

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχάνων  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής &  
Βελτιστοποίησης

Εφαρμογή Μη-Επεμβατικού Αναπτύγματος  
Πολυωνυμικού Χάους στην Αεροδυναμική  
Βελτιστοποίηση Μορφής με  
Κατασκευαστικές Αβεβαιότητες

Διπλωματική Εργασία

Πλευριτάκης Εμμανουήλ

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής  
ΕΜΠ



Αθήνα, Ελλάδα  
Σεπτέμβριος 2017

# Ευχαριστίες

Με την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας, ολοκληρώνω τις σπουδές μου στη σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών ΕΜΠ. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τα παιδιά της ΜΠΥΡΒ και ιδιαίτερα τους Δημήτρη Καψούλη και Ξενοφώντα Τρουμπούκη για την βοήθειά τους που μου προσέφεραν όταν τη χρειάστηκα. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα αυτής της διπλωματικής εργασίας, τον κ.ο. Γιαννάκογλου για την πολύτιμη βοήθειά του και την υπομονή του, τόσο σε τεχνικά θέματα όσο και στη διόρθωση αυτού του κειμένου. Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου που με στήριξε καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχάνων  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής &  
Βελτιστοποίησης

## Εφαρμογή Μη-Επεμβατικής Μεθόδου Αναπτύγματος Πολυωνυμικού Χάους στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Μορφής με Κατασκευαστικές Αβεβαιότητες

Διπλωματική Εργασία  
του

**Πλευριτάκη Εμμανουήλ**

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2017

### Περίληψη

Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, διερευνάται η επίπτωση κατασκευαστικών ατελειών αεροτομών στα αεροδυναμικά τους χαρακτηριστικά, διατυπώνοντας σχετική μέθοδο και προγραμματίζοντας και χρησιμοποιώντας αντίστοιχο λογισμικό. Είναι γνωστό ότι κατά την κατασκευή αεροδυναμικών σωμάτων αλλά και οποιωνδήποτε άλλων κατασκευών, στο πέρας της διαδικασίας κατασκευής, το τελικό προϊόν μπορεί να μην έχει επακριβώς το επιθυμητό μέγεθος και τις διαστάσεις που προέκυψαν από το σχεδιασμό. Αυτό συμβαίνει λόγω των πολλών παραμέτρων που συμβάλλουν στη διαδικασία κατασκευής, οι οποίες δεν γίνεται να ελεγχθούν πλήρως λόγω αστάθμητων παραγόντων. Έτσι, λοιπόν, είναι ιδιαίτερα χρήσιμο οι κατασκευαστικές αβεβαιότητες να ληφθούν υπόψη κατά το σχεδιασμό. Όταν είναι

επιθυμητή η ελάχιστη μεταβλητότητα της απόδοσης για τις διάφορες μεταβολές των συνθηκών λειτουργίας (σε αυτήν την περίπτωση, κατασκευαστικές ανοχές) τότε πρόκειται για αεροδυναμικά στιβαρό σχεδιασμό (aerodynamic robust design).

Η ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας ενός στοχαστικού μεγέθους (π.χ. του αριθμού Mach) γίνεται από μια μέση τιμή και μια τυπική απόκλιση. Με αυτόν τον τρόπο, γίνεται αντιληπτός ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται η ποσότητα ενδιαφέροντος (π.χ. του συντελεστή άνωσης μιας αεροτομής). Σε αυτή τη διπλωματική εργασία, η αβεβαιότητα αφορά το ίδιο το σχήμα της αεροτομής. Αναπτύχθηκε, λοιπόν, κατάλληλο λογισμικό για την προσομοίωση των κατασκευαστικών ατελειών κάνοντας χρήση της συνάρτησης Hicks-Henne (H-H). Λύνεται η ροή για την αεροτομή με κατασκευαστική ατέλεια και υπολογίζονται τα αεροδυναμικά της χαρακτηριστικά. Για την ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας χρησιμοποιείται η μη-επεμβατική μέθοδος αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους (Polynomial Chaos Expansion, PCE) όπου υπολογίζεται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της αντικειμενικής συνάρτησης όταν ορισμένες κατάλληλα επιλεγμένες παράμετροι της συνάρτησης H-H (π.χ. το ύψος της ατέλειας) ακολουθούν μια στοχαστική κατανομή.

Πραγματοποιείται στιβαρός αεροδυναμικός σχεδιασμός - βελτιστοποίηση μορφής αεροτομών οι οποίες διέπονται από κατασκευαστικές αβεβαιότητες, προσομοιούμενες από συναρτήσεις H-H, με χρήση εξελικτικών αλγορίθμων. Με την εισαγωγή των συναρτήσεων H-H, ορίζονται οι στοχαστικές μεταβλητές, οι οποίες ελέγχονται από το λογισμικό του PCE. Για τη βελτιστοποίηση χρησιμοποιείται το λογισμικό EASY (Evolutionary Algorithm SYstem) το οποίο βασίζεται σε εξελικτικούς αλγορίθμους και αναπτύχθηκε στη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ.

National Technical University of Athens  
School of Mechanical Engineering  
Fluids Department  
Laboratory of Thermal Turbomachines  
Parallel CFD & Optimization Unit

# **Non-Intrusive Polynomial Chaos Expansion in Aerodynamic Shape Optimization with Manufacturing Uncertainties**

Diploma Thesis

**Plevritakis Emmanouil**

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou

Athens, September 2017

## **Abstract**

In this diploma thesis, the effect of manufacturing imperfections of airfoils on their aerodynamic characteristics is investigated. During the manufacturing of aerodynamic shapes the final shape may deviate from the defined one. This is due to multiple parameters being involved in the process, all changing randomly, thus it is necessary to take into account manufacturing uncertainties during the design process. It is strongly desired that the aerodynamic performance of the designed shape remains (almost) constant without being affected by imperfections of the manufactured shape. This is generally referred to as 'aerodynamic robust design'.

The uncertainty quantification of a variable is represented with a mean value and a standard deviation. The corresponding uncertainty of the objective function (eg. of the lift or drag

coefficient) is quantified when the problem is regulated by variables that follow certain stochastic allocation. An appropriate software has been developed to simulate manufacturing imperfections of aerodynamic shapes, making use of the Hicks-Henne (H-H) function. The non-intrusive polynomial chaos expansion method was used as an uncertainty quantification method in combination with the previously mentioned software to calculate the mean value and the standard deviation of the chosen objective function assuming that the Hicks-Henne parameter follows a stochastic distribution.

The robust aerodynamic design-shape optimisation of airfoils is demonstrated by making the assumption that manufacturing uncertainties can be simulated by the H-H function. The EASY software, which is based on evolutionary algorithms and has been developed by the Parallel CFD & Optimisation Unit of the Lab of Thermal Turbomachines of NTUA, is used to perform the optimization.

# Ακρωνύμια

**PCE** - Polynomial Chaos Expansion

**MC** - Monte Carlo

**UQ** - Uncertainty Quantification

**H-H** - Hicks-Henne

**N-S** - Navier-Stokes

**GQ** - Gauss Quadrature

**GHQ** - Gauss Hermite Quadrature

**PDF** - Probability Density Function

**ΕΜΠ** - Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

**ΕΘΣ** - Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

**ΜΠΥΡΒ** - Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

# Περιεχόμενα

Περίληψη	2
Abstract	4
Ακρωνύμια	6
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>10</b>
1.1 Εισαγωγικά περί βελτιστοποίησης . . . . .	10
1.2 Εισαγωγή στα Προβλήματα Αεροδυναμικά Στιβαρού Σχεδιασμού . . . . .	12
1.3 Γενικά για τις Κατασκευαστικές Ατέλειες . . . . .	14
1.4 Επίλυση του Προβλήματος Αεροδυναμικά Στιβαρού Σχεδιασμού υπό Κατασκευαστικές Αβεβαιότητες . .	15
1.5 Σκοπός και Δομή της Διπλωματικής Εργασίας . . .	16
<b>2 Ανάπτυγμα Πολυωνυμικού Χάους</b>	<b>18</b>
2.1 Εισαγωγικά στοιχεία . . . . .	18
2.2 PCE για μία Στοχαστική Μεταβλητή . . . . .	19
2.3 Ανάπτυγμα Πολυωνυμικού Χάους για Πολλές Στοχαστικές Μεταβλητές . . . . .	23
2.4 Οικονομική Επίλυση Προβλημάτων Πολλών Στοχαστικών Μεταβλητών . . . . .	27
2.4.1 Η Κατάρα της Μεγάλης Διάστασης . . . . .	27
2.4.2 Τα Αραιά Πλέγματα Smolyak . . . . .	28



<b>3</b>	<b>Μοντελοποίηση Κατασκευαστικών Ατελειών</b>	<b>30</b>
3.1	Γενικά περι Κατασκευαστικών Ατελειών . . . . .	30
3.2	Μοντελοποίηση Κατασκευαστικών Ατελειών - Η Συν- νάρτηση Hicks-Henne . . . . .	32
3.3	Εφαρμογή Καμπυλών Hicks-Henne σε Αεροτομές .	37
<b>4</b>	<b>Εφαρμογή PCE - Ποσοτικοποίηση Αβεβαιότη- τας</b>	<b>44</b>
4.1	Εισαγωγικά Στοιχεία . . . . .	44
4.2	Εφαρμογή PCE σε Αεροτομή NACA0012 - Μία Δια- μόρφωση . . . . .	46
4.3	Εφαρμογή PCE σε Αεροτομή NACA0012 - Δύο Δια- μορφώσεις . . . . .	52
4.4	Εφαρμογή PCE σε Πτερύγωση Συμπιεστή - Μία Διαμόρφωση . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Βελτιστοποίηση υπό Κατασκευαστικές Αβεβαι- ότητες με Χρήση Εξελικτικών Αλγορίθμων</b>	<b>59</b>
5.1	Γενικά περι Εξελικτικών Αλγορίθμων . . . . .	59
5.2	Αεροδυναμικά Στιβαρός Σχεδιασμός, Βελτιστοποίη- ση με Κατασκευαστικές Αβεβαιότητες . . . . .	61
5.2.1	Βελτιστοποίηση Συμμετρικής Αεροτομής χω- ρίς Αβεβαιότητες . . . . .	62
5.2.2	Βελτιστοποίηση Συμμετρικής Αεροτομής με Κατασκευαστικές Αβεβαιότητες . . . . .	64
5.2.3	Βελτιστοποίηση Μη-Συμμετρικής Αεροτομής με Κατασκευαστικές Αβεβαιότητες . . . . .	69
5.2.4	Βελτιστοποίηση Πτερύγωσης Συμπιεστή με Κατασκευαστικές Αβεβαιότητες . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Συμπεράσματα - Προτάσεις για Μελλοντική Με- λέτη</b>	<b>84</b>
6.1	Ανακεφαλαίωση . . . . .	84

6.2 Παρατηρήσεις - Συμπεράσματα . . . . .	85
6.3 Προτάσεις για μελλοντική μελέτη . . . . .	86
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>88</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Εισαγωγικά περί βελτιστοποίησης

Σήμερα, δεν είναι αρκετή, απλά, η εύρεση μίας λύσης σε ένα πρόβλημα καθώς οι απαιτήσεις για καλύτερες επιδόσεις καθιστούν απαραίτητη την εύρεση της καλύτερης (βέλτιστης) λύσης που θα ικανοποιεί τα εκάστοτε κριτήρια.

Γενικά, με τον όρο 'βελτιστοποίηση' νοείται η εύρεση των παραμέτρων εκείνων που να μεγιστοποιούν ή να ελαχιστοποιούν ένα ή περισσότερα κριτήρια. Αυτά τα κριτήρια συνήθως είναι αντικρουόμενα. Για παράδειγμα, αν το πρόβλημα έχει δύο κριτήρια προς μεγιστοποίηση τότε είναι πιθανό, καθώς αλλάζουν οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού, όταν το ένα αυξάνεται το άλλο να μειώνεται. Συνεπώς, η τελική λύση στο πρόβλημα είναι εκείνες οι τιμές των παραμέτρων που καλύπτουν και τα δύο κριτήρια ως ένα βαθμό.

Το πρόβλημα της βελτιστοποίησης μπορεί να μεταφραστεί μαθηματικά ως η εύρεση της ελάχιστης ή μέγιστης τιμής μιας αντικειμενικής συνάρτησης  $F$  (objective function) ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Αυτές οι μεταβλητές μπορεί να παίρνουν πραγματικές τιμές (συνεχή προβλήματα) ή ακέραιες (διακριτά) [14]. Το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης ονομάζεται 'χώρος μεταβλητών βελτιστοποίησης' (design space).

Διαχωρισμός των προβλημάτων βελτιστοποίησης γίνεται με βάση τον αριθμό των συναρτήσεων-στόχων προς βελτιστοποίηση [3]. Αν το πρόβλημα έχει μία μόνο συνάρτηση-στόχο τότε αποτελεί πρόβλημα ενός στόχου ή πρόβλημα μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης (Single Objective Optimization, SOO). Αντίθετα, αν υπάρχουν πολλές συναρτήσεις-στόχοι προς βελτιστοποίηση, τότε το πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως πρόβλημα πολλών στόχων ή πρόβλημα πολυ-

κριτηριακής βελτιστοποίησης (Multi Objective Optimization, MOO) [4].

Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης μπορεί να διακριθούν σε δύο κατηγορίες ανάλογα με το είδος της βελτιστοποίησης [17], τις στοχαστικές (stochastic) και τις αιτιοκρατικές (deterministic). Οι στοχαστικές μέθοδοι χρησιμοποιούν μόνο την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, χωρίς κάποια επιπλέον πληροφορία και οδεύουν προς τη βέλτιστη λύση μιμούμενοι, συνήθως, τη θεωρία της εξέλιξης των ειδών. Στις στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης, με πιο διαδεδομένους τους εξελικτικούς αλγόριθμους (Evolutionary Algorithms, EA), επιλέγεται τυχαία (π.χ. από μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών) ένα σύνολο διανυσμάτων μεταβλητών βελτιστοποίησης προς αξιολόγηση. Συγκεκριμένα, οι EA χειρίζονται ένα σύνολο υποψηφίων λύσεων (πληθυσμό) και όχι μία μεμονωμένη λύση σε κάθε επανάληψη. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα των EA είναι ότι δεν εγκλωβίζονται σε τοπικά ακρότατα. Η εφαρμογή της μεθόδου είναι απλή και μπορεί να προσαρμοστεί εύκολα σε κάθε διαφορετικό πρόβλημα, αρκεί να είναι διαθέσιμο το λογισμικό αξιολόγησης της αντικειμενικής συνάρτησης. Ένα τέτοιο παράδειγμα στοχαστικής μεθόδου αποτελούν οι εξελικτικοί αλγόριθμοι (evolutionary algorithms) [1]. Στις αιτιοκρατικές μεθόδους, υπολογίζονται ή προσεγγίζονται οι τιμές των παραγώγων (πρώτων ή και σπανιότερα δεύτερων) της αντικειμενικής συνάρτησης και χρησιμοποιούνται για τον εντοπισμό των καλύτερων λύσεων. Με τον όρο ‘παράγωγος’ εδώ εννοείται η γενικευμένη παράγωγος, δηλαδή η κλίση της (gradient), γι’ αυτό το λόγο ονομάζονται και ‘μέθοδοι βασισμένες στην κλίση’ (gradient-based methods). Ο πιο απλός τρόπος υπολογισμού της παραγώγου είναι με πεπερασμένες διαφορές. Αν  $N$  το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού,  $b_i$  οι μεταβλητές σχεδιασμού και  $\epsilon$  μια πολύ μικρή ποσότητα που καθορίζεται από το χρήστη, τότε, η κεντρική παράγωγος θα είναι

$$\frac{\delta F}{\delta b_i} = \frac{F(b_1, b_2, \dots, b_i + \epsilon \dots b_N)}{2\epsilon} \quad (1.1)$$

Το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου είναι ίσο με  $2N + 1$ . Δύο άλλοι τρόποι με τους οποίους υπολογίζεται η κλίση είναι με μεθόδους μιγαδικών μεταβλητών (complex variable methods) [17] και η μέθοδος συζυγών μεταβλητών ή συζυγής μεθόδου (adjoint variable method). Ειδικά η τελευταία παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού το υπολογιστικό της κόστος είναι ανεξάρτητο του  $N$ . Σύγχρονοι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης χρησιμοποιούν υβριδισμό στοχαστικών και αιτιοκρατικών μεθόδων όπου, με βάση κάποια κριτήρια, γίνεται εναλλαγή μεταξύ των μεθόδων [2].

Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, γίνεται χρήση εξελικτικών αλγορίθμων. Συγκεκριμένα, γίνεται χρήση του συστήματος εξελικτικών αλγορίθμων

(Evolutionary Algorithm System - EASY) το οποίο έχει αναπτυχθεί στη ΜΠΥΡΒ/ΕΘΣ στο οποίο επιλύονται προβλήματα ελαχιστοποίησης. Επομένως για προβλήματα μεγιστοποίησης γίνεται εύρεση της ελάχιστης τιμής της αρνητικής αντικειμενικής συνάρτησης δηλαδή:

$$\max(F) = \min(-F) \quad (1.2)$$

Ακόμη οι μεταβλητές που εμπλέκονται στο πρόβλημα μπορούν να διαχωριστούν σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τον βαθμό στον οποίο είναι δυνατό να ελεγχθούν από το σχεδιαστή. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι μεταβλητές σχεδιασμού, πλήθους  $N$ , οι οποίες είναι πλήρως ελεγχόμενες από το σχεδιαστή, υπό την έννοια ότι μπορεί ασφαλώς να επιβάλει αυτές να έχουν τις τιμές που θα προκύψουν από την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης. Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει μεταβλητές, έστω πλήθους  $M$ , οι οποίες δεν μπορούν να αλλάξουν κατά βούληση του σχεδιαστή, αλλά διέπονται από μία στοχαστικότητα, χωρίς δυνατότητα ελέγχου τους. Αυτές αποτελούν τις μεταβλητές περιβάλλοντος ή στοχαστικές μεταβλητές, υπό την έννοια ότι αυτές καθορίζουν το μεταβλητό περιβάλλον εντός του οποίου πρέπει να υλοποιηθεί η βελτιστοποίηση. Παράδειγμα μιας τέτοιας μεταβλητής είναι η γωνία εισόδου της ροής.

## 1.2 Εισαγωγή στα Προβλήματα Αεροδυναμικά Στιβαρού Σχεδιασμού

Σε προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης όπου υπάρχουν τόσο μεταβλητές σχεδιασμού όσο και μεταβλητές περιβάλλοντος, η εύρεση μόνο της βέλτιστης λύσης δεν είναι πλέον αρκετή αφού με την παραμικρή αλλαγή σε κάποια από τις μεταβλητές περιβάλλοντος μπορεί να αλλάξει σε μεγάλο βαθμό το βέλτιστο σημείο λειτουργίας.

Στον συμβατικό σχεδιασμό/βελτιστοποίηση χωρίς αβεβαιότητες, γίνεται η υπόθεση ότι το τελικό προϊόν θα λειτουργεί ακριβώς στις συνθήκες λειτουργίας για τις οποίες έγινε ο σχεδιασμός του, ίσως και η πειραματική επαλήθευση. Στην πράξη όμως, το προϊόν λειτουργεί σε μη απόλυτα ελεγχόμενο περιβάλλον όπου συσσωρεύεται αβεβαιότητα σχεδόν για όλες τις παραμέτρους λειτουργίας. Για παράδειγμα, κατά το σχεδιασμό μιας ανεμογεννήτριας επιλέγονται τα κατάλληλα υλικά και οι βέλτιστες διαστάσεις των πτερύγων και του σώματος ώστε να λειτουργεί με τα βέλτιστα δυνατά αεροδυναμικά χαρακτηριστικά υπό συγκεκρι-

μένες συνθήκες. Όμως, δεν είναι βέβαιο ότι αυτές οι συνθήκες θα είναι πάντα σταθερές ή ότι το υλικό από το οποίο κατασκευάζεται θα έχει πάντα την ίδια σύνθεση και, κατά συνέπεια, τα ίδια χαρακτηριστικά όπως αντοχή ή σκληρότητα. Από το παραπάνω παράδειγμα μάλιστα φαίνεται ότι, μερικές φορές, οι μεταβλητές περιβάλλοντος μπορούν να ταυτίζονται με τις μεταβλητές σχεδιασμού.

Πρέπει λοιπόν να γίνει σχεδιασμός λαμβάνοντας υπόψη τις τυχαίες μεταβολές αυτών των μεταβλητών. Αυτό ονομάζεται ‘στιβαρός σχεδιασμός’ (robust design) [5]. Όταν γίνεται λόγος για προβλήματα αεροδυναμικής φύσεως, τότε πρόκειται για αεροδυναμικά στιβαρό σχεδιασμό/βελτιστοποίηση.

Η διαδικασία κατά την οποία υπολογίζεται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της απόκρισης του συστήματος όταν είναι γνωστός ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλονται οι στοχαστικές μεταβλητές (τύπος κατανομής, μέση τιμή, τυπική απόκλιση) ονομάζεται ποσοτικοποίηση αβεβαιότητας (Uncertainty Quantification) και είναι αναπόσπαστο τμήμα του στιβαρού σχεδιασμού αφού, με αυτόν τον τρόπο, εκφράζεται μαθηματικά το πώς μεταβάλλεται η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος, υπό αβεβαιότητες. Έτσι εισάγεται το στοιχείο της στοχαστικότητας στο σχεδιασμό. Πλέον, οι μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν κάποια στοχαστική κατανομή θα αναφέρονται ως ‘στοχαστικές μεταβλητές’ (stochastic variables).

Έστω  $F$  η μοναδική αντικειμενική συνάρτηση-στόχος για ένα μονοκριτηριακό πρόβλημα βελτιστοποίησης και  $\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  οι στοχαστικές μεταβλητές, καθεμιά απ’ τις οποίες ακολουθεί τη δική της στοχαστική κατανομή. Η  $F$  ονομάζεται και ‘ποσότητα ενδιαφέροντος’ (Quantity of Interest, QoI), π.χ. ο συντελεστής αντίστασης  $C_D$  μιας αεροτομής. Αυτή η συνάρτηση χρησιμοποιείται ως συνάρτηση-στόχος στη βελτιστοποίηση χωρίς αβεβαιότητες. Στο στιβαρό αεροδυναμικό σχεδιασμό/βελτιστοποίηση, καθίσταται απαραίτητη η αλλαγή της αντικειμενικής συνάρτησης, ώστε αυτή να εκφραστεί συναρτήσει της μέσης τιμής  $\mu_F$  και της τυπικής απόκλισης  $\sigma_F$  της  $F$  όταν μεταβάλλονται στοχαστικά οι μεταβλητές περιβάλλοντος. Έτσι, ορίζεται μια νέα αντικειμενική συνάρτηση  $\hat{F}$  η οποία, συνήθως, είναι:

$$\hat{F} = \mu_F + \kappa \sigma_F \quad (1.3)$$

Ο τρόπος με τον οποίο εκφράζεται πλέον η αντικειμενική συνάρτηση θα ονομάζεται ‘μετρική αεροδυναμικής στιβαρότητας’. Με τη σχέση 1.3 εκφράζεται η στιβαρότητα της αντικειμενικής συνάρτησης  $F$ . Η παράμετρος  $\kappa$  η οποία καθορίζεται από τον σχεδιαστή, εκφράζει το σενάριο στο οποίο δίνει έμφαση.

Για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης, η παράμετρος  $\kappa$  στη σχέση 1.3 εκφράζει την αισιόδοξη εκδοχή (best case scenario) αν η παράμετρος είναι θετική ενώ, αντίθετα, την απαισιόδοξη εκδοχή (worst case scenario), αν είναι αρνητική [5].

Υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να πραγματοποιηθεί η ποσοτικοποίηση αβεβαιότητας. Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, χρησιμοποιείται η μέθοδος αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους (Polynomial Chaos Expansion, PCE) [7]. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται η μη-επεμβατική εκδοχή της στην οποία γίνεται επιλογή και υπολογισμός κατάλληλων τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Ο αριθμός των τιμών της  $F$  επιλέγεται ανάλογα με την επιθυμητή ακρίβεια στα αποτελέσματα. Μεγαλύτερη ακρίβεια απαιτεί περισσότερες τιμές της  $F$  ενώ μικρότερη ακρίβεια απαιτεί λιγότερες.

Για τον αεροδυναμικά στιβαρό σχεδιασμό/βελτιστοποίηση, ο υπολογισμός μιας τιμής της  $F$  για ένα σύνολο των δεδομένων σημαίνει επίλυση του συστήματος εξισώσεων Navier-Stokes, N-S που, ανάλογα το πρόβλημα (π.χ. ροή γύρω από αεροσκάφος), κάθε αξιολόγηση μπορεί να απαιτεί πολύ χρόνο (wall clock time). Επομένως, απαιτείται προσεκτική διαχείριση της μεθόδου ώστε να πραγματοποιηθεί η ποσοτικοποίηση αβεβαιότητας με την καλύτερη δυνατή ακρίβεια, αλλά με το ελάχιστο δυνατό υπολογιστικό κόστος, δηλαδή με τον ελάχιστο δυνατό αριθμό κλήσεων του λογισμικού αξιολόγησης της  $F$ .

Μια άλλη κλασική μέθοδος ποσοτικοποίησης αβεβαιότητας είναι η Monte Carlo, (MC) [19]. Στην απλή της εκδοχή, επιλέγονται τυχαία οι τιμές της  $F$ , ενώ απαιτούνται χιλιάδες δείγματα για ικανοποιητική ακρίβεια. Αυτή η μέθοδος είναι πολύ κοστοβόρα για εφαρμογές αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού λόγω του μεγάλου αριθμού δειγμάτων που απαιτούνται. Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, η MC χρησιμοποιείται μόνο μια φορά για την πιστοποίηση της μεθόδου PCE.

### 1.3 Γενικά για τις Κατασκευαστικές Ατέλειες

Η τελική μορφή μιας γεωμετρίας, μετά το πέρας της κατασκευής της, μπορεί να διαφέρει με διάφορους τρόπους από το αρχικό σχέδιο. Μπορεί να είναι μικρές ατέλειες όπως εγχοπές ή προεξοχές ή μπορεί να φέρει κάποιου είδους εξόγκωμα όπως μία απλή ιδιομορφία με πολύ μικρό ύψος. Ένας από τους λόγους στους οποίους οφείλεται αυτή η διαφορά είναι σε πιθανά προβλήματα, είτε στην κίνηση, είτε στην κατάσταση του κοπτικού εργαλείου.

Αυτές οι ατέλειες πρέπει να μοντελοποιηθούν κατάλληλα ώστε οι παράμετροι της ατέλειας να χρησιμοποιηθούν ως στοχαστικές μεταβλητές στον αεροδυναμικά στιβαρό σχεδιασμό/βελτιστοποίηση. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι προσομοίωσης της κατασκευαστικής ατέλειας σε ένα σώμα. Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, χρησιμοποιείται η συνάρτηση Hicks-Henne (H-H) [14] για την παραμετροποίηση ιδιομορφιών ή διαμορφώσεων. Συγκεκριμένα, αναπτύχθηκε λογισμικό το οποίο υπερθέτει τις καμπύλες-ατέλειες H-H σε άλλες γεωμετρίες.

## 1.4 Επίλυση του Προβλήματος Αεροδυναμικά Στιβαρού Σχεδιασμού υπό Κατασκευαστικές Αβεβαιότητες

Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, πραγματοποιείται στιβαρός αεροδυναμικός σχεδιασμός/βελτιστοποίηση αεροτομής με κατασκευαστικές ατέλειες. Για την υλοποίηση της βελτιστοποίησης εμπλέκονται τα εξής λογισμικά:

- Το λογισμικό εξελικτικών αλγορίθμων EASY το οποίο πραγματοποιεί τη βελτιστοποίηση και χειρίζεται τις μεταβλητές σχεδιασμού, οι οποίες είναι τα σημεία ελέγχου Bezier της αεροτομής.
- Το λογισμικό αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους, το οποίο υπολογίζει τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της ποσότητας ενδιαφέροντος.
- Ο κώδικας επίλυσης του συστήματος εξισώσεων N-S.
- Το λογισμικό προσομοίωσης και εφαρμογής των κατασκευαστικών ατελειών στη γεωμετρία της αεροτομής.

