



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

Ανάπτυξη αλγορίθμου και λογισμικού υπολογισμού του  
μετώπου Pareto με αιτιοκρατική μέθοδο βελτιστοποίησης  
και εφαρμογές στην αεροδυναμική

Διπλωματική Εργασία

Νικόλαος Πατσαλίδης

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2020





Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

## Ανάπτυξη αλγορίθμου και λογισμικού υπολογισμού του μετώπου Pareto με αιτιοκρατική μέθοδο βελτιστοποίησης και εφαρμογές στην αεροδυναμική

Νικόλαος Πατσαλίδης

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2020

### Περίληψη

Η διπλωματική αυτή εργασία έχει ως σκοπό να παρουσιάσει την ανάπτυξη αλγορίθμου και λογισμικού ικανού να υπολογίσει, με χαμηλό κόστος, το μέτωπο Pareto σε προβλήματα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης, με αιτιοκρατική μέθοδο, δηλαδή μέθοδο η οποία χρησιμοποιεί την κλίση των συναρτήσεων κόστους για τον εντοπισμό των βέλτιστων λύσεων, σε αεροδυναμικές εφαρμογές. Βασίζεται, στον διαδοχικό εντοπισμό σημείων του μετώπου Pareto, θέτοντας όλους τους στόχους, πλην ενός, ο οποίος βελτιστοποιείται, ως περιορισμούς ισότητας. Από ένα σημείο του μετώπου Pareto, μπορεί να προβλεφθεί, με προσέγγιση πρώτης τάξεως, ένα διπλανό σημείο, χρησιμοποιώντας πρώτες και δεύτερες παραγώγους των συναρτήσεων κόστους ή και των περιορισμών, εφόσον υπάρχουν. Μετά από κάθε πρόβλεψη, πραγματοποιείται διόρθωση για τον ακριβή εντοπισμό κάθε σημείου στο μέτωπο Pareto με τη μέθοδο SQP για προβλήματα με περιορισμούς. Παράλληλα, αποφεύγεται ο ακριβής και ακριβός υπολογισμός των δεύτερων παραγώγων χρησιμοποιώντας την προσεγγιστική μέθοδο Newton BFGS (dBFGS), ενώ οι πρώτες παράγωγοι υπολογίζονται με τη συνεχή συζυγή μέθοδο[1], με την οποία το κόστος είναι ανεξάρτητο του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού.

Η εργασία αποτελεί επέκταση των διπλωματικών εργασιών [2, 3] που υλοποιήθηκαν παλαιότερα στην ΜΠΥΡ&Β. Συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος επεκτείνεται προσθέτοντας σε αυτόν τη δυνατότητα υπολογισμού πολυκριτηριακών προβλημάτων βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς είτε ισότητας, είτε και ανισο-ισότητας, αλλά και με φραγμένα όρια στο πεδίο ορισμού των μεταβλητών σχεδιασμού. Επίσης, υπάρχει η δυνατότητα υπολογισμού μετώπου Pareto τριών στόχων, μέσω του προγενέστερου υπολογισμού του συνόρου του μετώπου αυτού, το οποίο υπολογίζεται εντοπίζοντας μέτωπα δύο στόχων, συνδυάζοντας όλους τους στόχους βελτιστοποίησης. Ακόμη, έχει γίνει μία σημαντι-

κή μείωση στο υπολογιστικό κόστος, χρησιμοποιώντας τις μεθόδους που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, αλλά και ορισμένες τεχνικές χειρισμού των περιορισμών ανισο-ισότητας αλλά και των περιορισμών που εισάγονται λόγω των φραγμένων ορίων στις μεταβλητές σχεδιασμού.

Αρχικά, θεμελιώνεται και παρουσιάζεται θεωρητικά ο αλγόριθμος και η προτεινόμενη μέθοδος. Αναλύονται μαθηματικά και λεπτομερώς τα βήματα του αλγορίθμου, αλλά και οι φιλικές προς τον χρήστη δυνατότητες που προγραμματίστηκαν. Στη συνέχεια, γίνονται κάποιες πρώτες διερευνητικές εφαρμογές σε δύο μαθηματικά προβλήματα δύο στόχων, υπό περιορισμούς ανισο-ισότητας και ακολουθούν εφαρμογές του προτεινόμενου αλγορίθμου σε αεροδυναμική βελτιστοποίηση σχήματος αεροτομής, υπό δύο διαφορετικές συνθήκες ροής. Λύνονται προβλήματα βελτιστοποίησης δύο και τριών στόχων, με φραγμένα όρια στις μεταβλητές σχεδιασμού, με περιορισμούς ισότητας και ανισο-ισότητας.



National Technical University of Athens  
School of Mechanical Engineering  
Fluids Department  
Laboratory of Thermal Turbomachines  
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

## Development of an algorithm and software for computing Pareto fronts with a gradient-based method, with applications in aerodynamics

Nikolaos Patsalidis

Advisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, 2020

### Abstract

This diploma thesis proposes, develops and evaluates a low cost algorithm and software for computing Pareto fronts with a gradient-based method, i.e. a method that uses the gradient of the cost functions, by implementing the algorithm in aerodynamic shape optimization. It is based on a method that successively computes points on the front, by properly forcing all objectives to equality constraints, apart from one that becomes the target to be minimized. Starting from a point on the Pareto front, another point in the neighborhood can be predicted, with a first-order scheme, using first and second derivatives of the cost functions or/and of constraints, if they exist. After each prediction, a correction is followed for the refinement of the Pareto point, using SQP method for constrained points. At the same time, the exact and expensive computation of the second derivatives is avoided and instead, the Quasi-Newton method BFGS (dBFGS) is used. First derivatives are computed using the continuous adjoint method[1], at a cost which is independent of the number of the design variables.

This project is an extension of two previous diploma theses [2, 3] carried out in Parallel CFD & Optimization Unit. In particular, the capability of solving problems with equality or inequality constraints, or design variable bounds is added. There is, also, the capability for computing a three-objective Pareto front, by computing its bound, which is done by computing two-objective Pareto fronts, combining all three objectives. In addition, a significant decrease in the computational cost was achieved by using methods mentioned in the previous paragraph, using some techniques for handling inequality constraints and the design variable bounds

Initially, the foundations and the theory of the proposed method and algorithm is

presented. Then, each step of the algorithm is analyzed mathematically in detail. Other user-friendly capabilities that were programmed are also presented. After that, some first exploratory applications of the algorithm are showed in mathematical problems with two objectives and two inequality constraints. Finally, the implementation of the proposed algorithm in aerodynamic shape optimization of an airfoil is presented. Two- and three-objective problems are solved, with bounded design variables and equality or inequality constraints.

## Ευχαριστίες

Τελειώνοντας ένα σημαντικό κομμάτι της ζωής μου, θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ πάνω από όλα στους γονείς μου και στην οικογένειά μου, που όλα αυτά τα χρόνια πάντα με στήριζαν, χωρίς κανένα δισταγμό. Είμαι ευγνώμων σε όλους εκείνους τους κοντινούς μου ανθρώπους που μου στάθηκαν σε δύσκολες στιγμές που αντιμετώπισα κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Με πάσα ειλικρίνεια, ευχαριστώ και εκτιμώ τον άνθρωπο και καθηγητή κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου, καθώς από αυτόν, έχω κερδίσει πάμπολλες γνώσεις και μια γερή θεμελίωση στον τρόπο σκέψης μου, όχι μόνο μέσα από την εκπόνηση της εργασίας αυτής, αλλά και σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Δεν έχει διστάσει ποτέ, να μου λύσει την οποιονδήποτε απορία, να μου πει τα υπέρ και τα κατά μου, ώστε να γίνομαι καλύτερος, αλλά και να με συμβουλέψει για τη μετέπειτα σταδιοδρομία μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ, και ιδιαίτερα τη διδάκτορα Βαρβάρα Ασούτη, καθώς δεν στερήθηκα την πολύτιμη βοήθειά τους, όποτε και αν τη χρειάστηκα. Μέσα από την επαφή μου με τα μέλη της ομάδας, πιστεύω πως έχω αποκτήσει εξαιρετικά χρήσιμες για το μέλλον μου εμπειρίες και ικανότητες, θέτοντας γερές βάσεις.





## Ακρωνύμια

EMΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΕΘΣ	Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
ΜΠΥΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
<hr/>	
s.t.	Subjected to
CFD	Computational Fluid Dynamics
NTUA	National Technical University of Athens
PCopt	Parallel CFD & Optimization Unit
SOO	Single-Objective Optimization
MOO	Multi-Objective Optimization
SQP	Sequential Quadratic Programming
ALM	Augmented Langrange Method
DFP	Davidon-Fletcher-Powel
BFGS	Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
SR1	Symmetric-Rank1
dBFGS	Dumped Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
EFS	Equivalent Flow Solutions



# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Σκοπός της διπλωματικής εργασίας . . . . .	1
1.2 Πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση με αιτιοκρατικές μεθόδους . . . . .	5
1.3 Δομή της διπλωματικής εργασίας . . . . .	7
<b>2 Ο προτεινόμενος αλγόριθμος MOO</b>	<b>9</b>
2.1 Εισαγωγή . . . . .	9
2.2 Βήμα Πρόβλεψης - Μαθηματική υλοποίηση . . . . .	17
2.3 Βήμα διόρθωσης - Διατύπωση . . . . .	19
2.4 Αριθμητικός αλγόριθμος υπολογισμού σημείων στο μέτωπο Pareto . . . . .	21
2.5 Ανακεφαλαίωση . . . . .	26
<b>3 Εφαρμογή σε μαθηματικά προβλήματα</b>	<b>27</b>
3.1 Μαθηματικό πρόβλημα 1 . . . . .	28
3.2 Μαθηματικό πρόβλημα 2 . . . . .	32
<b>4 Αεροδυναμική βελτιστοποίηση μορφής αεροτομής</b>	<b>39</b>
4.1 Πρώτο Αεροδυναμικό Πρόβλημα . . . . .	42
4.1.1 Μέτωπο Pareto $C_D - C_L$ χωρίς περιορισμό . . . . .	42
4.1.2 Μέτωπο Pareto $C_D - C_L$ με περιορισμό ισότητας εμβαδού αεροτομής	46
4.1.3 Μέτωπο Pareto $C_D - C_L$ με περιορισμό ανισο-ισότητας εμβαδού αεροτομής . . . . .	48
4.1.4 Μέτωπο Pareto τριών στόχων $C_D - C_L - E$ . . . . .	50
4.2 Δεύτερο Αεροδυναμικό πρόβλημα . . . . .	57
4.2.1 Μέτωπο Pareto $C_D - C_L$ με περιορισμό ανισο-ισότητας εμβαδού αεροτομής . . . . .	57
4.2.2 Μέτωπο Pareto τριών στόχων $C_D - C_L - E$ . . . . .	60
<b>5 Συμπεράσματα και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα</b>	<b>67</b>
<b>Α' Μαθηματικοί ορισμοί και μαθηματικά εργαλεία</b>	<b>69</b>
A'.1 Βασικοί Ορισμοί . . . . .	69
A'.2 Αναγκαίες συνθήκες πρώτης και δεύτερης τάξης για το ελάχιστο . . . . .	69

A'.3 Η έννοια της κυρτότητας . . . . .	70
A'.4 Μη-κυριαρχούμενες λύσεις . . . . .	70
A'.5 Ενεργός/Ανενεργός περιορισμός ανισο-ισότητας . . . . .	70
A'.6 Γραμμική ανεξαρτησία περιορισμών . . . . .	70
A'.7 Διατύπωση της συνάρτησης Langrange . . . . .	71
A'.8 Οι συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker . . . . .	71
A'.9 Ισοδυναμία προβλημάτων . . . . .	72
A'.10 Προσέγγιση μορφής αεροτομής μέσω καμπυλών Bezier-Bernstein . . . . .	73
A'.11 Θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων . . . . .	73
<b>B' Μέθοδοι ανίχνευσης κατά γραμμή</b>	<b>75</b>
B'.1 Εισαγωγή . . . . .	75
B'.2 Η μέθοδος της Απότομης καθόδου (Steepest descent) . . . . .	76
B'.3 Η μέθοδος Newton . . . . .	76
B'.4 Προσεγγιστικές μέθοδοι Newton DFP, BFGS, dBFGS και SR1 . . . . .	76
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>81</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Σκοπός της διπλωματικής εργασίας

Στη βελτιστοποίηση, ένα τεράστιο πλήθος προβλημάτων εμπλέκει περισσότερους από έναν στόχους ή κριτήρια βελτιστοποίησης. Οι στόχοι-κριτήρια είναι μαθηματικές συναρτήσεις (**συναρτήσεις κόστους**), οι οποίες εξαρτώνται από τις **μεταβλητές σχεδιασμού**. Πιθανό, αλλά όχι αναγκαίο, είναι οι μεταβλητές αυτές να περιορίζονται από **άνω και κάτω όρια** αλλά και το πρόβλημα να υπόκειται σε **περιορισμούς**. Αναγκαίο, λοιπόν, είναι να προσδιορισθούν οι συναρτήσεις κόστους, που επιθυμείται να ελαχιστοποιηθούν ή να μεγιστοποιηθούν, και εφόσον υπάρχουν, οι συναρτήσεις των περιορισμών, που μπορεί να είναι είτε **ισότητας** είτε και **ανισο-ισότητας** που εξαρτώνται, επίσης, από τις μεταβλητές σχεδιασμού. Σε αυτή την εργασία, όλες οι συναρτήσεις κόστους ελαχιστοποιούνται και εφόσον επιθυμείται η μεγιστοποίηση μίας συνάρτησης  $F$  γίνεται ελαχιστοποίηση της  $-F$ . Ανάλογα με το πλήθος των κριτηρίων τα προβλήματα βελτιστοποίησης διακρίνονται σε **μονοκριτηριακά** ή **πολυκριτηριακά** με τα τελευταία να αποτελούν την κύρια ενασχόληση της εργασίας, καθώς γίνεται προσπάθεια ανάπτυξης αλγορίθμου επίλυσης προβλημάτων πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης χρησιμοποιώντας, εξωτερικά, οποιοδήποτε λογισμικό μπορεί να υπολογίσει τις συναρτήσεις κόστους, τους περιορισμούς και τις πρώτες παραγώγους αυτών ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Ο αλγόριθμος είναι υπεύθυνος, αφού διαβάσει τις προηγούμενες τιμές, να διορθώσει τις μεταβλητές σχεδιασμού προς μία κατεύθυνση που θα δίνει καλύτερη τιμή της συνάρτησης κόστους.

Με βάση όσα προαναφέρθηκαν ορίζεται ένα γενικό πρόβλημα μονοκριτηριακής βελτι-

στοποίησης (Single-Objective Optimization -SOO-) ως

$$\begin{aligned}
 & \min F(\vec{b}) \\
 & \text{s.t.} \\
 & c_i(\vec{b}) = 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, Mc \\
 & g_i(\vec{b}) \leq 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, Mg \\
 & b_i^L \leq b_i \leq b_i^U \quad \forall \quad i = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

όπου  $Mc$  το πλήθος των περιορισμών ισότητας,  $Mg$  το πλήθος των περιορισμών ανισότητας,  $\vec{b} \in \mathbb{R}^N$  το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού και  $b^L, b^U$  τα κάτω και άνω όριά τους, αντίστοιχα. Η βέλτιστη λύση σε ένα τέτοιο πρόβλημα σχηματίζεται από εκείνες τις μεταβλητές σχεδιασμού που ελαχιστοποιούν τη συνάρτηση κόστους ικανοποιώντας τους περιορισμούς. Από την άλλη, ένα γενικό πρόβλημα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης (Multi-Objective Optimization-MOO-) ορίζεται ως

$$\begin{aligned}
 \min \vec{F}(\vec{b}) = & \begin{bmatrix} \min f_1(\vec{b}) \\ \min f_2(\vec{b}) \\ \vdots \\ \min f_M(\vec{b}) \end{bmatrix} \\
 & \text{s.t.} \\
 & c_i(\vec{b}) = 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, Mc \\
 & g_i(\vec{b}) \leq 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, Mg \\
 & b_i^L \leq b_i \leq b_i^U \quad \forall \quad i = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

όπου  $M$  ο αριθμός των στόχων-κριτηρίων. Στα προβλήματα με περισσότερους του ενός στόχους το ιδανικό θα ήταν να βρεθεί μία λύση η οποία θα ελαχιστοποιούσε όλους τους στόχους ταυτόχρονα, όμως τις περισσότερες φορές, λόγω της αντικρουόμενης φύσης των στόχων, αυτό είναι αδύνατο. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης της οπισθέλκουσας μίας αεροτομής σε συνδυασμό με τη μεγιστοποίηση της άνωσης οι στόχοι είναι αντικρουόμενοι. Δηλαδή, καθώς μειώνεται η οπισθέλκουσα, συνήθως ανάλογα μειώνεται και η άνωση, σε αντίθεση με την επιθυμία για την αύξησή της. Ένα τέτοιο πρόβλημα δεν μπορεί να δεχθεί μία και μοναδική λύση, καθώς είναι αδύνατον, ταυτόχρονα, με τον ίδιο σχεδιασμό, να λάβουν και οι δύο συναρτήσεις κόστους τη βέλτιστη τιμή τους. Μπορεί, όμως, να δεχθεί ένα σύνολο **βέλτιστων λύσεων** στο οποίο καμία λύση δεν μπορεί να είναι καλύτερη και για τους δύο στόχους από μία άλλη λύση του συνόλου. Γενικεύοντας, το ίδιο σύνολο μπορεί να υπολογισθεί και για προβλήματα με περισσότερους από δύο στόχους βελτιστοποίησης, το οποίο ονομάζεται **σύνολο Pareto**<sup>1</sup>, τα μέλη του **κατά Pareto βέλτιστες λύσεις** ή **μη-κυριαρχούμενες λύσεις** και η διαδικασία υπολογισμού του **πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση**. Εάν παρουσιασθούν στο επίπεδο των στόχων οι λύσεις αυτές, σχηματίζουν το **μέτωπο των μη-κυριαρχούμενων λύσεων** ή μέτωπο Pareto

<sup>1</sup>Το σύνολο Pareto αποτελείται από τις μη-κυριαρχούμενες λύσεις οι οποίες ορίζονται μαθηματικά στο Α.4

ενώ εάν παρουσιασθούν στον τριδιάστατο χώρο των στόχων το μέτωπο Pareto θα είναι επιφάνεια ή καμπύλη στο χώρο.

Στη διπλωματική αυτή εργασία σκοπός είναι η ανάπτυξη αλγορίθμου και λογισμικού, ικανού να υπολογίσει το μέτωπο Pareto σε πολυκριτηριακά προβλήματα βελτιστοποίησης με **αιτιοκρατική μέθοδο (gradient-based)**, ενώ τα αποτελέσματα των εφαρμογών συγκρίνονται και επαληθεύονται με τα αποτελέσματα του εξελικτικού αλγορίθμου **EASY**[4] που αναπτύχθηκε στη ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ. Ως αιτιοκρατική μέθοδος, εννοείται μέθοδος η οποία απαιτεί τουλάχιστον τον υπολογισμό πρώτων παραγώγων για την εύρεση των βέλτιστων λύσεων. Όπως προαναφέρθηκε, οι συναρτήσεις κόστους, οι περιορισμοί και οι πρώτες παράγωγοι αυτών υπολογίζονται με ακρίβεια (χάριν της συζυγούς μεθόδου -adjoint method-[1, 5]) για τα προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης), χρησιμοποιώντας λογισμικό σε λογική μαύρου κουτιού, όμως οι δεύτερες παράγωγοι υπολογίζονται με προσεγγιστικές μεθόδους, καθώς ο ακριβής υπολογισμός τους αυξάνει κατακόρυφα το υπολογιστικό κόστος. Σε αντίθεση με τους **εξελικτικούς αλγορίθμους (evolutionary algorithms)**, οι οποίοι όμοια με την αργή εξελικτική διαδικασία της φύσης, εξελίσσουν πληθυσμιακά υποψήφια λύσεις μέχρι την εύρεση των μη-κυριαρχούμενων λύσεων, καταναλώνοντας μεγάλη υπολογιστική ισχύ[6, 7], στόχος είναι ο αλγόριθμος της εργασίας αυτής να προβάλλει ως πλεονέκτημά του χαμηλές απαιτήσεις σε αυτή. Όμως, οι αιτιοκρατικοί αλγόριθμοι μειονεκτούν στο ότι πιθανόν να εγκλωβιστούν σε τοπικά ακρότατα ή αδυνατούν να βρουν ολόκληρο το μέτωπο Pareto όταν αυτό είναι μη-συνεχές. Από την άλλη, οι εξελικτικοί αλγόριθμοι, που αποτελούν και τον κύριο εκπρόσωπο των **στοχαστικών μεθόδων (stochastic)**, πάντοτε εντοπίζουν καθολικές λύσεις(A.1) σε συνεχές η και μη-συνεχές μέτωπο Pareto, εφόσον τρέξουν για ικανοποιητικό χρόνο[8]. Τότε, όμως, το υπολογιστικό κόστος είναι μεγάλο, καθώς απαιτείται μεγάλο πλήθος αξιολογήσεων της συνάρτησης κόστους, ανάλογο του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού [6]. Ωστόσο, πολλοί αιτιοκρατικοί αλγόριθμοι, λύνοντας πολλά τοπικά προβλήματα βελτιστοποίησης, εντοπίζουν τελικώς και το καθολικό βέλτιστο, ενώ πολλοί στοχαστικοί αλγόριθμοι χρησιμοποιούν αιτιοκρατικά υποπροβλήματα (deterministic subproblems), για αύξηση της ταχύτητάς τους [9].

Ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε στην εργασία αυτή βασίζεται στη θεωρία που παρουσιάστηκε στην εργασία [10]. Ανάγει ένα πρόβλημα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης σε διαδοχική επίλυση προβλημάτων μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς, θέτοντας όλους τους υπόλοιπους στόχους, πλην ενός, σε περιορισμούς ισότητας, λύνοντας ένα πρόβλημα για κάθε μέλος του Pareto, αλλάζοντας τις τιμές των στόχων-περιορισμών. Σε κάθε βήμα, η διαδικασία περιλαμβάνει ένα προσεγγιστικό **βήμα πρόβλεψης** και ένα **βήμα διόρθωσης** κάθε επόμενου σημείου στο μέτωπο Pareto (εννοείται ότι χρειάζεται ένα αρχικό σημείο). Το βήμα πρόβλεψης υλοποιείται μαθηματικά χρησιμοποιώντας το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων ενώ στο βήμα διόρθωσης δύναται να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε μέθοδος βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς. Στο βήμα πρόβλεψης απαιτείται η εύρεση του Εσσιανού μητρώου, όπως και

στο βήμα διόρθωσης, σε αυτή την εργασία, καθώς χρησιμοποιείται η μέθοδος SQP[9]. Ως εκ τούτου, για την αποφυγή του υπολογισμού του ακριβούς και ακριβού υπολογισμού του Εσσιανού μητρώου, γίνεται χρήση προσεγγιστικών μεθόδων υπολογισμού του, όπως η BFGS, dBFGS και η SR1[9].

Το λογισμικό που προγραμματίζεται, σε γλώσσα C++, στην εργασία αυτή διαθέτει τη δυνατότητα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης (μέχρι 3 κριτήρια) υπό περιορισμούς ισότητας και ανισο-ισότητας και με δυνατότητα επιβολής ορίων στις μεταβλητές σχεδιασμού. Ακόμη, γίνεται προσπάθεια εύρεσης ενός ικανοποιητικού αλγορίθμου για τον υπολογισμό του μετώπου βέλτιστων λύσεων στον τριδιάστατο χώρο των στόχων. Γίνονται εφαρμογές σε μαθηματικά προβλήματα υπολογίζοντας αναλυτικά τις πρώτες παραγώγους αλλά και εφαρμογές σε αεροδυναμικά προβλήματα υπολογίζοντας τις πρώτες παραγώγους με τη **συνεχή συζυγή μέθοδο (continuous adjoint method)**[1, 5], χρησιμοποιώντας ως μαύρο κουτί τον επιλύτη ροής PUMA[11, 12] (και τον εμπεριχόμενο συζυγή επιλύτη) που αναπτύχθηκε στη ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ. Η συνεχής συζυγής μέθοδος έχει υπολογιστικό κόστος ισοδύναμο με τη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος, π.χ. της λύσης των εξισώσεων Navier-Stokes, επί τον αριθμό των στόχων ή επί τον αριθμό των συναρτήσεων για τις οποίες απαιτείται να βρεθεί η πρώτη παράγωγος.

Παλαιότερα, στη ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ, στο πλαίσιο των διπλωματικών εργασιών των Μ. Καφή (2014)[2] και Μ. Καρούζου (2015)[3], αναπτύχθηκε αλγόριθμος ο οποίος βασίστηκε στην ίδια θεωρία[10] και έγιναν εφαρμογές σε προβλήματα δύο στόχων χωρίς επιπλέον περιορισμούς, χρησιμοποιώντας στο βήμα διόρθωσης του προβλεπόμενου σημείου ως μέθοδο βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς την ALM. Στην εργασία του Μ. Καφή έγινε εφαρμογή σε αεροδυναμική βελτιστοποίηση σχήματος αεροτομής χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Newton με αποκοπή σε συνδυασμό με τη συνεχή συζυγή μέθοδο[13] για τον υπολογισμό του γινομένου του Εσσιανού μητρώου επί το διάνυσμα των παραγώγων, κατά τη διάρκεια του υπολογισμού της διόρθωσης των μεταβλητών σχεδιασμού στο βήμα πρόβλεψης. Από την άλλη, στην εργασία της Μ. Καρούζου δίνεται έμφαση στη διερεύνηση της αποτελεσματικότητας της μεθόδου χωρίς το στάδιο της διόρθωσης και γίνεται εφαρμογή σε πρόβλημα βελτιστοποίησης επιδόσεων υπερηχητικού επιβατικού αεροσκάφους, χρησιμοποιώντας και παραγωγίζοντας ένα απλοποιημένο μοντέλο ανάλυσης του προβλήματος. Η νέα αυτή εργασία αποτελεί επέκταση των προηγούμενων εργασιών, υπό την έννοια ότι με τον αλγόριθμο αυτής της εργασίας είναι δυνατόν να λυθούν προβλήματα 3 στόχων, με περιορισμούς είτε ισότητας, είτε και ανισο-ισότητας, με όρια στις μεταβλητές σχεδιασμού, αλλά έγινε και σημαντική μείωση του υπολογιστικού κόστους.

Αναπτύσσοντας μία αιτιοκρατική μέθοδο πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης και επαληθεύοντας τα αποτελέσματα με στοχαστική μέθοδο, δηλαδή τον εξελικτικό αλγόριθμο EASY, κρίνεται αναγκαίο στη συνέχεια να γίνει μία συνοπτική επισκόπηση των μεθόδων πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης με αιτιοκρατικές μεθόδους.



## 1.2 Πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση με αιτιοκρατικές μεθόδους

Στις αιτιοκρατικές μεθόδους η πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση γίνεται λύνοντας μία σειρά από μονοκριτηριακά προβλήματα όπου το καθένα αντιστοιχεί στον υπολογισμό ενός από τα σημεία του μετώπου Pareto. Η πιο συνηθισμένη και παραδοσιακή μέθοδος είναι η **μέθοδος των συντελεστών βαρύτητας (weighted sum method)**, ενώ στη βιβλιογραφία[8] αναφέρονται και παραλλαγές της. Σε αυτήν τη μέθοδο, το MOO πρόβλημα (1.2) μετατρέπεται σε πρόβλημα SOO αθροίζοντας τις συναρτήσεις κόστους των στόχων πολλαπλασιασμένες με **συντελεστές βαρύτητας** σε μία συνάρτηση κόστους

$$\min F(\vec{b}) = \sum_{i=1}^M w_i f_i(\vec{b}) \quad (1.3)$$

όπου  $w_i$  είναι ο συντελεστής βαρύτητας για κάθε στόχο. Το μέτωπο Pareto υπολογίζεται λύνοντας διαδοχικά το πρόβλημα (1.1) και αλλάζοντας τους συντελεστές βαρύτητας  $w_i$ .

Ωστόσο, η μέθοδος αυτή έχει δύο σημαντικά μειονεκτήματα. Πρώτον, εάν σε μία περιοχή του, το μέτωπο Pareto είναι **μη-κυρτό (non-convex)**(Α'.5), δεν υπάρχει κανένα σύνολο συντελεστών  $w_i$  για το οποίο η λύση του προβλήματος (1.1) θα βρίσκεται στην περιοχή αυτή. Πρακτικά, αυτό σημαίνει πως, στην περίπτωση λ.χ. βελτιστοποίησης δύο στόχων και μη-κυρτού Pareto, θα είναι δυνατόν να εντοπιστεί η βέλτιστη λύση μόνο για τα σύνολα συντελεστών  $(w_1, w_2) = (1, 0)$  και  $(w_1, w_2) = (0, 1)$  τα οποία αντιστοιχούν στα δύο άκρα του Pareto και στην ουσία αποτελούν προβλήματα SOO με διαφορετικούς στόχους. Δεύτερον, ακόμα και αν το μέτωπο Pareto είναι κυρτό, μία ομοιόμορφη κατανομή συντελεστών βαρύτητας δεν σημαίνει πως θα παράγει και μία ομοιόμορφη κατανομή σημείων στην καμπύλη του μετώπου και πολύ συχνά η ομοιόμορφη κατανομή των σημείων επιτυγχάνεται με μεγάλη ανομοιομορφία στην κατανομή των συντελεστών [14]. Μία πιο αποδοτική μέθοδος είναι η **μέθοδος των συντελεστών βαρύτητας με προσαρμογή (adaptive weighted sum method)**[15] η οποία, αφού πρώτα εντοπίσει κάποια σημεία σε κυρτές περιοχές του μετώπου με την παραδοσιακή μέθοδο, εντοπίζει σημεία και σε μη-κυρτές περιοχές του μετώπου προσθέτοντας στο πρόβλημα περιορισμούς ανισο-ισότητας, οι οποίοι είναι δυνατό να ικανοποιηθούν μόνο αν το σημείο ανήκει σε μη-κυρτή περιοχή. Η εξάρτηση από μεταβλητές προσδιορισμένες από το χρήστη (user-defined) αλλά και το επιπλέον υπολογιστικό κόστος είναι τα κύρια μειονεκτήματα της μεθόδου αυτής.

Ένας άλλος τρόπος, ο οποίος ακολουθείται και στην εργασία αυτή, το πρόβλημα MOO (1.2) να μετατραπεί σε SOO είναι όλοι οι στόχοι βελτιστοποίησης, πλην ενός, να τεθούν ως περιορισμοί ισότητας  $f_i(\vec{b}) - \hat{f}_i = 0$ , όπου  $\hat{f}_i$  είναι μία συγκεκριμένη επιθυμητή τιμή του  $i$ -ιοστού στόχου [16, 10] και να γίνει βελτιστοποίηση, έστω του στόχου 1. Τότε

το πρόβλημα (1.2) θα πάρει τη μορφή

$$\begin{aligned}
& \min f_1(\vec{b}) \\
& \text{s.t.} \\
& f_i(\vec{b}) - \hat{f}_i = 0 \quad \forall \quad i = 2, \dots, M \\
& c_i(\vec{b}) = 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, Mc \\
& g_i(\vec{b}) \leq 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, Mg \\
& b_i^L \leq b_i \leq b_i^U \quad \forall \quad i = 1, \dots, N
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Με αυτόν τον τρόπο υπάρχει η δυνατότητα για μεταβολή της επιθυμητής τιμής των στόχων-περιορισμών  $\hat{f}_i$  και υπολογισμός του μετώπου μέσω διαδοχικών λύσεων του προβλήματος (1.4). Οι Schmidt και Schulz[10] απέδειξαν ότι τα προβλήματα (1.3) και (1.4) είναι ισοδύναμα (βλέπε Α'.9) και, στη συνέχεια, ανέπτυξαν τη **μέθοδο συνέχισης του Pareto (Pareto continuation method)**, υλοποιώντας τον αλγόριθμο **πρόβλεψης-διόρθωσης** με εφαρμογή του θεωρήματος πεπλεγμένων συναρτήσεων στις συνθήκες KKT (2.3) του προβλήματος (1.4). Μία πρόσφατη εναλλακτική μέθοδος που προτείνεται από τον Η.Βασιλόπουλο [17] είναι, αφού βρεθεί το πρώτο σημείο στο μέτωπο Pareto, να ορισθεί ένα σημείο στόχου (target point)  $\vec{T}_i(\vec{b}_{i-1}) = [f_1(\vec{b}_{i-1}), \dots, f_k(\vec{b}_{i-1}) + \Delta f_k, \dots, f_M(\vec{b}_{i-1})]^T$ , το οποίο δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί, καθώς απαιτείται μείωση ενός κριτηρίου κρατώντας σταθερά τα υπόλοιπα, και αντί να εφαρμοσθεί το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων στις συνθήκες KKT του προβλήματος (1.4) να εφαρμοσθεί στις συνθήκες KKT του προβλήματος

$$\begin{aligned}
& \min \frac{1}{2} \left\| \vec{F}(\vec{b}) - \vec{T}_i(\vec{b}_{i-1}) \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^M \frac{1}{2} (f_i(\vec{b}) - t_i(\vec{b}_{i-1}))^2 \\
& \text{s.t.} \\
& c_i(\vec{b}) = 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, Mc \\
& g_i(\vec{b}) \leq 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, Mg \\
& b_i^L \leq b_i \leq b_i^U \quad \forall \quad i = 1, \dots, N
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Στην ίδια εργασία[17] γίνονται αεροδυναμικές εφαρμογές της μεθόδου σε διδιάστατη αεροτομή με στόχους τη μεγιστοποίηση της άνωσης και την ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας και σε 3Δ σταθερή πτερύγωση συμπίεστη με στόχους την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης και την ελαχιστοποίηση της γωνιακής απόκλισης της ροής από την αξονική κατεύθυνση. Στην αεροδυναμική επίσης, έγιναν εφαρμογές από τον Κ.Γκαραγκούνη[18], χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο πρόβλεψης-διόρθωσης[10], κάνοντας βελτιστοποίηση αεροτομής με στόχους την ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας και τη μεγιστοποίηση της άνωσης, επιβάλλοντας γεωμετρικό περιορισμό. Για να αποφευχθεί ο ακριβός υπολογισμός του ακριβούς Εσσιανού μητρώου, αναπτύχθηκαν αλγόριθμοι που βασίζονται σε γινόμενα του Εσσιανού με διανύσματα σε συνδυασμό με τη μέθοδο GMRES[19] και τη μέθοδο BFGS (dBFGS) για την προσέγγιση του.

### 1.3 Δομή της διπλωματικής εργασίας

**Κεφάλαιο 2:** Γίνεται παρουσίαση του προτεινόμενου αλγόριθμου και πως μπορούν να υπολογισθούν μέτωπα τριών στόχων. Αναλύονται μαθηματικά το βήμα πρόβλεψης και το βήμα διόρθωσης, και παρουσιάζεται τα βήματα που ακολουθεί ο αλγόριθμος για τον υπολογισμό κάθε σημείου του μετώπου Pareto.

**Κεφάλαιο 3:** Γίνονται εφαρμογές σε απλά μαθηματικά προβλήματα με σκοπό να εξαχθούν πληροφορίες, σχετικές με τη συμπεριφορά του αλγορίθμου. Επίσης, γίνεται μία πρώτη ανάλυση για τη χρησιμότητα του βήματος διόρθωσης, το οποίο έχει μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος από το βήμα πρόβλεψης, καθώς το υπολογιστικό κόστος των προβλημάτων αυτών είναι εξαιρετικά μικρό και επιτρέπει να γίνουν αρκετές δοκιμές, ώστε να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα.

**Κεφάλαιο 4:** Γίνεται βελτιστοποίηση σχήματος αεροτομής, βρίσκοντας διδιάστατα μέτωπα Pareto  $C_D - C_L$ , χωρίς περιορισμούς, με περιορισμό ισότητας και ανισο-ισότητας εμβαδού αεροτομής και τριδιάστατο μέτωπο με επιπλέον στόχο τη μεγιστοποίηση του εμβαδού της αεροτομής. Η βελτιστοποίηση γίνεται για δύο διαφορετικές συνθήκες ροής. Η μελέτη αφορά τυρβώδεις ροές συμπιεστού ρευστού.

**Κεφάλαιο 5:** Περιγράφονται τα συμπεράσματα, τα οποία προκύπτουν μέσα από τα αποτελέσματα των προβλημάτων που λύνονται και προτάσεις για βελτίωσή του και μελλοντική έρευνα.

**Παράρτημα Α:** Παρατίθενται μαθηματικοί ορισμοί και μαθηματικά εργαλεία.

**Παράρτημα Β:** Θεμελιώνονται θεωρητικά οι μέθοδοι ανίχνευσης κατά γραμμή και κυρίως οι προσεγγιστικές μέθοδοι Newton, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν στον προτεινόμενο αλγόριθμο.



## Κεφάλαιο 2

# Ο προτεινόμενος αλγόριθμος ΜΟΟ

### 2.1 Εισαγωγή

Ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε στην εργασία αυτή, ακολουθεί δύο βασικές αρχές, οι οποίες θα αναφερθούν και θα αναλυθούν στη συνέχεια. **Πρώτη βασική αρχή** του προτεινόμενου αλγόριθμου, η οποία χρησιμοποιήθηκε επιτυχώς και σε άλλες εργασίες [10, 17, 18, 3, 2], είναι να εντοπίζει τα σημεία στο μέτωπο Pareto, υποβαθμίζοντας όλους τους στόχους, πλην ενός, ο οποίος ελαχιστοποιείται, σε περιορισμούς ισότητας. Τότε, εάν συμπεριληφθούν και περιορισμοί ισότητας ή και ανισο-ισότητας, το πρόβλημα γράφεται ως

$$\begin{aligned} \min f_1(\vec{b}) \quad & \vec{b} \in \mathbb{R}^N \\ \text{s.t.} \\ f_i(\vec{b}) - \hat{f}_i &= 0 \quad \forall i = 2, \dots, M \\ c_i(\vec{b}) &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, M_c \\ g_i(\vec{b}) &\leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, M_g \end{aligned} \tag{2.1}$$

με το  $\hat{f}_i$  να αποτελεί την επιθυμητή τιμή των στόχων  $i = 2, \dots, M$ , η οποία μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο του μετώπου, ενώ  $M_c$  είναι ο αριθμός των περιορισμών ισότητας και  $M_g$  ο αριθμός των περιορισμών ανισο-ισότητας. Ο στόχος ελαχιστοποίησης επιλέγεται κατά σύμβαση να είναι ο πρώτος, ενώ θα μπορούσε να ήταν οποιοσδήποτε. Για παράδειγμα, εάν γίνει βελτιστοποίηση δύο στόχων, ο δεύτερος στόχος θα τίθεται ως περιορισμός ισότητας και θα ελαχιστοποιείται ο πρώτος, ενώ εάν γίνει βελτιστοποίηση τριών στόχων θα τίθενται ο δεύτερος και ο τρίτος στόχος ως περιορισμοί ισότητας, με τιμές διαφορετικές για κάθε σημείο στο μέτωπο Pareto, και θα ελαχιστοποιείται ο πρώτος.

