

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Προσομοίωση Προβλημάτων με Αβεβαιότητες -
Επεμβατικές Μέθοδοι Πολυωνυμικού Χάους.
Διατύπωση, Προγραμματισμός και Εφαρμογές στην
Ασυμπίεστη Ψευδο-1D Ροή

Διπλωματική Εργασία

Νυκτερή Γεωργία

Επιβλέποντες: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου , Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2016

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία σηματοδοτεί την ολοκλήρωση των σπουδών μου στο ΕΜΠ και ένα νέο ξεκίνημα για μένα. Κρατώντας μια όμορφη ανάμνηση από αυτά τα πέντε χρόνια, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλους όσους στάθηκαν δίπλα μου και συνέβαλαν με τον δικό τους τρόπο στην επίτευξη των στόχων μου.

Πρωτίστως, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στον καθηγητή, κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση, που μου προσέφερε κατά την ενασχόλησή μου με την παρούσα διπλωματική εργασία. Είμαι πραγματικά ευγνώμων που μου έδωσε τη δυνατότητα να ασχοληθώ με ένα θέμα, στο οποίο βρίσκω τόσο μεγάλο επιστημονικό ενδιαφέρον. Επίσης, τον ευχαριστώ θερμά για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και την άψογη συνεργασία μας τα τελευταία χρόνια. Κάθε ευκαιρία που μου έδωσε, υπήρξε καθοριστική για την μετέπειτα πορεία μου.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη της ομάδας της ΜΠΥΡ&Β του Τομέα Ρευστών για την αρμονική συνεργασία κατά το διάστημα εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας και την υποστήριξή τους στις δυσκολίες που προέκυψαν. Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στη Δρ. Βαρβάρα Ασούτη για τις σημαντικές συμβουλές της και όλη την καθοδήγηση που μου προσέφερε, όποτε τη χρειάστηκα. Η συμβολή της υπήρξε καθοριστική και την ευχαριστώ θερμά. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω το Δρ. Βαγγέλη Παπουτσή-Κιαχαγιά για τις εύστοχες παρατηρήσεις του κατά την εκπόνηση της εργασίας μου.

Κλείνοντας, δε θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω πολύ την οικογένειά μου, που πάντα είναι δίπλα μου και με στηρίζουν σε όλες τις επιλογές μου. Χωρίς τη δική τους υποστήριξη, αγάπη και ενθάρρυνση τίποτα δε θα ήταν ίδιο στη μέχρι τώρα πορεία μου.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ &
ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

**Προσομοίωση Προβλημάτων με Αβεβαιότητες -
Επεμβατικές Μέθοδοι Πολυωνυμικού Χάους. Διατύπωση,
Προγραμματισμός και Εφαρμογές στην Ασυμπίεστη Ψευδο-1D Ροή**

Διπλωματική Εργασία
της

Γεωργίας Νυκτερή

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2016

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στη μαθηματική διατύπωση και την υλοποίηση, μέσω της ανάπτυξης κατάλληλου λογισμικού, της Επεμβατικής Μεθόδου Πολυωνυμικού Χάους (Intrusive Polynomial Chaos Method, IPCM) στην ψευδο-1D ροή ασυμπίεστου ρευστού. Σύμφωνα με τη θεωρία του πολυωνυμικού χάους, κάθε στοχαστικό πεδίο εκφράζεται ως ένα πολυωνυμικό ανάπτυγμα με ορθογώνια πολυώνυμα, τα οποία εξαρτώνται από τη στοχαστική μεταβλητή που ακολουθεί γνωστή κατανομή. Η αβεβαιότητα του στοχαστικού πεδίου ποσοτικοποιείται με άγνωστο πεδίο ντετερμινιστικών συντελεστών στο ανάπτυγμα πολυωνυμικού χάους. Η μέθοδος χαρακτηρίζεται ως επεμβατική, καθώς τα ανάπτυγματα πολυωνυμικού χάους για κάθε στοχαστικό πεδίο αντικαθίστανται στις εξισώσεις ροής και προκύπτουν νέα συστήματα εξισώσεων προς επίλυση για τα πεδία των ντετερμινιστικών συντελεστών.

Σε προβλήματα υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (ΥΡΔ) συχνά παρατηρείται αβεβαιότητα ως προς τις συνθήκες ροής, τις ιδιότητες του ρευστού ή παραμέτρους του περιβάλλοντος. Κρίνεται λοιπόν αναγκαία η μη-ντετερμινιστική προσέγγιση του προβλήματος της ροής για πιο αξιόπιστα αποτελέσματα. Παράλληλα, τάση στη σύγχρονη αεροδυναμική αποτελεί ο στιβαρός σχεδιασμός (robust design), ο οποίος εξασφαλίζει σχεδόν αμετάβλητη λειτουργία στο σημείο σχεδιασμού ανεξαρτήτως των πιθανών μεταβολών διαφόρων παραμέτρων. Μια μελέτη τέτοιου είδους προϋποθέτει την εισαγωγή της αβεβαιότητας στις εξισώσεις ροής. Στη βιβλιογραφία απαντούν διάφορες στοχαστικές μέθοδοι για την ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας, όπως η δειγματοληπτική Μέθοδος

Monte-Carlo και η Μη-Επεμβατική Μέθοδος Πολυωνυμικού Χάους (Non-Intrusive Polynomial Chaos Method, NIPCM). Σημαντικό πλεονέκτημα της IPCM έναντι των υπολοίπων είναι το αισθητά χαμηλότερο υπολογιστικό κόστος ακόμα και για μεγάλη τάξη ακρίβειας των αναπτυγμάτων πολυωνυμικού χάους.

Η συγκεκριμένη εργασία εστιάζει στην υλοποίηση της IPCM στην τεχνική της δι-όρθωσης πίεσης για το πρόβλημα της ψευδο-1D ροής ασυμπίεστου ρευστού μέσα σε αγωγό μεταβλητής διατομής και στη 1D συνεκτική εξίσωση Burgers. Για ποικίλες στοχαστικές εισόδους στο πεδίο ροής, παρουσιάζεται η μορφή των αναπτυγμάτων πολυωνυμικού χάους όλων των στοχαστικών όρων με την καλύτερη δυνατή ακρίβεια, έπειτα διατυπώνονται οι εξισώσεις της IPCM και, τέλος, εξετάζεται ο τρόπος επίλυσής τους σε συμφωνία με τις εξισώσεις της μέσης ροής. Για τις ανάγκες των υπολογισμών αναπτύχθηκε σε κάθε περίπτωση λογισμικό για την επίλυση της μέσης ροής και της IPCM.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING
FLUIDS DEPARTMENT
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

**Simulation of Problems Under Uncertainty -
Intrusive Polynomial Chaos Methods. Formulation,
Programming and Implementation in Incompressible
Quasi-1D Flows**

Diploma Thesis
by

Georgia Nykteri

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, July 2016

Abstract

The present diploma thesis focuses on the mathematical formulation and implementation of the Intrusive Polynomial Chaos Method (IPCM) in quasi-1D flows of incompressible fluids, through the development of the appropriate software. According to the theory of polynomial chaos, each stochastic field is represented as a polynomial expansion with orthogonal polynomials, which depend on a random variable, following a known stochastic distribution. The uncertainty is quantified by an unknown field of deterministic coefficients in the polynomial chaos expansion. The method is mentioned as intrusive, because the polynomial chaos expansions for each stochastic field are replaced in the equations of the mean flow and result to new systems of equations in terms of the unknown fields of the deterministic coefficients.

In Computational Fluid Dynamics (CFD) problems, uncertainty in operating conditions, in fluid properties or in environmental parameters is a common place. Consequently, an introduction of a non-deterministic approach for solving the flow equations is very important for more reliable solutions. In present day, the aeronautical industry shows a great interest in robust design, a method that ensures an almost stable operation in the design point, regardless the stochastic behaviour of system parameters. For achieving a more robust design, an uncertainty quantification is needed. There are several stochastic methods, which quantify the uncertainty, like the Monte-Carlo Method and the Non-Intrusive Polynomial Chaos Method (NIPCM).

A great advantage of IPCM among the other stochastic methods is the significantly lower computational cost even for high order accurate polynomial chaos expansions.

This diploma thesis deals with the implementation of IPCM in the pressure correction method for simulating the quasi-1D flow of incompressible fluid inside a nozzle with a variable cross-section and, also, the 1D viscous Burgers' equation. Using different stochastic inputs in the flow field, the polynomial chaos expansions of all stochastic fields are provided aiming at the best possible accuracy, then the IPCM equations are formulated and finally the new systems of equations are numerically solved in conformity to the solvers of the mean flow. All calculations were carried out with the solvers of the mean flow and IPCM equations developed in the framework of the present thesis.

Ακρωνύμια

ΕΜΠ Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΕΘΣ Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

ΜΠΥΡ&Β Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής
Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

ΥΡΔ Υπολογιστική Ρευστοδυναμική

CFD Computational Fluid Dynamics

NTUA National Technical University of Athens

PCopt Parallel CFD & Optimization unit

ΣΔΕ Συνήθης Διαφορική Εξίσωση

PC Polynomial Chaos

IPCM Intrusive Polynomial Chaos Method

NIPCM Non-Intrusive Polynomial Chaos Method

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Γενικά Περί Αβεβαιότητας	1
1.2	Επεμβατική Μέθοδος Πολυωνυμικού Χάους (IPCM)	3
1.3	Στόχος της Διπλωματικής Εργασίας	5
1.4	Δομή της Διπλωματικής Εργασίας	6
2	Αριθμητική Επίλυση Ασυμπύεστης Ψευδο-1D Ροής σε Αγωγό	7
2.1	Μαθηματική Διατύπωση του Προβλήματος	7
2.2	Τεχνική Διόρθωσης Πίεσης	9
2.2.1	Αριθμητική Επίλυση των Εξισώσεων Ροής	9
2.2.2	Αρχικές και Οριακές Συνθήκες	14
2.3	Η ΣΔΕ για την Ολική Πίεση	16
3	Η IPCM(λ^*) στη Ψευδο-1D Ροή	19
3.1	Η IPCM(λ^*) στην Τεχνική Διόρθωσης Πίεσης	20
3.1.1	Ανάπτυγμα PC($p(x)$) 1 ^{ης} Τάξης	21
3.1.2	Ανάπτυγμα PC($p(x)$) 2 ^{ης} Τάξης	24
3.2	Η IPCM(λ^*) στην ΣΔΕ για την Ολική Πίεση	27
3.2.1	Ανάπτυγμα PC($p_t(x)$) 1 ^{ης} Τάξης	27
3.2.2	Ανάπτυγμα PC($p_t(x)$) 2 ^{ης} Τάξης	29
4	Η IPCM με Μη-Γραμμικούς Στοχαστικούς Όρους	33
4.1	Η IPCM(m) στη ΣΔΕ για την Ολική Πίεση	34
4.1.1	Ανάπτυγμα PC του Μη-Γραμμικού Όρου	35

4.1.2	Ανάπτυγμα $PC(p_t(x))$ 1 ^{ης} Τάξης	38
4.1.3	Ανάπτυγμα $PC(p_t(x))$ 2 ^{ης} Τάξης	39
4.2	Η IPCM($S(x)$) στη ΣΔΕ για την Ολική Πίεση	42
4.2.1	Ανάπτυγμα PC των Μη-Γραμμικών Όρων	43
4.2.2	Ανάπτυγμα $PC(p_t(x))$ 1 ^{ης} Τάξης	51
4.2.3	Ανάπτυγμα $PC(p_t(x))$ 2 ^{ης} Τάξης	52
5	Η IPCM($S(x)$) στην Τεχνική Διόρθωσης Πίεσης	57
5.1	Μαθηματική Διατύπωση της IPCM($S(x)$)	58
5.2	Ανάπτυγμα PC του Μη-Γραμμικού Όρου	59
5.3	Αναπτύγματα $PC(v(x), p(x))$ 1 ^{ης} Τάξης	60
5.4	Αναπτύγματα $PC(v(x), p(x))$ 2 ^{ης} Τάξης	69
6	Η IPCM στη 1D Εξίσωση Burgers	83
6.1	Μαθηματική Διατύπωση του Προβλήματος	84
6.1.1	Το Πρόβλημα Riemann	84
6.1.2	Μη-Συνεκτική Εξίσωση Burgers	86
6.1.3	Συνεκτική Εξίσωση Burgers	88
6.2	Η IPCM(v) στη Συνεκτική Εξίσωση Burgers	90
6.2.1	Ανάπτυγμα $PC(v(x, t))$ 1 ^{ης} Τάξης	92
6.2.2	Ανάπτυγμα $PC(v(x, t))$ 2 ^{ης} Τάξης	97
6.3	Η IPCM($v(x_{min}, t)$) στη Συνεκτική Εξίσωση Burgers	100
6.3.1	Ανάπτυγμα $PC(v(x, t))$ 1 ^{ης} Τάξης	103
6.3.2	Ανάπτυγμα $PC(v(x, t))$ 2 ^{ης} Τάξης	105
7	Συμπεράσματα και Προτάσεις	113
7.1	Ανακεφαλαίωση και Συμπεράσματα	113
7.2	Προτάσεις για Μελλοντική Μελέτη	115
A'	Ολοκλήρωση Πολυωνύμων Hermite	117
B'	Τυπολόγιο Προβολών Galerkin	121

Γ' Μέση Τιμή και Τυπική Απόκλιση Στοχαστικού Πεδίου $f(x)$	125
Γ'.0.1 Ανάπτυγμα PC($f(x)$) 1 ^{ης} Τάξης	126
Γ'.0.2 Ανάπτυγμα PC($f(x)$) 2 ^{ης} Τάξης	127
Δ' Βιβλιογραφία	129

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Γενικά Περί Αβεβαιότητας

Η ακριβής μοντελοποίηση σύνθετων ρευστομηχανικών συστημάτων καθίσταται ακόμα πιο δύσκολη εξαιτίας διαφόρων ειδών αβεβαιοτήτων που υπεισέρχονται στο σύστημα και, πιθανώς, αφορούν στις αρχικές ή οριακές συνθήκες, στις ιδιότητες του ρευστού, σε παραμέτρους του περιβάλλοντος ή σε αβεβαιότητες της γεωμετρίας. Σύγχρονη τάση στο πεδίο της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (CFD) είναι η βελτίωση της αξιοπιστίας των υπολογιστικών μοντέλων και εργαλείων, που χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων ροής σε βιομηχανικές εφαρμογές, η οποία όμως προϋποθέτει, πέραν της ελαχιστοποίησης των αριθμητικών σφαλμάτων, την υπολογιστική προσομοίωση της επίδρασης της αβεβαιότητας στη ροή (**σχεδιασμός υπό αβεβαιότητες**-design under uncertainty [16],[21]). Χαρακτηριστικό παράδειγμα της αναγκαιότητας μιας τέτοιας προσέγγισης του προβλήματος της ροής αποτελεί η περίπτωση ενός συμπιεστή, όπου οι συνθήκες ροής στην είσοδο, όπως ο αριθμός Mach και η γωνία πρόσπτωσης της ροής, είναι πρακτικά αδύνατο να διατηρηθούν σταθερές στο σημείο σχεδιασμού της μηχανής, αλλά παρουσιάζουν κάποια διακύμανση γύρω από αυτό, επηρεάζοντας τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά της ροής και κατ' επέκταση την απόδοση του συμπιεστή.

Οι αβεβαιότητες κατατάσσονται σε 2 κατηγορίες, τις επιστημικές (epistemic) και τις τυχαίες (aleatory) [24].

- Ως **επιστημική αβεβαιότητα** ορίζεται η έλλειψη γνώσης ή επαρκούς πληροφορησης σε οποιοδήποτε στάδιο ή διεργασία της διαδικασίας μοντελοποίησης. Πρόκειται για μια αβεβαιότητα, που σχετίζεται με το μοντέλο της ροής και διακρίνεται από μια ασάφεια χάρη στην οποία είναι δύσκολο να ποσοτικοποιηθεί. Ενδοιασμοί σχετικά με τη χρήση του κατάλληλου μοντέλου τύρβης ή των σωστών τιμών για τους σταθερούς συντελεστές σε ένα πρόβλημα ροής, όπως, επίσης,

και η έλλειψη πειραματικών δεδομένων, μπορούν να θεωρηθούν ως αβεβαιότητες αυτής της κατηγορίας.

- Η **τυχαία αβεβαιότητα** σχετίζεται με την εγγενή διακύμανση του φυσικού συστήματος ή του περιβάλλοντός του. Αβεβαιότητες στις οριακές συνθήκες του πεδίου ροής, σε φυσικές ιδιότητες του ρευστού (πχ. συνεκτικότητα, θερμική αγωγιμότητα), καθώς και στη γεωμετρία μιας πραγματικής μηχανής εξαιτίας των κατασκευαστικών ανοχών μπορούν να χαρακτηριστούν ως τυχαίες. Η μαθηματική μοντελοποίηση των τυχαίων αβεβαιοτήτων υλοποιείται με μια στοχαστική κατανομή.

Η εισαγωγή των αβεβαιοτήτων στην επίλυση του προβλήματος ροής είναι ιδιαίτερα σημαντική, γιατί εκτός της εξασφάλισης μιας πιο αξιόπιστης μοντελοποίησης για το πεδίο ροής, αποτελεί το μοναδικό τρόπο επίτευξης ενός αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού (**robust design** [2], [4]). Τα προβλήματα αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού είναι προβλήματα βελτιστοποίησης με αβέβαιες μεταβλητές περιβάλλοντος, στα οποία στόχος είναι η εξεταζόμενη αντικειμενική συνάρτηση να μην παρουσιάζει μεγάλη ευαισθησία σε μεταβολές γύρω από το σημείο σχεδιασμού. Στο παράδειγμα του συμπιεστή, στόχος θα ήταν η απόδοσή του να μην επηρεάζεται σημαντικά από την αβεβαιότητα των συνθηκών ροής στην είσοδο.

Τα προβλήματα CFD υπό αβεβαιότητες ανήκουν στην κατηγορία μη-ντετερμινιστικών προβλημάτων ροής. Για την ποσοτικοποίηση και διαχείριση της αβεβαιότητας χρησιμοποιούνται στοχαστικές μέθοδοι, όπως η Μέθοδος Monte-Carlo και η Μέθοδος Πολυωνυμικού Χάους (Polynomial Chaos, PC).

Η **Μέθοδος Monte-Carlo** [17], [10] στηρίζεται στην ντετερμινιστική επίλυση της ροής με τυχαίες εισόδους για ένα μεγάλο αριθμό δείγματος και στη μετέπειτα στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων για τον προσδιορισμό των επιθυμητών στατιστικών ροών [12]. Πρόκειται για μια απλή μέθοδο, η οποία όμως έχει μεγάλο υπολογιστικό κόστος και υπό συγκεκριμένες συνθήκες παρουσιάζει σημαντικό σφάλμα και αδυναμία σύγκλισης [25].

Η **Μέθοδος PC** βασίζεται σε ένα πολυωνυμικό ανάπτυγμα με ορθογώνια πολυώνυμα βάσης, που εξαρτώνται από τη στοχαστική μεταβλητή και αγνώστους τους ντετερμινιστικούς συντελεστές της υπολογιζόμενης στοχαστικής ποσότητας. Αρχικά, όπως αναπτύχθηκε από το Wiener [32], αφορούσε αποκλειστικά σε στοχαστικές μεταβλητές που ακολουθούν κανονική κατανομή με πολυώνυμα βάσης του αναπτύγματος PC τα πολυώνυμα Hermite. Έπειτα, γενικεύτηκε από τους Xiu και Karniadakis [34], [35] για κάθε στοχαστική κατανομή με τα αντίστοιχα ορθογώνια πολυώνυμα σύμφωνα με το σχήμα Askey [9]. Η μέθοδος PC διακρίνεται σε επεμβατική (intrusive) και μη-επεμβατική (non-intrusive), ανάλογα με τον τρόπο υλοποίησης του αναπτύγματος PC.

Η Μη-Επεμβατική Μέθοδος Πολυωνυμικού Χάους (NIPCM) [4] είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη σε εφαρμογές CFD [18],[19], καθώς δέχεται τον κώδικα ροής ως "μαύρο κουτί" (black-box) χωρίς να απαιτεί οποιαδήποτε παρέμβαση σε αυτόν. Το βασικό της

μειονέκτημα είναι το αυξημένο υπολογιστικό κόστος έναντι της επεμβατικής μεθόδου. Επιπλέον, σε πολυδιάστατους στοχαστικούς χώρους η επεμβατική μέθοδος πολυωνυμικού χάους παρέχει τις πιο ακριβείς λύσεις με το μικρότερο αριθμό εξισώσεων, γεγονός που την καθιστά εν γένει πιο ευέλικτη [33], [7].

1.2 Επεμβατική Μέθοδος Πολυωνυμικού Χάους (IPCM)

Η Επεμβατική Μέθοδος Πολυωνυμικού Χάους (IPCM) [11], [23] αποτελεί την κλασική μέθοδο PC και σε αντίθεση με τη NIPCM, απαιτείται παρέμβαση στις εξισώσεις ροής με αντικατάσταση του αναπτύγματος PC κάθε στοχαστικής εισόδου. Τα πεδία της ροής που δέχονται την επίδραση της αβεβαιότητας εισόδου και αποκτούν εξίσου στοχαστικό χαρακτήρα, εκφράζονται ως αναπτύγματα PC, τα οποία όμοια αντικαθίστανται στις εξισώσεις ροής. Τελικά, από την επίλυση των εξισώσεων της IPCM προσδιορίζονται οι ντετερμινιστικοί συντελεστές των άγνωστων στοχαστικών πεδίων της ροής, τα οποία υφίστανται την επίδραση των αβέβαιων εισόδων.

Βασική αρχή της μεθόδου είναι ότι κάθε αβεβαιότητα, που υπεισέρχεται στη διαμόρφωση ενός μαθηματικού μοντέλου, είναι μια ανεξάρτητη στοχαστική μεταβλητή εισόδου για το πρόβλημα της ροής (uncertain input variable). Ο αριθμός των στοχαστικών εισόδων n εκφράζει τη διάσταση του προβλήματος και η λύση του εξαρτάται από αυτόν. Σε αυτές τις διαστάσεις διατυπώνεται ένα ανάπτυγμα ορθογωνίων πολυωνύμων, του οποίου οι ντετερμινιστικοί συντελεστές ποσοτικοποιούν την αβεβαιότητα της λύσης. Για εξασφάλιση εκθετικής σύγκλισης της στοχαστικής λύσης, ως συνάρτηση βάρους χρησιμοποιείται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, που αντιστοιχεί στην οικογένεια των ορθογωνίων πολυωνύμων του αναπτύγματος.

Έστω $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1(\theta), \xi_2(\theta), \dots, \xi_n(\theta))$ οι n ανεξάρτητες στοχαστικές μεταβλητές εισόδου με γνωστή στοχαστική κατανομή, που ορίζει τη στοχαστική είσοδο ενός προβλήματος. Τότε, η λύση του μη-ντετερμινιστικού προβλήματος δίνεται από το ανάπτυγμα PC

$$f(\mathbf{x}, t, \theta) = \sum_{j=0}^p f_j(\mathbf{x}, t) \psi_j(\boldsymbol{\xi}(\theta)) \quad (1.1)$$

όπου θ το αποτέλεσμα ενός πειράματος που σχετίζεται με το μη-ντετερμινιστικό γεγονός, $f_j(\mathbf{x}, t)$ το πεδίο των ντετερμινιστικών συντελεστών του στοχαστικού πεδίου $f(\mathbf{x}, t, \theta)$, $\xi_z(\theta)$ για $z=1, \dots, n$ η στοχαστική μεταβλητή εισόδου, p η τάξη αποκοπής του αναπτύγματος που ονομάζεται τάξη PC και ψ_j τα ορθογώνια πολώνυμα της στοχαστικής κατανομής που ακολουθούν οι στοχαστικές μεταβλητές εισόδου.

Ο συνολικός αριθμός των όρων του αναπτύγματος PC, $P + 1$, εξαρτάται από την τάξη του PC p και τη διάσταση του στοχαστικού προβλήματος n [34] και ορίζεται ως

$$P + 1 = \frac{(n + p)!}{n!p!}$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της ορθογωνιότητας, για τα πολυώνυμα βάσης του αναπτύγματος PC ισχύει

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \langle \psi_i^2 \rangle \delta_{ij}$$

όπου ως $\langle \cdot \rangle$ ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο των ορθογωνίων πολυωνύμων με τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της στοχαστικής κατανομής $w(\boldsymbol{\xi})$ στο πεδίο ορισμού τους (**προβολή Galerkin**)

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \int_D \psi_i(\boldsymbol{\xi}) \psi_j(\boldsymbol{\xi}) w(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$$

Το σχήμα Askey [9] καθορίζει τη βέλτιστη οικογένεια ορθογωνίων πολυωνύμων για κάθε συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, προς επίτευξη σύγκλισης του αναπτύγματος PC. Στη συνέχεια, θα εξετάζονται προβλήματα μίας στοχαστικής μεταβλητής εισόδου ξ , που ακολουθεί κανονική κατανομή. Τότε, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής είναι η Gauss-ιανή συνάρτηση και τα ορθογώνια πολυώνυμα βάσης είναι τα πολυώνυμα Hermite $A'.1$.

Προκειμένου να καθορισθεί η στοχαστική συμπεριφορά του πεδίου f , πρέπει να προσδιορισθεί το πεδίο των ντετερμινιστικών συντελεστών f_j για $j=0, \dots, p$. Αυτό επιτυγχάνεται με την εφαρμογή προβολών Galerkin. Χάρη στην ιδιότητα ορθογωνιότητας των πολυωνύμων ψ_j , για το πεδίο των ντετερμινιστικών συντελεστών ισχύει ότι

$$f_j = \frac{\langle \psi_j f \rangle}{\langle \psi_j^2 \rangle}$$

Έστω ένα πρόβλημα ροής, το οποίο χαρακτηρίζεται από φαινόμενα αβεβαιότητας και περιγράφεται από μια συνήθη διαφορική εξίσωση της μορφής

$$L(f(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}) = 0 \tag{1.2}$$

Η εξίσωση από την οποία θα υπολογιστεί το άγνωστο ντετερμινιστικό πεδίο f_j προκύπτει με αντικατάσταση της εξίσωσης (1.1) στην (1.2) και προβολή κατά Galerkin

$$\langle L \left(\sum_{j=0}^p f_j(\mathbf{x}, t) \psi_j \right), \psi_j \rangle = 0, \quad j = 0, \dots, p$$

Επομένως, στην IPCM ο κώδικας της μέσης ροής επιλύεται μία φορά για τον προσδιορισμό του άγνωστου στοχαστικού πεδίου, ανεξαρτήτως της τάξης του αναπτύγματος PC. Αντίθετα, στη NIPCM ο κώδικας της ροής επιλύεται μία φορά για κάθε ντετερμινιστικό συντελεστή με αυξανόμενο υπολογιστικό κόστος αυξανόμενης της τάξης του PC. Πρόκειται για ένα σημαντικό πλεονέκτημα της IPCM, που την καθιστά κατάλληλη για χρήση σε στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης, όπως η μέθοδος των εξελικτικών αλγορίθμων [6], οι οποίες απαιτούν πολλαπλές κλήσεις του κώδικα αξιολόγησης της ροής σε κάθε γενιά.

1.3 Στόχος της Διπλωματικής Εργασίας

Η παρούσα διπλωματική εργασία εστιάζει στη μαθηματική διατύπωση της IPCM μίας στοχαστικής εισόδου σε προβλήματα ψευδο-1D ροής ασυμπίεστου ρευστού. Μέσα από εφαρμογές σε διαφορετικά προβλήματα ροής υπό ποικίλες αβέβαιες εισόδους, εξετάζεται ο τρόπος επίλυσης των εξισώσεων της IPCM για τον υπολογισμό των άγνωστων στοχαστικών πεδίων σε συμφωνία με τη μέθοδο επίλυσης των εξισώσεων της μέσης ροής, όταν τα συστήματα για τα πεδία των άγνωστων ντετερμινιστικών συντελεστών είναι πεπλεγμένα ή μη. Για κάθε πρόβλημα ροής, αναπτύσσεται η μέθοδος της IPCM 1^{ης} και 2^{ης} τάξης και διερευνάται η επίδραση της αύξησης της τάξης του PC στη βελτίωση της λύσης, αλλά και στη σύγκλιση της μεθόδου. Επιπλέον, κατά την υλοποίηση του αναπτύγματος PC στις εξισώσεις ροής διεξάγονται διερευνήσεις για επιμέρους στοχαστικούς όρους, προκειμένου να μοντελοποιηθούν με τον πιο ακριβή τρόπο. Σε κάθε περίπτωση, πραγματοποιούνται συγκρίσεις με τη NIPCM αντίστοιχης τάξης PC για επαλήθευση των αποτελεσμάτων. Στόχος είναι μέσα από τις εφαρμογές και τις διερευνήσεις, να εξαχθούν γενικότερα συμπεράσματα για τις IPCM χαμηλών τάξεων.

1.4 Δομή της Διπλωματικής Εργασίας

Η δομή της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η εξής:

- Στο 2^ο κεφάλαιο αναπτύσσεται η μέθοδος επίλυσης της ασυμπίεστης ψευδο-1D ροής μέσα σε αγωγό μεταβλητής διατομής με την τεχνική της διόρθωσης πίεσης και με τη συνήθη διαφορική εξίσωση (σδε) που διέπει την ολική πίεση συγκρίνοντας, τελικά, τα αποτελέσματα των 2 ισοδύναμων μεθόδων.
- Στο 3^ο κεφάλαιο διατυπώνεται η IPCM στις 2 μεθόδους επίλυσης της ροής με στοχαστική είσοδο μια ιδιότητα του ρευστού και εξετάζεται η επίδραση της αβεβαιότητας εισόδου στο πεδίο της ολικής πίεσης για αναπτύγματα PC 1^{ης} και 2^{ης} τάξης.
- Στο 4^ο κεφάλαιο διατυπώνεται η IPCM στη σδε για την ολική πίεση υπό 2 διαφορετικές στοχαστικές εισόδους, την παροχή και τη διατομή του αγωγού και παρουσιάζεται μια εκτενής διερεύνηση για την ακριβέστερη διατύπωση των μη-γραμμικών στοχαστικών όρων ως αναπτύγματα PC 1^{ης} και 2^{ης} τάξης.
- Στο 5^ο κεφάλαιο η IPCM εφαρμόζεται στην τεχνική της διόρθωσης πίεσης με στοχαστική είσοδο την κατανομή της διατομής του αγωγού και παρουσιάζεται διεξοδικά η μαθηματική διατύπωση της τεχνικής της διόρθωσης πίεσης για τα πεπλεγμένα συστήματα των εξισώσεων της IPCM 1^{ης} και 2^{ης} τάξης.
- Στο 6^ο κεφάλαιο διατυπώνεται η μέθοδος επίλυσης της συνεκτικής και μη-συνεκτικής εξίσωσης Burgers για ένα πρόβλημα αρχικών τιμών με ασυνέχεια. Έπειτα, αναπτύσσεται η IPCM στη συνεκτική εξίσωση Burgers υπό 2 διαφορετικές στοχαστικές εισόδους και ερμηνεύεται η επίδραση της στοχαστικότητας στο πεδίο ταχύτητας σύμφωνα με τη φυσική του προβλήματος.
- Στο 7^ο κεφάλαιο παρατίθενται τα συμπεράσματα από τη μελέτη της IPCM στην ψευδο-1D ροή ασυμπίεστου ρευστού, μαζί με προτάσεις και σχόλια για περαιτέρω μελέτη και εφαρμογές της μεθόδου σε 1D, αλλά και περισσότερων διαστάσεων, προβλήματα ροής.
- Στο παράρτημα παρουσιάζονται συγκεντρωτικά χρήσιμες σχέσεις και τυπολόγια για εφαρμογή κατά την υλοποίηση της IPCM 1^{ης} και 2^{ης} τάξης.

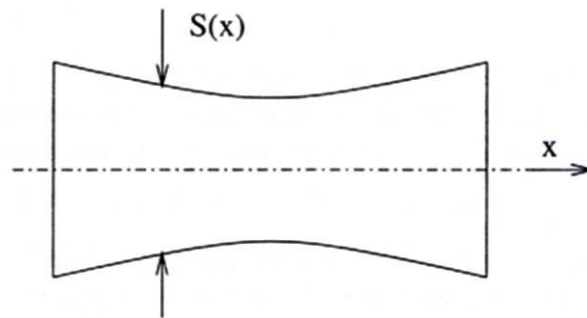
Κεφάλαιο 2

Αριθμητική Επίλυση Ασυμπίεστης Ψευδο-1D Ροής σε Αγωγό

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η διατύπωση των εξισώσεων, η διακριτοποίηση και η αριθμητική επίλυση της ψευδο-1D μόνιμης, στρωτής, ασυμπίεστης ροής μέσα σε αγωγό. Τα χαρακτηριστικά της ροής μεταβάλλονται μόνο κατά την αξονική κατεύθυνση του αγωγού, ενώ με την προσθήκη κατάλληλου όρου στην εξίσωση διατήρησης της ορμής λαμβάνεται υπόψη και η επίδραση των διατμητικών τάσεων. Για την αριθμητική επίλυση της ροής εφαρμόζεται η τεχνική της διόρθωσης πίεσης (pressure correction). Επιπλέον, για επαλήθευση της μεθόδου αναπτύσσεται και επιλύεται η σδε της ολικής πίεσης, η οποία προκύπτει από την εξίσωση διατήρησης της ορμής με αντικατάσταση της ταχύτητας βάσει του ορισμού της παροχής.

2.1 Μαθηματική Διατύπωση του Προβλήματος

Η διατομή του συγκλίνοντος-αποκλίνοντος αγωγού έχει μια κατανομή $S(x)$ κατά την αξονική κατεύθυνση με $x \in \mathbb{R}$ και έστω ότι δημιουργείται με μια καμπύλη Bezier. Έπειτα, εκατέρωθεν του συγκλίνοντος-αποκλίνοντος τμήματος προστίθεται ένα τμήμα σταθερής διατομής για εξασφάλιση σταθερής ταχύτητας στην είσοδο και την έξοδο του αγωγού. Στη μελέτη του ψευδο-1D προβλήματος οι εξισώσεις ροής διατυπώνονται και επιλύονται κατά μήκος του αγωγού. Η διακριτοποίηση του μήκους του αγωγού στην κατεύθυνση x γίνεται με np κόμβους i ($i = 1, \dots, np$), οι οποίοι απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση Δx .



Σχήμα 2.1: Η μορφή του συγκλίνοντος-αποκλίνοντος αγωγού με κατανομή διατομής $S(x)$ κατά την αξονική κατεύθυνση x .

Για την ψευδο-1D ροή ασυμπίεστου ρευστού σε αγωγό μεταβλητής διατομής διατυπώνονται οι εξισώσεις ροής σε μη-συντηρητική γραφή

$$\frac{d(vS)}{dx} = 0 \quad (2.1)$$

$$vS \frac{dv}{dx} - \frac{d}{dx} \left(S\nu \frac{dv}{dx} \right) = -S \frac{dp}{dx} - \lambda^* \sqrt{S} v^2 \quad (2.2)$$

όπου $v(x)$ το πεδίο της ταχύτητας του ρευστού, $S(x)$ η κατανομή της μεταβλητής διατομής του αγωγού, ν η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού, $p(x)$ το πεδίο της στατικής πίεσης διαιρεμένης με την πυκνότητα του ρευστού (κινηματική πίεση) και λ^* ο συντελεστής του όρου πηγής που εκφράζει την επίδραση των διατμητικών τάσεων. Στη συνέχεια, το πεδίο $p(x)$ θα αναφέρεται ως η στατική πίεση του πεδίου ροής. Το σύστημα των εξισώσεων ροής (2.1) και (2.2) έχει αγνώστους τα πεδία $v(x)$ και $p(x)$.

Κατά τη ροή σε αγωγό λαμβάνει χώρα πτώση ολικής πίεσης που οφείλεται στην τριβή, που αναπτύσσεται κατά την κίνηση του ρευστού εξαιτίας των φαινομένων συνεκτικότητας. Η πτώση ολικής πίεσης Δp_t σε έναν αγωγό μήκους l για πλήρως αναπτυγμένη, μόνιμη ροή εκφράζεται από την εξίσωση Darcy-Weisbach [22]

$$\Delta p_t = \lambda \frac{l}{D_h} \frac{\rho v^2}{2}$$

όπου λ ο συντελεστής τριβής κατά Darcy-Weisbach και D_h η υδραυλική διάμετρος του αγωγού. Ο συντελεστής τριβής λ προσδιορίζεται από το διάγραμμα Moody [22] και εξαρτάται από την τιμή του αριθμού Reynolds και την τραχύτητα στο εσωτερικό του αγωγού.

Στην ψευδο-1D εξίσωση διατήρησης της ορμής (2.2) η πτώση ολικής πίεσης ρυθμίζεται από τον όρο $\lambda^* \sqrt{S} v^2$ [26]. Για το συντελεστή λ^* , ο οποίος περιλαμβάνει όλες τις σχετικές σταθερές, ισχύει

$$\lambda^* = \lambda \frac{dx \sqrt{\pi}}{4}$$

2.2 Τεχνική Διόρθωσης Πίεσης

Η τεχνική της διόρθωσης πίεσης είναι μια μέθοδος για την επίλυση των ασυμπίεστων ροών, όπως παρουσιάστηκε από τους Patankar και Spalding [28]. Ανήκει στην κατηγορία μεθόδων υπολογιστικής ρευστοδυναμικής, που βασίζονται στην πίεση (pressure-based methods), εισάγοντάς την στην εξίσωση της συνέχειας. Σύμφωνα με την τεχνική της διόρθωσης πίεσης, στο πλαίσιο ενός επαναληπτικού αλγορίθμου, πρώτα επιλύεται η εξίσωση διατήρησης της ορμής για τον υπολογισμό του πεδίου της ταχύτητας με βάση το τρέχον πεδίο πίεσης. Στη συνέχεια, το πεδίο της ταχύτητας διορθώνεται σύμφωνα με ένα νέο διορθωμένο πεδίο πίεσης, το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση της συνέχειας. Η συγκεκριμένη διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι σύγκλισης.

2.2.1 Αριθμητική Επίλυση των Εξισώσεων Ροής

Η διακριτοποίηση των εξισώσεων της ψευδο-1D ροής (2.1) και (2.2) γίνεται σε ομοιόμορφο ομόθετο πλέγμα (co-located grid), όπου όλα τα χαρακτηριστικά μεγέθη της ροής, συμπεριλαμβανομένων των αγνώστων $v(x)$ και $p(x)$, αποθηκεύονται στους κόμβους i του πλέγματος (κεντροκομβική αποθήκευση, vertex-centered storage). Η υπολογιστική κυψέλη μήκους Δx καθορίζεται με κέντρο τον κόμβο i ($i=1, \dots, np$) και όρια τους εκατέρωθεν μεσόκομβους $f_i = \frac{i+1}{2}$ και $b_i = \frac{i-1}{2}$. Στην πρώτη και την τελευταία υπολογιστική κυψέλη, οι οποίες είναι μισού μήκους, ορίζονται ψευδοκόμβοι.

Οι όροι της εξίσωσης διατήρησης της ορμής (2.2) διακριτοποιούνται με σχήματα πεπερασμένων διαφορών 2^{ns} τάξης ακρίβειας στο χώρο $O[(\Delta x)^2]$. Συγκεκριμένα,

- ο όρος διάχυσης εκφράζεται με σχήμα κεντρικών διαφορών [27]

$$\frac{d}{dx} \left(S \nu \frac{dv}{dx} \right) \Big|_i = \frac{1}{\Delta x} \left[S_{f_i} \nu \frac{dv}{dx} \Big|_{f_i} - S_{b_i} \nu \frac{dv}{dx} \Big|_{b_i} \right] = \frac{1}{\Delta x} \left[S_{f_i} \nu \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta x} - S_{b_i} \nu \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta x} \right]$$

όπου

$$S_{f_i} = \frac{S_i + S_{i+1}}{2}, \quad S_{b_i} = \frac{S_i + S_{i-1}}{2}$$

- ο όρος μεταφοράς εκφράζεται με σχήμα ανάντι παραγωγίσης (upwind scheme [27]) 2^{ης} τάξης ακρίβειας και για ροή ρευστού προς τα θετικά x γίνεται

$$\begin{aligned} vS \frac{dv}{dx} \Big|_i &= \frac{v_{f_i} S_{f_i} \left[v_i + \frac{\Delta x}{2} \frac{dv}{dx} \Big|_i \right] - v_{b_i} S_{b_i} \left[v_{i-1} + \frac{\Delta x}{2} \frac{dv}{dx} \Big|_{i-1} \right]}{\Delta x} = \\ &= \frac{v_{f_i} S_{f_i} \left[v_i + \frac{\Delta x}{2} \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta x} \right] - v_{b_i} S_{b_i} \left[v_{i-1} + \frac{\Delta x}{2} \frac{v_i - v_{i-2}}{2\Delta x} \right]}{\Delta x} \end{aligned}$$

όπου

$$v_{f_i} = \frac{v_i + v_{i+1}}{2}, \quad v_{b_i} = \frac{v_i + v_{i-1}}{2}$$

- ο όρος κλίσης πίεσης εκφράζεται με σχήμα κεντρικών διαφορών

$$S \frac{dp}{dx} \Big|_i = S_i \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2\Delta x}$$

όπου το πεδίο της στατικής πίεσης $p(x)$ θεωρείται γνωστό από την προηγούμενη επανάληψη.

Αντικαθιστώντας τους διακριτοποιημένους όρους στην εξίσωση διατήρησης της ορμής (2.2), μετά από πράξεις προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων τριδιαγώνιας μορφής

$$A_{F_i} \cdot v_{i+1}^n + A_{P_i} \cdot v_i^* + A_{B_i} \cdot v_{i-1}^n = Q_i \quad (2.3)$$

όπου

$$A_{F_i} = \frac{S_{f_i} \nu}{\Delta x} - \frac{v_{f_i}^n S_{f_i}}{4}, \quad A_{P_i} = -\frac{S_{f_i} \nu}{\Delta x} - \frac{S_{b_i} \nu}{\Delta x} - v_{f_i}^n S_{f_i} + \frac{v_{b_i}^n S_{b_i}}{4}$$

$$A_{B_i} = \frac{S_{b_i} \nu}{\Delta x} + \frac{v_{f_i}^n S_{f_i}}{4} + v_{b_i}^n S_{b_i}, \quad Q_i = S_i \frac{p_{i+1}^n - p_{i-1}^n}{2} + \frac{v_{b_i}^n S_{b_i}}{4} v_{i-2}^n + \lambda^* \Delta x \sqrt{S_i} (v_i^n)^2$$

και n η προηγούμενη επανάληψη.

Το σύστημα των διακριτοποιημένων εξισώσεων διατήρησης της ορμής (2.3) επιλύεται σε κάθε επανάληψη για δεδομένο πεδίο πίεσης $p^n(x)$ με τον αλγόριθμο *Thomas* [5] και υπολογίζεται το πεδίο της ταχύτητας $v^*(x)$ στην τρέχουσα επανάληψη $n + 1$.

Για τη σταθεροποίηση και σύγκλιση της επαναληπτικής διαδικασίας χρησιμοποιείται η μέθοδος της χαλάρωσης στον υπολογισμό του πεδίου της ταχύτητας [15]. Με εφαρμογή της χαλάρωσης, το πεδίο της ταχύτητας στην τρέχουσα επανάληψη γίνεται

$$v_i^{n+1} = \omega_v \cdot v_i^* + (1 - \omega_v) \cdot v_i^n \quad (2.4)$$

όπου ω_v η παράμετρος χαλάρωσης (υποχαλάρωση για $0 < \omega_v < 1$), v_i^* το πεδίο της ταχύτητας στην τρέχουσα επανάληψη, που υπολογίστηκε από την επίλυση του συστήματος (2.3) χωρίς χαλάρωση και v_i^n το πεδίο της ταχύτητας στην προηγούμενη επανάληψη.

Από την εξίσωση (2.4) προκύπτει μια έκφραση για το πεδίο της ταχύτητας v_i^* , η οποία αντικαθίσταται στο σύστημα των διακριτοποιημένων εξισώσεων διατήρησης της ορμής χωρίς χαλάρωση (2.3) και προσδιορίζονται τα νέα μητρώα A'_{P_i} και Q'_i συναρτήσει της παραμέτρου χαλάρωσης για την ταχύτητα

$$A'_{P_i} = \frac{A_{P_i}}{\omega_v} \quad , \quad Q'_i = Q_i + \frac{1 - \omega_v}{\omega_v} A_{P_i} v_i^n$$

Τελικά, το σύστημα των διακριτοποιημένων εξισώσεων διατήρησης της ορμής για τα νέα μητρώα A'_{P_i} και Q'_i γίνεται

$$A_{F_i} \cdot v_{i+1}^n + A'_{P_i} \cdot v_i^{n+1} + A_{B_i} \cdot v_{i-1}^n = Q'_i \quad , \quad 1 \leq i \leq np \quad (2.5)$$

Από την επίλυση του τριδιαγώνιου συστήματος (2.5) υπολογίζεται το πεδίο της ταχύτητας $v^{n+1}(x)$ στην τρέχουσα επανάληψη, το οποίο έχει λάβει υπόψη την παράμετρο χαλάρωσης ω_v , αλλά δεν ικανοποιεί την εξίσωση της συνέχειας. Για την ικανοποίηση της εξίσωσης της συνέχειας, εφαρμόζονται στο πεδίο της ταχύτητας και της στατικής πίεσης διορθώσεις της μορφής

$$\begin{aligned} v_i^{DF} &= v_i^{n+1} + v'_i \\ p_i^{n+1} &= p_i^n + \omega_p p'_i \end{aligned} \quad (2.6)$$

όπου v_i^{n+1} το πεδίο της ταχύτητας στην τρέχουσα επανάληψη, που ικανοποιεί την εξίσωση διατήρησης της ορμής (2.5), v'_i το πεδίο της διόρθωσης της ταχύτητας, ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση της συνέχειας, ω_p η παράμετρος χαλάρωσης στον υπολογισμό της στατικής πίεσης, p_i^n το πεδίο της στατικής πίεσης στην προηγούμενη επανάληψη και p'_i το πεδίο της διόρθωσης της στατικής πίεσης, ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση της συνέχειας.

Με την υπόθεση ότι η διόρθωση στο πεδίο της ταχύτητας καθορίζεται αποκλειστικά από τη διόρθωση στο πεδίο της πίεσης, διατυπώνεται η διακριτοποιημένη εξίσωση διατήρησης της ορμής (2.5) στον κόμβο i για το τρέχον και το διορθωμένο πεδίο της ταχύτητας

$$A'_{P_i} v_i^{n+1} = R_{P_i} + \frac{p_{i+1}^n - p_{i-1}^n}{2\Delta x} dx S_i$$

$$A'_{P_i} v_i^{DF} = R_{P_i} + \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} dx S_i$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις προκύπτει η διόρθωση του πεδίου της ταχύτητας στον κόμβο i

$$v'_i = d_i \frac{p'_{i+1} - p'_{i-1}}{2\Delta x} dx S_i$$

όπου $d_i = \frac{1}{A'_{P_i}}$.

Τελικά, ορίζεται το διορθωμένο πεδίο της ταχύτητας, που ικανοποιεί την εξίσωση της συνέχειας

$$v_i^{DF} = v_i^{n+1} + d_i \left. \frac{dp'}{dx} \right|_i dx S_i, \quad i = 1, \dots, np \quad (2.7)$$

Η έκφραση (2.7) για το διορθωμένο πεδίο της ταχύτητας αντικαθίσταται στην εξίσωση της συνέχειας (2.1) και εφαρμόζεται σχήμα διακριτοποίησης κεντρικών διαφορών 2^{ns} τάξης ακρίβειας

$$\begin{aligned} \frac{d(v^{DF} S)}{dx} = 0 &\implies \frac{v_{f_i}^{DF} S_{f_i} - v_{b_i}^{DF} S_{b_i}}{\Delta x} = 0 \implies \\ \left[v_{f_i}^{n+1} + d_{f_i} \left. \frac{dp'}{dx} \right|_{f_i} \right] S_{f_i} - \left[v_{b_i}^{n+1} + d_{b_i} \left. \frac{dp'}{dx} \right|_{b_i} \right] S_{b_i} &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

όπου

$$d_{f_i} = \frac{d_i + d_{i+1}}{2}, \quad d_{b_i} = \frac{d_i + d_{i-1}}{2}$$

Μετά από πράξεις προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα np εξισώσεων τριδιαγώνιας μορφής ως προς το πεδίο της διόρθωσης της στατικής πίεσης $p'(x)$

$$A_{F_i} \cdot p'_{i+1} + A_{P_i} \cdot p'_i + A_{B_i} \cdot p'_{i-1} = Q_i \quad (2.9)$$

όπου

$$A_{F_i} = d_{f_i} S_{f_i}^2, \quad A_{B_i} = d_{b_i} S_{b_i}^2, \quad A_{P_i} = -(A_{F_i} + A_{B_i}), \quad Q_i = -v_{f_i}^{n+1} S_{f_i} + v_{b_i}^{n+1} S_{b_i}$$

Το σύστημα των διακριτοποιημένων εξισώσεων της συνέχειας (2.9) επιλύεται σε κάθε επανάληψη με τον ίδιο αλγόριθμο *Thomas* και υπολογίζεται το πεδίο της διόρθωσης της στατικής πίεσης $p'(x)$ στην τρέχουσα επανάληψη $n + 1$.