Πραγματοποιείται δικριτηριακή βελτιστοποίηση. Οι δύο στόχοι είναι η μέση τιμή  $\mu_F$  και η τυπική απόκλιση  $\sigma_F$  της ποσότητας ενδιαφέροντος. Οι στοχαστικές μεταβλητές είναι μία ή περισσότερες παράμετροι της κατασκευαστικής ατέλειας.

Αρχικοποιείται ο εξελικτικός αλγόριθμος με τη δημιουργία του αρχικού πληθυσμού των υποψήφιων λύσεων με μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών. Στη συνέχεια, αξιολογούνται αυτές οι λύσεις, δηλαδή με τα σημεία ελέγχου Bezier που αποτελούν τις υποψήφιες λύσεις, δημιουργείται η αεροτομή στην οποία εφαρμόζεται η ατέλεια με τη βοήθεια του κατάλληλου λογισμικού. Από το λογισμικό του PCE υπολογίζονται οι τιμές των  $\mu_F$  και  $\sigma_F$ . Δημιουργείται, δηλαδή,



έναν εσωτερικό βρόχο όπου καλείται το λογισμικό εφαρμογής των ατελειών και ο κώδικας επίλυσης της ροής. Οι τιμές που προκύπτουν από το PCE διαβάζονται από τον EA και με χρήση των εξελικτικών τελεστών, δημιουργείται ο νέος πληθυσμός λύσεων. Η διαδικασία τερματίζεται όταν ολοκληρωθεί ο προκαθορισμένος αριθμός αξιολογήσεων.

## 1.5 Σκοπός και Δομή της Διπλωματικής Εργασίας

Στο κεφάλαιο 2 γίνεται μια σύντομη παρουσίαση της θεωρίας αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους, αρχικά για μία μόνο στοχαστική μεταβλητή (παράγραφος 2.2) ενώ, στη συνέχεια, γενικεύεται για περισσότερες μεταβλητές (παράγραφος 2.3). Όπως όμως θα εξηγηθεί, καθώς αυξάνεται το πλήθος των στοχαστικών μεταβλητών, ελοχεύει η ονομαζόμενη κατάρα της μεγάλης διάστασης (curse of dimensionality) και η μέθοδος μπορεί να γίνει πολύ κοστοβόρα, πολύ γρήγορα λόγω της ανάγκης για πολλαπλές κλίσεις του λογισμικού αξιολόγησης της αντικειμενικής συνάρτησης. Στην παράγραφο 2.4 γίνεται μια σύντομη παρουσίαση μίας μεθόδου για τη μείωση του υπολογιστικού κόστους, χωρίς όμως αυτή να χρησιμοποιείται εδώ.

Στο κεφάλαιο 3 αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο μοντελοποιούνται οι κατασκευαστικές ατέλειες σε μια αεροτομή σε αυτήν την εργασία. Συγκεκριμένα, εξετάζονται ατέλειες στην επιφάνεια της αεροτομής οι οποίες έχουν τη μορφή εξογκώματος, τόσο μικρού σε ύψος που, γενικά, δεν φαίνεται με γυμνό μάτι. Αυτού του είδους οι ατέλειες θα αποκαλούνται στο εξής 'διαμορφώσεις' (bumps). Μελετάται κάθε παράμετρος και οι επιπτώσεις της στην τελική μορφή της αεροτομής καθώς και όλες οι πιθανές στοχαστικές μεταβλητές που μπορούν να οριστούν. Επίσης, επιλύεται η ροή γύρω από κάθε αεροτομή με κατασκευαστικές ατέλειες με διαφορετικές τιμές των παραμέτρων των ατελειών και καταγράφονται οι συντελεστές άνωσης και αντίστασης. Έτσι επιδεικνύεται η επίπτωση που έχει κάθε παράμετρος στα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά της αεροτομής.

Στη συνέχεια, ακολουθούν εφαρμογές σε προβλήματα αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού – βελτιστοποίησης

Συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο 4, εφαρμόζεται η μη-επεμβατική μέθοδος ανάπτυγματος πολυωνυμικού χάους σε μεμονωμένη αεροτομή NACA0012 με κα-

τασκευαστικές αβεβαιότητες για δύο διαφορετικές περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση ως κατασκευαστική ατέλεια εφαρμόζεται μία διαμόρφωση ενώ ως στοχαστική μεταβλητή ορίζεται το ύψος της. Στη δεύτερη περίπτωση, ορίζονται δύο διαμορφώσεις ως κατασκευαστικές ατέλειες, ενώ ως στοχαστικές μεταβλητές ορίζονται τα ύψη αυτών των διαμορφώσεων. Ακόμα, εφαρμόζεται η μέθοδος σε περύγωση συμπιεστή με διαφορετικές συναρτήσεις στόχους. Έτσι, γίνεται περισσότερο κατανοητή η στοχαστική φύση του προβλήματος και ο βαθμός στον οποίο επηρεάζουν το πρόβλημα οι διαφορετικές παράμετροι.

Στο κεφάλαιο 5, γίνεται βελτιστοποίηση συμμετρικής αεροτομής με χρήση εξελικτικών αλγορίθμων για διάφορους συνδυασμούς στοχαστικών μεταβλητών και συγκρίνονται οι διαφορετικές λύσεις μεταξύ τους. Πιο συγκεκριμένα, γίνεται βελτιστοποίηση της αεροτομής NACA0012, πρώτα χωρίς και μετά με κατασκευαστικές αβεβαιότητες. Στην πρώτη περίπτωση, συνάρτηση-στόχος είναι ο συντελεστής άνωσης και στη δεύτερη η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της άνωσης. Για τη δεύτερη περίπτωση βελτιστοποίησης, χρησιμοποιείται μία στοχαστική μεταβλητή με μία διαμόρφωση στην πλευρά υποπίεσης. Τέλος, πραγματοποιείται βελτιστοποίηση των αεροτομών περύγωσης συμπιεστή με κατασκευαστικές αβεβαιότητες. Σκοπός είναι η σύγκριση αυτών των βέλτιστων λύσεων και η ανάδειξη των διαφορών τους, όταν γίνεται σχεδιασμός με και χωρίς αβεβαιότητες.

## Κεφάλαιο 2

# Ανάπτυγμα Πολυωνυμικού Χάους

### 2.1 Εισαγωγικά στοιχεία

Η μέθοδος αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους (Polynomial Chaos Expansion, PCE) αναπτύχθηκε το 1938 και δημοσιεύτηκε ως το σχήμα Wiener και Ashkey [6]. Τότε, η χρήση της μεθόδου ήταν αρκετά περιοριστική καθώς είχε αναπτυχθεί για στοχαστικές μεταβλητές που ακολουθούν μόνο κανονική κατανομή. Οι Xiu and Karniadakis, το 2002, δημοσίευσαν μια επέκταση της μεθόδου η οποία έφερε το γενικό όρο 'Γενικευμένο πολυωνυμικό Χάος' ή Generalized Polynomial Chaos. Πλέον, η μέθοδος του PCE μπορεί να εφαρμοστεί για μεταβλητές οποιασδήποτε στοχαστικής κατανομής, όχι μόνο κανονικής [7]. Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, θα ακολουθηθεί η παραδοχή 'έξι σίγμα' δηλαδή οι στοχαστικές μεταβλητές θα ανήκουν στο εύρος  $\mu \pm 3\sigma$ .

Ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόζεται η σχετική θεωρία, διακρίνει τις μεθόδους σε επεμβατικές (intrusive) και μη-επεμβατικές (non-intrusive).

Στις επεμβατικές μεθόδους, εφαρμόζεται το ανάπτυγμα πολυωνυμικού χάους απευθείας στις στοχαστικές εισόδους και εξόδους έχοντας ως αποτέλεσμα να αλλάζουν ριζικά οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα [8]. Κάθε στοχαστική μεταβλητή, καθώς και το αποτέλεσμα της αντικειμενικής συνάρτησης, μοντελοποιούνται με τη χρήση πολυωνύμων, κάτι που μειώνει την πολυπλοκότητα των πράξεων και το υπολογιστικό κόστος. Αυτό σημαίνει μαζική τροποποίηση ή ακόμα και εκ νέου ανάπτυξη του κώδικα επίλυσης. Για κάθε διαφορετικό πρόβλημα, θα απαιτείται εκ νέου παρέμβαση στον κώδικα. Αυτό είναι και το πιο σημαντικό μειονέκτημα της μεθόδου.

Στις μη-επεμβατικές μεθόδους, γίνεται κλήση της αντικειμενικής συνάρτησης για συγκεκριμένο δείγμα εισόδων των στοχαστικών μεταβλητών [9]. Η εφαρμογή αυτού του είδους της μεθόδου είναι σαφώς πιο εύκολη στην υλοποίησή της από αυτήν της επεμβατικής καθώς δεν γίνεται καμία παρέμβαση στο λογισμικό αξιολόγησης, αντιμετωπίζεται δηλαδή ως ‘μαύρο κουτί’ (black box). Συνήθως, προτιμάται η χρήση της μη-επεμβατικής μεθόδου λόγω της ευκολίας στην εφαρμογή της, αφού μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ήδη υπάρχον λογισμικό υπολογισμού της αντικειμενικής συνάρτησης χωρίς περαιτέρω τροποποιήσεις. Μειονέκτημα της μη-επεμβατικής μεθόδου είναι το υπολογιστικό κόστος, αφού βασίζεται στην κλήση του λογισμικού αξιολόγησης πολλές φορές. Η μέθοδος γίνεται ιδιαίτερα κοστοβόρα από άποψη χρόνου υπολογισμού σε εφαρμογές στιβαρού αεροδυναμικού σχεδιασμού, όπου το λογισμικό αξιολόγησης είναι ο επιλύτης των εξισώσεων Navier-Stokes (N-S).

Στη διπλωματική αυτή εργασία, θα γίνει χρήση μη-επεμβατικής μεθόδου PCE. Στις επόμενες παραγράφους ακολουθεί η ανάλυσή της.

## 2.2 PCE για μία Στοχαστική Μεταβλητή

Σε αυτό το κεφάλαιο αναλύεται η θεωρία της μεθόδου PCE σε μία διάσταση, δηλαδή για προβλήματα με μία μόνο στοχαστική μεταβλητή.

Εστω μία αντικειμενική συνάρτηση  $F(x)$ , της οποίας η μεταβλητή εισόδου  $x$  κατανέμεται με βάση τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $w(x)$  (Probability Density Function, PDF) η οποία επιλέγεται ανάλογα με τη στοχαστική κατανομή που ακολουθούν οι στοχαστικές μεταβλητές. Έστω ακόμη μία οικογένεια  $P$  πολυωνύμων  $p_i(x)$ , μεγίστου βαθμού  $i$  η καθεμιά η οποία εξαρτάται από την κατανομή που ακολουθεί η στοχαστική μεταβλητή

$$P = (p_0, p_1, p_2, \dots, p_k, \dots) \quad (2.1)$$

Τότε, η  $\nu$ -οστή στατιστική ροπή της αντικειμενικής συνάρτησης  $F(x)$  γράφεται

$$\langle y \rangle^\nu = \int_D (F(x))^\nu w(x) dx \quad (2.2)$$

Βασικός σκοπός είναι ο υπολογισμός της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της  $F$ , δηλαδή της πρώτης και δεύτερης στατιστικής ροπής αντίστοιχα. Απαραίτητη προϋπόθεση για τον υπολογισμό της εκάστοτε στατιστικής ροπής είναι το ολοκλήρωμα 2.2 να έχει λύση, δηλαδή οι συναρτήσεις  $F(x)$  και  $w(x)$  να είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο διάστημα ολοκλήρωσης  $D$ .

Σύμφωνα με τη θεωρία του αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους (PCE), η αντικειμενική συνάρτηση  $F$  μπορεί να προσεγγιστεί σε ικανοποιητικό βαθμό από μία συνάρτηση  $f$  με την ίδια στοχαστική είσοδο  $x$ , η οποία  $f$  όμως αποτελεί γραμμικό συνδυασμό της οικογένειας πολυωνύμων  $P$ , με σύνολο τιμών το σύνολο  $Y$ . Δηλαδή, είναι

$$F(x) \simeq f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i p_i(x) \quad (2.3)$$

όπου  $y = f(x) \rightarrow Y$

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής υπολογίζεται η πρώτη στατιστική ροπή από τη σχέση 2.2, για  $\nu = 1$ , με την κατάλληλη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $w(x)$ ,

$$\mu_F = \langle y \rangle^1 = \int_D f(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \int_D p_i(x)w(x)dx \quad (2.4)$$

Όμως  $p_0 = 1$  και  $\int_D w(x)dx = 1$  αφού από τον ορισμό μιας στοχαστικής κατανομής η συνολική πιθανότητα ενός στοχαστικού φαινομένου ισούται με τη μονάδα. Τότε

$$\int_D p_i(x)w(x)dx = \int_D p_i(x)p_0(x)w(x)dx \equiv 0 \quad (2.5)$$

$\forall i > 0$ , λόγω ορθογωνιότητας των  $p_i$  και, επομένως, συνδυάζοντας τις εξισώσεις 2.4 και 2.5 προκύπτει

$$\begin{aligned} \mu_F &= \alpha_0 \int_D p_0(x)w(x)dx + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \int_D p_i(x)w(x)dx \\ &= \alpha_0 \int_D 1 \cdot w(x)dx \\ &= \alpha_0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Με χρήση της δεύτερης στατιστικής ροπής ( $\nu = 2$ ) υπολογίζεται η διακύμανση  $\sigma_F^2$  και η τυπική απόκλιση  $\sigma_F$  της αντικειμενικής συνάρτησης. Η διακύμανση γράφεται

$$\sigma_F^2 = \langle y \rangle^2 - \mu_F^2 \quad (2.7)$$

ενώ η τυπική απόκλιση θα ισούται με

$$\sigma_F = \sqrt{\sigma_F^2} = \sqrt{\langle y \rangle^2 - \mu_F^2} \quad (2.8)$$

Η δεύτερη στατιστική ροπή  $\langle y \rangle^2$  υπολογίζεται από τη σχέση 2.2, για  $\nu = 2$ ,

$$\langle y \rangle^2 = \int_D (f(x))^2 w(x) dx \quad (2.9)$$

Τελικά, η σχέση της δεύτερης στατιστικής ροπής είναι

$$\langle y \rangle^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 \quad (2.10)$$

όπου έγινε χρήση της οικογένειας ορθοκανονικών πολυωνύμων  $\tilde{p}_i(x)$ . Στη συνέχεια, η τυπική απόκλιση υπολογίζεται από την εξίσωση 2.8, αντικαθιστώντας σε αυτήν τη σχέση 2.10

$$\sigma_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2} \quad (2.11)$$

Με τις σχέσεις 2.6 και 2.11 υπολογίζεται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της  $F$ . Σε αυτές όμως τις σχέσεις καθώς και στην ίδια τη σχέση της  $F$  δεν έχει γίνει κάποια αποκοπή δηλαδή χρησιμοποιούνται άπειροι όροι, κάτι που πρακτικά είναι αδύνατο. Έτσι λοιπόν εφαρμόζεται αποκοπή, μέχρι και τον  $k$ -οστό όρο, αμελώντας δηλαδή κάθε όρο του πολυωνύμου βαθμού μεγαλύτερου του  $k$ . Αυτή η αποκοπή ονομάζεται 'τάξη χάους' (chaos order). Τότε, οι παραπάνω σχέσεις παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{i=0}^k \alpha_i p_i(x) \\
\mu_F &= \alpha_0 \\
\sigma_F &= \sqrt{\sum_{i=1}^k \alpha_i^2}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Οι συντελεστές  $\alpha_i$  υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις προβολές Galerkin και την ιδιότητα ορθογωνιότητας των πολυωνύμων  $p_i$ . Η προβολή Galerkin της αντικειμενικής συνάρτησης  $F$  και του πολυωνύμου  $p_i$  είναι:

$$\langle F(x), p_i(x) \rangle_w = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) p_i(x) w(x) dx \tag{2.13}$$

ενώ με αντικατάσταση της  $F(x)$  με την προσεγγιστική σχέση 2.3 είναι

$$\begin{aligned}
\langle F(x), p_i(x) \rangle_w &= \sum_{i=0}^k \alpha_i \int_{-\infty}^{+\infty} p_i(x) p_j(x) w(x) dx \\
&= \sum_{i=0}^k \alpha_i \gamma_i \delta_{ij} \\
&= \alpha_i \gamma_i
\end{aligned} \tag{2.14}$$

όπου  $\delta_{ij}$  το σύμβολο του Kronecker, το οποίο ισούται με 1 όταν  $i = j$  ενώ ισούται με 0 όταν  $i \neq j$ . Εξισώνοντας τις σχέσεις 2.13 και 2.14, προκύπτει η σχέση υπολογισμού των συντελεστών  $\alpha_i$ .

$$\alpha_i = \frac{1}{\gamma_i} \int_D F(x) p_i(x) w(x) dx \tag{2.15}$$

Το ολοκλήρωμα 2.15 υπολογίζεται με τη μέθοδο τετραγωνισμού κατά Gauss (Gaussian Quadrature, GQ) [15]. Ανάλογα με τη στοχαστική κατανομή, επιλέγεται η κατάλληλη οικογένεια ορθογωνίων πολυωνύμων και, κατά συνέπεια, η κατάλληλη μέθοδος GQ. Επειδή οι στοχαστικές μεταβλητές ακολουθούν κανονική κατανομή, χρησιμοποιούνται τα πιθανοτικά πολυώνυμα Hermite  $He_i(x)$  τα οποία είναι ορθογωνικά στο διάστημα  $(-\infty, +\infty)$ . Η μέθοδος ολοκλήρωσης, τότε, είναι η Gauss Hermite Quadrature (GHQ). Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούνται τα ορθοκανονικά πιθανοτικά πολυώνυμα Hermite  $He_i$  τα οποία

προέκυψαν διαιρώντας τα αρχικά πολυώνυμα  $He_i(x)$  με το μέτρο κανονικότητας τους  $\gamma_i$ .

Τότε, η εξίσωση 2.15 παίρνει τη μορφή

$$\alpha_i = \int_D F(x) \tilde{H}e_i(x) w(x) dx \quad (2.16)$$

Σύμφωνα με την GHQ, τα ολοκληρώματα 2.16 γράφονται ως αθροίσματα  $\rho$  όρων, του γινομένου της αντικειμενικής συνάρτησης  $F$ , υπολογισμένης σε κατάλληλα επιλεγμένους κόμβους  $x_\rho$ , με κατάλληλα επιλεγμένο συντελεστή βάρους  $w'_\rho$ . Για το συμβολισμό του συντελεστή βάρους, χρησιμοποιείται τονούμενο  $w$  για τη διαφοροποίησή του από την PDF. Τότε, οι συντελεστές  $\alpha_i$  είναι

$$\alpha_i = \sum_{\rho=0}^{k+1} w'_\rho F(x_\rho) \quad (2.17)$$

Οι κόμβοι  $z_\rho$  είναι οι ρίζες του πολυωνύμου Hermite, βαθμού  $k+1$ . Οι τιμές των  $w'_\rho$  και  $z_\rho$  επιλέγονται από πίνακες. Χρησιμοποιείται το σύμβολο  $z$  αντί του  $x$  διότι πρόκειται για την αδιάστατη κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu_z = 0$  και τυπική απόκλιση  $\sigma_z = 1$ . Μετά την επιλογή των κόμβων  $z_\rho$  κατά GHQ, υπολογίζονται οι πραγματικοί κόμβοι  $x_\rho$  σύμφωνα με τη σχέση

$$x_\rho = \sigma_\alpha z_\rho + \mu_\alpha \quad (2.18)$$

## 2.3 Ανάπτυγμα Πολυωνυμικού Χάους για Πολλές Στοχαστικές Μεταβλητές

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα επεκταθεί η θεωρία αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους για πολλές στοχαστικές μεταβλητές. Έστω  $F$  η αντικειμενική συνάρτηση και  $x_1, x_2, \dots, x_d$  οι στοχαστικές μεταβλητές που δέχεται ως είσοδο η  $F$ . Έστω, επίσης,  $D_1, D_2, \dots, D_d$  το πεδίο ορισμού για κάθε στοχαστική μεταβλητή ξεχωριστά. Τότε, η είσοδος-διάνυσμα που δέχεται η  $F$  είναι

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \quad (2.19)$$

και το πεδίο ορισμού αυτής της διανυσματικής μεταβλητής στον  $d$ -διάστατο χώρο γράφεται:



$$\vec{D} = D_1 \times D_2 \times \dots D_d \quad (2.20)$$

Για τις στοχαστικές εισόδους της συνάρτησης  $F$ , γίνεται η παραδοχή ότι όλες ακολουθούν τις ίδιες στοχαστικές κατανομές, αλλά με ξεχωριστές παραμέτρους (μέση τιμή και τυπική απόκλιση) η καθεμιά.

Όπως και στην περίπτωση της μίας μεταβλητής, έτσι κι εδώ, μπορεί να οριστεί με παρόμοιο τρόπο η  $\nu$ -οστή στατιστική ροπή της  $F$  ως

$$\langle y \rangle^\nu = \int \int_{\vec{D}} f(\vec{x})^\nu W(\vec{x}) d\vec{x} \quad (2.21)$$

όπου  $W$  μια γενικευμένη συνάρτηση βάρους που ορίζεται ως το γινόμενο των συναρτήσεων-βαρών των επιμέρους στοχαστικών μεταβλητών δηλαδή

$$W(\vec{x}) = \prod_{i=1}^d w_i(x_i) \quad (2.22)$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με τη θεωρία του PCE, η  $F$  μπορεί να προσεγγιστεί (όπως και στην περίπτωση μίας μεταβλητής) από μια άλλη συνάρτηση  $f$  η οποία όμως αποτελεί γραμμικό συνδυασμό πολυωνύμων μιας νέας οικογένειας πολυωνύμων  $\Psi$ ,

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \dots) \quad (2.23)$$

Το κάθε πολυώνυμο  $\psi_m$  αποτελείται από το γινόμενο των πολυωνύμων  $p_i$  που χρησιμοποιήθηκαν στην περίπτωση μίας μεταβλητής. Αυτά τα πολυώνυμα είναι:

$$\psi_m(\vec{x}) = \prod_{\lambda=1}^d p_{i_\lambda}(x_\lambda) \quad (2.24)$$

όπου  $i_\lambda$ , ο βαθμός του κάθε πολυωνύμου  $p$ . Το άθροισμα των βαθμών των επιμέρους πολυωνύμων πρέπει να ισούται με τη ζητούμενη τάξη χάους  $k$ .

Τότε, η  $F$  γράφεται

$$F(\vec{x}) \simeq f(\vec{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \psi_i(\vec{x}) \quad (2.25)$$

Αντικαθιστώντας την 2.25 στην 2.21, η έκφραση της ν-οστής στατιστικής ροπής παίρνει τη μορφή

$$\langle y \rangle^\nu = \int \int_{\vec{D}} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \psi_i(\vec{x}) \right)^\nu W(\vec{x}) d\vec{x} \quad (2.26)$$

Για  $\nu = 1$  στη σχέση 2.26 υπολογίζεται η πρώτη στατιστική ροπή και, άρα, η μέση τιμή ενώ για  $\nu = 2$  υπολογίζεται η δεύτερη στατιστική ροπή η οποία χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης. Για  $\nu = 1$ , από τη σχέση 2.26 υπολογίζεται η μέση τιμή  $\mu_F$

$$\begin{aligned} \mu_F = \langle y \rangle^1 &= \int \int_{\vec{D}} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \psi_i(\vec{x}) \right)^1 W(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \int \int_{\vec{D}} \psi_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Επειδή η συνολική πιθανότητα εμφάνισης είναι ίση με τη μονάδα ( $\int \int_{\vec{D}} W(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{D_1} w_1(x_1) dx_1 \dots \int_{D_d} w_d(x_d) dx_d = 1$ ) και  $\psi_0(\vec{x}) = p_{01}(x_1) \cdot p_{02}(x_2) \dots p_{0d}(x_d) = 1$ , η σχέση 2.27 γίνεται

$$\begin{aligned} \mu_F &= \alpha_0 \int \int_{\vec{D}} \psi_0(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \int \int_{\vec{D}} \psi_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \alpha_0 \int \int_{\vec{D}} \psi_0(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \alpha_0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Για  $\nu = 2$ , από τη σχέση 2.26 υπολογίζεται η δεύτερη στατιστική ροπή  $\langle y \rangle^2$ . Τότε, η τυπική απόκλιση υπολογίζεται από τη σχέση

$$\sigma_F = \sqrt{\langle y \rangle^2 - \mu_F^2} \quad (2.29)$$

Η δεύτερη στατιστική ροπή είναι

$$\begin{aligned}
\langle y \rangle^2 &= \int \int_{\vec{D}} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \psi_i(\vec{x}) \right)^2 W(\vec{x}) d\vec{x} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 \int \int_{\vec{D}} (\psi_i(\vec{x}))^2 W(\vec{x}) d\vec{x} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 \gamma_i
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Για ορθοκανονικά πολυώνυμα ( $\gamma_i = 1$ ), η σχέση 2.30 γίνεται

$$\langle y \rangle^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 \tag{2.31}$$

Από τη σχέση 2.29, με αντικατάσταση της δεύτερης στατιστικής ροπής με τη σχέση 2.31 υπολογίζεται η τυπική απόκλιση

$$\sigma_F = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 - \alpha_0^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2} \tag{2.32}$$

Επομένως, στην  $f$ , μαζί με τη μέση και την τυπική απόκλιση, όπως και πριν, εφαρμόζεται σημείο αποκοπής έως και  $k$ , αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του  $k$ . Τότε, οι σχέσεις 2.25, 2.28 και 2.32 γράφονται

$$\begin{aligned}
f(\vec{x}) &= \sum_{i=0}^k \alpha_i \psi_i(\vec{x}) \\
\mu_F &= \alpha_0 \\
\sigma_F &= \sqrt{\sum_{i=1}^k \alpha_i^2}
\end{aligned}$$

Και εδώ, χρησιμοποιούνται οι προβολές Galerkin για τον υπολογισμό των συντελεστών  $\alpha_i$ . Ακολουθείται παρόμοια διαδικασία με την περίπτωση μίας στοχαστικής μεταβλητής,

$$\langle F(\vec{x}), \psi_i(\vec{x}) \rangle = \int \int_D F(\vec{x}) \psi_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \tag{2.33}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση 2.25 στην εξίσωση 2.33, προκύπτει

$$\begin{aligned}
\langle F(\vec{x}), \psi_i(\vec{x}) \rangle &= \int \int_D \left( \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \psi_m(\vec{x}) \right) \psi_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \int \int_D \psi_m(\vec{x}) \psi_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \\
&= \alpha_i \gamma_i
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις 2.33 και 2.34, προκύπτει η σχέση υπολογισμού των συντελεστών  $\alpha_i$

$$\alpha_i = \frac{1}{\gamma_i} \int \int_D F(\vec{x}) \psi_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \tag{2.35}$$

Με χρήση των ορθοκανονικών πολυωνύμων  $\tilde{\psi}_i$ , η σχέση 2.35 γίνεται

$$\alpha_i = \int \int_D F(\vec{x}) \tilde{\psi}_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \tag{2.36}$$

Τα ολοκληρώματα 2.36 λύνονται, και εδώ, με τη μέθοδο GQ. Συγκεκριμένα, για κανονική κατανομή και για κανονικοποιημένα πιθανοτικά πολυώνυμα Hermite, η 2.36 γράφεται

$$\alpha_i = \sum_{\rho=1}^M W'_\rho F(x_\rho) \tag{2.37}$$

όπου τα βάρη  $W'_\rho$  υπολογίζονται ως το γινόμενο των επιμέρους βαρών  $w'_\rho{}^\lambda$  για κάθε μεταβλητή  $\lambda = 1, \dots, d$ . Τα βάρη αυτά, καθώς και οι ρίζες  $z_\rho$  του πολυωνύμου βαθμού  $k + 1$  επιλέγονται από πίνακες. Όπως και πριν, οι πραγματικοί κόμβοι υπολογίζονται από τη σχέση 2.18.

## 2.4 Οικονομική Επίλυση Προβλημάτων Πολύων Στοχαστικών Μεταβλητών

### 2.4.1 Η Κατάρτα της Μεγάλης Διάστασης

Στην παράγραφο 2.2, μελετήθηκε η περίπτωση του πολυωνυμικού χάους σε περισσότερες της μίας διαστάσεις. Η ολοκλήρωση με GQ απαιτεί τη δημιουργία ενός πλήρους πλέγματος δειγμάτων, που σημαίνει ότι ο αριθμός αξιολογήσεων

της αντικειμενικής συνάρτησης εξαρτάται εκθετικά από τις διαστάσεις του προβλήματος. Στις περιπτώσεις προβλημάτων αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης, η ραγδαία αύξηση του αξιολογήσεων της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης καθιστά την επίλυση τους αδύνατη.

