



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

## Μέθοδος Προσαρμογής του Μητρώου Συνδιακύμανσης (CMA) στην Εξελικτική Βελτιστοποίηση

Διπλωματική Εργασία

Παπαδοπούλου Μαρία

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2020



## Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που βοήθησαν να ολοκληρωθεί αυτή η διπλωματική εργασία. Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή αυτής της εργασίας, κύριο Κυριάκο Χ. Γιαννάκογλου, που μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ με το θέμα αυτής της εργασίας και για τη συνεχή καθοδήγηση του κατά την εκπόνηση της.

Επίσης, ευχαριστώ τη Δρ. Βαρβάρα Ασούτη για την πολύτιμη βοήθεια που μου παρείχε και για το χρόνο που αφιέρωσε, παρά το ιδιαίτερα βεβαρημένο πρόγραμμά της. Ευχαριστώ τους φίλους και τους συμφοιτητές μου που ήταν δίπλα μου το χρόνο ενασχόλησης μου με την εργασία, αλλά και όλα τα χρόνια φοίτησής μου στη σχολή. Τέλος, ευχαριστώ την οικογένεια μου που ήταν πάντα εκεί για να με στηρίζουν.





Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

## Μέθοδος Προσαρμογής του Μητρώου Συνδιακύμανσης (CMA) στην Εξελικτική Βελτιστοποίηση

Διπλωματική Εργασία

Παπαδοπούλου Μαρία

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2020

### Περίληψη

Αυτή η διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στην κατανόηση και τον προγραμματισμό του αλγορίθμου βελτιστοποίησης, που ονομάζεται Μέθοδος Προσαρμογής του Μητρώου Συνδιακύμανσης (Covariance Matrix Adaptation CMA). Αυτός αποτελεί έναν πολλά υποσχόμενο αλγόριθμο βελτιστοποίησης, κυρίως στο πλαίσιο των Στρατηγικών Εξέλιξης. Ένας στόχος αυτής της εργασίας είναι ο εμπλουτισμός της κλασικής εκδοχής του με νέους τελεστές εξέλιξης, ώστε να δημιουργηθεί ένας νέος γενικευμένος εξελικτικός αλγόριθμος που αποτελείται από στοιχεία Γενετικών Αλγορίθμων και Στρατηγικών Εξέλιξης. Επόμενοι στόχοι που τίθενται, είναι η ικανότητα διαχείρισης περιορισμών, η υποβοηθούμενη από μεταπρότυπα λειτουργία του και η ικανότητα επίλυσης πολυκριτηριακών προβλημάτων. Στο πρώτο μέρος της διπλωματικής εργασίας, αναλύεται το μαθηματικό υπόβαθρο του κλασικού CMA, όπως προτείνεται από τη βιβλιογραφία. Έπειτα, παρουσιάζονται οι προσθήκες που γίνονται για την υλοποίηση των στόχων που έχουν τεθεί. Στο δεύτερο μέρος, γίνεται πιστοποίηση της λειτουργίας του νέου CMA σε μαθηματικές συναρτήσεις αλλά και σε προβλήματα βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική. Ταυτόχρονα, γίνεται σύγκριση της απόδοσης του με το γενικευμένο EA που εφαρμόζει το λογισμικό EASY (Evolutionary Algorithms SYstem), που έχει αναπτυχθεί στη ΜΠΥΡ&Β, σε όλα τα προβλήματα ενός στόχου που επιλύονται. Στον EA που εφαρμόζεται, υπάρχουν μόνο όσα στοιχεία μπορούν να συγκριθούν με αυτά του εμπλουτισμένου CMA. Σκοπός της σύγκρισης είναι να διαπιστωθεί αν ο συνδυασμός των βασικών και των νέων χαρακτηριστικών που έχει ο CMA, οδηγούν σε καλύτερα αποτελέσματα από ότι ο άλλος γενικευμένος Εξελικτικός Αλγόριθμος. Στο τέλος αυτής της εργασίας, και, πιθανότατα, αφού πραγματοποιηθούν και άλλες δοκιμές, μπορεί κανείς να συμπεράνει αν πρέπει να υιοθετηθούν στοιχεία του αλγορίθμου CMA από ένα γενικευμένο EA (όπως αυτός που εφαρμόζει ο EASY) ή το αντίστροφο.



**National Technical University of Athens**  
**School of Mechanical Engineering**  
**Fluid Section**  
**Parallel CFD & Optimization Unit**

## **Covariance Matrix Adaptation in Evolutionary Optimization**

Diploma Thesis

**Papadopoulou Maria**

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, 2020

### **Abstract**

This diploma thesis is dealing with the programming and enhancement of the optimization algorithm Covariance Matrix Adaptation (CMA) in Evolutionary Strategies. Since this is considered a very promising algorithm in Evolutionary Strategies, the idea is to combine its characteristics with the evolutionary operators of a Genetic Algorithm (GA), in order to construct a generalised Evolutionary Algorithm (EA) with maximized efficiency. Other new characteristics, that were implemented during this study, consist of the handling of constraints, a metamodel-assisted mode and the ability to solve Multi Objective Optimization (MOO) problems. The first section of this study deals with the CMA basic model and the new additions. The enhanced version of the algorithm is tested on benchmark cases of single- and multi-objective problems. After having certified the basic operation of the enhanced CMA, it is used to solve aerodynamic optimization problems. All the single objective problems that are solved in this study are also solved with the generalised EA that is used by the software Evolutionary Algorithms SYstem (EASY). This EA will operate only with the characteristics that can be compared with the enhanced CMA. The results from both algorithms are then compared to conclude on the more efficient algorithm. Upon completion of this study, (and, most probably, after some more tests), one may draw conclusions about whether some of the elements of the CMA algorithm should be adopted by a generalized Evolutionary Algorithm (such as the platform EASY developed by the PCOpt/NTUA) or the other way around.

## Ακρωνύμια

ΒΔ	Βάση Δεδομένων
ΓΕΑ	Γενικευμένος Εξελικτικός Αλγόριθμος
ΕΑ	Εξελικτικός Αλγόριθμος
ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΜΠΥΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
CMA-ES	Covariance Matrix Adapatation Evolutionary Strategy
LCPE	Low-Cost Pre-Evaluation
MAEA	Metamodel Assisted Evolutionary Algorithm
MACMA	Metamodel Assisted CMA
NTUA	National Technical University of Athens
PUMA	Parallel solver for Unstructured grids, for Mult-Blade row computations, including Ajoint
PCOpt/NTUA	Parallel CFD & Optimization Unit/NTUA
RBF	Radial Basis Function
SPEA	Strength Pareto Evolutionary Algorithm
TP	Training Pattern





# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Αλγόριθμοι Βελτιστοποίησης . . . . .	1
1.2 Εξελικτικοί Αλγόριθμοι . . . . .	2
1.3 Μέθοδος Προσαρμογής του Μητρώου Συνδιακύμανσης . . . . .	3
1.4 Δομή της Εργασίας . . . . .	3
<b>2 Μέθοδος Προσαρμογής Μητρώου Συνδιακύμανσης (CMA)</b>	<b>5</b>
2.1 Μαθηματικό υπόβαθρο αλγορίθμου . . . . .	5
2.1.1 Μέση τιμή $\bar{\mathbf{m}}^{(g)}$ . . . . .	6
2.1.2 Κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\bar{\mathbf{m}}, \sigma^2 \mathbf{I})$ . . . . .	8
2.1.3 Πίνακας Συνδιακύμανσης $\mathbf{C}^{(g)}$ . . . . .	13
2.1.4 Δημιουργία πληθυσμού νέας γενιάς . . . . .	15
2.2 Προσθήκη νέων χαρακτηριστικών στον τυπικό CMA . . . . .	16
2.2.1 Επιλογή γονιών μέσω πιθανοτικού διαγωνισμού . . . . .	16
2.2.2 Μετάλλαξη . . . . .	17
2.3 Μεταπρότυπα - MACMA . . . . .	19
2.3.1 Νευρωνικό δίκτυο Radial Basis Function (RBF) . . . . .	20
2.3.2 Χρήση Μεταπροτύπων . . . . .	21
2.4 Προβλήματα βελτιστοποίησης πολλών στόχων . . . . .	22
2.4.1 Μέθοδος Strength Pareto Evolutionary Algorithm . . . . .	23
<b>3 Διερεύνηση επιρροής παραμέτρων χαλάρωσης</b>	<b>25</b>

3.1	Παράμετρος $c_m$ . . . . .	25
3.2	Παράμετροι χαλάρωσης $c_\mu$ και $c_1$ . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Εφαρμογές σε μαθηματικές συναρτήσεις</b>	<b>31</b>
4.1	Προβλήματα ενός στόχου . . . . .	31
4.1.1	Συνάρτηση Σφαίρας . . . . .	31
4.1.2	Συνάρτηση Ackley . . . . .	34
4.1.3	Συνάρτηση Rastrigin . . . . .	35
4.2	Προβλήματα πολλών στόχων . . . . .	38
4.2.1	Πρόβλημα ZDT 1 . . . . .	39
4.2.2	Πρόβλημα ZDT 2 . . . . .	40
4.2.3	Πρόβλημα ZDT 3 . . . . .	41
4.3	Αξιολόγηση απόδοσης μεθόδου CMA . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Βελτιστοποίηση στην Αεροδυναμική</b>	<b>45</b>
5.1	Υπολογιστικό Πλέγμα . . . . .	45
5.2	Παραμετροποίηση αεροτομής . . . . .	47
5.3	Εξισώσεις RANS για συμπιεστό ρευστό . . . . .	47
5.4	Προβλήματα βελτιστοποίησης . . . . .	50
5.4.1	1η Μελέτη: Ελαχιστοποίηση οπισθέλκουσας σε συνθήκες «ευ- θείας πτήσης» . . . . .	51
5.4.2	2η Μελέτη: Μεγιστοποίηση άνωσης σε συνθήκες «απογείωσης»	53
5.4.3	3η Μελέτη: Πρόβλημα βελτιστοποίησης δύο στόχων . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα</b>	<b>59</b>
6.1	Συμπεράσματα . . . . .	59
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>63</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Αλγόριθμοι Βελτιστοποίησης

Βελτιστοποίηση ονομάζεται η διαδικασία κατά την οποία εντοπίζεται η βέλτιστη τιμή ενός ή πολλών στόχων που έχουν οριστεί, μεταβάλλοντας τις μεταβλητές σχεδιασμού του εκάστοτε προβλήματος. Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης εφαρμόζονται σε προβλήματα από διάφορα επιστημονικά πεδία και η χρήση τους οδηγεί στον εντοπισμό ενός χώρου υποψήφιων λύσεων και τελικά στην επιλογή της βέλτιστης εξ αυτών με έξυπνο και γρήγορο τρόπο. Οι υποψήφιες λύσεις στις περισσότερες περιπτώσεις είναι άπειρες και, επομένως, μία μέθοδος βελτιστοποίησης κρίνεται από την αποτελεσματικότητά ως προς την εύρεση της βέλτιστης λύσης αλλά και από την ταχύτητα. Μετά τον εντοπισμό υποψήφιων λύσεων είναι απαραίτητη η αξιολόγησή τους, βάσει των στόχων που έχουν τεθεί πριν την έναρξη της βελτιστοποίησης. Επίσης, στην περίπτωση της βελτιστοποίησης με περιορισμούς, ελέγχεται κατά την αξιολόγηση και η τήρηση των περιορισμών που έχουν επιβληθεί.

Για να επιλυθεί ένα οποιοδήποτε πρόβλημα βελτιστοποίησης, οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται ανήκουν σε δύο βασικές κατηγορίες, τις Αιτιοκρατικές και τις Στοχαστικές. Το βασικό χαρακτηριστικό της πρώτης κατηγορίας είναι ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας της συνάρτησης στόχου. Αυτές χρησιμοποιούνται για να βρεθεί γρήγορα η ελάχιστη ή μέγιστη τιμή της συνάρτησης στόχου, με την εφαρμογή μεθόδων όπως αυτή της απότομης καθόδου. Ο υπολογισμός των παραγώγων μπορεί να γίνει με διάφορες τεχνικές, οι οποίες ενίοτε οδηγούν μία να οδηγήσει σε αποτελέσματα διαφορετικής ακρίβειας επηρεάζοντας ταυτόχρονα και το υπολογιστικό κόστος. Ορισμένες μέθοδοι έχουν υπολογιστικό κόστος ανάλογο του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού και άλλες ανεξάρτητο. Αντιθέτως, οι Στοχαστικές μέθοδοι βελτιστοποίησης χρησιμοποιούν στοιχεία τυχαίας ή οργανωμένα τυχαίας αναζήτησης της βέλτιστης

λύσης. Το μεγαλύτερο πλεονέκτημα αυτών είναι η δυνατότητα να μην εγκλωβίζονται σε τοπικά ακρότατα, σε αντίθεση με τις αιτιοκρατικές μεθόδους, όμως, είναι πολύ πιο αργές. Επίσης, το υπολογιστικό κόστος προσδιορίζεται αποκλειστικά από το λογισμικό αξιολόγησης που χρησιμοποιείται στο εκάστοτε πρόβλημα, καθώς οι υπόλοιποι υπολογισμοί που απαιτούνται από τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης θεωρείται πως έχουν αμελητέο κόστος.

## 1.2 Εξελικτικοί Αλγόριθμοι

Οι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι (ΕΑ) ανήκουν στις στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης. Η οργανωμένη αναζήτηση ολικού ακρότατου που πραγματοποιείται από αυτούς είναι εμπνευσμένη από τους φυσικούς μηχανισμούς εξέλιξης, όπου οφείλεται και η ονομασία της κατηγορίας. Ένα σύνθημα χαρακτηριστικό ενός τέτοιου αλγορίθμου είναι ότι χειρίζονται πληθυσμούς υποψήφιων λύσεων. Συγκεκριμένα, σε έναν  $(\mu, \lambda)$  αλγόριθμο ο πληθυσμός αποτελείται από  $\lambda$  απογόνους ενώ το  $\mu$  αποτελεί το πλήθος των γονιών, με τη βοήθεια των οποίων θα δημιουργηθεί η νέα γενιά. Οι γονείς είναι, συνήθως, οι απόγονοι με τις καλύτερες ιδιότητες και μέσω αυτών εξασφαλίζεται η μεταβίβαση των καλύτερων χαρακτηριστικών στη νέα γενιά. Η διαδικασία μεταχείρισης και δημιουργίας του πληθυσμού ορίζεται ως γενιά της βελτιστοποίησης. Για την εύρεση της καλύτερης δυνατής λύσης δημιουργούνται πολλές διαδοχικές γενιές απογόνων έως ότου ικανοποιηθεί κάποιο κριτήριο τερματισμού. Τα κριτήρια τερματισμού ορίζονται από το χρήστη και μπορεί να σχετίζονται με το μέγιστο αριθμό αξιολογήσεων, το επιτρεπόμενο σφάλμα και πολλά άλλα. Η εύρεση της βέλτιστης λύσης με την χρήση εξελικτικών αλγορίθμων μπορεί να εξασφαλιστεί μόνο μετά από πρακτικά άπειρες αξιολογήσεις. Αυτό δεν καθίσταται πάντοτε εφικτό κυρίως λόγω του υπολογιστικού κόστους που θα απαιτούσε. Εξαιτίας αυτού, η κύρια τάση σήμερα είναι η προσθήκη επιπλέον μηχανισμών σε τέτοιους αλγόριθμους με στόχο τη μείωση των απαραίτητων αξιολογήσεων.

Έχουν αναπτυχθεί τρεις κατηγορίες ΕΑ, οι Γενετικοί Αλγόριθμοι (Genetic Algorithms, ΓΑ), οι Εξελικτικές Στρατηγικές (Evolution Strategies, ΣΕ) και ο Γενετικός Προγραμματισμός (ΓΠ) [1]. Η διάκριση των δύο πρώτων κατηγοριών γίνεται κυρίως βάσει του τρόπου κωδικοποίησης των υποψήφιων λύσεων, αλλά και των τελεστών εξέλιξης που διαθέτουν. Όμως, πλέον ο διαχωρισμός τους δεν είναι σαφής, διότι αυτά τα στοιχεία ενδέχεται να είναι κοινά και στις δύο κατηγορίες. Αντιθέτως, ο ΓΠ χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι ως άτομα του πληθυσμού χρησιμοποιούνται προγράμματα υπολογιστή. Ο στόχος ενός προβλήματος βελτιστοποίησης, για την επίλυση του οποίου θα χρησιμοποιηθεί ένας ΓΠ, είναι η δημιουργία προγραμμάτων που λύνουν ή προσεγγίζουν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα.

## 1.3 Μέθοδος Προσαρμογής του Μητρώου Συνδιακύμανσης

Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης που θα μελετηθεί σε αυτή τη διπλωματική εργασία ονομάζεται Μέθοδος Προσαρμογής του Μητρώου Συνδιακύμανσης (Covariance Matrix Adaptation, CMA) [2],[3],[4],[5] και ανήκει στην κατηγορία Εξελικτικών Αλγορίθμων (EA). Τα στοιχεία που διαθέτει, όπως ο τελεστής διασταύρωσης και η πραγματική κωδικοποίηση, παραπέμπουν σε αλγόριθμο ΣΕ. Επίσης, είναι ένας  $(\mu, \lambda)$  EA, όπου  $\mu$  είναι το πλήθος των γονιών και  $\lambda$  το πλήθος των απογόνων κάθε γενιάς. Το κύριο χαρακτηριστικό του αλγορίθμου είναι η έξυπνη οριοθέτηση περιοχών μέσα στο χώρο εύρεσης λύσεων, όπου κυριαρχούν επιθυμητές ιδιότητες. Το μοντέλο που χρησιμοποιείται για να πραγματοποιηθεί αυτός ο διαχωρισμός, είναι μία πολυδιάστατη κανονική κατανομή. Ο καθορισμός των ιδιοτήτων απαιτεί μόνο δύο χαρακτηριστικά μεγέθη, τη μέση τιμή και τη διακύμανση των δεδομένων που εξετάζονται. Η μέση τιμή αποτελεί το κέντρο γύρω από το οποίο εκτείνεται η κατανομή, καθορίζοντας τις ιδιότητες των δεδομένων που θα προκύψουν, ενώ η διακύμανση καθορίζει το εύρος μέσα στο οποίο μπορούν να προκύψουν νέες λύσεις. Στα κεφάλαια που ακολουθούν θα εξηγηθεί η μέθοδος με την οποία υπολογίζονται αυτά τα δύο μεγέθη, ώστε ο αλγόριθμος CMA να μπορεί να επιλύσει προβλήματα βελτιστοποίησης.

## 1.4 Δομή της Εργασίας

Σε αυτήν την εργασία θα αναπτυχθεί ένας γενικευμένος εξελικτικός αλγόριθμος που έχει τα κύρια χαρακτηριστικά του αλγορίθμου CMA. Στόχος της εργασίας είναι η μελέτη της συμπεριφοράς του κλασικού CMA, που ανήκει ‘παραδοσιακά’ στην κατηγορία των Στρατηγικών Εξέλιξης, σε προβλήματα ενός στόχου ή περισσότερων, η προσθήκη επιπλέον τελεστών εξέλιξης, αλλά και η διερεύνηση της επιρροής που έχουν ορισμένες παράμετροι ελέγχου στην πορεία της εξέλιξης. Συγκεκριμένα, το κάθε κεφάλαιο πραγματεύεται τα εξής:

- Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται το μαθηματικό υπόβαθρο του κλασικού CMA, όπου γίνονται κατανοητές οι διαδικασίες που πραγματοποιούνται για να γίνει η μετάβαση από τη μία γενιά στην επόμενη. Ακολουθεί η επεξήγηση των νέων τελεστών εξέλιξης, οι οποίοι θα προστεθούν στον κλασικό CMA και είναι εμπνευσμένοι από το λογισμικό EASY (Evolutionary Algorithms SYstem)[6], ο οποίος υλοποιεί ένα γενικευμένο εξελικτικό αλγόριθμο. Επιπλέον, αναφέρονται πληροφορίες σχετικά με τους υποβοηθούμενους από μεταπρότυπα εξελικτικούς αλγορίθμους [7] [8] [9], αλλά και για τη μέθοδο Strength Pareto Evolutionary Algorithm II (SPEA II) που ενσωματώνεται για την επίλυση προβλημάτων πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης.

- Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται τρόποι μεταβολής των παραμέτρων χαλάρωσης που χρησιμοποιούνται για τους υπολογισμούς, για ταχύτερη σύγκλιση του αλγορίθμου. Για την επιλογή του σωστού τρόπου μεταβολής αυτών, πραγματοποιήθηκαν μελέτες για δύο ενδεχόμενες συναρτήσεις και αναδεικνύεται η καλύτερη.
- Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την πιστοποίηση του CMA με όλα τα νέα χαρακτηριστικά του, σε προβλήματα βελτιστοποίησης με μαθηματικές συναρτήσεις στόχου. Αυτά χωρίζονται σε προβλήματα ενός στόχου, όπου πραγματοποιείται και σύγκριση με άλλον ΕΑ, και προβλήματα περισσότερων στόχων.
- Στο κεφάλαιο 5 γίνεται χρήση του αλγορίθμου για προβλήματα βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική. Συγκεκριμένα, επιλέχθηκε να βελτιστοποιηθεί η μορφή αεροτομής θέτοντας διαφορετικούς στόχους, σε προβλήματα ενός και δύο στόχων.
- Στο κεφάλαιο 6 γίνεται ανακεφαλαίωση της εργασίας και παρατίθενται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την πιστοποίηση του νέου αλγορίθμου.

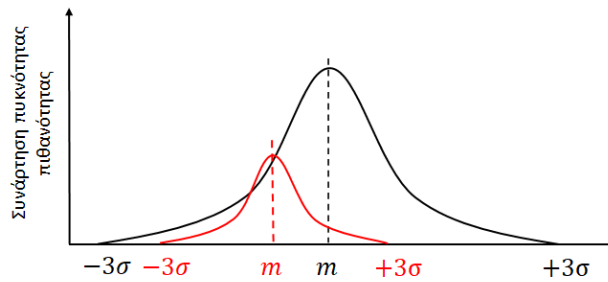
## Κεφάλαιο 2

# Μέθοδος Προσαρμογής Μητρώου Συνδιακύμανσης (CMA)

### 2.1 Μαθηματικό υπόβαθρο αλγορίθμου

Η λειτουργία και η απόδοση του αλγορίθμου CMA εξαρτάται από τον τρόπο υπολογισμού των κύριων χαρακτηριστικών μιας κανονικής κατανομής. Σύμφωνα με αυτήν, ορίζονται σε κάθε γενιά περιοχές στο χώρο ανίχνευσης λύσεων, που οριοθετούνται από την ‘καμπάνα’ της κανονικής κατανομής. Ένα τέτοιο παράδειγμα παρουσιάζεται στο σχήμα 2.1, όπου φαίνεται η ‘καμπάνα’ μιας μονοδιάστατης κανονικής κατανομής. Σε αυτήν την περίπτωση, οι απόγονοι στην αρχική γενιά θα βρίσκονται μέσα στο χώρο που περικλύεται από τη μαύρη καμπύλη και τα χαρακτηριστικά τους θα σχετίζονται με τη μέση τιμή και τη διακύμανση που ορίζουν αυτήν την κατανομή. Αν υποθεθεί ότι στην επόμενη γενιά η μέση τιμή και η διακύμανση έχουν μεταβληθεί όπως φαίνεται από την κόκκινη καμπύλη, τότε οι νέοι απόγονοι θα βρίσκονται στο χώρο που περικλύει αυτή η καμπύλη. Κατά τη βελτιστοποίηση, η καμπύλη που οριοθετεί το χώρο ανίχνευσης λύσεων σε κάθε γενιά θα μετατοπίζεται και θα προσαρμόζεται κατάλληλα μέχρι να φτάσει στο σημείο που βρίσκεται η βέλτιστη λύση.

Στο παράδειγμα αυτό, η κατανομή είναι μονοδιάστατη αλλά αυτή μπορεί να γενικευτεί σε μία πολυδιάστατη κανονική κατανομή. Η διάσταση της ορίζεται ίση με  $N$ , δηλαδή ίση με το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού. Έτσι, προκύπτει ότι η μέση τιμή  $\vec{\mu}$  θα είναι διάνυσμα διάστασης  $N$  και η τυπική απόκλιση θα είναι ο πίνακας συνδιακύμανσης  $\mathbf{C}$  διάστασης  $(N \times N)$ . Η κανονική κατανομή στη συνέχεια θα συμβολίζεται ως  $\mathcal{N}(\vec{\mu}, \mathbf{C})$  και οι απόγονοι κάθε γενιάς συμβολίζονται ως  $\vec{x}$ .



Σχήμα 2.1: Παράδειγμα ‘καμπάνας’ μονοδιάστατης κανονικής κατανομής

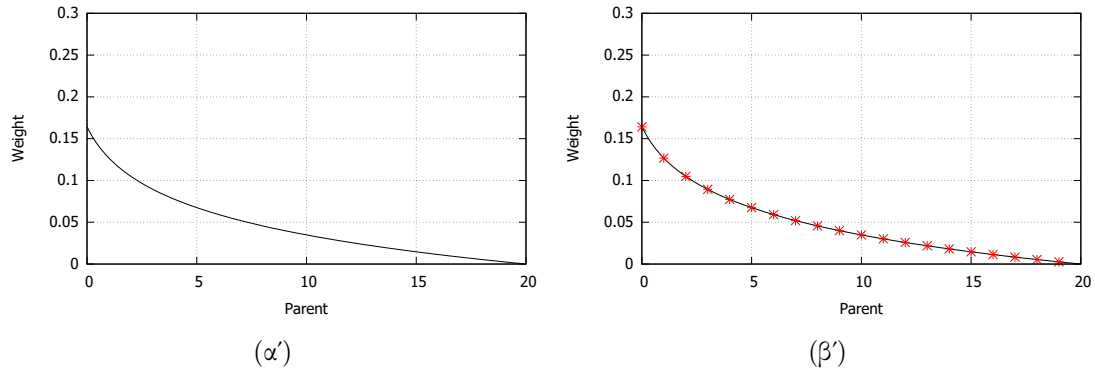
### 2.1.1 Μέση τιμή $\vec{m}^{(g)}$

Η μέση τιμή αποτελεί το κέντρο της κανονικής κατανομής και μπορεί να καθορίσει σε μεγάλο βαθμό τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού που θα προκύψει από αυτήν με τυχαία επιλογή, εφόσον γύρω και κοντά σε αυτήν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας λαμβάνει μεγάλες τιμές. Το γεγονός αυτό δημιουργεί την ανάγκη να περιληφθούν σε αυτήν οι καλύτερες ιδιότητες των μεταβλητών σχεδιασμού, που είναι γνωστές σε εκείνο το σημείο της βελτιστοποίησης. Εύκολα προκύπτει το συμπέρασμα πως η μέση τιμή πρέπει να υπολογιστεί ως το διάνυσμα με στοιχεία το μέσο όρο των μεταβλητών σχεδιασμού των καλύτερων απογόνων. Ως καλύτεροι απόγονοι νοούνται αυτοί που έχουν την καλύτερη τιμή συνάρτησης στόχου, ανάλογα με το στόχο που έχει τεθεί. Το πλήθος των καλύτερων απογόνων, που θα συμμετέχει τελικά στον υπολογισμό της μέσης τιμής, ορίζεται ίσο με  $\mu$  και επομένως, αυτοί θα αποτελούν τους γονείς της νέας γενιάς. Αφού οι επιλεγμένοι γονείς ταξινομηθούν σύμφωνα με την τιμή της συνάρτησης στόχου, από τον καλύτερο προς τον χειρότερο, η μέση τιμή για την κατανομή της νέας γενιάς μπορεί να υπολογιστεί σύμφωνα με την εξίσωση

$$\vec{m}^{(g)} = \frac{\sum_{i=0}^{(\mu-1)} \vec{x}_i}{\mu} \quad (2.1)$$

Με αυτήν την προσέγγιση διασφαλίζεται η μεταβίβαση των καλύτερων ιδιοτήτων στην επόμενη γενιά και κατά συνέπεια, αυξάνεται η πιθανότητα εύρεσης καλύτερης λύσης σε αυτήν. Παρόλο που οι  $\mu$  γονείς της νέας γενιάς αποτελούν τους καλύτερους απογόνους της τρέχουσας γενιάς, δεν έχουν όλοι αντίστοιχα καλές ιδιότητες. Για να διατηρηθεί όσο το δυνατόν μεγαλύτερο μέρος των καλύτερων ιδιοτήτων στην κατανομή για τη νέα γενιά, εισάγεται στους υπολογισμούς ένα διάνυσμα  $\vec{w}$ , με βάρη για κάθε γονέα. Το κάθε βάρος αποτελεί το ποσοστό με το οποίο θα συμμετέχει κάθε γονέας στον υπολογισμό της μέσης τιμής και μπορεί να είναι ίδιο για όλους ή μειούμενο ανάλογα με





**Σχήμα 2.2:** (α) Γραφική παράσταση εξίσωσης 2.3 στο διάστημα  $(0,20]$  (β) Τιμές βαρών για 20 γονείς

τη θέση του στην κατάταξη. Με την προσθήκη των βαρών προκύπτει η εξίσωση

$$\vec{m}^{(g)} = \sum_{i=0}^{(\mu-1)} w_i \vec{x}_i \quad (2.2)$$

Γίνεται φανερό πως πρέπει να επιλεγθεί μια συνάρτηση για τον υπολογισμό των βαρών με συγκεκριμένες ιδιότητες. Αρχικά, αυτή πρέπει να είναι φθίνουσα ως προς τη θέση του γονιού στην κατάταξη στο πεδίο ορισμού που θα χρησιμοποιηθεί, όπως έχει ήδη αναφερθεί. Μία σχέση που τηρεί αυτό το κριτήριο είναι η εξίσωση

$$w_i = \ln(\mu + 1) - \ln(i + 1) \quad (2.3)$$

Η μεταβλητή  $i$  είναι ο μετρητής των γονιών και η μέγιστη τιμή του είναι  $(\mu - 1)$ . Αυτό συμβαίνει, διότι η εξίσωση υπολογισμού των βαρών πρέπει να ορίζεται στο μηδέν, για προγραμματιστικούς λόγους. Στο σχήμα 2.2(α) απεικονίζεται η γραφική παράσταση της εξίσωσης 2.3 στο διάστημα  $(0,20]$ . Πράγματι, η συνάρτηση είναι φθίνουσα σε αυτό το διάστημα αλλά οι τιμές των βαρών είναι μεγαλύτερες της μονάδας. Για να αποφευχθεί αυτό, υπολογίζεται το άθροισμα όλων των βαρών που προκύπτουν βάσει της εξίσωσης 2.3 και, στη συνέχεια, αυτό χρησιμοποιείται ως διαιρέτης για κάθε βάρος. Με αυτόν τον τρόπο, εξασφαλίζεται πως όλα τα βάρη θα βρίσκονται στο διάστημα  $(0,1)$  οπότε και προκύπτει η εξίσωση

$$w_i = \frac{\ln(\mu + 1) - \ln(i + 1)}{\sum_{i=0}^{(\mu-1)} (\ln(\mu + 1) - \ln(i + 1))} \quad (2.4)$$

Ένα παράδειγμα υπολογισμού βαρών βάσει της 2.4 παρουσιάζεται στο σχήμα 2.2(β). Η εξίσωση υπολογισμού των βαρών είναι ενδεικτική, καθώς μπορεί να τροποποιηθεί

όπως θεωρείται αποδοτικότερο από το χρήστη. Η μόνη προϋπόθεση που πρέπει να πληρείται σε κάθε περίπτωση είναι το άθροισμα τους να είναι ίσο με τη μονάδα. Αυτή η προϋπόθεση, σε συνδυασμό με τη χρήση ίσων βαρών για όλους τους γονείς, διασφαλίζει τη δυνατότητα υπολογισμού της μέσης τιμής ως την πραγματική μέση τιμή των μεταβλητών σχεδιασμού των καλύτερων απογόνων.

