική εξίσωση της εξειλιγμένης βρίσκει:

$$\frac{d\vec{x}}{d\phi} = r_b(\phi - \phi_0)\cos\phi\vec{i} + r_b(\phi - \phi_0)\sin\phi\vec{j} \quad (4.11)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην εξίσωση 3.1 και πραγματοποιώντας την ολοκλήρωση προκύπτει

$$S = \frac{1}{2}r_0[(\phi_2 - \phi_0)^2 - (\phi_1 - \phi_0)^2] \quad (4.12)$$

όπου οι γωνίες ϕ_2 και ϕ_1 είναι οι τιμές της παραμέτρου του τελικού και του αρχικού σημείου της εξειλιγμένης αντίστοιχα. Επομένως, για ένα σημείο της εξειλιγμένης με τιμή της παραμέτρου ϕ_i , το επόμενο σημείο που πρέπει να απέχει σταθερό μήκος τόξου δS έχει ϕ_{i+1} ίσο με

$$\phi_{i+1} = \sqrt{\frac{\delta S}{2r_0} + (\phi_i - \phi_0)^2} + \phi_0 \quad (4.13)$$

Φυσικά, η τιμή δS υπολογίζεται από το λόγο του συνολικού μήκους του τμήματος του δρομέα ή του στάτη, που αποτελεί το περίγραμμα του χωρίου, προς τον αριθμό των σημείων που το αποτελούν μειωμένο κατά ένα. Το στοιχειώδες μήκος τόξου δS μπορεί να διαφέρει μεταξύ δρομέα και του στάτη. Το μήκος της καμπύλης υπολογίζεται από τη σχέση 4.12, αν γνωρίζεις κανείς τα σημεία επαφής του δρομέα με το στάτη. Αντίστοιχες εξισώσεις, που ισομοιράζουν τα σημεία του περιγράμματος στους δύο κύκλους και το ευθύγραμμο τμήμα της εσωτερικής περιοχής είναι:

$$\phi_{i+1} = \frac{\delta S}{r_1} + \phi_i \quad (4.14)$$

$$\phi_{i+1} = \frac{\delta S}{r_2} + \phi_i \quad (4.15)$$

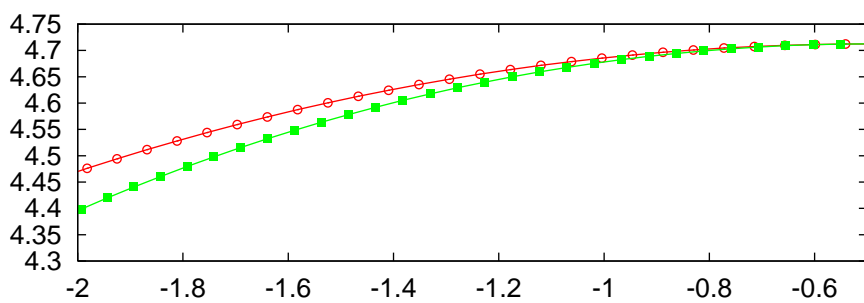
$$x_{i+1} = \delta S \frac{x_B - x_A}{L} + x_i \quad (4.16)$$

$$y_{i+1} = \delta S \frac{y_B - y_A}{L} + y_i \quad (4.17)$$

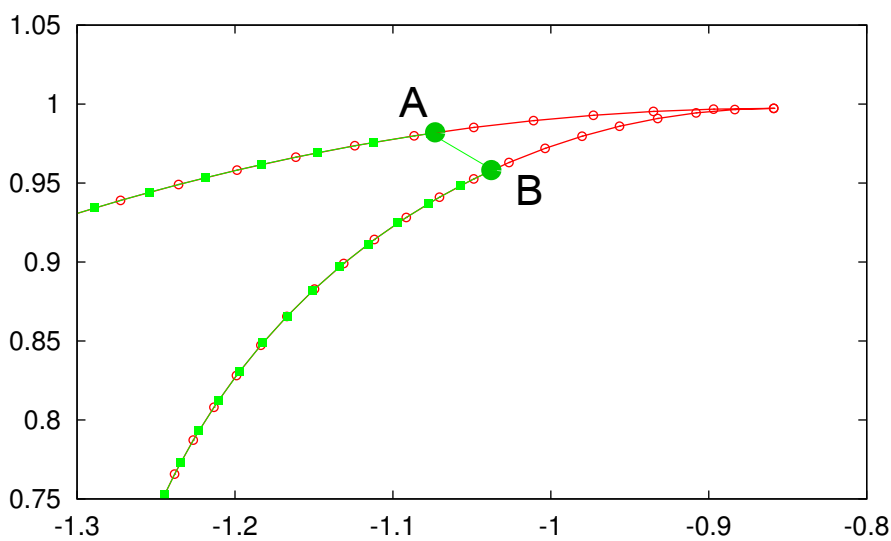
Τέλος, απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή στα σημεία συνέχειας των διαφορετικών καμπυλών. Ο τελευταίος κόμβος κάθε καμπύλης, που αποτελεί το χωρίο, πρέπει να απέχει απόσταση τόξου ίση με δS από το πρώτο σημείο της επόμενης καμπύλης.

Αφού ισομοιραστούν οι κόμβοι κατά μήκος του δρομέα και του στάτη, πρέπει να αντιμετωπιστεί το ακόλουθο πρόβλημα. Όπως φαίνεται και από το σχήμα 4.6 σε μια περιοχή κοντά στο σημείο επαφής των δύο ελίκων, τα σημεία που αποτελούν το δρομέα συγκλίνουν με αυτά του στάτη, έως ότου σχεδόν συμπέσουν σε ενιαία καμπύλη.

Σε αυτήν την περιοχή δεν υπάρχει περιθώριο δημιουργίας τριγωνικών στοιχείων με αποτέλεσμα να αποτυγχάνει η διαδικασία της γένεσης πλέγματος. Επομένως αυτή η περιοχή πρέπει να αποκόπτεται από το χωρίο. Υπάρχουν δύο τέτοιες περιοχές σε κάθε χωρίο, ένα στην αρχή του και ένα στο τέλος του. Η επιλογή του σημείου στο οποίο πραγματοποιείται η αποκοπή της ακατάλληλης περιοχής, γίνεται με δύο κριτήρια, όπου το κάθε ένα αποσκοπεί σε διαφορετικό αποτέλεσμα και μπορούν να τεθούν σε εφαρμογή είτε οι κόμβοι του περιγράμματος είναι ισαπέχοντες, είτε όχι. Στο σχήμα 4.7 φαίνεται το σημείο αποκοπής του χωρίου. Τα δύο κριτήρια που προτείνονται, ορίζουν ποιοι πρέπει να είναι κάθε φορά οι κόμβοι Α και Β του περιγράμματος, όπου Α είναι ο τελευταίος κόμβος του στάτη και Β ο τελευταίος κόμβος του δρομέα.



Σχήμα 4.6: Περιοχή ενός χωρίου κοντά στο σημείο επαφής του δρομέα με το στάτη.



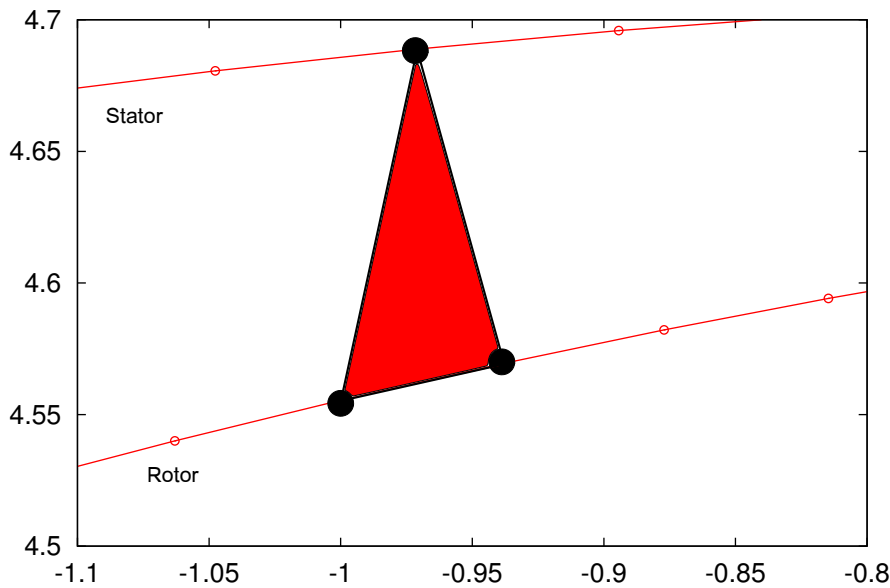
Σχήμα 4.7: Αποκοπή της περιοχής κοντά στο σημείο επαφής του δρομέα με το στάτη.

Στη συνέχεια ορίζεται αρίθμηση των κόμβων προς διευκόλυνση της μαθηματικής θεμελίωσης των κριτηρίων. Το πρώτο κριτήριο αποσκοπεί στη δημιουργία αρκετού χώρου μεταξύ των δύο σημείων, έτσι ώστε να είναι δυνατή η ύπαρξη τριγωνικών στοιχείων μεταξύ τους. Αρχικά, αναζητείται για κάθε κόμβο του στάτη ο πλησιέστερος κόμβος του δρομέα. Σε περίπτωση που τα σημεία του δρομέα και του στάτη είναι ισαπέχοντα,

μπορεί να χρησιμοποιηθεί η παρακάτω σχέση

$$i_{rt} = \frac{\delta S_{st}}{\delta S_{rt}}(i_{st} - 1) + 1 \quad (4.18)$$

όπου i_{st} και i_{rt} είναι οι δείκτες της αρίθμησης των κόμβων του στάτη και του δρομέα αντίστοιχα. Επίσης δS_{st} και δS_{rt} είναι οι αποστάσεις τόξου του στάτη και του δρομέα αντίστοιχα. Στη συνέχεια, υπολογίζεται το εμβαδό που φαίνεται στο σχήμα 4.8.



Σχήμα 4.8: Υπολογισμός του εμβαδού του πρώτου κριτηρίου αποκοπής.

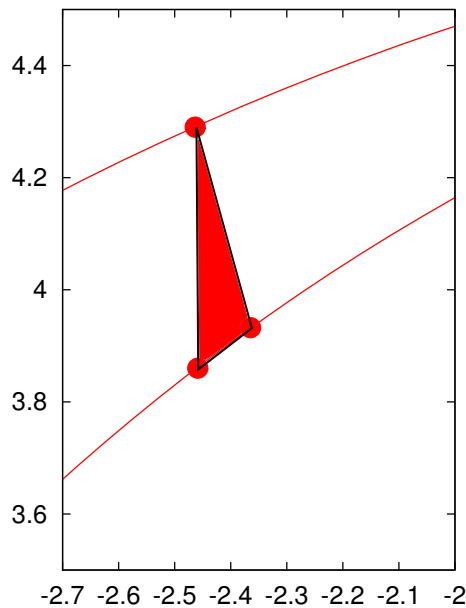
Αυτό υπολογίζεται εύκολα με τη βοήθεια του εξωτερικού γινομένου διανυσμάτων, από το οποίο προκύπτει ο παρακάτω τύπος:

$$E = \frac{1}{2} |(x_{i_{rt}-1} - x_{i_{rt}+1})(y_{i_{st}} - y_{i_{rt}+1}) - (y_{i_{rt}-1} - y_{i_{rt}+1})(x_{st} - x_{i_{rt}+1})| \quad (4.19)$$

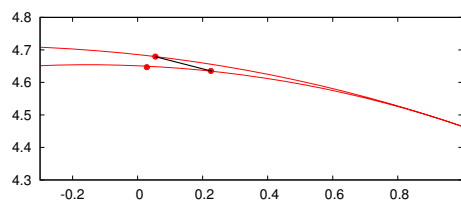
Το εμβαδό E οφείλει να είναι μεγαλύτερο από μια συγκεκριμένη τιμή, η οποία ορίζεται κάθε φορά σε σχέση με τα δεδομένα του λογισμικού πλεγματοποίησης που χρησιμοποιείται. Εδώ προτείνεται η χρήση του μεγέθους δS_{rt}^2 ως μέτρο σύγκρισης του εμβαδού. Σε περίπτωση που το εμβαδό E που προκύπτει από ένα συγκεκριμένο κόμβο του στάτη είναι μικρότερο από την τιμή σύγκρισης, πρέπει να εξεταστεί ο αμέσως επόμενος κόμβος ως πιθανός για τη δημιουργία της τομής του χωρίου. Εάν όμως ικανοποιείται το κριτήριο, τότε τίθεται σε εφαρμογή το δεύτερο κριτήριο. Σύμφωνα με αυτό, εξετάζεται η απόσταση του κόμβου i_{st} με τον κοντινότερό του i_{rt} . Το κριτήριο αυτό απαγορεύει στους κόμβους να πλησιάσουν περισσότερο από μια συγκεκριμένη απόσταση, έτσι ώστε το πλέγμα να μην πυκνώνει τοπικά. Εδώ προτείνεται η απόσταση d

$$d = \sqrt{(x_{st} - x_{rt})^2 + (y_{st} - y_{rt})^2} \quad (4.20)$$

να είναι μικρότερη από το μήκος δS_{rt} . Ο πρώτος κόμβος του στάτη, ο οποίος πληρεί και τα δύο κριτήρια είναι αυτός, στον οποίο γίνεται η τομή του χωρίου (σημείο A) μέχρι τον κοντινότερο κόμβο του δρομέα (σημείο B). Σε πολλές περιπτώσεις η ισχύς του ενός κριτηρίου δεν αρκεί για τη σωστή τομή του χωρίου. Η ύπαρξη μόνο του ενός προκαλεί πολλές φορές πλαγιοκοπή, η οποία είναι υπεύθυνη για την τοπική μείωση της ποιότητας του πλέγματος. Στο σχήμα 4.9 γίνονται δύο περιπτώσεις όπου έχει τεθεί σε ισχύ μόνο το ένα εκ των δύο κριτηρίων.



(α') Εφαρμογή μόνο του πρώτου κριτηρίου. Το εμβαδό είναι μικρό, αλλά η απόσταση μεταξύ των κόμβων των δύο καμπυλών είναι πολύ μεγάλη.



(β') Εφαρμογή μόνο του δεύτερου κριτηρίου. Το εμβαδόν είναι μεγάλο, αλλά η απόσταση μεταξύ δυο απέναντι κόμβων είναι πολύ μικρή.

Σχήμα 4.9: Αποτυχία σωστής αποκοπής της άκρης του χωρίου λόγω της μη εφαρμογής και των δύο κριτηρίων.