Κατά την ολοκλήρωση με GQ σε προβλήματα με περισσότερες από μία διαστάσεις, απαιτείται η αξιολόγηση της αντικειμενικής συνάρτησης σε κάθε δυνατό συνδυασμό συντεταγμένων σημείων. Το σύνολο αυτών των σημείων ονομάζεται πλήρες πλέγμα (Full-Grid). Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων με Gauss Quadrature, σε ολοκληρώσεις πολλών μεταβλητών, χρειάζονται  $k + 1$  δείγματα ανά κατεύθυνση, όσες και οι ρίζες του αντίστοιχου πολυωνύμου βαθμού  $k + 1$ , το οποίο σημαίνει ότι συνολικά θα χρειαστούν  $(k + 1)^d$  αξιολογήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης για τον υπολογισμό των συντελεστών  $a_i$ , δηλαδή, ο αριθμός κλήσεων της  $F$  εξαρτάται εκθετικά από τον αριθμό των διαστάσεων του προβλήματος. Η εκθετική αύξηση των σημείων που απαιτούνται για την ολοκλήρωση της ζητούμενης ποσότητας είναι γνωστή ως “κατάρρα της μεγάλης διάστασης” (curse of dimensionality). Έστω ότι σε ένα πρόβλημα αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού υπάρχουν  $d = 3$  στοχαστικές μεταβλητές και επιθυμάται τάξη χάους ίση με  $k = 2$ . Αυτό σημαίνει ότι απαιτούνται  $(k + 1)^d = (2 + 1)^3 = 27$  αξιολογήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης. Αν για κάποιο λόγο δεν είναι ικανοποιητικά τα αποτελέσματα και γίνεται επιθυμητή η βελτίωση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων αυξάνοντας την τάξη χάους από 2 σε 3 τότε θα χρειαστούν  $(3 + 1)^3 = 64$  κλήσεις, σχεδόν δύομισι φορές περισσότερες από πριν.

## 2.4.2 Τα Αραιά Πλέγματα Smolyak

Η ραγδαία αύξηση του υπολογιστικού κόστους των πλήρων πλεγμάτων οδήγησε τον Smolyak να αναπτύξει μια μέθοδο αντιμετώπισής τους που ονομάστηκε “Μέθοδος αραιών πλεγμάτων Smolyak” [10]. Απελευθερωμένα έως ένα βαθμό από την κατάρρα της μεγάλης διάστασης, τα αραιά πλέγματα Smolyak μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσέγγιση της τιμής των ολοκληρωμάτων πολλών διαστάσεων χωρίς υπερβολικά υψηλό κόστος. Η βασική ιδέα των αραιών πλεγμάτων στηρίζεται στο ότι δεν χρειάζονται όλοι οι κόμβοι ενός πλήρους πλέγματος για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων, παρά μόνο συγκεκριμένοι πιο σημαντικοί, οι οποίοι διαθέτουν πλέον διαφορετικά –τροποποιημένα– βάρη. Υπάρχουν πολλά είδη αραιών πλεγμάτων Smolyak, τα οποία διαθέτουν διαφορετικό βαθμό «εμφωλιασμού»(nesting), δίνεται, δηλαδή, έμφαση περισσότερο στους κεντρικούς κόμβους. Ονομάζονται εμφωλιασμένα πλέγματα καθώς κάθε μεγαλύτερη τάξη προσέγγισης περιλαμβάνει έναν αριθμό κόμβων μικρότερης

τάξης. Μεγάλος βαθμός εμφωλιασμού ενός αραιού πλέγματος σημαίνει ότι δίνεται μεγάλη βαρύτητα στις κεντρικές τιμές, με αποτέλεσμα το πλέγμα να μην περιλαμβάνει πολλές ακραίες τιμές και, άρα, να προκύπτει αραιότερο.

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος  $I$  μιας συνάρτησης  $f(\vec{x})$  με βάση τη μέθοδο Gauss-Quadrature όπου  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  και

$$I = \int \int_{\vec{D}} f(\vec{x}) d\vec{x} \quad (2.38)$$

ακολουθώντας τα εξής βήματα:

1) Επιλογή τάξης προσέγγισης πλέγματος  $k$ . Μεγαλύτερο  $k$  σημαίνει χρήση περισσότερων κόμβων από το πλήρες πλέγμα και, άρα, καλύτερη προσέγγισή του. Ταυτόχρονα, όμως, αυξάνεται και ο αριθμός των αξιολογήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης και, κατά συνέπεια, το κόστος του υπολογισμού του ολοκληρώματος  $I$ .

2) Καθορισμός όλων των δυνατών συνδυασμών  $N_{SMOL}$  οι οποίοι ικανοποιούν την ανισότητα

$$d < \sum_{l=1}^d i_l < d + k \quad (2.39)$$

3) Υπολογισμός των νέων τροποποιημένων βαρών  $w_{SMOL}$  για κάθε κόμβο του νέου πλέγματος

4) Τέλος, υπολογίζεται το ολοκλήρωμα κατά Gauss-Quadrature αυτή τη φορά με χρήση των νέων κόμβων του αραιού πλέγματος Smolyak

Εδώ είναι απαραίτητο να αναφερθεί ότι η μέθοδος των αραιών πλεγμάτων Smolyak δεν είναι κατάλληλη για όλους τους συνδυασμούς  $k$  και  $d$  καθώς για πολύ μικρή τάξη χάους και για πολύ λίγες στοχαστικές μεταβλητές, ο αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να είναι μεγαλύτερος απ' ότι θα ήταν με το πλήρες πλέγμα. Για παράδειγμα, αν  $d = 1$  και  $k = 4$  τότε χρειάζεται  $(k + 1)^d = 5$  αξιολογήσεις ενώ με αραιό πλέγμα Smolyak χρειάζεται 17. Η δύναμη της μεθόδου φαίνεται για μεγάλες τάξεις χάους ( $k > 3$ ) και για πολλές στοχαστικές μεταβλητές ( $d > 5$ ). Αν, όμως,  $d = 5$  και  $k = 2$  τότε με το πλήρες πλέγμα θα χρειαστούν  $(k + 1)^d = 243$  αξιολογήσεις ενώ με πλέγμα Smolyak χρειάζονται 61, αρκετά λιγότερες σε σχέση με το πλήρες πλέγμα.

## Κεφάλαιο 3

# Μοντελοποίηση Κατασκευαστικών Ατελειών

### 3.1 Γενικά περι Κατασκευαστικών Ατελειών

Κατά την κατασκευή σωμάτων, είναι πιθανή η εμφάνιση ατελειών (ως προς το σχέδιο της κατασκευής) μετά το πέρας της διαδικασίας κατασκευής τους. Σε μεγάλο βαθμό ευθύνεται η στοχαστικότητα που διέπει το περιβάλλον κατασκευής όπως η κατάσταση των κοπτικών εργαλείων. Για παράδειγμα, μπορεί το ίδιο το εργαλείο να έχει υποστεί φθορά ή να υπάρξει κάποιο πρόβλημα στην κίνησή του.

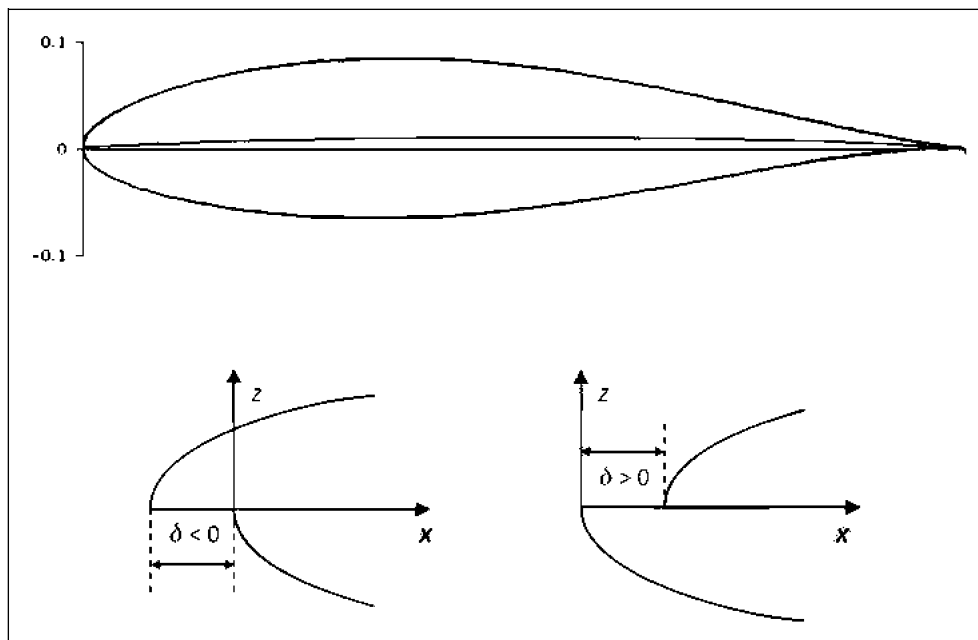
Από το σχεδιασμό μιας αεροτομής προκύπτει το περίγραμμά της, είτε ως ένα σύνολο σημείων ελέγχου καμπυλών Bezier, είτε ως μια πολυωνυμική συνάρτηση είτε με οποιονδήποτε άλλο τρόπο. Στην πραγματικότητα όμως, δεν γίνεται να προσεγγιστεί η επιθυμητή γεωμετρία χωρίς να υπάρχει κάποιο σφάλμα. Γι' αυτό το λόγο υπάρχουν οι ανοχές, δηλαδή υπάρχει ένα όριο σφάλματος μέχρι το οποίο το τελικό προϊόν γίνεται αποδεκτό, ενώ πέραν αυτού, απορρίπτεται.

Υπάρχουν πολλά είδη κατασκευαστικών ατελειών. Μερικά από αυτά είναι: διάφορες ατέλειες επιφανείας οι οποίες αλλοιώνουν την ομαλότητά (smoothness) της. Μερικές τέτοιες ατέλειες είναι: προεξοχές (bulges), ασυνέχειες (ειδικά στην περίπτωση κατασκευής πτέρυγας αεροσκάφους όπου π.χ. μπορεί δύο τμήματα λαμαρίνων να μην ταιριάζουν απόλυτα με αποτέλεσμα να δημιουργείται κενό μεταξύ τους), κυματισμοί (waviness), τραχύτητα (roughness) [12] κ.α..

Υπάρχουν επίσης και οι απλές ιδιομορφίες στην επιφάνεια των σωμάτων,

δηλαδή 'χαρούμπαλα' (bumps) με μεγάλο πλάτος και πολύ μικρό ύψος, αρκετά μικρό που δεν φαίνεται με γυμνό μάτι. Έτσι μπορεί η εκάστοτε γεωμετρία να είναι εντός ανοχών αλλά αποκλίνει από το αρχικό σχέδιο. Αυτές οι ιδιομορφίες αποκαλούνται 'διαμορφώσεις'. Αυτά τα είδη ατελειών είναι το αντικείμενο μελέτης αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Στο σχήμα 3.1 παρουσιάζεται μια αεροτομή NACA 63<sub>2</sub>-215 όπου υπάρχει κατασκευαστική ατέλεια στην ακμή προσβολής (leading edge imperfection). Σε αυτό το παράδειγμα, με  $\delta$  συμβολίζεται η διαφορά της πλευράς υποπίεσης από την πλευρά υπερπίεσης. Τέτοιου είδους κατασκευαστικές ατέλειες παρουσιάζονται συνήθως σε μη-αεροναυτικές εφαρμογές, όπως, ίσως, σε πτέρυγες ανεμογεννητριών [13].



Σχήμα 3.1: Κατασκευαστικές ατέλειες ραφής στην ακμή προσβολής αεροτομής NACA63<sub>2</sub>-215 [13].

Τέλος, υπάρχει πιθανότητα να παρουσιαστεί ένας συνδυασμός από όλα τα παραπάνω είδη ατελειών, κάτι που είναι φυσικά πολύ περισσότερο σπάνιο.



### 3.2 Μοντελοποίηση Κατασκευαστικών Ατελειών - Η Συνάρτηση Hicks-Henne

Το 1973, προτάθηκε από τους R. M. Hicks και P. A. Henne [14] ένας νέος τρόπος γένεσης γεωμετρίας αεροτομών όπου γίνεται χρήση ενός συνόλου λείων συναρτήσεων με τις οποίες προσεγγίζεται η επιθυμητή γεωμετρία. Σύμφωνα με τους Hicks και Henne, η κάθε πλευρά μιας αεροτομής δίνεται από ένα άθροισμα  $n$  ημιτονοειδών συναρτήσεων, δηλαδή

$$y = y_{basis} + \sum_{i=1}^n f_i(x) \quad (3.1)$$

όπου

$$f_i(x) = \alpha_i \left( \sin \left( \pi x \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(t_1^i)} \right) \right)^{t_2^i} \quad (3.2)$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις που ακολουθούν, χρησιμοποιείται μία απλή διαμόρφωση ( $n = 1$ ). Τότε η σχέση 3.2 γράφεται

$$f(x) = \alpha \left( \sin \left( \pi x \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(t_1)} \right) \right)^{t_2} \quad (3.3)$$

Στη σχέση 3.2, η παράμετρος  $\alpha_i$  είναι ένας πολλαπλασιαστής, του οποίου η φυσική σημασία είναι το ύψος της κορυφής της συνάρτησης, με  $t_1^i$  η θέση (αδιάστατη, με πεδίο τιμών  $(0, 1)$ ) στην οποία βρίσκεται το ακρότατο της συνάρτησης ενώ με  $t_2^i$  περιγράφεται η στενότητα της κορυφής. Ο δείκτης  $i$  αναφέρεται στην εκάστοτε ημιτονοειδή συνάρτηση ενώ με  $y_{basis}$  συμβολίζεται η μέση γραμμή κυρτότητας στην οποία υπερτίθενται οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις. Για συμμετρικές αεροτομές, αυτή η γραμμή ταυτίζεται με τον άξονα των τετμημένων  $x$  άρα τότε θα είναι  $y_{basis} = 0$ .

Η παραπάνω έκφραση υποδηλώνει μία ημιτονοειδή συνάρτηση με την οποία είναι δυνατή η περιγραφή απλών ατελειών. Αυτό όμως δεν σημαίνει πως δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην πιο σύνθετη μορφή της, την 3.2. Μάλιστα, με την 3.2 είναι δυνατή η κάλυψη περισσότερων ειδών ατελειών όπως για παράδειγμα πιο σύνθετες διαμορφώσεις στην επιφάνεια της αεροτομής, με υπέρθεση διαφορετικών ημιτονοειδών συναρτήσεων Hicks-Henne (H-H).

Στην περίπτωση όπου η 3.3 χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση διαμορφώσεων μέσω υπέρθεσης σε δεδομένη αεροτομή, οι παράμετροι στην εξίσωση αυτή έχουν παρόμοια σημασία, δηλαδή με  $\alpha$  περιγράφεται το ύψος της κορυφής της ατέλειας, με  $t_1$  η θέση στο διάστημα  $(0, 1)$  στην οποία βρίσκεται το μέγιστο ύψος της ατέλειας, ενώ με  $t_2$  η στενότητα της κορυφής αυτής. Τα παραπάνω είναι παράμετροι τοπικές στη γεωμετρία της ατέλειας.

Στη συνέχεια, αναλύονται οι παραπάνω παράμετροι για διάφορες τιμές τους, για να γίνει πιο κατανοητή η συμπεριφορά της σχέσης 3.3.

Αρχικά θα χρησιμοποιηθούν διαφορετικές τιμές της παραμέτρου ύψους  $\alpha$  κρατώντας τις άλλες παραμέτρους σταθερές. Συγκεκριμένα, στον πίνακα 3.1 καταγράφονται οι διαφορετικές τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιούνται. Στο σχήμα 3.2 απεικονίζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης 3.3 για τις παραμέτρους του πίνακα 3.1. Σε όλα τα επόμενα σχήματα, **δεν διατηρείται η κλίμακα στους δύο άξονες** για λόγους ευκρίνειας σχημάτων.

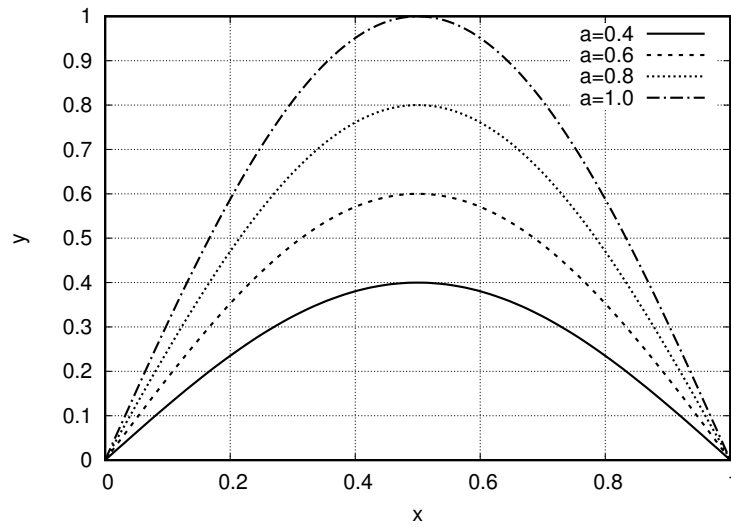
Πίνακας 3.1: Τιμές των παραμέτρων της συνάρτησης Hicks-Henne του σχήματος 3.2. Οι παράμετροι  $t_1$  και  $t_2$  διατηρούνται σταθερές ενώ αλλάζει η παράμετρος ύψους  $\alpha$ .

$\alpha$	$t_1$	$t_2$
0.4	0.5	1
0.6	0.5	1
0.8	0.5	1
1.0	0.5	1

Από το σχήμα 3.2 φαίνεται πώς η παράμετρος ύψους της ατέλειας μπορεί να επηρεάσει τη μορφή της. Αρνητικές τιμές της παραμέτρου υποδηλώνουν έλλειμα υλικού στο σημείο αυτό.

Σειρά έχει η παράμετρος θέσης του μέγιστου σημείου της ατέλειας  $t_1$ . Επειδή πρόκειται για θέση, όπως και για τις τιμές της συνάρτησης H-H, αυτή η παράμετρος παίρνει τιμές στο διάστημα  $(0, 1)$ . Στον πίνακα 3.2 καταγράφονται οι διαφορετικές τιμές της παραμέτρου που εξετάζονται. Οι άλλες δύο παράμετροι διατηρούνται σταθερές και ίσες με  $\alpha = 0.6$  και  $t_2 = 1$ . Στο σχήμα 3.3 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης Hicks-Henne για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $t_1$  με τις υπόλοιπες παραμέτρους να παραμένουν σταθερές.

Από το σχήμα 3.3 αλλά και από τα προηγούμενα σχήματα καθώς και από



Σχήμα 3.2: Συνάρτηση Hicks-Henne για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\alpha$  ( $t_1 = 0.5, t_2 = 1$ ).

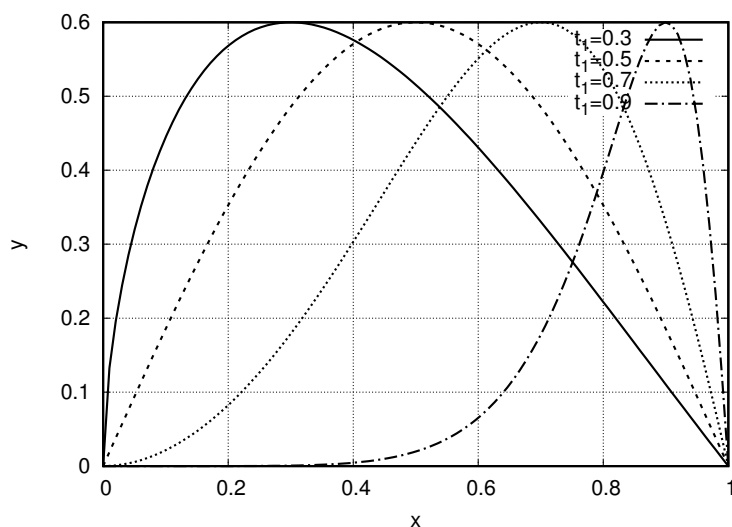
Πίνακας 3.2: Τιμές των παραμέτρων της συνάρτησης Hicks-Henne του σχήματος 3.3. Οι παράμετροι  $\alpha$  και  $t_2$  διατηρούνται σταθερές ενώ αλλάζει η παράμετρος ύψους  $t_1$ .

$\alpha$	$t_1$	$t_2$
0.6	0.3	1
0.6	0.5	1
0.6	0.7	1
0.6	1.0	1

τη σχέση 3.3, βγαίνει το συμπέρασμα ότι η συνάρτηση Hicks-Henne δεν είναι συμμετρική ως προς τον άξονα  $y$ . Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι σε κάθε περίπτωση ο τρόπος με τον οποίο η συνάρτηση αυξάνει μέχρι το μέγιστο και μετά φθίνει δεν είναι ο ίδιος, εκτός από την περίπτωση όπου  $t_1 = 0.5$ .

Τέλος, εξετάζονται διαφορετικές τιμές της παραμέτρου  $t_2$  κρατώντας τις υπόλοιπες παραμέτρους σταθερές και ίσες με  $\alpha = 0.6$  και  $t_1 = 0.5$ . Στον πίνακα 3.3 καταγράφονται οι διαφορετικές τιμές της παραμέτρου  $t_2$ . Στο σχήμα 3.4 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της 3.3 για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου  $t_2$ .

Από το σχήμα 3.4, προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα για την παράμετρο  $t_2$ .



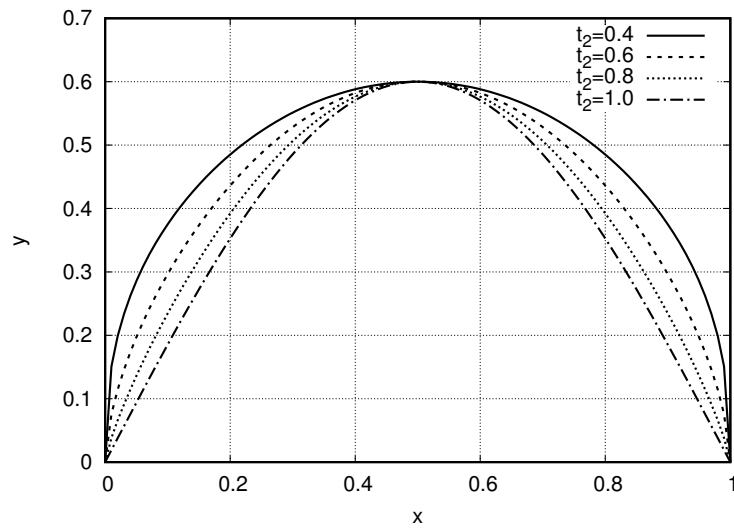
Σχήμα 3.3: Συνάρτηση Hicks-Henne για διάφορες τιμές του  $t_1$  ( $\alpha = 0.6, t_2 = 1$ ).

Πίνακας 3.3: Τιμές των παραμέτρων της συνάρτησης Hicks-Henne του σχήματος 3.4. Οι παράμετροι  $\alpha$  και  $t_1$  διατηρούνται σταθερές ενώ αλλάζει η παράμετρος ύψους  $t_2$ .

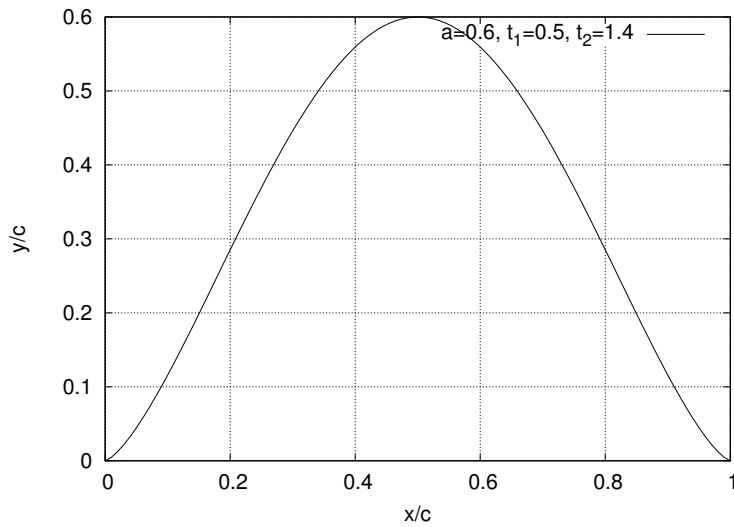
$\alpha$	$t_1$	$t_2$
0.6	0.5	0.4
0.6	0.5	0.6
0.6	0.5	0.8
0.6	0.5	1.0

Όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή της παραμέτρου τόσο πιο στενή είναι η κορυφή της ατέλειας. Στο σχήμα 3.5 απεικονίζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης Hicks-Henne για  $t_2 = 1.4$ .

Από τα σχήματα 3.4 και 3.5, φαίνεται ότι για τιμές της παραμέτρου  $t_2$  μεγαλύτερες της μονάδας, καθώς η τιμή της τετμημένης  $x$  αυξάνεται, η γραφική παράσταση της H-H είναι κυρτή στο διάστημα  $[0, 1]$  ενώ για  $t_2 < 1$ , είναι κοίλη. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η τιμή της H-H καθώς και οι υπόλοιπες παράμετροί της είναι αδιάστατες. Αυτό σημαίνει ότι το πλάτος της βάσης της ισούται με τη μονάδα ενώ δεν έχει ακόμα οριστεί το πού θα βρίσκεται πάνω στον άξονα των τετμημένων  $x$ . Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους  $S$ , στο οποίο θα τοποθετηθεί μια καμπύλη H-H σε κάποια θέση, έστω  $x'_i = \frac{x_i}{S}$ , αδιάστατη ως προς το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος. Αν  $[x_A, x_B]$  είναι το διάστημα



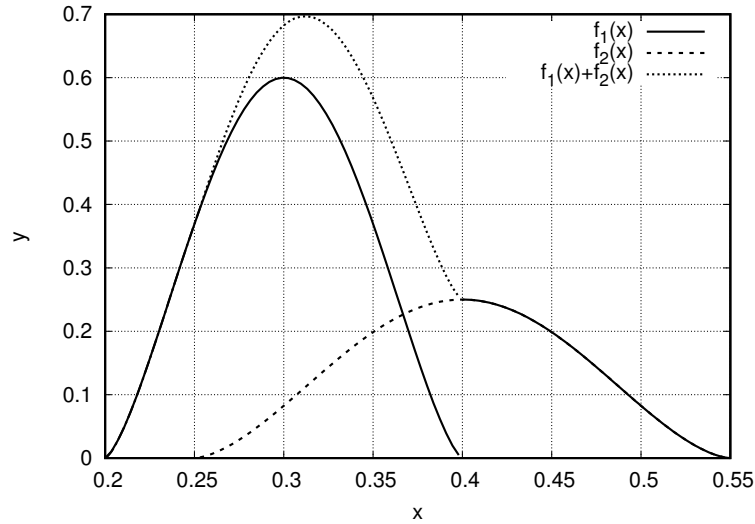
Σχήμα 3.4: Συνάρτηση Hicks-Henne για διάφορες τιμές του  $t_2$  ( $\alpha = 0.6, t_1 = 0.5$ )



Σχήμα 3.5: Συνάρτηση Hicks-Henne  $t_2 = 1.4$

στο οποίο αρχίζει και τελειώνει η καμπύλη H-H τότε, η θέση του κέντρου της βάσης της θα βρίσκεται στη θέση  $x_l = \frac{x_A + x_B}{2}$  ενώ το, διαστατό πλέον, πλάτος της θα είναι ίσο προς  $x_r = x_B - x_A$ . Οι τετμημένες της H-H πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα είναι  $x_{HH} = x_A + x'$  όπου  $x' = \frac{x - x_A}{x_r}$  η αδιάστατη τετμημένη στο διάστημα  $[0, 1]$ . Στο σχήμα 3.6 φαίνονται δύο καμπύλες H-H καθώς και η

υπέρθεσή τους.



Σχήμα 3.6: Δύο καμπύλες H-H σε ευθεία, οι οποίες υπερτίθενται. Παράμετροι της πρώτης καμπύλης:  $\alpha = 0.6, t_1 = 0.5, t_2 = 1.4, x'_l = 0.3, x_r = 0.2$ , παράμετροι της δεύτερης καμπύλης:  $\alpha = 0.25, t_1 = 0.5, t_2 = 1.6, x'_l = 0.4, x_r = 0.3$ .