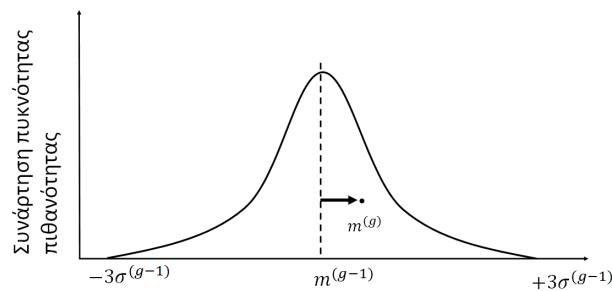
Η μέθοδος υπολογισμού της μέσης τιμής που παρουσιάστηκε παραπάνω, εξασφαλίζει καλή πορεία σύγκλισης για προβλήματα που έχουν πάνω από ένα τοπικό ακρότατο. Όμως, υπάρχει ακόμα πιθανότητα εγκλωβισμού σε κάποιο από αυτά, διότι όταν ο αλγόριθμος εγκλωβιστεί σε τοπικό ακρότατο προκύπτουν σε κάθε γενιά αρκετοί απόγονοι με πολύ καλές ιδιότητες, γεγονός το οποίο οδηγεί στη μείωση του εύρους της καμπάνας περιορίζοντας, έτσι, την εύρεση διαφορετικών λύσεων. Το μειονέκτημα αυτό μπορεί να παρακαμφθεί εισάγοντας μια μέθοδο χαλάρωσης. Η παράμετρος ελέγχου της χαλάρωσης συμβολίζεται ως  $c_m$  και παίρνει τιμές στο διάστημα  $(0,1)$ . Εφαρμόζοντας τη χαλάρωση στον υπολογισμό της μέσης τιμής προκύπτει η εξίσωση

$$\vec{m}^{(g)} = \vec{m}^{(g-1)} + c_m \sum_{i=0}^{(\mu-1)} w_i (\vec{x}_i - \vec{m}^{(g-1)}) \quad (2.5)$$

Για την επιλογή της κατάλληλης τιμής της παραμέτρου  $c_m$ , πραγματοποιήθηκε διερεύνηση της επίδρασής της, η οποία θα παρουσιαστεί σε επόμενο κεφάλαιο.

### 2.1.2 Κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\vec{m}, \sigma^2 \mathbf{I})$

Για να εξασφαλιστεί ο πλήρης έλεγχος των χαρακτηριστικών των νέων απογόνων, θεωρείται ότι αυτοί θα υπακούουν την N-διάστατη κανονική κατανομή  $\mathcal{N}(m^{(g)}, \sigma^{(g)2} \mathbf{C})$ .



**Σχήμα 2.3:** Κανονική κατανομή που ακολουθεί η μέση τιμή  $m^{(g)}$  (περίπτωση  $n = 1$ )

Για να υπολογιστεί η διακύμανση αυτής της κατανομής, ορίζεται ένα νέο μοντέλο ελέγχου για την μεταβολή της μέσης τιμής από γενιά σε γενιά. Το μοντέλο αυτό είναι

η κανονική κατανομή  $\mathcal{N}(m^{(g-1)}, \sigma^{(g-1)^2} \mathbf{I})$ . Η διακύμανση είναι ίδια για όλα τα στοιχεία και δεν υπάρχει βαθμός συσχέτισης, για αυτό και είναι πραγματικός αριθμός. Με στόχο την ποσοτικοποίηση της μεταβολής της μέσης τιμής, ορίζεται ένα νέο μέγεθος, το Μονοπάτι Εξέλιξης (Evolution Path)  $\vec{p}_\sigma$ . Αυτό είναι ένα διάνυσμα διάστασης  $n$ , στο οποίο αποθηκεύονται πληροφορίες για τη μεταβολή της μέσης τιμής σε κάθε γενιά. Μία πρώτη σχέση για τον υπολογισμό του διανύσματος  $\vec{p}_\sigma$  είναι η

$$\vec{p}_\sigma^{(g)} = \frac{\vec{m}^{(g)} - \vec{m}^{(g-1)}}{\sigma^{(g-1)}} \quad (2.6)$$

Σύμφωνα με αυτή, σε κάθε γενιά αποθηκεύεται η μεταβολή της μέσης τιμής στο διάνυσμα  $\vec{p}_\sigma$ , αφού πρώτα γίνει κανονικοποίηση της ώστε το  $\vec{p}_\sigma$  να ανήκει στην κανονική κατανομή  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Εφόσον ο στόχος αυτού του μεγέθους είναι η συλλογή πληροφοριών για όλη την πορεία της εξέλιξης, κρίνεται απαραίτητη η διατήρηση πληροφοριών από τις προηγούμενες γενιές. Όμως, με το πέρασμα των γενιών αλλάζουν σημαντικά τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού, με αποτέλεσμα να πρέπει οι πληροφορίες προηγούμενων γενιών να χάνουν τη βαρύτητα που έχουν στους υπολογισμούς. Αυτό επιτυγχάνεται με μία μέθοδο χαλάρωσης, για την εφαρμογή της οποίας ορίζεται η παράμετρος χαλάρωσης  $c_\sigma$ . Η νέα εξίσωση υπολογισμού του  $\vec{p}_\sigma$  είναι η

$$\vec{p}_\sigma^{(g)} = (1 - c_\sigma) \vec{p}_\sigma^{(g-1)} + \frac{\vec{m}^{(g)} - \vec{m}^{(g-1)}}{\sigma^{(g-1)}} \quad (2.7)$$

Για την επιλογή της τιμής της παραμέτρου  $c_\sigma$  πρέπει αρχικά να γίνει καλύτερα κατανοητός ο ρόλος της. Όπως αναφέρθηκε, αυτή καθορίζει τον χρόνο ζωής των πληροφοριών που αποθηκεύονται στο διάνυσμα  $\vec{p}_\sigma$  από κάθε προηγούμενη γενιά. Ας υποθεθεί ότι επιλύεται ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης και έχουν ολοκληρωθεί 2 γενιές. Έχοντας αρχικοποιήσει το Μονοπάτι Εξέλιξης  $\vec{p}_\sigma$  με το μηδενικό διάνυσμα και συμβολίζοντας τον όρο  $\frac{\vec{m}^{(g)} - \vec{m}^{(g-1)}}{\sigma^{(g-1)}}$  ως  $\vec{z}^{(g)}$ , στην 3η γενιά θα περιέχονται οι εξής πληροφορίες

$$\vec{p}_\sigma^{(3)} = (1 - c_\sigma)^2 \vec{z}^{(1)} + (1 - c_\sigma) \vec{z}^{(2)} + \vec{z}^{(3)} \quad (2.8)$$

Γίνεται εύκολα κατανοητό από την παραπάνω σχέση, ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός γενιών τόσο μικραίνουν οι συντελεστές με τους οποίους πολλαπλασιάζονται τα παλαιότερα διανύσματα  $\vec{z}$ . Συγκεκριμένα, αν υποθεθεί ότι η παράμετρος χαλάρωσης είναι ίση με 0.4 και έχουν ολοκληρωθεί 10 γενιές, στην 11η γενιά ο συντελεστής με τον οποίο πολλαπλασιάζεται το διάνυσμα  $\vec{z}^{(1)}$  θα είναι ίσος με 0.08 ενώ ο αντίστοιχος συντελεστής του διανύσματος  $\vec{z}^{(11)}$  θα είναι ίσος με 0.8. Εφόσον η διαφορά των δύο συντελεστών είναι μία τάξη μεγέθους, οι πληροφορίες από την 1η γενιά δεν θα έχουν πλέον ιδιαίτερη επιρροή στα νέα διανύσματα  $\vec{p}_\sigma$ . Με βάση τη λειτουργία της παραμέτρου  $c_\sigma$ , μπορεί να καθορισθεί η τιμή της λαμβάνοντας υπόψη πως ο μέγιστος χρόνος ζωής των πληροφοριών κάθε γενιάς πρέπει να είναι ανάλογος του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού.

Αυτό συμβαίνει διότι στα προβλήματα βελτιστοποίησης με μικρό αριθμό μεταβλητών είναι εφικτό να βρεθεί το ολικό ακρότατο σε μικρό αριθμό γενιών, και άρα είναι απαραίτητη η σύντομη ανανέωση των πληροφοριών που αποθηκεύονται. Αντίστοιχα, στην περίπτωση μεγάλου αριθμού μεταβλητών η σύγκλιση είναι πιο αργή και οι συνολικότερες μεταβολές μικρότερες, δημιουργώντας την απαίτηση να είναι μεγαλύτερη η διάρκεια ζωής παλαιότερων πληροφοριών. Σύμφωνα με την [10], ύστερα από διερεύνηση προέκυψε ότι η παράμετρος  $c_\sigma$  πρέπει να βρίσκεται στο διάστημα  $\left[\frac{1}{N}, \sqrt{\frac{2}{N}}\right]$ , ώστε να μην διαταράσσεται η πορεία της εξέλιξης. Για τον λόγο αυτό, επιλέχθηκε η παράμετρος  $c_\sigma$  να είναι ίση με  $\sqrt{\frac{2}{N}}$  για  $N \leq 5$  και ίση με  $\frac{1}{N}$  για  $N > 5$ . Τέλος, για να εξασφαλιστεί ότι τα διανύσματα  $\vec{p}_\sigma^{(g)}$  και  $\vec{p}_\sigma^{(g-1)}$  ανήκουν σε κατανομές με ίδια διακύμανση και επομένως είναι συγκρίσιμα, εισάγεται ο παράγοντας κανονικοποίησης  $\sqrt{c_\sigma(2 - c_\sigma)}$ . Όμως, λαμβάνοντας υπόψη τη χρήση βαρών στον υπολογισμό της μέσης τιμής, προκύπτει το συμπέρασμα πως χάνεται μέρος της πληροφορίας σχετικά με τη διακύμανση του δείγματος. Επομένως, κρίνεται απαραίτητη η χρήση ενός μεγέθους που θα διατηρήσει αυτές τις πληροφορίες. Για αυτό ορίζεται το  $\mu_{eff}$  για να εκπληρώσει αυτή τη λειτουργία. Ο υπολογισμός του γίνεται σύμφωνα με τη σχέση

$$\mu_{eff} = \frac{(\sum_{i=0}^{(\mu-1)} |w_i|)^2}{\sum_{i=0}^{(\mu-1)} w_i^2} \quad (2.9)$$

Εφόσον όλα τα βάρη είναι θετικά και το άθροισμα τους ισούται με τη μονάδα ισχύει

$$\sum_{i=0}^{(\mu-1)} |w_i| = 1 \quad (2.10)$$

$$\mu_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{(\mu-1)} w_i^2} \quad (2.11)$$

Η προσθήκη αυτών των μεγεθών στον υπολογισμό του διανύσματος  $\vec{p}_\sigma$  οδηγεί στην εξίσωση

$$\vec{p}_\sigma^{(g)} = (1 - c_\sigma)\vec{p}_\sigma^{(g-1)} + \sqrt{c_\sigma(2 - c_\sigma)\mu_{eff}} \frac{\vec{m}^{(g)} - \vec{m}^{(g-1)}}{\sigma^{(g-1)}} \quad (2.12)$$

Το μόνο παραμένον πρόβλημα είναι πως οι κανονικές κατανομές που δημιουργούνται έχουν διαφορετικές κατευθύνσεις σε κάθε γενιά, καθιστώντας δύσκολη την άθροιση των νέων διανυσμάτων  $\vec{p}_\sigma$ . Είναι γνωστό πως κάθε κανονική κατανομή συμβολίζεται ως  $\mathcal{N}(\vec{m}, \mathbf{C})$ , όπου  $\vec{m}$  η μέση τιμή και  $\mathbf{C}$  ο πίνακας συνδιακύμανσης. Στην πραγματικότητα, όμως, κάθε κατανομή είναι βασισμένη στην κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και πίνακα συνδιακύμανσης ίσο με το μοναδιαίο πίνακα και, επομένως, μπορεί να

εκφραστεί μέσω αυτής. Το πρώτο βήμα για να προκύψει αυτή η έκφραση, είναι να γίνει παραγοντοποίηση του πίνακα συνδιακύμανσης της μορφής

$$\mathbf{C} = \mathbf{BDB}^T \quad (2.13)$$

Ο πίνακας  $\mathbf{B}$  περιέχει τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα συνδιακύμανσης ως στήλες και ο πίνακας  $\mathbf{D}$  είναι ένας διαγώνιος πίνακας που η κύρια διαγώνιος αποτελείται από τις ιδιοτιμές του. Με τη βοήθεια των πινάκων  $\mathbf{B}$  και  $\mathbf{D}$ , η κατανομή  $\mathcal{N}(\vec{m}, \mathbf{C})$  προκύπτει από την  $\mathcal{N}(0, I)$  αν η τελευταία στραφεί στο σύστημα αξόνων που ορίζουν οι κύριοι άξονες της  $\mathcal{N}(\vec{m}, \mathbf{C})$  μέσω του  $\mathbf{B}$  και, στη συνέχεια, προσαρμοστεί κατάλληλα στην κλίμακα της, με τις τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του πίνακα συνδιακύμανσης. Για το λόγο αυτό, ο πίνακας  $\mathbf{D}$  ορίζεται έτσι ώστε να περιέχει τις τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών και ο παραπάνω μετασχηματισμός συνοψίζεται στη

$$\mathcal{N}(\vec{m}, \mathbf{C}) \sim \vec{m} + \mathbf{BD}\mathcal{N}(0, I) \quad (2.14)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, είναι εφικτό να μετασχηματιστεί με κατάλληλο τρόπο η μέση τιμή, έτσι ώστε να εμπεριέχεται σε αυτήν η κατεύθυνση της κατανομής, με αποτέλεσμα μία ισοδύναμη κατανομή της  $\mathcal{N}(\vec{m}, \mathbf{C})$  να είναι η εξής

$$\mathcal{N}(\vec{m}, \mathbf{C}) \sim \vec{m}' + \mathcal{N}(0, I) \quad (2.15)$$

Η σχέση της  $\vec{m}'$  με την κανονική μέση τιμή προκύπτει ως εξής

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\vec{m}, \mathbf{C}) &\sim \vec{m} + \mathbf{BD}\mathcal{N}(0, I) \\ \mathcal{N}(\vec{m}, \mathbf{C}) &\sim \mathbf{B}^{-1}\vec{m} + \mathbf{D}\mathcal{N}(0, I) \\ \mathcal{N}(\vec{m}, \mathbf{C}) &\sim \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\vec{m} + \mathcal{N}(0, I) \end{aligned}$$

Εφόσον ο πίνακας  $\mathbf{B}$  είναι ορθογώνιος, ο αντίστροφος του ταυτίζεται με τον ανάστροφο, άρα η τελική σχέση που δίνει τη μετασχηματισμένη μέση τιμή  $\vec{m}'$  είναι η

$$\vec{m}' = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}^T\vec{m} \quad (2.17)$$

Τέλος, είναι απαραίτητη η χρήση του μητρώου στροφής  $\mathbf{B}$  στη μετασχηματισμένη μέση τιμή, ώστε οι κύριοι άξονες της κατανομής να μην στραφούν τελικά από το συνολικό

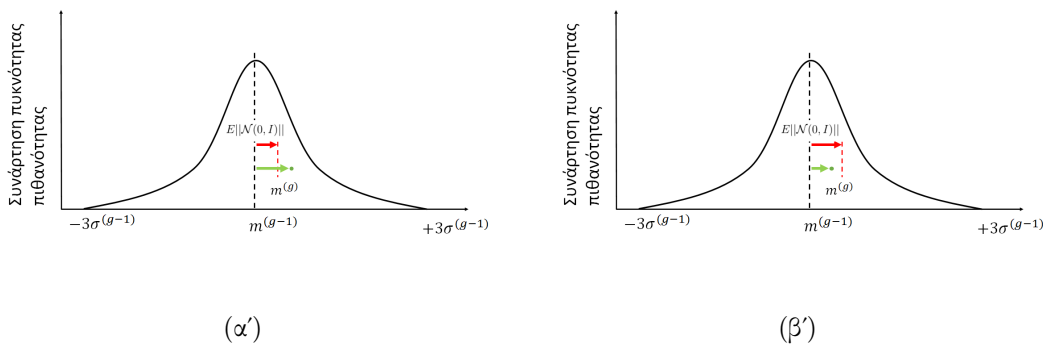
μετασχηματισμό. Έτσι, προκύπτει η τελική εξίσωση υπολογισμού του  $\vec{p}_\sigma$

$$\vec{p}_\sigma^{(g)} = (1 - c_\sigma)\vec{p}_\sigma^{(g-1)} + \sqrt{c_\sigma(2 - c_\sigma)}\mu_{eff}\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{B}^T \frac{\vec{m}^{(g)} - \vec{m}^{(g-1)}}{\sigma^{(g-1)}} \quad (2.18)$$

Ο τρόπος ορισμού του  $\vec{p}_\sigma$  δημιουργεί τη δυνατότητα ποσοτικοποίησης της μεταβολής της μέσης τιμής σε κάθε γενιά. Σύμφωνα με αυτή, μπορεί να προκύψει ένα συμπέρασμα για τον τρόπο μεταβολής της τυπικής απόκλισης  $\sigma$ , έτσι ώστε το εύρος της νέας κατανομής να εξασφαλίζει την εύρεση καλύτερης λύσης. Το μέτρο της απόστασης της νέας μέσης από την προηγούμενη υπολογίζεται μέσω του μέτρου του διανύσματος  $\vec{p}_\sigma$ . Όπως έχει αναφερθεί, το  $\vec{p}_\sigma$  ανήκει στην κατανομή  $\mathcal{N}(0, I)$ . Για κάθε τυχαίο διάνυσμα που ανήκει σε αυτήν, μπορεί να γίνει εκτίμηση του μέτρου του σύμφωνα με ένα μέσο αναμενόμενο μέτρο διανύσματος της κατανομής  $\mathcal{N}(0, I)$ , που δίνεται από τη σχέση

$$E\|\mathcal{N}(0, I)\| = \sqrt{2} \frac{\Gamma(\frac{N+1}{2})}{\Gamma(\frac{N}{2})} \simeq \sqrt{N} \quad (2.19)$$

Η εκτίμηση του μέτρου του  $\vec{p}_\sigma$  είναι χρήσιμο μέγεθος, καθώς συμβολίζει κατά μία έννοια τη μέγιστη αποδεκτή μεταβολή οποιουδήποτε στοιχείου της μέσης τιμής για σταθερή τυπική απόκλιση  $\sigma$ . Έτσι, γίνεται κατανοητό πως πρέπει να γίνει σύγκριση του πραγματικού και του εκτιμώμενου μεγέθους, ώστε να προκύψει συμπέρασμα για τη μεταβολή της τυπικής απόκλισης. Στην περίπτωση που το πραγματικό μέτρο του  $\vec{p}_\sigma$  είναι μεγαλύτερο από το εκτιμώμενο, σχήμα 2.4(α), η νέα μέση τιμή βρίσκεται σε μεγαλύτερη απόσταση από το κέντρο της κατανομής που ανήκει, σε σχέση με το μέσο όρο.



**Σχήμα 2.4:** Εκτιμώμενη και πραγματική απόσταση  $m_i^g$  από το κέντρο της κατανομής (περίπτωση  $N = 1$ )

Σε αυτήν την περίπτωση, θεωρείται πως η μεταβολή της μέσης τιμής σε μία γενιά είναι μεγάλη. Το γεγονός αυτό μπορεί να οδηγήσει σε απαραίτητες μεγάλες μεταβολές στις επόμενες γενιές, με στόχο την εξασφάλιση καλύτερης λύσης. Για να μην υπάρξει

κίνδυνος περιορισμού αυτής της μεταβολής, επιλέγεται να αυξηθεί η τυπική απόκλιση. Σε αντίθετη περίπτωση, όπου το πραγματικό μέτρο του  $\vec{p}_\sigma$  είναι μικρότερο από το εκτιμώμενο, σχήμα 2.4 (β), επιλέγεται να μειωθεί το εύρος της κατανομής. Η τελευταία περίπτωση που λαμβάνεται υπόψη, είναι η περίπτωση ισότητας των δύο μέτρων. Σε αυτήν θεωρείται ότι δεν θα υπάρξει περιορισμός στο μέγεθος των μεταβολών λόγω του εύρους της κατανομής. Έτσι, η τυπική απόκλιση  $\sigma$  πρέπει να παραμείνει σταθερή. Οι παραπάνω περιπτώσεις συνοψίζονται στην εξίσωση

$$\ln \sigma^{(g)} = \ln \sigma^{(g-1)} + \frac{c_\sigma}{d_\sigma} \left( \frac{\|p_\sigma^{(g+1)}\|}{E\|\mathcal{N}(0, I)\|} - 1 \right) \quad (2.20)$$

Στην παραπάνω εξίσωση υπάρχει μία νέα παράμετρος ελέγχου, η  $d_\sigma$ . Αυτή εξυπηρετεί στην προσαρμογή της μεταβολής του Μονοπατιού Εξέλιξης  $\vec{p}_\sigma$  σε μεταβολή του μεγέθους  $\sigma$ . Η τιμή της, στο πλήθος των περιπτώσεων, είναι κοντά στη μονάδα.

### 2.1.3 Πίνακας Συνδιακύμανσης $\mathbf{C}^{(g)}$

Ο πίνακας συνδιακύμανσης  $\mathbf{C}$  περιλαμβάνει πληροφορίες για τη σχέση μεταξύ όλων των μεταβλητών σχεδιασμού και αποτελεί μέτρο της διακύμανσης σε μία πολυδιάστατη κανονική κατανομή. Το πρώτο βήμα για τον υπολογισμό του είναι η κανονικοποίηση των απόγονων, ώστε να ανήκουν στην κατανομή  $\mathcal{N}(\vec{0}, I)$

$$\vec{y}_i = \frac{\vec{x}_i - \vec{m}^{(g)}}{\sigma^{(g)}} \quad (2.21)$$

Να σημειωθεί ότι ο δείκτης  $i$  συμβολίζει τους ταξινομημένους απογόνους από τον καλύτερο ( $i = 0$ ) προς τον χειρότερο ( $i = \lambda - 1$ ). Ο καλύτερος απόγονος συμβολίζεται με  $i = 0$  για να υπάρχει συμβατότητα με τις προηγούμενες σχέσεις. Έστερα, μπορεί να υπολογιστεί ο πίνακας συνδιακύμανσης από τη σχέση

$$\mathbf{C}^{(g)} = \sum_{i=0}^{(\mu-1)} \vec{y}_i \vec{y}_i^T \quad (2.22)$$

Όπως και στην περίπτωση της μέσης τιμής, οι  $\mu$  κανονικοποιημένοι γονείς μπορούν να πολλαπλασιαστούν με το αντίστοιχο βάρους

$$\mathbf{C}^{(g)} = \sum_{i=0}^{(\mu-1)} w_i \vec{y}_i \vec{y}_i^T \quad (2.23)$$

Επίσης, κρίνεται απαραίτητο να διατηρηθούν στοιχεία από τις προηγούμενες γενιές στο

νέο πίνακα συνδιακύμανσης. Όπως και στην περίπτωση του διανύσματος  $\vec{p}_\sigma$ , πρέπει να εξασφαλιστεί μεγάλη βαρύτητα για τις πληροφορίες της νέας γενιάς και μειούμενη για τις προηγούμενες. Επομένως, πραγματοποιείται χαλάρωση με παράμετρο χαλάρωσης το  $c_\mu$ . Με την προσθήκη αυτή προκύπτει η σχέση

$$\mathbf{C}^{(g)} = (1 - c_\mu)\mathbf{C}^{(g-1)} + c_\mu \sum_{i=0}^{(\mu-1)} w_i \vec{y}_i \vec{y}_i^T \quad (2.24)$$

Αυτή η προσέγγιση αποτελεί έναν αξιόπιστο τρόπο υπολογισμού του πίνακα συνδιακύμανσης αλλά μπορεί να οδηγήσει σε αργή σύγκλιση του αλγορίθμου. Αυτό οφείλεται στην έλλειψη πληροφοριών για το είδος της μεταβολής των μεταβλητών σχεδιασμού, λόγω της απώλειας του πρόσημου των κανονικοποιημένων μεταβλητών μέσω του όρου  $\vec{y}_i \vec{y}_i^T$ . Για την αποφυγή του προβλήματος, ορίζεται ένα δεύτερο Μονοπάτι Εξέλιξης (Evolution Path), το  $\vec{p}_c$ . Αντίστοιχα με το  $\vec{p}_\sigma$ , είναι ένα διάνυσμα διάστασης  $N$  στο οποίο αποθηκεύεται η μεταβολή της μέσης τιμής από γενιά σε γενιά, σύμφωνα με τη σχέση

$$\vec{p}_c^{(g)} = \vec{p}_c^{(g-1)} + \frac{\vec{m}^{(g)} - \vec{m}^{(g-1)}}{\sigma^{(g)}} \quad (2.25)$$

Όπως και στην περίπτωση του  $\vec{p}_\sigma$ , εφαρμόζεται χαλάρωση σύμφωνα με την παράμετρο  $c_c$  ενώ εισάγεται ταυτόχρονα και ο παράγοντας  $\sqrt{c_c(2 - c_c)\mu_{eff}}$  για τους λόγους που αναφέρθηκαν, και προκύπτει η σχέση

$$\vec{p}_c^{(g)} = (1 - c_c)\vec{p}_c^{(g-1)} + \sqrt{c_c(2 - c_c)\mu_{eff}} \frac{\vec{m}^{(g)} - \vec{m}^{(g-1)}}{\sigma^{(g)}} \quad (2.26)$$

Η τιμή της παραμέτρου  $c_c$  επιλέγεται μικρότερη ή ίση της παραμέτρου  $c_\sigma$ , καθώς έχουν την ίδια λειτουργία. Εισάγοντας το διάνυσμα  $\vec{p}_c$  στον υπολογισμό του πίνακα συνδιακύμανσης προκύπτει η σχέση

$$\mathbf{C}^{(g)} = (1 - c_\mu)\mathbf{C}^{(g-1)} + c_1 \vec{p}_c^{(g)} \vec{p}_c^{(g)T} + c_\mu \sum_{i=0}^{(\mu-1)} w_i \vec{y}_i \vec{y}_i^T \quad (2.27)$$