Τέλος, σημειώνεται ότι μετά από πολλά αριθμητικά πειράματα προέκυψε το ακόλουθο

συμπέρασμα για τα χωρία τύπου C . Στο σημείο επαφής, όπου η τιμή της παραμέτρου ϕ του στάτη είναι μεγαλύτερη, αρκεί ο έλεγχος του δεύτερου κριτηρίου. Σχετικά με τα χωρία τύπου S , μόλις βρεθεί ο κατάλληλος, κόμβος στον οποίο θα γίνει η κοπή του χωρίου στο ένα σημείο επαφής (i_{st}), λόγω συμμετρίας, υπολογίζεται ο κατάλληλος κόμβος στο άλλο σημείο επαφής από τη σχέση

$$i'_{st} = m - i_{st} + 1 \quad (4.21)$$

όπου m είναι ο συνολικός αριθμός των κόμβων του περιγράμματος του χωρίου που αποτελούν το στάτη. Μόλις απομακρυνθούν οι περιοχές κοντά στο σημείο επαφής, τα σημεία του περιγράμματος από την πλευρά του στάτη και από την πλευρά του δρομέα παύουν να είναι όσα θα επιθυμούσε κανείς, αλλά ο αριθμός τους εξαρτάται από τη γεωμετρία του κάθε χωρίου. Το γεγονός αυτό υπαγορεύει την επανατοποθέτηση των σημείων πάνω στο περίγραμμα. Καθώς η επανατοποθέτηση των σημείων στη νέα γεωμετρία είναι, σε επίπεδο προγραμματισμού, μη συμφέρουσα, προτείνεται η επανατοποθέτηση των σημείων πάνω στο περίγραμμα πριν αυτό κοπεί. Στη δεύτερη περίπτωση τα σημεία οφείλουν να είναι περισσότερα, έστω m' απ' ότι αρχικά (έστω m), έτσι ώστε να παραμείνουν ίσα με m μετά την αποκοπή των ακραίων περιοχών. Οι δύο τιμές m και m' συνδέονται μαθηματικά με τη σχέση

$$m' = \frac{(m - 1)^2}{k_{end} - k_{start}} + 1 \quad (4.22)$$

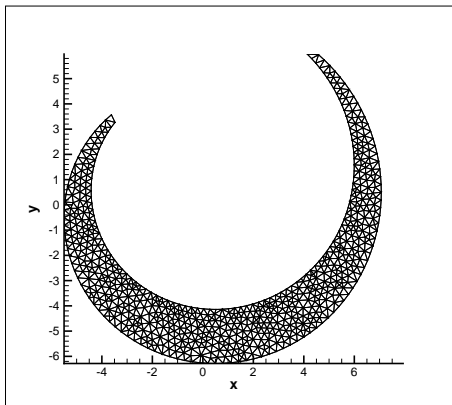
όπου k_{start} και k_{end} είναι ο αριθμός του κόμβου, στον οποίο έγινε η αποκοπή στην αρχή και στο τέλος της καμπύλης, που αποτελεί το στάτη ή το δρομέα. Έτσι, βρίσκεται ο νέος αριθμός των σημείων, που θα απαρτίσουν αυτές τις καμπύλες. Φυσικά, το μήκος τόξου μεταξύ δύο σημείων θα είναι πλέον μικρότερο. Στη συνέχεια, δεν είναι απαραίτητη η εφαρμογή της διαδικασίας για την εύρεση των κόμβων, στους οποίους θα γίνει η αποκοπή στην αρχή και στο τέλος της καμπύλης για δεύτερη φορά. Οι κόμβοι αυτοί θα έχουν αριθμό ταυτότητας, που δίνεται από τους παρακάτω τύπους.

$$k'_{start} = (k_{start} - 1) \frac{\delta S}{\delta S'} + 1 \quad (4.23)$$

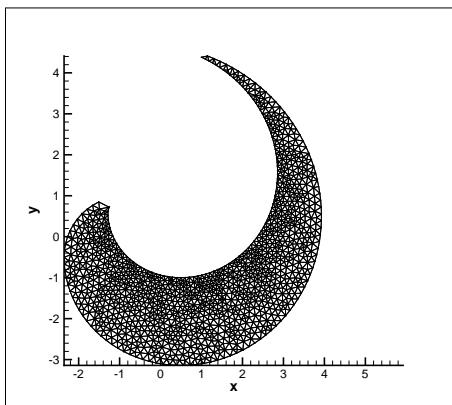
$$k'_{end} = k'_{start} + m - 1 \quad (4.24)$$

Η παραπάνω διαδικασία προσφέρει το πλεονέκτημα ότι ο πρώτος ισομοιρασμός των σημείων δεν είναι απαραίτητο να γίνει σε όλη την έκταση του περιγράμματος του χωρίου, αλλά ξεκινώντας από τα σημεία επαφής προς τα μέσα, εκτελείται μέχρι να βρεθούν τα κατάλληλα σημεία τομής A και B . Επίσης, δεν απαιτείται περαιτέρω ανάπτυξη λογισμικού, το οποίο να έχει τη δυνατότητα της εκ νέου κατασκευής του χωρίου, αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ήδη υπάρχον με τα νέα δεδομένα, που προκύπτουν από τις πα-

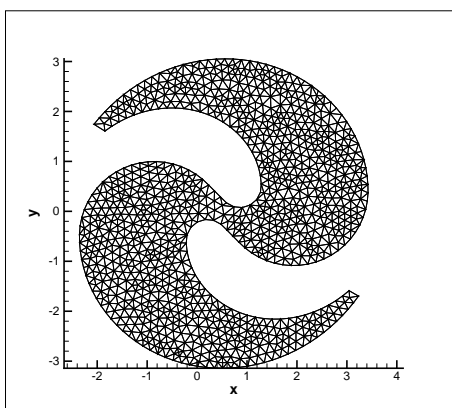
ραπάνω σχέσεις. Στο σχήμα 4.10 παρουσιάζονται διάφορα πλέγματα χαρακτηριστικών χωρίων, τα οποία προέκυψαν από τη διαδικασία της γένεσης πλέγματος με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου.



(α')



(β')

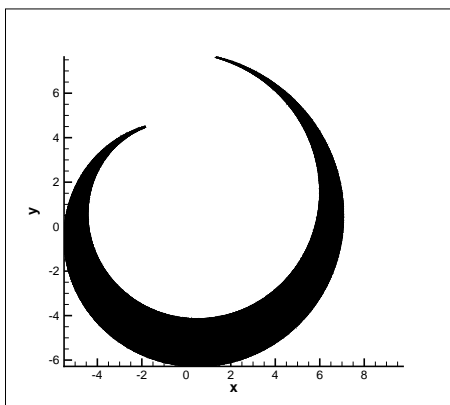


(γ')

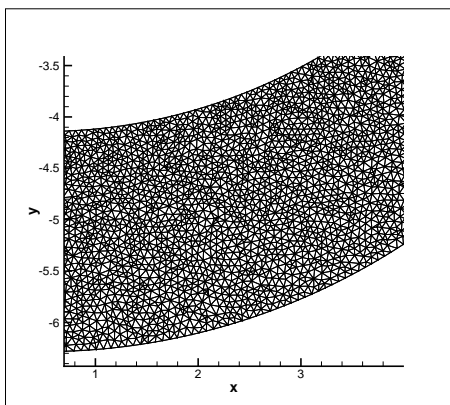
Σχήμα 4.10: Χαρακτηριστικά πλέγματα, τα οποία προέκυψαν με τη βοήθεια του οικείου γενέτη πλέγματος.

4.3.2 Παραγωγή πλέγματος σε όλα τα χωρία του Scroll

Η εφαρμογή της μεθόδου των ελατηρίων στα χωρία του Scroll απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή λόγω των έντονων μεταβολών τους και της ιδιαίτερης γεωμετρίας τους. Η γένεση πλέγματος στα χωρία τύπου S και τύπου C διαφέρει αρκετά και, κατά συνέπεια, θα εξεταστεί ξεχωριστά. Ξεκινώντας από τα χωρία τύπου C , δημιουργήθηκε αρχικό πλέγμα στο πρώτο χωρίο, το οποίο σχηματίζεται κατά τη συμπίεση. Το περίγραμμα του χωρίου αποτελείται από ισομοιρασμένα σημεία και έχει υποστεί αποκοπή των περιοχών στα άκρα του. Στο σχήμα 4.11 φαίνεται το πλέγμα, το οποίο είναι ιδιαίτερα πυκνό και άρα, δύσκολο να αντιληφθεί κανείς την ποιότητά του. Έτσι, παρουσιάζεται μια λεπτομέρεια στο ίδιο σχήμα, όπου φαίνεται η καταλληλότητα του πλέγματος για τη μετέπειτα χρήση του σε μεθόδους υπολογιστικής ρευστοδυναμικής.



(α') Πλέγμα σε όλο το χωρίο.

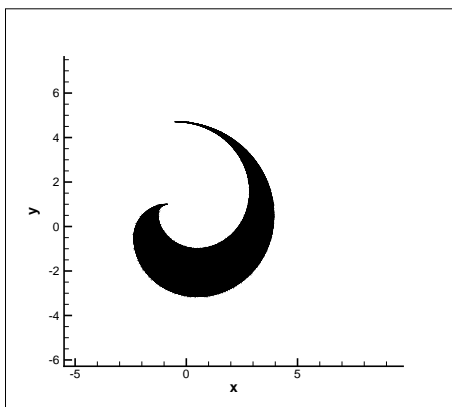


(β') Λεπτομέρεια πλέγματος.

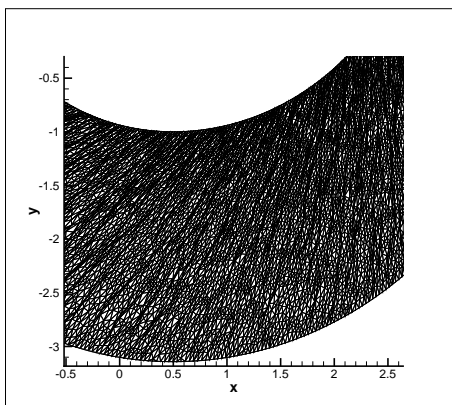
Σχήμα 4.11: Πλέγμα δημιουργημένο από τον γενέτη πλέγματος της ΜΠΥΡ&Β.

Ο αριθμός των κόμβων στα τοιχώματα του στάτη και του δρομέα είναι 500 στον καθένα, ενώ ο συνολικός αριθμός τους σε όλο το πλέγμα είναι 11962. Στη συνέχεια διαχωρίζεται η περίοδος της λειτουργίας του Scroll σε 20 τμήματα. Το αρχικό πλέγμα παραμορφώνεται λαμβάνοντας συνολικά 20 μορφές μέχρι τη στιγμή της δημιουργίας του κεντρικού

χωρίου τύπου S . Στη συνέχεια, εφαρμόζεται η μέθοδος των ελατηρίων για την παραμόρφωση του αρχικού πλέγματος και τη δημιουργία των υπόλοιπων 19 χωρίων. Όταν η μέθοδος εφαρμόζεται στα πρώτα χωρία, όπου η μεταβολή του περιγράμματος δεν είναι έντονη, η μέθοδος των ελατηρίων έχει πολύ καλά αποτελέσματα. Καθώς όμως η μεταβολή των χωρίων γίνεται έντονη η μέθοδος αστοχεί. Συγκεκριμένα, ενώ οι κόμβοι του πλέγματος ισορροπούν στις νέες τους θέσεις, πολλά από τα τριγωνικά στοιχεία του πλέγματος παραμορφώνονται έντονα στην προσπάθειά τους να προσαρμοστούν στη νέα γεωμετρία. Σε αρκετές περιπτώσεις μάλιστα το πλέγμα αναδιπλώνεται με αποτέλεσμα να είναι ακατάλληλο για χρήση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 4.12. Το χωρίο, που απεικονίζεται είναι το 16^ο σε σειρά. Η χαμηλή ποιότητα του πλέγματος φαίνεται ξεκάθαρα στη λεπτομέρεια του ίδιου σχήματος. Από το ίδιο σχήμα φαίνεται, ότι τα τριγωνικά στοιχεία παραμορφώνονται στην προσπάθειά τους να μετατοπίσουν τους κόμβους του περιγράμματος σε άλλη θέση. Έτσι προκύπτει το συμπέρασμα ότι εάν επιτραπεί η κίνηση των εξωτερικών κόμβων πάνω στο περίγραμμα, τότε θα δοθεί η δυνατότητα στο πλέγμα να προσαρμόσει τους κόμβους σε νέα θέση, έτσι ώστε να μειωθεί η συνισταμένη δύναμη στον κάθε ένα και να αυξήσει την ποιότητά του.



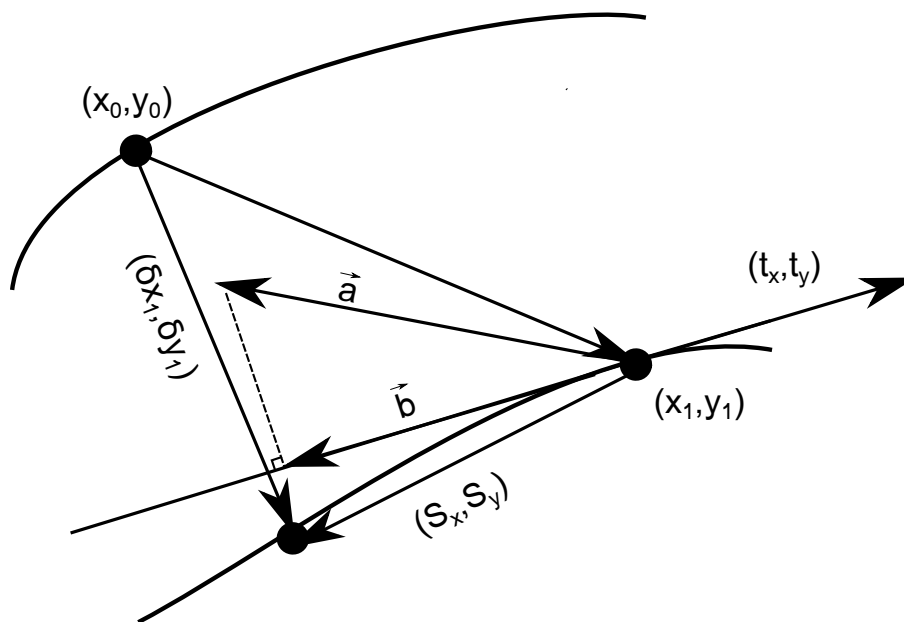
(α') Πλέγμα σε όλο το χωρίο.



(β') Λεπτομέρεια πλέγματος.

Σχήμα 4.12: Αποτυχημένη προσπάθεια εφαρμογής της μεθόδου των ελατηρίων.

Η κίνηση των εξωτερικών κόμβων στο περίγραμμα υπαγορεύεται από τη συνισταμένη δύναμη που δέχονται οι εσωτερικοί κόμβοι. Κάθε κόμβος του περιγράμματος δέχεται μια δύναμη, η οποία μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, μια παράλληλη με το εφαπτομενικό διάνυσμα και μια κάθετη. Η κάθετη δύναμη ορίζει στον κόμβο να μετακινηθεί από το περίγραμμα κάτι το οποίο δεν επιτρέπεται καθώς το συνολικό σχήμα του χωρίου δεν πρέπει να αλλάξει. Έτσι, δεν γίνεται καμία ενέργεια για τη μείωση της δύναμης αυτής. Η παράλληλη δύναμη τείνει να μετακινήσει τον κόμβο πάνω στο περίγραμμα. Ο κόμβος σταματά να μετακινείται όταν η δύναμη αυτή μηδενιστεί. Στο σχήμα 4.13 απεικονίζεται η διαδικασία μετατόπισης ενός κόμβου του περιγράμματος. Η θέση (x_0, y_0) είναι η θέση του κόμβου στο αρχικό περίγραμμα.



Σχήμα 4.13: Μετατόπιση των κόμβων του περιγράμματος.

Αρχικά, ο κόμβος αυτός μετατοπίζεται σε ένα σημείο του νέου περιγράμματος (x_1, y_1) . Στο σημείο αυτό το εφαπτομενικό διάνυσμα είναι το (t_x, t_y) . Από την επίλυση του συστήματος (εξ. 4.4) κατά την εφαρμογή της μεθόδου των ελατηρίων προκύπτει η επιθυμητή μετατόπιση \vec{a} του συγκεκριμένου κόμβου. Αυτή αναλύεται σε δύο συνιστώσες, μια παράλληλη (\vec{b}) στο διάνυσμα (t_x, t_y) και μια κάθετη. Εδώ γίνεται η παραδοχή, ότι για μικρές μετατοπίσεις το μέτρο του διανύσματος \vec{b} είναι ίσο με το μήκος τόξου, πάνω στο οποίο θα μετακινηθεί ο κόμβος. Ο κόμβος τελικά μετακινείται πάνω στην καμπύλη κατά το διάνυσμα $(\delta S_x, \delta S_y)$. Στη θεωρία των ελατηρίων που παρουσιάστηκε, όλες οι μετατοπίσεις των κόμβων είναι διανύσματα με σημείο εφαρμογής την αρχική θέση του κόμβου (x_0, y_0) . Έτσι, αν $(\delta x_1, \delta y_1)$ είναι η αρχική μετατόπιση ή η μετατόπιση της τελευταίας επανάληψης κατά τη διαδικασία της επίλυσης του συστήματος 4.4 τότε η επιθυμητή μετατόπιση πάνω στην καμπύλη είναι

$$\delta S = (\delta x - (x_1 - x_0))t_x + (\delta y - (y_1 - y_0))t_y \quad (4.25)$$

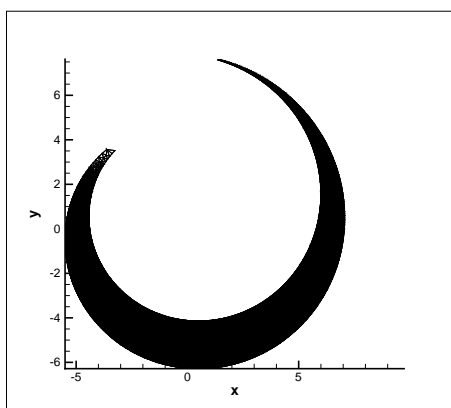
Με βάση αυτό το μήκος τόξου υπολογίζονται οι νέες συντεταγμένες του σημείου χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές σχέσεις των καμπυλών, από τις οποίες αποτελείται το περίγραμμα του χωρίου. Η τελική μετατόπιση του κόμβου, η οποία χρησιμοποιείται στον επόμενο επαναληπτικό κύκλο της μεθόδου είναι

$$(\delta x', \delta y') = (\delta S_x + x_1 - x_0)t_x + (\delta S_y + y_1 - y_0)t_y \quad (4.26)$$

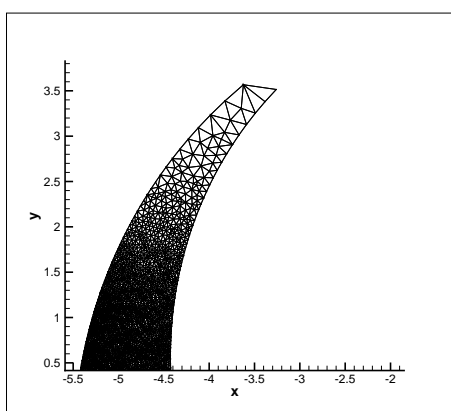
Διευκρινίζεται ότι σύμφωνα με προηγούμενη ενότητα η μεταφορά κόμβων από την περιοχή του στάτη στην περιοχή του δρομέα και αντίστροφα δεν είναι αποδεκτή. Η μέθοδος αυτή έχει πολύ καλά αποτελέσματα και επαναφέρει το πλέγμα στην αρχική του ποιότητα. Επίσης επηρεάζεται αρκετά από την πορεία δημιουργίας των χωρίων. Συγκεκριμένα, όταν η θεωρία εφαρμόζεται στο πλέγμα του πρώτου χωρίου που δημιουργείται κατά τη συμπίεση, για την παραγωγή πλέγματος σε επόμενα χωρία μικρότερου όγκου, οι κόμβοι του περιγράμματος τείνουν προς τα άκρα του χωρίου και συσσωρεύονται στις περιοχές κοντά στα σημεία επαφής του δρομέα με το στάτη. Εκεί υπάρχει κίνδυνος κόμβοι του πλέγματος να συμπέσουν με αποτέλεσμα την αναδίπλωση του πλέγματος χωρίου. Αντίθετα, εάν χρησιμοποιηθεί ως αρχικό χωρίο ένα με μικρό εμβαδό, κοντά στο κέντρο των ελίκων και γίνει προσαρμογή του πλέγματος με τη μέθοδο των ελατηρίων στο πρώτο χωρίο, που δημιουργείται κατά τη συμπίεση, τότε οι κόμβοι του περιγράμματος εγκαταλείπουν τις άκρες και μετακινούνται προς την κεντρική περιοχή του. Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει ο κίνδυνος της αραίωσης του πλέγματος κοντά στις περιοχές επαφής των δύο ελίκων. Αυτό έχει ενδεχομένως ως αποτέλεσμα τη μείωση της ακρίβειας της μετέπειτα επίλυσης του πεδίου ροής σε αυτές τις περιοχές, οι οποίες παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε επίπεδο υπολογιστικής ρευστοδυναμικής. Το φαινόμενο αυτό απεικονίζεται στο σχήμα 4.14.