Η επίλυση των διακριτοποιημένων εξισώσεων της ροής (2.5) και (2.9) σε ομόθετο πλέγμα δίνει μια λύση, όπου η πίεση ταλαντώνεται αφύσικα μεταξύ διαδοχικών κόμβων. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος των ταλαντώσεων της πίεσης εισάγεται στη μέθοδο επίλυσης της ροής η παρεμβολή Rhie-Chow [31]. Τότε, στη διορθωμένη ταχύτητα στους μεσόκομβους του πλέγματος, όπως ορίζεται από τη σχέση (2.7), προστίθεται ένας όρος τεχνητής συνεκτικότητας, στον οποίο εμφανίζονται με αντίθετο πρόσημο οι δύο διαφορετικές εκφράσεις της κλίσης της στατικής πίεσης $p^n(x)$ στο μεσόκομβο, δηλαδή με σχήμα κεντρικών διαφορών ως προς το μεσόκομβο και με παρεμβολή των παραγώγων στους εκατέρωθεν κόμβους. Επομένως, τα πεδία των διορθωμένων ταχυτήτων στους μεσόκομβους του πλέγματος γίνονται

$$v_{f_i}^{DF} = v_{f_i}^{n+1} + d_{f_i} (p'_{i+1} - p'_i) S_{f_i} + d_{f_i} \left[\left. \frac{dp^n}{dx} \right|_{f_i} - \left. \frac{d\tilde{p}^n}{dx} \right|_{f_i} \right] \Delta x S_{f_i} \quad (2.10)$$

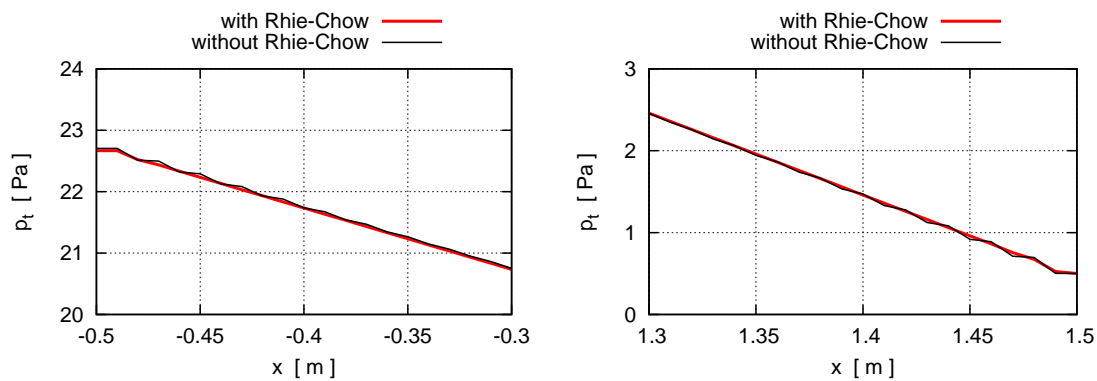
$$v_{b_i}^{DF} = v_{b_i}^{n+1} + d_{b_i} (p'_i - p'_{i-1}) S_{b_i} + d_{b_i} \left[\left. \frac{dp^n}{dx} \right|_{b_i} - \left. \frac{d\tilde{p}^n}{dx} \right|_{b_i} \right] \Delta x S_{b_i}$$

όπου

$$\left. \frac{dp^n}{dx} \right|_{f_i} = \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{\Delta x}, \quad \left. \frac{d\tilde{p}^n}{dx} \right|_{f_i} = \frac{1}{2} \left[\left. \frac{dp^n}{dx} \right|_i + \left. \frac{dp^n}{dx} \right|_{i+1} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{p_{i+1}^n - p_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{p_{i+2}^n - p_i^n}{2\Delta x} \right]$$

και

$$\left. \frac{dp^n}{dx} \right|_{b_i} = \frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{\Delta x}, \quad \left. \frac{d\tilde{p}^n}{dx} \right|_{b_i} = \frac{1}{2} \left[\left. \frac{dp^n}{dx} \right|_i + \left. \frac{dp^n}{dx} \right|_{i-1} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{p_{i+1}^n - p_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{p_i^n - p_{i-2}^n}{2\Delta x} \right]$$



Σχήμα 2.2: Το πεδίο της ολικής πίεσης $p_t(x)$ κοντά στα άκρα του αγωγού για το πρόβλημα της ψευδο-1D ροής με παροχή ρευστού $m=1 \text{ m}^3/\text{sec}$, κινηματική συνεκτικότητα $\nu=0.1 \text{ m}^2/\text{sec}$ και συντελεστή τριβής $\lambda^*=10$. Σύγκριση της μορφής της λύσης με και χωρίς την εφαρμογή της παρεμβολής Rhie-Chow στην τεχνική της διόρθωσης πίεσης με εμφανή την ταλαντωτική συμπεριφορά της ολικής πίεσης στη δεύτερη περίπτωση.

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.10) στην εξίσωση της συνέχειας (2.8), μετά από πράξεις προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα np εξισώσεων τριδιαγώνιας μορφής, αντίστοιχο του συστήματος (2.9). Το αριστερό μέλος του συστήματος των διακριτοποιημένων εξισώσεων της συνέχειας δεν αλλάζει, ενώ το δεξί μέλος γίνεται

$$Q_i = -v_{f_i}^{n+1} S_{f_i} + d_{f_i} \left[\frac{p_{i+2}^n}{4} - \frac{3p_{i+1}^n}{4} + \frac{3p_i^n}{4} - \frac{p_{i-1}^n}{4} \right] S_{f_i}^2 +$$

$$+ v_{b_i}^{n+1} S_{b_i} + d_{b_i} \left[-\frac{p_{i+1}^n}{4} + \frac{3p_i^n}{4} - \frac{3p_{i-1}^n}{4} + \frac{p_{i-2}^n}{4} \right] S_{b_i}^2$$

Τελικά, έχοντας υπολογίσει τα πεδία των διορθώσεων $p'(x)$ και $v'(x)$, ακολουθεί η διόρθωση των τιμών των πεδίων της ταχύτητας $v(x)$ και της στατικής πίεσης $p(x)$ με βάση τις εξισώσεις (2.6) και η διαδικασία επίλυσης επαναλαμβάνεται μέχρι σύγκλισης.

2.2.2 Αρχικές και Οριακές Συνθήκες

Για την επίλυση του συστήματος των διακριτοποιημένων εξισώσεων της ροής (2.5) και (2.9) και τον υπολογισμό των πεδίων της ταχύτητας $v(x)$ και της στατικής πίεσης $p(x)$, απαιτείται η αρχικοποίηση των άγνωστων πεδίων και ο καθορισμός οριακών συνθηκών στα άκρα του αγωγού.

Συγκεκριμένα, το πεδίο της ταχύτητας αρχικοποιείται με σταθερή τιμή σε κάθε θέση του αγωγού ίση με την ταχύτητα εισόδου

$$v_i = \frac{m}{S_1}, \quad i = 1, \dots, np$$

όπου m η διακινούμενη παροχή ρευστού μέσα στον αγωγό.

Επιπλέον, εφαρμόζεται οριακή συνθήκη Dirichlet για την ταχύτητα στην είσοδο του αγωγού και οριακή συνθήκη Neumann στην έξοδο

$$\begin{cases} v_1 = \frac{m}{S_1} \\ \left. \frac{dv}{dx} \right|_{np} = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Το πεδίο της στατικής πίεσης αρχικοποιείται με μηδενική τιμή σε κάθε θέση

$$p_i = 0, \quad i = 1, \dots, np$$

Έπειτα, η τιμή του διορθώνεται με βάση την αρχική τιμή της ολικής πίεσης στην έξοδο του αγωγού διαιρεμένης με την πυκνότητα του ρευστού

$$p_{t,np} = p_{np} + \frac{1}{2}v_{np}^2$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της ολικής πίεσης, η στατική πίεση είναι $p = p_t - \frac{1}{2}v^2$. Άρα, το αρχικό πεδίο της στατικής πίεσης γίνεται

$$p_i = p_{t,np} - \frac{1}{2}v_i^2, \quad i = 1, \dots, np$$

Επίσης, εφαρμόζεται οριακή συνθήκη Neumann για την ολική πίεση στην είσοδο του αγωγού και οριακή συνθήκη Dirichlet για τη διόρθωση της στατικής πίεσης στην έξοδο

$$\begin{cases} \left. \frac{dp_t}{dx} \right|_1 = 0 \\ p'_{np} = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

2.3 Η ΣΔΕ για την Ολική Πίεση

Στο πρόβλημα της ψευδο-1D ροής μέσα σε αγωγό μεταβλητής διατομής, η διακινούμενη παροχή παραμένει σταθερή σε κάθε θέση του αγωγού, ικανοποιώντας την εξίσωση της συνέχειας. Από τον ορισμό της παροχής προσδιορίζεται το πεδίο της ταχύτητας συναρτήσει της μεταβλητής διατομής του αγωγού

$$m = v(x) S(x) \implies v(x) = \frac{m}{S(x)} \quad (2.13)$$

Η στατική πίεση σε κάθε θέση του αγωγού εκφράζεται με βάση τον ορισμό της ολικής πίεσης

$$p_t(x) = p(x) + \frac{1}{2}v^2(x) \implies p(x) = p_t(x) - \frac{1}{2}v^2(x) \quad (2.14)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις για το πεδίο της ταχύτητας και της στατικής πίεσης, (2.13) και (2.14) αντίστοιχα, στην εξίσωση διατήρησης της ορμής (2.2), μετά από πράξεις προκύπτει η σδε, η οποία διέπει την ολική πίεση σε κάθε θέση του αγωγού

$$\frac{dp_t}{dx} = \nu m \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{S} \right) + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{S} \right) \right] - \lambda^* \frac{m^2}{S^2 \sqrt{S}} \quad (2.15)$$

Οι παράγωγοι της κατανομής της διατομής του αγωγού $S(x)$ στο δεξί μέλος της σδε (2.15) διακριτοποιούνται με σχήματα πεπερασμένων διαφορών 2^{ns} τάξης ακρίβειας στο χώρο $O[(\Delta x)^2]$. Ισχύει ότι

$$\left. \frac{dS}{dx} \right|_i = \frac{S_{i+1} - S_{i-1}}{2\Delta x}$$

Τότε, προκύπτουν και οι υπόλοιπες παράγωγοι της $S(x)$ ως εξής

$$\left. \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{S} \right) \right|_i = -\frac{1}{S_i^2} \left. \frac{dS}{dx} \right|_i$$

$$\left. \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{S} \right) \right|_i = \frac{d}{dx} \left[\left. \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{S} \right) \right] \right|_i$$

Τελικά, η σδε (2.15) επιλύεται αριθμητικά κατά μήκος του αγωγού με τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ης} τάξης [5] και υπολογίζεται το πεδίο της ολικής πίεσης $p_t(x)$ σε κάθε θέση. Για την επίλυσή της ορίζεται οριακή συνθήκη $p_{t,1} = 0$.

Προκειμένου, όμως, να υπάρχει αντιστοιχία με τις οριακές συνθήκες για το πεδίο πίεσης (2.12) και κατ' επέκταση με τη λύση του προβλήματος της ροής, όταν χρησιμοποιείται η τεχνική της διόρθωσης πίεσης, μετά την επίλυση της σδε, το πεδίο της ολικής πίεσης διορθώνεται με βάση την τιμή της ολικής πίεσης στην έξοδο του αγωγού, όπως προκύπτει από τη λύση του προβλήματος με την τεχνική της διόρθωσης πίεσης. Συγκεκριμένα, για μηδενική στατική πίεση στην έξοδο του αγωγού $p_{np} = 0$, η ολική πίεση είναι

$$p_{t,out} = \frac{1}{2} v_{np}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{m}{S_{np}} \right]^2$$

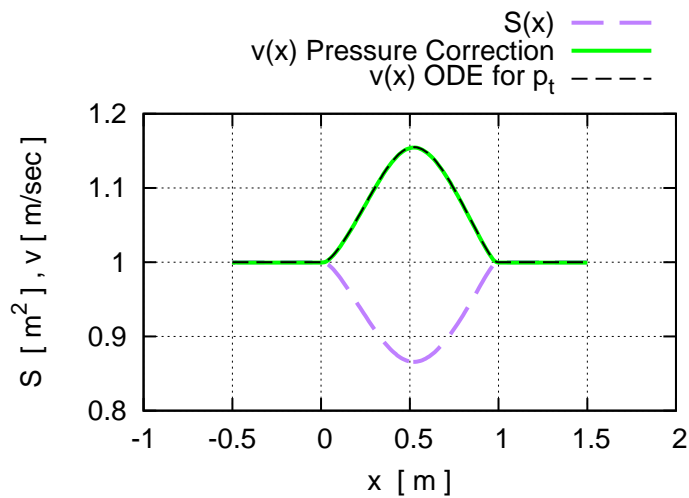
Τότε, η ολική πίεση στην έξοδο του αγωγού διορθώνεται ως εξής

$$p_{t,out} = p_{t,out} - p_{t,np}$$

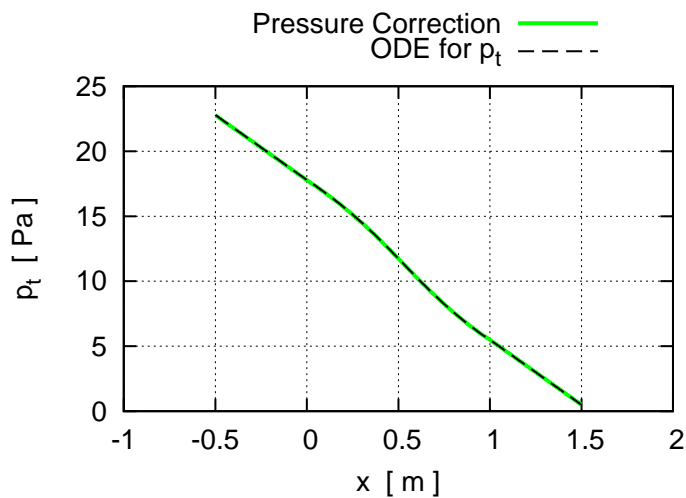
όπου $p_{t,np}$ η τιμή της ολικής πίεσης στην έξοδο του αγωγού, όπως υπολογίστηκε από την επίλυση της σδε.

Τελικά, το πεδίο της ολικής πίεσης γίνεται

$$p_{t,i} = p_{t,i} + p_{t,out} \quad , \quad i = 1, \dots, np \quad (2.16)$$



Σχήμα 2.3: Το πεδίο της ταχύτητας $v(x)$ για το πρόβλημα της ψευδο-1D ροής σε αγωγό μεταβλητής διατομής $S(x)$ με $x \in [-0.5, 1.5]$ m, παροχή ρευστού $m = 1 \text{ m}^3/\text{sec}$, κινηματική συνεκτικότητα $\nu = 0.1 \text{ m}^2/\text{sec}$ και συντελεστή τριβής $\lambda^* = 10$. Σύγκριση της λύσης με την τεχνική της διόρθωσης πίεσης και τη σδε για την ολική πίεση.



Σχήμα 2.4: Το πεδίο της ολικής πίεσης $p_t(x)$ για το πρόβλημα της ψευδο-1D ροής σε αγωγό μεταβλητής διατομής $S(x)$ με $x \in [-0.5, 1.5]$ m, παροχή ρευστού $m = 1 \text{ m}^3/\text{sec}$, κινηματική συνεκτικότητα $\nu = 0.1 \text{ m}^2/\text{sec}$ και συντελεστή τριβής $\lambda^* = 10$. Σύγκριση της λύσης με την τεχνική της διόρθωσης πίεσης και τη σδε για την ολική πίεση.

Κεφάλαιο 3

Η IPCM(λ^*) στη Ψευδο-1D Ροή

Σε αυτό το κεφάλαιο διατυπώνεται η IPCM 1^{ης} και 2^{ης} τάξης για τις 2 εναλλακτικές μεθόδους αριθμητικής επίλυσης της ασυμπίεστης ψευδο-1D ροής μέσα σε αγωγό, ήτοι την τεχνική της διόρθωσης πίεσης και τη σδε, η οποία διέπει την ολική πίεση. Στόχος είναι ο υπολογισμός του πεδίου της ολικής πίεσης $p_t(x)$ και η διερεύνηση της στοχαστικής συμπεριφοράς της εξαιτίας της αβεβαιότητας στο συντελεστή τριβής λ^* . Γενικά, ως IPCM(ϕ) θα αναφέρεται η IPCM με στοχαστική μεταβλητή εισόδου το ϕ .

Κατά την επίλυση της ροής με την τεχνική της διόρθωσης πίεσης, το πεδίο της ολικής πίεσης υπολογίζεται από τη σχέση

$$p_t(x) = p(x) + \frac{1}{2}v^2(x) \quad (3.1)$$

αφού πρώτα έχουν προσδιοριστεί τα άγνωστα πεδία της ταχύτητας $v(x)$ και της στατικής πίεσης $p(x)$. Αντίθετα, με την επίλυση της σδε (2.15), προκύπτει απευθείας η τιμή της ολικής πίεσης σε κάθε θέση του αγωγού. Επομένως, εξετάζεται η επίδραση που έχει στο ανάπτυγμα PC ο διαφορετικός τρόπος υπολογισμού του πεδίου της ολικής πίεσης με τις 2 μεθόδους και συγκρίνονται τα αποτελέσματα.

Το ανάπτυγμα PC για το συντελεστή τριβής λ^* , που αποτελεί την αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής, έχει τη μορφή

$$\lambda^* = \sum_{j=0}^p \lambda_j^* \psi_j(\xi) \quad (3.2)$$

όπου λ_j οι ντετερμινιστικοί συντελεστές της αβέβαιης μεταβλητής, p η τάξη του PC για το λ^* , ξ η στοχαστική μεταβλητή και ψ_j τα πολυώνυμα Hermite Α'2 της κανονικής

κατανομής j -οστού βαθμού.

3.1 Η IPCM(λ^*) στην Τεχνική Διόρθωσης Πίεσης

Ο συντελεστής τριβής λ^* εισάγει τη στοχαστικότητα στο πεδίο ροής και ορίζεται από τη σχέση (3.2). Από τις εξισώσεις ροής (2.1) και (2.2) προκύπτει ότι η στοχαστική συμπεριφορά του λ^* επιδρά αποκλειστικά στο πεδίο της στατικής πίεσης $p(x)$, καθώς το πεδίο της ταχύτητας $v(x)$ καθορίζεται μόνο από τη σταθερή και μη-στοχαστική παροχή m και την, επίσης, σταθερή διατομή του αγωγού $S(x)$ σε κάθε θέση, οπότε είναι ανεξάρτητο του λ^* . Με το ανάπτυγμα PC, το πεδίο της στατικής πίεσης λαμβάνει τη μορφή

$$p(x) = \sum_{j=0}^k p_j(x) \psi_j(\xi) \quad (3.3)$$

όπου k η τάξη του PC για το $p(x)$.

Αντικαθιστώντας τα ανάπτυγματα PC του συντελεστή τριβής (3.2) και του πεδίου της στατικής πίεσης (3.3) στην εξίσωση διατήρησης της ορμής (2.2), προκύπτει το ανάπτυγμα PC της εξίσωσης με αβέβαιη μεταβλητή εισόδου το συντελεστή τριβής λ^*

$$c(x) = -S \sum_{j=0}^k \frac{dp_j}{dx} \psi_j - \sum_{j=0}^p \lambda_j^* \psi_j \sqrt{S} v^2 \quad (3.4)$$

$$\text{όπου } c(x) = vS \frac{dv}{dx} - \frac{d}{dx} \left(S v \frac{dv}{dx} \right).$$

Η εξίσωση (3.4) πολλαπλασιάζεται με τα πολυώνυμα Hermite $\psi_n(\xi)$ για $n \geq 0$ και τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής $w(\xi)$, ολοκληρώνεται κατά ξ και προβάλλεται κατά Galerkin

$$c(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n w d\xi = -S \sum_{j=0}^k \frac{dp_j}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_n w d\xi - \sum_{j=0}^p \lambda_j^* \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_n w d\xi \sqrt{S} v^2 \implies$$

$$c(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n w d\xi = -S \sum_{j=0}^k \frac{dp_j}{dx} \langle \psi_j, \psi_n \rangle - \sum_{j=0}^p \lambda_j^* \langle \psi_j, \psi_n \rangle \sqrt{S} v^2 \quad (3.5)$$

Από την εξίσωση (3.5) προκύπτουν $k + 1$ μη-πεπλεγμένες εξισώσεις με αγνώστους το πεδίο της ταχύτητας $v(x)$ και τα πεδία των ντετερμινιστικών συντελεστών της στατικής πίεσης $p_j(x)$, όπου $j=0, \dots, k$.

- Η πρώτη εξίσωση του συστήματος, που προκύπτει με υπολογισμό του ολοκληρώματος του πολυωνύμου Hermite A' και των προβολών Galerkin B' για $n=0$, έχει αγνώστους το πεδίο της ταχύτητας $v(x)$ και το πεδίο της μέσης τιμής της στατικής πίεσης $p_0(x)$. Επομένως, αποτελεί την εξίσωση διατήρησης της ορμής για το πρόβλημα της μέσης ροής και επιλύεται μαζί με την εξίσωση της συνέχειας, χρησιμοποιώντας την τεχνική της διόρθωσης πίεσης, όπως περιγράφεται στην ενότητα 2.2.
- Οι υπόλοιπες εξισώσεις, δηλαδή για $n>0$, είναι οι σδε για τα πεδία $p_j(x)$ για $j>0$, τα οποία είναι τα πεδία των συντελεστών της τυπικής απόκλισης της στατικής πίεσης και επιλύονται αριθμητικά με τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ης} τάξης [5].

3.1.1 Ανάπτυγμα PC($p(x)$) 1^{ης} Τάξης

Έστω ότι ορίζεται ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης για το πεδίο της στατικής πίεσης $p(x)$. Τότε, και για την αβέβαιη μεταβλητή εισόδου λ^* θεωρείται, με βάση τη σχέση (3.2), ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης. Ο συντελεστής τριβής ορίζεται, λοιπόν Γ' , από τη μέση τιμή του λ_0^* και την τυπική του απόκλιση λ_1^* ως εξής

$$\lambda^* = \lambda_0^* \psi_0 + \lambda_1^* \psi_1$$

όπου ψ_0 και ψ_1 τα πολυώνυμα Hermite $A'.2$ 0^{ου} και 1^{ου} βαθμού, αντίστοιχα.

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα PC στην εξίσωση (3.5) και υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα του πολυωνύμου Hermite A' και τις προβολές Galerkin B' , προκύπτουν οι 2 εξισώσεις της IPCM

$$vS \frac{dv}{dx} - \frac{d}{dx} \left(Sv \frac{dv}{dx} \right) = -S \frac{dp_0}{dx} - \lambda_0^* \sqrt{S} v^2 \quad (3.6)$$

$$\frac{dp_1}{dx} = -\lambda_1^* \frac{\sqrt{S}}{S} \left(\frac{m}{S} \right)^2 \quad (3.7)$$

Η εξίσωση (3.6) επιλύεται μαζί με την εξίσωση της συνέχειας με την τεχνική της διόρθωσης πίεσης και υπολογίζονται το πεδίο της ταχύτητας $v(x)$ και το πεδίο της μέσης τιμής της στατικής πίεσης $p_0(x)$.

Η εξίσωση (3.7) είναι μια σδε για το πεδίο της τυπικής απόκλισης της στατικής πίεσης $p_1(x)$, η οποία επιλύεται ανεξάρτητα της εξίσωσης (3.6), αφού δεν αποτελεί συνάρτηση των πεδίων $v(x)$ και $p_0(x)$. Η αριθμητική της επίλυση γίνεται με τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ης} τάξης με οριακή συνθήκη $p_{1,i=1} = 0$

Με γνωστά, πλέον, τα πεδία της ταχύτητας και της στατικής πίεσης, υπολογίζεται το πεδίο της ολικής πίεσης από την εξίσωση (3.1). Η στοχαστική συμπεριφορά της στατικής πίεσης επιδρά στην ολική πίεση, η οποία αποκτά εξίσου στοχαστικό χαρακτήρα. Τότε, το ανάπτυγμα PC του πεδίου της ολικής πίεσης είναι

$$p_t(x) = \sum_{j=0}^k p_{tj}(x) \psi_j(\xi) \quad (3.8)$$

όπου k η τάξη του PC για το $p_t(x)$.

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα PC του πεδίου της ολικής πίεσης (3.8) και της στατικής πίεσης (3.3) στην εξίσωση (3.1), προκύπτει το ανάπτυγμα PC της εξίσωσης

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k p_{tj} \psi_j &= \sum_{j=0}^k p_j \psi_j + \frac{1}{2} v^2 \implies \dots \\ \sum_{j=0}^k p_{tj} \langle \psi_j, \psi_n \rangle &= \sum_{j=0}^k p_j \langle \psi_j, \psi_n \rangle + \frac{1}{2} v^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n w d\xi \end{aligned} \quad (3.9)$$

Για ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης για το $p_t(x)$, από την εξίσωση (3.9) προκύπτουν το πεδίο της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της ολικής πίεσης

$$\begin{aligned} p_{t0}(x) &= p_0(x) + \frac{1}{2} v^2(x) \\ p_{t1}(x) &= p_1(x) \end{aligned}$$

Προκειμένου να υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ των οριακών συνθηκών, που δίνονται για τον υπολογισμό των πεδίων $p_{t0}(x)$ και $p_{t1}(x)$, το πεδίο $p_{t1}(x)$ πρέπει να διορθωθεί με βάση την τιμή της τυπικής απόκλισης της ολικής πίεσης στην έξοδο του αγωγού, όπως αναλύεται στην ενότητα 2.3 για την επίλυση της σδε της μέσης ροής. Τότε, το διορθωμένο πεδίο της ολικής πίεσης θα έχει τη μορφή

$$p_t(x) = p_t(x) + p_{t,out} \quad (3.10)$$

όπου $p_{t,out} = \frac{1}{2}v^2(x_{max}) - p_t(x_{max})$.

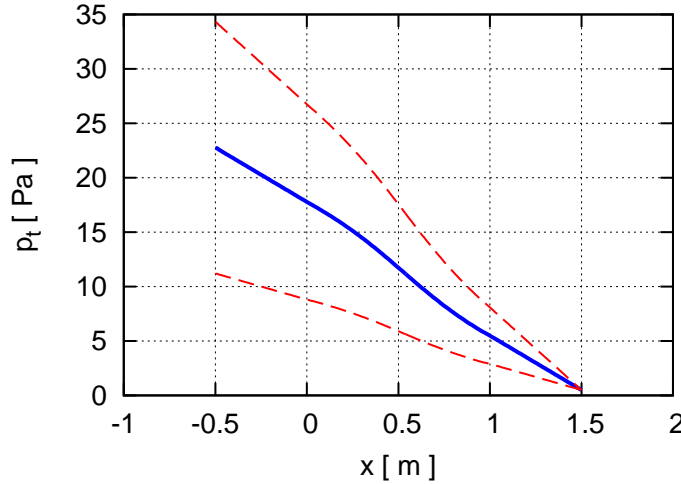
Αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα PC του πεδίου της ολικής πίεσης (3.8) στην εξίσωση (3.10), προκύπτει το ανάπτυγμα PC της εξίσωσης

$$\sum_{j=0}^k p_{tj}(x)\psi_j = \sum_{j=0}^k p_{tj}(x)\psi_j + \frac{1}{2}v^2(x_{max}) - \sum_{j=0}^k p_{tj}(x_{max})\psi_j \implies \dots$$

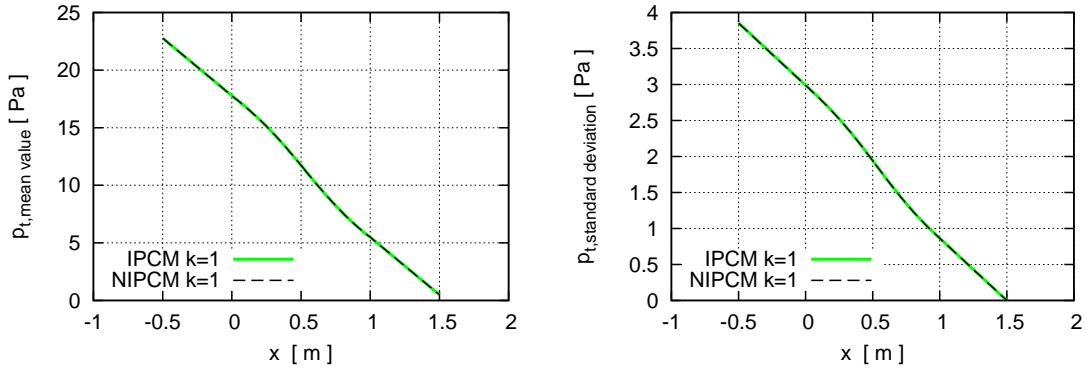
$$\sum_{j=0}^k p_{tj}(x)\langle\psi_j, \psi_n\rangle = \sum_{j=0}^k p_{tj}(x)\langle\psi_j, \psi_n\rangle + \frac{1}{2}v^2(x_{max}) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n w d\xi - \sum_{j=0}^k p_{tj}(x_{max})\langle\psi_j, \psi_n\rangle \quad (3.11)$$

Από την εξίσωση (3.11) για $n=1$ και ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης για το $p_t(x)$, προσδιορίζεται η διορθωμένη έκφραση για το πεδίο της τυπικής απόκλισης της ολικής πίεσης

$$p_{t1}(x) = p_{t1}(x) - p_{t1}(x_{max}) \implies p_{t1}(x) = p_{t1}(x) - p_1(x_{max})$$



Σχήμα 3.1: Η μέση τιμή και 3 φορές η τυπική απόκλιση (3σ) γύρω από αυτή για την ολική πίεση $p_t(x)$ σε αγωγό μεταβλητής διατομής $S(x)$ με $x \in [-0.5, 1.5]$ m, παροχή ρευστού $m=1 \text{ m}^3/\text{sec}$ και κινηματική συνεκτικότητα $\nu=0.1 \text{ m}^2/\text{sec}$. Πρόκειται για τη λύση της IPCM στην τεχνική της διόρθωσης πίεσης. Αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής είναι ο συντελεστής τριβής με μέση τιμή $\mu_{\lambda^*}=10$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{\lambda^*}=\sqrt{3}$.



Σχήμα 3.2: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ολικής πίεσης $p_t(x)$ σε αγωγό μεταβλητής διατομής $S(x)$ με $x \in [-0.5, 1.5]$ m, παροχή ρευστού $m=1 \text{ m}^3/\text{sec}$ και κινηματική συνεκτικότητα $\nu=0.1 \text{ m}^2/\text{sec}$. Αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής είναι ο συντελεστής τριβής με μέση τιμή $\mu_{\lambda^*}=10$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{\lambda^*}=\sqrt{3}$. Σύγκριση της IPCM και της NIPCM στην τεχνική της διόρθωσης πίεσης με ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης για το $p_t(x)$ ($k=1$).

3.1.2 Ανάπτυγμα PC($p(x)$) 2^{ης} Τάξης

Έστω, τώρα, ότι θεωρείται για το πεδίο της στατικής πίεσης $p(x)$ ανάπτυγμα PC 2^{ης} τάξης. Τότε, η αβέβαιη μεταβλητή εισόδου λ^* , σχέση (3.2), δίνεται, επίσης, από ανάπτυγμα PC 2^{ης} τάξης. Σε αυτή την περίπτωση, ο συντελεστής τριβής ορίζεται από τη μέση τιμή του λ_0^* και τους συντελεστές της τυπικής του απόκλισης λ_1^* και λ_2^* ως εξής

$$\lambda^* = \lambda_0^* \psi_0 + \lambda_1^* \psi_1 + \lambda_2^* \psi_2$$

όπου η τυπική απόκλιση του λ^* είναι $\sigma_{\lambda^*} = \sqrt{(\lambda_1^*)^2 + 2(\lambda_2^*)^2}$, Γ'.

Με αντικατάσταση των αναπτυγμάτων PC στην εξίσωση (3.5), προκύπτουν οι 3 εξισώσεις της IPCM

$$vS \frac{dv}{dx} - \frac{d}{dx} \left(S\nu \frac{dv}{dx} \right) = -S \frac{dp_0}{dx} - \lambda_0^* \sqrt{S} v^2 \quad (3.12)$$

$$\frac{dp_1}{dx} = -\lambda_1^* \frac{\sqrt{S}}{S} \left(\frac{m}{S} \right)^2 \quad (3.13)$$

$$\frac{dp_2}{dx} = -\lambda_2^* \frac{\sqrt{S}}{S} \left(\frac{m}{S} \right)^2 \quad (3.14)$$

Η εξίσωση (3.12) επιλύεται, κατά τα γνωστά, μαζί με την εξίσωση της συνέχειας με την τεχνική της διόρθωσης πίεσης και υπολογίζονται το πεδίο της ταχύτητας $v(x)$ και το πεδίο της μέσης τιμής της στατικής πίεσης $p_0(x)$.

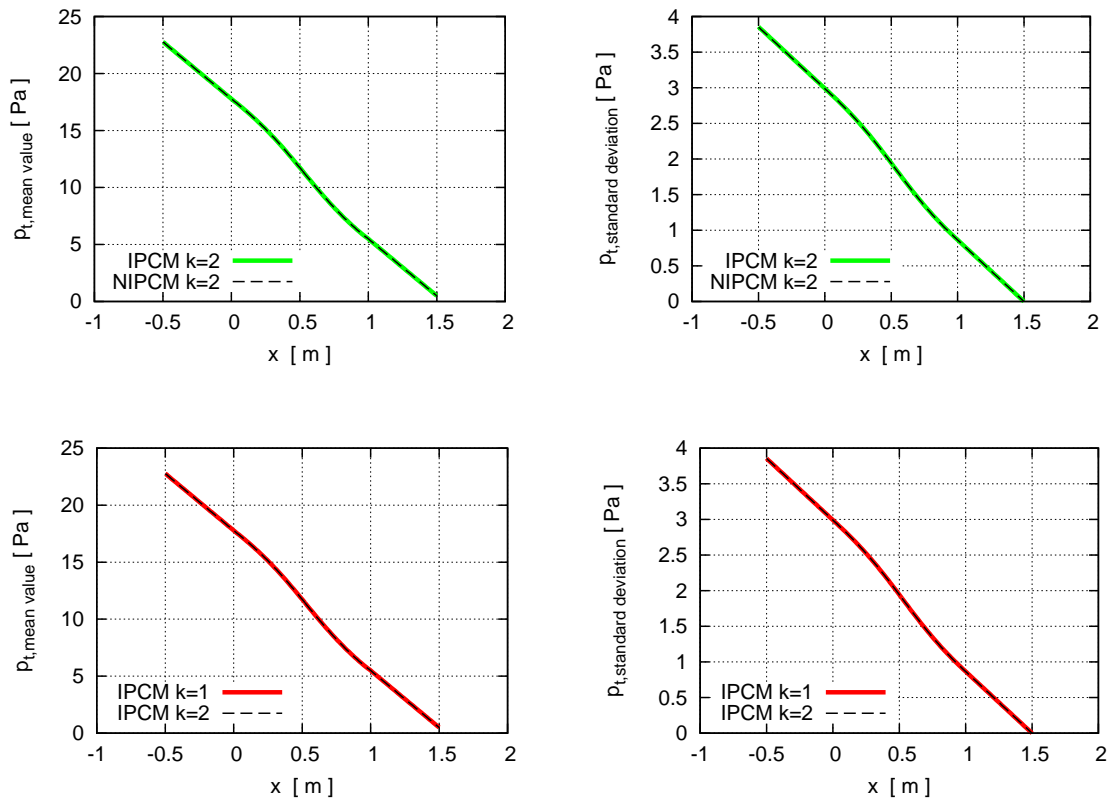
Οι εξισώσεις (3.13) και (3.14) είναι 2 σδε για τα πεδία των συντελεστών της τυπικής απόκλισης της στατικής πίεσης $p_1(x)$ και $p_2(x)$ και η επίλυσή τους είναι ανεξάρτητη της εξίσωσης (3.12). Καθεμία επιλύεται με τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ης} τάξης με οριακή συνθήκη $p_{1,i=1} = 0$ και $p_{2,i=1} = 0$, αντίστοιχα.

Γνωρίζοντας τα πεδία της ταχύτητας και της στατικής πίεσης, υπολογίζεται το πεδίο της ολικής πίεσης. Για ανάπτυγμα PC 2^{ης} τάξης για το $p_t(x)$, από την εξίσωση (3.9) προκύπτουν το πεδίο της μέσης τιμής και τα πεδία των συντελεστών της τυπικής απόκλισης της ολικής πίεσης

$$\begin{aligned} p_{t0}(x) &= p_0(x) + \frac{1}{2}v^2(x) \\ p_{t1}(x) &= p_1(x) \\ p_{t2}(x) &= p_2(x) \end{aligned}$$

Προκειμένου να υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ των οριακών συνθηκών, που δίνονται για τον υπολογισμό των πεδίων $p_{t0}(x)$, $p_{t1}(x)$ και $p_{t2}(x)$, τα πεδία $p_{t1}(x)$ και $p_{t2}(x)$ πρέπει να διορθωθούν με βάση την τιμή της τυπικής απόκλισης της ολικής πίεσης στην έξοδο του αγωγού. Από την εξίσωση (3.11) για $n = 1$, $n = 2$ και ανάπτυγμα PC 2^{ης} τάξης για το $p_t(x)$, προκύπτουν οι διορθωμένες εκφράσεις για τα πεδία των συντελεστών της τυπικής απόκλισης της ολικής πίεσης

$$\begin{aligned} p_{t1}(x) &= p_{t1}(x) - p_{t1}(x_{max}) \implies p_{t1}(x) = p_{t1}(x) - p_1(x_{max}) \\ p_{t2}(x) &= p_{t2}(x) - p_{t2}(x_{max}) \implies p_{t2}(x) = p_{t2}(x) - p_2(x_{max}) \end{aligned}$$



Σχήμα 3.3: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ολικής πίεσης $p_t(x)$ σε αγωγό μεταβλητής διατομής $S(x)$ με $x \in [-0.5, 1.5]$ m, παροχή ρευστού $m=1$ m³/sec και κινηματική συνεκτικότητα $\nu=0.1$ m²/sec. Αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής είναι ο συντελεστής τριβής με μέση τιμή $\mu_{\lambda^*}=10$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{\lambda^*}=\sqrt{3}$. Σύγκριση της IPCM και της NIPCM στην τεχνική της διόρθωσης πίεσης με ανάπτυγμα PC 2^{ης} τάξης για το $p_t(x)$ ($k=2$). Η IPCM με ανάπτυγμα PC 1^{ης} και 2^{ης} τάξης για το $p_t(x)$ δίνει πολύ κοντινά αποτελέσματα.

3.2 Η IPCM(λ^*) στην ΣΔΕ για την Ολική Πίεση

Όπως προκύπτει από τη σδε για την ολική πίεση (2.15), η στοχαστική συμπεριφορά του συντελεστή τριβής λ^* επιδρά στο πεδίο της ολικής πίεσης $p_t(x)$, το οποίο με το ανάπτυγμα PC λαμβάνει τη μορφή (3.8).

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα PC του συντελεστή τριβής (3.2) και του πεδίου της ολικής πίεσης (3.8) στη σδε για την ολική πίεση (2.15), προκύπτει το ανάπτυγμα PC της εξίσωσης με αβέβαιη μεταβλητή εισόδου το συντελεστή τριβής λ^*

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{j=0}^k p_{tj} \psi_j \right] = \nu m g(x) - \sum_{j=0}^k \lambda_j^* \psi_j \frac{m^2}{S^2 \sqrt{S}} \implies \dots$$

$$\sum_{j=0}^k \frac{dp_{tj}}{dx} \langle \psi_j, \psi_n \rangle = \nu m g(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n w(\xi) d\xi - \sum_{j=0}^k \lambda_j^* \langle \psi_j, \psi_n \rangle \frac{m^2}{S^2 \sqrt{S}} \quad (3.15)$$

$$\text{όπου } g(x) = \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{S} \right) + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{S} \right) \right].$$

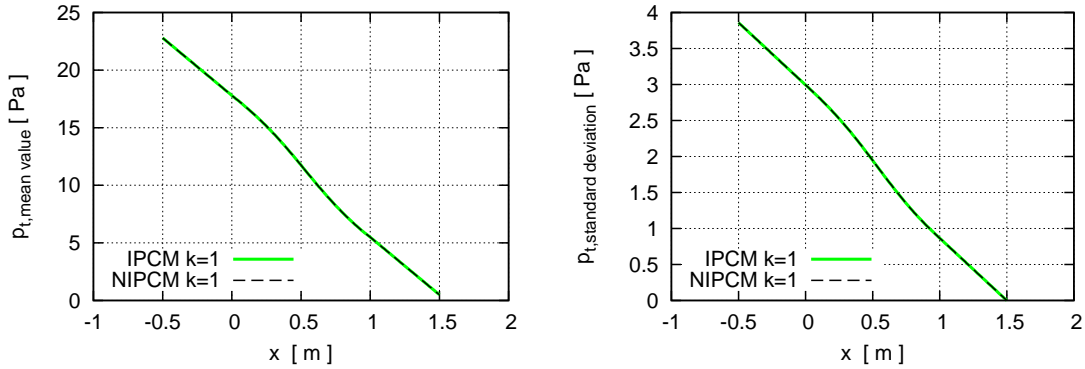
Από την εξίσωση (3.15) προκύπτουν $k + 1$ σδε για τα πεδία των ντετερμινιστικών συντελεστών της ολικής πίεσης $p_{tj}(x)$, όπου $j=0, \dots, k$.

3.2.1 Ανάπτυγμα PC($p_t(x)$) 1^{ης} Τάξης

Ορίζοντας για το πεδίο της ολικής πίεσης $p_t(x)$ και την αβέβαιη μεταβλητή εισόδου λ^* αναπτύγματα PC 1^{ης} τάξης, από την εξίσωση (3.15) προκύπτουν οι 2 εξισώσεις της IPCM

$$\frac{dp_{t0}}{dx} = \nu m g(x) - \lambda_0^* \frac{m^2}{S^2 \sqrt{S}} \quad (3.16)$$

$$\frac{dp_{t1}}{dx} = -\lambda_1^* \frac{m^2}{S^2 \sqrt{S}} \quad (3.17)$$



Σχήμα 3.4: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ολικής πίεσης $p_t(x)$ σε αγωγό μεταβλητής διατομής $S(x)$ με $x \in [-0.5, 1.5]$ m, παροχή ρευστού $m=1$ m³/sec και κινηματική συνεκτικότητα $\nu=0.1$ m²/sec. Αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής είναι ο συντελεστής τριβής με μέση τιμή $\mu_{\lambda^*}=10$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{\lambda^*}=\sqrt{3}$. Σύγκριση της IPCM και της NIPCM στη σδε για την ολική πίεση με ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης για το $p_t(x)$ ($k=1$).

Οι εξισώσεις (3.16) και (3.17) είναι 2 σδε για το πεδίο της μέσης τιμής $p_{t0}(x)$ και της τυπικής απόκλισης $p_{t1}(x)$ της ολικής πίεσης, αντίστοιχα. Επιλύονται με τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ης} τάξης με μηδενικές οριακές συνθήκες $p_{t0,i=1} = 0$ και $p_{t1,i=1} = 0$.

Για να υπάρχει αντιστοιχία με τις οριακές συνθήκες και κατ' επέκταση με τη λύση του προβλήματος της IPCM στην τεχνική της διόρθωσης πίεσης, όπως και στο πρόβλημα της μέσης ροής 2.3, μετά την επίλυση των σδε τα πεδία της μέσης τιμής $p_{t0}(x)$ και της τυπικής απόκλισης $p_{t1}(x)$ διορθώνονται με βάση τις λύσεις του προβλήματος με την τεχνική της διόρθωσης πίεσης στην έξοδο του αγωγού. Από την εξίσωση (3.11) με ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης για το $p_t(x)$, προκύπτουν οι διορθωμένες εκφράσεις για τα πεδία της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της ολικής πίεσης

$$p_{t0}(x) = p_{t0}(x) + \frac{1}{2} \frac{m^2}{S^2(x_{max})} - p_{t0}(x_{max})$$

$$p_{t1}(x) = p_{t1}(x) - p_{t1}(x_{max})$$

3.2.2 Ανάπτυγμα PC($p_t(x)$) 2^{ης} Τάξης

Θεωρώντας, τώρα, αναπτύγματα PC 2^{ης} τάξης για το πεδίο της ολικής πίεσης $p_t(x)$ και την αβέβαιη μεταβλητή εισόδου λ^* , από την εξίσωση (3.15) προκύπτουν οι 3 εξισώσεις της IPCM

$$\frac{dp_{t0}}{dx} = \nu mg(x) - \lambda_0^* \frac{m^2}{S^2 \sqrt{S}} \quad (3.18)$$

$$\frac{dp_{t1}}{dx} = -\lambda_1^* \frac{m^2}{S^2 \sqrt{S}} \quad (3.19)$$

$$\frac{dp_{t2}}{dx} = -\lambda_2^* \frac{m^2}{S^2 \sqrt{S}} \quad (3.20)$$

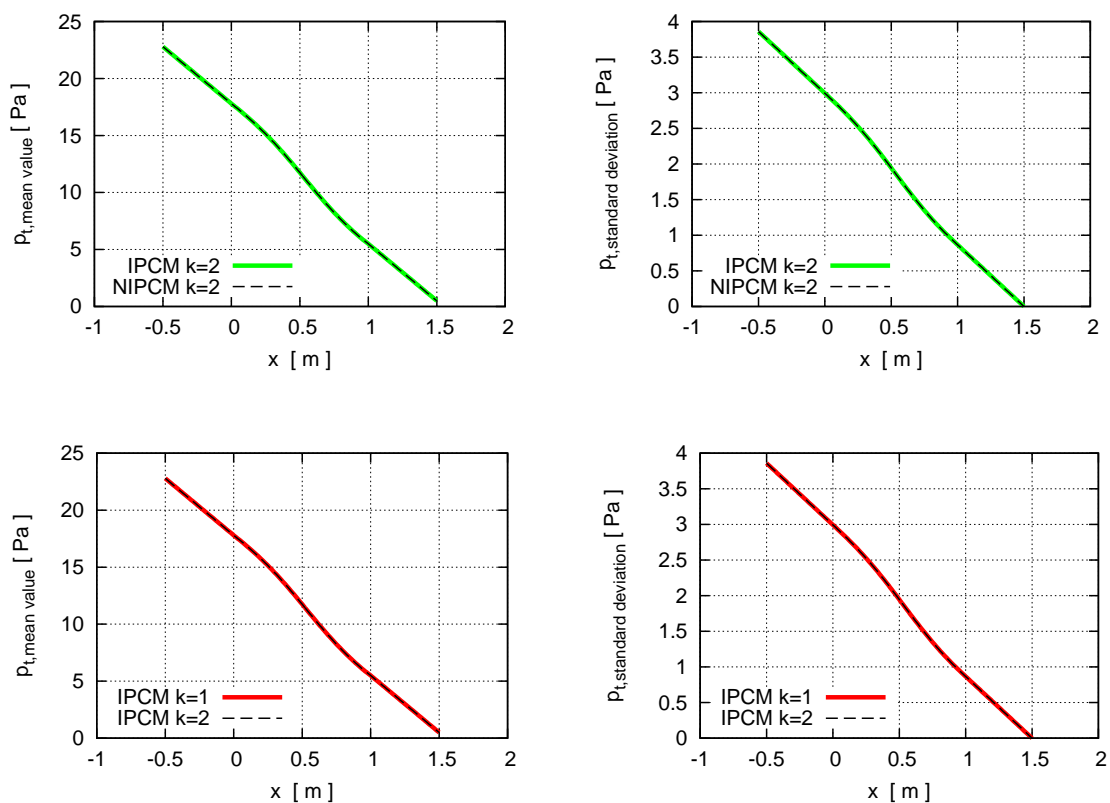
Οι εξισώσεις (3.18), (3.19) και (3.20) είναι 3 σδε για το πεδίο της μέσης τιμής $p_{t0}(x)$ και τα πεδία των συντελεστών της τυπικής απόκλισης $p_{t1}(x)$ και $p_{t2}(x)$ της ολικής πίεσης, αντίστοιχα, οι οποίες επιλύονται με τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ης} τάξης με μηδενικές οριακές συνθήκες $p_{t0,i=1} = 0$, $p_{t1,i=1} = 0$ και $p_{t2,i=1} = 0$.

Με στόχο την ύπαρξη αντιστοιχίας με τις οριακές συνθήκες και κατ' επέκταση με τη λύση του προβλήματος της IPCM στην τεχνική της διόρθωσης πίεσης, μετά την επίλυση της σδε τα πεδία της μέσης τιμής $p_{t0}(x)$ και των συντελεστών της τυπικής απόκλισης $p_{t1}(x)$ και $p_{t2}(x)$ διορθώνονται με βάση τις λύσεις του προβλήματος με την τεχνική της διόρθωσης πίεσης στην έξοδο του αγωγού. Από την εξίσωση (3.11) με ανάπτυγμα PC 2^{ης} τάξης για το $p_t(x)$, προκύπτουν οι διορθωμένες εκφράσεις για τα πεδία της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της ολικής πίεσης

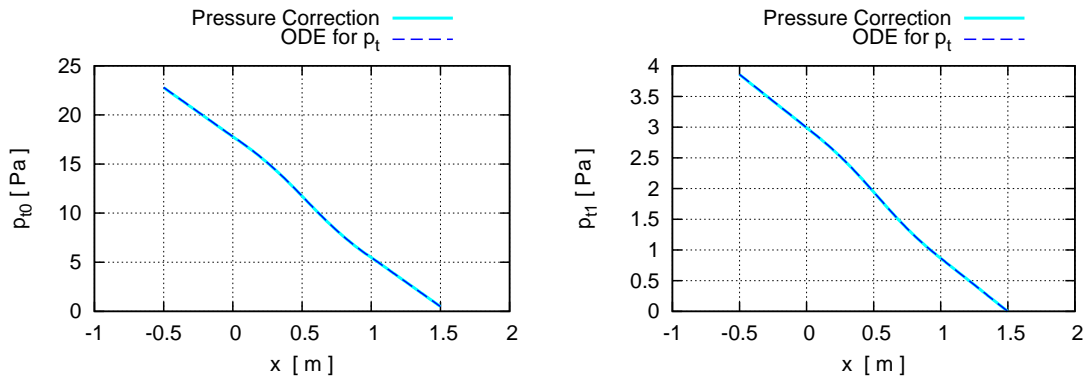
$$p_{t0}(x) = p_{t0}(x) + \frac{1}{2} \frac{m^2}{S^2(x_{max})} - p_{t0}(x_{max})$$

$$p_{t1}(x) = p_{t1}(x) - p_{t1}(x_{max})$$

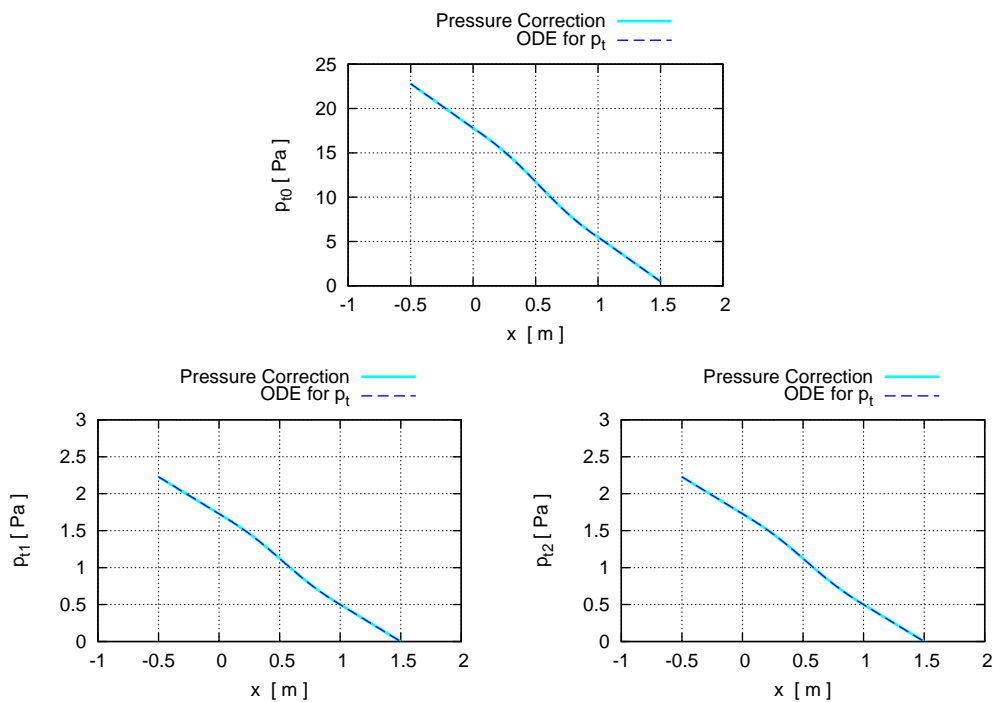
$$p_{t2}(x) = p_{t2}(x) - p_{t2}(x_{max})$$



Σχήμα 3.5: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ολικής πίεσης $p_t(x)$ σε αγωγό μεταβλητής διατομής $S(x)$ με $x \in [-0.5, 1.5]$ m, παροχή ρευστού $m=1$ m³/sec και κινηματική συνεκτικότητα $\nu=0.1$ m²/sec. Αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής είναι ο συντελεστής τριβής με μέση τιμή $\mu_{\lambda^*}=10$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{\lambda^*}=\sqrt{3}$. Σύγκριση της IPCM και της NIPCM στη σδε για την ολική πίεση με ανάπτυγμα PC 2^{ης} τάξης για το $p_t(x)$ ($k=2$) Οι λύσεις της IPCM με ανάπτυγμα PC 1^{ης} και 2^{ης} τάξης για το $p_t(x)$ σχεδόν ταυτίζονται.



