



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Διατύπωση και Προγραμματισμός της Τεχνικής της
Ισορροπίας των Αρμονικών σε Επιλύτη Ροής με τη
Μέθοδο των Τεμνομένων Κυψελών (Cut-Cell) για το
Ευθύ και το Συζυγές (Adjoint) Πρόβλημα

Διπλωματική Εργασία

Νικόλαος.Π.Μακρής

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2017

Ακρωνύμια

μδε/ΜΔΕ	Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις
ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΕΘΣ	Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
ΜΠΥΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

NTUA	National Technical University of Athens
PCopt	Parallel CFD & Optimization unit
CFD	Computational Fluid Dynamics
IBM	Immersed Boundary Method
IB	Immersed Boundary
FAE	Field Adjoint Equation
ABC	Adjoint Boundary Conditions
SD	Sensitivity Derivatives



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Διατύπωση και Προγραμματισμός της Τεχνικής της Ισορροπίας
των Αρμονικών σε Επιλύτη Ροής με τη Μέθοδο των
Τεμνομένων Κυψελών (Cut-Cell) για το Ευθύ και το Συζυγές
(Adjoint) Πρόβλημα

Διπλωματική Εργασία

Νικόλαος.Π.Μακρής

Επιβλέπων: Κ. Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2017

Περίληψη

Στη διπλωματική αυτή εργασία πραγματοποιείται ανάπτυξη-προγραμματισμός και πιστοποίηση λογισμικού για την αριθμητική πρόλεξη πεδίων ροής που εμφανίζουν χρονική περιοδικότητα, και τα οποία περιγράφονται από τις μη-μόνιμες διδιάστατες πεδιακές εξισώσεις ατρίβους ροής, κάνοντας χρήση της προσεγγιστικής Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών τόσο στο πρωτεύον (*primal*) όσο και στο συζυγές πρόβλημα (*adjoint*). Για τη διακριτοποίηση των πεδιακών εξισώσεων χρησιμοποιήθηκε λογισμικό παραγωγής μη-δομημένου και μη-οριόδετου πλέγματος που έχει αναπτυχθεί από την ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ, και το οποίο κάνει χρήση της Μεθόδου Τεμνομένων Κυψελών (*Cut-Cell Method*), δηλαδή, μιας ειδικής περίπτωσης της Μεθόδου Εμβαπτιζομένων Σωμάτων (*Immersed Boundary Methods*).

Πιο συγκεκριμένα, το λογισμικό που αναπτύχθηκε βρίσκει εφαρμογή στον τομέα της εξωτερικής αεροδυναμικής καθώς επιλύει φαινόμενα που προκαλούνται εξαιτίας της περιοδικής μεταβολής της γωνίας πρόσπτωσης στην υπό μελέτη γεωμετρία, η οποία στην εργασία αυτή είναι μια αεροτομή. Για την πιστοποίηση του λογισμικού πραγματοποιήθηκε σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα πιστοποιημένου επιλύτη που έχει αναπτυχθεί από την ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ και ο οποίος χρησιμοποιήθηκε ως βάση για το λογισμικό που αναπτύχθηκε. Τα αποτελέσματα αυτά αφορούν διαφορετικές περιπτώσεις διαταραχών, μεγέθους πλέγματος αλλά και αριθμού αρμονικών ώστε να εξαχθούν ασφαλή συμπεράσματα ως προς την ακρίβεια της μεθόδου που μελετάται αλλά και του κώδικα που αναπτύχθηκε. Επιπλέον, πραγματοποιείται διερεύνηση της συμπεριφοράς της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών σε διαδικασία βελτιστοποίησης, κάνοντας χρήση της μεθόδου τόσο στο πρωτεύον όσο και στο συζυγές πρόβλημα. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι η ανάπτυξη του λογισμικού πραγματοποιήθηκε στη γλώσσα προγραμματισμού C++.



National Technical University of Athens
School of Mechanical Engineering
Fluids Section
Parallel CFD & Optimization Unit

Formulation and Programming of the Harmonic Balance Technique for the Primal and Adjoint Problem using the Cut-Cell Method

Diploma Thesis

Nikolaos.P.Makris

Supervisor: K. C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, 2017

Abstract

The subject of this diploma thesis is the development-programming and validation of software that is able to cope with periodic phenomena, which are described by unsteady 2D equations of inviscid flow, by using Harmonic Balance Method on both the primal and adjoint problem. The discretization of the field flow equations was made by using a software, developed in PCopt of NTUA, which generates unstructured and non boundary-fitted grids. Specifically, this software makes use of the Cut-Cell method which belongs to the wide class of Immersed Boundary Methods.

The software finds use in external aerodynamics problems where the involved geometries are airfoils and the flow unsteadiness is due to the periodic oscillation of the infinite flow angle. The developed software constitutes an expansion of an existing code of PCopt, which is also the exact software that was used during the validation process. Comparisons are made for different periodic changes in the flow angle, different grid sizes and numerous number of harmonics. Furthermore, the use of Harmonic Balance Method in both the primal and the adjoint problem was studied in order to draw important conclusions as far as the advantages and disadvantages of using Harmonic Balance Method in optimization are concerned. It should be noted that the software development was made in C++.

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Κ.Χ. Γιαννάκογλου για την ανάθεση του συγκεκριμένου θέματος καθώς και για την πολύ καλή συνεργασία που είχαμε κατά τη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας. Οι συμβουλές του καθώς και η προθυμία του για επίλυση αποριών διευκόλυναν σε μεγάλο βαθμό την εκπόνηση της εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υπ. διδάκτορα Κωνσταντίνο Σαμούχο καθώς αφιέρωσε πολύτιμο χρόνο για επίλυση αποριών που ανέκυπταν κατά τη διάρκεια της εργασίας.

Τέλος, δεν θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω την οικογένεια μου. Ειδικότερα, θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου οι οποίοι με στηρίζουν σε κάθε μου προσπάθεια καθώς και τον αδερφό μου Γιώργο για τη βοήθεια αλλά και τις πολύτιμες συμβουλές που μου προσφέρει όλα αυτά τα χρόνια.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Δομή Διπλωματικής Εργασίας	1
2	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική και Αιτιοκρατικές Μέθοδοι Βελτιστοποίησης	3
2.1	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική και Βελτιστοποίηση	3
2.2	Συζυγείς Μέθοδοι	5
2.2.1	Βασικές Έννοιες	6
2.3	Συζυγείς Μέθοδοι και Απαιτούμενη Μνήμη	7
3	Μέθοδοι Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων	9
3.1	Βασικά Χαρακτηριστικά	9
3.2	Κατηγορίες Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων	11
3.3	Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων	12
3.4	Η Μέθοδος των Τεμνομένων Κυψελών	12
4	Διακριτοποίηση των Πεδιακών Εξισώσεων Ατριβούς Ροής	19
4.1	Εξισώσεις Euler	19
4.2	Διακριτοποίηση Πεδιακών Εξισώσεων	20
4.2.1	Διακριτοποίηση του Χωρικού Όρου	21
4.2.2	Διακριτοποίηση του Χρονικού Όρου	31
4.2.3	Εισαγωγή του Ψευδο-Χρονικού Όρου $\frac{\partial W_i}{\partial \tau}$	32
4.2.4	Τελική Έκφραση των Διακριτοποιημένων ΜΔΕ	33
4.3	Επίλυση των Διακριτοποιημένων Πεδιακών Εξισώσεων	33
4.3.1	Υπολογισμός της Παραγώγου $\frac{\partial R_i}{\partial W_j}$	35
4.3.2	Διατύπωση Συστήματος των Διακριτοποιημένων Εξισώσεων	41
4.3.3	Οριακές Συνθήκες του Προβλήματος	41
4.3.4	Αλγόριθμος Επίλυσης των Διακριτοποιημένων Εξισώσεων	43

5	Η Μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών	45
5.1	Εισαγωγή	45
5.2	Μαθηματική Θεμελίωση	47
5.2.1	Παρουσίαση της Μεθόδου για $N_H = 2$ Αρμονικές	49
5.2.2	Γενίκευση της Μεθόδου για Τυχάιο Αριθμό Αρμονικών	59
5.3	Συμπεράσματα, Παρατηρήσεις και Περιγραφή Διαδικασίας	60
5.3.1	Περιγραφή Διαδικασίας	60
5.3.2	Παρατηρήσεις	61
6	Εφαρμογή της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών στις Euler Εξισώσεις	63
6.1	Εξισώσεις Ισορροπίας των Αρμονικών για Ατριβή Ροή	63
6.2	Διακριτοποίηση των Εξισώσεων Ισορροπίας των Αρμονικών	64
6.3	Επίλυση των Διακριτοποιημένων Εξισώσεων της Ισορροπίας των Αρμονικών	66
6.4	Υπολογισμός των Πεδίων των Αρμονικών	68
6.5	Αλγόριθμος Επίλυσης των Εξισώσεων Ισορροπίας των Αρμονικών	70
7	Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος για Μη-Μόνιμη Ροή Ατριβούς Συμπίεστου Ρευστού	73
7.1	Διατύπωση Αντικειμενικής Συνάρτησης	73
7.2	Συνοπτική Παρουσίαση της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου	75
7.3	Εφαρμογή της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών στις Συζυγείς Εξισώσεις	77
8	Προβλήματα Εξωτερικής Αεροδυναμικής	79
8.1	Απλή Ημιτονοειδής Διαταραχή - Εφαρμογή στην Αεροτομή NACA 6409 .	79
8.2	Διηχητική Ροή - Εφαρμογή στη Μεμονωμένη Αεροτομή NACA 0006 . .	88
8.3	Σύνθετη Διαταραχή - Εφαρμογή στην Αεροτομή NACA 0016	95
8.4	Πρόβλημα Βελτιστοποίησης - Εφαρμογή σε Τυχάια Αεροτομή	101
9	Ανακεφαλαίωση, Συμπεράσματα και Προτάσεις για Μελλοντικές Εργασίες	111
9.1	Συμπεράσματα	112
9.2	Προτάσεις Για Μελλοντικές Εργασίες	113

Βιβλιογραφία

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στόχος της διπλωματικής αυτής εργασίας είναι η ανάπτυξη και ο προγραμματισμός λογισμικού για την επίλυση τόσο του χρονικά μη-μόνιμου πρωτεύοντος (*primal*) προβλήματος ατρίβους ροής, όσο και για την επίλυση του αντίστοιχου συζυγούς (*adjoint*). Η τεχνική που χρησιμοποιείται για την επίλυση των προβλημάτων αυτών ονομάζεται Μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών (*Harmonic Balance Method*) και αποτελεί μια προσεγγιστική μέθοδο. Η μέθοδος αυτή βρίσκει εφαρμογή σε πεδία ροής που εμφανίζουν χρονική περιοδικότητα, επιτρέποντας την επίλυση τους σε σημαντικά μικρότερο υπολογιστικό χρόνο έναντι των κλασικών επιλυτών που κάνουν χρήση της μεθόδου χρονο-προέλασης.

Η συγκεκριμένη μέθοδος κάνει χρήση σειρών Fourier ώστε να περιγράψει την τελική λύση του φαινομένου ροής. Το πλήθος των αρμονικών που χρησιμοποιείται κάθε φορά ποικίλει ανάλογα με το περιοδικό φαινόμενο ροής που μελετάται, ενώ είναι άμεσα συνδεδεμένο με την περίοδο, ισοδύναμα τη συχνότητα, της διαταραχής που εφαρμόζεται. Πιθανή χρήση λιγότερων των απαιτούμενων αρμονικών οδηγεί σε λήψη ανακριβών αποτελεσμάτων, ενώ η χρήση περισσότερων των απαιτούμενων αρμονικών αυξάνει σημαντικά το υπολογιστικό κόστος.

Για τη διακριτοποίηση των πεδριακών εξισώσεων τόσο του πρωτεύοντος όσο και του συζυγούς προβλήματος, χρησιμοποιείται η Μέθοδος των Τεμνομένων Κυψελών (*Cut-Cell Method*) η οποία αποτελεί ειδική κατηγορία των Διακριτών Μεθόδων Εμβαπτιζομένων Σωμάτων (*Discreet Immersed Boundary Methods*). Το λογισμικό που αφορά τη συγκεκριμένη μέθοδο δεν αναπτύχθηκε στην εργασία αυτή καθώς χρησιμοποιήθηκε λογισμικό που έχει ήδη αναπτυχθεί από την ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ [1].

1.1 Δομή Διπλωματικής Εργασίας

Η διπλωματική αυτή εργασία αποτελείται συνολικά από εννέα κεφάλαια. Ακολουθεί περιληπτικά το περιεχόμενο καθενός από αυτά:

- Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί την εισαγωγή της εργασίας όπου και περιγράφεται περιληπτικά ο στόχος και η δομή της.
 - Στο δεύτερο κεφάλαιο παρατίθενται βασικές έννοιες της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής καθώς και της Βελτιστοποίησης.
 - Στο τρίτο κεφάλαιο πραγματοποιείται μια εκτενής ανάλυση των μη-οριόδωτων πλεγμάτων. Ειδικότερα, παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά τους καθώς και τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα που εμφανίζουν σε σχέση με τα οριόδετα πλέγματα. Επιπλέον, πραγματοποιείται ανάλυση της μεθόδου Τεμνομένων Κυψελών (*Cut-Cell Method*) η οποία και χρησιμοποιείται στην εργασία, ενώ παρατίθεται ο αναλυτικός αλγόριθμος παραγωγής πλέγματος.
 - Στο κεφάλαιο τέσσερα πραγματοποιείται εκτενής ανάλυση της διακριτοποίησης των χρονικά μη-μόνιμων εξισώσεων ατρίβους ροής. Επίσης, παρουσιάζεται η μέθοδος επίλυσης για την περίπτωση της μεθόδου χρονο-προέλασης, ενώ παρατίθεται και αντίστοιχος αλγόριθμος.
 - Στο πέμπτο κεφάλαιο διατυπώνεται η Μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών. Πιο συγκεκριμένα, πραγματοποιείται αναλυτική απόδειξη της μεθόδου αρχικά για χρήση δύο αρμονικών, ενώ στη συνέχεια πραγματοποιείται γενίκευση για τυχαίο αριθμό αρμονικών. Το συγκεκριμένο κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παράθεση της *εξίσωσης της ισορροπίας των αρμονικών* η οποία στην πραγματικότητα αντιπροσωπεύει σύστημα πεπλεγμένων **χρονικά μόνιμων** διαφορικών εξισώσεων, είτε συνήθων είτε μερικών.
 - Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η εφαρμογή της μεθόδου στις Euler εξισώσεις ενώ παρουσιάζεται η διαδικασία διακριτοποίησης και επίλυσης των νέων εξισώσεων. Το κεφάλαιο αυτό αντλεί σημαντικές πληροφορίες από το τέταρτο κεφάλαιο.
 - Στο έβδομο κεφάλαιο πραγματοποιείται συνοπτική παρουσίαση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, ενώ πραγματοποιείται εφαρμογή της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών στις συζυγείς εξισώσεις.
 - Το όγδοο κεφάλαιο περιέχει τα αποτελέσματα από την εφαρμογή της μεθόδου σε τέσσερα προβλήματα εξωτερικής αεροδυναμικής. Τα τρία αφορούν την εφαρμογή στην επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος ενώ στο τέταρτο πραγματοποιείται βελτιστοποίηση μορφής. Κάθε φορά τα αποτελέσματα της μεθόδου συγκρίνονται με τα αποτελέσματα αναφοράς επιλύτη της ΜΠΥΡ&Β.
 - Στο ένατο και τελευταίο κεφάλαιο πραγματοποιείται ανακεφαλαίωση, παρατίθενται τα βασικά συμπεράσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου σε προβλήματα εξωτερικής αεροδυναμικής, ενώ γίνονται προτάσεις για μελλοντικές εργασίες που θα επεκτείνουν την μέθοδο σε προβλήματα που δεν μελετήθηκαν στην εργασία αυτή.
-

Κεφάλαιο 2

Υπολογιστική Ρευστοδυναμική και Αιτιοκρατικές Μέθοδοι Βελτιστοποίησης

2.1 Υπολογιστική Ρευστοδυναμική και Βελτιστοποίηση

Η Υπολογιστική Ρευστοδυναμική (*Computational Fluid Dynamics - CFD*) αποτελεί τον τομέα της μηχανικής των ρευστών που κάνει χρήση αριθμητικών μεθόδων με σκοπό την αριθμητική πρόλεξη πεδίων ροής. Οι συγκεκριμένες ροές περιγράφονται πλήρως από διαφορικές εξισώσεις, όπως λ.χ. οι εξισώσεις Navier-Stokes, οι οποίες είναι αδύνατο να επιλυθούν αναλυτικά ώστε να εξαχθούν γενικοί τύποι που θα μπορούν να κατασκευάσουν το πεδίο σε κάθε σημείο του χώρου. Εξαιτίας αυτής της αδυναμίας, χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι οι οποίες επιτρέπουν την προσεγγιστική επίλυση των εν λόγω διαφορικών εξισώσεων.

Για να καταστεί εφικτή η χρήση των συγκεκριμένων αριθμητικών μεθόδων απαιτείται η χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή, γεγονός που εξηγεί το λόγο για τον οποίο η υπολογιστική ρευστοδυναμική προοδεύει σημαντικά από τα μέσα του 20ού αιώνα μέχρι σήμερα, όπως ακριβώς δηλαδή συμβαίνει και στον τομέα των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Σε μεγάλο βαθμό, η ακρίβεια μιας υπολογιστικής μεθόδου είναι άμεσα συνδεδεμένη με την υπολογιστική ισχύ που απαιτεί. Κατά συνέπεια, η διαρκής αύξηση της υπολογιστικής ισχύος επιτρέπει την ανάπτυξη μεθόδων μεγαλύτερης ακρίβειας, αλλά και την επίλυση προβλημάτων που μέχρι πριν από λίγα χρόνια ήταν αδύνατο να επιλυθούν.

Ένας ακόμη κλάδος που αναπτύσσεται ταυτόχρονα με την Υπολογιστική Ρευστοδυναμική, και ο οποίος βασίζεται κατά κόρον στον ηλεκτρονικό υπολογιστή, είναι αυτός της Βελτιστοποίησης. Στη σημερινή εποχή, σκοπός του μηχανικού δεν είναι μόνο να παράξει

ένα προϊόν το οποίο θα επιτελεί το σκοπό για τον οποίο δημιουργήθηκε, αλλά επίσης βασικός του στόχος είναι το εν λόγω προϊόν να δουλεύει βέλτιστα. Πιο συγκεκριμένα, στα προβλήματα της αεροδυναμικής εμφανίζεται συνήθως πολλαπλά άπειρο πλήθος υποψηφίων λύσεων με αποτέλεσμα ο κλάδος της βελτιστοποίησης να στοχεύει στον εντοπισμό και, προφανώς, στη χρήση της βέλτιστης από όλες τις διαθέσιμες.

Για να εντοπιστεί η βέλτιστη λύση πρέπει πρώτα να γίνει ανίχνευση του χώρου των υποψηφίων λύσεων μέσω μιας μεθόδου βελτιστοποίησης. Προφανώς, οι συγκεκριμένες λύσεις αφορούν έναν ή περισσότερους στόχους που έχουν τεθεί εκ των προτέρων και οι οποίοι αφορούν την ποσότητα ως προς την οποία επιθυμείται να πραγματοποιηθεί βελτιστοποίηση, όπως για παράδειγμα η μεγιστοποίηση της άνωσης μιας αεροτομής. Το επόμενο βήμα αφορά την αξιολόγηση των ανιχνευθέντων λύσεων ως προς το στόχο ή τους στόχους. Για τον σκοπό αυτό, απαιτείται η χρήση ενός δεύτερου υπολογιστικού εργαλείου που θα αξιολογεί και θα βαθμολογεί ως προς τους στόχους που τέθηκαν κάθε υποψήφια λύση [2]. Για λόγους πληρότητας αναφέρεται ότι η αξιολόγηση μπορεί να πραγματοποιηθεί και με την εκτέλεση πειράματος, όπως λ.χ. με τη μελέτη ενός μοντέλου υπό κλίμακα στην αεροσήραγγα, χωρίς δηλαδή να γίνει χρήση κάποιου λογισμικού αξιολόγησης.

Πριν από λίγες δεκαετίες, κυρίως λόγω της μειωμένης υπολογιστικής ισχύος, η βελτιστοποίηση μορφών ακολουθούσε εντελώς διαφορετική διαδικασία από ότι σήμερα. Πιο συγκεκριμένα, η βελτιστοποίηση βασιζόταν κατά κύριο λόγο στην εμπειρία του μηχανικού ο οποίος όριζε, συνήθως, μια κατανομή πίεσης ή ταχύτητας γύρω από τη γεωμετρία η οποία θεωρούσε ότι θα οδηγούσε στην επιθυμητή αεροδυναμική συμπεριφορά. Με πιο απλά λόγια, αναζητούνταν η γεωμετρία εκείνη που για δεδομένες συνθήκες λειτουργίας θα παρήγαγε την κατανομή πίεσης ή ταχύτητας που είχε οριστεί. Η διαδικασία βελτιστοποίησης που ακολουθείται πλέον για τη βελτιστοποίηση μορφών, που άλλωστε αφορά αυτήν την εργασία, περιλαμβάνει τη μαθηματική διατύπωση της συνάρτησης κόστους F_{obj} , ή αλλιώς αντικειμενική συνάρτηση, η οποία είτε πρέπει να ελαχιστοποιηθεί είτε να μεγιστοποιηθεί. Για τον σκοπό αυτό, επιλύονται αριθμητικά οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα οπότε και αξιολογείται η υπό μελέτη μορφή ως προς την ικανοποίηση του στόχου που έχει τεθεί.

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται σήμερα στη βελτιστοποίηση μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες: α) στις στοχαστικές μεθόδους (*Stochastic optimization - SO*) β) στις αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης (*Deterministic optimization*). Οι στοχαστικές μέθοδοι βελτιστοποίησης χρησιμοποιούν στοιχεία τυχαίας ή οργανωμένα τυχαίας αναζήτησης της βέλτιστης λύσης [2], με πιο γνωστή μέθοδο να αποτελεί αυτή των εξελικτικών αλγορίθμων (*Evolutionary algorithms*). Αντίθετα, μια αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης χρησιμοποιεί τη γενικευμένη έννοια της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης, τιμές της οποίας καλείται να υπολογίσει ή να προσεγγίσει [2].

Σε αυτό το σημείο, καλό θα ήταν να τονιστεί ότι οι στοχαστικές μέθοδοι βελτιστοποίησης διαθέτουν τη δυνατότητα εντοπισμού του καθολικού ακρότατου, ανεξαρτήτως του σημείου εκκίνησης, της υπό μελέτη συνάρτησης στόχου, ενώ παράλληλα μπορούν να θεωρηθούν γενικές καθώς μπορούν σχετικά εύκολα να επεκταθούν και σε άλλα προβλήματα. Το βασικό τους μειονέκτημα αφορά την ταχύτητα σύγκλισης η οποία είναι αρκετά μεγαλύτερη από αυτή των αιτιοκρατικών μεθόδων. Αντίθετα, οι αιτιοκρατικές μέθοδοι προσφέρουν με-

γαλύτερες ταχύτητες σύγκλισης με κίνδυνο όμως τη σύγκλιση σε λύση η οποία αποτελεί τοπικό και όχι ολικό ακρότατο. Επίσης, η ανάπτυξη μια αιτιοκρατικής μεθόδου απαιτεί, από πλευράς προγραμματιστικού χρόνου, μεγαλύτερο χρόνο επένδυσης [2]. Τέλος, σημειώνεται ότι στη διπλωματική αυτή εργασία θα χρησιμοποιηθούν μόνο αιτιοκρατικές μέθοδοι βελτιστοποίησης.

2.2 Συζυγείς Μέθοδοι

Οι συζυγείς διατυπώσεις είναι μαθηματικά-υπολογιστικά εργαλεία υπολογισμού της κλίσης μιας αντικειμενικής συνάρτησης, εξασφαλίζοντας ταυτόχρονα την ικανοποίηση των βασικών εξισώσεων του προβλήματος (εξισώσεις Euler ή Navier-Stokes) [2]. Από τον παραπάνω ορισμό γίνεται κατανοητό ότι ο όρος «συζυγείς μέθοδοι» περιλαμβάνει τον υπολογισμό της κλίσης, αλλά όχι τη διαδικασία ελαχιστοποίησης, ή μεγιστοποίησης, της αντικειμενικής συνάρτησης. Για λόγους συντομίας όμως, πολλές φορές στη βιβλιογραφία ο εν λόγω όρος περιλαμβάνει το σύνολο της διαδικασίας βελτιστοποίησης, γεγονός που θα υιοθετηθεί και στη διπλωματική αυτή εργασία.

Για να πραγματοποιηθεί βελτιστοποίηση μορφής, απαραίτητη είναι η παραμετροποίηση της υπό μελέτη γεωμετρίας κάνοντας χρήση κάποιας κατάλληλης μεθόδου. Η συνηθέστερη μέθοδος, η οποία χρησιμοποιείται και στην εργασία αυτή, είναι αυτή των πολυωνύμων Bézier-Bernstein. Πιο συγκεκριμένα, η συγκεκριμένη μέθοδος χρησιμοποιεί πεπερασμένο αριθμό σημείων ελέγχου (*control points*) b_q μέσω των οποίων μπορεί να γίνει σύνθεση της υπό μελέτη γεωμετρίας. Πιθανή μετακίνηση των εν λόγω σημείων έχει ως αποτέλεσμα την τροποποίηση του σχήματος της γεωμετρίας, γεγονός που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι συντεταγμένες των εν λόγω σημείων αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού ή αλλιώς βαθμούς ελευθερίας του προβλήματος βελτιστοποίησης. Το βασικό πλεονέκτημα των συζυγών μεθόδων είναι η ανεξαρτησία του υπολογιστικού κόστους από το πλήθος N των μεταβλητών σχεδιασμού, με αποτέλεσμα πλέον το κόστος υπολογισμού των παραγώγων της αντικειμενικής να είναι περίπου ίσο με το κόστος επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων. Σε αντίθεση με τις συζυγείς μεθόδους, στις στοχαστικές μεθόδους το υπολογιστικό κόστος είναι ανάλογο των μεταβλητών σχεδιασμού με συνέπεια πολλές φορές το κόστος χρήσης τους να κρίνεται απαγορευτικό.

Για τον υπολογισμό των επιθυμητών παραγώγων, οι συζυγείς μέθοδοι δεν κάνουν χρήση μόνο της αντικειμενικής συνάρτησης, αλλά μέσω αυτής παράγουν την επαυξημένη αντικειμενική F_{aug} η οποία περιέχει την αντικειμενική συνάρτηση καθώς και τις εξισώσεις ροής πολλαπλασιασμένες με τις συζυγείς μεταβλητές. Μέσω αυτής εξάγονται οι διαφορικές εξισώσεις του συζυγούς προβλήματος οι οποίες όταν λυθούν επιτρέπουν τον υπολογισμό των επιθυμητών παραγώγων. Οι συζυγείς μέθοδοι χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: τη διακριτή συζυγή (*discrete adjoint method*) και τη συνεχή συζυγή μέθοδο (*continuous adjoint method*). Στη διακριτή συζυγή μέθοδο η αντικειμενική συνάρτηση καθώς και οι εξισώσεις ροής πρώτα διακριτοποιούνται και γραμμικοποιούνται και, στη συνέχεια, μέσω κατάλληλης διαδικασίας η οποία έχει ως αφετηρία την παραγωγή των διακριτοποιημένων και γραμμικοποιημένων σχέσεων, παράγονται οι εξισώσεις του συζυγούς προβλήματος σε μητρική γραφή, οι οποίες και επιλύονται (*first-discretize-then-differentiate*). Από την άλλη πλευρά, η συνεχής συζυγής μέθοδος ακολουθεί ανάποδη διαδικασία καθώς πρώτα

εξάγεται ο γενικός τύπος των συζυγών εξισώσεων και στη συνέχεια, πραγματοποιείται διακριτοποίηση και επίλυση τους (*first-differentiate-then-discretize*). Το γεγονός ότι η συνεχής συζυγής μέθοδος παράγει την αναλυτική έκφραση των συζυγών εξισώσεων αποτελεί ένα σημαντικό πλεονέκτημα έναντι της διακριτής μεθόδου, καθώς με αυτόν τον τρόπο μπορεί να κατανοηθεί και η φυσική υπόσταση του συζυγούς προβλήματος. Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε ως βάση, [1], και επεκτάθηκε στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας κάνει χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου.

2.2.1 Βασικές Έννοιες

Παρατίθενται οι ορισμοί βασικών όρων των συζυγών μεθόδων που θα χρησιμοποιούνται στη συνέχεια της διπλωματικής εργασίας, και οι οποίοι μέχρι αυτό το σημείο χρησιμοποιούνταν είτε παραθέτοντας την επεξήγηση, είτε αυθαίρετα λόγω της ευκόλως εννοούμενης σημασίας τους.

- Πρωτεύον Πρόβλημα (*Primal Problem*): Ως πρωτεύον πρόβλημα ορίζεται το φαινόμενο ροής που μελετάται και το οποίο περιγράφεται από τις πεδιακές εξισώσεις ροής σε συνδυασμό με τις οριακές συνθήκες.
- Συζυγές Πρόβλημα (*Adjoint Problem*): Ως συζυγές πρόβλημα ορίζεται το φαινόμενο που περιγράφεται από τις συζυγείς πεδιακές εξισώσεις και τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες. Αξίζει να σημειωθεί, ότι η φυσική σημασία του συζυγούς προβλήματος, αν και υπαρκτή, ποτέ δεν εκφράζει κάποιο γνωστό φυσικό φαινόμενο, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να γίνει πλήρως κατανοητή.
- Συζυγείς Πεδιακές Εξισώσεις (*Adjoint Equations - AE*): Οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις είναι οι διαφορικές εξισώσεις, είτε συνήθεις είτε μερικές, οι οποίες περιγράφουν το συζυγές πρόβλημα και οι οποίες προκύπτουν ύστερα από κατάλληλη ανάλυση, η οποία παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 7.
- Συζυγείς Οριακές Συνθήκες (*Adjoint Boundary Conditions - ABC*): Οι συζυγείς οριακές συνθήκες επιτελούν ακριβώς τον ίδιο σκοπό με τις αντίστοιχες του πρωτεύοντος προβλήματος οπότε και δεν επιδέχονται περαιτέρω ανάλυσης.
- Συνάρτηση Κόστους/Στόχου - Αντικειμενική Συνάρτηση (F_{obj}): Οποιαδήποτε από τις παραπάνω εκφράσεις περιγράφει την ίδια συνάρτηση. Η συγκεκριμένη συνάρτηση αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση της ποσότητας ως προς την οποία επιθυμείται να γίνει βελτιστοποίηση.
- Μεταβλητές Σχεδιασμού/Βαθμοί Ελευθερίας (b_q): Αποτελούν τα μεγέθη εκείνα των οποίων αναζητούνται κατάλληλες τιμές ώστε να ελαχιστοποιηθεί ή να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση στόχου. Για παράδειγμα, στην περίπτωση βελτιστοποίησης μορφής ως μεταβλητή σχεδιασμού θα μπορούσε να οριστεί το πάχος ή το μήκος της γεωμετρίας.
- Παράγωγοι Ευαισθησίας (*Sensitivity Derivatives - SD*): Οι παράγωγοι ευαισθησίας είναι οι παράγωγοι της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς κάθε μεταβλητή σχεδιασμού ξεχωριστά. Χρησιμοποιούνται για την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού κάνοντας χρήση κάποιας μεθόδου ανανέωσης όπως λ.χ. τη μέθοδο απότομης καθόδου (*steepest descent*) ή μια μέθοδο (προσεγγιστική ή ακριβή) Newton.

- Συζυγείς Μεταβλητές (Ψ): Οι συζυγείς μεταβλητές για το συζυγές πρόβλημα αποτελούν ό,τι και οι μεταβλητές ροής \mathbf{W} για το πρωτεύον πρόβλημα, δηλαδή, αποτελούν τα μεγέθη εκείνα που περιγράφουν πλήρως τη φύση του συζυγούς προβλήματος.
- Επαυξημένη Αντικειμενική Συνάρτηση (F_{aug}): Η επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση αποτελείται από την αντικειμενική συνάρτηση, καθώς και από τις πεδριακές εξισώσεις του πρωτεύοντος προβλήματος πολλαπλασιασμένες με τις συζυγείς μεταβλητές Ψ .

2.3 Συζυγείς Μέθοδοι και Απαιτούμενη Μνήμη

Βασικό χαρακτηριστικό των συζυγών μεθόδων αποτελεί η ανάγκη χρήσης πρωτευόντων μεγεθών, δηλαδή πεδίων (λ.χ. ταχύτητα, πίεση κ.λπ.) που υπολογίζονται από τις εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή, κατά την επίλυση του συζυγούς προβλήματος. Μάλιστα, το μη-μόνιμο συζυγές πρόβλημα επιλύεται αντίθετα στο χρόνο με αποτέλεσμα η διαδικασία επίλυσης του πρωτεύοντος και του συζυγούς προβλήματος να μην μπορεί να παραλληλοποιηθεί μαζί. Το γεγονός αυτό, αφενός υποδηλώνει ότι ο απαιτούμενος χρόνος ενός κύκλου βελτιστοποίησης θα ισούται περίπου με δύο χρονικές μονάδες [2], όπου ως χρονική μονάδα ορίζεται ο απαιτούμενος χρόνος επίλυσης του πρωτεύοντος προβλήματος, και αφετέρου σημαίνει ότι απαιτείται η αποθήκευση ολόκληρου του πρωτεύοντος προβλήματος. Το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό αποτελεί ίσως το σημαντικότερο μειονέκτημα των συγκεκριμένων μεθόδων καθώς σε πολύπλοκες εφαρμογές είναι αδύνατο να αποθηκευτούν όλα τα παραγόμενα πεδία.

Μια αποτελεσματική μέθοδος μείωσης της απαιτούμενης μνήμης είναι αυτή των δεικτών μνήμης (*checkpointing*) [4]. Με τη μέθοδο αυτή, πραγματοποιείται επιλεκτική αποθήκευση του πρωτεύοντος προβλήματος σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Κατά τη διάρκεια της επίλυσης του συζυγούς προβλήματος, όταν απαιτείται η χρήση πεδίων ροής που δεν έχουν αποθηκευτεί, πραγματοποιείται εκ νέου υπολογισμός του συγκεκριμένου πεδίου ξεκινώντας την επίλυση από την κοντινότερη αποθηκευμένη χρονική στιγμή [20]. Μια ακόμη μέθοδος που έχει αναπτυχθεί στην ΜΠΥΡ&Β, είναι αυτή του Σταδιακού Ίδιο-Γενικευμένου Διαχωρισμού (*Incremental Proper Generalized Decomposition - PGD*), [11], η οποία επιτρέπει τη συμπίεση της αποθηκευόμενης πληροφορίας με αποτέλεσμα την εξοικονόμηση μνήμης. Τέλος, σε περίπτωση που το υπό μελέτη φαινόμενο είναι περιοδικό, υπάρχει η δυνατότητα χρήσης της Μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών (*Harmonic Balance Method*) η οποία αποτελεί αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας οπότε και θα αναλυθεί σε επόμενο κεφάλαιο.

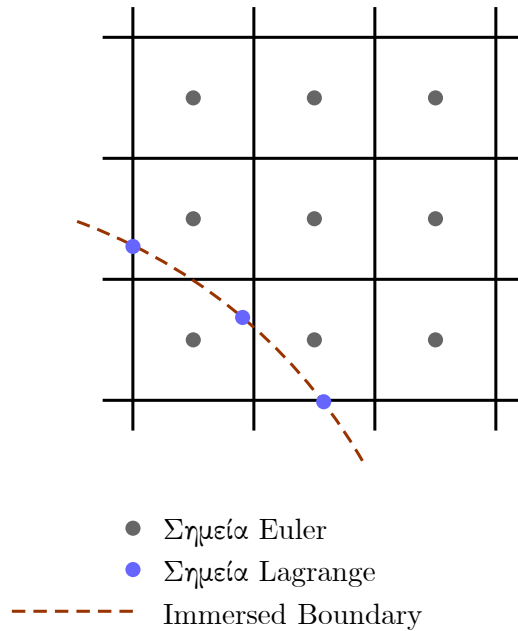
Κεφάλαιο 3

Μέθοδοι Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων

3.1 Βασικά Χαρακτηριστικά

Η μέθοδος των μη-οριόδετων πλεγμάτων (*Immersed Boundary Method - IBM*) αναπτύχθηκε από τον Perskin το 1972, με σκοπό την προσομοίωση της καρδιακής λειτουργίας και της ροής του αίματος διαμέσου της καρδιάς [18]. Η εν λόγω μέθοδος υπήρξε ιδιαίτερα πρωτοποριακή καθώς η φιλοσοφία της διέφερε αισθητά με αυτή των ήδη υπάρχουσών μεθόδων οριόδετων πλεγμάτων (*Body-fitted Methods*). Πιο συγκεκριμένα, ενώ στις μεθόδους οριόδετων πλεγμάτων το παραγόμενο πλέγμα προσαρμόζοταν στην υπό μελέτη γεωμετρία, στις μεθόδους μη-οριόδετων πλεγμάτων η γεωμετρία, που στην πρώτη εφαρμογή της μεθόδου ήταν η καρδιά, βυθιζόταν μέσα στο καρτεσιανό πλέγμα (*cartesian grid*) που είχε παραχθεί. Βέβαια, όπως θα φανεί και παρακάτω που θα ακολουθήσει εκτενής ανάλυση αυτών των μεθόδων, οι εξισώσεις ροής αναμένεται να τροποποιηθούν καθώς πρέπει να ληφθεί υπόψη και ο τρόπος που επιδρούν τα τοιχώματα της γεωμετρίας στη ροή.

Γίνεται αντιληπτό ότι καθώς η γεωμετρία βυθίζεται εντός του πλέγματος, άλλες υπολογιστικές κυψέλες ανήκουν αποκλειστικά στη γεωμετρία, άλλες ανήκουν αποκλειστικά στη ροή, ενώ υπάρχουν και αυτές που τέμνονται από τη γεωμετρία με αποτέλεσμα ένα τμήμα τους να ανήκει σε αυτή, ενώ το υπόλοιπο να ανήκει στη ροή. Στις υπολογιστικές κυψέλες που ανήκουν στη ροή, ο προσδιορισμός των ροϊκών μεγεθών του πεδίου πραγματοποιείται με μεταβλητές Euler (*Eulerian specification of the flow field*), δηλαδή, θεωρείται ότι σε κάθε υπολογιστική κυψέλη υπάρχει ακίνητος παρατηρητής που παρακολουθεί τη ροή που εισέρχεται και εξέρχεται από αυτήν. Αντίθετα, για την περιγραφή της κίνησης του στερεού υιοθετούνται οι μεταβλητές Lagrange, όπου η μεταβολή της θέσης της γεωμετρίας καθορίζεται από τον παρατηρητή που συμμετέχει στην κίνηση της. Στο σχήμα 3.1.1 παρουσιάζονται εποπτικά όσα αναφέρθηκαν μέχρι τώρα.



Σχήμα 3.1.1: Αναπαράσταση μιας περιοχής ενός τυχαίου πλέγματος. Παρατηρείται ότι η γεωμετρία «βυθίζεται» εντός των υπολογιστικών κυψελών, γεγονός που αποτελεί το χαρακτηριστικό των IB Μεθόδων. Επίσης, απεικονίζονται οι κόμβοι των κυψελών που κάνουν χρήση της Euler περιγραφής της ροής, καθώς και οι κόμβοι της γεωμετρίας που χρησιμοποιούν Lagrange περιγραφή.

Στην περίπτωση των οριόδετων πλεγμάτων, η διαδικασία που ακολουθείται για την κατασκευή του πλέγματος περιλαμβάνει τα παρακάτω δύο βήματα:

- i. Παραγωγή επιφανειακού πλέγματος που καλύπτει πλήρως την υπό μελέτη γεωμετρία, με σκοπό τη χρήση του ως οριακή συνθήκη για το πλέγμα που θα κατασκευαστεί για τον χώρο εκτός της αεροτομή όπου και υφίσταται η ροή.
- ii. Διακριτοποίηση των εξισώσεων που περιγράφουν τη ροή, είτε με χρήση πεπερασμένων διαφορών (*finite-difference method*), αν μελετώνται 3Δ γεωμετρίες, είτε με χρήση πεπερασμένων στοιχείων (*finite-element method*) είτε, τέλος, με χρήση πεπερασμένων όγκων (*finite-volume method*). Βέβαια, η επιλογή καθενός από τους παραπάνω τρόπους διακριτοποίησης απαιτεί και τη χρήση συγκεκριμένης μορφής των εξισώσεων που περιγράφουν τη ροή.

Από την άλλη πλευρά, στις μεθόδους μη-οριόδετων πλεγμάτων αν και διατηρείται το επιφανειακό πλέγμα της γεωμετρίας, δεν μεταβιβάζει πληροφορία στο καρτεσιανό πλέγμα που παράγεται για το χωρίο που περιλαμβάνει τη ροή. Έτσι, η γεωμετρία εισχωρεί στο καρτεσιανό πλέγμα «κόβοντας» με τυχαίο τρόπο ένα μεγάλο αριθμό υπολογιστικών κυψελών. Επιπλέον, το γεγονός ότι το καρτεσιανό πλέγμα δεν είναι προσαρμοσμένο στη γεωμετρία, επιβάλλει την αναζήτηση άλλων μεθόδων εφαρμογής των οριακών συνθηκών και κατ' επέκταση τη δημιουργία πολλών διαφορετικών μεθόδων μη-οριόδετων πλεγμάτων.

3.2 Κατηγορίες Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, οι διάφορες μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί για τα μη-οριόδετα πλέγματα πηγάζουν από τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η εφαρμογή των οριακών συνθηκών. Για να γίνουν ευκολότερα κατανοητές οι μέθοδοι που θα ακολουθηθούν, θα παρουσιαστούν, δίχως βλάβη της γενικότητας, βασισμένες στην ασυμπίεστη και μη-συνεκτική ροή που περιγράφεται από τις παρακάτω Euler εξισώσεις:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \nabla p = 0 \quad (3.2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \text{ στο } \Omega_f \quad (3.2.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma, \text{ στο } \Gamma_b \quad (3.2.3)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ η ταχύτητα του ρευστού, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ η πίεση του, ενώ με Ω_f συμβολίζεται ο όγκος που καταλαμβάνει το ρευστό και με Γ_b η επιφάνεια του ορίου του στερεού σώματος.

Στην πρώτη κατηγορία μη-οριόδετων πλεγμάτων ανήκουν οι συνεχείς IBM (*Continuous forcing approach*), οι οποίες κάνουν χρήση ενός όρου πηγής \mathbf{f} που εισάγεται στην εξίσωση 3.2.1 όπως φαίνεται και παρακάτω:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \nabla p = \mathbf{f} \quad (3.2.4)$$

όπου για τον όρο πηγής \mathbf{f} έχουν διατυπωθεί πολλές θεωρίες με μια πολύ διαδεδομένη να είναι αυτή που θεωρεί την πηγή ως ελατήριο [19]. Έτσι, σε κυψέλες που η γεωμετρία έχει «βυθιστεί», η πηγή λαμβάνει τιμές τέτοιες ώστε να προσομοιάζει το στερεό σώμα, ενώ στις υπολογιστικές κυψέλες που δεν υπάρχει τμήμα της γεωμετρίας ο εν λόγω όρος αποσβένεται.

Στη δεύτερη κατηγορία μη-οριόδετων πλεγμάτων ανήκουν οι διακριτές IBM (*Discrete forcing approach*) οι οποίες δεν κάνουν χρήση κάποιου επιπλέον όρου κατά τη διακριτοποίηση. Μάλιστα, η διακριτοποίηση των εξισώσεων ακολουθεί τη διαδικασία που θα χρησιμοποιούνταν αν η γεωμετρία δεν έτεμνε τις υπολογιστικές κυψέλες, ενώ ο επιπλέον όρος προστίθεται εκ των υστέρων, διαφοροποιώντας έτσι τις εξισώσεις κοντά στα στερεά τοιχώματα. Η πιο διαδεδομένη μέθοδος της συγκεκριμένης κατηγορίας είναι η μέθοδος των ψευδο-κυψελών (*Ghost-Cell* [14]) η οποία επιλύει τις εξισώσεις εντός και εκτός της γεωμετρίας και, εν συνεχεία, ρυθμίζοντας-συσχετίζοντας τις ταχύτητες των ψευδο-κυψελών με αυτές εκτός της γεωμετρίας, επιβάλλεται η οριακή συνθήκη. Μάλιστα, στο ΕΘΣ παράλληλα με τη συγκεκριμένη εργασία πραγματοποιήθηκε διπλωματική εργασία η οποία έκανε χρήση της μεθόδου των ψευδο-κυψελών [10].

Μια ειδική περίπτωση διακριτής μεθόδου αποτελεί η μέθοδος τεμνομένων κυψελών (*Cut-Cell* [16]). Η συγκεκριμένη μέθοδος διαφέρει από τις κλασικές διακριτές μεθόδους καθώς οι κυψέλες που τέμνονται από το στερεό όριο αλλάζουν σχήμα ώστε να προσαρμόζονται

σε αυτό. Άμεσο αποτέλεσμα αυτής της ιδιότητας αποτελεί η τοπική αλλά και η συνολική ικανοποίηση των νόμων διατήρησης, όπου ως τοπική ορίζεται η ικανοποίηση στη γειτονιά κάθε κυψέλης, ενώ ως συνολική η ικανοποίηση σε όλον τον υπολογιστικό χώρο.

3.3 Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων

Οι μέθοδοι μη-οριόδετων πλεγμάτων παρουσιάζουν κάποια σημαντικά πλεονεκτήματα σε σχέση με τις κλασικές μεθόδους παραγωγής οριόδετων πλεγμάτων. Πιο συγκεκριμένα, οι IB μέθοδοι είναι ιδανικές για τις περιπτώσεις που μελετώνται ροές με κινούμενες γεωμετρίες καθώς, σε κάθε χρονικό βήμα δεν απαιτείται εκ νέου πλεγματοποίηση. Αντίθετα, στις μεθόδους οριόδετων πλεγμάτων η παραγωγή πλέγματος σε κάθε χρονικό βήμα είναι απαραίτητη ώστε να παραμείνει το πλέγμα προσαρμοσμένο στη γεωμετρία, γεγονός που αυξάνει κατά πολύ τον απαιτούμενο υπολογιστικό χρόνο.

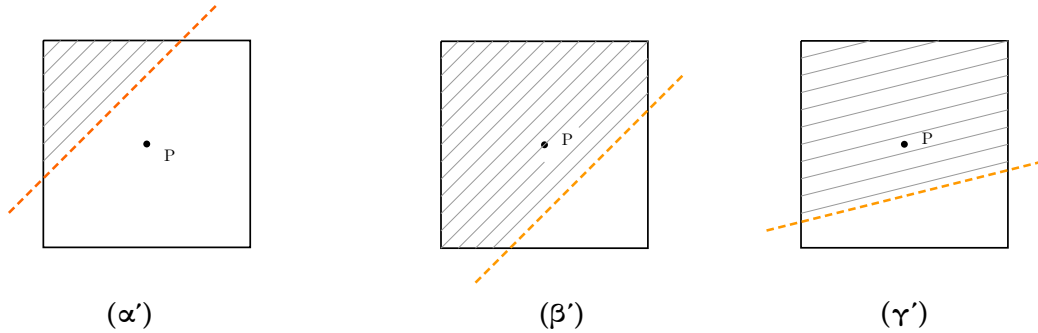
Ένα επιπλέον βασικό πλεονέκτημα των μεθόδων μη-οριόδετων πλεγμάτων αποτελεί η ευκολότερη αντιμετώπιση πολύπλοκων γεωμετριών κατά τη διαδικασία της πλεγματοποίησης. Στην περίπτωση των οριόδετων πλεγμάτων, όταν η γεωμετρία διαθέτει πολύπλοκο σχήμα απαιτείται η χρήση μιας αρκετά χρονοβόρας διαδικασίας πλεγματοποίησης η οποία κάνει χρήση μιας επαναληπτικής διαδικασίας για την τελική παραγωγή πλέγματος καλής ποιότητας. Αντιθέτως, στις IB μεθόδους επειδή η γεωμετρία «βυθίζεται» στο πλέγμα μια τέτοια διαδικασία δεν είναι αναγκαία, με αποτέλεσμα να μειώνεται αισθητά το υπολογιστικό κόστος, ενώ ταυτόχρονα ο κώδικας γίνεται πιο σταθερός.

Από την άλλη πλευρά, οι IB μέθοδοι εμφανίζουν δύο μειονεκτήματα ως προς τις μεθόδους οριόδετων πλεγμάτων. Πρώτον, επειδή το πλέγμα δεν είναι προσαρμοσμένο στη γεωμετρία, δεν μπορεί να γίνει άμεση εφαρμογή των οριακών συνθηκών καθώς δεν υπάρχουν κόμβοι στην επιφάνεια της γεωμετρίας. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με την πιθανή πολυπλοκότητα της γεωμετρίας, μπορεί να οδηγήσει σε μειωμένη ακρίβεια αποτελεσμάτων καθώς ενδέχεται να διαταραχθεί η συντηρητική ιδιότητα των εξισώσεων [6]. Τέλος, έχει παρατηρηθεί ότι ο αριθμός των υπολογιστικών κυψελών ενός μη-οριόδετου πλέγματος είναι άμεσα συνδεδεμένος με τον αριθμό Reynolds για την περίπτωση των συνεκτικών ροών. Η αύξηση του αριθμού Reynolds συνοδεύεται με ταυτόχρονη αύξηση των απαιτούμενων κυψελών, γεγονός που με τη σειρά του προκαλεί αύξηση του υπολογιστικού κόστους.

3.4 Η Μέθοδος των Τεμνομένων Κυψελών

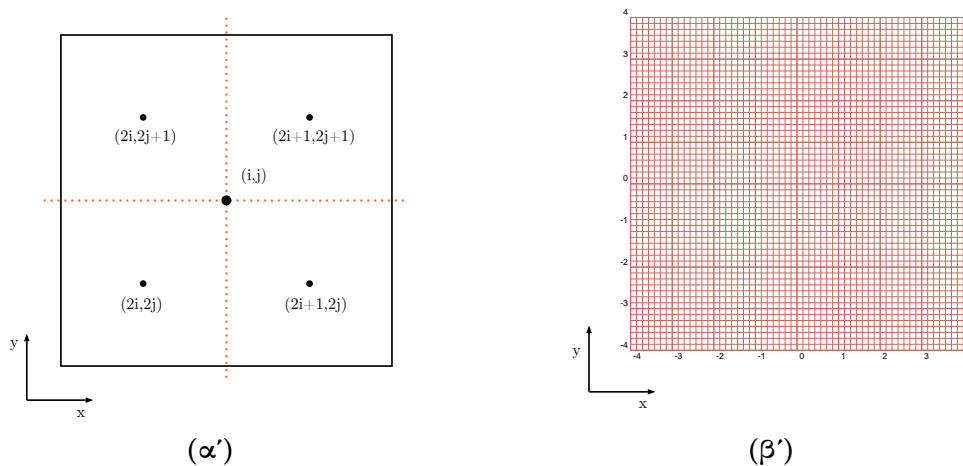
Η μέθοδος των τεμνομένων κυψελών (*Cut-Cell method*), όπως ειπώθηκε και προηγουμένως, αποτελεί ειδική κατηγορία των IB μεθόδων καθώς διαθέτει την ικανότητα να προσαρμόζεται στην επιφάνεια της υπό μελέτη γεωμετρίας επιτρέποντας έτσι την τοπική και συνολική ικανοποίηση των νόμων διατήρησης. Όπως και σε όλες τις IB μεθόδους έτσι και εδώ, η γεωμετρία βυθίζεται εντός του πλέγματος με αποτέλεσμα το όριο της να τέμνει πολλές από τις υπολογιστικές κυψέλες. Έτσι, πλέον, ένα τμήμα των εν λόγω κυψελών ανήκει στη γεωμετρία ενώ το υπόλοιπο ανήκει στο χώρο από όπου διέρχεται το ρευστό.

Επειδή το πλέγμα που έχει κατασκευαστεί είναι διδιάστατο και καρτεσιανό, δηλαδή αποτελείται από τετραγωνικά στοιχεία, το νέο σχήμα των τμημάτων των κυψελών που ανήκουν στη ροή θα είναι είτε τριγωνικό, είτε τετραπλευρικό είτε πενταπλευρικό, γεγονός που εξαρτάται από τον τρόπο που η γεωμετρία τέμνει τις κυψέλες και το οποίο παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα 3.4.1.

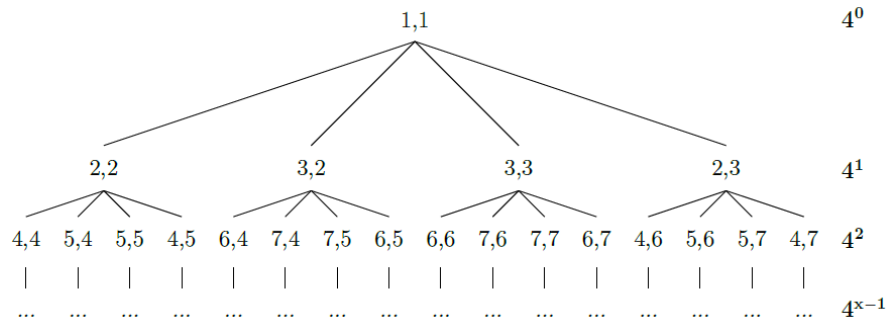


Σχήμα 3.4.1: Τρία πιθανά σχήματα (γραμμοσκιασμένα τμήματα) που μπορούν να προκύψουν εξαιτίας της τομής της τυχαίας υπολογιστικής κυψέλης P από τη γεωμετρία.

Στις IB μεθόδους, η διαδικασία παραγωγής του καρτεσιανού πλέγματος ακολουθεί τη δένδρική δομή quadtree, σχήμα 3.4.3, η οποία επιτρέπει την αποθήκευση των δεδομένων του πλέγματος κάνοντας χρήση μειωμένης μνήμης. Πιο συγκεκριμένα, η πλεγματοποίηση ξεκινά κατασκευάζοντας ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το οποίο ταυτίζεται με το υπολογιστικό χωρίο που έχει οριστεί εκ των προτέρων. Στη συνέχεια, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.4.2(α'), το εν λόγω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διασπάται σε τέσσερα ισομεταβαστικά ορθογώνια παραλληλόγραμμο, τα οποία διαθέτουν μια κοινή κορυφή και η οποία ταυτίζεται με το βαρύκεντρο του αρχικού ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Ακολουθώντας, η ίδια διαδικασία ακολουθείται ξεχωριστά για τα τέσσερα ορθογώνια παραλληλόγραμμο-κυψέλες και εν συνεχεία για τις νέες υπολογιστικές κυψέλες που προέκυψαν. Η παραπάνω διαδικασία τερματίζεται όταν το εμβαδόν των τελευταίων υπολογιστικών κυψελών δεν ξεπερνά το μέγιστο εμβαδόν (V_{max}) που έχει ορίσει ο χρήστης.



