



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Τεχνικές Συμπύεσης Δεδομένων στη Βελτιστοποίηση Μορφής
με τη Συζυγή Μέθοδο, για Χρονικά Μη-Μόνιμα Προβλήματα
Ροής

Διπλωματική Εργασία του:

Χρήστου Παπαγιάννη

Επιβλέπων: *Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου*, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2022



National Technical University of Athens
School of Mechanical Engineering
Fluids Section
Lab of Thermal Turbomachines
Parallel CFD & Optimization Unit

**Data Compression Techniques in Adjoint Shape Optimization
for Unsteady Flows**

Diploma Thesis

by

Christos Papagiannis

Advisor: *Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA*

Athens, 2022

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω ορισμένα άτομα τα οποία είχαν καθοριστικό ρόλο, στην ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας όπως και των σπουδών μου στη Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών.

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά, τον επιβλέποντα της εργασίας, Καθηγητή Κ.Χ. Γιαννάκογλου, καθώς μου ανέθεσε ένα τόσο ενδιαφέρον και σύγχρονο θέμα, ενώ παράλληλα βρισκόταν πάντα δίπλα μου για να απαντήσει σε κάθε απορία που προέκυπτε και για την υπομονή που επέδειξε. Από το τρίτο έτος των σπουδών μου, η διδασκαλία του έπαιξε καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση των επιστημονικών μου ενδιαφερόντων όπως και της αντίληψής μου για τη σύνδεση επιστήμης και βιομηχανίας.

Φυσικά δε θα μπορούσα να παραλείψω το να ευχαριστήσω θερμά και τα μέλη της ΜΠΥΡ&Β του ΕΘΣ, τον Δρ. Ξενοφώντα Τρομπούκη και τον Υποψήφιο Δρ. Ανδρέα Μαργέτη. Χωρίς την καθοδήγηση του πρώτου επι των τεχνικών ζητημάτων της εργασίας και τα πολύτιμα σχόλια του δεύτερου επί των αποτελεσμάτων και των μεθόδων, η παρούσα εργασία δεν θα μπορούσε να υλοποιηθεί.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου Κ&Γ, για την αμέριστη υποστήριξη που μου παρείχαν όλα τα φοιτητικά και μαθητικά μου χρόνια, αλλά και τον αδελφικό μου φίλο Κ. Ευχαριστώ, επίσης, πολύ την Ε και τους Φ,Σ,Φ,Α,Π. Η ύπαρξή τους στη ζωή μου κατέστησε τα φοιτητικά μου χρόνια μία αξέχαστη εμπειρία. .

Αισθανόμαστε ότι, ακόμα και αν όλα τα δυνατά επιστημονικά ερωτήματα έχουν απαντηθεί, τα προβλήματα της ζωής μας παραμένουν πλήρως ανέγγιχτα. Τότε φυσικά, δεν υπάρχουν άβλητα ερωτήματα• και αυτό από μόνο του είναι η απάντηση. – Ludwig Wittgenstein, TLP 6.52

Περίληψη

Τα περισσότερα προβλήματα από το χώρο της υπολογιστικής μηχανικής με την οποία η βελτιστοποίηση συνδέεται άμεσα, είναι χρονικά μη-μόνιμα. Αυτό μεταξύ άλλων γεννά προβλήματα αποθηκευτικού χώρου, τα οποία μεγεθύνονται εκθετικά με την αύξηση των διαστάσεων των προβλημάτων, όπως επιβάλλει η αυξανόμενη πολυπλοκότητα των προς μελέτη περιπτώσεων. Η συζυγής μέθοδος σε χρονικά μη-μόνιμες ΜΔΕ έχει αυξημένες απαιτήσεις αποθηκευτικού χώρου στη μνήμη του υπολογιστή για την υλοποίησή της επειδή αντιστρέφεται η φορά χρονικής ολοκλήρωσης για την επίλυση των συζυγών εξισώσεων και έτσι πρέπει να αποθηκευθεί ολόκληρη η χρονοσειρά της λύσης των πρωτεύουσών εξισώσεων ώστε να είναι διαθέσιμη για την αντίστροφη στο χρόνο επίλυση των συζυγών. Για τον λόγο αυτό, είναι σημαντική διερεύνηση τεχνικών για τη μείωση του αποθηκευτικού χώρου που καταλαμβάνει η χρονοσειρά των πεδίων της λύσης. Μία βασική κατηγορία τέτοιων τεχνικών είναι οι τεχνικές πλήρους αποθήκευσης συμπιεσμένων χρονοσειρών μέσω Τεχνικών Συμπίεσης Δεδομένων. Η ανά χείρας διπλωματική εργασία διερευνά την επίδραση που έχουν δύο τεχνικές συμπίεσης δεδομένων στη βελτιστοποίηση με τη συζυγή μέθοδο σε τέτοια, χρονικά μη-μόνιμα, προβλήματα βελτιστοποίησης αεροδυναμικών μορφών, τα οποία έχουν κοινό χαρακτηριστικό το ότι εμφανίζουν ασυνέχειες. Αρχικά αναλύονται δύο τεχνικές κατασκευής Βέλτιστων Προσεγγίσεων Μειωμένης Τάξης (συμπίεσης), η Ανάλυση Πινάκων σε Ιδιάζουσες Τιμές (SVD) και ο ιδιο-Γενικευμένος Διαχωρισμός (PGD). Ωστόσο, αυτές οι μέθοδοι συμπίεσης χρονοσειρών είναι σχεδιασμένες για να εκτελούν τη συμπίεση σε ολόκληρη τη χρονοσειρά πράγμα που για τις εφαρμογές που μελετώνται, είναι χωρίς αντίκρουσμα μίας και ολόκληρη η χρονοσειρά της λύσης ενός προβλήματος βιομηχανικού επιπέδου είναι εξαιρετικά ασύμφορο να αποθηκευθεί. Συνεπώς υλοποιούνται *βηματικές* παραλλαγές των αλγορίθμων που παράγουν την ίδια προσέγγιση μειωμένης τάξης με σταδιακό τρόπο, εμπλουτίζοντας μία αρχική προσέγγιση κάθε φορά που παράγεται ένα νέο στιγμιότυπο κατά τη χρονική ολοκλήρωση, έχοντας έτσι ανάγκη μόνο την πληροφορία που δίνει το εκάστοτε στιγμιότυπο. Οι μέθοδοι που μελετώνται τελικά είναι η iSVD (incremental Singular Value Decomposition) και η iPGD (incremental Proper Generalized Decomposition). Γίνεται επίδειξη των επιδόσεων αυτών των μεθόδων στην αναπαράσταση των πεδίων με λιγότερη πληροφορία και της επιβάρυνσης σε υπολογιστικό κόστος. Αυτό γίνεται συγκρίνοντας τις προσεγγιστικές χρονοσειρές των λύσεων με τις ακριβείς, από τρία χρονικά μη-μόνιμα συστήματα: τη 1Δ συνεκτική εξίσωση burgers, τις 2Δ εξισώσεις Euler γύρω από τη μεμονωμένη αεροτομή NACA0012 και τις 2Δ εξισώσεις Navier-Stokes σε 2Δ πτερυγώση διηχητικού συμπιεστή. Τέλος, εκκινώντας από τα τρία παραπάνω παραδείγματα, επιλύονται τρία προβλήματα βελτιστοποίησης: ο βέλτιστος έλεγχος ενός συστήματος που περιγράφεται από συνεκτική εξίσωση Burgers, η βελτιστοποίηση μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής υπό τις 2Δ χρονικά μη-μόνιμες εξισώσεις Euler και η βελτιστοποίηση μορφής της αεροτομής του πτερυγίου ενός διηχητικού

συμπιεστή για μέγιστη άνωση. Γίνεται διερεύνηση της επίδρασης των μεθόδων συμπίεσης στο αποτέλεσμα (την κατανομή της ταχύτητας στην εξίσωση Burgers και τη μορφή του σώματος για τις 2 τελευταίες εφαρμογές). Η αξιολόγηση γίνεται μέσω εποπτικών μέσων αλλά και μέσω ποσοτικής σύγκρισης διαφόρων μετρικών σφάλματος.

Abstract

Most of the problems in the domain of Computational Fluid Dynamics, with which optimization is often intertwined, are inherently unsteady in time. This, amongst other problems, creates high computer storage requirements, which increase exponentially with the dimensions of the problem, that are dictated by the complexity induced by the need to accurately model the real system. The state-of-the-art method for gradient based optimization, the adjoint method specifically, has extra computer storage requirements when applied to unsteady flows, due to the fact that, because the adjoint field equations are integrated backwards in time, the whole time-series of the primal solution needs to be stored. To alleviate this storage overhead, there are two basic approaches: partial storage plus recalculation methods (check-pointing) and to store the whole primal field time-series using Data Compression. The present diploma thesis, is concerned with the latter, the integration of two Data Compression Techniques into the optimization process, for problems in unsteady aerodynamics that feature strong shocks. The two data compression techniques are the Singular Value Decomposition (SVD) and the Proper Generalized Decomposition (PGD). However, these methods are designed to compress data *after* their acquisition from either a simulation or an experiment and thus after storing them, something which needs to be avoided. For this reason, the incremental variants of these two methods have been implemented for unstructured meshes, that produce the same Low Rank Approximation of the data, but in an incremental fashion, at the same time with the integration of the primal field equations. The incremental variants, iSVD and iPGD, only require the information of the current flow field snapshot, which is appropriately added to the existing approximation. The methods are firstly tested in terms of their ability to produce quality Low Rank Approximations of flow field time-series from three different unsteady PDEs. The 1D viscous Burgers Equation with shock formation and the 2D Euler and Navier-Stokes Equations around aerodynamic shapes (foils). With the above systems, three optimization problems are formed and then solved with the unsteady adjoint method: the optimal control of a system described by the 1D viscous Burgers Equation, the lift maximization of an isolated airfoil under the PDE constraints of the 2D Euler equations and the lift maximization of a 2D compressor cascade airfoil constrained by the Navier-Stokes Equations. The aim of this research is to study the effect of such methods of Data Compression in the above three problems as well as the computational time overhead of each method. For each problem respectively, the following results are examined: the long time solution of the PDE and the cost function's sensitivity derivatives for the Burgers Equation, the shape of the foils and the time-averaged Lift sensitivity derivatives for the last two problems. The methods are compared quantitatively and qualitatively through appropriate metrics from signal processing.

Ακρωνύμια

ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΕΘΣ	Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
ΜΠΥΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
ΜΔΕ	Μερική(ές) Διαφορική(ές) Εξίσωση(εις)
ΠΧΤ	Προσεγγίσεις Χαμηλής Τάξης
ΠΑΤ	Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

CFD	Computational Fluid Dynamics
NTUA	National Technical University of Athens
PCopt	Parallel CFD & Optimization unit
(i-)SVD	(incremental-)Singular Value Decomposition
(i-)PGD	(incremental-)Proper Generalised Decomposition
LRA	Low Rank Approximation(s)
PDE	Partial Differential Equation(s)
SD	Sensitivity Derivative(s)

Περιεχόμενα

Περίληψη	iii
Abstract	v
Περιεχόμενα	i
1 Εισαγωγή	1
1.1 Η ανάγκη επίλυσης χρονικά μη-μόνιμων προβλημάτων στη βιομηχανία	2
1.2 Μέθοδοι βελτιστοποίησης βασισμένες στην κλίση της συνάρτησης στόχου . . .	3
1.3 Σύνολα δεδομένων που προκύπτουν από μη-μόνιμες ΜΔΕ σε δομημένα και μη-δομημένα πλέγματα	7
1.4 Υπάρχουσες μέθοδοι μείωσης του αποθηκευτικού κόστους στη βελτιστοποίηση μη-μόνιμων προβλημάτων με τη συζυγή μέθοδο	9
1.4.1 Η μέθοδος του check-pointing	10
1.4.2 Η μέθοδος ZFP	12
1.4.3 Συμπίεση δεδομένων μέσω Προσεγγίσεων Χαμηλής Τάξης (ΠΧΤ)	13
1.5 Στόχος της εργασίας	14
2 Ανάλυση πινάκων σε Ιδιάζουσες τιμές	16
2.1 Η ανάλυση πινάκων σε ιδιάζουσες τιμές ως μέθοδος συμπίεσης	16
2.2 Το SVD και το σταδιακό (incremental) SVD στην υπολογιστική ρευστοδυναμική	19
3 Ιδιο-Γενικευμένος Διαχωρισμός	24
3.1 Η μέθοδος υπολογισμού του PGD μέσω σταθμισμένων υπολοίπων Galerkin . .	26
3.1.1 Αλγόριθμος εναλλασσόμενων κατευθύνσεων για τον υπολογισμό του PGD	27
3.2 Σταδιακός Ιδιο-Γενικευμένος Διαχωρισμός	29
3.2.1 iPGD με διαμέριση του διαστήματος χρονικής ολοκλήρωσης	34
4 Συμπίεση χρονικά μη-μόνιμων πεδίων ροής στην αεροδυναμική	36
4.1 Συμπίεση λύσεων της 1Δ συνεκτικής εξίσωσης Burgers	37
4.2 Συμπίεση λύσεων των 2Δ μη-μόνιμων εξισώσεων Euler γύρω από την αεροτομή NACA0012	43
4.3 Συμπίεση λύσεων των εξισώσεων Navier Stokes γύρω από 2Δ περυγώση διηχητικού συμπιεστή	58
4.4 Ποιοτική ανάλυση σφαλμάτων για τις δύο μεθόδους κατασκευής ΠΧΤ	65
5 Βελτιστοποίηση με τη χρήση των συμπεσμένων πεδίων	70

5.1	Βέλτιστος έλεγχος συστήματος που μοντελοποιείται με την 1Δ συνεκτική εξίσωση Burgers	71
5.1.1	Συνεχής Συζυγής μέθοδος για τη μη-μόνιμη Εξίσωση Burgers	72
5.1.2	Αριθμητικά Σχήματα και αποτελέσματα	75
5.1.3	Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης	77
5.1.4	Αντίστροφος σχεδιασμός	79
5.2	Βελτιστοποίηση μορφής μεμονωμένης αεροτομής για μέγιστη άνωση με τη συνεχή συζυγή μέθοδο	83
5.2.1	Ανάλυση των παραγώγων ευαισθησίας που προκύπτουν από τις διαφορετικές λύσεις των συζυγών εξισώσεων Euler	84
5.2.2	Βελτιστοποίηση μορφής μεμονωμένης αεροτομής με χρήση των χρονοσειρών από τις ΠΧΤ	87
5.3	Βελτιστοποίηση μορφής περυγίου αζονικού συμπιεστή για μέγιστη άνωση	90
5.3.1	Ανάλυση των παραγώγων ευαισθησίας που προκύπτουν από τις διαφορετικές λύσεις των συζυγών εξισώσεων Navier-Stokes	90
5.3.2	Βελτιστοποίηση μορφής 2Δ περύγωσης συμπιεστή με χρήση ΠΧΤ	92
6	Συμπεράσματα και προτάσεις για μελλοντική έρευνα	94
	Βιβλιογραφία	97

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η βελτιστοποίηση είναι ένας από τους κλάδους των μαθηματικών με το μεγαλύτερο εύρος εφαρμογών στις επιστήμες μηχανικού. Ωστόσο, εξαιτίας του ότι είναι μία επιστήμη αρκετά απαιτητική από πλευράς υπολογισμών, μέχρι πρόσφατα δεν ήταν προσβάσιμη από το ευρύ κοινό των μηχανικών που θα επωφελούνταν από αυτή, αφού η μειωμένη υπολογιστική ισχύς που ήταν διαθέσιμη σε αυτούς δεν μπορούσε να ανταπεξέλθει πάντα στις απαιτήσεις των προβλημάτων που υπήρχαν. Όμως με τη ραγδαία ανάπτυξη των υπολογιστικών συστημάτων και άρα της υπολογιστικής ισχύος η οποία είναι ευρέως διαθέσιμη πλέον, η βελτιστοποίηση και οι υπολογιστικά "δαπανηροί" αλγόριθμοί της, άρχισαν να ενσωματώνονται περισσότερο στη διαδικασία σχεδιασμού προϊόντων και συστημάτων. Η βελτιστοποίηση είναι απαραίτητη καθώς είναι το στάδιο στο σχεδιασμό συστημάτων, από μηχανολογικά μέχρι και πληροφοριακά, που καθορίζει την τελική μορφή του συστήματος προτού υλοποιηθεί και συνεπώς με τα νέα ισχυρότερα υπολογιστικά συστήματα έχει καταστεί πια επίκαιρη από ποτέ. Οι σημαντικότερες εφαρμογές της βελτιστοποίησης που αφορούν τους μηχανικούς σε επίπεδο σχεδιασμού συστημάτων, έχουν άμεση σχέση με τον κλάδο της υπολογιστικής μηχανικής που γνώρισε επίσης ραγδαία ανάπτυξη εξαιτίας των νέων τεχνολογιών στην πληροφορική και στην τεχνολογία υπολογιστών. Οι προσομοιώσεις είναι το βασικό εργαλείο αξιολόγησης των λύσεων ενός προβλήματος βελτιστοποίησης σε σχεδιαστικά προβλήματα της μηχανολογίας, χωρίς ωστόσο να είναι μονόδρομος [1]. Η βελτιστοποίηση ενός συστήματος (άμεση απόρριξη της θεωρίας ελέγχου δυναμικών συστημάτων[2]) αποτελεί τη διαδικασία της κατάλληλης "ρύθμισης" των χαρακτηριστικών του συστήματος τα οποία μπορεί ο σχεδιαστής να μεταβάλλει ώστε, με την εξέλιξή του, να λαμβάνει "επιθυμητά" αποτελέσματα, όπου το "επιθυμητά" ορίζεται μέσω μετρικών ποσοτήτων που συνθέτουν τη λεγόμενη *συνάρτηση κόστους*. Η λύση με τα χαρακτηριστικά αυτά, ή η λύση που είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά σε αυτά τα χαρακτηριστικά θα καλείται *βέλτιστη*. Τα προβλήματα της μηχανολογίας που αφορούν την εργασία αυτή, περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις, των οποίων οι λύσεις επιδιώκεται να έχουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Κάθε αναφορά σε φυσικά *συστήματα*, αφορά πρακτικά πρότυπα (μοντέλα) Διαφορικών Εξισώσεων (Συνήθων ή Μερικών) οι οποίες αποτελούν το βασικό περιορισμό του προβλήματος.

Στην προκειμένη εργασία, αναλύονται παραδείγματα από το τομέα της βελτιστοποίησης

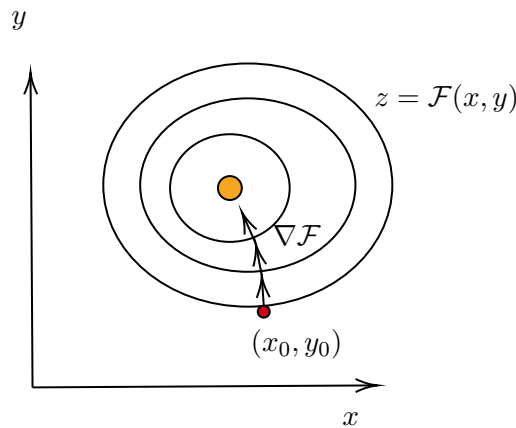
αεροδυναμικών μορφών. Η βελτιστοποίηση αεροδυναμικών μορφών συνίσταται στη μεταβολή του σχήματος του σώματος που αλληλεπιδρά με το ρευστό, ώστε να ελεγχθούν κάποιες αεροδυναμικές ποσότητες ενδιαφέροντος, όπως η άνωση, η αντίσταση ή οι απώλειες πίεσης. Μετά από κάθε μεταβολή των παραμέτρων του προβλήματος (την περίπτωση των αεροδυναμικών μορφών, μεταβολή της παραμετροποίησης του σώματος) είναι απαραίτητη η επαναξιολόγηση της προκύπτουσας μορφής μέσα από τον υπολογισμό των νέων ποσοτήτων ενδιαφέροντος και, άρα, ο υπολογισμός της τιμής της συνάρτησης κόστους. Αυτές προκύπτουν από την επίλυση των εξισώσεων που μοντελοποιούν το σύστημα, λαμβάνοντας υπόψη τη νέα γεωμετρία. Συνεπώς, η προσομοίωση του φυσικού συστήματος, ο υπολογισμός των ποσοτήτων ενδιαφέροντος (συνάρτηση κόστους) και η μεταβολή των παραμέτρων σχεδιασμού με μία τεκμηριωμένη στρατηγική, συνιστούν έναν "κύκλο" βελτιστοποίησης [3].

1.1 Η ανάγκη επίλυσης χρονικά μη-μόνιμων προβλημάτων στη βιομηχανία

Βασικό κίνητρο για την υλοποίηση της ανά χειράς διπλωματικής εργασίας, είναι η ανάγκη υλοποίησης της συζυγούς μεθόδου για χρονικά μη-μόνιμα προβλήματα αεροδυναμικής στη βιομηχανία. Το βασικό επιχείρημα για την ανάγκη της υλοποίησης της μη-μόνιμης συζυγούς μεθόδου, είναι πως τα περισσότερα φαινόμενα στα φυσικά συστήματα (στα οποία υπόκεινται οι διατάξεις που καλείται να βελτιστοποιήσει ο μηχανικός), είναι συνήθως μη-μόνιμα και έτσι μία μόνιμη προσέγγιση θα δημιουργούσε προβλήματα αξιοπιστίας. Ωστόσο, θα μπορούσε κανείς να θέσει το εύλογο ερώτημα, του πόσο σημαντική είναι η μη-μονιμότητα για τις εφαρμογές που ενδιαφέρουν τη βιομηχανία. Στους κλάδους της αυτοκινητοβιομηχανίας και της αεροπορικής βιομηχανίας, τα μη-μόνιμα φαινόμενα όπως η έκλυση στροβιλικότητας, η αποκόλληση της ροής και η μετάβαση της ροής από στρωτή σε τυρβώδη είναι αρκετά βασικά φαινόμενα, η ελλιπής μελέτη των οποίων μπορεί να ελαττώσει σημαντικά τις αεροδυναμικές επιδόσεις ενός σχεδιασμού. Οι πραγματικές ροές, που μελετώνται και στις δύο αυτές βιομηχανίες, είναι μη-μόνιμες, 3D και τυρβώδεις. Στη πλειοψηφία των μη-μόνιμων προβλημάτων, λύνονται οι μη-μόνιμες εξισώσεις μέσης ροής κατά Reynolds (Unsteady Reynolds Averaged Navier Stokes - URANS), μαζί με κάποιο κατάλληλο μοντέλο τύρβης, οι οποίες ως μοντέλο έχουν ικανοποιητικές επιδόσεις για την υπολογιστική απλότητα που προσφέρουν, ωστόσο αστοχούν σε υπολογισμούς κοντά σε στερεά όρια (όταν η μη-μονιμότητα είναι αρκετά έντονη και ο αριθμός Reynolds αρκετά υψηλός). Οι υπολογισμοί αυτοί εμφανίζουν μεγάλο ενδιαφέρον για τις εφαρμογές της αεροπορικής/αυτοκινητοβιομηχανίας [4],[5],[4]. Στην αυτοκινητοβιομηχανία παρουσιάζουν σχεδιαστικό ενδιαφέρον, οι ροές στον ομόρρο του οχήματος[6] όπως και μεταξύ εδάφους/οχήματος καθώς και γύρω από τους τροχούς. Με το τρόπο αυτό καθίσταται εμφανής η ανάγκη ενσωμάτωσης μη-μόνιμων προσομοιώσεων ΥΡΑ στην αυτοκινητοβιομηχανία. Όσον αφορά την αεροπορική βιομηχανία, τα φαινόμενα μετάβασης στις πτέρυγες και οι ροές μέσα σε περίπλοκες γεωμετρίες (όπως οι στροβιλοκινητήρες και οι αντιστροφείς ώσης[7]) θα αποτελέσουν σημαντικές προκλήσεις για τους μηχανικούς και θα επιλυθούν μόνο με την ορθή μοντελοποίηση των μη-μόνιμων αυτών φαινομένων, τα οποία εμφανίζονται τόσο σε προβλήματα αεροδυναμικής όσο και αεροακουστικής.

1.2 Μέθοδοι βελτιστοποίησης βασισμένες στην κλίση της συνάρτησης στόχου

Για να γίνει κατανοητή η συνεισφορά των μεθόδων συμπίεσης δεδομένων στη βελτιστοποίηση, είναι απαραίτητη μία σύντομη εισαγωγή στη διαδικασία μεταβολής των μεταβλητών σχεδιασμού που είναι το βασικό βήμα σε έναν κύκλο βελτιστοποίησης. Η ουσία της βελτιστοποίησης (καθ' ομοίωση με τη θεωρία ελέγχου), είναι ο σχεδιασμός στρατηγικών (νόμων ελέγχου), δηλαδή το ποιά μεταβολή στις μεταβλητές ελέγχου θα φέρει τη συνάρτηση κόστους πιο κοντά στην επιθυμητή της τιμή. Το πώς επιλέγεται αυτή η μεταβολή, είναι αυτό που χαρακτηρίζει μία μέθοδο βελτιστοποίησης ως *αιτιοκρατική* ή *στοχαστική*[1]. Σε μία στοχαστική μέθοδο βελτιστοποίησης οι παράμετροι σχεδιασμού μεταβάλλονται με τρόπο "τυχαίο" (δηλαδή με πολύ αδρά λόγια, η στρατηγική συνίσταται στην τυχηματική μεταβολή των παραμέτρων μέχρι να βρεθεί η σωστή μεταβολή). Στις αιτιοκρατικές μεθόδους, είναι απαραίτητος ο υπολογισμός της κλίσης της συνάρτησης στόχου στο χώρο των μεταβλητών σχεδιασμού. Η στρατηγική τεκμηριώνεται μαθηματικά μέσα από μία αναλυτική διαδικασία για την απόδειξη της σύγκλισης σε πεπερασμένο χρόνο. Η κλίση της συνάρτησης στόχου είναι απαραίτητη καθώς οι παράμετροι ελέγχου πρέπει να "προωθηθούν" κατά την κατεύθυνση όπου η μεταβολή τους επιφέρει τη μεγαλύτερη δυνατή μεταβολή στη συνάρτηση στόχο \mathcal{F} . Η κατεύθυνση αυτή είναι παράλληλη με την κλίση (gradient) της συνάρτησης στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1 και οδηγεί στο ακρότατο του \mathcal{F} (ειδικά στις περιπτώσεις όπου η \mathcal{F} είναι κυρτή όπως παρακάτω). Εδώ θα παρουσιαστεί η μέθοδος της απότομης κα-



Σχήμα 1.1: Κάθετα διανύσματα ($\nabla\mathcal{F}$) στις ισοψείς μιας κυρτής συνάρτησης κόστους $\mathcal{F}(x, y)$

θόδου, η συνηθέστερη αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης, κατά την οποία σε κάθε βήμα οι μεταβλητές σχεδιασμού "προωθούνται" κατά την κατεύθυνση εκείνη όπου η μεταβολή τους επιφέρει τη μεγαλύτερη μεταβολή στη συνάρτηση κόστους, με πρόθεση έτσι να οδηγήσουν στο ακρότατο:

$$\mathbf{b}^{n+1} = \mathbf{b}^n - \eta \nabla_{\mathbf{b}} \mathcal{F} \quad (1.1)$$

όπου $\nabla_{\mathbf{b}} \mathcal{F}$ το διάνυσμα των παραγώγων της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{b} . Με η συμβολίζεται το βήμα της απότομης καθόδου που καθορίζει το πόσο έντονα επηρεάζει η παράγωγος τις ανανεωμένες παραμέτρους σχεδιασμού.

Οι βασικοί τρόποι υπολογισμού του διανύσματος $\nabla_{\mathbf{b}}\mathcal{F}$ είναι:

- Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (Finite Differences) κατά την οποία βάσει του ορισμού της παραγώγου του \mathcal{F} η κλίση αυτού είναι (με δεύτερης τάξης ακρίβεια):

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial b_i} \cong \frac{\mathcal{F}(u(b_1, \dots, b_i + \varepsilon, \dots, b_n)) - \mathcal{F}(u(b_1, \dots, b_i - \varepsilon, \dots, b_n))}{2\varepsilon} \quad (1.2)$$

Η μέθοδος αυτή είναι ακριβέστερη από όσες ακολουθούν ωστόσο είναι αρκετά δαπανηρή για τη βελτιστοποίηση μορφής αεροδυναμικών σωμάτων όπου συνήθως οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι αρκετές (συνήθως σημεία ελέγχου κάποιας μεθόδου παραμετροποίησης της γεωμετρίας του σώματος). Για την υλοποίησή της είναι απαραίτητη η κλήση του λογισμικού υπολογισμού της \mathcal{F} $2n$ φορές, όπου n η διάσταση του διανύσματος των μεταβλητών σχεδιασμού.

- Μία εναλλακτική μέθοδος είναι αυτή των Μιγαδικών Μεταβλητών[8] (CV) κατά την οποία η παράγωγος της συνάρτησης κόστους υπολογίζεται από το φανταστικό μέρος του αναπτύγματος Taylor της $\mathcal{F}(b_0 + ih)$. Με τάξη αποκοπής $\mathcal{O}(h^3)$ ισχύει:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial b_i} \cong \frac{\text{Im}(\mathcal{F}(b_i + ih))}{h} \quad (1.3)$$

η οποία είναι οικονομικότερη σε υπολογισμούς από τις FD, απαιτώντας μόνο μία κλήση του λογισμικού αξιολόγησης ανά μεταβλητή σχεδιασμού. Ωστόσο δεν προτιμάται ιδιαίτερα σε εφαρμογές αεροδυναμικής βελτιστοποίησης καθώς και πάλι το κόστος n κλήσεων είναι μεγάλο, ενώ επίσης δημιουργεί προβλήματα μνήμης καθώς ο υπολογιστής καλείται να χειριστεί *μιγαδικές μεταβλητές* και άρα για αριθμητική δεδομένης ακρίβειας χρειάζεται τα διπλάσια bytes. Τέλος, ένα άλλο μειονέκτημα είναι το ότι καθίσταται προγραμματιστικά απαιτητική.

- Άλλη μία μέθοδος που βρίσκει συνηθέστερα χρήση στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση είναι αυτή της αυτόματης διαφορίσης, κατά την οποία η κλίση της συνάρτησης κόστους υπολογίζεται (σε δεδομένο \mathbf{b}) μέσα από τον κανόνα της αλυσίδας. Εκκινώντας από τις ανεξάρτητες μεταβλητές της συνάρτησης κόστους και χρησιμοποιώντας κατάλληλα το λογισμικό επίλυσης (που τις υπολογίζει) είναι εφικτός ο υπολογισμός της συνολικής κλίσης της \mathcal{F} με τον κανόνα της αλυσίδας πολλαπλασιάζοντας και αθροίζοντας τις προκύπτουσες παραγώγους για κάθε ενδιάμεση μεταβλητή που είναι συνάρτηση των ανεξάρτητων [9].
- Η οικονομικότερη ωστόσο μέθοδος για τον υπολογισμό των παραγώγων της συνάρτησης στόχου είναι η Συζυγής Μέθοδος (Adjoint Method) η οποία χρειάζεται δύο κλήσεις στο λογισμικό επίλυσης *ανεξαρτήτως* του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού.

Παρακάτω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα μέσω του οποίου θα φανεί το πώς η συζυγής μέθοδος για τον υπολογισμό του $\nabla_{\mathbf{b}}\mathcal{F}$ "κοστίζει" υπολογιστικά όσο 2 επιλύσεις της ΔΕ του συστήματος ανεξαρτητως του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού.

Έστω η συνάρτηση $u(t)$ και οι πραγματικοί αριθμοί a, c

$$u(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad a, c \in \mathbb{R}$$

και το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών:

$$\begin{cases} a \frac{du}{dt} + cu(t) = 0 \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Για χάρη του παραδείγματος, υποτίθεται πως είναι επιθυμητή η ελαχιστοποίηση της ποσότητας:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_0^T u(t, a, b)^2 dt \quad (1.5)$$

Αρχικά η συνάρτηση στόχος επαυξάνεται με το ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης $\Psi(t)$ με τη ΔΕ:

$$\int_0^T \Psi(t) \left(a \frac{du}{dt} + cu(t) \right) dt = 0, \quad (1.6)$$

$$\mathcal{F}_{aug} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T u^2 dt}_{\mathcal{F}} + 0 = \frac{1}{2} \int_0^T u^2 dt + \int_0^T \Psi(t) \left(a \frac{du}{dt} + cu(t) \right) dt \quad (1.7)$$

Και παραγωγίζοντας ως προς τα \mathbf{b} :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{F}_{aug}}{\delta \mathbf{b}} &= \int_0^T u \frac{\delta u}{\delta \mathbf{b}} dt + \int_0^T a \Psi(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta u}{\delta \mathbf{b}} \right) dt + \int_0^T \delta_a^j \Psi(t) \frac{du(t)}{dt} dt + \int_0^T \delta_c^i \Psi(t) u(t) dt \\ &+ \int_0^T \Psi(t) c \frac{\delta u}{\delta \mathbf{b}} dt \Rightarrow \\ &= \int_0^T u \frac{\delta u}{\delta \mathbf{b}} dt + a \Psi(T) \frac{\delta u(T)}{\delta \mathbf{b}} - a \Psi(0) \frac{\delta u(0)}{\delta \mathbf{b}} - \int_0^T a \frac{d\Psi}{dt} \frac{\delta u}{\delta \mathbf{b}} dt \\ &+ \int_0^T \Psi(t) u(t) dt + \int_0^T a \Psi(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta u}{\delta \mathbf{b}} \right) dt + \int_0^T \Psi(t) c \frac{\delta u}{\delta \mathbf{b}} dt \end{aligned} \quad (1.8)$$

0, γιατί η αρχική συνθήκη δεν εξαρτάται από τις μεταβλητές ελέγχου

Ομαδοποιώντας τους όρους που περιέχουν τις μεταβολές $\frac{\delta u}{\delta \mathbf{b}}$ προκύπτει πως αν η Ψ ικανοποιεί τη διαφορική:

$$\begin{cases} -a \frac{d\Psi(t)}{dt} + u(t) + c\Psi(t) = 0 \\ \Psi(T) = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

τότε οι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογίζονται συναρτήσει της $u(t)$, των παραγώγων της και της $\Psi(t)$. Η ΔΕ 1.9 καλείται *συζυγής ΔΕ* (Adjoint DE) της 1.4. Η συνάρτηση $\Psi(t)$ καλείται

συζυγής μεταβλητή της $u(t)$ (Adjoint variable), ενώ η 1.4 είναι η πρωτεύουσα ΔΕ και η $u(t)$ η πρωτεύουσα μεταβλητή. Οι παράγωγοι ευαισθησίας $\nabla_{\mathbf{b}}\mathcal{F}$ υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\frac{\delta\mathcal{F}_{aug}}{\delta\mathbf{b}} = \int_0^T \delta_c^i \Psi(t) u(t) dt + \int_0^T \delta_a^j \Psi(t) \frac{du(t)}{dt} dt \quad (1.10)$$

όπου δ_a^j, δ_c^i το δ του Kronecker.

Με το τρόπο αυτό, το διάνυσμα παραγώγων της συνάρτησης κόστους, υπολογίζεται με κόστος 2 μόνο επιλύσεων, του πρωτεύοντος προβλήματος και του συζυγούς (το οποίο έχει πάντα παρόμοιο κόστος με το πρωτεύον) ανεξαρτήτως του πλήθους μεταβλητών σχεδιασμού. Έτσι γίνεται εμφανής η εξαιρετική σημασία της μεθόδου σε προβλήματα βελτιστοποίησης με πολλές μεταβλητές σχεδιασμού, όπως η βελτιστοποίηση μορφής σωμάτων με κομβική παραμετροποίηση.

Είναι σημαντικό να παρατηρηθεί πως η συζυγής ΔΕ είναι πάντα γραμμική στο Ψ και πως είναι πάντα συνάρτηση της λύσης του πρωτεύοντος προβλήματος. Γενικότερα είναι η γραμμικοποιημένη εκδοχή του πρωτεύοντος (primal) προβλήματος (την περίπτωση που δεν είναι ήδη γραμμικό).

Τα φυσικά συστήματα που περιγράφουν φαινόμενα της αεροδυναμικής μπορούν να είναι χρονικά μόνιμα ή μη-μόνιμα ανάλογα με το αν οι μεταβλητές τους παραμένουν σταθερές ή όχι στο χρόνο. Ένα χαρακτηριστικό μη-μόνιμο πρόβλημα είναι η μελέτη της ροής γύρω από μία αεροτομή της οποίας η γωνία προσβολής εκτελεί ταλάντωση γύρω από μία μέση τιμή ή είναι αρκετά μεγάλη ώστε να προκληθεί αποκόλληση, ενώ ένα μόνιμο πρόβλημα είναι η επίλυση της ροής γύρω από μία ακίνητη αεροτομή με μικρή και σταθερή γωνία προσβολής, όπου τα πεδία u, p, ρ (ταχύτητα, πίεση, πυκνότητα) είναι χρονικά αμετάβλητα.

Έχοντας λύσει το πρόβλημα του χρόνου εκτέλεσης ενός κύκλου βελτιστοποίησης σε ένα πολυπαραμετρικό πρόβλημα με την επιστράτευση της συζυγούς μεθόδου, ερχόμαστε αντιμέτωποι με ένα άλλο πρόβλημα που πηγάζει από αυτήν τη σύζευξη της συζυγούς εξίσωσης με τη πρωτεύουσα: ο χρονικά μη-μόνιμος χαρακτήρας, δημιουργεί προβλήματα αποθήκευτικού χώρου μεταξύ κύκλων βελτιστοποίησης, καθώς είναι απαραίτητη η αποθήκευση της πλήρους χρονοσειράς της λύσης του πρωτεύοντος προβλήματος (ή έστω κάποια τμήματα αυτής [10]) για την αντίστροφη στο χρόνο επίλυση του συζυγούς. Αυτό σημαίνει ότι αν X το κόστος αποθήκευσης του χωρικού μέρους του προβλήματος (άμεσα σχετιζόμενο με τον αριθμό κόμβων του πλέγματος) και T το πλήθος χρονικών βημάτων, τότε η πλήρης αποθήκευση της χρονοσειράς της λύσης έχει κόστος $X \cdot T$, πράγμα που σε πολλές περιπτώσεις καθιστά τη βελτιστοποίηση μη συμφέρουσα ή και ανέφικτη. Για την αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματος υπάρχουν δύο γενικές κατηγορίες μεθόδων που χρησιμοποιούνται, αλλά πριν τη παρουσίαση αυτών, θα γίνει μία σύντομη παρουσίαση του είδους των δεδομένων που πρέπει να συμπίεστούν.

1.3 Σύνολα δεδομένων που προκύπτουν από μη-μόνιμες ΜΔΕ σε δομημένα και μη-δομημένα πλέγματα

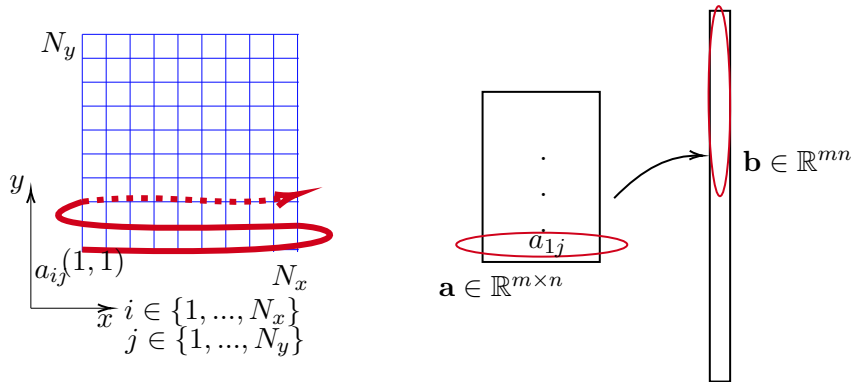
Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστούν μερικά βασικά χαρακτηριστικά των δεδομένων που προκύπτουν από τις υπολογιστικές προσομοιώσεις κατά τη βελτιστοποίηση. Κάθε προσομοίωση στον υπολογιστή απαιτεί τη μετατροπή του πραγματικού χώρου και των εξισώσεων σε αυτόν, σε ένα διακριτό ανάλογο που μπορεί να διαχειριστεί ο υπολογιστής. Αυτό γίνεται μέσω των υπολογιστικών πλεγμάτων. Τα υπολογιστικά πλέγματα που απαιτούνται για τη διακριτοποίηση της συνεχούς πληροφορίας στην ουσία είναι γράφοι χωρίς προσανατολισμό (μιάς και δεν είναι δυνατή η κατασκευή ενός πραγματικά πυκνού χώρου για την αναπαράσταση και τη διαχείριση των δεδομένων από τον υπολογιστή). Αποτελούνται από κόμβους και ακμές (nodes, edges). Οι ακμές συνδέουν τους κόμβους μεταξύ τους με αποτέλεσμα κάθε πλέγμα να πρέπει να περιγραφεί από τις συντεταγμένες των κόμβων του και τον τρόπο σύνδεσής τους. Ο τρόπος με τον οποίο καθορίζεται το ποιός κόμβος συνορεύει με ποιόν, διαχωρίζει τα πλέγματα σε δομημένα και μη. Στα δομημένα πλέγματα, γνωρίζοντας το πλήθος κόμβων ανά κατεύθυνση (αφού μπορούν να οριστούν κατευθύνσεις), μπορούμε να γνωρίζουμε ακριβώς ποιοί κόμβοι συνορεύουν με ποιούς, με αποτέλεσμα οι άγνωστοι να περιγράφονται από αντικείμενα \mathbf{a} , διαστάσεων όσες και του χώρου του προβλήματος με στοιχεία $a_{ijk\dots}$. Κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει στα μη-δομημένα πλέγματα καθώς εκεί η συνδεσιμότητα (connectivity) δεν είναι προβλέψιμη και εξαρτάται από το τρόπο γένεσης του πλέγματος. Η διπλωματική εργασία αυτή αναφέρεται στη δεύτερη περίπτωση, όπου οι τεχνικές θα εφαρμοστούν σε σύνολα δεδομένων χωρίς δομή. Για να είναι εφικτή η διαχείριση της πληροφορίας που περιέχεται στα πλέγματα, επιλέγεται αυτή η πληροφορία να μετατραπεί σε ένα 1Δ διάνυσμα δεδομένων μέσω κατάλληλης απεικόνισης. Έτσι καταλήγουμε να επεξεργαζόμαστε σήματα αντί για πίνακες (όπως θα είχαμε στην περίπτωση ενός δομημένου πλέγματος). Έστω ένα 2Δ δομημένο πλέγμα με διαστάσεις $N_x \times N_y$ τότε η απεικόνιση του \mathbf{a} σε ένα 1Δ διάνυσμα είναι:

$$\mathcal{M} : \mathbb{R}^{N_x \times N_y} \xrightarrow{\mathcal{M}} \mathbb{R}^{N_x N_y} \quad (1.11)$$

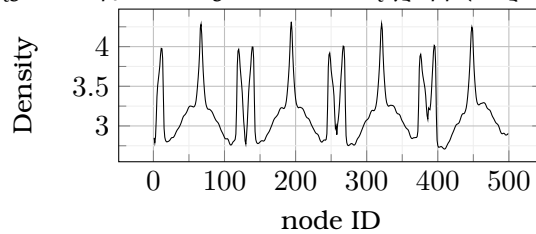
και μπορεί να είναι η διάταξη των γραμμών του \mathbf{a} σε αύξουσα σειρά η μία "κάτω" από την άλλη όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2.

Αυτή η απεικόνιση για τα μη-δομημένα πλέγματα επιλέγεται να είναι η διάταξη της πληροφορίας ανά τον αύξοντα αριθμό κόμβου στον οποίο αναφέρεται όπως φαίνεται και στο επεξηγηματικό σχήμα 1.4 όπως σημειώνει η κόκκινη συνεχής καμπύλη. Αυτό μπορεί να επιφέρει σημαντικές διαφορές στο σήμα που θα παραχθεί.

Είναι εμφανές πως στα μη-δομημένα πλέγμα (τα οποία συνήθως εμφανίζουν χωρικά εντοπισμένα πυκνώματα για λόγους ακρίβειας στους υπολογισμούς) υπάρχει πολύ μεγαλύτερη ανομοιογένεια στη διανομή της πληροφορίας ανά τους κόμβους απ' ότι στα δομημένα πλέγματα. Για δεδομένα σε ένα μη-δομημένο πλέγμα (point cloud data), η πληροφορία δεν κατανέμεται τόσο ξεκάθαρα όπως στα δομημένα (σχήμα 1.3), εξ ου και η μορφή του σχήματος 1.5 η οποία μοιάζει να είναι "τυχαία". Συνεπώς οι τεχνικές συμπίεσης που χρησιμοποιούνται αναφέρονται σε σήματα της μορφής του σχήματος 1.5, πράγμα που πρέπει να



Σχήμα 1.2: Διάταξη κόμβων σε 2Δ δομημένο πλέγμα και η απεικόνισή τους σε 1Δ διάνυσμα κατά αύξουσα σειρά αρίθμησης των κόμβων όπως υποδεικνύει η γραμμή σάρωσης



Σχήμα 1.3: Πυκνότητα από την επίλυση συμπιεστής ροής σε περιοδικό χωρίο σε μορφή σήματος

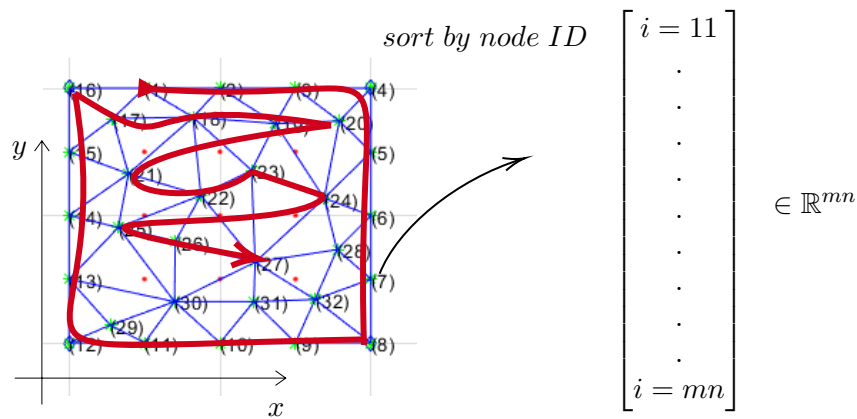
Λαμβάνεται υπόψη κατά το σχεδιασμό τους.

