



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

## Εφαρμογές και Διερευνήσεις Βελτιστοποίησης Τοπολογίας σε 2Δ/3Δ Στρωτές Ροές

Διπλωματική Εργασία

Νικόλαος Περαντάκος

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Φεβρουάριος 2021



## Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή Κ. Χ. Γιαννάκογλου, για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα και τις γνώσεις που μου προσέφερε σε όλη την περίοδο των φοιτητικών μου χρόνων. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Δρ. Ε. Παπουτσή για την πολύτιμη βοήθειά του καθ'όλη τη διάρκεια διεξαγωγής της διπλωματικής εργασίας.

Τέλος, ευχαριστώ πολύ την οικογένεια μου και τους φίλους μου για την στήριξη τους.





Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

## Εφαρμογές και Διερευνήσεις Βελτιστοποίησης Τοπολογίας σε 2Δ/3Δ Στρωτές Ροές

Διπλωματική Εργασία

Νικόλαος Περαντάκος

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Φεβρουάριος 2021

### Περίληψη

Αντικείμενο της Διπλωματικής Εργασίας είναι η Βελτιστοποίηση Τοπολογίας (Topology Optimisation) με τη χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου (continuous adjoint method) σε προβλήματα της Μηχανικής των Ρευστών. Η Βελτιστοποίηση Τοπολογίας (BeTo) βασίζεται στην υιοθέτηση ενός πεδίου πορώδους (porosity field) ή μη-διαπερατότητας, με τη βοήθεια του οποίου επαυξάνονται κατάλληλα οι εξισώσεις διατήρησης της ορμής. Οι τιμές των μεταβλητών της μη-διαπερατότητας στις κυφέςες του χωρικού πλέγματος αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού ενός προβλήματος BeTo, το οποίο υπάγεται σε συναρτήσεις στόχου και περιορισμούς. Ο όρος της μη-διαπερατότητας, εισάγεται με σκοπό την απενεργοποίηση των εξισώσεων ροής στο προς στερεοποίηση τμήμα του χώρου σχεδιασμού.

Στη διπλωματική εργασία θίγονται θέματα όπως η συμπεριφορά και η αποτελεσματικότητα της Βελτιστοποίησης Τοπολογίας, η οποία εφαρμόζεται σε διδιάστατα και τριδιάστατα προβλήματα στρωτής ροής και ασυμπίεστου ρευστού, καθώς και η αξιοπιστία της συνάρτησης-στόχου, σε σύγκριση με επίλυση σε πλέγματα στα οποία το όριο της προς μελέτη γεωμετρίας ταυτίζεται με το όριο του πλέγματος (οριόδετα πλέγματα).

Πιο συγκεκριμένα, ορίζονται οι εξισώσεις της ροής που επιλύονται στο υπολογιστικό χωρίο, καθώς και οι μαθηματικές σχέσεις που περιγράφουν τη συνάρτηση-στόχο και τους περιορισμούς του εκάστοτε προβλήματος που αντιμετωπίζεται. Ακόμη, καταstrώνονται οι εξισώσεις συζυγούς προβλήματος (adjoint problem) και των παραγώγων ευαισθησίας (sensitivity derivatives), οι οποίες συνεισφέρουν στην ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος. Ακολούθως, δημιουργείται το πλέγμα, όπου και επιλύονται τα συστήματα του πρωτεύοντος και συζυγούς προβλήματος. Διερευνάται η συμπεριφορά της BeTo κατά την επιβολή περιορισμών, ενώ συγχρόνως μεταβάλλεται η συνάρτηση και η αρχικοποίηση του πεδίου μη-διαπερατότητας. Επιπλέον, επιδιώκεται

η εύρεση ενός ομαλού και δυαδικού πεδίου εφαρμόζοντας τη μέθοδο Κανονικοποίηση-Προβολή, ενώ ακόμη αποδεικνύεται η χρησιμότητα της σταδιακής ενεργοποίησης των μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος.

Στη συνέχεια, έπεται μετεπεξεργασία του πεδίου του πορώδους, με σκοπό την αντιστοίχιση των περιοχών που έχουν στερεοποιηθεί σε τοίχωμα, δηλαδή την επιβολή των κατάλληλων οριακών συνθηκών. Η διαδικασία αυτή, εξυπηρετεί τόσο την προσπάθεια εύρεσης μιας αξιόπιστης τιμής της συνάρτησης-στόχου, όσο και τη σύγκριση λύσεων που προκύπτουν είτε από BeTo, είτε από βελτιστοποίηση μορφής.

Η διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου, δηλαδή η γένεση πλέγματος, η επίλυση των εξισώσεων ροής και των συζυγών εξισώσεων για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, αλλά και η βελτιστοποίηση των προβλημάτων (Τοπολογίας, Μορφής) πραγματοποιήθηκαν στο περιβάλλον του OpenFOAM, με λογισμικό της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του ΕΜΠ (ΜΠΥ-Ρ/ΕΜΠ), ενώ η επεξεργασία και η απεικόνιση των αποτελεσμάτων έγινε εφικτή μέσω του λογισμικού Paraview. Μάλιστα, η ανάγκη της τροφοδότησης του OpenFOAM με αρχεία της μορφής .stl, σε ορισμένα προβλήματα που τέθηκαν προς επίλυση, οδήγησε στη χρήση του εμπορικού λογισμικού SolidWorks.



**National Technical University of Athens**  
School of Mechanical Engineering  
Department of Fluid Mechanics  
LAB of Thermal Turbomachines  
Parallel CFD & Optimization Unit

## **Applications and Assessment of Topology Optimization in 2D/3D Laminar Flows**

Diploma Thesis

**Nikolaos Perantakos**

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, February 2021

### **Abstract**

The application of Topology Optimization on problems related with Fluid Mechanics (governed by Navier-Stokes equations for incompressible flows), using the continuous adjoint approach, is the main subject of this diploma thesis. At Topology Optimization problems, a variable permeability (porosity) field is defined by adding an extra term on momentum equations. The values of the permeability field, at each node of the computational domain, consist the design variables of a Topology Optimization problem governed by objective functions and constraints. The permeability term is introduced in order to deactivate the flow equations in the part of the design space to be solidified.

The diploma thesis addresses issues such as the behavior and the effectiveness of the Topology Optimization, applied to two or three-dimensional problems for laminar and incompressible flows, and also the assessment of the objective function, compared with body fitted meshes.

More specifically, the governing flow equations and the corresponding mathematical relations of the objective function and the imposed constraints are defined. In addition, the equations governing the adjoint system and compute the sensitivity derivatives, which contribute on updating the design variables, are developed. The computational grid, where the primal and adjoint problems are solved, is constructed in order to find the optimal value of the permeability field and the objective function. The behaviour of Topology Optimization, while the imposed constraints are satisfied and the non-permeability function and initialization are alternated, is presented. The computation of a smooth and binary field is sought, by applying the Regularization-Projection method, and the usefulness of gradual activation of the design variables is also proved.

Subsequently, the post-processing of the permeability field takes place, in order to match the areas to be solidified with walls, and impose the appropriate boundary conditions. This process serves both the attempt to find a reliable value of the objective function and make a comparison between Topology and Shape Optimization.

The discretization of the computational domain (mesh generation), the solution of flow and adjoint equations for the computation of sensitivity derivatives, and the optimization itself (Topology, Shape) took place in the environment of OpenFOAM, by means of solvers developed by the Parallel CFD & Optimization Unit of NTUA (PCOpt/NTUA). The post-processing and visualization of the results was possible through Paraview and the need to provide OpenFOAM with files in stl format, led to the use of commercial software SolidWorks.



## Ακρωνύμια

ΕΘΣ	Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΒεΜο	Βελτιστοποίηση Μορφής
ΒεΤο	Βελτιστοποίηση Τοπολογίας
ΜΠΥΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
ΣΜΔ	Σταδιακά Μεταβαλλόμενη Διαπερατότητα
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
<hr/>	
2I3O	Two Inlet Three Outlet
CFD	Computational Fluid Dynamics
EFS	Equivalent Flow Solutions
MMA	Method of Moving Asymptotes
NTUA	National Technical University of Athens
PCOpt	Parallel CFD & Optimization (Unit)



# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
<b>1</b> Εισαγωγή	<b>1</b>
<b>2</b> Βελτιστοποίηση Τοπολογίας	<b>3</b>
2.1 Πρωτεύον Πρόβλημα (Primal)	3
2.2 Στόχος - Περιορισμοί	4
2.2.1 Συνάρτηση-Στόχος	4
2.2.2 Περιορισμοί	5
2.3 Συζυγές Πρόβλημα (Adjoint)	8
2.4 Οριακές Συνθήκες (ΟΣ)	16
2.4.1 ΟΣ Πρωτεύοντος προβλήματος	16
2.4.2 ΟΣ Συζυγούς προβλήματος	17
2.5 Πεδίο Μη-Διαπερατότητας	18
2.5.1 Συνάρτηση Μη-Διαπερατότητας	18
2.5.2 Κανονικοποίηση - Προβολή	20
2.6 Σταδιακά Μεταβαλλόμενη Διαπερατότητα (ΣΜΔ)	22
<b>3</b> Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης	<b>23</b>
<b>4</b> Βελτιστοποίηση Μορφής	<b>27</b>
<b>5</b> Πρόβλημα ΒεΤο δύο Εισόδων - τριών Εξόδων (2Δ)	<b>31</b>
5.1 Περιορισμοί	34
5.1.1 Περιορισμός Όγκου	35

5.1.2	Περιορισμός Μάζας . . . . .	38
5.2	Σταδιακά Μεταβαλλόμενη Διαπερατότητα (ΣΜΔ) . . . . .	39
5.3	Αρχικοποίηση Μη-Διαπερατότητας . . . . .	41
5.4	Κανονικοποίηση - Προβολή . . . . .	44
5.5	Σύγκριση της Βέλτιστης Λύσης . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Πρόβλημα ΒεΤο μιας Εισόδου - δύο Εξόδων (2Δ)</b>	<b>51</b>
<b>7</b>	<b>Επιβεβαίωση λύσης ΒεΤο 2I3O</b>	<b>55</b>
7.1	Εκτίμηση Συνάρτησης-Στόχου . . . . .	55
7.2	Βελτιστοποίηση Μορφής . . . . .	57
7.3	Βελτιστοποίηση Τοπολογίας . . . . .	58
<b>8</b>	<b>Πρόβλημα ΒεΤο μίας Εισόδου - τεσσάρων Εξόδων (3Δ)</b>	<b>61</b>
<b>9</b>	<b>Σύνοψη - Συμπεράσματα</b>	<b>67</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>69</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Η Βελτιστοποίηση Τοπολογίας (BeTo), ενώ μπορεί να εφαρμοστεί και σε εξωτερική αεροδυναμική, βρίσκει εφαρμογή κυρίως σε εσωτερικές ροές, δηλαδή στη διαμόρφωση αγωγών και στην εύρεση της βέλτιστης διαδρομής που μπορεί να ακολουθήσει το ρευστό σε έναν εσωτερικό, κλειστό χώρο σχεδιασμού, με δεδομένες μόνο τις εισόδους και τις εξόδους. Αυτό παρατηρείται, καθώς σε προβλήματα εξωτερικής αεροδυναμικής, όπως για παράδειγμα η βελτιστοποίηση μιας αεροτομής (2Δ), η αρχική γεωμετρία και η τοπολογία είναι δεδομένες, και η μέθοδος της βελτιστοποίησης μορφής (shape optimization) είναι αρκετά αποτελεσματική [1]. Στην περίπτωση αυτή, οι μεταβλητές σχεδιασμού που περιγράφουν τη γεωμετρία της αεροτομής είναι τα σημεία ελέγχου (control points) μίας καμπύλης Bezier ή ενός Morphing Box ή, πιθανόν, οι συντεταγμένες των οριακών πλεγματικών κόμβων του προς σχεδιασμό στερεού σώματος.

Σε ένα πρόβλημα BeTo στη Μηχανική των Ρευστών, το πεδίο της μη-διαπερατότητας αποτελεί τις μεταβλητές σχεδιασμού, οι οποίες λαμβάνουν τιμές από το μηδέν έως τη μονάδα. Οι περιοχές του υπολογιστικού χωρίου που λαμβάνουν τιμές κοντά στη μονάδα αντιστοιχούν στο στερεοποιημένο τμήμα, ενώ τιμές κοντά στη μηδενική τιμή οριοθετούν περιοχές όπου ρέει ρευστό. Στο σημείο αυτό παρουσιάζεται, όπως θα γίνει αντιληπτό και στη συνέχεια, η ανάγκη της δυαδικότητας του πεδίου που περιγράφηκε, ώστε να είναι σαφής ο διαχωρισμός του προς στερεοποίηση πεδίου και αυτού που διαπερνά το ρευστό. Στις αβέβαιες περιοχές που δημιουργούνται, γνωστές και ως γκριζες περιοχές (grey areas), δεν είναι σαφής ο διαχωρισμός του στερεού από το ρευστό, με αποτέλεσμα να καθιστούν επισφαλή την τιμή της συνάρτησης-στόχου.

Η βελτιστοποίηση Τοπολογίας, δηλαδή η χρήση ενός πεδίου πορώδους (ή διαπερατότητας) για το βέλτιστο σχεδιασμό προβλημάτων, εντοπίζεται για πρώτη φορά στον κλάδο της Δομικής Μηχανικής στο [2] και επεκτάθηκε στα [3], [4], [5], στην προσπάθεια ανεξαρτητοποίησης της βελτιστοποίησης από παραμετροποιημένα χωρία, και συνεπώς αποφυγής της μεταβολής του πλέγματος (remeshing) κατά τη διάρκεια της

βελτιστοποίησης. Ακολούθως, παρουσιάστηκε η μεθοδολογία εφαρμογής της BeTo σε προβλήματα της Μηχανικής των Ρευστών από τους Borvall-Peterson [6], εισάγοντας το πεδίο της διαπερατότητας (πορώδους ή μη-διαπερατότητας), για σταθερή συνεκτικότητα, σε ροές Stokes, ενώ στο [7] επεκτάθηκε στις εξισώσεις Darcy-Stokes.

Στη συνέχεια, δόθηκε το έναυσμα εφαρμογής της BeTo σε προβλήματα που περιγράφονται από τις εξισώσεις Navier-Stokes και για τυρβώδη ροή, κυρίως με τη χρήση της διακριτής συζυγούς μεθόδου [8], αλλά και της συνεχούς συζυγούς μεθόδου με [9], [10] ή χωρίς [1] μετάδοση θερμότητας. Στις τελευταίες αναφορές, για την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος εφαρμόστηκε η Μέθοδος των Κινούμενων Ασυμπτωτών (Method of Moving Asymptotes), η οποία προτάθηκε στο [11] και χρησιμοποιήθηκε στη διπλωματική εργασία, ενώ στο [12] χρησιμοποιήθηκε εναλλακτικά η προσεγγιστική μέθοδος Newton (truncated Newton Method).

Η σύντομη αναφορά στη μέθοδο βελτιστοποίησης μορφής είναι αναγκαία, καθώς θα ακολουθήσει η άμεση σύγκριση των δύο προναφερθεισών μεθόδων, αφού εφαρμοστούν σε προβλήματα τα οποία χαρακτηρίζονται από την ίδια γεωμετρία, συνάρτηση-στόχο και περιορισμούς, καθώς και το ίδιο πλέγμα που επιλύεται η ροή. Ακόμη, λόγω της αδυναμίας που χαρακτηρίζει τη BeTo, δηλαδή στην απουσία ενός σαφούς ορίου – τοιχώματος για την επιβολή των οριακών συνθηκών, κρίνεται αναγκαία η μετεπεξεργασία, για την ορθή αξιολόγηση της λύσης και της τιμής της συνάρτησης-στόχου. Η μετεπεξεργασία αυτή, δηλαδή η αντιστοίχιση, μετά το πέρας της βελτιστοποίησης, των τιμών του πεδίου της μη-διαπερατότητας κοντά στη μονάδα σε στερεό τοίχωμα, μπορεί να πραγματοποιηθεί με αρκετούς τρόπους, οι οποίοι διαφέρουν ως προς την αποτελεσματικότητα, ένας από τους οποίους περιγράφεται στο [13].

Πριν παρουσιαστούν τα προς επίλυση προβλήματα της BeTo, περιγράφεται η μέθοδος που ακολουθήθηκε, καθώς καταγράφονται οι εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή, δηλαδή το πρωτεύον (primal) σύστημα εξισώσεων, το συζυγές (adjoint) σύστημα, αλλά και οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες. Ακόμη κρίνεται απαραίτητη, μια σύντομη αναφορά στις μεθόδους επίλυσης των συστημάτων αυτών (SIMPLE Algorithm), και της ανανέωσης των μεταβλητών σχεδιασμού (MMA).

## Κεφάλαιο 2

# Βελτιστοποίηση Τοπολογίας

### 2.1 Πρωτεύον Πρόβλημα (Primal)

Οι εξισώσεις που περιγράφουν τα προβλήματα ρευστοδυναμικής της διπλωματικής εργασίας, είναι οι χρονικά μόνιμες εξισώσεις Navier-Stokes για στρωτή ροή και ασυμπίεστο ρευστό, οι οποίες επιλύθηκαν μέσω του αλγορίθμου SIMPLE στο περιβάλλον OpenFOAM, όπως περιγράφεται αναλυτικά στη διδακτορική διατριβή [14]. Σε προβλήματα ΒεΤο οι εξισώσεις αυτές, και συγκεκριμένα οι εξισώσεις της ορμής, επαυξάνονται με τον όρο που συναρτάται της μη-διαπερατότητας  $\alpha$ . Συνεπώς, οι πρωτεύουσες εξισώσεις προκύπτουν ως εξής

$$R^p = -\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.1)$$

$$R_i^v = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \underbrace{G(a)v_i}_{T_{a,v_i}} = 0, i = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

όπου  $v_i$  οι συνιστώσες της ταχύτητας,  $p$  η στατική πίεση διαιρεμένη με την σταθερή, λόγω ασυμπίεστης ροής, πυκνότητα, και  $\nu$  η συνεκτικότητα του ρευστού.

Ο επιπλέον όρος στην εξίσωση 2.2 που συμβολίζεται ως  $T_{a,v_i}$  καθορίζει ένα πρόβλημα ΒεΤο, όπου η μεταβλητή  $\alpha$  (μη-διαπερατότητα) λαμβάνει τιμές από το μηδέν έως τη μονάδα. Όταν είναι μηδέν, δηλαδή υπάρχει ροή του ρευστού, οι εξισώσεις Navier-Stokes ικανοποιούνται όπως σε ένα σύννηδες πρόβλημα της Μηχανικής των Ρευστών. Στην περίπτωση που, τοπικά, οι τιμές του πεδίου  $\alpha$  προσεγγίζουν τη μονάδα, προκύπτει ένα (σχεδόν) μηδενικό πεδίο ταχύτητας. Πιο αναλυτική περιγραφή, σε συνδιασμό με

μοντέλο τύρβης και μετάδοση θερμότητας μπορεί να βρεθεί στο [9].

Στα προβλήματα ΒεΤο, ο όρος της μη-διαπερατότητας συχνά μοντελοποιείται ως μια συνάρτηση του  $a$ , της μορφής  $G(a) = b_{MAX}b(a)$ , μια πιο εξειδικευμένη αναφορά του οποίου παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 2.5.

## 2.2 Στόχος - Περιορισμοί

Σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, είναι απαραίτητο να οριστεί τουλάχιστον μια συνάρτηση στόχος, καθώς και τυχόν περιορισμοί.

### 2.2.1 Συνάρτηση-Στόχος

Η συνάρτηση-στόχος που θα χρησιμοποιηθεί, περιγράφει τις απώλειες ολικής πίεσης της ροής, δηλαδή τη διαφορά της ολικής πίεσης μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του υπολογιστικού χωρίου, σταθμισμένες με την παροχή όγκου του ρευστού. Οι απώλειες ολικής πίεσης της ροής αποτελούν μια ευρέως χρησιμοποιούμενη συνάρτηση-στόχο σε προβλήματα της Μηχανικής των Ρευστών και ιδιαίτερα στην εσωτερική αεροδυναμική. Η συνάρτηση-στόχος εκφράζεται ως

$$F_{OBJ} = - \int_{S_{I,O}} \left( p + \frac{1}{2} v_k^2 \right) v_i n_i dS \quad \left[ \frac{m^5}{s^3} \right] \quad (2.3)$$

όπου  $S_{I,O}$  η επιφάνεια της (των) εισόδου(ων) και εξόδου(ων) αντίστοιχα, ενώ  $n_i$  είναι το κάθετο διάνυσμα σε αυτές, με κατεύθυνση προς την εξωτερική πλευρά του τμήματος που καταλαμβάνει το ρευστό. Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση-στόχο ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, για υπολογιστικό πλέγμα που δεν μεταβάλλεται καθώς μεταβάλλουν τιμές οι μεταβλητές σχεδιασμού, προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{OBJ}}{\partial a} &= - \frac{\partial}{\partial a} \left( \int_{S_{I,O}} \left( p + \frac{1}{2} v_k^2 \right) v_i n_i dS \right) \\ &= - \int_{S_{I,O}} \frac{\partial \left[ \left( p + \frac{1}{2} v_k^2 \right) v_i n_i \right]}{\partial a} dS \\ &= - \int_{S_{I,O}} \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial a} + v_k \frac{\partial v_k}{\partial a} \right) v_i n_i + \left( p + \frac{1}{2} v_k^2 \right) \frac{\partial v_i}{\partial a} n_i \right] dS \end{aligned}$$

Ομαδοποιώντας τους όρους προκύπτει η τελική έκφραση της παραγώγου της συνάρτησης-



στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού

$$\frac{\partial F_{OBJ}}{\partial a} = - \int_{S_{I,O}} v_i n_i \frac{\partial p}{\partial a} dS - \int_{S_{I,O}} (v_i v_k n_k + p n_i + \frac{1}{2} v_k^2 n_i) \frac{\partial v_i}{\partial a} dS \quad (2.4)$$

Όπως γίνεται αντιληπτό από την εξίσωση 2.4, ο ευθύς υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας προαπαιτεί την εύρεση της μεταβολής των ροϊκών μεταβλητών ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Το υπολογιστικό κόστος όμως, για την εύρεση των  $\partial v_i / \partial a$ ,  $\partial p / \partial a$ , είναι ανάλογο του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού, γεγονός που δικαιολογεί τη χρήση της συζυγούς μεθόδου (adjoint method), όπως θα παρουσιαστεί και στη συνέχεια.

## 2.2.2 Περιορισμοί

Γενικότερα, στα προβλήματα βελτιστοποίησης, δημιουργείται η ανάγκη επιβολής περιορισμών. Έτσι και στα προβλήματα BeTo που ακολουθούν, ανάλογα με τις απαιτήσεις των εκάστοτε συνθηκών, εφαρμόζονται οι περιορισμοί των εξισώσεων 2.5 και 2.7. Ο πρώτος περιορισμός είναι στη μορφή

$$J_1 = \frac{\int_{\Omega} (1 - a) d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} - \pi_{tar} \leq 0 \quad (2.5)$$

όπου  $a$  η μη-διαπερατότητα,  $\Omega$  ο όγκος του υπολογιστικού χωρίου και  $\pi_{tar}$  η οριακή τιμή (άνω όριο) ικανοποίησης του περιορισμού. Η εξίσωση 2.5 εκφράζει τη διαφορά του ποσοστού του όγκου του υπολογιστικού χωρίου  $\Omega$ , που καταλαμβάνει το ρευστό, με την ελάχιστη τιμή του ποσοστού  $\pi_{tar}$ , που ορίζει ο χρήστης ανάλογα με το πρόβλημα βελτιστοποίησης. Ο περιορισμός αυτός, λειτουργεί συνήθως αντιχρουόμενα με τη συνάρτηση-στόχο της ελαχιστοποίησης της διαφοράς ολικών πιέσεων εισόδου - εξόδου, εξίσωση 2.3, καθώς είναι πιθανό να μην επιτρέπει στη ροή να ακολουθήσει την πορεία με τις ελάχιστες απώλειες, ενώ άλλοτε βοηθά στην πιο φθηνή, όσον αφορά το υπολογιστικό κόστος, εύρεση της βέλτιστης λύσης. Στα προβλήματα BeTo, πέραν της σχεδιαστικής ανάγκης του περιορισμού, ο περιορισμός όγκου της εξίσωσης 2.5 βοηθά στη δυαδικότητα του πεδίου  $a$ , δηλαδή να μη συναντώνται (συχνά) τιμές ανάμεσα στο 0 και το 1 (grey areas), αλλά και στην αποφυγή κλειστών περιοχών ρευστού ( $a = 0$ ), με μηδενικό πεδίο ταχύτητας, μέσα στο στερεοποιημένο τμήμα του πεδίου ( $a=1$ ), δηλαδή νεκρών περιοχών (λιμνών με πρακτικά ακίνητο ρευστό).

Η δυαδικότητα του πεδίου θεωρείται αναγκαία, τόσο για την αποφυγή ενδιάμεσων τιμών της μη-διαπερατότητας όπου οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι πιθανό να μη μηδενίζονται, δυσχεραίνοντας το σαφή διαχωρισμό του ρευστού με το προς στερεοποίηση τμήμα του υπολογιστικού χωρίου, όσο και για την καλύτερη εκμετάλλευση του περιορισμού του όγκου από τη ροή. Πιο συγκεκριμένα, το κλάσμα της εξίσωσης 2.5 αποτελεί πρακτικά το άθροισμα όλων των όρων  $1 - a$  κάθε υπολογιστικής κυψέλης, ανηγμένο

με το συνολικό όγκο  $\Omega$  του χωρίου. Συνεπώς, όσο τείνει στις προς στερεοποίηση περιοχές η τιμή της μη-διαπερατότητας στη μονάδα, τόσο δίνεται η δυνατότητα στη ροή να αναπτυχθεί στο υπολογιστικό χωρίο.

Μάλιστα, όπως ορίζεται η εξίσωση 2.5, αποτελεί ένα περιορισμό ανισο-ισότητας, με αποτέλεσμα το μέγεθος  $\pi_{tar}$  να καθορίζει τη μέγιστη τιμή που μπορεί να καταλαμβάνει ο όγκος του ρευστού (ως ποσοστό), δηλαδή δεν αποκλείεται η εύρεση μιας βέλτιστης λύσης με μικρότερη τιμή του όγκου.

Παραγωγίζοντας την εξίσωση 2.5 ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος προκύπτει

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_P} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_P} \left( \frac{\int_{\Omega} (1-a) d\Omega}{\Omega_{total}} \right) \\ &= \frac{\int_{\Omega} \frac{\partial(1-a)}{\partial \alpha_P} d\Omega}{\Omega_{total}} \\ &= -\frac{\frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_P} d\Omega_i}{\Omega_{total}}\end{aligned}$$

όπου η μερική παράγωγος εισέρχεται στο χωρικό ολοκλήρωμα, επειδή το υπολογιστικό χωρίο και το πλέγμα του είναι ανεξάρτητο των μεταβλητών σχεδιασμού και  $i \in N$  οι κυψέλες του υπολογιστικού χωρίου. Τελικά, η παράγωγος του περιορισμού του όγκου υπολογίζεται από τη σχέση

$$\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_P} = -\delta_i^P \frac{\Omega_P}{\Omega_{total}} \quad (2.6)$$

όπου  $\Omega_P$  ο όγκος της κυψέλης του υπολογιστικού χωρίου και  $\delta$  το δέλτα του Κρόνεκερ. Ο περιορισμός του όγκου, καθώς δεν συναρτάται άμεσα των ροϊκών μεταβλητών, είναι γεωμετρικός και πρακτικά δεν απαιτεί την επίλυση ενός συζυγούς προβλήματος για την εύρεση των παραγώγων του ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού.

Ένας άλλος περιορισμός ισότητας που εφαρμόζεται συχνά σε προβλήματα ΒεΤο, είναι η επιβολή του ποσοστού της εισερχόμενης στο υπολογιστικό χωρίο παροχής μάζας ρευστού, που περνά από κάθε αγωγό εξόδου. Για ένα χωρίο το οποίο αποτελείται από  $K$  εξόδους, ο περιορισμός της κατανομής μάζας ορίζεται ως

$$J_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K (\Delta m_k)^2 = 0 \quad (2.7)$$

όπου

$$\Delta m_k = \int_{S_{O_k}} v_i n_i dS + r_k \int_{S_I} v_i n_i dS \quad \left[ \frac{m^4}{s^2} \right]$$

η διαφορά της παροχής μάζας που διέρχεται από την κάθε έξοδο  $k$ , με το ποσοστό  $r_k$  της παροχής εισόδου που επιδιώκεται να εξέρχεται από κάθε έξοδο  $k$  (ορίζεται από το σχεδιαστή). Σημειώνεται, πως η επιφάνεια  $S_I$  είναι δυνατό να περιλαμβάνει περισσότερες της μια εισόδους. Η παραγωγή της συνάρτησης 2.7, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, δίνει

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K (\Delta m_k)^2 \right) \\ \frac{\partial J_2}{\partial a} &= \sum_{k=1}^K (\Delta m_k) \frac{\partial (\Delta m_k)}{\partial a} \end{aligned}$$

όπου

$$\frac{\partial (\Delta m_k)}{\partial a} = \int_{S_{O_k}} \frac{\partial v_i}{\partial a} n_i dS + r_k \int_{S_I} \frac{\partial v_i}{\partial a} n_i dS$$

Αντικαθιστώντας, η τελική έκφραση της παραγώγου της συνάρτησης του περιορισμού της μάζας προκύπτει ως

$$\frac{\partial J_2}{\partial a} = \sum_{k=1}^K \left( \int_{S_{O_k}} v_i n_i dS + r_k \int_{S_I} v_i n_i dS \right) \left( \int_{S_{O_k}} \frac{\partial v_i}{\partial a} n_i dS + r_k \int_{S_I} \frac{\partial v_i}{\partial a} n_i dS \right) \quad (2.8)$$

Η εξάρτηση της εξίσωσης 2.8 από τη μεταβολή των ροϊκών μεταβλητών με τις μεταβλητές σχεδιασμού, μαρτυρά την ανάγκη χρήσης της συζυγούς μεθόδου, όπως και στην περίπτωση της συνάρτησης-στόχου, λόγω του υψηλού υπολογιστικού κόστους που απαιτεί η εύρεση των παραγώγων  $\partial v_i / \partial a$ ,  $\partial p / \partial a$ .