Σχήμα 3.4.2: (α') Σχηματική αναπαράσταση του πρώτου επιπέδου διάσπασης καθώς και του τρόπου αποθήκευσης των δεδομένων κάθε κυψέλης με τη μέθοδο quadtree. (β') Τελικό πλέγμα που αγνοεί την πιθανή ύπαρξη γεωμετρίας.



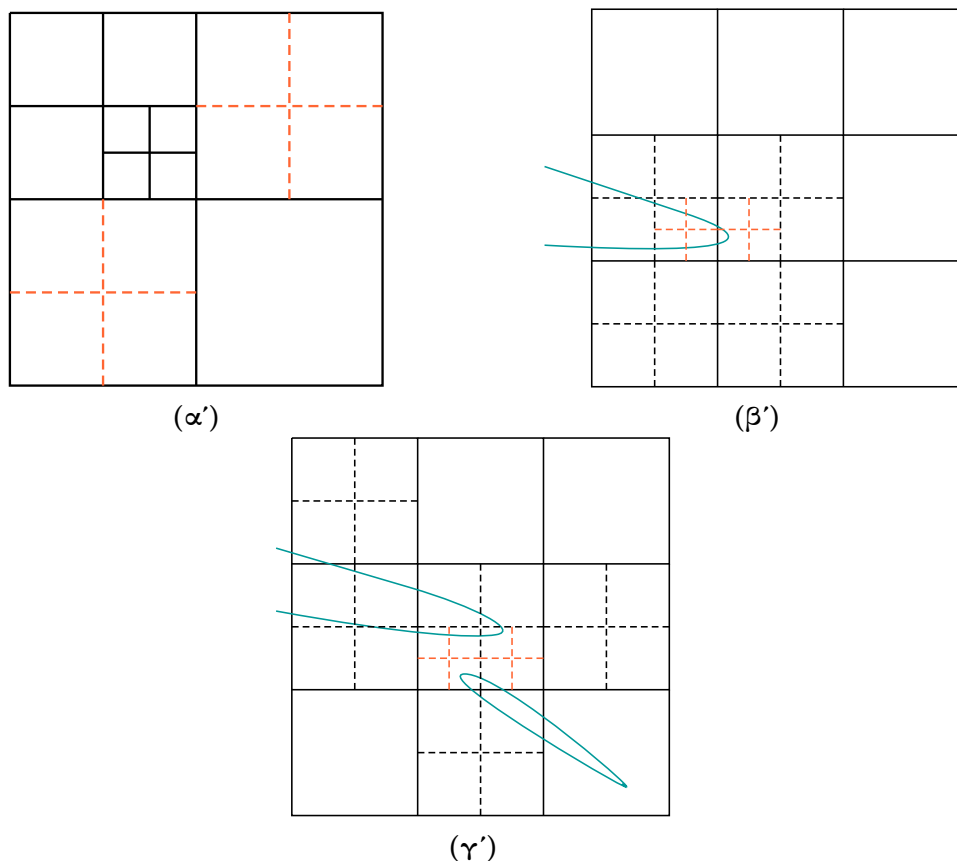
Σχήμα 3.4.3: Δενδρική δομή, quadtree, όπου απεικονίζονται τα διάφορα επίπεδα διάσπασης καθώς και το μοτίβο που ακολουθεί η ονομασία των νέων κυψελών [1].

Από τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω μπορούν να προκύψουν δύο βασικά συμπεράσματα για τη μέχρι τώρα πλεγματοποίηση. Πρώτον, αν συμβολιστούν με x τα επίπεδα διασπάσεων που έχουν πραγματοποιηθεί, τότε προκύπτει εύκολα ότι ο αριθμός των υπολογιστικών κυψελών ισούται με 4^{x-1} . Δεύτερον, μέχρι αυτό το σημείο η παραγωγή του πλέγματος δεν λαμβάνει υπόψη της την υπό μελέτη γεωμετρία, με αποτέλεσμα την παραγωγή ενός ομοιόμορφου πλέγματος που όμως δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί με αξιώσεις για τη μελέτη ροϊκών φαινομένων γύρω από γεωμετρίες (σχήμα 3.4.2(β')).

Όπως είναι λογικό, όταν στο υπολογιστικό χωρίο εισαχθεί και η γεωμετρία, πολλές υπολογιστικές κυψέλες τέμνονται από αυτήν. Για το λόγο αυτό, οι συγκεκριμένες υπολογιστικές κυψέλες αρχίζουν εκ νέου να διασπώνται ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με προηγούμενες. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι το εμβαδόν των νέων κυψελών να φτάσει ένα βήμα πριν γίνει μικρότερο του V_{min} που ο χρήστης έχει ορίσει εκ των προτέρων. Βέβαια, ακόμα και μετά από αυτήν τη διαδικασία, υπάρχουν κυψέλες που τέμνονται από τη γεωμετρία. Έτσι, γίνεται αντιληπτό, ότι αυτό που επιτεύχθηκε σε αυτό το σημείο είναι ότι, απλά αυτήν τη φορά, οι τεμνόμενες από τη γεωμετρία υπολογιστικές κυψέλες διαθέτουν μικρότερο εμβαδόν από τις κυψέλες που αρχικά τέμνονταν από αυτή. Κατά συνέπεια, το πλέγμα πλέον διαθέτει τρία είδη κυψελών: α) αυτές που όταν εισαχθεί η γεωμετρία δεν τέμνονται από αυτή και, συνεπώς δεν διασπώνται εκ νέου, διατηρώντας έτσι το αρχικό τους εμβαδόν που είναι λίγο μικρότερο του V_{max} β) αυτές που προέρχονται από κυψέλες που τέμνονταν από τη γεωμετρία και έχουν εμβαδόν που ανήκει στο ανοιχτό διάστημα (V_{min}, V_{max}) , γεγονός που πρακτικά σημαίνει ότι οι νέες αυτές κυψέλες δεν τέμνονται από τη γεωμετρία γ) αυτές που προέρχονται από κυψέλες που τέμνονταν από τη γεωμετρία και τέμνονται και αυτές με τη σειρά τους από τη γεωμετρία. Το εμβαδόν αυτών των κυψελών πλέον είναι μικρότερο από το V_{min} .

Οι παραπάνω διαδικασίες διάσπασης κυψελών δεν είναι οι μοναδικές που ακολουθούνται κατά την κατασκευή ενός πλέγματος. Η ύπαρξη απότομων διαφορών στα εμβαδά γειτονικών κυψελών μπορεί να προκαλέσει σημαντικά σφάλματα μειώνοντας σε μεγάλο βαθμό την ποιότητα των τελικών αποτελεσμάτων. Η πρώτη περίπτωση που απαιτεί επιπλέον διάσπαση κυψελών, αφορά γειτονικές κυψέλες που έχουν διαφορά τουλάχιστον δύο επιπέδων διάσπασης. Ισοδύναμα, οποιαδήποτε ακμή μιας τυχαίας υπολογιστικής κυψέλης πρέπει να γειτνιάζει το πολύ με δύο κυψέλες. Η συγκεκριμένη περίπτωση παρουσιάζεται στο σχήμα 3.4.4(α') και εξασφαλίζει, ως ένα βαθμό, την ομαλή μετάβαση από τα μεγαλύτερα εμ-

βαδά κυψελών στα μικρότερα. Η δεύτερη περίπτωση παρουσιάζεται στο σχήμα 3.4.4(β') και αφορά τις υπολογιστικές κυψέλες στις οποίες τυχαίνει η γεωμετρία να εισέρχεται και να εξέρχεται από μια μόνο ακμή. Αν δεν πραγματοποιηθεί διάσπαση των συγκεκριμένων κυψελών τότε θα προκύψουν κυψέλες με απότομες αλλαγές στις πλευρές, γεγονός που αποφεύγεται στη διαδικασία πλεγματοποίησης. Μάλιστα, πρέπει να τονιστεί ότι η συγκεκριμένη διαδικασία επαναλαμβάνεται ώστε καμιά από τις νέες κυψέλες να μην τέμνεται σε μια της ακμή δύο φορές από τη γεωμετρία. Η τελευταία περίπτωση αφορά τη μελέτη ροϊκών φαινομένων όπου στο χωρίο εμφανίζονται περισσότερες της μιας γεωμετρίας. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, ενδέχεται μια υπολογιστική κυψέλη να τέμνεται από περισσότερες από μια γεωμετρίας χωρίς να απασχολεί αν αυτό συμβαίνει στην ίδια ακμή (σχήμα 3.4.4(γ')). Η διάσπαση των συγκεκριμένων κυψελών πραγματοποιείται μέχρις ότου καμιά κυψέλη να μην τέμνεται ταυτόχρονα από πολλές γεωμετρίας, ενώ κρίνεται απαραίτητη καθώς οι περιοχές μεταξύ των γεωμετριών διαθέτουν έντονες μεταβολές στα ροϊκά μεγέθη και κατ' επέκταση παρουσιάζουν έντονο ενδιαφέρον.



Σχήμα 3.4.4: Αναπαράσταση τριών περιπτώσεων που απαιτούν εκ νέου διάσπαση ορισμένων υπολογιστικών κυψελών. Σε αυτές τις περιπτώσεις, το αρχικό πλέγμα απεικονίζεται με μαύρο χρώμα. (α') Παρατηρείται ότι η άνω-δεξιά και η κάτω-αριστερά κυψέλη γειτνιάζουν με τρεις κυψέλες οπότε απαιτείται ένα επιπλέον βήμα διάσπασης για καθεμιά από αυτές, το οποίο δίνεται με πορτοκαλί χρώμα. (β') Η γεωμετρία εισέρχεται και εξέρχεται σε δύο υπολογιστικές κυψέλες από την ίδια ακμή καθεμιάς, γεγονός που οδηγεί σε διάσπαση τους (πορτοκαλί χρώμα). (γ') Οι δύο γεωμετρίας τέμνουν ταυτόχρονα δύο υπολογιστικές κυψέλες οι οποίες και διασπώνται, κάτι που πάλι παρουσιάζεται με πορτοκαλί χρώμα

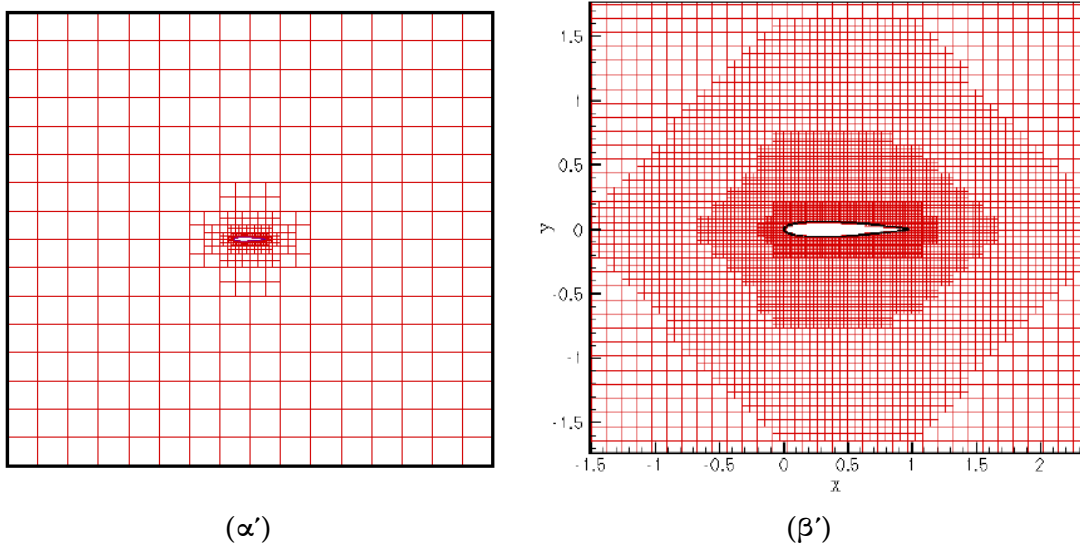
Στην Υπολογιστική Ρευστοδυναμική, το μέγεθος του υπολογιστικού πλέγματος εξαρτάται σε πολύ μεγάλο βαθμό από την πολυπλοκότητα της υπό μελέτη γεωμετρίας, με αποτέλεσμα πολλές φορές το υπολογιστικό κόστος να κρίνεται απαγορευτικό. Ένας αποτελεσματικός τρόπος μείωσης του υπολογιστικού κόστους με ταυτόχρονη εξασφάλιση της ποιότητας των αποτελεσμάτων είναι η προοδευτική πύκνωση του πλέγματος προς τη γεωμετρία (*Mesh Refinement*). Για την επίτευξη της επιθυμητής πύκνωσης γίνεται χρήση μιας σιγμοειδούς συνάρτησης f , η οποία εξασφαλίζει συνέχεια πρώτης παραγώγου και, συνεπώς, ομαλή και σταδιακή πύκνωση, οδηγώντας έτσι σε παραγωγή καλής ποιότητας πλέγματος. Παρακάτω ακολουθούν οι βασικές σχέσεις που χρησιμοποιούνται για την πύκνωση του πλέγματος:

$$x = \frac{d}{d_{max}}$$

$$f = \begin{cases} 1 & , \text{αν } x > 1 \\ -2x^3 + 3x^2 & , \text{αν } 0 < x < 1 \end{cases} \quad (3.4.1)$$

$$V_{crit} = fV_{max} + (1 - f)V_{min}$$

όπου d η απόσταση της εκάστοτε υπολογιστικής κυψέλης από τη γεωμετρία, d_{max} η απόσταση από τη γεωμετρία πέραν της οποίας δεν υφίσταται κάποια πύκνωση και η οποία ορίζεται από το χρήστη και, τέλος, V_{crit} το κρίσιμο εμβαδόν κάθε κυψέλης το οποίο λειτουργεί ως κριτήριο διασπώντας την κυψέλη αν είναι μικρότερο από το παρόν εμβαδόν της, δηλαδή όταν $V_{crit} < V_{cell}$. Ακολουθεί το σχήμα 3.4.5 στο απεικονίζεται μια περίπτωση πλέγματος που δεν έχει ακολουθήσει διαδικασία πύκνωσης, καθώς και μια περίπτωση πλέγματος στην οποία η πύκνωση είναι εμφανής.



Σχήμα 3.4.5: Αναπαράσταση δύο τυχαίων πλεγμάτων. Στο πρώτο πλέγμα δεν υφίσταται κάποιο είδος πύκνωσης, ενώ στο δεύτερο παρατηρείται σταδιακή πύκνωση [5].

Έχοντας περιγράψει πλήρως τη διαδικασία παραγωγής πλέγματος με τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών, καλό θα ήταν να αναλυθεί περαιτέρω και η μέθοδος quadtree που αναφέρθηκε προηγουμένως καθώς και ο τρόπος υπολογισμού των βασικών μεγεθών κάθε

κυψέλης. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρώντας το σχήμα 3.4.3 μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι σε κάθε υπολογιστική κυψέλη αντιστοιχεί μια δυάδα αριθμών της μορφής (i, j) , η οποία είναι διαφορετική για κάθε κυψέλη. Έτσι, γνωρίζοντας αυτό το ζεύγος αριθμών καθώς και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της πρωταρχικής κυψέλης, δηλαδή αυτής που δημιουργήθηκε όταν ξεκίνησε η κατασκευή του πλέγματος, μπορούν να υπολογιστούν τα βασικά χαρακτηριστικά οποιασδήποτε κυψέλης έχοντας αποθηκεύσει τον ελάχιστο αριθμό δεδομένων.

Η πρώτη πληροφορία που μπορεί να αντληθεί από το ζεύγος αριθμών κάθε κυψέλης, είναι το επίπεδο στο οποίο βρίσκεται η εν λόγω κυψέλη. Η συγκεκριμένη πληροφορία λαμβάνεται κάνοντας χρήση της παρακάτω σχέσης [1]:

$$L = \lfloor (\log_2 i + 1) \rfloor = \lfloor (\log_2 j + 1) \rfloor \quad (3.4.2)$$

όπου γίνεται χρήση της συνάρτησης "ακέραιο μέρος" (*floor function*). Γνωρίζοντας το επίπεδο της υπολογιστικής κυψέλης, μπορούν να υπολογιστούν οι βασικές διαστάσεις της ως εξής [1]:

$$\begin{aligned} \Delta x_{(i,j)} &= \frac{\Delta x_{(1,1)}}{2^{L-1}} \\ \Delta y_{(i,j)} &= \frac{\Delta y_{(1,1)}}{2^{L-1}} \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

όπου με $\Delta x_{(i,j)}$, $\Delta y_{(i,j)}$ συμβολίζονται τα μήκη των πλευρών της υπό μελέτη κυψέλης, ενώ με $\Delta x_{(1,1)}$, $\Delta y_{(1,1)}$ τα αντίστοιχα της πρώτης κυψέλης από την οποία ξεκίνησε η κατασκευή του πλέγματος. Το εμβαδόν κάθε κυψέλης υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση [1]:

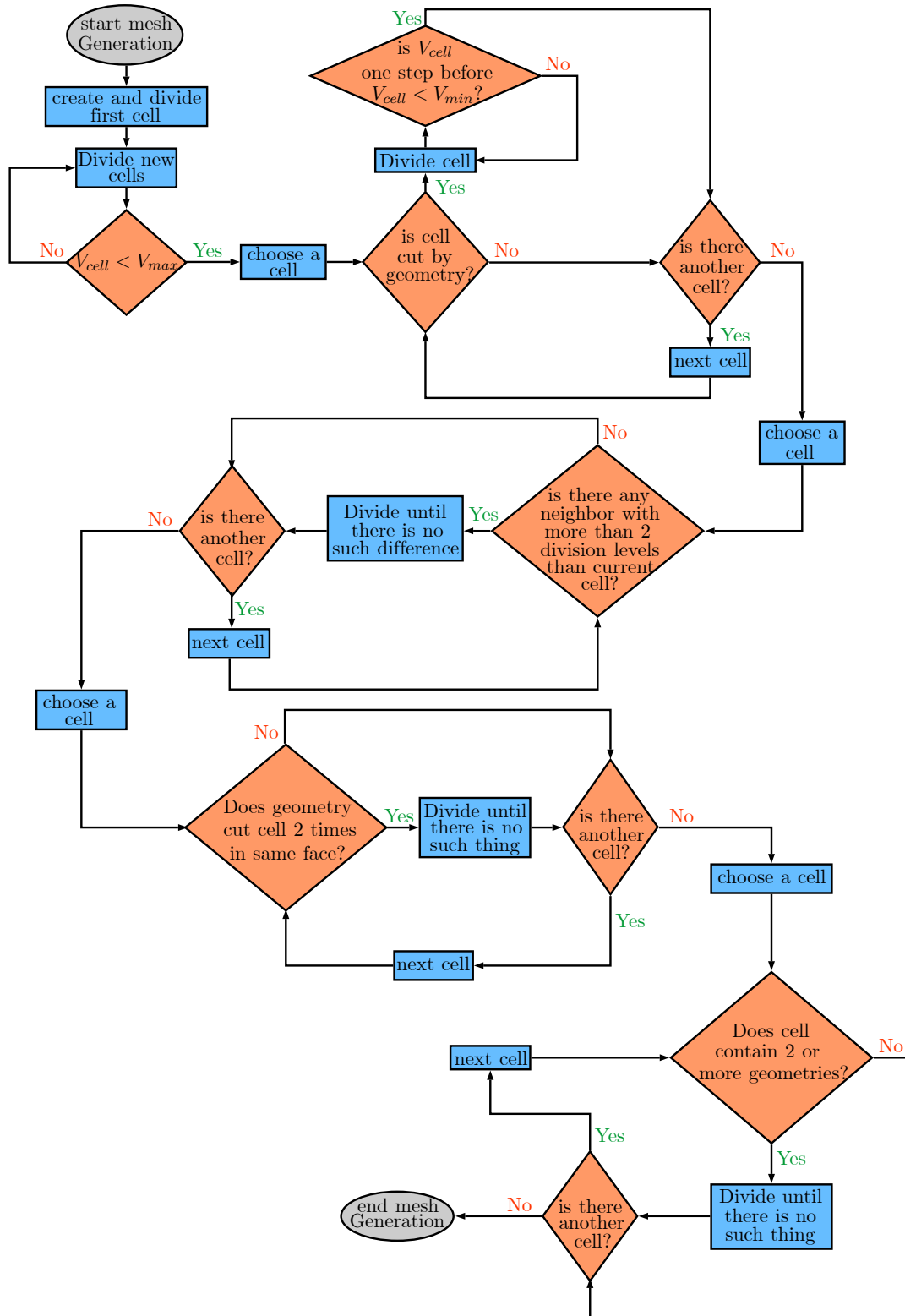
$$V = \frac{V_{(i,j)}}{(2^{L-1})^2} = \frac{V_{(i,j)}}{(4^{L-1})} = \frac{\Delta x_{(1,1)} \Delta y_{(1,1)}}{(4^{L-1})} \quad (3.4.4)$$

Τέλος, η θέση του βαρυκέντρου κάθε κυψέλης υπολογίζεται ως εξής [1]:

$$\begin{aligned} x_{(i,j)} &= x_{(1,1)} - \frac{3}{2} \Delta x_{(1,1)} + (i + \frac{1}{2}) \frac{\Delta x_{(1,1)}}{2^{L-1}} \\ y_{(i,j)} &= y_{(1,1)} - \frac{3}{2} \Delta y_{(1,1)} + (j + \frac{1}{2}) \frac{\Delta y_{(1,1)}}{2^{L-1}} \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Όπως είχε τονιστεί και προηγουμένως, όλες οι σχέσεις που παρατέθηκαν παραπάνω έκαναν χρήση μόνο των βασικών χαρακτηριστικών της πρώτης κυψέλης καθώς και του εκάστοτε ζεύγους (i, j) της υπό μελέτη κυψέλης, γεγονός που ελαχιστοποιεί την απαιτούμενη μνήμη.

Ακολουθεί το σχήμα 3.4.6 το οποίο περιέχει τη μορφή του διαγράμματος ροής της μεθόδου των τεμνομένων κυψελών.



Σχήμα 3.4.6: Διάγραμμα ροής του αλγορίθμου παραγωγής πλέγματος της μεθόδου τεμνομένων κυψελών.

Κεφάλαιο 4

Διακριτοποίηση των Πεδιακών Εξισώσεων Ατρισούς Ροής

4.1 Εξισώσεις Euler

Κάθε ροή που αναλύεται στη διπλωματική εργασία είναι διδιάστατη μη-μόνιμη και μη-συνεκτική ροή συμπιεστού ρευστού. Για μια ατρισή ροή απαιτείται η επίλυση τριών μδε, δηλαδή της εξίσωσης της συνέχειας, της εξίσωσης διατήρησης της ορμής και της εξίσωσης της ενέργειας. Το πλήθος των συνολικών διαφορικών εξισώσεων που τελικά πρέπει να επιλυθούν εξαρτάται από το αν η ροή είναι μονοδιάστατη, διδιάστατη ή τριδιάστατη καθώς κάθε διάσταση που προστίθεται απαιτεί και την επίλυση της αντίστοιχης εξίσωσης ορμής. Στη διπλωματική εργασία, απαιτείται η επίλυση δύο εξισώσεων διατήρησης ορμής και συνολικά τεσσάρων μερικών διαφορικών εξισώσεων. Οι μδε που πρέπει να επιλυθούν, διατυπωμένες στη συντηρητική διανυσματική τους γραφή είναι οι εξής:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_y}{\partial y} = 0 \quad (4.1.1)$$

όπου \mathbf{W} το διάνυσμα των συντηρητικών μεγεθών και \mathbf{f}_x , \mathbf{f}_y τα διανύσματα ροής (*fluxes*). Τα παραπάνω τρία διανύσματα δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}_x = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E_t + p) \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}_y = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E_t + p) \end{pmatrix}$$

όπου με ρ συμβολίζεται η πυκνότητα, με u και v η κατά τον οριζόντιο άξονα x και η κατά τον κατακόρυφο άξονα y ταχύτητα αντίστοιχα, με E_t η ολική ενέργεια και με p η στατική

πίεση. Η σχέση που συνδέει την ολική ενέργεια με τη στατική πίεση είναι η εξής:

$$E_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2)$$

όπου με γ συμβολίζεται ο εκθέτης ισεντροπικής μεταβολής και ο οποίος ισούται με 1.4. Για το υπόλοιπο της διπλωματικής εργασίας ο αέρας θα θεωρείται ως τέλειο αέριο.

Η διαφορική εξίσωση της σχέσης 4.1.1 μπορεί να γραφεί και σε ταυστική γραφή όπως παρακάτω:

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (4.1.2)$$

όπου $i = 1, \dots, 4$ ο δείκτης που αντιπροσωπεύει τα τέσσερα συντηρητικά μεγέθη και $j = 1, 2$ ο δείκτης που αντιπροσωπεύει τις δύο διευθύνσεις του διδιάστατου χώρου με $x_1 = x$ και $x_2 = y$.

Το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης θα αποκαλείται υπόλοιπο (*residual*) και θα συμβολίζεται με R_i . Έτσι, η εν λόγω σχέση μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$R_i = \frac{\partial W_i}{\partial t} + \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (4.1.3)$$

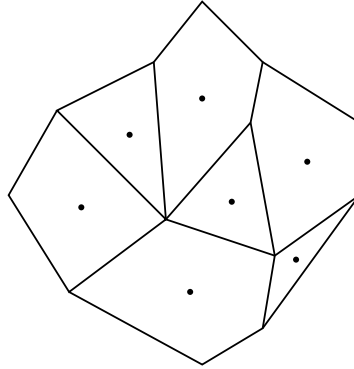
Γίνεται έτσι αντιληπτό ότι υπάρχουν τέσσερα υπόλοιπα όσες δηλαδή και οι μδε που περιγράφουν τη ροή.

4.2 Διακριτοποίηση Πεδιακών Εξισώσεων

Η διακριτοποίηση των μδε αποτελεί τη μέθοδο με την οποία επιτυγχάνεται η επίλυση του ροϊκού φαινομένου κάνοντας χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Όμως, πριν την έναρξη της διακριτοποίησης, είναι απαραίτητη η δημιουργία υπολογιστικού πλέγματος γύρω από τη γεωμετρία που μελετάται, η οποία στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι μια αεροτομή, ώστε να καταστεί δυνατό πάνω σε αυτό το πλέγμα να διακριτοποιηθούν οι εξισώσεις. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιήθηκε κώδικας παραγωγής μη-δομημένου πλέγματος που έχει αναπτυχθεί από την ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ [1].

Έχοντας κατασκευάσει το μη δομημένο πλέγμα γύρω από τη γεωμετρία, αμέσως έχουν παραχθεί υπολογιστικές κυψέλες μέσα στις οποίες αποθηκεύεται η τοπική πληροφορία. Η μέθοδος αποθήκευσης που επιλέχθηκε είναι η αποθήκευση της πληροφορίας στο βαρύκεντρο κάθε κυψέλης (*cell-centered*), καθώς λόγω του μη-δομημένου πλέγματος της μεθόδου Cut-Cell παράγονται πολλές κυψέλες με τυχαίο σχήμα και μέγεθος. Τέλος, ως μέθοδος επίλυσης των μδε επιλέχθηκε αυτή των πεπερασμένων όγκων (*finite volume method*) με τον όγκο κάθε κυψέλης να συμβολίζεται με Ω . Το σχήμα 4.2.1 απεικονίζει τις υπολογι-

στικτές κυψέλες μιας υποπεριοχής ενός τυχαίου μη-δομημένου πλέγματος με σκοπό την εποπτική αναπαράσταση όσων αναφέρθηκαν μέχρι τώρα.



Σχήμα 4.2.1: Υπολογιστικές κυψέλες τυχαίου μη-δομημένου πλέγματος με αναπαράσταση του βαρύκεντρου κάθε κυψέλης όπου και αποθηκεύεται η τοπική πληροφορία.

Ολοκληρώνοντας την έκφραση του υπολοίπου της σχέσης 4.1.3 στον όγκο ελέγχου Ω μιας τυχαίας υπολογιστικής κυψέλης, προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\int_{\Omega} R_i d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_i}{\partial t} + \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} \right) d\Omega = 0 \quad (4.2.1)$$

Στην παραπάνω σχέση, διακρίνεται ένας χρονικά μεταβαλλόμενος όρος καθώς και ένας χωρικά μεταβαλλόμενος όρος, γεγονός που υποδεικνύει ότι θα απαιτηθούν δύο διαφορετικά είδη διακριτοποίησης. Η ανάλυση που θα ακολουθήσει θα παρουσιάσει πρώτα τη χωρική και ύστερα τη χρονική διακριτοποίηση.

4.2.1 Διακριτοποίηση του Χωρικού Όρου

Πριν ξεκινήσει η ανάλυση του συγκεκριμένου είδους διακριτοποίησης πρέπει να τονιστεί ότι στην πράξη η περιγραφή που θα ακολουθήσει θα έχει αντιμετωπίσει πλήρως το φαινόμενο ροής σε μόνιμη κατάσταση (*steady state*), καθώς η μη μονιμότητα εισάγεται από τη χρονική παράγωγο των μεγεθών της ροής στις μδε.

Το χωρικό ολοκλήρωμα της χωρικής παραγωγού των διανυσμάτων ροής είναι το εξής:

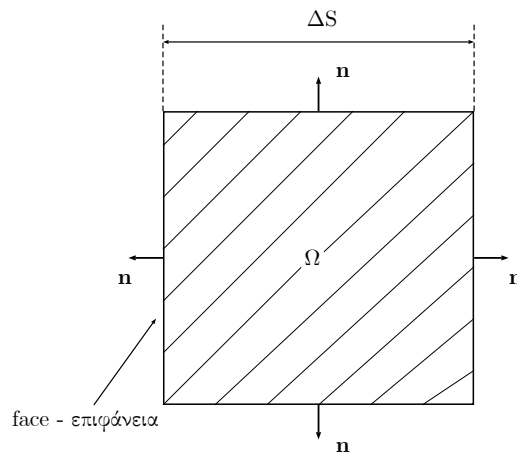
$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} \right) d\Omega$$

Κάνοντας χρήση του θεωρήματος της απόκλισης (*Divergence Theorem*) ή, αλλιώς, θεωρήματα των Gauss-Ostrogradsky, μπορεί να μετατραπεί το παραπάνω χωρικό ολοκλήρωμα

σε επιφανειακό ολοκλήρωμα. Έτσι, μπορεί να γραφεί ότι:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} \right) d\Omega = \int_S f_{ij} n_j dS \quad (4.2.2)$$

όπου $j = 1, 2$ οπότε και το n_j αντιπροσωπεύει την κατά τον άξονα x και κατά τον άξονα y συνιστώσα του κάθετου στην επιφάνεια της υπολογιστικής κυψέλης μοναδιαίου διανύσματος \mathbf{n} . Ακολουθεί το σχήμα 4.2.2 όπου απεικονίζεται μια τυχαία υπολογιστική κυψέλη σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου καθώς και τα βασικά μεγέθη που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση.



Σχήμα 4.2.2: Υπολογιστική κυψέλη σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου για την απεικόνιση βασικών μεγεθών.

Σε αυτό το σημείο γίνεται η παραδοχή ότι η ροή (flux) που εισέρχεται ή εξέρχεται από κάθε επιφάνεια (*face*) παραμένει σταθερή καθ' όλο το μήκος της. Αυτή η παραδοχή αυτομάτως εισάγει στην ανάλυση σφάλμα καθώς, στην πραγματικότητα, η ροή σε κάθε επιφάνεια δεν διαθέτει ομοιόμορφη κατανομή. Το συγκεκριμένο σφάλμα βέβαια, έχει άμεση εξάρτηση από τη θέση της υπολογιστικής κυψέλης ως προς την αεροτομή, ή γενικά ως προς το στερεό σώμα, καθώς και από την τοπική πυκνότητα του πλέγματος. Μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτό το γεγονός ότι αν η υπό μελέτη υπολογιστική κυψέλη βρίσκεται μακριά από το στερεό σώμα, όπου δηλαδή η ροή επηρεάζεται σε μικρό βαθμό, το σφάλμα είναι μικρό καθώς τα ροϊκά μεγέθη στη γειτονική της περιοχή είναι πρακτικά σταθερά, με αποτέλεσμα η υπόθεση της σταθερής κατανομής να είναι αρκετά ικανοποιητική. Όταν όμως η υπολογιστική κυψέλη βρίσκεται κοντά στο στερεό σώμα, τα ροϊκά μεγέθη ενδέχεται να μεταβάλλονται απότομα με αποτέλεσμα η υπόθεση της σταθερής κατανομής της ροής (*flux*) να προκαλεί σημαντικά σφάλματα. Για να περιοριστεί το μέγεθος του σφάλματος, απαραίτητη κρίνεται η πύκνωση του πλέγματος κοντά στο στερεό σώμα ώστε να μειωθούν οι επιφάνειες κάθε υπολογιστικής κυψέλης και, συνεπώς, η παραδοχή να θεωρηθεί αποδεκτή.

Βασίζόμενοι στην παραπάνω παραδοχή, το επιφανειακό ολοκλήρωμα της σχέσης 4.2.2

μπορεί να διακριτοποιηθεί ως εξής:

$$\int_S (f_{ij}n_j)dS \simeq \sum_{faces} f_{ij}n_j\Delta S \quad (4.2.3)$$

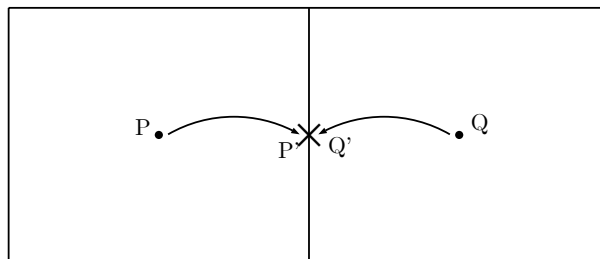
όπου το διάνυσμα ροής κάθε επιφάνειας είναι υπολογισμένο στο κέντρο της ενώ τα μεγέθη n_j και ΔS παρουσιάζονται στο σχήμα 4.2.2.

Το εσωτερικό γινόμενο $f_{ij}n_j$ που εμφανίζεται στην παραπάνω σχέση 4.2.3, μπορεί να εκφραστεί σε μητρική μορφή ως εξής:

$$f_{ij}n_j \equiv \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \\ \rho u(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) + pn_x \\ \rho v(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) + pn_y \\ (E_t + p)(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

όπου $\vec{\mathbf{F}} = (\mathbf{f}_x, \mathbf{f}_y)$, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ και $\mathbf{V} = (u, v)$.

Τα μεγέθη της ροής αποθηκεύονται στο βαρύκεντρο κάθε υπολογιστικής κυψέλης ενώ η διακριτοποίηση που πραγματοποιήθηκε, απαιτεί τη γνώση των ροϊκών μεγεθών στο κέντρο κάθε επιφάνειας. Γίνεται έτσι αντιληπτό, ότι πρέπει να βρεθεί τρόπος ώστε να μεταφερθεί η πληροφορία από τα βαρύκεντρα στις επιφάνειες κάθε κυψέλης. Κάθε επιφάνεια όμως, εξαιρουμένων των επιφανειών που ταυτίζονται με το όριο του στερεού σώματος καθώς και αυτών που αποτελούν τα όρια του πλέγματος, αποτελεί επιφάνεια τουλάχιστον δύο υπολογιστικών κυψελών με αποτέλεσμα περισσότερα του ενός βαρύκεντρα να πρέπει μεταφέρουν πληροφορία στην εν λόγω επιφάνεια. Το γεγονός αυτό παρουσιάζεται και εποπτικά στο παρακάτω σχήμα 4.2.3 για την περίπτωση πλέγματος με κυψέλες σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου.



Σχήμα 4.2.3: Μεταφορά πληροφορίας από τα βαρύκεντρα των γειτονικών υπολογιστικών κυψελών στην κοινή επιφάνεια τους.

Έστω P το βαρύκεντρο μιας τυχαίας υπολογιστικής κυψέλης και P' το κέντρο μιας εκ των επιφανειών της στο οποίο πρέπει να μεταφερθεί η πληροφορία, όπως ακριβώς φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα 4.2.3. Στη διπλωματική αυτή εργασία δίνεται η δυνατότητα χρήσης δύο τρόπων μετάδοσης της πληροφορίας από τα βαρύκεντρα στα κέντρα των επιφανειών.

Ο πρώτος τρόπος, εκτελεί μεταφορά των τιμών του βαρυκέντρου P στο σημείο P' χωρίς καμιά τροποποίηση, δηλαδή απαιτώντας να ισχύει:

$$\mathbf{W}^{P'} = \mathbf{W}^P \quad (4.2.5)$$

Η συγκεκριμένη μέθοδος χαρακτηρίζεται από πρώτης τάξης ακρίβεια (*first-order scheme*) με αποτέλεσμα η χρήση της να εισάγει στα αποτελέσματα σημαντικά σφάλματα. Από την άλλη πλευρά όμως, η ταχύτητα του επιλύτη αυξάνεται με αποτέλεσμα να απαιτείται λιγότερος υπολογιστικός χρόνος. Μπορεί, λοιπόν, να γίνει κατανοητό, ότι ο συγκεκριμένος τρόπος μεταφοράς της πληροφορίας χρησιμοποιείται μόνο όταν απαιτείται η λήψη γρήγορων και σχετικά ακριβών αποτελεσμάτων, ενώ όταν επιθυμείται η λήψη πολύ ακριβών αποτελεσμάτων απαιτείται αλλαγή του σχήματος προς το ακριβέστερο.

Ο δεύτερος τρόπος, μεταφέρει τις τιμές του βαρυκέντρου P στο σημείο P' κάνοντας χρήση του αναπτύγματος Taylor το οποίο στη διανυσματική του γραφή δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{W}^{P'} = \mathbf{W}^P \pm \frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial x_i} \Delta x_i \pm \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \mathbf{W}^P}{\partial x_i^2} \Delta x_i^2 \pm \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \mathbf{W}^P}{\partial x_i^3} \Delta x_i^3 \pm \dots \quad (4.2.6)$$

Στην παραπάνω σειρά Taylor διατηρούνται μόνο οι δύο πρώτοι όροι αποκόπτοντας τους υπόλοιπους, με αποτέλεσμα πλέον το νέο σχήμα μεταφοράς πληροφορίας να προσφέρει δεύτερης τάξης ακρίβεια (*second-order scheme*). Βέβαια, η αυξημένη ακρίβεια σε σχέση με το πρώτης τάξης σχήμα, συνοδεύεται με αύξηση του υπολογιστικού χρόνου καθώς απαιτείται ο υπολογισμός των παραγώγων $\partial \mathbf{W}^P / \partial x_i$. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι η παραπάνω σχέση είναι διατυπωμένη με θετικό αλλά και με αρνητικό πρόσημο ακριβώς για τον λόγο ότι το τυχαίο βαρύκεντρο μπορεί να μεταφέρει πληροφορία σε επιφάνεια που βρίσκεται σε οποιαδήποτε κατεύθυνση.

Εφαρμόζοντας τη σχέση 4.2.6 στα βαρύκεντρα P , και Q του σχήματος 4.2.3 προκύπτουν οι παρακάτω δύο διανυσματικές σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{P'} &= \mathbf{W}^P + \mathbf{P}\mathbf{P}' \cdot (\nabla \mathbf{W})|_P \\ \mathbf{W}^{Q'} &= \mathbf{W}^Q + \mathbf{Q}'\mathbf{Q} \cdot (\nabla \mathbf{W})|_Q \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

$$\text{όπου } (\nabla \mathbf{W})|_P = \left(\frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial y} \right) \text{ και } (\nabla \mathbf{W})|_Q = \left(\frac{\partial \mathbf{W}^Q}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{W}^Q}{\partial y} \right).$$

Για να υπολογιστούν οι επιθυμητές παράγωγοι γίνεται χρήση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων ορίζοντας μια συνάρτηση σφάλματος προς ελαχιστοποίηση. Για να καταστεί εφικτό η συνάρτηση σφάλματος που θα χρησιμοποιηθεί να δίνει τη δυνατότητα να υπολο-

γίνονται τα ροϊκά μεγέθη των γειτονικών κελιών με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια, προεκβάλλοντας τα ροϊκά μεγέθη με τη χρήση των χωρικών παραγώγων, ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία:

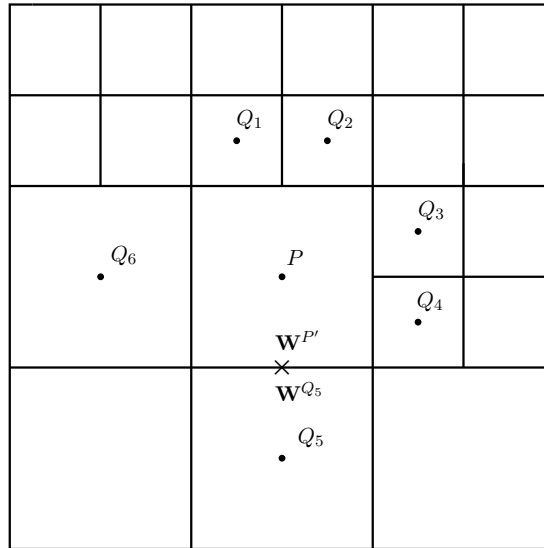
- Υπολογίζονται τα συντηρητικά μεγέθη του κάθε γείτονα της υπολογιστικής κυψέλης με βαρύκεντρο το P , κάνοντας χρήση του αναπτύγματος Taylor.

$$\begin{aligned}\mathbf{W}^Q &\simeq \mathbf{W}^P + \frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial x}(x_Q - x_P) + \frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial y}(y_Q - y_P) \Leftrightarrow \\ \mathbf{W}^Q &\simeq \mathbf{W}^P + \frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial y} \Delta y \Leftrightarrow \\ \frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial y} \Delta y - \Delta \mathbf{W} &\simeq 0\end{aligned}$$

- Γίνεται ορισμός της προς ελαχιστοποίηση συνάρτησης σφάλματος:

$$E = \sum_{n=0}^N \left[\frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial x} \Delta x_n + \frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial y} \Delta y_n - \Delta \mathbf{W}_n \right]^2 \quad (4.2.8)$$

όπου ως N συμβολίζεται το πλήθος των γειτόνων της υπό μελέτη υπολογιστικής κυψέλης. Ο αριθμός N δεν είναι σταθερός καθώς, όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί, κάθε κυψέλη δεν διαθέτει συγκεκριμένο αριθμό γειτόνων.



Σχήμα 4.2.4: Σχηματική αναπαράσταση μιας τετριμμένης περίπτωσης πλέγματος όπου παρατηρείται ότι οι γείτονες κάθε κυψέλης ποικίλουν από δύο μέχρι οχτώ. Η μεταφορά της πληροφορίας (προεκβολή) από τα βαρύκεντρα πραγματοποιείται στο μέσο της κοινής επιφανείας δύο γειτονικών κυψελών.

Παρατηρώντας το παραπάνω σχήμα 4.2.4 γίνεται αντιληπτό ότι οι γείτονες κάθε υπολογιστικής κυψέλης κυμαίνονται από δύο μέχρι οχτώ. Δύο γείτονες διαθέτουν μόνο οι

κυψέλες που βρίσκονται στις τέσσερις κορυφές του πλέγματος, ενώ το ανώτατο φράγμα των οχτώ γειτόνων προκαθορίζεται από τον μηχανικό-προγραμματιστή.

- Στη συνέχεια, η σχέση 4.2.8 παραγωγίζεται ως προς τις δύο χωρικές παραγώγους που περιέχει. Έτσι μπορεί να γραφεί ότι:

$$\frac{\partial E}{\partial(\frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial x})} = \sum_{n=1}^N \left\{ 2 \left[\frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial x} \Delta x_n + \frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial y} \Delta y_n - \Delta \mathbf{W}_n \right] \Delta x_n \right\} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial(\frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial y})} = \sum_{n=1}^N \left\{ 2 \left[\frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial x} \Delta x_n + \frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial y} \Delta y_n - \Delta \mathbf{W}_n \right] \Delta y_n \right\} = 0$$

ενώ εκτελώντας τις κατάλληλες πράξεις προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial x} \sum_{n=1}^N \{ \Delta x_n \Delta x_n \} + \frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial y} \sum_{n=1}^N \{ \Delta y_n \Delta x_n \} = \sum_{n=1}^N \{ \Delta x_n \Delta \mathbf{W}_n \}$$

$$\frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial x} \sum_{n=1}^N \{ \Delta y_n \Delta x_n \} + \frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial y} \sum_{n=1}^N \{ \Delta y_n \Delta y_n \} = \sum_{n=1}^N \{ \Delta y_n \Delta \mathbf{W}_n \}$$

οι οποίες αντιπροσωπεύουν ένα 2×2 σύστημα το οποίο σε μητρική μορφή γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N \{ \Delta x_n \Delta x_n \} & \sum_{n=1}^N \{ \Delta y_n \Delta x_n \} \\ \sum_{n=1}^N \{ \Delta y_n \Delta x_n \} & \sum_{n=1}^N \{ \Delta y_n \Delta y_n \} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{W}^P}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N \{ \Delta x_n \Delta \mathbf{W}_n \} \\ \sum_{n=1}^N \{ \Delta y_n \Delta \mathbf{W}_n \} \end{bmatrix} \quad (4.2.9)$$

Χρήση Περιοριστή

Έχει παρατηρηθεί ότι στο παραπάνω σύστημα 4.2.9, εξαιτίας των μικρών συντελεστών και της ευαισθησίας σε μικρές αλλαγές, προκαλούνται σημαντικές υπερακοντίσεις στις τιμές των χωρικών παραγώγων [15]. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιείται περιοριστής (*limiter*) ο οποίος αναπτύχθηκε από τους Barth & Jespersen [22], ενώ τροποποιήθηκε από τον Venkatakrishnan εισάγοντας στο σχήμα κατάλληλη διόρθωση ώστε η συνάρτηση του περιοριστή να είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της [23]. Ακολουθεί η διατύπωση του σχήματος:

$$\left(\mathbf{W}^{P'} \right)^{\bullet} = \mathbf{W}^P + \Pi^P \mathbf{P} \mathbf{P}' \cdot \left(\nabla W \right) \Big|_P \quad (4.2.10)$$

ενώ ορίζονται και οι παρακάτω ποσότητες:

$$\begin{aligned}\mathbf{W} &= \mathbf{W}^{P'} \\ \mathbf{W}_{min} &= \min(\mathbf{W}, \mathbf{W}^{Q_i}) \\ \mathbf{W}_{max} &= \max(\mathbf{W}, \mathbf{W}^{Q_i}) \\ \Phi(z) &= \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x + 2}\end{aligned}$$

όπου ο δείκτης i εκφράζει τις γειτονικές υπολογιστικές κυψέλες και, όπως έχει ήδη τονιστεί, λαμβάνει ακέραιες τιμές στο κλειστό διάστημα $[2, 8]$.

Κάνοντας χρήση των παραπάνω μεγεθών μπορεί να προκύψει η παρακάτω γενική σχέση του συντελεστή Π_P :

$$\Pi_{P_j} = \begin{cases} 1 & , \text{αν } \widetilde{W}_j = W_j^P \\ \Phi\left(\frac{W_{max,j} - W_j^P}{W_j - W_j^P}\right) & , \text{αν } \widetilde{W}_j > W_j^P \\ \Phi\left(\frac{W_{min,j} - W_j^P}{W_j - W_j^P}\right) & , \text{αν } \widetilde{W}_j < W_j^P \end{cases} \quad (4.2.11)$$

όπου ο δείκτης j αντιπροσωπεύει τα τέσσερα συντηρητικά μεγέθη οπότε ισχύει ότι $j = 1, \dots, 4$. Το μέγεθος \widetilde{W}_j αποτελεί την τιμή που λαμβάνει το εκάστοτε συντηρητικό μέγεθος στο κέντρο της κοινής επιφάνειας. Σε αυτό το σημείο όμως δεν θα γίνει περαιτέρω αναφορά, καθώς σε επόμενη ενότητα παρατίθεται ο τρόπος υπολογισμού των αντίστοιχων πρωτευόντων μεγεθών (σχέση 4.2.16).

Έχοντας μεταφέρει την πληροφορία από τα βαρύκεντρα στα κέντρα των επιφανειών πρέπει να βρεθεί ένας τρόπος σύνθεσης της τελικής πληροφορίας κάθε επιφάνειας καθώς, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, κάθε επιφάνεια συνορεύει με τουλάχιστον δύο υπολογιστικές κυψέλες οπότε δέχεται πληροφορία από καθεμιά ξεχωριστά. Για παράδειγμα, για το σχήμα 4.2.3 είναι εμφανές ότι μεταφέρεται πληροφορία από τα βαρύκεντρα P και Q , με αποτέλεσμα τελικά για το κατά x διάνυσμα ροής να ισχύει ότι:

$$\mathbf{f}_x = \mathbf{f}_x(\mathbf{W}^{P'}, \mathbf{W}^{Q'})$$

Για το λόγο αυτό γίνεται χρήση του σχήματος του Roe (*Roe approximate Riemann solver*) [21] το οποίο υπολογίζει το διάνυσμα ροής σε κάθε επιφάνεια.

Σχήμα Roe

Έστω ότι είναι επιθυμητός ο υπολογισμός των διανυσμάτων ροής στην κοινή επιφάνεια δύο γειτονικών κυψελών με βαρύκεντρα τα P και Q . Τότε τα διανύσματα ροής, σε διανυσματική μορφή, στο κέντρο της κοινής τους επιφάνεια, το οποίο θα συμβολίζεται με το δείκτη PQ , με τη βοήθεια του σχήματος Roe δίνονται ως εξής [13]:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_x^{PQ} &= \frac{1}{2}(\mathbf{f}_x^P + \mathbf{f}_x^Q) - \frac{1}{2}|\tilde{A}_x|(\mathbf{W}^{Q'} - \mathbf{W}^{P'}) \\ \mathbf{f}_y^{PQ} &= \frac{1}{2}(\mathbf{f}_y^P + \mathbf{f}_y^Q) - \frac{1}{2}|\tilde{A}_y|(\mathbf{W}^{Q'} - \mathbf{W}^{P'}) \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

όπου οι διάφοροι δείκτες που χρησιμοποιούνται έχουν ήδη παρουσιαστεί στο σχήμα 4.2.1.

Για λόγους πιο εύκολης παρουσίασης της μεθόδου θα χρησιμοποιηθεί η τανυστική μορφή της παραπάνω σχέσης η οποία διατυπώνεται ως εξής:

$$f_{ij}^{PQ} = \frac{1}{2}(f_{ij}^P + f_{ij}^Q) - \frac{1}{2}|\tilde{A}_j|(W_i^{Q'} - W_i^{P'}) \quad (4.2.13)$$

όπου $i = 1, \dots, 4$ και $j = 1, 2$ με αποτέλεσμα να γίνεται αντιληπτό ότι υπάρχουν δύο διαφορετικά μητρώα \tilde{A} όσα δηλαδή και τα διανύσματα ροής.

Κάθε μητρώο \tilde{A}_j έχει διαστάσεις 4×4 και επιλέγεται από το σχήμα Roe απαιτώντας να ισχύουν οι παρακάτω τέσσερις βασικές ιδιότητες για καθένα από αυτά [21]:

- i. Το μητρώο \tilde{A}_j πρέπει να αποτελεί μια γραμμική απεικόνιση από τον διανυσματικό χώρο των ταχυτήτων \mathbf{V} στον αντίστοιχο των διανυσμάτων ροής \mathbf{f}_j όπου $j = 1, 2 \equiv x, y$.
- ii. Καθώς ισχύει $\mathbf{V}^P \rightarrow \mathbf{V}^Q \rightarrow \tilde{\mathbf{V}}$, δηλαδή καθώς οι τρεις αυτές ταχύτητες τείνουν να ταυτιστούν, πρέπει να ισχύει ότι $\tilde{A}_j(\mathbf{V}^P, \mathbf{V}^Q) \rightarrow A_j(\tilde{\mathbf{V}})$ όπου $A_j = \partial \mathbf{f}_j / \partial \tilde{\mathbf{V}}$.
- iii. Πρέπει να ισχύει η σχέση $\tilde{A}_j(\mathbf{V}^P, \mathbf{V}^Q)(\mathbf{V}^P - \mathbf{V}^Q) = \mathbf{f}_j^P - \mathbf{f}_j^Q$.
- iv. Τα ιδιοδιανύσματα του \tilde{A}_j πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Στο εκάστοτε μητρώο \tilde{A}_j πραγματοποιείται διαγωνοποίηση, δηλαδή γράφεται στη μορφή:

$$\tilde{A}_j = P_j \Lambda_j P_j^{-1} \quad (4.2.14)$$

όπου Λ_j διαγώνιος πίνακας που περιέχει τις ιδιοτιμές και P_j ο πίνακας των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων του \tilde{A}_j . Στην παραπάνω σχέση, ο δείκτης j δεν υποδηλώνει καμία άθροιση και απλά λειτουργεί ως δείκτης υποδεικνύοντας κάθε φορά ποιος από τους πίνακες A_x και

A_y χρησιμοποιείται. Οι τέσσερις ιδιοτιμές του \tilde{A}_x καθώς και οι αντίστοιχες του \tilde{A}_y του αποδεικνύεται ότι είναι οι εξής [13]:

$$\begin{aligned} \lambda_{1x} &= \tilde{u} + \tilde{c} & \lambda_{2x} &= \tilde{u} - \tilde{c} & \lambda_{3x} &= \tilde{u} & \lambda_{4x} &= \tilde{u} \\ \lambda_{1y} &= \tilde{v} + \tilde{c} & \lambda_{2y} &= \tilde{v} - \tilde{c} & \lambda_{3y} &= \tilde{v} & \lambda_{4y} &= \tilde{v} \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

όπου οι δείκτες x, y αντιπροσωπεύουν το μητρώο στο οποίο αντιστοιχούν.