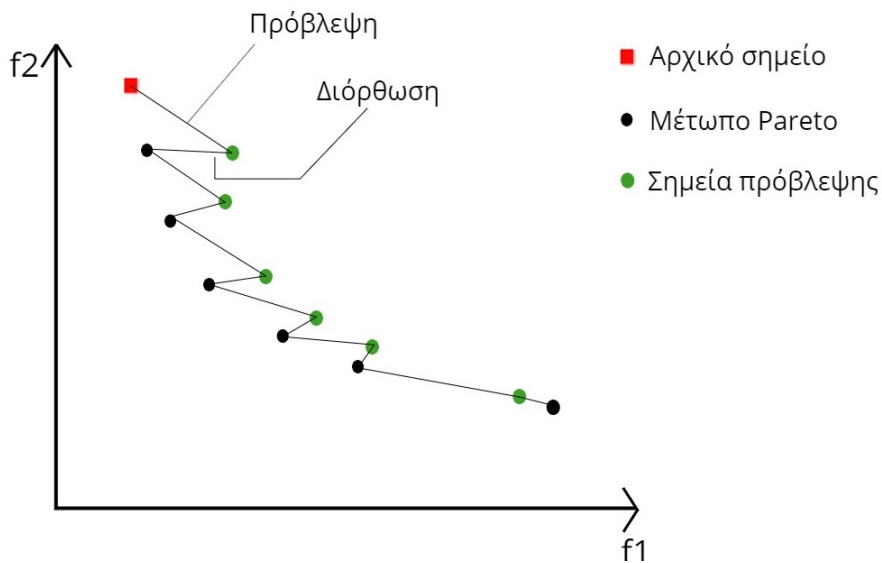
Δηλαδή, αφού εντοπισθεί τουλάχιστον ένα σημείο στο μέτωπο Pareto (π.χ. με μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση), λύνεται **διαδοχικά** το πρόβλημα (2.1) μεταβάλλοντας

κάθε φορά την επιθυμητή τιμή των στόχων-περιορισμών  $\hat{f}_i$ , εντοπίζοντας έτσι τα επόμενα σημεία. Για τον εντοπισμό κάθε επόμενου σημείου στο μέτωπο ακολουθούνται τα **βήματα πρόβλεψης-διόρθωσης**[10](σχήμα 2.1).

Ενώ ο αλγόριθμος βρίσκεται σε ένα σημείο στο μέτωπο Pareto, υπολογίζεται η επιθυμητή τιμή των στόχων-περιορισμών του επόμενου σημείου μεταβάλλοντάς τους κατά  $\Delta \hat{f}_i$ . Στο βήμα πρόβλεψης προσεγγίζεται το επόμενο σημείο, χρησιμοποιώντας τις πρώτες και τις δεύτερες παραγώγους στο σημείο του μετώπου που βρίσκεται ήδη ο αλγόριθμος και τη μεταβολή  $\Delta \hat{f}_i$  από αυτό. Οι συναρτήσεις κόστους και περιορισμών, υπολογίζονται από λογισμικό αξιολόγησης, ενώ οι πρώτες παράγωγοι αυτών, υπολογίζονται με τον αντίστοιχο συζυγή επιλύτη [1] (όσον αφορά τα αεροδυναμικά προβλήματα), ενώ ακόμη, οι δεύτερες παράγωγοι υπολογίζονται με μία εκ των προσεγγιστικών μεθόδων Newton (παράρτημα Β'.4). Ακολούθως, πραγματοποιείται το βήμα διόρθωσης για τον ακριβή εντοπισμό του σημείου στο μέτωπο Pareto, για το λόγο ότι το βήμα πρόβλεψης αποτελεί μία **πρώτης τάξεως προσέγγιση** (ενότητα 2.2) και ενδέχεται το επόμενο σημείο να έχει ένα διαφορετικό σύνολο ενεργών περιορισμών ανισο-ισότητας((Α'.8)) από το σημείο στο οποίο γίνεται η πρόβλεψη. Στο βήμα διόρθωσης χρησιμοποιείται η λύση του βήματος πρόβλεψης ως αρχική λύση και ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί τη μέθοδο SQP, η οποία είναι επαναληπτική, για τον εντοπισμό του σημείου αυτού στο μέτωπο. Σε κάθε επανάληψη απαιτείται, επίσης, ο επαναυπολογισμός (με το λογισμικό αξιολόγησης και τον αντίστοιχο συζυγή επιλύτη) των συναρτήσεων κόστους, των περιορισμών και των πρώτων παραγώγων τους, κάνοντας προφανές ότι το υπολογιστικό κόστος διογκώνεται στο βήμα διόρθωσης, εάν γίνουν πολλές επαναλήψεις. Ακόμη, σε κάθε επανάληψη, απαιτείται η εύρεση και δεύτερων παραγώγων η οποία γίνεται με την ανανέωση του προσεγγιστικού Εσσιανού μητρώου, το οποίο όταν συγχλίνει η μέθοδος στο εκάστοτε σημείο του μετώπου Pareto, χρησιμοποιείται στη συνέχεια στο βήμα πρόβλεψης για το επόμενο σημείο. Το βήμα πρόβλεψης υλοποιείται μαθηματικά στην επόμενη ενότητα (2.2) ενώ το βήμα διόρθωσης στην ενότητα (2.3).

Ακολουθώντας αυτή τη βασική αρχή υπάρχουν κάποιες δυσκολίες. Έστω μέτωπο Pareto δύο στόχων. Δεν μπορεί κάποιος να γνωρίζει, πάντοτε, εκ των προτέρων πόση πρέπει να είναι η μεταβολή των τιμών  $\hat{f}_2$  από σημείο σε σημείο ώστε να υπολογίζονται επαρκή σημεία ή και σε ποιες τιμές  $\hat{f}_2$  υπάρχει μη-κυριαρχούμενη λύση. Επίσης, έστω ότι το αρχικό σημείο υπολογίζεται κάνοντας μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση στο στόχο  $f_1$  και τα υπόλοιπα σημεία στο μέτωπο, εντοπίζονται λύνοντας, διαδοχικά, το πρόβλημα (2.1), μειώνοντας για κάθε σημείο την τιμή  $\hat{f}_2$ . Δεν μπορεί κάποιος να γνωρίζει εκ των προτέρων την καλύτερη λύση για το στόχο 2 και έτσι μπορεί να απαιτηθεί τιμή  $\hat{f}_2$  μικρότερη από την καλύτερη δυνατή. Οι προηγούμενες δυσκολίες υπάρχουν και σε προβλήματα τριών στόχων, όμως μπορούν να αποφευχθούν, με την προϋπόθεση ότι το μέτωπο Pareto είναι συνεχές, όπως θα εξηγηθεί στη συνέχεια.

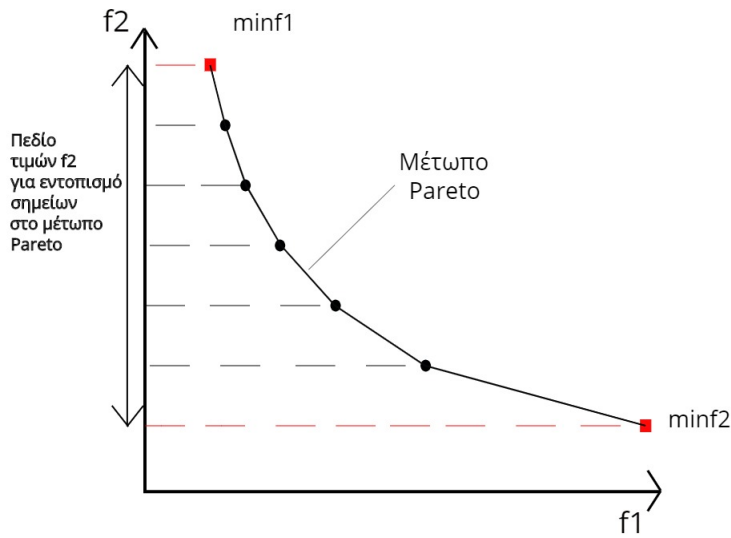
Η **δεύτερη βασική αρχή** και **βασική ιδέα** του προτεινόμενου αλγόριθμου είναι, να γίνεται, αρχικά, αναζήτηση ενός **πεδίου τιμών**  $\hat{f}_i$  για τις οποίες είναι δυνατόν



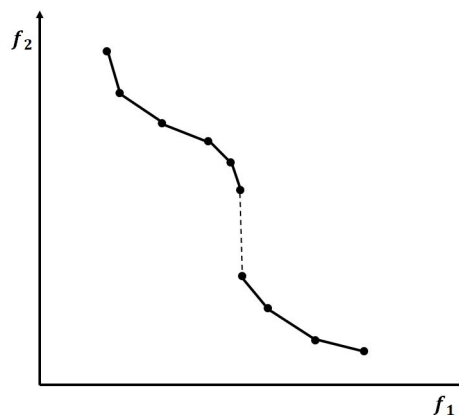
**Σχήμα 2.1:** Διαδικασία υπολογισμού μετώπου Pareto 2 στόχων με τη μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης. Αφού βρεθεί το αρχικό σημείο στο μέτωπο επιβάλλεται μικρότερη τιμή στον στόχο  $f_2$  και, στη συνέχεια, προσεγγίζεται στο βήμα πρόβλεψης και εντοπίζεται στο βήμα διόρθωσης το επόμενο σημείο. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται από το νέο σημείο στο μέτωπο μέχρι τον υπολογισμό όλου του μετώπου.

να εντοπισθεί μη-κυριαρχούμενη λύση. Δηλαδή, αναζητούνται οι τιμές των στόχων που θα θεωρηθούν και θα τεθούν ως περιορισμοί ισότητας, ώστε κατά τη λύση του προβλήματος (2.1) να μπορεί να εντοπισθεί λύση στο μέτωπο Pareto.

Ένας τρόπος για την εύρεση του πεδίου αυτού είναι, αρχικά, να γίνει μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση για κάθε στόχο, υπολογίζοντας ταυτόχρονα και τον άλλο στόχο, με αποτέλεσμα να υπολογίζονται τα άκρα του μετώπου Pareto. Στο παράδειγμα των δύο στόχων, το πεδίο καθορίζεται ως ο χώρος ανάμεσα στα άκρα του μετώπου Pareto (σχήμα 2.2) και η μεταβολή του  $\hat{f}_2$  υπολογίζεται ανάλογα με το πλήθος των σημείων που επιθυμείται να υπολογισθούν σε αυτό. Ακόμη, η μεταβολή του  $\hat{f}_2$  θα μπορούσε να μην είναι σταθερή και για παράδειγμα να γίνεται μικρότερη καθώς ο αλγόριθμος πλησιάζει στο κάτω άκρο. Μπορεί, όμως, λόγω της επιβολής περιορισμού ή περιορισμών στο πεδίο αυτό να υπάρχουν και μη-κυριαρχούμενες λύσεις, δηλαδή το μέτωπο Pareto να είναι μη συνεχές (σχήμα 2.3), όμως αυτό δεν είναι δυνατόν πάντοτε να το γνωρίζει κάποιος εκ των προτέρων.



**Σχήμα 2.2:** Τα κόκκινα σημεία αντιστοιχούν στα άκρα του μετώπου, τα οποία υπολογίζονται λύνοντας αντίστοιχα προβλήματα ενός στόχου, καθορίζοντας το πεδίο τιμών του στόχου-περιορισμού  $f_2$  για εντοπισμό σημείων στο μέτωπο Pareto. Ακολούθως, μεταβάλλοντας την επιθυμητή τιμή  $\hat{f}_2$ , υπολογίζονται τα εσωτερικά σημεία του μετώπου Pareto με τη μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης. Εάν απαιτηθεί τιμή  $\hat{f}_2$  μεγαλύτερη από αυτήν που υπολογίζεται στη μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση του στόχου  $f_1$ , η λύση που θα βρεθεί θα είναι κυριαρχούμενη και δεν θα ανήκει στο μέτωπο Pareto, ενώ είναι αδύνατον να λυθεί το πρόβλημα εάν απαιτηθεί τιμή  $\hat{f}_2$  μικρότερη από την ελάχιστη τιμή που βρέθηκε βελτιστοποιώντας το δεύτερο στόχο.

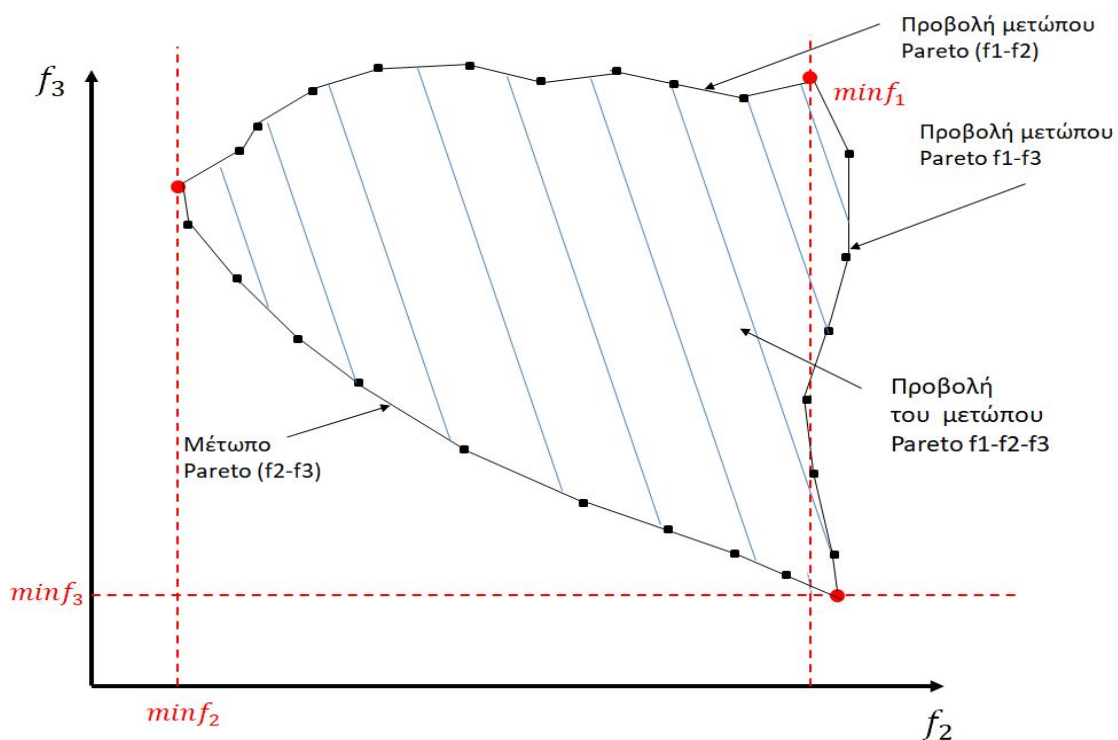


**Σχήμα 2.3:** Μέτωπο Pareto με ασυνέχεια.

Όμως, στην περίπτωση μετώπου Pareto τριών στόχων τα τρία σημεία που εντοπίζονται κάνοντας μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση για κάθε στόχο δεν είναι αρκετά ώστε να καθορίσουν το πεδίο τιμών  $\hat{f}_2, \hat{f}_3$ . Αυτό, όμως, καθορίζεται, όπως φαίνεται και στο κεφάλαιο 4, εντοπίζοντας διδιάστατα μέτωπα Pareto, συνδυάζοντας όλους τους



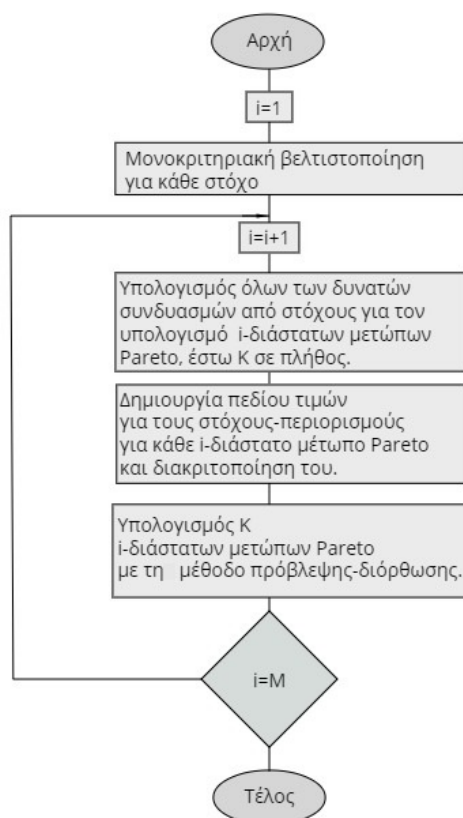
στόχους. Δηλαδή να βρεθούν τα μέτωπα  $(f_1, f_2)$ ,  $(f_1, f_3)$ ,  $(f_2, f_3)$ , με τον ίδιο τρόπο που εντοπίζονται στον αλγόριθμο τα διδιάστατα μέτωπα, υπολογίζοντας παράλληλα και το στόχο που δεν συμπεριλαμβάνεται στην τρέχουσα βελτιστοποίηση δύο στόχων. Εάν προβληθούν τα διδιάστατα μέτωπα Pareto, για παράδειγμα, στο χώρο των στόχων  $(f_2, f_3)$ , θα σχηματισθεί ένα πεδίο τιμών  $(f_2, f_3)$  το οποίο πέρα από το σύνορό του έχει μη-κυριαρχούμενες λύσεις (σχήμα 2.4). Επομένως, εάν απαιτηθούν τιμές  $\hat{f}_2, \hat{f}_3$  που ανήκουν σε αυτό το πεδίο θα εντοπισθούν λύσεις οι οποίες θα ανήκουν στο μέτωπο Pareto. Με άλλα λόγια, το πεδίο αποτελεί την προβολή του μετώπου Pareto στο χώρο των στόχων που τίθενται ως περιορισμοί ισότητας, εφόσον το μέτωπο Pareto είναι συνεχές.



**Σχήμα 2.4:** Στα αριστερά του μετώπου Pareto  $(f_2, f_3)$ , είναι αδύνατον να βρεθεί λύση, καθώς για την ίδια τιμή  $f_3$  δεν είναι δυνατόν να βρεθεί καλύτερη τιμή  $f_2$ . Στα δεξιότερα της καμπύλης που δημιουργείται από τον υπολογισμό του μετώπου Pareto  $(f_1, f_3)$ , δεν είναι δυνατόν να βρεθεί μη-κυριαρχούμενη λύση, καθώς για την ίδια τιμή  $f_3$  και μεγαλύτερο  $f_2$  δεν είναι δυνατόν να βρεθεί καλύτερη τιμή  $f_1$ . Ενώ, πιο πάνω από την καμπύλη που δημιουργείται από τον υπολογισμό του μετώπου Pareto  $(f_1, f_2)$ , δεν είναι δυνατόν να βρεθεί μη-κυριαρχούμενη λύση, καθώς για την ίδια τιμή  $f_2$  και μεγαλύτερο  $f_3$  δεν είναι δυνατόν να βρεθεί καλύτερη τιμή  $f_1$ . Επομένως, οι καμπύλες που σχηματίζονται μέσω του υπολογισμού των διδιάστατων μετώπων Pareto αποτελούν το σύνορο της προβολής του τριδιάστατου μετώπου Pareto.

Η διαδικασία αυτή μπορεί να γενικευθεί υπολογίζοντας μέτωπα Pareto με περισσότερους από τρεις στόχους. Έστω ότι επιθυμείται υπολογισμός του μετώπου Pareto  $M$  στόχων, ο αλγόριθμος αρχικά λύνει  $M$  μονοκριτηριακά προβλήματα βελτιστοποίησης,

ένα για κάθε στόχο. Ακολούθως υπολογίζονται  $\binom{M}{2} = \frac{M!}{2!(M-2)!}$  διδιάστατα μέτωπα Pareto, αφού πρώτα δημιουργηθεί και διακριτοποιηθεί το πεδίο τιμών για το στόχο-περιορισμό κάθε μετώπου για το οποίο θα μπορεί να βρεθεί μη-κυριαρχούμενη λύση στο διδιάστατο χώρο. Ακολούθως, υπολογίζονται  $\binom{M}{3} = \frac{M!}{3!(M-3)!}$  τριδιάστατα μέτωπα, αφού πρώτα δημιουργηθεί και διακριτοποιηθεί το αντίστοιχο πεδίο τιμών για τους στόχους-περιορισμούς κάθε μετώπου και η διαδικασία θα συνεχίζεται μέχρι να βρεθεί το μέτωπο Pareto  $M$  στόχων. Στο σχήμα 2.5 φαίνεται ο γενικός αλγόριθμος βελτιστοποίησης.



**Σχήμα 2.5:** Γενικός αλγόριθμος βελτιστοποίησης. Το πλήθος  $K$  των δυνατών συνδυασμών των  $i$ -διάστατων μετώπων Pareto υπολογίζεται από τη σχέση  $K = \binom{M}{i} = \frac{M!}{i!(M-i)!}$

Στην εργασία αυτή, η τελευταία γενίκευση δεν μελετάται, παρά μόνο για  $M \leq 3$ . Επίσης, ενδέχεται ο κίνδυνος, λόγω των  $M$  μονοκριτηριακών βελτιστοποιήσεων, να αυξηθεί το υπολογιστικό κόστος, ενώ ακόμη μπορεί π.χ. μία λύση από μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση κάποιου εκ των τριών στόχων να στερείται φυσικής σημασίας. Για τους δύο πιο πάνω λόγους, δίνονται στο χρήστη οι εξής δυνατότητες και τρόποι επίλυσης:

Για μέτωπο Pareto 2 στόχων :

- 1 Να γίνει μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση στόχου 1 και να τεθεί από τον χρήστη το κάτω όριο του στόχου 2.

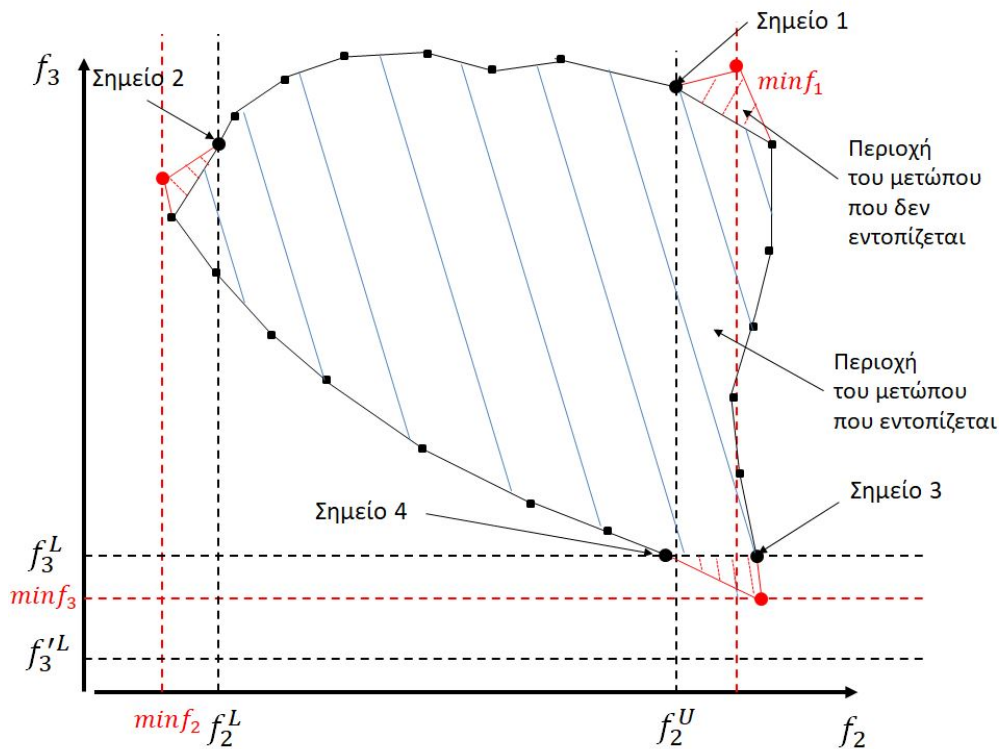
2 Να τεθούν από τον χρήστη το άνω και το κάτω όριο του στόχου 2 και να γίνει εύρεση του μετώπου Pareto ανάμεσα σε αυτά τα όρια.

Για μέτωπο Pareto 3 στόχων :

- 1 Να γίνει μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση των στόχων 1 και 2 και να τεθεί από το χρήστη το κάτω όριο του στόχου 3.
- 2 Να γίνει μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση του στόχου 1 και να τεθεί από τον χρήστη το κάτω όριο των στόχων 2 και 3.
- 3 Να τεθούν από τον χρήστη το άνω και κάτω όριο του στόχου 2 και το κάτω όριο του στόχου 3.

Η διαφορά των πιο πάνω τρόπων με τον αρχικό, είναι ότι οι ισογραμμές (σχήμα 2.6)  $f_2^U$ ,  $f_2^L$  και  $f_3^L$  τίθενται -μερικές ή και όλες- από τον χρήστη αντί να υπολογισθούν μέσω της διαδικασίας των μονοκριτηριακών βελτιστοποιήσεων. Οι τρόποι αυτοί μπορούν να δώσουν μία ευελιξία στο χρήστη, καθώς μπορεί να επιθυμεί κάποιοι στόχοι να έχουν τέτοια όρια. Για παράδειγμα, εάν ο ένας στόχος βελτιστοποίησης είναι η μεγιστοποίηση του εμβαδού  $E$  μιας αεροτομής, εάν οι μεταβλητές σχεδιασμού δεν είναι φραγμένες κατάλληλα, η αεροτομή μπορεί να παραμορφωθεί τόσο ώστε να μην έχει φυσική σημασία και επομένως μπορεί να τεθεί ένα άνω όριο στο εμβαδόν της. Επίσης, στην περίπτωση που γίνεται βελτιστοποίηση συντελεστών  $(C_D, -C_L)$  μιας αεροτομής, χωρίς κάποιο γεωμετρικό περιορισμό, η μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση του συντελεστή  $C_D$ , πιθανόν να δώσει μία λύση όπου η αεροτομή είναι επίπεδη και, επομένως, σε αυτή την περίπτωση, ο χρήστης μπορεί να δώσει ένα μέγιστο  $(-C_L)^U$  για την εύρεση του ελάχιστου  $C_D$ .

Βέβαια, οι τρόποι αυτοί σε σύγκριση με τον αρχικό έχουν και μειονεκτήματα, όπως το ότι μπορεί στις ισογραμμές αυτές να μην υπάρχει λύση αλλά και να μην υπολογισθεί μέρος του μετώπου Pareto το οποίο επιθυμείται (σχήμα 2.6).



**Σχήμα 2.6:** Παρουσίαση εναλλακτικών τρόπων υπολογισμού της προβολής του μετώπου Pareto στο χώρο  $(f_2, f_3)$ . Οι ισογραμμές  $f_2^U, f_2^L$  και  $f_3^L$  μπορούν να τεθούν από τον χρήστη αποφεύγοντας τη μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση. Αν για παράδειγμα, γίνει μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση για τον πρώτο στόχο, τότε η ισογραμμή  $f_2^U$ , θα εντοπισθεί και θα ταυτισθεί με την κόκκινη στα δεξιά της. Αντίστοιχα, αν γίνει μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση για τους στόχους 2 και 3, οι ισογραμμές  $f_2^L$  και  $f_3^L$  θα εντοπισθούν και θα ταυτιστούν με τις αντίστοιχες κόκκινες. Όμως, εάν για παράδειγμα δοθούν από τον χρήστη, το λογισμικό θα αποφύγει τις μη αναγκαίες μονοκριτηριακές βελτιστοποιήσεις και θα εντοπίσει πρώτα το διδιάστατο μέτωπο Pareto  $(f_1, f_2)$  (σημείο 1-2), ακολούθως θα υπολογίσει το μέτωπο  $(f_1, f_3)$  (σημείο 1-3) και, στη συνέχεια, το μέτωπο  $(f_2, f_3)$  (σημείο 2-4). Τέλος παρατηρείται, πως με αυτό τον τρόπο υπάρχουν περιοχές του μετώπου Pareto που δεν εντοπίζονται, αλλά και ο κίνδυνος να τεθεί μία ισογραμμή όπως η  $f_3^L$  στην οποία είναι αδύνατον να εντοπισθεί λύση, καθώς  $f_3^L < \min f_3$ .

## 2.2 Βήμα Πρόβλεψης - Μαθηματική υλοποίηση

Για τη μαθηματική υλοποίηση του **βήματος πρόβλεψης**[10], αρχικά, ορίζεται για το πρόβλημα (2.1) η συνάρτηση Langrange

$$L(\vec{b}, \vec{\lambda}) = f_1(\vec{b}) - \sum_{i=2}^M \lambda_{f_i} (f_i(\vec{b}) - \hat{f}_i) - \sum_{i=1}^{Mc} \lambda_{c_i} c_i(\vec{b}) - \sum_{i=1}^{Mg} \lambda_{g_i} g_i(\vec{b}) \quad (2.2)$$

Εάν υπάρχει η βέλτιστη λύση  $\vec{z}^*$ , όπου  $\vec{z} = [\vec{b} \ \vec{\lambda}]^T$ ,  $\vec{\lambda} = [\vec{\lambda}_f \ \vec{\lambda}_c \ \vec{\lambda}_g]^T$ , οι αναγκαίες συνθήκες KKT πρώτης τάξης γράφονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \nabla_b L(\vec{b}^*, \vec{\lambda}^*) &= 0 \\ f_i(\vec{b}^*) - \hat{f}_i &= 0 \quad \forall \quad i = 2, \dots, M \\ c_i(\vec{b}^*) &= 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, M_c \\ g_i(\vec{b}^*) &\leq 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, M_g \\ \lambda_{g_i}^* &\leq 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, M_g \\ \lambda_{g_i}^* g_i(\vec{b}^*) &= 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, M_g \end{aligned} \quad (2.3)$$

Στη συνέχεια, αφού ληφθούν υπόψη μόνο οι ενεργοί (Α'.8) περιορισμοί ανισο-ισότητας (έστω ότι συμβολίζονται με  $g^*$ ), οι συνθήκες KKT γράφονται ως ένα σύστημα εξισώσεων

$$\vec{H}(\vec{z}, \vec{f}) = \begin{bmatrix} \nabla_b L(\vec{z}) \\ \vec{f}(\vec{b}) - \vec{f} \\ \vec{c}(\vec{b}) \\ \vec{g}^*(\vec{b}) \end{bmatrix} = \vec{0} \quad (2.4)$$

όπου  $\vec{z} = [\vec{b} \ \vec{\lambda}]^T$ ,  $\vec{\lambda} = [\vec{\lambda}_f \ \vec{\lambda}_c \ \vec{\lambda}_g^*]^T$ ,  $\vec{f}(\vec{b}) = [f_2(\vec{b}), \dots, f_M(\vec{b})]^T$ ,  $\vec{f} = [\hat{f}_2, \dots, \hat{f}_M]^T$  και η συνάρτηση Langrange

$$L(\vec{z}) = f_1(\vec{b}) - \sum_{i=2}^M \lambda_{f_i} (f_i(\vec{b}) - \hat{f}_i) - \sum_{i=1}^{Mc} \lambda_{c_i} c_i(\vec{b}) - \sum_{i=1}^{Mg} \lambda_{g_i}^* g_i(\vec{b}) \quad (2.5)$$

Από το **θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων (implicit function theorem)** (Α'.11) ισχύει ότι στο  $\vec{H}(\vec{z}, \vec{f}) = 0$  υπάρχει μία συνάρτηση  $\vec{h}(\vec{f})$  ούτως ώστε  $\vec{z} = \vec{h}(\vec{f}) = \vec{z}(\vec{f})$ . Ακολουθώντας η ολική παράγωγος του συστήματος (2.4) ως προς κάθε  $\hat{f}_i$  να είναι μηδενική, καθώς στο μέτωπο Pareto οι συνθήκες KKT ισχύουν σε όλα τα σημεία του ανεξαρτήτως τιμών  $\hat{f}_i$ , προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{H}(\vec{z}, \vec{f})}{D\hat{f}_i} &= \frac{\partial \vec{H}(\vec{z}, \vec{f})}{\partial \hat{f}_i} + \frac{\partial \vec{H}(\vec{z}, \vec{f})}{\partial \vec{z}} \frac{\partial \vec{z}}{\partial \hat{f}_i} = \vec{0} \Rightarrow \\ \frac{\partial \vec{H}(\vec{z}, \vec{f})}{\partial \vec{z}} \frac{\partial \vec{z}}{\partial \hat{f}_i} &= - \frac{\partial \vec{H}(\vec{z}, \vec{f})}{\partial \hat{f}_i} \end{aligned} \quad (2.6)$$

όπου η τελευταία εξίσωση, σε διανυσματική μορφή και για κάθε  $\hat{f}_i$  γράφεται ως

$$\nabla_z \vec{H}(\vec{z}, \vec{f}) \nabla_{\hat{f}} \vec{z} = -\nabla_{\hat{f}} \vec{H}(\vec{z}, \vec{f}) \quad (2.7)$$

Παραγωγίζοντας το διάνυσμα  $\vec{H}$  ως προς το  $\vec{z} = [\vec{b} \quad \vec{\lambda}]^T$  το μητρώο  $\nabla_z \vec{H}$  υπολογίζεται ως

$$\nabla_z \vec{H}(\vec{z}, \vec{f}) = \begin{bmatrix} \nabla_{bb}^2 L & -\nabla_b^T f_{2,\dots,M} & -\nabla_b^T c_{1,\dots,M_c} & -\nabla_b^T g_{1,\dots,M_g}^* \\ \nabla_b f_{2,\dots,M} & 0 & 0 & 0 \\ \nabla_b c_{1,\dots,M_c} & 0 & 0 & 0 \\ \nabla_b g_{1,\dots,M_g}^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

όπου κάθε ποσότητα  $\nabla_y^T x_{1,\dots,M}$ ,  $\vec{y} \in R^N$  γράφεται ως

$$\nabla_y^T x_{1,\dots,M} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_M}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_M}{\partial y_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_N} & \frac{\partial x_2}{\partial y_N} & \cdots & \frac{\partial x_M}{\partial y_N} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

και  $\nabla_{bb}^2 L$  το Εσσιανό μητρώο της συνάρτησης Langrange.

$$\nabla_{bb}^2 L = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial b_1^2} & \frac{\partial L}{\partial b_1 b_2} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial b_1 b_N} \\ \frac{\partial L}{\partial b_2 b_1} & \frac{\partial L}{\partial b_2 b_2} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial b_2 b_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial b_N b_1} & \frac{\partial L}{\partial b_N b_2} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial b_N^2} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Το μητρώο  $\nabla_z \vec{H}(\vec{z}, \vec{f})$  είναι τετραγωνικό και τάξης  $[N + M - 1 + M_c + M_g^*] \times [N + M - 1 + M_c + M_g^*]$ . Το δεξί μέλος του συστήματος (2.7) υπολογίζεται παραγωγίζοντας το διάνυσμα  $\vec{H}$  ως προς το  $\vec{f}$  ως

$$\nabla_{\hat{f}} \vec{H}(\vec{z}, \vec{f}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{0} \\ -\tilde{I} \\ \tilde{0} \\ \tilde{0} \end{bmatrix} \in \begin{matrix} R^{N \times M-1} \\ R^{M-1 \times M-1} \\ R^{M_c \times M-1} \\ R^{M_g^* \times M-1} \end{matrix} \quad (2.11)$$

όπου το μητρώο είναι τάξης  $[N + M - 1 + M_c + M_g^*] \times [M - 1]$  με το  $-1$  να εμφανίζεται στις θέσεις  $(N + k, k)$  για  $k = 1, \dots, M - 1$ . Τέλος, το μητρώο  $\nabla_{\hat{f}} \vec{z}$  αναλύεται ως

$$\nabla_{\hat{f}} \vec{z} = \begin{bmatrix} \nabla_{\hat{f}} b_{1,\dots,N} \\ \nabla_{\hat{f}} \lambda_{f_{2,\dots,M}} \\ \nabla_{\hat{f}} \lambda_{c_{1,\dots,M_c}} \\ \nabla_{\hat{f}} \lambda_{g_{1,\dots,M_g}^*} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

το οποίο είναι τάξης  $[N + M - 1 + M_c + M_g^*] \times [M - 1]$ . Επομένως το σύστημα (2.7) γράφεται

$$\begin{bmatrix} \nabla_{bb}^2 L & -\nabla_b^T f_{2,\dots,M} & -\nabla_b^T c_{1,\dots,M_c} & -\nabla_b^T g_{1,\dots,M_g^*}^* \\ \nabla_b f_{2,\dots,M} & 0 & 0 & 0 \\ \nabla_b c_{1,\dots,M_c} & 0 & 0 & 0 \\ \nabla_b g_{1,\dots,M_g^*}^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\hat{f}} b_{1,\dots,N} \\ \nabla_{\hat{f}} \lambda_{f_{2,\dots,M}} \\ \nabla_{\hat{f}} \lambda_{c_{1,\dots,M_c}} \\ \nabla_{\hat{f}} \lambda_{g_{1,\dots,M_g^*}^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{0} \\ -\tilde{I} \\ \tilde{0} \\ \tilde{0} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Εφόσον το αριστερό μέλος του συστήματος αυτού θεωρείται γνωστό σε ένα σημείο του μετώπου Pareto μπορεί να επιλυθεί λύνοντας  $M - 1$  γραμμικά συστήματα και υπολογίζοντας τα στοιχεία του μητρώου  $\nabla_{\hat{f}} \vec{z}$ . Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας το ανάπτυγμα Taylor(2.14) πρώτης τάξης, γίνεται **πρόβλεψη** των μεταβλητών σχεδιασμού και των πολλαπλασιαστών Langrange του επόμενου σημείου στο μέτωπο, το οποίο έχει επιθυμητές τιμές στόχων-περιορισμών ίσες με  $\hat{f}_{n+1}$ .

$$\vec{z}_{n+1} = \vec{z}_n + [\nabla_{\hat{f}} \vec{z}]_n (\hat{f}_{n+1} - \hat{f}_n) \quad (2.14)$$

Επομένως το  $\vec{z}_{n+1} = [\vec{b}_{n+1} \ \vec{\lambda}_{n+1}]^T$  αποτελεί προσέγγιση **πρώτης τάξεως** της βέλτιστης λύσης για το επόμενο σημείο, ενώ, επίσης, δεν λαμβάνεται υπόψη η περίπτωση που το μητρώο (2.8) δεν αντιστρέφεται ή τυχόν αλλαγές στο σύνολο των ενεργών περιορισμών. Επομένως, η λύση που προκύπτει στο βήμα πρόβλεψης μπορεί να μην είναι στο μέτωπο και για αυτό πραγματοποιείται και το **βήμα διόρθωσης** που χρησιμοποιεί τη λύση  $\vec{z}_{n+1}$  ως αρχική λύση.