Κάθε τέτοιο σήμα αντιστοιχεί σε μία χρονική στιγμή, καθώς σε κάθε σημείο στο χρόνο αντιστοιχεί διαφορετική χωρική κατανομή του πεδιακού μεγέθους όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.6.

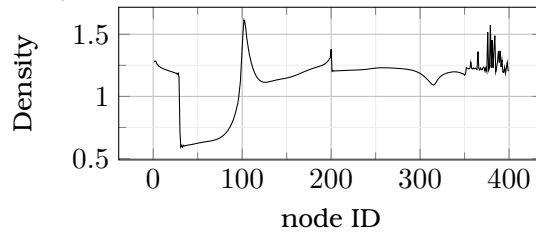
Τέτοια δεδομένα ονομάζονται *χρονοσειρές*:

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_{n_t}) \quad (1.12)$$

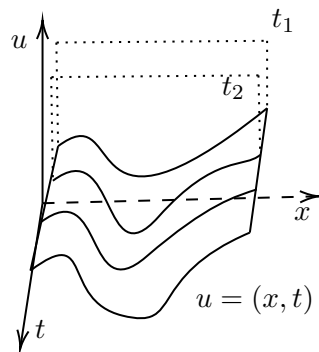
όπου $y \in \mathbb{R}^m$ τα σήματα που προκύπτουν από τους παραπάνω μετασχηματισμούς, με m το πλήθος κόμβων του μη-δομημένου πλέγματος. Συνεπώς, όλες οι τεχνικές που θα παρουσιαστούν *δεν επηρεάζονται* από το είδος των δεδομένων παρά μόνο από τη δομή τους. Δηλαδή, με διαφορετική απόδοση θα συμπιεστεί ένα σήμα με πολύ μεγάλες διακυμάνσεις και διαφορετικές κλίμακες, από ένα σήμα που αποτελείται αποκλειστικά από λ.χ. 3 αρμονικές.



Σχήμα 1.4: Διάταξη κόμβων όπως αριθμήθηκαν σε ένα τυπικό μη-δομημένο 2Δ πλέγμα και η απεικόνισή τους σε 1Δ διάνυσμα



Σχήμα 1.5: Στιγμιότυπο της πυκνότητας ρευστού γύρω από αεροδυναμική μορφή σε 400 κόμβους μη-δομημένου πλέγματος

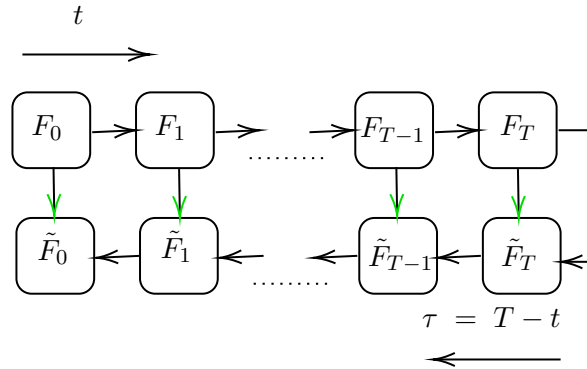


Σχήμα 1.6: Κατανομή σήματος $u(x, t)$ στο χρόνο

1.4 Υπάρχουσες μέθοδοι μείωσης του αποθηκευτικού κόστους στη βελτιστοποίηση μη-μόνιμων προβλημάτων με τη συζυγή μέθοδο

Το πρόβλημα του αποθηκευτικού χώρου για την επίλυση μη-μόνιμων συζυγών ΜΔΕ δεν απασχολεί μόνο τον επιστημονικό τομέα της βελτιστοποίησης, καθώς τέτοια προβλήματα συναντώνται τόσο στη σεισμολογία [11] όσο και για την εκτίμηση σφαλμάτων σε προσομοιώσεις (error estimation). Σε κάθε περίπτωση, είναι απαραίτητη η εύρεση μεθόδων μείωσης

του αποθηκευτικού χώρου που καταλαμβάνουν οι λύσεις των πρωτεύουσών εξισώσεων. Κάθε στιγμιότυπο της μη-μόνιμης λύσης είναι απαραίτητο για τον υπολογισμό του αντίστοιχου συζυγούς στιγμιότυπου, όπως φαίνεται στο επεξηγηματικό σχήμα 1.7.



Σχήμα 1.7: Ολοκλήρωση πρωταρχικών και συζυγών εξισώσεων

Ως τώρα, το πρόβλημα του αποθηκευτικού χώρου αντιμετωπίζεται μέσω δύο διαφορετικών στρατηγικών. Τον επανυπολογισμό της λύσης γύρω από προδιαγεγραμμένα σημεία στο χρονικό διάστημα (check-pointing) και την αποθήκευση κάθε στιγμιότυπου, αλλά σε ένα χώρο χαμηλότερης τάξης (μέσω μαθηματικών τεχνικών Συμπίεσης Δεδομένων). Αυτές είναι οι βασικές κατηγορίες μεθοδολογιών ελάφρυνσης του υπολογιστικού κόστους της μεθόδου και πάνω σε αυτές δημιουργούνται διάφορες παραλλαγές. Η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία παρουσιάζει τρόπους από τη δεύτερη κατηγορία, ωστόσο στην επόμενη ενότητα θα παρουσιαστεί η μέθοδος του check-pointing για λόγους βιβλιογραφικής πληρότητας.

1.4.1 Η μέθοδος του check-pointing

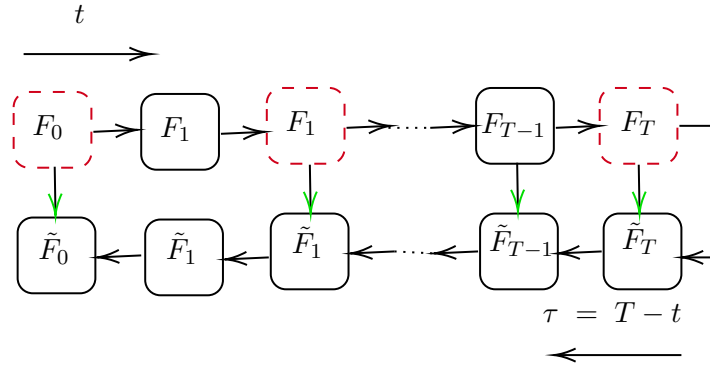
Το check-pointing είναι η επικρατέστερη μέθοδος μέχρι και σήμερα, για τη μείωση του αποθηκευτικού κόστους της επίλυσης των συζυγών ΜΔΕ [12] [13]. Η συγκεκριμένη τεχνική βασίζεται στην "ανταλλαγή" αποθηκευτικού χώρου με υπολογιστικό χρόνο. Δηλαδή θέλοντας να μειωθεί ο αποθηκευτικός χώρος, αναπόφευκτα θα πρέπει να γίνουν δαπανηροί επανυπολογισμοί της λύσης. Αρχικά θα οριστούν μερικές βασικές έννοιες. Κάθε διακριτή διαδικασία που εκτελείται σε βήματα εμπεριέχει μία έννοια "χρονικής μεταβολής" είτε αυτή αντιστοιχεί πραγματικά στη διάσταση του χρόνου του προβλήματος είτε όχι. Συνεπώς, παρά το γεγονός ότι τα παρακάτω αναφέρονται σε χρονικά μη-μόνιμες ΔΕ, θα μπορούσαν να αναφέρονται και σε οποιαδήποτε επαναληπτική διαδικασία. Έτσι, έστω μία βηματική διαδικασία, στην περίπτωση της εργασίας αυτής η χρονική ολοκλήρωση ενός συστήματος:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = f(\mathbf{u}(t), t), \quad \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \quad (1.13)$$

Έστω k ο δείκτης χρονικής ολοκλήρωσης και έτσι F_k η κατάσταση του συστήματος κατά τη χρονική στιγμή k . Οι συζυγείς εξισώσεις θα έχουν τη μορφή:

$$-\dot{\psi}(t) = g(\mathbf{u}, t, \psi(t)) = \tilde{f}, \quad \psi(T) = \phi(\mathbf{u}(T)) \quad (1.14)$$

με g μία γραμμική στο ψ συνάρτηση. Οι συζυγείς εξισώσεις όπως είναι γνωστό πρέπει να ολοκληρωθούν αντίστροφα στο χρόνο δίνοντας την κατάσταση \tilde{F}_k . Είναι, συνεπώς, απαραίτητη η γνώση του F_k , $\forall k \in [0, T]$. Αυτή η διαδικασία χρονικής ολοκλήρωσης, αποτελεί μία βηματική διαδικασία όπως φάνηκε στο σχήμα 1.7 με ενδιάμεσα στάδια την κάθε κατάσταση του συστήματος. Κατά το check-pointing, επιλέγονται συγκεκριμένα F_k τα οποία αποθηκεύονται και χρησιμοποιούνται ως αρχικές συνθήκες για την επανολοκλήρωση της ΔΕ. Στο επεξηγηματικό σχήμα 1.8 με κόκκινη διακεκομμένη συμβολίζονται οι καταστάσεις που θα αποθηκευθούν στη μνήμη του υπολογιστή. Αυτά είναι τα *checkpoints*. Όταν αρχίσει η χρονικά αντίστροφη ολοκλήρωση των συζυγών εξισώσεων, θα προηγηθεί ο επανυπολογισμός των καταστάσεων F_k , $s_{f-1} \leq k \leq s_f$ όπου με s συμβολίζεται το checkpoint ενώ οι δείκτες f και $f-1$ αντιστοιχούν στο τελευταίο (final) και προτελευταίο checkpoint. Δηλαδή, οι εξισώσεις επανολοκληρώνονται από το προτελευταίο checkpoint ως το σημείο όπου βρίσκεται η αντίστροφη ολοκλήρωση χωρίς να αποθηκεύονται οι ενδιάμεσες καταστάσεις. Η διαδικασία αυτή της αντίστροφης ολοκλήρωσης καλείται "reverse sweep" ενώ η πρόσω ολοκλήρωση "forward sweep"[10].



Σχήμα 1.8: Ολοκλήρωση των συζυγών εξισώσεων με χρήση του check-pointing

Το βασικότερο που μένει να απαντηθεί είναι το ποιά είναι η κατανομή των checkpoints, ώστε να απαιτούνται οι συνολικά ελάχιστοι επανυπολογισμοί της πρόσω λύσης κατά την "αντίστροφη σάρωση".

Ορίζουμε: s το πλήθος των checkpoints, l το πλήθος των επανυπολογισμών για το εκάστοτε χρονικό βήμα και $\beta(s, l)$ το μέγιστο μήκος της αντιστρέψιμης διαδρομής της παραπάνω διαδικασίας με περιορισμό την ύπαρξη s checkpoints και l επανυπολογισμούς σε κάθε βήμα του reverse sweep. Έτσι:

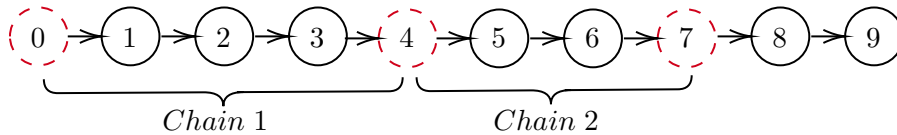
$$\beta(s, l) = \binom{s+l}{s} = \frac{(s+l)!}{s! l!} \quad (1.15)$$

Ορίζοντας 2 από τις 3 παραμέτρους, μπορεί να ευρεθεί η εναπομείνουσα. Σύμφωνα με την απόδειξη του A.Griewank [14], μία διωνυμική κατανομή των checkpoints συναρτήσει του β και των μέγιστων επανυπολογισμών l , εξασφαλίζει λογαριθμική αύξηση στη χωρική και χρονική πολυπλοκότητα.

Παραδείγματος χάριν, αν είναι επιθυμητή η αντιστροφή μίας αλυσίδας μήκους 10 βημάτων με 3 checkpoints, από την εξίσωση 1.15 υπολογίζεται το μέγιστο πλήθος επανυπολογισμών της λύσης για κάθε βήμα του reverse sweep.

$$\beta(3, l) = \frac{(3 + l)!}{6l!} = 10 \Rightarrow l = 2 \quad (1.16)$$

Για τη θέση των checkpoints, είναι λογική η υπόθεση, πως τοποθετούνται στο τέλος κάθε υπολογιστικής αλυσίδας που αντιστρέφεται πλήρως με s checkpoints και το πολύ l πρόσω βήματα από κάθε σημείο της. Η πρώτη χρονική στιγμή καθίσταται αμέσως checkpoint. Το μέγιστο μήκος αλυσίδας που αντιστρέφεται με s checkpoints και $l - 1$ επανυπολογισμούς σε κάθε βήμα είναι: $\beta(s, l - 1) = \beta(3, 1) = 4$. Άρα το επόμενο checkpoint είναι στο 4ο βήμα. Τέλος, στην τελευταία αλυσίδα απομένουν $s - 1$ checkpoints και έτσι το τελευταίο είναι η στιγμή $4 + \beta(s - 1, l - 1) = 4 + \beta(2, 1) = 4 + 3 = 7$ όπως φαίνεται και στο επεξηγηματικό σχήμα 1.9. Για την περίπτωση που το πλήθος βημάτων της αλυσίδας που πρέπει



Σχήμα 1.9: Παράδειγμα τοποθέτησης checkpoints για διαδικασία μήκους 10 βημάτων

να αντιστραφεί (δηλαδή όταν για κάποιο λόγο είναι επιθυμητή η αύξηση των βημάτων της προσομοίωσης) έχει αναπτυχθεί μία παραλλαγή της μεθόδου που προσαρμόζει την κανονική στα αυξανόμενα χρονικά βήματα ώστε να διατηρεί τη λογαριθμική αύξηση της χωρικής και χρονικής πολυπλοκότητας [15].

1.4.2 Η μέθοδος ZFP

Μία αρκετά πρόσφατη μέθοδος συμπίεσης επιστημονικών δεδομένων κινητής υποδιαστολής, (Floating Point Scientific Data) είναι η μέθοδος ZFP, η οποία πρωτοχρησιμοποιήθηκε στη βελτιστοποίηση με τη χρονικά μη-μόνιμη συζυγή μέθοδο στο [16]. Η μέθοδος δημιουργήθηκε για τις ανάγκες διαχείρισης και οπτικοποίησης δεδομένων από εφαρμογές HPC (High Performance Computing) στο Lawrence Livermore National Laboratory [17]. Η συγκεκριμένη μέθοδος λειτουργεί με διαμερίσεις [18].

Διαμέριση ενός συνόλου S , καλείται η οικογένεια συνόλων $p = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ για την οποία ισχύουν:

- Στη p δεν περιέχεται το κενό σύνολο ($\emptyset \notin \pi$)
- Η ένωση όλων των στοιχείων της p είναι το αρχικό σύνολο ($\bigcup_{B \in \pi} B = S$)
- Τα σύνολα που περιέχει η p δεν έχουν κοινά στοιχεία ($(\forall A, B \in \pi) A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$)

Η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για συμπίεση με απώλειες (lossy compression) όσο και για συμπίεση χωρίς απώλειες (lossless compression). Τα αρχικά δεδομένα από

μη-δομημένα πλέγματα, διαμερίζονται σε $4 \times 4 \times 4$ blocks για τη 3D περίπτωση.

Ο αλγόριθμος μπορεί να περιγραφεί από τα παρακάτω συνοπτικά βήματα:

1. Μετατροπή από γραφή κινητής υποδιαστολής σε γραφή σταθερής υποδιαστολής μέσω έκφρασης του κάθε block σε κοινή γραφή εκθέτη $Q3.60$ ¹. Ο μεγαλύτερος εκθέτης αποθηκεύεται και χαρακτηρίζει όλο το block,
2. μετασχηματισμός του block στην επιθυμητή βάση,
3. διάταξη των συντελεστών του μετασχηματισμού κατά φθίνουσα σειρά,
4. κωδικοποίηση συντελεστών ανά bit.

Βασιζόμενοι στην παρατήρηση πως οι περισσότεροι γνωστοί μετασχηματισμοί μπορούν να περιγραφούν από ένα ορθογώνιο μητρώο \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ c & s & -c & -s \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ s & -c & c & -s \end{bmatrix} \text{ όπου } c = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), \quad s = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \quad (1.17)$$

με t μία παράμετρο που χαρακτηρίζει τον εκάστοτε μετασχηματισμό (όπως οι διακριτοί μετασχηματισμοί Fourier, κυματιδίων και λοιποί). Οι γραμμές του πίνακα \mathbf{A} είναι τα διανύσματα βάσης του εκάστοτε χώρου που καταλήγει ο μετασχηματισμός. Έτσι σχηματίζουμε τη βάση B_{ijk} για το μετασχηματισμό:

$$B_{ijk} = b_i \otimes b_j \otimes b_k \quad (1.18)$$

όπου τα b_i, b_j, b_k είναι οι γραμμές του \mathbf{A} . Οι συντελεστές του μετασχηματισμού διατάσσονται και αποθηκεύονται όπως περιγράφεται αναλυτικά στο [17].

1.4.3 Συμπύεση δεδομένων μέσω Προσεγγίσεων Χαμηλής Τάξης (ΠΧΤ)

Μία διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα της μείωσης του αποθηκευτικού χώρου για την αποθήκευση δεδομένων είναι η αναπαράσταση των δεδομένων σε ένα χώρο χαμηλότερης τάξης, η πίο σωστά, ο υπολογισμός των βάσεων ενός χώρου χαμηλότερης διάστασης, στον οποίο τα δεδομένα θα προσεγγίζονται ικανοποιητικά συγκριτικά με την αναπαράστασή τους στον αρχικό χώρο [19]. Η πρώτη νύξη στη δυνατότητα προσέγγισης μίας συνάρτησης σε διαφορετικό χώρο χαμηλής διάστασης, έγινε από το Γάλλο μαθηματικό Joseph Fourier [20]. Ο μετασχηματισμός Fourier, είναι ουσιαστικά η πρώτη ΠΧΤ, καθώς αποσυνθέτει μία συνάρτηση σε ένα (αρχικά) άπειρο άθροισμα αρμονικών, το οποίο ωστόσο σε κάθε πρακτική εφαρμογή έχει πεπερασμένο αριθμό όρων, επιτυγχάνοντας έτσι τη μείωση τάξης. Η οικογένεια μετασχηματισμών στην οποία ανήκει ο μετασχηματισμός Fourier (ολοκληρωματικοί) απεικονίζουν συναρτήσεις σε ένα χώρο του οποίου η βάση είναι το επιλεγμένο πλήθος αρμονικών συναρτήσεων που ορίζει και την τάξη της προσέγγισης. Εφαρμόζον-

¹Η γραφή $Q3.60$ σημαίνει πως για την έκφραση του αριθμού χρησιμοποιούνται 3 bits για το ακέραιο μέρος και 60 για το δεκαδικό, ενώ ένα bit για το πρόσημο. Στη συγκεκριμένη γραφή, χρησιμοποιούνται 64 bits. Το εύρος τιμών που μπορεί να αναπαρασταθεί είναι της τάξης του 2^i , $i \in [-60, 60] \subset \mathbb{Z}$

τας το συγκεκριμένο μετασχηματισμό σε διάφορα σήματα από φυσικά συστήματα και μή, παρατηρήθηκε πως οι συντελεστές βάρους των βάσεων φθίνουν με εκθετικό τρόπο. Τα σήματα αυτά ονομάζονται *συμπιέσιμα*. Αυτή η εκθετική μείωση των συντελεστών σημαίνει πως αρκούν λίγες μόνο βάσεις για τη προσέγγιση των αρχικών δεδομένων. Αυτό θα διερευνηθεί και για τα σήματα που προέρχονται από τα προβλήματα που πραγματεύεται η εργασία αυτή. Για την κατασκευή ΠΧΤ σε κάθε είδους δεδομένα, επιδιώκεται η βέλτιστη προσέγγιση των βασικών χαρακτηριστικών των δεδομένων χρησιμοποιώντας ένα μικρό κομμάτι της υπέρχουσας πληροφορίας (βέλτιστη πάντα υπό κάποια νόρμα σε χώρους χαμηλότερων διαστάσεων). Όπως αναφέρθηκε, οι τεχνικές συμπίεσης δεν αλλάζουν όταν χρησιμοποιούνται σε λ.χ. ρευστομηχανικά, σεισμολογικά ή οικονομικά συστήματα. Αυτή η γενικότητά τους τις καθιστά μία εξαιρετικά θελκτική λύση στο πρόβλημα του αποθηκευτικού χώρου κατά τη βελτιστοποίηση χρονικά μη-μόνιμων προβλημάτων, μιάς και δεν είναι επεμβατικές στο λογισμικό που εκτελεί τη βελτιστοποίηση. Στην περίπτωση της παρούσας εργασίας, οι προσεγγίσεις αυτές θα χρησιμοποιηθούν για την αποθήκευση της πληροφορίας από το ρευστομηχανικό σύστημα χρησιμοποιώντας αρκετά λιγότερο αποθηκευτικό χώρο, εξετάζοντας τυχόντα συμβιβασμό στη ποιότητα. Σε επόμενα κεφάλαια πρόκειται να αναλυθούν 2 τεχνικές *σταδιακής* κατασκευής προσεγγίσεων μειωμένης τάξης, αυτή της Ανάλυσης σε Ιδιόζουσες Τιμές (iSVD) και ο Ιδιο-Γενικευμένος Διαχωρισμός (iPGD). Και για τις 2 παραπάνω μεθόδους, αναπτύχθηκαν κώδικες σε γλώσσα Fortran 95 οι οποίοι και χρησιμοποιήθηκαν καθόλη την εργασία. Οι δύο τεχνικές είναι αρκετά όμοιες όσον αφορά τη δομή, αποτελούν και οι δύο μία αποσύνθεση των αρχικών δεδομένων σε ένα σταθμισμένο άθροισμα βάσεων, ωστόσο διαφέρουν ως προς τους περιορισμούς κατά τον υπολογισμό τους: το iSVD είναι μία παραγοντοποίηση που πρέπει να διατηρεί την ορθογωνιότητα των μητρώων στροφής, ενώ το iPGD δεν έχει κάποιο περιορισμό ορθογωνιότητας στις συναρτήσεις βάσεις, εξ ου και ο χαρακτηρισμός "Γενικευμένος" (Generalized). Ο λόγος για τον οποίο εκτελούνται οι σταδιακές εκδοχές των αλγορίθμων θα αναλυθεί παρακάτω.

1.5 Στόχος της εργασίας

Κύριος στόχος της διπλωματικής εργασίας είναι η αξιολόγηση της ποιότητας των αποτελεσμάτων της βελτιστοποίησης μορφής με τη χρονικά μη-μόνιμη συζυγή μέθοδο κατά την οποία οι χρονοσειρές των πεδίων του πρωτεύοντος προβλήματος αποθηκεύονται συμπιεσμένες και αποσυμπιέζονται κατά την αντίστροφη στο χρόνο ολοκλήρωση των συζυγών εξισώσεων. Τελικός στόχος είναι η εξαγωγή συμπεράσματος για το κατά πόσο είναι δυνατόν να υπάρξει πλήρης αντικατάσταση των πρωτευουσών πεδίων, λύνοντας έτσι σε μεγάλο βαθμό το εγγενές πρόβλημα αποθηκευτικού χώρου της συζυγούς μεθόδου στα μη-μόνιμα προβλήματα. Αυτό γίνεται με τους εξής τρόπους:

- σύγκριση των αποσυμπιεσμένων χρονοσειρών με τις αρχικές μέσω διαφορετικών μετρικών σφάλματος,
- σύγκριση παραγώγων ευαισθησίας (παράγωγοι της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού οι οποίες χρησιμοποιούνται από την "απότομη κάθοδο" για την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού) και τιμών της συνάρτησης στόχου που προέκυψαν με και χωρίς τη χρήση των προσεγγιστικών χρονοσειρών των πεδίων,
- σύγκριση των αποτελεσμάτων της βελτιστοποίησης με χρήση των προσεγγίσεων και

χωρίς.

Στην εργασία περιέχονται:

- Κεφάλαιο 2: Παρουσίαση της μεθόδου της σταδιακής Ανάλυσης σε Ιδιάζουσες Τιμές (iSVD) και του τρόπου με τον οποίο χρησιμοποιείται σε προβλήματα βελτιστοποίησης. Γίνεται μία σχετικά εκτενής παρουσίαση της μεθόδου καθώς και επίδειξη της ικανότητάς της να συμπίπτει μονοδιάστατα χρονικά μη-μόνιμα πεδία.
- Κεφάλαιο 3: Παρουσίαση της μεθόδου του σταδιακού Ιδιο-Γενικευμένου Διαχωρισμού (iPGD) για τη δημιουργία ΠΧΤ με τον σταδιακό αλγόριθμό που αναπτύχθηκε από την ΜΠΥΡ&Β [21][22].
- Κεφάλαιο 4: Εφαρμογή των δύο μεθόδων συμπίεσης σε τρεις εφαρμογές: τις λύσεις της εξίσωσης Burgers, τις λύσεις των εξισώσεων Euler γύρω από την αεροτομή NACA0012 και τις λύσεις των εξισώσεων Navier Stokes σε πτερύγωση διηχητικού συμπιεστή.
- Κεφάλαιο 5: Εφαρμογή των μεθόδων προσέγγισης των πεδίων στο βέλτιστο έλεγχο ενός συστήματος που μοντελοποιείται με την εξίσωση Burgers, στη βελτιστοποίηση σχήματος μίας μεμονωμένης αεροτομής για μέγιστη άνωση και στη βελτιστοποίηση μορφής του περυγίου ενός διηχητικού συμπιεστή επίσης για μέγιστη άνωση (δύναμη κατά την περιφερειακή κατεύθυνση). Και στα δύο προβλήματα δεν υπάρχουν περιορισμοί.

Τα παραδείγματα που επιλέχθηκαν, εμφανίζουν ένα κοινό χαρακτηριστικό: ασυνέχειες.

Κεφάλαιο 2

Ανάλυση πινάκων σε Ιδιάζουσες τιμές

2.1 Η ανάλυση πινάκων σε ιδιάζουσες τιμές ως μέθοδος συμπίεσης

Η ανάλυση πινάκων σε ιδιάζουσες τιμές (Singular Value Decomposition) είναι μία από τις σημαντικότερες παραγοντοποιήσεις πινάκων με πληθώρα εφαρμογών σε κάθε επιστήμη που απαιτεί τη διαχείριση μεγάλων όγκων δεδομένων.

Η ανάλυση πινάκων μελετά τους διαφορετικούς τρόπους γραφής ενός πίνακα με πράξεις μεταξύ άλλων πινάκων. Η ανάλυση ενός πίνακα σε ιδιάζουσες τιμές, είναι ένας ο πιο διαδεδομένος τρόπος για την κατασκευή μίας "γενικευμένης διαγωνοποίησης" [23] ενός *όχι αναγκαστικά τετραγωνικού* πίνακα, καθώς υπάρχει για κάθε πίνακα. Ο γενικευμένος χαρακτήρας πηγάζει από τη χαλάρωση του περιορισμού του πίνακα που μετασχηματίζεται ώστε να είναι τετραγωνικός. Αυτό είναι σημαντικό, καθώς με τον τρόπο αυτό, το σύστημα αποσυντίθεται σε 3 πίνακες που αποθηκεύονται με πολύ μικρότερο κόστος απ' ό,τι ο αρχικός πίνακας.

Όπως και στη διαγωνοποίηση τετραγωνικών πινάκων, υπολογίζεται μία παραγοντοποίηση που αποτελείται από γινόμενο 2 ορθογώνιων πινάκων με έναν διαγώνιο, στη συγκεκριμένη παραγοντοποίηση, ο πίνακας αναλύεται σε γινόμενο 2 αυτοσυζυγών πινάκων και ενός μη τετραγωνικού με στοιχεία στην κύρια διαγώνιο τις *ιδιάζουσες τιμές* του A. Αυτοί οι πίνακες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την "οικονομικότερη" αποθήκευση του αρχικού, είτε για την προσομοίωση του δυναμικού συστήματος που παρήγαγε τα δεδομένα που περιέχει ο A όπως περιγράφηκε.

Ισχύει πως για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ υπάρχει η SVD και άρα ισχύει ότι:

$$\exists U \in \mathbb{R}^{m \times m}, V \in \mathbb{R}^{n \times n}, \Sigma = \text{diag}(\sigma_p) \in \mathbb{R}^{m \times n} : A = U \Sigma V^T \quad (2.1)$$

όπου

$$U^T U = I_{m \times m}, \quad V V^T = I_{n \times n}, \quad p = 1 : \min(m, n)$$

Τα στοιχεία που περιέχει ο πίνακας Σ στην κύρια διαγώνιο που ορίζει το $\min(m, n)$, καλούνται ιδιάζουσες τιμές του A , ενώ ο χώρος που δημιουργείται έχοντας βάση τις στήλες του $U = [\zeta_1 | \zeta_2 | \dots | \zeta_m]$ καλείται αριστερός ιδιόμορφος υπόχωρος (left singular subspace) και ομοίως από τις στήλες του V , $V = [\xi_1 | \xi_2 | \dots | \xi_n]$ καλείται δεξιός ιδιόμορφος υπόχωρος (right singular subspace).

Οι ιδιάζουσες τιμές αποτελούν τις ιδιοτιμές του πίνακα AA^T όπως και του $A^T A$. Πράγματι:

$$AA^T = A(V\Sigma^T U^T) = U\Sigma V^T (V\Sigma^T U^T) = U\Sigma\Sigma^T U^T \text{ και} \quad (2.2)$$

$$A^T A = (V\Sigma^T U^T)A = (V\Sigma^T U^T)U\Sigma V^T = V\Sigma^T \Sigma V^T \quad (2.3)$$

όπου σε κάθε περίπτωση ο πίνακας AA^T ή $A^T A$ γράφεται ως ένα γινόμενο τετραγωνικών πινάκων MSM^T όπου $MM^T = I$ και αφού $\Sigma^T \Sigma = \Sigma \Sigma^T = \text{diag}(\sigma_i^2)_{i=1:\text{rank}(A)}$ τότε πράγματι τα σ_i^2 είναι οι ιδιοτιμές των AA^T , $A^T A$

Ο A γράφεται και ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων βάσης του αριστερού και δεξιού ιδιόμορφου υποχώρου με συντελεστές βάρους τις ιδιάζουσες τιμές:

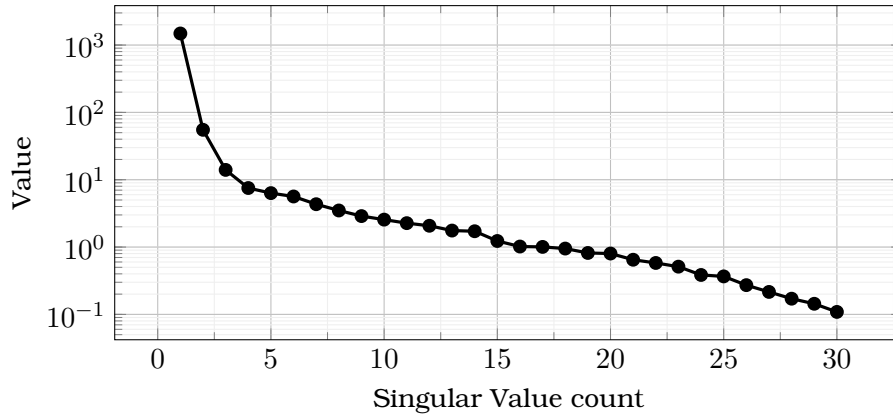
$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i \zeta_i \xi_i^T \quad (2.4)$$

όπου τα ζ_i, ξ_i έχουν $\text{rank} = 1$.

Ο λόγος που χρησιμοποιείται η συγκεκριμένη παραγοντοποίηση στην κατασκευή προσεγγίσεων χαμηλής τάξης, είναι ότι αποτελείται από πίνακες τέτοιους ώστε με σημαντικά μικρότερες διαστάσεις να περιγράφεται επαρκώς το φάσμα του A , $\sigma(A)$. Αυτό θα προϋπέθετε την ύπαρξη κάποιας αρτιοσι γνώσης, ότι το φάσμα ενός πίνακα περιγράφεται επαρκώς από σημαντικά χαμηλό αριθμό ιδιοτιμών, κοινώς ότι τα πλάτη των ιδιάζουσων τιμών φθίνουν εκθετικά. Ευτυχώς, για τους πίνακες που αποτελούνται από αποτελέσματα προσομοιώσεων ΥΡΔ, ισχύει ότι το φάσμα του πίνακα AA^T (οι ιδιάζουσες τιμές του A) φθίνει εκθετικά όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1:

Φάσμα ενός πίνακα καλείται το σύνολο των ριζών του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου, δηλαδή οι ιδιοτιμές του. Στην ΥΡΔ όπως και στη δυναμική γενικότερα, το φάσμα συνδέεται με τη δυναμική συμπεριφορά του υπό εξέταση συστήματος.

Όπως φαίνεται και από το σχήμα 2.1, ήδη μετά τις 10 πρώτες ιδιάζουσες τιμές ενός πίνακα



Σχήμα 2.1: ιδιάζουσες τιμές από προσομοίωση ροής γύρω από μεμονωμένη αεροτομή

A (με δεδομένα ΥΡΔ) παρατηρείται μείωση του πλάτους τους κατά 3 τάξεις μεγέθους. Αυτό υποδεικνύει πως τα σήματα που αποτελούν τον A είναι *συμπιέσιμα* καθώς μπορούν να αναπαρασταθούν από τις πρώτες λίγες (10) ιδιάζουσες τιμές. Εάν υπολογίζονταν περισσότερες από 30 ιδιάζουσες τιμές, θα παρατηρούνταν πως δεν αλλάζει το γεγονός ότι η διάσπαση του $A = \sum_{i=1}^n \sigma_i \xi_i \zeta_i^T$ κυριαρχείται από τους 10 πρώτους όρους και έτσι οι υπόλοιποι μπορούν να παραληφθούν.

Η βασική αρχή της κατασκευής προσεγγίσεων χαμηλής τάξης είναι ο υπολογισμός των βάσεων χώρων μικρότερης διάστασης, οι οποίοι περιγράφουν με ικανοποιητικό τρόπο την πληροφορία για τη δυναμική ολόκληρου του συστήματος χωρίς ολόκληρη την πληροφορία. Οι βάσεις αυτές είναι οι στήλες των U, V^T . Παραδείγματος χάριν, έστω ένας πίνακας A με τάξη $r_A = 10^5$. Θα ήταν επιθυμητό να βρεθεί ένας πίνακας B τάξης $k = 100$ όπου να περιλαμβάνει ικανοποιητικό μέρος του φάσματος του $(A, \sigma(A))$. Στην περίπτωση της ΥΡΔ, αυτό σημαίνει να περιέχεται μεγάλο κομμάτι της δυναμικής του πεδιακού μεγέθους στις στήλες του B . Η μείωση είναι επιθυμητή καθώς ο πίνακας με τη χαμηλότερη τάξη, έχει παραγοντοποίηση SVD με σημαντικά μικρότερο κόστος αποθήκευσης.

Την ύπαρξη αυτού του πίνακα B για κάθε επιθυμητή διάσταση εξασφαλίζει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1 (Schmidt-Eckart-Young) Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $rank(A) = r$, ο πίνακας:

$$A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i \xi_i \zeta_i^T, \quad 0 \leq k \leq r \quad (2.5)$$

είναι βέλτιστη προσέγγιση του A υπό τη νόρμα:

$$\|A - A_k\|_2 = \min_{B \in \mathbb{R}^{m \times n}} \|A - B\|_2 = \sigma_{k+1}, \quad \text{rank}(B) \leq k \quad (2.6)$$

Δηλαδή το θεώρημα 1 εγγυάται πως μία παραγοντοποίηση SVD του A , τάξης k (A_k) είναι η βέλτιστη (κατά την $\|\cdot\|_2$), πράγμα που τεκμηριώνει πως πράγματι η προσέγγιση χαμηλής τάξης είναι η βέλτιστη δυνατή για την επιλεχθείσα τάξη k . Βέβαια το παραπάνω δεν σημαίνει πως η ελάχιστη τιμή που λαμβάνει η διαφορά μεταξύ προσέγγισης και πραγματικού πεδίου είναι ικανοποιητική. Τέλος, η ορθογωνιότητα των μητρώων U, V της παραγοντοποίησης δεν είναι εγγυημένη στην ΠΧΤ, χωρίς ωστόσο αυτό να επηρεάζει σημαντικά την ποιότητα του αποτελέσματος. [24]

2.2 Το SVD και το σταδιακό (incremental) SVD στην υπολογιστική ρευστοδυναμική

Η SVD είναι βασικό εργαλείο για τη συμπίεση χρονοσειρών πεδίων στην ΥΡΔ. Αποτελεί τον πυρήνα πολλών μεθοδολογιών κατασκευής Μοντέλων Μειωμένης Τάξης όπως τα μοντέλα που προκύπτουν από την Κύρια Ορθογωνική Διάσπαση (Proper Orthogonal Decomposition) ή τη μέθοδο των στιγμιτύπων [25].

Έστω ο πίνακας δεδομένων

$$Y = \begin{bmatrix} | & & | \\ y_1 & \dots & y_n \\ | & & | \end{bmatrix}, \quad y_i \in \mathbb{R}^m \quad (2.7)$$

που αποτελείται από τα διανύσματα που περιέχουν τις m τιμές μίας μεταβλητής (η τιμή του πεδίου σε κάθε κόμβο του πλέγματος) ενώ περιέχει n τέτοια διανύσματα, ένα για κάθε χρονική στιγμή. Τα y_i ονομάζονται και "στιγμιότυπα" (snapshots) της λύσης [26]. Το μητρώο Y περιέχει όλη την πληροφορία του εκάστοτε ροϊκού μεγέθους, καθώς κάθε στήλη του με τον κατάλληλο μετασχηματισμό αντιστοιχεί στην κατανομή του πεδιακού μεγέθους στο χώρο.

Εάν αποθηκευθεί κάθε στιγμιότυπο της λύσης, έχουμε μία "συλλογή" της δυναμικής του πεδίου, δηλαδή μπορούμε για κάθε χρονική στιγμή να γνωρίζουμε πως κατανέμεται η μεταβλητή που εξετάζεται. Το ζητούμενο είναι να υπολογιστεί μία ΠΧΤ του μητρώου Y , για την οικονομικότερη αποθήκευσή του. Σε αυτό το σημείο θα γίνει η χρήση του SVD καθώς από το θεώρημα 1 είναι γνωστό πως, για ένα κατάλληλα επιλεγμένο k (τάξη αποκοπής-truncation rank), μπορεί να κατασκευαστεί με το SVD μία προσέγγιση τάξης k που θα είναι πράγματι βέλτιστη υπό την έννοια ότι από όλους τους πίνακες $\in \mathbb{R}^{m \times n}$, αυτός που αποτελείται από το άθροισμα των k πρώτων ιδιοδιανυσμάτων ξ_i, ζ_i , είναι αυτός με τη μικρότερη L_2 απόσταση από τον αρχικό πίνακα A , άρα η λύση στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$\min_{B \in \mathbb{R}^{m \times n}} (\|A - B\|_2) \quad .$$

Η προσέγγιση λέγεται τάξης k καθώς από τους πλήρεις $U \in \mathbb{R}^{m \times n}, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ κρατούνται οι

πρώτες k στήλες για τον U και οι πρώτες k γραμμές για τον V^T . Αυτό είναι δυνατόν εξαιτίας του ότι το φάσμα του A , $\sigma(A)$ φθίνει εκθετικά.

$$Y = \begin{bmatrix} | & & | \\ y_1 & \dots & y_n \\ | & & | \end{bmatrix} = U\Sigma V^T, \quad U \in \mathbb{R}^{m \times k}, \quad \Sigma = \text{diag}(\sigma_{p=1:k}) \in \mathbb{R}^{k \times k}, \quad V \in \mathbb{R}^{n \times k} \quad (2.8)$$

Με την παραπάνω προσέγγιση, το κόστος αποθήκευσης είναι: $(k+1) \times (m+k+1+n)$ που, καθώς συνήθως $k \ll r \leq \min(m, n)$, $r = \text{rank}(A)$, το οποίο είναι πολύ μικρότερο του $m \times n$ που απαιτείται για την πλήρη αποθήκευση του πεδίου. Ωστόσο, για τον υπολογισμό των U, Σ, V σύμφωνα με όσα έχουν λεχθεί ως τώρα, απαιτείται η πλήρης αποθήκευση της λύσης γεγονός αντιφατικό με το στόχο της εργασίας, μιάς και αν μπορούσε να αποθηκευθεί ολόκληρη η λύση, δε θα ήταν απαραίτητη η συμπίεσή της.

Συνεπώς χρειάζεται ένας τρόπος υπολογισμού των μητρώων της παραγοντοποίησης πριν την ολοκλήρωση της επίλυσης των εξισώσεων. Μία τέτοια μέθοδος, υπολογίζει τα U, Σ, V όσο ο επιλύτης υπολογίζει τα νέα y . Η διαδικασία κατασκευής του SVD που περιλαμβάνει τη νέα πληροφορία, γίνεται με τον υπολογισμό ορισμένων πινάκων [27] [28] [24].

Αρχικά αποθηκεύεται το πρώτο κομμάτι της λύσης, ως το σημείο που επιτρέπει η χωρητικότητα του "δίσκου" του εκάστοτε χώρου αποθήκευσης και υπολογίζεται η SVD της. Στο σημείο αυτό οι αποθηκευτικές ικανότητες του δίσκου έχουν εξαντληθεί. Είναι λοιπόν εμφανές, πως η μέθοδος που αναζητείται πρέπει να ανανεώσει τους ήδη αποθηκευμένους πίνακες, ώστε να περιλαμβάνεται πλέον και η νέα πληροφορία που θα προκύψει (το επόμενο y που θα υπολογίσει ο επιλύτης). Όπως παρουσιάζεται και στο [29], αυτό γίνεται "αναδιπλώνοντας" τη νέα πληροφορία που υπολογίστηκε από τον επιλύτη στην ήδη υπάρχουσα παραγοντοποίηση υπολογίζοντας εκ νέου τους U, Σ, V λαμβάνοντας υπόψη το νέο y . Έτσι ο αλγόριθμος αυτός ονομάζεται και incremental Singular Value Decomposition ή folding-in SVD αφού στο τέλος κάθε βήματος k του επιλύτη, υπολογίζει την SVD του πίνακα δεδομένων που θα αντιστοιχούσε στη στιγμή k εάν ήταν δυνατόν να αποθηκευθεί και νέα πληροφορία. Παρακάτω παρουσιάζονται τα βήματα του αλγορίθμου.