Στις παραπάνω ιδιοτιμές καθώς και στις τέσσερις βασικές προϋποθέσεις που προηγήθηκαν εμφανίστηκαν κάποια μεγέθη τα οποία μέχρι τώρα δεν είχαν χρησιμοποιηθεί. Πιο συγκεκριμένα, στις ιδιοτιμές εμφανίζεται το μέγεθος \tilde{u} αλλά και το μέγεθος \tilde{c} τα οποία εκφράζουν την ταχύτητα κατά την οριζόντια διεύθυνση καθώς και την ταχύτητα του ήχου αντίστοιχα. Στην πραγματικότητα, υπάρχουν ακόμα τρεις τέτοιες μεταβλητές που αφορούν τα υπόλοιπα τρία ροϊκά μεγέθη του πεδίου και εκφράζουν την τιμή που λαμβάνει το μέγεθος που αναπαριστούν στο κέντρο της κοινής επιφάνειας. Τα εν λόγω πέντε μεγέθη δίνονται από τους παρακάτω τύπους [21]:

$$\begin{aligned} \bullet \tilde{\rho} &= \sqrt{\varrho_P \varrho_Q} & \bullet \tilde{v} &= \frac{\sqrt{\varrho_P v_P} + \sqrt{\varrho_Q v_Q}}{\sqrt{\varrho_P} + \sqrt{\varrho_Q}} & \bullet \tilde{c} &= \sqrt{(\gamma - 1) \left[\tilde{h} - \frac{1}{2} \tilde{u}^2 \right]} \\ \bullet \tilde{u} &= \frac{\sqrt{\varrho_P u_P} + \sqrt{\varrho_Q u_Q}}{\sqrt{\varrho_P} + \sqrt{\varrho_Q}} & \bullet \tilde{h} &= \frac{\sqrt{\varrho_P h_P} + \sqrt{\varrho_Q h_Q}}{\sqrt{\varrho_P} + \sqrt{\varrho_Q}} \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Γνωρίζοντας όλα τα παραπάνω, καθίσταται δυνατή η παράθεση των εκφράσεων των πινακων Λ_x, P_x και Λ_y, P_y δηλαδή των μητρώων των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων. Υπενθυμίζεται ότι οι πίνακες \tilde{A}_j είναι διάστασης 4×4 ενώ το ίδιο ισχύει και για τα άλλα δύο μητρώα. Έτσι μπορεί να γραφεί [13]:

$$\Lambda_x = \begin{bmatrix} \tilde{u} + \tilde{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{u} - \tilde{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{u} \end{bmatrix} \quad P_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \tilde{u} + \tilde{c} & \tilde{u} - \tilde{c} & \tilde{u} & 0 \\ \tilde{v} & \tilde{v} & \tilde{v} & 1 \\ \tilde{h} + \tilde{u}\tilde{c} & \tilde{h} - \tilde{u}\tilde{c} & \frac{1}{2}q^2 & \tilde{v} \end{bmatrix} \quad (4.2.17)$$

$$\Lambda_y = \begin{bmatrix} \tilde{v} + \tilde{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{v} - \tilde{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{v} \end{bmatrix} \quad P_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \tilde{u} & \tilde{u} & \tilde{u} & 1 \\ \tilde{v} + \tilde{c} & \tilde{v} - \tilde{c} & \tilde{v} & 0 \\ \tilde{h} + \tilde{v}\tilde{c} & \tilde{h} - \tilde{v}\tilde{c} & \frac{1}{2}q^2 & \tilde{u} \end{bmatrix}$$

όπου q το μέτρο της ταχύτητας, δηλαδή $q^2 = \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2$.

Έχοντας πλέον υπολογίσει τα διανύσματα ροής στις επιφάνειες με τη βοήθεια του σχήματος Roe, μπορεί να αναλυθεί περαιτέρω η σχέση 4.2.3 ώστε τελικά να προκύψει μια

σχέση που να μπορεί στην πράξη να υπολογίσει το επιθυμητό επιφανειακό ολοκλήρωμα. Έτσι προκύπτει ότι:

$$\sum_{faces} f_{ij} n_j \Delta S = \sum_{k=faces} \left\{ \left[\frac{1}{2} (f_{ij}^P + f_{ij}^{Q,k}) - \frac{1}{2} |\tilde{A}_j^k| (W_i^{Q',k} - W_i^{P',k}) \right] n_j^k \Delta S^k \right\} \quad (4.2.18)$$

όπου ο δείκτης k που εισήχθη αντιπροσωπεύει τις επιφάνειες της υπό μελέτη υπολογιστικής κυψέλης P και κατ' επέκταση τις γειτονικές της υπολογιστικές κυψέλες, ενώ ισχύει ότι $\tilde{A}_j^k = (P_j | \Lambda_j | P_j^{-1}) \Big|_k$.

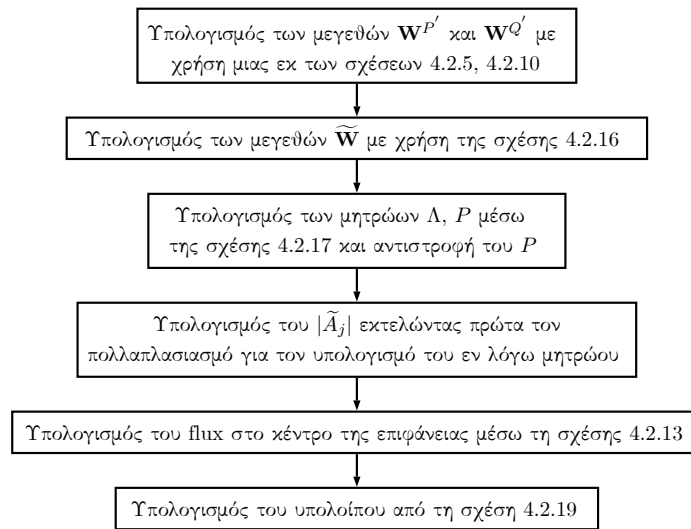
Τέλος, για λόγους καλύτερου συμβολισμού, πραγματοποιούνται οι παρακάτω απλοποιήσεις στη γραφή:

$$f_{ij}^P n_j^k = f_{i,n}^P \quad f_{ij}^{Q,k} n_j^k = f_{i,n}^{Q,k} \quad \tilde{A}_j^k n_j^k = \tilde{A}_n^k$$

οπότε και η σχέση 4.2.18 λαμβάνει την τελική της μορφή:

$$\sum_{faces} f_{ij} n_j \Delta S = \sum_{k=faces} \left\{ \left[\frac{1}{2} (f_{i,n}^P + f_{i,n}^{Q,k}) - \frac{1}{2} |\tilde{A}_n^k| (W_i^{Q',k} - W_i^{P',k}) \right] \Delta S^k \right\} \quad (4.2.19)$$

Έχοντας παράξει την παραπάνω σχέση 4.2.19, ολοκληρώθηκε η διαδικασία της διακριτοποίησης του ολοκληρώματος της χωρικής παραγωγού των διανυσμάτων ροής, καθώς το δεξί μέλος της εν λόγω σχέσης περιέχει μόνο γνωστές ποσότητες. Η παραπάνω σχέση σε περίπτωση μόνιμης ροής εκφράζει το διακριτοποιημένο υπόλοιπο των διαφορικών εξισώσεων του φαινομένου, γεγονός που δίνει την ευκαιρία να παρουσιαστεί στο σχήμα 4.2.5 ο αλγόριθμος υπολογισμού του εν λόγω υπολοίπου για μόνιμη ροή.



Σχήμα 4.2.5: Αλγόριθμος υπολογισμού του διακριτοποιημένου υπολοίπου για την περίπτωση της χρονικά μόνιμης ατριβούς ροής.

4.2.2 Διακριτοποίηση του Χρονικού Όρου

Η διακριτοποίηση του χρονικού όρου αποτελεί πολύ πιο εύκολη διαδικασία από την αντίστοιχη χωρική διακριτοποίηση. Πιο συγκεκριμένα, ο όρος που πρέπει να διακριτοποιηθεί είναι το ολοκλήρωμα της χρονικής παραγώγου της σχέσης 4.2.1, δηλαδή ο όρος:

$$\int_{\Omega^P} \left(\frac{\partial W_i}{\partial t} \right) d\Omega$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Leibnitz, ο χρονικός όρος μετατρέπεται ως εξής:

$$\int_{\Omega^P} \left(\frac{\partial W_i}{\partial t} \right) d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega^P} W_i d\Omega - \int_{\partial\Omega^P} V_l^{grid} n_l W_i d(\partial\Omega)$$

όπου για τον δείκτη l ισχύει ότι $l = 1, 2 \equiv x, y$.

Επειδή μελετάται ροή δίχως κινούμενες γεωμετρίες και επειδή ο δεύτερος όρος της παραπάνω σχέσης αφορά την κίνηση των γεωμετριών, γίνεται απλοποίηση της παραπάνω σχέσης μηδενίζοντας τον εν λόγω όρο:

$$\int_{\Omega^P} \left(\frac{\partial W_i}{\partial t} \right) d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega^P} W_i d\Omega$$

Επειδή τα συντηρητικά μεγέθη είναι υπολογισμένα στο βαρύκεντρο κάθε υπολογιστικής κυψέλης, είναι δυνατό να βγει έξω από το ολοκλήρωμα ο όρος W_i οπότε τελικά προκύπτει:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega^P} W_i d\Omega = \frac{\partial W_i}{\partial t} \Omega^P$$

Διακριτοποιώντας τη χρονική παράγωγο με ακρίβεια δεύτερης τάξης, λαμβάνεται η παρακάτω τελική σχέση:

$$\left. \frac{\partial W_i}{\partial t} \right|_{m+1} \Omega^P \simeq (3W_i^{P,m+1} - 4W_i^{P,m} + W_i^{P,m-1}) \frac{\Omega^P}{2\Delta t} \quad (4.2.20)$$

όπου $(m-1)$, m και $(m+1)$ είναι διαδοχικές χρονικές στιγμές, Ω^P είναι ο όγκος της υπό μελέτη υπολογιστικής κυψέλης P και Δt είναι το χρονικό βήμα της διακριτοποίησης. Τέλος, ύστερα από παρατήρηση της παραπάνω σχέσης 4.2.20 εξάγεται το συμπέρασμα ότι η παράγωγος της $(m+1)$ χρονικής στιγμής απαιτεί πληροφορία από τις προηγούμενες δύο χρονικές στιγμές.

4.2.3 Εισαγωγή του Ψευδο-Χρονικού Όρου $\frac{\partial W_i}{\partial \tau}$ στις ΜΔΕ

Έχει παρατηρηθεί ότι οι επιλύτες χρονικά μη-μόνιμων ή και μόνιμων ροών εμφανίζουν σημαντικές δυσκολίες στη σύγκλιση με άμεσο αποτέλεσμα, πολλές φορές, η λήψη αποτελεσμάτων να είναι αβέβαιη. Ένας ιδιαίτερα αποτελεσματικός τρόπος ενίσχυσης της σύγκλισης τους είναι η προσθήκη ενός ψευδο-χρονικού όρου στις αρχικές μδε. Για τον λόγο αυτό, ο επιλύτης που αναπτύχθηκε από τη ΜΠΥΡ&Β [1] και χρησιμοποιήθηκε ως βάση για τη διπλωματική εργασία, έκανε χρήση ψευδο-χρονικού όρου με αποτέλεσμα η αρχική σχέση 4.1.1 των διαφορικών εξισώσεων να γράφεται:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_y}{\partial y} = 0 \quad (4.2.21)$$

η ισοδύναμα σε τανυστική γραφή:

$$\frac{\partial W_i}{\partial \tau} + \frac{\partial W_i}{\partial t} + \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (4.2.22)$$

Ο ψευδο-χρονικός όρος αποτελεί καθαρά ένα υπολογιστικό τέχνασμα και δεν διαθέτει φυσική σημασία. Έτσι γίνεται αντιληπτό, ότι όταν ο επιλύτης συγκλίνει στην τελική λύση ο ψευδο-χρονικός όρος θα έχει μηδενιστεί.

Τέλος, επειδή ο συγκεκριμένος όρος έχει εισαχθεί στις αρχικές διαφορικές εξισώσεις, κατά την εφαρμογή των πεπερασμένων όγκων πλέον εμφανίζεται και το χωρικό ολοκλήρωμα του με αποτέλεσμα να απαιτείται μια επιπλέον διακριτοποίηση σε σχέση με όσα είχαν αναφερθεί μέχρι τώρα. Στην πράξη όμως, η διακριτοποίηση είναι ίδια με αυτήν του χρονικού όρου, με τη μοναδική διαφορά να εμφανίζεται στην τάξη της ακρίβειας που χρησιμοποιείται, καθώς για τον ψευδο-χρονικό όρο χρησιμοποιείται πρώτης τάξης ακρίβεια. Έτσι, η ψευδο-χρονική παράγωγος διακριτοποιείται ως εξής:

$$\left. \frac{\partial W_i}{\partial \tau} \right|_{m'+1} \Omega^P \simeq (W_i^{P,m'+1} - W_i^{P,m'}) \frac{\Omega^P}{\Delta \tau^P} \quad (4.2.23)$$

όπου m' και $(m' + 1)$ αντιστοιχούν σε διαδοχικές επαναλήψεις. Προφανώς, κάθε φορά αναζητάται η παράγωγος για την $(m' + 1)$ επανάληψη η οποία, όπως φαίνεται και στην παραπάνω σχέση, απαιτεί τη χρήση των ροϊκών μεγεθών της προηγούμενης επανάληψης.

Στην παραπάνω σχέση 4.2.23 παρατηρείται ότι στο ψευδο-χρονικό βήμα $\Delta \tau$ εισήχθη ο δείκτης P με αποτέλεσμα πλέον η κάθε υπολογιστική κυψέλη να διαθέτει το δικό της ψευδο-χρονικό βήμα. Αυτή η τεχνική εφαρμόζεται με σκοπό την επιτάχυνση της σύγκλισης του επιλύτη, επιτρέποντας στην κάθε κυψέλη να προχωρά στον ψευδο-χρόνο ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες χωρίς βέβαια να γίνεται απώλεια της ευστάθειας του κώδικα. Για την εφαρμογή της συγκεκριμένης τεχνικής γίνεται χρήση της συνθήκης Courant-Friedrichs-

Lewy [12]:

$$\Delta\tau_P = CFL \frac{\Omega^P}{C} \quad (4.2.24)$$

όπου CFL είναι ο ομώνυμος αριθμός, ενώ ο όρος C υπολογίζεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$C = (|V_k^P| + c^P) S_k^P \quad (4.2.25)$$

$$S_k^P = \frac{1}{2} \sum_{faces} \left\{ |n_k^{PQ}| \Delta S_k \right\} \quad (4.2.26)$$

όπου $k = 1, 2 \equiv x, y$, $|V_k^P|$ το μέτρο της κάθε συνιστώσας της ταχύτητας του βαρύνκτρου P , c^P η τοπική ταχύτητα του ήχου, $|n_k^{PQ}|$ το μέτρο των συνιστωσών του κάθετου στην κοινή επιφάνεια διανύσματος \mathbf{n} και ΔS_k η προβολή όλων των τμημάτων που απαρτίζουν τα όρια του όγκου ελέγχου της κυψέλης P κατά την κατεύθυνση k .

4.2.4 Τελική Έκφραση των Διακριτοποιημένων ΜΔΕ

Σε αυτό το σημείο γίνεται παράθεση των τελικών διακριτοποιημένων διαφορικών εξισώσεων Euler βασιζόμενοι στις τρεις διαφορετικές διακριτοποιήσεις που προηγήθηκαν. Πρακτικά δηλαδή, παρουσιάζεται μια τελική σχέση η οποία απλά αποτελεί τη σύνθεση των επιμέρους αποτελεσμάτων που προηγήθηκαν μέχρι τώρα. Αξίζει να σημειωθεί, ότι μια από τις τρεις διακριτοποιήσεις είναι και αυτή του ψευδο-χρονικού όρου, με αποτέλεσμα η σχέση που παρατίθεται στην ουσία να περιέχει και έναν όρο που δεν πηγάζει από τις Euler εξισώσεις. Έτσι, για λόγους ακριβείας πρέπει να ειπωθεί ότι οι διακριτοποιημένες εξισώσεις Euler περιγράφονται από την παρακάτω σχέση αφαιρώντας τον όρο της σχέσης 4.2.23.

$$\begin{aligned} R_i^P = \sum_{k=faces} \left\{ \left[\frac{1}{2} (f_{i,n}^P + f_{i,n}^{Q,k}) - \frac{1}{2} |\tilde{A}_n^k| (W_i^{Q',k} + W_i^{P',k}) \right] \Delta S^k \right\} \\ + (3W_i^{P,m+1} - 4W_i^{P,m} + W_i^{P,m-1}) \frac{\Omega^P}{2\Delta t} \\ + (W_i^{P,m'+1} - W_i^{P,m'}) \frac{\Omega^P}{\Delta\tau^P} \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

4.3 Επίλυση των Διακριτοποιημένων Πεδιακών Εξισώσεων

Οι διακριτοποιημένες εξισώσεις γράφονται κάνοντας χρήση της δέλτα διατύπωσης (*delta formulation*) ώστε οι άγνωστοι πλέον να μην είναι τα πεδία \mathbf{W} αλλά οι διορθωτικές ποσότητες $\Delta\mathbf{W}$. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι η ακριβής λύση της ροής συμβολίζεται ως

\mathbf{W}^* ενώ η τυχαία τιμή του πεδίου, η οποία μπορεί να αντιπροσωπεύει για παράδειγμα την αρχικοποίηση του πεδίου, συμβολίζεται ως \mathbf{W} . Όπως αναμένεται η τυχαία τιμή του πεδίου δεν θα ικανοποιεί τη μδε, γεγονός που με μαθηματικό τρόπο διατυπώνεται ως εξής:

$$\mathbf{R}(\mathbf{W}) \neq 0$$

Οι τιμές \mathbf{W}^* και \mathbf{W} όπως γίνεται αντιληπτό, δεν έχουν καμιά σχέση μεταξύ τους γεγονός που όμως δεν απαγορεύει το συνδυασμό τους χρησιμοποιώντας την παρακάτω βασική σχέση:

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{W} + \Delta \mathbf{W} \quad (4.3.1)$$

όπου πρακτικά η ποσότητα $\Delta \mathbf{W}$ εκφράζει πόσο απέχει η τιμή \mathbf{W} από τη λύση \mathbf{W}^* και στην πράξη αποτελεί μια άγνωστη ποσότητα. Όπως γίνεται αντιληπτό, απώτερος σκοπός είναι να βρεθεί ένας τρόπος που από μια τυχαία αρχικοποίηση του πεδίου \mathbf{W} θα εντοπίζεται η τιμή \mathbf{W}^* υπολογίζοντας την παραπάνω διαφορά $\Delta \mathbf{W}$. Για το υπόλοιπο της λύσης \mathbf{W}^* είναι γνωστό ότι είναι ίσο με μηδέν, οπότε λαμβάνοντας υπόψη την παραπάνω σχέση 4.3.1 μπορεί να γραφεί ότι:

$$\mathbf{R}(\mathbf{W}^*) = \mathbf{R}(\mathbf{W} + \Delta \mathbf{W}) = 0$$

ή ισοδύναμα σε τανυστική γραφή:

$$R_i(W_j^*) = R_i(W_j + \Delta W_j) = 0$$

όπου $i = 1, \dots, 4$ και $j = 1, \dots, 4$.

Αναπτύσσοντας την παραπάνω σχέση σε σειρά Taylor προκύπτει:

$$R_i(W_j^*) = R_i(W_j + \Delta W_j) = R_i(W_j) + \frac{\partial R_i}{\partial W_j} \Delta W_j + \dots = 0$$

όπου διατηρούνται μόνο οι δύο πρώτοι όροι αποκόπτοντας τους υπόλοιπους, γεγονός που αυτομάτως εισάγει σφάλμα στην ανάλυση. Έτσι, πολύ εύκολα προκύπτει η παρακάτω σχέση 4.3.2 η οποία επιτρέπει τον υπολογισμό του ΔW_j ώστε τελικά να υπολογιστεί η λύση της ροής.

$$\frac{\partial R_i}{\partial W_j} \Delta W_j = -R_i \quad (4.3.2)$$

Στην πραγματικότητα, η παραπάνω σχέση εκφράζει τέσσερις σχέσεις όσες δηλαδή και οι διαφορικές εξισώσεις της σχέσης 4.2.22 γεγονός που σε συνδυασμό με την άθροιση που υποδηλώνει ο επαναλαμβανόμενος δείκτης j , δημιουργεί ένα 4×4 γραμμικό σύστημα το

οποίο επιλύεται είτε με τη μέθοδο Jacobi είτε με τη μέθοδο Gauss-Seidel. Οι δύο μέθοδοι επίλυσης που αναφέρθηκαν επιλέχθηκαν στοχευμένα διότι αποτελούν επαναληπτικές μεθόδους (*iterative methods*) δηλαδή, αποτελούν μεθόδους που κάνουν χρήση συνεχώς βελτιούμενων αποτελεσμάτων ώστε μέσω επαναληπτικής διαδικασίας να καταλήξουν σε ένα αποτέλεσμα πολύ κοντά στο πραγματικό. Όπως επισημάνθηκε και προηγουμένως, η σχέση 4.3.2 προέκυψε με αποκοπή των όρων υψηλής τάξης με αποτέλεσμα να εισάγεται σημαντικό σφάλμα και, κατά συνέπεια, η χρήση τέτοιων μεθόδων επίλυσης να καθίσταται απαραίτητη.

Η σχέση 4.3.2 στη βιβλιογραφία περιγράφεται πολύ συχνά από την παρακάτω γενική σχέση:

$$[NUMERICS] \Delta W_j = [PHYSICS] \quad (4.3.3)$$

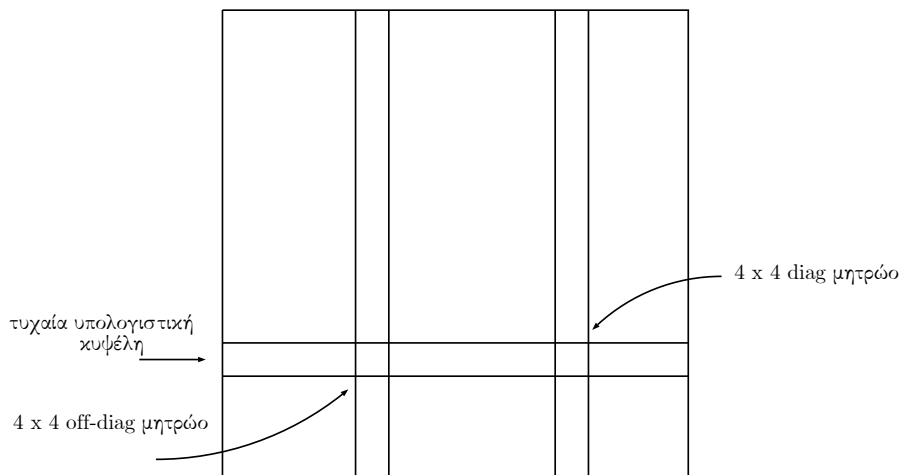
με το αριστερό μέλος (*left-hand side - LHS*) να καθορίζει τον τρόπο σύγκλισης, ενώ το δεξί μέλος (*right-hand side - RHS*) να καθορίζει την ακρίβεια της τελικής λύσης. Πρέπει να σημειωθεί ότι στον όρο του $[NUMERICS]$ υπάρχει σχετική ελευθερία, καθώς επιδέχεται τροποποιήσεων οι οποίες μπορούν να επιταχύνουν τη διαδικασία σύγκλισης ενός επιλύτη είτε προσθέτοντας κάποιον όρο είτε κάνοντας κάποιες απλοποιητικές παραδοχές, χωρίς όμως αυτό να σημαίνει ότι μπορούν να προκαλούνται εκ βάθρων αλλαγές. Μάλιστα, στην πραγματικότητα αυτό έχει ήδη συμβεί στην ανάλυση που προηγήθηκε, με την εισαγωγή του ψευδο-χρονικού όρου στις διαφορικές εξισώσεις ο οποίος, όπως ειπώθηκε, βοηθάει στην ευστάθεια του κώδικα (*robust programming*). Από την άλλη πλευρά, ο όρος $[PHYSICS]$ δεν επιδέχεται τροποποιήσεων καθώς εκφράζει την φυσική υπόσταση του προβλήματος.

4.3.1 Υπολογισμός της Παραγώγου $\frac{\partial R_i}{\partial W_j}$

Έστω ότι έχει κατασκευαστεί γύρω από την αεροτομή, ή γενικά γύρω από την υπό μελέτη γεωμετρία, ένα μη-δομημένο πλέγμα το οποίο αποτελείται από M στον αριθμό υπολογιστικές κυψέλες. Είναι γνωστό ότι η ροή περιγράφεται από τέσσερα συντηρητικά μεγέθη οπότε ισοδύναμα διαθέτει τέσσερα υπόλοιπα. Η παράγωγος που πρέπει να υπολογιστεί αποτελεί παράγωγο καθενός από αυτά τα τέσσερα υπόλοιπα για κάθε ένα από τα συντηρητικά μεγέθη αποτελώντας έτσι έναν 4×4 πίνακα. Όμως, όπως έχει γίνει αντιληπτό μέχρι τώρα, το υπόλοιπο κάθε υπολογιστικής κυψέλης δεν εξαρτάται μόνο από τα δικά της ροϊκά μεγέθη αλλά, σε μεγάλο βαθμό, και από τα αντίστοιχα των κυψελών με τις οποίες γειτνιάζει. Έτσι, προκύπτει ότι η εν λόγω παράγωγος πρέπει να υπολογιστεί και ως προς τα αντίστοιχα γειτονικά ροϊκά μεγέθη.

Όσα αναφέρθηκαν μέχρι τώρα μπορούν να απεικονισθούν σε ένα μητρώο διάστασης $M \times M$, όπου η κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη υπολογιστική κυψέλη και στα κελιά της συγκεκριμένης γραμμής αποθηκεύονται οι παράγωγοι του υπολοίπου της συγκεκριμένης κυψέλης ως προς τα συντηρητικά μεγέθη όλων των υπολογιστικών κυψελών. Έτσι, προκύπτουν τρία πολύ σημαντικά συμπεράσματα που αφορούν το συγκεκριμένο μη-

τρόο. Πρώτον, στην πραγματικότητα κάθε κελί του εν λόγω μητρώου αποτελεί έναν 4×4 πίνακα γεγονός που υποδεικνύει ότι ο πίνακας εν τέλει έχει διαστάσεις $4M \times 4M$ και όχι $M \times M$ όπως είχε αναφερθεί. Δεύτερον, μόνο τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα αυτού περιέχουν τις παραγώγους της κάθε κυψέλης ως προς τα συντηρητικά της μεγέθη. Τα εν λόγω στοιχεία από αυτό το σημείο και για την υπόλοιπη εργασία θα αναφέρονται με τον όρο *diag*. Τέλος, τα μη-διαγώνια κελιά, τα οποία θα αναφέρονται ως *off-diag*, είναι μη μηδενικά μόνο για τις γειτονικές κυψέλες της υπό μελέτη υπολογιστικής κυψέλης όταν πραγματοποιείται προεκβολή με σχήμα που προσφέρει πρώτης τάξης ακρίβεια. Σε περίπτωση που πραγματοποιείται προεκβολή με σχήμα δεύτερης τάξης ακρίβειας, η παραπάνω ιδιότητα δεν ισχύει για όλες τις μη γειτνιαζουσες κυψέλες καθώς η υπό μελέτη κυψέλη χρησιμοποιεί πληροφορία και από τις κυψέλες που γειτνιάζουν με τις δικές της γειτονικές κυψέλες. Όμως, και σε αυτήν την περίπτωση τα μη-διαγώνια στοιχεία των κυψελών που δεν γειτνιάζουν με την υπό μελέτη κυψέλη θεωρούνται μηδενικά, γεγονός που βασίζεται στην ελευθερία παρέμβασης στο LHS. Ακολουθεί το σχήμα 4.3.1 το οποίο απεικονίζει το εν λόγω μητρώο και στο οποίο παρουσιάζονται μερικά από τα χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν μέχρι τώρα.



Σχήμα 4.3.1: Παράθεση του $M \times M$ μητρώου, όπου M είναι ο αριθμός των υπολογιστικών κυψελών, όπου για μια τυχαία υπολογιστική κυψέλη απεικονίζεται ένα τυχαίο μη-διαγώνιο στοιχείο-μητρώο (*off-diag*) καθώς και το μοναδικό στοιχείο-μητρώο της διαγώνιου του (*diag*).

Ο υπολογισμός της επιθυμητής παραγώγου βασίζεται στη σχέση 4.2.27 που αποτελείται από τρεις όρους και οι οποίοι μελετώνται ξεχωριστά με σκοπό την καλύτερη κατανόηση της συνεισφοράς του καθενός στο τελικό αποτέλεσμα. Επιπλέον, η ανάλυση που ακολουθεί χωρίζεται και σε δύο μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με το αν ο όρος που μελετάται ανήκει ή όχι στη διαγώνιο του μητρώου που αναφέρθηκε.

Στοιχεία Κυρίας Διαγώνιου

Τα στοιχεία της κυρίας διαγώνιου περιέχουν τις παραγώγους των τεσσάρων χωρικών υπολοίπων της υπό μελέτη υπολογιστικής κυψέλης ως προς τα συντηρητικά μεγέθη της

κυψέλης αυτής, δηλαδή περιέχουν τους όρους $\frac{\partial R_i^P}{\partial W_j^P}$, όπου με P συμβολίζεται η υπολογιστική κυψέλη που μελετάται, ενώ για τους δείκτες i, j ισχύει ότι $i = 1, \dots, 4$ και $j = 1, \dots, 4$.

Για τον πρώτο όρο της σχέσης 4.2.27, δηλαδή τον όρο που προέρχεται από το σχήμα του Roe, ισχύει:

$$\begin{aligned} (diag)_{Roe}^P = \frac{\partial}{\partial W_j^P} \left(\sum_{k=faces} \left\{ \left[\frac{1}{2}(f_{i,n}^P + f_{i,n}^{Q,k}) - \frac{1}{2}|\tilde{A}_n^k|(W_i^{Q',k} - W_i^{P',k}) \right] \Delta S^k \right\} \right) = \\ \sum_{k=faces} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial(f_{i,n}^P + f_{i,n}^{Q,k})}{\partial W_j^P} \Delta S^k - \frac{1}{2} |\tilde{A}_n^k| \frac{\partial(W_i^{Q',k} - W_i^{P',k})}{\partial W_j^P} \Delta S^k \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial(|\tilde{A}_n^k|)}{\partial W_j^P} (W_i^{Q',k} - W_i^{P',k}) \Delta S^k \right\} \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να απλοποιηθεί αρκετά βασιζόμενοι στις παρακάτω τρεις παρατηρήσεις:

- Ο όρος $\frac{\partial(f_{i,n}^{Q,k})}{\partial W_j^P}$ είναι ίσος με μηδέν καθώς το διάνυσμα ροής \mathbf{f} των γειτονικών υπολογιστικών κυψελών Q δεν εξαρτάται από τα συντηρητικά μεγέθη \mathbf{W} της υπό μελέτη κυψέλης P .
- Ο όρος $\frac{\partial(W_i^{Q',k})}{\partial W_j^P}$ είναι και αυτός ίσος με το μηδέν καθώς τα συντηρητικά μεγέθη \mathbf{W} της γειτονικής υπολογιστικής κυψέλης Q δεν εξαρτώνται από τα αντίστοιχα της κυψέλης P .
- Ο τελευταίος όρος $\frac{\partial(|\tilde{A}_n^k|)}{\partial W_j^P} (W_i^{Q',k} - W_i^{P',k})$ παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία στον υπολογισμό του καθώς εντοπίζεται σημαντική δυσκολία στον υπολογισμό της παράγωγου $\frac{\partial(|\tilde{A}_n^k|)}{\partial W_j^P}$. Αποδεικνύεται από τη σχετική βιβλιογραφία ότι ο όρος που πρέπει να υπολογιστεί είναι σχεδόν μηδενικός οπότε για λόγους ευκολία μπορεί να παραλειφθεί. Βέβαια, αυτή η απλοποιητική παραδοχή αυτομάτως εισάγει σφάλμα στους υπολογισμούς. Όμως, όπως είχε αναφερθεί και σε προηγούμενη παράγραφο, ο υπολογισμός της παράγωγου $\frac{\partial R_i}{\partial W_j}$ δεν απαιτεί αυστηρή ακρίβεια, με αποτέλεσμα να πραγματοποιούνται κάποιες απλοποιητικές παραδοχές όπου αυτές κρίνονται απαραίτητες.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η ανωτέρω σχέση λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$(diag)_{Roe}^P = \sum_{k=faces} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial(f_{i,n}^P)}{\partial W_j^P} \Delta S^k - \frac{1}{2} |\tilde{A}_n^k| \frac{\partial(W_i^{P',k})}{\partial W_j^P} \Delta S^k \right\}$$

η οποία μπορεί να απλοποιηθεί ακόμα περισσότερο καθώς η παράγωγος $\frac{\partial(f_{i,n}^P)}{\partial W_j^P}$ αποτελεί την Ιακωβιανή των διανυσμάτων ροής της υπολογιστικής κυψέλης P και συμβολίζεται ως A_n^P . Επίσης, η παράγωγος $\frac{\partial(W_i^{P',k})}{\partial W_j^P}$ θεωρείται ότι είναι ίση με μονάδα ακόμα και για την περίπτωση της προεκβολής με δεύτερης τάξης ακρίβεια. Με πιο απλά λόγια, η συγκεκριμένη παραγωγή πραγματοποιείται πάντα σαν να έχει πραγματοποιηθεί προεκβολή πρώτης τάξης. Έτσι είναι:

$$(diag)_{Roe}^P = \frac{1}{2} \sum_{k=faces} \left\{ (A_n^P - |\tilde{A}_n^k|) \Delta S^k \right\} \quad (4.3.4)$$

Για τον δεύτερο όρο της σχέσης 4.2.27, ο οποίος αντιπροσωπεύει τη διακριτοποίηση της χρονικής παραγωγού, ισχύει:

$$(diag)_{time}^P = \frac{\partial}{\partial W_j^{P,m+1}} \left([3W_i^{P,m+1} - 4W_i^{P,m} + W_i^{P,m-1}] \frac{\Omega^P}{2\Delta t} \right)$$

όπου παρατηρείται ότι η παραγωγή γίνεται ως προς τα συντηρητικά μεγέθη της $m + 1$ χρονικής στιγμής, δηλαδή της χρονικής στιγμής που υπολογίζονται τα διάφορα μεγέθη. Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι χρονικές παράγωγοι των συντηρητικών μεγεθών των $m - 1$ και m χρονικών στιγμών ως προς τα αντίστοιχα της $m + 1$ χρονικής στιγμής είναι ίση με το μηδέν, προκύπτει η παρακάτω τελική σχέση:

$$(diag)_{time}^P = 3 \frac{\Omega^P}{2\Delta t} I \quad (4.3.5)$$

όπου ως I συμβολίζεται το 4×4 μοναδιαίο μητρώο.

Η συνεισφορά του τρίτου και τελευταίου όρου, ο οποίος αφορά την παράγωγο ως προς το ψευδο-χρόνο, της σχέσης 4.2.27 στα διαγώνια μητρώα υπολογίζεται ως εξής:

$$(diag)_{pseudo}^P = \frac{\partial}{\partial W_j^{P,m'+1}} \left([W_i^{P,m'+1} - W_i^{P,m'}] \frac{\Omega^P}{\Delta \tau} \right)$$

με την παραγωγή να γίνεται ως προς τη $(m' + 1)$ ψευδο-χρονική στιγμή για την οποία γίνεται επίλυση κάθε φορά, και τα συντηρητικά μεγέθη της οποίας είναι ανεξάρτητα με αυτά της προηγούμενης ψευδο-χρονικής στιγμής m' . Έτσι τελικά, προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$(diag)_{pseudo}^P = \frac{\Omega^P}{\Delta\tau^P} I \quad (4.3.6)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις 4.3.4, 4.3.5 και 4.3.6 προκύπτει η παρακάτω τελική σχέση 4.3.7 για τα στοιχεία της κυρία διαγωνίου:

$$(diag)^P = \frac{1}{2} \sum_{k=faces} \left\{ (A_n^P - |\tilde{A}_n^k|) \Delta S^k \right\} + 3 \frac{\Omega^P}{2\Delta t} I + \frac{\Omega^P}{\Delta\tau^P} I \quad (4.3.7)$$

Στοιχεία Εκτός της Κυρίας Διαγωνίου

Για μια οποιαδήποτε υπολογιστική κυψέλη P τα μη-διαγώνια στοιχεία που αναφέρονται σε αυτή είναι μη-μηδενικά μόνο για τις κυψέλες που γειτνιάζουν μαζί της. Βασιζόμενοι σε αυτή την παρατήρηση ακολουθείται παρόμοια διαδικασία με πριν οπότε λαμβάνοντας τον πρώτο όρο της σχέσης 4.2.27 και παραγωγίζοντας τον ως προς την εκάστοτε γειτονική κυψέλη Q της υπό μελέτη κυψέλης P προκύπτει:

$$\begin{aligned} (off - diag)_{Roe}^{P,k} &= \frac{\partial}{\partial W_j^{Q,k}} \left(\sum_{k=faces} \left\{ \left[\frac{1}{2} (f_{i,n}^P + f_{i,n}^{Q,k}) - \frac{1}{2} |\tilde{A}_n^k| (W_i^{Q',k} - W_i^{P',k}) \right] \Delta S^k \right\} \right) \\ &= \sum_{k=faces} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial (f_{i,n}^P + f_{i,n}^{Q,k})}{\partial W_j^{Q,k}} \Delta S^k - \frac{1}{2} |\tilde{A}_n^k| \frac{\partial (W_i^{Q',k} - W_i^{P',k})}{\partial W_j^{Q,k}} \Delta S^k \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial (|\tilde{A}_n^k|)}{\partial W_j^{Q,k}} (W_i^{Q',k} - W_i^{P',k}) \Delta S^k \right\} \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση απλοποιείται σημαντικά κάνοντας χρήση των παρακάτω παρατηρήσεων:

- Η παράγωγος του διανύσματος ροής της κυψέλης P ως προς το διάνυσμα των συντηρητικών μεγεθών κάθε γειτονικής κυψέλης, δηλαδή ο όρος $\frac{\partial (f_{i,n}^P)}{\partial W_j^{Q,k}}$ είναι ίση με μηδέν καθώς δεν υφίσταται κάποια συσχέτιση μεταξύ αυτών των δύο μεγεθών.
- Η παράγωγος $\frac{\partial (f_{i,n}^{Q,k})}{\partial W_j^{Q,k}}$ δηλαδή η παράγωγος των διανυσμάτων ροής των γειτονικών κυψελών ως προς τα αντίστοιχα συντηρητικά μεγέθη, είναι μη-μηδενική μόνο όταν τα δύο αυτά μεγέθη απευθύνονται στην ίδια υπολογιστική κυψέλη.

- Ο όρος $\frac{\partial(W_i^{P',k})}{\partial W_j^{Q,k}}$ μηδενίζεται καθώς τα συντηρητικά μεγέθη της υπολογιστικής κυψέλης P δεν εξαρτώνται από τα αντίστοιχα των γειτονιών κυψελών.
- Ο όρος $\frac{\partial(|\tilde{A}_n^k|)}{\partial W_j^{Q,k}}(W_i^{Q',k} - W_i^{P',k})\Delta S^k$ αμελείται για τον ίδιο λόγο που αμελήθηκε και στην περίπτωση των διαγωνίων στοιχείων.

Έτσι, η παραπάνω σχέση λαμβάνει την τελική της μορφή:

$$(off - diag)_{Roe}^{P,k} = \frac{1}{2} \left[\left(A_n^{Q,k} - |\tilde{A}_n^k| \right) \Delta S^k \right] \quad (4.3.8)$$

όπου $A_n^{Q,k}$ είναι η Ιακωβιανή της εκάστοτε γειτονικής κυψέλης Q και ουσιαστικά αντιπροσωπεύει τον όρο $\frac{\partial(f_{i,n}^{P,k})}{\partial W_j^{Q,k}}$, ενώ η παράγωγος $\frac{\partial(W_i^{Q'})}{\partial W_j^Q}$ ισούται με μονάδα, ακολουθώντας τον ίδιο συλλογισμό με τους διαγώνιους όρους.

Για τον δεύτερο όρο της σχέσης 4.2.27 ισχύει:

$$(off - diag)_{time}^{P,k} = \frac{\partial}{\partial W_j^{Q,m+1}|_k} \left([3W_i^{P,m+1} - 4W_i^{P,m} + W_i^{P,m-1}] \frac{\Omega^P}{2\Delta t} \right)$$

Όμως, τα συντηρητικά μεγέθη της υπολογιστικής κυψέλης P δεν εξαρτώνται από τα αντίστοιχα της οποιασδήποτε γειτονικής κυψέλης Q , γεγονός που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο παραπάνω όρος είναι ίσος με το μηδέν, δηλαδή:

$$(off - diag)_{time}^{P,k} = 0 \quad (4.3.9)$$

Ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό και για τον ψευδο-χρονικό όρο της σχέσης 4.2.27 συμπεραίνεται ότι η συνεισφορά του στους μη-διαγώνιους όρους είναι επίσης μηδενική, δηλαδή:

$$(off - diag)_{pseudo}^{P,k} = 0 \quad (4.3.10)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις 4.3.8, 4.3.9 και 4.3.10 προκύπτει η παρακάτω σχέση για τους μη-διαγώνιους όρους των γειτονικών υπολογιστικών κυψελών της P :

$$(off - diag)^{P,k} = \frac{1}{2} \left[\left(A_n^{Q,k} - |\tilde{A}_n^k| \right) \Delta S^k \right] \quad (4.3.11)$$

ή γενικεύοντας το αποτέλεσμα και για τις υπολογιστικές κυψέλες που δεν γειτνιάζουν με την υπό μελέτη κυψέλη P είναι:

$$(off - diag)^{P,k} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\left(A_n^{Q,k} - |\tilde{A}_n^k| \right) \Delta S^k \right] & , \text{αν } P \text{ και } Q \text{ γειτνιάζουν} \\ 0 & , \text{αν } P \text{ και } Q \text{ δεν γειτνιάζουν} \end{cases} \quad (4.3.12)$$

4.3.2 Διατύπωση Συστήματος των Διακριτοποιημένων Εξισώσεων

Έχοντας αποδείξει τους γενικούς τύπους των διαγώνιων και μη-διαγώνιων όρων, σχέσεις 4.3.7 και 4.3.12, μπορεί να διατυπωθεί σε μητρική γραφή το προς επίλυση σύστημα:

$$\begin{bmatrix} (diag)_1|_{m'} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & (off)^P|_{m'}^k & \dots & (diag)^P|_{m'} & \dots & (off)^P|_{m'}^k & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (diag)_M|_{m'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{W}_1^{m'+1} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{W}_P^{m'+1} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{W}_M^{m'+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^{m'} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_P^{m'} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_M^{m'} \end{bmatrix} \quad (4.3.13)$$

όπου για καθαρά χωροταξικούς λόγους, και μόνο για αυτή τη σχέση, μετονομάστηκαν τα off-diag στοιχεία-μητρώα δίνοντας τους τον τίτλο off. Ο δείκτης m' , όπως έχει αναφερθεί και σε προηγούμενη ενότητα, αντιπροσωπεύει την ψευδο-χρονική στιγμή και ο δείκτης k καθένα από τους γείτονες της τυχαίας υπολογιστικής κυψέλης P .

Το παραπάνω σύστημα διατυπωμένο σε διανυσματική γραφή για το τυχαίο βαρύκεντρο, δίνεται ως εξής:

$$(diag)^P|_{m'} \Delta \mathbf{W}^{P,m'+1} = -\mathbf{R}^{P,m'} - \sum_{cells} \left\{ (off - diag)^P|_{m'} \Delta \mathbf{W}^{P,m'} \right\}$$

Εκτελώντας αντιστροφή του πρώτου μητρώου της σχέσης 4.3.13 τελικά λαμβάνεται η παρακάτω γενική διανυσματική σχέση:

$$\Delta \mathbf{W}_P^{new} = [(diag)_{old}^P]^{-1} \left[-\mathbf{R}_{old}^P - \sum_{cells} \left\{ (off - diag)_{old}^P \Delta \mathbf{W}_{old}^P \right\} \right] \quad (4.3.14)$$

με την άθροιση να συμβαίνει κάθε φορά ως προς όλες τις υπολογιστικές κυψέλες. Προφανώς, η πλειοψηφία αυτών που δεν γειτνιάζουν με την εκάστοτε κυψέλη P , θα έχει μηδενική συνεισφορά.

4.3.3 Οριακές Συνθήκες του Προβλήματος

Για την επίλυση των φαινομένων ροής που προκαλούνται από την περιοδική μεταβολή της γωνίας πρόσπτωσης σε ακίνητη αεροτομή, απαιτούνται δύο ειδών οριακές συνθήκες, αυτές στα επ' άπειρον όρια καθώς και αυτές στα σταθερά όρια, δηλαδή, στα όρια της υπό μελέτη γεωμετρίας.

Οριακές Συνθήκες στα Επ' Άπειρον Όρια

Κατά τη μελέτη ροής γύρω από μεμονωμένα σώματα, γίνεται χρήση οριακών συνθηκών επ' άπειρον ροής (*far field boundary conditions*) δηλαδή οριακών συνθηκών που θεωρούν ότι αρκούντως μακριά της γεωμετρίας, η ροή παραμένει πρακτικά ανεπηρέαστη και ταυτίζεται με την επ' άπειρον ροή. Στην πραγματικότητα, αυτή η συνθήκη αποτελεί μια ακόμη παραδοχή η ακρίβεια της οποίας εξαρτάται από την απόσταση που ο χρήστης ορίζει ως απόσταση που η επίδραση της διαταραχής δεν επηρεάζει την επ' άπειρον ροή. Συνήθως, η απόσταση αυτή δίνεται ως ακέραιο πολλαπλάσιο της χορδής της υπό μελέτη αεροτομής και θεωρείται πολύ ικανοποιητική όταν ισούται περίπου με δέκα χορδές.

Οι οριακές συνθήκες για τα επ' άπειρον όρια είναι συνθήκες Dirichlet όπου απαιτείται τα τοπικά πρωτεύοντα μεγέθη να έχουν ίδιες τιμές με τα αντίστοιχα της επ' άπειρον ροής. Οι συγκεκριμένες οριακές συνθήκες δεν εφαρμόζονται στους οριακούς κόμβους του πλέγματος, αλλά σε ψευδο-κόμβους που τοποθετούνται εκτός του υπολογιστικού πλέγματος. Κατά τη διάρκεια της επίλυσης, οι ψευδο-κόμβοι χρησιμεύουν μόνο ως βοηθητικοί κόμβοι για τον υπολογισμό των μεγεθών της ροής στις πλευρές του υπολογιστικού χωρίου, δηλαδή στους οριακούς κόμβους, χωρίς η ροή να επιλύεται σε αυτούς.

Οριακές Συνθήκες στα Στερεά Όρια

Επειδή η ροή που μελετάται είναι ατρίβης, η μοναδική οριακή συνθήκη που απαιτείται να ισχύει στα στερεά όρια είναι η συνθήκη μη-εισχώρησης. Η συγκεκριμένη συνθήκη επιβάλλει τον μηδενισμό της κάθετης στην αεροτομή συνιστώσας της ταχύτητας:

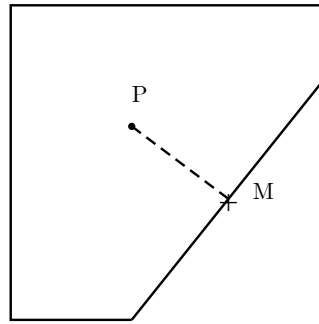
$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.3.15)$$

όπου με \mathbf{n} συμβολίζεται το κάθετο στην αεροτομή μοναδιαίο διάνυσμα.

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη μη-εισχώρησης στη σχέση 4.2.4 προκύπτει ότι:

$$\vec{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n} \Big|_{wall} = \begin{bmatrix} 0 \\ pn_x \\ pn_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.16)$$

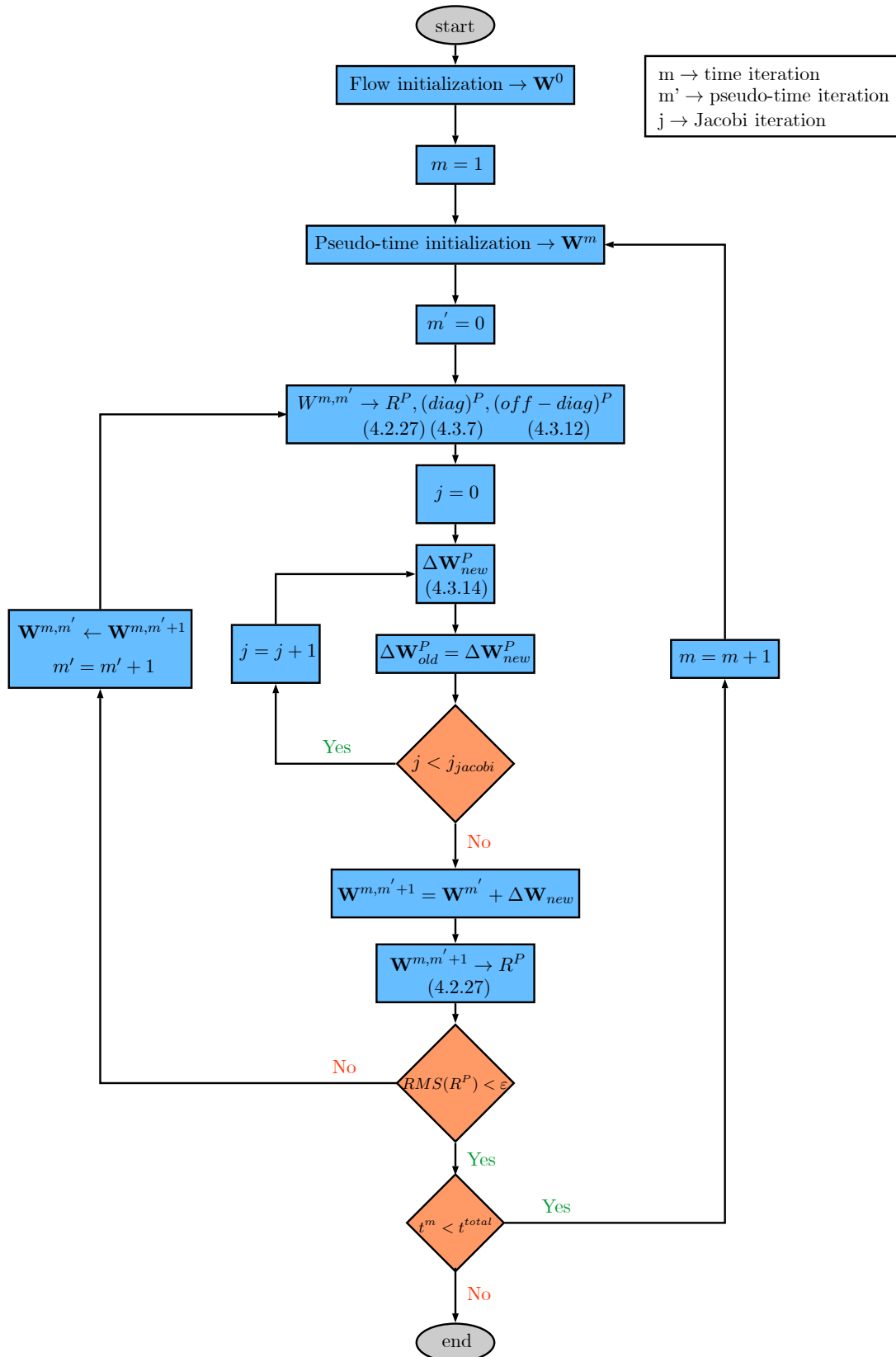
Όπως συνέβη και στην περίπτωση των συντηρητικών μεγεθών, έτσι και εδώ, η συνθήκη μη-εισχώρησης δεν μπορεί να εφαρμοστεί αμέσως πάνω στην επιφάνεια της αεροτομής, που πλέον διαδραματίζει τον ρόλο μιας εκ των επιφανειών της εκάστοτε γειτονικής στην αεροτομή κυψέλης, καθώς ο υπολογισμός των μεγεθών πραγματοποιείται στα βαρύνκεντρα. Για τον λόγο αυτό, πάλι πραγματοποιείται μεταφορά των μεγεθών στην επιφάνεια της αεροτομής, σχήμα 4.3.2, κάνοντας χρήση πρώτης τάξης (σχέση 4.2.5) ή δεύτερης τάξης ακρίβειας (σχέση 4.2.10) και ακολούθως εφαρμόζεται η σχέση 4.3.16.



Σχήμα 4.3.2: Υπολογιστική κυψέλη που τέμνεται από την αεροτομή. Πραγματοποιείται προεκβολή των μεγεθών από το βαρύκεντρο P , στο μέσον M της επιφάνειας που σχηματίζει η αεροτομή με την υπολογιστική κυψέλη, ώστε να εφαρμοστεί η συνθήκη μη-εισχώρησης.

4.3.4 Αλγόριθμος Επίλυσης των Διακριτοποιημένων Εξισώσεων

Παρακάτω ακολουθεί ο αλγόριθμος επίλυσης των διακριτοποιημένων εξισώσεων έτσι όπως προέκυψε βασισόμενος στην ανάλυση που προηγήθηκε.



Σχήμα 4.3.3: Αλγόριθμος επίλυσης των χρονικά μη-μόνιμων διακριτοποιημένων εξισώσεων Euler όπου έχει εισαχθεί και ο ψευδο-χρονικός όρος. Για τον υπολογισμό της διόρθωσης των ροϊκών μεγεθών έγινε χρήση της επαναληπτικής μεθόδου Jacobi.

Κεφάλαιο 5

Η Μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών

5.1 Εισαγωγή

Η Μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών (*Harmonic Balance Method*) αποτελεί μια μέθοδο υπολογισμού της μόνιμης κατάστασης φαινομένων που περιγράφονται από μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Η πρώτη της εφαρμογή αφορούσε τον τομέα των ηλεκτρικών κυκλωμάτων αλλά σύντομα επεκτάθηκε και σε άλλους τομείς όπως λ.χ. σε αυτόν της αεροδυναμικής, όπου χρησιμοποιείται κατά κόρον για την προσεγγιστική επίλυση μη-μόνιμων περιοδικών φαινομένων ροής (*Periodic Flow Phenomena*). Ως περιοδικά φαινόμενα ροής ορίζονται τα φαινόμενα εκείνα των οποίων η απόκριση τους στο πεδίο του χρόνου περιγράφεται από περιοδικές συναρτήσεις. Η γένεση ενός τέτοιου φαινομένου συνήθως πηγάζει από την περιοδική μεταβολή τουλάχιστον μιας οριακής του συνθήκης, όπως λ.χ. η περιοδική μεταβολή της γωνίας πρόσπτωσης της επ' άπειρον ροής, ή η περιοδική μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας της επ' άπειρον ροής.

Το βασικό πλεονέκτημα της Μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών αποτελεί η μείωση του υπολογιστικού χρόνου που απαιτείται για την επίλυση της ροής σε σχέση με τις κλασικές μεθόδους με την ταυτόχρονη παραγωγή αποτελεσμάτων υψηλής ακρίβειας, γεγονός που θα επιβεβαιωθεί και από τα συγκριτικά αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν σε επόμενα κεφάλαια της διπλωματικής εργασίας. Ένας βασικός περιορισμός της συγκεκριμένης μεθόδου αποτελεί η φύση των προβλημάτων στα οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η Μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών χρησιμοποιείται για την επίλυση περιοδικών φαινομένων γεγονός που περιορίζει σημαντικά το πεδίο εφαρμογής της από τη στιγμή που στην πραγματικότητα τα περιοδικά φαινόμενα αποτελούν την εξαίρεση και όχι τον κανόνα.