Σχήμα 3.6: Τα πεδία των ντετερμινιστικών συντελεστών της ολικής πίεσης για το πρόβλημα της ροής σε αγωγό μεταβλητής διατομής $S(x)$ με $x \in [-0.5, 1.5]$ m, παροχή ρευστού $m=1 \text{ m}^3/\text{sec}$ και κινηματική συνεκτικότητα $\nu=0.1 \text{ m}^2/\text{sec}$. Αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής είναι ο συντελεστής τριβής με μέση τιμή $\mu_{\lambda^*}=10$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{\lambda^*}=\sqrt{3}$. Σύγκριση της IPCM στην τεχνική της διόρθωσης πίεσης και στη σδε για την ολική πίεση με ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης για το $p_t(x)$ ($k=1$).



Σχήμα 3.7: Τα πεδία των ντετερμινιστικών συντελεστών της ολικής πίεσης για το πρόβλημα της ροής σε αγωγό μεταβλητής διατομής $S(x)$ με $x \in [-0.5, 1.5]$ m, παροχή ρευστού $m=1 \text{ m}^3/\text{sec}$ και κινηματική συνεκτικότητα $\nu=0.1 \text{ m}^2/\text{sec}$. Αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής είναι ο συντελεστής τριβής με μέση τιμή $\mu_{\lambda^*}=10$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{\lambda^*}=\sqrt{3}$. Σύγκριση της IPCM στην τεχνική της διόρθωσης πίεσης και στη σδε για την ολική πίεση με ανάπτυγμα PC 2^{ης} τάξης για το $p_t(x)$ ($k=2$).

Κεφάλαιο 4

Η IPCM με Μη-Γραμμικούς Στοχαστικούς Όρους

Σε αυτό το κεφάλαιο διατυπώνεται η IPCM στη σδε για την ολική πίεση υπό 2 διαφορετικές στοχαστικές εισόδους, την παροχή ρευστού m και την κατανομή της διατομής $S(x)$. Και στις 2 περιπτώσεις στο ανάπτυγμα PC της σδε εμφανίζονται μη-γραμμικοί όροι των στοχαστικών εισόδων, οι οποίοι πρέπει να εκφραστούν ως ένα ανάπτυγμα PC. Για κάθε μη-γραμμικό όρο παρουσιάζεται μια διερεύνηση σχετικά με την έκφραση του αναπτύγματος PC 1^{ης} και 2^{ης} τάξης και αναζητείται η ακριβέστερη προσέγγιση στα αποτελέσματα της NIPCM για την αντίστοιχη τάξη PC του μη-γραμμικού όρου.

Στην πρώτη περίπτωση, αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής είναι η διακινούμενη παροχή ρευστού μέσα στον αγωγό και έχει ανάπτυγμα PC της μορφής

$$m = \sum_{j=0}^p m_j \psi_j(\xi) \quad (4.1)$$

Στη δεύτερη περίπτωση, στοχαστική είσοδος στο πεδίο ροής είναι η κατανομή της διατομής του αγωγού, η οποία με το ανάπτυγμα PC γίνεται

$$S(x) = \sum_{j=0}^p S_j(x) \psi_j(\xi) \quad (4.2)$$

όπου m_j , $S_j(x)$ οι ντετερμινιστικοί συντελεστές των αβέβαιων εισόδων στο πεδίο ροής, p η τάξη του PC για την m και την $S(x)$, ξ η στοχαστική μεταβλητή σε κάθε πρόβλημα και ψ_j τα πολυώνυμα Hermite A'.2 της κανονικής κατανομής j -οστού βαθμού.

4.1 Η IPCM(m) στη ΣΔΕ για την Ολική Πίεση

Η παροχή ρευστού m εισάγει την αβεβαιότητα στο πεδίο ροής και ορίζεται από τη σχέση (4.1). Όπως προκύπτει από τη σδε για την ολική πίεση (2.15), η στοχαστική συμπεριφορά της παροχής επιδρά στο πεδίο της ολικής πίεσης $p_t(x)$, το οποίο αποκτά εξίσου στοχαστικό χαρακτήρα. Με το ανάπτυγμα PC, το πεδίο της ολικής πίεσης λαμβάνει τη μορφή

$$p_t(x) = \sum_{j=0}^k p_{tj}(x) \psi_j(\xi) \quad (4.3)$$

όπου k η τάξη του PC για το $p_t(x)$.

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα PC της παροχής (4.1) και του πεδίου της ολικής πίεσης (4.3) στη σδε για την ολική πίεση (2.15), προκύπτει το ανάπτυγμα PC της σδε με αβέβαιη μεταβλητή εισόδου την παροχή m

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{j=0}^k p_{tj} \psi_j \right] = \nu g(x) \sum_{j=0}^p m_j \psi_j - \frac{\lambda^*}{S^2 \sqrt{S}} \sum_{j=0}^k m_j \psi_j \sum_{z=0}^k m_z \psi_z \quad (4.4)$$

$$\text{όπου } g(x) = \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{S} \right) + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{S} \right) \right].$$

Η εξίσωση (4.4) πολλαπλασιάζεται με τα πολυώνυμα Hermite $\psi_n(\xi)$ για $n \geq 0$ και τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής $w(\xi)$, ολοκληρώνεται κατά ξ και προβάλλεται κατά Galerkin

$$\sum_{j=0}^k \frac{dp_{tj}}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_n w d\xi = \nu g(x) \sum_{j=0}^p m_j \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_n w d\xi - \frac{\lambda^*}{S^2 \sqrt{S}} \sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^k m_j m_z \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_z \psi_n w d\xi \implies$$

$$\sum_{j=0}^k \frac{dp_{tj}}{dx} \langle \psi_j, \psi_n \rangle = \nu g(x) \sum_{j=0}^p m_j \langle \psi_j, \psi_n \rangle - \frac{\lambda^*}{S^2 \sqrt{S}} \sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^k m_j m_z \langle \psi_j, \psi_z, \psi_n \rangle \quad (4.5)$$

Από την εξίσωση (4.5) προκύπτουν $k + 1$ σδε για τα πεδία των ντετερμινιστικών συντελεστών της ολικής πίεσης $p_{tj}(x)$, όπου $j = 0, \dots, k$.

4.1.1 Ανάπτυγμα PC του Μη-Γραμμικού Όρου

Στην εξίσωση (4.4) ο μη-γραμμικός όρος $b = m^2$ έχει εκφραστεί ως ανάπτυγμα PC σύμφωνα με τη συνήθη διατύπωση του γινομένου [14]

$$b = \sum_{j=0}^p b_j \psi_j = \sum_{j=0}^p \sum_{z=0}^p m_j m_z \psi_j \psi_z \quad (4.6)$$

Παρατηρείται ότι για το ανάπτυγμα PC του γινομένου m^2 χρησιμοποιείται ίδια τάξη PC με τον παράγοντα m , παρότι το δεξί μέλος της (4.6) έχει διπλάσια τάξη χάους $2p$. Η συγκεκριμένη παραδοχή προϋποθέτει ότι η τάξη PC του αναπτύγματος της στοχαστικής μεταβλητής m είναι επαρκής για την ικανοποιητική αναπαράσταση των συγκεκριμένων όρων. Κρίνεται, επομένως, χρήσιμο να εξεταστεί υπολογιστικά και να πιστοποιηθεί η ακρίβεια της ανωτέρω παραδοχής στον υπολογισμό του γινομένου 2 στοχαστικών ποσοτήτων, εκφρασμένων με αναπτύγματα PC χαμηλών τάξεων.

► Στη συνέχεια, εξετάζεται η σδε

$$\frac{d\phi}{dx} = S^2(x) \quad (4.7)$$

με διάστημα ολοκλήρωσης $x \in [-0.5, 1.5]$ και οριακή συνθήκη $\phi_{i=1} = 0$. Η αβεβαιότητα στην εξίσωση εισάγεται με το πεδίο $S(x)$, το οποίο ακολουθεί στοχαστική κατανομή με μέση τιμή την κατανομή της διατομής του αγωγού $\mu_S(x)$ και σταθερή τυπική απόκλιση $\sigma_S = 0.0245 m^2$. Με το ανάπτυγμα PC, το στοχαστικό πεδίο $S(x)$ λαμβάνει τη μορφή (4.2). Το πεδίο $\phi(x)$ αποκτά εξίσου αβέβαιο χαρακτήρα εξαιτίας της στοχαστικής εισόδου $S(x)$ και ορίζεται από ανάπτυγμα PC της μορφής

$$\phi(x) = \sum_{j=0}^k \phi_j(x) \psi_j(\xi)$$

όπου k η τάξη του PC για το πεδίο $\phi(x)$.

Με αντικατάσταση των αναπτυγμάτων PC των στοχαστικών πεδίων στην εξίσωση (4.7), προκύπτει το ανάπτυγμα PC της σδε με αβέβαιη εισόδο το πεδίο $S(x)$

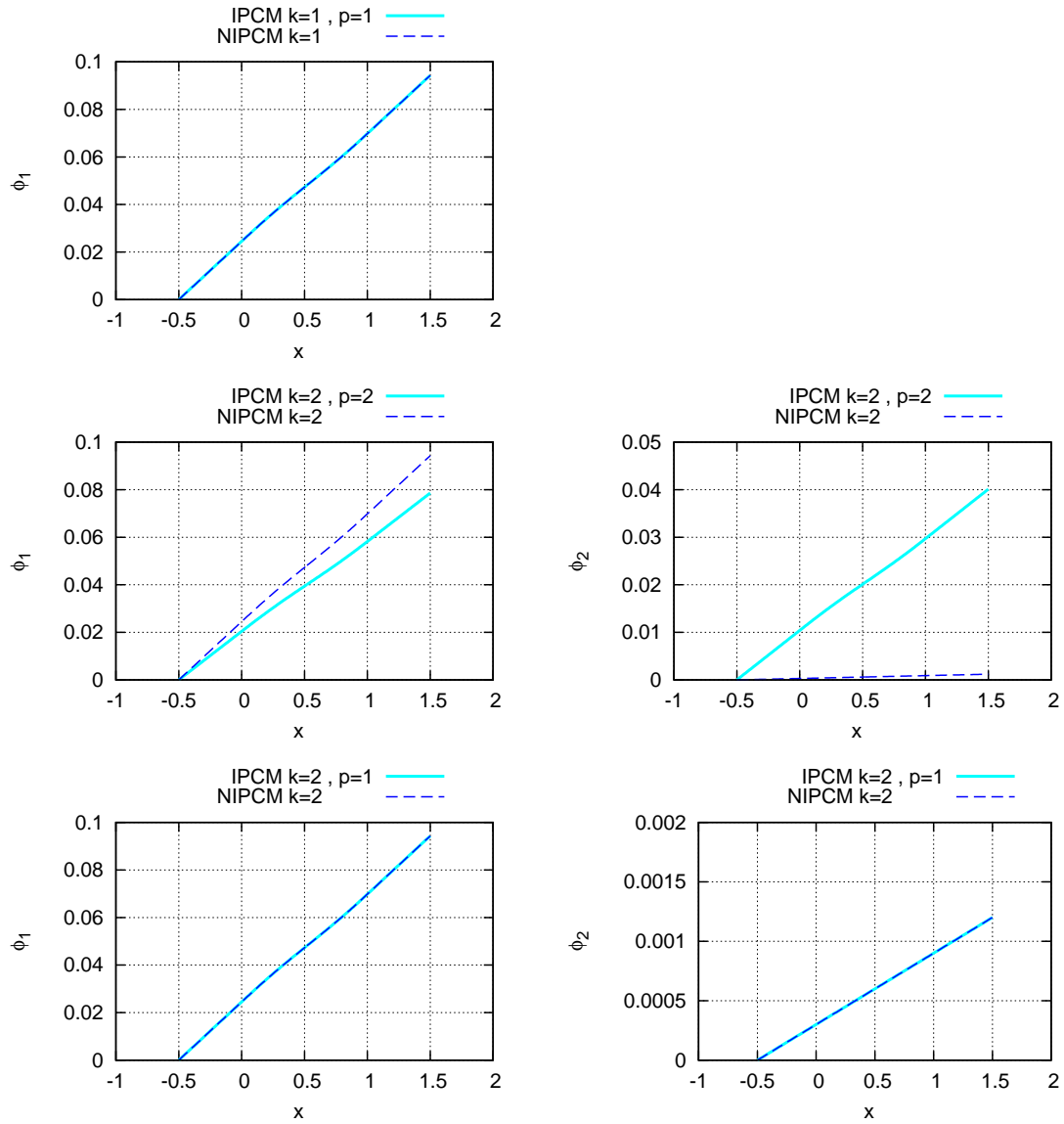
$$\sum_{j=0}^k \frac{d\phi_j}{dx} \psi_j = \sum_{j=0}^p \sum_{z=0}^p S_j S_z \psi_j \psi_z \implies \dots$$

$$\sum_{j=0}^k \frac{d\phi_j}{dx} \langle \psi_j, \psi_n \rangle = \sum_{j=0}^p \sum_{z=0}^p S_j S_z \langle \psi_j, \psi_z, \psi_n \rangle \quad (4.8)$$

Τάξη PC	Εξισώσεις IPCM
$k = 1, p = 1$	$\frac{d\phi_0}{dx} = S_0^2 + S_1^2$ $\frac{d\phi_1}{dx} = 2S_0 S_1$
$k = 2, p = 2$	$\frac{d\phi_0}{dx} = S_0^2 + S_1^2 + 2S_2^2$ $\frac{d\phi_1}{dx} = 2S_0 S_1 + 4S_1 S_2$ $\frac{d\phi_2}{dx} = S_1^2 + 4S_2^2 + 2S_0 S_2$
$k = 2, p = 1$	$\frac{d\phi_0}{dx} = S_0^2 + S_1^2$ $\frac{d\phi_1}{dx} = 2S_0 S_1$ $\frac{d\phi_2}{dx} = S_1^2$

Πίνακας 4.1: Τα συστήματα των εξισώσεων της IPCM στη σδε για το $\phi(x)$, όπως προκύπτουν από την εξίσωση (4.8) για τη στοχαστική είσοδο $S(x)$ τάξης PC p και το πεδίο $\phi(x)$ τάξης PC k .

Τα συστήματα των εξισώσεων της IPCM για διάφορους συνδυασμούς τάξεων PC p και k , όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.1, είναι συστήματα σδε που επιλύονται με τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ης} τάξης για μηδενικές οριακές συνθήκες. Τα αποτελέσματα της IPCM και της NIPCM συγκρίνονται στο Σχήμα 4.1 βάσει των πεδίων των συντελεστών της τυπικής απόκλισης $\phi_1(x)$ και $\phi_2(x)$. Με ανάπτυγμα PC 1^{ης} και 2^{ης} τάξης για το πεδίο $\phi(x)$, ορίζεται στην IPCM ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης για το πεδίο $S(x)$, και στις 2 περιπτώσεις, για καλύτερη προσέγγιση των αποτελεσμάτων της NIPCM με ανάπτυγμα PC για το $\phi(x)$ αντίστοιχης τάξης.



Σχήμα 4.1: Τα πεδία των συντελεστών της τυπικής απόκλισης $\phi_1(x)$ και $\phi_2(x)$ για τη σδε (4.7), όπως υπολογίστηκαν με την IPCM και τη NIPCM για το ανάπτυγμα PC 1^{ης} και 2^{ης} τάξης του πεδίου $\phi(x)$. Αβέβαιο πεδίο εισόδου είναι το $S(x)$ με μέση τιμή $\mu_S(x)$ και τυπική απόκλιση $\sigma_S=0.0245 \text{ m}^2$.

4.1.2 Ανάπτυγμα PC($p_t(x)$) 1^{ης} Τάξης

Έστω ανάπτυγμα PC 1^{ης} για το πεδίο της ολικής πίεσης $p_t(x)$, τότε ορίζεται ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης και για την αβέβαιη μεταβλητή εισόδου m . Από την εξίσωση (4.5), με υπολογισμό των προβολών Galerkin Β', προκύπτουν οι 2 εξισώσεις της IPCM

$$\frac{dp_{t0}}{dx} = \nu g(x)m_0 - \frac{\lambda^*}{S^2\sqrt{S}}(m_0^2 + m_1^2) \quad (4.9)$$

$$\frac{dp_{t1}}{dx} = \nu g(x)m_1 - \frac{\lambda^*}{S^2\sqrt{S}}2m_0m_1 \quad (4.10)$$

Οι εξισώσεις (4.9) και (4.10) είναι 2 σδε για το πεδίο της μέσης τιμής $p_{t0}(x)$ και της τυπικής απόκλισης $p_{t1}(x)$ της ολικής πίεσης, αντίστοιχα. Επιλύονται αριθμητικά με τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ης} τάξης για μηδενικές οριακές συνθήκες $p_{t0,i=1} = 0$ και $p_{t1,i=1} = 0$.

Μετά την επίλυση της σδε, τα πεδία της μέσης τιμής $p_{t0}(x)$ και της τυπικής απόκλισης $p_{t1}(x)$ της ολικής πίεσης διορθώνονται με βάση τις λύσεις του προβλήματος με την τεχνική της διόρθωσης πίεσης στην έξοδο του αγωγού, ώστε να υπάρχει αντιστοιχία στις λύσεις των 2 μεθόδων. Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα PC της παροχής (4.1) και του πεδίου της ολικής πίεσης (4.3) στην εξίσωση (2.16), προκύπτει το ανάπτυγμα PC της εξίσωσης

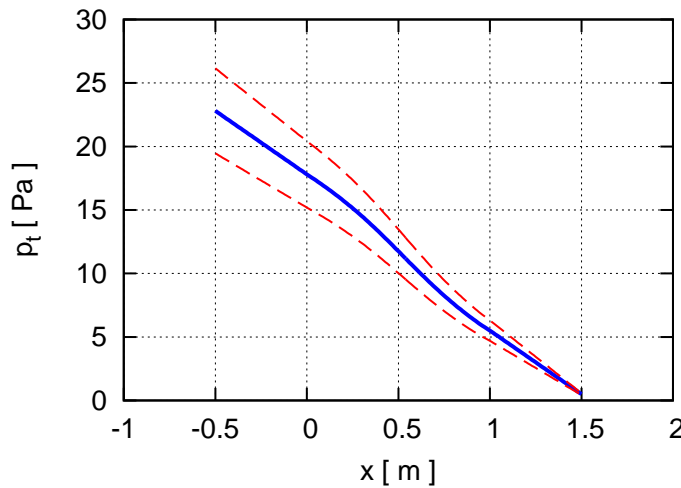
$$\sum_{j=0}^k p_{tj}(x)\psi_j = \sum_{j=0}^k p_{tj}(x)\psi_j + \frac{1}{2S^2(x_{max})} \sum_{j=0}^p \sum_{z=0}^p m_j m_z \psi_j \psi_z - \sum_{j=0}^k p_{tj}(x_{max})\psi_j \implies \dots$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k p_{tj}(x)\langle\psi_j, \psi_n\rangle &= \sum_{j=0}^k p_{tj}(x)\langle\psi_j, \psi_n\rangle + \frac{1}{2S^2(x_{max})} \sum_{j=0}^p \sum_{z=0}^p m_j m_z \langle\psi_j, \psi_z, \psi_n\rangle \\ &\quad - \sum_{j=0}^k p_{tj}(x_{max})\langle\psi_j, \psi_n\rangle \end{aligned} \quad (4.11)$$

Από την εξίσωση (4.11) για αναπτύγματα PC 1^{ης} τάξης για το $p_t(x)$ και την m , προσδιορίζονται οι διορθωμένες εκφράσεις για τα πεδία της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της ολικής πίεσης

$$p_{t0}(x) = p_{t0}(x) + \frac{1}{2S^2(x_{max})}(m_0^2 + m_1^2) - p_{t0}(x_{max})$$

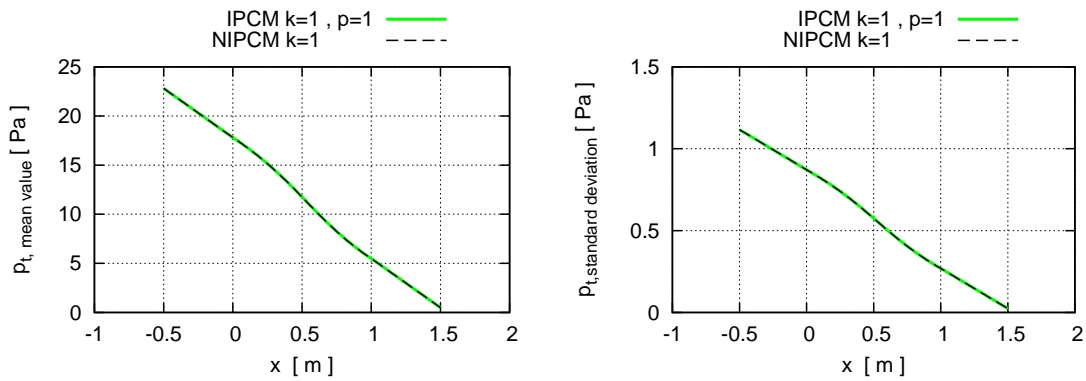
$$p_{t1}(x) = p_{t1}(x) + \frac{1}{2S^2(x_{max})}2m_0m_1 - p_{t1}(x_{max})$$



Σχήμα 4.2: Η μέση τιμή και 3 φορές η τυπική απόκλιση (3σ) γύρω από αυτή για την ολική πίεση $p_t(x)$ σε αγωγό μεταβλητής διατομής $S(x)$ με $x \in [-0.5, 1.5]$ m, συντελεστή τριβής $\lambda^*=10$ και κινηματική συνεκτικότητα $\nu=0.1$ m²/sec. Πρόκειται για τη λύση της IPCM στη σδε για την ολική πίεση. Αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής είναι η παροχή με μέση τιμή $\mu_m=1$ m³/sec και τυπική απόκλιση $\sigma_m=0.0245$ m³/sec.

4.1.3 Ανάπτυγμα PC($p_t(x)$) 2^{ης} Τάξης

Ορίζοντας, τώρα, για το πεδίο της ολικής πίεσης $p_t(x)$ ανάπτυγμα PC 2^{ης} τάξης, με όσα προηγήθηκαν, το ανάπτυγμα PC για την αβέβαιη μεταβλητή εισόδου m πρέπει να είναι 1^{ης} τάξης. Τότε, από την εξίσωση (4.5) προκύπτουν οι 3 εξισώσεις της IPCM



Σχήμα 4.3: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ολικής πίεσης $p_t(x)$ σε αγωγό μεταβλητής διατομής $S(x)$ με $x \in [-0.5, 1.5]$ m, συντελεστή τριβής $\lambda^*=10$ και κινηματική συνεκτικότητα $\nu=0.1$ m²/sec. Αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής είναι η παροχή με μέση τιμή $\mu_m=1$ m³/sec και τυπική απόκλιση $\sigma_m=0.0245$ m³/sec. Σύγκριση της IPCM και της NIPCM στη σδε για την ολική πίεση για ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης για το $p_t(x)$ ($k=1$).

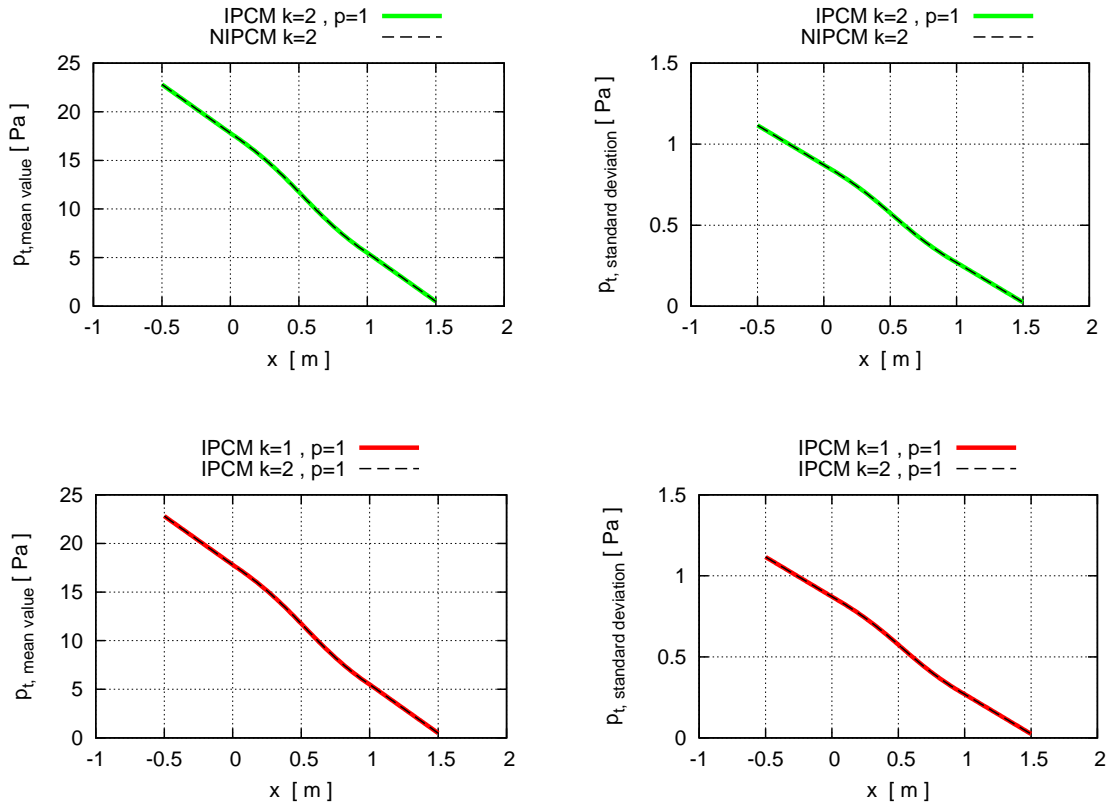
$$\frac{dp_{t0}}{dx} = \nu g(x)m_0 - \frac{\lambda^*}{S^2\sqrt{S}}(m_0^2 + m_1^2) \quad (4.12)$$

$$\frac{dp_{t1}}{dx} = \nu g(x)m_1 - \frac{\lambda^*}{S^2\sqrt{S}}2m_0m_1 \quad (4.13)$$

$$\frac{dp_{t2}}{dx} = -\frac{\lambda^*}{S^2\sqrt{S}}m_1^2 \quad (4.14)$$

Οι εξισώσεις (4.12), (4.13) και (4.14) είναι 3 σδε για το πεδίο της μέσης τιμής $p_{t0}(x)$ και τα πεδία των συντελεστών της τυπικής απόκλισης $p_{t1}(x)$ και $p_{t2}(x)$ της ολικής πίεσης, αντίστοιχα. Επιλύονται αριθμητικά με τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ης} τάξης για μηδενικές οριακές συνθήκες $p_{t0,i=1} = 0$, $p_{t1,i=1} = 0$ και $p_{t2,i=1} = 0$.

Μετά την επίλυση της σδε, τα πεδία της μέσης τιμής $p_{t0}(x)$ και των συντελεστών της τυπικής απόκλισης $p_{t1}(x)$ και $p_{t2}(x)$ της ολικής πίεσης διορθώνονται με βάση τις λύσεις του προβλήματος με την τεχνική της διόρθωσης πίεσης στην έξοδο του αγωγού, για να υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ των 2 μεθόδων. Θέτοντας στην εξίσωση (4.11) ανάπτυγμα PC 2^{ης} τάξης για το $p_t(x)$ και 1^{ης} τάξης την m , προκύπτουν οι διορθωμένες εκφράσεις για τα πεδία της μέσης τιμής και των συντελεστών της τυπικής απόκλισης της ολικής πίεσης



Σχήμα 4.4: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ολικής πίεσης $p_t(x)$ σε αγωγό μεταβλητής διατομής $S(x)$ με $x \in [-0.5, 1.5]$ m, συντελεστή τριβής $\lambda^*=10$ και κινηματική συνεκτικότητα $\nu=0.1$ m²/sec. Αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής είναι η παροχή με μέση τιμή $\mu_m=1$ m³/sec και τυπική απόκλιση $\sigma_m=0.0245$ m³/sec. Σύγκριση της IPCM και της NIPCM στη σδε για την ολική πίεση για ανάπτυγμα PC 2^{ης} τάξης για το $p_t(x)$ ($k=2$). Η IPCM για ανάπτυγμα PC 1^{ης} και 2^{ης} τάξης για το $p_t(x)$ δίνει κοντινά αποτελέσματα.

$$p_{t0}(x) = p_{t0}(x) + \frac{1}{2S^2(x_{max})}(m_0^2 + m_1^2) - p_{t0}(x_{max})$$

$$p_{t1}(x) = p_{t1}(x) + \frac{1}{2S^2(x_{max})}2m_0m_1 - p_{t1}(x_{max})$$

$$p_{t2}(x) = p_{t2}(x) + \frac{1}{2S^2(x_{max})}m_1^2 - p_{t2}(x_{max})$$

4.2 Η IPCM($S(x)$) στη ΣΔΕ για την Ολική Πίεση

ση

Σε αυτή την περίπτωση, η αβεβαιότητα στο πεδίο ροής εισάγεται μέσω της διαμήκου κατανομής της διατομής του αγωγού $S(x)$, η οποία εκφράζεται με ανάπτυγμα PC από τη σχέση (4.2). Με βάση τη σδε για την ολική πίεση (2.15), προκύπτει ότι η στοχαστική συμπεριφορά της κατανομής της διατομής επιδρά στο πεδίο της ολικής πίεσης $p_t(x)$, το οποίο εκφράζεται, πλέον, με ανάπτυγμα PC της μορφής (4.3) και τάξη PC l .

Στη σδε για την ολική πίεση (2.15) εμφανίζονται μη-γραμμικοί όροι συναρτήσεων του στοχαστικού πεδίου εισόδου $S(x)$. Προκειμένου να εκφραστούν τα αναπτύγματα PC των εν λόγω όρων, καθένας από αυτούς τίθεται ίσος με ένα τυχαίο στοχαστικό πεδίο [14]. Συγκεκριμένα, ορίζονται τα στοχαστικά πεδία

$$\begin{aligned}\kappa(x) &= \sum_{j=0}^k \kappa_j(x) \psi_j(\xi) = \frac{1}{S(x)} \\ \tau(x) &= \sum_{j=0}^k \tau_j(x) \psi_j(\xi) = \frac{1}{S^2(x)} \\ \gamma(x) &= \sum_{j=0}^k \gamma_j(x) \psi_j(\xi) = \frac{1}{\sqrt{S(x)}}\end{aligned}\quad (4.15)$$

όπου k η τάξη του PC για τα πεδία των μη-γραμμικών όρων $\kappa(x)$, $\tau(x)$ και $\gamma(x)$, ενώ $S(x)$ το στοχαστικό πεδίο εισόδου με ανάπτυγμα PC, που ορίζεται από τη σχέση (4.2) και τάξη PC p .

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα PC της κατανομής της διατομής (4.2), των πεδίων των μη-γραμμικών όρων (4.15) και του πεδίου της ολικής πίεσης (4.3) στη σδε για την ολική πίεση (2.15), προκύπτει το ανάπτυγμα PC της εξίσωσης με αβέβαιο πεδίο εισόδου την κατανομή της διατομής $S(x)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(\sum_{j=0}^l p_{tj} \psi_j \right) &= \nu m \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{j=0}^k \kappa_j \psi_j \right) + \sum_{j=0}^k \kappa_j \psi_j \frac{d}{dx} \left(\sum_{z=0}^p S_z \psi_z \right) \frac{d}{dx} \left(\sum_{r=0}^k \kappa_r \psi_r \right) \right] \\ &\quad - \lambda^* m^2 \sum_{j=0}^k \tau_j \psi_j \sum_{z=0}^k \gamma_z \psi_z \implies \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^l \frac{dp_{tj}}{dx} \langle \psi_j, \psi_n \rangle &= \nu m \left[\sum_{j=0}^k \frac{d^2 \kappa_j}{dx^2} \langle \psi_j, \psi_n \rangle + \sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^p \sum_{r=0}^k \kappa_j \frac{dS_z}{dx} \frac{d\kappa_r}{dx} \langle \psi_j, \psi_z, \psi_r, \psi_n \rangle \right] \\ &\quad - \lambda^* m^2 \sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^k \tau_j \gamma_z \langle \psi_j, \psi_z, \psi_n \rangle \end{aligned} \quad (4.16)$$

Από την εξίσωση (4.16) προκύπτουν $k + 1$ σδε για τα πεδία των ντετερμινιστικών συντελεστών της ολικής πίεσης $p_{tj}(x)$, όπου $j = 0, \dots, k$.

4.2.1 Ανάπτυγμα PC των Μη-Γραμμικών Όρων

Στη συνέχεια, εξετάζεται κατά πόσο είναι ακριβής η παραδοχή να οριστούν οι μη-γραμμικοί όροι, που εμφανίζονται στη σδε για την ολική πίεση (2.15) συναρτήσει του αβεβαίου πεδίου εισόδου $S(x)$, ίσοι με τυχαία στοχαστικά πεδία $\kappa(x)$, $\tau(x)$ και $\gamma(x)$ για αναπτύγματα PC $1^{\eta\varsigma}$ και $2^{\eta\varsigma}$ τάξης των συγκεκριμένων πεδίων.

► Το πεδίο του μη-γραμμικού όρου $\frac{1}{S(x)}$ εκφράζεται ως

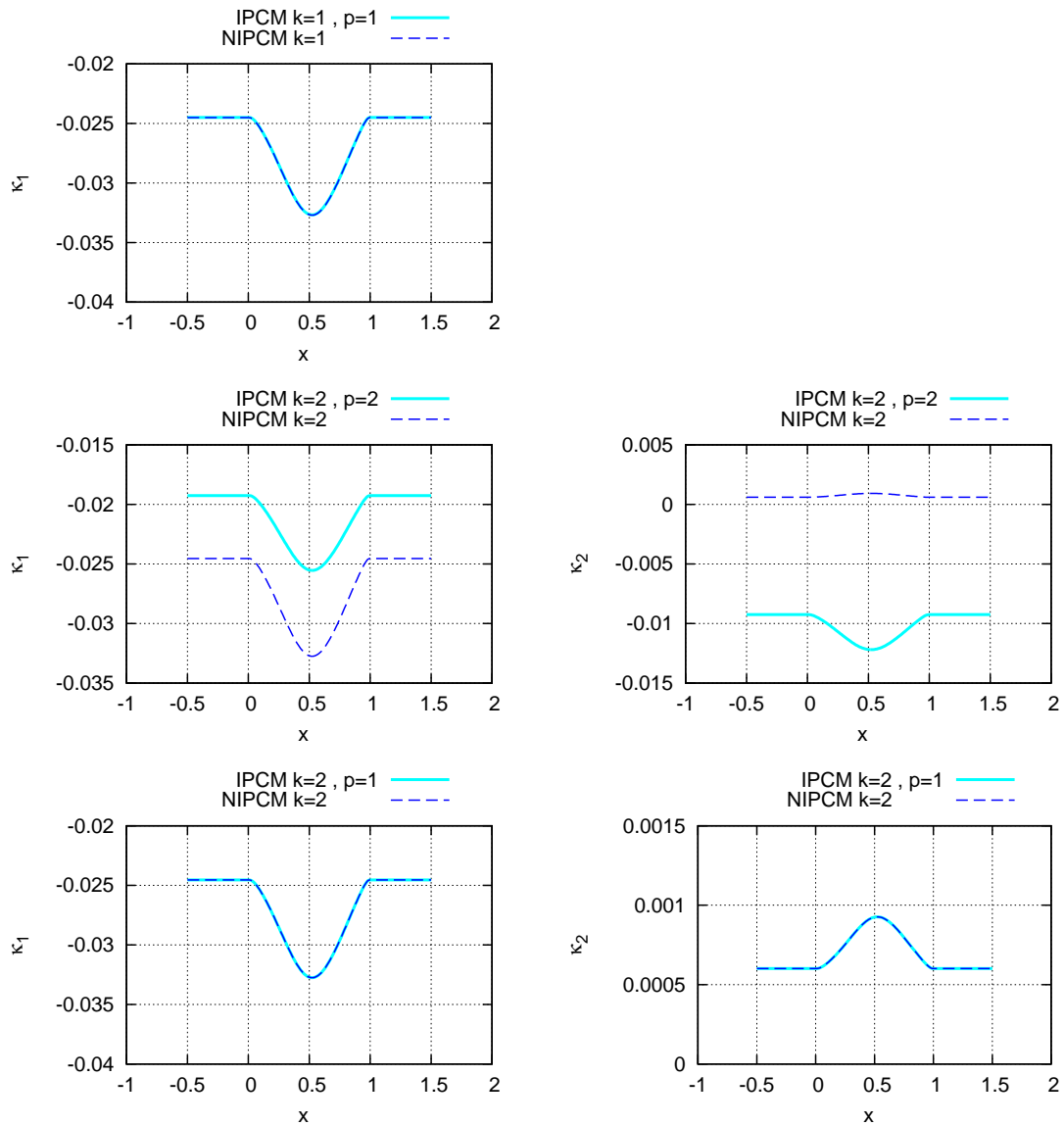
$$\kappa(x) = \frac{1}{S(x)} \implies \kappa(x)S(x) = 1 \implies \sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^p \kappa_j S_z \psi_j \psi_z = 1 \implies \dots \quad (4.17)$$

$$\sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^p \kappa_j S_z \langle \psi_j, \psi_z, \psi_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n w d\xi \quad (4.18)$$

Όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.2, τα συστήματα των εξισώσεων της IPCM είναι γραμμικά. Στο Σχήμα 4.5 συγκρίνονται τα αποτελέσματα της IPCM και της NIPCM βάσει των πεδίων των συντελεστών της τυπικής απόκλισης $\kappa_1(x)$ και $\kappa_2(x)$ και προκύπτει ότι για συμφωνία με τη NIPCM, πρέπει να οριστεί στην IPCM ανάπτυγμα PC $1^{\eta\varsigma}$ τάξης για το πεδίο $S(x)$ είτε το ανάπτυγμα PC του πεδίου $\kappa(x)$ είναι $1^{\eta\varsigma}$ είτε $2^{\eta\varsigma}$ τάξης.

► Για το πεδίο του μη-γραμμικού όρου $\frac{1}{S^2(x)}$ ισχύει

$$\tau(x) = \frac{1}{S^2(x)} \implies \tau(x)S^2(x) = 1 \implies \sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^p \sum_{r=0}^p \tau_j S_z S_r \psi_j \psi_z \psi_r = 1 \implies \dots \quad (4.19)$$



Σχήμα 4.5: Τα πεδία των συντελεστών της τυπικής απόκλισης $\kappa_1(x)$ και $\kappa_2(x)$ για την εξίσωση (4.17), όπως υπολογίστηκαν με την IPCM και τη NIPCM για το ανάπτυγμα PC 1^{ης} και 2^{ης} τάξης του πεδίου $\kappa(x)$. Αβέβαιο πεδίο εισόδου είναι το $S(x)$ με μέση τιμή $\mu_S(x)$ και τυπική απόκλιση $\sigma_S=0.0245 \text{ m}^2$.

Τάξη PC	Εξισώσεις IPCM
$k = 1, p = 1$	$\begin{bmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$k = 2, p = 2$	$\begin{bmatrix} S_0 & S_1 & 2S_2 \\ S_1 & S_0 + 2S_2 & 2S_1 \\ S_2 & S_1 & S_0 + 4S_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$k = 2, p = 1$	$\begin{bmatrix} S_0 & S_1 & 0 \\ S_1 & S_0 & 2S_1 \\ 0 & S_1 & S_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

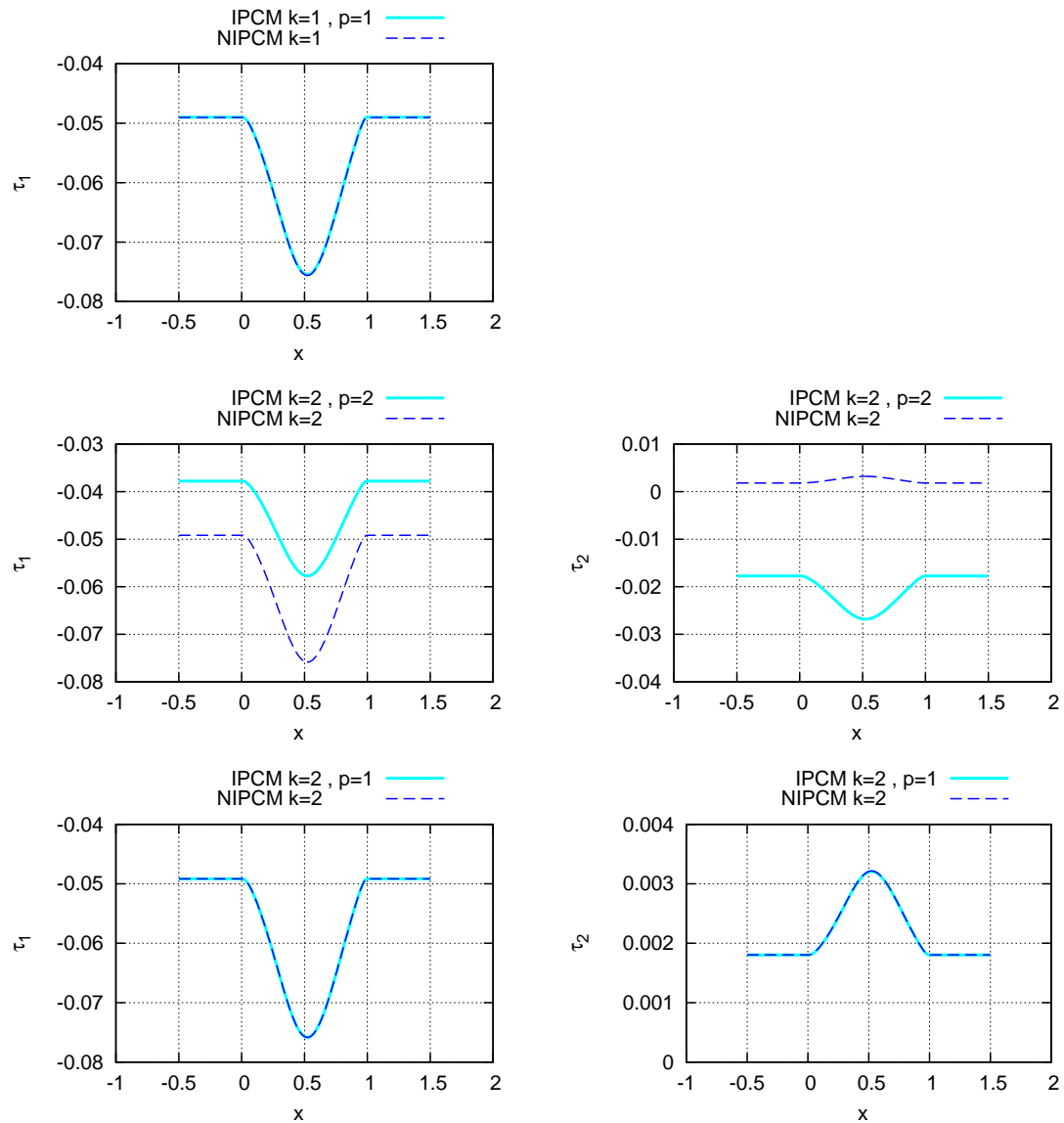
Πίνακας 4.2: Τα συστήματα των εξισώσεων της IPCM στην εξίσωση για το πεδίο του μη-γραμμικού όρου $\kappa(x)$, όπως προκύπτουν από την (4.18) για τη στοχαστική είσοδο $S(x)$ τάξης PC p και το πεδίο $\kappa(x)$ τάξης PC k .

$$\sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^p \sum_{r=0}^p \tau_j S_z S_r \langle \psi_j, \psi_z, \psi_r, \psi_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n w d\xi \quad (4.20)$$

Τάξη PC	Εξισώσεις IPCM
$k = 1, p = 1$	$\begin{bmatrix} S_0^2 + S_1^2 & 2S_0S_1 \\ 2S_0S_1 & S_0^2 + 3S_1^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$k = 2, p = 2$	$\begin{bmatrix} S_0^2 + S_1^2 + 2S_2^2 & 2S_0S_1 + 4S_1S_2 & 4S_0S_2 + 8S_2^2 + 2S_1^2 \\ 2S_0S_1 + 4S_1S_2 & 3S_1^2 + S_0^2 + 4S_0S_2 + 10S_2^2 & 4S_0S_1 + 20S_1S_2 \\ 4S_0S_2 + 8S_2^2 + 2S_1^2 & 4S_0S_1 + 20S_1S_2 & 60S_2^2 + 2S_0^2 + 16S_0S_2 + 10S_1^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$k = 2, p = 1$	$\begin{bmatrix} S_0^2 + S_1^2 & 2S_0S_1 & 2S_1^2 \\ 2S_0S_1 & 3S_1^2 + S_0^2 & 4S_0S_1 \\ S_1^2 & 2S_0S_1 & S_0^2 + 5S_1^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Πίνακας 4.3: Τα συστήματα των εξισώσεων της IPCM στην εξίσωση για το πεδίο του μη-γραμμικού όρου $\tau(x)$, όπως προκύπτουν από την (4.20) για τη στοχαστική είσοδο $S(x)$ τάξης PC p και το πεδίο $\tau(x)$ τάξης PC k .

Στον Πίνακα 4.3 παρουσιάζονται τα γραμμικά συστήματα των εξισώσεων της IPCM, όπως προκύπτουν για διάφορους συνδυασμούς τάξεων PC p και k . Στο Σχήμα 4.6 συγκρίνονται τα αποτελέσματα της IPCM και της NIPCM βάσει των πεδίων των συντελεστών της τυπικής απόκλισης $\tau_1(x)$ και $\tau_2(x)$. Και σε αυτήν την περίπτωση, για συμφωνία με τη NIPCM, πρέπει να οριστεί στην IPCM ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης για το πεδίο $S(x)$, όταν το ανάπτυγμα PC του πεδίου $\tau(x)$ είναι 1^{ης} ή 2^{ης} τάξης.



Σχήμα 4.6: Τα πεδία των συντελεστών της τυπικής απόκλισης $\tau_1(x)$ και $\tau_2(x)$ για την εξίσωση (4.19), όπως υπολογίστηκαν με την IPCM και τη NIPCM για το ανάπτυγμα PC 1^{ης} και 2^{ης} τάξης του πεδίου $\tau(x)$. Αβέβαιο πεδίο εισόδου είναι το $S(x)$ με μέση τιμή $\mu_S(x)$ και τυπική απόκλιση $\sigma_S=0.0245 \text{ m}^2$.

► Το πεδίο του μη-γραμμικού όρου $\frac{1}{\sqrt{S(x)}}$ ορίζεται ως

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{S(x)}} \implies \gamma^2(x)S(x) = 1 \implies \sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^k \sum_{r=0}^p \gamma_j \gamma_z S_r \psi_j \psi_z \psi_r = 1 \implies \dots \quad (4.21)$$

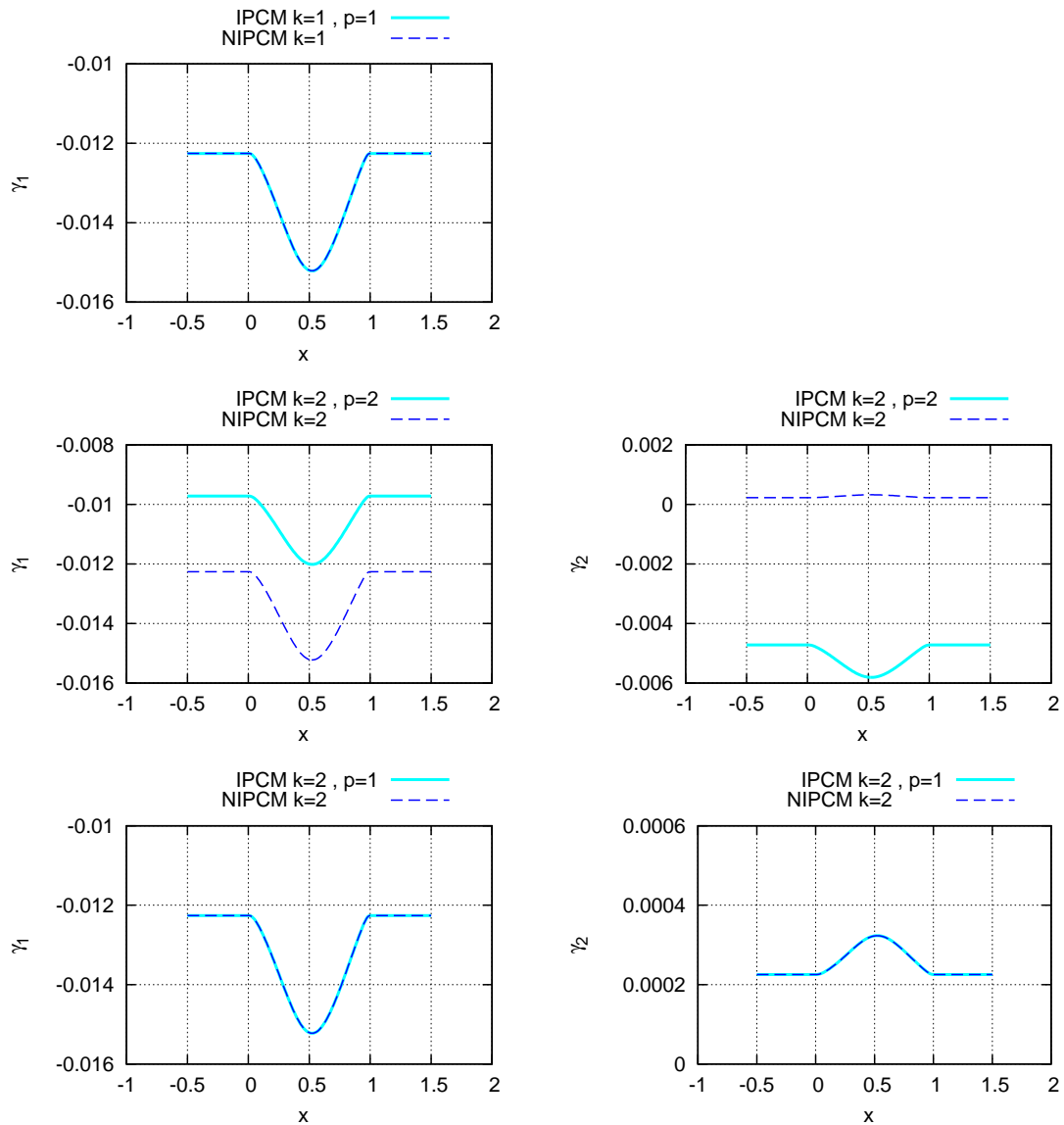
$$\sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^k \sum_{r=0}^p \gamma_j \gamma_z S_r \langle \psi_j, \psi_z, \psi_r, \psi_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n w d\xi \quad (4.22)$$

Τάξη PC	Εξισώσεις IPCM
$k = 1, p = 1$	$S_0 \gamma_0^2 + S_0 \gamma_1^2 + 2S_1 \gamma_0 \gamma_1 = 1$ $2S_0 \gamma_0 \gamma_1 + S_1 \gamma_0^2 + 3S_1 \gamma_1^2 = 0$
$k = 2, p = 2$	$S_0 \gamma_0^2 + (S_0 + 2S_2) \gamma_1^2 + (2S_0 + 8S_2) \gamma_2^2 + 2S_1 \gamma_0 \gamma_1 + 4S_2 \gamma_0 \gamma_2 + 4S_1 \gamma_1 \gamma_2 = 1$ $S_1 \gamma_0^2 + 3S_1 \gamma_1^2 + 10S_1 \gamma_2^2 + (2S_0 + 4S_2) \gamma_0 \gamma_1 + 4S_1 \gamma_0 \gamma_2 + (4S_0 + 20S_2) \gamma_1 \gamma_2 = 0$ $2S_2 \gamma_0^2 + (2S_0 + 10S_2) \gamma_1^2 + (60S_2 + 8S_0) \gamma_2^2 + 4S_1 \gamma_0 \gamma_1 + (4S_0 + 16S_2) \gamma_0 \gamma_2 + 20S_1 \gamma_1 \gamma_2 = 0$
$k = 2, p = 1$	$S_0 \gamma_0^2 + S_0 \gamma_1^2 + 2S_0 \gamma_2^2 + 2S_1 \gamma_0 \gamma_1 + 4S_1 \gamma_1 \gamma_2 = 1$ $S_1 \gamma_0^2 + 3S_1 \gamma_1^2 + 10S_1 \gamma_2^2 + 2S_0 \gamma_0 \gamma_1 + 4S_1 \gamma_0 \gamma_2 + 4S_0 \gamma_1 \gamma_2 = 0$ $2S_0 \gamma_1^2 + 8S_0 \gamma_2^2 + 4S_1 \gamma_0 \gamma_1 + 4S_0 \gamma_0 \gamma_2 + 20S_1 \gamma_1 \gamma_2 = 0$

Πίνακας 4.4: Τα συστήματα των εξισώσεων της IPCM στην εξίσωση για το πεδίο του μη-γραμμικού όρου $\gamma(x)$, όπως προκύπτουν από την (4.22) για τη στοχαστική είσοδο $S(x)$ τάξης PC p και το πεδίο $\gamma(x)$ τάξης PC k .