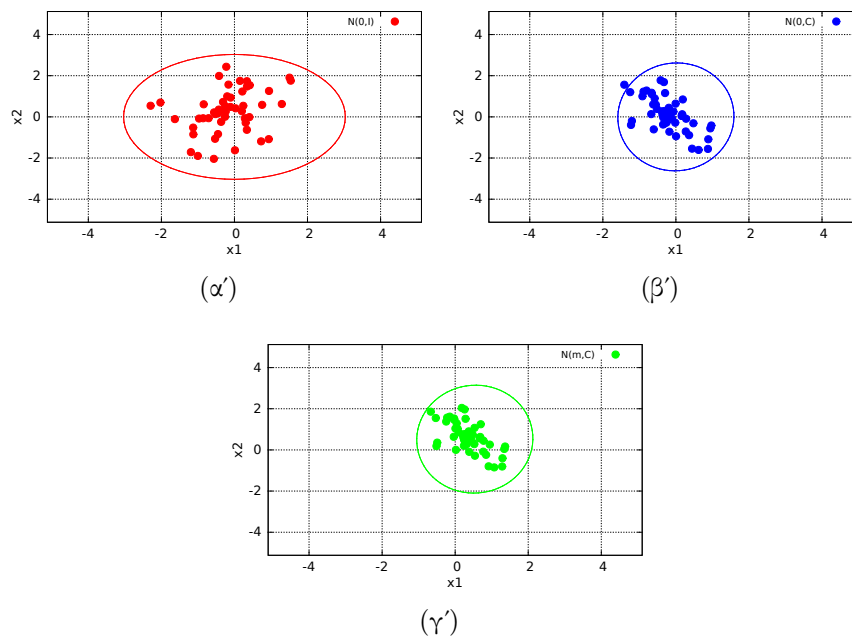
Στην εξίσωση (2.27) χρησιμοποιούνται δύο νέες παράμετροι χαλάρωσης, η  $c_\mu$  και η  $c_1$ . Η παράμετρος  $c_\mu$  καθορίζει το ρυθμό εκμάθησης για τη δημιουργία του πίνακα συνδιακύμανσης, καθώς δεν είναι εφικτό να κατασκευαστεί μόνο σε μία γενιά και να περιέχει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες. Όμως, όσο πλησιάζει στη εύρεση της λύσης θα πρέπει ο ρυθμός αυτός να αυξηθεί, ώστε οι μεταβολές να είναι μεγαλύτερες. Όπως και στην περίπτωση των παραμέτρων  $c_\sigma$  και



### 2.1.4 Δημιουργία πληθυσμού νέας γενιάς

Γνωρίζοντας την νέα μέση τιμή, τον πίνακα συνδιακύμανσης και τη διακύμανση  $\sigma^2$  μπορεί να οριστεί η νέα κατανομή από την οποία θα προκύψουν νέοι  $\lambda$  απόγονοι. Αυτοί είναι τυχαία διανύσματα που ανήκουν στην κατανομή  $\mathcal{N}(\vec{m}, \mathbf{C})$  και προσαρμόζονται κατάλληλα ώστε να υπακούν, τελικά, την κανονική κατανομή  $\mathcal{N}(\vec{m}, \sigma^2 \mathbf{C})$ . Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, αυτή προκύπτει από την μοναδιαία κανονική κατανομή  $\mathcal{N}(\vec{0}, I)$  με κατάλληλους μετασχηματισμούς, που πραγματοποιούνται μέσω του πίνακα ιδιοδιανυσμάτων  $\mathbf{B}$  και του διαγώνιου πίνακα ιδιοτιμών  $\mathbf{D}$ . Επομένως, έχοντας επιλέξει τυχαία διανύσματα  $\vec{z}$  που ανήκουν στην μοναδιαία κανονική κατανομή, μπορεί να γίνει μετασχηματισμός τους ώστε να ανήκουν στην κατανομή  $\mathcal{N}(\vec{m}, \mathbf{C})$ , τα οποία θα συμβολίζονται ως  $\vec{y}$ . Αυτό επιτυγχάνεται στρέφοντας το διάνυσμα  $\vec{z}$  στο σύστημα αξόνων που ορίζουν οι κύριοι άξονες της κατανομής  $\mathcal{N}(\vec{0}, \mathbf{C})$  με τη βοήθεια του μητρώου στροφής  $\mathbf{B}$  και, στη συνέχεια, μέσω του πίνακα  $\mathbf{D}$ , γίνεται προσαρμογή του στη κλίμακα της  $\mathcal{N}(\vec{0}, \mathbf{C})$

$$\vec{y} = \mathbf{B}\mathbf{D}\vec{z} \quad (2.28)$$



**Σχήμα 2.5:** Μετασχηματισμός διανύσματος  $\vec{z}$  που ανήκει στην κατανομή  $\mathcal{N}(\vec{0}, I)$  στο διάνυσμα  $\vec{y}$  που ανήκει στην  $\mathcal{N}(\vec{m}, \mathbf{C})$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η μέση τιμή είναι μη μηδενική, απαιτείται και η μετατόπιση του διανύσματος  $\vec{z}$ , ώστε να ανήκει στην κατανομή  $\mathcal{N}(\vec{m}, \mathbf{C})$ . Για να υπακούν, τελικά, οι νέοι απόγονοι την κανονική κατανομή  $\mathcal{N}(\vec{m}, \sigma^2 \mathbf{C})$ , δημιουργούνται σύμφωνα με την

εξίσωση

$$\vec{x} = \vec{m} + \sigma \vec{y} \quad (2.29)$$

## 2.2 Προσθήκη νέων χαρακτηριστικών στον τυπικό CMA

Για την ενίσχυση της απόδοσης της μεθόδου CMA σε προβλήματα βελτιστοποίησης, προστέθηκαν νέες δυνατότητες που λαμβάνουν χώρα σε κάθε γενιά, και, συγκεκριμένα, η επιλογή γονιών μέσω διαγωνισμού και η δυνατότητα μετάλλαξης. Οι δύο αυτές προσθήκες εξασφαλίζουν τον απεγκλωβισμό του αλγορίθμου από τοπικό ακρότατο και σε ορισμένες περιπτώσεις, την ταχύτερη σύγκλιση του.

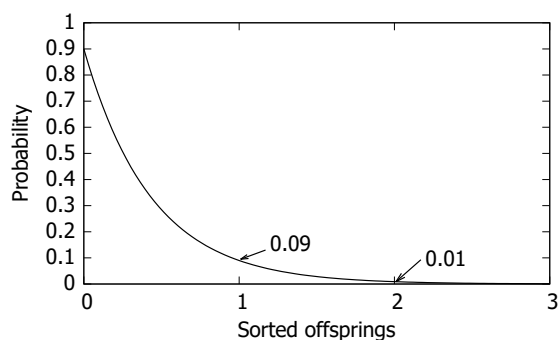
### 2.2.1 Επιλογή γονιών μέσω πιθανοτικού διαγωνισμού

Η δυνατότητα επιλογής γονιών μέσω πιθανοτικού διαγωνισμού (Tournament Selection) αποτελεί ένα λιγότερο ελιτιστικό σχήμα επιλογής. Η εφαρμογή του δίνει την ευκαιρία να μεταβιβαστούν τα χαρακτηριστικά ενός όχι και τόσο καλού απογόνου στην επόμενη γενιά. Αυτό μπορεί να έχει θετική επιρροή στην πορεία της εξέλιξης, διότι προσδίδει μεγαλύτερη διαχύμανση στα χαρακτηριστικά της νέας γενιάς και επομένως, μειώνεται η πιθανότητα να εγκλωβιστεί ο αλγόριθμος. Η υλοποίηση του απαιτεί να οριστούν δύο μεγέθη, το μέγεθος και η πιθανότητα του διαγωνισμού. Το πρώτο μέγεθος καθορίζει το πλήθος απογόνων, που θα ανταγωνιστούν μεταξύ τους για τη θέση στο σύνολο των γονιών ενώ το δεύτερο μέγεθος ορίζει την πιθανότητα, σύμφωνα με την οποία ο αλγόριθμος θα επιλέξει τον καλύτερο διαγωνιζόμενο. Επιπλέον, βάσει αυτής προσδιορίζονται από τον αλγόριθμο οι πιθανότητες να επιλεγθεί οποιοσδήποτε άλλος διαγωνιζόμενος, σύμφωνα με τη

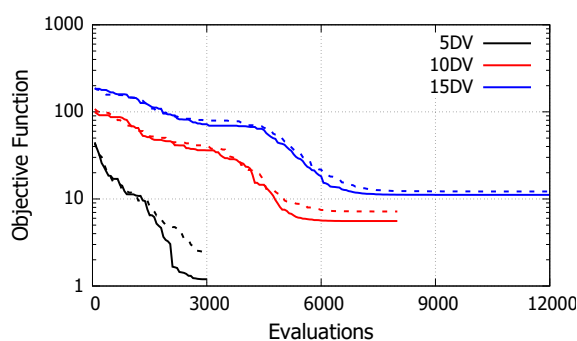
$$p_i = p_{\text{tournament}}(1 - p_{\text{tournament}})^i \quad (2.30)$$

Η μεταβλητή  $i$  ορίζεται ως ο ακέραιος που δηλώνει τη θέση κάθε διαγωνιζόμενου στην κατάταξη και λαμβάνει τιμές στο διάστημα μεταξύ του μηδενός και του μεγέθους του διαγωνισμού. Βάσει αυτής της μεταβλητής, όσο χαμηλότερα βρίσκεται ένας διαγωνιζόμενος στην κατάταξη τόσο μικρότερη θα είναι η πιθανότητα να επιλεγθεί. Ενδεικτικά, στο σχήμα 2.6 παρουσιάζονται οι πιθανότητες που θα προκύψουν σε έναν διαγωνισμό μεγέθους 3 με πιθανότητα ίση με 0.9.

Για να γίνει έλεγχος της συμπεριφοράς του CMA σε συνδυασμό με τον πιθανοτικό διαγωνισμό, έγινε εφαρμογή τους στο πρόβλημα Rastrigin για 5, 10 και 15 μεταβλητές σχεδιασμού. Από τα διαγράμματα σύγκλισης παρατηρείται ότι υπάρχει μείωση της



**Σχήμα 2.6:** Πιθανότητες διαγωνισμού. Στον οριζόντιο άξονα βρίσκονται οι ταξινομημένοι διαγωνιζόμενοι, όπου με  $i = 0$  συμβολίζεται ο πρώτος στην κατάταξη και με  $i = 2$  ο τελευταίος. Από το διάγραμμα φαίνεται πως η πιθανότητα να επιλεγεί ο δεύτερος στην κατάταξη είναι 9% ενώ για να επιλεγεί ο τελευταίος είναι 1%.

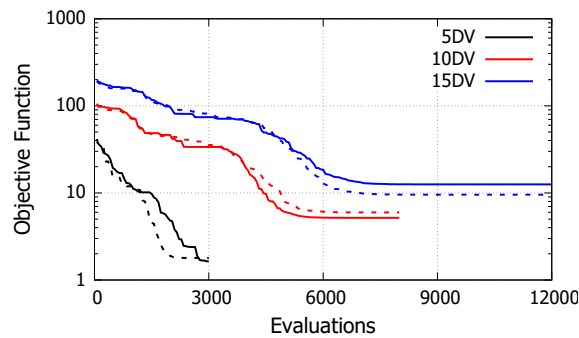


**Σχήμα 2.7:** Εφαρμογή πιθανοτικού διαγωνισμού στον κλασικό CMA και επίλυση του προβλήματος Rastrigin:  $f(\vec{x}) = An + \sum_{i=1}^n [x_i^2 - A \cos(2\pi x_i)]$ . Παρουσιάζονται τα διαγράμματα σύγκλισης από την επίλυση των προβλημάτων με 5, 10 και 15 μεταβλητές σχεδιασμού. Η συνεχής γραμμή αντιπροσωπεύει τον ενισχυμένο CMA ενώ η διακεκομμένη τον κλασικό.

τιμής στόχου σε όλα τα προβλήματα που επιλύθηκαν. Επομένως, η προσθήκη του πιθανοτικού διαγωνισμού στον κλασικό CMA θεωρείται σωστή επιλογή και για αυτό διατηρείται ως δυνατότητα.

## 2.2.2 Μετάλλαξη

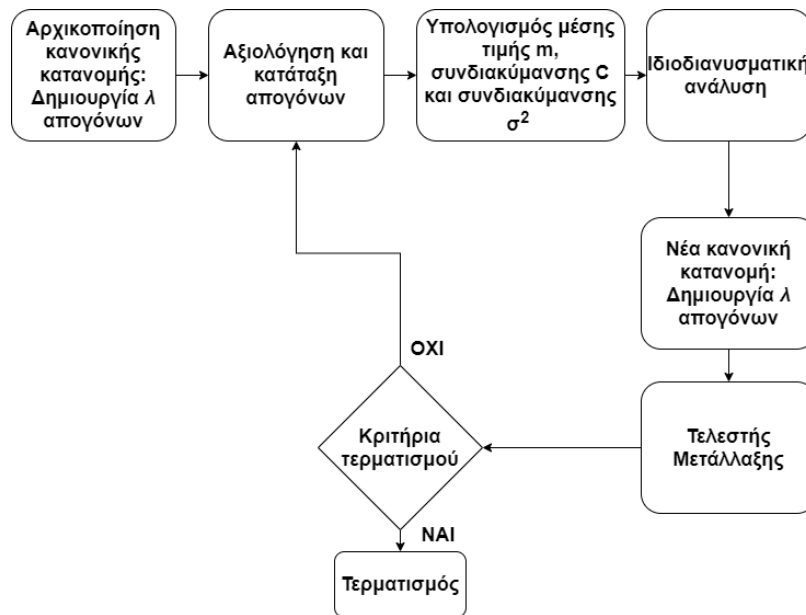
Η διαδικασία δημιουργίας απογόνων σύμφωνα με μία κανονική κατανομή, οδηγεί σε απογόνους με συγκεκριμένες και παρόμοιες ιδιότητες. Σε ορισμένες περιπτώσεις, το γεγονός αυτό μπορεί να οδηγήσει σε εγκλωβισμό του αλγορίθμου σε μια περιοχή για αρκετές γενιές αυξάνοντας το κόστος της βελτιστοποίησης χωρίς να οδηγείται απαραίτητα σε καλύτερη λύση. Ένας τρόπος για να αποφευχθεί μια τέτοια περίπτωση, είναι η εφαρμογή τελεστή μετάλλαξης σε κάποιους από τους απογόνους και επομένως, εισάγεται αυτή η δυνατότητα στον αλγόριθμο CMA.



**Σχήμα 2.8:** Επίλυση προβλήματος *Rastrigin* με διαφορετικό αριθμό μεταβλητών σχεδιασμού με τον ενισχυμένο CMA που έχει τελεστή μετάλλαξης. Παρουσιάζονται τα διαγράμματα σύγκλισης από την επίλυση των προβλημάτων με 5, 10 και 15 μεταβλητές σχεδιασμού. Η συνεχής γραμμή αντιπροσωπεύει τον ενισχυμένο CMA ενώ η διακεκομμένη τον κλασικό.

Η μετάλλαξη ενός απογόνου σημαίνει μικρή μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού του, που οδηγεί σε μεταβολή της τιμής στόχου του. Για να πραγματοποιηθεί μετάλλαξη ορίζεται μια πιθανότητα, συνήθως μικρή, και με τη βοήθεια μιας γεννήτριας τυχαίων αριθμών ο αλγόριθμος αποφασίζει αν θα εφαρμόσει μετάλλαξη στον εξεταζόμενο απόγονο ή όχι. Στην περίπτωση που γίνει μετάλλαξη, πρέπει να υπολογιστεί το μέγεθος και το είδος της μεταβολής των μεταβλητών σχεδιασμού του. Αρχικά, ορίζονται δύο πιθανά σενάρια, ένα όπου θα προστεθεί ποσότητα στις μεταβλητές σχεδιασμού και ένα που θα αφαιρεθεί. Στο πρώτο σενάριο, υπολογίζεται η απόσταση κάθε μεταβλητής σχεδιασμού από το άνω όριο της και πολλαπλασιάζεται με έναν τυχαίο αριθμό στο διάστημα  $[0,1]$  και έναν συντελεστή που ελέγχει το βαθμό μετάλλαξης, ανάλογα με το σημείο της βελτιστοποίησης που βρίσκεται ο αλγόριθμος. Ο όρος που δημιουργείται προστίθεται σε κάθε μεταβλητή και προκύπτει ο νέος μεταλλαγμένος απόγονος. Αντίστοιχα, υπολογίζεται και η αφαιρούμενη ποσότητα στο δεύτερο σενάριο, με τη διαφορά ότι υπολογίζεται η απόσταση της μεταβλητής σχεδιασμού από το κάτω όριο. Εισάγοντας τον τελεστή μετάλλαξης στον αλγόριθμο, δίνεται η δυνατότητα εισαγωγής επιπλέον χαρακτηριστικών στη νέα γενιά που δεν υπήρχαν στην προηγούμενη, αυξάνοντας έτσι την ταχύτητα σύγκλισης.

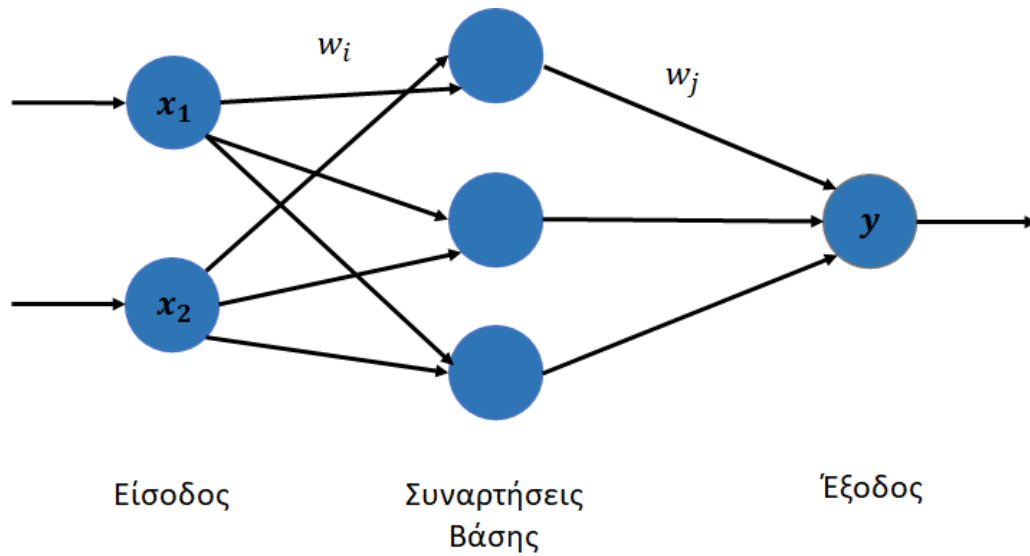
Για την εξαγωγή συμπεράσματος σχετικά με την επιρροή που έχει ο τελεστής μετάλλαξης στην πορεία σύγκλισης, εφαρμόστηκε ο ενισχυμένος CMA στο πρόβλημα *Rastrigin*, με διαφορετικό πλήθος μεταβλητών σχεδιασμού, και συγκρίθηκε με τον κλασικό. Στα διαγράμματα σύγκλισης παρατηρείται ότι υπάρχει μείωση της τιμής στόχου μόνο στην περίπτωση των 10 μεταβλητών σχεδιασμού. Το γεγονός αυτό, όμως, παραμένει ενθαρρυντικό ως προς την προσθήκη του τελεστή μετάλλαξης και, επομένως, επιλέγεται να διατηρηθεί. Οι επιμέρους διεργασίες που συνιστούν μία γενιά, μετά την προσθήκη των παραπάνω χαρακτηριστικών, συνοψίζονται στο διάγραμμα ροής 2.9.



Σχήμα 2.9: Διάγραμμα ροής αλγορίθμου CMA

## 2.3 Μεταπρότυπα - MACMA

Η επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος βελτιστοποίησης προϋποθέτει την ύπαρξη ενός λογισμικού αξιολόγησης, το οποίο θα υπολογίζει όλες τις συναρτήσεις στόχου. Ο υπολογισμός αυτών θα ορίζεται ως το πρωτεύον πρόβλημα. Σε πολλές περιπτώσεις, μπορεί το υπολογιστικό κόστος επίλυσης αυτού να είναι αισθητά μεγαλύτερο από το αντίστοιχο κόστος ενός κύκλου βελτιστοποίησης, όπως στην περίπτωση αεροδυναμικής βελτιστοποίησης. Για το λόγο αυτό το συνολικό υπολογιστικό κόστος της βελτιστοποίησης είναι ανάλογο του αριθμού αξιολογήσεων που απαιτούνται για την εύρεση βέλτιστης λύσης. Όμως, επιτρέποντας μόνο έναν ορισμένο αριθμό αξιολογήσεων περιορίζονται οι δυνατότητες του αλγορίθμου να βρει την πραγματική βέλτιστη λύση. Έτσι, άρχισαν να αναπτύσσονται τεχνικές όπου σε κάθε γενιά δεν είναι απαραίτητη η αξιολόγηση όλων των απογόνων, επιτρέποντας έτσι την ολοκλήρωση περισσότερων κύκλων βελτιστοποίησης. Η μείωση των αξιολογήσεων κάθε γενιάς οφείλεται κυρίως στη χρήση νευρωνικών δικτύων. Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα χρησιμοποιούνται για να προσεγγιστεί η τιμή μιας συνάρτησης αντί να χρησιμοποιηθεί η πραγματική σχέση που την εκφράζει. Αυτό επιτυγχάνεται εφόσον γίνει σε αυτό εκμάθηση με σωστό τρόπο. Ως εκπαίδευση νοείται η παροχή πληροφοριών για γνωστά σημεία της συνάρτησης, δηλαδή ο συνδυασμός των μεταβλητών και η τιμή που δίνουν, και τα οποία βρίσκονται σε κοντινή απόσταση από το σημείο για το οποίο προσεγγίζεται η τιμή της συνάρτησης.



Σχήμα 2.10: Αρχιτεκτονική δικτύου RBF

Τα νευρωνικά δίκτυα αποτελούνται από νευρώνες και συνδέσεις μεταξύ τους, όπως ακριβώς ο ανθρώπινος εγκέφαλος. Κάθε νευρώνας έχει μία είσοδο για τα δεδομένα προς επεξεργασία και μία έξοδο, όπου μετά από υπολογισμούς προκύπτει ένα αποτέλεσμα. Η πολυπλοκότητα ενός τέτοιου δικτύου είναι ανάλογη του αριθμού των νευρώνων από τους οποίους αποτελείται αλλά και του πλήθους κρυμμένων επιπέδων (Hidden layers) που διαθέτει. Ως κρυμμένο επίπεδο θεωρείται το πλήθος των εσωτερικών νευρώνων του δικτύου, οι οποίοι λαμβάνουν τα διανύσματα εισόδου, γίνεται επεξεργασία τους και τα μεταφέρουν στους νευρώνες του επιπέδου εξόδου. Η επεξεργασία των δεδομένων από τα κρυμμένα επίπεδα του νευρωνικού δικτύου μπορεί να πραγματοποιηθεί με πολλές συναρτήσεις, κάθε μία με τα δικά της πλεονεκτήματα. Το νευρωνικό δίκτυο που χρησιμοποιήθηκε σε αυτή την εργασία διαθέτει ακτινικές συναρτήσεις βάσης (Radial Basis Functions) και αναπτύχθηκε στα πλαίσια των διατριβών [11],[12].

### 2.3.1 Νευρωνικό δίκτυο Radial Basis Function (RBF)

Τα νευρωνικά δίκτυα RBF αποτελούν δίκτυα με μόνο ένα κρυμμένο επίπεδο, τα οποία χρησιμοποιούνται σε προβλήματα εκμάθησης με επίβλεψη. Στόχος αυτών των προβλημάτων είναι η εκμάθηση ενός δικτύου, έτσι ώστε να μπορεί να εκτιμήσει σωστά την τιμή μίας δεδομένης συνάρτησης με μοναδικά δεδομένα εισόδου τις μεταβλητές. Η παραπάνω διαδικασία είναι ιδιαίτερα σημαντική και επηρεάζει τα αποτελέσματα που παρέχει το νευρωνικό δίκτυο. Για να γίνει κατανοητός ο τρόπος που θα γίνει εκμάθηση του δικτύου, κρίνεται αναγκαίο να παρουσιαστεί η λειτουργία ενός δικτύου RBF.

Στο σχήμα 2.10 παρουσιάζεται η ροή πληροφορίας σε ένα νευρωνικό δίκτυο RBF. Τα δεδομένα από το επίπεδο εισόδου μεταφέρονται στο κρυμμένο επίπεδο, αφού πρώτα πολλαπλασιαστούν με ορισμένα βάρη. Στους νευρώνες του κρυμμένου επιπέδου γίνεται υπολογισμός της ακτινικής συνάρτησης βάσης, με τη χρήση των δεδομένων εισόδου. Αυτή είναι μία συνάρτηση που παίρνει μέγιστη τιμή στο κέντρο της ενώ η απομάκρυνση από αυτό οδηγεί σε μείωση της τιμής της. Ουσιαστικά, οι κρυμμένοι νευρώνες ορίζουν σφαιρικές περιοχές επιρροής και ανάλογα με τα δεδομένα εισόδου και την απόσταση αυτών από το κέντρο κάθε νευρώνα, αυξάνεται ή μειώνεται το βάρος που θα έχει ο εκάστοτε νευρώνας στο αποτέλεσμα. Έχοντας κατανοήσει τη λειτουργία των RBF δικτύων, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η καλή εκμάθηση του δικτύου απαιτεί ικανοποιητικό πλήθος δεδομένων και σε μικρή απόσταση από το διάνυσμα για το οποίο θα γίνει η προσέγγιση.

### 2.3.2 Χρήση Μεταπροτύπων

Στον αλγόριθμο βελτιστοποίησης που υλοποιήθηκε, η χρήση των μεταμοντέλων βοηθάει στη δραματική μείωση των απαιτούμενων αξιολογήσεων για τη βέλτιστη λύση. Η μέθοδος με την οποία επιτυγχάνεται αυτό ονομάζεται μέθοδος Προ-Αξιολόγησης Χαμηλού Κόστους (Low-Cost Pre-Evaluation, LCPE) [13]. Σύμφωνα με αυτήν, γίνεται μια εκτίμηση της τιμής της συνάρτησης στόχου όλων των απογόνων σε μία γενιά και βάσει αυτής γίνεται η κατάταξή τους. Εν συνεχεία, ο χρήστης μπορεί να επιλέξει έναν αριθμό απογόνων, που θεωρούνται επίλεκτοι, και μόνο για αυτούς να χρησιμοποιηθεί το λογισμικό αξιολόγησης. Με τον τρόπο αυτό, αποφεύγεται η αξιολόγηση ατόμων που δεν οδηγούν σε καλύτερη λύση αλλά ταυτόχρονα υπάρχει ένα μέτρο για την κατάταξη του καθενός. Όμως, όλα τα παραπάνω προϋποθέτουν πολύ καλή εκμάθηση του δικτύου ώστε η κατάταξη με τις εκτιμήσεις των τιμών της συνάρτησης στόχου να συμβαδίζει με την πραγματική.

Η εκμάθηση του δικτύου προαπαιτεί την ύπαρξη μιας Βάσης Δεδομένων (ΒΔ). Σε αυτήν αποθηκεύονται όλοι οι απόγονοι που αξιολογούνται, ώστε να υπάρχουν στοιχεία για την συνάρτηση στόχου και να είναι εφικτή η προσέγγιση της τιμής της για νέες μεταβλητές σχεδιασμού, χωρίς να χρησιμοποιηθεί η ακριβής μαθηματική σχέση υπολογισμού της. Όμως, για να υπάρξει ένας ικανοποιητικός αριθμός απογόνων στη βάση δεδομένων, είναι απαραίτητη η συγκέντρωση πληροφοριών για αρκετές γενιές. Έτσι, εξασφαλίζεται η μη πρόωρη εκμάθηση του δικτύου, που θα οδηγούσε σε λανθασμένους υπολογισμούς. Το απαραίτητο πλήθος δεδομένων σε μία βάση δεδομένων διαφέρει αισθητά ανάλογα με τον πληθυσμό και τις μεταβλητές σχεδιασμού που ορίζονται σε κάθε πρόβλημα. Για το λόγο αυτό, παρέχεται η δυνατότητα στο χρήστη να ορίσει τον ελάχιστο αριθμό απογόνων που πρέπει να υπάρχει στη βάση δεδομένων ώστε να ξεκινήσει η εκμάθηση. Αξίζει να σημειωθεί, πως η εκμάθηση του δικτύου γίνεται Online, δηλαδή πραγματοποιείται εκμάθηση σε κάθε γενιά για να αξιοποιούνται τα νέα δεδομένα. Επίσης, δεν είναι εφικτό η εκμάθηση να πραγματοποιηθεί μία φορά για όλους τους απογόνους, λόγω του ότι αυτοί δεν βρίσκονται πάντα σε κοντινές αποστάσεις

και οι εκτιμήσεις θα είναι εσφαλμένες. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, πρέπει να οριστεί ένα δείγμα εκπαίδευσης (Training Pattern, TP) που θα χρησιμοποιηθεί για την εκμάθηση του δικτύου για κάθε απόγονο, και ένα κριτήριο με βάση το οποίο θα επιλέγονται. Το πλήθος των δειγμάτων εκπαίδευσης ορίζεται από το χρήστη, γιατί είναι ανάλογος του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού. Όσον αφορά το κριτήριο επιλογής δειγμάτων εκπαίδευσης του δικτύου για κάθε απόγονο, αυτό επιλέγεται να είναι η ευκλείδεια απόσταση του εξεταζόμενου απογόνου από όλα τα σημεία της βάσης δεδομένων. Χρησιμοποιώντας μόνο τα κοντινότερα δείγματα εκπαίδευσης για την εκμάθηση του δικτύου, διασφαλίζεται η μεγαλύτερη ακρίβεια της εκτίμησης. Μετά το πέρας της εκμάθησης, γίνεται χρήση του δικτύου για τον υπολογισμό της συνάρτησης στόχου του εξεταζόμενου απογόνου και εκκινεί η εκμάθηση για τον επόμενο απόγονο.