Βασικό χαρακτηριστικό της μεθόδου αποτελεί το γεγονός ότι η επίλυση του φαινομένου πραγματοποιείται στο πεδίο των συχνοτήτων (*frequency domain*) σε αντίθεση με την πλειοψηφία των υπόλοιπων μεθόδων όπου η επίλυση πραγματοποιείται στο πεδίο του χρό-

νου. Πιο συγκεκριμένα, οι αρχικές μδε που περιγράφουν το μη-μόνιμο πρόβλημα (*unsteady problem*), αντικαθίστανται από ένα πεπλεγμένο σύστημα (*coupled system*) διαφορικών εξισώσεων στις οποίες απουσιάζει ο χρονικός όρος (*steady problem*) και το πλήθος των οποίων εξαρτάται άμεσα από την μετάβαση από το πεδίο του χρόνου σε αυτό των συχνοτήτων.

Η μετάβαση από το πεδίο του χρόνου σε αυτό των συχνοτήτων, πραγματοποιείται με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier (*Fast Fourier Transform*). Ειδικότερα, οι άγνωστες μεταβλητές των αρχικών διαφορικών εξισώσεων, δηλαδή οι τελικές λύσεις του φαινομένου, προσεγγίζονται με σειρές Fourier οι οποίες διαθέτουν πεπερασμένο αριθμό αρμονικών (N_H). Βέβαια, ο ανά κόμβο ή ανά κυψέλη αριθμός των άγνωστων συντελεστών που περιγράφουν το φαινόμενο δεν ισούται με τον αριθμό των αρμονικών, αλλά είναι ίσος με το διπλάσιο του πλήθους των αρμονικών συν ενός ακόμα όρου ($2N_H + 1$). Το γεγονός αυτό, όπως θα γίνει αντιληπτό σε επόμενη παράγραφο όπου θα παρατεθεί η αναλυτική έκφραση του μετασχηματισμού Fourier, πηγάζει από το ότι κάθε αρμονική διαθέτει δύο συντελεστές, έναν για τον ημιτονοειδή όρο και έναν για τον συνημιτονοειδή όρο ενώ ο επιπλέον όρος περιγράφει τη μέση τιμή της χρονικά μεταβαλλόμενης μεταβλητής. Έτσι, εύκολα εξάγεται το συμπέρασμα ότι τελικά το υπό μελέτη πρόβλημα μετασχηματίζεται από πρόβλημα υπολογισμού των αγνώστων μεταβλητών των αρχικών χρονικά μεταβαλλόμενων διαφορικών εξισώσεων, σε πρόβλημα υπολογισμού των συντελεστών των σειρών Fourier. Μάλιστα, το πλήθος των χρονικά μόνιμων εξισώσεων που αναφέρθηκαν προηγουμένως και οι οποίες πρέπει να επιλυθούν ταυτίζεται με τον αριθμό των αγνώστων συντελεστών ($2N_H + 1$).

Τέλος, πρέπει να γίνει ιδιαίτερη αναφορά στα τελικά αποτελέσματα που παράγει η μέθοδος. Όπως είναι γνωστό, σε κάθε φαινόμενο, συμπεριλαμβανομένων και των περιοδικών, για να επέλθει η μόνιμη κατάσταση προηγείται το μεταβατικό φαινόμενο (*transitional period*). Η Μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών δεν λαμβάνει υπόψη της το μεταβατικό φαινόμενο με αποτέλεσμα τα αποτελέσματα της να περιγράφουν μόνο την κατάσταση ισορροπίας του φαινομένου. Κατά συνέπεια, γίνεται αντιληπτό ότι σε περίπτωση που είναι επιθυμητή η μελέτη της μόνιμης κατάστασης του φαινομένου, η συγκεκριμένη μέθοδος παρουσιάζει ένα σημαντικό πλεονέκτημα καθώς αγνοεί το μεταβατικό φαινόμενο εξοικονομώντας έτσι πολύτιμο υπολογιστικό χρόνο. Σε περίπτωση, όμως, που το μεταβατικό φαινόμενο είναι ο βασικός στόχος της μελέτης, η επίλυση πρέπει να γίνει στο πεδίο του χρόνου.

5.2 Μαθηματική Θεμελίωση

Έστω ότι το περιοδικό φαινόμενο που μελετάται περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d\mathbf{W}(t)}{dt} + \mathbf{R}(t) = 0 \quad (5.2.1)$$

όπου \mathbf{W} είναι το διάνυσμα της τελικής λύσης και \mathbf{R} είναι το διάνυσμα του χωρικού υπολοίπου της διαφορικής εξίσωσης (*spatial residual*) το οποίο στην πραγματικότητα αποτελεί συνάρτηση του διανύσματος της λύσης, δηλαδή ισχύει ότι $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{W})$. Ο λόγος που χρησιμοποιούνται διανύσματα έγκειται στο γεγονός ότι στην πλειοψηφία των περιπτώσεων η περιγραφή ενός φαινομένου απαιτεί την ταυτόχρονη γνώση περισσότερων του ενός πεδίων. Κατά συνέπεια, η σχέση 5.2.1 στην πραγματικότητα αντιπροσωπεύει τόσες διαφορικές εξισώσεις όσες είναι και οι μεταβλητές που περιγράφουν το φαινόμενο που μελετάται.

Επειδή το φαινόμενο που μελετάται είναι περιοδικό, τα διανύσματα \mathbf{W} , \mathbf{R} μπορούν να προσεγγιστούν με τη βοήθεια σειρών Fourier (*Fourier series*) κάνοντας χρήση πεπερασμένου αριθμού αρμονικών, και ισοδύναμα συχνοτήτων, που θα συμβολίζεται με N_H . Έτσι, τα παραπάνω διανύσματα λαμβάνουν την εξής μορφή:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(t) &\doteq \widehat{\mathbf{W}}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \left\{ \widehat{\mathbf{W}}_{an} \cos(\omega nt) + \widehat{\mathbf{W}}_{bn} \sin(\omega nt) \right\} \\ \mathbf{R}(t) &\doteq \widehat{\mathbf{R}}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \left\{ \widehat{\mathbf{R}}_{an} \cos(\omega nt) + \widehat{\mathbf{R}}_{bn} \sin(\omega nt) \right\} \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

όπου ω είναι η γωνιακή συχνότητα της διαταραχής και ορίζεται ως $\omega = \frac{2\pi}{T}$, με T να συμβολίζεται η περίοδος της διαταραχής.

Παρατηρώντας την παραπάνω σχέση 5.2.2, επιβεβαιώνεται πλέον το συμπέρασμα το οποίο είχε εξαχθεί σε προηγούμενη παράγραφο, και το οποίο αφορούσε τον αριθμό των αγνώστων συντελεστών που μπορούν να παράξουν τη λύση \mathbf{W} και, κατά συνέπεια, να περιγράψουν το φαινόμενο. Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι το πλήθος των εν λόγω πεδίων-συντελεστών ισούται με $2N_H + 1$, όπως ακριβώς είχε ειπωθεί και προηγουμένως.

Παραγωγίζοντας την εξίσωση της τελικής λύσης \mathbf{W} , όπως αυτή δίνεται από την παραπάνω σχέση 5.2.2, ως προς το χρόνο προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \mathbf{W}(t) \right\} &= \frac{d}{dt} \left\{ \widehat{\mathbf{W}}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \left\{ \widehat{\mathbf{W}}_{an} \cos(\omega nt) + \widehat{\mathbf{W}}_{bn} \sin(\omega nt) \right\} \right\} \Rightarrow \\ \frac{d\mathbf{W}(t)}{dt} &= \frac{d\widehat{\mathbf{W}}_0}{dt} + \frac{d \left\{ \sum_{n=1}^{N_H} \left\{ \widehat{\mathbf{W}}_{an} \cos(\omega nt) + \widehat{\mathbf{W}}_{bn} \sin(\omega nt) \right\} \right\}}{dt} \Rightarrow \\ \frac{d\mathbf{W}(t)}{dt} &= \sum_{n=1}^{N_H} \left\{ -\omega n \widehat{\mathbf{W}}_{an} \sin(\omega nt) + \omega n \widehat{\mathbf{W}}_{bn} \cos(\omega nt) \right\} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση καθώς και την κατά Fourier γραφή του χωρικού υπολοίπου της σχέσης 5.2.2 στην αρχική διαφορική εξίσωση της σχέσης 5.2.1,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{R}}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \left\{ \widehat{\mathbf{R}}_{an} \cos(\omega n t) + \widehat{\mathbf{R}}_{bn} \sin(\omega n t) \right\} + \sum_{n=1}^{N_H} \left\{ -\omega n \widehat{\mathbf{W}}_{an} \sin(\omega n t) + \omega n \widehat{\mathbf{W}}_{bn} \cos(\omega n t) \right\} = 0 \Rightarrow \\ \widehat{\mathbf{R}}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \left\{ (\widehat{\mathbf{R}}_{an} + \omega n \widehat{\mathbf{W}}_{bn}) \cos(\omega n t) + (\widehat{\mathbf{R}}_{bn} - \omega n \widehat{\mathbf{W}}_{an}) \sin(\omega n t) \right\} \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση πρέπει να ισχύει για κάθε χρονική στιγμή, γεγονός που εξασφαλίζεται από την ικανοποίηση των παρακάτω $2N_H + 1$ διανυσματικών σχέσεων:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{R}}_0 &= 0 \\ \widehat{\mathbf{R}}_{an} + \omega n \widehat{\mathbf{W}}_{bn} &= 0, \text{ για } n = 1, \dots, N_H \\ \widehat{\mathbf{R}}_{bn} - \omega n \widehat{\mathbf{W}}_{an} &= 0, \text{ για } n = 1, \dots, N_H \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Από τη σχέση 5.2.3, μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι διαθέτει συνολικά $4N_H + 1$ αγνώστους συντελεστές αλλά μόνο $2N_H + 1$ εξισώσεις. Κατά συνέπεια, για να καταστεί εφικτός ο υπολογισμός των εν λόγω συντελεστών, απαιτείται η γνώση μιας σχέσης που να συνδέει τους συντελεστές της τελικής μας λύσης $\widehat{\mathbf{W}}_{an}$ και $\widehat{\mathbf{W}}_{bn}$ με τους αντίστοιχους του χωρικού υπολοίπου $\widehat{\mathbf{R}}_{an}$ και $\widehat{\mathbf{R}}_{bn}$. Αν και, στο πεδίο του χρόνου, υπάρχει σχέση που συνδέει το πεδίο των λύσεων $\mathbf{W}(t)$ με το πεδίο των χωρικών υπολοίπων $\mathbf{R}(t)$, για τους αντίστοιχους συντελεστές των σειρών Fourier δεν είναι γνωστή μια τέτοια σχέση. Το γεγονός αυτό προκύπτει από τη μη-γραμμικότητα της αρχικής διαφορικής εξίσωσης 5.2.1 με αποτέλεσμα κάθε πεδίο $\widehat{\mathbf{R}}_{an}$, $\widehat{\mathbf{R}}_{bn}$ να εξαρτάται ταυτόχρονα από όλα τα πεδία $\widehat{\mathbf{W}}_{an}$ και $\widehat{\mathbf{W}}_{bn}$.

Για να ξεπεραστεί η παραπάνω δυσκολία, γίνεται χρήση της Μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών η οποία ακολουθεί τα παρακάτω βήματα [3, 7]:

- Πραγματοποιείται χρονική διακριτοποίηση της τελικής λύσης \mathbf{W} και του χωρικού υπολοίπου \mathbf{R} χωρίζοντας την περίοδο T σε $N_T = 2N_H + 1$ ισομήκη χρονικά διαστήματα. Το πλήθος των εν λόγω διαστημάτων δεν είναι τυχαίο αλλά ταυτίζεται με τον αριθμό των εξισώσεων που αντιπροσωπεύει η σχέση 5.2.3. Έτσι μπορεί να γραφεί ότι:

$$\vec{\mathbf{W}}_{HB} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}(t_0) \\ \mathbf{W}(t_0 + \Delta t) \\ \vdots \\ \mathbf{W}(t_0 + T - \Delta t) \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{R}}_{HB} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(t_0) \\ \mathbf{R}(t_0 + \Delta t) \\ \vdots \\ \mathbf{R}(t_0 + T - \Delta t) \end{pmatrix}$$

όπου T η περίοδος της διαταραχής που προκαλεί το υπό μελέτη φαινόμενο και Δt το χρονικό βήμα της χρονικής διακριτοποίησης για το οποίο ισχύει ότι $\Delta t = \frac{T}{2N_H + 1} = \frac{2\pi}{2N_H + 1} \cdot \frac{1}{\omega} = \frac{\alpha}{\omega}$, όπου για λόγους συντομίας ορίστηκε $\alpha = \frac{2\pi}{2N_H + 1} \cdot \frac{1}{\omega}$.

- Έχοντας διακριτοποιήσει την περίοδο σε $2N_H + 1$ χρονικές στιγμές και κατ' επέκταση έχοντας παράξει ισάριθμα πεδία \mathbf{W} και \mathbf{R} , μπορούν να ικανοποιηθούν για κάθε χρονική στιγμή οι σχέσεις των σειρών Fourier που δίνονται από τη σχέση 5.2.2. Με αυτόν τον τρόπο, επιτυγχάνεται η άμεση συσχέτιση καθενός πεδίου-συντελεστή $\widehat{\mathbf{W}}$ και $\widehat{\mathbf{R}}$ με κάθε

πεδίο \mathbf{W} και \mathbf{R} κάθε χρονικής στιγμής αντίστοιχα. Με απλά λόγια, γίνεται χρήση των σειρών Fourier για να επιτευχθεί η μετάβαση από το πεδίο των συχνοτήτων πίσω στο πεδίο του χρόνου ώστε τελικά να πραγματοποιηθεί η επίλυση του προβλήματος.

- Οι σχέσεις μεταξύ των $\widehat{\mathbf{W}}$, \mathbf{W} και των $\widehat{\mathbf{R}}$, \mathbf{R} που παράχθηκαν μπορούν να αντικατασταθούν στη σχέση 5.2.3, με αποτέλεσμα το σύστημα των $2N_H + 1$ εξισώσεων που αντιπροσωπεύει αυτή η σχέση, πλέον, να είναι διατυπωμένο στο πεδίο του χρόνου και να συσχετίζει τα \mathbf{W} και \mathbf{R} των $2N_H + 1$ χρονικών στιγμών της περιόδου και όχι τους συντελεστές $\widehat{\mathbf{W}}$ και $\widehat{\mathbf{R}}$ όπως γινόταν μέχρι τώρα. Όμως, όπως είχε τονιστεί και σε προηγούμενο σημείο, υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των πεδίων \mathbf{W} και \mathbf{R} η οποία μάλιστα είναι γνωστή. Κατά συνέπεια, καθίσταται δυνατός ο υπολογισμός των πεδίων \mathbf{W} κάθε χρονικής στιγμής ή ισοδύναμα ο υπολογισμός του διανύσματος $\vec{\mathbf{W}}_{HB}$.

5.2.1 Παρουσίαση της Μεθόδου για $N_H = 2$ Αρμονικές

Κάνοντας χρήση της μεθόδου για 2 αρμονικές μπορεί αρχικά να υπολογιστεί το χρονικό βήμα Δt το οποίο χρησιμοποιείται κατά τη διακριτοποίηση της περιόδου. Έτσι, βασιζόμενοι σε όσα αναφέρθηκαν σε προηγούμενη παράγραφο προκύπτει ότι $\Delta t = \frac{T}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{T}{5} = \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{1}{\omega} = \frac{\alpha}{\omega}$, όπου $\alpha = \frac{2\pi}{5}$.

Η προσέγγιση του πεδίου των λύσεων με σειρές Fourier για $N_H = 2$ αρμονικές γράφεται:

$$\mathbf{W}(t) = \widehat{\mathbf{W}}_0 + \sum_{n=1}^2 \left\{ \widehat{\mathbf{W}}_{an} \cos(\omega n t) + \widehat{\mathbf{W}}_{bn} \sin(\omega n t) \right\} \Rightarrow \quad (5.2.4)$$

$$\mathbf{W}(t) = \widehat{\mathbf{W}}_0 + \widehat{\mathbf{W}}_{a1} \cos(\omega t) + \widehat{\mathbf{W}}_{b1} \sin(\omega t) + \widehat{\mathbf{W}}_{a2} \cos(2\omega t) + \widehat{\mathbf{W}}_{b2} \sin(2\omega t)$$

Όπως αναμενόταν προκύπτουν πέντε άγνωστα πεδία συντελεστών τα $\widehat{\mathbf{W}}_0$, $\widehat{\mathbf{W}}_{a1}$, $\widehat{\mathbf{W}}_{b1}$, $\widehat{\mathbf{W}}_{a2}$ και $\widehat{\mathbf{W}}_{b2}$, ενώ ταυτόχρονα λόγω της διακριτοποίησης της περιόδου σε πέντε διαστήματα το διάνυσμα των πεδίων-λύσεων $\vec{\mathbf{W}}_{HB}$ θα αποτελείται από πέντε πεδία-λύσεις \mathbf{W} . Έτσι, μπορεί να γραφεί ότι:

$$\vec{\mathbf{W}}_{HB} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}(t_0) \\ \mathbf{W}(t_0 + \Delta t) \\ \mathbf{W}(t_0 + 2\Delta t) \\ \mathbf{W}(t_0 + 3\Delta t) \\ \mathbf{W}(t_0 + T - \Delta t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{W}}_{HB} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}(0) \\ \mathbf{W}(1) \\ \mathbf{W}(2) \\ \mathbf{W}(3) \\ \mathbf{W}(4) \end{pmatrix}$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης του Euler μπορούν να μετατραπούν οι ημιτονοειδείς και συνημιτονοειδείς όροι της προηγούμενης σχέσης σε εκθετικούς όρους ως εξής:

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\cos(2\omega t) = \frac{e^{j2\omega t} + e^{-j2\omega t}}{2}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = j \frac{e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}}{2}$$

$$\sin(2\omega t) = \frac{e^{j2\omega t} - e^{-j2\omega t}}{2j} = j \frac{e^{-j2\omega t} - e^{j2\omega t}}{2}$$

Αντικαθιστώντας τα ημίτονα και τα συνημίτονα των σειρών Fourier με τις παραπάνω ισοδύναμες εκφράσεις τους προκύπτει:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(t) &= \widehat{\mathbf{W}}_0 + \widehat{\mathbf{W}}_{a1} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} + j\widehat{\mathbf{W}}_{b1} \frac{e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}}{2} \\ &\quad + \widehat{\mathbf{W}}_{a2} \cdot \frac{e^{j2\omega t} + e^{-j2\omega t}}{2} + j\widehat{\mathbf{W}}_{b2} \frac{e^{-j2\omega t} - e^{j2\omega t}}{2} \\ &= \widehat{\mathbf{W}}_0 + e^{-j2\omega t} \left[\frac{\widehat{\mathbf{W}}_{a2} + j\widehat{\mathbf{W}}_{b2}}{2} \right] + e^{-j\omega t} \left[\frac{\widehat{\mathbf{W}}_{a1} + j\widehat{\mathbf{W}}_{b1}}{2} \right] \\ &\quad + e^{j\omega t} \left[\frac{\widehat{\mathbf{W}}_{a1} - j\widehat{\mathbf{W}}_{b1}}{2} \right] + e^{-2j\omega t} \left[\frac{\widehat{\mathbf{W}}_{a2} - j\widehat{\mathbf{W}}_{b2}}{2} \right] \end{aligned}$$

Για λόγους συντομίας αλλά και για λόγους καλύτερου συμβολισμού, χρησιμοποιούνται τα μιγαδικά πεδία $\widehat{\mathbf{W}}_{-2}, \dots, \widehat{\mathbf{W}}_2$ τα οποία ορίζονται ακριβώς παρακάτω και οι δείκτες των οποίων ταυτίζονται με τον προσημασμένο αριθμό που εμφανίζεται στον εκθέτη του εκθετικού όρου που συνοδεύει το κάθε πεδίο-συντελεστής.

$$\begin{aligned} \bullet \widetilde{\mathbf{W}}_{-2} &= \frac{\widehat{\mathbf{W}}_{a2} + j\widehat{\mathbf{W}}_{b2}}{2} & \bullet \widetilde{\mathbf{W}}_1 &= \frac{\widehat{\mathbf{W}}_{a1} - j\widehat{\mathbf{W}}_{b1}}{2} & \bullet \widetilde{\mathbf{W}}_0 &= \widehat{\mathbf{W}}_0 \quad (5.2.5) \\ \bullet \widetilde{\mathbf{W}}_{-1} &= \frac{\widehat{\mathbf{W}}_{a1} + j\widehat{\mathbf{W}}_{b1}}{2} & \bullet \widetilde{\mathbf{W}}_2 &= \frac{\widehat{\mathbf{W}}_{a2} - j\widehat{\mathbf{W}}_{b2}}{2} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην προηγούμενη έκφραση των σειρών Fourier λαμβάνεται η παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{W}(t) = \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}e^{-j2\omega t} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}e^{-j\omega t} + \widetilde{\mathbf{W}}_0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1e^{j\omega t} + \widetilde{\mathbf{W}}_2e^{j2\omega t}$$

η οποία ισχύει για κάθε χρονική στιγμή μέσα στην περίοδο T . Για τον λόγο αυτό, μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσες φορές όσα και τα χρονικά βήματα που έχουν χρησιμοποιηθεί για να διακριτοποιηθεί η περίοδος, δηλαδή πέντε φορές από τη στιγμή που έχουν χρησιμοποιηθεί δύο αρμονικές. Με αυτόν τον τρόπο, μπορούν να παραχθούν ισάριθμα στον αριθμό πεδία \mathbf{W} λύσεων τα οποία, όπως έχει αναφερθεί, συνθέτουν το διάνυσμα $\vec{\mathbf{W}}_{HB} = [\mathbf{W}_0 \ \mathbf{W}_1 \ \mathbf{W}_2 \ \mathbf{W}_3 \ \mathbf{W}_4]^T$. Επιλέγοντας ως αφετηρία την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ οι εξισώσεις για κάθε χρονική στιγμή είναι οι εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 0 \cdot \Delta t \rightarrow \mathbf{W}_0 = \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}e^{-0j\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}e^{0j\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1e^{0j\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_2e^{0j\omega\Delta t} \\ t = 1 \cdot \Delta t \rightarrow \mathbf{W}_1 = \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}e^{-j2\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}e^{-j\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1e^{j\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_2e^{j2\omega\Delta t} \\ t = 2 \cdot \Delta t \rightarrow \mathbf{W}_2 = \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}e^{-j4\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}e^{-j2\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1e^{j2\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_2e^{j4\omega\Delta t} \\ t = 3 \cdot \Delta t \rightarrow \mathbf{W}_3 = \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}e^{-j6\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}e^{-j3\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1e^{j3\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_2e^{j6\omega\Delta t} \\ t = 4 \cdot \Delta t \rightarrow \mathbf{W}_4 = \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}e^{-j8\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}e^{-j4\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1e^{j4\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_2e^{j8\omega\Delta t} \end{array} \right.$$

Συμβολίζοντας ως $e^{\pm jk\omega\Delta t} = \phi^{\pm k}$ όπου $k = -8, \dots, 8$, ισοδύναμα είναι:

$$\begin{cases} t = 0 \cdot \Delta t \rightarrow \mathbf{W}_0 = \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_0\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_2\phi^0 \\ t = 1 \cdot \Delta t \rightarrow \mathbf{W}_1 = \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}\phi^{-2} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}\phi^{-1} + \widetilde{\mathbf{W}}_0\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1\phi^1 + \widetilde{\mathbf{W}}_2\phi^2 \\ t = 2 \cdot \Delta t \rightarrow \mathbf{W}_2 = \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}\phi^{-4} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}\phi^{-2} + \widetilde{\mathbf{W}}_0\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1\phi^2 + \widetilde{\mathbf{W}}_2\phi^4 \\ t = 3 \cdot \Delta t \rightarrow \mathbf{W}_3 = \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}\phi^{-6} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}\phi^{-3} + \widetilde{\mathbf{W}}_0\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1\phi^3 + \widetilde{\mathbf{W}}_2\phi^6 \\ t = 4 \cdot \Delta t \rightarrow \mathbf{W}_4 = \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}\phi^{-8} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}\phi^{-4} + \widetilde{\mathbf{W}}_0\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1\phi^4 + \widetilde{\mathbf{W}}_2\phi^8 \end{cases} \quad (5.2.6)$$

Επειδή για τον μιγαδικό αριθμό ϕ ισχύει ότι $\phi^{\pm k} = e^{\pm jk\omega\Delta t}$, κάνοντας χρήση της σχέσης του Euler μπορεί να γραφεί ότι:

$$e^{\pm jk\omega\Delta t} = \cos(\pm k\omega\Delta t) + j\sin(\pm k\omega\Delta t)$$

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη ότι η περίοδος του φαινομένου έχει διακριτοποιηθεί σε $2N_H + 1$ ισομήκη χρονικά διαστήματα, μπορεί να αποδειχθεί πολύ εύκολα ότι ισχύει η παρακάτω γενική σχέση:

$$\phi^{-p} = \phi^{-p \pm q(2N_H + 1)} \quad , p, q \in \mathbb{Z} \quad (5.2.7)$$

Κάνοντας εφαρμογή του παραπάνω γενικού τύπου οι εκθέτες της σχέσης 5.2.6 μπορούν να μετατραπούν έτσι ώστε να είναι πιο βολικοί στη μετέπειτα ανάλυση. Μετά την εφαρμογή της συγκεκριμένης ιδιότητας αλλά και μετά από κατάλληλη αναδιάταξη των όρων της, η σχέση γράφεται:

$$\begin{cases} t = 0 \cdot \Delta t \rightarrow \mathbf{W}_0 = \widetilde{\mathbf{W}}_0\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_2\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}\phi^0 \\ t = 1 \cdot \Delta t \rightarrow \mathbf{W}_1 = \widetilde{\mathbf{W}}_0\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1\phi^1 + \widetilde{\mathbf{W}}_2\phi^2 + \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}\phi^3 + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}\phi^4 \\ t = 2 \cdot \Delta t \rightarrow \mathbf{W}_2 = \widetilde{\mathbf{W}}_0\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1\phi^2 + \widetilde{\mathbf{W}}_2\phi^4 + \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}\phi^6 + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}\phi^8 \\ t = 3 \cdot \Delta t \rightarrow \mathbf{W}_3 = \widetilde{\mathbf{W}}_0\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1\phi^3 + \widetilde{\mathbf{W}}_2\phi^6 + \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}\phi^9 + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}\phi^{12} \\ t = 4 \cdot \Delta t \rightarrow \mathbf{W}_4 = \widetilde{\mathbf{W}}_0\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1\phi^4 + \widetilde{\mathbf{W}}_2\phi^8 + \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}\phi^{12} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}\phi^{16} \end{cases} \quad (5.2.8)$$

Επειδή γενικά είναι επιθυμητό οι δείκτες των πεδίων-συντελεστών να συμβαδίζουν με τον εκθέτη του εκθετικού όρου που αντιπροσωπεύει η ποσότητα ϕ , και επειδή οι παρόντες δείκτες αφορούσαν τον συμβολισμό πριν την εφαρμογή της σχέσης 5.2.7, μπορεί να πραγματοποιηθεί αλλαγή των δεικτών των δύο τελευταίων πεδίων-συντελεστών οπότε και να γραφεί ότι:

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{-2} \equiv \widetilde{\mathbf{W}}_3 \quad \widetilde{\mathbf{W}}_{-1} \equiv \widetilde{\mathbf{W}}_4$$

Λαμβάνοντας όλα τα παραπάνω υπόψη, μπορεί να διατυπωθεί σε μητρική γραφή το σύστημα της σχέσης 5.2.8 ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \phi^1 & \phi^2 & \phi^3 & \phi^4 \\ 1 & \phi^2 & \phi^4 & \phi^6 & \phi^8 \\ 1 & \phi^3 & \phi^6 & \phi^9 & \phi^{12} \\ 1 & \phi^4 & \phi^8 & \phi^{12} & \phi^{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{W}}_0 \\ \widetilde{\mathbf{W}}_1 \\ \widetilde{\mathbf{W}}_2 \\ \widetilde{\mathbf{W}}_3 \\ \widetilde{\mathbf{W}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_0 \\ \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 \\ \mathbf{W}_4 \end{bmatrix} \quad (5.2.9)$$

Σε αυτό το σημείο, είναι απαραίτητο να τονιστεί ότι το μητρώο και το διάνυσμα του πρώτου μέλους του παραπάνω συστήματος είναι μιγαδικοί αριθμοί, ενώ το διάνυσμα του δεύτερου μέλους, δηλαδή το διάνυσμα των λύσεων, περιέχει μόνο πραγματικούς αριθμούς. Προφανής σκοπός του παραπάνω συστήματος είναι ο υπολογισμός του διανύσματος του

πρώτου μέλους. Για να γίνει αυτό, δεν θα πραγματοποιηθεί επίλυση του συγκεκριμένου συστήματος αλλά θα γίνει χρήση μαθηματικών θεωρημάτων, τα οποία θα αποδειχθούν παρακάτω, ώστε να υπολογιστεί το αντίστροφο μητρώο του πρώτου πίνακα του αριστερού μέλους και έτσι ο υπολογισμός του επιθυμητού μητρώου στήλης να πραγματοποιείται με ένα απλό γινόμενο μεταξύ δύο γνωστών πλέον μητρώων.

Το μητρώο που πρέπει να αντιστραφεί, για λόγους συντομίας, θα συμβολίζεται ως M και είναι το εξής:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \phi^1 & \phi^2 & \phi^3 & \phi^4 \\ 1 & \phi^2 & \phi^4 & \phi^6 & \phi^8 \\ 1 & \phi^3 & \phi^6 & \phi^9 & \phi^{12} \\ 1 & \phi^4 & \phi^8 & \phi^{12} & \phi^{16} \end{bmatrix}$$

Ακολουθεί η διατύπωση των θεωρημάτων που θα καταστήσουν εφικτή την αντιστροφή του μητρώου M καθώς και οι αποδείξεις τους.

Θεώρημα 1. Έστω $\phi = e^{j\omega\Delta t} = e^{j2\pi\frac{\Delta t}{T}}$. Τότε αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$\boxed{1 + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^{2N_H} = 0}$$

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι για τους πραγματικούς αριθμούς ισχύει η παρακάτω ταυτότητα:

$$1 + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^{2N_H} = \frac{1 - \phi^{2N_H+1}}{1 - \phi}, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

Επίσης είναι γνωστό ότι οι ταυτότητες των πραγματικών αριθμών επεκτείνονται και στους μιγαδικούς αριθμούς. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\phi = e^{j\omega\Delta t}$ η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} 1 + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^{2N_H} &= \frac{1 - e^{(2N_H+1)j2\pi\frac{\Delta t}{T}}}{1 - e^{j2\pi\frac{\Delta t}{T}}} \xrightarrow{(2N_H+1)\Delta t=T} \\ &= \frac{1 - e^{j2\pi}}{1 - e^{j2\pi\frac{\Delta t}{T}}} \xrightarrow{e^{j2\pi}=1} \\ &1 + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^{2N_H} = 0, \quad \phi \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

■

Θεώρημα 2. Αν k , r και q ακέραιοι αριθμοί και ϕ μιγαδικός, τότε ισχύει:

$$\sum_{k=0}^{2N_H} \phi^{k(r-q)} = \begin{cases} 0 & , \text{αν } r \neq q \\ 2N_H + 1 & , \text{αν } r = q \end{cases}$$

Απόδειξη. Διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

- Έστω ότι $r \neq q$ και πιο συγκεκριμένα έστω $r - q = 1$. Τότε ισοδύναμα:

$$\sum_{k=0}^{2N_H} \phi^{k \cdot 1} = \phi^0 + \phi^1 + \phi^2 \dots + \phi^{2N_H} \xrightarrow{\text{Θεώρημα 1}} \sum_{k=0}^{2N_H} \phi^k = 0$$

Έστω ότι $r - q = 2$ τότε:

$$\sum_{k=0}^{2N_H} \phi^{k \cdot 2} = \phi^0 + \phi^2 + \phi^4 \dots \phi^{4N_H}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας γίνεται η θεώρηση ότι γίνεται χρήση $N_H = 2$ αρμονικών. Τότε ισχύει:

$$\sum_{k=0}^4 \phi^{k \cdot 2} = \phi^0 + \phi^2 + \phi^4 + \phi^6 + \phi^8$$

Από τη σχέση 5.2.7 για δύο αρμονικές προκύπτει ότι:

$$\phi^6 = \phi^1 \quad \phi^8 = \phi^3$$

οπότε και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\sum_{k=0}^4 \phi^{k \cdot 2} = \phi^0 + \phi^1 + \phi^2 + \phi^3 + \phi^4$$

η οποία ισούται με μηδέν λόγω του θεωρήματος 1. Η ίδια διαδικασία μπορεί να ακολουθηθεί για οποιονδήποτε συνδυασμό $r - q$ και αριθμού αρμονικών.

- Έστω ότι $r = q$ τότε:

$$\sum_{k=0}^{2N_H} \phi^0 = \sum_{k=0}^{2N_H} \{1\} = 2N_H + 1$$

■

Σε αυτό το σημείο ορίζεται ο συζυγής πίνακας του M δηλαδή ο:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{\phi}^1 & \bar{\phi}^2 & \bar{\phi}^3 & \bar{\phi}^4 \\ 1 & \bar{\phi}^2 & \bar{\phi}^4 & \bar{\phi}^6 & \bar{\phi}^8 \\ 1 & \bar{\phi}^3 & \bar{\phi}^6 & \bar{\phi}^9 & \bar{\phi}^{12} \\ 1 & \bar{\phi}^4 & \bar{\phi}^8 & \bar{\phi}^{12} & \bar{\phi}^{16} \end{bmatrix}$$

Για τον μιγαδικό αριθμό ϕ^k , με $k \in \mathbb{Z}$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}^k &= \overline{e^{jk2\pi \frac{\Delta t}{T}}} = \overline{\cos\left(k \frac{2\pi \Delta t}{T}\right) + j \sin\left(k \frac{2\pi \Delta t}{T}\right)} \Rightarrow \\ \bar{\phi}^k &= \cos\left(k \frac{2\pi \Delta t}{T}\right) - j \sin\left(k \frac{2\pi \Delta t}{T}\right) = e^{-jk2\pi \frac{\Delta t}{T}} = \phi^{-k} \end{aligned}$$

Βασίζόμενοι στα παραπάνω, ο συζυγής πίνακας \bar{M} γράφεται:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{\phi}^1 & \bar{\phi}^2 & \bar{\phi}^3 & \bar{\phi}^4 \\ 1 & \bar{\phi}^2 & \bar{\phi}^4 & \bar{\phi}^6 & \bar{\phi}^8 \\ 1 & \bar{\phi}^3 & \bar{\phi}^6 & \bar{\phi}^9 & \bar{\phi}^{12} \\ 1 & \bar{\phi}^4 & \bar{\phi}^8 & \bar{\phi}^{12} & \bar{\phi}^{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \phi^{-1} & \phi^{-2} & \phi^{-3} & \phi^{-4} \\ 1 & \phi^{-2} & \phi^{-4} & \phi^{-6} & \phi^{-8} \\ 1 & \phi^{-3} & \phi^{-6} & \phi^{-9} & \phi^{-12} \\ 1 & \phi^{-4} & \phi^{-8} & \phi^{-12} & \phi^{-16} \end{bmatrix}$$

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω θα αποδειχθεί ότι ισχύει η παρακάτω πρόταση, η οποία στην πράξη δίνει και την έκφραση του αντίστροφου πίνακα M^{-1} .

Πρόταση 1. Για τα μιγαδικά μητρώα M , M^{-1} που αναφέρθηκαν προηγουμένως, ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$M \cdot \bar{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{\phi}^1 & \bar{\phi}^2 & \bar{\phi}^3 & \bar{\phi}^4 \\ 1 & \bar{\phi}^2 & \bar{\phi}^4 & \bar{\phi}^6 & \bar{\phi}^8 \\ 1 & \bar{\phi}^3 & \bar{\phi}^6 & \bar{\phi}^9 & \bar{\phi}^{12} \\ 1 & \bar{\phi}^4 & \bar{\phi}^8 & \bar{\phi}^{12} & \bar{\phi}^{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{\phi}^1 & \bar{\phi}^2 & \bar{\phi}^3 & \bar{\phi}^4 \\ 1 & \bar{\phi}^2 & \bar{\phi}^4 & \bar{\phi}^6 & \bar{\phi}^8 \\ 1 & \bar{\phi}^3 & \bar{\phi}^6 & \bar{\phi}^9 & \bar{\phi}^{12} \\ 1 & \bar{\phi}^4 & \bar{\phi}^8 & \bar{\phi}^{12} & \bar{\phi}^{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 5I$$

Απόδειξη. Διακρίνονται οι παρακάτω δύο περιπτώσεις:

- i. Πολλαπλασιασμός της i γραμμής του πίνακα M με την i στήλη του πίνακα \bar{M} , το οποίο ισοδυναμεί με τον υπολογισμό του (i,i) στοιχείου του τελικού πίνακα (στοιχείο της διαγωνίου).

$$\sum_{k=1}^5 \left\{ \phi^{(i-1)(k-1)} \bar{\phi}^{(i-1)(k-1)} \right\} \xrightarrow{\bar{\phi}^m = \phi^{-m}} \sum_{k=1}^5 \left\{ \phi^{(i-1)(k-1)} \phi^{-(i-1)(k-1)} \right\} = \sum_{k=1}^5 \left\{ \phi^0 \right\} = 5$$

- ii. Πολλαπλασιασμός της i γραμμής του πίνακα M με την j στήλη του πίνακα \bar{M} (στοιχεία εκτός διαγωνίου).

$$\sum_{k=1}^5 \left\{ \phi^{(i-1)(k-1)} \bar{\phi}^{(j-1)(k-1)} \right\} \xrightarrow{\bar{\phi}^m = \phi^{-m}} \sum_{k=1}^5 \left\{ \phi^{(i-1)(k-1)} \phi^{-(j-1)(k-1)} \right\} = \sum_{k=1}^5 \left\{ \phi^{k(i-j)} \right\} \xrightarrow[\text{Θεώρημα 2}]{i-j \neq 2N_H + 1} \sum_{k=1}^5 \left\{ \phi^{(i-1)(k-1)} \bar{\phi}^{(j-1)(k-1)} \right\} = 0$$

■

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα παραπάνω αποτελέσματα γενικεύονται και στην περίπτωση που χρησιμοποιείται τυχαίος αριθμός αρμονικών N_H .

Έχοντας αποδείξει όλα τα παραπάνω, πολύ εύκολα εξάγεται η παρακάτω έκφραση του αντίστροφου πίνακα του M :

$$M^{-1} = \frac{1}{5} \bar{M}, \text{ ή γενικά } M^{-1} = \bar{M} \frac{1}{2N_H + 1} = \bar{M} \frac{1}{N_T} \quad (5.2.10)$$

Πλέον, αφού είναι γνωστή η έκφραση του αντίστροφου πίνακα είναι δυνατόν, μέσω της σχέσης 5.2.9, να υπολογιστούν οι συντελεστές $\widetilde{\mathbf{W}}_0, \dots, \widetilde{\mathbf{W}}_4$ ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{W}}_0 \\ \widetilde{\mathbf{W}}_1 \\ \widetilde{\mathbf{W}}_2 \\ \widetilde{\mathbf{W}}_3 \\ \widetilde{\mathbf{W}}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \phi^{-1} & \phi^{-2} & \phi^{-3} & \phi^{-4} \\ 1 & \phi^{-2} & \phi^{-4} & \phi^{-6} & \phi^{-8} \\ 1 & \phi^{-3} & \phi^{-6} & \phi^{-9} & \phi^{-12} \\ 1 & \phi^{-4} & \phi^{-8} & \phi^{-12} & \phi^{-16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_0 \\ \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 \\ \mathbf{W}_4 \end{bmatrix} \quad (5.2.11)$$

Έχοντας ολοκληρώσει όλη την απαραίτητη διαδικασία για το χρονικά μεταβαλλόμενο όρο $\mathbf{W}(t)$, πρέπει να επαναληφθεί η ίδια διαδικασία και για το χρονικά μεταβαλλόμενο χωρικό

υπόλοιπο $\mathbf{R}(t)$. Έτσι αρχικά, αναλύεται το χωρικό υπόλοιπο σε σειρές Fourier με δύο αρμονικές:

$$\mathbf{R}(t) = \widehat{\mathbf{R}}_0 + \sum_{n=1}^2 \left\{ \widehat{\mathbf{R}}_{an} \cos(\omega n t) + \widehat{\mathbf{R}}_{bn} \sin(\omega n t) \right\} \Rightarrow \quad (5.2.12)$$

$$\mathbf{R}(t) = \widehat{\mathbf{R}}_0 + \widehat{\mathbf{R}}_{a1} \cos(\omega t) + \widehat{\mathbf{R}}_{b1} \sin(\omega t) + \widehat{\mathbf{R}}_{a2} \cos(2\omega t) + \widehat{\mathbf{R}}_{b2} \sin(2\omega t)$$

Στη συνέχεια, ακολουθώντας ακριβώς τα ίδια βήματα με πριν, προκύπτει η παρακάτω σχέση η οποία πρακτικά είναι η σχέση 5.2.11 εκφρασμένη, αυτή τη φορά, για τα χωρικά υπόλοιπα. Έτσι είναι:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{R}}_0 \\ \widetilde{\mathbf{R}}_1 \\ \widetilde{\mathbf{R}}_2 \\ \widetilde{\mathbf{R}}_3 \\ \widetilde{\mathbf{R}}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \phi^{-1} & \phi^{-2} & \phi^{-3} & \phi^{-4} \\ 1 & \phi^{-2} & \phi^{-4} & \phi^{-6} & \phi^{-8} \\ 1 & \phi^{-3} & \phi^{-6} & \phi^{-9} & \phi^{-12} \\ 1 & \phi^{-4} & \phi^{-8} & \phi^{-12} & \phi^{-16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_4 \end{bmatrix} \quad (5.2.13)$$

όπου για τα στοιχεία τους αριστερού μέλους, κατ' αντιστοιχία με αυτά του όρου \mathbf{W} , ισχύει:

$$\begin{aligned} \bullet \widetilde{\mathbf{R}}_{-2} = \widetilde{\mathbf{R}}_3 &= \frac{\widehat{\mathbf{R}}_{a2} + j\widehat{\mathbf{R}}_{b2}}{2} & \bullet \widetilde{\mathbf{R}}_1 &= \frac{\widehat{\mathbf{R}}_{a1} - j\widehat{\mathbf{R}}_{b1}}{2} & \bullet \widetilde{\mathbf{R}}_0 &= \widehat{\mathbf{R}}_0 \\ \bullet \widetilde{\mathbf{R}}_{-1} = \widetilde{\mathbf{R}}_4 &= \frac{\widehat{\mathbf{R}}_{a1} + j\widehat{\mathbf{R}}_{b1}}{2} & \bullet \widetilde{\mathbf{R}}_2 &= \frac{\widehat{\mathbf{R}}_{a2} - j\widehat{\mathbf{R}}_{b2}}{2} & & \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

όπου επίσης ισχύει ότι $\widetilde{\mathbf{R}}_{-2} = \widetilde{\mathbf{R}}_3$ και $\widetilde{\mathbf{R}}_{-1} = \widetilde{\mathbf{R}}_4$.

Κοιτώντας τις σχέσεις 5.2.11, 5.2.13 διαπιστώνεται ότι η γνώση των διανυσμάτων $\vec{\mathbf{W}}$ και $\vec{\mathbf{R}}$ εξασφαλίζει τον υπολογισμό των διανυσμάτων $\widetilde{\mathbf{W}} = [\widetilde{\mathbf{W}}_0 \ \widetilde{\mathbf{W}}_1 \ \widetilde{\mathbf{W}}_2 \ \widetilde{\mathbf{W}}_3 \ \widetilde{\mathbf{W}}_4]^T$ και $\widetilde{\mathbf{R}} = [\widetilde{\mathbf{R}}_0 \ \widetilde{\mathbf{R}}_1 \ \widetilde{\mathbf{R}}_2 \ \widetilde{\mathbf{R}}_3 \ \widetilde{\mathbf{R}}_4]^T$ τα οποία αποτελούν το ενδιάμεσο βήμα ώστε να υπολογιστούν τα μεγέθη $\widetilde{\mathbf{W}}_i$ και $\widetilde{\mathbf{R}}_i$, όπου $i = 0, \dots, 4$. Πλέον, γνωρίζοντας τα συγκεκριμένα μεγέθη, είναι δυνατό μέσω των γνωστών σχέσεων 5.2.5, 5.2.14 να υπολογιστούν τα διανύσματα $\widehat{\mathbf{W}} = [\widehat{\mathbf{W}}_0 \ \widehat{\mathbf{W}}_1 \ \widehat{\mathbf{W}}_2 \ \widehat{\mathbf{W}}_{-2} \ \widehat{\mathbf{W}}_{-1}]^T$ και $\widehat{\mathbf{R}} = [\widehat{\mathbf{R}}_0 \ \widehat{\mathbf{R}}_1 \ \widehat{\mathbf{R}}_2 \ \widehat{\mathbf{R}}_{-2} \ \widehat{\mathbf{R}}_{-1}]^T$.

Σε αυτό όμως το σημείο τίθεται ένα σημαντικό ερώτημα το οποίο ανακύπτει ύστερα από προσεκτική παρατήρηση των σχέσεων 5.2.5, 5.2.14. Όπως έχει τονιστεί και προηγουμένως, τα μεγέθη $\widetilde{\mathbf{W}}_i$ και $\widetilde{\mathbf{R}}_i$ είναι μιγαδικοί αριθμοί ενώ οι αντίστοιχοι $\widehat{\mathbf{W}}_i$ και $\widehat{\mathbf{R}}_i$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Γίνεται αμέσως αντιληπτό ότι οι σχέσεις 5.2.5, 5.2.14 παρέχουν πέντε εξισώσεις εκ των οποίων χρειάζονται οι τρεις, διότι για παράδειγμα τα $\widehat{\mathbf{W}}_{a2}$, $\widehat{\mathbf{W}}_{b2}$ μπορούν να βρεθούν ταυτόχρονα είτε από τη σχέση που τα συνδέει με το $\widetilde{\mathbf{W}}_2$ είτε με την αντίστοιχη για το $\widetilde{\mathbf{W}}_3$, εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέλη. Αποδεικνύεται ότι όποια από τις δύο εξισώσεις και αν χρησιμοποιηθεί το αποτέλεσμα είναι το ίδιο, γεγονός που θα επιβεβαιωθεί και από την απόδειξη που θα παρατεθεί παρακάτω. Πρέπει να τονιστεί ότι αν και η απόδειξη θα αφορά τα μεγέθη $\widehat{\mathbf{W}}_{a2}$, $\widehat{\mathbf{W}}_{b2}$ και $\widetilde{\mathbf{W}}_2$, $\widetilde{\mathbf{W}}_3$, μπορεί να γενικευτεί για όλες τις περιπτώσεις που μπορούν να προκύψουν είτε για δύο αρμονικές, είτε για τυχαίο αριθμό αρμονικών.

Απόδειξη. Από τη σχέση 5.2.9 για τα $\widetilde{\mathbf{W}}_2$, $\widetilde{\mathbf{W}}_3$ προκύπτει:

$$\widetilde{\mathbf{W}}_2 = \mathbf{W}_0 + \phi^{-2} \mathbf{W}_1 + \phi^{-4} \mathbf{W}_2 + \phi^{-6} \mathbf{W}_3 + \phi^{-8} \mathbf{W}_4$$

$$\widetilde{\mathbf{W}}_3 = \mathbf{W}_0 + \phi^{-3} \mathbf{W}_1 + \phi^{-6} \mathbf{W}_2 + \phi^{-9} \mathbf{W}_3 + \phi^{-12} \mathbf{W}_4$$

Για τον μιγαδικό αριθμό ϕ ισχύει η σχέση $\phi = e^{j2\pi \frac{\Delta t}{T}}$ η οποία ύστερα από εφαρμογή της σχέσης Euler μετασχηματίζει τις παραπάνω σχέσεις ως εξής:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{W}}_2 = & \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1 \cos(-4\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_2 \cos(-8\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_3 \cos(-12\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_4 \cos(-16\pi \frac{\Delta t}{T}) \\ & + j \left[\mathbf{W}_1 \sin(-4\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_2 \sin(-8\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_3 \sin(-12\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_4 \sin(-16\pi \frac{\Delta t}{T}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{W}}_3 = & \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1 \cos(-6\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_2 \cos(-12\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_3 \cos(-18\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_4 \cos(-24\pi \frac{\Delta t}{T}) \\ & + j \left[\mathbf{W}_1 \sin(-6\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_2 \sin(-12\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_3 \sin(-18\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_4 \sin(-24\pi \frac{\Delta t}{T}) \right] \end{aligned}$$

Αρκεί ισοδύναμα λοιπόν να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$Re(\widetilde{\mathbf{W}}_2) = Re(\widetilde{\mathbf{W}}_3)$$

$$Im(\widetilde{\mathbf{W}}_2) = Im(\widetilde{\mathbf{W}}_3)$$

Τοποθετώντας στις παραπάνω σχέσεις τις αναλυτικές εκφράσεις κάθε μέλους είναι:

$$\begin{aligned} Re(\widetilde{\mathbf{W}}_2) = Re(\widetilde{\mathbf{W}}_3) & \Leftrightarrow \\ \cancel{\mathbf{W}_0} + \mathbf{W}_1 \cos(-4\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_2 \cos(-8\pi \frac{\Delta t}{T}) + \cancel{\mathbf{W}_3 \cos(-12\pi \frac{\Delta t}{T})} + \mathbf{W}_4 \cos(-16\pi \frac{\Delta t}{T}) = \\ \cancel{\mathbf{W}_0} + \mathbf{W}_1 \cos(-6\pi \frac{\Delta t}{T}) + \cancel{\mathbf{W}_2 \cos(-12\pi \frac{\Delta t}{T})} + \mathbf{W}_3 \cos(-18\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_4 \cos(-24\pi \frac{\Delta t}{T}) & \Leftrightarrow \\ \mathbf{W}_1 \cos(-4\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_2 \cos(-8\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_4 \cos(-6\pi \frac{\Delta t}{T} - 2 \cdot 5\pi \frac{\Delta t}{T}) = \\ \mathbf{W}_1 \cos(-6\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_3 \cos(-8\pi \frac{\Delta t}{T} - 2 \cdot 5\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_4 \cos(-4\pi \frac{\Delta t}{T} - 4 \cdot 5\pi \frac{\Delta t}{T}) & \\ \xleftrightarrow[\cos(a \pm 2k\pi) = \cos(a)]{\cos(a \pm 2k\pi) = \cos(a)} \mathbf{W}_1 \cos(-4\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_2 \cos(-8\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_4 \cos(-6\pi \frac{\Delta t}{T}) = \\ \mathbf{W}_1 \cos(-4\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_3 \cos(-6\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_4 \cos(-8\pi \frac{\Delta t}{T}) & \\ \Leftrightarrow 0 = 0 & \end{aligned}$$

ενώ η ισότητα των φανταστικών μελών γίνεται:

$$\begin{aligned} Im(\widetilde{\mathbf{W}}_2) = Im(\widetilde{\mathbf{W}}_3) & \Leftrightarrow \\ \mathbf{W}_1 \sin(-4\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_2 \sin(-8\pi \frac{\Delta t}{T}) + \cancel{\mathbf{W}_3 \sin(-12\pi \frac{\Delta t}{T})} + \mathbf{W}_4 \sin(-16\pi \frac{\Delta t}{T}) = \\ \mathbf{W}_1 \sin(-6\pi \frac{\Delta t}{T}) + \cancel{\mathbf{W}_2 \sin(-12\pi \frac{\Delta t}{T})} + \mathbf{W}_3 \sin(-18\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_4 \sin(-24\pi \frac{\Delta t}{T}) & \Leftrightarrow \\ \mathbf{W}_1 \sin(-4\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_2 \sin(-8\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_4 \sin(-6\pi \frac{\Delta t}{T} - 2 \cdot 5\pi \frac{\Delta t}{T}) = \\ \mathbf{W}_1 \sin(-6\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_3 \sin(-8\pi \frac{\Delta t}{T} - 2 \cdot 5\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_4 \sin(-4\pi \frac{\Delta t}{T} - 4 \cdot 5\pi \frac{\Delta t}{T}) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xleftrightarrow[\sin(a \pm 2k\pi) = \sin(a)]{5\Delta t/T=1} \mathbf{W}_1 \sin(-4\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_2 \sin(-8\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_4 \sin(-6\pi \frac{\Delta t}{T}) = \\ \mathbf{W}_1 \sin(-4\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_3 \sin(-6\pi \frac{\Delta t}{T}) + \mathbf{W}_4 \sin(-8\pi \frac{\Delta t}{T}) \\ \Leftrightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

■

Το άμεσο αποτέλεσμα της παραπάνω απόδειξης είναι ότι τελικά από τις πέντε εξισώσεις καθεμιάς από τις σχέσεις 5.2.5, 5.2.14 θα χρησιμοποιούνται οι τρεις ώστε να γίνεται μετάβαση στα διανύσματα $\vec{\mathbf{W}}, \vec{\mathbf{R}}$. Ακολουθεί η αναλυτική επίδειξη της μετάβασης από το διάνυσμα $\vec{\mathbf{W}}$ στο διάνυσμα $\vec{\mathbf{W}}$ για δύο αρμονικές. Η συγκεκριμένη επίδειξη βασίζεται αποκλειστικά στις σχέσεις 5.2.5, 5.2.11 και μπορεί να γενικευτεί για οποιοδήποτε αριθμό αρμονικών αλλά και για την περίπτωση των χωρικών υπολοίπων όπου τότε πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις 5.2.13, 5.2.14.