### 2.3 Βήμα διόρθωσης - Διατύπωση

Το **βήμα διόρθωσης**, όπως προαναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, απαιτείται καθώς στο βήμα πρόβλεψης γίνεται προσέγγιση πρώτης τάξεως, ενώ οι ενεργοί περιορισμοί μπορεί να αλλάξουν από σημείο σε σημείο. Στο βήμα διόρθωσης, διορθώνονται οι μεταβλητές σχεδιασμού προς μία καλύτερη λύση, ενώ ταυτόχρονα διορθώνονται οι περιορισμοί που δεν ικανοποιούνται. Σε αυτό το βήμα, δύναται να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε μέθοδος βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς. Σε αυτήν την εργασία, χρησιμοποιείται η μέθοδος SQP, κατά την οποία το σύστημα των εξισώσεων KKT πρώτης τάξης (2.4), γραμμικοποιείται ως προς το διάνυσμα  $\vec{z} = [\vec{b} \ \vec{\lambda}]$  με αποτέλεσμα να γράφεται το σύστημα των πιο κάτω εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} \nabla_{bb}^2 L & -\nabla_b^T f_{2,\dots,M} & -\nabla_b^T c_{1,\dots,M_c} & -\nabla_b^T g_{1,\dots,M_g^*}^* \\ \nabla_b f_{2,\dots,M} & 0 & 0 & 0 \\ \nabla_b c_{1,\dots,M_c} & 0 & 0 & 0 \\ \nabla_b g_{1,\dots,M_g^*}^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \vec{b} \\ \Delta \vec{\lambda}_f \\ \Delta \vec{\lambda}_c \\ \Delta \vec{\lambda}_g^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla_b L(\vec{z}) \\ -\vec{f}(\vec{b}) + \hat{f} \\ -\vec{c}(\vec{b}) \\ -\vec{g}^*(\vec{b}) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

με τη διόρθωση σε κάθε επανάληψη να γράφεται ως

$$\begin{aligned}\vec{b}_{n+1} &= \vec{b}_n + \Delta \vec{b}_n \\ \vec{\lambda}_{n+1} &= \vec{\lambda}_n + \Delta \vec{\lambda}_n\end{aligned}\quad (2.16)$$

Παρατηρείται πως το αριστερό μέλος των εξισώσεων (2.13) και (2.15) είναι ίδιο, όμως η διαφορά των δύο συστημάτων είναι ότι το πρώτο είναι έγκυρο μόνο στην περίπτωση που ισχύουν οι συνθήκες KKT(2.3) για το  $\vec{z}_n$ , δηλαδή το  $\vec{z}_n$  να ανήκει στο Pareto, ενώ το δεύτερο σύστημα μπορεί να λυθεί για οποιοδήποτε  $\vec{z}_n$ [18], το οποίο το καθιστά κατάλληλο σχήμα για το βήμα διόρθωσης. Το σύστημα (2.15) μπορεί επίσης να γραφεί σε δύο ισοδύναμα σχήματα, κατά τα οποία υπολογίζεται κατευθείαν το σύνολο των πολλαπλασιαστών Langrange  $\vec{\lambda}_{n+1}$  αντί της διόρθωσης  $\Delta \vec{\lambda}_n$ . Για πληρότητα, τα σχήματα αυτά γράφονται ως

$$\begin{bmatrix} \nabla_{bb}^2 L & -\nabla_b^T f_{2,\dots,M} & -\nabla_b^T c_{1,\dots,M_c} & -\nabla_b^T g_{1,\dots,M_g}^* \\ \nabla_b f_{2,\dots,M} & 0 & 0 & 0 \\ \nabla_b c_{1,\dots,M_c} & 0 & 0 & 0 \\ \nabla_b g_{1,\dots,M_g}^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \vec{b} \\ \vec{\lambda}_{f_{n+1}} \\ \vec{\lambda}_{c_{n+1}} \\ \vec{\lambda}_{g_{n+1}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla_b L(\vec{z}) \\ -\vec{f}(\vec{b}) + \vec{f} \\ -\vec{c}(\vec{b}) \\ -\vec{g}^*(\vec{b}) \end{bmatrix}\quad (2.17)$$

και

$$\begin{bmatrix} \nabla_{bb}^2 L & -\nabla_b^T f_{2,\dots,M} & -\nabla_b^T c_{1,\dots,M_c} & -\nabla_b^T g_{1,\dots,M_g}^* \\ \nabla_b f_{2,\dots,M} & 0 & 0 & 0 \\ \nabla_b c_{1,\dots,M_c} & 0 & 0 & 0 \\ \nabla_b g_{1,\dots,M_g}^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \vec{b} \\ \vec{\lambda}_{f_{n+1}} \\ \vec{\lambda}_{c_{n+1}} \\ \vec{\lambda}_{g_{n+1}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla_b f_1(\vec{z}) \\ -\vec{f}(\vec{b}) + \vec{f} \\ -\vec{c}(\vec{b}) \\ -\vec{g}^*(\vec{b}) \end{bmatrix}\quad (2.18)$$

Σημαντικό πλεονέκτημα εφαρμογής της μεθόδου SQP στο βήμα διόρθωσης, είναι ότι δεν εξαρτάται από παραμέτρους εισόδου από τον χρήστη, όπως η μέθοδος ALM που χρησιμοποιήθηκε σε προηγούμενες διπλωματικές εργασίες[2, 3], και εφόσον η προσέγγιση του Εσσιανού μητρώου είναι καλή συγκλίνει με μεγάλη ταχύτητα[9].

Για την προσέγγιση του Εσσιανού μητρώου μπορεί να χρησιμοποιηθεί μία από τις προσεγγιστικές μεθόδους Newton(B'.4) με τη μέθοδο BFGS (ανανέωση μητρώου με την εξίσωση (B'.19)) και την παραλλαγή της dBFGS (ανανέωση μητρώου με την εξίσωση (B'.23)) να χρησιμοποιείται κυρίως στην εργασία αυτή. Για τον υπολογισμό των διανυσμάτων  $\vec{s}_n$  και  $\vec{y}_n$  που χρησιμοποιούνται για την ανανέωση του προσεγγιστικού μητρώου χρησιμοποιούνται μόνο οι ανανεωμένοι συντελεστές Langrange όπως πιο κάτω

$$\vec{s}_n = \vec{b}_{n+1} - \vec{b}_n \quad (2.19)$$

$$\vec{y}_n = \nabla L(\vec{b}_{n+1}, \vec{\lambda}_{n+1}) - \nabla L(\vec{b}_n, \vec{\lambda}_{n+1}) \quad (2.20)$$

Στην περίπτωση που το Εσσιανό  $\nabla_{bb}^2 L(\vec{z})$  είναι θετικά ορισμένο στην περιοχή όπου γίνεται η βελτιστοποίηση, εάν χρησιμοποιηθεί η μέθοδος BFGS η βελτιστοποίηση θα



συγκλίνει ταχύτατα. Όμως, στην περίπτωση που το πραγματικό Εσσιανό έχει αρνητικές ιδιοτιμές η συνθήκη καμπυλότητας (B'.12) μπορεί να μην ισχύει, ακόμη και όταν ο κύκλος βελτιστοποίησης είναι κοντά στη λύση. Για να αποφευχθεί αυτή η δυσκολία χρησιμοποιείται η μέθοδος η Damped BFGS (παράρτημα B'.4), η οποία εξασφαλίζει ότι το ανανεωμένο Εσσιανό μητρώο  $B_{n+1}$  θα είναι θετικά ορισμένο.

## 2.4 Αριθμητικός αλγόριθμος υπολογισμού σημείων στο μέτωπο Pareto

Έστω ότι ο προτεινόμενος γενικός αλγόριθμος MOO βρίσκεται σε ένα σημείο του μετώπου Pareto. Για τον υπολογισμό του επόμενου σημείου ακολουθούνται τα εξής βήματα:

- Βήμα 0. Πραγματοποίηση του βήματος πρόβλεψης υπολογίζοντας την αρχική λύση  $\vec{z}_0 = [\vec{b}_0 \quad \vec{\lambda}_0]^T$ .
- Βήμα 1. Εκτέλεση του λογισμικού αξιολόγησης, το οποίο πρέπει να υπολογίσει τις συναρτήσεις κόστους, τις συναρτήσεις των περιορισμών και του αντίστοιχου συζυγούς επιλύτη για τον υπολογισμό των πρώτων παραγώγων.
- Βήμα 2. Εκτίμηση των ενεργών περιορισμών ανισο-ισότητας (A'.8), με τρόπο που αναφέρεται στη συνέχεια.
- Βήμα 3. Έλεγχος σύγκλισης. Για τη σύγκλιση πρέπει να ικανοποιούνται οι περιορισμοί και να ισχύει είτε η σύγκλιση της συνάρτησης Langrange, είτε η σύγκλιση του στόχου ελαχιστοποίησης, είτε το  $\nabla_b L \rightarrow \vec{0}$ , είτε η σύγκλιση των μεταβλητών σχεδιασμού.
- Βήμα 4. Ανανέωση προσεγγιστικού Εσσιανού μητρώου. Χρησιμοποιείται μία από τις σχέσεις υπολογισμού του προσεγγιστικού μητρώου που παρουσιάζονται στο παράρτημα B'.4, υπό την προϋπόθεση ότι τα διανύσματα  $\vec{s}_n$  και  $\vec{y}_n$  υπολογίζονται από τις σχέσεις (2.19) και (2.20).
- Βήμα 5. Εκτίμηση των ενεργών περιορισμών ανισο-ισότητας, οι οποίοι υπάρχουν λόγω των ορίων στις μεταβλητές σχεδιασμού, με τρόπο που αναφέρεται στη συνέχεια και λύση του συστήματος SQP με γραμμικό επιλύτη. Λύνεται 1 από τα τρία ισοδύναμα συστήματα που παρουσιάστηκαν στην ενότητα του βήματος διόρθωσης 2.3.
- Βήμα 6. Ανανέωση μεταβλητών σχεδιασμού και πολλαπλασιαστών Langrange και επιστροφή στο βήμα 1. Δεν επιτρέπεται οι μεταβλητές σχεδιασμού να ξεπεράσουν τα όρια τους, καθώς όταν η τιμή μίας μεταβλητής σχεδιασμού, πάει να ξεπεράσει το όριο της τίθεται ίση με αυτό. Για παράδειγμα, έστω ότι η μεταβλητή  $b_1$  ανανεώνεται από τη σχέση  $b_1^{n+1} = b_1^n + \Delta b_1^n > b_1^U$ , όπου το  $b_1^U$  το μέγιστο όριο της, τότε τίθεται  $b_1^{n+1} = b_1^U$ , ενώ αν  $b_1^{n+1} = b_1^n + \Delta b_1^n < b_1^L$  τότε  $b_1^{n+1} = b_1^L$ .

Στη συνέχεια, αφού ο αλγόριθμος συγκλίνει, χρησιμοποιεί το τελευταίο προσεγγιστικό Εσσιανό μητρώο που υπολογίστηκε στο βήμα διόρθωσης για την πρόβλεψη του επόμενου σημείου. Με αυτό τον τρόπο, αποφεύγεται ο ακριβός και ακριβής υπολογισμός του Εσσιανού μητρώου. Η δυνατότητα για χρησιμοποίηση των μαθηματικών σχημάτων (2.15), (2.17) και (2.18) αλλά και των μεθόδων προσέγγισης του Εσσιανού μητρώου, δίνεται για το λόγο ότι, το πιο μαθηματικό σχήμα η ποια προσεγγιστική μέθοδος του Εσσιανού μητρώου είναι καλύτερη, δεν είναι πάντοτε το ίδιο, αλλά εξαρτάται από το πρόβλημα το οποίο λύνεται[9].

### Ενεργοί περιορισμοί ανισο-ισότητας

Ενεργοί περιορισμοί ανισο-ισότητας τίθενται αυτοί, που κατά το παρόν βήμα έχουν τιμή  $g(\vec{b}) > 0$ . Παρόλα αυτά, σε περίπτωση που ένας περιορισμός εναλλάξει την τιμή του από αρνητική σε θετική και το αντίστροφο, ένα πεπερασμένο αριθμό φορών, ο περιορισμός αυτός εκτιμάται ότι είναι ενεργός στη βέλτιστη λύση και θεωρείται ότι ισχύει η ισότητα για το παρόν σημείο.

### Ενεργοί περιορισμοί ανισο-ισότητας λόγω ορίων

Περιορισμοί ανισο-ισότητας υπάρχουν στο πρόβλημα και λόγω των ορίων στις μεταβλητές σχεδιασμού. Δηλαδή, ο αλγόριθμος αντιλαμβάνεται τα όρια στις μεταβλητές σχεδιασμού ως περιορισμούς ανισο-ισότητας τύπου

$$\begin{aligned} g_i^U &= b_i - b_i^U \leq 0 \quad \forall \quad i = 1, N \\ g_i^L &= b_i^L - b_i \leq 0 \quad \forall \quad i = 1, N \end{aligned} \quad (2.21)$$

όπου, όταν ένας τέτοιος περιορισμός είναι ενεργός, ισχύει για αυτόν η ισότητα. Τότε, η συνάρτηση Langrange, συμπεριλαμβάνοντας τους ενεργούς περιορισμούς ανισο-ισότητας που υπάρχουν λόγω των ορίων στις μεταβλητές σχεδιασμού, γράφεται ως

$$L(\vec{b}, \vec{\lambda}) = f_1(\vec{b}) - \sum_{i=2}^M \lambda_{f_i} (f_i(\vec{b}) - \hat{f}_i) - \sum_{i=1}^{Mc} \lambda_{c_i} c_i(\vec{b}) - \sum_{i=1}^{Mg^* + Mg_b^*} \lambda_{g_i}^* g_i^*(\vec{b}) \quad (2.22)$$

όπου  $Mg_b$  ο αριθμός αυτών των ενεργών περιορισμών. Μαθηματικά οι περιορισμοί που αφορούν τα όρια δεν διαφέρουν από ένα περιορισμό ανισο-ισότητας τύπου  $g(\vec{b})$  που ίσως υπάρχει σε ένα πρόβλημα. Όμως, δεν χρειάζεται εξωτερικό λογισμικό για τον υπολογισμό τους και για τον υπολογισμό της πρώτης τους παραγώγου, κάτι που αξιοποιείται για την εκτίμηση των ενεργών αυτών περιορισμών πριν την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού.

Ο αλγόριθμος στο βήμα 6, όπου και οι μεταβλητές σχεδιασμού ανανεώνονται δεν επιτρέπει, αυτές, να πάρουν τιμές που παραβιάζουν τα όριά τους, θέτοντας τις μεταβλητές που παραβιάζουν το όριο ίσες με αυτό. Όμως, αυτό μπορεί να εισάγει σφάλμα στον υπολογισμό της μεταβολής των μεταβλητών σχεδιασμού  $\Delta \vec{b}$  αλλά και των πολλαπλασιαστών Langrange  $\Delta \vec{\lambda}$ , όταν δεν συμπεριλαμβάνονται στη λύση του συστήματος ως ενεργοί περιορισμοί ανισο-ισότητας τα όρια αυτά, για λόγους που εξηγούνται παρακάτω.

Για πληρότητα ξαναγράφεται το σύστημα (2.15)

$$\begin{bmatrix} \nabla_{bb}^2 L & -\nabla_b^T f_{2,\dots,M} & -\nabla_b^T c_{1,\dots,M_c} & -\nabla_b^T g_{1,\dots,M_g^*+Mg_b^*}^* \\ \nabla_b f_{2,\dots,M} & 0 & 0 & 0 \\ \nabla_b c_{1,\dots,M_c} & 0 & 0 & 0 \\ \nabla_b g_{1,\dots,M_g^*+Mg_b^*}^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \vec{b} \\ \Delta \vec{\lambda}_f \\ \Delta \vec{\lambda}_c \\ \Delta \vec{\lambda}_g^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla_b L(\vec{z}) \\ -\vec{f}(\vec{b}) + \vec{f} \\ -\vec{c}(\vec{b}) \\ -\vec{g}^*(\vec{b}) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Ορίζεται ο Ιακωβιανός πίνακας (Jacobian matrix) ως

$$A^T = [\nabla_b^T f_{2,\dots,M} \quad \nabla_b^T c_{1,\dots,M_c} \quad \nabla_b^T g_{1,\dots,M_g^*+Mg_b^*}^*] \quad (2.24)$$

και γράφονται οι περιορισμοί ισότητας και οι ενεργοί περιορισμοί ανισο-ισότητας ως ένα ενιαίο διάνυσμα

$$\vec{C}(\vec{b}) = \begin{bmatrix} \vec{f}(\vec{b}) - \vec{f} \\ \vec{c}(\vec{b}) \\ \vec{g}^*(\vec{b}) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

ενώ το Εσσιανό μητρώο γράφεται ως  $H_L = \nabla_{bb}^2 L$ . Τότε το πιο πάνω σύστημα (2.23) γράφεται συντομότερα ως

$$\begin{bmatrix} H_L & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \vec{b} \\ \Delta \vec{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla_b L(\vec{z}) \\ -\vec{C}(\vec{b}) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Το τελευταίο σύστημα μπορεί να αναλυθεί στις δύο πιο κάτω εξισώσεις

$$H_L \Delta \vec{b} - A^T \Delta \vec{\lambda} = -\nabla_b L \quad (2.27)$$

$$A \Delta \vec{b} = -\vec{C} \quad (2.28)$$

Ακολουθώντας, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (2.27) με τον αντίστροφο του Εσσιανού μητρώου  $H_L$  και λύνοντας ως προς  $\Delta \vec{b}$  η εξίσωση γράφεται

$$\Delta \vec{b} = H_L^{-1} A^T \Delta \vec{\lambda} - H_L^{-1} \nabla_b L \quad (2.29)$$

Από την τελευταία εξίσωση, είναι προφανές ότι η μεταβολή στις μεταβλητές σχεδιασμού εξαρτάται από τον όρο  $H_L^{-1} \nabla_b L$  ο οποίος εξαρτάται από τις ποσότητες  $\vec{b}$ ,  $\vec{\lambda}$  της τρέχουσας επανάληψης, δηλαδή είναι σταθερός στην τρέχουσα επανάληψη, και από τον όρο  $H_L^{-1} A^T \Delta \vec{\lambda}$ , ο οποίος εξαρτάται από τον αντίστροφο του Εσσιανού μητρώου, από τη μεταβολή των πολλαπλασιαστών Langrange, αλλά και τον Ιακωβιανό πίνακα ο οποίος αποτελείται από τα διανύσματα των παραγώγων των ενεργών περιορισμών ανισο-ισότητας και των περιορισμών ισότητας. Αν στην εξίσωση (2.28) αντικατασταθεί το  $\Delta \vec{b}$  της εξίσωσης (2.29) και η εξίσωση λυθεί ως προς τη μεταβολή των πολλαπλασιαστών Langrange η εξίσωση γράφεται ως

$$\Delta \vec{\lambda} = [A H_L^{-1} A^T]^{-1} [A H_L^{-1} \nabla_b L - \vec{C}] \quad (2.30)$$

Αν, λοιπόν, στον Ιακωβιανό πίνακα δεν συμπεριληφθούν οι παράγωγοι των ενεργών περιορισμών προκαλείται άμεσο σφάλμα στον υπολογισμό των μεταβλητών σχεδιασμού

από τον όρο  $H_L^{-1}A^T\Delta\vec{\lambda}$  και έμμεσο σφάλμα από τον υπολογισμό των πολλαπλασιαστών Langrange, που βρίσκονται στον ίδιο όρο. Αυτό γιατί, χωρίς την εισαγωγή των ορίων ως περιορισμούς ανισο-ισότητας στο σύστημα (2.23), δεν συνυπολογίζεται ότι η μεταβλητή που έχει πιάσει το όριο της πρέπει να παραμείνει εκεί.

Παρόλα αυτά, για έναν γενικό περιορισμό ανισο-ισότητας  $g(\vec{b})$ , δεν μπορεί εύκολα να εκτιμηθεί, πριν τη λύση του συστήματος (2.23) και τον επαναυπολογισμό του από ένα εξωτερικό λογισμικό, αν στην επόμενη επανάληψη ο περιορισμός αυτός είναι ενεργός. Όταν ο περιορισμός αυτός είναι αρνητικός η μόνη περίπτωση που εκτιμάται ότι ο περιορισμός αυτός είναι ενεργός, είναι όταν κατά τη σύγκλιση στο σημείο του μετώπου Pareto, έχει γίνει εναλλαγή στην τιμή του από αρνητική σε θετική και το αντίστροφο κάποιες φορές.

Από την άλλη, όμως, μετά την επίλυση του συστήματος (2.23) μπορεί να εκτιμηθεί αν μία μεταβλητή σχεδιασμού ξεπερνά ένα όριο, χωρίς να χρειαστεί να γίνει κλήση του εξωτερικού λογισμικού. Επομένως, μπορεί να προστεθεί στον Ιακωβιανό πίνακα  $A^T$ , πριν από την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού και των πολλαπλασιαστών Langrange, το όριο αυτό ως ενεργός περιορισμός ανισο-ισότητας και επαναλαμβάνοντας την επίλυσή του του συστήματος (2.23), με τον αλγόριθμο να αντιλαμβάνεται εκ των προτέρων ποια είναι η οριακή τιμή που πρέπει να έχει η μεταβλητή που αρχικά ξεπέρασε το όριο της. Έτσι, υπολογίζεται, μία αρχική μεταβολή  $\Delta\vec{b}$  και  $\Delta\vec{\lambda}$  με την οποία εκτιμάται αν κάποια μεταβλητή φτάνει η ξεπερνά τα όριά της. Εάν δεν φτάσει η ξεπεράσει κάποια μεταβλητή τα όριά της, τότε η μεταβολή αυτή θεωρείται ορθή και ο αλγόριθμος συνεχίζει στην επόμενη επανάληψη, αλλιώς ο αλγόριθμος αντιλαμβάνεται ότι υπάρχει ακόμη ένας ενεργός περιορισμός ανισο-ισότητας (τύπου  $b_i = b_i^{bound}$ ), ο οποίος συμπεριλαμβάνεται στο σύστημα (2.23).

Όμως, με τον υπολογισμό της αρχικής μεταβολής, μπορεί περισσότερες από μία μεταβλητές σχεδιασμού να φτάσουν στα όριά τους, με κάποιες από αυτές να έφτασαν στο όριό τους λόγω του προαναφερθέντος σφάλματος. Δηλαδή, μπορεί μία μεταβλητή σχεδιασμού να φτάνει στο όριό της λόγω εσφαλμένου υπολογισμού της μεταβολής της και εσφαλμένα να τειθεί το όριο αυτό ως ενεργός περιορισμός ανισο-ισότητας. Επομένως, για την αποφυγή του τελευταίου, στον Ιακωβιανό πίνακα(2.24) δεν θα προστεθούν, κατευθείαν, για όλες τις μεταβλητές σχεδιασμού που φτάνουν στο όριό τους ενεργοί περιορισμοί ανισο-ισότητας. Θα προστεθεί πρώτα για μία μεταβλητή, θα επαναυπολογισθεί η μεταβολή  $\Delta\vec{b}$ , επιλύοντας ξανά το σύστημα (2.23), και θα επανεκτιμηθεί αν κάποια άλλη μεταβλητή φτάνει στο όριό της. Ο ενεργός περιορισμός ανισο-ισότητας που προστίθεται πρώτος στο σύστημα αφορά το όριο της μεταβλητής σχεδιασμού που εκτιμάται ότι αν δεν υπήρχε, θα προκαλούσε τη μεγαλύτερη μεταβολή ( $\Delta L^e$ ) στη συνάρτηση Langrange. Η εκτίμηση αυτή γίνεται με την πιο κάτω εξίσωση για κάθε μεταβλητή που ξεπερνά το όριό της και είναι πρώτης τάξεως.

$$\Delta L_i^e = \left| \frac{\partial L}{\partial b_i} \cdot (b_i + \Delta b_i - b_i^{bound}) \right| \quad (2.31)$$

Αφού ξαναλυθεί το σύστημα (2.23), με τον επιπλέον ενεργό, περιορισμό ανισο-ισότητας με την ίδια λογική επανεκτιμάται αν πρέπει να προστεθεί και άλλο όριο ως ενεργός περιορισμός ανισο-ισότητας. Γενικοποιώντας το τελευταίο εκτελείται η πιο κάτω υπορουτίνα στο βήμα 5 του αλγορίθμου, κατά την οποία εκτιμάται ποια όρια τίθενται ως περιορισμοί ανισο-ισότητας:

- α) Επίλυση του συστήματος (2.23) και υπολογισμός  $\Delta \vec{b}$  και  $\Delta \vec{\lambda}$
- β) Προσωρινός υπολογισμός των νέων τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού από τη σχέση  $\vec{b}' = \vec{b} + \Delta \vec{b}$ .
- γ) Εκτίμηση των ορίων που παραβιάζονται με την προσωρινή τιμή  $\vec{b}'$  και υπολογισμός της μεταβολής  $\Delta L_i^e$ . Αν καμία μεταβλητή δεν ξεπερνά κάποιο όριο η αυτό έχει ήδη τεθεί ως ενεργός περιορισμός ανισο-ισότητας, τότε θεωρείται ότι εκτιμήθηκε ορθά το σύνολο των ενεργών περιορισμών ανισο-ισότητας και πραγματοποιείται η ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού και των πολλαπλασιαστών Langrange, όπως αναφέρεται στο βήμα 6.
- δ) Επιβολή του ορίου της μεταβλητής σχεδιασμού, η οποία εκτιμάται ότι θα προκαλούσε τη μεγαλύτερη μεταβολή  $\Delta L_i^e$  στη συνάρτηση Langrange, ως ενεργό περιορισμό ανισο-ισότητας και επιστροφή στο βήμα (α).

Επιπλέον, εάν κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων του βήματος διόρθωσης τεθεί ένα όριο κάποιες φορές ως ενεργός περιορισμός ανισο-ισότητας, τότε θεωρείται ότι για το τρέχον σημείο του μετώπου Pareto στη βέλτιστη λύση η μεταβλητή σχεδιασμού είναι στο όριο και, επομένως, τίθεται ως ενεργός περιορισμός ανισο-ισότητας, μέχρι τη σύγκλιση του αλγορίθμου στο σημείο αυτό. Τέλος, η υπορουτίνα εκτίμησης των μεταβλητών που είναι στο όριο εφαρμόζεται και στο βήμα πρόβλεψης, καθώς, λόγω της συμπληρωματικής συνθήκης  $\lambda_i g(\vec{b}) = 0$ , δεν τίθεται θέμα μη ικανοποίησης των συνθηκών KKT αν στο σημείο από το οποίο γίνεται η πρόβλεψη δεν είναι ενεργός κάποιος περιορισμός ανισο-ισότητας ο οποίος εκτιμάται ενεργός στο επόμενο σημείο. Η διαφορά υπάρχει στο ότι αντί να λύνεται το σύστημα (2.23) λύνεται το σύστημα (2.13) και η μεταβολές  $\Delta \vec{b}$  και  $\Delta \vec{\lambda}$  υπολογίζονται από τη σχέση

$$[\Delta \vec{b} \quad \Delta \vec{\lambda}]^T = \nabla_{\vec{f}} \vec{z} (\vec{f}_{n+1} - \vec{f}_n) \quad (2.32)$$

### Κριτήρια σύγκλισης

Τέλος, τα κριτήρια σύγκλισης μαθηματικά ορίστηκαν ως εξής

1.  $\frac{|L^{new} - L^{old}|}{|L^{new}| + r} \leq \epsilon$
2.  $\frac{|f_1^{new} - f_1^{old}|}{|f_1^{new}| + r} \leq \epsilon$
3.  $|\nabla_b L| \leq \epsilon$
4.  $\frac{|v_i^{new} - v_i^{old}|}{|v_i^{new}| + r} \leq \epsilon \quad \forall \quad i = 1, N$

$$5. \frac{|f_i^{new} - \hat{f}_i|}{|\hat{f}_i| + r} \leq \epsilon_i \quad \forall \quad i = 2, M$$

$$6. |c_i| \leq \epsilon_i \quad \forall \quad i = 1, M_c$$

$$7. g_i \leq \epsilon_i \quad \forall \quad i = 1, M_g$$

όπου  $\epsilon$  μικρός θετικός αριθμός, ο οποίος μπορεί να είναι διαφορετικός για κάθε κριτήριο, και  $r$  μικρός θετικός αριθμός για αποφυγή της διαίρεσης με το μηδέν. Για να συγκλίνει ο αλγόριθμος πρέπει να ισχύουν τα κριτήρια 5 έως 7 και ένα από τα κριτήρια 1 έως 4. Αυτό, γίνεται γιατί σαφώς πρέπει να ισχύουν οι περιορισμοί, έστω με κάποια ανοχή, ενώ μπορεί κάποιο κριτήριο από τα κριτήρια 1 έως 4 να συγκλίνει γρηγορότερα από κάποιο άλλο, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ικανοποιητικό. Εάν, για παράδειγμα, κάποιος επιθυμεί να ισχύει μόνο ένα κριτήριο από τα 4 μπορεί να δώσει αρνητικό  $\epsilon$  στα υπόλοιπα 3 και μικρό θετικό  $\epsilon$  σε αυτό που επιθυμεί.

## 2.5 Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε και αναλύθηκε η βασική ιδέα του προτεινόμενου αλγορίθμου, η οποία είναι ο υπολογισμός μετώπων Pareto, αφού πρώτα βρεθεί και διακριτοποιηθεί το πεδίο τιμών των στόχων-περιορισμών  $\hat{f}_i$ , κάτι το οποίο έχει μεγαλύτερη σημασία όσον αφορά τον υπολογισμό τριδιάστατων μετώπων Pareto. Αυτό γιατί, στην περίπτωση 2 στόχων το πεδίο αυτό καθορίζεται από δύο πεπερασμένες τιμές, μία για κάθε άκρο του μετώπου, του ενός από τους δύο στόχους. Όμως, στην περίπτωση των τριών στόχων το πεδίο αυτό, είναι πολύ δυσκολότερο να εκτιμηθεί, καθώς είναι η προβολή του μετώπου στο χώρο δύο στόχων-περιορισμών, η οποία έχει ακανόνιστο σύνορο. Με την προτεινόμενη μέθοδο υπολογίζονται και προβάλλονται τρία διδιάστατα μέτωπα Pareto  $((f_1, f_2), (f_1, f_3), (f_2, f_3))$  στο χώρο των δύο στόχων-περιορισμών, εντοπίζοντας το σύνορο αυτό.

Για τον εντοπισμό των σημείων στο μέτωπο Pareto, χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος πρόβλεψης-διόρθωσης, ο οποίος έχει αποδειχθεί αξιόπιστος και σε άλλες εργασίες [10, 17, 18, 3, 2], λύνοντας διαδοχικά προβλήματα ενός στόχου και μεταβάλλοντας την τιμή των στόχων-περιορισμών από σημείο σε σημείο του μετώπου. Τα βήματα αυτά αναλύθηκαν και παρουσιάστηκαν μαθηματικά ενώ, στη συνέχεια παρουσιάστηκε λεπτομερώς, βήμα προς βήμα, ο αριθμητικός αλγόριθμος σύγκλισης των σημείων στο μέτωπο. Παράλληλα, παρουσιάστηκε ο χειρισμός των περιορισμών ανισο-ισότητας και των ορίων στις μεταβλητές σχεδιασμού, με το χειρισμό των τελευταίων να αποτελεί πρωτοτυπία, σε σχέση με τις εργασίες που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

## Κεφάλαιο 3

# Εφαρμογή σε μαθηματικά προβλήματα

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να παρουσιασθούν εφαρμογές και αποτελέσματα του προτεινόμενου αλγορίθμου σε μαθηματικά προβλήματα, κάνοντας μία πρώτη εκτίμηση για τις δυνατότητές του, με χαμηλό κόστος υπολογισμού. Οι τιμές των συναρτήσεων κόστους, των περιορισμών και των παραγώγων τους υπολογίζονται με αναλυτικό τρόπο, επομένως είναι ακριβείς, ενώ οι εφαρμογές αυτές αφορούν προβλήματα 2 στόχων με περιορισμούς ανισο-ισότητας. Επίσης, σκοπός είναι να διαπιστωθεί η ικανότητα του αλγορίθμου να υπολογίσει μέτωπα Pareto με ακρίβεια, και χαμηλό υπολογιστικό κόστος και κατά πόσον αυτό το κόστος μπορεί να μειωθεί περαιτέρω παραλείποντας επαναλήψεις από το βήμα διόρθωσης η ολόκληρο το βήμα. Παραλείποντας όμως, το βήμα διόρθωσης ή επαναλήψεις από αυτό, ενδέχεται τα σημεία που υπολογίζονται να αποκλίνουν από το μέτωπο Pareto, καθώς ενδέχεται να συσσωρευτεί σφάλμα λόγω των διαδοχικών προσεγγίσεων, ή λάθος εκτίμησης των ενεργών περιορισμών ανισο-ισότητας. Λύνονται δύο μαθηματικά προβλήματα, τα οποία βρέθηκαν στη βιβλιογραφία, ενώ το υπολογιστικό κόστος μετράται σε κλήσεις ενός λογισμικού, το οποίο υπολογίζει τις συναρτήσεις κόστους και περιορισμών, αλλά και τις παραγώγους τους.

### 3.1 Μαθηματικό πρόβλημα 1

Το πρώτο μαθηματικό πρόβλημα με την ονομασία BNH[20] ορίζεται ως

$$\begin{aligned}
 f_1(\vec{b}) &= 4b_1^2 + 4b_2^2 \\
 f_2(\vec{b}) &= (b_1 - 5)^2 + (b_2 - 5)^2 \\
 & \text{s.t.} \\
 g_1(\vec{b}) &= (b_1 - 5)^2 + b_2^2 - 25 \leq 0 \\
 g_2(\vec{b}) &= 7.7 - (b_1 - 8)^2 - (b_2 - 5)^2 \leq 0 \\
 b_1 &\in [0, 5] \\
 b_2 &\in [0, 3]
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

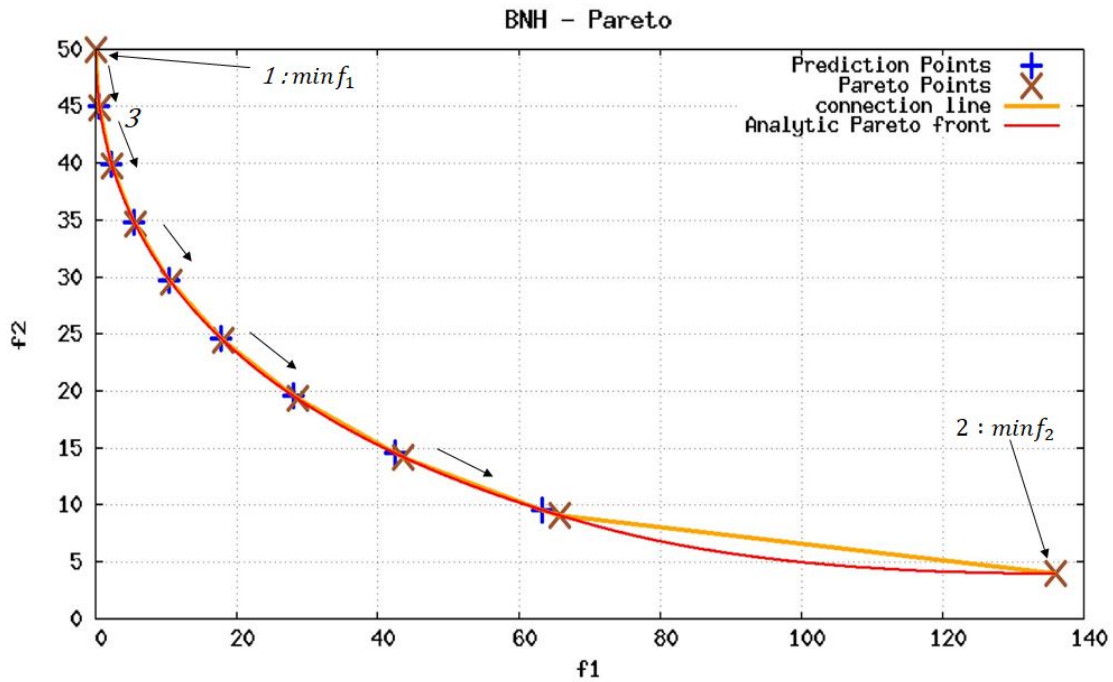
Καθώς το πρόβλημα είναι αναλυτικό, οι πρώτες παράγωγοι των στόχων και των περιορισμών αναλύονται ως εξής

$$\begin{aligned}
 \nabla_b f_1(\vec{b}) &= \begin{bmatrix} 8b_1 \\ 8b_2 \end{bmatrix}, \quad \nabla_b f_2(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 2(b_1 - 5) \\ 2(b_2 - 5) \end{bmatrix} \\
 \nabla_b g_1(\vec{b}) &= \begin{bmatrix} 2(b_1 - 5) \\ 2b_2 \end{bmatrix}, \quad \nabla_b g_2(\vec{b}) = \begin{bmatrix} -2(b_1 - 8) \\ -2(b_2 - 5) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

ενώ για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι δυνατή η εύρεση του μετώπου Pareto με αναλυτικό τρόπο, καθώς ο κάθε στόχος έχει όμοιο ρυθμό μεταβολής ως προς τις δύο μεταβλητές σχεδιασμού (ίσες συνιστώσες στις παραγώγους, όταν  $b_1 = b_2$ ). Στη βέλτιστη λύση του στόχου 1 οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι στο κάτω όριό τους, ενώ στη βέλτιστη λύση του στόχου 2 είναι στο άνω. Επομένως, το μέτωπο Pareto υπολογίζεται, ξεκινώντας από το  $(b_1, b_2) = (0, 0)$  και μεταβάλλοντας τις δύο μεταβλητές σχεδιασμού με τον ίδιο ρυθμό στο πεδίο ορισμού  $[0, 3]$  της μεταβλητής  $b_2$ , και, στη συνέχεια, μεταβάλλοντας μόνο τη μεταβλητή  $b_1$  από  $[3, 5]$ , με τη μεταβλητή  $b_2$  να μένει σταθερή στο άνω της όριο  $b_2 = 3$ .

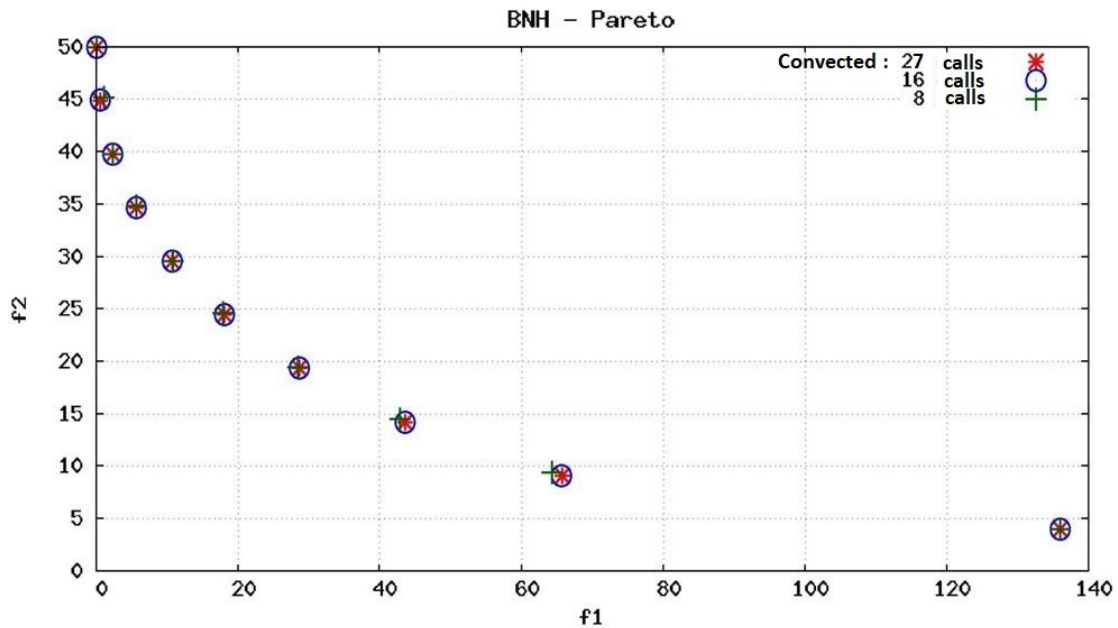
Το πρόβλημα αυτό, λύνεται κάνοντας, αρχικά, μία μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση για κάθε στόχο και ακολούθως δημιουργείται ένα σύνολο τιμών του  $\hat{f}_2$  για κάθε μέλος του μετώπου Pareto (σχήμα 3.1). Η μεταβολή του  $\hat{f}_2$ , από σημείο σε σημείο, είναι σταθερή και υπολογίζεται από τη σχέση  $\Delta \hat{f}_2 = -(f_2^U - f_2^L)/(M_p - 1)$ , όπου  $M_p$  το σύνολο των σημείων στο μέτωπο και  $f_2^U - f_2^L$  η διαφορά στο στόχο  $f_2$  των δύο ακραίων σημείων του μετώπου Pareto. Το τελευταίο υπολογίζεται από πάνω προς τα κάτω, δηλαδή η πρώτη πρόβλεψη του επόμενου σημείου γίνεται από το πάνω άκρο του μετώπου. Στο σχήμα 3.1 φαίνεται ότι τα σημεία πρόβλεψης αποτελούν πολύ καλή προσέγγιση των σημείων που εντοπίζονται στο βήμα διόρθωσης, τα οποία εντοπίζονται με μεγάλη ακρίβεια. Στο άνω άκρο του μετώπου βρέθηκε ενεργός ο περιορισμός ανισο-ισότητας  $g_1(\vec{b}) = 0$ , με τις μεταβλητές σχεδιασμού να βρίσκονται στο κάτω όριό τους, ενώ στο κάτω άκρο βρίσκονται στο άνω.