Αρχικά αποθηκεύεται όση πληροφορία από τη λύση χωράει στο σύστημα και σχηματίζεται ο ως τότε πίνακας δεδομένων Y και υπολογίζεται η SVD του $Y = U\Sigma V^T$. Στη συνέχεια, πρέπει για κάθε νέο y που υπολογίζεται από τον επιλύτη, η $U\Sigma V^T$ να ανανεώνεται κατάλληλα ώστε να ανταποκρίνεται στην SVD του $[Y \ y]$. Για να γίνει αυτό χρησιμοποιείται η ταυτότητα:

$$Y_{new} = [U\Sigma V^T \quad y] = [U \quad f] \cdot \begin{bmatrix} \Sigma & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (2.9)$$

που ισχύει όταν τα p και f υπολογίζονται όπως παρακάτω. Αρχικά υπολογίζεται η προβολή h των νέων δεδομένων y στον αριστερό υπόχωρο U η προβολή p στον U^T και η διαφορά f ,

του y από το h

$$\begin{cases} p = U^T y, \\ h = Up, \\ f = y - h = (I - UU^T)y, \end{cases} f \in \mathbb{R}^m, \text{ με } \|f\| = 1 \quad (2.10)$$

ώστε να ισχύει, μετά από πράξεις, η **2.9**. Οι παραπάνω 3 πίνακες πλέον θα ονομάζονται επαυξημένοι και θα συμβολίζονται με ” $\hat{\cdot}$ ”

$$\hat{U}_{m \times (k+1)} = [U \ f], \quad \hat{\Sigma}_{(k+1) \times (k+1)} = \begin{bmatrix} \Sigma & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{V}_{(n+1) \times (k+1)} = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

ενώ η **2.9** γράφεται:

$$[U \Sigma V^T \ y] = \hat{U}_{m \times (k+1)} \cdot \hat{\Sigma}_{(k+1) \times (k+1)} \cdot \hat{V}_{n \times (k+1)}^T \quad (2.12)$$

Τώρα, εάν ο $\hat{\Sigma}$ διαγωνοποιηθεί $\hat{\Sigma} = U' \Sigma' V'^T$, $\Sigma' \in \mathbb{R}^{(k+1) \times (k+1)}$ έχουμε 2 νέους πίνακες στροφής U', V' επίσης $\in \mathbb{R}^{(k+1) \times (k+1)}$ που στρέφουν τις βάσεις των επαυξημένων υποχώρων $\hat{U} = [U \ r], \hat{V} = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ώστε να ισχύει:

$$Y_{new} = \hat{U} U' \Sigma' V'^T \hat{V}_{[1:n, 1:k+1]}^T \quad (2.13)$$

Στην περίπτωση αυτή, έχει επιτευχθεί το ζητούμενο, να υπολογιστεί ο Y_{new} ανανεώνοντας μόνο υπάρχοντες πίνακες, τους:

$$\begin{cases} U_{1:m, 1:k} \leftarrow \hat{U} U' \\ \Sigma_{1:k} \leftarrow \Sigma' \\ V_{1:n, 1:k} \leftarrow V'^T \hat{V}^T \end{cases} \quad (2.14)$$

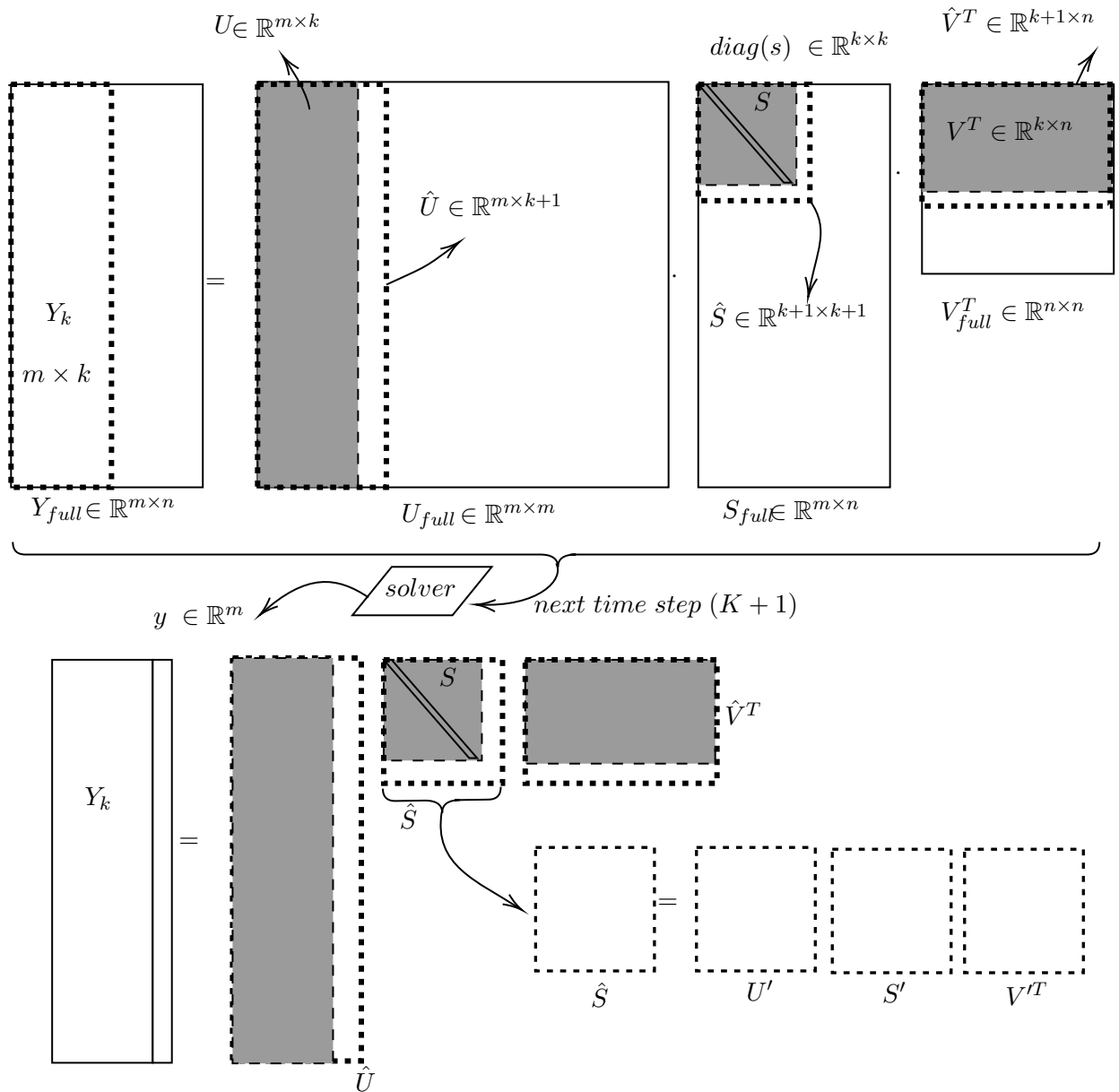
Έτσι οι μόνοι πίνακες που χρειάζεται να αποθηκευθούν είναι οι U, Σ, V και με κοινή διάσταση k που είναι η τάξη αποκοπής (truncation rank). Η διαδικασία αυτή εκκινεί όταν ο επιλύτης υπολογίσει k στιγμιότυπα και τελειώνει με το τέλος της επίλυσης.

Τότε η λύση αποδίδεται ως ένα SVD με τους πίνακες $U \in \mathbb{R}^{m \times k}, \Sigma \in \mathbb{R}^{k \times k}, V \in \mathbb{R}^{n \times k}$ όπου ο Σ όντας διαγώνιος, αποθηκεύεται ως ένα διάνυσμα $s \in \mathbb{R}^k$. Αθροιστικά, όμως, εξαιτίας της ύπαρξης των επαυξημένων πινάκων με διαστάσεις $k+1$, υπάρχει ένα επιπλέον κόστος (overhead) στο κόστος αποθήκευσης: $m(k+1) + n(k+1) + (k+1) - km - kn - k = m + n + 1$ το οποίο οφείλει να είναι διαθέσιμο στο αποθηκευτικό μέσο.

Για να γίνει κατανοητή η βηματική διαδικασία ανανέωσης της παραγοντοποίησης, στα σχήματα **1,2,2** παρουσιάζεται ο αλγόριθμος τόσο σχηματικά όσο και σε μορφή βημάτων.

Αρχίζοντας από το βήμα $step = k$, όπου k η προδιαγεγραμμένη τάξη αποκοπής από το

χρήστη, υπολογίζεται η SVD του Y_k . Με γκρι χρωματίζονται οι πίνακες που προκύπτουν από αυτόν τον πρώτο υπολογισμό. Στη συνέχεια, όπως υπαγορεύει και ο αλγόριθμος, αυτοί οι πίνακες επαυξάνονται μόλις υπολογιστεί το στιγμιότυπο y . Έτσι προκύπτουν οι πίνακες $\hat{U}, \hat{S}, \hat{V}$. Τώρα από αυτούς ο \hat{S} διαγωνοποιείται και οι πίνακες των ιδιοδιανυσμάτων του U', V' στρέφουν τους \hat{U} και \hat{V} . Τώρα, για να μην μεταβληθούν οι διαστάσεις των σκιασμένων πινάκων U, S, V , αποθηκεύονται οι υποπίνακες των $\hat{U}, \hat{S}, \hat{V}$ που αντιστοιχούν στους γραμμοσκιασμένους πίνακες που έχουν ήδη αποθηκευθεί. Έτσι το κόστος αποθήκευσης καταλήγει να είναι $k(m + n + 1)$.



Σχήμα 2.2: Σχηματική αναπαράσταση του iSVD

Έτσι ο αλγόριθμος είναι:

Algorithm 1 Αλγόριθμος υπολογισμού του iSVD κατά την ολοκλήρωση των πρωτευουσών εξισώσεων

```

1:  $t \leftarrow 0$ 
2: read  $k$ 
3: while  $t \leq T$  do                                     ▷  $T$ : final time of primal solution
4:   if  $t_i \leq k$  then
5:     Store  $y$  in  $Y_k$ 
6:   else
7:     if  $t_i = k + 1$  then
8:       Calculate SVD of  $Y_k$ 
9:       goto 11
10:    else
11:      Calculate  $p, f, h$ 
12:      Calculate  $\hat{U}, \hat{S}, \hat{V}$ 
13:      Diagonalize (Factor)  $\hat{S}$  in  $U', S', V'$ 
14:      Update  $U, S, V$  ( $k^{th}$  order truncation of  $\Sigma'$ )
15:    end if
16:  end if
17: end while

```

Για τα βήματα που απαιτείται η παραγοντοποίηση SVD κάποιου πίνακα, χρησιμοποιήθηκε ένας αξιόπιστος αλγόριθμος υπολογισμού του SVD σύμφωνα με τους Forsythe et al. [30]. Το L_2 σφάλμα μεταξύ προσέγγισης και του αρχικού πίνακα δεδομένων, για την *iSVD* με προκαθορισμένη τάξη αποκοπής k , σύμφωνα με τις αποδείξεις που παρατίθενται στο [31] και το θεώρημα 1, είναι e και κατά τη βηματική ανανέωση των πινάκων της παραγοντοποίησης ισχύει:

$$e_i = e_{i-1} + p_i + \sigma_{k+1}^i, \quad \partial_i = \|y_i - UU^T y_i\| \quad (2.15)$$

καθώς ο σταδιακός αλγόριθμος πραγματοποιεί αποκοπή στην τάξη k , με σ_{k+1} την $k+1$ οστή ιδιοτιμή του Σ' .

Κεφάλαιο 3

Ιδιο-Γενικευμένος Διαχωρισμός

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί η μέθοδος του Ιδιο-Γενικευμένου Διαχωρισμού, για τη δημιουργία Βέλτιστων προσεγγίσεων χαμηλής τάξης. Ο ιδιο-γενικευμένος διαχωρισμός είναι μία τεχνική διαχωρισμού μίας συνάρτησης πολλών μεταβλητών η και παραμέτρων, σε ένα άθροισμα γινομένων μονοδιάστατων συναρτήσεων. Έστω μία συνάρτηση u με N ορίσματα. Τότε το PGD αναζητά μία αποσύνθεση της συνάρτησης της μορφής:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_N) \approx \sum_{\mu=1}^M \prod_{n=1}^N X_n^\mu(x_n) \quad (3.1)$$

Από αυτό το σημείο γίνεται εμφανής η αξία μίας τέτοιας μεθόδου για τη μείωση του αποθηκευτικού κόστους ενός πεδίου που εξαρτάται από πολλές παραμέτρους. Εάν τα $x_{i=1:N}$ διακριτοποιούνται και ήταν απαραίτητη η αποθήκευση του u , θα ήταν απαραίτητη η δημιουργία και αποθήκευση ενός πολυδιάστατου αντικειμένου $u_{ijk\dots}$ με κόστος αποθήκευσης $I \times J \times K \times \dots$ όπου I, J, K είναι τα πλήθη σημείων διακριτοποίησης των $x_{i=1:N}$.

Έτσι, αντί να αποθηκευτεί το πεδίο ως ένα πολυδιάστατο αντικείμενο, αποθηκεύονται οι υπολογισμένες συναρτήσεις X_n^μ με κόστος $M(I + J + K + \dots)$

Το PGD μπορεί να λειτουργήσει είτε ως μέθοδος επίλυσης ΠΣΤ¹, είτε ως μέθοδος δημιουργίας προσεγγίσεων χαμηλής τάξης πολυπαραμετρικών συναρτήσεων. Στην ανα χείρας διπλωματική εργασία θα παρουσιαστεί ο τρόπος εφαρμογής της μεθόδου στη βέλτιστη προσέγγιση μίας πολυδιάστατης συνάρτησης, κάνοντας χρήση γινομένων μονοδιάστατων συναρτήσεων. Για την παρουσίαση της μεθόδου ως επιλύτη ΜΔΕ, υπάρχει επίσης διαθέσιμη βιβλιογραφία από τη ΜΠΥΡ& Β[22][21][32][33]. Για τη συμπίεση του πεδίου δεν απαιτείται επέμβαση στον επιλύτη της ΜΔΕ, ωστόσο όπως θα γίνει εμφανές παρακάτω, για λόγους μείωσης του αποθηκευτικού χώρου είναι απαραίτητος ο σταδιακός υπολογισμός του PGD[16][34].

Θα αναζητηθεί μία προσέγγιση του u κατά τη 3.1 ώστε να αποθηκευτεί με πολύ μικρότερο

¹Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών

κόστος. Έχοντας το πεδίο u υπολογίζονται οι συναρτήσεις X_n^μ μέσω της διαδικασίας που θα περιγραφεί παρακάτω. Οι συναρτήσεις που απαρτίζουν το εκάστοτε γινόμενο $X_1^\mu \times X_2^\mu \times X_3^\mu \times \dots \times X_N^\mu$ καλούνται βάσεις, καθώς συνθέτουν N χώρους συναρτήσεων διάστασης M ο κάθε ένας. Ο χώρος γινομένου των παραπάνω N χώρων είναι εκεί όπου αναπαρίσταται η συνάρτηση u με το PGD. Γίνεται λοιπόν εμφανές, πως δοθέντος του πλήθους των χώρων (διάσταση του προβλήματος, στο παράδειγμα N) και της τάξης του κάθε χώρου (πλήθος βάσεων που πρόκειται να υπολογιστούν, M) υπολογίζονται οι M βάσεις με βέλτιστο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται το σφάλμα από την πραγματική λύση. Αυτό θα αναλυθεί περαιτέρω.

Στην περίπτωση της βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική, τα πεδία που πρόκειται να συμπιεστούν με τη μέθοδο είναι τα ροϊκά μεγέθη, δηλαδή η ταχύτητα $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ και η πίεση $p(x, y, z, t)$ για ασυμπίεστες ροές, ενώ για συμπιεστές θα υπολογιστεί και η πυκνότητα $\rho(x, y, z, t)$ όπως και τα πεδία των συνεκτικιοτήτων, ν, ν_t . Καθώς θα χρησιμοποιηθούν μη δομημένα πλέγματα, γίνεται χρήση μίας παραλλαγής της μεθόδου όπου όλες οι χωρικές διαστάσεις περιέχονται σε μία μόνο διάσταση (ανεξαρτήτως του πλήθους τους). Λόγω του ότι το πλέγμα είναι μη δομημένο, δεν υπάρχει δομή στους κόμβους ώστε να προσδιοριστούν κατευθύνσεις x, y, z κλπ. Έτσι, σε ένα διάνυσμα αποθηκεύονται τιμές που αντιστοιχούν στους κόμβους με τη σειρά που αυτοί έχουν αριθμηθεί ανεξαρτήτως του που βρίσκονται στο χωρίο. Σε ένα δομημένο πλέγμα, είναι εμφανές πως, λόγω της συγκεκριμένης τοπολογίας του μπορούν να οριστούν διευθύνσεις (γενικά καμπυλόγραμμες). Έτσι, θα υπήρχε πληροφορία για τους κόμβους "κατά άξονα x_1 " και "κατά άξονα x_2 " για ένα 2D πλέγμα. Δηλαδή στη λογική της 3.1, για ένα χρονικά μη μόνιμο πρόβλημα με ρητή εξάρτηση από το χρόνο, θα ήταν:

$$u(\nu, \chi, y) \approx \sum_{\mu=1}^M T^\mu(t) X^\mu(x) Y^\mu(y) \quad (3.2)$$

Ωστόσο όπως φαίνεται και στο επεξηγηματικό σχήμα 1.4 (για κεντροκομβικές διατυπώσεις των διακριτοποιημένων εξισώσεων) στα μη δομημένα πλέγματα, λόγω της έλλειψης δομής στη τοπολογία τους είναι αδύνατη η εύρεση "βολικών" διευθύνσεων κατά την προηγούμενη λογική, κοντά δηλαδή σε μία λογική συστήματος συντεταγμένων.

Έτσι, αφού είναι αδύνατη η γνώση της πληροφορίας ανά "φυσική" διεύθυνση, όλη η πληροφορία συγκεντρώνεται σε ένα μόνο διάνυσμα (πράγμα που θα μπορούσε να γίνει και σε ένα δομημένο πλέγμα) στο οποίο απλώς ακολουθείται η σειρά αρίθμησης των κόμβων όπως προκύπτουν από το πρόγραμμα γένεσης του πλέγματος. Έτσι, είναι πιθανόν να μην υπάρχει φυσική συσχέτιση μεταξύ της πληροφορίας που περιέχεται σε 2 διαδοχικούς κόμβους. Η λύση τώρα με το PGD θα γράφεται:

$$u(x, y, t) \approx \sum_{\mu=1}^M S^\mu(x_i) \cdot T^\mu(t^n) \quad (3.3)$$

όπου $S^\mu(x_i)$ είναι μία γενική "χωρική" βάση (Spatial) που ορίζεται μόνο για το διακριτοποιημένο σύστημα και έχει στοιχεία όσα οι κόμβοι του πλέγματος. Η χρονική βάση T_k^μ έχει τόσα στοιχεία όσα το πλήθος των χρονικών στιγμών που επιλύονται οι εξισώσεις. Έτσι, είναι εμ-

φανές πως ανεξαρτήτως της διάστασης του προβλήματος η προσέγγιση γίνεται με 2 βάσεις. Η διδιάστατη προσέγγιση έχει το όφελος του ότι το PGD θα είναι πράγματι βέλτιστο όπως έχει αποδειχθεί για τις 2 διαστάσεις και για το SVD.[32]

3.1 Η μέθοδος υπολογισμού του PGD μέσω σταθμισμένων υπολοίπων Galerkin

Τα σταθμισμένα υπόλοιπα Galerkin αποτελούν το μαθηματικό θεμέλιο για την αριθμητική επίλυση συνοριακών προβλημάτων ΜΔΕ. Υπενθυμίζεται η γενίκευση του εσωτερικού γινομένου από διανύσματα σε συναρτήσεις που ανήκουν σε ένα χώρο Ω . [19]

Αρχικά ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο στον Ω :

Ορισμός 1 Έστω η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega} : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ και $a, b \in \Omega$ τότε

$$\langle a, b \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} (a \cdot b) d\Omega \quad (3.4)$$

όπου Ω ο χώρος που ανήκει η λύση του προβλήματος. Η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle$ καλείται *εσωτερικό γινόμενο* επί του Ω .

Για τη διατύπωση Galerkin απαιτείται η χρήση μίας δοκιμαστικής/γενικευμένης συνάρτησης (*κατανομή*) $u^* \in \mathcal{U} \subset \Omega$.

Όσον αφορά το πρόβλημα, αντί για ένα Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (μία ΜΔΕ με συνοριακές συνθήκες), στην περίπτωση της συμπίεσης αναζητείται λύση στο απλό αλγεβρικό πρόβλημα:

$$u_{PGD}(x, t) = f(x, t) \quad (3.5)$$

όπου $f(x, t)$ είναι η λύση που υπολογίζεται από τον επιλύτη και $u_{PGD}(x, t)$ η ΠΧΤ με το PGD 3.3 που είναι και το ζητούμενο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, οι διαστάσεις του προβλήματος θεωρούνται εξαρχής 2, δηλαδή πλέον η βάση $S(x)$ δεν έχει άμεση φυσική σημασία. Ορίζοντας το υπόλοιπο ως

$$R(x, t) = u_{PGD}(x, t) - f(x, t) \quad (3.6)$$

αναζητείται η αποσύνθεση PGD ώστε $R \approx 0$ και έτσι διατυπώνεται με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου της 3.4 η ασθενής διατύπωση του προβλήματος:

$$\langle R, u^* \rangle = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} u^* (u_{PGD} - f) d\Omega = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} u^* \left(\sum_{\mu=1}^M S^{\mu}(x) T^{\mu}(t) - f \right) d\Omega = 0 \quad (3.7)$$

Καθώς τα εσωτερικά γινόμενα γενικεύουν την έννοια της προβολής, σε χώρους εσωτερικού γινομένου, η 3.7 εκφράζει μία σχέση ορθογωνιότητας μεταξύ του υπολοίπου R και της

δοκιμαστικής συνάρτησης u^* καθώς το ένα έχει μηδενική προβολή στο άλλο. Η ιδέα του Galerkin, εξ ου και η ονομασία, ήταν η χρήση των βάσεων που προσεγγίζουν τη λύση ως τη δοκιμαστική συνάρτηση. Γενικά, οι βάσεις θα προσδιοριστούν από τη σχέση ορθογωνιότητας του υπόλοιπου R με κάθε δοκιμαστική συνάρτηση u^* :

$$\int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{T}} u^* (u_{PGD}(x,t) - f(x,t)) dx dt = 0 \quad \forall u^* \in \mathcal{U} \quad (3.8)$$

3.1.1 Αλγόριθμος εναλλασσόμενων κατευθύνσεων για τον υπολογισμό του PGD

Η εξίσωση 3.7 είναι μη γραμμική οπότε για την επίλυσή της απαιτείται κάποια επαναληπτική διαδικασία. Επιλέγεται η μέθοδος των εναλλασσόμενων κατευθύνσεων. Για τα παρακάτω με p συμβολίζεται ο αριθμός των εσωτερικών επαναλήψεων για τις εναλλασσόμενες κατευθύνσεις και όπως και παραπάνω με m η βάση προς υπολογισμό. Η διαδικασία έχει ως εξής:

- Αφού αρχικοποιηθούν οι βάσεις S_i^1, T_0^1 ορίζεται για το βήμα p η προσέγγιση της u με το PGD για τη m -οστή βάση:

$$u_p^m = S_p^m T_{p-1}^m + \sum_{\mu=1}^{m-1} S_p^\mu T_{p-1}^\mu \quad (3.9)$$

όπου θεωρείται γνωστή η βάση T_{p-1}^m από την προηγούμενη ($p-1$) επανάληψη. Έτσι, από την 3.9 και την 3.8 και λαμβάνοντας για δοκιμαστική συνάρτηση την $u^* = S^{m*} T_{p-1}^m$ παράγεται η αλγεβρική εξίσωση προσδιορισμού του $S^m(x)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{T}} S^{m*} \left(S_p^m T_{p-1}^m + T_{p-1}^m \sum_{\mu=1}^{m-1} S_p^\mu T_{p-1}^\mu \right) dx dt - \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{T}} S^{m*} T_{p-1}^m f dx dt = 0 \Rightarrow \\ \int_{\mathcal{X}} S^{m*} \left(S_p^m \alpha_t + \sum_{\mu=1}^{m-1} S_p^\mu \beta_t^\mu - \gamma_t \right) dx = 0 \quad \forall S^{m*} \in \mathcal{X} \end{aligned} \quad (3.10)$$

όπου με δείκτη t τα χρονικά ολοκληρώματα:

$$\begin{cases} \alpha_t = \int_{\mathcal{T}} T_{p-1}^m{}^2 dt \\ \beta_t^\mu = \int_{\mathcal{T}} T_{p-1}^m T_{p-1}^\mu dt \\ \gamma_t = \int_{\mathcal{T}} T_{p-1}^m f dt \end{cases} \quad (3.11)$$

- Στη συνέχεια, πρέπει να ανανεωθεί στο βήμα p η βάση T_p^m . Έτσι, ακολουθείται όμοια

διαδικασία με παραπάνω, Μόνο που τώρα η

$$u_p^m = S_p^m T_p^m + \sum_{\mu=1}^{m-1} S_p^\mu T_p^\mu \quad (3.12)$$

αφού πλέον η S_p^m είναι γνωστή. Ως δοκιμαστική συνάρτηση λαμβάνεται η $u^* = S_p^m T^{m*}$. Έτσι, η T_p^m υπολογίζεται από την:

$$\int_{\mathcal{T}} T^{m*} \left(T_p^m \alpha_x + \sum_{\mu=1}^{m-1} T_p^\mu \beta_x^\mu - \gamma_x \right) dx = 0 \quad \forall T^{m*} \in \mathcal{T} \quad (3.13)$$

όπου με δείκτη x τα πλέον χωρικά ολοκληρώματα:

$$\begin{cases} \alpha_x = \int_{\mathcal{X}} S_p^{m2} d\mathcal{X} \\ \beta_x^\mu = \int_{\mathcal{X}} S_p^m S_p^\mu d\mathcal{X} \\ \gamma_x = \int_{\mathcal{X}} S_p^m f d\mathcal{X} \end{cases} \quad (3.14)$$

- Ο τερματισμός της διαδικασίας επέρχεται όταν οι εσωτερικές επαναλήψεις φτάσουν έναν προδιαγεγραμμένο αριθμό P_{max} ή όταν οι βάσεις συγκλίνουν σύμφωνα με κάποιο επιθυμητό σφάλμα:

$$\sqrt{\int_{\mathcal{X}} (S_p^m - S_{p-1}^m)^2 d\mathcal{Q}} \leq \epsilon \quad (3.15)$$

$$\sqrt{\int_{\mathcal{T}} (T_p^m - T_{p-1}^m)^2 d\mathcal{T}} \leq \epsilon \quad (3.16)$$

Η παραπάνω διαδικασία συνοψίζεται στον αλγόριθμο:

Algorithm 2 Αλγόριθμος υπολογισμού iPGD

```
1:  $S_{i=1:nx}^1 = u_{i=1:nx,1}$ 
2:  $T_0^1 = 1, T_{k=2:K}^1 = 0$ 
3: while  $m \leq M$  do ▷ Για όλες τις βάσεις
4:   while  $p \leq P_{max}$  or  $T_p^m, S_p^m$  unconverged do
5:     ▷  $S_p^m$  is unknown,  $T_{p-1}^m$  is known
6:      $u^* = S^{m*}T_{p-1}^m$ 
7:      $u_p^m = S_p^m T_{p-1}^m + \sum_{\mu=1}^{m-1} S_p^\mu T_{p-1}^\mu$ 
8:     update  $S_p^M$  from 3.10
9:     ▷  $T_p^m$  is unknown,  $S_p^m$  is known
10:     $u^* = S_p^m T^{m*}$ 
11:     $u_p^m = S_p^m T_p^m + \sum_{\mu=1}^{m-1} S_p^\mu T_p^\mu$ 
12:    Update  $T_p^m$  from 3.13
13:   end while
14: end while
```

Ωστόσο, οι παραπάνω υπολογισμοί πρέπει να γίνουν αφού υπολογιστεί και αποθηκευτεί στη μνήμη του υπολογιστή το εκάστοτε πεδίο $f(x, t)$. Αυτό είναι αντιδιαμετρικά αντίθετο με το σκοπό της εργασίας αυτής, που είναι η μελέτη μεθόδων εξοικονόμησης χώρου κατά την αποθήκευση της πληροφορίας. Έτσι, απαιτείται μία άλλη μέθοδος που θα μπορεί να πραγματοποιήσει τον υπολογισμό του PGD *ταυτοχρόνως* με τον υπολογισμό του πεδίου από τον επιλύτη.

3.2 Σταδιακός Ιδιο-Γενικευμένος Διαχωρισμός

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η μέθοδος που αναπτύχθηκε στη ΜΠΥΡ & Β [34][16][21], για το σταδιακό υπολογισμό της διαχωρισμένης αναπαράστασης, ο σταδιακός ιδιο-Γενικευμένος Διαχωρισμός (incremental Proper Generalized Decomposition). Η παρουσίαση θα γίνει μέσα από ένα μονοδιάστατο χρονικά μη-μόνιμο παράδειγμα, με μία συνάρτηση $U(x, t)$. Σε αντίθεση με το προηγούμενο κεφάλαιο, εδώ θα γίνεται αναφορά στα διακριτά ανάλογα των παραπάνω σχέσεων, βάσει των οποίων δημιουργήθηκε η μέθοδος.

Αυτό σημαίνει πως πλέον οι ολοκληρώσεις γίνονται αθροίσματα και οι πλέον διακριτοποιημένες βάσεις θα χαρακτηρίζονται από τους δείκτες μ (για την αρίθμηση τους), i για τη χωρική διακριτοποίηση στις χωρικές βάσεις και k για τη χρονική διακριτοποίηση στις διακριτοποιημένες χρονικές βάσεις. Έτσι, οι βάσεις γράφονται $S^\mu(x) \rightarrow S_i^\mu$ και $T^\mu(t) \rightarrow T_k^\mu$ ενώ $U(x, t) \rightarrow U_{ik}$.

Παρακάτω περιγράφεται με ποιό τρόπο επιτυγχάνεται ο σταδιακός υπολογισμός των βάσεων ταυτόχρονα με την επίλυση των εξισώσεων.

- Αρχικοποίηση βάσεων

Πρώτο σημαντικό βήμα είναι η αρχικοποίηση των βάσεων με τρόπο ώστε στο πρώτο χρονικό βήμα το iPGD να ταυτίζεται με το προς συμπίεση στιγμιότυπο του πεδίου.

Η βάση T_k^μ αρχικοποιείται ως εξής:

$$T_k^1 = \begin{cases} 1, & \text{for } k = 0 \\ 0, & \text{for } k \neq 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

ενώ η χωρική βάση:

$$S_i^1 = u_{i1} \quad (3.18)$$

- όπως φαίνεται και στο επεξηγηματικό διάγραμμα ροής 3.1, η επίλυση γίνεται σε k βήματα. Στο χρονικό βήμα $K + 1$ (όπου K είναι το τρέχον βήμα) είναι γνωστές και οι M βάσεις $\tilde{T}_k^\mu, \tilde{X}_i^\mu$ που ως τώρα αναπαριστούν το πεδίο μέχρι τη στιγμή K . Οι βάσεις αυτές πρέπει να ανανεωθούν, ώστε να ενσωματώσουν το νέο στιγμιότυπο της λύσης που υπολογίστηκε μόλις, στο χρονικό βήμα $k+1$. Σε παρόμοια λογική με την προηγούμενη μέθοδο, έτσι και εδώ ορίζεται για το βήμα $K + 1$ το τετραγωνικό σφάλμα μεταξύ της προσέγγισης PGD και του προς συμπίεση πεδίου U

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nx} \sum_{k=1}^{K+1} \left[\sum_{\mu=1}^M X_i^\mu T_k^\mu - U_{i,k} \right]^2 \quad (3.19)$$

Το σφάλμα εξαρτάται από όλο το πεδίο $U_{i,k}$, που σημαίνει ότι για τον υπολογισμό του θα ήταν απαραίτητη η αποθήκευση όλου του $U_{i,k}$. Για να μην συμβεί αυτό, το σφάλμα επαναδιατυπώνεται ώστε πλέον να χρησιμοποιείται μόνο το τελευταίο στιγμιότυπο $U_{i,K+1}$ της λύσης και το υπόλοιπο πεδίο να αναπαρίσταται από την ήδη υπολογισμένη προσέγγιση $\sum_{\mu=1}^M \tilde{X}_i^\mu \tilde{T}_k^\mu$:

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nx} \left[\sum_{\mu=1}^m X_i^\mu T_{K+1}^\mu - U_{i,K+1} \right]^2}_{\text{εξάρτηση από το μόλις υπολογισμένο στιγμιότυπο}} + \underbrace{\frac{w}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{nx} \left[\sum_{\mu=1}^m X_i^\mu T_k^\mu - \sum_{\mu=1}^M \tilde{X}_i^\mu \tilde{T}_k^\mu \right]^2}_{\text{σταθμισμένη εξάρτηση από την ήδη υπολογισμένη προσέγγιση}} \quad (3.20)$$

Η παράμετρος w ελέγχει τη συμμετοχή του ήδη υπολογισμένου πεδίου στη διαμόρφωση των βάσεων. Όσο το $w \rightarrow 0$ οι νέες βάσεις θα ελαχιστοποιούν μόνο το πρώτο κομμάτι και άρα το αποτέλεσμα θα μοιάζει περισσότερο με το στιγμιότυπο $U_{i,K+1}$ και θα απέχει πολύ από τα προηγούμενα στιγμιότυπα, πράγμα ανεπιθύμητο. Αφού το

iPGD είναι σταδιακό, πρέπει σε κάθε βήμα κάθε μία από τις βάσεις να ελαχιστοποιεί εκ νέου το σφάλμα 3.20 με $E = E(X_i^m, T_k^m, T_{K+1}^m)$ το οποίο είναι συνάρτηση των m άγνωστων χωρικών βάσεων X_i^m , των m άγνωστων χρονικών βάσεων T_k^m και της τελευταίας τιμής των χρονικών βάσεων για το βήμα $K + 1$, T_{K+1}^m . Έτσι, προκύπτει αρκετά φυσικά ο τρόπος υπολογισμού των βάσεων. Είναι εκείνες που μηδενίζουν τη κλίση του σφάλματος ως προς τις άγνωστες ποσότητες:

$$\nabla E(X_i^m, T_k^m, T_{K+1}^m) = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

άρα σε κάθε βήμα πρέπει να υπολογιστούν οι βάσεις X_i^m, T_k^m, T_{K+1}^m από τις εξισώσεις:

$$\frac{\partial E}{\partial X_k^m} = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial E}{\partial T_k^m} = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial E}{\partial T_{K+1}^m} = 0 \quad (3.24)$$

Εκτελώντας τις πράξεις και αναδιατάσσοντας τα αθροίσματα για λόγους ταχύτερου υπολογισμού όπως δείχνεται αναλυτικά σε προηγούμενη διπλωματική εργασία [21]:

$$X_i^m = \frac{U_{i,K+1}T_{K+1}^m + w \sum_{\mu=1}^M \left[\tilde{X}_i^\mu \sum_{k=1}^K \tilde{T}_k^\mu T_k^m \right] - \sum_{\mu=1}^{m-1} X_i^\mu \left[T_{K+1}^\mu T_{K+1}^m + \sum_{k=1}^K T_k^\mu T_k^m \right]}{(T_{K+1}^m)^2 + w \sum_{k=1}^K (T_k^m)^2} \quad (3.25)$$

$$T_k^m = \frac{\sum_{\mu=1}^M \left[\tilde{T}_k^\mu \sum_{i=1}^{nx} \tilde{X}_i^\mu X_i^m \right] - \sum_{\mu=1}^{m-1} \left[T_k^\mu \sum_{i=1}^{nx} X_i^\mu X_i^m \right]}{\sum_{i=1}^{nx} (X_i^m)^2} \quad (3.26)$$

$$T_{K+1}^m = \frac{\sum_{i=1}^{nx} U_{i,K+1} X_i^m - \sum_{\mu=1}^{m-1} \left[T_{K+1}^\mu \sum_{i=1}^{nx} \tilde{X}_i^\mu X_i^m \right]}{\sum_{i=1}^{nx} (X_i^m)^2} \quad (3.27)$$

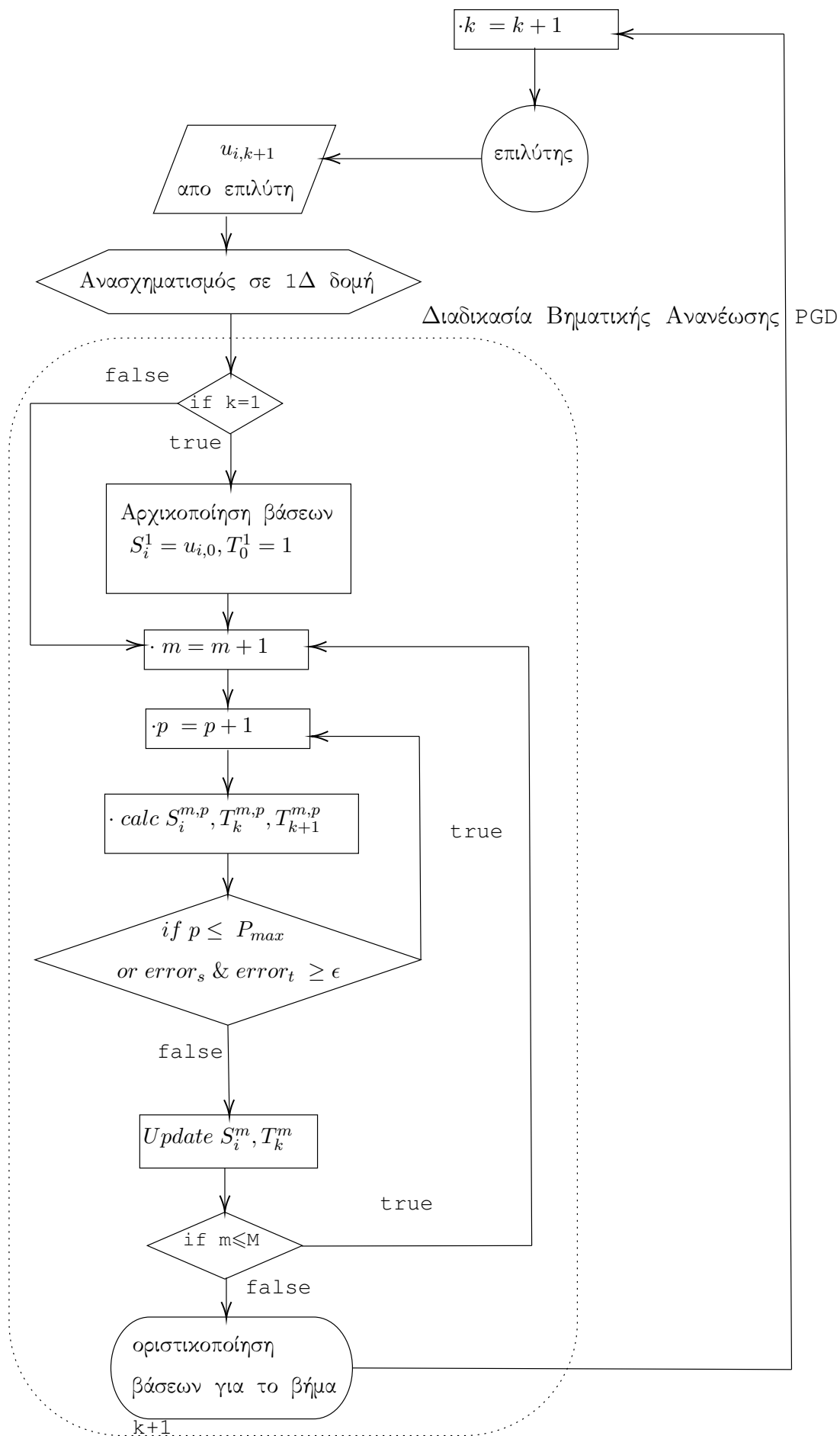
- Αφού υπολογιστούν, με την παραπάνω σειρά που εμφανίζονται, εφαρμόζεται η επαναληπτική διαδικασία εναλλασσόμενων κατευθύνσεων που περιγράφηκε για τη σύγκλιση των βάσεων στα επιθυμητά όρια. Ως κριτήριο τερματισμού τίθεται στη βάση m , το

τετραγωνικό σφάλμα μεταξύ δύο διαδοχικών υπολογισμών να είναι μικρότερο ενός κατωφλίου:

$$\sqrt{\int_0^L (X(x)_p^m - X(x)_{p-1}^m)^2 dx} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^{Nx} (X_{i,p}^m - X_{i,p-1}^m)^2} \leq \epsilon \quad (3.28)$$

$$\sqrt{\int_0^T (T(t)_p^m - T(t)_{p-1}^m)^2 dt} \approx \sqrt{\sum_{k=1}^{K+1} (T_{k,p}^m - T_{k,p-1}^m)^2} \leq \epsilon \quad (3.29)$$

όπου p ο δείκτης της εσωτερικής επαναληπτικής διαδικασίας που γίνεται για κάθε βάση m . Εκτελώντας τη διαδικασία αυτή για $m = 1 : M$ ολοκληρώνεται ο υπολογισμός της λύσης στη διαχωρισμένη μορφή 3.4. Σε διάγραμμα ροής, ο αλγόριθμος έχει ως εξής:



Σχήμα 3.1: Διάγραμμα ροής αλγορίθμου *i*-PGD για τη σταδιακή συμπίεση πεδίου *u*

3.2.1 iPGD με διαμέριση του διαστήματος χρονικής ολοκλήρωσης

Καθώς ο χρόνος υπολογισμού των βάσεων στο συμβατικό iPGD όπως περιγράφηκε στο κεφάλαιο 3.2 αυξάνεται σημαντικά για ένα μεγάλο πλήθος βάσεων, προτάθηκε [16] μία παραλλαγή του αλγορίθμου, που χωρίζει το διάστημα ολοκλήρωσης των εξισώσεων στο χρόνο, σε υποδιαστήματα τ_i , στα οποία υπολογίζονται διαφορετικές βάσεις, X_{μ_i}, T_{μ_i} , $\mu_i \in [1, M_i]$. Με M_i συμβολίζεται το πλήθος των βάσεων σε κάθε υποδιάστημα του συνολικού χρόνου και με L το πλήθος χρονικών παραθύρων (time windows) που ορίζει ο χρήστης. Τα τ_i είναι διαμερίσεις του T .

Τα σύνολα τ_i περιέχουν τους ακεραίους που αριθμούν τα βήματα της ολοκλήρωσης των εξισώσεων που το κάθε σύνολο M_i βάσεων αναλαμβάνει να προσεγγίσει. Με το τρόπο αυτό, βελτιώνεται ένα εγγενές πρόβλημα του *iPGD*, πως το πλήθος βάσεων για την ποιοτική αναπαράσταση του πεδίου, αυξάνεται όσο αυξάνεται και το πλήθος των χρονικών στιγμών που απαιτείται να αποθηκευτούν σε συμπιεσμένη μορφή [16],[21]. Εξαιτίας της βηματικής κατασκευής της μεθόδου κάθε νέα χρονική στιγμή που πρέπει να συμπιεστεί, "αλλοιώνει" την προσέγγιση των προηγούμενων καθώς πρέπει να ελαχιστοποιηθεί ένα νέο σφάλμα που περιέχει και την "απόσταση" της ως τώρα προσέγγισης από το νέο στιγμιότυπο.

Το εάν τα σύνολα τ_i είναι ή δεν είναι ισοπληθή, είναι μία ακόμα παράμετρος που χρήζει διερεύνησης για την ποιότητα της αναπαράστασης, καθώς θα ήταν επιθυμητό, ο συνολικός χρόνος να χωριστεί σε υποδιαστήματα στο κάθε ένα εκ των οποίων η λύση να εμφανίζει παρεμφερή δυναμική (ώστε κάθε νέο στιγμιότυπο να μην αλλοιώνει σημαντικά την ως τότε υπολογισμένη προσέγγιση). Για $k \in \tau_i$, οι M_i βάσεις έχουν διαστάσεις $X_{\mu_i} \in \mathbb{R}^m$, $T_{\mu_i} \in \mathbb{R}^q$. Ο ακεραίος $q = \frac{N}{L}$ είναι ένας διαιρέτης του N όπως και το L , στην περίπτωση που τα τ_i είναι ισοπληθή, δηλαδή όταν το συνολικό χρονικό διάστημα χωρίζεται σε ίσα υποδιαστήματα. Σε περίπτωση μη ισοπληθών χρονικών υποδιαστημάτων, οι χρονικές βάσεις σε κάθε παράθυρο, θα είχαν μήκος όσο και το πλήθος των στιγμών που αναλαμβάνουν να προσεγγίσουν στο εκάστοτε χρονικό υποδιάστημα. Στην περίπτωση που τα χρονικά βήματα που πρέπει να συμπιεστούν είναι περιττός αριθμός και δεν διαιρούνται από το πλήθος παραθύρων L που επιλέχθηκε, χρησιμοποιούνται $q = \frac{N-1}{L}$ παράθυρα και οι υπόλοιπες χρονικές στιγμές συμπίεζονται ως το τελευταίο χρονικό παράθυρο από M επιπλέον βάσεις.

Φυσικά το πλήθος των L φράσσεται από τα άνω από το N . Εάν επιλεγθούν $L = N$ τότε κάθε στιγμιότυπο της λύσης αναπαρίσταται από M_i βάσεις, ξοδεύοντας έτσι περισσότερο χώρο απ' ότι αν αποθηκευόταν ολόκληρη η χρονοσειρά του πεδίου. $\sum_{i=1}^m (M_i \cdot L(m+1)) \geq m \cdot N$. Έτσι, είναι εφικτός ο υπολογισμός του *CR* με έναν "a priori" τρόπο, όπως έγινε και για τις προηγούμενες μεθόδους συμπίεσης, ώστε να γίνουν κάποιες αρχικές εκτιμήσεις του M . Κατ' αρχάς, θα γίνει η υπόθεση πως κάθε χρονικό υποδιάστημα αναπαρίσταται από ίδιο συνολικό αριθμό βάσεων, M . Για λόγους συντομίας θα συμβολίζεται κάθε παραλλαγή του iPGD ως *iPGD*(M, L). Το συμβατικό *iPGD* συμβολίζεται ως *iPGD*($M, 1$) ενώ αν ο χρόνος χωριστεί σε L "παράθυρα", ως *iPGD*(M, L).

$$CR_L = \frac{m \cdot N}{L \cdot M_L(m+q)}, \quad CR_{L=1} = \frac{m \cdot N}{M(m+N)} \quad (3.30)$$

Είναι σαφές ωστόσο, πως η συγκεκριμένη προσέγγιση έχει ορισμένους περιορισμούς όσον αφορά τα όρια στα οποία είναι αποδοτικότερη από το συμβατικό *iPGD*. Αυτά καθορίζονται από το πλήθος των χρονικών παραθύρων L και το πλήθος βάσεων που επιλέγονται να αναπαραστήσουν κάθε ένα L . Το συμβατικό *iPGD* συμβολίζεται ως *iPGD*($M, 1$) με M βάσεις και *iPGD*(M_L, L) για την παραλλαγή με M_L βάσεις για κάθε ένα από τα L χρονικά παράθυρα. Έτσι, μπορεί να υπολογιστεί το κλάσμα των λόγων συμπίεσης μεταξύ των παραλλαγών:

$$\frac{CR_L}{CR_{L=1}} > 1 \Rightarrow \frac{\frac{m \cdot N}{L \cdot M_L(m+q)}}{\frac{m \cdot N}{M(m+N)}} \Rightarrow \frac{M(m+N)}{M_L \cdot (Lm+N)} > 1 \xrightarrow{BR = \frac{M}{M_L}} BR \frac{m+N}{Lm+N} > 1 \Rightarrow$$

$$L < BR \frac{m+N}{m} - \frac{N}{m} \Rightarrow L < BR + \frac{N}{m}(BR-1) \quad (3.31)$$

Στις περιπτώσεις που παρουσιάζονται σε αυτήν την εργασία, ισχύει $m \gg N$ και έτσι για τη σύγκριση αρκεί ο περιορισμός $L < BR$. Συνεπώς για δεδομένο M , μπορεί να επιλεγεί L και M_L τέτοια ώστε να επιτυγχάνεται και μεγαλύτερος λόγος συμπίεσης, αλλά και σημαντικά χαμηλότερος υπολογιστικός χρόνος. Ωστόσο, ο περιορισμός να χωριστεί το χρονικό διάστημα σε *ισοπληθή* υποδιαστήματα χρονικών στιγμών και άρα το L να είναι διαιρέτης του N , περιορίζει σημαντικά το L με αποτέλεσμα η ποιότητα του αποσυμπιεσμένου πεδίου να είναι αμφίβολη. Είναι κατανοητό, πως αν το L είναι αρκετά μικρό για να ισχύει ο περιορισμός $L < BR$ τότε λίγες (σχετικά με τις M) βάσεις προσεγγίζουν ένα σχετικά μεγάλο πλήθος χρονικών στιγμών με προφανείς συνέπειες στην ποιότητα του αποτελέσματος. (Μικρό πλήθος παραθύρων συνεπάγεται πολλές χρονικές στιγμές σε κάθε παράθυρο). Έτσι, είναι πιθανό η εκδοχή με τα χρονικά παράθυρα να έχει χειρότερο λόγο συμπίεσης από το συμβατικό *iPGD*, έχοντας ωστόσο, σημαντικά μειωμένο χρόνο εκτέλεσης.

