

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Πρόλεξη Ασυμπίεστων Ροών με Αβεβαιότητες με την
Επεμβατική Μέθοδο Αναπτύγματος Πολυωνυμικού
Χάους. Μαθηματική Διατύπωση, Προγραμματισμός και
Εφαρμογές σε Περιβάλλον OpenFOAM

Διπλωματική Εργασία

Παπαγεωργίου Αναστάσιος

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου , Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2017

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας την διπλωματική αυτή εργασία θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους με βοήθησαν για την εκπόνηση της.

Αρχικά, ευχαριστώ ιδιαίτερα τον Καθηγητή κ. Κ.Χ. Γιαννάκογλου για όλη τη βοήθεια που μου παρείχε κατά τη διάρκεια της συνεργασίας μας. Χωρίς τις συμβουλές του, τις γνώσεις του και την καθοδήγηση του δεν θα μπορούσα να έχω αυτό το αποτέλεσμα.

Στη συνέχεια ένα μεγάλο ευχαριστώ στον Δρ. Ε. Παπουτσή-Κιαχαγιά, ο οποίος ήταν πάντα παραπάνω από πρόθυμος να αφιερώσει χρόνο για να απαντήσει σε απορίες που είχα σε εξειδικευμένα θέματα της διπλωματικής εργασίας αυτής. Θα ήθελα, ακόμα, να ευχαριστήσω όλα τα μέλη της μονάδας ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ, όπως τον υποψήφιο διδάκτορα Κ. Γκαραγκούνη και τη Δρ. Β. Ασούτη για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφεραν σε διάφορα ζητήματα.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ &
ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

**Πρόλεξη Ασυμπίεστων Ροών με Αβεβαιότητες με την Επεμβατική
Μέθοδο Αναπτύγματος Πολυωνυμικού Χάους. Μαθηματική
Διατύπωση, Προγραμματισμός και Εφαρμογές σε Περιβάλλον
OpenFOAM**

Διπλωματική Εργασία
του

Αναστάσιου Παπαγεωργίου

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2017

Περίληψη

Η διπλωματική αυτή εργασία εστιάζει στη μαθηματική διατύπωση και υλοποίηση, μέσω ανάπτυξης κατάλληλου λογισμικού στο περιβάλλον του OpenFOAM, της μεθόδου Αναπτύγματος Πολυωνυμικού Χάους (Polynomial Chaos Expansion PCE) και, ειδικά, της επεμβατικής παραλλαγής της (intrusive PCE) σε χρονικά μόνιμα προβλήματα ροής ασυμπίεστου ρευστού. Σκοπός της μεθόδου είναι η προσομοίωση της στοχαστικότητας της ροής λόγω της στοχαστικής αλλαγής τιμής των λεγόμενων περιβαλλοντικών μεταβλητών. Σύμφωνα με τη μέθοδο, κάθε αβέβαιη μεταβλητή εκφράζεται ως ένα πολυωνυμικό ανάπτυγμα με ορθογώνια πολυώνυμα, τα οποία εξαρτώνται από την κατανομή που ακολουθούν οι αβέβαιες μεταβλητές εισόδου. Η στοχαστικότητα του πεδίου ποσοτικοποιείται με άγνωστους τα πεδία των αιτιοκρατικών συντελεστών του PCE. Ο χαρακτηρισμός της μεθόδου ως "επεμβατική", οφείλεται στο γεγονός ότι το ανάπτυγμα κάθε αβέβαιης μεταβλητής αντικαθίσταται στις εξισώσεις ροής και δημιουργούνται νέες εξισώσεις. Πιο συγκεκριμένα, το πλήθος των πεπλεγμένων μ.δ.ε, που πρέπει να λυθούν αριθμητικά για να τον υπολογισμό των πεδίων των συντελεστών του PCE, αυξάνεται.

Τα προβλήματα στα οποία πιστοποιείται το προγραμματισθέν λογισμικό αφορούν τόσο εξωτερική, όσο και εσωτερική αεροδυναμική. Επιλέγεται μία αβέβαιη μεταβλητή εισόδου και διατυπώνονται οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα για στρωτή ροή και διάφορες τάξεις πολυωνυμικού χάους. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με άλλες με-

θόδους (non-intrusive PCE, Monte-Carlo) και διαπιστώνεται η αξιοπιστία τους. Τα αποτελέσματα είναι εξαιρετικά αφού επιτυγχάνεται η επιθυμητή ακρίβεια με μικρότερο υπολογιστικό κόστος σε σχέση με τις άλλες μεθόδους. Έπειτα επιλύονται προβλήματα τυρβώδους ροής, όπου γίνεται η παραδοχή της μη-στοχαστικής τύρβης. Δηλαδή, γίνεται η βολική παραδοχή ότι το πεδίο της τύρβης δεν επηρεάζεται από στοχαστικές μεταβολές των περιβαλλοντικών μεταβλητών. Τα αποτελέσματα είναι και πάλι ικανοποιητικά, ωστόσο υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις. Οι κώδικες προγραμματίστηκαν με την τεχνική της απευπλεγμένης διαχείρισης της εξίσωσης της συνέχειας από τις εξισώσεις της ορμής και είναι για 1^η και 2^η τάξη χάους και μία αβέβαιη μεταβλητή εισόδου.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING
FLUIDS DEPARTMENT
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

**Prediction of Incompressible Flows under Uncertainties
using the Intrusive Polynomial Chaos Expansion Method.
Mathematical Formulation, Programming and
Implementation in the OpenFOAM Environment**

Diploma Thesis
by

Anastasios Papageorgiou

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, July 2017

Abstract

This diploma thesis focuses on the mathematical formulation and implementation, through the development of the appropriate software in the OpenFOAM environment, of the Polynomial Chaos Expansion method (PCE), more specifically the intrusive variation (iPCE) in steady flows of incompressible fluids. The main purpose of the method is the simulation of the uncertainty of the flow due to stochastic changes in the values of the environmental variables. According to PCE, each uncertain variable is represented as a polynomial expansion with orthogonal polynomials, which depend on the stochastic distribution of the input uncertain variables. The method is referred to as intrusive, because the expanded uncertain flow fields are replaced into the flow p.d.e.'s and new equations are produced. As a result, the number of the p.d.e.'s, to be solved to compute the fields of the coefficients of PCE, increases.

The applications this diploma thesis is dealing with, concern both external and internal aerodynamics. It is assumed that there is only one uncertain input variable and the governing equations for laminar flow are formulated for various polynomial chaos orders. The results are compared with other methods such as the non-Intrusive PCE and Monte-Carlo and the programmed iPCE method is thus assessed. The results are very good, since the desired precision is accomplished with less computational cost compared to the other methods. Afterwards, turbulent flows are computed,

with the assumption of non-stochastic turbulence. In other words, it is assumed that the turbulent viscosity is not influenced by the stochastic change of the environmental variables. The results are satisfactory, however under some conditions. The codes that are programmed concern 1st and 2nd chaos order and one uncertain input variable. The segregated solution method is used in the codes, thus the continuity equation solved decoupled from the momentum equations.

Ακρωνύμια

ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΕΘΣ	Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
ΜΠΤΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
μδε	μερικές διαφορικές εξισώσεις

CFD	Computational Fluid Dynamics
NTUA	National Technical University of Athens
PCOpt	Parallel CFD & Optimization unit
PCE	Polynomial Chaos Expansion
iPCE	intrusive Polynomial Chaos Expansion
niPCE	non-intrusive Polynomial Chaos Expansion

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
1 Εισαγωγή	1
1.1 Περί Αβεβαιότητας	1
1.2 Μέθοδος Monte-Carlo	2
1.3 Μέθοδος Αναπτύγματος Πολυωνυμικού Χάους (PCE)	2
1.3.1 Επεμβατική Μέθοδος iPCE	5
1.4 Στόχος της Εργασίας	8
1.5 Δομή της Εργασίας	9
2 Ανάπτυξη Συστήματος Εξισώσεων της Μεθόδου PCE	11
2.1 Εξισώσεις Ροής	11
2.2 Διατύπωση Εξισώσεων PCE - Μία Αβέβαιη Μεταβλητή	17
2.2.1 Εξισώσεις 1 ^{ης} Τάξης Χάους	20
2.2.2 Εξισώσεις 2 ^{ης} Τάξης Χάους	21
2.2.3 Οριακές Συνθήκες Αβέβαιων Μεταβλητών	22
2.2.4 Επίλυση των Εξισώσεων	22
3 Αποτελέσματα της Μεθόδου iPCE	25
3.1 Μεμονωμένη Αεροτομή (LD) σε Ελεύθερο Ρεύμα Αέρα	25
3.1.1 Επίλυση Προβλήματος χωρίς Αβεβαιότητες	25
3.1.2 Διατύπωση Συντελεστών PCE Συντελεστή Άνωσης και Οπισθέλκουσας	27
3.1.3 Αποτελέσματα με Αβεβαιότητα στην α_∞	29

3.1.4	Αποτελέσματα με Αβεβαιότητα στην v_y	39
3.2	Μεμονωμένη Αεροτομή (HL) σε Ελεύθερο Ρεύμα Αέρα	42
3.2.1	Αβεβαιότητα στο Μέτρο της Ταχύτητας v	43
4	Επεμβατικό Ανάπτυγμα Πολυωνυμικού Χάους και Τυρβώδεις Ροές	47
4.1	Μελέτη Πτερύγωσης Συμπιεστή χωρίς Αβεβαιότητες	48
4.2	Διατύπωση Εξισώσεων PCE - Μία Αβέβαιη Μεταβλητή Εισόδου	51
4.3	Σύγκριση με niPCE και Monte Carlo	56
4.4	Κατανομή Αντικειμενικών Συναρτήσεων	65
5	Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα	69
5.1	Ανακεφαλαίωση	69
5.2	Συμπεράσματα	70
5.3	Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα	71
A'	Παράρτημα Στατιστικής	73
A'.1	Μέτρα Θέσης, Διασποράς και Σχήματος Κατανομής	73
A'.2	Κανονική Κατανομή	79
B'	Πολυώνυμα Hermite και Ολοκλήρωση τους	81
Γ'	Τυπολόγιο Προβολών Galerkin	85
Δ'	Τυπολόγιο μη-επεμβατικής μεθόδου niPCE	93
	Βιβλιογραφία	97

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Περί Αβεβαιότητας

Οι αβεβαιότητες στις συνθήκες λειτουργίας (στο λεγόμενο και "περιβάλλον") ενός ρευστομηχανικού συστήματος δεν λαμβάνονται υπόψη από την πλειοψηφία των υπολογιστικών μοντέλων που έχουν αναπτυχθεί μέχρι σήμερα. Ως αποτέλεσμα αυτής της παραδοχής-παράλειψης, τα προβλήματα αντιμετωπίζονται σ' ένα σταθερό σημείο λειτουργίας. Στην πράξη, κάτι τέτοιο συχνά δεν ισχύει, αφού οι περιβαλλοντικές συνθήκες μεταβάλλονται συνεχώς. Λ.χ. η ταχύτητα στην είσοδο ενός συμπιεστή δεν διατηρεί ούτε το μέτρο ούτε τη γωνία της αλλά, συνήθως, αυτά μεταβάλλονται, έστω και ελάχιστα, γύρω από μέσες τιμές. Κάθε ροϊκή μεταβλητή με τέτοια συμπεριφορά θεωρείται αβέβαιη και αναγκαστικά εκφράζεται μέσω στατιστικών ροπών, όπως η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση. Συνεπώς, υπάρχει η ανάγκη περαιτέρω εξέλιξης των υπολογιστικών εργαλείων έτσι ώστε να λαμβάνουν υπόψη τους περιπτώσεις όπου η στοχαστικότητα του φαινομένου είναι ουσιώδους σημασίας. Για να επιτευχθεί αυτό, απαραίτητη είναι η προσομοίωση της στοχαστικότητας της ροής. Αν, ειδικά, πρόκειται για πρόβλημα σχεδιασμού-βελτιστοποίησης και όχι πρόβλημα ανάλυσης της ροής, τότε χρησιμοποιείται ο όρος σχεδιασμός υπό αβεβαιότητες (design under uncertainties) [9], [13] και ο όρος στιβαρός σχεδιασμός (robust design) [1], [3]. Σε τέτοιες περιπτώσεις, συνήθης στόχος είναι η βελτιστοποίηση ενός (γραμμικού) συνδυασμού της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης. Για μία τέτοια βελτιστοποίηση, είναι αναγκαίο να προσδιοριστούν με ακρίβεια τα στατιστικά αυτά μεγέθη της αντικειμενικής συνάρτησης.

Τα ρευστοδυναμικά προβλήματα, όπου οι ροϊκές μεταβλητές είναι αβέβαιες, ανήκουν στην κατηγορία μη-αιτιοκρατικών προβλημάτων ροής. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση της αβεβαιότητας της ροής ονομάζονται στοχαστικές. Με-

ρικές από αυτές είναι η μέθοδος Monte-Carlo [7], [10] και η μέθοδος Αναπτύγματος Πολυωνυμικού Χάους (PCE, Polynomial Chaos Expansion) [18], [5]. Σ' αυτήν τη διπλωματική εργασία, θα χρησιμοποιηθούν και οι δύο, αν και έμφαση δίνεται στη δεύτερη και, ειδικά, στην επεμβατική (intrusive) εκδοχή της.

1.2 Μέθοδος Monte-Carlo

Η Μέθοδος Monte-Carlo βασίζεται στην επίλυση της ροής χωρίς αβεβαιότητες για ένα μεγάλο αριθμό διαφορετικών δειγμάτων (διαφορετικές τιμές των στοχαστικών μεταβλητών) (υπολογισμών CFD) και στη μετέπειτα στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων για τον προσδιορισμό των επιθυμητών στατιστικών μεγεθών. Οι είσοδοι που χρησιμοποιούνται επιλέγονται από μία γεννήτρια τυχαίων αριθμών που ακολουθούν την κατανομή της εισόδου. Η μέθοδος αυτή είναι αρκετά απλή, αφού δεν απαιτείται ανάπτυξη κάποιου υπολογιστικού εργαλείου αλλά αρκεί ένας κώδικας επίλυσης της ροής. Ωστόσο, για να είναι αξιόπιστα τα αποτελέσματα, απαιτείται μεγάλος αριθμός αξιολογήσεων [15], ειδικά εάν το πλήθος των αβέβαιων μεταβλητών εισόδου είναι μεγάλο, κάτι που αυξάνει σε μεγάλο βαθμό το υπολογιστικό κόστος. Για το λόγο αυτό, η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται πολύ σπάνια στην πράξη. Στη διπλωματική αυτή εργασία, θα χρησιμοποιηθεί μόνο για την πιστοποίηση των αποτελεσμάτων τα οποία προκύπτουν από άλλες μεθόδους.

1.3 Μέθοδος Αναπτύγματος Πολυωνυμικού Χάους (PCE)

Σύμφωνα με τη μέθοδο PCE, κάθε μεταβλητή του προβλήματος (π.χ ταχύτητα, πίεση) εκφράζεται ως ανάπτυγμα/άθροισμα ορθογώνιων πολυωνύμων των αβέβαιων μεταβλητών με κατάλληλους συντελεστές. Το ανάπτυγμα μίας αβέβαιης χωρο-χρονικής συνάρτησης f μπορεί να γραφεί ως:

$$f(\mathbf{x}, t, \theta) = \sum_{m=0}^M f^m(\mathbf{x}, t) \psi_m(\boldsymbol{\xi}(\theta)) \quad (1.1)$$

όπου θ το αποτέλεσμα ενός πειράματος που σχετίζεται με ένα τυχαίο ενδεχόμενο, $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1(\theta), \xi_2(\theta), \dots, \xi_n(\theta))$ το διάνυσμα των n ανεξάρτητων αβέβαιων μεταβλητών, ψ_m τα ορθογώνια πολυώνυμα και f^m οι αιτιοκρατικοί συντελεστές PCE. Το ίδιο ισχύει και

για ολοκληρωματικές ποσότητες, όπως λ.χ. η άνωση και η οπισθέλκουσα. Το πλήθος $M+1$ των όρων του αθροίσματος υπολογίζεται από τη σχέση [19]:

$$M + 1 = \binom{n + q}{n} = \frac{(n + q)!}{n!q!} \quad (1.2)$$

όπου q η τάξη χάους. Η τάξη χάους επιλέγεται σε κάθε πρόβλημα από τον χρήστη. Αύξηση της τάξης χάους συνεπάγεται ταυτόχρονη αύξηση της ακρίβειας των μεγεθών που υπολογίζονται και αύξηση του χρόνου που απαιτείται για την επίλυση του προβλήματος.

Η μέθοδος PCE τελικά στοχεύει στο να υπολογίσει τους συντελεστές PCE της αντικειμενικής συνάρτησης (με τον όρο αυτόν θα αναφέρεται κάθε ποσότητα, συνήθως ολοκληρωματική, που μας ενδιαφέρει, είτε ακολουθεί είτε βελτιστοποίηση όχι). Αφού υπολογιστούν αυτοί χρησιμοποιούνται για την εύρεση της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης. Προϋπόθεση αποτελεί η γνώση ή η αναγκαστική υπόθεση της κατανομής που ακολουθούν οι στοχαστικές μεταβλητές εισόδου, ενώ γίνεται η παραδοχή πως όλες οι μεταβλητές του προβλήματος ακολουθούν την ίδια κατανομή. Αυτό δεν ισχύει στην πράξη αφού οι εξισώσεις της ροής δεν είναι γραμμικές. Δηλαδή, δεν είναι απαραίτητο η ταχύτητα στην είσοδο και στην έξοδο ενός συμπιεστή να ακολουθεί την ίδια κατανομή. Η μέθοδος PCE αρχικά διατυπώθηκε από το Wiener [17] και αφορούσε στοχαστικές μεταβλητές που ακολουθούν κανονική κατανομή ενώ αργότερα γενικεύθηκε για κάθε κατανομή από τους Xiu και Karniadakis [19], [20]. Αναλόγως της κατανομής που ακολουθούν οι στοχαστικές μεταβλητές, χρησιμοποιείται διαφορετική οικογένεια ορθογώνιων πολυωνύμων για το ανάπτυγμα τους. Η βέλτιστη οικογένεια ορθογώνιων πολυωνύμων για συγκεκριμένη κατανομή προσδιορίζεται από το σχήμα Askey [6]. Στην περίπτωση που οι στοχαστικές μεταβλητές ακολουθούν κανονική κατανομή, τα ορθογώνια πολυώνυμα είναι τα πιθανοτικά Hermite (παράρτημα Β').

Υπάρχουν δύο βασικές διαφοροποιήσεις της μεθόδου:

- Επεμβατική Μέθοδος PCE (intrusive Polynomial Chaos Expansion, iPCE) [8], [22], [14], [2]. Στην περίπτωση αυτή, ο δημιουργός της μεθόδου οφείλει να παράξει ένα νέο σύστημα εξισώσεων οι οποίες θα λυθούν ως προς τους συντελεστές που εισάγει το ανάπτυγμα πολυωνυμικού χάους. Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν προφανώς από τις εξισώσεις ροής και, αναπόφευκτα, οι εξισώσεις της ροής αλλάζουν και αυξάνονται σε αριθμό. Ως αποτέλεσμα, η παρέμβαση στους επιλύτες της ροής είναι αναπόφευκτη. Άρα, η επεμβατική μέθοδος απαιτεί πρόσβαση στον πηγαίο κώδικα. Για τον προσδιορισμό των νέων εξισώσεων αντικαθίστανται στις μ.δ.ε (στην περίπτωση ροής που μοντελοποιείται με τις εξισώσεις Navier-Stokes, ως μ.δ.ε. χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Navier-Stokes) οι αβέβαιες μεταβλητές με ανάπτυγματα της μορφής (1.1). Σκοπός είναι οι εξισώσεις που προκύπτουν να μην εξαρτώνται από το ξ . Για να γίνει κάτι τέτοιο, οι εξισώσεις προβάλλονται κατά Galerkin (Παράρτημα Γ'). Ο αριθμός των εξισώσεων που προκύπτουν

εξαρτάται τόσο από την τάξη χάους που επιλέγεται όσο και από τον αριθμό των ανεξάρτητων αβέβαιων μεταβλητών. Οι εξισώσεις που προέκυψαν είναι και αυτές μ.δ.ε και οι οριακές συνθήκες εξαρτώνται από στοχαστικές ποσότητες (λ.χ. μέση τιμή, τυπική απόκλιση) των αβέβαιων μεταβλητών. Οι εξισώσεις αυτές επιλύονται αριθμητικά και προσδιορίζονται τα πεδία των συντελεστών PCE (π.χ. ταχύτητα θερμοκρασία για ρευστομηχανικά συστήματα). Αφού ολοκληρωθεί η επίλυση των εξισώσεων γίνονται, πλέον, διαθέσιμα τα πεδία των συντελεστών PCE για την ταχύτητα, την πίεση και για οποιαδήποτε άλλη ροϊκή μεταβλητή εμπλέκεται στις εξισώσεις. Ωστόσο, είναι επιθυμητός ο προσδιορισμός της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης, λ.χ. του συντελεστή άνωσης μίας αεροτομής. Για τον υπολογισμό αυτό, χρησιμοποιούνται τα πεδία των συντελεστών PCE της ταχύτητας και της πίεσης, όπως θα δειχθεί λεπτομερώς στη συνέχεια.

- Μη-επεμβατική Μέθοδος PCE (non-intrusive Polynomial Chaos Expansion, niPCE) [11], [12]. Αυτή η μέθοδος είναι πιο διαδεδομένη, επειδή δεν απαιτείται επέμβαση στους επιλύτες της ροής. Σε αντίθεση με την επεμβατική μέθοδο, στη μη-επεμβατική μέθοδο δεν υπολογίζονται τα πεδία των συντελεστών PCE για κάθε κομβική τιμή ροϊκού μεγέθους, αλλά υπολογίζονται απευθείας η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της αντικειμενικής συνάρτησης (λ.χ. του συντελεστή άνωσης). Για να υπολογιστούν τα μεγέθη αυτά είναι απαραίτητο να επιλυθεί το πρόβλημα παραπάνω από μία φορές. Εάν η στοχαστικότητα προέρχεται από τις οριακές συνθήκες (π.χ. από την ταχύτητα στην είσοδο ενός συμπιεστή) τότε επιλύεται το πρόβλημα με διαφορετικές οριακές συνθήκες. Στην περίπτωση που η στοχαστικότητα προέρχεται από τη γεωμετρία ενός ή περισσοτέρων σωμάτων στο χωρίο (π.χ. οι ανοχές στην κατασκευή των πτερυγίων ενός στροβίλου) τότε επιλύεται η ροή με πτερύγια διαφορετικής μορφής στο χωρίο. Τα σημεία αυτά επίλυσης της ροής επιλέγονται με βάση τη θεωρία ολοκλήρωσης κατά Gauss (Gauss Quadrature). Ο αριθμός των σημείων στα οποία πρέπει να γίνουν υπολογισμοί των αντίστοιχων πεδίων ροής εξαρτάται από την τάξη χάους που επιλέγεται και τον αριθμό των ανεξάρτητων αβέβαιων μεταβλητών.

Συγκρίνοντας τις δύο μεθόδους, η δεύτερη απαιτεί περισσότερο χρόνο ειδικά όταν υπάρχει μεγάλος αριθμός αβέβαιων μεταβλητών. Αυτό συμβαίνει διότι επιλύεται το ρευστομηχανικό πρόβλημα χωρίς αβεβαιότητες πολλές φορές. Ωστόσο, δεν απαιτείται προγραμματιστική παρέμβαση στους ήδη υπάρχοντες κώδικες. Σε αντίθεση με τη μη-επεμβατική μέθοδο, στην επεμβατική μέθοδο ο χρόνος για τη λύση του προβλήματος είναι μικρότερος. Όμως, είναι απαραίτητη η αλλαγή στους ήδη υπάρχοντες κώδικες, επειδή αλλάζουν και πληθαίνουν οι εξισώσεις και προφανώς οι άγνωστοι του προβλήματος. Παρόλα αυτά, εάν γίνει ο προγραμματισμός των εξισώσεων, τότε η επεμβατική μέθοδος πλεονεκτεί σημαντικά έναντι της μη-επεμβατικής, λόγω του μειωμένου χρόνου υπολογισμών [18], [5]. Σε κάθε περίπτωση, και οι δύο παραλλαγές της μεθόδου είναι πολύ γρηγορότερες από τη μέθοδο Monte Carlo.

1.3.1 Επεμβατική Μέθοδος iPCE

Οι n αβέβαιες μεταβλητές εισόδου θα προκαλέσουν αβεβαιότητα σε όλες τις ροϊκές μεταβλητές του προβλήματος, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως. Έτσι, κάθε μεταβλητή γράφεται στη μορφή της σχέσης (1.1). Το πλήθος των όρων που εμφανίζεται στο ανάπτυγμα εξαρτάται από το πλήθος των στοχαστικών μεταβλητών καθώς και την τάξη χάους q που επιλέγεται, σύμφωνα με την εξίσωση (1.2). Όσο μεγαλύτερη είναι η τάξη χάους, τόσο μεγαλύτερη είναι και η ακρίβεια στη λύση του προβλήματος. Ωστόσο, καθώς αυξάνεται η τάξη χάους, αυξάνεται και ο αριθμός των εξισώσεων που πρέπει να επιλυθούν. Αυτό οφείλεται στην αύξηση των πεδίων των συντελεστών PCE, που αποτελούν και τους αγνώστους του προβλήματος. Με άλλα λόγια, στην πράξη δεν χρησιμοποιούνται αναπτύγματα που αντιστοιχούν σε μεγάλες τάξεις χάους, επειδή αυξάνεται σημαντικά ο χρόνος που απαιτείται για την επίλυση του προβλήματος και επιτυγχάνεται σύγκλιση με μικρότερες τάξεις χάους. Εφόσον το πλήθος και η μορφή των εξισώσεων εξαρτάται από την τάξη χάους και τον αριθμό των αβέβαιων μεταβλητών ο προγραμματισμός γίνεται ξεχωριστά για κάθε περίπτωση. Έτσι, είναι δυνατό να κατασκευαστεί ενιαίος κώδικας όπου ο χρήστης θα μπορεί να επιλέξει την περίπτωση που επιθυμεί ή να κατασκευαστούν περισσότεροι από ένας κώδικες, ένας για κάθε περίπτωση. Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία επιλέγεται ο δεύτερος τρόπος.

Αφού προσδιορισθεί ο αριθμός των αβέβαιων μεταβλητών καθώς και η επιθυμητή τάξη χάους των μεταβλητών των εξισώσεων (π.χ ταχύτητα, πίεση) αντικαθίστανται τα αναπτύγματα αυτών στις εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα. Σκοπός είναι οι εξισώσεις να είναι ανεξάρτητες από το διάνυσμα των n ανεξάρτητων αβέβαιων μεταβλητών ($\boldsymbol{\xi}=(\xi_1(\theta), \xi_2(\theta), \dots, \xi_n(\theta))$). Για να επιτευχθεί αυτό, χρησιμοποιούνται οι προβολές Galerkin. Ως προβολή Galerkin ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο δύο η περισσότερων ορθογωνίων πολυωνύμων με την αντίστοιχη πυκνότητα πιθανότητας. Τα πιθανοτικά πολυώνυμα Hermite επιλέγονται στην περίπτωση της κανονικής κατανομής και η σχέση υπολογισμού της προβολής Galerkin δύο η περισσότερων ορθογώνιων πολυωνύμων είναι:

$$\langle \psi_i(\boldsymbol{\xi}), \psi_j(\boldsymbol{\xi}), \dots, \psi_n(\boldsymbol{\xi}) \rangle = \int_V \psi_i(\boldsymbol{\xi}) \psi_j(\boldsymbol{\xi}) \dots \psi_n(\boldsymbol{\xi}) w(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (1.3)$$

όπου $w(\boldsymbol{\xi})$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής και $\psi_i(\boldsymbol{\xi})$ το i -οστό πολυώνυμο Hermite. Ενδεικτικά αναφέρονται τα πέντε πρώτα (παράρτημα Β')

$$\begin{aligned} \psi_0(\xi) &= 1 \\ \psi_1(\xi) &= \xi \\ \psi_2(\xi) &= \xi^2 - 1 \\ \psi_3(\xi) &= \xi^3 - 3\xi \\ \psi_4(\xi) &= \xi^4 - 6\xi^2 + 3 \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που υπάρχει μία αβέβαιη μεταβλητή εισόδου, η οποία θα εξεταστεί σ' αυτήν τη διπλωματική εργασία τότε η προβολή Galerkin των πολυωνύμων γράφεται ισοδύναμα:

$$\langle \psi_i(\xi), \psi_j(\xi), \dots \psi_n(\xi) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(\xi) \psi_j(\xi) \dots \psi_n(\xi) w(\xi) d\xi \quad (1.4)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα ορθογωνιότητας, για δύο ορθογώνια πολυώνυμα ισχύει ότι:

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \langle \psi_i^2 \rangle \delta_{ij} \quad (1.5)$$

όπου $\|\psi_i\|^2 = \langle \psi_i^2 \rangle$ το τετράγωνο της νόρμας του πολυωνύμου και δ_{ij} το δέλτα του Kronecker το οποίο ισούται με:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

Οι παραπάνω σχέσεις χρησιμοποιούνται για την παραγωγή των εξισώσεων αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους, όπως θα φανεί στα επόμενα κεφάλαια.

Υπολογισμός Στατιστικών Μεγεθών

Αφού επιλυθούν οι εξισώσεις και προσδιοριστούν όλα τα πεδία των συντελεστών PCE για όλες τις ροϊκές μεταβλητές είναι επιθυμητός ο υπολογισμός στατιστικών ποσοτήτων (π.χ. η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση) ορισμένων μεγεθών, όπως η άνωση και η οπισθέλκουσα στην περίπτωση μίας αεροτομής σε ελεύθερο ρεύμα αέρα. Σύμφωνα με τον ορισμό της ν-οστής προσδοκώμενης τιμής για ένα αβέβαιο μέγεθος f (παράρτημα

Α') και με αντικατάσταση του αναπτύγματος της σχέσης (1.1) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
 E[f^\nu] &= \int_{-\infty}^{\infty} f^\nu w(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^q f_i \psi_i(\xi) \right)^\nu w(\xi) d\xi \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i_1=0}^q f_{i_1} \psi_{i_1}(\xi) \dots \sum_{i_\nu=0}^q f_{i_\nu} \psi_{i_\nu}(\xi) w(\xi) d\xi \quad (1.6) \\
 &= \sum_{i_1=0}^q \dots \sum_{i_\nu=0}^q f_{i_1} \dots f_{i_\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{i_1}(\xi) \dots \psi_{i_\nu}(\xi) w(\xi) d\xi
 \end{aligned}$$

Για $\nu=1$, η πρώτη προσδοκώμενη τιμή συμπίπτει με τη μέση τιμή (παράρτημα Α'), συνεπώς ισχύει ότι:

$$\mu_f = E[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^q f_i \psi_i(\xi) w(\xi) d\xi \quad (1.7)$$

επειδή ισχύει ότι $\psi_0(\xi) = 1$, η σχέση για τη μέση τιμή ξαναγράφεται ως εξής:

$$\mu_f = E[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^q f_i \psi_i(\xi) \psi_0(\xi) w(\xi) d\xi \quad (1.8)$$

Όμως, σύμφωνα με την ιδιότητα ορθογωνιότητας των πολυωνύμων Hermite προκύπτει μόνο ένας μη-μηδενικός όρος από το άθροισμα. Έτσι η σχέση για τη μέση τιμή γράφεται:

$$\mu_f = f_0 \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) d\xi = f_0 \quad (1.9)$$

Επιπλέον, από τη σχέση Α'.11 (παράρτημα Α') η τυπική απόκλιση εξαρτάται από τη μέση τιμή και την $E[f^2]$. Όμως, για την $E[f^2]$ ισχύει ότι:

$$E[f^2] = \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^q f_i f_j \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(\xi) \psi_j(\xi) w(\xi) d\xi = \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^q f_i f_j \langle \psi_i^2 \rangle \delta_{ij} \quad (1.10)$$

όπου οι μόνοι μη-μηδενικοί όροι της παραπάνω σχέσης είναι αυτοί για τους οποίους

ισχύει $i = j$. Τελικά, προκύπτει ότι:

$$E[f^2] = \sum_{i=0}^q f_i^2 \|\psi_i\|^2 \quad (1.11)$$

Αντικαθιστώντας την (1.11) στη σχέση A.11 προκύπτει ότι:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^q f_i^2 \langle \psi_i^2 \rangle \quad (1.12)$$

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, η μέση τιμή δίνεται από τον ίδιο τύπο για οποιαδήποτε τάξη χάους ενώ η τυπική απόκλιση, για πρώτη τάξη χάους $q = 1$, είναι:

$$\sigma = |f_1| \quad (1.13)$$

και για δεύτερη τάξη χάους είναι:

$$\sigma = \sqrt{f_1^2 + 2f_2^2} \quad (1.14)$$

1.4 Στόχος της Εργασίας

Η διπλωματική εργασία εστιάζει στη μαθηματική διατύπωση της iPCE μεθόδου για μία αβέβαιη μεταβλητή εισόδου σε διδιάστατα προβλήματα χρονικά μόνιμης ροής ασυμπίεστου ρευστού. Αφού παραχθούν οι εξισώσεις για 1^η και 2^η τάξη πολυωνυμικού χάους επιλύονται σε περιβάλλον OpenFOAM και διερευνάται η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων, μέσω της σύγκρισης τους με αποτελέσματα άλλων μεθόδων, όπως η niPCE και Monte-Carlo. Επιπλέον διερευνάται η επίδραση της αύξησης της τάξης χάους στη βελτίωση της λύσης. Τέλος, συγκρίνεται ο χρόνος που απαιτείται, για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων, από την iPCE και niPCE. Αρχικά τα προβλήματα αφορούν στρωτή ροή και, μετά, τυρβώδη με την παραδοχή της μη-στοχαστικής τύρβης. Σύμφωνα με την παραδοχή αυτή, το πεδίο της τυρβώδους συνεκτικότητας δεν είναι επηρεάζεται από την μεταβολή των αβέβαιων μεταβλητών εισόδου. Τελικός στόχος είναι μέσα από τις εφαρμογές που πραγματοποιήθηκαν να εξαχθούν γενικά συμπεράσματα για την επεμβατική μέθοδο.

