



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Τομέας Ρευστών

Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

**Υπολογιστική Διερεύνηση Μη-Μόνιμων, Ατριβών Ροών, γύρω από
Κινούμενα και Παραμορφούμενα Στερεά Σώματα με τη Μέθοδο των
Τεμνομένων Κυψελών (Cut-Cell)**

Διπλωματική Εργασία

Αθανάσιος Νάτσικας

Επιβλέπων : Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2017



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής &
Βελτιστοποίησης

Υπολογιστική Διερεύνηση Μη-Μόνιμων, Ατριβών Ροών, γύρω από Κινούμενα και Παραμορφούμενα Στερεά Σώματα με τη Μέθοδο των Τεμνομένων Κυψελών (Cut-Cell)

Διπλωματική Εργασία

Αθανάσιος Νάτσικας

Επιβλέπων: Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Η διπλωματική αυτή εργασία αποτελεί διερευνητική μελέτη σε μεθόδους και λογισμικό υπολογιστικής ρευστοδυναμικής, για την επίλυση ατριβών, διδιάστατων, συμπιεστών ροών εξωτερικής και εσωτερικής αεροδυναμικής με χρονικά μεταβαλλόμενα στερεά όρια. Χρησιμοποιείται η προσέγγιση μη-οριόδετων πλεγμάτων/εμβαπτιζόμενων ορίων (Immersed Boundary method), εφαρμόζοντας πιο συγκεκριμένα την τεχνική των τεμνομένων κυψελών (cut-cell), σε επιλύτη ροής των εξισώσεων Euler με διακριτοποίηση πεπερασμένων όγκων, ανεπτυγμένων στη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του ΕΜΠ.

Βασικό σενάριο μελέτης αποτέλεσε η βιομημητική περίπτωση της κυματόμορφης λίκνισης των χελιών (Anguilliform locomotion), με πρωταρχικό στόχο την αξιολόγηση των δυνατοτήτων του λογισμικού τεμνομένων κυψελών σε πολύπλοκα κινούμενες γεωμετρίες. Ταυτόχρονα, όμως, γίνεται βασική έρευνα στην αεροδυναμική των λικνιζόμενων αεροτομών, εξετάζοντας παράλληλα την δυνατότητα παραγωγής πρόωσης μέσω τέτοιων διατάξεων.

Επιπλέον, μελετάται η διδιάστατη περίπτωση της συμπιεστής, ατριβούς, ροής που περιρρέει δύο παράλληλως τοποθετημένους κυλίνδρους, με διάκεντρο κάθετη στην επ' άπειρο ροή, οι οποίοι εκτελούν αρμονική κίνηση προσέγγισης-απομάκρυνσης. Το πρόβλημα αυτό, εξετάζει την ικανότητα πρόλεξης ροών του λογισμικού, σε περιπτώσεις όπου υφίσταται αλληλεπίδραση ροών γύρω από δύο στερεά σώματα.

Τέλος, επιλύεται η διδιάστατη, ατριβής, συμπιεστή ροή δια μέσου της σταθερής περυγώσης ενός ιδεατού ακτινικού συμπιεστή, ένα μείζονος σημασίας θέμα για τη διερεύνηση της ικανότητας πρόλεξης του λογισμικού τεμνομένων κυψελών, σε ροές με πολυάρθρο στερεά σώματα.



National Technical University of Athens

School of Mechanical Engineering
Fluids Department
Lab. of Thermal Turbomachines
Parallel CFD & Optimization Unit

Computational Studies on the Cut-Cell, Immersed Boundary Method, in Unsteady, Inviscid flows past Moving and Transforming Solid Boundaries

Diploma Thesis

Athanasios Natsikas

Supervisor: K. C. Giannakoglou, Professor NTUA

Abstract

This diploma thesis is a compilation of studies on methods used to numerically solve unsteady, inviscid, two-dimensional, internal and external flows of a compressible fluid, around solid bodies with moving and transforming boundaries, through a cut-cell, immersed boundaries method which was developed by the Parallel CFD & Optimization Unit of NTUA.

The main test case is concerned with an undulating, flexible airfoil in parallel air flow, a bio-inspired kind of motion, from the locomotion of eels (Anguilliform locomotion), which was selected due to its complexity, as an extreme testing case for the developed cut-cell software. At the same time, basic research on the aerodynamics of undulating foils in various infinite flow conditions is carried out, while investigating for propulsion possibilities of such systems.

Furthermore, a two-dimensional simulation of the flow around two side-by-side, vertically aligned to the infinite flow, moving cylinders, which perform an approach-departure oscillation, through the same cut-cell software is carried out, as an extra test case of the developed software, in cases where interaction of flows around two moving solid boundaries occurs.

Finally, the 2D inviscid compressible flow through the stator-blades of an idealistic radial compressor is being solved. This problem is of great importance, because it puts the developed cut-cell software into the test, in cases of flows around large numbers of solid bodies.

«πολυμαθίη νόον ἔχειν οὐ διδάσκει»

— *Ηράκλειτος*

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό, θέλω να ευχαριστήσω τον κ. Κ. Χ. Γιαννάκογλου, ο οποίος μέσω της διδασκαλίας του μου πρωτοέθεσε σε κίνηση το ενεργό ενδιαφέρον για τα ρευστά. Ακόμα, για την όλη επιμελέστατη επίβλεψή του κατά τη διάρκεια αυτής της εργασίας, καθώς και για την πρόταση του θέματος της εργασίας αυτής, του πολύ ενδιαφέροντος θέματος των λικνιζόμενων αεροτομών.

Ευχαριστώ επίσης τον υποψήφιο διδάκτορα Κωνσταντίνο Σαμούχο, σε λογισμικό του οποίου βασίστηκε αυτή η εργασία, που ήταν πάντα πρόθυμος να συζητήσει μαζί μου και να με συμβουλέψει σε όλα τα στάδια της εργασίας.

Τέλος, τον κ. Σ. Βουτσινά, με τον οποίο εξ εντελώς τυχαίας αφορμής, είχαμε κάποιες ενδιαφέρουσες συζητήσεις πάνω στη ρευστομηχανική της λίκνισης των υδρόβιων οργανισμών.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή.....	1
1.1 Μόνιμες και Μη-Μόνιμες Ροές.....	1
1.2 Μέθοδος Εμβαπτιζόμενων Ορίων/Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων.....	1
1.3 Περί Υδρόβιας Κίνησης	3
1.4 Σκοπός και Διάρθρωση της Διπλωματικής Εργασίας	5
2 Υπολογιστική Διατύπωση Προβλήματος Εξωτερικής Αεροδυναμικής	7
2.1 Γένεση και προσαρμογή πλέγματος	7
2.2 Διακριτοποίηση των Εξισώσεων Ροής.....	13
2.2.2 Ολοκλήρωση σε Πεπερασμένους Όγκους μέσω Κεντροκυβελικής Διατύπωσης..	13
2.2.3 Διακριτοποίηση Ατριβών Ροών.....	14
2.2.3 Διακριτοποίηση Χρονικών Όρων.....	24
2.2.4 Οριακές Συνθήκες	25
2.3 Αριθμητική Επίλυση	28
3 Περί Κίνησης Λικνιζόμενων Οργανισμών, Μαθηματική Έκφραση του Λικνισμού....	32
3.1 Εισαγωγικά Σχόλια	32
3.2 Η Φυσική του Λικνισμού	32
3.3 Περί προωθητικής αποδοτικότητας σε λικνιζόμενα σώματα.....	38
3.4 Μαθηματική Περιγραφή Λικνιζόμενης Αεροτομής	40
3.4.1 Ορολογία	40
3.4.2 Η λικνιζόμενη μέση γραμμή.....	41
3.4.2 Επένδυση με Κατανομή Πάχους	43
3.4.4 Επίδραση των παραμέτρων στη μορφή λίκνισης	47
3.3.5 Υπολογισμός Ταχυτήτων Λικνιζόμενης Αεροτομής	49
4 Επίλυση Ροής περίξ Λικνιζόμενης Αεροτομής.....	55
4.1 Εισαγωγικά Σχόλια.....	55
4.2 Αντιμετώπιση της οξείας ακμής εκφυγής.....	56
4.3 Επίλυση χρονικά μόνιμου προβλήματος	59
4.4 Επίλυση Μη-Μόνιμης Ροής περίξ Λικνιζόμενης Αεροτομής	63
4.5 Επίλυση Μη-Μόνιμης Ροής περίξ Λικνιζόμενης Αεροτομής, με Γωνία της Επ' Άπειρο Ροής 15°	70
4.6 Βασική Διερεύνηση Δυνατοτήτων Πρόωσης Λικνιζόμενων Αεροτομών.....	73
4.6.1 Μήκος Κύματος $\lambda=0.6283$	74
4.6.2 Μήκος Κύματος $\lambda=1.6283$	76

4.6.3 Μήκος Κύματος $\lambda=1.6283$, Μήκος Τόξου Μέσης Γραμμής $L=1$ =σταθερό	82
5 Επίλυση Διηχητικής Ροής περίξ δύο Ταλαντούμενων Κυλίνδρων με Διάκεντρο Κάθετη στη Ροή.....	86
5.1 Εισαγωγικά Σχόλια.....	86
5.2 Χρονικά Μόνιμο Πρόβλημα	88
5.3 Απλή Αρμονική Ταλάντωση με $\delta=0.3/0.7$	92
5.4 Απλή Αρμονική Ταλάντωση με $\delta=0.2/0.3$	97
5.5 Απλή Αρμονική Ταλάντωση με $\delta=3.4/3.6$	100
6 Επίλυση Ροής δια μέσου Σταθερής Πτερύγωσης Ακτινικού Συμπιεστή	104
6.1 Εισαγωγικά Σχόλια	104
6.2 Επίλυση Μόνιμης Ροής	105
7 Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα	109
Βιβλιογραφία.....	112

1 Εισαγωγή

1.1 Μόνιμες και Μη-Μόνιμες Ροές

Στη ρευστομηχανική, χρονικά μόνιμες ροές ονομάζονται, οι ροές αερίων ή υγρών μέσων κατά τις οποίες οι ιδιότητες του πεδίου ροής (πίεση, ταχύτητα, πυκνότητα) διατηρούνται σταθερές και ανεξάρτητες από την πάροδο του χρόνου, ως προς ένα ακίνητο σύστημα συντεταγμένων.

Αντίθετα, χρονικά μη-μόνιμες ροές ονομάζονται οι ροές αερίων ή υγρών μέσων κατά τις οποίες οι ιδιότητες του πεδίου ροής μεταβάλλονται με τον χρόνο.

Υπάρχουν διακριτές αιτίες (οι οποίες είναι δυνατόν και να συνυπάρχουν) οι οποίες προκαλούν την χρονική μη μονιμότητα της ροής.

Σε αυτές συγκαταλέγεται και η τύρβη, για τον λόγο ότι όταν η ροή υπερβεί μια οριακή περιοχή του αριθμού Reynolds, παρόλο που η μέση τιμή των ιδιοτήτων του ρευστού ενδέχεται να είναι ανεξάρτητη του χρόνου (όταν δεν υπάρχει άλλη αιτία μη-μονιμότητας), παρατηρείται διαταραχή των τιμών των ιδιοτήτων της ροής περί τη μέση τους τιμή, η οποία μεταβάλλεται συνεχώς με την πάροδο του χρόνου.

Μια άλλη αιτία που καθιστά μη μόνιμη μια ροή είναι η ύπαρξη της λεγόμενης συνοριακής διέγερσης, δηλαδή είτε χρονικής μεταβολής των συνθηκών της επ' άπειρον ροής (λ.χ. ο προσπίπτων άνεμος σε μια ανεμογεννήτρια), είτε η ύπαρξη κινουμένων ή και παραμορφούμενων στερεών ορίων που αλληλεπιδρούν με τη ροή (λ.χ. κινούμενες πτερυγώσεις στροβιλομηχανών) [1]. Τα παραπάνω ισχύουν για συνεκτικές και μη-συνεκτικές ροές.

Τέλος, στις συνεκτικές ροές, αιτία γένεσης μη-μονιμότητας μπορεί να αποτελέσει η αποκόλληση του οριακού στρώματος εκ του στερεού ορίου υπό την ύπαρξη αρνητικής διαμήκουσ κλίσης πίεσης, κάτι το οποίο σε συνδυασμό με την επανένωση των δύο (ή περισσότερων) ρευμάτων στα οποία διήρесе το στερεό σώμα τη ροή, δημιουργούν, κατάντι του στερεού σώματος, περιοδικές δίνες (λ.χ. στρόβιλοι von Karman στον ομόρρου ενός κυλίνδρου).

1.2 Μέθοδος Εμβαπτιζόμενων Ορίων/Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων

Ως μη-οριόδετα πλέγματα ή πλέγματα εμβαπτιζόμενων ορίων (Immersed Boundaries method) νοούνται καρτεσιανά πλέγματα τα οποία δεν συνάπτονται του στερεού σώματος, αλλά ολόκληρο το στερεό σώμα «βυθίζεται» στο καρτεσιανό πλέγμα, τέμνοντας κατά μη προκαθορισμένο τρόπο έναν αριθμό κελιών. Προκύπτουν, έτσι, κελιά τα οποία εκτείνονται αποκλειστικά σε περιοχή που καταλαμβάνει το στερεό, άλλα που εκτείνονται αποκλειστικά σε περιοχή του ρευστού και άλλα που τέμνονται από το στερεό και άρα περιέχουν και ρευστό και στερεό τμήμα.

Η μέθοδος των εμβαπτιζόμενων ορίων εισήχθη από τον Peskin [2], για την προσομοίωση της καρδιακής συσταλτικής-διασταλτικής λειτουργίας και της ροής του αίματος δια μέσου της καρδιάς.

Τα οφέλη της μεθόδου αυτής σε μη-μόνιμα προβλήματα σύνθετων κινουμένων στερεών ορίων, τα οποία απαντώνται σε πολλούς τομείς της σύγχρονης υπολογιστικής ρευστοδυναμικής, αναδύονται μέσω των δυσκολιών που απορρέουν από τη χρήση οριόδετων πλεγμάτων για τα προβλήματα αυτά.

Οι μέθοδοι οριόδετων πλεγμάτων, όταν εφαρμόζονται σε σύνθετα, παραμορφούμενα στερεά όρια, όπου απαιτείται επαναπλεγματοποίηση για κάθε μεταβολή του στερεού ορίου, επιφέρουν μεγάλη αύξηση του υπολογιστικού κόστους. Επιπλέον, ακόμα και σε περιπτώσεις όπου το όριο των στερεών σωμάτων δεν παραμορφώνεται (λ.χ. μεταφορική κίνηση μιας αεροτομής), η ύπαρξη περισσότερων του ενός σωμάτων, τα οποία μετακινούνται το ένα ως προς το άλλο, πάλι απαιτεί επαναγένεση του πλέγματος σε κάθε χρονικό βήμα της επίλυσης.

Αντιθέτως, με την τεχνική των εμβαπτιζόμενων ορίων, η επίλυση λαμβάνει χώρα σε ένα καρτεσιανό πλέγμα επιτρέποντας εύκολη και γρήγορη (σε σχέση με την οριόδετη προσέγγιση) γένεση πλέγματος, αλλά και εύκολη διαδικασία προσαρμογής του στην κινούμενη γεωμετρία [3].

Ακολουθούνται δύο βασικές προσεγγίσεις που υπάγονται στις μεθόδους εμβαπτιζόμενων ορίων, η συνεχής και η διακριτή. Η συνεχής προσέγγιση, χρησιμοποιεί έναν επιπλέον όρο πηγής στην εξίσωση διατήρησης ορμής για να προσομοιώσει την επίδραση των στερεών τοιχωμάτων, ο οποίος υφίσταται απόσβεση, απομακρυνόμενος από το τοίχωμα. Αντιθέτως, η διακριτή προσέγγιση, λειτουργεί αγνοώντας την ύπαρξη στερεού σώματος, δηλαδή γίνεται πρώτα η διακριτοποίηση των εξισώσεων ροής, και ύστερα αυτές προσαρμόζονται κοντά στο στερεό για να προσομοιώσουν την επίδρασή του [4].

Τρίτη μέθοδος προσέγγισης και εξέχουσα μεταξύ των υπολοίπων είναι η μέθοδος τεμνόμενων κυψελών με διακριτοποίηση πεπερασμένων όγκων [(cut-cell finite volume method), η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί διακριτή μέθοδος αλλά διαφοροποιείται από τις άλλες στον τρόπο χειρισμού των κυψελών τις οποίες τέμνει το στερεό όριο. Η μέθοδος αυτή εγγυάται την ολική (σε ολόκληρο το υπολογιστικό χωρίο) και τοπική (σε κάθε κυψέλη) ικανοποίηση των νόμων διατήρησης [5].

Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της αναδιαμόρφωσης των κυψελών που τέμνονται από το στερεό όριο, τις λεγόμενες και τεμνόμενες κυψέλες (cut-cells), μέσω μιας διαδικασίας διαρκούς προσαρμογής τους στο στερεό όριο. Τα αποτεμνόμενα τμήματα των τεμνόμενων κυψελών αλλά και όσες κυψέλες κείνται στο εσωτερικό του στερεού σώματος αμελούνται [6].

Οι μέθοδοι εμβαπτιζόμενων ορίων παρουσιάζουν συνολικά το πλεονέκτημα της εύκολης γένεσης πλέγματος ακόμα και σε περιπτώσεις σύνθετων γεωμετρικών στερεών οντοτήτων, εν αντιθέσει με τη δυστροπία που συχνά ανακύπτει ακολουθώντας μεθόδους οριόδετων πλεγμάτων. Ακόμα, επιφέρουν σημαντική μείωση του υπολογιστικού κόστους αλλά και δυνατότητα αυτοματοποίησής τους σε προβλήματα κινουμένων στερεών ορίων, λόγω της πολύ απλής διαδικασίας προσαρμογής τους από τη μια χρονική στιγμή στην άλλη, αίροντας την ανάγκη για επαναπλεγματοποίηση και παραμόρφωση του πλέγματος που απαιτείται στις μεθόδους οριόδετων πλεγμάτων.

Από την άλλη πλευρά, βασικό μειονέκτημα των μεθόδων εμβαπτιζόμενων ορίων αποτελεί το ότι οι κόμβοι του πλέγματος δεν κείνται εν γένει επί του στερεού ορίου και, άρα, η επιβολή των οριακών συνθηκών απαιτεί ειδικό χειρισμό, μη εξαλείφοντας απολύτως το ενδεχόμενο, ο διαχωρισμός στερεού από ρευστό να μην είναι ακριβώς ο επιθυμητός [7]. Συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι η πιθανότητα αλλοτρίωσης της συντηρητικότητας της ροής με επίπτωση στην ενδεχόμενη μείωση της ακρίβειας της τελικής λύσης.

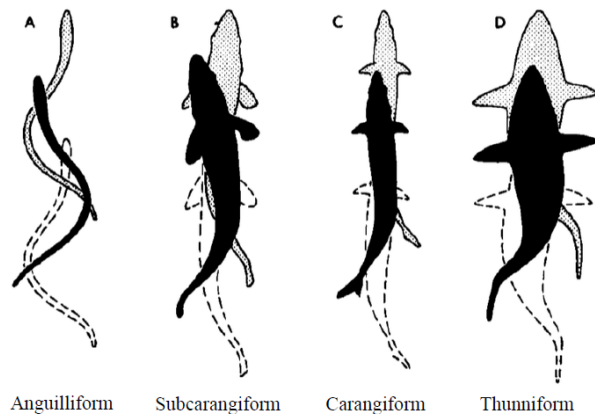
1.3 Περί Υδρόβιας Κίνησης

Όπως προειπώθηκε, η κινητήριος ιδέα που οδήγησε στην ανάπτυξη των μεθόδων εμβαπτιζόμενων ορίων ήταν η προσπάθεια από τον Peskin να προσομοιώσει τη ροή του αίματος δια μέσου της καρδιάς, ένα πρόβλημα παραμορφούμενων στερεών ορίων (στη γλώσσα της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής), το οποίο καθιστά την αναπλεγματοποίηση σε κάθε χρονικό βήμα υποχρεωτική.

Ένα άλλο πρόβλημα παραμορφούμενων στερεών ορίων, πάλι με πεδίο έμπνευσης τη φύση, είναι η λικνιστική κίνηση προώθησης των ψαριών και άλλων υδρόβιων οργανισμών. Από άποψη υπολογιστικής ρευστοδυναμικής, μία μέθοδος εμβαπτιζόμενων ορίων είναι κατεξοχήν κατάλληλη για την επίλυση του θέματος αυτού. Και αντίστροφα όμως, ένα τέτοιο θέμα ενδείκνυται για να τροφοδοτήσει με περιπτωσιολογία ένα λογισμικό εμβαπτιζόμενων ορίων, όπως είναι και το λογισμικό τεμνομένων κυβελών που χρησιμοποιείται σε αυτήν την εργασία.

Η μελέτη της λίκνισης έχει λοιπόν διττό ενδιαφέρον, τόσο τεχνολογικό-βιομημητικό, όσο και υπολογιστικό, στο πλαίσιο της διερεύνησης της ικανότητας πρόλεξης ροών ενός λογισμικού εμβαπτιζόμενων ορίων. Στην εργασία αυτή δίνεται έμφαση και στις δύο αυτές διαστάσεις, γι' αυτό κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούν, σε αυτό το σημείο, κάποια εισαγωγικά στοιχεία για το φυσικό ενδιαφέρον που διέπει την προώθηση των υδρόβιων οργανισμών μέσω λίκνισης.

Στην φύση, παρατηρούνται διάφορα υδρόβια είδη τα οποία παρουσιάζουν ομοιότητες και διαφορές στον τρόπο με τον οποίο αξιοποιούν ρευστοδυναμικά φαινόμενα για την κίνησή τους. Μια πρωτογενής κατηγορία είναι αυτή των υδρόβιων οργανισμών που χρησιμοποιούν τη λίκνιση του σώματός τους και τα πτερύγια τους, πρωτίστως για προωθητικούς σκοπούς [8]. Οι διάφορες ιδιομορφές λίκνισης (Anguilliform, Subcarangiform, Carangiform και Thunniform) μοιάζουν μεταξύ τους αρκετά ως προς το ότι, σε όλες, πρόκειται για τη διάδοση ενός αντίστροφου προς τη διεύθυνση προώθησης διαδιδόμενου κύματος, παρουσιάζουν όμως και σημαντικές ειδοποιούς διαφορές. Οπτική απεικόνιση των βασικών ιδιομορφών λίκνισης των υδρόβιων οργανισμών παρουσιάζεται στο σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1: Κατάταξη των ιδιομορφών λίκνισης κατά τον Breder [9].

Συγκεκριμένα, στην κίνηση τύπου χελιού ('anguilliform'), λικνίζεται ολόκληρο σχεδόν το σώμα του οργανισμού, το μήκος κύματος της λίκνισης είναι αρκετά μικρότερο από το μήκος του σώματος, απουσιάζει δε το ουραίο πτερύγιο.

Στο άλλο άκρον βρίσκεται η λίκνιση του τόνου ("Thunniform"), κατά την οποία το κυρίως σώμα παραμένει ευθύ, ενώ το ουραίο πτερύγιο ταλαντώνεται με μεγάλο πλάτος και σχεδόν ανεξάρτητα από τη θέση του σώματος, αναλαμβάνοντας ολόκληρη την παραγωγή πρόωσης. Πρόκειται δηλαδή περισσότερο για ταλάντωση παρά για λικνισμό, αφού το μήκος κύματος του αντίστροφα διαδιδόμενου κύματος είναι αρκετά μεγαλύτερο από το μήκος του σώματος. Ενδιάμεσες περιπτώσεις αποτελούν οι ιδιομορφές λίκνισης Carangiform και Subcarangiform.

Η υδροδυναμική της λίκνισης τύπου χελιού, έχει μελετηθεί πολύ λιγότερο από τις υπόλοιπες μορφές λίκνισης. Πρόκειται για σώματα μεγάλου μήκους, με μικρά ή καθόλου πτερύγια, τόσο κατά μήκος του σώματός τους, όσο και στην απόληξή τους [10].

Ο λόγος αυτού του σχετικού ελλείμματος στη μελέτη τους είναι ότι παλιότερα θεωρούνταν πως μόνο το ουραίο τμήμα παράγει σημαντική προωστική δύναμη και, κατά συνέπεια, κάθε άλλη κίνηση κατά μήκος του σώματος θεωρείτο περιττή και ζημιογόνα από την άποψη της απόδοσης. Γι' αυτό, έμφαση είχε δοθεί στην κίνηση του τόνου ή Thunniform [11].

Και πράγματι, ο τόνος έχει παρατηρηθεί να κολυμπά με μέγιστες ταχύτητες ως και 70 km/h, ενώ σε χαμηλότερες ταχύτητες περί τα 20 km/h οι εκτιμήσεις του βαθμού απόδοσης ανέρχονται ως και 80-90%.

Όμως, τύποι χελιών όπως τα (*Anguilla rostrata*, *Anguilla anguilla*) έχουν παρατηρηθεί να κολυμπούν κατά την ετήσια μετανάστευσή τους για περισσότερες από 60 μέρες ασταμάτητα (χωρίς να τρέφονται κατά τη διάρκεια του ταξιδιού), διανύοντας από 2000 ως 5500 km, χωρίς σημαντική απώλεια σωματικού βάρους. Αυτές οι επιδόσεις καταδεικνύουν εξαιρετικά υψηλή προωθητική αποδοτικότητα, η οποία έχει πειραματικά υπολογιστεί κοντά στο 90% [12].

Τα εντυπωσιακά αυτά χαρακτηριστικά των υδροβίων οργανισμών έστρεψαν την προσοχή των επιστημόνων πάνω τους, με σκοπό την κατανόησή τους και τη διάνοιξη νέων προοπτικών στις εφαρμογές προώθησης.

Στην εργασία αυτή, τόσο επειδή η υπολογιστική μελέτη-προσομοίωση του λικνισμού τύπου Thunniform έχει μελετηθεί αρκετά, όσο και επειδή η λίκνιση του χελιού (Anguilliform)

παρουσιάζει μεγαλύτερες ιδιομορφίες – δυσκολίες από υπολογιστική άποψη, θα μελετηθεί κατά βάση η λίκνιση τύπου χελιού (Anguilliform).

1.4 Σκοπός και Διάρθρωση της Διπλωματικής Εργασίας

Στην εργασία αυτή, η σχέση μεταξύ μέσου και σκοπού είναι αμφίδρομη. Δηλαδή, το λογισμικό επίλυσης των εξισώσεων Euler μέσω της μεθόδου τεμνομένων κυψελών (ανεπτυγμένο στο Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του Ε.Μ.Π., από τον Υποψήφιο Διδάκτορα Κων/νο Σαμούχο στο πλαίσιο της Διδακτορικής Διατριβής του), είναι κατ' αρχάς το μέσο για την επίλυση μη-μόνιμων προβλημάτων με παραμορφούμενα στερεά όρια, τα οποία παρουσιάζουν αεροδυναμικό ενδιαφέρον. Συγκεκριμένα, διερευνάται η δυνατότητα δημιουργίας δύναμης πρόωσης μέσω λικνιζόμενων αεροτομών.

Παράλληλα όμως, οι γεωμετρικά πολύπλοκες επιλυόμενες εφαρμογές, αξιοποιούνται και ως διαγνωστικές μελέτες πάνω στο υπάρχον λογισμικό, μέσω των οποίων βελτιώνεται, διορθώνεται, ή επιβεβαιώνεται η λειτουργικότητά του, και ισχυροποιείται η αξιοπιστία του.

Η διάρθρωση της εργασίας έχει ως εξής:

- Κεφάλαιο 1
Εισαγωγή
- Κεφάλαιο 2
Παρατίθεται αρχικά η διαδικασία διακριτοποίησης του υπολογιστικού χωρίου-γένεσης πλέγματος μέσω της μεθόδου τεμνομένων κυψελών. Έπειτα παρουσιάζεται η διακριτοποίηση των εξισώσεων Euler και η διακριτοποιημένη επιβολή των οριακών συνθηκών και, στη συνέχεια αναλύονται οι διεργασίες προσαρμογής του πλέγματος σε μεταβαλλόμενα στερεά όρια. Τέλος, παρατίθεται ο αλγόριθμος επίλυσης, ο οποίος εφαρμόζεται στο λογισμικό τεμνομένων κυψελών που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί και το οποίο αναπτύχθηκε στη ΜΠΥΡ&B/Ε.Μ.Π..
- Κεφάλαιο 3
Περιγράφονται τα ρευστομηχανικά φαινόμενα τα οποία διέπουν τη λίκνιση των υδρόβιων οργανισμών και ειδικά των χελιών, και εκφράζεται με μαθηματικό τρόπο η γεωμετρία μιας λικνιζόμενης αεροτομής με κατανομή πάχους αυτό της NACA 0012, εμπνευσμένης από τον λικνισμό των χελιών.
- Κεφάλαιο 4
Γίνεται επίλυση της ροής περίξ λικνιζόμενης αεροτομής, σε επ' άπειρο ροή αέρα ταχύτητας 100 m/sec, με αριθμό Strouhal: $Sr=0.006$. Επιλύεται το μόνιμο και το μη-μόνιμο πρόβλημα, για οριζόντια και, με γωνία 15° επ' άπειρο ροή. Ακόμα γίνεται διερεύνηση των δυνατοτήτων πρόωσης μέσω λικνιζόμενων αεροτομών για διάφορες παραμέτρους λίκνισης.

- **Κεφάλαιο 5**
Επιλύεται η ροή περίξ δύο πανομοιότυπων κυλίνδρων, με διάκεντρο κάθετη προς τη διεύθυνση της επ' άπειρο ροής, η οποία προσέρχεται υπό μηδενική γωνία, με ταχύτητα 100 m/s. Αρχικά γίνεται επίλυση του διηχητικού μόνιμου προβλήματος (οι κύλινδροι παγιωμένοι), και στη συνέχεια επιλύονται τρία χρονικά μη-μόνιμα προβλήματα, όπου οι κύλινδροι εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση επί της διακέντρου των (προσέγγιση-απομάκρυνση), με πλάτος ταλάντωσης ίσο με την ακτίνα των κυλίνδρων και ίσο με το ένα τέταρτο της ακτίνας (παλμική κίνηση), ενώ επιλύεται και μία περίπτωση όπου η μέση απόσταση μεταξύ των κυλίνδρων είναι αρκετά μεγάλη, ώστε η αλληλεπίδραση μεταξύ των κυλίνδρων να φθίνει.
- **Κεφάλαιο 6**
Επιλύεται το χρονικά μόνιμο πρόβλημα της ροής δια μέσου μιας ιδεατής σταθερής πτερύγωσης ακτινικού συμπιεστή, όπου η είσοδος και η έξοδος προσομοιώνονται από μία κυκλική περιφέρεια εκάστη.
- **Κεφάλαιο 7**
Γίνεται συνοπτική ανακεφαλαίωση των πεπραγμένων, και παρουσιάζονται συμπεράσματα σχετικά με τη μέθοδο και το λογισμικό τεμνομένων κυψελών, και τις πραγματοποιηθείσες εφαρμογές.

2 Υπολογιστική Διατύπωση Προβλήματος Εξωτερικής Αεροδυναμικής

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά η μεθοδολογία και οι απαιτούμενες τεχνικές για την επίλυση μιας μη-μόνιμης, διδιάστατης, συμπιεστής και ατριβούς ροής μέσω της μεθόδου Εμβαπτιζόμενων Ορίων, της χρησιμοποιούμενης τεχνικής τεμνομένων κυψελών και του επιλύτη ατριβούς συμπιεστής ροής των εξισώσεων Euler.

2.1 Γένεση και προσαρμογή πλέγματος

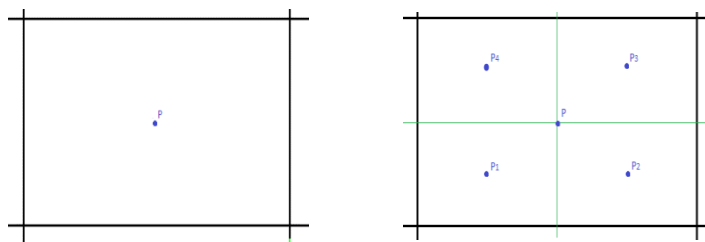
Το υπολογιστικό χωρίο είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με διαστάσεις που υπαγορεύονται από τις διαστάσεις των εμβαπτιζόμενων σωμάτων και τις θέσεις όπου επιβάλλονται οι οριακές συνθήκες του προβλήματος ροής.

Από τον χρήστη καθορίζεται ακόμα το μέγιστο και το ελάχιστο εμβαδόν των υπολογιστικών κυψελών (Ω_{max} , Ω_{min}) καθώς και η μέγιστη απόσταση μεταξύ των κυψελών ελαχίστου εμβαδού και των κυψελών μεγίστου εμβαδού ($Distance_{max}$). Με την τελευταία, καθορίζεται το εάν λ.χ. οι κυψέλες μικρότερου εμβαδού περιορίζονται μόνο κοντά στο στερεό ($Distance_{max} \ll$), ή εάν θα υπάρχει σταδιακή πύκνωση, ώστε μόνο στην περιοχή κοντά στα σύνορα του χωρίου να συναντώνται κυψέλες με Ω_{max} ($Distance_{max} \gg$).

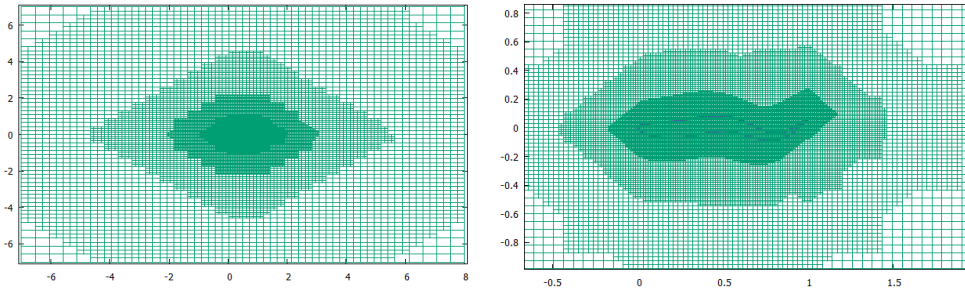
Ο πλεγματοποιητής αρχικά δημιουργεί ένα καρτεσιανό πλέγμα σε όλο το υπολογιστικό χωρίο με εμβαδό κελιών ίσο με το άνω δοθέν όριο. Έπειτα, με αφητηρία την περιοχή που τέμνεται από τα στερεά όρια και εκκινώντας από τετραγωνικές κυψέλες του μεγίστου ανεκτού εμβαδού, διαιρεί κάθε κυψέλη σε 4 ισεμβαδικές κυψέλες μέχρι το προκύπτον εμβαδό καθεμίας να είναι μικρότερο ή ίσο του Ω_{min} . Έπειτα, γίνεται προέλαση προς τα όρια του χωρίου, τετραπλασιάζοντας σε κάθε βήμα το εμβαδόν των κυψελών, μέχρι να επιτευχθεί το εμβαδόν Ω_{max} . Ο απομένον χώρος μέχρι τα όρια του χωρίου, καλύπτεται με κυψέλες εμβαδού Ω_{max} . [15],[16].

Σε μεταγενέστερο στάδιο, ο ρυθμός πύκνωσης των κυψελών από Ω_{min} σε Ω_{max} , προσαρμόζεται για να ικανοποιήσει την απόσταση $Distance_{max}$ που έδωσε ο χρήστης, αλλά και για να γίνεται όσο το δυνατόν πιο ομαλά η μετάβαση μεταξύ των κυψελών διαφορετικού εμβαδού.

Στο σχήμα 2.1 φαίνεται η διαδικασία τετραχοτόμησης μιας κυψέλης, και ακολουθεί στο σχήμα 2.2, μια άποψη ολόκληρου του πλεγματοποιημένου χωρίου γύρω από μια λινικιζόμενη αεροτομή.



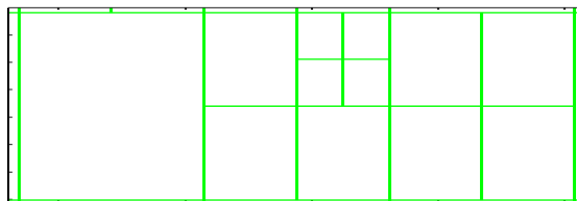
Σχήμα 2.1: Τετραχοτόμηση μιας κυψέλης σε 4 ισεμβαδικές κυψέλες, κατά τη γένεση του καρτεσιανού πλέγματος. P είναι το βαρύκεντρο της αρχικής κυψέλης, και P_1, P_2, P_3, P_4 είναι τα βαρύκεντρα των νεόκοπων κυψελών.



Σχήμα 2.2: Άποψη ολόκληρου του προσαρμοσμένου καρτεσιανού πλέγματος γύρω από στιγμιότυπο μίας λικνιζόμενης αεροτομής (Αριστερά) και εστίαση στην περιοχή γύρω από το στερεό (Δεξιά).

Συνεπώς, ξεκινώντας από μια κυψέλη εμβαδού Ω_{max} , κάθε άλλη κυψέλη θα έχει εμβαδό $\Omega_v = \left(\frac{1}{4}\right)^v \Omega_{max}$, όπου v ο αριθμός των μεσολαβουσών τετραχοτομήσεων.

Κανονιστική συνθήκη κατά την πλεγματοποίηση είναι οποιαδήποτε ακμή-μέτωπο μιας κυψέλης να μην γειτνιάζει με περισσότερες από δύο άλλες κυψέλες, δηλαδή δύο σε επαφή κυψέλες να μην έχουν λόγο εμβαδών μεγαλύτερο του 4 (ή μικρότερο του $\frac{1}{4}$ ανάλογα με ποια σειρά γίνεται η συσχέτιση), που αντιστοιχεί σε μία τετραχοτόμηση (ή τετραπλασιασμό) μιας κυψέλης. Η απαίτηση αυτή προκύπτει ως αναγκαιότητα ομαλής πύκνωσης του πλέγματος για λόγους ευστάθειας του υπολογιστικού σχήματος επίλυσης. Στο σχήμα 2.3 φαίνεται μια αποδεκτή διάρθρωση πύκνωσης κυψελών.

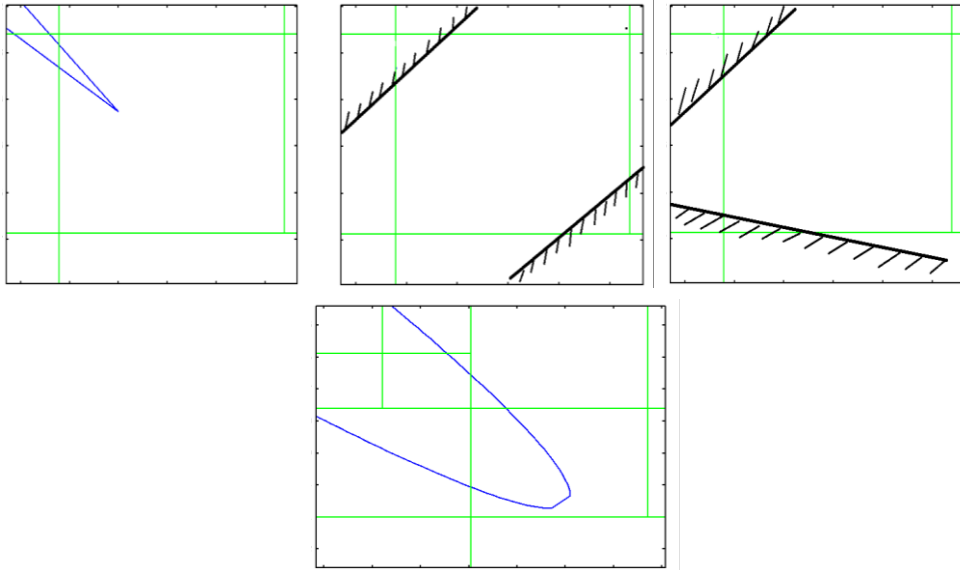


Σχήμα 2.3: Επιτρεπτή διάταξη διαδοχικών πυκνώσεων σε γειτνιάζουσες κυψέλες. Μέγιστη επιτρεπόμενη μείωση εμβαδού μεταξύ δύο κυψελών με κοινή ακμή, ο λόγος 4:1.

Ένας άλλος περιορισμός που οφείλει να τηρείται είναι, όταν το όριο της στερεάς γεωμετρίας εισέρχεται σε μια κυψέλη μέσω μιας εκ των τεσσάρων ακμών (πλευρών) της, να μην εξέρχεται από την ίδια ακμή. Δηλαδή δεν επιτρέπεται οποιαδήποτε ακμή να τέμνεται περισσότερο από μία φορές από το στερεό όριο. Κίνδυνος να συμβεί αυτό υπάρχει όταν το στερεό όριο εμφανίζει πολύ οξείες γωνίες. Είναι δεκτό, όμως, μία κυψέλη να τέμνεται συνολικά δύο φορές από το στερεό, αλλά σε διαφορετικές της ακμές.

Ακόμα, κάθε τεμνόμενη κυψέλη πρέπει να τέμνεται από μόνο ένα και συνεχές στερεό όριο. Αυτός ο περιορισμός προκύπτει από την παραδοχή (κατά την επιβολή οριακών συνθηκών) ότι το πολύ μία από τις νέες έδρες της τεμνόμενης κυψέλης (βλ. σχήμα 2.5, 2.6) μπορεί να θεωρείται ότι κείται στο στερεό.

Στο σχήμα 2.4 αποτυπώνονται τέσσερα συνολικά περιστατικά που οπτικοποιούν τους παραπάνω περιορισμούς, τα επάνω ως μη αποδεκτά ενώ το κάτω ως αποδεκτό.



Σχήμα 2.4: Μη αποδεκτές περιπτώσεις τομής κυψέλης από το στερεό όριο σύμφωνα με τη μέθοδο τεμνομένων κυψελών (Επάνω), και αποδεκτή περίπτωση (Κάτω).

Στην περίπτωση που διαμορφωθούν κυψέλες ελαχίστου εμβαδού Ω_{min} κοντά στο στερεό όριο, οι οποίες όμως λόγω της ύπαρξης οξείων γωνιών στη γεωμετρία, δεν καλύπτουν τον προαναφερθέντα περιορισμό, τότε γίνονται περαιτέρω τετραχοτομήσεις μέχρι ένα ελάχιστο οριακό εμβαδόν $\Omega_{lim} \ll \Omega_{min}$, τοπικά ώστε να λυθεί το πρόβλημα.

Ο λόγος ύπαρξης του οριακού αυτού εμβαδού ως μιας επιπλέον παραμέτρου, είναι ότι στα περισσότερα προβλήματα, μία ή το πολύ δύο περιοχές περιέχουν ιδιομορφίες (οξείες γωνίες), και άρα αν προκειμένου να γίνει πύκνωση κοντά σε αυτές, τίθετο $\Omega_{min} \ll$, τότε θα μεγάλωνε δραματικά και αχρείαστα (ως προς τις απαιτήσεις του μεγαλύτερου μέρους του χωρίου) το μέγεθος του πλέγματος. Ενώ με την εισαγωγή του $\Omega_{lim} \sim \Omega_{min} 10^{-3}$, γίνεται περαιτέρω πύκνωση μόνο στις ιδιομορφες περιοχές του στερεού ορίου, ενώ στο υπόλοιπο χωρίο τηρούνται τα όρια που έχουν θεσπιστεί.

Η αιτία για την οποία ακόμα και το Ω_{lim} δεν μπορεί να μειωθεί απεριόριστα, είναι η αρνητική επίδραση των πολύ μικρών υπολογιστικών κυψελών στην ευστάθεια του σχήματος επίλυσης.

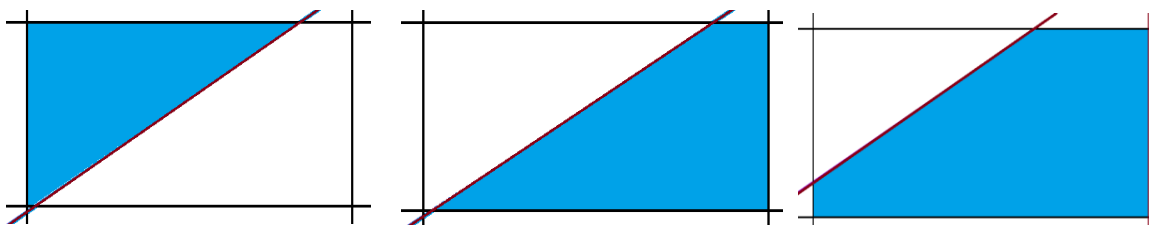
Αν όμως οι γωνίες του στερεού σώματος είναι απολύτως οξείες όπως στο σχήμα 2.4 (αριστερά), ο πλεγματοποιητής αδυνατεί να δημιουργήσει το πλέγμα στα όρια της ανεκτής υπολογιστικά συρρίκνωσης των υπολογιστικών κυψελών. Τότε, επιχειρούνται μικρομετατοπίσεις ολόκληρου του πλέγματος με ενιαίο τρόπο και, αν και πάλι δεν επέλθει η επιθυμητή διάταξη, η πλεγματοποίηση καθίσταται αδύνατη.

Αυτό αποτελεί ένα μειονέκτημα των μεθόδων εμβαπτιζόμενων ορίων, διότι απαιτούν αμβλυμμένη αναπαράσταση των ενδεχομένως πολύ οξείων γωνιών που μπορεί να απαντηθούν σε μια εφαρμογή.

Εφόσον δεν υπάρχει πρόβλημα οξείας γωνίας, προκύπτει ένας αριθμός τεμνομένων κυψελών, για τις οποίες ικανοποιούνται οι περιορισμοί που προαναφέρθηκαν.

Για όλες αυτές τις τεμνόμενες κυψέλες, τα τμήματά τους τα οποία εκτείνονται στην περιοχή του στερεού σώματος αμελούνται και απορρίπτονται. Προκύπτουν έτσι νέες κυψέλες οι οποίες

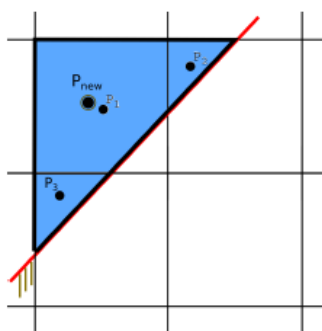
λόγω του μη προσδιορισμένου τρόπου με τον οποίο τις έτμησε το στερεό τοίχωμα, δύνανται να είναι σχήματος τριγώνου, τετραπλεύρου ή πενταγώνου. Σε διδιάστατο πρόβλημα δεν είναι δυνατόν να δημιουργηθεί άλλος σχηματισμός, διότι τα δύο σημεία τομής του στερεού με την τεμνόμενη κυψέλη, ενώνονται με γραμμικό τρόπο, ασχέτως εάν η γεωμετρία είναι γραμμική ή όχι, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.5.



Σχήμα 2.5: Τα τρία πιθανά σχήματα που μπορεί να πάρει μια τεμνόμενη κυψέλη, αφού αφαιρεθεί το τμήμα της που κείται στην περιοχή του στερεού. Με μπλε χρώμα είναι η περιοχή του ρευστού. Τρίγωνο (αριστερά), τετράπλευρο (στο μέσο), πεντάγωνο (δεξιά).

Από τη διαδικασία αυτή προκύπτουν κυψέλες με αλλαγμένες έδρες και θέση του βαρυκέντρου τους.

Η καθόλου σπάνια πιθανότητα δημιουργίας, κατ' αυτόν τον τρόπο, πλειάδας πολύ μικρών κυψελών, είναι συχνά αιτία επιδείνωσης του ρυθμού σύγκλισης. Προς αποφυγήν αυτού, εφαρμόζεται μια διαδικασία συνένωσης κελιών κατά την οποία υπολογίζεται το νέο βαρύκεντρο της συγχωνευμένης πλέον κυψέλης και αποθηκεύονται εκεί οι μεταβλητές της ροής, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6: Επανακαθορισμός της θέσης του βαρυκέντρου, μετά από συνένωση δύο μικρών αποτμηθεισών κυψελών με μία μεγαλύτερη [13].

Όσον αφορά προβλήματα με κινούμενα στερεά όρια, ένα μειονέκτημα της μεθόδου αποτελούσε ότι, αν η γεωμετρία κατά την κίνησή της διέτρεχε μεγάλη έκταση, θα έπρεπε όλη αυτή η περιοχή να πυκνωθεί στο ελάχιστο εμβαδόν κυψέλης, ώστε σε κάθε στιγμιότυπο να υπάρχει μεγάλη πυκνωση κοντά στο στερεό όριο, επιβαρύνοντας έτσι όμως κάθε στιγμιότυπο, με μέγεθος πλέγματος πολύ μεγαλύτερο από το απαιτούμενο.

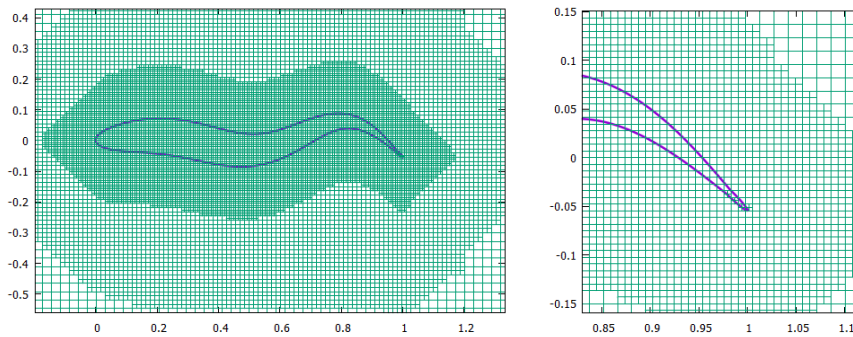
Το χρησιμοποιούμενο λογισμικό επιλύει αυτό το πρόβλημα, μειώνοντας σημαντικά το υπολογιστικό κόστος σε προβλήματα κινούμενης γεωμετρίας. Χρησιμοποιείται αλγόριθμος

τοπικής πύκνωσης γύρω από το κινούμενο σώμα, δηλαδή ενδιάμεση προσαρμογή πλέγματος μεταξύ των διαδοχικών χρονικών στιγμών.

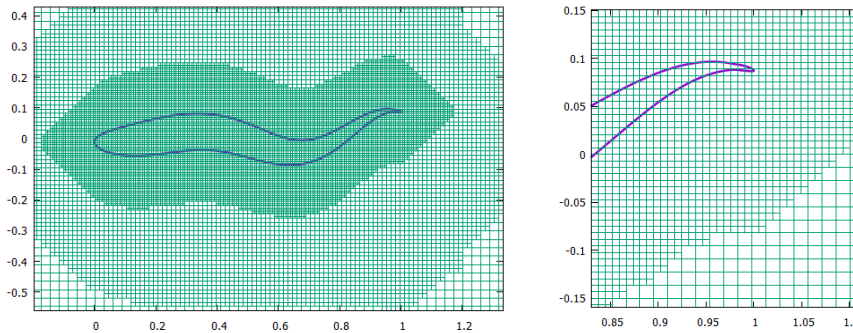
Εξαιτίας της φύσης του καρτεσιανού αυτού πλέγματος, δεν απαιτείται πλήρης επαναπλεγματοποίηση. Η διαδικασία έχει ως εξής:

Αρχικά ακολουθείται μια εξομαλυντική διεργασία κατά την οποία οποιοδήποτε κελί έχει εμβαδόν μικρότερο του Ω_{max} συγχωνεύεται με τα γειτονικά κελιά του. Στη συνέχεια, το στερεό σώμα τοποθετείται στη νέα του θέση και με αφετηρία το νέο πλέγμα, γίνεται η περαιτέρω αναγκαία πύκνωση με βάση το στερεό σώμα. Με αυτόν τον τρόπο, επιτυγχάνεται η εκλέπτυνση του πλέγματος στην περιοχή του στερεού ορίου ενώ η πύκνωση γύρω από την πρότερη γεωμετρία αναιρείται.

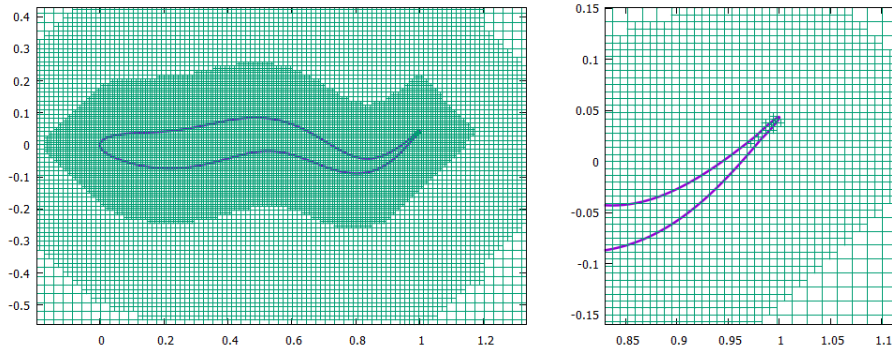
Στα σχήματα 2.7, 2.8 ,2.9 παρατίθενται τρία διαδοχικά στιγμιότυπα μιας λικνιζόμενης αεροτομής όπου φαίνεται η προσαρμογή του πλέγματος στην κίνηση της γεωμετρίας.



Σχήμα 2.7: Προσαρμογή καρτεσιανού πλέγματος στην κινούμενη στερεά γεωμετρία μιας λικνιζόμενης αεροτομής. Δεξιά γίνεται εστίαση στην ακμή εκφυγής. Στιγμιότυπο 1° .