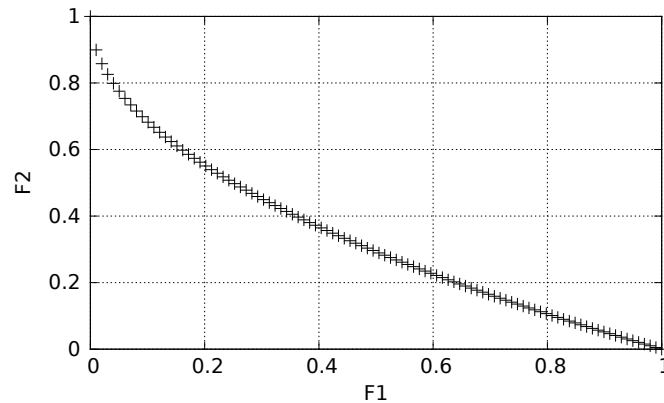
## 2.4 Προβλήματα βελτιστοποίησης πολλών στόχων

Ο ορισμός ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης πολλών στόχων γίνεται σύμφωνα με την σχέση

$$\min \vec{F} = \vec{F}(\vec{x}) \quad (2.31)$$

Το διάνυσμα  $\vec{F}$  έχει διάσταση ίση με το πλήθος των συναρτήσεων στόχου του προβλήματος, η οποία θα συμβολίζεται ως  $m$ . Η δυσκολία που υπάρχει σε αυτά τα προβλήματα, είναι ο τρόπος με τον οποίο θα καταταχθούν οι πιθανές λύσεις, καθώς σε έναν πολυδιάστατο χώρο δεν μπορεί να προκύψει συμπεέρασμα για την σχέση δύο διανυσμάτων. Έτσι, εισάγεται η έννοια των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων, ο ορισμός των οποίων γίνεται με τη χρήση της έννοιας της κυριαρχίας. Μία πιθανή λύση  $\vec{x}$  κυριαρχεί της λύσης  $\vec{y}$  αν και μόνο αν ισχύει  $F_m(\vec{x}) \leq F_m(\vec{y})$  για όλους τους στόχους και, παράλληλα, υπάρχει τουλάχιστον ένας στόχος για τον οποίο η σχέση ισχύει μόνο ως ανισότητα. Για να ανήκει η λύση  $\vec{x}$  στο σύνολο των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων, θα πρέπει να μην υπάρχει καμία άλλη λύση  $\vec{y}$  που να κυριαρχεί της  $\vec{x}$ . Η απεικόνιση αυτών των λύσεων γίνεται στο χώρο που ορίζουν οι στόχοι του προβλήματος και ονομάζεται μέτωπο Pareto. Στο σχήμα 2.11 παρουσιάζεται το μέτωπο Pareto ενός προβλήματος δύο στόχων. Σύμφωνα με αυτό, συμπεραίνεται ότι δεν μπορούν να υπάρξουν λύσεις στο χώρο που βρίσκεται αριστερά από την αναλυτική λύση, καθώς τότε τα σημεία της καμπύλης δεν θα ήταν μη-κυριαρχούμενα (nondominated) και, κατά συνέπεια, κατά Pareto βέλτιστες λύσεις. Για να μπορέσει ένας EA να οδηγηθεί σε αυτές, έχουν αναπτυχθεί πολλές μέθοδοι για την τελική ιεράρχηση των πιθανών λύσεων, ώστε να διασφαλιστεί η ύπαρξή τους σε όλο το εύρος του πραγματικού μετώπου Pareto. Εδώ χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Strength Pareto Evolutionary Algorithm II [14].





Σχήμα 2.11: Μέτωπο κατά Pareto βέλτιστων λύσεων

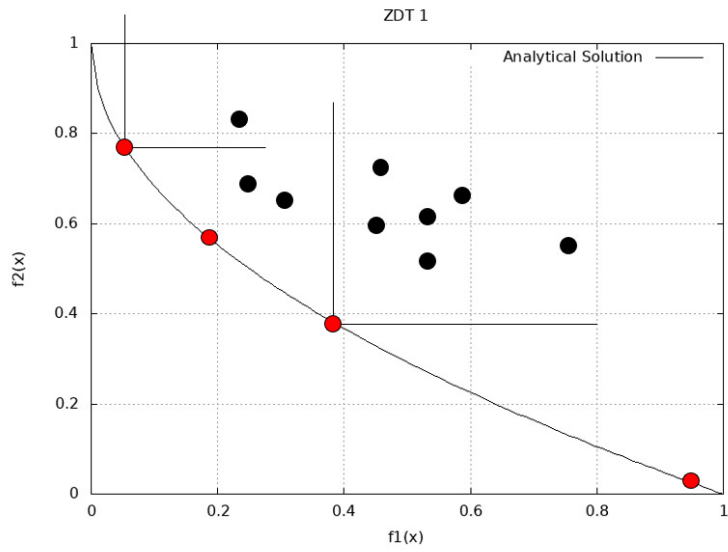
### 2.4.1 Μέθοδος Strength Pareto Evolutionary Algorithm

Η μέθοδος Strength Pareto Evolutionary Algorithm (SPEA) στηρίζεται στον υπολογισμό ενός νέου μεγέθους, που ονομάζεται ισχύς (Strength), το οποίο χρησιμοποιείται αντί της συνάρτησης στόχου για την ιεράρχηση των υποψήφιων λύσεων. Η ισχύς ορίζεται για κάθε υποψήφια λύση ως μία αδιάστατη ποσότητα που είναι ανάλογη του αριθμού των κυριαρχούμενων λύσεων από την υπό εξέταση λύση. Ο υπολογισμός της γίνεται σύμφωνα με τη σχέση

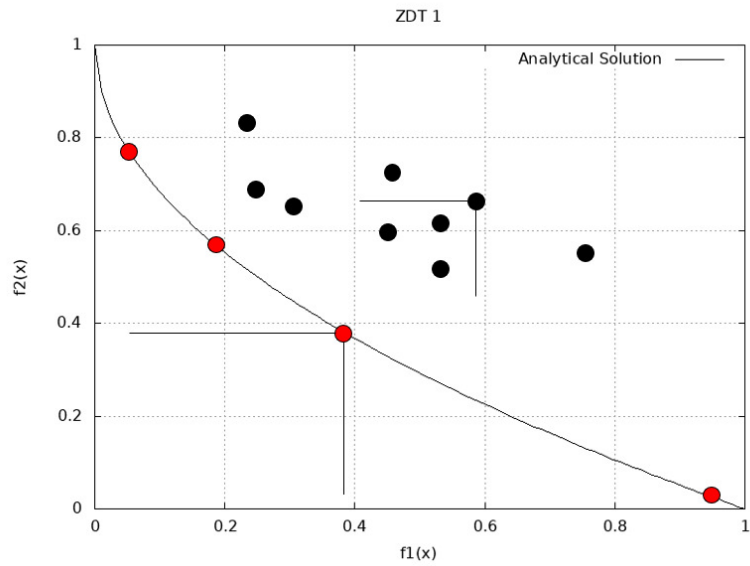
$$S_i = \frac{k_{dominated}}{\lambda + \mu + 1} \quad (2.32)$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα 2.12, η τιμή της ισχύος προμοδοτεί τα ενδιάμεσα σημεία του μετώπου Pareto, καθώς τα ακραία σημεία δεν κυριαρχούν σε μεγάλο αριθμό λύσεων. Έτσι, εξασφαλίζεται η εξάπλωση αυτών κατά μήκος του μετώπου Pareto, ώστε η τελική επιλογή βέλτιστης λύσης να γίνει από ένα ικανοποιητικό δείγμα λύσεων. Με βάση την ισχύ κάθε υποψήφιας λύσης μπορεί να οριστεί ένα άλλο μέγεθος, η ενιαία τιμή κόστους, η οποία ορίζεται για κάθε λύση ως ανάλογη του αριθμού αυτών που κυριαρχούν στην υπό εξέταση λύση. Για να διασφαλιστεί ένας τρόπος να βρεθούν οι μη-κυριαρχούμενες λύσεις, προστίθεται στην ενιαία τιμή κόστους η μονάδα, ώστε όσο μικρότερη είναι η τιμή της τόσο καλύτερη είναι η λύση για την οποία υπολογίστηκε.

Τελικά, χρησιμοποιώντας την ενιαία τιμή κόστους για την κατάταξη των υποψήφιων λύσεων από την καλύτερη προς τη χειρότερη, μπορεί να λειτουργήσει ένας EA χωρίς καμία άλλη παρέμβαση στα βήματα που γίνονται σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης.



Σχήμα 2.12: Υπολογισμός ισχύος κάθε λύσης



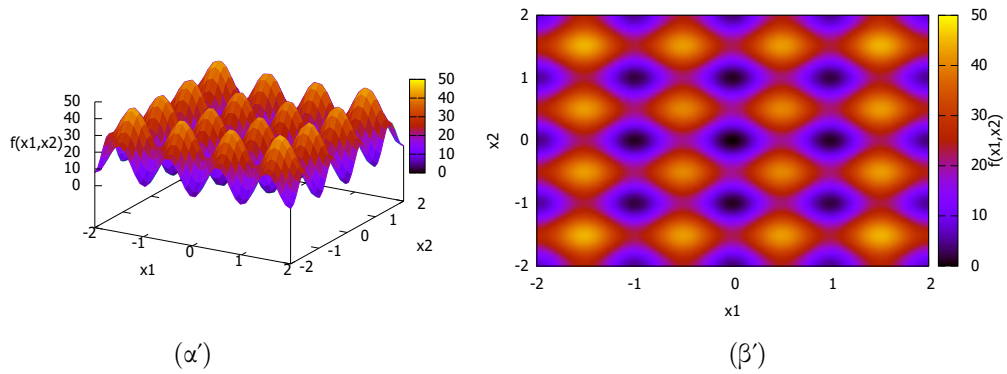
Σχήμα 2.13: Υπολογισμός ενιαίας τιμής κόστους κάθε λύσης

## Κεφάλαιο 3

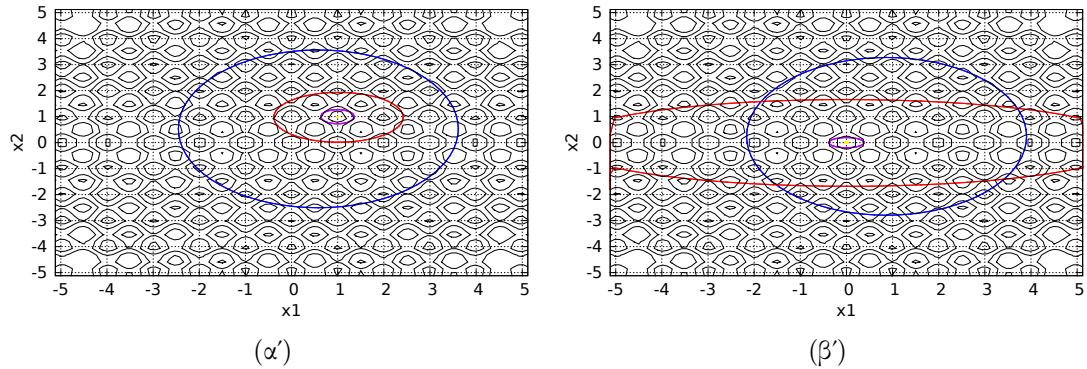
# Διερεύνηση επιρροής παραμέτρων χαλάρωσης

### 3.1 Παράμετρος $c_m$

Η παράμετρος  $c_m$ , όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 2.1.1, χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της νέας μέσης τιμής. Σύμφωνα με αυτήν, καθορίζεται ο ρυθμός μεταβολής της μέσης τιμής σε κάθε γενιά. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η τιμή 1 είναι αρκετά αποτελεσματική για την εύρεση του ολικού ακρότατου. Όμως, όταν η συνάρτηση στόχου του προβλήματος βελτιστοποίησης έχει μεγάλο αριθμό τοπικών ακρότατων, όπως στην περίπτωση της συνάρτησης Rastrigin, κρίνεται αναγκαία η μεταβολή της κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης. Αυτό συμβαίνει, διότι εκκινώντας από μικρή τιμή είναι εφικτό να περιοριστεί ο ρυθμός μεταβολής της μέσης τιμής με τέτοιο τρόπο, ώστε στις αρχικές γενιές που δεν υπάρχουν αρκετά στοιχεία για την τοπολογία της συνάρτησης να λαμβάνουν χώρα μικρές μεταβολές, επιτρέποντας έτσι μια επαρκή εξερεύνηση του χώρου εύρεσης λύσεων. Εστιάζοντας στη συνάρτηση Rastrigin, θα μελετηθεί ο κατάλληλος τρόπος μεταβολής της παραμέτρου  $c_m$ . Όπως φαίνεται από το σχήμα 3.1, η γραφική της παράσταση αποτελείται από πολλά κοιλώματα, όπου στο καθένα βρίσκεται ένα διαφορετικό τοπικό ακρότατο. Ως αποτέλεσμα, ο αλγόριθμος εγκλωβίζεται όταν καταλήξει σε μία κανονική κατανομή που περικλείει μία τέτοια κοιλάδα, καθώς τα ενδιάμεσα σημεία σε δύο κοιλώματα δεν αποτελούν απαραίτητα κοντινές λύσεις της συνάρτησης. Μία τέτοια περίπτωση παρουσιάζεται στο σχήμα 3.2α. Η εφαρμογή της μεθόδου χαλάρωσης μπορεί να βοηθήσει στον απεγκλωβισμό του αλγορίθμου, καθώς μειώνει το ρυθμό της μεταβολής της νέας μέσης τιμής, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2β. Η τιμή της παραμέτρου  $c_m$  δεν παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης, καθώς όσο ο αλγόριθμος πλησιάζει στη βέλτιστη λύση αυτή θα πρέπει να τείνει



Σχήμα 3.1: Γραφική παράσταση συνάρτησης *Rastrigin* για 2 μεταβλητές

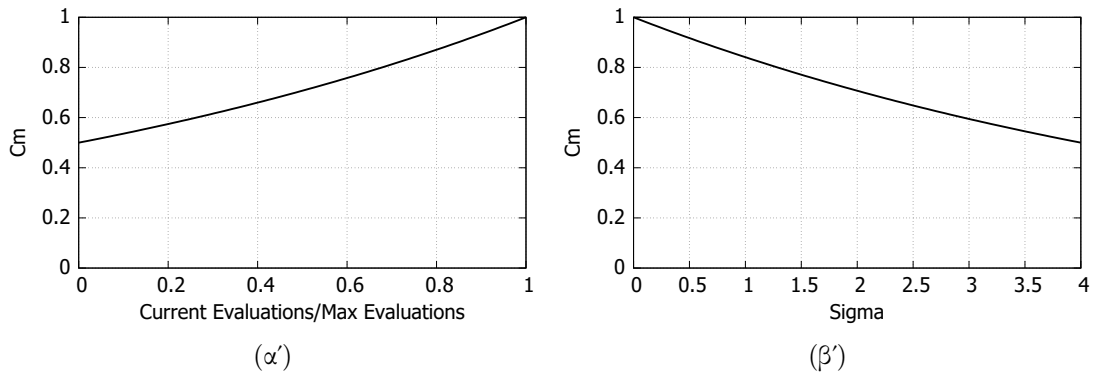


Σχήμα 3.2: (α) Εγκλωβισμός σε τοπικό ακρότατο (β) Εύρεση ολικού ακρότατου

στη μονάδα. Για να βρεθεί η συνάρτηση που καθορίζει τη μεταβολή της, δοκιμάστηκαν δύο πιθανά σενάρια. Στο ένα η μεταβολή της γίνεται εκθετικά, εκκινώντας από μία αρχική τιμή  $c_{m_0}$  που ορίζεται από το χρήστη, συναρτήσει του κλάσματος των ολοκληρωμένων αξιολογήσεων προς το μέγιστο αριθμό αξιολογήσεων, σύμφωνα με τη σχέση

$$c_m = c_{m_0} \exp \left[ \ln \left( \frac{1}{c_{m_0}} \right) \frac{\text{current \# of evaluations}}{\text{max \# of evaluations}} \right] \quad (3.1)$$

Η επιλογή αυτή έγινε, διότι είναι επιθυμητό στις πρώτες γενιές η παράμετρος  $c_m$  να λαμβάνει μικρές τιμές ενώ στις τελευταίες να τείνει στη μονάδα. Στο δεύτερο σενάριο, η μεταβολή της είναι, επίσης, εκθετική αλλά τώρα συναρτήσει της τυπικής απόκλισης  $\sigma$ . Σύμφωνα με αυτή, ο αλγόριθμος έχει στοιχεία για το κατά πόσο στις νέες κατανομές περιέχονται λύσεις κοντά στη βέλτιστη, με αποτέλεσμα να τη μεταβάλλει κατάλληλα. Όπως εξηγήθηκε στην παράγραφο 2.2, όσο η μέθοδος πλησιάζει στη δημιουργία περιοχών με καλύτερες λύσεις τόσο μικραίνει η τυπική απόκλιση  $\sigma$ . Έτσι, η συνάρτηση μεταβολής της παραμέτρου  $c_m$  θα πρέπει για την αρχική τιμή της τυπικής απόκλισης  $\sigma_0$



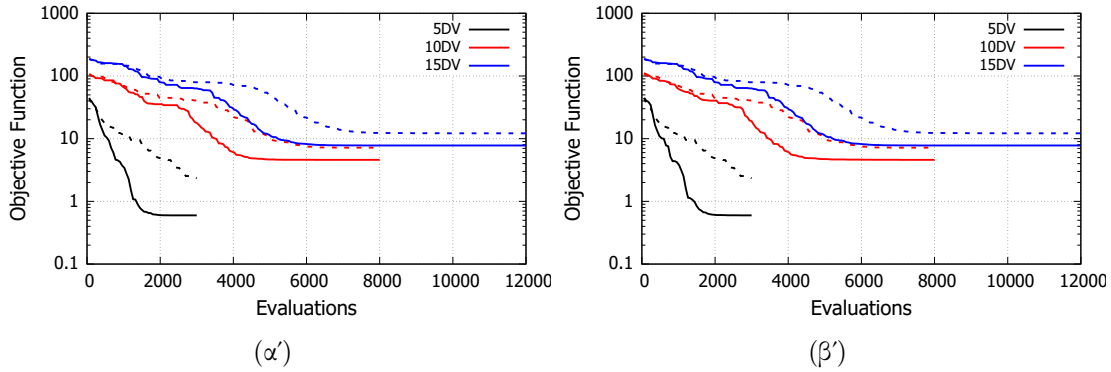
**Σχήμα 3.3:** (α) Γραφική παράσταση μεταβολής παραμέτρου  $c_m$  συναρτήσει του ποσοστού αξιολογήσεων. (β) Γραφική παράσταση μεταβολής παραμέτρου  $c_m$  συναρτήσει της τυπικής απόκλισης. Στο παράδειγμα η αρχική τιμή της τυπικής απόκλισης είναι 4.

να λαμβάνει την αρχική τιμή  $c_{m_0}$  και όσο μειώνεται το  $\sigma$  αυτή να τείνει στη μονάδα, το οποίο επιτυγχάνεται με τη σχέση

$$c_m = \exp\left(\frac{1}{\sigma_0} \ln c_{m_0} \sigma\right) \quad (3.2)$$

Η γραφική παράσταση του κάθε νόμου μεταβολής φαίνεται στο σχήμα 3.3. Η δοκιμή των δύο τρόπων μεταβολής της παραμέτρου  $c_m$  έγινε για την επίλυση της Rastrigin με 5, 10 και 15 μεταβλητές σχεδιασμού. Κάθε πρόβλημα επιλύθηκε 7 φορές, με διαφορετική αρχική τιμή γεννήτριας τυχαίων αριθμών, η  $c_{m_0}$  επιλέχθηκε ίση με 0.5 και ο μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων είναι 3000, 8000 και 12000 αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα από τη διερεύνηση παρουσιάζονται στο σχήμα 3.4.

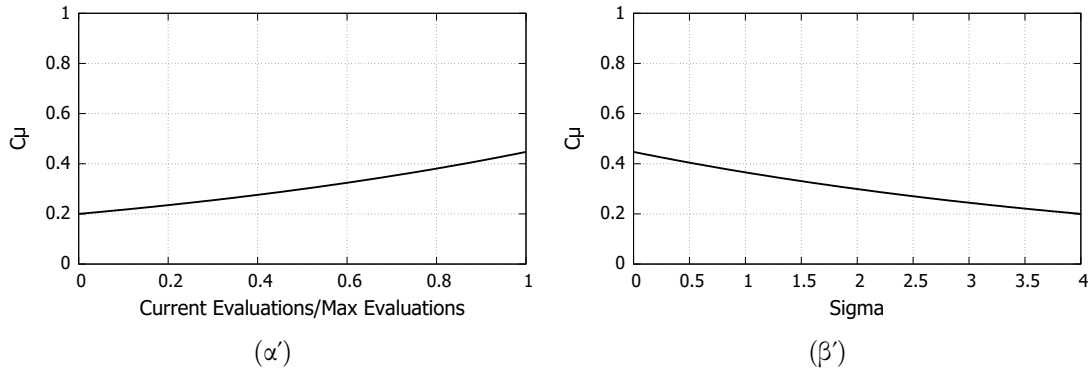
Το κέρδος από τη μεταβολή της  $c_m$  κατά τη βελτιστοποίηση είναι εμφανές, ιδιαίτερα στην περίπτωση των 5 μεταβλητών σχεδιασμού. Εκεί φαίνεται πως διατηρώντας σταθερή την  $c_m$ , η κλίση της καμπύλης σύγκλισης είναι μικρή, με αποτέλεσμα να μην προλάβει να βρεθεί η βέλτιστη λύση. Αντιθέτως, μεταβάλλοντας την  $c_m$  παρατηρείται μεγάλη κλίση της καμπύλης, που οδηγεί στην εύρεση λύση μικρότερης του 1, η οποία αποτελεί και το πιο μικρό τοπικό ακρότατο. Έτσι, έχει εξασφαλιστεί η εύρεση του ολικού ακρότατου, δηλαδή του μηδενός, και η ακρίβεια με την οποία θα βρεθεί εξαρτάται αποκλειστικά από το μέγιστο αριθμό αξιολογήσεων. Τα αποτελέσματα από τις δύο συναρτήσεις είναι σχεδόν πανομοιότυπα, γεγονός που αφήνει το περιθώριο ελεύθερης επιλογής της συνάρτησης. Επιλέγεται αυθαίρετα η πρώτη συνάρτηση.



**Σχήμα 3.4:** Διαγράμματα σύγκλισης για τα 3 προβλήματα *Rastrigin*. (α) Μεταβολή παραμέτρου  $c_m$  συναρτήσει του ποσοστού αξιολογήσεων. (β) Μεταβολή παραμέτρου  $c_m$  συναρτήσει της τυπικής απόκλισης  $\sigma$ . Με συνεχή γραμμή παρουσιάζεται η περίπτωση μεταβολής της παραμέτρου  $c_m$  ενώ με διακεκομμένη γραμμή απεικονίζεται η περίπτωση που διατηρείται σε όλη την επίλυση σταθερή και ίση με 1. Παρατηρείται στο πρόβλημα με 5 μεταβλητές σχεδιασμού, ότι ο αλγόριθμος ξεπερνάει το πιο μικρό τοπικό ακρότατο (τιμή 1.00) λόγω της μεταβολής του  $c_m$

## 3.2 Παράμετροι χαλάρωσης $c_\mu$ και $c_1$

Η παράμετροι  $c_\mu$  και  $c_1$  χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του πίνακα συνδιακύμανσης σε κάθε γενιά. Η  $c_\mu$  καθορίζει τη διάρκεια ζωής πληροφοριών από παλαιότερες γενιές ενώ η  $c_1$  ρυθμίζει τη συμμετοχή του Μονοπατιού Εξέλιξης  $\vec{p}_c$ . Γίνεται κατανοητό πως το  $\vec{p}_c$  θα έχει σημαντικά μικρότερη συμμετοχή, καθώς περιέχει ποιοτικές πληροφορίες για τις μεταβολές που λαμβάνουν χώρα. Έτσι, επιλέγεται η παράμετρος  $c_1$  να είναι μια τάξη μεγέθους μικρότερο από τη  $c_\mu$ . Όσον αφορά την παράμετρο  $c_\mu$ , αυτή έχει την ίδια λειτουργία με τις παραμέτρους  $c_\sigma$  και  $c_c$ , που έχουν παρουσιαστεί στην παράγραφο 2.1.2. Όπως και στην περίπτωση των  $c_\sigma$  και  $c_c$ , είναι απαραίτητο η  $c_\mu$  να εξαρτάται από το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού, διότι όσο μεγαλύτερο είναι αυτό τόσο περισσότερες γενιές απαιτούνται για την προσαρμογή του πίνακα συνδιακύμανσης. Ταυτόχρονα, όμως, όταν ο αλγόριθμος πλησιάζει στη βέλτιστη λύση πρέπει να είναι εφικτή η επαναπροσαρμογή του πίνακα συνδιακύμανσης σε λιγότερες γενιές. Λαμβάνοντας υπόψη την επιλογή για μεταβαλλόμενη παράμετρο  $c_m$ , επιλέχθηκε να μεταβάλλεται με αντίστοιχο τρόπο και η παράμετρος  $c_\mu$ . Τα ενδεχόμενα μεγέθη από τα οποία θα εξαρτάται η τιμή της παραμέτρου  $c_\mu$  επιλέγονται και σε αυτή την περίπτωση να είναι το ποσοστό των αξιολογήσεων και η τυπική απόκλιση  $\sigma$ . Εδώ πρέπει να ληφθούν υπόψη τα όρια που πρέπει να τηρεί η τιμή της παραμέτρου  $c_\mu$ . Όπως αναφέρθηκε, οι παράμετροι  $c_\sigma$  και  $c_c$  πρέπει να βρίσκονται στο διάστημα  $\left[\frac{1}{n}, \sqrt{\frac{2}{n}}\right]$ . Για να βρεθεί το διάστημα ορισμού της  $c_\mu$  πραγματοποιήθηκαν δοκιμές και προέκυψε το συμπέρασμα, ότι αυτή θα πρέπει να βρίσκεται στο διάστημα  $\left[\frac{1}{n}, \sqrt{\frac{1}{n}}\right]$ , ώστε να μην επηρεαστεί αρνητικά η πορεία της εξέλιξης. Επομένως, θα πρέπει η συνάρτηση μεταβολής της να



**Σχήμα 3.5:** (α) Γραφική παράσταση μεταβολής παραμέτρου  $c_\mu$  συναρτήσει του ποσοστού αξιολογήσεων. (β) Γραφική παράσταση μεταβολής παραμέτρου  $c_\mu$  συναρτήσει της τυπικής απόκλισης. Στο παράδειγμα η αρχική τιμή της τυπικής απόκλισης είναι 4 και το πλήθος των μεταβλητών είναι 5.

παίρνει την τιμή  $\frac{1}{n}$  στην αρχή της βελτιστοποίησης, η οποία θα συμβολίζεται ως  $c_{\mu_0}$ , και όσο πλησιάζει στη λύση, αυτή να τείνει προς την τιμή  $\sqrt{\frac{1}{n}}$ . Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, προκύπτουν οι εξής ενδεχόμενες συναρτήσεις μεταβολής και η γραφική παράσταση αυτών παρουσιάζεται στο σχήμα 3.5

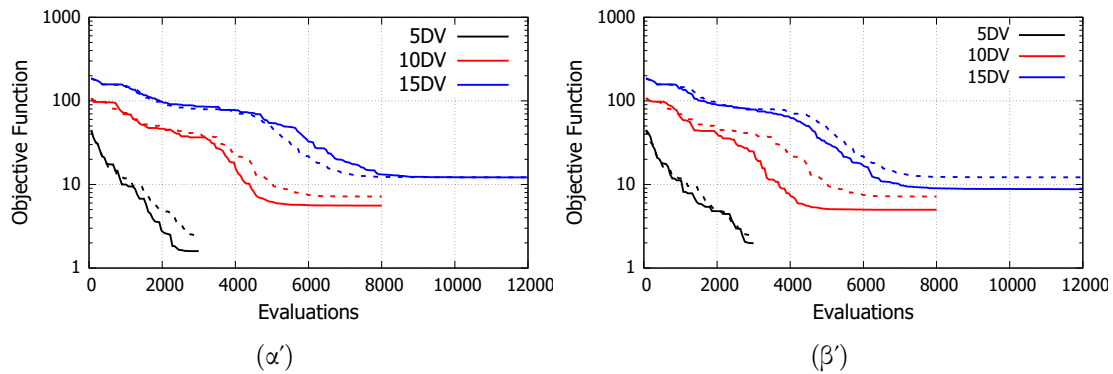
$$c_\mu = c_{\mu_0} \exp \left( \ln \left( \frac{1}{c_{\mu_0}} \right) 0.5 \frac{\text{current \# of evaluations}}{\text{max \# of evaluations}} \right) \quad (3.3)$$

$$c_\mu = \sqrt{\frac{1}{n}} \exp \left( \frac{1}{\sigma_0} \ln \left( \frac{c_{\mu_0}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \right) \sigma \right) \quad (3.4)$$

Όσον αφορά την παράμετρο  $c_1$ , επιλέχθηκε να μεταβάλλεται με τον ίδιο τρόπο αλλά να είναι μία τάξη μεγέθους μικρότερη και, επομένως, υπολογίζεται από τη σχέση

$$c_1 = 0.1c_\mu \quad (3.5)$$

Για την επιλογή της κατάλληλης συνάρτησης, έγινε δοκιμή της κάθε μίας στη συνάρτηση Rastrigin και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο σχήμα 3.6. Συγκεκριμένα, επιλύθηκαν τα προβλήματα για 5, 10 και 15 μεταβλητές σχεδιασμού, από 7 φορές το καθένα με διαφορετική αρχική τιμή της γεννήτριας τυχαίων αριθμών, και για μέγιστο αριθμό αξιολογήσεων 3000, 8000 και 12000. Από τα αποτελέσματα παρατηρείται ότι η συνάρτηση που εξαρτάται από το ποσοστό αξιολογήσεων οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα μόνο στην περίπτωση των 5 μεταβλητών σχεδιασμού, ενώ η συνάρτηση που εξαρτάται από την τυπική απόκλιση έχει καλύτερη συμπεριφορά για 10 και 15 μεταβλητές σχεδιασμού. Αξίζει να σημειωθεί, ότι οι μελέτες πραγματοποιήθηκαν για



**Σχήμα 3.6:** Διαγράμματα σύγκλισης για τα 3 προβλήματα *Rastrigin*. (α) Μεταβολή παραμέτρου  $c_m$  συναρτήσει του ποσοστού αξιολογήσεων. (β) Μεταβολή παραμέτρου  $c_m$  συναρτήσει της τυπικής απόκλισης  $\sigma$ . Με συνεχή γραμμή παρουσιάζεται η περίπτωση μεταβολής της παραμέτρου  $c_m$  ενώ η διακεκομμένη γραμμή είναι η περίπτωση που διατηρείται σε όλη την επίλυση σταθερή και ίση με  $c_{m0}$ . Παρατηρείται ότι σε κανένα πρόβλημα δεν έχει ξεπεραστεί το πιο μικρό τοπικό ακρότατο. Για το πρόβλημα με τις 5 μεταβλητές σχεδιασμού φαίνεται ότι η χρήση της συνάρτησης που εξαρτάται από το ποσοστό αξιολογήσεων έχει καλύτερα αποτελέσματα, αλλά στα άλλα δύο προβλήματα είναι καλύτερη η συνάρτηση που εξαρτάται από την τυπική απόκλιση  $\sigma$ .