1.5 Δομή της Εργασίας

Η δομή αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η εξής:

- Στο **2^ο** κεφάλαιο παρουσιάζεται η διακριτοποίηση των εξισώσεων ροής για διδιάστατη, χρονικά μόνιμη και στρωτή ροή ασυμπίεστου ρευστού. Επίσης, αναπτύσσεται το γενικό σύστημα των εξισώσεων της iPCE μεθόδου και παράγονται από αυτό οι εξισώσεις για μία αβέβαιη στοχαστική μεταβλητή εισόδου και για 1^η-2^η τάξη πολυωνυμικού χάους.
- Στο **3^ο** κεφάλαιο εφαρμόζεται η μέθοδος σε διδιάστατα προβλήματα. Πιο συγκεκριμένα, σε 2 διαφορετικές μεμονωμένες αεροτομές σε ελεύθερο ρεύμα αέρα και τα αποτελέσματα που προκύπτουν συγκρίνονται με τη μέθοδο niPCE για την οποία έχει ήδη διαπιστωθεί πως δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα.
- Στο **4^ο** κεφάλαιο εφαρμόζεται η μέθοδος για μία αβέβαιη μεταβλητή και 2^η τάξη χάους σε προβλήματα τυρβώδους ροής με την παραδοχή της μη-στοχαστικής τύρβης. Η ίδια παραδοχή χρησιμοποιείται και στην περίπτωση της μη-επεμβατικής μεθόδου και τα αποτελέσματα συγκρίνονται με την "κλασική" niPCE και τη μέθοδο Monte-Carlo.
- Στο **5^ο** κεφάλαιο παρατίθενται τα συμπεράσματα από τη μελέτη της iPCE μαζί με προτάσεις και σχόλια για περαιτέρω μελέτη και εφαρμογές της μεθόδου
- Στο παράρτημα παρουσιάζονται συγκεντρωτικά χρήσιμες σχέσεις και τυπολογία για τη μέθοδο PCE, που αφορούν την επεμβατική και τη μη-επεμβατική εκδοχή της. Επιπλέον παρατίθεται ένα παράρτημα στατιστικής.

Κεφάλαιο 2

Ανάπτυξη Συστήματος

Εξισώσεων της Μεθόδου PCE

2.1 Εξισώσεις Ροής

Οι εξισώσεις της χρονικά μόνιμης στρωτής, ασυμπίεστης ροής είναι οι εξής:

$$R^p = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

$$R_i^v = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.2)$$

όπου

$$\tau_{ij} = \nu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.3)$$

όπου $p = \frac{p}{\rho}$ αφού στην περίπτωση του ασυμπίεστου ρευστού η πυκνότητα είναι σταθερή.

Στις εξισώσεις χρησιμοποιείται η σύμβαση του Einstein, όπου ο διπλός δείκτης υποδηλώνει άθροιση.

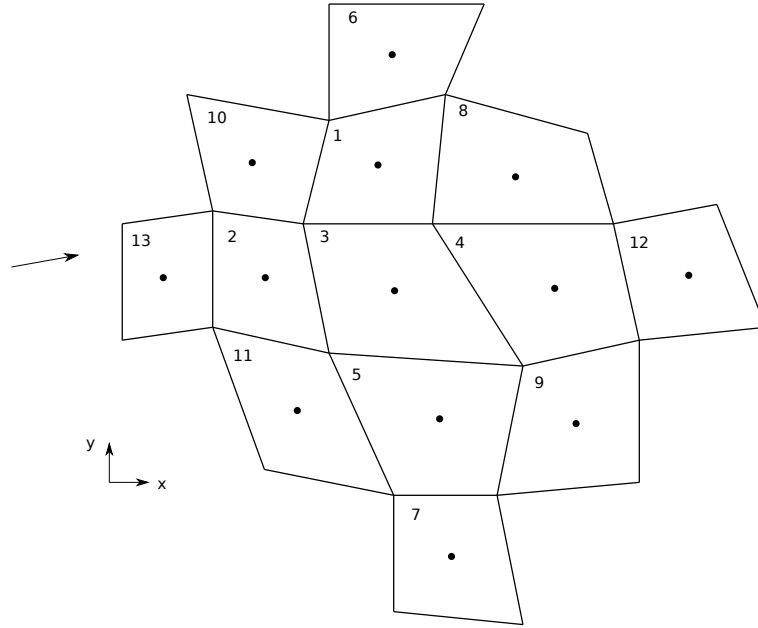
Οι εξισώσεις επιλύονται στο λογισμικό ανοιχτού κώδικα OpenFOAM με τον αλγόριθμο SIMPLE (Semi-Implicit Method Pressure-Linked Equations) [1]. Είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος, σύμφωνα με τον οποίο, αρχικά λύνονται αριθμητικά οι εξισώσεις της ορμής, θεωρώντας, προσωρινά, γνωστό το πεδίο της πίεσης και υπολογίζονται οι

συνιστώσες της ταχύτητας σε κάθε κόμβο του πλέγματος. Έπειτα, μέσω της εξίσωσης της συνέχειας, βρίσκεται η τιμή της πίεσης σε κάθε κόμβο του πλέγματος. Για τη διακριτοποίηση των εξισώσεων χρησιμοποιείται η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων [4], η οποία μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε δομημένα, όσο και σε μη-δομημένα πλέγματα. Τελικά, οι εξισώσεις (2.4)-(2.5) ολοκληρώνονται και για κάθε όγκο ελέγχου (όγκος κυψέλης του πλέγματος) παίρνουν τη μορφή:

$$R^p = \int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV = 0 \quad (2.4)$$

$$R_i^v = \int_V v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV + \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV - \int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV = 0 \quad (2.5)$$

Η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων στο OpenFOAM ακολουθεί την κεντρο-κυψελική διατύπωση (cell-centered finite volume formulation), οπότε κατά τη διακριτοποίηση των εξισώσεων ο όγκος ελέγχου θεωρείται ο όγκος της κυψέλης (cell) του πλέγματος. Παρακάτω θα μελετηθεί η διακριτοποίηση των εξισώσεων στην περίπτωση του διδιάστατου προβλήματος. Παρά το γεγονός, ότι τα προβλήματα είναι διδιάστατα, τα πλέγματα που δημιουργούνται στο περιβάλλον του OpenFOAM είναι τριδιάστατα. Πιο συγκεκριμένα, όλες οι κυψέλες του πλέγματος έχουν το ίδιο πάχος στην τρίτη (z) διεύθυνση και η εξίσωση της ορμής κατά τον άξονα z δεν επιλύεται. Στο σχήμα 2.1 παρουσιάζεται ένα τμήμα μη-δομημένου πλέγματος κατασκευασμένο στο OpenFOAM. Η τρίτη διάσταση του πλέγματος δεν φαίνεται στο σχήμα αφού όπως αναφέρθηκε προηγουμένως το πρόβλημα είναι διδιάστατο. Κάθε "φάτσα" (face) του πλέγματος, με εξαίρεση τις οριακές, συνορεύει με δύο κυψέλες. Για κάθε "φάτσα" χρησιμοποιείται από τον OpenFOAM η εξής σύμβαση: Η κυψέλη με τον μικρότερο αριθμό λέγεται "ιδιοκτήτης" (owner) της "φάτσας", ενώ η κυψέλη με τον μεγαλύτερο αριθμό ονομάζεται "γείτονας" (neighbour) της "φάτσας". Επιπλέον, οι οριακές "φάτσες" του πλέγματος συνορεύουν με μία κυψέλη μόνο που ονομάζεται "ιδιοκτήτης" της "φάτσας".



Σχήμα 2.1: Τμήμα μη-δομημένου πλέγματος κατασκευασμένου στο περιβάλλον του *OpenFOAM*

Παρακάτω παρουσιάζεται η διακριτοποίηση των εξισώσεων για την κυψέλη 3 του σχήματος 2.1. Αρχικά, ο όρος της μεταφοράς γράφεται ισοδύναμα στη συντηρητική γραφή, αφού ισχύει η εξίσωση της συνέχειας για ασυμπίεστο ρευστό:

$$\int_V v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV = \int_V \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} dV \quad (2.6)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Green-Gauss, το ογκικό ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα στην επιφάνεια της κυψέλης και, τελικά, μετατρέπεται σε άθροισμα ροών:

$$\int_V \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} dV = \int_S v_i v_j n_j dS = \sum_{f=1}^{NF} v_i^f (v_j n_j)^f \Delta S^f \quad (2.7)$$

όπου NF ο αριθμός των "φατσών" (faces) της κυψέλης, n_j το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στη "φάτσα" f , με κατεύθυνση από τον ιδιοκτήτη (owner) στον γείτονα (neighbour). Το ΔS^f είναι το εμβαδόν της "φάτσας". Ο όρος $(v_j n_j \Delta S)^f$ συμβολίζει τη παροχή όγκου (flux) του ρευστού που διέρχεται από τη "φάτσα" f και συμβολίζεται με Φ . Η ταχύτητα στη "φάτσα" του πλέγματος που χρειάζεται για τον υπολογισμό του Φ υπολογίζεται με γραμμική παρεμβολή των ταχυτήτων των κέντρων των κυψελών εκατέρωθεν. Τα κάθετα μοναδιαία διανύσματα έχουν αποθηκευτεί στη μνήμη με την σύμβαση που αναφέρθηκε προηγουμένως, ωστόσο, κατά την διαδικασία της διακριτοποίησης των εξισώσεων σε μία κυψέλη, θεωρείται πως το κάθετο διάνυσμα έχει

φορά προς τα έξω. Συνεπώς, τοποθετείται το κατάλληλο πρόσημο, μπροστά από κάθε διακριτοποιημένο όρο. Επομένως, για την κυψέλη 3 του πλέγματος του σχήματος 2.1, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \int_{V_3} \frac{\partial(v_j v_i)}{\partial x_j} dV = & -\Phi_{23}(\omega^{23} v_i^2 + (1 - \omega^{23}) v_i^3) \\ & -\Phi_{13}(\omega^{13} v_i^1 + (1 - \omega^{13}) v_i^3) \\ & +\Phi_{35}(\omega^{35} v_i^3 + (1 - \omega^{35}) v_i^5) \\ & +\Phi_{34}(\omega^{34} v_i^3 + (1 - \omega^{34}) v_i^4) \end{aligned} \quad (2.8)$$

όπου οι συντελεστές ω εξαρτώνται από τα σχήματα διακριτοποίησης. Για τον όρο της μεταφοράς επιλέγονται ανάντι σχήματα διακριτοποίησης. Για παράδειγμα, εάν επιλεχθούν 1^{ης} τάξης σχήματα διακριτοποίησης για τον όρο μεταφοράς και θεωρηθεί πως η φορά της ταχύτητας είναι από την κυψέλη 2 προς την κυψέλη 3, τότε $\omega^{23} = 1$. Δηλαδή λαμβάνεται υπόψη μόνο η ταχύτητα του κέντρου της κυψέλης 2.

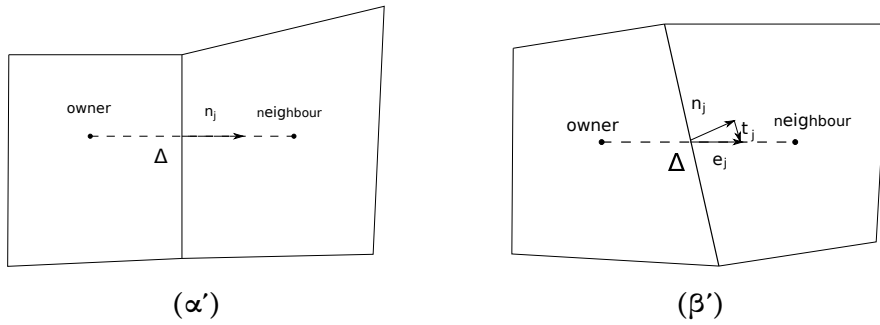
Για τον όρο της διάχυσης, χρησιμοποιείται το θεώρημα (Green-Gauss) και το επιφανειακό ολοκλήρωμα γράφεται ως άθροισμα ροών:

$$\int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_S \tau_{ij} n_j dS = \sum_{f=1}^{NF} \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j \Delta S^f \quad (2.9)$$

όπου τ_{ij} ο τανυστής των τάσεων. Οι μερικές παράγωγοι που βρίσκονται μέσα στο άθροισμα υπολογίζονται ξεχωριστά:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_f \nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j \Delta S^f \\ \Sigma_2 &= \sum_f \nu \frac{\partial v_j}{\partial x_i} n_j \Delta S^f \end{aligned} \quad (2.10)$$

Για το Σ_1 υπάρχουν δύο υποπεριπτώσεις. Εξετάζεται εάν το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα των δύο κυψελών είναι κάθετο στην κοινή τους "φάτσα" ή όχι. Οι δύο αυτές περιπτώσεις παρουσιάζονται στο σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2: Δύο γειτονικές κυψέλες ενός πλέγματος όπου α) το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των κέντρων των κυψελών είναι κάθετο στην κοινή τους "φάτσα" β) το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των κέντρων των κυψελών δεν είναι κάθετο στην κοινή τους "φάτσα".

Η δεύτερη περίπτωση, η οποία είναι και γενικότερη, παρουσιάζεται στο σχήμα 2.2β. Το διάνυσμα \vec{n} αναλύεται σε δύο συνιστώσες, μία παράλληλη στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα των κυψελών (\vec{e}) και μία κάθετη στο \vec{n} (\vec{t}). Για αυτά τα διανύσματα ισχύει η σχέση $\vec{n} + \vec{t} = \vec{e}$. Έτσι, το Σ_1 γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} e_j - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} t_j \quad (2.11)$$

Ο πρώτος όρος της σχέσης (2.11) μπορεί να διακριτοποιηθεί σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} e_j = \frac{v_i^N - v_i^O}{\Delta} \quad (2.12)$$

Για τον δεύτερο όρο, που αποτελεί μία διόρθωση, γίνεται παρεμβολή από τα κέντρα των δύο κυψελών στη "φάτσα", σύμφωνα με τη σχέση:

$$\left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_f = \omega^O \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_O + \omega^N \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_N \quad (2.13)$$

Για τον υπολογισμό των παραγώγων στα κέντρα των κυψελών γίνεται η παραδοχή, ότι η μερική παράγωγος θεωρείται σταθερή στον όγκο της κυψέλης. Συνεπώς, ισχύει ότι:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \int_V dV = \int_V \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dV \Rightarrow \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{\int_V \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dV}{V} \quad (2.14)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Green-Gauss προκύπτει ότι:

$$\left. \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right|_{O,N} = \frac{1}{V} \sum_f v_j n_i \Delta S^f \quad (2.15)$$

Έτσι, το Σ_1 για την κυψέλη 3 του σχήματος 2.1 ισοδυναμεί με:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = & \nu \left(\frac{v_i^4 - v_i^3}{\Delta} \Delta S^{34} + \frac{v_i^3 - v_i^2}{\Delta} \Delta S^{23} + \frac{v_i^3 - v_i^1}{\Delta} \Delta S^{13} + \frac{v_i^5 - v_i^3}{\Delta} \Delta S^{53} \right. \\ & \left. + \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{34} t_j^{34} \Delta S^{34} + \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{23} t_j^{23} \Delta S^{23} + \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{13} t_j^{13} \Delta S^{13} + \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{35} t_j^{35} \Delta S^{35} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

ενώ οι μερικές παράγωγοι στις "φάτσες" αναλύονται με τον εξής τρόπο:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{13} t_j^{13} \Delta S^{13} &= \omega^{13} \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_1 t_j^{13} \Delta S^{13} + (1 - \omega^{13}) \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_3 t_j^{13} \Delta S^{13} \\ &= \frac{\omega^{13}}{V} \sum_{f1=1}^{NF} v_i n_j t_j^{13} \Delta S^{13} + \frac{1 - \omega^{13}}{V} \sum_{f3=1}^{NF} v_i n_j t_j^{13} \Delta S^{13} \\ &= \frac{\omega^{13}}{V} (v_i^{16} n_j^{16} \Delta S^{16} + v_i^{18} n_j^{18} \Delta S^{18} + v_i^{110} n_j^{110} \Delta S^{110} + v_i^{13} n_j^{13} \Delta S^{13}) t_j^{13} \Delta S^{13} + \\ & \quad \frac{1 - \omega^{13}}{V} (v_i^{13} n_j^{13} \Delta S^{13} + v_i^{34} n_j^{34} \Delta S^{34} + v_i^{23} n_j^{23} \Delta S^{23} + v_i^{35} n_j^{35} \Delta S^{35}) t_j^{13} \Delta S^{13} \end{aligned} \quad (2.17)$$

όπου V ο όγκος της κυψέλης, και οι συντελεστές ω εξαρτώνται από τα σχήματα διακριτοποίησης. Τέλος, η ταχύτητα στην κάθε "φάτσα" υπολογίζεται με γραμμική παρεμβολή των ταχυτήτων στα κέντρα των κυψελών.

Με παρόμοιο τρόπο γράφονται και οι άλλοι 3 όροι που περιέχουν μερική παράγωγο στην εξίσωση (2.17). Επίσης, και το Σ_2 διακριτοποιείται με τον ίδιο τρόπο που διακριτοποιήθηκε και ο δεύτερος όρος του Σ_1 . Τελικά, αντικαθιστώντας τους διακριτοποιημένους όρους μεταφοράς και διάχυσης στην εξίσωση της ορμής, προκύπτει μία σχέση της μορφής:

$$a_r v_{i,r} = \sum_{n=1}^{NB} a_n v_{i,n} - \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV + b_i \quad (2.18)$$

όπου r είναι η κυψέλη που εξετάζεται κάθε φορά (στην παραπάνω ανάλυση η κυψέλη 3), a_r και a_n συντελεστές, NB ο αριθμός των γειτονικών κυψελών και b_i είναι ένας όρος που περιέχει τους όρους που δεν αντιμετωπίζονται με πεπλεγμένο (Implicit) τρόπο, ανάμεσα στους οποίους είναι και οι συνεισφορές από τις άλλες κυψέλες. Για την κλίση πίεσης χρησιμοποιείται το θεώρημα Green-Gauss και ο όρος αυτός γράφεται:

$$\int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = \int_S p n_i dS = \sum_{f=1}^{NF} p n_i \Delta S^f \quad (2.19)$$

Η τιμή της πίεσης σε κάθε "φάτσα" υπολογίζεται με γραμμική παρεμβολή της τιμής της πίεσης στα κέντρα των κυψελών με τις οποίες συνορεύει η "φάτσα". Η εξίσωση (2.18) αποτελεί την πρώτη διανυσματική εξίσωση που λύνεται από τον αλγόριθμο SIMPLE και προκύπτει το πεδίο της ταχύτητας στα κέντρα των κυψελών του πλέγματος. Η δεύτερη εξίσωση προκύπτει από την εξίσωση της συνέχειας και την (2.18).

2.2 Διατύπωση Εξισώσεων PCE - Μία Αβέβαιη Μεταβλητή

Παρακάτω διατυπώνονται οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα για $q = 1$ και 2 με μία αβέβαιη μεταβλητή εισόδου. Οι μεταβλητές που θεωρούνται στοχαστικές είναι η ταχύτητα και η πίεση. Η πυκνότητα του ρευστού και η συνεκτικότητα λαμβάνονται σταθερές σε όλο το πεδίο. Επιπλέον, θεωρείται πως όλες οι μεταβλητές ακολουθούν κανονική κατανομή. Στην περίπτωση της μεθόδου iPCE, οι μεταβλητές της ροής αντικαθίστανται στις εξισώσεις από τα αναπτύγματα των αντίστοιχων μεταβλητών σύμφωνα με την εξίσωση (1.1). Οπότε οι εξισώσεις (2.4) και (2.5) γράφονται:

$$R^p = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{m=0}^P v_i^m(\mathbf{x}) \psi_m(\boldsymbol{\xi}) \right) = 0 \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} R_i^v = & \sum_{m=0}^P v_j^m(\mathbf{x}) \psi_m(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{l=0}^P v_i^l(\mathbf{x}) \psi_l(\boldsymbol{\xi}) \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{m=0}^P p^m(\mathbf{x}) \psi_m(\boldsymbol{\xi}) \right) \\ & - \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\sum_{m=0}^P v_i^m(\mathbf{x}) \psi_m(\boldsymbol{\xi}) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Θεωρώντας ότι η κατανομή που ακολουθούν οι αβέβαιες μεταβλητές σε όλο το χωρίο

είναι η κανονική, τα πολυώνυμα που χρησιμοποιούνται είναι τα πιθανοτικά πολυώνυμα Hermite. Αυτά εξαρτώνται μόνο από το διάνυσμα των ανεξάρτητων αβέβαιων μεταβλητών $\boldsymbol{\xi}$ και όχι από το \boldsymbol{x} . Δηλαδή τα πολυώνυμα Hermite σχετίζονται με τη στοχαστικότητα του πεδίου και είναι ανεξάρτητα της θέσης ενός σημείου στο χώρο. Επομένως, οι παραπάνω εξισώσεις λαμβάνουν τη μορφή:

$$R^p = \frac{\partial v_i^m}{\partial x_i} \psi_m = 0 \quad (2.22)$$

$$R_i^v = v_j^m \frac{\partial v_i^l}{\partial x_j} \psi_m \psi_l + \frac{\partial p^m}{\partial x_i} \psi_m - \nu \frac{\partial^2 v_i^m}{\partial x_j^2} \psi_m = 0 \quad (2.23)$$

Για να δημιουργηθούν οι προβολές Galerkin πολλαπλασιάζονται οι εξισώσεις με $\psi_k(\boldsymbol{\xi})w(\boldsymbol{\xi})$, όπου w η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής:

$$R^p = \frac{\partial v_i^m}{\partial x_i} \psi_m \psi_k w(\boldsymbol{\xi}) = 0 \quad (2.24)$$

$$R_i^v = v_j^m \frac{\partial v_i^l}{\partial x_j} \psi_m \psi_l \psi_k w(\boldsymbol{\xi}) + \frac{\partial p^m}{\partial x_i} \psi_m \psi_k w(\boldsymbol{\xi}) - \nu \frac{\partial^2 v_i^m}{\partial x_j^2} \psi_m \psi_k w(\boldsymbol{\xi}) = 0 \quad (2.25)$$

Τέλος, ολοκληρώνονται οι εξισώσεις (2.2)-(2.25) ως προς $\boldsymbol{\xi}$ σε όλο το πεδίο ορισμού του και προκύπτει ότι:

$$R^p = \frac{\partial v_i^m}{\partial x_i} \langle \psi_m, \psi_n \rangle = 0 \quad (2.26)$$

$$R_i^v = v_j^m \frac{\partial v_i^l}{\partial x_j} \langle \psi_m, \psi_l, \psi_n \rangle + \frac{\partial p^m}{\partial x_i} \langle \psi_m, \psi_n \rangle - \nu \frac{\partial^2 v_i^m}{\partial x_j^2} \langle \psi_m, \psi_n \rangle = 0 \quad (2.27)$$

Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν το γενικό σύστημα των εξισώσεων επεμβατικού πολυωνυμικού χάους που διέπουν το στοχαστικό πρόβλημα. Ανάλογα με την τάξη του χάους που επιλέγεται και τον αριθμό των ανεξάρτητων αβέβαιων μεταβλητών εισόδου προκύπτει διαφορετικός αριθμός εξισώσεων προς επίλυση. Το πλήθος των εξισώσεων πρέπει να είναι όσοι και οι άγνωστοι του προβλήματος, για να έχει λύση το πρόβλημα. Στην προκειμένη περίπτωση, άγνωστοι είναι τα πεδία των συντελεστών PCE για την ταχύτητα και την πίεση. Το πλήθος των συντελεστών αυτών έχει, ήδη, προσδιοριστεί από την εξίσωση (1.2). Συνεπώς, για το διδιάστατο πρόβλημα, όπου η ταχύτητα έχει

δύο συνιστώσες, ο αριθμός των εξισώσεων δίνεται από τη σχέση:

$$\text{Number of Equations} = 3 \frac{(n+q)!}{n!q!} \quad (2.28)$$

Θεωρώντας ως μοναδιαίο υπολογιστικό κόστος, το κόστος που απαιτείται για να λυθεί το πρόβλημα, δίχως αβεβαιότητες τότε είναι δυνατό να γίνει μία εκτίμηση του κόστους της μεθόδου iPCE για διάφορους συνδυασμούς των q , n . Στον πίνακα 2.1 παρουσιάζεται το κόστος αυτό.

iPCE	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$q = 1$	2	3	4	5
$q = 2$	3	6	10	15
$q = 3$	4	10	20	35
$q = 4$	5	15	35	70

Πίνακας 2.1: Κόστος υπολογισμού των πεδίων PCE μέσω της μεθόδου iPCE για διάφορες τάξεις χάους q και πλήθος αβέβαιων μεταβλητών εισόδου n .

Για την niPCE μέθοδο απαιτούνται $(q+1)^n$ προσομοιώσεις για τον υπολογισμό των επιθυμητών στατιστικών ροπών. Συνεπώς είναι δυνατό να υπολογιστεί το αντίστοιχο κόστος. Στον πίνακα 2.2 φαίνεται το κόστος αυτό.

niPCE	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$q = 1$	2	3	4	5
$q = 2$	4	9	16	25
$q = 3$	8	27	64	125
$q = 4$	16	81	256	625

Πίνακας 2.2: Κόστος υπολογισμού στατιστικών ροπών των αντικειμενικών συναρτήσεων μέσω της μεθόδου niPCE για διάφορες τάξεις χάους q και πλήθος αβέβαιων μεταβλητών εισόδου n .

Είναι εμφανές ότι εάν καθώς αυξάνουν τα q , n το υπολογιστικό κόστος της niPCE αυξάνει πολύ περισσότερο από το αντίστοιχο της iPCE. Το υπολογιστικό κόστος είναι ίδιο μόνο στην περίπτωση, όπου υπάρχει μία αβέβαιη μεταβλητή εισόδου ($n = 1$). Παρόλα που το υπολογιστικό κόστος της επεμβατικής μεθόδου είναι αρκετά μικρότερο από το αντίστοιχο της μη-επεμβατικής, στην περίπτωση της επεμβατικής μεθόδου απαιτείται

περισσότερη υπολογιστική μνήμη. Αυτό συμβαίνει διότι οι μ.δ.ε είναι πεπλεγμένες και λύνονται όλες μαζί.

2.2.1 Εξισώσεις 1^{ης} Τάξης Χάους

Στην περίπτωση μίας αβέβαιης μεταβλητής ($n = 1$) και $q = 1$, προκύπτουν 6 εξισώσεις όπως αναφέρθηκε προηγουμένως.

Στις εξισώσεις (2.26)-(2.27), για $k = 0$, ισχύει ότι:

$$R^p = \frac{\partial v_i^0}{\partial x_i} \langle \psi_0, \psi_0 \rangle + \frac{\partial v_i^1}{\partial x_i} \langle \psi_1, \psi_0 \rangle = 0 \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} R_i^v = & v_j^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \langle \psi_0, \psi_0, \psi_0 \rangle + v_j^0 \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \langle \psi_0, \psi_1, \psi_0 \rangle + v_j^1 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \langle \psi_1, \psi_0, \psi_0 \rangle \\ & + v_j^1 \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \langle \psi_1, \psi_1, \psi_0 \rangle + \frac{\partial p^0}{\partial x_i} \langle \psi_0, \psi_0 \rangle + \frac{\partial p^1}{\partial x_i} \langle \psi_1, \psi_0 \rangle \\ & - \nu \frac{\partial^2 v_i^0}{\partial x_j^2} \langle \psi_0, \psi_0 \rangle - \nu \frac{\partial^2 v_i^0}{\partial x_j^2} \langle \psi_1, \psi_0 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα ορθογωνιότητας των πολυωνύμων καθώς και το παράρτημα Γ' προκύπτουν οι εξής εξισώσεις για $k = 0$:

$$\frac{\partial v_i^0}{\partial x_i} = 0 \quad (2.31)$$

$$v_j^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + v_j^1 \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^0}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i^0}{\partial x_j^2} \quad (2.32)$$

Η ίδια διαδικασία γίνεται και για $k = 1$, οπότε προκύπτουν οι εξισώσεις για τα μεγέθη με δείκτη "1":

$$\frac{\partial v_i^1}{\partial x_i} = 0 \quad (2.33)$$

$$v_j^1 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + v_j^0 \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^1}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i^1}{\partial x_j^2} \quad (2.34)$$

Οι εξισώσεις αυτές έχουν αρκετές ομοιότητες με τις εξισώσεις Navier-Stokes από τις οποίες προήλθαν. Είναι εμφανές πως η εξίσωση της συνέχειας ισχύει αναλλοίωτη για τα μεγέθη με δείκτη "0" και "1" και χωρίς να εμπλέκεται η μία με την άλλη. Επιπλέον, οι εξισώσεις που παρήχθησαν από τις εξισώσεις ορμής δεν διαφέρουν σημαντικά με τις αρχικές. Για παράδειγμα, η εξίσωση της ορμής που προέκυψε με $n = 0$ διαφέρει μόνο σε έναν όρο από την κλασική εξίσωση ορμής. Τέλος, οι εξισώσεις διατήρησης της ορμής είναι πεπλεγμένες ως προς τα μεγέθη με δείκτη "0" και "1".

2.2.2 Εξισώσεις 2^{ης} Τάξης Χάους

Επιλέγοντας $q = 2$ και μία αβέβαιη μεταβλητή εισόδου, ακολουθείται η ίδια διαδικασία με πριν και τελικά προκύπτει ένα σύστημα με 9 εξισώσεις, τις εξής 6:

$$\frac{\partial v_i^0}{\partial x_i} = 0 \quad (2.35)$$

$$v_j^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + v_j^1 \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} + 2v_j^2 \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^0}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i^0}{\partial x_j^2} \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial v_i^1}{\partial x_i} = 0 \quad (2.37)$$

$$v_j^1 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + v_j^0 \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} + 2v_j^1 \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} + 2v_j^2 \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^1}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i^1}{\partial x_j^2} \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial v_i^2}{\partial x_i} = 0 \quad (2.39)$$

$$4v_j^2 \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} + v_j^1 \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} + v_j^2 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + v_j^0 \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^2}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i^2}{\partial x_j^2} \quad (2.40)$$

Όπως αναμενόταν, η εξίσωση της συνέχειας συνεχίζει να ισχύει αναλλοίωτη για τα μεγέθη "0", "1", "2". Οι εξισώσεις "ορμής" που προέκυψαν είναι παρόμοιες με τις αρχικές, μόνο που υπάρχουν περισσότεροι όροι μεταφοράς.

2.2.3 Οριακές Συνθήκες Αβέβαιων Μεταβλητών

Στην περίπτωση όπου η στοχαστικότητα της ροής οφείλεται στις συνθήκες λειτουργίας, αυτή μοντελοποιείται μέσω των οριακών συνθηκών. Για τον καθορισμό των οριακών συνθηκών είναι απαραίτητη η γνώση ή η υπόθεση στατιστικών μεγεθών των αβέβαιων μεταβλητών. Το πλήθος των στατιστικών μεγεθών εξαρτάται άμεσα από την τάξη χάους που επιλέγεται. Για παράδειγμα, στην περίπτωση 1^{ης} τάξης χάους απαιτούνται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση, ενώ εάν επιλεγεί 2^{ης} τάξης χάους χρειάζεται επιπλέον και η στρέβλωση. Ωστόσο, οι εξισώσεις αναπτύχθηκαν για κανονική κατανομή, όπου η στρέβλωση της κατανομής είναι μηδέν ($s = 0$).