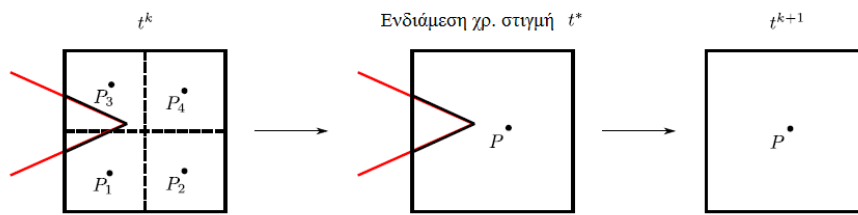
Σχήμα 2.8: Προσαρμογή καρτεσιανού πλέγματος στην κινούμενη στερεά γεωμετρία μιας λικνιζόμενης αεροτομής. Δεξιά γίνεται εστίαση στην ακμή εκφυγής. Στιγμιότυπο 2° .



Σχήμα 2.9: Προσαρμογή καρτεσιανού πλέγματος στην κινούμενη στερεά γεωμετρία μιας λικνιζόμενης αεροτομής. Δεξιά γίνεται εστίαση στην ακμή εκφυγής. Στιγμιότυπο 3^ο.

Όσον αφορά τη μεταφορά των τιμών των συντηρητικών μεταβλητών \vec{U} , από τη χρονική στιγμή t^k στην αμέσως επόμενη t^{k+1} , ακολουθείται η εξής διαδικασία:

Θεωρείται μια υποθετική ενδιάμεση χρονική στιγμή t^* , όπου το στερεό όριο βρίσκεται στην ίδια θέση όπου βρισκόταν την t^k , αλλά το πλέγμα είναι αυτό της t^{k+1} . Για την υπόθεση αυτή είναι αδιάφορο το εάν τηρούνται οι τυπικοί περιορισμοί σχετικής θέσης στερεού-πλέγματος που αναφέρθηκαν, (βλ. σχήμα 2.10).



Σχήμα 2.10: Διαδικασία ανακατανομής των μεταβλητών κατάστασης κατά την προσαρμογή του πλέγματος [13].

Για τη διάταξη λοιπόν της t^* , βρίσκεται το υποθετικό βαρύκεντρο P^* , της υποθετικά σχηματιζόμενης κυψέλης, και λαμβάνοντας σταθμισμένα τις συνεισφορές από τις κυψέλες που προπήρχαν (τη χρ. στιγμή t^k), βρίσκεται το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών \vec{U}_P^* , απ' όπου με προεκβολή στο βαρύκεντρο της P^{k+1} λαμβάνεται το \vec{U}_P^{k+1} .

Στο παράδειγμα του σχήματος 2.10, θα είναι:

$$\vec{U}_P^* = \frac{\sum_{i=1}^4 (\vec{U}_{P_i}^k \Omega_{P_i}^k)}{\Omega_{P_i}^*}$$

Το σχήμα 2.10, μπορεί να θεωρηθεί και με αντίστροφη φορά, δηλαδή μία μεγάλη κυψέλη που δεν τέμνεται από το στερεό, στην επόμενη χρονική στιγμή τέμνεται από το στερεό και διασπάται σε τέσσερις επιμέρους κυψέλες. Τότε θα ήταν:

$$\vec{U}_{P_i}^k = \vec{U}_P^*, i = 1,2,3,4$$

2.2 Διακριτοποίηση των Εξισώσεων Ροής

Οι εξισώσεις που διέπουν μια ατριβή, συμπιεστή ροή είναι οι εξισώσεις Euler, που αποτελούν τη μαθηματική έκφραση των νόμων διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας ως προς ένα καρτεσιανό, αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων.

Για διδιάστατη ροή, η συντηρητική, διαφορική μορφή των εξισώσεων Euler είναι [17] :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial y} = \vec{0} \quad (2.1)$$

όπου \vec{U} το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

και \vec{f}_x, \vec{f}_y , τα διανύσματα ατριβών ροών κατά τη διεύθυνση x και y αντίστοιχα:

$$\vec{f}_x = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad \vec{f}_y = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

όπου ρ η πυκνότητα του ρευστού, u και v η κατά x και y συνιστώσα της ταχύτητας αντίστοιχα, p η στατική πίεση, και E η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού (ενδεικτικά αναφέρεται η σχέση: $E = h_t - p/\rho$).

Ακόμα, γίνεται η παραδοχή τελείου αερίου, και χρησιμοποιείται η καταστατική εξίσωση:

$$p = \gamma RT$$

όπου $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, R η σταθερά του αερίου και T η στατική θερμοκρασία.

2.2.2 Ολοκλήρωση σε Πεπερασμένους Όγκους μέσω Κεντροκυβελικής Διατύπωσης

Η ολοκλήρωση που απαιτεί η επίλυση της διανυσματικής εξίσωσης (2.1), γίνεται με προσέγγιση πεπερασμένων όγκων, τους οποίους αποτελούν είτε ορθογωνικές κυψέλες του κυρίως πλέγματος, είτε κυψέλες που προέκυψαν από τη συνένωση των τεμνόμενων κυψελών με τις γειτονικές τους, όπως παρατέθηκε στην παράγραφο 2.1.

Εφεξής, θα γίνεται αναφορά στον τυχαίο «όγκο» ελέγχου (κυψέλη στη διδιάστατη περίπτωση) με τον συμβολισμό Ω_p , στο βαρύκεντρο της κυψέλης αλλά και στην ίδια την κυψέλη με τον συμβολισμό P ενώ με \vec{n} θα συμβολίζονται τα κάθετα στο όριο της κυψέλης μοναδιαία διανύσματα, με φορά προς το εξωτερικό της κυψέλης.

Οι συντηρητικές μεταβλητές θα αναφέρονται στο βαρύκεντρο εκάστης κυψέλης, γι' αυτό και η ολοκλήρωση λέγεται ότι γίνεται σε κεντροκυβελικούς όγκους ελέγχου.

Αν ολοκληρωθούν οι εξισώσεις (2.1) τη χρονική στιγμή t^{k+1} , στον όγκο ελέγχου Ω_P^{k+1} της κυψέλης P (δηλαδή με βαρύκεντρο το P), λαμβάνεται το διάνυσμα των υπολοίπων των εξισώσεων (residuals) ή εξισώσεων κατάστασης στην κυψέλη P:

$$\int_{\Omega_P^{k+1}} \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial y} \right) d\Omega = \vec{0} \rightarrow$$

$$\vec{R}_P := \int_{\Omega_P^{k+1}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_P^{k+1}} \left(\frac{\partial \vec{f}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial y} \right) d\Omega = \vec{0} \quad (2.4)$$

όπου το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ο χρονικός όρος ενώ το δεύτερο εκφράζει τις ατριβείς ροές μάζας, ορμής και ενέργειας.

Αν στο δεύτερο, επιφανειακό ολοκλήρωμα της (2.4) εφαρμοστεί το θεώρημα Green-Gauss, τότε αυτό μετατρέπεται σε επικαμπύλιο επί του συνόρου $\partial\Omega_P^{k+1} = S_P^{k+1}$ της κυψέλης P. Ακόμα, επειδή όλοι οι όροι στο εξής και μέχρι παραιτέρω διευκρίνισης αναφέρονται στη χρονική στιγμή t^{k+1} , ο δείκτης “k+1” θα παραλείπεται από την επόμενη εξίσωση και μετά.

$$(2.2) \rightarrow \vec{R}_P := \int_{\Omega_P^{k+1}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega + \int_{S_P^{k+1}} \vec{f}_i n_i dS = \vec{0} \quad (2.5)$$

όπου, κατά τη σύμβαση του Einstein, ο διπλός δείκτης δηλώνει άθροιση ενώ ορίζεται ταυτόχρονα και το συνιστάμενο διάνυσμα των ατριβών ροών $\vec{\Phi}$:

$$\vec{f}_i n_i = \vec{f}_x n_x + \vec{f}_y n_y := \vec{\Phi} \quad (2.6)$$

Η διακριτοποίηση των ατριβών ροών της εξίσωσης (2.5) βασίζεται στο σχήμα Roe [18],[19], μέσω του οποίου μετασχηματίζονται οι μεταβλητές κατάστασης, σε νέες μεταβλητές κατά Roe (βλ. εξισώσεις (2.16), (2.16α) έως (2.16γ)).

2.2.3 Διακριτοποίηση Ατριβών Ροών

Αρχικά γίνεται αντικατάσταση της $\vec{\Phi}$ στις εξισώσεις κατάστασης (2.5), οπότε λαμβάνεται:

$$\vec{R}_P = \int_{\Omega_P^{k+1}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega + \int_{S_P^{k+1}} \vec{\Phi} dS = \vec{0} \quad (2.5\alpha)$$

Το ολοκλήρωμα των ατριβών όρων της (2.5α) για στο σύνορο της κυψέλης P, προσεγγίζεται αριθμητικά ως άθροισμα συνεισφορών των ατριβών ροών $\vec{\Phi}_{P,Q}$, από τις διεπιφάνειες μήκους

Δs , της κυψέλης ελέγχου P με τις γειτονικές κυψέλες Q , οι οποίες εκφράζονται συνολικά ως « γειτ(P) », ενώ με

$$I_P^{\alpha\tau\rho} \cong \sum_{Q \in \text{γειτ}(P)} \overrightarrow{\Phi}_{P,Q} \Delta s \quad (2.7)$$

Στην εξίσωση (2.1), αναλύονται οι παράγωγοι $\frac{\partial \vec{f}_x}{\partial \vec{U}}$, $\frac{\partial \vec{f}_y}{\partial \vec{U}}$ μέσω των ιακωβιανών οριζουσών, ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_x}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} &= \vec{0} \rightarrow \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (2.8)$$

όπου :

$$\mathbf{A}_x = \frac{\partial \vec{f}_x}{\partial \vec{U}}, \mathbf{A}_y = \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial \vec{U}}$$

ενώ, για κάθε διεπιφάνεια, ορίζεται ο πίνακας \mathbf{A} ως:

$$\mathbf{A} := \mathbf{A}_x n_x + \mathbf{A}_y n_y \quad (2.9)$$

ο οποίος γράφεται και:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \vec{f}_x}{\partial \vec{U}} n_x + \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial \vec{U}} n_y \rightarrow \mathbf{A} = \frac{\partial (\vec{f}_i n_i)}{\partial \vec{U}} \xrightarrow{(2.6)} \mathbf{A} = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \vec{U}} \quad (2.10)$$

Για τον υπολογισμό του μητρώου \mathbf{A} , σύμφωνα με την (2.10) πρέπει να παραγωγιστεί η $\vec{\Phi}$, η οποία εξ ορισμού της (2.6), για $\vec{u} = (u, v)$, γράφεται ως εξής:

$$\vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \rho(\vec{u}\vec{n}) \\ \rho u(\vec{u}\vec{n}) + p n_x \\ \rho v(\vec{u}\vec{n}) + p n_y \\ (E + p)(\vec{u}\vec{n}) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Προκειμένου να απλοποιηθεί η αναλυτική παραγωγή της (2.11) ως προς τις μεταβλητές κατάστασης \vec{U} , γίνεται ο εξής ανασυμβολισμός των μεταβλητών κατάστασης:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

ενώ πλέον το διάνυσμα $\vec{\Phi}$ γράφεται:

$$\vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \mu_2 n_x + \mu_3 n_y \\ \frac{\mu_2}{\mu_1} (\mu_2 n_x + \mu_3 n_y) + (\gamma - 1) \left(\mu_4 - \frac{1}{2} \frac{\mu_2^2 + \mu_3^2}{\mu_1} \right) n_x \\ \frac{\mu_3}{\mu_1} (\mu_2 n_x + \mu_3 n_y) + (\gamma - 1) \left(\mu_4 - \frac{1}{2} \frac{\mu_2^2 + \mu_3^2}{\mu_1} \right) n_y \\ \left(\gamma \mu_4 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu_2^2 + \mu_3^2}{\mu_1} \right) \frac{\mu_2 n_x + \mu_3 n_y}{\mu_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

ενώ η Ιακωβιανή **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu_2} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu_3} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu_4} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu_2} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu_3} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu_4} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial \mu_1} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \mu_2} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \mu_3} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \mu_4} \\ \frac{\partial \Phi_4}{\partial \mu_1} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial \mu_2} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial \mu_3} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial \mu_4} \end{bmatrix}$$

Οπότε, πλέον, μπορούν να υπολογιστούν όλοι οι όροι του **A**:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu_1} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu_2} = n_x$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu_3} = n_y$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu_4} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu_1} = -u(\vec{u}\vec{n}) + \frac{\gamma - 1}{2} (u^2 + v^2) n_x$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu_2} = \vec{u}\vec{n} + (2 - \gamma) u n_x$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu_3} = u n_y - (\gamma - 1) v n_y$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu_4} = (\gamma - 1) n_x$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \mu_1} = -v(\vec{u}\vec{n}) + \frac{\gamma - 1}{2} (u^2 + v^2) n_y$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \mu_2} = vn_x - (\gamma - 1)un_y$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \mu_3} = \vec{u}\vec{n} + (2 - \gamma)vn_y$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \mu_4} = (\gamma - 1)n_y$$

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial \mu_1} = \left(-\gamma \frac{E}{\rho} + (\gamma - 1)(u^2 + v^2)\right)(\vec{u}\vec{n})$$

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial \mu_2} = \left(\frac{\gamma E}{\rho} - \frac{\gamma - 1}{2}(u^2 + v^2)\right)n_x - (\gamma - 1)u(\vec{u}\vec{n})$$

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial \mu_3} = \left(\frac{\gamma E}{\rho} - \frac{\gamma - 1}{2}(u^2 + v^2)\right)n_y - (\gamma - 1)v(\vec{u}\vec{n})$$

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial \mu_4} = \gamma(\vec{u}\vec{n})$$

Άρα, το μητρώο \mathbf{A} είναι:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & n_x & n_y & 0 \\ -u(\vec{u}\vec{n}) + \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2)n_x & \vec{u}\vec{n} + (2 - \gamma)un_x & un_y - (\gamma - 1)vn_y & (\gamma - 1)n_x \\ -v(\vec{u}\vec{n}) + \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2)n_y & vn_x - (\gamma - 1)un_y & \vec{u}\vec{n} + (2 - \gamma)vn_y & (\gamma - 1)n_y \\ \left(-\gamma \frac{E}{\rho} + (\gamma - 1)(u^2 + v^2)\right)(\vec{u}\vec{n}) & \left(\frac{\gamma E}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2)\right)n_x - (\gamma - 1)u(\vec{u}\vec{n}) & \left(\frac{\gamma E}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2)\right)n_y - (\gamma - 1)v(\vec{u}\vec{n}) & \gamma(\vec{u}\vec{n}) \end{bmatrix}$$

Για τα γνωστά πλέον \mathbf{A} , \vec{U} και $\vec{\Phi}$, αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$\vec{\Phi} = \mathbf{A} \cdot \vec{U} \quad (2.10\beta)$$

Οι ιδιοτιμές του μητρώου \mathbf{A} προκύπτουν κατά τα γνωστά από τη λύση της εξίσωσης $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \mathbf{0}$, και είναι οι εξής:

$$\lambda_1 = \vec{u} \cdot \vec{n}$$

$$\lambda_2 = \vec{u} \cdot \vec{n}$$

$$\lambda_3 = \vec{u} \cdot \vec{n} + c$$

$$\lambda_4 = \vec{u} \cdot \vec{n} - c$$

Προκειμένου να εκφραστεί ο πίνακας \mathbf{A} μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας σε διαγώνια κανονική μορφή, θα προσδιοριστούν τα αριστερά και δεξιά ιδιοδιανύσματα του, όπου τα δεξιά προκύπτουν από την εξίσωση $(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I})\vec{r}_k = \vec{0}$. Τα αριστερά ιδιοδιανύσματα (δηλαδή τα

δεξιά ιδιοδιανύσματα του αντιστρόφου του A) προκύπτουν μέσω της $\vec{l}_k(A - \lambda_k I) = \vec{0}$. Τα ιδιοδιανύσματα έχουν ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \left[1 \quad u \quad v \quad \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right]^T \\ \vec{r}_2 &= [0 \quad n_y \quad -n_x \quad n_y u - n_x v]^T \\ \vec{r}_3 &= \left[\frac{1}{c} \quad \frac{u}{c} + n_x \quad \frac{v}{c} + n_y \quad \frac{1}{2c}(u^2 + v^2) + \frac{c}{\gamma - 1} + \vec{u}\vec{n} \right]^T \\ \vec{r}_4 &= \left[\frac{1}{c} \quad \frac{u}{c} - n_x \quad \frac{v}{c} - n_y \quad \frac{1}{2c}(u^2 + v^2) + \frac{c}{\gamma - 1} - \vec{u}\vec{n} \right]^T \\ \vec{l}_1 &= \left[1 - \frac{(\gamma - 1)(u^2 + v^2)}{2c^2} \quad \frac{\gamma - 1}{c^2}u \quad \frac{\gamma - 1}{c^2}v \quad \frac{-(\gamma - 1)}{c^2} \right]^T \\ \vec{l}_2 &= [n_x v - n_y u \quad n_y \quad -n_x \quad 0]^T \\ \vec{l}_3 &= \left[-\frac{\vec{u}\vec{n}}{2} + \frac{(\gamma - 1)(u^2 + v^2)}{4c} \quad \frac{n_x}{2} - \frac{(\gamma - 1)}{2c} \quad \frac{n_y}{2} - \frac{(\gamma - 1)}{2c} \quad \frac{\gamma - 1}{2c} \right]^T \\ \vec{l}_4 &= \left[\frac{\vec{u}\vec{n}}{2} + \frac{(\gamma - 1)(u^2 + v^2)}{4c} \quad -\frac{n_x}{2} - \frac{(\gamma - 1)}{2c} \quad -\frac{n_y}{2} - \frac{(\gamma - 1)}{2c} \quad \frac{\gamma - 1}{2c} \right]^T\end{aligned}$$

Η έκφραση του A σε διαγώνια κανονική μορφή, μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας και μήτρας μετασχηματισμού P έχει ως εξής:

$$A = P \Lambda P^{-1}$$

$$\text{όπου } P = [\vec{r}_1 \quad \vec{r}_2 \quad \vec{r}_3 \quad \vec{r}_4], \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \\ \vec{l}_3 \\ \vec{l}_4 \end{bmatrix}, \quad \text{ενώ } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Ακόμα ορίζονται τα μητρώα

$$A^+ = P \Lambda^+ P^{-1}, \quad A^- = P \Lambda^- P^{-1}, \quad |A| = A^+ - A^- \quad (2.15)$$

όπου τα Λ^+, Λ^- , εμπεριέχουν μόνο τις θετικές, και μόνο τις αρνητικές ιδιοτιμές αντίστοιχα.

Ορίζεται επίσης το διάνυσμα των πρωτεύουσών μεταβλητών κατάστασης \vec{V} (διαφέρουν από τις συντηρητικές), και το αντίστοιχο κατά Roe διάνυσμα των μέσων τιμών τους $\vec{\tilde{V}}$:

$$\vec{V} = [\rho \quad u \quad v \quad p]^T, \quad \vec{\tilde{V}} = [\tilde{\rho} \quad \tilde{u} \quad \tilde{v} \quad \tilde{p}]^T \quad (2.16)$$

όπου η μέση κατά Roe πυκνότητα προκύπτει ως:

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_L \rho_R} \quad (2.16\alpha)$$

οι αντίστοιχες ταχύτητες μέσω της σχέσης:

$$\vec{V} = \frac{\sqrt{\rho_L} \vec{V}_L + \sqrt{\rho_R} \vec{V}_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (2.16\beta)$$

όπου εδώ οι δείκτες «R,L» αντιστοιχούν σε τιμές εκατέρωθεν του σημείου στο οποίο επιθυμείται ο υπολογισμός των ροϊκών ποσοτήτων, δηλαδή της διεπιφάνειας δύο γειτονικών κυψελών.

Η μέση τιμή της πίεσης υπολογίζεται μέσω μιας παρεμφερούς της παραπάνω, σχέσης για την ολική ενθαλπία [19]:

$$\tilde{h} = \frac{\sqrt{\rho_L} h_L + \sqrt{\rho_R} h_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (2.16\gamma)$$

και έπειτα λαμβάνεται η τιμή της πίεσης μέσω της:

$$h_t = \frac{\gamma p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} \rho(u^2 + v^2)$$

Άρα, επαναδιατυπώνεται το διάνυσμα ατριβών όρων $\overline{\Phi_{PQ}^{\alpha\tau\rho}}$ ως:

$$\overline{\Phi_{PQ}^{\alpha\tau\rho}} = \frac{1}{2} (\overline{\Phi_{PQ}^L} + \overline{\Phi_{PQ}^R}) - \frac{1}{2} |\widetilde{A_{PQ}}| (\overline{U_{PQ}^R} - \overline{U_{PQ}^L}) \quad (2.17)$$

όπου το $|\widetilde{A_{PQ}}|$ προκύπτει από τις κατά Roe μέσες τιμές των πρωτευουσών μεταβλητών

Οι δείκτες R,L πλέον αναφέρονται στις περιοχές εκατέρωθεν της διεπιφάνειας μεταξύ των κυψελών P και Q, και τίθεται το ζήτημα του από πόσο μακριά ή κοντά στη διεπιφάνεια θα ληφθούν οι τιμές των συντηρητικών μεταβλητών.

Η επιλογή των σημείων από τα οποία θα ληφθούν οι συντηρητικές μεταβλητές οι οποίες θα αντιπροσωπεύουν την κατάσταση που επικρατεί στη διεπιφάνεια μεταξύ δύο γειτονικών κυψελών είναι καθοριστικής σημασίας για την ακρίβεια της λύσης.

Σε μια χωρική διακριτοποίηση πρώτης τάξης, ως τιμές εκατέρωθεν της διεπιφάνειας λαμβάνονται οι τιμές στα βαρύκεντρα των αντίστοιχων γειτονικών κυψελών, δηλαδή :

$$\overline{U_{PQ}^L} = \overline{U_P} \quad \text{και} \quad \overline{U_{PQ}^R} = \overline{U_Q} \quad (2.18)$$

Για επίτευξη ακρίβειας δεύτερης τάξης των $\overline{U_{PQ}^L}$, $\overline{U_{PQ}^R}$, αυτά υπολογίζονται μέσω αναπτύγματος Taylor, αμελώντας όρους δεύτερης ή μεγαλύτερης τάξης:

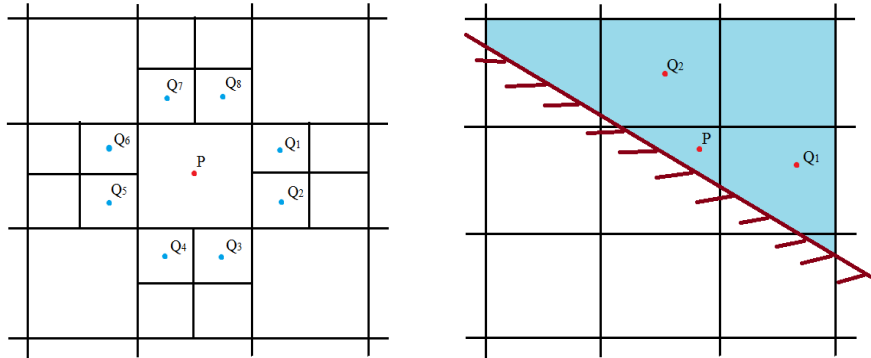
$$\left. \begin{aligned} \overline{U}_{PQ}^L &= \overline{U}_P + \overline{PM} \cdot (\nabla \overline{U})_P \\ \overline{U}_{PQ}^R &= \overline{U}_Q + \overline{QM} \cdot (\nabla \overline{U})_Q \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

όπου $(\nabla \overline{U})_P = \left(\frac{\partial \overline{U}_P}{\partial x}, \frac{\partial \overline{U}_P}{\partial y} \right)$, $(\nabla \overline{U})_Q = \left(\frac{\partial \overline{U}_Q}{\partial x}, \frac{\partial \overline{U}_Q}{\partial y} \right)$, και M το μέσον της διεπιφάνειας των κυψελών P και Q.

Συνεπώς πρέπει να υπολογιστούν οι χωρικές παράγωγοι $(\nabla \overline{U})_P, (\nabla \overline{U})_Q$. Ο υπολογισμός τους βασίζεται στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, και χρησιμοποιούνται οι τιμές των συντηρητικών μεταβλητών των γειτονικών κυψελών κάθε κυψέλης.

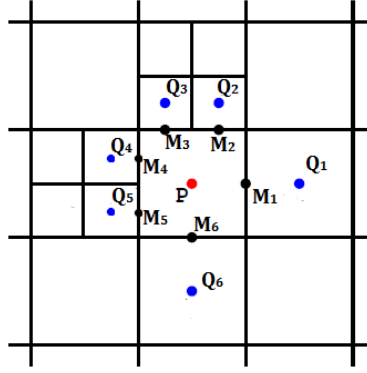
Η ανάλυση που θα ακολουθήσει αναφέρεται στην κυψέλη P, ενώ η διαδικασία γενικεύεται για κάθε κυψέλη.

Ο αριθμός των γειτόνων μιας τυχαίας κυψέλης P, κυμαίνεται μεταξύ δύο και οκτώ. Ο λόγος είναι ότι όπως προαναφέρθηκε στην παράγραφο 2.1, κάθε ακμή μίας κυψέλης P μπορεί να συνορεύει με το πολύ δύο άλλες κυψέλες. Αυτή η συνθήκη δίνει σε μία κυψέλη μεγάλου – σε σχέση με τις γύρω της – μεγέθους, το πολύ οκτώ μικρότερες (και μάλιστα υπο-τετραπλάσιου εμβαδού) γειτονικές κυψέλες. Το κάτω όριο των 2 γειτονικών κυψελών, επιτυγχάνεται όταν οι κυψέλες τέμνονται από το στερεό κατά συγκεκριμένο τρόπο, ώστε να απομένουν μόνο δύο γειτονικές κυψέλες που κείνται σε περιοχή του ρευστού. Οι δύο αυτές περιπτώσεις αποτυπώνονται στο σχήμα 2.11.



Σχήμα 2.11: Περιπτώσεις οριακού αριθμού γειτόνων μιας κυψέλης P. Μέγιστος αριθμός γειτόνων = 8 (Αριστερά) και ελάχιστος αριθμός γειτόνων = 2 (Δεξιά).

Στο σχήμα 2.12, παρουσιάζεται η τυχαία περίπτωση όπου η κυψέλη P γειτνιάζει με 6 κυψέλες:



Σχήμα 2.12: Περίπτωση όπου η κυψέλη P γειτνιάζει με 6 κυψέλες βαρυκέντρων Q_i . Με M_i , παρίστανται τα μέσα των διεπιφανειών μεταξύ γειτνιαζουσών κυψελών.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Taylor για την τυχαία γειτονική κυψέλη Q είναι:

$$\vec{U}_Q = \vec{U}_P + \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right]_P \Delta x + \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial y} \right]_P \Delta y$$

με $\Delta x = x_Q - x_P, \Delta y = y_Q - y_P$, ενώ αν τεθεί $\overline{\Delta \vec{U}} = \vec{U}_Q - \vec{U}_P$, λαμβάνεται:

$$\left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right]_P \Delta x + \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial y} \right]_P \Delta y - \overline{\Delta \vec{U}} = 0$$

Αρα η εύρεση των δύο παραγώγων μπορεί να αναχθεί στην ελαχιστοποίηση του υπολοίπου της παραπάνω εξίσωσης για όλες τις γειτονικές κυψέλες, δηλαδή της συνάρτησης:

$$E = \sum_{i=1}^{\gamma_{\text{ειτ}}(P)} \left(\left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right]_P \Delta x_i + \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial y} \right]_P \Delta y_i - \overline{\Delta U}_i \right)^2$$

Αρα, για την ελαχιστοποίησή της πρέπει να βρεθούν τα ακρότατα της ως προς $\frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x}, \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y}$, δηλαδή:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \left(\left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right]_P \right)} &= \sum_{i=1}^{\gamma_{\text{ειτ}}(P)} 2 \left(\left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right]_P \Delta x_i + \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial y} \right]_P \Delta y_i - \overline{\Delta U}_i \right) \Delta x_i = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial \left(\left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial y} \right]_P \right)} &= \sum_{i=1}^{\gamma_{\text{ειτ}}(P)} 2 \left(\left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right]_P \Delta x_i + \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial y} \right]_P \Delta y_i - \overline{\Delta U}_i \right) \Delta y_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

και επιμερίζοντας την τελευταία, και με χρήση της σύμβασης του Einstein, είναι:

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right]_P \Delta x_i \Delta x_i + \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right]_P \Delta x_i \Delta y_i &= \Delta x_i \overline{\Delta U_i} \\ \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right]_P \Delta x_i \Delta y_i + \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right]_P \Delta y_i \Delta y_i &= \Delta y_i \overline{\Delta U_i} \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

ή σε μητρική μορφή:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_i \Delta x_i & \Delta x_i \Delta y_i \\ \Delta x_i \Delta y_i & \Delta y_i \Delta y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right]_P \\ \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right]_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_i \overline{\Delta U_i} \\ \Delta y_i \overline{\Delta U_i} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Η επίλυση του παραπάνω γραμμικού συστήματος δίνει τις ζητούμενες τιμές των χωρικών παραγώγων, επιτρέποντας τη χωρική διακριτοποίηση δεύτερης τάξης ακρίβειας.

Περιοριστής (Limiter)

Αν οι παράγωγοι που υπολογίστηκαν παραπάνω, χρησιμοποιούνταν ατόφια για την προεκβολή των συντηρητικών μεταβλητών στα μέσα των διεπιφανειών των γειτονικών κυψελών, τότε λόγω πιθανών υπερακοντίσεων στις τιμές τους, μπορεί οι προκύπτουσες τιμές των συντηρητικών μεταβλητών να έβγαιναν εκτός των τιμών που θέτουν ως προς τις μεταβλητές αυτές, τα βαρύκεντρα των γειτνιαζουσών κυψελών. Για να αποφευχθεί αυτό, οι προκύπτουσες παράγωγοι περιορίζονται [16]. Δηλαδή χρησιμοποιείται η σχέση των Barth&Jeffersen [20],[21] για την προεκβολή των συντηρητικών μεταβλητών:

$$\left. \begin{aligned} (\bar{U}_{PQ}^L)^* &= \bar{U}_P + \psi_P \overline{PM} \cdot (\nabla \bar{U})_P \\ (\bar{U}_{PQ}^R)^* &= \bar{U}_Q + \psi_Q \overline{QM} \cdot (\nabla \bar{U})_Q \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

όπου ψ_P, ψ_Q είναι οι περιοριστές, εν γένει διάφοροι μεταξύ τους, με τιμές που κυμαίνονται μεταξύ 0 και 1, και $(\bar{U}_{PQ}^L)^*, (\bar{U}_{PQ}^R)^*$ είναι οι τελικές τιμές των συντηρητικών μεταβλητών στη διεπιφάνεια των κυψελών P,Q, μετά τη χρήση του περιοριστή.

Στις περιπτώσεις όπου $\psi=1$, λαμβάνει χώρα μια γραμμική ανάπλαση των ζητουμένων μεταβλητών, και το σφάλμα αποκοπής είναι δεύτερης τάξης, ενώ όταν $\psi=0$, γίνεται μηδενικού βαθμού ανάπλαση και το σφάλμα αποκοπής είναι πρώτης τάξης.

Πριν οριστεί ο περιοριστής ψ , ορίζονται οι ποσότητες:

$$\left. \begin{aligned}
 \vec{U}_{min} &= \min(\vec{U}, \vec{U}_{Q_i}) \\
 \vec{U}_{max} &= \max(\vec{U}, \vec{U}_{Q_i}) \\
 \vec{U} &= \overline{U_{PQ}^L}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Ο περιοριστής δίδεται από τη σχέση:

$$\psi_{P,j} = \begin{cases} 1, & \tilde{U}_j = U_{P,j} \\ \min\left(1, \frac{U_{max,j} - U_{P,j}}{\tilde{U}_j - U_{P,j}}\right), & \tilde{U}_j > U_{P,j} \\ \min\left(1, \frac{U_{min,j} - U_{P,j}}{\tilde{U}_j - U_{P,j}}\right), & \tilde{U}_j < U_{P,j} \end{cases} \quad (2.25)$$

για $j=1,2,3,4$

Ομοίως προκύπτουν τα $\psi_{Q,j}$, και επιλέγεται τελικώς:

$$\left. \begin{aligned}
 \psi_P &= \min(\psi_{P,j}) \\
 \psi_Q &= \min(\psi_{Q,j})
 \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Επιγραμματικά, ο περιοριστής επιβάλλει, οι τιμές των προεκβεβλημένων συντηρητικών μεταβλητών να είναι φραγμένες από τις τιμές των συντηρητικών μεταβλητών στα σημεία τα οποία χρησιμοποιήθηκαν για την εύρεση των παραγώγων.

Όμως, η χρήση περιοριστών δυσχεραίνει συχνά την επίτευξη σύγκλισης μόνιμης κατάστασης, οδηγώντας σε «φαύλους» κύκλους, όπου η τελική λύση υπόκειται σε διαρκείς μικρομεταβολές οφειλόμενες στις αλλαγές των περιοριστών και όχι στη φυσική της ροής.

Για αυτό, οι τιμές των περιοριστών παγιώνονται μετά από κάποιο σημείο κατά την πορεία σύγκλισης, χρησιμοποιώντας προηγούμενες αποθηκευμένες τιμές, και δεν υπολογίζονται κάθε φορά εκ νέου.

2.2.3 Διακριτοποίηση Χρονικών Όρων

Επαναπαράτιθεται αρχικά ο χρονικός όρος της εξίσωσης κατάστασης (2.4), δηλαδή το ολοκλήρωμα:

$$\int_{\Omega_p^{k+1}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega$$

Επειδή το όριο ολοκλήρωσης εξαρτάται από τον χρόνο, θα χρησιμοποιηθεί το θεώρημα μεταφοράς Reynolds [22] (για τη συμπερίληψη του εισερχόμενου ρευστού στον όγκο ελέγχου), οπότε συμβολίζοντας το όριο του όγκου Ω_p^{k+1} , ως $\partial\Omega_p^{k+1} = S_p^{k+1}$ λαμβάνεται:

$$\int_{\Omega_p^{k+1}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_p^{k+1}} \vec{U} d\Omega - \int_{S_p^{k+1}} \vec{u}_{\pi\lambda\epsilon\gamma\mu}^{k+1} \vec{n}^{k+1} \vec{U} ds \quad (2.27)$$

όπου $\vec{u}_{\pi\lambda\epsilon\gamma\mu}^{k+1}$ είναι η ταχύτητα μετατόπισης του συνόρου του όγκου ολοκλήρωσης (δηλαδή της κυψέλης P) τη χρονική στιγμή t^{k+1} .

Η σχέση (2.27) περιγράφει μαθηματικά, ότι το σύνολο των χρονικών μεταβολών των συντηρητικών μεγεθών εντός του όγκου ελέγχου, ισούται με τη χρονική μεταβολή τους εάν ο όγκος ελέγχου ήταν ακίνητος (λ.χ. λόγω περιοδικών συνθηκών επ' άπειρο ροής), αφαιρουμένης της ροής (flux) που εισέρχεται (ή εξέρχεται) από τον όριο του όγκου ελέγχου, λόγω ακριβώς της μετακίνησης του ορίου του.

Όμως ένας όγκος ελέγχου (κυψέλη) παραμένει γενικά ακίνητος, εκτός από όταν μία εκ των ακμών του άπτεται του στερεού (cut-cell), οπότε η ακμή αυτή αποκτά ταχύτητα ίδια με την ταχύτητα του στερεού ορίου. Εκφράζοντάς τα παραπάνω με μαθηματικό τρόπο:

$$\int_{S_p^{k+1}} \vec{u}_{\pi\lambda\epsilon\gamma\mu}^{k+1} \vec{n}^{k+1} \vec{U} ds = \int_{S_p^{k+1}} \vec{U} u_{\tau\omicron\iota\chi,n} ds \quad (2.28)$$

όπου $u_{\tau\omicron\iota\chi,n}$ είναι η ταχύτητα παραμόρφωσης-κίνησης της ακμής που άπτεται του στερεού ορίου, δηλαδή η συνιστώσα της ταχύτητας του στερεού που είναι κάθετη στην ακμή της κυψέλης,

Η (2.27) διακριτοποιείται μέσω κατάντι χρονικού σχήματος πεπερασμένων διαφορών (implicit), ακρίβειας δευτέρης τάξης:

$$\int_{\Omega_p^{k+1}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega \cong \frac{1}{2\Delta t} (3\vec{U}_p^{k+1} \vec{\Omega}_p^{k+1} - 4\vec{U}_p^k \vec{\Omega}_p^k + \vec{U}_p^{k-1} \vec{\Omega}_p^{k-1}) - \sum_{Q \in \gamma\epsilon\iota\tau(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^{\tau\omicron\iota\chi,k+1} \Delta s \quad (2.29)$$

όπου $\vec{U}_p^{k+1}, \vec{U}_p^k, \vec{U}_p^{k-1}$ είναι τα διανύσματα των συντηρητικών μεταβλητών της κυψέλης P τις χρονικές στιγμές t^{k+1}, t^k, t^{k-1} αντίστοιχα, $\vec{\Omega}_p^{k+1}, \vec{\Omega}_p^k, \vec{\Omega}_p^{k-1}$ είναι οι όγκοι (εμβαδά) της κυψέλης P τις αντίστοιχες πάλι χρονικές στιγμές, ενώ το $\vec{\Phi}_{PQ}^{\tau\omicron\iota\chi,k+1}$ είναι το αριθμητικό

διάνυσμα της ροής που προκύπτει λόγω της παραμόρφωσης του ορίου του όγκου ολοκλήρωσης (δηλαδή της κίνησης του τοιχώματος).

2.2.4 Οριακές Συνθήκες

Αρχικά παρουσιάζεται η περίπτωση ακίνητης γεωμετρίας, όπου $\vec{u}_{\text{τοιχ}} = \vec{0}$.

Η ροή είναι θεωρείται ατριβής, συνεπώς εφαρμόζεται η συνθήκη μη εισχώρησης, στα στερεά τοιχώματα:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.30)$$

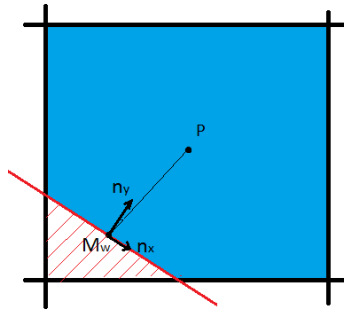
Άρα, για ακίνητη γεωμετρία, οι ροές από το τοίχωμα είναι από (2.10),

$$\vec{\Phi}_{\text{τοιχ}} = \begin{bmatrix} \rho(\vec{u}\vec{n}) \\ \rho u(\vec{u}\vec{n}) + pn_x \\ \rho v(\vec{u}\vec{n}) + pn_y \\ (E + p)(\vec{u}\vec{n}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ pn_x \\ pn_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Όπως έχει προειπωθεί, επειδή επί του στερεού ορίου δεν υπάρχουν βαρύκεντρα των κυψελών του πλέγματος, η επιβολή των οριακών συνθηκών γίνεται έμμεσα, μέσω προεκβολής των τιμών των συντηρητικών μεταβλητών του βαρυκέντρου της κυψέλης P, στο μέσον της ακμής που άπτεται του στερεού ορίου, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.12. Από το θεώρημα Taylor:

$$\vec{U}_{M_w} = \vec{U}_P + \overline{PM_w} \cdot (\nabla \vec{U})_P \quad (2.32)$$

από όπου προκύπτει το διάνυσμα συντηρητικών μεταβλητών στο μέσον του τοιχώματος M_w .



Σχήμα 2.13: Προεκβολή των συντηρητικών μεταβλητών από το βαρύκεντρο της τεμνόμενης κυψέλης P, στο μέσον της M της ακμής που άπτεται του στερεού (wall). Η μπλε περιοχή ορίζει το ρευστό, η κόκκινη συνεχής γραμμή το σύνορο του στερεού, και με διαγράμμιση απεικονίζεται το αποτμηθέν τμήμα της τεμνόμενης κυψέλης P.

Από την (2.10β), για το τοίχωμα ισχύει: $\vec{\Phi}_{\text{τοιχ}} = \mathbf{A}\vec{U}_{M_w}$, δηλαδή βρίσκεται ο μόνος άγνωστος της (2.31) και γίνεται η επιβολή του διανύσματος ατριβών ροών στο τοίχωμα.

Στα εξωτερικά σύνορα του υπολογιστικού χωρίου χρησιμοποιείται η τεχνική του ψευδοκόμβου, όπου χρησιμοποιείται ένας παραπάνω κόμβος κάθε φορά, και έτσι το βαρύκεντρο της σχηματιζόμενης κυψέλης συμπίπτει με το σύνορο του χωρίου. Στους κόμβους αυτούς επιβάλλονται οι τιμές των πρωτευουσών μεταβλητών της επ' άπειρο ροής ως συνθήκες Dirichlet.

Σε περίπτωση που υπάρχει κίνηση των στερεών ορίων, 4 πιθανά ενδεχόμενα μπορούν να συμβούν.

Η απλούστερη περίπτωση είναι, μία κυψέλη που εκτεινόταν σε περιοχή ρευστού τη χρονική στιγμή t^k , να εκτείνεται σε περιοχή ρευστού και τη χρονική στιγμή t^{k+1} . Συνεπώς ο όγκος ολοκλήρωσης παραμένει ανέπαφος, και εφαρμόζεται κανονικά το σχήμα πεπερασμένων διαφορών όπως προαναφέρθηκε.

Η δεύτερη πιθανή περίπτωση, περιλαμβάνει τις κυψέλες P οι οποίες σε οποιαδήποτε εκ των χρονικών στιγμών t^{k+1}, t^k, t^{k-1} , διατρέχονται από το στερεό όριο.

Άρα επιστρέφοντας στο σημείο μετά την εφαρμογή του θεωρήματος μεταφοράς Reynolds, και στον όρο $\int_{S_p^{k+1}} (\vec{U} u_{\text{τοιχ},n}) ds$, γίνεται η παραδοχή ότι [13]:

$$\int_{S_p^{k+1}} (\vec{U} u_{\text{τοιχ},n}) ds \cong \vec{U}_{\text{τοιχ}}^{k+1} \int_{\partial\Omega_p^{k+1}} u_{\text{τοιχ},n} ds$$

$$\vec{U}_{\text{τοιχ}}^{k+1} \frac{\partial\Omega_p}{\partial t} \Big|^{k+1} \cong \frac{\vec{U}_{\text{τοιχ}}^{k+1}}{2\Delta t} (3\Omega_p^{k+1} - 4\Omega_p^k + \Omega_p^{k-1}) \quad (2.33)$$

ενώ για τον χωρικό όρο ισχύουν όσα προηγήθηκαν .

Η τρίτη περίπτωση αφορά τις κυψέλες όπου εκτείνονται σε περιοχή του στερεού την χρονική στιγμή t^k , ενώ εισέρχονται σε περιοχή του ρευστού την χρονική στιγμή t^{k+1} .

Αυτό συνεπάγεται πως τα $\Omega_p^k, \Omega_p^{k-1}$ είναι ίσα με μηδέν , οπότε προσαρμόζεται κατάλληλα η προηγούμενη εξίσωση.

Τέλος, κυψέλες που καλύπτουν περιοχή του ρευστού τη χρονική στιγμή t^k και «στερεοποιούνται» τη χρονική στιγμή t^{k+1} , οφείλουν να μεταφέρουν τις τιμές των συντηρητικών μεταβλητών σε γειτονικές κυψέλες, μέσω διαδικασίας συνένωσης.

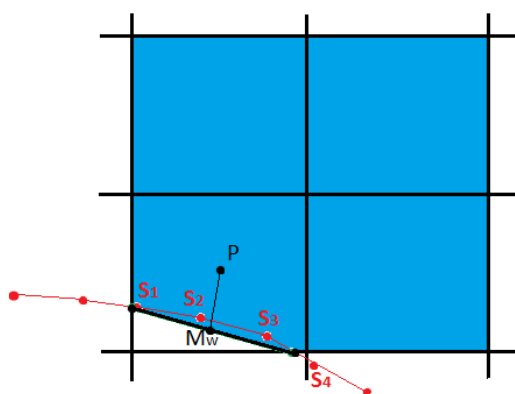
Τέλος, ας εστιάσουμε στην ταχύτητα του στερεού $u_{\text{τοιχ},n}$.

Επειδή η στερεά γεωμετρία, όπως προειπώθηκε, αναπαρίσταται σε διακριτή μορφή, υπό μορφή σημείων, τα οποία το λογισμικό τεμνομένων κυψελών τα ενώνει με γραμμικό τρόπο, απαιτείται πυκνά διακριτοποιημένη αναπαράσταση του στερεού ορίου, όχι πλέον μόνο (όπως στα οριόδετα πλέγματα) για την πιστή αναπαράσταση της αληθινής γεωμετρίας με διακριτό τρόπο, αλλά επιπλέον για τον εξής λόγο:

Οι επικρατούσες ταχύτητες του εκάστοτε τμήματος του τοιχώματος, το οποίο άπτεται σε μια ακμή μιας τυχαίας τεμνόμενης κυψέλης P, λαμβάνονται με προεκβολή από γειτονικά σημεία της διακριτοποιημένης στερεάς γεωμετρίας. Άρα, αν οι διαστάσεις των μικρότερων κυψελών του πλέγματος (έστω κυψέλες πλευράς a), είναι κατά πολύ μικρότερες της στοιχειώδους

λωρίδας της στερεάς γεωμετρίας (Δs), τότε οι ταχύτητες στις κυψέλες αυτές ενδέχεται να αποκλίνουν από τις πραγματικές.

Το φαινόμενο αυτό δεν δημιουργεί προβλήματα σε μη σύνθετες κινήσεις (λ.χ. μια αεροτομή που μετακινείται κάθετα στον οριζόντιο άξονα), όπου οι ταχύτητες είναι κοινές για κάθε σημείο του στερεού. Αντιθέτως, σε προβλήματα συνθέτως κινουμένων στερεών ορίων (λ.χ. η λίκνιση μιας αεροτομής), απαιτείται πυκνότερα διακριτοποιημένη αναπαράσταση του στερεού. Στο λογισμικό τεμνομένων κυψελών, όπως εξηγείται και στο σχήμα 2.14, προκειμένου να βρεθεί η ταχύτητα του τοιχώματος στο μέσον της απότομης στο στερεό ακμής μιας κυψέλης P, λαμβάνονται υπόψη οι συνεισφορές των ταχυτήτων από τα 4 πλησιέστερα σημεία της στερεάς γεωμετρίας.



Σχήμα 2.14: Εκτίμηση ταχύτητας τοιχώματος στο μέσον της σχηματιζόμενης ακμής που άπτεται του στερεού, μέσω συνυπολογισμού συνεισφορών των (γνωστών) ταχυτήτων από τα 4 πλησιέστερα σημεία της στερεάς γεωμετρίας. Με μπλε απεικονίζεται η περιοχή του ρευστού, με κόκκινο το σύνορο του στερεού, M_W είναι το μέσον της ακμής που άπτεται στο στερεό, και S_1, S_2, S_3, S_4 τα πλησιέστερα διακριτά σημεία του στερεού.

Έπειτα από την εύρεση της $\vec{u}_{\text{τοιχ}}$, μπορεί να εφαρμοστεί και η συνθήκη μη-εισχώρησης για την κινούμενη γεωμετρία, δηλαδή:

$$(\vec{u} - \vec{u}_{\text{τοιχ}})\vec{n} = 0 \quad (2.30\alpha)$$

και η επιβολή του νέου διανύσματος ατριβών ροών στο τοίχωμα, με χρήση ξανά της (2.10β):

$$\vec{\Phi}_{\text{τοιχ}} = \begin{bmatrix} \rho(\vec{u}\vec{n}) \\ \rho u(\vec{u}\vec{n}) + pn_x \\ \rho v(\vec{u}\vec{n}) + pn_y \\ (E + p)(\vec{u}\vec{n}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(\vec{u}_{\text{τοιχ}}\vec{n}) \\ pn_x \\ pn_y \\ (E + p)(\vec{u}_{\text{τοιχ}}\vec{n}) \end{bmatrix} \quad (2.31\alpha)$$

2.3 Αριθμητική Επίλυση

Υπενθυμίζεται η διανυσματική εξίσωση των νόμων διατήρησης:

$$\vec{R}_P = \int_{\Omega_P^{k+1}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega + \int_{S_P^{k+1}} \vec{\Phi} dS = \vec{0}$$

η οποία έπειτα από την προηγούμενη ανάλυση, για ακίνητα στερεά όρια, τροποποιείται σε :

$$\vec{R}_P = \frac{1}{2\Delta t} (3\vec{U}_P^{k+1}\vec{\Omega}_P^{k+1} - 4\vec{U}_P^k\vec{\Omega}_P^k + \vec{U}_P^{k-1}\vec{\Omega}_P^{k-1}) + \sum_{Q \in \gamma_{\text{ειτ}}(P)} \vec{\Phi}_{P,Q} \Delta s \quad (2.34)$$

Για την επίλυση του συστήματος εξισώσεων χρησιμοποιείται η τεχνική διπλού χρονικού βήματος (dual time stepping), δηλαδή εισάγεται ένα ψευδο-χρονικό βήμα για κάθε πραγματικό βήμα, προκειμένου το πρόβλημα να κατασταθεί υπερβολικό στο χωρο-χρόνο. Θα γίνει αναλυτικότερη περιγραφή παρακάτω.

Ακόμα, επειδή οι εξισώσεις κατάστασης είναι μη-γραμμικές απαιτείται γραμμικοποίησή τους για την υπολογιστική επίλυση. Επ' αυτού χρησιμοποιείται η δέλτα-διατύπωση (Δ -formulation), που προκύπτει με εφαρμογή του θεωρήματος Taylor.

Αν θεωρηθεί το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών $\vec{U}_{\alpha\kappa\rho}$, το οποίο περιέχει την ακριβή λύση της εξίσωσης κατάστασης για μια τυχαία κυψέλη P, σε μια τυχαία χρονική στιγμή, δηλαδή μηδενίζει εντελώς τη διανυσματική εξίσωση υπολοίπου, θα ισχύει:

$$\vec{R}_P(\vec{U}_{\alpha\kappa\rho}) = \vec{0}$$

Ενώ, για μια αρχική ή ενδιάμεση λύση (δηλ. διάνυσμα συντηρητικών μεταβλητών), θα είναι

$$\vec{R}_P(\vec{U}) \neq \vec{0}$$

Τίθεται : $\vec{\Delta U} = \vec{U}_{\alpha\kappa\rho} - \vec{U} \rightarrow \vec{U}_{\alpha\kappa\rho} = \vec{\Delta U} + \vec{U}$, οπότε από το θεώρημα Taylor προκύπτει:

$$\begin{aligned} \vec{R}_P(\vec{U}_{\alpha\kappa\rho}) = \vec{0} &\leftrightarrow \vec{R}_P(\vec{\Delta U} + \vec{U}) = \vec{0} \leftrightarrow \vec{R}_P(\vec{U}) + \left[\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right]_P \vec{\Delta U} + O(\vec{\Delta U}^2) = \vec{0} \rightarrow \\ &\left[\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right]_P \vec{\Delta U} = -\vec{R}_P(\vec{U}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Συνεπώς, η επίλυση του προβλήματος ανάγεται στον μηδενισμό του διανύσματος $\vec{\Delta U}$. Όταν επιτευχθεί αυτό (αφού είναι θεωρητικά μόνο επιτεύξιμος ο πραγματικός μηδενισμός), μηδενίζεται και η τιμή των υπολοίπων $\vec{R}_P(\vec{U})$, ανεξάρτητα από την τιμή των $\left[\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right]_P$.

Για τον υπολογισμό των όρων $\left[\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right]_P$, στις μεν πραγματικές χρονικές στιγμές θα χρησιμοποιείται ο δείκτης π (πραγματικές), στις δε στιγμές ψευδοχρόνου θα χρησιμοποιείται ο δείκτης ψ (ψευδο-).