Στον Πίνακα 4.4 παρατίθενται τα συστήματα των εξισώσεων της IPCM για διάφορους συνδυασμούς τάξεων PC p και k . Σε κάθε περίπτωση, πρόκειται για μη-γραμμικά συστήματα εξισώσεων, που επιλύονται αριθμητικά με τη μέθοδο Newton-Raphson [5]. Στο Σχήμα 4.7 συγκρίνονται τα αποτελέσματα της IPCM και της NIPCM βάσει των πεδίων των συντελεστών της τυπικής απόκλισης $\gamma_1(x)$ και $\gamma_2(x)$. Για να υπάρχει συμφωνία με τη NIPCM, ορίζεται στην IPCM ανάπτυγμα PC 1^{ns} τάξης για το πεδίο $S(x)$, όταν το ανάπτυγμα PC του πεδίου $\gamma(x)$ είναι 1^{ns} ή 2^{ns} τάξης.

Επιπλέον, αναζητείται ο πιο ακριβής τρόπος έκφρασης του γινομένου των 2 στοχαστικών πεδίων, $\tau(x)$ και $\gamma(x)$, όπου και τα 2 πεδία είναι συνάρτηση της στοχαστικής εισόδου $S(x)$. Το ανάπτυγμα PC του συγκεκριμένου γινομένου, $\tau(x)\gamma(x)$, εμφανίζεται στο ανάπτυγμα PC της σδε για την ολική πίεση (4.16).



Σχήμα 4.7: Τα πεδία των συντελεστών της τυπικής απόκλισης $\gamma_1(x)$ και $\gamma_2(x)$ για την εξίσωση (4.21), όπως υπολογίστηκαν με την IPCM και τη NIPCM για το ανάπτυγμα PC 1^{ης} και 2^{ης} τάξης του πεδίου $\gamma(x)$. Αβέβαιο πεδίο εισόδου είναι το $S(x)$ με μέση τιμή $\mu_S(x)$ και τυπική απόκλιση $\sigma_S=0.0245 \text{ m}^2$.

► Εξετάζεται, λοιπόν, η σδε

$$\frac{d\theta}{dx} = \tau(x)\gamma(x) \quad (4.23)$$

με διάστημα ολοκλήρωσης $x \in [-0.5, 1.5]$ και οριακή συνθήκη $\theta_{i=1}=0$. Τα πεδία $\tau(x)$ και $\gamma(x)$ εξαρτώνται από το στοχαστικό πεδίο της κατανομής της διατομής $S(x)$ και είναι ήδη γνωστά. Επομένως, η αβεβαιότητα στην εξίσωση εισάγεται με το πεδίο $S(x)$, το οποίο ακολουθεί στοχαστική κατανομή με μέση τιμή $\mu_S(x)$ και τυπική απόκλιση $\sigma_S=0.0245 m^2$.

Το πεδίο $\theta(x)$ αποκτά εξίσου αβέβαιο χαρακτήρα εξαιτίας της στοχαστικής εισόδου $S(x)$ και ορίζεται από ανάπτυγμα PC της μορφής

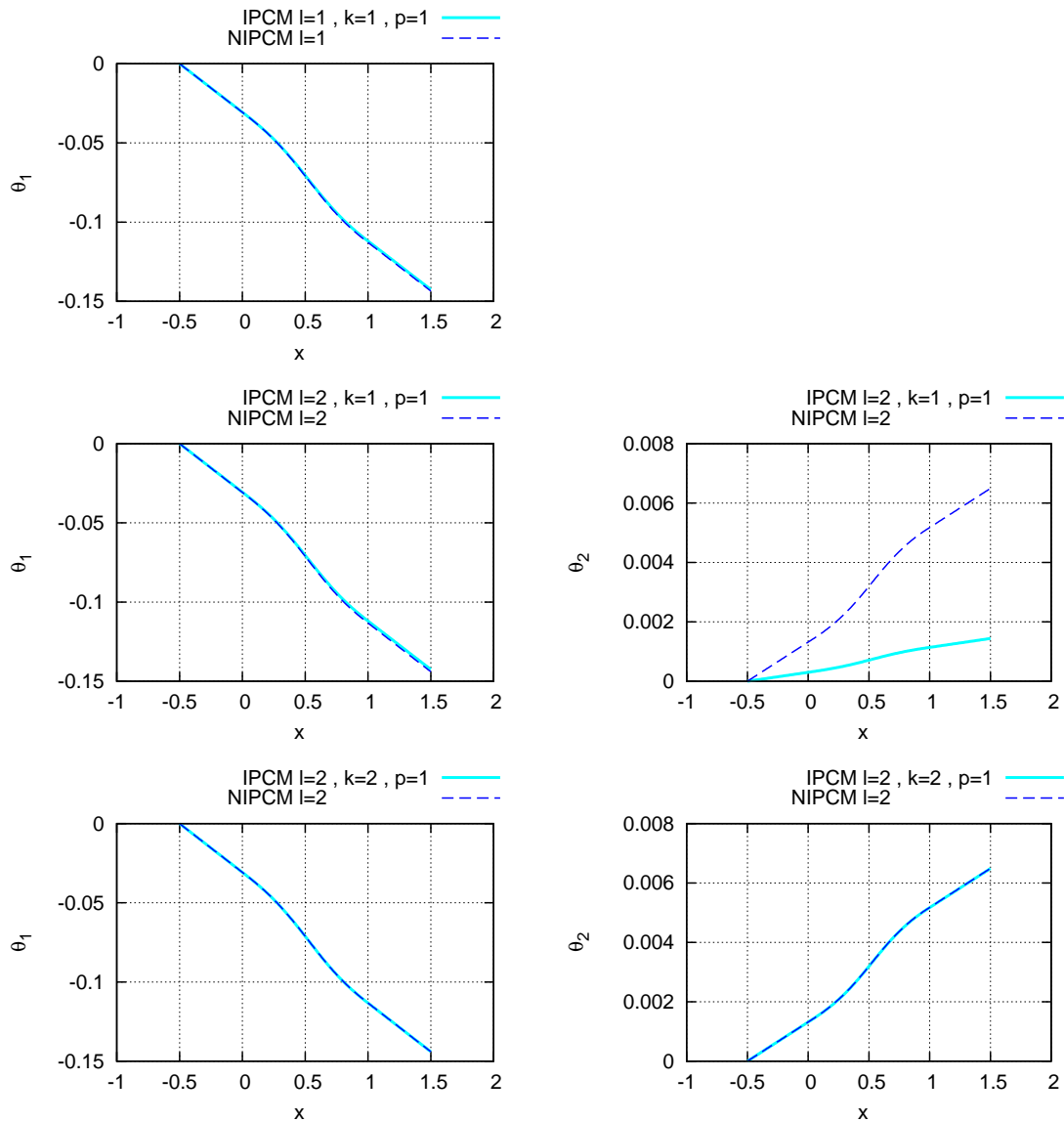
$$\theta(x) = \sum_{j=0}^l \theta_j(x)\psi_j(\xi)$$

όπου l η τάξη του PC για το πεδίο $\theta(x)$.

Με αντικατάσταση των αναπτυγμάτων PC των στοχαστικών πεδίων στην εξίσωση (4.23), προκύπτει το ανάπτυγμα PC της σδε με αβέβαιη εισόδο το πεδίο $S(x)$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^l \frac{d\theta_j}{dx} \psi_j &= \sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^k \tau_j \gamma_z \psi_j \psi_z \implies \dots \\ \sum_{j=0}^l \frac{d\theta_j}{dx} \langle \psi_j, \psi_n \rangle &= \sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^k \tau_j \gamma_z \langle \psi_j, \psi_z, \psi_n \rangle \end{aligned} \quad (4.24)$$

Στον Πίνακα 4.5 παρουσιάζονται τα συστήματα των εξισώσεων της IPCM για κάποιους συνδυασμούς τάξεων PC p και k . Καθένα από αυτά αποτελεί ένα σύστημα σδε που επιλύονται με τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ns} τάξης για μηδενικές οριακές συνθήκες. Τα αποτελέσματα της IPCM και της NIPCM συγκρίνονται στο Σχήμα 4.8 βάσει των πεδίων των συντελεστών της τυπικής απόκλισης $\theta_1(x)$ και $\theta_2(x)$. Η IPCM και η NIPCM δίνουν λύσεις, που σχεδόν συμπίπτουν για αναπτύγματα PC 1^{ns} τάξης για τα πεδία $S(x)$, $\tau(x)$, $\gamma(x)$ και $\theta(x)$. Για ανάπτυγμα PC 2^{ns} τάξης για το πεδίο $\theta(x)$, η πιο κοντινή λύση στη NIPCM προκύπτει για αναπτύγματα PC 2^{ns} τάξης για τα πεδία $\tau(x)$ και $\gamma(x)$, όπου το ανάπτυγμα PC για το πεδίο $S(x)$ είναι 1^{ns} τάξης σύμφωνα με όσα αναλύθηκαν παραπάνω.



Σχήμα 4.8: Τα πεδία των συντελεστών της τυπικής απόκλισης $\theta_1(x)$ και $\theta_2(x)$ για τη σδε (4.23), όπως υπολογίστηκαν με την IPCM και τη NIPCM για το ανάπτυγμα PC 1^{ns} και 2^{ns} τάξης του πεδίου $\theta(x)$. Αβέβαιο πεδίο εισόδου είναι το $S(x)$ με μέση τιμή $\mu_S(x)$ και τυπική απόκλιση $\sigma_S=0.0245 \text{ m}^2$.

Τάξη PC	Εξισώσεις IPCM
$l = 1, k = 1, p = 1$	$\frac{d\theta_0}{dx} = \tau_0\gamma_0 + \tau_1\gamma_1$ $\frac{d\theta_1}{dx} = \tau_0\gamma_1 + \tau_1\gamma_0$
$l = 2, k = 1, p = 1$	$\frac{d\theta_0}{dx} = \tau_0\gamma_0 + \tau_1\gamma_1$ $\frac{d\theta_1}{dx} = \tau_0\gamma_1 + \tau_1\gamma_0$ $\frac{d\theta_2}{dx} = \tau_1\gamma_1$
$l = 2, k = 2, p = 1$	$\frac{d\theta_0}{dx} = \tau_0\gamma_0 + \tau_1\gamma_1 + 2\tau_2\gamma_2$ $\frac{d\theta_1}{dx} = \tau_0\gamma_1 + \tau_1\gamma_0 + 2\tau_1\gamma_2 + 2\tau_2\gamma_1$ $\frac{d\theta_2}{dx} = \tau_1\gamma_1 + 4\tau_2\gamma_2 + \tau_0\gamma_2 + \tau_2\gamma_0$

Πίνακας 4.5: Τα συστήματα των εξισώσεων της IPCM στη σδε για το $\theta(x)$, όπως προκύπτουν από την εξίσωση (4.24) για τη στοχαστική είσοδο $S(x)$ τάξης PC p και το πεδίο $\theta(x)$ τάξης PC k .

4.2.2 Ανάπτυγμα PC($p_t(x)$) 1^{ης} Τάξης

Έστω ότι για το πεδίο της ολικής πίεσης $p_t(x)$ θεωρείται, με βάση τη σχέση (4.3), το ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης. Τότε, ορίζονται για τα πεδία $\kappa(x), \tau(x)$ και $\gamma(x)$ ανάπτυγματα PC 1^{ης} τάξης. Το αβέβαιο πεδίο εισόδου $S(x)$ ορίζεται, επίσης, με ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης και από την εξίσωση (4.5) προκύπτουν οι 2 εξισώσεις της IPCM

$$\frac{dp_{t0}}{dx} = \nu m \left[\frac{d^2\kappa_0}{dx^2} + \kappa_0 \frac{dS_0}{dx} \frac{d\kappa_0}{dx} + \kappa_1 \frac{dS_0}{dx} \frac{d\kappa_1}{dx} \right] - \lambda^* m^2 (\tau_0\gamma_0 + \tau_1\gamma_1) \quad (4.25)$$

$$\frac{dp_{t1}}{dx} = \nu m \left[\frac{d^2\kappa_1}{dx^2} + \kappa_1 \frac{dS_0}{dx} \frac{d\kappa_0}{dx} + \kappa_0 \frac{dS_0}{dx} \frac{d\kappa_1}{dx} \right] - \lambda^* m^2 (\tau_1\gamma_0 + \tau_0\gamma_1) \quad (4.26)$$

Οι εξισώσεις (4.25) και (4.26) είναι 2 σδε για το πεδίο της μέσης τιμής $p_{t0}(x)$ και της τυπικής απόκλισης $p_{t1}(x)$ της ολικής πίεσης, αντίστοιχα, οι οποίες επιλύονται αριθμητικά με τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ης} τάξης για μηδενικές οριακές συνθήκες $p_{t0,i=1} = 0$ και $p_{t1,i=1} = 0$.

Για αντιστοιχία της λύσης με το πρόβλημα της IPCM στην τεχνική της διόρθωσης πίεσης, μετά την επίλυση της σδε, τα πεδία της μέσης τιμής $p_{t0}(x)$ και της τυπικής απόκλισης $p_{t1}(x)$ της ολικής πίεσης διορθώνονται με βάση τις λύσεις του προβλήματος με την τεχνική της διόρθωσης πίεσης στην έξοδο του αγωγού. Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα PC του στοχαστικού πεδίου $\tau(x)$ και του πεδίου της ολικής πίεσης $p_t(x)$ στην εξίσωση (2.16), προσδιορίζεται το ανάπτυγμα PC της εξίσωσης

$$\sum_{j=0}^l p_{tj}(x)\psi_j = \sum_{j=0}^l p_{tj}(x)\psi_j + \frac{1}{2}m^2 \sum_{j=0}^k \tau(x_{max})_j \psi_j - \sum_{j=0}^l p_{tj}(x_{max})\psi_j \implies \dots$$

$$\sum_{j=0}^l p_{tj}(x)\langle \psi_j, \psi_n \rangle = \sum_{j=0}^l p_{tj}(x)\langle \psi_j, \psi_n \rangle + \frac{1}{2}m^2 \sum_{j=0}^k \tau(x_{max})_j \langle \psi_j, \psi_n \rangle - \sum_{j=0}^l p_{tj}(x_{max})\langle \psi_j, \psi_n \rangle \quad (4.27)$$

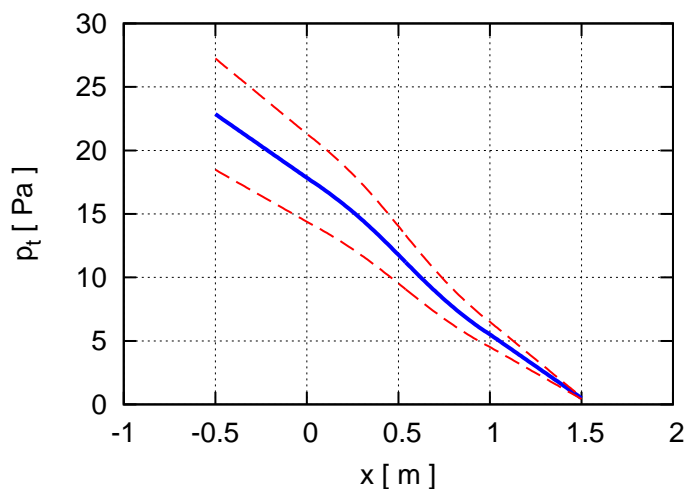
Από την εξίσωση (4.27) για ανάπτυγμα PC $1^{\eta\varsigma}$ τάξης για τα πεδία $p_t(x)$ και $\tau(x)$, προκύπτουν οι διορθωμένες εκφράσεις για τα πεδία της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της ολικής πίεσης

$$p_{t0}(x) = p_{t0}(x) + \frac{1}{2}m^2 \tau_0(x_{max}) - p_{t0}(x_{max})$$

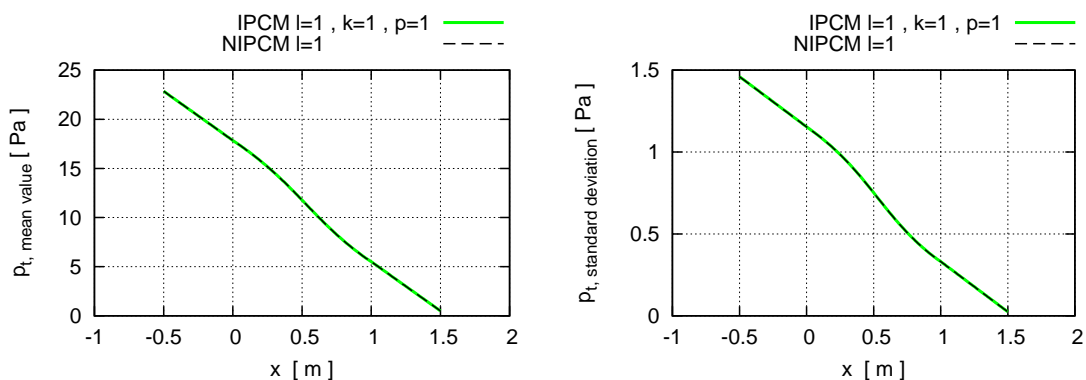
$$p_{t1}(x) = p_{t1}(x) + \frac{1}{2}m^2 \tau_1(x_{max}) - p_{t1}(x_{max})$$

4.2.3 Ανάπτυγμα PC($p_t(x)$) $2^{\eta\varsigma}$ Τάξης

Ορίζοντας, τώρα, για το πεδίο της ολικής πίεσης $p_t(x)$ ανάπτυγμα PC $2^{\eta\varsigma}$ τάξης, με βάση τη μελέτη που προηγήθηκε, τα αναπτύγματα PC των πεδίων των μη-γραμμικών όρων $\kappa(x)$, $\tau(x)$ και $\gamma(x)$ πρέπει να είναι $2^{\eta\varsigma}$ τάξης, ενώ το ανάπτυγμα PC της στοχαστικής εισόδου $S(x)$ $1^{\eta\varsigma}$ τάξης. Τότε, από την εξίσωση (4.16) προκύπτουν οι 3 εξισώσεις της IPCM



Σχήμα 4.9: Η μέση τιμή και 3 φορές η τυπική απόκλιση (3σ) γύρω από αυτή για την ολική πίεση $p_t(x)$ σε αγωγό μεταβλητής διατομής $S(x)$ με $x \in [-0.5, 1.5]$ m, παροχή $m=1 \text{ m}^3/\text{sec}$, συντελεστή τριβής $\lambda^*=10$ και κινηματική συνεκτικότητα $\nu=0.1 \text{ m}^2/\text{sec}$. Πρόκειται για τη λύση της IPCM στη σδε για την ολική πίεση. Αβέβαιο πεδίο εισόδου είναι η $S(x)$ με μέση τιμή $\mu_S(x)$ και τυπική απόκλιση $\sigma_S = 0.0245 \text{ m}^2$.



Σχήμα 4.10: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ολικής πίεσης $p_t(x)$ σε αγωγό μεταβλητής διατομής $S(x)$ με $x \in [-0.5, 1.5]$ m, παροχή $m=1 \text{ m}^3/\text{sec}$, συντελεστή τριβής $\lambda^*=10$ και κινηματική συνεκτικότητα $\nu=0.1 \text{ m}^2/\text{sec}$. Αβέβαιο πεδίο εισόδου είναι η $S(x)$ με μέση τιμή $\mu_S(x)$ και τυπική απόκλιση $\sigma_S = 0.0245 \text{ m}^2$. Σύγκριση της IPCM και της NIPCM στη σδε για την ολική πίεση για ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης για το $p_t(x)$ ($l=1$).

$$\diamond \frac{dp_{t0}}{dx} = \nu m \left[\frac{d^2 \kappa_0}{dx^2} + \kappa_0 \frac{dS_0}{dx} \frac{d\kappa_0}{dx} + \kappa_1 \frac{dS_0}{dx} \frac{d\kappa_1}{dx} + 2\kappa_2 \frac{dS_0}{dx} \frac{d\kappa_2}{dx} \right] - \lambda^* m^2 (\tau_0 \gamma_0 + \tau_1 \gamma_1 + 2\tau_2 \gamma_2) \quad (4.28)$$

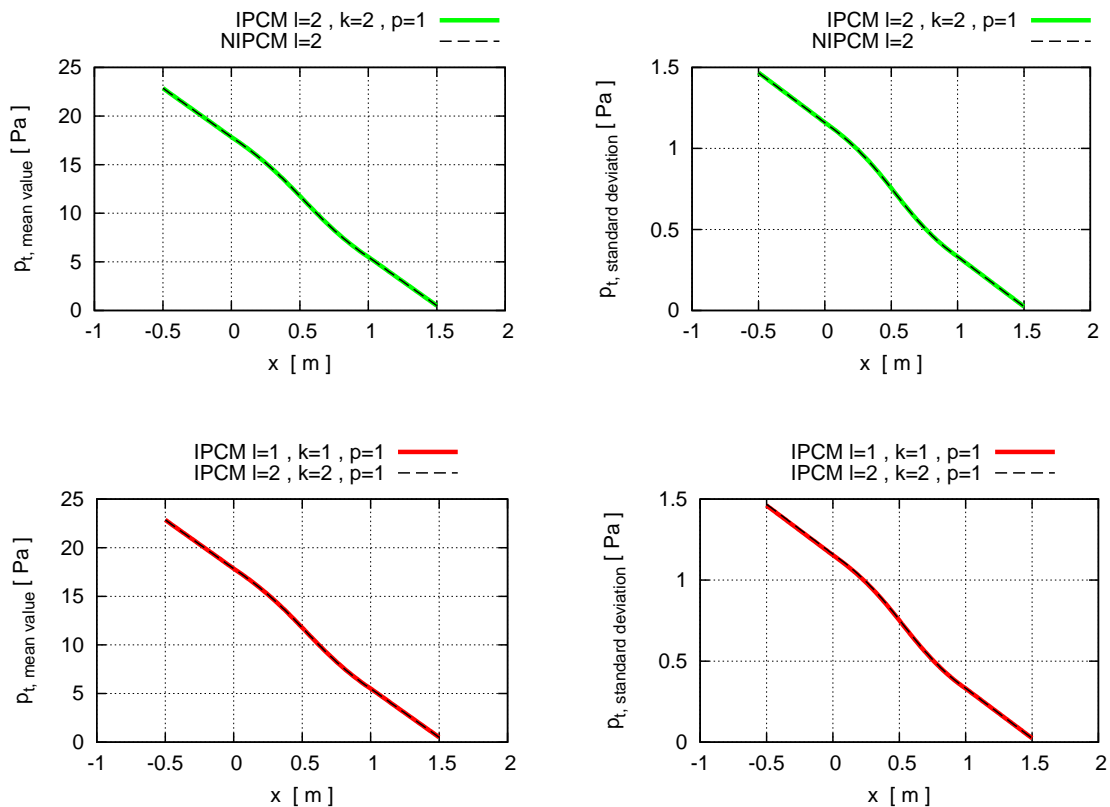
$$\diamond \frac{dp_{t1}}{dx} = \nu m \left[\frac{d^2 \kappa_1}{dx^2} + \kappa_1 \frac{dS_0}{dx} \frac{d\kappa_0}{dx} + \kappa_0 \frac{dS_0}{dx} \frac{d\kappa_1}{dx} + 2\kappa_1 \frac{dS_0}{dx} \frac{d\kappa_2}{dx} + 2\kappa_2 \frac{dS_0}{dx} \frac{d\kappa_1}{dx} \right] - \lambda^* m^2 (\tau_1 \gamma_0 + \tau_0 \gamma_1 + 2\tau_1 \gamma_2 + 2\tau_2 \gamma_1) \quad (4.29)$$

$$\diamond \frac{dp_{t2}}{dx} = \nu m \left[\frac{d^2 \kappa_2}{dx^2} + \kappa_2 \frac{dS_0}{dx} \frac{d\kappa_0}{dx} + \kappa_0 \frac{dS_0}{dx} \frac{d\kappa_2}{dx} + 4\kappa_2 \frac{dS_0}{dx} \frac{d\kappa_2}{dx} + \kappa_1 \frac{dS_0}{dx} \frac{d\kappa_1}{dx} \right] - \lambda^* m^2 (\tau_2 \gamma_0 + \tau_0 \gamma_2 + 4\tau_2 \gamma_2 + \tau_1 \gamma_1) \quad (4.30)$$

Οι εξισώσεις (4.28), (4.29) και (4.30) είναι 3 σδε για το πεδίο της μέσης τιμής $p_{t0}(x)$ και τα πεδία των συντελεστών της τυπικής απόκλισης $p_{t1}(x)$ και $p_{t2}(x)$ της ολικής πίεσης, αντίστοιχα, οι οποίες επιλύονται αριθμητικά με τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ης} τάξης για μηδενικές οριακές συνθήκες $p_{t0,i=1} = 0$, $p_{t1,i=1} = 0$ και $p_{t2,i=1} = 0$.

Για να υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ των λύσεων της σδε, που διέπει την ολική πίεση και της τεχνικής της διόρθωσης πίεσης, μετά την επίλυση της σδε, τα πεδία της μέσης τιμής $p_{t0}(x)$ και των συντελεστών της τυπικής απόκλισης $p_{t1}(x)$ και $p_{t2}(x)$ της ολικής πίεσης διορθώνονται με βάση τις λύσεις του προβλήματος με την τεχνική της διόρθωσης πίεσης στην έξοδο του αγωγού. Από την εξίσωση (4.27) για αναπτύγματα PC 2^{ης} τάξης για τα πεδία $p_t(x)$ και $\tau(x)$, προκύπτουν οι διορθωμένες εκφράσεις για τα πεδία της μέσης τιμής και των συντελεστών της τυπικής απόκλισης της ολικής πίεσης

$$\begin{aligned} p_{t0}(x) &= p_{t0}(x) + \frac{1}{2} m^2 \tau_0(x_{max}) - p_{t0}(x_{max}) \\ p_{t1}(x) &= p_{t1}(x) + \frac{1}{2} m^2 \tau_1(x_{max}) - p_{t1}(x_{max}) \\ p_{t2}(x) &= p_{t2}(x) + \frac{1}{2} m^2 \tau_2(x_{max}) - p_{t2}(x_{max}) \end{aligned}$$



Σχήμα 4.11: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ολικής πίεσης $p_t(x)$ σε αγωγό μεταβλητής διατομής $S(x)$ με $x \in [-0.5, 1.5]$ m, παροχή $m=1 \text{ m}^3/\text{sec}$, συντελεστή τριβής $\lambda^*=10$ και κινηματική συνεκτικότητα $\nu=0.1 \text{ m}^2/\text{sec}$. Αβέβαιο πεδίο εισόδου είναι η $S(x)$ με μέση τιμή $\mu_S(x)$ και τυπική απόκλιση $\sigma_S = 0.0245 \text{ m}^2$. Σύγκριση της IPCM και της NIPCM στη σδε για την ολική πίεση για ανάπτυγμα PC 2^{ης} τάξης για το $p_t(x)$ ($l=2$). Η IPCM για ανάπτυγμα PC 1^{ης} και 2^{ης} τάξης για το $p_t(x)$ δίνει λύσεις, οι οποίες σχεδόν συμπίπτουν μεταξύ τους.

Κεφάλαιο 5

Η IPCM($S(x)$) στην Τεχνική Διόρθωσης Πίεσης

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η διατύπωση της IPCM στην τεχνική της διόρθωσης πίεσης με στοχαστική είσοδο την κατανομή της διατομής $S(x)$. Τότε, στην εξίσωση διατήρησης της ορμής εμφανίζεται ένας μη-γραμμικός όρος συναρτήσεως του στοχαστικού πεδίου εισόδου, για τον οποίο παρατίθεται διερεύνηση ως προς την ακριβέστερη διατύπωσή του για ανάπτυγμα PC 1^{ης} και 2^{ης} τάξης. Επιπλέον, ενδιαφέρον παρουσιάζει ο υπολογισμός του πεδίου της ολικής πίεσης $p_t(x)$, καθώς με την ύπαρξη αβεβαιότητας στο πεδίο της ταχύτητας $v(x)$ και της στατικής πίεσης $p(x)$, η ολική πίεση αποτελεί, πλέον, συνάρτηση του μη-γραμμικού στοχαστικού όρου της ταχύτητας.

Με το ανάπτυγμα PC, το στοχαστικό πεδίο της κατανομής της διατομής του αγωγού γίνεται

$$S(x) = \sum_{j=0}^p S_j(x) \psi_j(\xi) \quad (5.1)$$

όπου $S_j(x)$ οι ντετερμινιστικοί συντελεστές της αβέβαιης εισόδου στο πεδίο ροής, p η τάξη του PC για την $S(x)$, ξ η στοχαστική μεταβλητή και ψ_j τα πολυώνυμα Hermite Α'.2 της κανονικής κατανομής j -οστού βαθμού.

5.1 Μαθηματική Διατύπωση της IPCM($S(x)$)

Η κατανομή της διατομής του αγωγού $S(x)$ εισάγει την αβεβαιότητα στο πεδίο ροής και ορίζεται από τη σχέση (5.1). Από τις εξισώσεις ροής (2.1) και (2.2) προκύπτει ότι η στοχαστική συμπεριφορά της $S(x)$ επιδρά εξίσου στο πεδίο της ταχύτητας $v(x)$ και της στατικής πίεσης $p(x)$. Επομένως, και τα 2 πεδία χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα και με το ανάπτυγμα PC λαμβάνουν τη μορφή

$$v(x) = \sum_{j=0}^k v_j(x) \psi_j(\xi) \quad (5.2)$$

$$p(x) = \sum_{j=0}^k p_j(x) \psi_j(\xi) \quad (5.3)$$

όπου k η τάξη του PC για τα πεδία $v(x)$ και $p(x)$.

Στην εξίσωση διατήρησης της ορμής (2.2) εμφανίζεται ένας μη-γραμμικός όρος συναρτήσεως του στοχαστικού πεδίου εισόδου $S(x)$, ο οποίος τίθεται ίσος με ένα τυχαίο στοχαστικό πεδίο. Συγκεκριμένα, ισχύει

$$\gamma(x) = \sum_{j=0}^k \gamma_j(x) \psi_j(\xi) = \sqrt{S(x)} \quad (5.4)$$

όπου k η τάξη του PC για το πεδίο του μη-γραμμικού όρου $\gamma(x)$.

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα PC της κατανομής της διατομής (5.1), του πεδίου του μη-γραμμικού όρου (5.4), της ταχύτητας (5.2) και της στατικής πίεσης (5.3) στην εξίσωση διατήρησης της ορμής (2.2), προκύπτει το ανάπτυγμα PC της εξίσωσης με αβέβαιο πεδίο εισόδου το $S(x)$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^k v_j \psi_j \sum_{z=0}^p S_z \psi_z \frac{d}{dx} \left[\sum_{r=0}^k v_r \psi_r \right] - \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=0}^p S_j \psi_j \nu \frac{d}{dx} \left[\sum_{z=0}^k v_z \psi_z \right] \right] = \\ & = - \sum_{j=0}^p S_j \psi_j \frac{d}{dx} \left[\sum_{z=0}^k p_z \psi_z \right] - \lambda^* \sum_{j=0}^k \gamma_j \psi_j \sum_{z=0}^k \sum_{r=0}^k v_z v_r \psi_z \psi_r \end{aligned} \quad (5.5)$$

Η εξίσωση (5.5) πολλαπλασιάζεται με τα πολυώνυμα Hermite $\psi_n(\xi)$ για $n \geq 0$ και τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής $w(\xi)$, ολοκληρώνεται

κατά ξ και προβάλλεται κατά Galerkin

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^p \sum_{r=0}^k v_j S_z \frac{dv_r}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_z \psi_r \psi_n w d\xi - \sum_{j=0}^p \sum_{z=0}^k \frac{d}{dx} \left[S_j \nu \frac{dv_z}{dx} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_z \psi_n w d\xi = \\
& = - \sum_{j=0}^p \sum_{z=0}^k S_j \frac{dp_z}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_z \psi_n w d\xi - \lambda^* \sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^k \sum_{r=0}^k \gamma_j v_z v_r \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_z \psi_r \psi_n w d\xi \implies \\
& \sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^p \sum_{r=0}^k v_j S_z \frac{dv_r}{dx} \langle \psi_j, \psi_z, \psi_r, \psi_n \rangle - \sum_{j=0}^p \sum_{z=0}^k \frac{d}{dx} \left[S_j \nu \frac{dv_z}{dx} \right] \langle \psi_j, \psi_z, \psi_n \rangle = \\
& = - \sum_{j=0}^p \sum_{z=0}^k S_j \frac{dp_z}{dx} \langle \psi_j, \psi_z, \psi_n \rangle - \lambda^* \sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^k \sum_{r=0}^k \gamma_j v_z v_r \langle \psi_j, \psi_z, \psi_r, \psi_n \rangle
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Από την εξίσωση (5.6) προκύπτουν $k+1$ πεπλεγμένες εξισώσεις με αγνώστους τα πεδία των ντετερμινιστικών συντελεστών της ταχύτητας $v_j(x)$ και της στατικής πίεσης $p_j(x)$, όπου $j=0, \dots, k$. Το σύστημα των εξισώσεων του αναπτύγματος PC για την εξίσωση διατήρησης της ορμής επιλύεται με τη μέθοδο της διόρθωσης πίεσης, κατ' αντιστοιχία με όσα αναπτύχθηκαν για τη μέση ροή στην ενότητα 2.2, μαζί με το αντίστοιχο σύστημα που προκύπτει για την εξίσωση της συνέχειας και υπολογίζονται τα άγνωστα πεδία $v_j(x)$ και $p_j(x)$.

5.2 Ανάπτυγμα PC του Μη-Γραμμικού Όρου

Το πεδίο του μη-γραμμικού όρου $\sqrt{S(x)}$, που εμφανίζεται στην εξίσωση διατήρησης της ορμής, ορίζεται ως

$$\gamma(x) = \sqrt{S(x)} \implies \gamma^2(x) = S(x) \implies \sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^k \gamma_j \gamma_z \psi_j \psi_z = \sum_{j=0}^p S_j \psi_j \implies \dots \tag{5.7}$$

$$\sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^k \gamma_j \gamma_z \langle \psi_j, \psi_z, \psi_n \rangle = \sum_{j=0}^p S_j \langle \psi_j, \psi_n \rangle \quad (5.8)$$

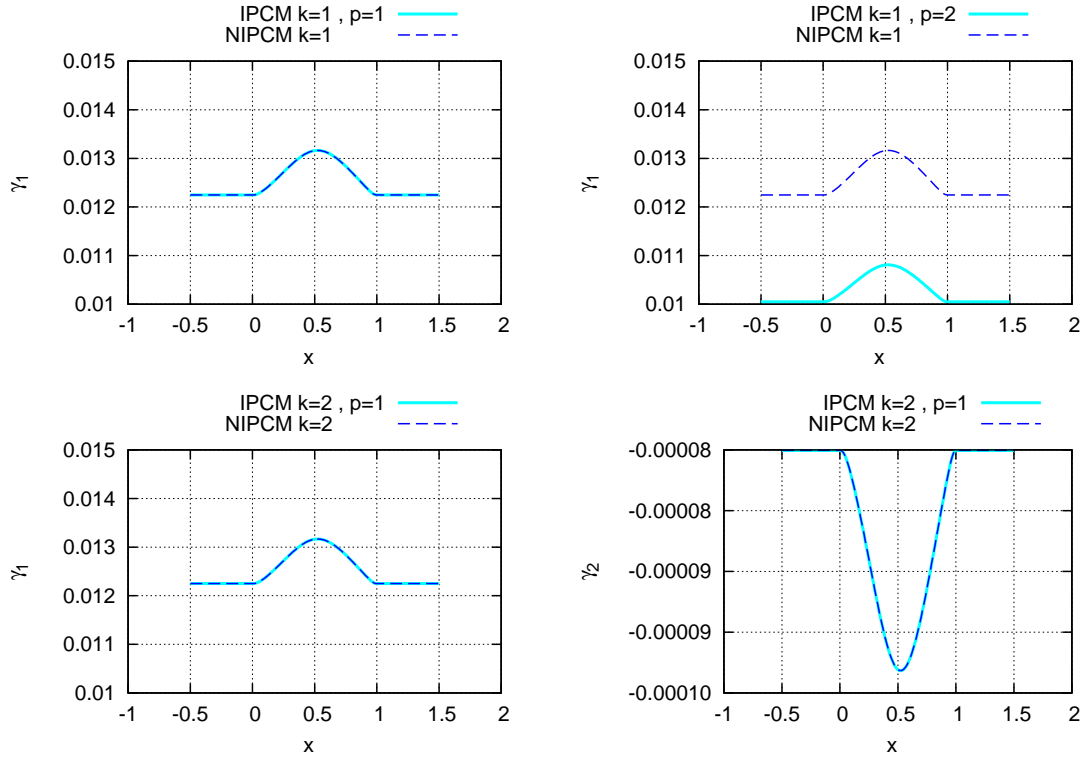
Τάξη PC	Εξισώσεις IPCM
$k = 1, p = 1$	$\gamma_0^2 + \gamma_1^2 = S_0$ $2\gamma_0\gamma_1 = S_1$
$k = 1, p = 2$	$\gamma_0^2 + \gamma_1^2 = S_0$ $2\gamma_0\gamma_1 = S_1$ $\gamma_1^2 = S_2$
$k = 2, p = 1$	$\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + 2\gamma_2^2 = S_0$ $2\gamma_0\gamma_1 + 4\gamma_1\gamma_2 = S_1$ $2\gamma_1^2 + 8\gamma_2^2 + 4\gamma_0\gamma_2 = 0$

Πίνακας 5.1: Τα συστήματα των εξισώσεων της IPCM στην εξίσωση για το πεδίο του μη-γραμμικού όρου $\gamma(x)$, όπως προκύπτουν από την (5.8) για τη στοχαστική είσοδο $S(x)$ τάξης PC p και το πεδίο $\gamma(x)$ τάξης PC k .

Στον Πίνακα 5.1 παρουσιάζονται τα μη-γραμμικά συστήματα των εξισώσεων της IPCM για διάφορους συνδυασμούς τάξεων PC p και k , τα οποία επιλύονται αριθμητικά με τη μέθοδο Newton-Raphson [5]. Στο Σχήμα 5.1 συγκρίνονται τα αποτελέσματα της IPCM και της NIPCM βάσει των πεδίων των συντελεστών της τυπικής απόκλισης $\gamma_1(x)$ και $\gamma_2(x)$. Όπως παρατηρείται, προκειμένου να υπάρχει συμφωνία με τη NIPCM, ορίζεται στην IPCM ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης για το πεδίο $S(x)$, όταν το ανάπτυγμα PC του πεδίου $\gamma(x)$ είναι 1^{ης} ή 2^{ης} τάξης.

5.3 Αναπτύγματα $PC(v(x), p(x))$ 1^{ης} Τάξης

Έστω ότι για το πεδίο της στατικής πίεσης $p(x)$ και της ταχύτητας $v(x)$ θεωρούνται αναπτύγματα PC 1^{ης} τάξης. Τότε, το πεδίο του μη-γραμμικού όρου $\gamma(x)$, αλλά και το αβέβαιο πεδίο εισόδου $S(x)$, σύμφωνα με την ανωτέρω μελέτη για την ακριβή διατύπωση του μη-γραμμικού όρου, ορίζονται με αναπτύγματα PC 1^{ης} τάξης. Τελικά, από την εξίσωση (5.6), με υπολογισμό των προβολών Galerkin B' , προκύπτουν οι 2 εξισώσεις της IPCM



Σχήμα 5.1: Τα πεδία των συντελεστών της τυπικής απόκλισης $\gamma_1(x)$ και $\gamma_2(x)$ για την εξίσωση (5.7), όπως υπολογίστηκαν με την IPCM και τη NIPCM για το ανάπτυγμα PC 1^{ης} και 2^{ης} τάξης του πεδίου $\gamma(x)$. Αβέβαιο πεδίο εισόδου είναι το $S(x)$ με μέση τιμή $\mu_S(x)$ και τυπική απόκλιση $\sigma_S=0.0245 \text{ m}^2$.

$$\begin{aligned}
 \diamond \quad & v_0 S_0 \frac{dv_0}{dx} + v_1 S_1 \frac{dv_0}{dx} + v_1 S_0 \frac{dv_1}{dx} + v_0 S_1 \frac{dv_1}{dx} - \frac{d}{dx} \left[S_0 \nu \frac{dv_0}{dx} \right] - \frac{d}{dx} \left[S_1 \nu \frac{dv_1}{dx} \right] = \\
 & = -S_0 \frac{dp_0}{dx} - S_1 \frac{dp_1}{dx} - \lambda^* \gamma_0 v_0^2 - 2\lambda^* \gamma_1 v_0 v_1 - \lambda^* \gamma_0 v_1^2 \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \diamond \quad & v_1 S_0 \frac{dv_0}{dx} + v_0 S_1 \frac{dv_0}{dx} + v_0 S_0 \frac{dv_1}{dx} + 3v_1 S_1 \frac{dv_1}{dx} - \frac{d}{dx} \left[S_0 \nu \frac{dv_1}{dx} \right] - \frac{d}{dx} \left[S_1 \nu \frac{dv_0}{dx} \right] = \\
 & = -S_0 \frac{dp_1}{dx} - S_1 \frac{dp_0}{dx} - \lambda^* \gamma_1 v_0^2 - 2\lambda^* \gamma_0 v_0 v_1 - 3\lambda^* \gamma_1 v_1^2 \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις (5.9) και (5.10) αποτελούν ένα πεπλεγμένο σύστημα με αγνώστους τα πεδία των ντετερμινιστικών συντελεστών $v_0(x)$ και $v_1(x)$ για γνωστά τα πεδία $p_0(x)$ και $p_1(x)$ από την προηγούμενη επανάληψη. Εφαρμόζοντας τα σχήματα διακριτοποίησης, που ορίστηκαν στην ενότητα 2.2 για τη μέση ροή, μετά από πράξεις προκύπτει ένα μπλοκ γραμμικό σύστημα 2×2 τριδιαγώνιας μορφής

$$M_{F_i} \cdot \begin{bmatrix} v_{0,i+1}^n \\ v_{1,i+1}^n \end{bmatrix} + M_{P_i} \cdot \begin{bmatrix} v_{0,i}^* \\ v_{1,i}^* \end{bmatrix} + M_{B_i} \cdot \begin{bmatrix} v_{0,i-1}^n \\ v_{1,i-1}^n \end{bmatrix} = M_{Q_i} \quad (5.11)$$

Στον πίνακα 5.2 παρουσιάζονται τα μητρώα του συστήματος (5.11) των $2 * nr$ διακριτοποιημένων εξισώσεων της IPCM στην εξίσωση διατήρησης της ορμής. Για γνωστά τα πεδία πίεσης, $p_0^n(x)$ και $p_1^n(x)$, το σύστημα επιλύεται με έναν αλγόριθμο για μπλοκ συστήματα [8] και υπολογίζονται τα πεδία των συντελεστών της ταχύτητας $v_0^*(x)$ και $v_1^*(x)$ στην τρέχουσα επανάληψη.

Στα πεδία των συντελεστών της ταχύτητας $v_0^*(x)$ και $v_1^*(x)$, που υπολογίζονται από την επίλυση τους συστήματος (5.11), εφαρμόζεται η μέθοδος της χαλάρωσης για ταχύτερη σύγκλιση της επαναληπτικής μεθόδου. Τότε, τα νέα πεδία των συντελεστών της ταχύτητας στην τρέχουσα επανάληψη είναι

$$v_{0,i}^{n+1} = \omega_v \cdot v_{0,i}^* + (1 - \omega_v) \cdot v_{0,i}^n \quad (5.12)$$

$$v_{1,i}^{n+1} = \omega_v \cdot v_{1,i}^* + (1 - \omega_v) \cdot v_{1,i}^n \quad (5.13)$$

Διατυπώνοντας την εξίσωση (5.12) ως προς το πεδίο $v_0^*(x)$ και αντικαθιστώντας στην 1^η εξίσωση του συστήματος (5.11), προσδιορίζονται τα νέα μητρώα A'_{P_i} , B'_{P_i} και M'_{1,Q_i} , τα οποία έχουν λάβει υπόψη την παράμετρο χαλάρωσης της ταχύτητας

$$A'_{P_i} = \frac{A_{P_i}}{\omega_v} \quad , \quad B'_{P_i} = \frac{B_{P_i}}{\omega_v} \quad , \quad M'_{1,Q_i} = M_{1,Q_i} + \frac{1 - \omega_v}{\omega_v} A_{P_i} v_{0,i}^n + \frac{1 - \omega_v}{\omega_v} B_{P_i} v_{1,i}^n$$

Κατ' αντιστοιχία, από την εξίσωση (5.13) προκύπτει το πεδίο $v_1^*(x)$, το οποίο αντικαθίσταται στη 2^η εξίσωση του συστήματος (5.11) και προσδιορίζονται τα νέα μητρώα C'_{P_i} , D'_{P_i} και M'_{2,Q_i} συναρτήσει της παραμέτρου χαλάρωσης της ταχύτητας

$M_{F_i} = \begin{bmatrix} A_{F_i} & B_{F_i} \\ C_{F_i} & D_{F_i} \end{bmatrix}$	$A_{F_i} = \frac{S_{0,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{v_{0,f_i}^n S_{0,f_i}}{4} - \frac{v_{1,f_i}^n S_{1,f_i}}{4}$ $B_{F_i} = \frac{S_{1,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{v_{1,f_i}^n S_{0,f_i}}{4} - \frac{v_{0,f_i}^n S_{1,f_i}}{4}$ $C_{F_i} = \frac{S_{1,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{v_{1,f_i}^n S_{0,f_i}}{4} - \frac{v_{0,f_i}^n S_{1,f_i}}{4}$ $D_{F_i} = \frac{S_{0,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{v_{0,f_i}^n S_{0,f_i}}{4} - \frac{3v_{1,f_i}^n S_{1,f_i}}{4}$
$M_{P_i} = \begin{bmatrix} A_{P_i} & B_{P_i} \\ C_{P_i} & D_{P_i} \end{bmatrix}$	$A_{P_i} = -\frac{S_{0,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{S_{0,b_i}\nu}{\Delta x} - v_{0,f_i}^n S_{0,f_i} + \frac{v_{0,b_i}^n S_{0,b_i}}{4} - v_{1,f_i}^n S_{1,f_i} + \frac{v_{1,b_i}^n S_{1,b_i}}{4}$ $B_{P_i} = -\frac{S_{1,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{S_{1,b_i}\nu}{\Delta x} - v_{1,f_i}^n S_{0,f_i} + \frac{v_{1,b_i}^n S_{0,b_i}}{4} - v_{0,f_i}^n S_{1,f_i} + \frac{v_{0,b_i}^n S_{1,b_i}}{4}$ $C_{P_i} = -\frac{S_{1,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{S_{1,b_i}\nu}{\Delta x} - v_{1,f_i}^n S_{0,f_i} + \frac{v_{1,b_i}^n S_{0,b_i}}{4} - v_{0,f_i}^n S_{1,f_i} + \frac{v_{0,b_i}^n S_{1,b_i}}{4}$ $D_{P_i} = -\frac{S_{0,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{S_{0,b_i}\nu}{\Delta x} - v_{0,f_i}^n S_{0,f_i} + \frac{v_{0,b_i}^n S_{0,b_i}}{4} - 3v_{1,f_i}^n S_{1,f_i} + \frac{3v_{1,b_i}^n S_{1,b_i}}{4}$
$M_{B_i} = \begin{bmatrix} A_{B_i} & B_{B_i} \\ C_{B_i} & D_{B_i} \end{bmatrix}$	$A_{B_i} = \frac{S_{0,b_i}\nu}{\Delta x} + \frac{v_{0,f_i}^n S_{0,f_i}}{4} + v_{0,b_i}^n S_{0,b_i} + \frac{v_{1,f_i}^n S_{1,f_i}}{4} + v_{1,b_i}^n S_{1,b_i}$ $B_{B_i} = \frac{S_{1,b_i}\nu}{\Delta x} + \frac{v_{1,f_i}^n S_{0,f_i}}{4} + v_{1,b_i}^n S_{0,b_i} + \frac{v_{0,f_i}^n S_{1,f_i}}{4} + v_{0,b_i}^n S_{1,b_i}$ $C_{B_i} = \frac{S_{1,b_i}\nu}{\Delta x} + \frac{v_{1,f_i}^n S_{0,f_i}}{4} + v_{1,b_i}^n S_{0,b_i} + \frac{v_{0,f_i}^n S_{1,f_i}}{4} + v_{0,b_i}^n S_{1,b_i}$ $D_{B_i} = \frac{S_{0,b_i}\nu}{\Delta x} + \frac{v_{0,f_i}^n S_{0,f_i}}{4} + v_{0,b_i}^n S_{0,b_i} + \frac{3v_{1,f_i}^n S_{1,f_i}}{4} + 3v_{1,b_i}^n S_{1,b_i}$
$M_{Q_i} = \begin{bmatrix} M_{1,Q_i} \\ M_{2,Q_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{P_i} + W_i \\ R_{P_i} + R_i \end{bmatrix}$	$W_{P_i} = \left[S_0 \frac{dp_0^n}{dx} \Delta x \right]_i + \left[S_1 \frac{dp_1^n}{dx} \Delta x \right]_i = S_{0,i} \frac{p_{0,i+1}^n - p_{0,i-1}^n}{2} + S_{1,i} \frac{p_{1,i+1}^n - p_{1,i-1}^n}{2}$ $W_i = \lambda^* \Delta x \gamma_{0,i} v_{0,i}^n v_{0,i}^n + 2\lambda^* \Delta x \gamma_{1,i} v_{0,i}^n v_{1,i}^n + \lambda^* \Delta x \gamma_{0,i} v_{1,i}^n v_{1,i}^n + \left[\frac{v_{1,b_i}^n S_{0,b_i}}{4} + \frac{v_{1,b_i}^n S_{1,b_i}}{4} \right] v_{0,i-2}^n + \left[\frac{v_{1,b_i}^n S_{0,b_i}}{4} + \frac{v_{0,b_i}^n S_{1,b_i}}{4} \right] v_{1,i-2}^n$ $R_{P_i} = \left[S_0 \frac{dp_1^n}{dx} \Delta x \right]_i + \left[S_1 \frac{dp_0^n}{dx} \Delta x \right]_i = S_{0,i} \frac{p_{1,i+1}^n - p_{1,i-1}^n}{2} + S_{1,i} \frac{p_{0,i+1}^n - p_{0,i-1}^n}{2}$ $R_i = \lambda^* \Delta x \gamma_{1,i} v_{0,i}^n v_{0,i}^n + 2\lambda^* \Delta x \gamma_{0,i} v_{0,i}^n v_{1,i}^n + 3\lambda^* \Delta x \gamma_{1,i} v_{1,i}^n v_{1,i}^n + \left[\frac{v_{1,b_i}^n S_{0,b_i}}{4} + \frac{v_{0,b_i}^n S_{1,b_i}}{4} \right] v_{0,i-2}^n + \left[\frac{v_{0,b_i}^n S_{0,b_i}}{4} + \frac{3v_{1,b_i}^n S_{1,b_i}}{4} \right] v_{1,i-2}^n$

Πίνακας 5.2: Τα μητρώα του μπλοκ γραμμικού συστήματος (5.11), το οποίο προκύπτει από τη διακριτοποίηση των εξισώσεων της IPCM στην εξίσωση διατήρησης της ορμής για αναπτύγματα PC των στοχαστικών πεδίων $v(x)$ και $p(x)$ 1^{ης} τάξης.

$$C'_{P_i} = \frac{C_{P_i}}{\omega_v} \quad , \quad D'_{P_i} = \frac{D_{P_i}}{\omega_v} \quad , \quad M'_{2,Q_i} = M_{2,Q_i} + \frac{1 - \omega_v}{\omega_v} C_{P_i} v_{0,i}^n + \frac{1 - \omega_v}{\omega_v} D_{P_i} v_{1,i}^n$$

Τελικά, το σύστημα των διακριτοποιημένων εξισώσεων της IPCM στην εξίσωση διατήρησης της ορμής γίνεται

$$M_{F_i} \cdot \begin{bmatrix} v_{0,i+1}^n \\ v_{1,i+1}^n \end{bmatrix} + M'_{P_i} \cdot \begin{bmatrix} v_{0,i}^{n+1} \\ v_{1,i}^{n+1} \end{bmatrix} + M_{B_i} \cdot \begin{bmatrix} v_{0,i-1}^n \\ v_{1,i-1}^n \end{bmatrix} = M'_{Q_i}, \quad 1 \leq i \leq np \quad (5.14)$$

Το σύστημα (5.14) επιλύεται για γνωστά πεδία πίεσης $p_0^n(x)$ και $p_1^n(x)$ από την προηγούμενη επανάληψη και υπολογίζονται το πεδίο της μέσης τιμής $v_0^{n+1}(x)$ και της τυπικής απόκλισης $v_1^{n+1}(x)$ της ταχύτητας στην τρέχουσα επανάληψη.