## 2.3 Συζυγές Πρόβλημα (Adjoint)

Η επίλυση του συζυγούς συστήματος, αποτελεί μια μέθοδο εύρεσης των παραγώγων ευαισθησίας, δηλαδή ανήκει στις μεθόδους υπολογισμού της κλίσης της συνάρτησης-στόχου, μερικές από τις οποίες είναι η ευθεία διαφορίση (Direct Differentiation) [15], η αυτόματη διαφορίση (Automatic Differentiation) [16] και η μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών (Finite Differences) [17], η περιγραφή των οποίων μπορεί να βρεθεί στη διδακτορική διατριβή [14]. Η επιλογή της επίλυσης του συζυγούς προβλήματος δικαιολογείται από το μεγάλο αριθμό των μεταβλητών σχεδιασμού, δηλαδή του πεδίου κομβικών τιμών της μη-διαπερατότητας ( $\alpha$ ) στο υπολογιστικό χωρίο.

Πιο συγκεκριμένα, όπως θα γίνει αντιληπτό ύστερα από την παρουσίαση των εξισώσεων, σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης το υπολογιστικό κόστος υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας, με την ευθεία διαφορίση είναι ανάλογο των  $N + 1$  ισοδύναμων επιλύσεων της ροής (Equivalent Flow Solutions - EFS), ενώ η συζυγής μέθοδος κοστίζει μόνο 2 EFS, όπου  $N$  ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού. Αυτό πρακτικά επιτυγχάνεται με την αποφυγή υπολογισμού της μεταβολής των ροϊκών μεταβλητών με τις μεταβλητές σχεδιασμού, το οποίο θα απαιτούσε υπολογιστικό κόστος περίπου  $1EFS$  για κάθε  $\alpha$ . Συνεπώς, σε ένα πρόβλημα BeTo, όπου σε κάθε υπολογιστική κυψέλη αντιστοιχεί και μια μεταβλητή σχεδιασμού, η χρήση της συζυγούς μεθόδου καθίσταται αναγκαία για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας (Sensitivity Derivatives).

Για την πληρότητα της εργασίας παρουσιάζονται συνοπτικά ο σχηματισμός του συζυγούς συστήματος και των παραγώγων ευαισθησίας, μια πιο αναλυτική περιγραφή της μεθόδου μπορεί να βρεθεί στα [8], [9], [1].

Αρχικά, είναι απαραίτητο να οριστεί η συνάρτηση-στόχος, επαυξημένη με τις εξισώσεις της ροής

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} q R_p d\Omega + \int_{\Omega} u_i R_{v_i} d\Omega \quad (2.9)$$

όπου  $q$ ,  $u_i$  οι συζυγείς μεταβλητές της πίεσης και των συνιστωσών της ταχύτητας αντίστοιχα, και  $\Omega$  το υπολογιστικό χωρίο. Τα  $R^p$ ,  $R^{v_i}$  αποτελούν τα υπόλοιπα (residuals) των εξισώσεων ροής, όπως ορίστηκαν στις εξισώσεις 2.1 και 2.2, ενώ σε κάθε φάση της βελτιστοποίησης οι ροϊκές μεταβλητές τις ικανοποιούν, με αποτέλεσμα να ταυτίζονται με το μηδέν. Συνεπώς, το τέχνασμα της συζυγούς μεθόδου βασίζεται στο γεγονός ότι, ο υπολογισμός της κλίσης της συνάρτησης-στόχου για την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού, συμπίπτει με αυτόν της αντίστοιχης επαυξημένης συνάρτησης.

Παραγωγίζοντας την εξίσωση 2.9 ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού προκύπτει

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta \alpha} &= \frac{\delta F}{\delta \alpha} + \frac{\delta}{\delta \alpha} \int_{\Omega} q R^p d\Omega + \frac{\delta}{\delta \alpha} \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega \\
&= \frac{\delta F}{\delta \alpha} + \int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta \alpha} d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\delta R_i^v}{\delta \alpha} d\Omega + \int_S (q R^p + u_i R_i^v) n_k \frac{\delta x_k}{\delta \alpha} dS \quad (2.10)
\end{aligned}$$

όπου το όριο  $S$  του υπολογιστικού χωρίου μπορεί να γραφεί ως  $S = S_I \cup S_O \cup S_W \cup S_{W_P}$ , με τα  $S_I, S_O, S_W, S_{W_P}$  να αντιστοιχούν στην είσοδο, στην έξοδο, στο τοίχωμα και στις παραμετροποιημένες περιοχές του  $\Omega$ . Ακόμη, το  $n_k$  αντιστοιχεί στο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της κάθε επιφάνειας, ενώ με  $\alpha$  συμβολίζονται οι μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος. Εφόσον σε ένα πρόβλημα ΒεΤο δεν μεταβάλλεται το πλέγμα και το σχήμα του υπολογιστικού χωρίου, δηλαδή είναι ανεξάρτητα του  $\alpha$  ο όρος  $\partial x_k / \partial \alpha$ , της εξίσωσης 2.10, ταυτίζεται με το μηδέν. Επομένως:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta \alpha} = \frac{\delta F}{\delta \alpha} + \int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta \alpha} d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\delta R_i^v}{\delta \alpha} d\Omega \quad (2.11)$$

Συνεπώς, αφού δεν επηρεάζεται το σχήμα του υπολογιστικού χωρίου και  $\partial x_k / \partial \alpha = 0$ , δηλαδή δεν υφίστανται παραμετροποιημένες περιοχές  $S_{W_P}$ , η ολική παράγωγος ταυτίζεται με την μερική, δηλαδή

$$\frac{\delta}{\delta \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \quad (2.12)$$

και η 2.11 γίνεται

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta \alpha} = \frac{\delta F}{\delta \alpha} + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial \alpha} d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial \alpha} d\Omega \quad (2.13)$$

Αναλύοντας τις προς ολοκλήρωση ποσότητες των όρων της εξίσωσης 2.13 ξεχωριστά προκύπτει

$$\begin{aligned}
q \frac{\partial R^p}{\partial a} &= -q \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \\
&= -q \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ q \frac{\partial v_j}{\partial a} \right] + \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial a}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial a} &= u_i \frac{\partial}{\partial a} \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} + G(a)v_i \right) \\
&= u_i \left( \frac{\partial}{\partial a} \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial a} \left[ \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial a} \left( G(a)v_i \right) \right) \\
&= u_i \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial a} \right) + \frac{\partial G(a)}{\partial a} v_i + G(a) \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) \\
&= u_i \frac{\partial v_j}{\partial a} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + u_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) - u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) \right) \right] \\
&\quad + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial a} \right) + u_i v_i \frac{\partial G(a)}{\partial a} + u_i G(a) \frac{\partial v_i}{\partial a} \\
&= u_i \frac{\partial v_j}{\partial a} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial a} \right] - \frac{\partial(u_i v_j)}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ u_i \nu \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) \right) \right] \\
&\quad + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_i \frac{\partial p}{\partial a} \right) - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial a} + u_i v_i \frac{\partial G(a)}{\partial a} + u_i G(a) \frac{\partial v_i}{\partial a} \\
&= u_i \frac{\partial v_j}{\partial a} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial a} \right] - \frac{\partial(u_i v_j)}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ u_i \nu \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) \right) \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \right) \frac{\partial v_i}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \right) \frac{\partial v_j}{\partial a} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_i \frac{\partial p}{\partial a} \right) - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial a} + u_i v_i \frac{\partial G(a)}{\partial a} + u_i G(a) \frac{\partial v_i}{\partial a}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Ομαδοποιώντας τους όρους και προσαρμόζοντας τους δείκτες, η 2.15 γίνεται

$$\begin{aligned}
u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial a} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ u_i \nu \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) \right) \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_i \frac{\partial p}{\partial a} \right) \\
&+ u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial a} - \frac{\partial(u_i v_j)}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \right) \frac{\partial v_i}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \nu \right) \frac{\partial v_i}{\partial a} + u_i G(a) \frac{\partial v_i}{\partial a} \\
&- \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial a} + u_i v_i \frac{\partial G(a)}{\partial a}
\end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}
u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial a} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ u_i \nu \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) \right) \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_i \frac{\partial p}{\partial a} \right) \\
&+ \left( u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial(u_i v_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \nu \right) + u_i G(a) \right) \frac{\partial v_i}{\partial a} \\
&- \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial a} + u_i v_i \frac{\partial G(a)}{\partial a} \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις 2.14 και 2.16 στην γενική έκφραση 2.9

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta a} &= \frac{\delta F}{\delta a} + \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ -q \frac{\partial v_j}{\partial a} \right] + \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial a} \right] d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial a} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ u_i \nu \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) \right) \right] \right. \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_i \frac{\partial p}{\partial a} \right) \\
&+ \left( u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial(u_i v_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \nu \right) + u_i G(a) \right) \frac{\partial v_i}{\partial a} \\
&\left. - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial a} + u_i v_i \frac{\partial G(a)}{\partial a} \right] d\Omega
\end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta a} &= \frac{\delta F}{\delta a} - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ q \frac{\partial v_j}{\partial a} \right] d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial a} d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial a} - u_i \nu \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) \right) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \frac{\partial v_i}{\partial a} \right] d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \frac{\partial v_j}{\partial a} + u_i \frac{\partial p}{\partial a} \right) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \left( u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial(u_i v_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \nu \right) + u_i G(a) \right) \frac{\partial v_i}{\partial a} d\Omega \\
&- \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial a} d\Omega + \int_{\Omega} u_i v_i \frac{\partial G(a)}{\partial a} d\Omega
\end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta a} &= \frac{\delta F}{\delta a} - \int_S n_i q \frac{\partial v_i}{\partial a} dS \\
&+ \int_S n_j \left[ u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial a} - u_i \nu \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) \right) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \frac{\partial v_i}{\partial a} \right] dS \\
&+ \int_S n_j \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \nu \frac{\partial v_i}{\partial a} + u_j \frac{\partial p}{\partial a} \right) dS \\
&+ \int_{\Omega} \left( u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial(u_i v_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \nu \right) + u_i G(a) + \frac{\partial q}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial a} d\Omega \\
&- \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial a} d\Omega + \int_{\Omega} u_i v_i \frac{\partial G(a)}{\partial a} d\Omega
\end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta a} &= \frac{\delta F}{\delta a} + \int_S \left[ -n_i q + n_j u_i v_j + n_j \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial v_i}{\partial a} dS \\
&- \int_S n_j u_i \nu \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS + \int_S n_j u_j \frac{\partial p}{\partial a} dS \\
&+ \int_{\Omega} \left( u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial(u_i v_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + u_i G(a) + \frac{\partial q}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial a} d\Omega \\
&- \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial a} d\Omega + \int_{\Omega} u_i v_i \frac{\partial G(a)}{\partial a} d\Omega \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Ορίζεται η γενική έκφραση της συνάρτησης  $F$ , που αντιπροσωπεύει είτε τη συνάρτηση-στόχο, είτε τον περιορισμό των εξερχόμενων παροχών μάζας και αποτελείται από επι-



φανειακά ολοκληρώματα. Είναι δυνατόν να αποτελεί άμεση συνάρτηση του πεδίου της μη-διαπερατότητας ή και συνάρτηση των ροϊκών μεταβλητών.

$$F = \int_S F_S dS \quad (2.18)$$

όπου  $F_S$  η προς ολοκλήρωση ποσότητα των επιφανειακών ολοκληρωμάτων της συνάρτησης  $F$ . Παραγωγίζοντας την 2.18 ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, δηλαδή το πεδίο της μη-διαπερατότητας, προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta a} &= \frac{\delta}{\delta a} \int_S F_S dS \\ &= \int_S \frac{\delta F_S}{\delta a} dS \end{aligned} \quad (2.19)$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας στους όρους των ολοκληρωμάτων η 2.19 γίνεται

$$\frac{\delta F}{\delta a} = \int_S \left( \frac{\partial F_S}{\partial a} + \frac{\partial F_S}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial F_S}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) dS$$

ή

$$\frac{\delta F}{\delta a} = \int_S \frac{\partial F_S}{\partial a} dS + \int_S \frac{\partial F_S}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial a} dS + \int_S \frac{\partial F_S}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial a} dS \quad (2.20)$$

Αφού ορίστηκε η παράγωγος ευαισθησίας της συνάρτησης  $F$  (εξίσωση 2.20), και ύστερα από την εκτέλεση πράξεων και την ομαδοποίηση των όρων, η 2.17 γίνεται

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta a} &= \int_{\Omega} \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial a} d\Omega + \int_S \frac{\partial F_S}{\partial a} dS \\
&+ \int_{\Omega} \underbrace{\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)}_{T_1} \frac{\partial p}{\partial a} d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \underbrace{\left[ u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial(u_i v_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + u_i G(a) + \frac{\partial q}{\partial x_i} \right]}_{T_2} \frac{\partial v_i}{\partial a} d\Omega \\
&+ \int_S \underbrace{\left( \frac{\partial F_S}{\partial p} + u_i n_i \right)}_{T_3} \frac{\partial p}{\partial a} dS \\
&+ \int_S \underbrace{\left[ \frac{\partial F_S}{\partial v_i} - n_i q + n_j u_i v_j + n_j \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]}_{T_4} \frac{\partial v_i}{\partial a} dS \\
&+ \int_S \underbrace{-u_i n_j \nu \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}_{T_5} dS + \int_{\Omega} u_i v_i \frac{\partial G(a)}{\partial a} d\Omega
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Η εξίσωση 2.21 αποτελεί έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας του προβλήματος, οι όροι της οποίας συνδράμουν στη διατύπωση των συζυγών εξισώσεων, καθώς και των συζυγών οριακών συνθηκών, όπως διατυπώνονται στο κεφάλαιο 2.4.2. Πιο συγκεκριμένα, η εύρεση τους βασίζεται στην απαλοιφή των όρων που περιλαμβάνουν την άμεση μεταβολή των ροϊκών μεταβλητών με τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\alpha$ .

Συνεπώς, για την απαλοιφή των  $\partial p/\partial a$ ,  $\partial v_i/\partial a$  πρέπει να μηδενιστούν οι όροι  $T_1$  και  $T_2$  της εξίσωσης 2.21 αντίστοιχα. Με τον τρόπο αυτό, προκύπτει το συζυγές σύστημα εξισώσεων

$$R^q = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2.22}$$

$$R_i^u = u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial(u_i v_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + u_i G(\alpha) + \frac{\partial q}{\partial x_i} = 0 \tag{2.23}$$

Ύστερα από την απαλοιφή των αντίστοιχων όρων και από τα επιφανειακά ολοκληρώματα (όροι  $T_3, T_4, T_5$ ), οι οποίοι συμβάλλουν στη διατύπωση των συζυγών οριακών συνθηκών, οι εναπομείναντες όροι αποτελούν τις παραγώγους ευαισθησίας (Sensitivity

Derivatives) του προβλήματος

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta \alpha} = \int_S \frac{\partial F_S}{\partial \alpha} dS + \int_{\Omega} u_i v_i \frac{\partial G(\alpha)}{\partial \alpha} d\Omega \quad (2.24)$$

Η συνάρτηση  $F$  των εξισώσεων 2.22, 2.23, 2.24 εκπροσωπεί την επιθυμητή συνάρτηση-στόχο και επιβαλλόμενο περιορισμό. Στη διπλωματική εργασία, για την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού χρησιμοποιήθηκε η Μέθοδος των Κινούμενων Ασυμπτώτων (Method of Moving Asymptotes - MMA), η οποία περιγράφεται στην ενότητα 3. Για την εφαρμογή της μεθόδου πρέπει να επιλυθούν διαφορετικά συζυγή προβλήματα για τη συνάρτηση-στόχο και τον περιορισμό των εξερχόμενων παροχών μάζας, καθώς η μέθοδος αυτή προαπαιτεί τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, ξεχωριστά για κάθε συνάρτηση-στόχο και περιορισμό. Συνεπώς, ακολουθεί η παρουσίαση των συζυγών προβλημάτων που επιλύονται πριν την εφαρμογή της Μεθόδου των Κινούμενων Ασυμπτώτων, για την εύρεση των παραγώγων  $\frac{\partial F_{OBJ}}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial J_1}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial J_2}{\partial a}$ , όπου οι συναρτήσεις  $F_{OBJ}$ ,  $J_1$ ,  $J_2$  ορίζονται στις εξισώσεις 2.3, 2.5 και 2.7 αντίστοιχα.

Η μεταβολή της συνάρτησης-στόχου (απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδων και εξόδων) ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού ορίζεται στην εξίσωση 2.4, συμπεραίνοντας πως τα χωρικά ολοκληρώματα και οι όροι που αφορούν την άμεση μεταβολή της  $F_{OBJ}$  με τη μη-διαπερατότητα να ταυτίζονται με το μηδέν. Συνεπώς, προκύπτουν οι εξισώσεις του συζυγούς προβλήματος ως

$$R^q = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.25)$$

$$R_i^u = u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial(u_i v_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + u_i G(a) + \frac{\partial q}{\partial x_i} = 0 \quad (2.26)$$

και η τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta a} = \int_{\Omega} u_i v_i \frac{\partial G(a)}{\partial a} d\Omega \quad (2.27)$$

για τη χρησιμοποιούμενη συνάρτηση-στόχο. Όπως γίνεται αντιληπτό, η συνάρτηση των απωλειών ολικής πίεσης δεν συμβάλλει άμεσα στις εξισώσεις 2.25 και 2.26 του συζυγούς προβλήματος, ούτε και στις παραγώγους ευαισθησίας 2.27, παρά μόνο στη διαμόρφωση των συζυγών οριακών συνθηκών του προβλήματος, οι οποίες περιγράφονται στην ενότητα που ακολουθεί (2.4.2).

Το συζυγές πρόβλημα που επιλύεται για την εύρεση της μεταβολής της συνάρτησης του περιορισμού της μάζας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού είναι όμοιο με το αντίστοιχο της συνάρτησης-στόχου (2.25, 2.26) Η συνάρτηση  $J_2$  αποτελεί επιφανειακό

ολοκλήρωμα που συναρτάται άμεσα μόνο από τις ροϊκές μεταβλητές (σε αντίθεση με τον περιορισμό του όγκου), με αποτέλεσμα να συνεισφέρει μόνο στη διατύπωση των οριακών συνθηκών, ενώ η αντίστοιχη παράγωγος ευαισθησίας υπολογίζεται (όμοια με την  $\delta F_{aug}/\delta a$ ) ως

$$\frac{\delta J_2}{\delta a} = \int_{\Omega} u_i v_i \frac{\partial G(a)}{\partial a} d\Omega \quad (2.28)$$

## 2.4 Οριακές Συνθήκες (ΟΣ)

Οι οριακές συνθήκες, δηλαδή οι συνθήκες της ροής στην είσοδο  $S_I$ , έξοδο  $S_O$  και στο τοίχωμα  $S_W$  του υπολογιστικού χωρίου  $\Omega$ , είναι απαραίτητο να διατυπωθούν, ώστε να καταστεί δυνατή η επίλυση του πρωτεύοντος και συζυγούς συστήματος. Τονίζεται ότι οριακές συνθήκες επιβάλλονται στα όρια  $S$  του υπολογιστικού χωρίου  $\Omega$ , και όχι στο εσωτερικό του  $\Omega$ , όπου η μη-διαπερατότητα  $\alpha$  τείνει στη μονάδα, δηλαδή στο προς στερεοποίηση τμήμα του πεδίου.

### 2.4.1 ΟΣ Πρωτεύοντος προβλήματος

Οι οριακές συνθήκες που συμπληρώνουν το πρωτεύον σύστημα εξισώσεων στο υπολογιστικό χωρίο ενός προβλήματος εσωτερικής αεροδυναμικής, είναι

(α) Dirichlet συνθήκες για τις συνιστώσες τις ταχύτητας  $v_i$  στην είσοδο, και στο τοίχωμα  $S_W$  του υπολογιστικού χωρίου, για την ικανοποίηση των συνθηκών μη εισχώρησης και μη ολίσθησης,

(β) μηδενική Neumann συνθήκη για την πίεση  $p$  στην είσοδο και στο τοίχωμα,

(γ) Dirichlet συνθήκη για την πίεση  $p$  στην έξοδο και κατ' επιλογή μηδενική, καθώς οι εξισώσεις που επιλύονται περιλαμβάνουν μόνο τη χωρική παράγωγο της πίεσης και

(δ) μηδενικές Neumann συνθήκες για τις συνιστώσες της ταχύτητας  $v_i$  στην έξοδο.

Όσον αφορά τις ΟΣ της μη-διαπερατότητας, συνήθως επιβάλλονται μηδενικές Neumann συνθήκες σε όλα τα όρια  $S$  του υπολογιστικού χωρίου (είσοδος, έξοδος, τοίχωμα), ώστε να μην περιορίζεται η επίλυση του συστήματος. Παραλλαγή των οριακών συνθηκών αυτών, αποτελεί η επιβολή μοναδιαίων Dirichlet, για τον καθορισμό του τοιχώματος του υπολογιστικού χωρίου, ως στερεοποιημένο τμήμα ( $\alpha = 1$ ). Οι τελευταίες συνθήκες, βρίσκουν συνήθως εφαρμογή στην περίπτωση που προκύπτουν γκρίζες περιοχές πολύ κοντά στα τοιχώματα του υπολογιστικού χωρίου.

Σημειώνεται ότι οι ΟΣ της μη-διαπερατότητας δεν συνεισφέρουν άμεσα στην επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος, μιάς και το πεδίο  $\alpha$  ορίζεται στο εσωτερικό του υπολογιστικού χωρίου. Οι ΟΣ αυτές, συμπληρώνουν τη διαφορική εξίσωση που επιλύεται κατά την εφαρμογή του φίλτρου της Κανονικοποίησης, όπως θα παρουσιαστεί στο κεφάλαιο 2.5.2.

## 2.4.2 ΟΣ Συζυγούς προβλήματος

Όπως αναφέρθηκε εν συντομία και προηγουμένως, για την εύρεση των οριακών συνθηκών μηδενίζονται οι όροι  $T_3, T_4, T_5$  της εξίσωσης 2.21, οι οποίοι επαναλαμβάνονται και εδώ

$$\begin{aligned}T_3 &= \frac{\partial F_S}{\partial p} + u_i n_i = 0 \\T_4 &= \frac{\partial F_S}{\partial v_i} + n_i q + u_i v_j n_j + \nu n_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0 \\T_5 &= -u_i n_j \nu \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 0\end{aligned}$$

Υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση  $F$  των παραπάνω εξισώσεων αντιστοιχεί είτε στη συνάρτηση-στόχο, είτε στη δεύτερη ( $J_2$ ) από τις συναρτήσεις των περιορισμών που ορίστηκαν, ανάλογα με το συζυγές πρόβλημα που επιλύεται.

Οι οριακές συνθήκες (ΟΣ), αναλύονται σε κάθε όριο ξεχωριστά ως εξής

**Συζυγείς ΟΣ στην είσοδο ( $S_I$ ):** Στις εισόδους  $S_I$  εφαρμόζονται Dirichlet οριακές συνθήκες για τις συνιστώσες της πρωτεύουσας ταχύτητας. Συνεπώς η παράγωγος  $\partial v_i / \partial a = 0$  και το ολοκλήρωμα που αντιστοιχεί στο  $T_4$  μηδενίζεται. Οι όροι  $T_3, T_5$  απαιτούν αντίστοιχα

$$\begin{aligned}u_i n_i &= -\frac{\partial F_S}{\partial p} \\u_i n_j &= u_i t_i = 0\end{aligned}$$

όπου  $t_i$  τα εφαπτομενικά μοναδιαία διανύσματα, κάθετα στο  $n$ .

Εφόσον δεν προκύπτει οριακή συνθήκη από τις εξισώσεις για τη συζυγή πίεση, επιβάλλεται μηδενική Neumann για τη μεταβλητή  $q$  στην είσοδο.

**Συζυγείς ΟΣ στην έξοδο ( $S_O$ ):** Στις εξόδους  $S_O$  εφαρμόζονται Dirichlet οριακές συνθήκες για την πίεση και Neumann για την πρωτεύουσα ταχύτητα. Συνεπώς, οι παράγωγοι  $\partial p / \partial a = 0$ ,  $\partial v_i / \partial a = \text{constant}$  και τα ολοκληρώματα που αντιστοιχούν στα  $T_3, T_5$  μηδενίζονται. Ο όρος  $T_4$  απαιτεί

$$n_i q = -\frac{\partial F_S}{\partial v_i} - u_i v_j n_j - \nu n_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Η παραπάνω εξίσωση επιλύεται στα όρια των εξόδων λαμβάνοντας προεκβάλλοντας την τιμή της συζυγούς ταχύτητας από το εσωτερικό χωρίο.

**Συζυγείς ΟΣ στο τοίχωμα( $S_W$ ):** Στα σταθερά όρια  $S_W$  εφαρμόζονται Dirichlet οριακές συνθήκες για τις συνιστώσες της ταχύτητας. Συνεπώς η παράγωγος  $\partial v_i / \partial \alpha = 0$  και το ολοκλήρωμα που αντιστοιχεί στο  $T_4$  μηδενίζεται. Οι όροι  $T_3, T_5$  απαιτούν αντίστοιχα

$$\begin{aligned} u_i n_i &= -\frac{\partial F_S}{\partial p} \\ u_i n_j &= u_i t_i = 0 \end{aligned}$$

Εφόσον δεν προκύπτει οριακή συνθήκη από τις εξισώσεις για τη συζυγή πίεση, επιβάλλεται μηδενική Neumann για τη μεταβλητή  $q$  στο τοίχωμα.

## 2.5 Πεδίο Μη-Διαπερατότητας

Ο τρόπος με τον οποίο μοντελοποιείται στις εξισώσεις ο όρος της μη-διαπερατότητας ( $T_{a,v} = G(a)v_i$ ), επηρεάζει σημαντικά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης και τη δυνατότητα εύρεσης της βέλτιστης λύσης, και συνεπώς μια γραμμική, ως προς  $\alpha$ , έκφραση της να μην είναι πάντοτε αποτελεσματική. Επιπλέον, όπως θα παρουσιαστεί στη συνέχεια, δύναται να εφαρμοστεί φιλτράρισμα του πεδίου (density filtering), και στη συνέχεια προβολή του στην προσπάθεια εξαγωγής ενός δυαδικού πεδίου.

### 2.5.1 Συνάρτηση Μη-Διαπερατότητας

Η συνάρτηση της μη-διαπερατότητας  $G(a)$  μπορεί να οριστεί ως

$$G(a) = b_{MAX} \cdot b(a) \quad (2.29)$$

όπου  $b(a)$  μια συνάρτηση της μη-διαπερατότητας  $\alpha$ , με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το  $[0, 1]$  και  $b_{MAX}$  ένας συντελεστής, η τιμή του οποίου διαφοροποιείται ανάλογα με

το πρόβλημα και τις απαιτήσεις του μηχανικού, ενώ μια ενδεικτική τιμή, όπως παρουσιάζεται και στα [9], [8] μπορεί να ληφθεί από την εξίσωση

$$b_{MAX} = \frac{\nu}{D_a l^2} \quad \left[ \frac{1}{s} \right] \quad (2.30)$$

όπου  $\nu$  η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού,  $l$  ένα χαρακτηριστικό μήκος της ροής, όπως η διάμετρος της διατομής εισόδου και  $D_a$  ο αδιάστατος αριθμός Darcy. Ο αριθμός Darcy ορίζεται στη μηχανική των Ρευστών, όταν αυτά διαπερνούν ένα πορώδες (διαπερατό) μέσο, και, πρακτικά, αντιπροσωπεύει τον λόγο των συνεκτικών δυνάμεων προς τις δυνάμεις που ασκούνται από το πορώδες υλικό. Ο συντελεστής  $b_{MAX}$  είναι απαραίτητος από διαστασιολογικής απόψεως, καθώς εξυπηρετεί την κυριαρχία του όρου της μη-διαπερατότητας έναντι των υπόλοιπων όρων της εξίσωσης της ορμής, στην περίπτωση που το  $a$  τείνει στη μονάδα. Με τον τρόπο αυτό, όταν το μέσο έχει την τάση να στερεοποιηθεί, το πεδίο της ταχύτητας μηδενίζεται έτσι ώστε να εξαλειφθεί ο ισχυρός αυτός όρος και να ικανοποιηθούν οι εξισώσεις της ροής. Η μεταβολή του συντελεστή αυτού, σχετίζεται με τη βαρύτητα της συνάρτησης της μη-διαπερατότητας στις εξισώσεις της ροής, με αποτέλεσμα η τιμή που λαμβάνει να επηρεάζει άμεσα τη πορεία και, συνεπώς, τη δυνατότητα εύρεσης της βέλτιστης λύσης.