Θα εξηγηθούν αρχικά τα περί ψευδο-χρονικής στιγμής. Ο όρος που προειπώθηκε ότι προστίθεται στις εξισώσεις κατάστασης είναι ο:

$$\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t}\right)_p^{\psi+1} \Omega_P$$

ο οποίος διακριτοποιείται με κατάντι χρονικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών, ακρίβειας πρώτης τάξης :

$$\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t}\right)_p^{\psi+1} \Omega_P = \frac{\bar{U}_P^{\psi+1} - \bar{U}_P^\psi}{\Delta t} \Omega_P^{\psi+1} = \frac{\Delta \bar{U}_P^{\psi+1}}{\Delta t} \Omega_P^{\psi+1} \quad (2.36)$$

Για επίτευξη γρηγορότερης σύγκλισης, εφαρμόζεται τεχνική υπερχαλάρωσης (over-relaxation), όπου το ψευδοχρονικό βήμα για κάθε κυψέλη P προκύπτει με την προσέγγιση Courant-Friedrichs-Lewy [23] ως:

$$\Delta t_P = CFL \frac{\Omega_P^{\psi+1}}{C} \quad (2.37)$$

όπου CFL ο αριθμός Courant-Friedrichs-Lewy, ενώ :

$$C = (|u_i^P| + c^P) S_i^P, \quad i = 1, 2 \quad (2.38)$$

ενώ S_i^P είναι το άθροισμα των απόλυτων τιμών των προβολών των ακμών της κυψέλης P επί της διεύθυνσης i:

$$S_i^P = \frac{1}{2} \sum_{Q \in \gamma_{\text{ειτ}}(P)} |n_i^{PQ}| \Delta s \quad (2.39)$$

Επιστρέφοντας πλέον στον υπολογισμό του μητρώου $\frac{\partial \bar{R}_P}{\partial \bar{U}}$, για τις ψευδο-χρονικές στιγμές, θα προσδιοριστούν αρχικά οι όροι της διαγωνίου του:

$$[\mathbf{D}]_P^\psi = \frac{\partial \bar{R}_P}{\partial \bar{U}_P^{\psi+1}} = \sum_{Q \in \gamma_{\text{ειτ}}(P)} \frac{1}{2} (\mathbf{A}_P + |\tilde{\mathbf{A}}_{PQ}|) \Delta s_{PQ} + \frac{3\Omega_P^{\pi+1}}{2\Delta t_P} I_{4 \times 4} + \frac{3\Omega_P^{\psi+1}}{\Delta t_P} I_{4 \times 4} \quad (2.40)$$

ενώ οι όροι εκτός διαγωνίου είναι:

$$[\mathbf{nonD}]_{PQ}^\psi = \frac{\partial \bar{R}_P}{\partial \bar{U}_{PQ}^{\psi+1}} = \sum_{Q \in \gamma_{\text{ειτ}}(P)} \frac{1}{2} (\mathbf{A}_Q - |\tilde{\mathbf{A}}_{PQ}|) \Delta s_{PQ} \quad (2.41)$$

άρα μέσω της Δ -διατύπωσης, λαμβάνεται η μητρική έκφραση των διακριτοποιημένων εξισώσεων ροής, όπου P η τυχαία κυψέλη του πλέγματος:

$$\frac{\partial \vec{R}_P}{\partial \vec{U}_P^{\psi+1}} \vec{\Delta U}_P^{\psi+1} + \frac{\partial \vec{R}_P}{\partial \vec{U}_Q^{\psi+1}} \vec{\Delta U}_Q^{\psi+1} = -\vec{R}_P^{\psi} \rightarrow$$

$$[\mathbf{D}]_P^{\psi} \vec{\Delta U}_P^{\psi+1} + [\mathbf{nonD}]_{PQ}^{\psi} \vec{\Delta U}_Q^{\psi+1} = -\vec{R}_P^{\psi} \quad (2.42)$$

ή σε μητρωική μορφή, όπου με f συμβολίζεται ο συνολικός αριθμός κυψελών:

$$\begin{bmatrix} D|_1^{\psi} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \mathbf{nonD}|_{PQ}^{\psi} & D|_P^{\psi} & \mathbf{nonD}|_{PQ}^{\psi} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & D|_f^{\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\Delta U}_1^{\psi+1} \\ \vdots \\ \vec{\Delta U}_P^{\psi+1} \\ \vdots \\ \vec{\Delta U}_f^{\psi+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \vec{R}_1^{\psi} \rightarrow \\ \vdots \\ \vec{R}_P^{\psi} \rightarrow \\ \vdots \\ \vec{R}_f^{\psi} \rightarrow \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Το παραπάνω σύστημα είναι το τυπικό γραμμικό σύστημα της μορφής $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{B}$. Η επίλυση μέσω αντιστροφής του μητρώου συντελεστών είναι όμως ατελέσφορη, διότι συνήθως μεγέθη (συνολικός αριθμός κυψελών) των πλεγμάτων σε υπολογιστικές εφαρμογές είναι της τάξης του 10^4 . Συνεπώς, το μητρώο συντελεστών είναι $\propto 10^4 \times 10^4$. Έτσι προκύπτει πρόσθετη αναγκαιότητα επαναληπτικής επίλυσης (πέρα από την αρχική μη-γραμμικότητα του προβλήματος). Εξ άλλου, αν και υπάρχουν μη μηδενικά στοιχεία εκτός της κυρίας διαγωνίου, παρ' όλα αυτά, τα συντριπτικά περισσότερα στοιχεία εκτός διαγωνίου είναι μηδενικά, και άρα θα αποτελούσε ούτως ή άλλως υπολογιστική «σπατάλη» μια τέτοια προσέγγιση.

Γι' αυτό, χρησιμοποιείται ο επαναληπτικός αλγόριθμος επίλυσης Jacobi [24]. Οπότε η μητρωική εξίσωση γράφεται:

$$[\mathbf{D}]_P^{\psi} \vec{\Delta U}_P^{new} = -\vec{R}_P^{\psi} - [\mathbf{nonD}]_{PQ}^{\psi} \vec{\Delta U}_Q^{old} \rightarrow$$

$$\vec{\Delta U}_P^{new} = [[\mathbf{D}]_P^{\psi}]^{-1} [-\vec{R}_P^{\psi} - [\mathbf{nonD}]_{PQ}^{\psi} \vec{\Delta U}_Q^{old}] \quad (2.44)$$

Ακολουθεί συνοπτική παράθεση του αλγορίθμου επίλυσης :

Ο προσδιορισμός του $\vec{\Delta U}$ γίνεται με την επαναληπτική διαδικασία Jacobi, έπειτα εκτελείται μία επαναληπτική διαδικασία στον ψευδο-χρόνο, και τέλος η εξωτερική επανάληψη στον πραγματικό χρόνο [25].

Βήμα 1: Αρχικοποίηση του διανύσματος \vec{U}^0 των συντηρητικών μεταβλητών σε κάθε βαρύκεντρο κυψέλης.

Βήμα 2: Εκκίνηση της εξωτερικής επαναληπτικής διαδικασίας του πραγματικού χρόνου ($\pi=1$), με $\vec{U}^{\pi} = \vec{U}^0$.

Βήμα 3: Εκκίνηση της ψευδο-χρονικής επαναληπτικής διαδικασίας ($\psi=1$), με $\vec{U}^\psi = \vec{U}^0$.

Βήμα 4: Με τα τρέχοντα $\vec{U}^\pi, \vec{U}^\psi$ υπολογίζονται τα $[[D]_P^\psi]^{-1}, \vec{R}_P^\psi, [nonD]_{PQ}^\psi$ για κάθε κυψέλη P, και τίθεται $\vec{\Delta U}_Q^{old} = \vec{0}$.

Βήμα 5: Εκκίνηση της εσωτερικής επαναληπτικής διαδικασίας (Jacobi) για τον προσδιορισμό του $\vec{\Delta U}$ ($i=1$).

Βήμα 6: Μέσω της τελικής έκφρασης Jacobi για τα $\vec{\Delta U}$, υπολογίζονται τα $\vec{\Delta U}_P^{new}$ για κάθε κυψέλη P.

Βήμα 7: Αν $i < i_{max,jacobi}$, τότε: $\vec{\Delta U}_P^{old} \leftarrow \vec{\Delta U}_P^{new}, i \leftarrow i + 1$, επιστροφή στο βήμα 6. $i_{max,jacobi}$ είναι ο αριθμός των εσωτερικών επαναλήψεων για κάθε ψευδο-χρονικό βήμα που επιλέγεται από τον προγραμματιστή (εδώ $i_{max,jacobi} = 15$).

Βήμα 8: Τερματισμός της Jacobi διαδικασίας και ανανέωση των συντηρητικών μεταβλητών.

$$\vec{U}^{\psi+1} = \vec{U}^\psi + \vec{\Delta U}_{new}$$

Βήμα 9: Μέσω των $\vec{U}^{\psi+1}$, υπολογίζονται τα υπόλοιπα \vec{R}_P^ψ για κάθε κυψέλη P, και έπειτα η RMS τιμή τους, δηλαδή η ρίζα του μέσου όρου των τετραγώνων των υπολοίπων, η οποία συγκρίνεται με το κριτήριο σύγκλισης που έχει δώσει ο χρήστης. Αν δεν έχει επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια, τότε: $\vec{U}^\psi \leftarrow \vec{U}^{\psi+1}, \psi \leftarrow \psi + 1$, και επιστροφή στο βήμα 4.

Βήμα 10: Αν ο πραγματικός χρόνος δεν έχει ανέλθει στον χρόνο επίλυσης που έδωσε ο χρήστης, τότε $\vec{U}^\pi \leftarrow \vec{U}^\psi, \pi \leftarrow \pi + 1$, και επιστροφή στο βήμα 3.

Βήμα 11: Τερματισμός

3 Περί Κίνησης Λικνιζόμενων Οργανισμών, Μαθηματική Έκφραση του Λικνισμού

3.1 Εισαγωγικά Σχόλια

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί αρχικά η φυσική που διέπει τη λίκνιση των χελιών και εν γένει των λικνιζόμενων σωμάτων. Έπειτα περιγράφεται μαθηματικά η κινηματική της λίκνισης και διαμορφώνεται η λικνιζόμενη αεροτομή η οποία θα αποτελέσει αντικείμενο μελέτης των επόμενων κεφαλαίων, τόσο καθ' αυτό, όσο και ως μέσο για τη διερεύνηση της ικανότητας πρόλεξης ροών του λογισμικού τεμνομένων κυψελών.

3.2 Η Φυσική του Λικνισμού

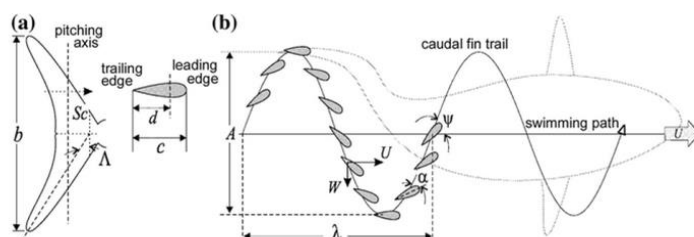
Η ιδιόμορφη κίνηση των αυτοπροωθούμενων οργανισμών όπως τα ψάρια και τα χέλια, μπορεί να παρομοιαστεί με μια ταλαντούμενη, εύκαμπτη υδροτομή, της οποίας η ακριβής μορφή κυμάτωσης, ποικίλει ανάμεσα στα διάφορα υδρόβια είδη.

Ο μηχανισμός παραγωγής πρόωσης, διαφέρει αρκετά στις διάφορες ιδιομορφές λίκνισης, και από άποψη ρευστομηχανικής παραμένουν κάποια σκοτεινά σημεία ως προς τον ακριβή υδροδυναμικό μηχανισμό που τις διέπει.

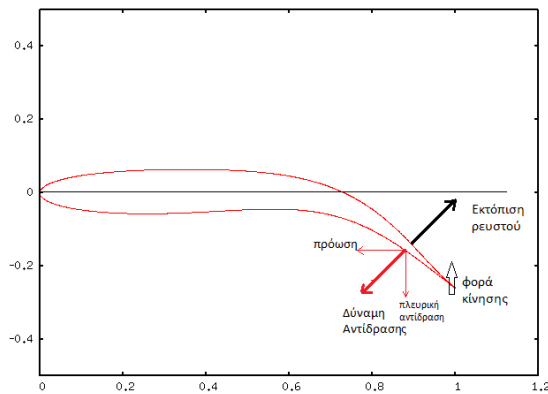
Σε γενικές γραμμές, η πρόωση βασίζεται είτε σε ανωστικά, είτε σε φαινόμενα μηχανικής αντίδρασης με το ρευστό (αν και συνήθως συνυπάρχουν και οι δύο μηχανισμοί σε κάποιο βαθμό).

Για παράδειγμα στην ιδιομορφή λίκνισης του τόνου, το ουραίο περύγιο λειτουργεί ως υδροτομή που εκτελεί ταλάντωση πρόνευσης-φυγοειδούς (pitch and heave), με αποτέλεσμα το διάνυσμα της άνωσης να ενέχει προωστική συνιστώσα [41], όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1.

Σε άλλους οργανισμούς (carangi, sub-carangi), μετέχει σημαντικά στην πρόωση και η δύναμη αντίδρασης που ασκεί το ρευστό στο σώμα [41]. Το ψάρι «σπρώχνει» δηλαδή το ρευστό και εκ της αντιδράσεως προωθείται (βλ. σχήμα 3.2), όπως ακριβώς και ένα συμβατικό πλοίο σπρώχνει μάζες νερού προς τα πίσω μέσω της προπέλας, με τη διαφορά όμως ότι στην περίπτωση των ψαριών, το ίδιο το σώμα είναι αυτό που κινούμενο, εκτοπίζει το ρευστό προς τα πίσω, ενώ στα πλοία ή στα αεροσκάφη, το κυρίως «ωφέλιμο» σώμα, λειτουργεί συνήθως μόνο ως αντίσταση και ως αδράνεια στην προώθηση.

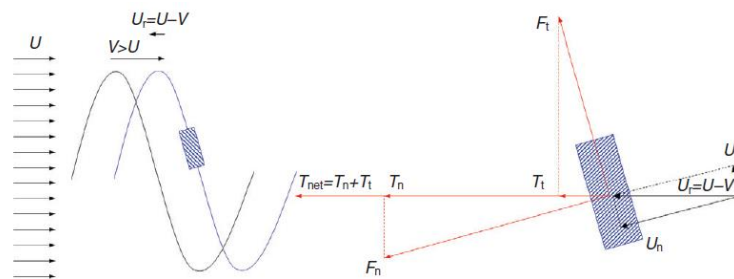


Σχήμα 3.1: Προωστικός μηχανισμός στην ιδιομορφή λίκνισης του τόνου: Ανωστική κυρίως παραγωγή πρόωσης [30].

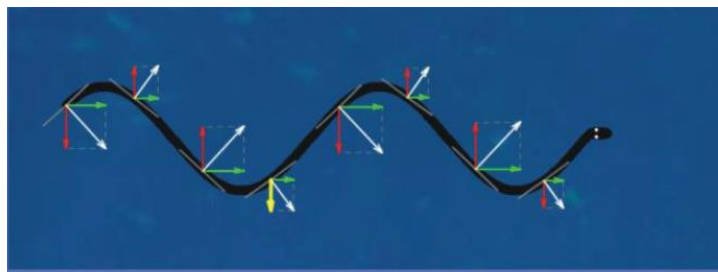


Σχήμα 3.2: Απλουστευμένη αναπαράσταση της προώθησης με μηχανική αντίδραση ρευστού-ψαριού.

Τέλος, στη λίκνιση τύπου χελιού (Anguilliform), το σώμα λειτουργεί κατά βάση ως ενός είδους αντλία όπου προωθεί νερό προς τα πίσω. Στο σώμα του χελιού διαδίδεται ένα αντίστροφο προς τη φορά πλεύσης κύμα, με ταχύτητα μεγαλύτερη της επ' άπειρο ροής (σχήμα 3.3). Έτσι, λειτουργεί τρόπον τινά σαν κοχλίας, προωθώντας νερό προς τα πίσω με κάθε σημείο του σώματός του (σχήμα 3.3), ενώ τα φαινόμενα άνωστικού τύπου προώθησης είναι περιορισμένα [33].



Σχήμα 3.3: Απλουστευμένη αναπαράσταση της προώθησης του χελιού, ως μιας κοχλιώτης αντλίας. U η ταχύτητα της επ' άπειρο ροής, V η ταχύτητα διάδοσης του κύματος, U_r η σχετική ταχύτητα μεταξύ των δύο. Στο δεξί μέρος αναλύονται οι δυνάμεις που δρουν σε ένα στοιχειώδες μέρος του σώματος του [33].



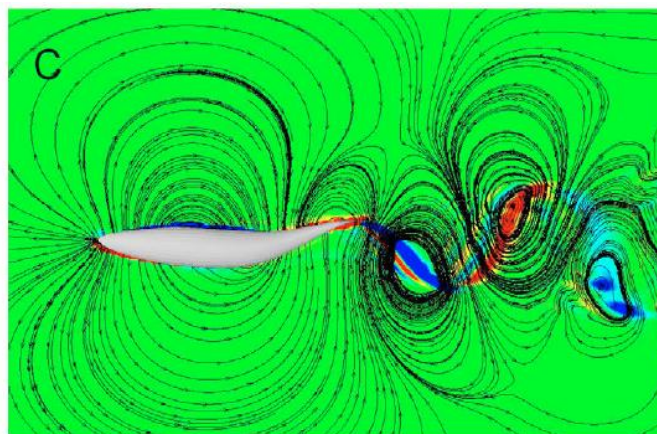
Σχήμα 3.4: Δυνάμεις που δρουν στο σώμα του χελιού. (φορά πλεύσης προς τα δεξιά) [31].

Ασχέτως όμως από την ιδιομορφή λίκνισης, όλοι οι λικνιζόμενοι οργανισμοί έχουν το χαρακτηριστικό, ότι αξιοποιούν και διευθύνουν κατά τέτοιο τρόπο το πεδίο στροβιλισμού της ροής για να επιτύχουν προώθηση με πολύ καλή προωθητική αποδοτικότητα. Μάλιστα η μορφή του πεδίου στροβιλισμού στον ομόρρου ενός οργανισμού είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα της κάθε ιδιομορφής λίκνισης.

Η εκμετάλλευση αυτή του στροβιλισμού εκ μέρους των λικνιζόμενων οργανισμών, έγκειται στο ότι, όταν σε μια λικνιζόμενη υδροτομή που περιρρέεται από παράλληλη ροή ρευστού, επέλθει μία απότομη μεταβολή στην γωνία πρόσπτωσης (λόγω της εγκάρσιας ταλάντωσης που εκτελεί η ακμή προσβολής), μετατοπίζεται το σημείο ανακοπής, και δημιουργείται στην προσβολή ένας στρόβιλος (Leading Edge Vortex), ο οποίος διαδίδεται κατά μήκος της αεροτομής. Ο στρόβιλος αυτός, αλληλεπιδρώντας με τον υφιστάμενο στροβιλισμό κατά μήκος της υδροτομής (δηλαδή του σώματος του οργανισμού), προκαλεί προσωρινά μια αλλοίωση των χαρακτηριστικών της ροής, με τρόπο ευνοϊκό για τη δημιουργία προωστικής δύναμης [27], λόγω της μεταβολής των πεδίων ταχύτητας και πίεσης.

Με συνεχή και δυναμικό λοιπόν τρόπο, οι λικνιζόμενοι οργανισμοί αλλάζουν εκ νέου γωνία πρόσπτωσης, προκαλώντας τη συνεχή διάδοση στροβίλων ακμής προσβολής (LEV). Οι στρόβιλοι αυτοί, όταν, αφού διατρέξουν το σώμα του οργανισμού, φτάσουν στην εκφυγή, σχηματίζουν έναν ομόρρου δινών, οι οποίες είναι τέτοιας φοράς ώστε δημιουργούν μια προς τα πίσω δέσμη ταχυτήτων, και οι οποίες λέγονται για αυτόν τον λόγο αντίστροφος ομόρρους von Karman [42].

Στο σχήμα 3.5 παρουσιάζεται το πεδίο στροβιλισμού γύρω από έναν λικνιζόμενο οργανισμό σε ατριβή ροή, όπου φαίνεται η διάδοση των στροβίλων προσβολής πάνω στο σώμα του ψαριού, και η κατανομή του στροβιλισμού στον ομόρρου.



Σχήμα 3.5: Πεδίο στροβιλισμού γύρω από λικνιζόμενη υδροτομή ιδιομορφής carangiform, σε ατριβή ροή ($Re=\infty$) [42].

Η εκμετάλλευση των δυναμικών αυτών φαινομένων από τους λικνιζόμενους οργανισμούς, μπορεί να επιτευχθεί μόνο σε συγκεκριμένη περιοχή συνθηκών λίκνισης, ανάλογα με την ταχύτητα της ροής. Καίριος ρυθμιστικός παράγοντας για την προωστική (ή μη) συμπεριφορά των λικνιζόμενων υδρο- /αεροτομών είναι ο αριθμός Strouhal, ο οποίος ορίζεται ως:

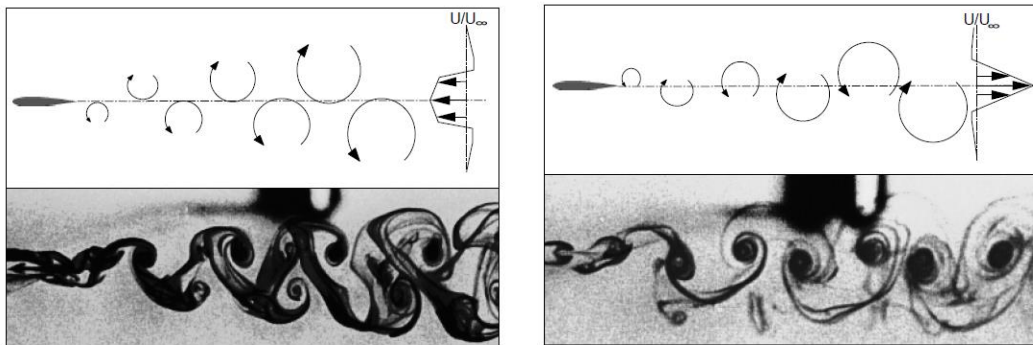
$$Sr = \frac{fD}{U_\infty} \quad (3.1)$$

όπου f η συχνότητα ταλάντωσης, D το πλάτος του ομόρρου, το οποίο συνήθως λαμβάνεται ίσο με το διπλάσιο του πλάτους ταλάντωσης της αεροτομής, και U_∞ η ταχύτητα της παράλληλης ροής.

Ο αριθμός Strouhal, συνδέεται άμεσα με τον ρυθμό με τον οποίο οι στρόβιλοι προσβολής διαδέχονται ο ένας τον άλλον, και γι' αυτό είναι καθοριστικός παράγοντας για την προωστική συμπεριφορά των λικνιζόμενων σωμάτων. Σημειώνεται ότι υπάρχει οριοθετημένη εκ των πειραμάτων και των υπολογιστικών προσομοιώσεων περιοχή του Sr ($[0.25:0.35]$), για την οποία σε υδροδυναμικό περιβάλλον, παράγεται πρόωση μέσω λικνιζόμενων αεροτομών [31],[33].

Ενδιαφέρον ακόμα παρουσιάζει, ότι τα φαινόμενα που διέπουν τα λικνιζόμενα σώματα, παρουσιάζουν κοινά χαρακτηριστικά με περιπτώσεις αεροτομών, που εκτελούν ταυτόχρονη ταλάντωση πρόνευσης-φυγοειδούς, διατάξεις οι οποίες επίσης είναι ικανές να παραγάγουν προωστικές δυνάμεις.

Στο σχήμα 3.6, φαίνονται δύο περιπτώσεις του ομόρρου τέτοιων αεροτομών, όπου στη μία παράγεται πρόωση, ενώ στην άλλη μόνο αντίσταση.



Σχήμα 3.6: Περιπτώσεις ομόρρου αεροτομών σε ταυτόχρονη ταλάντωση πρόνευσης-φυγοειδούς (Pitch and heave), διαφορετικών αριθμών Sr . Αριστερά: παραγωγή αντίστασης, Δεξιά: παραγωγή πρόωσης [26].

Στο σημείο αυτό, επειδή ο στροβιλισμός είναι σημαντικό στοιχείο της προωστικής δραστηριότητας των λικνιζόμενων σωμάτων, είναι χρήσιμο να επισημανθούν μερικά στοιχεία περί θεωρίας στροβιλισμού, διότι η διάδοση και η εναλλαγή περιοχών ετερόσημων στροβιλισμών με συγκεκριμένο ρυθμό είναι που δημιουργεί την προωστική δραστηριότητα ενός λικνιζόμενου σώματος. Κατ' αρχάς, ο στροβιλισμός ορίζεται ως:

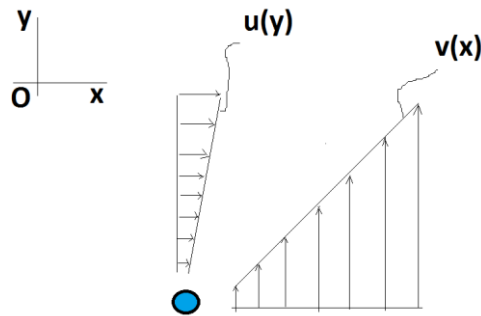
$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{U} \quad (3.2)$$

και εκφράζει την περιστροφή των σωματιδίων του ρευστού γύρω από τον εαυτό τους (spin), είναι δηλαδή μια μικροσκοπική ιδιότητα ενός ρευστού, ενώ δεν πρέπει να συγχέεται με την

εκτροπή μιας ροής προς άλλη μακροσκοπική κατεύθυνση. Για διδιάστατη ροή, ο στροβιλισμός εκφράζεται σε ένα κάθετο στο επίπεδο ροής διάνυσμα, μέτρου:

$$\omega_{2D} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.3)$$

Η φορά περιστροφής ενός σωματιδίου του ρευστού, στη διδιάστατη θεώρηση είναι ανθρωλογιακή, όταν $\omega_{2D} > 0$, και αρνητική όταν $\omega_{2D} < 0$, όπως εξηγείται από το σχήμα 3.7.

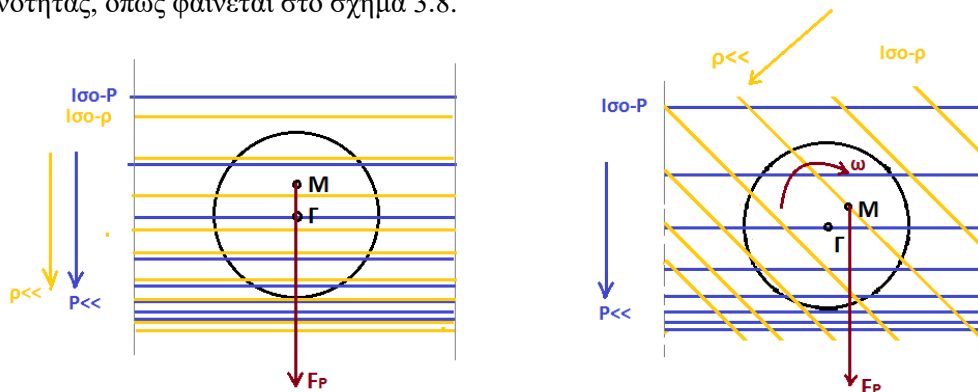


Σχήμα 3.7: Κατανομή ταχυτήτων κατάντι ενός σωματιδίου ρευστού, όπου: $dv/dx - du/dy > 0$, και άρα το σωματίδιο θα στροβιλιστεί αριστερόστροφα (ανθρωλογιακά).

Γράφοντας την εξίσωση στροβιλισμού, για ένα μη-συνεκτικό, συμπιεστό ρευστό, λαμβάνεται:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \left((\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{U} - \vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{U}) + \frac{\nabla p \times \nabla \rho}{\rho^2} \right) \quad (3.4)$$

όπου ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους εκφράζει την παραμόρφωση των σωλήνων στροβιλισμού λόγω κλίσεων ταχύτητας, ο δεύτερος όρος περιγράφει την έκταση των σωλήνων στροβιλισμού λόγω συμπιεστότητας του ρευστού (διατήρηση στροφορμής των ρευστοστοιχείων, άρα αλλαγή γωνιακής ταχύτητας ανάλογα την πυκνότητα), ενώ ο τρίτος όρος εκφράζει την γένεση στροβιλισμού λόγω διαφοροποίησης των ισοσταθμικών πίεσης και πυκνότητας, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.8.



Σχήμα 3.8: Απεικόνιση ενός στοιχειώδους σωματιδίου του ρευστού, καθώς και των ισοσταθμικών πίεσης και πυκνότητας. Με Γ συμβολίζεται το γεωμετρικό κέντρο, ενώ με M το κέντρο μάζας, το οποίο προκύπτει από τη διάταξη των ισοσταθμικών πυκνότητας γύρω του. Αριστερά: Παράλληλες iso-p, iso-ρ, άρα η δύναμη λόγω πίεσης δεν δημιουργεί ροπή. Δεξιά: Οι iso-ρ τέμνονται με τις iso-p, και άρα η δύναμη λόγω πίεσης στο κέντρο μάζας, προκαλεί περιστροφή.

Συνεπώς σε μια αρχικά αστρόβιλη ροή, όπως μια παράλληλη ροή αέρα, ο μόνος όρος που μπορεί να εισάγει στροβιλισμό στη ροή είναι ο τρίτος, ο οποίος είναι μη μηδενικός, όταν η πυκνότητα δεν είναι συνάρτηση μόνο της πίεσης. Αυτό συμβαίνει όταν μία ροή υπόκειται σε μη-αντιστρεπτή μεταβολή, δηλαδή η ροή δεν είναι πια ισεντροπική (λ.χ σε περιπτώσεις κρουστικών κυμάτων)[29].

Μια άλλη αιτία γένεσης στροβιλισμού σε ένα σύστημα είναι η μεταβολή της κυκλοφορίας εντός του. Οι επιλύτες εξισώσεων Euler, ανιχνεύουν ως γνωστόν την αποβολή στροβιλισμού στον ομόρρου ανωστικών σωμάτων, δια μέσου της ακμής εκφυγής [43]. Από το θεώρημα του Kelvin προκύπτει, ότι ο ρυθμός μεταβολής της κυκλοφορίας γύρω από ένα σώμα, προκαλεί την αποβολή στροβιλισμού από την ακμή εκφυγής, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = -\frac{dI_w}{dt} \gamma_w^N$$

όπου $\frac{\partial \Gamma}{\partial t}$ ο ρυθμός μεταβολής της κυκλοφορίας, $\frac{dI_w}{dt}$ η ταχύτητα αποβολής του φύλλου στροβιλισμού, ο δείκτης w δηλοί των ομόρρου (wake) και γ_w^N είναι η χωροχρονική διανομή του στροβιλισμού στον ομόρρου υπό μορφή επαλληλίας δινών, δηλαδή:

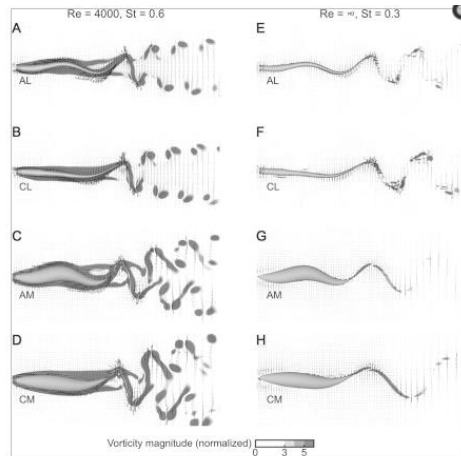
$$\gamma_w^N(\vec{x}_w, t) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

όπου δ η συνάρτηση Dirac.

Η κατεύθυνση κατά την οποία γίνεται η αποβολή του στροβιλισμού είναι άμεση συνάρτηση του προσήμου της κυκλοφορίας του ανωστικού σώματος. Έτσι, αν η κυκλοφορία είναι θετική (ωρολογιακή φορά), τότε το κοντινό τμήμα του ομόρρου αποβάλλεται εφαιπτομενικά προς την κάτω πλευρά του (δηλαδή με φορά προς τα πάνω) και αντίστροφα [1].

Αυτά αναφέρθηκαν προκειμένου να κατασταθεί σαφές, ότι ο στροβιλισμός, μπορεί να εμφανιστεί στο πρόβλημα αυτό και χωρίς την επίδραση συνεκτικών φαινομένων. Δεν είναι όμως βέβαιο το εάν αυτή θα εμφανιστεί μόνο στην ακμή εκφυγής και στον ομόρρου, της λικνιζόμενης αεροτομής, ή και στην ακμή προσβολής λόγω της διαρκούς αλλαγής της γωνίας μετάλλου και άρα και της ενεργής γωνίας πρόσπτωσης (ώστε να εμφανιστούν οι LEV).

Σε υπολογιστικές προσομοιώσεις που έχουν γίνει, πάντως, ο ζητούμενος στροβιλισμός προκύπτει και σε συνεκτικές και σε ατριβείς, συμπεσιτές ροές, και είναι εφικτό να μελετηθεί η προωστική συμπεριφορά λικνιζόμενων αεροτομών (σχήμα 3.9).



Σχήμα 3.9: Πεδίο στροβιλότητας στον ομόρρου λικνιζόμενων σωμάτων. Αριστερά $Re=4000$, δεξιά $Re=\infty$ (ατριβής ροή). A,B,E,F: ιδιομορφή λίκνισης χελιού, C,D,G,H: ιδιομορφή λίκνισης Carangiform [33].

Ειδικά όμως όσον αφορά τη λίκνιση τύπου χελιού, που θα μελετηθεί αρχικά, επειδή βασίζεται περισσότερο στην ώθηση του νερού προς τα πίσω, παρά σε ανωστικά φαινόμενα, η έλλειψη συνεκτικότητας λειτουργεί ανασταλτικά στην ικανότητα του σώματος να μεταδώσει την κινητική του ενέργεια στο ρευστό, γιατί αυτό «γλιστρά», και έτσι μόνο η κάθετη στο στερεό όριο ταχύτητα μπορεί να επιδράσει πάνω του (στο ρευστό) [33]. Η διαπίστωση αυτή, σε συνδυασμό με τη μειωμένη πυκνότητα του αέρα σε σχέση με το νερό, προκαλεί αβεβαιότητα στο αν μια λικνιζόμενη αεροτομή, με ιδιομορφή λίκνισης τύπου χελιού, μπορεί να παρουσιάσει προωστική δραστηριότητα σε ατριβές περιβάλλον.

Το κυρίως ζητούμενο όμως σε αρχικό επίπεδο, είναι η διερεύνηση των δυνατοτήτων του λογισμικού τεμνομένων κυψελών, να επιλύσει μη-μόνιμες ροές με πολύ σύνθετες κινήσεις των στερεών ορίων. Αφού γίνει αυτό, θα γίνει ανάλυση των αποτελεσμάτων προς αναζήτηση του εάν παράγεται ή όχι πρόωση, αλλά και περαιτέρω διερεύνηση για άλλες ιδιομορφές λίκνισης.

3.3 Περί Προωθητικής Αποδοτικότητας σε Λικνιζόμενα Σώματα

Η εκτίμηση της αποδοτικότητας των υδρόβιων οργανισμών βασίζεται σε πειράματα σε ζωντανούς οργανισμούς εντός εργαστηριακού περιβάλλοντος, με μέριμνα για την εύθετη αναπαραγωγή του φυσικού τους περιβάλλοντος, και σε υπολογιστικές προσομοιώσεις.

Σε εργαστηριακό επίπεδο, για τη μέτρηση της συνολικής ενέργειας που δαπανά ένας οργανισμός για να διανύσει μια συγκεκριμένη απόσταση σε ένα ενυδρείο ελεγχόμενης ροής, λαμβάνεται υπόψη η κατανάλωση οξυγόνου, αλλά και η σωματική τους σύσταση πριν και μετά το πείραμα (κυρίως ως προς το λίπος, αλλά και πρωτεΐνες, κ.α.). Έτσι ορίζεται κατ' αρχάς ο ρυθμός κατανάλωσης ενέργειας εκ μέρους τους, ανά μονάδα μάζας και ανά μονάδα διανυόμενης απόστασης.

Προκειμένου να προσδιοριστεί ο προωθητικός βαθμός απόδοσής τους, με δεδομένη πλέον τη συνολική ισχύ αλλά και την ταχύτητα κολύμβησης (μετρούμενη ταχύτητα ροής), απομένει ο

προσδιορισμός της δύναμης πρόωσης. Αυτή είναι ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς με τη δύναμη αντίστασης που πρέπει να υπερνικηθεί, ώστε η συνολική δύναμη κατά τη διεύθυνση πλεύσης να είναι μηδενική (σταθερή ταχύτητα πλεύσης).

Η πιο επιτυχής τεχνική για τη μέτρηση της υφιστάμενης αντίστασης εισάχθηκε από τον Webb [32], σε μελέτη του πάνω σε πέστροφες. Στο πείραμά του, με χειρουργική διαδικασία, προσέδεσε στο σώμα της πέστροφας κάποιες επιφάνειες γνωστού συντελεστή αντίστασης, οι οποίοι μετρήθηκαν προηγουμένως, προσαρμοσμένες σε ναρκωμένα-ακίνητα ψάρια.

Έπειτα, παρατηρήθηκε στα κολυμπώντα ψάρια, ότι όσο μεγαλύτερη είναι η αντίσταση που δέχεται το ψάρι λόγω των πρόσθετων (προσδεδεδμένων πάνω του) επιφανειών, τόσο πιο γρήγορα (με μεγαλύτερη συχνότητα) και τόσο με μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης λικνίζεται, για να διατηρήσει σταθερή την ταχύτητά του. Με αφορμή αυτή την παρατήρηση, δηλαδή ότι όσο πιο πολλή ισχύ δαπανά το ψάρι, τόσο πιο γρήγορα (f), και τόσο εντονότερα (A) κινείται, ορίζεται ένας γνώμονας ισχύος f^A/L , όπου f : η συχνότητα ταλάντωσης της ουράς, A το πλάτος ταλάντωσης της ουράς και L το μήκος του σώματος. Αυξάνοντας κλιμακωτά την ταχύτητα της ροής (διατηρώντας για αρκετό χρόνο κάθε επίπεδο ταχύτητας) μέχρι του κρίσιμου σημείου όπου το ψάρι δεν μπορεί να διατηρήσει την πλεύση, σημειώθηκε για κάθε ταχύτητα ο γνώμονας ισχύος. Έτσι προέκυψε για κάθε ταχύτητα το ποσοστό χρήσης της διαθέσιμης ισχύος του ψαριού, ως ποσοστό χρήσης του μέγιστου γνώμονα ισχύος.

$$\% \text{ ισχυς} = \frac{(f^A/L)_V}{(f^A/L)_{V_{max}}}$$

Έπειτα, από τη σύγκριση των επιδόσεων της πέστροφας, με - και χωρίς την επιπλέον αντίσταση για κάθε ταχύτητα, ανιχνεύθηκε η περίπτωση όπου για κάποια ταχύτητα πλεύσης, το ποσοστό της χρησιμοποιούμενης ισχύος διπλασιάστηκε με την εισαγωγή της πρόσθετης αντίστασης. Αυτό σημαίνει ότι η αντίσταση του ψαριού μόνου του είναι το μισό της συνολικής αντίστασης σε εκείνες τις συνθήκες πλεύσης, αφού η δαπανούμενη ισχύς είναι ευθέως ανάλογη του συντελεστή αντίστασης.

Τέλος, συσχετίστηκε στατιστικά το ποσοστό της χρησιμοποιούμενης ισχύος με την ταχύτητα πλεύσης και τη δύναμη αντίστασης, οπότε προέκυψε και η δύναμη πρόωσης σε κάθε συνθήκη πλεύσης, από όπου υπολογίστηκε ο προωθητικός βαθμός απόδοσης.

Σε επίπεδο υπολογιστικής προσομοίωσης, υπάρχουν διάφορες προσεγγίσεις υπολογισμού της αποδοτικότητας. Αντιπροσωπευτική είναι αυτή των Borajani και Sotiropoulos [33], όπου ως ωφέλιμη ισχύς είναι το γινόμενο ώσης με ταχύτητα πλεύσης (η ώση προκύπτει με ολοκλήρωση των δυνάμεων πίεσης επί της βρεχόμενης επιφάνειας κατά την διεύθυνση πλεύσης), ενώ ως δαπανώμενη ισχύς είναι το άθροισμα της ισχύος πρόωσης και της ισχύος που παράγει πλευρικές επιταχύνσεις στον ομόρρου, η οποία προκύπτει από την ολοκλήρωση της ισχύος των δυνάμεων πίεσης επί την κατακόρυφη ταχύτητα σε κάθε σημείο.

$$\eta_{\text{προωθ}} = \frac{\bar{T}U_{\infty}}{\bar{T}U + \bar{P}_{\text{πλευρ}}} \quad (3.5)$$

όπου για ατριβή ροή, $\bar{T} = \int_t^{t+T} [\phi(-pn_x)ds] dt = \sum_t^{t+T} \left(\frac{C_D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 S} \right)$ η μέση δύναμη πρόωσης κατά τη διάρκεια μιας περιόδου λίκνισης και $\bar{P}_{\text{πλευρ}} = \int_t^{t+T} [\phi(-pn_y V_y)ds] dt$ η μέση δαπάνη ισχύος λόγω πλευρικών κινήσεων (με το “-“ βγαίνει θετική).

Ακόμα, ένας απλούστερος ορισμός για σταθερή ταχύτητα πλεύσης δόθηκε από τον Lighthill [34], σύμφωνα με τη Θεωρία Μακρυτενών Σωμάτων (Elongated Body Theory) ως εξής:

$$\eta_{EBT} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{U}{V} \right) \quad (3.6)$$

όπου U η ταχύτητα πλεύσης και V η ταχύτητα διάδοσης του αντίστροφα διαδιδόμενου κύματος λίκνισης.

Όπως ήδη προειπώθηκε, η βέλτιστη προωθητική απόδοση στους υδρόβιους, λικνιζόμενους οργανισμούς επιτυγχάνεται γενικώς για αριθμούς Strouhal $Sr = 0.25:0.35$, αποτέλεσμα το οποίο προέκυψε τόσο από πειράματα όσο και από υπολογιστικές προσομοιώσεις.

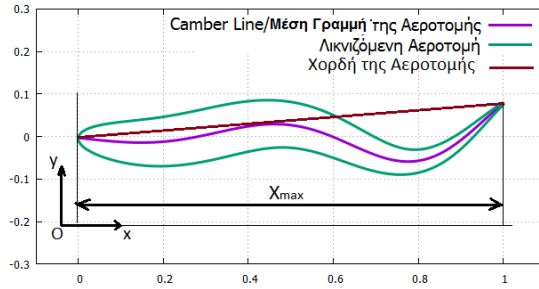
Αντιθέτως, όσον αφορά τις λικνιζόμενες αεροτομές σε αεροδυναμικό περιβάλλον, δεν υπάρχει επαρκής ερευνητική κάλυψη μέχρι στιγμής. Οι μελέτες επικεντρώνονται κυρίως σε άκαμπτες αεροτομές, οι οποίες εκτελούν ταυτόχρονα ταλάντωση πρόνευσης και ταλάντωση φυγοειδούς (pitch and heave). Για τέτοιες μόνο διατάξεις, υπάρχουν παρατηρήσεις όσον αφορά την προωθητική αποδοτικότητα, με κύρια παράμετρο την ανηγμένη συχνότητα ταλάντωσης $k = \frac{\omega c}{2U_\infty}$, μέσω της οποίας οριοθετούνται τα βέλτιστα χαρακτηριστικά της κίνησης για διάφορα πλάτη ταλάντωσης.

Το πλάτος ταλάντωσης όμως, όπως και η συχνότητα ταλάντωσης, επιδρούν εντελώς διαφορετικά στη λίκνιση απ’ ότι στην κίνηση πρόνευσης – φυγοειδούς. Για τον λόγο αυτό, δεν υπάρχει εγγυημένη δυνατότητα αξιοποίησης των συμπερασμάτων που αφορούν άκαμπτες αεροτομές.

3.4 Μαθηματική Περιγραφή Λικνιζόμενης Αεροτομής

3.4.1 Ορολογία

Προκειμένου να αποφευχθούν ονοματολογικές συγχύσεις, κρίνεται σκόπιμο να οριστούν σαφώς οι χρησιμοποιούμενοι όροι. Στο σχήμα 3.10 αποτυπώνονται τα βασικά μεγέθη μιας λικνιζόμενης αεροτομής, σε ένα στιγμιότυπό της.



Σχήμα 3.10: Αποτύπωση της χορδής, της μέσης γραμμής (camber line), και της προβολής της αεροτομής στην οριζόντιο x_{max} μιας λικνιζόμενης αεροτομής.

Ως μέση γραμμή (camber line) καλείται η κυρτή γραμμή που ενώνει εσωτερικά την ακμή εκφυγής με την ακμή προσβολής, ενώ ως χορδή κατά τα γνωστά, η ευθεία γραμμή μεταξύ ακμής προσβολής και ακμής εκφυγής. Επίσης, με x_{max} σημαίνεται η προβολή της αεροτομής στην οριζόντιο, όπου ο δείκτης “max” δηλοί ότι αν οριστεί ως αρχή των αξόνων η ακμή προσβολής, τότε η μέγιστη τετμημένη x της αεροτομής θα έχει την τιμή x_{max} .

Τέλος, όταν γίνεται αναφορά στο μήκος L της αεροτομής, εννοείται (και ταυτίζεται με) το μήκος της μέσης γραμμής, δηλαδή το μήκος που θα μετρούνταν αν «τεντωνόταν» η αεροτομή. Σημειώνεται ότι $L \neq x_{max}$.

3.4.2 Η Λικνιζόμενη Μέση Γραμμή

Έπειτα από όσα προηγήθησαν, θα παρουσιασθεί η τελικώς επιλεγθείσα λικνιζόμενη γεωμετρία και η μαθηματική της περιγραφή.

Οδηγός της όλης κίνησης είναι μία λικνιζόμενη μεσογραμμή–camber line, η οποία θα ληφθεί από συναρτησιακή προσαρμογή πειραματικών δεδομένων [35]. Η μεσογραμμή αυτή, επενδύεται εξωτερικά με την απλή κατανομή πάχους της τυποποιημένης αεροτομής NACA 0012. Έτσι προκύπτει μια λικνιζόμενη αεροτομή.

Η κίνηση η οποία θα χρησιμοποιηθεί ως αφετηρία στη μελέτη αυτή, βασίζεται σε πειραματική οπτικοποίηση της ροής (PIV) των E. D. Tytell και G. V. Lauder για το αμερικανικό είδος χελιών *Anguilla rostrata*. Στο πείραμα τους, λήφθηκαν δεδομένα για αμερικανικά χέλια σε σταθερή ταχύτητα κολύμβησης 1.4 ΜΣ/sec (ΜΣ: Μήκος Σώματος), με αριθμό Strouhal $St=0.3$.

Παρατηρήθηκε ότι για την εκάστοτε ταχύτητα κολύμβησης, το πλάτος ταλάντωσης μεγαλώνει εκθετικά κατά μήκος του σώματος του χελιού. Με ποσοστά στατιστικής συσχέτισης μεγαλύτερα του 0.970, η μέση γραμμή του χελιού περιγράφεται με ακρίβεια ως:

$$y(x, t) = Ae^{a(x-1)} \sin\left(2\pi\left(x - \frac{t}{T}\right)\right) \quad \text{ή}$$

$$y(x, t) = Ae^{a(x-1)} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - \gamma t)\right) \quad (3.7)$$

όπου $x = 0$: x_{max} η οριζόντια απόσταση, ξεκινώντας από το κεφάλι, A το πλάτος ταλάντωσης της ουράς, α ο ρυθμός αύξησης του πλάτους κατά μήκος του σώματος, t ο χρόνος, T η περίοδος του κύματος, λ το μήκος κύματος της λίκνισης, V η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

Πρόκειται δηλαδή για τη μαθηματική έκφραση αυτού που προαναφέρθηκε ως αντίστροφα διαδιδόμενο κύμα μεταβαλλόμενου πλάτους με φορέα του τη μέση γραμμή.

Αξιοσημείωτο είναι ότι το συνολικό μήκος L της αεροτομής δεν είναι σταθερό προϊόντος του χρόνου, αλλά κυμαίνεται μεταξύ κάποιων ορίων. Στην βιβλιογραφία ακολουθούνται και οι δύο προσεγγίσεις (δηλαδή με σταθερό και με μεταβλητό μήκος) χωρίς να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση, διότι για σχετικά μικρό πλάτος ταλάντωσης, οι διακυμάνσεις του μήκους είναι της τάξης του 1% της μέσης τιμής του. Εδώ θα εφαρμοστεί η προσέγγιση του μη-σταθερού μήκους, δηλαδή μια πιστή αναπαράσταση ενός διαδιδόμενου κύματος.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η περίοδος T σε συνδυασμό με το μήκος κύματος, καθορίζουν την ταχύτητα διάδοσης του κύματος

$$v = \frac{\lambda}{T} \left[\frac{m}{sec} \right] \quad (3.8)$$

Το μήκος κύματος καθορίζει τον αριθμό των κυματώσεων που περιέχονται κάθε στιγμή στο μήκος του σώματος.

Ο εκθετικός συντελεστής α καθορίζει τον ρυθμό ενίσχυσης του πλάτους κατά μήκος του σώματος. Μεγάλη τιμή του συντελεστή α περιγράφει κίνηση με μικρό πλάτος κοντά στο κεφάλι και ραγδαία ενίσχυση προς την ουρά, ενώ μικρή τιμή του α σχηματίζει μια ομαλότερη μετάβαση του πλάτους.

Η επίδραση των παραπάνω συντελεστών θα παρασταθεί και οπτικά μετά τη θεμελίωση των εξισώσεων που παράγουν την τελική γεωμετρία.

Από την ανάλυση των E. D. Tytell και G. V. Lauder, έλήφθη το διάνυσμα των τιμών των παραμέτρων λίκνισης της (3.7) για το οποίο σημειώθηκε μέγιστη ταχύτητα κολύμβησης, σε υπό μελέτη χέλια.

A	α	x_{max}	λ	T
0.1	2.25	1	0.6283	$\pi/10$

Πίνακας 3.1: Τιμές παραμέτρων λίκνισης από το πείραμα των E. D. Tytell και G. V. Lauder [35].

Άρα με αντικατάσταση, η εξίσωση (3.7) παίρνει τη μορφή :

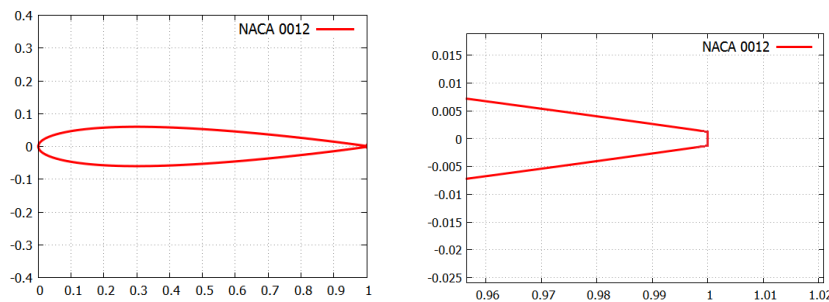
$$y(x, t) = 0.1e^{2.25(x-1)} \sin\left(\frac{2\pi}{0.6283}(x - 0.02t)\right) \quad (3.9)$$

3.4.2 Επένδυση με Κατανομή Πάχους

Όσον αφορά στην κατανομή πάχους, επελέγη να επενδυθεί η λικνιζόμενη μεσογραμμή που προέκυψε από την κίνηση των χελιών με την κατανομή πάχους της αεροτομής NACA 0012, λόγω του τεχνολογικού και όχι βιολογικού πρίσματος θεώρησης των λικνιζόμενων σωμάτων. Η συμμετρική κατανομή ημιπάχους της NACA 0012 όπως δίδεται [36] (με μη μηδενικό πάχος στην εκφυγή) είναι η εξής:

$$\frac{th(x)}{c} = \pm 0.6 \left[0.2969 \sqrt{\left(\frac{x}{c}\right)} - 0.1260 \left(\frac{x}{c}\right) - 0.3516 (x/c)^2 + 0.2843 \left(\frac{x}{c}\right)^3 - 0.1015 \left(\frac{x}{c}\right)^4 \right] \quad (3.10)$$

όπου x η οριζόντια απόσταση, και c το ολικό μήκος της χορδής. Η χορδή αυτή, αναφέρεται στην αεροτομή NACA 0012 και κείται πάνω στον άξονα x . Για να προκύψει αντιστοιχία με την λικνιζόμενη αεροτομή, θα πρέπει ως μήκος χορδής να θεωρηθεί όχι το μήκος της χορδής της λικνιζόμενης αεροτομής, αλλά η μέγιστη τετμημένη x_{max} , η οποία ορίστηκε στην παράγραφο 3.4.1. (δηλαδή στην 3.10, $c = x_{max}$)



Σχήμα 3.11: Άποψη της αεροτομής NACA 0012 (αριστερά), εστίαση στην ακμή εκφυγής (δεξιά).

Επισημαίνεται εδώ ότι η τιμή του ημιπάχους με το οποίο θα επενδυθεί εκατέρωθεν της η λικνιζόμενη μεσογραμμή εξαρτάται μόνο από την οριζόντια απόσταση x .

Με την κατανομή αυτή θα επενδυθεί η λικνιζόμενη μεσογραμμή ως εξής:

Αρχικά θα υπολογιστεί η χωρική παράγωγος της λικνιζόμενης μεσογραμμής και κατ' επέκταση το κάθετο διάνυσμα σε κάθε σημείο της, αναλυτικά. Έπειτα θα «κτιστεί» το πάχος, εγκάρσια κάθε φορά στην εκάστοτε κλίση της λικνιζόμενης μεσογραμμής. Σημειώνεται εδώ ότι η παρακάτω ανάλυση γίνεται σε παραμετρικό επίπεδο, δηλαδή στο τέλος μόνο θα αντικατασταθούν οι γνωστές τιμές των παραμέτρων που προαναφέρθηκαν.