Έτσι πρέπει να προτιμάται η αρχική γένεση πλέγματος να γίνεται στα χωρία μεγάλου όγκου. Επίσης, έγιναν διάφορα αριθμητικά πειράματα για να διαπιστωθεί, αν χρειάζεται τα χωρία, στα οποία δρουν τα ελατήρια να έχουν υποστεί αποκοπή. Διαπιστώθηκε ότι το πλέγμα είναι καλύτερης ποιότητας σε ακέραια χωρία. Επίσης διερευνήθηκε κατά πόσο οι τελευταίοι κόμβοι της καμπύλη του στάτη και οι αντίστοιχοι του δρομέα έχουν ελευθερία μετακίνησης. Όταν αυτοί οι τέσσερις κόμβοι παραμένουν σταθεροί, παρά τις επιταγές της θεωρίας των ελατηρίων, διατηρείται καλύτερα το σχήμα του χωρίου στις άκρες. Στο σχήμα 4.30 φαίνονται δύο περιπτώσεις με ακίνητους ακραίους κόμβους. Το συμπέρασμα είναι ότι είναι καλό να μετακινούνται και οι ακραίοι κόμβοι. Σε περιπτώσεις όπου η θεωρία των ελατηρίων εφαρμόζεται για την προσαρμογή του πλέγματος από τα μεγάλα χωρία στα μικρά, η περιοχή κοντά στο σημείο επαφής αποκόπτεται αυτόματα με τη θέληση των κόμβων να απομακρυνθούν από αυτήν.

Στη συνέχεια, αναλύεται η εφαρμογή των ελατηρίων στα χωρία τύπου S . Αρχικά εξετάζεται η περίπτωση της δημιουργίας πλέγματος στο μεγαλύτερο εμβαδού τέτοιο χωρίο και, στη συνέχεια, η εφαρμογή της μεθόδου σε ένα άλλο παραμορφωμένο χωρίο του ίδιου τύπου. Το αποτέλεσμα κοντά στον χαρακτηριστικό λαιμό, που υπάρχει σε αυτά τα χωρία, φαίνεται στο σχήμα 4.16.



(α') Πλέγμα σε όλο το χωρίο.

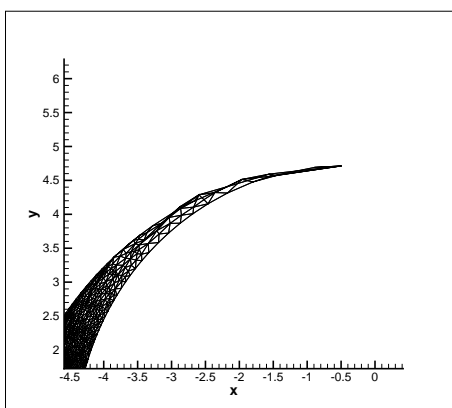


(β') Λεπτομέρεια πλέγματος.

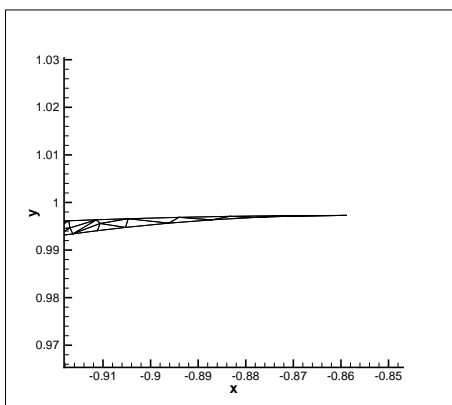
Σχήμα 4.14: Το φαινόμενο της αραίωσης του πλέγματος στις άκρες του χωρίου.

Τονίζεται, ότι η μεταβολή του περιγράμματος είναι πολύ μικρή. Η μέθοδος των ελατηρίων δεν μπορεί να ανταποκριθεί στην απομάκρυνση ή την προσέγγιση του δρομέα με το στάτη. Αυτό συμβαίνει γιατί ένας κόμβος του δρομέα συνδέεται μέσω ενός πεπερασμένου σταθερού αριθμού κόμβων με έναν κόμβο του στάτη. Όταν ο κόμβος του δρομέα απομακρυνθεί από τον κόμβο του στάτη, η αλυσίδα των κόμβων που τους συνδέει παραμορφώνεται έντονα καταστρέφοντας το πλέγμα. Συνεπώς, κατά την απομάκρυνση των δύο στερεών σωμάτων πρέπει να δημιουργούνται κόμβοι που να συμπληρώνουν το αρκετά αυξανόμενο κενό που προκαλείται μεταξύ των δύο σωμάτων. Η μέθοδος που ακολουθείται εκμεταλλεύεται το γεγονός ότι τα χωρία τύπου S είναι συμμετρικά. Έτσι, υπάρχει η δυνατότητα της δημιουργίας πλέγματος μόνο στο μισό χωρίο και, στη συνέχεια, η αντιγραφή του στο υπόλοιπο.

Τα χωρία τύπου S είναι συμμετρικά ως προς σημείο. Έστω ότι αυτό το σημείο έχει συντεταγμένες (x_C, y_C) . Το σημείο αυτό βρίσκεται στο μέσο κάθε ευθείας που συνδέει δύο αντίστοιχα σημεία του στάτη και του δρομέα. Στο προηγούμενο κεφάλαιο αποδείχθηκε η σχέση



(α') Δημιουργία πλέγματος από χωρίο μικρότερου εμβαδού.



(β') Δημιουργία πλέγματος από χωρίο μεγαλύτερου εμβαδού.

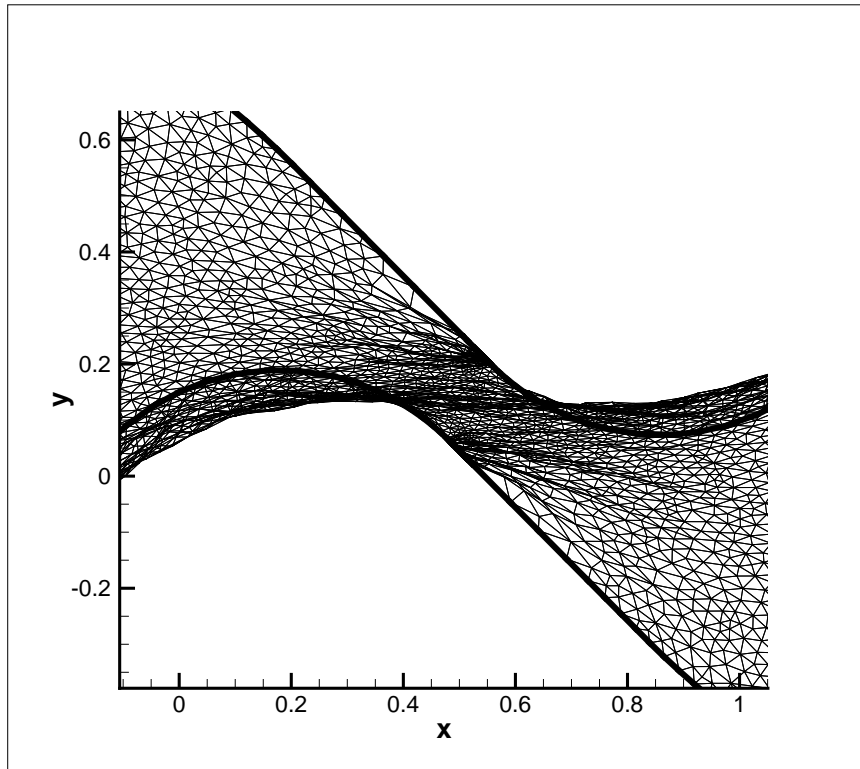
Σχήμα 4.15: Πλέγμα χαμηλής ποιότητας λόγω της ακινησίας των κόμβων στα άκρα του χωρίου.

$$\vec{x}_r = -\vec{x}_s + \vec{r}_0 \quad (4.27)$$

Το σημείο C έχει συντεταγμένες

$$\vec{x}_C = \frac{\vec{x}_r + \vec{x}_s}{2} \Leftrightarrow \vec{x}_C = \frac{1}{2}\vec{r}_0 = \frac{1}{2}r_0(\sin(\phi)\vec{i} - \cos(\phi)\vec{j}) \quad (4.28)$$

Η ευθεία, που θα επιλεγεί για τη διχοτόμηση του χωρίου, πρέπει να περνά από το σημείο C , να συνδέει αντιδιαμετρικά σημεία και να παραμένει εντός του χωρίου καθόλη την κίνηση του δρομέα. Μια τέτοια ευθεία είναι αυτή που περνά από το μέσο σημείο του ευθύγραμμου τμήματος της εσωτερικής περιοχής. Το σημείο αυτό, έστω D έχει συντεταγμένες

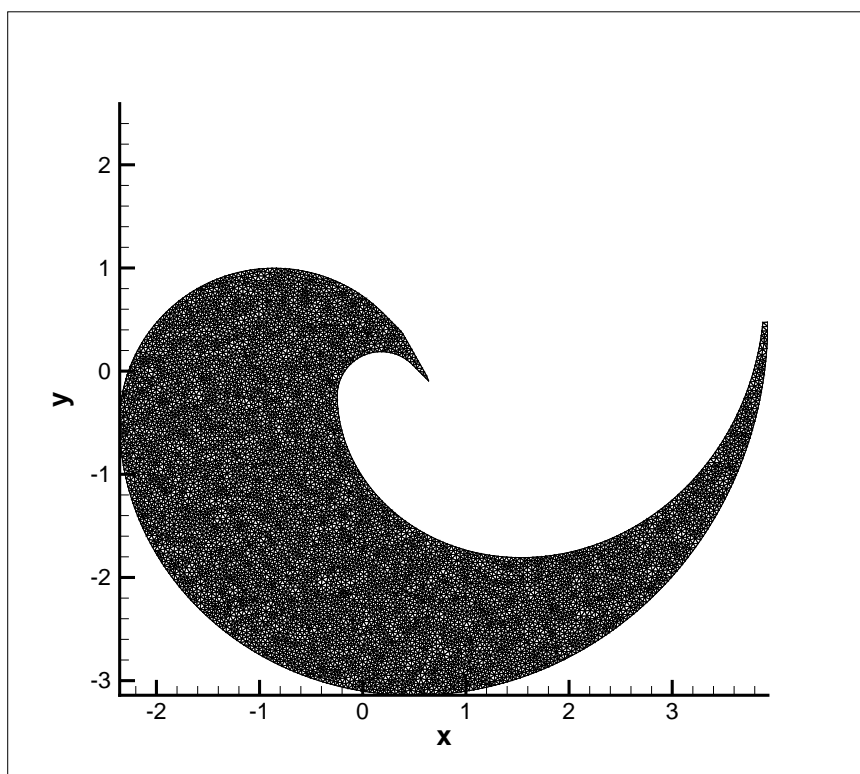


Σχήμα 4.16: Αποτυχία δημιουργίας πλέγματος σε ολόκληρο το χωρίο τύπου S . Λεπτομέρεια από το χωρίο.

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} \quad (4.29)$$

$$y_D = \frac{y_A + y_B}{2} \quad (4.30)$$

Όπως έχει προαναφερθεί οι κόμβοι που ανήκουν πάνω στην καμπύλη του στάτη δεν μπορούν να μετακινήθουν πέραν από αυτήν. Το ίδιο ισχύει και για τους κόμβους του δρομέα. Επομένως η ευθεία, που διέρχεται από τα σημεία \vec{x}_C \vec{x}_D πρέπει να συμπληρωθεί με επιπλέον κόμβους. Στο σχήμα 4.17 φαίνεται η δημιουργία πλέγματος στο διχοτομημένο τμήμα σε ένα χωρίο τύπου S . Σε αυτήν την περίπτωση, η μέθοδος των ελατηρίων δημιουργεί πλέγμα σε μικρές μετατοπίσεις του περιγράμματος, ενώ συνεχίζει να αποτυγχάνει σε πιο έντονες αλλαγές. Ένα πλέγμα προερχόμενο από μια τέτοια αλλαγή φαίνεται στο σχήμα 4.18 . Η λύση για τη δημιουργία ικανοποιητικού πλέγματος σε οποιαδήποτε μεταβολή του χωρίου είναι να επιτραπεί η ελεύθερη μετακίνηση των εξωτερικών κόμβων παντού στο περίγραμμα. Το γεγονός αυτό προκαλεί αυξομείωση του αριθμού των κόμβων στο στάτη και το δρομέα, κάτι το οποίο δεν είναι αποδεκτό αλλά παραμένει αναπόφευκτο.

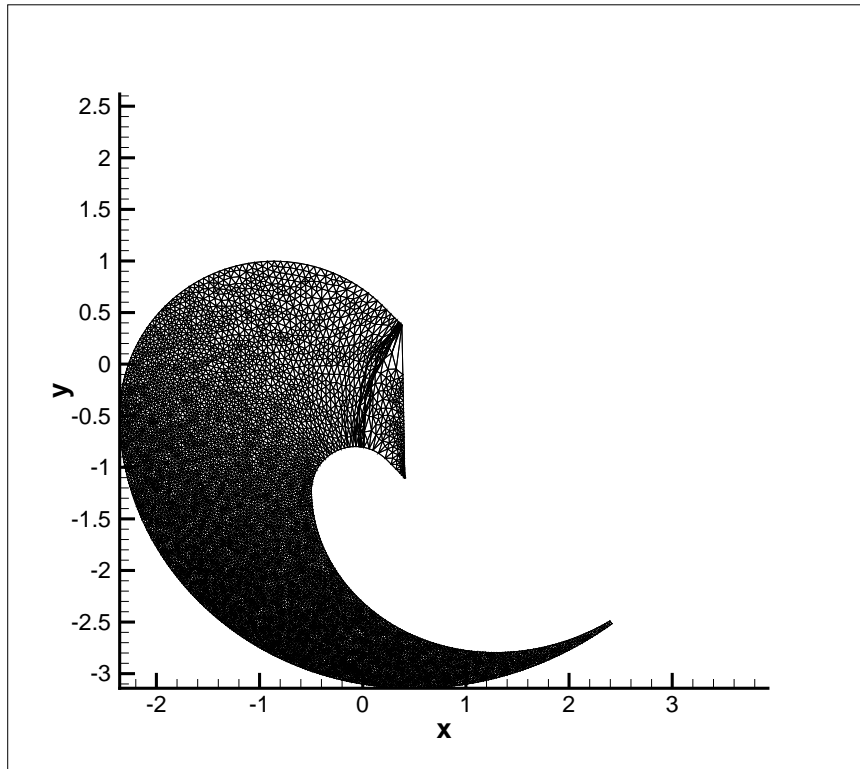


Σχήμα 4.17: Δημιουργία πλέγματος με χρήση οικείου λιγισμικού σε χωρίο τύπου S .