σταθερή τιμή της παραμέτρου  $c_m$  και ίση με τη μονάδα, γεγονός που μπορεί να εξηγήσει ενδεχομένως τον εγκλωβισμό της μεθόδου ακόμα και για 5 μεταβλητές σχεδιασμού. Λαμβάνοντας υπόψη τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις παραπάνω μελέτες για αυτές τις παραμέτρους χαλάρωσης, επιλέχθηκε να μεταβάλλονται και οι 3, σύμφωνα με τις αντίστοιχες συναρτήσεις. Τα τελικά αποτελέσματα της επίλυσης του προβλήματος *Rastrigin* με τη μέθοδο CMA με αυτές τις δυνατότητες, παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 4, όπου γίνεται σύγκριση με έναν άλλο ΕΑ.



# Κεφάλαιο 4

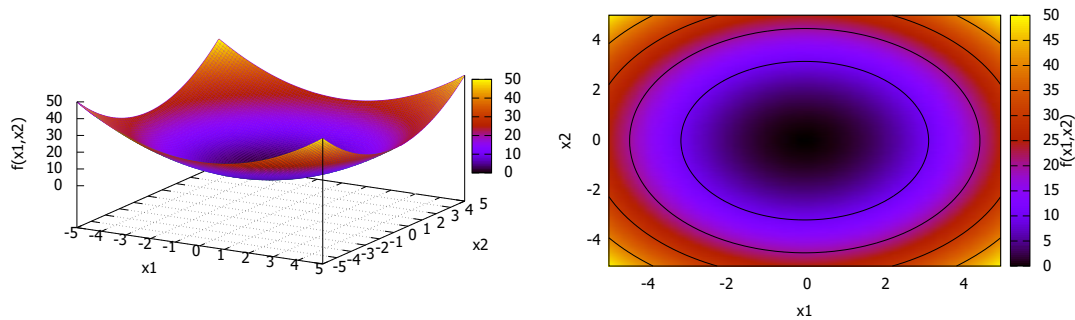
## Εφαρμογές σε μαθηματικές συναρτήσεις

Η απόδοση του αλγορίθμου CMA με τα νέα χαρακτηριστικά ελέγχεται, αρχικά, σε προβλήματα βελτιστοποίησης με μαθηματικές συναρτήσεις στόχου (Test Functions), που διέπονται από διαφορετικές ιδιότητες. Στόχος αυτών των προβλημάτων είναι η ανάδειξη ενδεχόμενων αδυναμιών που έχει ο αλγόριθμος αλλά και η σύγκριση της απόδοσής του σε σχέση με άλλους. Αυτή η σύγκριση καθίσταται εφικτή και δίκαια, καθώς είναι εκ των προτέρων γνωστό το ολικό ακρότατο ή το μέτωπο Pareto κάθε προβλήματος αλλά και ο απαραίτητος αριθμός αξιολογήσεων για την εύρεση βέλτιστης λύσης. Επίσης, σημαντική ιδιότητα των μαθηματικών συναρτήσεων έναντι πραγματικών προβλημάτων βελτιστοποίησης είναι το χαμηλό υπολογιστικό κόστος που απαιτεί το λογισμικό αξιολόγησης. Ο αλγόριθμος CMA χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση τριών προβλημάτων ενός στόχου και τριών προβλημάτων δύο στόχων. Επίσης, στην περίπτωση των προβλημάτων ενός στόχου έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων με αυτά που προέκυψαν από έναν άλλο ΕΑ.

### 4.1 Προβλήματα ενός στόχου

#### 4.1.1 Συνάρτηση Σφαίρας

Η συνάρτηση σφαίρας αποτελεί ένα από τα πιο εύκολα προβλήματα βελτιστοποίησης. Ανήκει στην κατηγορία των κυρτών συναρτήσεων, γεγονός που εξασφαλίζει πως κάθε τοπικό ελάχιστο της αποτελεί και καθολικό ελάχιστο. Επίσης, μπορεί να οριστεί στο



Σχήμα 4.1: Συνάρτηση σφαίρας με δύο μεταβλητές

$n$ -διάστατο χώρο, σύμφωνα με τη σχέση

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (4.1)$$

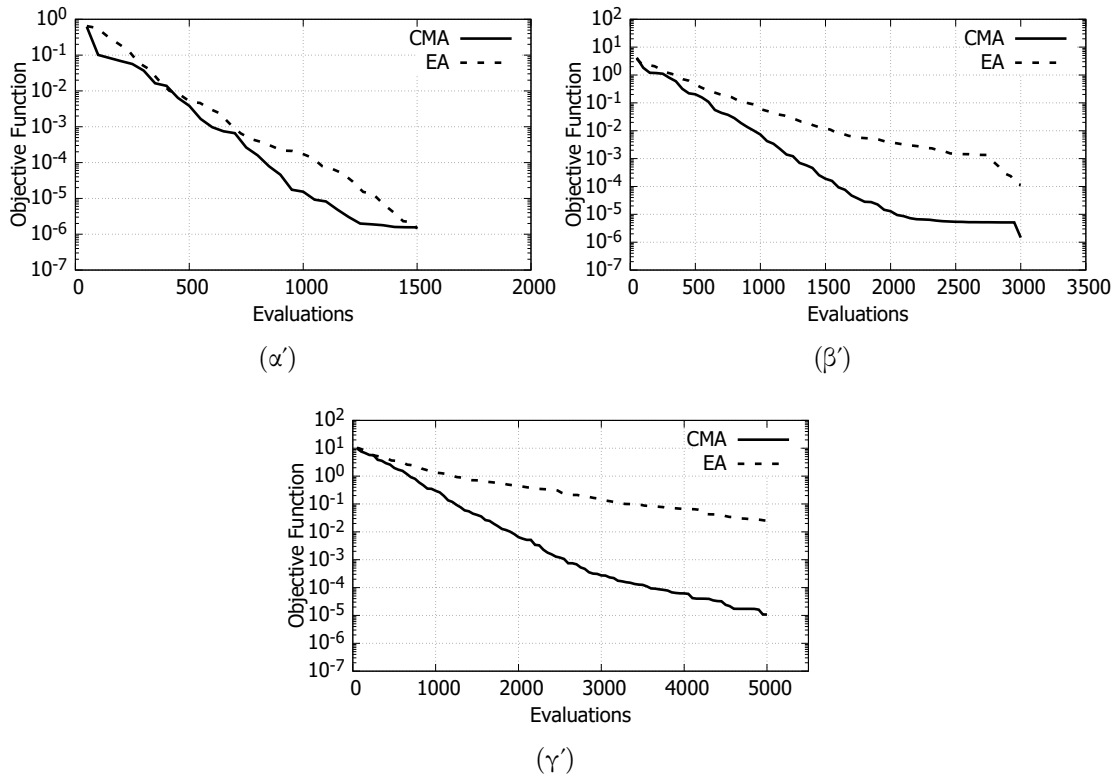
Παρατηρείται από το σχήμα 4.1 πως το ολικό ελάχιστο είναι το μηδέν και προκύπτει όταν και οι δύο μεταβλητές είναι ίσες με το μηδέν. Αντίστοιχα, το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης στον  $n$ -διάστατο χώρο δίνεται από τη σχέση

$$f(\vec{0}) = 0 \quad (4.2)$$

Η εφαρμογή του CMA σε αυτό πραγματοποιείται για να ελεγχθεί η ικανότητα του αλγορίθμου να επιλύει απλά προβλήματα και να συγκριθεί η απόδοσή του σε σχέση με τον EA. Καθώς η συνάρτηση σφαίρας ορίζεται για οποιοδήποτε αριθμό μεταβλητών, επιλέχθηκε να επιλυθούν τρία προβλήματα βελτιστοποίησης με διαφορετικό αριθμό μεταβλητών σχεδιασμού, ίσο με 5, 10 και 20 αντίστοιχα. Αξίζει να σημειωθεί πως για κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης πραγματοποιήθηκαν 7 μελέτες με διαφορετική αρχική τιμή της γεννήτριας τυχαίων αριθμών, ώστε να εξασφαλιστεί ότι το αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται από την αρχικοποίηση. Συγκεκριμένα, από τις 7 μελέτες δεν χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα της καλύτερης και της χειρότερης μελέτης και από τις υπόλοιπες 5 κατασκευάστηκε ένα μέσο διάγραμμα σύγκλισης. Ο αριθμός των απαιτούμενων αξιολογήσεων για την εύρεση του ολικού ελάχιστου είναι ανάλογος του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού και ορίστηκε ίσος με 1500, 3000 και 5000 αντίστοιχα. Τέλος, για να εκκινήσει η βελτιστοποίηση απαιτείται ο καθορισμός μερικών παραμέτρων, οι οποίες παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

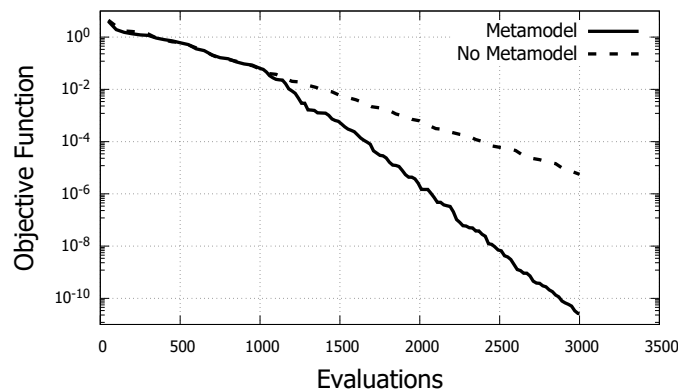
$\lambda$	50	$\mu$	20
Πιθανότητα μετάλλαξης	0.02	$\sigma_0$	1
Μέγεθος διαγωνισμού	3	Πιθανότητα διαγωνισμού	0.90

Το διάστημα ορισμού κάθε μεταβλητής σχεδιασμού είναι το  $[-5, 5]$ . Για να είναι δίκαια



**Σχήμα 4.2:** Αποτελέσματα από την επίλυση του προβλήματος Σφαίρας με τον αλγόριθμο CMA και έναν EA. Διαγράμματα σύγκλισης για (α) 5 μεταβλητές σχεδιασμού, (β) 10 μεταβλητές σχεδιασμού, (γ) 20 μεταβλητές σχεδιασμού (δ) Επίλυση προβλήματος Σφαίρας με τον αλγόριθμο CMA για 10 μεταβλητές σχεδιασμού με και χωρίς τη χρήση μεταπροτύπου.

η σύγκριση των αποτελεσμάτων από κάθε αλγόριθμο, ορίστηκαν στον EA οι ίδιες τιμές των παραμέτρων εξέλιξης με τον CMA.



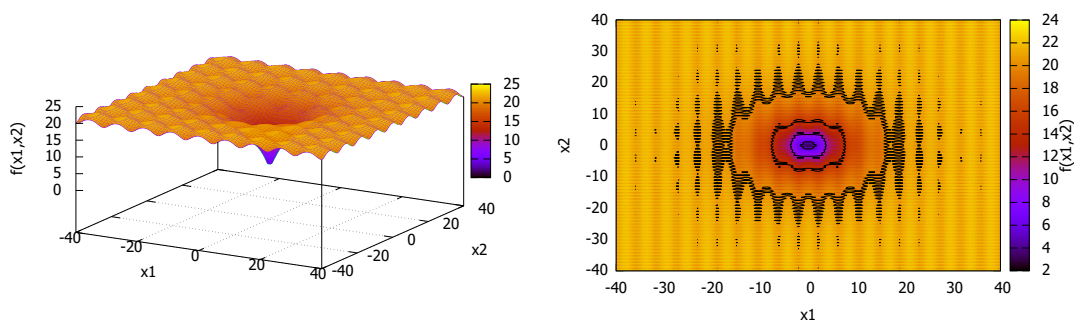
**Σχήμα 4.3:** Επίλυση προβλήματος Σφαίρας με τον αλγόριθμο CMA για 10 μεταβλητές σχεδιασμού με και χωρίς τη χρήση μεταπροτύπου.

Από τα διαγράμματα σύγκλισης παρατηρείται ότι ο CMA καταλήγει σε καλύτερη λύση από τον EA όσο αυξάνεται ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού. Το συμπέρασμα αυτό αποτελεί ένα σημαντικό πλεονέκτημα του CMA έναντι του EA, διότι στα πραγματικά προβλήματα βελτιστοποίησης ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού είναι συνήθως μεγάλος. Εφόσον έχει εξασφαλιστεί η ομαλή βασική λειτουργία του CMA, πραγματοποιήθηκε μία μελέτη με 10 μεταβλητές σχεδιασμού, η οποία επιλύεται από τον CMA υποβοηθούμενο από μεταπρότυπα. Στόχος αυτής της μελέτης είναι να μειωθεί ο απαιτούμενος αριθμός αξιολογήσεων για την εύρεση της βέλτιστης λύσης. Πράγματι, παρατηρείται στο σχήμα 4.3 ότι η χρήση του μεταπρότυπου οδηγεί στην εύρεση της βέλτιστης λύσης με σχεδόν τις μισές αξιολογήσεις σε σχέση με τη μελέτη που έγινε με τον CMA αλλά χωρίς μεταπρότυπο.

#### 4.1.2 Συνάρτηση Ackley

Η συνάρτηση Ackley αποτελεί μία συνήθη επιλογή για τον έλεγχο της απόδοσης ενός αλγορίθμου βελτιστοποίησης σε μη-κυρτή συνάρτηση. Στην διδιάστατη μορφή της χαρακτηρίζεται από μία επίπεδη εξωτερική περιοχή και ένα κοίλωμα στη μέση που περιέχει το ολικό ελάχιστο, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.4. Η τιμή της στον  $n$ -διάστατο χώρο υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση

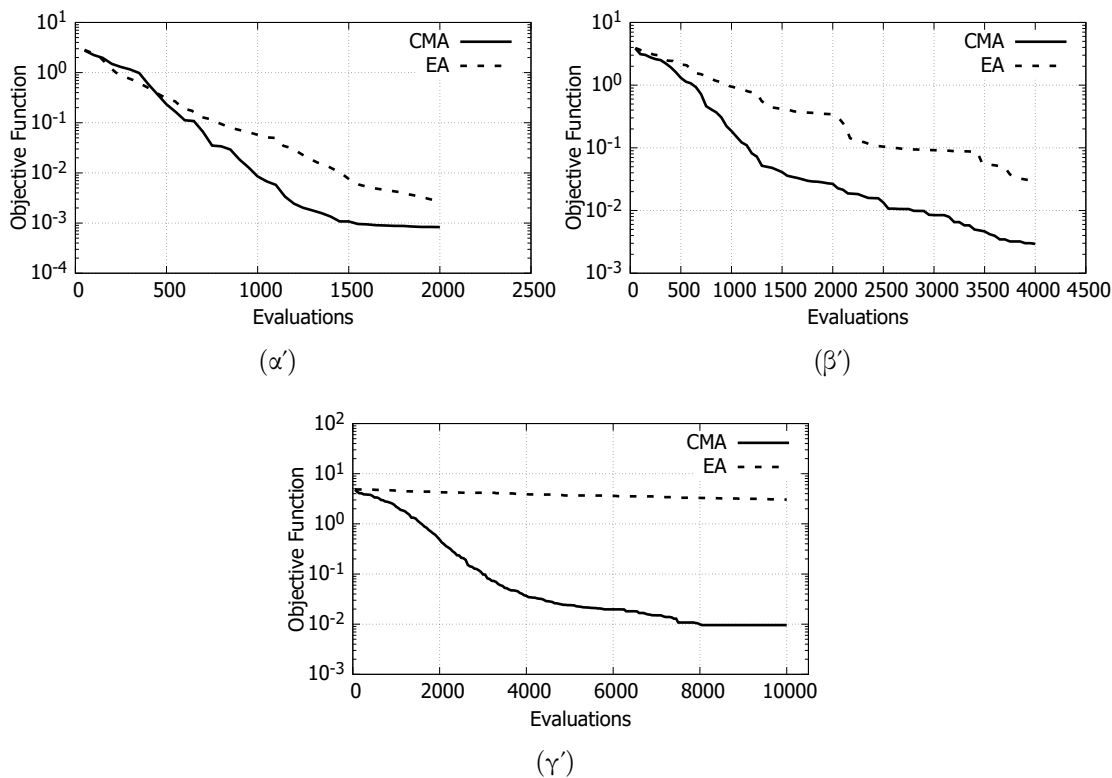
$$f(\vec{x}) = -20 \exp \left( -0.2 \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} \right) - \exp \left( -0.2 \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(2\pi x_i)} \right) + 20 + \exp(1) \quad (4.3)$$



Σχήμα 4.4: Συνάρτηση Ackley με δύο μεταβλητές

Όπως και στην περίπτωση της συνάρτησης Σφαίρας, πραγματοποιούνται 3 μελέτες με 5, 10 και 30 μεταβλητές σχεδιασμού αντίστοιχα και επαναλαμβάνονται 7 φορές η κάθε μία, με διαφορετική αρχική τιμή της γεννήτριας τυχαίων αριθμών. Το μέσο διάγραμμα σύγκλισης για κάθε πρόβλημα προκύπτει από τα αποτελέσματα των 5 από τις 7 μελέτες, καθώς έχουν αμεληθεί τα αποτελέσματα της καλύτερης και της χειρότερης μελέτης. Το

διάστημα ορισμού των μεταβλητών σχεδιασμού είναι το  $[-32, 32]$  και ο επιτρεπόμενος αριθμός αξιολογήσεων τέθηκε ίσος με 2000, 4000 και 10000 αντίστοιχα. Οι παράμετροι εξέλιξης που επιλέχθηκαν παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα και είναι οι ίδιες που χρησιμοποιούνται κατά την επίλυση των προβλημάτων με τον EA:



**Σχήμα 4.5:** Επίλυση προβλήματος Ackley με τον αλγόριθμο CMA και έναν EA. Διαγράμματα σύγκλισης του προβλήματος με (α) 5 μεταβλητές σχεδιασμού, (β) 10 μεταβλητές σχεδιασμού και (γ) 30 μεταβλητές σχεδιασμού

$\lambda$	50	$\mu$	20
Πιθανότητα μετάλλαξης	0.03	$\sigma_0$	1
Μέγεθος διαγωνισμού	3	Πιθανότητα διαγωνισμού	0.90

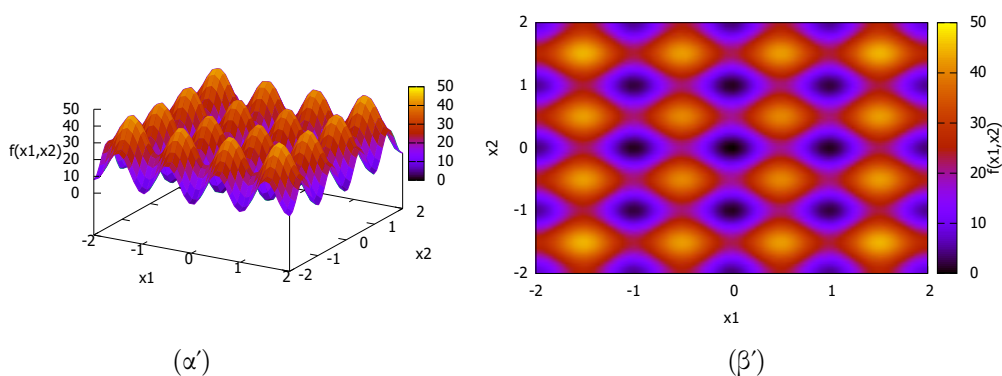
Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτό το πρόβλημα βελτιστοποίησης συμφωνούν με αυτά από τη μελέτη της συνάρτησης Σφαίρας. Συγκεκριμένα, στην συνάρτηση Ackley για 30 μεταβλητές σχεδιασμού παρατηρείται ακόμα μεγαλύτερη υπεροχή του αλγορίθμου CMA έναντι του EA.

### 4.1.3 Συνάρτηση Rastrigin

Η συνάρτηση Rastrigin είναι μία μη-κυρτή συνάρτηση, με μεγάλο αριθμό τοπικών ελαχίστων και κατά συνέπεια μεγάλη δυσκολία στην εύρεση βέλτιστης λύσης. Σε αντίθεση

με τη συνάρτηση Ackley, τα κοιλώματα της έχουν πολύ μεγαλύτερες κλίσεις, με αποτέλεσμα ένας ΕΑ να μπορεί να απεγκλωβιστεί μόνο αν έχει τη δυνατότητα να κάνει μεγάλες μεταβολές στα χαρακτηριστικά του πληθυσμού. Η τοπολογία της στο διδιάστατο χώρο, όπου γίνεται κατανοητή η κατάσταση γύρω από ένα τοπικό ελάχιστο, παρουσιάζεται στο σχήμα 4.6 και στον  $n$ -διάστατο χώρο η τιμή της υπολογίζεται από τη σχέση

$$f(\vec{x}) = 10n + \sum_{i=0}^{n-1} [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i)] \quad (4.4)$$

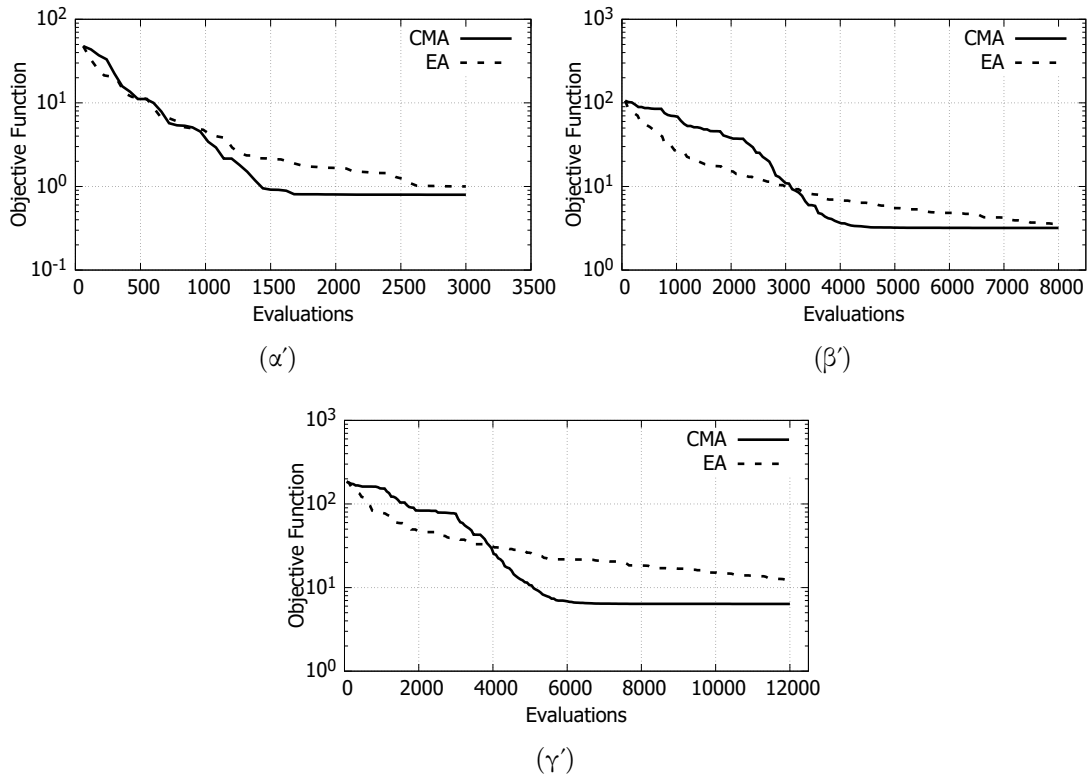


**Σχήμα 4.6:** Γραφική παράσταση συνάρτησης *Rastrigin* για 2 μεταβλητές

Το διάστημα ορισμού κάθε μεταβλητής σχεδιασμού είναι  $[-5.12, 5.12]$  και το πλήθος τους ορίζεται ίσο με 5, 10 και 15 αντίστοιχα. Όπως και στα προηγούμενα προβλήματα, πραγματοποιούνται 7 μελέτες για κάθε πρόβλημα και προκύπτει ένα μέσο διάγραμμα σύγκλισης από τις 5 μελέτες, στις οποίες δεν περιέχονται η καλύτερη και η χειρότερη που προέκυψαν. Για τη επίλυση αυτού του προβλήματος βελτιστοποίησης χρησιμοποιήθηκε η παράμετρος χαλάρωσης  $c_m$ , ώστε να περιοριστεί στις πρώτες γενιές ο ρυθμός μεταβολής της μέσης τιμής. Οι ρυθμίσεις που επιλέχθηκαν για τη βελτιστοποίηση είναι οι ίδιες για τον CMA και τον ΕΑ, αλλά διαφέρουν ανάλογα με το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού, για αυτό παρουσιάζονται ξεχωριστά στον παρακάτω πίνακα:

Μελέτη	1	2,3
$\lambda$	60	60
$\mu$	30	30
Πιθανότητα μετάλλαξης	0.05	0.05
$c_{m_0}$	0.50	0.50
Μέγεθος διαγωνισμού	3	3
Πιθανότητα διαγωνισμού	0.87	0.88

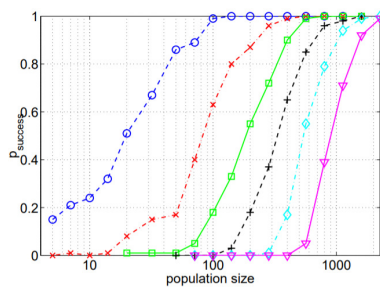
Παρατηρείται από τα διαγράμματα σύγκλισης, ότι ο CMA εξακολουθεί να βρίσκει καλύτερη λύση από τον ΕΑ, αλλά η διαφορά των δύο λύσεων έχει μειωθεί δραστικά.



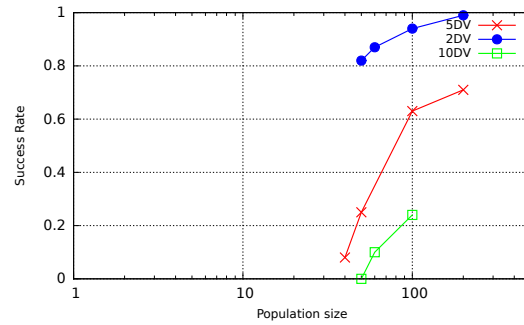
**Σχήμα 4.7:** Επίλυση προβλήματος Rastrigin με τον CMA και έναν EA. Διαγράμματα σύγκλισης του προβλήματος με (α) 5 μεταβλητές σχεδιασμού, (β) 10 μεταβλητές σχεδιασμού και (γ) 15 μεταβλητές σχεδιασμού

Επιπλέον, στο πρόβλημα με 5 μεταβλητές σχεδιασμού φαίνεται πως ο EA έχει εγκλωβιστεί στο τοπικό ακρότατο με τιμή 1, ενώ ο CMA κατάφερε να απεγκλωβιστεί. Αυτό, όμως, δεν έχει συμβεί στα προβλήματα με περισσότερες μεταβλητές σχεδιασμού από κανέναν από τους δύο αλγορίθμους. Σύμφωνα με την [15], όσον αφορά τον CMA, η εξασφάλιση του απεγκλωβισμού του αλγορίθμου από τα τοπικά ακρότατα εξαρτάται σημαντικά από το πλήθος των απογόνων. Στο σχήμα 4.8 παρουσιάζεται η παραμετρική μελέτη, για διαφορετικό αριθμό μεταβλητών σχεδιασμού και πλήθος απογόνων με στόχο την εύρεση του ποσοστού επιτυχίας του αλγορίθμου να βρει το ολικό ακρότατο σε κάθε περίπτωση.