Εφόσον, τα μεγέθη με δείκτη "0" συμπίπτουν με τη μέση τιμή των μεγεθών, οι οριακές συνθήκες για αυτά τα μεγέθη είναι ίδιες με αυτές που θα χρησιμοποιούνταν εάν το πρόβλημα λυνόταν χωρίς να ληφθεί υπόψη η στοχαστικότητα. Οι οριακές συνθήκες για τα μεγέθη "1" και "2", εάν αυτά υπάρχουν, είναι αντίστοιχες με τις οριακές συνθήκες για τα μεγέθη "0". Δηλαδή όπου επιλέχθηκε συνθήκη *Dirichlet* για τα μεγέθη "0" επιλέγεται και πάλι τέτοιου είδους συνθήκη. Το ίδιο ισχύει και για τις συνθήκες *Neumann*.

Εάν επιλεγεί $q = 1$ τότε η τυπική απόκλιση της αβέβαιης μεταβλητής ισούται με τον συντελεστή PCE f_1 σύμφωνα με τη σχέση 1.14. Άρα, η οριακή συνθήκη *Dirichlet* για τα μεγέθη με δείκτη "1" είναι η τυπική απόκλιση $f_1 = \sigma$, στην περίπτωση των αβέβαιων μεταβλητών. Σε κάθε άλλη περίπτωση επιλέγεται η τιμή 0.

Όταν επιλεγεί $q = 2$, η σχέση (1.14) συνδέει την τυπική απόκλιση σ με τα μεγέθη f_1, f_2 . Συνεπώς, για τον καθορισμό των οριακών συνθηκών απαιτείται μία ακόμα σχέση. Αυτή είναι η σχέση που προκύπτει από το γεγονός ότι η κανονική κατανομή είναι συμμετρική και, επομένως, η στρέβλωση είναι 0. Η σχέση αυτή συνδέει τα μεγέθη f_1, f_2 και είναι η εξής:

$$8f_2^3 + 6f_1^2 f_2 = 0 \quad (2.41)$$

Η εξίσωση αυτή αν λυθεί ως προς f_2 έχει μοναδική ρίζα το 0. Συνεπώς, οι οριακές συνθήκες για τις αβέβαιες μεταβλητές "1" και "2" είναι $f_2 = 0$ και $f_1 = \sigma$ αντίστοιχα.

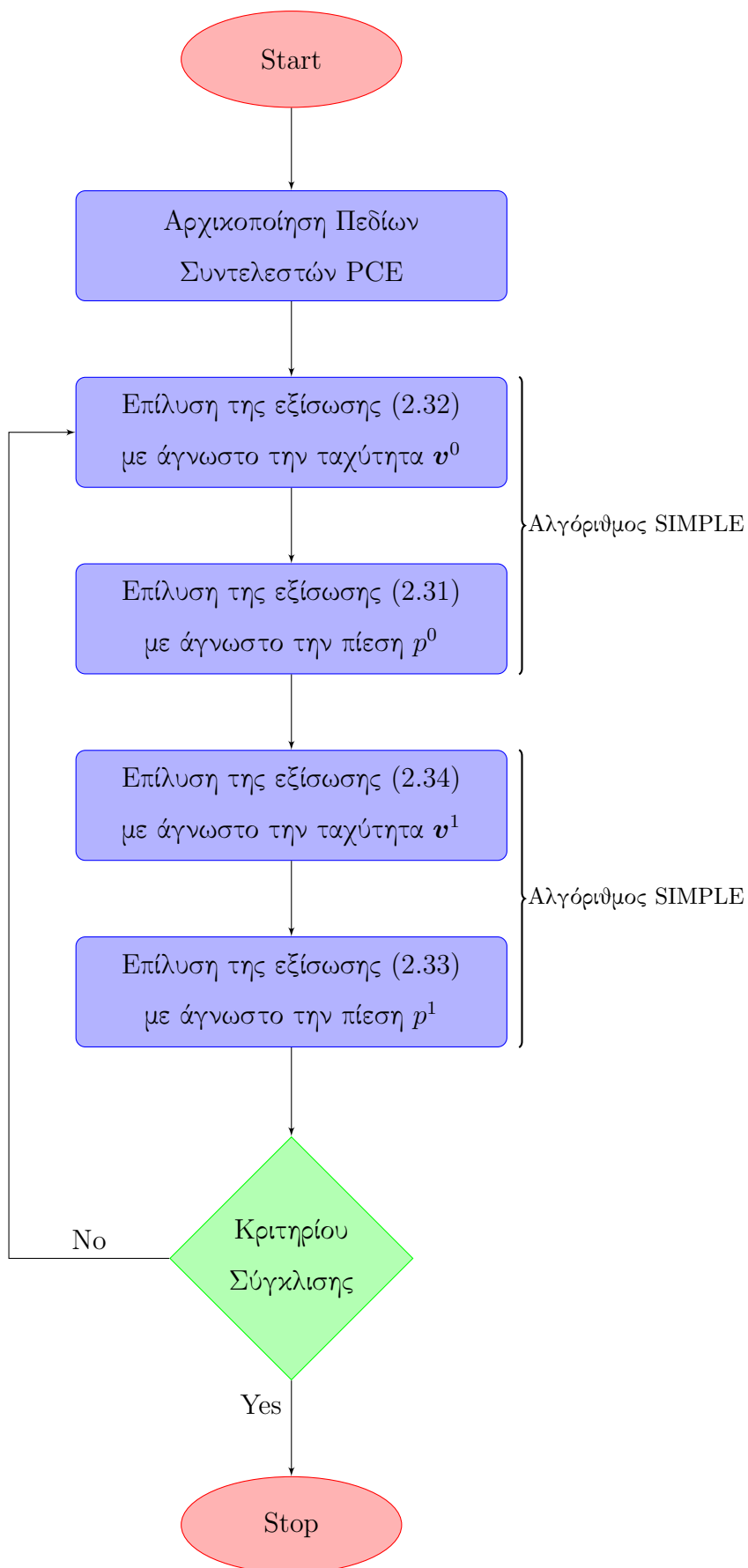
2.2.4 Επίλυση των Εξισώσεων

Όπως έχει ήδη αναφερθεί οι εξισώσεις που μοντελοποιούν τη στοχαστικότητα της ροής και προέκυψαν με την εφαρμογή της επεμβατικής μεθόδου PCE μοιάζουν αρκετά με τις εξισώσεις Navier-Stokes. Για το λόγο αυτό, επιλέγεται ο ίδιος αλγόριθμος επίλυσης, ο αλγόριθμος SIMPLE. Αν δεν υπάρχουν αβέβαιες μεταβλητές, οι εξισώσεις είναι 3 για διδιάστατη ροή και ο αλγόριθμος χρησιμοποιείται 1 φορά. Ανάλογα με την τάξη

χάους, το πλήθος των εξισώσεων αλλάζει και, συνεπώς, αλλάζει ο αριθμός που καλείται ο αλγόριθμος ανά επανάληψη. Για την περίπτωση 1^{ης} τάξης χάους οι εξισώσεις (2.31)-(2.34) είναι πεπλεγμένες ως προς τα μεγέθη "0" και "1". Ωστόσο, οι εξισώσεις λύνονται χωριστά, αλλά επαναληπτικά. Αρχικά, επιλύονται οι εξισώσεις που προέκυψαν για $n = 0$ και προκύπτει μία εκτίμηση για τα μεγέθη "0", έπειτα επιλύονται οι εξισώσεις που παρήχθησαν με $n = 1$ και βρίσκονται τα μεγέθη "1". Πιο συγκεκριμένα, αρχικά επιλύεται η εξίσωση (2.32) και με άγνωστο την v^0 . Έπειτα, μέσω της (2.31) προκύπτει το πεδίο p^0 . Μέχρι αυτό το σημείο τα μεγέθη "1" θεωρούνται γνωστά. Στο επόμενο βήμα επιλύεται η εξίσωση (2.34) και προκύπτει το διανυσματικό πεδίο της v^1 . Τέλος, η p^1 υπολογίζεται από την (2.33). Επομένως, ο αλγόριθμος SIMPLE χρησιμοποιείται 2 φορές. Στο σχήμα 2.3 παρουσιάζεται το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου που αναλύθηκε. Η διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων του 2^{ης} τάξης χάους είναι παρόμοια με αυτήν που αναφέρθηκε. Η βασική διαφορά είναι πως ο αλγόριθμος SIMPLE χρησιμοποιείται 3 φορές ανά επανάληψη. Η επίλυση των εξισώσεων τόσο για $q = 1$ όσο και για $q = 2$ προγραμματίστηκαν στο περιβάλλον OpenFOAM στην έκδοση 2.2.1.

Στις εξισώσεις οι όροι μεταφοράς (convection) $v_j^m \frac{\partial v_i^n}{\partial x_j}$ μοντελοποιούνται με τον ίδιο τρόπο που διακριτοποιήθηκε ο όρος της μεταφοράς στην εξίσωση της ορμής. Συνεπώς, οι διακριτοποιημένες εξισώσεις ορμής για τα μεγέθη "0", "1" και "2" αντίστοιχα έχουν την ίδια μορφή με την εξίσωση (2.18). Εάν, για παράδειγμα, διακριτοποιείται η εξίσωση (2.40), από τους όρους μεταφοράς, που έχουν ως μεταφερόμενη ποσότητα την v_i^2 , προκύπτουν συνεισφορές, οι οποίες περιέχονται στους συντελεστές a_p , a_n , ενώ οι συνεισφορές των υπόλοιπων όρων μεταφοράς περιέχονται στο b .

Τα επιπλέον σχήματα μεταφοράς διακριτοποιούνται και πάλι με σχήματα πρόσω διαφύρισης, ενώ, οι υπόλοιποι όροι μοντελοποιούνται με κεντρικά σχήματα. Στα προβλήματα που εξετάζονται στα επόμενα κεφάλαια, χρησιμοποιούνται σχήματα διακριτοποίησης 1^{ης} και 2^{ης} τάξης [16] και συγκρίνονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν, για να διαπιστωθεί εάν τα πρώτα δίνουν αξιόπιστα αποτελέσματα.



Σχήμα 2.3: Διάγραμμα Ροής Επαναληπτικού Αλγορίθμου επίλυσης εξισώσεων 1^{ης} τάξης χάους.

Κεφάλαιο 3

Αποτελέσματα της Μεθόδου

iPCE

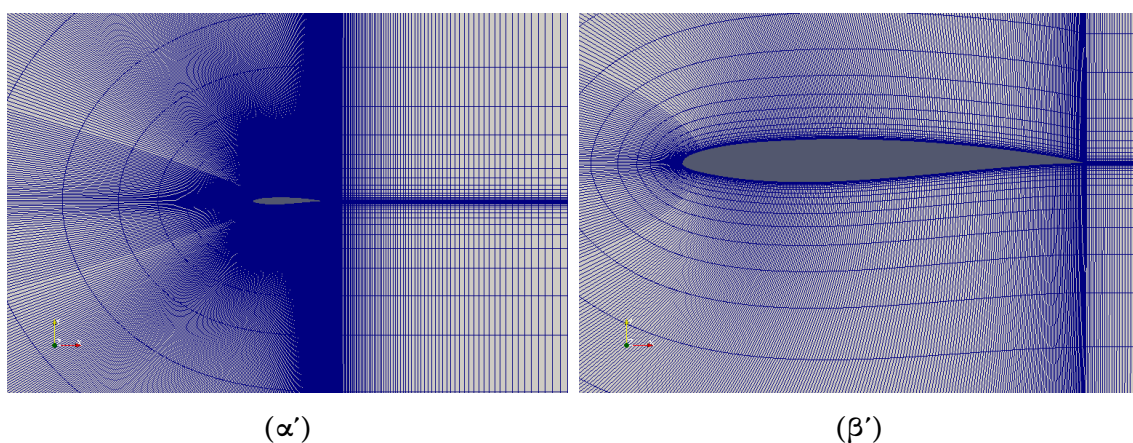
Αφού προγραμματίστηκε η επίλυση των εξισώσεων για μία αβέβαιη μεταβλητή εισόδου και για $q=1,2$ στο περιβάλλον του OpenFOAM, ακολουθεί η αριθμητική επίλυση αυτών σε ρευστομηχανικά προβλήματα. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά της μεθόδου niPCE για να διαπιστωθεί, εάν είναι δυνατόν να εκτιμηθούν με ακρίβεια η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση επιθυμητών μεγεθών, (λ.χ. του συντελεστή άνωσης μίας αεροτομής) μέσω της μεθόδου iPCE. Η niPCE έχει ήδη ελεγχθεί από τη ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ και τα αποτελέσματα που προκύπτουν από αυτήν είναι πολύ ικανοποιητικά. Η αβεβαιότητα της ροής, μπορεί να οφείλεται σε διαφορετική ροϊκή μεταβλητή εισόδου κάθε φορά. Λ.χ. είτε μπορεί να θεωρηθεί σταθερό το μέτρο της ταχύτητας και να μεταβάλλεται η γωνία ή κάποια συνιστώσα της ταχύτητας (v_x, v_y).

3.1 Μεμονωμένη Αεροτομή (LD) σε Ελεύθερο Ρεύμα Αέρα

3.1.1 Επίλυση Προβλήματος χωρίς Αβεβαιότητες

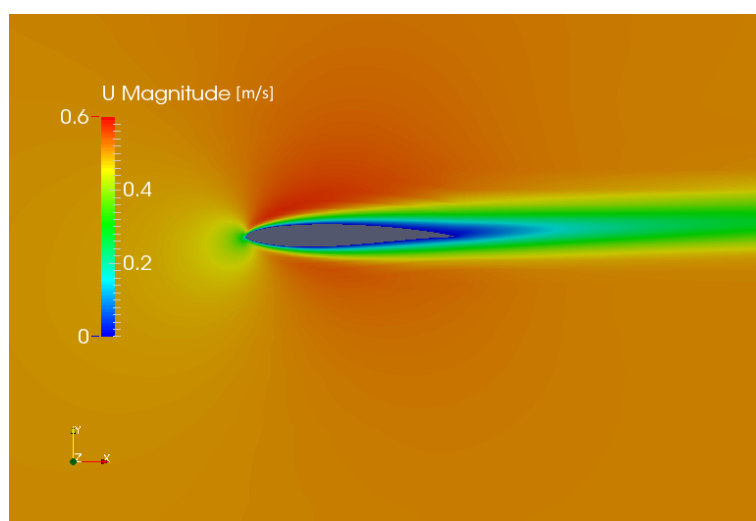
Αρχικά επιλέγεται μεμονωμένη αεροτομή σε ελεύθερο ρεύμα αέρα. Πιο συγκεκριμένα, η ροή θεωρείται χρονικά μόνιμη και στρωτή, με αδιάστατο αριθμό $Re=1000$ (βασισμένο στο μήκος της χορδής). Η συγκεκριμένη αεροτομή έχει μελετηθεί από τη

ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ στο παρελθόν υπό την κωδική ονομασία “αεροτομή Χαμηλής Οπισθέλκουσας” (Low Drag), σε διαφορετικές όμως συνθήκες ροής. Παρόλα αυτά, για ιστορικούς λόγους, θα διατηρηθεί αυτό το όνομα και στο εξής θα καλείται με τα αρχικά LD χάριν συντομίας. Το πλέγμα γύρω από την αεροτομή είναι ένα δομημένο πλέγμα τύπου-C και κατασκευάστηκε στο περιβάλλον του OpenFOAM, το οποίο φαίνεται στο σχήμα 3.1. Είναι φανερό ότι, υπάρχει μεγάλη πυκνωση γύρω από την αεροτομή, έτσι ώστε να προλεχθεί το οριακό στρώμα με ακρίβεια.



Σχήμα 3.1: Αεροτομή LD: α) Δομημένο Πλέγμα τύπου C β) Εστίαση πλέγματος στην αεροτομή.

Αφού ολοκληρωθεί η επίλυση του προβλήματος χωρίς αβεβαιότητες, για γωνία της επί άπειρο ροής ίση με $\alpha_\infty = 2.5^\circ$, προκύπτει το πεδίο της ταχύτητας του σχήματος 3.2.



Σχήμα 3.2: Αεροτομή LD, $\alpha_\infty = 2.5^\circ$, $Re = 1000$: Πεδίο Ταχύτητας.

3.1.2 Διατύπωση Συντελεστών PCE Συντελεστή Άνωσης και Οπισθέλκουσας

Στην προκειμένη περίπτωση, ανεξαρτήτως της αβέβαιης μεταβλητής εισόδου, είναι επιθυμητό να υπολογιστούν η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των συντελεστών άνωσης και οπισθέλκουσας στην αεροτομή. Για το πρόβλημα χωρίς αβεβαιότητες, οι συντελεστές άνωσης και οπισθέλκουσας υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$c_L = \frac{2L}{\rho_\infty v_\infty^2 A}, \quad c_D = \frac{2D}{\rho_\infty v_\infty^2 A} \quad (3.1)$$

όπου L η άνωση, D η οπισθέλκουσα, ρ_∞ η πυκνότητα της επί άπειρο ροής, v_∞ το μέτρο της ταχύτητας της επί άπειρο ροής και A το εμβαδόν της πτέρυγας. Η άνωση και η οπισθέλκουσα υπολογίζονται ολοκληρώνοντας τις τάσεις και την πίεση στην επιφάνεια της αεροτομής σύμφωνα με τους τύπους:

$$\begin{aligned} L &= \int_S (-\tau_{ij} n_j + p n_i) r_i dS \\ D &= \int_S (-\tau_{ij} n_j + p n_i) r'_i dS \end{aligned} \quad (3.2)$$

όπου n_i το κάθετο στην αεροτομή διάνυσμα με διεύθυνση από το ρευστό στο στερεό και r_i και r'_i τα μοναδιαία διανύσματα στη διεύθυνση της άνωσης και της οπισθέλκουσας αντίστοιχα. Τα δύο αυτά διανύσματα είναι εξ ορισμού κάθετα μεταξύ τους. Για τον υπολογισμό των επιθυμητών μεγεθών θεωρείται ότι η αβεβαιότητα της ταχύτητας είναι αμελητέα, καθώς και των μοναδιαίων διανυσμάτων στη διεύθυνση της άνωσης και της οπισθέλκουσας. Κάτι τέτοιο στην πραγματικότητα δεν ισχύει, αφού τα διανύσματα r_i , r'_i μεταβάλλονται με μεταβολή της επί άπειρο γωνίας της ροής. Ωστόσο, για μικρή τυπική απόκλιση της α_∞ η παραδοχή αυτή δεν επιφέρει μεγάλο σφάλμα στους υπολογισμούς. Επομένως, σύμφωνα με τις παραπάνω παραδοχές, καθώς και εφαρμόζοντας το ανάπτυγμα πολυωνυμικού χάους για τις αβέβαιες μεταβλητές, οι σχέσεις γράφονται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} L^m \psi^m(\xi) &= \int_S (-\tau_{ij}^m \psi^m(\xi) n_j + p^m \psi^m(\xi) n_i) r_i dS \\ D^m \psi^m(\xi) &= \int_S (-\tau_{ij}^m \psi^m(\xi) n_j + p^m \psi^m(\xi) n_i) r'_i dS \end{aligned} \quad (3.3)$$

όπου ο δείκτης $m = 0, 1, \dots, q$. Με αντικατάσταση του ταυιστή των τάσεων τ_{ij} από τη σχέση (2.3), οι εξισώσεις (3.3) γράφονται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} L^m \psi^m &= \int_S \left(-\nu \left(\frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^m}{\partial x_i} \right) \psi^m n_j + p^m \psi^m n_i \right) r_i dS \\ D^m \psi^m &= \int_S \left(-\nu \left(\frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^m}{\partial x_i} \right) \psi^m n_j + p^m \psi^m n_i \right) r'_i dS \end{aligned} \quad (3.4)$$

Οι εξισώσεις (3.4) προβάλλονται κατά Galerkin, οπότε ξαναγράφονται:

$$\begin{aligned} L^m \langle \psi^m(\xi), \psi^l(\xi) \rangle &= \int_S \left(-\nu \left(\frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^m}{\partial x_i} \right) n_j + p^m n_i \right) r_i dS \langle \psi^m(\xi), \psi^l(\xi) \rangle \\ D^m \langle \psi^m(\xi), \psi^l(\xi) \rangle &= \int_S \left(-\nu \left(\frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^m}{\partial x_i} \right) n_j + p^m n_i \right) r'_i dS \langle \psi^m(\xi), \psi^l(\xi) \rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

Αναπτύσσοντας τις παραπάνω εξισώσεις για $l = 0$ και $q = 1$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} L^0 \langle \psi^0, \psi^0 \rangle + L^1 \langle \psi^1, \psi^0 \rangle &= \int_S \left(-\nu \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^0}{\partial x_i} \right) n_j + p^0 n_i \right) r_i dS \langle \psi^0, \psi^0 \rangle + \\ &\quad \int_S \left(-\nu \left(\frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^1}{\partial x_i} \right) n_j + p^1 n_i \right) r_i dS \langle \psi^1, \psi^0 \rangle \\ D^0 \langle \psi^0, \psi^0 \rangle + D^1 \langle \psi^1, \psi^0 \rangle &= \int_S \left(-\nu \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^0}{\partial x_i} \right) n_j + p^0 n_i \right) r'_i dS \langle \psi^0, \psi^0 \rangle + \\ &\quad \int_S \left(-\nu \left(\frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^1}{\partial x_i} \right) n_j + p^1 n_i \right) r'_i dS \langle \psi^1, \psi^0 \rangle \end{aligned} \quad (3.6)$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα ορθογωνιότητας των πολυωνύμων Hermite, οι παραπάνω σχέσεις γράφονται στη μορφή:

$$\begin{aligned} L^0 &= \int_S \left(-\nu \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^0}{\partial x_i} \right) n_j + p^0 n_i \right) r_i dS \\ D^0 &= \int_S \left(-\nu \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^0}{\partial x_i} \right) n_j + p^0 n_i \right) r'_i dS \end{aligned} \quad (3.7)$$

Σύμφωνα με τις παραδοχές που έγιναν, ανεξαρτήτως της τάξης χάους που επιλέγεται, ισχύει η παραπάνω σχέση αναλλοίωτη. Επίσης, ισχύει η ίδια σχέση για τα μεγέθη $l = 1, 2, \dots$. Οπότε, ο γενικός τύπος για κάθε μέγεθος l είναι ο εξής:

$$\begin{aligned} L^l &= \int_S \left(-\nu \left(\frac{\partial v_i^l}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^l}{\partial x_i} \right) n_j + p^l n_i \right) r_i dS \\ D^l &= \int_S \left(-\nu \left(\frac{\partial v_i^l}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^l}{\partial x_i} \right) n_j + p^l n_i \right) r'_i dS \end{aligned} \quad (3.8)$$

Τέλος, για τον υπολογισμό των συντελεστών άνωσης και οπισθέλκουσας, εφόσον ο όρος $\frac{2}{\rho_\infty v_\infty^2 A}$ θεωρείται σταθερός, ισχύει ότι:

$$c_L^l = \frac{2L^l}{\rho v^2 A}, \quad c_D^l = \frac{2D^l}{\rho v^2 A} \quad (3.9)$$

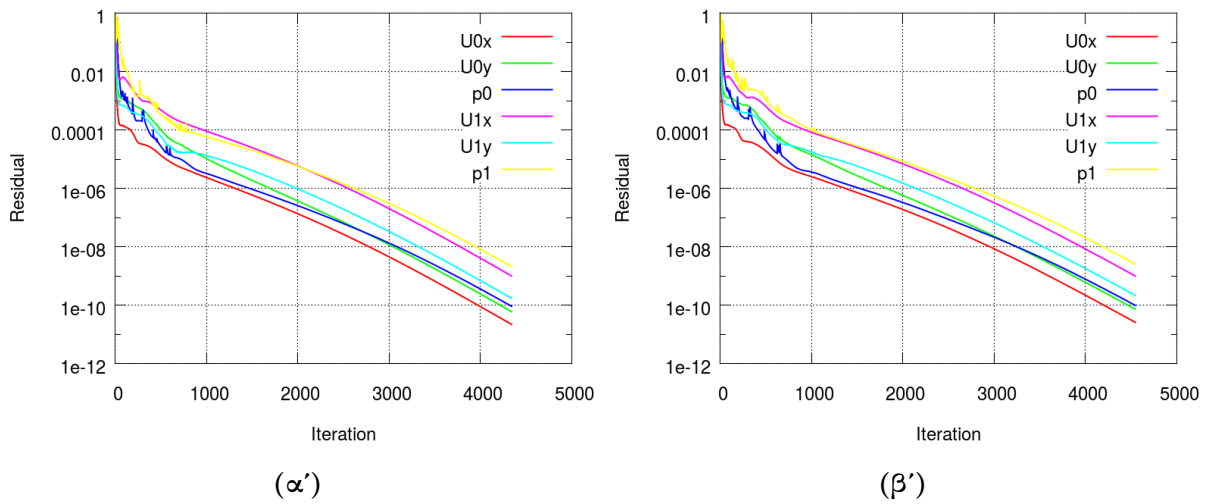
3.1.3 Αποτελέσματα με Αβεβαιότητα στην α_∞

Σ' αυτήν την περίπτωση, η στοχαστικότητα της ροής οφείλεται στην γωνία της επ' άπειρο ροής α_∞ , για την οποία:

- Μέση Τιμή $\mu_{\alpha_\infty} = 2.5^\circ$
- Τυπική Απόκλιση $\sigma_{\alpha_\infty} = 1^\circ$

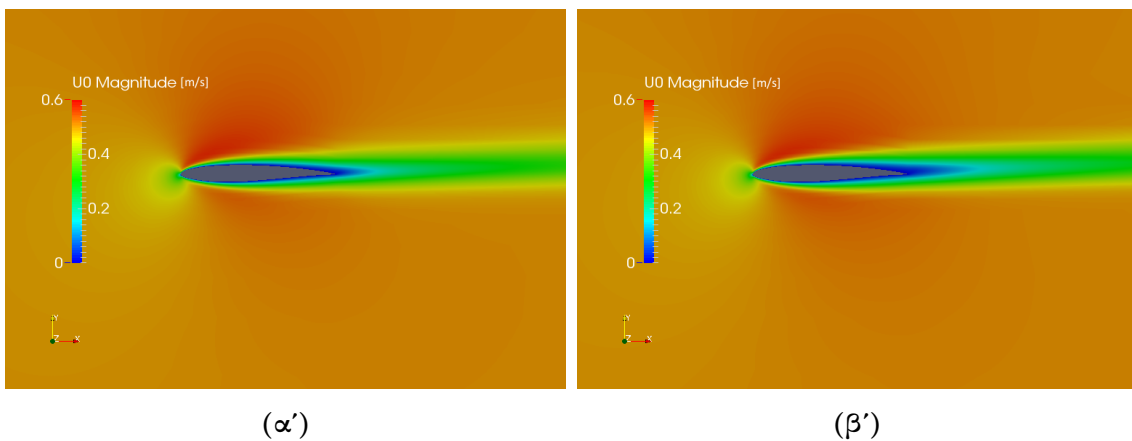
Σύγκριση Σχημάτων Διακριτοποίησης

Αρχικά επιλύονται οι εξισώσεις (2.31)-(2.34) για $q = 1$. Συγκρίνονται τα αποτελέσματα για σχήματα διακριτοποίησης 1^{ης} και 2^{ης} τάξης στους όρους μεταφοράς. Στο σχήμα 3.3 παρουσιάζονται τα διαγράμματα σύγκλισης για τις δύο περιπτώσεις που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

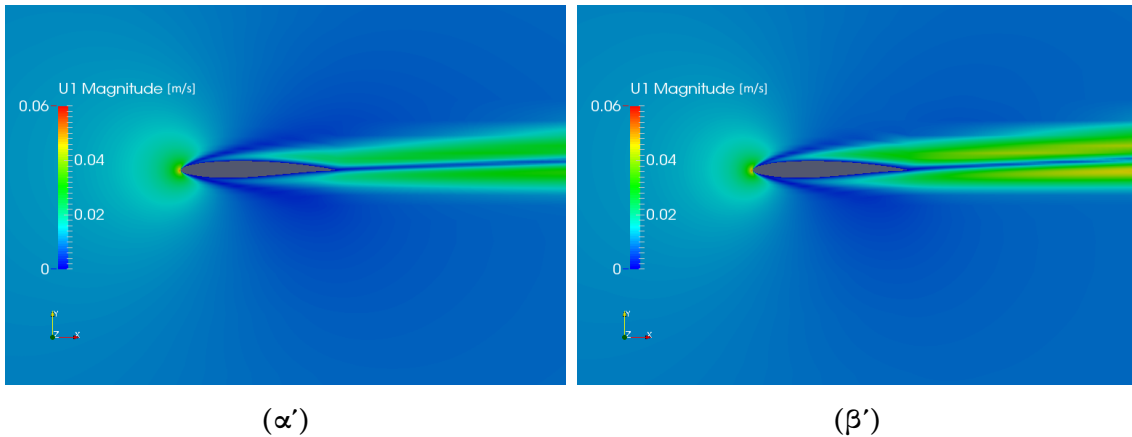


Σχήμα 3.3: Αεροτομή LD, $Re = 1000$, $\mu_{\alpha\infty} = 2.5^\circ$, $\sigma_{\alpha\infty} = 1^\circ$: Διάγραμμα Σύγκλισης
 α) 1^{ης} τάξης σχήματα διακριτοποίησης β) 2^{ης} τάξης για $q = 1$.

Στην περίπτωση που χρησιμοποιήθηκαν 1^{ης} τάξης σχήματα διακριτοποίησης ο κώδικας συνέκλινε σε μικρότερο αριθμό επαναλήψεων, όπως αναμενόταν. Ωστόσο, τα αποτελέσματα που προέκυψαν εμπεριέχουν σφάλμα ως προς τα αποτελέσματα με 2^{ης} τάξης σχήματα διακριτοποίησης. Αυτό φαίνεται στον πίνακα 3.1, όπου παρουσιάζονται οι συντελεστές PCE των συντελεστών άνωσης και οπισθέλκουσας. Επιπλέον, στα σχήματα 3.4 και 3.5 παρουσιάζονται τα πεδία των μέτρων των συντελεστών PCE για την ταχύτητα (U_0 , U_1).



Σχήμα 3.4: Αεροτομή LD $Re = 1000$, $\mu_{\alpha\infty} = 2.5^\circ$, $\sigma_{\alpha\infty} = 1^\circ$: Πεδίο του μέτρου του συντελεστή PCE U_0 α) 1^{ης} τάξης σχήματα διακριτοποίησης β) 2^{ης} τάξης.



Σχήμα 3.5: Αεροτομή LD $Re = 1000$, $\mu_{\alpha_{\infty}} = 2.5^{\circ}$, $\sigma_{\alpha_{\infty}} = 1^{\circ}$: Πεδίο του μέτρου του συντελεστή PCE U_1 α) 1^{ης} τάξης σχήματα διακριτοποίησης β) 2^{ης} τάξης.

	μ_{c_L}	σ_{c_L}	μ_{c_D}	σ_{c_D}
1 ^{ης} τάξης σχήματα	0.62036	0.21765	0.39165	0.02176
2 ^{ης} τάξης σχήματα	0.44219	0.18502	0.35109	0.02313

Πίνακας 3.1: Αεροτομή LD $Re = 1000$, $\mu_{\alpha_{\infty}} = 2.5^{\circ}$, $\sigma_{\alpha_{\infty}} = 1^{\circ}$: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση συντελεστή άνωσης (μ_{c_L} , σ_{c_L}) και συντελεστή οπισθέλκουσας (μ_{c_D} , σ_{c_D}) υπολογισμένες με τη μέθοδο $iPCE$ με 1^{ης} και 2^{ης} τάξης σχήματα διακριτοποίησης.

Παρατηρώντας τον παραπάνω πίνακα, είναι φανερό πως τα αποτελέσματα της μεθόδου $iPCE$ με 1^{ης} τάξης σχήματα διακριτοποίησης έχουν μεγάλο σφάλμα. Το ίδιο συμβαίνει και στο πρόβλημα χωρίς αβεβαιότητες, εάν χρησιμοποιηθούν 1^{ης} και 2^{ης} τάξης σχήματα διακριτοποίησης. Τα αποτελέσματα για τους συντελεστές άνωσης και οπισθέλκουσας των προσομοιώσεων αυτών παρουσιάζονται στον πίνακα 3.2.

	c_L	c_D
1 ^{ης} τάξης σχήματα	0.62213	0.39407
2 ^{ης} τάξης σχήματα	0.44460	0.35318

Πίνακας 3.2: Αεροτομή LD $Re = 1000$, $\alpha_{\infty} = 2.5^{\circ}$: Συντελεστής άνωσης (c_L) και συντελεστής οπισθέλκουσας (c_D) υπολογισμένοι με τον αλγόριθμο $SIMPLE$ με 1^{ης} και 2^{ης} τάξης σχήματα διακριτοποίησης.