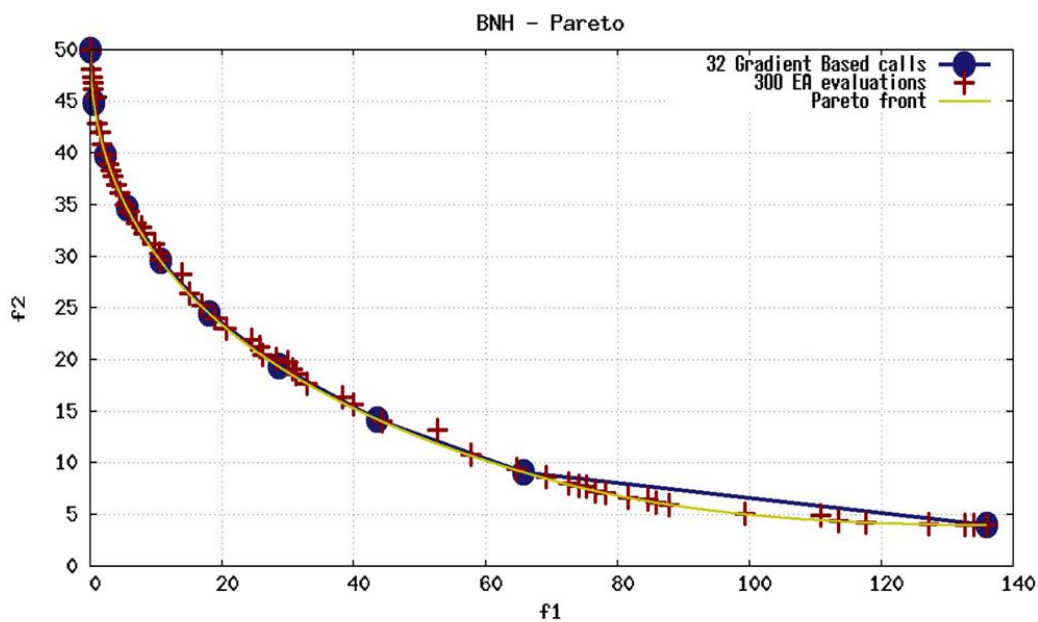
**Σχήμα 3.1:** Μέτωπο Pareto 10 σημείων. Αρχικά, γίνεται βελτιστοποίηση του  $f_1$ , στη συνέχεια του  $f_2$  και, τέλος, υπολογίζονται τα ενδιάμεσα σημεία με την προτεινόμενη μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης, με τα βέλη να διαγράφουν την πορεία υπολογισμού τους.

Έχοντας υπόψη ότι στο κάθε βήμα πρόβλεψης υπολογίζεται μία πολύ καλή προσέγγιση του επόμενου σημείου, στη συνέχεια διερευνάται κατά πόσον το βήμα διόρθωσης, κατά το οποίο γίνονται και οι περισσότερες επανλήψεις και είναι το πιο κοστοβόρο, μπορεί να παραλειφθεί ή να γίνει μόνο μία επανάληψη σε αυτό. Τα ακραία σημεία του μετώπου υπολογίζονται, όπως προηγουμένως, με μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση, οπότε το κόστος που αναφέρεται στο σχήμα 3.2, αφορά μόνο τα ενδιάμεσα σημεία, τα οποία και υπολογίζονται με την προτεινόμενη μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης. Αποφεύγοντας το βήμα διόρθωσης, παρατηρείται πως σχεδόν όλα τα σημεία (πλην ενός) που εντοπίζονται δεν κυριαρχούνται από τα σημεία που εντοπίστηκαν αρχικά. Με μία επανάληψη στο βήμα διόρθωσης τα σημεία βρέθηκαν να ταυτίζονται, σχεδόν, με τα σημεία τα οποία χρειάστηκαν 27 αξιολογήσεις για να συγκλίνουν στη βέλτιστη λύση. Συμπεραίνεται πως το βήμα διόρθωσης θα μπορούσε να παραλειφθεί και ότι γίνεται καλή προσέγγιση του Εσσιανού μητρώου, ακόμα και αν η ανανέωση του γίνεται από σημείο σε σημείο του μετώπου Pareto.

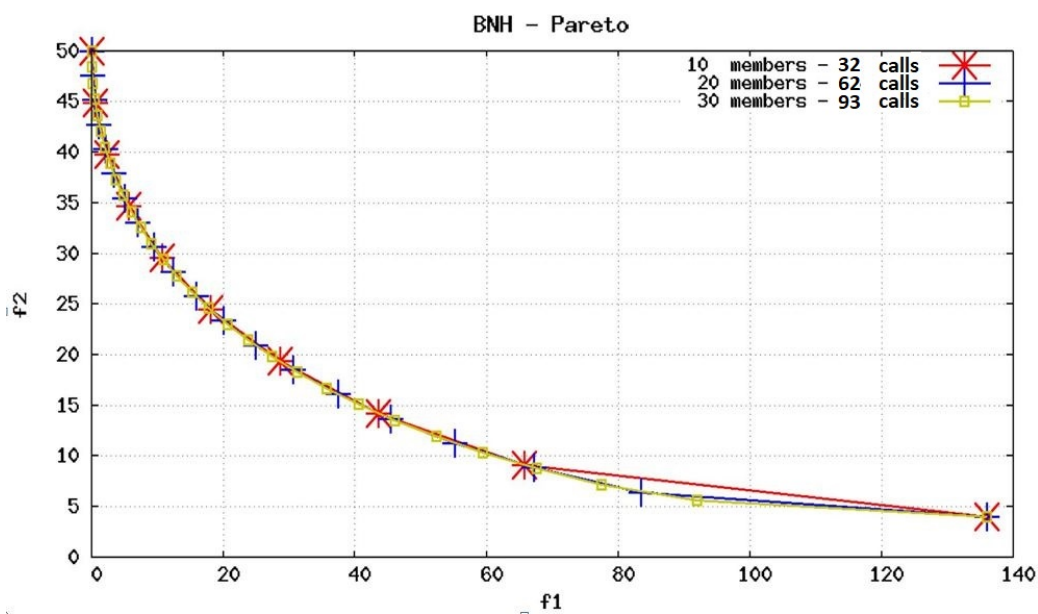


**Σχήμα 3.2:** Παρουσίαση απόδοσης του αλγορίθμου με μία μόνο αξιολόγηση στο βήμα διόρθωσης και με αποφυγή του βήματος αυτού. Ο αριθμός των κλήσεων αφορά τα 8 ενδιαμέσα σημεία.

Το πρόβλημα αυτό λύθηκε με το σχήμα (2.18) στο βήμα διόρθωσης και με τη μέθοδο BFGS για την προσέγγιση του Εσσιανού μητρώου. Για τον υπολογισμό όλων των σημείων του μετώπου χρειάστηκαν συνολικά 32 κλήσεις ενός λογισμικού, το οποίο υπολογίζει τις συναρτήσεις κόστους και περιορισμών και τις πρώτες παραγώγους τους με αναλυτικό τρόπο, ενώ για τη μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση του στόχου  $f_1$  και του στόχου  $f_2$  χρειάστηκαν 3 και 2 αντίστοιχα. Σε όλα τα κριτήρια σύγκλισης τοποθετήθηκε  $\epsilon = 10^{-7}$ , κάτι που δείχνει την ακρίβεια υπολογισμού των σημείων στο μέτωπο. Στη συνέχεια, στο σχήμα 3.3 γίνεται σύγκριση αποτελεσμάτων με εξελικτικό αλγόριθμο, ο οποίος αφέθηκε να τρέξει για μεγάλο αριθμό αξιολογήσεων. Ακολούθως, στο σχήμα 3.4 γίνεται σύγκριση αποτελεσμάτων και κόστους, όταν γίνεται αύξηση του αριθμού των μελών στο μέτωπο. Παρατηρείται πως το υπολογιστικό κόστος ανά μέλος του Pareto είναι περίπου σταθερό και ίσο με 3.2 κλήσεις και ότι δεν φαίνεται να εξαρτάται από τον αριθμό των μελών η το  $\Delta f_2$ .



Σχήμα 3.3: Σύγκριση αποτελεσμάτων εξελικτικού αλγορίθμου με την προτεινόμενη αιτιοκρατική (Gradient-Based) μέθοδο. Ο εξελικτικός αλγόριθμος έτρεξε με σύνολο γονέων 20 και σύνολο απογόνων 60 σε κάθε γενιά με πραγματική κωδικοποίηση και χωρίς τη χρήση μεταμοντέλου.



Σχήμα 3.4: Σύγκριση αποτελεσμάτων και κόστους, με την αύξηση του αριθμού των μελών στο μέτωπο Pareto.

Συνοψίζοντας, μέσα από τα αποτελέσματα αυτού του προβλήματος, εκτιμάται ότι τα σημεία στο μέτωπο εντοπίζονται με μεγάλη ακρίβεια και χαμηλό υπολογιστικό κόστος, ενώ φαίνεται πως υπολογίζοντας το μέτωπο με λιγότερη ακρίβεια μπορούν να παραλει-

φθούν επαναλήψεις από το βήμα διόρθωσης η να παραλειφθεί εντελώς το βήμα αυτό, μειώνοντας περαιτέρω, το κόστος υπολογισμού. Ακόμη, φαίνεται ότι το κόστος υπολογισμού κάθε επόμενου σημείου είναι ανεξάρτητο από τη διαφορά των τιμών  $\hat{f}_{i+1} - \hat{f}_i$ , και, επομένως, το συνολικό κόστος εξαρτάται από τον αριθμό των σημείων που εντοπίζονται στο μέτωπο. Σκοπός της ανάλυσης του επόμενου προβλήματος είναι να διαπιστωθεί κατά πόσον αυτές οι πρώτες εκτιμήσεις για τις δυνατότητες του αλγορίθμου επιβεβαιώνονται η διαψεύδονται.

### 3.2 Μαθηματικό πρόβλημα 2

Το δεύτερο μαθηματικό πρόβλημα με την ονομασία SRN[21] ορίζεται ως

$$\begin{aligned} f_1(\vec{b}) &= 2 + (b_1 - 2)^2 + (b_2 - 1)^2 \\ f_2(\vec{b}) &= 9b_1 - (b_2 - 1)^2 \\ & \text{s.t.} \\ g_1(\vec{b}) &= b_1^2 + b_2^2 - 225 \leq 0 \\ g_2(\vec{b}) &= b_1 - 3b_2 + 10 \leq 0 \\ b_1 &\in [-20, 20] \\ b_2 &\in [-20, 20] \end{aligned} \tag{3.3}$$

Οι πρώτες παράγωγοι των στόχων και των περιορισμών αναλύονται ως εξής

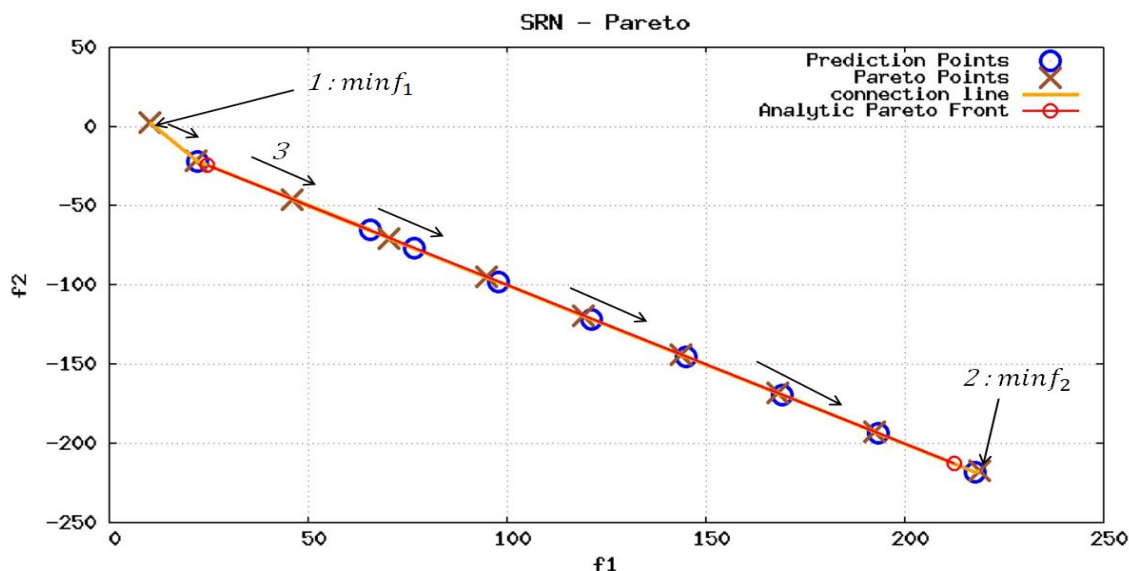
$$\begin{aligned} \nabla_b f_1(\vec{b}) &= \begin{bmatrix} 2(b_1 - 2) \\ 2(b_2 - 1) \end{bmatrix}, \quad \nabla_b f_2(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 9 \\ -2(b_2 - 1) \end{bmatrix} \\ \nabla_b g_1(\vec{b}) &= \begin{bmatrix} 2b_1 \\ 2b_2 \end{bmatrix}, \quad \nabla_b g_2(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Η αναλυτική λύση του προβλήματος εντοπίζεται στη βιβλιογραφία[21]. Στο χώρο των στόχων ορίζεται, ως το ευθύγραμμο τμήμα κλίσης 45 μοιρών που ενώνει τα σημεία  $(f_1, f_2) = (24.5, -24.5)$  και  $(f_1, f_2) = (212.5, -212.5)$ , με τη μεταβλητή σχεδιασμού να είναι σταθερή στο  $b_1 = -2.5$ , ενώ η μεταβλητή  $b_2$  μεταβάλλεται από  $[2.5, 14.7903]$ .

Αρχικά, το πρόβλημα αυτό λύνεται όπως προηγουμένως, δηλαδή γίνεται μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση για κάθε στόχο, εντοπίζοντας τα άκρα του μετώπου Pareto και, στη συνέχεια, τα εσωτερικά του σημεία. Στο βήμα διόρθωσης χρησιμοποιείται το μαθηματικό σχήμα  $\chi(2.15)$ , ενώ για την προσέγγιση του Εσσιανού μητρώου η μέθοδος SR1 και η BFGS, με όμοιο αποτέλεσμα, το οποίο φαίνεται στο σχήμα (3.5). Παρατηρείται ότι στο βήμα πρόβλεψης εντοπίζονται σημεία που ανήκουν στο μέτωπο Pareto, με αυτά να υπολογίζονται λίγο πιο κάτω από τα σημεία που υπολογίζονται στο βήμα διόρθωσης. Επίσης, οι ακραίες λύσεις που εντοπίζονται, είναι εκτός του ευθύγραμμου τμήματος που δίδεται ως αναλυτική λύση<sup>1</sup>, ενώ αυτές έχουν ενεργούς περιορισμούς. Το υπολο-

<sup>1</sup>Τέτοιες ακραίες λύσεις, εκτός του ευθύγραμμου τμήματος, εντοπίζονται και με εξελικτικό αλγόριθμο, όπως αναφέρεται στην ίδια βιβλιογραφία[21].

γιστικό κόστος αναλύεται στον πίνακα 3.1 και για τις δύο μεθόδους προσέγγισης του Εσσιανού μητρώου που χρησιμοποιήθηκαν.

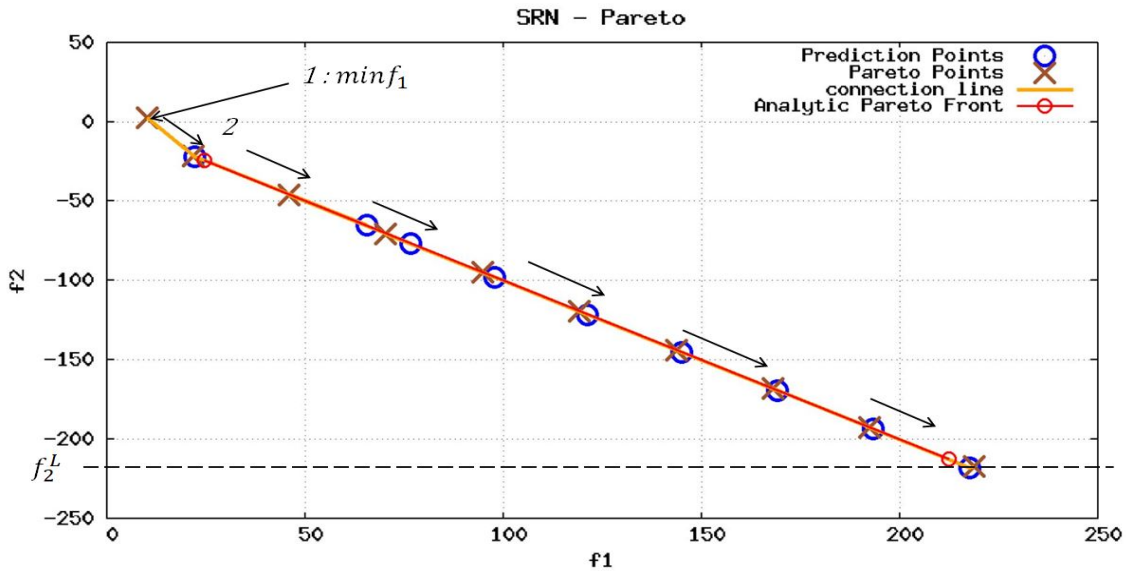


**Σχήμα 3.5:** Μέτωπο Pareto 10 σημείων. Αρχικά, γίνεται μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση των στόχων  $f_1$  και  $f_2$  και, στη συνέχεια, υπολογίζονται τα υπόλοιπα 8 σημεία με την προτεινόμενη μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης, ενώ τα βέλη διαγράφουν την πορεία υπολογισμού τους. Για τα κριτήρια σύγκλισης ισχύει  $\epsilon = 10^{-7}$ .

Προσέγγιση Εσσιανού μητρώου	Βελτιστοποίηση	Κλήσεις λογισμικού
SR1	Στόχου $f_1$	5
SR1	Στόχου $f_2$	9
SR1	Pareto ( $f_1, f_2$ ) (εκτός άκρων)	30
SR1	Σύνολο	44
BFGS	Στόχου $f_1$	8
BFGS	Στόχου $f_2$	11
BFGS	Pareto ( $f_1, f_2$ ) (εκτός άκρων)	35
BFGS	Σύνολο	54

**Πίνακας 3.1:** Στο κόστος κλήσης του λογισμικού, συμπεριλαμβάνονται το κόστος υπολογισμού των στόχων και των περιορισμών, αλλά και των παραγώγων τους. Με τη μέθοδο SR1 υπάρχει γρηγορότερη σύγκλιση σε αυτό το πρόβλημα, όμως δεν χρησιμοποιείται στη συνέχεια, καθώς δεν παράγει απαραίτητα θετικά ορισμένο Εσσιανό μητρώο.

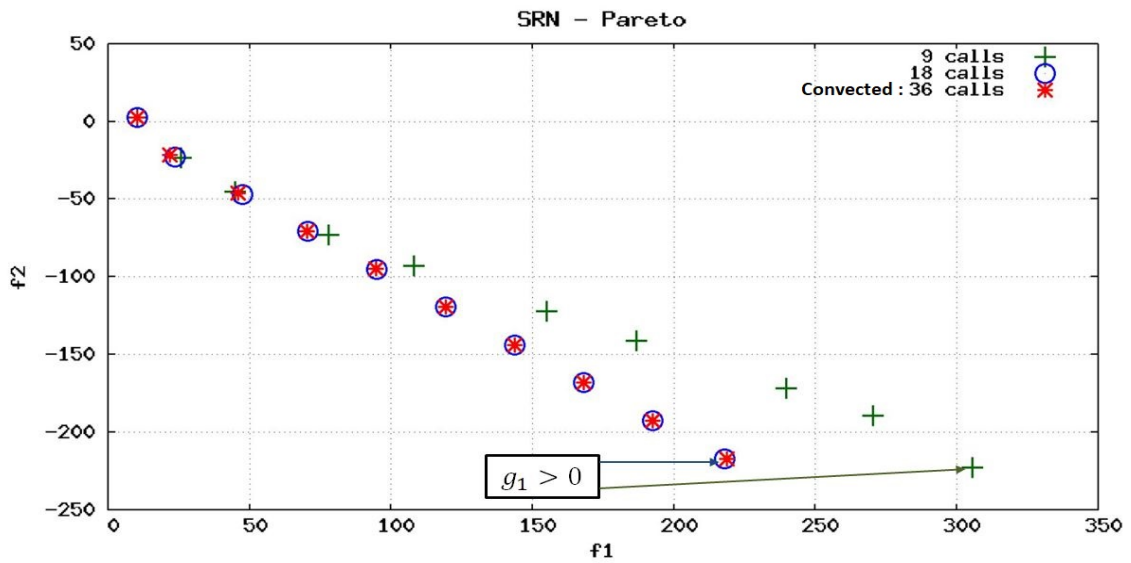
Ακολούθως, το μέτωπο εντοπίζεται με διαφορετικό τρόπο, παρουσιάζοντας, μια διαφορετική τεχνική υπολογισμού του. Γίνεται μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση για τον πρώτο στόχο και ακολούθως δημιουργείται το σύνολο τιμών  $\hat{f}_2$  με τη μεταβολή του από σημείο σε σημείο να υπολογίζεται, όμοια με το πρόβλημα 1, από τη σχέση  $\Delta \hat{f}_2 = -(f_2^U - f_2^L)/(M_p - 1)$ , όπου το  $f_2^L = -217$ , το οποίο επιβάλλεται (σχήμα 3.6).



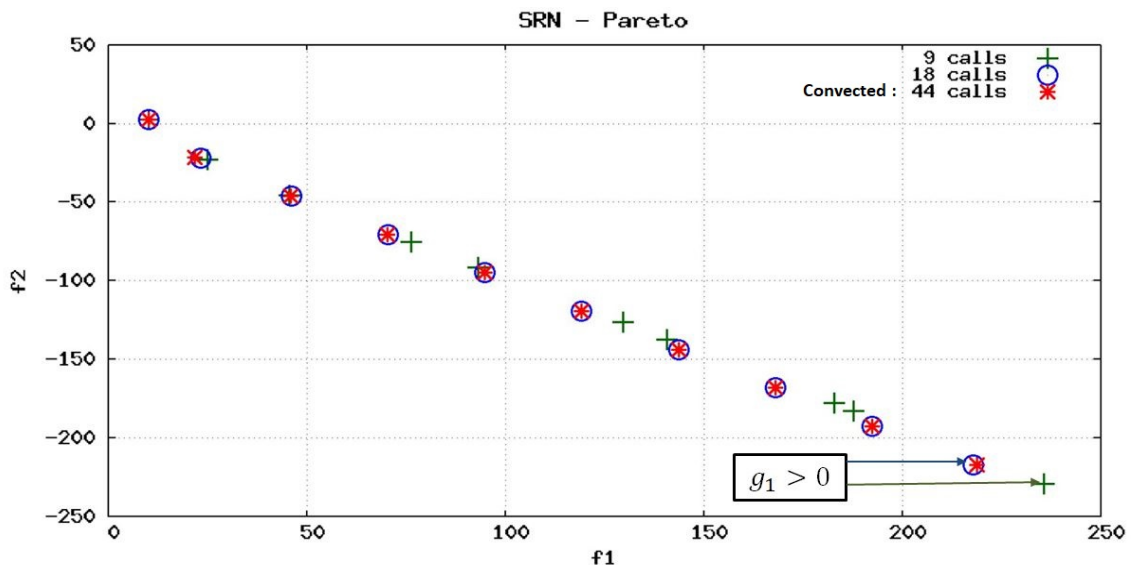
**Σχήμα 3.6:** Μέτωπο Pareto 10 σημείων. Αρχικά, γίνεται μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση του στόχου  $f_1$  και, στη συνέχεια, υπολογίζονται τα υπόλοιπα 9 σημεία με την προτεινόμενη μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης, ενώ τα βέλη διαγράφουν την πορεία υπολογισμού τους. Για τα κριτήρια σύγκλισης ισχύει  $\epsilon = 10^{-7}$ .

Στη συνέχεια, στα σχήματα (3.7) και (3.8) παρουσιάζεται η απόδοση του αλγορίθμου χωρίς το βήμα διόρθωσης ή με μία μόνο επανάληψη σε αυτό. Στο σχήμα (3.7) χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος SR1, ενώ στο σχήμα (3.8) χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος BFGS. Το άνω άκρο εντοπίζεται με μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση, ενώ το κάτω άκρο, εντοπίζεται κατά τη διαδικασία πρόβλεψης-διόρθωσης θέτοντας ως  $f_2^L = -217$ .

Παρατηρείται πως, όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος SR1, εάν παραλειφθεί το βήμα διόρθωσης, ο αλγόριθμος αποτυγχάνει να προσεγγίσει το μέτωπο, εκτός από τα τρία πρώτα σημεία. Επίσης, ακόμα και με μία διόρθωση, υπάρχει ένα σημείο, στο οποίο ο περιορισμός ισότητας δεν ικανοποιείται. Από την άλλη, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο BFGS και εκτελώντας μόνο το βήμα πρόβλεψης, η προσέγγιση δεν είναι τόσο καλή όσο η αρχική (σχήμα 3.5), ενώ υπάρχουν σημεία για τα οποία δεν ικανοποιούνται οι περιορισμοί, ακόμα και με μία διόρθωση. Αντίθετα, όταν ο αλγόριθμος αφήνεται να συγκλίνει, εντοπίζει τα σημεία στο μέτωπο είτε με τη μέθοδο SR1, είτε με τη μέθοδο BFGS, κάτι που δείχνει ότι όταν γίνεται αυτό η προσέγγιση του Εσσιανού μητρώου είναι καλύτερη καθώς τα επόμενα σημεία προσεγγίζονται με μεγαλύτερη ακρίβεια στο βήμα πρόβλεψης. Οπότε, δεν μπορεί να επιβεβαιωθεί ότι το βήμα διόρθωσης δεν είναι αναγκαίο. Όπως φάνηκε στο μαθηματικό πρόβλημα 1, το βήμα διόρθωσης δεν ήταν αναγκαίο, όμως παραλείποντας το στο δεύτερο μαθηματικό πρόβλημα, φαίνεται πως αυτό δεν μπορεί να γενικοποιηθεί. Εξακολουθεί, όμως, με εξαίρεση ένα σημείο στο οποίο δεν ικανοποιείται ο περιορισμός ανισο-ισότητας, κάνοντας μία επανάληψη στο βήμα διόρθωσης να μπορεί το μέτωπο Pareto να εντοπισθεί με ικανοποιητική ακρίβεια.

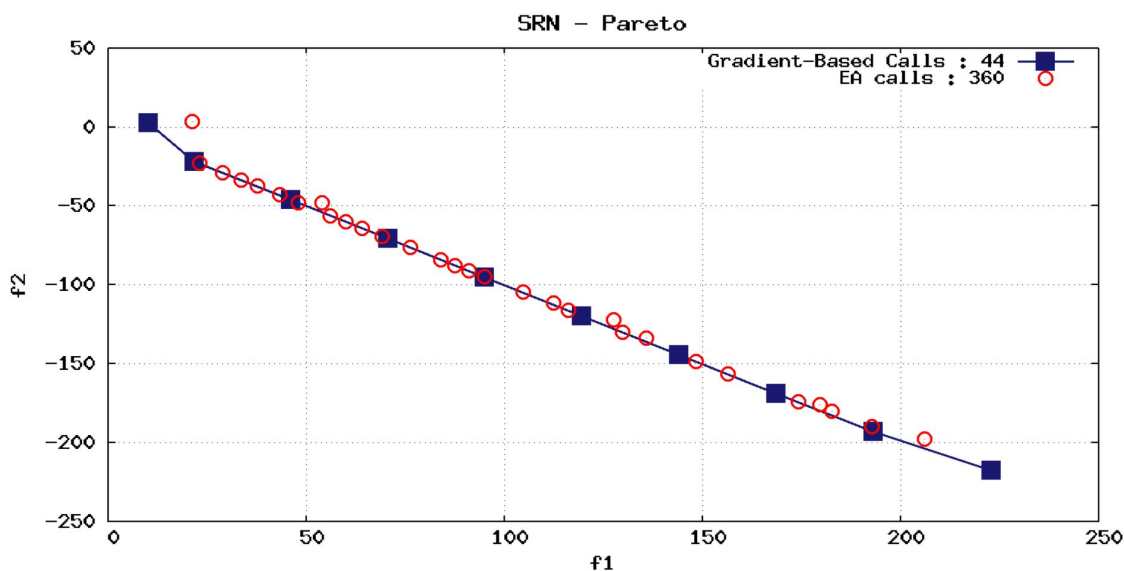


Σχήμα 3.7: Παρουσίαση απόδοσης του αλγορίθμου με μία μόνο αξιολόγηση στο βήμα διόρθωσης και χωρίς αυτό, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο SR1 για την προσέγγιση του Εσσιανού μητρώου.

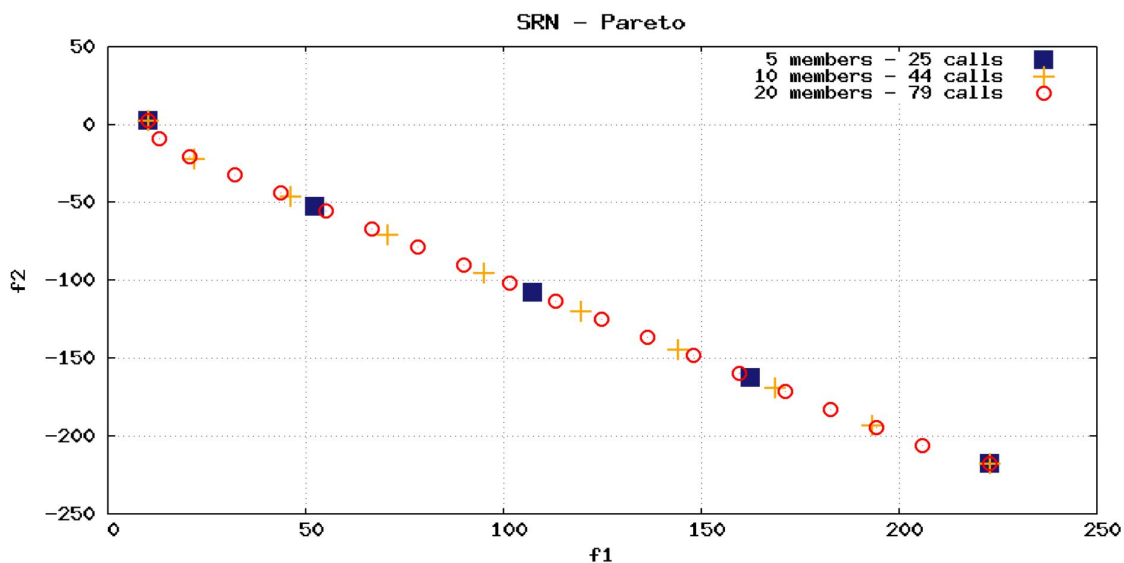


Σχήμα 3.8: Παρουσίαση απόδοσης του αλγορίθμου με μία μόνο αξιολόγηση στο βήμα διόρθωσης και χωρίς αυτό, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο BFGS για την προσέγγιση του Εσσιανού μητρώου.

Ακολουθώντας, στο σχήμα (3.9) γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων με εξελικτικό αλγόριθμο. Τέλος, στο σχήμα (3.10) υπολογίζεται ξανά το μέτωπο με 5 και 20 μέλη, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο SR1, επιβεβαιώνοντας ότι το κόστος υπολογισμού του μετώπου είναι ανάλογο του αριθμού των μελών που επιθυμείται να έχει το Pareto, παρόλο που παρατηρείται ότι το κόστος ανά σημείο μειώνεται, ελαφρώς, με τη μείωση του  $\Delta f_2$ .



**Σχήμα 3.9:** Σύγκριση αποτελεσμάτων εξελικτικού αλγορίθμου *EASY* με την προτεινόμενη αιτιοκρατική (*Gradient-Based*) μέθοδο. Στο κόστος κλήσης της προτεινόμενης μεθόδου συμπεριλαμβάνεται το κόστος υπολογισμού των παραγώγων. Ο εξελικτικός αλγόριθμος έτρεξε με σύνολο γονέων 20 και σύνολο απογόνων 60 σε κάθε γενιά με πραγματική κωδικοποίηση, χωρίς τη χρήση μεταμοντέλου.



**Σχήμα 3.10:** Υπολογιστικό κόστος και μέτωπο *Pareto* με λιγότερα η περισσότερα μέλη.



Συνοψίζοντας, συμπεραίνεται πως το κοστοβόρο βήμα διόρθωσης, δεν μπορεί να παραλειφθεί, τουλάχιστον χωρίς ρίσκο, καθώς υπάρχει ο κίνδυνος να μην εντοπιστεί το μέτωπο Pareto. Μία εναλλακτική περίπτωση είναι στο βήμα διόρθωσης να γίνει μόνο μία επανάληψη, μειώνοντας αυτό το ρίσκο μεν, αλλά διπλασιάζοντας το υπολογιστικό κόστος. Επιπλέον, καθώς ο αριθμός των περιορισμών ανισο-ισότητας στο πρόβλημα μεγαλώνει, εάν συνυπολογισθούν και οι περιορισμοί ανισο-ισότητας λόγω των ορίων στις μεταβλητές σχεδιασμού, δεν θα είναι καθόλου εύκολο χωρίς να αφήνεται να συγχλίνει στο βήμα διόρθωσης ο αλγόριθμος, να γίνει ορθή εκτίμηση των ενεργών περιορισμών και να υπολογισθεί ένα έγκυρο μέτωπο Pareto στο οποίο δεν θα παραβιάζονται οι περιορισμοί αυτοί. Αντίθετα, έχειδειχθεί ότι ο αλγόριθμος υπολογίζει το μέτωπο Pareto με πολύ καλή ακρίβεια και ικανοποιητικό υπολογιστικό κόστος, εφόσον αφηθεί να συγχλίνει στο βήμα διόρθωσης. Επίσης, έχειδειχθεί ότι μπορεί να εντοπισθεί το μέτωπο χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά σχήματα (2.15,2.18) και τις προσεγγιστικές μεθόδους Newton SR1 και BGFS. Τέλος, σημαντικό συμπέρασμα αποτελεί ότι το κόστος υπολογισμού είναι ανάλογο του πλήθους των σημείων στο μέτωπο. Αυτό είναι αρνητικό, στην περίπτωση που επιθυμείται πυκνό μέτωπο Pareto και θετικό στην περίπτωση που χρειάζονται λίγα σημεία. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο σε αεροδυναμικά προβλήματα, εντοπίζεται μέτωπο Pareto τριών στόχων κατά το οποίο το υπολογιστικό κόστος αυξάνεται σε σχέση με μέτωπα Pareto 2 στόχων, καθώς χρειάζεται να υπολογισθούν πιο πολλά σημεία, για να είναι ικανοποιητικά πυκνό το μέτωπο αυτό.

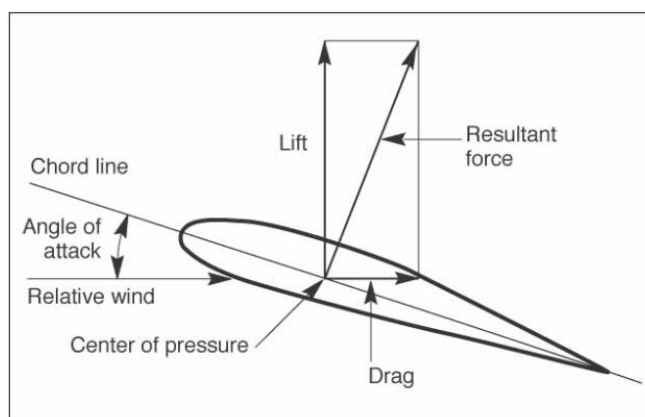


## Κεφάλαιο 4

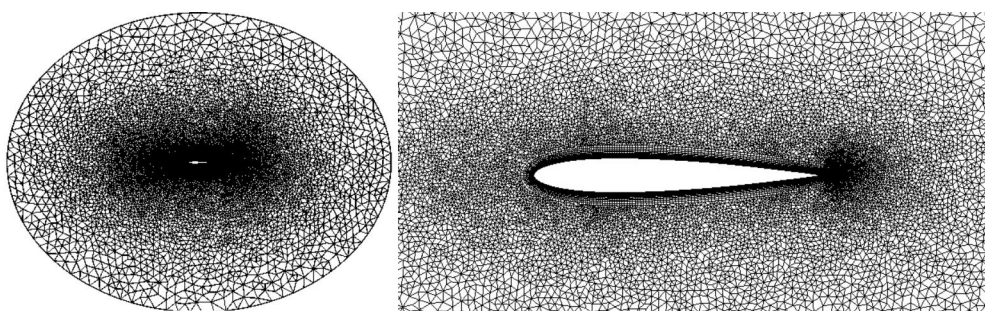
# Αεροδυναμική βελτιστοποίηση μορφής αεροτομής

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να γίνει πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση μορφής σε αεροτομή, πιστοποιώντας τις ικανότητες του αλγόριθμου που αναπτύχθηκε, σε δύο αεροδυναμικά προβλήματα. Ως στόχοι τίθενται η ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας, καθώς αυτό μειώνει τις αεροδυναμικές απώλειες, για παράδειγμα ενός αεροσκάφους και κατά συνέπεια την κατανάλωση καυσίμου, αλλά και η μεγιστοποίηση της άνωσης της αεροτομής. Μεγάλη άνωση μπορεί να απαιτείται για την απογείωση ενός αεροσκάφους και για την αύξηση του βάρους που είναι ικανό να μεταφέρει. Ως περιορισμός, είτε ισότητας είτε ανισο-ισότητας, τίθεται το εμβαδόν της αεροτομής το οποίο μπορεί να τεθεί και ως στόχος μεγιστοποίησης, καθώς πολλά αεροσκάφη χρησιμοποιούν το εσωτερικό της πτέρυγας τους για αποθήκευση καυσίμου.

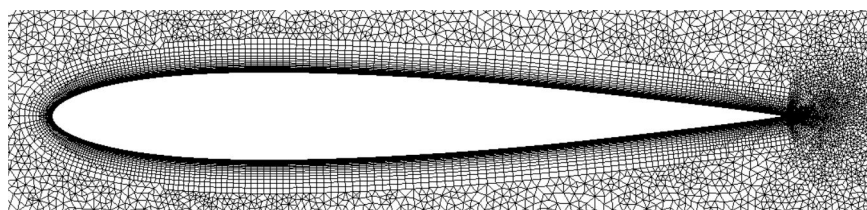
Η βελτιστοποίηση γίνεται σε συμπιεστή και τυρβώδη ροή, ενώ η αρχική αεροτομή είναι η *NACA0012*, η οποία είναι συμμετρική. Στα δύο προβλήματα ισχύει ότι, στο επ' άπειρο όριο, η πίεση είναι  $P_\infty = 101325 Pa$ , η θερμοκρασία  $T_\infty = 300 K$ , η πυκνότητα  $\rho_\infty = 1.2 kg/m^3$  και η συνεκτικότητα  $\nu_\infty = 5.85 \cdot 10^{-5} kg/ms$ . Το μήκος αναφοράς, δηλαδή η χορδή της αεροτομής, είναι  $1 m$  και το εμβαδόν αναφοράς  $S_{ref} = 0.05 m^2$ , ενώ οι συντελεστές άνωσης και οπισθέλκουσας υπολογίζονται από τις σχέσεις  $C_L = \frac{L}{0.5 \rho_\infty V_\infty^2 S_{ref}}$  και  $C_D = \frac{D}{0.5 \rho_\infty V_\infty^2 S_{ref}}$ . Στο πρώτο πρόβλημα η γωνία της επ' άπειρο ροής είναι  $5$  μοίρες (σχήμα 4.1) ενώ η ταχύτητα της επ' άπειρο ροής είναι  $V_\infty = 170 m/s$ , με τον αριθμό Reynolds να είναι  $R = 2.906 \cdot 10^6$ . Στο δεύτερο πρόβλημα η ταχύτητα της επ' άπειρον ροής είναι  $V_\infty = 140 m/s$  και η γωνία της επ' άπειρο ροής μηδενική με τον αριθμό Reynolds να είναι  $R = 2.393 \cdot 10^6$ . Το πλέγμα του πεδίου ροής, το οποίο είναι όμοιο και για τα δύο προβλήματα, είναι μη-δομημένο (σχήμα 4.2) στο ευρύτερο πεδίο της ροής και δομημένο σε μια πολύ στενή ζώνη σε επαφή με την αεροτομή (σχήμα 4.3).



**Σχήμα 4.1:** Παρουσίαση της γωνίας πρόσπτωσης (*angle of attack*) σε αεροτομή και των δυνάμεων άνωσης (*lift*) και οπισθέλκουσας (*drag*) [22]. Στην εργασία, η γωνία πρόσπτωσης θεωρείται ίση με τη γωνία της επ' άπειρο ροής, με τις δυνάμεις άνωσης και οπισθέλκουσας να υπολογίζονται σε σχέση με τη γωνία αυτή.