Από την παραπάνω μελέτη συμπεραίνεται ότι το πλήθος των απογόνων που απαιτούνται για την εύρεση ολικού ελάχιστου είναι ανάλογος του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού. Συγκεκριμένα, παρατηρείται πως για να υπάρχει επιτυχία στο 95% των μελετών που θα πραγματοποιηθούν, πρέπει το πλήθος των απογόνων να είναι ίσο ή μεγαλύτερο του 100 για οποιοδήποτε πλήθος μεταβλητών σχεδιασμού. Αυτό δικαιολογείται για τον αλγόριθμο CMA, καθώς ο τρόπος με τον οποίο περιορίζει τον χώρο ανίχνευσης λύσεων σε κάθε γενιά εκμεταλλεύεται τα κοινά χαρακτηριστικά των απογόνων. Όσο πιο μεγάλος είναι ο πληθυσμός που εξετάζεται κάθε φορά, τόσο μεγαλύτερη ποικιλομορφία θα έχει το δείγμα από το οποίο κληροδοτούνται χαρακτηριστικά στην επόμενη γενιά



(α')



(β')

**Σχήμα 4.8:** (α) Ποσοστό επιτυχημένων δοκιμών συναρτήσει του  $\lambda$  :  $n = 2(\circ)$ ,  $n = 5(\times)$ ,  $n = 10(\square)$ ,  $n = 20(+)$ ,  $n = 40(\diamond)$ ,  $n = 80(\nabla)$ . Ως επιτυχημένες δοκιμές θεωρούνται αυτές που  $f_{obj} = 10^{-8}$  και ο μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων που τέθηκε είναι  $10^7$  [15]. (β) Ποσοστό επιτυχημένων δοκιμών συναρτήσει του  $\lambda$  :  $n = 2(\circ)$ ,  $n = 5(\times)$ ,  $n = 10(\square)$ . Ως επιτυχημένες δοκιμές θεωρούνται αυτές με  $f_{obj} \leq 0.1$ , καθώς έχει ξεπεραστεί το πιο μικρό τοπικό ακρότατο και εξαρτάται αποκλειστικά από τον αριθμό των μέγιστων αξιολογήσεων η ακρίβεια με την οποία θα βρεθεί το ολικό ακρότατο

και επομένως, θα μειώνεται η πιθανότητα εγκλωβισμού σε ένα από τα πολλά τοπικά ακρότατα της συνάρτησης. Η παραπάνω μελέτη πραγματοποιήθηκε με την παράμετρο χαλάρωσης  $c_m$  να έχει σταθερή τιμή και ίση με τη μονάδα. Έχοντας αναδείξει τη θετική επιρροή που έχει η μεταβολή της στην πορεία της σύγκλισης, θεωρήθηκε σημαντικό να γίνει η ίδια παραμετρική μελέτη λαμβάνοντας υπόψη τη μεταβολή της. Τα αποτελέσματα από τη χρήση της παραμέτρου  $c_m$  δείχνουν να υπάρχει μία αύξηση στο ποσοστό επιτυχίας, κυρίως στην περίπτωση των 10 μεταβλητών σχεδιασμού. Το γεγονός αυτό είναι ενθαρρυντικό και δικαιολογεί την επιλογή να χρησιμοποιηθεί στις μελέτες που πραγματοποιήθηκαν.

## 4.2 Προβλήματα πολλών στόχων

Για τον έλεγχο της συμπεριφοράς του αλγορίθμου CMA σε προβλήματα πολλών στόχων επιλέχθηκαν τα προβλήματα βελτιστοποίησης της [16], γνωστά και ως ZDT. Τα προβλήματα ZDT αποτελούν προβλήματα ελαχιστοποίησης δύο στόχων και ορίζονται για διαφορετικό αριθμό μεταβλητών σχεδιασμού. Για κάθε πρόβλημα ZDT, το μέτωπο των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων δίνεται από μία αναλυτική σχέση και έχει διαφορετικές ιδιότητες.



### 4.2.1 Πρόβλημα ZDT 1

Το πρόβλημα ZDT1 αποτελεί πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων και ορίζεται από τις σχέσεις

$$f_1(\vec{x}) = x_1 \quad (4.5\alpha')$$

$$f_2(\vec{x}) = g(\vec{x}) \left[ 1 - \sqrt{\frac{x_1}{g(\vec{x})}} \right] \quad (4.5\beta')$$

$$g(\vec{x}) = 1 + 9 \frac{\sum_{i=2}^n x_i}{n-1} \quad (4.5\gamma')$$

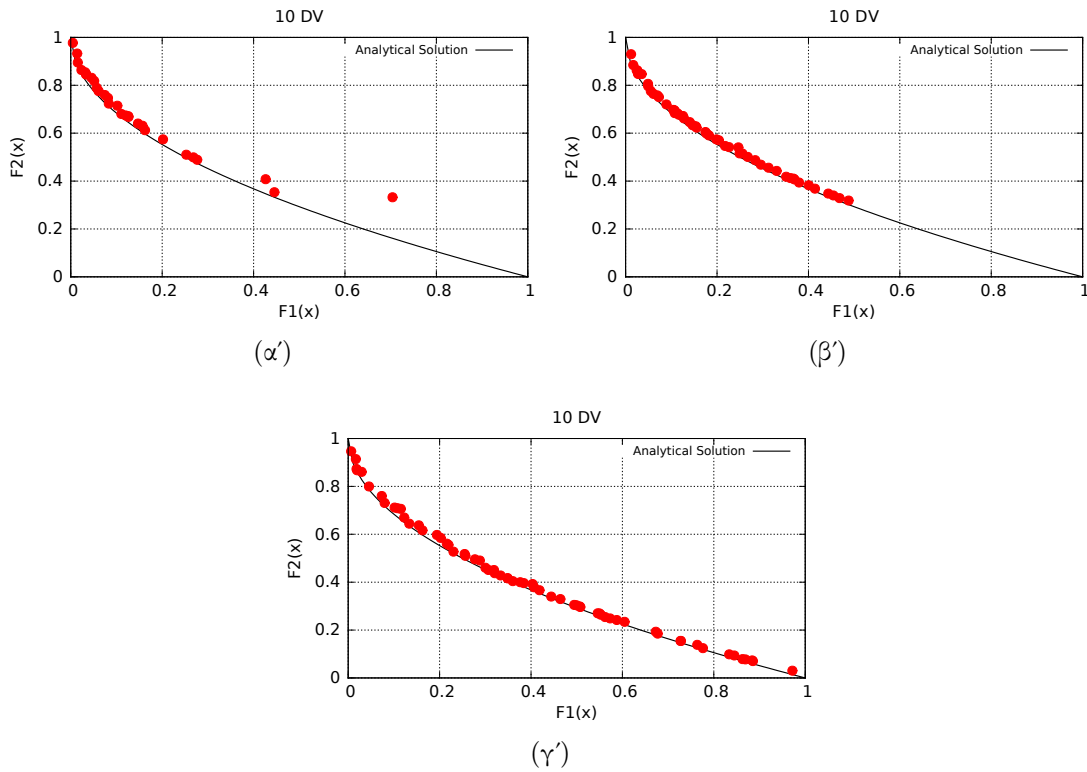
Το μέτωπο των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων είναι κυρτό και υπολογίζεται αναλυτικά από την εξίσωση

$$f(x) = 1 - \sqrt{x} \quad (4.6)$$

Γνωρίζοντας την αναλυτική λύση καθίσταται εφικτός ο έλεγχος της απόδοσης του αλγορίθμου CMA, εφόσον είναι γνωστός και ο ελάχιστος απαιτούμενος αριθμός αξιολογήσεων για να βρεθεί το μέτωπο Pareto. Για την επίλυση του προβλήματος ορίστηκαν οι παράμετροι εξέλιξης που παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Πιθανότητα μετάλλαξης	0.02	$\sigma_0$	3.0
Μέγεθος διαγωνισμού	3	Πιθανότητα διαγωνισμού	0.95

Το πρόβλημα επιλύθηκε για 10 και για 20 μεταβλητές σχεδιασμού, από 4 φορές το καθένα με διαφορετική αρχική τιμή της γεννήτριας τυχαίων αριθμών, ώστε το μέτωπο Pareto να προκύψει από το συνδυασμό τους και ο μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων επιλέχθηκε ίσος με 10000 και 15000, όπως αναφέρεται στην [17]. Επίσης, δοκιμάστηκαν διαφορετικά  $\lambda$  για να διαπιστωθεί αν το εύρος των λύσεων που βρίσκει ο αλγόριθμος εξαρτάται από το πλήθος των απογόνων. Παρατηρείται στην περίπτωση των 10 μεταβλητών σχεδιασμού, ότι μόνο με  $\lambda = 100$  βρίσκονται λύσεις σε όλο το εύρος του μετώπου, ενώ για μικρότερα  $\lambda$  τα σημεία βρίσκονται πάνω στην αναλυτική λύση αλλά μόνο σε ένα τμήμα της. Αντιθέτως, για τις 20 μεταβλητές σχεδιασμού για  $\lambda \leq 100$  φαίνεται πως δεν είναι όλες οι λύσεις πάνω στο πραγματικό μέτωπο αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις πολύ πιο πάνω. Για  $\lambda = 100$  φαίνεται να αντιμετωπίζεται αυτό για τις περισσότερες λύσεις και ταυτόχρονα αυτές κατανομούνται σχεδόν σε όλο το μέτωπο.



**Σχήμα 4.9:** Μέτωπο κατά Pareto βέλτιστων λύσεων που προέκυψε από 4 επιλύσεις του προβλήματος ZDT1 για 10 μεταβλητές σχεδιασμού. Οι διαφορετικοί πληθυσμοί που επιλέχθηκαν για κάθε μελέτη είναι (α)  $(\mu, \lambda) = (10, 30)$ , (β)  $(\mu, \lambda) = (20, 50)$  και (γ)  $(\mu, \lambda) = (50, 100)$

#### 4.2.2 Πρόβλημα ZDT 2

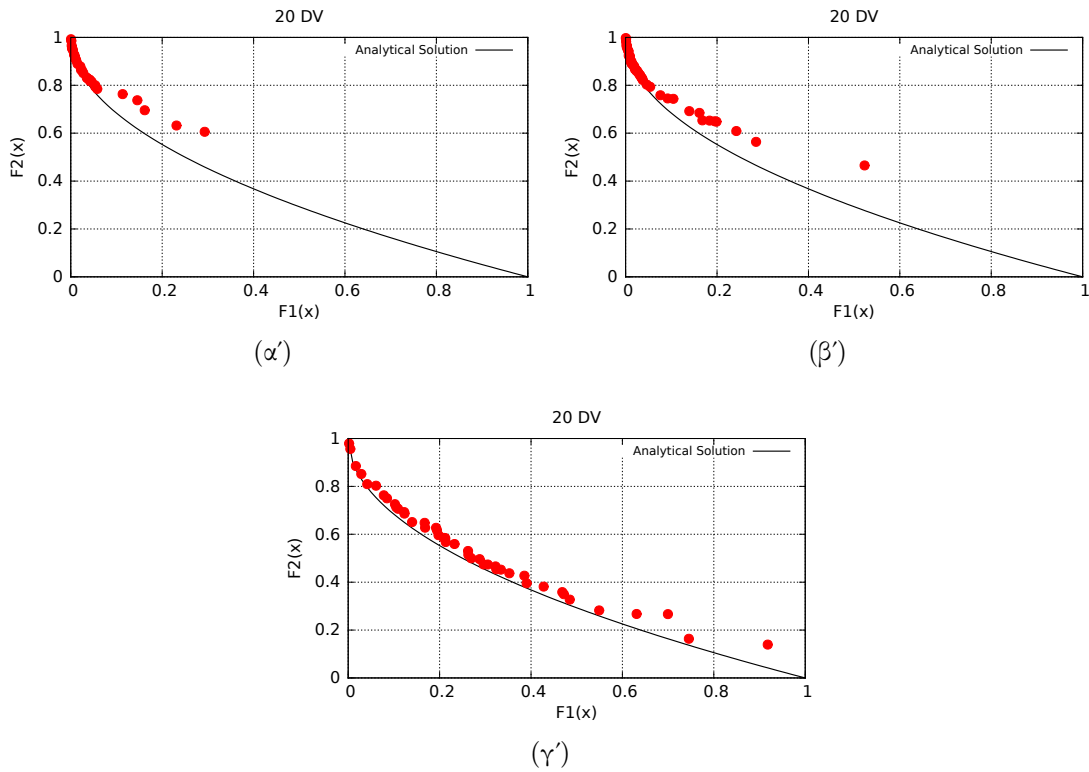
Το πρόβλημα ZDT2 είναι ένα πιο δύσκολο πρόβλημα βελτιστοποίησης δύο στόχων, καθώς το μέτωπο των κατά Pareto είναι κοίλο. Οι συναρτήσεις στόχου υπολογίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις

$$f_1(\vec{x}) = x_1 \tag{4.7\alpha'}$$

$$f_2(\vec{x}) = g(\vec{x}) \left[ 1 - \frac{x_1}{g(\vec{x})} \right]^2 \tag{4.7\beta'}$$

$$g(\vec{x}) = 1 + 9 \frac{\sum_{i=2}^n x_i}{n-1} \tag{4.7\gamma'}$$

Η επίλυσή του έγινε για 10 μεταβλητές σχεδιασμού. Όπως και στο πρόβλημα ZDT1, το πρόβλημα επιλύθηκε 4 φορές και το τελικό μέτωπο Pareto προκύπτει από το συνδυασμό



**Σχήμα 4.10:** Μέτωπο κατά Pareto βέλτιστων λύσεων που προέκυψε από 4 επιλύσεις του προβλήματος ZDT1 για 20 μεταβλητές σχεδιασμού. Οι διαφορετικοί πληθυσμοί που επιλέχθηκαν για κάθε μελέτη είναι (α)  $(\mu, \lambda) = (10, 30)$ , (β)  $(\mu, \lambda) = (20, 50)$  και (γ)  $(\mu, \lambda) = (50, 100)$

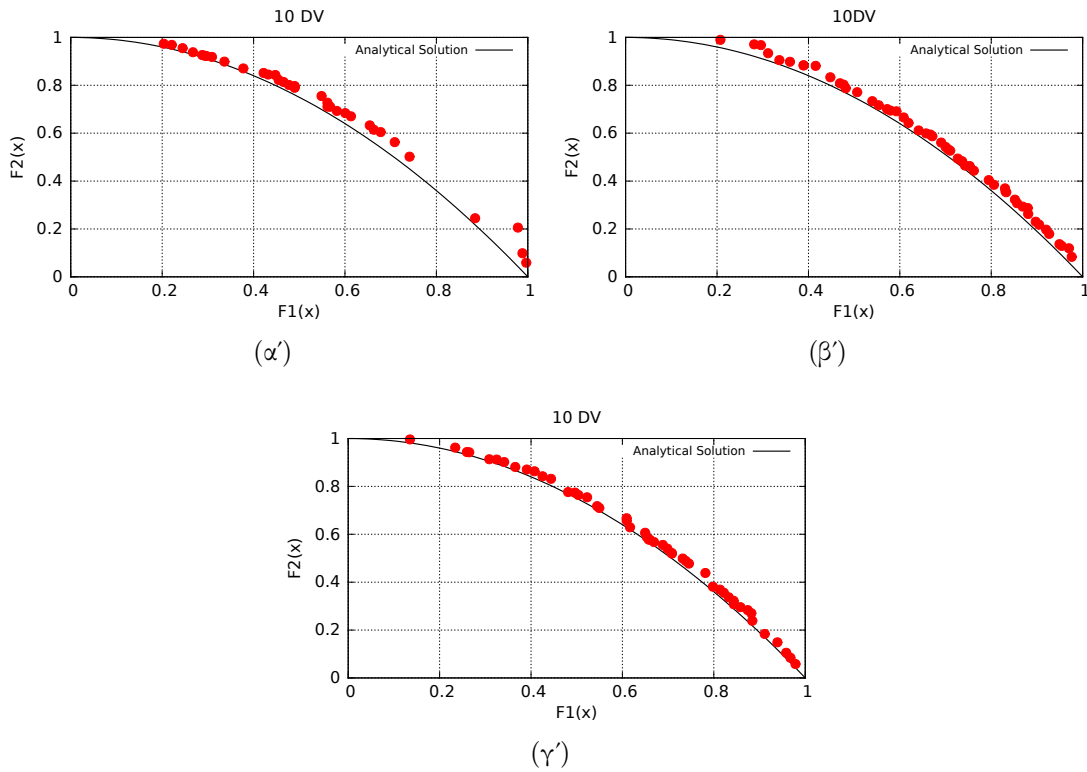
τους. Ο μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων τέθηκε ίσος με 10000 και οι λοιπές παράμετροι επιλέχθηκαν ως εξής

Πιθανότητα μετάλλαξης	0.03	$\sigma_0$	5.0
Μέγεθος διαγωνισμού	3	Πιθανότητα διαγωνισμού	0.95

Παρατηρείται πως η επιλογή  $\lambda \geq 50$  είναι επαρκής, ώστε οι λύσεις να βρίσκονται κατά μήκος όλου του μετώπου ενώ με  $\lambda = 100$  επιτυγχάνεται μεγαλύτερη ακρίβεια, καθώς οι λύσεις βρίσκονται οριακά πάνω στην αναλυτική λύση.

### 4.2.3 Πρόβλημα ZDT 3

Το τελευταίο πρόβλημα που επιλέχθηκε να μελετηθεί είναι το ZDT3, καθώς διαφέρει σημαντικά από τα προηγούμενα λόγω του ότι το μέτωπο Pareto δεν είναι συνεχές. Στο σχήμα 4.12 απεικονίζεται η αναλυτική λύση αυτού του προβλήματος αλλά οι κατά Pareto βέλτιστες λύσεις βρίσκονται μόνο στα κυρτά μέρη της γραφικής παράστασης. Η ασυνέχεια του μετώπου δημιουργεί μια επιπλέον δυσκολία για τον αλγόριθμο, διότι



**Σχήμα 4.11:** Μέτωπο κατά Pareto βέλτιστων λύσεων προβλήματος ZDT2 για 10 μεταβλητές σχεδιασμού, που προέκυψε από 4 μελέτες. Οι πληθυσμοί που εξετάστηκαν σε κάθε περίπτωση είναι (α)  $(\mu,\lambda)=(15,40)$ , (β)  $(\mu,\lambda)=(30,60)$  και (γ)  $(\mu,\lambda)=(40,100)$

πρέπει να διατηρεί αρκετά μεγάλο το εύρος της κανονικής κατανομής για πολλές γενιές ώστε να καταλήξει να βρει σημεία σε όλα τα τμήματα. Βασιζόμενοι στα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προηγούμενες μελέτες επιλέχθηκε μεγάλο πλήθος απογόνων για αυτό το σκοπό. Οι τιμές των συναρτήσεων στόχου δίνονται από τις σχέσεις

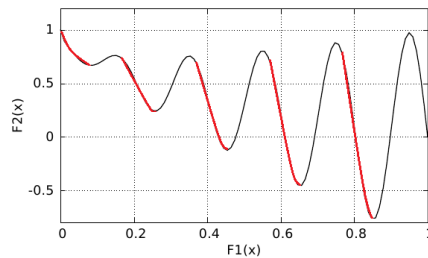
$$f_1(\vec{x}) = x_1 \quad (4.8\alpha')$$

$$f_2(\vec{x}) = g(\vec{x}) \left[ 1 - \sqrt{\frac{x_1}{g(\vec{x})}} - \frac{x_1}{g(\vec{x})} \sin(10\pi x_1) \right] \quad (4.8\beta')$$

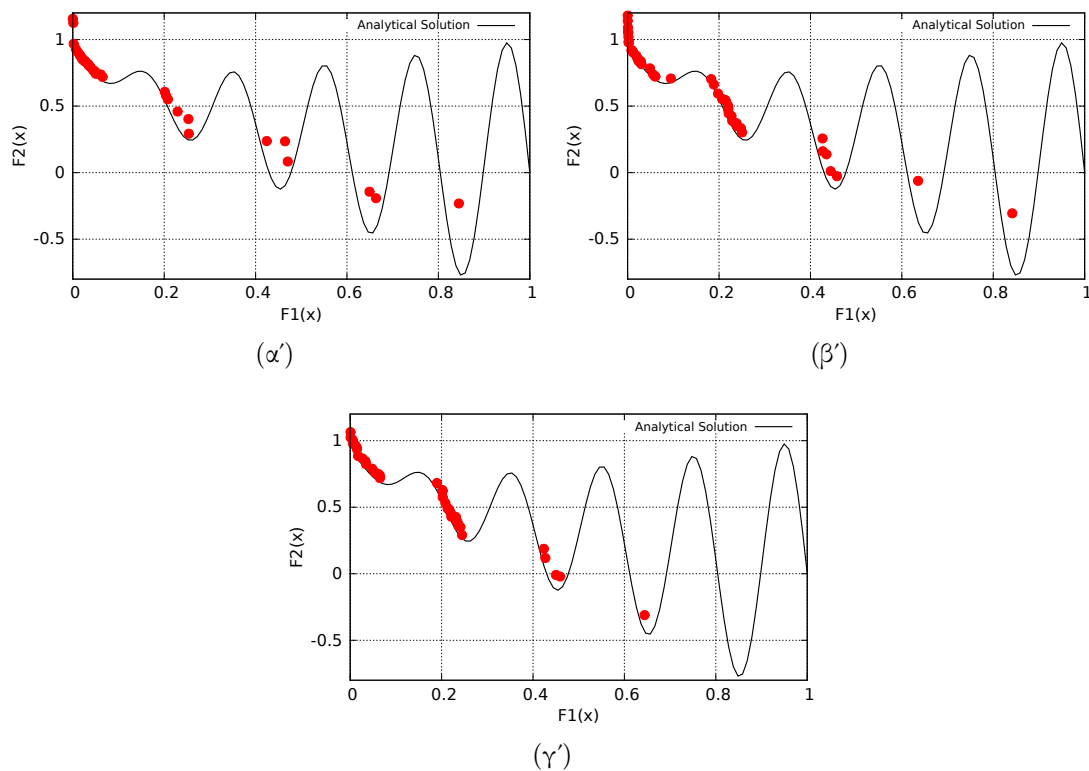
$$g(\vec{x}) = 1 + 9 \frac{\sum_{i=2}^n x_i}{n-1} \quad (4.8\gamma')$$

Το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού για το οποίο επιλύθηκε είναι ίσο με 10. Όπως και στα προηγούμενα προβλήματα, πραγματοποιήθηκαν 4 μελέτες και δοκιμάστηκαν 3 διαφορετικές τιμές  $(\mu,\lambda)$ . Ο μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων ίσος με 10000. Οι υπόλοιπες παράμετροι παρουσιάζονται στον πίνακα

Πιθανότητα μετάλλαξης	0.02	$\sigma_0$	8.0
Μέγεθος διαγωνισμού	3	Πιθανότητα διαγωνισμού	0.95



Σχήμα 4.12: Μέτωπο κατά Pareto βέλτιστων λύσεων



Σχήμα 4.13: Μέτωπο κατά Pareto βέλτιστων λύσεων του προβλήματος ZDT3 με (α)  $(\mu, \lambda) = (10, 30)$ , (β)  $(\mu, \lambda) = (20, 50)$  και (γ)  $(\mu, \lambda) = (50, 100)$

Η επιλογή μεγάλου αρχικού  $\sigma$  έγινε ώστε να γίνει με αργό ρυθμό η μείωση του εύρους της κατανομής της μέσης τιμής. Από τα αποτελέσματα (σχήμα 4.13), παρατηρείται πως ακόμα και με  $\lambda = 100$  υπάρχει ένα τμήμα του μετώπου Pareto στο οποίο δεν έχουν βρεθεί λύσεις. Για μικρότερα  $\lambda$  φαίνεται πως ο αλγόριθμος δεν μπορεί να βρει τις ακριβείς βέλτιστες λύσεις σε ορισμένα τμήματα του μετώπου.

### 4.3 Αξιολόγηση απόδοσης μεθόδου CMA

Στις παραπάνω παραγράφους, εξετάστηκε η απόδοση της μεθόδου CMA σε συνδυασμό με τα νέα χαρακτηριστικά που προστέθηκαν, σε προβλήματα ενός και δύο στόχων. Στην πρώτη κατηγορία, προέκυψε το συμπέρασμα ότι μπορεί να επιλύσει ικανοποιητικά διάφορους τύπους προβλημάτων βάσει της συνάρτησης στόχου. Συγκεκριμένα, στο πρόβλημα της Σφαίρας και στο πρόβλημα Ackley φαίνεται να ξεπερνάει σε απόδοση τον EA με τον οποίο συγκρίθηκε, για διάφορα πλήθη μεταβλητών σχεδιασμού. Όσο μεγαλύτερο ήταν αυτό, η διαφορά της βέλτιστης τιμής που βρίσκουν ο CMA και ο EA φαίνεται να αυξάνεται. Όσον αφορά το πρόβλημα Rastrigin, συμπεραίνεται ότι και οι δύο αλγόριθμοι αντιμετωπίζουν δυσκολία στην εύρεση του ολικού ακρότατου και στην περίπτωση των προβλημάτων με παραπάνω από 5 μεταβλητές σχεδιασμού τα αποτελέσματα δείχνουν ότι γίνεται εγκλωβισμός σε κάποιο τοπικό ακρότατο. Η μεταβολή των παραμέτρων χαλάρωσης φαίνεται να έχει θετική επιρροή στην πορεία της εξέλιξης, οδηγώντας τον CMA σε μικρότερες τιμές από αυτές που φτάνει ο EA, αλλά εξακολουθεί να μην είναι αρκετό ώστε να εξασφαλίζεται η εύρεση του ολικού ακρότατου.

Στα προβλήματα δύο στόχων, η μέθοδος CMA μαζί με τη μέθοδο SPEA II οδήγησαν στην εύρεση κατά Pareto βέλτιστων λύσεων σε όλες τις περιπτώσεις. Όμως, από τα αποτελέσματα συμπεραίνεται ότι έχει καθοριστικό ρόλο το μέγεθος του πληθυσμού που επιλέγεται από το χρήστη, στην εύρεση λύσεων σε όλο το εύρος του μετώπου. Ιδιαίτερα στην περίπτωση του προβλήματος ZDT3, που το μέτωπο Pareto δεν είναι συνεχές, φαίνεται ότι ακόμα και για μεγάλο  $\lambda$  δεν εξασφαλίζεται η εύρεση λύσεων σε ορισμένα τμήματα. Ενδεχομένως, η αύξηση του μέγιστου αριθμού αξιολογήσεων να βοηθούσε σε αυτήν την περίπτωση, αλλά τότε δεν θα υπήρχε νόημα σύγκρισης με άλλους αλγόριθμους.

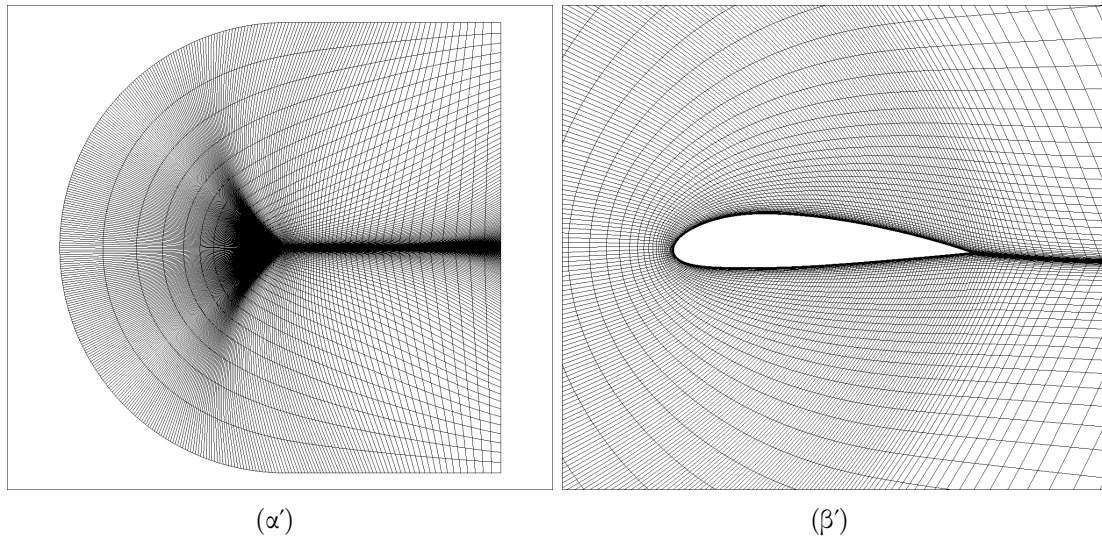
# Κεφάλαιο 5

## Βελτιστοποίηση στην Αεροδυναμική

Η βελτιστοποίηση στην αεροδυναμική απαιτεί την επίλυση των εξισώσεων ροής, για τον υπολογισμό των επιθυμητών αεροδυναμικών χαρακτηριστικών που θα επιλεγθούν ως στόχοι ή περιορισμοί. Στις αεροδυναμικές μελέτες που ακολουθούν έγινε επίλυση των εξισώσεων Reynolds-Averaged-Navier-Stokes (RANS), για μόνιμη και συμπιεστή ροή και όσον αφορά τη μοντελοποίηση της τύρβης έγινε χρήση του μοντέλου μίας εξίσωσης Spalart-Allmaras[18]. Για την επίλυσή τους έγινε χρήση του λογισμικού PUMA (Parallel solver, for Unstructured grids, for Mult-blade row computations, including Adjoint), που αναπτύχθηκε στη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του ΕΜΠ (ΜΠΥΡΒ/ΕΜΠ) [19],[20],[21],[22]. Σε όλες τις μελέτες που πραγματοποιήθηκαν, χρησιμοποιήθηκε η έκδοση του PUMA που εκτελείται σε επεξεργαστές κάρτες γραφικών NVIDIA-GPUs, η χρήση της οποίας μειώνει κατά πολύ τον απαιτούμενο χρόνο για την επίλυση των RANS.