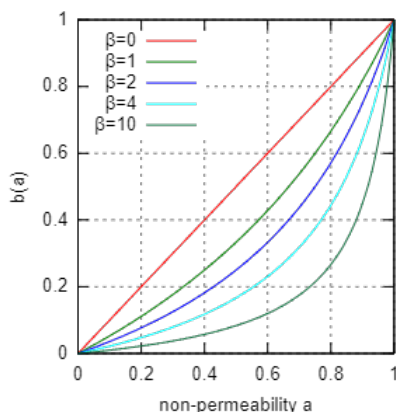
Όσον αφορά τη συνάρτηση  $b(a)$  όπως ορίστηκε στην εξίσωση 2.29, υπάρχει μια πληθώρα επιλογών στη βιβλιογραφία [9], [8], μερικές από τις οποίες παρουσιάζονται και στη διπλωματική εργασία [18]. Η συνάρτηση που χρησιμοποιήθηκε στη διπλωματική εργασία και προτάθηκε στο [6], παρουσιάζεται στην εξίσωση 2.31 και αποτυπώνεται στο σχήμα 2.1.

$$b(a) = \frac{a}{1 + \beta(1 - a)} \quad (2.31)$$

όπου  $\beta$  συντελεστής, που ορίζεται ανάλογα με τις απαιτήσεις του προβλήματος, και είναι δυνατό είτε να παραμένει σταθερός, είτε να μεταβάλλεται με τη διαδοχή των κύκλων βελτιστοποίησης. Στη διπλωματική εργασία, ο συντελεστής  $\beta$  αρχικοποιείται με τιμή 0 (γραμμική συσχέτιση  $a - \beta$ ) και αυξάνεται ισόποσα κάθε 5 κύκλους βελτιστοποίησης (βηματικά), έως ότου λάβει την τελική τιμή 10 μετά από 100 κύκλους βελτιστοποίησης, χωρίς να αποκλείεται το πρόβλημα να έχει ήδη συγχλίνει. Με τον τρόπο αυτό, οι εξισώσεις ροής έχουν μεγαλύτερη τάση να απενεργοποιηθούν ( $b(a)$  τείνει στη μονάδα) στους αρχικούς κύκλους της BeTo και σε συνδυασμό με τη μέθοδο της ΣΜΔ (όπως περιγράφεται στην ενότητα 2.6) διευκολύνεται η στερεοποίηση του πεδίου κοντά στο τοίχωμα του υπολογιστικού χωρίου. Με τη διαδοχή των κύκλων βελτιστοποίησης, το πεδίο  $b(a)$  τείνει να χαμηλώνει την τιμή της μη-διαπερατότητας (αυξάνεται η τιμή του συντελεστή  $\beta$ ), δηλαδή να διατηρεί το πεδίο ανοιχτό, περιορίζοντας την έντονη τάση του περιορισμού όγκου.

Η πορεία της βελτιστοποίησης εξαρτάται σημαντικά από την επιλογή της συνάρτησης

της μη-διαπερατότητας, καθώς αλλάζουν οι εξισώσεις του προς επίλυση συστήματος, αλλά και αυτές που σχετίζονται με την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού, δηλαδή οι παράγωγοι ευαισθησίας. Συνεπώς, είναι δυνατό να διαφοροποιείται η εξέλιξη της βελτιστοποίησης και, κατ' επέκταση, η τελική λύση.



**Σχήμα 2.1:** Γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης  $b(a)$  (εξίσωση 2.31), για διάφορες τιμές του συντελεστή  $\beta$ , όπου  $a$  η μη-διαπερατότητα, με σύνολο τιμών και πεδίο ορισμού το  $[0,1]$ . Η  $b(a)$  για  $\beta = 0$  αποτελεί μια γραμμική έκφραση της συνάρτησης της μη-διαπερατότητας  $\alpha$ . Παρατηρείται, πως η κυρτότητα της συνάρτησης μεγαλώνει με την αύξηση του  $\beta$ , με αποτέλεσμα το πεδίο  $b(a)$  να τείνει να χαμηλώνει την τιμή της μη-διαπερατότητας, δηλαδή να διατηρεί το πεδίο ανοιχτό, ρευστοποιημένο.

## 2.5.2 Κανονικοποίηση - Προβολή

Σε προβλήματα τοπολογίας BeTo είναι πολύ πιθανό η διαδικασία της βελτιστοποίησης να οδηγηθεί σε ένα τραχύ, ανομοιόμορφο πεδίο, καθώς και σε ένα πεδίο μορφής σκακιέρας, δυσχεραίνοντας την εύρεση ενός ομαλού προς στερεοποίηση πεδίου. Πεδία αυτής της μορφολογίας, συνήθως οφείλονται τόσο στα σχήματα διακριτοποίησης των εξισώσεων της ροής όσο και στο πλέγμα που εφαρμόζεται, ενώ είναι πιθανό να συναντώνται σε προβλήματα που χαρακτηρίζονται από δυσκολία σύγκλισης των εξισώσεων του πρωτεύοντος και του συζυγούς συστήματος. Για την αντιμετώπιση των δυσκολιών αυτών, αλλά και στη προσπάθεια ανεξαρτητοποίησης της βελτιστοποίησης από το πλέγμα του υπολογιστικού χωρίου, εφαρμόζεται φιλτράρισμα στο πεδίο της μη-διαπερατότητας  $\alpha$ , μια διαδικασία η οποία ονομάζεται Κανονικοποίηση (Regularization).

Στη βιβλιογραφία συναντώνται αρκετά σχήματα για το φιλτράρισμα ενός προβλήματος, τα οποία περιγράφονται αναλυτικά στο [19] και εφαρμόζονται στο [9], ένα από τα οποία βασίζεται στην επίλυση της διαφορικής εξίσωσης 2.32, η οποία παρέχει, από το γνωστό πεδίο  $\alpha$ , ένα φιλτραρισμένο πεδίο  $\tilde{\alpha}$ , το οποίο στη συνέχεια τίθεται ως όρισμα του  $b$ ,



δηλαδή προκύπτει το πεδίο  $b(\tilde{\alpha})$ . Έτσι, εδώ, υιοθετείται η διαφορική εξίσωση

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left( r_f(x)^2 \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial x_j} \right) + \tilde{\alpha} = \alpha, \quad x \in \Omega \quad (2.32)$$

Ο όρος  $r_f(x)$  σχετίζεται με την ακτίνα  $R_f$  επιρροής του φίλτρου, καθώς επιλύεται η εξίσωση 2.32 σε κάθε κόμβο του υπολογιστικού χωρίου, σύμφωνα με την εξίσωση

$$r_f = \frac{R_f}{2\sqrt{3}} \quad (2.33)$$

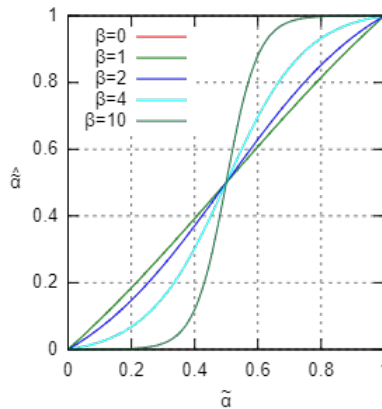
Η τιμή της ακτίνας  $R_f$  που λαμβάνεται, συνήθως έχει την ίδια τάξη μεγέθους με τα κελιά του υπολογιστικού χωρίου. Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης 2.32, η οριακή συνθήκη που απαιτείται είναι μηδενική Neumann ( $\partial \tilde{\alpha} / \partial n$ , όπου  $n$  το κάθετο διάνυσμα στο όριο, με κατεύθυνση προς τα έξω), ενώ είναι δυνατόν να οριστεί Dirichlet οριακή συνθήκη, ώστε να ορίζονται επ' ακριβώς οι οριακές τιμές του φιλτραρισμένου πεδίου, μια πιο αυστηρή προσέγγιση για πιο εύκολη σύγκλιση της διαδικασίας.

Ύστερα από την εφαρμογή της Κανονικοποίησης, το φιλτραρισμένο πεδίο που προκύπτει, συνήθως οδηγεί στην ενίσχυση του αβέβαιων περιοχών (grey areas), ειδικότερα για μεγάλες τιμές της ακτίνας  $r_f$ , αλλοιώνοντας τη δυαδικότητα του πεδίου, γεγονός που δεν είναι επιθυμητό για τη βελτιστοποίηση. Για το λόγο αυτό, αφού επιλυθεί η εξίσωση 2.32, θεωρείται αναγκαία η εφαρμογή ενός σχήματος για την προβολή (Projection) του φιλτραρισμένου πεδίου  $\tilde{\alpha}$  στις τιμές 0-1. Στη βιβλιογραφία προτείνονται αρκετές μέθοδοι Προβολής [19], ενώ στη διπλωματική εργασία χρησιμοποιείται προσεγγιστική (συνεχής και, άρα, διαφορίσιμη) βηματική συνάρτηση (Heaviside), στη μορφή

$$\hat{\alpha} = H(\tilde{\alpha}) = \frac{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(\tilde{\alpha} - \eta))}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))} \quad (2.34)$$

όπου  $\beta$  συντελεστής που μεταβάλλεται βηματικά με τη διαδοχή των κύκλων βελτιστοποίησης, όμοια με της εξίσωσης 2.31, και  $\eta$  η οριακή τιμή αλλαγής της κυρτότητας της συνάρτησης. Η βηματική συνάρτηση  $H$  συμβάλλει στην εύρεση του φιλτραρισμένου πεδίου  $\hat{\alpha}$ , από το γνωστό πεδίο  $\tilde{\alpha}$ , το οποίο υπολογίστηκε μέσω της Κανονικοποίησης του πεδίου  $\alpha$  (εξίσωση 2.32).

Για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου της Προβολής του πεδίου, παρατίθεται στο σχήμα 2.2 η γραφική αναπαράσταση της εξίσωσης 2.34 για διάφορες τιμές του συντελεστή  $\beta$ . Επιλέγεται μια σχετικά χαμηλή μέγιστη τιμή για το συντελεστή  $\beta$  ( $\beta_{max} = 10$ ), ο οποίος σχετίζεται άμεσα με την κλίση της συνάρτησης  $H$ . Διαφορετικά, το τελικό φιλτραρισμένο πεδίο της μη-διαπερατότητας είναι πιθανό να εμφανίσει τραχειές περιοχές (πεδία σκακιέρας), αναιρώντας τα οφέλη της Κανονικοποίησης.



**Σχήμα 2.2:** Γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης  $H(\tilde{\alpha}) = \hat{\alpha}$  (εξίσωση 2.34), για  $\eta = 0.5$  και για διάφορες τιμές του συντελεστή  $\beta$ , όπου  $\tilde{\alpha}$  το φιλτραρισμένο μέσω της Κανονικοποίησης πεδίο. Παρατηρείται, πως η κλίση της  $H$  μεγαλώνει με την αύξηση του συντελεστή  $\beta$ , με αποτέλεσμα να τείνει όλο και περισσότερο στη μη-διαφορίσιμη βηματική συνάρτηση και κατ' επέκταση στην εύρεση ενός δυαδικού πεδίου μη-διαπερατότητας.

Έγινε κατανοητό, πως η προβολή του πεδίου της μη-διαπερατότητας  $\alpha$  συμπληρώνει τη μέθοδο της κανονικοποίησης, αλλά είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί και αυτούσια όποτε εμφανίζονται μεγάλοι εύρους περιοχές με ενδιάμεσες τιμές του πεδίου  $b(\alpha)$ .

## 2.6 Σταδιακά Μεταβαλλόμενη Διαπερατότητα (ΣΜΔ)

Κατά την επίλυση ενός προβλήματος ΒεΤο, συνήθως γίνεται ενεργοποίηση όλων των μεταβλητών σχεδιασμού του υπολογιστικού χωρίου, από τον πρώτο κι όλες κύκλο. Λόγω όμως της εφαρμογής, κατά κανόνα, του περιορισμού του όγκου, σε προβλήματα ΒεΤο όπου στο εσωτερικό πεδίο η αρχική τιμή της μη-διαπερατότητας είναι μηδενική (παντού), η διαδικασία της βελτιστοποίησης προσεγγίζει τη λύση από την περιοχή μη ικανοποίησης του. Για το λόγο αυτό, ο περιορισμός έχει μια έντονη τάση να κλείνει το χωρίο, με αποτέλεσμα οι τιμές του πεδίου της μη-διαπερατότητας να είναι πιο εύκολο να λαμβάνουν τιμές κοντά στη μονάδα, παρά να μηδενιστούν.

Για την αντιπετώπιση του προβλήματος αυτού, είναι δυνατόν να εφαρμοστεί η τεχνική της Σταδιακά Μεταβαλλόμενης Διαπερατότητας (ΣΜΔ) κατά τη ΒεΤο, κατά την οποία η μέθοδος ελευθέρωσης των μεταβλητών σχεδιασμού καθορίζονται από τον μηχανικό, με σταδιακή ενεργοποίησή τους κατά τη διαδοχή των κύκλων βελτιστοποίησης. Η μέθοδος αυτή, φρενάρει την τάση του περιορισμού να ικανοποιηθεί γρήγορα, αποφεύγοντας να εγκλωβιστεί η διαδικασία σε κάποιο τοπικό ακρότατο και να στερεοποιήσει μια κατεύθυνση της ροής που είναι πιθανό να αποτελούσε καλύτερη λύση. Στη διπλωματική εργασία, οι μεταβλητές σχεδιασμού των προβλημάτων ΒεΤο, όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος της ΣΜΔ, ελευθερώνονται σταδιακά από το όριο (τοίχωμα) προς το εσωτερικό του υπολογιστικού χωρίου.

## Κεφάλαιο 3

# Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζεται εν συντομία η Μέθοδος των Κινούμενων Ασυμπτώτων (Method of Moving Asymptotes - MMA), ενώ μια πιο αναλυτική περιγραφή των εξισώσεων μπορεί να βρεθεί στο [11]. Χρησιμοποιείται για την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού στα προβλήματα ΒεΤο που επιλύονται, και αποτελεί μια αιτιοκρατική μέθοδο βελτιστοποίησης κυρίως για την επίλυση προβλημάτων που υπόκεινται σε περιορισμούς.

Πιο συγκεκριμένα, η MMA είναι ικανή να επιλύσει προβλήματα βελτιστοποίησης της μορφής

$$\begin{array}{ll} \text{ελαχιστοποίηση της} & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{υπό τους περιορισμούς} & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, \quad j = 1, \dots, n \end{array} \quad (3.1)$$

όπου  $\mathbf{X} = \{x \in \mathbb{R}^n\}$  οι μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος (αντιστοιχούν στο πεδίο της μη-διαπερατότητας  $\alpha$  στη ΒεΤο),  $f_0(x)$  η προς ελαχιστοποίηση συνάρτηση-στόχος και  $f_i(x)$  οι επιβαλλόμενοι περιορισμοί. Ακόμη, είναι απαραίτητο οι μεταβλητές σχεδιασμού  $\mathbf{X}$  να φράσσονται από ένα κατώτερο και ένα ανώτερο όριο. Για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης της μορφής 3.1 με τη βοήθεια της MMA, πρέπει αυτά να λάβουν την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned}
& \text{ελαχιστοποίηση της } f_0(\mathbf{x}) + a_0 z + \sum_{i=1}^m (c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2) & (3.2) \\
& \text{υπό τους περιορισμούς } f_i(\mathbf{x}) - a_i z - y_i \leq 0 & , i = 1, \dots, m \\
& x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max} & , j = 1, \dots, n \\
& z \geq 0, y_i \geq 0 & , i = 1, \dots, m
\end{aligned}$$

όπου  $f_0, f_i$  συνεχείς και παραγωγίσιμες συναρτήσεις ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\mathbf{X}$ , και  $a_0, a_i, c_i, d_i$  γνωστές, πραγματικές σταθερές, για τις οποίες ισχύει  $a_0 > 0, a_i \geq 0, c_i \geq 0, d_i \geq 0, c_i + d_i > 0$  και  $a_i c_i > a_0$  για κάθε  $i$  με  $a_i > 0$ .

Στην εξίσωση 3.2 οι φυσικές μεταβλητές του προβλήματος είναι οι  $\mathbf{X} = \{x \in \mathbb{R}^n\}$ , ενώ οι  $\mathbf{Y} = \{y \in \mathbb{R}^m\}$  και  $z$  αποτελούν τις τεχνητές μεταβλητές, οι οποίες συμβάλλουν στο σχηματισμό και τη διευκόλυνση της επίλυσης μιας σειράς προβλημάτων, όπως είναι και αυτά της ελαχιστοποίησης που αφορούν την παρούσα εργασία. Οι τεχνητές μεταβλητές  $y_i$  εισάγονται στις εξισώσεις των περιορισμών, έτσι ώστε κάθε μια να αντιστοιχεί με μια συνάρτηση  $f_i$ . Οι επιπλέον όροι που προστίθενται στην προς ελαχιστοποίηση συνάρτηση-στόχο, είναι πάντοτε θετικοί και αυξάνουν την τιμή της, όποτε οι αντίστοιχοι περιορισμοί είναι ενεργοί.

Πιο συγκεκριμένα, αν σε ένα κύκλο βελτιστοποίησης μια από τις μεταβλητές  $y_i$  λάβει τιμή διάφορη του μηδενός, δηλαδή ο αντίστοιχος περιορισμός  $f_i$  δεν ικανοποιείται, τότε ο επιπλέον όρος της συνάρτησης-στόχου είναι θετικός, “τιμωρώντας” και αυξάνοντας την τιμή της. Η μεταβλητές  $y_i$  λαμβάνουν κάθε φορά τη μικρότερη δυνατή τιμή, εφόσον εμφανίζονται ως συνάρτηση πολυωνύμου στη συνάρτηση-στόχο. Για το λόγο αυτό, ο συντελεστής  $c_i$  επιλέγεται μεγάλος σχετικά με την τιμή της  $f_0$ , έτσι ώστε να γίνεται αισθητό σε αυτήν όποτε δεν ικανοποιείται ο αντίστοιχος περιορισμός. Η παρουσία των τεχνητών μεταβλητών, εξασφαλίζει πως το πρόβλημα είναι επιλύσιμο, ακόμη και στην περίπτωση που δεν υπάρχει πιθανό διάνυσμα  $\mathbf{X}$  που να ικανοποιεί τους περιορισμούς του προβλήματος 3.1.

Τα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού  $x_j$ , δηλαδή του πεδίου της μη-διαπερατότητας σε ένα πρόβλημα ΒεΤο, είναι  $x_j^{\min} = 0$  και  $x_j^{\max} = 1$ , ενώ οι τιμές των υπόλοιπων συντελεστών επιλέγονται κάθε φορά ώστε το πρόβλημα που αντιστοιχεί στην εξίσωση 3.2 να είναι όμοιο με αυτό της εξίσωσης 3.1. Οι συντελεστές  $d_i$  και  $a_0$  λαμβάνουν τη μοναδιαία τιμή, και οι  $a_i = 0$  για κάθε  $i$ . Με το πέρας μιας πετυχημένης βελτιστοποίησης, πρέπει όλοι οι περιορισμοί  $f_i$  του προβλήματος 3.1 να ικανοποιούνται, δηλαδή  $y_i = 0$  για κάθε  $i$ , και ο όρος  $a_0 z$  να λαμβάνει την τιμή 0 και συγκεκριμένα  $z = 0$ , έτσι ώστε τα δύο προβλήματα, αρχικό και διαμορφωμένο, να ταυτίζονται.

Συνεπώς, για την επίλυση προβλημάτων της μορφής 3.2, εφαρμόζεται η μέθοδος MMA, ακολουθώντας την εξής διαδικασία. Σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης  $k$ , οι μεταβλητές  $x_i^{(k)}, y_i^{(k)}, z^{(k)}$  είναι γνωστές, είτε ως αρχικοποίηση, είτε από τον προηγούμενο κύκλο, ενώ επιλύεται το πρωτεύον και συζυγές πρόβλημα, με τη βοήθεια του αλγόριθμου SI-

MPLE, για την εύρεση των παραγώγων ευαισθησίας  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)})$  με  $i = 0, 1, \dots, m$ . Στη συνέχεια, ορίζεται ένα υποπρόβλημα, κατά το οποίο η συνάρτηση-στόχος  $f_0$  και οι περιορισμοί  $f_i$ , αντικαθίστανται από αντίστοιχες κυρτές συναρτήσεις, που συμβολίζονται ως  $\tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x})$ , με  $i = 0, 1, \dots, m$ .

Συνεπώς, το υποπρόβλημα της MMA, που επιλύεται για την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \text{ελαχιστοποίηση της} \quad & \tilde{f}_0(\mathbf{x}) + a_0 z + \sum_{i=1}^m (c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2) & (3.3) \\ \text{υπό τους περιορισμούς} \quad & \tilde{f}_i(\mathbf{x}) - a_i z - y_i \leq 0 & , i = 1, \dots, m \\ & \alpha_j^{(k)} \leq x_j \leq \beta_j^{(k)} & , j = 1, \dots, n \\ & z \geq 0, y_i \geq 0 & , i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Στο υποπρόβλημα 3.3 οι προσεγγιστικές συναρτήσεις διαμορφώνονται ως

$$\tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_{ij}^{(k)}}{u_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - l_j^{(k)}} \right) + r_i^{(k)}, i = 0, 1, \dots, m \quad (3.4)$$

όπου οι μεταβλητές  $\alpha_j^{(k)}, \beta_j^{(k)}, p_{ij}^{(k)}, q_{ij}^{(k)}, r_i^{(k)}$  υπολογίζονται σε κάθε κύκλο  $k$  της MMA συναρτήσεως των γνωστών ορίων  $x_j^{\min}, x_j^{\max}$ , των μεταβλητών σχεδιασμού  $x_j^{(k)}$  και των παραγώγων ευαισθησίας  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)})$  που έχουν υπολογιστεί με τη συζυγή μέθοδο. Γίνεται αντιληπτό λοιπόν, πως ο λόγος για τον οποίο ορίστηκαν και επιλύθηκαν διαφορετικά συζυγή προβλήματα για τη συνάρτηση-στόχο και για κάθε περιορισμό, είναι η ανάγκη που εισάγει η MMA να είναι γνωστές οι πρώτες παράγωγοι των συναρτήσεων  $f_i$  ξεχωριστά, και όχι μιας ενιαίας, επαυξημένης συνάρτησης-στόχου.

Ακόμη, για την επίλυση του υποπροβλήματος, είναι απαραίτητη η εύρεση των μεταβλητών  $u_j^{(k)}, l_j^{(k)}$ , οι οποίες εκφράζουν τις ασύμπτωτες (upper, lower) των προσεγγιστικών συναρτήσεων. Αυτές, υπολογίζονται συναρτήσεως του κατώτερου  $x_j^{\min}$  και ανώτερου  $x_j^{\max}$  ορίου, καθώς και των μεταβλητών σχεδιασμού  $x_j^{(k)}$  του παρόντος και  $x_j^{(k-1)}, x_j^{(k-2)}$  των δύο τελευταίων κύκλων της μεθόδου. Το γεγονός αυτό, μαρτυρά πως η MMA δεν διαθέτει την απαραίτητη πληροφορία στους δύο πρώτους κύκλους, αδυνατώντας να προσεγγίσει με μεγάλη ακρίβεια τις συναρτήσεις του προβλήματος στους κύκλους αυτούς.

Αφού βρεθούν οι προσεγγιστικές συναρτήσεις που περιγράφουν τη συνάρτηση-στόχο και τους περιορισμούς, δηλαδή ολοκληρωθεί το πρόβλημα 3.3, τότε αυτό επιλύεται εύκολα με μια αιτιοκρατική μέθοδο βελτιστοποίησης, καθώς οι  $\tilde{f}_i(\mathbf{x})$  με  $i = 0, 1, \dots, m$  αποτελούν πολυωνυμικές συναρτήσεις ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\mathbf{X}$ . Εφόσον

το υποπρόβλημα που ορίζεται είναι κυρτό, η βέλτιστη λύση του είναι δυνατό να βρεθεί με τη μέθοδο Newton, ικανοποιώντας τις συνθήκες KKT. Για το λόγο αυτό, ορίζεται συνάρτηση Lagrange ως

$$L = \tilde{f}_0(\mathbf{x}) + a_0 z + \sum_{i=1}^m (c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (\tilde{f}_i(\mathbf{x}) - a_i z - y_i) \quad (3.5)$$

$$+ \sum_{j=1}^n (\xi_j (\alpha_j - x_j) + \eta_j (x_j - \beta_j)) - \sum_{i=1}^m \mu_i y_i - \zeta z \quad (3.6)$$

όπου  $\lambda, \xi, \eta, \mu, \zeta$  οι θετικά ημιορισμένοι πολλαπλασιαστές Lagrange για τους περιορισμούς του υποπρόβληματος.

## Κεφάλαιο 4

# Βελτιστοποίηση Μορφής

Η Βελτιστοποίηση Μορφής (shape optimisation) αποτελεί μία μέθοδο κατά την οποία το στερεό τμήμα του υπολογιστικού χωρίου ακολουθεί μια παραμετροποίηση που είναι γνωστή εκ των προτέρων, σε αντίθεση με τη ΒεΤο. Πιο συγκεκριμένα, η διαπερατότητα δεν υφίσταται και, συνεπώς, δεν υπάρχουν αβέβαιες περιοχές στο υπολογιστικό χωρίο, όπου δεν είναι ξεκάθαρο αν αυτές ανήκουν στο στερεό τοίχωμα ή σε περιοχή που ρέει το ρευστό. Στα προβλήματα μορφής που επιλύονται στη διπλωματική εργασία, οι μεταβλητές σχεδιασμού που περιγράφουν της γεωμετρία του στερεού ορίου είναι τα σημεία ελέγχου (control points) ενός Πλέγματος Μορφοποίησης (Morphing Box), δηλαδή το πλέγμα του χωρίου και τα παραμετροποιημένα όρια μεταβάλλονται με το πέρασ κάθε κύκλου βελτιστοποίησης.

Όπως αναφέρθηκε στην Εισαγωγή της διπλωματικής εργασίας, η εμφάνιση νεκρών περιοχών σε ένα πρόβλημα ΒεΤο και γενικότερα το πεδίο της μη-διαπερατότητας, αλλά και η μη επιβολή οριακών συνθηκών στα όρια των περιοχών που καθορίζουν την περιοχή που ρέει ρευστό, εισάγουν αβεβαιότητα στην αξιοπιστία της τιμής της συνάρτησης-στόχου, καθιστώντας χρήσιμη την μετεπεξεργασία της μη-διαπερατότητας για την επίλυση ενός προβλήματος μορφής.

Για την άμεση συσχέτιση της ΒεΤο και της ΒεΜο θα επιλυθούν αντίστοιχα προβλήματα, τα οποία ταυτίζονται όσον αφορά τις συνθήκες της ροής, τη συνάρτηση-στόχο και τους περιορισμούς που επιβάλλονται. Συνεπώς, κρίνεται αναγκαίο να γίνει μια σύντομη αναφορά στις εξισώσεις που διέπουν το πρωτεύον και συζυγές πρόβλημα της βελτιστοποίησης μορφής, ενώ μια αναλυτική περιγραφή της διαδικασίας σχηματισμού των εξισώσεων μπορεί να βρεθεί στο [1].

Οι πρωτεύουσες εξισώσεις είναι παρόμοιες με αυτές της ΒεΤο (2.1, 2.2), χωρίς την παρουσία προφανώς του όρου της μη-διαπερατότητας στις εξισώσεις της ορμής, δηλαδή

$$R^p = -\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (4.1)$$

$$R_i^v = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

Οι οριακές συνθήκες της πίεσης και των συνιστωσών της ταχύτητας που συμπληρώνουν το πρωτεύον πρόβλημα είναι όμοιες με τις αντίστοιχες ενός προβλήματος ΒεΤο, οι οποίες ορίστηκαν στην ενότητα 2.4.1.