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\mathbf{W}}_0 = \widetilde{\mathbf{W}}_0 = \frac{1}{5} [\mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_3 + \mathbf{W}_4] \\ \widehat{\mathbf{W}}_{a1} = 2Re(\widetilde{\mathbf{W}}_1) = \frac{2}{5} Re[\mathbf{W}_0 + \phi^{-1} \mathbf{W}_1 + \phi^{-2} \mathbf{W}_2 + \phi^{-3} \mathbf{W}_3 + \phi^{-4} \mathbf{W}_4] \\ \widehat{\mathbf{W}}_{b1} = -2Im(\widetilde{\mathbf{W}}_1) = -\frac{2}{5} Im[\mathbf{W}_0 + \phi^{-1} \mathbf{W}_1 + \phi^{-2} \mathbf{W}_2 + \phi^{-3} \mathbf{W}_3 + \phi^{-4} \mathbf{W}_4] \\ \widehat{\mathbf{W}}_{a2} = 2Re(\widetilde{\mathbf{W}}_2) = \frac{2}{5} Re[\mathbf{W}_0 + \phi^{-2} \mathbf{W}_1 + \phi^{-4} \mathbf{W}_2 + \phi^{-6} \mathbf{W}_3 + \phi^{-8} \mathbf{W}_4] \\ \widehat{\mathbf{W}}_{b2} = -2Im(\widetilde{\mathbf{W}}_2) = -\frac{2}{5} Im[\mathbf{W}_0 + \phi^{-2} \mathbf{W}_1 + \phi^{-4} \mathbf{W}_2 + \phi^{-6} \mathbf{W}_3 + \phi^{-8} \mathbf{W}_4] \end{array} \right.$$

Σε αυτό το σημείο θα γίνει αντικατάσταση των όρων $\phi^{-k}, k \in \mathbb{Z}$, από τις ισοδύναμες εκφράσεις τους από τη σχέση Euler, οπότε λαμβάνοντας υπόψη ότι ισχύει και η σχέση $a = \omega \Delta t$, μπορεί να γραφεί ότι:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\mathbf{W}}_0 = \frac{1}{5} [\mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_3 + \mathbf{W}_4] \\ \widehat{\mathbf{W}}_{a1} = \frac{2}{5} [\mathbf{W}_0 + \cos(a) \mathbf{W}_1 + \cos(2a) \mathbf{W}_2 + \cos(3a) \mathbf{W}_3 + \cos(4a) \mathbf{W}_4] \\ \widehat{\mathbf{W}}_{b1} = \frac{2}{5} [0 \mathbf{W}_0 + \sin(a) \mathbf{W}_1 + \sin(2a) \mathbf{W}_2 + \sin(3a) \mathbf{W}_3 + \sin(4a) \mathbf{W}_4] \\ \widehat{\mathbf{W}}_{a2} = \frac{2}{5} [\mathbf{W}_0 + \cos(2a) \mathbf{W}_1 + \cos(3a) \mathbf{W}_2 + \cos(6a) \mathbf{W}_3 + \cos(8a) \mathbf{W}_4] \\ \widehat{\mathbf{W}}_{b2} = \frac{2}{5} [0 \mathbf{W}_0 + \sin(2a) \mathbf{W}_1 + \sin(4a) \mathbf{W}_2 + \sin(6a) \mathbf{W}_3 + \sin(8a) \mathbf{W}_4] \end{array} \right.$$

Το παραπάνω σύστημα μπορεί πλέον να διατυπωθεί και σε μητρική μορφή ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{W}}_0 \\ \widehat{\mathbf{W}}_{a1} \\ \widehat{\mathbf{W}}_{b1} \\ \widehat{\mathbf{W}}_{a2} \\ \widehat{\mathbf{W}}_{b2} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 \cos(a) & 2 \cos(2a) & 2 \cos(3a) & 2 \cos(4a) \\ 0 & 2 \sin(a) & 2 \sin(2a) & 2 \sin(3a) & 2 \sin(4a) \\ 2 & 2 \cos(2a) & 2 \cos(4a) & 2 \cos(6a) & 2 \cos(8a) \\ 0 & 2 \sin(2a) & 2 \sin(4a) & 2 \sin(6a) & 2 \sin(8a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_0 \\ \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 \\ \mathbf{W}_4 \end{bmatrix} \quad (5.2.15)$$

όπου ορίζεται το μητρώο E :

$$E = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 \cos(a) & 2 \cos(2a) & 2 \cos(3a) & 2 \cos(4a) \\ 0 & 2 \sin(a) & 2 \sin(2a) & 2 \sin(3a) & 2 \sin(4a) \\ 2 & 2 \cos(2a) & 2 \cos(4a) & 2 \cos(6a) & 2 \cos(8a) \\ 0 & 2 \sin(2a) & 2 \sin(4a) & 2 \sin(6a) & 2 \sin(8a) \end{bmatrix}$$

το οποίο, στην πράξη, αποτελεί μητρώο μετασχηματισμού (*transformation matrix*) από το διάνυσμα των πεδίων-λύσεων $\vec{\mathbf{W}}$ στο διάνυσμα των πεδίων-συντελεστών $\vec{\mathbf{W}}$ της σειράς Fourier.

Για την περίπτωση των δύο αρμονικών, το σύστημα της σχέσης 5.2.3 γράφεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \widehat{\mathbf{R}}_0 \\ \omega \widehat{\mathbf{W}}_{a1} = \widehat{\mathbf{R}}_{b1} \\ -\omega \widehat{\mathbf{W}}_{b1} = \widehat{\mathbf{R}}_{a1} \\ 2\omega \widehat{\mathbf{W}}_{a2} = \widehat{\mathbf{R}}_{b2} \\ -2\omega \widehat{\mathbf{W}}_{b2} = \widehat{\mathbf{R}}_{a2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \omega \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{W}}_0 \\ \widehat{\mathbf{W}}_{a1} \\ \widehat{\mathbf{W}}_{b1} \\ \widehat{\mathbf{W}}_{a2} \\ \widehat{\mathbf{W}}_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{R}}_0 \\ \widehat{\mathbf{R}}_{a1} \\ \widehat{\mathbf{R}}_{b1} \\ \widehat{\mathbf{R}}_{a2} \\ \widehat{\mathbf{R}}_{b2} \end{bmatrix}$$

όπου αν οριστεί το μητρώο C ως:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

το παραπάνω σύστημα σε διανυσματική γραφή εκφράζεται ως εξής:

$$\omega C \vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{R}} \begin{array}{l} \vec{\mathbf{W}} = E\vec{\mathbf{W}} \\ \vec{\mathbf{R}} = E\vec{\mathbf{R}} \end{array} \Leftrightarrow \omega C E \vec{\mathbf{W}} = E \vec{\mathbf{R}} \Leftrightarrow \omega E^{-1} C E \vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{R}} \Leftrightarrow \omega D \vec{\mathbf{W}} + \vec{\mathbf{R}} = 0 \quad (5.2.16)$$

Εδώ εμφανίζεται το νέο μητρώο D για το οποίο ισχύει ότι $D = -E^{-1}CE$. Η εξίσωση 5.2.16 ονομάζεται **εξίσωση ισορροπίας των αρμονικών** (*Harmonic Balance Equation*) και είναι αντίστοιχη των αρχικών διαφορικών εξισώσεων της σχέσης 5.2.1.

Όσον αφορά το μητρώο D , είναι γνωστά από προηγούμενα βήματα τα μητρώα E και C αλλά μέχρι τώρα δεν έχει αναφερθεί το μητρώο E^{-1} . Το συγκεκριμένο μητρώο μπορεί να προκύψει εύκολα από τη σχέση 5.2.4, δηλαδή από την ανάλυση Fourier της λύσης $\mathbf{W}(t)$, οπότε δίχως παράθεση περαιτέρω πράξεων παρουσιάζεται το τελικό αποτέλεσμα:

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \cos(a) & \sin(a) & \cos(2a) & \sin(2a) \\ 1 & \cos(2a) & \sin(2a) & \cos(4a) & \sin(4a) \\ 1 & \cos(3a) & \sin(3a) & \cos(6a) & \sin(6a) \\ 1 & \cos(4a) & \sin(4a) & \cos(8a) & \sin(8a) \end{bmatrix}$$

Γνωρίζοντας όλες τις εκφράσεις των μητρώων που απαιτούνται για τον υπολογισμό του μητρώου D , αφού πρώτα παρουσιαστεί και η αναλυτική έκφραση του γινομένου των $E^{-1}C$, μπορεί να πραγματοποιηθεί ο καθορισμός του επιθυμητού μητρώου. Έτσι είναι:

$$E^{-1}C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & \sin(a) & -\cos(a) & 2\sin(2a) & -2\cos(2a) \\ 0 & \sin(2a) & -\cos(2a) & 2\sin(4a) & -2\cos(4a) \\ 0 & \sin(3a) & -\cos(3a) & 2\sin(6a) & -2\cos(6a) \\ 0 & \sin(4a) & -\cos(4a) & 2\sin(8a) & -2\cos(8a) \end{bmatrix}$$

ενώ ο αναλυτικός τύπος κάθε στοιχείου του μητρώου D για δύο αρμονικές είναι ο εξής:

$$D_{i,j} = \frac{2}{5} \left[\sin[a(j-i)] + 2\sin[2a(j-i)] \right] \quad (5.2.17)$$

όπου $i = 1, \dots, 5$ ο αριθμός γραμμής και $j = 1, \dots, 5$ ο αριθμός στήλης.

5.2.2 Γενίκευση της Μεθόδου για Τυχαίο Αριθμό Αρμονικών

Στην προηγούμενη παράγραφο παρουσιάστηκε η Μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών για την ειδική περίπτωση της χρήσης σειρών Fourier με δύο αρμονικές. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν μπορούν να γενικευτούν και για τυχαίο αριθμό αρμονικών ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία. Για αυτόν τον λόγο, δεν γίνεται λεπτομερής ανάλυση της μεθόδου για τυχαίο αριθμό αρμονικών αλλά παρουσιάζονται μόνο τα σημαντικότερα αποτελέσματα η γνώση των οποίων είναι απαραίτητη για την εφαρμογή της μεθόδου. Αξίζει να σημειωθεί ότι και πάλι δίχως βλάβη της γενικότητας θεωρείται ως $t_0 = 0$ οπότε και προκύπτουν τα παρακάτω μητρώα.

$$E = \frac{1}{N_T} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2\cos(a) & 2\cos(2a) & \dots & 2\cos[(N_T-1)a] \\ 0 & 2\sin(a) & 2\sin(2a) & \dots & 2\sin[(N_T-1)a] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2\cos(N_H a) & 2\cos(2N_H a) & \dots & 2\cos[(N_T-1)N_H a] \\ 0 & 2\sin(N_H a) & 2\sin(2N_H a) & \dots & 2\sin[(N_T-1)N_H a] \end{bmatrix} \quad (5.2.18)$$

Το αντίστροφο μητρώο του E , το οποίο απαιτείται για τον υπολογισμό του μητρώου D , δίνεται ως εξής:

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \cos(a) & \sin(a) & \dots & \cos(N_H a) & \sin(N_H a) \\ 1 & \cos(2a) & \sin(2a) & \dots & \cos(N_H 2a) & \sin(N_H 2a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos[(N_T-1)a] & \sin[(N_T-1)a] & \dots & \cos[(N_T-1)N_H a] & \sin[(N_T-1)N_H a] \end{bmatrix} \quad (5.2.19)$$

Τα στοιχεία του μητρώου C , η γνώση του οποίου είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό του μητρώου D , δίνονται από την παρακάτω τρίκλαδη συνάρτηση:

$$C_{i,j} = \begin{cases} -n & , \text{ για } i = 2n \text{ και } j = 2n + 1 \\ n & , \text{ για } i = 2n + 1 \text{ και } j = 2n \\ 0 & , \text{ για κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases} \quad (5.2.20)$$

όπου με i συμβολίζονται οι γραμμές, με j οι στήλες ενώ για το n ισχύει ότι $1 \leq n \leq N_H$ με $n \in \mathbb{N}$

Τέλος, μέσω των παραπάνω μητρώων μπορεί να εξαχθεί ο γενικός τύπος που δίνει τα στοιχεία του πίνακα D για οποιονδήποτε αριθμό αρμονικών:

$$D_{i,j} = \frac{2}{N_T} \sum_{k=1}^{N_H} \left\{ k \sin[ak(j-i)] \right\} \quad (5.2.21)$$

5.3 Συμπεράσματα, Παρατηρήσεις και Περιγραφή Διαδικασίας

Η εφαρμογή της Μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών αλλάζει ολοκληρωτικά τη φιλοσοφία με την οποία προσεγγίζεται το πρόβλημα. Πλέον, δεν επιχειρείται η επίλυση των χρονικά μη-μόνιμων εξισώσεων της σχέσης 5.2.1, αλλά απαιτείται η επίλυση ενός συστήματος πεπλεγμένων μόνιμων διαφορικών εξισώσεων το οποίο περιγράφεται από την παρακάτω σχέση 5.3.1, και του οποίου ο αριθμός των εξισώσεων εξαρτάται από τον αριθμό των αρμονικών που επιλέγεται να χρησιμοποιηθούν.

$$\boxed{\frac{d\vec{W}}{d\tau} + \omega D\vec{W} + \vec{R} = 0} \quad (5.3.1)$$

Ο ψευδο-χρονικός όρος που εμφανίζεται παραπάνω προστίθεται με σκοπό την ενίσχυση της διαγωνίας κυριαρχίας του συστήματος που θα προκύψει ή ισοδύναμα να διευκολυνθεί η αριθμητική σύγκλιση.

Από τη διαδικασία που ακολουθήθηκε μέχρι τώρα, ένα ισοδύναμο αποτέλεσμα της παραπάνω σχέσης 5.3.1 αποτελεί η παρακάτω σχέση υπολογισμού της χρονικής παραγώγου $\frac{d\vec{W}}{dt}$. Η απόδειξη της συγκεκριμένης εξίσωσης βασίζεται στον συνδυασμό των σχέσεων 5.2.1, 5.3.1 χωρίς βέβαια να συνυπολογίζεται ο ψευδο-χρονικός όρος.

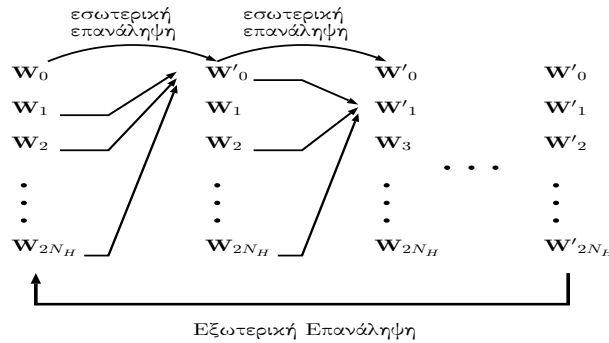
$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \omega D\vec{W}$$

5.3.1 Περιγραφή Διαδικασίας

Έχοντας παραθέσει όλο το θεωρητικό υπόβαθρο της μεθόδου καλό θα ήταν να παρουσιαστεί η διαδικασία η οποία ακολουθείται κατά την επίλυση με τη Μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών.

- Επιλύεται το σύστημα της σχέσης 5.3.1 που στην πράξη αντιπροσωπεύει $N_T = 2N_H + 1$ χρονικά μόνιμες μδε. Το συγκεκριμένο σύστημα είναι πεπλεγμένο οπότε για να μπορέσει να απεμπλακεί 'παγώνεται' κάθε φορά το αποτέλεσμα της εξίσωσης που επιλύθηκε

και χρησιμοποιείται στην επόμενη εξίσωση. Όταν επιλυθεί και η επόμενη, κρατώνται 'παγωμένα' τα αποτελέσματα των δύο προηγούμενων εξισώσεων και χρησιμοποιούνται στην επόμενη κ.ο.κ. Βέβαια, πρέπει να επισημανθεί ότι κάθε εξίσωση χρησιμοποιεί αποτελέσματα και από τις επόμενες εξισώσεις, οπότε, καταλαβαίνει κανείς ότι κάθε εξίσωση χρησιμοποιεί ανανεωμένη πληροφορία από τις προηγούμενες εξισώσεις αλλά παλιά πληροφορία από τις επόμενες. Η διαδικασία παρουσιάζεται εποπτικά στο παρακάτω σχήμα 5.3.1 όπου τα τονούμενα μεγέθη είναι τα ανανεωμένα μεγέθη.



Σχήμα 5.3.1: Απλοποιημένη διαδικασία επίλυσης του πεπλεγμένου συστήματος των N_T διαφορικών εξισώσεων.

- Γνωρίζοντας πλέον το διάνυσμα \vec{W} μπορεί να υπολογιστεί το διάνυσμα των συντελεστών Fourier $\widehat{\vec{W}}$ μέσω της παρακάτω σχέσης:

$$\widehat{\vec{W}} = E\vec{W} \quad (5.3.2)$$

- Γνωρίζοντας πλέον του συντελεστές των σειρών Fourier της σχέσης 5.2.2 μπορεί να γίνει ανακατασκευή (*reconstruction*) του πεδίου \mathbf{W} για οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

5.3.2 Παρατηρήσεις

Η Μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών δίνει τη δυνατότητα να προσεγγίζεται η λύση με οποιονδήποτε αριθμό αρμονικών. Το πλήθος των αρμονικών δεν πρέπει να επιλέγεται τυχαία αλλά πρέπει να επιλέγεται βάσει της συχνότητας της διαταραχής που παράγει το πεδίο που πρέπει να αντιμετωπιστεί. Όταν η συχνότητα είναι χαμηλή, οπότε και εμφανίζονται μεγάλες περίοδοι, τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί μικρός αριθμός αρμονικών, για παράδειγμα δύο με τρεις αρμονικές, οπότε και το πραγματικό πεδίο περιγράφεται με μεγάλη ακρίβεια. Όταν όμως η συχνότητα διέγερσης είναι υψηλή, ισοδύναμα η περίοδος είναι μικρή, τότε όπως φαίνεται και στη σχέση 5.2.2 για να μπορέσουν οι σειρές Fourier να περιγράψουν υψηλές συχνότητες χρειάζονται αρκετούς όρους άρα και μεγαλύτερο αριθμό αρμονικών. Όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός αρμονικών τόσο πιο αργός γίνεται ο κώδικας καθώς απαιτείται επίλυση περισσότερων διαφορικών εξισώσεων. Για τον λόγο αυτό, η επιλογή του αριθμού των αρμονικών πρέπει να γίνεται ύστερα από κατανόηση του φαινομένου και να επιλέγεται πάντα ο βέλτιστος αριθμός, ώστε και η τελική λύση να περιγράφει ικανοποιητικά το φαινόμενο αλλά και να μην ξοδεύεται πολύτιμος υπολογιστικός χρόνος άσκοπα.

Οι εξισώσεις που πρέπει να επιλυθούν είναι γραμμένες στο πεδίο των συχνοτήτων με την επίλυση τους όμως να πραγματοποιείται στο πεδίο του χρόνου. Αυτό πραγματοποιείται διακριτοποιώντας την περίοδο σε N_T ισομήκη διαστήματα και γράφοντας τις εξισώσεις κάνοντας χρήση μεταβλητών που αναφέρονται κάθε φορά στη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Όσον αφορά το μητρώο D που εμφανίζεται στη σχέση 5.3.1, πρέπει να αναφερθούν δύο βασικά του χαρακτηριστικά. Πρώτον, το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του μητρώου είναι ίσο με μηδέν. Αυτό αφενός, μπορεί να λειτουργήσει σαν δικλείδα ασφαλείας καθώς μπορεί να πραγματοποιείται ένας γρήγορος έλεγχος πριν τη χρήση του μητρώου και αφετέρου, γίνεται εμφανές ότι θεωρώντας μια χρονικά σταθερή συνάρτηση ως οριακά περιοδική μπορεί να ληφθεί το ακριβές αποτέλεσμα στην προσέγγιση της χρονικής παραγωγού της λύσης $\frac{d\vec{W}}{dt} = 0$.

Κεφάλαιο 6

Εφαρμογή της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών στις Euler Εξισώσεις

6.1 Εξισώσεις Ισορροπίας των Αρμονικών για Ατριβή Ροή

Οι μδε ατριβούς ροής σε διανυσματική αλλά και σε τανυστική γραφή, όπως παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 4 στις σχέσεις 4.1.1, 4.1.2, είναι οι εξής:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

όπου $i = 1, \dots, 4$ και $j = 1, 2$.

Η εφαρμογή της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών πραγματοποιείται στη διανυσματική μορφή των εξισώσεων Euler. Αρχικά, πραγματοποιείται εκ νέου παράθεση της σχέσης 5.2.16, δηλαδή της εξίσωσης ισορροπίας των αρμονικών, ώστε να είναι πιο εύκολα κατανοητή η παρουσίαση που θα ακολουθήσει. Έτσι, μπορεί να γραφεί ότι:

$$\omega D\vec{\mathbf{W}} + \vec{\mathbf{R}} = 0$$

Στη Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών το διάνυσμα $\vec{\mathbf{R}}$ αντιπροσωπεύει το λεγόμενο χωρικό υπόλοιπο (*spatial residual*), γεγονός που έχει αναφερθεί και στο Κεφάλαιο 5 όπου αναπτύχθηκε η συγκεκριμένη μέθοδος. Αντίθετα, στις Euler εξισώσεις που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 4, το διάνυσμα \mathbf{R} αποτελεί το υπόλοιπο των εξισώσεων Euler. Επίσης, υπενθυμίζεται ότι η εξίσωση ισορροπίας των αρμονικών διαθέτει ταυτόχρονα δύο διανυσματικούς συμβολισμούς. Ο πρώτος είναι τα έντονα μαύρα γράμματα και αντιπροσωπεύει ακριβώς ότι και στις εξισώσεις Euler, δηλαδή, τη διανυσματική φύση της εκάστοτε μεταβλητής η οποία πηγάζει από το γεγονός ότι υπάρχουν περισσότερες των μια εξισώσεων

που πρέπει να επιλυθούν ώστε να περιγραφεί πλήρως η ροή. Ο δεύτερος συμβολισμός είναι το βέλος που εμφανίζεται πάνω από συγκεκριμένα μεγέθη, και το οποίο αντιπροσωπεύει τον αριθμό των στιγμιότυπων της ροής που πρέπει να επιλυθούν ώστε να υπολογιστούν οι αρμονικές που περιγράφουν το πεδίο στο χρόνο.

Το χωρικό υπόλοιπο των Euler εξισώσεων $\vec{\mathbf{R}}$ είναι ο παρακάτω όρος:

$$\vec{\mathbf{R}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{f}}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\mathbf{f}}_y}{\partial y} \quad (6.1.1)$$

όπου τα διανύσματα ροής πλέον είναι διατυπωμένα για πολλά στιγμιότυπα, ώστε να συμβαδίζουν με το συμβολισμό που ακολουθεί η Μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών.

Έχοντας συσχετίσει το χωρικό υπόλοιπο της εξίσωσης της ισορροπίας των αρμονικών με τα διανύσματα ροής, απομένει η επεξήγηση ακόμη δύο όρων ώστε να καταστεί πλήρως κατανοητή η μετάβαση από τις Euler εξισώσεις στις αντίστοιχες της ισορροπίας των αρμονικών. Αρχικά, παρατηρείται ότι οι Euler εξισώσεις διαθέτουν χρονικά μη-μόνιμο όρο ενώ οι αντίστοιχες της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών δεν διαθέτουν. Αυτό είναι λογικό γιατί η συγκεκριμένη μέθοδος, όπως έχει ειπωθεί πολλές φορές μέχρι τώρα, επιλύει πολλές χρονικά μόνιμες εξισώσεις αντί να επιλύσει μη-μόνιμες. Όμως, για να καταστεί δυνατή η περιγραφή ενός μη-μόνιμου φαινομένου από μόνιμες εξισώσεις, απαιτείται η χρήση ενός όρου πηγής που για την εν λόγω μέθοδο είναι ο $\omega D\vec{\mathbf{W}}$. Έτσι, τελικά, μπορούν να προκύψουν οι **εξισώσεις ισορροπίας των αρμονικών της Euler ροής** σε διανυσματική γραφή:

$$\omega D\vec{\mathbf{W}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{f}}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\mathbf{f}}_y}{\partial y} = 0 \quad (6.1.2)$$

ενώ η τανυστική μορφή διατυπώνεται ως εξής:

$$\omega D_{\mu\nu} W_{\nu i} + \frac{\partial f_{ij}^{\mu}}{\partial x_j} = 0 \quad (6.1.3)$$

όπου ο δείκτης i λαμβάνει ακέραιες τιμές στο κλειστό διάστημα $[1, 4]$ αντιπροσωπεύοντας τα τέσσερα ροϊκά μεγέθη των εξισώσεων, ο δείκτης j λαμβάνει τις τιμές 1 και 2 αντιπροσωπεύοντας τις δύο κατευθύνσεις του χώρου, ενώ οι δείκτες μ και ν λαμβάνουν ακέραιες τιμές στο κλειστό διάστημα $[1, 2N_H + 1]$, όπου ο μεν δείκτης μ καθορίζει ποια από τα $2N_H + 1$ μόνιμα πεδία μελετώνται, ενώ ο δε δείκτης ν καθορίζει τη συνεισφορά του καθενός από τα $2N_H + 1$ πεδία στον όρο πηγής κάθε πεδίου. Η τελευταία παρατήρηση εξηγεί πλήρως ένα συμπέρασμα που είχε διατυπωθεί στο Κεφάλαιο 5, και το οποίο ανέφερε ότι οι $2N_H + 1$ εξισώσεις της μεθόδου είναι **πεπλεγμένες** καθώς καθεμιά απαιτεί ταυτόχρονη πληροφορία από όλες τις υπόλοιπες ώστε να επιλυθεί.

6.2 Διακριτοποίηση των Εξισώσεων Ισορροπίας των Αρμονικών

Ως μέθοδος επίλυσης των μδε χρησιμοποιείται η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων, όπως ακριβώς είχε συμβεί και στις διαφορικές εξισώσεις της ατρίβους ροής του Κεφαλαίου 3.

Έτσι ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση 6.1.3 προκύπτει:

$$\int_{\Omega} \left(\omega D_{\mu\nu} W_{\nu i} + \frac{\partial f_{ij}^{\mu}}{\partial x_j} \right) d\Omega = 0 \quad (6.2.1)$$

Η παραπάνω σχέση εμφανίζει σημαντικές ομοιότητες με το πρώτο μέλος της σχέσης 4.2.2, καθώς η σχέση 4.2.2 αποτελεί τον χωρικό όρο των ολοκληρωμένων εξισώσεων Euler ο οποίος πρακτικά περιγράφει πλήρως τη μόνιμη ροή. Οι διαφορές που υπάρχουν αφορούν τον όρο πηγής που εμφανίζει η Μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών, καθώς και τον δείκτη μ που επίσης εμφανίζουν οι εν λόγω εξισώσεις.

Αν και οι παραπάνω διαφορές έχουν μεγάλη σημασία για την πορεία επίλυσης του προβλήματος, η διαδικασία διακριτοποίησης των εξισώσεων της ισορροπίας των αρμονικών της Euler ροής ουσιαστικά ταυτίζεται με την ήδη υπάρχουσα ανάλυση της Παραγράφου 3.2.1, απαιτώντας απλά την επιπλέον διακριτοποίηση του όρου πηγής, καθώς και την εισαγωγή του δείκτη μ .

Η εισαγωγή του δείκτη μ είναι μια πολύ εύκολη διαδικασία καθώς δεν απαιτεί την εκτέλεση οποιασδήποτε πράξης. Έτσι, μπορεί να πραγματοποιηθεί εισαγωγή του στη τελική σχέση 4.2.19 με αποτέλεσμα να προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\sum_{faces} f_{ij} n_j \Delta S \Big|_{\mu} = \sum_{k=faces} \left\{ \left[\frac{1}{2} (f_{i,n}^P + f_{i,n}^{Q,k}) - \frac{1}{2} |\tilde{A}_n^k| (W_i^{Q',k} - W_i^{P',k}) \right] \Delta S^k \right\} \Big|_{\mu} \quad (6.2.2)$$

όπου οι διάφοροι δείκτες δεν επεξηγούνται καθώς αυτό έχει ήδη πραγματοποιηθεί στο τμήμα της εργασίας όπου παρατίθεται η σχέση 4.2.19. Ο λόγος που ο δείκτης μ δεν απαιτεί την πραγματοποίηση πράξεων, είναι το γεγονός ότι αποτελεί ελεύθερο δείκτη της σχέσης 6.1.3, δηλαδή αποτελεί έναν τρόπο ώστε κάθε φορά να γίνεται αντιληπτό ποια χρονικά μόνιμη εξίσωση μελετάται.

Από την άλλη πλευρά, η διακριτοποίηση του όρου πηγής απαιτεί μια μικρή ανάλυση. Πιο συγκεκριμένα, επειδή ο όρος αυτός θεωρείται ως όρος πηγής, η διακριτοποίηση του απλοποιείται σημαντικά λαμβάνοντας την παρακάτω μορφή:

$$\int_{\Omega} \omega D_{\mu\nu} W_{\nu i} d\Omega \simeq \omega D_{\mu\nu} W_{\nu i} \int_{\Omega} d\Omega = \omega D_{\mu\nu} W_{\nu i} \Omega^P \quad (6.2.3)$$

όπου ως P , κάθε φορά, συμβολίζεται το βαρύκεντρο της υπό μελέτη υπολογιστικής κυψέλης.

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα των σχέσεων 6.2.2, 6.2.3, προκύπτει η παρακάτω σχέση που περιέχει την πλήρη διακριτοποίηση των εξισώσεων της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών της ατριβούς ροής:

$$\int_{\Omega} \left(\omega D_{\mu\nu} W_{\nu i} + \frac{\partial f_{ij}^{\mu}}{\partial x_j} \right) d\Omega \simeq \sum_{k=faces} \left\{ \left[\frac{1}{2} (f_{i,n}^P + f_{i,n}^{Q,k}) - \frac{1}{2} |\tilde{A}_n^k| (W_i^{Q',k} - W_i^{P',k}) \right] \Delta S^k \right\} \Big|_{\mu} + \omega D_{\mu\nu} W_{\nu i} \Omega^P \quad (6.2.4)$$

Όμως, η ανάλυση δεν έχει ολοκληρωθεί καθώς στις μέχρι τώρα σχέσεις δεν έχει εμφανιστεί ο ψευδο-χρονικός όρος που τεχνητά εισέρχεται στις διαφορικές εξισώσεις για λόγους σύγκλισης. Έτσι η σχέση 6.1.3 μετά από εισαγωγή του ψευδο-χρονικού όρου γράφεται:

$$\frac{\partial W_i^\mu}{\partial \tau} + \omega D_{\mu\nu} W_{\nu i} + \frac{\partial f_{ij}^\mu}{\partial x_j} = 0 \quad (6.2.5)$$

Ο ψευδο-χρονικός όρος $\frac{dW_i^\mu}{d\tau}$, μετά την εφαρμογή των πεπερασμένων όγκων, διακριτοποιείται όπως ακριβώς και στην περίπτωση που δεν χρησιμοποιείται η Μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών, με τη διαφορά πάλι να εντοπίζεται στην ανάγκη εισαγωγής του δείκτη μ . Έτσι, προκύπτει ότι:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W_i^\mu}{\partial \tau} d\Omega \simeq \frac{\partial W_i^\mu}{\partial \tau} \Omega^P \quad (6.2.6)$$

ενώ η παράγωγος ως προς το ψευδο-χρόνο, κατ' αντιστοιχία της σχέσης 4.2.23, γράφεται:

$$\frac{\partial W_i^\mu}{\partial \tau} \Omega^P \simeq (W_i^{P,m'+1} - W_i^{P,m'}) \Big|_{\mu} \frac{\Omega^P}{\Delta \tau^P} \quad (6.2.7)$$

Μέσω της σχέσης 6.2.4 αλλά και της παραπάνω σχέσης 6.2.7, λαμβάνεται η τελική σχέση των διακριτοποιημένων εξισώσεων ισορροπίας των αρμονικών, ή αλλιώς σχέση υπολογισμού του εκάστοτε υπολοίπου, που περιέχουν και τον ψευδο-χρονικό όρο:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_i^\mu}{\partial \tau} + \omega D_{\mu\nu} W_{\nu i} + \frac{\partial f_{ij}^\mu}{\partial x_j} \right) d\Omega \simeq & (W_i^{P,m'+1} - W_i^{P,m'}) \Big|_{\mu} \frac{\Omega^P}{\Delta \tau^P} + \omega D_{\mu\nu} W_{\nu i} \Omega^P \\ & + \sum_{k=faces} \left\{ \left[\frac{1}{2} (f_{i,n}^P + f_{i,n}^{Q,k}) - \frac{1}{2} |\tilde{A}_n^k| (W_i^{Q',k} - W_i^{P',k}) \right] \Delta S^k \right\} \Big|_{\mu} \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

Το υπόλοιπο της παραπάνω σχέσης θεωρητικά θα μπορούσε να συμβολιστεί διανυσματικά ως $\vec{\mathbf{R}}^P$ και τανυστικά ως $R_i^P|_{\mu}$, ώστε να συμβαδίζει με το συμβολισμό του Κεφαλαίου 3. Επειδή όμως, όπως ειπώθηκε και προηγουμένως, ο συγκεκριμένος συμβολισμός στη Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών απευθύνεται στο χωρικό υπόλοιπο, χρησιμοποιούνται οι συμβολισμοί $\vec{\mathbf{Res}}^P$ και $Res_i^P|_{\mu}$.

6.3 Επίλυση των Διακριτοποιημένων Εξισώσεων της Ισορροπίας των Αρμονικών

Όπως τονίστηκε και προηγουμένως, οι εξισώσεις ισορροπίας των αρμονικών της Euler ροής παρουσιάζουν σημαντικές ομοιότητες με τις μόνιμες εξισώσεις Euler, γεγονός που επιβεβαιώνεται από την αρκετά περιορισμένη επιπλέον ανάλυση που απαιτήθηκε ώστε να διακριτοποιηθούν οι εξισώσεις της μεθόδου. Αυτό το χαρακτηριστικό, όπως είναι λογικό, αναμένεται να εμφανιστεί και στην ανάλυση που θα ακολουθήσει και η οποία θα αφορά τον τρόπο επίλυσης των διακριτοποιημένων εξισώσεων.

Από την παραπάνω σχέση 6.2.8 ο μοναδικός όρος που δεν έχει αντιμετωπιστεί στο Κεφάλαιο 4 είναι ο όρος πηγής. Κατά συνέπεια, η ανάλυση που θα ακολουθήσει αφορά μόνο

αυτόν τον όρο καθώς οι υπόλοιποι όροι έχουν ήδη αναλυθεί διεξοδικά. Μάλιστα, σημειώνεται ότι σε αυτό το σημείο της εργασίας δεν θα επεξηγηθούν εκ νέου οι διάφοροι όροι που θα αναφέρονται, όπως για παράδειγμα τι είναι τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου, καθώς έχουν αναλυθεί διεξοδικά στο Κεφάλαιο 3.

Συνεισφορά του Όρου Πηγής στα Στοιχεία της Κυρίας Διαγωνίου

Για να υπολογιστεί η συνεισφορά του όρου πηγής στα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου πρέπει να υπολογιστεί η παρακάτω παράγωγος:

$$\left. \frac{\partial}{\partial W_l^P} \left(\omega D_{\mu\nu} W_{\nu i} \Omega \right) \right|_P$$

όπου ο δείκτης l λαμβάνει ακέραιες στο κλειστό διάστημα $[1, 4]$ συμβολίζοντας τα τέσσερα συντηρητικά μεγέθη, ενώ ο όρος ∂W_l^P είναι γραμμένος για την εκάστοτε εξίσωση, από τις συνολικά μ , για την οποία πραγματοποιείται επίλυση.

Η παραπάνω σχέση, λόγω της σύμβασης του Einstein, μπορεί να γραφεί ξανά ως εξής:

$$\left. \frac{\partial}{\partial W_l^P} \left(\omega D_{\mu 1} W_{1i} \Omega + \omega D_{\mu 2} W_{2i} \Omega + \dots + \omega D_{\mu 2N_H+1} W_{2N_H+1i} \Omega \right) \right|_P$$

Ο όρος του αριθμητή περιέχει τα διανύσματα των συντηρητικών μεγεθών και των μ εξισώσεων. Έτσι, προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Οι παράγωγοι $\frac{\partial(\omega D_{\mu\nu} W_{\nu i})}{\partial W_l^P}$ είναι μηδενικές όταν το ν δεν ταυτίζεται με το πεδίο W_l^P ως προς το οποίο πραγματοποιείται παραγωγή, καθώς δεν υφίσταται κάποια εξάρτηση μεταξύ των διανυσμάτων των συντηρητικών μεγεθών μιας οποιαδήποτε εξίσωσης μ ως προς τα αντίστοιχα μεγέθη οποιασδήποτε άλλης εξίσωσης.
- Από την παραπάνω παρατήρηση προκύπτει ότι θεωρητικά μόνο ο όρος του αριθμητή που περιέχει το πεδίο ως προς το οποίο γίνεται η παραγωγή θα συνεισφέρει στα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου. Όμως, ο όρος αυτός πολλαπλασιάζεται με τον εκάστοτε όρο διαγωνίου του μητρώου D , ο οποίος είναι μηδενικός (Κεφάλαιο 4).

Από τις παραπάνω παρατηρήσεις εξάγεται το συμπέρασμα ότι ο όρος πηγής δεν συνεισφέρει καθόλου στους όρους της κυρίας διαγωνίου. Έτσι, μπορεί τελικά να γραφεί η τελική σχέση που δίνει τους εν λόγω όρους. Αυτή ταυτίζεται με τη σχέση 4.3.7, αφαιρώντας τον χρονικό όρο, και προσθέτοντας το δείκτη μ που υποδηλώνει ποια εξίσωση επιλύεται κάθε φορά.

$$(diag)^P \Big|_{\mu} = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=faces} \left\{ \left(A_n^P - |\tilde{A}_n^k| \right) \Delta S^k \right\} + \frac{\Omega^P}{\Delta \tau^P} I \right] \Big|_{\mu} \quad (6.3.1)$$

Συνεισφορά του Όρου Πηγής στα Μη-Διαγώνια Στοιχεία

Ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό με προηγουμένως, πάλι πρέπει να διερευνηθεί μόνο η συνεισφορά του όρου πηγής στα μη-διαγώνια στοιχεία, δηλαδή να μελετηθεί η συμπεριφορά του όρου:

$$\left. \frac{\partial}{\partial W_l^{Q,o}} \left(\omega D_{\mu\nu} W_{\nu i} \Omega \right) \right|_P$$

όπου ως o συμβολίζεται η εκάστοτε γειτονική της P κυψέλη, ενώ η παραγωγή πραγματοποιείται ως προς τα συντηρητικά μεγέθη την γειτονικών κυψελών της εκάστοτε των μ εξισώσεων.

Αν αναλυθεί ο συγκεκριμένος όρος προκύπτει:

$$\left. \frac{\partial}{\partial W_l^{Q,o}} \left(\omega D_{\mu 1} W_{1i} \Omega + \omega D_{\mu 2} W_{2i} \Omega + \dots + \omega D_{\mu 2N_H+1} W_{2N_H+1i} \Omega \right) \right|_P$$

Ο συγκεκριμένος όρος είναι και αυτός μηδενικός, καθώς κανένα από τα διανύσματα των συντηρητικών μεγεθών των μ εξισώσεων της P κυψέλης δεν εξαρτάται από τα διανύσματα των συντηρητικών μεγεθών των γειτονικών της P κυψέλης. Έτσι, προκύπτει ότι η συνεισφορά του όρου πηγής στα μη-διαγώνια στοιχεία είναι επίσης μηδενική. Έτσι, βάσει της σχέσης 4.3.11, μπορεί να γραφεί ότι:

$$(off - diag)^{P,k} \Big|_{\mu} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\left(A_n^{Q,k} - |\tilde{A}_n^k| \right) \Delta S^k \right] \Big|_{\mu} & , \text{αν } P \text{ και } Q \text{ γειτνιάζουν} \\ 0 & , \text{αν } P \text{ και } Q \text{ δεν γειτνιάζουν} \end{cases} \quad (6.3.2)$$

Πριν την ολοκλήρωση της ανάλυσης που αφορά την επίλυση των διακριτοποιημένων εξισώσεων, καλό είναι να αναφερθεί ότι οποιαδήποτε από τις σχέσεις του Κεφαλαίου 3 που δεν παρουσιάστηκε μπορεί να επαναδιατυπωθεί είτε εισάγοντας το διανυσματικό συμβολισμό βέλους πάνω από τα ήδη υπάρχοντα διανύσματα, είτε προσθέτοντας το δείκτη μ αν η σχέση είναι διατυπωμένη σε τανυστική γραφή. Για παράδειγμα, η αντίστοιχη της 4.3.14 σχέση υπολογισμού του $\Delta \vec{W}$, σύμφωνα με τα παραπάνω γράφεται:

$$\Delta \vec{W}_{new}^P = \left[(diag)_{old}^P \right]^{-1} \left[-\mathbf{Res}_{old}^P - \sum_{cells} \left\{ (off - diag)_{old}^P \Delta \vec{W}_{old}^P \right\} \right] \quad (6.3.3)$$

6.4 Υπολογισμός των Πεδίων των Αρμονικών

Ο υπολογισμός των πεδίων των αρμονικών αποτελεί εύκολη διαδικασία καθώς πραγματοποιείται μέσω της σχέσης 5.3.2. Η συγκεκριμένη σχέση επαναδιατυπώνεται, ενώ παρατίθεται και η τανυστική της γραφή για λόγους πληρότητας:

$$\widehat{\vec{W}} = E \vec{W}$$

$$\widehat{W}_i^\mu = E_{\mu\nu} W_{\nu i}$$

όπου ο συμβολισμός των διαφόρων δεικτών έχει ήδη αναλυθεί, ενώ για να ληφθούν υπόψη οι ψευδο-χρονικές στιγμές, ή αλλιώς οι επαναλήψεις του κώδικα, οι σχέσεις γίνονται:

$$\widehat{\mathbf{W}}^{m'} = E \overrightarrow{\mathbf{W}}^{m'} \quad (6.4.1)$$

$$\widehat{W}_i^{\mu, m'} = E_{\mu\nu} W_{\nu i}^{m'} \quad (6.4.2)$$

Έχοντας υπολογίσει τις αρμονικές του παρόντος ψευδο-χρονικού βήματος, δηλαδή τις νέες αρμονικές, υπολογίζεται ο παρακάτω όρος:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{Diff}} &= \widehat{\mathbf{W}}_{new} - \widehat{\mathbf{W}}_{old} \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{\mathbf{Diff}} &= \widehat{\mathbf{W}}^{m'+1} - \widehat{\mathbf{W}}^{m'} \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

Για να διατυπωθεί το κριτήριο σύγκλισης, αρχικά υπολογίζεται το μέσο σφάλμα των αρμονικών $\overrightarrow{\mathbf{A.E.H}}$ (*Average Error of Harmonics*):

$$\overrightarrow{\mathbf{A.E.H}} = \frac{1}{N.O.C} \sum_{P=1}^{N.O.C} \left\{ \overrightarrow{\mathbf{Diff}}^P \right\} \quad (6.4.4)$$

όπου ως *N.O.C* (*Number Of Cells*) συμβολίζεται ο αριθμός των υπολογιστικών κυψελών του χωρίου. Η παραπάνω σχέση διατυπώνεται και σε τανυστική γραφή ως εξής:

$$A.E.H_i^\mu = \frac{1}{N.O.C} \sum_{P=1}^{N.O.C} \left\{ Diff_i^{P,\mu} \right\} \quad (6.4.5)$$

Όλα τα μεγέθη που εμφανίστηκαν μέχρι τώρα είναι διανυσματικά, γεγονός που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι και το επιτρεπόμενο σφάλμα που θα οριστεί, πρέπει να είναι διάνυσμα. Έτσι, ως επιτρεπόμενο σφάλμα ορίζεται:

$$\overrightarrow{\mathbf{Err}} = \begin{bmatrix} \mathbf{err} \\ \mathbf{err} \\ \vdots \\ \mathbf{err} \end{bmatrix} \quad (6.4.6)$$

όπου το διάνυσμα στήλης έχει $2N_H + 1$ γραμμές, ενώ το διάνυσμα \mathbf{err} είναι το εξής:

$$\mathbf{err} = \begin{bmatrix} error \\ error \\ error \\ error \end{bmatrix}$$

με τις τέσσερις γραμμές να αντιστοιχούν στα τέσσερα συντηρητικά μεγέθη.

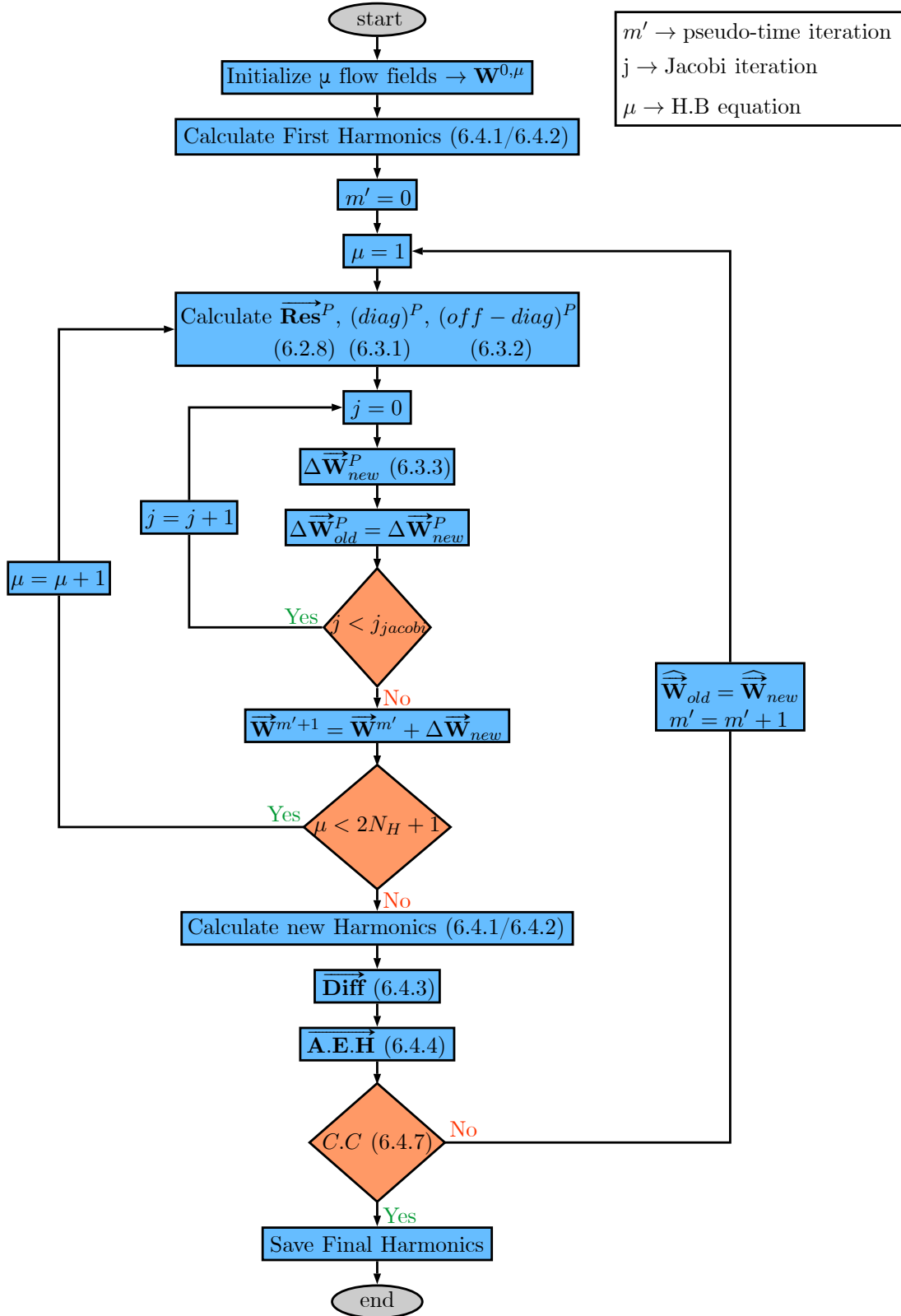
Τέλος, το κριτήριο σύγκλισης (*Convergence Criterion - C.C*) που χρησιμοποιείται διατυπώνεται ως εξής:

$$A.E.H_i^\mu < Err_i^\mu, \forall i, \mu \quad (6.4.7)$$

Η μοναδική παρατήρηση αφορά τα διανύσματα $\vec{\mathbf{Err}}$ και \mathbf{err} . Κατά τη διάρκεια της επίλυσης ορίζεται ίδιο επιτρεπόμενο σφάλμα των αρμονικών κάθε συντηρητικού μεγέθους (μεταβλητή *error*), με αποτέλεσμα το διάνυσμα \mathbf{err} να περιέχει τέσσερα ίδια στοιχεία, και κατ' επέκταση το διάνυσμα $\vec{\mathbf{Err}}$ να περιέχει $2N_H + 1$ ίδια διανύσματα.

6.5 Αλγόριθμος Επίλυσης των Εξισώσεων Ισορροπίας των Αρμονικών

Στο παρακάτω σχήμα 6.5.1 παρουσιάζεται ο αλγόριθμος που περιγράφει τον κώδικα που αναπτύχθηκε και επιλύει το πρόβλημα ροής με τη Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών. Αξίζει να παρατηρηθεί η ομοιότητα που εμφανίζει σε αρκετά του σημεία ο εν λόγω αλγόριθμος με τον αντίστοιχο του σχήματος 4.3.3.



Σχήμα 6.5.1: Αλγόριθμος επίλυσης των διακριτοποιημένων εξισώσεων της Μεθόδου Ισοροπίας των Αρμονικών.

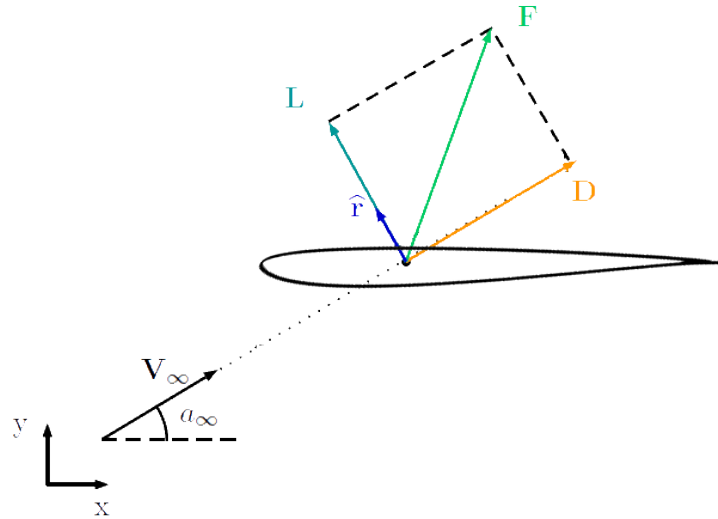
Κεφάλαιο 7

Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος για Μη-Μόνιμη Ροή Ατριβούς Συμπιεστού Ρευστού

Στη διπλωματική αυτή εργασία γίνεται χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου (*Continuous Adjoint method*) για τη διδιάστατη, μη-μόνιμη, συμπιεστή και μη-συνεχτική ροή [17]. Πιο συγκεκριμένα, στις παραγράφους που ακολουθούν παρουσιάζεται συνοπτικά η διαδικασία που ακολουθείται για την εξαγωγή των συζυγών εξισώσεων (*Adjoint Equations - AE*), των συζυγών οριακών συνθηκών (*Boundary Conditions - BC*) καθώς και των παραγώγων ευαισθησίας (*Sensitivity Derivatives - SD*).

7.1 Διατύπωση Αντικειμενικής Συνάρτησης

Στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας πραγματοποιήθηκε μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση (*Single Objective Optimization - S.O.O*) με σκοπό τη μεγιστοποίηση του μέτρου της παραγόμενης από την αεροτομή άνωσης L (*Lift*). Η άνωση αποτελεί εκείνη τη δύναμη που ασκείται από τη ροή στην αεροτομή, όντας κάθε χρονική στιγμή κάθετη στο διάνυσμα της ταχύτητας της επ' άπειρο ροής. Μια εξίσου σημαντική δύναμη είναι η οπισθέλκουσα D (*Drag*). Η συγκεκριμένη δύναμη θα μπορούσε να αποτελέσει στόχο βελτιστοποίησης καθώς αποτελεί δύναμη που αντιτίθεται στη φορά της κίνησης του πτερυγίου, οπότε γενικά επιδιώκεται η ελαχιστοποίησή της. Η σύνθεση των δύο αυτών δυνάμεων είναι η δύναμη F η οποία αποτελεί την ολική δύναμη που ασκείται στην υπό μελέτη γεωμετρία. Τέλος, το διάνυσμα της επ' άπειρον ταχύτητας συμβολίζεται ως V_∞ , η αντίστοιχη γωνία ως προς τον οριζόντιο άξονα x συμβολίζεται ως α_∞ , ενώ το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι μόνιμα κάθετο στο διάνυσμα της επ' άπειρον ταχύτητας συμβολίζεται ως \hat{r} . Όλα τα παραπάνω μεγέθη παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στο παρακάτω σχήμα 7.1.1.



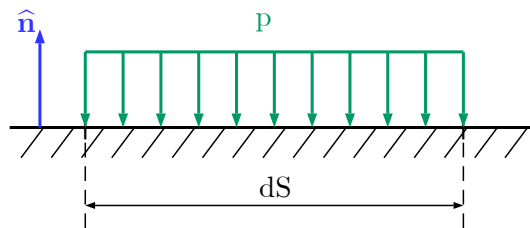
Σχήμα 7.1.1: Αναπαράσταση των βασικών διανυσματικών μεγεθών σε τυχαία αεροτομή που προσβάλλεται από ροή γωνίας α και μέτρου V_∞ .

Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα 7.1.2, σε κάθε στοιχειώδες τμήμα dS της αεροτομής ασκείται πίεση p η οποία έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή της στοιχειώδους δύναμης $d\mathbf{F}$. Αν αθροιστεί η $d\mathbf{F}$ για κάθε σημείο παράγει την ολική δύναμη \mathbf{F} που ασκείται στην αεροτομή. Έτσι, μπορεί να γραφεί ότι:

$$d\mathbf{F} = p\hat{\mathbf{n}}dS \quad (7.1.1)$$

Ολοκληρώνοντας σε ολόκληρη την επιφάνεια S_w της αεροτομής προκύπτει η ολική δύναμη \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \int_{S_w} d\mathbf{F} = \int_{S_w} p\hat{\mathbf{n}}dS \quad (7.1.2)$$



Σχήμα 7.1.2: Απειροστό μήκος τόξου dS αεροτομής όπου απεικονίζεται η κατανομή πίεσης p καθώς και το κάθετο στην επιφάνεια της αεροτομής μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$.

Έτσι, το μέτρο της άνωσης, που αποτελεί την προβολή του διανύσματος της ολικής δύναμης \mathbf{F} στη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{r}}$, μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$|\mathbf{L}| = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \left(\int_{S_w} p\hat{\mathbf{n}}dS \right) \cdot \hat{\mathbf{r}} = \int_{S_w} p\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}}dS \quad (7.1.3)$$

με το διάνυσμα $\hat{\mathbf{r}}$ να εισέρχεται στο ολοκλήρωμα καθώς αποτελεί χαρακτηριστικό της ροής και είναι ανεξάρτητο της επιφάνειας, S_w , της αεροτομής.