Όταν οι παράμετροι πλάτους  $x_r$  και θέσης  $x_l$  είναι γνωστές, οι θέσεις αρχής και τέλους της καμπύλης H-H υπολογίζονται από τις σχέσεις  $x_A = x_l - \frac{x_r}{2}$  και  $x_B = x_l + \frac{x_r}{2}$ .

### 3.3 Εφαρμογή Καμπυλών Hicks-Henne σε Αεροτομές

Έστω  $\vec{r} = (x, y)$  η καμπύλη της αεροτομής και  $\vec{r}_b = (x_b, y_b)$  η καμπύλη της συνάρτησης ατέλειας Hicks-Henne. Στόχος είναι η δημιουργία μιας νέας αεροτομής με καμπύλη  $\vec{r}_a = (x_a, y_a)$ , όπου υπάρχει μια κατασκευαστική ατέλεια σε κάποιο σημείο της αεροτομής.

Ορίζεται, επίσης, η θέση πάνω στην αεροτομή στην οποία βρίσκεται η ατέλεια, έστω  $s_l$ , καθώς και το πραγματικό μήκος της ατέλειας πάνω στην αεροτομή, έστω  $s_r$ . Αν  $x, y$  είναι οι συντεταγμένες της κλειστής γεωμετρίας (αεροτομής) τότε ορίζεται το μήκος  $s$  όπου για κάθε τιμή του αντιστοιχεί ένα μοναδικό ζεύγος συντεταγμένων  $x, y$  πάνω στη αεροτομή καθώς αυτή διαγράφεται αριστερόστροφα με αρχή την ακμή εκφυγής (trailing edge), είναι, δηλαδή

το μήκος τόξου της αεροτομής. Όπως και πριν, ορίζεται η αδιάστατη θέση της ατέλειας  $s'_i = \frac{s_i}{S}$ , όπου  $S$ , συμβολίζεται το συνολικό μήκος τόξου της κλειστής γεωμετρίας. Το πεδίο ορισμού αυτής της παραμέτρου τότε είναι το  $[0, 1]$ . Για παράδειγμα, αν μια αεροτομή έχει συνολικό μήκος τόξου  $S = 2.5$  και η ατέλεια βρίσκεται στο μέσον της πλευράς υποπίεσης τότε  $s_i = 0.625$  και  $s'_i = \frac{s_i}{S} = \frac{0.625}{2.5} = 0.25$ . Από εδώ και στο εξής, όποτε γίνεται αναφορά στη θέση της ατέλειας  $s_i$ , εννοείται μόνο η σχετική της θέση.

Για κάθε σημείο της αεροτομής υπολογίζεται το κάθετο διάνυσμα  $\vec{n}_i$  με φορά προς τα έξω. Πρώτα υπολογίζεται το εφαπτομενικό διάνυσμα:

$$\vec{e}_i = (x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1}) \quad (3.4)$$

Το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα είναι:

$$\hat{e}_i = \frac{\vec{e}_i}{\|\vec{e}_i\|} = \frac{\vec{e}_i}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}} \quad (3.5)$$

Το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα τότε είναι:

$$\hat{n}_i = M\hat{e}_i \quad (3.6)$$

όπου  $M$  είναι το μητρώο στροφής

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Άρα, η τελική αεροτομή υπολογίζεται ως:

$$\vec{r}_a = \vec{r} + h_b \hat{n} \quad (3.7)$$

όπου  $h_b = y_b(x)$  το ύψος της ατέλειας στη θέση  $x, y$  της αεροτομής. Φυσικά, πριν υπολογιστεί το ύψος αυτό, η θέση  $x$  έχει αδιαστατοποιηθεί στο σύστημα συντεταγμένων  $x_b, y_b$  της ατέλειας. Για κάθε συντεταγμένη ξεχωριστά είναι:

$$x_a = x + h_b n_x \quad (3.8)$$

$$y_a = y + h_b n_y \quad (3.9)$$

Οι παραπάνω σχέσεις (3.7 – 3.9) ισχύουν για

$$s_l - \frac{s_r}{2} < r < s_l + \frac{s_r}{2} \quad (3.10)$$

Για τα υπόλοιπα σημεία της κλειστής γεωμετρίας, θα ισχύει κανονικά  $\vec{r}_a = \vec{r}$  ή  $x_a = x$  και  $y_a = y$ .

Είναι φανερό ότι πλέον είναι απαραίτητες επιπλέον δύο παράμετροι ( $s_r$  και  $s_l$ ) για την πλήρη περιγραφή της ατέλειας όταν γίνεται αναφορά σε αεροτομή. Αρχικά, πριν την επίλυση ροής, είναι απαραίτητο να καθοριστούν κάποια όρια στις παραμέτρους της σχέσης 3.3 ώστε να αντιπροσωπεύονται πιο σωστά τέτοιες ατέλειες. Βασική παράμετρος είναι η παράμετρος ύψους ( $\alpha$ ) καθώς αυτή η παράμετρος επηρεάζει την τελική μορφή της ατέλειας σε μεγαλύτερο βαθμό σε σχέση με τις άλλες παραμέτρους. Εδώ θα χρησιμοποιηθούν μικρά ύψη σε σχέση με την αεροτομή, τόσο μικρά που δύσκολα διακρίνονται με γυμνό μάτι. Επομένως, ορίζεται το ακόλουθο εύρος για την παράμετρο ύψους με μοναδιαίο μήκος χορδής:(αντίστοιχα ισχύει και για αρνητικές τιμές)

$$0 < \alpha < 0.008 \quad (3.11)$$

Στο πλαίσιο αυτής της διπλωματικής εργασίας μελετώνται ατέλειες κεντραρισμένες στο μέσον του μήκους τους συνεπώς  $t_1 = 0.5$ . Αυτή η παράμετρος διατηρείται σταθερή για το υπόλοιπο αυτής της εργασίας.

Επίσης, δεν μελετώνται ατέλειες με πολύ στενές κορυφές (π.χ. προεξοχές). Επομένως, διατηρούνται τιμές της παραμέτρου  $t_2$  γενικά κοντά στη μονάδα:

$$0.75 < t_2 < 1.25 \quad (3.12)$$

Όσο για τις παραμέτρους θέσης  $s_l$  και πλάτους  $s_r$  μπορούν να πάρουν τιμές στα εύρη:

$$0.0 < s_l < 1.0 \quad (3.13)$$

$$0.3 < s_r < 0.5 \quad (3.14)$$

δηλαδή, η ατέλεια μπορεί να τοποθετηθεί οπουδήποτε πάνω στην αεροτομή και να έχει πλάτος από 30% μέχρι και 50% του μήκους της επιφάνειας της αεροτομής. Τα προηγούμενα ισχύουν σε περίπτωση μίας διαμόρφωσης. Σε περίπτωση πολλών διαμορφώσεων, απαιτούνται περισσότεροι περιορισμοί ώστε η τελική αεροτομή να έχει ατέλειες σε λογικά πλαίσια. Για παράδειγμα, σε μια αεροτομή με τέσσερις διαμορφώσεις, δεν είναι δυνατόν, και οι τέσσερις να είναι στην



ίδια θέση, διότι τότε πρόκειται πλέον για μία διαμόρφωση με υπερβολικά μεγάλο ύψος. Ακόμα ένα παράδειγμα είναι η προσομοίωση σύνθετης διαμόρφωσης όπου είναι επιθυμητή η τοποθέτηση δύο ξεχωριστών κορυφών. Η παράμετρος θέσης κορυφής  $t_1$  πρέπει να πάρει κατάλληλες τιμές ώστε οι επιέρους κορυφές να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες σε όλο το μήκος της ατέλειας.

Στη συνέχεια, ακολουθούν μερικά παραδείγματα αεροτομών με κατασκευαστικές ατέλειες. Οι ατέλειες εφαρμόζονται σε αεροτομή NACA0012. Ο αριθμός Reynolds της ροής ισούται με  $10^6$ , ο αριθμός Mach της επί άπειρον ροής ισούται με 0.5. Η γωνία της επίπειρον ροής είναι ίση με  $1^\circ$ . Λύνεται το σύστημα εξισώσεων N-S με μοντέλο τύρβης Spalart-Allmaras [23]. Κατασκευάζεται υβριδικό πλέγμα με το δομημένο τμήμα γύρω από το στερεό τοίχωμα.

Αναπτύχθηκε λογισμικό για την εφαρμογή των καμπυλών H-H σε αεροτομές. Είναι δυνατή η εφαρμογή δύο ή περισσότερων διαμορφώσεων, οι οποίες μπορούν να αλληλοεπικαλύπτονται (ολόκληρες ή τμήματά τους). Ακόμη είναι εφικτή η προσομοίωση σύνθετων ατελειών, δηλαδή γίνεται εφαρμογή της σχέσης 3.1.

Κάθε φορά διατηρείται η μία παράμετρος σταθερή και αλλάζουν οι υπόλοιπες. Για κάθε παράμετρο, επιλύεται η ροή και καταγράφονται οι συντελεστές άνωσης και αντίστασης.

Η θέση πάνω στην αεροτομή στην οποία εφαρμόζεται η ατέλεια, είναι ίση με  $s_l = 0.25$  δηλαδή στο μέσον της πλευράς υποπίεσης και έχει πλάτος  $s_r = 0.4$ . Αυτές οι δύο παράμετροι διατηρούνται σταθερές για όλες τις περιπτώσεις που θα εξεταστούν σε αυτήν την παράγραφο.

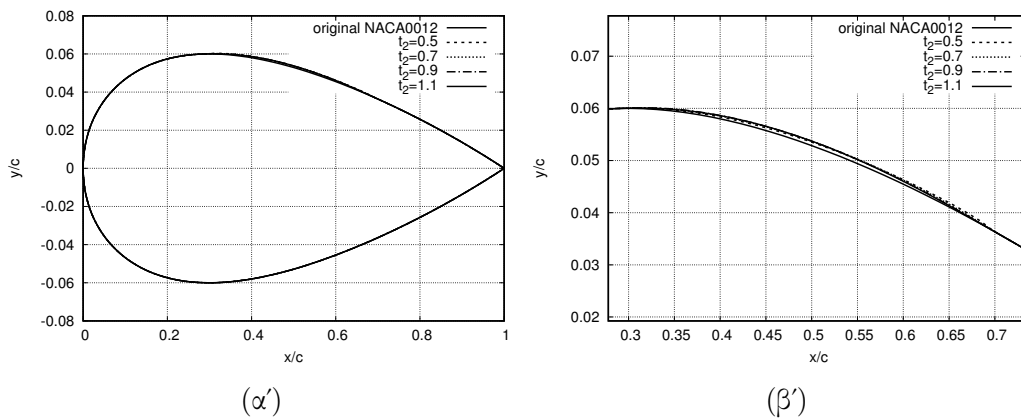
Αρχικά διατηρούνται σταθερές οι παράμετροι ύψους  $\alpha = 0.001$  και σχετικής θέσης κορυφής  $t_1 = 0.5$  και δοκιμάζονται διαφορετικές τιμές της παραμέτρου στενότητας κορυφής  $t_2$ . Οι τιμές της παραμέτρου  $t_2$  που χρησιμοποιούνται, καθώς και οι τιμές των συντελεστών  $c_L$  και  $c_D$  καταγράφονται στον πίνακα 3.4. Η αεροτομή NACA0012 μαζί με τις διαφορετικές διαμορφώσεις H-H απεικονίζονται στο σχήμα 3.7

Στη συνέχεια, μεταβάλλεται η παράμετρος  $t_1$  ενώ διατηρούνται σταθερές οι άλλες δύο παράμετροι. Οι τιμές της παραμέτρου  $t_1$  συγκεντρώνονται στον πίνακα 3.5

Η αεροτομή NACA0012 μαζί με τις διαφορετικές διαμορφώσεις H-H απεικονίζονται στο σχήμα 3.8

Πίνακας 3.4: Τιμές των παραμέτρων της συνάρτησης H-H του σχήματος 3.7 και των συντελεστών άνωσης και αντίστασης. Συγκεκριμένα οι παράμετροι  $\alpha$  και  $t_1$  διατηρούνται σταθερές ενώ αλλάζει η παράμετρος ύψους  $t_2$ . Εφαρμογή σε αεροτομή.

$\alpha$	$t_1$	$t_2$	$c_L$	$c_D$
0.002	0.5	0.5	1.058923	0.0034564
0.002	0.5	0.7	1.058279	0.0034502
0.002	0.5	0.9	1.057277	0.0034784
0.002	0.5	1.1	1.056241	0.0035567



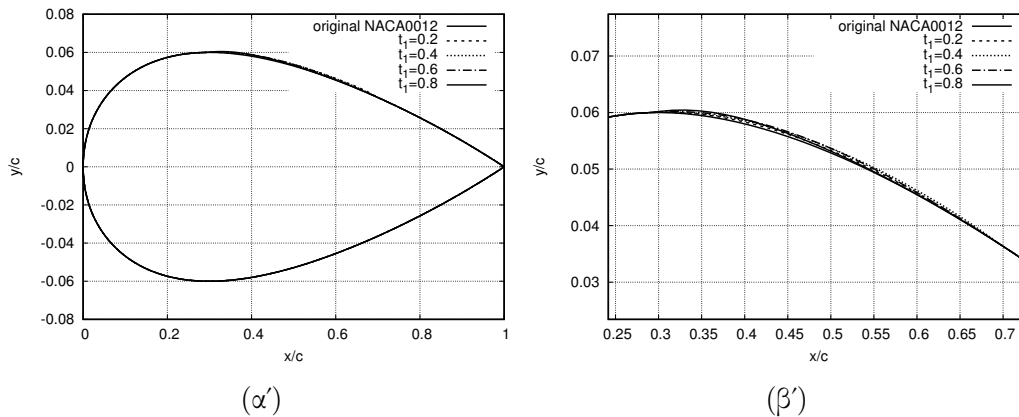
Σχήμα 3.7: Αεροτομή NACA0012 με διαφορετικές διαμορφώσεις H-H (α'): Εφαρμογή συνάρτησης H-H σε αεροτομή NACA0012. Οι παράμετροι  $\alpha$  και  $t_1$  παραμένουν σταθερές ενώ αλλάζει η παράμετρος  $t_2$ . (β'):Εστίαση στο σημείο της ατέλειας.

Πίνακας 3.5: Τιμές των παραμέτρων της συνάρτησης H-H του σχήματος 3.8 και των συντελεστών άνωσης και αντίστασης. Συγκεκριμένα οι παράμετροι  $\alpha$  και  $t_2$  διατηρούνται σταθερές ενώ αλλάζει η παράμετρος  $t_1$ .

$\alpha$	$t_2$	$t_1$	$c_L$	$c_D$
0.002	0.9	0.2	1.057788	0.0034514
0.002	0.9	0.4	1.057953	0.0034353
0.002	0.9	0.6	1.055868	0.0036203
0.002	0.9	0.8	1.051763	0.0037089

Τέλος μεταβάλλεται η παράμετρος ύψους  $\alpha$  ενώ διατηρούνται σταθερές οι παράμετροι θέσης κορυφής  $t_1$  και στένωσης κορυφής  $t_2$ . Οι τιμές των σταθερών παραμέτρων καθώς και της παραμέτρου ύψους  $\alpha$  απεικονίζονται στον πίνακα 3.6.

Η αεροτομή NACA0012 μαζί με τις διαφορετικές διαμορφώσεις  $HH$  απει-



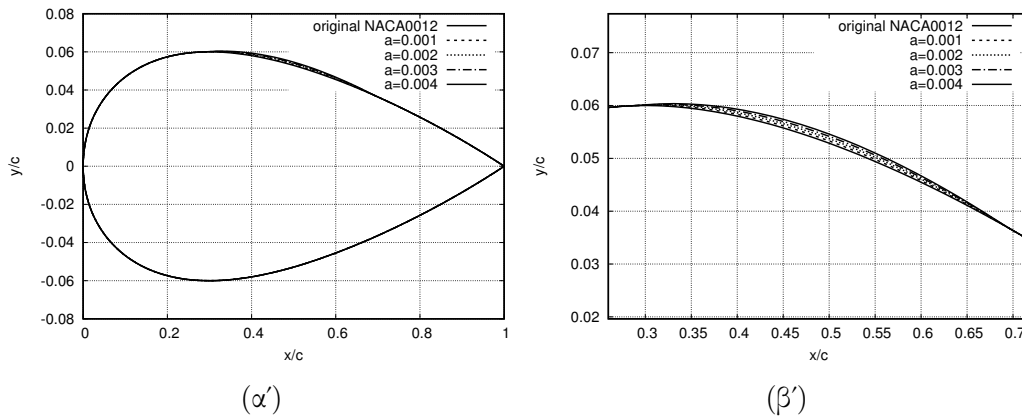
Σχήμα 3.8: Αεροτομή NACA0012 με διαφορετικές διαμορφώσεις H-H. (α'): Εφαρμογή συνάρτησης H-H σε αεροτομή NACA0012. Οι παράμετροι  $\alpha$  και  $t_2$  παραμένουν σταθερές ενώ αλλάζει η παράμετρος  $t_1$ . (β'):Εστίαση στο σημείο της ατέλειας.

Πίνακας 3.6: Τιμές των παραμέτρων της συνάρτησης H-H του σχήματος 3.9 και των συντελεστών άνωσης και αντίστασης. Συγκεκριμένα οι παράμετροι  $t_1$  και  $t_2$  διατηρούνται σταθερές ενώ αλλάζει η παράμετρος  $\alpha$ . Εφαρμογή σε αεροτομή.

$t_1$	$t_2$	$\alpha$	$c_L$	$c_D$
0.5	0.9	0.001	1.051667	0.0034393
0.5	0.9	0.002	1.057277	0.0034501
0.5	0.9	0.003	1.062920	0.0034784
0.5	0.9	0.004	1.069934	0.0035367

κονίζονται στο σχήμα 3.9

Από τα παραπάνω παραδείγματα είναι φανερό ότι η παράμετρος ύψους  $\alpha$  είναι η παράμετρος με τη μεγαλύτερη βαρύτητα όσον αφορά τη μορφή της ατέλειας και τις επιπτώσεις της στα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά της αεροτομής. Σε μικρότερο βαθμό ακολουθεί η παράμετρος θέσης κορυφής και η παράμετρος στενότητας κορυφής, ειδικά για τόσο μικρά ύψη. Όταν αλλάζουν η παράμετρος στενότητας και θέσης κορυφής ( $t_2$  και  $t_1$ ) δεν φαίνεται αισθητή διαφορά στην τελική μορφή της αεροτομής. Περισσότερο ορατή είναι η διαφορά στη γεωμετρία όταν αλλάζει η παράμετρος ύψους της ατέλειας  $\alpha$ .



Σχήμα 3.9: Αεροτομή NACA0012 με διαφορετικές διαμορφώσεις Η-Η. (α'): Εφαρμογή συνάρτησης Η-Η σε αεροτομή NACA0012. Οι παράμετροι  $t_1$  και  $t_2$  παραμένουν σταθερές ενώ αλλάζει η παράμετρος ύψους  $a$ . (β'): Εστίαση στο σημείο της ατέλειας.

## Κεφάλαιο 4

# Εφαρμογή PCE - Ποσοτικοποίηση Αβεβαιότητας

### 4.1 Εισαγωγικά Στοιχεία

Στο κεφάλαιο 2 έγινε ανάλυση της μεθόδου αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους για μία και πολλές στοχαστικές μεταβλητές ενώ στο κεφάλαιο 3 έγινε ανάλυση των πιο συνηθισμένων ειδών κατασκευαστικών ατελειών καθώς και η ανάλυση του τρόπου με τον οποίο παραμετροποιούνται.

Σε αυτό το κεφάλαιο, εφαρμόζεται η μη-επεμβατική μέθοδος πολυωνυμικού χάους σε ένα πρόβλημα επίλυσης ροής γύρω από μεμονωμένη αεροτομή NACA0012 ως μέθοδος ποσοτικοποίησης αβεβαιότητας. Δεν πραγματοποιείται σε αυτό το κεφάλαιο βελτιστοποίηση μορφής. Ο κώδικας επίλυσης της ροής έχει αναπτυχθεί στη ΜΠΥΡΒ/ΕΘΣ και έχει γραφτεί για να τρέχει σε κάρτες γραφικών για συμπιεστό ρευστό με χρήση του μοντέλου τύρβης Spalart-Allmaras [23] μίας εξίσωσης. Για κάθε νέα τιμή της στοχαστικής μεταβλητής, δημιουργείται εκ νέου υβριδικό πλέγμα.

Ως αντικειμενικές συναρτήσεις  $F$  του προβλήματος χρησιμοποιούνται, χωριστά, ο συντελεστής άωσης  $c_L$  και ο συντελεστής αντίστασης  $c_D$ . Οι αντίστοιχες μετρικές αεροδυναμικής στιβαρότητας είναι

$$\hat{F}_1 = \mu_{CL} + \kappa_1 \sigma_{CL} \quad (4.1)$$

$$\hat{F}_2 = \mu_{CD} + \kappa_2 \sigma_{CD} \quad (4.2)$$

Όσον αφορά τις συνθήκες της ροής, θεωρήθηκε αριθμός Mach της επ' άπειρον ροής ίσος με 0.5, η γωνία της επ' άπειρον ροής τέθηκε ίση με  $1^\circ$  και ο αριθμός

Reynolds της ροής ίσος με  $10^6$ . Αυτές οι συνθήκες διατηρούνται σταθερές σε όλες τις περιπτώσεις.

Για την περίπτωση επίλυσης ροής πτερύγωσης συμπιεστή τέθηκαν δύο ξεχωριστές αντικειμενικές συναρτήσεις, ο λόγος στατικών πιέσεων εισόδου - εξόδου της πτερύγωσης  $p_2/p_1$  καθώς και η γωνία εξόδου της ροής σε μοίρες. Τότε, οι μετρικές αεροδυναμικής στιβαρότητας είναι:

$$\hat{F}_1 = \mu_{p_2/p_1} + \kappa_1 \sigma_{p_2/p_1} \quad (4.3)$$

$$\hat{F}_2 = \mu_{a_2} + \kappa_2 \sigma_{a_2} \quad (4.4)$$

Κάθε φορά, εκτελείται το λογισμικό PCE το οποίο, ανάλογα με την τάξη χάους καλεί το λογισμικό αξιολόγησης, το οποίο είναι ο κώδικας που εφαρμόζει την ατέλεια στην αεροτομή και το λογισμικό που δημιουργεί το πλέγμα και λύνει τη ροή. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς και οι αντίστοιχοι συντελεστές PCE:  $\alpha_i$ .

Αρχικά, εκτελείται μία περίπτωση με τη μέθοδο Monte Carlo και PCE τάξης χάους  $k = 2$  για την πιστοποίηση της μεθόδου. Για τη μέθοδο Monte-Carlo, επιλέγονται 200 δείγματα. Κανονικά, απαιτούνται πολύ περισσότερα για ακριβή αποτελέσματα, αλλά επιλέγονται εδώ λιγότερα για τη μείωση του υπολογιστικού κόστους. Αντικειμενική συνάρτηση είναι ο συντελεστής άνωσης. Για τις συνθήκες της ροής, σε αυτή την περίπτωση, ισχύουν τα εξής: Αριθμός Reynolds της ροής ίσος προς  $10^6$ , Αριθμός Mach = 0.4 και γωνία ροής ίση προς  $1^\circ$ . Ως κατασκευαστική ατέλεια θεωρείται μία διαμόρφωση, οι παράμετροι της οποίας είναι ίδιες με αυτές της πρώτης περίπτωσης που παρουσιάζεται στη συνέχεια.

Συνολικά, εξετάζονται τρεις περιπτώσεις αεροτομών με κατασκευαστικές ατέλειες. Αρχικά μελετάται η NACA0012 με μία μόνο διαμόρφωση στην πλευρά υποπίεσης και ελέγχεται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων στο διάστημα  $\pm 3\sigma$ , με στοχαστική μεταβλητή την παράμετρο ύψους της διαμόρφωσης. Στη συνέχεια μελετάται πάλι η NACA0012 αυτήν τη φορά με δύο διαμορφώσεις, μία στο μέσον της πλευράς υποπίεσης και μία στο μέσον της πλευράς υπερπίεσης. Συνολικά, γίνεται μελέτη για δύο στοχαστικές μεταβλητές, τα ύψη των δύο διαμορφώσεων. Τέλος, εφαρμόζεται η μέθοδος PCE για πτερύγωση συμπιεστή όπου, αυτήν τη φορά, μελετώνται οι αντικειμενικές συναρτήσεις που αναφέρθηκαν προηγουμένως με μετρικές στιβαρότητας τις σχέσεις 4.4.

Πιο αναλυτικά, οι παράμετροι των διαμορφώσεων που εφαρμόζονται σε κάθε περίπτωση είναι:

- Ύψος της ατέλειας με μέση τιμή 0.003 και τυπική απόκλιση 0.0005, ανήκει δηλαδή στο εύρος τιμών από 0.0015 έως 0.0045 για τάξεις χάους  $k = 2 \dots 4$  ώστε να φανεί η επίπτωση της στοχαστικότητας μίας παραμέτρου στα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά της αεροτομής αλλά και η επίπτωση της τάξης χάους στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Για τις υπόλοιπες παραμέτρους ορίστηκαν οι ακόλουθες τιμές:  $t_1 = 0.5$ ,  $t_2 = 0.9$ ,  $s_l = 0.3$  και  $s_r = 0.4$
- Για τη δεύτερη περίπτωση, το ύψος της πρώτης ατέλειας στην πλευρά υποπίεσης έχει μέση τιμή 0.003 και τυπική απόκλιση 0.001, ανήκει δηλαδή στο εύρος τιμών από 0.001 έως 0.006 για τάξεις χάους  $k = 2 \dots 4$ . Το ίδιο έχει οριστεί και για τη 2η διαμόρφωση. Για τις υπόλοιπες παραμέτρους ορίστηκαν οι ακόλουθες τιμές:  $t_1 = 0.5$ ,  $t_2 = 1.05$ ,  $s_l = 0.25$  και  $s_r = 0.4$  για την πρώτη διαμόρφωση και  $t_1 = 0.5$ ,  $t_2 = 1.05$ ,  $s_l = 0.75$  και  $s_r = 0.45$  για τη δεύτερη.
- Στην τελευταία περίπτωση, εφαρμόζεται μία διαμόρφωση σε περύγωση συμπίεστη με μέση τιμή ύψους ατέλειας στην πλευρά υποπίεσης 0.003 και τυπική απόκλιση 0.0005, δηλαδή ανήκει στο εύρος τιμών από 0.0015 έως 0.0045 για τάξεις χάους από  $k = 2 \dots 4$ . Για τις υπόλοιπες παραμέτρους ορίστηκαν οι ακόλουθες τιμές:  $t_1 = 0.5$ ,  $t_2 = 1.05$ ,  $s_l = 0.3$  και  $s_r = 0.4$ .

## 4.2 Εφαρμογή PCE σε Αεροτομή NACA0012 - Μία Διαμόρφωση

Σε αυτήν την περίπτωση, εφαρμόζεται μία διαμόρφωση (bump) σε αεροτομή NACA0012 με χρήση της συνάρτησης Hicks -Henne για την προσομοίωσή του. Ως αντικειμενική συνάρτηση επιλέχθηκε ο συντελεστής άνωσης ενώ ως στοχαστική μεταβλητή χρησιμοποιήθηκε το ύψος της διαμόρφωσης.

Πρώτα, ακολουθούν τα αποτελέσματα από τη μέθοδο Monte Carlo, στον πίνακα 4.1, τα οποία συγκρίνονται με αυτά της μεθόδου PCE δεύτερης τάξης χάους για την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος, τον συντελεστή άνωσης.

Πίνακας 4.1: Αποτελέσματα μεθόδου PCE τάξης χάους  $k = 2$  και μεθόδου Monte Carlo 200 δειγμάτων. Εφαρμογή σε αεροτομή NACA0012 με κατασκευαστική ατέλεια μία διαμόρφωση. Μία στοχαστική μεταβλητή: η παράμετρος ύψους της ατέλειας  $\alpha$ .