4.4 Αποτελέσματα της μεθόδου των ελατηρίων στο Scroll

Σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση είναι εφικτή η δημιουργία πλέγματος σε όλα τα χωρία, που σχηματίζονται κατά τη λειτουργία του Scroll αποφεύγοντας τη δημιουργία πλέγματος σε κάθε ένα από αυτά. Στην παρούσα ενότητα δημιουργείται πλέγμα στο πρώτο χωρίο, που σχηματίζεται κατά τη λειτουργία του Scroll ως συμπιεστή και ακολουθείται η παραμόρφωσή του καθώς αυτό μειώνεται σε εμβαδόν μέχρι το σχηματισμό του μικρότερου δυνατού χωρίου. Η πλεγματοποίηση γίνεται στη γεωμετρία μιας πραγματικής μηχανής, η οποία απεικονίζεται στην αρχή του κεφαλαίου 3. Η μηχανή αυτή έχει παραμέτρους, που φαίνονται στον πίνακα 4.1.

Ως αρχική θέση του δρομέα θεωρείται αυτή, στην οποία ισχύει $\theta = 0$. Σε αυτήν τη θέση δημιουργούνται πέντε χωρία, δύο ζεύγη συμμετρικών χωρίων και και ένα κεντρικό. Επιλέγεται το εξωτερικό χωρίο, το οποίο φαίνεται με χρώμα στο σχήμα 3.15. Σε αυτό δημιουργείται πλέγμα με τη βοήθεια του γενέτη πλέγματος της ΜΠΥΡ&Β. Για τις ανάγκες της επίλυσης της ροής το πλέγμα πρέπει να αποτελείται από μεγάλο αριθμό κόμβων. Σε τέτοια πλέγματα υπάρχει μεγάλη δυσκολία στην αναγνώριση της

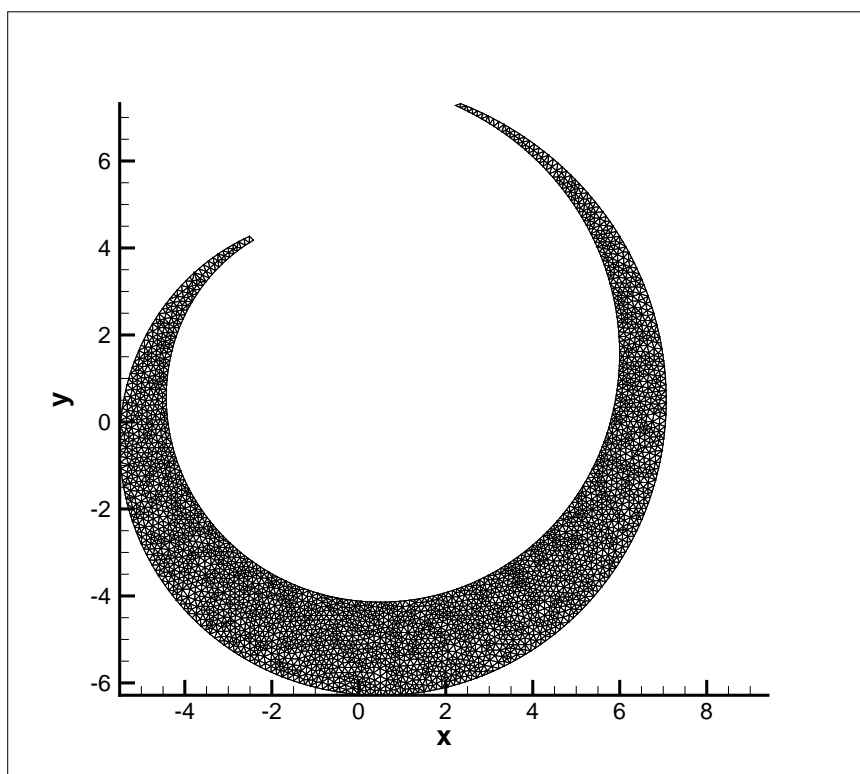


Σχήμα 4.18: Αποτυχία δημιουργίας πλέγματος μέσω της μεθόδου των ελατηρίων σε χωρίο τύπου S με αφετηρία το πλέγμα του σχήματος 4.17.

$r_b = 0.5$
$\phi_{i0} = 0$
$\phi_{is} = \frac{3\pi}{2}$
$\phi_{ie} = 5\pi$
$t = 0.5$
$L = 0.5$

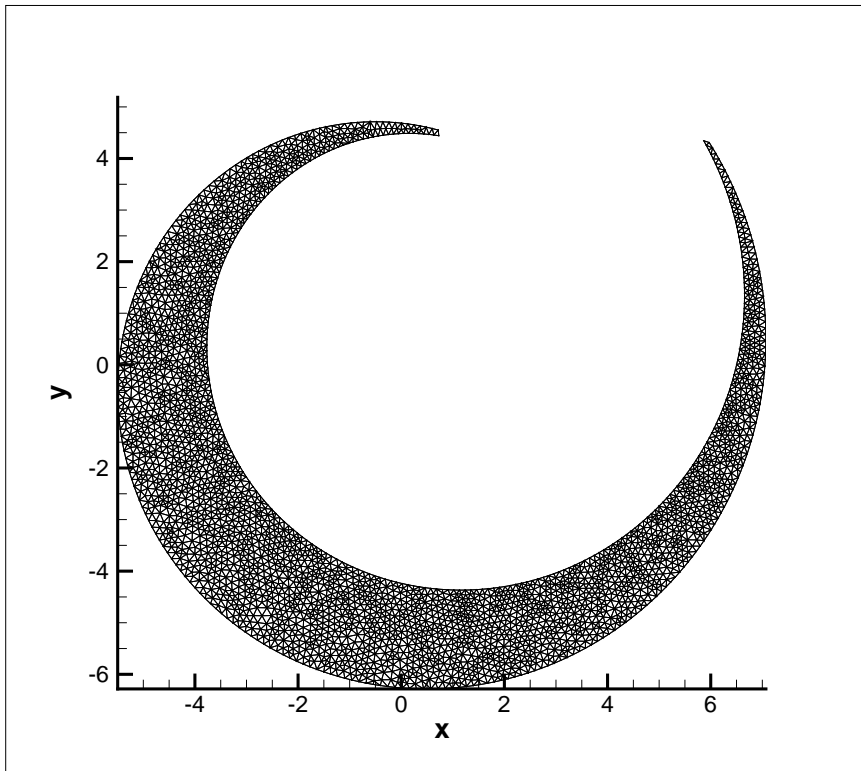
Πίνακας 4.1: Τιμές των γεωμετρικών παραμέτρων του Scroll, στα χωρία του οποίου πραγματοποιείται η πλεγματοποίηση.

ποιότητας του πλέγματος. Έτσι, για τις ανάγκες της παρουσίασης των αποτελεσμάτων επιλέχθηκε πλέγμα με λιγότερους κόμβους, το οποίο είναι ευκολότερα διακριτό. Στο σχήμα 4.19 φαίνεται το αποτέλεσμα της γένεσης πλέγματος με 3390 κόμβους. Όταν στο χωρίο αυτό υπάρχει ρευστό, απαιτούνται δύο κύκλοι του δρομέα που εξετάζεται, έτσι ώστε να διέλθει από όλα τα σχηματιζόμενα χωρία. Συνεπώς, η μέθοδος των ελατηρίων εφαρμόζεται κατά τη διάρκεια δύο περιόδων της μηχανής. Ο χρόνος αυτός διαμερίζεται σε 20 φάσεις. Η θεωρία των ελατηρίων εφαρμόζεται σε κάθε μια από αυτές εκτός φυσικά της πρώτης. Ακολουθούν σχήματα με τα πλέγματα των 9 πρώτων φάσεων. Όλα τα χωρία είναι τύπου C και προέρχονται από το πλέγμα του σχήματος 4.19.

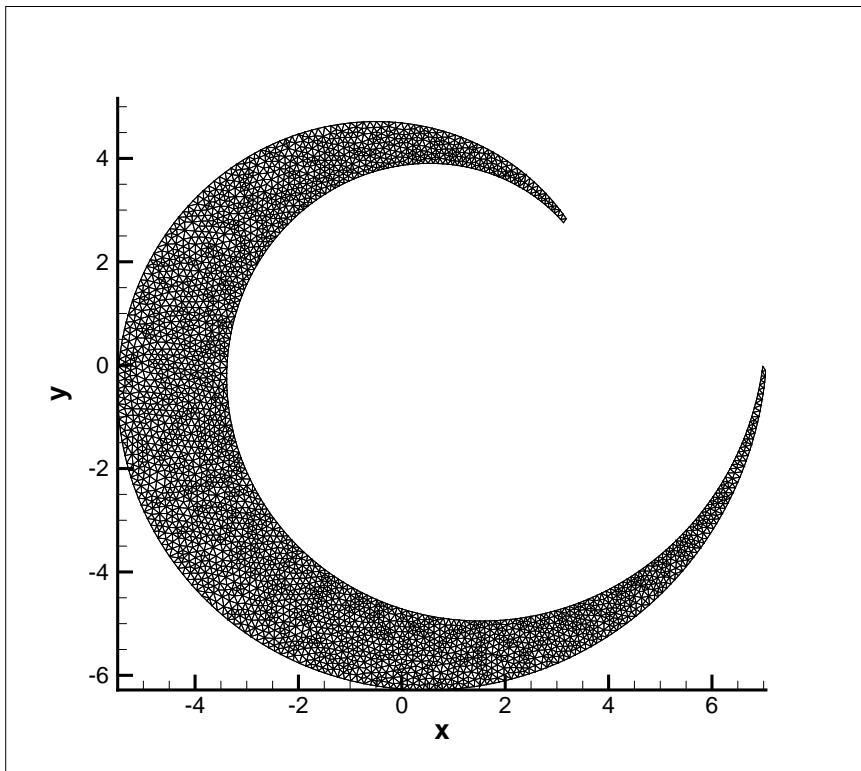


Σχήμα 4.19: Αρχικό πλέγμα δημιουργημένο από τον γενέτη πλέγματος της ΜΠΥΡ&Β.

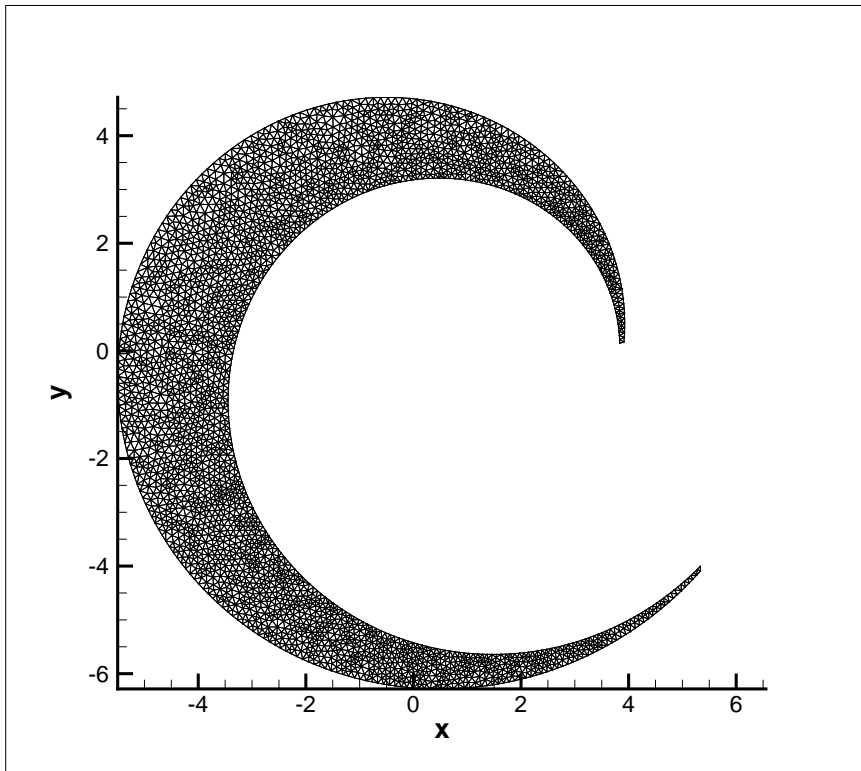
Στα παραπάνω πλέγματα φαίνεται καθαρά η τάση των κόμβων να μετακινούνται προς τα άκρα του χωρίου. Αυτό είναι επιθυμητό, καθώς η περιοχές αυτές έχουν ιδιόμορφη γεωμετρία. Συνεπώς, απαιτείται αυξημένη ακρίβεια κατά την επίλυση της ροής και επομένως πυκνό πλέγμα. Κάθε ένα χωρίο από αυτά έχει και ένα συμμετρικό αντιδιαμετρικά του κέντρου των ελίκων. Η κατασκευή πλέγματος σε αυτά είναι απλή καθώς απαιτείται μόνο ο συμμετρικός καθρεπτισμός ως προς σημείο των κόμβων των πλεγμάτων που παρουσιάστηκαν. Στη συνέχεια, από το πλέγμα του σχήματος 4.23 δημιουργείται το πρώτο πλέγμα τύπου *S*. Υπενθυμίζεται ότι σε αυτά τα πλέγματα εφαρμόζεται η θεωρία των ελατηρίων στο μισό τους τμήμα. Το πλέγμα του σχήματος 4.23 επιλέχθηκε ως το πλησιέστερο γεωμετρικά, κάνοντας εύκολη την προσαρμογή των κόμβων στο νέο σχήμα. Μόλις φτιαχτεί το 12^ο πλέγμα, χρησιμοποιείται ως πρότυπο για τη δημιουργία των υπόλοιπων χωρίων.



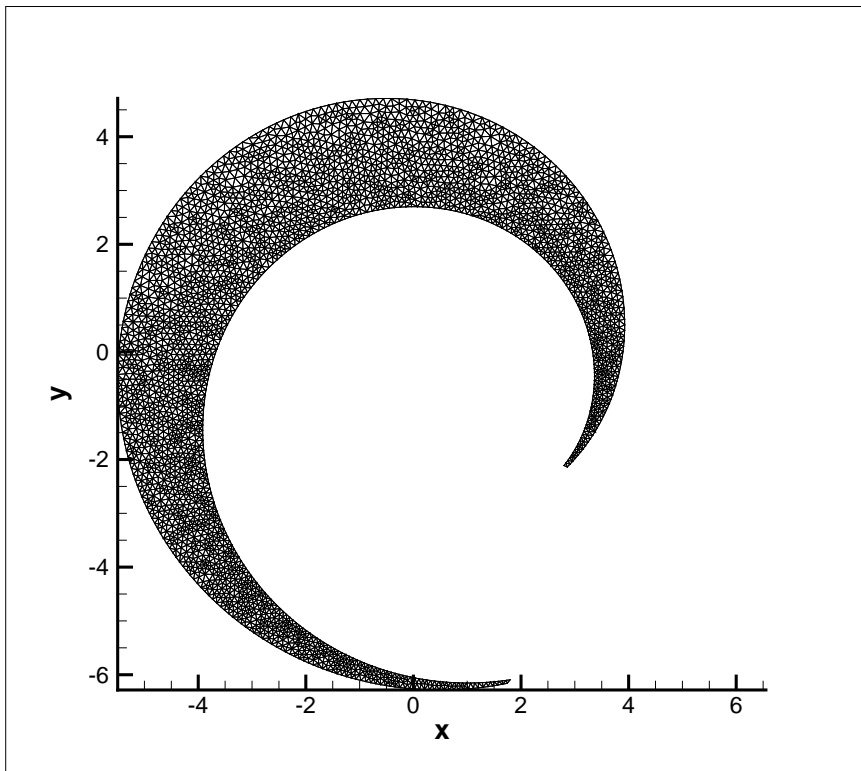
Σχήμα 4.20: Δεύτερο πλέγμα.



