



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ**  
**ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ**  
**ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ**  
**& ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ**

**Αριθμητική προσομοίωση αεροελαστικής απόκρισης  
αεροτομής και έλεγχος με ενεργητικές μεθόδους**

Διπλωματική εργασία

Μιχαήλ Γ. Λογοθέτη-Αγαλιώτη

Επιβλέπων: Κ. Χ. Γιαννάκογλου  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2012



# Ευχαριστίες

Από τη θέση αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου, κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου, για τη δυνατότητα που μου προσέφερε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον και πρωτότυπο θέμα, καθώς και για τις χρήσιμες συμβουλές και την καθοδήγηση που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια της ενασχόλησής μου με το παρόν. Επιπλέον, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την εμπιστοσύνη του στο πρόσωπό μου, από την αρχή έως το πέρας των σπουδών μου, καθώς και για το σημαντικό ρόλο που διαδραμάτισε στην ακαδημαϊκή εξέλιξή μου κατά τα τελευταία 5 χρόνια.

Παράλληλα, θα ήθελα ξεχωριστά να ευχαριστήσω τον Δρ. Ξ. Τρομπούκη, τόσο για τη βοήθεια που μου προσέφερε, όσο και για την εξαιρετική συνεργασία που είχαμε, στο πλαίσιο της ενασχόλησής μου με το παρόν. Επίσης, τον ευχαριστώ για τις σημαντικές γνώσεις και την εμπειρία που μου μετέδωσε, αλλά και για τον πολύτιμο χρόνο που αφειδώς μοιράστηκε μαζί μου, συζητώντας για θέματα επιστημονικά και μη.

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα επίσης να εκφράσω ιδιαίτερες ευχαριστίες στη Δρ. Β. Ασούτη, για την προθυμία και το χρόνο που διέθεσε ώστε να ξεπεραστούν οι δυσκολίες, κυρίως στα τεχνικά ζητήματα που προέκυψαν κατά την εκπόνηση αυτής της εργασίας, αλλά και για την καθοριστική συνεισφορά της στη διαμόρφωση ενός ευχάριστου και δημιουργικού περιβάλλοντος εργασίας.

Τέλος, νιώθω την υποχρέωση να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου σε όλους τους ερευνητές της ΜΠΥΡ&B/ΕΘΣ που γνώρισα κατά τη διάρκεια των σπουδών μου, για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφεραν, όποτε και αν τη χρειάστηκα.



Στην οικογένειά μου.



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ  
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ  
& ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Αριθμητική προσομοίωση αεροελαστικής απόκρισης αεροτομής και έλεγχος με ενεργητικές μεθόδους

Διπλωματική Εργασία

Μιχαήλ Γ. Λογοθέτη-Αγαλιώτη

Επιβλέπων: Κ. Χ. Γιαννάκογλου

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2012

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με την προσομοίωση της αεροελαστικής απόκρισης αεροτομής μέσω της αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων Euler και με την προεργασία για την εφαρμογή τεχνικών ενεργητικού ελέγχου ροής για την καταστολή των αεροδυναμικά επαγόμενων ταλαντώσεων σε αυτήν. Ως προς το τελευταίο, η εργασία φτάνει ένα βήμα πριν την εφαρμογή μεθόδων βελτιστοποίησης για τον υπολογισμό του βέλτιστου τρόπου ελέγχου της ροής. Βασικό τμήμα και συνεισφορά της εργασίας είναι η επέκταση του λογισμικού αεροδυναμικής ανάλυσης που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της ερευνητικής δραστηριότητας της ΜΠΥΡ&B/ΕΘΣ στο παρελθόν, με τον προγραμματισμό ενός επιλύτη αεροελαστικών προβλημάτων. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στο τμήμα του λογισμικού που αφορά στη συμπεριφορά του στερεού σώματος (δηλαδή εδώ της αεροτομής), ενώ παράλληλα με τον προγραμματισμό του λογισμικού παρατίθεται η πλήρης μαθηματική θεωρία που διέπει την αριθμητική προσομοίωση αεροελαστικών προβλημάτων. Στη συνέχεια, ο αεροελαστικός επιλύτης πιστοποιήθηκε βάσει πειραματικών μετρήσεων και χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση αεροελαστικών προβλημάτων αεροτομής, δύο βαθμών ελευθερίας. Έτσι, διαπιστώθηκε ότι, υπό συγκεκριμένες συνθήκες, μία αεροτομή μπορεί να έχει ασταθή αεροελαστική απόκριση. Για το λόγο αυτό, επεκτείνοντας τις δυνατότητες του αερο-ελαστικού επιλύτη που προγραμματίστηκε, δημιουργήθηκε ένας αερο-σερβο-ελαστικός επιλύτης, ο οποίος στηρίζεται στην ανάδραση των μεταβλητών κατάστασης του συστήματος, προκειμένου να υπολογίσει την απαιτούμενη δράση ελέγχου που πρέπει να εφαρμοστεί στο σύστημα. Η συμπεριφορά αυτή καθορίζεται από έναν αναλογικό νόμο ελέγχου, ενώ ως επενεργητές χρησιμοποιήθηκαν μη-μόνιμες δέσμες ρευστού (jets), οι οποίες στόχο έχουν να τροποποιήσουν το ροϊκό πεδίο που σχηματίζεται γύρω από την αεροτομή. Η επιλογή των βασικών παραμέτρων του αερο-σερβο-ελαστικού προβλήματος είναι αυθαίρετη, ωστόσο η συνέχιση της εργασίας αυτής επιβάλλει τη χρήση μεθόδων βελτιστοποίησης για τον