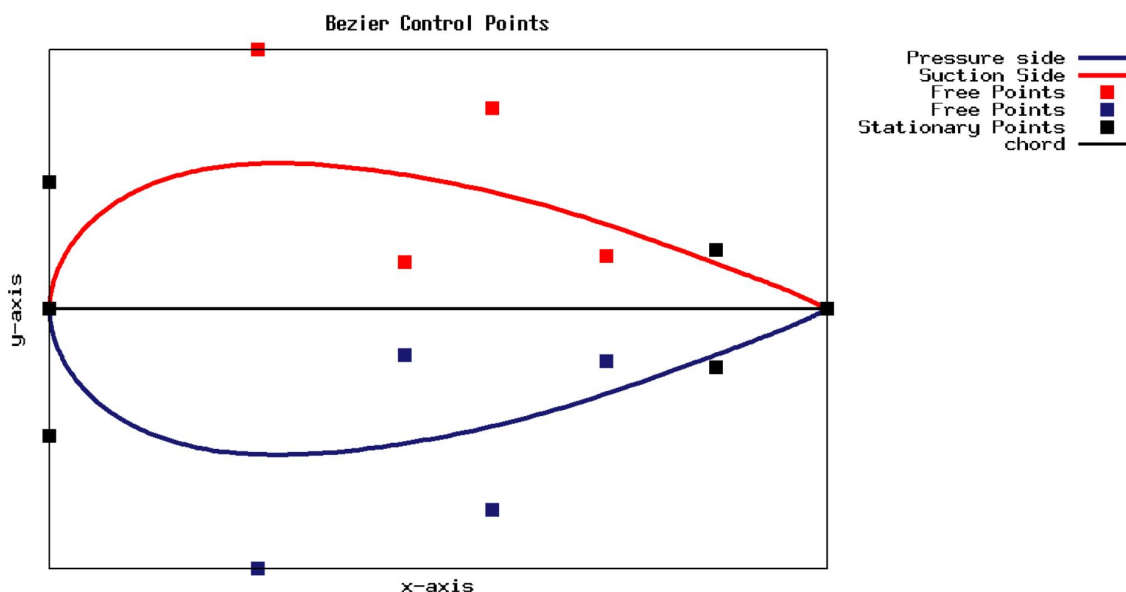
**Σχήμα 4.2:** Το ευρύτερο μη-δομημένο πλέγμα του πεδίου ροής, το οποίο γίνεται πυκνότερο όσο πλησιάζει στην αεροτομή και στη συνέχεια μετατρέπεται σε δομημένο σε μια πολύ στενή ζώνη σε επαφή με την αεροτομή.



**Σχήμα 4.3:** Το δομημένο πλέγμα τύπου H γύρω από την αεροτομή, το οποίο γίνεται πυκνότερο όσο φτάνει στο τοίχωμα της αεροτομής.

Το σχήμα της αεροτομής παραμετροποιείται με σημεία ελέγχου Bezier-Bernstein (παράρτημα Α'.10). Για την παραμετροποίηση χρησιμοποιούνται συνολικά 16 σημεία, 8 για κάθε πλευρά της αεροτομής. Σε κάθε πλευρά τα 4, δύο σε κάθε ακμή, από τα 8 σημεία είναι σταθερά με αποτέλεσμα τα σημεία στην ακμή προσβολής και στην ακμή εκφυγής, αλλά και η κλίση του σχήματος της κάθε πλευράς στα σημεία αυτά να παρα-

μένει σταθερή (σχήμα 4.4). Τα υπόλοιπα 8 σημεία, είναι ελεύθερα να κινηθούν μόνο κατά τον άξονα- $y$ , με τις θέσεις αυτές να αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος.



**Σχήμα 4.4:** Το σχήμα της αεροτομής μαζί με τα σημεία ελέγχου. Τα πάνω σημεία καθορίζουν το σχήμα της πλευράς υποπίεσης, ενώ τα κάτω σημεία το σχήμα της πλευράς υπερπίεσης. Τα κόκκινα και μπλε σημεία, μεταβάλλονται κατά τον  $y$ -άξονα, κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης, μεταβάλλοντας το σχήμα των πλευρών υποπίεσης και υπερπίεσης, αντίστοιχα. Τα μαύρα σημεία παραμένουν σταθερά καθορίζοντας τα δύο άκρα και την κλίση των καμπυλών της αεροτομής στα σημεία αυτά.

Σε κάθε επανάληψη, αρχικά στο πλέγμα γίνεται προσαρμογή, σύμφωνα με το νέο σχήμα της αεροτομής (δηλαδή τις νέες μεταβλητές σχεδιασμού) και το λογισμικό αξιολόγησης, δηλαδή ο επιλύτης ροής PUMA είναι υπεύθυνος για την επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος ροής και την εύρεση των πρώτων παραγώγων των συναρτήσεων κόστους και περιορισμών, με τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Η εύρεση των παραγώγων αυτών προσθέτει επιπλέον υπολογιστικό κόστος στο πρόβλημα, σε σχέση με τον υπολογισμό του μετώπου Pareto με εξελικτικό αλγόριθμο, οι οποίοι δεν χρησιμοποιούν τις παραγώγους των συναρτήσεων (derivative-free). Αυτό το κόστος, όμως, είναι μικρό και ανάλογο των συναρτήσεων για τις οποίες υπολογίζονται οι πρώτες παράγωγοι, όταν χρησιμοποιείται ο συζυγής επιλύτης που εμπεριέχεται στον PUMA, ενώ το κόστος των εξελικτικών αλγορίθμων είναι ανάλογο του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού. Στην εργασία αυτή, ο συζυγής επιλύτης χρησιμοποιείται μόνο για την εύρεση των παραγώγων  $\frac{dC_L}{db_i}$  και  $\frac{dC_D}{db_i}$ , ενώ οι πρώτες παράγωγοι ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού του εμβαδού  $E$  της αεροτομής υπολογίζονται με πεπερασμένες διαφορές, καθώς το εμβαδόν αποτελεί γεωμετρική ποσότητα και δεν απαιτείται η επίλυση της συζυγούς ροής για τον υπολογισμό τους. Επομένως, το κόστος μετράται σε ισοδύναμες λύσεις της

ροής (Equivalent Flow Solutions -EFS-), καθώς το κόστος υπολογισμού των πρώτων παραγώγων για κάθε στόχο, με τη συνεχή συζυγή μέθοδο είναι περίπου ίσο με το κόστος επίλυσης του πρωτεύοντος προβλήματος. Για παράδειγμα, αν σε μία επανάληψη του αλγορίθμου απαιτείται ο υπολογισμός των στόχων  $C_D$ ,  $C_L$  και των πρώτων παραγώγων τους, λύνεται μία φορά η ροή και μία φορά για κάθε στόχο το συζυγές πεδίο της ροής με αποτέλεσμα το υπολογιστικό κόστος της επανάληψης να είναι 3 EFS. Από την άλλη, στο λογισμικό EASY χρησιμοποιείται πραγματική κωδικοποίηση, 15 γονείς και 45 απογόνοι σε κάθε γενιά, χωρίς τη χρήση μεταμοντέλων.

Τέλος, σε όλους τους πιο κάτω υπολογισμούς χρησιμοποιείται το μαθηματικό σχήμα 2.18 στο βήμα διόρθωσης και η μέθοδος dBFGS για την προσέγγιση του Εσσιανού μητρώου.

## 4.1 Πρώτο Αεροδυναμικό Πρόβλημα

Αρχικά, υπολογίζονται τρία διδιάστατα μέτωπα Pareto με στόχους την ελαχιστοποίηση του συντελεστή οπισθέλκουσας και τη μεγιστοποίηση του συντελεστή άνωσης. Στο πρώτο μέτωπο δεν τίθεται κάποιος περιορισμός, στο δεύτερο μέτωπο τίθεται περιορισμός ισότητας στο εμβαδόν της αεροτομής, ενώ στο τρίτο μέτωπο Pareto το εμβαδόν τίθεται ως περιορισμός ανισο-ισότητας. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η προσπάθεια υπολογισμού του τριδιάστατου μετώπου, με τρίτο στόχο τη μεγιστοποίηση του εμβαδού της αεροτομής και την προτεινόμενη μέθοδο.

### 4.1.1 Μέτωπο Pareto $C_D - C_L$ χωρίς περιορισμό

Επιθυμείται η ελαχιστοποίηση του συντελεστή οπισθέλκουσας σε συνδυασμό με τη μεγιστοποίηση του συντελεστή άνωσης, χωρίς να επιβάλλεται περιορισμός στο εμβαδόν της αεροτομής. Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \min f_1(\vec{b}) &= C_D(\vec{b}) \\ \min f_2(\vec{b}) &= -C_L(\vec{b}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

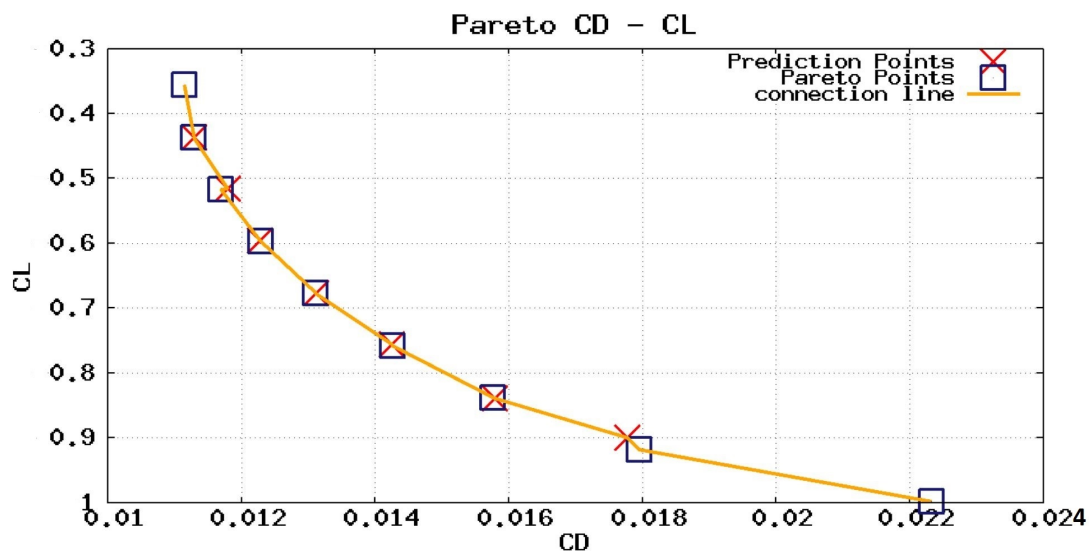
με τις μεταβλητές σχεδιασμού να περιορίζονται από τα πιο κάτω όρια

$$\begin{aligned} b_1 &\in [-0.2, -0.0001] & b_2 &\in [-0.1, -0.0001] \\ b_3 &\in [-0.2, -0.0001] & b_4 &\in [-0.11, -0.0001] \\ b_5 &\in [0.0001, 0.2] & b_6 &\in [0.0001, 0.1] \\ b_7 &\in [0.0001, 0.2] & b_8 &\in [0.0001, 0.11] \end{aligned}$$

Η γεωμετρία της αεροτομής περιορίζεται από τα όρια αυτά. Οι μεταβλητές 1-4 αντιστοιχούν στην πλευρά υπερπίεσης και οι μεταβλητές 5-8 στην πλευρά υποπίεσης. Με αυτό τον τρόπο αποφεύγεται η καμπύλη της πλευράς υπερπίεσης της αεροτομής να διαπεράσει την καμπύλη της πλευράς υποπίεσης.

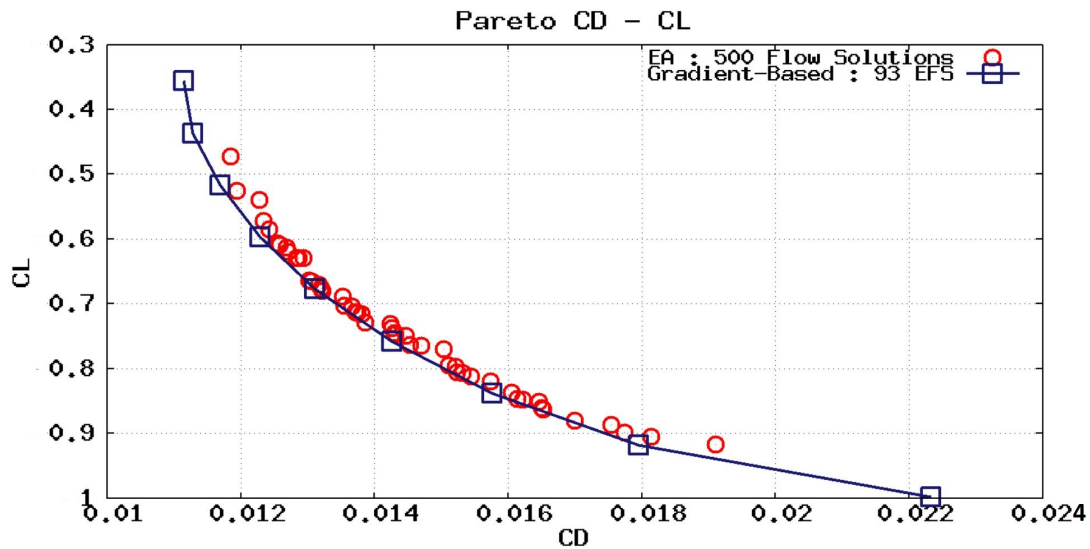
Το πρόβλημα αυτό λύθηκε, κάνοντας αρχικά μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση κάθε στόχου, εντοπίζοντας έτσι το πεδίο για τις επιθυμητές τιμές του δεύτερου στόχου  $f_2$ .

Συγκεκριμένα, κάνοντας μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση του συντελεστή οπισθέλκουσας εντοπίστηκε το μικρότερο  $C_L$  στο μέτωπο αυτό ως  $f_2^U = -C_L^L = -0.356$ , ενώ κάνοντας μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση του συντελεστή οπισθέλκουσας υπολογίστηκε το κάτω άκρο του μετώπου  $f_2^L = -C_L^U = -0.998$ . Στη συνέχεια, υπολογίζονται συνολικά άλλα 7 ενδιαμέσα σημεία (σχήμα 4.5) με την προτεινόμενη μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης.



**Σχήμα 4.5:** Μέτωπο Pareto 9 σημείων, με τον αλγόριθμο πρόβλεψης-διόρθωσης. Τα κριτήρια σύγκλισης, τοποθετήθηκαν ως  $|\frac{f_1^{new} - f_1^{old}}{f_1^{new}}| \leq 10^{-3}$  και  $|\frac{f_2^{new} - f_2}{\hat{f}_2}| \leq 10^{-1}$ . Παρατηρείται ότι, τα σημεία πρόβλεψης είναι πολύ κοντά στα σημεία που υπολογίζονται στο βήμα διόρθωσης.

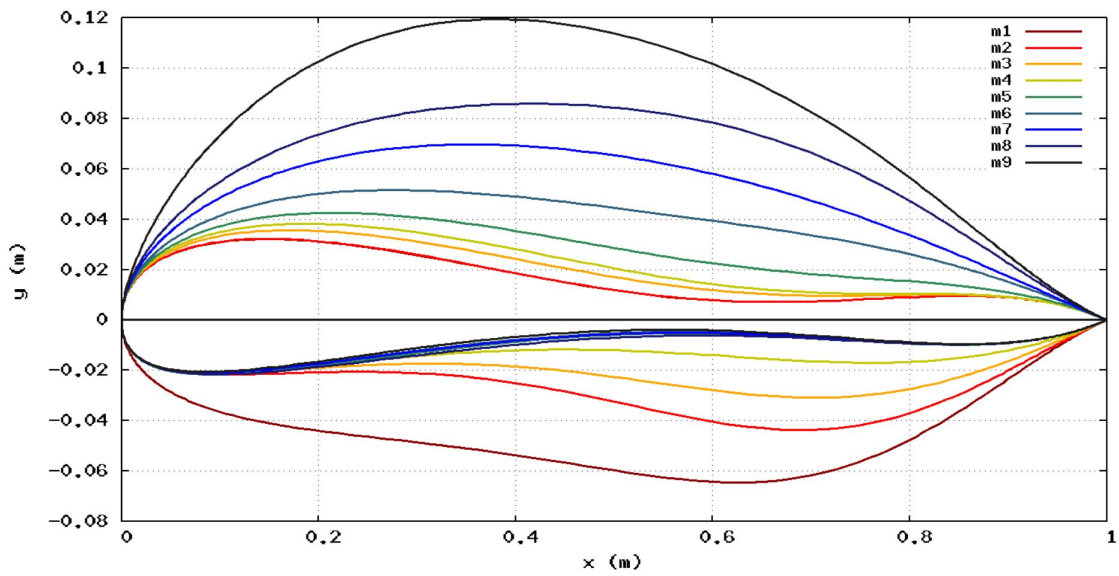
Το συνολικό κόστος υπολογισμού και των 9 σημείων στο μέτωπο ανήλθε στις 93 *EFS*. Το πρωτεύον πρόβλημα λύθηκε 36 φορές, ενώ το συζυγές 57 (αποφεύγεται ο υπολογισμός των πρώτων παραγώγων των στόχων που δεν λαμβάνουν μέρος στις 2 μονοκριτηριακές βελτιστοποιήσεις, εκτός όταν απαιτείται για την πρόβλεψη του επόμενου σημείου, δηλαδή κατά τον εντοπισμό του πρώτου σημείου). Για το άνω άκρο του μετώπου χρειάστηκαν 9 επαναλήψεις του αριθμητικού αλγορίθμου, δηλαδή 19 *EFS* ( $9 \cdot 2 + 1$ ), ενώ για το κάτω άκρο χρειάστηκαν 7 επαναλήψεις του αλγορίθμου, δηλαδή 14 *EFS* ( $7 \cdot 2$ ). Για τα 7 ενδιαμέσα σημεία χρειάστηκαν 20 επαναλήψεις, δηλαδή 60 *EFS* ( $20 \cdot 3$ ), κάτι που δείχνει τη δυναμική του αναπτυχθέντος αλγορίθμου, κατά τη διαδικασία πρόβλεψης-διόρθωσης, καθώς απαιτούνται περίπου 3 επαναλήψεις ανά σημείο, εφόσον ξεκινήσει από ένα σημείο στο μέτωπο Pareto. Το κόστος υπολογισμού και το μέτωπο συγκρίνεται με αυτό που υπολογίστηκε με τον εξελικτικό αλγόριθμο, στο σχήμα 4.6.



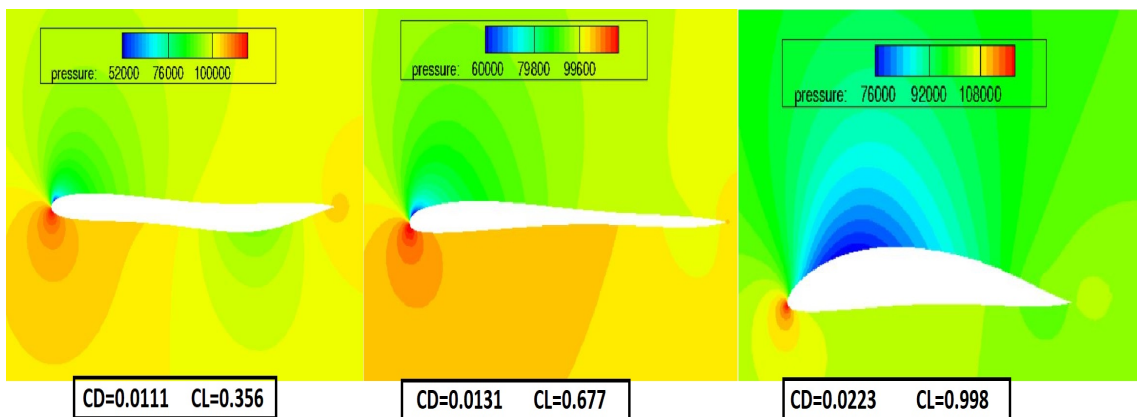
**Σχήμα 4.6:** Σύγκριση αποτελεσμάτων με εξελικτικό αλγόριθμο. Παρατηρείται πως ο αλγόριθμος εντοπίζει όμοια αποτελέσματα με τον εξελικτικό, ενώ φαίνεται ευκολότερο να εντοπίσει τα άκρα. Από την άλλη δεν έγινε χρήση μεταμοντέλων τα οποία αυξάνουν την ταχύτητα και την ικανότητα του εξελικτικού αλγόριθμου.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται το σχήμα που παίρνει η αεροτομή σε κάθε σημείο του μετώπου (σχήμα 4.7). Παρατηρείται πως, καθώς αυξάνεται η άνωση οι πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης ανεβαίνουν προς τα πάνω, το οποίο είναι λογικό καθώς η γωνία πρόσπτωσης είναι θετική, δηλαδή η ροή χτυπά την αεροτομή από κάτω, με αποτέλεσμα να δημιουργείται μεγαλύτερη διαφορά πίεσης, μεταξύ των δύο πλευρών (σχήμα 4.8). Από την άλλη στις αεροτομές με μικρότερη οπισθέλκουσα, το σχήμα τους δεν διαγράφει μεγάλη καμπύλη με αποτέλεσμα η ταχύτητα ροής κοντά στην αεροτομή να είναι μικρή (σχήμα 4.9), στο μεγαλύτερο μήκος της, και, επομένως, μικρές είναι και οι συνεκτικές δυνάμεις, λόγω της μικρής μεταβολής της ταχύτητας από το τοίχωμα. Ακόμη, οι αεροτομές αυτές, έχουν μικρότερο μέτωπο προς τη ροή σε σχέση με αυτές που έχουν μεγάλη άνωση, αφού μεγαλύτερο μέτωπο προκαλεί μεγαλύτερη οπισθέλκουσα από δυνάμεις πίεσης (σχήμα 4.8). Καθώς, λοιπόν, εντοπίζεται το μέτωπο Pareto, από το σημείο με τη μικρότερη οπισθέλκουσα προς το σημείο με τη μεγαλύτερη άνωση το σχήμα της αεροτομής διαμορφώνεται, έτσι ώστε να παράγεται μεγαλύτερη διαφορά πίεσης κατά το μήκος της, και παράλληλα παράγονται μεγαλύτερες ταχύτητες κοντά στο τοίχωμά της, φανερώνοντας τον λόγο που εκ φύσεως οι στόχοι της μεγιστοποίησης της άνωσης και της ελαχιστοποίησης της οπισθέλκουσας είναι αντικρουόμενοι. Επιπλέον, καθώς η άνωση αυξάνεται, αρχικά το εμβαδόν της αεροτομής μειώνεται (σημεία  $m_2, m_3, m_4$ ), ενώ στη συνέχεια αρχίζει να αυξάνεται (σημεία  $m_5, \dots, m_9$ ), ενώ για τα τελευταία σημεία του μετώπου ισχύει ότι τα σημεία Bezier που καθορίζουν το σχήμα της πλευράς υπερπίεσης, βρίσκονται στο μέγιστο όριό τους.

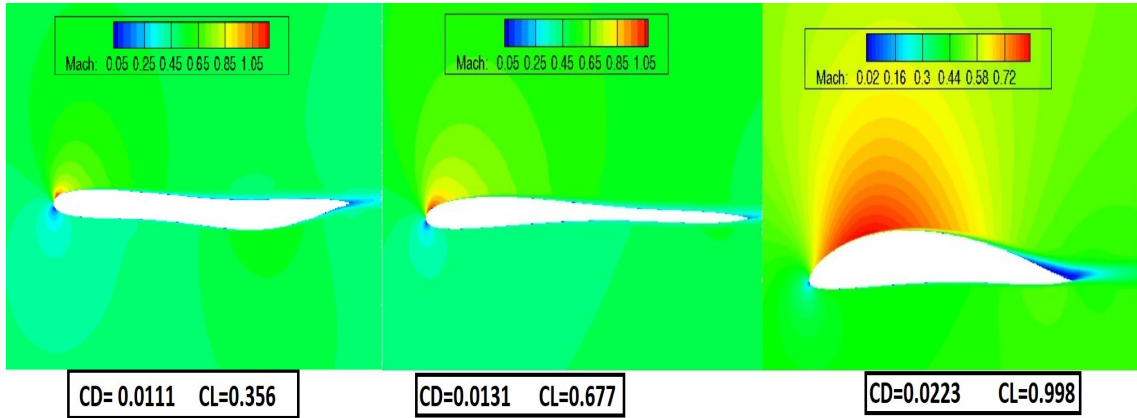




Σχήμα 4.7: Το σχήμα που παίρνει η αεροτομή σε κάθε σημείο. Με σκούρο κόκκινο χρώμα είναι η αεροτομή με τη μικρότερη οπισθέλκουσα, ενώ με μαύρο η αεροτομή με τη μεγαλύτερη άνωση. Η αρίθμηση των σημείων  $m_i$ , είναι τέτοια ώστε  $C_{L_{i+1}} > C_{L_i}$ .



Σχήμα 4.8: Πεδίο πιέσεων τριών αεροτομών, οι οποίες αντιστοιχούν στο πρώτο ( $m_1$ ), στο πέμπτο ( $m_5$ ) και στο ένατο ( $m_9$ ) σημείο του μετώπου Pareto, μετρώντας από πάνω προς τα κάτω.



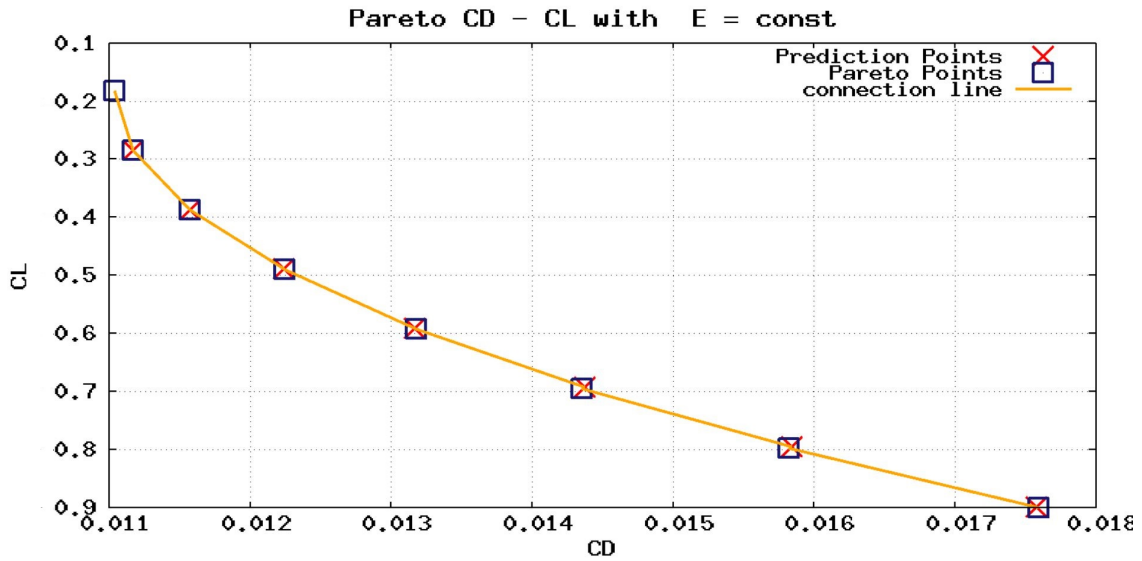
Σχήμα 4.9: Πεδίο αριθμού Mach τριών αεροτομών, οι οποίες αντιστοιχούν στο πρώτο ( $m1$ ), στο πέμπτο ( $m5$ ) και στο ένατο ( $m9$ ) σημείο του μετώπου Pareto, μετρώντας από πάνω προς τα κάτω.

#### 4.1.2 Μέτωπο Pareto $C_D - C_L$ με περιορισμό ισότητας εμβαδού αεροτομής

Σε δεύτερη φάση, γίνεται ελαχιστοποίηση του συντελεστή οπισθέλκουσας σε συνδυασμό με τη μεγιστοποίηση του συντελεστή άνωσης, με περιορισμό ισότητας στο εμβαδόν της αεροτομής. Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

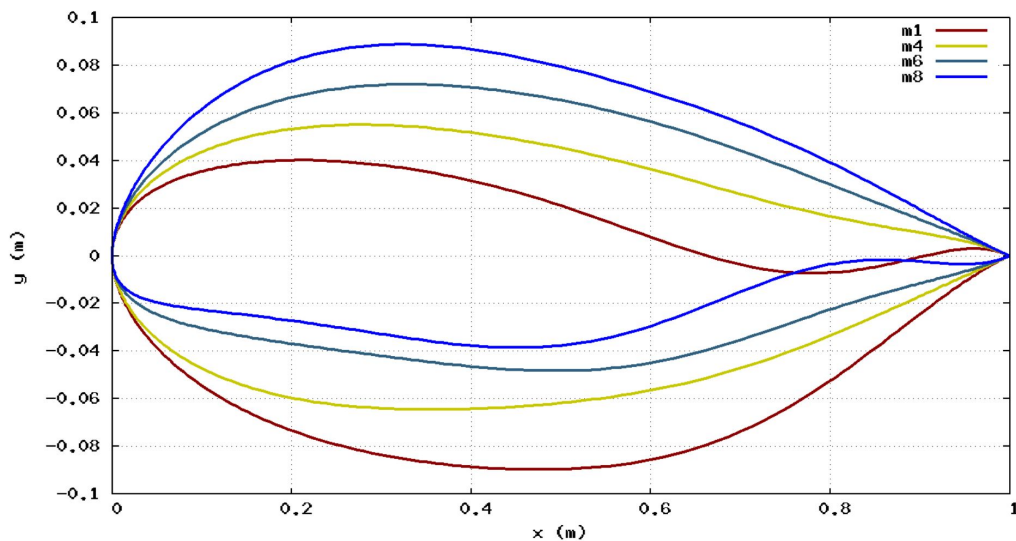
$$\begin{aligned}
 \min f_1(\vec{b}) &= C_D(\vec{b}) \\
 \min f_2(\vec{b}) &= -C_L(\vec{b}) \\
 & \text{s.t.} \\
 c_1(\vec{b}) &= E(\vec{b}) - 0.00541749 = 0
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

όπου  $0.00541749m^2$  το εμβαδόν της αρχικής αεροτομής, ενώ δεν υπάρχουν όρια στις μεταβλητές σχεδιασμού. Το μέτωπο Pareto, εντοπίζεται κάνοντας, αρχικά, μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση του στόχου ελαχιστοποίησης του συντελεστή οπισθέλκουσας, υπολογίζοντας τον ελάχιστο συντελεστή άνωσης ως  $f_2^U = -C_L^L = -0.182$ , ενώ τίθεται το μέγιστο όριο στο συντελεστή άνωσης ως  $f_2^L = -C_L^U = -0.9$ . Στο σχήμα 4.10 φαίνεται το μέτωπο Pareto, ενώ παρατηρείται ότι τα σημεία πρόβλεψης αποτελούν πολύ καλή προσέγγιση των σημείων του μετώπου και σε αυτήν την περίπτωση. Το υπολογιστικό κόστος του πρώτου πάνω σημείου ανήλθε στις  $17EFS$ , ενώ για τα υπόλοιπα 7 σημεία, τα οποία υπολογίστηκαν με τη μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης το κόστος ανήλθε στις  $60EFS$  ( $77EFS$  σύνολο).

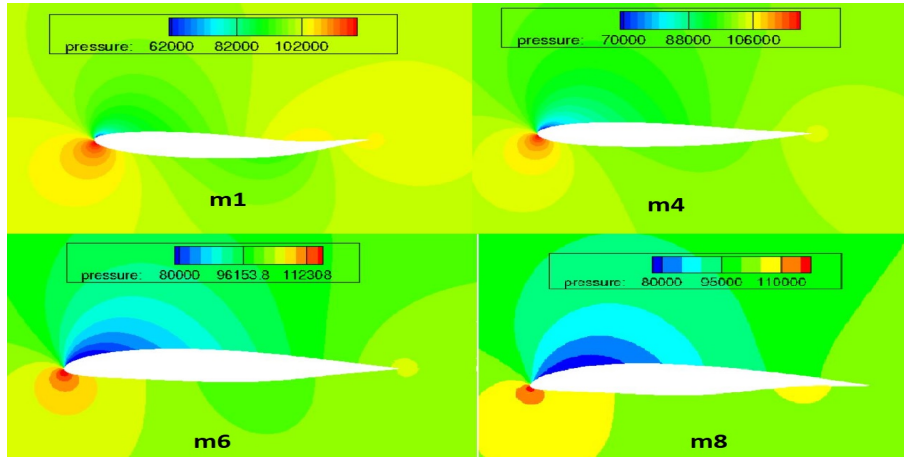


Σχήμα 4.10: Μέτωπο Pareto 8 σημείων, με τον αλγόριθμο πρόβλεψης-διόρθωσης. Τα κριτήρια σύγκλισης, τοποθετήθηκαν ως  $|\frac{f_1^{new}-f_1^{old}}{f_1^{new}}| \leq 10^{-3}$ ,  $|\frac{f_2^{new}-f_2}{f_2}| \leq 10^{-3}$  και  $|c_1| < 10^{-6}$ .

Στη συνέχεια, στο σχήμα 4.11, παρουσιάζονται ενδεικτικά 4 αεροτομές, οι οποίες αντιστοιχούν σε σημεία του μετώπου Pareto και το πεδίο πίεσεων των αεροτομών (σχήμα 4.12). Παρατηρείται πως, το εμβαδόν της αεροτομής παραμένει σταθερό, ενώ οι αεροτομές στις ακραίες λύσεις του μετώπου μοιάζουν να αντικατοπτρίζονται. Επίσης, παρατηρείται αύξηση της διαφοράς πίεσης καθώς το μέτωπο φτάνει στο κάτω του άκρο.



Σχήμα 4.11: Το σχήμα που παίρνει η αεροτομή σε τέσσερα σημεία του μετώπου. Η αριθμηση αντιστοιχεί στα σημεία του μετώπου από πάνω προς τα κάτω.



Σχήμα 4.12: Πεδίο πιέσεων τεσσάρων αεροτομών. Η αριθμηση αντιστοιχεί στα σημεία του μετώπου από πάνω προς τα κάτω.

#### 4.1.3 Μέτωπο Pareto $C_D - C_L$ με περιορισμό ανισο-ισότητας εμβαδού αεροτομής

Αφού υπολογίστηκε το μέτωπο Pareto  $C_D - C_L$  χωρίς περιορισμούς και με περιορισμό ισότητας στο εμβαδόν της αεροτομής, το ίδιο μέτωπο υπολογίζεται με δύο περιορισμούς ανισο-ισότητας, οι οποίοι περιορίζουν το εμβαδόν της αεροτομής ανάμεσα σε δύο ακραίες τιμές. Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

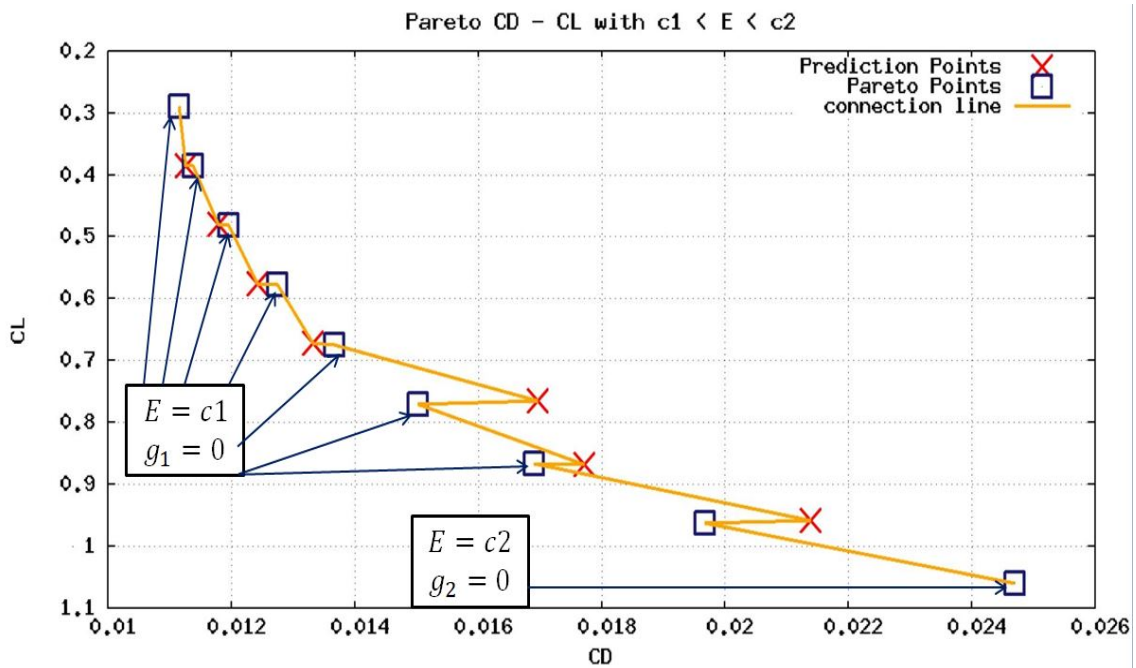
$$\begin{aligned}
 \min f_1(\vec{b}) &= C_D(\vec{b}) \\
 \min f_2(\vec{b}) &= -C_L(\vec{b}) \\
 & \text{s.t.} \\
 g_1(\vec{b}) &= 0.0045 - E(\vec{b}) \leq 0 \\
 g_2(\vec{b}) &= E(\vec{b}) - 0.0065 \leq 0
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

με τα πιο κάτω όρια στις μεταβλητές σχεδιασμού.

$$\begin{aligned}
 b_1 &\in [-0.3, -0.0001] & b_2 &\in [-0.3, -0.0001] \\
 b_3 &\in [-0.3, -0.0001] & b_4 &\in [-0.3, -0.0001] \\
 b_5 &\in [0.0001, 0.3] & b_6 &\in [0.0001, 0.3] \\
 b_7 &\in [0.0001, 0.3] & b_8 &\in [0.0001, 0.3]
 \end{aligned}$$

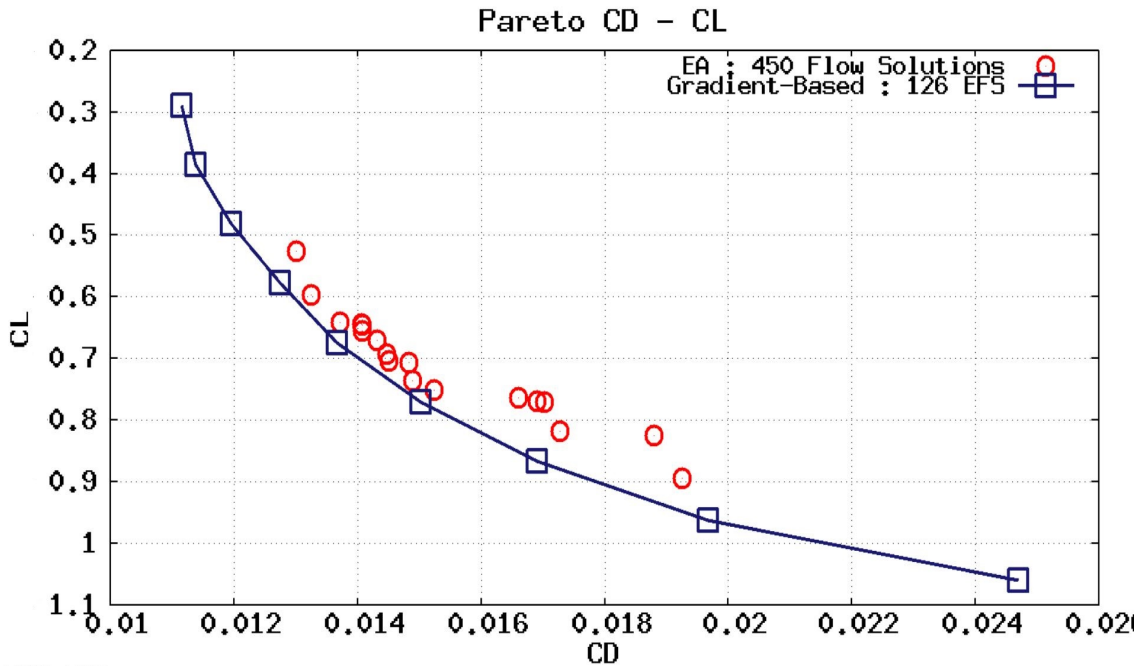
Για τον εντοπισμό του μετώπου Pareto, έγινε, αρχικά, μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση για κάθε στόχο, όπου για τη καλύτερη λύση για το συντελεστή οπισθέλκουσας βρέθηκε ότι ο περιορισμός  $g_1(\vec{b}) = 0$ , ενώ για την καλύτερη λύση του συντελεστή άνωσης βρέθηκε ότι ο περιορισμός  $g_2(\vec{b}) = 0$ . Στη συνέχεια το μέτωπο, υπολογίζεται από πάνω προς τα κάτω με τον αλγόριθμο πρόβλεψης-διόρθωσης, όπου για τα επόμενα 6 σημεία, βρέθηκε ότι και πάλι ότι ο περιορισμός  $g_1(\vec{b}) = 0$ , είναι ενεργός (σχήμα 4.14). Επίσης, για την πρόβλεψη κάθε επόμενου σημείου, οι περιορισμοί θεωρούνται μη-ενεργοί, διότι δεν μπορεί εκ των προτέρων να εκτιμηθεί αν ο περιορισμός θα είναι

ενεργός στο επόμενο σημείο. Επομένως, αυτό προσθέτει σφάλμα στον υπολογισμό της πρόβλεψης του επόμενου σημείου και όπως φαίνεται στο σχήμα 4.14 η προσέγγιση των σημείων στο μέτωπο, δεν είναι όσο καλή, βρέθηκε να είναι στα προηγούμενα 2 προβλήματα βελτιστοποίησης (σχήματα 4.5,4.10). Το τελευταίο, δείχνει για ακόμα μία φορά, ότι το βήμα διόρθωσης είναι αναγκαίο για τον υπολογισμό του μετώπου Pareto.