Κεφάλαιο 4

Συμπίεση χρονικά μη-μόνιμων πεδίων ροής στην αεροδυναμική

Για να πιστοποιηθεί η ικανότητα των μεθόδων συμπίεσης να προσεγγίζουν τα πεδία, που απαιτείται να αποθηκευθούν, είναι απαραίτητη η εφαρμογή τους σε διαφορετικά προβλήματα. Ως τέτοια επιλέγονται τρία προβλήματα με όμοια χαρακτηριστικά, τα οποία αφού επιλυθούν, θα συμπειστούν και αποσυμπειστούν και με τις 2 μεθόδους (iSVD,iPGD) ώστε να διαπιστωθεί εάν αυτές παράγουν ποιοτικές προσεγγίσεις των πραγματικών λύσεων και με ποιό τρόπο επηρεάζουν την ποιότητα του αποτελέσματος της βελτιστοποίησης. Τα προβλήματα που θα μελετηθούν είναι η 1Δ συνεκτική εξίσωση Burgers, οι εξισώσεις Euler γύρω από μεμονωμένη αεροτομή και οι εξισώσεις Navier-Stokes σε 2Δ πτερύγωση διηχητικού συμπίεστη.

Για την ποσοτικοποίηση της ποιότητας της συμπίεσης επιστρατεύονται ορισμένες μετρικές ποσότητες.

- Peak Signal to Noise Ratio (PSNR) [dB]

$$Q = 10 \log \frac{(\phi_{max} - \phi'_{max})^2}{\frac{1}{N} \sum_i (\phi_i - \phi'_i)^2} \quad (4.1)$$

Υψηλό Peak Signal to Noise Ratio σημαίνει πως το σφάλμα που επάγει ο αλγόριθμος συμπίεσης στο αρχικό σήμα είναι χαμηλό, καθώς το τετραγωνικό L_2 σφάλμα που βρίσκεται στο παρονομαστή είναι επίσης μικρό.

- ε , το απόλυτο και κανονικοποιημένο L_2 σφάλμα:

$$\varepsilon = \frac{\|\phi - \phi'\|}{\|\phi\|} \quad (4.2)$$

Για τη ποσοτικοποίηση του μεγέθους της συμπίεσης των ροϊκών πεδίων, όπου ϕ είναι το αρχικό σήμα που προκύπτει από την πλήρη αποθήκευση και ϕ' είναι αυτό που έχει προκύψει από την αποσυμπιεσμένη χρονοσειρά,

- ορίζεται ο λόγος συμπίεσης ως:

$$CR = \frac{Full\ Storage\ Size}{Compressed\ Storage\ Size} \quad (4.3)$$

- και για την ποσοτικοποίηση της επιβάρυνσης σε υπολογιστικό χρόνο, ορίζεται η αδιάστατη ποσότητα:

$$T_{CPU} = \frac{Simulation\ Time\ with\ Compression}{Simulation\ Time\ without\ Compression} \quad (4.4)$$

Για την υπόλοιπη εργασία, με $iPGD(M, 1)$ θα συμβολίζεται η συμβατική μέθοδος $iPGD$ με ένα χρονικό παράθυρο και M βάσεις, ενώ με $iPGD(M, L)$ η εκδοχή με L παράθυρα και M βάσεις ανά παράθυρο. Το $iSVD$ τάξης k θα είναι $iSVD(k)$. Τέλος, όσον αφορά τα $PSNR$, εάν αυτά αφορούν το $iPGD(M, L)$ θα αναγράφονται $PSNR_{M,L}$. Σε κάθε άλλη περίπτωση θα είναι $PSNR_k$.

4.1 Συμπίεση λύσεων της 1Δ συνεκτικής εξίσωσης Burgers

Η πρώτη εξίσωση που θα μελετηθεί είναι μία τροποποιημένη εξίσωση Burgers με έναν όρο διέγερσης της μορφής $u(x, t)z(x)$. Έτσι το σύστημα περιγράφεται από τη μη-μόνιμη 1Δ συνεκτική εξίσωση Burgers,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - u(x, t)z(x) = 0 \quad (4.5)$$

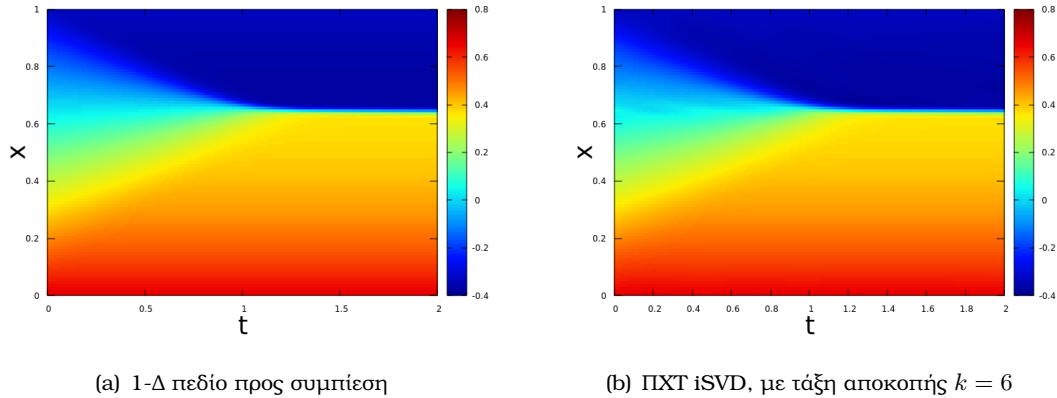
με τις οριακές/αρχικές συνθήκες:

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) = \frac{2}{3} - x \\ u(0, t) = \frac{2}{3} \\ u(L, t) = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (4.6)$$

και έναν έλεγχο της μορφής $u(x, t)z(x)$. Περαιτέρω πληροφορίες για την επίλυση της 4.5 δίνονται στο κεφάλαιο 5.1.2.

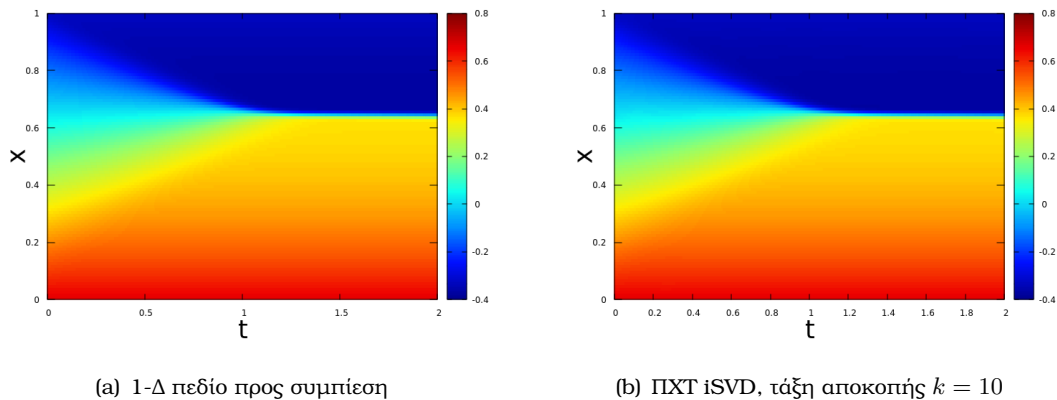
Θα παρουσιαστούν αποτελέσματα που αφορούν τη λύση της εξίσωσης Burgers με μία είσοδο $z(x)$, ενώ σε επόμενο κεφάλαιο, θα υπολογιστούν οι απαραίτητες μεταβολές της $z(x)$ ώστε μετά από τον προκαθορισμένο χρόνο $T = 2$ η λύση της 4.5 να έχει μία επιθυμητή μορφή. Αρχικά, διερευνάται η αποδοτικότητα της συμπίεσης με $iSVD$ και $iPGD$ του πεδίου που προκύπτει από την επίλυση της 4.5 με τις αρχικές και οριακές συνθήκες που περιγρά-

φονται, στο χωρίο $\Omega = [0, L = 1] \times [0, T = 2s]$ για χρονικό βήμα $\delta t = 10^{-3}s$, και χωρικό βήμα $\delta x = 10^{-2}$ άρα με $n_x = 100$, $n_t = 2000$.



Σχήμα 4.1: Συμπίεση 1Δ χρονικά μη μόνιμου πεδίου με το iSVD

Στο σχήμα 4.1, έχουν χρησιμοποιηθεί οι 6 πρώτες ιδιάζουσες τιμές για την προσέγγιση του Y που είναι ο πίνακας δεδομένων ολόκληρης της προσομοίωσης, με την *iSVD*. Παρατηρείται μία εμφανής αλλοίωση της λύσης στην πρώτη περιοχή προτού δημιουργηθεί η ασυνέχεια. Ωστόσο, αυξάνοντας το πλήθος των ιδιάζουσων τιμών που χρησιμοποιούνται στη διάσπαση του πίνακα, η αλλοίωση εξαφανίζεται (σχήμα 4.2(b)). Καθώς η συμπίεση εκτελείται ταυτόχρονα

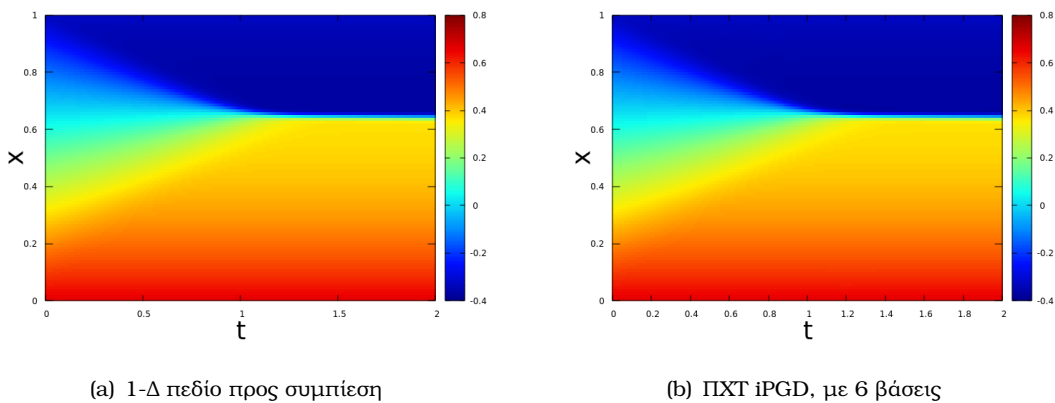


Σχήμα 4.2: Συμπίεση 1Δ χρονικά μη μόνιμου πεδίου με το iSVD

με την επίλυση της ΔΕ, ο χρόνος που απαιτεί υπολογίζεται ως ποσοστό επί του χρόνου της προσομοίωσης. Η προσομοίωση με τα 2000 χρονικά βήματα έχει κόστος 1.6s. Η συμπίεση του πεδίου είτε με 6 είτε με 10 ιδιάζουσες τιμές (*iSVD*) δεν επηρέασε σχεδόν καθόλου το χρόνο επίλυσης.

Στη συνέχεια, η προσέγγιση γίνεται με τη μέθοδο *iPGD* με 6 βάσεις (Σχήμα 4.3(b)). Στην

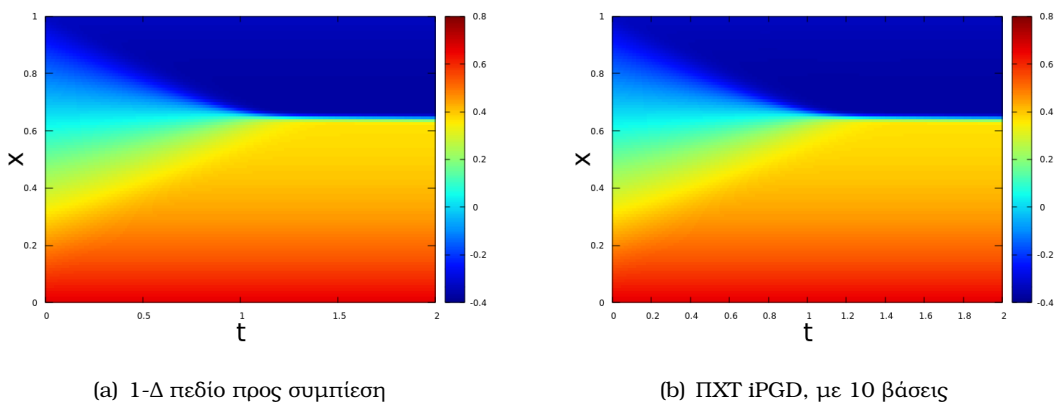
περίπτωση του $iPGD(6, 1)$ δεν παρατηρείται η αλλοίωση που παρατηρήθηκε με το $iSVD(6)$ (σχήμα 4.1). Συνεπώς η μέθοδος $iPGD(M, 1)$, για το συγκεκριμένο πεδίο και ίδιο αριθμό βάσεων/ιδιαζουσών τιμών, δείχνει να αποδίδει καλύτερα. Ο λόγος που επιλέγεται ίδιο, μεταξύ τους, πλήθος βάσεων/ιδιαζουσών τιμών σε κάθε παράδειγμα, είναι πως κάθε όρος από τους M/k στην εκάστοτε παραγοντοποίηση αντιστοιχεί σε διαφορετικό χαρακτηριστικό του πεδίου και έτσι ελέγχει την ακρίβεια της ΠΧΤ όπως θα φανεί αναλυτικά στην ενότητα 4.4. Συνεπώς θεωρήθηκε σκόπιμο να είναι ίδιοι για να φανεί πως κατανέμεται η πληροφορία που περιέχει η τελική ΠΧΤ, σε κάθε όρο του αναπτύγματος ανάλογα με τη μέθοδο. Αυξάνοντας



Σχήμα 4.3: Συμπίεση 1Δ χρονικά μη μόνιμου πεδίου με το iPGD

τον αριθμό των βάσεων σε 10 για την προσέγγιση του πεδίου με $iPGD$ παρατηρείται σημαντική βελτίωση στην ποιότητα της συμπίεσης.

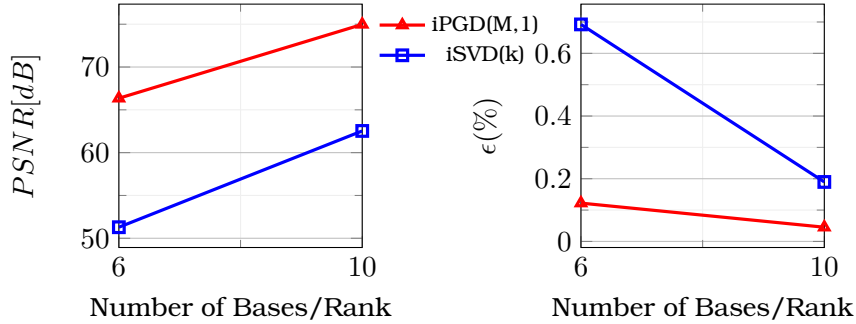
Το αποτέλεσμα 4.4(b) είναι εποπτικά πανομοιότυπο τόσο με την ασυμπίεστη χρονοσειρά,



Σχήμα 4.4: Συμπίεση 1Δ χρονικά μη μόνιμου πεδίου με το iPGD

όσο και με αυτή που προέκυψε από τις 6 βάσεις $iPGD$ 4.3(b). Από την πρώτη εποπτική σύγκριση, η μόνη περίπτωση με παρατηρήσιμη αλλοίωση εξαιτίας της συμπίεσης είναι η $iSVD(6)$. Ωστόσο, για να είναι δυνατή η ακριβέστερη σύγκριση των μεθόδων, υπολογίζονται οι μετρικές που παρουσιάστηκαν στην εισαγωγή του κεφαλαίου.

Αρχικά παρουσιάζονται το $PSNR$ και το ε για τη συμπίεση με την $iPGD(6, 1)$, $iPGD(10, 1)$ συγκριτικά με αυτά της $iSVD(6)$, $iSVD(10)$.



Σχήμα 4.5: Μετρικές ποιότητας ΠΧΤ της λύσης της εξίσωσης Burgers

Παρατηρείται πως ήδη από τις 6 βάσεις η ποιότητα της συμπίεσης με το $iPGD$ είναι ανώτερη από αυτή του $iSVD$ (όπως φάνηκε και εποπτικά), με ένα $PSNR_{M=6} = 66$, ήδη μεγαλύτερο από το καλύτερο που παρουσίασε η $iSVD$ με $PSNR_{k=10} = 62$. Προφανώς, ίδια τάση εμφανίζουν και τα απόλυτα L_2 σφάλματα. Αξίζει να σημειωθεί πως η τάξη και των 2 σφαλμάτων ε με το $iPGD$, ακόμα και με τις 6 βάσεις, είναι 0.1%, μία πολύ καλή επίδοση.

Το $iPGD$ ωστόσο, παρά την αυξημένη ποιότητά του, είχε αρκετά υψηλό υπολογιστικό κόστος σε χρόνο ο οποίος μετρήθηκε σε πολλαπλάσια του αρχικού κόστους προσομοίωσης, με μονάδα μέτρησης την αδιάστατη σταθερά T_{CPU} όπως ορίστηκε.

iPGD	6 bases	10 bases
CPU time (real)	131 T_{CPU} (3m55s)	165 T_{CPU} (4m40s)

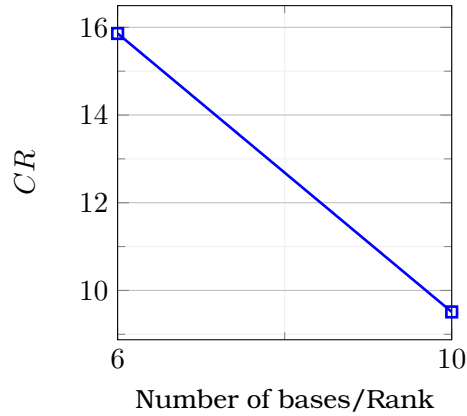
Πίνακας 4.1: Χρόνοι συμπίεσης και εγγραφής στο δίσκο για το $iPGD$

Μεταξύ των δύο μεθόδων $iSVD(k)$, $iPGD(M, 1)$, δεν υπάρχει σημαντική διαφορά στους λόγους συμπίεσης (σχήμα 4.6) καθώς για το δεδομένο πλήθος $n_x = 100$, $n_t = 2000$ ισχύει $n_x + n_t + 1 \cong n_x + n_t$. Άρα (αφού χρησιμοποιούνται ίδια M, k):

Καθώς η συγκεκριμένη περίπτωση (επίλυση της εξίσωσης Burgers) είναι αρκετά οικονομική υπολογιστικά (γιαυτό και επιλέχθηκε), θα χρησιμοποιηθεί για να απαντηθούν 2 ερωτήματα που εγείρονται από τα παραπάνω συμπεράσματα:

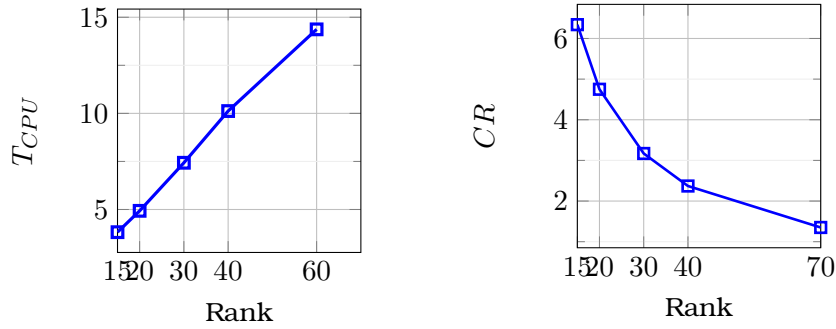
- είναι δυνατόν να πετύχουμε τα $PSNR$ και ε του $iPGD(10, 1)$ αυξάνοντας τις ιδιάζουσες τιμές της $iSVD$, γλιτώνοντας έτσι τον μεγάλο χρόνο υπολογισμού και
- πώς αποδίδει η εκδοχή του $iPGD$ με χρονικά παράθυρα; Με πόσο συμβιβασμό στο λόγο συμπίεσης, θα πλησιάσει το $iPGD(M, L)$ το $iPGD(10, 1)$;

Εκκινώντας από το πρώτο ερώτημα σχετικά με το $iSVD$, αυξάνονται οι ιδιάζουσες τιμές σε 15. Στην περίπτωση αυτή παρατηρείται η πρώτη αύξηση σε υπολογιστικό κόστος λόγω της

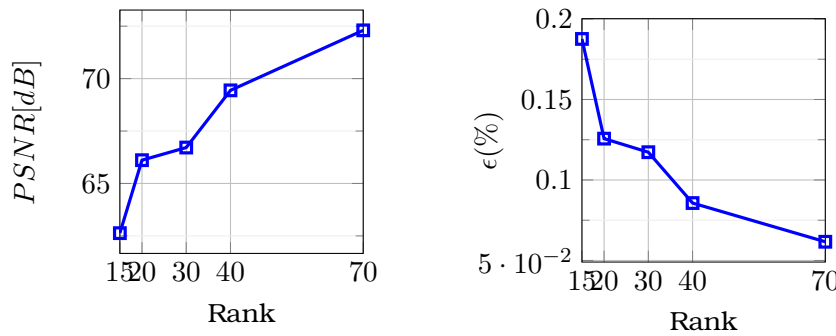


Σχήμα 4.6: Λόγος συμπίεσης με $iPGD(M, 1)$, $iSVD(k)$

συμπίεσης με την $iSVD$.



Σχήμα 4.7: Κόστος και λόγος συμπίεσης με $iSVD$ σε επιλύσεις της εξίσωσης Burgers

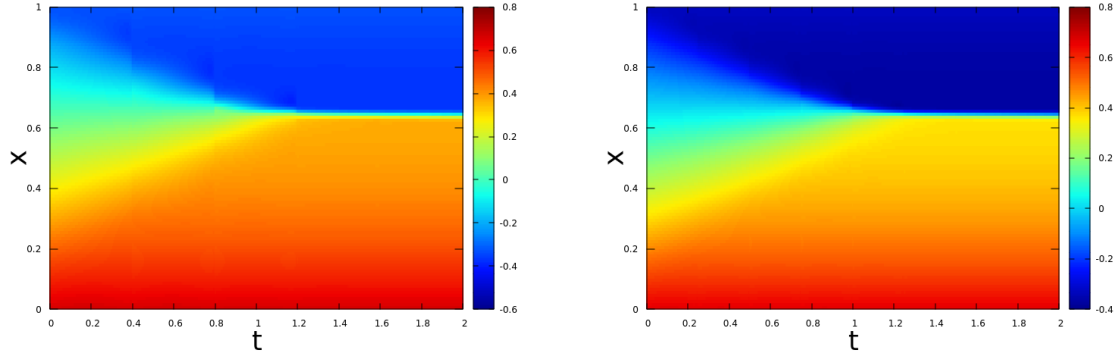


Σχήμα 4.8: Μειτρικές ποιότητας ΠΧΤ με $iSVD$ της λύσης της εξίσωσης Burgers

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 4.8, η ακρίβεια της προσέγγισης του $iSVD$ φτάνει αυτή του $iPGD$ με τάξη αποκοπής $k = 60$. Παρά το μικρό υπολογιστικό κόστος $T_{iSVD(k>20)} < 5T_{CPU}$ ενώ το $iPGD(10, 1)$ κόστισε $165T_{CPU}$, η αύξηση του k κρίνεται μη συμφέρουσα καθώς ο λόγος συμπίεσης έπεσε στο $\frac{mn}{k(m+n+1)} \approx 1.59$ αντί για το $CR_{10} = 9.52$ του $iPGD(10, 1)$.

Στο σημείο αυτό απομένει η διερεύνηση της ποιότητας της συμπίεσης με την παραλλαγή του

αλγορίθμου $iPGD$ με χρονικά παράθυρα. Υπενθυμίζεται πως με $iPGD(M, L)$ συμβολίζεται η συμπίεση με $iPGD$ με M βάσεις σε κάθε ένα από τα L ισοπληθή χρονικά παράθυρα. Υλοποιείται η συμπίεση της χρονοσειράς με 3 και 5 βάσεις ανά χρονικό παράθυρο. Τα παράθυρα είναι $L \in \{2, 4, 5, 8\}$.



(a) ΠΧΤ $iPGD(3,5)$ 3 βάσεις και 5 χρονικά παράθυρα

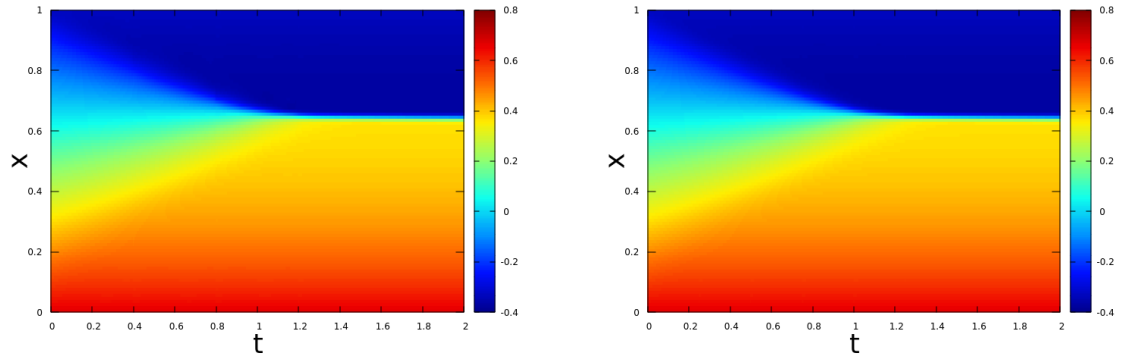
(b) ΠΧΤ $iPGD(3,8)$, με 3 βάσεις και 8 χρονικά παράθυρα

Σχήμα 4.9: Συμπίεση 1D χρονικά μη μόνιμου πεδίου με το $iPGD$

Στις τρεις βάσεις, τα σύνορα των χρονικών παραθύρων είναι εμφανή (σχήμα 4.9(a)), καθώς όπως φαίνεται οι τρεις βάσεις δεν επαρκούν για την προσέγγιση των επιμέρους τμημάτων της λύσης που πρέπει να συμπειστεί, ακόμα και στην περίπτωση του $L = 8$ (σχήμα 4.9(b)).

Αυξάνοντας τις βάσεις σε 5 (σχήμα 4.10), με τα ίδια χρονικά παράθυρα, οι τεχνητές ασυνέχειες μεταξύ των παραθύρων εξαφανίζονται, ενώ ο λόγος συμπίεσης μειώνεται κατά περίπου 10 μονάδες, από $CR \approx 30$ σε $CR \approx 20$. Ο χρόνος εκτέλεσης μειώθηκε σημαντικά συγκριτικά με τους χρόνους εκτέλεσης για $L = 1$ (σχήμα 4.11). Από το σχήμα 4.12 γίνεται εμφανές πως η παραθυρική στο χρόνο εκδοχή του $iPGD$ διατηρεί την ακρίβεια που έχει η μη-παραθυρική εκδοχή του αλγορίθμου ($PSNR > 70dB$) για 10 βάσεις (που είναι η καλύτερη δυνατή περίπτωση από όσες εξετάστηκαν για $L = 1$).

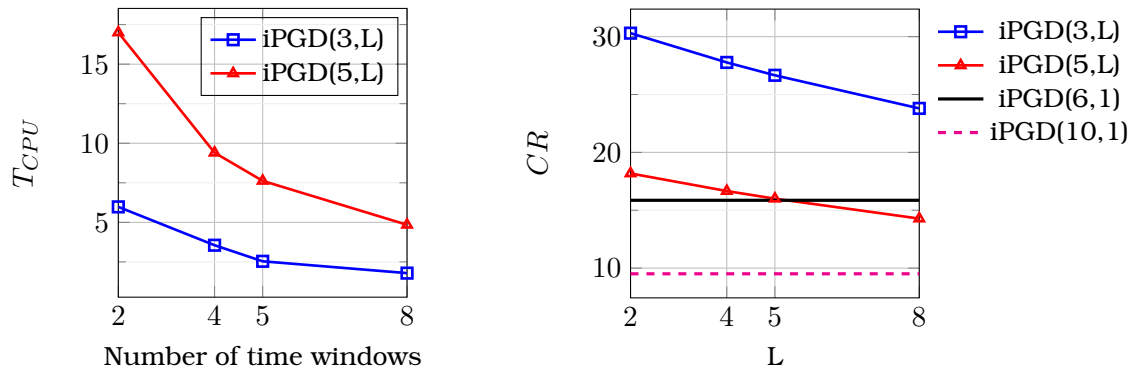
Αξίζει να σημειωθεί πως με την ορθή επιλογή πλήθους βάσεων ανά χρονικό παράθυρο, η ποιότητα της ΠΧΤ αυξάνεται ενώ ο χρόνος υπολογισμού μειώνεται. Το $PSNR_{5,5} = 66$ είναι περίπου κατά $10dB$ υψηλότερο από το $PSNR_{3,8} = 57$ που προκύπτει από τα 8 χρονικά παράθυρα προσεγγισμένα από 3 βάσεις έκαστο, ενώ το CR μειώνεται κατά σχεδόν 10 μονάδες ($CR_{5,5} = 14$), το οποίο είναι ανεκτό για τη σημαντική αύξηση της ποιότητας της προσέγγισης. Δηλαδή η ορθή κατανομή περίπου ίδιου αριθμού βάσεων ($3 \times 8 = 24$, $5 \times 5 = 25$) σε κάθε χρονικό παράθυρο μπορεί να επιφέρει σημαντικές αλλαγές στην ποιότητα του αποτελέσματος. Τέλος, οι χρόνοι εκτέλεσης των δύο παραπάνω παραλλαγών $iPGD(5,5)$, $iPGD(5,8)$ είναι περίπου ίδιοι ($\approx 2.5T_{CPU}$). Για την περίπτωση



(a) ΠΧΤ $iPGD(5,5)$ 5 βάσεις και 5 χρονικά παράθυρα

(b) ΠΧΤ $iPGD(5,8)$, με 5 βάσεις και 8 χρονικά παράθυρα

Σχήμα 4.10: Συμπύεση 1D χρονικά μη μόνιμου πεδίου με το $iPGD$

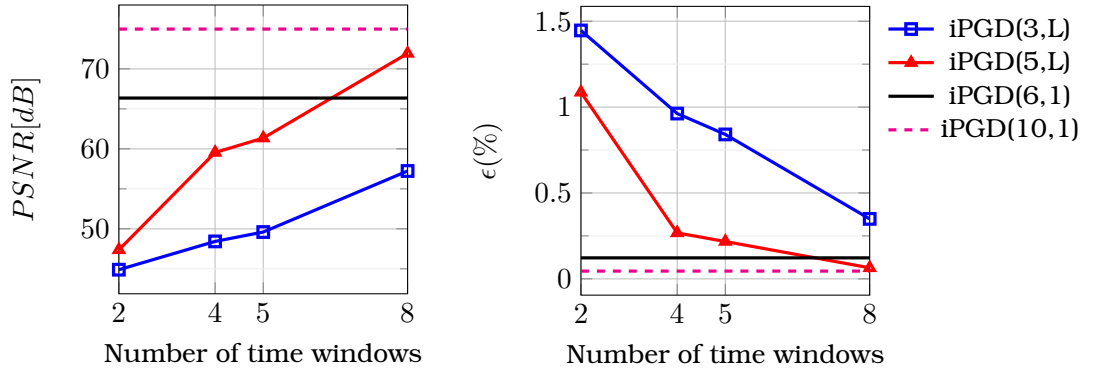


Σχήμα 4.11: Κόστος συμπίεσης με $iPGD(M,L)$ σε επιλύσεις της εξίσωσης Burgers

του $iPGD(5,8)$ προκύπτει πως είναι η καλύτερη δυνατή προσέγγιση του πεδίου λαμβάνοντας υπόψη κάθε κριτήριο: ($PSNR = 72, \epsilon = 0.01\%, T_{CPU} = 5, CR = 14$). Η διαμέριση του χρονικού διαστήματος, όπως φάνηκε και στο σχήμα 4.11, μειώνει δραματικά το χρόνο εκτέλεσης, συγκριτικά με τη μη-παραθυρική εκδοχή, διατηρώντας την ακρίβεια, ενώ ταυτόχρονα έχει μεγαλύτερο λόγο συμπίεσης CR από την περίπτωση του $iPGD(10,1)$ (Σχήμα 4.12). Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, ο λόγος συμπίεσης της οικονομικότερης, στο χρόνο, εκδοχής του $iPGD(5, L)$, το $iPGD(5,8)$ είναι $CR_{5,8} = \frac{n_x n_t}{ML(n_x + n_t/L)} = 14.28$.

4.2 Συμπύεση λύσεων των 2D μη-μόνιμων εξισώσεων Euler γύρω από την αεροτομή NACA0012

Για την επόμενη εφαρμογή επιλύονται οι 2D μη-μόνιμες εξισώσεις Euler για τη ροή συμπιεστού ρευστού. Για την επίλυση χρησιμοποιείται το λογισμικό PUMA [35] το οποίο χρησι-



Σχήμα 4.12: PSNR και σφάλμα ϵ με $iPGD(3, L)$, $iPGD(5, L)$

μποιεί ένα σημειακά πεπλεγμένο σχήμα και διακριτοποιεί τις εξισώσεις με μία κεντροκομβική διατύπωση πεπερασμένων όγκων. Η επίλυση γίνεται σε κάρτα γραφικών Nvidia Tesla K20 με 2496 πυρήνες CUDA παράλληλης επεξεργασίας στα 706 MHz.

Η εξίσωση Burgers που αναλύθηκε νωρίτερα, στην πραγματικότητα αποτελεί ένα απλοποιημένο μοντέλο που οποιοσδήποτε μελετά τις εξισώσεις Euler η Navier-Stokes, έχει κάποτε συναντήσει καθώς είναι μία απλοποιημένη εκδοχή τους. Οι εξισώσεις Euler σε συντηρητική μορφή γράφονται:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \vec{u}] = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot [\vec{u} \otimes \vec{u} + \mathbf{I}p] = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \nabla \cdot [(p + E_t)\vec{u}] = 0 \quad (4.9)$$

όπου $\vec{u} = [u \ v]^T$ το διάνυσμα ταχύτητας για τις 2 διαστάσεις, p η στατική πίεση και E_t η συνολική ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου: $E_t = \rho E = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho|\vec{u}|^2$. Στην εξίσωση ορμής 4.8 το τανυστικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ορίζεται ως $\vec{u} \otimes \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{u}^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$ όπου d η διάσταση του διανύσματος. Η πράξη αυτή απεικονίζει δύο διανύσματα σε έναν τανυστή (με +1 διάσταση δηλαδή). Έτσι το $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ο μοναδιαίος 2Δ τανυστής ώστε η απόκλιση της ποσότητας (ροή ορμής) μέσα στις αγκύλες να είναι διάνυσμα $\in \mathbb{R}^2$. Για περισσότερη ευκολία στο συμβολισμό, οι εξισώσεις 4.7 γράφονται σαν ένα σύστημα νόμων διατήρησης ως:

$$\vec{R} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\vec{U}) = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{f}_2}{\partial y} = 0 \quad (4.10)$$

$$\text{με } \vec{f}_1 = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (p + E_t)u \end{bmatrix} \text{ και } \vec{f}_2 = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (p + E_t)v \end{bmatrix}$$

και $\vec{U} = [\rho \rho u \rho v E_t]^T$. Με $A_{mij} = \frac{\partial f_i}{\partial U_j}$ συμβολίζεται ο τανυστής που περιέχει τις ιακωβιανές του \mathbf{f} ως προς τα U_j όπου $j, i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $m \in \{1, 2\}$ για τη 2Δ περίπτωση και τα 2 διανύσματα του \mathbf{f} είναι:

$$\vec{f}_m = \begin{bmatrix} \rho u_m \\ \rho u_m u_1 + \delta_{m1} p \\ \rho u_m u_2 + \delta_{m2} p \\ (E_t + p) u_m \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Ο A είναι ένας τανυστής τρίτης τάξης με στοιχεία τους πίνακες:

$$\begin{aligned} A_{1ij} &= \frac{\partial f_{1i}}{\partial U_j} = \mathbf{a} \text{ και} \\ A_{2ij} &= \frac{\partial f_{2i}}{\partial U_j} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \end{aligned} \quad (4.12)$$

ώστε οι εξισώσεις να γράφονται στη ψευδογραμμική μορφή τους:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{a} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_1} + \mathbf{b} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_2} = 0 \quad (4.13)$$

ή σε τανυστική γραφή:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + A_{mij} \frac{\partial U_j}{\partial x_m} = 0 \quad (4.14)$$

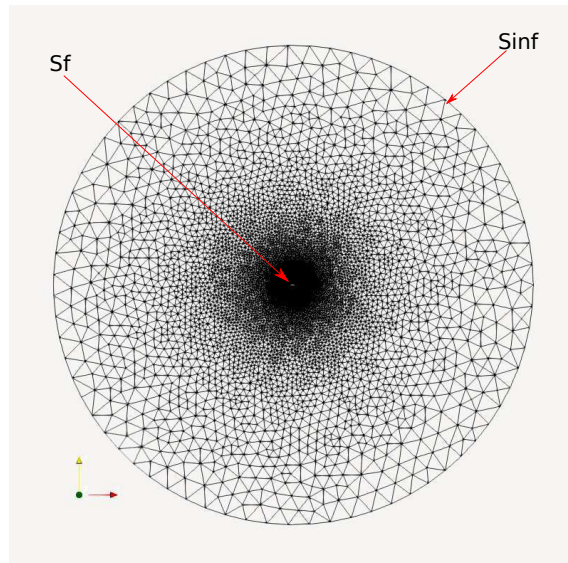
όπου $\vec{x} = (x, y)$ ενώ \vec{R} είναι τα υπόλοιπα των 4ων εξισώσεων.

Αυτές ικανοποιούνται στο χωρίο $\Omega \Rightarrow \vec{R}(\vec{U}) = \vec{0}, \forall \vec{x} \in \Omega$ όπως και στο σύνορο $S = \partial\Omega = S_\infty \cup S_{foil}$ όπου S_∞ ονομάζουμε το όριο του χωρίου στο άπειρο (farfield) και S_{foil} το περίγραμμα της αεροτομής. Για την επίλυση των εξισώσεων δημιουργείται ένα απλό μη-δομημένο πλέγμα με 48,636 κόμβους. Τα 2 όρια που αναφέρθηκαν, επισημαίνονται στο σχήμα 4.13 μαζί με το υπολογιστικό πλέγμα. Το πλέγμα γύρω από τα σημεία ενδιαφέροντος της αεροτομής εμφανίζει τις απαραίτητες πυκνώσεις και αραιώσεις.

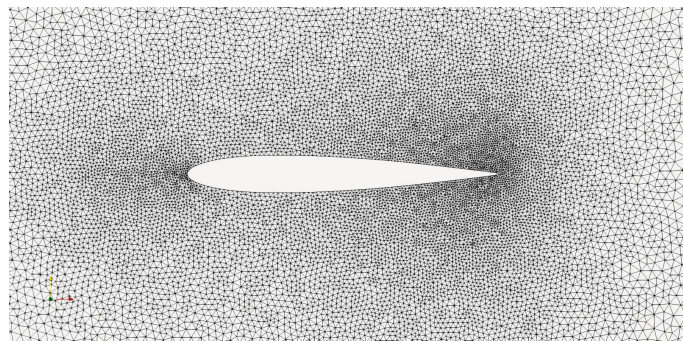
Καθώς η αεροτομή παραμένει ακίνητη και αλλάζει η γωνία προσβολής, η άνωση και αντίσταση ορίζονται με άξονες αναφοράς το καρτεσιανό σύστημα που ορίζει το διάνυσμα της u_∞ . Το κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας της αεροτομής \vec{n} αναλύεται σε 2 συνιστώσες $\vec{n} = (n_x, n_y)$ σύμφωνα με το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων που ορίζει η αεροτομή.

Οι πρωτεύουσες μεταβλητές $\vec{V} = [\rho u v p]^T$ στο "άπειρο" όριο ($\text{Mach} \approx 0.8$) είναι:

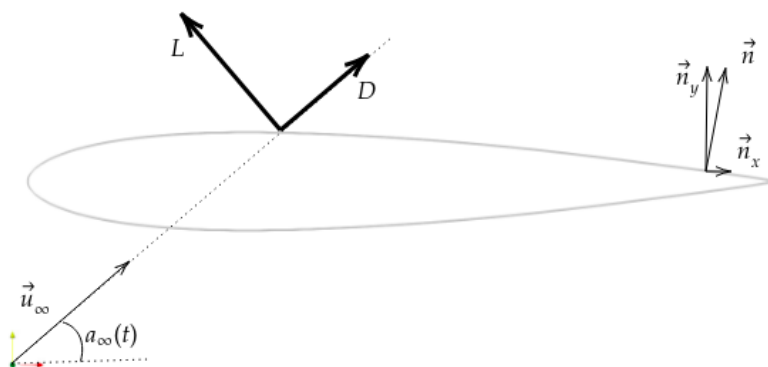
όπου η $a(t) = 5^\circ \cdot \sin(\frac{2\pi}{0.22}t)$, για να εισαχθεί η μη-μονιμότητα στο πρόβλημα. Η ολική θερμοκρασία θεωρείται $T_t = 300K$, ο ισεντροπικός εκθέτης λαμβάνει την τιμή $\gamma = 1.4$ για σταθερά ιδανικού αερίου $R_a = 284[kJ/kg/K]$ καθώς χρησιμοποιείται καταστατική ιδανικού



Σχήμα 4.13: Όρια του υπολογιστικού χωρίου γύρω από τη NACA0012



Σχήμα 4.14: Μη δομημένο πλέγμα γύρω από τη NACA0012



Σχήμα 4.15: Σύστημα συντεταγμένων της άνωσης/αντίστασης και κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια της αεροτομής

ρ	$1.22[kg/m^3]$
u	$278 \cdot \cos(a(t))[m/s]$
v	$278 \cdot \sin(a(t))[m/s]$
p	$101325[Pa]$
period	$T_p = 0.22[s]$

Πίνακας 4.2: Αρχικοποίηση ροϊκών μεγεθών για την προσομοίωση ροής γύρω από μεμονωμένη αεροτομή

αερίου. Η επίλυση γίνεται για 32 χρονικά βήματα σε κάθε περίοδο, για 5 περιόδους, καθώς είναι επιθυμητή η μοντελοποίηση του περιοδικού φαινομένου. Συνεπώς, οι εξισώσεις ολοκληρώνονται για τέσσερις περιόδους, ώστε η λύση να γίνει πλήρως περιοδική, και στη συνέχεια, η πέμπτη περίοδος που αποθηκεύεται εν τέλει, συλλέγει την πληροφορία προς επεξεργασία. Πράγματι, παρατηρώντας τη μεταβολή της άνωσης με το χρόνο (σχήμα 4.16), ακόμα και μετά από 2 περιόδους έχει επέλθει πλήρης περιοδικότητα. Αυτό θα ληφθεί υπόψη αργότερα όταν θα υλοποιηθεί η μεγιστοποίηση της άνωσης στο ίδιο πρόβλημα, για να αποφευχθούν άχρηστα χρονοβόρες επιλύσεις.

Οι αρχικές και οριακές συνθήκες του προβλήματος έχουν ως εξής:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = un_x + vn_y = 0 \quad \forall \vec{x} \in S_{foil} \text{ (μη εισχώρηση)} \quad (4.15)$$

$$p_\infty = 101325.0[Pa], \quad T_t = 300[K], \quad \forall \vec{x} \in S_\infty, \quad \frac{\partial T}{\partial \vec{n}_{foil}} = 0 \quad (4.16)$$

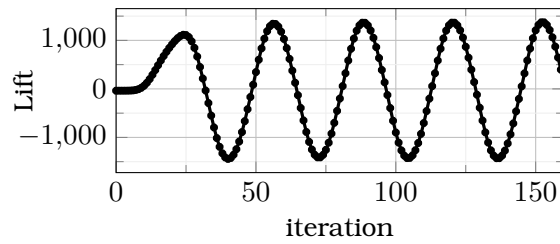
$$\text{και } \vec{U}(t) = \vec{U}(t)_\infty \quad \forall \vec{x} \in S_\infty, \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.17)$$

για τις ροές (\mathbf{f}) ισχύει: $\mathbf{f} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow$

$$\mathbf{f} \cdot \vec{n} = \vec{f}_1 n_x + \vec{f}_2 n_y = \begin{bmatrix} \rho u n_x \\ \rho u^2 n_x + p n_x \\ \rho u v n_x \\ (p + E_t) u n_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho v n_y \\ \rho u v n_y \\ \rho v^2 n_y + p n_y \\ (p + E_t) v n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ p n_y \\ p n_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

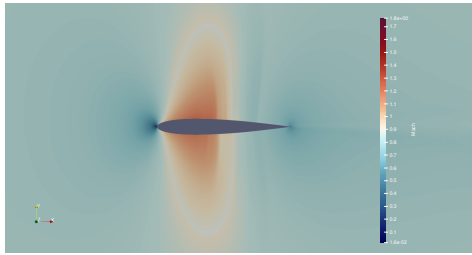
λόγω της 4.15. Έτσι γίνεται εμφανές και μαθηματικά, πως στις ατριβείς ροές οι μόνες δυνάμεις που ασκεί το ρευστό σε επιφάνειες που ισχύει η συνθήκη μη-εισχώρησης, είναι δυνάμεις πίεσης (που είναι πάντα κάθετη στα τοιχώματα).

Στη συνέχεια παρουσιάζονται επιλεγμένες στιγμές από τα συμπιεσμένα πεδία που προέκυψαν από την επίλυση των εξισώσεων για 5 περιόδους. Επιλέγεται να παρουσιαστούν για εποπτική σύγκριση, οι στιγμές που είναι πιο πλούσιες σε πληροφορία από πλευράς πεδίου. Αυτές είναι το μισό της περιόδου δηλαδή το στιγμιότυπο 16/32 ($t = 0.11[s]$) όπου εμφανίζεται ένα κύμα κρούσης σε κάθε πλευρά της αεροτομής και η στιγμή $t = 0.144[s]$ που αντιστοιχεί στο στιγμιότυπο 21/32, όπου εμφανίζεται το πιο έντονο κύμα κρούσης στη μία πλευρά της αεροτομής τη στιγμή όπου και η γωνία προσβολής αποκτά τη μέγιστη τιμή της.