Η συνάρτηση στόχος του προβλήματος είναι αυτή της διαφοράς ολικής πίεσης μεταξύ εισόδων και εξόδων (εξίσωση 2.3), ενώ επιβάλλεται περιορισμός διατήρησης του όγκου (ή επιφάνειας) που καταλαμβάνεται από ρευστό, και ο οποίος περιγράφεται από την εξίσωση 4.3.

$$J_3 = V - V_{init} = 0$$

$$V = -\frac{1}{2(3)} \int_{S_W} x_k n_k dS \quad [m^{2(3)}] \quad (4.3)$$

όπου  $V$  η επιφάνεια ή ο όγκος του υπολογιστικού χωρίου, για 2Δ και 3Δ πρόβλημα αντίστοιχα, που ορίζεται από τα στερεά τοιχώματα  $S_W$  και  $V_{init}$  η επιφάνεια ή ο όγκος της αρχικής γεωμετρίας που καθορίζεται από το  $S_W$  κατά την έναρξη της βελτιστοποίησης. Η μεταβολή της  $J_3$ , η οποία βρίσκει εφαρμογή μόνο σε προβλήματα ΒεΜο, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού υπολογίζεται ως

$$\frac{\delta J_3}{\delta b_n} = -\frac{1}{2} \left( \int_{S_{W_P}} n_i \frac{\partial x_i}{\partial x_m} n_m \frac{\partial x_k}{\partial b_n} n_k dS + \int_{S_{W_P}} x_i \frac{\delta n_i}{\delta b_n} dS + \int_{S_{W_P}} x_i n_i \frac{\delta(dS)}{\delta b_n} \right) \quad (4.4)$$

Στη συνέχεια, ορίζεται η συνάρτηση-στόχος επαυξημένη με τις εξισώσεις της ροής,

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} q R^p d\Omega + \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega \quad (4.5)$$

όπου  $q, u_i$  οι συζυγείς μεταβλητές της πίεσης και των συνιστωσών της ταχύτητας αντίστοιχα. Παραγωγίζοντας την εξίσωση 4.5 ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού  $b_n$  του προβλήματος και ύστερα από την εκτέλεση πράξεων με σκοπό την απαλοιφή των παραγώγων  $\frac{\partial v_i}{\partial \alpha}, \frac{\partial p}{\partial \alpha}$ , προκύπτουν οι εξισώσεις του συζυγούς προβλήματος ως



$$R^q = -\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (4.6)$$

$$R_i^u = u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_j u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial q}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, (3) \quad (4.7)$$

Αφού ικανοποιηθούν οι συζυγείς εξισώσεις, η έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας έχει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \int_S \left[ u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \{v_i v_k n_k + p n_k + \frac{1}{2} v_i^2 n_k\}_{S_{I,O}} \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS \\ &+ \int_S (u_j n_j + \{v_i n_i\}_{S_{I,O}}) \frac{\partial p}{\partial b_n} dS \\ &+ \int_{S_{W_P}} (u_i R_i^v + q R^p) \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k dS \end{aligned} \quad (4.8)$$

όπου  $S$  το όριο του υπολογιστικού χωρίου, το οποίο γράφεται ως  $S = S_I \cup S_O \cup S_W \cup S_{W_P}$ , με  $S = S_I, S_O, S_W, S_{W_P}$  οι εισόδου, έξοδοι, τα σταθερά και παραμετροποιημένα όρια αντίστοιχα. Είναι σημαντικό να τονιστεί, πως η γεωμετρία των τμημάτων εισόδου και εξόδου είναι σταθερή, δηλαδή δεν εξαρτάται από τις μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος, ενώ η συνάρτηση στόχος ολοκληρώνεται πάνω στις εισόδους και εξόδους, και ο περιορισμός μόνο στο παραμετροποιημένο όριο. Η σημαντικότερη διαφορά των εξισώσεων, σε σχέση με ένα πρόβλημα BeTo, εντοπίζεται στη μεταβολή που υφίσταται του πλέγμα του υπολογιστικού χωρίου με το πέρας κάθε κύκλου βελτιστοποίησης, δηλαδή αυτό εξαρτάται από τις μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος.

Τα δύο πρώτα ολοκληρώματα, με σκοπό να απαλειφούν οι όροι της μεταβολής των ροικών μεταβλητών από τις μεταβλητές σχεδιασμού, συμβάλλουν στη διατύπωση των συζυγών οριακών συνθηκών. Πιο συγκεκριμένα,

α) Στις εισόδους του υπολογιστικού χωρίου  $S_I$ , εφαρμόζονται Dirichlet οριακές συνθήκες για τις συνιστώσες της ταχύτητας και μηδενική Neumann για την πίεση, δηλαδή  $\delta v_i / \delta b_n = \partial v_i / \partial b_n = 0$ , και επειδή είναι σταθερό όριο ισχύει  $\delta x_k / \delta b_n = 0$ . Συνεπώς, το πρώτο ολοκλήρωμα της εξίσωσης 4.8 απαλείφεται και από το δεύτερο προκύπτει,

$$u_j n_j = -v_i n_i \quad (4.9)$$

Εφόσον δεν προκύπτει οριακή συνθήκη από τις εξισώσεις για την συζυγή πίεση, επιβάλλεται μηδενική Neumann για την μεταβλητή  $q$  στην είσοδο.

β) Στις εξόδους του υπολογιστικού χωρίου  $S_O$ , εφαρμόζονται μηδενικές Neumann οριακές συνθήκες για τις συνιστώσες της ταχύτητας και μηδενική Dirichlet για την πίεση, δηλαδή  $\delta p/\delta b_n = \partial p/\partial b_n = 0$ , και επειδή είναι σταθερό όριο ισχύει  $\delta x_k/\delta b_n = 0$ . Συνεπώς, το δεύτερο ολοκλήρωμα της εξίσωσης 4.8 απαλείφεται και από το πρώτο προκύπτει,

$$qn_i = u_i v_j n_j + v_i v_k n_k + pn_k + \frac{1}{2} v_i^2 n_k \quad (4.10)$$

Η εξίσωση 4.10 επιλύεται στα όρια των εξόδων λαμβάνοντας την τιμή της συζυγούς ταχύτητας από το εσωτερικό χωρίο.

γ) Στα σταθερά όρια του υπολογιστικού χωρίου  $S_W$ , εφαρμόζονται Dirichlet οριακές συνθήκες για τις συνιστώσες της ταχύτητας και μηδενική Neumann για την πίεση, δηλαδή  $\delta v_i/\delta b_n = \partial v_i/\partial b_n = 0$ , και επειδή είναι σταθερό όριο ισχύει  $\delta x_k/\delta b_n = 0$ . Συνεπώς, το πρώτο ολοκλήρωμα της εξίσωσης 4.8 απαλείφεται και από το δεύτερο προκύπτει

$$u_j n_j = -v_i n_i \quad (4.11)$$

Εφόσον δεν προκύπτει οριακή συνθήκη από τις εξισώσεις για την συζυγή πίεση, ορίζεται μηδενική Neumann για την μεταβλητή  $q$  στα σταθερά όρια.

δ) Στα παραμετροποιημένα όρια του υπολογιστικού χωρίου  $S_{W_P}$ , εφαρμόζονται μηδενικές Dirichlet οριακές συνθήκες για τις συνιστώσες της ταχύτητας, και συνεπώς η ολική παράγωγος  $\delta v_i/\delta b_n = 0$ . Τα παραμετροποιημένα όρια όμως, μεταβάλλονται στους κύκλους βελτιστοποίησης, δηλαδή η ολική παράγωγος  $\delta x_k/\delta b_n \neq 0$ , με αποτέλεσμα η μερική παράγωγος των συνιστωσών της ταχύτητας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού να υπολογίζεται ως

$$\frac{\partial v_i}{\partial b_n} = -\frac{\partial v_i}{\partial b_n} n_k \frac{\delta x_m}{\delta b_n} n_m$$

Για το μηδενισμό των πρώτων δύο ολοκληρωμάτων της εξίσωσης 4.8, οι συζυγείς μεταβλητές υπολογίζονται στα παραμετροποιημένα όρια ως

$$qn_i = u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \quad (4.12)$$

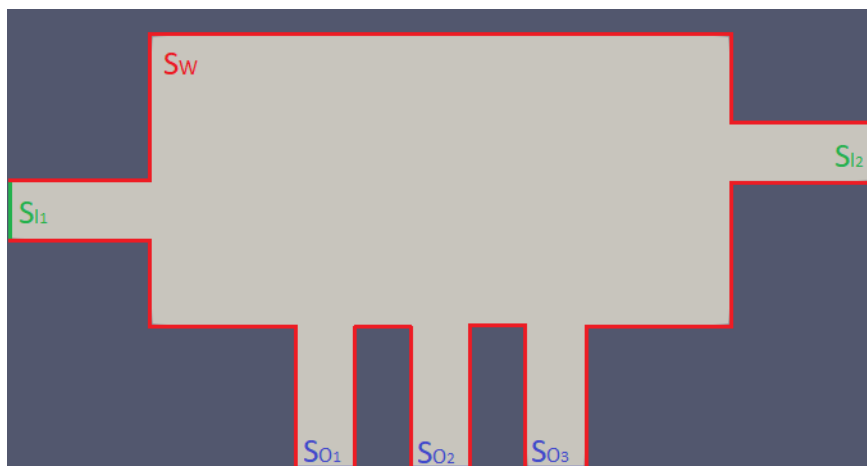
$$u_j n_j = 0 \quad (4.13)$$

Η επίλυση των πρωτεύοντος αλλά και συζυγούς προβλήματος πραγματοποιήθηκαν με το αλγόριθμο SIMPLE, ενώ η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης είναι η SQP.

## Κεφάλαιο 5

### Πρόβλημα ΒεΤο δύο Εισόδων - τριών Εξόδων (2Δ)

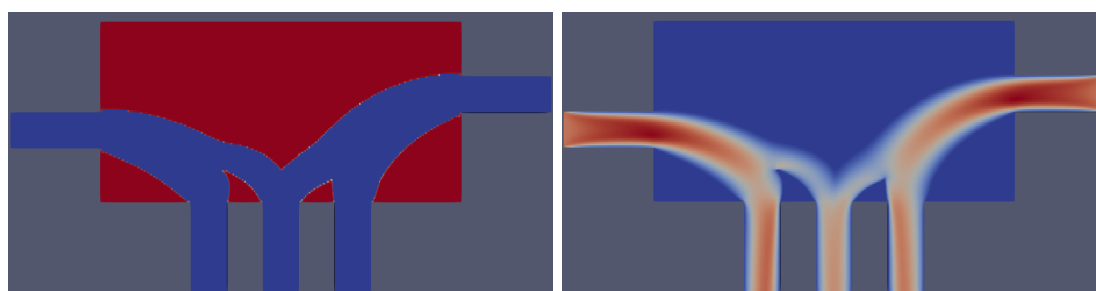
Εδώ επιλύεται ένα πρόβλημα ΒεΤο δύο εισόδων και τριών εξόδων (2I3O), όπως παρουσιάζονται τα όρια ( $S_W, S_I, S_O$ ) του υπολογιστικού χωρίου στο σχήμα 5.1.



**Σχήμα 5.1:** Τα όρια  $S_W$ ,  $S_I$  και  $S_O$  του υπολογιστικού χωρίου του προβλήματος που επιλύεται, όπου επιβάλλονται οριακές συνθήκες τοίχου, εισόδου και εξόδου αντίστοιχα (2.4).

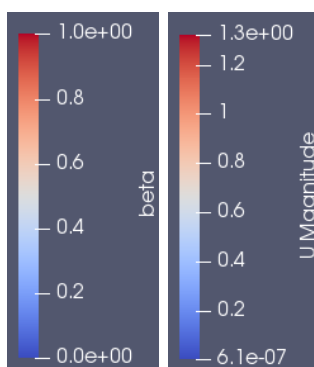
Το 2Δ πρόβλημα που επιλύεται, χαρακτηρίζεται από ασυμπίεστη και στρωτή ροή, δηλαδή περιγράφεται από τις εξισώσεις του συστήματος που παρουσιάστηκαν στις ενότητες 2.1 (πρωτεύον πρόβλημα) και 2.3 (συζυγές πρόβλημα), με τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες που ορίστηκαν στην ενότητα 2.4, ενώ υπόκειται στη συνάρτηση-στόχο των απωλειών πίεσης (εξίσωση 2.3) και τον περιορισμό του όγκου (εξίσωση 2.5).

Στις υποενότητες που ακολουθούν, παρουσιάζεται η συμπεριφορά της επίλυσης του προβλήματος ΒεΤο των δύο εισόδων και τριών εξόδων, κατά τη μεταβολή των περιορισμών, της συνάρτησης της μη-διαπερατότητας και του τρόπου ενεργοποίησης των μεταβλητών σχεδιασμού. Για καλύτερη κατανόηση και σύγκριση των αποτελεσμάτων, παρατίθεται στο σχήμα 5.2 τα πεδία της μη-διαπερατότητας και της ταχύτητας, με το πέρας των κύκλων βελτιστοποίησης.



(α') Πεδίο μη-διαπερατότητας

(β') Πεδίο μέτρου ταχύτητας



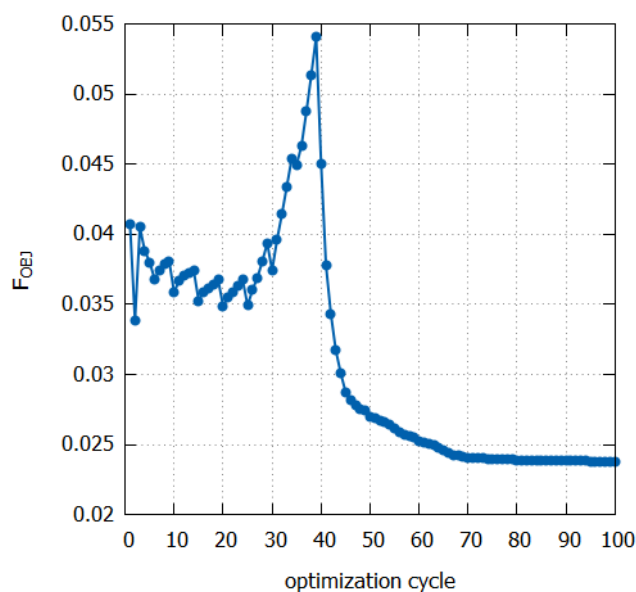
(γ') Μη- (δ') Μέτρο  
διαπερατότητα ταχύτητας

**Σχήμα 5.2:** Πεδία της μη-διαπερατότητας και της ταχύτητας (α και β αντίστοιχα), με το πέρας της βελτιστοποίησης. Παρατηρείται, πως το πεδίο της μη-διαπερατότητας (σχήμα α) χαρακτηρίζεται από δυαδικότητα, ενώ είναι απαλλαγμένο από νεκρές περιοχές και από μεγάλο αριθμό γκρίζων περιοχών. Ακόμη, στο κύκλο που παρουσιάζεται ο περιορισμός έχει ικανοποιηθεί, και η τιμή της συνάρτησης-στόχου είναι ίση με  $F_{OBJ} = 0.0237908$ , ενώ αδιαστατοποιημένη με την τιμή της στο πρώτο κύκλο ισούται με  $0.584672$ . Στα σχήματα γ και δ, παρουσιάζεται η ποσοτικοποίηση των χρωμάτων που περιγράφουν τα Πεδία της μη-διαπερατότητας και του μέτρου της ταχύτητας αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, το βαθύ κόκκινο χρώμα αντιστοιχεί σε τιμή της μη-διαπερατότητας ίση με τη μονάδα, δηλαδή πλήρως στερεοποιημένη περιοχή, ενώ το σκούρο μπλε χρώμα υποδεικνύει την ελεύθερη ροή του ρευστού (μηδενική τιμή μη-διαπερατότητας).

Στο πρόβλημα αυτό, χρησιμοποιήθηκε ο περιορισμός για τον όγκο του ρευστού στο υπολογιστικό χωρίο με στόχο  $\pi_{tar} = 0.462$ , η μη γραμμική συνάρτηση της μη-διαπερατότητας (2.31), με τιμή του συντελεστή  $b_{MAX}$  της εξίσωσης 2.29 ίση με 2500, ενώ εφαρμόστηκε Κανονικοποίηση (Regularization) και σταδιακή ενεργοποίηση των μεταβλητών σχε-

διασμού (ΣΜΔ). Στις εισόδους ορίστηκε οριζόντια ταχύτητα προς το εσωτερικό του χωρίου, με τιμή ίση με τη μονάδα, ενώ για καλύτερη κατανόηση των χρωμάτων που περιγράφουν τα πεδία της ταχύτητας και της μη-διαπερατότητας, δίνονται τα σχήματα 5.2(γ'), 5.2(δ') για την ποσοτική αντιστοίχιση τους. Ο τρόπος με τον οποίο δομείται το πρόβλημα που επιλύθηκε αποτελεί αναφορά για τα προβλήματα που ακολουθούν, ενώ οι σχετικές διαφορές τους θα αναφέρονται ρητά.

Στο σχήμα 5.3 παρουσιάζεται η τιμή της συνάρτησης-στόχου  $F_{OBJ}$  με τη διαδοχή των κύκλων βελτιστοποίησης. Στους πρώτους 30 κύκλους διακρίνεται μια ταλαντωτική συμπεριφορά στην τιμή των απωλειών ολικής πίεσης της ροής, η οποία οφείλεται στη σταδιακή ενεργοποίηση των μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος (ΣΜΔ). Στη συνέχεια, η συνάρτηση-στόχος έχει ανοδική πορεία, έως ότου ικανοποιηθεί ο επιβαλλόμενος περιορισμός του όγκου (κύκλος 39), ενώ ακολουθεί η απότομη μείωση της τιμής της, η οποία οφείλεται στη μέθοδο ανανέωσης των μεταβλητών σχεδιασμού (MMA). Η  $F_{OBJ}$  έχει συγκλίνει στο 70ο κύκλο, αλλά είναι σημαντικό να μη τερματιστεί άμεσα η βελτιστοποίηση, ώστε να δοθεί η δυνατότητα μείωσης του εύρους πιθανών νεκρών ή και γκριζών περιοχών.



**Σχήμα 5.3:** Η τιμή της συνάρτησης-στόχου  $F_{OBJ}$  με τη διαδοχή των κύκλων της ΒεΤο (σχήμα 5.2). Η ταλαντωτική συμπεριφορά, έως τον 30ο κύκλο, δικαιολογείται από την εφαρμογή της ΣΜΔ, ενώ αφού ικανοποιηθεί ο επιβαλλόμενος περιορισμός του όγκου, στον 39ο κύκλο, η βελτιστοποίηση συγκλίνει γρήγορα στη βέλτιστη τιμή των απωλειών ολικής πίεσης της ροής, λόγω της MMA.

Στις υποενότητες του κεφαλαίου αυτού, θα δοθεί έμφαση στη συμπεριφορά της επίλυσης διαφόρων προβλημάτων ΒεΤο, καθώς και στη μορφή του τελικού πεδίου της μη-διαπερατότητας, όσο μεταβάλλονται παράμετροι όπως: α) οι επιβαλλόμενοι περιορισμοί, β) η μέθοδος ενεργοποίησης των μεταβλητών σχεδιασμού, γ) η αρχικοποίηση της μη-διαπερατότητας, και δ) το φιλτράρισμα ή όχι του πεδίου της μη-διαπερατότητας. Τα

χαρακτηριστικά του προβλήματος αναφοράς που αξίζει να σημειωθούν, προς σύγκριση με τα προβλήματα που ακολουθούν, είναι

1. Η ικανοποίηση του(των) περιορισμού(ών)
2. Η τιμή της συνάρτησης στόχου  $F_{OBJ} = 0.0237908$
3. Η δυαδικότητα του πεδίου της μη-διαπερατότητας
4. Η ομαλότητα των πεδίων, όχι τραχειά πεδία ή πεδία σκακιέρας
5. Οι μικρού εύρους νεκρές και γκρίζες περιοχές

Με το πέρας μιας πετυχημένης ΒεΤο οι επιβαλλόμενοι περιορισμοί έχουν ικανοποιηθεί, ενώ η τιμή της συνάρτησης-στόχου αποτελεί ένα κριτήριο σύγκρισης δύο όμοιων προβλημάτων, δηλαδή προβλημάτων που δεν διαφέρουν ως προς τις παραμέτρους α) και δ). Τα χαρακτηριστικά 3, 4, 5 που αφορούν το πεδίο της μη-διαπερατότητας, επηρεάζουν την αξιοπιστία της τιμής της συνάρτησης-στόχου, δηλαδή πόσο διαφέρει η  $F_{OBJ}$  ενός προβλήματος ΒεΤο και ενός όμοιου που επιλύεται σε οριόδετο πλέγμα, όπου έχουν επιβληθεί οριακές συνθήκες στις προς στερεοποίηση περιοχές του χωρίου. Οι διαφορές που εντοπίζονται κατά την επίλυση της ροής, οφείλονται κυρίως στη μετεπεξεργασία του πεδίου της μη-διαπερατότητας για την επίλυση του προβλήματος σε οριόδετο πλέγμα, καθώς και στην αδυναμία της ΒεΤο να παράξει ένα σαφές όριο μεταξύ στερεού τοιχώματος και ρευστού (παρουσία γκρίζων περιοχών) για την τοποθέτηση οριακών συνθηκών. Για την αξιολόγηση της τιμής της συνάρτησης-στόχου ενός προβλήματος ΒεΤο, δηλαδή της αξιοπιστίας της, επιλύονται τα αντίστοιχα προβλήματα στην ενότητα 7.

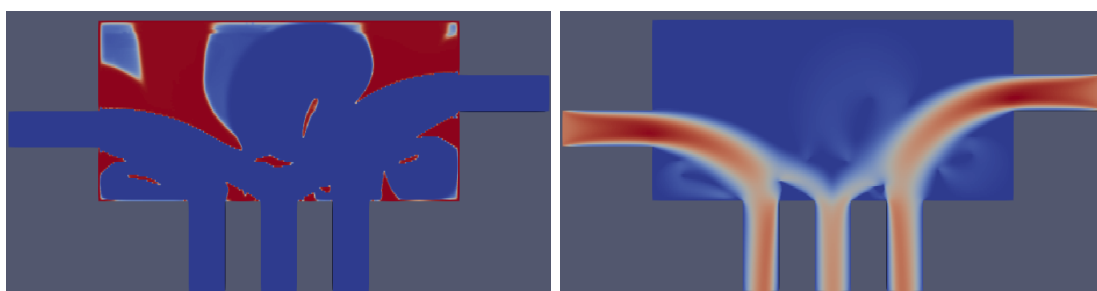
## 5.1 Περιορισμοί

Στην ενότητα αυτή, δίνεται έμφαση στην επιβολή διαφορετικών περιορισμών, είτε μεταβάλλοντας την οριακή μέγιστη τιμή του περιορισμού του όγκου (εξίσωση 2.5), είτε επιβάλλοντας το ποσοστό μάζας που εξέρχεται από κάθε αγωγό (εξίσωση 2.7). Η εφαρμογή των περιορισμών που ακολουθούν, έχει αντίκτυπο τόσο στην τιμή της συνάρτησης-στόχου, όσο και στο πεδίο της μη-διαπερατότητας που προκύπτει.

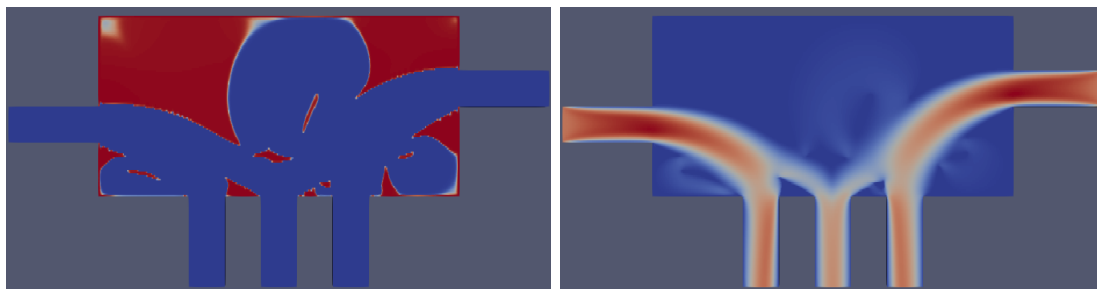
Στα προβλήματα ΒεΤο που επιλύονται στην παρούσα ενότητα, εφαρμόζεται η μέθοδος της Κανονικοποίησης και του Σταδιακά Μεταβαλλόμενη Διαπερατότητα (ΣΜΔ), με μηδενική τιμή αρχικοποίησης όσον αφορά το πεδίο της μη-διαπερατότητας στο εσωτερικό χωρίο σχεδιασμού. Σε συνδυασμό με την επιβολή των διαφορετικών περιορισμών, μελετάται η συμπεριφορά της λύσης του προβλήματος με τη μεταβολή του σταθερού συντελεστή  $b_{MAX}$  της συνάρτησης της μη-διαπερατότητας.

### 5.1.1 Περιορισμός Όγκου

Στην περίπτωση που ακολουθεί, θεωρώντας πως δεν υπάρχει κάποια σχεδιαστική ανάγκη, παραλείπεται η εφαρμογή περιορισμών, με αποτέλεσμα η λύση να οδηγείται στα πεδία που παρουσιάζονται στο σχήμα 5.4. Η παρουσία νεκρών περιοχών και ενδιάμεσων τιμών της μη-διαπερατότητας είναι εμφανής, ενώ ακόμη η μη-διαπερατότητα εμφανίζει τραχιές επιφάνειες και το πεδίο του μέτρου της ταχύτητας ορισμένες περιοχές ανακυκλοφορίας. Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι ανεπιθύμητα, καθώς έχουν αντίκτυπο στην αξιοπιστία της συνάρτησης στόχου, η οποία λαμβάνει τιμή παραπλήσια του προβλήματος αναφοράς και ίση με  $F_{OBJ} = 0.0238085$  (έναντι 0.0237908).



(α') Πεδίο μη-διαπερατότητας, χωρίς περιορισμό, (β') Πεδίο μέτρου ταχύτητας, χωρίς περιορισμό, για 100 κύκλους βελτιστοποίησης, με  $F_{OBJ} = 0.0238085$

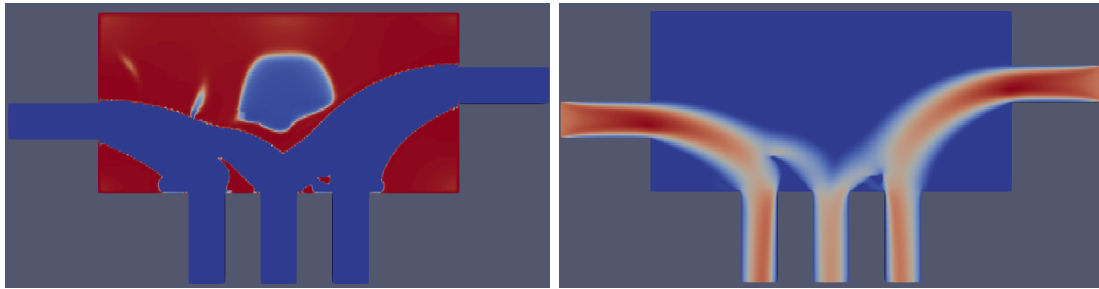


(γ') Πεδίο μη-διαπερατότητας, χωρίς περιορισμό, (δ') Πεδίο μέτρου ταχύτητας, χωρίς περιορισμό, για 200 κύκλους βελτιστοποίησης

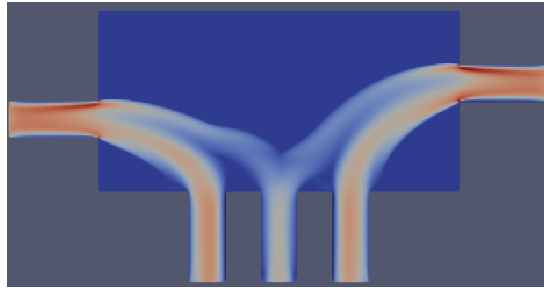
**Σχήμα 5.4:** Πεδία της μη-διαπερατότητας και της ταχύτητας, σε πρόβλημα *BeTo*, χωρίς την εφαρμογή του περιορισμού του όγκου, με έντονη εμφάνιση νεκρών περιοχών και ενδιάμεσων τιμών της μη-διαπερατότητας. Αυξάνοντας τους κύκλους βελτιστοποίησης (σχήματα γ και δ), το πρόβλημα τείνει να αντιμετωπιστεί, ενώ η μεταβολή της  $F_{OBJ}$  είναι ανεπαίσθητη. Δεν αποτελεί, όμως, γρήγορα υπολογίσιμη λύση, καθώς αυξάνεται αναλογικά και το υπολογιστικό κόστος, ενώ το πεδίο της ταχύτητας δεν μεταβάλλεται σημαντικά.

Θέτοντας τη μέγιστη τιμή του περιορισμού του όγκου ίση με  $\pi_{tar} = 0.70$ , σχετικά χαλάρως περιορισμός, προκύπτουν τα πεδία του σχήματος 5.5. Ο περιορισμός έχει ικανοποιηθεί, ενώ παρατηρούνται αρκετές, αλλά μειωμένες σχετικά με την απουσία περιορισμού (σχήμα 5.4), νεκρές περιοχές. Η τιμή της συνάρτησης-στόχου προκύπτει ελάχιστα,

ίσως ανεπαίσθητα, μικρότερη από την προηγούμενη περίπτωση  $F_{OBJ} = 0.0236857$  (έναντι 0.0238085). Μάλιστα, συγκριτικά με το πρόβλημα αναφοράς ( $\pi_{tar} = 0.462$ , σχήμα 5.2), όπου η συνάρτηση-στόχος λαμβάνει παραπλήσια τιμή ( $F_{OBJ_{ref}} = 0.0237908$ ) και συναντάται ομοιόμορφο πεδίο μη-διαπερατότητας, διαπιστώνεται πως ο περιορισμός του όγκου, βοηθά στη δυαδικότητα, απαλλάσσοντάς την από νεκρές περιοχές. Συνεπώς, είναι απαραίτητο να δοθεί μια εξήγηση για την αιτία δημιουργίας των νεκρών περιοχών, αλλά και για τη δυσκολία του αλγορίθμου να στερεοποιήσει τα σημεία του υπολογιστικού χωρίου που συναντάται μηδενική ταχύτητα.