Σχήμα 4.13: Μέτωπο Pareto 9 σημείων, με τον αλγόριθμο πρόβλεψης-διόρθωσης. Τα κριτήρια σύγκλισης, τοποθετήθηκαν ως  $|\frac{f_1^{new} - f_1^{old}}{f_1^{new}}| \leq 10^{-3}$ ,  $|\frac{f_2^{new} - f_2}{f_2}| \leq 10^{-1}$  και  $g_1 < 10^{-6}$ ,  $g_2 < 10^{-6}$ .

Το συνολικό υπολογιστικό κόστος αυτού του μετώπου ανήλθε στις  $126EFS$  με το κόστος του άνω άκρου του μετώπου να είναι  $21EFS$ , ενώ το κόστος του κάτω άκρου να είναι  $12EFS$ . Τέλος τα αποτελέσματα, συγκρίνονται με αυτά εξελικτικού αλγορίθμου.



Σχήμα 4.14: Σύγκριση αποτελεσμάτων με εξελικτικό αλγόριθμο.

#### 4.1.4 Μέτωπο Pareto τριών στόχων $C_D - C_L - E$

Μέχρι τώρα παρουσιάστηκε η ικανότητα του αλγορίθμου να υπολογίσει μέτωπα Pareto δύο στόχων με περιορισμούς είτε ισότητας, είτε ανισο-ισότητας, ή και όρια στις μεταβλητές σχεδιασμού. Σε αυτήν την υπο-ενότητα γίνεται υπολογισμός του μετώπου Pareto με τρεις στόχους. Ως τρίτος στόχος ορίζεται η μεγιστοποίηση του εμβαδού της αεροτομής. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης ορίζεται ως

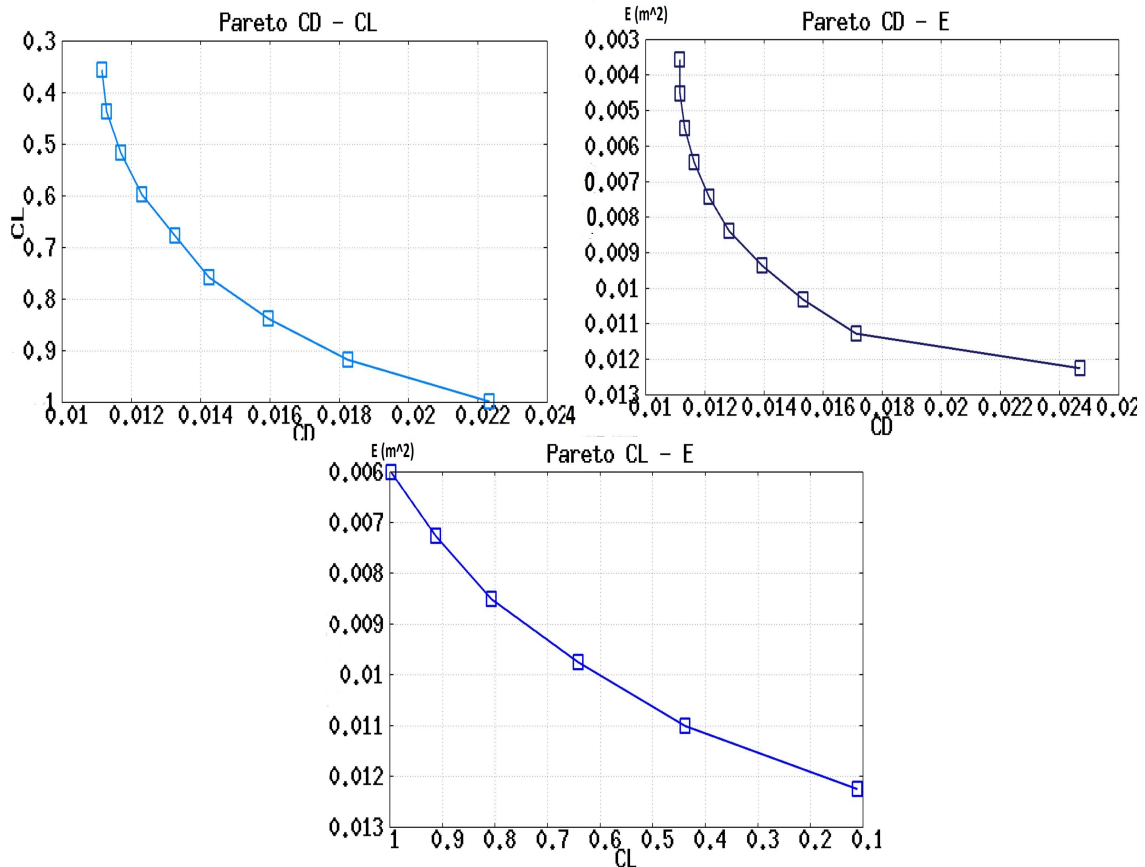
$$\begin{aligned}
 \min f_1(\vec{b}) &= C_D(\vec{b}) \\
 \min f_2(\vec{b}) &= -C_L(\vec{b}) \\
 \min f_3(\vec{b}) &= -E(\vec{b})
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

με τα όρια στις μεταβλητές σχεδιασμού να τίθενται ως εξής

$$\begin{aligned}
 b_1 &\in [-0.2, -0.0001] & b_2 &\in [-0.1, -0.0001] \\
 b_3 &\in [-0.2, -0.0001] & b_4 &\in [-0.11, -0.0001] \\
 b_5 &\in [0.0001, 0.2] & b_6 &\in [0.0001, 0.1] \\
 b_7 &\in [0.0001, 0.2] & b_8 &\in [0.0001, 0.11]
 \end{aligned}$$

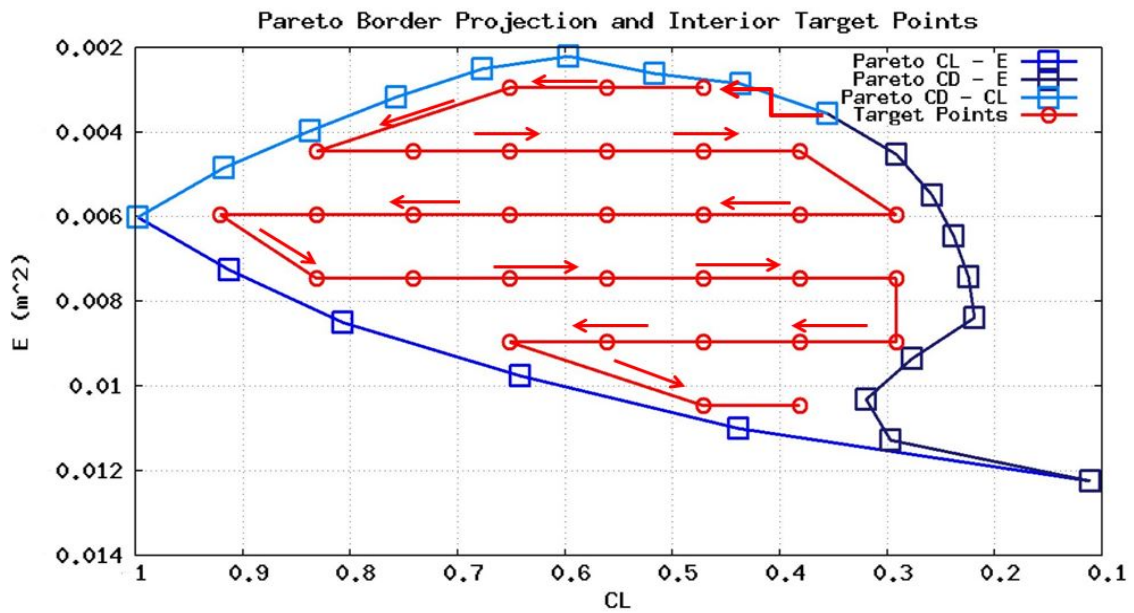
όπου οι μεταβλητές 1-4 αντιστοιχούν στις θέσεις  $y$  των σημείων ελέγχου Bezier, της πλευράς υπερπίεσης, ενώ οι μεταβλητές 5-8 στην πλευρά υποπίεσης. Για τον υπολογισμό του μετώπου αυτού ακολουθείται η διαδικασία που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 2. Δηλαδή, υπολογίζονται, αρχικά 3 διδιάστατα μέτωπα τα οποία, εάν προβληθούν σε οποιονδήποτε χώρο 2 στόχων σχηματίζουν το σύνολο της προβολής του τριδιάστατου μετώπου στο χώρο αυτό. Όμως, πρώτου υπολογισθούν τα διδιάστατα μέτωπα

$(C_D, C_L)$ ,  $(C_D, E)$  και  $(C_L, E)$  γίνεται μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση για κάθε στόχο. Το μέτωπο  $(C_D, C_L)$  βρέθηκε προηγουμένως (4.1.1), ενώ για το μέτωπο  $(C_D, E)$  εντοπίζονται 10 σημεία και για το μέτωπο  $(C_L, E)$  εντοπίζονται 5 σημεία (σχήμα 4.15).

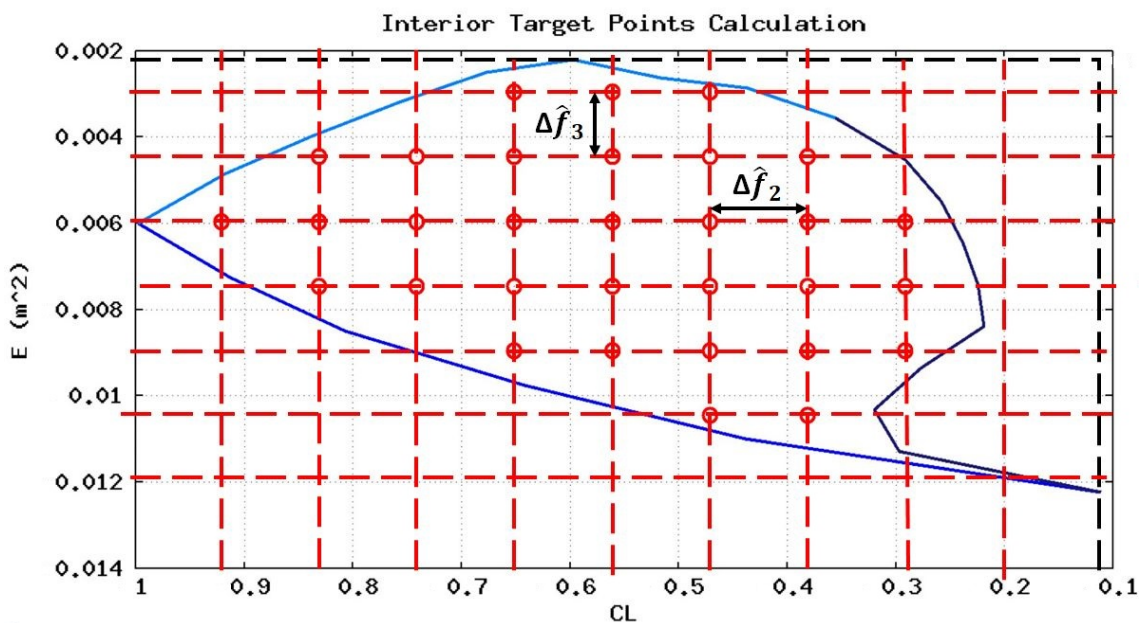


**Σχήμα 4.15:** Τρία τριδιάστατα μέτωπα Pareto, συνδυάζοντας τους τρεις στόχους. Τα άκρα των μετώπων εντοπίστηκαν, κάνοντας μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση για κάθε στόχο.

Στη συνέχεια, τα μέτωπα αυτά προβάλλονται στο χώρο των στόχων  $(f_2, f_3)$ , σχηματίζοντας ένα κλειστό πεδίο, το οποίο αποτελεί την προβολή του τριδιάστατου μετώπου στο χώρο αυτό (σχήμα 4.16). Το πεδίο στη συνέχεια διακριτοποιείται χρησιμοποιώντας ισογραμμές  $\hat{f}_2$  και  $\hat{f}_3$  οι οποίες απέχουν, μεταξύ τους, σταθερή απόσταση  $\Delta\hat{f}_2 = 0.09$  και  $\Delta\hat{f}_3 = 0.0015$ . Τα σημεία τομής των ισογραμμών αυτών, τα οποία είναι μέσα στο πεδίο και όχι πολύ κοντά στο σύνορο τίθενται, ως σημεία στόχων-περιορισμών (σχήμα 4.17). Τα σημεία υπολογίζονται, διαδοχικά, ακολουθώντας την πορεία της κόκκινης γραμμής του σχήματος 4.16.



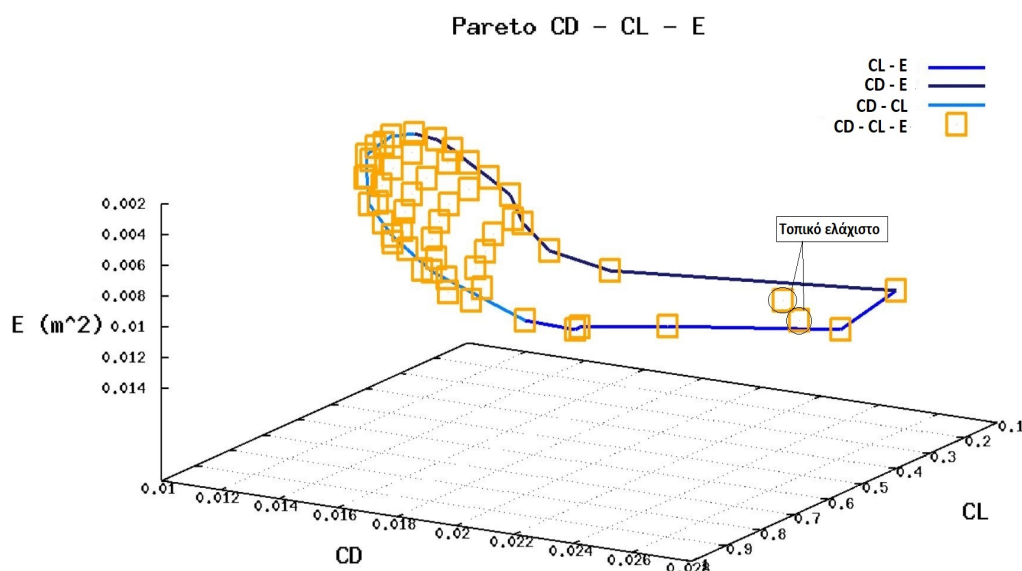
**Σχήμα 4.16:** Η προβολή του μετώπου Pareto στο χώρο  $(f_2, f_3)$  και η διακριτοποίηση του πεδίου ορισμού της. Ο αλγόριθμος στη συνέχεια θα ακολουθήσει την πορεία της κόκκινης γραμμής, ξεκινώντας από το σημείο που βρέθηκε κάνοντας μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση του συντελεστή οπισθέλκουσας. Η προβολή του μετώπου διακριτοποιείται με 31 συνολικά σημεία.



**Σχήμα 4.17:** Η προβολή του μετώπου Pareto στο χώρο  $(f_2, f_3)$  και η διακριτοποίηση του πεδίου ορισμού της. Ο αλγόριθμος ελέγχει ποια σημεία τομής των ισογραμμών  $\hat{f}_2$  και  $\hat{f}_3$  ανήκουν στο πεδίο προβολής του μετώπου. Ο έλεγχος των σημείων ξεκινά από τη γωνία του μαύρου πλαισίου, δηλαδή από την τομή των ισογραμμών  $\hat{f}_2 = f_{2_{max}}$  και  $\hat{f}_3 = f_{3_{max}}$  του συνόρου.

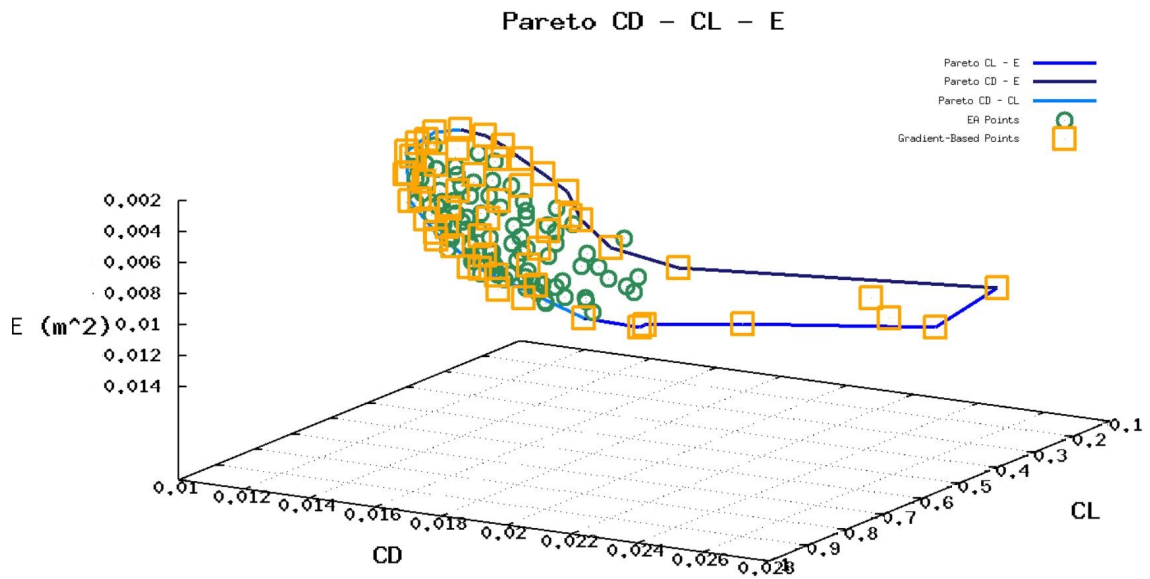


Ακολούθως, παρουσιάζεται το τριδιάστατο μέτωπο που υπολογίστηκε στο σχήμα 4.18, ενώ σε αυτό, όπως φαίνεται στη συνέχεια εντοπίζονται δύο σημεία σε τοπικό ελάχιστο.

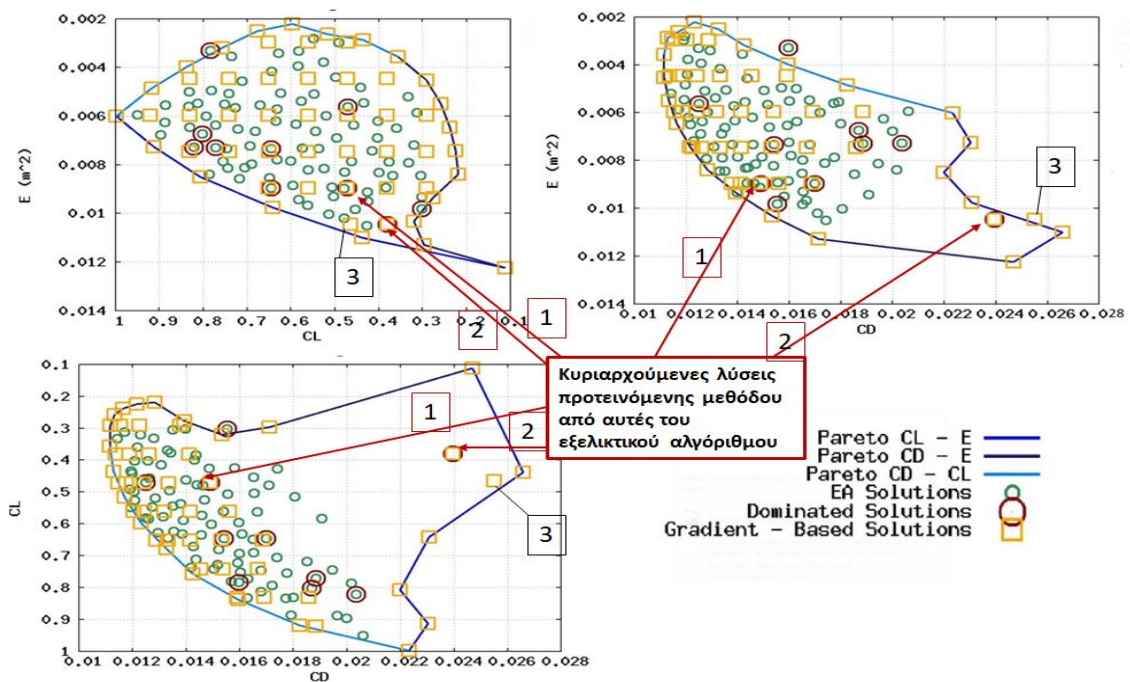


**Σχήμα 4.18:** Το τριδιάστατο μέτωπο Pareto. Ως στόχοι περιορισμοί τέθηκαν οι στόχοι ( $f_2, f_3$ ). Δύο σημεία του μετώπου εντοπίστηκαν σε τοπικό ελάχιστο όπως θα φανεί στη συνέχεια.

Για τα σημεία που εντοπίστηκαν, ελέγχθηκε αν κάποιο κυριαρχεί κάποιο άλλο, όπου βρέθηκε ότι και τα 51 συνολικά σημεία είναι μη-κυριαρχούμενες λύσεις. Η εγκυρότητά του μετώπου Pareto ελέγχεται συγκρίνοντας το μέτωπο που υπολογίστηκε χρησιμοποιώντας εξελικτικό αλγόριθμο, ο οποίος έτρεξε για 585 αξιολογήσεις (σχήμα 4.19, 4.20). Επίσης, τα σημεία που βρέθηκαν είτε με τον εξελικτικό αλγόριθμο, είτε με την προτεινόμενη μέθοδο, ελέγχονται αν κυριαρχούνται από αυτά της άλλης μεθόδου. Οκτώ λύσεις του εξελικτικού αλγορίθμου βρέθηκαν να κυριαρχούνται από λύσεις της προτεινόμενης μεθόδου, ενώ δύο λύσεις της προτεινόμενης μεθόδου βρέθηκαν να κυριαρχούνται από τις λύσεις του εξελικτικού αλγορίθμου (σχήμα 4.20). Αξίζει, λοιπόν να διερευνηθεί ο λόγος που αυτές οι δύο λύσεις, κυριαρχούνται από λύσεις του εξελικτικού αλγορίθμου, οι οποίες απαριθμούνται στο σχήμα 4.20, όπου το μέτωπο προβάλλεται στα τρία επίπεδα του χώρου. Εντοπίζονται, χρησιμοποιώντας κριτήριο κυριαρχίας (παράρτημα (Α'.7)), ποιες λύσεις του εξελικτικού αλγορίθμου κυριαρχούν τις λύσεις του προτεινόμενου αλγορίθμου, οι οποίες αναφέρονται αριθμητικά στον πίνακα 4.3.



**Σχήμα 4.19:** Σύγκριση μετώπου με εξελικτικό αλγόριθμο. Όπως φαίνεται το μέτωπο που εντοπίζεται με την προτεινόμενη μέθοδο, είναι παρόμοιο με το μέτωπο που εντοπίζεται με εξελικτικό αλγόριθμο. Με την προτεινόμενη μέθοδο εντοπίζονται ευκολότερα λύσεις στο σύνορο του μετώπου Pareto.



**Σχήμα 4.20:** Προβολή του μετώπου Pareto, με την προτεινόμενη μέθοδο και με εξελικτικό αλγόριθμο στα τρία επίπεδα του χώρου. Σημειώνονται, επίσης οι κυριαρχούμενες από την άλλη μέθοδο λύσεις και απαριθμούνται 3 σημεία τα οποία αναφέρονται στο κείμενο. Επίσης, παρατηρείται ότι η κατανομή των σημείων του μετώπου είναι περίπου όμοια και με τις δύο μεθόδους.

Λύση	Αλγόριθμος	$f_1$	$f_2$	$f_3$
1	Προτεινόμενος	0.014884	-0.47117	-0.008955
-	Εξελικτικός	0.014621	-0.47969	-0.008965
2	Προτεινόμενος	0.023955	-0.37981	-0.01046
-	Εξελικτικός	0.0174	-0.42776	-0.010507

**Πίνακας 4.1:** Λύσεις της προτεινόμενης μεθόδου, οι οποίες κυριαρχούνται από λύσεις του εξελικτικού αλγορίθμου. Η κυριαρχούμενη λύση 1 παρατηρείται ότι είναι πολύ κοντά σε αυτήν από την οποία κυριαρχείται, ενώ η κυριαρχούμενη λύση 2 βρίσκεται αρκετά μακριά από την αντίστοιχη.

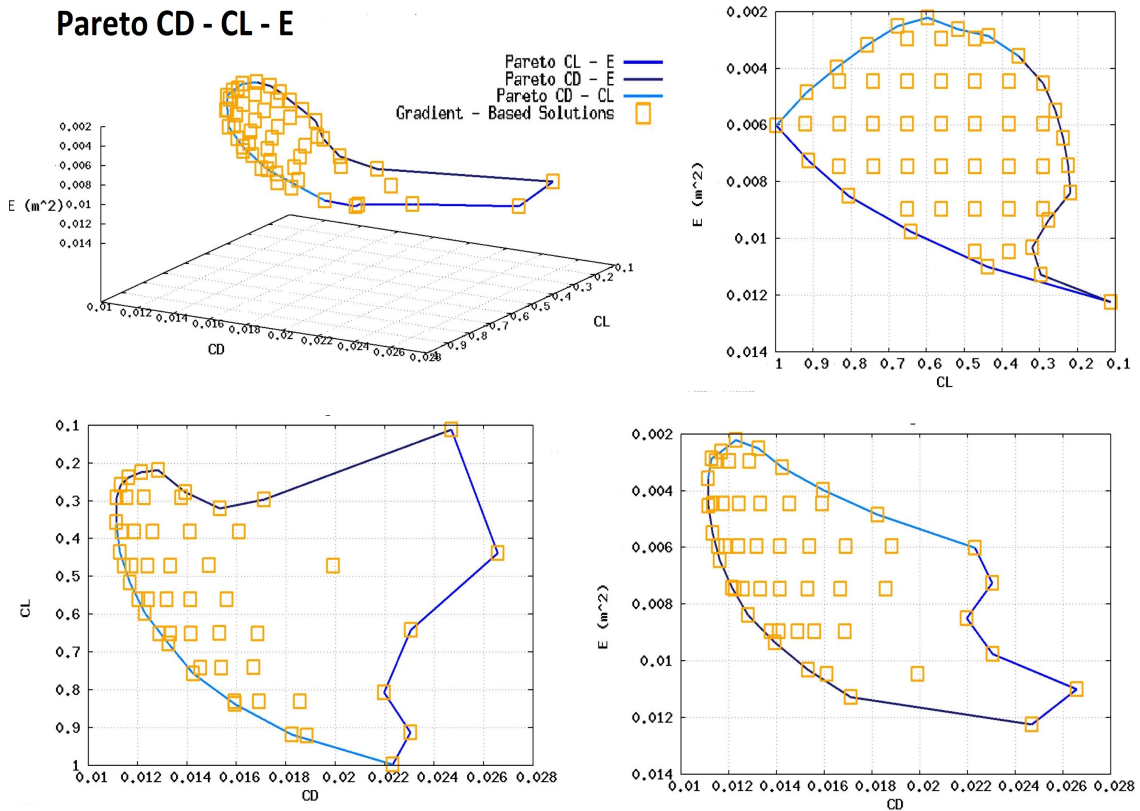
Με τον εξελικτικό αλγόριθμο εντοπίζονται περισσότερες κυριαρχούμενες από την προτεινόμενη μέθοδο λύσεις. Με αυτή τη μέθοδο εντοπίζονται περισσότερα σημεία και είναι λογικό αριθμητικά (δηλαδή με μικρή αριθμητική διαφορά) κάποιες λύσεις να κυριαρχούνται από κάποιες του προτεινόμενου αλγορίθμου. Ο τελευταίος συγκλίνει σε κάθε σημείο με μία σχετική ακρίβεια η οποία απαιτείται, ενώ αντίθετα, με τον εξελικτικό αλγόριθμο χρειάζονται να γίνουν περισσότερες αξιολογήσεις, η χρήση μεταμοντέλων η μεταπροτύπων για εντοπισμό του μετώπου με μεγαλύτερη ακρίβεια[6]. Από την άλλη, παρατηρώντας τον πίνακα 4.1 φαίνεται ότι η λύση 1 του προτεινόμενου αλγορίθμου είναι πολύ κοντά, στη λύση του εξελικτικού αλγορίθμου, από την οποία κυριαρχείται. Όμως, η λύση 2 εντοπίζεται αρκετά μακριά, όπου, πιθανώς, ο προτεινόμενος αιτιοκρατικός αλγόριθμος εγκλωβίστηκε σε ένα τοπικό ελάχιστο. Για το λόγο αυτό, το σημείο αυτό επαναυπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη λύση του εξελικτικού αλγορίθμου ως αρχική, ενώ στη συνέχεια γίνεται πρόβλεψη και διόρθωση και για το διπλανό του σημείο (στην ίδια ισογραμμή εμβαδού αεροτομής -σημείο 3 σχήματος 4.20- ), καθώς παρατηρείται πως και τα δύο αυτά σημεία βρίσκονται σε μεγάλη απόσταση στον τριδιάστατο χώρο από το αμέσως προηγούμενο σημείο που υπολογίστηκε με τη διαδικασία πρόβλεψης-διόρθωσης. Στον αμέσως επόμενο πίνακα φαίνονται οι νέες τιμές που υπολογίζει ο αλγόριθμος με καλύτερη αρχικοποίηση, με το κόστος επαναυπολογισμού να ανέρχεται στις 21EFS.

Σημείο	$f_1$	$f_2$	$f_3$
2 : παλιό	0.023955	-0.3798	-0.010455
2 : καινούριο	0.016105	-0.38088	-0.010455
3 : παλιό	0.025499	-0.46528	-0.010455
3 : καινούριο	0.01992	-0.47132	-0.010455

**Πίνακας 4.2:** Επαναυπολογισμός σημείων στο μέτωπο Pareto, με καλύτερη αρχικοποίηση. Παρατηρείται ότι οι λύσεις είναι σαφώς καλύτερες. Ως αρχική λύση χρησιμοποιείται η λύση του εξελικτικού αλγορίθμου που κυριάρχησε στη λύση 2.

Εφόσον οι λύσεις που εντοπίστηκαν με διαφορετική αρχικοποίηση είναι καλύτερες από τις προηγούμενες, επιβεβαιώθηκε η υποψία ότι αυτές οι δύο λύσεις ήταν τοπικά και όχι καθολικά βέλτιστα σημεία. Το τριδιάστατο μέτωπο, μετά τον εντοπισμό των τελευταίων

σημείων παρουσιάζεται στο σχήμα 4.21.



Σχήμα 4.21: Μέτωπο Pareto ( $C_D, C_L, E$ ) 51 σημείων.

Το συνολικό κόστος υπολογισμού του μετώπου ανήλθε στις 550 *EFS*, περίπου ίσο με αυτό του εξελικτικού αλγορίθμου (585*EFS*), ενώ αυτό αναλύεται στον πίνακα 4.3.

Βελτιστοποίηση	<i>EFS</i>	Σημεία	<i>EFS</i> /σημείο
Στόχος $f_1$	19	1	19
Στόχος $f_2$	15	1	15
Στόχος $f_3$	7	1	7
Pareto ( $f_1, f_2$ ) (εσωτερικά σημεία)	60	6	10
Pareto ( $f_1, f_3$ ) (εσωτερικά σημεία)	44	8	5.5
Pareto ( $f_2, f_3$ ) (εσωτερικά σημεία)	36	3	12
Pareto ( $f_1, f_2, f_3$ ) (εσωτερικά σημεία)	348	31	11.2
Επαναυπολογισμός 2 σημείων	21	-	10.5
Σύνολο	550	51	10.8

Πίνακας 4.3: Ανάλυση υπολογιστικού κόστους με την προτεινόμενη μέθοδο.

Το υπολογιστικό κόστος εύρεσης του τριδιάστατου μετώπου κρίνεται αρκετά μεγάλο. Κυριότερος λόγος, είναι τα πολλά σημεία που απαιτήθηκε να βρεθούν από τον αλ-

γόριθμο, καθώς όπως έχει φανεί μέχρι τώρα το κόστος είναι ανάλογο του πλήθους των σημείων αυτών. Όμως, ως πρώτη προσπάθεια να βρεθεί ένα τριδιάστατο μέτωπο Pareto, απαιτήθηκε πυκνό μέτωπο, ώστε να μπορεί να εξακριβωθεί η εγκυρότητά του. Συγκρίνοντας το υπολογισμένο μέτωπο, με αυτό εξελικτικού αλγορίθμου, παρατηρήθηκε ότι, εκτός από εξαιρέσεις, οι λύσεις της προτεινόμενης μεθόδου, είναι μη-κυριαρχούμενες από τις λύσεις του εξελικτικού αλγορίθμου, ενώ με τη μέθοδο αυτή είναι ευκολότερος ο υπολογισμός των συννοριακών σημείων, που είναι και η ουσία της μεθόδου. Επομένως, το μέτωπο Pareto το οποίο υπολογίστηκε κρίνεται έγκυρο.

## 4.2 Δεύτερο Αεροδυναμικό πρόβλημα

Στο πρώτο αεροδυναμικό πρόβλημα, εντοπίστηκαν μέτωπα Pareto 2 στόχων, υπό περιορισμούς ανισο-ισότητας στις μεταβλητές σχεδιασμού, υπό περιορισμό ισότητας ή και ανισο-ισότητας, αλλά και μέτωπο 3 στόχων. Στο δεύτερο αεροδυναμικό πρόβλημα που λύνεται σε αυτή την εργασία, αλλάζουν οι συνθήκες της ροής, αλλάζοντας την ταχύτητα της επ' άπειρον ροής σε  $V_\infty = 140m/s$  και τη γωνία πρόσπτωσης και επ' άπειρον ροής σε μηδέν μοίρες, με τον αριθμό Reynolds να είναι  $R = 2.393 \cdot 10^6$ . Αρχικά, εντοπίζεται μέτωπο Pareto 2 στόχων, με στόχους την ελαχιστοποίηση του συντελεστή οπισθέλκουσας και τη μεγιστοποίηση του συντελεστή άνωσης και με 2 περιορισμούς ανισο-ισότητας στο εμβαδόν της αεροτομής. Στη συνέχεια εντοπίζεται μέτωπο τριών στόχων, υπό τους ίδιους περιορισμούς ανισο-ισότητας.

### 4.2.1 Μέτωπο Pareto $C_D - C_L$ με περιορισμό ανισο-ισότητας εμβαδού αεροτομής

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

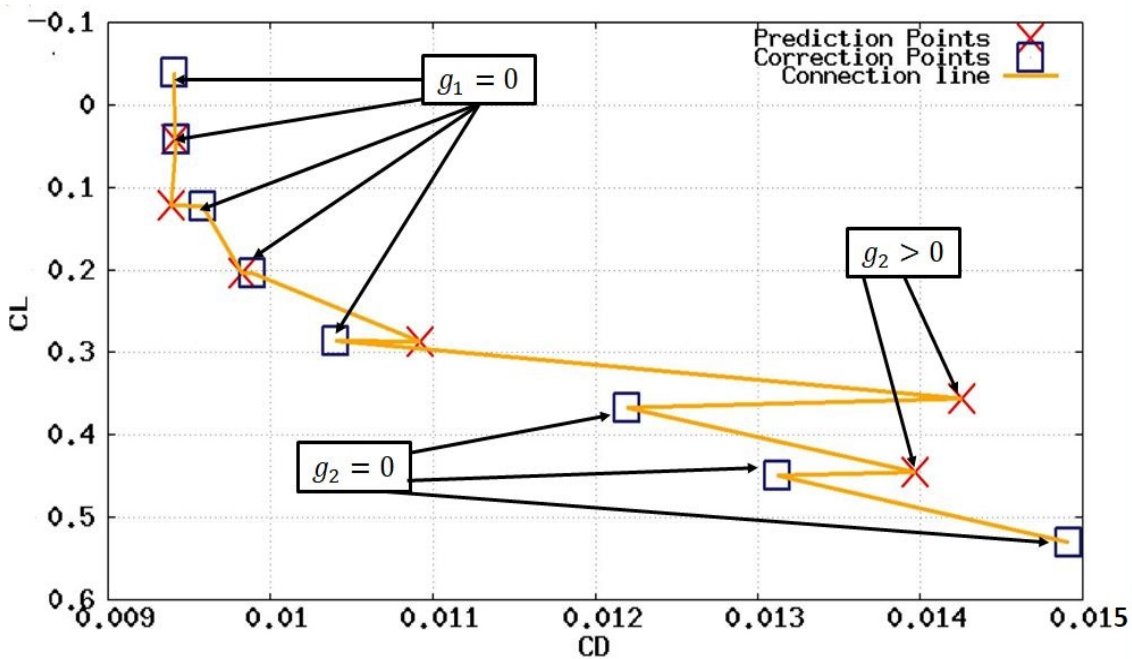
$$\begin{aligned} \min f_1(\vec{b}) &= C_D(\vec{b}) \\ \min f_2(\vec{b}) &= -C_L(\vec{b}) \\ & \text{s.t.} \\ g_1(\vec{b}) &= 0.005 - E(\vec{b}) \leq 0 \\ g_2(\vec{b}) &= E(\vec{b}) - 0.007 \leq 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

με τα πιο κάτω όρια στις μεταβλητές σχεδιασμού.