καθορισμό τους. Η παρούσα διπλωματική εργασία προετοιμάζει το έδαφος για την εφαρμογή κατάλληλης μεθόδου βελτιστοποίησης, στο πρόβλημα αυτό.

---



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS  
DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING  
FLUIDS SECTION  
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES  
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

Numerical aeroelastic simulation of an airfoil and active flow control

Diploma Thesis

Michail G. Logothetis -Agaliotis

Advisor: K. C. Giannakoglou

Professor NTUA

Athens, July 2012

The present diploma thesis investigates the aeroelastic response of an airfoil and develops background computational tools for the implementation of active flow control techniques for the suppression of aeroelastic instabilities. The main contribution of this thesis is the development of an aero-elastic solver by coupling the pre-existing aerodynamic (Euler equations) solver, developed in the Parallel CFD & Optimization Unit of the Lab. of Thermal Turbomachines, with a new elastic solver developed in this thesis. Emphasis is also given in programming the portion of the software manipulating the motion of the aerodynamic body (airfoil). In the same time, it is attempted to establish the mathematical model for the numerical simulation of aeroelastic applications. The aero-elastic solver, developed in this thesis, is firstly validated in a pitching airfoil case by comparing numerical results with experimental measurements. Subsequently, the validated solver is used for the prediction of the aeroelastic response of a 2-degree-of-freedom airfoil. It is confirmed that, under certain conditions, the aeroelastic response of an airfoil may be unstable. Thus, the aforementioned aero-elastic solver was further upgraded in order to perform closed-loop aero-servo-elastic computations, based on the feedback of the state variables of the system to determine the required control output. Unsteady jets were employed as actuators for the adjustment of the developed flow field around the airfoil. The time-dependent jet mass flow is computed by using a proportional control law. The values of the gains of the feedback control and the jet positions are selected arbitrarily. Future work includes the use of optimization methods for the calculation of their optimal values. This diploma thesis provides the necessary background for the application of such optimization schemes.