Η παραπάνω σχέση 7.1.3 μπορεί να γραφεί και σε τανυστική μορφή ως εξής:

$$|\mathbf{L}| = \int_{S_w} p \hat{n}_k \hat{r}_k dS \quad (7.1.4)$$

όπου $k = 1, 2$, συμβολίζοντας έτσι τις δύο κατευθύνσεις του χώρου.

Επειδή το φαινόμενο που μελετάται είναι περιοδικό, πραγματοποιείται μεγιστοποίηση του μέτρου της μέσης δύναμης άνωσης, το οποίο θα συμβολίζεται ως $|\bar{\mathbf{L}}|$. Έτσι η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει την παρακάτω τελική μορφή:

$$F_{obj} = \frac{1}{T} \int_0^T |\bar{\mathbf{L}}| dt = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{S_w} p \hat{n}_k \hat{r}_k dS dt \quad (7.1.5)$$

όπου με T συμβολίζεται η περίοδος του φαινομένου. Για λόγους απλότητας, η αντικειμενική συνάρτηση που χρησιμοποιείται αγνοεί τον σταθερό όρο $\frac{1}{T}$, οπότε η τελική μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι η εξής:

$$F_{obj} = \int_0^T \int_{S_w} p \hat{n}_k \hat{r}_k dS dt \quad (7.1.6)$$

7.2 Συνοπτική Παρουσίαση της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου

Μέσω της παραπάνω σχέσης 7.1.6 διατυπώνεται η επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση:

$$F_{aug} = \int_0^T \int_{S_w} p \hat{n}_k \hat{r}_k dS dt + \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_i R_i d\Omega dt \quad (7.2.1)$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού b_q προκύπτει:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_q} = \underbrace{\frac{\delta}{\delta b_q} \left\{ \int_0^T \int_{S_w} p \hat{n}_k \hat{r}_k dS dt \right\}}_{\mathbf{T}_1} + \underbrace{\frac{\delta}{\delta b_q} \left\{ \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_i R_i d\Omega dt \right\}}_{\mathbf{T}_2} \quad (7.2.2)$$

Αποδεικνύεται ότι ο όρος \mathbf{T}_1 συνεισφέρει μόνο στις συζυγές οριακές συνθήκες (ABC) και στις παραγώγους ευαισθησίας (SD) ως εξής [9]:

$$\mathbf{ABC}_{\mathbf{T}_1} \rightarrow \int_0^T \int_{S_w} \frac{\delta p}{\delta b_q} \hat{n}_k \hat{r}_k dS dt \quad (7.2.3)$$

$$\mathbf{SD}_{\mathbf{T}_1} \rightarrow \int_0^T \int_{S_w} p \frac{\delta}{\delta b_q} \{ \hat{n}_k \hat{r}_k dS \} dt \quad (7.2.4)$$

Επίσης, αποδεικνύεται ότι ο όρος \mathbf{T}_2 εκτός από τις συζυγείς οριακές συνθήκες και τις παραγωγούς ευαισθησίας συνεισφέρει και στις συζυγείς πεδιακές εξισώσεις [9]. Έτσι, προκύπτει:

$$\mathbf{FAE}_{\mathbf{T}_2} \rightarrow - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \frac{\partial W_i}{\partial b_q} d\Omega dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} \left(A_{ilj} \frac{\partial W_l}{\partial b_q} \right) d\Omega dt \quad (7.2.5)$$

$$\mathbf{ABC}_{\mathbf{T}_2} \rightarrow \int_0^T \int_{S_{\infty}} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_q} \hat{n}_k dS dt + \int_0^T \int_{S_w} \Psi_{k+1} \frac{\delta p}{\delta b_q} \hat{n}_k dS dt \quad (7.2.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{SD}_{\mathbf{T}_2} \rightarrow & \int_0^T \int_S \Psi_i R_i \frac{\partial x_k}{\partial b_q} \hat{n}_k dS dt - \int_0^T \int_{S_w} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_{\sigma}} \frac{\delta x_{\sigma}}{\delta b_q} \hat{n}_k dS dt \\ & - \int_0^T \int_S \Psi_i f_{ik} \frac{\delta \hat{n}_k}{\delta b_q} dS dt + \int_0^T \int_{S_w} \Psi_{k+1} \frac{\delta \hat{n}_k}{\delta b_q} dS dt \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

όπου $i, l = 1, \dots, 4$, $k, j, \sigma = 1, 2$ και q ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού.

Συζυγείς Πεδιακές Εξισώσεις - FAE

Στις συζυγείς πεδιακές εξισώσεις συνεισφέρει μόνο ο όρος \mathbf{T}_2 μέσω της σχέσης 7.2.5. Έτσι, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \frac{\partial W_i}{\partial b_q} d\Omega dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} A_{ilj} \frac{\partial W_l}{\partial b_q} d\Omega dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} \left\{ \left(- \frac{\partial \Psi_l}{\partial t} - A_{ilj} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial W_l}{\partial b_q} \right\} d\Omega dt \end{aligned}$$

Για να αποφευχθεί ο υπολογισμός της παραγώγου $\left(\frac{\partial W_l}{\partial b_q} \right)$, απαιτείται ο μηδενισμός της παρενθέσεως με την οποία πολλαπλασιάζεται, παράγοντας έτσι τις παρακάτω συζυγείς πεδιακές εξισώσεις:

$$- \frac{\partial \Psi_l}{\partial t} - A_{ilj} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} = 0 \quad (7.2.8)$$

Συζυγείς Οριακές Συνθήκες - ABC

Στις συζυγείς οριακές συνθήκες συνεισφέρουν και οι δύο όροι \mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_2 μέσω των σχέσεων 7.2.3, 7.2.6. Έτσι μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{S_w} \frac{\delta p}{\delta b_q} \hat{n}_k \hat{r}_k dS dt + \int_0^T \int_{S_{\infty}} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_q} \hat{n}_k dS dt + \int_0^T \int_{S_w} \Psi_{k+1} \frac{\delta p}{\delta b_q} \hat{n}_k dS dt \\ & = \int_0^T \int_{S_{\infty}} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_q} \hat{n}_k dS dt + \int_0^T \int_{S_w} \frac{\delta p}{\delta b_q} \left\{ \hat{n}_k \hat{r}_k + \Psi_{k+1} \hat{n}_k \right\} dS dt \end{aligned}$$

Για να αποφευχθεί ο υπολογισμός των παραγώγων $\left(\frac{\partial f_{ik}}{\partial b_q} \right)$ και $\left(\frac{\delta p}{\delta b_q} \right)$ μηδενίζονται οι παρενθέσεις με τις οποίες πολλαπλασιάζονται, με αποτέλεσμα να προκύπτουν οι παρακάτω

συζυγείς οριακές συνθήκες στα επ' άπειρον όρια καθώς και στα όρια της γεωμετρίας:

$$\mathbf{ABC} \Big|_{S_\infty} \rightarrow \Psi \Big|_{S_\infty} = 0 \quad (7.2.9)$$

$$\mathbf{ABC} \Big|_{S_w} \rightarrow \Psi \Big|_{k+1} \hat{n}_k + \hat{n}_k \hat{r}_k = 0 \quad (7.2.10)$$

Παράγωγοι Ευαισθησίας - SD

Οι σχέσεις 7.2.4, 7.2.7, που περιέχουν τη συνεισφορά του καθενός από τους όρους \mathbf{T}_1 και \mathbf{T}_2 , γράφονται:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_q} = & \int_0^T \int_S \Psi_i R_i \frac{\partial x_k}{\partial b_q} \hat{n}_k dS dt - \int_0^T \int_{S_w} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_\sigma} \frac{\delta x_\sigma}{\delta b_q} \hat{n}_k dS dt \\ & + \int_0^T \int_{S_w} p \frac{\delta}{\delta b_q} \{ \hat{n}_k \hat{r}_k dS \} dt + \int_0^T \int_{S_w} \frac{\delta \hat{n}_k}{\delta b_q} \left\{ \Psi_{k+1p} - \Psi_i f_{ik} \right\} dS dt \end{aligned}$$

Επειδή η παράγωγος $\left(\frac{\partial x_k}{\partial b_q} \right)$ στα όρια της επ' άπειρον συνθήκης είναι ίση με μηδέν, το πρώτο επιφανειακό ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης μετατρέπεται σε επιφανειακό ολοκλήρωμα στην επιφάνεια της γεωμετρίας (S_w). Έτσι, τελικά, οι παράγωγοι ευαισθησίας γράφονται:

$$\begin{aligned} \mathbf{SD} \rightarrow \frac{\delta F}{\delta b_q} = & \int_0^T \int_{S_w} \Psi_i R_i \frac{\partial x_k}{\partial b_q} \hat{n}_k dS dt - \int_0^T \int_{S_w} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_\sigma} \frac{\delta x_\sigma}{\delta b_q} \hat{n}_k dS dt \\ & + \int_0^T \int_{S_w} p \frac{\delta}{\delta b_q} \{ \hat{n}_k \hat{r}_k dS \} dt + \int_0^T \int_{S_w} \frac{\delta \hat{n}_k}{\delta b_q} \left\{ \Psi_{k+1p} - \Psi_i f_{ik} \right\} dS dt \end{aligned} \quad (7.2.11)$$

7.3 Εφαρμογή της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών στις Συζυγείς Εξισώσεις

Η διαδικασία που ακολουθείται κατά την εφαρμογή της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών στις συζυγείς πεδριακές εξισώσεις [9], δεν διαφέρει σε τίποτα από την αντίστοιχη διαδικασία που ακολουθήθηκε για την περίπτωση των εξισώσεων Euler όπως αυτή παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 6. Για τον λόγο αυτό, παρατίθεται μόνο η τελική εξίσωση που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου:

$$\frac{\partial \Psi_l^\mu}{\partial \tau} - \omega D_{\mu\nu} \Psi_{\nu l} - \left(A_{ilj} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} \right) \Big|_\mu = 0 \quad (7.3.1)$$

όπου για λόγους πληρότητας εισήχθη και ο ψευδο-χρονικός όρος, ενώ ο συμβολισμός βασίστηκε στο συμβολισμό της αντίστοιχης σχέσης του πρωτεύοντος προβλήματος, σχέση 6.2.5, του Κεφαλαίου 5.

Οι συζυγείς οριακές συνθήκες παραμένουν ίδιες με αυτές των σχέσεων 7.2.9, 7.2.10, με τη διαφορά ότι πρέπει να εισαχθεί και ο δείκτης μ που καθορίζει ποια από τις $2N_H + 1$

εξισώσεις επιλύεται κάθε φορά. Έτσι, οι συζυγείς οριακές συνθήκες επαναδιατυπώνονται:

$$\mathbf{ABC} \Big|_{S_\infty}^{HB} \rightarrow \Psi^\mu \Big|_{S_\infty} = 0 \quad (7.3.2)$$

$$\mathbf{ABC} \Big|_{S_w}^{HB} \rightarrow \Psi^\mu \Big|_{k+1} \hat{n}_k + \hat{n}_k \hat{r}_k^\mu = 0 \quad (7.3.3)$$

Οι παράγωγοι ευαισθησίας παραμένουν ίδιες με αυτές της σχέσης 7.2.11, καθώς υπολογίζονται αφότου έχει ολοκληρωθεί η επίλυση των συζυγών εξισώσεων. Η διαφορά με τις παραγώγους ευαισθησίας που υπολογίζονται στην περίπτωση που δεν χρησιμοποιείται η Μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών, έγκειται στον τρόπο με τον οποίο υπολογίζονται τα πρωτεύοντα και τα συζυγή μεγέθη κάθε φορά. Στις κλασικές μεθόδους επίλυσης, τα εν λόγω μεγέθη έχουν αποθηκευτεί στη μνήμη του υπολογιστή οπότε χρησιμοποιούνται όταν απαιτούνται. Στην περίπτωση, όμως, της Ισορροπίας των Αρμονικών, τα συγκεκριμένα μεγέθη υπολογίζονται εκ νέου κάθε φορά κάνοντας χρήση των αρμονικών που έχουν υπολογιστεί και αποθηκευτεί.

Κεφάλαιο 8

Προβλήματα Εξωτερικής Αεροδυναμικής

Ακολουθούν τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών σε προβλήματα εξωτερικής αεροδυναμικής. Τα εν λόγω αποτελέσματα συγκρίνονται με τα αποτελέσματα αναφοράς επιλύτη που αναπτύχθηκε από την ΜΠΤΡ&Β του ΕΜΠ, [1], ώστε να διαπιστωθεί η ακρίβεια του νέου λογισμικού. Για τον σκοπό αυτό, μελετώνται τέσσερις περιπτώσεις οι οποίες μάλιστα επιλέχθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να μην διαθέτουν κοινά στοιχεία μεταξύ τους. Καθεμιά από τις τέσσερις περιπτώσεις μελετά διαφορετική περιοδική διαταραχή που προκαλείται από την περιοδική μεταβολή της γωνίας πρόσπτωσης, ενώ χρησιμοποιούνται ισάριθμες αεροτομές όπως και ισάριθμα μεγέθη πλέγματος.

8.1 Απλή Ημιτονοειδής Διαταραχή - Εφαρμογή στην Αεροτομή NACA 6409

Η ημιτονοειδής διαταραχή αποτελεί ίσως την πιο απλή διαταραχή που μπορεί να εφαρμοστεί όταν μελετώνται περιοδικά φαινόμενα. Το γεγονός αυτό όμως σε καμιά περίπτωση δεν μειώνει τη βαρύτητα των αποτελεσμάτων καθώς μπορούν να εξαχθούν σημαντικά συμπεράσματα όσον αφορά τη Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών. Οι συνθήκες της επ' άπειρον ροής είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}\rho_{\infty} &= 1.2 \frac{kg}{m^3} \\ |V_{\infty}| &= 100 \frac{m}{s} \\ p_{\infty} &= 10^5 Pa\end{aligned}$$

οπότε και ο αριθμός Mach προκύπτει:

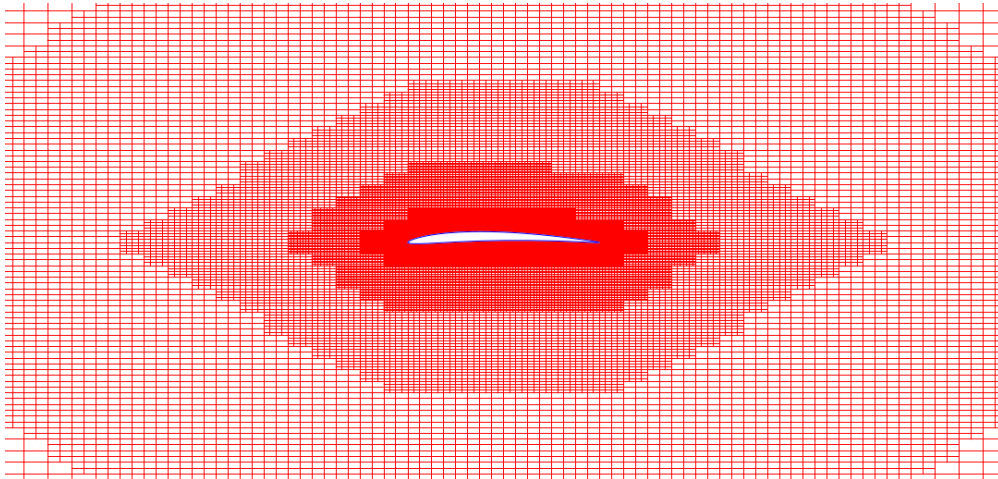
$$M_{\infty} = \frac{|V_{\infty}|}{\sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}} \Rightarrow M_{\infty} \simeq 0.293$$

όπου υπενθυμίζεται ότι ο αέρας θεωρείται τέλειο αέριο με αποτέλεσμα ο εκθέτης ισοεντροπικής μεταβολής γ να λαμβάνει την τιμή 1.4. Η χαμηλή ταχύτητα της διαταραχής, σε συνδυασμό με την σχετικά μικρή καμπυλότητα της αεροτομής NACA 6409, καθιστά πιθανό η ροή να παραμείνει υποηχητική ακόμα και στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής. Για να επαληθευτεί αυτή η παρατήρηση, στο τέλος του παραδείγματος παρουσιάζεται το πεδίο Mach γύρω από την αεροτομή (σχήμα 8.1.6).

Στον πίνακα 8.1 που ακολουθεί παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης εφαρμογής, ενώ στο σχήμα 8.1.1 παρουσιάζεται το πλέγμα που κατασκευάστηκε καθώς και η μη-συμμετρική αεροτομή που χρησιμοποιήθηκε.

Αριθμός Υπολογιστικών Κυψελών	36844
Περίοδος Διαταραχής (sec)	1
Συχνότητα Διαταραχής (Hz)	1
Τύπος Διαταραχής (a_∞)	$3^\circ + 2^\circ \sin(2\pi t)$
Ακρίβεια Σχήματος Επίλυσης	Πρώτη στον χώρο

Πίνακας 8.1: Βασικά χαρακτηριστικά της απλής ημιτονοειδούς διαταραχής.

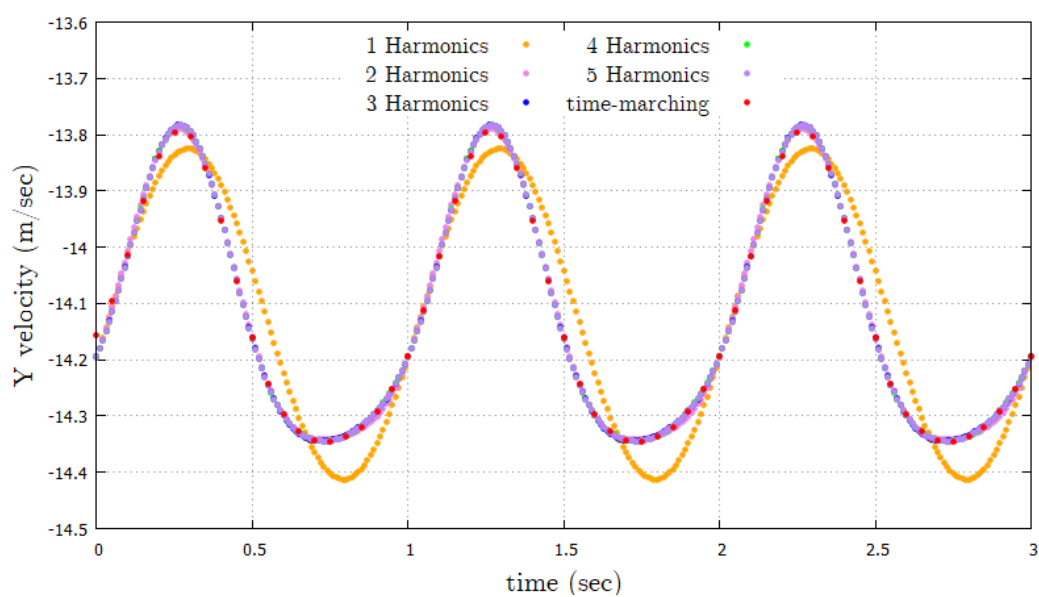


Σχήμα 8.1.1: Αεροτομή NACA 6409 καθώς και το, σε μεγέθυνση, πλέγμα που κατασκευάστηκε για τη διακριτοποίηση των πεδιακών εξισώσεων.

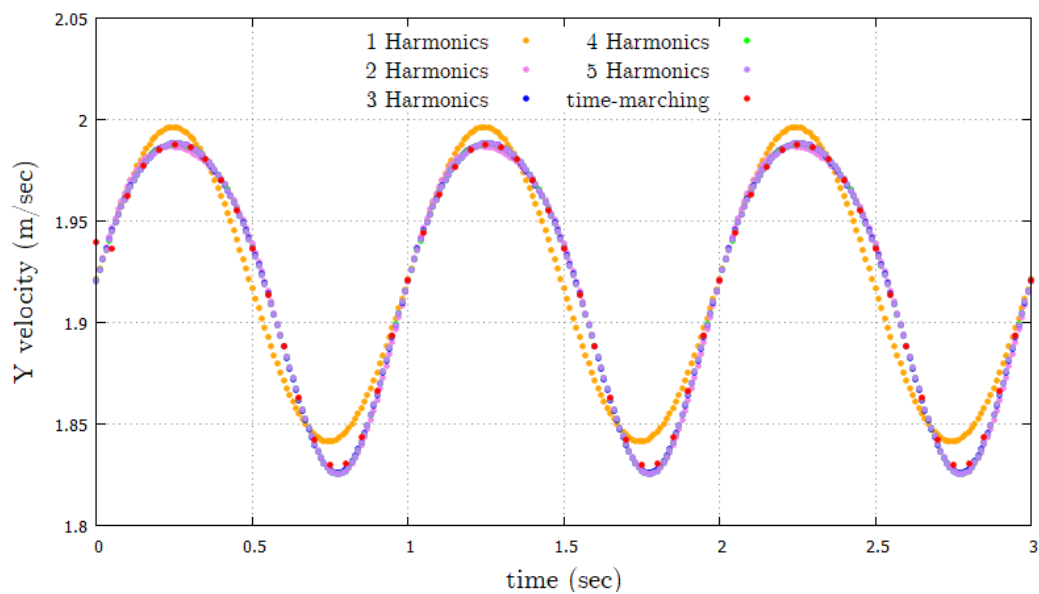
Επειδή το συγκεκριμένο παράδειγμα αποτελεί την πρώτη εφαρμογή της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών, πραγματοποιείται διερεύνηση του αριθμού των αρμονικών που απαιτούνται. Έτσι, επιλέχθηκε πρώτης τάξης, στον χώρο, ακρίβεια ώστε να μειωθεί ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτούν όλες οι περιπτώσεις. Τα ποιοτικά συμπεράσματα των αποτελεσμάτων όμως επεκτείνονται και στην περίπτωση δεύτερης τάξης ακρίβειας, γεγονός που επιβεβαιώνεται και στα παραδείγματα των επόμενων παραγράφων.

Για να διαπιστωθεί ποιος είναι ο κατάλληλος αριθμός αρμονικών, παρουσιάζονται τα σχήματα 8.1.2(α') - (γ') που απεικονίζουν τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται, σε συνάρτηση με τον χρόνο, η κατά τον άξονα y ταχύτητα τριών υπολογιστικών κυψελών. Οι τρεις υπο-

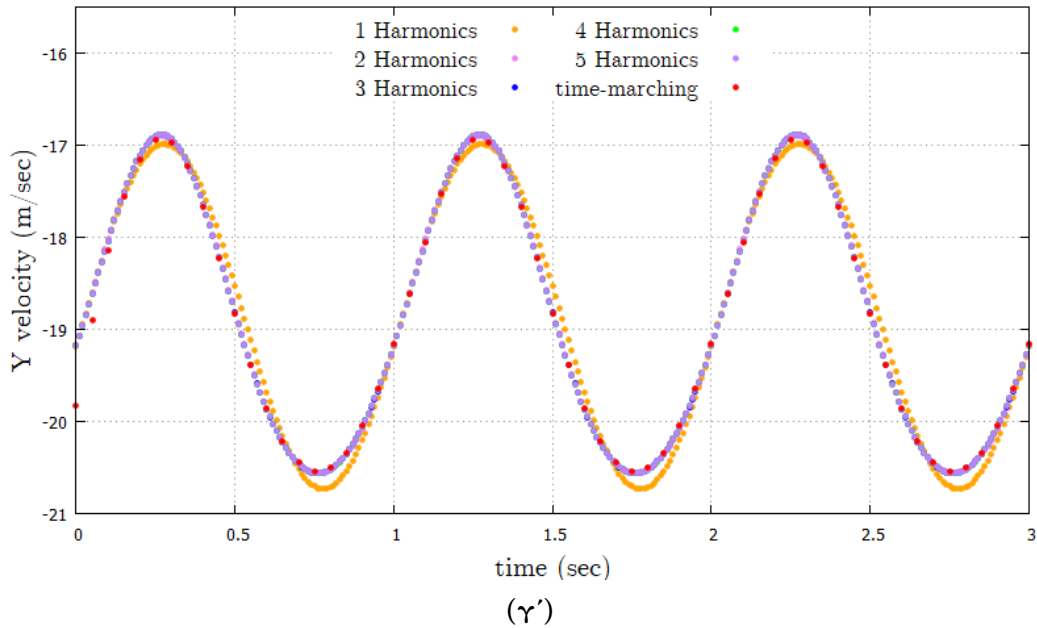
λογιστικές κυψέλες που χρησιμοποιούνται βρίσκονται πολύ κοντά στην αεροτομή, δηλαδή σε θέσεις όπου υπάρχει σημαντική πιθανότητα τα μεγέθη της ροής να μεταβάλλονται με έντονο τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, η πρώτη υπολογιστική κυψέλη βρίσκεται στην πλευρά υποπίεσης (*suction surface*) της αεροτομής, η δεύτερη στην πλευρά υπερπίεσης (*pressure surface*) ενώ η τρίτη βρίσκεται μπροστά από την ακμή εκφυγής της αεροτομής (*trailing edge*). Τα σχήματα αυτά παρουσιάζουν τα αποτελέσματα που προέκυψαν κάνοντας χρήση 5 διαφορετικών περιπτώσεων πλήθους αρμονικών τα οποία συγκρίνονται με τα αποτελέσματα αναφοράς του επιλύτη της ΜΠΥΡ&Β.



(α')

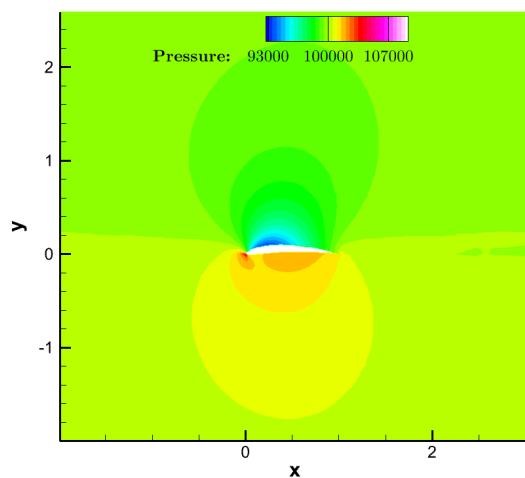


(β')

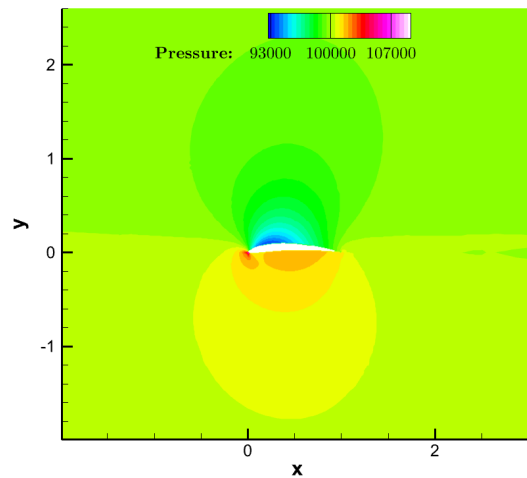


Σχήμα 8.1.2: Μεταβολή της κατά τον άξονα y ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο τριών υπολογιστικών κυψελών για την περίπτωση χρήσης πέντε διαφορετικών περιπτώσεων αρμονικών (α') Υπολογιστική κυψέλη που βρίσκεται πολύ κοντά στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής (β') Υπολογιστική κυψέλη που βρίσκεται πολύ κοντά στην πλευρά υπερπίεσης της αεροτομής (γ') Υπολογιστική κυψέλη που βρίσκεται πολύ κοντά στην ακμή εκφυγής της αεροτομής. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τα αντίστοιχα του επιλύτη της μεθόδου χρονο-προέλασης ώστε να εντοπιστεί ο κατάλληλος αριθμός αρμονικών.

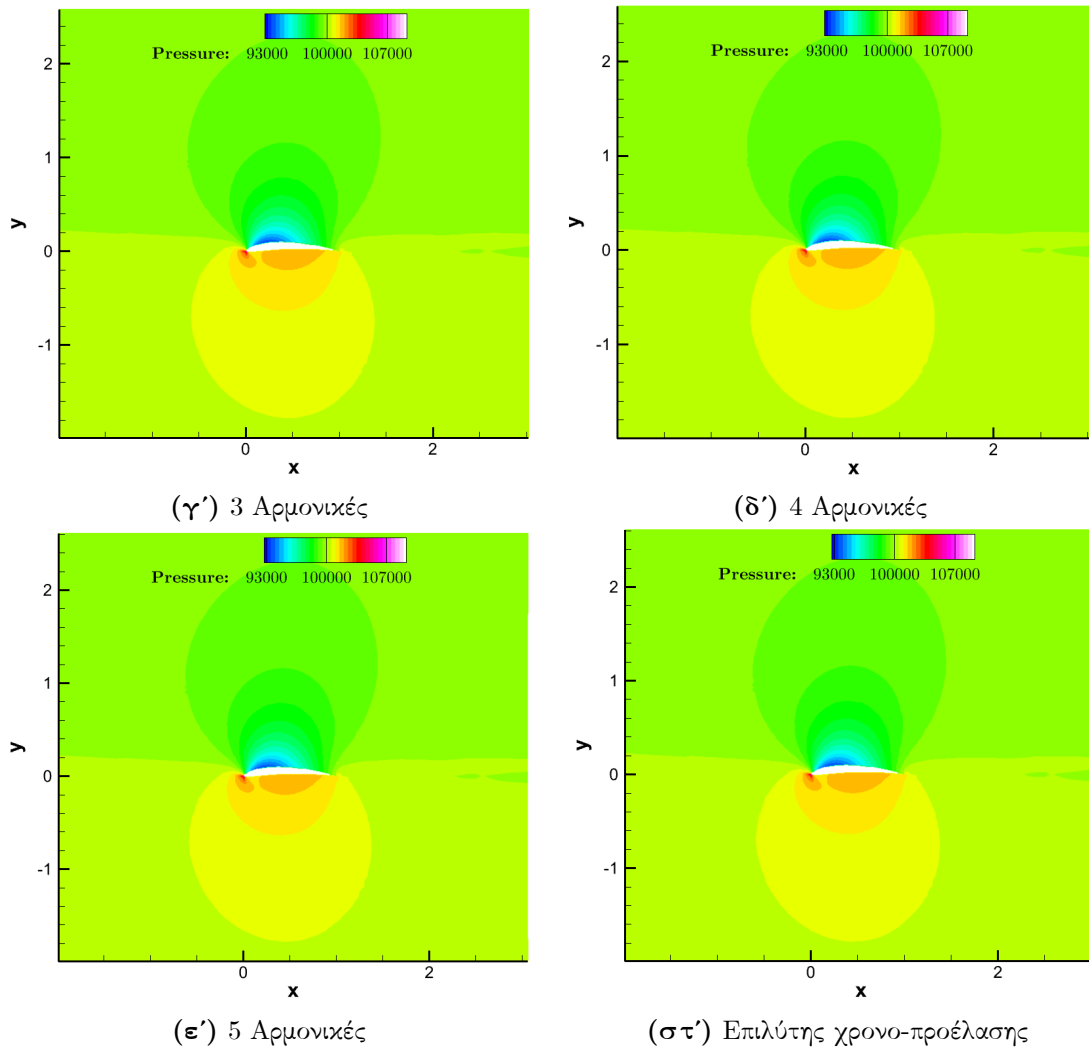
Από τα παραπάνω σχήματα γίνεται αντιληπτό ότι η χρήση περισσότερων των τριών αρμονικών δεν προσφέρει ουσιαστικά στην ακρίβεια της τελικής λύσης. Για να επιβεβαιωθεί το συγκεκριμένο συμπέρασμα, παρατίθεται το σχήμα 8.1.3 το οποίο περιέχει την κατανομή στατικής πίεσης στο πεδίο γύρω από την αεροτομή, έτσι όπως προέκυψε για καθεμιά από τις πέντε περιπτώσεις αρμονικών καθώς και από τον επιλύτη της ΜΠΥΡ&Β που κάνει χρήση της μεθόδου χρονο-προέλασης.



(α') 1 Αρμονική



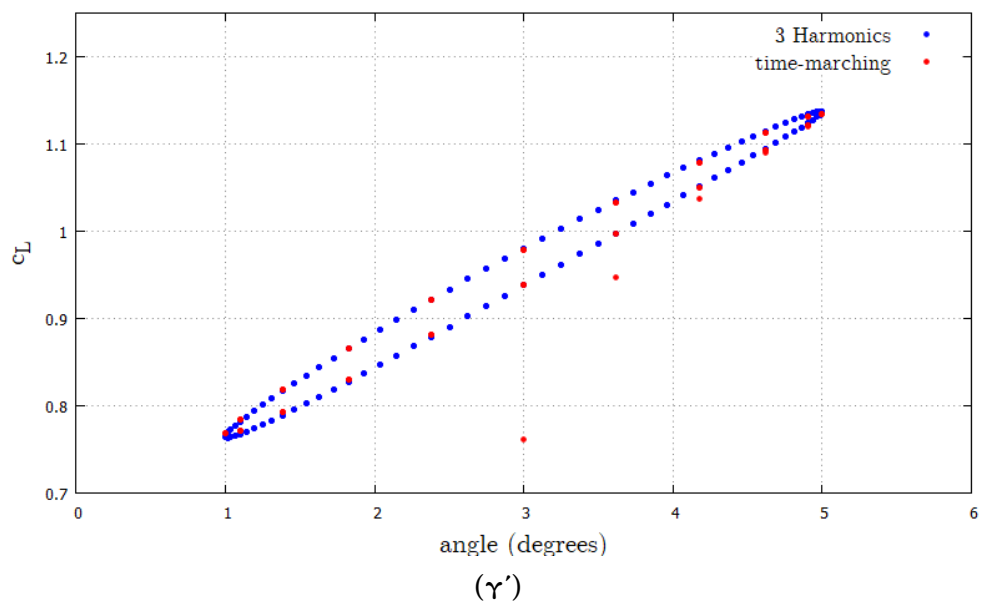
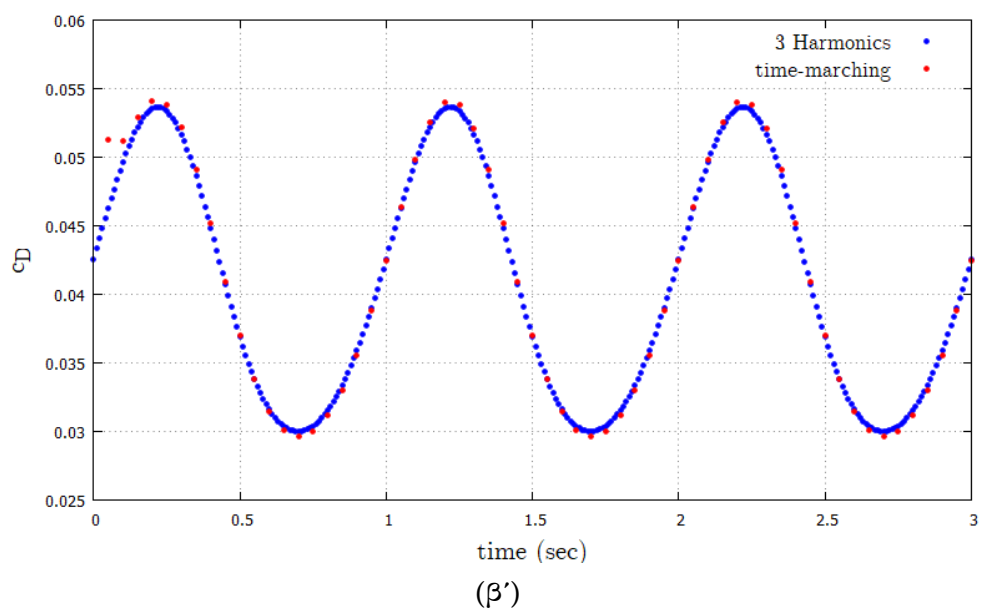
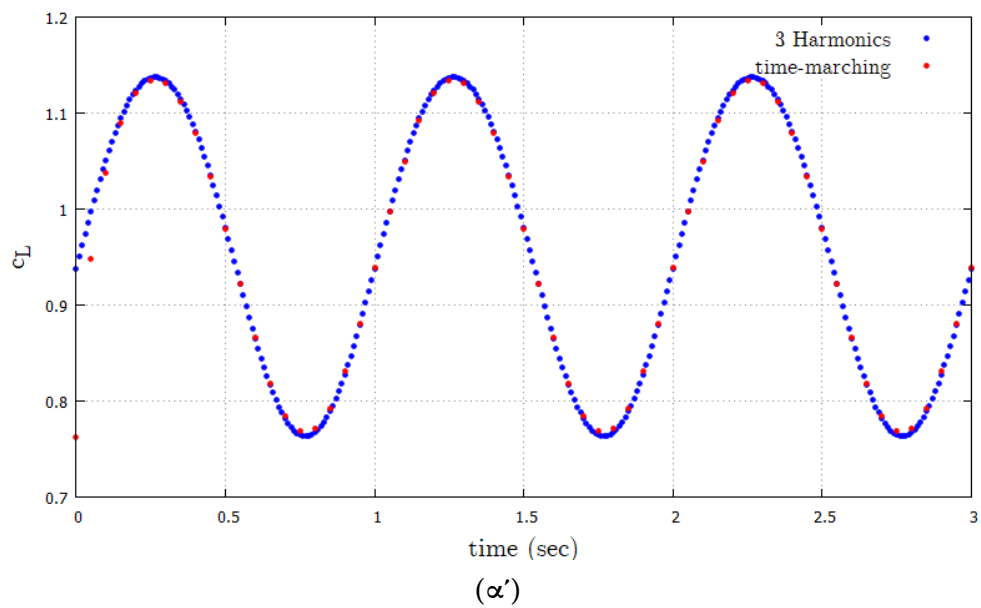
(β') 2 Αρμονικές

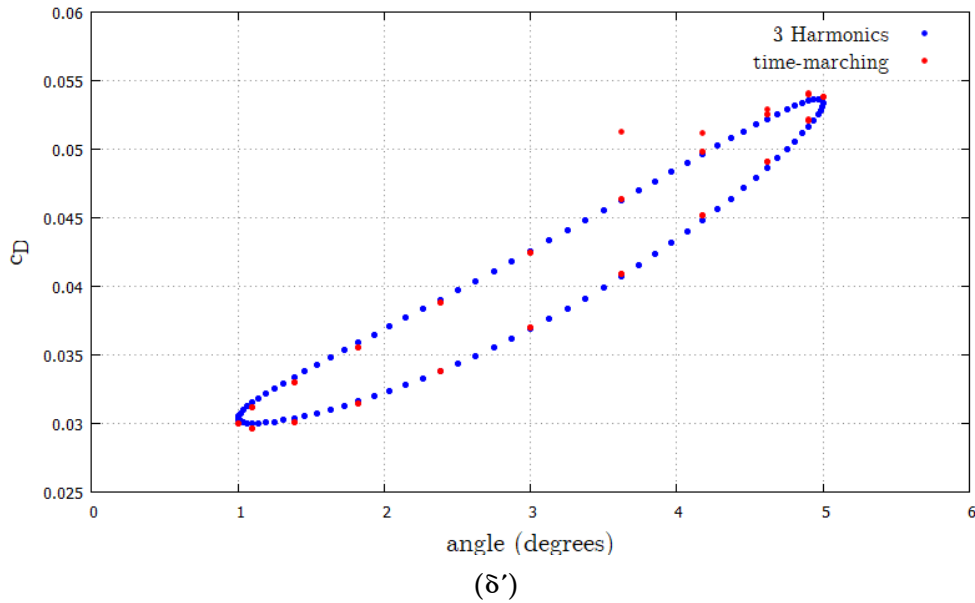


Σχήμα 8.1.3: Απεικόνιση του πεδίου στατικής πίεσης γύρω από την αεροτομή έτσι όπως προέκυψε για πέντε περιπτώσεις πλήθους αρμονικών καθώς και από τη χρήση του επιλύτη της ΜΠΥΡ&Β [1]. Η χρονική στιγμή που μελετάται είναι η $t = 1.5\text{sec}$ που ανήκει στην δεύτερη περίοδο έτσι ώστε να αποφευχθεί το μεταβατικό φαινόμενο του επιλύτη χρονο-προέλασης. Όλα τα σχήματα διαθέτουν το ίδιο εύρος τιμών καθώς και ίδια διαβάθμιση ώστε να είναι πιο εύκολη η σύγκριση.

Από τα παραπάνω σχήματα προκύπτει ότι το πεδίο στατικής πίεσης περιγράφεται ικανοποιητικά για οποιονδήποτε αριθμό αρμονικών καθώς τα αποτελέσματα είναι πολύ κοντά σε αυτά του κλασικού επιλύτη. Έτσι, από τη στιγμή που το πεδίο πίεσης περιγράφεται ικανοποιητικά για κάθε αριθμό αρμονικών ενώ το πεδίο ταχύτητας απαιτεί τρεις αρμονικές, γίνεται αντιληπτό ότι ο βέλτιστος αριθμός αρμονικών για το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι οι τρεις αρμονικές.

Για λόγους πληρότητας παρατίθενται και τα διαγράμματα των ολοκληρωματικών μεγεθών c_L και c_D σε συνάρτηση με το χρόνο αλλά και την επ' άπειρον γωνία ροής. Σε αυτά τα σχήματα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του επιλύτη με τη μέθοδο χρονο-προέλασης καθώς και αυτού που αναπτύχθηκε κάνοντας χρήση τριών αρμονικών.





Σχήμα 8.1.4: Μεταβολή των ολοκληρωματικών μεγεθών c_L και c_D σε συνάρτηση με τον χρόνο αλλά και την επ' άπειρον γωνία. (α') Συντελεστής c_L σε συνάρτηση με τον χρόνο (β') Συντελεστής c_D σε συνάρτηση με τον χρόνο (γ') Συντελεστής c_L σε συνάρτηση με την επ' άπειρον γωνία (δ') Συντελεστής c_D σε συνάρτηση με την επ' άπειρον γωνία. Κάθε φορά τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τα αποτελέσματα αναφοράς που προκύπτουν από τον επιλύτη της ΜΠΥΡ&Β.

Από τα σχήματα 8.1.4(β') και (δ') γίνεται αντιληπτό ότι ο χρονικά μέσος συντελεστής αντίστασης είναι διάφορος του μηδενός, μέση τιμή ίση με 0.04, γεγονός που όμως δεν δικαιολογείται από την ατριβή ροή που μελετάται. Για ατριβείς ροές ο συντελεστής αντίστασης είναι ίσος με το μηδέν. Η διαφορά που παρατηρείται οφείλεται στην επιλογή πρώτης τάξης ακρίβειας στον χώρο, γεγονός που επιβεβαιώνεται και από το παράδειγμα της παραγράφου 8.3, σχήμα 8.3.4(β'), όπου το χρονικά μέσο c_D ισούται με μηδέν καθώς χρησιμοποιείται δεύτερης τάξης ακρίβεια στον χώρο.

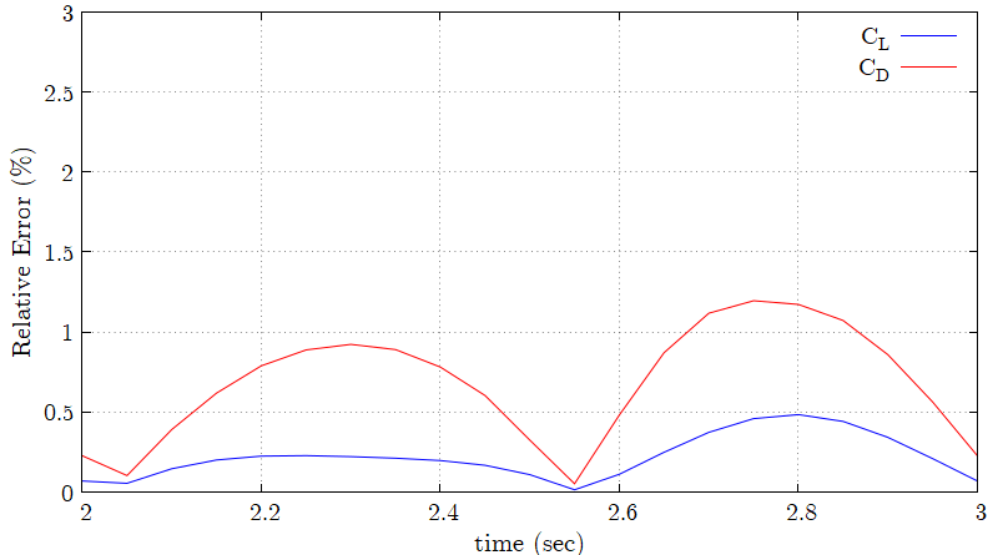
Η ακρίβεια της μεθόδου μπορεί να διαπιστωθεί μέσω του σχήματος 8.1.5 που αναπαριστά το, επί τοις εκατό, σχετικό σφάλμα (*relative error*) σε συνάρτηση με τον χρόνο για τους συντελεστές άνωσης και αντίστασης. Υπενθυμίζεται ότι το σχετικό σφάλμα δίνεται από τον τύπο:

$$\eta = \frac{|coef_{HB} - coef_{TM}|}{|coef_{TM}|} \quad (8.1.1)$$

ενώ το επί τοις εκατό σχετικό σφάλμα προκύπτει ως εξής:

$$\delta = 100 \cdot \eta \quad (8.1.2)$$

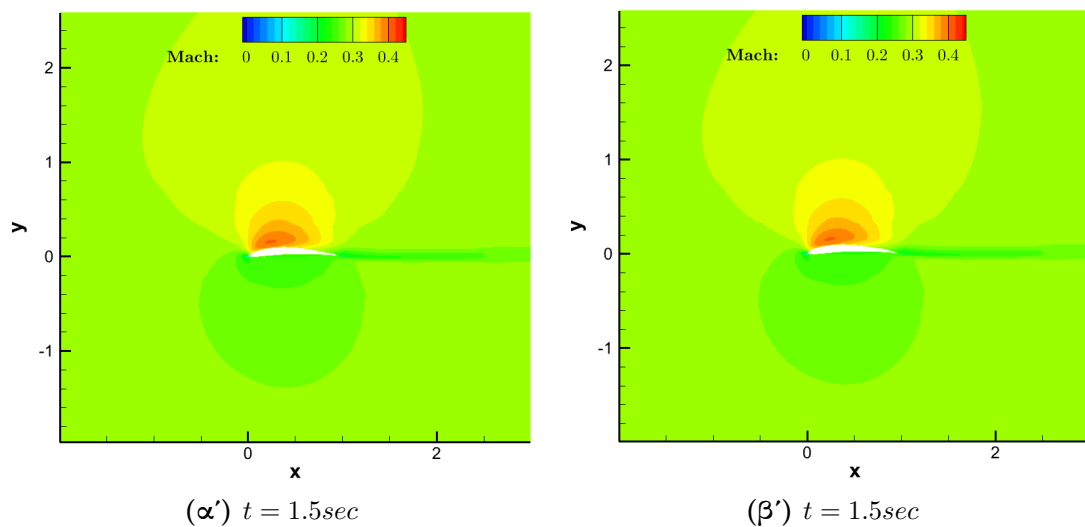
Στον παραπάνω τύπο 8.1.1 η μεταβλητή *coef* αναπαριστά είτε τον συντελεστή άνωσης c_L είτε τον συντελεστή αντίστασης c_D , ενώ οι δείκτες *HB* και *TM* αναφέρονται στη Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών και στη μέθοδο χρονο-προέλασης αντίστοιχα.

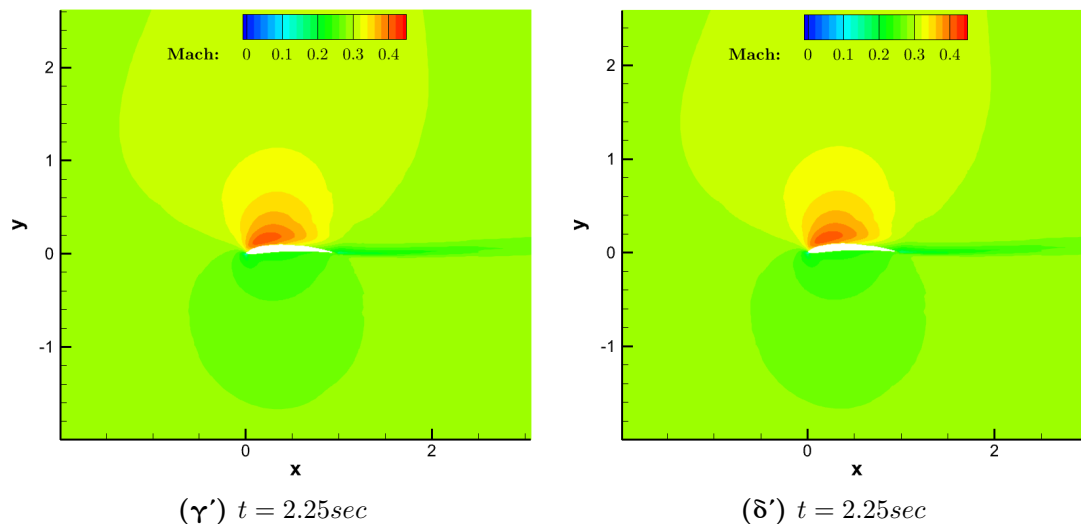


Σχήμα 8.1.5: Αναπαράσταση του σχετικού σφάλματος σε συνάρτηση με τον χρόνο των συντελεστών άνωσης και αντίστασης έτσι όπως προέκυψε από τη χρήση τριών αρμονικών. Το χρονικό διάστημα αντιστοιχεί στην τρίτη περίοδο του φαινομένου.

Διαπιστώνεται ότι το σχετικό σφάλμα και των δύο συντελεστών δεν ξεπερνά σε καμιά χρονική στιγμή το 1.5%, ένα νούμερο δηλαδή το οποίο είναι αρκετά μικρό για προσεγγιστική μέθοδο. Βέβαια, για την εξαγωγή πιο ασφαλών συμπερασμάτων όσον αφορά την ακρίβεια πρέπει να μελετηθούν και άλλες περιπτώσεις προβλημάτων ροής.

Ακολουθεί το σχήμα 8.1.6 όπου αναπαριστάται το πεδίο Mach έτσι όπως προέκυψε για δύο χρονικές στιγμές εντός της δεύτερης περιόδου, ώστε να διαπιστωθεί αν πράγματι η ροή παραμένει πάντα υποηχητική.





Σχήμα 8.1.6: Πεδία Mach έτσι όπως προέκυψαν για δύο χρονικές στιγμές εντός της δεύτερης περιόδου. Τα πεδία (α') και (γ') προέκυψαν κάνοντας χρήση τριών αρμονικών ενώ τα πεδία (β') και (δ') προέρχονται από επιλύτη που κάνει χρήση της μεθόδου χρονο-προέλασης. Τα στιγμιότυπα ανήκουν στη δεύτερη και στην τρίτη περίοδο ώστε να αποφευχθεί το μεταβατικό φαινόμενο που εμφανίζεται στον επιλύτη χρονο-προέλασης.

Παρατηρείται ότι η μέγιστη τιμή του αριθμού Mach είναι μικρότερη της μονάδας με αποτέλεσμα η ροή να παραμένει πάντα υποηχητική. Πιο συγκεκριμένα, για τα παραπάνω δύο στιγμιότυπα ο αριθμός Mach δεν ξεπερνά ποτέ την τιμή 0.45, μια τιμή δηλαδή που απέχει πολύ από την ηχητική κατάσταση. Επίσης, όπως αναμενόταν η μέγιστη τιμή εμφανίζεται στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής, εκεί δηλαδή που η στατική πίεση μειώνεται με ταυτόχρονη αύξηση της ταχύτητας της ροής.

Τέλος, η Μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών αποτελεί μια προσεγγιστική μέθοδο η οποία όμως είναι αρκετά πιο γρήγορη σε σχέση με τη μέθοδο χρονο-προέλασης. Για τον λόγο αυτό, παρατίθεται ο πίνακας 8.2 που περιέχει τους υπολογιστικούς χρόνους που απαιτήθηκαν για κάθε περίπτωση επίλυσης που χρησιμοποιήθηκε ώστε να γίνει αντιληπτό το κέρδος σε υπολογιστικό χρόνο που προσφέρει η χρήση της συγκεκριμένης μεθόδου.

Τρόπος Επίλυσης	Υπολογιστικός χρόνος (sec)
Χρήση μίας (1) αρμονικής	2794.15
Χρήση δύο (2) αρμονικών	4459.1
Χρήση τριών (3) αρμονικών	6255.25
Χρήση τεσσάρων (4) αρμονικών	8046.33
Χρήση πέντε (5) αρμονικών	9966.12
Μέθοδος χρονο-προέλασης	40990.83

Πίνακας 8.2: Απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος ανάλογα με την επιλογή τρόπου επίλυσης για το παράδειγμα υποηχητικής ροής που προκαλείται από την απλή ημιτονοειδή μεταβολή της γωνίας πρόσπτωσης. Ο επιλύτης χρονο-προέλασης χρησιμοποιεί πρώτης τάξης ακρίβεια στον χώρο ενώ εκτελείται συνολικά για τρεις περιόδους.

Από τον παραπάνω πίνακα διαπιστώνεται ότι η αύξηση του αριθμού αρμονικών αυξάνει σημαντικά τον απαιτούμενο υπολογιστικό χρόνο. Επίσης, οι χρόνοι που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος με τη Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών είναι πολύ μικρότεροι σε σχέση με τον αντίστοιχο της μεθόδου χρονο-προέλασης. Ειδικότερα, η περίπτωση των πέντε αρμονικών απαιτεί μόλις το ένα πέμπτο $\left(\frac{1}{5}\right)$ του χρόνου της μεθόδου χρονο-προέλασης, ενώ οι τρεις αρμονικές που περιγράφουν ικανοποιητικά το φαινόμενο απαιτούν μόλις το ένα έβδομο $\left(\frac{1}{7}\right)$. Βέβαια, τα νούμερα αυτά δεν πρέπει να γενικεύονται καθώς η φύση της διαταραχής που χρησιμοποιείται, δηλαδή η απλή ημιτονοειδής μεταβολή της γωνίας πρόσπτωσης, ευνοεί την Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών η οποία βασίζεται στις σειρές Fourier.

Όπως φαίνεται σε όλα τα παραπάνω διαγράμματα, τα σχήματα της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών διαθέτουν μεγάλο πλήθος σημείων ενώ τα αντίστοιχα της μεθόδου χρονο-προέλασης διαθέτουν πολύ λιγότερα. Αυτό συμβαίνει διότι η Μέθοδος Ισορροπίας των αρμονικών μπορεί να αναπαράξει το πεδίο για οποιαδήποτε χρονική στιγμή με μηδενικό υπολογιστικό κόστος. Αντίθετα, η μέθοδος χρονο-προέλασης χρησιμοποιεί έναν προκαθορισμένο αριθμό πεδίων, στην περίπτωση του παραδείγματος χρησιμοποιήθηκαν εξήντα πεδία, τα οποία επιλύει με ακρίβεια. Αυτά τα πεδία όμως πρέπει να κατανεμηθούν σε περισσότερες της μιας περιόδους καθώς υπάρχει και το μεταβατικό φαινόμενο. Έτσι, τα πεδία που περιγράφουν το περιοδικό φαινόμενο μειώνονται σημαντικά, ενώ η πιθανή αύξηση τους αυξάνει κατά πολύ τον απαιτούμενο υπολογιστικό χρόνο.