Προκειμένου τα πεδία των συντελεστών της ταχύτητας και της πίεσης να ικανοποιούν την εξίσωση της συνέχειας, εφαρμόζονται οι διορθώσεις

$$\begin{aligned} v_{0,i}^{DF} &= v_{0,i}^{n+1} + v'_{0,i} \\ v_{1,i}^{DF} &= v_{1,i}^{n+1} + v'_{1,i} \end{aligned} \quad (5.15)$$

και

$$\begin{aligned} p_{0,i}^{n+1} &= p_{0,i}^n + \omega_p p'_{0,i} \\ p_{1,i}^{n+1} &= p_{1,i}^n + \omega_p p'_{1,i} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Με την υπόθεση ότι η διόρθωση στο πεδίο της ταχύτητας καθορίζεται αποκλειστικά από τη διόρθωση στο πεδίο της πίεσης, το σύστημα των εξισώσεων της IPCM (5.14) εκφράζεται ως προς τα πεδία των συντελεστών της ταχύτητας

$$\begin{bmatrix} A'_{P_i} & B'_{P_i} \\ C'_{P_i} & D'_{P_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{0,i}^{n+1} \\ v_{1,i}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{P_i} + W_{all_i} \\ R_{P_i} + R_{all_i} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Τότε, διατυπώνεται το τρέχον και το διορθωμένο πεδίο της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της ταχύτητας, σύμφωνα με τη σχέση (5.17) και από τις εξισώσεις (5.15) υπολογίζονται οι διορθώσεις των πεδίων των συντελεστών της ταχύτητας $v'_0(x)$ και $v'_1(x)$. Οι σχετικές πράξεις παρουσιάζονται στον πίνακα 5.3.

Τα πεδία των συντελεστών της διορθωμένης ταχύτητας $v_0^{DF}(x)$ και $v_1^{DF}(x)$ ικανοποιούν την εξίσωση της συνέχειας. Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα PC του πεδίου της ταχύτητας $v^{DF}(x)$ και της κατανομής της διατομής $S(x)$ στην εξίσωση της συνέχειας (2.1), προκύπτει το ανάπτυγμα PC της εξίσωσης

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{j=0}^k v_j^{DF} \psi_j \sum_{z=0}^p S_z \psi_z \right) = 0 \implies \dots$$

Τα Πεδία των Συντελεστών $v_0^{n+1}(x)$ και $v_1^{n+1}(x)$ της Τρέχουσας Ταχύτητας

$$v_{0,i}^{n+1} = \frac{D'_{P_i}}{A'_{P_i}D'_{P_i} - B'_{P_i}C'_{P_i}} \left[S_0 \frac{dp_0^n}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp_1^n}{dx} \Delta x \Big|_i \right] - \frac{B'_{P_i}}{A'_{P_i}D'_{P_i} - B'_{P_i}C'_{P_i}} \left[S_0 \frac{dp_1^n}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp_0^n}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + \frac{D'_{P_i}W_{all,i} - B'_{P_i}R_{all,i}}{A'_{P_i}D'_{P_i} - B'_{P_i}C'_{P_i}}$$

$$v_{1,i}^{n+1} = \frac{-C'_{P_i}}{A'_{P_i}D'_{P_i} - B'_{P_i}C'_{P_i}} \left[S_0 \frac{dp_0^n}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp_1^n}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + \frac{A'_{P_i}}{A'_{P_i}D'_{P_i} - B'_{P_i}C'_{P_i}} \left[S_0 \frac{dp_1^n}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp_0^n}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + \frac{-C'_{P_i}W_{all,i} + A'_{P_i}R_{all,i}}{A'_{P_i}D'_{P_i} - B'_{P_i}C'_{P_i}}$$

Τα Πεδία των Συντελεστών $v_0^{DF}(x)$ και $v_1^{DF}(x)$ της Διορθωμένης Ταχύτητας

$$v_{0,i}^{DF} = \frac{D'_{P_i}}{A'_{P_i}D'_{P_i} - B'_{P_i}C'_{P_i}} \left[S_0 \frac{dp_0^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp_1^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i \right] - \frac{B'_{P_i}}{A'_{P_i}D'_{P_i} - B'_{P_i}C'_{P_i}} \left[S_0 \frac{dp_1^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp_0^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + \frac{D'_{P_i}W_{all,i} - B'_{P_i}R_{all,i}}{A'_{P_i}D'_{P_i} - B'_{P_i}C'_{P_i}}$$

$$v_{1,i}^{DF} = \frac{-C'_{P_i}}{A'_{P_i}D'_{P_i} - B'_{P_i}C'_{P_i}} \left[S_0 \frac{dp_0^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp_1^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + \frac{A'_{P_i}}{A'_{P_i}D'_{P_i} - B'_{P_i}C'_{P_i}} \left[S_0 \frac{dp_1^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp_0^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + \frac{-C'_{P_i}W_{all,i} + A'_{P_i}R_{all,i}}{A'_{P_i}D'_{P_i} - B'_{P_i}C'_{P_i}}$$

Οι Διορθώσεις για τα Πεδία των Συντελεστών $v'_0(x)$ και $v'_1(x)$ της Ταχύτητας

$$v'_{0,i} = \frac{D'_{P_i}}{A'_{P_i}D'_{P_i} - B'_{P_i}C'_{P_i}} \left[S_0 \frac{dp'_0}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp'_1}{dx} \Delta x \Big|_i \right] - \frac{B'_{P_i}}{A'_{P_i}D'_{P_i} - B'_{P_i}C'_{P_i}} \left[S_0 \frac{dp'_1}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp'_0}{dx} \Delta x \Big|_i \right]$$

$$v'_{1,i} = \frac{-C'_{P_i}}{A'_{P_i}D'_{P_i} - B'_{P_i}C'_{P_i}} \left[S_0 \frac{dp'_0}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp'_1}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + \frac{A'_{P_i}}{A'_{P_i}D'_{P_i} - B'_{P_i}C'_{P_i}} \left[S_0 \frac{dp'_1}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp'_0}{dx} \Delta x \Big|_i \right]$$

Πίνακας 5.3: Τα πεδία των συντελεστών της τρέχουσας και της διορθωμένης ταχύτητας, καθώς και οι διορθώσεις των πεδίων των συντελεστών της ταχύτητας, ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση της συνέχειας, σύμφωνα με τη διατύπωση της τεχνικής της διόρθωσης πίεσης για αναπτύγματα PC των στοχαστικών πεδίων $v(x)$ και $p(x)$ 1^{ης} τάξης.

$$\sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^p \frac{d}{dx} (v_j^{DF} S_z) \langle \psi_j, \psi_z, \psi_p \rangle = 0 \quad (5.18)$$

Θεωρώντας αναπτύγματα PC 1^{ης} τάξης για το πεδίο της διορθωμένης ταχύτητας και της κατανομής της διατομής του αγωγού, προκύπτουν οι 2 εξισώσεις της IPCM

$$\frac{d}{dx} (v_0^{DF} S_0) + \frac{d}{dx} (v_1^{DF} S_1) = 0 \quad (5.19)$$

$$\frac{d}{dx} (v_1^{DF} S_0) + \frac{d}{dx} (v_0^{DF} S_1) = 0 \quad (5.20)$$

Οι εξισώσεις (5.19) και (5.20) αποτελούν ένα πεπλεγμένο σύστημα με αγνώστους τις διορθώσεις των πεδίων των νετερμιστικών συντελεστών της στατικής πίεσης $p'_0(x)$ και $p'_1(x)$. Εφαρμόζοντας το σχήμα διακριτοποίησης, που ορίστηκε στην ενότητα 2.2 για τη μέση ροή, μετά από πράξεις προκύπτει ένα μπλοκ γραμμικό σύστημα 2×2 τριδιαγώνιας μορφής

$$M_{F_i} \cdot \begin{bmatrix} p'_{0,i+1} \\ p'_{1,i+1} \end{bmatrix} + M_{P_i} \cdot \begin{bmatrix} p'_{0,i} \\ p'_{1,i} \end{bmatrix} + M_{B_i} \cdot \begin{bmatrix} p'_{0,i-1} \\ p'_{1,i-1} \end{bmatrix} = M_{Q_i}, \quad 1 \leq i \leq np \quad (5.21)$$

Στον πίνακα 5.4 παρουσιάζονται τα μητρώα του συστήματος (5.21) των $2 * np$ διακριτοποιημένων εξισώσεων της IPCM στην εξίσωση της συνέχειας με εφαρμογή της παρεμβολής Rhie-Chow. Το σύστημα επιλύεται με έναν αλγόριθμο για μπλοκ συστήματα και υπολογίζονται οι διορθώσεις των πεδίων των συντελεστών της στατικής πίεσης $p'_0(x)$ και $p'_1(x)$ στην τρέχουσα επανάληψη. Γνωρίζοντας, πλέον, τις διορθώσεις για τα πεδία της ταχύτητας και της στατικής πίεσης, από τις εξισώσεις (5.15) και (5.16) υπολογίζονται τα πεδία των συντελεστών για τη διορθωμένη ταχύτητα $u_0^{DF}(x)$ και $u_1^{DF}(x)$ και τη διορθωμένη στατική πίεση $p_0^{n+1}(x)$ και $p_1^{n+1}(x)$ και επαναλαμβάνεται ο υπολογιστικός αλγόριθμος μέχρι σύγκλισης.

Με γνωστά τα πεδία των συντελεστών της ταχύτητας και της στατικής πίεσης, μπορούν να προσδιοριστούν τα πεδία των συντελεστών της ολικής πίεσης του ρευστού, καθώς για στοχαστική ταχύτητα και στατική πίεση η ολική πίεση αποκτά εξίσου στοχαστικό χαρακτήρα. Με το ανάπτυγμα PC, το πεδίο της ολικής πίεσης είναι

$$p_t(x) = \sum_{j=0}^l p_{tj}(x) \psi_j(\xi)$$

όπου l η τάξη του PC για το $p_t(x)$.

Αντικαθιστώντας τα ανάπτυγματα PC στην εξίσωση ορισμού της ολικής πίεσης προκύπτει το ανάπτυγμα PC της εξίσωσης

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^l p_{tj} \psi_j &= \sum_{j=0}^k p_j \psi_j + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^k u_j u_z \psi_j \psi_z \Rightarrow \dots \\ \sum_{j=0}^l p_{tj} \langle \psi_j, \psi_n \rangle &= \sum_{j=0}^k p_j \langle \psi_j, \psi_n \rangle + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^k u_j u_z \langle \psi_j, \psi_z \psi_n \rangle \end{aligned} \quad (5.22)$$

$M_{F_i} = \begin{bmatrix} A_{F_i} & B_{F_i} \\ C_{F_i} & D_{F_i} \end{bmatrix}$	$A_{F_i} = E_{1,f_i} S_{0,f_i}^2 + E_{2,f_i} S_{1,f_i} S_{0,f_i} + E_{3,f_i} S_{0,f_i} S_{1,f_i} + E_{4,f_i} S_{1,f_i}^2$ $B_{F_i} = E_{1,f_i} S_{1,f_i} S_{0,f_i} + E_{2,f_i} S_{0,f_i}^2 + E_{3,f_i} S_{1,f_i}^2 + E_{4,f_i} S_{0,f_i} S_{1,f_i}$ $C_{F_i} = E_{3,f_i} S_{0,f_i}^2 + E_{4,f_i} S_{1,f_i} S_{0,f_i} + E_{1,f_i} S_{0,f_i} S_{1,f_i} + E_{2,f_i} S_{1,f_i}^2$ $D_{F_i} = E_{3,f_i} S_{1,f_i} S_{0,f_i} + E_{4,f_i} S_{0,f_i}^2 + E_{1,f_i} S_{1,f_i}^2 + E_{2,f_i} S_{0,f_i} S_{1,f_i}$
$M_{P_i} = \begin{bmatrix} A_{P_i} & B_{P_i} \\ C_{P_i} & D_{P_i} \end{bmatrix}$	$A_{P_i} = -(A_{F_i} + A_{B_i})$ $B_{P_i} = -(B_{F_i} + B_{B_i})$ $C_{P_i} = -(C_{F_i} + C_{B_i})$ $D_{P_i} = -(D_{F_i} + D_{B_i})$
$M_{B_i} = \begin{bmatrix} A_{B_i} & B_{B_i} \\ C_{B_i} & D_{B_i} \end{bmatrix}$	$A_{B_i} = E_{1,b_i} S_{0,b_i}^2 + E_{2,b_i} S_{1,b_i} S_{0,b_i} + E_{3,b_i} S_{0,b_i} S_{1,b_i} + E_{4,b_i} S_{1,b_i}^2$ $B_{B_i} = E_{1,b_i} S_{1,b_i} S_{0,b_i} + E_{2,b_i} S_{0,b_i}^2 + E_{3,b_i} S_{1,b_i}^2 + E_{4,b_i} S_{0,b_i} S_{1,b_i}$ $C_{B_i} = E_{3,b_i} S_{0,b_i}^2 + E_{4,b_i} S_{1,b_i} S_{0,b_i} + E_{1,b_i} S_{0,b_i} S_{1,b_i} + E_{2,b_i} S_{1,b_i}^2$ $D_{B_i} = E_{3,b_i} S_{1,b_i} S_{0,b_i} + E_{4,b_i} S_{0,b_i}^2 + E_{1,b_i} S_{1,b_i}^2 + E_{2,b_i} S_{0,b_i} S_{1,b_i}$
$M_{Q_i} = \begin{bmatrix} W_i \\ R_i \end{bmatrix}$	$W_i = -v_{0,f_i}^{n+1} S_{0,f_i} + v_{0,b_i}^{n+1} S_{0,b_i} - v_{1,f_i}^{n+1} S_{1,f_i} + v_{1,b_i}^{n+1} S_{1,b_i}$ $R_i = -v_{1,f_i}^{n+1} S_{0,f_i}^2 + v_{1,b_i}^{n+1} S_{0,b_i}^2 - v_{0,f_i}^{n+1} S_{1,f_i} + v_{0,b_i}^{n+1} S_{1,b_i}$
όπου	$E_{1i} = \frac{D_{P_i}}{A_{P_i} D_{P_i} - B_{P_i} C_{P_i}}, \quad E_{2i} = -\frac{B_{P_i}}{A_{P_i} D_{P_i} - B_{P_i} C_{P_i}}, \quad E_{3i} = \frac{-C_{P_i}}{A_{P_i} D_{P_i} - B_{P_i} C_{P_i}}, \quad E_{4i} = \frac{A_{P_i}}{A_{P_i} D_{P_i} - B_{P_i} C_{P_i}}$
Τα πεδία της ταχύτητας στο δεξί μέλος M_{Q_i} με την εφαρμογή της παρεμβολής Rhie-Chow:	
$\triangleright v_{0,f_i}^{n+1} = \frac{v_{0,i}^{n+1} + v_{0,i+1}^{n+1}}{2} + E_{1,f_i} S_{0,f_i} \left[-\frac{p_{0,i+2}^n}{4} + \frac{3p_{0,i+1}^n}{4} - \frac{3p_{0,i}^n}{4} + \frac{p_{0,i-1}^n}{4} \right] + E_{1,f_i} S_{1,f_i} \left[-\frac{p_{1,i+2}^n}{4} + \frac{3p_{1,i+1}^n}{4} - \frac{3p_{1,i}^n}{4} + \frac{p_{1,i-1}^n}{4} \right]$	
$\quad + E_{2,f_i} S_{0,f_i} \left[-\frac{p_{0,i+2}^n}{4} + \frac{3p_{0,i+1}^n}{4} - \frac{3p_{0,i}^n}{4} + \frac{p_{0,i-1}^n}{4} \right] + E_{2,f_i} S_{1,f_i} \left[-\frac{p_{1,i+2}^n}{4} + \frac{3p_{1,i+1}^n}{4} - \frac{3p_{1,i}^n}{4} + \frac{p_{1,i-1}^n}{4} \right]$	
$\triangleright v_{0,b_i}^{n+1} = \frac{v_{0,i}^{n+1} + v_{0,i-1}^{n+1}}{2} + E_{1,b_i} S_{0,b_i} \left[\frac{p_{0,i+1}^n}{4} - \frac{3p_{0,i}^n}{4} + \frac{3p_{0,i-1}^n}{4} - \frac{p_{0,i-2}^n}{4} \right] + E_{1,b_i} S_{1,b_i} \left[\frac{p_{1,i+1}^n}{4} - \frac{3p_{1,i}^n}{4} + \frac{3p_{1,i-1}^n}{4} - \frac{p_{1,i-2}^n}{4} \right]$	
$\quad + E_{2,b_i} S_{0,b_i} \left[\frac{p_{0,i+1}^n}{4} - \frac{3p_{0,i}^n}{4} + \frac{3p_{0,i-1}^n}{4} - \frac{p_{0,i-2}^n}{4} \right] + E_{2,b_i} S_{1,b_i} \left[\frac{p_{1,i+1}^n}{4} - \frac{3p_{1,i}^n}{4} + \frac{3p_{1,i-1}^n}{4} - \frac{p_{1,i-2}^n}{4} \right]$	
$\triangleright v_{1,f_i}^{n+1} = \frac{v_{1,i}^{n+1} + v_{1,i+1}^{n+1}}{2} + E_{3,f_i} S_{0,f_i} \left[-\frac{p_0^{i+2}}{4} + \frac{3p_0^{i+1}}{4} - \frac{3p_0^i}{4} + \frac{p_0^{i-1}}{4} \right] + E_{3,f_i} S_{1,f_i} \left[-\frac{p_{1,i+2}^n}{4} + \frac{3p_{1,i+1}^n}{4} - \frac{3p_{1,i}^n}{4} + \frac{p_{1,i-1}^n}{4} \right]$	
$\quad + E_{4,f_i} S_{0,f_i} \left[-\frac{p_{1,i+2}^n}{4} + \frac{3p_{1,i+1}^n}{4} - \frac{3p_{1,i}^n}{4} + \frac{p_{1,i-1}^n}{4} \right] + E_{4,f_i} S_{1,f_i} \left[-\frac{p_{0,i+2}^n}{4} + \frac{3p_{0,i+1}^n}{4} - \frac{3p_{0,i}^n}{4} + \frac{p_{0,i-1}^n}{4} \right]$	
$\triangleright v_{1,b_i}^{n+1} = \frac{v_{1,i}^{n+1} + v_{1,i-1}^{n+1}}{2} + E_{3,b_i} S_{0,b_i} \left[\frac{p_{0,i+1}^n}{4} - \frac{3p_{0,i}^n}{4} + \frac{3p_{0,i-1}^n}{4} - \frac{p_{0,i-2}^n}{4} \right] + E_{3,b_i} S_{1,b_i} \left[\frac{p_{1,i+1}^n}{4} - \frac{3p_{1,i}^n}{4} + \frac{3p_{1,i-1}^n}{4} - \frac{p_{1,i-2}^n}{4} \right]$	
$\quad + E_{4,b_i} S_{0,b_i} \left[\frac{p_{1,i+1}^n}{4} - \frac{3p_{1,i}^n}{4} + \frac{3p_{1,i-1}^n}{4} - \frac{p_{1,i-2}^n}{4} \right] + E_{4,b_i} S_{1,b_i} \left[\frac{p_{0,i+1}^n}{4} - \frac{3p_{0,i}^n}{4} + \frac{3p_{0,i-1}^n}{4} - \frac{p_{0,i-2}^n}{4} \right]$	

Πίνακας 5.4: Τα μητρώα του μπλοκ γραμμικού συστήματος (5.21), το οποίο προκύπτει από τη διακριτοποίηση των εξισώσεων της IPCM στην εξίσωση της συνέχειας με εφαρμογή της παρεμβολής Rhie-Chow για αναπτύγματα PC των στοχαστικών πεδίων $v(x)$ και $p(x)$ 1^{ης} τάξης.

Όπως παρατηρείται στην εξίσωση (5.22), το στοχαστικό πεδίο της ολικής πίεσης είναι συνάρτηση του τετραγώνου της ταχύτητας, η οποία χαρακτηρίζεται, επίσης, από αβεβαιότητα και εκφράζεται με ένα ανάπτυγμα PC. Τότε, με βάση τη διερεύνηση, που πραγματοποιήθηκε στην ενότητα 4.1.1 για τη διατύπωση του γινομένου 2 στοχαστικών μεταβλητών, προέκυψε ότι για χαμηλές τάξεις PC η θεωρήση ίδιας τάξης PC για τους στοχαστικούς παράγοντες του γινομένου και το στοχαστικό αποτέλεσμα, δεν οδηγεί σε ακριβή λύση ως προς τα αποτελέσματα της NIPCM ίδιας τάξης. Επομένως, για πεδίο ταχύτητας και στατικής πίεσης 1^{ης} τάξης PC, ορίζεται πεδίο ολικής πίεσης διπλάσιας τάξης, ήτοι 2^{ης} τάξης PC και από την εξίσωση (5.22) προκύπτουν οι εξισώσεις για τα πεδία των ντετερμινιστικών συντελεστών της ολικής πίεσης

$$\begin{aligned} p_{t0}(x) &= p_0(x) + \frac{1}{2}v_0^2(x) + \frac{1}{2}v_1^2(x) \\ p_{t1}(x) &= p_1(x) + v_0(x)v_1(x) \\ p_{t2}(x) &= \frac{1}{2}v_1^2(x) \end{aligned} \quad (5.23)$$

► Οι αρχικές και οι οριακές συνθήκες, που καθορίζονται για τα άγνωστα πεδία των συντελεστών της ταχύτητας και της στατικής πίεσης είναι αντίστοιχες με εκείνες του προβλήματος της μέσης ροής. Συγκεκριμένα, τα πεδία των συντελεστών της ταχύτητας $v_0(x)$ και $v_1(x)$ αρχικοποιούνται, με βάση την τιμή τους στην είσοδο του αγωγού, ως

$$v_i = \frac{m}{S_{i=1}}, \quad i = 1, \dots, np$$

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα PC για τα πεδία $v(x)$ και $S(x)$ στην εξίσωση της αρχικής συνθήκης, μετά από πράξεις προκύπτει το ανάπτυγμα PC της εξίσωσης

$$\sum_{j=0}^k v_j(x) \langle \psi_j, \psi_n \rangle = m \sum_{j=0}^k \kappa_j(x_{min}) \langle \psi_j, \psi_n \rangle \quad (5.24)$$

όπου $\kappa(x) = \frac{1}{S(x)}$ και υπολογίζεται, όπως παρουσιάστηκε στην ενότητα 4.2.1 για τους μη-γραμμικούς όρους της $S(x)$.

Για αναπτύγματα PC 1^{ης} τάξης για τα πεδία $v(x)$ και $S(x)$, προκύπτουν τελικά οι αρχικές συνθήκες του πεδίου της ταχύτητας

$$\begin{cases} v_{0,i} = m \kappa_{0,i=1} \\ v_{1,i} = m \kappa_{1,i=1} \end{cases}$$

Οι οριακές συνθήκες για τα πεδία των συντελεστών της ταχύτητας, κατ' αντιστοιχία με τις οριακές συνθήκες της μέσης ροής (2.11), είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{0,i=1} = m\kappa_{0,i=1} \\ \left. \frac{dv_0}{dx} \right|_{np} = 0 \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{1,i=1} = m\kappa_{1,i=1} \\ \left. \frac{dv_1}{dx} \right|_{np} = 0 \end{array} \right.$$

Η αρχικοποίηση για τα πεδία των συντελεστών της στατικής πίεσης γίνεται με διόρθωση της αρχικής μηδενικής τιμής της με την τιμή της ολικής πίεσης στην έξοδο του αγωγού. Τότε, με βάση τις εξισώσεις της IPCM για την ολική πίεση (5.23) προκύπτει

$$\begin{aligned} p_{0,i} &= p_{t0,i=np} - \frac{1}{2}v_{0,i}^2 - \frac{1}{2}v_{1,i}^2 \\ p_{1,i} &= p_{t1,i=np} - v_{0,i}v_{1,i}, \quad i = 1, \dots, np \end{aligned}$$

όπου για μηδενική στατική πίεση στην έξοδο ισχύει

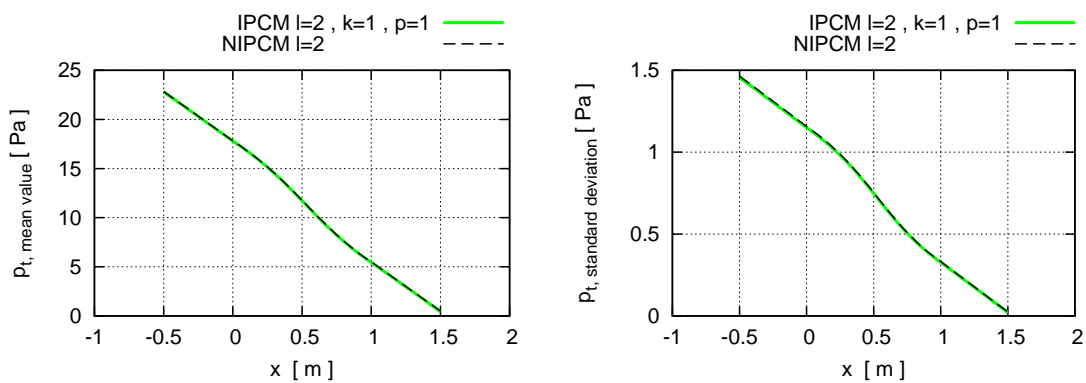
$$\begin{aligned} p_{t0,i=np} &= \frac{1}{2}v_{0,i=np}^2 + \frac{1}{2}v_{1,i=np}^2 \\ p_{t1,i=np} &= v_{0,i=np}v_{1,i=np} \end{aligned}$$

Οι οριακές συνθήκες για τα πεδία των συντελεστών της στατικής πίεσης έχουν τη μορφή των οριακών συνθηκών της μέσης ροής (2.12) και είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{dp_{t0}}{dx} \right|_{i=1} = 0 \\ p'_{0,i=np} = 0 \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{dp_{t1}}{dx} \right|_{i=1} = 0 \\ p'_{1,i=np} = 0 \end{array} \right.$$

5.4 Αναπτύγματα PC($v(x), p(x)$) 2^{ης} Τάξης

Έστω, τώρα, ότι για το πεδίο της στατικής πίεσης $p(x)$ και της ταχύτητας $v(x)$ θεωρούνται αναπτύγματα PC 2^{ης} τάξης. Τότε, το πεδίο του μη-γραμμικού όρου $\gamma(x)$ θα εκφραστεί, επίσης, με ανάπτυγμα PC 2^{ης} τάξης, ενώ για το αβέβαιο πεδίο εισόδου $S(x)$ ορίζεται ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης, σύμφωνα με τη διερεύνηση που προηγήθηκε για τη διατύπωση του μη-γραμμικού όρου. Τελικά, από την εξίσωση (5.6) προκύπτουν οι 3 εξισώσεις της IPCM



Σχήμα 5.2: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ολικής πίεσης $p_t(x)$ σε αγωγό μεταβλητής διατομής $S(x)$ με $x \in [-0.5, 1.5]$ m, παροχή $m=1 \text{ m}^3/\text{sec}$, συντελεστή τριβής $\lambda^*=10$ και κινηματική συνεκτικότητα $\nu=0.1 \text{ m}^2/\text{sec}$. Αβέβαιο πεδίο εισόδου είναι η $S(x)$ με μέση τιμή $\mu_S(x)$ και τυπική απόκλιση $\sigma_S = 0.0245 \text{ m}^2$. Σύγκριση της IPCM και της NIPCM στην τεχνική της διόρθωσης πίεσης για ανάπτυγμα PC 2^{ης} τάξης για το $p_t(x)$ ($l=2$).

$$\begin{aligned}
\diamond \quad & v_0 S_0 \frac{dv_0}{dx} + v_1 S_1 \frac{dv_0}{dx} + v_1 S_0 \frac{dv_1}{dx} + v_0 S_1 \frac{dv_1}{dx} + 2v_2 S_0 \frac{dv_2}{dx} + 2v_1 S_1 \frac{dv_2}{dx} + 2v_2 S_1 \frac{dv_1}{dx} \\
& - \frac{d}{dx} \left[S_0 \nu \frac{dv_0}{dx} \right] - \frac{d}{dx} \left[S_1 \nu \frac{dv_1}{dx} \right] = -S_0 \frac{dp_0}{dx} - S_1 \frac{dp_1}{dx} - \lambda^* \gamma_0 v_0^2 - 2\lambda^* \gamma_1 v_0 v_1 \\
& \hspace{20em} (5.25)
\end{aligned}$$

$$- \lambda^* \gamma_0 v_1^2 - 4\lambda^* \gamma_2 v_0 v_2 - 2\lambda^* \gamma_0 v_2^2 - 8\lambda^* \gamma_2 v_2^2 - 4\lambda^* \gamma_1 v_1 v_2 - 2\lambda^* \gamma_2 v_1^2$$

$$\begin{aligned}
\diamond \quad & v_1 S_0 \frac{dv_0}{dx} + v_0 S_1 \frac{dv_0}{dx} + v_0 S_0 \frac{dv_1}{dx} + 3v_1 S_1 \frac{dv_1}{dx} + 2v_0 S_1 \frac{dv_2}{dx} + 2v_1 S_0 \frac{dv_2}{dx} \\
& + 2v_2 S_0 \frac{dv_1}{dx} + 2v_2 S_1 \frac{dv_0}{dx} + 10v_2 S_1 \frac{dv_2}{dx} - \frac{d}{dx} \left[S_0 \nu \frac{dv_1}{dx} \right] - \frac{d}{dx} \left[S_1 \nu \frac{dv_0}{dx} \right] - \frac{d}{dx} \left[2S_1 \nu \frac{dv_2}{dx} \right] = \\
& = -S_0 \frac{dp_1}{dx} - S_1 \frac{dp_0}{dx} - 2S_1 \frac{dp_2}{dx} - \lambda^* \gamma_1 v_0^2 - 2\lambda^* \gamma_0 v_0 v_1 - 3\lambda^* \gamma_1 v_1^2 \\
& \hspace{20em} (5.26)
\end{aligned}$$

$$- 4\lambda^* \gamma_0 v_1 v_2 - 4\lambda^* \gamma_1 v_0 v_2 - 4\lambda^* \gamma_2 v_0 v_1 - 20\lambda^* \gamma_2 v_1 v_2 - 10\lambda^* \gamma_1 v_2^2$$

$$\begin{aligned}
\diamond \quad & 2v_2 S_0 \frac{dv_0}{dx} + 2v_0 S_0 \frac{dv_2}{dx} + 8v_2 S_0 \frac{dv_2}{dx} + 2v_1 S_1 \frac{dv_0}{dx} + 2v_1 S_0 \frac{dv_1}{dx} + 2v_0 S_1 \frac{dv_1}{dx} \\
& + 10v_1 S_1 \frac{dv_2}{dx} + 10v_2 S_1 \frac{dv_1}{dx} - \frac{d}{dx} \left[2S_1 \nu \frac{dv_1}{dx} \right] - \frac{d}{dx} \left[2S_0 \nu \frac{dv_2}{dx} \right] = \\
& = -2S_1 \frac{dp_1}{dx} - 2S_0 \frac{dp_2}{dx} - 60\lambda^* \gamma_2 v_2^2 - 4\lambda^* \gamma_0 v_0 v_2 - 2\lambda^* \gamma_2 v_0^2 \\
& \hspace{20em} (5.27)
\end{aligned}$$

$$- 16\lambda^* \gamma_2 v_0 v_2 - 8\lambda^* \gamma_0 v_2^2 - 4\lambda^* \gamma_1 v_0 v_1 - 2\lambda^* \gamma_0 v_1^2 - 20\lambda^* \gamma_1 v_1 v_2 - 10\lambda^* \gamma_2 v_1^2$$

Οι εξισώσεις (5.25), (5.26) και (5.27) αποτελούν ένα πεπλεγμένο σύστημα με αγνώστους τα πεδία των ντετερμινιστικών συντελεστών της ταχύτητας $v_0(x)$, $v_1(x)$ και $v_2(x)$ για γνωστά τα πεδία $p_0(x)$, $p_1(x)$ και $p_2(x)$, από την προηγούμενη επανάληψη. Μετά τη διακριτοποίηση των εξισώσεων, όπως ορίστηκε για το πρόβλημα της μέσης ροής, προ-

κύπτει ένα μπλοκ γραμμικό σύστημα 3×3 τριδιαγώνιας μορφής

$$M_{F_i} \cdot \begin{bmatrix} v_{0,i+1}^n \\ v_{1,i+1}^n \\ v_{2,i+1}^n \end{bmatrix} + M_{P_i} \cdot \begin{bmatrix} v_{0,i}^* \\ v_{1,i}^* \\ v_{2,i}^* \end{bmatrix} + M_{B_i} \cdot \begin{bmatrix} v_{0,i-1}^n \\ v_{1,i-1}^n \\ v_{2,i-1}^n \end{bmatrix} = M_{Q_i} \quad (5.28)$$

Στους πίνακες 5.5 και 5.6 παρουσιάζονται τα μητρώα του συστήματος (5.11) των $3 \times n \times n$ διακριτοποιημένων εξισώσεων της IPCM στην εξίσωση διατήρησης της ορμής. Για γνωστά τα πεδία πίεσης, $p_0^n(x), p_1^n(x)$ και $p_2^n(x)$ το σύστημα επιλύεται με έναν αλγόριθμο για μπλοκ συστήματα και υπολογίζονται το πεδίο της μέσης τιμής $v_0^*(x)$ και τα πεδία των συντελεστών της τυπικής απόκλισης της ταχύτητας $v_1^*(x)$ και $v_2^*(x)$ στην τρέχουσα επανάληψη.

Στα πεδία των συντελεστών της ταχύτητας εφαρμόζεται η μέθοδος της χαλάρωσης για ταχύτερη σύγκλιση της επαναληπτικής μεθόδου και προκύπτουν τα νέα πεδία συντελεστών

$$\begin{aligned} v_{0,i}^{n+1} &= \omega_v \cdot v_{0,i}^* + (1 - \omega_v) \cdot v_{0,i}^n \\ v_{1,i}^{n+1} &= \omega_v \cdot v_{1,i}^* + (1 - \omega_v) \cdot v_{1,i}^n \\ v_{2,i}^{n+1} &= \omega_v \cdot v_{2,i}^* + (1 - \omega_v) \cdot v_{2,i}^n \end{aligned}$$

Επιλύοντας κάθε μία από τις εξισώσεις ως προς τα πεδία των συντελεστών για την τρέχουσα ταχύτητα v_i^* και αντικαθιστώντας στο σύστημα των διακριτοποιημένων εξισώσεων της ροής, προκύπτουν τα νέα μητρώα της διαγωνίου και του δεξί μέλους του συστήματος (5.28) συναρτήσεως της παραμέτρου χαλάρωσης της ταχύτητας

$$\circ \quad A'_{P_i} = \frac{A_{P_i}}{\omega_v}, \quad B'_{P_i} = \frac{B_{P_i}}{\omega_v}, \quad C'_{P_i} = \frac{C_{P_i}}{\omega_v}$$

$$M'_{1,Q_i} = M_{1,Q_i} + \frac{1 - \omega_v}{\omega_v} A_{P_i} v_{0,i}^n + \frac{1 - \omega_v}{\omega_v} B_{P_i} + \frac{1 - \omega_v}{\omega_v} C_{P_i} v_{2,i}^n$$

$$\circ D'_{P_i} = \frac{D_{P_i}}{\omega_v} \quad , \quad E'_{P_i} = \frac{E_{P_i}}{\omega_v} \quad , \quad F'_{P_i} = \frac{F_{P_i}}{\omega_v}$$

$$M'_{2,Q_i} = M_{2,Q_i} + \frac{1-\omega_v}{\omega_v} D_{P_i} v_{0,i}^n + \frac{1-\omega_v}{\omega_v} E_{P_i} v_{1,i}^n + \frac{1-\omega_v}{\omega_v} F_{P_i} v_{2,i}^n$$

$$\circ G'_{P_i} = \frac{G_{P_i}}{\omega_v} \quad , \quad H'_{P_i} = \frac{H_{P_i}}{\omega_v} \quad , \quad O'_{P_i} = \frac{O_{P_i}}{\omega_v}$$

$$M'_{3,Q_i} = M_{3,Q_i} + \frac{1-\omega_v}{\omega_v} G_{P_i} v_{0,i}^n + \frac{1-\omega_v}{\omega_v} H_{P_i} v_{1,i}^n + \frac{1-\omega_v}{\omega_v} O_{P_i} v_{2,i}^n$$

Τελικά, το σύστημα των διακριτοποιημένων εξισώσεων της IPCM στην εξίσωση διατήρησης της ορμής γίνεται

$$M_{F_i} \cdot \begin{bmatrix} v_{0,i+1}^n \\ v_{1,i+1}^n \\ v_{2,i+1}^n \end{bmatrix} + M'_{P_i} \cdot \begin{bmatrix} v_{0,i}^{n+1} \\ v_{1,i}^{n+1} \\ v_{2,i}^{n+1} \end{bmatrix} + M_{B_i} \cdot \begin{bmatrix} v_{0,i-1}^n \\ v_{1,i-1}^n \\ v_{2,i-1}^n \end{bmatrix} = M'_{Q_i} \quad (5.29)$$

Για την ικανοποίηση της εξίσωσης της συνέχειας, εφαρμόζονται διορθώσεις στα πεδία των συντελεστών της ταχύτητας και της στατικής πίεσης

$$\begin{aligned} v_{0,i}^{DF} &= v_{0,i}^{n+1} + v'_{0,i} \\ v_{1,i}^{DF} &= v_{1,i}^{n+1} + v'_{1,i} \\ v_{2,i}^{DF} &= v_{2,i}^{n+1} + v'_{2,i} \end{aligned} \quad (5.30)$$

και

$$\begin{aligned} p_{0,i}^{n+1} &= p_{0,i}^n + \omega_p p'_{0,i} \\ p_{1,i}^{n+1} &= p_{1,i}^n + \omega_p p'_{1,i} \\ p_{2,i}^{n+1} &= p_{2,i}^n + \omega_p p'_{2,i} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Με την υπόθεση ότι η διόρθωση στο πεδίο της ταχύτητας καθορίζεται αποκλειστικά από τη διόρθωση στο πεδίο της πίεσης, το σύστημα των εξισώσεων της IPCM (5.29)

εκφράζεται ως προς τα πεδία των συντελεστών της ταχύτητας

$$\begin{bmatrix} A'_{P_i} & B'_{P_i} & C'_{P_i} \\ D'_{P_i} & E'_{P_i} & F'_{P_i} \\ G'_{P_i} & H'_{P_i} & O'_{P_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{0,i}^{n+1} \\ v_{1,i}^{n+1} \\ v_{2,i}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{P_i} + W_{all_i} \\ R_{P_i} + R_{all_i} \\ Z_{P_i} + Z_{all_i} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Τότε, διατυπώνεται το τρέχον και το διορθωμένο πεδίο της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της ταχύτητας, σύμφωνα με τη σχέση (5.32) και από τις εξισώσεις (5.30) υπολογίζονται οι διορθώσεις των πεδίων των συντελεστών της ταχύτητας $v'_0(x)$, $v'_1(x)$ και $v'_2(x)$. Οι σχετικές πράξεις παρουσιάζονται στον πίνακα 5.7.

Από το ανάπτυγμα PC της εξίσωσης της συνέχειας (5.18), για αναπτύγματα PC 2^{ης} τάξης για τα πεδία των συντελεστών της διορθωμένης ταχύτητας και 1^{ης} τάξης για το αβέβαιο πεδίο εισόδου, προκύπτουν οι 3 εξισώσεις της IPCM

$$\frac{d}{dx} (v_0^{DF} S_0) + \frac{d}{dx} (v_1^{DF} S_1) = 0 \quad (5.33)$$

$$\frac{d}{dx} (v_1^{DF} S_0) + \frac{d}{dx} (v_0^{DF} S_1) + \frac{d}{dx} (2v_2^{DF} S_1) = 0 \quad (5.34)$$

$$\frac{d}{dx} (2v_1^{DF} S_1) + \frac{d}{dx} (2v_2^{DF} S_0) = 0 \quad (5.35)$$

Μετά τη διακριτοποίηση των εξισώσεων (5.33), (5.34), και (5.35) προκύπτει ένα μπλοκ γραμμικό σύστημα 3×3 τριδιαγώνιας μορφής με αγνώστους τις διορθώσεις των πεδίων των ντετερμινιστικών συντελεστών της στατικής πίεσης $p'_0(x)$, $p'_1(x)$ και $p'_2(x)$

$$M_{F_i} \cdot \begin{bmatrix} p'_{0,i+1} \\ p'_{1,i+1} \\ p'_{2,i+1} \end{bmatrix} + M_{P_i} \cdot \begin{bmatrix} p'_{0,i} \\ p'_{1,i} \\ p'_{2,i} \end{bmatrix} + M_{B_i} \cdot \begin{bmatrix} p'_{0,i-1} \\ p'_{1,i-1} \\ p'_{2,i-1} \end{bmatrix} = M_{Q_i}, \quad 1 \leq i \leq np \quad (5.36)$$

Στον πίνακα 5.8 παρουσιάζονται τα μητρώα του συστήματος (5.36) των $3 * np$ διακριτοποιημένων εξισώσεων της IPCM στην εξίσωση της συνέχειας. Το σύστημα επιλύεται με έναν αλγόριθμο για μπλοκ συστήματα και υπολογίζονται οι διορθώσεις των πεδίων των συντελεστών της στατικής πίεσης $p'_0(x)$, $p'_1(x)$ και $p'_2(x)$ στην τρέχουσα επανάληψη. Με γνωστές τις διορθώσεις για τα πεδία της ταχύτητας και της στατικής πίεσης,

από τις εξισώσεις (5.30) και (5.31) υπολογίζονται τα πεδία των συντελεστών για τη διορθωμένη ταχύτητα $v_0^{DF}(x)$, $v_1^{DF}(x)$ και $v_2^{DF}(x)$ και τη διορθωμένη στατική πίεση $p_0^{n+1}(x)$, $p_1^{n+1}(x)$ και $p_2^{n+1}(x)$ και επαναλαμβάνεται ο υπολογιστικός αλγόριθμος μέχρι σύγκλισης.

Για αναπτύγματα PCE 2^{ης} τάξης για τα στοχαστικά πεδία $v(x)$ και $p(x)$, στο ανάπτυγμα PC της εξίσωσης της ολικής πίεσης (5.22) ορίζεται για την ολική πίεση $p_t(x)$ ανάπτυγμα PC 4^{ης} τάξης, δηλαδή διπλάσιας τάξης από το ανάπτυγμα PC της ταχύτητας, το οποίο εμφανίζεται ως γινόμενο. Τότε, προκύπτουν οι εξισώσεις της IPCM για την ολική πίεση

$$\begin{aligned} p_{t0}(x) &= p_0(x) + \frac{1}{2}v_0^2(x) + \frac{1}{2}v_1^2(x) + v_2^2(x) \\ p_{t1}(x) &= p_1(x) + v_0(x)v_1(x) + 2v_1(x)v_2(x) \\ p_{t2}(x) &= p_2(x) + \frac{1}{2}v_1^2(x) + v_0(x)v_2(x) + 2v_2^2(x) \\ p_{t3}(x) &= v_1(x)v_2(x) \\ p_{t4}(x) &= \frac{1}{2}v_2^2(x) \end{aligned} \quad (5.37)$$

Το πεδίο της τυπικής απόκλισης της ολικής πίεσης, Γ' , είναι

$$\sigma_{p_t} = \sqrt{p_{t1}^2 + 2p_{t2}^2 + 6p_{t3}^2 + 24p_{t4}^2}$$

► Για αντιστοιχία με το πρόβλημα της μέσης ροής, οι αρχικές και οι οριακές συνθήκες, που καθορίζονται για τα άγνωστα πεδία των συντελεστών της ταχύτητας και της στατικής πίεσης είναι οι ακόλουθες.

Για αναπτύγματα PC 2^{ης} τάξης για τα πεδία $v(x)$ και $S(x)$, προκύπτουν από την εξίσωση (5.24) οι αρχικές συνθήκες του πεδίου της ταχύτητας

$$\begin{cases} v_{0,i} = m \kappa_{0,i=1} \\ v_{1,i} = m \kappa_{1,i=1} \\ v_{2,i} = m \kappa_{2,i=1} \end{cases}$$

Οι οριακές συνθήκες για τα πεδία των συντελεστών της ταχύτητας είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{0,i=1} = m\kappa_{0,i=1} \\ \frac{dv_0}{dx} \Big|_{np} = 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} v_{1,i=1} = m\kappa_{1,i=1} \\ \frac{dv_1}{dx} \Big|_{np} = 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} v_{2,i=1} = m\kappa_{1,i=1} \\ \frac{dv_2}{dx} \Big|_{np} = 0 \end{array} \right\}$$

Η αρχικοποίηση για τα πεδία των συντελεστών της στατικής πίεσης γίνεται με διόρθωση της αρχικής μηδενικής τιμής της με την τιμή της ολικής πίεσης στην έξοδο του αγωγού και με βάση τις εξισώσεις της IPCM για την ολική πίεση (5.23) προκύπτει

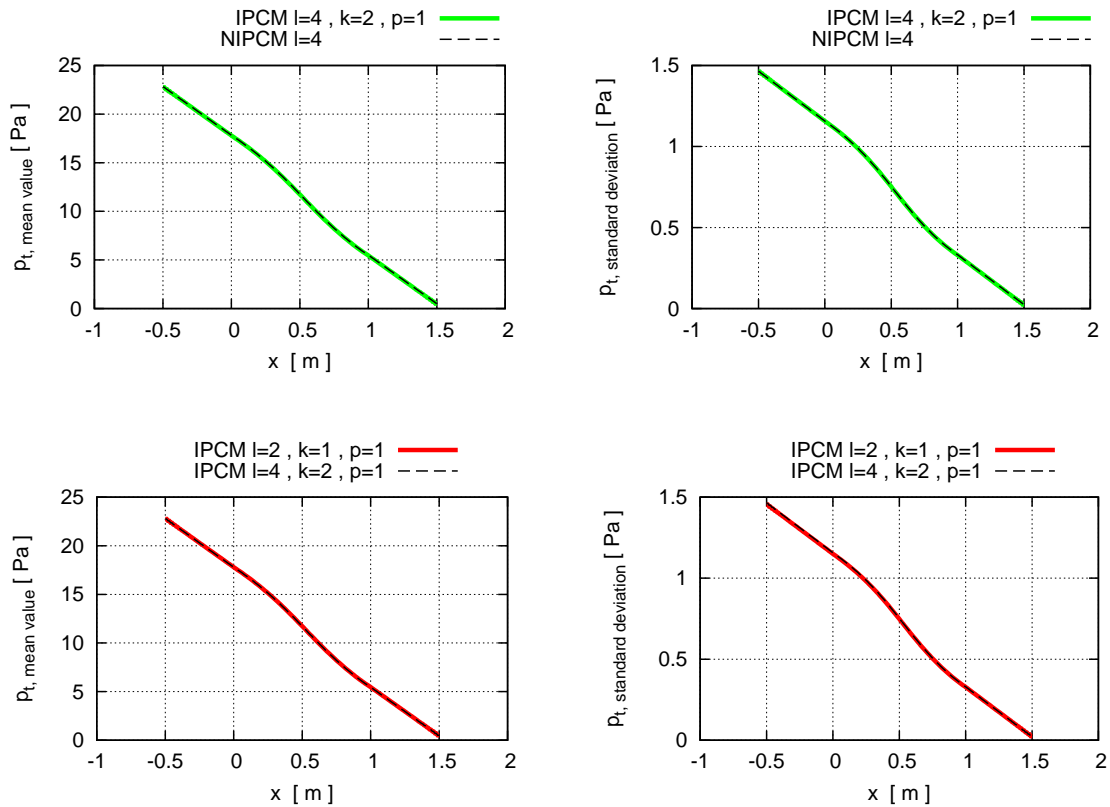
$$\begin{aligned} p_{0,i} &= p_{t0,i=np} - \frac{1}{2}v_{0,i}^2 - \frac{1}{2}v_{1,i}^2 - v_{2,i}^2 \\ p_{1,i} &= p_{t1,i=np} - v_{0,i}v_{1,i} - 2v_{1,i}v_{2,i} \\ p_{2,i} &= p_{t2,i=np} - \frac{1}{2}v_{1,i}^2 - v_{0,i}v_{2,i} - 2v_{2,i}^2, \quad i = 1, \dots, np \end{aligned}$$

όπου για μηδενική στατική πίεση στην έξοδο ισχύει

$$\begin{aligned} p_{t0,i=np} &= \frac{1}{2}v_{0,i=np}^2 + \frac{1}{2}v_{1,i=np}^2 + v_{2,i=np}^2 \\ p_{t1,i=np} &= v_{0,i=np}v_{1,i=np} + 2v_{1,i=np}v_{2,i=np} \\ p_{t2,i=np} &= \frac{1}{2}v_{1,i=np}^2 + v_{0,i=np}v_{2,i=np} + 2v_{2,i=np}^2 \end{aligned}$$

Τέλος, οι οριακές συνθήκες για τα πεδία των συντελεστών της στατικής πίεσης έχουν τη μορφή

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_{t0}}{dx} \Big|_{i=1} = 0 \\ p'_{0,i=np} = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_{t1}}{dx} \Big|_{i=1} = 0 \\ p'_{1,i=np} = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_{t2}}{dx} \Big|_{i=1} = 0 \\ p'_{2,i=np} = 0 \end{array} \right.$$



Σχήμα 5.3: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ολικής πίεσης $p_t(x)$ σε αγωγό μεταβλητής διατομής $S(x)$ με $x \in [-0.5, 1.5]$ m, παροχή $m=1$ m³/sec, συντελεστή τριβής $\lambda^*=10$ και κινηματική συνεκτικότητα $\nu=0.1$ m²/sec. Αβέβαιο πεδίο εισόδου είναι η $S(x)$ με μέση τιμή $\mu_S(x)$ και τυπική απόκλιση $\sigma_S = 0.0245$ m². Σύγκριση της IPCM και της NIPCM στην τεχνική της διόρθωσης πίεσης για ανάπτυγμα PC 4^{ης} τάξης για το $p_t(x)$ ($l=4$). Η IPCM για ανάπτυγμα PC 2^{ης} και 4^{ης} τάξης για το $p_t(x)$ δίνει κοντινές λύσεις.