Για λόγους χρηστικότητας κατά τους υπολογισμούς, στη σχέση (3.7), τίθεται $a_1 = \frac{2\pi}{\lambda}$ και ως $y_m(x, t)$ συμβολίζεται η τεταγμένη της λικνιζόμενης μέσης γραμμής, οπότε προκύπτει:

$$(3.7) \rightarrow y_m = Ae^{a(x-1)}\sin(a_1(x - \gamma t)) \quad (3.11)$$

Η κατανομή ημιπάχους θα υπερτεθεί εκατέρωθεν της λικνιζόμενης μεσογραμμής για κάθε σημείο της, κάθετα κάθε φορά στην εφαπτομένη της μεσογραμμής σε εκείνο το σημείο, εκείνη τη χρονική στιγμή. Συνεπώς, απαιτείται η εύρεση της παραγώγου (εφαπτομένης) και του καθέτου σε αυτήν διανύσματος.

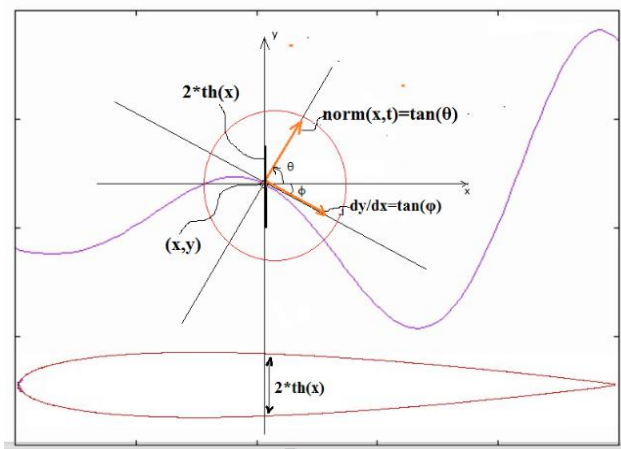
Παραγωγίζοντας κατά x, προκύπτει η χωρική παράγωγος της τεταγμένης της λικνιζόμενης μεσογραμμής:

$$\frac{dy_m}{dx} = ay_m + Aa_1e^{a(x-1)}\cos(a_1(x - \gamma t)) \quad (3.12)$$

Κατά τα γνωστά, η χωρική παράγωγος σε κάποιο σημείο μιας καμπύλης δίνει την κλίση της στο σημείο αυτό (με το θετικό πρόσημο της παραγώγου να αντιστοιχεί σε αριστερόστροφη φορά γωνιάς).

Έστω θ η γωνία που σχηματίζει το κάθετο διάνυσμα με την οριζόντιο και φ η αντίστοιχη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη. Είναι:

$$\frac{dy_m}{dx}(x_n, t_n) = \tan(\varphi) \quad (3.13)$$



Σχήμα 3.12: Γεωμετρική ανάλυση επί της λικνιζόμενης μέσης γραμμής, όπου φ η γωνία κλίσης της μεσογραμμής με την οριζόντιο, θ η αντίστοιχη γωνία του καθέτου διανύσματος, και στο κάτω μέρος, η κατανομή πάχους της NACA 0012.

Ακόμα:

$$\theta = \varphi \pm \frac{\pi}{2}, \text{ ανάλογα με τη σύμβαση προσήμου}$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$\blacksquare \tan(\theta) \tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi \pm \frac{\pi}{2}) \sin(\varphi)}{\cos(\varphi \pm \frac{\pi}{2}) \cos(\varphi)} = \frac{\pm \cos(\varphi) \sin(\varphi)}{\mp \sin(\varphi) \cos(\varphi)} = \pm 1$$

Συνεπώς, τα κάθετα στη λικνιζόμενη μεσογραμμή διανύσματα αξιοποιώντας την παραπάνω γεωμετρική ταυτότητα προκύπτουν (υπό μορφή γωνιών ως προς την οριζόντια) ως εξής:

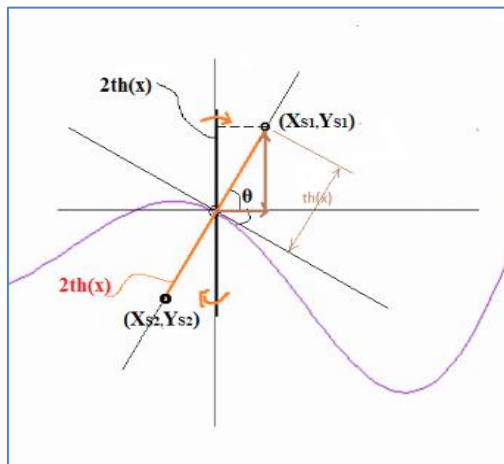
$$n(x, t) = \pm \frac{1}{dy_m/dx} = \pm \frac{1}{\tan(\varphi)} \quad (3.14)$$

Θέτοντας τη σύμβαση θετικού προσήμου σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση :

$$n(x, t) = + \frac{1}{dy_m/dx} \quad (3.15)$$

προκύπτει, τελικώς, ότι η γωνία που σχηματίζει το κάθετο διάνυσμα με την οριζόντια, είναι:

$$\theta = \arctan(n(x, t)) \quad (3.16)$$



Σχήμα 3.13: Εστίαση του σχήματος 3.7. Επένδυση της λικνιζόμενης μεσογραμμής με την κατανομή πάχους της NACA 0012, σε τυχαίο σημείο της, δίνει τα αντίστοιχα σημεία για την άνω και κάτω πλευρά της λικνιζόμενης αεροτομής: (x_{s1}, y_{s1}) και (x_{s2}, y_{s2})

Με βάση τα σχήματα 3.12 και 3.13, καταγράφονται οι γεωμετρικές σχέσεις για την υπέρθεση της κατανομής πάχους στην άνω και κάτω μεριά της λικνιζόμενης μεσογραμμής (παρίστανται με δείκτες s1 και s2 η άνω και κάτω μεριά αντίστοιχα). Σημειώνεται ότι η επαπτόμενη σε κάποιο σημείο της λικνιζόμενης μεσογραμμής, δεν μπορεί να γίνει ποτέ κάθετη, δηλαδή απείρου ρυθμού χωρικής μεταβολής $\frac{dy_m}{dx}$ και, συνεπώς, δεν λαμβάνεται υπόψη παρακάτω τέτοια υποπερίπτωση.

Αν $\frac{dy_m}{dx} < 0$:

$$\begin{aligned} y_{s1} &= y_m - th(x_m)\sin(\theta) \\ x_{s1} &= x_m + th(x_m)\cos(\theta) \\ y_{s2} &= y_m + th(x_m)\sin(\theta) \\ x_{s2} &= x_m - th(x_m)\cos(\theta) \end{aligned}$$

(3.17)

• Αν $\frac{dy_m}{dx} \geq 0$:

$$\begin{aligned} y_{s1} &= y_m + th(x_m)\sin(\theta) \\ x_{s1} &= x_m - th(x_m)\cos(\theta) \\ y_{s2} &= y_m - th(x_m)\sin(\theta) \\ x_{s2} &= x_m + th(x_m)\cos(\theta) \end{aligned}$$

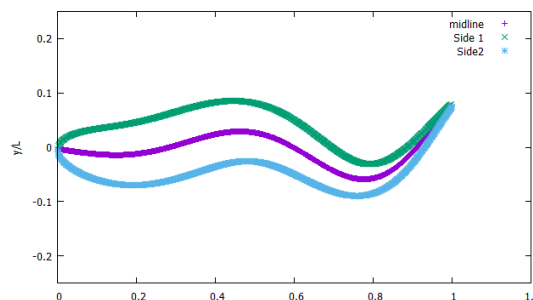
Το σύστημα σχέσεων (3.17), παριστάνεται συντομότερα με τη βοήθεια συμβολισμών, όπου το πρόσημο της πρώτης χωρικής παραγώγου της τεταγμένης της λικνιζόμενης μεσογραμμής συμβολίζεται ως εξής:

$$Sign(x, t) = sign\left(\frac{dy_m}{dx}\right) = + \text{ ή } - \quad (3.18)$$

ενώ ο δείκτης i ($i=1,2$) θα αναφέρεται στην άνω και κάτω της μεσογραμμής πλευρά, της παραγόμενης γεωμετρίας.

$$\begin{aligned} (3.17) \rightarrow x_{s,i} &= x_m + Sign(x, t)(-1)^i th(x_m) \cos(\theta) \\ y_{s,i} &= y_m - Sign(x, t)(-1)^i th(x_m) \sin(\theta) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Άρα, πλέον, είναι εφικτό να παραχθεί υπολογιστικά η χρονικά μεταβαλλόμενη μορφή της λικνιζόμενης αεροτομής, μέσω χωρικής και χρονικής διακριτοποίησης των συνεχών συναρτήσεων που διέπουν την κίνησή της:



Σχήμα 3.14: Γεωμετρική παράσταση της άνω και κάτω πλευράς, δηλαδή της λικνιζόμενης αεροτομής, καθώς και της λικνιζόμενης μέσης γραμμής, (side1, side2 και midline αντίστοιχα).

3.4.4 Επίδραση των Παραμέτρων στη Μορφή Λίκνισης

Ακολουθεί μια οπτική παρουσίαση των επιδράσεων των παραμέτρων της σχέσης (3.7), η οποία περιγράφει την κίνηση της λικνιζόμενης μεσογραμμής, στην προκύπτουσα γεωμετρία. Υπενθυμίζεται η σχέση (3.7):

$$y(x, t) = Ae^{a(x-1)} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - \gamma t)\right) = Ae^{a(x-1)} \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right)$$

Οπότε θα δειχθεί η επίδραση του μεγίστου πλάτους ταλάντωσης A , του ρυθμού αύξησης του πλάτους κατά μήκος του σώματος a , και του μήκους κύματος λ του διαδιδόμενου κύματος λίκνισης.

Έπειτα, θα παρουσιασθούν εδώ οι επιδράσεις των παραμέτρων λίκνισης, στην προκύπτουσα γεωμετρία, εξαιρουμένης της περιόδου λίκνισης, η οποία απλώς μεταβάλλει το πόσο γρήγορα θα ολοκληρωθεί μια περίοδος λίκνισης.

Οι παράμετροι μέσω των οποίων είναι εφικτό να ρυθμιστεί η λίκνιση είναι:

- Το μήκος κύματος λίκνισης (λ)
- Ο ρυθμός αύξησης του πλάτους κατά μήκος της αεροτομής (a)
- Το μέγιστο πλάτος λίκνισης (A)
- Το μέγιστο ημι-πάχος (th_{max}), το οποίο είναι 0.6 στην κατανομή μιας NACA 0012, (αλλά δύναται να μεταβληθεί), και το οποίο υφίσταται στο 12% του μήκους της χορδής

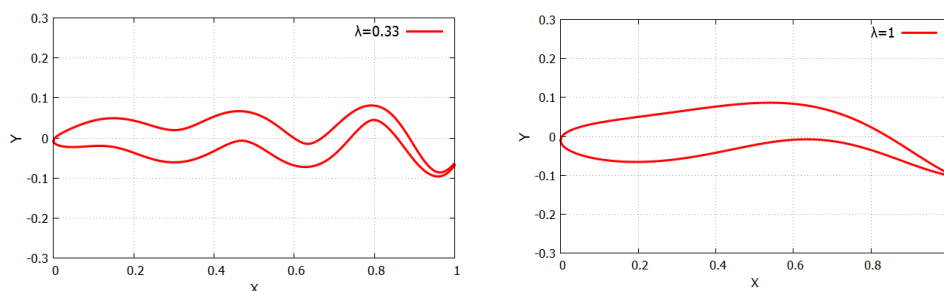
Για την κατανόηση της επίδρασης εκάστης παραμέτρου στην ιδιομορφή λίκνισης, θα μεταβάλλεται μόνο μία κάθε φορά παράμετρος, ενώ οι υπόλοιπες θα παραμένουν σταθερές.

a) Παράμετρος: μήκος κύματος λίκνισης λ

λ	a	A	th_{max}
$\lambda=0.33$, $\lambda=1$	2.25	0.1	0.6

Πίνακας 3.2: Τιμές παραμέτρων λίκνισης, για παραμετρική ανάλυση του μήκους κύματος λίκνισης.

Το μήκος κύματος λίκνισης καθορίζει τον αριθμό των πλήρων κυματώσεων που εκτελεί ένα λικνιζόμενο σώμα.



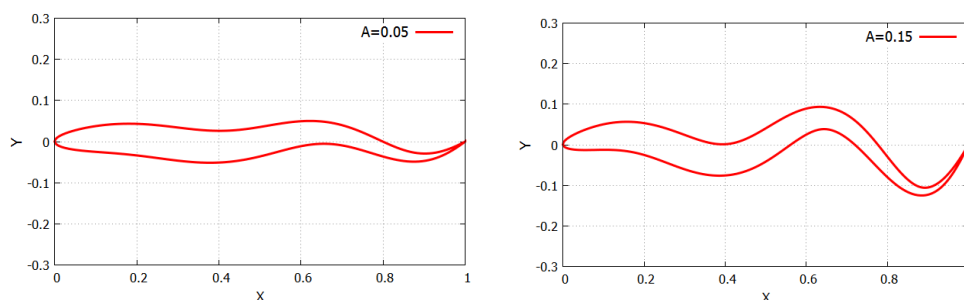
Σχήμα 3.15: Επίδραση του μήκους κύματος λίκνισης, στη λικνιζόμενη αεροτομή. Αριστερά: $\lambda=1$, δεξιά: $\lambda=0.68$.

b) Παράμετρος: μέγιστο πλάτος A

Το μέγιστο πλάτος λίκνισης A καθορίζει το πλάτος στο οποίο ταλαντώνεται η ακμή εκφυγής, και εμμέσως (ανάλογα τον ρυθμό αύξησης του πλάτους, α), το πλάτος ταλάντωσης κάθε τμήματος της αεροτομής.

λ	α	A	th_{max}
0.5	2.25	0.05 , 0.15	0.4

Πίνακας 3.3: Τιμές παραμέτρων λίκνισης για παραμετρική ανάλυση του μεγίστου πλάτους λίκνισης.

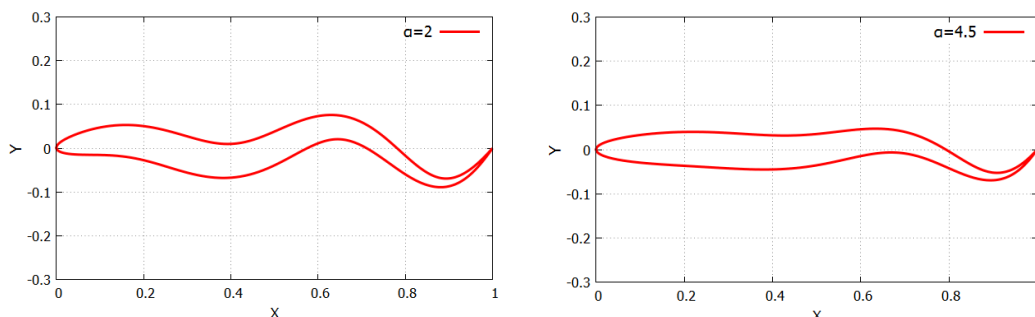


Σχήμα 3.16: Επίδραση του μεγίστου πλάτους λίκνισης, στη λικνιζόμενη αεροτομή. Αριστερά: A=0.05, δεξιά: A=0.15.

Ο ρυθμός αύξησης α , ρυθμίζει με εκθετικό τρόπο την κατανομή του πλάτους ταλάντωσης από την προσβολή στην εκφυγή. Προς αποφυγή σύγχυσης, τονίζεται ότι απλώς διανέμει το πλάτος ταλάντωσης, δεν επεμβαίνει στο μέγιστο πλάτος ταλάντωσης, το οποίο επικρατεί στην εκφυγή.

λ	α	A	th_{max}
0.5	2 , 4.5	0.1	0.4

Πίνακας 3.4: Τιμές παραμέτρων λίκνισης για παραμετρική ανάλυση ρυθμού αύξησης του πλάτους λίκνισης.



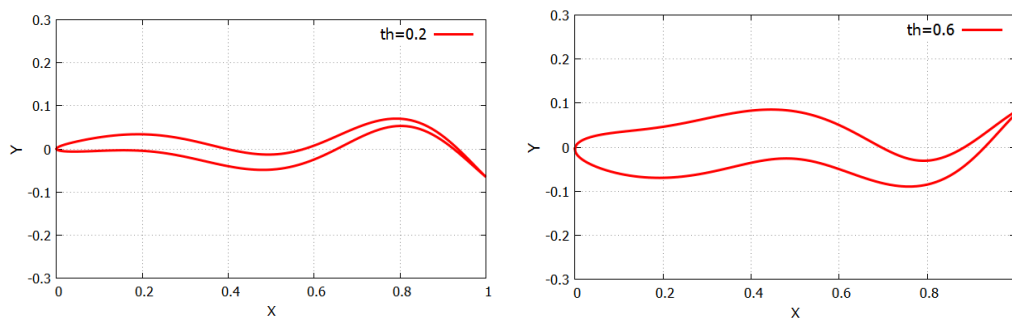
Σχήμα 3.17: Επίδραση του ρυθμού αύξησης του πλάτους λίκνισης, στη λικνιζόμενη αεροτομή. Αριστερά: $\alpha=2$, δεξιά: $\alpha=4.5$.

d) Παράμετρος: μέγιστο πάχος th_{max}

Το μέγιστο πάχος th_{max} , ενώ δεν επηρεάζει την λίκνιση καθ' αυτή, παρ' όλα αυτά επηρεάζει την ιδιομορφή διότι εισάγεται στον τύπο κατανομής πάχους και, συνεπώς, επηρεάζει όχι μόνο την τιμή του μέγιστου πάχους, αλλά αποτελεί έναν παράγοντα κλιμάκας (ως προς το πάχος) ολόκληρης της αεροτομής.

λ	α	A	th_{max}
0.63	2.25	0.1	0.2, 0.6

Πίνακας 3.5: Τιμές παραμέτρων λίκνισης για παραμετρική ανάλυση μεγίστου ημι-πάχους αεροτομής.



Σχήμα 3.18: Επίδραση του μέγιστου ημι-πάχους th_{max} στη λικνιζόμενη αεροτομή. Αριστερά: $th_{max} = 0.2$, δεξιά: $th_{max} = 0.6$.

3.3.5 Υπολογισμός Ταχυτήτων Λικνιζόμενης Αεροτομής

Η ταχύτητα κίνησης της στερεάς γεωμετρίας είναι αναγκαία όπως προειπώθηκε στο κεφάλαιο 2 για την επίλυση του μη-μόνιμου προβλήματος.

Στην παρακάτω ανάλυση, υπολογίζονται αναλυτικά η κατακόρυφη και η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας του στερεού ορίου, από τις οποίες θα προκύψουν με γεωμετρικό μετασχηματισμό η εφαπτομενική και η κάθετη ταχύτητα, σε κάθε σημείο του στερεού ορίου, στην εκάστοτε χρονική στιγμή.

Υπενθυμίζεται, ότι η εφαπτομενική στο στερεό όριο ταχύτητα δεν εφαρμόζεται ως οριακή συνθήκη αφού η ροή είναι ατριβής και, άρα, το ρευστό δεν επηρεάζεται από αυτήν, αλλά είναι αναγκαία για τον υπολογισμό του διανύσματος της ροής $\vec{\Phi}$ στη διεπιφάνεια μεταξύ επικοινωνούντων, τεμνόμενων από το στερεό όριο, κυψελών.

Η εύρεση των ταχυτήτων γίνεται αναλυτικά, μέσω παραγώγισης των εξισώσεων θέσης της λικνιζόμενης αεροτομής. Επειδή όμως η λίκνιση της αεροτομής βασίζεται στη λίκνιση της μεσογραμμής γραμμής της (θυμίζεται: $x_{s,i} = x_m + \text{Sign}(x, t)(-1)^i th(x_m) \cos(\theta)$),

υπολογίζονται πρώτα οι ταχύτητες της λικνιζόμενης μεσογραμμής κατά x και κατά y, εφεξής αναφερόμενες ως (U_m, V_m) , διότι αυτές θα χρειαστούν για τον υπολογισμό των ταχυτήτων της άνω και κάτω πλευράς της. Υπενθυμίζεται η σχέση 3.11:

$$y_m = A e^{a(x-1)} \sin(a_1(x - \gamma t))$$

Κατ' αρχάς, εφόσον η μέση γραμμή διέπεται από κυματική εξίσωση, δεν υπάρχει μεταφορά ύλης κατά τη οριζόντια διεύθυνση διάδοσης (δηλαδή κάθε σημείο της μεσογραμμής μετακινείται μόνο κατά y). Κατά συνέπεια (όπως αποδεικνύεται άλλωστε εύκολα αναλυτικά), η οριζόντια ταχύτητα της λικνιζόμενης μεσογραμμής είναι μηδενική ($U_m = 0$).

Παραγωγίζοντας χρονικά την (3.13) θα ληφθεί η V_m . Οπότε:

$$\left. \begin{aligned} U_m &= \frac{dx_m}{dt} = 0 \\ V_m &= \frac{dy_m}{dt} = -A a_1 \gamma e^{a(x-1)} \cos(a_1(x - \gamma t)) \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Τώρα, ξεκινώντας την ανάλυση για την άνω πλευρά (s_1), με υπόθεση αρνητικής χωρικής παραγωγού της λικνιζόμενης μεσογραμμής και, στη συνέχεια, προσαρμόζοντας τα πρόσημα για την κάτω πλευρά, θα βρεθούν οι τέσσερις ταχύτητες (δύο για την άνω και δύο για την κάτω πλευρά) των στερεών ορίων: $U_{s1}, V_{s1}, U_{s2}, V_{s2}$, όπου με U συμβολίζονται οι x-συνιστώσες, και με V, οι y-συνιστώσες της ταχύτητας.

Κατά τα παραπάνω, από την (3.17), παραγωγίζεται η τεταγμένη της άνω πλευράς της αεροτομής y_{s1} ως προς τον χρόνο, κάνοντας πρώτα αντικατάσταση της γωνίας θ μεταξύ του καθέτου διανύσματος και της οριζόντιου, με το τόξο εφαπτομένης της γωνίας αυτής, δηλαδή $n(s,t)$, σύμφωνα με την (3.16). Υπενθυμίζονται αρχικά οι (3.17), (3.16), κατά σειρά:

$$y_{s1} = y_m - th(x_m) \sin(\theta)$$

$$\theta = \arctan(n(x, t))$$

Οπότε: $y_{s1}(x, t) = y_m - th(x_m) \sin(\arctan(n(x, t)))$, άρα

$$V_{s1} = \frac{dy_{s1}}{dt} = \frac{dy_m}{dt} - th(x) \frac{d}{dt} [\sin(\arctan(n(x, t)))]$$

$$U_{s1} = \frac{dx_{s1}}{dt} = 0 + th(x) \frac{d}{dt} [\cos(\arctan(n(x, t)))]$$

ή

$$\left. \begin{aligned} V_{s1} &= \frac{dy_m}{dt} - th(x) \left\{ \cos[\arctan(n(x,t))] \frac{d}{dt} [\arctan(n(x,t))] \right\} \\ U_{s1} &= 0 + th(x) \left\{ \sin[\arctan(n(x,t))] \frac{d}{dt} [\arctan(n(x,t))] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Στην (3.21), εμφανίστηκε η σύνθετη παράγωγος $\frac{d}{dt} [\arctan(n(x,t))]$, η οποία υπολογίζεται ξεχωριστά στο παρακάτω βήμα:

$$\left. \begin{aligned} \bullet \quad \frac{d}{dt} [\arctan(n(x,t))] &= \frac{1}{1+n^2} \frac{d}{dt} (n(x,t)) \\ \bullet \quad \frac{d}{dt} (n(x,t)) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{dy_m/dx} \right) = - \frac{1}{(dy_m/dx)^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy_m}{dx} \right) = -n^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{dy_m}{dx} \right) \\ \bullet \quad \xrightarrow{(3.14)} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy_m}{dx} \right) &= \frac{d^2 y_m}{dt dx} = a \frac{dy_m}{dt} + a_1^2 \gamma e^{a(x-t)} \sin[a_1(x-\gamma t)] \rightarrow \\ & \frac{d^2 y_m}{dt dx} = a \frac{dy_m}{dt} + a_1^2 \gamma y_m \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Άρα (3.21) $\xrightarrow{(3.22)}$

$$\left. \begin{aligned} V_{s1} &= V_m + th(x) \left\{ \cos[\arctan(n)] \frac{n^2}{1+n^2} (aV_m + a_1^2 \gamma y_m) \right\} \\ U_{s1} &= 0 - th(x) \left\{ \sin[\arctan(n)] \frac{n^2}{1+n^2} (aV_m + a_1^2 \gamma y_m) \right\} \end{aligned} \right\}$$

Για την κάτω πλευρά, γίνεται η ίδια διαδικασία, και τελικώς παρατίθενται συνοψισμένες οι τελικές σχέσεις, με παράμετρο το πρόσημο της πρώτης χωρικής παραγώγου της λικνιζόμενης μεσογραμμής.

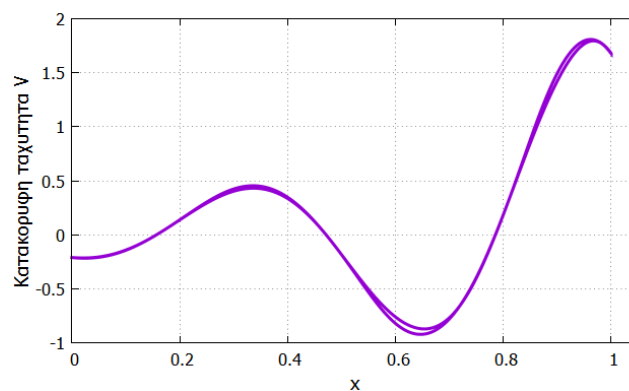
Τίθεται όπως και νωρίτερα το πρόσημο της πρώτης χωρικής παραγώγου της λικνιζόμενης μεσογραμμής ως ακολούθως:

$$Sign(x,t) = sign(dy_m/dx)$$

Άρα, για την πλευρά i (με $i=1,2$ για άνω και κάτω πλευρά αντίστοιχα) είναι:

$$\left. \begin{aligned}
 V_{s,i} &= V_m - \text{Sign}(x, t) (-1)^{i+1} \text{th}(x) \left\{ \cos[\arctan(\text{norm})] \frac{n^2}{1+n^2} (aV_m + a_1^2 \gamma y_m) \right\} \\
 U_{s,i} &= +\text{Sign}(x, t) (-1)^{i+1} \text{th}(x) \left\{ \sin[\arctan(\text{norm})] \frac{n^2}{1+n^2} (aV_m + a_1^2 \gamma y_m) \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης (3.24), παρατίθεται στο σχήμα 3.19 το γράφημα της y-συνιστώσας της ταχύτητας κάθε πλευράς της αεροτομής, δηλ. των $V_{s,1}, V_{s,2}$, ενός στιγμιότυπου της λικνιζόμενης αεροτομής σε χρόνο $t=0$ κατά μήκος της λικνιζόμενης αεροτομής.



Σχήμα 3.19: Κατανομή κατακόρυφης ταχύτητας κατά μήκος της λικνιζόμενης αεροτομής, σε τυχαίο στιγμιότυπο.

Η μορφή της ταχύτητας στο σχήμα 3.18 είναι η αναμενόμενη, διότι το πλάτος ταλάντωσης ενισχύεται από την ακμή προσβολής προς την ακμή εκφυγής, και μαζί μ' αυτό μεγαλώνει και η μέγιστη κατακόρυφη ταχύτητα που μπορεί να λάβει η αεροτομή προχωρώντας κατά μήκος της (εφόσον η συχνότητα ταλάντωσης είναι η ίδια καθ' όλο το μήκος της).

Παρατηρείται ότι, σε μερικά σημεία, η φαινομενικά μία γραμμή διαχωρίζεται σε δύο κοντινές γραμμές ταχύτητας, οι οποίες αναπαριστούν την άνω και κάτω μεριά της λικνιζόμενης αεροτομής, και των οποίων οι ταχύτητες διαφέρουν ελάχιστα διότι λόγω του ημιπάχους που χωρίζει καθένα από αυτά από τη λικνιζόμενη μέση γραμμή, αλλά και των κλίσεων που αυτή παίρνει κατά τη λίκνισή της, τα δύο σημεία της άνω και κάτω πλευράς αποκτούν κατά τι διαφορετική τεταγμένη, αφού όπως παρουσιάστηκε νωρίτερα, η λικνιζόμενη αεροτομή κτίσθηκε εγκάρσια στην εκάστοτε κλίση της μεσογραμμής.

Επειδή σε μία γενική περίπτωση, η ταχύτητα της αεροτομής σε κάθε σημείο της ενδεχομένως να μην ήταν γνωστή σε αναλυτική διατύπωση, ακολουθεί και μία ανάλυση πεπερασμένων διαφορών.

Θα εφαρμοστεί σχήμα πρόσω διαφορών (ακρίβεια πρώτης τάξης) για τους υπολογισμούς που αφορούν στην αρχική χρονική στιγμή, σχήμα πίσω διαφορών (πρώτης τάξεως ακρίβεια) για τους υπολογισμούς που αφορούν την τελευταία χρονική στιγμή ενώ σχήμα κεντρικών διαφορών (ακρίβεια δεύτερης τάξης) για όλες τις ενδιάμεσες χρονικές στιγμές [37].

Συνεπώς ορίζοντας ως t τον χρόνο, x την αδιάστατη χωρική τετμημένη, ως $t_0 = 0$ και $t_{max} = T$, την αρχική και τελική στιγμή αντίστοιχα, ως dt το βήμα χρονικής διακριτοποίησης και ως $x_0 = 0, x_{max} = 1$, την αρχική και τελική τεταγμένη της αεροτομής, και ως dx το βήμα χωρικής διακριτοποίησης λαμβάνονται:

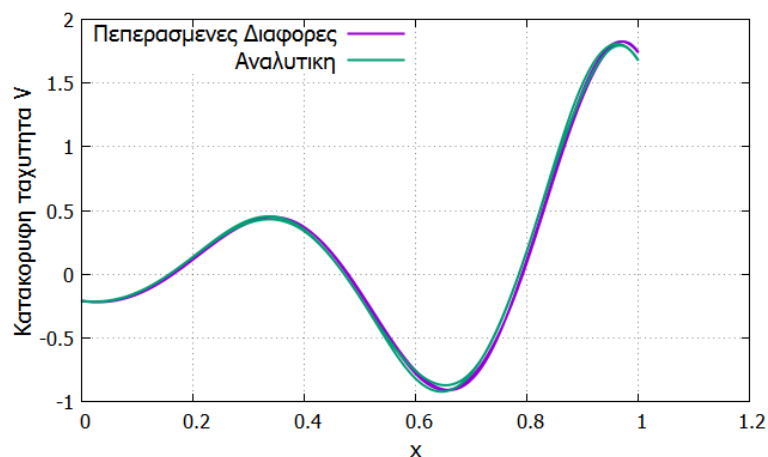
Για κάθε x :

$$\begin{aligned}
 U_{FD}(x, t_0) &= \frac{X(x, t_0 + dt) - X(x, t_0)}{dt} \\
 V_{FD}(x, t_0) &= \frac{Y(x, t_0 + dt) - Y(x, t_0)}{dt} \\
 U_{FD}(x, t_{max}) &= \frac{X(x, t_{max}) - X(x, t_{max} - dt)}{dt} \\
 V_{FD}(x, t_{max}) &= \frac{Y(x, t_{max}) - Y(x, t_{max} - dt)}{dt}
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

Και, επιπλέον, για κάθε ενδιάμεση χρονική στιγμή t :

$$\begin{aligned}
 U_{FD}(x, t) &= \frac{X(x, t + dt) - X(x, t - dt)}{2dt} \\
 V_{FD}(x, t) &= \frac{Y(x, t + dt) - Y(x, t - dt)}{2dt}
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

Παρατίθεται στο σχήμα 3.20 συγκριτικό γράφημα των ταχυτήτων που προέκυψαν με αναλυτική και με αριθμητική παραγωγή (πεπερασμένες διαφορές):



Σχήμα 3.20: Σύγκριση αναλυτικής και αριθμητικής (μέσω πεπερασμένων διαφορών) εύρεσης της κατανομής κατακόρυφων ταχυτήτων

Παρατηρείται ότι οι δύο ταχύτητες είναι πολύ κοντά, και ιδίως στο πρώτο ήμισυ του μήκους, όπου οι κλίσεις της ταχύτητας δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλες, σχεδόν ταυτίζονται. Όσο προσεγγίζεται η ακμή εκφυγής, όπου οι κλίσεις της ταχύτητας μεγαλώνουν (γιατί η εκφυγή ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος, άρα και ταχύτητα), υπάρχει μια μικρή απόκλιση μεταξύ αναλυτικής και αριθμητικής λύσης.

Πάντως θα μπορούσε κάλλιστα να χρησιμοποιηθεί η ταχύτητα που προέκυψε μέσω πεπερασμένων διαφορών, αφού επαληθεύτηκε η πιστότητά τους προς την αναλυτική-ακριβή λύση.

4 Επίλυση Ροής περίξ Λικνιζόμενης Αεροτομής

4.1 Εισαγωγικά Σχόλια

Στο κεφάλαιο αυτό θα επιλυθεί αρχικά το χρονικά μόνιμο και έπειτα το μη-μόνιμο πρόβλημα της ροής περίξ μιας λικνιζόμενης αεροτομής, και αφού διαπιστωθεί η ικανότητα επίλυσης του προβλήματος από το λογισμικό τεμνομένων κυψελών, ακολουθεί μία βασική διερεύνηση των προωστικών δυνατοτήτων λικνιζόμενων αεροτομών.

Όπως προειπώθηκε, η γεωμετρία η οποία αρχικά θα χρησιμοποιηθεί, και οι τιμές των παραμέτρων λίκνισης της εξίσωσης (3.7), ελήφθησαν από πειραματικές διατάξεις και συναρτησιακή προσαρμογή σε ζωντανά χέλια. Με καμπύλες προσαρμογής στην κίνησή τους προέκυψε η εξίσωση (3.7) :

$$y(x, t) = Ae^{a\left(\frac{x}{L}-1\right)} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x/L - \gamma t)\right)$$

με τις ακόλουθες τιμές παραμέτρων:

A	α	x_{max}	λ	T [sec]	γ [L/sec]
0.1	2.25	1	0.6283	$\pi/10$	0.02

Πίνακας 4.1: Παράμετροι λίκνισης κατά E. D. Tydell και E.V. Lauder [35] .

Οπότε αντικαθιστώντας, και στρογγυλοποιώντας το $\frac{2\pi}{\lambda} = 10.0003 \cong 10$ προκύπτει:

$$y(x, t) = 0.1e^{2.25(x-1)} \sin(10(x - 0.02t)) \quad (4.1)$$

Η εξίσωση αυτή πρέπει να διακριτοποιηθεί κατά x, και έτσι να προκύψουν διακριτά σημεία που ορίζουν τη γεωμετρία. Στη συνέχεια, η επιλυόμενη γεωμετρία προκύπτει από ένωση των σημείων αυτών με ευθείες γραμμές από τον κώδικα της μεθόδου τεμνομένων κυψελών.

Αξίζει να διευκρινιστεί εδώ, ότι ενώ στα οριόδετα πλέγματα, το πλήθος των κόμβων που ορίζουν το στερεό όριο (αεροτομή εν προκειμένω), καθορίζουν και τη διάσταση του συνολικού πλέγματος και άρα και τον χρόνο υπολογιστικής επίλυσης, στα μη-οριόδετα πλέγματα, είναι αδιάφορο κατά τη διαδικασία της πλεγματοποίησης το πλήθος των κόμβων αυτών, αφού αντιμετωπίζονται μόνο ως ευθείες γραμμές οι οποίες τέμνουν τις ορθογωνικές κυψέλες. Συνεπώς, υπάρχει ευχέρεια ελεύθερης επιλογής της πυκνότητας της χωρικής διακριτοποίησης του στερεού ορίου.

Έπειτα από τα παραπάνω, επιλέγονται 1000 σημεία επί της λικνιζόμενης μεσογραμμής ($dx=0.001$), εκ των οποίων προκύπτουν 2000 σημεία για όλη την τελική γεωμετρία.

Η αιτία αυτής της εκλογής, δεν σχετίζεται με το χρονικά μόνιμο πρόβλημα που μελετάται αρχικά (στην παράγραφο 4.3), αλλά με το μη-μόνιμο πρόβλημα έπεται (παράγραφο 4.4 και

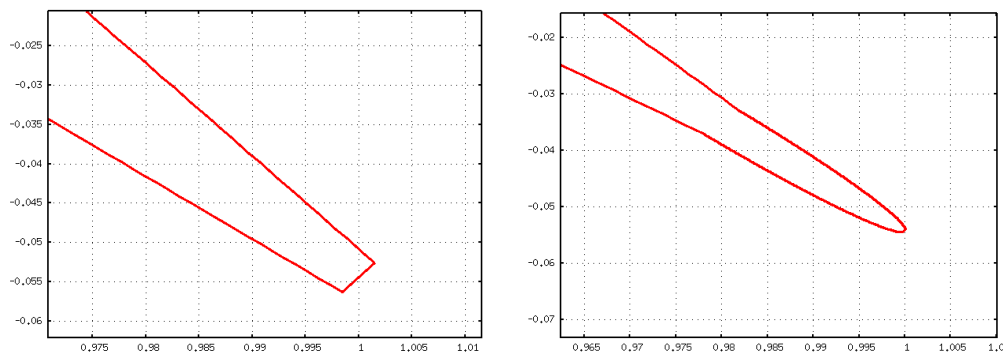
εξής), και έχει να κάνει με την επαρκούς ακρίβειας προεκβολή των τιμών των ταχυτήτων του στερεού, στα βαρύκεντρα των τεμνόμενων κυψελών, όπως προειπώθηκε στην παράγραφο 2.2.3. Όπως επίσης προειπώθηκε όμως, η πυκνότητα- πλήθος σημείων διακριτοποίησης του στερεού ορίου δεν επηρεάζει το μέγεθος του πλέγματος.

Όσον αφορά στον χρόνο t , προς το παρόν, για το χρονικά μόνιμο πρόβλημα, μπορεί να επιλεγθεί μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή, και να αντικατασταθεί στην εξίσωση (3.7). Όμως προτιμάται ένα τέτοιο στιγμιότυπο, που να έχει στην ακμή προσβολής και εκφυγής, κλίσεις της λικνιζόμενης μεσογραμμής τέτοιες που να προκαλούν μακροσκοπικά εκτροπή της ροής (όπως στο σχήμα 4.2 παρακάτω), ώστε να εξεταστεί η αεροδυναμική συμπεριφορά μιας ακίνητης, μη-εύκαμπτης αεροτομής, με κυματόμορφη μέση γραμμή, σε μεσαίες προς υψηλές υποηχητικές συνθήκες ροής.

4.2 Αντιμετώπιση της Οξείας Ακμής Εκφυγής

Όσον αφορά στην κατανομή του ημιπάχους, προκειμένου η ακμή εκφυγής να μην είναι πολύ μικρού μεγέθους οξεία γωνία διότι δυσχεραίνεται η πλεγματοποίηση όπως προαναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2, αλλά ούτε και να γίνει αποκοπή τμήματος του σώματος της αεροτομής, ακολουθούνται δύο τεχνικές:

- Η πρώτη είναι η υπέρθεση επί της μέσης κυματογραμμής, όχι της κατανομής πάχους της NACA0012 για μήκος χορδής c ($=x_{max}$) ίσο με 1, αλλά ίση με $1+\varepsilon$, όπου ε αρκετά μικρό (0.006). Έτσι στην ακμή εκφυγής, ο ίδιος τύπος της κατανομής ημιπάχους NACA 0012, δίνει κάποιο πεπερασμένο πάχος, όχι μόνο ώστε να μπορεί να παραχθεί το πλέγμα, αλλά και ώστε να μην προκύψουν υπερβολικά μικρές κυψέλες κοντά στην ακμή εκφυγής οι οποίες θα επιβάρυναν πολύ τη διαδικασία σύγκλισης. Γίνεται δηλαδή χρήση μιας εικονικής κατανομής πάχους μιας μακρύτερης κατά ε αεροτομής, η οποία αποτέμενεται στο σημείο όπου $x=1$.
- Η δεύτερη τεχνική αλλάζει τη σχέση κατανομής πάχους στο έσχατο τμήμα της λικνιζόμενης μεσογραμμής. Συγκεκριμένα, στο τμήμα της μεσογραμμής (κατά x) από $0.98 \rightarrow 1$ χρησιμοποιείται μια ελλειπτική κατανομή, με μεγάλο άξονα ίσο με το ολικό πάχος που δίνει η NACA 0012 στη θέση 0.98, και μικρό άξονα την απομένουσα απόσταση ως το πέρας της μεσογραμμής δηλαδή 0.02. Έτσι η ακμή εκφυγής αμβλύνεται.



Σχήμα 4.1: Αντιμετώπιση της οξύτητας της ακμής εκφυγής της λικνιζόμενης αεροτομής με : Αριστερά: Εφαρμογή της κατανομής πάχους της NACA 0012 για μήκος χορδής μεγαλύτερο από το πραγματικό, και τομή στο επιθυμητό μήκος. Δεξιά: Αλλαγή κατανομής πάχους κοντά στην ακμή εκφυγής, χρήση συμβατής ελλειπτικής κατανομής. (Τα σχήματα δεν είναι σε κοινή κατά- x και y κλίμακα, για εποπτικούς λόγους).

Οι μαθηματικές εκφράσεις των κατανομών ημι-πάχους για τις δύο τεχνικές είναι:

- Εικονική κατανομή NACA 0012, με μεγαλύτερο μήκος χορδής και απότμηση στην εκφυγή:

$$(3.11): \frac{th(x)}{c} = \pm 0.6 \left[0.2969 \sqrt{\left(\frac{x}{c}\right)} - 0.1260 \left(\frac{x}{c}\right) - 0.3516 \left(\frac{x}{c}\right)^2 + 0.2843 \left(\frac{x}{c}\right)^3 - 0.1015 \left(\frac{x}{c}\right)^4 \right]$$

Εκλέγεται $c=1.005$ (έναντι του 1), συνεπώς για μέγιστη τετμημένη $x=1$, ο μέγιστος λόγος $\frac{x}{c}$ είναι ίσος με 0.995, και άρα το διπλάσιο του ημι-πάχους στην ακμή εκφυγής είναι:

$$th(1) = 2 * 0.6 [0.2969\sqrt{0.995} - 0.1260(0.995) - 0.3516(0.995)^2 + 0.2843(0.995)^3 - 0.1015(0.995)^4] \cong 0.004$$

που είναι ικανοποιητικό για την πλεγματοποίηση.

- Ελλειπτική κατανομή στο τμήμα της εκφυγής:

Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιείται κανονικά η κατανομή της NACA 0012, της σχέσης (5.1), ανέπαφη, αλλά στο ουραίο τμήμα, δηλαδή για $x=[0.98:1]$, υιοθετείται ελλειπτική κατανομή ως εξής:

Για να δημιουργηθεί όσο το δυνατόν πιο μικρή καμπυλότητα στην ακμή εκφυγής, ο μεγάλος άξονας της έλλειψης τοποθετείται κάθετα στη λικνιζόμενη μεσογραμμή.

Άρα αν $\alpha_{ελλ}$, $\beta_{ελλ}$, είναι το μήκος του μεγάλου και του μικρού ημιάξονα αντίστοιχα, πρέπει, αφενός ο μεγάλος ημιάξονας, στην τετμημένη 0.98 να ισούται με το ημι-πάχος που δίνει η NACA 0012 στην ίδια θέση, ενώ ο μικρός ημιάξονας, να ισούται με την απομένουσα απόσταση ως την ακμή εκφυγής, δηλαδή:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\varepsilon\lambda\lambda} &= th_{NACA}(x = 0.98) \\ \beta_{\varepsilon\lambda\lambda} &= 0.02 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Οπότε, η εξίσωση κατανομής του πάχους στο ουραίο τμήμα είναι:

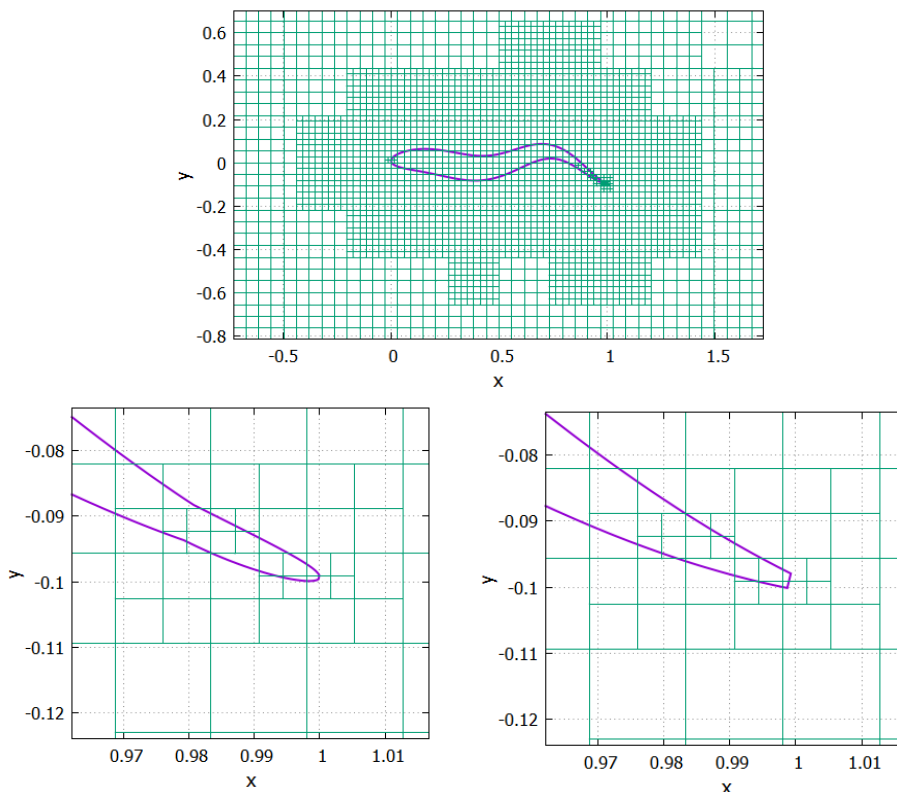
$$th_{\varepsilon\lambda\lambda} = \sqrt{\alpha_{\varepsilon\lambda\lambda}^2 - \left(\frac{\alpha_{\varepsilon\lambda\lambda}}{\beta_{\varepsilon\lambda\lambda}}\right)^2 x_{local}^2}, \quad 0 \leq x_{local} \leq 0.02 \quad (4.3)$$

όπου :

$$x_{local} = x - 0.98$$

Όπως θα αποδειχθεί παρακάτω, και οι δύο λύσεις αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά το πρόβλημα ενώ, επίσης, η επιλογή της μίας ή της άλλης λύσης ελάχιστα επηρεάζει τα αποτελέσματα.

Στο σχήμα 4.2 γίνεται (σε ένα αραιό πλέγμα για εποπτικούς λόγους) εστίαση στην περιοχή γύρω από το στερεό όριο, και γίνεται αντιπαραβολή των δύο τεχνικών αντιμετώπισης της οξείας ακμής εκφυγής:



Σχήμα 4.2: Επάνω: Άποψη της λικνιζόμενης αεροτομής σε αραιό πλέγμα (για εποπτικούς λόγους), Κάτω: Εστίαση στην ακμή εκφυγής, αντιπαραβολή των δύο τεχνικών «άμβλυνσης» της ακμής εκφυγής. Αριστερά: Με ελλειπτική κατανομή, Δεξιά: Με χρήση εικονικής χορδής μεγαλύτερου μήκους και ύστερη απότμησή της

4.3 Επίλυση χρονικά μόνιμου προβλήματος

Περνώντας τώρα στην επίλυση, χρησιμοποιήθηκε χωρική διακριτοποίηση ακρίβειας δευτέρας τάξεως, ενώ οι συνθήκες της επ' άπειρο ροής παρατίθενται στον πίνακα 4.2. Ο αριθμός Mach, ορίζεται ως:

$$M = \frac{U}{\sqrt{\gamma RT}} \quad (4.4)$$

Γωνία α_∞	M_∞
0°	0.294

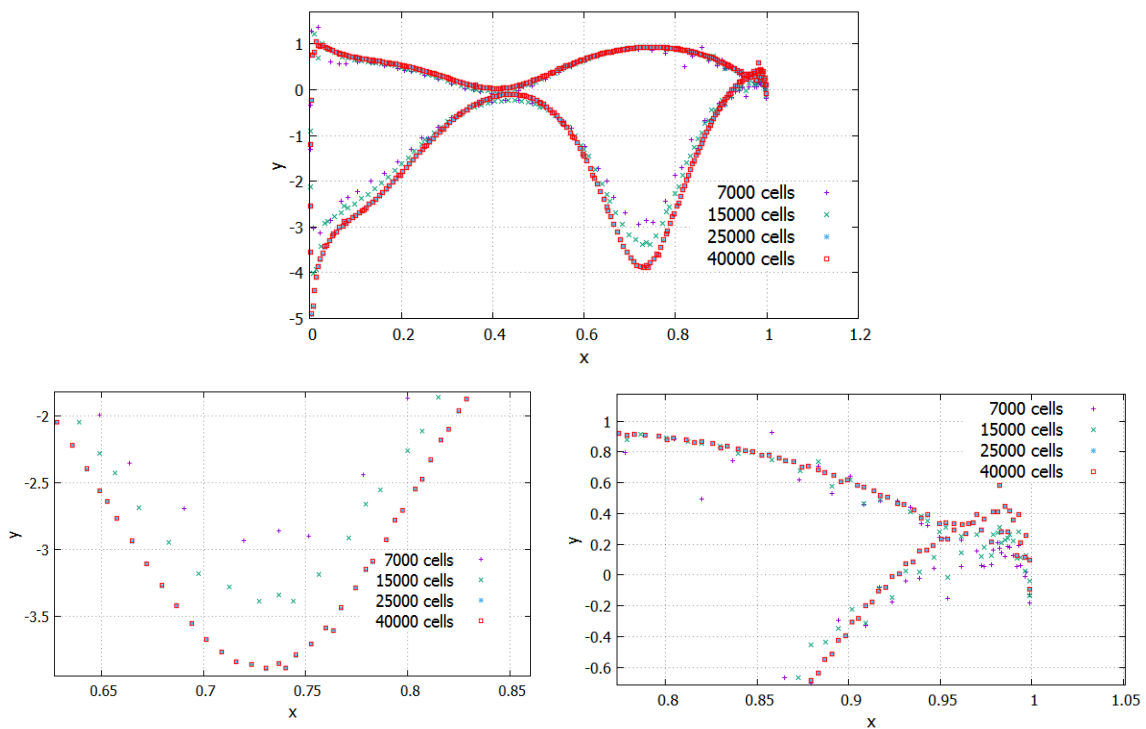
Πίνακας 4.2: Συνθήκες επ' άπειρο ροής, περιρρέουσας στιγμιότυπο λικνιζόμενης αεροτομής

Το υπολογιστικό χωρίο που χρησιμοποιήθηκε είναι 15x14 μήκη χορδής κατά x και κατά y αντίστοιχα.

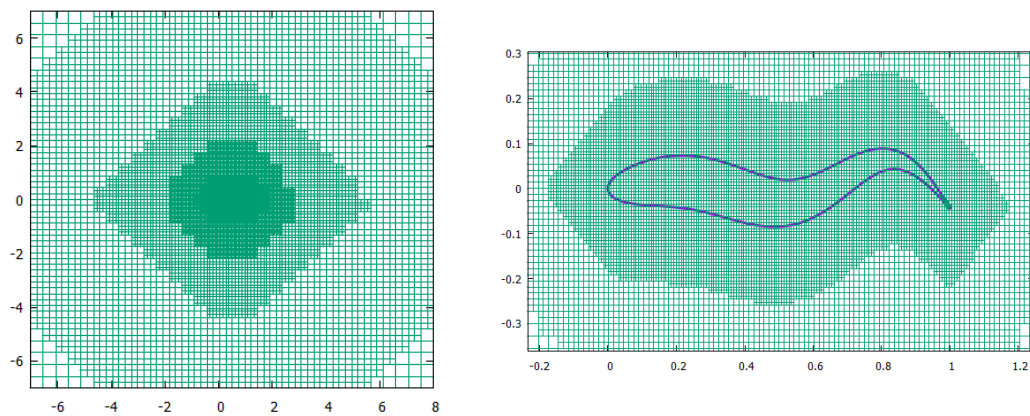
Ως προς τα ελάχιστα και μέγιστα μεγέθη των κυψελών του πλέγματος, έγιναν δοκιμές για διάφορα μεγέθη πλέγματος, και ανιχνεύτηκε τελικά η ανεξάρτητη του πλέγματος λύση. Ως κριτήριο ελέγχου των διαφόρων περιπτώσεων χρησιμοποιείται η κατανομή του συντελεστή πίεσης C_p επί της λικνιζόμενης αεροτομής, ο οποίος ορίζεται για κάθε σημείο όπου επικρατεί πίεση p , ως:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2}$$

Παρατίθεται στο σχήμα 4.3, το διάγραμμα κατανομής του συντελεστή πίεσης, για πλέγματα μεγέθους περί τα 7000, 15000, 25000 και 40000 κελιά, του μόνιμου προβλήματος της άκαμπτης αεροτομής (με κυματόμορφη μέση γραμμή), ενώ στο σχήμα 4.4, μια άποψη του πλεγματοποιημένου χωρίου στο οποίο έγινε η επίλυση: (4.5)



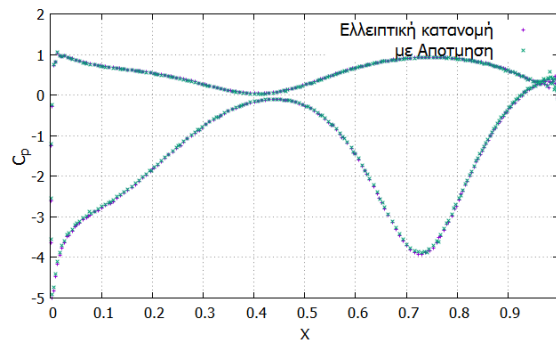
Σχήμα 4.3: Αναζήτηση ανεξάρτητης του πλέγματος λύσης, μέσω σύγκρισης της κατανομής του συντελεστή πίεσης κατά μήκος μίας ακίνητης-άκαμπτης αεροτομής, κυματιστής μέσης γραμμής. Ελέγχονται οι λύσεις για πλέγματα 7000, 15000, 25000 και 40000 κυψελών. Κάτω γίνεται εστίαση σε νεφώδεις περιοχές.