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1	Τεχνικές ελέγχου ροής ρευστού . . . . .	1
1.1.1	Παθητικός έλεγχος . . . . .	2
1.1.2	Ενεργητικός έλεγχος . . . . .	9
1.2	Παρουσίαση και δομή της εργασίας . . . . .	30
1.2.1	Σκοπός της εργασίας . . . . .	30
1.2.2	Δομή της εργασίας . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Οι εξισώσεις Euler και η διακριτοποίηση αυτών</b>	<b>33</b>
2.1	Διατύπωση των εξισώσεων . . . . .	33
2.2	Η παραδοχή του τελείου αερίου . . . . .	34
2.3	Πρόβλημα Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων . . . . .	36
2.4	Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων . . . . .	37
2.5	Διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου . . . . .	42
2.6	Διακριτοποίηση των εξισώσεων . . . . .	43
2.6.1	Υπολογισμός των διανυσμάτων ροής . . . . .	44
2.6.2	Διακριτοποίηση του ψευδο-χρονικού όρου . . . . .	45
2.7	Επιβολή οριακών συνθηκών και η διακριτοποίηση αυτών . . . . .	46
2.8	Μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης στον ψευδο-χρόνο . . . . .	50
2.8.1	Ο επαναληπτικός αλγόριθμος Jacobi . . . . .	51
2.9	Χρονικά μη-μόνιμες εξισώσεις ροής . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Αεροελαστικότητα, ελαστικές εξισώσεις και σύζευξη με την αεροδυναμική</b>	<b>55</b>
3.1	Αεροελαστικότητα . . . . .	55
3.1.1	Το φαινόμενο του Πτερυγισμού (Flutter) . . . . .	56
3.1.2	Το φαινόμενο LCO . . . . .	57
3.1.3	Περιοχή ευσταθούς λειτουργίας αεροτομής . . . . .	58
3.2	Μεταβαλλόμενο χωρίο και διαχείριση πλέγματος . . . . .	59
3.3	Οι εξισώσεις ροής για μεταβαλλόμενο χωρίο . . . . .	64
3.3.1	Διακριτοποίηση του πραγματικού χρονικού όρου . . . . .	64
3.3.2	Επαναδιατύπωση των οριακών συνθηκών . . . . .	67
3.4	Ελαστικές εξισώσεις ισορροπίας απαραμόρφωτης αεροτομής . . . . .	68
3.4.1	Εξισώσεις κίνησης . . . . .	69

---

3.4.2	Αδιάστατες παράμετροι . . . . .	70
3.5	Αδιαστατοποίηση των ελαστικών εξισώσεων . . . . .	72
3.6	Αριθμητική ολοκλήρωση των ελαστικών εξισώσεων . . . . .	73
3.7	Αλγόριθμος επίλυσης αεροελαστικών προβλημάτων . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Αριθμητική επίλυση αεροελαστικών προβλημάτων</b>	<b>79</b>
4.1	Εξαναγκασμένη περιοδική ταλάντωση αεροτομής - Πιστοποίηση λογισμικού . . . . .	80
4.2	Αεροελαστική ανάλυση αεροτομής δύο βαθμών ελευθερίας . . . . .	84
4.2.1	Περίπτωση 1: Ευσταθής απόκριση . . . . .	84
4.2.2	Περίπτωση 2: Ασταθής απόκριση . . . . .	86
4.2.3	Περίπτωση 3: Παραμετρική διερεύνηση . . . . .	86
4.3	Σύγκριση ποιότητας αποτελεσμάτων CPU-GPU & υπολογιστικό κόστος	88
<b>5</b>	<b>Έλεγχος ροής</b>	<b>93</b>
5.1	Ελεγκτές και εφαρμογές . . . . .	93
5.1.1	Γενικά . . . . .	93
5.1.2	Τύποι κλασικών ελεγκτών . . . . .	95
5.1.3	Ο έλεγχος ως πρόβλημα βελτιστοποίησης . . . . .	98
5.1.4	Εφαρμογή στην αεροδυναμική/αεροελαστικότητα . . . . .	99
5.2	Υλοποίηση του ελέγχου . . . . .	101
5.2.1	Το νέο υπολογιστικό χωρίο και η διακριτοποίηση αυτού . . . . .	102
5.2.2	Επαναδιατύπωση των οριακών συνθηκών στην περιοχή τοποθέτησης των δεσμών . . . . .	105
5.2.3	Ο νόμος ελέγχου . . . . .	108
5.3	Έλεγχος ροής σε ασταθείς αεροελαστικές εφαρμογές . . . . .	110
5.3.1	Περίπτωση 1: Συμμετρική τοποθέτηση των δεσμών ως προς τη χορδή της αεροτομής . . . . .	111
5.3.2	Περίπτωση 2: Ασύμμετρη τοποθέτηση των δεσμών ως προς τη χορδή της αεροτομής . . . . .	111
5.3.3	Επίλογος . . . . .	118
<b>6</b>	<b>Ανακεφαλαίωση-Συζήτηση-Συμπεράσματα</b>	<b>119</b>
<b>A'</b>	<b>Θεμελιώδη θεωρήματα από τα Μαθηματικά</b>	<b>123</b>
A'.1	Το θεώρημα Green-Gauß . . . . .	123
A'.2	Το θεώρημα του Leibniz . . . . .	124
<b>B'</b>	<b>Πρωτότυπη εφαρμογή του παθητικού ελέγχου ροής</b>	<b>125</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>131</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Τεχνικές ελέγχου ροής ρευστού