αποτ.	PCE( $k = 2$ )	MC(200)
$\mu$	0.9788741	0.9788956
$\sigma$	0.0017941593	0.0017816477

Από αυτήν την εφαρμογή φαίνεται πόσο πιο οικονομική είναι η μέθοδος του PCE, αφού χρειάστηκε μόλις τρεις κλήσεις του επιλύτη ροής σε αντίθεση με τις 200 που χρειάστηκε η μέθοδος MC για το ίδιο αποτέλεσμα αφού η διαφορά στη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση βρίσκεται στο πέμπτο δεκαδικό ψηφίο.

Στη συνέχεια, στον πίνακα 4.2 καταγράφονται οι τιμές της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων που ορίστηκαν για τάξεις χάους  $k = 2 \dots 4$ .

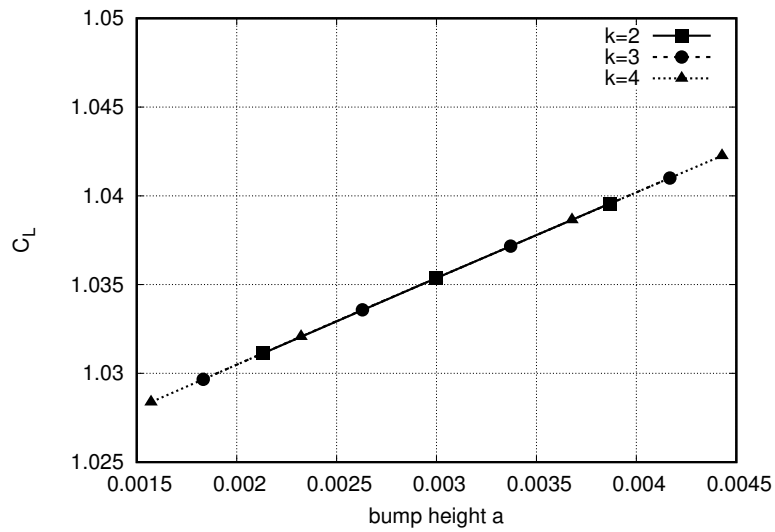
Πίνακας 4.2: Πρώτη περίπτωση εφαρμογής μεθόδου PCE σε αεροτομή NACA0012, με μία στοχαστική μεταβλητή, την παράμετρο ύψους της ατέλειας  $\alpha$ , τάξεις χάους  $k = 2 \dots 4$ .

αποτ.	$\alpha$	$c_L$	$c_D$
$\mu(k = 2)$	0.003	1.0353609	0.0364030
$\sigma(k = 2)$	0.0005	0.0024297	0.00004027
$\mu(k = 3)$	0.003	1.0353669	0.0364028
$\sigma(k = 3)$	0.0005	0.0024232	0.00004008
$\mu(k = 4)$	0.003	1.0353614	0.0364029
$\sigma(k = 4)$	0.0005	0.0024274	0.00004003

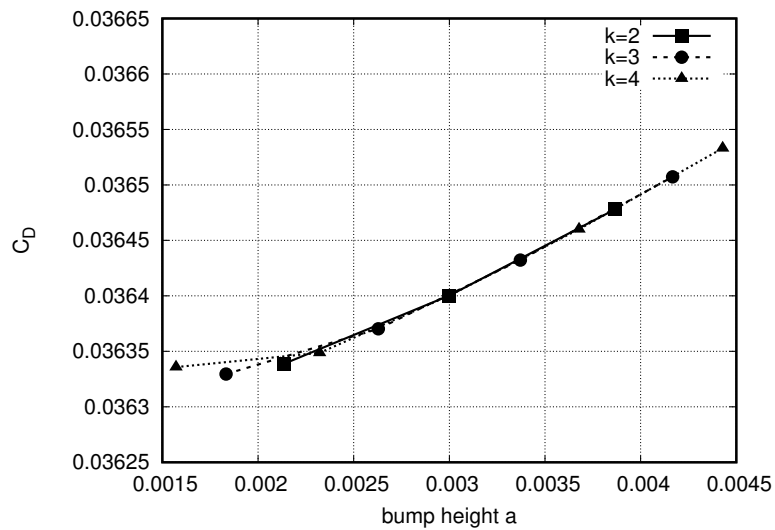
Στο σχήμα 4.1 απεικονίζεται η κατανομή του συντελεστή άνωσης για ύψη της διαμόρφωσης που κινούνται στο εύρος  $\pm 3\sigma$  για τάξεις χάους  $k = 2 \dots 4$ . Η κατανομή του συντελεστή αντίστασης απεικονίζεται στο σχήμα 4.2 για την ίδια στοχαστική κατανομή και για τάξεις χάους  $k = 2 \dots 4$ . Από τα σχήματα 4.1 και 4.2 φαίνεται ότι η πορεία των αντικειμενικών συναρτήσεων είναι μονότονη χωρίς ιδιαίτερη διασπορά των σημείων.

Από την εφαρμογή της μεθόδου του PCE προέκυψαν επίσης οι συντελεστές πολυωνυμικού χάους με τους οποίους μπορεί να σχηματιστεί το πολυωνυμικό ανάπτυγμα της αντικειμενικής συνάρτησης. Για το συντελεστή άνωσης για τάξη χάους  $k = 2$  το πολυωνυμικό ανάπτυγμα είναι:



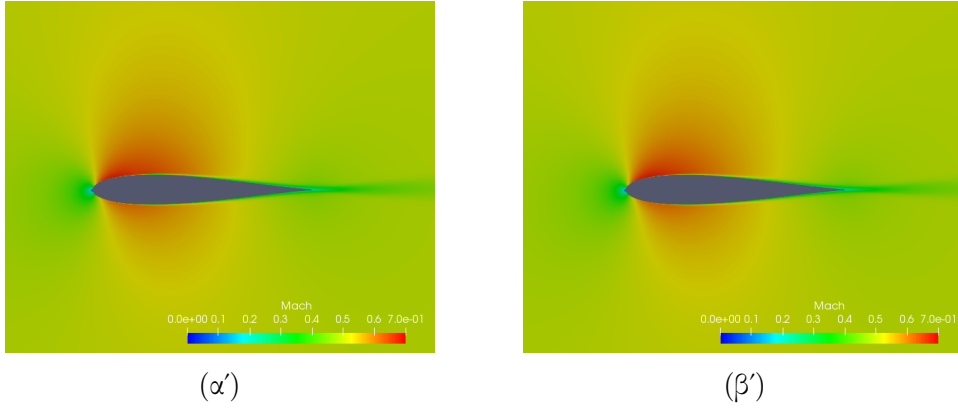


Σχήμα 4.1: Κατανομή του συντελεστή άνωσης στο διάστημα  $\pm 3\sigma$  για τρεις τάξεις χάους, στοχαστική μεταβλητή το ύψος της διαμόρφωσης.



Σχήμα 4.2: Κατανομή του συντελεστή αντίστασης στο διάστημα  $\pm 3\sigma$  για τρεις τάξεις χάους, στοχαστική μεταβλητή το ύψος της διαμόρφωσης.

$$\begin{aligned}
 c_L(\alpha) = & 1.035361 \tilde{H}e_0\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
 & + 2.429672 \cdot 10^{-3} \tilde{H}e_1\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
 & - 6.30166748 \cdot 10^{-6} \tilde{H}e_2\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right)
 \end{aligned}$$



Σχήμα 4.3: Πρώτη περίπτωση εφαρμογής PCE σε αεροτομή NACA0012 με μία διαμόρφωση (α'): Ροή γύρω από τη NACA0012 με την παράμετρο ύψους στη μέγιστη τιμή  $\mu + 3\sigma$ . (β'): Ροή γύρω από τη NACA0012 με την παράμετρο ύψους στην ελάχιστη τιμή  $\mu - 3\sigma$ .

Για αυτήν την περίπτωση, αντικαθίστανται τα αντίστοιχα πιθανοτικά πολυώνυμα Hermite συναρτήσεσι του  $z_\alpha = \frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}$ .

$$\begin{aligned} He_0(z_\alpha) &= 1 \\ He_1(z_\alpha) &= z_\alpha \\ He_2(z_\alpha) &= z_\alpha^2 - 1 \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση και μετά από πράξεις, προκύπτει το προσεγγιστικό πολυώνυμο του συντελεστή άνωσης  $c_L(z_\alpha)$  για τάξη χάους  $k = 2$

$$c_L(z_\alpha) = 1.035355 + 2.429672 \cdot 10^{-3} z_\alpha - 6.301667 \cdot 10^{-6} z_\alpha^2 \quad (4.5)$$

Για τάξη χάους  $k = 3$  είναι:

$$\begin{aligned} c_L(\alpha) &= 1.035367 \tilde{H}e_0\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\ &+ 2.423216 \cdot 10^{-3} \tilde{H}e_1\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\ &- 7.353572 \cdot 10^{-6} \tilde{H}e_2\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\ &+ 2.224688 \cdot 10^{-6} \tilde{H}e_3\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \end{aligned}$$

ενώ, τέλος, για τάξη χάους  $k = 4$  είναι:

$$\begin{aligned}c_L(\alpha) &= 1.035361\tilde{H}e_0\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\ &+ 2.427405 \cdot 10^{-3}\tilde{H}e_1\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\ &- 5.818988 \cdot 10^{-6}\tilde{H}e_2\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\ &+ 3.739831 \cdot 10^{-7}\tilde{H}e_3\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\ &- 3.251161 \cdot 10^{-8}\tilde{H}e_4\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right)\end{aligned}$$

Αντίστοιχα, με δεδομένους τους συντελεστές PCE για τον συντελεστή αντίστασης, σχηματίζεται το προσεγγιστικό πολυωνυμικό ανάπτυγμα της αντικειμενικής συνάρτησης.

Για το συντελεστή αντίστασης και τάξη χάους  $k = 2$  το προσεγγιστικό πολυώνυμο είναι:

$$\begin{aligned}c_D(\alpha) &= 3.640301 \cdot 10^{-2}\tilde{H}e_0\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\ &+ 4.019019 \cdot 10^{-5}\tilde{H}e_1\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\ &+ 2.643283 \cdot 10^{-6}\tilde{H}e_2\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right)\end{aligned}$$

ενώ για τάξη χάους  $k = 3$  είναι:

$$\begin{aligned}
c_D(\alpha) &= 3.640284 \cdot 10^{-2} \tilde{H}e_0\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&+ 3.992169 \cdot 10^{-5} \tilde{H}e_1\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&+ 3.493717 \cdot 10^{-6} \tilde{H}e_2\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&- 7.541673 \cdot 10^{-7} \tilde{H}e_3\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right)
\end{aligned}$$

ενώ για τάξη χάους  $k = 4$  είναι:

$$\begin{aligned}
c_D(\alpha) &= 3.640290 \cdot 10^{-2} \tilde{H}e_0\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&+ 3.987132 \cdot 10^{-5} \tilde{H}e_1\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&+ 3.482965 \cdot 10^{-6} \tilde{H}e_2\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&- 1.035400 \cdot 10^{-6} \tilde{H}e_3\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&+ 3.179353 \cdot 10^{-7} \tilde{H}e_4\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις των προσεγγιστικών πολυωνύμων για τάξεις χάους 4, οι συντελεστές βγαίνουν μειούμενοι. Αυτό σημαίνει ότι για μεγαλύτερες τάξεις χάους οι αλλαγές περιορίζονται στα τελευταία δεκαδικά ψηφία της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης. Με την αύξηση του ύψους της ατέλειας, τόσο ο συντελεστής άνωσης όσο και ο συντελεστής αντίστασης φαίνεται να αυξάνονται.

### 4.3 Εφαρμογή PCE σε Αεροτομή NACA0012 - Δύο Διαμορφώσεις

Εφαρμόζονται δύο διαμορφώσεις σε αεροτομή NACA0012, μία στην πλευρά υποπίεσης και μία στην πλευρά υπερπίεσης. Χρησιμοποιείται η μη-επεμβατική μέθοδος του PCE για την ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας της αντικειμενικής συνάρτησης που εδώ είναι ο συντελεστής άνωσης και ο συντελεστής αντίστασης. Ως στοχαστικές μεταβλητές χρησιμοποιούνται τα ύψη των δύο διαμορφώσεων.

Για την πρώτη διαμόρφωση οι υπόλοιπες σταθερές παράμετροι είναι:  $t_1 = 0.5$ ,  $t_2 = 1.05$ ,  $s_l = 0.25$ ,  $s_r = 0.4$  ενώ οι παράμετροι της δεύτερης διαμόρφωσης ισούνται με:  $t_1 = 0.5$ ,  $t_2 = 1.05$ ,  $s_l = 0.75$  και  $s_r = 0.4$ .

Στον πίνακα 4.3 καταγράφονται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση για τις δύο στοχαστικές μεταβλητές καθώς και για τις δύο αντικειμενικές συναρτήσεις  $c_L$  και  $c_D$ .

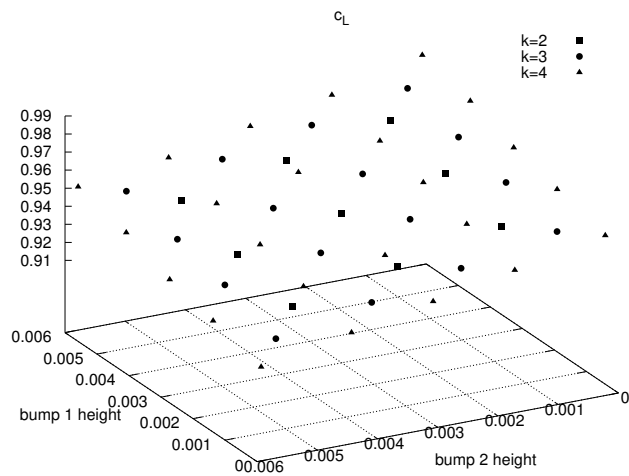
Πίνακας 4.3: Δεύτερη περίπτωση εφαρμογής μεθόδου PCE σε αεροτομή NACA0012, με δύο στοχαστικές μεταβλητές, τις παραμέτρους ύψους των δύο ατελειών  $\alpha$ , τάξεις χάους  $k = 2 \dots 4$

αποτ.	$\alpha$ (bump 1)	$\alpha$ (bump 2)	$c_L$	$c_D$
$\mu(k=2)$	0.003	0.003	0.952528	0.040346
$\sigma(k=2)$	0.001	0.001	0.0082207	0.0001223
$\mu(k=3)$	0.003	0.003	0.952804	0.040411
$\sigma(k=3)$	0.001	0.001	0.0078779	0.0002117
$\mu(k=4)$	0.003	0.003	0.952583	0.040339
$\sigma(k=4)$	0.001	0.001	0.0081845	0.0001688

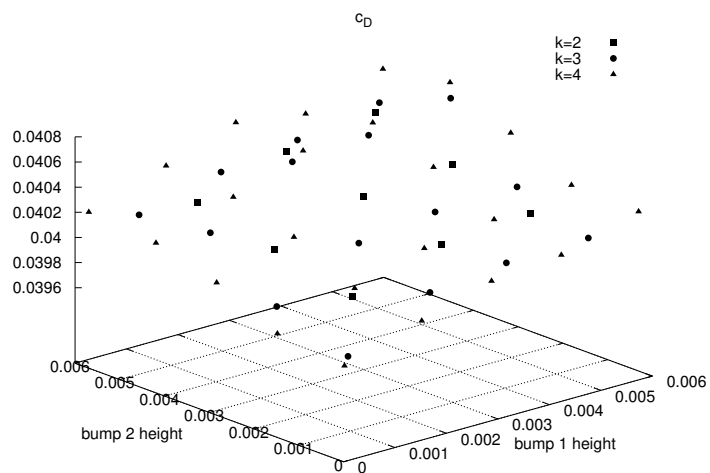
Από τον πίνακα 4.3 φαίνεται πώς επηρεάζεται η άνωση και η οπισθέλκουσα της αεροτομής. Συγκεκριμένα, με την πρόσθεση και της δεύτερης διαμόρφωσης ο συντελεστής άνωσης μειώνεται ενώ ο συντελεστής αντίστασης αυξάνεται. Στο σχήμα 4.4 παριστάνονται τα αποτελέσματα της αντικειμενικής συνάρτησης  $c_L$  για τους κόμβους του πλήρους πλέγματος.

Αντίστοιχα φαίνεται στο σχήμα 4.5 η κατανομή του συντελεστή αντίστασης καθώς μεταβάλλονται τα δύο ύψη των διαμορφώσεων.

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση έτσι και εδώ με την επίλυση της



Σχήμα 4.4: Κατανομή του συντελεστή άνωσης στο διάστημα  $\pm 3\sigma$  για κάθε στοχαστική μεταβλητή για τρεις τάξεις χάους, στοχαστικές μεταβλητές τα ύψη των δύο διαμορφώσεων.



Σχήμα 4.5: Κατανομή του συντελεστή αντίστασης στο διάστημα  $\pm 3\sigma$  για κάθε στοχαστική μεταβλητή για τρεις τάξεις χάους, στοχαστικές μεταβλητές τα ύψη των δύο διαμορφώσεων.

μεθόδου λαμβάνονται οι συντελεστές PCE και παρουσιάζονται τα αντίστοι-

χα προσεγγιστικά πολυώνυμα για τις δύο αντικειμενικές συναρτήσεις που επιλέχθηκαν.

Σε αυτήν την περίπτωση, το πολυωνυμικό ανάπτυγμα που προσεγγίζει τον συντελεστή άνωσης για τάξη χάους  $k = 2$  είναι:

$$\begin{aligned}
c_L(\alpha_1, \alpha_2) = & 0.952528 \tilde{H}e_0\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \tilde{H}e_0\left(\frac{\alpha_2 - \mu_{\alpha_2}}{\sigma_{\alpha_2}}\right) \\
& + 5.060923 \cdot 10^{-3} \tilde{H}e_1\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \tilde{H}e_1\left(\frac{\alpha_2 - \mu_{\alpha_2}}{\sigma_{\alpha_2}}\right) \\
& - 6.478152 \cdot 10^{-3} \tilde{H}e_2\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \tilde{H}e_2\left(\frac{\alpha_2 - \mu_{\alpha_2}}{\sigma_{\alpha_2}}\right) \\
& + 4.567972 \cdot 10^{-6} \tilde{H}e_3\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \tilde{H}e_3\left(\frac{\alpha_2 - \mu_{\alpha_2}}{\sigma_{\alpha_2}}\right) \\
& - 1.242475 \cdot 10^{-5} \tilde{H}e_4\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \tilde{H}e_4\left(\frac{\alpha_2 - \mu_{\alpha_2}}{\sigma_{\alpha_2}}\right) \\
& - 1.252036 \cdot 10^{-5} \tilde{H}e_5\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \tilde{H}e_5\left(\frac{\alpha_2 - \mu_{\alpha_2}}{\sigma_{\alpha_2}}\right)
\end{aligned}$$

ενώ, αντίστοιχα για το συντελεστή αντίστασης, και για τάξη χάους  $k = 2$  είναι:

$$\begin{aligned}
c_D(\alpha_1, \alpha_2) = & 4.034627 \cdot 10^{-2} \tilde{H}e_0\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \tilde{H}e_0\left(\frac{\alpha_2 - \mu_{\alpha_2}}{\sigma_{\alpha_2}}\right) \\
& + 8.303256 \cdot 10^{-5} \tilde{H}e_1\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \tilde{H}e_1\left(\frac{\alpha_2 - \mu_{\alpha_2}}{\sigma_{\alpha_2}}\right) \\
& + 8.583414 \cdot 10^{-5} \tilde{H}e_2\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \tilde{H}e_2\left(\frac{\alpha_2 - \mu_{\alpha_2}}{\sigma_{\alpha_2}}\right) \\
& - 2.587535 \cdot 10^{-5} \tilde{H}e_3\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \tilde{H}e_3\left(\frac{\alpha_2 - \mu_{\alpha_2}}{\sigma_{\alpha_2}}\right) \\
& + 4.391492 \cdot 10^{-6} \tilde{H}e_4\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \tilde{H}e_4\left(\frac{\alpha_2 - \mu_{\alpha_2}}{\sigma_{\alpha_2}}\right) \\
& - 9.220194 \cdot 10^{-7} \tilde{H}e_5\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \tilde{H}e_5\left(\frac{\alpha_2 - \mu_{\alpha_2}}{\sigma_{\alpha_2}}\right)
\end{aligned}$$

## 4.4 Εφαρμογή PCE σε Πτερύγωση Συμπιεστή - Μία Διαμόρφωση

Τέλος, μελετάται η περίπτωση πτερύγωσης συμπιεστή με κατασκευαστικές αβεβαιότητες. Εφαρμόζεται μία διαμόρφωση στην πλευρά υποπίεσης με σταθερές παραμέτρους:  $t_1 = 0.5$ ,  $t_2 = 1.05$ ,  $s_l = 0.3$  και  $s_r = 0.4$ . Στοχαστική μεταβλητή είναι το ύψος αυτής της διαμόρφωσης. Η αεροτομή της πτερύγωσης τοποθετείται στις  $30^\circ$  σε σχέση με την αξονική κατεύθυνση (γωνία κλίσης, stagger angle) ενώ η ροή εισέρχεται στην είσοδο της πτερύγωσης με γωνία  $47^\circ$ . Ως αντικειμενικές συναρτήσεις εξετάζονται ο λόγος των στατικών πιέσεων εξόδου προς εισόδου και η γωνία εξόδου της ροής σε μοίρες. Αυτές οι αντικειμενικές συναρτήσεις μελετώνται μόνο σε αυτό το κεφάλαιο. Στη βελτιστοποίηση πτερύγωσης συμπιεστή, η συνάρτηση-στόχος είναι διαφορετική.

Στον πίνακα 4.4 παρουσιάζονται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της στοχαστικής μεταβλητής του προβλήματος καθώς και για τις αντικειμενικές συναρτήσεις για τάξεις χάους  $k = 2 \dots 4$ .

Πίνακας 4.4: Τρίτη περίπτωση εφαρμογής μεθόδου PCE σε πτερύγωση συμπιεστή, με μία στοχαστική μεταβλητή, την παράμετρο ύψους της ατέλειας  $\alpha$ , τάξεις χάους  $k = 2 \dots 4$ .

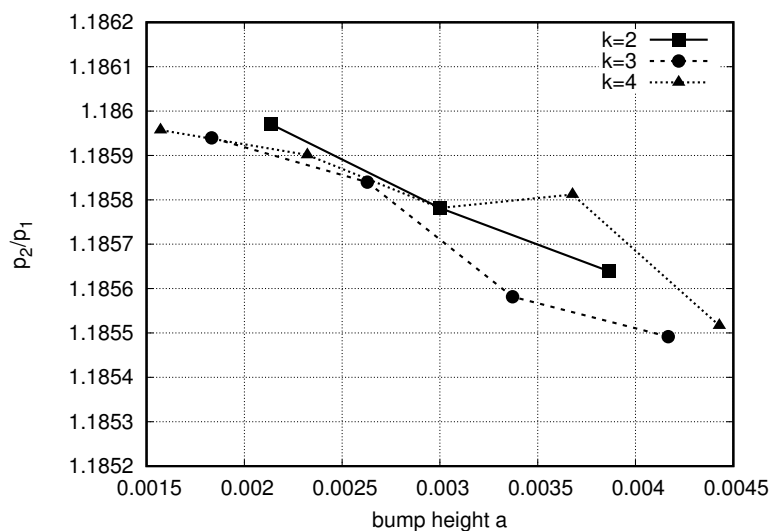
αποτ.	$\alpha$	$p_2/p_1$	$a_{out}$
$\mu(k=2)$	0.003	1.185789	24.672479
$\sigma(k=2)$	0.0005	$9.615667 \cdot 10^{-5}$	0.0024784
$\mu(k=3)$	0.003	1.185711	24.678117
$\sigma(k=3)$	0.0005	$1.358983 \cdot 10^{-5}$	0.0040265
$\mu(k=4)$	0.003	1.185814	24.669313
$\sigma(k=4)$	0.0005	$4.349357 \cdot 10^{-5}$	0.0023979

Στο σχήμα 4.6 αναπαρίστανται οι αντίστοιχοι κόμβοι Gauss του λόγου στατικών πιέσεων για τάξεις χάους  $k = 2 \dots 4$ .

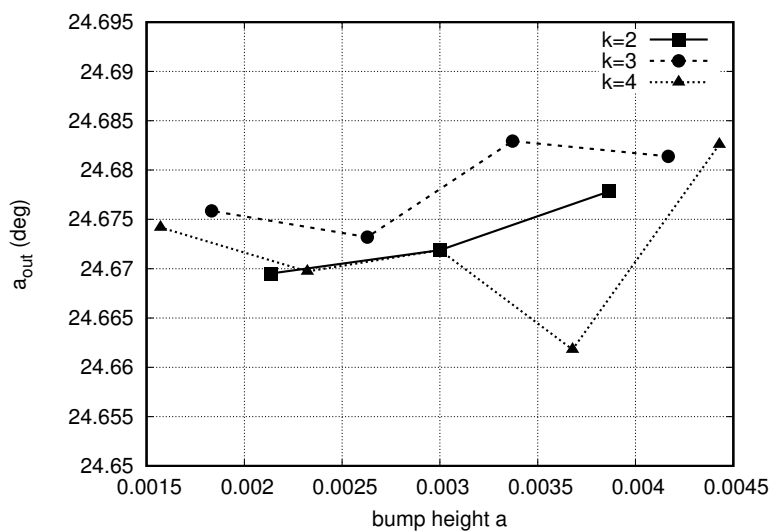
Αντίστοιχα στο σχήμα 4.7 αναπαρίστανται οι αντίστοιχοι κόμβοι Gauss της γωνίας εξόδου της ροής για τάξεις χάους  $k = 2 \dots 4$ .

Όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις, και εδώ υπολογίζονται τα αντίστοιχα προσεγγιστικά πολυώνυμα για τις δύο αντικειμενικές συναρτήσεις που ορίστηκαν και για τις τρεις τάξεις χάους.





Σχήμα 4.6: Κατανομή του λόγου στατικών πιέσεων στο διάστημα  $\pm 3\sigma$  για τρεις τάξεις χάους, στοχαστική μεταβλητή το ύψος της διαμόρφωσης.



Σχήμα 4.7: Κατανομή της γωνίας εξόδου της ροής στο διάστημα  $\pm 3\sigma$  για τρεις τάξεις χάους, στοχαστική μεταβλητή το ύψος της διαμόρφωσης.

Για τον λόγο στατικών πιέσεων εξόδου προς εισόδου για τάξη χάους  $k = 2$  είναι:

$$\begin{aligned}
p_2/p_1(\alpha) &= 1.185789\tilde{H}e_0\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&\quad - 9.584712 \cdot 10^{-5}\tilde{H}e_1\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&\quad + 7.709380 \cdot 10^{-6}\tilde{H}e_2\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right)
\end{aligned}$$

για τάξη χάους  $k = 3$  είναι:

$$\begin{aligned}
p_2/p_1(\alpha) &= 1.185711\tilde{H}e_0\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&\quad - 1.349575 \cdot 10^{-4}\tilde{H}e_1\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&\quad + 1.040409 \cdot 10^{-6}\tilde{H}e_2\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&\quad + 1.592860 \cdot 10^{-5}\tilde{H}e_3\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right)
\end{aligned}$$

ενώ για τάξη χάους  $k = 4$  είναι:

$$\begin{aligned}
p_2/p_1(\alpha) &= 1.185814\tilde{H}e_0\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&\quad - 4.101414 \cdot 10^{-5}\tilde{H}e_1\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&\quad + 1.035289 \cdot 10^{-5}\tilde{H}e_2\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&\quad - 6.986583 \cdot 10^{-6}\tilde{H}e_3\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&\quad - 7.316853 \cdot 10^{-6}\tilde{H}e_4\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Για τη γωνία εξόδου και τάξη χάους  $k = 2$  το προσεγγιστικό πολυώνυμο είναι:

$$\begin{aligned}
a_2(\alpha) &= 24.672479\tilde{H}e_0\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&+ 2.405420 \cdot 10^{-3}\tilde{H}e_1\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&+ 5.973137 \cdot 10^{-4}\tilde{H}e_2\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right)
\end{aligned}$$

ενώ για τάξη χάους  $k = 3$  είναι:

$$\begin{aligned}
a_2(\alpha) &= 24.678117\tilde{H}e_0\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&+ 3.872317 \cdot 10^{-3}\tilde{H}e_1\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&+ 1.143818 \cdot 10^{-4}\tilde{H}e_2\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&- 1.097672 \cdot 10^{-3}\tilde{H}e_3\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right)
\end{aligned}$$

ενώ για τάξη χάους  $k = 4$  είναι:

$$\begin{aligned}
a_2(\alpha) &= 24.669313\tilde{H}e_0\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&- 2.113568 \cdot 10^{-3}\tilde{H}e_1\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&- 6.129188 \cdot 10^{-4}\tilde{H}e_2\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&+ 6.944424 \cdot 10^{-4}\tilde{H}e_3\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right) \\
&+ 6.518292 \cdot 10^{-4}\tilde{H}e_4\left(\frac{\alpha - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Σε αντίθεση με πριν, εδώ οι συντελεστές PCE δεν έχουν φθίνουσα πορεία. Αυτό σημαίνει ότι μεγαλύτερη τάξη χάους δίνει πιο ακριβή αποτελέσματα.