$M_{F_i} = \begin{bmatrix} A_{F_i} & B_{F_i} & C_{F_i} \\ D_{F_i} & E_{F_i} & F_{F_i} \\ G_{F_i} & H_{F_i} & O_{F_i} \end{bmatrix}$	$A_{F_i} = \frac{S_{0,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{v_{0,f_i}^n S_{0,f_i}}{4} - \frac{v_{1,f_i}^n S_{1,f_i}}{4}$ $B_{F_i} = \frac{S_{1,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{v_{1,f_i}^n S_{0,f_i}}{4} - \frac{v_{0,f_i}^n S_{1,f_i}}{4} - \frac{v_{2,f_i}^n S_{1,f_i}}{2}$ $C_{F_i} = -\frac{v_{2,f_i}^n S_{0,f_i}}{2} - \frac{v_{1,f_i}^n S_{1,f_i}}{2}$ $D_{F_i} = \frac{S_{1,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{v_{1,f_i}^n S_{0,f_i}}{4} - \frac{v_{0,f_i}^n S_{1,f_i}}{4}$ $E_{F_i} = \frac{S_{0,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{3v_{1,f_i}^n S_{1,f_i}}{4} - \frac{v_{0,f_i}^n S_{0,f_i}}{4} - \frac{v_{2,f_i}^n S_{0,f_i}}{2}$ $F_{F_i} = \frac{2S_{1,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{v_{0,f_i}^n S_{1,f_i}}{2} - \frac{v_{1,f_i}^n S_{0,f_i}}{2} - \frac{5v_{2,f_i}^n S_{1,f_i}}{2}$ $G_{F_i} = -\frac{v_{2,f_i}^n S_{0,f_i}}{2} - \frac{v_{1,f_i}^n S_{1,f_i}}{2}$ $H_{F_i} = \frac{2S_{1,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{v_{1,f_i}^n S_{0,f_i}}{2} - \frac{v_{0,f_i}^n S_{1,f_i}}{2} - \frac{5v_{2,f_i}^n S_{1,f_i}}{2}$ $O_{F_i} = \frac{2S_{0,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{v_{0,f_i}^n S_{0,f_i}}{2} - 2v_{2,f_i}^n S_{0,f_i} - \frac{5v_{1,f_i}^n S_{1,f_i}}{2}$
$M_{P_i} = \begin{bmatrix} A_{P_i} & B_{P_i} & C_{P_i} \\ D_{P_i} & E_{P_i} & F_{P_i} \\ G_{P_i} & H_{P_i} & O_{P_i} \end{bmatrix}$	$A_{P_i} = -\frac{S_{0,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{S_{0,b_i}\nu}{\Delta x} - v_{0,f_i}^n S_{0,f_i} - v_{1,f_i}^n S_{1,f_i} + \frac{v_{0,b_i}^n S_{0,b_i}}{4} + \frac{v_{1,b_i}^n S_{1,b_i}}{4}$ $B_{P_i} = -\frac{S_{1,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{S_{1,b_i}\nu}{\Delta x} - v_{1,f_i}^n S_{0,f_i} - v_{0,f_i}^n S_{1,f_i} - 2v_{2,f_i}^n S_{1,f_i} + \frac{v_{1,b_i}^n S_{0,b_i}}{4} + \frac{v_{0,b_i}^n S_{1,b_i}}{4} + \frac{v_{2,b_i}^n S_{1,b_i}}{2}$ $C_{P_i} = -2v_{2,f_i}^n S_{0,f_i} - 2v_{1,f_i}^n S_{1,f_i} + \frac{v_{2,b_i}^n S_{0,b_i}}{2} + \frac{v_{1,b_i}^n S_{1,b_i}}{2}$ $D_{P_i} = -\frac{S_{1,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{S_{1,b_i}\nu}{\Delta x} - v_{1,f_i}^n S_{0,f_i} - v_{0,f_i}^n S_{1,f_i} + \frac{v_{1,b_i}^n S_{0,b_i}}{4} + \frac{v_{0,b_i}^n S_{1,b_i}}{4}$ $E_{P_i} = -\frac{S_{0,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{S_{0,b_i}\nu}{\Delta x} - 3v_{1,f_i}^n S_{1,f_i} - v_{0,f_i}^n S_{0,f_i} - 2v_{2,f_i}^n S_{0,f_i} + \frac{3v_{1,b_i}^n S_{1,b_i}}{4} + \frac{v_{0,b_i}^n S_{0,b_i}}{4} + \frac{v_{2,b_i}^n S_{0,b_i}}{2}$ $F_{P_i} = -\frac{2S_{1,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{2S_{1,b_i}\nu}{\Delta x} - 2v_{0,f_i}^n S_{1,f_i} - 2v_{1,f_i}^n S_{0,f_i} - 10v_{2,f_i}^n S_{1,f_i} + \frac{v_{0,b_i}^n S_{1,b_i}}{2} + \frac{v_{1,b_i}^n S_{0,b_i}}{2} + \frac{5v_{2,b_i}^n S_{1,b_i}}{2}$ $G_{P_i} = -2v_{2,f_i}^n S_{0,f_i} - 2v_{1,f_i}^n S_{1,f_i} + \frac{v_{2,b_i}^n S_{0,b_i}}{2} + \frac{v_{1,b_i}^n S_{1,b_i}}{2}$ $H_{P_i} = -\frac{2S_{1,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{2S_{1,b_i}\nu}{\Delta x} - 2v_{1,f_i}^n S_{0,f_i} - 2v_{0,f_i}^n S_{1,f_i} - 2v_{2,f_i}^n S_{1,f_i} - 10v_{2,f_i}^n S_{1,f_i} + \frac{v_{1,b_i}^n S_{0,b_i}}{2} + \frac{v_{0,b_i}^n S_{1,b_i}}{2} + \frac{5v_{2,b_i}^n S_{1,b_i}}{2}$ $O_{P_i} = -\frac{2S_{0,f_i}\nu}{\Delta x} - \frac{2S_{0,b_i}\nu}{\Delta x} - 2v_{0,f_i}^n S_{0,f_i} - 8v_{2,f_i}^n S_{0,f_i} - 10v_{1,f_i}^n S_{1,f_i} + \frac{v_{0,b_i}^n S_{0,b_i}}{2} + 2v_{2,b_i}^n S_{0,b_i} + \frac{5v_{1,b_i}^n S_{1,b_i}}{2}$

Πίνακας 5.5: Τα μητρώα M_{F_i} και M_{P_i} του μπλοκ γραμμικού συστήματος (5.28), το οποίο προκύπτει από τη διακριτοποίηση των εξισώσεων της IPCM στην εξίσωση διατήρησης της ορμής για αναπτύγματα PC των στοχαστικών πεδίων $v(x)$ και $p(x)$ 2^{ης} τάξης.

$M_{B_i} = \begin{bmatrix} A_{B_i} & B_{B_i} & C_{B_i} \\ D_{P_i} & E_{P_i} & F_{B_i} \\ G_{B_i} & H_{B_i} & O_{B_i} \end{bmatrix}$	$A_{B_i} = \frac{S_{0,b}\nu}{\Delta x} + \frac{v_{0,f_i}^n S_{0,f_i}}{4} + \frac{v_{1,f_i}^n S_{1,f_i}}{4} + v_{0,b_i}^n S_{0,b_i} + v_{1,b_i}^n S_{1,b_i}$ $B_{B_i} = \frac{S_{1,b_i}\nu}{\Delta x} + \frac{v_{1,f_i}^n S_{0,f_i}}{4} + \frac{v_{0,f_i}^n S_{1,f_i}}{4} + \frac{v_{2,f_i}^n S_{1,f_i}}{2} + v_{1,b_i}^n S_{0,b_i} + v_{0,b_i}^n S_1^b + 2v_{2,b_i}^n S_1^b$ $C_{B_i} = \frac{v_{2,f_i}^n S_{0,f_i}}{2} + 2v_{2,f_i}^n S_{0,f_i} + \frac{v_{1,f_i}^n S_{1,f_i}}{2} + 2v_{2,b_i}^n S_{0,b_i} + 2v_{1,b_i}^n S_1^b$ $D_{B_i} = \frac{S_{1,b_i}\nu}{\Delta x} + \frac{v_{1,f_i}^n S_{0,f_i}}{4} + \frac{v_{0,f_i}^n S_{1,f_i}}{4} + v_{1,b_i}^n S_{0,b_i} + v_{0,b_i}^n S_{1,b_i}$ $E_{B_i} = \frac{S_{0,b_i}\nu}{\Delta x} + \frac{3v_{1,f_i}^n S_{1,f_i}}{4} + \frac{v_{0,f_i}^n S_{0,f_i}}{4} + \frac{v_{2,f_i}^n S_{0,f_i}}{2} + 3v_{1,b_i}^n S_{1,b_i} + v_{0,b_i}^n S_{0,b_i} + 2v_{2,b_i}^n S_{0,b_i}$ $F_{B_i} = \frac{2S_{1,b_i}\nu}{\Delta x} + \frac{v_{0,f_i}^n S_{1,f_i}}{2} + \frac{v_{1,f_i}^n S_{0,f_i}}{2} + \frac{5v_{2,f_i}^n S_{1,f_i}}{2} + 2v_{0,b_i}^n S_{1,b_i} + 2v_{1,b_i}^n S_{0,b_i} + 10v_{2,b_i}^n S_{1,b_i}$ $G_{B_i} = \frac{v_{2,f_i}^n S_{0,f_i}}{2} + \frac{v_{1,f_i}^n S_{1,f_i}}{2} + 2v_{2,b_i}^n S_{0,b_i} + 2v_{1,b_i}^n S_{1,b_i}$ $H_{B_i} = \frac{2S_{1,b_i}\nu}{\Delta x} + \frac{v_{1,f_i}^n S_{0,f_i}}{2} + \frac{v_{0,f_i}^n S_{1,f_i}}{2} + \frac{5v_{2,f_i}^n S_{1,f_i}}{2} + 2v_{1,b_i}^n S_{0,b_i} + 2v_{0,b_i}^n S_{1,b_i} + 10v_{2,b_i}^n S_{1,b_i}$ $O_{B_i} = \frac{2S_{0,b_i}\nu}{\Delta x} + \frac{v_{0,f_i}^n S_{0,f_i}}{2} + 2v_{2,f_i}^n S_{0,f_i} + \frac{5v_{1,f_i}^n S_{1,f_i}}{2} + 2v_{0,b_i}^n S_{0,b_i} + 8v_{2,b_i}^n S_{0,b_i} + 10v_{1,b_i}^n S_{1,b_i}$
$M_{Q_i} = \begin{bmatrix} M_{1,Q_i} \\ M_{2,Q_i} \\ M_{3,Q_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{P_i} + G_i \\ R_{P_i} + R_i \\ Z_{P_i} + Z_i \end{bmatrix}$	$G_{P_i} = \left[S_0 \frac{dp_0^n}{dx} \Delta x \right]_i + \left[S_1 \frac{dp_1^n}{dx} \Delta x \right]_i = S_{0,i} \frac{p_{0,i+1}^n - p_{0,i-1}^n}{2} + S_{1,i} \frac{p_{1,i+1}^n - p_{1,i-1}^n}{2}$ $G_i = \lambda^* \Delta x \gamma_{0,i} v_{0,i}^n v_{0,i}^n + 2\lambda^* \Delta x \gamma_{1,i} v_{0,i}^n v_{1,i}^n + \lambda^* \Delta x \gamma_{0,i} v_{1,i}^n v_{1,i}^n + 4\lambda^* \Delta x \gamma_{2,i} v_{0,i}^n v_{2,i}^n$ $+ 2\lambda^* \Delta x \gamma_{0,i} v_{2,i}^n v_{2,i}^n + 8\lambda^* \Delta x \gamma_{2,i} v_{2,i}^n v_{2,i}^n + 4\lambda^* \Delta x \gamma_{1,i} v_{1,i}^n v_{2,i}^n + 2\lambda^* \Delta x \gamma_{2,i} v_{1,i}^n v_{1,i}^n$ $+ \left[\frac{v_{0,b_i}^n S_{0,b_i}}{4} + \frac{v_{1,b_i}^n S_{1,b_i}}{4} \right] v_{0,i-2}^n + \left[\frac{v_{1,b_i}^n S_{0,b_i}}{4} + \frac{v_{0,b_i}^n S_{1,b_i}}{4} + \frac{v_{2,b_i}^n S_{1,b_i}}{2} \right] v_{1,i-2}^n + \left[\frac{v_{2,b_i}^n S_{2,b_i}}{2} + \frac{v_{1,b_i}^n S_{1,b_i}}{2} \right] v_{2,i-2}^n$ $R_{P_i} = \left[S_0 \frac{dp_1^n}{dx} \Delta x \right]_i + \left[S_1 \frac{dp_0^n}{dx} \Delta x \right]_i + \left[2S_1 \frac{dp_2^n}{dx} \Delta x \right]_i = S_{0,i} \frac{p_{1,i+1}^n - p_{1,i-1}^n}{2} + S_{1,i} \frac{p_{0,i+1}^n - p_{0,i-1}^n}{2} + 2S_{1,i} \frac{p_{2,i+1}^n - p_{2,i-1}^n}{2}$ $R_i = 3\lambda^* \Delta x \gamma_{1,i} v_{1,i}^n v_{1,i}^n + 2\lambda^* \Delta x \gamma_{0,i} v_{0,i}^n v_{1,i}^n + \lambda^* \Delta x \gamma_{1,i} v_{0,i}^n v_{0,i}^n + 4\lambda^* \Delta x \gamma_{0,i} v_{1,i}^n v_{2,i}^n$ $+ 4\lambda^* \Delta x \gamma_{1,i} v_{0,i}^n v_{2,i}^n + 4\lambda^* \Delta x \gamma_{2,i} v_{0,i}^n v_{1,i}^n + 20\lambda^* \Delta x \gamma_{2,i} v_{1,i}^n v_{2,i}^n + 10\lambda^* \Delta x \gamma_{1,i} v_{2,i}^n v_{2,i}^n$ $+ \left[\frac{v_{1,b_i}^n S_{0,b_i}}{4} + \frac{v_{0,b_i}^n S_{1,b_i}}{4} \right] v_{0,i-2}^n + \left[\frac{v_{0,b_i}^n S_{0,b_i}}{4} + \frac{3v_{1,b_i}^n S_{1,b_i}}{4} + \frac{v_{2,b_i}^n S_{0,b_i}}{2} \right] v_{1,i-2}^n + \left[\frac{v_{0,b_i}^n S_{1,b_i}}{2} + \frac{v_{1,b_i}^n S_{0,b_i}}{2} + \frac{5v_{2,b_i}^n S_{1,b_i}}{2} \right] v_{2,i-2}^n$ $Z_{P_i} = \left[2S_1 \frac{dp_1^n}{dx} \Delta x \right]_i + \left[2S_0 \frac{dp_2^n}{dx} \Delta x \right]_i = 2S_{1,i} \frac{p_{1,i+1}^n - p_{1,i-1}^n}{2} + 2S_{0,i} \frac{p_{2,i+1}^n - p_{2,i-1}^n}{2}$ $Z_i = 60\lambda^* \Delta x \gamma_{2,i} v_{2,i}^n v_{2,i}^n + 4\lambda^* \Delta x \gamma_{0,i} v_{0,i}^n v_{2,i}^n + 2\lambda^* \Delta x \gamma_{2,i} v_{0,i}^n v_{0,i}^n + 16\lambda^* \Delta x \gamma_{2,i} v_{0,i}^n v_{2,i}^n$ $+ 8\lambda^* \Delta x \gamma_{0,i} v_{2,i}^n v_{2,i}^n + 4\lambda^* \Delta x \gamma_{1,i} v_{0,i}^n v_{1,i}^n + 2\lambda^* \Delta x \gamma_{0,i} v_{1,i}^n v_{1,i}^n + 20\lambda^* \Delta x \gamma_{1,i} v_{1,i}^n v_{2,i}^n + 10\lambda^* \Delta x \gamma_{2,i} v_{1,i}^n v_{1,i}^n$ $+ \left[\frac{v_{2,b_i}^n S_{0,b_i}}{2} + \frac{v_{1,b_i}^n S_{1,b_i}}{2} \right] v_{0,i-2}^n + \left[\frac{v_{1,b_i}^n S_{0,b_i}}{2} + \frac{v_{0,b_i}^n S_{1,b_i}}{2} + \frac{5v_{2,b_i}^n S_{1,b_i}}{2} \right] v_{1,i-2}^n + \left[\frac{v_{0,b_i}^n S_{0,b_i}}{2} + 2v_{2,b_i}^n S_{0,b_i} + \frac{5v_{1,b_i}^n S_{1,b_i}}{2} \right] v_{2,i-2}^n$

Πίνακας 5.6: Τα μητρώα M_{B_i} και M_{Q_i} του μπλοκ γραμμικού συστήματος (5.28), το οποίο προκύπτει από τη διακριτοποίηση των εξισώσεων της IPCM στην εξίσωση διατήρησης της ορμής για αναπτύγματα PC των στοχαστικών πεδίων $v(x)$ και $p(x)$ 2^{ης} τάξης.

Τα Πεδία των Συντελεστών $v_0^{n+1}(x)$, $v_1^{n+1}(x)$ και $v_2^{n+1}(x)$ της Τρέχουσας Ταχύτητας

$$v_{0,i}^{n+1} = T_{1,i} \left[S_0 \frac{dp_0^n}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp_1^n}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{2,i} \left[S_0 \frac{dp_1^n}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp_0^n}{dx} \Delta x \Big|_i + 2 S_1 \frac{dp_2^n}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{3,i} \left[2S_1 \frac{dp_1^n}{dx} \Delta x \Big|_i + 2S_0 \frac{dp_2^n}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{1,i} W_{all,i} + T_{2,i} R_{all,i} + T_{3,i} Z_{all,i}$$

$$v_{1,i}^{n+1} = T_{4,i} \left[S_0 \frac{dp_0^n}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp_1^n}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{5,i} \left[S_0 \frac{dp_1^n}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp_0^n}{dx} \Delta x \Big|_i + 2 S_1 \frac{dp_2^n}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{6,i} \left[2S_1 \frac{dp_1^n}{dx} \Delta x \Big|_i + 2S_0 \frac{dp_2^n}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{4,i} W_{all,i} + T_{5,i} R_{all,i} + T_{6,i} Z_{all,i}$$

$$v_{2,i}^{n+1} = T_{7,i} \left[S_0 \frac{dp_0^n}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp_1^n}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{8,i} \left[S_0 \frac{dp_1^n}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp_0^n}{dx} \Delta x \Big|_i + 2 S_1 \frac{dp_2^n}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{9,i} \left[2S_1 \frac{dp_1^n}{dx} \Delta x \Big|_i + 2S_0 \frac{dp_2^n}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{7,i} W_{all,i} + T_{8,i} R_{all,i} + T_{9,i} Z_{all,i}$$

Τα Πεδία των Συντελεστών $v_0^{DF}(x)$ και $v_1^{DF}(x)$ της Διορθωμένης Ταχύτητας

$$v_{0,i}^{DF} = T_{1,i} \left[S_0 \frac{dp_0^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp_1^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{2,i} \left[S_0 \frac{dp_1^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp_0^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i + 2 S_1 \frac{dp_2^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{3,i} \left[2S_1 \frac{dp_1^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i + 2S_0 \frac{dp_2^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{1,i} W_{all,i} + T_{2,i} R_{all,i} + T_{3,i} Z_{all,i}$$

$$v_{1,i}^{DF} = T_{4,i} \left[S_0 \frac{dp_0^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp_1^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{5,i} \left[S_0 \frac{dp_1^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp_0^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i + 2 S_1 \frac{dp_2^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{6,i} \left[2S_1 \frac{dp_1^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i + 2S_0 \frac{dp_2^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{4,i} W_{all,i} + T_{5,i} R_{all,i} + T_{6,i} Z_{all,i}$$

$$v_{2,i}^{DF} = T_{7,i} \left[S_0 \frac{dp_0^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp_1^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{8,i} \left[S_0 \frac{dp_1^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp_0^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i + 2 S_1 \frac{dp_2^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{9,i} \left[2S_1 \frac{dp_1^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i + 2S_0 \frac{dp_2^{n+1}}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{7,i} W_{all,i} + T_{8,i} R_{all,i} + T_{9,i} Z_{all,i}$$

Οι Διορθώσεις για τα Πεδία των Συντελεστών $v'_0(x)$ και $v'_1(x)$ της Ταχύτητας

$$v'_{0,i} = T_{1,i} \left[S_0 \frac{dp'_0}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp'_1}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{2,i} \left[S_0 \frac{dp'_1}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp'_0}{dx} \Delta x \Big|_i + 2 S_1 \frac{dp'_2}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{3,i} \left[2S_1 \frac{dp'_1}{dx} \Delta x \Big|_i + 2S_0 \frac{dp'_2}{dx} \Delta x \Big|_i \right]$$

$$v'_{1,i} = T_{4,i} \left[S_0 \frac{dp'_0}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp'_1}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{5,i} \left[S_0 \frac{dp'_1}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp'_0}{dx} \Delta x \Big|_i + 2 S_1 \frac{dp'_2}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{6,i} \left[2S_1 \frac{dp'_1}{dx} \Delta x \Big|_i + 2S_0 \frac{dp'_2}{dx} \Delta x \Big|_i \right]$$

$$v'_{2,i} = T_{7,i} \left[S_0 \frac{dp'_0}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp'_1}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{8,i} \left[S_0 \frac{dp'_1}{dx} \Delta x \Big|_i + S_1 \frac{dp'_0}{dx} \Delta x \Big|_i + 2 S_1 \frac{dp'_2}{dx} \Delta x \Big|_i \right] + T_{9,i} \left[2S_1 \frac{dp'_1}{dx} \Delta x \Big|_i + 2S_0 \frac{dp'_2}{dx} \Delta x \Big|_i \right]$$

όπου T_i ο αντίστροφος πίνακας του διαγώνιου μητρώου $(M_{P_i})^{(-1)} = T_i = \begin{bmatrix} T_{1,i} & T_{2,i} & T_{3,i} \\ T_{4,i} & T_{5,i} & T_{6,i} \\ T_{7,i} & T_{8,i} & T_{9,i} \end{bmatrix}$

Πίνακας 5.7: Τα πεδία των συντελεστών της τρέχουσας και της διορθωμένης ταχύτητας, καθώς και οι διορθώσεις των πεδίων των συντελεστών της ταχύτητας, ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση της συνέχειας, σύμφωνα με τη διατύπωση της τεχνικής της διορθωσης πίεσης για αναπτύγματα PC των στοχαστικών πεδίων $v(x)$ και $p(x)$ 2^{ης} τάξης.

$M_{F_i} = \begin{bmatrix} A_{F_i} & B_{F_i} & C_{F_i} \\ D_{F_i} & E_{F_i} & F_{F_i} \\ G_{F_i} & H_{F_i} & O_{F_i} \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} A_{F_i} &= T_{1,f_i} S_{0,f_i}^2 + T_{2,f_i} S_{1,f_i} S_{0,f_i} + T_{4,f_i} S_{0,f_i} S_{1,f_i} + E_{5,f_i} S_{1,f_i}^2 \\ B_{F_i} &= T_{1,f_i} S_{1,f_i} S_{0,f_i} + T_{2,f_i} S_{0,f_i}^2 + 2T_{3,f_i} S_{0,f_i} S_{1,f_i} + T_{4,f_i} S_{1,f_i}^2 + T_{5,f_i} S_{0,f_i} S_{1,f_i} + 2T_{6,f_i} S_{1,f_i}^2 \\ C_{F_i} &= 2T_{2,f_i} S_{1,f_i} S_{0,f_i} + 2T_{3,f_i} S_{0,f_i}^2 + 2T_{5,f_i} S_{1,f_i}^2 + 2T_{6,f_i} S_{0,f_i} S_{1,f_i} \\ D_{F_i} &= T_{1,f_i} S_{1,f_i} S_{0,f_i} + T_{2,f_i} S_{1,f_i}^2 + T_{4,f_i} S_{0,f_i}^2 + T_{5,f_i} S_{0,f_i} S_{1,f_i} + 2T_{7,f_i} S_{0,f_i} S_{1,f_i} + 2T_{8,f_i} S_{1,f_i}^2 \\ E_{F_i} &= T_{1,f_i} S_{1,f_i}^2 + T_{2,f_i} S_{1,f_i} S_{0,f_i} + 2T_{3,f_i} S_{1,f_i}^2 + T_{4,f_i} S_{0,f_i} S_{1,f_i} + T_{5,f_i} S_{0,f_i}^2 + 2T_{6,f_i} S_{1,f_i} S_{0,f_i} \\ &\quad + 2T_{7,f_i} S_{1,f_i}^2 + 2T_{8,f_i} S_{0,f_i} S_{1,f_i} + 2T_{9,f_i} S_{1,f_i}^2 \\ F_{F_i} &= T_{2,f_i} S_{1,f_i}^2 + T_{3,f_i} S_{0,f_i} S_{1,f_i} + 2T_{6,f_i} S_{0,f_i}^2 + 4T_{8,f_i} S_{1,f_i}^2 + 4T_{9,f_i} S_{0,f_i} S_{1,f_i} \\ G_{F_i} &= 2T_{4,f_i} S_{1,f_i} S_{0,f_i} + 2T_{5,f_i} S_{1,f_i}^2 + 2T_{7,f_i} S_{0,f_i}^2 + 2T_{8,f_i} S_{1,f_i} S_{0,f_i} \\ H_{F_i} &= 2T_{4,f_i} S_{1,f_i}^2 + 2T_{5,f_i} S_{0,f_i} S_{1,f_i} + 4T_{6,f_i} S_{1,f_i}^2 + 2T_{7,f_i} S_{0,f_i} S_{1,f_i} + 2T_{8,f_i} S_{0,f_i}^2 + 2T_{9,f_i} S_{0,f_i} S_{1,f_i} \\ O_{F_i} &= 4T_{5,f_i} S_{1,f_i}^2 + 4T_{6,f_i} S_{0,f_i} S_{1,f_i} + 4T_{8,f_i} S_{0,f_i} S_{1,f_i} + 4T_{9,f_i} S_{0,f_i}^2 \end{aligned}$
$M_{P_i} = \begin{bmatrix} A_{P_i} & B_{P_i} & C_{P_i} \\ D_{P_i} & E_{P_i} & F_{P_i} \\ G_{P_i} & H_{P_i} & O_{P_i} \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} A_{P_i} &= -(A_{F_i} + A_{B_i}) \\ B_{P_i} &= -(B_{F_i} + B_{B_i}) \\ C_{P_i} &= -(C_{F_i} + C_{B_i}) \\ D_{P_i} &= -(D_{F_i} + D_{B_i}) \\ E_{P_i} &= -(E_{F_i} + E_{B_i}) \\ F_{P_i} &= -(F_{F_i} + F_{B_i}) \\ G_{P_i} &= -(G_{F_i} + G_{B_i}) \\ H_{P_i} &= -(H_{F_i} + H_{B_i}) \\ O_{P_i} &= -(O_{F_i} + O_{B_i}) \end{aligned}$
$M_{B_i} = \begin{bmatrix} A_{B_i} & B_{B_i} & C_{B_i} \\ D_{B_i} & E_{B_i} & F_{B_i} \\ G_{B_i} & H_{B_i} & O_{B_i} \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} A_{B_i} &= T_{1,b_i} S_{0,b_i}^2 + T_{2,b_i} S_{1,b_i} S_{0,b_i} + T_{4,b_i} S_{0,b_i} S_{1,b_i} + E_{5,b_i} S_{1,b_i}^2 \\ B_{B_i} &= T_{1,b_i} S_{1,b_i} S_{0,b_i} + T_{2,b_i} S_{0,b_i}^2 + 2T_{3,b_i} S_{0,b_i} S_{1,b_i} + T_{4,b_i} S_{1,b_i}^2 + T_{5,b_i} S_{0,b_i} S_{1,b_i} + 2T_{6,b_i} S_{1,b_i}^2 \\ C_{B_i} &= 2T_{2,b_i} S_{1,b_i} S_{0,b_i} + 2T_{3,b_i} S_{0,b_i}^2 + 2T_{5,b_i} S_{1,b_i}^2 + 2T_{6,b_i} S_{0,b_i} S_{1,b_i} \\ D_{B_i} &= T_{1,b_i} S_{1,b_i} S_{0,b_i} + T_{2,b_i} S_{1,b_i}^2 + T_{4,b_i} S_{0,b_i}^2 + T_{5,b_i} S_{0,b_i} S_{1,b_i} + 2T_{7,b_i} S_{0,b_i} S_{1,b_i} + 2T_{8,b_i} S_{1,b_i}^2 \\ E_{B_i} &= T_{1,b_i} S_{1,b_i}^2 + T_{2,b_i} S_{1,b_i} S_{0,b_i} + 2T_{3,b_i} S_{1,b_i}^2 + T_{4,b_i} S_{0,b_i} S_{1,b_i} + T_{5,b_i} S_{0,b_i}^2 + 2T_{6,b_i} S_{1,b_i} S_{0,b_i} \\ &\quad + 2T_{7,b_i} S_{1,b_i}^2 + 2T_{8,b_i} S_{0,b_i} S_{1,b_i} + 2T_{9,b_i} S_{1,b_i}^2 \\ b_{B_i} &= T_{2,b_i} S_{1,b_i}^2 + T_{3,b_i} S_{0,b_i} S_{1,b_i} + 2T_{6,b_i} S_{0,b_i}^2 + 4T_{8,b_i} S_{1,b_i}^2 + 4T_{9,b_i} S_{0,b_i} S_{1,b_i} \\ G_{B_i} &= 2T_{4,b_i} S_{1,b_i} S_{0,b_i} + 2T_{5,b_i} S_{1,b_i}^2 + 2T_{7,b_i} S_{0,b_i}^2 + 2T_{8,b_i} S_{1,b_i} S_{0,b_i} \\ H_{B_i} &= 2T_{4,b_i} S_{1,b_i}^2 + 2T_{5,b_i} S_{0,b_i} S_{1,b_i} + 4T_{6,b_i} S_{1,b_i}^2 + 2T_{7,b_i} S_{0,b_i} S_{1,b_i} + 2T_{8,b_i} S_{0,b_i}^2 + 2T_{9,b_i} S_{0,b_i} S_{1,b_i} \\ O_{B_i} &= 4T_{5,b_i} S_{1,b_i}^2 + 4T_{6,b_i} S_{0,b_i} S_{1,b_i} + 4T_{8,b_i} S_{0,b_i} S_{1,b_i} + 4T_{9,b_i} S_{0,b_i}^2 \end{aligned}$
$M_{Q_i} = \begin{bmatrix} W_i \\ R_i \\ Z_i \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} W_i &= -v_{0,f_i}^{n+1} S_{0,f_i} + v_{0,b_i}^{n+1} S_{0,b_i} - v_{1,f_i}^{n+1} S_{1,f_i} + v_{1,b_i}^{n+1} S_{1,b_i} \\ R_i &= -v_{0,f_i}^{n+1} S_{1,f_i} + v_{0,b_i}^{n+1} S_{1,b_i} - v_{1,f_i} S_{0,f_i}^{n+1} + v_{1,b_i}^{n+1} S_{0,b_i} - 2v_{2,f_i} S_{1,f_i}^{n+1} + 2v_{2,b_i}^{n+1} S_{1,b_i} \\ Z_i &= -2v_{1,f_i} S_{1,f_i}^{n+1} + 2v_{1,b_i}^{n+1} S_{1,b_i} - 2v_{2,f_i}^{n+1} S_{0,f_i} + 2v_{2,b_i}^{n+1} S_{0,b_i} \end{aligned}$
<p>όπου T_i ο αντίστροφος πίνακας του διαγώνιου μητρώου $(M_{P_i}^{(-1)}) = T_i = \begin{bmatrix} T_{1,i} & T_{2,i} & T_{3,i} \\ T_{4,i} & T_{5,i} & T_{6,i} \\ T_{7,i} & T_{8,i} & T_{9,i} \end{bmatrix}$</p>	

Πίνακας 5.8: Τα μητρώα του μπλοκ γραμμικού συστήματος (5.21), το οποίο προκύπτει από τη διακριτοποίηση των εξισώσεων της IPCM στην εξίσωση της συνέχειας για αναπτύγματα PC των στοχαστικών πεδίων $v(x)$ και $p(x)$ 2^{ης} τάξης.

Κεφάλαιο 6

Η IPCM στη 1D Εξίσωση Burgers

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η μαθηματική διατύπωση, η διακριτοποίηση και η αριθμητική επίλυση της 1D συνεκτικής και μη-συνεκτικής εξίσωσης Burgers για ένα πρόβλημα αρχικών τιμών με ασυνέχεια (πρόβλημα Riemann). Επιπλέον, διατυπώνεται η IPCM 1^{ης} και 2^{ης} τάξης για τη 1D συνεκτική εξίσωση Burgers υπό 2 διαφορετικές στοχαστικές εισόδους και αναλύεται η μέθοδος επίλυσης των εξισώσεων.

Στην πρώτη περίπτωση, η αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής είναι η κινηματική συνεκτικότητα ν . Το ανάπτυγμα PC της κινηματικής συνεκτικότητας είναι

$$\nu = \sum_{j=0}^p \nu_j \psi_j(\xi) \quad (6.1)$$

Στην δεύτερη περίπτωση, η αβεβαιότητα εισάγεται στο πεδίο ροής μέσω της ταχύτητας στην είσοδο του εξεταζόμενου μήκους $v(x_{min}, t)$ για $t > 0$. Η εφαρμογή του αναπτύγματος PC στην ταχύτητα εισόδου δίνει

$$v(x_{min}, t) = \sum_{j=0}^p v_j(x_{min}, t) \psi_j(\xi), \quad t > 0 \quad (6.2)$$

όπου ν_j και $v_j(x_{min}, t)$ οι ντετερμινιστικοί συντελεστές των αβέβαιων εισόδων στο πεδίο ροής, p η τάξη του PC για το ν και την $v(x_{min}, t)$, ξ η στοχαστική μεταβλητή σε κάθε πρόβλημα και ψ_j τα πολυώνυμα Hermite A.2 της κανονικής κατανομής j -οστού βαθμού.

6.1 Μαθηματική Διατύπωση του Προβλήματος

Η 1D συνεκτική εξίσωση Burgers [8] είναι η πιο απλή σδε ροής, που συνδυάζει μη-γραμμικά φαινόμενα μεταφοράς και φαινόμενα διάχυσης. Προκύπτει από τις εξισώσεις Navier-Stokes για 1D ροή ασυμπύεστου ρευστού με αμελητέα τη βαρύτητα και την κλίση πίεσης. Είναι μια παραβολική σδε της μορφής

$$\frac{dv}{dt} + v \frac{dv}{dx} = \nu \frac{d^2v}{dx^2} \quad (6.3)$$

όπου ν η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού.

Σε συντηρητική γραφή διατυπώνεται ως

$$\frac{dv}{dt} + \frac{df}{dx} = \nu \frac{d^2v}{dx^2} \quad (6.4)$$

όπου $f = \frac{v^2}{2}$ το διάνυσμα της ατρίβους ροής.

Αμελώντας την κινηματική συνεκτικότητα, προκύπτει η 1D μη-συνεκτική εξίσωση Burgers [8],

$$\frac{dv}{dt} + v \frac{dv}{dx} = 0 \quad (6.5)$$

η οποία είναι μια υπερβολική σδε. Σε συντηρητική γραφή έχει τη μορφή

$$\frac{dv}{dt} + \frac{df}{dx} = 0 \quad (6.6)$$

6.1.1 Το Πρόβλημα Riemann

Το πρόβλημα Riemann ορίζεται ως ένα πρόβλημα αρχικών τιμών μιας σδε σε συντηρητική μορφή, στο οποίο το αρχικό πεδίο τιμών παρουσιάζει ασυνέχεια, έχοντας τη μορφή βηματικής συνάρτησης.

Για τη 1D μη-συνεκτική εξίσωση Burgers, το πρόβλημα Riemann [30] διατυπώνεται ως

$$\begin{cases} v_t + f_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \\ v(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (6.7)$$

όπου το τμηματικά συνεχές αρχικό πεδίο της ταχύτητας είναι

$$\phi(x) = \begin{cases} v_l, & x < 0 \\ v_r, & x > 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

Η μορφή της λύσης του προβλήματος Riemann εξαρτάται από τη σχέση μεταξύ των ταχυτήτων v_l και v_r του αρχικού πεδίου. Στην περίπτωση όπου $v_l > v_r$, το πρόβλημα Riemann έχει μια μοναδική ασθενή λύση (weak solution). Η ασθενής λύση του προβλήματος (6.7) είναι ένα κύμα κρούσης (shock wave [29]), δηλαδή μια ασυνέχεια που διαδίδεται με ταχύτητα s .

$$v(x, t) = \begin{cases} v_l, & x < st \\ v_r, & x > st \end{cases} \quad (6.9)$$

Σύμφωνα με τη συνθήκη Rankine-Hugoniot [20], η ταχύτητα διάδοσης του κύματος κρούσης είναι

$$s = \frac{1}{2}(v_l + v_r)$$

Το πρόβλημα Riemann για τη 1D συνεκτική εξίσωση Burgers [30] ορίζεται ως

$$\begin{cases} v_t + f_x = \nu v_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \\ v(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (6.10)$$

και έχει τις ίδιες αρχικές συνθήκες με το πρόβλημα Riemann για τη 1D μη-συνεκτική εξίσωση Burgers (6.8).

Επιπλέον, επιβάλλονται οριακές συνθήκες για το πεδίο της ταχύτητας

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x, t) = v_l, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} v(x, t) = v_r \quad t > 0$$

με $v_l > v_r$.

Λόγω της παρουσίας της κινηματικής συνεκτικότητας, η 1D σδε Burgers είναι παραβολική και δε δίνει πλέον ασυνεχείς λύσεις ακόμα και για τις ασυνεχείς αρχικές συνθήκες (6.8) του πεδίου της ταχύτητας. Η λύση του προβλήματος Riemann (6.10) είναι ένα ομαλό δεξιά οδεύον κύμα (traveling-wave [29]) με ταχύτητα διάδοσης $s = \frac{1}{2}(v_l + v_r)$. Όταν $\nu \rightarrow 0$, τότε η λύση του προβλήματος (6.10) τείνει στο κύμα κρούσης του προβλήματος Riemann για τη 1D μη-συνεκτική εξίσωση Burgers (6.7), καθώς εξαλείφεται

η επίδραση της κινηματικής συνεκτικότητας στην ομαλοποίηση της μορφής του κύματος (vanishing viscosity approach [13]).

$$\lim_{\nu \rightarrow 0^+} v(x, t) = \begin{cases} v_l, & x < st \\ v_r, & x > st \end{cases}$$

Στα παραδείγματα που ακολουθούν εξετάζεται το πρόβλημα Riemann για τη 1D συνεκτική (6.10) και μη-συνεκτική (6.7) εξίσωση Burgers με αρχικές συνθήκες

$$v(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

Παρατηρείται ότι για τις αρχικές συνθήκες (6.11) η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι μηδενική και η λύση του προβλήματος Riemann είναι ένα στάσιμο κύμα. Για να σημειωθεί διάδοση του κύματος στο χώρο, πρέπει για χρόνο $t > 0$ να εισαχθεί στο πεδίο ροής μια διαταραχή, ώστε η ταχύτητα διάδοσης του κύματος να γίνει θετική ($s > 0$). Γι' αυτό το λόγο, τίθενται οριακές συνθήκες Dirichlet στο πεδίο της ταχύτητας

$$\begin{cases} v(x_{min}, t) = 1 + d, & t > 0 \\ v(x_{max}, t) = -1, & t > 0 \end{cases} \quad (6.12)$$

όπου $d > 0$ μια διαταραχή που εισάγεται στο πεδίο ροής για $t > 0$ και προκαλεί σταδιακά τη διάδοση του κύματος με ταχύτητα $s = \frac{d}{2} > 0$.

6.1.2 Μη-Συνεκτική Εξίσωση Burgers

Η αριθμητική επίλυση του προβλήματος Riemann για τη 1D μη-συνεκτική εξίσωση Burgers (6.7) με αρχικές συνθήκες (6.11) και οριακές συνθήκες (6.12) υλοποιείται με τη μέθοδο Godunov [8]. Πρόκειται για ένα ρητό σχήμα διακριτοποίησης, που χρησιμοποιεί τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων προς αποφυγή της θεώρησης συνεχών συναρτήσεων και παραγώγων, που απαιτεί η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών, η οποία προκύπτει από το ανάπτυγμα Taylor. Μια τέτοια θεώρηση δεν ανταποκρίνεται στη φυσική του προβλήματος λόγω της ασυνέχειας στο πεδίο της ταχύτητας.

Το σχήμα Godunov για τη 1D μη-συνεκτική εξίσωση Burgers (6.6) είναι

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n \right), \quad i = 1, \dots, i_{max} \quad (6.13)$$

όπου το διάνυσμα της ατριβούς ροής f υπολογίζεται στους μεσόκομβους του πλέγματος με βάση τη λύση ενός τοπικού προβλήματος Riemann σε κάθε υπολογιστικό κελί.

Για το τοπικό πρόβλημα Riemann σε κάθε κόμβο $i \in [1, i_{max} - 1]$ ισχύει ότι $v_i > v_{i+1}$. Τότε, ορίζεται η ταχύτητα διάδοσης του κύματος κρούσης στο μεσόκομβο ως

$$s_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{v_i^n + v_{i+1}^n}{2}$$

Με βάση το σχήμα ανάντι παραγωγής, για το διάνυσμα της ατριβούς ροής $f(v) = \frac{v^2}{2}$ ισχύει

$$f_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \frac{1}{2} (v_i^n)^2, & s_{i+\frac{1}{2}}^n > 0 \\ \frac{1}{2} (v_{i+1}^n)^2, & s_{i+\frac{1}{2}}^n < 0 \end{cases}$$

Κατ' αντιστοιχία, ισχύει

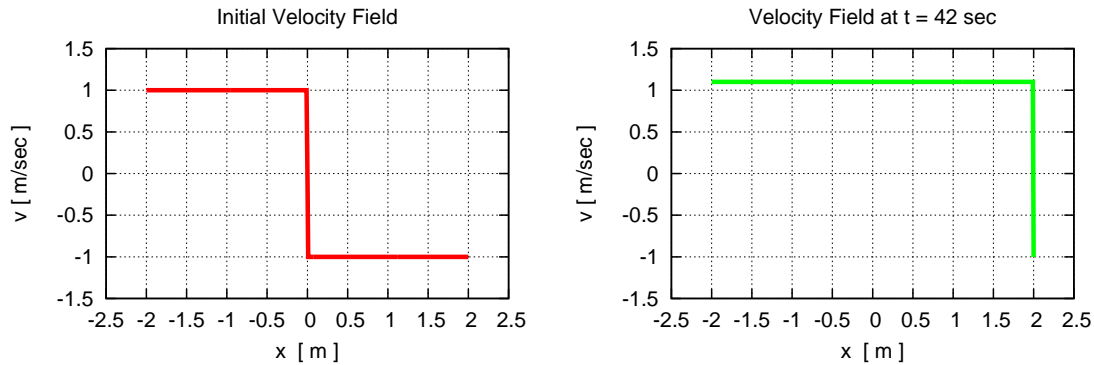
$$f_{i-\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \frac{1}{2} (v_{i-1}^n)^2, & s_{i-\frac{1}{2}}^n > 0 \\ \frac{1}{2} (v_i^n)^2, & s_{i-\frac{1}{2}}^n < 0 \end{cases}$$

Τελικά από την εξίσωση (6.13) υπολογίζεται το πεδίο της ταχύτητας $v(x, t)$ για κάθε χρονική στιγμή $t > 0$.

Για την ευστάθεια του ρητού σχήματος διακριτοποίησης Godunov, πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη

$$\left| v_{max} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq \frac{1}{2}$$

Στα παραδείγματα που ακολουθούν δόθηκαν $v_{max} = 1.1 \text{ m/sec}$, $\Delta x = 0.01 \text{ m}$, $\Delta t = 0.001 \text{ sec}$.



Σχήμα 6.1: Λύση του προβλήματος Riemann για τη 1D μη-συνεκτική εξίσωση Burgers. Σύγκριση του πεδίου της ταχύτητας $v(x,t)$ στις αρχικές συνθήκες και μετά από 42 sec, όταν το κύμα κρούσης έχει φτάσει στο τέλος του εξεταζόμενου μήκους $x \in [-2, 2]$ m. Για τη διάδοση του κύματος κρούσης προστέθηκε μια διαταραχή $d = 0.1$ m/sec στην ταχύτητα εισόδου σύμφωνα με τις οριακές συνθήκες (6.12). Η καθυστέρηση της διάδοσης του κύματος κρούσης κατά ~ 2 sec οφείλεται στη σταδιακή δημιουργία αυτού χάρη στη διαταραχή d .

6.1.3 Συνεκτική Εξίσωση Burgers

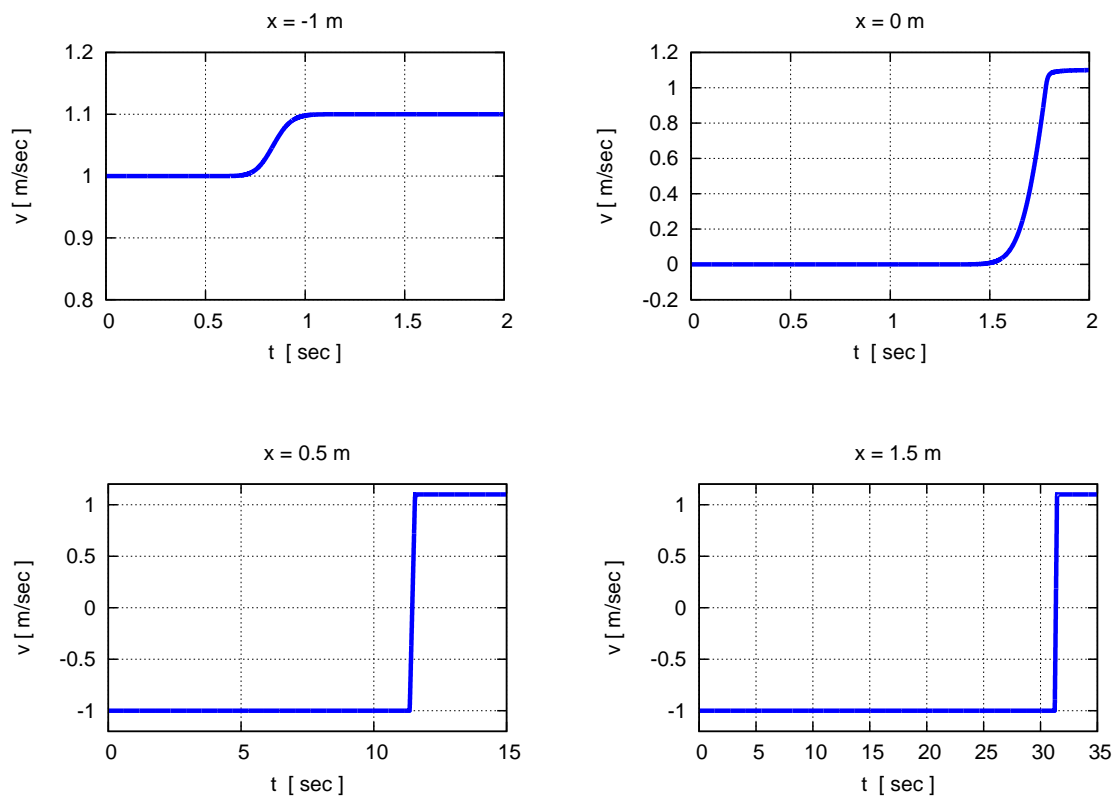
Η αριθμητική επίλυση του προβλήματος Riemann για τη 1D συνεκτική εξίσωση Burgers (6.10) με αρχικές συνθήκες (6.11) και οριακές συνθήκες (6.12) υλοποιείται με τη μέθοδο Briley-McDonald [8]. Πρόκειται για ένα πλήρως πεπλεγμένο σχήμα διακριτοποίησης ενός βήματος, που χρησιμοποιεί πρόσω διαφόριση 1^{ης} τάξης ακρίβειας στο χρόνο $O[\Delta t]$ και κεντρική διαφόριση 2^{ης} τάξης ακρίβειας στο χώρο $O[(\Delta x)^2]$.