Ο έλεγχος της ροής των ρευστών αποτελεί ένα σημαντικό κεφάλαιο συστηματικής έρευνας εδώ και δύο δεκαετίες, ωστόσο διαρκώς αποκτά αυξανόμενο επιστημονικό ενδιαφέρον. Η χρήση ελέγχου ροής σε εφαρμογές μηχανικής ρευστών προσφέρει νέες λύσεις για την προστασία έναντι της υπερβολικής ανάπτυξης του οριακού στρώματος και του φαινομένου της αποκόλλησης της ροής. Η αποκόλληση της ροής συνδέεται με μια σειρά αρνητικών επιδράσεων, όπως είναι η μείωση της άνωσης (όταν αυτή αποτελεί το ζητούμενο σε μια εφαρμογή), η αύξηση της οπισθέλκουσας και η δημιουργία αεροδυναμικού θορύβου, ο οποίος πλέον δεν μπορεί να αγνοείται.

Ακόμη, με χρήση του ελέγχου ροής σε εφαρμογές αεροδυναμικής περιορίζεται η ένταση των κρουστικών κυμάτων και οι αυξητικές τάσεις της οπισθέλκουσας κοντά στη διηχητική περιοχή, επιτυγχάνεται ο έλεγχος καταστάσεων απώλειας στήριξης και συνολικά μεγιστοποιούνται οι επιδόσεις των υπαρχουσών αεροδυναμικών κατασκευών.

Τέλος, η χρήση του ελέγχου ροής σε πολλές άλλες διαφορετικές εφαρμογές, μπορεί να οδηγήσει, για παράδειγμα, στη βέλτιστη καύση των χημικών ουσιών, ενισχύοντας την τυρβώδη ανάμειξη αυτών και μειώνοντας τις συγκεντρώσεις των ρυπαντών στα καυσαέρια. Επίσης, στον αποδοτικό έλεγχο της θερμικής ροής σε ένα πολύπλοκο ενεργειακό σύστημα, ή ακόμη και στη μείωση του κόστους κατασκευής ενός ηλεκτροχημικού βιοαισθητήρα. Ο έλεγχος της ροής ενός ρευστού μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους, οι οποίοι εντάσσονται σαφώς σε δύο κατηγορίες.

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν μέθοδοι που αφορούν στον παθητικό έλεγχο της ροής (Passive Flow Control [1], [2]). Ο παθητικός έλεγχος, βασίζεται στην απλή ιδέα της τοποθέτησης σωμάτων συγκεκριμένης γεωμετρικής μορφής σε μια δεδομένη κατασκευή με στόχο τη βελτίωση των αεροδυναμικών της χαρακτηριστικών. Για παράδειγμα, μπορούν να αναφερθούν οι γεννήτριες δίνης (Vortex Generators) που τοποθετούνται σε διάφορα τμήματα των αεροσκαφών (άτρακτος, πτέρυγες, κάθετο σταθερό) με στόχο να αλλοιώσουν τα χαρακτηριστικά της ροής. Συγκεκρι-

---

μένα, προκαλούν αύξηση της κατανομής της διατμητικής τάσης στην επιφάνεια της ατράκτου, ώστε να αποφευχθεί ή έστω να καθυστερήσει η εμφάνιση του φαινομένου της αποκόλλησης της ροής, το οποίο συνεπάγεται πρόσθετες (ανεπιθύμητες) αεροδυναμικές απώλειες.

Στη δεύτερη κατηγορία αντιθέτως, ο έλεγχος της ροής γίνεται με ενεργητικό τρόπο (Active Flow Control [2], [3], [4]), δηλαδή με τεχνικές ελεγχόμενης αναρρόφησης (*Suction*) ή έγχυσης (*Blowing*) ρευστού στην κύρια ροή. Η ενεργητική μέθοδος ελέγχου μπορεί να έχει πολλές παραλλαγές και να εφαρμοστεί με επιτυχία σε τεράστιο πλήθος εφαρμογών, που δεν σχετίζονται αναγκαστικά με την αεροδυναμική.