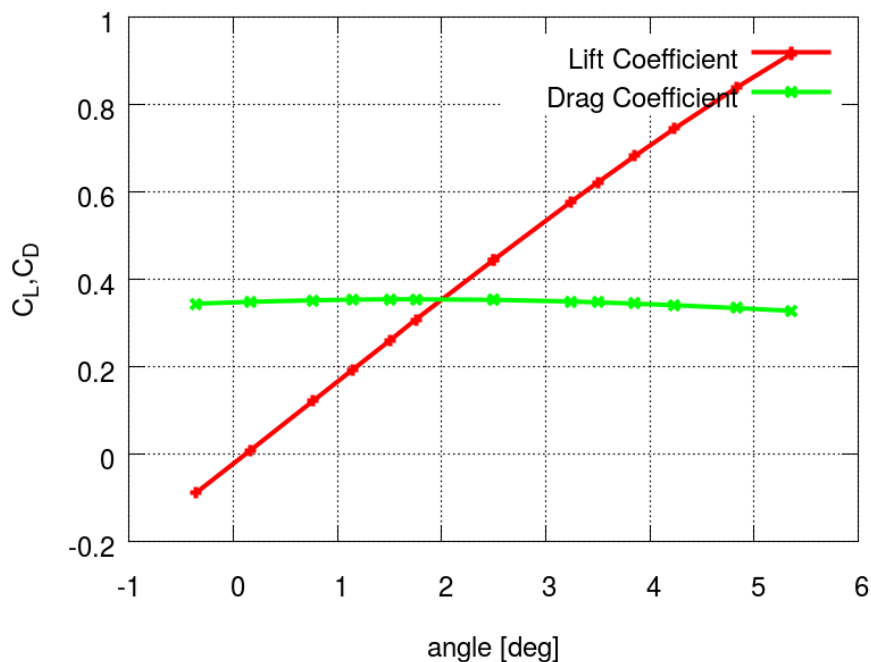
Για τους παραπάνω λόγους, από εδώ και πέρα, στη συγκεκριμένη εφαρμογή, θα χρησιμοποιούνται 2^{ης} τάξης σχήματα διακριτοποίησης.

Σύγκριση Αποτελεσμάτων με niPCE

Για να ελεγχθεί η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της iPCE χρησιμοποιείται η μέθοδος niPCE, όπως έχει ήδη αναφερθεί. Έγιναν προσομοιώσεις μέχρι $q = 4$ για τη μέθοδο niPCE και μέχρι $q = 2$ για τη μέθοδο iPCE. Για τον υπολογισμό των στατιστικών μεγεθών, μέσω της μεθόδου niPCE, έγιναν συνολικά 13 αξιολογήσεις (προσομοιώσεις CFD) σε διαφορετικά σημεία. Στον πίνακα 3.3 παρουσιάζεται το πλήθος των προσομοιώσεων για κάθε τάξη χάους. Για τα 13 αυτά διαφορετικά σημεία απεικονίζονται, στο σχήμα 3.6, οι συντελεστές άνωσης και οπισθέλκουσας συναρτήσει της γωνίας α_∞ .

niPCE	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$
	2	3	4	5

Πίνακας 3.3: Αεροτομή LD $Re = 1000$, $\mu_{\alpha_\infty} = 2.5^0$, $\sigma_{\alpha_\infty} = 1^\circ$: Αριθμός προσομοιώσεων για τη μέθοδο niPCE.



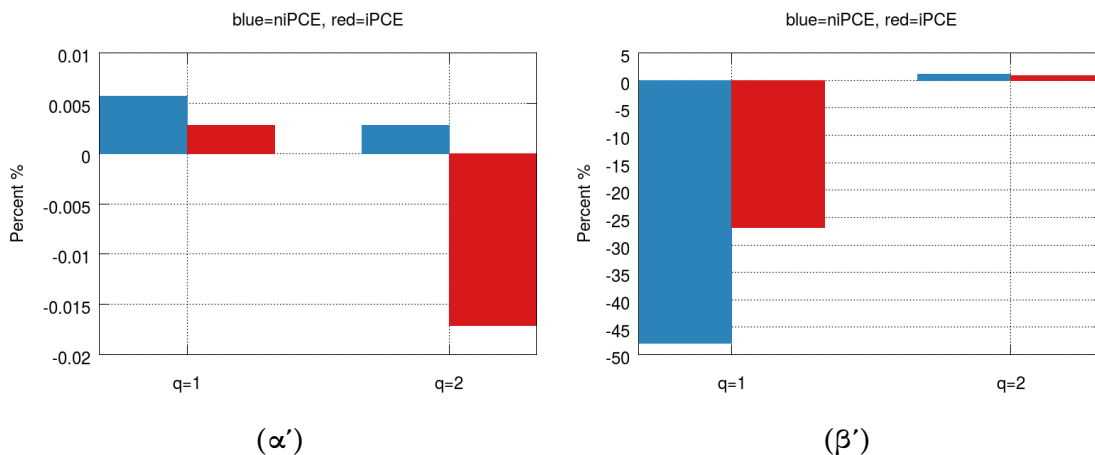
Σχήμα 3.6: Αεροτομή LD $Re = 1000$: Συντελεστές Άνωσης και Οπισθέλκουσας της αεροτομή συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης, υπολογισμένοι με 2^{ns} τάξης σχήματα διακριτοποίησης.

Στον πίνακα 3.4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης για τους συντελεστές άνωσης και οπισθέλκουσας όπως προέκυψαν τόσο από την iPCE όσο και την niPCE.

	μ_{c_L}	σ_{c_L}	μ_{c_D}	σ_{c_D}
iPCE $q = 1$	0.44219	0.18502	0.35109	0.02313
iPCE $q = 2$	0.44199	0.18607	0.35108	0.04485
niPCE $q = 1$	0.44087	0.18113	0.35108	0.03243
niPCE $q = 2$	0.44087	0.17967	0.35101	0.04473
niPCE $q = 3$	0.44090	0.17970	0.35101	0.04435
niPCE $q = 4$	0.44086	0.17967	0.35107	0.04436

Πίνακας 3.4: Αεροτομή LD $Re = 1000$, $\mu_{\alpha_\infty} = 2.5^0$, $\sigma_{\alpha_\infty} = 1^o$: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση συντελεστή άνωσης (μ_{c_L}, σ_{c_L}) και συντελεστή οπισθέλκουσας (μ_{c_D}, σ_{c_D}) υπολογισμένες τόσο με την επεμβατική όσο και με τη μη-επεμβατική μέθοδο πολυωνυμικού χάους.

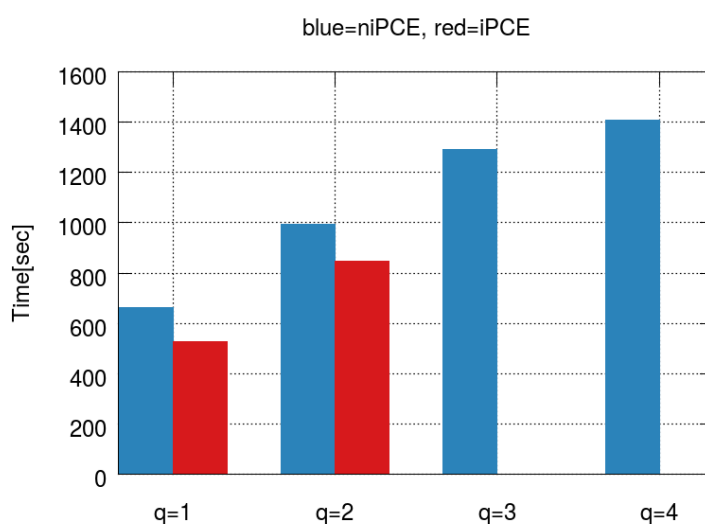
Τα αποτελέσματα της iPCE μεθόδου είναι αξιόπιστα, θεωρώντας ότι τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την niPCE εμπεριέχουν μικρό σφάλμα. Εάν θεωρηθεί ότι οι τιμές που προέκυψαν με τη μέθοδο niPCE για $q = 4$ αποτελούν 'ακριβείς' εκτιμήσεις των αντικειμενικών συναρτήσεων (υπόθεση εργασίας), τότε μπορεί να εκτιμηθεί η τάξη των σφαλμάτων της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης. Στα σχήματα 3.7 παρουσιάζονται τα σφάλματα για τον συντελεστή οπισθέλκουσας, υπολογισμένα και από τις δύο μεθόδους για $q = 1, 2$.



Σχήμα 3.7: Αεροτομή LD $Re = 1000$, $\mu_{\alpha_\infty} = 2.5^0$, $\sigma_{\alpha_\infty} = 1^o$: Σφάλμα της iPCE και της niPCE για $q=1,2$ με την niPCE για $q=4$ α) της μέσης τιμής β) της τυπικής απόκλισης του συντελεστή οπισθέλκουσας. Έγινε η υπόθεση εργασίας ότι οι τιμές αναφοράς είναι αυτές που προέκυψαν από την niPCE μέθοδο για $q = 4$.

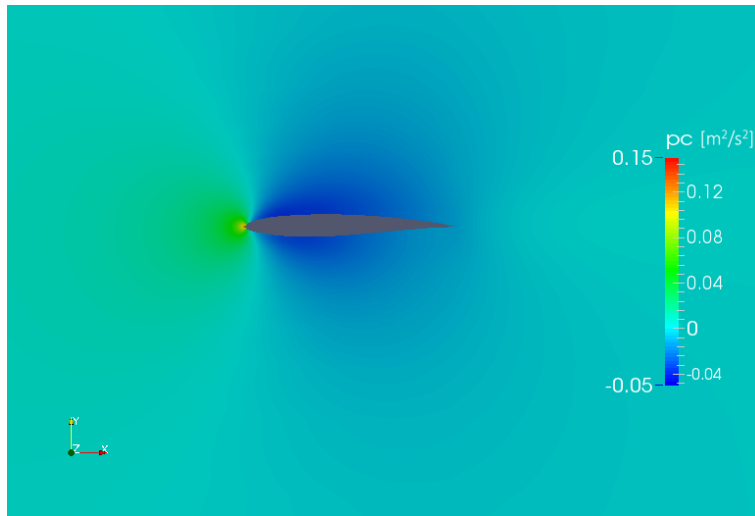
Τα αποτελέσματα που προέκυψαν για $q = 2$ είναι σαφώς καλύτερα, ειδικά, ως προς την τυπική απόκλιση. Είναι δηλαδή αναμενόμενο να υπάρχουν περιπτώσεις όπου δεν επαρκεί η PCE με $q = 1$ αλλά να απαιτείται μεγαλύτερης τάξης πολυωνυμικό χάος. Ωστόσο, το πολυωνυμικό χάος με $q = 2$, έχει πολύ καλά αποτελέσματα και δεν χρειάζεται περαιτέρω αύξηση της τάξης χάους.

Βασικό πλεονέκτημα της επεμβατικής μεθόδου είναι ο μειωμένος χρόνος που απαιτείται για τον υπολογισμό των επιθυμητών μεγεθών σε σχέση με τη μη-επεμβατική μέθοδο, αν ασφαλώς δεχθούμε ότι έχει γίνει έτσι κι αλλιώς η αναγκαία επένδυση για να δημιουργηθεί το λογισμικό προηγουμένως. Αυτό είναι περισσότερο εμφανές, όταν το πλήθος αβέβαιων μεταβλητών αυξάνεται, μιας ο αριθμός των αξιολογήσεων για τη μέθοδο niPCE μεγαλώνει πολύ και το υπολογιστικό κόστος γίνεται πολύ μεγάλο. Παρόλα αυτά, και στην περίπτωση μίας αβέβαιης υπάρχει βελτίωση στο χρόνο υπολογισμού. Στο σχήμα (3.8) παρουσιάζεται ο απαιτούμενος χρόνος των δύο μεθόδων για διάφορες τάξεις χάους.

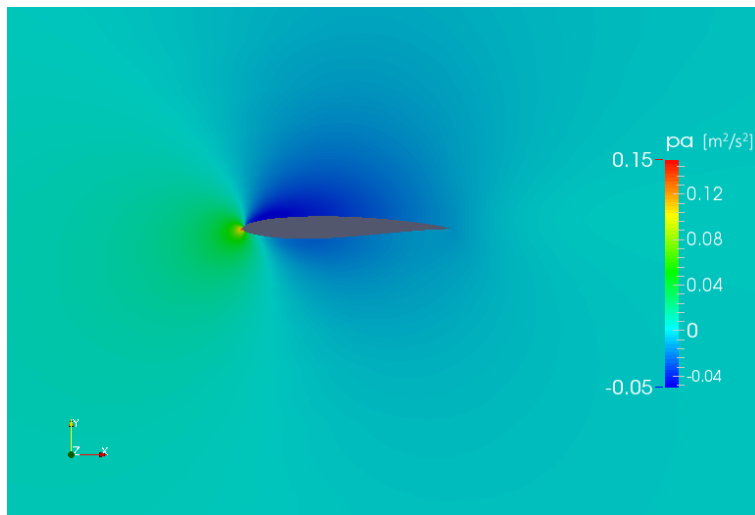


Σχήμα 3.8: Αεροτομή LD $Re = 1000$, $\mu_{\alpha\infty} = 2.5^\circ$, $\sigma_{\alpha\infty} = 1^\circ$: Χρόνος υπολογισμού των στατιστικών μεγεθών με τη μέθοδο *iPCE* και τη μέθοδο *niPCE*.

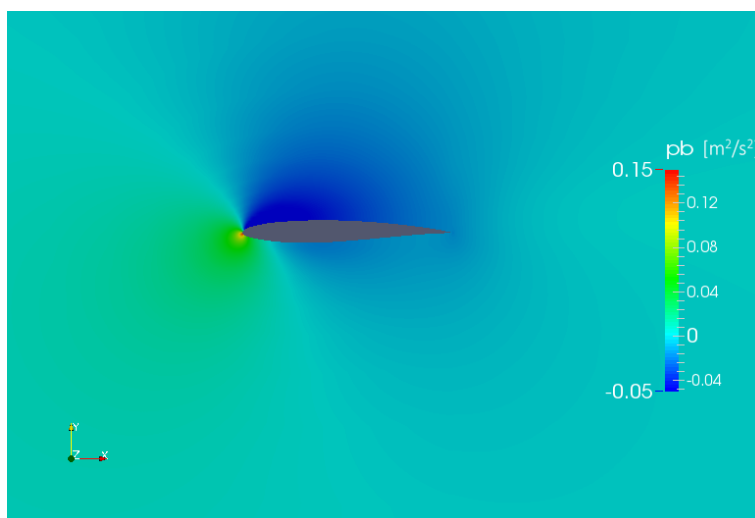
Παρατηρώντας το διάγραμμα, φαίνεται πως η σχέση ανάμεσα στον χρόνο και την τάξη χάους q είναι σχεδόν γραμμική στην περίπτωση της μη-επεμβατικής μεθόδου. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, για μία αβέβαιη μεταβλητή εισόδου, ο αριθμός των προσομοιώσεων είναι $q + 1$. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει εάν υπάρχουν περισσότερες από μία αβέβαιες μεταβλητές εισόδου. Επιπλέον, είναι φανερό πως έχει επιτευχθεί 20%-30% μείωση του απαιτούμενου χρόνου στην περίπτωση που χρησιμοποιείται η επεμβατική μέθοδος αντί της μη-επεμβατικής. Στην περίπτωση $q = 2$, απαιτούνται τρεις διαφορετικές αξιολογήσεις για τη μέθοδο niPCE. Στο σχήμα 3.9 φαίνονται τα πεδία της πίεσης για τις τρεις διαφορετικές αξιολογήσεις που έγιναν.



(α')



(β')



(γ')

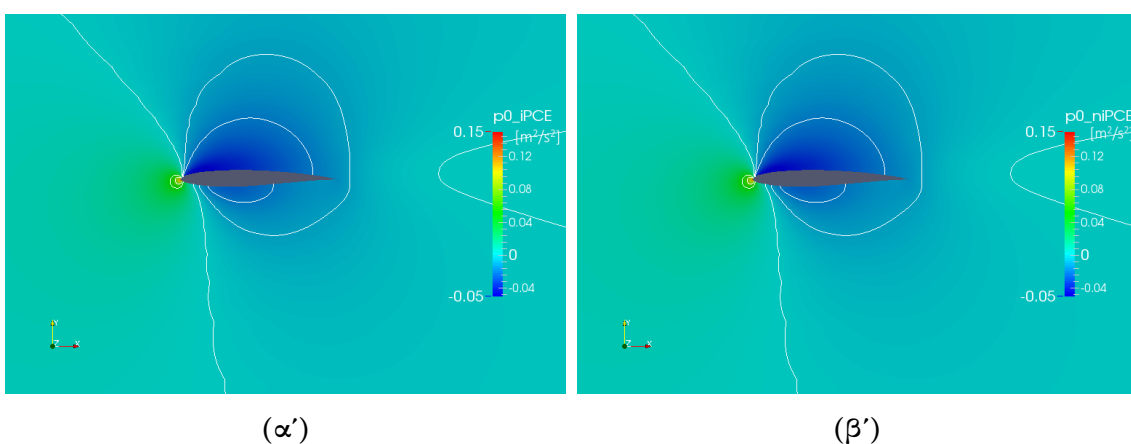
Σχήμα 3.9: Αεροτομή LD, $Re = 1000$: Πεδίο πίεσης γύρω από την αεροτομή για τις γωνίες πρόσπτωσης της μη επεμβατικής μεθόδου $q = 2$ α) 0.76° β) 2.5° γ) 4.23° .

Αφού έγιναν οι τρεις αυτές αξιολογήσεις, μπορούν να υπολογισθούν τα πεδία p_0, p_1, p_2 των συντελεστών PCE μέσω των αλγεβρικών σχέσεων:

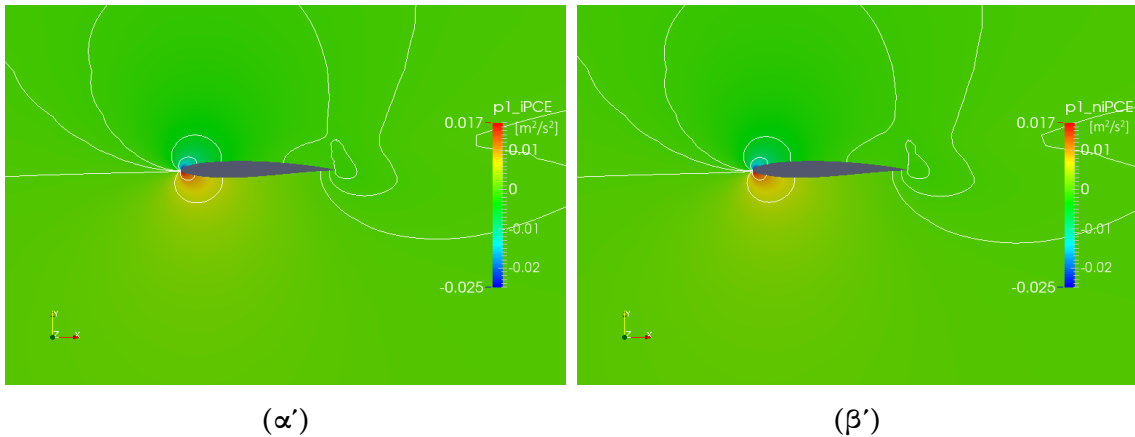
$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{2}{3}p_a + \frac{1}{6}p_b + \frac{1}{6}p_c \\ p_1 &= \frac{\sqrt{3}}{6}p_b - \frac{\sqrt{3}}{6}p_c \\ p_2 &= -\frac{2}{3}p_a + \frac{1}{3}p_b + \frac{1}{3}p_c \end{aligned} \quad (3.10)$$

όπου ο δείκτης a, b, c υποδηλώνουν τις αξιολογήσεις για τις γωνίες $\alpha_\infty = 2.5^\circ$, $\alpha_\infty = 3.23^\circ$ και $\alpha_\infty = -0.23^\circ$ αντίστοιχα.

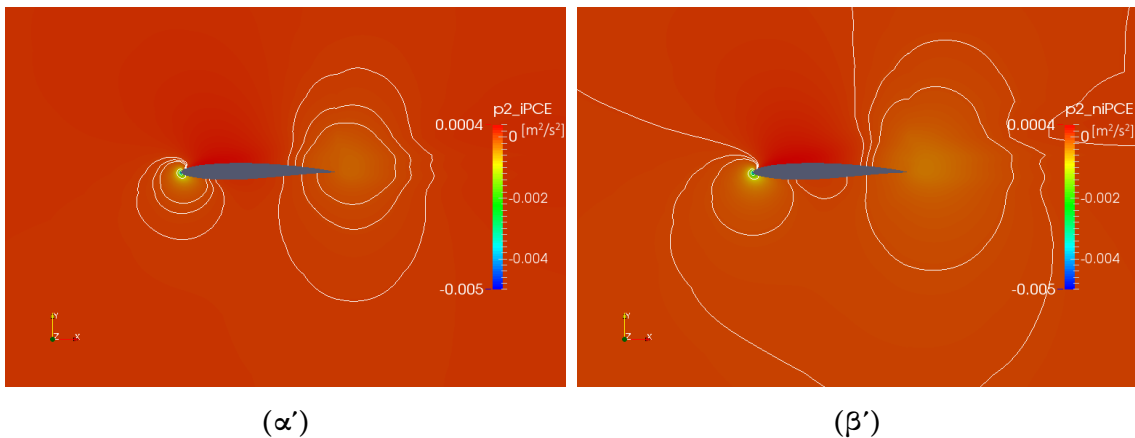
Αφού υπολογιστούν τα τρία αυτά πεδία, συγκρίνονται, σχήματα 3.10-3.12, με τα αντίστοιχα πεδία που προέκυψαν από τη μέθοδο iPCE για $q = 2$.



Σχήμα 3.10: Αεροτομή LD, $Re=1000$, $\mu_{\alpha_\infty} = 2.5^\circ$, $\sigma_{\alpha_\infty} = 1^\circ$: Πεδίο και Ισογραμμές του συντελεστή PCE p_0 για $q=2$ στην αεροτομή α) Επεμβατική μέθοδος β) Μη-επεμβατική μέθοδος.



Σχήμα 3.11: Αεροτομή $LD Re = 1000$, $\mu_{\alpha_{\infty}} = 2.5^{\circ}$, $\sigma_{\alpha_{\infty}} = 1^{\circ}$: Πεδίο και Ισογραμμές του συντελεστή $PCE p_1$ για $q = 2$ στην αεροτομή α) Επεμβατική μέθοδος β) Μη-επεμβατική μέθοδος.

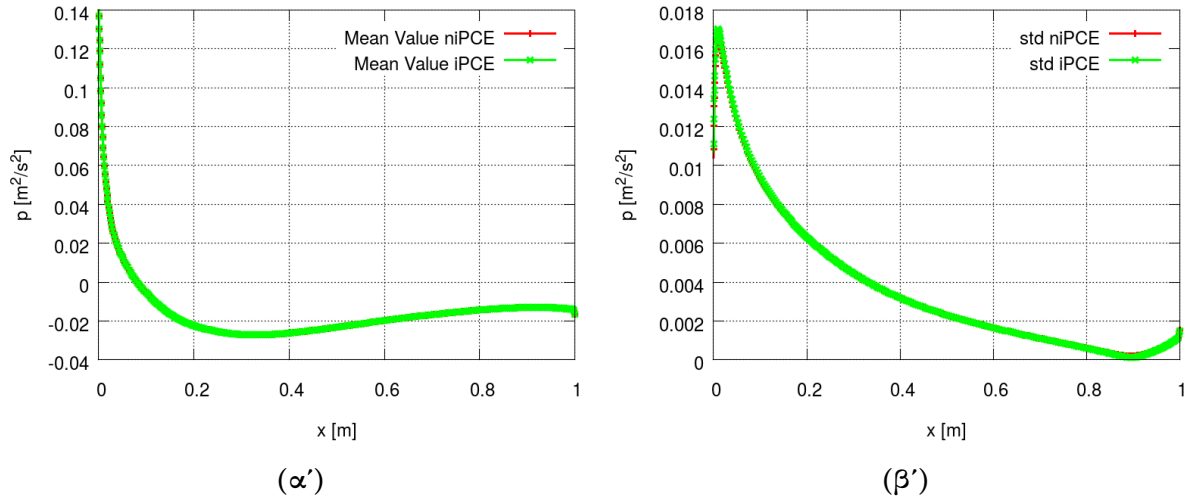


Σχήμα 3.12: Αεροτομή $LD Re = 1000$, $\mu_{\alpha_{\infty}} = 2.5^{\circ}$, $\sigma_{\alpha_{\infty}} = 1^{\circ}$: Πεδίο και Ισογραμμές του συντελεστή $PCE p_2$ για $q = 2$ στην αεροτομή α) Επεμβατική μέθοδος β) Μη-επεμβατική μέθοδος.

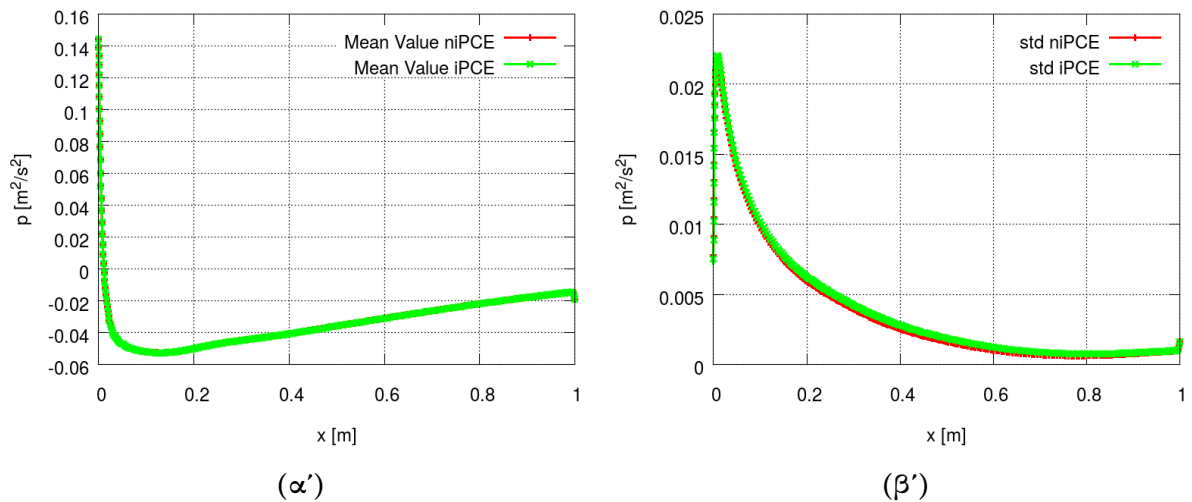
Τα πεδία είναι πανομοιότυπα μεταξύ τους (ειδικά τα p_0, p_1 πεδία). Στην περίπτωση του p_2 , υπάρχουν κάποιες διαφορές στις ισογραμμές, παρόλα αυτά οι διαφορές δεν είναι σημαντικές.

Μέσω των πεδίων αυτών είναι δυνατό, να υπολογισθούν τα πεδία της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της πίεσης. Από αυτά τα πεδία, ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι τιμές αυτών πάνω στην αεροτομή, επειδή αυτές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των δυνάμεων στην αεροτομή και κατ' επέκταση των συντελεστών άνωσης και οπισθέλκουσας. Στα σχήματα 3.14 φαίνονται τα μεγέθη που αναφέρθηκαν στην πλευρά

υπερπίεσης της αεροτομής ενώ στα σχήματα 3.13 παρουσιάζονται τα ίδια μεγέθη στην πλευρά υποπίεσης.



Σχήμα 3.13: Αεροτομή LD $Re = 1000$, $\mu_{\alpha_{\infty}} = 2.5^{\circ}$, $\sigma_{\alpha_{\infty}} = 1^{\circ}$: α) Μέση τιμή πίεσης β) Τυπική απόκλιση πίεσης στην πλευρά υπερπίεσης της αεροτομής με τις $q = 2$ επεμβατικές και μη-επεμβατικές μεθόδους.



Σχήμα 3.14: Αεροτομή LD $Re = 1000$, $\mu_{\alpha_{\infty}} = 2.5^{\circ}$, $\sigma_{\alpha_{\infty}} = 1^{\circ}$: α) Μέση τιμή πίεσης β) Τυπική απόκλιση πίεσης στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής με τις $q = 2$ επεμβατικές και μη-επεμβατικές μεθόδους.

Η μέση τιμή υπολογισμένη με την επεμβατική μέθοδο, συμπίπτει αυτήν της μη-επεμβατικής μεθόδου. Η τυπική απόκλιση διαφέρει αλλά οι διαφορές είναι ασήμαντες.

3.1.4 Αποτελέσματα με Αβεβαιότητα στην v_y

Σ' αυτήν την περίπτωση, η στοχαστικότητα της ροής οφείλεται στην κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας της επ' άπειρο ροής v_y . Επιλέγεται:

- Μέση τιμή $\mu_{v_y} = 0.0218m/s$
- Τυπική απόκλιση $\sigma_{v_y} = 0.004369m/s$

Ως αντικειμενικές συναρτήσεις θεωρούνται και πάλι οι συντελεστές άνωσης και οπισθέλκουσας. Επομένως, δεν διατηρείται σταθερό ούτε το μέτρο της ταχύτητας, ούτε και η γωνία της επ' άπειρο ροής. Σταθερή διατηρείται η συνιστώσα της ταχύτητας v_x , αλλά και τα διανύσματα όπου προβάλλονται οι δυνάμεις r_i, r'_i .

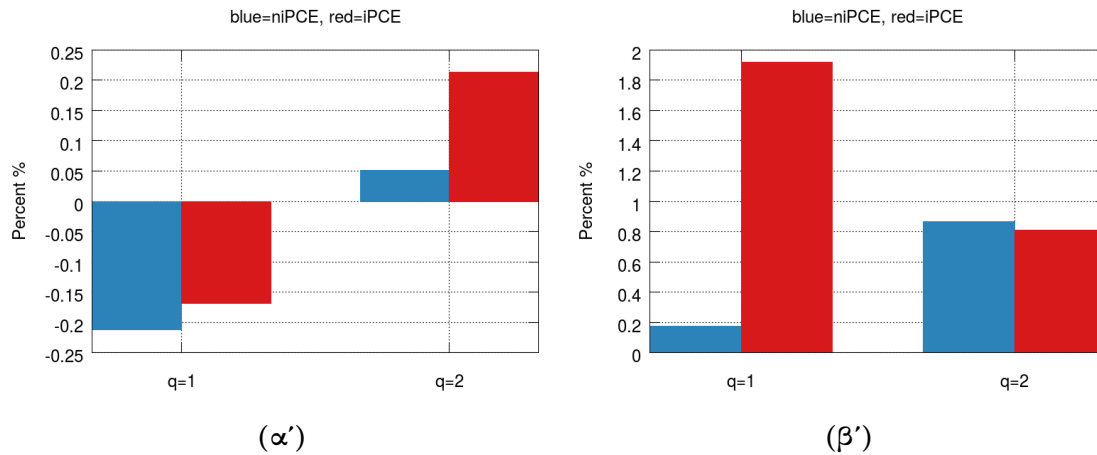
Σύγκριση Αποτελεσμάτων με niPCE

Για τον έλεγχο της εγκυρότητας της μεθόδου επαναλαμβάνεται η προηγούμενη διαδικασία. Στον πίνακα 3.5 παρουσιάζονται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των αντικειμενικών συναρτήσεων, υπολογισμένες και από τις δύο μεθόδους.

	μ_{c_L}	σ_{c_L}	μ_{c_D}	σ_{c_D}
iPCE $q = 1$	0.44397	0.09281	0.35265	0.00139
iPCE $q = 2$	0.44377	0.09191	0.35264	0.00176
niPCE $q = 1$	0.44375	0.09122	0.35264	0.00154
niPCE $q = 2$	0.44495	0.09212	0.35260	0.00180
niPCE $q = 3$	0.44375	0.09105	0.35264	0.00170
niPCE $q = 4$	0.44472	0.09106	0.35263	0.00170

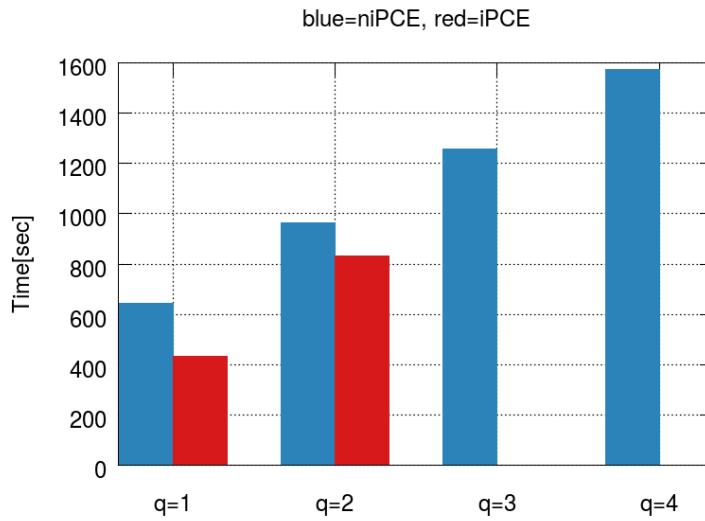
Πίνακας 3.5: Αεροτομή $LD Re = 1000$, $\mu_{v_y} = 0.0218m/s$, $\sigma_{v_y} = 0.004369m/s$: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση συντελεστή άνωσης (μ_{c_L}, σ_{c_L}) και συντελεστή οπισθέλκουσας (μ_{c_D}, σ_{c_D}) υπολογισμένες τόσο με την επεμβατική όσο και με τη μη-επεμβατική μέθοδο αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους.

Τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων έχουν μικρή απόκλιση μεταξύ τους και εφόσον η μη-επεμβατική μέθοδος θεωρείται αξιόπιστη, συνεπάγεται ότι και τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την επεμβατική μέθοδο είναι και πάλι αξιόπιστα. Για μία ακόμη φορά, θεωρείται πως τα αποτελέσματα της niPCE για $q = 4$, αποτελούν ακριβή εκτίμηση των αντικειμενικών συναρτήσεων. Άρα, είναι δυνατό να εκτιμηθεί το σφάλμα της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης των αντικειμενικών συναρτήσεων που προκύπτει και από τις δύο μεθόδους για $q = 1, 2$. Στο σχήμα 3.15 φαίνεται το σφάλμα αυτό.



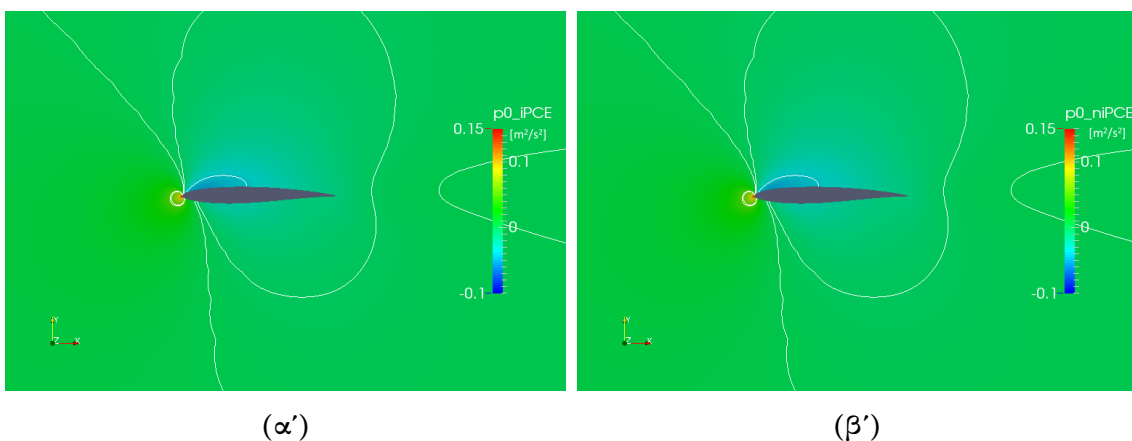
Σχήμα 3.15: Αεροτομή LD $Re = 1000$, $\mu_{v_y} = 0.0218m/s$, $\sigma_{v_y} = 0.004369m/s$: Σφάλμα της $iPCE$ και της $niPCE$ για $q=1,2$ σε σχέση με την $niPCE$ για $q=4$ α) της μέσης τιμής β) της τυπικής απόκλισης του συντελεστή άνωσης.

Είναι εμφανές ότι, τα σφάλματα είναι πάρα πολύ μικρά (κάτω του 2%) και υπάρχουν περιπτώσεις όπου τα αποτελέσματα της $iPCE$ μεθόδου είναι καλύτερα από αυτά της $niPCE$. Το σφάλμα της τυπικής απόκλισης είναι μεγαλύτερο σε μέτρο από το σφάλμα της μέσης τιμής ωστόσο, σ' αυτήν την περίπτωση, το σφάλμα είναι αρκετά μικρό και στα δύο στατιστικά μεγέθη. Και πάλι η $iPCE$ είναι γρηγορότερη της $niPCE$ και αυτό φαίνεται στο σχήμα 3.16, όπου παρουσιάζονται οι χρόνοι που απαιτήθηκαν για να επιλυθούν οι εξισώσεις της $iPCE$ και $niPCE$ μεθόδου. Η σχέση χρόνου - q είναι και πάλι σχεδόν γραμμική.

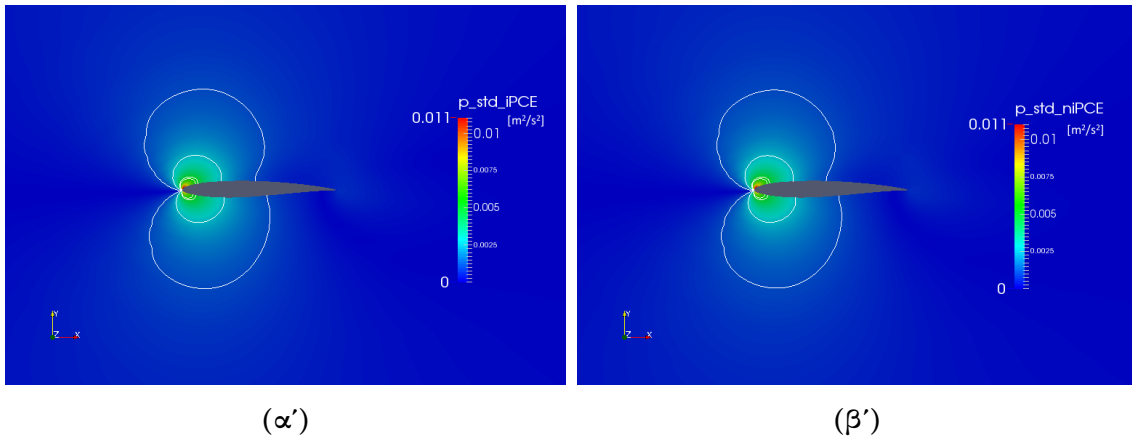


Σχήμα 3.16: Αεροτομή LD $Re = 1000$, $\mu_{vy} = 0.0218m/s$, $\sigma_{vy} = 0.004369m/s$: Χρόνος υπολογισμού των στατιστικών μεγεθών με τη μέθοδο *iPCE* και τη μέθοδο *niPCE*.

Αφού ολοκληρώθηκαν οι 3 αξιολογήσεις της *niPCE*, υπολογίζονται τα 3 πεδία των συντελεστών PCE για την πίεση (3.10)-(3.12). Τα αντίστοιχα πεδία υπολογίζονται με τη μέθοδο *iPCE* μέσω της επίλυσης των εξισώσεων (2.35)-(2.40). Τα πεδία αυτά είναι απαραίτητα για να υπολογιστεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της πίεσης σε κάθε κόμβο του πλέγματος. Στα σχήματα (3.17) και (3.18) παρουσιάζονται αυτά τα πεδία υπολογισμένα και από τις δύο μεθόδους.



Σχήμα 3.17: Αεροτομή LD $Re=1000$ $\mu_{vy} = 0.0218m/s$, $\sigma_{vy} = 0.004369m/s$: Πεδίο και Ισογραμμές μέσης τιμής της πίεσης για $q = 2$ α) Επεμβατική μέθοδος β) Μη-Επεμβατική μέθοδος.

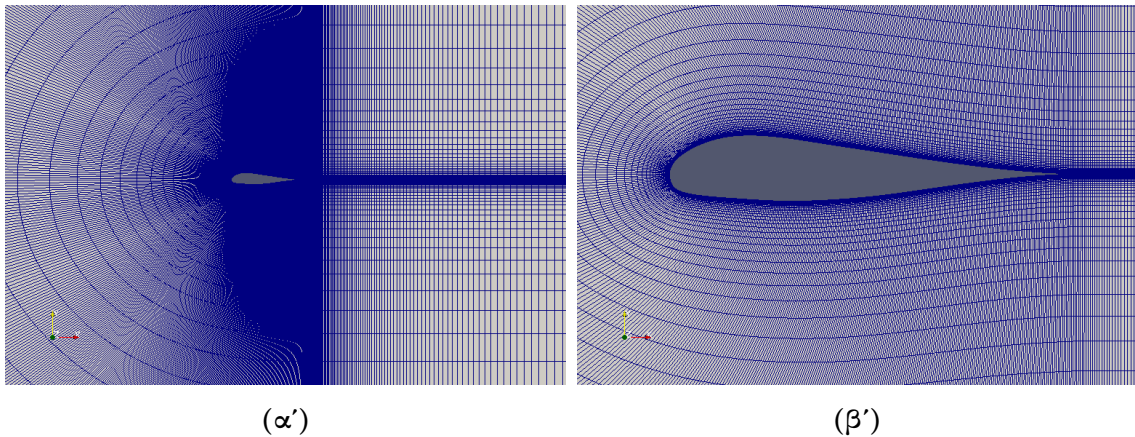


Σχήμα 3.18: Αεροτομή LD $Re=1000$ $\mu_{v,y} = 0.0218m/s$, $\sigma_{v,y} = 0.004369m/s$: Πεδίο και Ισογραμμές της τυπικής απόκλισης της πίεσης για $q = 2$ α) Επεμβατική μέθοδος β) Μη-Επεμβατική μέθοδος.

Τα πεδία είναι σχεδόν ίδια μεταξύ τους κάτι που φαίνεται και από τις ισογραμμές της πίεσης.

3.2 Μεμονωμένη Αεροτομή (HL) σε Ελεύθερο Ρεύμα Αέρα

Η μελέτη που ακολουθεί αφορά ακόμα μία μεμονωμένη αεροτομή σε ασυμπίεστη και στρωτή ροή. Για μία ακόμη φορά, ο αδιάστατος αριθμός $Re = 1000$ και είναι βασισμένος στο μήκος της χορδής. Το πλέγμα γύρω από την αεροτομή είναι, και σε αυτήν την περίπτωση, δομημένο τύπου C, ωστόσο είναι αρκετά μεγαλύτερο σε πλήθος στοιχείων από την προηγούμενη περίπτωση. Πιο συγκεκριμένα, αποτελείται περίπου από 45000 κυψέλες ενώ προηγουμένως το πλέγμα αποτελούνταν περίπου από 23000 κυψέλες. Στα σχήματα 3.19 παρουσιάζεται το πλέγμα γύρω από την αεροτομή, το οποίο είναι κατασκευασμένο στο περιβάλλον του OpenFOAM. Η συγκεκριμένη αεροτομή είναι μη-συμμετρική, και έχει ήδη μελετηθεί από τη ΜΠΥΡ&B/EMΠ υπό την κωδική ονομασία "αεροτομή υψηλής άνωσης" (High Lift), για άλλες, βέβαια, συνθήκες ροής. Παρόλ' αυτά το όνομα διατηρείται για ιστορικούς λόγους και στο εξής θα καλείται αεροτομή HL.



Σχήμα 3.19: Αεροτομή HL a) Δομημένο Πλέγμα τύπου C β) Εστίαση πλέγματος στην αεροτομή.

3.2.1 Αβεβαιότητα στο Μέτρο της Ταχύτητας v

Η στοχαστικότητα του προβλήματος οφείλεται στο μέτρο της ταχύτητας. Δηλαδή, η γωνία της επί άπειρο ροής είναι σταθερή και ίση με $\alpha_\infty = 7^\circ$ ενώ το μέτρο της ταχύτητας μεταβάλλεται. Για τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της ταχύτητας ισχύει ότι:

- μέση τιμή $\mu_v = 5m/s$
- τυπική απόκλιση $\sigma_v = 0.5m/s$

Επομένως, ο αριθμός Re δεν είναι σταθερός, αλλά μεταβάλλεται περίπου από 450 έως και 800.

Σύγκριση Σχημάτων Διακριτοποίησης

Εφόσον το πλέγμα είναι αρκετά πυκνότερο, ελέγχεται και πάλι εάν τα σχήματα διακριτοποίησης 1^{ης} τάξης δίνουν αξιόπιστα αποτελέσματα. Στον πίνακα 3.6 παρουσιάζονται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του συντελεστή άνωσης 1^{ης} και 2^{ης} τάξης σχήματα διακριτοποίησης.

	μ_{c_L}	σ_{c_L}	μ_{c_D}	σ_{c_D}
1 ^{ης} τάξης σχήματα	0.50005	0.07273	0.29687	0.04440
2 ^{ης} τάξης σχήματα	0.28799	0.03923	0.27403	0.04216

Πίνακας 3.6: Αεροτομή HL $\sigma_v = 0.5m/s$ $\mu_v = 5m/s$: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση συντελεστή άνωσης (μ_{c_L}, σ_{c_L}) και οπισθέλκουσας (μ_{c_D}, σ_{c_D}) υπολογισμένες με τη μέθοδο $iPCE$ με 1^{ης} και 2^{ης} τάξης σχήματα διακριτοποίησης για $q = 2$.

Και πάλι, τα 1^{ης} τάξης σχήματα διακριτοποίησης δεν επαρκούν για να υπολογιστούν σωστά οι συντελεστές PCE και, παράλληλα, αυξήθηκε αρκετά και το υπολογιστικό κόστος λόγω του μεγαλύτερου πλέγματος. Συνεπώς, θα χρησιμοποιηθούν και πάλι 2^{ης} τάξης σχήματα διακριτοποίησης.

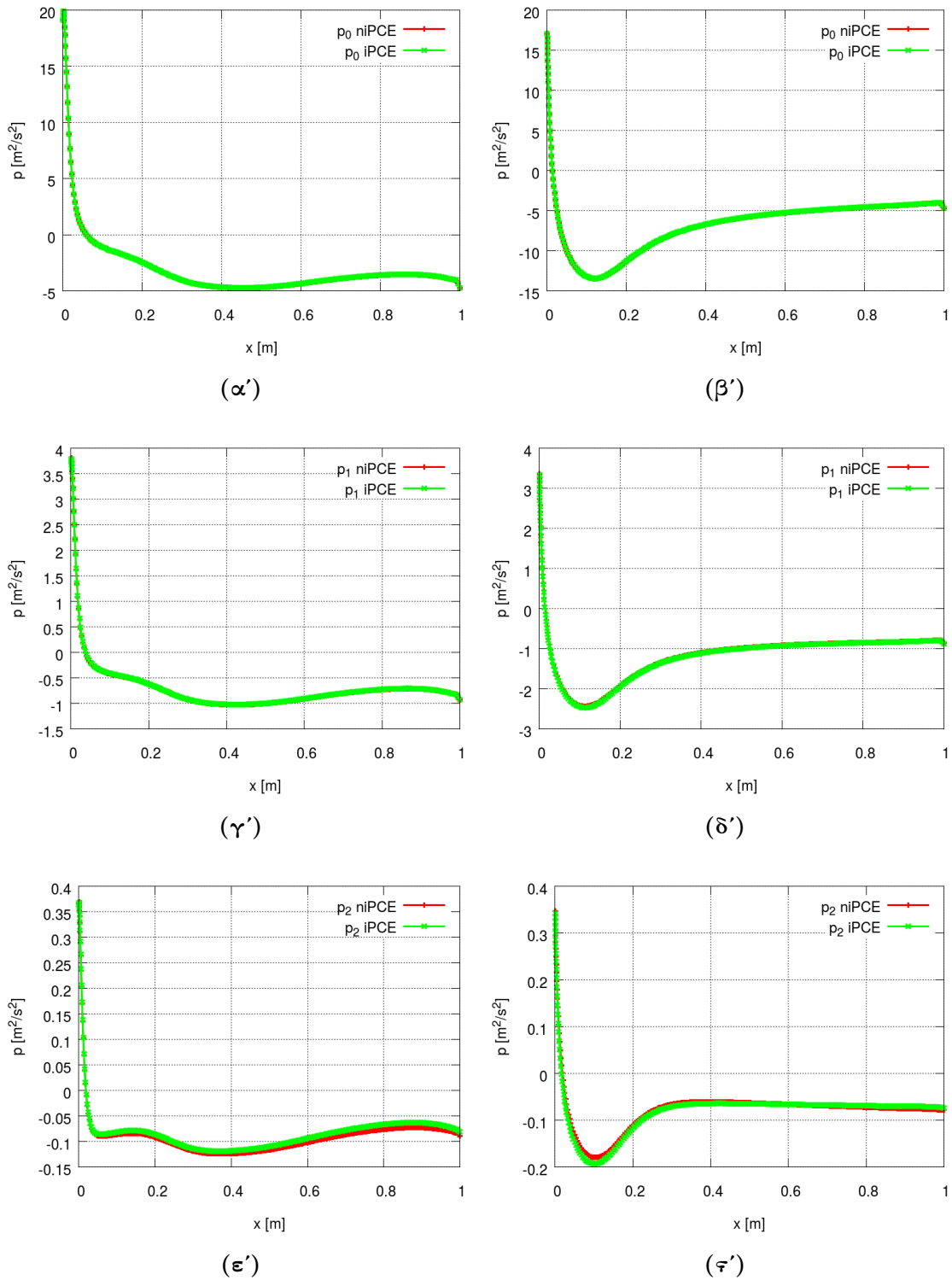
Σύγκριση Αποτελεσμάτων με niPCE

Για ακόμα μία φορά, τα αποτελέσματα της iPCE μεθόδου συγκρίνονται με αυτά της niPCE. Στον πίνακα 3.7 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα όπως προέκυψαν από τις δύο μεθόδους.

	μ_{c_L}	σ_{c_L}	μ_{c_D}	σ_{c_D}
iPCE, $q = 1$	0.28799	0.03924	0.27402	0.04216
iPCE, $q = 2$	0.28757	0.03802	0.27402	0.04211
niPCE, $q = 1$	0.28897	0.03731	0.27437	0.04208
niPCE, $q = 2$	0.28898	0.03630	0.27427	0.04226
niPCE, $q = 3$	0.28899	0.03629	0.27437	0.04208
niPCE, $q = 4$	0.28899	0.03630	0.27437	0.04208

Πίνακας 3.7: Αεροτομή HL, $\sigma_v = 0.5m/s$ $\mu_v = 5m/s$: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση συντελεστή άνωσης (μ_{c_L}, σ_{c_L}) και συντελεστή οπισθέλκουσας (μ_{c_D}, σ_{c_D}) υπολογισμένα τόσο με την επεμβατική όσο και με τη μη-επεμβατική μέθοδο πολυωνυμικού χάους.

Τα αποτελέσματα είναι πολύ κοντινά μεταξύ τους και αυτό επιβεβαιώνεται και από τα σχήματα 3.20 όπου φαίνονται τα πεδία των συντελεστών PCE της πίεσης υπολογισμένα και από τις δύο μεθόδους στις πλευρές της αεροτομής. Τα μεγέθη "0" και "1" είναι σχεδόν ταυτόσημα. Στα μεγέθη "2" υπάρχει μία μικρή διαφορά, η οποία είναι κάπως αμελητέα διότι τα μεγέθη "2" είναι πολύ μικρότερα από τα υπόλοιπα και η συνεισφορά τους στην τυπική απόκλιση είναι πολύ μικρή, ενώ στη μέση τιμή είναι μηδενική.



Σχήμα 3.20: Αεροτομή HL , $\sigma_v = 0.5\text{m/s}$ $\mu_v = 5\text{m/s}$: Πεδία συντελεστών PCE για την πίεση στις πλευρές της αεροτομής υπολογισμένα από τις δύο μεθόδους α) p_0 πλευρά υπερπίεσης β) p_0 πλευρά υποπίεσης γ) p_1 πλευρά υπερπίεσης δ) p_1 πλευρά υποπίεσης ε) p_2 πλευρά υπερπίεσης ζ) p_2 πλευρά υποπίεσης.

Κεφάλαιο 4

Επεμβατικό Ανάπτυγμα Πολυωνυμικού Χάους και Τυρβώδεις Ροές

Στα προηγούμενα κεφάλαια οι εξισώσεις της μεθόδου iPCE, καθώς και τα προβλήματα που εξετάστηκαν αφορούσαν στρωτή ροή. Ωστόσο, η πλειοψηφία των προβλημάτων που συναντώνται στην πραγματικότητα αφορά τυρβώδεις ροές. Για το λόγο αυτό, σ' αυτό το κεφάλαιο, υπολογίζονται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των αντικειμενικών συναρτήσεων, μέσω της μεθόδου iPCE σε προβλήματα τυρβώδους ροής. Για να μοντελοποιηθούν με ακρίβεια τέτοια προβλήματα πρέπει εφαρμοστεί η μέθοδος ανάπτυγματος πολυωνυμικού χάους και στις εξισώσεις του μοντέλου τύρβης. Άρα και οι εξισώσεις του μοντέλου τύρβης πληθαίνουν σε αριθμό. Επειδή οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι αρκετά πολύπλοκες, αξίζει να διερευνηθεί, σε πρώτο στάδιο, η παραδοχή της μη-στοχαστικής τύρβης (non-Stochastic Turbulence nST). Δηλαδή, παρόλο που η τυρβώδης συνεκτικότητα (ν_t) είναι αβέβαιη ροϊκή μεταβλητή, αντιμετωπίζεται ως μη-στοχαστική. Επομένως, η τυπική απόκλιση αυτής θεωρείται μηδενική και δεν αλλάζει καθώς μεταβάλλεται το διάνυσμα της ταχύτητας εισόδου. Αυτό σημαίνει πως τα μεγέθη ν_t^1 και ν_t^2 είναι μηδενικά σύμφωνα με τη σχέση (1.14). Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των αντικειμενικών συναρτήσεων υπολογίζονται, επίσης, με τη μέθοδο niPCE, τόσο λαμβάνοντας υπόψη την παραδοχή της μη-στοχαστικής τύρβης όσο και χωρίς αυτήν. Τέλος, τα επιθυμητά στατιστικά μεγέθη εκτιμώνται μέσω της μεθόδου Monte Carlo.

4.1 Μελέτη Πτερύγωσης Συμπιεστή χωρίς Α-βεβαιότητες

Το πρόβλημα που εξετάζεται αφορά μια διδιάστατη πτερύγωση συμπιεστή ελεγχόμενης διάχυσης. Το πλέγμα γύρω από το πτερύγιο του συμπιεστή έχει κατασκευαστεί και αυτό στο περιβάλλον του OpenFOAM. Πρόκειται για ένα υβριδικό πλέγμα, το οποίο κοντά στο πτερύγιο του συμπιεστή είναι δομημένο τύπου O και μακριά από αυτό είναι μη-δομημένο. Είναι γνωστό ότι, στα δομημένα πλέγματα τα αποτελέσματα είναι ακριβέστερα απ' ό,τι στα μη-δομημένα, κυρίως όσον αφορά στην πρόλεξη των οριακών στρωμάτων σε επαφή με στερεά όρια. Εφόσον, το μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζεται στο οριακό στρώμα του πτερυγίου, για να προσομοιαστεί σωστότερα επιλέγεται δομημένο πλέγμα κοντά στο πτερύγιο. Στο σχήμα 4.1 φαίνεται το πλέγμα της πτερύγωσης, καθώς και εστίαση αυτού κοντά στην αεροτομή, όπου φαίνονται και οι δύο τύποι πλέγματος.

Το μοντέλο τύρβης που χρησιμοποιείται είναι το μοντέλο τύρβης μιας εξίσωσης Spalart-Allmaras [21]. Οι εξίσωση υπολογισμού της τυρβώδους συνεκτικότητας ν_t είναι:

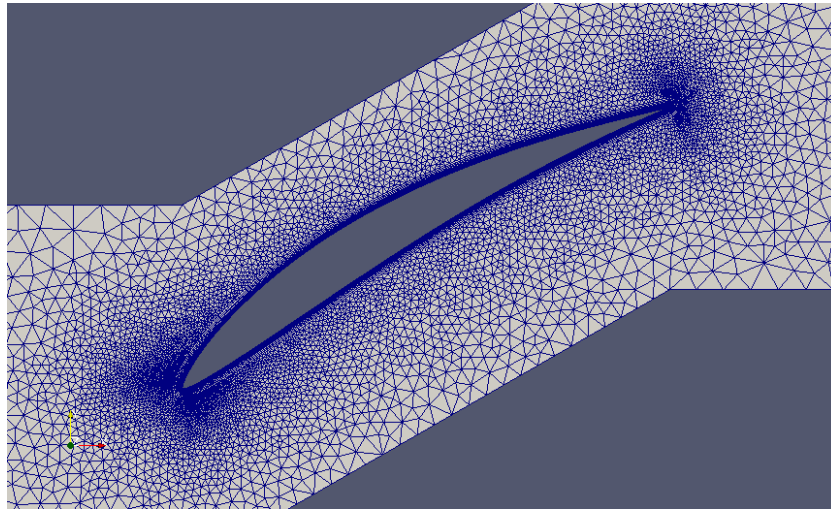
$$R^{\tilde{\nu}} = \nu_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\tilde{\nu}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] - \frac{c_{b2}}{\sigma} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 - \tilde{\nu} P(\tilde{\nu}) + \tilde{\nu} D(\tilde{\nu}) = 0 \quad (4.1)$$

Από την παραπάνω εξίσωση υπολογίζεται η μεταβλητή $\tilde{\nu}$, η οποία συνδέεται με την τυρβώδη συνεκτικότητα με τη σχέση:

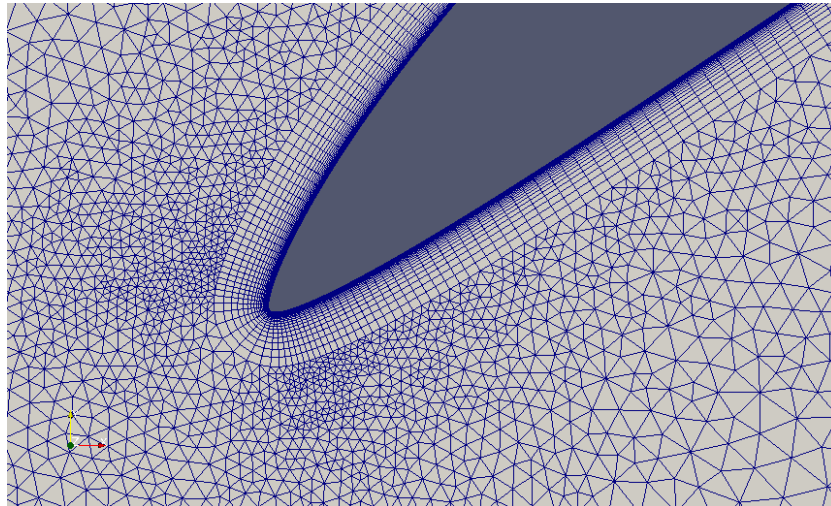
$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1} \quad (4.2)$$

Ο όρος παραγωγής και καταστροφής είναι αντίστοιχα:

$$P(\tilde{\nu}) = c_{b1} \tilde{Y}, \quad D(\tilde{\nu}) = c_{w1} f_w(\tilde{Y}) \frac{\tilde{\nu}}{\Delta^2} \quad (4.3)$$



(α')



(β')

Σχήμα 4.1: Πτερύγωση Συμπιεστή: α) Πλέγμα β) Εστίαση κοντά στο πτερύγιο.

όπου \tilde{Y} ισούται με:

$$\tilde{Y} = Y f_{v3} + \frac{\tilde{\nu}}{\Delta^2 \kappa^2} f_{v2}, \quad Y = \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right| \quad (4.4)$$

όπου Υ ο στροβιλισμός και Δ η απόσταση των κέντρων των κυψελών. Οι συναρτήσεις του μοντέλου ορίζονται ως:

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad f_{v2} = \frac{c_{v2}^3}{(\chi + c_{v2})^3} \quad (4.5)$$

$$f_{v3} = \frac{(1 + \chi f_{v1})}{c_{v2}} \left[3 \left(1 + \frac{\chi}{c_{v2}} + \left(\frac{\chi}{c_{v2}} \right)^2 \right) \right] \left(1 + \frac{\chi}{c_{v2}} \right)^{-3} \quad (4.6)$$

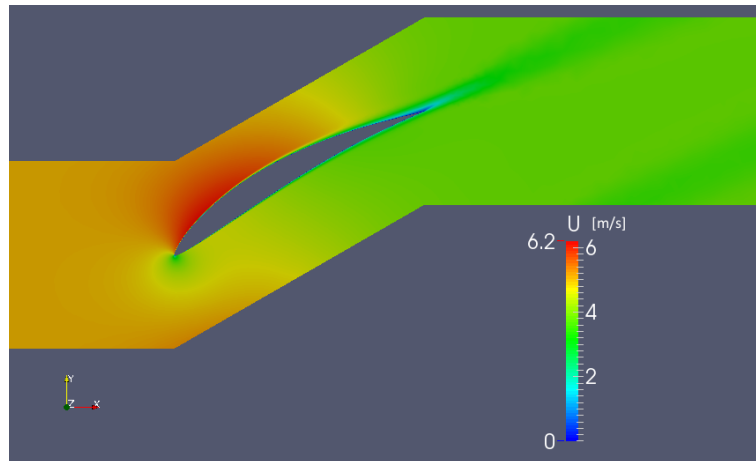
$$\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, \quad f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{1/6} \quad (4.7)$$

$$g = r + c_{w2}(r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{Y} \kappa^2 \Delta^2} \quad (4.8)$$

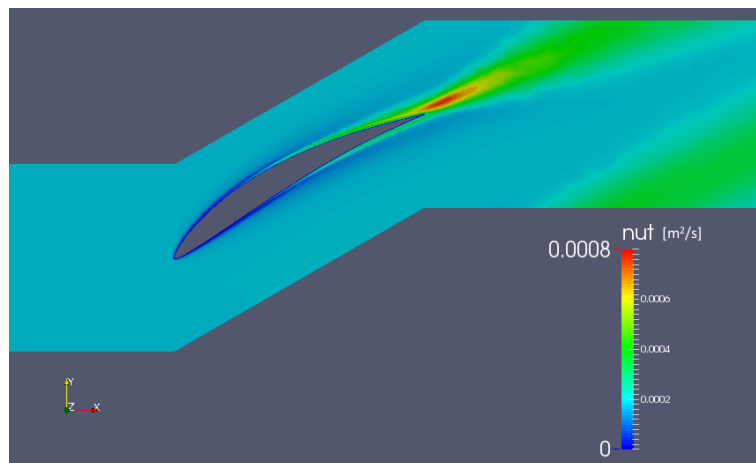
όπου $c_{b1} = 0.1355$, $c_{b2} = 0.622$, $\kappa = 0.41$, $\sigma = 2/3$, $c_{w1} = 3.2391$, $c_{w2} = 0.3$, $c_{w3} = 2$, $c_{v1} = 7.1$, $c_{v2} = 5$ και το e_{ijk} δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{cases} +1 & (i, j, k) \in (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & (i, j, k) \in (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3) \\ 0 & i = j, j = k, k = i \end{cases}$$

Ο αδιάστατος αριθμός Reynolds της ροής ισούται με $Re = 350000$ όταν ως μήκος χρησιμοποιεί τη χορδή του πτερυγίου, η οποία σχηματίζει γωνία 30° με τον οριζόντιο άξονα x , ενώ η ταχύτητα στην είσοδο του υπολογιστικού χωρίου σχηματίζει γωνία 47° με τον οριζόντιο άξονα. Οπότε, η σχετική γωνία ταχύτητας εισόδου και πτερυγίου είναι 17° . Στα πάνω και κάτω όρια του υπολογιστικού χωρίου επιβάλλεται συνθήκη περιοδικότητας. Στο σχήμα 4.2 παρουσιάζεται το πεδίο της ταχύτητας και της τυρβώδους συνεκτικότητας, όπως αυτό προέκυψε από την επίλυση του προβλήματος χωρίς αβεβαιότητες.



(α')



(β')

Σχήμα 4.2: Πτερύγωση Συμπιεστή: α) Πεδίο μέτρου ταχύτητας β) Πεδίο τυρβώδους συνεκτικότητας.