Η διατύπωση της μεθόδου Briley-McDonald για τη 1D συνεκτική εξίσωση Burgers (6.4) είναι

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} + \frac{df}{dx} \Big|_i^{n+1} = \nu \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_i^{n+1}, \quad i = 1, \dots, i_{max} \quad (6.14)$$

Ο όρος μεταφοράς $\frac{df}{dx} \Big|_i^{n+1}$ της εξίσωσης (6.14) αναπτύσσεται κατά Taylor ως προς το χρόνο t

$$\frac{df}{dx} \Big|_i^{n+1} = \frac{df}{dx} \Big|_i^n + \Delta t \frac{d}{dt} \left[\frac{df}{dx} \right]_i^n + O[(\Delta t)^2]$$



Σχήμα 6.2: Λύση του προβλήματος Riemann για τη 1D μη-συνεκτική εξίσωση Burgers σε εξεταζόμενη μήκος $x \in [-2, 2]$ m και με διαταραχή $d = 0.1$ m/sec στην ταχύτητα εισόδου, που προκαλεί τη διάδοση του κύματος κρούσης. Σύγκριση της μεταβολής της ταχύτητας της ροής $v(x, t)$ στις θέσεις $x = -1$ m, $x = 0$ m, $x = 0.5$ m και $x = 1.5$ m.

όπου

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{df}{dx} \right]_i^n = \frac{d}{dx} \left[\frac{df}{dt} \right]_i^n = \frac{d}{dx} \left[\frac{df}{dv} \frac{dv}{dt} \right]_i^n = \frac{d}{dx} \left[A \frac{dv}{dt} \right]_i^n$$

και A η ιακωβιανή της ταχύτητας v

$$A = \frac{df}{dv} = v$$

Αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα Taylor στην (6.14) και διακριτοποιώντας τους όρους της εξίσωσης σύμφωνα με τη μέθοδο Briley-McDonald, μετά από πράξεις προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα i_{max} εξισώσεων τριδιαγώνιας μορφής

$$A_F \cdot v_{i+1}^{n+1} + A_P \cdot v_i^{n+1} + A_B \cdot v_{i-1}^{n+1} = Q \quad (6.15)$$

όπου

$$A_F = \frac{A_{i+1}^n}{2\Delta x} - \frac{\nu}{\Delta x^2} \quad , \quad A_P = \frac{1}{\Delta t} - \frac{2\nu}{\Delta x^2} \quad , \quad A_B = -\frac{A_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\nu}{\Delta x^2}$$

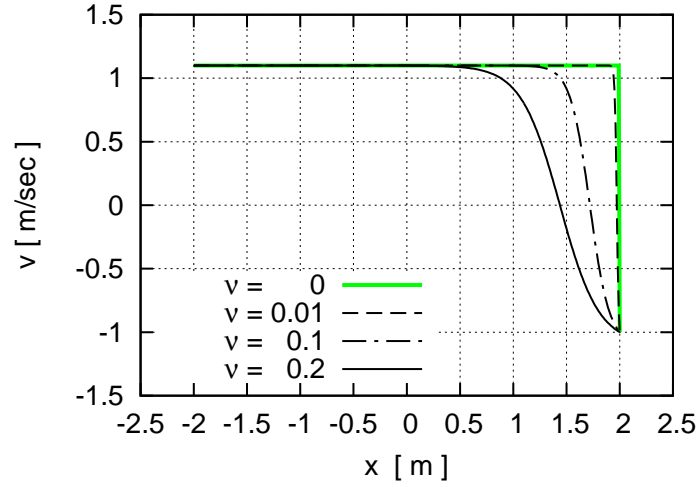
$$Q = \frac{v_i^n}{\Delta t} - \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{A_{i+1}^n v_{i+1}^n}{2\Delta x} - \frac{A_{i-1}^n v_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

Το σύστημα των εξισώσεων ροής (6.15) επιλύεται για κάθε χρονική στιγμή $t > 0$ με τον αλγόριθμο *Thomas* [5] και υπολογίζεται το πεδίο της ταχύτητας $v(x, t)$.

6.2 Η IPCM(ν) στη Συνεκτική Εξίσωση Burgers

Η κινηματική συνεκτικότητα ν είναι η αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής και διατυπώνεται σύμφωνα με την έκφραση (6.1). Η στοχαστική συμπεριφορά της κινηματικής συνεκτικότητας επιδρά στο πεδίο της ταχύτητας $v(x, t)$, το οποίο με το ανάπτυγμα PC λαμβάνει τη μορφή

$$v(x, t) = \sum_{j=0}^k v_j(x, t) \psi_j(\xi) \quad (6.16)$$



Σχήμα 6.3: Λύση του προβλήματος Riemann για τη 1D συνεκτική εξίσωση Burgers σε εξεταζόμενη μήκος $x \in [-2, 2]$ m και με διαταραχή $d = 0.1$ m/sec στην ταχύτητα εισόδου. Σύγκριση της τελικής μορφής του κύματος για διάφορες τιμές της κινηματικής συνεκτικότητας ν [m²/sec] τη χρονική στιγμή $t = 42$ sec.

όπου k η τάξη του PC για το $v(x, t)$.

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα PC της κινηματικής συνεκτικότητας (6.1) και του πεδίου της ταχύτητας (6.16) στη 1D συνεκτική εξίσωση Burgers (6.3), προκύπτει το ανάπτυγμα PC της εξίσωσης με αβέβαιη μεταβλητή εισόδου την κινηματική συνεκτικότητα ν

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{j=0}^k v_j \psi_j \right] + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=0}^k v_j \psi_j \sum_{z=0}^k v_z \psi_z \right] = \sum_{j=0}^p \nu_j \psi_j \frac{d^2}{dx^2} \left[\sum_{z=0}^k v_z \psi_z \right] \implies \dots$$

$$\sum_{j=0}^k \frac{dv_j}{dt} \langle \psi_j, \psi_n \rangle + \sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^k \frac{d}{dx} \left(\frac{v_j v_z}{2} \right) \langle \psi_j, \psi_z, \psi_n \rangle = \sum_{j=0}^p \sum_{z=0}^k \nu_j \frac{d^2 v_z}{dx^2} \langle \psi_j, \psi_z, \psi_n \rangle \quad (6.17)$$

Τελικά, προκύπτουν $k + 1$ πεπλεγμένες εξισώσεις (6.17) με αγνώστους τα πεδία των ντετερμινιστικών συντελεστών της ταχύτητας $v_j(x, t)$ για $j = 0, \dots, k$.

6.2.1 Ανάπτυγμα PC($v(x, t)$) 1^{ης} Τάξης

Έστω ότι ορίζεται ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης για το πεδίο της ταχύτητας $v(x)$. Τότε, και για την αβέβαιη μεταβλητή εισόδου ν θεωρείται ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης και με βάση τη σχέση (6.1) η κινηματική συνεκτικότητα ν ορίζεται από τη μέση τιμή της ν_0 και την τυπική της απόκλιση ν_1 ως εξής

$$\nu = \nu_0 \psi_0 + \nu_1 \psi_1$$

όπου ψ_0 και ψ_1 τα πολυώνυμα Hermite Α΄ 2 0^{ου} και 1^{ου} βαθμού, αντίστοιχα.

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα PC στην εξίσωση (6.17) και υπολογίζοντας τις προβολές Galerkin Β΄, προκύπτουν οι 2 εξισώσεις της IPCM

$$\frac{dv_0}{dt} + \frac{d}{dx} \left[\frac{(v_0)^2}{2} + \frac{(v_1)^2}{2} \right] = \nu_0 \frac{d^2 v_0}{dx^2} + \nu_1 \frac{d^2 v_1}{dx^2} \quad (6.18)$$

$$\frac{dv_1}{dt} + \frac{d}{dx} [v_0 v_1] = \nu_0 \frac{d^2 v_1}{dx^2} + \nu_1 \frac{d^2 v_0}{dx^2}$$

Σε συντηρητική γραφή, το σύστημα των εξισώσεων της IPCM (6.18) είναι

$$\frac{d\vec{U}}{dt} + \frac{d\vec{f}}{dx} = \vec{q} \quad (6.19)$$

όπου \vec{U} το διάνυσμα των ταχυτήτων, \vec{f} το διάνυσμα της ατριβούς ροής και \vec{q} το διάνυσμα των όρων πηγής.

Τα διανύσματα \vec{U} , \vec{f} , \vec{q} δίνονται από τις σχέσεις

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(v_0)^2}{2} + \frac{(v_1)^2}{2} \\ v_0 v_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_0 \frac{d^2 v_0}{dx^2} + \nu_1 \frac{d^2 v_1}{dx^2} \\ \nu_0 \frac{d^2 v_1}{dx^2} + \nu_1 \frac{d^2 v_0}{dx^2} \end{bmatrix}$$

Για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων της IPCM (6.19) εφαρμόζεται η μέθοδος Briley-McDonald. Κατ' αντιστοιχία με την 1D συνεκτική εξίσωση Burgers (6.14), ισχύει

$$\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_i^n + \left. \frac{d\vec{f}}{dx} \right|_i^{n+1} = \vec{q}_i^{n+1} \quad (6.20)$$

όπου

$$\left. \frac{d\vec{f}}{dx} \right|_i^{n+1} = \left. \frac{d\vec{f}}{dx} \right|_i^n + dt \frac{d}{dt} \left[\left. \frac{d\vec{f}}{dx} \right|_i^n \right] = \dots = \left. \frac{d\vec{f}}{dx} \right|_i^n + dt \frac{d}{dx} \left[A \frac{d\vec{U}}{dt} \right]_i^n$$

και A το ιακωβιανό μητρώο των ταχυτήτων \vec{U}

$$A = \frac{d\vec{f}}{d\vec{U}} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dU_1} & \frac{df_1}{dU_2} \\ \frac{df_2}{dU_1} & \frac{df_2}{dU_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 \\ v_1 & v_0 \end{bmatrix}$$

Τελικά, για τον όρο μεταφοράς $\left. \frac{d\vec{f}}{dx} \right|_i^{n+1}$ ισχύει

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}_i^{n+1} = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}_i^n + dt \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} v_0 \frac{dv_0}{dt} + v_1 \frac{dv_1}{dt} \\ v_1 \frac{dv_0}{dt} + v_0 \frac{dv_1}{dt} \end{bmatrix}_i^n \quad (6.21)$$

Οι όροι μεταφοράς $\left. \frac{df_1}{dx} \right|_i^{n+1}$ και $\left. \frac{df_2}{dx} \right|_i^{n+1}$ της εξίσωσης (6.21) διακριτοποιούνται με σχήμα πρόσω διαφοράρισης 1^{ns} τάξης ακρίβειας στο χρόνο και σχήμα κεντρικής διαφοράρισης 2^{ns} τάξης ακρίβειας στο χώρο. Εφαρμόζοντας τα ίδια σχήματα διακριτοποίησης και στους υπόλοιπους όρους του συστήματος των εξισώσεων (6.20), μετά από πράξεις προκύπτει το σύστημα των διακριτοποιημένων εξισώσεων της IPCM σε μητρωϊκή γραφή

$$A_F \begin{bmatrix} v_{0,i+1}^{n+1} \\ v_{1,i+1}^{n+1} \end{bmatrix} + A_P \begin{bmatrix} v_{0,i}^{n+1} \\ v_{1,i}^{n+1} \end{bmatrix} + A_B \begin{bmatrix} v_{0,i-1}^{n+1} \\ v_{1,i-1}^{n+1} \end{bmatrix} = Q \quad (6.22)$$

όπου

$$A_F = \begin{bmatrix} \frac{v_{0,i+1}^n}{2\Delta x} - \frac{\nu_0}{\Delta x^2} & \frac{v_{1,i+1}^n}{2\Delta x} - \frac{\nu_1}{\Delta x^2} \\ \frac{v_{1,i+1}^n}{2\Delta x} - \frac{\nu_1}{\Delta x^2} & \frac{v_{0,i+1}^n}{2\Delta x} - \frac{\nu_0}{\Delta x^2} \end{bmatrix}, \quad A_P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\nu_0}{\Delta x^2} & \frac{2\nu_1}{\Delta x^2} \\ \frac{2\nu_1}{\Delta x^2} & \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\nu_0}{\Delta x^2} \end{bmatrix},$$

$$A_B = \begin{bmatrix} -\frac{u_{0,i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\nu_0}{\Delta x^2} & -\frac{v_{1,i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\nu_1}{\Delta x^2} \\ -\frac{v_{1,i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\nu_1}{\Delta x^2} & -\frac{u_{0,i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\nu_0}{\Delta x^2} \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{v_{0,i}^n}{\Delta t} - \frac{f_{1,i+1}^n - f_{1,i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{(v_{0,i+1}^n)^2 - (v_{0,i-1}^n)^2}{2\Delta x} + \frac{(v_{1,i+1}^n)^2 - (v_{1,i-1}^n)^2}{2\Delta x} \\ \frac{v_{1,i}^n}{\Delta t} - \frac{f_{2,i+1}^n - f_{2,i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{1,i+1}^n v_{0,i+1}^n}{\Delta x} - \frac{v_{1,i-1}^n v_{0,i-1}^n}{\Delta x} \end{bmatrix}$$

Το σύστημα των εξισώσεων της IPCM (6.22) είναι ένα μπλοκ γραμμικό σύστημα 2×2 τριδιαγώνιας μορφής, που επιλύεται με έναν αλγόριθμο για μπλοκ συστήματα [8] για κάθε χρονική στιγμή $t > 0$ και υπολογίζεται το πεδίο των ταχυτήτων $v_0(x, t)$ και $v_1(x, t)$, όπου $v_0(x, t)$ είναι το πεδίο της μέσης τιμής και $v_1(x, t)$ το πεδίο της τυπικής απόκλισης της ταχύτητας.

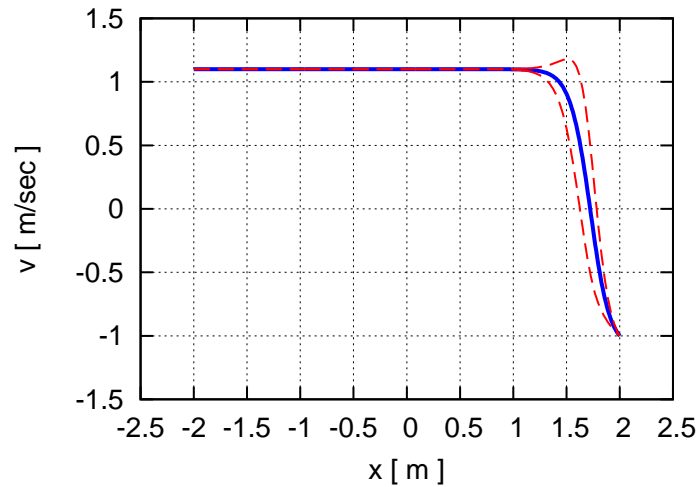
Οι οριακές συνθήκες της ταχύτητας τίθενται ως εξής

$$\begin{cases} v_0(x_{min}, t) = 1 + d, & t > 0 \\ v_1(x_{min}, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

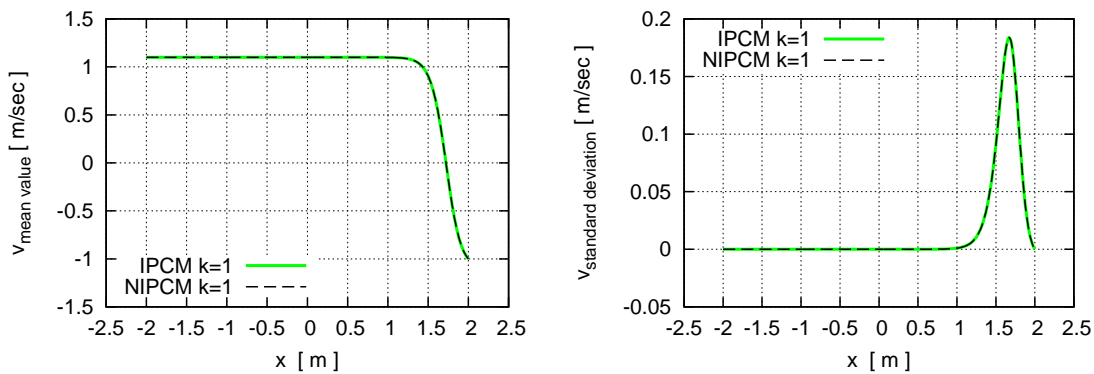
και

$$\begin{cases} v_0(x_{max}, t) = -1, & t > 0 \\ v_1(x_{max}, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

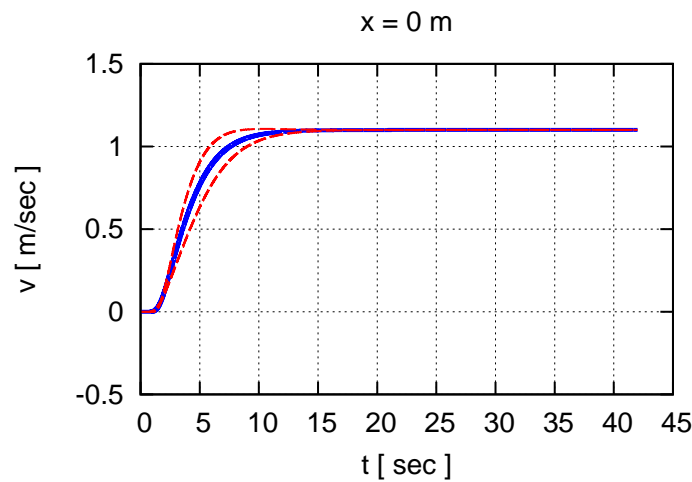
Το πεδίο της τυπικής απόκλισης της ταχύτητας $v_1(x, t)$ μηδενίζεται στα άκρα του εξεταζόμενου μήκους, ώστε να υπάρχει συμφωνία με το πρόβλημα της μέσης ροής για τη 1D συνεκτική εξίσωση Burgers. Στο πρόβλημα της μέσης ροής (6.10) δίνονται οριακές συνθήκες Dirichlet για την ταχύτητα (6.12), με αποτέλεσμα το πεδίο της ταχύτητας να μην παρουσιάζει αβεβαιότητα στις θέσεις $x = x_{min}$ και $x = x_{max}$.



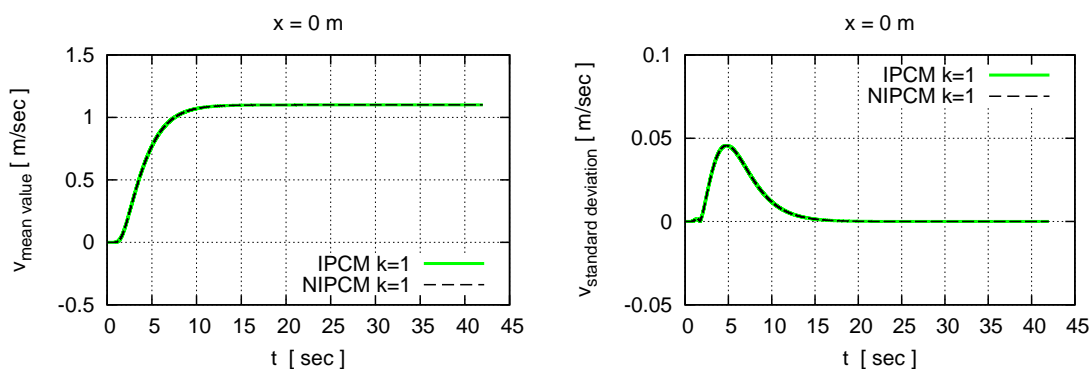
Σχήμα 6.4: Η μέση τιμή και 3 φορές η τυπική απόκλιση (3σ) γύρω από αυτή για την ταχύτητα $v(x, t)$ στο εξεταζόμενο μήκος $x \in [-2, 2]$ m τη χρονική στιγμή $t = 42$ sec. Πρόκειται για τη λύση της IPCM (6.22) με αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής την κινηματική συνεκτικότητα, έχοντας μέση τιμή $\mu_\nu = 0.1$ m²/sec και τυπική απόκλιση $\sigma_\nu = 0.01$ m²/sec. Η δυνατή διακύμανση της ταχύτητας γύρω από τη μέση τιμή ανταποκρίνεται στα συμπεράσματα για το ρόλο της κινηματικής συνεκτικότητας στην ομαλοποίηση του κύματος, όπως αναλύθηκαν στην ενότητα 6.1.3.



Σχήμα 6.5: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ταχύτητας $v(x, t)$ στο εξεταζόμενο μήκος $x \in [-2, 2]$ m τη χρονική στιγμή $t = 42$ sec. Αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής είναι η κινηματική συνεκτικότητα με μέση τιμή $\mu_\nu = 0.1$ m²/sec και τυπική απόκλιση $\sigma_\nu = 0.01$ m²/sec. Σύγκριση της IPCM και της NIPCМ για τάξη PC $k = 1$ για το πεδίο της ταχύτητας.



Σχήμα 6.6: Η μέση τιμή και 3 φορές η τυπική απόκλιση (3σ) γύρω από αυτή για την ταχύτητα $v(x, t)$ στη θέση $x = 0 \text{ m}$ για τη χρονική διάρκεια $t \in [0, 42] \text{ sec}$. Πρόκειται για τη λύση της IPCM (6.22) με αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής την κινηματική συνεκτικότητα, έχοντας μέση τιμή $\mu_\nu = 0.1 \text{ m}^2/\text{sec}$ και τυπική απόκλιση $\sigma_\nu = 0.01 \text{ m}^2/\text{sec}$.



Σχήμα 6.7: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ταχύτητας $v(x, t)$ στη θέση $x = 0 \text{ m}$ για τη χρονική διάρκεια $t \in [0, 42] \text{ sec}$. Αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής είναι η κινηματική συνεκτικότητα με μέση τιμή $\mu_\nu = 0.1 \text{ m}^2/\text{sec}$ και τυπική απόκλιση $\sigma_\nu = 0.01 \text{ m}^2/\text{sec}$. Σύγκριση της IPCM και της NIPCМ για τάξη PC $k = 1$ για το πεδίο της ταχύτητας.

6.2.2 Ανάπτυγμα PC($v(x, t)$) 2^{ης} Τάξης

Για την αβέβαιη μεταβλητή εισόδου ν θεωρείται, όπως και στην προηγούμενη ενότητα από τη σχέση (6.1), ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης. Ορίζοντας για το πεδίο της ταχύτητας ανάπτυγμα PC 2^{ης} τάξης, από την εξίσωση (6.17) προκύπτουν οι 3 εξισώσεις της IPCM

$$\begin{aligned} \frac{dv_0}{dt} + \frac{d}{dx} \left[\frac{(v_0)^2}{2} + \frac{(v_1)^2}{2} + (v_2)^2 \right] &= \nu_0 \frac{d^2 v_0}{dx^2} + \nu_1 \frac{d^2 v_1}{dx^2} \\ \frac{dv_1}{dt} + \frac{d}{dx} [v_0 v_1 + 2v_1 v_2] &= \nu_0 \frac{d^2 v_1}{dx^2} + \nu_1 \frac{d^2 v_0}{dx^2} + 2\nu_1 \frac{d^2 v_2}{dx^2} \\ \frac{dv_2}{dt} + \frac{d}{dx} \left[\frac{(v_1)^2}{2} + 2(v_2)^2 + v_0 v_2 \right] &= \nu_1 \frac{d^2 v_1}{dx^2} + \nu_0 \frac{d^2 v_2}{dx^2} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Σε συντηρητική γραφή, το σύστημα των εξισώσεων της IPCM (6.23) είναι

$$\frac{d\vec{U}}{dt} + \frac{d\vec{f}}{dx} = \vec{q} \quad (6.24)$$

Τα διανύσματα \vec{U} , \vec{f} , \vec{q} δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \vec{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(v_0)^2}{2} + \frac{(v_1)^2}{2} + (v_2)^2 \\ v_0 v_1 + 2v_1 v_2 \\ \frac{(v_1)^2}{2} + 2(v_2)^2 + v_0 v_2 \end{bmatrix}, \\ \vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \nu_0 \frac{d^2 v_0}{dx^2} + \nu_1 \frac{d^2 v_1}{dx^2} \\ \nu_0 \frac{d^2 v_1}{dx^2} + \nu_1 \frac{d^2 v_0}{dx^2} + 2\nu_1 \frac{d^2 v_2}{dx^2} \\ \nu_1 \frac{d^2 v_1}{dx^2} + \nu_0 \frac{d^2 v_2}{dx^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων της IPCM (6.24) εφαρμόζεται η μέθοδος Briley-McDonald. Κατ' αντιστοιχία με την 1D συνεκτική εξίσωση Burgers

(6.14), ισχύει

$$\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_i^n + \left. \frac{d\vec{f}}{dx} \right|_i^{n+1} = \vec{q}_i^{n+1} \quad (6.25)$$

όπου

$$\left. \frac{d\vec{f}}{dx} \right|_i^{n+1} = \left. \frac{d\vec{f}}{dx} \right|_i^n + dt \frac{d}{dt} \left[\left. \frac{d\vec{f}}{dx} \right|_i^n \right] = \dots = \left. \frac{d\vec{f}}{dx} \right|_i^n + dt \frac{d}{dx} \left[A \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_i^n \right]$$

και A το ιακωβιανό μητρώο των ταχυτήτων \vec{U}

$$A = \frac{d\vec{f}}{d\vec{U}} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dU_1} & \frac{df_1}{dU_2} & \frac{df_1}{dU_3} \\ \frac{df_2}{dU_1} & \frac{df_2}{dU_2} & \frac{df_2}{dU_3} \\ \frac{df_3}{dU_1} & \frac{df_3}{dU_2} & \frac{df_3}{dU_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & 2v_2 \\ v_1 & v_0 + 2v_2 & 2v_1 \\ v_2 & v_1 & 4v_2 + v_0 \end{bmatrix}$$

Τελικά, για τον όρο μεταφοράς $\left. \frac{d\vec{f}}{dx} \right|_i^{n+1}$ ισχύει

$$\frac{d}{dx} \left[\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} \right]_i^{n+1} = \frac{d}{dx} \left[\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} \right]_i^n + dt \frac{d}{dx} \left[\begin{matrix} v_0 \frac{dv_0}{dt} + v_1 \frac{dv_1}{dt} + 2v_2 \frac{dv_2}{dt} \\ v_1 \frac{dv_0}{dt} + (v_0 + 2v_2) \frac{dv_1}{dt} + 2v_1 \frac{dv_2}{dt} \\ v_2 \frac{dv_0}{dt} + v_1 \frac{dv_1}{dt} + (4v_2 + v_0) \frac{dv_2}{dt} \end{matrix} \right]_i^n \quad (6.26)$$

Οι όροι μεταφοράς $\left. \frac{df_1}{dx} \right|_i^{n+1}$, $\left. \frac{df_2}{dx} \right|_i^{n+1}$ και $\left. \frac{df_3}{dx} \right|_i^{n+1}$ της εξίσωσης (6.26) διακριτοποιούνται με σχήμα πρόσω διαφόρισης 1^{ns} τάξης ακρίβειας στο χρόνο και σχήμα κεντρικής διαφόρισης 2^{ns} τάξης ακρίβειας στο χώρο. Εφαρμόζοντας τα ίδια σχήματα διακριτοποίησης και στους υπόλοιπους όρους του συστήματος των εξισώσεων (6.25), μετά από πράξεις προκύπτει το σύστημα των διακριτοποιημένων εξισώσεων της IPCM σε

μητρική γραφή

$$A_F \begin{bmatrix} v_{0,i+1}^{n+1} \\ v_{1,i+1}^{n+1} \\ v_{2,i+1}^{n+1} \end{bmatrix} + A_P \begin{bmatrix} v_{0,i}^{n+1} \\ v_{1,i}^{n+1} \\ v_{2,i}^{n+1} \end{bmatrix} + A_B \begin{bmatrix} v_{0,i-1}^{n+1} \\ v_{1,i-1}^{n+1} \\ v_{2,i-1}^{n+1} \end{bmatrix} = Q \quad (6.27)$$

όπου

$$A_F = \begin{bmatrix} \frac{v_{0,i+1}^n - \nu_0}{2\Delta x} & \frac{v_{1,i+1}^n - \nu_1}{2\Delta x} & \frac{v_{2,i+1}^n}{\Delta x} \\ \frac{v_{1,i+1}^n - \nu_1}{2\Delta x} & \frac{v_{0,i+1}^n + \frac{v_{2,i+1}^n}{\Delta x} - \nu_0}{2\Delta x} & \frac{v_{1,i+1}^n - 2\nu_1}{\Delta x} \\ \frac{v_{2,i+1}^n}{2\Delta x} & \frac{v_{1,i+1}^n - \nu_1}{2\Delta x} & \frac{2v_{2,i+1}^n + \frac{v_{0,i+1}^n}{2\Delta x} - \nu_0}{\Delta x} \end{bmatrix}$$

$$A_P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\nu_0}{\Delta x^2} & \frac{2\nu_1}{\Delta x^2} & 0 \\ \frac{2\nu_1}{\Delta x^2} & \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\nu_0}{\Delta x^2} & \frac{4\nu_1}{\Delta x^2} \\ 0 & \frac{2\nu_1}{\Delta x^2} & \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\nu_0}{\Delta x^2} \end{bmatrix}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} -\frac{v_{0,i-1}^n - \nu_0}{2\Delta x} & -\frac{v_{1,i-1}^n - \nu_1}{2\Delta x} & -\frac{v_{2,i-1}^n}{\Delta x} \\ -\frac{v_{1,i-1}^n - \nu_1}{2\Delta x} & -\frac{v_{0,i-1}^n - \frac{v_{2,i-1}^n}{\Delta x} - \nu_0}{2\Delta x} & -\frac{v_{1,i-1}^n - 2\nu_1}{\Delta x} \\ -\frac{v_{2,i-1}^n}{2\Delta x} & -\frac{v_{1,i-1}^n - \nu_1}{2\Delta x} & -\frac{2v_{2,i-1}^n + \frac{v_{0,i-1}^n}{2\Delta x} - \nu_0}{\Delta x} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{v_{0,i}^n}{\Delta t} - \frac{f_{1,i+1}^n - f_{1,i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{(v_{0,i+1}^n)^2 - (v_{0,i-1}^n)^2}{2\Delta x} + \frac{(v_{1,i+1}^n)^2 - (v_{1,i-1}^n)^2}{2\Delta x} + \frac{(v_{2,i+1}^n)^2 - (v_{2,i-1}^n)^2}{\Delta x} \\ \frac{v_{1,i}^n}{\Delta t} - \frac{f_{2,i+1}^n - f_{2,i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{1,i+1}^n v_{0,i+1}^n - v_{1,i-1}^n v_{0,i-1}^n}{\Delta x} + 2 \frac{v_{2,i+1}^n v_{1,i+1}^n - v_{2,i-1}^n v_{1,i-1}^n}{\Delta x} \\ \frac{v_{2,i}^n}{\Delta t} - \frac{f_{3,i+1}^n - f_{3,i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{2,i+1}^n v_{0,i+1}^n - v_{2,i-1}^n v_{0,i-1}^n}{\Delta x} + \frac{(v_{1,i+1}^n)^2 - (v_{1,i-1}^n)^2}{2\Delta x} + 2 \frac{(v_{2,i+1}^n)^2 - (v_{2,i-1}^n)^2}{\Delta x} \end{bmatrix}$$

Το σύστημα των εξισώσεων της IPCM (6.27) είναι ένα μπλοκ γραμμικό σύστημα 3×3 τριδιαγώνιας μορφής, που επιλύεται με έναν αλγόριθμο για μπλοκ συστήματα για κάθε χρονική στιγμή $t > 0$ και υπολογίζεται το πεδίο των ταχυτήτων $v_0(x, t)$, $v_1(x, t)$ και $v_2(x, t)$, όπου $v_0(x, t)$ είναι το πεδίο της μέσης τιμής και $v_1(x, t)$, $v_2(x, t)$ τα πεδία των συντελεστών της τυπικής απόκλισης της ταχύτητας.

Οι οριακές συνθήκες της ταχύτητας τίθενται ως εξής

$$\begin{cases} v_0(x_{min}, t) = 1 + d, & t > 0 \\ v_1(x_{min}, t) = 0, & t > 0 \\ v_2(x_{min}, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} v_0(x_{max}, t) = -1, & t > 0 \\ v_1(x_{max}, t) = 0, & t > 0 \\ v_2(x_{max}, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

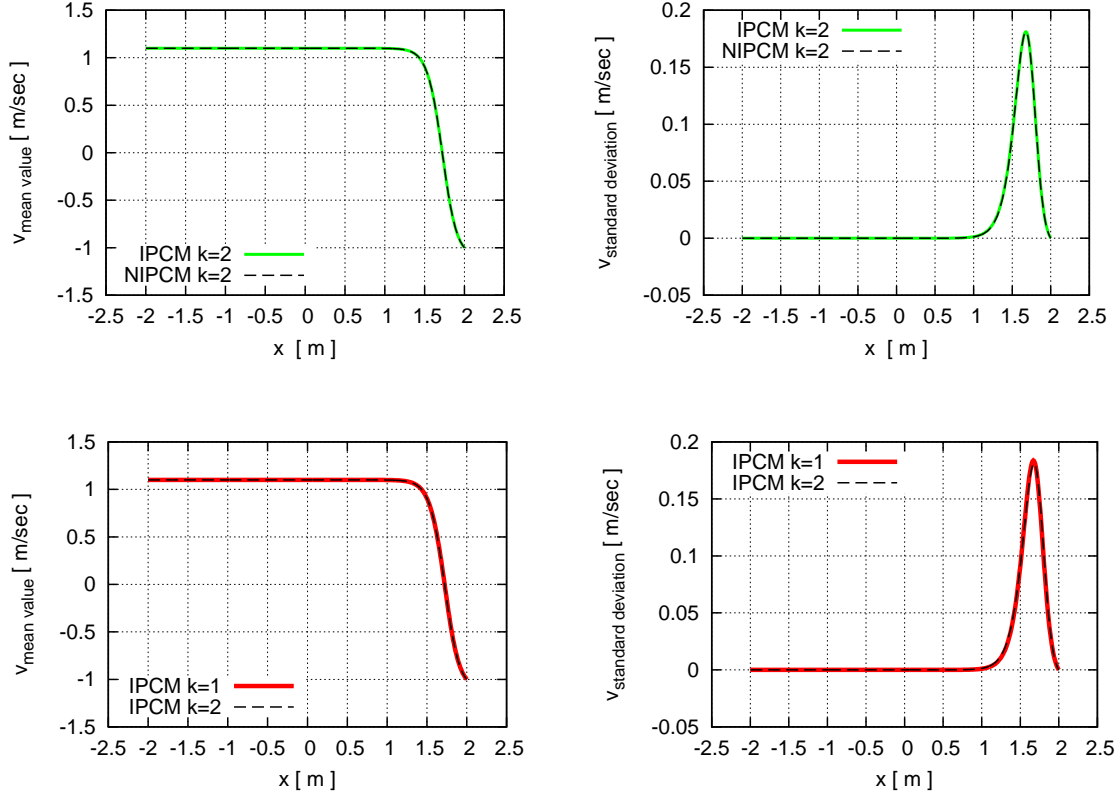
Το πεδίο της τυπικής απόκλισης της ταχύτητας και κατ' επέκταση τα πεδία των συντελεστών της $v_1(x, t)$ και $v_2(x, t)$ μηδενίζονται στα άκρα του εξεταζόμενου μήκους, ώστε να υπάρχει συμφωνία με το πρόβλημα της μέσης ροής για τη 1D συνεκτική εξίσωση Burgers, όπου τίθενται οριακές συνθήκες Dirichlet για την ταχύτητα (6.12).

6.3 Η IPCM($v(x_{min}, t)$) στη Συνεκτική Εξίσωση Burgers

Η ταχύτητα στην είσοδο του εξεταζόμενου μήκους $v(x_{min}, t)$ εισάγει την αβεβαιότητα στο πεδίο ροής, σε αυτή την περίπτωση, και διατυπώνεται σύμφωνα με την έκφραση (6.2). Η στοχαστική συμπεριφορά της ταχύτητας εισόδου επιδρά συνολικά στο πεδίο της ταχύτητας $v(x, t)$, το οποίο με το ανάπτυγμα PC λαμβάνει τη μορφή (6.16).

Αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα PC του πεδίου της ταχύτητας (6.16) στη 1D συνεκτική εξίσωση Burgers (6.3), προκύπτει το ανάπτυγμα PC της εξίσωσης με αβέβαιη είσοδο την ταχύτητα εισόδου στο πεδίο ροής $v(x_{min}, t)$

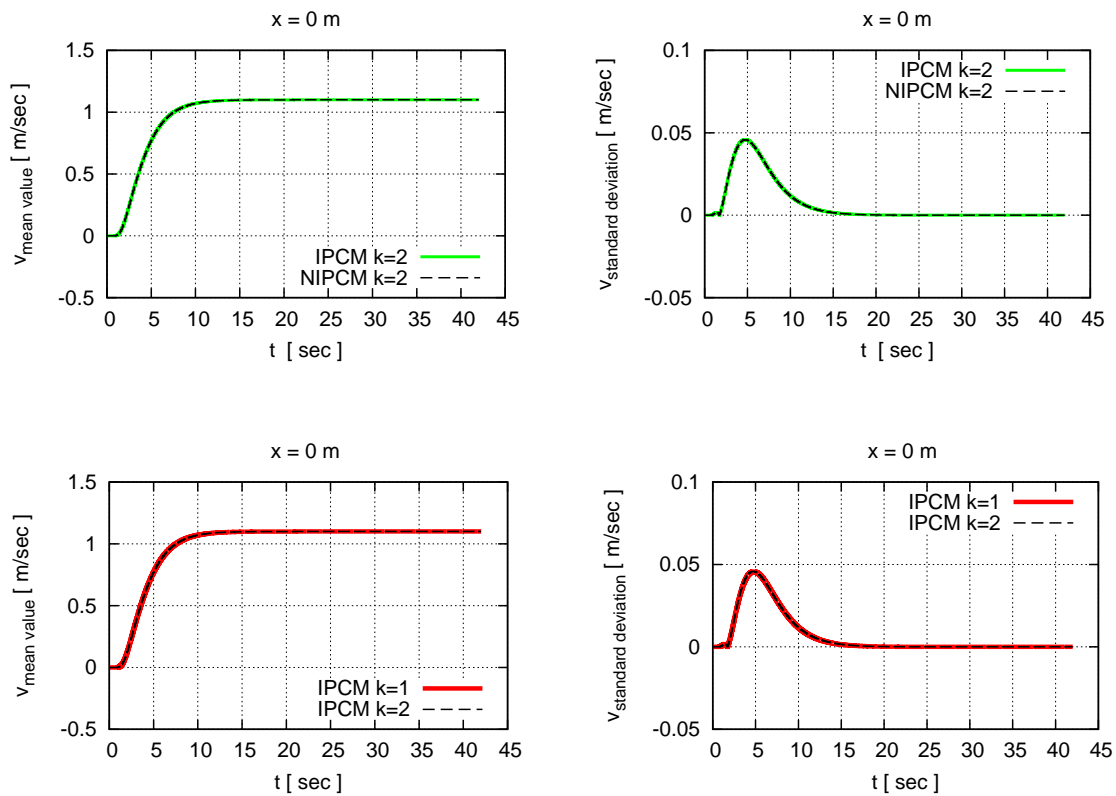
$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{j=0}^k v_j \psi_j \right] + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=0}^k v_j \psi_j \sum_{z=0}^k v_z \psi_z \right] = \nu \frac{d^2}{dx^2} \left[\sum_{j=0}^k v_j \psi_j \right] \implies \dots$$



Σχήμα 6.8: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ταχύτητας $v(x, t)$ στο εξεταζόμενο μήκος $x \in [-2, 2]$ m τη χρονική στιγμή $t = 42$ sec. Αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής είναι η κινηματική συνεκτικότητα με μέση τιμή $\mu_\nu = 0.1$ m²/sec και τυπική απόκλιση $\sigma_\nu = 0.01$ m²/sec. Σύγκριση της IPCM και της NIPCM για τάξη PC $k = 2$. Η IPCM δίνει πολύ κοντινά αποτελέσματα για τάξεις PC $k = 1$ και $k = 2$ για το πεδίο της ταχύτητας.

$$\sum_{j=0}^k \frac{dv_j}{dt} \langle \psi_j, \psi_n \rangle + \sum_{j=0}^k \sum_{z=0}^k \frac{d}{dx} \left(\frac{v_j v_z}{2} \right) \langle \psi_j, \psi_z, \psi_n \rangle = \nu \sum_{j=0}^k \frac{d^2 v_j}{dx^2} \langle \psi_j, \psi_n \rangle \quad (6.28)$$

Τελικά προκύπτουν $k + 1$ πεπλεγμένες εξισώσεις (6.28) με αγνώστους τα πεδία των ντετερμινιστικών συντελεστών της ταχύτητας $v_j(x, t)$ για $j = 0, \dots, k$.



Σχήμα 6.9: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ταχύτητας $v(x, t)$ στη θέση $x = 0 \text{ m}$ για τη χρονική διάρκεια $t \in [0, 42] \text{ sec}$. Αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής είναι η κινηματική συνεκτικότητα με μέση τιμή $\mu_\nu = 0.1 \text{ m}^2/\text{sec}$ και τυπική απόκλιση $\sigma_\nu = 0.01 \text{ m}^2/\text{sec}$. Σύγκριση της IPCM και της NIPCM για τάξη PC $k = 2$. Οι λύσεις της IPCM για τάξεις PC $k = 1$ και $k = 2$ για το πεδίο της ταχύτητα σχεδόν ταυτίζονται.

6.3.1 Ανάπτυγμα PC($v(x, t)$) 1^{ης} Τάξης

Έστω ότι ορίζεται ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης για το πεδίο της ταχύτητας $v(x)$. Τότε, και για την ταχύτητα στην είσοδο $v(x_{min}, t)$, η οποία εισάγει την αβεβαιότητα στο πεδίο ροής, θεωρείται με βάση τη σχέση (6.2), ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης. Η ταχύτητα εισόδου ορίζεται από τη μέση τιμή της $v_0(x_{min}, t)$ και την τυπική της απόκλιση $v_1(x_{min}, t)$ ως εξής

$$v(x_{min}, t) = v_0(x_{min}, t)\psi_0 + v_1(x_{min}, t)\psi_1$$

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα PC στην εξίσωση (6.28), προκύπτουν οι 2 εξισώσεις της IPCM

$$\frac{dv_0}{dt} + \frac{d}{dx} \left[\frac{(v_0)^2}{2} + \frac{(v_1)^2}{2} \right] = \nu \frac{d^2 v_0}{dx^2} \quad (6.29)$$

$$\frac{dv_1}{dt} + \frac{d}{dx} [v_0 v_1] = \nu \frac{d^2 v_1}{dx^2}$$

Το σύστημα των εξισώσεων της IPCM (6.29) διατυπώνεται σε συντηρητική γραφή

$$\frac{d\vec{U}}{dt} + \frac{d\vec{f}}{dx} = \vec{q} \quad (6.30)$$

όπου \vec{U} το διάνυσμα των ταχυτήτων, \vec{f} το διάνυσμα της ατρισούς ροής και \vec{q} το διάνυσμα των όρων πηγής.

Τα διανύσματα \vec{U} , \vec{f} , \vec{q} δίνονται από τις σχέσεις

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(v_0)^2}{2} + \frac{(v_1)^2}{2} \\ v_0 v_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu \frac{d^2 v_0}{dx^2} \\ \nu \frac{d^2 v_1}{dx^2} \end{bmatrix}$$

Παρατηρείται ότι τα διανύσματα \vec{U} και \vec{f} είναι ίδια με της εξίσωσης (6.19).

Για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων της IPCM (6.30) εφαρμόζεται η μέθοδος Briley-McDonald. Κατ' αντιστοιχία με την 1D συνεκτική εξίσωση Burgers

(6.14), ισχύει

$$\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_i^n + \left. \frac{d\vec{f}}{dx} \right|_i^{n+1} = \vec{q}_i^{n+1} \quad (6.31)$$

όπου ο όρος μεταφοράς $\left. \frac{d\vec{f}}{dx} \right|_i^{n+1}$ σύμφωνα με τη σχέση (6.21) είναι

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}_i^{n+1} = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}_i^n + dt \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} v_0 \frac{dv_0}{dt} + v_1 \frac{dv_1}{dt} \\ v_1 \frac{dv_0}{dt} + v_0 \frac{dv_1}{dt} \end{bmatrix}_i^n \quad (6.32)$$

Οι όροι μεταφοράς $\left. \frac{df_1}{dx} \right|_i^{n+1}$ και $\left. \frac{df_2}{dx} \right|_i^{n+1}$ της εξίσωσης (6.32) διακριτοποιούνται με σχήμα πρόσω διαφοράσης 1^{ns} τάξης ακρίβειας στο χρόνο και σχήμα κεντρικής διαφοράσης 2^{ns} τάξης ακρίβειας στο χώρο. Εφαρμόζοντας τα ίδια σχήματα διακριτοποίησης και στους υπόλοιπους όρους του συστήματος των εξισώσεων (6.31), μετά από πράξεις προκύπτει το σύστημα των διακριτοποιημένων εξισώσεων της IPCM σε μητρωϊκή γραφή

$$A_F \begin{bmatrix} v_{0,i+1}^{n+1} \\ v_{1,i+1}^{n+1} \end{bmatrix} + A_P \begin{bmatrix} v_{0,i}^{n+1} \\ v_{1,i}^{n+1} \end{bmatrix} + A_B \begin{bmatrix} v_{0,i-1}^{n+1} \\ v_{1,i-1}^{n+1} \end{bmatrix} = Q \quad (6.33)$$

όπου

$$A_F = \begin{bmatrix} \frac{v_{0,i+1}^n}{2\Delta x} - \frac{\nu}{\Delta x^2} & \frac{v_{1,i+1}^n}{2\Delta x} \\ \frac{v_{1,i+1}^n}{2\Delta x} & \frac{v_{0,i+1}^n}{2\Delta x} - \frac{\nu}{\Delta x^2} \end{bmatrix}, \quad A_P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\nu}{\Delta x^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\nu}{\Delta x^2} \end{bmatrix},$$

$$A_B = \begin{bmatrix} -\frac{v_{0,i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\nu}{\Delta x^2} & -\frac{v_{1,i-1}^n}{2\Delta x} \\ -\frac{v_{1,i-1}^n}{2\Delta x} & -\frac{v_{0,i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\nu}{\Delta x^2} \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{v_{0,i}^n}{\Delta t} - \frac{F_{1,i+1}^n - F_{1,i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{0,i+1}^n v_{0,i+1}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{1,i+1}^n v_{1,i+1}^n}{2\Delta x} - \frac{v_{0,i-1}^n v_{0,i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{v_{1,i-1}^n v_{1,i-1}^n}{2\Delta x} \\ \frac{v_{1,i}^n}{\Delta t} - \frac{F_{2,i+1}^n - F_{2,i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{1,i+1}^n v_{0,i+1}^n}{\Delta x} - \frac{v_{1,i-1}^n v_{0,i-1}^n}{\Delta x} \end{bmatrix}$$

Το σύστημα των εξισώσεων της IPCM (6.33) είναι ένα μπλοκ γραμμικό σύστημα 2×2 τριδιαγώνιας μορφής, που επιλύεται με έναν αλγόριθμο για μπλοκ συστήματα για κάθε χρονική στιγμή $t > 0$ και υπολογίζεται το πεδίο της μέση τιμής $v_0(x, t)$ και της τυπικής απόκλισης $v_1(x, t)$ της ταχύτητας.

Το αρχικό πεδίο των ταχυτήτων είναι

$$v_0(x, 0) = \begin{cases} 1 + d & , \quad x < 0 \\ -1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

και $v_1(x, 0) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οι οριακές συνθήκες της ταχύτητας τίθενται ως εξής

$$\begin{cases} v_0(x_{min}, t) = 1 + d, & t > 0 \\ v_1(x_{min}, t) = a, & t > 0 \end{cases}$$

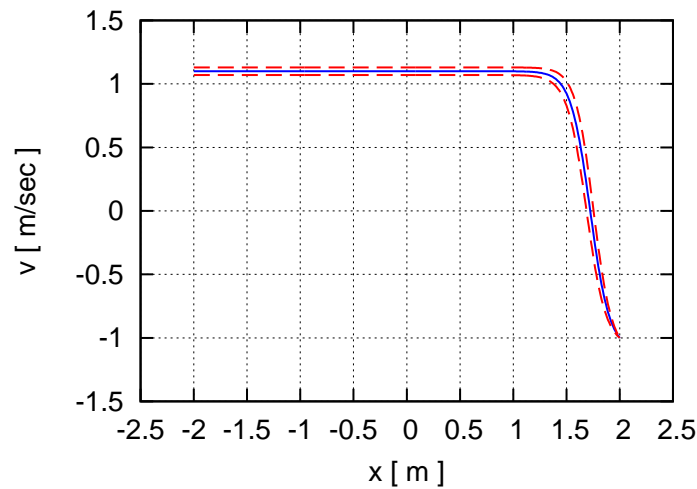
και

$$\begin{cases} v_0(x_{max}, t) = -1, & t > 0 \\ v_1(x_{max}, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

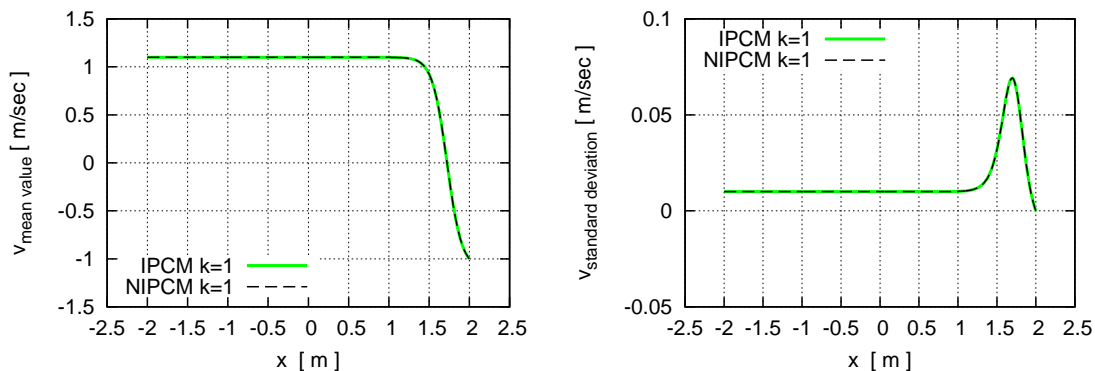
Οι οριακές συνθήκες της ταχύτητας δίνονται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε $v(x_{min}, t) > 1$ για κάθε $t > 0$. Σε αντίθετη περίπτωση η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι μηδενική ή αρνητική για κάποιες τιμές της τυπικής απόκλισης $v_1(x_{min}, t)$, με αποτέλεσμα οι λύσεις του αναπτύγματος PC να αποκλίνουν και να μην έχουν φυσική σημασία.