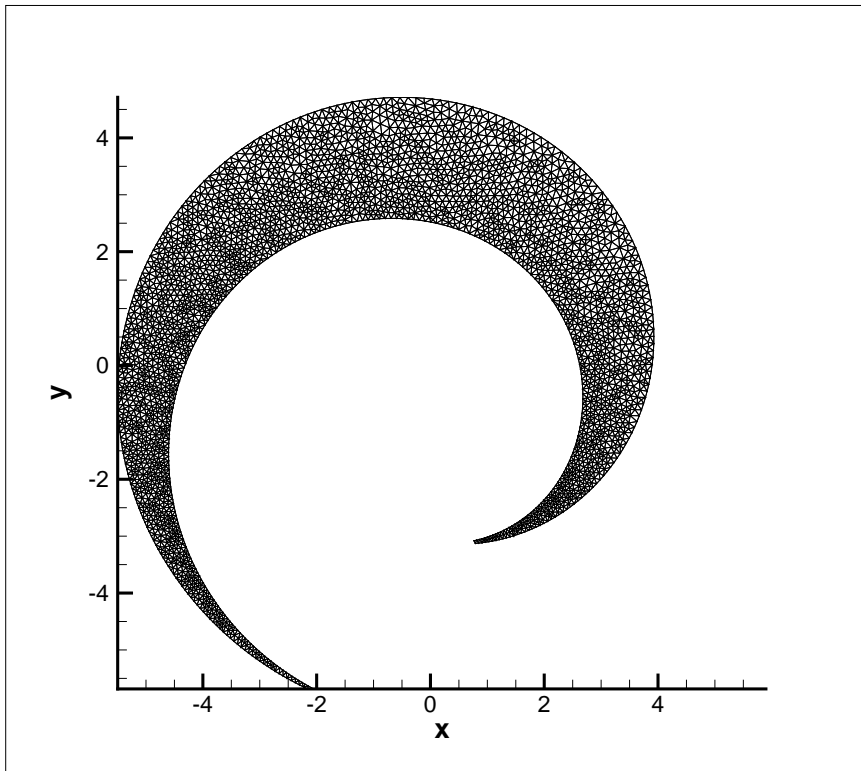
Σχήμα 4.21: Τρίτο πλέγμα.



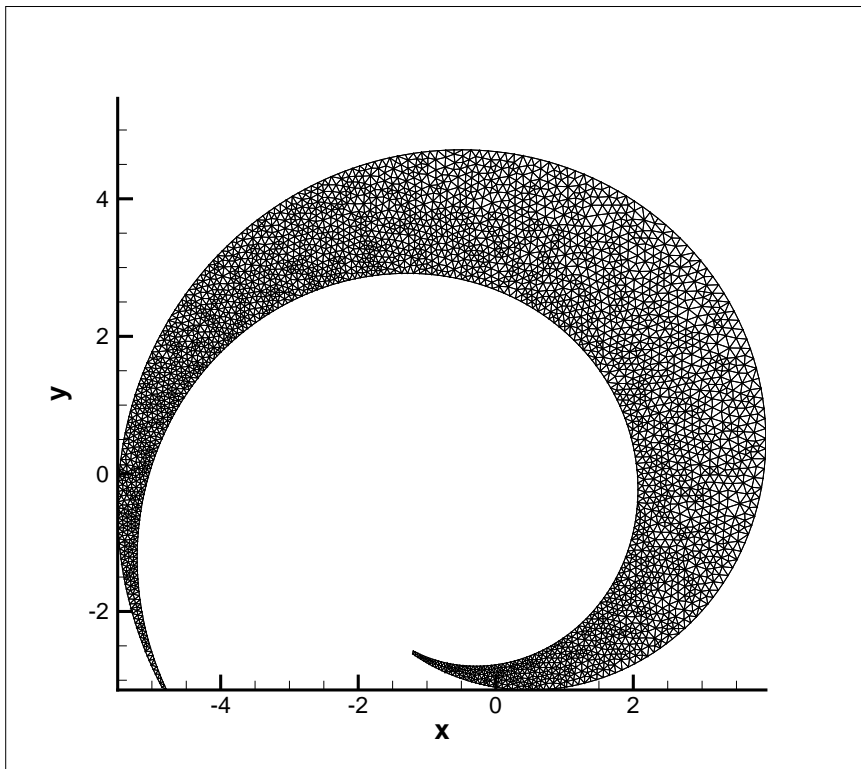
Σχήμα 4.22: Τέταρτο πλέγμα.



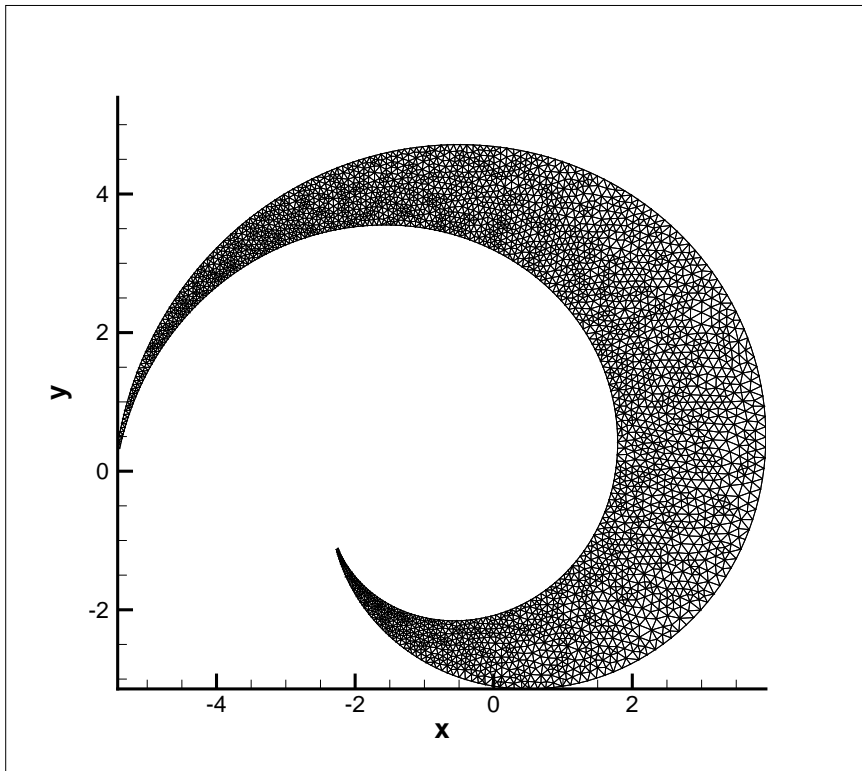
Σχήμα 4.23: Πέμπτο πλέγμα.



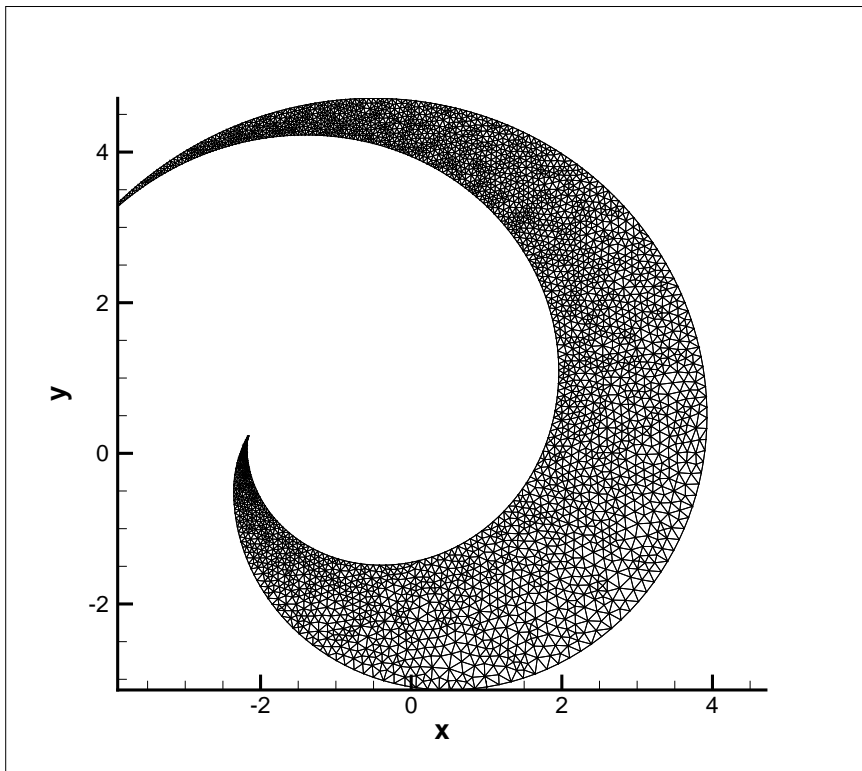
Σχήμα 4.24: Έκτο πλέγμα.



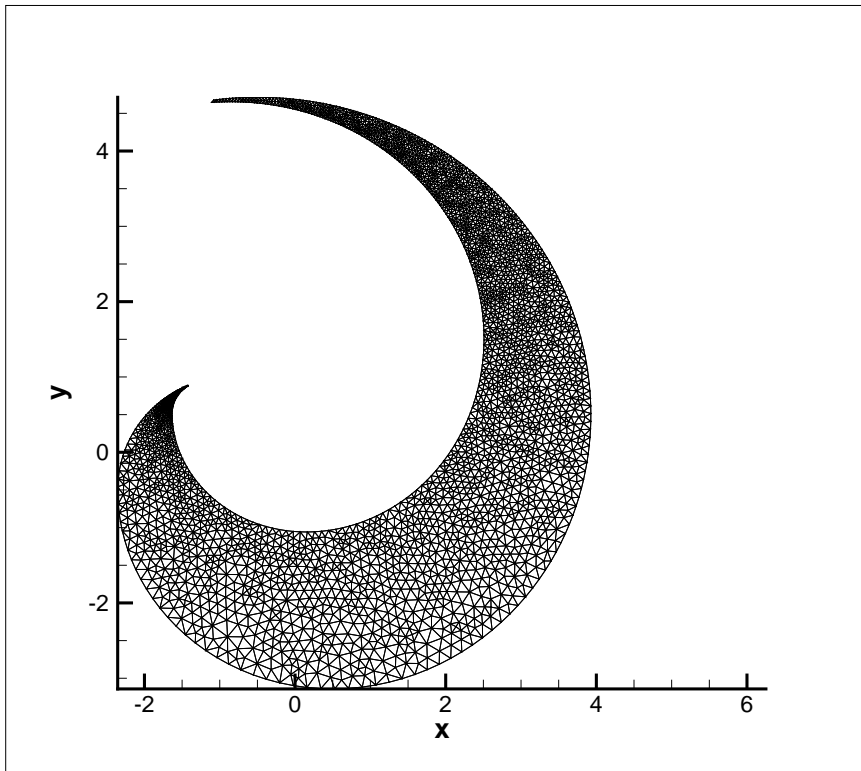
Σχήμα 4.25: Έβδομο πλέγμα.



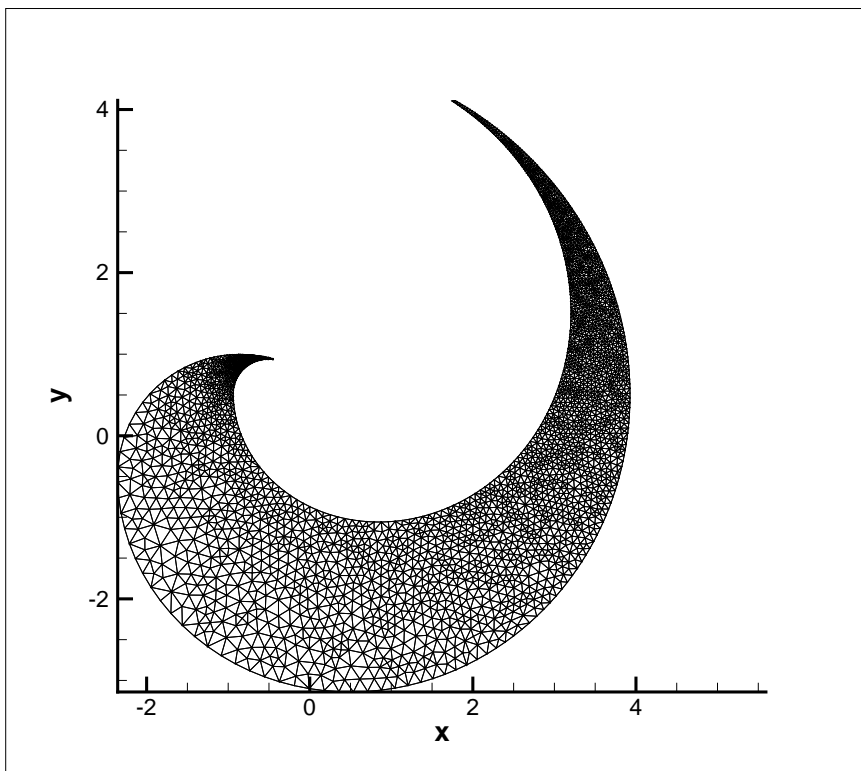
Σχήμα 4.26: Όγδοο πλέγμα.



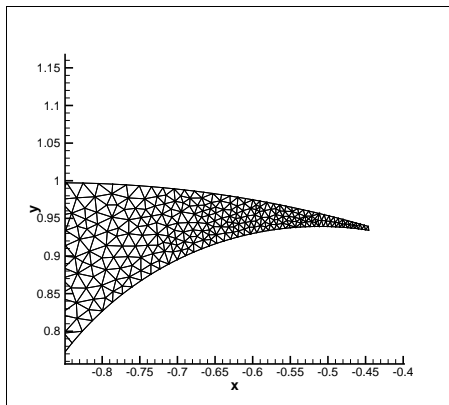
Σχήμα 4.27: Ένατο πλέγμα.



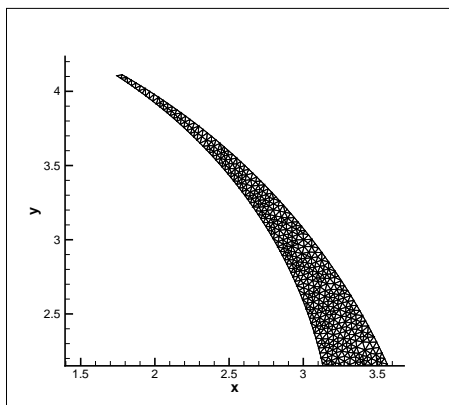
Σχήμα 4.28: Δέκατο πλέγμα.



Σχήμα 4.29: Ενδέκατο πλέγμα.

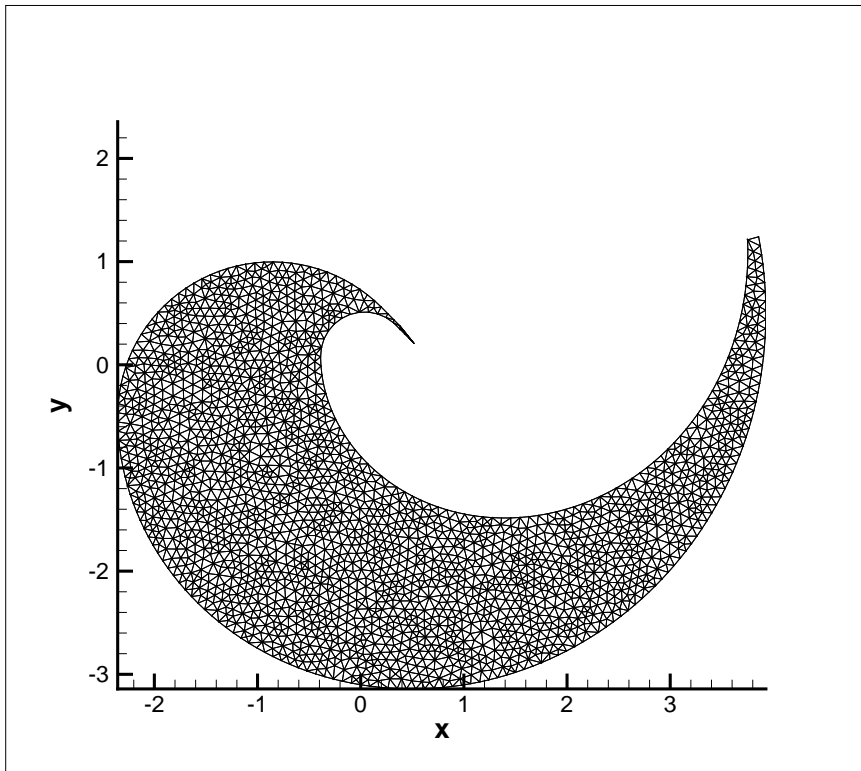


(α') Δεξιά άκρη.