Σχήμα 4.3: Απόψεις του πλεγματοποιημένου χωρίου περίξ μιας ακίνητης, κυματόμορφης αεροτομής. Μέγεθος πλέγματος περί τις 25000 κυψέλες.

Διαπιστώνεται ότι η λύση του πλέγματος 25000 κελιών ταυτίζεται με αυτή των 40000, και συνεπώς αυτή η λύση λαμβάνεται ως ανεξάρτητη της πυκνότητας του πλέγματος. Το τελικό πλέγμα ελήφθη για μέγιστο και ελάχιστο εμβαδό κυψέλης : $\Omega_{max} = 0.24$, $\Omega_{min} = 0.0001$ αντίστοιχα, ενώ η μέγιστη απόσταση μεταξύ κυψελών μεγίστου και ελαχίστου εμβαδού ορίστηκε ως $Distance_{max} = 14$. Τα παραπάνω μεγέθη αναφέρονται σε μονάδες οριζόντιας απόστασης της λικνιζόμενης αεροτομής, η οποία ισούται με 1.

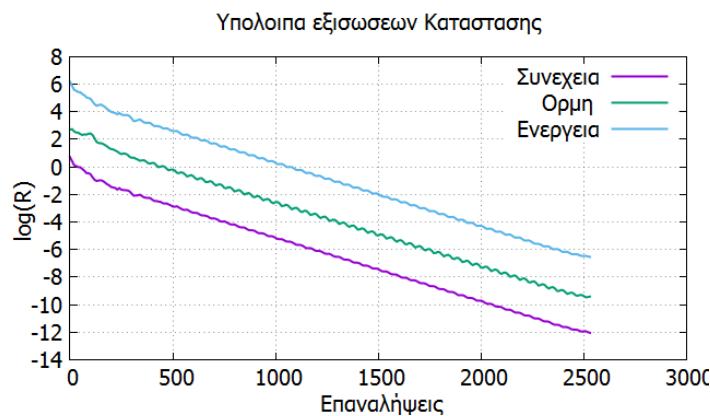
Οπότε πλέον, για το πλέγμα των 25000 κελιών, γίνεται ο έλεγχος μεταξύ των δύο προταθεισών τεχνικών για την αντιμετώπιση της οξείας ακμής εκφυγής.



Σχήμα 4.5: Σύγκριση κατανομών συντελεστή πίεσης σε στιγμιότυπο λικνιζόμενης μεσογραμμής, για ανεξάρτητη του πλέγματος λύση, που προέκυψαν από ελλειπτικό προφίλ εκφυγής και από προφίλ εικονικής αεροτομής μεγαλύτερης της πραγματικής, με απότμηση.

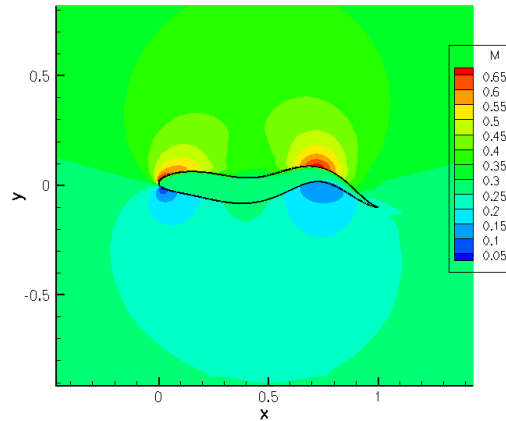
Παρατηρείται ότι η επιλογή της μιας ή της άλλης τεχνικής δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα της κατανομής του συντελεστή πίεσης. Επιλέγεται λοιπόν η τεχνική του ελλειπτικού ουραίου τμήματος.

Παρατίθεται ακόμα στο σχήμα 4.6 το διάγραμμα σύγκλισης, δηλαδή η νόρμα των υπολοίπων των εξισώσεων κατάστασης ως προς τον αριθμό επαναλήψεων. Ως κριτήριο σύγκλισης, δηλαδή μέγιστο επιτρεπτό μέγεθος υπολοίπου ($\|R\|$), εφαρμόστηκε το 10^{-6} . Ως υπόλοιπο της διανυσματικής εξίσωσης ορμής παρίσταται ένα και αυτό υπόλοιπο, διότι τα υπόλοιπα της εξίσωσης ορμής κατά x και κατά y, είναι παραπλήσια και δεν παρουσιάζουν διακριτότητα σε μεγάλη κλίμακα θέασης.



Σχήμα 4.6: Διάγραμμα σύγκλισης με λογαριθμική κλίμακα της νόρμας των υπολοίπων των εξισώσεων κατάστασης, για στιγμιότυπο λικνιζόμενης αεροτομής.

Έπειτα από τα παραπάνω, παρατίθεται στο σχήμα 4.7 το πεδίο του αριθμού Mach της ροής γύρω από την ακίνητη αεροτομή.



Σχήμα 4.7: Πεδίο αριθμού Mach, ατρίβους ροής γύρω από ακίνητο στιγμιότυπο λικνιζόμενης αεροτομής. $M_\infty = 0.294$.

Οι συντελεστές αντίστασης και άνωσης είναι:

$$C_D = 0.0176, C_L = 2.0952$$

οι οποίοι ορίζονται ως:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho S U_\infty^2}, \quad C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho S U_\infty^2} \quad (4.6)$$

όπου S η βρεχόμενη επιφάνεια. Οι συντελεστές αυτοί, είναι υπολογισμένοι ανά μονάδα μήκους, δηλαδή δεν γίνεται διαίρεση με το μήκος της χορδής. Ο λόγος αυτής της επιλογής, είναι το να υπάρχει συμβατότητα ορισμού των αεροδυναμικών συντελεστών του μελετούμενου χρονικά μόνιμου προβλήματος, με το χρονικά μη-μόνιμο πρόβλημα που θα μελετηθεί στην επόμενη παράγραφο.

Έτσι, επειδή κατά τη λίκνιση της αεροτομής (στο χρονικά μη-μόνιμο πρόβλημα), ούτε το μήκος της χορδής ούτε αυτό της μέσης γραμμής (camber line) παραμένει σταθερό σε κάθε στιγμιότυπο, επιλέχτηκε να εκφραστούν οι C_L, C_D , ανά μονάδα μήκους. Οι τιμές του μήκους της χορδής πάντως (στο χρονικά μη-μόνιμο πρόβλημα) κυμαίνονται πολύ κοντά στη μέση τιμή της, με αποκλίσεις της τάξης του 1%. Υπενθυμίζεται ότι χορδή νοείται κανονικά η ευθεία που ενώνει ακμή προσβολής με ακμή εκφυγής.

Ο μεγάλος αυτός συντελεστής άνωσης, οφείλεται, όπως φαίνεται τόσο στο πεδίο του αριθμού Mach, όσο και στην κατανομή του συντελεστή πίεσης (σχήμα 4.5), στο ότι έπειτα από το αρχικό κομμάτι της αεροτομής, όπου η ροή επιταχύνεται στην πλευρά υποπίεσης, και δημιουργείται δύναμη άνωσης, η ροή επιβραδύνεται στο ενδιάμεσο κομμάτι, εξισώνοντας σχεδόν υπό- και υπερπίεση, και έπειτα μειώνεται εκ νέου η πίεση στην άνω πλευρά, προκαλώντας επιπλέον ανωστική δύναμη.

4.4 Επίλυση Μη-Μόνιμης Ροής περίξ Λικνιζόμενης Αεροτομής

Εδώ θα εξεταστεί η ανταπόκριση του λογισμικού τεμνομένων κυψελών στο μη-μόνιμο πρόβλημα, που είναι και ο κύριος λόγος για τον οποίο αναπτύχθηκε η λογική των εμβαπτιζόμενων ορίων, και η διαχείρισή του πλέγματος αυτού μέσω της τεχνικής των τεμνομένων κυψελών.

Το χρησιμοποιούμενο πλέγμα, είναι αυτό που υπέδειξε η ανάλυση ανεξαρτησίας στο μόνιμο πρόβλημα του προηγούμενου κεφαλαίου, δηλαδή περί τα 28000 κελιά, με μέγιστο και ελάχιστο εμβαδό κυψέλης : $\Omega_{max} = 0.24$, $\Omega_{min} = 0.0001$ αντίστοιχα, $Distance_{max} = 14$, οι παράμετροι της λίκνισης παραμένουν οι ίδιες όπως για το προηγούμενο μόνιμο πρόβλημα. Αμφότερες η χωρική και η χρονική διακριτοποίηση είναι ακρίβειας δεύτερης τάξης, ενώ οι συνθήκες της επ' άπειρο ροής είναι ίδιες με της χρονικά μόνιμης περίπτωσης (Πίνακας 4.3), ενώ οι παράμετροι λίκνισης είναι αυτές του πίνακα 4.1, στον οποίο τα μήκη εκφράζονται ως προς το μήκος σώματος (ΜΣ ή BL εκ του Body Length).

Επ' άπειρο Ροή		Λίκνιση			
Γωνία α_{∞}	M_{∞}	Περίοδος T	Μέγιστο πλάτος ταλάντωσης A	Ρυθμός ενίσχυσης πλάτους α	Μήκος κύματος λίκνισης λ
0°	0.294	0.314 sec	0.1	2.25	0.6283

Πίνακας 4.3: Συνθήκες άπειρης ροής που περιρρέει τη λικνιζόμενη αεροτομή, και βασικές παράμετροι λίκνισης.

Ο αριθμός Strouhal της περίπτωσης αυτής είναι:

$$Sr = \frac{fD}{U} = 2 \frac{fA}{U} \cong 0.006 \quad (4.7)$$

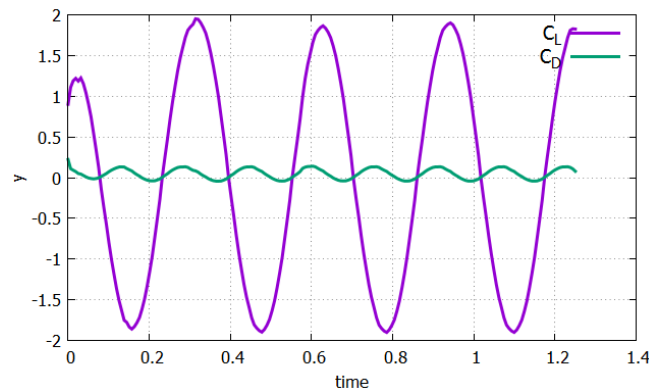
δηλαδή πολύ χαμηλότερος από την περιοχή [0.25:0.35] που ορίστηκε στο κεφάλαιο 2 ως η «αποδοτική», από προωθητικής άποψης περιοχή για υδρόβια βέβαια είδη. Η επιλογή αυτή έγκειται στον υπολογιστικά προσανατολισμένο χαρακτήρα της εργασίας αυτής, όπου κύριος στόχος είναι η διαπίστωση της δυνατότητας του λογισμικού τεμνομένων κυψελών να ανταποκριθεί στη σύνθετη παραμόρφωση των στερεών ορίων μιας λικνιζόμενης αεροτομής, κάτι το οποίο μπορεί να μελετηθεί ανεξαρτήτως αριθμού Strouhal. Εξ άλλου, όπως προειπώθηκε, στον τομέα της αεροδυναμικής, δεν έχουν μελετηθεί επαρκώς οι λικνιζόμενες αεροτομές, ώστε να υπάρχουν βέβαιοι οδηγοί στην επιλογή του Sr.

Συνεπώς, σε πρώτο στάδιο, επιλέγεται μία μικρή σχετικά συχνότητα σε σχέση με την ταχύτητα της παράλληλης ροής, προκειμένου να διερευνηθεί η λειτουργικότητα του αναπτυχθέντος λογισμικού. Στην πράξη, χρησιμοποιείται ατόφια η ιδιομορφή λίκνισης των χελιών, σε επ' άπειρο ροή αέρα $M_{\infty} \cong 0.3$.

Επιστρέφοντας στις παραμέτρους επίλυσης, απαιτείται διερεύνηση για την ανεξαρτησία από την χρονική διακριτοποίηση, αλλά και για την επίτευξη περιοδικής λύσης.

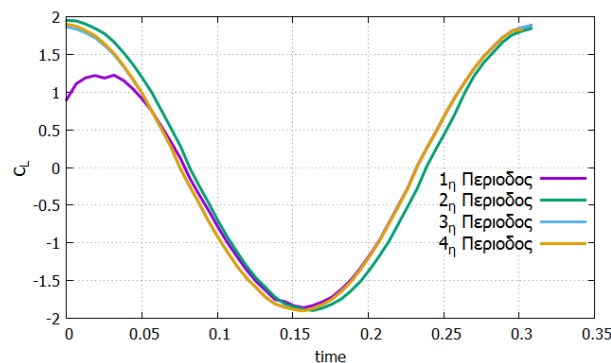
Ως προς τη χρονική διακριτοποίηση, θα γίνει έλεγχος για 10, 20, 40 και 50 χρονικά βήματα ανά περίοδο, ενώ ως προς τον έλεγχο περιοδικότητας θα γίνει δοκιμαστική επίλυση για χρόνο 4 περιόδων.

Θα παρουσιαστεί αρχικά η περίπτωση με 50 χρονικά βήματα ανά περίοδο, στην επίλυση της οποίας διατρέχονται 4 περίοδοι, με περίοδο ενός κύκλου λίκνισης $T=\pi/10$. Ως εποπτικό κριτήριο σύγκρισης των διαφόρων περιπτώσεων θα χρησιμοποιηθούν αυτήν τη φορά οι αεροδυναμικοί συντελεστές C_L και C_D ως προς τον χρόνο (σχήμα 4.8).



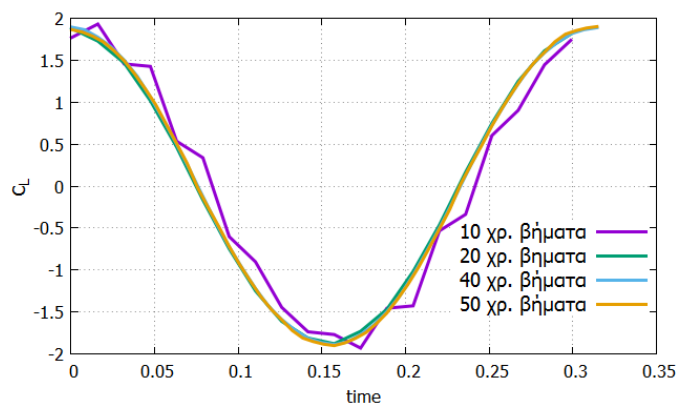
Σχήμα 4.8: Κοινό διάγραμμα συντελεστών άνωσης και αντίστασης λικνιζόμενης αεροτομής συναρτήσει του χρόνου, για χρονική διάρκεια επίλυσης ίση με 4 περιόδους λίκνισης.

Στη συνέχεια, υπερτίθενται στο σχήμα 4.9, οι χρονοσειρές του συντελεστή άνωσης C_L κάθε μιας περιόδου σε ένα γράφημα με οριζόντιο άξονα όχι πια τον απόλυτο χρόνο, αλλά τον σχετικό χρόνο που μετράει απ' την αρχή κάθε περιόδου.



Σχήμα 4.9: Υπέρθεση συντελεστών άνωσης σε κοινό χρόνο (δηλ. Δt από την αρχή κάθε περιόδου), προς αναζήτηση περιοδικής λύσης.

Διακρίνεται, ότι εν μέσω της δεύτερης περιόδου επιτυγχάνεται η περιοδικότητα, συνεπώς στο εξής θα επιλύονται 3 περίοδοι και θα παρουσιάζεται η τρίτη ως αντιπροσωπευτική της ροής. Όσον αφορά τη χρονική ανεξαρτησία, στο σχήμα 4.10 γίνεται σύγκριση των συντελεστών άνωσης των διαφόρων διακριτοποιήσεων, λαμβάνοντας πλέον υπόψη μόνο την τρίτη περίοδο.

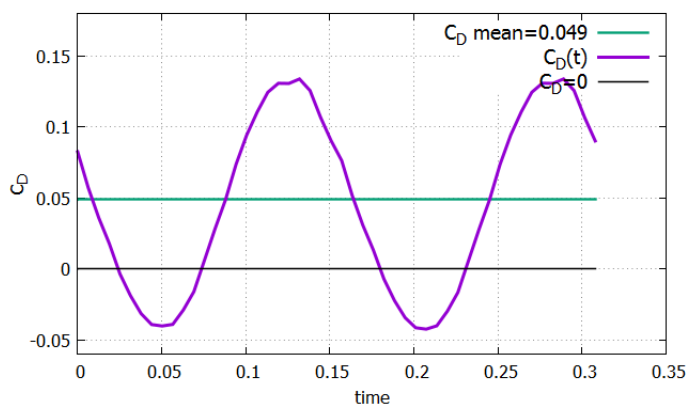


Σχήμα 4.10: Συντελεστές άνωσης περιοδικής λύσης, για διάφορες πυκνότητες χρονικής διακριτοποίησης (βήματα σε μια περίοδο).

Από το σχήμα 4.10 γίνεται εμφανές πως για 20, 40 και 50 χρονικά βήματα ανά περίοδο, οι λύσεις είναι αρκετά όμοιες, με εξαίρεση μια πολύ μικρή απόκλιση στο αρχικό τμήμα της περιόδου. Ιδίως δε για διακριτοποίηση 40 και 50 χρονικών βημάτων ανά περίοδο οι λύσεις θεωρούνται ισοδύναμες.

Θα παρουσιασθούν τα αποτελέσματα της πυκνότερης διακριτοποίησης, δηλαδή για 50 χρονικά βήματα ανά περίοδο, κάλλιστα όμως σε μελλοντικά προβλήματα αντίστοιχου αριθμού Strouhal, θα μπορούσε να διεξαχθεί επίλυση με 20 χρονικά βήματα, με μικρό κατ' αναλογία κόστος σε ακρίβεια έναντι του κέρδους σε υπολογιστικό χρόνο.

Αρχικά, στο σχήμα 4.11 παρατίθεται γραφικά η χρονοσειρά του συντελεστή αντίστασης για να γίνει αντιληπτό αν και κατά πόσον υπάρχει δημιουργία αρνητικής οπισθέλκουσας δηλαδή δύναμη προώθησης. Το εάν η αεροτομή λειτουργεί ως αντίσταση ή ως προωθητικό σώμα, κρίνεται στην ατριβή ροή από την κατανομή των πιέσεων επί αυτής. Η αντίσταση δηλαδή είναι αντίσταση μορφής (δεν υπάρχει συνεκτικότητα).



Σχήμα 4.11: Συντελεστής αντίστασης λικνιζόμενης αεροτομής με $St=0.006$, σε επ' άπειρο ροή αέρα $M_\infty \cong 0.3$, κατά τη διάρκεια μιας περιόδου (αφού επιτευχθεί περιοδικότητα).

Παρατηρείται, ότι παρ' όλο που ο αριθμός Strouhal είναι κατά πολύ, εκτός της αποδοτικής περιοχής του $[0.25:0.35]$ που αναφέρθηκε (εδώ : $St \approx 0.006$), υπάρχουν χρονικές ζώνες κατά τις οποίες, με γνώμονα το σχήμα 4.11, δημιουργείται δύναμη προώθησης, όπου δηλαδή ο συντελεστής αντίστασης είναι αρνητικός. Όμως ο μέσος συντελεστής αντίστασης είναι

θετικός, δηλαδή συνολικά, σε διάστημα μιας περιόδου λίκνισης, η συνισταμένη δύναμη στον οριζόντιο άξονα είναι παράλληλη στην κατεύθυνση της παράλληλης ροής.

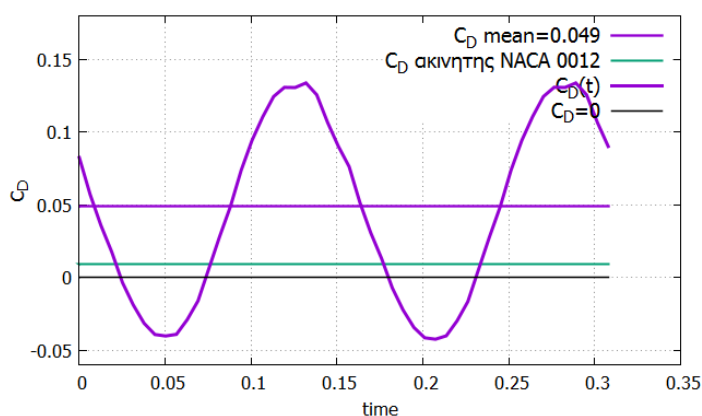
Η μη προωστική συμπεριφορά της αεροτομής αυτής, οφείλεται εν μέρει στον πολύ χαμηλό Sr , και εν μέρει στη μη-συνεκτικότητα της ροής, διότι όπως προειπώθηκε, στην ιδιομορφή λίκνισης τύπου χελιού, η συνεκτικότητα βοηθά στην ώθηση του ρευστού μέσου προς τα πίσω.

Για λόγους πληρότητας συμπαρατίθεται στο σχήμα 4.12 ο μέσος συντελεστής αυτός, με τον αντίστοιχο συντελεστή αντίστασης μορφής μιας αεροτομής NACA 0012, σε άπειρη ροή ίδιων χαρακτηριστικών, που έχει μήκος χορδής όχι ίσο με 1, αλλά ίσο με το μέγιστο επικαμπύλιο μήκος το οποίο έχει η αεροτομή κατά τον λικνισμό της. Επισημαίνεται ότι το μήκος τόξου της λικνιζόμενης μέσης γραμμής δεν μένει απολύτως σταθερό, αλλά κυμαίνεται μεταξύ κάποιου άνω και κάτω ορίου, όπως επιβάλλει η κυματική εξίσωση λίκνισης [38].

Η σύγκριση αυτή είθισται να γίνεται κατά τη μελέτη των υδρόβιων οργανισμών, για να βρεθεί ο αριθμός Strouhal ο οποίος προκαλεί δύναμη αντίστασης οριακά μικρότερη από εκείνη του άκαμπτου και ίσιου αντιστοίχου σώματος [33].

Έτσι υπολογίζονται πρώτα αριθμητικώς τα επικαμπύλια ολοκληρώματα (μήκος καμπύλης) της λικνιζόμενης μεσογραμμής για κάθε στιγμιότυπο μιας περιόδου, και επιλέγεται το μέγιστο μήκος .

Το μέγιστο μήκος προκύπτει $L_{max} = 1.0635$ (με σχεδόν αμελητέα διαφορά με το ελάχιστο που είναι $L_{min} = 1.0424$). Για μήκος μέσης γραμμής της αεροτομής ίσο με L_{max} , επιλύεται το μόνιμο πρόβλημα για την NACA 0012 με το ίδιο λογισμικό επίλυσης και, χαράσσεται συμπληρωματικά στο προηγούμενο σχήμα (σχήμα 4.11) η τιμή του C_D που προέκυψε.

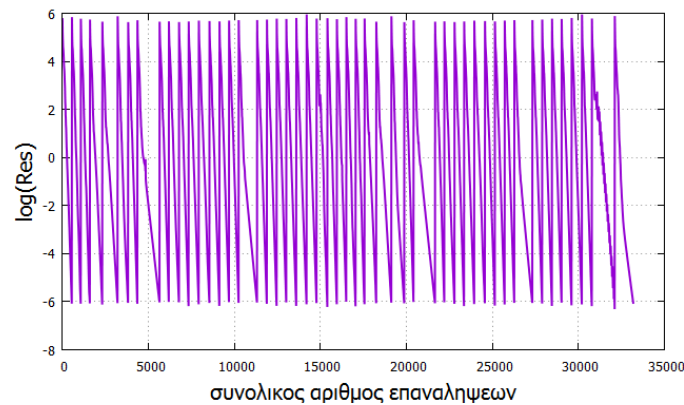


Σχήμα 4.12: Σύγκριση συντελεστή αντίστασης της λικνιζόμενης αεροτομής με μηδενική γωνία της επ' άπειρο ροής και $M_\infty \cong 0.3$, με τον αντίστοιχο συντελεστή του μόνιμου προβλήματος μιας NACA 0012 σε ίδιες συνθήκες ροής ($C_{D,NACA} = 0.009$).

Παρατηρείται, πως η μέση δύναμη αντίστασης σε χρόνο μιας περιόδου λίκνισης της αεροτομής, είναι αρκετά μεγάλη, παρά τις όποιες περιοχές όπου παράγεται ώση, και αυτό προκύπτει από τον σχεδόν τέσσερις φορές μεγαλύτερο μέσο συντελεστή αντίστασης που παρουσιάζει, σε σχέση με μία περίπτωση μιας ακίνητης αεροτομής NACA 0012.

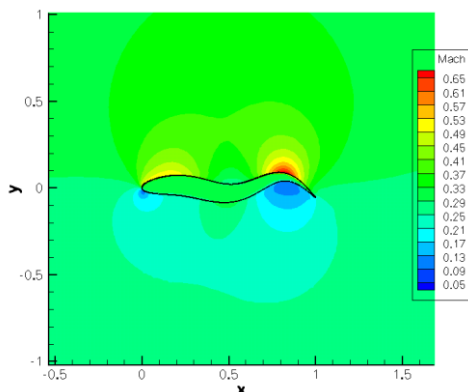
Σημειώνεται ότι οι αεροδυναμικοί συντελεστές, προέκυψαν μέσω ολοκλήρωσης των δυνάμεων λόγω πιέσεων επί του στερεού ορίου κατά x και y . Οι πιέσεις στο στερεό όριο ελήφθησαν μέσω προεκβολής από τα βαρύκεντρα των τεμνόμενων κυψελών (βλ. παράγραφο 2.2.4).

Τέλος παρουσιάζεται στο σχήμα 4.13 το διάγραμμα σύγκλισης των λογαρίθμων της νόρμας των υπολοίπων της απαιτητικότερης υπολογιστικά εξίσωσης, δηλαδή της εξίσωσης της ενέργειας, ως προς τον συνολικό αριθμό επαναλήψεων, για κάθε χρονικό βήμα, όπου το κριτήριο σύγκλισης είναι όπως στο μόνιμο πρόβλημα, δηλαδή μέγιστο επιτρεπτό υπόλοιπο (νόρμα) το 10^{-6} . Κάθε «παλμός» του σχήματος αντιστοιχεί στη σύγκλιση των ψευδοχρονικών επαναλήψεων ενός χρονικού στιγμιότυπου.

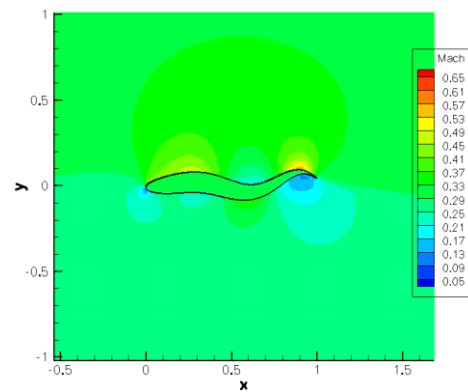


Σχήμα 4.13: Διάγραμμα σύγκλισης της νόρμας των υπολοίπων της εξίσωσης ενέργειας, με τα υπόλοιπα εκφρασμένα σε λογαριθμική κλίμακα, για τα 50 χρονικά βήματα μιας περιόδου επίλυσης.

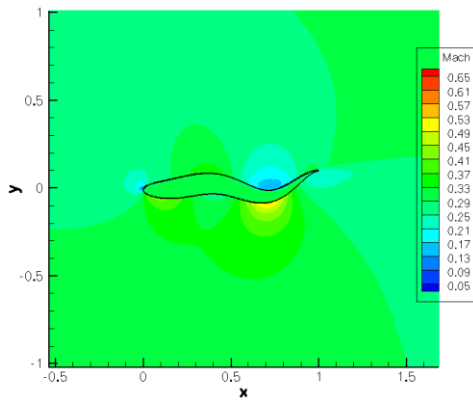
Στα σχήματα που ακολουθούν (4.14 ως 4.19), παρατίθενται διαδοχικά στιγμιότυπα των πεδίων ροής περίξ της λικνιζόμενης αεροτομής, όπου απεικονίζονται ισοσταθμικές περιοχές του αριθμού Mach. Η χρονική διαφορά μεταξύ των στιγμιότυπων είναι $\delta t = T/6$.



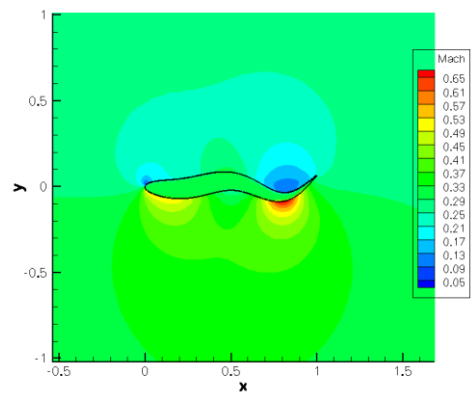
Σχήμα 4.14: Πεδίο του αριθμού Mach γύρω από τη λικνιζόμενη αεροτομή, στιγμιότυπο πρώτο: $t=0$.



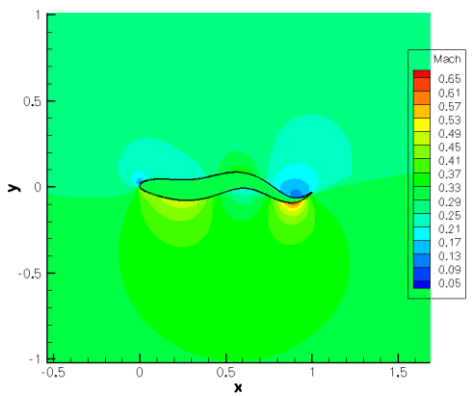
Σχήμα 4.15: Πεδίο του αριθμού Mach γύρω από τη λικνιζόμενη αεροτομή, στιγμιότυπο δεύτερο: $t=T/6$.



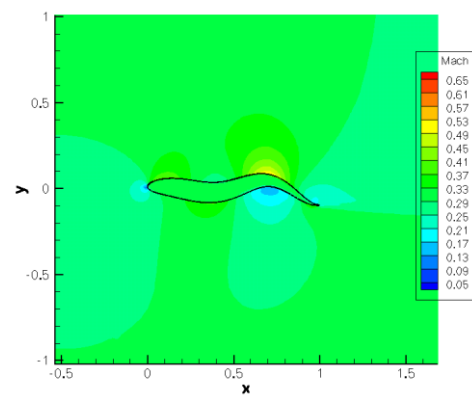
Σχήμα 4.16: Πεδίο του αριθμού Mach γύρω από τη λικνιζόμενη αεροτομή, στιγμιότυπο τρίτο: $t=2T/6$.



Σχήμα 4.17: Πεδίο του αριθμού Mach γύρω από τη λικνιζόμενη αεροτομή, στιγμιότυπο τέταρτο: $t=3T/6$.



Σχήμα 4.18: Πεδίο του αριθμού Mach γύρω από τη λικνιζόμενη αεροτομή, στιγμιότυπο πέμπτο: $t=4T/6$.

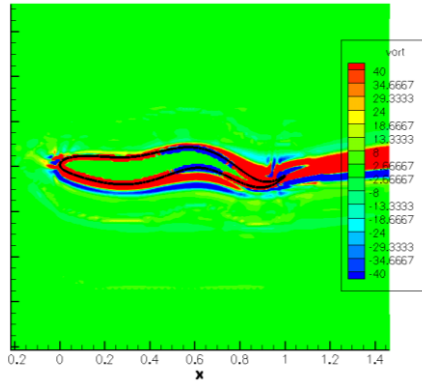


Σχήμα 4.19: Πεδίο του αριθμού Mach γύρω από τη λικνιζόμενη αεροτομή, στιγμιότυπο έκτο: $t=5T/6$.

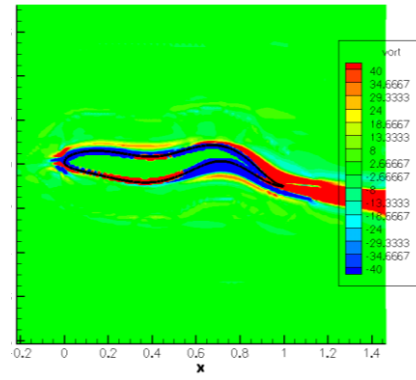
Όπως διαπιστώθηκε και από τη μορφή του συντελεστή αντίστασης, σε κάποιες χρονικές στιγμές δημιουργείται αρνητική δύναμη στον οριζόντιο άξονα, δηλαδή προωστική.

Παρουσιάζονται στα σχήματα 4.20, 4.21, στιγμιότυπα του πεδίου στροβιλισμού, για ένα προωστικό ($C_D < 0$) και ένα οπισθελκόμενο στιγμιότυπα. Υπενθυμίζεται ακόμα ο τύπος υπολογισμού του στροβιλισμού σε διδιάστατη διατύπωση:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

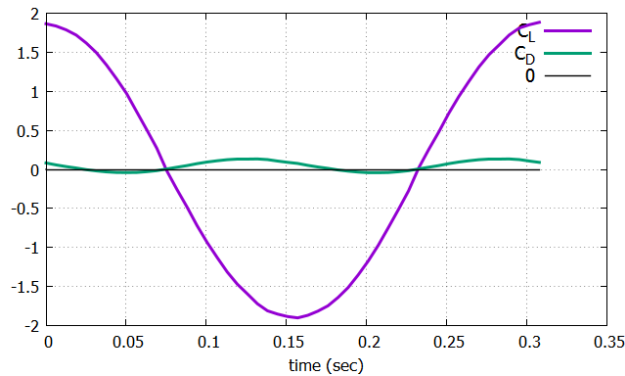


Σχήμα 4.20: Στροβιλισμός του πεδίου γύρω από τη λικνιζόμενη αεροτομή. $t=4T/6$, $C_D < 0$.



Σχήμα 4.21: Στροβιλισμός του πεδίου γύρω από τη λικνιζόμενη αεροτομή. $t=5T/6$, $C_D > 0$.

Επιπλέον, στο σχήμα 4.22, παρατίθεται το διάγραμμα των συντελεστών άνωσης-αντίστασης συναρτήσει του χρόνου.



Σχήμα 4.22: Συντελεστές άνωσης και αντίστασης κατά τη διάρκεια μιας περιόδου λίκνισης.

Προκειμένου να δημιουργηθούν προωστικές συνθήκες, πρέπει η υπερισχύουσα μορφή στον ομόρρου, να είναι δύο απόμενες περιοχές ετερόσημου στροβιλισμού, όπου η άνω να είναι ανθρωρολογιακής και η κάτω ωρολογιακής φοράς, ώστε να δημιουργούν μία κοινή δέσμη ταχυτήτων στη διεπιφάνειά τους, η οποία να είναι θετική (προς τα δεξιά στο σχήμα).

Αυτό λαμβάνει χώρα με ξεκάθαρο τρόπο μόνο στο στιγμιότυπο του σχήματος 4.20, όπου ο ομόρρους του στιγμιότυπου του σχήματος 4.20, αποτελείται από δύο μεσαίες ζώνες ετερόσημου στροβιλισμού, όπου η κόκκινη ζώνη είναι θετική (ανθρωρολογιακής φοράς) και η μπλε αρνητική (ωρολογιακής φοράς). Αυτό δημιουργεί μια συνισταμένη δέσμη ταχυτήτων κινούμενη προς τα πίσω δημιουργώντας δύναμη πρόωσης. Η έκταση της περιοχής αρνητικού στροβιλισμού είναι μικρότερη της θετικής, κι έτσι περιορίζεται κάπως το μέγεθος της δύναμης πρόωσης. Και πράγματι ο συντελεστής αντίστασης στο στιγμιότυπο αυτό προέκυψε αρνητικός, δηλαδή υπάρχει δημιουργία, μικρής έστω, πρόωσης.

Τέλος, αν γίνει σύγκριση των διαδοχικών στιγμιότυπων των σχημάτων 4.20, 4.21, παρατηρείται πως στην ακμή προσβολής του σχήματος 4.21 όπου μόλις έχει αλλάξει κατεύθυνση η «μύτη» της αεροτομής, σχηματίζεται στην άνω πλευρά (υποπίεσης), μια περιοχή ετερόσημου στροβιλισμού από την προηγούμενη επικρατούσα, δηλαδή του σχήματος 4.20

4.5 Επίλυση Μη-Μόνιμης Ροής περίξ Λικνιζόμενης Αεροτομής, με Γωνία της Επ' Άπειρο Ροής 15°

Η περίπτωση αυτή εξετάζεται αφενός επειδή γίνονται δυσμενέστερα τα αεροδυναμικά φαινόμενα, και άρα δοκιμάζεται ακόμα περισσότερο η ικανότητα της ακολουθούμενης τεχνικής, αλλά επίσης και για τη διερεύνηση της ανωστικής συμπεριφοράς μιας λικνιζόμενης αεροτομής.

Τα χαρακτηριστικά κίνησης της γεωμετρίας παραμένουν τα ίδια όπως και στη βασική υπόθεση διερεύνησης (βλ. Παρ. 4.4). Η χωρική διακριτοποίηση είναι δευτέρας τάξεως ακρίβειας, ενώ χρησιμοποιήθηκε το ίδιο πλέγμα με αυτό της περίπτωσης μηδενικής γωνίας της επ' άπειρο ροής, δηλαδή περί τις 28000 κυψέλες, με μέγιστο και ελάχιστο εμβαδό κυψέλης : $\Omega_{max} = 0.24$, $\Omega_{min} = 0.0001$ αντίστοιχα, ενώ η μέγιστη απόσταση μεταξύ κυψελών μεγίστου και ελαχίστου εμβαδού $Distance_{max} = 14$.

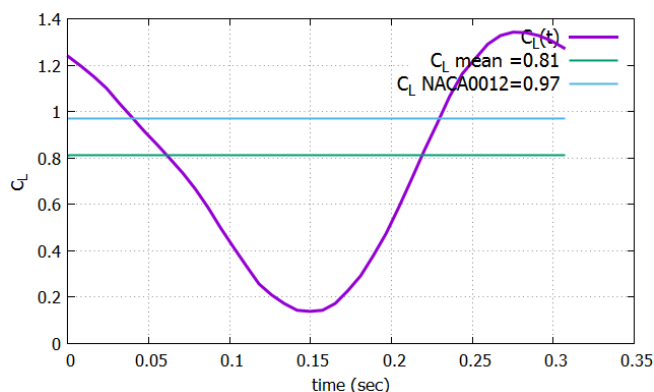
Επίσης, η επίλυση έγινε για συνολικό χρόνο τριών περιόδων, διότι όπως προέκυψε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η τρίτη περίοδος εκφράζει την πλήρως περιοδική λύση.

Χαρακτηριστικά λίκνισης (ίδια με της παραγράφου 4.4) και επ' άπειρο ροής:

Επ' άπειρο Ροή		Λίκνιση			
Γωνία α_∞	M_∞	Περίοδος T	Μέγιστο πλάτος ταλάντωσης A	Ρυθμός ενίσχυσης πλάτους α	Μήκος κύματος λίκνισης λ
15°	0.294	0.314 sec	0.1	2.25	0.6283

Πίνακας 4.4: Συνθήκες απείρου ροής, η οποία περιρρέει λικνιζόμενη αεροτομή.

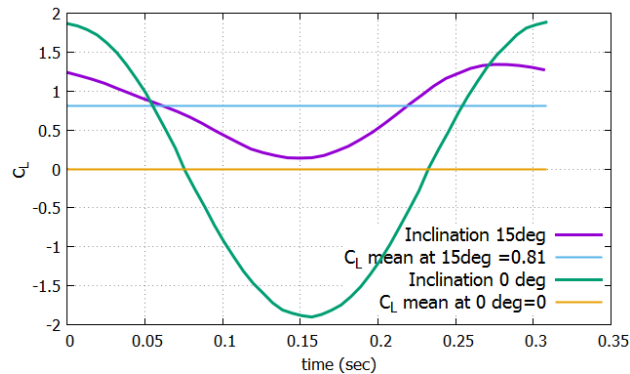
Έπειτα από τα παραπάνω, παρατίθεται στο σχήμα 4.23, το διάγραμμα του συντελεστή άνωσης συναρτήσει του χρόνου που προέκυψε για την τρίτη περίοδο, με χαραγμένη επίσης τη μέση τιμή του. Γίνεται επίσης σύγκριση με τον αντίστοιχο συντελεστή άνωσης μιας αεροτομής NACA 0012 , σε ίδιες συνθήκες ροής και γωνία της επ' άπειρο ροής.



Σχήμα 4.23: Συντελεστής άνωσης λικνιζόμενης αεροτομής, με γωνία της επ' άπειρο ροής ίση με 15° ,σε χρόνο μιας περιόδου, με χάραξη της μέσης τιμής του αλλά και του αντίστοιχου συντελεστή μιας ακίνητης αεροτομής NACA 0012 σε ίδιες συνθήκες ροής.

Η επίλυση του χρονικά μόνιμου προβλήματος της αεροτομής NACA 0012 σε γωνία 15° , έγινε επίσης με το λογισμικό τεμνομένων κυψελών. Το λογισμικό έχει πιστοποιηθεί άλλωστε σε διάφορες περιπτώσεις ακίνητων και κινούμενων περιπτώσεων της NACA 0012 [25].

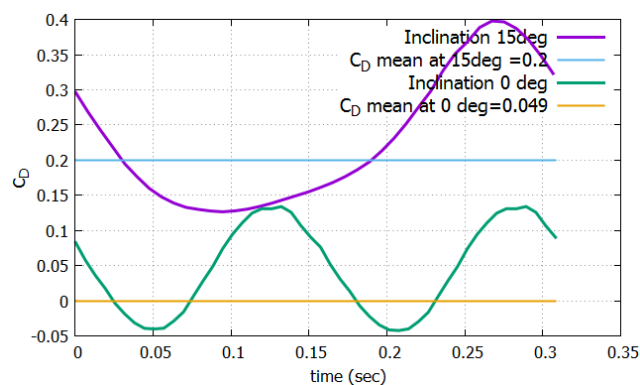
Προκειμένου να γίνει σύγκριση της λικνιζόμενης αεροτομής σε μηδενική και σε 15° γωνία της επ' άπειρο ροής, παρατίθεται στο σχήμα 4.24 κοινό διάγραμμα των συντελεστών άνωσης και αντίστασης, όπως προέκυψαν από την περιοδική λύση της 3^{ης} περιόδου επίλυσης, για τις δύο περιπτώσεις, όπου ο άξονας του χρόνου είναι σε σχετικό χρόνο, δηλαδή θέτοντας $t=0$ στην αρχή της 3^{ης} περιόδου:



Σχήμα 4.24: Σύγκριση συντελεστών άνωσης λικνιζόμενης αεροτομής υπό γωνία 0 και 15 μοιρών σε χρόνο μιας περιόδου, με χάραξη των μέσων τιμών τους.

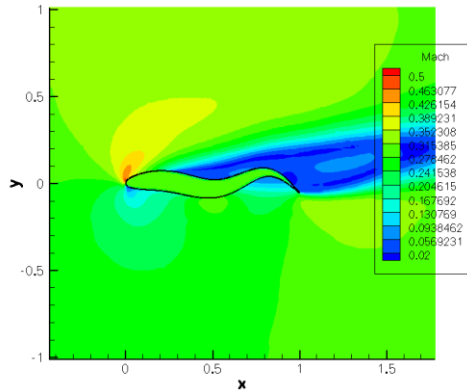
Παρατηρείται μέσω του σχήματος 4.24, ότι αν και ο μέσος συντελεστής άνωσης της λικνιζόμενης αεροτομής με γωνία της επ' άπειρο ροής 15° είναι θετικός με τιμή περίπου 0.814, η μεταβολή της γωνιάς της επ' άπειρο ροής, οδήγησε σε μείωση του πλάτους διακύμανσης του συντελεστή άνωσης.

Ακόμα αξίζει να σημειωθεί, ότι λόγω της μεγάλης σχετικά γωνιάς της επ' άπειρο ροής, ο συντελεστής αντίστασης άλλαξε μορφή, περιοριζόμενος σε μία μόνη κυμάτωση κατά μήκος μιας περιόδου, ασυμμετρικής πλέον ως προς το μέσον της περιόδου, όπως φαίνεται στο συγκριτικό σχήμα 4.25. Αυτό οφείλεται, στο ότι όταν η αεροτομή φτάνει πρώτη φορά στο σημείο ελάχιστου C_D (βλ. σχήμα 4.27), και έπειτα η ακμή εκφυγής εκτείνεται προς τα πάνω και δεξιά (σχήμα 4.28), ενώ σε μία οριζόντια ροή θα προκαλούνταν αντίσταση από την εκτεθειμένη ακμή εκφυγής, στην περίπτωση αυτή, «κρύβεται» πίσω από το κυρίως σώμα της αεροτομής, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει αύξηση του C_D , παρά μόνο αργότερα, όταν η ακμή εκφυγής ξαναβρεθεί σε υπήνεμη θέση (σχήμα 4.26).

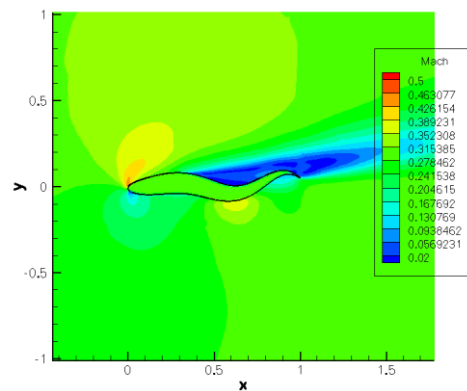


Σχήμα 4.25: Σύγκριση συντελεστών αντίστασης λικνιζόμενης αεροτομής, με γωνία της επ' άπειρο ροής 0 και 15 μοίρες, σε χρόνο μιας περιόδου, με χάραξη των μέσων τιμών τους. Ο χρόνος είναι ο σχετικός χρόνος της 3^{ης} περιόδου επίλυσης.

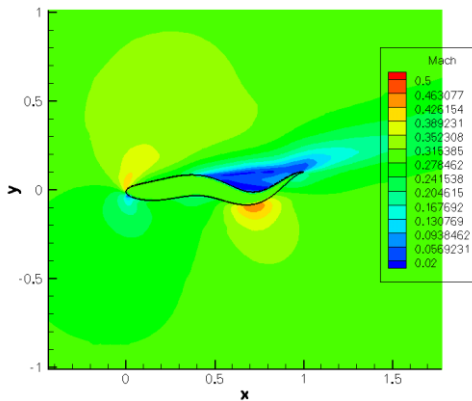
Στα σχήματα 4.26 ως 4.31, παρουσιάζονται τα πεδία του αριθμού Mach σε στιγμιότυπα της λικνιζόμενης αεροτομής, κατά χρονολογική σειρά:



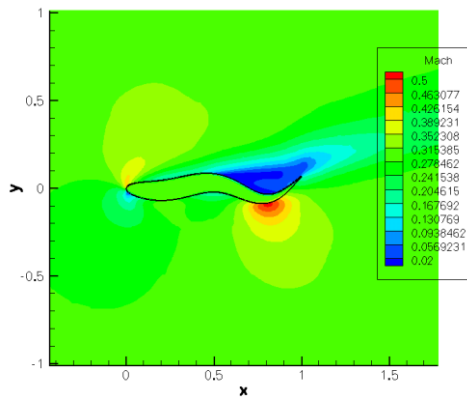
Σχήμα 4.26: Στιγμιότυπο του πεδίου του αριθμού Mach περίξ λικνιζόμενης αεροτομής, σε επ' άπειρο ροή 100 m/s, γωνίας 15°. Στιγμιότυπο 1° : $t=0$.



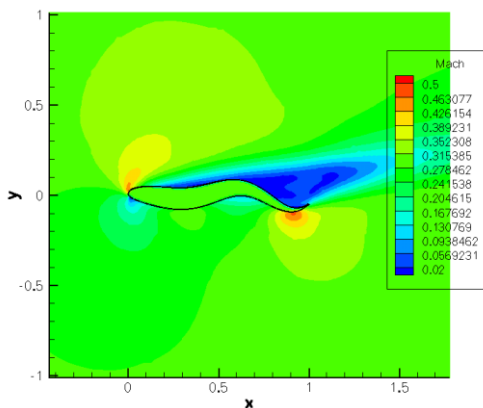
Σχήμα 4.27: Στιγμιότυπο του πεδίου του αριθμού Mach περίξ λικνιζόμενης αεροτομής, σε επ' άπειρο ροή 100 m/s, γωνίας 15°. Στιγμιότυπο 2° : $t=T/6$.



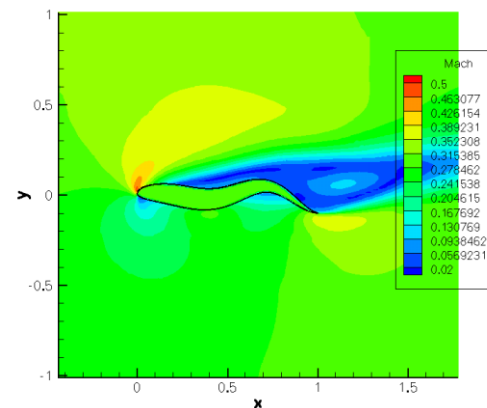
Σχήμα 4.28: Στιγμιότυπο του πεδίου του αριθμού Mach περίξ λικνιζόμενης αεροτομής, σε επ' άπειρο ροή 100 m/s, γωνίας 15°. Στιγμιότυπο 3° : $t=2T/6$.



Σχήμα 4.29: Στιγμιότυπο του πεδίου του αριθμού Mach περίξ λικνιζόμενης αεροτομής, σε επ' άπειρο ροή 100 m/s, γωνίας 15°. Στιγμιότυπο 4° : $t=3T/6$.



Σχήμα 4.30: Στιγμιότυπο του πεδίου του αριθμού Mach περίξ λικνιζόμενης αεροτομής, σε επ' άπειρο ροή 100 m/s, γωνίας 15°. Στιγμιότυπο 5° : $t=4T/6$.



Σχήμα 4.31: Στιγμιότυπο του πεδίου του αριθμού Mach περίξ λικνιζόμενης αεροτομής, σε επ' άπειρο ροή 100 m/s, γωνίας 15°. Στιγμιότυπο 6° : $t=5T/6$.

4.6 Μια Πρώτη Διερεύνηση Δυνατοτήτων Πρόωσης Λικνιζόμενων Αεροτομών

Στην προηγούμενη παράγραφο δείχτηκε η ικανότητα του λογισμικού τεμνομένων κυψελών να επιλύει τη ροή γύρω από τη λικνιζόμενη αεροτομή. Αν και εμφανίστηκε τμηματικά δύναμη πρόωσης εντός της περιόδου λίκνισης, παρ' όλα αυτά κατά μέσο όρο, η συμπεριφορά της αεροτομής ήταν οπισθητική.

Σε αυτή την παράγραφο γίνεται μία πρώτη απόπειρα ανεύρεσης και οριοθέτησης των παραμέτρων λίκνισης που οδηγούν σε προωστική δραστηριότητα.

Σε υδροδυναμικό περιβάλλον, για λικνιζόμενες υδροτομές, η περιοχή του αριθμού Strouhal που συνδέεται με τη δημιουργία πρόωσης είναι οριοθετημένη στο διάστημα [0.25:0.35] [30],[33],[39]. Σε αεροδυναμικό περιβάλλον, υπάρχει οριοθέτηση μόνο για αεροτομές που εκτελούν ταυτόχρονα ταλάντωση πρόνευσης-φυγοειδούς (pitch and heave), η οποία ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της κίνησης, εκτείνεται σε γενικές γραμμές στο ενεργό διάστημα [0.1:1+] [40].

Οι παράμετροι που επεμβαίνουν άμεσα στον αριθμό Strouhal είναι η συχνότητα ταλάντωσης f , το πλάτος ταλάντωσης A , και η ταχύτητα της επ' άπειρο ροής U_∞ . Υπενθυμίζεται:

$$Sr = \frac{2Af}{U_\infty}$$

Όμως και το μήκος κύματος της λίκνισης λ , και ο συντελεστής ενίσχυσης του πλάτους κατά μήκος της αεροτομής a , επηρεάζουν την προωστική κατάσταση, γιατί παρ' όλο που δεν επηρεάζουν τον Sr , καθορίζουν το σε ποιο τμήμα της γενικής ενεργής περιοχής Sr , μπορεί μια συγκεκριμένη ιδιομορφή λίκνισης να παράγει πρόωση. (Η επίδραση όλων των παραμέτρων λίκνισης πάνω στην τελική ιδιομορφή αναλύθηκε ήδη στην παράγραφο 3.4.4).