(α') Πεδίο μη-διαπερατότητας, με περιορισμό όγκου 0.70 (β') Πεδίο μέτρου ταχύτητας, με περιορισμό όγκου 0.70



(γ') Πεδίο μέτρου συζυγούς ταχύτητας, με περιορισμό όγκου 0.70

**Σχήμα 5.5:** Πεδία της μη-διαπερατότητας, του μέτρου της ταχύτητας και του μέτρου της συζυγούς ταχύτητας ύστερα από την επίλυση του προβλήματος που έχει οριστεί, για περιορισμό όγκου  $\pi_{tar} = 0.70$ .

Η εξίσωση που συμβάλλει στην ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού (εξίσωση 2.27) ορίστηκε στην ενότητα 2.3 και επαναλαμβάνεται ακολούθως

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta a} = \int_{\Omega} u_i v_i \frac{\partial G(a)}{\partial a} d\Omega$$

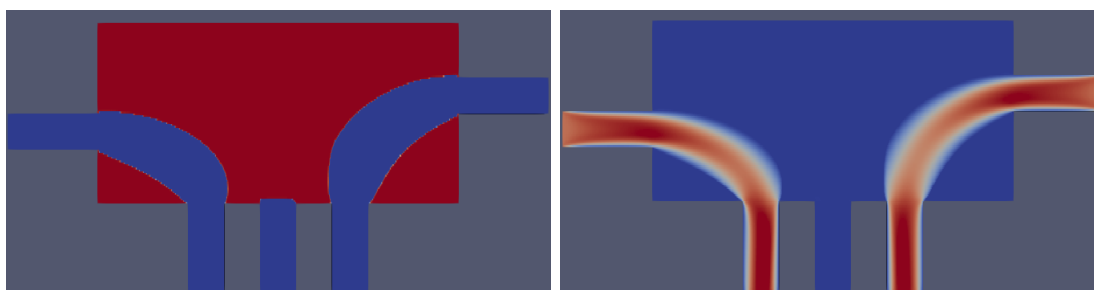
Οι παράγωγοι ευαισθησίας εξαρτώνται άμεσα από τις συνιστώσες της ταχύτητας  $v_i$  και της συζυγούς ταχύτητας  $u_i$ . Αυτό, έχει ως αποτέλεσμα να λαμβάνουν μικρές, έως και ανεπαίσθητες τιμές, εκεί όπου τα πεδία της ταχύτητας και της συζυγούς ταχύτητας τείνουν να μηδενιστούν, όπως φαίνεται στα σχήματα 5.5(β') και 5.5(γ'). Άμεση συνέπεια



αυτού, είναι ο σχηματισμός των νεκρών περιοχών στο υπολογιστικό χωρίο, οι οποίες δεν είναι δυνατόν να στερεοποιηθούν ύστερα από την ικανοποίηση του περιορισμού του όγκου.

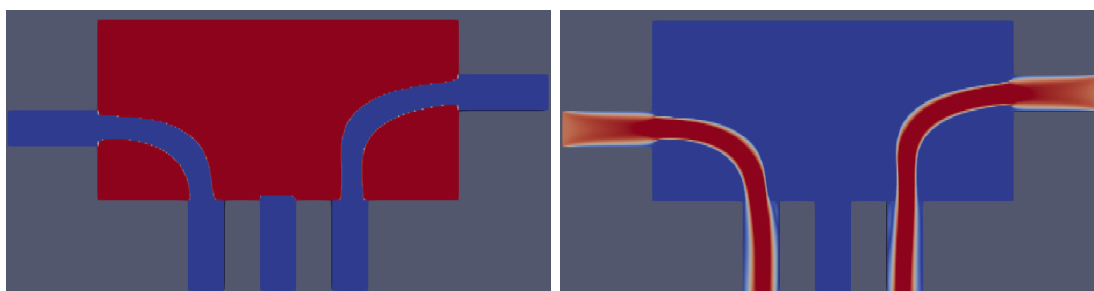
Είναι σημαντικό να γίνει αντιληπτό, πως οι νεκρές περιοχές γύρω από στερεοποιημένο υλικό (όπως αυτή που συναντάται στο σχήμα 5.5), δεν επηρεάζουν άμεσα την τιμή της συνάρτησης-στόχου, αλλά καταλαμβάνουν ένα ποσοστό του περιορισμού του όγκου, το οποίο κάλλιστα θα μπορούσε να δοθεί στη ροή, εκεί όπου δηλαδή αναπτύσσεται ταχύτητα.

Στην περίπτωση που οριστεί πιο αυστηρός περιορισμός όγκου, δηλαδή  $\pi_{tar} = 0.40$  ή  $\pi_{tar} = 0.30$ , τα πεδία που προκύπτουν παρουσιάζονται στα σχήματα 5.6(α'), 5.6(β') και 5.6(γ'), 5.6(δ') αντίστοιχα. Ο αλγόριθμος επίλυσης συμπεριφέρεται έξυπνα αρκετά, ώστε να στερεοποιήσει τη μεσαία έξοδο και να επιτρέψει στη ροή να εξέλθει μόνο από τις ακριανές εξόδους.



(α') Πεδίο μη-διαπερατότητας με περιορισμό όγκου 0.40

(β') Πεδίο μέτρου ταχύτητας με περιορισμό όγκου 0.40



(γ') Πεδίο μη-διαπερατότητας με περιορισμό όγκου 0.30

(δ') Πεδίο μέτρου ταχύτητας με περιορισμό όγκου 0.30

**Σχήμα 5.6:** Πεδία της μη-διαπερατότητας και της ταχύτητας, σε πρόβλημα ΒεΤο με περιορισμό όγκου 0.40 (σχήματα α, β) και 0.30 (σχήματα γ, δ).

Ο περιορισμός όγκου έρχεται αντιμέτωπος με την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης-στόχου, καθώς δεν επιτρέπει στη ροή να κατευθυνθεί προς την πορεία με τις ελάχιστες απώλειες. Η απότομη στροφή του ρευστού ώστε να εξέλθει από την αντίστοιχη κοντινή έξοδο, αλλά και η έντονη μείωση της διατομής, ειδικότερα στην περίπτωση του  $\pi_{tar} = 0.30$ , οδηγεί στην αύξηση των απωλειών. Αποτέλεσμα αυτού, είναι η αύξηση της διαφοράς ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου και κατ' επέκταση της

τιμής της συνάρτησης στόχου, η οποία προκύπτει ίση με  $F_{OBJ_{vol=0.40}} = 0.026369$  και  $F_{OBJ_{vol=0.30}} = 0.0951156$  για την κάθε περίπτωση ξεχωριστά.

### 5.1.2 Περιορισμός Μάζας

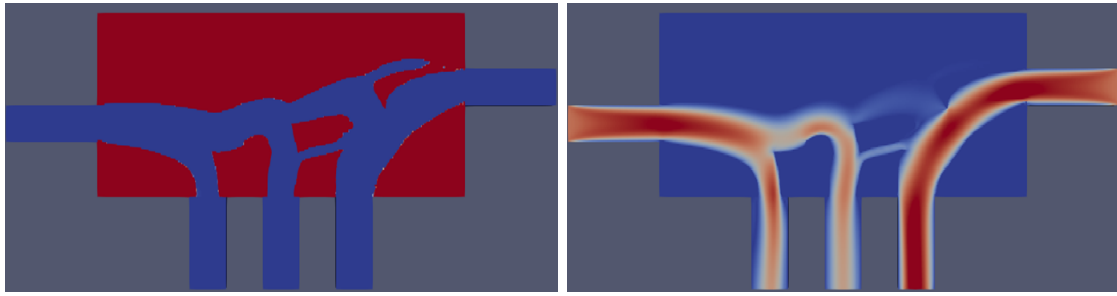
Στη φάση αυτή, τίθεται σε εφαρμογή ο περιορισμός μάζας (εξίσωση 2.7), για τον καθορισμό της παροχής μάζας που περνά από κάθε αγωγό εξόδου. Συγχρόνως, επιβάλλεται σε κάθε περίπτωση και ο περιορισμός του όγκου με τιμή  $\pi_{tar} = 0.462$ , η αναγκαιότητα του οποίου, όπως δικαιολογήθηκε στην προηγούμενη ενότητα, οφείλεται τόσο στις ανάγκες του εκάστοτε προβλήματος όσο και στην προσπάθεια μείωσης των νεκρών περιοχών. Σημαντικό είναι να διαπιστωθεί η συμπεριφορά της βελτιστοποίησης ενός προβλήματος BeTo, στο οποίο επιβάλλονται οι περιορισμοί μάζας και όγκου, παρατηρώντας τόσο τη μεταβολή της συνάρτησης στόχου, όσο και τη μορφή του πεδίου της μη-διαπερατότητας που προκύπτει.

Η πορεία της βελτιστοποίησης εξαρτάται σημαντικά από την επιλογή της συνάρτησης της μη-διαπερατότητας, όπως ορίστηκε στην εξίσωση 2.29, καθώς αλλάζουν οι εξισώσεις του προς επίλυση συστήματος, αλλά και αυτές που σχετίζονται με την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού, δηλαδή οι παράγωγοι ευαισθησίας. Συνεπώς, είναι δυνατό να διαφοροποιείται η εξέλιξη της βελτιστοποίησης και κατ' επέκταση η τελική λύση.

Για το λόγο αυτό, επιλύονται προβλήματα BeTo με διαφορετικό σταθερό συντελεστή της συνάρτησης της μη-διαπερατότητας  $b_{MAX}$  και για διαφορετικό επιβαλλόμενο περιορισμό μάζας. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζονται τα τελικά πεδία της μη-διαπερατότητας και του μέτρου της ταχύτητας, ύστερα από την επίλυση προβλημάτων BeTo, όπου και εφαρμόζονται τιμές του συντελεστή  $b_{MAX}$  ίσες με 2500 και 5000, με κατανομές παροχής μάζας εξόδου 0.25, 0.25, 0.50 (σχήμα 5.7) και 0.50, 0.25, 0.25 (σχήμα 5.8) από αριστερά προς δεξιά.

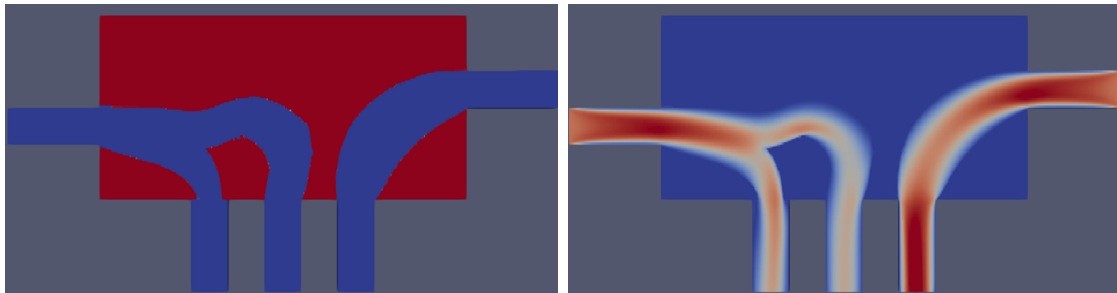
Και στις δύο περιπτώσεις του περιορισμού της μάζας, η αύξηση του συντελεστή  $b_{MAX}$  βοηθά στην εύρεση μιας πιο αποτελεσματικής λύσης των παρόντων προβλημάτων. Πρακτικά, με την αύξηση της τιμής του συντελεστή της συνάρτησης  $G(a)$ , ενισχύεται η βαρύτητα του όρου της μη-διαπερατότητας, με αποτέλεσμα να διευκολύνεται η απενεργοποίηση των εξισώσεων της ροής, στις προς στερεοποίηση περιοχές του υπολογιστικού χωρίου, κυρίως στις ενδιάμεσες τιμές του πεδίου της μη-διαπερατότητας.

Στα προβλήματα του σχήματος 5.7, τα τελικά πεδία διαφέρουν σημαντικά όσον αφορά την τιμή της συνάρτησης-στόχου και τη μορφή του πεδίου της μη-διαπερατότητας. Μεταβάλλοντας την τιμή του  $b_{MAX}$  η BeTo οδηγείται σε διαφορετική λύση, καθώς για χαμηλή τιμή του και οι τρεις σχηματιζόμενοι αγωγοί επικοινωνούν μεταξύ τους, εγκλωβίζοντας τη διαδικασία σε ένα πιθανό τοπικό ακρότατο. Αυξάνοντας την τιμή του συντελεστή, στα προβλήματα που αντιστοιχούν στο σχήμα 5.8, η τιμή της συνάρτησης-στόχου και η μορφή της μη-διαπερατότητας στην τελική λύση δεν διαφέρουν σημαντικά, αλλά βοηθά στην εξάλειψη της νεκρής περιοχής που συναντάται στο δεξί αγωγό (σχήμα



(α') Πεδίο μη-διαπερατότητας με συντελεστή  $b_{MAX} = 2500$  και  $F_{OBJ} = 0.0356241$

(β') Πεδίο μέτρου ταχύτητας με συντελεστή  $b_{MAX} = 2500$



(γ') Πεδίο μη-διαπερατότητας με συντελεστή  $b_{MAX} = 5000$  και  $F_{OBJ} = 0.0266918$

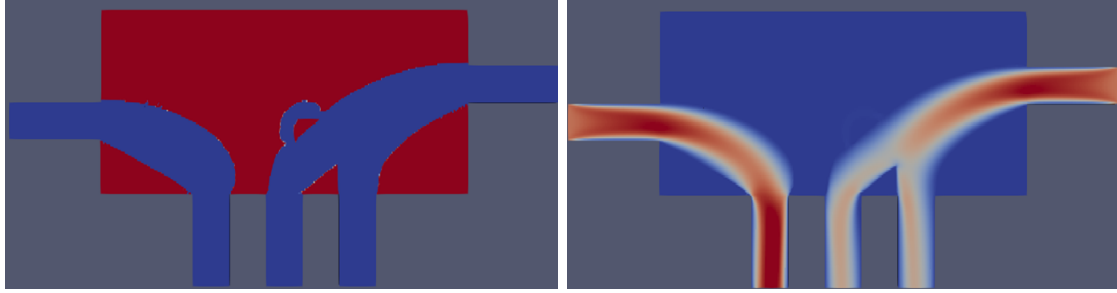
(δ') Πεδίο μέτρου ταχύτητας με συντελεστή  $b_{MAX} = 5000$

**Σχήμα 5.7:** Πεδία της μη-διαπερατότητας και της ταχύτητας, σε δύο προβλήματα BeTo με διαφορετικές τιμές του συντελεστή  $b_{MAX}$  και υπό την επιβολή του περιορισμού της παροχής της μάζας που εξέρχεται από του αγωγούς, με κατανομή 0.25, 0.25, 0.50 από αριστερά προς τα δεξιά. Διαπιστώνεται πως με την αύξηση του συντελεστή  $b_{MAX}$ , η βελτιστοποίηση οδηγείται σε καλύτερη λύση όσον αφορά την τιμή της συνάρτησης-στόχου, ενώ συγχρόνως το πεδίο της μη-διαπερατότητας διαφέρει σημαντικά.

5.8(α')).

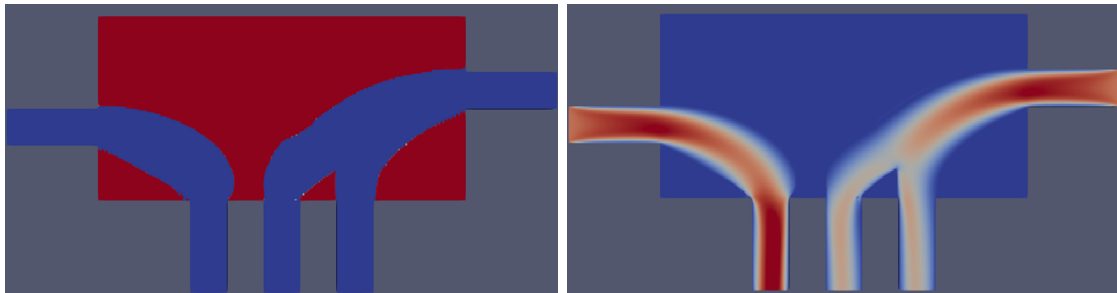
## 5.2 Σταδιακά Μεταβαλλόμενη Διαπερατότητα (ΣΜΔ)

Η σταδιακή ενεργοποίηση των μεταβλητών σχεδιασμού ενός προβλήματος BeTo, ξεκινώντας από τα όρια του τοιχώματος  $S_W$  του υπολογιστικού χωρίου, βοηθά, όπως περιγράφηκε και στην ενότητα 2.6, στην εύρεση μιας πιθανώς καλύτερης λύσης, όσον αφορά την τιμή της συνάρτησης-στόχου. Η λύση αυτή, δεν διαφέρει μόνο στα χαρακτηριστικά του πεδίου της μη-διαπερατότητας, δηλαδή στη δυαδικότητα και στην ύπαρξη γκριζων περιοχών, αλλά είναι δυνατόν να αλλάζει μορφολογικά, δηλαδή να παρατηρείται διαφορετική κατεύθυνση της ροής, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 5.9. Για καλύτερη εποπτεία των προβλημάτων που επιλύονται στο κεφάλαιο αυτό, αναφέρεται πως στα προβλήματα της ενότητας εφαρμόζεται η μέθοδος της Κανονικοποίησης και το πεδίο της μη-διαπερατότητας, στο εσωτερικό του χωρίου, λαμβάνει ως αρχικοποίηση τη μηδενική



(α') Πεδίο μη-διαπερατότητας με συντελεστή  $b_{MAX} = 2500$  και  $F_{OBJ} = 0.0250969$

(β') Πεδίο μέτρου ταχύτητας με συντελεστή  $b_{MAX} = 2500$



(γ') Πεδίο μη-διαπερατότητας με συντελεστή  $b_{MAX} = 5000$  και  $F_{OBJ} = 0.0250321$

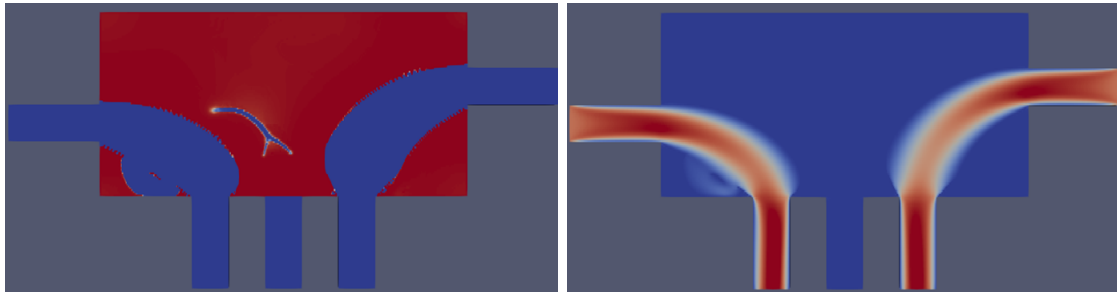
(δ') Πεδίο μέτρου ταχύτητας με συντελεστή  $b_{MAX} = 5000$

**Σχήμα 5.8:** Πεδία της μη-διαπερατότητας και της ταχύτητας, σε δύο προβλήματα BeTo με διαφορετικές τιμές του συντελεστή  $b_{MAX}$  και υπό την επιβολή του περιορισμού της παροχής της μάζας που εξέρχεται από του αγωγούς, με κατανομή 0.50, 0.25, 0.25 από αριστερά προς τα δεξιά. Διαπιστώνεται πως με την αύξηση του συντελεστή  $b_{MAX}$ , η διαφορά στην τιμή της συνάρτησης-στόχου είναι ανεπαίσθητη, ενώ απουσιάζει το κομμάτι της νεκρής περιοχής που παρατηρείται στο σχήμα 5.8(α').

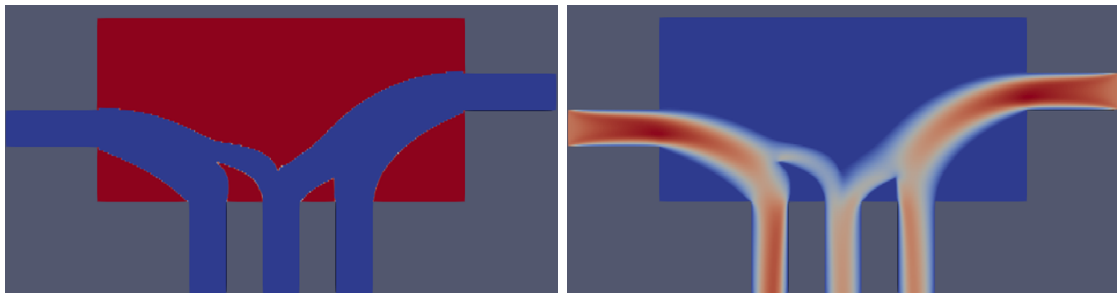
τιμή.

Κατά την ενεργοποίηση των μεταβλητών σχεδιασμού από τον πρώτο κι όλας κύκλο βελτιστοποίησης (σχήμα 5.9(α')), η τελική λύση έχει οδηγηθεί σε ένα τοπικό ακρότατο, καθώς η συνάρτηση στόχος εμφανίζει αυξημένη τιμή  $F_{OBJ} = 0.026074$ , έναντι της  $F_{OBJ_{\Sigma\text{M}\Pi}} = 0.0242459$ , αποκλείοντας την έξοδο του ρευστού από τον μεσαίο κατακόρυφο αγωγό, ενώ η παρουσία νεκρών περιοχών και η ανακυκλοφορία ταχύτητας είναι εμφανής.

Η ανομοιομορφία όμως της μη-διαπερατότητας που συναντάται στο σχήμα 5.9, είναι πιθανό να οφείλεται στο ότι έχει ικανοποιηθεί ο περιορισμός του όγκου και οι νεκρές περιοχές παραμένουν στο τελικό πεδίο και όχι στο γεγονός ότι όλες οι μεταβλητές σχεδιασμού αφήνονται ελεύθερες από την έναρξη της βελτιστοποίησης. Για το λόγο αυτό, είναι δόκιμο να συγκριθούν τα δύο προβλήματα BeTo, με και χωρίς ΣΜΔ, σε πιο αυστηρό περιορισμό όγκου, της τάξης του  $\pi_{tar} = 0.40$ , τα οποία και παρουσιάζονται στο σχήμα 5.10.



(α) Πεδίο μη-διαπερατότητας με περιορισμό (β) Πεδίο μέτρου ταχύτητας με περιορισμό όγκου όγκου 0.45, σε πρόβλημα ΒεΤο και  $F_{OBJ} = 0.45$ , σε πρόβλημα ΒεΤο 0.026074



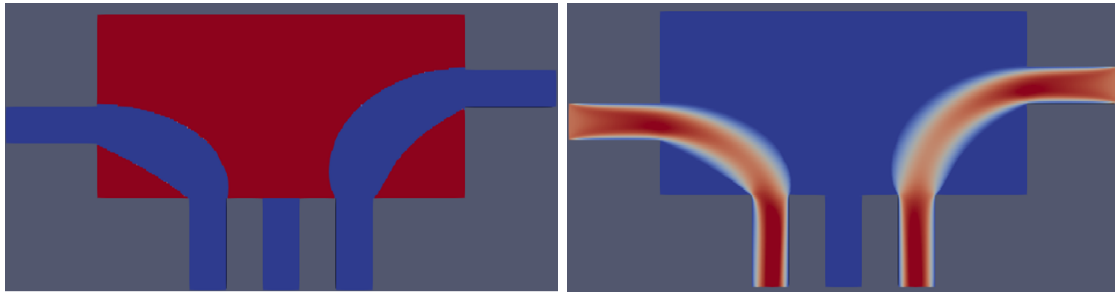
(γ) Πεδίο μη-διαπερατότητας με περιορισμό (δ) Πεδίο μέτρου ταχύτητας με περιορισμό όγκου όγκου 0.45, σε πρόβλημα ΒεΤο με ΣΜΔ και 0.45, σε πρόβλημα ΒεΤο με ΣΜΔ  $F_{OBJ} = 0.0242459$

**Σχήμα 5.9:** Πεδία της μη-διαπερατότητας και της ταχύτητας, σε πρόβλημα ΒεΤο με ή χωρίς ΣΜΔ, και με περιορισμό όγκου 0.45. Είναι εμφανές, τόσο από την τιμή της συνάρτησης στόχου όσο και από τα χαρακτηριστικά του πεδίου της μη-διαπερατότητας, πως στο παρόν πρόβλημα η σταδιακή ενεργοποίηση μεταβλητών σχεδιασμού βοηθά στην αναζήτηση βέλτιστης λύσης.

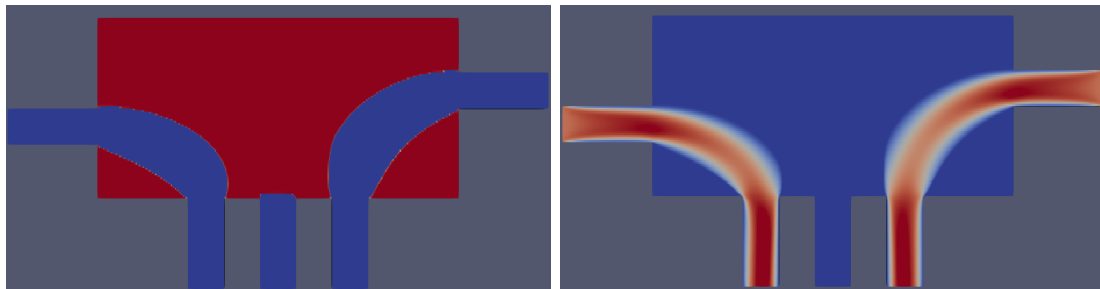
Διαπιστώνεται, πως ανεξαρτήτως από τον τρόπο ενεργοποίησης των μεταβλητών σχεδιασμού, η λύση και στα δύο προβλήματα είναι παρόμοια, με ανεπαίσθητη διαφορά στην τιμή της συνάρτησης-στόχου. Πιο συγκεκριμένα, το πρόβλημα ΒεΤο δεν εγκλωβίζεται σε τοπικό ακρότατο, με αποτέλεσμα να προκύπτουν δύο όμοιες μορφολογικά λύσεις, με δυαδικό πεδίο μη-διαπερατότητας και χωρίς νεκρές περιοχές.

### 5.3 Αρχικοποίηση Μη-Διαπερατότητας

Γενικότερα σε προβλήματα βελτιστοποίησης, όχι μόνο σε αυτά της Τοπολογίας, τα οποία επιλύονται με επαναληπτικές μεθόδους, η επιλογή των αρχικών τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού είναι δυνατόν να οδηγήσει σε ταχύτερη εύρεση της επιθυμητής λύσης (μείωση υπολογιστικού κόστους) ή ακόμη είναι πιθανό η μέθοδος να παγιδευτεί σε κάποιο τοπικό ακρότατο, αδυνατώντας να οδηγηθεί στην καθολικά βέλτιστη λύση. Συνεπώς, είναι σημαντικό να διερευνηθεί η πιο αποτελεσματική τιμή του πεδίου της μη-



(α') Πεδίο μη-διαπερατότητας με περιορισμό όγκου 0.40, σε πρόβλημα ΒεΤο και  $F_{OBJ} = 0.40$ , σε πρόβλημα ΒεΤο 0.0264031

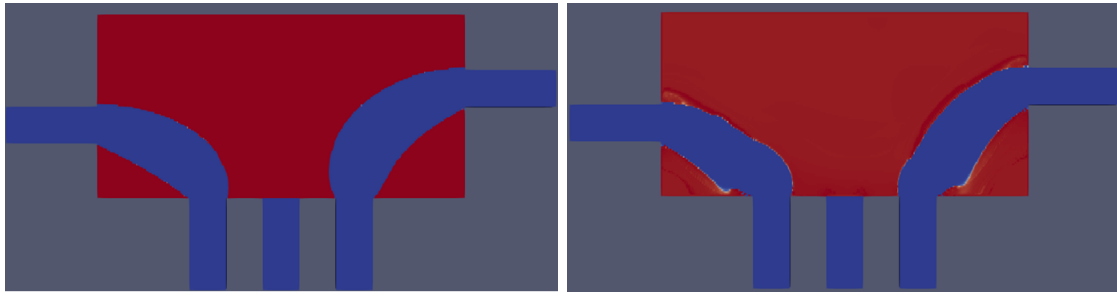


(γ') Πεδίο μη-διαπερατότητας με περιορισμό όγκου 0.40, σε πρόβλημα ΒεΤο με ΣΜΔ και  $F_{OBJ} = 0.026369$

**Σχήμα 5.10:** Πεδία της μη-διαπερατότητας και της ταχύτητας, σε πρόβλημα ΒεΤο με ή χωρίς ΣΜΔ, με περιορισμό όγκου 0.40. Και στις δύο λύσεις, η ροή εξέρχεται από τους κοντινούς αγωγούς, λόγω της επιβολής του αυστηρού περιορισμού του όγκου, χωρίς να συναντάται σημαντική διαφορά στα πεδία, καθώς και οι δύο χαρακτηρίζονται ως βέλτιστες λύσεις και όχι ως τοπικά ακρότατα.