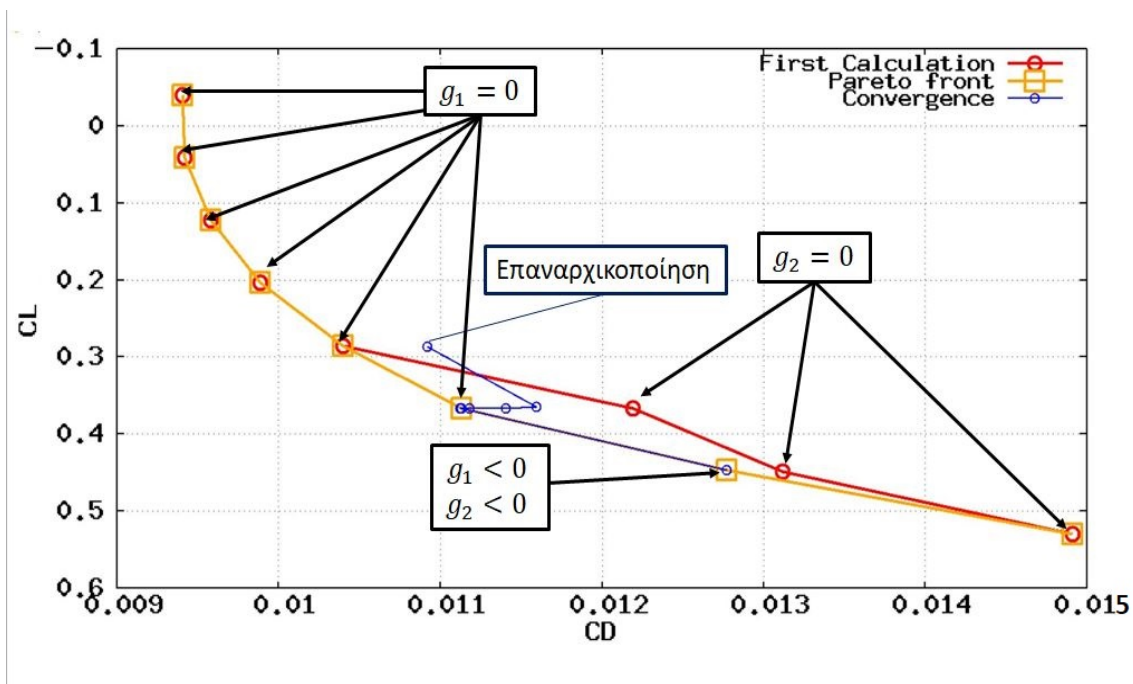
$$\begin{aligned} b_1 &\in [-2, -0.0001] & b_2 &\in [-2, -0.0001] \\ b_3 &\in [-2, -0.0001] & b_4 &\in [-2, -0.0001] \\ b_5 &\in [0.0001, 2] & b_6 &\in [0.0001, 2] \\ b_7 &\in [0.0001, 2] & b_8 &\in [0.0001, 2] \end{aligned}$$

Ουσιαστικά, τα όρια στις μεταβλητές σχεδιασμού, απαγορεύουν στην πλευρά υπερπίεσης να ανέβει προς τα πάνω (μεταβλητές 1-4), ενώ στην πλευρά υποπίεσης να κατέβει προς τα κάτω (μεταβλητές 5-8), εμποδίζοντας τη μία πλευρά να διαπεράσει την άλλη, ενώ επιτρέπουν ελεύθερα την απομάκρυνσή τους. Το τελευταίο, εμποδίζεται από το δεύτερο περιορισμό στο εμβαδόν της αεροτομής.

Το μέτωπο αυτό εντοπίζεται, κάνοντας αρχικά μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση για κάθε στόχο, εντοπίζοντας τα άκρα του μετώπου και, στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης εντοπίζονται άλλα 6 ενδιαμέσα σημεία. Αρχικά στον αλγόριθμο δόθηκε η εντολή, εφόσον σε ένα περιορισμό ανισο-ισότητας, γίνει μεταβολή της τιμής του από αρνητική σε θετική μία φορά, ο περιορισμός αυτός να θεωρηθεί ενεργός για το σημείο του μετώπου αυτού. Το τελευταίο, εμπεριέχει ρίσκο, καθώς κατά τη διάρκεια της σύγκλισης του αλγορίθμου σε ένα σημείο, ενδέχεται ένας περιορισμός να θεωρηθεί ενεργός, ενώ στη βέλτιστη λύση δεν είναι, με αποτέλεσμα ο αλγόριθμος να εγκλωβισθεί σε τοπικό ελάχιστο, ενώ το ενδεχόμενο κέρδος είναι γρηγορότερη σύγκλιση. Στο σχήμα 4.22 παρουσιάζονται οι αρχικές λύσεις που εντοπίστηκαν, με δύο από αυτές να εντοπίζονται σε τοπικό ελάχιστο, όπως θα φανεί στο σχήμα 4.23. Στο τελευταίο, γίνεται επαναρχικοποίηση από το σημείο πρόβλεψης του τέταρτου σημείου από το κάτω άκρο (σημείο στο οποίο και οι δύο περιορισμοί είναι μη-ενεργοί) και εντοπίζεται, το αντίστοιχο καθολικό ελάχιστο των προηγούμενων σημείων.



**Σχήμα 4.22:** Πρώτη απόπειρα υπολογισμού του μετώπου. Κατά την πρόβλεψη των επόμενων σημείων, οι περιορισμοί θεωρούνται μη-ενεργοί. Στο βήμα διόρθωσης, όμως ο αλγόριθμος ελέγχει, ποιιο περιορισμοί είναι θετικοί και τίθενται ως ενεργοί περιορισμοί. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα δύο σημεία στο μέτωπο (δεύτερο και τρίτο από το κάτω άκρο) να εγκλωβίζονται σε τοπικό ελάχιστο, καθώς οι συνθήκες KKT πρώτης τάξεως ικανοποιούνται στα σημεία αυτά, τα οποία όμως δεν ανήκουν στο μέτωπο Pareto. Τα κριτήρια σύγκλισης, τοποθετήθηκαν ως  $|\frac{f_1^{new} - f_1^{old}}{f_1^{new}}| \leq 10^{-3}$ ,  $|\frac{f_2^{new} - \hat{f}_2}{f_2}| \leq 10^{-1}$  και  $g_i < 10^{-6}$ .

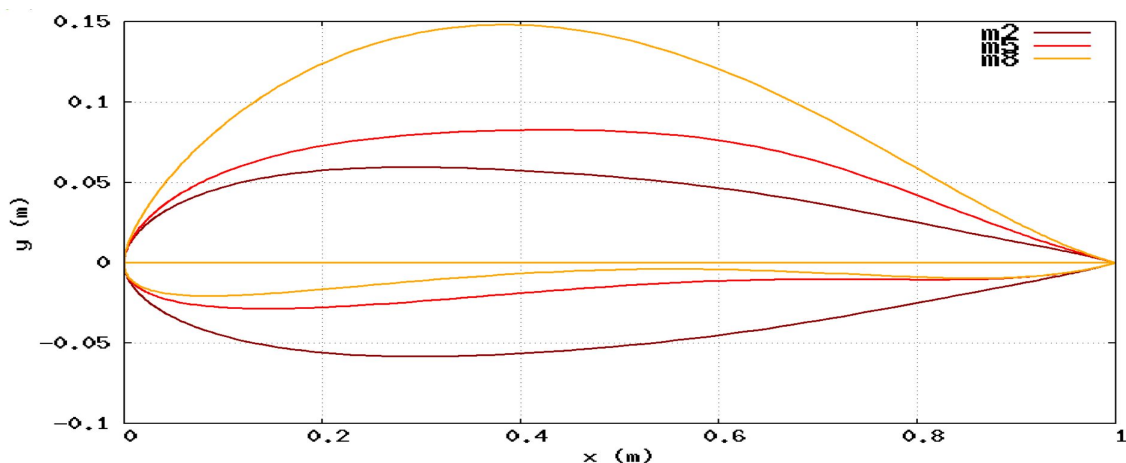


**Σχήμα 4.23:** Εντοπισμός του μετώπου Pareto. Επαναρχικοποιώντας το πρόβλημα, εντοπίζονται άλλα δύο σημεία που ανήκουν στο μέτωπο. Επίσης, παρατηρήθηκε ότι για το δεύτερο σημείο, στο οποίο οι δύο περιορισμοί είναι μη-ενεργοί, χρειάστηκε μόλις 1 επανάληψη στο βήμα διόρθωσης για να συγκλίνει ο αλγόριθμος.

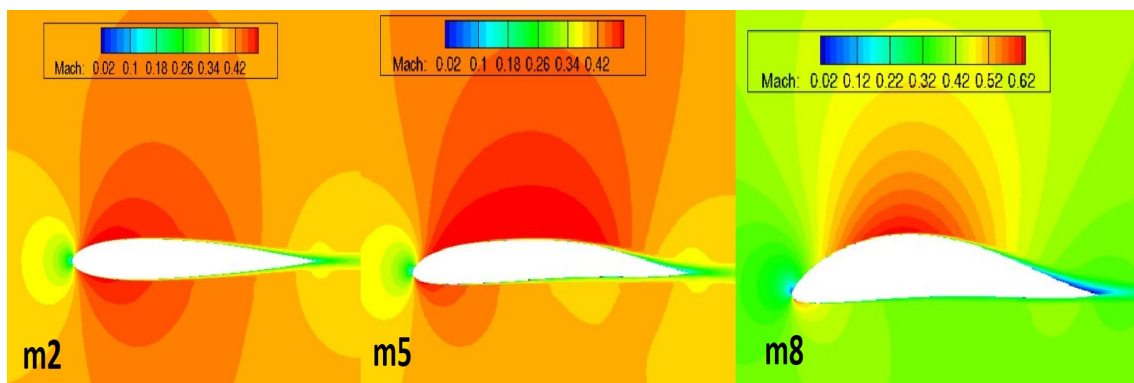
Από τα αμέσως προηγούμενα δύο σχήματα γίνεται αντιληπτό, το πόσο σημαντικό είναι να γίνεται σε κάθε σημείο του μετώπου σωστή εκτίμηση των ενεργών περιορισμών ανισο-ισότητας. Το πιο απλό που θα μπορούσε να γίνει στη λύση του προβλήματος αυτού είναι, τουλάχιστον, να χρειάζονται δύο εναλλαγές της τιμής του περιορισμού ανισο-ισότητας, από αρνητική σε θετική, ώστε να θεωρείται ενεργός στο σημείο αυτό. Για παράδειγμα, εφόσον ο  $g_2 > 0$  τότε να θεωρείται ενεργός για λίγες επαναλήψεις του βήματος διόρθωσης μέχρι να πάρει τιμή μικρότερη από  $g_2 < \epsilon$ , όπου  $\epsilon$  μικρός θετικός αριθμός η μηδέν. Τότε, ο περιορισμός θεωρείται μη-ενεργός στην επόμενη επανάληψη. Αν ο περιορισμός συνεχίζει να είναι μη-ενεργός, η και η τιμή του γίνεται πιο μικρή, τότε ο περιορισμός αυτός, στη βέλτιστη λύση δεν είναι ενεργός. Από την άλλη, αν η τιμή του γίνει ξανά θετική, τότε υπάρχει μεγαλύτερη σιγουριά ότι στη βέλτιστη λύση ο περιορισμός αυτός είναι ενεργός.

Το υπολογιστικό κόστος κάθε ακραίου σημείου ανήλθε στις  $11EFS$ , ενώ για τα 6 ενδιάμεσα σημεία το υπολογιστικό κόστος, συμπεριλαμβάνοντας το επιπλέον κόστος της επαναρχικοποίησης ( $27EFS$ ), ανήλθε στις  $102EFS$ , με το συνολικό κόστος να είναι  $124EFS$ . Στη συνέχεια, παρουσιάζονται, το σχήμα και το πεδίο αριθμού Mach τριών αεροτομών, οι οποίες αντιστοιχούν, στο δεύτερο, στο πέμπτο και στο όγδοο σημείο από το άνω άκρο. Παρατηρώντας το πεδίο αριθμού Mach (σχήμα 4.25) των αεροτομών φαίνεται ξεκάθαρα η αύξηση της διαφοράς της ταχύτητας και άρα και της πίεσης μεταξύ

των πλευρών υποπίεσης και υπερπίεσης, καθώς αυξάνεται η άνωση. Επίσης, φαίνεται ότι, καθώς αυξάνεται η άνωση, η ταχύτητα στον ομόρρο της αεροτομής μικραίνει, το οποίο οδηγεί στην αύξηση της οπισθέλκουσας, λόγω του θεωρήματος διατήρησης της ορμής.



**Σχήμα 4.24:** Σχήμα τριών αεροτομών. Παρατηρείται πως καθώς η άνωση αυξάνεται, οι πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης ανεβαίνουν προς τα πάνω, ενώ στη μέγιστη άνωση το εμβαδόν της αεροτομής είναι όσο μεγάλο επιτρέπεται από τον περιορισμό ανισο-ισότητας.



**Σχήμα 4.25:** Πεδίο αριθμού Mach τριών αεροτομών. Η σειρά αρίθμησης αντανακλά τα σημεία του μετώπου, μετρώντας από το πάνω άκρο.

#### 4.2.2 Μέτωπο Pareto τριών στόχων $C_D - C_L - E$

Το πρόβλημα αυτό αποτελεί επέκταση του προηγούμενου προβλήματος προσθέτοντας ως τρίτο στόχο τη μεγιστοποίηση του εμβαδού της αεροτομής, για το οποίο, όμως, η μέγιστη τιμή του (η ελάχιστη, δηλαδή, τιμή του στόχου  $f_3$ ) είναι γνωστή, καθώς ισχύουν οι δύο προηγούμενοι περιορισμοί ανισο-ισότητας. Το πρόβλημα αυτό, διατυ-



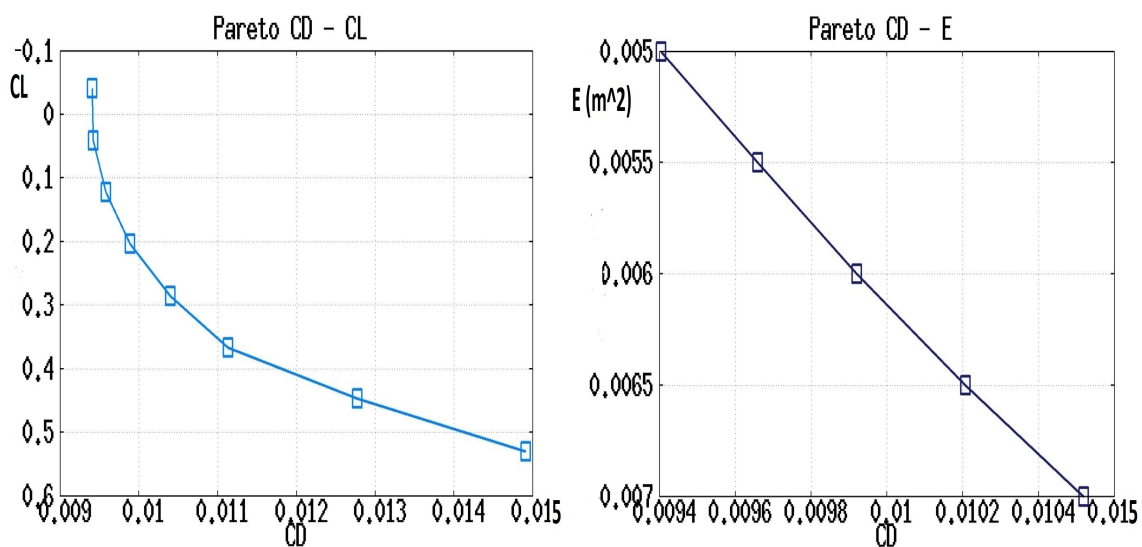
πώνεται μαθηματικά ως εξής:

$$\begin{aligned}
 \min f_1(\vec{b}) &= C_D(\vec{b}) \\
 \min f_2(\vec{b}) &= -C_L(\vec{b}) \\
 \min f_3(\vec{b}) &= -E(\vec{b}) \\
 &s.t. \\
 g_1(\vec{b}) &= 0.005 - E(\vec{b}) \leq 0 \\
 g_2(\vec{b}) &= E(\vec{b}) - 0.007 \leq 0
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

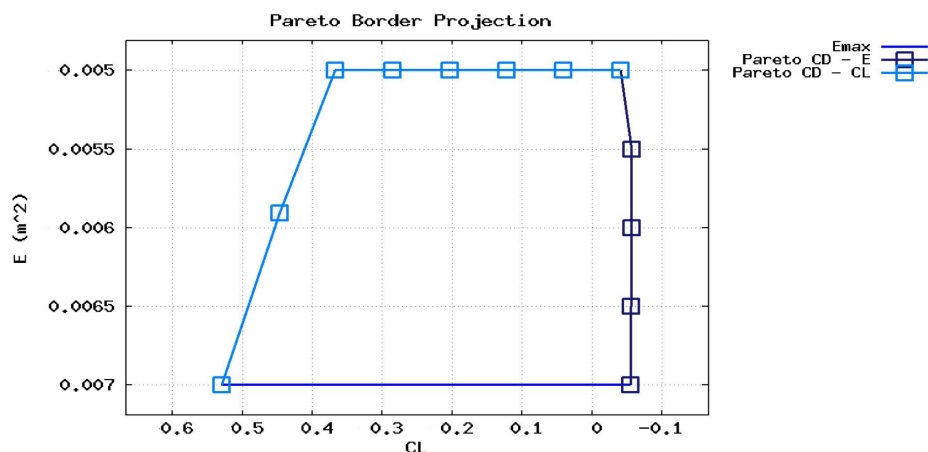
με τα πιο κάτω όρια στις μεταβλητές σχεδιασμού.

$$\begin{aligned}
 b_1 &\in [-2, -0.0001] & b_2 &\in [-2, -0.0001] \\
 b_3 &\in [-2, -0.0001] & b_4 &\in [-2, -0.0001] \\
 b_5 &\in [0.0001, 2] & b_6 &\in [0.0001, 2] \\
 b_7 &\in [0.0001, 2] & b_8 &\in [0.0001, 2]
 \end{aligned}$$

Το μέτωπο  $(C_D, C_L)$  εντοπίστηκε προηγουμένως, ενώ σε αυτό το πρόβλημα το μέτωπο  $(C_L, E)$ , δεν υπάρχει καθώς, η μέγιστη τιμή του συντελεστή άνωσης, συμπίπτει στο ίδιο σημείο με τη μέγιστη τιμή του εμβαδού της αεροτομής. Δηλαδή, για τον αρχικό υπολογισμό του πεδίου τιμών στόχων-περιορισμών  $\vec{f}$ , υπολογίζεται μόνο το μέτωπο  $(C_D, E)$  ενώ το πεδίο κλείνει η ισογραμμή  $f_3^L = E = E_{max} = 0.007m^2$  (σχήμα 4.27).

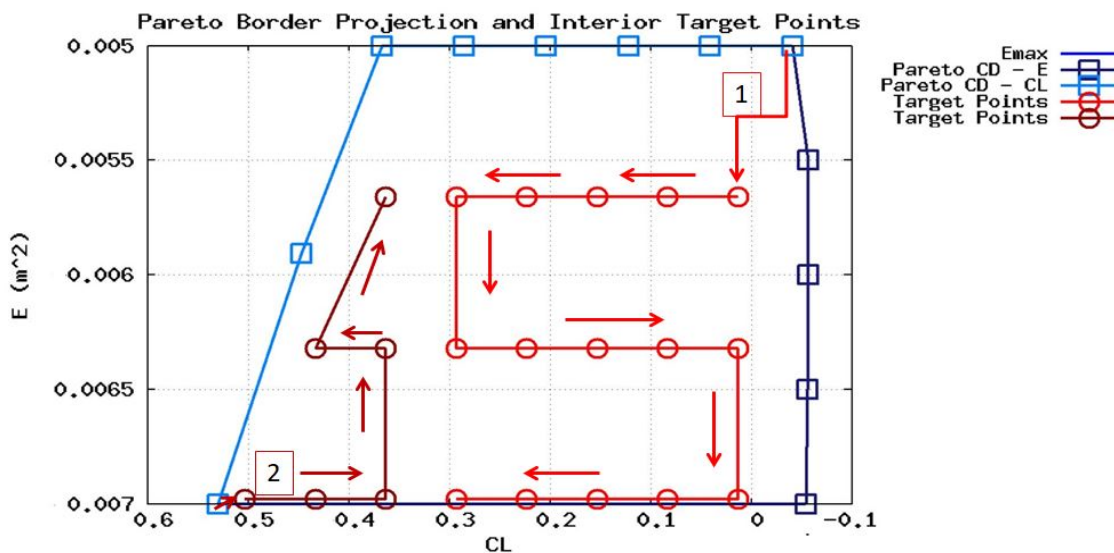


**Σχήμα 4.26:** Μέτωπο Pareto  $(C_D, C_L)$  και μέτωπο Pareto  $(C_D, E)$  5 σημείων. Το μέτωπο  $(C_D, C_L)$  υπολογίστηκε προηγουμένως. Παρατηρείται ότι το μέτωπο  $(C_D, E)$  έχει σταθερή κλίση, δείχνοντας ότι η μεταβολή της οπισθέλκουσας σε σχέση με το εμβαδόν της αεροτομής είναι γραμμική, στο πεδίο ορισμού του προβλήματος.



Σχήμα 4.27: Το σύνορο της προβολής του μετώπου Pareto στο χώρο των στόχων  $f_2, f_3$ .

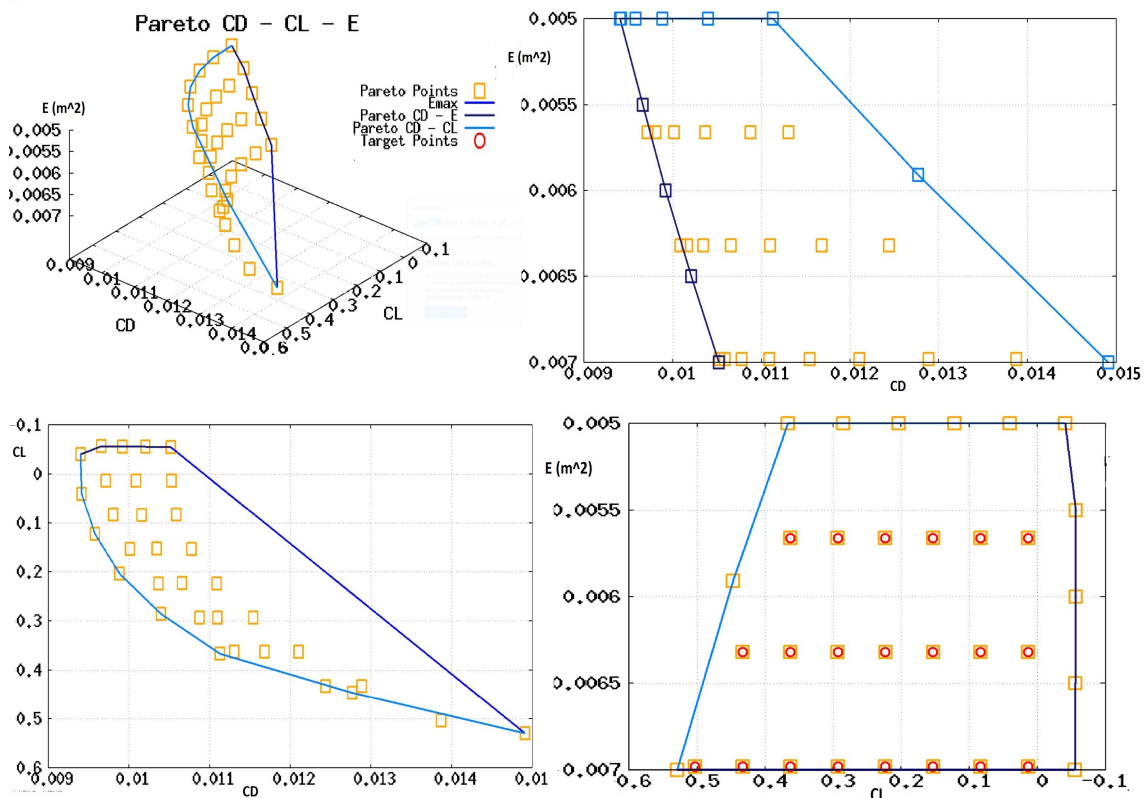
Στη συνέχεια, το μέτωπο διακριτοποιείται, με όμοιο τρόπο με το προηγούμενο αεροδυναμικό πρόβλημα, ορίζοντας ως  $\Delta \hat{f}_2 = 0.07$  και  $\Delta \hat{f}_3 = 0.0066$ . Όμως, αντί να ακολουθηθεί πορεία υπολογισμού των σημείων όπως προηγουμένως, το πεδίο χωρίζεται σε δύο χώρους, και εντοπίζονται 2 διαφορετικά σύνολα σημείων, ακολουθώντας 2 διαφορετικές πορείες, σε διαφορετικούς επεξεργαστές<sup>1</sup>. Στο κείμενο, οι πορείες ονομάζονται πορεία 1 και πορεία 2, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.28.



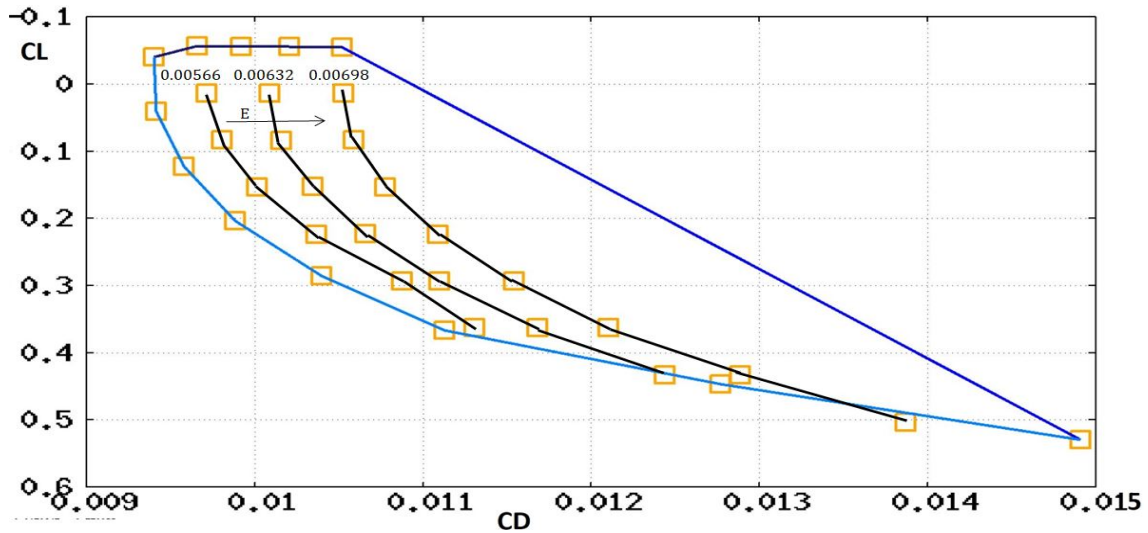
Σχήμα 4.28: Η διακριτοποίηση της προβολής του μετώπου στο χώρο  $f_2, f_3$  και οι πορείες υπολογισμού των σημείων σε διαφορετικούς επεξεργαστές. Ο υπολογισμός των σημείων στην πορεία 1 ξεκινά από το σημείο, το οποίο έχει τον καλύτερο συντελεστή οπισθέλκουσας, ενώ η πορεία 2 ξεκινά από το σημείο με τον καλύτερο συντελεστή άνωσης. Συνολικά εντοπίζονται άλλα 21 σημεία.

<sup>1</sup> Τα σημεία στη πορεία 2 είναι λιγότερα των σημείων στη πορεία 1 για τον λόγο ότι, οι αντίστοιχοι επεξεργαστές που χρησιμοποιήθηκαν, έχουν διαφορετική ταχύτητα υπολογισμών (περίπου  $\frac{v_1}{v_2} = 3$ ).

Τα αποτελέσματα, τα οποία ελέγχθηκαν με αυτό εξελικτικού αλγορίθμου, ο οποίος έτρεξε 540 αξιολογήσεις, φάνηκε ότι είναι έγκυρα καθώς, δεν εντοπίστηκε κάποια λύση του προτεινόμενου αλγορίθμου να κυριαρχείται από λύση του εξελικτικού. Στο σχήμα 4.30 φαίνεται το τριδιάστατο μέτωπο Pareto και οι προβολές του σε κάθε επίπεδο. Στην προβολή των στόχων ( $CL, E$ ) παρατηρείται, ότι οι στόχοι-περιορισμοί εντοπίστηκαν με ακρίβεια. Επίσης, στην προβολή των στόχων ( $CD, CL$ ), φαίνεται ότι δημιουργούνται παράλληλα διδιάστατα μέτωπα ( $CD, CL$ ) όπου στο κάθε ένα το εμβαδόν είναι σταθερό. Δηλαδή, θα μπορούσαν να εντοπισθούν λύνοντας προβλήματα δύο στόχων, με αντίστοιχους περιορισμούς ισότητας στο εμβαδόν της αεροτομής.



**Σχήμα 4.29:** Μέτωπο Pareto τριών στόχων και η προβολή τους σε κάθε επίπεδο των στόχων. Εντοπίστηκαν συνολικά 33 σημεία. Τα κριτήρια σύγκλισης, τοποθετήθηκαν ως  $|\frac{f_1^{new} - f_1^{old}}{f_1^{new}}| \leq 10^{-3}$ ,  $|\frac{f_2^{new} - f_2}{f_2}| \leq 10^{-2}$ ,  $|\frac{f_3^{new} - f_3}{f_3}| \leq 10^{-2}$  και  $g_i < 10^{-6}$



**Σχήμα 4.30:** Παράλληλα διδιάστατα μέτωπα Pareto ( $CL, CD$ ), τα οποία δημιουργούνται αυξάνοντας το εμβαδόν της αεροτομής.

Ακολούθως, στο σχήμα 4.31 τα αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά εξελικτικού αλγορίθμου, για τον οποίο τα όρια τέθηκαν ως

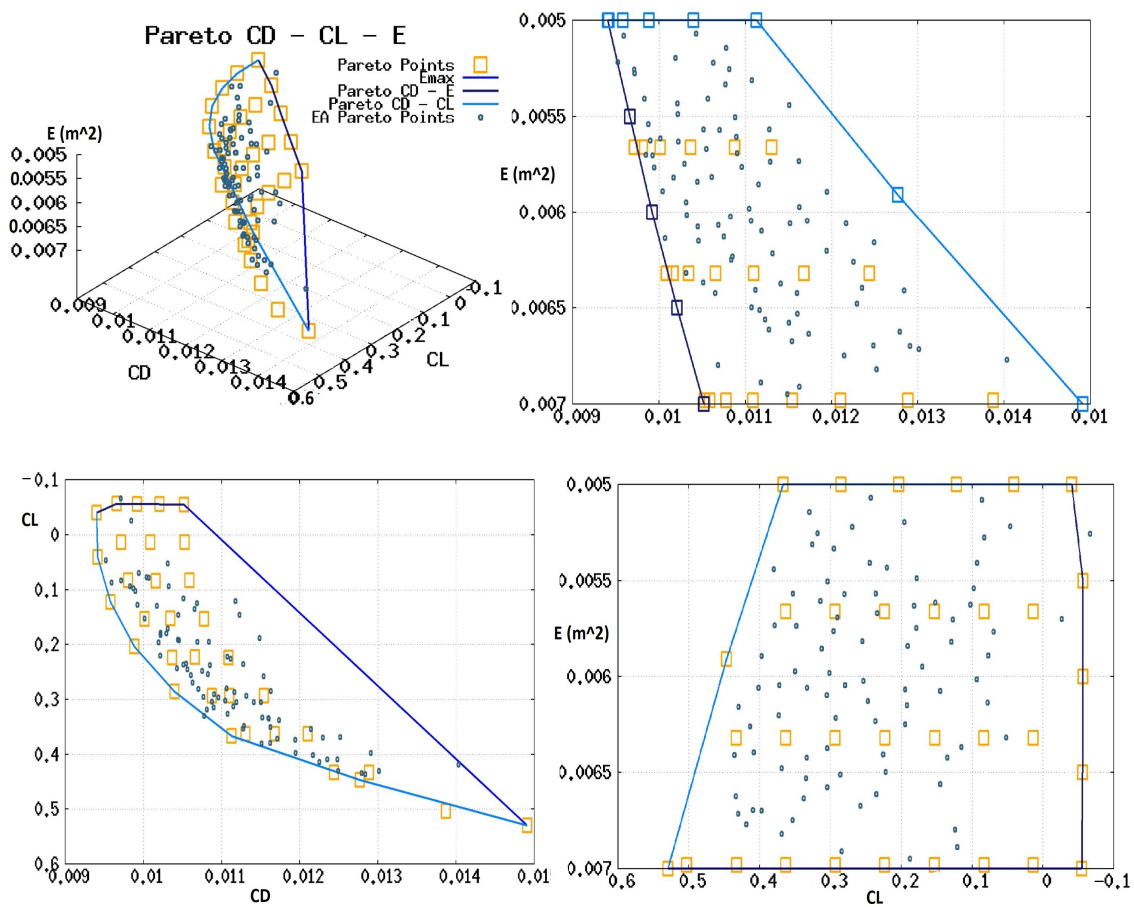
$$\begin{aligned}
 b_1 &\in [-0.3, -0.0001] & b_2 &\in [-0.3, -0.0001] \\
 b_3 &\in [-0.3, -0.0001] & b_4 &\in [-0.3, -0.0001] \\
 b_5 &\in [0.0001, 0.3] & b_6 &\in [0.0001, 0.3] \\
 b_7 &\in [0.0001, 0.3] & b_8 &\in [0.0001, 0.3]
 \end{aligned}$$

Το συνολικό υπολογιστικό κόστος ανήλθε στις  $313EFS$ , ενώ αυτό αναλύεται στον αμέσως επόμενο πίνακα.

Βελτιστοποίηση	$EFS$	Σημεία	$EFS/σημείο$
Στόχος $f_1$	11	1	11
Στόχος $f_2$	11	1	11
Pareto ( $f_1, f_2$ ) (εσωτερικά σημεία)	75	6	12.5
Pareto ( $f_1, f_3$ ) (εκτός ενός άκρου)	16	4	4
Pareto ( $f_1, f_2, f_3$ ) (πορεία 1)	123	15	8.2
Pareto ( $f_1, f_2, f_3$ ) (πορεία 2)	66	6	11
Επαναυπολογισμός 2 σημείων	27	-	13.5
Σύνολο	313	33	9.5

**Πίνακας 4.4:** Ανάλυση υπολογιστικού κόστους με την προτεινόμενη μέθοδο.

Αξιοσημείωτο είναι ότι το υπολογιστικό κόστος ανά σημείο στο μέτωπο ( $f_1, f_3$ ). Το μέτωπο αυτό συνέκλινε σε κάθε σημείο του, με μόλις μία επανάληψη στο βήμα διόρθωσης, το οποίο είναι λογικό καθώς, στο βήμα πρόβλεψης γίνεται μία γραμμική προσέγγιση πρώτης τάξης, ενώ το μέτωπο αυτό φαίνεται να έχει μία σταθερή περίπου κλίση.



**Σχήμα 4.31:** Σύγκριση των αποτελεσμάτων με εξελικτικό αλγόριθμο. Παρατηρείται ότι τα μέτωπα είναι παρόμοια, όπως επίσης και η κατανομή σε κάθε επίπεδο.

Το υπολογιστικό κόστος ανά σημείο θεωρείται ικανοποιητικό, όπως και το συνολικό κόστος, καθώς υπάρχει ακρίβεια στον εντοπισμό του μετώπου και είναι μικρότερο από αυτό του εξελικτικού αλγορίθμου.



## Κεφάλαιο 5

# Συμπεράσματα και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Στην εργασία αυτή, πραγματοποιήθηκε βελτίωση και επέκταση του αλγορίθμου που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο προηγούμενων διπλωματικών εργασιών [2, 3] στη ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ. Αρχικά, ο αλγόριθμος επεκτάθηκε με την ικανότητα να υπολογίζει μέτωπα Pareto, όταν το πρόβλημα υποβάλλεται σε περιορισμούς ισότητας ή και ανισο-ισότητας, ενώ υπάρχει η δυνατότητα περιορισμού των μεταβλητών σχεδιασμού σε όρια, τα οποία λαμβάνονται, επίσης, ως περιορισμοί ανισο-ισότητας. Έχει γίνει σημαντικό βήμα στη μείωση του υπολογιστικού κόστους στο βήμα διόρθωσης, κατά το οποίο διαπιστώθηκε ότι υπολογίζεται, ένα καλό Εσσιανό μητρώο για το επόμενο βήμα πρόβλεψης, καθώς παρατηρήθηκε ότι το βήμα πρόβλεψης, προσέγγιζε πολύ συχνά και πολύ καλά τη βέλτιστη λύση. Μέσω, δοκιμών σε μαθηματικά προβλήματα, αλλά και των αποτελεσμάτων σε αεροδυναμικά προβλήματα υπό περιορισμούς ανισο-ισότητας, διαπιστώθηκε ότι το βήμα διόρθωσης είναι αναγκαίο, ειδικότερα όταν το πρόβλημα υπόκειται σε τέτοιους περιορισμούς, καθώς οι περιορισμοί αυτοί μπορεί να είναι σε ένα σημείο ενεργοί ενώ σε ένα προηγούμενο η επόμενο σημείο μη-ενεργοί. Η εκτέλεση του βήματος διόρθωσης αποτελεί μία σίγουρη επιλογή, καθώς αν και σε ορισμένες περιπτώσεις φάνηκε να μην προκαλεί ζημιά η παράλειψη του, εμπεριέχει μεγάλο ρίσκο ο αλγόριθμος να αποτύχει, έστω να προσεγγίσει το μέτωπο Pareto.

Ακόμη, διαπιστώθηκε ότι ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε μπορεί να υπολογίσει μέτωπα Pareto τριών στόχων. Υπολογίζοντας, αρχικά, διδιάστατα μέτωπα, συνδυάζοντας τους τρεις στόχους, διαγράφοντας σε ένα από τα τρία επίπεδα των στόχων το σύνορο της προβολής του μετώπου Pareto και εν τέλει διακριτοποιώντας το πεδίο ορισμού της προβολής αυτής, εντοπίζονται οι τιμές των στόχων-περιορισμών για τις οποίες μπορεί να εντοπισθεί στη συνέχεια λύση στο μέτωπο. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τα βήματα πρόβλεψης-διόρθωσης εντοπίζονται, διαδοχικά τα σημεία στο μέτωπο, ικανοποιώντας σε κάθε σημείο τους στόχους-περιορισμούς που εντοπίστηκαν προηγουμένως. Το υπολογιστικό κόστος, διαπιστώθηκε ότι είναι ανάλογο των σημείων που εντοπίζονται στο

μέτωπο και έτσι κρίνεται αναγκαίο η μεταβολή των στόχων-περιορισμών  $\Delta \vec{f}$  μεταξύ διαδοχικών σημείων να μεταβάλλεται ανάλογα με την απόσταση των διαδοχικών σημείων, έτσι ώστε, να παράγεται ένα ομοιόμορφο μέτωπο με τα λιγότερα δυνατά σημεία. Αυτό για να γίνει, πιθανόν, να χρειάζεται ο υπολογισμός των τιμών των στόχων-περιορισμών να γίνεται ταυτόχρονα με τον εντοπισμό των σημείων στο μέτωπο, έχοντας, βέβαια υπόψη το σύνορο του μετώπου Pareto που υπολογίστηκε προηγουμένως.

Αφού, λοιπόν, η λογική υπολογισμού μετώπων κατώτερων διαστάσεων, διαπιστώθηκε επιτυχημένη για τον υπολογισμό του συνόρου τριδιάστατων μετώπων Pareto, θα μπορούσε να διερευνηθεί αν μπορούν με την ίδια λογική να υπολογίζονται μέτωπα τεσσάρων στόχων, υπολογίζοντας, αρχικά, τρία τριδιάστατα μέτωπα Pareto, τα οποία θεωρητικά, θα σχηματίσουν μία κλειστή επιφάνεια στον τριδιάστατο χώρο, η οποία είναι η προβολή του τετραδιάστατου μετώπου Pareto στον τριδιάστατο χώρο.

Τέλος, μπορεί να προγραμματιστεί και να επεκταθεί το λογισμικό, ούτως ώστε να μπορεί να τρέχει τις απαιτούμενες μονοκριτηριακές βελτιστοποιήσεις σε παράλληλους επεξεργαστές, με το ίδιο να ισχύει και στον υπολογισμό των τριών διδιάστατων μετώπων Pareto που απαιτούνται για τον υπολογισμό του τριδιάστατου μετώπου. Στη συνέχεια, ο χώρος των στόχων-περιορισμών που δημιουργούν αυτά τα μέτωπα, θα μπορούσε να διαιρεθεί σε μικρότερους χώρους και να υπολογισθεί το μέτωπο σε παράλληλους επεξεργαστές, όπως για παράδειγμα, γίνεται στον υπολογισμό του μετώπου Pareto τριών στόχων του δεύτερου αεροδυναμικού προβλήματος (υποενότητα 4.2.2, σχήμα 4.28), το οποίο, όμως, στην εργασία αυτή δεν πραγματοποιείται με αυτοματοποιημένο τρόπο.