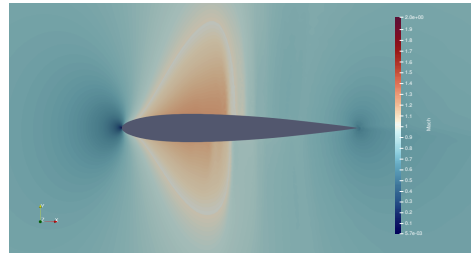


Σχήμα 4.16: Άνωση $L(t)$ της αεροτομής NACA0012 για ροή με $Mach=0.8$ στο επ'άπειρο όριο και ταλαντούμενη γωνία προσβολής

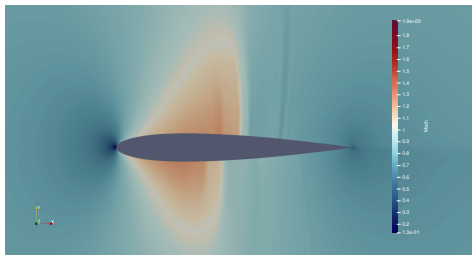
Τα κύματα κρούσης αποτελούν μεγάλη πρόκληση για τις μεθόδους συμπίεσης καθώς η ασυνέχειες τείνουν να εξομαλύνονται με τις μεθόδους προσέγγισης. Μία (πραγματική) ασυνέχεια είναι ένα χαρακτηριστικό του πεδίου που αφορά τη μικρότερη δυνατή χωρική κλίμακα, είναι μία ασυνέχεια στο ροϊκό μέγεθος μεταξύ δύο γειτονικών κελιών του υπολογιστικού πλέγματος (για μία δεδομένη έκταση στο υπολογιστικό χώρο). Συνήθως, αυτή η διαφορά της τιμής, μεταξύ γειτονικών κελιών (που χαρακτηρίζει την ασυνέχεια), είναι από τα πρώτα πράγματα που αλλοιώνονται σε μία ΠΧΤ. Ωστόσο όπως θα φανεί και στη συνέχεια, κάθε μέθοδος από τις δύο που παρουσιάζονται, διαχειρίζεται με διαφορετικό τρόπο αυτή την απώλεια πληροφορίας. Όσον αφορά τους χρόνους εκτέλεσης της συμπίεσης, το iSVD επέφερε αμεληταία επιβάρυνση, συγκριτικά με το συνολικό χρόνο προσομοίωσης. Ενδεικτικά η ακριβότερη συμπίεση με iSVD(30) κόστισε 49s, χρόνος πολύ μικρότερος της $T_{sim} = 90min$.



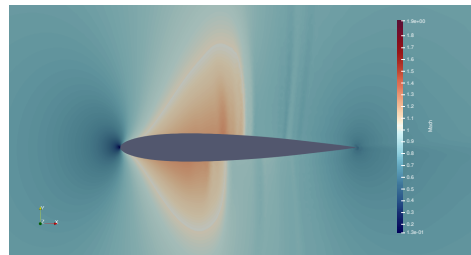
(a) Αποσυμπιεσμένο πεδίο Mach με $iSVD(3)$



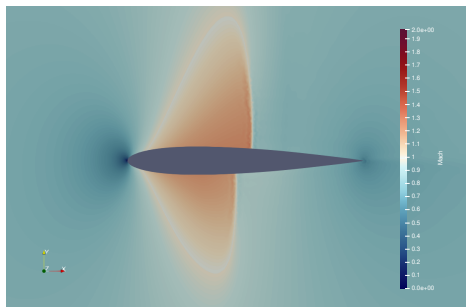
(b) Αποσυμπιεσμένο πεδίο Mach με $iSVD(5)$



(c) Αποσυμπιεσμένο πεδίο Mach με $iSVD(10)$



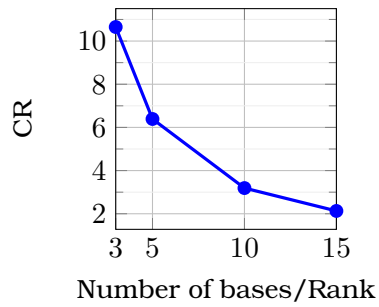
(d) Αποσυμπιεσμένο πεδίο Mach με $iSVD(15)$



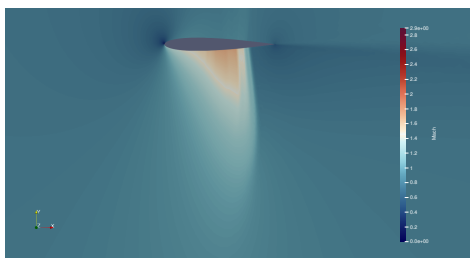
(e) Αρχικό πεδίο Mach πριν τη συμπίεση

Σχήμα 4.17: Συμπίεση 2D χρονικά μη-μόνιμου πεδίου με το $iSVD$ γύρω από μεμονωμένη αεροτομή

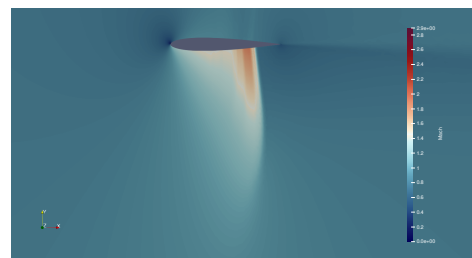
Για τη στιγμή 16/32, όπως ήταν αναμενόμενο η ποιότητα της αναπαράστασης βελτιώνεται με την αύξηση της τάξης της $iSVD$. Τα κύματα κρούσης στις πλευρές της αεροτομής προσεγγίζονται με φαινομενικά ικανοποιητική ακρίβεια, με ξεκάθαρα καλύτερη προσέγγιση αυτή με τη μεγαλύτερη τάξη. Στο σχήμα 4.18 παρατίθενται οι λόγοι συμπίεσης των δύο μεθόδων οι οποίοι είναι παραπλήσιοι (συμφωνούν σε 4 σημαντικά ψηφία).



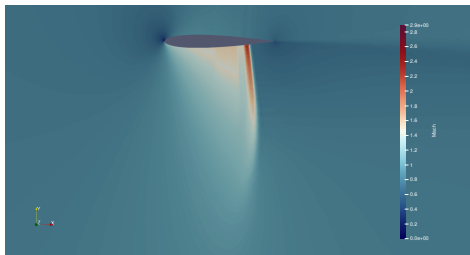
Σχήμα 4.18: Λόγος συμπίεσης CR με $iSVD$ και $iPGD$ για τη ροή γύρω από τη μεμονωμένη αεροτομή NACA0012



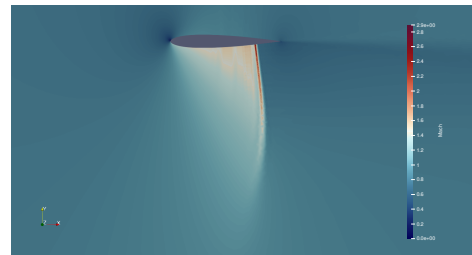
(a) Αποσυμπιεσμένο πεδίο Mach με $iSVD(3)$



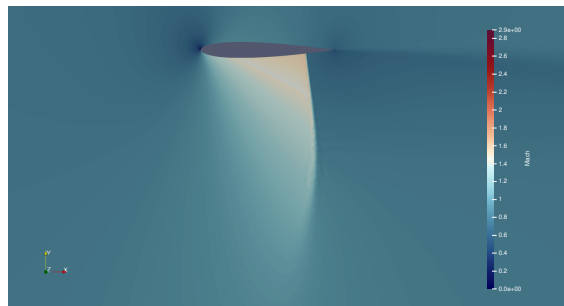
(b) Αποσυμπιεσμένο πεδίο Mach με $iSVD(5)$



(c) Αποσυμπιεσμένο πεδίο Mach με $iSVD(10)$



(d) Αποσυμπιεσμένο πεδίο Mach με $iSVD(15)$



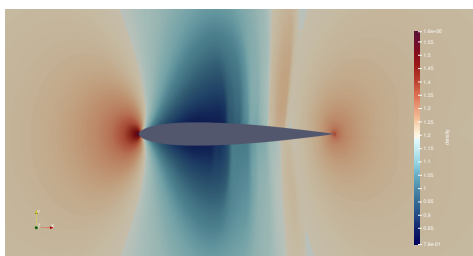
(e) Αρχικό πεδίο Mach πριν τη συμπίεση

Σχήμα 4.19: Συμπίεση 2D χρονικά μη μόνιμου πεδίου με το $iSVD$ γύρω από μεμονωμένη αεροτομή

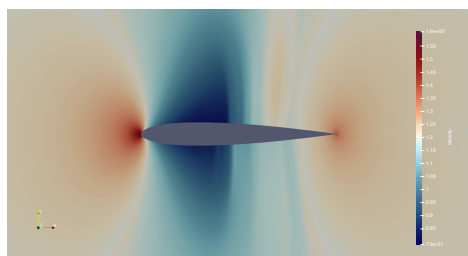
Στο εντονότερο κύμα κρούσης της σιγμής 21/32 ωστόσο, η προσέγγιση αλλοιώνεται πιο έν-

τονα πέριξ της ασυνέχειας αλλά με την αύξηση της τάξης k , πλησιάζει σε πολύ μεγάλο βαθμό το στιγμιότυπο αναφοράς.

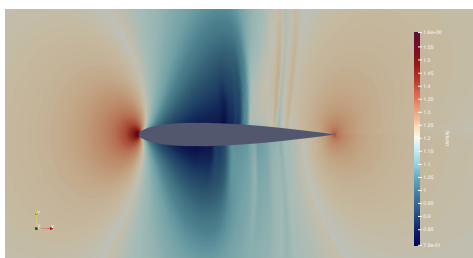
Το πεδίο της πυκνότητας, συνήθως εμφανίζει όμοια δυναμική με αυτή του πεδίου Mach καθώς τα δύο αυτά μεγέθη έχουν αλληλοεξάρτηση και άρα αναμένεται να είναι ποιοτικά συμπληρωματικά λόγω της εξίσωσης συνέχειας. Έτσι αναμένεται παρόμοια εικόνα στα πεδία.



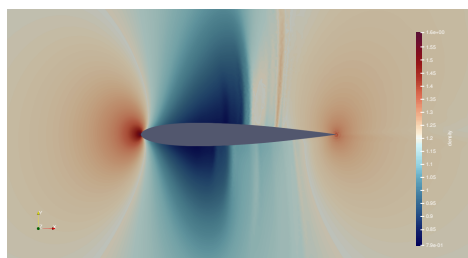
(a) Αποσυμπιεσμένο πεδίο πυκνότητας με $iSVD(3)$



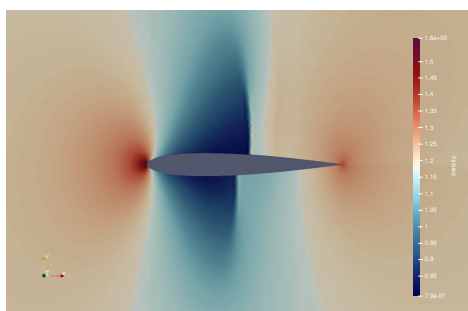
(b) Αποσυμπιεσμένο πεδίο πυκνότητας με $iSVD(5)$



(c) Αποσυμπιεσμένο πεδίο πυκνότητας με $iSVD(10)$



(d) Αποσυμπιεσμένο πεδίο πυκνότητας με $iSVD(15)$

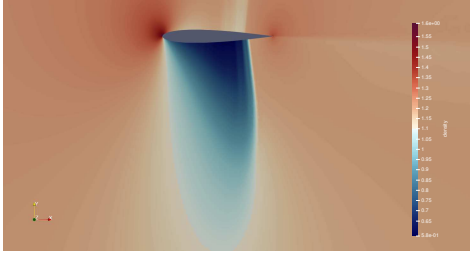


(e) Αρχικό πεδίο πυκνότητας πριν τη συμπίεση

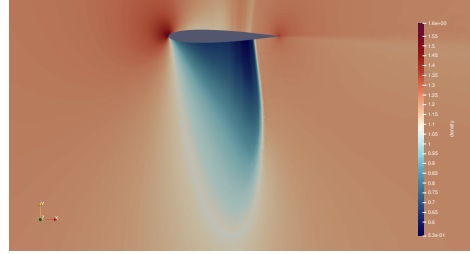
Σχήμα 4.20: Συμπίεση 2Δ χρονικά μη μόνιμου πεδίου με το $iSVD$ γύρω από μεμονωμένη αεροτομή

Επίσης παρατηρείται αύξηση της ακρίβειας της ΠΧΤ με αύξηση της τάξης k του $iSVD$. Εποπτικά, οι προσεγγίσεις της πυκνότητας με την $iSVD$ φαίνονται ποιοτικότερες από αυτές του πεδίου του Mach. Αυτό οφείλεται στις μικρότερες χωρικές κλίσεις που εμφανίζει η πυκνότητα, οι οποίες επηρεάζουν τη μορφή του παραγόμενου σήματος που πρόκειται να

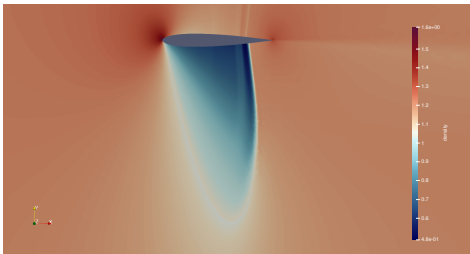
συμπίεσεί. Οι μεγαλύτερες κατά αριθμητική τιμή διακυμάνσεις στο πεδίο του Mach, ενισχύουν το χαρακτήρα της ασυνέχειας στα δεδομένα που θα συμπίεστούν, δημιουργώντας ένα πιο έντονα ανομοιογενές σήμα.



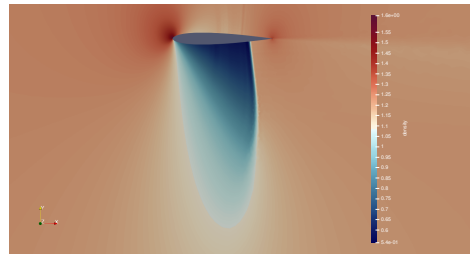
(a) Αποσυμπιεσμένο πεδίο πυκνότητας με $iSVD(3)$



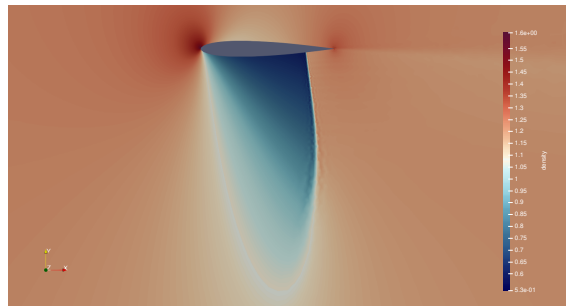
(b) Αποσυμπιεσμένο πεδίο πυκνότητας με $iSVD(5)$



(c) Αποσυμπιεσμένο πεδίο πυκνότητας με $iSVD(10)$



(d) Αποσυμπιεσμένο πεδίο πυκνότητας με $iSVD(15)$



(e) Αρχικό πεδίο πυκνότητας πριν τη συμπίεση

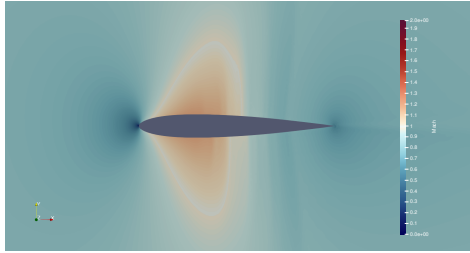
Σχήμα 4.21: Συμπίεση 2D χρονικά μη μόνιμου πεδίου με το $iSVD$ γύρω από μεμονωμένη αεροτομή

Είναι χαρακτηριστική η εξαιρετική ομοιότητα του αποσυμπιεσμένου πεδίου της τάξης $k = 15$ με το πεδίο αναφοράς, όσον αφορά την πυκνότητα τη στιγμή 21 (σχήμα 4.21(d)). Με εξαίρεση κάποιες ατέλειες στην ανώτερη πλευρά της αεροτομής, η προσέγγιση επιτυγχάνει να αποδώσει όλο το εύρος της πληροφορίας εκατέρωθεν του κύματος κρούσης, δηλαδή την περιοχή αυτού. Ακολουθεί η ίδια διαδικασία, με χρήση του $iPGD$, αρχικά για εποπτική σύγκριση. Αυτό που αναμένεται για το $iPGD$ είναι μία μεγαλύτερη ικανότητα στην αναπαράσταση των γενικών χαρακτηριστικών της λύσης, αλλά και ταυτόχρονα μειωμένη ικανότητα στην επακριβή προσέγγιση συγκεκριμένων χαρακτηριστικών του πεδίου, τα οποία είναι χωρικά

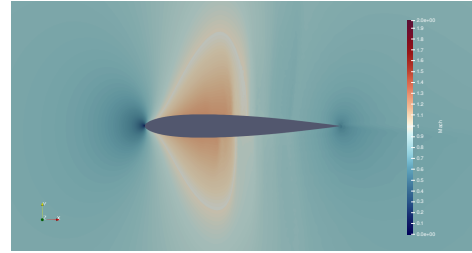
εντοπισμένα σε μικρό τμήμα του χωρίου. Κόστος σε T_{CPU} φαίνεται στον πίνακα 4.3.

iPGD	3 bases	5 bases	10 bases	15 bases
T_{CPU}	0.01	0.019	0.073	0.167

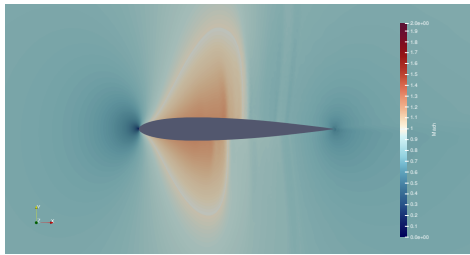
Πίνακας 4.3: Χρόνοι συμπίεσης και εγγραφής στο δίσκο για το *iSVD* (Ροή σε περιύγωση διηχητικού συμπίεστη)



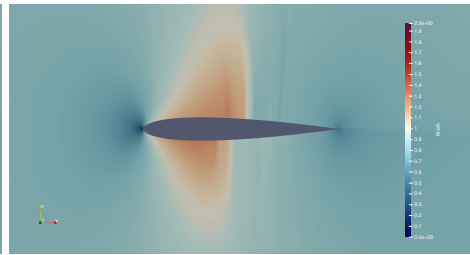
(a) Αποσυμπίεσμένο πεδίο Mach με $iPGD(3, 1)$



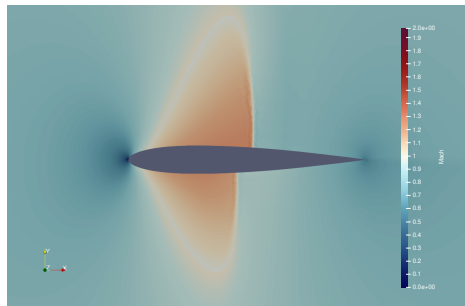
(b) Αποσυμπίεσμένο πεδίο Mach με $iPGD(5, 1)$



(c) Αποσυμπίεσμένο πεδίο Mach με $iPGD(10, 1)$



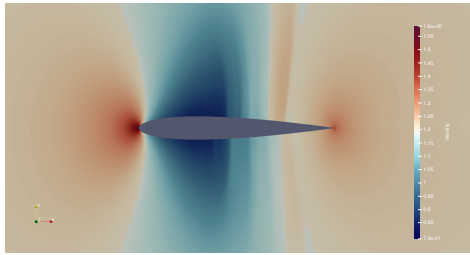
(d) Αποσυμπίεσμένο πεδίο Mach με $iPGD(15, 1)$



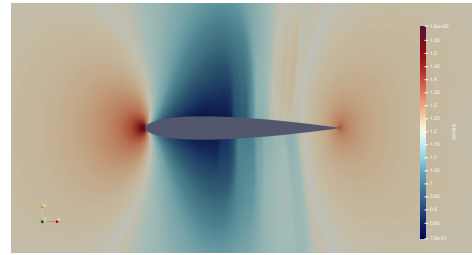
(e) Αρχικό πεδίο Mach πριν τη συμπίεση

Σχήμα 4.22: Συμπίεση 2D χρονικά μη μόνιμου πεδίου με το *iPGD* γύρω από μεμονωμένη αεροτομή

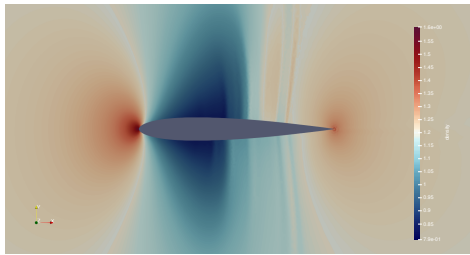
Ήδη από το σχήμα 4.22(a) φαίνεται πως όλη η προσέγγιση εμφανίζει μεγαλύτερη "ομοιογένεια" απ' ότι με την *iSVD*, χωρίς ωστόσο να αποδίδονται τα έντονα χωρικά εντοπισμένα χαρακτηριστικά της, όπως τα όρια των περιοχών εκατέρωθεν του κύματος κρούσης. Αυτό ωστόσο αλλάζει, αυξάνοντας τον αριθμό των βάσεων που χρησιμοποιούνται για την ΠΧΤ.



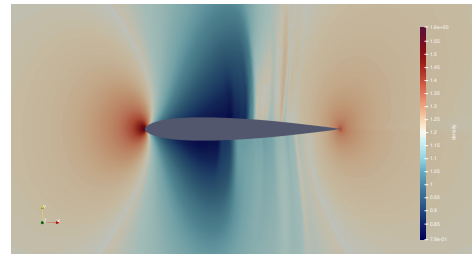
(a) Αποσυμπιεσμένο πεδίο πυκνότητας με $iPGD(3, 1)$



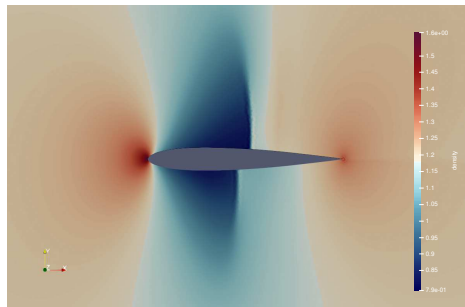
(b) Αποσυμπιεσμένο πεδίο πυκνότητας με $iPGD(5, 1)$



(c) Αποσυμπιεσμένο πεδίο πυκνότητας με $iPGD(10, 1)$



(d) Αποσυμπιεσμένο πεδίο πυκνότητας με $iPGD(15, 1)$

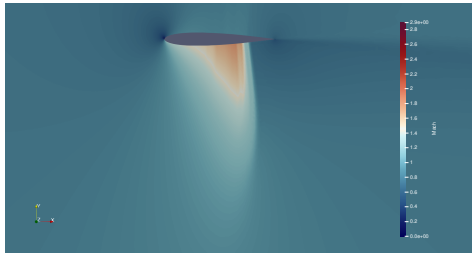


(e) Αρχικό πεδίο πυκνότητας πριν τη συμπίεση

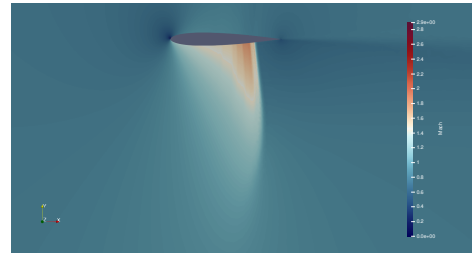
Σχήμα 4.23: Συμπίεση 2D χρονικά μη μόνιμου πεδίου με το $iPGD$ γύρω από μεμονωμένη αεροτομή

Συνολικά για τη στιγμή 16/32, η οποία εμφανίζει λιγότερο έντονα χαρακτηρισικά απ' ότι η 21, επιβεβαιώνεται, η παρατήρηση του προηγούμενου βήματος, ότι η προσέγγιση με την $iPGD$, σχήμα 4.22(a), είναι πιο ομοιογενής στην ποιότητα απόδοσης του πεδίου αλλά συνολικά λιγότερο ακριβής απ' ότι με την $iSVD$. Αυτή η διαφορά θα αναλυθεί σε επόμενη ενότητα όπου θα παρουσιαστούν τα πεδία της απόλυτης τιμής του σχετικού σφάλματος για διάφορες ΠΧΤ.

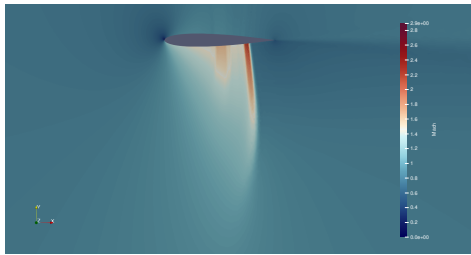
Για τη στιγμή με το έντονο κύμα κρούσης:



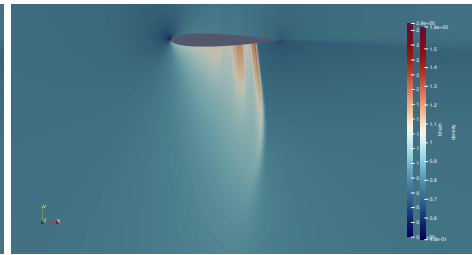
(a) Αποσυμπιεσμένο πεδίο Mach με $iPGD(3,1)$



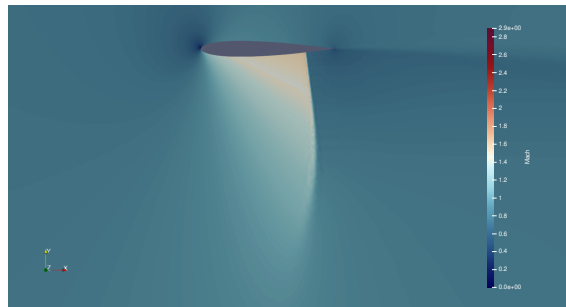
(b) Αποσυμπιεσμένο πεδίο Mach με $iPGD(5,1)$



(c) Αποσυμπιεσμένο πεδίο Mach με $iPGD(10,1)$

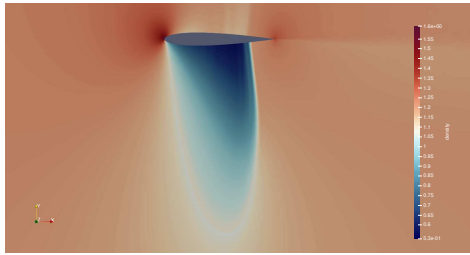


(d) Αποσυμπιεσμένο πεδίο Mach με $iPGD(15,1)$

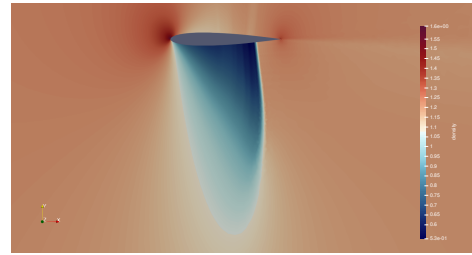


(e) Αρχικό πεδίο Mach πριν τη συμπίεση

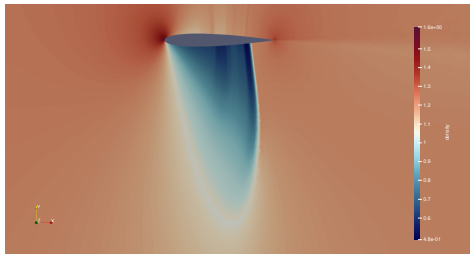
Σχήμα 4.24: Συμπίεση 2D χρονικά μη μόνιμου πεδίου με το $iPGD$ γύρω από μεμονωμένη αεροτομή



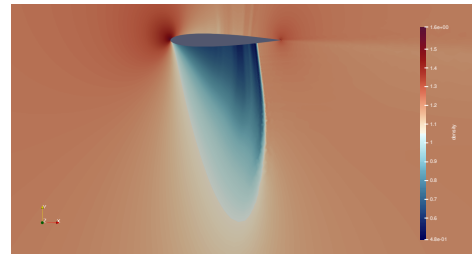
(a) Αποσυμπίεσμένο πεδίο πυκνότητας με $iPGD(3,1)$



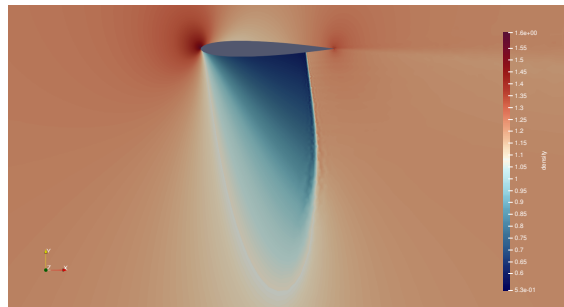
(b) Αποσυμπίεσμένο πεδίο πυκνότητας με $iPGD(5,1)$



(c) Αποσυμπίεσμένο πεδίο πυκνότητας με $iPGD(10,1)$



(d) Αποσυμπίεσμένο πεδίο πυκνότητας με $iPGD(15,1)$



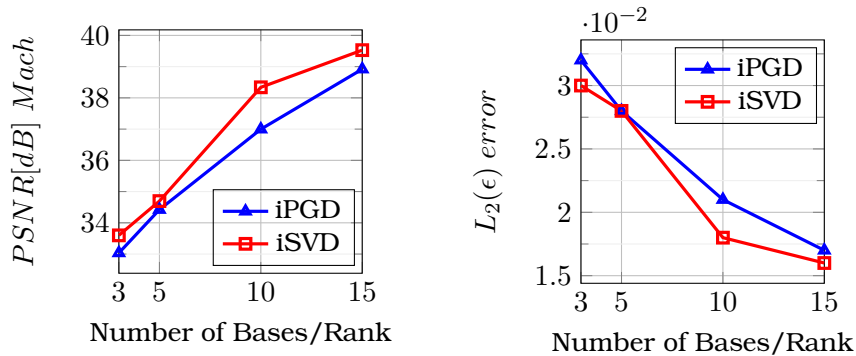
(e) Αρχικό πεδίο πυκνότητας πριν τη συμπίεση

Σχήμα 4.25: Συμπίεση 2D χρονικά μη μόνιμου πεδίου με το $iPGD$ γύρω από μεμονωμένη αεροτομή

Γενικά αυτό που παρατηρείται συγκριτικά μεταξύ $iSVD$ και $iPGD$ είναι ότι το δεύτερο αποδίδει με μεγαλύτερη ακρίβεια μεγαλύτερο εύρος της πληροφορίας του πεδίου όπως φαίνεται συγκρίνοντας τα σχήματα 4.19(d) και 4.25(d). Στην περίπτωση του $iSVD$, η ασυνέχεια "υπερκαλύπτει" την πληροφορία ανάντη της, πράγμα που δε-συμβαίνει στον ίδιο βαθμό στο $iPGD$ δηλαδή η περιοχή της ροής πίσω από το κύμα κρούσης, προσεγγίζεται καλύτερα από ότι με το $iSVD$. Αυτό όμως δεν σημαίνει πως η προσέγγιση είναι συνολικά "ανώτερη", καθώς η μέθοδος $iPGD$ εκ κατασκευής, ελαχιστοποιεί σε κάθε βήμα διαφορετικό σφάλμα που σημαίνει πως σε κάθε βήμα συσσωρεύονται τα σφάλματα της ως τώρα προσέγγισης στην προσέγγιση των νέων βάσεων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το να παραμένουν "υπολείμματα" χαρακτηριστικών του πεδίου σε επόμενα στιγμότυπα. Με την $iSVD$, το σφάλμα που προσθέτει στην τελική προσέγγιση κάθε επόμενο βήμα, εξαρτάται από το υπόλοιπο πεδίο με διαφορετικό τρόπο από ότι στην $iPGD$. Ωστόσο η εποπτική σύγκριση δεν αρκεί για να

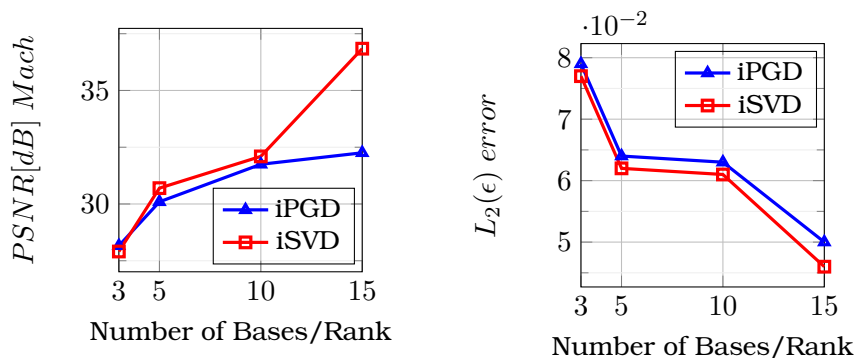
ποσοτικοποιηθεί η επίδραση των μεθόδων συμπίεσης, πρώτον στην ποιότητα των παραγώγων ευαισθησίας και δεύτερον στο τελικό αποτέλεσμα της βελτιστοποίησης.

Για να παρουσιαστεί μία πιο πλήρης εικόνα της αποδοτικότητας των δύο μεθόδων που αναλύθηκαν, στα ακόλουθα διαγράμματα 4.28, 4.26, παρουσιάζονται τα PSNR και τα απόλυτα και κανονικοποιημένα L_2 σφάλματα και για τις 2 μεθόδους.



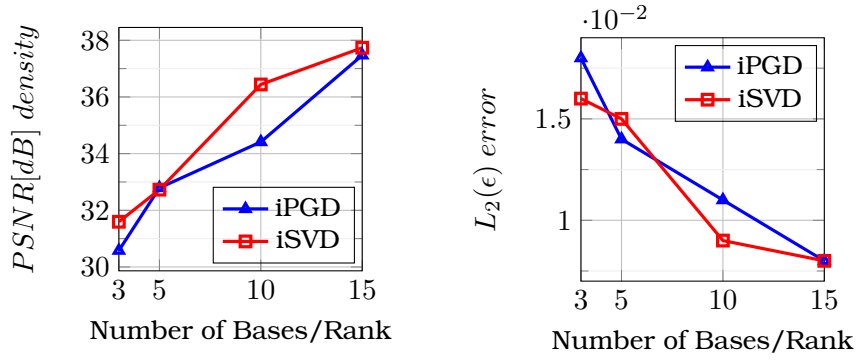
Σχήμα 4.26: Μειρικές ποιότητας ΠΧΤ του πεδίου Mach της στιγμής 16/32 συμπίεμένο με $iSVD(k)/iPGD(M,1)$

Είναι ήδη ξεκάθαρο πως για τη στιγμή 16/32 τόσο στα πεδία του Mach όσο και της πυκνότητας, (σχήματα 4.26, 4.28), η ΠΧΤ με την $iSVD$ είναι ποιοτικότερη, με λιγότερο θόρυβο και μικρότερο συνολικό σφάλμα. Συνεπώς παρά το ότι η προσέγγιση του $iPGD$ ήταν εποπτικά πιο κοντά στο πεδίο αναφοράς, φαίνεται πως η $iSVD$ προσεγγίζει καλύτερα τα χαρακτηριστικά του πεδίου. Όμοια είναι και τα αποτελέσματα για τη στιγμή 21/32 καθώς πάλι η ΠΧΤ

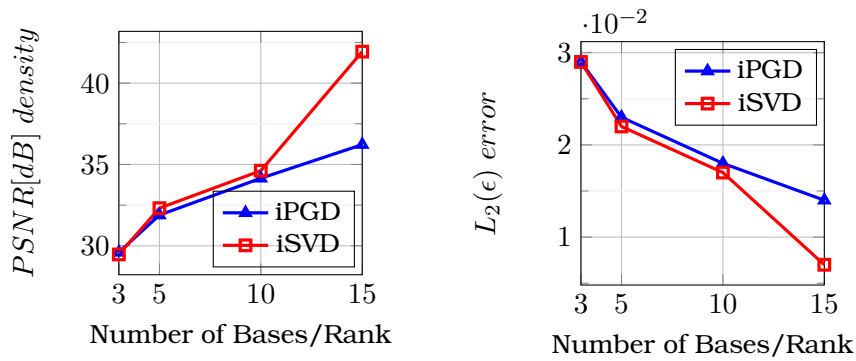


Σχήμα 4.27: Μειρικές ποιότητας ΠΧΤ του πεδίου Mach της στιγμής 21/32 συμπίεμένο με $iSVD(k)/iPGD(M,1)$

του $iSVD$ υπερτερεί. Πράγματι επιβεβαιώνεται η προηγούμενη εποπτική παρατήρηση, πως η προσέγγιση της πυκνότητας με την $iSVD(15)$ τη στιγμή 21/32 (σχήμα 4.21(d)), είναι η ακριβέστερη από όλες τις ΠΧΤ των παραπάνω δεδομένων, καθώς εμφανίζει το μεγαλύτερο PSNR και μικρότερο σφάλμα. Συνεπώς, αναμένεται και μεγαλύτερη ομοιότητα στις παραγώγους ευαισθησίας κατά τους κύκλους βελτιστοποίησης, αλλά αυτό θα απαντηθεί σε επόμενο κεφάλαιο.



Σχήμα 4.28: Μειρικές ποιότητες ΠΧΤ του πεδίου πυκνότητας της στιγμής 16/32 συμπεσμένο με $iSVD(k)/iPGD(M, 1)$



Σχήμα 4.29: Μειρικές ποιότητες ΠΧΤ του πεδίου πυκνότητας της στιγμής 21/32 συμπεσμένο με $iSVD(k)/iPGD(M, 1)$

4.3 Συμπύεση λύσεων των εξισώσεων Navier Stokes γύρω από 2Δ περύγωση διηχητικού συμπιεστή

Στην ακόλουθη εφαρμογή θα λυθούν οι μη-μόνιμες 2Δ εξισώσεις Navier-Stokes σε μία 2Δ περύγωση διηχητικού συμπιεστή. Η επίλυση γίνεται σε κάρτα γραφικών Nvidia Tesla K20 με 2496 πυρήνες CUDA παράλληλης επεξεργασίας στα 706 MHz. Πιο συγκεκριμένα, θα επιλυθούν οι κατά Reynolds χρονικά μέσες μη-μόνιμες εξισώσεις NS (URANS) με το μοντέλο τύρβης μίας εξίσωσης των Spallart-Almaras [?] για τον υπολογισμό της τυρβώδους δυναμικής συνεκτικότητας:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \bar{v}_i) = 0 \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{v}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_j + \bar{p} \delta_{ij} - (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) \right] = 0, \quad i = 1, 2 \quad (4.20)$$

με

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1} \Rightarrow \mu_t = \rho \tilde{\nu} f_{v1} \quad (4.21)$$

Η $\tilde{\nu}$ υπολογίζεται από την εξίσωση του μοντέλου τύρβης των Spallart-Almaras:

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{\nu}v_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\tilde{\nu}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] - \frac{c_{b2}}{\sigma} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 - \tilde{\nu}P(\tilde{\nu}) + \tilde{\nu}D(\tilde{\nu}) = 0 \quad (4.22)$$

και οι όροι παραγωγής και καταστροφής του $\tilde{\nu}$ είναι:

$$P(\tilde{\nu}) = c_{b1}\tilde{Y}, \quad D(\tilde{\nu}) = c_{w1}f_w(\tilde{Y})\frac{\tilde{\nu}}{\Delta^2} \text{ ενώ το } \tilde{Y} \text{ δίνεται από τη σχέση:}$$

$$\tilde{Y} = Yf_{v3} + \frac{\tilde{\nu}}{\Delta^2\kappa^2}f_{v2}, \quad Y = \left| \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right| \quad (4.23)$$

Με Y συμβολίζεται η ένταση της στροβιλότητας και με Δ η απόσταση των κέντρων των κελιών του πλέγματος από τα τοιχώματα του χωρίου. Οι υπόλοιπες συναρτήσεις του μοντέλου είναι:

$$f_{v1} = \frac{\chi}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad f_{v2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\chi}{c_{v2}}\right)^3} \quad (4.24)$$

$$f_{v3} = \frac{(1 + \chi f_{v1})}{c_{v2}} \left[3 \left(1 + \frac{\chi}{c_{v2}}\right) + \left(\frac{\chi}{c_{v2}}\right)^2 \right] \left(1 + \frac{\chi}{c_{v2}}\right)^{-3} \quad (4.25)$$

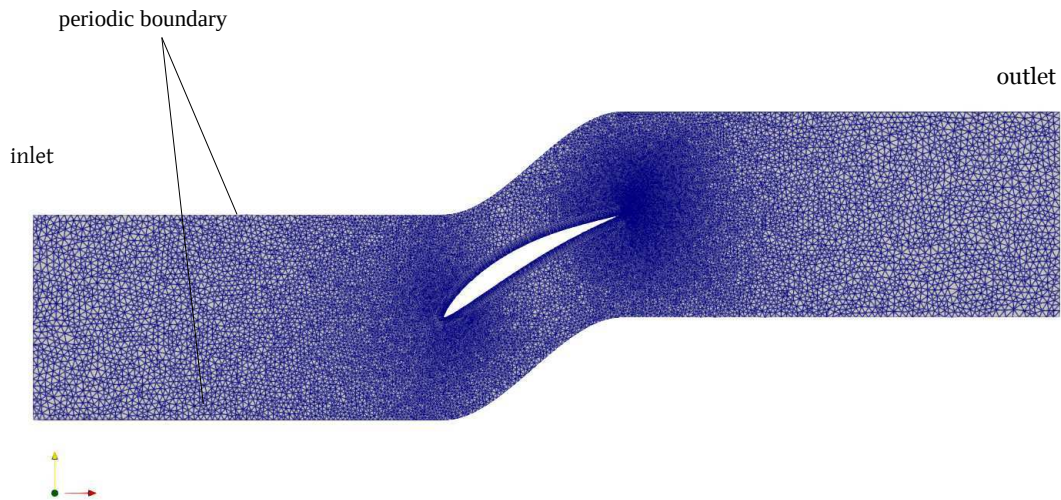
$$\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, \quad f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{1/6} \quad (4.26)$$

$$g = r + c_{w2} (r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{Y}\kappa^2\Delta^2} \quad (4.27)$$

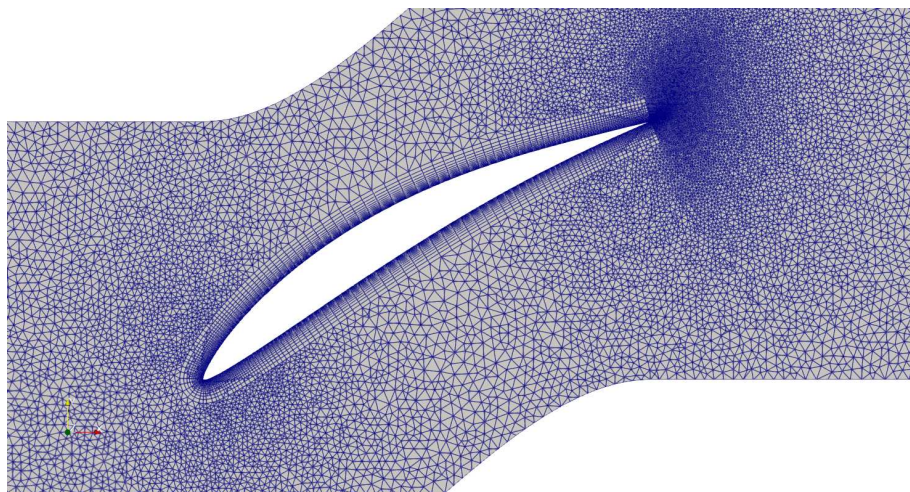
και οι σταθερές $c_{b1} = 0.1355$, $c_{b2} = 0.622$, $\kappa = 0.41$, $\sigma = 2/3$, $c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1+c_{b2}}{\sigma}$, $c_{w2} = 0.3$, $c_{w3} = 2$, $c_{v1} = 7.1$, $c_{v2} = 5$.

Το ζητούμενο είναι η αξιολόγηση της ποιότητας της συμπίεσης της προκύπτουσας χρονοσειράς. Επιλέγεται η μη-μονιμότητα να εισαχθεί από την περιοδική διακύμανση της ολικής πίεσης στην είσοδο του χωρίου: $P_{T_{inlet}} = 118150.00[Pa] + 10^4 \sin(\frac{2\pi}{T_p}t)$. Το πλέγμα αποτελείται από 87926 κόμβους, το οποίο γύρω από την αεροτομή είναι δομημένο (σχήμα 4.31). Όπως και στο παράδειγμα με τις εξισώσεις Euler 4.2, έτσι και στο παράδειγμα αυτό, το πλέγμα εμφανίζει τα κατάλληλα πυκνώματα στις ακμές της αεροτομής. Στο σχήμα 4.30 φαίνονται τα περιοδικά όρια, όπως και η είσοδος (inlet), και έξοδος (outlet) του χωρίου.

Στο όριο της αεροτομής S_{foil} , εφαρμόζεται συνθήκη μη-εισχώρησης $\vec{u} \cdot \vec{n} = un_x + vn_y = 0$ και μη-ολίσθησης $\vec{u} \cdot \vec{t} = ut_x + vt_y = 0$ όπως και μηδενική συνθήκη Neumann για τη θερμοκρασία (αδιαβατικό στερεό σύνορο) αλλά και τη πίεση. Στα άνω και κάτω όρια του χωρίου εφαρμόζονται περιοδικές οριακές συνθήκες όπως υποδηλώνεται στο σχήμα 4.30, ενώ στην είσοδο και έξοδο επιβάλλονται οριακές συνθήκες τύπου Dirichlet στατικής πίεσης (έξοδος) και ολικής θερμοκρασίας, ολικής πίεσης και γωνίας εισόδου (στην είσοδο) όπως συνοψίζονται και στον πίνακα 4.4.