4.2 Διατύπωση Εξισώσεων PCE - Μία Αβέβαιη Μεταβλητή Εισόδου

Στην περίπτωση όπου η ροή είναι τυρβώδης αλλά ασυμπίεστη, σύμφωνα με την υπόθεση Boussinesq, τότε η μόνη διαφορά στις εξισώσεις 2.4-2.5 είναι η έκφραση του τανυστή

των τάσεων, όπου ισούται με:

$$\tau_{ij} = (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (4.9)$$

Εάν δεν γίνει η παραδοχή της μη-στοχαστικής τύρβης τότε στις εξισώσεις της iPCE μεθόδου, οι όροι που προκύπτουν από τον ταχυστή των τάσεων αλλάζουν. Έτσι, με αντικατάσταση των αναπτύγματος του πολυωνυμικού χάους της ταχύτητας και της τυρβώδους συνεκτικότητας στην εξίσωση 4.2 προκύπτει ότι:

$$\tau_{ij}^m \psi^m = (\nu + \nu_t^m \psi^m) \left(\frac{\partial v_j^n \psi^n}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^n \psi^n}{\partial x_j} \right) \quad (4.10)$$

$$\tau_{ij}^m \psi^m = \nu \left(\frac{\partial v_j^n \psi^n}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^n \psi^n}{\partial x_j} \right) + \nu_t^m \psi^m \left(\frac{\partial v_j^n \psi^n}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^n \psi^n}{\partial x_j} \right) \quad (4.11)$$

Προβάλλοντας τις εξισώσεις κατά Galerkin:

$$\tau_{ij}^m \langle \psi^m, \psi^l \rangle = \nu \left(\frac{\partial v_j^n}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^n}{\partial x_j} \right) \langle \psi^n, \psi^l \rangle + \nu_t^m \left(\frac{\partial v_j^n}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^n}{\partial x_j} \right) \langle \psi^m, \psi^n, \psi^l \rangle \quad (4.12)$$

Στην περίπτωση $q = 1$, προκύπτει ότι:

$$\tau_{ij}^0 = \nu \left(\frac{\partial v_j^0}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right) + \nu_t^0 \left(\frac{\partial v_j^0}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right) + \nu_t^1 \left(\frac{\partial v_j^1}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \right) \quad (4.13)$$

$$\tau_{ij}^1 = \nu \left(\frac{\partial v_j^1}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \right) + \nu_t^0 \left(\frac{\partial v_j^1}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \right) + \nu_t^1 \left(\frac{\partial v_j^0}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right) \quad (4.14)$$

Η παραπάνω σχέση ξαναγράφεται ως:

$$\tau_{ij}^0 = (\nu + \nu_t^0) \left(\frac{\partial v_j^0}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right) + \nu_t^1 \left(\frac{\partial v_j^1}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \right) \quad (4.15)$$

$$\tau_{ij}^1 = (\nu + \nu_t^1) \left(\frac{\partial v_j^1}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \right) + \nu_t^0 \left(\frac{\partial v_j^0}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right) \quad (4.16)$$

Εάν $q = 2$, σύμφωνα με τη σχέση 4.12, ισχύει ότι:

$$\tau_{ij}^0 = \nu \left(\frac{\partial v_j^0}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right) + \nu_t^0 \left(\frac{\partial v_j^0}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right) + \nu_t^1 \left(\frac{\partial v_j^1}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \right) + 2\nu_t^2 \left(\frac{\partial v_j^2}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} \right) \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^1 = & \nu \left(\frac{\partial v_j^1}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \right) + \nu_t^0 \left(\frac{\partial v_j^1}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \right) + \nu_t^1 \left(\frac{\partial v_j^0}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right) \\ & + 2\nu_t^1 \left(\frac{\partial v_j^2}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} \right) + 2\nu_t^2 \left(\frac{\partial v_j^1}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^2 = & 2\nu \left(\frac{\partial v_j^2}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} \right) + 8\nu_t^2 \left(\frac{\partial v_j^2}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} \right) + 2\nu_t^2 \left(\frac{\partial v_j^0}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right) \\ & + 2\nu_t^0 \left(\frac{\partial v_j^2}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} \right) + 2\nu_t^1 \left(\frac{\partial v_j^1}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Συνοψίζοντας:

$$\tau_{ij}^0 = (\nu + \nu_t^0) \left(\frac{\partial v_j^0}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right) + \nu_t^1 \left(\frac{\partial v_j^1}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \right) + 2\nu_t^2 \left(\frac{\partial v_j^2}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} \right) \quad (4.20)$$

$$\tau_{ij}^1 = (\nu + \nu_t^0) \left(\frac{\partial v_j^1}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \right) + \nu_t^1 \left(\frac{\partial v_j^0}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right) + 2\nu_t^1 \left(\frac{\partial v_j^2}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} \right) + 2\nu_t^2 \left(\frac{\partial v_j^1}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \right) \quad (4.21)$$

$$\tau_{ij}^2 = 2(\nu + \nu_t^0) \left(\frac{\partial v_j^2}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} \right) + 8\nu_t^2 \left(\frac{\partial v_j^2}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} \right) + 2\nu_t^2 \left(\frac{\partial v_j^0}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right) + 2\nu_t^1 \left(\frac{\partial v_j^1}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \right) \quad (4.22)$$

Οι όροι ν_t^0 , ν_t^1 , ν_t^2 υπολογίζονται από τις εξισώσεις του μοντέλου τύρβης εάν εφαρμοστεί σ' αυτές η μέθοδος iPCE. Έτσι, εφαρμόζοντας τη μέθοδο στην εξίσωση του

μοντέλου τύρβης και θέτοντας $\tilde{\nu}P = P^*$ και $\tilde{\nu}D = D^*$:

$$\begin{aligned} v_j^m \frac{\partial \tilde{\nu}^l}{\partial x_j} \langle \psi_m \psi_l \psi_k \rangle - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \tilde{\nu}^m}{\partial x_j} \right) \langle \psi_m \psi_k \rangle - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tilde{\nu}^m}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}^l}{\partial x_j} \right) \langle \psi_m \psi_l \psi_k \rangle \\ - \frac{c_{b2}}{\sigma} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}^m}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\nu}^l}{\partial x_j} \right) \langle \psi_m \psi_l \psi_k \rangle - P^{*m}(\tilde{\nu}) \langle \psi_m \psi_k \rangle + D^{*m}(\tilde{\nu}) \langle \psi_m \psi_k \rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Για $q = 1$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} v_j^0 \frac{\partial \tilde{\nu}^0}{\partial x_j} + v_j^1 \frac{\partial \tilde{\nu}^1}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\tilde{\nu}^0}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}^0}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tilde{\nu}^1}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}^1}{\partial x_j} \right) \\ - \frac{c_{b2}}{\sigma} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}^0}{\partial x_j} \right)^2 - \left(\frac{\partial \tilde{\nu}^1}{\partial x_j} \right)^2 - P^{*0}(\tilde{\nu}) + D^{*0}(\tilde{\nu}) = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} v_j^0 \frac{\partial \tilde{\nu}^1}{\partial x_j} + v_j^1 \frac{\partial \tilde{\nu}^0}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\tilde{\nu}^0}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}^1}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tilde{\nu}^1}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}^0}{\partial x_j} \right) \\ - 2 \frac{c_{b2}}{\sigma} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}^0}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\nu}^1}{\partial x_j} \right) - P^{*1}(\tilde{\nu}) + D^{*1}(\tilde{\nu}) = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Οι όροι P^* , D^* είναι μη-γραμμικοί και ο υπολογισμός τους είναι εξαιρετικά πολύπλοκος. Για παράδειγμα, παρακάτω περιγράφεται ο υπολογισμός του P^* . Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (4.8) στην εξίσωση του όρου παραγωγής και, έπειτα από πράξεις οι οποίες παραλείπονται, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} a_1 \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right| \tilde{\nu}^6 + a_2 \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right| \tilde{\nu}^5 + a_3 \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right| \tilde{\nu}^4 + a_4 \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right| \tilde{\nu}^3 + a_5 \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right| \tilde{\nu}^2 + \\ a_6 \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right| \tilde{\nu} + a_7 \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right| + a_8 \tilde{\nu}^4 + a_9 \tilde{\nu} = \\ b_1 P^* \tilde{\nu}^6 + b_2 P^* \tilde{\nu}^5 + b_3 P^* \tilde{\nu}^4 + b_4 P^* \tilde{\nu}^3 + b_5 P^* \tilde{\nu}^2 + b_6 P^* \tilde{\nu} + b_7 P^* \end{aligned} \quad (4.26)$$

όπου a_i , b_i σταθεροί συντελεστές που εξαρτώνται από τις σταθερές που υπάρχουν στο μοντέλο τύρβης. Εφαρμόζοντας την επεμβατική μέθοδο προκύπτουν δύο εξισώσεις με

αγνώστους τα P_0^* , P_1^* . Παραλείποντας τις ενδιάμεσες πράξεις, παρακάτω γράφεται η μία από τις δύο εξισώσεις ως:

$$\begin{aligned}
& a_1 \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_1 \tilde{\nu}_0^6 + 6 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_0 \tilde{\nu}_0^5 \tilde{\nu}_1 + 30 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_1 \tilde{\nu}_0^4 \tilde{\nu}_1^2 + 40 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_0 \tilde{\nu}_0^3 \tilde{\nu}_1^3 + \right. \\
& 48 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_0 \tilde{\nu}_0 \tilde{\nu}_1^5 + 120 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_1 \tilde{\nu}_0^2 \tilde{\nu}_1^4 + 48 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_1 \tilde{\nu}_1^6 \left. \right) + \\
& a_2 \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_1 \tilde{\nu}_0^5 + 5 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_0 \tilde{\nu}_0^4 \tilde{\nu}_1 + 20 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_1 \tilde{\nu}_0^3 \tilde{\nu}_1^2 + 20 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_0 \tilde{\nu}_0^2 \tilde{\nu}_1^3 + \right. \\
& 40 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_1 \tilde{\nu}_0 \tilde{\nu}_1^4 + 8 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_0 \tilde{\nu}_1^5 \left. \right) + a_3 \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_1 \tilde{\nu}_0^4 + 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_0 \tilde{\nu}_0^3 \tilde{\nu}_1 + \right. \\
& 8 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_0 \tilde{\nu}_0 \tilde{\nu}_1^3 + 12 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_1 \tilde{\nu}_0^2 \tilde{\nu}_1^2 + 8 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_1 \tilde{\nu}_1^4 \left. \right) + a_4 \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_1 \tilde{\nu}^3 + \right. \\
& + 3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_0 \tilde{\nu}_0^2 \tilde{\nu}_1 + 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_0 \tilde{\nu}_1^3 + 3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_1 \tilde{\nu}_0 \tilde{\nu}_1^2 \left. \right) + a_5 \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_1 \tilde{\nu}_0^2 + \right. \\
& 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_0 \tilde{\nu}_0 \tilde{\nu}_1 + 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_1 \tilde{\nu}_1^2 \left. \right) + a_6 \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_0 \tilde{\nu}_1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_1 \tilde{\nu}_0 \right) + \\
& a_7 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_1 + a_8 \left(4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{\nu}_0^3 \tilde{\nu}_1 + 8 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{\nu}_0 \tilde{\nu}_1^3 \right) + a_9 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{\nu}_1 = \\
& b_1 (\tilde{\nu}_0^6 P_0^* + 6 \tilde{\nu}_0^5 \tilde{\nu}_1 P_1^* + 15 \tilde{\nu}_0^4 \tilde{\nu}_1^2 P_0^* + 60 \tilde{\nu}_0^3 \tilde{\nu}_1^3 P_1^* + 45 \tilde{\nu}_0^2 \tilde{\nu}_1^4 P_0^* + 90 \tilde{\nu}_0 \tilde{\nu}_1^5 P_0^* + 15 \tilde{\nu}_1^6 P_0^*) + \\
& b_2 (\tilde{\nu}_0^5 P_0^* + 10 \tilde{\nu}_0^3 \tilde{\nu}_1^2 P_0^* + 5 \tilde{\nu}_0^4 \tilde{\nu}_1 P_1^* + 30 \tilde{\nu}_0^3 \tilde{\nu}_1^3 P_1^* + 15 \tilde{\nu}_0 \tilde{\nu}_1^4 P_0^* + 15 \tilde{\nu}_1^5 P_1^*) \\
& b_3 (\tilde{\nu}_0^4 P_0^* + 6 \tilde{\nu}_0^2 \tilde{\nu}_1^2 P_0^* + 4 \tilde{\nu}_0^3 \tilde{\nu}_1 P_1^* + 3 \tilde{\nu}_1^3 P_0^* + 12 \tilde{\nu}_0 \tilde{\nu}_1^3 P_1^*) \\
& b_4 (\tilde{\nu}_0^3 P_0^* + 3 \tilde{\nu}_0^2 \tilde{\nu}_1 P_1^* + 3 \tilde{\nu}_0 \tilde{\nu}_1^2 P_0^* + 3 \tilde{\nu}_1^3 P_1^*) + \\
& b_5 (\tilde{\nu}_0^2 P_0^* + \tilde{\nu}_1^2 P_0^* + 2 \tilde{\nu}_0 \tilde{\nu}_1 P_1^*) + b_6 (\tilde{\nu}_0 P_0^* + \tilde{\nu}_1 P_1^*) + b_7 P_0^*
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Επισημαίνεται ότι, στην περίπτωση όπου υπάρχει η απόλυτη τιμή οι προβολές Galerkin των πολυωνύμων Hermite αλλάζουν. Ο υπολογισμός των συντελεστών PCE της τυρβώδους συνεκτικότητας είναι πολύπλοκος, όπως φάνηκε ακόμα και για $q = 1$, και για το λόγο αυτό αποφεύγεται σ' αυτήν τη διπλωματική εργασία. Αντ' αυτού, χρησιμοποιείται η παραδοχή της μη στοχαστικής τύρβης. Επομένως, η μόνη διαφορά με τις εξισώσεις για τη στρωτή ροή είναι στον όρο της διάχυσης, όπου στην κινηματική συνεκτικότητα προστίθεται και η τυρβώδης συνεκτικότητα. Τελικά, οι εξισώσεις για $q = 1$ γράφονται:

$$\frac{\partial v_i^0}{\partial x_i} = 0 \tag{4.28}$$

$$v_j^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + v_j^1 \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^0}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \nu_t) \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right) \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial v_i^1}{\partial x_i} = 0 \quad (4.30)$$

$$v_j^1 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + v_j^0 \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^1}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \nu_t) \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \right) \quad (4.31)$$

ενώ για $q = 2$

$$\frac{\partial v_i^0}{\partial x_i} = 0 \quad (4.32)$$

$$v_j^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + v_j^1 \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} + 2v_j^2 \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^0}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \nu_t) \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right) \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial v_i^1}{\partial x_i} = 0 \quad (4.34)$$

$$v_j^1 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + v_j^0 \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} + 2v_j^1 \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} + 2v_j^2 \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^1}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \nu_t) \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \right) \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial v_i^2}{\partial x_i} = 0 \quad (4.36)$$

$$4v_j^2 \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} + v_j^1 \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} + v_j^2 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + v_j^0 \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^2}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \nu_t) \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} \right) \quad (4.37)$$

Για τον υπολογισμό του πεδίου της τυρβώδους συνεκτικότητας, επιλύεται το πρόβλημα χωρίς αβεβαιότητες και το πεδίο που προκύπτει χρησιμοποιείται αμετάβλητο στις εξισώσεις, δηλαδή δεν επιλύονται οι εξισώσεις του μοντέλου τύρβης.

4.3 Σύγκριση με niPCE και Monte Carlo

Ως αβέβαιη μεταβλητή επιλέγεται η γωνία εισόδου της ροής ($\mu_{\alpha_\infty} = 47^\circ$, $\sigma_{\alpha_\infty} = 0.6^\circ$) και ως αντικειμενικές συναρτήσεις επιλέγονται η περιφερειακή και η αξονική δύναμη που

ασκούνται στο πτερύγιο του συμπίεστη. Σε προηγούμενο κεφάλαιο έχουν αναπτυχθεί οι σχέσεις υπολογισμού των συντελεστών PCE για την άνωση και την οπισθέλκουσα (3.9). Οι σχέσεις υπολογισμού των συντελεστών PCE για την αξονική και περιφερειακή δύναμη είναι ίδιες με αυτές, με μόνη διαφορά τα διανύσματα r_i , r'_i , τα οποία είναι τα μοναδιαία στην περιφερειακή και αξονική διεύθυνση αντίστοιχα. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση υπολογίζονται με τέσσερις διαφορετικούς τρόπους και συγκρίνονται μεταξύ τους. Συγκρίνονται:

- iPCE, $q = 2$, μη-στοχαστική τύρβη
- niPCE, $q = 2$, μη-στοχαστική τύρβη
- niPCE, $q = 2$
- Monte-Carlo, 1000 αξιολογήσεις

Για να εφαρμοστεί η μέθοδος niPCE με την παραδοχή της μη-στοχαστικής τύρβης χρησιμοποιείται το ίδιο πεδίο τυρβώδους συνεκτικότητας σε όλες τις αξιολογήσεις. Το πεδίο αυτό είναι το ίδιο που χρησιμοποιείται και στη μέθοδο iPCE, και προκύπτει από την επίλυση του προβλήματος χωρίς αβεβαιότητες. Τα σημεία που θα επιλεγθούν για τις 1000 αξιολογήσεις της μεθόδου Monte Carlo προκύπτουν από μία γεννήτρια τυχαίων αριθμών κανονικής κατανομής με μέση τιμή αυτήν της γωνίας εισόδου και τυπική απόκλιση την τυπική απόκλιση αυτής. Στον πίνακα 4.1 φαίνονται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της αξονικής δύναμης χωριστά λόγω πίεσης και λόγω συνεκτικότητας, καθώς και της συνολικής αξονικής δύναμης υπολογισμένες με τις δύο παραλλαγές της μεθόδου PCE και με τη μέθοδο Monte Carlo. Στον πίνακα 4.2 φαίνονται τα αποτελέσματα για την περιφερειακή δύναμη.

Αξονική Δύναμη(Nt)	$\mu_{F_{xp}}$	$\sigma_{F_{xp}}$	$\mu_{F_{xv}}$	$\sigma_{F_{xv}}$	μ_{F_x}	σ_{F_x}
iPCE, $q = 2$, μη-στοχαστική τύρβη	-4.3105	0.1091	0.0835	0.00205	-4.2272	0.1115
niPCE, $q = 2$	-4.3102	0.1109	0.0834	0.00217	-4.2269	0.1130
niPCE, $q = 2$, μη-στοχαστική τύρβη	-4.3100	0.1091	0.0833	0.00206	-4.2267	0.1112
MC 1000	-4.3118	0.1067	0.0834	0.00208	-4.2284	0.1087

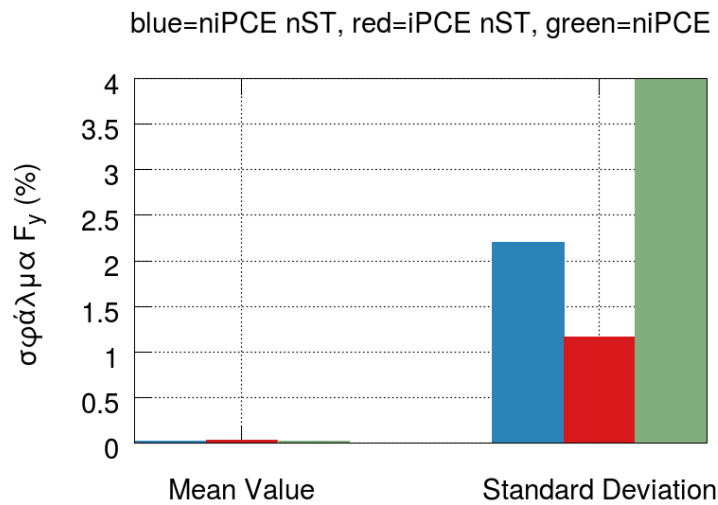
Πίνακας 4.1: Πτερύγωση Συμπίεστη, $\mu_{\alpha_{\infty}} = 47^{\circ}$, $\sigma_{\alpha_{\infty}} = 0.6^{\circ}$: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση αξονικής δύναμης λόγω πίεσης ($\mu_{F_{xp}}$, $\sigma_{F_{xp}}$) και λόγω συνεκτικότητας ($\mu_{F_{xv}}$, $\sigma_{F_{xv}}$) και της συνολικής δύναμης (μ_{F_x} , σ_{F_x}) υπολογισμένες με τις μεθόδους iPCE, niPCE, Monte Carlo.

Περιφερειακή Δύναμη(Nt)	$\mu_{F_{yp}}$	$\sigma_{F_{yp}}$	$\mu_{F_{yv}}$	$\sigma_{F_{yv}}$	μ_{F_y}	σ_{F_y}
iPCE, $q = 2$, μη-στοχαστική τύρβη	5.8110	0.0597	0.0617	0.001021	5.8727	0.0608
niPCE, $q = 2$	5.8108	0.0634	0.0617	0.000997	5.8725	0.0624
niPCE, $q = 2$, μη-στοχαστική τύρβη	5.8104	0.0598	0.0617	0.001047	5.8721	0.0587
MC 1000	5.8118	0.0610	0.0617	0.000959	5.8735	0.0600

Πίνακας 4.2: Πτερύγωση Συμπιεστή, $\mu_{\alpha\infty} = 47^\circ$, $\sigma_{\alpha\infty} = 0.6^\circ$: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της περιφερειακής δύναμης λόγω πίεσης ($\mu_{F_{yp}}$, $\sigma_{F_{yp}}$) και λόγω συνεκτικότητας ($\mu_{F_{yv}}$, $\sigma_{F_{yv}}$) και συνολικής δύναμης (μ_{F_y} , σ_{F_y}) υπολογισμένες με τις μεθόδους iPCE, niPCE, Monte Carlo.

Οι τιμές που προέκυψαν από τη μέθοδο Monte-Carlo θεωρούνται οι ακριβέστερες (υπόθεση εργασίας). Κάτι τέτοιο δεν είναι απολύτως σωστό, αφού οι 1000 αξιολογήσεις είναι πιθανόν να μην επαρκούν για την εκτίμηση της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης. Ωστόσο, το υπολογιστικό κόστος είναι πολύ μεγάλο για να γίνουν περισσότερες αξιολογήσεις. Επομένως, η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση προσεγγίζονται με ακρίβεια από όλες τις μεθόδους και με τη χρήση της παραδοχής της μη-στοχαστικής τύρβης. Στη μέθοδο niPCE, το σφάλμα στα αποτελέσματα της τυπικής απόκλισης δεν είναι σημαντικό είτε γίνει χρήση της παραδοχής είτε όχι. Ωστόσο, εάν επιλεγεί μεγαλύτερη τυπική απόκλιση η παραδοχή της μη-στοχαστικής τύρβης είναι πιθανόν να δώσει μεγαλύτερο σφάλμα, είτε χρησιμοποιηθεί η επεμβατική είτε η μη-επεμβατική μέθοδος. Στην περίπτωση της μη-επεμβατικής μεθόδου, αυτό θα συμβεί, επίσης, εάν χρησιμοποιηθεί μεγαλύτερη τάξη πολυωνυμικού χάους, αφού οι αξιολογήσεις γίνονται σε σημεία μακριά από τη μέση τιμή και, συνεπώς, το πεδίο της τυρβώδους συνεκτικότητας μπορεί να διαφέρει αρκετά.

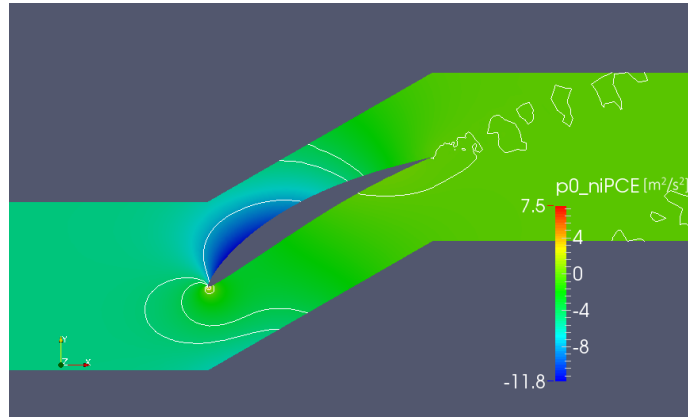
Εφόσον η μέθοδος Monte-Carlo θεωρείται αξιόπιστη, είναι δυνατόν να εκτιμηθεί το σφάλμα των υπόλοιπων μεθόδων αλλά και το σφάλμα που εισάγει η παραδοχή της μη-στοχαστικής τύρβης. Στο σχήμα 4.3 παρουσιάζεται το σφάλμα της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της περιφερειακής δύναμης.



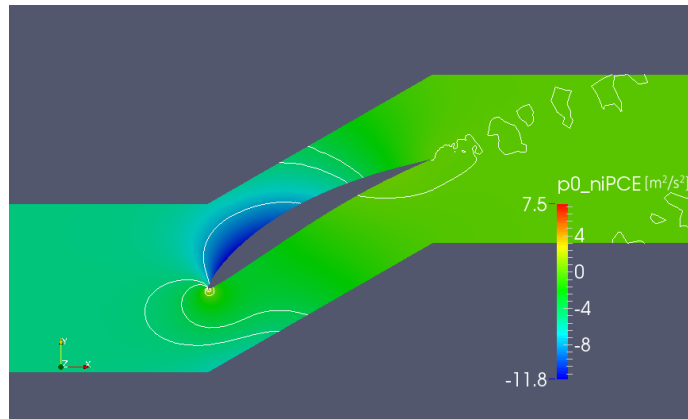
Σχήμα 4.3: Πτερύγωση Συμπιεστή, $\mu_{\alpha\infty} = 47^\circ$, $\sigma_{\alpha\infty} = 0.6^\circ$: Σφάλμα μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης περιφερειακής δύναμης υπολογισμένης από τη μέθοδο niPCE και iPCE με την παραδοχή της μη-στοχαστικής τύρβης. Έγινε η υπόθεση ότι τα αποτελέσματα της Monte-Carlo αποτελούν ακριβή εκτίμηση.

Το ποσοστιαίο σφάλμα στον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης είναι γενικά μεγαλύτερο από αυτό της μέσης τιμής όποια μέθοδος και αν χρησιμοποιηθεί. Παρόλα αυτά οι διαφορές είναι ασήμαντες και τα αποτελέσματα εξαιρετικά αξιόπιστα. Τα σφάλματα αυτά αποτελούν μόνο μία εκτίμηση και όχι ακριβείς τιμές. Συνεπώς, το γεγονός ότι το σφάλμα στην τυπική απόκλιση της μεθόδου niPCE με την παραδοχή της μη-στοχαστικής τύρβης είναι μικρότερο από το αντίστοιχο σφάλμα εάν δεν γίνει η παραδοχή αυτή είναι τυχαίο και οφείλεται πιθανόν στον ανεπαρκή αριθμό αξιολογήσεων που έγιναν με τη μέθοδο Monte Carlo. Επιπλέον, δεν είναι δυνατόν να διαπιστωθεί ποια μέθοδος είναι καλύτερη, εφόσον τα αντίστοιχα σφάλματα από όλες τις περιπτώσεις είναι ίδιας τάξης.

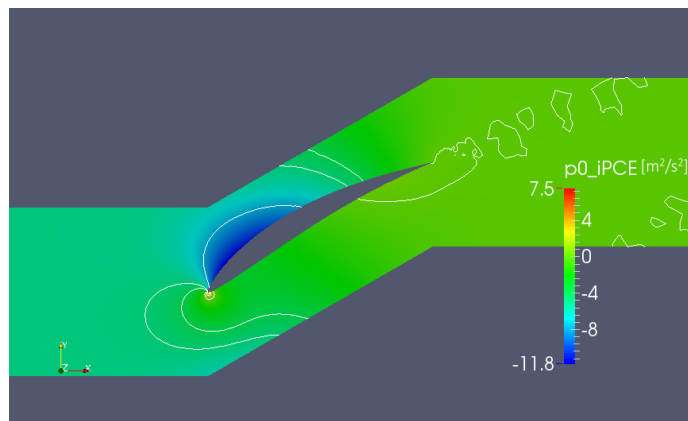
Στα σχήματα 4.4-4.6 παρουσιάζονται τα πεδία των συντελεστών PCE και οι ισογραμμές της πίεσης για την niPCE χωρίς την παραδοχή της μη-στοχαστικής τύρβης, με την παραδοχή αυτή και για τη μέθοδο iPCE με την παραδοχή της μη-στοχαστικής τύρβης.



(α')

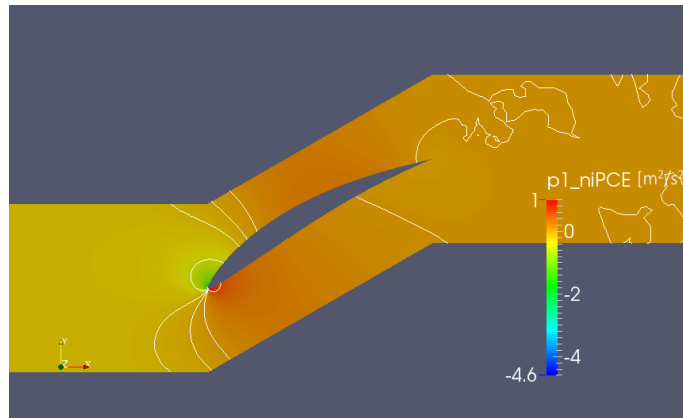


(β')

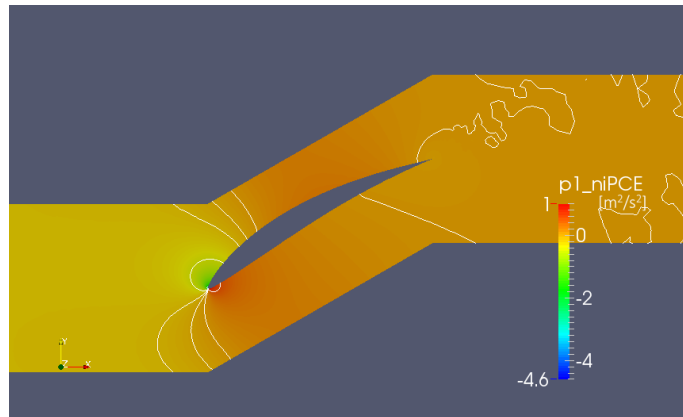


(γ')

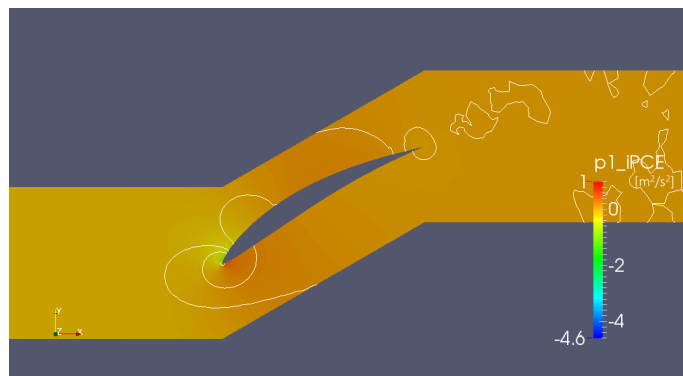
Σχήμα 4.4: Πτερύγωση Συμπιεστή, $\mu_{\alpha\infty} = 47^\circ$, $\sigma_{\alpha\infty} = 0.6^\circ$: Πεδίο πίεσης p_0 με $q = 2$ α) *niPCE* β) *niPCE* μη-στοχαστική τύρβη γ) *iPCE* μη-στοχαστική τύρβη.



(α')

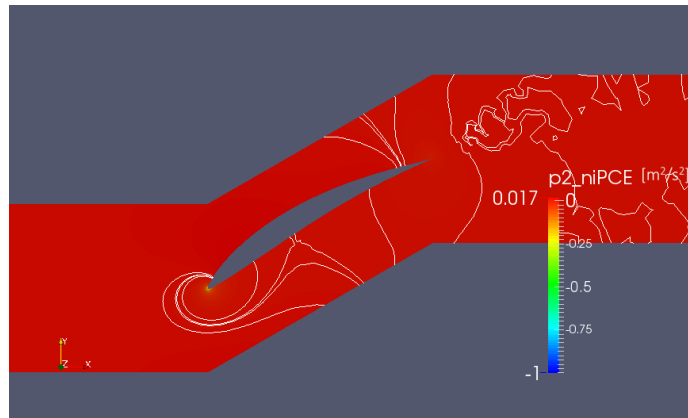


(β')

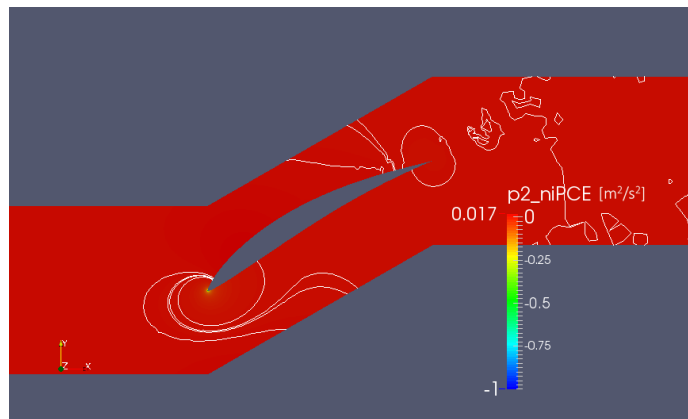


(γ')

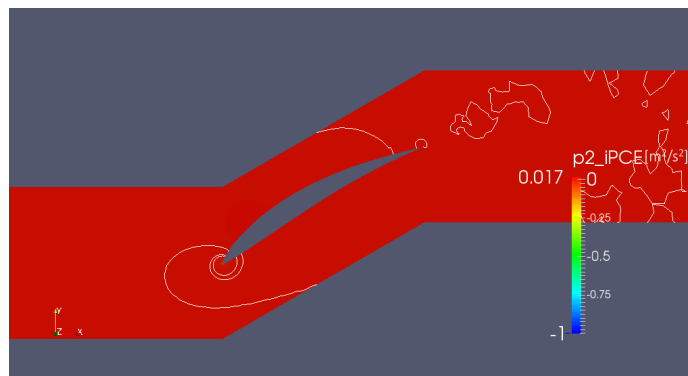
Σχήμα 4.5: Πτερύγωση Συμπίεστη, $\mu_{\alpha\infty} = 47^\circ$, $\sigma_{\alpha\infty} = 0.6^\circ$: Πεδίο πίεσης p_1 με $q = 2$ α) *niPCE* β) *niPCE* μη-στοχαστική τύρβη γ) *iPCE* μη-στοχαστική τύρβη.