6.3.2 Ανάπτυγμα PC($v(x, t)$) 2^{ης} Τάξης

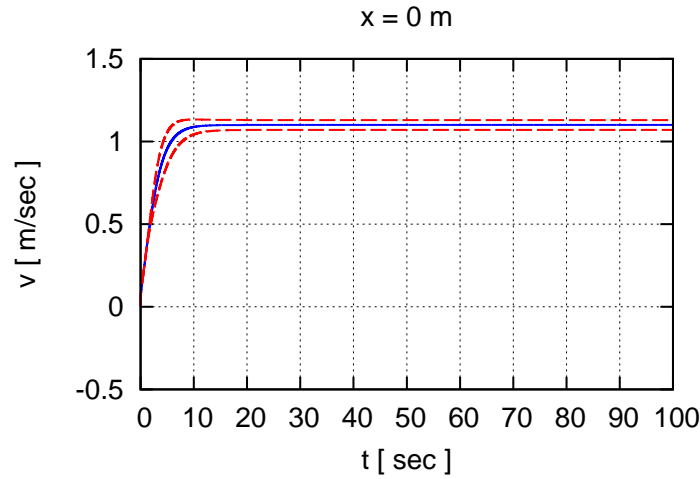
Για την ταχύτητα στην είσοδο $v(x_{min}, t, \xi)$, η οποία εισάγει την αβεβαιότητα στο πεδίο ροής, θεωρείται, όπως και στην προηγούμενη ενότητα, με βάση τη σχέση (6.2), το ανάπτυγμα PC 1^{ης} τάξης. Ορίζοντας για το πεδίο της ταχύτητας ανάπτυγμα PC 2^{ης} τάξης, από την εξίσωση (6.28) προκύπτουν οι 3 εξισώσεις της IPCM



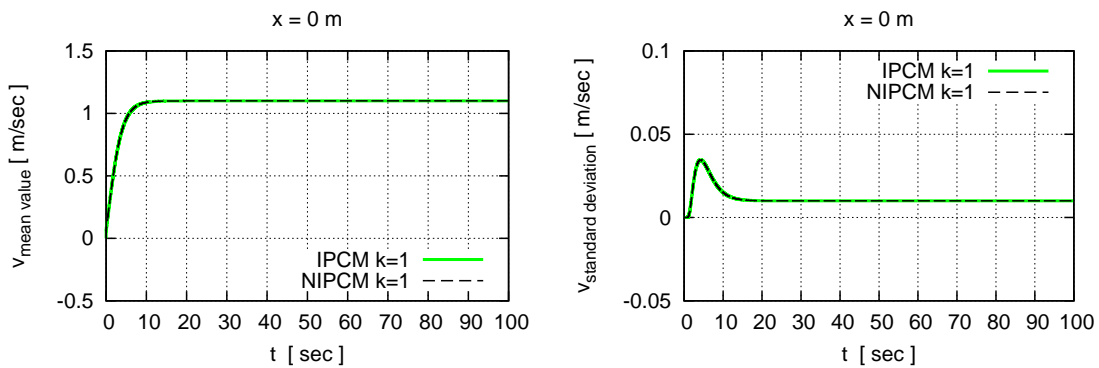
Σχήμα 6.10: Η μέση τιμή και 3 φορές η τυπική απόκλιση (3σ) γύρω από αυτή για την ταχύτητα $v(x, t)$ στο εξεταζόμενο μήκος $x \in [-2, 2]$ m τη χρονική στιγμή $t = 100 \text{ sec} \gg 42 \text{ sec}$, ώστε το κύμα να έχει συγκλίνει παρά τη στοχαστική ταχύτητα εισόδου. Πρόκειται για τη λύση της IPCM (6.33) με αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής την ταχύτητα στην είσοδο, έχοντας μέση τιμή $\mu_{v(-2,t)} = 1.1 \text{ m/sec}$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{v(-2,t)} = 0.01 \text{ m/sec}$.



Σχήμα 6.11: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ταχύτητας $v(x, t)$ στο εξεταζόμενο μήκος $x \in [-2, 2]$ m τη χρονική στιγμή $t = 100 \text{ sec}$. Αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής είναι η ταχύτητα στην είσοδο με μέση τιμή $\mu_{v(-2,t)} = 1.1 \text{ m/sec}$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{v(-2,t)} = 0.01 \text{ m/sec}$. Σύγκριση της IPCM και της NIPCM για τάξη PC $k = 1$ για το πεδίο της ταχύτητας.



Σχήμα 6.12: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση (3σ) γύρω από αυτή της ταχύτητας $v(x,t)$ στη θέση $x = 0 \text{ m}$ για τη χρονική διάρκεια $t \in [0, 100] \text{ sec}$. Πρόκειται για τη λύση της IPCM (6.33) με αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής την ταχύτητα στην είσοδο, έχοντας μέση τιμή $\mu_{v(-2,t)} = 1.1 \text{ m/sec}$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{v(-2,t)} = 0.01 \text{ m/sec}$.



Σχήμα 6.13: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ταχύτητας $v(x,t)$ στη θέση $x = 0 \text{ m}$ για τη χρονική διάρκεια $t \in [0, 100] \text{ sec}$. Αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής είναι η ταχύτητα στην είσοδο με μέση τιμή $\mu_{v(-2,t)} = 1.1 \text{ m/sec}$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{v(-2,t)} = 0.01 \text{ m/sec}$. Σύγκριση της IPCM και της NIPCM για τάξη PC $k = 1$ για το πεδίο της ταχύτητας.

$$\begin{aligned} \frac{dv_0}{dt} + \frac{d}{dx} \left[\frac{(v_0)^2}{2} + \frac{(v_1)^2}{2} + (v_2)^2 \right] &= \nu \frac{d^2 v_0}{dx^2} \\ \frac{dv_1}{dt} + \frac{d}{dx} [v_0 v_1 + 2v_1 v_2] &= \nu \frac{d^2 v_1}{dx^2} \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\frac{dv_2}{dt} + \frac{d}{dx} \left[\frac{(v_1)^2}{2} + 2(v_2)^2 + v_0 v_2 \right] = \nu \frac{d^2 v_2}{dx^2}$$

Σε συντηρητική γραφή, το σύστημα των εξισώσεων της IPCM (6.34) είναι

$$\frac{d\vec{U}}{dt} + \frac{d\vec{f}}{dx} = \vec{q} \quad (6.35)$$

Τα διανύσματα \vec{U} , \vec{f} , \vec{q} δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \vec{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(v_0)^2}{2} + \frac{(v_1)^2}{2} + (v_2)^2 \\ v_0 v_1 + 2v_1 v_2 \\ \frac{(v_1)^2}{2} + 2(v_2)^2 + v_0 v_2 \end{bmatrix}, \\ \vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \nu \frac{d^2 v_0}{dx^2} \\ \nu \frac{d^2 v_1}{dx^2} \\ \nu \frac{d^2 v_2}{dx^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Παρατηρείται ότι τα διανύσματα \vec{U} και \vec{f} είναι ίδια με της εξίσωσης (6.24).

Για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων της IPCM (6.35) εφαρμόζεται η μέθοδος Briley-McDonald. Κατ' αντιστοιχία με την 1D συνεκτική εξίσωση Burgers (6.14), ισχύει

$$\frac{d\vec{U}}{dt} \Big|_i^n + \frac{d\vec{f}}{dx} \Big|_i^{n+1} = \vec{q} \Big|_i^{n+1} \quad (6.36)$$

όπου ο όρος μεταφοράς $\left. \frac{df}{dx} \right|_i^{n+1}$ σύμφωνα με τη σχέση (6.26) είναι

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}_i^{n+1} = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}_i^n + dt \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} v_0 \frac{dv_0}{dt} + v_1 \frac{dv_1}{dt} + 2v_2 \frac{dv_2}{dt} \\ v_1 \frac{dv_0}{dt} + (v_0 + 2v_2) \frac{dv_1}{dt} + 2v_1 \frac{dv_2}{dt} \\ v_2 \frac{dv_0}{dt} + v_1 \frac{dv_1}{dt} + (4v_2 + v_0) \frac{dv_2}{dt} \end{bmatrix}_i^n \quad (6.37)$$

Οι όροι μεταφοράς $\left. \frac{df_1}{dx} \right|_i^{n+1}$, $\left. \frac{df_2}{dx} \right|_i^{n+1}$ και $\left. \frac{df_3}{dx} \right|_i^{n+1}$ της εξίσωσης (6.37) διακριτοποιούνται με σχήμα πρόσω διαφόρισης 1^{ns} τάξης ακρίβειας στο χρόνο και σχήμα κεντρικής διαφόρισης 2^{ns} τάξης ακρίβειας στο χώρο. Εφαρμόζοντας τα ίδια σχήματα διακριτοποίησης και στους υπόλοιπους όρους του συστήματος των εξισώσεων (6.36), μετά από πράξεις προκύπτει το σύστημα των διακριτοποιημένων εξισώσεων της IPCM σε μητρική γραφή

$$A_F \begin{bmatrix} v_{0,i+1}^{n+1} \\ v_{1,i+1}^{n+1} \\ v_{2,i+1}^{n+1} \end{bmatrix} + A_P \begin{bmatrix} v_{0,i}^{n+1} \\ v_{1,i}^{n+1} \\ v_{2,i}^{n+1} \end{bmatrix} + A_B \begin{bmatrix} v_{0,i-1}^{n+1} \\ v_{1,i-1}^{n+1} \\ v_{2,i-1}^{n+1} \end{bmatrix} = Q \quad (6.38)$$

όπου

$$A_F = \begin{bmatrix} \frac{v_{0,i+1}^n}{2\Delta x} - \frac{\nu}{\Delta x^2} & \frac{v_{1,i+1}^n}{2\Delta x} & \frac{v_{2,i+1}^n}{\Delta x} \\ \frac{v_{1,i+1}^n}{2\Delta x} & \frac{v_{0,i+1}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{2,i+1}^n}{\Delta x} - \frac{\nu}{\Delta x^2} & \frac{v_{1,i+1}^n}{\Delta x} \\ \frac{v_{2,i+1}^n}{2\Delta x} & \frac{v_{1,i+1}^n}{2\Delta x} & \frac{2v_{2,i+1}^n}{\Delta x} + \frac{v_{0,i+1}^n}{2\Delta x} - \frac{\nu}{\Delta x^2} \end{bmatrix}$$

$$A_P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\nu}{\Delta x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\nu}{\Delta x^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\nu}{\Delta x^2} \end{bmatrix}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} -\frac{v_{0,i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\nu}{\Delta x^2} & -\frac{v_{1,i-1}^n}{2\Delta x} & -\frac{v_{2,i-1}^n}{\Delta x} \\ -\frac{u_{1,i-1}^n}{2\Delta x} & -\frac{v_{0,i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{v_{2,i-1}^n}{\Delta x} - \frac{\nu}{\Delta x^2} & -\frac{v_{1,i-1}^n}{\Delta x} \\ -\frac{u_{2,i-1}^n}{2\Delta x} & -\frac{v_{1,i-1}^n}{2\Delta x} & -\frac{2v_{2,i-1}^n}{\Delta x} - \frac{v_{0,i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\nu}{\Delta x^2} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{v_{0,i}^n}{\Delta t} - \frac{F_{1,i+1}^n - F_{1,i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{0,i+1}^n v_{0,i+1}^n + v_{1,i+1}^n v_{1,i+1}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{2,i+1}^n v_{2,i+1}^n}{\Delta x} - \frac{v_{0,i-1}^n v_{0,i-1}^n + v_{1,i-1}^n v_{1,i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{v_{2,i-1}^n v_{2,i-1}^n}{\Delta x} \\ \frac{v_{1,i}^n}{\Delta t} - \frac{F_{2,i+1}^n - F_{2,i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{1,i+1}^n v_{0,i+1}^n}{\Delta x} + \frac{2v_{2,i+1}^n v_{1,i+1}^n}{\Delta x} - \frac{v_{1,i-1}^n v_{0,i-1}^n}{\Delta x} - \frac{2v_{2,i-1}^n v_{1,i-1}^n}{\Delta x} \\ \frac{v_{2,i}^n}{\Delta t} - \frac{F_{3,i+1}^n - F_{3,i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{2,i+1}^n v_{0,i+1}^n + 2v_{2,i+1}^n v_{2,i+1}^n}{\Delta x} + \frac{v_{1,i+1}^n v_{1,i+1}^n}{2\Delta x} - \frac{v_{2,i-1}^n v_{0,i-1}^n + 2v_{2,i-1}^n v_{2,i-1}^n}{\Delta x} - \frac{v_{1,i-1}^n v_{1,i-1}^n}{2\Delta x} \end{bmatrix}$$

Το σύστημα των εξισώσεων της IPCM (6.38) είναι ένα μπλοκ γραμμικό σύστημα 3×3 τριδιαγώνιας μορφής, που επιλύεται με έναν αλγόριθμο για μπλοκ συστήματα για κάθε χρονική στιγμή $t > 0$ και υπολογίζεται το πεδίο της μέσης τιμής $v_0(x, t)$ και τα πεδία των συντελεστών της τυπικής απόκλισης $v_1(x, t)$ και $v_2(x, t)$ της ταχύτητας.

Το αρχικό πεδίο των ταχυτήτων είναι

$$v_0(x, 0) = \begin{cases} 1 + d & , \quad x < 0 \\ -1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

και $v_1(x, 0) = 0$, $v_2(x, 0) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

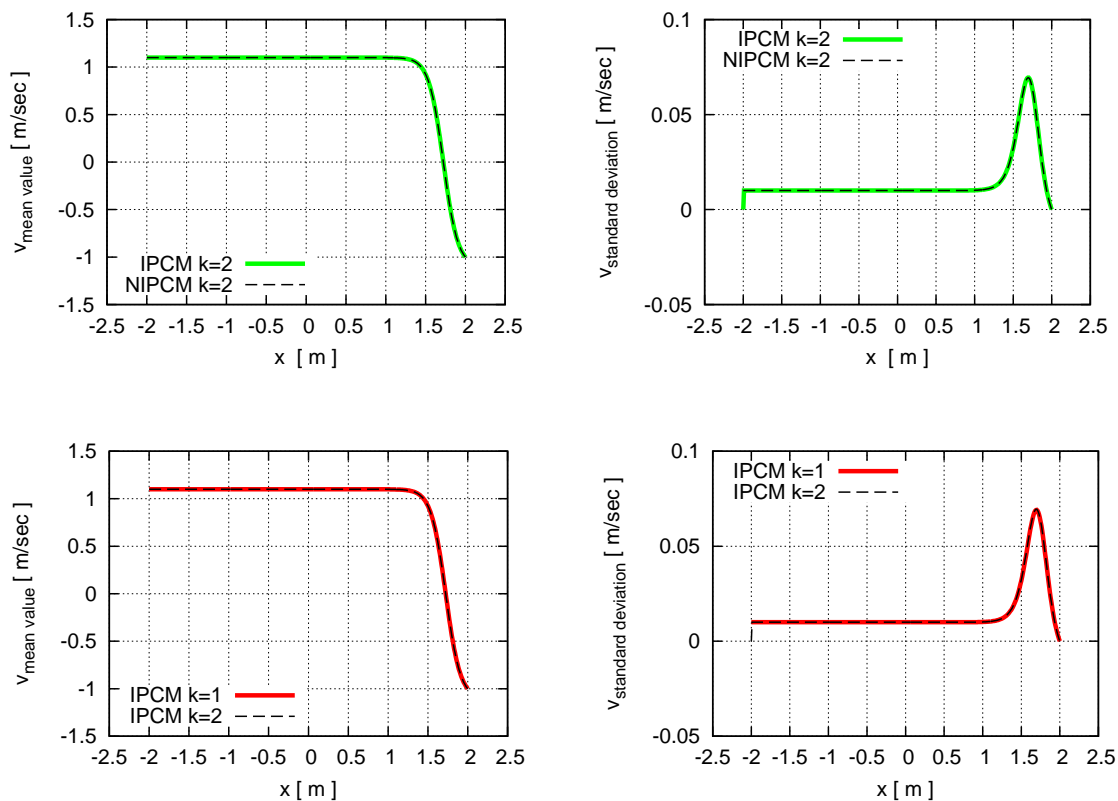
Οι οριακές συνθήκες της ταχύτητας τίθενται ως εξής

$$\begin{cases} v_0(x_{min}, t) = 1 + d, & t > 0 \\ v_1(x_{min}, t) = a, & t > 0 \\ v_2(x_{min}, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

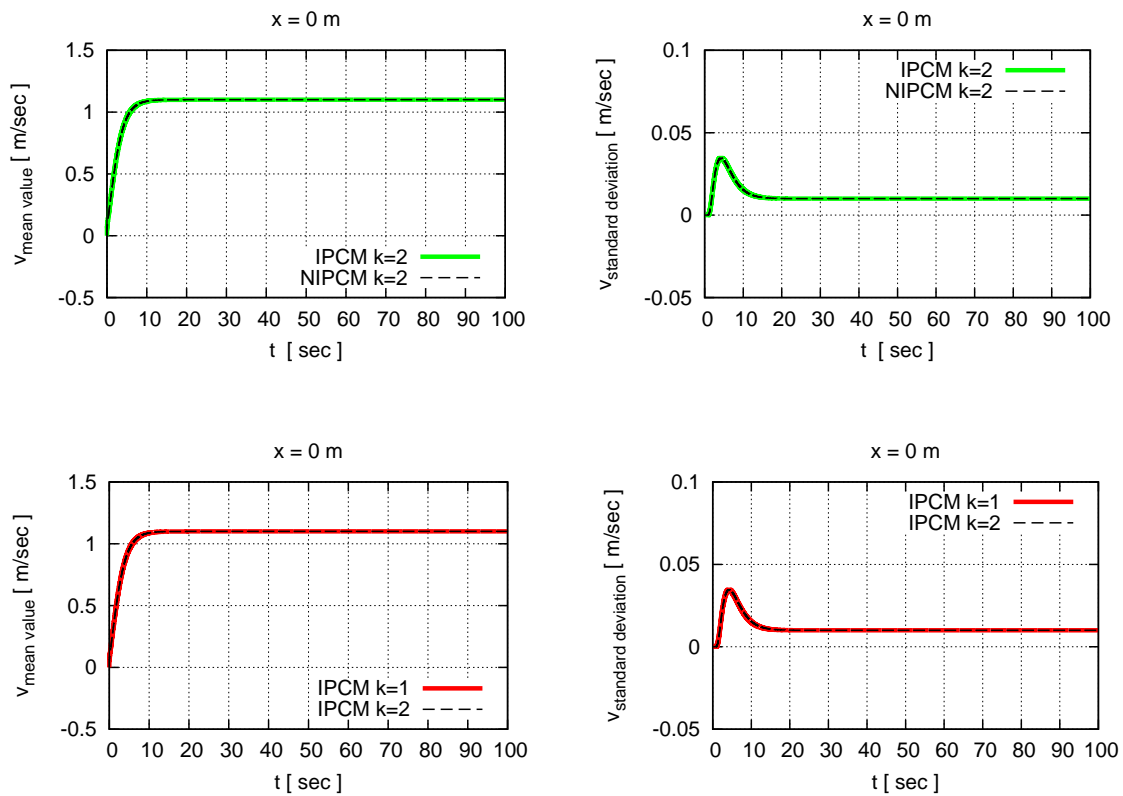
και

$$\begin{cases} v_0(x_{max}, t) = -1, & t > 0 \\ v_1(x_{max}, t) = 0, & t > 0 \\ v_2(x_{max}, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

Και σε αυτήν την περίπτωση οι οριακές συνθήκες της ταχύτητας δίνονται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε $v(x_{min}, t) > 1$ για κάθε $t > 0$. Τότε, η λύση των εξισώσεων του αναπτύγματος PC θα έχει φυσική σημασία.



Σχήμα 6.14: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ταχύτητας $v(x, t)$ στο εξεταζόμενο μήκος $x \in [-2, 2]$ m τη χρονική στιγμή $t = 100$ sec. Αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής είναι η ταχύτητα στην είσοδο με μέση τιμή $\mu_{v(-2,t)} = 1.1$ m/sec και τυπική απόκλιση $\sigma_{v(-2,t)} = 0.01$ m/sec. Σύγκριση της IPCM και της NIPCM για τάξη PC $k = 2$. Η IPCM δίνει πολύ κοντινά αποτελέσματα για τάξεις PC $k = 1$ και $k = 2$ για το πεδίο της ταχύτητας.



Σχήμα 6.15: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ταχύτητας $v(x, t)$ στη θέση $x = 0$ m για τη χρονική διάρκεια $t \in [0, 100]$ sec. Αβέβαιη μεταβλητή εισόδου στο πεδίο ροής είναι η ταχύτητα στην είσοδο με μέση τιμή $\mu_{v(-2,t)} = 1.1$ m/sec και τυπική απόκλιση $\sigma_{v(-2,t)} = 0.01$ m/sec. Σύγκριση της IPCM και της NIPCM για τάξη PC $k = 2$. Οι λύσεις της IPCM για τάξεις PC $k = 1$ και $k = 2$ για το πεδίο της ταχύτητας σχεδόν ταυτίζονται.

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα και Προτάσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο συνοψίζονται τα βασικότερα σημεία της μελέτης, που παρουσιάστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια και διατυπώνονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν. Επίσης, γίνεται αναφορά σε ορισμένες ιδέες για περαιτέρω μελέτη και εμβάθυνση στο θέμα.

7.1 Ανακεφαλαίωση και Συμπεράσματα

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολήθηκε με την IPCM, μια μέθοδο για την ποσοτικοποίηση των αβεβαιοτήτων στο πεδίο ροής, η οποία στηρίζεται στη διατύπωση κάθε στοχαστικού πεδίου ως ένα πολυωνυμικό ανάπτυγμα ορθογωνίων πολυωνύμων με αγνώστους τους ντετερμινιστικούς συντελεστές του στοχαστικού πεδίου και, έπειτα, την αντικατάσταση των αναπτυγμάτων στις εξισώσεις ροής. Η υλοποίηση της μεθόδου πραγματοποιήθηκε για ποικίλες εφαρμογές μίας στοχαστικής εισόδου στην ψευδο-1D ροή ασυμπύεστου ρευστού. Σε κάθε περίπτωση, παρουσιάστηκε η μαθηματική διατύπωση της IPCM 1^{ης} και 2^{ης} τάξης και η διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων για τα προκύπτοντα συστήματα διαφόρων μορφών, σύμφωνα με τη μέθοδο επίλυσης των εξισώσεων της μέσης ροής. Κατά τη μελέτη, προέκυψε η ανάγκη διατύπωσης του αναπτύγματος PC μη-γραμμικών στοχαστικών όρων, η οποία δεν είναι προφανής και διεξήχθησαν οι κατάλληλες διερευνήσεις προς αναζήτηση της ακριβέστερης διατύπωσης. Επίσης, πραγματοποιήθηκαν συγκρίσεις με τη NIPCM για έλεγχο της ισοδυναμίας των 2 μεθόδων. Τέλος, με τη σύγκριση των αποτελεσμάτων της IPCM, αυξανόμενης της τάξης PC, προέκυψαν χρήσιμες διαπιστώσεις ως προς τη σύγκλιση της μεθόδου στα προβλήματα ροής που μελετήθηκαν.

Ακολουθούν τα βασικά συμπεράσματα, όπως προέκυψαν από την ανωτέρω μελέτη:

- Η υλοποίηση της IPCM στην τεχνική της διόρθωσης πίεσης για την επίλυση ασυμπίεστων ψευδο-1D ροών είναι και εφικτή και ακριβής, συγκρίνοντας την με τον απλούστερο ισοδύναμο τρόπο επίλυσης της ροής με τη σδε για την ολική πίεση. Μάλιστα, για το πρόβλημα της ροής μέσα σε αγωγό μεταβλητής διατομής, η μέθοδος συγκλίνει ήδη για αναπτύγματα PC 1^{ης} τάξης για τα υπολογιζόμενα στοχαστικά πεδία της ταχύτητας και της στατικής πίεσης σε όλες τις περιπτώσεις στοχαστικών εισόδων που εξετάστηκαν.
- Η συνήθης διατύπωση του στοχαστικού γινομένου ως ανάπτυγμα PC ίδιας τάξης με καθέναν από τους στοχαστικούς παράγοντές του δεν είναι ακριβής για χαμηλές τάξεις PC. Αντίθετα, προτάθηκε ο ορισμός της τάξης του PC για το γινομένο ίσος με την πραγματική τιμή του (λχ για γινόμενο 2 στοχαστικών μεταβλητών τάξης PC k η καθεμία, η τάξη PC του γινομένου θα είναι $2k$), ώστε να αυξηθεί η ακρίβεια του αναπτύγματος, έχοντας ως σημείο αναφοράς τα αποτελέσματα της NIPCM.
- Οι μη-γραμμικοί στοχαστικοί όροι των στοχαστικών μεταβλητών, όπως τα κλάσματα, οι ρίζες κτλ, μπορούν να διατυπωθούν με ακρίβεια ως αναπτύγματα PC, αν τεθούν ίσοι με μια τυχαία στοχαστική μεταβλητή τάξης PC, που σέβεται τα συμπεράσματα που προέκυψαν για το γινόμενο στοχαστικών μεταβλητών. Σε αυτήν την περίπτωση, πριν από την επίλυση των εξισώσεων ροής, επιλύονται τα επιμέρους συστήματα για προσδιορισμό των ντετερμινιστικών συντελεστών των μη-γραμμικών όρων και αυτά πλέον αντικαθίστανται στις εξισώσεις του αναπτύγματος PC.
- Η IPCM στη συνεκτική εξίσωση Burgers μπορεί να υλοποιηθεί για κάθε μέθοδο επίλυσης της εξίσωσης με πολύ καλή ακρίβεια στα αποτελέσματα ακόμα για αναπτύγματα PC 1^{ης} τάξης.
- Τα αποτελέσματα της IPCM και της NIPCM σχεδόν συμπίπτουν για στοχαστικά πεδία ίδιας τάξης PC, όπως αναμενόταν, καθώς πρόκειται για ισοδύναμες προσεγγίσεις της ίδιας μεθόδου.

7.2 Προτάσεις για Μελλοντική Μελέτη

Ακολουθούν ορισμένες προτάσεις για περαιτέρω εφαρμογές και διερευνήσεις στην I-PCM:

- Για τα προβλήματα ροής που εξετάστηκαν με τις αντίστοιχες στοχαστικές εισόδους, έχοντας γνωστούς πλέον του κώδικες της IPCM προτείνεται ο συνδυασμός της μεθόδου με τη βελτιστοποίηση [6] προς την επίτευξη ενός αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού (robust design). Πέραν της χρήσης εξελικτικών αλγορίθμων, όπου το κέρδος σε υπολογιστικό κόστος είναι προφανές έναντι της NIPCM, ενδιαφέρον παρουσιάζει η ανάπτυξη της συζυγούς μεθόδου για το εκάστοτε πρόβλημα ροής υπό αβεβαιότητες (αιτιοκρατικές μέθοδοι βελτιστοποίησης).
- Η μαθηματική διατύπωση και υλοποίηση της IPCM στην τεχνική της διόρθωσης πίεσης για τη 2D ροή (αλγόριθμος SIMPLE), αξιοποιώντας τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την 1D ροή, παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον και θα συμβάλει στην περαιτέρω κατανόηση της μεθόδου και των υπολογιστικών προκλήσεων που αυτή συνεπάγεται.
- Γενικότερα, με την υλοποίηση της IPCM και σε άλλα προβλήματα ροής ασυμπίεστου ή συμπιεστού ρευστού, κάθε περίπτωση θα έχει να προσδώσει χρήσιμα συμπεράσματα για τη διαχείριση αμφιλεγόμενων στοχαστικών όρων, όπως οι-μη γραμμικοί όροι, αλλά και για την ανάπτυξη των εξισώσεων της IPCM.
- Για μια πιο εκτενή μελέτη της διατύπωσης του αναπτύγματος PC μη-γραμμικών στοχαστικών όρων προτείνεται η χρήση, πέραν της μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία, και άλλων μεθόδων της βιβλιογραφίας [14], όπως το ανάπτυγμα Taylor των εν λόγω όρων και η σύγκριση της ακρίβειας και της ευελιξίας που προσδίδουν σε διάφορες εφαρμογές.
- Σημαντική για την επιβεβαίωση ταχείας σύγκλισης της IPCM είναι η υλοποίησή της για αναπτύγματα PC ανώτερης από 2^{ns} τάξης.
- Η παρούσα εργασία περιορίστηκε μόνο σε πρόβλημα ροής μίας στοχαστικής εισόδου, καθιστώντας σημαντική τη διερεύνηση της μαθηματικής διατύπωσης των εξισώσεων ροής και τον τρόπο επίλυσής τους για προβλήματα περισσότερων στοχαστικών εισόδων.
- Τέλος, συνιστάται η γενίκευση της IPCM για στοχαστικές μεταβλητές εισόδου που δεν ακολουθούν κανονική κατανομή, αλλά οποιαδήποτε άλλη στοχαστική κατανομή [35] (πχ κατανομή Βήτα, εκθετική κατανομή, ομοιόμορφη κατανομή).

Παράρτημα Α΄

Ολοκλήρωση Πολυωνύμων Hermite

Κατά την εφαρμογή της IPCM εμφανίζονται ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(\xi) w(\xi) d\xi \quad (\text{A.1})$$

όπου $\psi_i(\xi)$ το i -οστό πολυώνυμο Hermite για τη στοχαστική μεταβλητή ξ , που ακολουθεί κανονική κατανομή και $w(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF) της κανονικής κατανομής.

Δίνονται τα πρώτα δέκα πιθανοτικά πολυώνυμα Hermite της κανονική κατανομής συναρτήσει της στοχαστικής μεταβλητής ξ :

$$\begin{aligned} \psi_0(\xi) &= 1 \\ \psi_1(\xi) &= \xi \\ \psi_2(\xi) &= \xi^2 - 1 \\ \psi_3(\xi) &= \xi^3 - 3\xi \\ \psi_4(\xi) &= \xi^4 - 6\xi^2 + 3 \\ \psi_5(\xi) &= \xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi \\ \psi_6(\xi) &= \xi^6 - 15\xi^4 + 45\xi^2 - 15 \\ \psi_7(\xi) &= \xi^7 - 21\xi^5 + 105\xi^3 - 105\xi \\ \psi_8(\xi) &= \xi^8 - 28\xi^6 + 210\xi^4 - 420\xi^2 + 105 \\ \psi_9(\xi) &= \xi^9 - 36\xi^7 + 378\xi^5 - 1260\xi^3 + 945\xi \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Το ολοκλήρωμα μιας τυχαίας Gauss-ιανής συνάρτησης πολλαπλασιασμένης με μια άρτια δύναμη του ξ είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2n} e^{-\alpha \xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{(2n-1)!!}{(2\alpha)^n} \quad (\text{A'.3})$$

Για $\alpha = \frac{1}{2}$, το ολοκλήρωμα (A'.3) γίνεται

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2n} w(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = (2n-1)!! \quad (\text{A'.4})$$

όπου το διπλό παραγοντικό (!!) ορίζεται ως

$$n!! = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n/2} (2k) = n(n-2) \cdots 2, & \text{αν το } n \text{ είναι άρτιος} \\ \prod_{k=1}^{(n+1)/2} (2k-1) = n(n-2) \cdots 1, & \text{αν το } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

Για κάθε περιττό εκθέτη της στοχαστικής μεταβλητής ξ , το ολοκλήρωμα (A'.4) μηδενίζεται

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2n+1} w(\xi) d\xi = 0$$

Τότε, από το ολοκλήρωμα (A'.4) μπορούν να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα της PDF της κανονικής κατανομής πολλαπλασιασμένης με μια άρτια δύναμη του ξ και, επομένως, είναι υπολογίσιμα ολοκληρώματα της μορφής (A'.1).

Δίνονται τα ολοκληρώματα των πρώτων πέντε άρτιων εκθετών $2n$ της στοχαστικής μεταβλητής ξ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) d\xi = 1$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 w(\xi) d\xi = 1$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^4 w(\xi) d\xi = 3$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^6 w(\xi) d\xi = 15$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^8 w(\xi) d\xi = 105$$

Παράρτημα Β'

Τυπολόγιο Προβολών Galerkin

Ως προβολή Galerkin ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο δύο ή περισσότερων ορθογώνιων πολυωνύμων $\psi_i(\xi)$ με τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $w(\xi)$ της αντίστοιχης στοχαστικής κατανομής στο πεδίο ορισμού τους.

Ακολουθεί ένα σύντομο τυπολόγιο με τις προβολές Galerkin των πολυωνύμων Hermite της κανονικής κατανομής για χρήση στην IPCM με στοχαστικά πεδία, που ακολουθούν κανονική κατανομή και εκφράζονται με αναπτύγματα PC έως και $2^{\text{ης}}$ τάξης:

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(\xi) \psi_j(\xi) w(\xi) d\xi$$

$$\langle \psi_0, \psi_0 \rangle = 1$$

$$\langle \psi_1, \psi_1 \rangle = 1$$

$$\langle \psi_2, \psi_2 \rangle = 2$$

$$\langle \psi_0, \psi_1 \rangle = \langle \psi_1, \psi_0 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_0, \psi_2 \rangle = \langle \psi_2, \psi_0 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1 \rangle = 0$$

Γενικά, από τις ιδιότητες των ορθογώνιων πολυωνύμων Hermite, ισχύει ότι

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \langle \psi_i^2 \rangle \delta_{ij} = i! \delta_{ij}$$

$$\langle \psi_i, \psi_j, \psi_z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(\xi) \psi_j(\xi) \psi_z(\xi) w(\xi) d\xi$$

$$\langle \psi_0, \psi_0, \psi_0 \rangle = 1$$

$$\langle \psi_1, \psi_1, \psi_1 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_2, \psi_2, \psi_2 \rangle = 8$$

$$\langle \psi_0, \psi_0, \psi_1 \rangle = \langle \psi_0, \psi_1, \psi_0 \rangle = \langle \psi_1, \psi_0, \psi_0 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_1, \psi_1, \psi_0 \rangle = \langle \psi_1, \psi_0, \psi_1 \rangle = \langle \psi_0, \psi_1, \psi_1 \rangle = 1$$

$$\langle \psi_0, \psi_0, \psi_2 \rangle = \langle \psi_0, \psi_2, \psi_0 \rangle = \langle \psi_2, \psi_0, \psi_0 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_2, \psi_2, \psi_0 \rangle = \langle \psi_2, \psi_0, \psi_2 \rangle = \langle \psi_0, \psi_2, \psi_2 \rangle = 2$$

$$\langle \psi_1, \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1, \psi_1 \rangle = 2$$

$$\langle \psi_2, \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_2 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_0, \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_0, \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_1, \psi_0, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_0 \rangle = \langle \psi_2, \psi_0, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1, \psi_0 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_i, \psi_j, \psi_z, \psi_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(\xi) \psi_j(\xi) \psi_z(\xi) \psi_n(\xi) w(\xi) d\xi$$

$$\langle \psi_0, \psi_0, \psi_0, \psi_0 \rangle = 1$$

$$\langle \psi_1, \psi_1, \psi_1, \psi_1 \rangle = 3$$

$$\langle \psi_2, \psi_2, \psi_2, \psi_2 \rangle = 60$$

$$\langle \psi_1, \psi_0, \psi_0, \psi_0 \rangle = \langle \psi_0, \psi_1, \psi_0, \psi_0 \rangle = \langle \psi_0, \psi_0, \psi_1, \psi_0 \rangle = \langle \psi_0, \psi_0, \psi_0, \psi_1 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_1, \psi_1, \psi_0, \psi_0 \rangle = \langle \psi_0, \psi_0, \psi_1, \psi_1 \rangle = \langle \psi_1, \psi_0, \psi_1, \psi_0 \rangle = \langle \psi_0, \psi_1, \psi_0, \psi_1 \rangle = \langle \psi_0, \psi_1, \psi_1, \psi_0 \rangle \\ = \langle \psi_1, \psi_0, \psi_0, \psi_1 \rangle = 1$$

$$\langle \psi_1, \psi_1, \psi_1, \psi_0 \rangle = \langle \psi_1, \psi_1, \psi_0, \psi_1 \rangle = \langle \psi_1, \psi_0, \psi_1, \psi_1 \rangle = \langle \psi_0, \psi_1, \psi_1, \psi_1 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_2, \psi_0, \psi_0, \psi_0 \rangle = \langle \psi_0, \psi_2, \psi_0, \psi_0 \rangle = \langle \psi_0, \psi_0, \psi_2, \psi_0 \rangle = \langle \psi_0, \psi_0, \psi_0, \psi_2 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_2, \psi_2, \psi_0, \psi_0 \rangle = \langle \psi_0, \psi_0, \psi_2, \psi_2 \rangle = \langle \psi_2, \psi_0, \psi_2, \psi_0 \rangle = \langle \psi_0, \psi_2, \psi_0, \psi_2 \rangle = \langle \psi_0, \psi_2, \psi_2, \psi_0 \rangle \\ = \langle \psi_2, \psi_0, \psi_0, \psi_2 \rangle = 2$$

$$\langle \psi_2, \psi_2, \psi_2, \psi_0 \rangle = \langle \psi_2, \psi_2, \psi_0, \psi_2 \rangle = \langle \psi_2, \psi_0, \psi_2, \psi_2 \rangle = \langle \psi_0, \psi_2, \psi_2, \psi_2 \rangle = 8$$

$$\langle \psi_1, \psi_2, \psi_0, \psi_0 \rangle = \langle \psi_1, \psi_0, \psi_2, \psi_0 \rangle = \langle \psi_1, \psi_0, \psi_0, \psi_2 \rangle = \langle \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_0 \rangle = \langle \psi_0, \psi_1, \psi_0, \psi_2 \rangle \\ = \langle \psi_2, \psi_1, \psi_0, \psi_0 \rangle = \langle \psi_0, \psi_0, \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_2, \psi_0, \psi_1, \psi_0 \rangle = \langle \psi_0, \psi_2, \psi_1, \psi_0 \rangle \\ = \langle \psi_0, \psi_0, \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_0, \psi_0, \psi_1 \rangle = \langle \psi_0, \psi_2, \psi_0, \psi_1 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_1, \psi_1, \psi_2, \psi_0 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_1, \psi_0 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1, \psi_1, \psi_0 \rangle = \langle \psi_1, \psi_0, \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_0, \psi_1 \rangle \\ = \langle \psi_2, \psi_0, \psi_1, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1, \psi_0, \psi_1 \rangle = \langle \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_0, \psi_2, \psi_1, \psi_1 \rangle \\ = \langle \psi_1, \psi_1, \psi_0, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \psi_0, \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_0, \psi_1, \psi_1, \psi_2 \rangle = 2$$

$$\langle \psi_1, \psi_1, \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \psi_1, \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_1, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1, \psi_1, \psi_1 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_2, \psi_2, \psi_1, \psi_0 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1, \psi_2, \psi_0 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_2, \psi_0 \rangle = \langle \psi_2, \psi_2, \psi_0, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_0, \psi_2, \psi_1 \rangle \\ = \langle \psi_0, \psi_2, \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_2 \rangle = \langle \psi_0, \psi_2, \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \psi_0, \psi_2, \psi_2 \rangle \\ = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_0, \psi_2 \rangle = \langle \psi_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1, \psi_0, \psi_2 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_2, \psi_2, \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_2, \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1, \psi_2, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_2, \psi_2 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_2, \psi_2, \psi_1, \psi_1 \rangle = \langle \psi_1, \psi_1, \psi_2, \psi_2 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1, \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1, \psi_2, \psi_1 \rangle \\ = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_1, \psi_2 \rangle = 10$$

Παράρτημα Γ'

Μέση Τιμή και Τυπική Απόκλιση Στοχαστικού Πεδίου $f(x)$

Το στοχαστικό πεδίο $f(x)$ σύμφωνα με τη θεωρία του πολυωνυμικού χάους (PC) εκφράζεται ως

$$f(x) = \sum_{i=0}^k f_i(x) \psi_i(\xi) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad (\Gamma'.1)$$

όπου η στοχαστική μεταβλητή ξ κατανέμεται με βάση τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $w(\xi)$ της κανονικής κατανομής και τα πολυώνυμα $\psi_i(\xi)$ είναι τα πολυώνυμα Hermite της κανονικής κατανομής i -οστού βαθμού.

- Η πρώτη στατιστική ροπή του στοχαστικού πεδίου $f(x)$ είναι το πεδίο της μέσης τιμής $\mu_f(x)$ και ορίζεται ως

$$\mu_f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) w(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^k f_i(x) \psi_i(\xi) w(\xi) d\xi \quad (\Gamma'.2)$$

- Η δεύτερη στατιστική ροπή του στοχαστικού πεδίου $f(x)$ είναι το πεδίο της διακύμανσης $\sigma_f^2(x)$ και ορίζεται ως

$$\sigma_f^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) w(\xi) d\xi - \mu_f^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k f_i(x) \psi_i(\xi) \right)^2 w(\xi) d\xi - \mu_f^2(x) \quad (\Gamma'.3)$$

Γ'.0.1 Ανάπτυγμα PC($f(x)$) 1^{ης} Τάξης

Για ανάπτυγμα PC 1ης τάξης, το στοχαστικό πεδίο $f(x)$ έχει τη μορφή

$$f(x) = f_0(x)\psi_0(\xi) + f_1(x)\psi_1(\xi) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad (\Gamma'.4)$$

- Η μέση τιμή του στοχαστικού πεδίου $f(x)$ προκύπτει με αντικατάσταση του αναπτύγματος PC 1^{ης} τάξης (Γ'.4) στην εξίσωση (Γ'.2) ως εξής

$$\begin{aligned} \mu_f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)w(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (f_0(x)\psi_0(\xi) + f_1(x)\psi_1(\xi))w(\xi) d\xi \\ &= f_0(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(\xi)w(\xi) d\xi + f_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\xi)w(\xi) d\xi \\ &= f_0(x) \end{aligned}$$

- Η διακύμανση του στοχαστικού πεδίου $f(x)$ προκύπτει με αντικατάσταση της (Γ'.4) στην εξίσωση (Γ'.3) ως εξής

$$\begin{aligned} \sigma_f^2(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)w(\xi) d\xi - \mu_f^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_0(x)\psi_0(\xi) + f_1(x)\psi_1(\xi))^2 w(\xi) d\xi - f_0^2(x) \\ &= f_0^2(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(\xi)\psi_0(\xi)w(\xi) d\xi + 2f_0(x)f_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(\xi)\psi_1(\xi)w(\xi) d\xi \\ &\quad + f_1^2(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\xi)\psi_1(\xi)w(\xi) d\xi - f_0^2(x) \\ &= f_0^2(x)\langle \psi_0, \psi_0 \rangle + 2f_0(x)f_1(x)\langle \psi_0, \psi_1 \rangle + f_1^2(x)\langle \psi_1, \psi_1 \rangle - f_0^2(x) = f_1^2(x) \end{aligned}$$

Άρα, η τυπική απόκλιση του στοχαστικού πεδίου $f(x)$ είναι

$$\sigma_f(x) = |f_1(x)|$$

Γ'.0.2 Ανάπτυγμα PC($f(x)$) 2^{ης} Τάξης

Για ανάπτυγμα PC 2ης τάξης, το στοχαστικό πεδίο $f(x)$ έχει τη μορφή

$$f(x) = f_0(x)\psi_0(\xi) + f_1(x)\psi_1(\xi) + f_2(x)\psi_2(\xi) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad (\Gamma'.5)$$

- Η μέση τιμή του στοχαστικού πεδίου $f(x)$ προκύπτει με αντικατάσταση του PC 2^{ης} τάξης (Γ'.5) στην εξίσωση (Γ'.2)

$$\begin{aligned} \mu_f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)w(x) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (f_0(x)\psi_0(\xi) + f_1(x)\psi_1(\xi) + f_2(x)\psi_2(\xi))w(\xi) d\xi \\ &= f_0(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(\xi)w(\xi) d\xi + f_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\xi)w(\xi) d\xi + f_2(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(\xi)w(\xi) d\xi \\ &= f_0(x) \end{aligned}$$

- Η διακύμανση του στοχαστικού πεδίου $f(x)$ προκύπτει με αντικατάσταση της (Γ'.5) στην εξίσωση (Γ'.3)

$$\begin{aligned} \sigma_f^2(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)w(\xi) d\xi - \mu_f^2(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_0(x)\psi_0(\xi) + f_1(x)\psi_1(\xi) + f_2(x)\psi_2(\xi))^2w(\xi) d\xi - f_0^2(x) \\ &= f_0^2(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(\xi)\psi_0(\xi)w(\xi) d\xi + f_1^2(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\xi)\psi_1(\xi)w(\xi) d\xi \\ &\quad + f_2^2(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(\xi)\psi_2(\xi)w(\xi) d\xi + 2f_0(x)f_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(\xi)\psi_1(\xi)w(\xi) d\xi \\ &\quad + 2f_1(x)f_2(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1\xi\psi_2w d\xi + 2f_0(x)f_2(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(\xi)\psi_2(\xi)w(\xi) d\xi - f_0^2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_0^2(x)\langle\psi_0, \psi_0\rangle + f_1^2(x)\langle\psi_1, \psi_1\rangle + f_2^2(x)\langle\psi_2, \psi_2\rangle + 2f_0(x)f_1(x)\langle\psi_0, \psi_1\rangle \\
&+ 2f_1(x)f_2(x)\langle\psi_1, \psi_2\rangle + 2f_0(x)f_2(x)\langle\psi_0, \psi_2\rangle - f_0^2(x) = f_1^2(x) + 2f_2^2(x)
\end{aligned}$$

Άρα, η τυπική απόκλιση του στοχαστικού πεδίου $f(x)$ είναι

$$\sigma_f(x) = \sqrt{f_1^2(x) + 2f_2^2(x)}$$

Γενικά, για κάθε στοχαστικό πεδίο $f(x)$ της μορφής (Γ'.1), το πεδίο της μέσης τιμής $\mu_f(x)$ και της διακύμανσης $\sigma_f^2(x)$ ορίζονται ως

$$\bullet \mu_f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^k f_i(x) \psi_i(\xi) w(\xi) d\xi = f_0(x) \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^k f_i(x) \psi_i(\xi) w(\xi) d\xi = f_0(x)$$

$$\bullet \sigma_f^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^k f_i^2(x) \psi_i^2(\xi) w(\xi) d\xi - \mu_f^2(x) = \sum_{i=1}^k f_i^2(x) \langle\psi_i^2\rangle = \sum_{i=1}^k f_i^2(x) i!$$

Παράρτημα Δ΄

Βιβλιογραφία

- [1] Σ. Γ. Τσαγγάρης. *Μηχανική των Ρευστών*. Συμεών, 2005.
- [2] Ε. Παπουτσής-Κιαχαγιάς. *Συζυγείς μέθοδοι για το στιβαρό σχεδιασμό αεροδυναμικών μορφών με υπολογισμό τρίτων παραγώγων. Εφαρμογή σε μονοδιάστατους αγωγούς*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2009.
- [3] Γ. Χ. Μπεργελές. *Υπολογιστική Ρευστομηχανική*. Συμεών, 2012.
- [4] Γ. Πάμπλης. *Υλοποίηση αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους στον αεροδυναμικά στιβαρό σχεδιασμό. Βελτιστοποίηση με εξελικτικούς αλγορίθμους υπό στοχαστικές εισόδους*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2015.
- [5] Κ. Χ. Γιαννάκογλου. *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς*. Ε.Μ.Π., 2003.
- [6] Κ. Χ. Γιαννάκογλου. *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Ε.Μ.Π., 2006.
- [7] Alekseev A. K., Navon I. M., and Zelentsov M. E. The estimation of functional uncertainty using polynomial chaos and adjoint equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 67:242–272, 2011.
- [8] Anderson, D. A., Tannehill, J. C., and Pletcher, R. H. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. Hemisphere Publishing, New York, NY, 1984.
- [9] Askey, W. and Wilson, J. Some basic hypergeometric polynomials that generalize Jacobi polynomials. *Memoirs of the American Mathematical Society, AMS, Providence, RI*, παγε 319, 1985.
- [10] Asmussen, S. and Glynn, P. W. *Stochastic Simulation: Algorithms and Analysis*. Springer, 2007.
- [11] Bijl, H., Lucor, D., Mishra, S. and Schwab, C. *Uncertainty quantification in computational fluid dynamics*. Springer, 2013.

-
- [12] Bowman, K. O. and Shenton, L. R. Estimator: Method of Moments. *Encyclopedia of statistical sciences*, Wiley, παρρεσ 2092–2098, 1998.
- [13] Cooper, J. *Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB*. Springer, 1998.
- [14] Debusschere, B. J., et al. Numerical challenges in the use of polynomial chaos representations for stochastic processes. *SIAM journal on scientific computing*, 26.2:698–719, 2004.
- [15] Giannakoglou, K. C. and Politis, E. S. A segregated implicit solution algorithm for 2D and 3D laminar incompressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 21:1067–1086, 1995.
- [16] Hamarat, C., Kwakkel, J. H. and Pruyt, E. Adaptive robust design under deep uncertainty. *Journal of Technological Forecasting and Social Change*, 80(3):408–418, 2013.
- [17] Hammersley, J. M. and Handscomb, D. C. Monte Carlo Methods. *Biometrische Zeitschrift*, 8(3):209, 1966.
- [18] Hosder, S., Walters R. W. and Perez, R. A Non-Intrusive Polynomial Chaos Method For Uncertainty Propagation in CFD Simulations. *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2006.
- [19] Hu, C. and Youn, B. D. Adaptive-sparse polynomial chaos expansion for reliability analysis and design of complex engineering systems. *Struct Multidisc Optim*, 43:419–442, 2011.
- [20] Krehl, P. O.K. The classical Rankine-Hugoniot jump conditions, an important cornerstone of modern shock wave physics: ideal assumptions vs. reality. *The European Physical Journal*, 40(2):159–204, 2005.
- [21] Lu, X. and Li, H. X. Perturbation theory based robust design under model uncertainty. *Journal of Mechanical Design*, 131(11), 2009.
- [22] Moody, L.F. Friction factors for pipe flow. *Transactions of the ASME*, 66(8):671–678, 1944.
- [23] norato, G., Loeven, G. J. A., Ghorbaniasl, G., Bijl, H., and Lacor, C. Comparison of intrusive and non-intrusive polynomial chaos methods for CFD applications in aeronautics. *V European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS*, 67:14–17, 2010.
- [24] Oberkampf, W. L., Trucano, T. G. and Hirsch, C. Verification, validation and predictive capability in computational engineering and physics. *Foundations for Verification and Validation in the 21st Century Workshop*, 2002.
- [25] Owen, A. B. *Monte Carlo theory, methods and examples*. Stanford University, 2013.
-

-
- [26] Papoutsis-Kiachagias, E. M., Papadimitriou, D. I. and Giannakoglou, K. C. Robust design in aerodynamics using third-order sensitivity analysis based on discrete adjoint. Application to quasi-1D flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 69:699, 2012.
- [27] Patankar, S. V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. CRC press, 1980.
- [28] Patankar, S. V. and Spalding, D. B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15:1787–1806, 1972.
- [29] Schechter, S. Traveling-wave solutions of convection-diffusion systems by center manifold reduction. *Nonlinear Analysis*, 49:35–59, 2002.
- [30] Schechter, S. Computation of Riemann solutions using the Dafermos regularization and continuation. *Discrete and continuous dynamical systems*, 10(4):965–986, 2004.
- [31] Versteeg, H. K. and Malalasekera W. *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. Pearson Education, 2007.
- [32] Wiener, W. The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4):897–926, 1938.
- [33] Xiu D. Fast Numerical Methods for Stochastic Computations: A Review. *Communications in Computational Physics*, 5(2-4):242–272, 2009.
- [34] Xiu, D. and Karniadakis, G. E. The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(2):619–644, 2002.
- [35] Xiu, D. and Karniadakis, G. E. Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos. *Journal of Computational Physics*, 187:137–167, 2003.
-