Είναι πάντως προσμενόμενο, η ενεργός-προωστική περιοχή Sr για μία συγκεκριμένη ιδιομορφή λίκνισης, να διαφέρει μεταξύ υδροδυναμικού και αεροδυναμικού περιβάλλοντος, λόγω της μικρότερης πυκνότητας του αέρα σε σχέση με το νερό.

Η διερεύνηση που ακολουθεί έχει, κατά τη μεταβολή του Sr , ως κατευθυντήριες γραμμές να μην γίνει υπερβολικά μεγάλη η συχνότητα ταλάντωσης, ούτε το πλάτος ταλάντωσης και να μην μειωθεί υπερβολικά η ταχύτητα της επ' άπειρο ροής, αλλά να υπάρχει ένας συμβιβασμός μεταξύ των τριών.

Για την επίλυση, χρησιμοποιούνται τα ίδια χαρακτηριστικά πλέγματος όπως στην προηγούμενη παράγραφο ($\Omega_{max} = 0.24$, $\Omega_{min} = 0.0001$, $Distance_{max} = 14$) και χρονικό βήμα (σε ένα συμβιβασμό μεταξύ ακρίβειας και ταχύτητας επίλυσης) ίσο με $dt = T/20$.

4.6.1 Μήκος Κύματος $\lambda=0.6283$

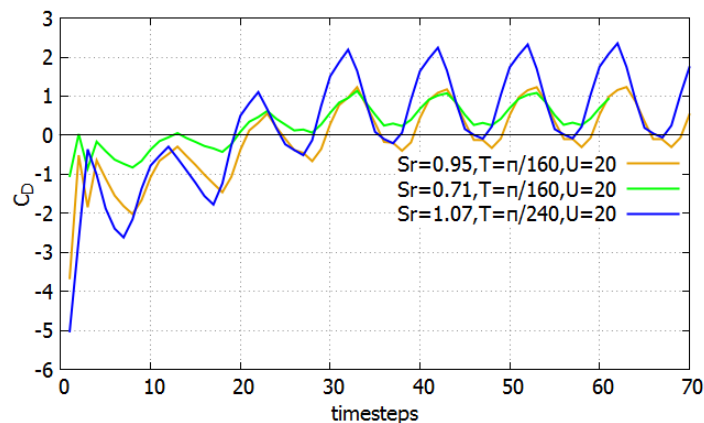
Χαρακτηριστικό γνώρισμα της ιδιομορφής λίκνισης τύπου χελιού είναι, η ότι το μήκος κύματος λίκνισης είναι μικρότερο της μονάδας. Αρχικά γίνεται λοιπόν διερεύνηση, κρατώντας την παράμετρο του μήκους κύματος $\lambda=0.6283$, όπως στην προηγούμενη παράγραφο.

Στον πίνακα 4.5 που ακολουθεί, καταγράφονται τα διάφορα σύνολα παραμέτρων που επιλέχθηκαν για τη διερεύνηση αυτή. Το μέγιστο ημι-πάχος th_{max} είναι παντού ίδιο και ίσο με 0.6, όπως και πριν.

$\lambda = 0.6283, th_{max} = 0.6$					
Περίπτωση	α	A	U_{∞}	T	Sr
1.	3	0.14	20	$\pi/160$	0.71
2.	3	0.14	15	$\pi/160$	0.95
3.	3	0.14	20	$\pi/240$	1.06
4.	3	0.14	20	$\pi/75$	0.33
5.	2.25	0.2	10	$\pi/20$	0.38
6.	2.25	0.1	10	$\pi/80$	0.51
7.	2.25	0.15	1.5	$\pi/10$	0.64
8.	2.25	0.15	7.6	$\pi/60$	0.75

Πίνακας 4.5: Παράμετροι λίκνισης για τις αναλυόμενες περιπτώσεις όπου $\lambda=0.6283$

Παρατίθενται στο σχήμα 4.32 το διάγραμμα του συντελεστή αντίστασης ως προς τον αριθμό χρονικών βημάτων (1 περίοδος=20 χρονικά βήματα), για τις περιπτώσεις 1,2,3, όπου γίνεται εμφανής η κοινή μορφή των τριών τους, αλλά και φαίνεται η επίτευξη της περιοδικότητας στην τρίτη περίοδο. Υπενθυμίζεται ότι ο C_D έχει περίοδο τη μισή από την περίοδο λίκνισης.

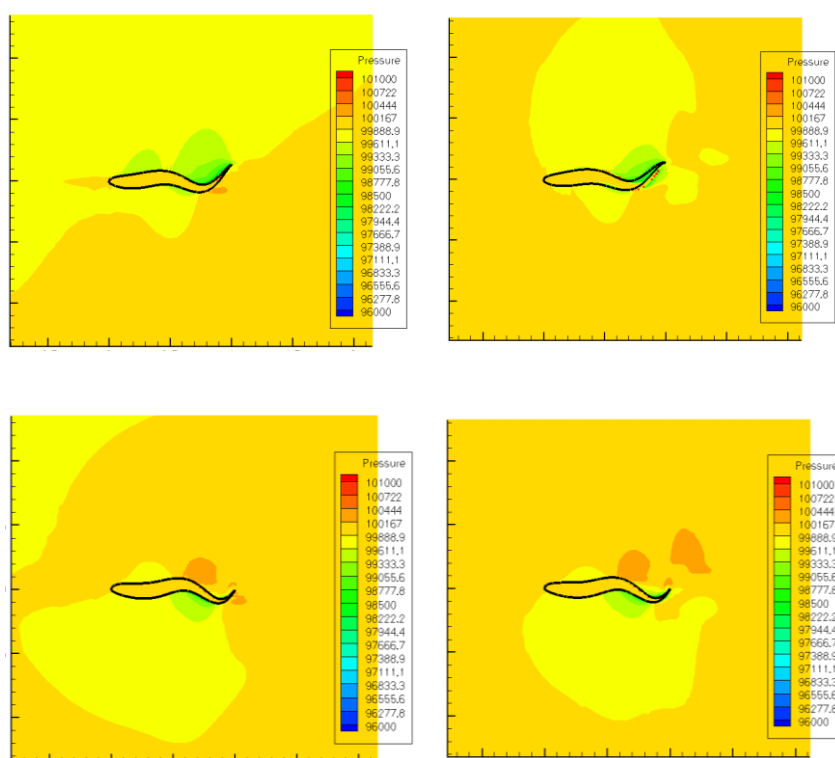


Σχήμα 4.32: Συντελεστής αντίστασης λικνιζόμενων αεροτομών μήκους κύματος $\lambda=0.6283$ ως προς τον αριθμός χρονικών βημάτων για αριθμούς Strouhal [0.71:1.07]. Η κάθε περίοδος αντιστοιχεί σε 20 χρονικά βήματα. Μέγιστο πλάτος ταλάντωσης $A=0.14$, ρυθμός αύξησης του πλάτους $\alpha=3$. Αναλυτικά οι παράμετροι στον πίνακα 4.5 (περιπτώσεις 1,2,3).

Γίνεται εμφανές ότι και στις τρεις περιπτώσεις, ενώ αρχικά υπάρχει εξ ολοκλήρου ή μερικώς παραγωγή πρόωσης ($C_{D,μεσο} < 0$), στη μόνιμη (περιοδικά) κατάσταση, η μέση δύναμη αντίστασης είναι θετική ($C_{D,μεσο} > 0$).

Ακόμα, ότι η αύξηση του St από 0.71 σε 0.95 επέφερε μερική έστω, πάντως ύπαρξη περιστασιακής πρόωσης, ενώ από 0.95 σε 1.07, αναίρεσε πάλι αυτό το φαινόμενο. Επίσης φαίνεται το πλάτος διακύμανσης του συντελεστή αντίστασης να μεγαλώνει, καθώς μεγαλώνει ο αριθμός Strouhal.

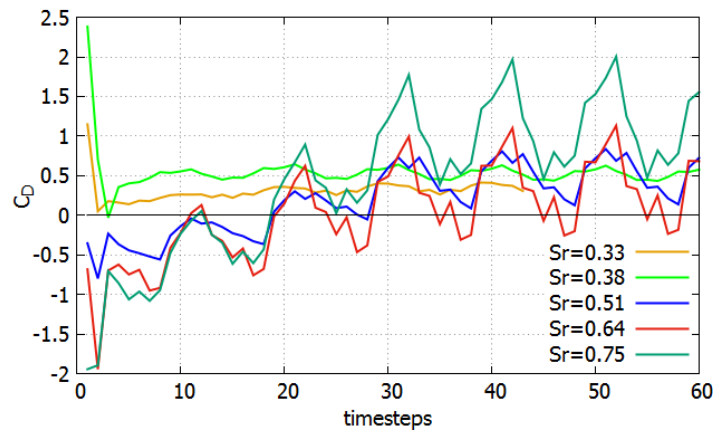
Στο σχήμα 4.33, αποτυπώνονται τα πεδία της στατικής πίεσης για την περίπτωση 1 του πίνακα 4.5, όπου γίνεται αντιπαράσταση στιγμιότυπων όπου ο C_D αποκτά μέγιστη και ελάχιστη τιμή εντός κάθε περιόδου. Σκοπός της απεικόνισης αυτής είναι να γίνουν εμφανείς οι αιτίες που προκαλούν την αναίρεση της προωστικής δραστηριότητας από την 1^η στην 3^η περίοδο.



Σχήμα 4.33: Πεδίο στατικής πίεσης στιγμιότυπων της περίπτωσης 1, του πίνακα 4.5 ($St=0.71$). **Επάνω:** ευμενέστερα από προωστική άποψη στιγμιότυπα της πρώτης (αριστερά) και της τρίτης περιόδου (δεξιά). **Κάτω:** Δυσμενέστερο στιγμιότυπο της πρώτης (αριστερά) και της τρίτης περιόδου (δεξιά).

Γίνεται στο σχήμα 4.33 εμφανές, ότι οι περιοχές υπερπίεσης δεν έχουν μεταβληθεί σημαντικά μεταξύ των περιόδων αυτών, με την εξαίρεση ότι στην ευμενή περίπτωση του 4.33 (πάνω αριστερά) υπήρχε έντονη περιοχή υποπίεσης και στην πρώτη καμπή της αεροτομής κοντά στην προσβολή. Η περιοχή υποπίεσης όμως, έχει συρρικνωθεί δραματικά και έχει αλλάξει προσανατολισμό με αποτέλεσμα, στο δυσμενές στιγμιότυπο της 3^{ης} περιόδου (κάτω αριστερά στο 4.33), η παραγόμενη δύναμη λόγω διαφοράς πιέσεων άνω και κάτω πλευράς, να μην έχει προωστική συνιστώσα.

Ερχόμενοι στις περιπτώσεις 4 με 8 του πίνακα 4.5, των οποίων ο $C_D(t)$ παρατίθεται στο σχήμα 4.34, γίνεται διακριτή μια ριζική αλλαγή της μορφής του C_D κατεβαίνοντας από $Sr=0.51$ σε $Sr=0.38$.



Σχήμα 4.34: Συντελεστής αντίστασης λικνιζόμενων αεροτομών μήκους κύματος $\lambda=0.6283$ ως προς τον αριθμό χρονικών βημάτων για αριθμούς Strouhal [0.33:0.75]. Η κάθε περίοδος αντιστοιχεί σε 20 χρονικά βήματα. Μέγιστο πλάτος ταλάντωσης $A=0.14$, ρυθμός αύξησης πλάτους $\alpha=3$. Αναλυτικά οι παράμετροι στον πίνακα 4.5 (περιπτώσεις 4,5,6,7,8).

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, φαίνεται για τη συγκεκριμένη ιδιομορφή λίκνισης ($\lambda=0.6283$, $\alpha=2:3$, $A=0.1:0.2$), να μην μπορεί να παραχθεί πρόωση για τους συνήθεις αριθμούς Strouhal σε μη-συνεκτική ροή (0.3 με 1). Όμως λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου, όπου εμφανίστηκε τμηματικά δύναμη πρόωσης για $Sr=0.006$ (με ποιοτική μορφή της μόνιμης κατάστασης παρόμοια με του $Sr=0.95$), δεν μπορεί να αποκλειστεί, να υπάρχει δυνατότητα πρόωσης σε χαμηλότερους των συνήθων αριθμούς Strouhal (πχ 0.01-0.1).

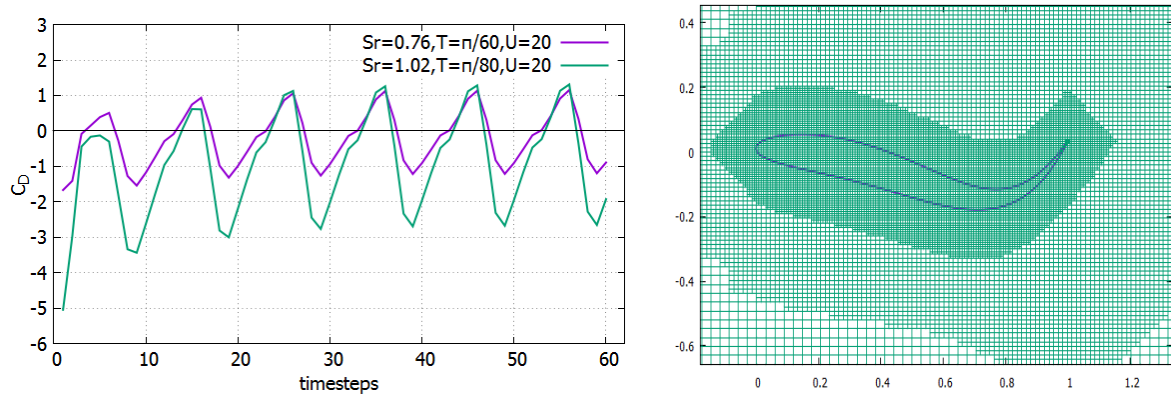
4.6.2 Μήκος Κύματος $\lambda=1.6283$

Προκειμένου να μεταβληθεί η ιδιομορφή λίκνισης και να ομοιάσει περισσότερο σε μία εύκαμπτη-ελαστική αεροτομή, επιλέγεται να αυξηθεί το μήκος κύματος κατά μία μονάδα. Έτσι επιλέγονται δύο περιπτώσεις, όπου οι αριθμοί Strouhal βρίσκονται σε συνήθεις τιμές για αεροτομές πρόνευσης-φυγοειδούς (pitch & heave). Τα σύνολα των παραμέτρων αναγράφονται στον πίνακα 4.6.

$\lambda=1.6283, th_{max} = 0.6$					
Περίπτωση	α	A	U_∞	T	Sr
1. Eel7	3	0.4	20	$\pi/60$	0.76
2. Eel4	3	0.4	20	$\pi/80$	1.02

Πίνακας 4.6: Παράμετροι λίκνισης για τις αναλυόμενες περιπτώσεις όπου $\lambda=1.6283$

Στο σχήμα 4.35 παρατίθεται ο C_D για τις δύο αυτές περιπτώσεις συναρτήσε του χρονικού βήματος, και μία άποψη ενός στιγμιότυπου της νέας αεροτομής, εμβαπτισμένης στο καρτεσιανό πλέγμα.



Σχήμα 4.35: Αριστερά: C_D λικνιζόμενων αεροτομών μήκους κύματος $\lambda=1.6283$ ως προς τον αριθμό χρονικών βημάτων για αριθμούς Strouhal 0.76 και 1.02. $T=20$ χρονικά βήματα. $A=0.4$, ρυθμός αύξησης πλάτους $\alpha=3$, $U_\infty = 20m/s$. βλ. πίνακα 4.6 (περιπτώσεις 1,2). Δεξιά: άποψη της εμβαπτισμένης αεροτομής στο καρτεσιανό πλέγμα

Στον πίνακα 4.7, καταγράφονται τα χαρακτηριστικά πρόωσης των δύο περιπτώσεων. Η μη-μηδενική τιμή του $C_{L,μεσο}$, οφείλεται το πιθανότερο στην πυκνότητα των χρονικών βημάτων, η οποία όπως φαίνεται στο σχήμα 4.35, προκαλεί «μύτες» που δεν αντιπροσωπεύουν την πραγματικότητα.

Ακόμα, υπενθυμίζεται η σχέση υπολογισμού της προωθητικής απόδοσης (3.6):

$$\eta_{προωθ} = \frac{\bar{T}U_\infty}{\bar{T}U + \bar{P}_{πλευρ}}$$

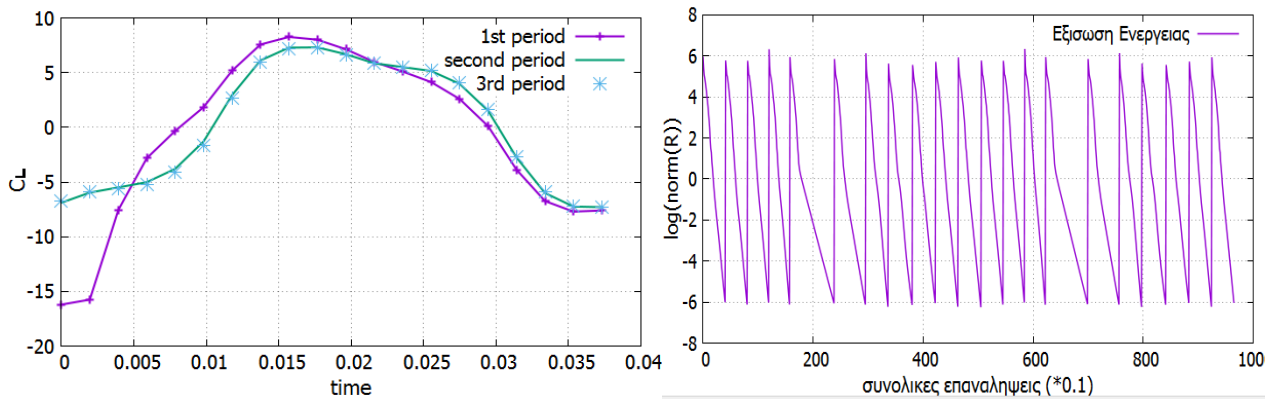
όπου για ατριβή ροή, $\bar{T} = \int_t^{t+T} [\phi(-pn_x)ds] dt = \sum_t^{t+T} \left(\frac{C_D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 S} \right)$ η μέση δύναμη πρόωσης κατά τη διάρκεια μιας περιόδου λίκνισης και $\bar{P}_{πλευρ} = \int_t^{t+T} [\phi(-pn_y V_y)ds] dt$ η μέση δαπάνη ισχύος λόγω πλευρικών κινήσεων (με το “-“ βγαίνει θετική).

Επίσης, εφόσον ο μέσος C_D είναι αρνητικός στη διάρκεια μιας περιόδου, μπορεί να γίνεται λόγος και για μέσο συντελεστή ώσης $C_{T,μ} = -C_{D,μ}$.

Περίπτωση	T	Sr	$C_{T,μεσο}$	$C_{L,μεσο}$	$\eta_{προωθ}$ (%)
1. Eel7	$\pi/60$	0.76	0.075	-0.001	48.8
2. Eel4	$\pi/80$	1.02	0.635	-0.007	72.1

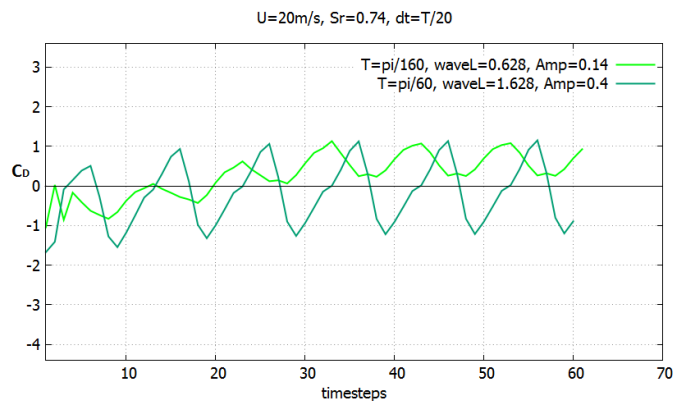
Πίνακας 4.7: Καταγραφή αποτελεσμάτων για τις περιπτώσεις 1,2 του πίνακα 4.6.

Παρατίθενται στο σχήμα 4.36, η διερεύνηση περιοδικής λύσης και το διάγραμμα σύγκλισης της νόρμας των λογαριθμικών υπολοίπων της εξίσωσης ενέργειας.



Σχήμα 4.36: Αριστερά η ανίχνευση έναρξης περιοδικής λύσης. Έναρξη περιοδικότητας στη δεύτερη περίοδο επίλυσης. Δεξιά το διάγραμμα σύγκλισης της νόρμας των λογαριθμικών υπολοίπων της εξίσωσης ενέργειας. Περίπτωση 2 του πίνακα 4.6.

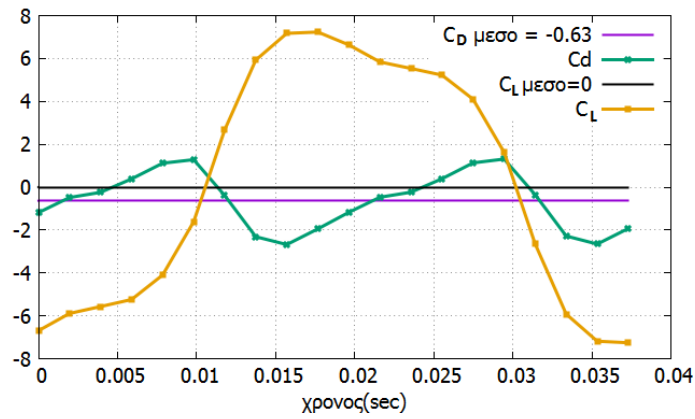
Στο σχήμα 4.37 γίνεται σύγκριση των συντελεστών αντίστασης δύο ιδιομορφών λίκνισης με παραπλήσιο αριθμό Strouhal, αλλά με διαφορετικό μήκος κύματος λίκνισης μεταξύ τους.



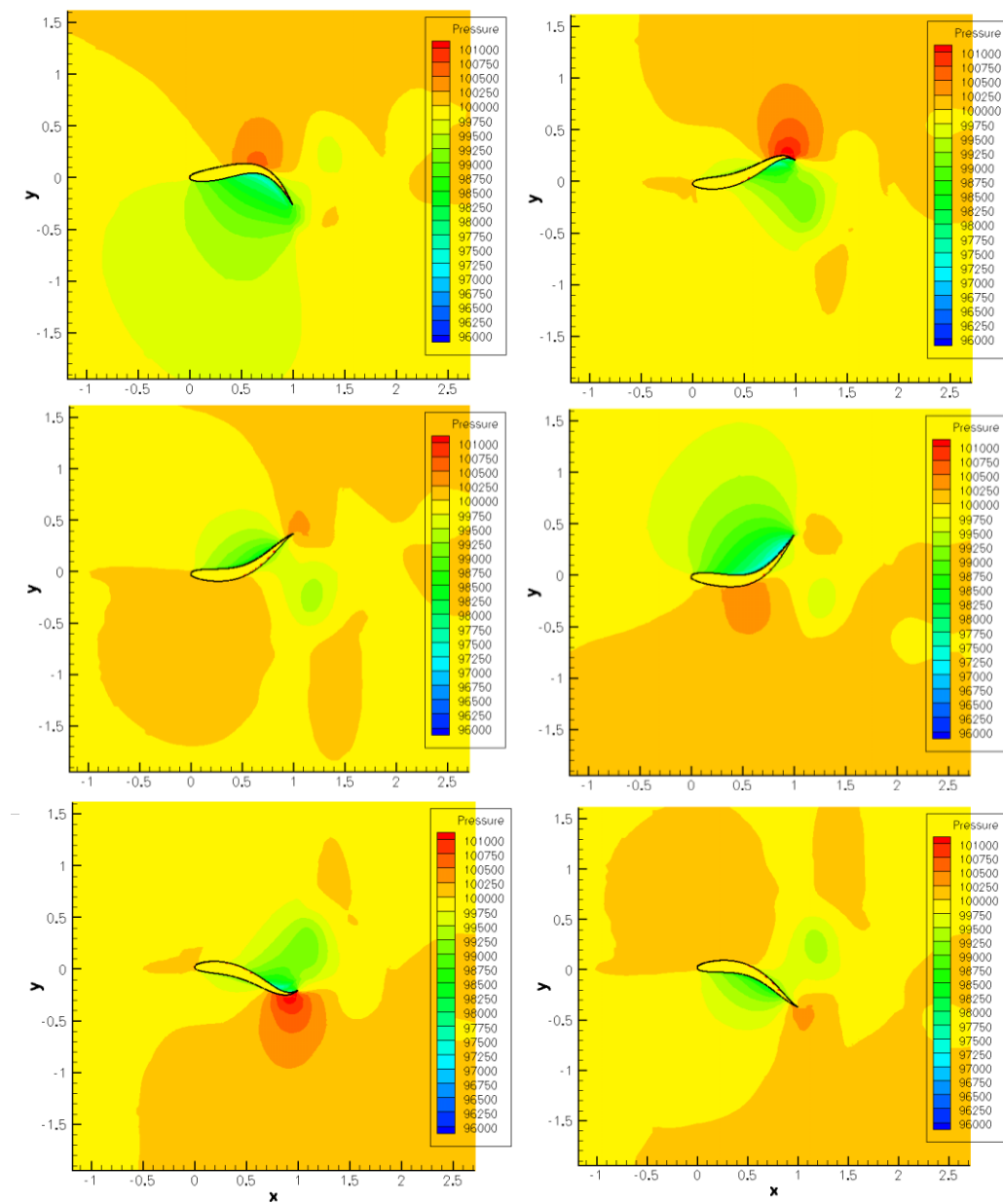
Σχήμα 4.37: Σύγκριση προωστικής συμπεριφοράς μέσω C_D , δύο περιπτώσεων παραπλήσιων Sr ($Sr \approx 0.74$), με διαφορετικά μήκη κύματος λίκνισης (περιπτώσεις 1 πίνακα 4.5 και 1 πίνακα 4.6).

Συμπεραίνεται, ότι αν και ο αριθμός Strouhal αποτελεί ένα χαρακτηριστικό μέγεθος για την προωστική ή μη συμπεριφορά μιας ιδιομορφής λίκνισης, παρ' όλα αυτά δεν έχει καθολικό χαρακτήρα, δηλαδή κοινό αντίκτυπο σε κάθε είδους ιδιομορφή.

Παρακάτω παρατίθενται στιγμιότυπα από το πεδίο ροής της περίπτωσης 2 του πίνακα 4.6, δηλαδή της περίπτωσης με τις υψηλότερες επιδόσεις πρόωσης και προωθητικής αποδοτικότητας. Στο σχήμα 4.38 χαράσσονται οι C_L , C_D , στο σχήμα 4.39 στιγμιότυπα του πεδίου στατικής πίεσης, ενώ στο σχήμα 4.40 αντίστοιχα στιγμιότυπα του πεδίου στροβιλισμού.



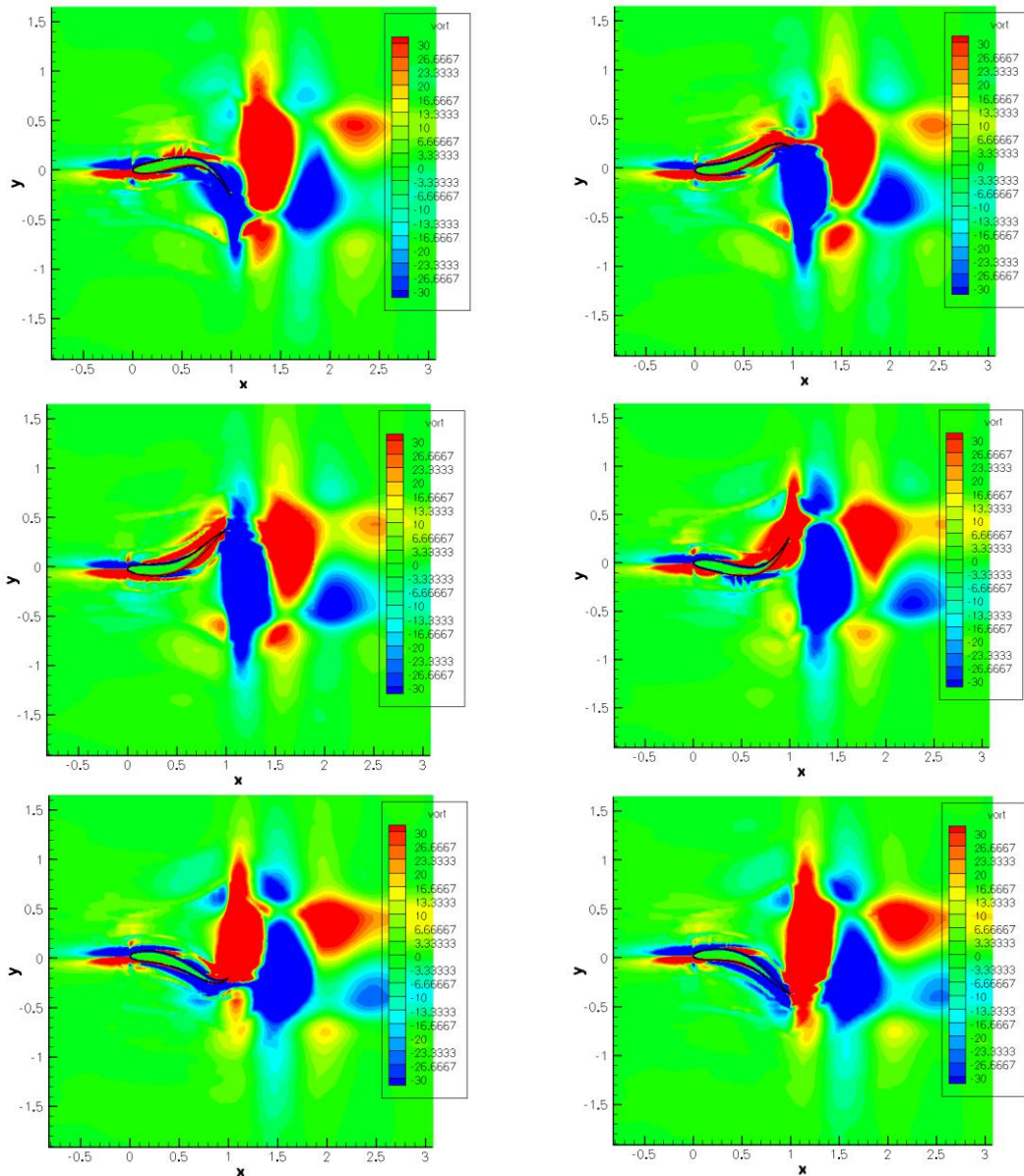
Σχήμα 4.38: Συντελεστές άνωσης και αντίστασης περιοδικής λύσης για $Sr=1.02$, $\lambda=1.6283$, $A=0.4$, $U=20\text{m/s}$.



Σχήμα 4.39: Στιγμιότυπα του πεδίου στατικής πίεσης της περίπτωσης 2 του πίνακα 4.6 ($Sr=1.02$).

Γίνεται προφανές στα παραπάνω σχήματα, ότι η κατανομή των πιέσεων πάνω στην αεροτομή διαφέρει πολύ από τη συνήθη εικόνα που θα υπήρχε αν κάθε στιγμιότυπο ήταν ένα χρονικά μόνιμο πρόβλημα (όπου θα επικρατούσε υποπίεση στην πλευρά «εφελκυσμού» και υπερπίεση στην πλευρά «θλίψης»).

Η διαφοροποίηση αυτή είναι ακριβώς που γεννά την πρόωση, διότι, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.40 όταν σε μια πλευρά της αεροτομής διαχέεται ετερόσημος του κρατούντος στροβιλισμός, προκαλείται πτώση της ταχύτητας λόγω της συνιστάμενης δέσμης των δύο αυτών δινών, με συνέπεια την αύξηση της πίεσης, σε περιοχές όπου θα έπρεπε να ισχύει το αντίθετο αν λαμβάναμε υπόψη μόνο την καμπυλότητα της γεωμετρίας.



Σχήμα 4.40: Στιγμιότυπα του πεδίου στροβιλισμού της περίπτωσης 2 του πίνακα 4.6 ($St=1.02$).

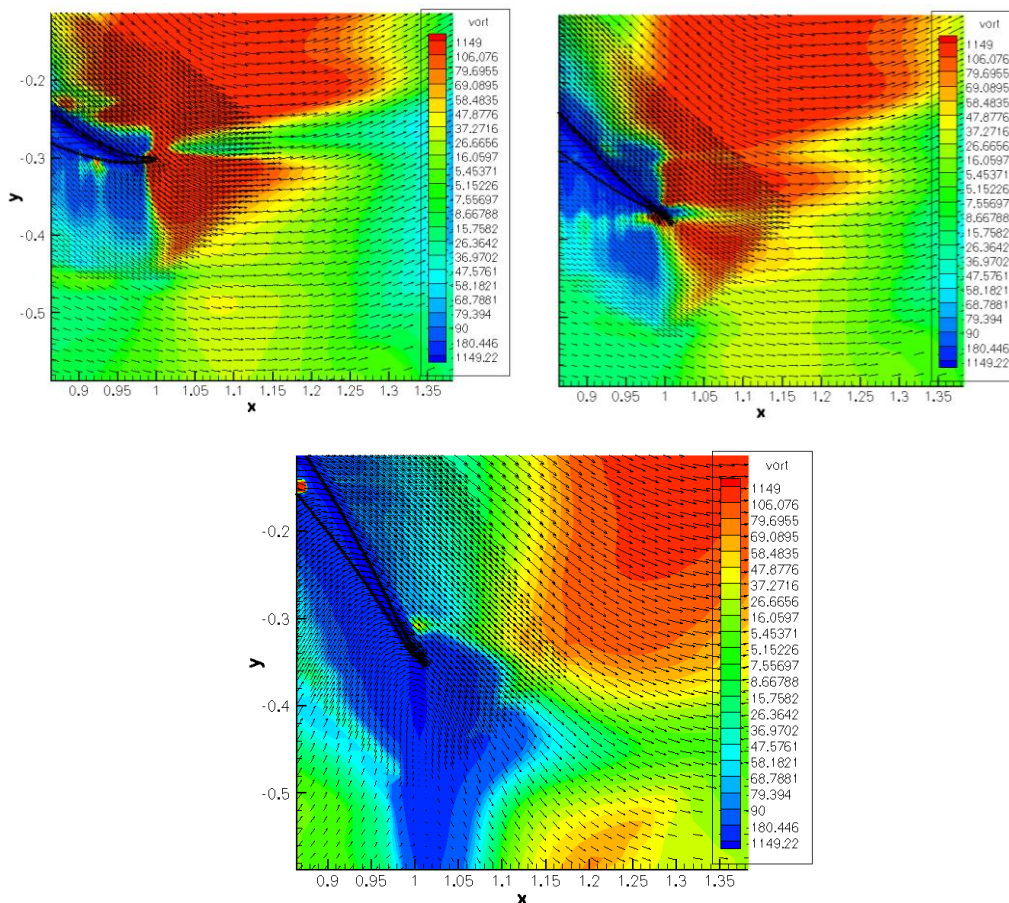
Στο σχήμα 4.40 διακρίνεται στην ακμή προσβολής, καθ' όλη τη διάρκεια της περιόδου, ένα ζεύγος δινών (πάνω ωρολογιακή και κάτω ανθωρολογιακή) οι οποίες οφείλονται στην

επιβράδυνση της ροής προ του σημείου ανακοπής. Οι στρόβιλοι αυτοί, διαδίδονται και στις πλευρές τις αεροτομής (μπλε-ωρολογιακή στην πάνω και κόκκινη-ανθωρολογιακή στην κάτω μεριά).

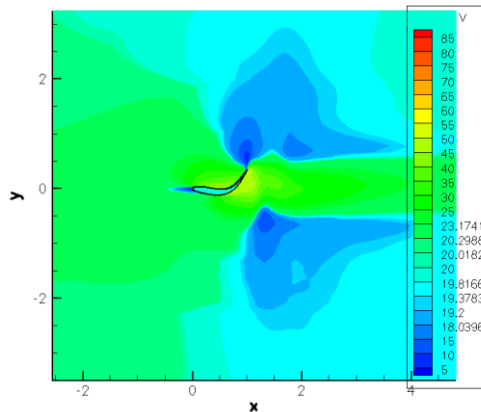
Καθώς όμως η ακμή προσβολής ταλαντώνεται, «βουτάει» εναλλάξ στη μία ή στην άλλη δίνη της ακμής προσβολής, με αποτέλεσμα να εισέρχεται ετερόσημος του επικρατούντος στροβιλισμός σε κάθε πλευρά της αεροτομής. Αυτό όπως προειπώθηκε προκαλεί πτώση της ταχύτητας τοπικά, όσο μετακινείται ο «ξένος» αυτός στροβιλισμός πάνω σε μια πλευρά της αεροτομής.

Για παράδειγμα στην πάνω μεριά όπου ο στροβιλισμός γενικά είναι ωρολογιακής φοράς, εγχύεται -με τη μετακίνηση της ακμής προσβολής- ένα υπόστρωμα στροβιλισμού ανθωρολογιακής φοράς, εφαπτομενικά στην επιφάνεια της αεροτομής, η επαλληλία των οποίων προκαλεί τοπική δέσμη ταχύτητας προς τα αριστερά – αντίστροφα στη ροή- και άρα η ταχύτητα μειώνεται και η πίεση αυξάνεται.

Μόλις παρέλθει ο «ξένος» στροβιλισμός, εκχέεται από την ακμή εκφυγής, και αλληλεπιδρώντας με τον προηγούμενο, ετερόσημο στρόβιλο που εκχύθηκε από την κάτω πλευρά της αεροτομής (σχήμα 4.41), δημιουργείται μια συνισταμένη δέσμη ταχυτήτων προς τα πίσω, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.42.



Σχήμα 4.41: Τρία διαδοχικά στιγμιότυπα του πεδίου στροβιλισμού με διανυσματική αναπαράσταση της ταχύτητας κοντά στην ακμή εκφυγής, όπου η επαλληλία δινών προκαλεί επιτάχυνση της ροής στον ομόρροο.



Σχήμα 4.42: Στιγμιότυπο του πεδίου ταχύτητας της περίπτωσης 2 του πίνακα 4.6 ($St=1.02$). Δέσμη υψηλής ταχύτητας στον ομόρροο της λικνιζόμενης αεροτομής.

Τέλος, όπως προαναφέρθηκε ήδη στην παράγραφο 4.1, από τη φύση της κυματικής εξίσωσης της λικνιζόμενης μεσογραμμής, το συνολικό μήκος τόξου της μεσογραμμής δεν είναι σταθερό προϊόντος του χρόνου αλλά μεταβάλλεται εντός δύο οριακών τιμών. Στην περίπτωση όπου $\lambda=1.6283$, η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του μήκους είναι 1.19 και 1.06 μονάδες αντίστοιχα.

4.6.3 Μήκος Κύματος $\lambda=1.6283$, Μήκος Τόξου Μέσης Γραμμής $L=1$ =σταθερό

Στο σημείο αυτό, θα εφαρμοστεί μία διαφορετική τακτική, δηλαδή θα οριστεί ένα σταθερό μήκος της αεροτομής, με αποτέλεσμα, αυτή τη φορά να κυμαίνεται η μέγιστη τετμημένη x και όχι το μήκος L . Αυτό γίνεται ως μια απόπειρα περισσότερο ρεαλιστικής θεώρησης του προβλήματος, δεδομένου ότι η περιοδική συστολή και διαστολή του μήκους μιας αεροτομής παρουσιάζει εφαρμοστικές δυσκολίες.

Ακόμα, επειδή όταν το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης είναι μικρό ($A \sim 0.1 * L$), οι διακυμάνσεις στο συνολικό μήκος είναι επίσης μικρές. Όταν όμως το μέγιστο πλάτος, και ο συντελεστής ενίσχυσης πλάτους μεγαλώνουν, όπως στις περιπτώσεις του πίνακα 4.6, τότε οι διακυμάνσεις του μήκους μεγαλώνουν ($\delta L \sim 0.1 * L$).

Επιλύεται λοιπόν η αεροτομή της περίπτωσης 2 του πίνακα 4.6, διατηρώντας όμως το μήκος τόξου της μέσης γραμμής σταθερό και ίσο με τη μονάδα.

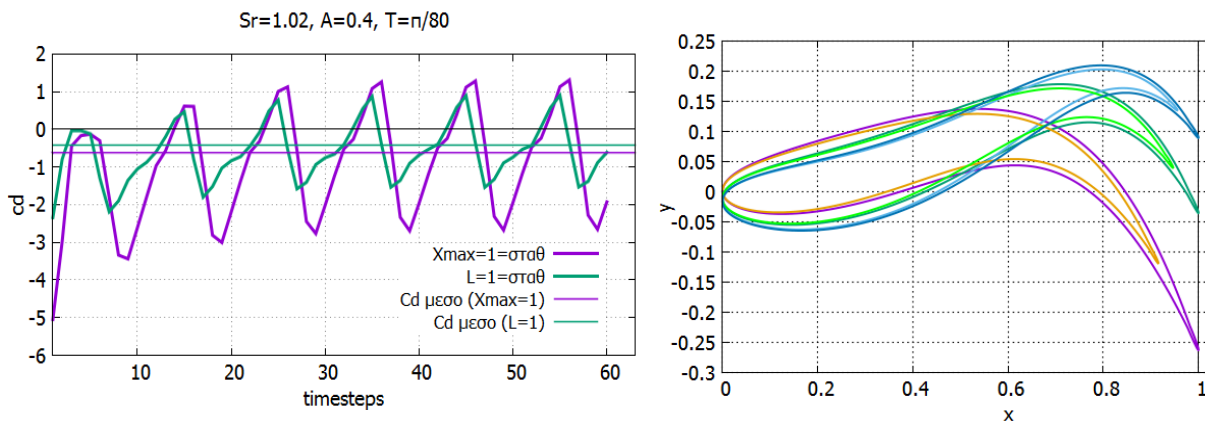
Αυτό επιτυγχάνεται με επαναληπτική διαδικασία, διότι η εξίσωση (3.7) δεν εκφράζεται αναλυτικά ως προς x . Έτσι, γίνεται έλεγχος για κάθε ένα από τα 20 στιγμιότυπα μιας περιόδου, σε ποιο x , το μήκος γίνεται μοναδιαίο. Ταυτόχρονα, αλλάζει και το μήκος χορδής το οποίο μπαίνει ως είσοδος στην κατανομή πάχους της NACA 0012 (ήταν $c = x_{max} = 1$), και γίνεται κάθε φορά ίσο με το -μεταβλητό πλέον- $x_{max}(t)$.

Στον πίνακα 4.8 αναγράφονται τα δεδομένα μήκους της μέσης γραμμής για την προηγούμενη και την νέα περίπτωση.

$\lambda=1.6283,$			
Μέγιστη τετμημένη $x_{max} = 1 = \text{σταθ}$		Μήκος μέσης γραμμής $L = 1 = \text{σταθ}$	
L_{min}	1.06	x_{min}	0.89
L_{max}	1.19	x_{max}	0.96

Πίνακας 4.8: Καταγραφή δεδομένων διακύμανσης μεγεθών, αν η μέγιστη τετμημένη διατηρείται σταθερή (παράγραφος 4.5.2) και αν το συνολικό μήκος διατηρείται σταθερό.

Παρατίθεται λοιπόν στο σχήμα 4.43 κοινό διάγραμμα των C_D για τις δύο αυτές περιπτώσεις (αριστερά) και σχηματική σύγκριση των δύο ιδιομορφών.



Σχήμα 4.43: Αριστερά: Σύγκριση C_D για ιδιομορφή σταθερού μήκους και ιδιομορφή σταθερού x_{max} . $T=20$ χρονικά βήματα. Δεξιά: Σύγκριση των ιδιομορφών σταθερού συνολικού μήκους $L=1$, και σταθερής μέγιστης τετμημένης $x_{max} = 1$, όπου οι εσωτερικές ιδιομορφές είναι οι σταθερού μήκους.

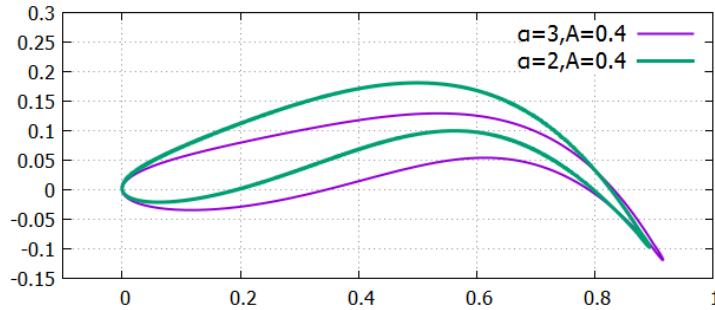
Στον πίνακα 4.9, καταγράφονται τα αποτελέσματα των μέσων αεροδυναμικών και προωστικών χαρακτηριστικών για τις δύο περιπτώσεις, δηλαδή για λίκνιση με σταθερό μήκος και με σταθερή μέγιστη τετμημένη.

$\lambda = 1.6283, Sr = 1.02, \alpha = 3, A = 0.4$						
	L	x_{max}	$C_{T,μεσο}$	$C_{T,μεσο}/L$	$C_{L,μεσο}$	$\eta_{προωθ}$ (%)
$x_{max} = 1$	[1.06:1.19]	1=σταθ	0.635	0.564	-0.007	72.1
$L = 1$	1=σταθ	[0.89:0.96]	0.42	0.42	-0.002	65.8

Πίνακας 4.9: Καταγραφή δεδομένων διακύμανσης γεωμετρικών και αεροδυναμικών μεγεθών, αν η μέγιστη τετμημένη διατηρείται σταθερή (παράγραφος 4.5.2) και αν το συνολικό μήκος διατηρείται σταθερό. $\alpha=3$, $T=\pi/80$, $A=0.4$, $th_{max} = 0.6$.

Παρατηρείται ότι η διατήρηση του μήκους της αεροτομής σταθερού, επέφερε μείωση στον συντελεστή ώσης $C_{T,μεσο}$, αλλά και στον προωθητικό βαθμό απόδοσης, διατηρώντας παρ' όλα αυτά έντονα προωστικά χαρακτηριστικά.

Ως τελευταία μελέτη πάνω στην πρόωση, επιλύεται η τελευταία αυτή ιδιομορφή, δηλ, με σταθερό μήκος $L=1$, αλλά με ρυθμό αύξησης του πλάτους ταλάντωσης $\alpha=2$ (αντί 3). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα (όπως αναλύθηκε λεπτομερώς στην παράγραφο 3.4.4), την εντονότερη συμμετοχή του εμπρόσθιου μέρους της αεροτομής στην λίκνιση. Σύγκριση των δύο ιδιομορφών παρατίθεται στο σχήμα 4.44.

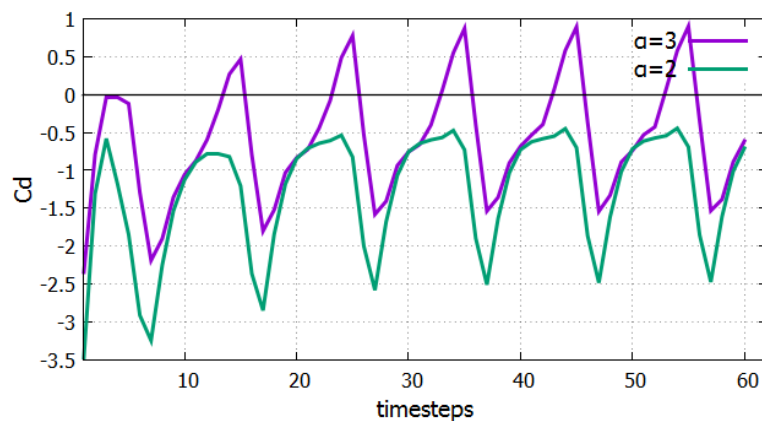


Σχήμα 4.44: Σύγκριση ιδιομορφών ίδιων παραμέτρων λίκνισης ($A=0.4$, $\lambda=1.6283$, $L=1$ =σταθ,), αλλά διαφορετικών συντελεστών ενίσχυσης πλάτους α .

Στον πίνακα 4.10 καταγράφονται τα χαρακτηριστικά των δύο ιδιομορφών, ενώ στο σχήμα 4.45 χαράσσεται συγκριτικό διάγραμμα του C_D για τις δύο αυτές ιδιομορφές. Υπενθυμίζεται ότι αρνητικός C_D , αντιστοιχεί σε θετικό (και αντίθετό του) C_T .

$\lambda = 1.6283, Sr = 1.02, T = \pi/80, A = 0.4, L=1$ =σταθ				
	x_{max}	$C_{T,μεσο}$	$C_{L,μεσο}$	$\eta_{προωθ}$ (%)
$\alpha=3$	[0.89:0.96]	0.42	-0.002	65.8
$\alpha=2$	[0.87:0.93]	1.06	-0.0006	78.9

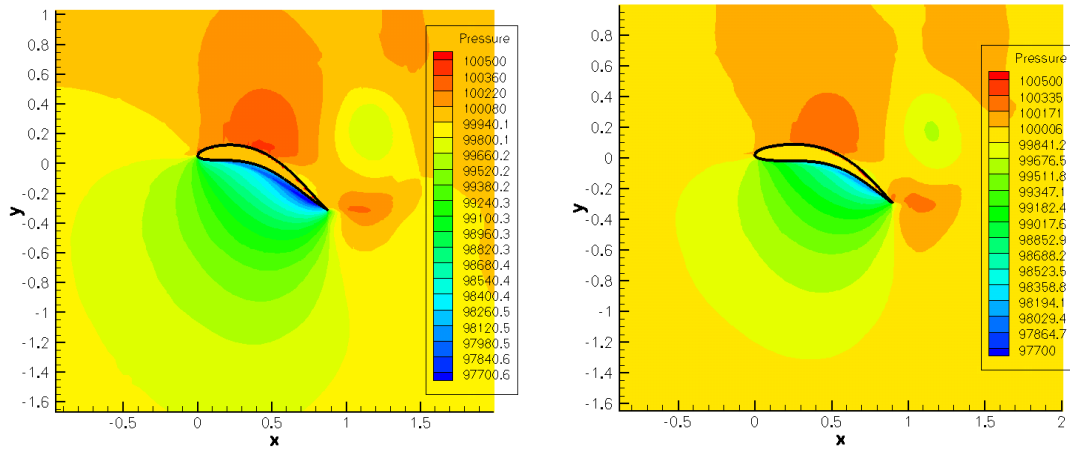
Πίνακας 4.10: Καταγραφή δεδομένων αεροδυναμικών μεγεθών για δύο λικνιζόμενες αεροτομές σταθερού μήκους $L=1$, με μόνη διαφορά τον συντ. ενίσχυσης πλάτους, α .



Σχήμα 4.45: Σύγκριση ιδιομορφών ίδιων παραμέτρων λίκνισης ($A=0.4$, $\lambda=1.6283$, $L=1$ =σταθ, $T=\pi/80$, $Sr=1.02$), αλλά διαφορετικών συντελεστών ενίσχυσης πλάτους α . Περίοδος =20 χρ. βήματα.

Παρατηρείται δηλαδή ότι αυξήθηκε πολύ, τόσο ο προωθητικός βαθμός απόδοσης, όσο και ο μέσος συντελεστής ώσης $C_{T,μεσο}$, μέσω μείωσης του ρυθμού αύξησης του πλάτους ταλάντωσης, από την προσβολή προς την εκφυγή. Επίσης, ότι καθ' όλη τη διάρκεια της περιόδου λίκνισης, υπάρχει διαρκής παραγωγή πρόωσης, δηλαδή δεν υπάρχουν πλέον θετικά

τιμήματα του C_D . Στο σχήμα 4.46 αποτυπώνονται τα πεδία πίεσης για τις δύο αυτές περιπτώσεις, για μία χρονική στιγμή στην οποία και οι δύο ιδιομορφές παράγουν πρόωση.



Σχήμα 4.46: Σύγκριση πεδίων πίεσης ιδιομορφών ίδιων παραμέτρων λίκνισης ($A=0.4$, $\lambda=1.6283$, $L=1$ =σταθ., $T=\pi/80$). **Αριστερά:** $\alpha=2$, **Δεξιά:** $\alpha=3$. Περίοδος =20 χρ. βήματα.

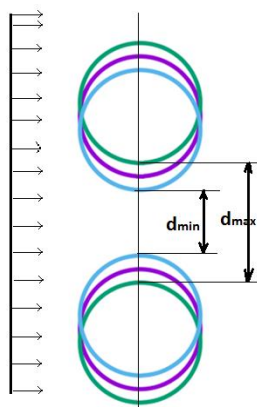
Γίνεται εμφανές από το σχήμα 4.46, ότι με την μείωση του συντελεστή α (αριστερά), τόσο η ένταση της διαφοράς υπερπίεσης-υποπίεσης, όσο και ο προσανατολισμός των περιοχών αυτών εκατέρωθεν της αεροτομής, συμβάλλουν στη δημιουργία μεγαλύτερης δύναμης πρόωσης.