## Παράρτημα Α'

### Μαθηματικοί ορισμοί και μαθηματικά εργαλεία

#### Α'.1 Βασικοί Ορισμοί

**Καθολικό ελάχιστο:** Το  $\vec{x}^*$  αποτελεί καθολικό ελάχιστο(global minimizer) της  $F(\vec{x})$  αν ισχύει

$$F(\vec{x}^*) \leq F(\vec{x}) \quad \forall \quad \vec{x} \quad (\text{A'.1})$$

**Τοπικό ελάχιστο:** Το  $\vec{x}^*$  αποτελεί τοπικό ελάχιστο (local minimizer) της  $F(\vec{x})$  αν στη γειτονιά του  $\vec{x}^*$  ισχύει

$$F(\vec{x}^*) \leq F(\vec{x}) \quad \forall \quad \vec{x} \quad (\text{A'.2})$$

**Θετικά ορισμένο μητρώο:** Ένα μητρώο B είναι θετικά ορισμένο (positive definite) αν ισχύει

$$\vec{p}^T B \vec{p} > 0 \quad \forall \quad \vec{p} \quad (\text{A'.3})$$

**Θετικά ήμι-ορισμένο μητρώο:** Ένα μητρώο B είναι θετικά ήμι-ορισμένο (positive semidefinite) αν ισχύει

$$\vec{p}^T B \vec{p} \geq 0 \quad \forall \quad \vec{p} \quad (\text{A'.4})$$

[6]

#### Α'.2 Αναγκαίες συνθήκες πρώτης και δεύτερης τάξης για το ελάχιστο

**Αναγκαία συνθήκη πρώτης τάξης** ώστε το  $\vec{x}^*$  να αποτελεί τοπικό ελάχιστο της συνεχώς διαφορίσιμης  $F$  στη γειτονιά του  $\vec{x}^*$  και ισχύει  $\nabla F(\vec{x}^*) = 0$ .

**Αναγκαίες συνθήκες δεύτερης τάξης** ώστε το  $\vec{x}^*$  να αποτελεί τοπικό ελάχιστο της  $F$ , για την οποία η  $\nabla^2 F$  είναι συνεχής στη γειτονιά του  $\vec{x}^*$ , είναι να ισχύει  $\nabla F(\vec{x}^*) = 0$  και συγχρόνως το μητρώο  $\nabla^2 F$  να είναι θετικά ημι-ορισμένο.

[6]

### A'.3 Η έννοια της κυρτότητας

Μία συνάρτηση είναι κυρτή στον  $R^N$  αν ισχύει

$$f(t\vec{x} + (1-t)\vec{y}) \leq tf(\vec{x}) + (1-t)f(\vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in R^N, \quad \forall t \in [0,1] \quad (A'.5)$$

Το σύνολο  $\Omega \subset R^N$  ονομάζεται κυρτό αν

$$t\vec{x} + (1-t)\vec{y} \in \Omega \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \Omega, \quad \forall t \in [0,1] \quad (A'.6)$$

Καθολικό ελάχιστο σε κυρτές συναρτήσεις: Αν η  $F$  είναι κυρτή συνάρτηση, κάθε τοπικό της ελάχιστο  $\vec{x}^*$  αποτελεί και καθολικό ελάχιστό της. Αν, επιπλέον, η  $F$  είναι διαφορίσιμη, τότε κάθε στάσιμο σημείο  $\vec{x}^*$  είναι καθολικό ελάχιστο της  $F$ . [6]

### A'.4 Μη-κυριαρχούμενες λύσεις

Ορισμός: Μη-κυριαρχούμενη λύση ή κατά Pareto βέλτιστη λύση είναι η λύση  $\vec{x}$  αν και μόνο αν δεν υπάρχει άλλη λύση  $\vec{y}$  τέτοια ώστε για  $M$  στόχους βελτιστοποίησης να ισχύει

$$F_m(\vec{y}) \leq F_m(\vec{x}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in R^N, \quad \forall m = 1, \dots, M \quad (A'.7)$$

και για έναν τουλάχιστον στόχο να ισχύει  $F_k(\vec{y}) < F_k(\vec{x})$ . [6]

### A'.5 Ενεργός/Ανενεργός περιορισμός ανισο-ισότητας

Ενεργός περιορισμός ανισο-ισότητας είναι ο περιορισμός για τον οποίο, στη βέλτιστη λύση  $\vec{b}^*$  ισχύει

$$g(\vec{b}^*) = 0. \quad (A'.8)$$

Ανενεργός περιορισμός ανισο-ισότητας είναι ο περιορισμός για τον οποίο, στη βέλτιστη λύση  $\vec{b}^*$  ισχύει

$$g(\vec{b}^*) < 0. \quad (A'.9)$$

[6]

### A'.6 Γραμμική ανεξαρτησία περιορισμών

Αν ορισθεί ο Ιακωβιανός πίνακας (Jacobian matrix)

$$A^T(\vec{b}) = [\nabla_{\vec{b}}c_1(\vec{b}), \dots, \nabla_{\vec{b}}c_M(\vec{b})] \quad (A'.10)$$

τότε λέμε πως υπάρχει γραμμική ανεξαρτησία περιορισμών (linear independence constraint qualification-LICQ) αν το σύνολο των παραγώγων των ενεργών περιορισμών  $\{\nabla_{c_i}(\vec{b}), i \in A(\vec{b})\}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητο. [9]

## A'.7 Διατύπωση της συνάρτησης Langrange

Απαραίτητη σε αυτή την εργασία, αλλά και γενικά σε πολλές εφαρμογές της βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς, είναι η διατύπωση της **συνάρτησης Langrange**. Έστω το πρόβλημα βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς

$$\begin{aligned} \min F(\vec{b}) \\ \text{s.t.} \\ c_i(\vec{b}) = 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, Mc \\ g_i(\vec{b}) \leq 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, Mg \end{aligned} \quad (A'.11)$$

όπου  $Mc$  ο αριθμός των περιορισμών ισότητας και  $Mg$  ο αριθμός των περιορισμών ανισο-ισότητας. Ορίζοντας το διάνυσμα πολλαπλασιαστών Langrange  $\vec{\lambda} = [\vec{\lambda}_c \quad \vec{\lambda}_g]^T$ , η συνάρτηση Langrange διατυπώνεται ως

$$L(\vec{b}, \vec{\lambda}) = F(\vec{b}) - \sum_{i=1}^{Mc} \lambda_{c_i} c_i(\vec{b}) - \sum_{i=1}^{Mg} \lambda_{g_i} g_i(\vec{b}) \quad (A'.12)$$

Τώρα, το πρόβλημα ελαχιστοποίησης, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Langrange, μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως το πρόβλημα ικανοποίησης των αναγκαίων συνθηκών ελαχιστοποίησης υπό περιορισμούς **Karush-Kuhn-Tucker (KKT)**.

## A'.8 Οι συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker

Έστω το πρόβλημα ελαχιστοποίησης υπό περιορισμούς (A'.11) για το οποίο διατυπώνεται η συνάρτηση Langrange (A'.12), τότε αν  $\vec{b}^*$  είναι μία τοπική λύση του προβλήματος, υπάρχει ένα διάνυσμα πολλαπλασιαστών Langrange  $\vec{\lambda}^*$  τέτοιο ώστε στο  $(\vec{b}^*, \vec{\lambda}^*)$  να ισχύουν

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{b}} L(\vec{b}^*, \vec{\lambda}^*) &= 0 \\ c_i(\vec{b}^*) &= 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, Mc \\ g_i(\vec{b}^*) &\leq 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, Mg \\ \lambda_{g_i}^* &\leq 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, Mg \\ \lambda_{g_i}^* g_i(\vec{b}^*) &= 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, Mg \end{aligned} \quad (A'.13)$$

Οι αναγκαίες συνθήκες ονομάζονται **συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker (KKT) πρώτης τάξεως**. Παρατηρείται πως όταν οι συνθήκες ικανοποιούνται η συνάρτηση  $L(\vec{b}, \vec{\lambda}) = F(\vec{b})$  και ταυτόχρονα ικανοποιούνται και οι περιορισμοί. Παράλληλα, η συνθήκη  $\lambda_{g_i}^* g_i(\vec{b}^*) = 0$  δείχνει την ανάγκη μηδενισμού του πολλαπλασιαστή  $\lambda_{g_i}$  στην περίπτωση που ο περιορισμός είναι μη-ενεργός [6]. Η αναγκαία **συνθήκη KKT δεύτερης τάξης** ορίζει ότι το μητρώο  $\nabla_{\vec{b}\vec{b}}^2 L(\vec{b}^*, \vec{\lambda}^*)$  πρέπει να είναι θετικά ορισμένο.

$$\vec{u}^T \nabla_{\vec{b}\vec{b}}^2 L(\vec{b}^*, \vec{\lambda}^*) \vec{u} \quad \forall \quad \vec{u} \in T^*(\vec{b}^*) \quad (A'.14)$$

## A'.9 Ισοδυναμία προβλημάτων

Έστω τα πιο κάτω προβλήματα βελτιστοποίησης

$$\begin{aligned} \min F(\vec{b}) &= \sum_{i=1}^M w_i f_i(\vec{b}) \\ \text{s.t.} & \end{aligned} \quad (\text{A'.15})$$

$$\begin{aligned} c_i(\vec{b}) &= 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, M_c \\ g_i(\vec{b}) &\leq 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, M_g \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \min f_1(\vec{b}) \\ \text{s.t.} \end{aligned} \quad (\text{A'.16})$$

$$\begin{aligned} f_i(\vec{b}) - \hat{f}_i &= 0 \quad \forall \quad i = 2, \dots, M \\ c_i(\vec{b}) &= 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, M_c \\ g_i(\vec{b}) &\leq 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, M_g \end{aligned}$$

Εάν διατυπωθεί, αντίστοιχα, η συνάρτηση Langrange(A'.12) για τα δύο προβλήματα

$$L(\vec{b}, \vec{\lambda}, \vec{w}) = w_1 f_1(\vec{b}) + \sum_{i=2}^M w_i f_i(\vec{b}) - \sum_{i=1}^{M_c} \lambda_{c_i} c_i(\vec{b}) - \sum_{i=1}^{M_g} \lambda_{g_i} g_i(\vec{b}) \quad (\text{A'.17})$$

$$L(\vec{b}, \vec{\lambda}) = f_1(\vec{b}) - \sum_{i=2}^M \lambda_{f_i} f_i(\vec{b}) - \sum_{i=1}^{M_c} \lambda_{c_i} c_i(\vec{b}) - \sum_{i=1}^{M_g} \lambda_{g_i} g_i(\vec{b}) \quad (\text{A'.18})$$

Ακολουθώντας ικανοποιώντας την πρώτη συνθήκη  $\nabla_b L = 0$  από τις συνθήκες KKT(A'.13) η εξίσωση(A'.17) παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} \nabla_b L(\vec{b}, \vec{\lambda}, \vec{w}) &= w_1 \nabla_b f_1(\vec{b}) + \sum_{i=2}^M w_i \nabla_b f_i(\vec{b}) - \sum_{i=1}^{M_c} \lambda_{c_i} \nabla_b c_i(\vec{b}) - \sum_{i=1}^{M_g} \lambda_{g_i} \nabla_b g_i(\vec{b}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \\ \nabla_b L(\vec{b}, \vec{\lambda}, \vec{w}) &= \nabla_b f_1(\vec{b}) + \sum_{i=2}^M \frac{w_i}{w_1} \nabla_b f_i(\vec{b}) - \sum_{i=1}^{M_c} \frac{\lambda_{c_i}}{w_1} \nabla_b c_i(\vec{b}) - \sum_{i=1}^{M_g} \frac{\lambda_{g_i}}{w_1} \nabla_b g_i(\vec{b}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A'.19})$$

ενώ η εξίσωση(A'.18) παίρνει την μορφή

$$\nabla_b L(\vec{b}, \vec{\lambda}) = \nabla_b f_1(\vec{b}) - \sum_{i=2}^M \lambda_{f_i} \nabla_b f_i(\vec{b}) - \sum_{i=1}^{M_c} \lambda_{c_i} \nabla_b c_i(\vec{b}) - \sum_{i=1}^{M_g} \lambda_{g_i} \nabla_b g_i(\vec{b}) = 0 \quad (\text{A'.20})$$

Παρατηρώντας τις εξισώσεις (A'.19) και (A'.20) είναι προφανές ότι ισχύει η εξής αντιστοιχία

$$\begin{aligned} -\frac{w_i}{w_1} &\longleftrightarrow \lambda_{f_i} \quad \forall \quad i = 2, \dots, M \\ \frac{\lambda_{c_i}}{w_1} &\longleftrightarrow \lambda_{c_i} \quad \forall \quad i = 1, \dots, M_c \\ \frac{\lambda_{g_i}}{w_1} &\longleftrightarrow \lambda_{g_i} \quad \forall \quad i = 1, \dots, M_g \end{aligned}$$

και οι αρχικοί συντελεστές βαρύτητας, ελαφρώς διαφοροποιημένοι, μετατρέπονται στους πολλαπλασιαστές Langrange.

## A'.10 Προσέγγιση μορφής αεροτομής μέσω καμπυλών Bezier-Bernstein

Στην εργασία αυτή γίνεται πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση μορφής αεροτομής. Η γεωμετρική μορφή της μπορεί να βρεθεί μέσω προσέγγισης δύο καμπυλών, μία για την πλευρά υποπίεσης και μία για την πλευρά υπερπίεσης, μέσω των πολυωνύμων **Bezier-Bernstein**, τα οποία χρησιμοποιούν ένα περιορισμένο αριθμό από **σημεία ελέγχου (control points - CP)**[23]. Η θέση (x,y) στον διδιάστατο χώρο των σημείων αυτών, καθορίζει το σχήμα της καμπύλης. Στην εργασία τα σημεία ελέγχου παραμένουν σταθερά κατά τον x-άξονα ενώ είναι ελεύθερα να μετακινηθούν κατά τον y-άξονα. Επομένως οι θέσεις y των σημείων ελέγχου αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού κατά τη βελτιστοποίηση του σχήματος της αεροτομής.

Κάθε σημείο  $\vec{r} = [x \ y]^T$  μίας καμπύλης Bezier-Bernstein δίδεται από τη σχέση

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=0}^N \vec{R}_i C_i(t) \quad (\text{A'.21})$$

όπου  $t \in [0, 1]$  και  $\vec{R}_i$  τα  $N + 1$  σημεία ελέγχου σε διανυσματική μορφή, ενώ οι συντελεστές  $C_i(t)$  δίνονται σε μητρική γραφή ως

$$\begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \\ \vdots \\ C_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} & \cdots & m_{0,N} \\ m_{1,0} & m_{1,1} & \cdots & m_{1,N} \\ & & \ddots & \\ m_{N,0} & m_{N,1} & \cdots & m_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^0 \\ t^1 \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix} \quad (\text{A'.22})$$

με τα στοιχεία  $m_{i,j}$  να ορίζονται ως

$$m_{i,j} = (-1)^{j-i} \binom{N}{j} \binom{j}{i} \quad (\text{A'.23})$$

Επίσης, βασική ιδιότητα των καμπυλών Bezier-Bernstein είναι ότι η καμπύλη ξεκινά από το πρώτο και τερματίζει στο τελευταίο σημείο της, ενώ η κλίση στο πρώτο και στο τελευταίο σημείο καθορίζεται από το ζεύγος των δύο πρώτων και των δύο τελευταίων σημείων αντίστοιχα. Για παράδειγμα, η κλίση στο πρώτο σημείο της καμπύλης υποπίεσης στο σχήμα (4.4) είναι 90 μοίρες, καθώς η κλίση αυτή είναι ίση με την κλίση της ευθείας που καθορίζουν τα 2 πρώτα σημεία ελέγχου.

## A'.11 Θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων

Για πληρότητα παρατίθεται πιο κάτω το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων (implicit function theorem) το οποίο μπορεί να βρεθεί σε πολλές πηγές στη βιβλιογραφία[10,

9].

Θεώρημα: Έστω  $\vec{f}(\vec{x}, \vec{y}) : \mathbb{R}^{N+M} \rightarrow \mathbb{R}^N$  συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και  $\vec{x} \in \mathbb{R}^N, \vec{y} \in \mathbb{R}^M$ . Αν στο σημείο  $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{\alpha}, \vec{\beta})$  ισχύει  $\vec{f}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \vec{0}$  και ο Ιακωβιανός πίνακας (Jacobian matrix)

$$J(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \nabla_y f_{1,\dots,N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial y_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_M} & \frac{\partial f_2}{\partial y_M} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial y_M} \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο  $U \subset \mathbb{R}^M$  το οποίο περιέχει τέτοια  $\vec{\beta}$ , έτσι ώστε να υπάρχει μία μοναδική συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση  $\vec{g}(\vec{\beta}) = \vec{\alpha}$  και

$$\vec{f}(\vec{x}, \vec{g}(\vec{x})) = \vec{0} \quad \forall \quad \vec{x} \in U \quad (\text{A'.24})$$

$$\nabla_x \vec{g}(\vec{x}) = -[J(\vec{x}, \vec{g}(\vec{x}))]^{-1} \nabla_y \vec{f}(\vec{x}, \vec{g}(\vec{x})) \quad (\text{A'.25})$$

## Παράρτημα Β΄

### Μέθοδοι ανίχνευσης κατά γραμμή

#### Β΄.1 Εισαγωγή

Οι μέθοδοι ανίχνευσης κατά γραμμή είναι επαναληπτικές. Βασίζονται στη βασική αρχή υπολογισμού μίας **κατεύθυνσης ανίχνευσης** και, ακολούθως, αποφασίζεται πόσο μεγάλη διόρθωση θα γίνει στην κατεύθυνση αυτή σε κάθε επανάληψη. Μαθηματικά αυτό υλοποιείται με το σχήμα

$$\vec{b}_{n+1} = \vec{b}_n + \eta_n \vec{p}_n \quad (\text{B'.1})$$

όπου  $\vec{b}$  το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού,  $\vec{p}$  η κατεύθυνση ανίχνευσης και  $\eta$  το μήκος βήματος (step length). Αρκετά συχνά το μήκος βήματος παραμένει σταθερό σε κάθε επανάληψη. Τις περισσότερες φορές απαιτείται η κατεύθυνση ανίχνευσης να είναι **κατεύθυνση καθόδου (descent direction)** για τις οποίες ισχύει  $p_n^T \nabla_b F < 0$  [9], όπου η  $F$  η βαθμωτή συνάρτηση στόχου της βελτιστοποίησης. Καθώς το διάνυσμα  $\nabla_b F$  είναι το διάνυσμα μέγιστης μεταβολής μιας συνάρτησης  $F$ , μία κατεύθυνση καθόδου που χρησιμοποιείται αρκετά είναι η  $\vec{p}_n = -\nabla_b F$  η οποία αντιστοιχεί στη μέθοδο της **Απότομης καθόδου (Steepest descent)**. Άλλες φορές, στη μέθοδο **Newton** ή στις **προσεγγιστικές μεθόδους Newton (Quasi-Newton)** χρησιμοποιείται η κατεύθυνση ανίχνευσης  $\vec{p}_n = -B_n^{-1} \nabla_b F$ , όπου το μητρώο  $B_n$  είναι το ακριβές Εσσιανό μητρώο (Hessian matrix)  $\nabla^2 F$  η αντίστοιχα προσέγγιση αυτού. Είναι προφανές ότι στη μέθοδο απότομης καθόδου ισχύει  $p_n^T \nabla_b F = -\nabla_b F^T \nabla_b F < 0$ , ενώ στη μέθοδο Newton ισχύει ότι  $p_n^T \nabla_b F = -\nabla_b F^T B_n^{-1} \nabla_b F < 0$  μόνο όταν το μητρώο  $B_n$  είναι θετικά ορισμένο (Α΄.3).

Στην εργασία αυτή, χρησιμοποιούνται αυτές οι μέθοδοι, είτε για αρχική μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση, είτε υπό την έννοια υπολογισμού μίας διόρθωσης στις μεταβλητές σχεδιασμού  $\Delta \vec{b} = \vec{b}_{n+1} - \vec{b}_n$ , όταν χρησιμοποιείται μία επαναληπτική μέθοδος βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς.

## B'.2 Η μέθοδος της Απότομης καθόδου (Steepest descent)

Εάν επιλεγεί το διάνυσμα  $\vec{p}_n = -\nabla_b F$  το σχήμα (B'.1) λαμβάνει τη μορφή

$$\vec{b}_{n+1} = \vec{b}_n - \eta_n \nabla_b F \quad (\text{B'.2})$$

Η μέθοδος αυτή είναι καλή μέθοδος σε απλά προβλήματα. Είναι, όμως, ιδιαίτερα αργή και αναποτελεσματική σε πολύπλοκα προβλήματα, καθώς υπάρχει μεγάλη εξάρτηση από την αρχική λύση  $\vec{b}_0$ , το μήκος βήματος και τη μορφή της συνάρτησης. Συγκριτικό της πλεονέκτημα είναι ότι δεν απαιτείται η εύρεση του Εσσιανού μητρώου, δηλαδή παραγώγων δεύτερης τάξης.[6]

## B'.3 Η μέθοδος Newton

Για τη θεμελίωση της μεθόδου αρκεί να γραφεί το πιο κάτω τετραγωνικό μοντέλο χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης και  $\eta_n = 1$ .

$$F(\vec{b}_n + \vec{p}_n) \approx F(\vec{b}_n) + \vec{p}_n^T \nabla_b F(\vec{b}_n) + \frac{1}{2} \vec{p}_n^T \nabla_{bb}^2 F(\vec{b}_n) \vec{p}_n \quad (\text{B'.3})$$

Η απαίτηση μηδενικής πρώτης παραγώγου της εξίσωσης (B'.3) ως προς  $\vec{p}_n$  γράφεται

$$\nabla_b F(\vec{b}_n) + \nabla_{bb}^2 F(\vec{b}_n) \vec{p}_n = 0$$

από την οποία καθορίζεται η κατεύθυνση ανίχνευσης στην τρέχουσα επανάληψη με τη σχέση

$$\vec{p}_n = -B_n^{-1} \nabla_b F \quad (\text{B'.4})$$

όπου  $B_n = \nabla_{bb}^2 F(\vec{b}_n)$ . Τότε το σχήμα (B'.1) λαμβάνει τη μορφή

$$\vec{b}_{n+1} = \vec{b}_n - B_n^{-1} \nabla_b F \quad (\text{B'.5})$$

Η τελευταία σχέση γράφτηκε υπό την προϋπόθεση, ότι η κατεύθυνση  $\vec{p}_n = -B_n^{-1} \nabla_b F$  μπορεί να ορισθεί. Αυτό είναι αδύνατον στην περίπτωση που το Εσσιανό μητρώο δεν είναι θετικά ορισμένο, καθώς δεν είναι εγγυημένο ότι μπορεί να βρεθεί ο αντίστροφος του[6]. Η μέθοδος Newton είναι μία πολύ γρήγορη μέθοδος, καθώς η σύγκλιση της είναι τετραγωνική (quadratic), όμως απαιτείται η εύρεση του ακριβούς Εσσιανού μητρώου, κάτι που πολύ συχνά είναι απαγορευτικά ακριβό από πλευράς υπολογιστικού κόστους [9]. Για τον λόγο αυτό, στην εργασία αυτή χρησιμοποιούνται προσεγγιστικές μέθοδοι υπολογισμού του Εσσιανού μητρώου όπως είναι η **BFGS**, **dBFGS** και η **SR1**.

## B'.4 Προσεγγιστικές μέθοδοι Newton DFP, BFGS, dBFGS και SR1

Οι προσεγγιστικές μέθοδοι Newton βασίζονται στην προσέγγιση του Εσσιανού μητρώου ή του αντιστρόφου του. Τέτοιες μέθοδοι είναι η **DFP (Davidon-Fletcher-**



*Powel*) , η *BFGS* (*Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno*) και η *SR1* (*symmetric rank 1*). Στο παρόν κεφάλαιο θεμελιώνονται θεωρητικά, αναφέρονται οι σχέσεις υπολογισμού του προσεγγιστικού Εσσιανού μητρώου για κάθε μέθοδο και παρουσιάζονται τα σημαντικότερα μειονεκτήματα και πλεονεκτήματά τους. Με παρόμοιο τρόπο, όπως και στη μέθοδο Newton ορίζεται το τετραγωνικό μοντέλο

$$m(\vec{b}_{n+1}, \vec{p}) = F(\vec{b}_{n+1}) + \vec{p}^T \nabla_b F(\vec{b}_{n+1}) + \frac{1}{2} \vec{p}^T \nabla_{bb}^2 F(\vec{b}_{n+1}) \vec{p} \quad (\text{B'.6})$$

και απαιτείται ότι  $\nabla_b m(\vec{b}_{n+1}, \vec{p}) = \nabla_b F(\vec{b}_{n+1})$ . Το τελευταίο δίνει τη σχέση

$$\nabla_b m(\vec{b}_{n+1}, -\eta_n \vec{p}_n) = \nabla_b F(\vec{b}_{n+1}) - \eta_n \nabla_{bb}^2 F(\vec{b}_{n+1}) \vec{p}_n = \nabla_b F(\vec{b}_n) \quad (\text{B'.7})$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (B'.7) και (B'.1) γράφεται η εξίσωση

$$\nabla_{bb}^2 F(\vec{b}_{n+1})(\vec{b}_{n+1} - \vec{b}_n) = \nabla_b F(\vec{b}_{n+1}) - \nabla_b F(\vec{b}_n) \quad (\text{B'.8})$$

και ορίζοντας το Εσσιανό μητρώο ως  $B_{n+1} = \nabla_{bb}^2 F(\vec{b}_{n+1})$  και τις πιο κάτω σχέσεις

$$\vec{s}_n = \vec{b}_{n+1} - \vec{b}_n \quad (\text{B'.9})$$

$$\vec{y}_n = \nabla F(\vec{b}_{n+1}) - \nabla F(\vec{b}_n) \quad (\text{B'.10})$$

η εξίσωση (B'.8) γράφεται

$$B_{n+1} \vec{s}_n = \vec{y}_n \quad (\text{B'.11})$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **εξίσωση της τέμνουσας** (*secant equation*) και μπορεί να λυθεί μόνο όταν το συμμετρικό μητρώο  $B_{n+1}$  μετασχηματίζει (maps) το διάνυσμα  $\vec{s}_n$  στο  $\vec{y}_n$ . Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση της τέμνουσας με  $\vec{s}_n^T$  στο αριστερό και δεξί μέλος

$$\vec{s}_n^T B_{n+1} \vec{s}_n = \vec{s}_n^T \vec{y}_n$$

γίνεται αντιληπτό ότι πρέπει να ισχύει η **συνθήκη καμπυλότητας** (*curvature condition*)

$$\vec{s}_n^T \vec{y}_n > 0 \quad (\text{B'.12})$$

Η τελευταία ισχύει πάντα για αυστηρά κυρτές συναρτήσεις  $F$ , όμως δεν είναι σίγουρο ότι θα ισχύει για τις μη-κυρτές [9]. Για την ικανοποίηση της συνθήκης καμπυλότητας δεν υπάρχει μία και μοναδική λύση για το μητρώο  $B_{n+1}$  καθώς οι  $n(n+1)/2$  βαθμοί ελευθερίας του προβλήματος είναι περισσότεροι από τις  $n$  συνθήκες που επιβάλλονται από την εξίσωση της τέμνουσας. Για να υπάρξει μοναδική λύση επιβάλλεται η συνθήκη το μητρώο  $B_{n+1}$  να είναι κατά το δυνατόν πιο κοντά στο μητρώο  $B_n$ , δηλαδή επιβάλλεται να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{aligned} \min \|B_{n+1} - B_n\| \\ \text{s.t.} \\ B_{n+1} = B_{n+1}^T \\ B_{n+1} \vec{s}_n = \vec{y}_n \end{aligned} \quad (\text{B'.13})$$

Με τη χρησιμοποίηση της νόρμας του Frobenius [9] στο πιο πάνω πρόβλημα υπολογίζεται με την πιο κάτω σχέση το Εσσιανό μητρώο, η οποία αποτελεί τη μοναδική λύση του προβλήματος (B'.13) και αντιστοιχεί στη μέθοδο DFP.

$$B_{n+1} = (I - \rho_n \vec{y}_n \vec{s}_n^T) B_n (I - \rho_n \vec{s}_n \vec{y}_n^T) + \rho_n \vec{y}_n \vec{y}_n^T \quad (\text{B'.14})$$

με

$$\rho_n = \frac{1}{\vec{y}_n^T \vec{s}_n} \quad (\text{B'.15})$$

ενώ ο αντίστροφος του Εσσιανού μητρώου  $H = B^{-1}$  ορίζεται από τη σχέση

$$H_{n+1} = H_n - \frac{H_n \vec{y}_n \vec{y}_n^T H_n}{\vec{y}_n^T H_n \vec{y}_n} + \rho_n \vec{s}_n \vec{s}_n^T \quad (\text{B'.16})$$

Από την άλλη, εάν απαιτηθεί να λυθεί το πρόβλημα για τον αντίστροφο  $H$

$$\begin{aligned} \min \|H_{n+1} - H_n\| \\ \text{s.t.} \\ H_{n+1} = H_{n+1}^T \\ H_{n+1} \vec{y}_n = \vec{s}_n \end{aligned} \quad (\text{B'.17})$$

και χρησιμοποιηθεί η ίδια νόρμα, η μοναδική λύση της μεθόδου για τον αντίστροφο του Εσσιανού μητρώου είναι

$$H_{n+1} = (I - \rho_n \vec{s}_n \vec{y}_n^T) H_n (I - \rho_n \vec{y}_n \vec{s}_n^T) + \rho_n \vec{s}_n \vec{s}_n^T \quad (\text{B'.18})$$

η οποία αντιστοιχεί στη συγγενική της μεθόδου DFP, μέθοδο BFGS, ενώ το Εσσιανό μητρώο ανανεώνεται από τη σχέση

$$B_{n+1} = B_n - \frac{B_n \vec{s}_n \vec{s}_n^T B_n}{\vec{s}_n^T B_n \vec{s}_n} + \rho_n \vec{y}_n \vec{y}_n^T \quad (\text{B'.19})$$

Παρατηρείται πως οι μέθοδοι DFP και BFGS είναι δυαδικές ( $B \longleftrightarrow H$ ), με την έννοια ότι παράγεται η μία σχέση από την άλλη (B'.14)  $\longleftrightarrow$  (B'.18) και (B'.16)  $\longleftrightarrow$  (B'.19) αλλάζοντας μεταξύ τους τις σχέσεις (B'.9) και (B'.10) ( $\vec{s} \longleftrightarrow \vec{y}$ ), κάτι που δίνει ευκολία στον προγραμματισμό στην περίπτωση που επιθυμείται η επιλογή μεθόδου από τον χρήστη. Η μέθοδος DFP είναι αρκετά αποτελεσματική, όμως η BFGS θεωρείται καλύτερη[9]. Σημαντικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι διατηρεί ένα αρκετά ταχύ μη-γραμμικό (superlinear) ρυθμό σύγκλισης σε σχέση με τη μέθοδο Newton, με πολύ μικρό σχετικά υπολογιστικό κόστος για την εφαρμογή της. Επίσης, αποδεικνύεται ότι αν τα μητρώα  $H_n$  και  $B_n$  είναι θετικά ορισμένα τότε, εφόσον ισχύει η συνθήκη καμπυλότητας (B'.12), και τα μητρώα  $H_{n+1}$  και  $B_{n+1}$  θα είναι θετικά ορισμένα, κάτι σημαντικό για τη σύγκλιση της μεθόδου. Αξιοσημείωτο είναι ότι η μέθοδος BFGS είναι πολύ αποτελεσματική στην αυτοδιόρθωση[9]. Για παράδειγμα, εάν το μητρώο  $H_n$  είναι μία κακή προσέγγιση του πραγματικού μητρώου, τότε σε ελάχιστα βήματα η νέα προσέγγιση θα έχει την τάση να αυτοδιορθωθεί.

Όμως η συνθήκη καμπυλότητας σε κάποιες περιπτώσεις δεν ισχύει και έτσι δεν εξασφαλίζεται ότι τα μητρώα  $H_{n+1}$  και  $B_{n+1}$  θα είναι θετικά ορισμένα (Α'.3). Για να εξασφαλισθεί ότι τα μητρώα θα είναι πάντα θετικά ορισμένα χρησιμοποιείται η μέθοδος **Damped BFGS**[9], η οποία είναι παραλλαγή της BFGS. Στη μέθοδο αυτή χρησιμοποιούνται οι πιο κάτω σχέσεις

$$\vec{r}_n = \theta_n \vec{y}_n + (1 - \theta_n) B_n \vec{s}_n \quad (\text{B'.20})$$

όπου

$$\theta_n = \begin{cases} 1 & \text{αν } \vec{s}_n^T \vec{y}_n \geq 0.2 \vec{s}_n^T B_n \vec{s}_n \\ \frac{0.8 \vec{s}_n^T B_n \vec{s}_n}{\vec{s}_n^T B_n \vec{s}_n - \vec{s}_n^T \vec{y}_n} & \text{αν } \vec{s}_n^T \vec{y}_n < 0.2 \vec{s}_n^T B_n \vec{s}_n \end{cases} \quad (\text{B'.21})$$

και για τον υπολογισμό των μητρώων  $H_{n+1}$  και  $B_{n+1}$  χρησιμοποιούνται οι σχέσεις υπολογισμού της BFGS (B'.19),(B'.18) αντικαθιστώντας το διάνυσμα  $\vec{y}_n$  με το διάνυσμα  $\vec{r}_n$

$$H_{n+1} = (I - \rho_n \vec{s}_n \vec{r}_n^T) H_n (I - \rho_n \vec{r}_n \vec{s}_n^T) + \rho_n \vec{s}_n \vec{s}_n^T \quad (\text{B'.22})$$

$$B_{n+1} = B_n - \frac{B_n \vec{s}_n \vec{s}_n^T B_n}{\vec{s}_n^T B_n \vec{s}_n} + \rho_n \vec{r}_n \vec{r}_n^T \quad (\text{B'.23})$$

Τέλος, σε αντίθεση με τη BFGS η μέθοδος SR1 δεν εξασφαλίζει ότι το μητρώο B θα είναι θετικά ορισμένο, όμως είναι χρήσιμη σε προβλήματα που το πραγματικό Εσσιανό μητρώο δεν είναι θετικά ορισμένο. Τα μητρώα B και H υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$B_{n+1} = B_n + \frac{(\vec{y}_n - B_n \vec{s}_n)(\vec{y}_n - B_n \vec{s}_n)^T}{(\vec{y}_n - B_n \vec{s}_n)^T \vec{s}_n} \quad (\text{B'.24})$$

$$H_{n+1} = H_n + \frac{(\vec{s}_n - H_n \vec{y}_n)(\vec{s}_n - H_n \vec{y}_n)^T}{(\vec{s}_n - H_n \vec{y}_n)^T \vec{y}_n} \quad (\text{B'.25})$$

Όταν ισχύει  $(\vec{y}_n - B_n \vec{s}_n)^T \vec{s}_n = 0$  και  $B_n \vec{s}_n \neq \vec{y}_n$  δεν υπάρχει συμμετρική πρώτης τάξης σχέση που να ικανοποιεί την εξίσωση της τέμνουσας. Το τελευταίο μπορεί πολλές φορές να οδηγήσει σε αποτυχία της μεθόδου, εκτός και αν χρησιμοποιηθεί ένα κριτήριο ανανέωσης του μητρώου  $B_{n+1}$ , όπως το να ανανεώνεται μόνο όταν

$$|(\vec{y}_n - B_n \vec{s}_n)^T \vec{s}_n| \geq r \|\vec{s}_n\| \|(\vec{y}_n - B_n \vec{s}_n)\| \quad (\text{B'.26})$$

όπου το  $r \in (0, 1)$  είναι μικρός αριθμός. Κύριο πλεονέκτημά της είναι ότι μπορούν να υπολογισθούν καλές προσεγγίσεις του πραγματικού Εσσιανού μητρώου, πολλές φορές καλύτερες από την BFGS.

Ένα μειονέκτημα των προσεγγιστικών μεθόδων Newton μπορεί να θεωρηθεί ότι δεν υπάρχει τρόπος για την επιλογή του αρχικού μητρώου  $H_0$  ή  $B_0$ , ο οποίος θα δουλεύει καλά για όλα τα προβλήματα. Πολλές φορές χρησιμοποιείται ως αρχικοποίηση το ακριβές μητρώο ή μία προσέγγιση αυτού με πεπερασμένες διαφορές. Αλλιώς, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο μοναδιαίος πίνακας πολλαπλασιασμένος με μία σταθερή θετική τιμή. [9]



## Βιβλιογραφία

- [1] Papoutsis-Kiachagias, Evangelos M and Giannakoglou, Kyriakos C: *Continuous adjoint methods for turbulent flows, applied to shape and topology optimization: industrial applications*. Archives of Computational Methods in Engineering, 23(2):255–299, 2016.
- [2] Καψής Μ. : *Εντοπισμός του μετώπου Pareto στην πολυκριτηριακή αεροδυναμική βελτιστοποίηση με μέθοδο Newton με αποκοπή*, 2014.
- [3] Καρούζου Μ. : *Επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης δύο στόχων με βάση τη θεωρία της συνέχισης του μετώπου Pareto*, 2015.
- [4] <http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/EASY/>.
- [5] Kavvadias, IS and Papoutsis-Kiachagias, EM and Giannakoglou, Kyriakos C: *On the proper treatment of grid sensitivities in continuous adjoint methods for shape optimization*. Journal of Computational Physics, 301:1–18, 2015.
- [6] Γιαννάκογλου, Κ. Χ.: *Μέθοδοι βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική*. Αθήνα, τέταρτη έκδοση, 2006.
- [7] Coello, Carlos A Coello and Lamont, Gary B and Van Veldhuizen, David A and others: *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*. Springer, 2007.
- [8] Marler, R Timothy and Arora, Jasbir S: *Survey of multi-objective optimization methods for engineering*. Structural and multidisciplinary optimization, 26(6):369–395, 2004.
- [9] Nocedal, Jorge and Wright, Stephen J: *Numerical optimization second edition*. Numerical optimization, 2006.
- [10] Schmidt, Stephan and Schulz, Volker: *Pareto-curve continuation in multi-objective optimization*. Pac J Optim, 4(2):243–257, 2008.
- [11] Asouti, Varvara G and Trompoukis, Xenofon S and Kampolis, Ioannis C and Giannakoglou, Kyriakos C: *Unsteady CFD computations using vertex-centered finite volumes for unstructured grids on Graphics Processing Units*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 67(2):232–246, 2011.
- [12] Kampolis, IC and Trompoukis, XS and Asouti, VG and Giannakoglou, KC: *CFD-based analysis and two-level aerodynamic optimization on graphics pro-*

- cessing units*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199(9-12):712–722, 2010.
- [13] Papadimitriou, DI and Giannakoglou, KC: *Aerodynamic design using the truncated Newton algorithm and the continuous adjoint approach*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 68(6):724–739, 2012.
- [14] Das,Indraneel and Dennis, John E: *A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for Pareto set generation in multicriteria optimization problems*. Structural optimization, 14(1):63–69, 1997.
- [15] Kim, Il Yong and de Weck, Oliver L: *Adaptive weighted-sum method for bi-objective optimization: Pareto front generation*. Structural and multidisciplinary optimization, 29(2):149–158, 2005.
- [16] Lin, Jiguan: *Multiple-objective problems: Pareto-optimal solutions by method of proper equality constraints*. IEEE Transactions on Automatic Control, 21(5):641–650, 1976.
- [17] Vasilopoulos, Ilias and Asouti, Varvara G and Giannakoglou, Kyriakos C and Meyer, Marcus: *Gradient-based Pareto front approximation applied to turbomachinery shape optimization*. Engineering with Computers, σελίδες 1–11, 2019.
- [18] Gkaragkounis, K and Papoutsis-Kiachagias, E and Asouti, V and Giannakoglou, K and Parallel, CFD: *Adjoint-based pareto front tracing in aerodynamic shape optimization*. Στο 10th international conference on computational fluid dynamics (ICCFD10), Barcelona, Spain, 2018.
- [19] Saad, Youcef and Schultz, Martin H: *GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems*. SIAM Journal on scientific and statistical computing, 7(3):856–869, 1986.
- [20] Chafekar, Deepti and Xuan, Jiang and Rasheed, Khaled: *Constrained multi-objective optimization using steady state genetic algorithms*. Στο Genetic and Evolutionary Computation Conference, σελίδες 813–824. Springer, 2003.
- [21] Keller, André A: *Multi-Objective Optimization in Theory and Practice II: Meta-heuristic Algorithms*. Bentham Science Publishers, 2019.
- [22] <http://learntoflyblog.com/2016/08/11/cfi-brief-angle-of-attack-as-it>.
- [23] Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Ι. Αναγνωστόπουλος, Γ. Μπεργελές: *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς*. Αθήνα, τρίτη έκδοση, 2003.