### 5.1 Υπολογιστικό Πλέγμα

Η ποιότητα και ο τύπος των υπολογιστικών πλεγμάτων που χρησιμοποιούνται για την επίλυση αεροδυναμικών προβλημάτων καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό την ταχύτητα και την ακρίβεια με την οποία βρίσκεται η λύση. Για το λόγο αυτό ορίζονται συγκεκριμένες απαιτήσεις για το υπολογιστικό πλέγμα που θα χρησιμοποιηθεί ανάλογα με τον τύπο προβλήματος που επιλύεται. Όσον αφορά τον τύπο των πλεγμάτων, υπάρχουν τρεις κατηγορίες, τα δομημένα, τα μη-δομημένα και τα υβριδικά πλέγματα. Ως δομημένα πλέγματα θεωρούνται αυτά που μετασχηματίζονται σε ένα κανονικό σχήμα στο μετασχηματισμένο χωρίο με απόλυτη δομή και μπορούν να παραστούν με αρίθμηση



**Σχήμα 5.1:** Υπολογιστικό πλέγμα γύρω από αεροτομή. (α) Ολόκληρο υπολογιστικό πλέγμα (β) Υπολογιστικό πλέγμα πολύ κοντά στην αεροτομή. Παρατηρείται ότι κοντά στα στερεά τοιχώματα είναι πολύ πυκνό ώστε να υπολογιστεί με επαρκή ακρίβεια το οριακό στρώμα

τύπου  $(i, j, k)$ . Αντιθέτως, τα μη-δομημένα πλέγματα δεν παριστάνονται με το κανονικό τρόπο  $(i, j, k)$  αλλά με κατάλληλα μητρώα συσχέτισης γειτονικών κυψελών. Τα δομημένα πλέγματα είναι περισσότερο διαδομένα, λόγω της υψηλής ακρίβειας αλλά και του μικρότερου υπολογιστικού χρόνου που απαιτείται για τη διαχείρισή τους. Όμως, εξαιτίας της αυξανόμενης υπολογιστικής δύναμης που διαθέτουν σήμερα οι σύγχρονοι επεξεργαστές, αρχίζει να γίνεται περισσότερο διαδομένη η χρήση των μη-δομημένων πλεγμάτων, κυρίως εξαιτίας της μεγάλης ευελιξίας που διαθέτουν για τη γένεση πλέγματος για πολύπλοκες γεωμετρίες. Για να αξιοποιηθούν τα θετικά των δύο κατηγοριών, αναπτύχθηκε ένας νέος τύπος πλεγμάτων, τα υβριδικά. Αυτά αποτελούνται από τμήματα όπου το πλέγμα είναι δομημένο, διότι εκεί είναι απαραίτητη η υψηλή ακρίβεια στους υπολογισμούς, όπως στην περίπτωση των οριακών στρωμάτων, και από άλλα που είναι μη-δομημένο, όπως για παράδειγμα στις περιοχές που η ροή είναι ομοιόμορφη. Ο επιλύτης PUMA χειρίζεται μη-δομημένα πλέγματα. Όμως, λόγω της μεγαλύτερης ευκολίας να κατασκευαστεί ένα δομημένο πλέγμα, για τις μελέτες που ακολουθούν δημιουργήθηκε ένα διδιάστατο δομημένο πλέγμα τύπου C, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1, αλλά η διαχείριση του από τον PUMA έγινε ως μη-δομημένο, το οποίο αποτελείται μόνο από τετράπλευρα.

Η ποιότητα του πλέγματος είναι εξίσου σημαντική για την ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Αυτή καθορίζεται από την πυκνότητα των πλεγματικών γραμμών, καθώς όσο μεγαλύτερη είναι αυτή τόσο υψηλότερης ακρίβειας είναι τα αποτελέσματα. Τα τμήματα όπου απαιτείται αρκετά πυκνό πλέγμα, είναι αυτά στα οποία λαμβάνουν χώρα μεγάλες μεταβολές των μεγεθών, όπως είναι η περίπτωση του οριακού στρώματος. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.1(β), κοντά στην αεροτομή οι πλεγματικές γραμμές βρίσκονται πολύ κοντά



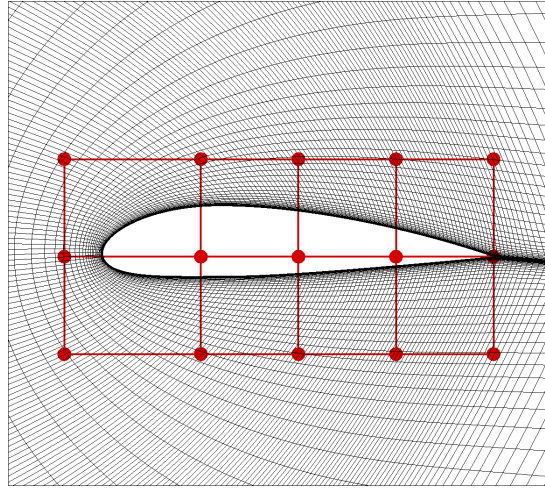
μεταξύ τους και έτσι είναι εφικτός ο ακριβής υπολογισμός των κλίσεων της ταχύτητας και της πίεσης. Ένα μέγεθος που ορίζεται για να καθορισθεί ποσοτικά η ποιότητα του πλέγματος, είναι η απόσταση από το στερεό όριο του κοντινότερου κόμβου σε αυτό ( $y^+$ ). Η τιμή για την οποία το πλέγμα είναι επαρκώς πυκνό, ώστε να είναι ακριβής ο υπολογισμός του οριακού στρώματος, καθορίζεται από το μοντέλο τύρβης που χρησιμοποιείται. Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι στο λογισμικό PUMA η αποθήκευση των μεγεθών της ροής είναι κεντροκομβική (vertex-centered) και επομένως, το υπολογιστικό κόστος επίλυσης των εξισώσεων είναι ανάλογο του αριθμού των κόμβων του πλέγματος. Σημειώνεται ότι το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε αποτελείται από 59696 κόμβους.

## 5.2 Παραμετροποίηση αεροτομής

Σε αυτήν την εργασία, όλα τα αεροδυναμικά προβλήματα βελτιστοποίησης που μελετήθηκαν αφορούν τη βελτιστοποίηση μορφής μεμονωμένης (Isolated) αεροτομής. Ο στόχος σε αυτά είναι να μεταβληθεί η γεωμετρία της εξεταζόμενης αεροτομής με τέτοιο τρόπο ώστε να αλλάξουν τα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά της για δεδομένες συνθήκες ροής. Καθώς είναι αδύνατο να τεθούν ως μεταβλητές σχεδιασμού οι συντεταγμένες όλων των κόμβων της αεροτομής, διότι συνεπάγεται υψηλό υπολογιστικό κόστος για την εύρεση της βέλτιστης λύσης, επιλέγεται να γίνει παραμετροποίησή της. Μέσω αυτής της διαδικασίας γίνεται μία σύνδεση των πραγματικών κόμβων της αεροτομής με νέους, οι οποίοι θα ονομάζονται κόμβοι ελέγχου (**Control Points**). Αυτοί έχουν την ιδιότητα να ελέγχουν πλήρως τη γεωμετρία της αεροτομής ενώ το πλήθος τους είναι σημαντικά μικρότερο από αυτό των πραγματικών κόμβων. Ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνεται αυτή η συσχέτιση βασίζεται σε ορισμένες συναρτήσεις που μπορούν να μετατρέψουν τη μετακίνηση ενός CP σε μεταβολή ενός τμήματος της γεωμετρίας της αεροτομής. Η μέθοδος που εφαρμόστηκε στις ακόλουθες μελέτες ανήκει στην κατηγορία μεθόδων ελεύθερης μορφοποίησης χώρου και βασίζεται σε τριπαραμετρικούς όγκους **Non Uniform Rational B-Spline (NURBS)**, και ονομάζεται μέθοδος ογκομετρικών NURBS. Αυτή χρησιμοποιείται για την παραμετροποίηση του περιγράμματος της εξεταζόμενης αεροτομής, καθώς και του περιβάλλοντος σε αυτήν υπολογιστικού πλέγματος που εμπεριέχεται στον όγκο NURBS. Ένα παράδειγμα παραμετροποίησης αεροτομής με NURBS παρουσιάζεται στο σχήμα 5.2.

## 5.3 Εξισώσεις RANS για συμπιεστό ρευστό

Οι εξισώσεις RANS για συμπιεστό ρευστό στον τριδιάστατο χώρο αποτελούνται από την εξίσωση συνέχειας, τις εξισώσεις διατήρησης της ορμής κατά τη  $x$ , την  $y$  και τη  $z$  κατεύθυνση και τη διατήρηση ενέργειας, και συνοψίζονται σε διανυσματική μορφή στη



(α')

**Σχήμα 5.2:** Παραμετροποίηση αεροτομής και περιβάλλοντος υπολογιστικού πλέγματος με τη μέθοδο ογκομετρικών *NURBS*

σχέση

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_k^{inv}}{\partial x_k} - \frac{\partial \vec{f}_k^{vis}}{\partial x_k} = 0 \quad (5.1)$$

Η διανυσματική ποσότητα  $\vec{U}$  αποτελείται από τις εξαρτημένες μεταβλητές του προβλήματος, δηλαδή την πυκνότητα  $\rho$  του ρευστού, τις τρεις συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας  $(u_1, u_2, u_3)$  και την ολική ενέργεια ανά μονάδα μάζας  $E$

$$\vec{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E) \quad (5.2)$$

Τα διανύσματα  $\vec{f}_k^{inv}$  και  $\vec{f}_k^{vis}$  των μη-συνεκτικών και των συνεκτικών ροών

$$\vec{f}_k^{inv} = \begin{bmatrix} \rho u_k \\ \rho u_1 u_k + p \delta_{1k} \\ \rho u_2 u_k + p \delta_{2k} \\ \rho u_3 u_k + p \delta_{3k} \\ \rho u_k (E_t + p) \end{bmatrix}, \quad \vec{f}_k^{vis} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{1k} \\ \tau_{2k} \\ \tau_{3k} \\ u_1 \tau_{1k} + q_k \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

όπου το  $\delta_{nk}$  είναι το σύμβολο Kronecker,  $E_t = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho u^2$  η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου,  $q_k$  οι συνιστώσες της παροχής θερμότητας και  $\tau_{ik}$  οι συνεκτικές και τυρβώδεις τάσεις. Για νευτώνια ρευστά κάθε συνιστώσα του ταυνοστή των συνεκτικών τάσεων

ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση

$$\tau_{ij} = \frac{\mu + \mu_t}{Re} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (5.4)$$

Οι συνιστώσες της παροχής θερμότητας δίνονται από τη σχέση

$$q_k = \frac{C_p}{Re} \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_k} \quad (5.5)$$

όπου  $C_p$  είναι η ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση. Από την εφαρμογή του μοντέλου τύρβης εισάγεται μία επιπλέον διαφορική εξίσωση που πρέπει να επιλυθεί, μέσω της οποίας υπολογίζεται το μέγεθος  $\tilde{\nu}$  που θα οδηγήσει στον υπολογισμό της τυρβώδους συνεκτικότητας  $\mu_t$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\tilde{\nu})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\tilde{\nu}u_k)}{\partial x_k} = \frac{\rho}{Re\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ (\tilde{\nu} + \nu) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \right] + c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \right\} \\ + \rho c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\nu} - \frac{\rho}{Re} \left( c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \left( \frac{\tilde{\nu}}{\Delta} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

όπου  $\Delta$  η απόσταση κάθε σημείου από το κοντινότερο στερεό όριο. Η τυρβώδης συνεκτικότητα υπολογίζεται από τη σχέση

$$\mu_t = \rho \tilde{\nu} f_{w1} \quad (5.7)$$

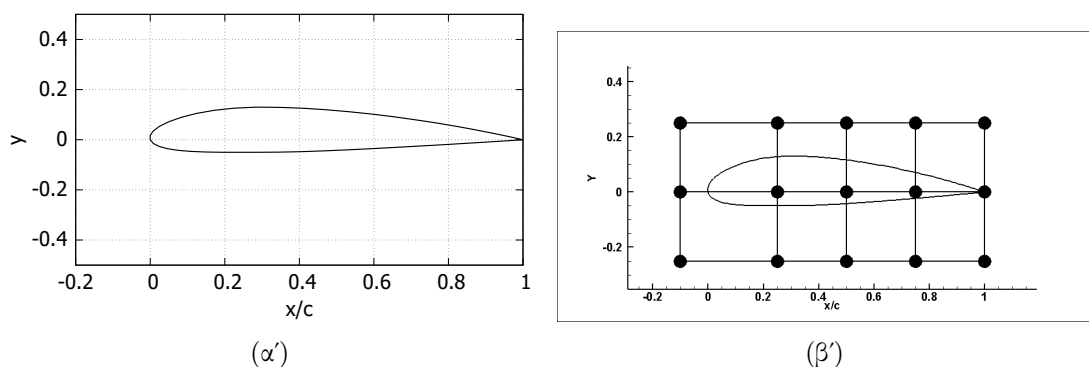
Ακολουθούν οι ορισμοί που συνοδεύουν την εξίσωση (5.6)

$$\begin{aligned} \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, f_{u2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{u1}}, S = \sqrt{\varepsilon_{klm} \varepsilon_{kqr} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \frac{\partial u_r}{\partial x_q}} \\ \tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu} f_{u2}}{Re \tilde{S} \kappa^2 \Delta^2}, f_w = g \left( \frac{1 + c_w 3^2}{g^6 + c_w 3^2} \right)^{\frac{1}{3}}, g = r + c_{w2} (r^6 - r), \\ r = \min \left( 10, \frac{\tilde{\nu}}{Re_0 \tilde{S} \kappa^2 \Delta^2} \right), \tilde{\mu} = \rho \tilde{\nu}, f_{t2} = c_{t3} e^{c_{t4} \chi^2}, \\ c_{v1} = 7.1, c_{b1} = 0.1355, c_{b2} = 0.622, c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}, \\ c_{w2} = 0.3, c_{w3} = 2.0, \sigma = \frac{2}{3}, \kappa = 0.41, c_{t3} = 1.2, c_{t4} = 0.5 \end{aligned}$$

Για τη διακριτοποίηση κάθε όρου των εξισώσεων χρησιμοποιείται η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων. Όσον αφορά το χρονικό όρο, εφόσον η ροή θεωρείται μόνιμη, γίνεται αντικατάσταση του με ψευδο-χρονική παράγωγο. Έπειτα, σε κάθε ψευδο-χρονικό βήμα γίνεται διακριτοποίηση των εξισώσεων και διόρθωση των μεγεθών της ροής για το επόμενο ψευδο-χρονικό βήμα. Όταν υπάρξει σύγκλιση των εξισώσεων, η ψευδο-χρονική παράγωγος μηδενίζεται και έτσι προκύπτει η λύση των εξισώσεων μόνιμης ροής. Τέλος, σημειώνεται ότι για όλες τις μελέτες που πραγματοποιήθηκαν, χρησιμοποιείται η έκδοση του PUMA που εκτελείται σε επεξεργαστές κάρτες γραφικών NVIDIA-GPUs.

## 5.4 Προβλήματα βελτιστοποίησης

Επιλέγεται να γίνει βελτιστοποίηση των αεροδυναμικών χαρακτηριστικών της σε δύο διακριτές συνθήκες πτήσης, συγκεκριμένα σε δύο σημαντικά σημεία λειτουργίας, την απογείωση και την ευθεία πτήση. Η αεροτομή που επιλέχθηκε να βελτιστοποιηθεί είναι η NACA 4318.



**Σχήμα 5.3:** (α) Αεροτομή NACA 4318 [23]. (β) Παραμετροποίηση αεροτομής με τη μέθοδο ογκομετρικών NURBS.

Η γεωμετρία της παραμετροποιείται με τη μέθοδο ογκομετρικών NURBS, για την οποία ορίζονται 15 σημεία ελέγχου, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.3(β). Το καθένα από αυτά έχει δύο βαθμούς ελευθερίας, έναν κατά τη  $x$  και έναν κατά την  $y$  κατεύθυνση. Για τις ανάγκες του προβλήματος, το σημείο ελέγχου στο μπροστινό τμήμα και αυτό που βρίσκεται στην ακμή εκφυγής δεν επιτρέπεται να κινηθούν. Για τα υπόλοιπα σημεία ελέγχου, δεν επιτρέπεται η κίνηση κατά την  $x$  κατεύθυνση. Οι εναπομείναντες βαθμοί ελευθερίας είναι 13 και αφορούν την κίνηση κατά την  $y$  κατεύθυνση των 13 σημείων ελέγχου που επιτρέπεται να κινηθούν. Έτσι, κάθε πρόβλημα που μελετάται θα έχει **13 μεταβλητές σχεδιασμού**. Για να εξασφαλιστεί ότι είναι γνωστή η γεωμετρία αυτής της αεροτομής από την αρχή της βελτιστοποίησης, εισάγεται στον αρχικό πληθυσμό ένα άτομο που είναι ταυτικά ίσο με την αρχική αεροτομή (όπως αυτή περιγράφεται από τα σημεία ελέγχου που βρέθηκαν από την αντίστροφη γεωμετρική διαδικασία). Με αυτό τον τρόπο, εξασφαλίζεται ότι δεν θα βρεθεί λύση που είναι χειρότερη από την

αρχική.

#### 5.4.1 1η Μελέτη: Ελαχιστοποίηση οπισθέλκουσας σε συνθήκες «ευθείας πτήσης»

Με τον όρο «ευθεία» πτήση αναφέρονται οι συνθήκες ροής με υψηλή ταχύτητα και μικρή γωνία πρόσπτωσης. Σε αυτές τις συνθήκες τα επιθυμητά αεροδυναμικά χαρακτηριστικά μιας αεροτομής είναι όσο το δυνατόν μικρότερη οπισθέλκουσα και, ταυτόχρονα, η άνωση να είναι τουλάχιστον μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερη από την οπισθέλκουσα. Στόχος είναι να μεταβληθεί με κατάλληλο τρόπο η μορφή της αεροτομής, ώστε αυτά τα αεροδυναμικά μεγέθη να πληρούν αυτά τα δύο κριτήρια. Οι συνθήκες ροής στις οποίες εξετάζεται η αεροτομή παρουσιάζονται στον πίνακα

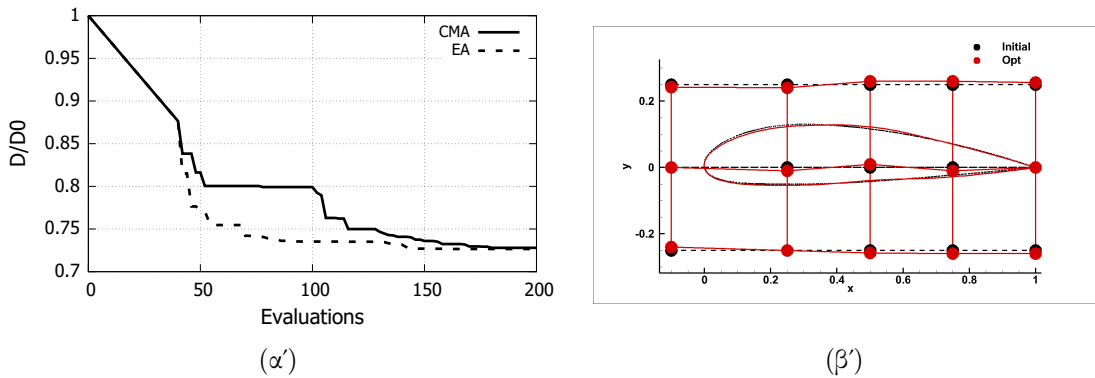
Αριθμός Mach	0.7	Γωνία πρόσπτωσης $\alpha$ ( $^\circ$ )	1.2
Ύψος πτήσης (km)	10	Πίεση περιβάλλοντος (Pa)	26090
Θερμοκρασία περιβάλλοντος (K)	223.1	Πυκνότητα αέρα ( $\frac{kg}{m^3}$ )	0.4076

**Πίνακας 5.1:** Συνθήκες ροής κατά την «ευθεία πτήση»

Σε αυτές τις συνθήκες ροής, οι τιμές του συντελεστή οπισθέλκουσας και του συντελεστή άνωσης για την αεροτομή NACA 4318 είναι 0.045 και 0.31, αντίστοιχα. Εφόσον, σε αυτή την περίπτωση τηρείται η διαφορά που πρέπει να έχουν η οπισθέλκουσα και η άνωση, ορίζεται περιορισμός στο πρόβλημα ώστε η άνωση να είναι ίση ή μεγαλύτερη από το 90% της αρχικής, ώστε να εξασφαλιστεί η διαφορά μιας τάξης μεγέθους μεταξύ της οπισθέλκουσας και της άνωσης. Αυτό το πρόβλημα βελτιστοποίησης επιλύθηκε με την εμπλουτισμένη μέθοδο CMA, που περιέχει όλα τα χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, και ως λογισμικό αξιολόγησης χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό PUMA. Επίσης, έγινε χρήση μεταπρότυπου, συγκεκριμένα νευρωνικών δικτύων τύπου RBF, ώστε σε κάθε γενιά να γίνεται αξιολόγηση ενός μικρού αριθμού απογόνων με το λογισμικό αξιολόγησης και για τους υπόλοιπους να γίνεται προσέγγιση της συνάρτησης στόχου και της τιμής του περιορισμού. Ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού είναι 13, για τους λόγους που αναφέρθηκαν. Το ίδιο πρόβλημα επιλύεται και με τον γενικευμένο EA, ο οποίος χρησιμοποιεί το ίδιο μεταπρότυπο και όλες οι ρυθμίσεις που απαιτεί είναι ίδιες με αυτές που ορίζονται για τον CMA. Οι απαραίτητες παράμετροι που ορίζονται για να ξεκινήσει η βελτιστοποίηση είναι οι εξής

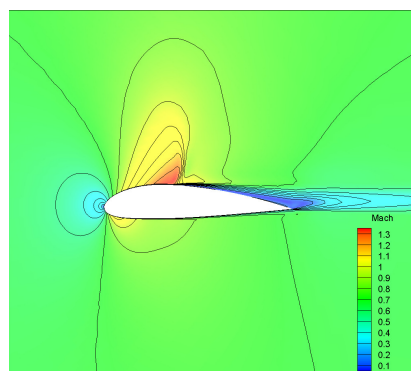
$\lambda$	40	$\mu$	15
Πιθανότητα μετάλλαξης	0.03	$\sigma_0$	2
Μέγεθος διαγωνισμού	3	Πιθανότητα διαγωνισμού	0.92
Άτομα στη ΒΔ για εκκίνηση LCPE	30	TP	15

**Πίνακας 5.2:** Παράμετροι που ορίζονται για τη βελτιστοποίηση

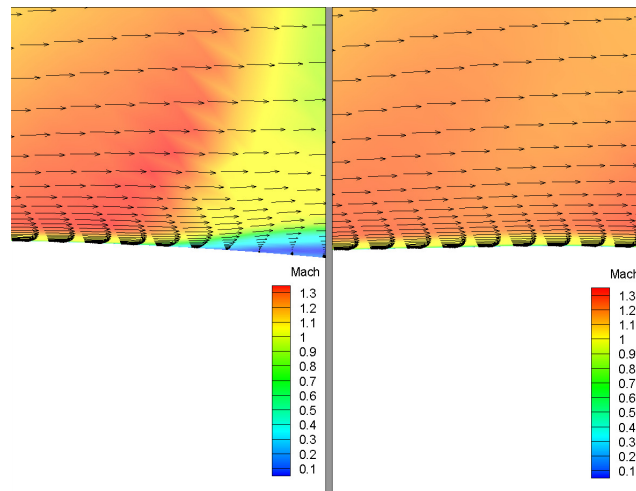


**Σχήμα 5.4:** (α) Διάγραμμα σύγκλισης προβλήματος βελτιστοποίησης που επιλύθηκε με τον ενισχυμένο CMA και με έναν γενικευμένο EA, με στόχο την ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας και περιορισμό στην παραγόμενη άνωση. Μετά από 200 αξιολογήσεις, οι μέγιστες επιτρεπόμενες, ο αλγόριθμος κατέληξε σε λύση που οδηγεί σε μείωση της οπισθέλκουσας κατά  $\sim 27\%$ . (β) Σύγκριση αρχικής και τελικής γεωμετρίας της αεροτομής κατά την επίλυση του προβλήματος με περιορισμό: Με διακεκομμένη μαύρη γραμμή απεικονίζεται η αρχική γεωμετρία και τα μαύρα σημεία είναι τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου, ενώ με κόκκινη συνεχή γραμμή απεικονίζεται η τελική γεωμετρία και τα κόκκινα σημεία αποτελούν τα σημεία ελέγχου της.

Μετά το πέρας της βελτιστοποίησης, η τελική αεροτομή θα έχει μειωμένη οπισθέλκουσα κατά περίπου 27% και, ταυτόχρονα, θα υπάρχει αύξηση της άνωσης κατά 8.42%. Από τη σύγκριση των δύο αλγορίθμων παρατηρείται ότι, παρόλο που και οι δύο καταλήγουν σχεδόν στην ίδια λύση, η καμπύλη σύγκλισης του γενικευμένου EA έχει μεγαλύτερη κλίση στην αρχή της βελτιστοποίησης. Ως αποτέλεσμα, βρίσκει καλύτερες λύσεις με μικρότερο αριθμό αξιολογήσεων από τον ενισχυμένο CMA. Η αρχική και η τελική γεωμετρία της αεροτομής, καθώς και τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου, παρουσιάζονται στο σχήμα 5.4 (β).



**Σχήμα 5.5:** Κατανομή Mach γύρω από την αρχική αεροτομή. Παρατηρείται κύμα κρούσης στην πλευρά υποπίεσης.



**Σχήμα 5.6:** Κατανομή ταχύτητας στο οριακό στρώμα που αναπτύσσεται στην πλευρά υποπίεσης. Παρατηρείται το φαινόμενο αλληλεπίδρασης του κρουστικού κύματος με το οριακό στρώμα, το οποίο οδηγεί σε αποκόλληση της ροής και, συνεπώς, σε απώλειες. Παρουσιάζεται το ίδιο τμήμα ( $\frac{x}{c} = 0.32$  έως  $\frac{x}{c} = 0.43$ ) της πλευράς υποπίεσης της αρχικής και της βέλτιστης αεροτομής, όπου στην πρώτη φαίνεται να έχει ξεκινήσει η αποκόλληση ενώ στη δεύτερη το οριακό στρώμα αναπτύσσεται κανονικά.

Εκτός από αυτά τα χαρακτηριστικά της αεροτομής, αξίζει να ελεγχθεί το φαινόμενο της αλληλεπίδρασης του κρουστικού κύματος με το οριακό στρώμα, που συμβαίνει στην πλευρά υποπίεσης. Όπως φαίνεται στο σχήμα 5.5, στην πλευρά υποπίεσης της αρχικής αεροτομής η ροή είναι διηχητική, με αποτέλεσμα την ύπαρξη κρουστικού κύματος. Η αλληλεπίδραση αυτού με το οριακό στρώμα που αναπτύσσεται, οδηγεί σε αποκόλληση της ροής σε ένα τμήμα της αεροτομής, αυξάνοντας τις απώλειες και συνεπώς, αυξάνεται και η οπισθέλκουσα. Η αλλαγή στη γεωμετρία της αεροτομής φαίνεται να βελτιώνει την κατάσταση, σύμφωνα με το σχήμα 5.6. Σε αυτό παρουσιάζεται η κατανομή ταχύτητας του οριακού στρώματος στο ίδιο τμήμα της πλευράς υποπίεσης, συγκεκριμένα από  $\frac{x}{c} = 0.32$  έως  $\frac{x}{c} = 0.43$ , στην αρχική και τη βέλτιστη αεροτομή. Είναι εμφανές, πως στην αρχική αεροτομή έχει ήδη ξεκινήσει η αποκόλληση της ροής σε αυτό το τμήμα, ενώ στη βέλτιστη αεροτομή αυτό συμβαίνει σε μεγαλύτερο ποσοστό της χορδής. Έτσι, η ροή είναι αποκολλημένη σε μικρότερο τμήμα της αεροτομής, οδηγώντας σε μειωμένες απώλειες και συνεπώς, μειωμένη οπισθέλκουσα.