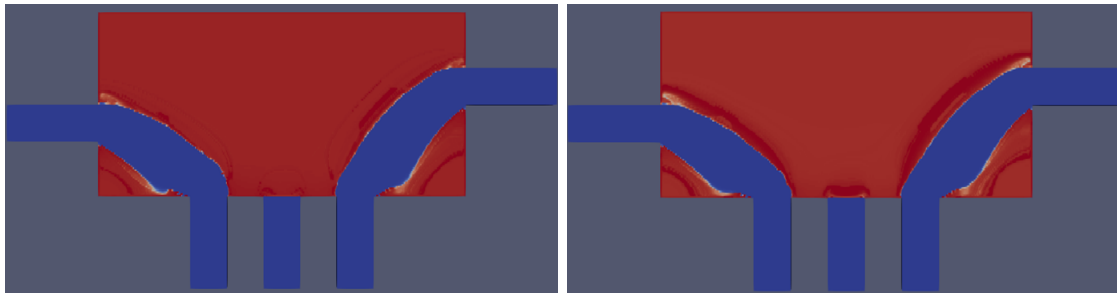
διαπερατότητας, ώστε να εισαχθεί στο πρόβλημα ως αρχικοποίηση. Για τον λόγο αυτό, στο σχήμα 5.11 παρουσιάζονται τα πεδία που προκύπτουν, θέτοντας ως αρχικοποίηση ενιαία τιμή στο πεδίο της μη-διαπερατότητας ίση με 0, 0.2, 0.5, 0.8, 1 και για περιορισμό όγκου  $\pi_{tar} = 0.40$ .

Η αύξηση της αρχικής τιμής της μη-διαπερατότητας στο υπολογιστικό χωρίο, στο παρόν πρόβλημα βελτιστοποίησης, οδηγεί κάθε φορά στην αύξηση των απωλειών ολικής πίεσης, δηλαδή της συνάρτησης στόχου, γεγονός το οποίο οφείλεται κυρίως στο τραχύ τελικό πεδίο αλλά και στην εμφάνιση ενδιάμεσων τιμών της μη-διαπερατότητας (απουσία δυαδικότητας). Καθώς αυξάνεται η τιμή της αρχικοποίησης, ο περιορισμός του όγκου τείνει να ικανοποιηθεί, με αποτέλεσμα από ένα σημείο και μετά να προσεγγίζει τη λύση από την αποδεκτή περιοχή. Με τον τρόπον αυτό, ο περιορισμός του όγκου είναι ανενεργός ως προς τη μέθοδο βελτιστοποίησης και δεν συμβάλλει στην ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού, με αποτέλεσμα περιοχές με ενδιάμεσες τιμές της μη-διαπερατότητας και μηδενικό πεδίο ταχύτητας να είναι αδύνατο να στερεοποιηθούν πλήρως (παρόμοια προσέγγιση με το σχηματισμό νεκρών περιοχών). Προκύπτει



(α') Πεδίο μη-διαπερατότητας με ενιαία αρχική τιμή ίση με 0 και  $F_{OBJ} = 0.0264031$

(β') Πεδίο μη-διαπερατότητας με ενιαία αρχική τιμή ίση με 0.2 και  $F_{OBJ} = 0.0295221$



(γ') Πεδίο μη-διαπερατότητας με ενιαία αρχική τιμή ίση με 0.5 και  $F_{OBJ} = 0.0317944$

(δ') Πεδίο μη-διαπερατότητας με ενιαία αρχική τιμή ίση με 0.8 και  $F_{OBJ} = 0.0341128$



(ε') Πεδίο μη-διαπερατότητας με ενιαία αρχική τιμή ίση με 1 και  $F_{OBJ} = 0.0355388$

**Σχήμα 5.11:** Πεδία της μη-διαπερατότητας που προκύπτουν, ύστερα από την επίλυση προβλημάτων ΒεΤο με διαφορετική αρχικοποιημένη τιμή μη-διαπερατότητας. Διαπιστώνεται, πως όσο η αρχική τιμή τείνει στη μονάδα, τόσο αλλοιώνεται η δυαδικότητα και η ομαλότητα του πεδίου, ενώ αυξάνεται η τιμή της συνάρτησης-στόχου, καθιστώντας τη μηδενική αρχική τιμή ως βέλτιστη, συγκριτικά με τις υπόλοιπες που διερευνήθηκαν.

συνεπώς το συμπέρασμα πως στο πρόβλημα ΒεΤο που αντιστοιχεί στο σχήμα 5.11, η μηδενική αρχική τιμή της μη-διαπερατότητας δηλαδή, ως εάν το χωρίο σχεδιασμού να καλύπτεται αρχικά από ρευστό, συμπεριφέρεται πιο αποτελεσματικά για την εύρεση βέλτιστης λύσης.

Στα προβλήματα που ήδη αντιμετωπίστηκαν στην ενότητα αυτή, δεν εφαρμόστηκε σταδιακή ενεργοποίηση των μεταβλητών σχεδιασμού, ΒεΤο με ΣΜΔ, καθώς το αρχι-

κά στερεοποιημένο πεδίο έχει την τάση να οδηγεί τη ροή να κατευθυνθεί περιφεριακά, δηλαδή στις περιοχές του υπολογιστικού χωρίου όπου οι μεταβλητές σχεδιασμού έχουν ενεργοποιηθεί. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία νεκρών περιοχών οι οποίες λόγω του ήδη ικανοποιημένου περιορισμού δεν είναι δυνατό να εξαλειφθούν, ενώ καθυστερεί σημαντικά τη βελτιστοποίηση, καθώς εμποδίζει τη ροή, στους αρχικούς κύκλους, να οδηγηθεί στην κατεύθυνση με τις ελάχιστες απώλειες. Το φαινόμενο αυτό, παρατηρείται όλο και πιο έντονα όσο αυξάνεται η τιμή της μη-διαπερατότητας στο αρχικοποιημένο πεδίο, όπως παρουσιάζεται και στο σχήμα 5.12, ενώ δικαιολογεί και την αύξηση της τιμής της συνάρτησης στόχου, η οποία προκύπτει για την κάθε περίπτωση ίση με  $F_{OBJ_{a_{init}=0.2}} = 0.0264776$  και  $F_{OBJ_{a_{init}=1}} = 0.0316846$ , έναντι της  $F_{OBJ_{a_{init}=0}} = 0.0242459$ .

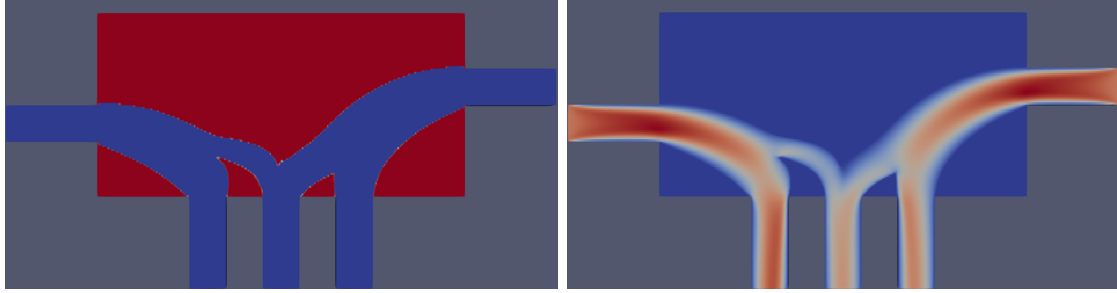
## 5.4 Κανονικοποίηση - Προβολή

Στα προβλήματα που επιλύθηκαν στο κεφάλαιο αυτό, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της Κανονικοποίησης - Προβολής, ώστε να καταστεί η βελτιστοποίηση ανεξάρτητη του πλέγματος του υπολογιστικού χωρίου, αλλά και για την αποφευχθεί η εμφάνιση περιοχών μορφής σκακιέρας στο πεδίο της μη-διαπερατότητας. Η μέθοδος αυτή, περιλαμβάνει την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης 2.32 για την εύρεση ενός φιλτραρισμένου πεδίου μη-διαπερατότητας, και στη συνέχεια την προβολή του στις τιμές 0-1. Η εφαρμογή της Κανονικοποίησης δεν επηρεάζει άμεσα τις εξισώσεις ροής, καθώς λαμβάνει χώρα μετά την επίλυσή τους σε όλο το υπολογιστικό χωρίο, και αμέσως πριν την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού, σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Πρακτικά, η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης επηρεάζει κάθε φορά τον επόμενο κύκλο και, κατά συνέπεια, την πορεία της βελτιστοποίησης. Για το λόγο αυτό, είναι δυνατόν η τελική λύση να διαφέρει σημαντικά με την εφαρμογή ή όχι της Κανονικοποίησης.

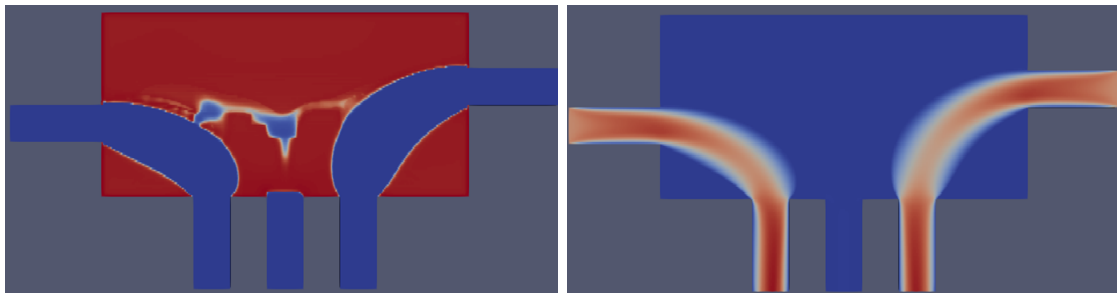
Οι διαφορές αυτές, εντοπίζονται τόσο στη μορφή του πεδίου της μη-διαπερατότητας, δηλαδή στην κατεύθυνση της ροής, όσο και στην ποιότητα του πεδίου, όπως είναι η εμφάνιση ενδιάμεσων τιμών μη-διαπερατότητας και νεκρών περιοχών. Για τον λόγο αυτό, παρουσιάζονται στα σχήματα 5.13 και 5.14 οι τελικές λύσεις δύο διαφορετικών προβλημάτων, με ή χωρίς την εφαρμογή της Κανονικοποίησης.

Στο πρόβλημα που αντιστοιχεί στο σχήμα 5.13 επιβάλλεται περιορισμός όγκου με τιμή  $\pi_{tar} = 0.45$ , ενώ συγχρόνως αποκλείεται στη ροή να εξέλθει από τον μεσαίο κατακόρυφο αγωγό. Παρατηρώντας τα πεδία της ταχύτητας και της μη-διαπερατότητας, εντοπίζεται ο σχηματισμός νεκρών περιοχών, στην περίπτωση της εφαρμογής της Κανονικοποίησης (σχήμα 5.13(α')). Αντιθέτως, στην περίπτωση που δεν χρησιμοποιηθεί το φιλτράρισμα του πεδίου (σχήμα 5.13(γ')), η μη-διαπερατότητα χαρακτηρίζεται από τραχύτητα στα νοητά τοιχώματα που σχηματίζονται (πεδίο σκακιέρας), ενώ στις στερεοποιημένες περιοχές οι τιμές του δεν τείνουν καθαρά στην μονάδα, γεγονός που καθιστά αναξιόπιστη την τιμή της συνάρτησης στόχου. Η μορφή των πεδίων πρακτικά οφείλεται στην αλληλεπίδραση της Κανονικοποίησης με τον περιορισμό του όγκου.

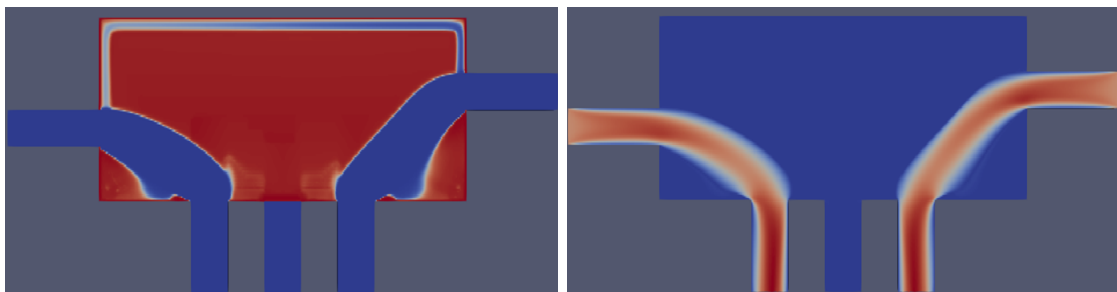




(α') Πεδίο μη-διαπερατότητας με περιορισμό όγκου 0.45, αρχική τιμή μη-διαπερατότητας στο 0.45 και αρχική τιμή μη-διαπερατότητας στο εσω-εσωτερικό του χωρίου ίσο με 0 και  $F_{OBJ} =$  τερικό του χωρίου ίσο με 0  
0.0242459

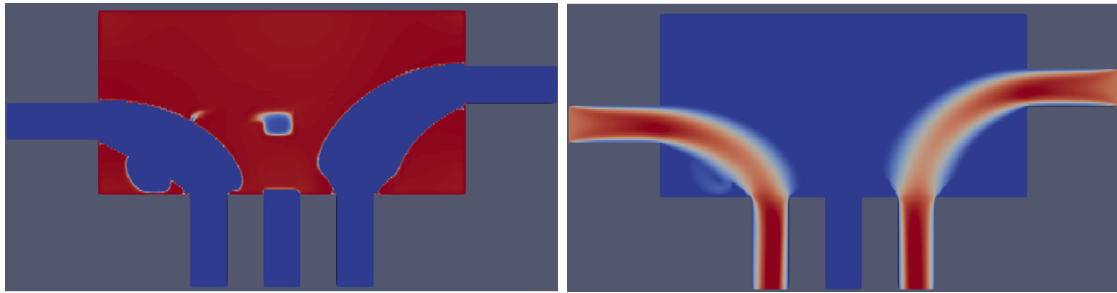


(γ') Πεδίο μη-διαπερατότητας με περιορισμό όγκου 0.45, αρχική τιμή μη-διαπερατότητας στο 0.45 και αρχική τιμή μη-διαπερατότητας στο εσω-εσωτερικό του χωρίου ίσο με 0.2 και  $F_{OBJ} =$  τερικό του χωρίου ίσο με 0.2  
0.0264776

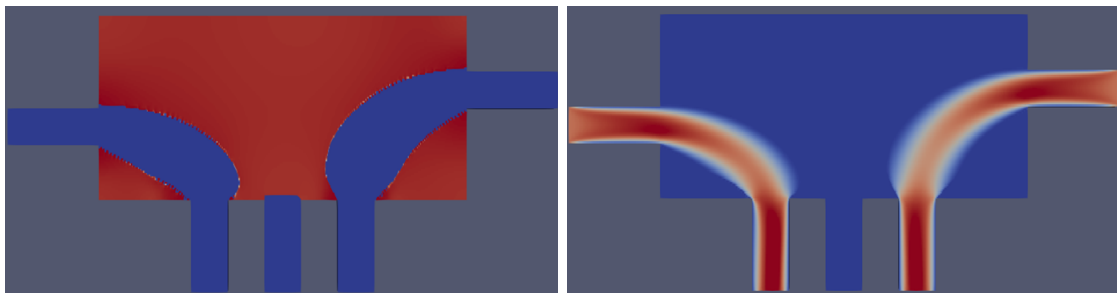


(ε') Πεδίο μη-διαπερατότητας με περιορισμό όγκου 0.45, αρχική τιμή μη-διαπερατότητας στο 0.45 και αρχική τιμή μη-διαπερατότητας στο εσω-εσωτερικό του χωρίου ίσο με 1 και  $F_{OBJ} =$  τερικό του χωρίου ίσο με 1  
0.0316846

**Σχήμα 5.12:** Πεδία της μη-διαπερατότητας και της ταχύτητας, σε ένα πρόβλημα Be-TO με ΣΜΔ, με περιορισμό όγκου  $\pi_{tar} = 0.45$  και για διαφορετικές τιμές αρχικοποίησης της μη-διαπερατότητας. Διαπιστώνεται πως η αύξηση της τιμής του στο αρχικό πεδίο, δεν διευκολύνει τη σύγκλιση της βελτιστοποίησης σε λύση με δυαδικό πεδίο μη-διαπερατότητας και χαμηλότερη τιμή της συνάρτησης-στόχου, αλλά αντιθέτως την καθυστερεί και επιτρέπει τον σχηματισμό νεκρών περιοχών.



(α') Πεδίο μη-διαπερατότητας με εφαρμογή της Κανονικοποίησης και  $F_{OBJ} = 0.0261442$  (β') Πεδίο ταχύτητας με εφαρμογή της Κανονικοποίησης



(γ') Πεδίο μη-διαπερατότητας χωρίς εφαρμογή της Κανονικοποίησης και  $F_{OBJ} = 0.0261236$  (δ') Πεδίο ταχύτητας χωρίς εφαρμογή της Κανονικοποίησης



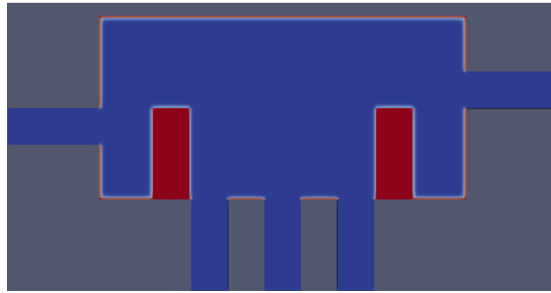
(ε') Πεδίο μη-διαπερατότητας χωρίς εφαρμογή της Κανονικοποίησης, σε μεγένθυση

**Σχήμα 5.13:** Πεδία της μη-διαπερατότητας και της ταχύτητας, καθώς επιβάλλεται περιορισμός όγκου  $\pi_{tar} = 0.45$  και αποκλείεται στη ροή να κατευθυνθεί στην μεσαία έξοδο. Εντοπίζεται η επίδραση της Κανονικοποίησης-Προβολής, καθώς κατά την εφαρμογή του (5.13(α')) παρατηρείται δυαδικό πεδίο μη-διαπερατότητας, αλλά εμφανίζονται νεκρές περιοχές. Στην αντίθετη περίπτωση (σχήμα 5.13(γ')), παρατηρούνται ενδιάμεσες τιμές μη-διαπερατότητας και περιοχές με μορφή σκακιέρας.

Πιο συγκεκριμένα, η Προβολή που εφαρμόζεται στο φιλτραρισμένο πεδίο, βοηθά στην ταχύτερη ικανοποίηση του περιορισμού, καθώς στις στερεοποιημένες περιοχές η μη-διαπερατότητα λαμβάνει τιμές πολύ κοντά στη μονάδα. Με τον τρόπον αυτό, ευνοείται ο σχηματισμός νεκρών περιοχών, σε αντίθεση με το σχήμα 5.13(γ'), όπου ο περιορισμός του όγκου ικανοποιείται σε μεγαλύτερο κύκλο βελτιστοποίησης, συμβάλλοντας

στη στερεοποίηση των περιοχών με μηδενική ταχύτητα.

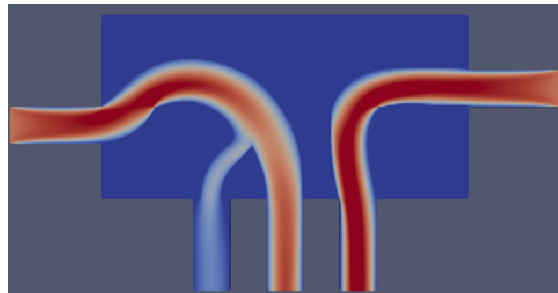
Ένα άλλο πρόβλημα, που επιλύεται για τον εντοπισμό της συμπεριφοράς της Κανονικοποίησης, παρουσιάζεται στο σχήμα 5.14. Σε αυτό, επιβάλλεται περιορισμός όγκου με τιμή  $\pi_{tar} = 0.45$ , και καθορίζονται εξαρχής δύο στερεοποιημένες περιοχές στο υπολογιστικό χωρίο (σχήμα 5.14(α')). Με τον τρόπο αυτό, το ρευστό αναγκάζεται να ακολουθήσει ανοδική πορεία, ώστε να ικανοποιήσει τις ανάγκες του προβλήματος.



(α') Πεδίο μη-διαπερατότητας στην έναρξη της βελτιστοποίησης



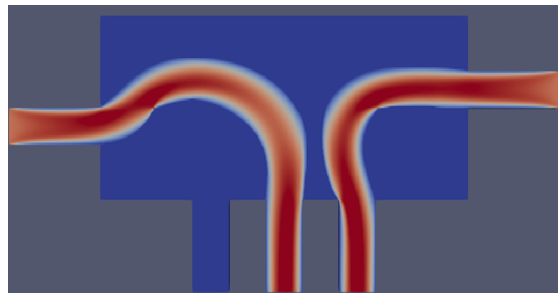
(β') Πεδίο μη-διαπερατότητας με εφαρμογή της Κανονικοποίησης και  $F_{OBJ} = 0.0403047$



(γ') Πεδίο ταχύτητας με εφαρμογή της Κανονικοποίησης



(δ') Πεδίο μη-διαπερατότητας χωρίς εφαρμογή της Κανονικοποίησης και  $F_{OBJ} = 0.0399288$



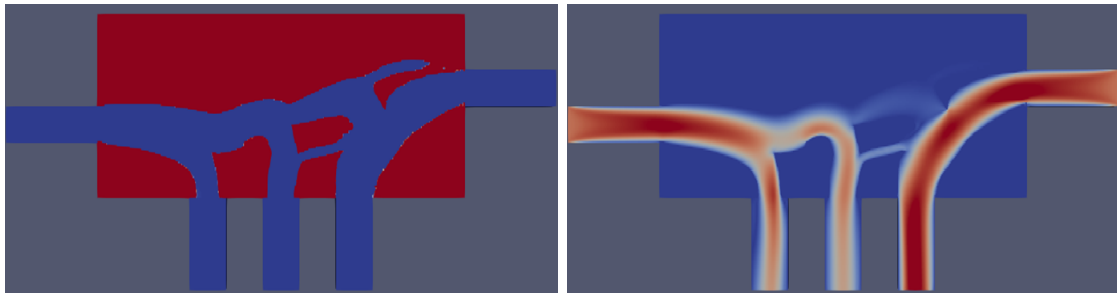
(ε') Πεδίο ταχύτητας χωρίς εφαρμογή της Κανονικοποίησης

**Σχήμα 5.14:** Πεδία της μη-διαπερατότητας και της ταχύτητας, καθώς επιβάλλεται περιορισμός όγκου  $\pi_{tar} = 0.45$  και ορίζονται εξαρχής δύο στερεοποιημένες περιοχές. Η τιμή της συνάρτησης στόχου είναι ανεπαίσθητα διαφορετική, ενώ με ή χωρίς την εφαρμογή της Κανονικοποίησης η βελτιστοποίηση έχει οδηγηθεί σε διαφορετική λύση.

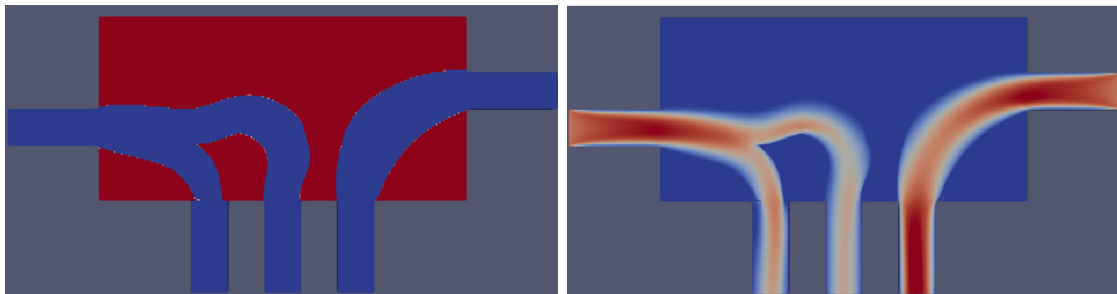
Ύστερα από την επίλυση των δύο αυτών προβλημάτων, το τελικό πεδίο της μη-διαπερατότητας

χαρακτηρίζεται από δυαδικότητα και στις δύο περιπτώσεις, ενώ είναι απαλλαγμένο από νεκρές περιοχές. Οι δύο λύσεις όμως, παρόλο που ταυτίζονται όσον αφορά την τιμή της συνάρτησης-στόχου, διαφέρουν ως προς την κατεύθυνση που έχει “επιλέξει” η ροή να ακολουθήσει. Με την εφαρμογή της Κανονικοποίησης το ρευστό εξέρχεται και από τους τρεις κατακόρυφους αγωγούς, αποδεικνύοντας πως είναι δυνατόν να επηρεάσει σημαντικά την τελική λύση του προβλήματος.

Συνεπώς γίνεται αντιληπτό πως με την εφαρμογή ή όχι της τεχνικής Κανονικοποίησης-Προβολής, η πορεία επίλυσης ενός προβλήματος ΒεΤο μπορεί να διαφέρει σε μεγάλο βαθμό, διευκολύνοντας την εύρεση τη βέλτιστης λύσης, ενώ άλλοτε είναι πιθανό να εγκλωβιστεί σε τοπικό ακρότατο. Για τον λόγο αυτόν, παρουσιάζονται προς σύγκριση δύο όμοια προβλήματα ΒεΤο (σχήμα 5.15), τα οποία διαφέρουν ως προς την εφαρμογή ή όχι της Κανονικοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, και στα δύο προβλήματα επιβάλλονται περιορισμός όγκου με τιμή  $\pi_{tar} = 0.462$  και περιορισμός μάζας με κατανομή 0.25, 0.25, 0.50.



(α') Πεδίο μη-διαπερατότητας με εφαρμογή της Κανονικοποίησης και  $F_{OBJ} = 0.0356241$  (β') Πεδίο ταχύτητας με εφαρμογή της Κανονικοποίησης



(γ') Πεδίο ταχύτητας χωρίς εφαρμογή της Κανονικοποίησης και  $F_{OBJ} = 0.0266918$  (δ') Πεδίο ταχύτητας χωρίς εφαρμογή της Κανονικοποίησης

**Σχήμα 5.15:** Πεδία της μη-διαπερατότητας και της ταχύτητας δύο προβλημάτων που διαφέρουν ως προς την εφαρμογή ή όχι της Κανονικοποίησης, καθώς επιβάλλονται περιορισμός όγκου ( $\pi_{tar} = 0.462$ ) και μάζας (0.25, 0.25, 0.50). Η τιμή της συνάρτησης στόχου διαφέρει σημαντικά, καθώς η ΒεΤο έχει οδηγηθεί σε διαφορετική λύση. Συνεπώς, στο πρόβλημα αυτό η εφαρμογή της Κανονικοποίησης δεν συμπεριφέρεται αποτελεσματικά

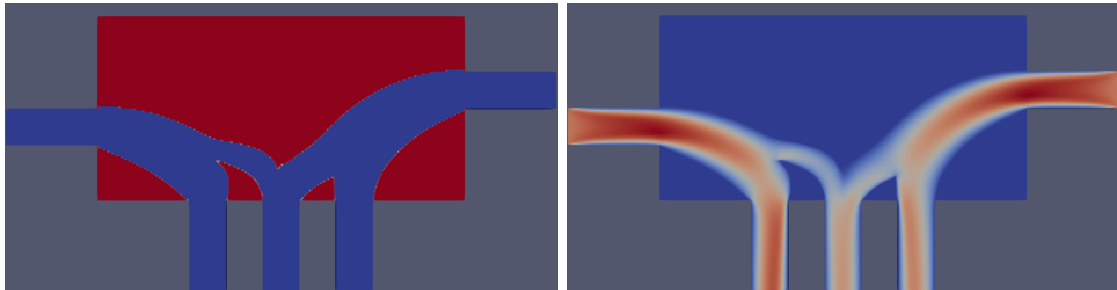
Ύστερα από την εφαρμογή της Κανονικοποίησης, η τελική λύση κρίνεται χειρότερη, τόσο λόγω της τιμής της συνάρτησης-στόχου όσο και εξαιτίας της εμφάνισης νεκρών

περιοχών. Και στις δύο περιπτώσεις, η δυαδικότητα του πεδίου της μη-διαπερατότητας είναι ικανοποιητική. Συνεπώς, η μέθοδος Κανονικοποίηση-Προβολή βοηθά στην εύρεση μιας δυαδικής και ομαλής λύσης, αλλά απαιτείται προσοχή κατά την προσαρμογή της στο εκάστοτε πρόβλημα ΒεΤο.