## Κεφάλαιο 5

# Βελτιστοποίηση υπό Κατασκευαστικές Αβεβαιότητες με Χρήση Εξελικτικών Αλγορίθμων

### 5.1 Γενικά περι Εξελικτικών Αλγορίθμων

Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι είναι μία κατηγορία στοχαστικών μεθόδων βελτιστοποίησης. Δανειζόμενοι τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσονται ζωντανό οργανισμοί, υπολογίζουν με βάση έναν αρχικό πληθυσμό λύσεων την βέλτιστη λύση (αν πρόκειται για μονοκριτηριακό πρόβλημα) σύμφωνα με κάποια κριτήρια που δίνει ο χρήστης. Λόγω του μη-μαθηματικού υποβάθρου τους και της ευκολίας τους στην εφαρμογή σχεδόν οποιουδήποτε προβλήματος, η χρήση τους εξαπλώθηκε πολύ γρήγορα [1]. Ένα προτέρημά τους ως στοχαστικές μέθοδοι είναι ότι δεν εγκλωβίζονται σε τοπικά ακρότατα. Βασικό τους χαρακτηριστικό είναι ότι χειρίζονται ένα πλήθος λύσεων σε κάθε επανάληψη και όχι μία μόνο λύση όπως άλλες στοχαστικές μέθοδοι. Μεγάλο πλεονέκτημά τους είναι ότι δεν απαιτείται κάποια επιπλέον παρέμβαση στον κώδικα αξιολόγησης ή στην όλη διαδικασία της βελτιστοποίησης. Παρόλ' αυτά οι εξελικτικοί αλγόριθμοι έχουν ένα σοβαρό μειονέκτημα και είναι η απαίτηση πολλών αξιολογήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης μέχρι τη σύγκλισή τους, ειδικά σε προβλήματα αεροδυναμικού σχεδιασμού όπου η αξιολόγηση της αντικειμενικής συνάρτησης συνεπάγεται τη λύση των εξισώσεων ροής, κάτι που καθιστά την μέθοδο ιδιαίτερα κοστοβόρα.

Στην κατηγορία των εξελικτικών αλγορίθμων ανήκουν οι γενετικοί αλγόριθμοι.

μοι (genetic algorithms), οι εξελικτικές στρατηγικές (evolution strategies) και ο γενετικός προγραμματισμός (genetic programming). Επειδή όμως τα τελευταία χρόνια η κάθε μέθοδος δανείζεται χαρακτηριστικά από άλλη, γίνεται αναφορά πλέον με τον όρο "γενικευμένος εξελικτικός αλγόριθμος".

Στη συνέχεια, παρατίθενται τα χαρακτηριστικά των εξελικτικών αλγορίθμων:

- Χρήση και διαχείριση πληθυσμού ατόμων-λύσεων με συνεχή εξέλιξη
- Συνεχής διαδοχή πληθυσμών λύσεων με τις καλύτερες λύσεις του προηγούμενου
- Χρήση της αντικειμενικής συνάρτησης-στόχου για την κρίση καταλληλότητας κάποιας λύσης
- Εμφάνιση νέων χαρακτηριστικών είτε με κληρονομικότητα από τους γονείς στους απογόνους είτε στοχαστικά

Τέλος, γίνεται μια σύντομη περιγραφή ενός γενικευμένου εξελικτικού αλγορίθμου.

Έστω  $F(\vec{x})$  η συνάρτηση-στόχος ενός προβλήματος και  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  οι μεταβλητές σχεδιασμού με  $x_{i,LOW}$  και  $x_{i,HIGH}$  η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή αντίστοιχα που μπορεί να πάρει η κάθε τιμή σχεδιασμού  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Στους εξελικτικούς αλγορίθμους γενικά υπάρχουν τρεις πληθυσμοί με ιδιαίτερο ρόλο το καθένα. Αν  $\mu$  το πλήθος των υποψήφιων λύσεων,  $\lambda$  το πλήθος των απογόνων και  $e$  το πλήθος των επίλεκτων λύσεων τότε τα αντίστοιχα σύνολα θα είναι  $S^{g,\mu}$  (γονείς),  $S^{g,\lambda}$  (απόγονοι) και  $S^{g,e}$  (επίλεκτοι ή ελίτ) όπου  $g$  ο σριθμός της γενιάς. Γενικά, σε ένα γενικευμένο εξελικτικό αλγόριθμο ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:

- Αρχικοποίηση του αλγορίθμου, το πεδίο ορισμού των μεταβλητών σχεδιασμού (design space) αφού διακριτοποιηθεί κατάλληλα, με τυχαίο τρόπο επιλέγονται από αυτό τα μέλη του συνόλου  $S^{0,\lambda}$  όπου τέθηκε  $g = 0$  που σηματοδοτεί την αρχικοποίηση ή τη "μηδενική" γενιά.
- Αξιολόγηση των ατόμων του συνόλου  $S^{0,\lambda}$  όπου υπολογίζεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε άτομο. Αυτό είναι και το πιο κοστοβόρο βήμα από άποψης υπολογιστικού κόστους ιδιαίτερα σε προβλήματα αεροδυναμικού σχεδιασμού.

- Μετά το βήμα της αξιολόγησης τα άτομα με την καλύτερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης χρησιμοποιούνται για την ανανέωση του συνόλου των επιλέκτων  $S^{g,e}$ .
- Στη συνέχεια ανανεώνεται το σύνολο  $S^{g,\lambda}$  των απογόνων με άτομα από το μόλις ανανεωμένο σύνολο των ελίτ ατόμων.
- Επιλέγεται το σύνολο γονέων της επόμενης γενιάς  $S^{g+1,\mu}$  με άτομα από τα σύνολα γονέων και απογόνων της προηγούμενης γενιάς.
- Δημιουργείται το σύνολο των απογόνων της επόμενης γενιάς  $S^{g+1,\lambda}$  από άτομα του συνόλου  $S^{g+1,\mu}$  ή ακόμα και του συνόλου  $S^{g+1,e}$
- Ελέγχεται η σύγκλιση του αλγορίθμου. Αν δεν έχει συγχλίνει τότε η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται.

## 5.2 Αεροδυναμικά Στιβαρός Σχεδιασμός, Βελτιστοποίηση με Κατασκευαστικές Αβεβαιότητες

Στα προηγούμενα κεφάλαια έγινε ανάλυση του τρόπου μοντελοποίησης των κατασκευαστικών ατελειών και εφαρμόστηκε μη-επεμβατική μέθοδος πολυωνυμικού χάους για την ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας σε ορισμένες περιπτώσεις σε συγκεκριμένες αντικειμενικές συναρτήσεις. Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει αεροδυναμική βελτιστοποίηση μορφής αεροτομών όπου πλέον εκτός από τις μεταβλητές σχεδιασμού που τις καθορίζει ο σχεδιαστής υπάρχουν και οι стоχαστικές μεταβλητές του προβλήματος που φέρουν το στοιχείο της τυχαιότητας και ο σχεδιαστής δεν έχει τον έλεγχό τους. Αλλιώς λέγονται και μεταβλητές περιβάλλοντος.

Αρχικά, πραγματοποιείται βελτιστοποίηση συμμετρικής αεροτομής με βάση τη NACA0012 χωρίς αβεβαιότητες, στη συνέχεια επαναλαμβάνεται η παραπάνω βελτιστοποίηση με κατασκευαστικές αβεβαιότητες και συγκρίνονται οι διάφορες λύσεις που προκύπτουν. Έπειτα, πραγματοποιείται εκ νέου βελτιστοποίηση, αυτή τη φορά μη συμμετρικής αεροτομής με τις ίδιες συνθήκες περιβάλλοντος και τις ίδιες παραμέτρους κατασκευαστικών ατελειών. Τέλος, γίνεται βελτιστοποίηση πτερύγωσης συμπίεστη με κατασκευαστικές αβεβαιότητες.

### 5.2.1 Βελτιστοποίηση Συμμετρικής Αεροτομής χωρίς Αβεβαιότητες

Σε αυτήν την παράγραφο, πραγματοποιείται βελτιστοποίηση συμμετρικής αεροτομής όπου ως αρχική αεροτομή έχει χρησιμοποιηθεί η NACA0012. Επειδή τόσο η αρχική όσο και η τελική αεροτομή (χωρίς τις κατασκευαστικές ατέλειες) είναι συμμετρικές, οι πίνακες και τα σχήματα που ακολουθούν, αφορούν μόνο την πλευρά υποπίεσης.

Η ροή που λύνεται γύρω από την αεροτομή είναι συμπιεστή και τυρβώδης, συνεπώς, λύνονται οι εξισώσεις Navier - Stokes. Χρησιμοποιείται μοντέλο τύρβης Spalart-Allmaras μίας εξίσωσης. Ο αριθμός Reynolds της ροής ισούται με  $10^6$  ενώ ο αριθμός Mach της επ' άπειρον ροής ισούται με 0.5. Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις μεμονωμένης αεροτομής χρησιμοποιείται υβριδικό πλέγμα με το δομημένο τμήμα κοντά στο στερεό τοίχωμα της αεροτομής και το μη-δομημένο στο υπόλοιπο. Για τη βελτιστοποίηση χρησιμοποιείται το λογισμικό EASY (Evolutionary Algorithm SYstem).

Συνάρτηση-στόχος είναι ο συντελεστής άνωσης και στόχος η μεγιστοποίησή του. Αυτό γράφεται ως:

$$F = \max(C_L) = \min(-C_L) \quad (5.1)$$

Ως μεταβλητές σχεδιασμού χρησιμοποιούνται τα σημεία ελέγχου Bezier της αεροτομής. Συγκεκριμένα, για συμμετρική αεροτομή χρησιμοποιούνται μόνο τα σημεία ελέγχου της πλευράς υποπίεσης. Η αρίθμηση ξεκινά με την εξής φορά: από την ακμή εκφυγής και αριστερόστροφα. Συνολικά χρησιμοποιούνται δύο σημεία ελέγχου για την πλευρά υποπίεσης των οποίων μεταβάλλονται οι τετμημένες και οι τεταγμένες. Αρα, συνολικά χρησιμοποιούνται τέσσερις μεταβλητές σχεδιασμού, αυτές είναι οι  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$ . Στον πίνακα 5.1 συγκεντρώνονται τα πεδία τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού.

Πίνακας 5.1: Πεδία τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού μεμονωμένης συμμετρικής αεροτομής.

$b_{i,c}$	$b_{i,LOW}$	$b_{i,HIGH}$
0.82	0.69	0.86
0.24	0.20	0.40
0.023	0.019	0.04
0.109	0.105	0.130

Στον πίνακα 5.1 με  $b_{i,c}$  παριστάνονται τα αρχικά σημεία ελέγχου που στις προηγούμενες εφαρμογές αντιπροσωπεύουν την NACA0012 ενώ με  $b_{i,LOW}$  και  $b_{i,HIGH}$  συμβολίζονται το κατώτατο και το ανώτατο όριο αντίστοιχα κάθε μεταβλητής σχεδιασμού. Τα υπόλοιπα σημεία ελέγχου είναι τα (0.0, 0.0) και (0.0, 0.051) που καθορίζουν την αρχή και την κλίση της ακμής προσβολής καθώς και το σημείο (0.0, 1.0) το οποίο καθορίζει το σημείο της ακμής εκφυγής.

Για τη διακριτοποίηση του πεδίου τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού χρησιμοποιείται δυαδική διακριτοποίηση με 10 bit. Επομένως μια τυχαία λύση  $b_i$  γράφεται:

$$b_i = b_{i,LOW} + \frac{b_{i,LOW} + b_{i,HIGH}}{2^n - 1} \quad (5.2)$$

όπου  $n$  είναι η διακριτοποίηση που ορίστηκε.

Στον πίνακα 5.2 παρουσιάζονται τα σημεία ελέγχου Bezier της αεροτομής με μέγιστο συντελεστή άνωσης. Ο εξελικτικός αλγόριθμος τερματίστηκε στις 500 αξιολογήσεις ενώ παράλληλα χρησιμοποιήθηκε on-line μεταπρότυπο.

Πίνακας 5.2: Σημεία ελέγχου μεμονωμένης συμμετρικής αεροτομής με μέγιστο συντελεστή άνωσης.

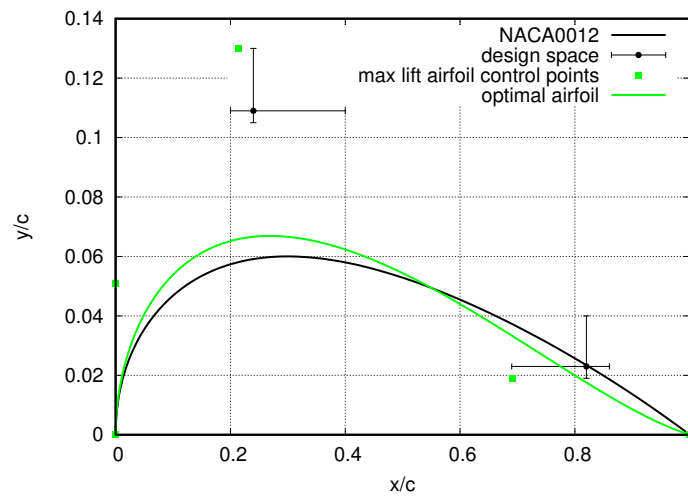
Μεταβλητή σχεδιασμού	$b_i$
$X_1$	0.690613
$X_2$	0.214479
$Y_1$	0.019004
$Y_2$	0.129992
$C_L$	1.055867

Η τελική τιμή του συντελεστή άνωσης προέκυψε  $C_L = 1.055867$ . Στο σχήμα 5.1 απεικονίζονται η αρχική αεροτομή NACA0012 με τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου με μαύρο χρώμα και η αεροτομή με το μέγιστο συντελεστή άνωσης μαζί με τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου με πράσινο χρώμα.

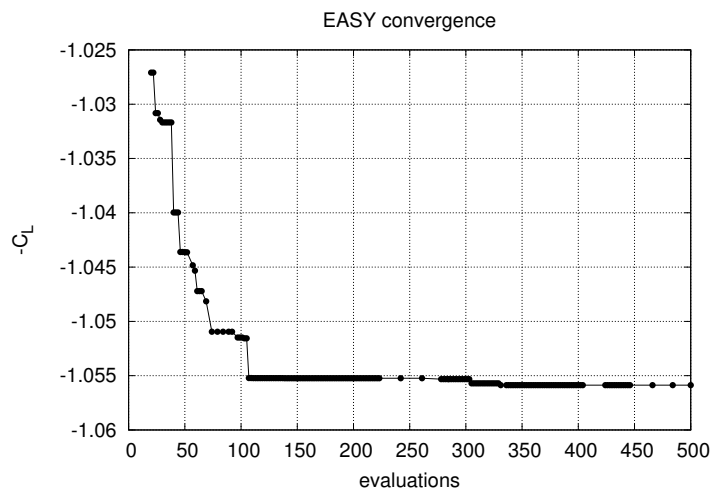
Στο σχήμα 5.2 παρουσιάζεται η σύγκλιση του EASY. Είναι φανερό ότι ο αλγόριθμος θα μπορούσε να είχε τερματιστεί πολύ πιο σύντομα. Το μεταπρότυπο ευθύνεται για τη γρήγορη εύρεση της βέλτιστης λύσης.

Στο σχήμα φαίνεται η ροή γύρω από την αεροτομή με το μέγιστο συντελεστή άνωσης.





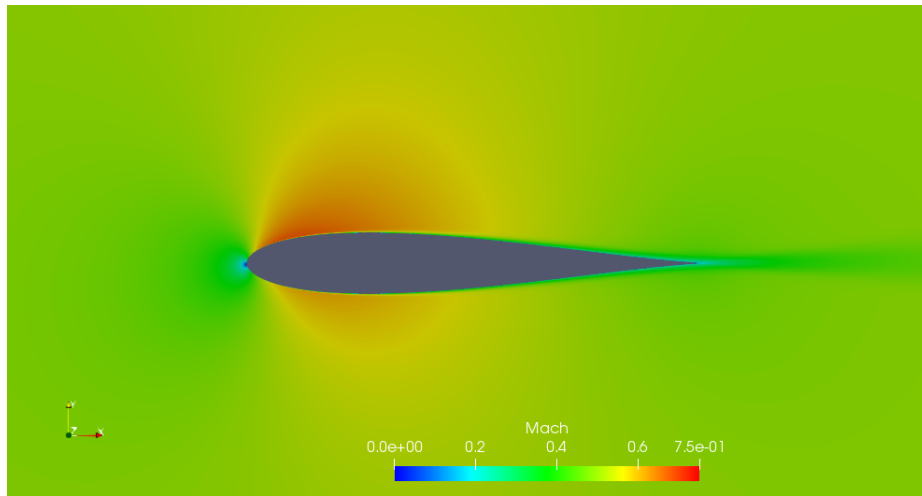
Σχήμα 5.1: Αρχική αεροτομή NACA0012 (μαύρο) και αεροτομή με μέγιστο συντελεστή άνωσης (πράσινο).



Σχήμα 5.2: Σύγκλιση του λογισμικού βελτιστοποίησης EASY.

## 5.2.2 Βελτιστοποίηση Συμμετρικής Αεροτομής με Κατασκευαστικές Αβεβαιότητες

Σε αυτή την παράγραφο επαναλαμβάνεται η βελτιστοποίηση συμμετρικής αεροτομής αλλά αυτή τη φορά με αβεβαιότητες ως προς την κατασκευή της. Όπως και πριν λύνονται οι εξισώσεις συμπιεστού ρευστού και τυρβώδους ροής



Σχήμα 5.3: Περίπτωση βέλτιστης αεροτομής χωρίς κατασκευαστικές ατέλειες με μέγιστο συντελεστή άνωσης.

(Navier-Stokes) με χρήση μοντέλου τύρβης Spalart-Allmaras μίας εξίσωσης. Επίσης όπως και πριν κατασκευάζεται υβριδικό πλέγμα που αποτελείται από δομημένο μέρος κοντά στο στερεό τοίχωμα της αεροτομής και το μη-δομημένο τμήμα.

Ως μεταβλητές σχεδιασμού χρησιμοποιούνται και εδώ τα ίδια σημεία ελέγχου που χρησιμοποιήθηκαν και στην προηγούμενη περίπτωση για την πλευρά υποπίεσης. Επειδή πρόκειται για συμμετρική αεροτομή, παρουσιάζονται τα σημεία ελέγχου, το πεδίο ορισμού τους και οι μορφές των αεροτομών για την πλευρά υποπίεσης λόγω συμμετρίας ως προς τον άξονα  $x$ . Οι μεταβλητές σχεδιασμού καταγράφονται στον πίνακα 5.1.

Επειδή εδώ εισάγεται το στοιχείο της αβεβαιότητας πλέον η αντικειμενική συνάρτηση δεν είναι απλά ο συντελεστής άνωσης (ένα κριτήριο) αλλά η μέση τιμή  $\mu_{C_L}$  και η τυπική απόκλιση του  $\sigma_{C_L}$  (δύο κριτήρια). Κατά συνέπεια αλλάζει ο αριθμός των συναρτήσεων-στόχων από ένα σε δύο. Πιο συγκεκριμένα επιδιώκεται η μεγιστοποίηση της μέσης τιμής του συντελεστή άνωσης και η ελαχιστοποίηση της τυπικής απόκλισης. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι η τελική αεροτομή πρέπει να διατηρεί τη βέλτιστη άνωση για ένα πεδίο μεταβολών της μορφής της αεροτομής. Οι δύο νέες συναρτήσεις-στόχοι λοιπόν θα είναι:

$$F_1 = \max(\mu_{C_L}) = \min(-\mu_{C_L}) \quad (5.3)$$

$$F_2 = \min(\sigma_{C_L}) \quad (5.4)$$

Ο λόγος για τον οποίο στις εξισώσεις 5.4 οι στόχοι τροποποιούνται ώστε να είναι στόχοι ελαχιστοποίησης είναι λόγω του ότι το λογισμικό EASY λύνει μόνο προβλήματα ελαχιστοποίησης.

Ως κατασκευαστική ατέλεια χρησιμοποιείται μία διαμόρφωση στην πλευρά υποπίεσης όπου στοχαστική μεταβλητή επιλέγεται το ύψος  $\alpha$  αυτής. Οι υπόλοιπες σταθερές παράμετροι της ατέλειας είναι:

- Παράμετρος θέσης κορυφής  $t_1 = 0.5$
- Παράμετρος στενότητας κορυφής  $t_2 = 0.9$
- Θέση της διαμόρφωσης πάνω στην αεροτομή  $s_l = 0.3$
- Πλάτος της διαμόρφωσης  $s_r = 0.4$

Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της παραμέτρου ύψους της διαμόρφωσης ορίζεται ως:

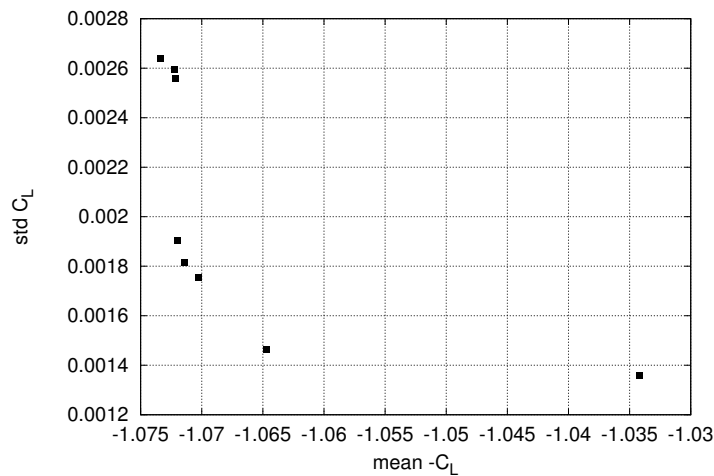
$$\mu_\alpha = 0.003$$

$$\sigma_\alpha = 0.0005$$

Στο σχήμα 5.4 απεικονίζεται το μέτωπο των μη-κυριαρχούμενων λύσεων κατά Pareto.

Από το μέτωπο των μη-κυριαρχούμενων λύσεων που απεικονίζονται στο σχήμα 5.4, διακρίνονται δύο διαφορετικές λύσεις. Η πρώτη έχει τη μέγιστη δυνατή τιμή της μέσης τιμής και η δεύτερη έχει την ελάχιστη τυπική απόκλιση δηλαδή βρίσκονται πάνω αριστερά και κάτω δεξιά αντίστοιχα στο μέτωπο. Στον πίνακα 5.3 καταγράφονται τα σημεία ελέγχου-λύσεις για τις δύο αεροτομές.

Η αεροτομή με τη μέγιστη μέση τιμή του συντελεστή άνωσης έχει  $\mu_{C_L} = 1.073373$  και τυπική απόκλιση του συντελεστή άνωσης ίση με  $\sigma_{C_L} = 0.002638$ . Η δεύτερη λύση έχει την ελάχιστη τιμή της τυπικής απόκλισης και ισούται με  $\sigma_{C_L} = 0.001358$ . Η μέση τιμή του συντελεστή άνωσης σε αυτήν την περίπτωση είναι ίση προς  $\mu_{C_L} = 1.034153$ , αρκετά μικρότερη από την πρώτη λύση. Πλεονέκτημά της σε σχέση με την πρώτη είναι ότι το σημείο λειτουργίας δεν θα



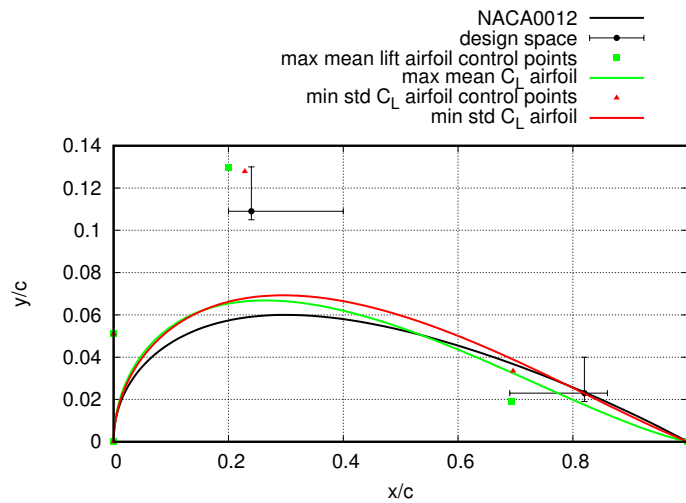
Σχήμα 5.4: Μέτωπο Pareto των μη-κυριαρχούμενων λύσεων. Βελτιστοποίηση με κατασκευαστικές αβεβαιότητες. Συναρτήσεις-στόχοι: η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του συντελεστή άνωσης.

Πίνακας 5.3: Σημεία ελέγχου μεμονωμένης συμμετρικής αεροτομής με κατασκευαστικές αβεβαιότητες. Από το μέτωπο των μη-κυριαρχούμενων λύσεων, επιλέγονται δύο λύσεις προς μελέτη. Μία με τη μέγιστη μέση τιμή του συντελεστή άνωσης και μία με την ελάχιστη τυπική απόκλιση αυτού.

Μεταβλητή σχεδιασμού	$max \mu_{C_L}$ αεροτομή	$min \sigma_{C_L}$ αεροτομή
$X_1$	0.692281	0.695698
$X_2$	0.200000	0.228527
$Y_1$	0.019000	0.033457
$Y_2$	0.129835	0.127849

μεταβληθεί εύκολα με την ύπαρξη κατασκευαστικής ατέλειας λόγω της χαμηλής τυπικής απόκλισης. Αυτή η αεροτομή είναι πιο στιβαρή αεροδυναμικά, αλλά έχει χειρότερο συντελεστή άνωσης από την πρώτη λύση. Τα αντίστοιχα εύρη  $\mu \pm 3\sigma$  του συντελεστή αντίστασης  $C_L$  φαίνονται στο σχήμα 5.7. Η αεροτομή εκείνη με τη χαμηλότερη τυπική απόκλιση αποδίδει σταθερά χειρότερα από εκείνη με την μέγιστη μέση τιμή του  $C_L$ . Επιλέγεται ως βέλτιστη αεροτομή η λύση με τη μέγιστη μέση τιμή του συντελεστή άνωσης, αφού δεν είναι πρόβλημα οι τελικές αποκλίσεις. Τελικά, το πρόβλημα δικριτηριακής βελτιστοποίησης εκφυλίστηκε σε πρόβλημα μονοκριτηριακής.

Στο σχήμα 5.6 φαίνονται οι εικόνες της ροής γύρω από την αεροτομή με τη



Σχήμα 5.5: Αρχική αεροτομή NACA0012 (μαύρο) αεροτομή με μέγιστη μέση τιμή συντελεστή άνωσης (πράσινο) και αεροτομή με ελάχιστη τυπική απόκλιση συντελεστή άνωσης (κόκκινο).

μέγιστη μέση τιμή του συντελεστή άνωσης και την ελάχιστη τιμή της τυπικής απόκλισης του συντελεστή άνωσης.

### Σύγκριση των λύσεων

Με τη βελτιστοποίηση συμμετρικής αεροτομής χωρίς και με κατασκευαστικές αβεβαιότητες προέκυψαν ορισμένες λύσεις με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Στη βελτιστοποίηση χωρίς αβεβαιότητες προέκυψε μόνο μία λύση με το μέγιστο συντελεστή άνωσης. Όμως στη βελτιστοποίηση με αβεβαιότητες προέκυψαν περισσότερες από μία λύσεις οι οποίες απεικονίζονται στο σχήμα 5.4. Από αυτές διακρίθηκαν δύο. Μία με τη μέγιστη τιμή της μέσης τιμής του συντελεστή άνωσης και μία με την ελάχιστη τιμή της τυπικής απόκλισης του συντελεστή άνωσης. Αυτές οι δύο λύσεις συγκρίνονται με τη λύση που προέκυψε από τη βελτιστοποίηση χωρίς αβεβαιότητες. Στο σχήμα 5.8 συγκρίνεται η βέλτιστη αεροτομή χωρίς αβεβαιότητες με την αεροτομή με τη μέγιστη μέση τιμή.