(α')



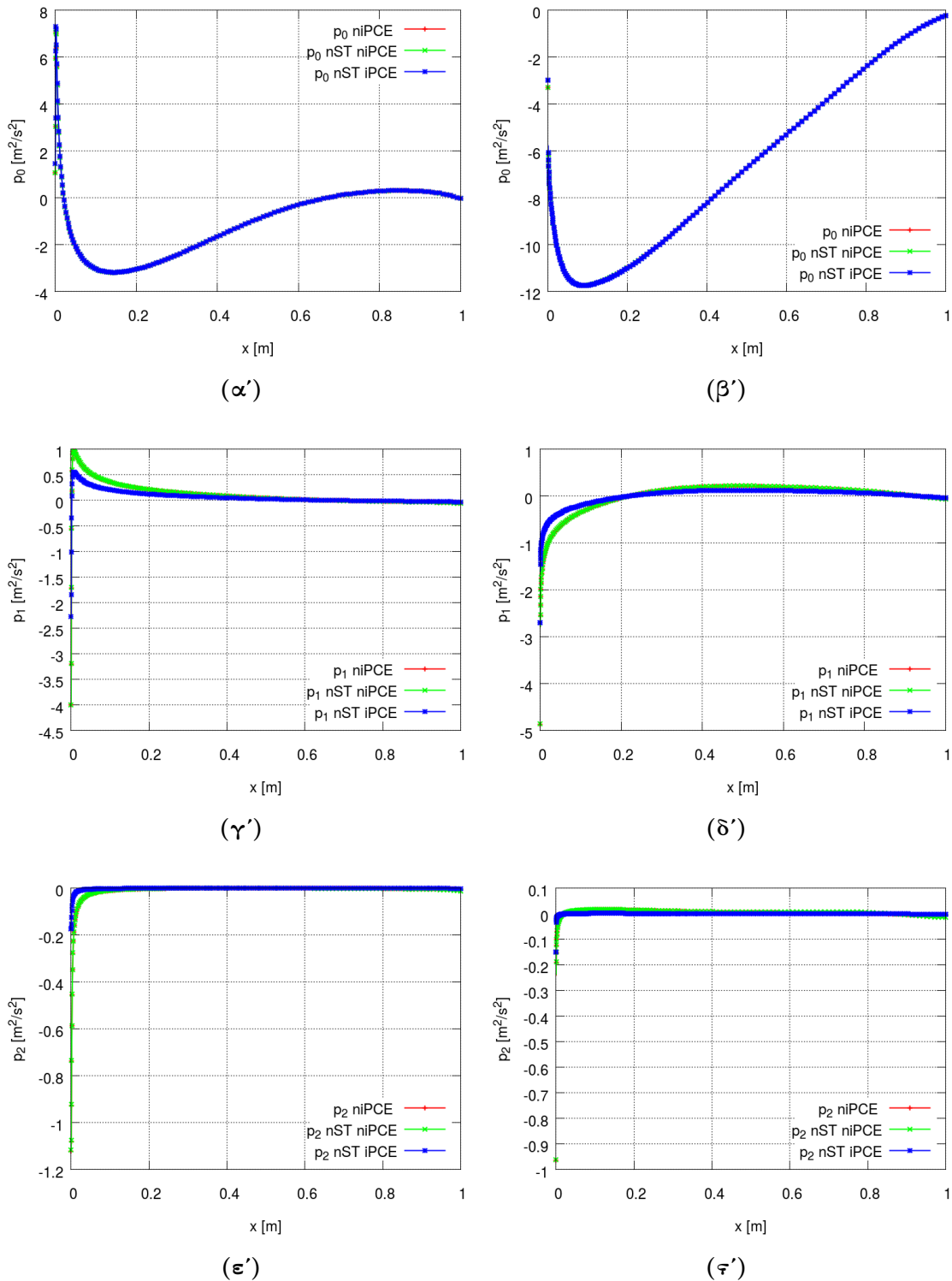
(β')



(γ')

Σχήμα 4.6: Πτερύγωση Συμπίεστη, $\mu_{\alpha\infty} = 47^\circ$, $\sigma_{\alpha\infty} = 0.6^\circ$: Πεδίο πίεσης p_2 με $q = 2$ α) *niPCE* β) *niPCE* μη-στοχαστική τύρβη γ) *iPCE* μη-στοχαστική τύρβη.

Τα πεδία του συντελεστή PCE p_0 , καθώς και οι ισογραμμές δεν παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές σε καμία περίπτωση. Αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού το πεδίο αυτό ισούται με το πεδίο της μέσης τιμής της πίεσης, που προσομοιάζεται με ακρίβεια και από τις δύο παραλλαγές της μεθόδου PCE, όπως φάνηκε και στα αποτελέσματα. Οι διαφορές παρουσιάζονται στα πεδία p_1 , p_2 τα οποία συνδέονται με το πεδίο της τυπικής απόκλισης σύμφωνα με τη σχέση (1.14). Παρόλα αυτά τα πεδία αυτά δεν έχουν σημαντικές διαφορές. Επιπλέον, στα σχήματα (4.7) παρουσιάζονται τα πεδία των συντελεστών PCE, με και χωρίς την παραπάνω παραδοχή, πάνω στην πλευρά υπερπίεσης και υποπίεσης της αεροτομής.

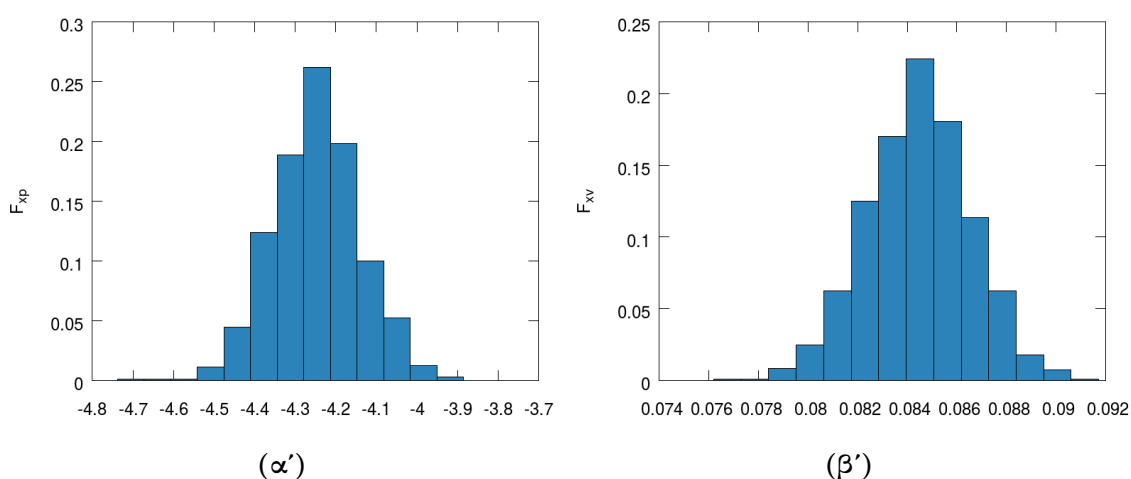


Σχήμα 4.7: Πτερύγωση Συμπίεστη, $\mu_{\alpha\infty} = 47^\circ$, $\sigma_{\alpha\infty} = 0.6^\circ$: Πεδία συντελεστών PCE για την πίεση ($q = 2$) στις πλευρές της αεροτομής υπολογισμένα από τις δύο μεθόδους με και χωρίς την παραδοχή της μη-στοχαστικής τύρβης α) p_0 πλευρά υπερπίεσης β) p_0 πλευρά υποπίεσης γ) p_1 πλευρά υπερπίεσης δ) p_1 πλευρά υποπίεσης ε) p_2 πλευρά υπερπίεσης ζ) p_2 πλευρά υποπίεσης.

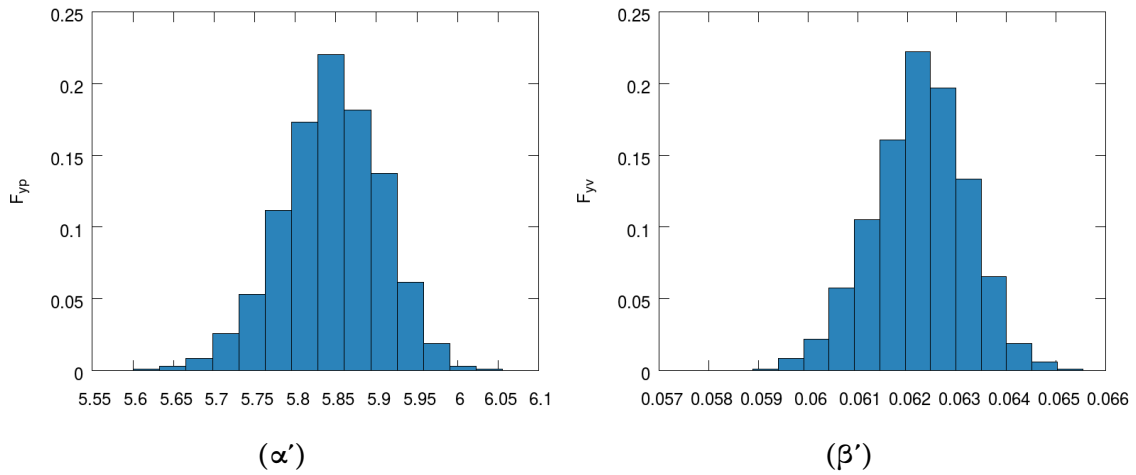
Στο πεδίο p_0 δεν υπάρχουν ουσιαστικές αποκλίσεις, αλλά στα πεδία p_1 , p_2 δεν ισχύει το ίδιο. Οι διαφορές αυτές, πάντως, δεν είναι σημαντικές. Αξιοσημείωτο είναι ότι τα πεδία που προέκυψαν από τη μέθοδο piPCE και στις δύο παραλλαγές ταυτίζονται μεταξύ τους για το λόγο αυτό η κόκκινη καμπύλη καλύπτεται από την πράσινη και δεν φαίνεται.

4.4 Κατανομή Αντικειμενικών Συναρτήσεων

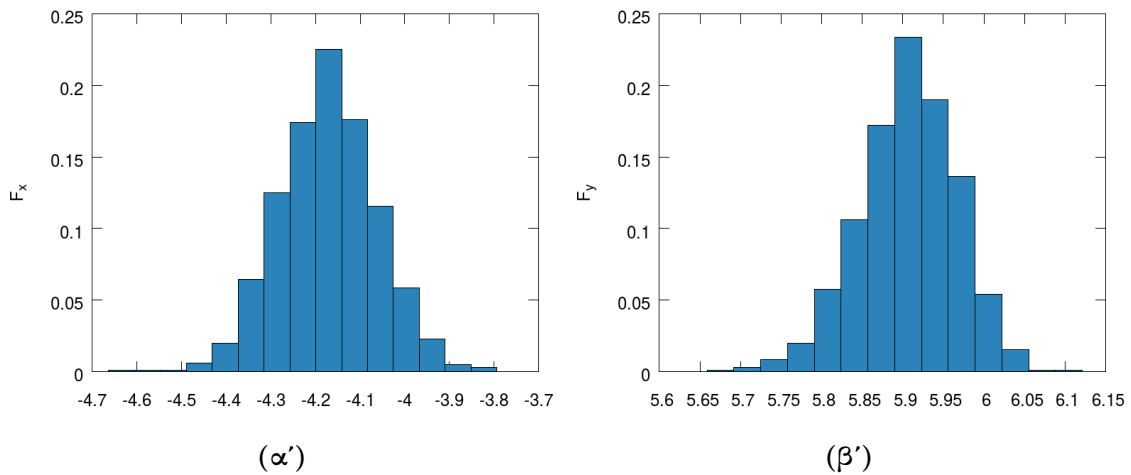
Για την εξαγωγή των εξισώσεων του PCE έγινε η παραδοχή πως όλα τα ροϊκά μεγέθη σε όλο το υπολογιστικό χωρίο, αλλά και οι αντικειμενικές συναρτήσεις ακολουθούν κανονική κατανομή, εφόσον και τα μεγέθη στην είσοδο ακολουθούν κανονική κατανομή. Αυτή η παραδοχή είναι πιθανόν να μην ισχύει αφού οι εξισώσεις που επιλύονται, Navier-Stokes για τη στρωτή ροή και RANS για την τυρβώδη ροή, είναι μη-γραμμικές. Παρόλα αυτά, αφού έγιναν οι 1000 αξιολογήσεις του Monte Carlo μπορούν να κατασκευαστούν τα ιστογράμματα συχνότητας εμφάνισης των αντικειμενικών συναρτήσεων και να διαπιστωθεί κατά πόσο, αυτές ακολουθούν κανονική κατανομή και, συνεπώς, κατά πόσο ισχύει η παραδοχή που έγινε. Στα σχήματα 4.8-4.10 παρουσιάζονται τα ιστογράμματα της αξονικής και περιφερειακής δύναμης. Αρχικά, οι δυνάμεις αποτελούνται από δύο συνιστώσες τη δύναμη λόγω πίεσης και αυτήν λόγω συνεκτικότητας. Σε κάθε περίπτωση, ο κατακόρυφος άξονας συμβολίζει τη συχνότητα εμφάνισης $f_i = n_i/N_{total}$. Στην περίπτωση που ο αριθμός των αξιολογήσεων αυξηθεί απεριόριστα, το ιστόγραμμα τείνει στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής.



Σχήμα 4.8: Πτερύγωση Συμπιεστή, $\mu_{\alpha\infty} = 47^\circ$, $\sigma_{\alpha\infty} = 0.6^\circ$: Ιστόγραμμα οριζόντιας δύναμης που ασκείται στο πτερύγιο α) λόγω πίεσης β) λόγω συνεκτικότητας.

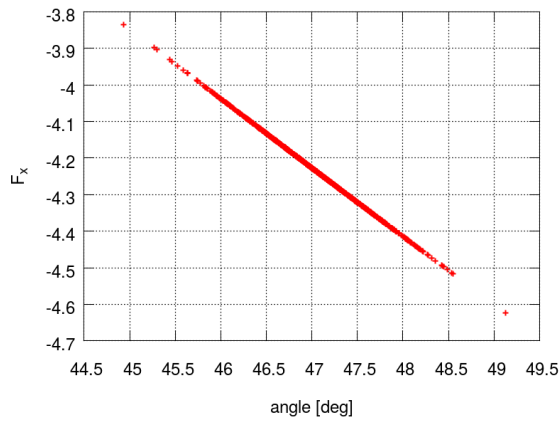


Σχήμα 4.9: Πτερύγωση Συμπιεστή, $\mu_{\alpha_{\infty}} = 47^{\circ}$, $\sigma_{\alpha_{\infty}} = 0.6^{\circ}$: Ιστόγραμμα περιφερειακής δύναμης που ασκείται στο πτερύγιο α) λόγω πίεσης β) λόγω συνεκτικότητας.

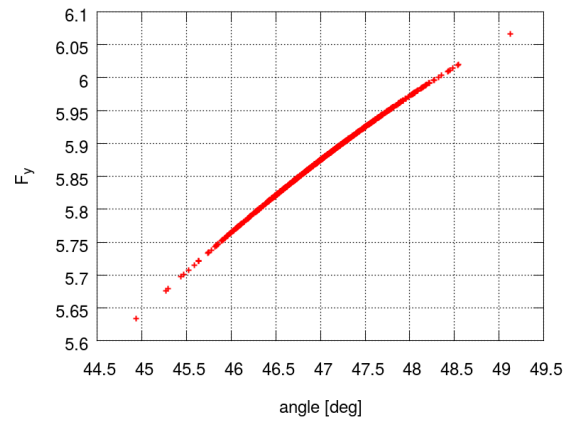


Σχήμα 4.10: Πτερύγωση Συμπιεστή, $\mu_{\alpha_{\infty}} = 47^{\circ}$, $\sigma_{\alpha_{\infty}} = 0.6^{\circ}$: Ιστόγραμμα δύναμης που ασκείται στο πτερύγιο α) αξονικής β) περιφερειακής.

Είναι εμφανές ότι, στην περίπτωση της αξονικής δύναμης, η κατανομή μοιάζει αρκετά με την κανονική ενώ, στην περίπτωση της περιφερειακής δύναμης, η κατανομή δείχνει να μην είναι συμμετρική. Παρόλα αυτά, δεν είναι δυνατό να καθοριστεί με ακρίβεια η μορφή της κατανομής, επειδή ο αριθμός των αξιολογήσεων του Monte Carlo δεν επαρκεί. Επιπλέον, είναι δυνατό να παραστεί γραφικά η καμπύλη της δύναμης (αξονικής, περιφερειακής) συναρτήσει της γωνίας για τις 1000 αυτές αξιολογήσεις. Στο σχήμα 4.11 παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των δύο συνιστωσών της δύναμης.



(α')



(β')

Σχήμα 4.11: Πτερύγωση Συμπιεστή, $\mu_{\alpha\infty} = 47^\circ$, $\sigma_{\alpha\infty} = 0.6^\circ$: Καμπύλη δύναμης συναρτήσει της γωνίας α) αξονική β) περιφερειακή.

Η αξονική δύναμη είναι γραμμική συνάρτηση της γωνίας, οπότε επιβεβαιώνεται η πεποίθηση, ότι η κατανομή της αξονικής δύναμης είναι κανονική. Σε αντίθεση με την αξονική δύναμη, η περιφερειακή δύναμη δεν είναι γραμμική συνάρτηση της γωνίας και, για το λόγο αυτό, η κατανομή δεν μοιάζει να είναι κανονική.

Κεφάλαιο 5

Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα

5.1 Ανακεφαλαίωση

Σκοπός της διπλωματικής αυτής εργασίας ήταν η ποσοτικοποίηση της στοχαστικότητας σε ρευστομηχανικά προβλήματα μέσω της μεθόδου επεμβατικού αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους (iPCE). Αρχικά, διατυπώθηκε το γενικό σύστημα των μ.δ.ε της μεθόδου για τάξη χάους q και n αβέβαιες (στοχαστικές) μεταβλητές εισόδου για χρονικά μόνιμη και στρωτή ροή ασυμπίεστου ρευστού. Από το γενικό σύστημα παράχθηκαν οι μ.δ.ε για $n = 1$ και $q = 1, 2$. Αφού έγινε ο προγραμματισμός αυτών των εξισώσεων σε περιβάλλον OpenFOAM, εξετάστηκε η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της μεθόδου, συγκρίνοντας τα με τις μεθόδους μη-επεμβατικού αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους (niPCE) και δειγματοληψίες Monte-Carlo, σε 2 διαφορετικές μεμονωμένες αεροτομές σε ελεύθερο ρεύμα αέρα. Τα αποτελέσματα ήταν εξαιρετικά και στις 2 περιπτώσεις, αφού υπολογίστηκε με ακρίβεια τόσο η μέση τιμή όσο και η τυπική απόκλιση των αντικειμενικών συναρτήσεων. Το επόμενο στάδιο ήταν η ποσοτικοποίηση της στοχαστικότητας σε τυρβώδεις ροές. Επιλέχθηκε το μοντέλο τύρβης μίας εξίσωσης Spalart-Allmaras και εφαρμόστηκε σ' αυτό η μέθοδος αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους. Επειδή οι εξισώσεις που προέκυψαν ήταν αρκετά πολύπλοκες δεν προγραμματίστηκαν παρά το ότι έγινε όλη η απαραίτητη μαθηματική ανάπτυξη. Αντ' αυτού, έγινε η παραδοχή της μη-στοχαστικής τύρβης, υποθέτοντας ότι η τύρβη δεν επηρεάζεται από τις αβέβαιες/περιβαλλοντικές μεταβολές. Η αξιοπιστία της τελευταίας μεθόδου δοκιμάστηκε σε μία διδιάστατη πτερύγωση συμπιεστή ελεγχόμενης διάχυσης.

5.2 Συμπεράσματα

Ακολουθούν συμπεράσματα που προέκυψαν από τις μαθηματικές διατυπώσεις και τις δοκιμές με τον προγραμματισθέντα, στη διπλωματική αυτή εργασία, κώδικα:

- Η μέθοδος iPCE είναι το ίδιο ακριβής με τη μέθοδο niPCE για αντίστοιχη τάξη πολυωνυμικού χάους, ειδικά, στη στρωτή ροή.
- Διαπιστώθηκε ότι, η επεμβατική μέθοδος απαιτεί μικρότερο υπολογιστικό κόστος σε σχέση με τη μη-επεμβατική μέθοδο αντίστοιχης τάξης για μία αβέβαιη μεταβλητή εισόδου, παρόλο που επιλύεται ίδιος αριθμός μ.δ.ε. Πιο συγκεκριμένα, ο χρόνος υπολογισμού των στατιστικών ροπών με την επεμβατική μέθοδο είναι περίπου 25% μικρότερος από τη μη-επεμβατική. Ωστόσο, η επεμβατική μέθοδος απαιτεί περισσότερη υπολογιστική μνήμη από τη μη-επεμβατική.
- Στη μέθοδο iPCE αυξάνεται σημαντικά το υπολογιστικό κόστος, με αύξηση της τάξης πολυωνυμικού χάους και αύξηση των αβέβαιων μεταβλητών. Για παράδειγμα, για $q = 2$ και $n = 4$ προκύπτει σύστημα με 105 μ.δ.ε σε ένα 2Δ πρόβλημα ασυμπίεστου ρευστού, το οποίο απαιτεί αρκετό χρόνο και αρκετή υπολογιστική μνήμη για να επιλυθεί. Το υπολογιστικό κόστος αυξάνει εξίσου και στην αντίστοιχη περίπτωση όπου χρησιμοποιηθεί η niPCE μέθοδος, όπου απαιτούνται 81 προσομοιώσεις προβλημάτων χωρίς αβεβαιότητες, κάτι που είναι πιο χρονοβόρο από την επεμβατική μέθοδο.
- Επιπλέον, παρατηρήθηκε ότι δεν απαιτείται υψηλή τάξη χάους κάτι που θα αύξανε, ίσως και απαγορευτικά, το υπολογιστικό κόστος. Συνεπώς, ο χρήστης οφείλει να είναι προσεκτικός με την επιλογή της τάξης χάους q , ώστε να συνδυάσει τα δύο επιθυμητά χαρακτηριστικά ενός αντίστοιχου επιλύτη: αποδεκτή ακρίβεια και αποδεκτό υπολογιστικό κόστος. Σύμφωνα με τις εξετασθείσες εφαρμογές με $q = 2$ τα αποτελέσματα είναι αξιόπιστα.
- Η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί σε προβλήματα αεροδυναμικού στιβαρού σχεδιασμού - βελτιστοποίησης μορφής υπό αβεβαιότητες και να μειωθεί σημαντικά το υπολογιστικό κόστος, ειδικά σε σύγκριση με τη μέθοδο Monte-Carlo.
- Η χρήση της μη-στοχαστικής τύρβης απαιτεί μεγάλη προσοχή, επειδή εάν η τυπική απόκλιση της αβέβαιης μεταβλητής εισόδου είναι πολύ μεγάλη, τότε τα αποτελέσματα μπορεί να εμπεριέχουν σφάλμα. Ωστόσο, για μικρή τυπική απόκλιση, τα αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά.
- Κατά την εφαρμογή της μεθόδου, έγινε η παραδοχή πως όλα τα ροϊκά μεγέθη, αλλά και η αντικειμενική συνάρτηση ακολουθούν την ίδια κατανομή με αυτήν που ακολουθούν οι αβέβαιες μεταβλητές εισόδου (στην προκειμένη περίπτωση κανονική κατανομή). Κάτι τέτοιο δεν ισχύει πάντα, αλλά ακόμα και σε αυτήν την περίπτωση, οι στατιστικές ροπές της αντικειμενικής συνάρτησης υπολογίζονται με ακρίβεια.

5.3 Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

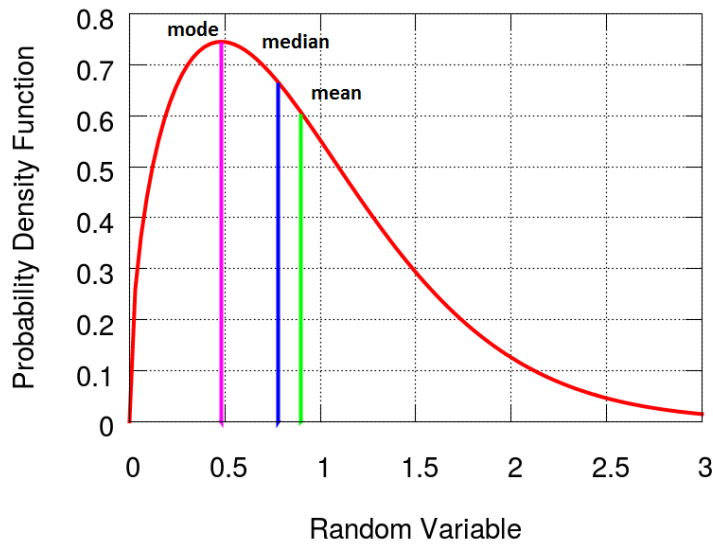
- Η μαθηματική διατύπωση και υλοποίηση προβλημάτων με περισσότερες από μία αβέβαιες μεταβλητές παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον. Επίσης, είναι απαραίτητο να διερευνηθεί η τάξη χάους που απαιτείται για να είναι αξιόπιστα τα αποτελέσματα και να επιτυγχάνεται το ελάχιστο υπολογιστικό κόστος.
- Η διερεύνηση και ο προγραμματισμός των εξισώσεων του μοντέλου τύρβης όπως αυτές προέκυψαν, έτσι ώστε να μην απαιτείται η παραδοχή της μη-στοχαστικής τύρβης.
- Η ανάπτυξη των συζυγών εξισώσεων (adjoint equations) για τις παραπάνω εφαρμογές, έτσι ώστε να μπορεί να γίνει βελτιστοποίηση και αεροδυναμικά στιβαρός σχεδιασμός των προβλημάτων.
- Σ' αυτήν την διπλωματική εργασία αναπτύχθηκαν διαφορετικοί κώδικες για κάθε q . Θα ήταν πολύ ενδιαφέρον να δημιουργηθεί και, κυρίως να συντηρείται ενιαίος κώδικας, στον οποίο ο χρήστης θα επιλέγει την επιθυμητή τάξη χάους και το επιθυμητό πλήθος αβέβαιων μεταβλητών.

Παράρτημα Α΄

Παράρτημα Στατιστικής

Α΄.1 Μέτρα Θέσης, Διασποράς και Σχήματος Κατανομής

Για κάθε συνεχή στοχαστική μεταβλητή που ακολουθεί μία κατανομή, ορίζονται κάποια αριθμητικά μεγέθη για το χαρακτηρισμό της κατανομής αυτής. Τα πιο σημαντικά από αυτά τα μεγέθη είναι η μέση τιμή μ (mean), η τυπική απόκλιση σ (standard deviation), η διάμεσος (median), η επικρατούσα τιμή (mode), η στρέβλωση s (skewness) και η κύρτωση k (kurtosis). Η μέση τιμή, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή είναι μέτρα θέσης. Με άλλα λόγια, είναι αριθμητικές ποσότητες που προσδιορίζουν το 'κέντρο' των παρατηρήσεων. Η διάμεσος είναι η τιμή όπου η πιθανότητα να βρεθεί μία τιμή μικρότερη της διαμέσου είναι 50%. Η επικρατούσα τιμή είναι πιο συχνά εμφανιζόμενη τιμή. Η τυπική απόκλιση είναι μέτρο διασποράς και υποδηλώνει τη διασπορά των παρατηρήσεων γύρω από τη μέση τιμή.



Σχήμα Α'.1: Η θέση της μέσης τιμής της διαμέσου και της επικρατούσας σε μία τυχαία κατανομή.

Τέλος υπάρχουν και τα μεγέθη που χαρακτηρίζουν το σχήμα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας. Ένα από αυτά είναι η στρέβλωση που δείχνει την ασυμμετρία της κατανομής και μπορεί να πάρει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές. Στην περίπτωση που η κατανομή είναι συμμετρική, τότε η στρέβλωση είναι 0. Εάν η στρέβλωση είναι θετική τότε η κορυφή της καμπύλης είναι μετατοπισμένη προς τα αριστερά σε σχέση με μία συμμετρική κατανομή, ενώ αν είναι αρνητική είναι μετατοπισμένη προς τα δεξιά. Παράδειγμα συμμετρικής κατανομής είναι η κανονική κατανομή ενώ μη-συμμετρικής η Weibull. Η κατανομή αυτή μπορεί να έχει είτε αρνητική είτε θετική στρέβλωση. Λ.χ, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Weibull δίνεται από τη σχέση:

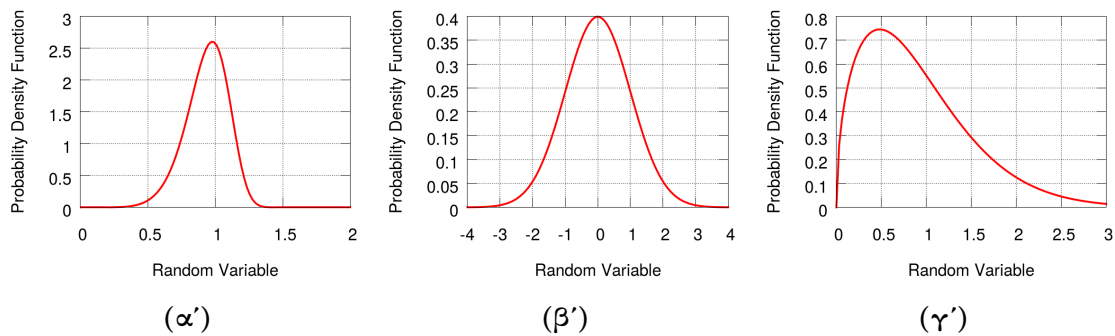
$$w(x|a, b) = \frac{a}{b} \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a}, x \leq 0 \quad (\text{Α'.1})$$

Ενώ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομή είναι:

$$w(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{Α'.2})$$

όπου μ η μέση τιμή και σ η τυπική απόκλιση.

Τα a, b είναι παράμετροι της κατανομής. Πιο συγκεκριμένα, το a είναι μία παράμετρος μορφής που επηρεάζει το σχήμα της καμπύλης, σε αντίθεση με το b που είναι παράμετρος διασποράς. Στο σχήμα Α'.2 παρουσιάζονται οι μορφές της κατανομής για διάφορες τιμές της στρέβλωσης.



Σχήμα Α'.2: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας για διάφορες τιμές της στρέβλωσης
 α) Κατανομή Weibull $a=7, b=1$ αρνητική στρέβλωση, β) Κανονική κατανομή μηδενικής στρέβλωσης, γ) Κατανομή Weibull $a=1.5, b=1$ θετική στρέβλωση.

Οι σχέσεις που συνδέουν τα a, b με τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση, τη στρέβλωση και την κύρτωση της κατανομής Weibull δίνονται από τις σχέσεις (Α'.3α')-(Α'.3δ').

$$\mu = b\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) \quad (\text{Α'.3α'})$$

$$\sigma = b^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)\right)^2\right] \quad (\text{Α'.3β'})$$

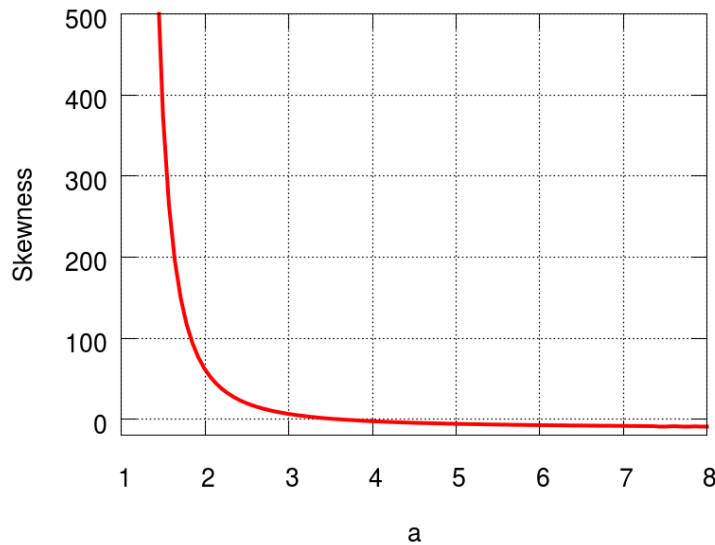
$$s = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{a}\right)b^3 - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3} \quad (\text{Α'.3γ'})$$

$$k = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{4}{a}\right)b^4 - 4s\sigma^3\mu - 6\sigma^2\mu^2 - \mu^4}{\sigma^4} \quad (\text{Α'.3δ'})$$

όπου Γ η συνάρτηση Γάμμα¹.

Στο σχήμα (Α'.3) φαίνεται η τιμή της στρέβλωσης, συναρτήσει της τιμής της παραμέτρου μορφής, για $b=1$.

¹ $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, x > 0$



Σχήμα Α'.3: Τιμή της στρέβλωσης συναρτήσει του παραμέτρου μορφής, εξίσωση (Α'.3γ') για $b=1$.