Σχήμα 4.30: Πλεγματοποιημένο υπολογιστικό χωρίο 2Δ περύγωσης διηχητικού συμπιεστή



Σχήμα 4.31: Υβριδικό πλέγμα γύρω από τη 2Δ περύγωση διηχητικού συμπιεστή

	inlet	outlet
P [Pa]	$P_T(t)$ (Total)	108406.45 (Static)
T_T [K]	288.00	-
α^0 [deg]	47.00	-

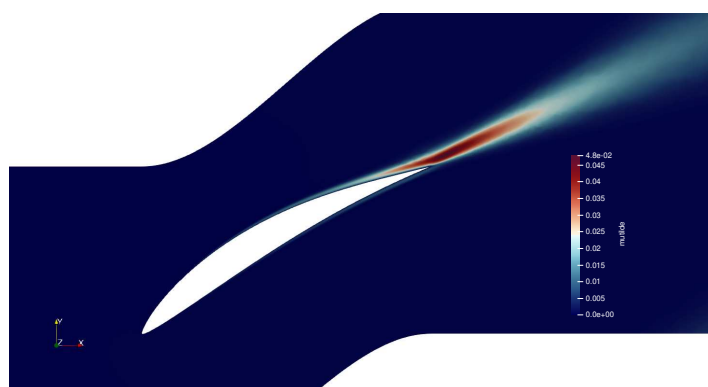
Πίνακας 4.4: Οριακές συνθήκες εισόδου/εξόδου 2Δ περύγωσης διηχητικού συμπιεστή

Για τα τρία μεγέθη (ολική πίεση, ολική θερμοκρασία και γωνία εισόδου), που καθορίζονται στην είσοδο, γίνεται η υπόθεση ότι είναι χωρικά ομογενώς κατανεμημένα. Στην έξοδο επιβάλλεται οριακή συνθήκη σταθερής στατικής πίεσης. Η στατική πίεση στην έξοδο θεωρείται επίσης χωρικά ομογενώς κατανεμημένη. Οι εξισώσεις επιλύονται για 4 περιόδους των $T_p = 0.11s$. Για την επίδειξη της ποιότητας της συμπίεσης χρησιμοποιούνται τα πεδία

του αριθμού Mach και πίεσης της τέταρτης περιόδου και συγκεκριμένα του σιγμοτύπου της χρονοσειράς που αντιστοιχεί στον πραγματικό χρόνο $t = 0.058[s]$. Τα πεδία που προκύπτουν από την επίλυση φαίνονται στο σχήμα 4.32. Τα πεδία της πυκνότητας και της πίεσης είναι αρκετά όμοια με του Mach, οπότε δεν παρουσιάζονται.



(a) Πεδίο Mach σε 2Δ περύγωση συμπιεστή



(b) Πεδίο τυρβώδους δυναμικής συνεκτικότητας σε 2Δ περύγωση συμπιεστή

Σχήμα 4.32: 2Δ χρονικά μη-μόνιμη ροή σε 2Δ περύγωση διηχητικού συμπιεστή τη στιγμή 17/32 με $t = 0.058[s]$

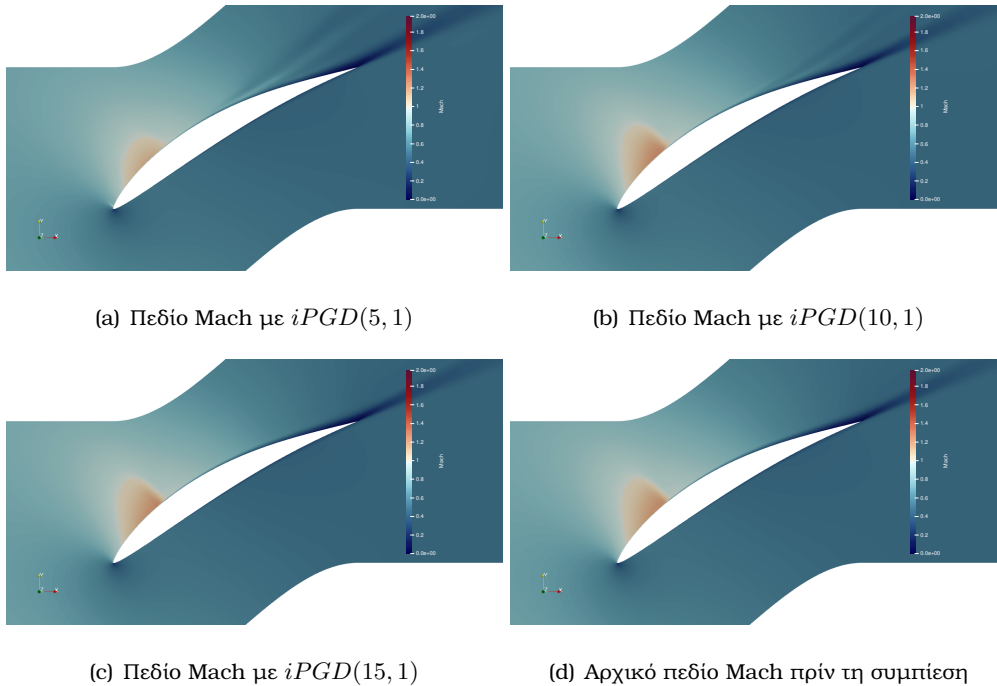
Ο πραγματικός χρόνος που χρειάζεται ο επιλύτης για τον υπολογισμό ενός σιγμοτύπου της συγκεκριμένης προσομοίωσης είναι $T_{CFD} = 95 \text{ minutes}$. Τα πεδία που καλούνται να συμπιεστούν, εμφανίζουν πάλι μία χωρικά εντοπισμένη ασυνέχεια στην πλευρά υποπίεσης του περυγίου.

Αρχικά εκτελείται συμπίεση των πεδίων με την *iPGD* με κόστος σε χρόνο εκτέλεσης που φαίνεται στον πίνακα 4.5

Παρατηρούνται, όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή, αρκετά υψηλοί χρόνοι για τη συμπίεση του πεδίου.

iPGD	5 bases	10 bases	15 bases
T_{CPU}	0.04	0.10	0.21

Πίνακας 4.5: Χρόνοι συμπίεσης και εγγραφής στο δίσκο για το iPGD (Ροή σε 2Δ περύγωση συμπίεστη)



Σχήμα 4.33: Συμπίεση 2Δ πεδίου Mach γύρω από αεροτομή περυγίου συμπίεστη με το iPGD τη στιγμή $t = 0.058[s]$

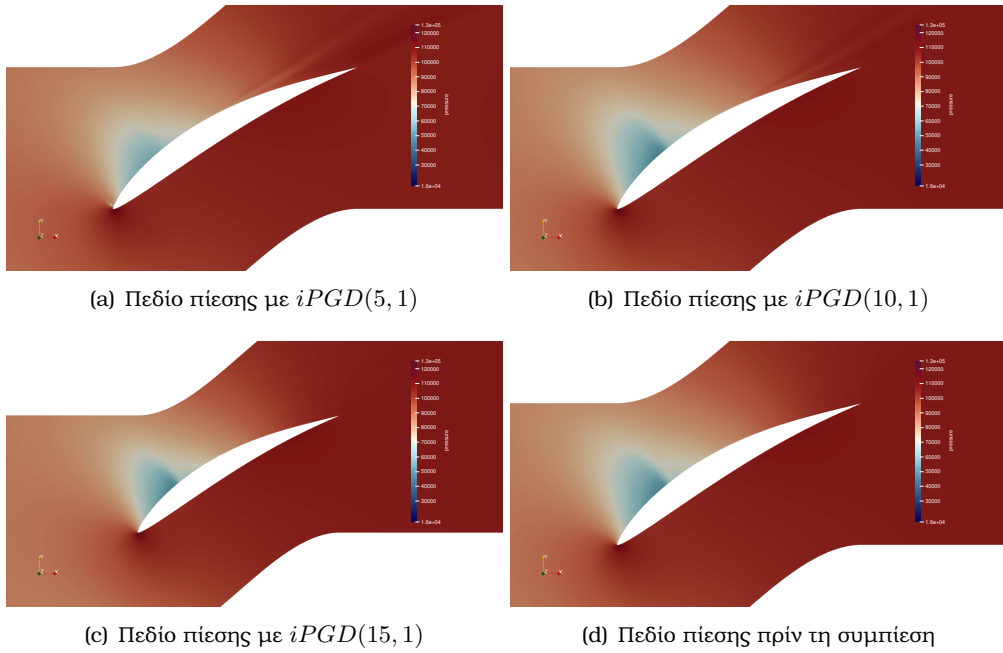
Όσον αφορά την ποιότητα του πεδίου, πάλι γίνεται εμφανές συγκρίνοντας τα σχήματα 4.33(a) και 4.35(a), το iPGD αποδίδει το κάθε στιγμιότυπο της λύσης με υπολείμματα από προηγούμενα και δεν έχει την ίδια σαφήνεια στα χαρακτηριστικά. Φυσικά, με αύξηση των βάσεων τα υπολείμματα προηγούμενων χαρακτηριστικών του πεδίου, όπως το εμφανές όριο του ομόρρου (σχήμα 4.33(a)), εξαφανίζονται. Η iSVD αποδίδει με μεγαλύτερη ακρίβεια τη θέση και την έκταση της ασυνέχειας, πιθανότατα λόγω του τρόπου διάδοσης του σφάλματος κατά τη βηματική ανανέωση της παραγοντοποίησης.

Ένα ακόμα πλεονέκτημα της iSVD είναι το εξαιρετικά χαμηλό υπολογιστικό κόστος (πίνακας 4.6): Τέλος, όπως και στην περίπτωση των εξισώσεων Euler, οι δύο τεχνικές εμφανίζουν

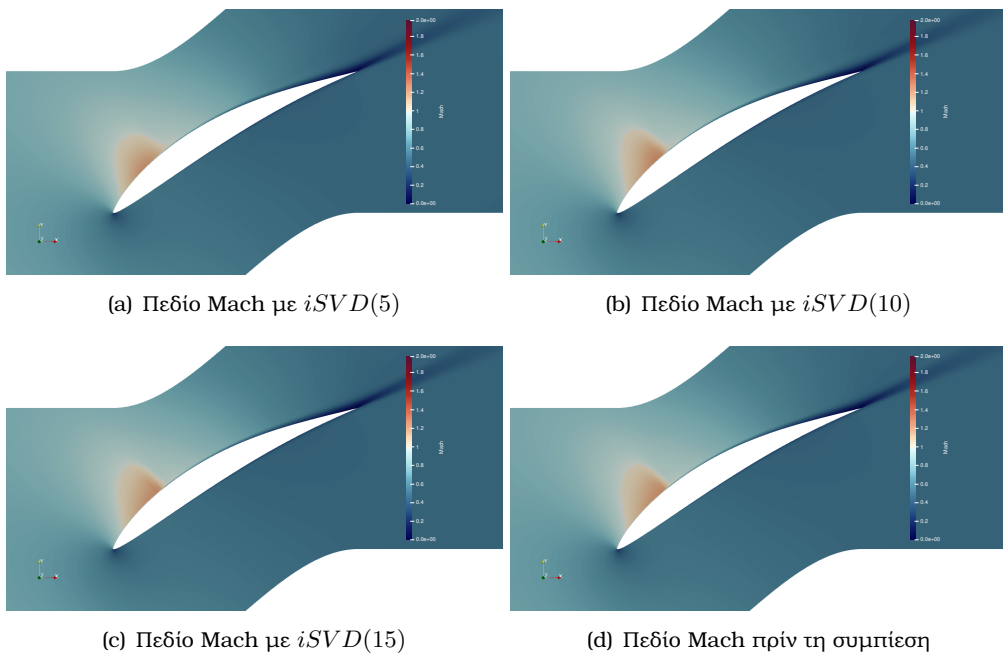
iSVD	rank 5	rank 10	rank 15
T_{CPU}	0.013	0.014	0.015

Πίνακας 4.6: Χρόνοι συμπίεσης και εγγραφής στο δίσκο για το iSVD (Ροή σε περύγωση διχητικού συμπίεστη)

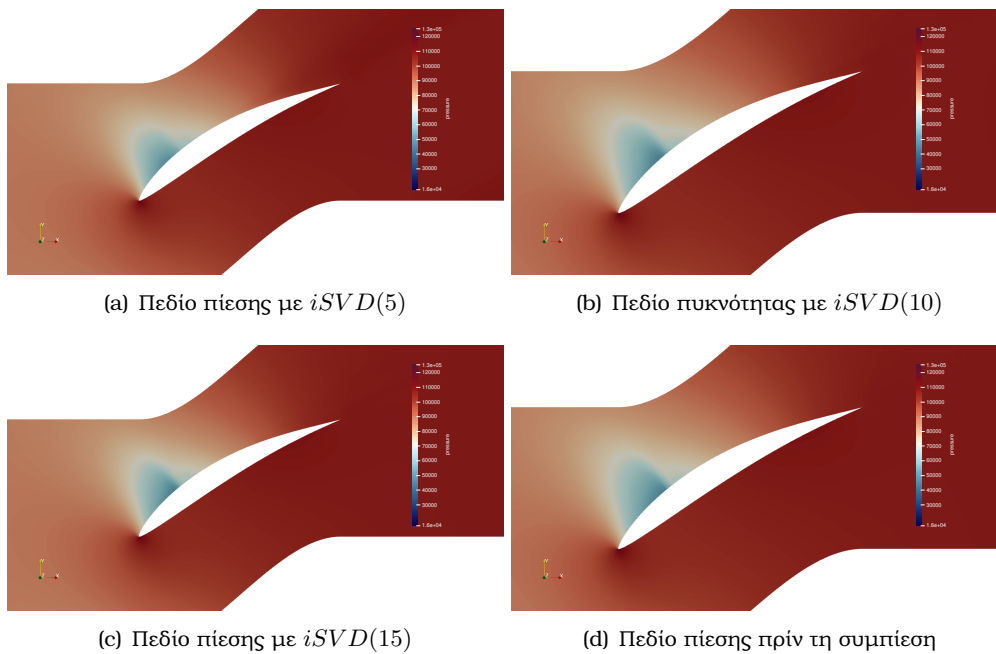
παραπλήσιους λόγους συμπίεσης:



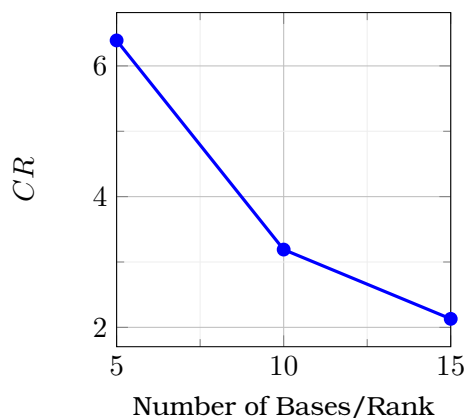
Σχήμα 4.34: Συμπίεση 2Δ πεδίου πίεσης γύρω από αεροτομή περυγίου συμπιεστή με το $iPGD$ τη στιγμή $t = 0.058[s]$



Σχήμα 4.35: Συμπίεση 2Δ πεδίου Mach γύρω από αεροτομή περυγίου συμπιεστή με το $iSVD$ τη στιγμή $t = 0.058[s]$



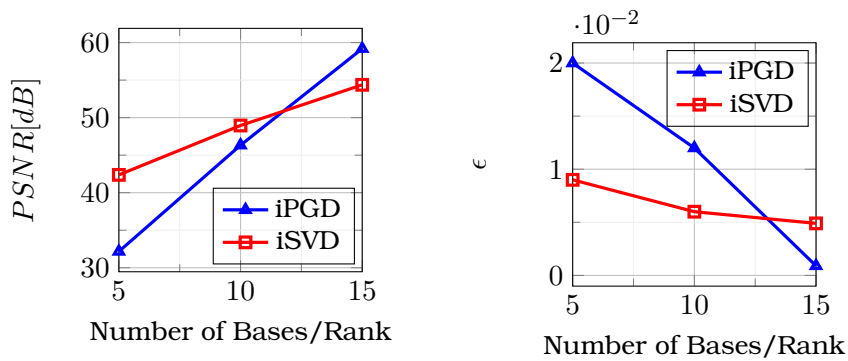
Σχήμα 4.36: Συμπίεση 2Δ πεδίου πίεσης γύρω από αεροτομή περυγίου συμπιεστή με το $iSVD$ τη στιγμή $t = 0.058[s]$



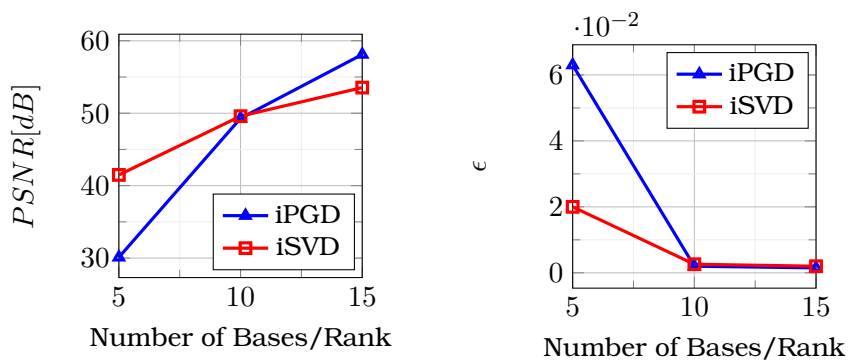
Σχήμα 4.37: Λόγοι συμπίεσης CR της συνεκτικής ροής σε περύγωση διχητικού συμπιεστή με $iPGD(M, 1), iSVD(k)$

Όσον αφορά τις ποσοτικές διαφορές των μεθόδων, αυτή τη φορά η $iSVD$ δεν υπερτερεί παντού της $iPGD$. Στην τελευταία περίπτωση με 15 βάσεις, η $iPGD$ ξεπερνά σε ποιότητα την $iSVD$, όχι όμως σημαντικά για να δικαιολογήσει τη μεγάλη διαφορά σε υπολογιστικό κόστος αν συγκρίνονταν οι δύο μέθοδοι πιο ολιστικά.

Αυτό που απομένει μετά την παρουσίαση της ικανότητας των μεθόδων να συμπιέζουν, με ικανοποιητική ακρίβεια (σφάλμα μέχρι και 0.15% 4.39), χρονοσειρές λύσεων μη-μόνιμων εξισώσεων στην αεροδυναμική, είναι η ένταξη των μεθόδων σε προβλήματα αεροδυναμικής



Σχήμα 4.38: Μετρικές ποιότητας ΠΧΤ του πεδίου Mach με *iSVD/iPGD*



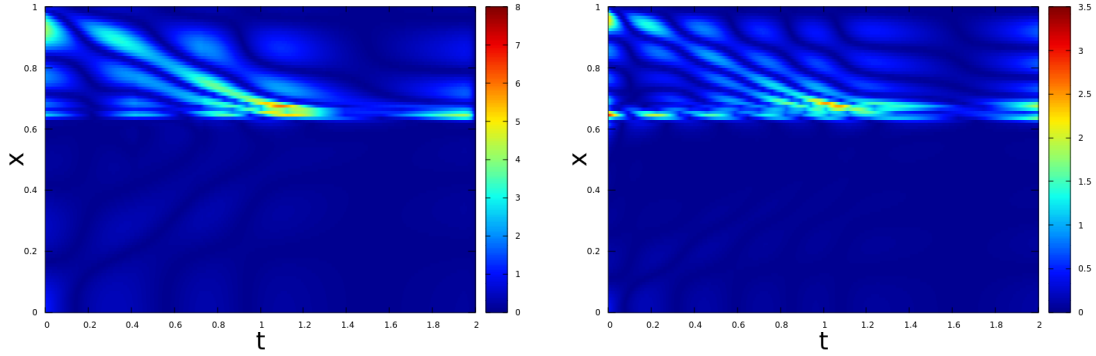
Σχήμα 4.39: Μετρικές ποιότητας ΠΧΤ του πεδίου πίεσης με *iSVD/iPGD*

βελτιστοποίησης, για να διερευνηθεί το κατά πόσο μία τέτοια μέθοδος θα επηρεάσει το αποτέλεσμα της βελτιστοποίησης μέσα από τις παραγώγους ευαισθησίας (SDs).

4.4 Ποιοτική ανάλυση σφαλμάτων για τις δύο μεθόδους κατασκευής ΠΧΤ

Οι δύο μέθοδοι αν και μαθηματικά ισοδύναμες [32], καθώς το *iSVD* είναι η βέλτιστη ΠΧΤ για δεδομένη τάξη k (Θεώρημα 1) και έτσι δεδομένου του και ότι το *iPGD* είναι επίσης κατά L_2 βέλτιστο, θα πρέπει να ταυτίζονται. Ωστόσο, καθώς υλοποιήθηκαν οι βηματικές εκδοχές των δύο τεχνικών, τα πράγματα δεν είναι όπως αναμένονται από τη θεωρία και υπάρχουν αποκλίσεις, εξ ου και η ανάγκη δια διερεύνηση. Όπως έχει ήδη παρατηρηθεί, το *iSVD(k)* με το *iPGD(k,1)* έχουν διαφορετική συμπεριφορά ως προς το πως αποδίδουν τα χαρακτηριστικά των πεδίων στα οποία εφαρμόστηκαν. Το *iSVD(k)* δείχνει να αντιμετωπίζει τα κυρίαρχα χαρακτηριστικά των πεδίων (οι ασυνέχειες) με μεγαλύτερη ακρίβεια όταν αυτά βρίσκονται σε μικρή έκταση μέσα στο υπολογιστικό χωρίο. Ωστόσο, το *iPGD* υπερτερεί όταν η ασυνέχεια εκτείνεται σε μεγαλύτερη έκταση στο χωρίο. Μπορεί να φανεί κοιτώντας και τα σφάλματα $e(\%) = \frac{|u|_{full} - |u|_{decomp}}{|u|_{full}}$. Στη λύση της εξίσωσης Burgers (σχήμα 4.40) το σφάλμα κατανέμεται διαφορετικά μεταξύ των δύο μεθόδων.

Επαληθεύεται πως στο αποσυμπιεσμένο πεδίο που προέκυψε από το *iPGD* το σφάλμα είναι



(a) Απόλυτη τιμή σχετικού σφάλματος με iPGD(6,1) (b) Απόλυτη τιμή σχετικού σφάλματος με iSVD(6)

Σχήμα 4.40: Πεδία απόλυτης τιμής σχετικού σφάλματος της λύσης της εξίσωσης Burgers

πίο ομοιόμορφα καταναμημένο από ότι στο αποσυμπιεσμένο πεδίο από το iSVD.

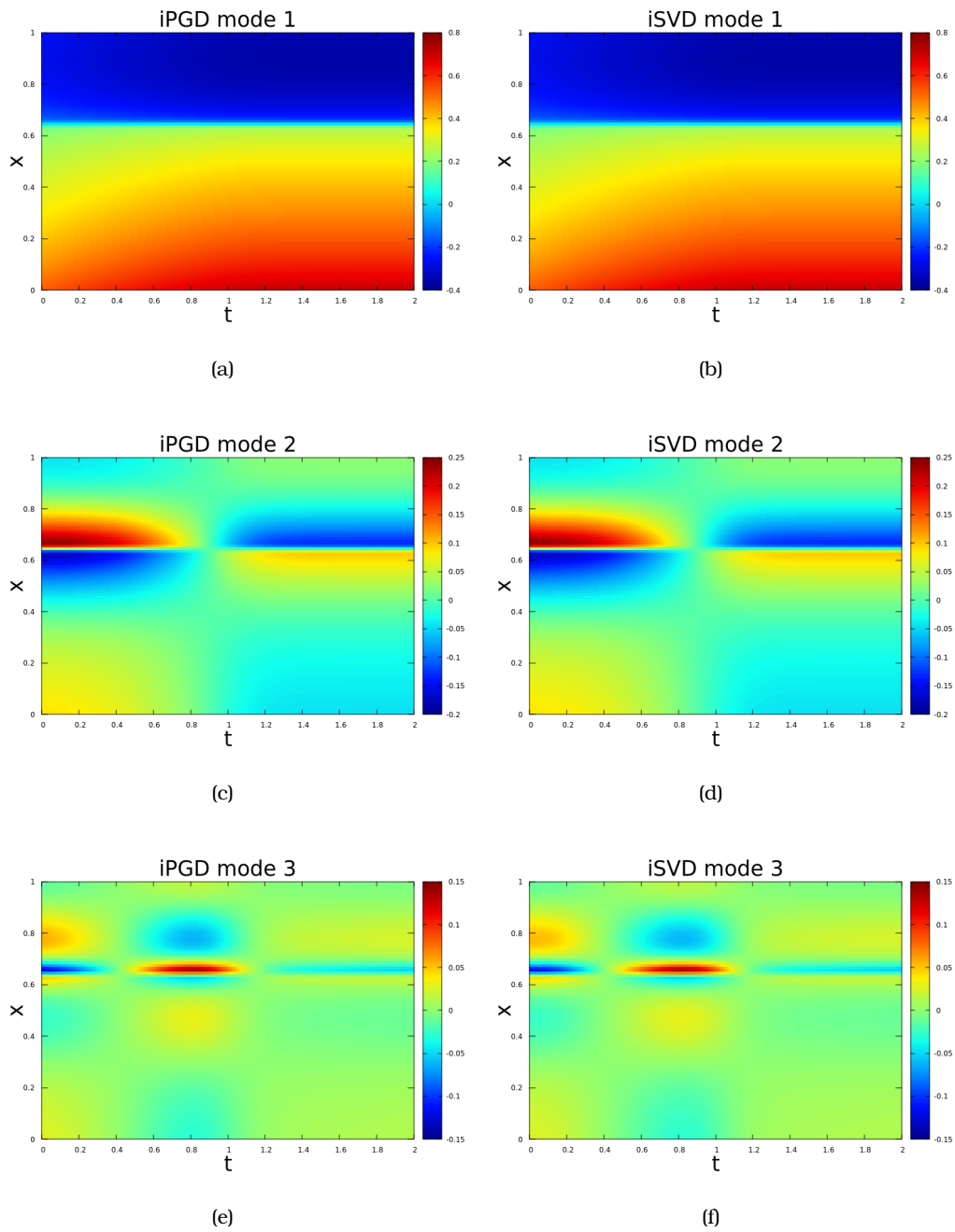
Και οι δύο τεχνικές συμπίεσης (κατασκευής ΠΧΤ) μπορούν να γραφούν ως ένα άθροισμα πινάκων. Αν Y τα τελικά δεδομένα, τότε με το (i)PGD ισχύει:

$$Y \approx \sum_{\mu=1}^M \vec{X}_{\mu} \cdot \vec{T}_{\mu}^T, \quad \vec{X}_{\mu} \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \quad \vec{T}_{\mu} \in \mathbb{R}^{N \times 1} \quad (4.28)$$

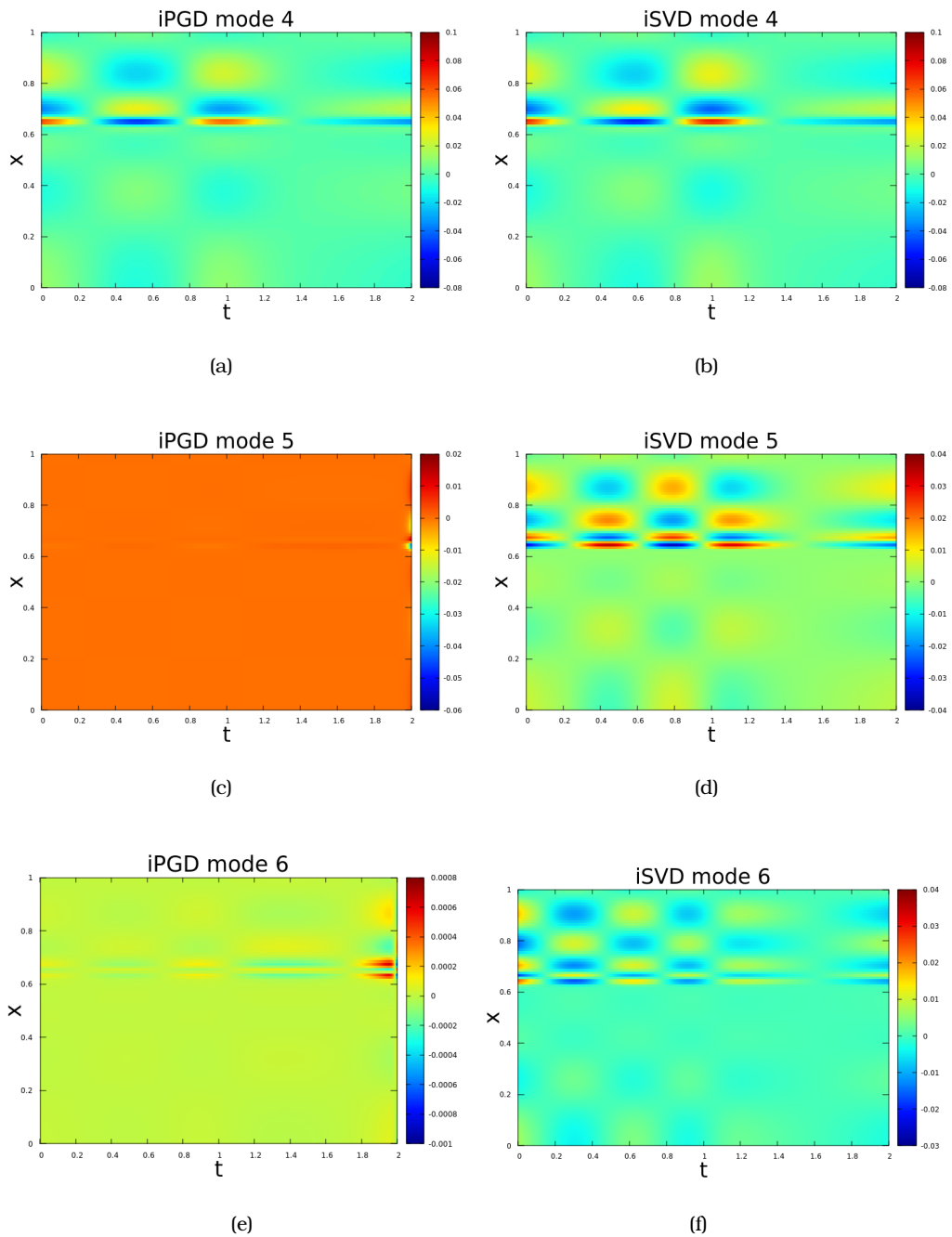
και ομοίως για το (i)SVD:

$$Y \approx \sum_{i=1}^k \sigma_i \vec{\zeta}_i \cdot \vec{\xi}_i^T, \quad \vec{\zeta}_i \in \text{colsp}(U), \quad \vec{\xi}_i \in \text{rowsp}(V) \quad (4.29)$$

Έτσι η προκύπτουσα ΠΧΤ αποτελεί μία επαλληλία πεδίων (modes) όπου η κλίμακα τους φθίνει όσο αυξάνεται η τάξη της προσέγγισης. Δηλαδή το πρώτο mode θα περιέχει αρκετά "χονδρική" πληροφορία για το πεδίο και με κάθε επιπλέον mode θα προστίθενται λεπτομέρειες (σχήματα 4.41, 4.42). Η πληροφορία που περιέχει το εκάστοτε mode είναι αυτή που θα καθορίσει τη τελική κατανομή του σφάλματος. Από τα σχήματα 4.42, γίνεται εμφανής ο λόγος για τον οποίο το iSVD εμφανίζει την αλλοίωση στη περιοχή πρώτου αναπτυχθεί η ασυνέχεια (σχήμα 4.1). Τα πεδία που αποτελούν τη προσέγγιση με το iPGD φθίνουν ήδη από το πέμπτο mode (σχήμα 4.42(c)) ενώ του iSVD όχι. Συνεπώς τα αρχικά (και άρα πιο έντονα) χαρακτηριστικά του πεδίου, όπως η έντονη ασυνέχεια, ευνοούνται έναντι των υπόλοιπων χαρακτηριστικών, αφού τα τελευταία δύο modes του iPGD δεν προσθέτουν σημαντική πληροφορία στην προσέγγιση. Αυτό είναι που πιθανώς συμβαίνει και στη περίπτωση των μη-δομημένων πλεγμάτων. Τα αρχικά χαρακτηριστικά μεγάλης κλίμακας, όπως ο ομόρους στο σχήμα 4.33(a), παραμένουν στη λύση, καθώς τα επόμενα χαρακτηριστικά που προστίθενται είναι αρκετά μικρότερης κλίμακας (αναφερόμενοι πάντα στο iPGD). Το συμπέρασμα για τη κατανομή σφάλματος επαληθεύεται ξανά, παρατηρώντας τα πεδία της απόλυτης τιμής του σχετικού σφάλματος από την περίπτωση της συμπίεσης των λύσεων των

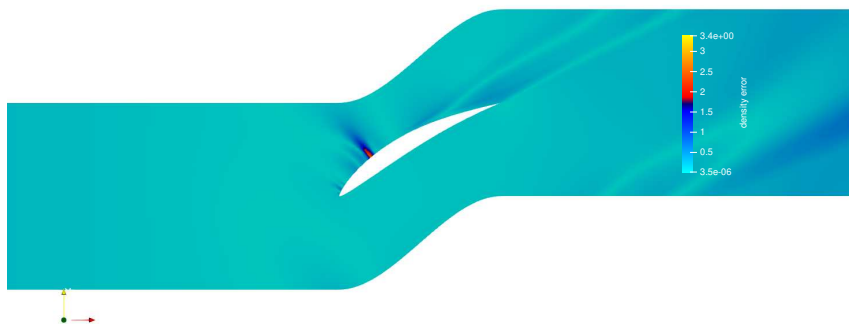


Σχήμα 4.41: Όροι αναπτύγματος PGD και SVD



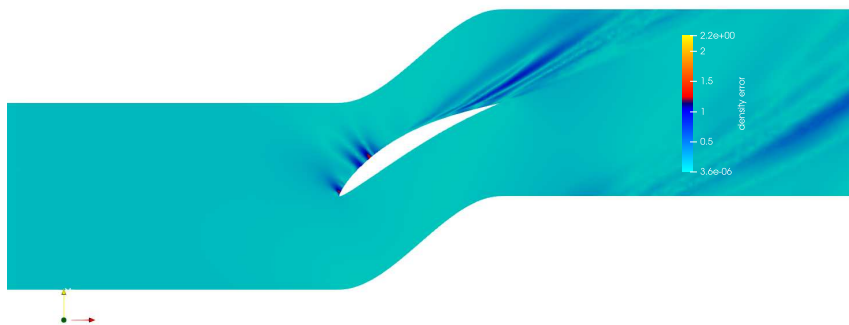
Σχήμα 4.42: Όροι αναπτύγματος PGD και SVD

NS, (σχήματα 4.43,4.44).



Σχήμα 4.43: Πεδίο σφάλματος iSVD(10)

Το αποτέλεσμα αυτό, οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι με τις ρυθμίσεις που έγιναν στις μεθόδους, το iSVD αναμένεται να δίνει καλύτερες ΠΧΤ σε πεδία όπου έχουν χωρικά εντοπισμένες ασυνέχειες και όχι πολλά κυρίαρχα χαρακτηριστικά, ενώ το iPGD αναμένεται να δίνει καλύτερες ΠΧΤ σε πεδία όπου οι ασυνέχειες καταλαμβάνουν μεγαλύτερη έκταση στο χωρίο της επίλυσης.



Σχήμα 4.44: Πεδίο σφάλματος iPGD(10,1)

Κεφάλαιο 5

Βελτιστοποίηση με τη χρήση των συμπιεσμένων πεδίων

Στο παρόν κεφάλαιο θα ενταχθούν τα 3 προηγούμενα παραδείγματα πεδίων σε προβλήματα βελτιστοποίησης. Αρχικά θα παρουσιαστεί ο αντίστροφος σχεδιασμός της κατανομής ταχύτητας ενός ρευστού με χρήση της 1Δ μη-μόνιμης συνεκτικής εξίσωσης Burgers, ενώ στη συνέχεια θα παρουσιαστούν οι βελτιστοποιήσεις σχήματος μεμονωμένων αεροτομών για μέγιστη άνωση. Το παρόν κεφάλαιο αποτελεί τον πυρήνα της εργασίας, καθώς ασχέτως με την απόδοση των τεχνικών στη συμπίεση μεμονωμένων χρονοσειρών πεδίων, το συμπέρασμα που ενδιαφέρει τον μηχανικό είναι το πόσο ή αν επηρεάζεται η ποιότητα της τελικής βελτιστοποίησης από την εφαρμογή των τεχνικών συμπίεσης. Συνεπώς, μαζί με τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης θα παρουσιαστούν και κάποιες μετρικές ποσότητες για την αξιολόγηση αυτών όπως και σε προηγούμενα κεφάλαια. Θα γίνει ανάλυση ιδίως των διανυσμάτων των παραγώγων ευαισθησίας όπως προκύπτουν είτε από αποσυμπιεσμένες χρονοσειρές, είτε από πλήρως αποθηκευμένες χρονοσειρές. Για κάθε παράδειγμα, θα παρουσιαστεί ο εξής πίνακας:

Τεχνική Συμπίεσης	CR	SDs		
		g(dB)	θ(deg)	ε
Άνευ συμπίεσης	-	-	-	-
...				

Πίνακας 5.1: Μεγέθη για τη σύγκριση τεχνικών συμπίεσης

όπου θ η γωνία μεταξύ των σημμάτων ως διανύσματα:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\phi \cdot \phi'}{\|\phi\| \|\phi'\|}\right) \quad (5.1)$$

5.1 Βέλτιστος έλεγχος συστήματος που μοντελοποιείται με την

1Δ συνεκτική εξίσωση Burgers

Στο παρόν κεφάλαιο θα χρησιμοποιηθεί η συνεκτική εξίσωση Burgers για την επίδειξη της ικανότητας εξοικονόμησης χώρου κατά τη βελτιστοποίηση ενός χρονικά μη-μόνιμου συστήματος, κάνοντας χρήση των ΠΧΤ. Προτιμάται η συνεκτική εκδοχή καθώς η διάχυση αίρει τα προβλήματα κατά την επίλυση (όπως ταλαντώσεις πριν και μετά την ασυνέχεια) που θα είχε η καθαρά υπερβολική εξίσωση Burgers[36], καθώς είναι επιθυμητή η μελέτη περιπτώσεων που εμφανίζουν ασυνέχειες.

Έστω οι συναρτήσεις: $u(x, t) : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $z(x) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ όπου u θα μπορούσε να είναι κάποια ταχύτητα και z η συνάρτηση ελέγχου και η συνάρτηση κόστους:

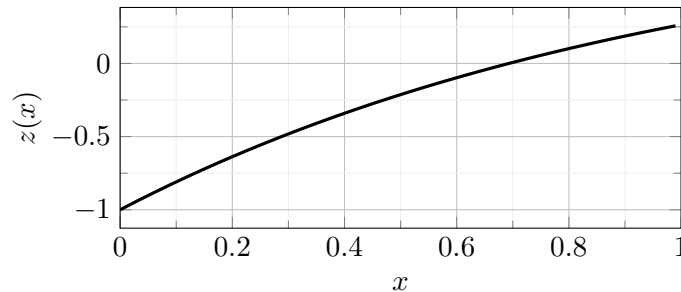
$$\mathcal{F}[u, z] = \frac{1}{2} \int_0^L (u(x, T, z) - u_{tar}(x))^2 dx \quad (5.2)$$

που ποσοτικοποιεί την "απόσταση" της λύσης $u(x, T)$, στο τέλος του χρονικού διαστήματος, από μία επιθυμητή συνάρτηση $u_{tar}(x)$. Συγκεκριμένα, η συνάρτηση κόστους 5.2, είναι το εμβαδόν της περιοχής μεταξύ των δύο κατανομών, $u(x, T)$, $u_{tar}(x)$. Προφανώς ελαχιστοποίηση αυτής, συνεπάγεται την καλύτερη δυνατή προσαρμογή της $u(x, T)$ στην επιθυμητή της μορφή τη στιγμή $t = T$.

Η u ικανοποιεί τον περιορισμό ότι είναι λύση της:

$$\begin{cases} \mathcal{D}(u, z) = u(x, t)_t + u(x, t) \cdot u(x, t)_x - \nu u(x, t)_{xx} - u(x, t) \cdot z(x) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(0, t) = \frac{2}{3}, u(L, t) = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (5.3)$$

Επιβάλλονται σταθερές οριακές συνθήκες ανεξάρτητες της συνάρτησης ελέγχου. Θα ακολουθηθεί μία διαδικασία αντίστροφου σχεδιασμού, δηλαδή επιζητούμε τη u για την οποία ελαχιστοποιείται η απόσταση $\| u(x, T) - u_{tar}(x) \|_{L_2}$ σε *αρκούντως μεγάλο τελικό χρόνο* T . Η συνάρτηση $z(x)$ αρχικοποιείται ως $z(x) = 1 - e^{-2x}$ (σχήμα 5.1)



Σχήμα 5.1: Αρχικοποίηση της συνάρτησης ελέγχου $z(x)$

..

Ο έλεγχος υλοποιείται μέσω της συνεχούς συνάρτησης ελέγχου $z(x)$ και της συζυγούς μεθόδου για τον υπολογισμό των απαραίτητων μεταβολών δz για την ελαχιστοποίησή του 5.2.[36].

Συγκεκριμένα, το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι:

$$\begin{aligned} \min_{u(x,t), z(x)} \quad & \frac{1}{2} \|u(x, T) - u_{tar}(x)\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{D}(u, z) = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Για την ελαχιστοποίηση του $\mathcal{F}[u, z]$ χρησιμοποιείται η μέθοδος της απότομης καθόδου, όπου αν p ο δείκτης αρίθμησης των κύκλων βελτιστοποίησης:

$$z_{p+1}(x_i) = z_p(x_i) - \eta \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta z}(x_i) \quad (5.5)$$

Η παράγωγος της συνάρτησης κόστους ορίζεται ως:

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta z} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}[u, z(x) + \varepsilon \delta z(x)] - \mathcal{F}[u, z(x)]}{\varepsilon} \quad (5.6)$$

όπου $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \ll 1$ και $\delta z(x)$ μια μεταβολή της $z(x)$. Το συνεχές διάστημα $[0, L]$ διαμερίζεται σε n_x ίσα υποδιαστήματα. Άρα πλέον στο διακριτό σύνολο με στοιχεία τα x_i , οι μεταβλητές ελέγχου είναι οι τιμές $z_i = z(x_i)$ που προκύπτουν από τον υπολογισμό της $z(x)$ στα x_i . Έτσι για τον υπολογισμό της παραγώγου 5.6 απαιτούνται n_x υπολογισμοί του $\mathcal{F}[u, z]$ δηλαδή n_x επιλύσεις της 4.5.

5.1.1 Συνεχής Συζυγής μέθοδος για τη μη-μόνιμη Εξίσωση Burgers

Για να μην πραγματοποιηθούν οι υπολογισμοί που απαιτούνται από την 5.6, όπως παρουσιάστηκε και στο κεφάλαιο 1.2, επιστρατεύεται η συζυγής μέθοδος:

αρχικά επαυξάνεται η συνάρτηση κόστους με το εσωτερικό γινόμενο $\langle \Psi, \mathcal{D}(u, z) \rangle$ της ΜΔΕ με μία συνάρτηση $\Psi(x, t)$

$$\mathcal{F}_{aug} = \frac{1}{2} \int_0^L (u(x, T) - u_{tar}(x))^2 dx - \int_0^T \int_0^L \mathcal{D}(u, z) \Psi(x, t) dx dt \quad (5.7)$$

η πρώτη μεταβολή είναι:

$$\frac{\delta \mathcal{F}_{aug}}{\delta z} = \int_0^L (u(x, T) - u_{tar}(x)) \frac{\delta u(x, T)}{\delta z} dx$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_0^L \frac{\delta}{\delta z} (u(x,t)_t + u(x,t)u(x,t)_x - \nu u(x,t)_{xx} - u(x,t)z(x)) \Psi(x,t) dx dt \\
& = \int_0^L (u(x,T) - u_{tar}(x)) \frac{\delta u(x,T)}{\delta z} dx \\
& \quad - \underbrace{\int_0^T \int_0^L \frac{\delta}{\delta z} u(x,t)_t \Psi(x,t) dx dt}_{I_1} - \underbrace{\int_0^T \int_0^L \frac{\delta}{\delta z} \left(\frac{1}{2}u(x,t)^2\right)_x \Psi(x,t) dx dt}_{I_2} \\
& \quad + \underbrace{\int_0^T \int_0^L \frac{\delta}{\delta z} \nu u(x,t)_{xx} \Psi(x,t) dx dt}_{I_3} + \underbrace{\int_0^T \int_0^L \frac{\delta}{\delta z} (u(x,t)z(x)) \Psi(x,t) dx dt}_{I_4} \tag{5.8}
\end{aligned}$$

Τώρα κάνοντας χρήση της παραγοντικής ολοκλήρωσης, οι διαφορικοί τελεστές μεταφέρονται στη συνάρτηση Ψ . Έτσι οι παραπάνω όροι γίνονται (τα ορίσματα των συναρτήσεων παραλείπονται για λόγους συντομίας):

$$\begin{aligned}
I_1 & = \int_0^L \left[\frac{\delta u}{\delta z} \Psi \right]_0^T dx - \int_0^T \int_0^L \frac{\delta u}{\delta z} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dx dt \\
& = \int_0^L \left(\frac{\delta u(x,T)}{\delta z} \Psi(x,T) - \frac{\delta u(x,0)}{\delta z} \Psi(x,0) \right) dt - \int_0^T \int_0^L \frac{\delta u}{\delta z} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dx dt \tag{5.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 & = \int_0^L \int_0^T \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta}{\delta z} \left(\frac{1}{2}u^2\right) \Psi dt dx = \int_0^L \left[\Psi \frac{\delta}{\delta z} \left(\frac{1}{2}u^2\right) \right]_0^T dt - \int_0^T \int_0^L \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\delta}{\delta z} \left(\frac{1}{2}u^2\right) dx dt \\
& = - \int_0^T \int_0^L \frac{\partial \Psi}{\partial x} u \frac{\delta u}{\delta z} dx dt \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Οι μεταβολές της u στο σύνορο του $\Omega_x = [0, L]$ και η μεταβολή της $u_0(x)$ είναι 0, καθώς οι συνοριακές συνθήκες όπως και η αρχική κατανομή $u_0(x)$ είναι ανεξάρτητες της $z(x)$

$$\begin{aligned}
I_3 & = \nu \int_0^L \int_0^T \Psi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\delta u}{\delta z}\right) dt dx \\
& = \nu \int_0^L \left[\Psi \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta u}{\delta z} \right]_0^T dt - \int_0^L \int_0^T \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta u}{\delta z} dt dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \nu \int_0^T \left(\Psi(L, t) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta u(L, t)}{\delta z} - \Psi(0, t) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta u(0, t)}{\delta z} \right) dt \\
&\quad - \nu \int_0^T \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\delta u}{\delta z} \right]_0^L dt + \nu \int_0^T \int_0^L \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \frac{\delta u}{\delta z} dx dt
\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$I_4 = \int_0^T \int_0^L \Psi u dx dt + \int_0^T \int_0^L \Psi \frac{\delta u}{\delta z} z(x) dx dt \tag{5.12}$$

Από τους παρακάτω όρους, όσοι φέρουν ένδειξη FAE (Field Adjoint Equations) συνιστούν τη συζυγή ΜΔΕ, ABC (Adjoint Boundary Conditions) ενώ οι υπόλοιποι την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης κόστους.