Στο σχήμα 5.9 συγκρίνεται η αρχική βέλτιστη αεροτομή χωρίς αβεβαιότητες με την αεροτομή με την ελάχιστη τυπική απόκλιση του συντελεστή άνωσης.

Η μορφή της αεροτομής με τη μέγιστη μέση τιμή συντελεστή άνωσης είναι πολύ κοντά σε αυτή με τη μέγιστη άνωση χωρίς αβεβαιότητες ενώ το ίδιο δεν ισχύει για την αεροτομή με την ελάχιστη τυπική απόκλιση του συντελεστή άνωσης.

### 5.2.3 Βελτιστοποίηση Μη-Συμμετρικής Αεροτομής με Κατασκευαστικές Αβεβαιότητες

Σε αυτή την παράγραφο, πραγματοποιείται στιβαρός αεροδυναμικός σχεδιασμός-βελτιστοποίηση αεροτομής με αρχική τη NACA0012. Η τελική αεροτομή δεν είναι συμμετρική, επομένως ορίζονται κατάλληλα οι μεταβλητές σχεδιασμού. Συγκεκριμένα, ορίζονται τέσσερα σημεία ελέγχου, δύο στην πλευρά υποπίεσης και δύο στην πλευρά υπερπίεσης με μεταβλητές τις τετμημένες και τις τεταγμένες των σημείων. Επομένως, συνολικά, ορίζονται οκτώ μεταβλητές σχεδιασμού, τα εύρη των οποίων καταγράφονται στον πίνακα 5.4. Η αντίστοιχη γραφική παράστασή τους φαίνεται στο σχήμα 5.10. Οι μεταβλητές περιβάλλοντος καθώς και οι παράμετροι της κατασκευαστικής ατέλειας είναι ίδιες με την προηγούμενη περίπτωση.

Πίνακας 5.4: Μεταβλητές σχεδιασμού μη-συμμετρικής αεροτομής.

$b_i$	$b_{i,LOW}$	$b_{i,HIGH}$
$X_1$	0.60000	0.87000
$X_2$	0.10000	0.500000
$X_3$	0.10000	0.500000
$X_4$	0.60000	0.87000
$Y_1$	0.014	0.04500
$Y_2$	0.0900	0.1400
$Y_3$	-0.0900	-0.1400
$Y_4$	-0.0140	-0.0450

Οι συναρτήσεις-στόχοι προς βελτιστοποίηση είναι και πάλι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του συντελεστή άνωσης. Από τη δικριτηριακή βελτιστοποίηση προκύπτει το μέτωπο κυριαρχούμενων λύσεων κατά Pareto. Αυτό απεικονίζεται στο σχήμα 5.11.

Από αυτές τις λύσεις, επιλέγονται δύο. Η πρώτη έχει μέγιστη μέση τιμή του συντελεστή άνωσης ενώ η δεύτερη έχει την ελάχιστη τυπική απόκλιση. Οι αντίστοιχες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού για κάθε λύση καταγράφονται στον πίνακα 5.5 ενώ οι γραφικές παραστάσεις των κάθε λύσεων απεικονίζονται στο σχήμα 5.12.

Η αεροτομή με τη μέγιστη μέση τιμή του συντελεστή άνωσης έχει  $\mu_{C_L} = 3.221526$  και τυπική απόκλιση του συντελεστή άνωσης ίση με  $\sigma_{C_L} = 0.001514$ . Η δεύτερη λύση έχει την ελάχιστη τιμή της τυπικής απόκλισης και ισούται με  $\sigma_{C_L} = 0.000737$ . Η μέση τιμή του συντελεστή άνωσης σε αυτή την περίπτωση

Πίνακας 5.5: Μεταβλητές σχεδιασμού των δύο μη-συμμετρικών αεροτομών με κατασκευαστικές ατέλειες που επιλέχθηκαν. Μία με τη μέγιστη μέση τιμή του συντελεστή άνωσης και μία με την ελάχιστη τυπική απόκλισή του.

$b_i$	$\max \mu_{C_L}$	$\min \sigma_{C_L}$
$X_1$	0.867828	0.868353
$X_2$	0.500000	0.500000
$X_3$	0.135489	0.362082
$X_4$	0.600000	0.617258
$Y_1$	0.045000	0.038686
$Y_2$	0.138579	0.138161
$Y_3$	-0.090000	-0.090000
$Y_4$	-0.014000	-0.014000

είναι ίση προς  $\mu_{C_L} = 3.033195$ . Όπως ήταν αναμενόμενο, οι τιμές του συντελεστή άνωσης είναι πολύ μεγαλύτερες σε σχέση με τις προηγούμενες περιπτώσεις. Η τυπική απόκλιση του  $C_L$  της δεύτερης λύσης είναι αρκετά μικρότερη από την αντίστοιχη της συμμετρικής αεροτομής, κάτι που είναι αναμενόμενο αφού αυξήθηκε ο χώρος σχεδιασμού. Πάλι και εδώ επιλέγεται ως λύση εκείνη με τη μέγιστη μέση τιμή, αφού η τυπική απόκλιση είναι αρκετά μικρή.

Στο σχήμα 5.13, φαίνεται το εύρος του συντελεστή άνωσης για τις δύο λύσεις που επιλέχθηκαν. Και εδώ, η αεροτομή με την ελάχιστη τυπική απόκλιση του  $C_L$  αποδίδει πολύ χειρότερα από εκείνη με τη μέγιστη μέση τιμή του. Επομένως, η λύση στο πρόβλημα θα είναι μια ενδιάμεση.

#### 5.2.4 Βελτιστοποίηση Πτερύγωσης Συμπιεστή με Κατασκευαστικές Αβεβαιότητες

Ακολουθεί βελτιστοποίηση πτερύγωσης συμπιεστή. Συνολικά, χρησιμοποιούνται διαφορετικά σημεία ελέγχου για την πλευρά υποπίεσης και υπερπίεσης.

Λύνεται το σύστημα εξισώσεων Navier-Stokes με μοντέλο τύρβης Spalart Allmaras. Η ροή εισέρχεται στην είσοδο υπο γωνία 47 μοίρες με ταχύτητα  $u = 202.632m/s$ . Ο αριθμός Reynolds θεωρήθηκε ίσος με  $10^6$ . Η αεροτομή είναι τοποθετημένη 30 μοίρες ως προς τον οριζόντιο άξονα. Φυσικά στα άνω και κάτω άκρα του χωρίου επίλυσης της ροής εφαρμόζεται συνθήκη περιοδικότητας. Κατασκευάζεται όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις υβριδικό πλέγμα, με το δομημένο τμήμα κοντά στο στερεό τοίχωμα.

Πριν τη βελτιστοποίηση της περύγωσης, πρώτα επιλύεται η ροή με τις συνθήκες που προαναφέρθηκαν και παρουσιάζεται η κατανομή του αριθμού Mach γύρω από την αρχική περύγωση. Αυτό απεικονίζεται στο σχήμα 5.15. Ο συντελεστής άνωσης τότε ισούται με  $C_L = 0.002194785$ .

Συνολικά χρησιμοποιούνται 9 μεταβλητές σχεδιασμού. Ξεκινώντας από την ακμή εκφυγής και ακολουθώντας την αεροτομή αριστερόστροφα είναι δύο σημεία ελέγχου με μεταβλητές τις τεταγμένες ( $Y_1, Y_2$ ), ένα σημείο ελέγχου με μεταβλητή τετμημένη και τεταγμένη ( $X_1, Y_3$ ), ακόμα ένα σημείο με μεταβλητή τεταγμένη ( $Y_4$ ), έπειτα στην πλευρά υπερπίεσης ακόμα ένα σημείο με μεταβλητές την τετμημένη και τεταγμένη ( $X_2, Y_5$ ) και, τέλος, άλλα δύο σημεία με μεταβλητές μόνο τις τεταγμένες τους ( $Y_6, Y_7$ ). Στον πίνακα 5.6 καταγράφονται οι αρχικές τιμές των παραπάνω μεταβλητών καθώς και η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του πεδίου ορισμού τους.

Πίνακας 5.6: Μεταβλητές σχεδιασμού περύγωσης συμπίεστή.

$b_i$	$b_{i,c}$	$b_{i,LOW}$	$b_{i,HIGH}$
$X_1$	0.443636	0.30000	0.55000
$X_2$	0.0523077	0.02000	0.150000
$Y_1$	0.0266	0.0150	0.04504
$Y_2$	0.0819692	0.0600	0.1000
$Y_3$	0.12311	0.0900	0.1500
$Y_4$	0.0789114	0.0500	0.0950
$Y_5$	-0.00784615	-0.0250	-0.0035
$Y_6$	0.0282769	0.0100	0.0350
$Y_7$	0.0112	0.0050	0.0145

Τα σημεία ελέγχου με συντεταγμένες (0.0, 0.0) και (0.0, 0.00466667) είναι σταθερά και καθορίζουν την κλίση της ακμής εκφυγής προς την πλευρά υποπίεσης ενώ τα σημεία με συντεταγμένες (0.0, 0.0) και (0.0, -0.00466667) είναι επίσης σταθερά και καθορίζουν την κλίση της ακμής εκφυγής προς την πλευρά υπερπίεσης. Το σημείο (0.0, 1.0) καθορίζει τη θέση της ακμής εκφυγής. Στο σχήμα απεικονίζονται όλα όσα προαναφέρθηκαν όσον αφορά το πεδίο ορισμού των μεταβλητών σχεδιασμού.

Ως προς την αβεβαιότητα στο κατασκευαστικό, εφαρμόζεται μία διαμόρφωση στην πλευρά υποπίεσης με παρόμοια χαρακτηριστικά με τις προηγούμενες περιπτώσεις. Οι σταθερές παράμετροι της συνάρτησης Hicks - Henne για αυτήν



την περίπτωση θεωρήθηκαν ίσοι με:

- Παράμετρος θέσης κορυφής  $t_1 = 0.5$
- Παράμετρος στενότητας κορυφής  $t_2 = 1.05$
- Θέση της διαμόρφωσης πάνω στην αεροτομή  $s_l = 0.3$
- Πλάτος της διαμόρφωσης  $s_r = 0.4$

Η στοχαστική μεταβλητή είναι και εδώ το ύψος της ατέλειας. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της τιμής της παραμέτρου είναι.

$$\mu_\alpha = 0.003$$

$$\sigma_\alpha = 0.0005$$

Όπως και στην περίπτωση της μεμονωμένης συμμετρικής αεροτομής, έτσι και εδώ η συνάρτηση στόχος είναι η μετρική στιβαρότητας του συντελεστή άνωσης. Συγκεκριμένα είναι επιθυμητή η μεγιστοποίηση της μέσης τιμής και η ελαχιστοποίηση της τυπικής απόκλισης του συντελεστή άνωσης.

$$F_1 = \max(\mu_{C_L}) = \min(-\mu_{C_L}) \quad (5.5)$$

$$F_2 = \min(\sigma_{C_L}) \quad (5.6)$$

Όπως και πριν, προκύπτει το μέτωπο των μη-κυριαρχούμενων λύσεων κατά Pareto και αυτό φαίνεται στο σχήμα 5.17.

Επιλέγονται, όπως και πριν, δύο διαφορετικές λύσεις από το μέτωπο Pareto. Μία με τη μέγιστη μέση τιμή του συντελεστή άνωσης και μία με την ελάχιστη τυπική απόκλιση. Τα σημεία ελέγχου των δύο διαφορετικών λύσεων καταγράφονται στον πίνακα 5.7. Η πρώτη λύση έχει τη μέγιστη μέση τιμή του συντελεστή άνωσης και ισούται με  $\mu_{C_L} = 0.00330634$ . Η τυπική απόκλιση του συντελεστή άνωσης αυτής της αεροτομής θα είναι ίση με  $\sigma_{C_L} = 3.386531 \cdot 10^{-6}$ . Η δεύτερη λύση έχει την ελάχιστη τυπική απόκλιση η οποία ισούται με  $\sigma_{C_L} = 1.696439 \cdot 10^{-8}$ , είναι δύο τάξεις μεγέθους μικρότερη από αυτήν της πρώτης λύσης. Η μέση τιμή του συντελεστή άνωσης της δεύτερης λύσης προέκυψε  $\mu_{C_L} = 0.00232991$ , αρκετά μικρότερη από την πρώτη λύση αλλά και πάλι

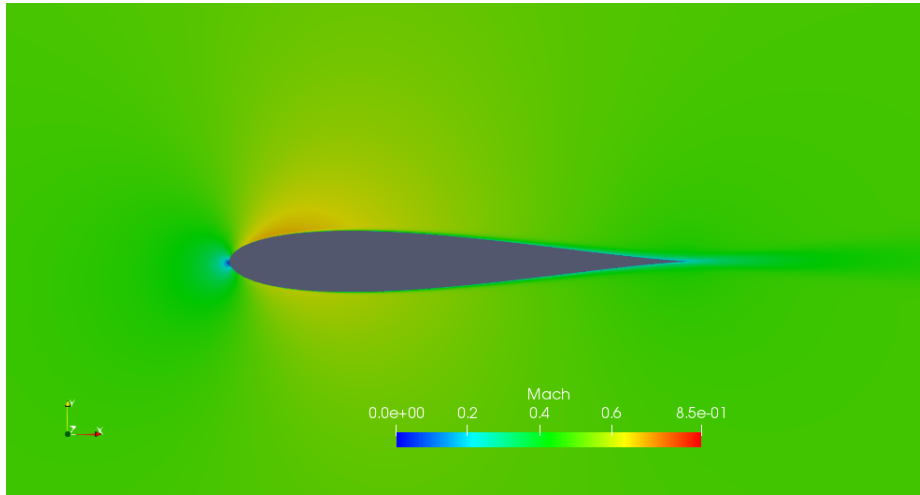
καλύτερη από τον συντελεστή άνωσης της αρχικής πτερύγωσης προ βελτιστοποίησης. Στο σχήμα 5.20 φαίνεται η κατανομή του  $C_L$  για τις δύο λύσεις που επιλέχθηκαν. Η πτερύγωση με την ελάχιστη τυπική απόκλιση του  $C_L$  αποδίδει πολύ χειρότερα από εκείνη με τη μέγιστη μέση τιμή. Η πτερύγωση με το ελάχιστο  $\sigma_{C_L}$  δεν αποτελεί λύση στο πρόβλημα, ακόμα και αν έχει πολύ μικρή τυπική απόκλιση, δύο τάξεις μεγέθους μικρότερη από αυτή με το μέγιστο  $\mu_{C_L}$ . Έτσι και εδώ, επιλέγεται η λύση με τη μέγιστη μέση τιμή του συντελεστή άνωσης.

Πίνακας 5.7: Σημεία ελέγχου των δύο διαφορετικών λύσεων πτερύγωσης συμπιεστή.

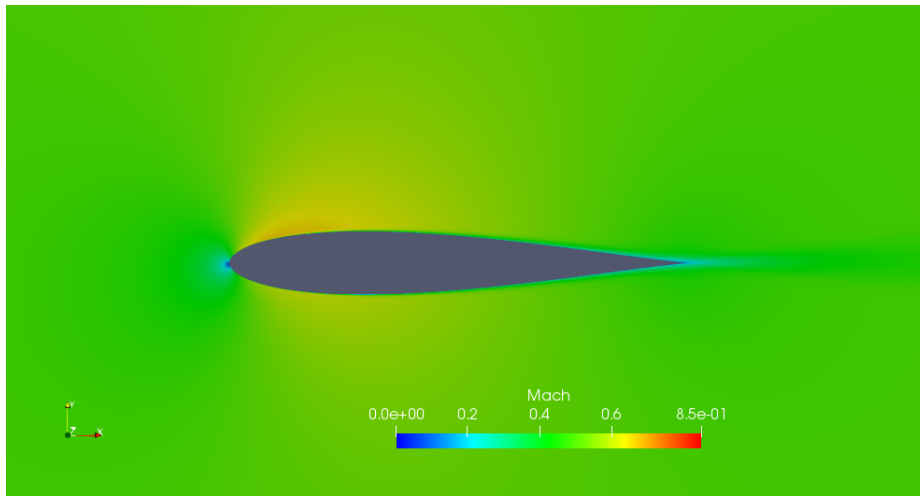
$b_i$	$\max \mu_{C_L}$	$\min \sigma_{C_L}$
$X_1$	0.34730576	0.44932920
$X_2$	0.07142781	0.03560115
$Y_1$	0.03447958	0.01835877
$Y_2$	0.06699485	0.09217899
$Y_3$	0.10755808	0.15000000
$Y_4$	0.08146618	0.09203925
$Y_5$	-0.0067856	-0.02500000
$Y_6$	0.01406249	0.027298593
$Y_7$	0.00952940	0.012531520

Στο σχήμα 5.18 φαίνονται οι δύο διαφορετικές λύσεις σε σχέση με την αρχική αεροτομή.

Στο σχήμα 5.19 φαίνονται τα πεδία ροής σε πτερύγωση συμπιεστή με τη μέγιστη μέση τιμή του συντελεστή άνωσης και την ελάχιστη τιμή της τυπικής απόκλισης του συντελεστή άνωσης.

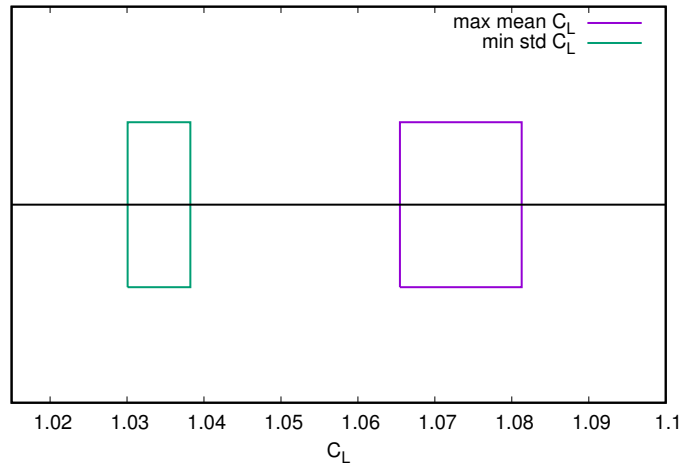


(α') Κατανομή αριθμού Mach γύρω από αεροτομή με μέγιστη μέση τιμή του  $C_L$ .

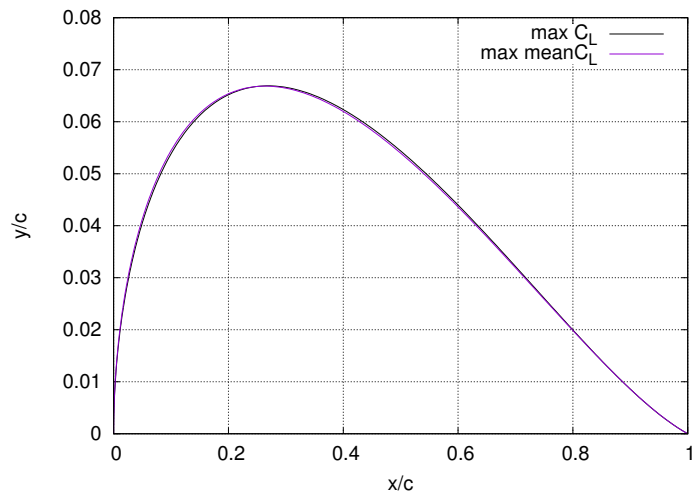


(β') Κατανομή αριθμού Mach γύρω από αεροτομή με ελάχιστη τυπική απόκλιση του  $C_L$ .

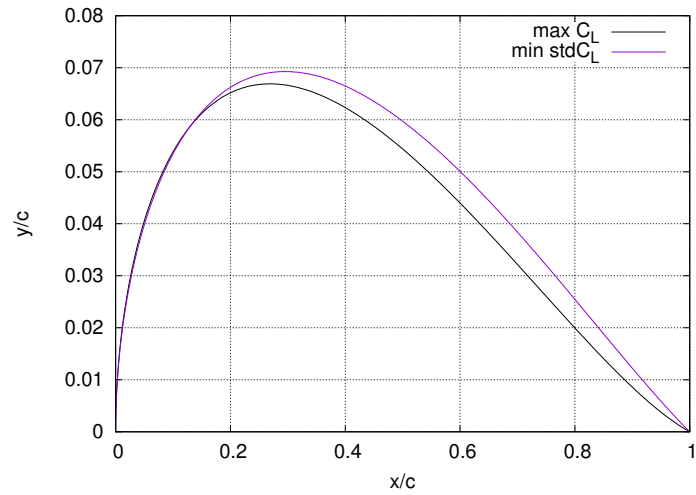
Σχήμα 5.6: Περίπτωση βελτιστοποίησης μεμονωμένης συμμετρικής αεροτομής με κατασκευαστικές αβεβαιότητες. Κατανομή αριθμού Mach γύρω από τις δύο αεροτομές-λύσεις που επιλέχθηκαν.



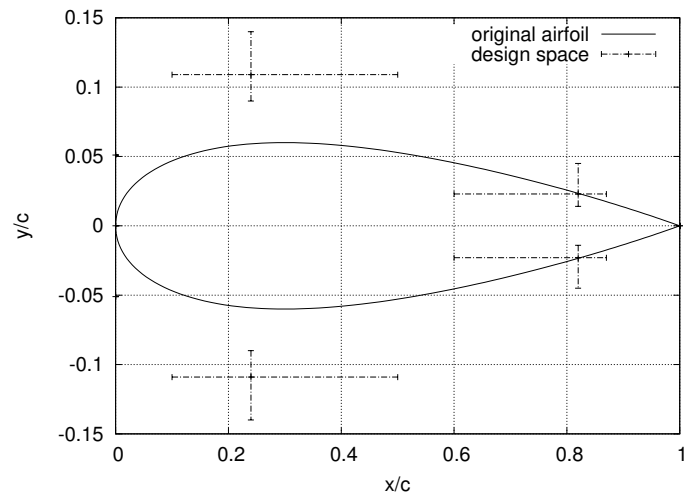
Σχήμα 5.7: Περίπτωση βελτιστοποίησης μεμονωμένης συμμετρικής αεροτομής με κατασκευαστικές αβεβαιότητες. Κατανομές  $\pm 3\sigma$  του συντελεστή άνωσης των δύο λύσεων.



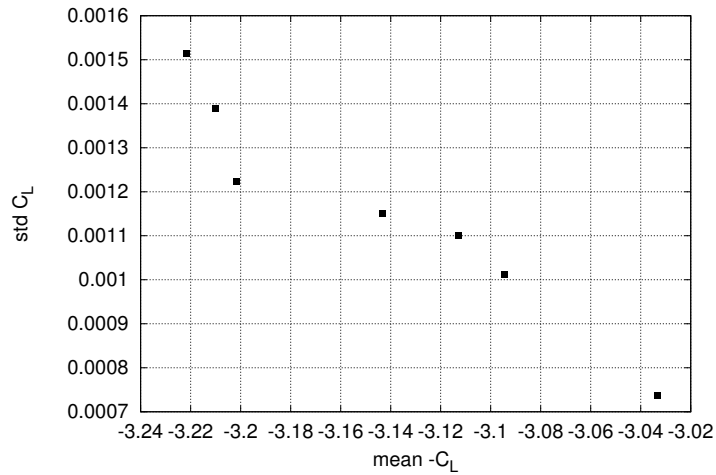
Σχήμα 5.8: Σύγκριση αεροτομής με μέγιστη τιμή συντελεστή άνωσης χωρίς αβεβαιότητες (μαύρο) και της αεροτομής με μέγιστη μέση τιμή του συντελεστή άνωσης (μωβ).



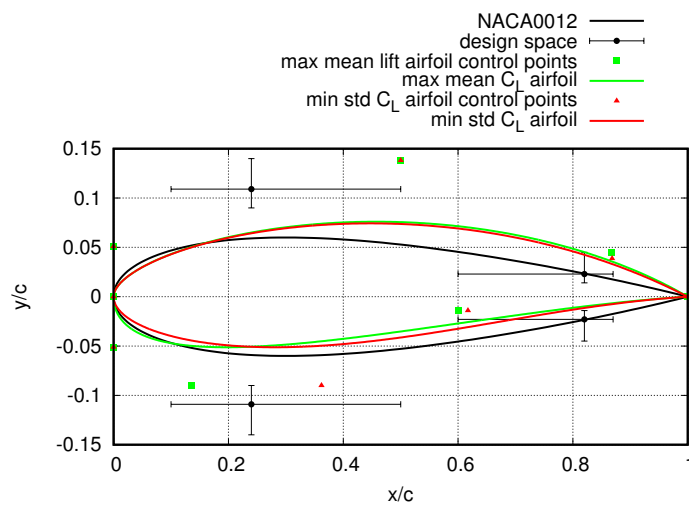
Σχήμα 5.9: Σύγκριση αεροτομής με μέγιστη τιμή συντελεστή άνωσης χωρίς αβεβαιότητες (μαύρο) και της αεροτομής με ελάχιστη τυπική απόκλιση του συντελεστή άνωσης (μωβ).



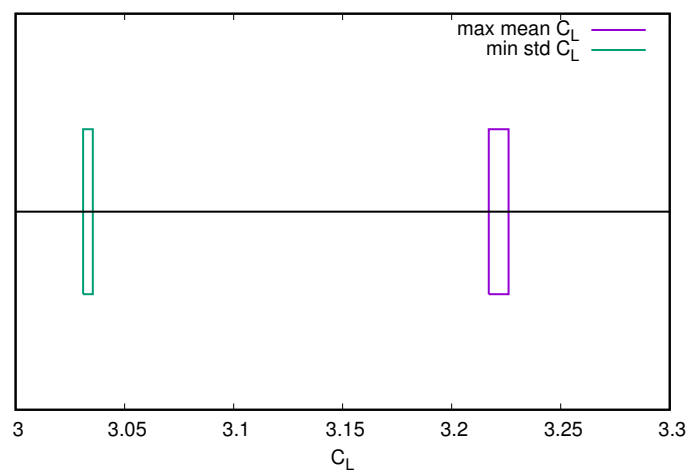
Σχήμα 5.10: Μεταβλητές σχεδίασης μη-συμμετρικής αεροτομής με κατασκευαστικές αβεβαιότητες.



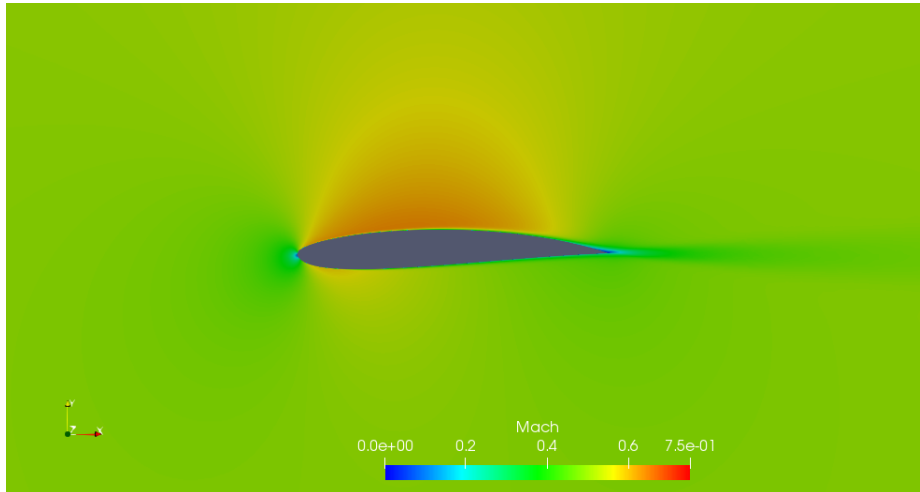
Σχήμα 5.11: Μέτωπο Pareto λύσεων μη-συμμετρικής αεροτομής με κατασκευαστικές αβεβαιότητες.