#### 5.4.2 2η Μελέτη: Μεγιστοποίηση άνωσης σε συνθήκες «απογείωσης»

Ως συνθήκες «απογείωσης» χαρακτηρίζονται αυτές, όπου η ταχύτητα της ροής είναι χαμηλή και η γωνία πρόσπτωσης μεγάλη. Σε αυτές είναι απαραίτητο η άνωση να έχει

όσο το δυνατόν μεγαλύτερη τιμή γίνεται. Σε αυτό το σημείο λειτουργίας, η γωνία πρόσπτωσης είναι αρκετά μεγαλύτερη από ότι στην περίπτωση της ευθείας πτήσης, ώστε ο λόγος της άνωσης προς την οπισθέλκουσα να είναι μεγάλος. Με βάση τα παραπάνω, επιλύθηκε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης μορφής με στόχο τη μεγιστοποίηση της άνωσης. Ταυτόχρονα, τέθηκε περιορισμός ανισοσιότητας για την τιμή της οπισθέλκουσας, ώστε να διατηρηθεί η διαφορά τάξης μεγέθους μεταξύ αυτής και της άνωσης. Η παραμετροποίηση της αεροτομής που χρησιμοποιήθηκε σε αυτό το πρόβλημα, είναι η ίδια με το προηγούμενο, με τους ίδιους βαθμούς ελευθερίας για τα σημεία ελέγχου. Επομένως, οι μεταβλητές σχεδιασμού και σε αυτήν την περίπτωση θα είναι 13. Οι συνθήκες ροής που ορίστηκαν για αυτό το σημείο λειτουργίας παρουσιάζονται στον πίνακα

Αριθμός Mach	0.13	Γωνία πρόσπτωσης $\alpha$ ( $^\circ$ )	8.5
Ύψος πτήσης (km)	0	Πίεση περιβάλλοντος (Pa)	101325
Θερμοκρασία περιβάλλοντος (K)	288	Πυκνότητα αέρα ( $\frac{kg}{m^3}$ )	1.2259

**Πίνακας 5.3:** Συνθήκες ροής κατά την «απογείωση»

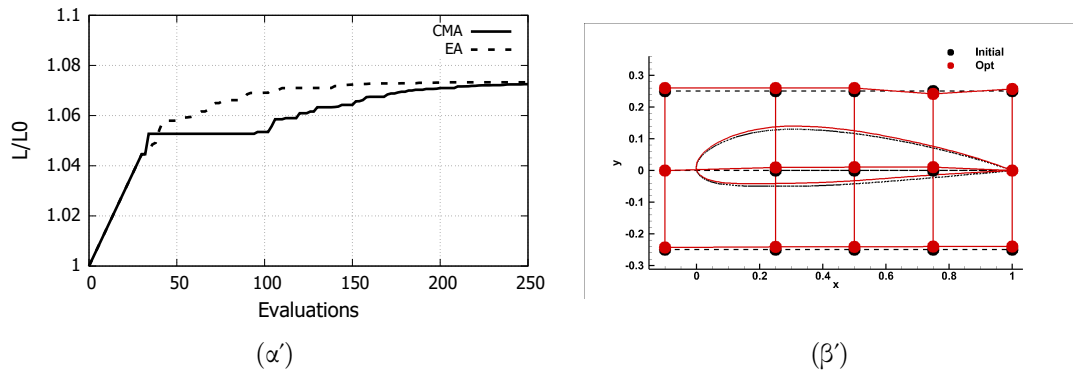
Σε αυτές τις συνθήκες, οι συντελεστές άνωσης και οπισθέλκουσας της αρχικής αεροτομής είναι 1.31 και 0.017, αντίστοιχα. Ο περιορισμός που τέθηκε σε αυτό το πρόβλημα είναι η οπισθέλκουσα να είναι ίση ή μικρότερη από το 110% της αρχικής. Το πρόβλημα επιλύθηκε με την ενισχυμένη μέθοδο CMA αλλά και με τον γενικευμένο EA και πραγματοποιήθηκε σύγκριση των δύο μεθόδων. Επίσης, οι δύο αλγόριθμοι χρησιμοποιήθηκαν σε συνδυασμό με μεταπρότυπα, για μείωση του υπολογιστικού κόστους. Ως μεταπρότυπο για κάθε αλγόριθμο, χρησιμοποιήθηκαν τα ίδια νευρωνικά δίκτυα τύπου RBF. Οι παράμετροι που πρέπει να οριστούν για τη βελτιστοποίηση τέθηκαν ίδιοι για τους δύο αλγόριθμους και παρουσιάζονται στον πίνακα

$\lambda$	30	$\mu$	10
Πιθανότητα μετάλλαξης	0.03	$\sigma_0$	2
Μέγεθος διαγωνισμού	3	Πιθανότητα διαγωνισμού	0.9
Άτομα στη ΒΔ για εκκίνηση LCPE	30	TP	17

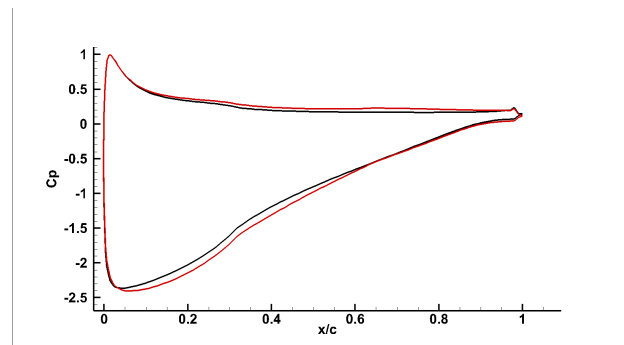
**Πίνακας 5.4:** Παράμετροι που ορίζονται για τη βελτιστοποίηση

Το κριτήριο τερματισμού που ορίστηκε, είναι ο μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων να είναι 250. Μετά το πέρας της βελτιστοποίησης, βρέθηκε αεροτομή με αυξημένη παραγόμενη άνοση κατά 7.2% και με μειωμένη οπισθέλκουσα κατά 7.4%. Η αύξηση της άνωσης μπορεί να φανεί στο διάγραμμα του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της αεροτομής (σχήμα 5.8). Το εμβαδόν που περιλαμβάνεται από αυτή την καμπύλη είναι ανάλογο της άνωσης που παράγεται, καθώς αυξάνεται με την αύξηση της διαφοράς των πιέσεων της πλευράς υποπίεσης και υπερπίεσης. Είναι σαφές, ότι το εμβαδόν που περιλαμβάνει η κόκκινη καμπύλη είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο της μαύρης καμπύλης. Από τα διαγράμματα σύγκλισης παρατηρείται ότι η βέλτιστη λύση που βρίσκει κάθε αλγόριθμος οδηγεί σε περίπου ίδια αύξηση της άνωσης. Όμως, η καμπύλη του EA φαίνεται να





**Σχήμα 5.7:** (α) Διαγράμματα σύγκλισης του προβλήματος μεγιστοποίησης της άνωσης που επιλύθηκε με τον CMA και έναν EA. Παρατηρείται ότι η καμπύλη σύγκλισης του EA έχει μεγαλύτερη κλίση στην αρχή της βελτιστοποίησης σε αντίθεση με την αντίστοιχη καμπύλη του CMA. Η βέλτιστη λύση που βρίσκεται από τους δύο αλγόριθμους είναι πολύ κοντά. (β) Μεταβολή γεωμετρίας της αεροτομής και μεταβολή της θέσης των σημείων ελέγχου: Η μαύρη διακεκομμένη γραμμή απεικονίζει το σχήμα της αρχικής αεροτομής και τα μαύρα σημεία τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου ενώ η κόκκινη γραμμή απεικονίζει την αεροτομή που προέκυψε μετά το πέρας της βελτιστοποίησης και τα κόκκινα σημεία αποτελούν τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου.



**Σχήμα 5.8:** Γραφική παράσταση συντελεστή πίεσης συναρτήσει του ποσοστού της χορδής της αεροτομής. Η μαύρη γραμμή απεικονίζει την αρχική αεροτομή και η κόκκινη γραμμή την τελική. Παρατηρείται ότι το εμβαδόν κάτω από τη καμπύλη με την κόκκινη γραμμή είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο για τη μαύρη γραμμή, που συνεπάγεται αύξηση της άνωσης.

έχει μεγαλύτερη κλίση στην αρχή της βελτιστοποίησης, με αποτέλεσμα σε λιγότερες αξιολογήσεις να έχει βρει καλύτερη λύση.

Η μελέτη αυτού του προβλήματος και του προηγούμενου έγινε για διαφορετικά σημεία λειτουργίας της αεροτομής. Όμως, κρίνεται απαραίτητο η βέλτιστη αεροτομή να μπορεί να αποδώσει ικανοποιητικά και στα δύο σημεία λειτουργίας. Για το λόγο αυτό, η βέλτιστη λύση που προέκυψε από τη μελέτη στο σημείο λειτουργίας ευθείας πτήσης

δοκιμάστηκε και σε συνθήκες απογείωσης και το αντίστροφο. Τα αποτελέσματα για κάθε αεροτομή παρουσιάζονται στον πίνακα

Μελέτη	«Ευθεία πτήση»		«Απογείωση»	
	1	2	1	2
$c_L$	0.33	0.31	1.26	1.41
$c_D$	0.033	0.055	0.017	0.019

Από τα αποτελέσματα παρατηρείται ότι η λύση της δεύτερης μελέτης σε συνθήκες ευθείας πτήσης, έχει ιδιαίτερα αυξημένο συντελεστή οπισθέλκουσας, συγκεκριμένα είναι κατά 66% υψηλότερος από τον αντίστοιχο της πρώτης λύσης. Αντίστοιχα, η λύση της πρώτης μελέτης σε συνθήκες απογείωσης, έχει μειωμένο συντελεστή άνωσης κατά 10% σε σχέση με αυτόν της δεύτερης λύσης. Λόγω της σαφώς υψηλότερης αύξησης του συντελεστή οπισθέλκουσας σε σχέση με τη μείωση του συντελεστή άνωσης, επιλέγεται τελικά η αεροτομή από την πρώτη μελέτη ως βέλτιστη λύση και για τα δύο σημεία λειτουργίας.

### 5.4.3 3η Μελέτη: Πρόβλημα βελτιστοποίησης δύο στόχων

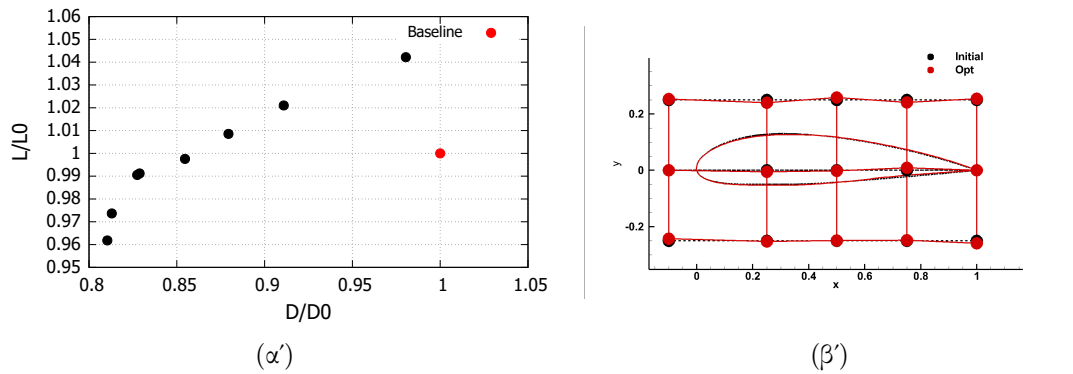
Για τον ολοκληρωμένο έλεγχο της απόδοσης της ενισχυμένης μεθόδου CMA, επιλύθηκε ένα αεροδυναμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης δύο στόχων. Οι στόχοι που ορίστηκαν είναι η ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας σε συνθήκες ευθείας πτήσης, όπως στη 1η μελέτη, και η μεγιστοποίηση της άνωσης σε συνθήκες απογείωσης, όπως στη 2η. Οι συνθήκες ροής για κάθε σημείο λειτουργίας που εξετάζεται έχουν παρουσιαστεί στον πίνακα 5.1, 5.3. Οι παράμετροι που ορίστηκαν για να εκκινήσει η βελτιστοποίηση παρουσιάζονται στον πίνακα 5.5.

$\lambda$	50	$\mu$	20
Πιθανότητα μετάλλαξης	0.01	$\sigma_0$	2
Μέγεθος διαγωνισμού	3	Πιθανότητα διαγωνισμού	0.93
Άτομα στη ΒΔ για εκκίνηση LCPE	30	TP	17

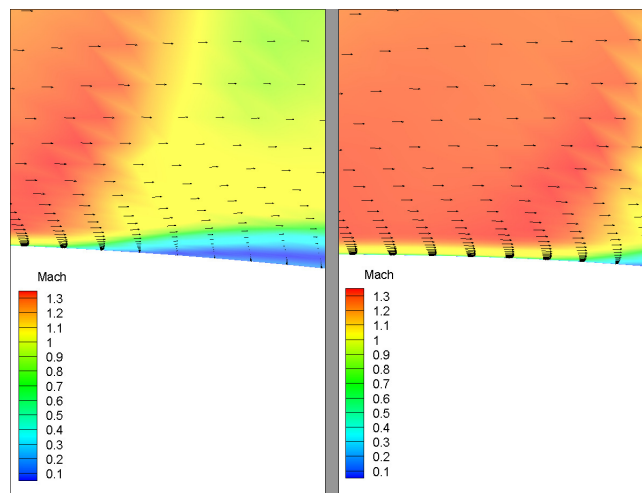
**Πίνακας 5.5:** Παράμετροι που ορίζονται για τη βελτιστοποίηση

Το κριτήριο τερματισμού της βελτιστοποίησης επιλέχθηκε να είναι ο μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων και ορίστηκε ίσος με 100. Το μέτωπο των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων (σχήμα 5.9) φαίνεται πως έχει τρεις λύσεις, με καλύτερες τιμές από την αρχική αεροτομή και για τους δύο στόχους της βελτιστοποίησης. Ως ενδεικτική λύση του προβλήματος επιλέγεται να παρουσιαστεί η αεροτομή με μειωμένη οπισθέλκουσα κατά 9% και αυξημένη άνωση κατά 2%. Τα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά της σε κάθε σημείο λειτουργίας παρουσιάζονται στον πίνακα

Καθώς η μείωση της οπισθέλκουσας είναι σημαντικότερη από την αύξηση της άνωσης, το φαινόμενο που αξίζει να ελεγχθεί είναι η αλληλεπίδραση του χρουστικού κύματος



**Σχήμα 5.9:** (α) Μέτωπο κατά Pareto βέλτιστων λύσεων για το πρόβλημα με στόχους την ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας σε συνθήκες ευθείας πτήσης και μεγιστοποίηση της άνωσης σε συνθήκες απογείωσης. Οι λύσεις παρουσιάζονται για τιμές στόχων που έχουν αδιαστατοποιηθεί με τις αρχικές τιμές τους. Ο μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων είναι 100. (β) Μεταβολή γεωμετρίας της αεροτομής και μεταβολή της θέσης των σημείων ελέγχου: Η μαύρη διακεκομμένη γραμμή απεικονίζει το σχήμα της αρχικής αεροτομής και τα μαύρα σημεία τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου ενώ η κόκκινη γραμμή απεικονίζει την αεροτομή που προέκυψε μετά το πέρας της βελτιστοποίησης και τα κόκκινα σημεία αποτελούν τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου.



**Σχήμα 5.10:** Αλληλεπίδραση κρουστικού κύματος και οριακού στρώματος που αναπτύσσεται στην πλευρά υποπίεσης.

	<b>Ευθεία πτήση</b>	<b>Απογείωση</b>
$c_L$	0.44	1.34
$c_D$	0.041	0.017

με το οριακό στρώμα που αναπτύσσεται στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής, κατά τη λειτουργία σε ευθεία πτήση. Παρατηρείται από το σχήμα 5.10 (β), ότι υπάρχει μετατόπιση προς την ακμή εκφυγής του σημείου που ξεκινά αποκόλληση της ροής στη βέλτιστη αεροτομή, με αποτέλεσμα τη μείωση των απωλειών. Όμως, η μετατόπιση αυτή είναι σαφώς μικρότερη από αυτήν που παρατηρήθηκε στην πρώτη μελέτη, το οποίο είναι αναμενόμενο, αφού η μείωση της οπισθέλκουσας σε εκείνη τη μελέτη είναι μεγαλύτερη.

## Κεφάλαιο 6

# Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία προγραμματίστηκε και μελετήθηκε ο κλασικός CMA, που εφαρμόζεται συνήθως σε Στρατηγικές Εξέλιξης και προσαρμόστηκε κατάλληλα, ώστε να λειτουργεί ως Γενικευμένος Εξελικτικός Αλγόριθμος. Αρχικά, προγραμματίστηκε ο κλασικός CMA και, στη συνέχεια, έγινε προσθήκη και αξιολόγηση νέων διεργασιών/τελέσεων. Σε αυτά περιέχονται δύο επιπλέον τελεστές εξέλιξης, η επιλογή γονιών μέσω πιθανοτικού διαγωνισμού και η δυνατότητα μετάλλαξης. Οι προσθήκες αυτές εξυπηρετούν τη μεγιστοποίηση της απόδοσης της μεθόδου, ιδιαίτερα στην περίπτωση επίλυσης προβλημάτων με μεγάλο αριθμό τοπικών ακρότατων. Για τον ίδιο λόγο, έγινε διερεύνηση της επιρροής ορισμένων παραμέτρων χαλάρωσης, που συμμετέχουν στον υπολογισμό της μέσης τιμής και του πίνακα συνδιακύμανσης, και επιλέχθηκαν συγκεκριμένες συναρτήσεις σύμφωνα με τις οποίες θα μεταβάλλονται κατά την επίλυση του προβλήματος. Οι άλλες δυνατότητες που έχει ο νέος CMA είναι η διαχείριση περιορισμών, η υποβοηθούμενη από μεταπρότυπα λειτουργία. Έπειτα, έγινε πιστοποίηση της νέας μεθόδου με μαθηματικές συναρτήσεις στόχου, για την απόδειξη της ομαλής λειτουργίας του αλλά και την σύγκριση του με έναν άλλο ΕΑ. Από αυτές τις μελέτες, προέκυψε το συμπέρασμα ότι η εμπλουτισμένη μέθοδος CMA βρίσκει καλύτερη λύση από τον ΕΑ χωρίς το CMA στα προβλήματα ενός στόχου. Όσον αφορά τα προβλήματα πολλών στόχων, τα αποτελέσματα που προέκυψαν αναδεικνύουν την ικανότητα της μεθόδου να επιλύει τέτοια προβλήματα. έγινε επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης μορφής αεροτομής, για τον έλεγχο της συμπεριφοράς του αλγορίθμου σε πραγματικά αεροδυναμικά προβλήματα.

### 6.1 Συμπεράσματα

Η εισαγωγή στον αλγόριθμο CMA των τελεστών μετάλλαξης επιλογής γονιών μέσω πιθανοτικού διαγωνισμού και μετάλλαξης έδωσαν τη δυνατότητα στη μέθοδο CMA να

λειτουργεί λιγότερα επιλεκτικά. Με αυτόν τον τρόπο, γίνεται δυσκολότερος ο εγκλωβισμός της μεθόδου σε κάποιο τοπικό ακρότατο, καθώς οι δύο αυτοί τελεστές δύναται να αυξήσουν την ποικιλομορφία των χαρακτηριστικών που υπάρχει σε κάθε γενιά. Για να διαπιστωθεί αν η προσθήκη αυτών των τελεστών είχε θετική επιρροή, επιλύθηκε το πρόβλημα Rastrigin με τον κλασικό CMA και με κάθε τελεστή ξεχωριστά. Η χρήση του τελεστή πιθανοτικού διαγωνισμού επέφερε μείωση της τιμής στόχου για τα προβλήματα των 5 και 10 μεταβλητών σχεδιασμού, κατά 33% και 6.7%, αντίστοιχα. Όσον αφορά τη χρήση του τελεστή μετάλλαξης, φάνηκε από τα διαγράμματα σύγκλισης για τα ίδια προβλήματα μία αντίστοιχη μείωση της τιμής στόχου, συγκεκριμένα κατά 8% για 5 μεταβλητές σχεδιασμού και 13% για 10 μεταβλητές σχεδιασμού.

Μια άλλη αλλαγή που έγινε στη μέθοδο και είχε θετική επιρροή σε αυτήν την περίπτωση, είναι η μεταβολή των παραμέτρων χαλάρωσης μέσω συγκεκριμένων νόμων μεταβολής. Το κέρδος από τη χρήση των παραπάνω χαρακτηριστικών έναντι του κλασικού CMA, διερευνήθηκε στην επίλυση του προβλήματος Rastrigin. Συγκεκριμένα, επιλύοντας το πρόβλημα με 5 μεταβλητές σχεδιασμού, υπήρξε μείωση 65% της τιμής της συνάρτησης στόχου σε σχέση με την τιμή που βρέθηκε από τον κλασικό CMA. Όσον αφορά το πρόβλημα με 10 μεταβλητές σχεδιασμού, η μείωση ήταν 55%, ενώ για τις 15 μεταβλητές σχεδιασμού ήταν 47 %.

Η χρήση των μεταπρότυπων και η επιρροή που έχουν στην ταχύτητα σύγκλισης, εξετάστηκαν στο πρόβλημα Σφαίρας για 10 μεταβλητές σχεδιασμού. Αυτό επιλύθηκε με τον κλασικό CMA και από την υποβοηθούμενη από μεταπρότυπα εκδοχή του. Από τη σύγκριση των καμπυλών σύγκλισης, παρατηρήθηκε μείωση της τιμής στόχου κατά 73%. Επιπλέον, η υποβοηθούμενη από μεταπρότυπα μέθοδος βρίσκει καλύτερη λύση με αρκετά μικρότερο αριθμό αξιολογήσεων. Συγκεκριμένα, σε αυτό το παράδειγμα απαιτούνται οι μισές αξιολογήσεις για την εύρεση της τελικής βέλτιστης λύσης.

Μετά την προσθήκη των νέων δυνατοτήτων, πραγματοποιήθηκε σύγκριση της εμπλουτισμένης μεθόδου CMA με έναν EA χωρίς το CMA. Όλες οι συγκρίσεις έγιναν ρυθμιζοντας με τις ίδιες ακριβώς παραμέτρους και τους δύο αλγόριθμους. Τα αποτελέσματα αποδεικνύουν ότι ο ενισχυμένος CMA είναι καλύτερος από τον άλλο EA. Το γεγονός αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα πως μπορούν να αξιοποιηθούν στοιχεία του CMA στον γενικευμένο EA, με στόχο να συνδυαστούν τα θετικά των δύο μεθόδων για να παραχθεί ένας ακόμα πιο αποδοτικός αλγόριθμος βελτιστοποίησης.

Από την επίλυση των προβλημάτων πολλών στόχων με τον CMA και τη μέθοδο SPEA II, προκύπτει το συμπέρασμα ότι μπορούν να βρεθούν με ακρίβεια η κατά Pareto βέλτιστες λύσεις, εφόσον ήταν γνωστές οι πραγματικές λύσεις για να γίνει σύγκριση. Όμως, φαίνεται να παίζει καθοριστικό ρόλο το μέγεθος του πληθυσμού που επιλέγεται, στην εύρεση λύσεων σε όλο το εύρος του μετώπου. Στα προβλήματα ZDT1 και ZDT2 για 10 μεταβλητές σχεδιασμού, απαιτείται πληθυσμός τουλάχιστον 100 απογόνων για την ανίχνευση όλων των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων, το οποίο είναι ιδιαίτερα μεγάλο μέγεθος πληθυσμού για έναν EA. Αυτό είναι πρόβλημα, διότι μειώνεται ο αριθμός των γενιών για τον ίδιο αριθμό αξιολογήσεων, περιορίζοντας τις μεταβολές στα χαρακτηριστικά του πληθυσμού. Ιδιαίτερα στην περίπτωση του προβλήματος ZDT3 με 10

μεταβλητές σχεδιασμού, που το μέτωπο δεν είναι συνεχές, η μέθοδος δεν καταφέρνει να βρει, ακόμα και με πληθυσμό 100 απογόνων, λύσεις σε όλα τα τμήματα του μετώπου.

Η πιστοποίηση του εμπλουτισμένου CMA έγινε και σε αεροδυναμικά προβλήματα βελτιστοποίησης, τα οποία επιλύθηκαν και με τον άλλο EA για σύγκριση. Η πρώτη μελέτη αφορά βελτιστοποίηση μορφής αεροτομής, με στόχο την ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας σε συνθήκες ευθείας πτήσης με περιορισμό, ώστε η άνωση να μην μειωθεί περισσότερο από 10% σε σχέση με την αρχική τιμή της. Με το νέο CMA υπήρξε μείωση της οπισθέλκουσας κατά 27.19% και αύξηση της άνωσης κατά 8.4%, ενώ τα ίδια μεγέθη από την επίλυση με τον άλλο EA είναι 27.34% και 6.8%, αντίστοιχα. Στη δεύτερη μελέτη, στόχος είναι η μεγιστοποίηση της άνωσης σε συνθήκες απογείωσης με περιορισμό, ώστε η οπισθέλκουσα να μην αυξηθεί περισσότερο από 10% σε σχέση με την αρχική τιμή της. Η λύση που βρέθηκε και από τους δύο αλγόριθμους έχει αυξημένη άνωση κατά 7.3% και αυξημένη οπισθέλκουσα κατά 7.4%. Από τις δύο μελέτες παρατηρήθηκε ότι οι αλγόριθμοι βρίσκουν σχεδόν την ίδια λύση, αλλά βάσει των διαγραμμάτων σύγκλισης ο EA μπορεί να βρει καλύτερη λύση με μικρότερο αριθμό αξιολογήσεων. Η τρίτη μελέτη αφορά πρόβλημα βελτιστοποίησης δύο στόχων, το οποίο προκύπτει από τον συνδυασμό των στόχων των δύο προηγούμενων μελετών. Σε αυτή βρέθηκαν τρεις λύσεις που έχουν καλύτερες τιμές και για τους δύο στόχους, σε σχέση με την αρχική.





## Βιβλιογραφία

- [1] Γιαννάκογλου, Κ.Χ.: *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2006.
- [2] Hansen, N. and Ostermeier, A.: *Convergence properties of evolution strategies with the derandomized covariance matrix adaptation: The  $(\mu/\mu I, \lambda)$ -ES*. In *EUFIT'97, 5th Europ. Congr. on Intelligent Techniques and Soft Computing, Proceedings*, σελίδες 650–654, 1997.
- [3] Hansen, N.: *Invariance, Self-Adaptation and Correlated Mutations in Evolution Strategies*. Στο Schoenauer, M. and Deb, K. and Rudolph, G. and Yao, X. and Lutton, E. and Merelo, J.J. and Schwefel, H.-P. (επιμελητής): *Proceedings of PPSN VI, Parallel Problem Solving from Nature*, σελίδες 355–364. Springer, 2000.
- [4] Hansen, N.: *The CMA evolution strategy: a comparing review*. Στο Lozano, J.A. and Larranaga, P. and Inza, I. and Bengoetxea, E. (επιμελητής): *Towards a new evolutionary computation. Advances on estimation of distribution algorithms*, σελίδες 75–102. Springer, 2006.
- [5] Dirk, V.A. and Hansen, N.: *Active Covariance Matrix Adaptation for the  $(1+1)$ -CMA-ES*. In *Genetic And Evolutionary Computation Conference*, σελίδες 385–392, Ιούλιος 2010.
- [6] *EASY*. <http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/EASY/>.
- [7] Giannakoglou, K.C., Kampolis, I.C., and Georgopoulou, C.A.: *Metamodel-assisted evolutionary algorithms (MAEAs)*. In *Introduction to Optimization and Multidisciplinary Design in Aeronautics and Turbomachinery, Lecture Series*. von Karman Institute, Rhode-St-Genése, Belgium, Ιούνιος 2008.
- [8] Karakasis, M.K. and Giannakoglou, K.C.: *On the use of metamodel-assisted, multi-objective evolutionary algorithms*. *Engineering Optimization*, 38(8):941–957, 2006.
- [9] Kampolis, I.C., Papadimitriou, D.I., and Giannakoglou, K.C.: *Evolutionary optimization using a new radial basis function network and the adjoint formulation*. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 14(4):397–410, 2006.

- [10] Hansen, N. and Ostermeier, A.: *Completely derandomized self-adaptation in evolution strategies*. *Evolutionary Computation*, 9(2):159–195, 2001.
- [11] Γιώτης, Α.: *Χρήση εξελικτικών τεχνικών, υπολογιστικής ευφυΐας και μεθόδων υπολογιστικής ρευστομηχανικής στη βελτιστοποίηση-αντίστροφη σχεδίαση περρυγώσεων στροβιλομηχανών, μέσω παράλληλης επεξεργασίας*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2003.
- [12] Καρακάσης, Μ.: *Ιεραρχικοί, κατανεμημένοι εξελικτικοί αλγόριθμοι και υπολογιστική ευφυΐα στη σχεδίαση βέλτιστων αεροδυναμικών μορφών σε περιβάλλον πολυεπεξεργασίας*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2006.
- [13] Giannakoglou, K.C., Giotis, A.P., and Karakasis, M.K.: *Low-cost genetic optimization based on inexact pre-evaluations and the sensitivity analysis of design parameters*. *Inverse Problems in Engineering*, 9(4):389–412, 2001.
- [14] Zitzler, E., Laumanns, M. and Thiele, L.: *SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm*. Technical Report 103. Computer Engineering and Networks Laboratory (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich, 2001.
- [15] Hansen, N. and Kern, S.: *Evaluating the CMA Evolution Strategy on Multimodal Test Functions*. Στο Yao, X. and others (επιμελητής): *Parallel Problem Solving from Nature PPSN VIII*, τόμος 3242 του LNCS, σελίδες 282–291. Springer, 2004.
- [16] Zitzler, E. and Deb, K. and Thiele, L.: *Comparison of Multiobjective Evolutionary Algorithms: Empirical Results*. *Evolutionary Computation*, 8(2):173–195, 2000.
- [17] Pandu, R., World Scientific (Firm): *Multi-Objective Optimization: Techniques and Applications in Chemical Engineering*. Singapore Hackensack, N.J World Scientific, 2009.
- [18] Spalart, P. and Allmaras, S.: *A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows*. AIAA Paper 92 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit Reno, Nevada, United States.
- [19] Ασούτη, Β.: *Μέθοδοι αεροδυναμικής ανάλυσης και σχεδιασμού για ροές υψηλών και χαμηλών ταχυτήτων, σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2009.
- [20] Ζερβογιάννης, Θ.: *Μέθοδοι βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική και τις στροβιλομηχανές με χρήση συζυγών τεχνικών, υβριδικών πλεγμάτων και του ακριβούς εσσιανού μητρώου*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2011.

- [21] Τρομπούκης, Ξ.: *Αριθμητική επίλυση προβλημάτων αεροδυναμικής-αεροελαστικότητας σε επεξεργαστές καρτών γραφικών*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2012.
- [22] Τσιόκας, Κ.: *Ανάπτυξη μεθόδων βελτιστοποίησης με χρήση επεξεργαστών καρτών γραφικών και εφαρμογή στις στροβιλομηχανές*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2019.
- [23] *Airfoil tools*. <http://airfoiltools.com/airfoil/naca4digit>.