Έτσι η πρώτη παράγωγος 5.8 γράφεται:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{F}_{aug}}{\delta z} &= \underbrace{\int_0^L (u(x, T) - u(x)_{tar}) \frac{\delta u(x, T)}{\delta z} dx}_{ABC} \\
&\quad - \int_0^L \left(\underbrace{\frac{\delta u(x, T)}{\delta z} \Psi(x, T)}_{ABC} - \frac{\delta u(x, 0)}{\delta z} \Psi(x, 0) \right) dt + \underbrace{\int_0^T \int_0^L \frac{\delta u}{\delta z} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dx dt}_{FAE} \\
&\quad + \underbrace{\int_0^T \int_0^L u \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\delta u}{\delta z} dx dt}_{FAE} + \underbrace{\nu \int_0^T \left(\Psi(L, t) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta u(L, t)}{\delta z} - \Psi(0, t) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta u(0, t)}{\delta z} \right) dt}_{ABC} \\
&\quad + \underbrace{\nu \int_0^T \int_0^L \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \frac{\delta u}{\delta z} dx dt}_{FAE} + \int_0^T \int_0^L \Psi \frac{\delta u}{\delta z} z(x) dx dt + \int_0^T \int_0^L \Psi u dx dt
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Έτσι προκύπτει το συζυγές πρόβλημα με τις αντίστοιχες οριακές και αρχικές συνθήκες:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + \Psi(x, t) z(x) = 0 \\ \Psi(0, t) = \Psi(L, t) = 0 \\ \Psi(x, T) = u(x, T) - u_{tar}(x) \end{cases} \tag{5.14}$$

Το συζυγές πρόβλημα, μαζί με το ευθύ, αποτελεί ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών 2 σημείων. Έτσι η μεταβολή της συνάρτησης κόστους σε κάθε σημείο του χωρίου είναι:

$$\frac{\delta \mathcal{F}_{aug}}{\delta z}(x) = \int_0^T \Psi(x, t) u(x, t) dx dt \quad (5.15)$$

5.1.2 Αριθμητικά Σχήματα και αποτελέσματα

Παρουσιάζονται τα αριθμητικά σχήματα που χρησιμοποιούνται για την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων. Χρησιμοποιείται ένα ρητό συντηρητικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών, δεύτερης τάξης ακρίβειας για τις χωρικές παραγώγους και ένα πρώτης τάξης σχήμα πρόσο Euler για τη χρονική ολοκλήρωση κατά το [10]. Έτσι:

$$u_{xx} \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\delta x^2} \quad (5.16)$$

$$uu_x = \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x \approx \frac{(u_{i+1}^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2}{4\delta x} \quad (5.17)$$

$$u_t \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} \quad (5.18)$$

και άρα:

$$\mathbf{F}_i(u) = z(x_i)u_i^n - \frac{(u_{i+1}^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2}{4\delta x} - \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\delta x^2} \Rightarrow u_i^{n+1} = u_i^n + \delta t \mathbf{F}_i(u) \quad (5.19)$$

Για τη συζυγή εξίσωση ισχύει το ίδιο σχήμα:

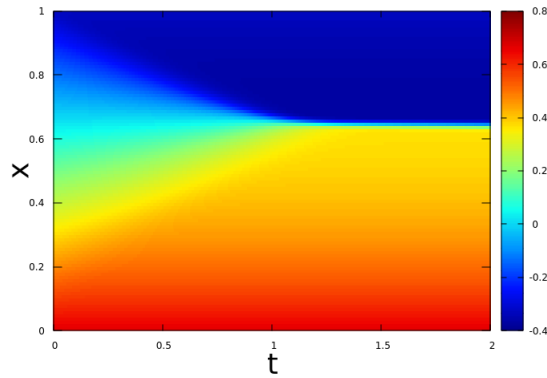
$$\hat{\mathbf{F}}_i(\Psi) = -z(x_i)\Psi_i^n - u_i^n \frac{\Psi_{i+1}^n - \Psi_{i-1}^n}{4\delta x} - \nu \frac{\Psi_{i+1}^n - 2\Psi_i^n + \Psi_{i-1}^n}{\delta x^2} \Rightarrow \Psi_i^{n-1} = \Psi_i^n - \delta t \hat{\mathbf{F}}_i(\Psi) \quad (5.20)$$

με σημαντική διαφορά στην τελευταία, ότι η παράμετρος του χρόνου είναι ανεστραμμένη. Αυτό εμφανίζεται μέσω της αλλαγής μεταβλητής $\tau = -t \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \tau}$

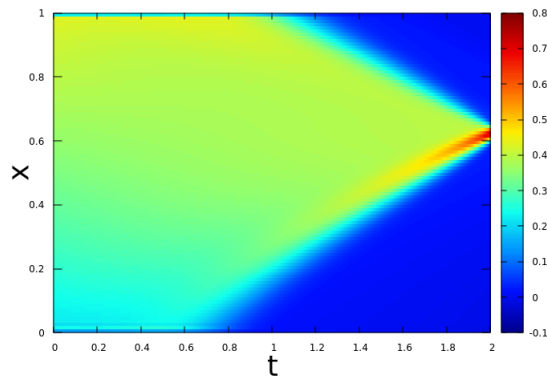
Παρακάτω παρουσιάζονται οι λύσεις των δύο εξισώσεων για το χωρίο

$\Omega = [0, L = 1] \times [0, T = 2]$ για χρονικό βήμα $\delta t = 10^{-3}$, και χωρικό βήμα $\delta x = 10^{-2}$ άρα:

Εξίσωση	Βήματα	Πλήθος βημάτων
Πρωτεύον Πρόβλημα	$dx = 10^{-2}, dt = 10^{-3}$	$n_x = 100, n_t = 2000$
Συζυγές Πρόβλημα	$dx = 10^{-2}, dt = -10^{-3}$	$n_x = 100, n_t = 2000$



(a) Λύση πρωτεύοντος προβλήματος



(b) Λύση συζυγούς προβλήματος

Σχήμα 5.2: Αποτέλεσμα πρώτου κύκλου βελτιστοποίησης με πλήρη αποθήκευση

Έχει καθοριστεί ο αριθμός $CFL = 0.5$ και το κατάλληλο (για την ευστάθεια της λύσης) χρονικό βήμα

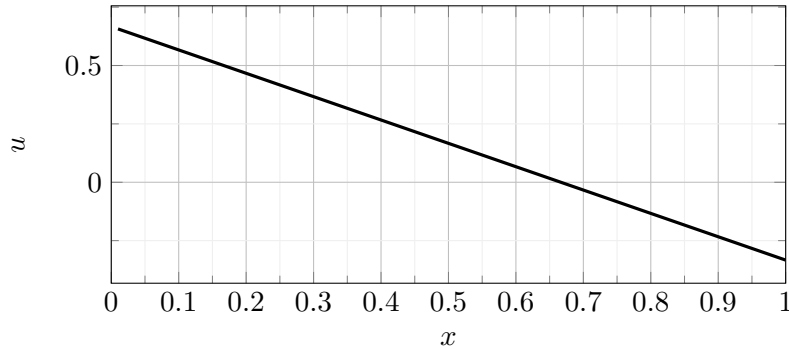
$$\delta t = \frac{1}{2} CFL \frac{\delta x}{U_{max}} \quad (5.21)$$

όπου U_{max} η μεγαλύτερη ταχύτητα που υπάρχει στην αρχική συνάρτηση. Η λύση αποθηκεύθηκε ανά 5 επαναλήψεις.

Η μορφή της λύσης συμφωνεί με τη θεωρία, καθώς ο μη γραμμικός όρος δημιουργεί ασυνέχειες σε αρχικές συνθήκες όπως αυτή που επιβλήθηκε [37].

Η μορφή της λύσης που φαίνεται στο σχήμα 5.2(a) είναι αναμενόμενη, λαμβάνοντας υπόψη την αρχική συνθήκη του σχήματος 5.3 όπου εξαιτίας της ύπαρξης τόσο θετικών όσο και αρνητικών ταχυτήτων, είναι αιτιολογημένη η εμφάνιση ασυνέχειας λίγο μετά το μέσο του $[0, L]$. Η ύπαρξη θετικών και αρνητικών ταχυτήτων στην αρχική συνθήκη, υποδηλώνει ότι θα

υπάρξει τομή των χαρακτηριστικών και άρα ασυνέχεια κατά τη χρονική εξέλιξη του συστήματος. Το πού θα εμφανιστεί αυτή, εξαρτάται από τη διαφορά των (σταθερών) συνοριακών τιμών. Από τη στιγμή που το αριστερό σύνορο διατηρείται σε υψηλότερη ταχύτητα από το δεξιό, η ασυνέχεια είναι αναμενόμενο να σχηματιστεί μετά το μέσο του χωρίου.



Σχήμα 5.3: Αρχική συνθήκη $u(x, 0)$

5.1.3 Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης

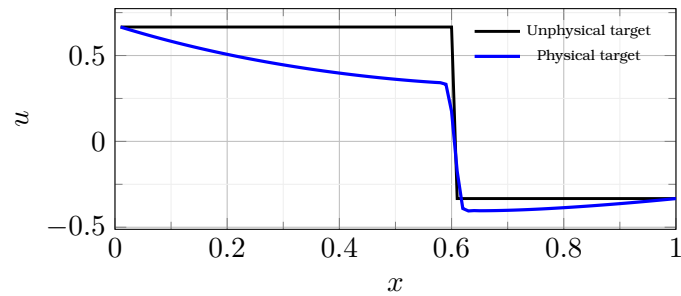
Αρχικά θα παρουσιαστεί η διαδικασία που ακολουθείται για τη βελτιστοποίηση με τη λύση πλήρως αποθηκευμένη

Algorithm 3 Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης

- 1: $z \leftarrow z(x)$
 - 2: **while** $\mathcal{F} \geq tol$ **do** ▷ σχολιο
 - 3: $j = j + 1$
 - 4: *solve primal*
 - 5: *solve adjoint*
 - 6: *compute* $\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta z}$
 - 7: *update* $z(x)^{j+1} = z(x)^j - \epsilon \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta z}$
 - 8: **end while**
 - 9: **return** $\mathcal{F}, z^*(x)$ ▷ Επιστρέφει $z^*(x)$ ώστε $\min(\mathcal{F})$
-

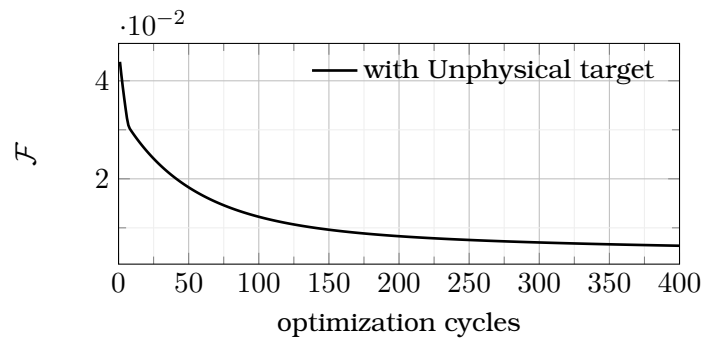
Σημαντικό ρόλο για τον αντίστροφο σχεδιασμό, παίζει η μορφή της συνάρτησης στόχου. Αυτή πρέπει να ανταποκρίνεται στους περιορισμούς του προβλήματος (όπως ο τελικός χρόνος). Εάν η συνάρτηση στόχου έχει χαρακτηριστικά που δεν μπορούν να αποδοθούν από τον περιορισμό της ΜΔΕ, τότε η ελάχιστη (κατά L_2) λύση θα είναι μία ποσότητα όχι αρκετά ικανοποιητική, όπως φαίνεται από το σχήμα 5.5, όπου η διαδικασία συγκλίνει σε μία τιμή L_2 απόστασης που δεν είναι ικανοποιητική. Η διαφορά φαίνεται στο σχήμα 5.4, όπου φαίνεται η απαίτηση που τέθηκε στο πρόβλημα και η εφικτή λύση για $t \rightarrow \infty$.

Στο σχήμα 5.4 φαίνεται μία "αφύσικη" συνάρτηση στόχου όπου επιθυμούμε η λύση να έχει ασυνεχή μορφή με σταθερή τιμή σε κάθε υποδιάστημα. Η μπλέ καμπύλη προέκυψε εξελίσσοντας την 4.5 για 1500 βήματα και συνεπώς αποτελεί μία συνάρτηση στόχο που είναι δεδομένο ότι υπάρχει L_2 ελάχιστο.



Σχήμα 5.4: Συναρτήσεις στόχοι για τον αντίστροφο σχεδιασμό, u_{tar}

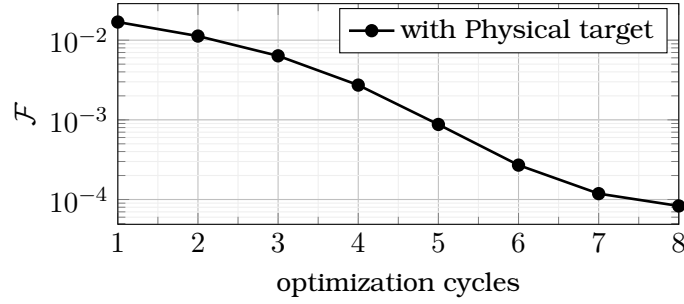
Στην περίπτωση της "αφύσικης" συνάρτησης στόχου η σύγκλιση είναι εξαιρετικά αργή (σχήμα 5.5):



Σχήμα 5.5: Σύγκλιση της συνάρτησης κόστους

Όταν η συνάρτηση κόστους είναι εκτός του συνόλου των εφικτών λύσεων της 4.5 για τον δεδομένο τελικό χρόνο (πλήθος βημάτων) που επιλέγεται, τότε το ελάχιστο του \mathcal{F} βρίσκεται στο σύνορο αυτού του συνόλου. Αυτό μπορεί να μην ικανοποιεί τον μηχανικό αφού δεν υπάρχει περίπτωση η λύση αυτή να βελτιωθεί. Χαρακτηριστικά, παρατηρούμε πως για το λόγο αυτό, με την "αφύσικη" συνάρτηση στόχου, απαιτούνται πάνω από 400 κύκλοι βελτιστοποίησης, ενώ η συνάρτηση κόστους συγκλίνει περίπου στην τιμή $\mathcal{F} = 0.005$.

Απεναντίας, για τη "φυσική" συνάρτηση στόχου, η αλλαγή είναι σημαντικότερη, καθώς στη περίπτωση αυτή απαιτούνται μόλις 9 επαναλήψεις για τη σύγκλιση με ένα σφάλμα τάξης $\mathcal{O}(10^{-5})$.



Σχήμα 5.6: Σύγκλιση της συνάρτησης κόστους

5.1.4 Αντίστροφος σχεδιασμός

Ακολουθεί ο βέλτιστος σχεδιασμός της λύσης της εξίσωσης Burgers 4.5. Θα παρουσιαστούν συγκριτικά οι βελτιστοποιήσεις κάνοντας χρήση των αποσυμπιεσμένων πεδίων από τα *iSVD* και *iPGD* αντίστοιχα, αντί των κανονικών. Όπως έχει εξηγηθεί και προηγουμένως στο κεφάλαιο 1.2. Για να ποσοτικοποιηθεί η οικονομία σε αποθηκευτικό χώρο υπενθυμίζεται ο ορισμός του λόγου συμπίεσης (*CR*):

$$CR = \frac{Full\ Storage\ Size}{Compressed\ Storage\ Size} \quad (5.22)$$

Όπου με *Compressed Storage Size* συμβολίζεται ο όγκος πληροφορίας που αποθηκεύεται όταν γίνεται χρήση των τεχνικών προσέγγισης. Στην περίπτωση που αποθηκεύεται ολόκληρο το πεδίο, ο όγκος δεδομένων που δεσμεύεται είναι *Full storage*. Οι δύο αυτοί όγκοι μετρώνται από τα πλήθη στοιχείων που απαιτεί η κάθε μέθοδος για την αποθήκευση των "δομικών της λίθων" (βάσεις αν αναφερόμαστε στο PGD είτε για τους πίνακες U, V, s για το SVD). Η μετατροπή από όγκο στοιχείων σε πραγματικό χώρο αποθήκευσης στον υπολογιστή (λ.χ. σε GigaBytes) είναι αναλογική και άρα δεν θα επηρεάσει το αποτέλεσμα. Δηλαδή k στοιχεία αποθηκεύονται σε χώρο $8k$ Bytes και άρα 10^5 στοιχεία σε $10^5 8k$ Bytes για αριθμητική διπλής ακρίβειας.

Πιο συγκεκριμένα: το *iPGD* πρέπει να αποθηκεύσει Mm τιμές για τις M χωρικές βάσεις διάστασης $S_\mu(x) \in \mathbb{R}^m$ και Mn τιμές για τις M χρονικές βάσεις διάστασης $T_\mu(t) \in \mathbb{R}^n$. Το *iSVD* πρέπει να αποθηκεύσει τους πίνακες $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ και άρα για $r = M$

$$Storage_{isvd} = Mm + Mn + M = M(m + n + 1) \quad (5.23)$$

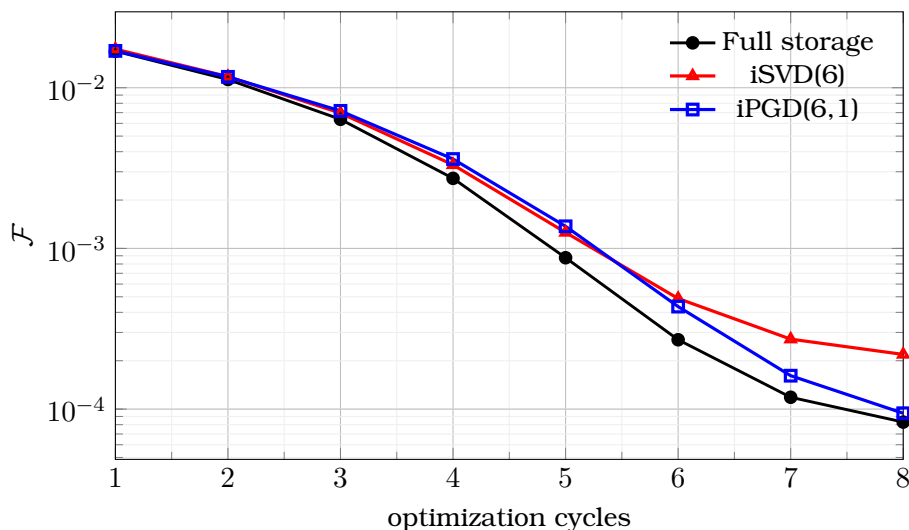
$$Storage_{ipgd} = Mm + Mn = M(m + n) \approx \mathcal{O}(Storage_{isvd}) \quad (5.24)$$

Για 6 βάσεις *iPGD* και τις 6 πρώτες ιδιάζουσες τιμές:

Η διαδικασία της βελτιστοποίησης τερματίζεται όταν η συνάρτηση κόστους 5.2 πέσει κάτω από μία ορισμένη τιμή (10^{-5}) ή όταν φτάσει σε ελάχιστο, ανάλογα την ποιότητα της συμπίεσης, όταν η μεταβολή μεταξύ 2 διαδοχικών κύκλων είναι: $\mathcal{F}_{j+1} - \mathcal{F}_j \leq 10^{-5}$

Τεχνική Συμπίεσης	CR	SDs		
		Q(dB)	θ(deg)	ε
Άνευ συμπίεσης	-	-	-	-
<i>iSVD</i> (6)	15.86	19.54	0.99	0.29
<i>iPGD</i> (6,1)	15.87	22.30	0.99	0.21

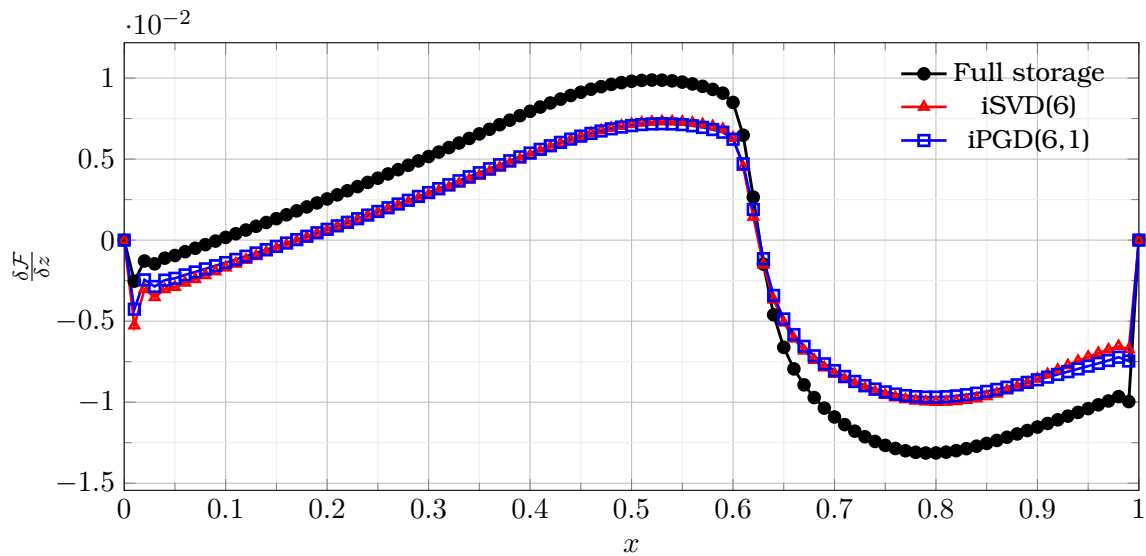
Πίνακας 5.2: Μετρικές ποιότητας των τεχνικών συμπίεσης για τις παραγώγους ευαισθησίας



Σχήμα 5.7: \mathcal{F} με πλήρη αποθήκευση, *iSVD* και *iPGD*

Παρατηρείται πως το πλήθος βάσεων είναι αρκετά μικρό για να προσεγγίσει με την απαραίτητη ακρίβεια τη λύση αναφοράς, ώστε οι κύκλοι βελτιστοποίησης με τις διαφορετικές τεχνικές συμπίεσης να καταλήξουν στο ίδιο ελάχιστο. Πιθανώς, η δυναμική της λύσης που αποτυπώνεται στα συμπίεσιμα πεδία, δεν είναι αρκετά πλούσια και οδηγεί σε λανθασμένη παράγωγο ευαισθησίας.

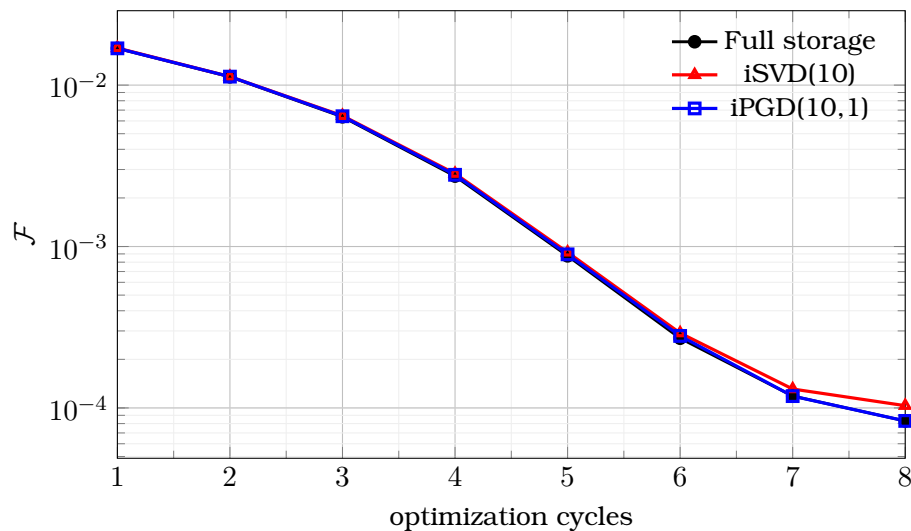
Παρατηρείται πως όπως ήταν αναμενόμενο από τη θεωρητική ανάλυση των μεθόδων [32], το *iSVD* είναι αρκετά κοντά στο *iPGD* όσον αφορά τη συμπεριφορά της \mathcal{F} .



Σχήμα 5.8: $\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta z}$ με πλήρη αποθήκευση, *iSVD* και *iPGD*

Στη συνάρτηση $\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta z}(x)$ (σχήμα 5.8) το *iPGD* είναι ελάχιστα πιο κοντά στις παραγώγους αναφοράς, χωρίς ωστόσο να είναι σημαντική η διαφορά του από το *iSVD*. Για να μελετηθεί η επίδραση του πλήθους των βάσεων στην ακρίβεια των παραγώγων ευαισθησίας και στην τελική τιμή της \mathcal{F} , τα παραπάνω επαναλαμβάνονται κρατώντας 10 βάσεις στο *iPGD* και 10 ιδιάζουσες τιμές στο *iSVD*

Κρατώντας 10 ιδιάζουσες τιμές και 10 βάσεις αντίστοιχα, τα κέρδη σε αποθηκευτικό χώρο



Σχήμα 5.9: Εξέλιξη της \mathcal{F} κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης με πλήρη αποθήκευση, *iSVD* και *iPGD*

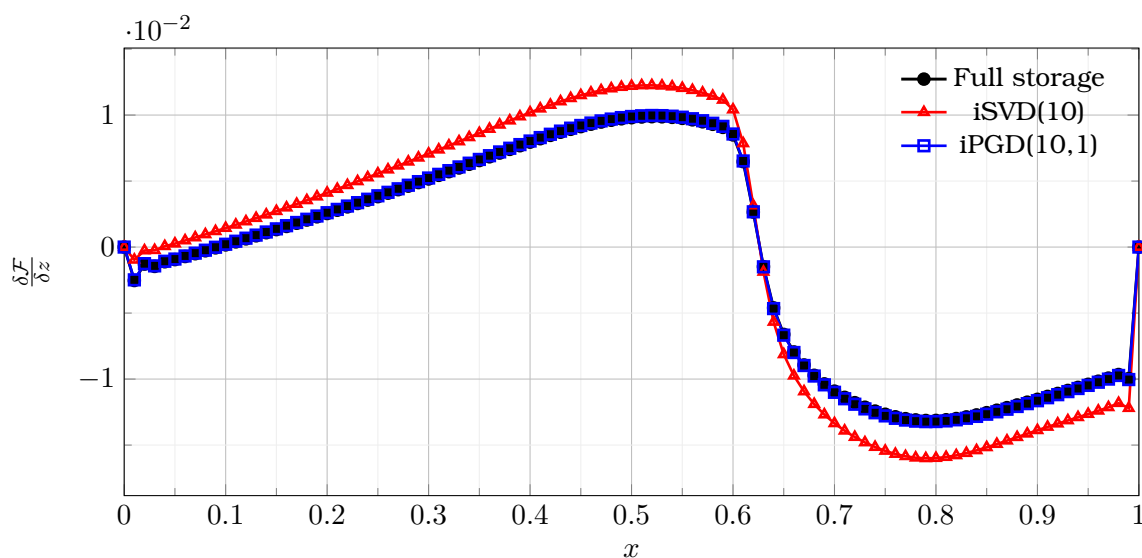
συνοψίζονται στον πίνακα 5.3:

Τεχνική Συμπίεσης	CR	SDs		
		g(dB)	θ(deg)	ε
Άνευ συμπίεσης	-	-	-	-
<i>iSVD</i> (10)	9.51	36.35	0.99	0.041
<i>iPGD</i> (10,1)	9.52	41.32	0.99	0.0235

Πίνακας 5.3: Μετρικές ποιότητας των τεχνικών συμπίεσης για τις παραγώγους ευαισθησίας

Ο υπολογιστικός χρόνος, ειδικά του *iPGD* αυξάνεται δραματικά όπως έχει φανεί και στον πίνακα 4.1.

Όπως ήταν αναμενόμενο, η αύξηση των διαστάσεων των χώρων των ΠΧΤ (βάσεις M για



Σχήμα 5.10: $\frac{\delta F}{\delta z}$ του τελευταίου κύκλου βελτιστοποίησης

το *iPGD* και τάξη αποκοπής k στο *iSVD*) από 6 σε 10, δίνει προσεγγίσεις με μεγαλύτερη ακρίβεια. Επίσης είναι εμφανές πως για το συγκεκριμένο πεδίο το οποίο είναι σχετικά "φτωχό" σε χαρακτηριστικά, πέρα από την εκτεταμένη ασυνέχεια και τη περιοχή όπου αυτή διαμορφώνεται, οι 10 βάσεις του *iPGD* επαρκούν ώστε η βελτιστοποίηση να μένει πρακτικά ανεπηρέαστη (σχήμα 5.9) από το εάν χρησιμοποιήθηκαν ΠΧΤ ή όχι. Αυτό δεν σημαίνει πως η *iSVD* δεν αποδίδει ικανοποιητικά, ωστόσο η ακρίβεια της *iPGD*(10, L) είναι σαφώς ανώτερη. Η μείωση του L_2 σφάλματος (ε) είναι και οπτικά εμφανής καθώς η παράγωγος ευαισθησίας με τις 10 βάσεις είναι εμφανώς πιο κοντά σε αυτή με τη πλήρη αποθήκευση (σχήμα 5.10). Συμπερασματικά, όπως φαίνεται και από το σχήμα 5.9, τόσο το *iPGD*(10, 1) όσο και το *iSVD*(10) αποδίδουν με ικανοποιητική ακρίβεια τη χρονοσειρά $u(t)$ ώστε η βελτιστοποίηση να μην επηρεάζεται από το σφάλμα κατά την αποσυμπίεση της χρονοσειράς.

5.2 Βελτιστοποίηση μορφής μεμονωμένης αεροτομής για μέγιστη άνωση με τη συνεχή συζυγή μέθοδο

Σε συνέχεια της επίλυσης των εξισώσεων της ενότητας 4.2 θα υλοποιηθεί ένας αλγόριθμος αιτιοκρατικής βελτιστοποίησης για τη μεγιστοποίηση της άνωσης μίας μεμονωμένης αεροτομής με αεροτομή εκκίνησης τη NACA0012. Τελικός στόχος της ενότητας είναι η αξιολόγηση της ποιότητας των αποτελεσμάτων της βελτιστοποίησης με και χωρίς τις συμπιεσμένες χρονοσειρές των πεδίων. Έτσι αφού ως τώρα έχουν αξιολογηθεί οι τεχνικές συμπίεσης ως προς την ποιότητα αναπαράστασης των ροϊκών πεδίων, είναι επόμενο να συγκριθούν ποσοτικά οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίζονται από τη συζυγή μέθοδο με και χωρίς τη χρήση των ΠΧΤ. Σε όλα τα παρακάτω, όταν γίνεται αναφορά στις παραγωγούς ευαισθησίας (Sensitivity Derivatives- SD) θα χρησιμοποιούνται οι δείκτες SD_f, SD_c από το *full* και το *compressed* αντίστοιχα, ώστε να είναι σαφές ποιά παράγωγος προέκυψε από ποιά επίλυση των συζυγών πεδριακών εξισώσεων (με τα πλήρη ή με τα προσεγγιστικά πεδία).

Για την επίλυση των συζυγών εξισώσεων γίνεται επίσης χρήση του κώδικα PUMA[35](Parallel Unstructured Multi-line Adjoint) που αναπτύχθηκε στη ΜΠΥΡ&Β. Από εδώ και στο εξής, αν δεν λεχθεί κάτι διαφορετικό, θα χρησιμοποιείται τανυστική γραφή και η σύμβαση Einstein για την άθροιση τανυστών όταν εμφανίζουν επαναλαμβανόμενο δείκτη: $a_{ij}b_{jk} = \sum_{j \in JCZ} a_{ij}b_{jk}$

Συγκεκριμένα το πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμό ΜΔΕ τίθεται ως εξής:

$$\min_{\rho, \vec{u}, p, b_n} [\mathcal{F}] \text{ s.t. } \vec{R}(\vec{U}) = \vec{0} \quad (5.25)$$

όπου $\vec{R}(\vec{U})$ είναι τα υπόλοιπα των εξισώσεων Euler 4.10 και η ποσότητα προς μεγιστοποίηση είναι η χρονικά μέση άνωση:

$$\mathcal{F} = \int_0^T \left(\int_{S_{foil}} p \delta_{ij} r_i n_j ds \right) dt \quad (5.26)$$

όπου r_i οι συνιστώσες του διανύσματος κάθετο στη u_∞ σύμφωνα με το [38] και ds το στοιχειώδες μήκος του συνόρου του χωρίου που συνιστά την αεροτομή. Το διάνυσμα της \vec{u}_∞ είναι:

$$\vec{u}_\infty = (|u_\infty| \cos(a(t)), |u_\infty| \sin(a(t))) \quad (5.27)$$

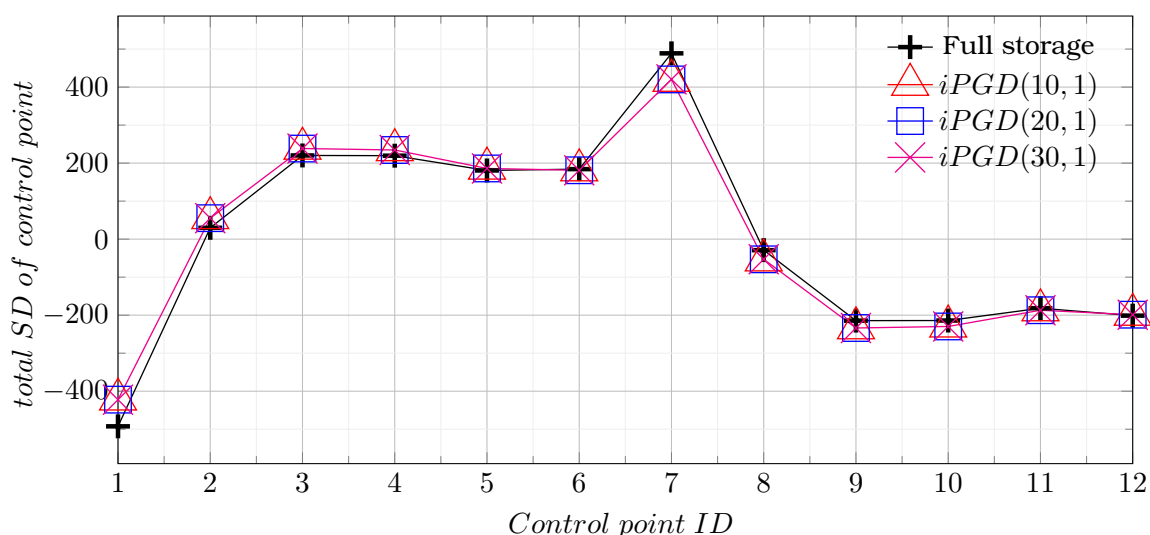
με κάθετο διάνυσμα το:

$$\vec{r} = \frac{1}{|u_\infty|} (\sin(a(t)), -\cos(a(t))) \quad (5.28)$$

5.2.1 Ανάλυση των παραγώγων ευαισθησίας που προκύπτουν από τις διαφορετικές λύσεις των συζυγών εξισώσεων Euler

Στη συγκεκριμένη ενότητα θα παρουσιαστεί η ικανότητα των τεχνικών να παράγουν ικανοποιητικές προσεγγίσεις για τις παραγώγους ευαισθησίας. Ωστόσο εξαιτίας της ευαισθησίας των συζυγών εξισώσεων στις μεταβολές στη λύση του Primal, μία ικανοποιητική προσέγγιση της παραγώγου σε κάποιο βήμα δεν εγγυάται ικανοποιητικό αποτέλεσμα στη βελτιστοποίηση που είναι και το επιθυμητό αποτέλεσμα. Αυτό θα διαπιστωθεί σε επόμενο κεφάλαιο που θα πραγματοποιηθεί η βελτιστοποίηση χωρίς και με τις μεθόδους συμπίεσης όπως έγινε και με την εξίσωση Burgers.

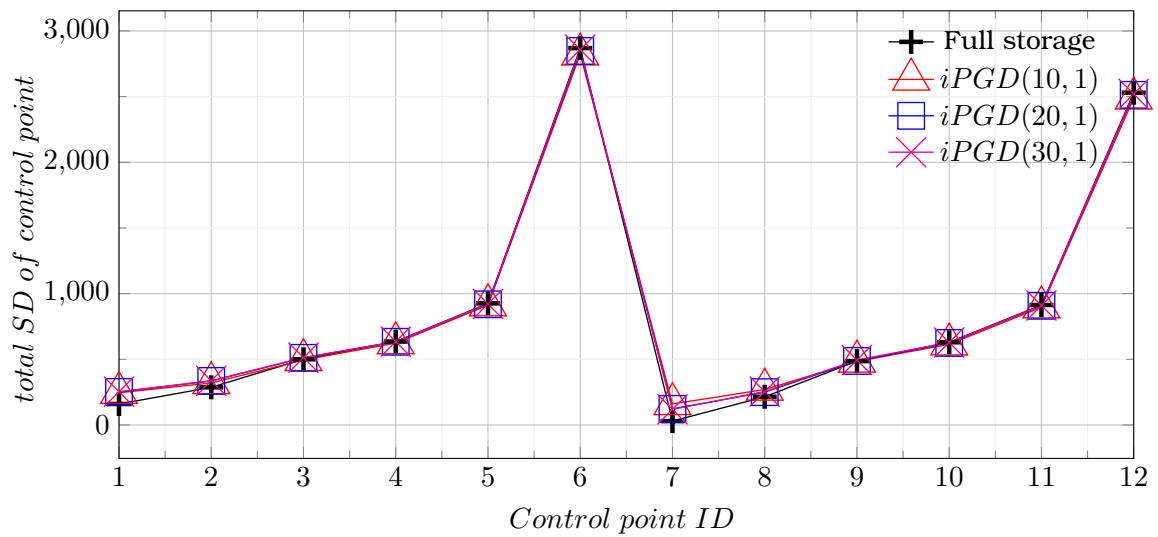
Θα παρουσιαστούν οι παράγωγοι ευαισθησίας κάθε σημείου ελέγχου, μετά από έναν κύκλο βελτιστοποίησης με συνάρτηση κόστους τη χρονικά μέση άνωση/αντίσταση $\overline{L}(t), \overline{D}(t)$.



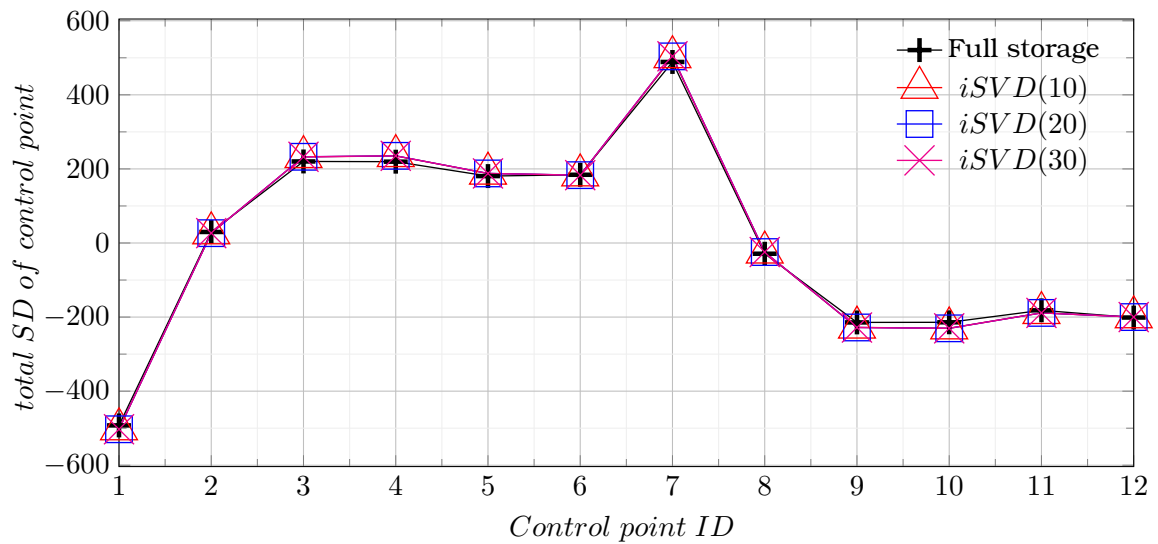
Σχήμα 5.11: Παράγωγοι ευαισθησίας της χρονικά μέσης αντίστασης ως προς τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου

Μέχρι στιγμής, η $iPGD(M, 1)$ (σχήμα 5.12) δείχνει να προσεγγίζει ικανοποιητικά τις παραγώγους ευαισθησίας (με συνάρτηση κόστους τη χρονικά μέση άνωση σε μία περίοδο). Ωστόσο, οι παράγωγοι υπολογισμένες από τις ΠΧΤ κατασκευασμένες με $iSVD$ είναι περισσότερο ακριβείς καθώς όπως φαίνεται και εποπτικά, πλησιάζουν περισσότερο τις παραγώγους αναφοράς σε περισσότερα σημεία ελέγχου (σχήμα 5.14). Στα σχήματα 5.16 και 5.15 φαίνονται τα απόλυτα σφάλματα των παραγώγων ευαισθησίας μετά από 1 κύκλο βελτιστοποίησης. Ο λόγος για τον οποίο τα σημεία ελέγχου 1 και 7 εμφανίζουν τόσο μεγάλες παραγώγους οφείλεται στο ότι βρίσκονται κοντά στο σημείο ανακοπής το οποίο είναι ένα ιδιόμορφο σημείο της ροής καθώς εκεί μηδενίζεται η ταχύτητα. Συνεπώς, είναι αναμενόμενες έντονες μεταβολές των τιμών των παραγώγων στο σημείο αυτό λόγω μεγάλων χωρικών κλίσεων.