Όπως παρουσιάστηκε και στα σχήματα Α'.2α και Α'.2γ, η στρέβλωση είναι αρνητική και θετική αντίστοιχα, κάτι που επιβεβαιώνεται και από το σχήμα Α'.3. Ένα άλλο συμπέρασμα που εξάγεται είναι ότι όσο μικρότερη είναι η τιμή της στρέβλωσης τόσο η κατανομή τείνει να γίνει συμμετρική. Στην περίπτωση $a=7$, η απόλυτη τιμή της στρέβλωσης είναι εμφανώς μικρότερη από αυτή για $a=1.5$. Αυτό δικαιολογεί και τη μορφή της καμπύλης του σχήματος Α'.2α που είναι σχεδόν συμμετρική.

Το άλλο μέγεθος που χαρακτηρίζει το σχήμα της κατανομής είναι η κύρτωση. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της κύρτωσης τόσο μεγαλύτερες είναι οι κλίσεις γύρω από την κορυφή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας. Μία κατανομή με μεγάλη κύρτωση (> 3) ονομάζεται λεπτόκυρτη (leptokurtic) ενώ μία κατανομή με μικρή κύρτωση (< 3) πλατύκυρτη (platykurtic). Πιο συγκεκριμένα, 3 είναι η τιμή της κύρτωσης που έχει η κανονική κατανομή. Παράδειγμα πλατύκυρτης κατανομής είναι η ομοιόμορφη κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αυτή που δίνεται από τη σχέση (Α'.4). Ενώ λεπτόκυρτη είναι η κατανομή Laplace της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τη σχέση (Α'.5).

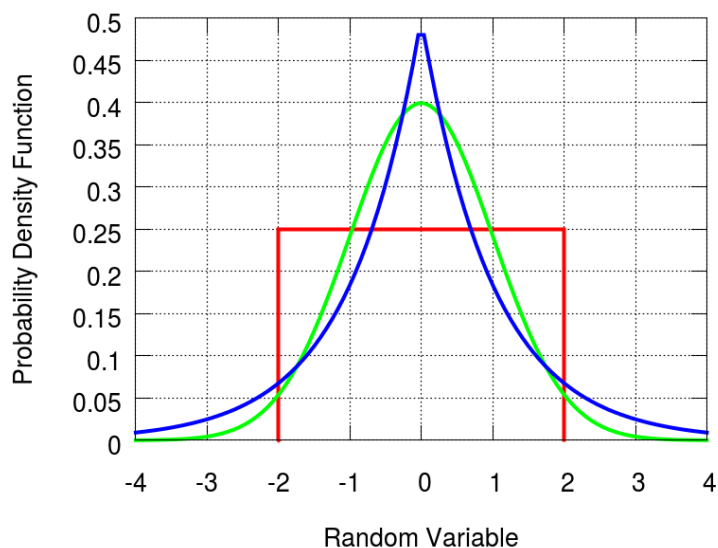
$$w(x) = \frac{1}{c-d}, c \geq x \geq d \quad (\text{Α'.4})$$

όπου $c-d$ είναι το εύρος των παρατηρήσεων.

$$w(x|\mu, \beta) = \frac{e^{-\frac{|x-\mu|}{\beta}}}{2\beta} \quad (\text{Α'.5})$$

όπου μ η μέση τιμή και β ένα μέτρο διασποράς.

Στο σχήμα Α'.4 παρουσιάζονται κατανομές με διαφορετικές τιμές κύρτωσης.



Σχήμα Α'.4: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας για διάφορες τιμές της κύρτωσης, με μπλε η κατανομή Laplace (Α'.5) ($\mu=0, \beta=1$) που είναι λεπτόκυρτη, με κόκκινο η ομοιόμορφη κατανομή (Α'.4) με εύρος 4 και μέση τιμή 0 που είναι πλατύκυρτη και με πράσινο η κανονική κατανομή (Α'.5) με μέση τιμή 0, τυπική απόκλιση 1 και κύρτωση 3.

Οι εξισώσεις για τον υπολογισμό της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης, της στρέβλωσης και της κύρτωσης μιας στοχαστικής μεταβλητής X που ακολουθεί μία συγκεκριμένη κατανομή, περιγράφονται από τις σχέσεις (Α'.6α')-(Α'.6δ').

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} X(\xi)w(\xi)d\xi \quad (\text{Α'.6α'})$$

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} (X(\xi) - \mu)^2 w(\xi)d\xi \quad (\text{Α'.6β'})$$

$$s = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(X(\xi) - \mu)^3}{\sigma^3} w(\xi)d\xi \quad (\text{Α'.6γ'})$$

$$k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(X(\xi) - \mu)^4}{\sigma^4} w(\xi)d\xi \quad (\text{Α'.6δ'})$$

όπου ξ είναι η ανεξάρτητη στοχαστική μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή και καθορίζει τη στοχαστική είσοδο X ενώ $w(\xi)$ η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Για μία τυχαία συνεχή μεταβλητή X , ορίζεται η ν -οστή προσδοκώμενη τιμή (expected value) $E[X^\nu]$ σύμφωνα με την εξίσωση:

$$E[X^\nu] = \int_{-\infty}^{\infty} X(\xi)^\nu w(\xi) d\xi \quad (A'.7)$$

Η προσδοκώμενη τιμή για $\nu=1$ συμπίπτει με τη μέση τιμή. Επίσης ο τελεστής της προσδοκώμενης τιμής είναι γραμμικός και ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$E[X + c] = E[X] + c \quad (A'.8\alpha')$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] \quad (A'.8\beta')$$

$$E[aX] = aE[X] \quad (A'.8\gamma')$$

Ο τελεστής αυτός είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για την εξαγωγή σχέσεων που θα διευκολύνουν τον υπολογισμό των αριθμητικών μεγεθών που καθορίζουν την κατανομή όπως θα φανεί παρακάτω.

Ένας άλλος ορισμός που είναι χρήσιμος είναι η ν -οστή στατιστική ροπή γύρω από τη μέση τιμή για μια συνεχή στοχαστική μεταβλητή, σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\langle X^\nu \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (X(\xi) - \mu)^\nu w(\xi) d\xi \quad (A'.9)$$

Η πρώτη ροπή ($\nu=1$) είναι 0 και δεν έχει ιδιαίτερη σημασία. Η δεύτερη στατιστική ροπή ($\nu=2$) είναι η διακύμανση σ^2 (Variance). Η τρίτη ροπή ($\nu=3$) είναι το γινόμενο της στρέβλωσης με την 3^η δύναμη της τυπικής απόκλισης, ενώ η τέταρτη ροπή ($\nu=4$) είναι το γινόμενο της κύρτωσης με την 4^η δύναμη της τυπικής απόκλισης. Για το λόγο αυτό ορίζονται και οι κανονικοποιημένες στατιστικές ροπές σύμφωνα με τη σχέση:

$$\langle X_{standard}^\nu \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(X(\xi) - \mu)^\nu}{\sigma^\nu} w(\xi) d\xi \quad (A'.10)$$

Η πρώτη κανονικοποιημένη ροπή ($\nu=1$) είναι και πάλι 0, η δεύτερη ($\nu=2$) είναι 1, ενώ η τρίτη ($\nu=3$) και η τέταρτη ($\nu=4$) αντιπροσωπεύουν τη στρέβλωση και την κύρτωση αντίστοιχα. Στον πίνακα A'.1 φαίνεται σε ποια μεγέθη αντιστοιχούν οι πρώτες 4 προσδοκώμενες τιμές, οι πρώτες 4 στατιστικές ροπές γύρω από το 0 και οι πρώτες 4 κανονικοποιημένες στατιστικές ροπές, δηλαδή, για $\nu=1$ έως $\nu=4$ στις εξισώσεις (A'.7),(A'.9),(A'.10).

ν	Προσδοκώμενη Τιμή	Στατιστική Ροπή γύρω από το μ	Κανονικοποιημένη Στατιστική Ροπή
1	μ	0	0
2	-	σ^2	1
3	-	$s\sigma^3$	s
4	-	$k\sigma^4$	k

Πίνακας Α'.1: Μεγέθη στα οποία αντιστοιχούν οι εξισώσεις (Α'.7),(Α'.9),(Α'.10) για $\nu=1$ έως και $\nu=4$.

Εναλλακτικά για τον υπολογισμό της διακύμανσης χρησιμοποιείται η προσδοκώμενη τιμή. Η εξίσωση (Α'.11) καταλήγει σε μία πιο απλή μορφή για την τυπική απόκλιση:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E[(X - E[X])^2] = \\
&= E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2] = \\
&= E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2 = \\
&= E[X^2] - (E[X])^2
\end{aligned} \tag{Α'.11}$$

Συνδυάζοντας την εξίσωση (Α'.11) με τον ορισμό που δόθηκε για τη στρέβλωση, την κύρτωση και εισάγοντας την προσδοκώμενη τιμή προκύπτουν οι εξισώσεις (Α'.12α')-(Α'.12β').

$$s = \frac{(E[X - E[X]])^3}{\sigma^3} = \frac{E[X^3] - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3} \tag{Α'.12α'}$$

$$k = \frac{(E[X - E[X]])^4}{\sigma^4} = \frac{E[X^4] - 4\mu s k \sigma^3 - 6\mu^2 \sigma^2 - \mu^4}{\sigma^4} \tag{Α'.12β'}$$

Α'.2 Κανονική Κατανομή

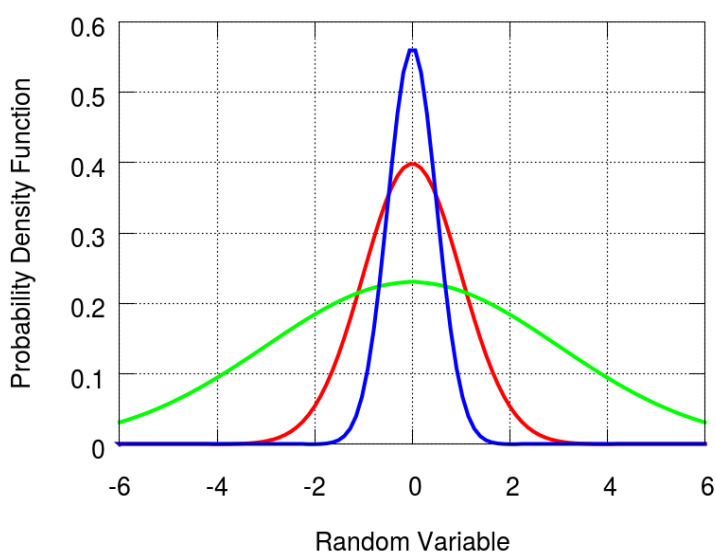
Παρακάτω θα μελετηθεί η κανονική κατανομή, η οποία σύμφωνα με τη θεωρία είναι συμμετρική και, συνεπώς, η στρέβλωσή της είναι μηδενική. Επίσης η μέση τιμή συμπίπτει με τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η κύρτωση της κανονικής κατανομής είναι 3. Ωστόσο, σε πολλές περιπτώσεις, η τιμή αυτή κανονικοποιείται έτσι ώστε να είναι 0. Συνεπώς, ο νέος ορισμός που προκύπτει

και ισχύει για όλες τις κατανομές είναι:

$$k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(X(\xi) - \mu)^4}{\sigma^4} w(\xi) d\xi - 3 \quad (A'.13)$$

Ωστόσο, σ' αυτήν τη διπλωματική εργασία, χρησιμοποιείται ο πρώτος ορισμός για την κύρτωση.

Στο σχήμα Α'.5 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της κανονικής κατανομής για διάφορες τιμές της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης.



Σχήμα Α'.5: Κανονική Κατανομή: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας για μέση τιμή $\mu=0$ και διάφορες τιμές της τυπικής απόκλισης, κόκκινη $\sigma=1$, μπλε $\sigma=0,5$, πράσινη $\sigma=2$

Παράρτημα Β΄

Πολυώνυμα Hermite και Ολοκλήρωση τους

Τα πολυώνυμα Hermite χρησιμοποιούνται στο ανάπτυγμα πολυωνυμικού χάους όταν μία μεταβλητή ακολουθεί κανονική κατανομή. Τα πολυώνυμα αυτά είναι ορθογώνια και υπάρχουν 2 διαφορετικά είδη πολυωνύμων. Τα πιθανοτικά (probabilists, $\Psi_n(\xi)$) που χρησιμοποιούνται κυρίως σε εφαρμογές στατιστικής και τα φυσικά (physicists, $H_n(\xi)$). Με κατάλληλο μετασχηματισμό, από τα πρώτα προκύπτουν τα δεύτερα και το αντίστροφο. Παρακάτω φαίνονται οι γενικοί τύποι υπολογισμού των πολυωνύμων αυτών.

- Πιθανοτικά πολυώνυμα Hermite

$$\psi_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2/2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2/2} \quad (\text{B'.1})$$

- Φυσικά πολυώνυμα Hermite

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} \quad (\text{B'.2})$$

Σ' αυτήν τη διπλωματική εργασία, χρησιμοποιούνται τα πιθανοτικά πολυώνυμα Hermite. Επίσης παρουσιάζεται και ο αναδρομικός τύπος υπολογισμού αυτών:

$$\psi_{n+1}(\xi) = \xi\psi_n(\xi) - n\psi_{n-1}(\xi) \quad (\text{B'.3})$$

Τα πρώτα 6 πολυώνυμα όπως αυτά προκύπτουν από τον ορισμό είναι:

$$\begin{aligned}
\psi_0(\xi) &= 1 \\
\psi_1(\xi) &= \xi \\
\psi_2(\xi) &= \xi^2 - 1 \\
\psi_3(\xi) &= \xi^3 - 3\xi \\
\psi_4(\xi) &= \xi^4 - 6\xi^2 + 3 \\
\psi_5(\xi) &= \xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi
\end{aligned}$$

Ορίζεται η νόρμα των πολυωνύμων Hermite ως:

$$\gamma_i = \|\psi_i\|^2 = \langle \psi_i^2 \rangle = i! \quad (\text{B'.4})$$

Επειδή στην περίπτωση των πολυωνύμων πιθανωτικών Hermite η νόρμα δεν είναι πάντα 1, ορίζονται τα κανονικοποιημένα πιθανοτικά πολυώνυμα Hermite που έχουν νόρμα ίση με 1. Όμως σ' αυτήν την περίπτωση τα πολυώνυμα είναι μη-μονικά, δηλαδή ο όρος του x^k είναι $A_k = \frac{1}{\sqrt{k!}}$. Τελικά τα κανονικοποιημένα πολυώνυμα Hermite είναι:

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_0(\xi) &= 1 \\
\tilde{\psi}_1(\xi) &= \xi \\
\tilde{\psi}_2(\xi) &= \frac{\xi^2 - 1}{\sqrt{2}} \\
\tilde{\psi}_3(\xi) &= \frac{\xi^3 - 3\xi}{\sqrt{6}} \\
\tilde{\psi}_4(\xi) &= \frac{\xi^4 - 6\xi^2 + 3}{\sqrt{24}} \\
\tilde{\psi}_5(\xi) &= \frac{\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi}{\sqrt{120}}
\end{aligned}$$

Κατά την εξαγωγή των εξισώσεων του πολυωνιμικού χάους χρησιμοποιούνται οι προβολές Galerkin. Ως προβολή Galerkin ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο δύο η περισσότερων ορθογωνίων πολυωνύμων με την αντίστοιχη πυκνότητα πιθανότητας. Στην περίπτωση των πολυωνύμων Hermite, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι αυτή της κανονικής κατανομής. Ο τύπος υπολογισμού των προβολών Galerkin δίνεται από τη σχέση:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(\xi)\psi_j(\xi)\dots\psi_n(\xi)w(\xi) d\xi \quad (\text{B'.5})$$

όπου $w(\xi)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής και $\psi_i(\xi)$ το i -οστό πολυώνυμο Hermite. Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων αυτών χρη-

σφομοποιούνται δύο βασικές ιδιότητες:

- Η συνάρτηση $f(\xi) = \xi^{2k}w(\xi)$ είναι άρτια και, συνεπώς, ισχύει ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi = 2 \int_0^{\infty} f(\xi)d\xi \quad (\text{B'.6})$$

Επίσης είναι γνωστό ότι:

$$\int_0^{\infty} f(\xi)d\xi = \frac{(2k-1)!!}{2} \quad (\text{B'.7})$$

Συνεπώς:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi = (2k-1)!! \quad (\text{B'.8})$$

- Η συνάρτηση $g(\xi) = \xi^{2k+1}w(\xi)$ είναι περιττή και συνεπώς:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi = 0 \quad (\text{B'.9})$$

Παράρτημα Γ'

Τυπολόγιο Προβολών Galerkin

Παρακάτω παρουσιάζονται οι προβολές Galerkin των πιθανοτικών πολυωνύμων Hermite στη μορφή ενός εύχρηστου τυπολόγιου για οποιονδήποτε ενδιαφέρεται να παράξει τις εξισώσεις του επεμβατικού PCE για οποιανδήποτε μερική διαφορική εξίσωση ή σύστημα εξισώσεων.

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(\xi) \psi_j(\xi) w(\xi) d\xi$$

$$\langle \psi_0, \psi_0 \rangle = 1$$

$$\langle \psi_1, \psi_1 \rangle = 1$$

$$\langle \psi_2, \psi_2 \rangle = 2$$

$$\langle \psi_0, \psi_1 \rangle = \langle \psi_1, \psi_0 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_0, \psi_2 \rangle = \langle \psi_2, \psi_0 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_i, \psi_j, \psi_z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(\xi) \psi_j(\xi) \psi_z(\xi) w(\xi) d\xi$$

$$\langle \psi_0, \psi_0, \psi_0 \rangle = 1$$

$$\langle \psi_1, \psi_1, \psi_1 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_2, \psi_2, \psi_2 \rangle = 8$$

$$\langle \psi_0, \psi_0, \psi_1 \rangle = \langle \psi_0, \psi_1, \psi_0 \rangle = \langle \psi_1, \psi_0, \psi_0 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_1, \psi_1, \psi_0 \rangle = \langle \psi_1, \psi_0, \psi_1 \rangle = \langle \psi_0, \psi_1, \psi_1 \rangle = 1$$

$$\langle \psi_0, \psi_0, \psi_2 \rangle = \langle \psi_0, \psi_2, \psi_0 \rangle = \langle \psi_2, \psi_0, \psi_0 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_2, \psi_2, \psi_0 \rangle = \langle \psi_2, \psi_0, \psi_2 \rangle = \langle \psi_0, \psi_2, \psi_2 \rangle = 2$$

$$\langle \psi_1, \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1, \psi_1 \rangle = 2$$

$$\langle \psi_2, \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_2 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_0, \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_0, \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_1, \psi_0, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_0 \rangle = \langle \psi_2, \psi_0, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1, \psi_0 \rangle = 0$$

$$\begin{aligned}
\langle \psi_2, \psi_2, \psi_1, \psi_1, \psi_0 \rangle &= \langle \psi_1, \psi_2, \psi_1, \psi_2, \psi_0 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_2, \psi_1, \psi_0 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1, \psi_1, \psi_2, \psi_0 \rangle \\
&= \langle \psi_2, \psi_1, \psi_2, \psi_1, \psi_0 \rangle = \langle \psi_2, \psi_2, \psi_1, \psi_1, \psi_0 \rangle = \langle \psi_1, \psi_0, \psi_2, \psi_2, \psi_1 \rangle \\
&= \langle \psi_1, \psi_2, \psi_0, \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_2, \psi_0, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1, \psi_0, \psi_2, \psi_0 \rangle \\
&= \langle \psi_2, \psi_1, \psi_2, \psi_0, \psi_1 \rangle = \langle \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_2, \psi_1, \psi_0, \psi_1 \rangle \\
&= \langle \psi_0, \psi_2, \psi_1, \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_2, \psi_0, \psi_1, \psi_1 \rangle \\
&= \langle \psi_0, \psi_2, \psi_2, \psi_1, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_0, \psi_2, \psi_1, \psi_1 \rangle = \langle \psi_1, \psi_1, \psi_0, \psi_2, \psi_2 \rangle \\
&= \langle \psi_1, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_2 \rangle = \langle \psi_0, \psi_1, \psi_1, \psi_2, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2 \rangle \\
&= \langle \psi_1, \psi_0, \psi_2, \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_0, \psi_2, \psi_1, \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_1, \psi_1 \rangle \\
&= \langle \psi_2, \psi_1, \psi_0, \psi_1, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_0, \psi_1, \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \psi_1, \psi_2, \psi_0, \psi_2 \rangle \\
&= \langle \psi_1, \psi_2, \psi_1, \psi_0, \psi_2 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1, \psi_1, \psi_0, \psi_2 \rangle = 10 \\
\langle \psi_0, \psi_0, \psi_2, \psi_2, \psi_1 \rangle &= \langle \psi_2, \psi_0, \psi_2, \psi_0, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_0, \psi_0, \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_0, \psi_2, \psi_2, \psi_0, \psi_1 \rangle \\
&= \langle \psi_0, \psi_2, \psi_0, \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_0, \psi_0, \psi_2, \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1, \psi_0, \psi_0, \psi_2 \rangle \\
&= \langle \psi_2, \psi_0, \psi_1, \psi_0, \psi_2 \rangle = \langle \psi_2, \psi_0, \psi_0, \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_0, \psi_2, \psi_1, \psi_0, \psi_1 \rangle \\
&= \langle \psi_0, \psi_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_0, \psi_0, \psi_2 \rangle = \langle \psi_0, \psi_0, \psi_2, \psi_1, \psi_2 \rangle \\
&= \langle \psi_1, \psi_0, \psi_2, \psi_0, \psi_2 \rangle = \langle \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_0, \psi_2 \rangle = \langle \psi_0, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_2 \rangle \\
&= \langle \psi_1, \psi_0, \psi_0, \psi_2, \psi_2 \rangle = \langle \psi_0, \psi_1, \psi_0, \psi_2, \psi_2 \rangle = \langle \psi_2, \psi_2, \psi_1, \psi_0, \psi_0 \rangle \\
&= \langle \psi_2, \psi_1, \psi_2, \psi_0, \psi_0 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_2, \psi_0, \psi_0 \rangle = \langle \psi_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_0 \rangle \\
&= \langle \psi_2, \psi_1, \psi_0, \psi_2, \psi_0 \rangle = \langle \psi_1, \psi_0, \psi_2, \psi_2, \psi_0 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_0, \psi_2, \psi_2 \rangle \\
&= \langle \psi_0, \psi_2, \psi_1, \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_2, \psi_0 \rangle = \langle \psi_2, \psi_2, \psi_0, \psi_1, \psi_0 \rangle \\
&= \langle \psi_2, \psi_0, \psi_2, \psi_1, \psi_0 \rangle = \langle \psi_0, \psi_2, \psi_2, \psi_1, \psi_0 \rangle = 0
\end{aligned}$$

Παράρτημα Δ'

Τυπολόγιο μη-επεμβατικής μεθόδου niPCE

Στη μη-επεμβατική μέθοδο υπολογίζονται απευθείας οι στατιστικές ροπές χωρίς να υπολογιστούν τα πεδία των συντελεστών του PCE. Έτσι, για μία αντικειμενική συνάρτηση F αποδεικνύεται ότι οι συντελεστές του PCE είναι:

$$F_i = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{x}, \xi) \psi_i(\xi) w(\xi) d\xi \quad (\Delta'.1)$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με Gauss Quadrature και στην περίπτωση της κανονικής κατανομής που εξετάστηκε στη διπλωματική αυτή, Gauss-Hermite Quadrature. Συνεπώς η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$F_i = \sum_{j=1}^l \omega_j F(z_j) \quad (\Delta'.2)$$

όπου z_j ρίζες του πολυωνύμου Hermite βαθμού l , και ω_j βάρη.

Τα βάρη της GHQ βρίσκονται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \omega_j &= \frac{(l-1)! \sqrt{2\pi}}{\psi'_l(x_j) \cdot \psi_{l-1}(x_j)} = \frac{(l-1)! \sqrt{2\pi}}{n \cdot \psi_{l-1}^2(x_j)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega_j = \frac{n! \sqrt{2\pi}}{n^2 \cdot \psi_{n-1}^2(x_j)} \end{aligned} \quad (\Delta'.3)$$

$$\begin{aligned}\omega_j &= 2 \cdot \frac{2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}}{H'_n(x_j) \cdot H_{n-1}(x_j)} = \frac{2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}}{n \cdot H_{n-1}^2(x_j)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega_j = \frac{2^{n-1}n!\sqrt{\pi}}{n^2 \cdot H_{n-1}^2(x_j)}\end{aligned}\quad (\Delta'.4)$$

Τέλος, υπενθυμίζεται ότι κατά την εφαρμογή της GHQ στο ανάπτυγμα πολυωνυμικού χάους, αντί του συμβολισμού l , προτιμάται ο συμβολισμός $q+1$, με $l = q + 1$ όπου q η τάξη αποκοπής τους χάους.

Δεδομένου ότι κατά την ολοκλήρωση με Gauss-Hermite Quadrature οι τιμές των ριζών και τα αντίστοιχα βάρη παραμένουν σταθερά, αυτές μπορούν να πινακοποιηθούν για γρηγορότερη αναφορά κατά την επίλυση αριθμητικών εφαρμογών.

Στον Πίνακα Δ'.1 αναγράφονται οι ρίζες και τα βάρη για τα πολυώνυμα Hermite τριών κατηγοριών: πιθανοτικά (ψ_n), κανονικά πιθανοτικά ($\tilde{\psi}_n$), και πολυώνυμα φυσικού (H_n), για βαθμό GHQ από 1 έως 8.

Βαθμός GHQ (l)	Πολυώνυμο ψ_n		Πολυώνυμο $\tilde{\psi}_n$		Πολυώνυμο H_n	
	Ρίζες (z_j)	Βάρη (ω_j)	Ρίζες (z_j)	Βάρη (ω_j)	Ρίζες (z_j)	Βάρη (ω_j)
1	0	2.506628275	0	1	0	1.77245385091
2	1 -1	1.25331414 1.25331414	1 -1	0.5 0.5	0.7071067812 -0.7071067812	0.886226925 0.886226925
3	1.732050808 0 -1.732050808	0.417771379 1.671085516 0.417771379	1.732050808 0 -1.732050808	0.1666666667 0.6666666667 0.1666666667	1.224744871 0 -1.224744871	0.295408975 1.181635901 0.295408975
4	2.334414218 0.7419637843 -0.7419637843 -2.334414218	0.11499371 1.13832042 1.13832042 0.11499371	2.334414218 0.7419637843 -0.7419637843 -2.334414218	0.04587585477 0.4541241452 0.4541241452 0.04587585477	1.650680124 0.5246476233 -0.5246476233 -1.650680124	0.0813128354 0.80491409 0.80491409 0.0813128354
5	2.856970014 1.35562618 0 -1.35562618 -2.856970014	0.028218146 0.55666179 1.336868413 0.55666179 0.028218146	2.856970014 1.35562618 0 -1.35562618 -2.856970014	0.01125741133 0.222075922 0.5333333333 0.222075922 0.01125741133	2.02018287 0.9585724646 0 -0.9585724646 -2.02018287	0.0199532421 0.393619323 0.9453087205 0.393619323 0.0199532421
6	3.324257434 1.889175878 0.6167065902 -0.6167065902 -1.889175878 -3.324257434	0.0064064014 0.22212673 1.02478100 1.02478100 0.22212673 0.0064064014	3.324257434 1.889175878 0.6167065902 -0.6167065902 -1.889175878 -3.324257434	0.002555784402 0.08861574604 0.4088284696 0.4088284696 0.08861574604 0.002555784402	2.350604974 1.335849074 0.4360774119 -0.4360774119 -1.335849074 -2.350604974	0.00453000991 0.1570673203 0.724629595 0.724629595 0.1570673203 0.00453000991
7	3.750439718 2.366759411 1.154405395 0 -1.154405395 -3.366759411 -3.750439718	0.001374306 0.07709668 0.60189955 1.145887211 0.60189955 0.07709668 0.001374306	3.750439718 2.366759411 1.154405395 0 -1.154405395 -3.366759411 -3.750439718	0.0005482689 0.03075712 0.24012318 0.4571428571 0.24012318 0.03075712 0.0005482689	2.651961357 1.673551629 0.8162878829 0 -0.8162878829 -1.673551629 -2.651961357	0.000971781245 0.05451558282 0.4256072526 0.8102646176 0.4256072526 0.05451558282 0.000971781245
8	4.144547186 2.802485861 1.636519042 0.5390798114 -0.5390798114 -1.636519042 -2.802485861 -4.144547186	0.0002822828 0.02415192 0.29387687 0.935003072 0.935003072 0.29387687 0.02415192 0.0002822828	4.144547186 2.802485861 1.636519042 0.5390798114 -0.5390798114 -1.636519042 -2.802485861 -4.144547186	0.0001126145 0.009635220 0.11723991 0.373012258 0.373012258 0.11723991 0.009635220 0.0001126145	2.930637420 2.981656757 1.157193712 0.3811869902 -0.3811869902 -1.157193712 -2.981656757 -2.930637420	0.0001996041 0.01707798 0.20780233 0.661147013 0.661147013 0.20780233 0.01707798 0.0001996041

Πίνακας Δ'.1: Ρίζες και βάρη πολυωνύμων *Hermite* (πιθανοτικών, κανονικοποιημένων πιθανοτικών και πολυωνύμων φυσικού) για προβλήματα ολοκλήρωσης κατά *Gauss Quadrature*, τάξεως $n = 1, 2, \dots, 8$.

Βιβλιογραφία

- [1] Παπουτσής-Κιαχαγιάς Ε. *Συζυγείς μέθοδοι χαμηλού υπολογιστικού κόστους για τυρβώδεις ροές, στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση*. Διδακτορική Διατριβή. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2013.
- [2] Νυκτερή Γ. *Προσομοίωση Προβλημάτων με Αβεβαιότητες - Επεμβατικές Μέθοδοι Πολυωνυμικού Χάους*. Διατύπωση, Προγραμματισμός και Εφαρμογές στην Ασυμπίεστη Ψευδο-1Δ Ροή. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2016.
- [3] Πάμπαλης Γ. *Υλοποίηση αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους στον αεροδυναμικά στιβαρό σχεδιασμό*. Βελτιστοποίηση με εξελικτικούς αλγορίθμους υπό στοχαστικές εισόδους. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2015.
- [4] Moukalled F., Mangashi L., and Darwish M. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics*. Springer, 2015.
- [5] Alekseev A. K., Navon I. M., and Zelentsov M. E. *The estimation of functional uncertainty using polynomial chaos and adjoint equations*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 67:242–272, 2011.
- [6] Askey, W. and Wilson, J. *Some basic hypergeometric polynomials that generalize Jacobi polynomials*. Memoirs of the American Mathematical Society, AMS, Providence, RI, παγε 319, 1985.
- [7] Asmussen, S. and Glynn, P. W. *Stochastic Simulation: Algorithms and Analysis*. Springer, 2007.
- [8] Bijl, H., Lucor, D., Mishra, S. and Schwab, C. *Uncertainty quantification in computational fluid dynamics*. Springer, 2013.
- [9] Hamarat, C., Kwakkel, J. H. and Pruyt, E. *Adaptive robust design under deep uncertainty*. Journal of Technological Forecasting and Social Change, 80(3):408–418, 2013.
- [10] Hammersley, J. M. and Handscomb, D. C. *Monte Carlo Methods*. Biometrische Zeitschrift, 8(3):209, 1966.

- [11] Hosder, S., Walters R. W. and Perez, R. *A Non-Intrusive Polynomial Chaos Method For Uncertainty Propagation in CFD Simulations*. 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2006.
- [12] Hu, C. and Youn, B. D. *Adaptive-sparse polynomial chaos expansion for reliability analysis and design of complex engineering systems*. Structural Multidisciplinary Optimization, 43:419–442, 2011.
- [13] Lu, X. and Li, H. X. *Perturbation theory based robust design under model uncertainty*. Journal of Mechanical Design, 131(11), 2009.
- [14] Onorato, G., Loeven, G. J. A., Ghorbaniasl, G., Bijl, H., and Lacor, C. *Comparison of intrusive and non-intrusive polynomial chaos methods for CFD applications in aeronautics*. V European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS, 67:14–17, 2010.
- [15] Owen, A. B. *Monte Carlo theory, methods and examples*. Stanford University, 2013.
- [16] Patankar, S. V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. CRC press, 1980.
- [17] Wiener, W. *The homogeneous chaos*. American Journal of Mathematics, 60(4):897–926, 1938.
- [18] Xiu D. *Fast Numerical Methods for Stochastic Computations: A Review*. Communications in Computational Physics, 5(2-4):242–272, 2009.
- [19] Xiu, D. and Karniadakis, G. E. *The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations*. SIAM Journal on Scientific Computing, 24(2):619–644, 2002.
- [20] Xiu, D. and Karniadakis, G. E. *Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos*. Journal of Computational Physics, 187:137–167, 2003.
- [21] Spalart, P. R. and Allmaras, S. R. *A one-Equation Turbulence Model For Aerodynamic Flows*. Boeing Commercial Airplane Group AIAA Paper 92-0439, 1992.
- [22] Lacor, C., Dinescu, C., Hirsch C. and Smirnov S. *Implementation of Intrusive Polynomial Chaos in CFD Codes and Application to 3D Navier-Stokes* Springer International Publishing Switzerland, 2013