8.2 Διηχητική Ροή - Εφαρμογή στη Μεμονωμένη Αεροτομή NACA 0006

Σκοπός του συγκεκριμένου παραδείγματος είναι η μελέτη της συμπεριφοράς της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών σε προβλήματα όπου η ροή ενδέχεται τοπικά να ξεπεράσει την τοπική ταχύτητα του ήχου, ή ισοδύναμα ο τοπικός αριθμός Mach να λάβει τιμή μεγαλύτερη της μονάδας. Για τον σκοπό αυτόν, επιλέχθηκε η μελέτη περίπτωσης διηχητικής ροής (*transonic flow*) όπου ο αριθμός Mach ξεπέρασε την μονάδα στην πλευρά υποπίεσης με αποτέλεσμα την παραγωγή κύματος κρούσης (*shock wave*).

Οι συνθήκες της επ' άπειρον ροής που επιλέχθηκαν για τη συγκεκριμένη περίπτωση είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}\rho_{\infty} &= 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ |V_{\infty}| &= 280 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ p_{\infty} &= 10^5 \text{ Pa}\end{aligned}$$

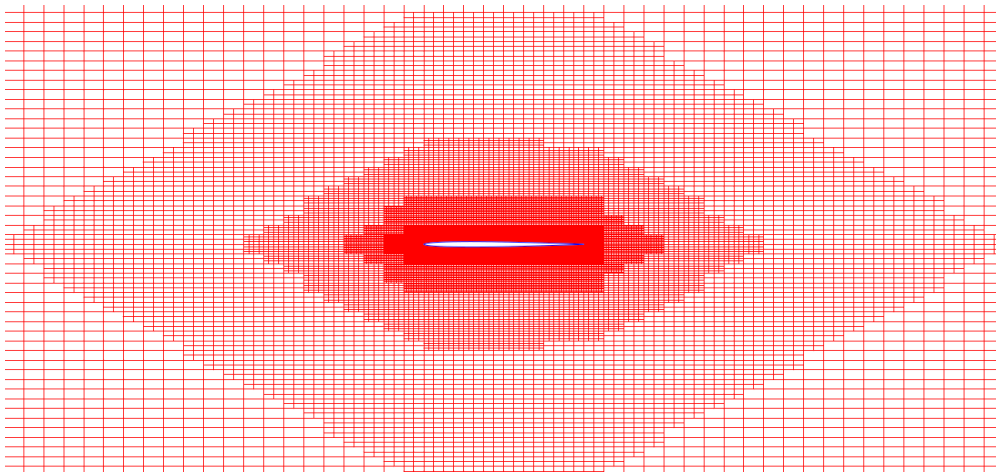
Ο αριθμός Mach της επ' άπειρον ροής βασιζόμενος στα παραπάνω δεδομένα προκύπτει ως εξής:

$$M_{\infty} = \frac{|V_{\infty}|}{\sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}} \Rightarrow M_{\infty} \simeq 0.82$$

Ακολουθεί ο πίνακας 8.3 που περιέχει συγκεντρωτικά τις βασικές πληροφορίες του συγκεκριμένου παραδείγματος, ενώ αμέσως μετά ακολουθεί το σχήμα 8.2.1 που απεικονίζει την αεροτομή που χρησιμοποιήθηκε καθώς και το πλέγμα που παράχθηκε γύρω από αυτή.

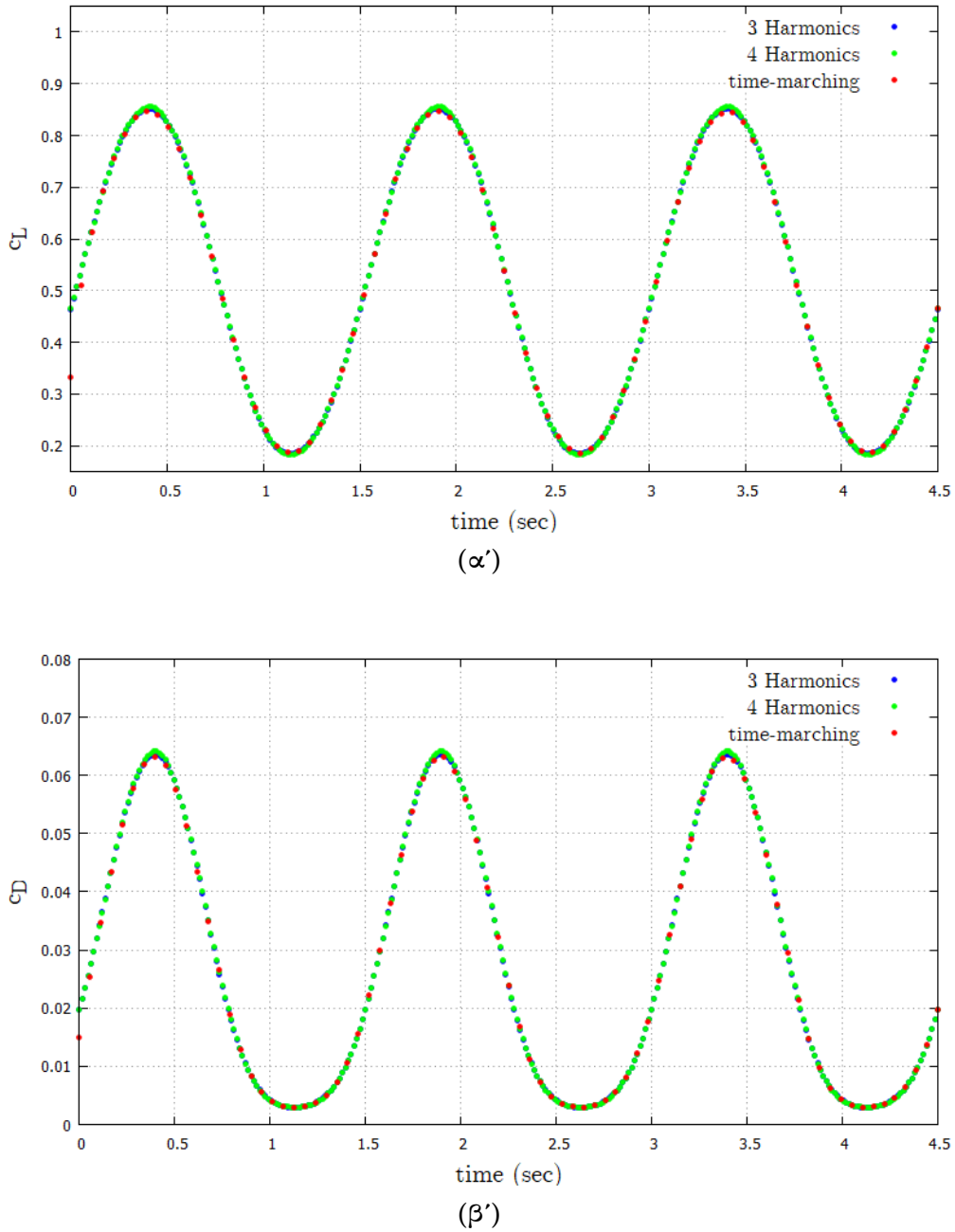
Αριθμός Υπολογιστικών Κυψελών	27058
Περίοδος Διαταραχής (sec)	1.5
Συχνότητα Διαταραχής (Hz)	0.666
Τύπος Διαταραχής (a_∞)	$2.5^\circ + 1.5^\circ \sin(1.333\pi t)$
Ακρίβεια Σχήματος Επίλυσης	Δεύτερη στον χώρο

Πίνακας 8.3: Βασικές πληροφορίες του παραδείγματος διηχητικής ροής.



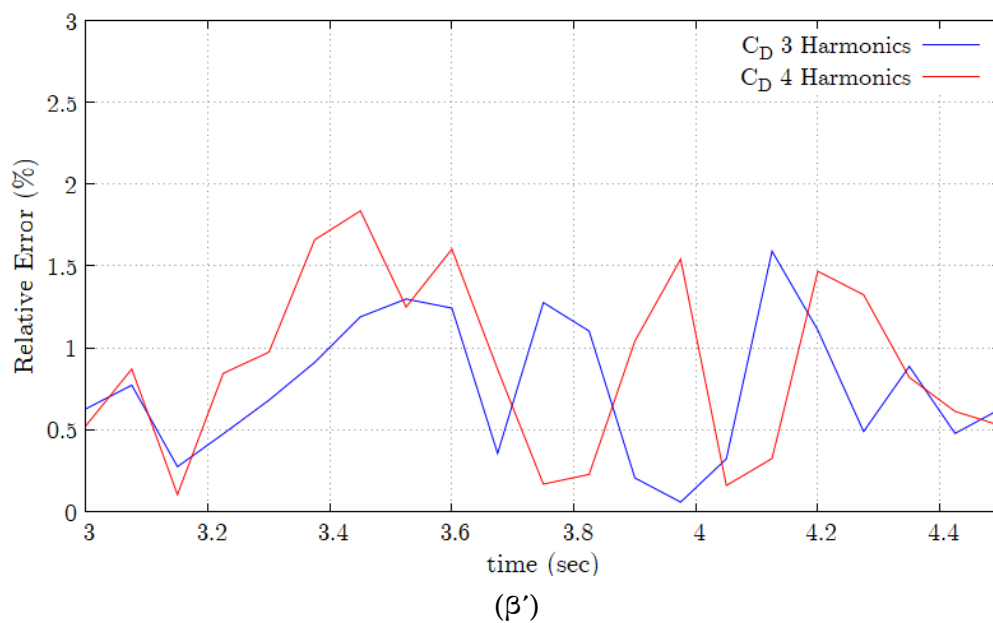
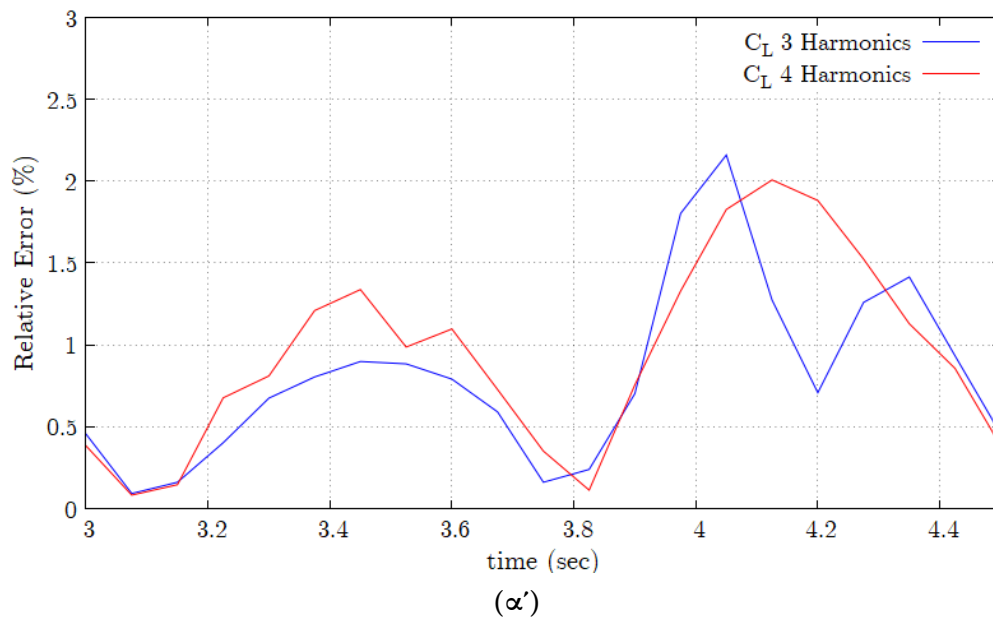
Σχήμα 8.2.1: Σχηματική αναπαράσταση της αεροτομής NACA 0006 καθώς και του, σε μεγέθυνση, πλέγματος που κατασκευάστηκε για την διακριτοποίηση των πεδιακών εξισώσεων.

Η επιλογή του αριθμού των αρμονικών που χρησιμοποιήθηκε βασίστηκε σε μεγάλο βαθμό στο παράδειγμα υποηχητικής ροής που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Πιο συγκεκριμένα, στην υποηχητική ροή διαπιστώθηκε ότι η χρήση περισσότερων των τριών αρμονικών δεν επηρέαζε την τελική λύση. Από τη στιγμή που η διαταραχή που χρησιμοποιείται στη διηχητική ροή έχει παρόμοια μορφή με αυτήν του προηγούμενου παραδείγματος, αναμένεται η ροή να περιγράφεται σε ικανοποιητικό βαθμό από τρεις αρμονικές. Έτσι, το συγκεκριμένο παράδειγμα μελετάται για τρεις και για τέσσερις αρμονικές, όπου οι τέσσερις αρμονικές χρησιμοποιούνται για να αποδειχθεί ότι πράγματι το φαινόμενο δεν απαιτεί χρήση περισσότερων αρμονικών. Παρατίθενται τα σχήματα 8.2.2(α'), 8.2.2(β') που απεικονίζουν τη μεταβολή των συντελεστών άνωσης και αντίστασης αντίστοιχα, σε συνάρτηση με το χρόνο.



Σχήμα 8.2.2: Μεταβολή του συντελεστή άνωσης (σχήμα (α')) καθώς και του συντελεστή αντίστασης (σχήμα (β')) σε συνάρτηση με το χρόνο για την περίπτωση χρήσης τριών και τεσσάρων αρμονικών. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τα αντίστοιχα του επιλύτη μη-μόνιμης ροής.

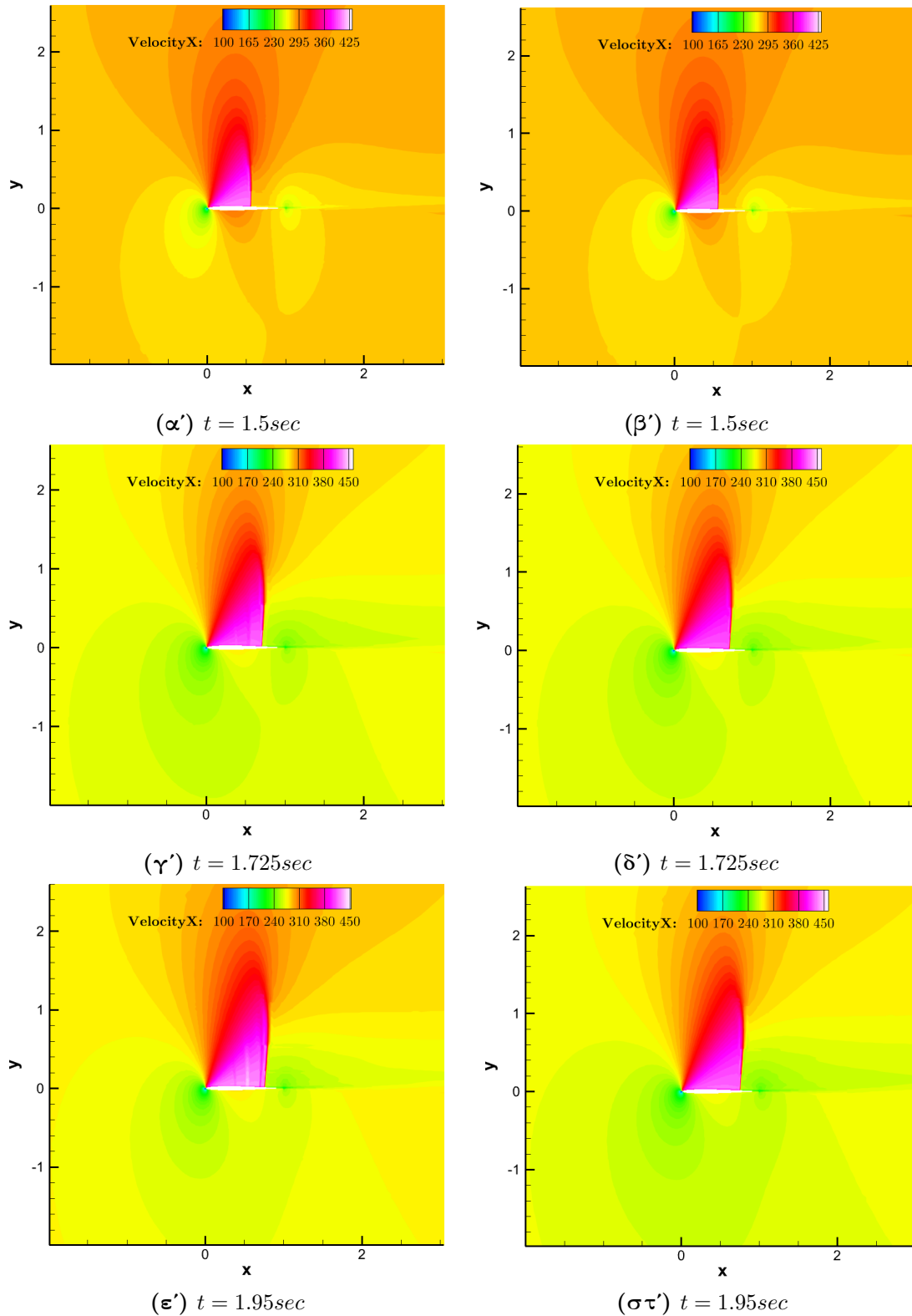
Από τα δύο αυτά σχήματα φαίνεται ότι οι τρεις και οι τέσσερις αρμονικές περιγράφουν ικανοποιητικά τη χρονική μεταβολή των συντελεστών c_L και c_D . Για να διαπιστωθεί το μέγεθος του σφάλματος που υπεισέρχεται εξαιτίας της χρήσης της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών παρατίθενται τα σχήματα 8.2.3(α'), (β') που απεικονίζουν το επί τοις εκατό σχετικό σφάλμα των δύο συντελεστών για την περίπτωση των τριών και των τεσσάρων αρμονικών.

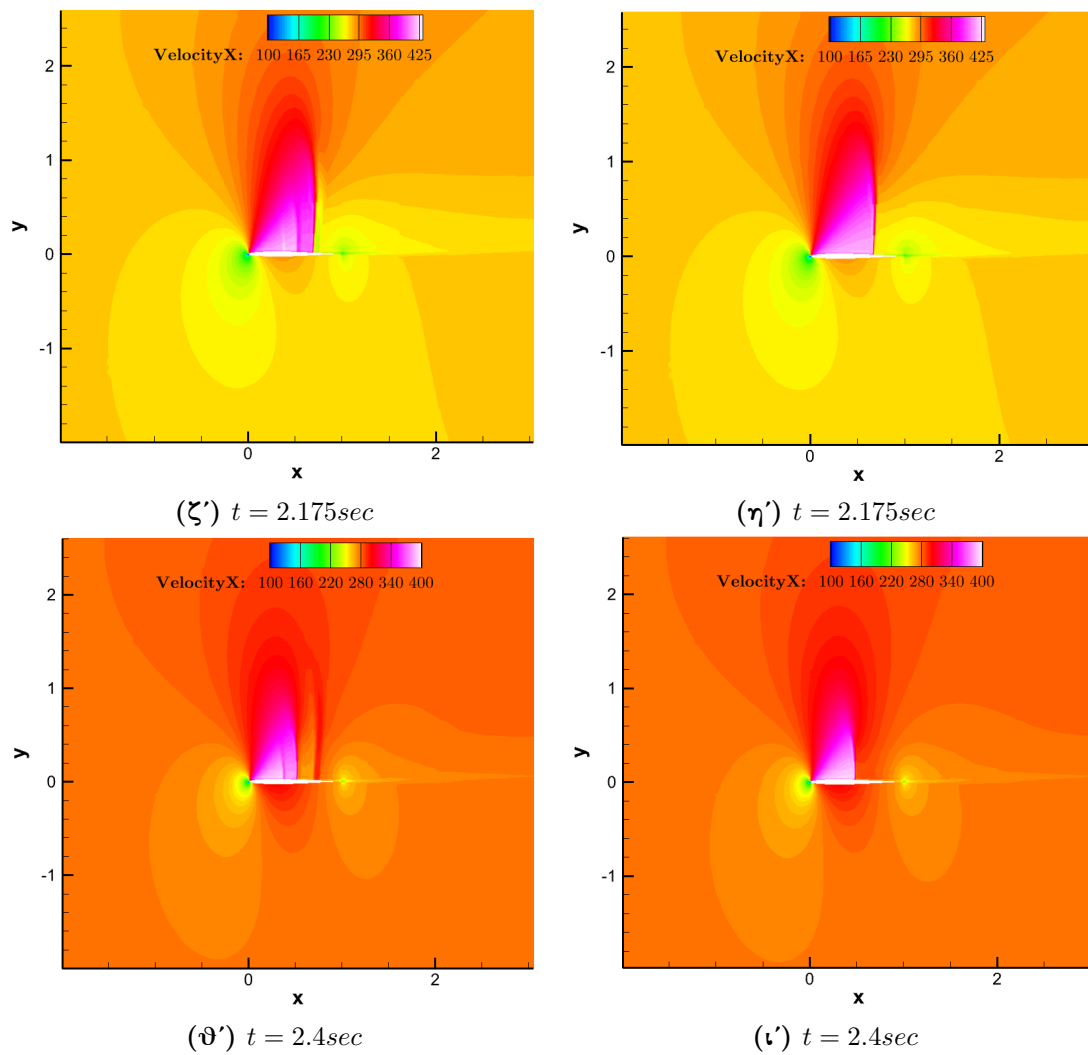


Σχήμα 8.2.3: Αναπαράσταση του σχετικού σφάλματος σε συνάρτηση με τον χρόνο για την περίπτωση τριών και τεσσάρων αρμονικών. (α') Σχετικό σφάλμα του συντελεστή άνωσης c_L (β') Σχετικό σφάλμα του συντελεστή αντίστασης c_D . Το χρονικό διάστημα αντιστοιχεί στην τρίτη περίοδο του φαινομένου.

Παρατηρείται ότι η χρήση τεσσάρων αρμονικών δεν συνεισφέρει επιπλέον στην ακρίβεια της λύσης με αποτέλεσμα η χρήση των τριών αρμονικών να κρίνεται ως η πλέον κατάλληλη. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρείται ότι σε ορισμένες χρονικές στιγμές οι τέσσερις αρμονικές παράγουν πιο ακριβή αποτελέσματα, ενώ στις εναπομείνουσες τα αποτελέσματα είναι λιγότερο ακριβή σε σχέση με αυτά των τριών αρμονικών.

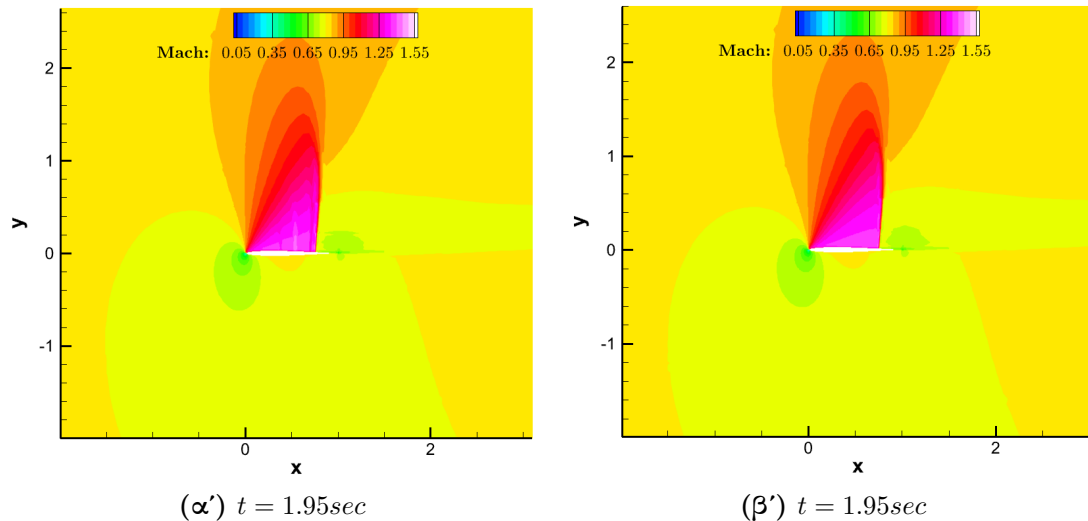
Ακολουθεί το σχήμα 8.2.4 στο οποίο απεικονίζονται πέντε στιγμιότυπα της ροής έτσι όπως προέκυψαν από τη χρήση του κώδικα που αναπτύχθηκε καθώς και τα αντίστοιχα που προέκυψαν από τον επίλυτη της ΜΠΥΡ&Β [1]:





Σχήμα 8.2.4: Απεικόνιση του κατά τον οριζόντιο άξονα x πεδίου ταχύτητας για πέντε χρονικές στιγμές εντός της περιόδου. Τα σχήματα που βρίσκονται στην αριστερή στήλη προέρχονται από την επίλυση της ροής με τη Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών κάνοντας χρήση τριών αρμονικών. Τα σχήματα της δεξιάς στήλης προέρχονται από τον επιλύτη της ΜΠΥΡ&Β [1]. Οι χρονικές στιγμές ανήκουν στην δεύτερη περίοδο του φαινομένου ώστε να αποφευχθεί το μεταβατικό στάδιο του επιλύτη της ΜΠΥΡ&Β.

Παρατηρώντας τα στιγμιότυπα του σχήματος 8.2.4, γίνεται αντιληπτό ότι τα αποτελέσματα της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών εμφανίζουν μικρές διαφορές με τα αποτελέσματα αναφοράς. Επίσης, είναι εμφανής η απότομη αύξηση της κατά τον οριζόντιο άξονα ταχύτητας στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής, γεγονός που υποδηλώνει πιθανή ύπαρξη κύματος κρούσης. Για να αποδειχθεί ότι πράγματι εμφανίζεται κύμα κρούσης και ότι η ροή είναι διηχητική, δηλαδή ότι η εκάστοτε τοπική ταχύτητα δεν είναι πάντα είτε μικρότερη είτε μεγαλύτερη από την αντίστοιχη τοπική ταχύτητα του ήχου, παρατίθεται για τη χρονική στιγμή $t = 1.95sec$ το πεδίο Mach έτσι όπως προέκυψε από τη Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών καθώς και από τον επίλυτη της ΜΠΥΡ&Β.



Σχήμα 8.2.5: Απεικόνιση του πεδίου Mach για τη χρονική στιγμή $t = 1.95sec$. (α') Πεδίο έτσι όπως προκύπτει από τη Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών. (β') Πεδίο έτσι όπως προκύπτει από την επίλυση με μέθοδο χρονο-προέλασης.

Διαπιστώνεται ότι ο αριθμός Mach ξεπερνά την μονάδα στο μεγαλύτερο μέρος της πλευράς υποπίεσης με αποτέλεσμα να μπορεί να ειπωθεί με ασφάλεια ότι η ροή είναι διηχητική.

Ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτήθηκε για καθεμιά από τις περιπτώσεις παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα 8.4.

Τρόπος Επίλυσης	Υπολογιστικός χρόνος (sec)
Χρήση τριών (3) αρμονικών	11168.65
Χρήση τεσσάρων (4) αρμονικών	14285.61
Μέθοδος χρονο-προέλασης	80198.87

Πίνακας 8.4: Απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος ανάλογα με την επιλογή τρόπου επίλυσης για την περίπτωση διηχητικής ροής. Ο επίλυτης χρονο-προέλασης χρησιμοποιεί δεύτερης τάξης, στον χώρο, ακρίβεια ενώ εκτελείται για τρεις χρονικές περιόδους.

Γίνεται αντιληπτό ότι η χρήση τριών αρμονικών απαιτεί περίπου το ένα όγδοο $\left(\frac{1}{8}\right)$ του

χρόνου που χρειάζεται ο επιλύτης χρονο-προέλασης, μια τιμή που βρίσκεται πολύ κοντά σε αυτή του πρώτου παραδείγματος.

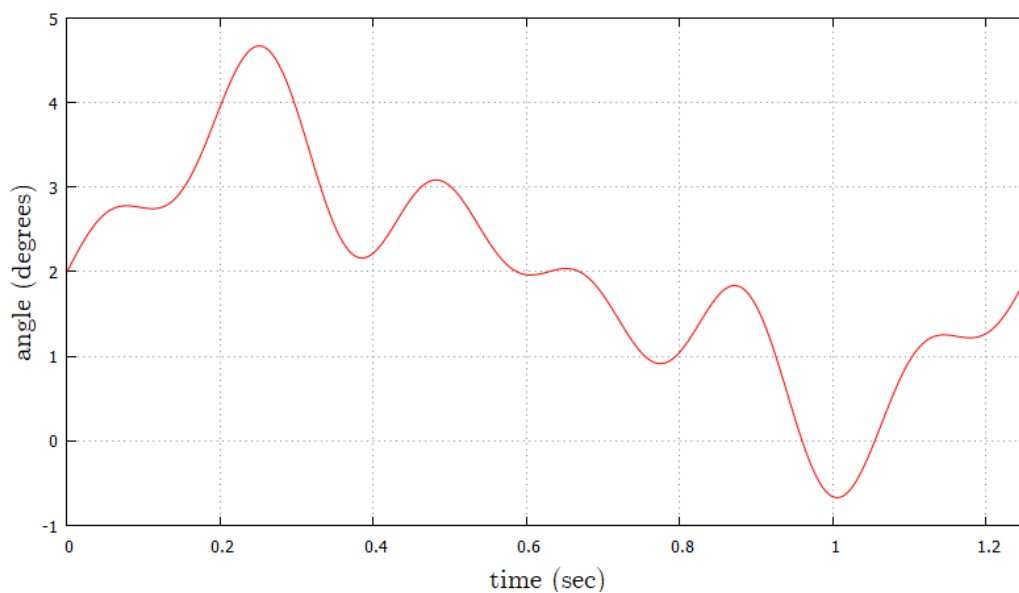
8.3 Σύνθετη Διαταραχή - Εφαρμογή στην Αεροτομή NACA 0016

Το συγκεκριμένο παράδειγμα επιλέχθηκε με σκοπό τη μελέτη της συμπεριφοράς της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών σε πιο πολύπλοκες διαταραχές από αυτές του απλού ημιτόνου. Για τον σκοπό αυτό, η περιοδική διαταραχή που χρησιμοποιείται αποτελεί σύνθεση ημιτονοειδών και συνημιτονοειδών όρων, και δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$a_{\infty} = 2^{\circ} + 1.5^{\circ} \sin(5t) + 2^{\circ} \sin(5t) \cos(15t) \cos(10t) \quad (8.3.1)$$

όπου η περίοδος της διαταραχής είναι ίση με $T = 1.256 \text{sec}$.

Ακολουθεί το σχήμα 8.3.1 στο οποίο απεικονίζεται η απόκριση της διαταραχής σε συνάρτηση με το χρόνο.



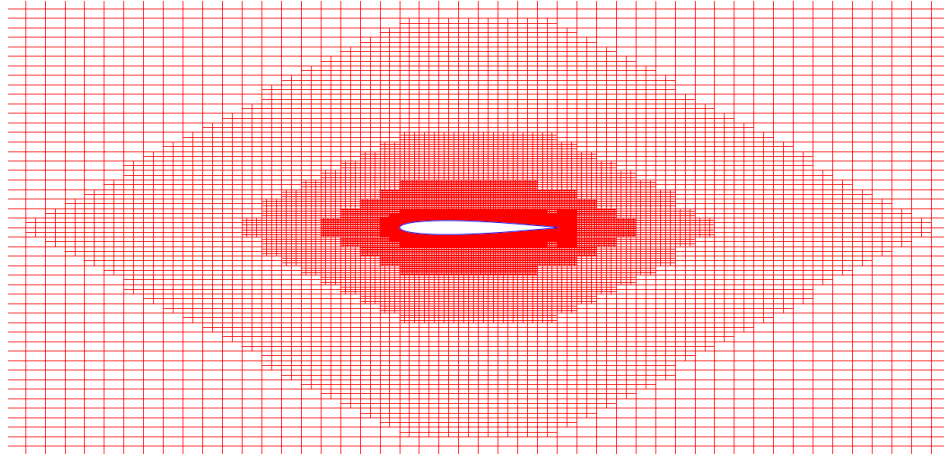
Σχήμα 8.3.1: Απεικόνιση της απόκρισης της σύνθετης διαταραχής για χρονικό διάστημα μιας περιόδου.

Παρατηρείται ότι η απόκριση εμφανίζει έντονα ταλαντωτική συμπεριφορά γεγονός που υποδεικνύει ότι θα απαιτηθούν αρκετές αρμονικές για να περιγραφεί ικανοποιητικά το φαινόμενο. Για τον λόγο αυτό, η ανάλυση που παρουσιάζεται παρακάτω έχει ως αφετηρία τις τρεις αρμονικές.

Η χρησιμοποιούμενη αεροτομή καθώς και το πλέγμα που κατασκευάστηκε παρουσιάζονται στο σχήμα 8.3.2, αμέσως μετά από τον συγκεντρωτικό πίνακα 8.5.

Αριθμός Υπολογιστικών Κυψελών	24592
Περίοδος Διαταραχής (sec)	1.256
Συχνότητα Διαταραχής (Hz)	0.796
Τύπος Διαταραχής	Σχέση 8.3.1
Ακρίβεια Σχήματος Επίλυσης	Δεύτερη στον χώρο

Πίνακας 8.5: Βασικές πληροφορίες για το παράδειγμα της σύνθετης διαταραχής.



Σχήμα 8.3.2: Σχηματική αναπαράσταση της συμμετρικής αεροτομής NACA 0016 καθώς και, του σε μεγέθυνση, πλέγματος που κατασκευάστηκε για την μελέτη του φαινομένου.

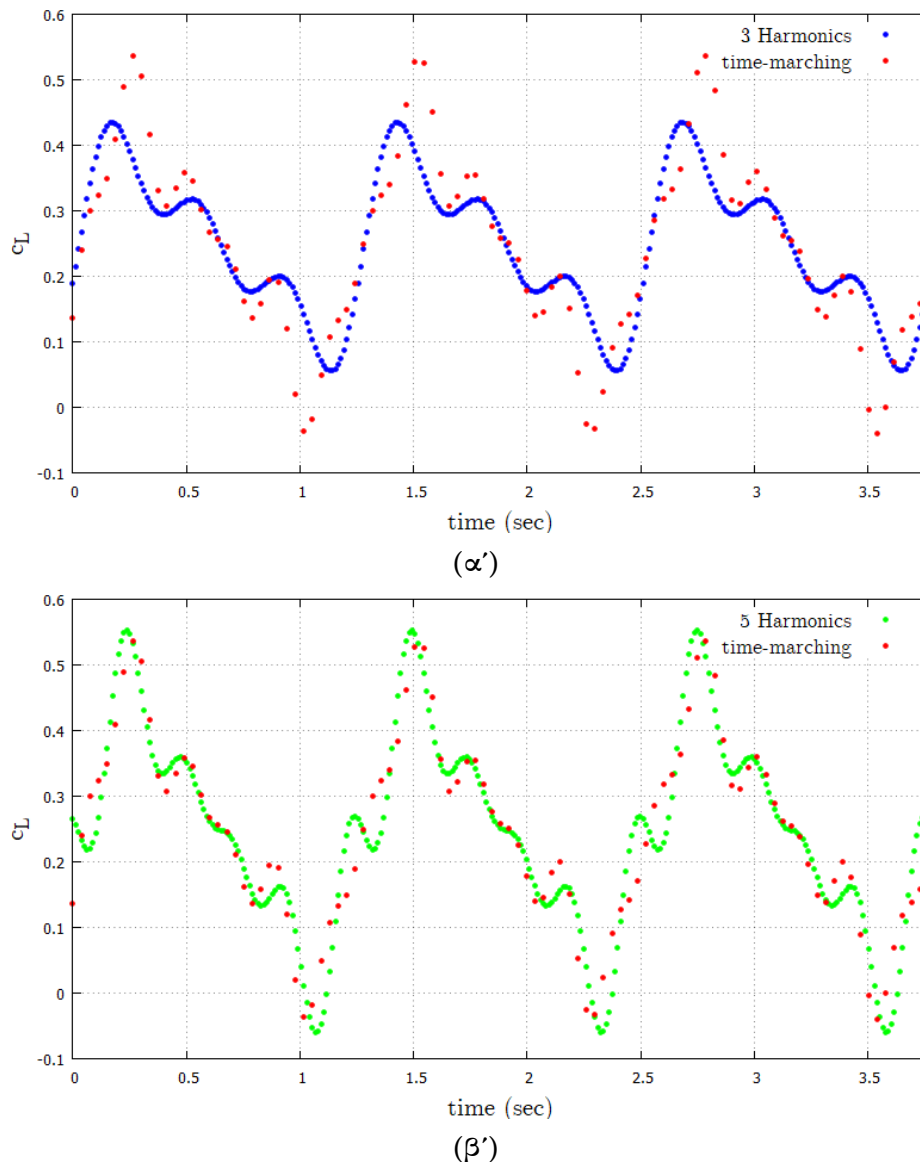
Όσον αφορά τα τρία βασικά μεγέθη, πυκνότητα, ταχύτητα και πίεση, της επ' άπειρον ροής, οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}\rho_{\infty} &= 1.2 \frac{kg}{m^3} \\ |V_{\infty}| &= 80 \frac{m}{s} \\ p_{\infty} &= 10^5 Pa\end{aligned}$$

οπότε ο αριθμός Mach της επ' άπειρον ροής προκύπτει ίσος με:

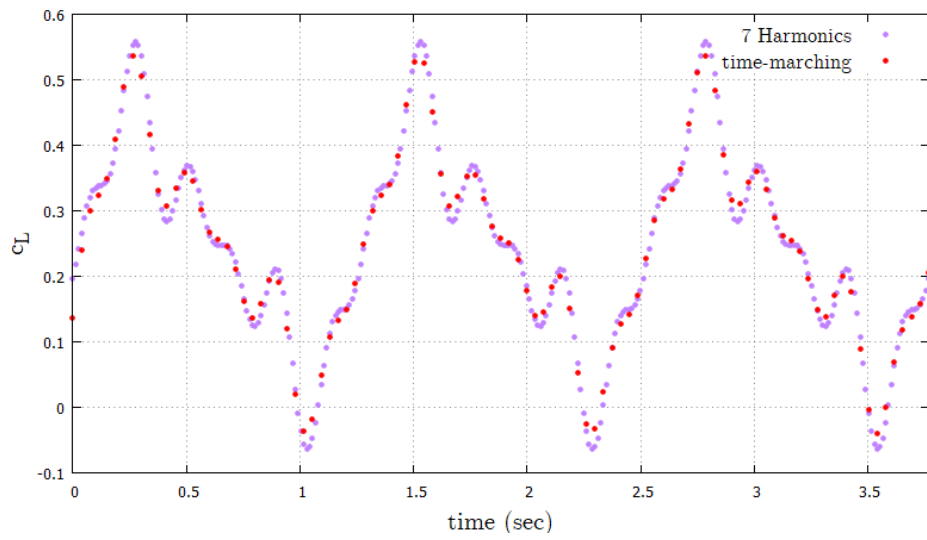
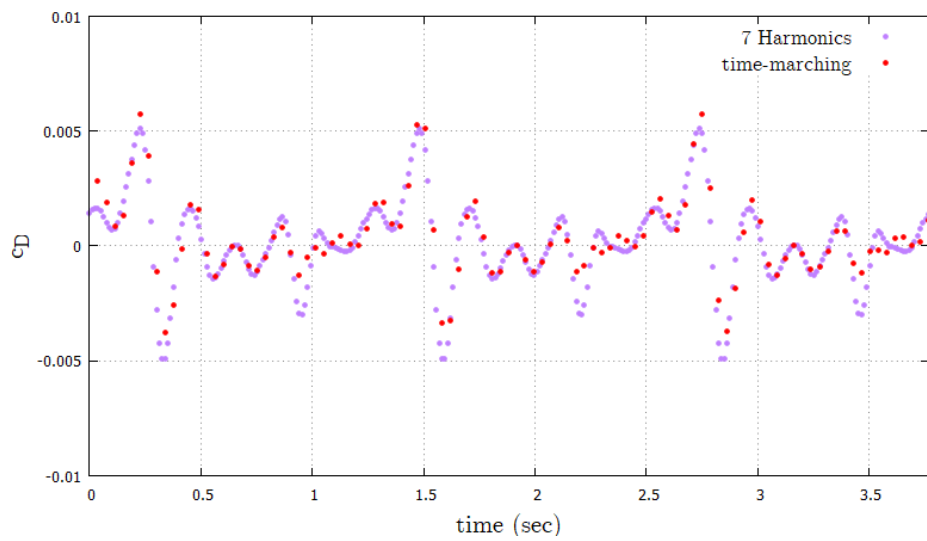
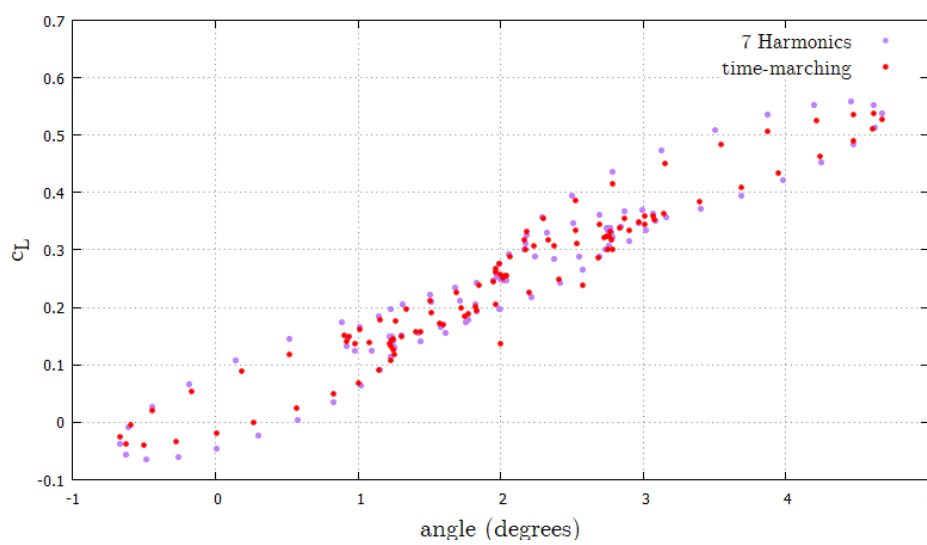
$$M_{\infty} = \frac{|V_{\infty}|}{\sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}} \Rightarrow M_{\infty} \simeq 0.234$$

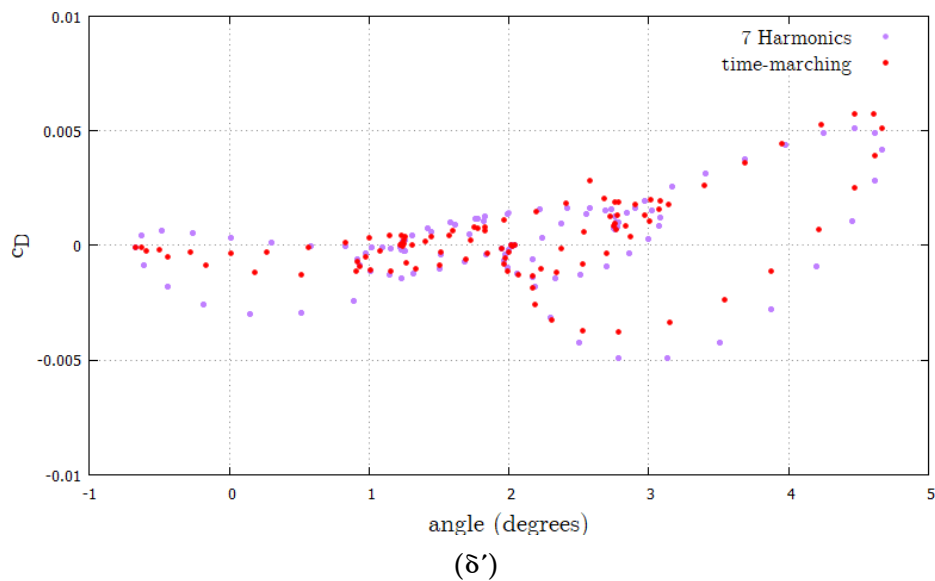
Τα σχήματα 8.3.3(α)', (β)' παρουσιάζουν τον συντελεστή άνωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο κάνοντας χρήση τριών και πέντε αρμονικών.



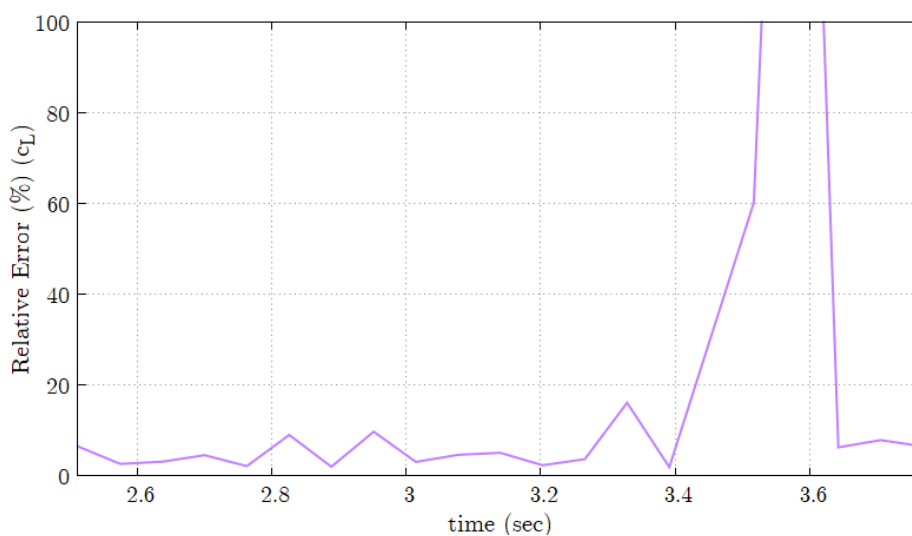
Σχήμα 8.3.3: Συντελεστής άνωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο. Στο σχήμα (α') χρησιμοποιούνται τρεις αρμονικές ενώ στο σχήμα (β') πέντε. Τα αποτελέσματα κάθε φορά συγκρίνονται με τα αποτελέσματα αναφοράς επιλύτη που κάνει χρήση της μεθόδου χρονοπροέλασης.

Εξαιτίας της πολυπλοκότητας της χρησιμοποιούμενης διαταραχής, οι τρεις αρμονικές πλέον δεν αρκούν για να περιγράψουν ικανοποιητικά το φαινόμενο. Υπενθυμίζεται ότι στις απλές διαταραχές που χρησιμοποιήθηκαν στις προηγούμενες δύο παραγράφους, οι τρεις αρμονικές περιέγραφαν πολύ ικανοποιητικά την εκάστοτε ροή. Η χρήση πέντε αρμονικών παρουσιάζει σημαντική βελτίωση αλλά εκ νέου εμφανίζονται διαφορές οι οποίες μπορούν να μειωθούν σημαντικά αν χρησιμοποιηθούν περισσότερες αρμονικές. Για τον λόγο αυτό, γίνεται χρήση επτά αρμονικών. Ακολουθούν τα σχήματα 8.3.4(α') - (δ') στα οποία παρουσιάζονται τα ολοκληρωματικά μεγέθη c_L και c_D σε συνάρτηση με τον χρόνο αλλά και την επ' άπειρον γωνία ροής, καθώς και το σχήμα 8.3.5 όπου απεικονίζεται το επί τοις εκατό σχετικό σφάλμα του συντελεστή άνωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο.

 (α')  (β')  (γ')



Σχήμα 8.3.4: Συντελεστές άνωσης και αντίστασης σε συνάρτηση με τον χρόνο και την επ' άπειρον γωνία ροής για επτά αρμονικές. Στα σχήματα (α') και (β') παρουσιάζονται οι συντελεστές άνωσης και αντίστασης σε συνάρτηση με τον χρόνο, ενώ στα σχήματα (γ') και (δ') οι εν λόγω συντελεστές σε συνάρτηση με την επ' άπειρον γωνία. Τα αποτελέσματα κάθε φορά συγκρίνονται με τα αποτελέσματα αναφοράς επιλύτη που κάνει χρήση της μεθόδου χρονο-προέλασης.

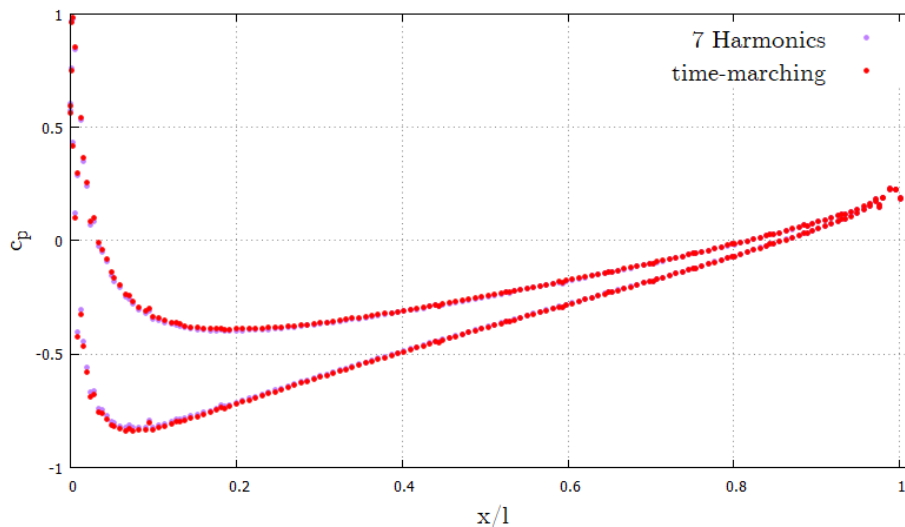


Σχήμα 8.3.5: Απεικόνιση του σχετικού σφάλματος του συντελεστή άνωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο κατά το χρονικό διάστημα της τρίτης περιόδου.

Από τα παραπάνω σχήματα γίνεται αντιληπτό ότι τα αποτελέσματα των επτά αρμονικών είναι αρκετά κοντά σε αυτά της μεθόδου χρονο-προέλασης. Ακόμα και σε αυτήν την περίπτωση παρατηρούνται μικρές διαφορές οι οποίες κυρίως αφορούν τα διαγράμματα των συντελεστών σε συνάρτηση με την επ' άπειρον γωνία. Βέβαια, η ύπαρξη διαφορών είναι αδύνατο να αποφευχθεί από τη στιγμή που η Μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών είναι

μια προσεγγιστική μέθοδος. Το σχετικό σφάλμα του σχήματος 8.3.5 επιβεβαιώνει την ύπαρξη σφάλματος το οποίο δεν μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο, όπως συνέβη στα προηγούμενα παραδείγματα. Το σχετικό σφάλμα κυμαίνεται στο 10% ενώ εμφανίζονται και δύο χρονικές στιγμές όπου το σφάλμα αγγίζει το 20% ενώ ξεπερνά και το 100%. Προφανώς όμως, η αυξημένη τιμή του σφάλματος δύο χρονικών στιγμών δεν μπορεί να αλλοιώσει την τιμή που προκύπτει από τη πλειοψηφία των χρονικών στιγμών.

Παρατίθεται ακόμη και το σχήμα 8.3.6 το οποίο απεικονίζει τον συντελεστή κατανομής πίεσης κατά μήκος της επιφάνειας της αεροτομής για τη χρονική στιγμή που ορίζεται ως αφετηρία της περιόδου, δηλαδή, οποιαδήποτε από τις χρονικές στιγμές $t = 0 + kT$ όπου $k \in \mathbb{N}^*$. Συνειδητά δεν συμπεριλαμβάνεται η χρονική στιγμή $t = 0$ καθώς αντιστοιχεί στο μεταβατικό φαινόμενο του επιλύτη της μεθόδου χρονο-προέλασης.



Σχήμα 8.3.6: Συντελεστής κατανομής πίεσης κατά μήκος της επιφάνειας της αεροτομής. Τα αποτελέσματα προκύπτουν κάνοντας χρήση επτά αρμονικών και συγκρίνονται με αυτά του επιλύτη χρονο-προέλασης.

Εκ νέου παρατηρείται ότι τα αποτελέσματα της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών είναι πολύ κοντά με τα αντίστοιχα του κλασικού επιλύτη.

Τέλος, παρατίθεται ο πίνακας 8.6 που περιέχει τον απαιτούμενο υπολογιστικό χρόνο κάθε περίπτωσης που μελετήθηκε.

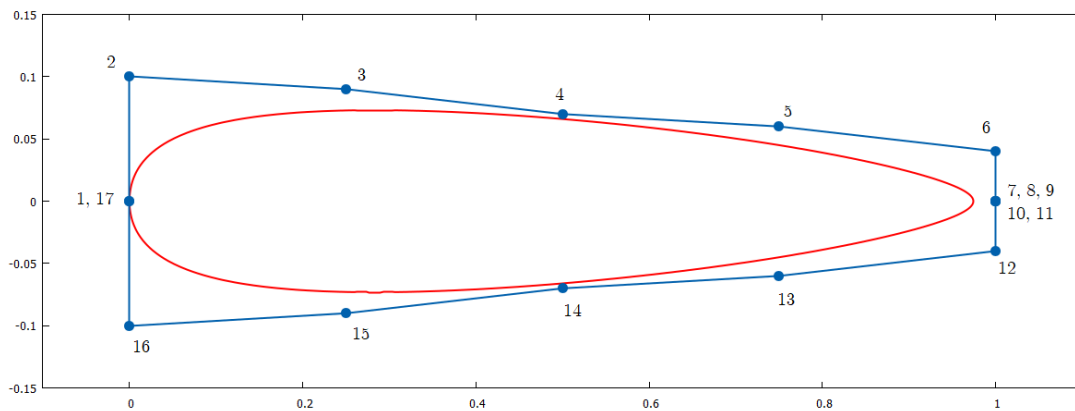
Τρόπος Επίλυσης	Υπολογιστικός χρόνος (sec)
Χρήση τριών (3) αρμονικών	20898.11
Χρήση πέντε (5) αρμονικών	34269.66
Χρήση επτά (7) αρμονικών	45535.09
Μέθοδος χρονο-προέλασης	128742.96

Πίνακας 8.6: Απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος ανάλογα με την επιλογή τρόπου επίλυσης για το παράδειγμα σύνθετης διαταραχής. Η μέθοδος χρονο-προέλασης χρησιμοποιεί δεύτερης τάξης ακρίβεια στον χώρο και εκτελείται για τρεις περιόδους.