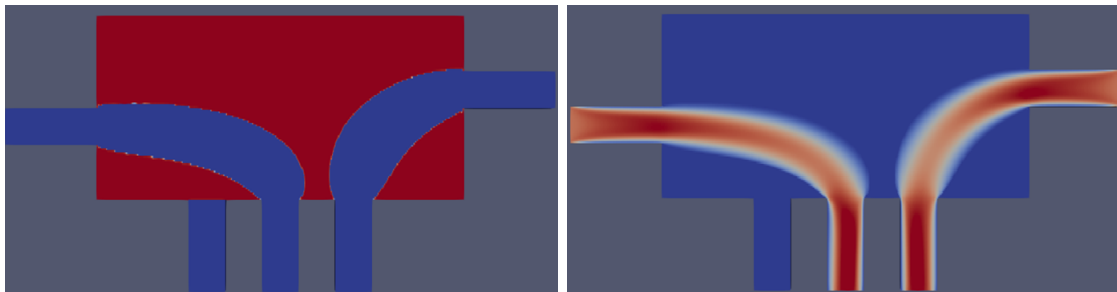
## 5.5 Σύγκριση της Βέλτιστης Λύσης

Στις υποενότητες του κεφαλαίου αυτού, τίχτηκε το ερώτημα αν μια λύση αποτελεί τη βέλτιστη ή ένα πιθανό τοπικό ακρότατο. Συνεπώς, θεωρείται δόκιμο να διερευνηθεί αν η τιμή της συνάρτησης-στόχου, ορισμένων διαισθητικά λογικών λύσεων, είναι μικρότερη, δηλαδή καλύτερη, από τη μέχρι τώρα βέλτιστη λύση (σχήμα 5.2). Πιο συγκεκριμένα, θα συγκριθεί το πεδίο της μη-διαπερατότητας και η τιμή της συνάρτησης-στόχου του, με όμοια προβλήματα, στα οποία αποκλείεται κάθε φορά μια πιθανή έξοδος. Τα αποτελέσματα της διερεύνησης αυτής παρουσιάζονται στο σχήμα 5.16.

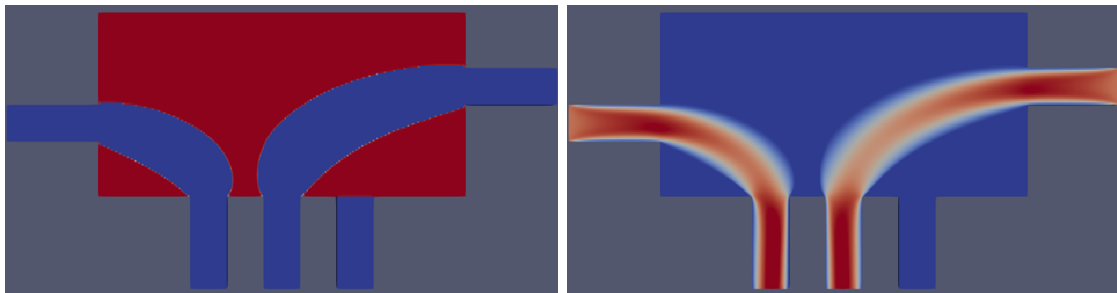
Σε καθένα από τα προβλήματα που επιλύονται, το τελικό πεδίο της μη-διαπερατότητας χαρακτηρίζεται ικανοποιητικό, όσον αφορά την ομοιομορφία και τη δυαδικότητα του, ενώ εύκολα διαπιστώνεται η αλλαγή της μορφής του λόγω του αποκλεισμού των εξόδων. Η σύγκριση της τιμής της συνάρτησης-στόχου βοηθά στην εύρεση της διαδρομής της ροής με της ελάχιστες απώλειες, συμπεραίνοντας ότι η λύση του προβλήματος αναφοράς αποτελεί τη βέλτιστη, όσον αφορά τη διερεύνηση που έλαβε χώρα στο κεφάλαιο αυτό.



(α') Πεδίο μη-διαπερατότητας με ελεύθερη ροή και (β') Πεδίο ταχύτητας με ελεύθερη ροή και από τις από τις τρεις εξόδους και  $F_{OBJ} = 0.0242459$  τρεις εξόδους



(γ') Πεδίο μη-διαπερατότητας με αποκλεισμό της (δ') Πεδίο ταχύτητας με αποκλεισμό της πρώτης πρώτης από αριστερά εξόδου και  $F_{OBJ} =$  από αριστερά εξόδου 0.0270331



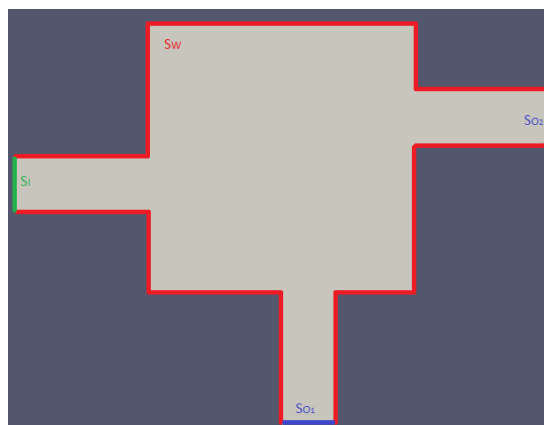
(ε') Πεδίο μη-διαπερατότητας με αποκλεισμό της (ς') Πεδίο ταχύτητας με αποκλεισμό της τρίτης τρίτης από αριστερά εξόδου και  $F_{OBJ} =$  από αριστερά εξόδου 0.0268609

**Σχήμα 5.16:** Πεδία της μη-διαπερατότητας και της ταχύτητας του προβλήματος αναφοράς και αντίστοιχών του, στην περίπτωση που αποκλείεται μια πιθανή έξοδος. Η τιμή της συνάρτησης-στόχου υποδεικνύει πως η βέλτιστη λύση συναντάται κατά την ελεύθερη ροή του ρευστού και στις τρεις εξόδους.

## Κεφάλαιο 6

### Πρόβλημα ΒεΤο μιας Εισόδου - δύο Εξόδων (2Δ)

Στην προσπάθεια ισχυροποίησης των συμπερασμάτων της ενότητας 5, επιλύεται ένα πρόβλημα ΒεΤο μιας εισόδου και δύο εξόδων, η γεωμετρία του οποίου παρουσιάζεται στο σχήμα 6.1. Πιο συγκεκριμένα, η συνάρτηση-στόχος του προβλήματος είναι αυτή των απωλειών ολικής πίεσης της ροής (εξίσωση 2.3) και θα διερευνηθεί η χρησιμότητα της επιβολής του περιορισμού του όγκου και της σταδιακής ενεργοποίησης των μεταβλητών σχεδιασμού, ενώ εφαρμόζεται η μέθοδος Κανονικοποίηση-Προβολή για το φιλτράρισμα του πεδίου της μη-διαπερατότητας. Η ροή είναι στρωτή ( $Re = 200$ ), με την ταχύτητα εισόδου να ορίζεται ίση με  $1m/s$  και τον αγωγό εισόδου να έχει πλάτος  $0.2m$ .



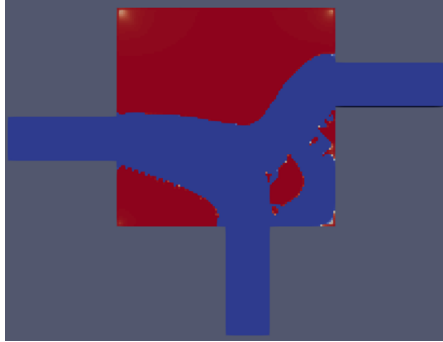
**Σχήμα 6.1:** Τα όρια  $S_W$ ,  $S_I$  και  $S_O$  του υπολογιστικού χωρίου του προβλήματος που επιλύεται, όπου επιβάλλονται οριακές συνθήκες τοίχου, εισόδου και εξόδου αντίστοιχα.

Αρχικά, επιλύεται το 2Δ πρόβλημα επιβάλλοντας τον περιορισμό όγκου με στόχο

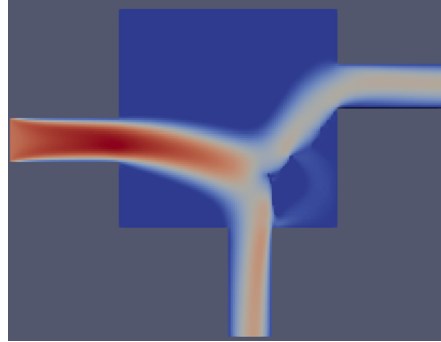
$\pi_{tar} = 0.80$  (σχετικά χαλάρος περιορισμός) και ενεργοποιώντας όλες τις μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος από τον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης (χωρίς ΣΜΔ). Τα τελικά πεδία της μη-διαπερατότητας και της ταχύτητας παρουσιάζονται στα σχήματα 6.2(α') και 6.2(β') αντίστοιχα. Η παρουσία νεκρών και γκρίζων περιοχών είναι εμφανής, με τη συνάρτηση-στόχο να λαμβάνει την τιμή  $F_{OBJ} = 0.0116951$ . Για την αντιμετώπιση αυτών των “προβληματικών” περιοχών, επιβάλλεται πιο αυστηρός περιορισμός όγκου με στόχο  $\pi_{tar} = 0.50$  (σχήματα 6.2(γ') και 6.2(δ')). Με τον τρόπο αυτό, ενισχύεται η δυαδικότητα του πεδίου της μη-διαπερατότητας ενώ, συγχρόνως, δεν παρουσιάζονται νεκρές περιοχές. Όμως, η συνάρτηση-στόχος παρουσιάζει αυξημένη τιμή ( $F_{OBJ} = 0.0116951$ ) και η μορφολογία του σχηματιζόμενου αγωγού έχει αλλάξει σημαντικά. Η έντονη τάση της MMA να ικανοποιήσει τον περιορισμό του όγκου, οδηγεί στη στερεοποίηση των περιοχών που βρίσκονται κοντά στον οριζόντιο αγωγό, στους πρώτους κύκλους βελτιστοποίησης, εγκλωβίζοντας τη ΒεΤο σε τοπικό ακρότατο.

Ακολούθως, επιλύεται το πρόβλημα εφαρμόζοντας τη μέθοδο ΣΜΔ, ώστε να περιοριστεί η έντονη τάση ικανοποίησης του περιορισμού, με στόχο  $\pi_{tar} = 0.50$ , και να βρεθεί μια καλύτερη μορφολογικά λύση (σχήματα 6.2(ε') και 6.2(ζ')). Διαπιστώνεται, πως η ΣΜΔ δίνει το επιθυμητό αποτέλεσμα, καθώς το τελικό πεδίο μη-διαπερατότητας είναι αρκετά δυαδικό και λείο. Ακόμη, συγκρίνοντας την τιμή της συνάρτησης-στόχου,  $F_{OBJ} = 0.0117171$ , γίνεται αντιληπτό πως αποτελεί την καλύτερη (συγκριτικά) λύση.





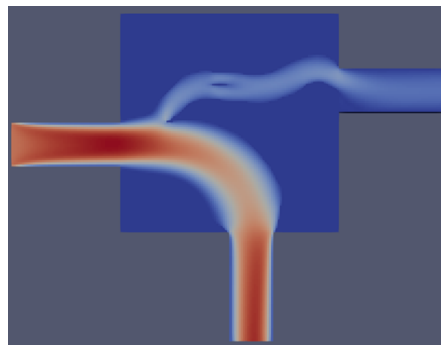
(α') Πεδίο μη-διαπερατότητας με  $\pi_{tar} = 0.80$ , χωρίς ΣΜΔ και  $F_{OBJ} = 0.0116951$



(β') Πεδίο ταχύτητας



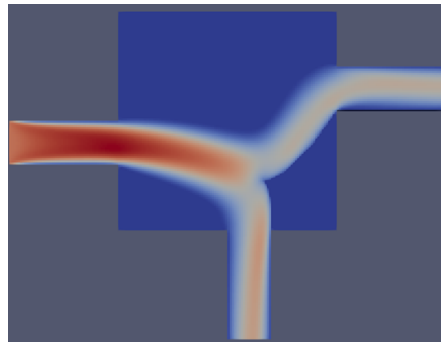
(γ') Πεδίο μη-διαπερατότητας με  $\pi_{tar} = 0.50$ , χωρίς ΣΜΔ και  $F_{OBJ} = 0.0120072$



(δ') Πεδίο ταχύτητας



(ε') Πεδίο μη-διαπερατότητας με  $\pi_{tar} = 0.50$ , με ΣΜΔ και  $F_{OBJ} = 0.0117171$



(ϛ') Πεδίο ταχύτητας

**Σχήμα 6.2:** Πεδία της μη-διαπερατότητας και της ταχύτητας του προβλήματος, τα οποία διαφέρουν ως προς την εφαρμογή ή όχι της ΣΜΔ και τον στόχο του περιορισμού του όγκου. Παρατηρείται, ο περιορισμός του όγκου βοηθά στη μείωση των νεκρών και γκρίζων περιοχών, αλλά μια σχετικά αυστηρή τιμή του μπορεί να εγκλωβίσει τη ΒεΤο σε τοπικό ακρότατο. Λύση στο πρόβλημα αυτό δίνει η μέθοδος ΣΜΔ, η οποία βοηθά στην εύρεση μιας καλύτερης (συγκριτικά) λύσης.



## Κεφάλαιο 7

### Επιβεβαίωση λύσης ΒεΤο 2I3O

Στο προηγούμενο κεφάλαιο (5), παρουσιάστηκε μια αναλυτική περιγραφή της συμπεριφοράς ενός προβλήματος ΒεΤο, δύο εισόδων - τριών εξόδων, όσο μεταβάλλονται οι επιβαλλόμενοι περιορισμοί και η συνάρτηση της μη-διαπερατότητας. Αξιολογώντας ως βέλτιστη, όσον αφορά την τιμή της συνάρτησης-στόχου και την ομοιομορφία της μη-διαπερατότητας (δυσαικτικότητα, απουσία νεκρών περιοχών), τη λύση του προβλήματος αναφοράς που ορίστηκε, αξιοποιείται το τελικό πεδίο της μη-διαπερατότητας για τον καθορισμό των ορίων του υπολογιστικού χωρίου. Πιο συγκεκριμένα, η εύρεση της θέσης των τοιχωμάτων είναι αναγκαία, για την ακριβή επιβολή των οριακών συνθηκών και, στη συνέχεια, την επίλυση της ροής μέσα σε ένα αγωγό καθορισμένης γεωμετρίας, χωρίς την παρουσία της μη-διαπερατότητας στις εξισώσεις που επιλύονται. Απώτερο σκοπό της διαδικασίας αυτής, αποτελεί η αξιολόγηση της λύσης και της τιμής της συνάρτησης-στόχου της ΒεΤο, συγκριτικά με την επίλυση ενός όμοιου προβλήματος με οριόδετο πλέγμα, ενώ στη συνέχεια εφαρμόζεται σε αυτό ΒεΜο για ακόμη καλύτερη βελτίωση της τιμής της συνάρτησης-στόχου.

#### 7.1 Εκτίμηση Συνάρτησης-Στόχου

Για την επίλυση του προβλήματος σε οριόδετο πλέγμα απαιτείται η μετεπεξεργασία του πεδίου της μη-διαπερατότητας που προκύπτει από την επίλυση της ΒεΤο. Η μετεπεξεργασία αυτή έχει σκοπό την αντιστοίχιση των περιοχών του υπολογιστικού χωρίου με τιμή μη-διαπερατότητας κοντά στη μονάδα, σε στερεά τοιχώματα. Όμως, η παρουσία γκρίζων περιοχών καθιστά αδύνατο το σαφή διαχωρισμό του ρευστού από το προς στερεοποίηση πεδίο, δηλαδή η δυσαικτικότητα του πεδίου αποτελεί σημαντική παράμετρο για την αξιολόγηση της τιμής της συνάρτησης στόχου και για την αποτελεσματικότητα των συγκρίσεων που ακολουθούν.

Ένα ακόμη καίριο στοιχείο αποτελεί η μέθοδος που ακολουθείται για τη μετεπεξεργασία της μη-διαπερατότητας. Στη διπλωματική εργασία, για τον καθορισμό της γεωμετρίας του αγωγού χρησιμοποιήθηκε το εμπορικό λογισμικό SolidWorks, όπου και σχεδιάστηκε, “αντιγράφοντας με το μάτι” όσο δυνατόν καλύτερα το αποτέλεσμα της BeTo, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 7.1(β’). Προφανώς, η διαδικασία αυτή εισάγει σφάλμα λόγω της ανθρώπινης παρέμβασης, και για το λόγο αυτό επιλύονται οι πρωτεύουσες εξισώσεις της BeTo, με τις προς στερεοποίηση περιοχές να καθορίζονται από τη γεωμετρία του αγωγού που σχεδιάστηκε (σχήμα 7.1(γ’)). Η τιμή της συνάρτησης-στόχου εντοπίζεται μεγαλύτερη, της τάξης του 4%. Η διαφορά αυτή οφείλεται (α) στη μέθοδο που εφαρμόστηκε (μέσω του SolidWorks) για την αντιστοίχιση των προς στερεοποίηση περιοχών σε τοίχωμα (σχήμα 7.1(β’)) και (β) στον τρόπο με τον οποίο “βάφτηκαν” οι προς στερεοποίηση περιοχές κατά την επίλυση των εξισώσεων της ροής με την παρουσία του όρου της μη-διαπερατότητας (ορίστηκε  $\alpha = 1$ , δηλαδή στερεό, σε κάθε κελί που τέμνει ο αγωγός που σχεδιάστηκε, σχήμα 7.1(γ’)).



(α’) Πεδίο μη-διαπερατότητας στο πρόβλημα BeTo, με  $F_{OBJ} = 0.0237908$



(β’) Γεωμετρία σχηματιζόμενου αγωγού (designed)



(γ’) Πεδίο μη-διαπερατότητας, με  $F_{OBJ_{Designed}} = 0.0248185$

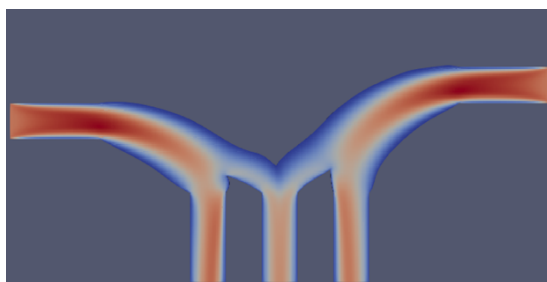


(δ’) Πεδίο μέτρου ταχύτητας

**Σχήμα 7.1:** Πεδία της μη-διαπερατότητας και της ταχύτητας (γ και δ αντίστοιχα), ύστερα από την επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος της BeTo, με τις προς στερεοποίηση περιοχές να καθορίζονται από τη γεωμετρία του σχηματιζόμενου, μέσω του SolidWorks, αγωγού. Η απόκλιση του πεδίου της μη-διαπερατότητας και της τιμής της συνάρτησης-στόχου (4%), από το αντίστοιχο πρόβλημα της BeTo (σχήμα 7.1(α’)), οφείλεται κυρίως στη μετεπεξεργασία της μη-διαπερατότητας.

Ακολούθως, επιλύθηκε η ροή στον αγωγό αυτό (πρόβλημα με οριόδετο πλέγμα), με αποτέλεσμα η συνάρτηση-στόχος να λάβει την τιμή  $F_{OBJ_{bodyfitted}} = 0.0240386$ , έναντι της

τιμής που προέκυψε από την επίλυση του προβλήματος της ΒεΤο,  $F_{OBJ} = 0.0237908$  (σχήμα 7.2). Η σχετική τους διαφορά, 1%, οφείλεται (α) στη μη επιβολή οριακών συνθηκών στα στερεά τοιχώματα που προκύπτουν από το πρόβλημα της ΒεΤο και (β) στη μετεπεξεργασία που υπέστη το πεδίο της μη-διαπερατότητας για την αντιστοίχιση των προς στερεοποίηση περιοχών σε τοίχωμα. Για την άμεση σύγκριση των τιμών της συνάρτησης-στόχου, είναι αναγκαίο να επιλυθούν δύο προβλήματα (ΒεΤο και επίλυση ροής σε οριόδετο πλέγμα) ίδιων συνθηκών εισόδου και εξόδου, γεωμετρίας και περιορισμών.

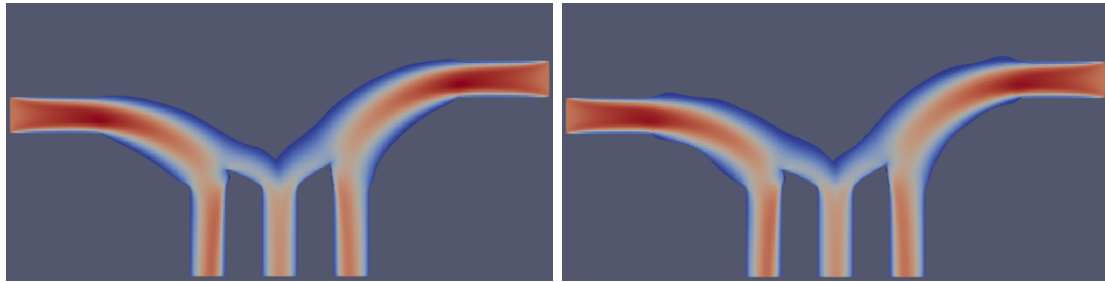


**Σχήμα 7.2:** Πεδίο μέτρου ταχύτητας ύστερα από την επίλυση της ροής σε οριόδετο πλέγμα χωρίς την παρουσία της μη-διαπερατότητας, με  $F_{OBJ} = 0.0240386$ .

## 7.2 Βελτιστοποίηση Μορφής

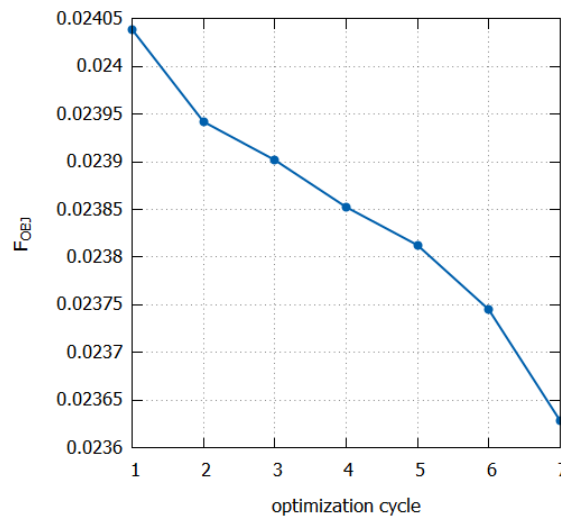
Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζεται η γεωμετρία του αγωγού και το πεδίο της ταχύτητας, ύστερα από τη βελτιστοποίηση του αγωγού που σχεδιάστηκε (designed) (7.1(β')). Πιο συγκεκριμένα, επιλύεται ένα πρόβλημα ΒεΜο, όπου οι μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος είναι τα σημεία ελέγχου (control points) ενός Πλέγματος Μορφοποίησης (Morphing Box),  $14 \times 7$ , ενώ οι αγωγοί εισόδου και εξόδου ανήκουν στις μη παραμετροποιημένες περιοχές. Με το πέρας της βελτιστοποίησης, η γεωμετρία του αγωγού λαμβάνει τη μορφή του σχήματος 7.3(β') και η τιμή της συνάρτησης-στόχου λαμβάνει την τιμή  $F_{OBJ_{shape}} = 0.0236285$  (μείωση της τάξης του 2%).

Συγκριτικά με το πρόβλημα της ΒεΤο που επιλύθηκε, εκτός από τη σχετικά μικρή, αλλά σημαντική, διαφορά που εντοπίζεται στην τιμή της συνάρτησης-στόχου, η ΒεΜο επιλέγει να διαμορφώσει αρκετά το σχήμα του αγωγού, δημιουργώντας μια πιο καμπυλόμορφη διάταξη. Συγκλίνει σε 7, μόλις, κύκλους, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 7.4, καθώς η ΒεΜο εφαρμόζεται σε ένα ήδη βελτιστοποιημένο, με τη μέθοδο της ΒεΤο, αγωγό.



(α') Πεδίο ταχύτητας ύστερα από την επίλυση της (β') Πεδίο ταχύτητας ύστερα από την βελτιστοποίηση του αγωγού, με  $F_{OBJ} = 0.0240386$   $F_{OBJ} = 0.0236285$

**Σχήμα 7.3:** Πεδία της ταχύτητας στο εσωτερικό του αγωγού, στον πρώτο και στον τελευταίο κύκλο της BeMo. Εντοπίζεται μείωση της τιμής της συνάρτησης-στόχου της τάξης του 2%.



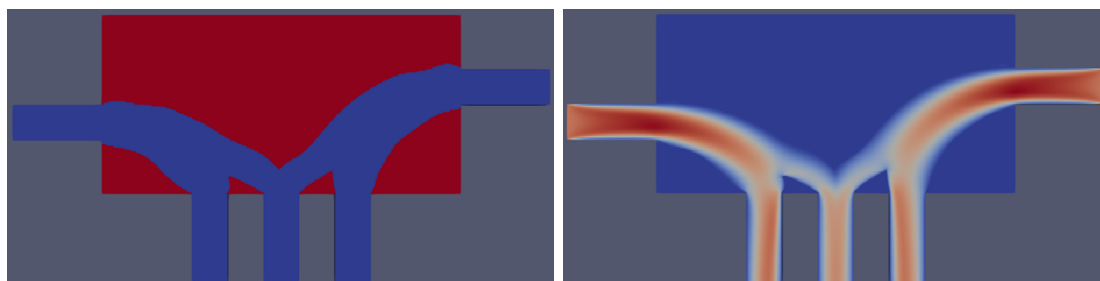
**Σχήμα 7.4:** Η τιμή της συνάρτησης-στόχου  $F_{OBJ}$  με τη διαδοχή των κύκλων της BeMo (σχήμα 7.3).

### 7.3 Βελτιστοποίηση Τοπολογίας

Στο πλαίσιο της περαιτέρω σύγκρισης προβλημάτων, που διαφέρουν ως την παρουσία ή όχι της μη-διαπερατότητας, επιλύονται στην ενότητα αυτή τα εξής προβλήματα: α) εφαρμόζονται οι εξισώσεις του πρωτεύοντος προβλήματος της BeTo σε ορθογώνιο υπολογιστικό χωρίο, με τις προς στερεοποίηση περιοχές να καθορίζονται από τον βελτιστοποιημένο αγωγό που προέκυψε από τη BeMo (σχήμα 7.5), β) επιλύεται πρόβλημα BeTo στο εσωτερικό του αγωγού που διαμορφώθηκε από τη BeMo (σχήμα 7.6).

Συσχετίζοντας τη λύση του (α) προβλήματος με την αντίστοιχη της BeMo, σχήμα 7.3(β'), δύο προβλήματα όπου οι περιοχές ροής του ρευστού ταυτίζονται, παρατηρείται η αυξημένη τιμή της συνάρτησης-στόχου, της τάξης του 2.5%. Η σχετική τους

διαφορά οφείλεται στην αδυναμία, που εισάγει κάθε πρόβλημα BeTo, της μη-επιβολής οριακών συνθηκών στις προς στερεοποίηση περιοχές του υπολογιστικού χωρίου, αλλά και στον τρόπο με τον οποίο καθορίστηκαν οι περιοχές αυτές (όπως σχολιάστηκε και προηγουμένως).

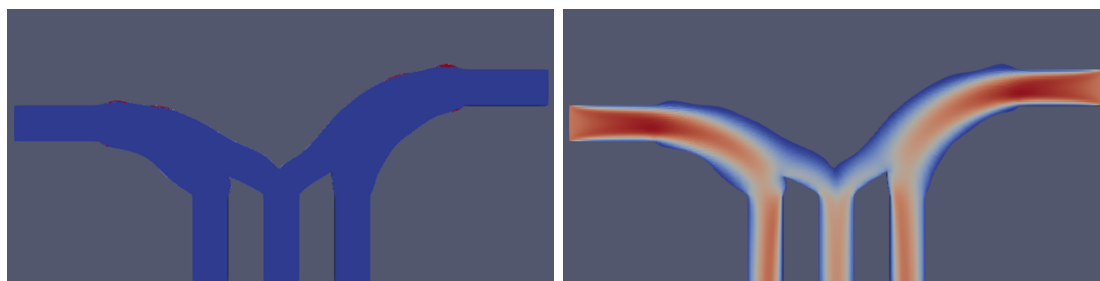


(α') Πεδίο μη-διαπερατότητας , με  $F_{OBJ} = 0.0242768$

(β') Πεδίο ταχύτητας

**Σχήμα 7.5:** Πεδία της μη-διαπερατότητας και του μέτρου της ταχύτητας, ύστερα από την επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος της BeTo, με τις προς στερεοποίηση περιοχές να καθορίζονται από το βελτιστοποιημένο αγωγό που έδωσε η BeMo.

Όσον αφορά το (β) πρόβλημα, η BeTo τείνει να στερεοποιήσει τις καμπυλότητες του ήδη βελτιστοποιημένου αγωγού (με BeMo), επαναφέροντάς τον σε μια πιο ομαλή διάμορφωση. Η συνάρτηση-στόχος μεταβάλλεται ανεπαίσθητα, διαφορά μικρότερη του 1% η οποία μπορεί να θεωρηθεί και τυχαία.