5 Επίλυση Διηχητικής Ροής περίξ δύο Ταλαντούμενων Κυλίνδρων με Διάκεντρο Κάθετη στη Ροή

5.1 Εισαγωγικά Σχόλια

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει διδιάστατη υπολογιστική διερεύνηση της περίπτωσης όπου δύο κύλινδροι τοποθετημένοι εν παραλλήλω, υπόκεινται σε επ' άπειρο ροή αέρα, διεύθυνσης κάθετης στη διάκεντρο των κυλίνδρων, μέσω της μεθόδου των τεμνομένων κυψελών.

Επιλύεται αρχικά το χρονικά μόνιμο διδιάστατο πρόβλημα, και στη συνέχεια το μη-μόνιμο, όπου οι κύλινδροι τίθενται σε απλή αρμονική ταλάντωση προσέγγισης – απομάκρυνσης, κάθετα στη διεύθυνση της ροής, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1. Το χρονικά μη-μόνιμο πρόβλημα επιλύεται για τρεις τιμές του λόγου ελαχίστου προς μεγίστου εύρους διόδου $\delta = \frac{d_{min}}{d_{max}}$.

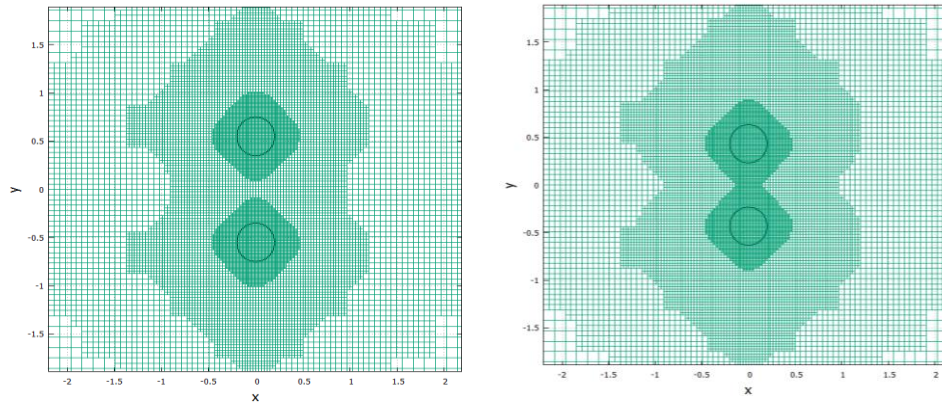


Σχήμα 5.1: Στιγμιότυπική αναπαράσταση της απλής αρμονικής ταλάντωσης δύο κυλίνδρων, οι οποίοι εκτελούν κίνηση προσέγγισης – απομάκρυνσης επί της διακέντρου των.

Η ροή, λόγω της στένωσης, τόσο στο χρονικά μόνιμο όσο και στο μη-μόνιμο πρόβλημα είναι διηχητική, δηλαδή υπάρχουν τοπικά περιοχές όπου ο αριθμός Mach γίνεται μεγαλύτερος της μονάδας, αλλά για την επ' άπειρο ροή ισχύει: $M_{\infty} \cong 0.3$.

Κατ' αρχάς, το πρόβλημα αυτό ενδείκνυται ως διερευνητικό θέμα πάνω στο λογισμικό τεμνομένων κυψελών για τον εξής λόγο:

Κάθε στερεό σώμα που εμβαπτίζεται μέσα στο καρτεσιανό πλέγμα, έχει μια «ακτίνα επιρροής» εντός της οποίας το πλέγμα προσαρμόζεται πάνω σε – και γύρω από το στερεό, όπως περιγράφηκε στην παράγραφο 2.1. Έτσι, καθώς οι δύο κύλινδροι πλησιάζουν και απομακρύνονται περιοδικώς, συμβαίνει μία περιοδική εμπλοκή και απεμπλοκή των πλεγματικών περιοχών επιρροής του κάθε κυλίνδρου, όπως αποτυπώνεται στο σχήμα 5.2.



Σχήμα 5.2: Εμπλοκή – απεμπλοκή των πλεγματικών περιοχών επιρροής των δύο κυλίνδρων καθώς αυτοί προσεγγίζονται – απομακρύνονται.

Κρίνεται σημαντικό λοιπόν, το να διερευνηθεί η ικανότητα πρόλεξης ροής του λογισμικού τεμνομένων κυψελών, σε περιπτώσεις σαν την προκειμένη, όπου η μορφή του πλέγματος γύρω από ένα σώμα δεν επηρεάζεται μόνο από τις εφ' άπαξ επιλογές του χρήστη στην αρχή της επίλυσης, αλλά σημειώνονται περαιτέρω μεταβολές λόγω της σχετικής κίνησης των στερεών σωμάτων.

Επιπλέον, η τοπική υπερηχητικότητα της ροής, είναι ένας ακόμα παράγοντας που καθιστά το πρόβλημα αυτό μία ενδιαφέρουσα διερευνητική μελέτη πάνω στην ικανότητα πρόλεξης ροών του λογισμικού τεμνομένων κυψελών.

Όσον αφορά την επίλυση, αυτή λαμβάνει χώρα με χωρική και χρονική - στο μη-μόνιμο πρόβλημα - διακριτοποίηση ακρίβειας δεύτερης τάξης. Ως κριτήριο σύγκλισης τίθεται το επιτρεπόμενο ανώφλι της νόρμας των υπολοίπων των εξισώσεων κατάστασης στο ποσό 10^{-6}

Σημειώνεται ότι εφόσον το πρόβλημα τίθεται στις δύο διαστάσεις, οι κύλινδροι εκφυλίζονται σε κύκλους, οι οποίοι περιγράφουν τη διατομή των κυλίνδρων. Παρ' όλα αυτά, θα αναφέρονται ως κύλινδροι ή διατομές κυλίνδρων, για λόγους φυσικής σημασίας.

Αρχικά μελετάται το χρονικά μόνιμο πρόβλημα, όπου δηλαδή οι κύλινδροι είναι ακίνητοι, και στη συνέχεια μελετάται η περίπτωση όπου αυτοί κινούνται αρμονικά (ημιτονοειδώς) κάθετα στη διεύθυνση της ροής, για διάφορους λόγους δ , ελαχίστου προς μεγίστου εύρους της διόδου που σχηματίζεται ανάμεσά τους.

Η γεωμετρία των κυλίνδρων, παράγεται σε πολικές συντεταγμένες, με γωνιακή ισοκατανομή. Εφεξής, τα x_m, y_m θα αναφέρονται στη διατομή ενός ιδεατού κυλίνδρου, ακτίνας r και κέντρου $(0,0)$, δηλαδή: $(x_m, y_m) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.

5.2 Χρονικά Μόνιμο Πρόβλημα

Προκειμένου να προκύψουν οι δύο ζητούμενοι κύλινδροι, διακέντρου Δ , ίσης ακτίνας r , οι οποίοι να ορίζουν ανάμεσά τους διάδο ελάχιστης απόστασης d_{min} , προστίθεται και αφαιρείται (για τον άνω και κάτω κύλινδρο αντίστοιχα) από την τεταγμένη του πρότυπου κυλίνδρου, το ήμισυ της επιθυμητής διακέντρου, το οποίο σχετίζεται με το πλάτος της σχηματιζόμενης διόδου ως εξής: $\Delta = d_{min} + 2r$.

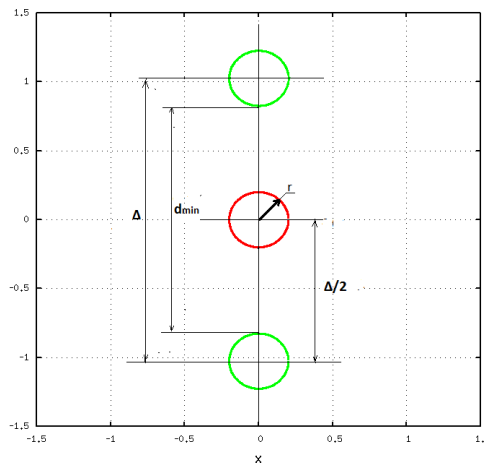
Στο σχήμα 5.3, απεικονίζεται στο κέντρο ο αρχικός κύλινδρος, και επιδεικνύονται γεωμετρικά οι σχετικές αποστάσεις.

Συνεπώς οι ζητούμενοι κύλινδροι είναι:

$$\left. \begin{aligned} y_{up} &= y_m + \left(r + \frac{d_{min}}{2} \right) \\ &(5.1) \\ y_{down} &= y_m - \left(r + \frac{d_{min}}{2} \right) \\ x_{up} &= x_{down} = x_m \end{aligned} \right\} (5.2)$$

Η διακριτοποίηση των κυλίνδρων γίνεται με ισαπέχοντες περιμετρικά κόμβους:

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{360} \text{ rad} \quad , \theta = [0: 2\pi]$$



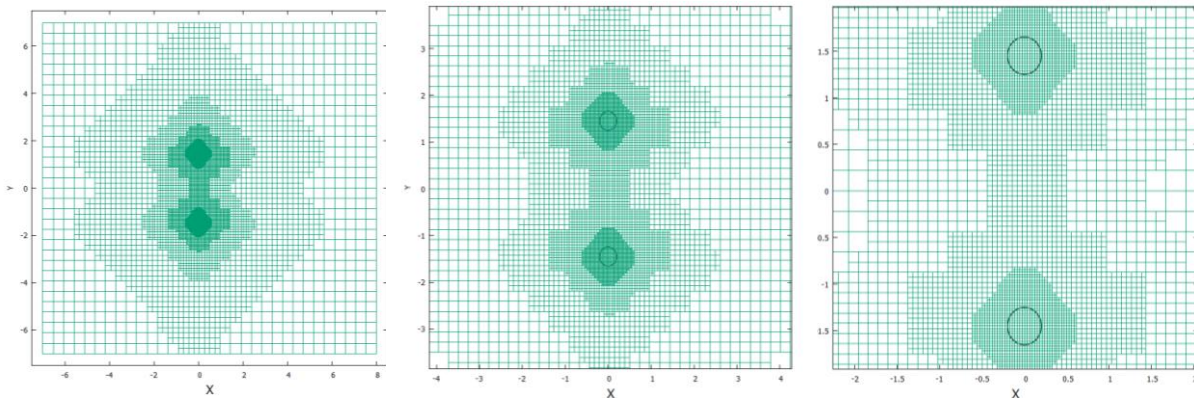
Σχήμα 5.3: Γεωμετρικά μεγέθη κυλίνδρων σε πλευρική διάταξη.

Στον πίνακα 5.1, περιέχονται τα βασικά χαρακτηριστικά των κυλίνδρων και της επ' άπειρο ροής:

Γεωμετρία		Επ' άπειρο ροή	
Ακτίνα r	Πλάτος διόδου d_{min}	Γωνία	Αριθμός Mach
0.2 m	0.8 m	0°	0.294

Πίνακας 5.1: Χαρακτηριστικά γεωμετρίας και άπειρης ροής χρονικά μόνιμου προβλήματος, πλευρικά διατεταγμένων κυλίνδρων.

Στο σχήμα 5.4, φαίνεται το υπολογιστικό χωρίο με τους κυλίνδρους εμβαπτισμένους σε ένα για εποπτικούς λόγους «αραιό», καρτεσιανό πλέγμα. Το χρησιμοποιούμενο υπολογιστικό χωρίο είναι διαστάσεων 15x14 κατά x και κατά y αντίστοιχα.



Σχήμα 5.4: Απόψεις του πλεγματοποιημένου χωρίου, με σταδιακή εστίαση στα στερεά όρια. Συνολικός αριθμός κυψελών ≈ 7000 .

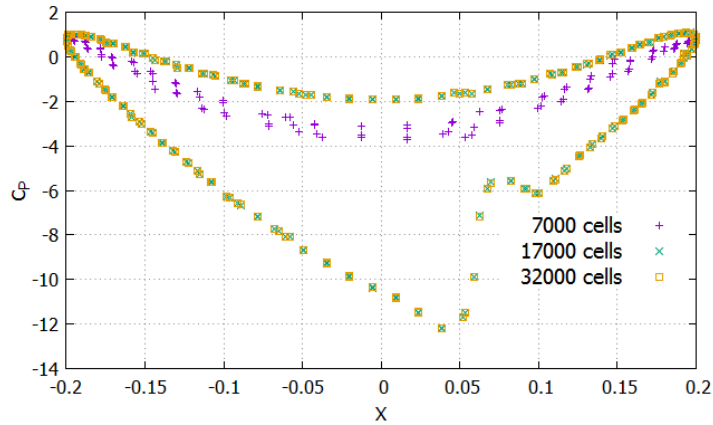
Κατ' αρχάς, πραγματοποιείται διερεύνηση ανεξαρτησίας της λύσης από την πυκνότητα του πλέγματος. Για το σκοπό αυτόν, παράγεται αρχικά ένα πλέγμα μικρής σχετικά πυκνότητας.

Ως κριτήριο σύγκρισης των αποτελεσμάτων, χρησιμοποιείται η κατανομή του συντελεστή πίεσης επί των κυλίνδρων. Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν για πλέγματα περί τις 7000, 17000, και 32000 κυψέλες. Εφαρμόστηκε χωρική διακριτοποίηση ακρίβειας δεύτερης τάξης.

Στο σχήμα 5.5, φαίνονται οι κατανομές των συντελεστών πίεσης και των δύο κυλίνδρων, όπου λόγω συμμετρίας, η κατανομή πίεσης της άνω πλευράς του άνω κυλίνδρου, συμπίπτει με την κατανομή πίεσης της κάτω πλευράς του κάτω κυλίνδρου, ενώ στον λαιμό, λόγω της επιτάχυνσης της ροής, δημιουργείται μεγάλη υποπίεση, η οποία επικρατεί στην κάτω πλευρά του άνω κυλίνδρου αλλά και στην άνω πλευρά του κάτω κυλίνδρου.

Ο συντελεστής πίεσης σε κάθε σημείο, υπενθυμίζεται ότι ορίζεται ως:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad (5.2)$$



Σχήμα 5.5: Ανίχνευση ανεξαρτησίας πλέγματος, του χρονικά μόνιμου προβλήματος δύο πλευρικών κυλίνδρων σε επ' άπειρο ροή, μέσω σύγκρισης των κατανομών του συντελεστή πίεσης

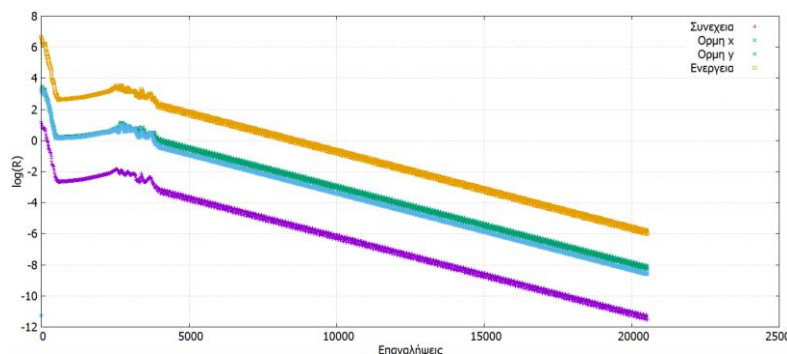
Παρατηρείται πως για πλέγμα περίπου 17000 κυψελών επιτυγχάνεται ανεξάρτητη λύση, εφόσον η κατανομή του συντελεστή πίεσης στο πλέγμα αυτό συμπίπτει με το σχεδόν διπλάσιου αριθμού κυψελών πλέγμα. Συνεπώς θα επιλεγεί το πλέγμα αυτό για την επίλυση, με χαρακτηριστικά τα εξής: μέγιστο εμβαδό κυψέλης : $\Omega_{max} = 0.26$, ελάχιστο εμβαδό κυψέλης $\Omega_{min} = 0.0006$, ενώ η μέγιστη απόσταση μεταξύ κυψελών μεγίστου και ελαχίστου εμβαδού ορίστηκε ίση με $Distance_{max} = 13$.

Από το παραπάνω γράφημα, συμπεραίνεται πως στον λαιμό μεταξύ των δύο κυλίνδρων δημιουργείται κρουστικό κύμα, κάτι το οποίο φαίνεται από την απότομη πτώση του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της πλευράς υποπίεσης, λόγω διηχητικής ροής. Επίσης ένδειξη της ραγδαίας επιτάχυνσης της ροής είναι οι υπερβολικά χαμηλές τιμές του συντελεστή πίεσης στην πλευρά υποπίεσης, δηλαδή στον λαιμό.

Παρατίθεται έπειτα από τα προηγούμενα, στο σχήμα 5.6, η πορεία σύγκλισης των εξισώσεων συνέχειας, ορμής και ενέργειας, με τις νόρμες των υπολοίπων σε λογαριθμική κλίμακα. Ως κριτήριο σύγκλισης χρησιμοποιήθηκε το:

$$\min(\log\|R_i\|) \leq 10^{-6}$$

όπου $\|R_i\|$ οι νόρμες των υπολοίπων των 4 εξισώσεων κατάστασης.



Σχήμα 5.6: Διάγραμμα σύγκλισης των εξισώσεων ροής, για το χρονικά μόνιμο πρόβλημα ροής γύρω από δύο παράλληλους μεταξύ τους κυλίνδρους, κάθετα στη ροή.

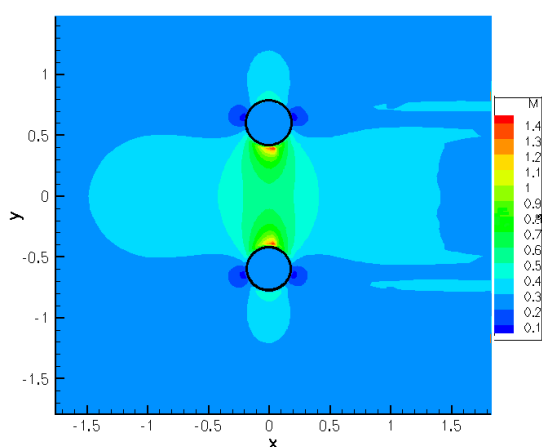
Οι τιμές των συντελεστών άωσης των δύο κυλίνδρων είναι ίσου μέτρου και αντιθέτου προσήμου, ενώ οι συντελεστές αντίστασης είναι ομόσημοι. Παρατίθενται οι τιμές τους:

$$C_{L,down} = -C_{L,up} = 2.0836 \text{ και } C_{D,down} = C_{D,up} = -0.0121$$

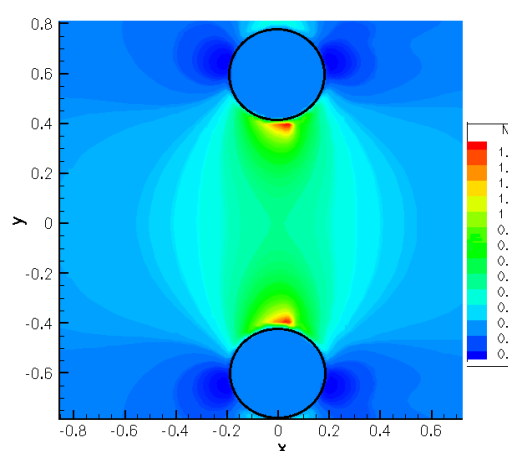
όπου οι αεροδυναμικοί συντελεστές, υπενθυμίζεται ότι ορίζονται ως:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho S U_\infty^2}, \quad C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho S U_\infty^2} \quad (5.3)$$

Στα σχήματα 5.7, και 5.8, παρουσιάζεται το πεδίο του αριθμού Mach γύρω από τους δύο κυλίνδρους.



Σχήμα 5.7: Πεδίο του αριθμού Mach περίξ πλευρικά διατεταγμένων κυλίνδρων σε επ' άπειρο ροή αέρα $U=100\text{m/s}$. Διακρίνεται η επιτάχυνση της ροής κατάντι της διόδου.



Σχήμα 5.8: Πεδίο του αριθμού Mach περίξ πλευρικά διατεταγμένων κυλίνδρων σε επ' άπειρο ροή αέρα $U=100\text{m/s}$. Εστίαση στη σχηματιζόμενη διάδο.

Από τα σχήματα 5.7, 5.8, μπορούν να εξηγηθούν και οι τιμές των αεροδυναμικών συντελεστών. Κατ' αρχάς, ο αρνητικός C_L του επάνω, και ο θετικός C_L του κάτω, οι οποίοι δημιουργούν δύναμη έλξης μεταξύ των κυλίνδρων, οφείλεται στο ότι λόγω της επιτάχυνσης της ροής και της ταυτόχρονης πτώσης της πίεσης στη μεταξύ τους διάδο, η πλευρά υποπίεσης του καθενός είναι αυτή που έγκειται στη διάδο, και άρα η δύναμη που προκαλείται είναι ελκτική, με το πεδίο του αριθμού Mach, να μοιάζει με αυτό των μαγνητικών γραμμών ανάμεσα σε αντίθετους μαγνητικούς πόλους.

Παρατηρείται ακόμα στο σχήμα 5.8, ότι εμφάνιση υπερηχητικών ταχυτήτων, δεν οφείλεται αποκλειστικά στη στένωση της διόδου μεταξύ των κυλίνδρων, αφού δεν επικρατεί διηχητική ταχύτητα σε ολόκληρη τη διατομή λαιμού. Η στένωση, επιταχύνει όμως σημαντικά τη ροή, με αποτέλεσμα, η ροή επί των κυλίνδρων, όταν περνά στη φάση της επιτάχυνσης (κατάντι της διακέντρου των δύο κυλίνδρων), να προβεί τοπικά σε υπερηχητικές καταστάσεις.

Όσον αφορά το αρνητικό πρόσημο του συντελεστή αντίστασης C_D , ($C_{D,down} = C_{D,up} = -0.0121$) οφείλεται στο ότι η διάδος μεταξύ των κυλίνδρων συμπεριφέρεται, τρόπον τινά, ως ένα συγκλίνον-αποκλίνον ακροφύσιο (παρ' ότι εδώ πρόκειται για εξωτερική αεροδυναμική).

Έτσι, όπως φαίνεται και από το σχήμα 5.8, η ροή επιταχύνεται εντός της διόδου, δημιουργώντας κατάντι των κυλίνδρων μια πιο εκτεταμένη περιοχή υψηλών Ma (περιοχές με $Ma=0.4\div 0.5$), σε σχέση με ανάντι.

5.3 Απλή Αρμονική Ταλάντωση με $\delta=0.3/0.7$

Προκειμένου να αναπαρασταθεί μαθηματικά η κίνηση των κυλίνδρων, πρέπει να προστεθεί ένας χρονικός ταλαντωτικός όρος στην τεταγμένη y της εξίσωσης (5.1) (αφού κατά x δεν υπάρχει κίνηση), ώστε αυτοί περιοδικά να απομακρύνονται και να προσεγγίζονται, μέχρις κάποιων επιθυμητών ορίων. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} y_{up} &= y_m + \left(r + \frac{d_{min}}{2} \right) + \alpha_1(t) \\ y_{down} &= y_m - \left(r + \frac{d_{min}}{2} \right) + \alpha_2(t) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Οι χρονικοί όροι πρέπει να βρίσκονται μεταξύ τους σε διαφορά φάσης π , ώστε όταν ο ένας προκαλεί αύξηση της τεταγμένης, ο άλλος να προκαλεί μείωση και αντίστροφα, ώστε να επιτυγχάνεται η επιθυμητή απομάκρυνση και προσέγγιση.

Ως προς το πλάτος ταλάντωσης, επιλέγεται να είναι ίσο με την ακτίνα του κυλίνδρου, δηλαδή να διανύεται απόσταση κορυφής με κορυφή (peak to peak), ίση με $2r$.

Άρα οι χρονικοί όροι, σύμφωνα με τα παραπάνω να είναι:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= r \sin(\omega t) + r \\ \alpha_2(t) &= r \sin(\omega t + \pi) - r \end{aligned} \quad (5.5)$$

όπου η προσθαφαίρεση της ακτίνας στον $\alpha_1(t)$, και $\alpha_2(t)$ κατά σειρά, έγινε ώστε να μετατοπιστεί το σημείο ισοροπίας κάθε κυλίνδρου κατά μία ακτίνα έκαστο από τη θέση ελαχίστης απόστασης όπου βρίσκονταν, ειδάλλως θα συνέπιπταν σε κάποιες χρονικές στιγμές.

Άρα η τελική μαθηματική έκφραση των ταλαντούμενων με ημιτονοειδή ταχύτητα, κυλίνδρων, με ελάχιστο και μέγιστο άνοιγμα της ενδιάμεσης διόδου ίσο με d_{min} , και $2r+d_{min}$, αντίστοιχα, είναι:

$$\left. \begin{aligned} y_{up} &= y_m + \left(2r + \frac{d_{min}}{2} \right) + r \sin(\omega t) \\ y_{down} &= y_m - \left(2r + \frac{d_{min}}{2} \right) + r \sin(\omega t + \pi) \\ x_{up} &= x_{down} = x_m \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Παραγωγίζοντας την (5.6) θα προκύψουν οι ταχύτητες των δύο κυλίνδρων, όπου υπενθυμίζεται ότι δεν υπάρχει οριζόντια κίνηση, συνεπώς η οριζόντια ταχύτητα είναι μηδέν. Ακόμα, ο αρχικός κύλινδρος (x_m, y_m) ορίστηκε ως ακίνητος. Συνεπώς από την παραγωγή προκύπτουν:

$$\left. \begin{aligned} V_{up} &= \omega r \cos(\omega t) \\ V_{down} &= \omega r \cos(\omega t + \pi) \\ U_{up} &= U_{down} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Συνεπώς ορίζοντας την επιθυμητή ελάχιστη απόσταση της διόδου, την κυκλική συχνότητα ταλάντωσης ω , και την ακτίνα των κυλίνδρων r , προκύπτει η επιθυμητή κίνηση.

Παρατίθενται στον πίνακα 5.2 τα επιλεγόμενα χαρακτηριστικά κίνησης της γεωμετρίας αλλά και της επ' άπειρο ροής.

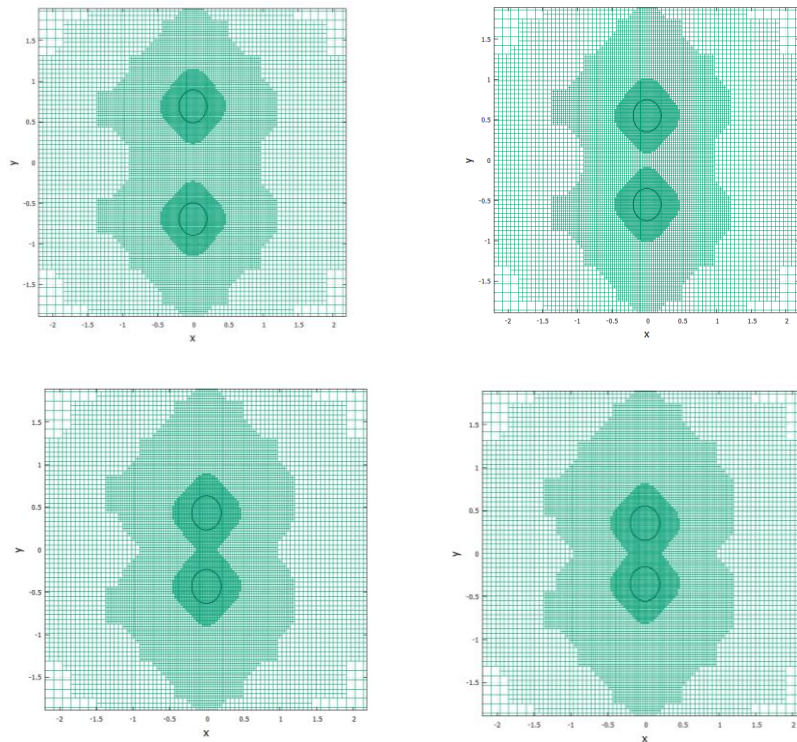
Γεωμετρία-Κίνηση				Επ' άπειρο Ροή	
Ακτίνα r	Λόγος $\delta = d_{min}/d_{max}$	Γωνιακή συχνότητα ω	Πλάτος ταλάντωσης A	Γωνία	Αριθμός Mach
0.2 m	0.3 /0.7	10 rad/sec	0.2 m	0°	0.294

Πίνακας 5.2: Χαρακτηριστικά γεωμετρίας και άπειρης ροής προβλήματος, πλευρικά διατεταγμένων κυλίνδρων, οι οποίοι εκτελούν αρμονική κίνηση προσέγγισης-απομάκρυνσης

Ως προς τη χωρική διακριτοποίηση, εκμεταλλευόμαστε τα συμπεράσματα που προέκυψαν από το χρονικά μόνιμο πρόβλημα. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται πλέγμα με μέγιστο και ελάχιστο εμβαδόν κυψέλης $\Omega_{max} = 0.26$ και $\Omega_{min} = 0.0006$ αντίστοιχα, ενώ μέγιστη απόσταση μεταξύ τους ορίστηκε $Distance_{max} = 17$. Ο συνολικός αριθμός κυψελών κυμαίνεται περί τις 23000 κυψέλες.

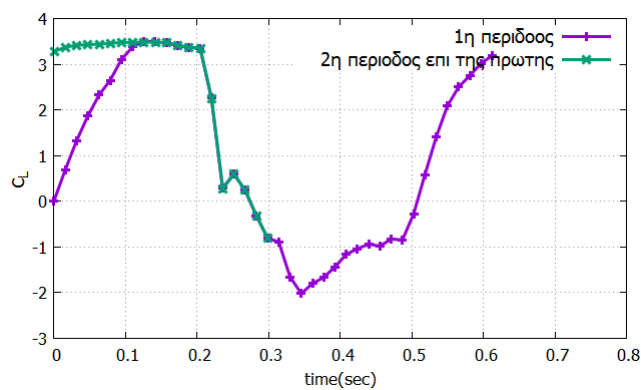
Ως προς τη χρονική διακριτοποίηση, επιλέγονται 40 χρονικά βήματα ανά περίοδο ταλάντωσης, αριθμός ικανός να προσομοιώσει το συνεχές της κίνησης.

Στο σχήμα 5.9 φαίνεται η συνεχής ανίχνευση των στερεών σωμάτων και η προσαρμογή του πλέγματος γύρω από αυτά, κατά τη διάρκεια της κίνησής τους, σε τέσσερα χαρακτηριστικά στιγμιότυπα.



Σχήμα 5.9: Ανίχνευση των στερεών σωμάτων και προσαρμογή του πλέγματος στην κίνηση των.

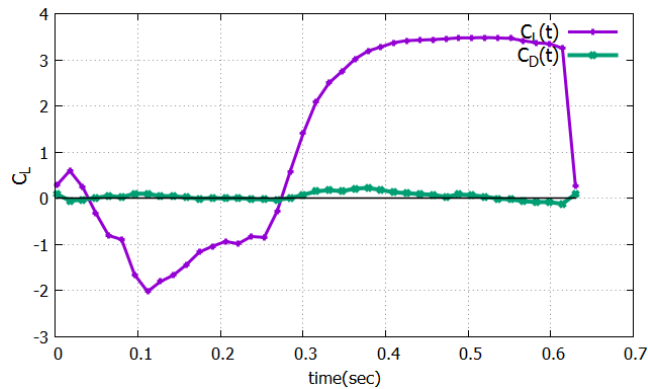
Όσον αφορά τον χρόνο επίτευξης περιοδικής λύσης, παρατίθεται στο σχήμα 5.10 το διάγραμμα του συντελεστή άνωσης (του άνω κυλίνδρου) συναρτήσει του χρόνου. Στο σχήμα αυτό γίνεται επίσης υπέρθεση των τιμών του συντελεστή άνωσης που προέκυψαν από την πρώτη και δεύτερη περίοδο επίλυσης, από όπου διακρίνεται η έναρξη της περιοδικότητας της λύσης στο 35% περίπου της περιόδου.



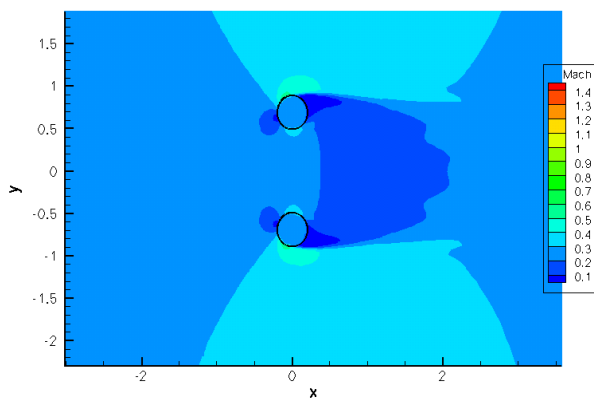
Σχήμα 5.10: Συντελεστής άνωσης αρμονικά κινούμενων, πλευρικά διατεταγμένων κυλίνδρων συναρτήσει του χρόνου προς ανίχνευση έναρξης περιοδικής λύσης. $T=0.628\text{sec}$,

Αφού, λοιπόν, εξακριβώθηκε ο απαιτούμενος χρόνος επίλυσης για την επίτευξη περιοδικής λύσης, ακολουθεί η παρουσίαση αποτελεσμάτων της αντιπροσωπευτικής περιόδου επίλυσης.

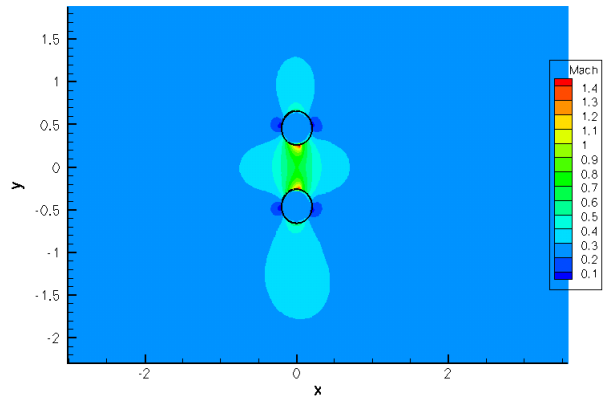
Παρατίθεται στο σχήμα 5.11 το διάγραμμα συντελεστών άνωσης και αντίστασης σε κοινό διάγραμμα, ενώ στα σχήματα 5.12 έως 5.17, τα στιγμιότυπα του πεδίου του αριθμού Mach γύρω από τους κυλίνδρους κατά χρονολογική σειρά.



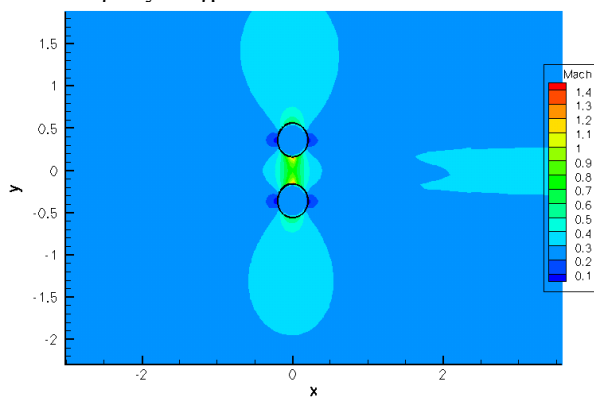
Σχήμα 5.11: Συντελεστές άνωσης και αντίστασης, δύο κυλίνδρων ταλαντούμενων κάθετα σε επ' άπειρο ροή ταχύτητας 100 m/s, κατά τη διάρκεια μιας περιόδου. $T=0.628$ sec



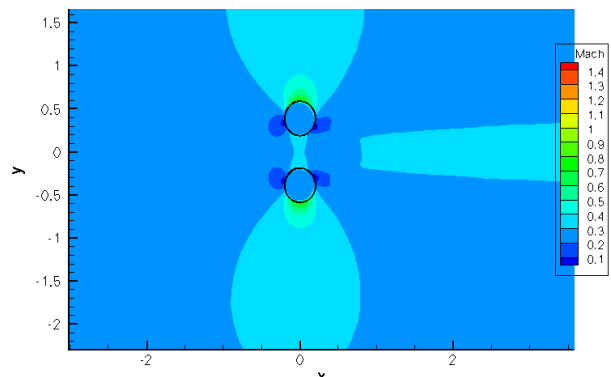
Σχήμα 5.12: Πεδίο αριθμού Mach, γύρω από δύο πλευρικά διατεταγμένους και αρμονικά κινούμενους κυλίνδρους. Στιγμιότυπο 1^ο : $t=0$.



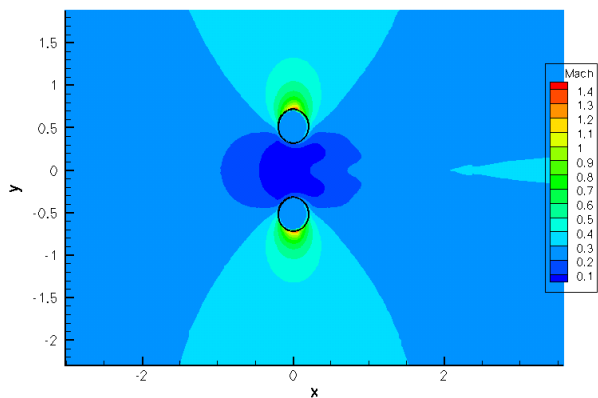
Σχήμα 5.13: Πεδίο αριθμού Mach, γύρω από δύο πλευρικά διατεταγμένους και αρμονικά κινούμενους κυλίνδρους. Στιγμιότυπο 2^ο : $t=T/6$.



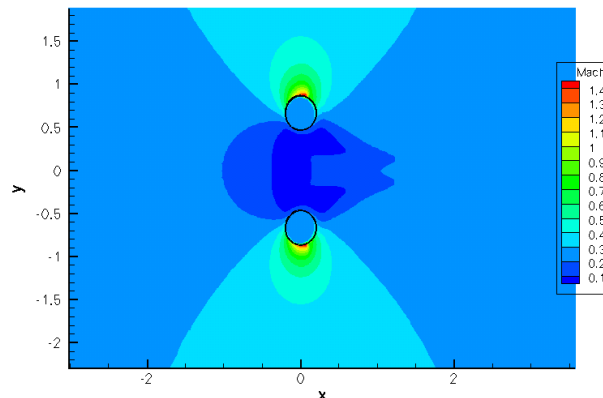
Σχήμα 5.14: Πεδίο αριθμού Mach, γύρω από δύο πλευρικά διατεταγμένους και αρμονικά κινούμενους κυλίνδρους. Στιγμιότυπο 3^ο : $t=2T/6$.



Σχήμα 5.15: Πεδίο αριθμού Mach, γύρω από δύο πλευρικά διατεταγμένους και αρμονικά κινούμενους κυλίνδρους. Στιγμιότυπο 4^ο : $t=3T/6$.



Σχήμα 5.16: Πεδίο αριθμού Mach, γύρω από δύο πλευρικά διατεταγμένους και αρμονικά κινούμενους κυλίνδρους. Στιγμιότυπο 5^ο : $t=4T/6$.



Σχήμα 5.17: Πεδίο αριθμού Mach, γύρω από δύο πλευρικά διατεταγμένους και αρμονικά κινούμενους κυλίνδρους. Στιγμιότυπο 6^ο : $t=5T/6$.

Παρατηρείται ότι ο συνδυασμός του υπολογίσιμου πλάτους ταλάντωσης (ίσο με την ακτίνα των κυλίνδρων) και της μικρής απόστασης της διόδου που σχηματίζεται ανάμεσά τους, οδηγεί σε πολύ βίαια φαινόμενα εναλλαγής της άνωσης και της κυκλοφορίας γύρω από τους κυλίνδρους.

Ακόμα παρατηρείται, ότι υπάρχουν δύο αίτια δημιουργίας κυκλοφορίας γύρω από τα εν γένει μη ανωστικά σώματα των κυλίνδρων.

Το πρώτο είναι η εγκάρσια ταχύτητα μετατόπισης, ανεξαρτήτου φοράς κίνησης. Ακόμα και όταν οι κύλινδροι απομακρύνονται, οι ταχύτητα μετακίνησης εξαναγκάζει τη ροή να επιταχυνθεί στην πλευρά με την οποία «διασχίζει» το ρευστό, με συνέπεια τη δημιουργία άνωσης ομόροπης προς τη φορά κίνησης.

Το δεύτερο αίτιο είναι ότι στη σχηματιζόμενη δίοδο μεταξύ των κυλίνδρων, η ροή τείνει να επιταχύνεται κάτι το οποίο μπορεί να συντελέσει στη μείωση της πίεσης στην πλευρά κάθε κυλίνδρου που συν-οριοθετεί τη δίοδο.

Από τα σχήματα 5.12 και 5.17, απορρέει, ότι όταν οι κύλινδροι βρίσκονται στο απώτατο σημείο απομάκρυνσης, έχει σχηματιστεί στη μεταξύ τους δίοδο μια περιοχή χαμηλής ταχύτητας (περίπου $M=0.05$ αντί $M=0.3$ της επ' άπειρο ροής), η οποία όταν υποβάλλεται σε συμπίεση λόγω της προς αυτήν κίνησης των κυλίνδρων, εκτονώνεται απότομα στη γύρω ροή.

Το φαινόμενο αυτό, οφείλεται στο ότι κατά την απομάκρυνση των δύο κυλίνδρων, τα σημεία ανακοπής κάθε κυλίνδρου ολισθαίνουν σταδιακά προς την πλευρά που βρέχεται από τη δίοδο, και πλησιάζουν μεταξύ τους. Έτσι, η ροή επιβραδύνεται σημαντικά σε όλη την δίοδο, διότι λόγω της έντονης αλληλεπίδρασης των δύο κυλίνδρων, δεν υπάρχει χώρος να αποκατασταθεί η ταχύτητα της ροής εντός της διόδου. Συνεπώς, όταν αντιστρέφεται η ταχύτητα των κυλίνδρων (προσέγγιση), η επιτάχυνση στην δίοδο είναι σχεδόν κρουστική.

Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο, αν και θα αναμενόταν η μέγιστη ελκτική δύναμη (ή ισοδύναμα ο ελάχιστος C_L) μεταξύ των δύο κυλίνδρων να είναι μεγαλύτερου μέτρου από τη μέγιστη απωστική (ή τον μέγιστο C_L), πάραυτα ισχύει το αντίθετο. Η μετατόπιση των σημείων ανακοπής προς την δίοδο, οδηγεί σε ενίσχυση της επιβράδυνσης στις βρεχόμενες από την δίοδο πλευρές των κυλίνδρων, με αποτέλεσμα την ενίσχυση της απωστικής δύναμης.

Συνεπώς, γίνεται αντιληπτό, ότι η ταλάντωση με πλάτος ίσο με την ακτίνα των κυλίνδρων, λόγω της εμφάνισης μεγάλων μεταφορικών ταχυτήτων κάθετα στη ροή, επιφέρει βίαια αεροδυναμικά φαινόμενα (συντελεστής άνωσης $C_L = -2 \div 3$). Στην επόμενη παράγραφο, γίνεται απόπειρα μείωσης του πλάτους ταλάντωσης, στις ίδιες κατά τα άλλα συνθήκες ροής.

5.4 Απλή Αρμονική Ταλάντωση με $\delta=0.2/0.3$

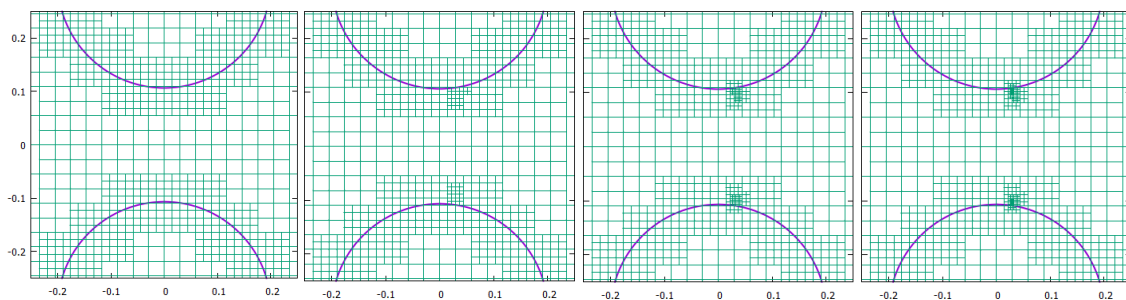
Για την επίλυση αυτής της περίπτωσης, θα χρησιμοποιηθούν τα ίδια χαρακτηριστικά πλέγματος όπως και στην προηγούμενη περίπτωση ($\Omega_{max} = 0.26$, $\Omega_{min} = 0.0006$, $Distance_{max} = 17$), και οι ίδιες συνθήκες ροής. Ακόμα, η χρονική διακριτοποίηση χρησιμοποιεί 60 βήματα ανά περίοδο, έναντι των 40 της προηγούμενης περίπτωσης.

Διαφοροποίηση αποτελεί, κατ' αρχάς, το πλάτος ταλάντωσης, το οποίο περιορίζεται στο εν τέταρτον της ακτίνας, δηλαδή ίσο με 0.05, καθώς και μια πολύ μικρή αλλαγή στην περίοδο ταλάντωσης (για πρακτικούς λόγους), δηλαδή από 0.62832, γίνεται 0.6 sec, και στην ελάχιστη απόσταση της διόδου ($d_{min} = 0.2$ (αντί 0.3)). Τα στοιχεία αυτά παρατίθενται στον πίνακα 5.3.

Ακόμα, εφαρμόστηκε τοπική πύκνωση του πλέγματος στην υπερηχητική περιοχή. Η πύκνωση αυτή γίνεται αυτοματοποιημένα, μόλις διαπιστωθεί μεγάλη κλίση πιέσεων μεταξύ πολύ κοντινών κυψελών, και ο έλεγχος επαναλαμβάνεται τρεις φορές, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.18.

Γεωμετρία-Κίνηση				Επ' άπειρο Ροή	
Ακτίνα r	Λόγος $\delta = d_{min}/d_{max}$	Περίοδος Ταλάντωσης	Πλάτος ταλάντωσης A	Γωνία α_∞	Αριθμός Mach
0.2 m	0.2 / 0.3	0.6 sec	0.05 m	0°	0.294

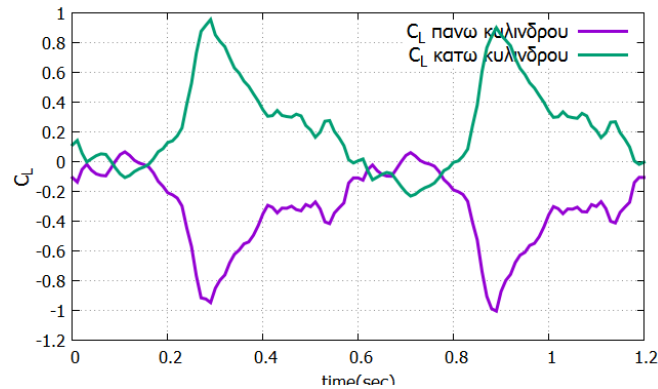
Πίνακας 5.3: Χαρακτηριστικά γεωμετρίας και άπειρης ροής προβλήματος, πλευρικά διατεταγμένων κυλίνδρων, σε παλμική κίνηση επί της διακέντρου των.



Σχήμα 5.18: Περαιτέρω πύκνωση του πλέγματος στην υπερηχητική μετάβαση, μέσω ελέγχου κλίσης πιέσεων σε κοντινές κυψέλες.

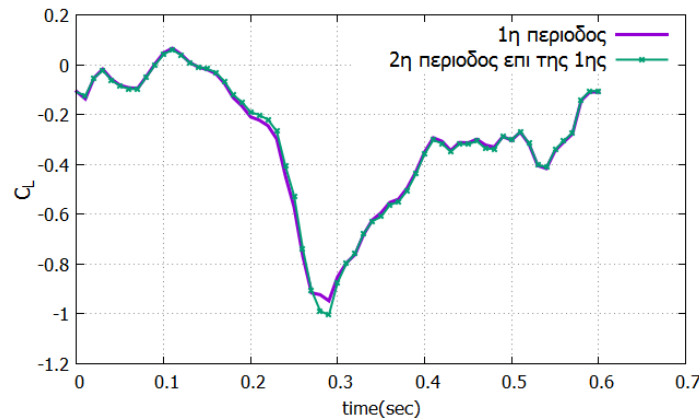
Ο λόγος που η πύκνωση πραγματοποιήθηκε στα σημεία που φαίνεται στο σχήμα 5.18 είναι, ότι η ροή, λόγω της κυκλικής γεωμετρίας, υφίσταται έντονη επιτάχυνση από τη θέση $x=0$ και έπειτα. Αργότερα όμως η διάδοχος μεγαλώνει, και η ταχύτητα μειώνεται. Ενώ στη θέση αυτή, επικρατεί η μέγιστη συσχέτιση μεταξύ ταχύτητας της ροής και εύρους της διάδοσης, κάτι το οποίο οδηγεί στην υπερηχητικότητα.

Στο σχήμα 5.19 παρατίθεται το διάγραμμα των συντελεστών άνωσης για τον άνω και κάτω κύλινδρο (συμμετρικοί), κατά τη διάρκεια δύο περιόδων επίλυσης.



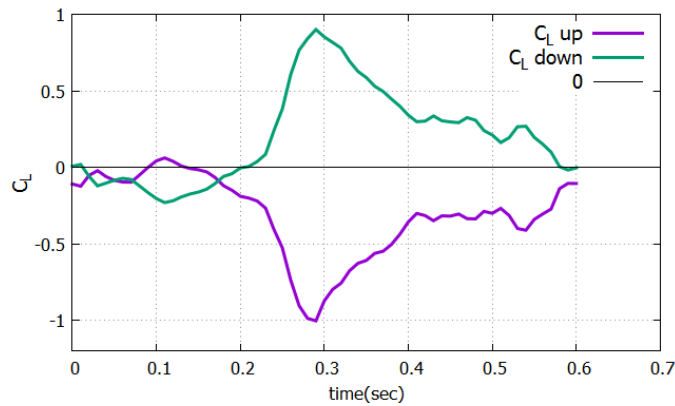
Σχήμα 5.19: Συντελεστής άνωσης άνω και κάτω κυλίνδρου, κατά τη διάρκεια δύο περιόδων επίλυσης. $T=0.6\text{sec}$.

Η περιοδικότητα επιτυγχάνεται και πάλι περίπου στο 30% της περιόδου, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.20 όπου συγκρίνονται οι κατανομές του συντελεστή άνωσης του άνω κυλίνδρου κατά τη διάρκεια πρώτης και δεύτερης περιόδου επίλυσης.



Σχήμα 5.20: Συντελεστής άνωσης του άνω κυλίνδρου κατά τη διάρκεια δύο περιόδων επίλυσης. Σύγκριση πρώτης και δεύτερης περιόδου.

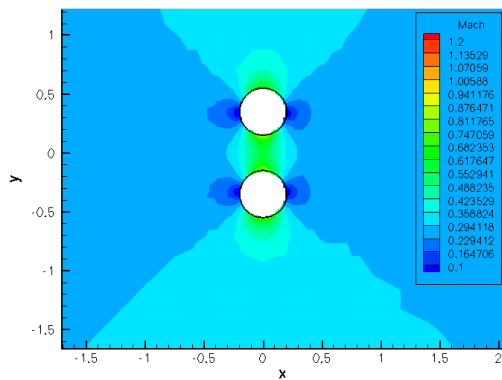
Παρακάτω, στο σχήμα 5.21 ακολουθεί το διάγραμμα του συντελεστή άνωσης τους δύο κυλίνδρους, της τελικής (περιοδικής) λύσης.



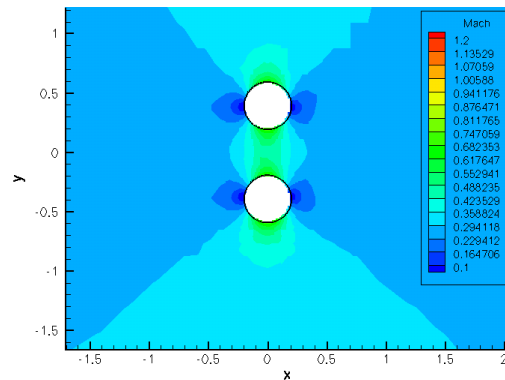
Σχήμα 5.21: Συντελεστής άνωσης των δύο κυλίνδρου κατά τη διάρκεια δύο περιόδων επίλυσης (ο χρόνος μετράει από την αρχή της δεύτερης περιόδου).

Παρατηρείται στο σχήμα 5.21, ότι ο συντελεστής άνωσης του άνω κυλίνδρου δεν υπερβαίνει στο μεγαλύτερο τμήμα του τη μηδενική τιμή (δηλαδή η άνωση έχει ως επί το πλείστον, και κατά μέσο όρο, φορά προς τα κάτω). Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι κυρίαρχη αιτία δημιουργίας κυκλοφορίας γύρω από τον κύλινδρο, δεν είναι η ταχύτητα του κυλίνδρου (η οποία είναι περιορισμένη), αλλά η επιτάχυνση της ροής εντός της διόδου, κάτι το οποίο προκαλεί ελκτική δύναμη μεταξύ των κυλίνδρων, σε αντίθεση με το πρόβλημα της προηγούμενης παραγράφου.