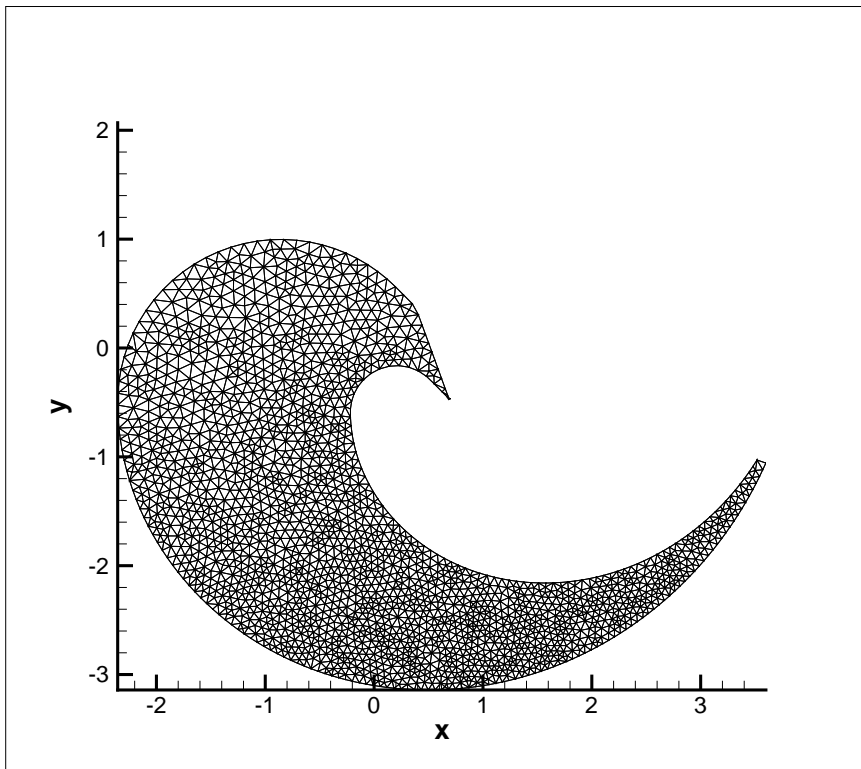


(β') Αριστερή άκρη.

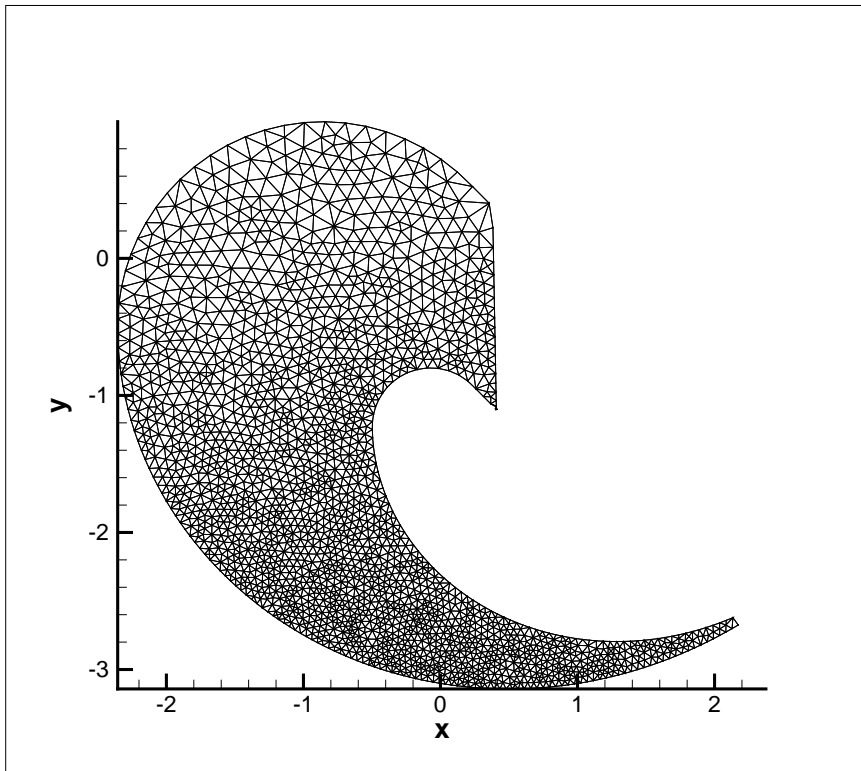
Σχήμα 4.30: Μεγένθυση των δύο ακραίων περιοχών του ενδέκατου πλέγματος.



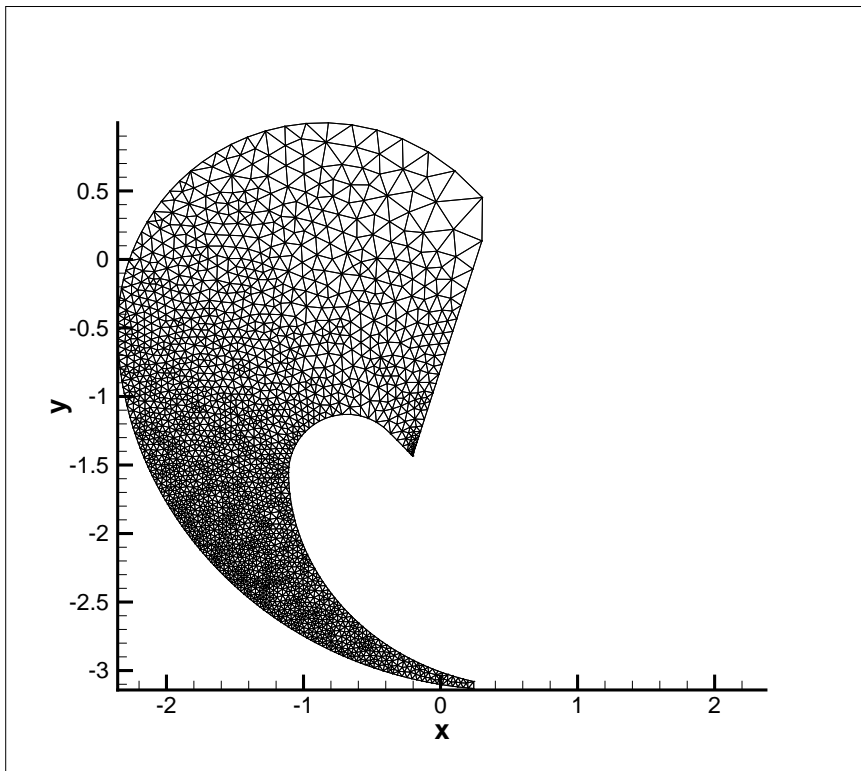
Σχήμα 4.31: Δωδέκατο πλέγμα.



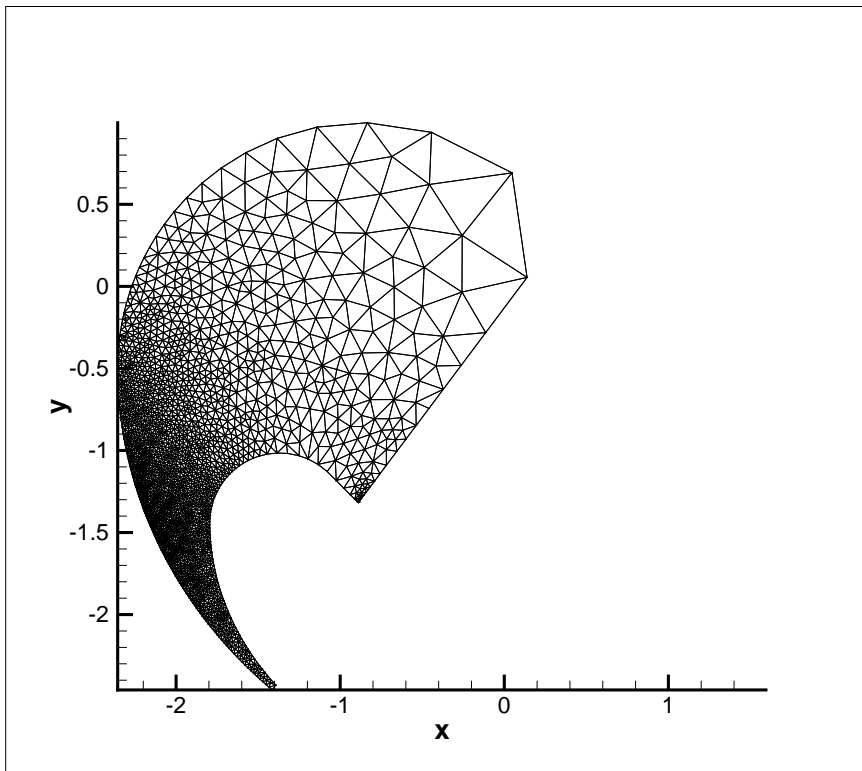
Σχήμα 4.32: Δέκατο τρίτο πλέγμα.



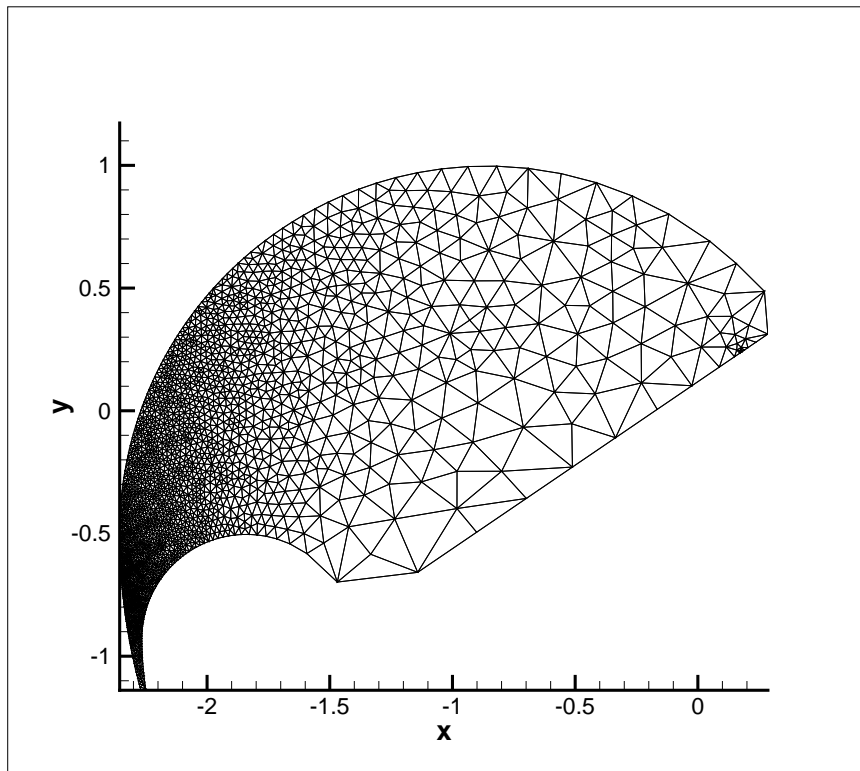
Σχήμα 4.33: Δέκατο τέταρτο πλέγμα.



Σχήμα 4.34: Δέκατο πέμπτο πλέγμα.

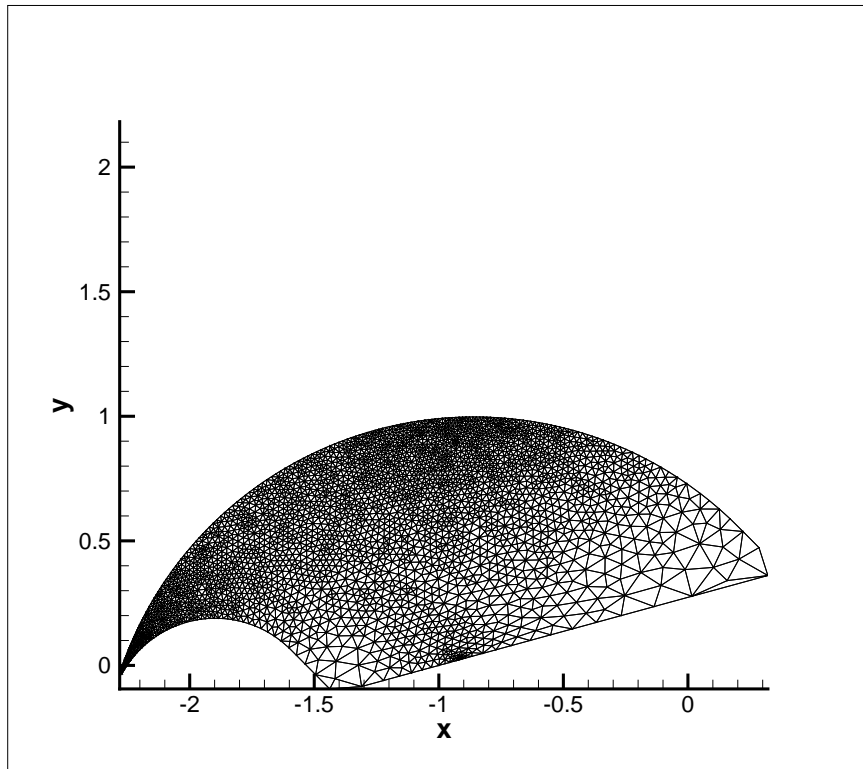


Σχήμα 4.35: Δέκατο έκτο πλέγμα.

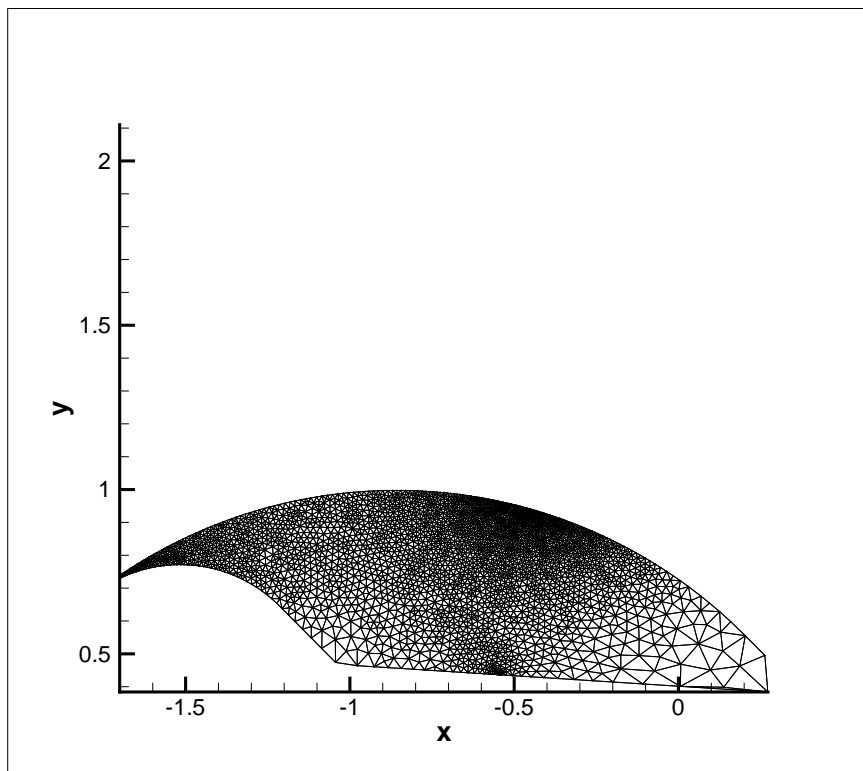


Σχήμα 4.36: Δέκατο έβδομο πλέγμα.

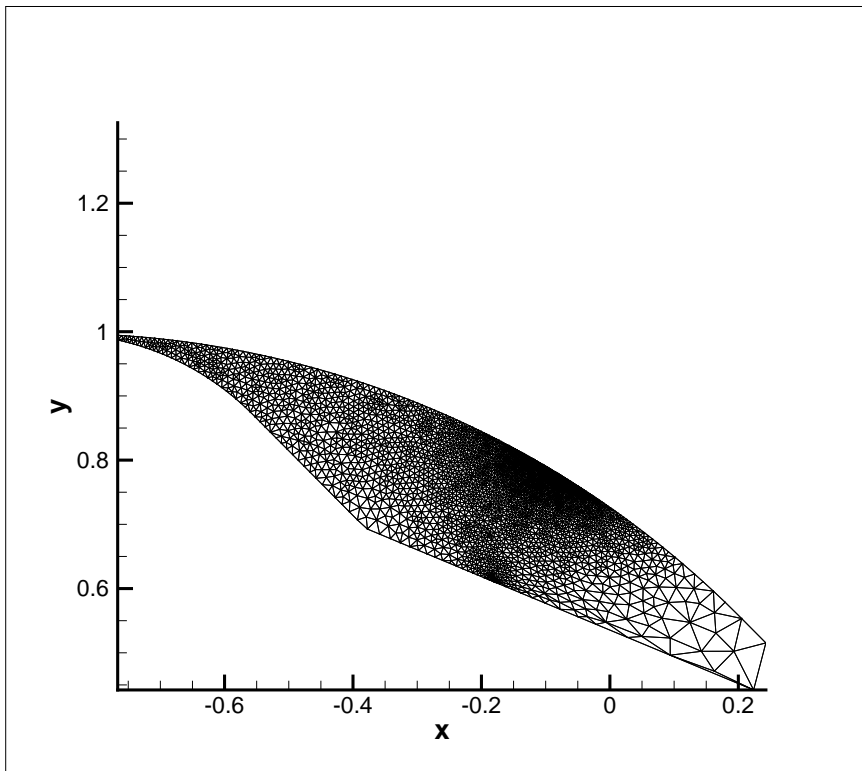
Στα τελευταία χωρία φαίνεται έντονα η ανομοιομορφία του πλέγματος. Αυτό οφείλεται στη ριζική αλλαγή της γεωμετρίας του χωρίου. Η κίνηση των κόμβων του περιγράμματος είναι τέτοια, ώστε να απομακρύνονται από το ευθύγραμμο τμήμα τομής του χωρίου καθώς στην περιοχή κοντά σε αυτό εξαναγκάζει τα τριγωνικά στοιχεία σε μεγάλη παραμόρφωση. Το γεγονός αυτό δεν μπορεί να αποφευχθεί μέσω της χρήσης της θεωρίας των ελατηρίων που παρουσιάστηκε. Η ποιότητα των πλεγμάτων μπορεί να αυξηθεί αρκετά σε περίπτωση όπου επιχειρήσει κανείς δεύτερη γένεση πλέγματος σε χωρίο τύπου S . Αυτό όμως σε επίπεδο υπολογιστικής ρευστοδυναμικής απαιτεί κάποιου είδους παρεμβολή των μεγεθών της ροής στο συγκεκριμένο χωρίο.