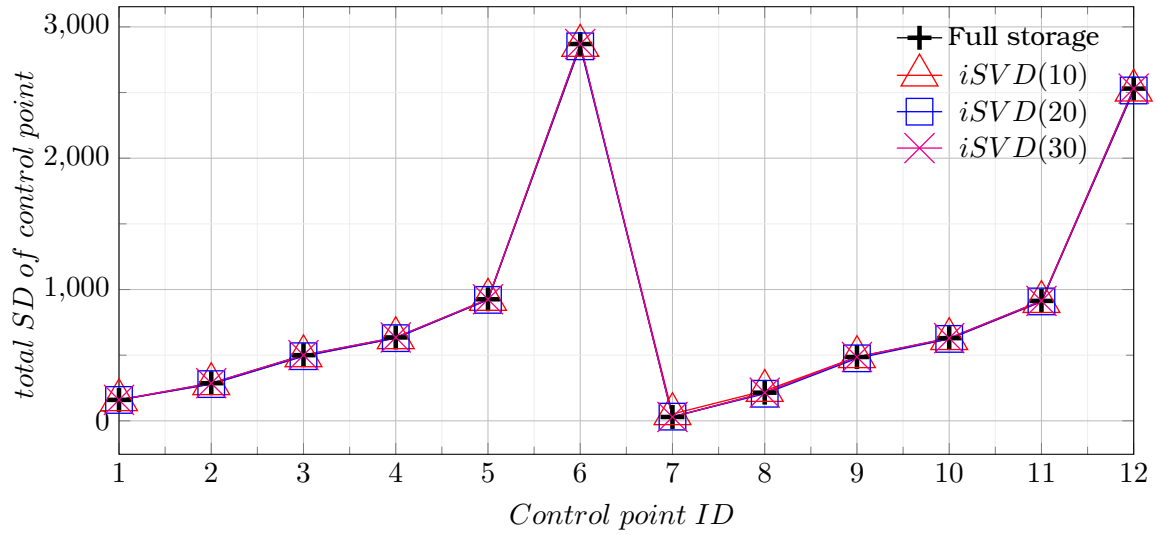
Το αποτέλεσμα ακολουθεί τα συμπεράσματα της ενότητας 4.2, καθώς η προσέγγιση των



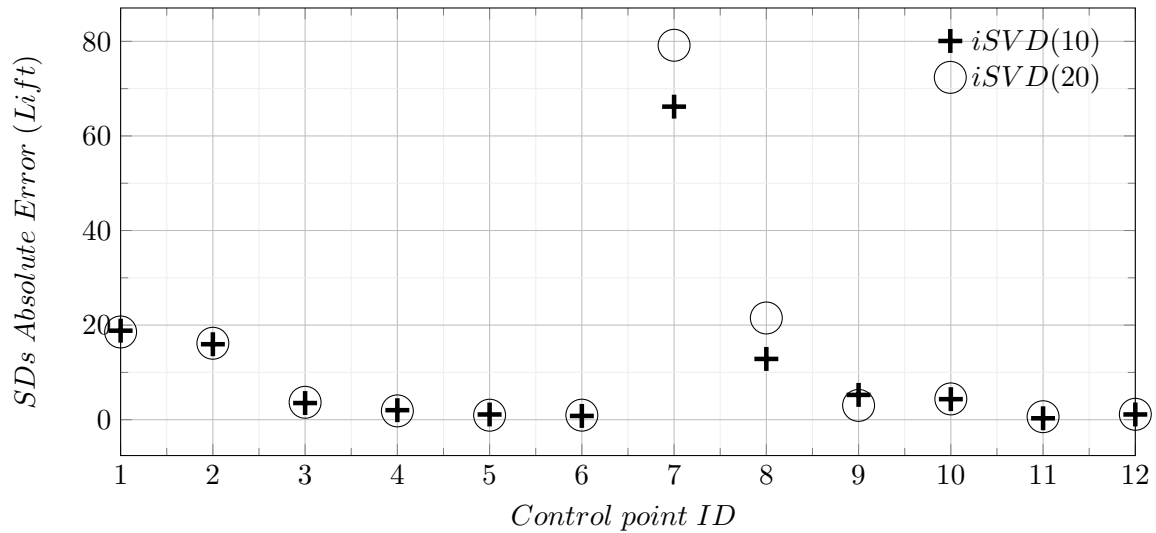
Σχήμα 5.12: Παράγωγοι ευαισθησίας χρονικά μέσης άνοσης ως προς τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου



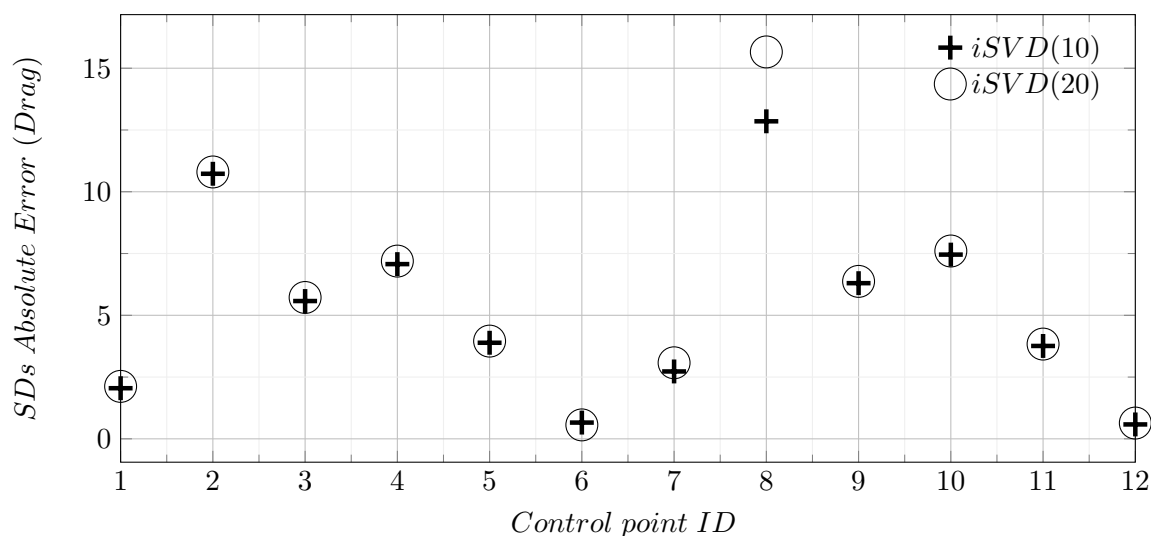
Σχήμα 5.13: Παράγωγοι ευαισθησίας χρονικά μέσης αντίστασης από ΠΧΤ με $iSVD(k)$ ως προς τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου



Σχήμα 5.14: Παράγωγοι ευαισθησίας χρονικά μέσης άνωσης υπολογισμένες με το iSVD



Σχήμα 5.15: Απόλυτα σφάλματα παραγών ευαισθησίας υπολογισμένες με το iSVD



Σχήμα 5.16: Απόλυτα σφάλματα παραγώγων ευαισθησίας υπολογισμένες με το iSVD

χρονοσειρών με iSVD επιφέρει μικρότερα σφάλματα κατά τον υπολογισμό των παραγώγων. Ακολουθεί η ένταξη των προσεγγιστικών χρονοσειρών σε μία διαδικασία μεγιστοποίησης της χρονικά μέσης άνωσης, εκκινώντας από μία συμμετρική αεροτομή NACA0012. Η επιβάρυνση σε υπολογιστικό κόστος κάθε κύκλου της βελτιστοποίησης είναι (σε πολλαπλάσια χρόνων επίλυσης των πρωταρχικών εξισώσεων): Με το iSVD ανεξαρτήτως τάξης, το κόστος

	iSVD(k)			iPGD(M, 1)		
k/M	10	20	30	10	20	30
T_{CPU}	1	1	1.02	1.036	1.14	1.32

Πίνακας 5.4: Επιβάρυνση υπολογιστικού κόστους λόγω υπολογισμού ΠΧΤ στη βελτιστοποίηση

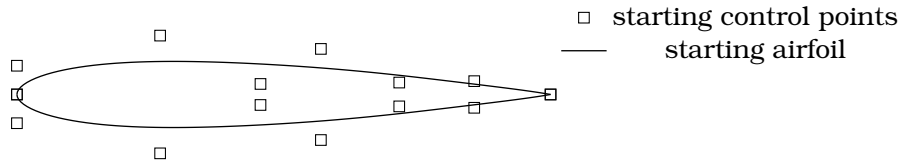
μένει πρακτικά ανεπηρέαστο.

5.2.2 Βελτιστοποίηση μορφής μεμονωμένης αεροτομής με χρήση των χρονοσειρών από τις ΠΧΤ

Θα παρουσιαστεί η βελτιστοποίηση μορφής μεμονωμένης αεροτομής υπό τις 2Δ μη-μόνιμες εξισώσεις Euler. Η αεροτομή παραμετροποιείται με 2 καμπύλες Bezier με συνολικά 12 σημεία ελέγχου όπως φαίνεται στο σχήμα:

Σκοπός της βελτιστοποίησης είναι η αύξηση του μέτρου της άνωσης με μεταβλητές ελέγχου τις κατά y συντεταγμένες των "εσωτερικών" σημείων ελέγχου της αεροτομής.

Για την υλοποίηση, υιοθετείται μία μέθοδος απότομης καθόδου, με αρκούντως μικρό βήμα το οποίο υπολογίζεται ευριστικά. Ο αλγόριθμος 4 υλοποιήθηκε με λογισμικό γραμμένο σε γλώσσα Python το οποίο εκτελείται στο cluster καρτών γραφικών της ΜΠΥΡ&Β. Το η που



Σχήμα 5.17: Αρχικό σχήμα αεροτομής

εμφανίζεται παραπάνω είναι το βήμα της απότομης καθόδου και υπολογίστηκε ευριστικά $\eta = 5 \cdot 10^{-4}$.

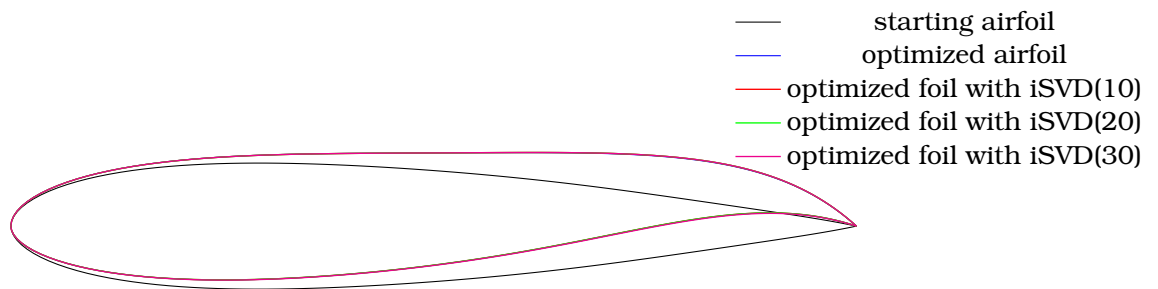
Τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης αποδεικνύουν πως η συμπίεση/αποσυμπίεση της

Algorithm 4 Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης μορφής αεροτομής

```

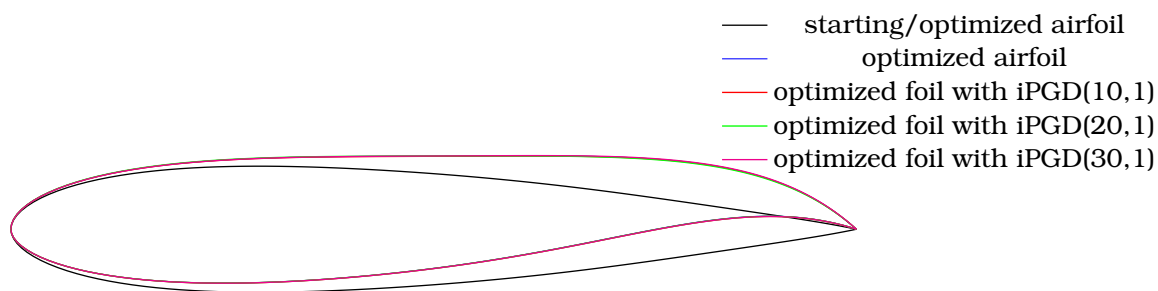
1: initialize geometry :  $\vec{CP}$ 
2: for  $j \leq \text{Max iterations}$  do                                     ▷ Κύκλοι βελτιστοποίησης
3:    $p = p + 1$ 
4:   for  $n = 1 : N$  do
5:     solve primal equations
6:     add primal fields into Low Rank Approximation
7:   end for
8:   for  $n = N : 1, -1$  do
9:     decompress primal fields
10:    solve adjoint equations
11:  end for
12:  compute  $\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \vec{CP}}$ 
13:  update  $\vec{CP}_{j+1} = \vec{CP}_j + \eta \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \vec{CP}}$ 
14: end for
15: return  $\mathcal{F}, \vec{CP}$       ▷ Επιστρέφει τις συντεταγμένες των Control Points  $\vec{CP}$  ώστε  $\max(\mathcal{F})$ 

```



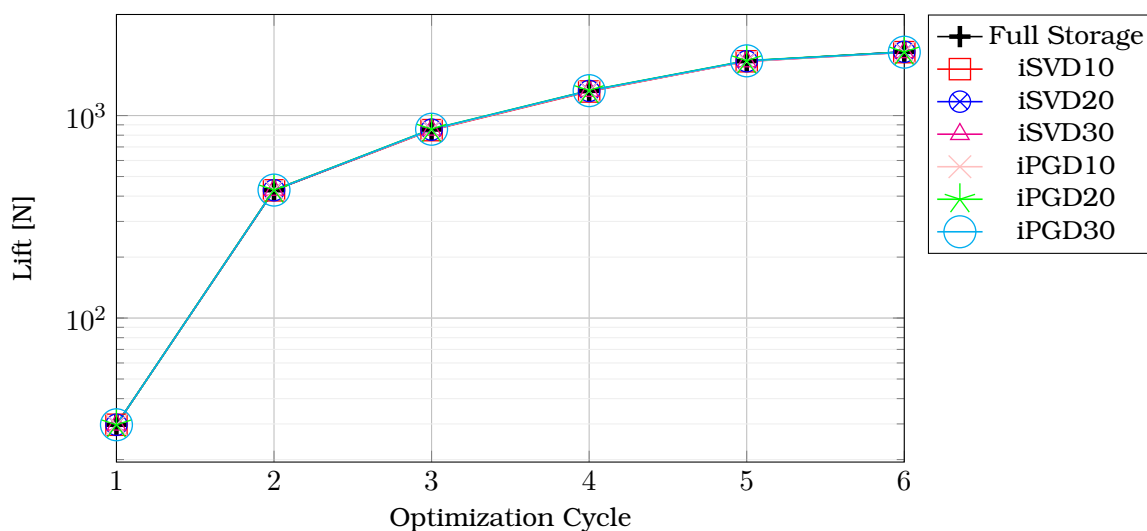
Σχήμα 5.18: Βελτιστοποιημένη αεροτομή για μέγιστη άνωση μετά από 6 κύκλους με $iSVD(k)$

χρονοσειράς πρακτικά δεν επηρέασε καθόλου το αποτέλεσμα της βελτιστοποίησης, καθώς εποπτικά έστω, οι αεροτομές που παρήχθησαν για διαφορετικές τάξεις αποκοπής/πλήθους βάσεων για τα $iSVD/iPGD$ αντίστοιχα (σχήματα 5.18 και 5.19), είναι εποπτικά πανομοιότυπες. Αυτό φαίνεται και από το σχήμα 5.20 όπου οι τιμές της συνάρτησης κόστους \mathcal{F} και για τις 2 μεθόδους, είναι εξαιρετικά κοντά στις αντίστοιχες τιμές της \mathcal{F} υπολογισμένες με τις



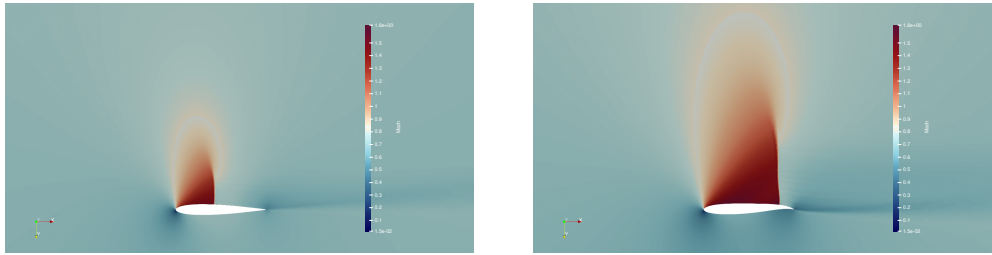
Σχήμα 5.19: Βελτιστοποιημένη αεροτομή για μέγιστη άνωση μετά από 6 κύκλους με $iPGD(M, 1)$

ακριβείς χρονοσειρές.



Σχήμα 5.20: Εξέλιξη της άνωσης κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης

Η τελική αεροτομή (σχήμα 5.21(b)) έχει τα χαρακτηριστικά που αναμένονται από μία διηχητική αεροτομή. Επίπεδη πλευρά υποπίεσης, για την παράταση της περιοχής ανάντη του κύματος κρούσης και έντασης αυτού, όπως και τη χαρακτηριστική καμπύλωση της ακμής εκφυγής για την περαιτέρω αύξηση της πίεσης στην περιοχή αυτή.



(a) Πεδίο Mach πριν τη βελτιστοποίηση

(b) Πεδίο Mach μετά τη βελτιστοποίηση

Σχήμα 5.21: Κύμα κρούσης στη πλευρά υποπίεσης μεμονωμένης αεροτομής σε διηχητική ροή

Να σημειωθεί πως το αποτέλεσμα αυτό έχει προκύψει χωρίς την επιβολή περιορισμών για τα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά της αεροτομής. Σε μία λεπτομερέστερη προσέγγιση του προβλήματος μεγιστοποίησης της άνωσης, θα έπρεπε να ληφθεί υπόψη και η αύξηση της αντίστασης λόγω του εντονότερου κύματος κρούσης και να περιοριστεί.

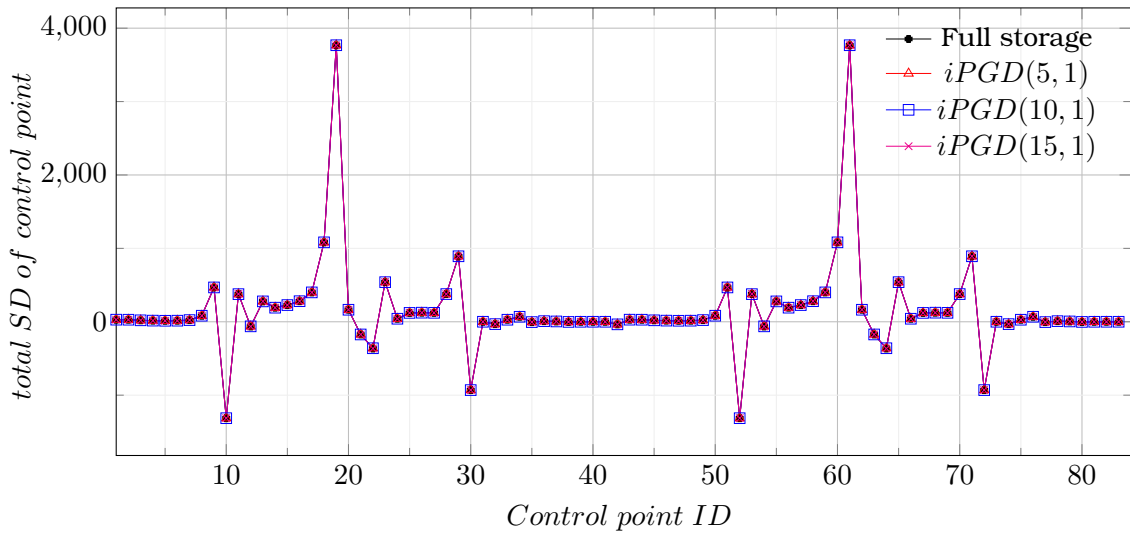
5.3 Βελτιστοποίηση μορφής πτερυγίου αξονικού συμπιεστή για μέγιστη άνωση

Πρόκειται να παρουσιαστεί η βελτιστοποίηση μορφής ενός πτερυγίου αξονικού συμπιεστή σε διηχητική ροή, επιλύοντας τις εξισώσεις Navier-Stokes με το μοντέλο τύρβης των Spalart-Allmaras. Οι εξισώσεις ροής είναι αυτές που περιγράφηκαν στο κεφάλαιο 4.3. Οι συζυγείς ΜΔΕ των Navier-Stokes [38] επιλύονται μαζί με το μοντέλο τύρβης των Spallart-Almaras στο λογισμικό PUMA όπως και προηγουμένως με τις εξισώσεις Euler σε κάρτα γραφικών Nvidia Tesla K20. Εκτελούνται έξι κύκλοι βελτιστοποίησης με τρεις διαφορετικές τάξεις ακρίβειας στις μεθόδους κατασκευής των ΠΧΤ: 5, 10, 15 ιδιαίζουσες τιμές/βάσεις καθώς προς συμπίεση χρονοσειρά, εμφανίζει μεν κύμα κρούσης αλλά μικρότερης έντασης από ότι η περίπτωση του κεφαλαίου 5.2 και άρα κρίνεται πως δεν χρειάζεται ο ίδιος αριθμός ιδιαίζουσων τιμών/βάσεων για την επαρκή προσέγγισή του.

5.3.1 Ανάλυση των παραγώγων ευαισθησίας που προκύπτουν από τις διαφορετικές λύσεις των συζυγών εξισώσεων Navier-Stokes

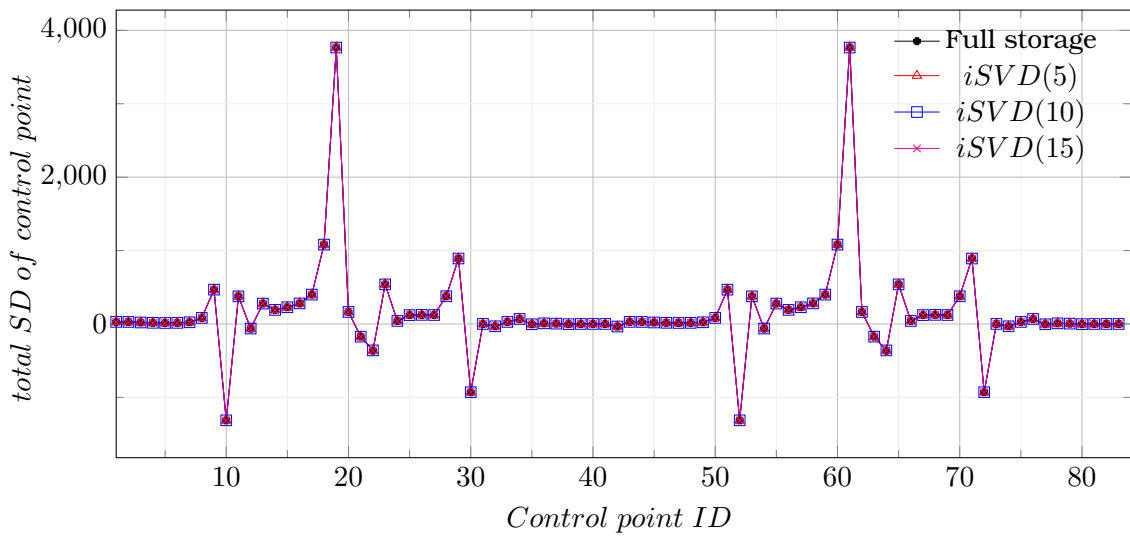
Στα σχήματα 5.22 και 5.23 παρουσιάζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας των κατά y συντεταγμένων των σημείων ελέγχου των NURBS υπολογισμένες από τη χρονοσειρά του συζυγούς πεδίου που προέκυψε με το iPGD και το iSVD αντίστοιχα. Όσο είναι δυνατόν εμποπτικά επαληθεύεται πως οι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογισμένες με το iPGD (σχήμα 5.22) είναι ελαφρώς χειρότερης ποιότητας από αυτές του iSVD (σχήμα 5.23) όπως ήταν αναμενόμενο

από τα αποτελέσματα της ενότητας 4.3.



Σχήμα 5.22: Παράγωγοι ευαισθησίας συνάρτησης κόστους της χρονικά μέσης ανίστασης ως προς τα 12 σημεία ελέγχου με $iPGD(M,1)$

Ωστόσο η διαφορά των τιμών των παραγώγων είναι ανεπαίσθητη (συμφωνία της τάξης των 4 σημαντικών ψηφίων).



Σχήμα 5.23: Παράγωγοι ευαισθησίας συνάρτησης κόστους της χρονικά μέσης άνωσης ως προς τα 12 σημεία ελέγχου με $iSVD(k)$

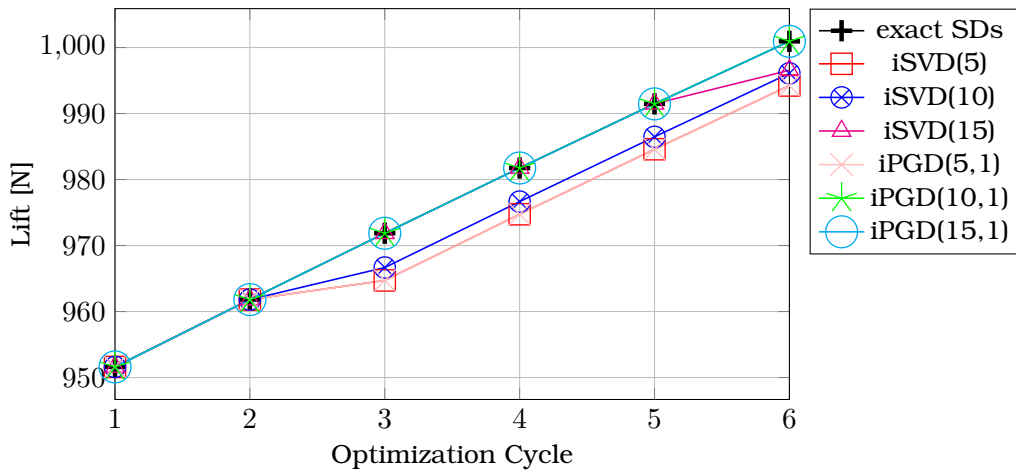
5.3.2 Βελτιστοποίηση μορφής 2Δ πτερύγωσης συμπίεστή με χρήση ΠΧΤ

Η πολύ μικρή διαφορά των τιμών των παραγώγων ευαισθησίας (σχήματα 5.22, 5.23) φαίνεται πως δεν επηρεάζει εποπτικά έστω τη μορφή των παραγόμενων αεροδυναμικών μορφών (σχήμα 5.24). Αυτό που φαίνεται να επηρεάστηκε περισσότερο είναι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης απότι στις εξισώσεις Euler. Αυτό πιθανώς να οφείλεται στην εισαγωγή του μοντέλου τύρβης και στη συμπίεση αυτού, προσθέτοντας μία ακόμα πηγή σφάλματος κατά τη συμπίεση/αποσυμπίεση. Στο πρόβλημα αυτό ωστόσο, παρατηρούνται μεγαλύτερες



Σχήμα 5.24: Βελτιστοποιημένη αεροτομή συμπίεστή για μέγιστη άνωση μετά από 6 κύκλους με $iSVD(k)$ και $iPGD(M,1)$

αποκλίσεις από ότι στις εξισώσεις Euler καθώς βέβαια η μεταβολή της άνωσης είναι σημαντικά μικρότερη από ότι στη περίπτωση του κεφαλαίου 5.2. Ένας επιπλέον παράγοντας που επηρεάζει το αποτέλεσμα των τιμών της άνωσης στο σχήμα 5.25 είναι η επαρκής σύγκλιση των εξισώσεων καθώς και του μοντέλου τύρβης, το οποίο πλέον συνεισφέρει στις παραγώγους. Η τελική μορφή της αεροτομής έχει την ακμή εκφυγής κυρτωμένη, ώστε να επιτυγχάνεται μεγαλύτερη στροφή της ροής και άρα μεγαλύτερη δύναμη στη πτερύγωση. Η περιοχή ανάντη του κύματος κρούσης εμφανώς αυξάνεται, όπως και αυτό εκτείνεται σε μεγαλύτερο μήκος κάθετα στην αεροτομή (σχήμα 5.27).



Σχήμα 5.25: Εξέλιξη της άνωσης κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης



Σχήμα 5.26: Συγκριτικό Mach της ροής στη περύγωση πριν τη βελ/ση



Σχήμα 5.27: Συγκριτικό Mach της ροής στη περύγωση μετά τη βελ/ση

Τέλος, παρουσιάζεται η επιβάρυνση σε υπολογιστικό κόστος εξαιτίας της εφαρμογής των τεχνικών συμπίεσης, ανά κύκλο βελτιστοποίησης σε T_{CPU} δηλαδή σε πολλαπλάσια του χρόνου επίλυσης της ροής.

k/M	iSVD(k)			iPGD(M,1)		
	5	10	15	5	10	15
T_{CPU}	1.013	1.014	1.015	1.04	1.10	1.21

Πίνακας 5.5: Επιβάρυνση υπολογιστικού κόστους λόγω υπολογισμού ΠΧΤ στη βελτιστοποίηση

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα και προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Στην ανά χείρας διπλωματική εργασία, παρουσιάστηκαν 2 μέθοδοι συμπίεσης δεδομένων για να υποστηρίξουν τις απαιτήσεις αποθηκευτικού κόστους της βελτιστοποίησης με τη συνεχή συζυγή μέθοδο για μη-μόνιμες ΜΔΕ στην αεροδυναμική. Δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση σε προβλήματα που εμφανίζουν ασυνέχειες καθώς η απότομη αλλαγή κλιμάκων στη λύση, αποτελεί μία ακόμα καλή δοκιμασία για τις ΠΧΤ. Ο γενικός στόχος είναι οι παράγωγοι ευαισθησίας, υπολογισμένες με ΠΧΤ κατά την επίλυση των συζυγών εξισώσεων (αντί για τα κανονικά πεδία), να μη διαφέρουν καθόλου από τις παραγώγους κάνοντας χρήση των πραγματικών πεδίων. Τελικός σκοπός είναι οι τεχνικές συμπίεσης, επιτρέποντας μεγάλη μείωση του αποθηκευτικού χώρου της χρονοσειράς της λύσης, να καταστήσουν τη βελτιστοποίηση με τη συζυγή μέθοδο για μη-μόνιμα προβλήματα ροής πίο υλοποιήσιμη από στο μηχανικό. Στο πλαίσιο αυτό, στη διπλωματική εργασία, συγκρίθηκαν ποσοτικά οι επιδόσεις των τεχνικών κατασκευής ΠΧΤ, $iSVD$ και $iPGD$, όσον αφορά την απόδοση στη συμπίεση των αρχικών χρονοσειρών, καθώς και την ποιότητα των παραγώγων ευαισθησίας και κατά συνέπεια της βελτιστοποίησης με τις αποσυμπιεσμένες χρονομέτρες, σε τρία διαφορετικά προβλήματα.

- Κάθε τεχνική αποθήκευσης συμπιεσμένων χρονοσειρών, για τη μείωση του αποθηκευτικού κόστους της συζυγούς μεθόδου σε χρονικά μη-μόνιμα προβλήματα ροής πρέπει να είναι *ρηματική* στο χρόνο, ώστε να μην απαιτεί περισσότερη πληροφορία από αυτή που παρέχει ο επιλύτης σε κάθε χρονικό βήμα (η έστω ένα μικρό σύνολο αυτών) και να μπορεί να ανανεώνει την υπάρχουσα προσέγγιση με την απόκτηση της νέας πληροφορίας. Σε κάθε άλλη περίπτωση, αν ήταν δυνατή η αποθήκευση της χρονοσειράς πριν τη συμπίεσή της, η συγκεκριμένη έρευνα δε θα είχε λόγο ύπαρξης.
- Στην περίπτωση της εξίσωσης Burgers (4.1) η $iPGD(M)$ ήταν σαφώς ανώτερη από πλευράς ποιότητας προσέγγισης της $iSVD(k)$, ενώ υστερούσε σημαντικά σε υπολογιστικό χρόνο, περίπου 100 φορές αυτόν της $iSVD$, για τις συγκεκριμένες ρυθμίσεις των παραμέτρων των τεχνικών. Ωστόσο, το υπολογιστικό κόστος μειώθηκε δραματικά όταν χρησιμοποιήθηκε η εκδοχή του αλγορίθμου με διαμερίσεις του διαστήματος ολοκλήρ-

ωσης. Στην περίπτωση των εξισώσεων Euler (4.2) και Navier-Stokes (4.3) η $iSVD(k)$ υπερτερεί της $iPGD(M)$ στην ποιότητα αναπαράστασης των ροϊκών πεδίων με χωρικά εντοπισμένες ασυνέχειες. Αυτό πιθανώς οφείλεται στη διαφορά της έντασης και έκτασης των ασυνεχειών στο πεδίο, καθώς όπως φάνηκε από την περίπτωση των εξισώσεων Euler, το $iPGD$ εξαιτίας της αναδιατύπωσης του σφάλματος που ελαχιστοποιεί, παράγει ΠΧΤ με ομοιογένεια στην κατανομή σφάλματος, ενώ με το $iSVD$ κάθε ιδιάζουσα τιμή προσθέτει διαφορετική πληροφορία των χαρακτηριστικών της χρονοσειράς, παράγοντας πιο χωρικά εντοπισμένο σφάλμα, γύρω από τα "χαρακτηριστικά" του προς συμπίεση πεδίου, δηλαδή την ασυνέχεια.

- Η υιοθέτηση της "παραθυρικής" στο χρόνο εκδοχής $iPGD(M, L)$ του $iPGD$ είναι αναγκαία για υψηλότερους λόγους συμπίεσης από αυτούς που παρουσάστηκαν ($CR=2:10$). Σε αυτή τη διπλωματική εργασία, οι προσομοιώσεις ΥΡΔ με τις εξισώσεις Euler και NS είχαν λίγα χρονικά βήματα πράγμα που συνεπάγεται και χαμηλούς λόγους συμπίεσης. Ωστόσο, τα πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν είχαν "ρεαλιστικές" διαστάσεις. Αυξάνοντας τον αριθμό των χρονικών βημάτων της προσομοίωσης (σε λογικό πλαίσιο που μπορεί να υπολογιστούν από τους υπολογισμούς της ενότητας 3.2.1), μπορεί να φανεί η αξία των μεθόδων αυτών με λόγους συμπίεσης που ξεπερνούν το $CR = \frac{mn}{M(m+n)} > 100$ για μία 2Δ περίπτωση με $m = 87000$, $n > 1000$ και $M = 10$. Στην περίπτωση αύξησης των βημάτων θα είναι αναγκαία η υιοθέτηση της παραθυρικής στο χρόνο εκδοχής, η οποία θα επιφέρει κάποια μείωση στο λόγο συμπίεσης, όπως μελετήθηκε στο κεφάλαιο 4.1, αλλά κάτι τέτοιο εξαρτάται σε πολύ μεγάλο βαθμό από την πληροφορία της χρονοσειράς που καλείται να συμπίεστεί.
- Σε κάθε σενάριο, ακόμα και με την υλοποίηση της παραθυρικής εκδοχής, του $iPGD(M, L)$, το $iPGD$ υστερεί από πλευράς υπολογιστικού κόστους έναντι του $iSVD$, επιβαρύνοντας περισσότερο τη βελτιστοποίηση. Ωστόσο, χρησιμοποιώντας τη "παραθυρική" στο χρόνο εκδοχή, το κόστος μειώνεται σημαντικά. Σε κάθε περίπτωση η μέγιστη επιβάρυνση στο χρόνο επίλυσης ενός κύκλου κατά τη βελτιστοποίηση είχε συντελεστή 1.21, μία αρκετά ικανοποιητική τιμή. Σε προβλήματα με διαφορετικά χαρακτηριστικά, το $iPGD$ πιθανώς να υπερτερεί και του $iSVD$.
- Κατά τη συμπίεση της χρονοσειράς της λύσης της εξίσωσης Burgers, για την ικανοποιητική προσέγγιση του πεδίου χρειάζονται 10 βάσεις $iPGD$ το οποίο υπερτερεί. Ωστόσο, αυτό κοστίζει 165 όσο επιλύσεις της αρχικής εξίσωσης και άρα κρίνεται ως ανεπαρκές. Με την εφαρμογή της παραθυρικής εκδοχής του $iPGD$, ο χρόνος μειώνεται στις 5 επιλύσεις και η ακρίβεια διατηρείται ενώ επιτυγχάνεται λόγος συμπίεσης $CR = 14$ αντί του $CR = 9$ για 10 βάσεις σε ένα "παράθυρο". Στις εξισώσεις Euler, καθώς το προς συμπίεση πεδίο εμφανίζει απαιτητικά χαρακτηριστικά, τα έντονα κύματα κρούσης που κινούνται κατά μήκος της αεροτομής, οι λόγοι συμπίεσης κυμαίνονται από 10 ως 2 με σφάλματα 3% με 1.5% για τα στιγμιότυπα με τις πιο ήπιες ασυνέχειες και 8% με 4% για αυτά με τις αρκετά έντονες ασυνέχειες. Τέλος, στις εξισώσεις NS στο 2Δ περυσύγωση, καθώς το πεδίο εμφάνιζε μικρότερης έντασης κύμα κρούσης, τα σφάλματα κυμαίνονται από 1% ως 0.01% ενώ οι λόγοι συμπίεσης από 6 ως 2, λόγω του μεγάλου αριθμού κόμβων.
- Πιστοποιείται ότι οι μέθοδοι συμπίεσης δεδομένων, εφαρμοσμένες στη βελτιστοποίηση με τη συζυγή μέθοδο για μη-μόνιμα προβλήματα δε επηρεάζουν το αποτέλεσμα της βελτιστοποίησης. Στα δύο τελευταία προβλήματα, η βελτιστοποίηση με κάθε ρύθμιση

των τεχνικών συμπίεσης που δοκιμάστηκε, παρήγαγε αποδεκτές αεροδυναμικές μορφές, χωρίς εμφανείς αποκλίσεις. Επίσης, το επιπλέον υπολογιστικό κόστος κάθε κύκλου (λαμβάνοντας υπ' όψη την καλύτερη δυνατή περίπτωση, το iSVD) ήταν αμελητέο.

- Φυσικά, η ποιότητα της ΠΧΤ αυξάνεται με αύξηση των παραμέτρων που ελέγχουν την ακρίβειά της (τάξη αποκοπής+πλήθος βάσεων) αλλά παράλληλα αυξάνονται και οι απαιτήσεις σε υπολογιστικό χρόνο.

Τέλος επισημαίνονται κάποια σημεία που μπορούν να ερευνηθούν στο μέλλον, με σκοπό την αύξηση της ευρωστίας των τεχνικών συμπίεσης δεδομένων στη βελτιστοποίηση με τη συζυγή μέθοδο, για την εφαρμογή τους σε μεγαλύτερη ποικιλία προβλημάτων, που είναι και ο απόλυτος στόχος.

- Είναι εμφανές πως η μέθοδος του *iPGD* είναι θεμιτό να χρησιμοποιείται μόνο στην παραθυρική εκδοχή της. Η εκδοχή με ολόκληρο το χρονικό διάστημα να προσεγγίζεται από τις ίδιες βάσεις, για ένα βιομηχανικού επιπέδου πρόβλημα, καθίσταται απαγορευτική από πλευράς υπολογιστικού κόστους. Συνεπώς, πρέπει να διατυπωθεί μία στρατηγική ευριστική ή μή, για τον ορθό διαμερισμό του διαστήματος χρονικής ολοκλήρωσης. Καθώς η *iPGD* ελαχιστοποιεί ένα σφάλμα που αποτελείται από: την απόσταση του νέου στιγμιότυπου της χρονοσειράς από τις νέες βάσεις + την απόσταση της νέας προσέγγισης από την ως τότε προσέγγιση, έστω f_c η ως τώρα προσέγγιση και f_n η νέα, δηλαδή $\|f_n - U_i^{K+1}\|_x^2 + w \|f_n - f_c\|^2$ είναι εμφανές πως όταν το νέο στιγμιότυπο "διαφέρει" σημαντικά από τα προηγούμενα, τότε οι ανανεωμένες βάσεις θα κυριαρχούνται από τα χαρακτηριστικά αυτού του στιγμιότυπου, πράγμα που θα αλλοιώνει τη f_c . Συνεπώς, είναι θεμιτός ένας τρόπος δυναμικού προσδιορισμού του πλήθους των στιγμιότυπων που θα περιέχουν τα χρονικά παράθυρα, λαμβάνοντας υπόψη προσδιορισμένα από το χρήστη, κάτω όρια στο λόγο συμπίεσης CR . Αυτό θα μπορούσε να υλοποιηθεί, πολιτικοποιώντας τη διαφορά μεταξύ της U_i^{K+1} και της f_n μέσα από κατάλληλες μετρικές και εκφράζοντας κριτήρια για το εάν το νέο στιγμιότυπο πρέπει να προστεθεί στις υπάρχουσες βάσεις, ή να δημιουργηθεί νέο χρονικό παράθυρο. Ωστόσο, κατά την προσπάθεια αυτή, πρέπει να λυθούν προβλήματα υλοποίησης όπως αυτό της δυναμικής δέσμευσης μνήμης που θα είναι απαραίτητη, καθώς θα πρέπει να αυξάνονται οι διαστάσεις των T_k^m όσο προχωρά ο υπολογισμός της ΠΧΤ.

Συμπερασματικά, γίνεται εμφανές πως η εξοικονόμηση αποθηκευτικού χώρου κατά τη βελτιστοποίηση χωρίς συμβιβασμό στην ποιότητα των αποτελεσμάτων, καθιστά πολύ πιο εφαρμόσιμη τη βελτιστοποίηση με τη συζυγή μέθοδο και σε μη-μόνιμα προβλήματα σε βιομηχανικές εφαρμογές βελτιστοποίησης, που ως τώρα ήταν δύσκολο να υλοποιηθούν[39].

Βιβλιογραφία

- [1] Κ. Χ. Γιαννάκογλου: *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2006.
- [2] S. Brunton, N. Kutz: *Data Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control*. University of Washington, 2017.
- [3] D. Greiner, B. Galván, J. Periaux N. Gauger K.C. Giannakoglou and Winter, G.: *Advances in Evolutionary and Deterministic Methods for Design, Optimization and Control in Engineering and Sciences*, volume 36. January 2015, ISBN 978-3-319-11540-5.
- [4] M. Aultman, Z. Wang, R. Auza Gutierrez and Duan, L.: *Evaluation of cfd methodologies for prediction of flows around simplified and complex automotive models*. *Computers & Fluids*, 236:105297, 2022, ISSN 0045-7930. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793021003856>, <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2021.105297>.
- [5] E. Guilmineau, G. Deng, A. Leroyer P. Queutey M. Visonneau and J. Wackers: *Assessment of rans and des methods for the ahmed body*. pages 912-921, January 2016.
- [6] M. Boudreau, G. Dumas and Veilleux, J.C.: *Assessing the ability of the ddes turbulence modeling approach to simulate the wake of a bluff body*. *Aerospace*, 4(3), 2017, ISSN 2226-4310. <https://www.mdpi.com/2226-4310/4/3/41>, 10.3390/aerospace4030041.
- [7] P. R. Spalart and V. Venkatakrishnan: *On the role and challenges of cfd in the aerospace industry*. *The Aeronautical Journal*, 120(1223):209-232, 2016. 10.1017/aer.2015.10.
- [8] W. Squire and G. Trapp: *Using complex variables to estimate derivatives of real functions*. *SIAM Rev.*, 40:110-112, 1998.
- [9] A. Griewank: *A mathematical view of automatic differentiation*. 12:321-398, 2003. 10.1017/S0962492902000132.
- [10] A. Griewank, A. Walther: *Algorithm 799: Revolve: An implementation of checkpointing for the reverse or adjoint mode of computational differentiation*. *ACM Transactions on Mathematical Software* · March 2000, 2000.

- [11] N. Kukreja, J. Hükelheim, M. Louboutin, K. Hou, F. Luporini P.Hovland, and Gorman, G.: *Combining checkpointing and data compression for large scale seismic inversion*. October 2018.
- [12] Stumm and A. Walther: *Multistage approaches for optimal offline checkpointing*. SIAM Journal on Scientific Computing, 31, 2009, ISSN 1064-8275. 10.1137/080718036.
- [13] J. Hükelheim, J. D. Mueller: *Checkpointing with time gaps for unsteady adjoint cfd*. Computational Methods in Applied Sciences, pages 117–130, January 2019.
- [14] A. Griewank : *Achieving logarithmic growth of temporal and spatial complexity in reverse automatic differentiation*. Optimization Methods and Software, 1, 1992, ISSN 10294937. <http://dx.doi.org/10.1080/10556789208805505>.
- [15] Q. Wang, P. Moin and G. Iaccarino: *Minimal repetition dynamic checkpointing algorithm for unsteady adjoint calculation*. SIAM J. Scientific Computing, 31:2549–2567, January 2009. 10.1137/080727890.
- [16] A.S.I. Margetis, E.M. Papoutsis-Kiachagias, K.C. Giannakoglou: *Lossy compression techniques supporting unsteady adjoint on 2d/3d unstructured grids*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2021.
- [17] P. Lindstrom: *Fixed-rate compressed floating-point arrays*. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 20, 2014, ISSN 10772626. 10.1109/TVCG.2014.2346458.
- [18] Χ.Αθανασιάδης: *Διακριτά Μαθηματικά Σημειώσεις*. Πανεπιστήμιο Αθηνών, Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Μαθηματικών, 2018.
- [19] A. Quarterioni, A. Manzoni, F. Negri: *Reduced Basis Methods for Partial Differential Equations ,An Introduction*. Springer Verlag, 2016.
- [20] I. Markovsky: *Structured low-rank approximation and its applications*. Automatica, 44(4):891–909, 2008, ISSN 0005-1098. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109807003950>, <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2007.09.011>.
- [21] L. Kliafas : *Compression of multidimensional flow fields using incremental proper generalized decomposition & molecular dynamics computations and optimization of coarse-grained ionic liquid lubricants*. 2019.
- [22] Β. Παπαγεωργίου: *Προγραμματισμός της Μεθόδου του Ιδιο-Γενικευμένου Διαχωρισμού (Proper Generalized Decomposition) για την Πρόβλεξη και/ή τη Συμπύεση της Λύσης 2Δ Μόνιμων και Μη-Μόνιμων ΜΔΕ. Εφαρμογή στη Βελτιστοποίηση με Χρήση της Συζυγούς Μεθόδου*. 2017.
- [23] G. Strang: *Introduction to linear algebra*. January 2003.
- [24] B. Sarwar, G. Karypis, J. Konstan and Riedl, J.: *Incremental singular value decomposition algorithms for highly scalable recommender systems*. Fifth International Conference on Computer and Information Science, 2002.
- [25] L. Sirovich: *Turbulence and the dynamics of coherent structures. i - coherent structures. ii - symmetries and transformations. iii - dynamics and scaling*. Quarterly of Ap-

plied Mathematics - QUART APPL MATH, 45, October 1987. 10.1090/qam/910463.

- [26] Π. Αλεξιάς: "Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Χρονικά μη-Μόνιμων ροών με τη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο και Πρότυπα Μειωμένης Τάξης". "Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π. Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής και Βελτιστοποίησης", "2015".
- [27] J. R. Bunch, C. P. Nielsen: *Updating the singular value decomposition*. Numerische Mathematik, 9 by Springer-Verlag, 1978.
- [28] M.Brand: *Fast low-rank modifications of the thin singular value decomposition*. Linear Algebra and its Applications 415 (2006) 20–30, Springer, 2003.
- [29] C. Vezyris, E.P. Kichagias, K.C. Giannakoglou: *On the incremental singular value decomposition method to support unsteady adjoint-based optimization*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 91(7):315–331, 2019. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/flid.4755>, <https://doi.org/10.1002/flid.4755>.
- [30] G. E. Forsythe, M. A. Malcom, C. B. Moler: *Computer Methods for Mathematical Computations*. PRENTICE-HALL, INC., 1977.
- [31] H. Fareed and J. R. Singler: *Error analysis of an incremental proper orthogonal decomposition algorithm for pde simulation data*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 368:112525, 2020, ISSN 0377-0427. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042719305308>, <https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112525>.
- [32] F. Chinesta, R. Keunings, A. Leygue: *The Proper Generalized Decomposition for Advanced Numerical Simulations*. Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London, 2014.
- [33] D. González, A. Ammar, F. Chinesta and Cueto, E.: *Recent advances in the use of separated representations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 81:637 – 659, January 2009. 10.1002/nme.2710.
- [34] V. S. Papageorgiou, K. D. Samouchos and Giannakoglou, K. C.: *The unsteady continuous adjoint method assisted by the proper generalized decomposition method*. Fifth International Conference on Computer and Information Science, 2018.
- [35] V. G. Asouti, X. S. Trompoukis, I. C. Kampolis and Giannakoglou, K. C.: *Unsteady cfd computations using vertex-centered finite volumes for unstructured grids on graphics processing units*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 67(2):232–246, 2011. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/flid.2352>, <https://doi.org/10.1002/flid.2352>.
- [36] N. Allahverd, A. Pozo, E. Zuazua: *Numerical aspects of large-time optimal control of burgers equation*. ESAIM: M2AN, 50(5):1371–1401, 2016. <https://doi.org/10.1051/m2an/2015076>, 10.1051/m2an/2015076.

- [37] K. Ou, A. Jameson: *Unsteady adjoint method for the optimal control of advection and burger's equations using high-order spectral difference method*. Aeronautics and Astronautics Department, Stanford University, Stanford, 2011.
- [38] I.S. Kavvadias, E.M. Papoutsis-Kiachagias, K.C. Giannakoglou: *On the proper treatment of grid sensitivities in continuous adjoint methods for shape optimization*. Journal of Computational Physics, 301:1-18, 2015, ISSN 0021-9991. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999115005318>, <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.08.012>.
- [39] G. Ntanakas, M. Meyer, K. C. Giannakoglou: *Employing the Time-Domain Unsteady Discrete Adjoint Method for Shape Optimization of Three-Dimensional Multirow Turbomachinery Configurations*. Journal of Turbomachinery, 140(8), July 2018, ISSN 0889-504X. <https://doi.org/10.1115/1.4040564>, 10.1115/1.4040564, 081006.