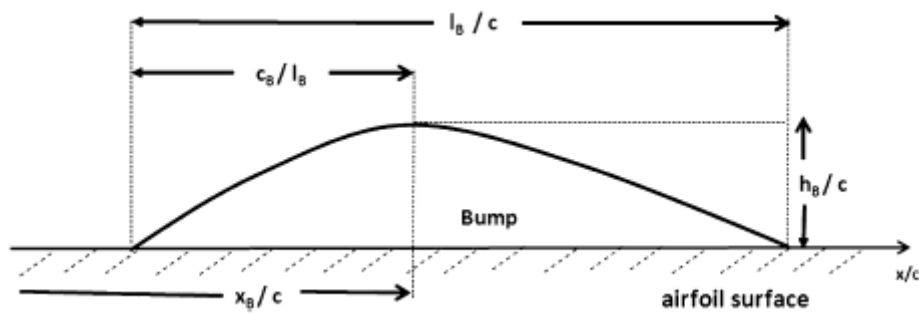
Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν οι κυριότερες μορφές παθητικού και ενεργητικού ελέγχου ροής ρευστού καθώς επίσης θα παρατεθούν ενδεικτικά παραδείγματα εφαρμογών τους.

### 1.1.1 Παθητικός έλεγχος

Όπως ήδη αναφέρθηκε, ο παθητικός έλεγχος της ροής ρευστού συνίσταται στην τροποποίηση της γεωμετρίας των αεροδυναμικών επιφανειών μιας κατασκευής, προκειμένου να μεταβληθεί το διαμορφούμενο πεδίο ροής γύρω από τις εν λόγω επιφάνειες και να προκύψουν πρόσθετα αεροδυναμικά οφέλη. Η τροποποίηση αυτή μπορεί να είναι μόνιμη, κατά την οποία οι αεροδυναμικές επιφάνειες ενισχύονται με ειδικούς σχηματισμούς κατά τη στιγμή της κατασκευής τους, όπως δηλαδή συμβαίνει στην περίπτωση των γεννητριών δίνης. Παράλληλα, υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες η τροποποίηση αυτή μπορεί να συμβαίνει κατά τη φάση της λειτουργίας της κατασκευής, δηλαδή όποτε ο πιλότος (στην περίπτωση που η υπό-μελέτη κατασκευή είναι το αεροσκάφος) αποφασίζει ότι υπάρχει η ανάγκη της αύξησης της άνωσης των πτερυγών ή της μείωσης της ταχύτητας πτήσης. Παρακάτω, ακολουθεί μια σύντομη αναφορά σε δύο πολύ διαφορετικές και πρωτότυπες εφαρμογές των γεννητριών δίνης που μελετώνται, ενώ στο παράρτημα Β' παρατίθεται άλλη μία, αναδεικνύοντας έτσι την τεράστια δυναμική χρήσης τους για την επίλυση σημαντικών τεχνολογικών προβλημάτων.

#### Εφαρμογή στην εξωτερική αεροδυναμική

Στη μελέτη [5], χρησιμοποιείται μια διδιάστατη αεροτομή τύπου *RAE5243* και εφαρμόζονται τεχνικές παθητικού και ενεργητικού ελέγχου ροής προκειμένου να διαπιστωθεί αν είναι εφικτός ο περιορισμός του σχηματιζόμενου κρουστικού κύματος, και συνακόλουθα η μείωση της οπισθέλκουσας που οφείλεται σε αυτό το φαινόμενο, υπό διηχητικές συνθήκες ροής. Σε αυτό το σημείο, θα παρουσιαστεί μόνο η προσέγγιση του προβλήματος με χρήση παθητικών μεθόδων ελέγχου. Έτσι, επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί μια διδιάστατη κατανομή πάχους επιπλέον του στερεού ορίου της αεροτομής, επειδή συνδυάζει τα πλεονεκτήματα της μείωσης της οπισθέλκουσας που συνοδεύει την ανάπτυξη κρουστικού κύματος και της μικρής συνεισφοράς στην αύξηση της παρασιτικής οπισθέλκουσας [2]. Στο σχήμα 1.1 φαίνεται ακριβώς αυτή η διαμόρφωση.