Σχήμα 4.37: Δέκατο όγδοο πλέγμα.



Σχήμα 4.38: Δέκατο ένατο πλέγμα.



Σχήμα 4.39: Εικοστό πλέγμα.

Κεφάλαιο 5

Παράδειγμα επίλυση της ροής σε πλέγμα δημιουργημένο με τη μέθοδο των ελατηρίων.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η επίλυση της ροής σε μια απλή περίπτωση, στην οποία έχει δημιουργηθεί πλέγμα με τη μέθοδο των ελατηρίων. Ως τέτοια επιλέγεται η κίνηση του τετραπλεύρου, το οποίο εξετάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η επιλογή έγινε για τους παρακάτω λόγους: Είναι αρκετά όμοιο με την περίπτωση του Scroll με την έννοια ότι και τα δύο φαινόμενα αφορούν κλειστά χωρία, τα οποία παραμορφώνονται στο χρόνο. Επίσης, και στα δυο έχει εφαρμοστεί η μέθοδος των ελατηρίων. Στην περίπτωση όμως του τετραπλεύρου η γεωμετρία του περιγράμματος είναι αρκετά απλούστερη από αυτήν των χωρίων του Scroll. Έτσι, η μέθοδος των ελατηρίων καθίσταται ικανή να δημιουργήσει υψηλής ποιότητας πλέγμα σε κάθε φάση της κίνησής του. Αυτό με τη σειρά του, επιτρέπει την ακριβή επίλυση του ρευστοδυναμικού πεδίου εντός του τετραπλεύρου. Όπως θα φανεί και στη συνέχεια, τα αποτελέσματα της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής αποδεικνύουν τη δυνατότητα της χρήσης παραμορφούμενων πλεγμάτων σε κλειστά χωρία με τη μέθοδο που εξετάζεται. Συνεπώς, δίνεται η δυνατότητα και στην περίπτωση του Scroll, χρήσης των πλεγμάτων που δημιουργήθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο για την ανάλυση της ροής σε αυτά.

5.1 Παρουσίαση του προβλήματος. Επίλυση της ροής.

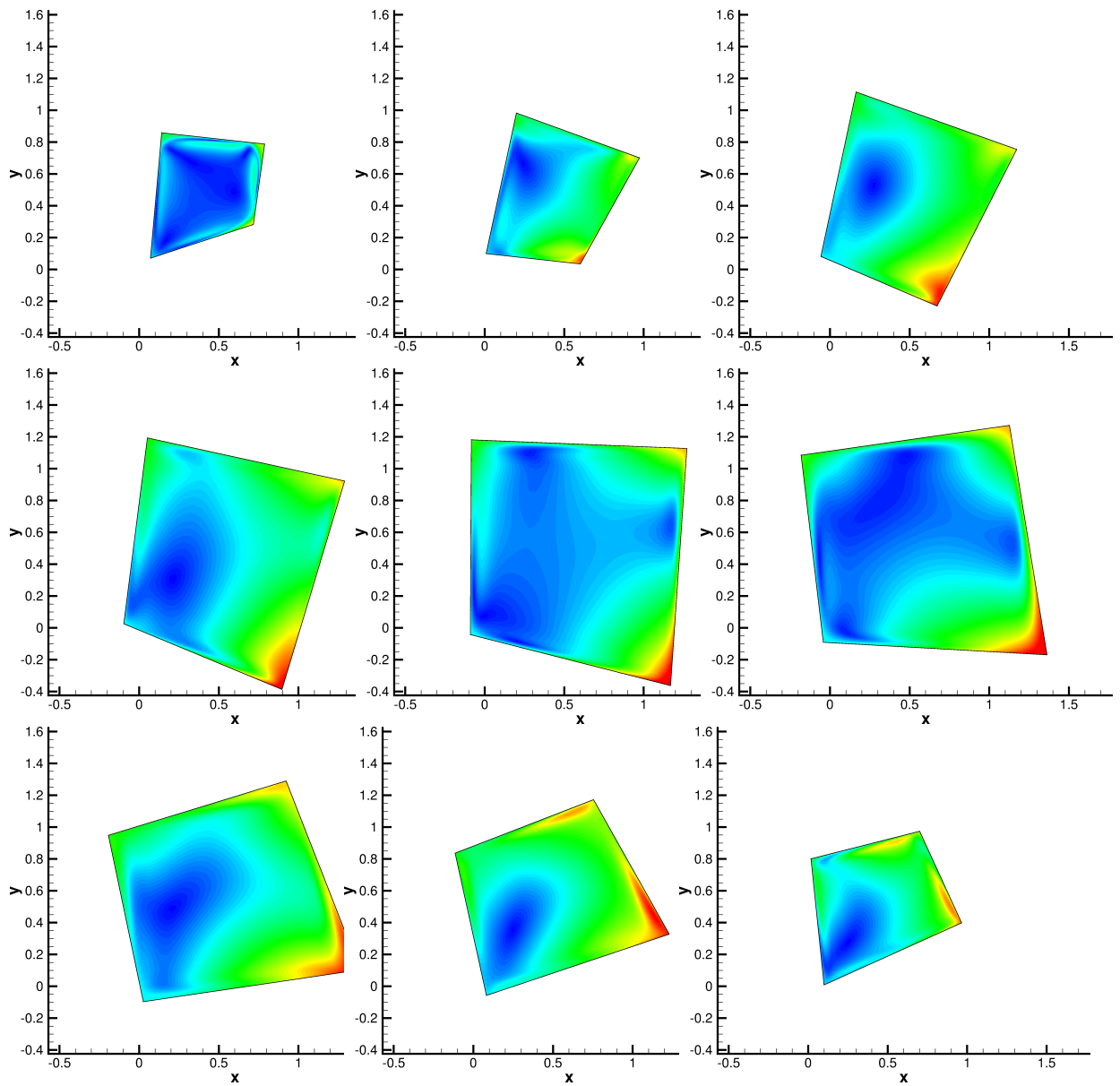
Έστω το τετράπλευρο που ορίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Υπενθυμίζεται ότι οι κορυφές του κινούνται στην περιφέρεια κύκλων διαφορετικής ακτίνας και φάσης αλλά με την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Η αρχική θέση των κορυφών αυτών επιλέγεται τέτοια, έτσι ώστε το τετράπλευρο να έχει το ελάχιστο δυνατό εμβαδόν (ή όγκο μοναδιαίου βάθους). Επίσης, η φορά της κίνησης των σημείων πάνω στους κύκλους είναι τέτοια ώστε αρχικά να αυξάνει τον όγκο του σχήματος μέχρι μια μέγιστη τιμή και, στη συνέχεια, να μειώνεται μέχρι την αρχική τιμή του. Ο λόγος του μέγιστου όγκου του τετραπλεύρου προς τον ελάχιστο επιλέχτηκε κοντά στο 4, όσο δηλαδή και ο αντίστοιχος λόγος του Scroll, που μελετήθηκε. Εντός του τετραπλεύρου τοποθετείται αέρας χωρίς δυνατότητα διαφυγής από αυτό. Αρχικά, το ρευστό τίθεται σε ηρεμία. Στη συνέχεια, το σχήμα αρχίζει να παραμορφώνεται αυξομειώνοντας συνεχώς τον όγκο του. Μετά από το πέρας ικανού αριθμού κύκλων (μεταβατική φάση) το φαινόμενο γίνεται περιοδικό.

Αρχικά δημιουργείται πλέγμα με 10200 κόμβους στο πρώτο χωρίο με τη βοήθεια οικείου λογισμικού. Στη συνέχεια χωρίζεται η περίοδος σε 40 φάσεις. Έτσι, για τη δημιουργία του σχήματος της επόμενης φάσης, απαιτείται η μετακίνηση των κορυφών του τετραπλεύρου κατά $\frac{\pi}{20}$ rad. Σε κάθε νέο σχήμα εφαρμόζεται η μέθοδος των ελατηρίων. Τα πλέγματα που δημιουργήθηκαν είναι ικανά για την επίλυση της συνεκτικής ροής, καθώς είναι δυνατός ο υπολογισμός του οριακού στρώματος, εξαιτίας του σχόπιμα πυκνού πλέγματος κοντά στον τοίχο.

Η επίλυση της ροής πραγματοποιείται με τον κώδικα PUMA, ο οποίος έχει αναπτυχθεί στην ΜΠΤΡ&Β [25, 26, 14, 24, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33]. Ο κώδικας αυτός επιλύει αριθμητικά τις εξισώσεις Favre ή Reynolds Averaged Navier-Stokes σε εσωτερικό ή εξωτερικό υπολογιστικό πεδίο, για διδιάστατες ή τριδιάστατες, συμπιεστές ή ασυμπιεστές ροές. Για την επίλυση της χρονικά μη-μόνιμης ροής χρησιμοποιείται η τεχνική του διπλού χρονικού βήματος (dual time-stepping), ενώ για μόνιμη ροή χρησιμοποιείται η τεχνική της χρονοπροέλασης (time-marching). Η διακριτοποίηση των εξισώσεων γίνεται με το σχήμα πεπερασμένων όγκων και την κεντροκομβική διατύπωση, χρησιμοποιώντας ανάντι σχήματα δεύτερης τάξης με χρήση περιοριστών για τους όρους μεταφοράς. Επιπλέον, πραγματοποιείται δυναμική προσαρμογή του πλέγματος στην υπό εξέλιξη λύση ή στις τεθείσες απαιτήσεις ακρίβειας της πρόλεξης (με έλεγχο του υπολοίπου των εξισώσεων ροής), με διάφορα a priori ή a posteriori κριτήρια. Ακόμα, ο κώδικας υποστηρίζει πλέγματα που παραμορφώνονται ακολουθώντας την κίνηση/παραμόρφωση του στερεού ορίου. Στον κώδικα υπάρχει η δυνατότητα παράλληλης επεξεργασίας με τη χρήση πρωτοκόλλων PVM και MPI σε συνδυασμό με τη δυνατότητα παράλληλης εκτέλεσης σε κάρτες γραφικών (GPUs).

Με τη χρήση του παραπάνω κώδικα επιλύθηκε η μη-μόνιμη συμπιεστή συνεκτική ροή

εντός του τετραπλεύρου για 350 κύκλους. Η σύγκλιση επιτεύχθηκε και η περιοδικότητα αποκαταστάθηκε. Όσον αφορά τα αποτελέσματα, εξετάστηκε ο λόγος πίεσης του τετραπλεύρου στη μόνιμη κατάσταση και διαπιστώθηκε ότι η τιμή του είναι κοντά στην τιμή του λόγου όγκων. Έτσι, εξασφαλίστηκε η ικανότητα του συγκεκριμένου λογισμικού να επιλύει ροές εντός κλειστών χώρων, που υφίστανται μεγάλη μεταβολή του όγκου τους. Επίσης, αποδείχθηκε η δυνατότητα της μεθόδου των ελατηρίων να δημιουργεί καλής ποιότητας πλέγματα, ικανά να χρησιμοποιηθούν για την ορθή πρόλεξη της ροής. Τέλος, φάνηκε η δυνατότητα της χρησιμοποίησης του λογισμικού PUMA, για την επίλυση της ροής εντός των χωρίων του Scroll με βάση τα πλέγματα, που κατασκευάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται σχήματα από διάφορα στιγμιότυπα του φαινομένου.



Σχήμα 5.1: Στιγμιότυπα της εξέλιξης της ροής εντός του κινούμενου τετραπλεύρου στη μόνιμη κατάσταση.

Κεφάλαιο 6

Ανακεφαλαίωση, συμπεράσματα και προτάσεις για περαιτέρω μελέτη

Η παρούσα διπλωματική εργασία είχε συνολικά τρεις στόχους. Πρώτον, παρουσιάστηκε η μέθοδος παραγωγής ενέργειας με τη βοήθεια εγκαταστάσεων που λειτουργούν με βάση τον οργανικό κύκλο Rankine. Ακολούθησε η θερμοδυναμική ανάλυση αυτών των κύκλων, η εφαρμογή τους σε μια πραγματική εγκατάσταση και η βελτιστοποίηση τους με βάση οικονομικά κριτήρια. Δεύτερον, δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή σε μια από τις συσκευές, που λαμβάνουν μέρος σε τέτοιες εγκαταστάσεις παραγωγής ενέργειας, το στρόβιλο. Το είδος του στρόβιλου, που μελετήθηκε, ονομάζεται Scroll. Η επιλογή του βασίστηκε στα πλεονεκτήματα που προσφέρει σε μικρές μονάδες ηλεκτροπαραγωγής. Συγκεκριμένα, αναλύθηκε η γεωμετρία του με σκοπό την παραμετροποίησή της. Τρίτον, έγινε όλη η απαραίτητη προετοιμασία της συγκεκριμένης μηχανής για τη μετέπειτα ρευστοδυναμική ανάλυση. Έτσι, διερευνήθηκε διεξοδικά η δυνατότητα δημιουργίας πλέγματος στους θύλακες του Scroll, στους οποίους κυκλοφορεί το ρευστό. Τέλος, στην προσπάθεια της πιστοποίησης της αξίας των πλεγμάτων που δημιουργήθηκαν, χρησιμοποιήθηκε η ίδια μέθοδος για τη δημιουργία πλέγματος σε μια απλούστερη περίπτωση, όπου επιτεύχθηκε η επίλυση της ροής με τη βοήθεια οικείου κώδικα υπολογιστικής ρευστοδυναμικής. Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται συνοπτικά τα συμπεράσματα, που προέκυψαν από όλη την προαναφερθείσα μελέτη.

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάστηκε η μέθοδος παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας βασισμένη στον οργανικό κύκλο Rankine. Συγκεκριμένα, αναλύθηκε η λειτουργία μιας πραγματικής εγκατάστασης, η οποία εργάζεται με ψυκτικό μέσο σε υπερκρίσιμη κατάσταση. Με αυτόν τον τρόπο φάνηκε ότι τέτοιες εγκαταστάσεις μπορούν να εκμεταλλευθούν

ενέργεια χαμηλής θερμοκρασίας, μέχρι και 80°C . Το γεγονός αυτό καθιστά την εφαρμογή τους δυνατή σε πολλές τεχνολογικές εφαρμογές. Επίσης, όταν οι μηχανές αυτές εργάζονται στην υπερκρίσιμη περιοχή, δηλαδή η πρόσδοση θερμότητας σε αυτές γίνεται σε ψυκτικό μέσο με πίεση μεγαλύτερη της κρίσιμης, η παραγωγή ενέργειας αλλά και η απόδοσή τους αυξάνουν σημαντικά. Όσον αφορά τη βελτιστοποίηση της απόδοσης της μηχανής διαπιστώθηκε, ότι με κατάλληλη επιλογή των σταθερών μεταβλητών της μηχανής καθιστάται δυνατή η μείωση των παραμέτρων βελτιστοποίησης σε μία, την υψηλή πίεση του κύκλου. Το γεγονός αυτό επιτρέπει όχι μόνο τη μείωση του χρόνου βελτιστοποίησης της μηχανής αλλά τον αυτόματο περιορισμό του προβλήματος σε βέλτιστες λύσεις, οι οποίες είναι φυσικά αλλά και οικονομικά αποδεκτές. Το μέτωπο Pareto, που προέκυψε από τη βελτιστοποίηση επαληθεύει το γεγονός ότι οι εγκαταστάσεις, που λειτουργούν με βάση τον υπερκρίσιμο κύκλο Rankine έχουν αυξημένη απόδοση σε σχέση με τις υποκρίσιμες. Το μέγεθος των εναλλακτών αποτελεί τη μεγαλύτερη πηγή κόστους της εγκατάστασης. Μετά τη βελτιστοποίηση που εφαρμόστηκε, διαπιστώθηκε ότι είναι δυνατή η μείωση της επιφάνειας των εναλλακτών διατηρώντας υψηλή την απόδοση της εγκατάστασης. Το γεγονός αυτό αποτελεί μεγάλο πλεονέκτημα αυτής της τεχνολογικής εφαρμογής, καθώς με τη χρήση της δίνεται η δυνατότητα της οικονομικά συμφέρουσας εκμετάλλευσης πηγών θερμότητας χαμηλής ενεργειακής στάθμης, αυξάνοντας την πιθανότητα εμπορευματοποίησής της.