(α') Πεδίο μη-διαπερατότητας ύστερα από την επίλυση ενός προβλήματος BeTo, με  $F_{OBJ} = 0.02358858$  (και 0.0236285 στον πρώτο κύκλο)

**Σχήμα 7.6:** Πεδία της μη-διαπερατότητας και της ταχύτητας, ύστερα από την επίλυση ενός προβλήματος BeTo, στο εσωτερικό του αγωγού που προέκυψε από τη BeMo.

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού, αναφέρεται πως η μετεπεξεργασία του πεδίου της μη-διαπερατότητας και η επίλυση του προβλήματος σε οριόδετο πλέγμα, είναι απαραίτητα για την καλύτερη εκτίμηση της τιμής της συνάρτησης-στόχου, λόγω της απουσίας των οριακών συνθηκών σε ένα πρόβλημα BeTo. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε για τη μετεπεξεργασία του πεδίου εισάγει σημαντικό σφάλμα, ενώ μια πιο αποτελεσματική μέθοδος μπορεί να βρεθεί στο [13]. Επιπλέον, το γενικότερο

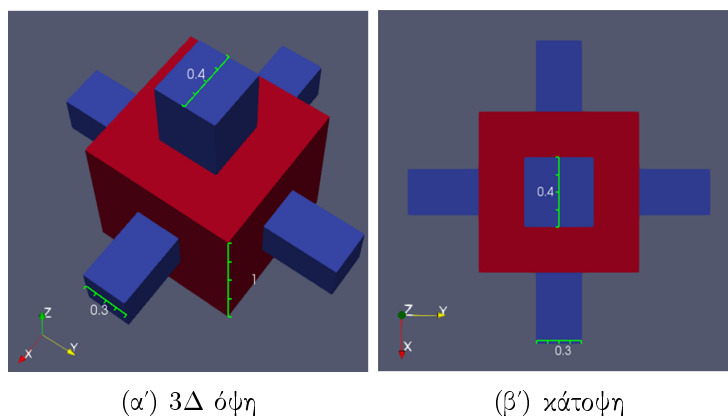
πρόβλημα, της εύρεσης της γεωμετρίας του βέλτιστου αγωγού, επιδέχεται βελτίωση εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ΒεΜο. Είναι σημαντικό όμως να γίνει κατανοητό, πως η επίλυση του προβλήματος ΒεΤο στο ορθογώνιο υπολογιστικό χωρίο, είναι αναγκαία προϋπόθεση για την εύρεση της διαδρομής που ακολουθεί το ρευστό, δηλαδή για τη σύνδεση των αγωγών εισόδου με τις εξόδους.



## Κεφάλαιο 8

### Πρόβλημα ΒεΤο μίας Εισόδου - τεσσάρων Εξόδων (3Δ)

Στο κεφάλαιο αυτό επιλύεται ένα 3Δ πρόβλημα ΒεΤο μίας εισόδου και τεσσάρων εξόδων, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 8.1, το οποίο διέπεται από εξισώσεις, συνάρτησης-στόχο και περιορισμούς που περιγράφηκαν στην ενότητα 2.



**Σχήμα 8.1:** Γεωμετρία του προς επίλυση προβλήματος. Με κόκκινο χρώμα συμβολίζεται το χωρίο σχεδιασμού, και με μπλε χρώμα ο αγωγός εισόδου ( $0.4 \times 0.4 \times 0.5$ ) και οι τέσσερις αγωγοί εξόδου ( $0.3 \times 0.3 \times 0.5$ ) της ροής.

Πιο συγκεκριμένα, η ροή εισέρχεται με ταχύτητα μέτρου  $1m/s$  και διεύθυνση παράλληλη στον άξονα  $z$  και εξέρχεται παράλληλα του επιπέδου  $xy$ , ενώ ο όγκος του υπολογιστικού χωρίου (κύβος) είναι  $1m^3$ . Η ροή είναι στρωτή ( $Re = 200$ ) και το ρευστό ασυμπίεστο, με τις απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδων (εξίσωση 2.3) να αποτελούν τη συνάρτηση-στόχο του προβλήματος. Επιπλέον, επιβάλλεται ο περιορι-

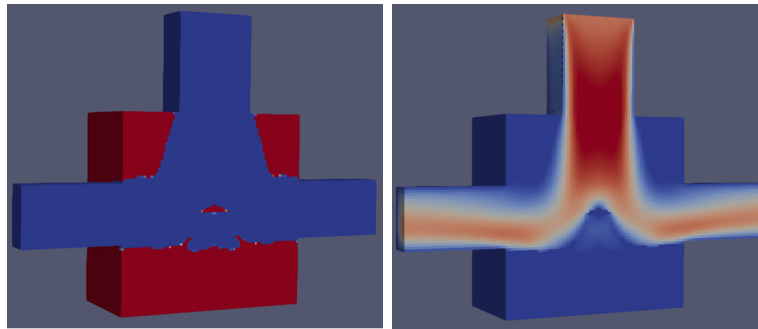
σμός ανισοϊσότητας για τον όγκο του ρευστού στο υπολογιστικό χωρίο (εξίσωση 2.5), με στόχο  $\pi_{tar} = 0.425$ , ενώ σε συμφωνία με τη διερεύνηση της συμπεριφοράς του 2Δ προβλήματος BeTo 2I3O της ενότητας 5, εφαρμόζονται:

- i) η μη γραμμική συνάρτηση της μη-διαπερατότητας (εξίσωση 2.31) με
- ii) τιμή του συντελεστή  $b_{MAX} = 5000$ ,
- iii) η μέθοδος της Κανονικοποίησης-Προβολής για το φιλτράρισμα του πεδίου της μη-διαπερατότητας και
- iv) σταδιακή ενεργοποίηση των μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος (ΣΜΔ).

Τα τελικά πεδία της μη-διαπερατότητας και της ταχύτητας παρουσιάζονται στο σχήμα 8.2. Η ροή εξέρχεται και από του τέσσερις αγωγούς με τη συνάρτηση-στόχο να λαμβάνει την τιμή  $F_{OBJ} = 0.146197$ . Το πεδίο της μη-διαπερατότητας είναι απαλλαγμένο από νεκρές περιοχές (μη στερεοποιημένες περιοχές με μηδενική ταχύτητα), με αποτέλεσμα η ροή να εκμεταλεύεται τον περιορισμό του όγκου στο έπακρο, ενώ οι γκριζες περιοχές (ενδιάμεσες τιμές του  $\alpha$ ) είναι περιορισμένες. Για την καλύτερη κατανόηση του σχηματιζόμενου πεδίου μη-διαπερατότητας, παρουσιάζεται στο σχήμα 8.3 το υπολογιστικό χωρίο σε διαφορετικές τομές, παράλληλες στο επίπεδο  $xz$ , ενώ το διάγραμμα σύγκλισης της συνάρτησης-στόχου δίνεται στο σχήμα 8.4.

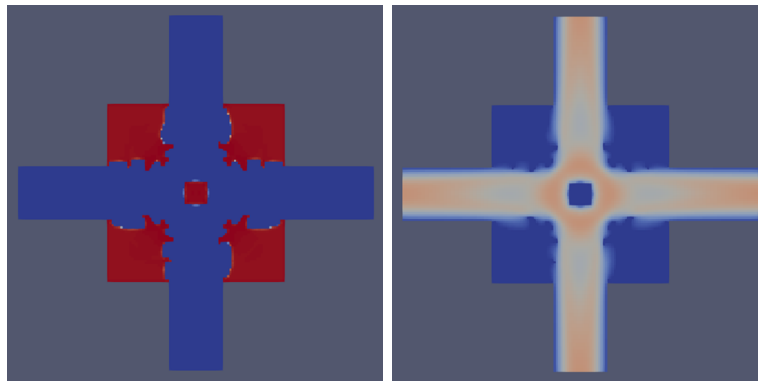
Στη συνέχεια, επιλύεται το 3Δ πρόβλημα BeTo με το στόχο του περιορισμού του όγκου να λαμβάνει την τιμή  $\pi_{tar} = 0.556$ . Η συνάρτηση-στόχος λαμβάνει, ίσως ανεπαίσθητα, αυξημένη τιμή ίση με  $F_{OBJ} = 0.146722$ , και εντοπίζονται αυξημένου εύρους γκριζες περιοχές, δηλαδή περισσότερες περιοχές με ενδιάμεσες τιμές της μη-διαπερατότητας (σχήμα 8.5). Με την χαλάρωση του περιορισμού του όγκου (αύξηση του  $\pi_{tar}$ ) προκύπτουν, συγχρόνως, νεκρές περιοχές, αποδεικνύοντας τη χρησιμότητα της εφαρμογής του για την εύρεση ενός ομοιόμορφου πεδίου μη-διαπερατότητας.

Τέλος, διερευνάται η χρησιμότητα της εφαρμογής της μεθόδου Κανονικοποίηση-Προβολή. Για το λόγο αυτό, επιλύεται το 3Δ πρόβλημα BeTo χωρίς το φιλτράρισμα του πεδίου της μη-διαπερατότητας, ενώ συγχρόνως επιβάλλεται ο περιορισμός του όγκου με στόχο  $\pi_{tar} = 0.425$ . Με το πέρας της BeTo προκύπτουν τα πεδία της μη-διαπερατότητας και της ταχύτητας που αναπαριστώνται στο σχήμα 8.6. Ο προς στερεοποίηση αγωγός που σχηματίζεται έχει διαφορετική μορφολογία σε σχέση με αυτήν του προβλήματος με Κανονικοποίηση-Προβολή, και η παρουσία ενδιάμεσων τιμών του πορώδους είναι εμφανής. Ακόμη, η αυξημένη τιμή της συνάρτησης στόχου,  $F_{OBJ} = 0.148558$  (έναντι  $F_{OBJ} = 0.146197$ ), μαρτυρά πως η λύση αυτή είναι λίγο υποδεέστερη.



(α) Πεδίο μη-διαπερατότητας σε 3Δ πρόβλημα BeTo (τομή στο επίπεδο  $y = 0.5$ ), με  $F_{OBJ} = 0.146197$

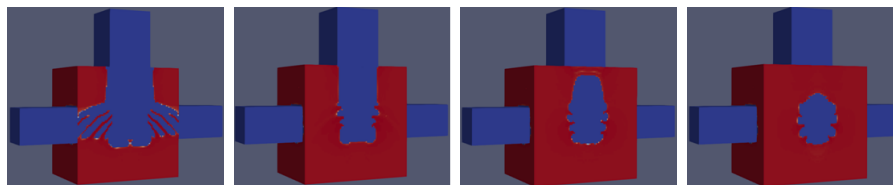
(β) Πεδίο μέτρου ταχύτητας



(γ) Πεδίο μη-διαπερατότητας σε 3Δ πρόβλημα BeTo, σε κάτοψη (τομή στο επίπεδο  $z = 0.5$ )

(δ) Πεδίο μέτρου ταχύτητας

**Σχήμα 8.2:** Πεδία μη-διαπερατότητας και ταχύτητας του 3Δ προβλήματος BeTo, ενώ επιβάλλεται περιορισμός για τον όγκο του ρευστού στο υπολογιστικό χωρίο με στόχο  $\pi_{tar} = 0.425$ . Παρατηρείται απουσία νεκρών περιοχών και περιορισμένη εμφάνιση ενδιάμεσων τιμών της μη-διαπερατότητας.



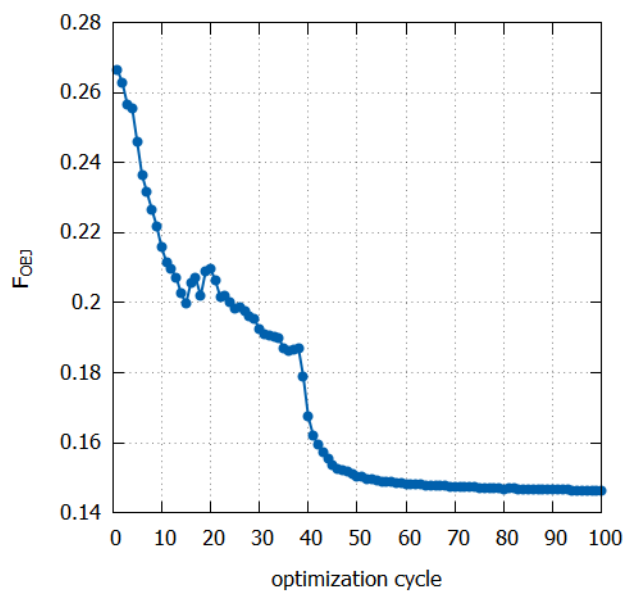
(α)  $y = 0.65$

(β)  $y = 0.70$

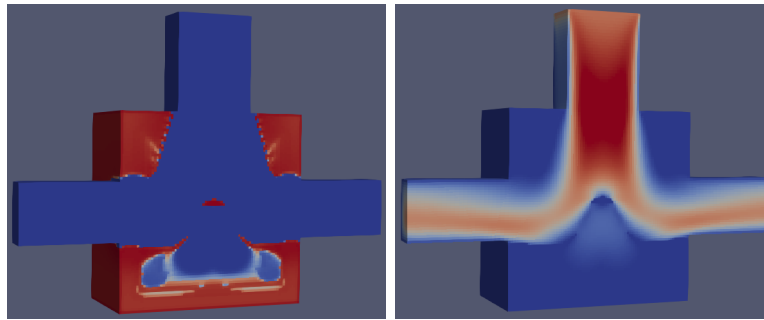
(γ)  $y = 0.75$

(δ)  $y = 0.80$

**Σχήμα 8.3:** Πεδία μη-διαπερατότητας σε τομές παράλληλες το  $xz$  επίπεδο.

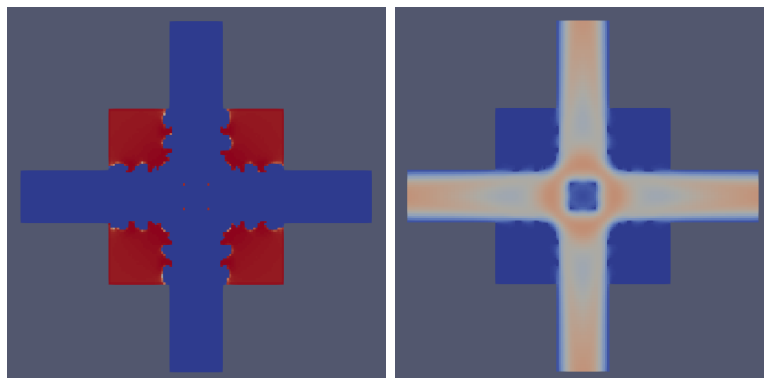


**Σχήμα 8.4:** Η τιμή της συνάρτησης-στόχου  $F_{OBJ}$  με τη διαδοχή των κύκλων της  $BeTo$  (σχήμα 8.2). Από το 60ο κύκλο και μετά, οι απώλειες ολικής πίεσης της ροής δεν μεταβάλλονται σημαντικά, αλλά δίνεται “χρόνος” στη  $BeTo$  να μειώσει το εύρος πιθανών νεκρών και γκρίζων περιοχών που έχουν σχηματιστεί.



(α) Πεδίο μη-διαπερατότητας σε 3Δ πρόβλημα BeTo (τομή στο επίπεδο  $y = 0.5$ ), με  $F_{OBJ} = 0.146722$

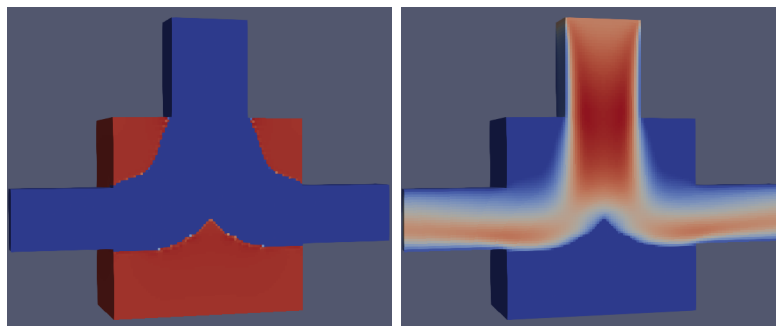
(β') Πεδίο μέτρου ταχύτητας



(γ') Πεδίο μη-διαπερατότητας σε 3Δ πρόβλημα BeTo, σε κάτοψη (τομή στο επίπεδο  $z = 0.5$ )

(δ') Πεδίο μέτρου ταχύτητας

**Σχήμα 8.5:** Πεδία μη-διαπερατότητας και ταχύτητας του 3Δ προβλήματος BeTo, ενώ επιβάλλεται περιορισμός για τον όγκο του ρευστού στο υπολογιστικό χωρίο με στόχο  $\pi_{tar} = 0.556$ . Παρατηρείται ο σχηματισμός νεκρών περιοχών και η έντονη εμφάνιση ενδιάμεσων τιμών της μη-διαπερατότητας.



(α) Πεδίο μη-διαπερατότητας σε 3Δ πρόβλημα BeTo (τομή στο επίπεδο  $y = 0.5$ ), με  $F_{OBJ} = 0.148558$  (β') Πεδίο μέτρου ταχύτητας

**Σχήμα 8.6:** Πεδία μη-διαπερατότητας και ταχύτητας του 3Δ προβλήματος BeTo, χωρίς να εφαρμόζεται η μέθοδος Κανονικοποίηση-Προβολή, ενώ επιβάλλεται περιορισμός για τον όγκο του ρευστού στο υπολογιστικό χωρίο με στόχο  $\pi_{tar} = 0.425$ . Συγκριτικά με το σχήμα 8.2 (εφαρμογή Κανονικοποίησης-Προβολής), παρατηρείται η εμφάνιση ενδιάμεσων τιμών της μη-διαπερατότητας, ενώ, συγχρόνως, η συνάρτηση-στόχος παρουσιάζει αυξημένη τιμή.

# Κεφάλαιο 9

## Σύνοψη - Συμπεράσματα

Στη διπλωματική εργασία παρουσιάστηκε μια εκτενής διερεύνηση της συμπεριφοράς ενός 2D προβλήματος Βελτιστοποίησης Τοπολογίας (BeTo), στρωτής ροής, καθώς μεταβάλλονται οι περιορισμοί, η μέθοδος ενεργοποίησης των μεταβλητών σχεδιασμού, η αρχικοποίηση και το φιλτράρισμα του πεδίου της μη-διαπερατότητας. Για το λόγο αυτό, ορίστηκαν, αρχικά, οι εξισώσεις Navier-Stokes που περιγράφουν τη ροή στο υπολογιστικό χωρίο (πρωτεύον πρόβλημα), κι οι μαθηματικές σχέσεις της συνάρτησης-στόχου των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδων και εξόδων, και των επιβαλλόμενων περιορισμών όγκου και μάζας. Στη συνέχεια, καταστρώθηκαν οι εξισώσεις για την εύρεση του συζυγούς προβλήματος και των παραγώγων ευαισθησίας, που συμβάλλουν στην ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος μέσω της μεθόδου των Κινούμενων Ασυμπτωτών (MMA). Χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση  $b(\alpha)$  της μη-διαπερατότητας, ενώ εφαρμόστηκε φιλτράρισμα του πεδίου  $\alpha$  μέσω της μεθόδου Κανονικοποίηση-Προβολή.

Ύστερα από την επίλυση του προβλήματος BeTo χωρίς την επιβολή περιορισμού του όγκου, παρατηρήθηκαν νεκρές περιοχές μεγάλου εύρους, δηλαδή μη στερεοποιημένες περιοχές με μηδενική ταχύτητα, γεγονός που οφείλεται στη άμεση εξάρτηση των παραγώγων ευαισθησίας από τις συνιστώσες της ταχύτητας (και συζυγούς ταχύτητας). Επιβάλλοντας στη ροή να καταλαμβάνει ένα ποσοστό του υπολογιστικού χωρίου, της τάξης του 40% (εξαρτάται από το εκάστοτε πρόβλημα που επιλύεται), ενισχύεται η δυαδικότητα του πεδίου της μη-διαπερατότητας, ενώ συγχρόνως δίνεται η δυνατότητα εύρεσης μιας καλύτερης λύσης, με τη συνάρτηση-στόχο να λαμβάνει μικρότερη τιμή.

Επιπλέον, παρουσιάστηκε η συμπεριφορά του προβλήματος BeTo κατά τη μεταβολή του συντελεστή της συνάρτησης μη-διαπερατότητας, ο οποίος έλαβε τιμές  $1000 \leq b_{MAX} \leq 5000$ , με την τάξη μεγέθους να καθορίζεται από τον αριθμό Darcy. Ο συντελεστής αυτός, σχετίζεται με την κυριαρχία του όρου της μη-διαπερατότητας έναντι των υπολοίπων όρων της εξίσωσης της ορμής, με αποτέλεσμα η αύξηση της τιμής του να βοηθά

στην πιο εύκολη απενεργοποίηση των εξισώσεων ροής, δηλαδή στερεοποίηση τμήματος του πεδίου, με τον κίνδυνο όμως η ΒεΤο να εγκλωβιστεί σε πιθανό τοπικό ακρότατο. Μάλιστα, η μεταβολή του συντελεστή  $b_{MAX}$  είναι δυνατό να μεταβάλει σημαντικά το τελικό πεδίο της μη-διαπερατότητας, συνεισφέροντας με την αύξηση της τιμής του στην εξάλειψη των νεκρών περιοχών.

Σε ένα πρόβλημα ΒεΤο ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού είναι ίσος με το πλήθος των κυψελών του υπολογιστικού χωρίου (περίπου 20,000 για το 2Δ). Η ταυτόχρονη ενεργοποίηση τους κατά την έναρξη της βελτιστοποίησης, ελλοχεύει τον κίνδυνο να οδηγηθεί η ΒεΤο σε τοπικό ακρότατο, καθώς η ΜΜΑ έχει έντονη τάση να ικανοποιήσει τον περιορισμό του όγκου. Για τον λόγο αυτόν, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της Σταδιακά Μεταβαλλόμενης Διαπερατότητας (ΣΜΔ), φρενάροντας την τάση του περιορισμού, χωρίς να υποβαθμίζεται η διαδικασία της βελτιστοποίησης.

Ακολούθως, επιλύθηκαν όμοια προβλήματα ΒεΤο μεταβάλλοντας την αρχικοποίηση του πεδίου μη-διαπερατότητας, και συγκεκριμένα για διάφορες διακριτές τιμές του πεδίου ορισμού της ( $\alpha \in [0, 1]$ ). Διαπιστώθηκε, πως όσο αυξάνεται η τιμή της αρχικοποίησης, ο περιορισμός του όγκου τείνει να ικανοποιηθεί, με αποτέλεσμα να ενισχύεται η εμφάνιση νεκρών περιοχών και ενδιάμεσων τιμών του πεδίου  $\alpha$ . Συνεπώς, στην παρούσα διερεύνηση, η βέλτιστη λύση υπολογίστηκε με μηδενική αρχικοποίηση του πεδίου μη-διαπερατότητας.

Εφαρμόζοντας το φιλτράρισμα του πεδίου μη-διαπερατότητας, με τη μέθοδο της Κανονικοποίησης - Προβολής, διαπιστώθηκε πως είναι δυνατό να συνεισφέρει στην ανεξαρτητοποίηση της ΒεΤο από το πλέγμα του υπολογιστικού χωρίου και κατ'επέκταση στην αποφυγή εμφάνισης πεδίων σκακιέρας. Βοηθά, κατά κανόνα, στον υπολογισμό ενός περισσότερο δυαδικού πεδίου μη-διαπερατότητας, όμως απαιτεί προσοχή κατά την προσαρμογή της στο εκάστοτε πρόβλημα που επιλύεται.

Ακολούθως, αξιολογώντας το βέλτιστο πεδίο μη-διαπερατότητας που υπολογίστηκε, σύμφωνα με την τιμή της συνάρτησης-στόχου και την ομοιομορφία του πεδίου (μειωμένο εύρος νεκρών και γκριζών περιοχών), χρησιμοποιήθηκε για την τοποθέτηση οριακών συνθηκών στις προς στερεοποίηση περιοχές στο εσωτερικό του χωρίου. Για τον σκοπό αυτόν, το πεδίο μη-διαπερατότητας υπέστη μετεπεξεργασία, αυξάνοντας την τιμή της συνάρτησης-στόχου κατά 4%, λόγω της μεθόδου που ακολουθήθηκε, και επιλύθηκε ένα όμοιο πρόβλημα σε οριόδετο πλέγμα. Με τον τρόπο αυτό, έγινε καλύτερη εκτίμηση της τιμής της συνάρτησης-στόχου της ΒεΤο, και εντοπίστηκε διαφορά της τάξης του 2% η οποία οφείλεται, κυρίως, στην αδυναμία της να επιβάλει οριακές συνθήκες στις προς στερεοποίηση περιοχές του υπολογιστικού χωρίου. Προς σύγκριση με τη βέλτιστη λύση της ΒεΤο, επιλύθηκε ένα πρόβλημα Βελτιστοποίησης Μορφής στο οριόδετο πλέγμα που σχεδιάστηκε, βελτιώνοντας περαιτέρω την τιμή της συνάρτησης-στόχου κατά 2%.

Τέλος, αξιοποιώντας τα συμπεράσματα της διερεύνησης του 2Δ προβλήματος, παρουσιάστηκε η εφαρμογή της ΒεΤο σε 3Δ πρόβλημα, με σκοπό τη βελτίωση της τιμής της συνάρτησης-στόχου, την ικανοποίηση των περιορισμών και την εύρεση ενός δυαδικού πεδίου μη-διαπερατότητας, με μικρού εύρους γκριζες και νεκρές περιοχές.



## Βιβλιογραφία

- [1] Papoutsis-Kiachagias, E.M. and Giannakoglou, K.C.: *Continuous Adjoint Methods for Turbulent Flows, Applied to Shape and Topology Optimization: Industrial Applications*. Archives of Computational Methods in Engineering. Springer Netherlands, 23(2):255–299, 2016.
- [2] Bendsoe, M. and Kikuchi, N.: *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*. Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 71:197–224, 1988.
- [3] Sigmund, O.: *Design of multiphysics actuators using topology optimization – Part I: One-material structures*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190(49):6577–6604, 2001, ISSN 0045-7825.
- [4] Sigmund, O. and Maute, K.: *Topology optimization approaches: A comparative review*. Structural and Multidisciplinary Optimization 48, 1031–1055, 2013.
- [5] Deaton, J.D. and Grandhi, R.V.: *A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000*. Struct Multidisc Optim 49, 1–38, 2014.
- [6] Borvall, T. and Peterson, J.: *Topology optimization of fluids in stokes flow*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 41:77–107, 2003.
- [7] Guest, J. and Prevost, J.: *Topology optimization of creeping fluid flows using a Darcy-Stokes finite element*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 66:461–484, 2006.
- [8] Dilgen, Cetin B., Dilgen, Sumer B., Fuhrman, David R., Sigmund, Ole, and Lazarov, Boyan S.: *Topology optimization of turbulent flows*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 331, 363–393, 2018.
- [9] Papoutsis-Kiachagias, E.M. and Giannakoglou, K.C.: *An Adjoint-based Topology Optimization Framework for Fluid Mechanics and Conjugate Heat Transfer in OpenFOAM*. 8th OpenFOAM Conference, Digital Event, October 13-15. Taylor & Francis, 2020.
- [10] Kontoleonos, E.A., Papoutsis-Kiachagias, E.M., Zymaris, A.S., Papadimitriou, D.I., and Giannakoglou, K.C.: *Adjoint-based constrained topology op-*

- timization for viscous flows, including heat transfer*. Engineering Optimization, 45(8):941–946. Taylor & Francis, 2013.
- [11] Svanberg, K.: *MMA and GCMMA – two methods for nonlinear optimization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24(2):359–373, 2007.
- [12] Papadimitriou, D.I., Papoutsis-Kiachagias, E.M., and Giannakoglou, K.C.: *Topology optimization in fluid dynamics using adjoint-based truncated newton*. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012), Vienna, Austria, September 10-14, 2012.
- [13] Koch, J.R.L, Papoutsis-Kiachagias, E.M., and Giannakoglou, K.C.: *Transition from Adjoint Level Set Topology to Shape Optimization for 2D Fluid Mechanics*. Computers & Fluids, 150:123–138, 2017.
- [14] Παπουτσή-Κιαχαγιάς: *Συζυγείς μέθοδοι χαμηλού υπολογιστικού κόστους για τυρβώδεις ροές, στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2013.
- [15] Papadimitriou, DI and Giannakoglou, KC: *Direct, adjoint mixed approaches for the computation of Hessian in airfoil design problems*. Computers & Fluids, 37:1029-1039, 2008.
- [16] Neidinger and D., Richard: *Introduction to Automatic Differentiation and MATLAB Object-Oriented Programming*. SIAM Review. 52 (3): 545–563, 2010.
- [17] Papadimitriou, DI and Giannakoglou, KC: *Computation of the Hessian matrix in aerodynamic inverse design using continuous adjoint formulations*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 56(10):1929-1943, 2007.
- [18] Κατηφόρης, Ζ.: *Βελτιστοποίηση Τοπολογίας στη Ρευστοδυναμική με τη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο και τη Μέθοδο των Κινημένων Ασυμπτώτων*. Διπλωματική Εργασία. Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης, Ε.Μ.Π., 2019.
- [19] Lazarov, B. S., Wang, F., and Sigmund, O.: *Length scale and manufacturability in density-based topology optimization*. Archive of Applied Mechanics, 86(1-2), 189-218, 2016.