Οι παραπάνω υπολογιστικοί χρόνοι εμφανίζουν εξαιρετικό ενδιαφέρον. Ειδικότερα, στα παραδείγματα των δύο προηγούμενων παραγράφων ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος για την περίπτωση της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών ήταν μόλις το ένα έβδομο ή ένα όγδοο του χρόνου του κλασικού επιλύτη χρονο-προέλασης. Αυτό οφειλόταν στην απλότητα της διαταραχής η οποία είχε ως αποτέλεσμα την απαίτηση χρήσης μόλις τριών αρμονικών. Στη σύνθετη διαταραχή αυτής της παραγράφου οι απαιτούμενες αρμονικές είναι επτά ενώ ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος είναι περίπου ίσος με το ένα τρίτο $\left(\frac{1}{3}\right)$ του αντίστοιχου της μεθόδου χρονο-προέλασης. Γίνεται έτσι αντιληπτό ότι η Μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών εξακολουθεί να είναι σημαντικά ταχύτερη, αλλά ταυτόχρονα επιβεβαιώνεται και το γεγονός ότι οι υπολογιστικοί χρόνοι των προηγούμενων παραγράφων δεν πρέπει να γενικεύονται.

8.4 Πρόβλημα Βελτιστοποίησης - Εφαρμογή σε Τυχαία Αεροτομή

Η διαδικασία βελτιστοποίησης που ακολουθήθηκε περιλαμβάνει τη χρήση μιας τυχαίας αεροτομής που παραμετροποιείται με πολώνυμα Bézier-Bernstein. Η συγκεκριμένη μορφή παραμετροποίησης αποτελεί ιδανική επιλογή όταν επιχειρείται βελτιστοποίηση μορφής, καθώς ως μεταβλητές σχεδιασμού χρησιμοποιούνται οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου πιθανή μετακίνηση των οποίων αλλάζει το σχήμα τη υπό μελέτη αεροτομής. Η αεροτομή που χρησιμοποιήθηκε καθώς και τα σημεία ελέγχου που την αναπαράγουν παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα 8.4.1.



Σχήμα 8.4.1: Αεροτομή που χρησιμοποιείται στο παράδειγμα βελτιστοποίησης καθώς και τα 17 σημεία ελέγχου που χρησιμοποιούνται για να την αναπαράξουν. Από τα 17 σημεία ελέγχου τα σημεία 1 και 17 βρίσκονται στη θέση (0,0), ενώ τα 7, 8, 9, 10, 11 βρίσκονται στη θέση (1,0). Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας της βελτιστοποίησης τα συγκεκριμένα επτά σημεία παραμένουν ακλόνητα.

Οι συνθήκες της επ' άπειρον ροής που χρησιμοποιήθηκαν στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}\rho_{\infty} &= 1.2 \frac{kg}{m^3} \\ |V_{\infty}| &= 150 \frac{m}{s} \\ p_{\infty} &= 10^5 Pa\end{aligned}$$

με αποτέλεσμα ο αριθμός Mach της επ' άπειρον ροής προκύπτει να προκύπτει ίσος με:

$$M_{\infty} = \frac{|V_{\infty}|}{\sqrt{\gamma p / \rho}} \Rightarrow M_{\infty} \simeq 0.44$$

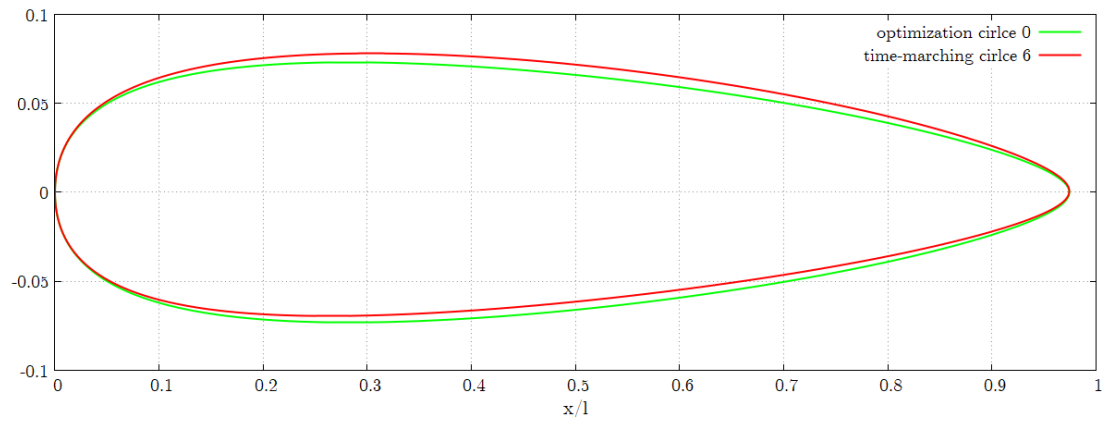
Ακολουθεί ο πίνακας 8.7 στον οποίο συγκεντρώνονται οι βασικές πληροφορίες του συγκεκριμένου παραδείγματος.

Αριθμός Υπολογιστικών Κυψελών	20182
Περίοδος Διαταραχής (sec)	0.9
Συχνότητα Διαταραχής (Hz)	1.111
Τύπος Διαταραχής (α_{∞})	$4.5^{\circ} + 1.5^{\circ} \sin(2.222\pi t)$
Ακρίβεια Σχήματος Επίλυσης Ευθέως Προβλήματος	Πρώτη στον χώρο
Ακρίβεια Σχήματος Επίλυσης Συζυγούς Προβλήματος	Πρώτη στον χώρο
Αριθμός Σημείων Ελέγχου	17
Αριθμός Κύκλων Βελτιστοποίησης	6
Αριθμός Αρμονικών Ευθέως και Συζυγούς Προβλήματος	4
Στόχος Βελτιστοποίησης	Μεγιστοποίηση $ \bar{L} $

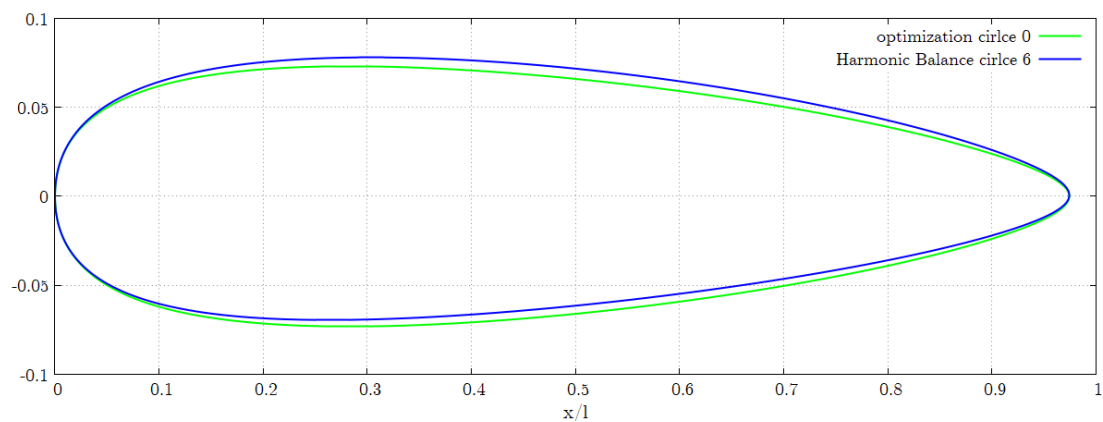
Πίνακας 8.7: Βασικές πληροφορίες για το παράδειγμα της σύνθετης διαταραχής.

Παρατηρείται ότι στο παράδειγμα βελτιστοποίησης μορφής επιλέχθηκε η χρήση πρώτης τάξης ακρίβειας στον χώρο, τόσο στο ευθύ όσο και στο συζυγές πρόβλημα ώστε να μειωθεί σημαντικά ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος. Επίσης, για την παραμετροποίηση της αεροτομής γίνεται χρήση 17 σημείων ελέγχου εκ των οποίων ορισμένα έχει επιλεγεί να μην μετακινούνται κατά τη διάρκεια της ανανέωσης των τιμών τους στο τέλος κάθε κύκλου βελτιστοποίησης, ώστε η τελική αεροτομή να διατηρεί ρεαλιστικό σχήμα. Ειδικότερα, τα σημεία ελέγχου που δεν μετακινούνται είναι αυτά που διαθέτουν τεταγμένη ίση με μηδέν (σημεία του οριζόντιου άξονα).

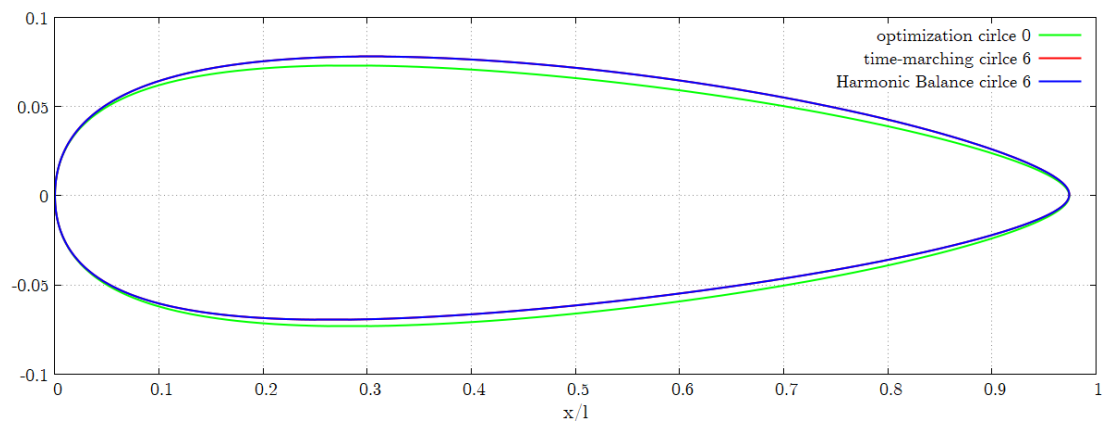
Ακολουθούν τα σχήματα 8.4.2(α') - (γ') όπου απεικονίζεται η αρχική και τελική γεωμετρία έτσι όπως προέκυψε από την Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών καθώς και τη μέθοδο χρονο-προέλασης, ενώ στη συνέχεια ακολουθεί το σχήμα 8.4.3 που παρουσιάζει την πορεία αύξησης της αντικειμενικής συνάρτησης έτσι όπως προέκυψε για κάθε μέθοδο επίλυσης.



(α')

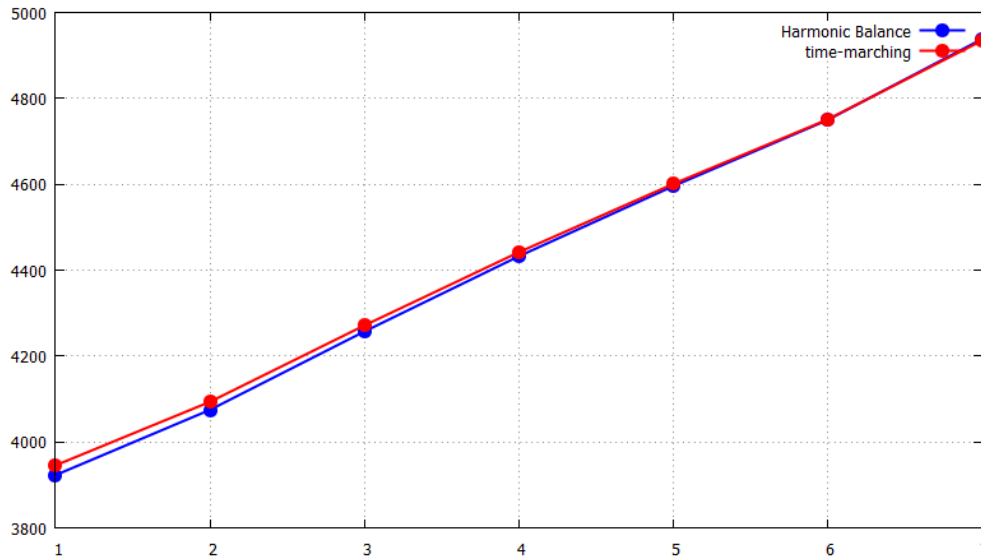


(β')



(γ')

Σχήμα 8.4.2: Συγκριτικά σχήματα όπου απεικονίζεται η αρχική και η τελική αεροτομή. (α') Αρχική (πράσινη καμπύλη) και τελική αεροτομή (κόκκινη καμπύλη) έτσι όπως προέκυψε από τη μέθοδο χρονο-προέλασης (β') Αρχική (πράσινη καμπύλη) και τελική αεροτομή (μπλε καμπύλη) έτσι όπως προέκυψε από τη Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών (γ') Αρχική αεροτομή σε κοινό σχήμα με αυτές που προέκυψαν από τις δύο μεθόδους επίλυσης.



Σχήμα 8.4.3: Αύξηση της αντικειμενικής για κάθε κύκλο και για κάθε μέθοδο επίλυσης.

Από το παραπάνω σχήμα 8.4.2(γ') παρατηρείται ότι οι αεροτομές που προκύπτουν και από τις δύο μεθόδους έχουν διαφορές που δεν μπορούν να γίνουν αντιληπτές, δηλαδή, παράγουν σχεδόν όμοια αποτελέσματα. Επίσης, από το σχήμα 8.4.3 παρατηρείται ότι η πορεία αύξησης της αντικειμενικής συνάρτησης είναι πολύ κοντά και για τις δύο μεθόδους. Από το συγκεκριμένο σχήμα μπορούν να γίνουν δύο σημαντικές παρατηρήσεις. Πρώτον, αν και χρησιμοποιήθηκαν έξι κύκλοι βελτιστοποίησης στο σχήμα εμφανίζονται εφτά τιμές της αντικειμενικής. Αυτό συμβαίνει διότι όταν ολοκληρωθεί ο έκτος κύκλος βελτιστοποίησης επιλύεται εκ νέου το ευθύ πρόβλημα για να υπολογιστούν τα επιθυμητά μεγέθη στην τελική αεροτομή. Δεύτερον, ο λόγος που η αντικειμενική αυξάνεται οφείλεται στο γεγονός ότι σαν στόχος έχει τεθεί η μεγιστοποίηση της μέσης χρονικά άνωσης (σχέση 7.1.4). Υπενθυμίζεται ότι επειδή πραγματοποιείται μεγιστοποίηση του στόχου χρησιμοποιείται η μέθοδος της απότομης ανόδου (*steepest ascent*) ώστε να γίνει ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού, η οποία διατυπώνεται ως εξής:

$$b_q^{new} = b_q^{old} + \eta \frac{\delta F}{\delta b_q}$$

Παρατηρείται ότι η μεταβλητή η καθορίζει σε μεγάλο βαθμό την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού στο τέλος κάθε κύκλου βελτιστοποίησης. Μικρή τιμή της συγκεκριμένης μεταβλητής οδηγεί σε μικρή μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού και, κατά συνέπεια, σε περιορισμένη μεταβολή της σχήματος της αεροτομής. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η μεταβλητή η δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\eta = \frac{0.005}{\max(|SD|)}$$

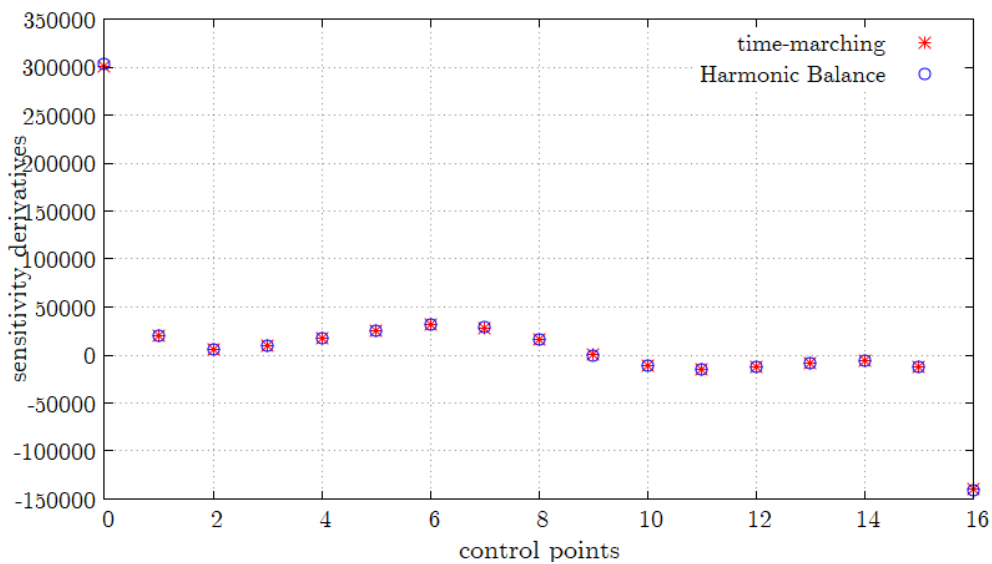
όπου $\max(|SD|)$ η μέγιστη μεταβλητή σχεδιασμού του πρώτου κύκλου βελτιστοποίησης. Η μεταβλητή η παραμένει σταθερή για όλους τους κύκλους βελτιστοποίησης. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα η εν λόγω μεταβλητή για καθεμιά από τις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν προέκυψε ίση με:

$$\eta_{HB} = 165 \cdot 10^{-10}$$

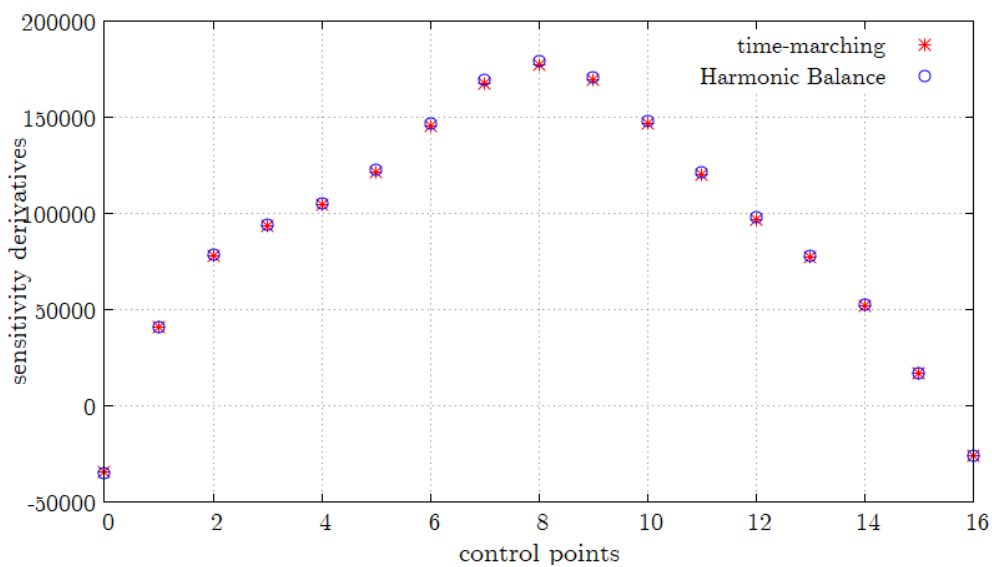
$$\eta_{TM} = 166 \cdot 10^{-10}$$

οι τιμές αυτές είναι αρκετά μικρές με αποτέλεσμα οι τελικές αεροτομές να εμφανίζουν σχετικά μικρές αλλαγές σε σχέση με τις αρχικές.

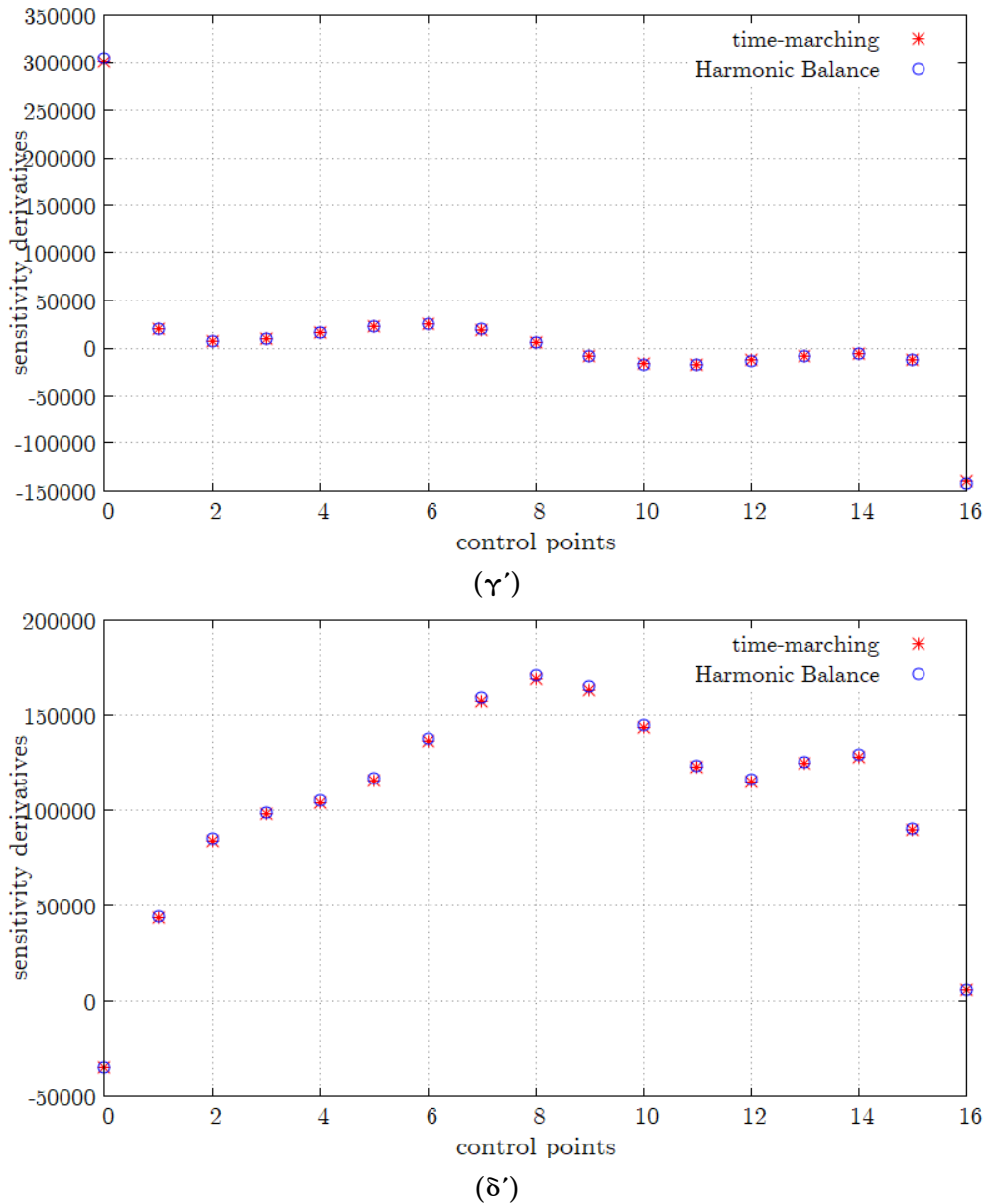
Ακολουθούν τα σχήματα 8.4.4(α') - (δ') όπου απεικονίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας για τον πρώτο και τον έβδομο κύκλο βελτιστοποίησης, έτσι όπως προέκυψαν από τις δύο μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν.



(α')



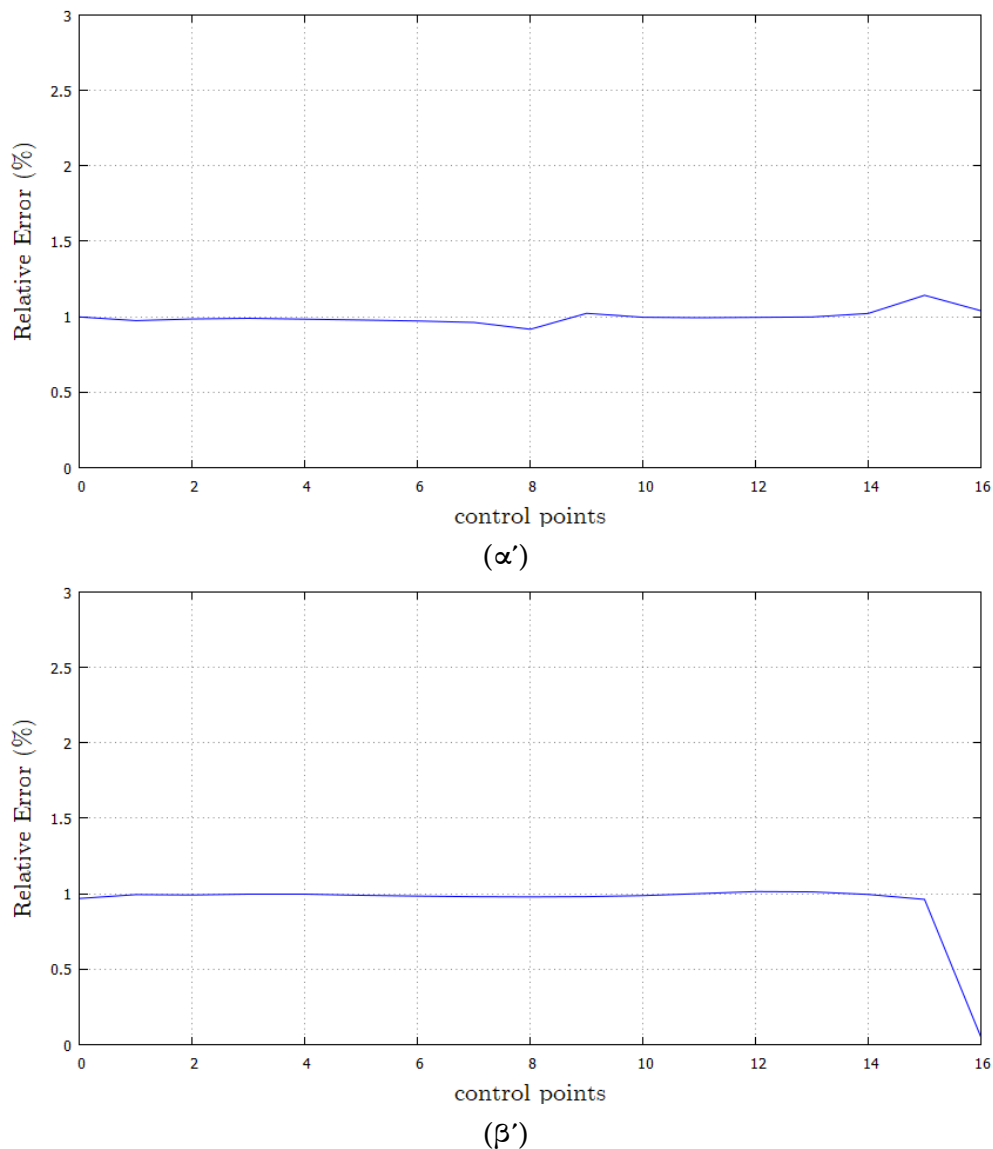
(β')



Σχήμα 8.4.4: Παράγωγοι ευαισθησίας για τον πρώτο και τον έκτο κύκλο βελτιστοποίησης. (α') Παράγωγοι ευαισθησίας για την τετμημένη του κάθε σημείου ελέγχου του πρώτου κύκλου βελτιστοποίησης (β') Παράγωγοι ευαισθησίας για την τεταγμένη του κάθε σημείου ελέγχου του πρώτου κύκλου βελτιστοποίησης (γ') Παράγωγοι ευαισθησίας για την τετμημένη του κάθε σημείου ελέγχου του έκτου κύκλου βελτιστοποίησης (β') Παράγωγοι ευαισθησίας για την τεταγμένη του κάθε σημείου ελέγχου του έκτου κύκλου βελτιστοποίησης. Τα αποτελέσματα της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών συγκρίνονται με τα αποτελέσματα του επιλύτη της ΜΠΥΡ&Β.

Παρατηρείται ότι οι παράγωγοι ευαισθησίας της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών παρουσιάζουν μικρές διαφορές σε σχέση με τις αντίστοιχες της μεθόδου χρονο-προέλασης. Το γεγονός αυτό βέβαια αναμενόταν καθώς οι τελικές γεωμετρίες είναι σχεδόν ταυτόσημες. Για να γίνει αντιληπτό το σφάλμα που προκαλείται εξαιτίας της χρήσης της Μεθόδου

Ισορροπίας των Αρμονικών, ακολουθεί το σχήμα 8.4.5 που απεικονίζει το σχετικό σφάλμα των παραγώγων ευαισθησίας του έκτου κύκλου βελτιστοποίησης.

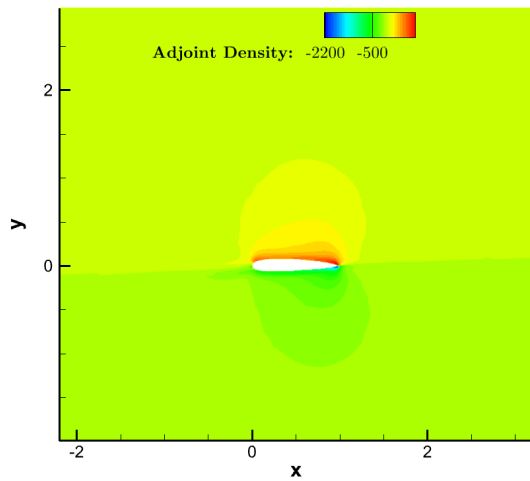


Σχήμα 8.4.5: Σχετικό σφάλμα των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας με τη Μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών. (α') Σχετικό σφάλμα των παραγώγων ευαισθησίας της τετμημένης των σημείων ελέγχου του έκτου κύκλου βελτιστοποίησης (β') Σχετικό σφάλμα των παραγώγων ευαισθησίας της τεταγμένης των σημείων ελέγχου του έκτου κύκλου βελτιστοποίησης.

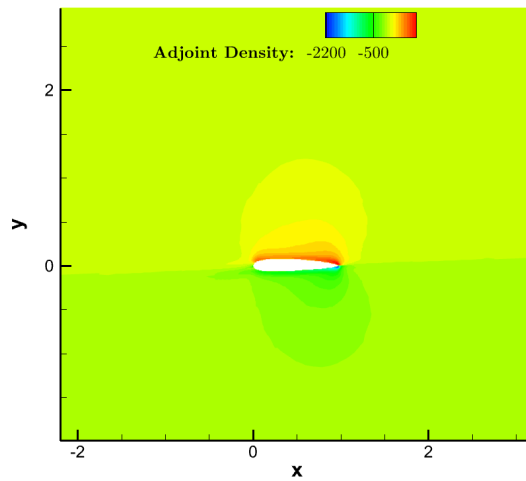
Παρατηρείται ότι το σχετικό σφάλμα των παραγώγων ευαισθησίας του έκτου κύκλου βελτιστοποίησης είναι της τάξης του 1%, μια τιμή δηλαδή ιδιαίτερος χαμηλή. Βέβαια, για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων απαιτείται επιπλέον διερεύνηση και για περιπτώσεις διαταραχών που διαφοροποιούνται από αυτήν του απλού ημιτόνου [9].

Το σχήμα 8.4.6 που ακολουθεί απεικονίζει πέντε πεδία της συζυγούς πυκνότητας (*adjoint*

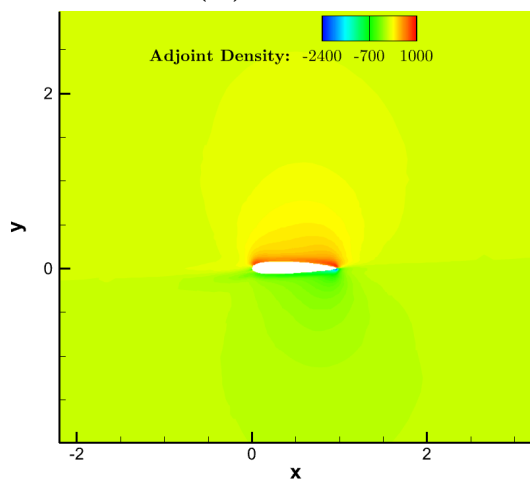
density) του έκτου κύκλου βελτιστοποίησης έτσι όπως προκύπτουν από τη χρήση της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών καθώς και αυτή της χρονο-προέλασης.



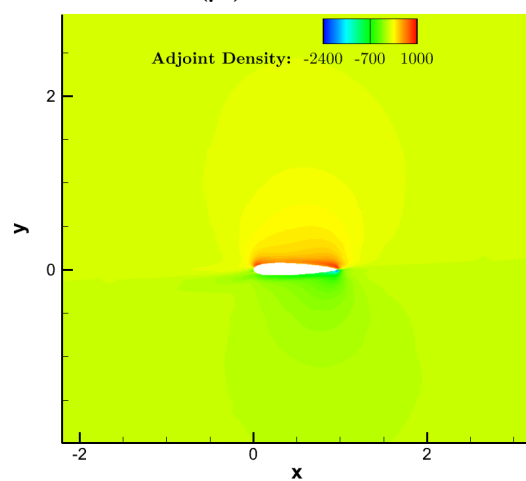
(α') $t = 0\text{sec}$



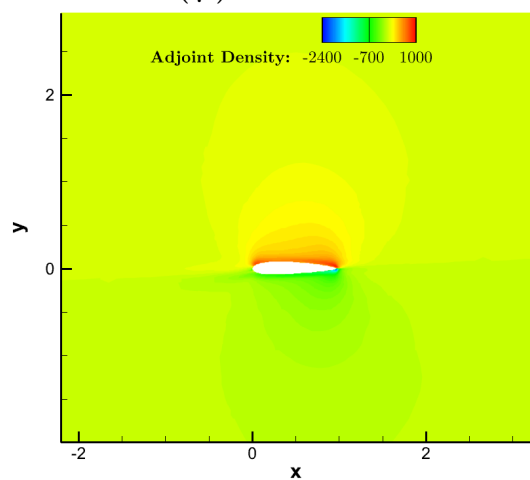
(β') $t = 0\text{sec}$



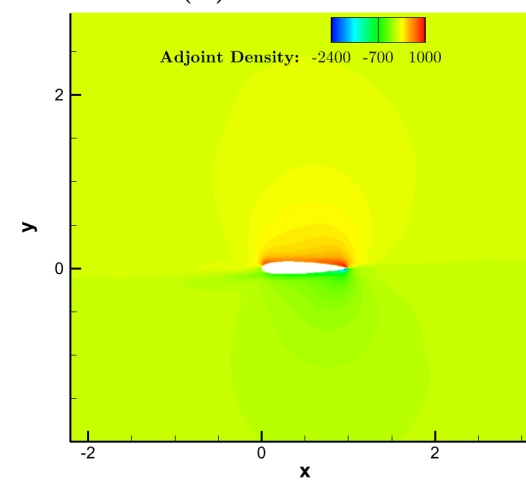
(γ') $t = 0.18\text{sec}$



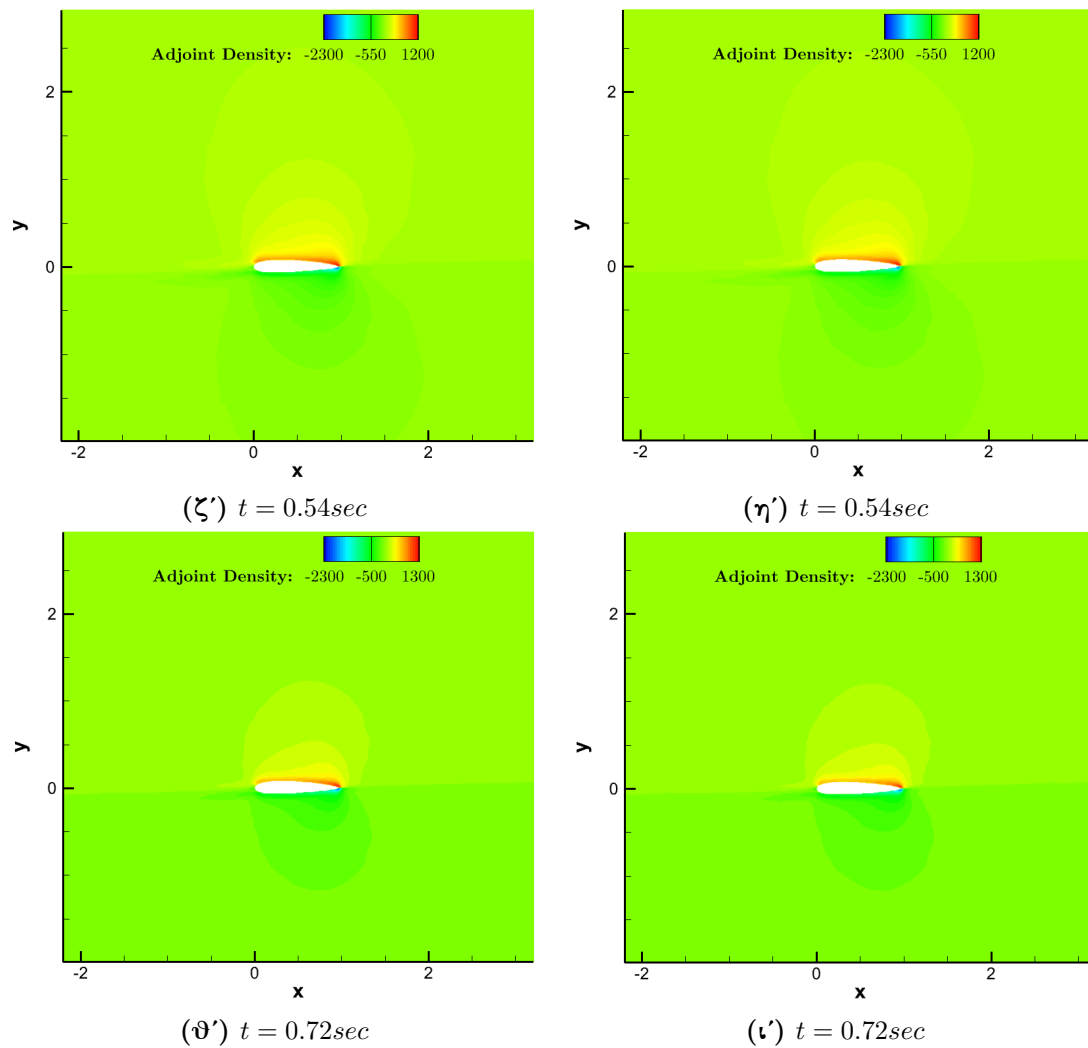
(δ') $t = 0.18\text{sec}$



(ϵ') $t = 0.36\text{sec}$



$(\sigma\tau')$ $t = 0.36\text{sec}$



Σχήμα 8.4.6: Απεικόνιση πέντε πεδίων συζυγούς πυκνότητας του έκτου κύκλου βελτιστοποίησης έτσι όπως προκύπτουν από τη Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών (σχήματα αριστερής στήλης) καθώς και από τον επιλύτη χρονο-προέλασης (σχήματα της δεξιάς στήλης). Οι χρονικές στιγμές ανήκουν στην τελευταία περίοδο επίλυσης του συζυγούς προβλήματος. Υπενθυμίζεται ότι στη μέθοδο χρονο-προέλασης το συζυγές πρόβλημα επιλύεται αντίθετα στον χρόνο οπότε η τελευταία περίοδος είναι η πρώτη του ευθέως προβλήματος, δηλαδή για τη συγκεκριμένη εφαρμογή το διάστημα $(0, 0.9)$.

Παρατηρείται ότι τα συζυγή πεδία της υπό μελέτη μεθόδου είναι πολύ κοντά σε αυτά της μεθόδου χρονο-προέλασης, γεγονός αυτό αναμενόταν καθώς οι τελικές γεωμετρίες που προέκυψαν από τις δύο μεθόδους είναι σχεδόν ίδιες.

Τέλος, παρατίθεται ο πίνακας 8.8 ο οποίος περιέχει τους υπολογιστικούς χρόνους που απαιτήθηκαν για την ολοκλήρωση του συγκεκριμένου παραδείγματος.

Τρόπος Επίλυσης	Υπολογιστικός χρόνος (sec)
Μεθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών	62365.12
Μέθοδος χρονο-προέλασης	329056.2

Πίνακας 8.8: Απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος ανάλογα με την επιλογή τρόπου επίλυσης για το παράδειγμα της βελτιστοποίησης. Η μέθοδος χρονο-προέλασης χρησιμοποιεί πρώτης τάξης ακρίβεια στον χώρο, για το ευθύ αλλά και για το συζυγές πρόβλημα. Για κάθε κύκλο βελτιστοποίησης ο επιλύτης χρονο-προέλασης εκτελείται για τρεις χρονικές περιόδους.

Ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτεί ο επιλύτης της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών είναι μόλις το ένα πέμπτο ($\frac{1}{5}$) του κλασικού επιλύτη χρονο-προέλασης. Μάλιστα, ο μειωμένος αυτός χρόνος έχει πολύ μικρό αντίκτυπο στην ποιότητα των αποτελεσμάτων καθώς εμφανίζονται ελάχιστες διαφορές στις τελικές γεωμετρίες.

Κεφάλαιο 9

Ανακεφαλαίωση, Συμπεράσματα και Προτάσεις για Μελλοντικές Εργασίες

Στη διπλωματική αυτή εργασία πραγματοποιείται ανάπτυξη λογισμικού με σκοπό την επίλυση της ατριβούς και μη-μόνιμης ροής με τη Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών. Η Μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών είναι μια προσεγγιστική μέθοδος η οποία κάνει χρήση σειρών Fourier ώστε να περιγράψει την τελική λύση του φαινομένου ροής. Πιο συγκεκριμένα, ανάλογα με τον αριθμό αρμονικών N_H που επιλέγεται, ισοδύναμα όρων των σειρών Fourier, η περίοδος του φαινομένου χωρίζεται σε $2N_H + 1$ ισομήκη διαστήματα. Παράγονται συνολικά $2N_H + 1$ εξισώσεις από τις οποίες απουσιάζει ο χρονικά μεταβαλλόμενος όρος και οι οποίες αποτελούν ένα πεπλεγμένο σύστημα το οποίο και επιλύεται. Η τελική λύση καθεμιάς από αυτές τις εξισώσεις αποτελεί την πραγματική λύση του πεδίου ροής για την αντίστοιχη χρονική στιγμή. Μέσω αυτών των λύσεων υπολογίζονται οι αρμονικές και συνεπώς μπορεί να αναπαραχθεί το πεδίο για οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Η μελέτη που πραγματοποιείται αφορά προβλήματα εξωτερικής αεροδυναμικής όπου οι υπό μελέτη γεωμετρίες είναι αεροτομές, ενώ τα φαινόμενα που μελετώνται προκαλούνται από την περιοδική μεταβολή της γωνίας πρόσπτωσης της επ' άπειρον ροής. Το απαραίτητο πλέγμα που χρησιμοποιείται κάθε φορά για τη διακριτοποίηση των πεδιακών εξισώσεων κατασκευάζεται από λογισμικό παραγωγής μη-δομημένου και μη-οριόδετου πλέγματος το οποίο κάνει χρήση της Μεθόδου Τεμνομένων Κυψελών (*Cut-Cell Method*) και το οποίο έχει αναπτυχθεί από την ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ [1]. Από την ΜΠΥΡ&Β προέρχεται και το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε ως βάση για τη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία. Ειδικότερα, χρησιμοποιήθηκε κώδικας που κάνει χρήση της μεθόδου χρονο-προέλασης για την επίλυση της εκάστοτε ατριβούς ροής, και ο οποίος τροποποιήθηκε ώστε να επιλύει το υπό μελέτη πρόβλημα κάνοντας χρήση της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών. Το συγκεκριμένο λογισμικό αναπτύχθηκε σε γλώσσα προγραμματισμού C++.

Τα παραδείγματα που μελετήθηκαν επιλέχθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να πραγματοποιηθεί όσο το δυνατόν πιο ολοκληρωμένη ανάλυση. Έτσι, μελετήθηκε η συμπεριφορά της Μεθό-

δου Ισορροπίας των Αρμονικών σε συμμετρικές αλλά και σε μη-συμμετρικές αεροτομές, ενώ χρησιμοποιήθηκαν απλές αλλά και σύνθετες περιοδικές διαταραχές. Τέλος, πραγματοποιήθηκε συνοπτική μελέτη της χρήσης της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών σε διαδικασία βελτιστοποίησης με τη χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου.

9.1 Συμπεράσματα

Από τα παραδείγματα που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 8 διαπιστώνεται ότι η χρησιμοποιούμενη μέθοδος εμφανίζει πολύ μικρότερους χρόνους επίλυσης σε σχέση με τη μέθοδο χρονο-προέλασης. Ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος για την επίλυση ενός προβλήματος μη-μόνιμης ροής κυμαίνεται από $\left(\frac{1}{8}\right)$ έως $\left(\frac{1}{3}\right)$ του χρόνου της μεθόδου χρονο-προέλασης. Σε αυτό συνεισφέρει ιδιαίτερος και η φύση της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών καθώς αγνοεί πλήρως το μεταβατικό φαινόμενο εξοικονομώντας έτσι υπολογιστικό χρόνο.

Όταν η μέθοδος χρησιμοποιείται σε διαδικασία βελτιστοποίησης το κέρδος σε υπολογιστικό χρόνο γίνεται πιο αισθητό καθώς οι υπολογιστικοί χρόνοι αυξάνονται σημαντικά λόγω των επαναλήψεων που εκτελούνται (*optimization loop*). Έτσι, στο παράδειγμα που μελετήθηκε, ενώ η χρήση της συζυγούς μεθόδου με τη μέθοδο χρονο-προέλασης απαιτεί περίπου 3.8 ημέρες ώστε να ολοκληρώσει έξι κύκλους βελτιστοποίησης, η Μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών απαιτεί μόλις 17 ώρες. Η συγκεκριμένη τιμή όμως δεν πρέπει να γενικευτεί διότι η χρησιμοποιούμενη διαταραχή είναι ιδιαίτερος απλή με αποτέλεσμα να απαιτούνται λίγες αρμονικές για την περιγραφή της. Περισσότερα αποτελέσματα που επιτρέπουν την εξαγωγή πιο ασφαλών συμπερασμάτων για τη Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών σε διαδικασία βελτιστοποίησης παρουσιάζονται σε διπλωματική εργασία που πραγματοποιήθηκε παράλληλα στην ΜΠΥΡ&Β [9].

Όταν γίνεται χρήση πολύπλοκης διαταραχής ο απαιτούμενος αριθμός αρμονικών αυξάνεται. Η σημαντικότερη δυσκολία που εμφανίζει η συγκεκριμένη μέθοδος είναι η επιλογή του κατάλληλου αριθμού αρμονικών που μπορούν να περιγράψουν το φαινόμενο. Γενικά, δεν υφίσταται κάποιος κανόνας που να υποδεικνύει πόσες αρμονικές απαιτούνται κάθε φορά, με αποτέλεσμα η επιλογή του αριθμού να εξαρτάται από την εμπειρία του μηχανικού.

Τέλος, παρατηρείται ότι όσο ο αριθμός αρμονικών αυξάνεται τόσο ο επιλύτης γίνεται πιο ασταθής όσον αφορά τη σύγκλιση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση της σύνθετης διαταραχής που χρησιμοποιήθηκε, καθώς όταν επιχειρήθηκε η χρήση έξι αρμονικών ο κώδικας απέτυχε επανειλημμένα να συγκλίνει. Αντίθετα, όταν έγινε χρήση επτά αρμονικών ο κώδικας συνέκλινε προσφέροντας ικανοποιητικά αποτελέσματα. Γίνεται έτσι αντιληπτό ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των αρμονικών ο επιλύτης εμφανίζει ιδιαίτερη ευαισθησία με αποτέλεσμα η σύγκλιση να καθίσταται επισφαλής.

9.2 Προτάσεις Για Μελλοντικές Εργασίες

Η μελέτη της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών σε καμιά περίπτωση δεν εξαντλείται με το πέρας της συγκεκριμένης εργασίας καθώς υπάρχουν πολλές εφαρμογές που μπορούν να αναλυθούν και οι οποίες αναμένεται να παράξουν πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Ειδικότερα, στη συγκεκριμένη εργασία η διαταραχή που χρησιμοποιήθηκε αφορούσε την περιοδική μεταβολή της γωνίας πρόσπτωσης σε ακίνητη αεροτομή. Έτσι, μια εφαρμογή που μπορεί να μελετηθεί είναι η χρήση κινούμενων αεροτομών η οποία μπορεί να συνδυαστεί είτε με σταθερή είτε με μεταβαλλόμενη γωνία της επ' άπειρον ροής.

Επίσης, η ταυτόχρονη παρουσία πολλών αεροτομών στο χωρίο ροής αποτελεί μια άλλη ενδιαφέρουσα παραλλαγή. Το συγκεκριμένο παράδειγμα μάλιστα μπορεί να βρει εφαρμογή και σε βιομηχανικό επίπεδο καθώς ένα τέτοιο πρόβλημα μπορεί να αντιπροσωπεύει τη μελέτη της περιοδικής ροής διαμέσου μιας βαθμίδας συμπιεστή.

Η χρήση της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών μπορεί να επεκταθεί και σε προβλήματα που δεν αφορούν την εξωτερική αεροδυναμική. Πιο συγκεκριμένα, η μελέτη της συμπεριφοράς της μεθόδου σε προβλήματα που αφορούν κλειστούς αγωγούς εμφανίζει αποτελεί ένα ακόμη πιθανό θέμα για μια μελλοντική διπλωματική εργασία.

Τέλος, ενδιαφέρον θα παρουσίαζε η εφαρμογή της μεθόδου σε προβλήματα που κάνουν χρήση άλλης μεθόδου μη-οριόδετων πλεγμάτων όπως για παράδειγμα η μέθοδος ψευδο-κυψελών (*Ghost-Cell*), ενώ προτείνεται η επέκταση της συγκεκριμένης μεθόδου σε προβλήματα τριών διαστάσεων (3D) καθώς και ο προγραμματισμός της σε κάρτες γραφικών (*GPU programming*).

Βιβλιογραφία

- [1] Κωνσταντίνος Σαμούχος. *Η συνεχής συζυγής μέθοδος σε μη-οριόδετα πλέγματα για τη βελτιστοποίηση στροβιλομηχανών*. Διαδακτορική διατριβή, Ε.Μ.Π. σε εξέλιξη.
- [2] Κυριάκος Χ Γιαννάκογλου. *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. 2006.
- [3] Γεώργιος Δ. Κανέλλης. Θεμελίωση και προγραμματισμός της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών στην αριθμητική επίλυση περιοδικών πεδίων ροής. Διπλωματική εργασία, Ε.Μ.Π, Οκτώβριος 2011.
- [4] Αντώνιος Β. Τάτσης. Μέθοδος των Τεμνομένων Κυψελών για 2Δ Χρονικά Μόνιμες και Μη-Μόνιμες Ροές. Προγραμματισμός και Διερεύνηση Προσταθεροποιητή Χαμηλών Αριθμών Mach για τον Ευθύ και Συζυγή Επιλύτη. Διπλωματική εργασία, Ε.Μ.Π, 2012.
- [5] Παναγιώτης-Γιάννης Βρυώνης. Μέθοδος των Τεμνομένων Κυψελών για 2Δ Χρονικά Μόνιμες και Μη-Μόνιμες Ροές. Προγραμματισμός και Διερεύνηση Προσταθεροποιητή Χαμηλών Αριθμών Mach για τον Ευθύ και Συζυγή Επιλύτη. Διπλωματική εργασία, Ε.Μ.Π, 2017.
- [6] Γεώργιος Μπεργελές. *Υπολογιστική Ρευστομηχανική*. Συμεών, 2006.
- [7] Νικόλαος Σημηριώτης. Η συνεχής συζυγής μέθοδος για περιοδικές ροές, με εφαρμογή της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών στην επίλυση του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος. Διπλωματική εργασία, Ε.Μ.Π, 2013.
- [8] Στέργιος Κατσανούλης. Προγραμματισμός Λογισμικού για την Επίλυση Μη-Μόνιμων Πεδίων Ροής με Κινούμενα Στερεά Όρια με τη μέθοδο των Τεμνομένων Κυψελών (Cut-Cell). Διπλωματική εργασία, Ε.Μ.Π, 2015.
- [9] Βασίλειος Καρανικόλας. Διατύπωση και Προγραμματισμός της Τεχνικής της Ισορροπίας των Αρμονικών σε Επιλύτη Ροής με τη Μέθοδο των Τεμνομένων Κυψελών (Cut-Cell) για Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Μορφής με τη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο. Διπλωματική εργασία, Ε.Μ.Π, 2017.
- [10] Δανάη Χατζηνικολάου. Προγραμματισμός και Εφαρμογή της Μεθόδου των Ψευδο-Κυψελών (Ghost-Cell) για 2Δ Χρονικά Μόνιμες Ατριβείς Ροές Συμπίεστου Ρευστού. Διπλωματική εργασία, Ε.Μ.Π, 2017.

-
- [11] Βασίλειος Παπαγεωργίου. Προγραμματισμός της Μεθόδου του Ίδιο-Γενικευμένου Διαχωρισμού (Proper Generalized Decomposition) για την Πρόλεξη και/ή τη Συμπίεση της Λύσης 2Δ Μόνιμων και Μη-Μόνιμων ΜΔΕ. Εφαρμογή στη Βελτιστοποίηση με Χρήση της Συζυγούς Μεθόδου. Διπλωματική εργασία, Ε.Μ.Π, 2017.
- [12] Lewy H. Courant R., Friedrichs K. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. *Mathematische Annalen*, 100:32–74, 1928.
- [13] Stephen F. Davis. An interface tracking method for hyperbolic systems of conservation laws. *Applied Numerical Mathematics*, November 1992.
- [14] Rajat Mittal Jung Hee Seo. A sharp-interface immersed boundary method with improved mass conservation and reduced spurious pressure oscillations. *Journal of Computational Physics*, pages 7347–7363, 2011.
- [15] Carl Ollivier-Gooch Krzysztof Michalak. Limiters for Unstructured Higher-Order Accurate Solutions of the Euler Equations. *AIAA*, January 2008.
- [16] Iaccarino G. Mittal R. Immersed boundary methods. *Annual Review of Fluid Mechanics*, pages 239–261, 2005.
- [17] Evangelos M. Papoutsis-Kiachagias and Kyriakos C. Giannakoglou. Continuous Adjoint Methods for Turbulent Flows, Applied to Shape and Topology Optimization: Industrial Applications. *Archives of Computational Methods in Engineering*, November 2014.
- [18] Charles S. Peskin. Flow patterns around heart valves: A numerical method. *Journal of Computational Physics*, pages 252–271, 1972.
- [19] Charles S. Peskin. The immersed boundary method. *Acta Numerica*, 2002.
- [20] Gianluca Iaccarino Qiqi Wang, Parviz Moin. Minimal repetition dynamic checkpointing algorithm for unsteady adjoint calculation. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 31:2549–2567, 2009.
- [21] Philip L. Roe. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes. *Journal of Computational Physics*, March 1981.
- [22] Dennis C. Jespersen Timothy J. Barth. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. *AIAA*, January 1989.
- [23] Venkat Venkatakrishnan. On the accuracy of limiters and convergence to steady state solutions. *AIAA*, January 1993.
-