Σημαντικό ρόλο στη λειτουργία των εγκαταστάσεων ORC κατέχει ο στρόβιλος, ο οποίος είναι υπεύθυνος για την παραγωγή ηλεκτρικού ρεύματος μέσω ηλεκτρογεννήτριας. Ένα είδος στρόβιλου που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε αυτές τις εφαρμογές είναι η μηχανή Scroll. Προκειμένου να ξεκινήσει η ρευστοδυναμική ανάλυση μιας τέτοιας μηχανής, παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 3 η παραμετροποίηση της γεωμετρίας του. Εκεί, καταβλήθηκε προσπάθεια της εξαρχής μαθηματικής θεμελίωσης, μέσω διαδοχικών γεωμετρικών κυρίως αποδείξεων, όλων των χρήσιμων σχέσεων, που αποτυπώνουν τις γεωμετρικές ιδιότητες της μηχανής. Ξεκινώντας από βασικές γνώσεις διαφορικής γεωμετρίας, αποτυπώθηκαν οι εξισώσεις των καμπυλών, που απαρτίζουν το στάτη και το δρομέα. Επίσης, αποδείχθηκε ότι η γεωμετρία του Scroll, που εξετάστηκε, παραμετροποιείται με 6 μεταβλητές. Με βάση αυτές τις μεταβλητές παρουσιάστηκε όλη η διαδικασία του ακριβούς καθορισμού της γεωμετρίας των δυο ελίκων. Σημαντικό μέρος το κεφαλαίου αυτού αποτελεί η επινόηση και απόδειξη μιας μεθόδου για την εύκολη εύρεση των σημείων επαφής του δρομέα με το στάτη και του ακριβούς καθορισμού του περιγράμματος των κλειστών χωρίων, που δημιουργούνται κατά τη σχετική κίνηση του ενός ως προς τον άλλο.

Στο κεφάλαιο 4 αναλύθηκε διεξοδικά η δυνατότητα δημιουργίας πλέγματος στα χωρία του Scroll, ικανά για την επίλυση της μη συνεκτικής ροής στο εσωτερικό τους. Αρχικά, διαπιστώθηκε ότι εάν απομακρυνθούν οι ακραίες περιοχές των χωρίων, τότε δύναται να σχηματιστεί μη δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων σε όλα τα χωρία, ανεξάρτητα από την ιδιαίτερη μορφή του καθενός. Επιπλέον, στο κεφάλαιο αυτό φάνηκε η ανάγκη χρήσης κάποιας μεθόδου προσαρμογής του πλέγματος καθώς το περίγραμμα του χωρίου παραμορφώνεται. Ως κατάλληλη επιλέχθηκε η μέθοδος των στρεπτικών ελατηρίων., όπου παρουσιάστηκε η δυνατότητά της να ανταποκρίνεται στις έντονες πα-

ραμορφώσεις που επιβάλλονται στα χωρία κατά τη λειτουργία του Scroll. Από τη χρήση της μεθόδου σε διάφορα χωρία φάνηκε η ανάγκη της ελεύθερης κίνησης των κόμβων του περιγράμματος των χωρίων πάνω στις καμπύλες του δρομέα και του στάτη. Η χρήση της τεχνικής αυτής οδήγησε στο συμπέρασμα ότι είναι ικανή να παράξει υψηλής ποιότητας πλέγμα στα χωρία τύπου *C*. Όσον αφορά τα χωρία τύπου *S* φανερώθηκε η αδυναμία της μεθόδου να δημιουργήσει πλέγμα. Παρόλ' αυτά, εφαρμόστηκε η τεχνική της δημιουργίας πλέγματος ικανοποιητικής ποιότητας μόνο στο μισό συμμετρικό χωρίο. Στο υπόλοιπο τμήμα του χωρίου μπορεί εύκολα να προκύψει πλέγμα λόγω συμμετρίας. Από το κεφάλαιο αυτό προκύπτει το συμπέρασμα ότι είναι δυνατή η γένεση πλέγματος μόνο στο αρχικά σχηματιζόμενο χωρίο. Στη συνέχεια, η μέθοδος των ελατηρίων σε συνδυασμό με την κίνηση των κόμβων του περιγράμματος είναι ικανή να παράγει πλέγμα σε όλα τα υπόλοιπα χωρία σε όλη τους την έκταση ή στο ένα τους τμήμα.

Η διπλωματική εργασία καταλήγει στο κεφάλαιο 5, όπου εξετάστηκε η δυνατότητα επίλυσης της ροής εντός παραμορφούμενου κλειστού χωρίου με τη χρήση οικείου κώδικα. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε μη-δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων, το οποίο μπορεί να παραμορφωθεί με τη μέθοδο των ελατηρίων. Αρχικά, διαπιστώθηκε για άλλη μια φορά η δυνατότητα παραμόρφωσης του πλέγματος με τη χρήση της μεθόδου των ελατηρίων με αποτέλεσμα τη δημιουργία καλής ποιότητας πλέγματος. Επίσης, φάνηκε η δυνατότητα του οικείου επιλύτη της ροής (PUMA) να εξάγει σωστά αποτελέσματα στις ιδιαίτερες συνθήκες που επικρατούν εντός κλειστών παραμορφούμενων χωρίων. Το κύριο συμπέρασμα του κεφαλαίου είναι το γεγονός ότι όπως ακριβώς έγινε η επίλυση της ροής σε αυτή την απλή περίπτωση, έτσι τα ίδια εργαλεία (οικείο λογισμικό γένεσης πλέγματος, λογισμικό ικανό να παραμορφώνει το πλέγμα σύμφωνα με τη μέθοδο του κεφαλαίου 4, οικείο λογισμικό πρόλεξης της ροής) είναι ικανά να οδηγήσουν στην υπολογιστική επίλυση της ροής εντός των χωρίων του Scroll.

Η παρούσα διπλωματική εργασία ανοίγει το δρόμο για περαιτέρω έρευνα, τόσο στους υπερκρίσιμους κύκλους ORC όσο και στην ανάλυση του Scroll. Όσον αφορά τους οργανικούς κύκλους Rankine μπορεί να μελετηθεί η επίδραση του είδους του ψυκτικού υγρού στην απόδοσή τους και στην παραγωγή ενέργειας. Επίσης, η εγκατάσταση, που μελετήθηκε, είναι απλή καθώς αποτελείται από το συμπυκνωτή, τον ατμοποιητή, το συμπιεστή και το στρόβιλο. Με βάση τη θερμοδυναμική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε, μπορεί να εξεταστεί η συμπεριφορά εγκαταστάσεων με ενδιάμεσους εναλλάχτες ή περισσότερους του ενός ατμοποιητές. Πολλές επεκτάσεις επίσης μπορούν να εξεταστούν στο μαθηματικό μοντέλο της γεωμετρίας του Scroll. Η σημαντικότερη προσθήκη είναι η μελέτη των διακένων, που υπάρχουν στα σημεία επαφής του δρομέα με το στάτη. Τα διάκενα αυτά έχουν αμεληθεί θεωρώντας πλήρη επαφή των δυο ελίκων. Η προσθήκη αυτή αλλάζει εντελώς την έννοια των κλειστών χωρίων, έτσι όπως παρουσιάστηκε, αλλά και μελετήθηκε από τη σκοπιά της γένεσης πλέγματος. Μια άλλη σημαντική επέκταση του γεωμετρικού μοντέλου είναι η εισαγωγή της έννοιας του ύψους και της δημιουργίας τριδιάστατων ελίκων. Σε αυτήν την περίπτωση η μέθοδος των ελατηρίων αλλάζει καθώς πρέπει να επεκταθεί στις τρεις διαστάσεις. Επίσης, σε επόμενη μελέτη μπορεί να διερευνηθεί η δυνατότητα κατασκευής των ελίκων του Scroll από άλλες καμπύλες εκτός της εξειλιγμένης, όπου το πάχος του δρομέα και του στάτη μπορεί

να μεταβάλλεται. Σχετικά με την παραμόρφωση των πλεγμάτων είναι ενδιαφέρουσα η εφαρμογή διαφορετικών μεθόδων εκτός από αυτή των ελατηρίων που εξετάστηκε. Τέτοιες μέθοδοι μπορεί να είναι η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης Laplace, από την οποία προκύπτει η νέα θέση των κόμβων του παραμορφούμενου πλέγματος. Επίσης, η θεωρία των ελατηρίων επιδέχεται αρκετές βελτιώσεις ως προς την αύξηση της ποιότητας των πλεγμάτων, ιδιαίτερα των μικρότερων χωρίων. Επιπροσθέτως στην εργασία αυτή δόθηκαν οι βάσεις για την μετέπειτα μελέτη της ρευστοδυναμικής συμπεριφοράς της μηχανής. Στο τελευταίο κεφάλαιο διαπιστώθηκε η ικανότητα των υπολογιστικών εργαλείων να αντιμετωπίσουν αυτό το πρόβλημα. Έτσι, με την εργασία αυτή, είναι πλέον δυνατή η έρευνα της ρευστοδυναμικής συμπεριφοράς του Scroll, ενδεχομένως σε μια επόμενη διπλωματική εργασία.

Βιβλιογραφία

- [1] *comparison of scroll and piston expander for small scale ORC applications*. <http://www.orc2011.nl/>.
- [2] Gravesen J. and Henriksen C. and Howell P.: *Danfoss: Scroll Optimization*, σελίδες 3–35. Department of Mathematics, DTU, 1998.
- [3] Clemente S. and Micheli D. and Reini M. and Taccani R.: *Energy efficiency analysis of Organic Rankine Cycles with scroll expanders for cogenerative applications*. Applied Energy, 97(0):792 – 801, 2012.
- [4] Κουρεμένος, Δ.: *Θερμοδυναμική 1*. Συμewών, 1991.
- [5] Κοντολέοντος, Ε.: *Συμβολή στο σχεδιασμό Θερμο-ρυστοδυναμικών δυναμικών διατάξεων με χρήση Εξελικτικών και Αιτιοκρατικών μεθόδων Βελτιστοποίησης*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2012.
- [6] Κακάτσιος, Ξ.: *Αρχές Μεταφοράς Θερμότητας και Μάζης*. Συμewών, 2006.
- [7] *Shell and Tube Heat Exchangers: Calculations*. <http://www.cbu.edu/~rprice/lectures/stcalcs.html>.
- [8] *Shell-and-Tube Heat Exchangers*. <http://www.cheresources.com>.
- [9] Pioro I. and Hussam Khartabil F. and Duffey R.: *Heat transfer to supercritical fluids flowing in channels—empirical correlations (survey)*. Nuclear Engineering and Design, 230(1–3):69 – 91, 2004.
- [10] Καμπόλης, Ι.: *Πολυεπίπεδοι, πολυεπεξεργαστικοί αλγόριθμοι αεροδυναμικής βελτιστοποίησης στις στροβιλομηχανές*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2009.
- [11] Γιώτης, Α.: *Χρήση εξελικτικών τεχνικών, υπολογιστικής ευφυίας και μεθόδων υπολογιστικής ρυστομηχανικής στη βελτιστοποίηση-αντίστροφη σχεδίαση περυγώσεων στροβιλομηχανών, μέσω παράλληλης επεξεργασίας*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2007.

- [12] Κυριάκου, Σ.: *Μέθοδοι Σχεδιασμού-Βελτιστοποίησης στις Στροβιλομηχανές βασισμένες στους Εξελικτικούς Αλγορίθμους*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2013.
- [13] Καρακάσης, Μ.: *Ιεραρχικοί, κατανεμημένοι εξελικτικοί αλγόριθμοι και υπολογιστική ευφυΐα στη σχεδίαση βέλτιστων αεροδυναμικών μορφών σε περιβάλλον πολυεπεξεργασίας*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2006.
- [14] Ασούτη, Β.: *Μέθοδοι αεροδυναμικής ανάλυσης και σχεδιασμού για ροές υψηλών και χαμηλών ταχυτήτων, σε πολυεπεξεργασιακό περιβάλλον*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2009.
- [15] Bell, I.: *Theoretical and experimental analysis of liquid flooded compression in scroll compressors*. PhD thesis, Purdue University, West Lafayette, Indiana, 2011.
- [16] Harada K.: *Development of a Small Scale Scroll Expander*. Master's thesis, Oregon State University, 2011.
- [17] Lee Y. and Wu W.: *On the profile design of a scroll compressor*. International Journal of Refrigeration, 18(5):308 – 317, 1995.
- [18] Bell I. and Lemort V. and Groll E. and Braun J. and King G. and Horton W.: *Liquid-flooded compression and expansion in scroll machines – Part I: Model development*. International Journal of Refrigeration, 35(7):1878 – 1889, 2012.
- [19] Χαΐνης, Ι.: *Μαθήματα Μαθηματικής Αναλύσεως, Τόμος Α*. Ε.Μ.Π, 1990.
- [20] Χαΐνης, Ι.: *Μαθήματα Μαθηματικής Αναλύσεως, Τόμος Β*. Ε.Μ.Π, 1998.
- [21] Tiow Ooi K. and Zhu J.: *Convective heat transfer in a scroll compressor chamber: a 2-D simulation*. International Journal of Thermal Sciences, 43(7):677 – 688, 2004.
- [22] Λιακόπουλος, Π.: *Γένεση μη-δομημένων πλεγμάτων και διαχείρισή τους σε μεθόδους ανάλυσης και βελτιστοποίησης συνιστωσών στροβιλομηχανών και εφαρμογές, αξιοποιώντας τεχνολογίες πλέγματος (Grid computing)*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2008.
- [23] Ντανόνας, Γ.: *Επίλυση διδιάστατης ροής σε μη-δομημένα πλέγματα με τη κεντροκυβελική διατύπωση σε επεξεργαστές καρτών γραφικών*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2012.
- [24] Τρομπούκης, Ξ.: *Αριθμητική επίλυση προβλημάτων αεροδυναμικής-αεροελαστικότητας σε επεξεργαστές καρτών γραφικών*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2012.

- [25] Κομπογιάννης, Δ.: *Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes με χρήση μη-δομημένων πλεγμάτων σε περιβάλλον παράλληλης επεξεργασίας*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1998.
- [26] Ζερβογιάννης, Θ.: [25] *Μέθοδοι βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική και τις στροβιλομηχανές με χρήση συζυγών τεχνικών, υβριδικών πλεγμάτων και του ακριβούς εσσιανού μητρώου*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2011.
- [27] Λαμπρόπουλος, Ν.: *Τεχνικές πολυπλέγματος σε μη-δομημένα πλέγματα για την αριθμητική επίλυση πεδίων ροής στις στροβιλομηχανές, σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2007.
- [28] Πάππου, Θ.: *Ανάπτυξη αριθμητικής μεθοδολογίας τεχνητής συμπίεστότητας για τον υπολογισμό μη μόνιμων ροών σε κινούμενα όρια*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Αεροδυναμικής, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1998.
- [29] G6ddecke, D., Buijssen, S., Wobker, H., and Turek, S.: *GPU acceleration of an unmodified parallel finite element Navier-Stokes solver*. In High Performance Computing Simulation Conference, San Diego, California, June 21–24 2009.
- [30] Cohen, J. and Molemaker, M.: *A fast double precision CFD code using CUDA*. In Parallel Computational Fluid Dynamics Conference, California, May 18–22 2009.
- [31] Asouti, V., Trompoukis, X., Kampolis, I., and Giannakoglou, K.: *Unsteady CFD computations using vertex-centered finite volumes for unstructured grids on Graphics Processing Units*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 67(2):232–246, May 2011.
- [32] Trompoukis, X., Asouti, V., Kampolis, I., and Giannakoglou, K.: *CUDA implementation of vertex-centered, finite volume CFD methods on unstructured grids with flow control applications*. In *GPU Computing Gems*, chapter 17, pages 207–224. Addison-Wesley Professional, 2011.
- [33] Asouti, V., Kontoleonos, E., Trompoukis, X., and Giannakoglou, K.: *Shape optimization using the one-shot adjoint technique on Graphics Processing Units*. In 7th GRACM International Congress on Computational Mechanics Conference, Athens, Greece, 30 June-2 July 2011.