Σχήμα 1.1: Η διδιάστατη διαμόρφωση που υπερτίθεται στο στερεό όριο της αεροτομής [5].

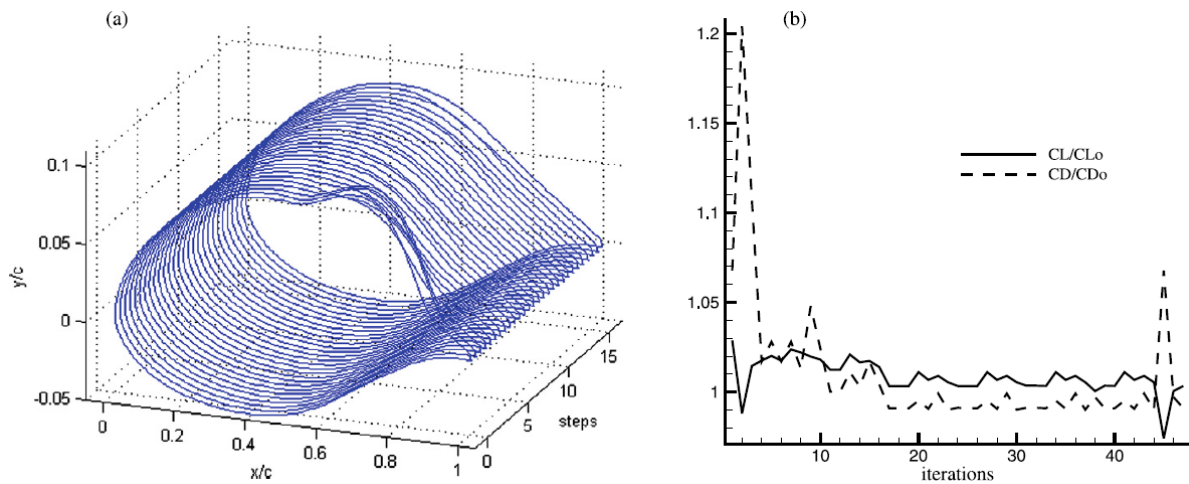
Αρχικές τιμές παραμέτρων				Βέλτιστες τιμές παραμέτρων					
$x_B$	$l_B$	$c_B/l_B$	$h_B$	$x_B^*$	$l_B^*$	$c_B/l_B^*$	$h_B^*$	$C_L^*$	$C_D^*$
0.82	0.40	0.80	0.012	0.6377	0.3737	0.5043	0.01232	0.5328	0.00996
								+0.54%	-0.98%

Πίνακας 1.1: Οι αρχικές και οι βέλτιστες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος [5].

Η διαδικασία βελτιστοποίησης που ακολουθήθηκε είχε στόχο τον προσδιορισμό των τιμών τεσσάρων μεταβλητών σχεδιασμού. Οι μεταβλητές αυτές φαίνονται στο σχήμα 1.1 και είναι το μέγιστο μήκος  $l_B$  και ύψος  $h_B$  της διαμόρφωσης, αδιαστατοποιημένα ως προς τη χορδή της αεροτομής, και η θέση στην οποία βρίσκεται το μέγιστο ύψος της διαμόρφωσης ως προς την ακμή πρόσπτωσης και το κατώφλι της διαμόρφωσης,  $c_B$  και  $x_B$  αντίστοιχα. Η βελτιστοποίηση έγινε με χρήση μεθόδων που βασίζονται στον υπολογισμό της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης και στον πίνακα 1.1 φαίνονται οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού, προ και μετά τη διαδικασία. Να σημειωθεί επίσης ότι μοναδικός περιορισμός κατά τη βελτιστοποίηση ήταν ο συντελεστής άνωσης, ο οποίος ορίστηκε να έχει τιμή όχι μικρότερη από 0.5299, ενώ στόχος ήταν η ελαχιστοποίηση του συντελεστή αντίστασης της αεροτομής.