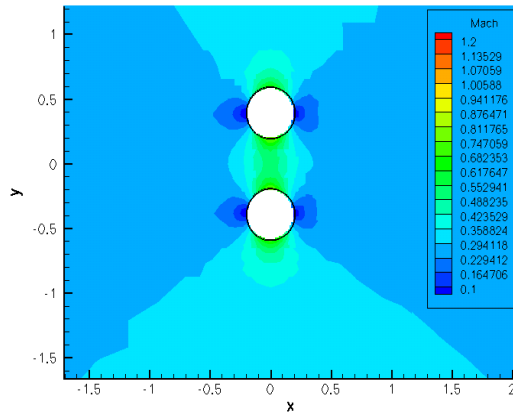
Παρακάτω ακολουθούν στα σχήματα 5.22 ως 5.27, διάφορα στιγμιότυπα του πεδίου Mach γύρω από τους δυο κυλίνδρους.



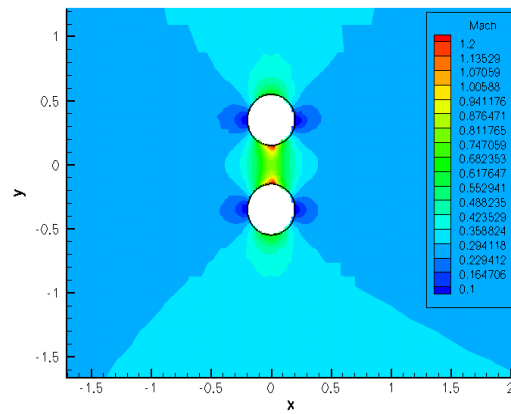
Σχήμα 5.22: Στιγμιότυπο του πεδίου του αριθμού Mach, γύρω από δύο πλευρικά διατεταγμένους, παλλόμενους κινούμενους κυλίνδρους. Στιγμιότυπο 1° : $t=0$.



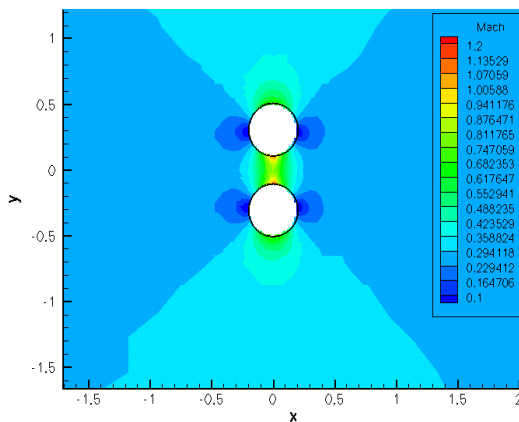
Σχήμα 5.23: Στιγμιότυπο του πεδίου του αριθμού Mach, γύρω από δύο πλευρικά διατεταγμένους, παλλόμενους κινούμενους κυλίνδρους. Στιγμιότυπο 2° : $t=T/6$.



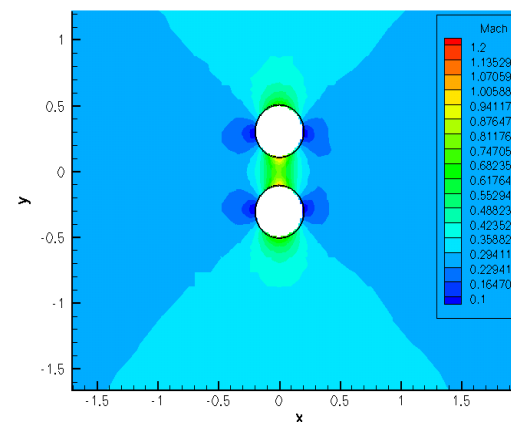
Σχήμα 5.24 Στιγμιότυπο του πεδίου του αριθμού Mach, γύρω από δύο πλευρικά διατεταγμένους, παλλόμενους κινούμενους κυλίνδρους. Στιγμιότυπο 3° : $t=2T/6$.



Σχήμα 5.25: Στιγμιότυπο του πεδίου του αριθμού Mach, γύρω από δύο πλευρικά διατεταγμένους, παλλόμενους κινούμενους κυλίνδρους. Στιγμιότυπο 4° : $t=3T/6$.



Σχήμα 5.26: Στιγμιότυπο του πεδίου του αριθμού Mach, γύρω από δύο πλευρικά διατεταγμένους, παλλόμενους κινούμενους κυλίνδρους. Στιγμιότυπο 5° : $t=4T/6$.



Σχήμα 5.27: Στιγμιότυπο του πεδίου του αριθμού Mach, γύρω από δύο πλευρικά διατεταγμένους, παλλόμενους κινούμενους κυλίνδρους. Στιγμιότυπο 6° : $t=5T/6$.

5.5 Απλή Αρμονική Ταλάντωση με $\delta=3.4/3.6$

Τέλος, μελετάται μία περίπτωση όπου η αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο κυλίνδρων είναι πολύ περιορισμένη λόγω της μεγάλης μεταξύ των απόστασης.

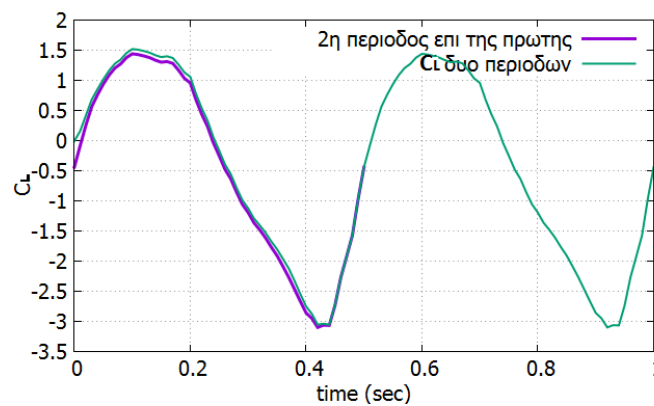
Για την επίλυση αυτής της περίπτωσης, χρησιμοποιούνται τα ίδια δεδομένα εισόδου για το πλέγμα όπως στην πρώτη περίπτωση, ($\Omega_{max} = 0.26$, $\Omega_{min} = 0.0006$, $Distance_{max} = 17$), θεωρώντας ότι είναι επαρκή για την αναπαράσταση του προβλήματος, αφού τα φαινόμενα είναι πολύ πιο ήπια από ότι πριν. Η χρονική διακριτοποίηση χρησιμοποιεί 50 χρονικά βήματα ανά περίοδο.

Τα χαρακτηριστικά της ροής παραμένουν ίδια, αλλάζουν όμως οι παράμετροι κίνησης της γεωμετρίας, όπως φαίνεται στον πίνακα 5.4.

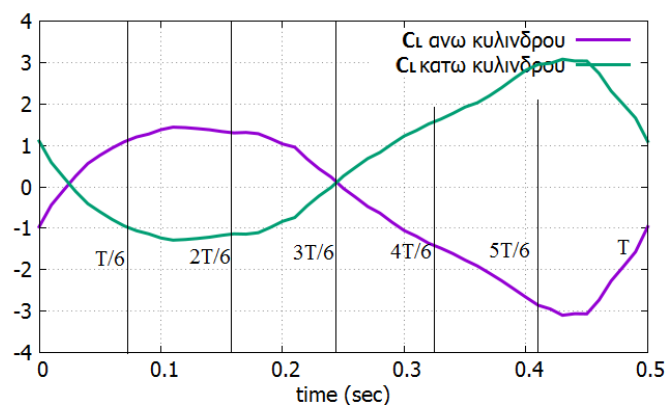
Γεωμετρία-Κίνηση				Επ' άπειρο Ροή	
Ακτίνα r	Λόγος $\delta = d_{min}/d_{max}$	Περίοδος Ταλάντω σης	Πλάτος ταλάντω σης A	Γωνία α_{∞}	Αριθμός Mach
0.2 m	3.4 / 3.6	0.5 sec	0.1 m	0°	0.294

Πίνακας 5.4: Χαρακτηριστικά γεωμετρίας και άπειρης ροής προβλήματος, πλευρικά διατεταγμένων κυλίνδρων, οι οποίοι εκτελούν αρμονική κίνηση προσέγγισης-απομάκρυνσης, με μεγάλη ενδιάμεση απόσταση.

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, πραγματοποιείται ανάλυση περιοδικότητας, με κριτήριο τη μορφή του συντελεστή άνωσης ενός εκ των δύο κυλίνδρων κατά τη διάρκεια της περιόδου. Στο σχήμα 5.28 παρατίθεται ο συντελεστής άνωσης κατά τη διάρκεια δύο περιόδων επίλυσης, και η υπέρθεση των αποτελεσμάτων της δεύτερης περιόδου επί της πρώτης, από όπου γίνεται σαφές, ότι η περιοδικότητα ξεκινά περί το 80% της πρώτης περιόδου επίλυσης,



Σχήμα 5.28: Συντελεστής άνωσης του άνω κυλίνδρου κατά τη διάρκεια δύο περιόδων επίλυσης. Σύγκριση πρώτης και δεύτερης περιόδου, για έλεγχο περιοδικότητας.

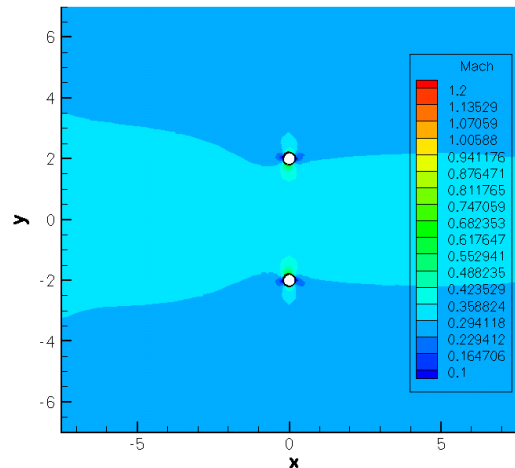


Σχήμα 5.29: Συντελεστής άνωσης άνω και κάτω κυλίνδρου, όπως προέκυψαν από την περιοδική λύση.

Παρατηρείται στο σχήμα 5.29, ότι η απομάκρυνση των δύο κυλίνδρων οδηγεί σε μεγάλη μείωση της μεταξύ των αλληλεπίδρασης, λόγος για τον οποίο η μορφή του συντελεστή άνωσης είναι πολύ ομαλή και αναμενόμενη. Ακόμα, όπως και στην παράγραφο 5.3, παρατηρείται ότι

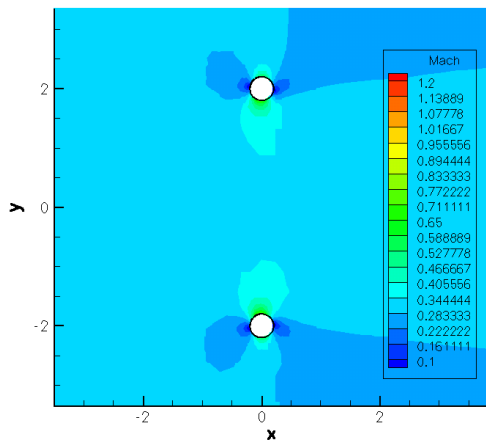
η μέγιστη ελκτική δύναμη (μέγιστου μέτρου αρνητικός C_L άνω κυλίνδρου) μεταξύ των κυλίνδρων είναι μεγαλύτερου μέτρου από τη μέγιστη απωστική (μέγιστος θετικός C_L άνω κυλίνδρου).

Στο σχήμα 5.30 παρουσιάζεται το στιγμιότυπο του πεδίου του αριθμού Mach, ολόκληρου του χωρίου, στην αρχή της περιόδου.

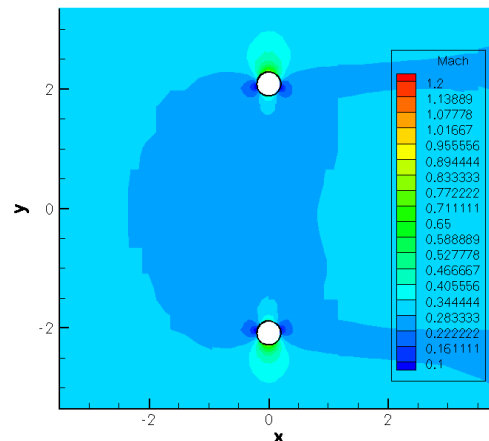


Σχήμα 5.30: Στιγμιότυπο του πεδίου του αριθμού Mach, γύρω από δύο πλευρικά διατεταγμένους, ταλαντούμενους κινούμενους κυλίνδρους. Στιγμιότυπο 1^ο : $t=0$. Άποψη ολόκληρου του χωρίου.

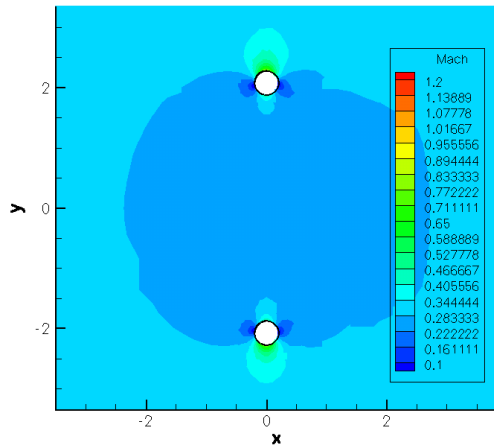
Στα σχήματα 5.31 έως 5.36, παρουσιάζονται στιγμιότυπα του πεδίου του αριθμού Mach , που ισαπέχουν χρονικά κατά $T/6$.



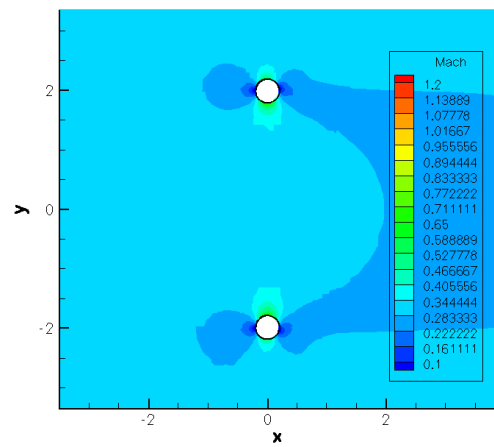
Σχήμα 5.31: Στιγμιότυπο του πεδίου του αριθμού Mach, γύρω από δύο πλευρικά διατεταγμένους, ταλαντούμενους κυλίνδρους. Στιγμιότυπο 1^ο : $t=0$.



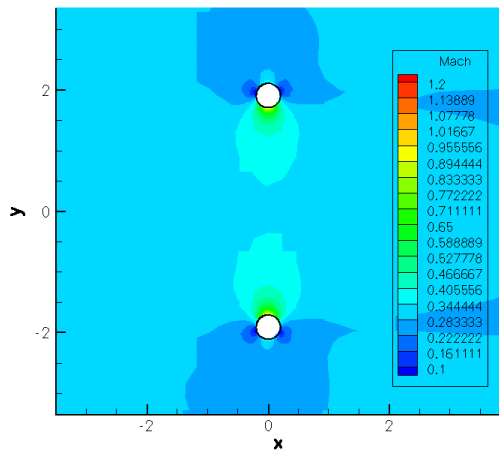
Σχήμα 5.32: Στιγμιότυπο του πεδίου του αριθμού Mach, γύρω από δύο πλευρικά διατεταγμένους, ταλαντούμενους κυλίνδρους. Στιγμιότυπο 2^ο : $t=T/6$.



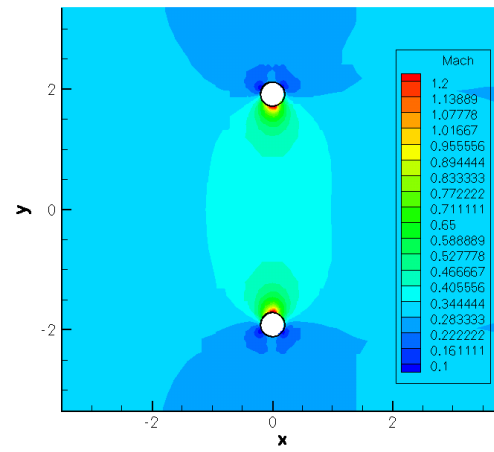
Σχήμα 5.33: Στιγμιότυπο του πεδίου του αριθμού Mach, γύρω από δύο πλευρικά διατεταγμένους, ταλαντούμενους κυλίνδρους. Στιγμιότυπο 3^ο : $t=2T/6$.



Σχήμα 5.34: Στιγμιότυπο του πεδίου του αριθμού Mach, γύρω από δύο πλευρικά διατεταγμένους, ταλαντούμενους κυλίνδρους. Στιγμιότυπο 4^ο : $t=3T/6$.



Σχήμα 5.35: Στιγμιότυπο του πεδίου του αριθμού Mach, γύρω από δύο πλευρικά διατεταγμένους, ταλαντούμενους κυλίνδρους. Στιγμιότυπο 5^ο : $t=4T/6$.



Σχήμα 5.36: Στιγμιότυπο του πεδίου του αριθμού Mach, γύρω από δύο πλευρικά διατεταγμένους, ταλαντούμενους κυλίνδρους. Στιγμιότυπο 6^ο : $t=5T/6$.

6 Επίλυση Ροής δια μέσου Σταθερής Πτερύγωσης Ακτινικού Συμπιεστή

6.1 Εισαγωγικά Σχόλια

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται επίλυση της ροής δια μέσου της σταθερής πτερύγωσης ενός ακτινικού συμπιεστή. Ως χωρικά όρια του συμπιεστή τίθενται δύο κύκλοι εντός των οποίων βρίσκεται η πτερύγωση. Ο εσωτερικός κύκλος προσομοιώνει την είσοδο της ροής, από όπου η ροή εισέρχεται ακτινικά, με επιβολή οριακών συνθηκών ολικής πίεσης και ολικής θερμοκρασίας. Ο εξωτερικός κύκλος, αποτελεί μία απλουστευμένη αναπαράσταση του κελύφους εξόδου, από όπου η ροή εξέρχεται και όπου επιβάλλεται οριακή συνθήκη στατικής πίεσης.

Οι δύο κύκλοι βρίσκονται εντός ενός ορθογωνίου χωρίου, αρκετά μεγάλου ώστε να περιέχει και τους δύο. Το πλέγμα παράγεται κατά τη γνωστή διαδικασία εντός του ορθογωνικού χωρίου, ενώ τα μέρη του χωρίου αυτού που βρίσκονται εκτός του εξωτερικού κύκλου, αποτέμνονται και δεν λαμβάνονται υπόψη κατά την επίλυση.

Το πρόβλημα αυτό επιλέγεται κυρίως λόγω του ότι, καθώς περιλαμβάνει πολύ μεγάλο αριθμό στερεών σωμάτων, δημιουργείται κατά την πλεγματοποίηση, πολύ μεγάλη αλληλεπίδραση μεταξύ των πλεγματικών περιοχών γύρω από κάθε στερεό όριο. Δηλαδή υπάρχει επικάλυψη των ακτινών επιρροής κάθε διακριτού στερεού ορίου στο πλέγμα. Αυτό καθιστά το πρόβλημα αυτό καταλληλότερο ελεγκτικό εργαλείο για το λογισμικό τεμνομένων κυψελών.

Επιπλέον όμως, επιλέγεται λόγω της υπολογιστικής δυσκολίας που παρουσιάζει ένα καρτεσιανό πλέγμα (όπως είναι και το χρησιμοποιούμενο), να αναπαραστήσει μία ακτινική ροή. Η δυσκολία αυτή ανακύπτει από το ότι οι ακμές των καρτεσιανών κυψελών, δεν είναι διατεταγμένες σύμφωνα με τις γραμμές ροής, αλλά βρίσκονται υπό μεγάλη γωνία ως προς αυτές, με αποτέλεσμα μία εμμεσότητα όσον αφορά τη διάδοση της ροϊκής πληροφορίας.

Ακόμα σημειώνεται, ότι η αρχικοποίηση των μεταβλητών της ροής (ταχύτητες, πίεση, πυκνότητα) είναι αναγκαστικά πολύ δυσμενής, διότι ενώ αυτές αναφέρονται σε καρτεσιανές συνιστώσες, η ροή διέπεται από πολική συμμετρία.

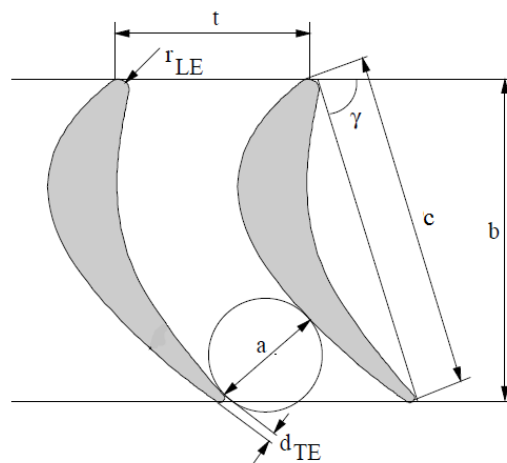
6.2 Επίλυση Μόνιμης Ροής

Τα επιλεγθέντα πτερύγια, είναι ιδεατά πτερύγια στάτορα, τα οποία δημιουργούνται με βάση μία μεσαία γραμμή λογαριθμικής συνάρτησης της μορφής $y = a \log(\beta x)$, επί της οποίας επενδύεται μία ομοιόμορφη κατανομή πάχους ($th/2=0.1c$ εκατέρωθεν της μέσης γραμμής), ενώ στα άκρα (2% του μήκους από κάθε απόληξη) εφαρμόζεται ελλειπτική κατανομή.

Υπενθυμίζεται η έννοια της στερεότητας σ (solidity), η οποία εκφράζεται ως:

$$\sigma = \frac{c}{t}$$

όπου c είναι το μήκος χορδής του πτερυγίου, και t το βήμα μεταξύ δύο διαδοχικών πτερυγίων, όπως φαίνεται και στο σχήμα 6.1.



Σχήμα 6.1: Γεωμετρικά μεγέθη πτερυγώσεων [38].

Στην προκειμένη περίπτωση, χρησιμοποιούνται 40 ισαπέχοντα πτερύγια, με $c=0.374$, γωνιακό βήμα $t=9^\circ$ και $\sigma \cong 1.33$.

Το ορθογωνικό χωρίο το οποίο θα συμπεριλάβει όλες τις στερεές γεωμετρίες έχει διαστάσεις 5.5×5.5 , ενώ οι ακτίνες των κύκλων εισόδου και εξόδου είναι 1.4 και 2.5 αντίστοιχα.

Ως συνοριακές συνθήκες τίθενται $p_{t,in} = 1 \text{ bar}$, $T_{t,in} = 293 \text{ K}$, $p_{s,out} = 0.93 \text{ bar}$.

Θα διεξαχθεί αρχικά διερεύνηση ανεξαρτησίας εκ του πλέγματος. Ως γνώμονας σύγκρισης των αποτελεσμάτων των διαφόρων πλεγμάτων, χρησιμοποιείται η συνολική ροπή που παράγεται από το σύνολο των πτερυγίων, ως προς το κέντρο ολόκληρης της πτερυγώσης (την αρχή των αξόνων). Η ροπή υπολογίζεται μέσω της ολοκλήρωσης των πιέσεων επί του πτερυγίου, της εύρεσης των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του κατά x και y , και τη λήψη ροπής ως προς την αρχή των αξόνων. Συνοπτικά:

$$F_i = \oint p n_i ds \quad (6.1)$$

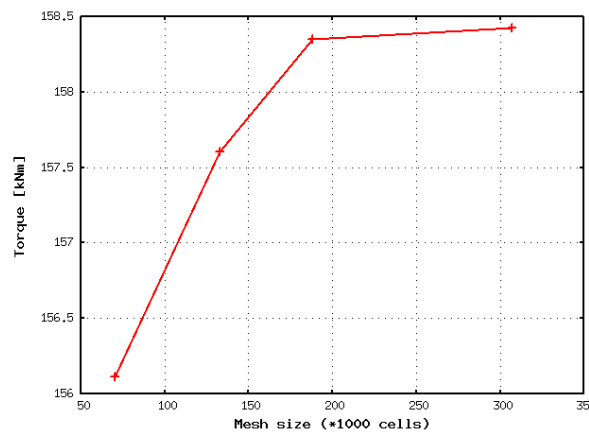
όπου i η x ή y διεύθυνση, p η πίεση, n_i η συνιστώσα κατά x ή y του καθέτου διανύσματος στη στοιχειώδη επιφάνεια, και ds η στοιχειώδης επιφάνεια. Η ροπή κάθε στοιχειώδους επιφάνειας περί το κέντρο περιστροφής –δηλαδή την αρχή των αξόνων– προκύπτει ως:

$$dT = xF_y - yF_x \quad (6.2)$$

$$T = \sum dT \quad (6.3)$$

όπου x, y είναι οι μέσες συντεταγμένες της στοιχειώδους επιφάνειας, F_x, F_y οι στοιχειώδεις δυνάμεις που προκύπτουν από ολοκλήρωση των πιέσεων επί της επιφανείας αυτής, και T η συνολική παραγόμενη ροπή.

Στο σχήμα 6.2 παρουσιάζεται το διάγραμμα συσχέτισης του μεγέθους του πλέγματος (σε χιλιάδες κελιά) με την υπολογιζόμενη συνολική ροπή (σε kNm) για κάθε πλέγμα.



Σχήμα 6.2: Συνολική άποψη πλεγματοποιημένου χωρίου, περιέχον τη στατική περυγωση. Μέγεθος πλέγματος: 70000 κυψέλες.

Κατά την τελευταία μετάβαση, όπου το μέγεθος του πλέγματος αυξάνεται από 188000 σε 308000 κυψέλες, η σχετική αύξηση της ροπής είναι:

$$\varepsilon = \frac{T_{307000} - T_{188000}}{T_{188000}} = \frac{158426 - 158349}{158349} = 0.00049 \cong 0.05\%$$

Συνεπώς, κατά την αύξηση αυτού του πλέγματος, η αύξηση της ακρίβειας υπισχύει της αύξησης του υπολογιστικού κόστους και, συνεπώς, το πλέγμα των 188000 κυψελών λαμβάνεται ως επαρκές για την επίλυση του προβλήματος.

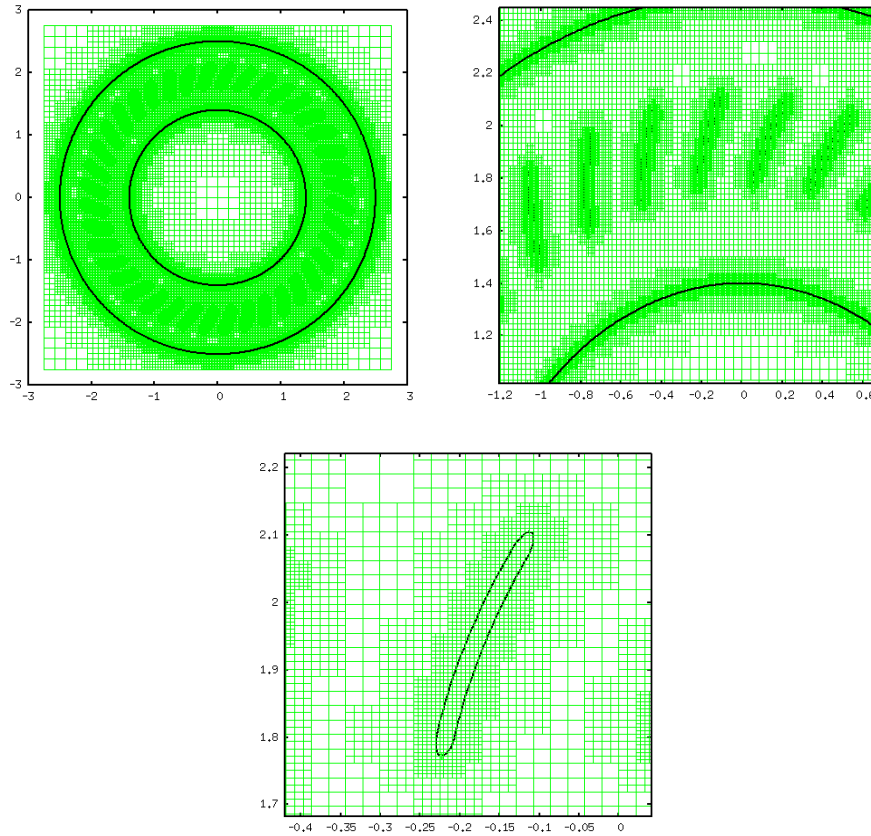
Χαρακτηριστικά πλέγματος μεγέθους 188000 κυψελών:

$$\Omega_{min} = 0.2$$

$$\Omega_{max} = 0.00005$$

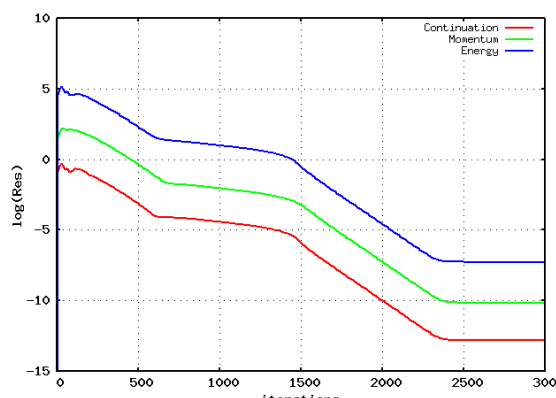
$$Distance_{max} = 4$$

Στο σχήμα 6.3 παρουσιάζεται το πλεγματοποιημένο υπολογιστικό χωρίο, και γίνεται εστίαση σε ένα εκ των περυγίων.



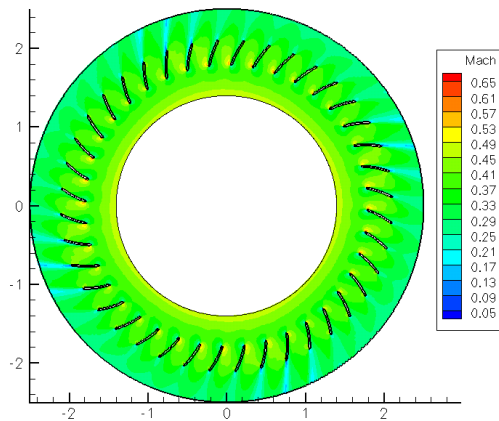
Σχήμα 6.3: Απόψεις του τελικού πλεγματοποιημένου χωρίου, περιέχον τη στατική περυγωση., με σταδιακή εστίαση σε ένα περυγίο. Μέγεθος πλέγματος: 188000 κυψέλες.

Τα υπόλοιπα των εξισώσεων κατάστασης, μειώνονται κατά 12 και πλέον τάξεις μεγέθους, όπως φαίνεται στο διάγραμμα σύγκλισης του σχήματος 6.4, όπου στον κατακόρυφο άξονα βρίσκεται ο λογάριθμος των υπολοίπων. Η πορεία σύγκλισης της κατά x και y εξίσωσης της ορμής παρουσιάζεται ενιαία, λόγω της φαινομενικής ταύτισής των, στην κλίμακα της όλης πορείας σύγκλισης.

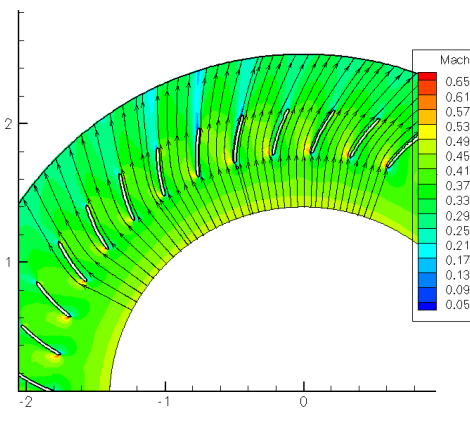


Σχήμα 6.4: Πορεία σύγκλισης εξισώσεων κατάστασης, της ακτινικής ροής δια μέσου σταθερής περυγωσης.

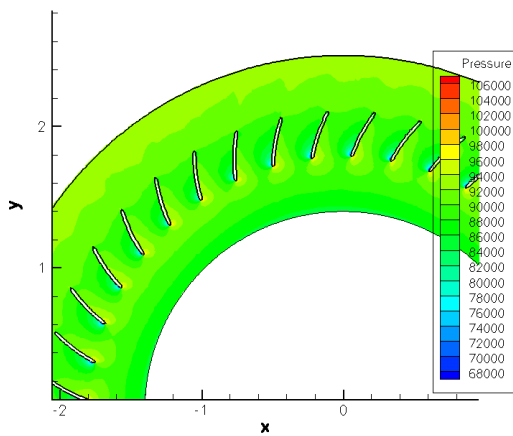
Στα σχήματα 6.5 και 6.6 παρουσιάζεται το πεδίο του αριθμού Mach της ροής δια μέσου του στάτορα, ενώ στα σχήματα 6.7,6.8 τα αντίστοιχα πεδία πίεσης.



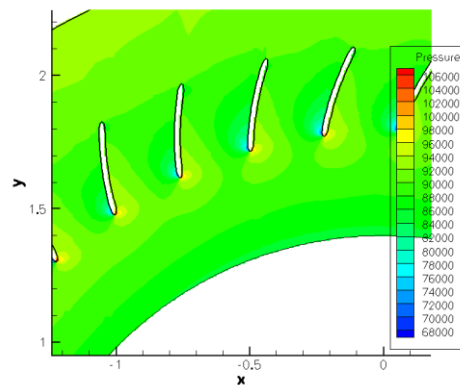
Σχήμα 6.5: Αριθμός Mach πεδίου ροής, δια μέσου ακτινικού στάτορα. Γενική άποψη.



Σχήμα 6.6: Αριθμός Mach πεδίου ροής, δια μέσου ακτινικού στάτορα. Εστίαση, και χάραξη γραμμών ροής.



Σχήμα 6.7: Στατική πίεση πεδίου ροής, δια μέσου ακτινικού στάτορα. Εστίαση σε 1/4 του πεδίου.



Σχήμα 6.8: Στατική πίεση πεδίου ροής, δια μέσου ακτινικού στάτορα. Εστίαση στην περυσύγωση.

Παρατηρείται πως το πεδίο είναι παρουσιάζει την αναμενόμενη περιφερειακή συμμετρία, καθώς και την πτώση της ταχύτητας από την είσοδο προς την έξοδο που περιγράφεται από την εξίσωση της συνέχειας.

Παρατηρείται όμως, ιδίως στα σχήματα 6.5, 6.6 μια περιοδική ανομοιομορφία στην εξωτερική περιφέρεια, όπου φαίνεται πως πίσω από συγκεκριμένα πτερύγια, υπάρχει μια «σκιά» χαμηλών ταχυτήτων. Ενδιαφέρον είναι ότι η ανομοιομορφία αυτή παρουσιάζει συμμετρία, δηλαδή εμφανίζεται σε αντιδιαμετρικές περιοχές.

Αυτό συμβαίνει επειδή τα πτερύγια έχουν διαφορετικό προσανατολισμό μεταξύ τους, και έτσι το κάθε ένα τέμνεται εν γένει με διαφορετική γωνία από το καρτεσιανό πλέγμα που σχηματίζεται γύρω του. Για αυτόν τον λόγο, δημιουργείται και μία μικρή μεταβλητότητα στην φόρτιση του κάθε πτερυγίου (σχήμα 6.8).

Επειδή όμως τα πτερύγια που απέχουν μεταξύ τους γωνιακή απόσταση $\Delta\varphi = \kappa \frac{\pi}{2}$ έχουν τον ίδιο ή παραπληρωματικό προσανατολισμό ως προς την οριζόντιο, το φαινόμενο της ανομοιομορφίας έχει και αυτό περιοδικότητα (χωρική) 90° .

7 Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα

Στη διπλωματική εργασία αυτή, χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό επίλυσης των εξισώσεων Euler, το οποίο εφαρμόζει τη μέθοδο εμβαπτιζόμενων ορίων-τεμνομένων κυψελών (Immersed Boundaries, cut-cell method), με προσαρμολζόμενο στην κίνηση του στερεού ορίου πλέγμα, που αναπτύχθηκε στη ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ. Η λογική και η διάρθρωση του λογισμικού παρουσιάστηκε στο πρώτο μέρος της εργασίας.

Κύριο υπολογιστικό αντικείμενο, κατέστη η διερεύνηση της αεροδυναμικής και της προωστικής συμπεριφοράς λικνιζόμενων αεροτομών, κίνηση βασισμένη στην λίκνιση των χελιών (Anguilliform Locomotion), θέμα που αποτέλεσε ταυτόχρονα διαπιστευτική – διαγνωστική περιπτωσιολογία της επιλυτικής ικανότητας του λογισμικού σε μη-μόνιμες ροές με ιδιόμορφα παραμορφούμενα στερεά όρια.

Ως επιπλέον θέμα μελέτης επελέγησαν δύο πλευρικά διατεταγμένοι κύλινδροι, εκτελούντες αρμονική κίνηση προσέγγισης-απομάκρυνσης, σε διηχητικές συνθήκες ροής, υπό διάφορες παραμέτρους κίνησης, όπου η περιοδική κίνηση των δύο σωμάτων δημιουργεί περιοδική σύμπλεξη των πλεγματικών περιοχών γύρω από κάθε σώμα.

Τέλος, επιλύθηκε η ροή δια μέσου μιας ιδεατής σταθερής πτερύγωσης ακτινικού συμπιεστή, με μία απλουστευμένη (κυκλική) προσομοίωση του κελύφους εξόδου.

Ταυτόχρονα με τα υπολογιστικής φύσεως αποτελέσματα όσον αφορά την αποκρισιμότητα του λογισμικού σε δύσκολα μη-μόνιμα προβλήματα, αντλήθηκαν και καθ' αυτό ρευστοδυναμικά συμπεράσματα για τις υλοποιηθείσες διατάξεις. Τα συμπεράσματα συνοψίζονται ως εξής:

Όσον αφορά το αναπτυχθέν λογισμικό τεμνομένων κυψελών:

- Επιβεβαιώθηκε κατ' αρχάς η πλήρης λειτουργικότητα του στην περίπτωση της λικνιζόμενης αεροτομής, τόσο στην ακίνητη αλλά προπάντων στην κινούμενη περίπτωση, με την τελευταία να εξαντλεί έναν μεγάλο αριθμό πιθανών περιπτώσεων στερεοποίησης ή/και ρευστοποίησης κυψελών μεταξύ διαδοχικών χρονικών στιγμών, κάτι το οποίο προσδίδει στο λογισμικό αξιοπιστία αποκρισιμότητας σε μελλοντικές εφαρμογές γενικά, αλλά και συγκεκριμένα στη μελέτη λικνιζόμενων αεροτομών.
- Επιβεβαιώθηκε ακόμα η λειτουργικότητά του, όσον αφορά μη-μόνιμα προβλήματα, με ύπαρξη δύο κινούμενων σωμάτων (περίπτωση των κυλίνδρων), σε διηχητικές συνθήκες ροής, όπου μάλιστα υπάρχει περιοδική εμπλοκή των πλεγματικών περιοχών που υφίστανται γύρω από κάθε στερεό σώμα.
- Τέλος, δείχθηκε η ικανότητα του λογισμικού να επιλύει ροές γύρω από μεγάλο αριθμό σωμάτων (περίπτωση πτερύγωσης), εν λειτουργία επιβολής οριακών συνθηκών εισόδου-εξόδου, και μελετήθηκε η επάρκεια αναπαράστασης ενός ακτινικού πεδίου ροής, στο καρτεσιανό πλέγμα στο οποίο εμβαπτίζεται η γεωμετρία.

Συνολικά, εκπληρώθηκε ο υπολογιστικής χροιάς σκοπός αυτής της εργασίας, δηλαδή ελέγχθηκε η επάρκεια του λογισμικού τεμνομένων κυψελών αν ανταποκριθεί σε σύνθετα προβλήματα παραμορφούμενων ορίων, διαγνώστηκαν περιπτώσεις οι οποίες δεν είχαν ληφθεί υπόψη, και βελτιώθηκε το υπάρχον λογισμικό ώστε να τις συμπεριλάβει. Έτσι, αν και η

περιπτωσιολογία ποτέ δεν εξαντλείται, επιβεβαιώθηκε και ενισχύθηκε η αξιοπιστία του λογισμικού αυτού μέσω αυτών των περιπτώσεων σε πολύ μεγάλο βαθμό.

Από ρευστομηχανικής απόψεως:

- Στην περίπτωση της λικνιζόμενης αεροτομής υπό οριζόντια παράλληλη ροή, με $St=0.006$, παρατηρήθηκε η ύπαρξη χρονικών περιοχών, όπου υφίσταται δημιουργία προωστικής δύναμης, ακόμα και αν το συνολικό έργο μιας περιόδου είναι αρνητικό. Όταν η επ' άπειρο ροή αποκτά γωνία κλίσης, η καμπύλη του συντελεστή αντίστασης μετατοπίζεται μεν προς τα πάνω (δηλαδή αυξάνεται ο μέσος C_D), αλλάζει όμως μορφή και βρίσκεται για μεγαλύτερο χρονικό τμήμα της περιόδου, κοντά στην (νέα) ελάχιστη τιμή του συντελεστή αντίστασης.
- Από την ανάλυση που διεξήχθη δεν προέκυψε κάποια ιδιομορφή λίκνισης με μήκος κύματος αυτό των πραγματικών χελιών ($\lambda \approx 0.6$) για την οποία (σε αεροδυναμικό περιβάλλον) να προκύπτει κατά μέσο όρο προωστική δύναμη. Αντίθετα, μεγαλώνοντας το μήκος κύματος και αυξάνοντας το πλάτος ταλάντωσης, βρέθηκαν ενδεικτικά τρεις προωστικές ιδιομορφές, με τη βέλτιστη μεταξύ τους να παράγει ώση καθ' όλη τη διάρκεια της περιόδου, έχοντας (για $St \cong 1$), προωθητικό βαθμό απόδοσης $\eta_{προωθ} \cong 79\%$, και συντελεστή ώσης $C_T = 1.06$.
- Στην περίπτωση των ταλαντούμενων κυλίνδρων, παρατηρήθηκε κατ' αρχάς ότι η τοπική μετάβαση σε υπερηχητική ροή, οφείλεται κυρίως στην εγκάρσια κίνηση των κυλίνδρων και στην επιτάχυνση της ροής λόγω καμπυλότητας της γεωμετρίας, και δευτερευόντως στη στενωπό που σχηματίζεται μεταξύ τους, αν και αυτή συμβάλλει στην αύξηση της ταχύτητας εντός της περιοχής αυτής. Από πλευράς δυνάμεων, τα αεροδυναμικά φαινόμενα δημιουργούν απώθηση των κυλίνδρων κατά την απομάκρυνση τους και έλξη κατά την προσέγγιση μεταξύ τους.

Λόγω της σχηματιζόμενης διόδου ανάμεσά τους, η μέγιστη ελκτική δύναμη είναι μεγαλύτερη από τη μέγιστη απωστική δύναμη μεταξύ των κυλίνδρων, αφού η μέγιστη υποπίεση στη δίοδο είναι εντονότερη από τη μέγιστη υποπίεση στη «σκοτεινή» προς τη δίοδο πλευρά των κυλίνδρων. Συνεπώς, η μορφή του συντελεστή άνωσης δεν είναι συμμετρική, αλλά υπάρχει ανομοιομορφία σε βάρος της δύναμης απώθησης.

Παρατηρήθηκε όμως μια παρέκκλιση από αυτή τη συμπεριφορά (παράγραφος 5.3), όταν το πλάτος ταλάντωσης μεγαλώνει χωρίς αύξηση της περιόδου (δηλαδή οι ταχύτητες μετακίνησης των κυλίνδρων αυξάνουν). Συγκεκριμένα, κατά τη θέση μέγιστης απομάκρυνσης, τα σημεία ανακοπής των κυλίνδρων βρίσκονται (και τα 4 συνολικά-2 και 2) στην περιοχή ανάμεσα στους δύο κυλίνδρους, με αποτέλεσμα να προκληθεί ένα φαινόμενο «θρόμβωσης» της ροής εντός της διόδου, και ταυτόχρονη ραγδαία πτώση της ταχύτητας και αύξηση της πίεσης. Έτσι, στην περίπτωση αυτή, η μέγιστη απώθηση υπερβαίνει τη μέγιστη έλξη μεταξύ των κυλίνδρων.

- Τέλος, η ροή δια μέσου της σταθερής πτερύγωσης ακτινικού συμπιεστή, είναι ένα πρόβλημα στο οποίο τα αποτελέσματα οφείλουν να έχουν συγκεκριμένα – γνωστά

ποιοτικά χαρακτηριστικά, που καθορίζονται από τη φυσική της ροής εντός των ακτινικών συμπίεστών. Πράγματι, στην περίπτωση της ακίνητης περύγωσης, παρατηρήθηκε η αναμενόμενη ανακατεύθυνση της ροής περνώντας δια μέσου της περύγωσης, και μια μικρή άνοδος της στατικής πίεσης, με ταυτόχρονη πτώση του αριθμού Mach.

Κλείνοντας, χαράσσονται οι βασικές γραμμές που θα μπορούσαν να αποτελέσουν προεκτάσεις της εργασίας αυτής. Κατ' αρχάς, τα αποτελέσματα περί προώθησης λικνιζόμενων σωμάτων, μπορούν να γίνουν αφετηρία για μία νέα εργασία, στο πλαίσιο υπολογιστικής βελτιστοποίησης ως προς την πρόωση, ή/και μιας περαιτέρω χαρτογράφησης των παραμέτρων που διέπουν την προωθητική δραστηριότητα.

Ακόμα, ενδεχομένως να παρουσιάσουν ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά, διατάξεις δύο αεροτομών, όπως δύο λικνιζόμενες αεροτομές, η μία πάνω από την άλλη (όπου μπορούν να αξιοποιηθούν και τα συμπεράσματα από τους ταλαντούμενους κυλίνδρους), ή μία λικνιζόμενη αεροτομή μπροστά από μία ακίνητη, ώστε να εξεταστεί η δυνατότητα αξιοποίησης του ομόρρου της λικνιζόμενης αεροτομής, για παραγωγή πρόωσης και από την ακίνητη, χωρίς επιπλέον απαίτηση ισχύος.

Βιβλιογραφία

- [1] Βουτσινάς, Σ. : *Μη-μόνιμη Αεροδυναμική, Αεροελαστικότητα, Αεροακουστική*. Πανεπιστημιακές Σημειώσεις.
- [2] Peskin, C.: *Flow patterns around heart valves: A numerical method*. Journal of Computational Physics, 10, pp. 252-271.
- [3] Thompson, F.J., Hammand, B.D.: *A survey of grid generation techniques and systems with emphasis on recent developments*. Surveys on Mathematics for Industry, 6, pp. 289-310.
- [4] Pinelli A., Naqavi I. Z., Piomelli U., Favier J.: *Immersed-boundary methods for general finite-difference and finite-volume Navier-Stokes solvers*. Journal of Computational Physics, Elsevier, 229(24), pp. 9073-9091.
- [5] Bergmann M., Hovnanian J., Iollo A.: *An accurate cartesian method for incompressible flows with moving boundaries*. Communications in Computational Physics, Global Science Press, 15(5), pp. 1266-1290.
- [6] Berger M., LeVeque R.: *An Adaptive Cartesian Mesh Algorithm for the Euler Equations in Arbitrary Geometries*, AIAA paper89-1930-CP, 1989.
- [7] Kim J., Kim D., and Choi H.: *An Immersed-Boundary Finite-Volume Method for Simulations of Flow in Complex Geometries*, Journal of Computational Physics, 171, pp. 132-150.
- [8] Breder, C. M. J.: *The Locomotion of fishes*, Zoologica 4, pp. 159-297, 1926.
- [9] Hoar W.S., Randall D.J.: *Fish Physiology Volume 7, Locomotion*, pp. 425-492.
- [10] Tytell D. E., Lauder V. G.: *The hydrodynamics of eel swimming I. Wake structure*, The Journal of Experimental Biology 207, pp. 1825-1841.
- [11] Lauder V. G., Tangorra J. L.: *Fish Locomotion: Biology and Robotics of Body and Fin-Based Movements*, 2015.
- [12] Van Vincent G., Antonissen E., Ulrike M. K., Booms R., Eding E., Verreth J., Van den Thillart G.: *Eel migration to the Sargasso: remarkably high swimming efficiency and low energy costs*, Journal of Experimental Biology, 208, pp. 1329-1335.
- [13] Samouchos K.D., Katsanoulis S.G., Giannakoglou K.C.: *Unsteady Adjoint to the cut-cell method using mesh adaptations on GPUs*, ECCOMAS CFD 2016 Conference 2016.
- [14] Σαμούχος, Κ.: *Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος σε Μη-οριόδετα Πλέγματα για Βελτιστοποίηση Στροβιλομηχανών*. Διδακτορική Διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π. (σε εξέλιξη).
- [15] Quirk, J.J.: *A Cartesian grid approach with hierarchical refinement for compressible flows*. NASA- CR-1 94938, 1994.

- [16] De Zeeuw D., Powell G.K.: *An Adaptively Refined Cartesian Mesh Solver for the Euler Equations*, Journal of Computational Physics, 104, pp. 56-68.
- [17] Γιαννάκογλου, Κ. Χ.: *Μεθοδοί Βελτιστοποίησης στις Στροβιλομηχανές*. Ε.Μ.Π., 2006.
- [18] Roe, P.: *Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*. Journal of Computational Physics, 43(2), pp. 357-372.
- [19] Chakravarthy, R.S.: *Development of Upwind Schemes for the Euler Equations*. Nasa-CR-4043, 1987.
- [20] Barth, T.J., Jespersen D.C.: *The design and application of upwind schemes on unstructured meshes*. AIAA paper 89-0366, January 1989.
- [21] Barth, T. J.: *Computational Fluid Dynamics*. Lecture Series 1900-04. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 1990.
- [22] Reynolds, O.: *Papers on Mechanical and Physical Subjects, Vol. 3, The SubMechanics of the Universe*. Cambridge University Press, 1903.
- [23] Courant R., Friedrichs K., Lewy H.: *Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik*. Mathematische Annalen, 100, pp. 32-74.
- [24] Γιαννάκογλου, Κ. Χ.: *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς*. Ε.Μ.Π., 2003.
- [25] Κατσανούλης, Σ. : *Προγραμματισμός Λογισμικού για την Επίλυση Μη-Μόνιμων Πεδίων Ροών με Κινούμενα Στερεά Όρια με τη Μέθοδο των Τεμνόμενων Κυψελών (Cut-Cell)*. Διπλωματική Εργασία., Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2015.
- [26] Jones K. D., Dohring, C. M. Platzer M. F.: *Experimental and computational investigation on the Knoller-Betz effect*. U.S. Naval Postgraduate School Monterey, California 93943. AIAA Journal 36(7), July 1998.
- [27] Ashraf M.A., Lai J.C.S., Young J.: *Numerical Analysis of flapping wing aerodynamics*. 16th Australasian Fluid Mechanics Conference Crown Plaza, Gold Coast, Australia 2-7 December 2007.
- [28] Eloy C.: *Optimal Strouhal number for swimming animals*, Preprint submitted to Journal of Fluids and Structures, 1 Feb 2011.
- [29] Mc Cormack P.: *Vortex, Molecular Spin & Nanovorticity. An Introduction*. 2012, VII, 136 p71.
- [30] Sfakiotakis M., Lane D.M., Davies J. B. C.: *Review of fish swimming modes for aquatic locomotion*. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 24(2), pp. 237-252.
- [31] Plininger B., Rachel A., Wiesner H., Ziegler, A. : *Anschauliche Mechanik: Vortrieb von Wassertieren*. 2005.
- [32] Webb P.W.: *The swimming energetics of trout I. Thrust and power output at cruising speeds*. Journal of Experimental Biology, 55, pp. 489-520.

- [33] Borazjani I, Sotiropoulos F.: *Numerical investigation of the hydrodynamics of anguilliform swimming in the transitional and inertial flow regimes*. The Journal of Experimental Biology, 212, pp. 576-592.
- [34] Lighthill M. J.: *Large-Amplitude Elongated-Body Theory of Fish Locomotion*. Proceedings of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences, 1971, pp. 125-38.
- [35] Tytell D. E.: *The hydrodynamics of eel swimming II. Effect of swimming speed*, The Journal of Experimental Biology, 207, pp. 3265-3279.
- [36] NASA, Langley Research Center, Turbulence Modelling Resource: *2D NACA 0012 Airfoil Validation Case*. http://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012_val.html
- [37] Μπεργελές, Γ.: *Υπολογιστική Ρευστομηχανική*. Συμείων, 2012.
- [38] Willinger, R.: *Numerische Strömungsberechnung von Thermischen Turbomaschinen*. Skriptum zur Vorlesung, TU Wien, 2012, p35.
- [39] Triantafyllou M.S., Triantafyllou G.S., Yue D.K.P.: *Hydrodynamics of Fishlike Swimming*. Annu. Rev. Fluid Mech., 32, pp. 33-53.
- [40] Hover F. S., Haugsdal O., Triantafyllou M.S.Q: *Effect of angle of attack profiles in flapping foil propulsion*. Journal of Fluids and Structures, 19, pp. 37-47.
- [41] Borazjani I, Daghooghi M.: *The fish tail motion forms an attached leading edge vortex*. Proc R Soc B, 280, 20122071.
- [42] Borazjani I, Daghooghi M.: *Numerical investigation of the hydrodynamics of carangiform swimming in the transitional and inertial flow regimes*. The Journal of Experimental Biology, 211, pp. 1541-1558.
- [43] Yang S., Luoy S., Liuz F.: *Optimization of Unstalled Pitching and Plunging Motion of an Airfoil*. 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, AIAA 2006-1055.