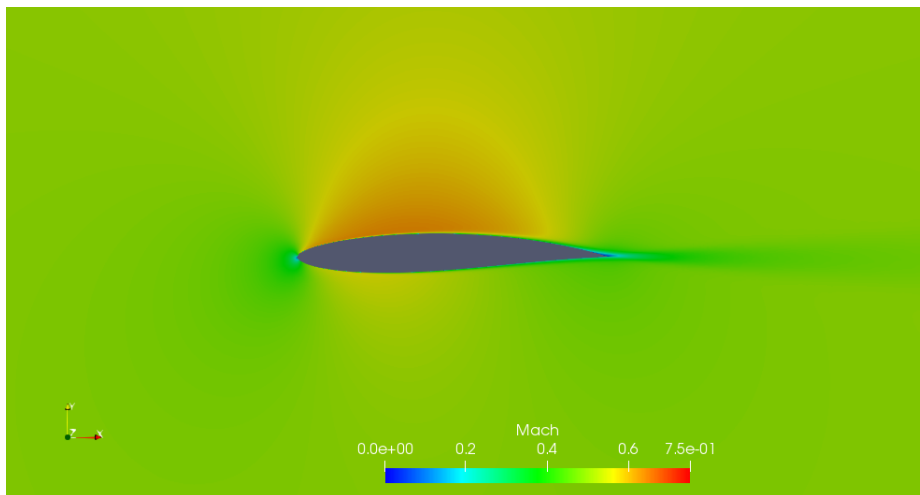
Σχήμα 5.12: Αρχική αεροτομή NACA0012 (μαύρο), αεροτομή με μέγιστη μέση τιμή συντελεστή άνωσης (πράσινο) και αεροτομή με ελάχιστη τυπική απόκλιση συντελεστή άνωσης (κόκκινο).



Σχήμα 5.13: Περίπτωση βελτιστοποίησης μεμονωμένης μη-συμμετρικής αεροτομής με κατασκευαστικές αβεβαιότητες. Κατανομές  $\pm 3\sigma$  του συντελεστή άνωσης των δύο λύσεων.



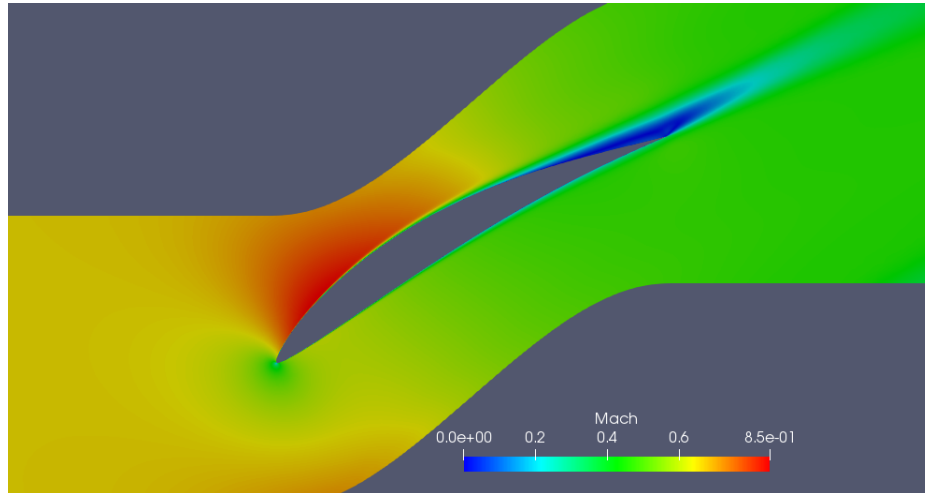
(α') Κατανομή αριθμού Mach γύρω από αεροτομή με μέγιστη μέση τιμή του  $C_L$ .



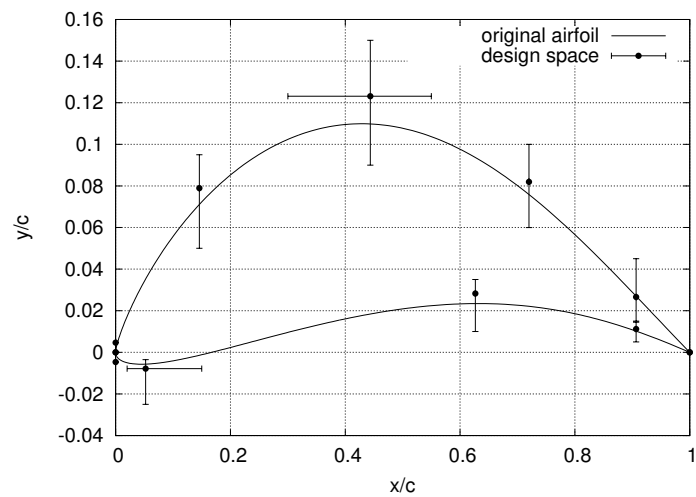
(β') Κατανομή αριθμού Mach γύρω από αεροτομή με ελάχιστη τυπική απόκλιση του  $C_L$ .

Σχήμα 5.14: Περίπτωση βελτιστοποίησης μεμονωμένης μη-συμμετρικής αεροτομής με κατασκευαστικές αβεβαιότητες. Κατανομή αριθμού Mach γύρω από τις δύο αεροτομές-λύσεις που επιλέχθηκαν.

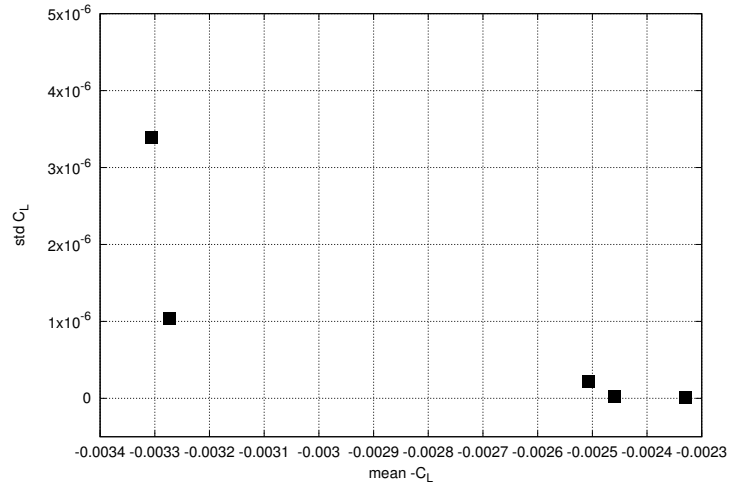




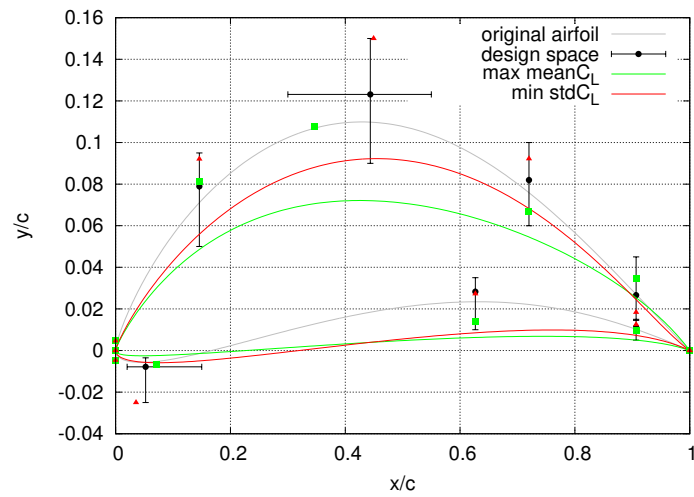
Σχήμα 5.15: Κατανομή αριθμού Mach γύρω από πτερύγωση συμπιεστή προ βελτιστοποίησης.



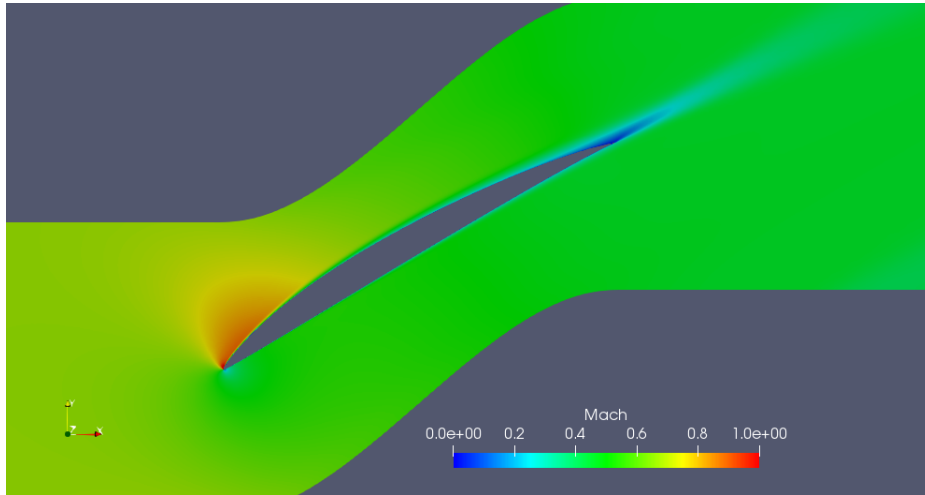
Σχήμα 5.16: Αρχική αεροτομή πτερύγωσης συμπιεστή και πεδίο ορισμού των μεταβλητών σχεδιασμού.



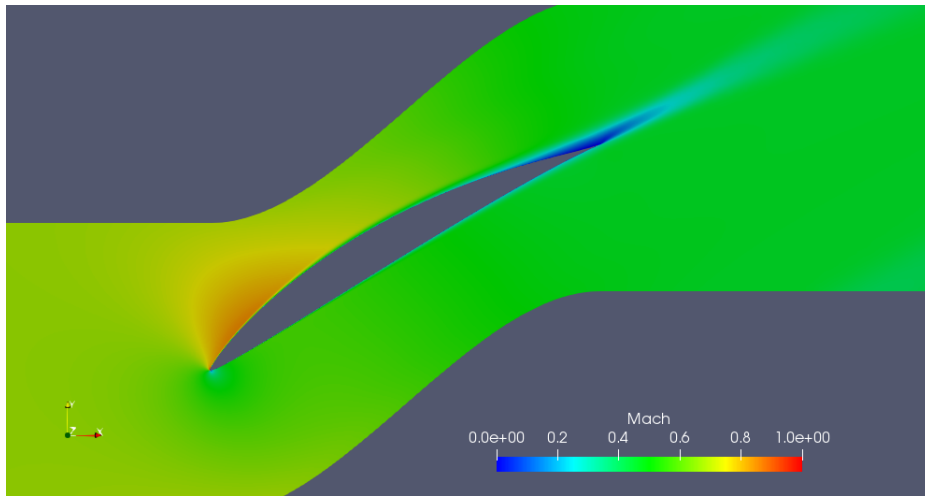
Σχήμα 5.17: Μέτωπο Pareto με τις μη-κυριαρχούμενες λύσεις. Από τις πέντε λύσεις επιλέγονται δύο προς μελέτη. Μία με την μέγιστη μέση τιμή του συντελεστή άνωσης και μία με την ελάχιστη τυπική απόκλιση του.



Σχήμα 5.18: Αεροτομές πτερύγωσης συμπιεστή με μέγιστη μέση τιμή άνωσης (πράσινο) και ελάχιστη τυπική απόκλιση (κόκκινο) μαζί με τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου τους σε σύγκριση με την αρχική αεροτομή πτερύγωσης συμπιεστή (γκρι).

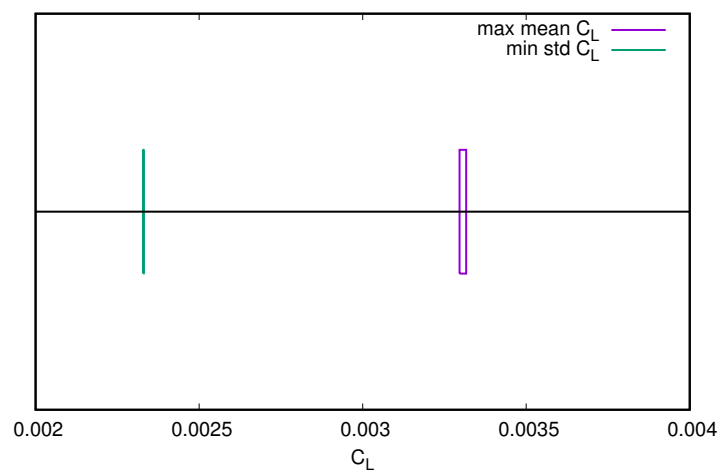


(α') Κατανομή αριθμού Mach σε πτερύγωση συμπίεστη με μέγιστη μέση τιμή του  $C_L$ .



(β') Κατανομή αριθμού Mach σε πτερύγωση συμπίεστη με ελάχιστη τυπική απόκλιση του  $C_L$ .

Σχήμα 5.19: Περίπτωση βελτιστοποίησης αεροτομών πτερύγωσης συμπίεστη με κατασκευαστικές αβεβαιότητες. Κατανομή αριθμού Mach γύρω από τις δύο αεροτομές-λύσεις που επιλέχθηκαν.



Σχήμα 5.20: Περίπτωση βελτιστοποίησης αεροτομών πτερύγωσης συμπιεστή με κατασκευαστικές αβεβαιότητες. Κατανομές  $\pm 3\sigma$  του συντελεστή άνωσης των δύο λύσεων.

## Κεφάλαιο 6

# Συμπεράσματα - Προτάσεις για Μελλοντική Μελέτη

### 6.1 Ανακεφαλαίωση

Στο πρώτο κεφάλαιο έγινε μια μικρή εισαγωγή στη βελτιστοποίηση, στις κατηγορίες στις οποίες χωρίζονται οι διαφορετικές μέθοδοι βελτιστοποίησης. Επίσης, έγινε μια γενική παρουσίαση του στιβαρού αεροδυναμικού σχεδιασμού και της αντίστοιχης ορολογίας που το διέπει.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάστηκε η μέθοδος του μη-επεμβατικού πολυωνυμικού χάους, αρχικά για μία και έπειτα για πολλές στοχαστικές μεταβλητές.

Στο τρίτο κεφάλαιο, αρχικά έγινε μια γενική ανάλυση της έννοιας των κατασκευαστικών ατελειών σε αεροτομές και παρουσιάστηκαν τα διάφορα είδη τους. Επίσης, παρουσιάστηκε και μελετήθηκε η συνάρτηση Hicks-Henne ως τρόπος μαθηματικής εισαγωγής των κατασκευαστικών ιδιομορφιών. Παρουσιάστηκε ακόμη ο τρόπος εφαρμογής της συνάρτησης σε αεροτομή όταν είναι γνωστή η γεωμετρία της. Τέλος παρουσιάστηκαν ορισμένα παραδείγματα εφαρμογής της συνάρτησης Hicks-Henne και επιλύθηκε τυρβώδης ροή γύρω από αεροτομή χωρίς και με κατασκευαστικές ατέλειες για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων H-H.

Έπειτα στο τέταρτο κεφάλαιο χρησιμοποιήθηκε η μη-επεμβατική μέθοδος PCE για την ποσοτικοποίηση αβεβαιότητας αεροτομής με κατασκευαστικές αβεβαιότητες. Ειδικότερα, εξετάστηκαν τρεις περιπτώσεις. Αρχικά μελετήθηκε μεμονωμένη αεροτομή με μία διαμόρφωση στην πλευρά υποπίεσης και μία στο-

χαστική μεταβλητή. Ως αντικειμενική συνάρτηση εξετάστηκαν ο συντελεστής άνωσης και ο συντελεστής αντίστασης ξεχωριστά. Στη δεύτερη περίπτωση εξετάστηκε πάλι μεμονωμένη αεροτομή, αυτή τη φορά με δύο διαμορφώσεις και δύο στοχαστικές μεταβλητές, τα ύψη των διαμορφώσεων. Ως αντικειμενικές συναρτήσεις θεωρήθηκαν οι ίδιες. Τέλος μελετήθηκε η περίπτωση πτερύγωσης συμπίεστη με μία διαμόρφωση και μία στοχαστική μεταβλητή (το ύψος της διαμόρφωσης). Ως αντικειμενικές συναρτήσεις μελετήθηκαν ο λόγος στατικών πιέσεων εξόδου προς εισόδου και η γωνία εξόδου της ροής ως προς τον οριζόντιο άξονα.

Τέλος στο πέμπτο κεφάλαιο πραγματοποιήθηκε βελτιστοποίηση με χρήση εξελικτικών αλγορίθμων. Αρχικά, έγινε βελτιστοποίηση μεμονωμένης συμμετρικής αεροτομής χωρίς αβεβαιότητες. Συνάρτηση-στόχος ήταν η μεγιστοποίηση του συντελεστή άνωσης. Στη συνέχεια, έγινε πάλι βελτιστοποίηση μεμονωμένης συμμετρικής αεροτομής αυτή τη φορά με κατασκευαστικές αβεβαιότητες και συγκεκριμένα με μία διαμόρφωση στην πλευρά υποπίεσης. Από τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης διακρίθηκαν δύο λύσεις, μία με τη μέγιστη μέση τιμή του συντελεστή άνωσης και μία με την ελάχιστη τυπική απόκλιση. Οι δύο αυτές λύσεις συγκρίθηκαν με την αρχική αεροτομή και με την αεροδυναμικά βέλτιστη χωρίς αβεβαιότητες. Στις δύο αυτές περιπτώσεις, η αρχική και η τελική αεροτομή είναι συμμετρικές. Πραγματοποιείται ακόμα μια περίπτωση βελτιστοποίησης μεμονωμένης αεροτομής, αυτή τη φορά, το αποτέλεσμα επιτράπηκε να γίνει μη-συμμετρικό. Στην τελευταία περίπτωση, έγινε βελτιστοποίηση πτερύγωσης συμπίεστη με κατασκευαστικές αβεβαιότητες. Με χρήση της συνάρτησης Hicks-Henne εφαρμόστηκε μία κατασκευαστική ατέλεια στην πλευρά υποπίεσης και η στοχαστική μεταβλητή ήταν το ύψος αυτής. Συναρτήσεις-στόχοι ήταν η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του συντελεστή άνωσης.

## 6.2 Παρατηρήσεις - Συμπεράσματα

Μετά από εφαρμογή των καμπυλών H-H και με δοκιμή διαφορετικών παραμέτρων, όπως ήταν αναμενόμενο, προέκυψε ότι μεγαλύτερη επίπτωση στην ατέλεια έχει η παράμετρος ύψους, τόσο στη μορφή της αεροτομής όσο και στα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά της.

Στην εφαρμογή του PCE για την ποσοτικοποίηση αβεβαιότητας του φαινομένου, σε ορισμένες περιπτώσεις όπως λ.χ. πτερύγωση συμπίεστη, οι τάξεις χάους που επιλέχθηκαν δεν ήταν αρκετές για την προσέγγιση του φαινομένου. Αυτό φάνηκε από τους συντελεστές πολυωνυμικού χάους. Αντί να φθίνουν

με κάθε επόμενο όρο κινούνταν στην ίδια τάξη μεγέθους. Σε άλλες όμως περιπτώσεις όπως η μεμονωμένη αεροτομή με μία διαμόρφωση, από τους συντελεστές του PCE φάνηκε ότι μια τάξη χάους ίση με 3 ήταν αρκετή για να προσεγγίσει το φαινόμενο.

Κατά τον αεροδυναμικά στιβαρό σχεδιασμό - βελτιστοποίηση με αβεβαιότητες, γίνεται φανερό η αντικρουόμενη φύση του προβλήματος, δηλαδή, λύση με χαμηλή τυπική απόκλιση ('robust' λύση) έχει σχετικά χαμηλό συντελεστή άνωσης ενώ λύση με τη μέγιστη δυνατή μέση τιμή άνωσης έχει υψηλή τυπική απόκλιση που σημαίνει ότι είναι πιο εύκολο να μεταβληθεί ο συντελεστής άνωσης για μικρές αλλαγές στη γεωμετρία της αεροτομής. Επομένως, είναι καλύτερη η επιλογή μιας ενδιάμεσης λύσης η οποία έχει καλή μέση τιμή του συντελεστή άνωσης και σχετικά χαμηλή τυπική απόκλισή του.

Με τη δημιουργία λογισμικού υπέρθεσης καμπυλών H-H σε άλλες γεωμετρικές διατίθεται, πλέον, ένα εργαλείο για την παραμετροποίηση κατασκευαστικών ατελειών, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον αεροδυναμικά στιβαρό σχεδιασμό-βελτιστοποίηση.

Από την εφαρμογή των καμπυλών H-H για μοντελοποίηση κατασκευαστικών διαμορφώσεων σε αεροτομές, μη ορατών με γυμνό μάτι, είναι φανερό ότι παρόλο που οι ατέλειες αυτές δεν φαίνονται, υπάρχουν και επηρεάζουν τα αεροδυναμικά τους χαρακτηριστικά. Είναι, λοιπόν, απαραίτητο τυχόν αποκλίσεις από την επιθυμητή γεωμετρία (έστω και πολύ μικρές) να λαμβάνονται υπόψη κατά το σχεδιασμό/βελτιστοποίηση.

Η συνάρτηση H-H είναι απλά ένας από τους πολλούς τρόπους να παραμετροποιηθεί μια ατέλεια. Περισσότερο σημαντική είναι η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε, δηλαδή η υπέρθεση αυτών των καμπυλών σε άλλες γεωμετρικές. Άλλωστε, μπορεί να εφαρμοστεί οποιαδήποτε καμπύλη, κατάλληλα επιλεγμένη ώστε να αναπαριστά ατέλεια και να υπερτεθεί στην εκάστοτε γεωμετρία προς μελέτη. Είναι απαραίτητη η συμβολή του κατασκευαστικού τομέα για την πρόταση ενός κατάλληλου μοντέλου ή/και κατάλληλων ορίων των παραμέτρων που να ανταποκρίνονται σε πραγματικές περιπτώσεις.

### 6.3 Προτάσεις για μελλοντική μελέτη

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου του PCE έγινε η παραδοχή ότι τόσο οι στοχαστικές μεταβλητές εισόδου όσο και η αντικειμενική συνάρτηση ακολουθούν

κανονική κατανομή. Αυτό μπορεί γενικά να καλύπτει πολλές περιπτώσεις αλλά συγκεκριμένα σε γραμμή παραγωγής πολλά μεγέθη ακολουθούν άλλη στοχαστική κατανομή πέρα της κανονικής. Θα είχε λοιπόν ενδιαφέρον η εφαρμογή της μη επεμβατικής μεθόδου του PCE με άλλη κατανομή πέραν της κανονικής. Τότε, αλλάζει η PDF και κατά συνέπεια, αλλάζει η οικογένεια ορθογώνιων πολυωνύμων για την υλοποίηση της GQ.

Μια άλλη μέθοδος, ίσως πιο ακριβής και πιο γρήγορη από το μη-επεμβατικό PCE αλλά σίγουρα πιο δύσκολη στην εφαρμογή είναι η επεμβατική μέθοδος PCE.

Η εφαρμογή της συζυγούς μεθόδου (adjoint method) ή η χρήση ενός συνδυασμού της συζυγούς μεθόδου με εξελικτικούς αλγορίθμους για την βελτιστοποίηση έχει ενδιαφέρον ως προς τα αποτελέσματα που μπορεί να δώσει.

Τα εύρη των τιμών των παραμέτρων που μελετήθηκαν, επιλέχθηκαν αυθαίρετα, χωρίς τη διάθεση πραγματικών δεδομένων, όπως κατασκευαστικές ανοχές. Είναι, λοιπόν, δυνατή μια εφαρμογή της μεθόδου με χρήση πραγματικών δεδομένων ή ακόμα και με χρήση άλλων καμπυλών πέραν της συνάρτησης Hicks-Henne.

Τέλος, η μελέτη άλλων ειδών κατασκευαστικών ατελειών όπως προεξοχές ή διαφορετικός συνδυασμός διαμορφώσεων (π.χ. εφαρμογή δύο διαμορφώσεων στην πλευρά υποπίεσης έτσι ώστε να αλληλοκαλύπτονται (overlap) είναι μια πιθανή επέκταση της παρούσας μελέτης. Επίσης, μπορούν να χρησιμοποιηθούν άλλες στοχαστικές μεταβλητές αντί των παραμέτρων της συνάρτησης Hicks-Henne όπως η θέση και το πλάτος της διαμόρφωσης.



# Βιβλιογραφία

- [1] Κ. Χ. Γιαννάκογλου, *Μέθοδοι Αιτιοκρατικής και Στοχαστικής Βελτιστοποίησης και Εφαρμογές*, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2η έκδοση, 2012
- [2] J. Gentle, W. Härdle, and Y. Mori, *Handbook of Computational Statistics*, 2014
- [3] M.H. Lin, J.F. Tsai, and Chian-Son Yu, *A Review of Deterministic Optimization Methods in Engineering and Management*, Hindawi Publishing Corporation, Vol. 2012 2012
- [4] K. Deb, *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms: An Introduction*, Indian Institute of Technology Kanpur, 2011
- [5] A.F. Shahraki and R. Noorossana, *Reliability-based robust design optimization: A general methodology using genetic algorithm*, Computers & Industrial Engineering, Vol. 74 (199-207) 2014
- [6] X. Wan and G. E. Karniadakis, *An adaptive multi-element generalized polynomial chaos method for stochastic differential equations*, Journal of Computational Physics, Vol. 209 (617-642) 2005
- [7] D. Qu and C. Xu, *Generalized polynomial chaos decomposition and spectral methods for the stochastic Stokes equations*, Computers and Fluids, Vol. 71 (250-260) 2013
- [8] Γ. Νυχτερή, *Προσομοίωση Προβλημάτων με Αβεβαιότητες - Επεμβατικές Μέθοδοι Πολυωνυμικού Χάους. Διατύπωση, Προγραμματισμός και Εφαρμογές στην Ασυμπίεστη Ψευδο-1Δ Ροή*, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Διπλωματική Εργασία, 2016
- [9] Γ. Πάμπαλης, *Υλοποίηση Αναπτύγματος Πολυωνυμικού Χάους στον Αεροδυναμικά Στιβαρό Σχεδιασμό – Βελτιστοποίηση με Εξελικτικούς Αλγόριθμους υπό Στοχαστικές Εισόδους*, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Διπλωματική Εργασία, 2015

- [10] K. L. Judd, L. Maliar, S. Maliar and R. Valero, *Smolyak method for solving dynamic economic models: Lagrange interpolation, anisotropic grid and adaptive domain*, Journal of Economic Dynamics & Control, Vol. 44, (92-123) 2014
- [11] M. S. Eldred, *Recent Advances in Non-Intrusive Polynomial Chaos and Stochastic Collocation Methods for Uncertainty Analysis and Design*, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM 87185, 2009
- [12] A. H. Nayfeh and H. T. Abu-Khajeel, *Effect of a Hump on the Stability of the Subsonic Boundary Layers over an Airfoil*, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Int. J. Engng ScL Vol. 34 1996
- [13] L. Ayuso, R. Sant and J. Meseguer, *Influence of leading edge imperfections on the aerodynamic characteristics of NACA 632 -215 laminar aerofoils at low Reynolds numbers*, University of Madrid, department of aeronautics, 2014
- [14] K. M. Selvan, *On the effect of shape parameterization on aerofoil shape optimization*, International Journal of Research in Engineering and Technology, Vol. 04 2015
- [15] K. X. Γιαννάκογλου, *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς*, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2003
- [16] K. X. Γιαννάκογλου, *Συνεκτικές Ροές στις Στροβιλομηχανές*, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2004
- [17] S. Poles, and A. Lovinson, *A Polynomial Chaos Approach to Robust Multiobjective Optimization*, Hybrid and Robust Approaches to Multi-objective Optimization, 2009
- [18] M. S. Eldred and Burkardt, *Comparison of Non-Intrusive Polynomial Chaos and Stochastic Collocation Methods for Uncertainty Quantification*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2009
- [19] E. Benedikt, *Effect of Geometric Uncertainties on the Aerodynamic Characteristic of Offshore Wind Turbine Blades*, Journal of Physics: Conference Series, Ser. 555 012033 2014
- [20] J. Huang, G. Zhengong, K. Zhao, and J. Bai, *Robust Design of Supercritical Wing Aerodynamic Optimization Considering Fuselage Interfering*, Chinese Journal of Aeronautics, Vol. 23 (523-528), 2010

- [21] X. Du, L. Leifsson, S. Koziel and A. Bekasiewicz, *Airfoil Design Under Uncertainty Using Non-Intrusive Polynomial Chaos Theory and Utility Functions*, International Conference on Computational Science, Vol. 108C (1493-1499) June 2017
- [22] Z. Huan, G. Zhenghong, G. Yuan and C. Wang, *Effective robust design of high lift NLF airfoil under multi-parameter uncertainty*, Aerospace Science and Technology, Vol. 68 (530-542) June 2017
- [23] F. Lanzillotta, A. Sciacchitano and A. G. Rao, *Effect of film cooling on the aerodynamic performance of an airfoil*, International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 66 (108-120) June 2017
- [24] L.M.M. van den Bos, B. Koren and R.P. Dwight, *Non-intrusive uncertainty quantification using reduced cubature rules*, Journal of Computational Physics, Vol. 332 (418-445) December 2016