Το προφίλ της διαμόρφωσης όπως αυτό τέθηκε βάσει των τιμών του πίνακα 1.1 ήταν καθαρά μη συμμετρικό, ωστόσο κατά τη διαδικασία βελτιστοποίησης, μετά από 26 επαναλήψεις έλαβε σχεδόν συμμετρική μορφή. Επίσης, το μέγιστο του ύψους του πλησίασε το σημείο όπου εμφανίζεται το κρουστικό κύμα, ενώ η τιμή του μεγίστου παρέμεινε σχεδόν σταθερή. Στο σχήμα 1.2 φαίνονται οι μορφές τις οποίες έλαβε κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης η διαμόρφωση επί της αεροτομής και οι μεταβολές των τιμών της άνωσης και της οπισθέλκουσας σε σχέση με τη θέση του μεγίστου ύψους της διαμόρφωσης.

Στο σχήμα 1.3 φαίνεται σύγκριση μεταξύ της αεροτομής χωρίς τη διδιάστατη



Σχήμα 1.2: Οι μεταβολές του (a) σχήματος της διαμόρφωσης και (b) των τιμών των συντελεστών άνωσης και οπισθέλκουσας κατά την πορεία της διαδικασίας βελτιστοποίησης της μορφής της διδιάστατης διαμόρφωσης [5].

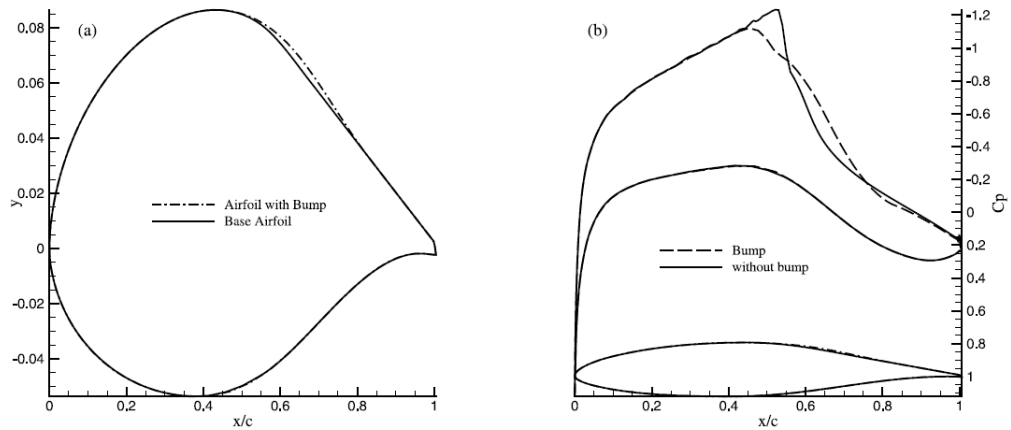
διαμόρφωση και της αεροτομής με αυτή. Τα μεγέθη είναι προφανώς κατάλληλα αδιαστατοποιημένα. Επίσης, στο ίδιο σχήμα φαίνονται οι κατανομές της πίεσης για τις δύο περιπτώσεις αεροτομής. Αυτό που μπορεί να συναχθεί ως συμπέρασμα, είναι ότι εφόσον η διαμόρφωση τοποθετηθεί στη θέση που προβλέπει η ανάλυση που προηγήθηκε, η οφειλόμενη στο κύμα κρούσης οπισθέλκουσα ελαττώνεται, αφού ελαττώνεται και η ισχύς του ίδιου του κύματος, με μικρή αύξηση της παρασιτικής οπισθέλκουσας. Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί και από το σχήμα 1.4, στο οποίο εικονίζονται οι γραμμές σταθερού αριθμού Mach. Συγκεκριμένα, η οπισθέλκουσα μειώθηκε κατά 3.12% ενώ η παρασιτική οπισθέλκουσα αυξάνεται μόλις κατά 0.72%, μεγέθη που συνολικά επιφέρουν ικανοποιητική βελτίωση της κατανάλωσης καυσίμου και του βεληνικού του αεροσκάφους. Έτσι, η αναλογία άνωσης-προς-αντίσταση αυξάνεται κατά 1.55% παρέχοντας σαφή ένδειξη ενίσχυσης των επιδόσεων του αεροσκάφους στο οποίο θα χρησιμοποιηθεί αυτή η μορφή παθητικού ελέγχου ροής.

### Εφαρμογή στη μεταφορά θερμότητας<sup>1</sup>

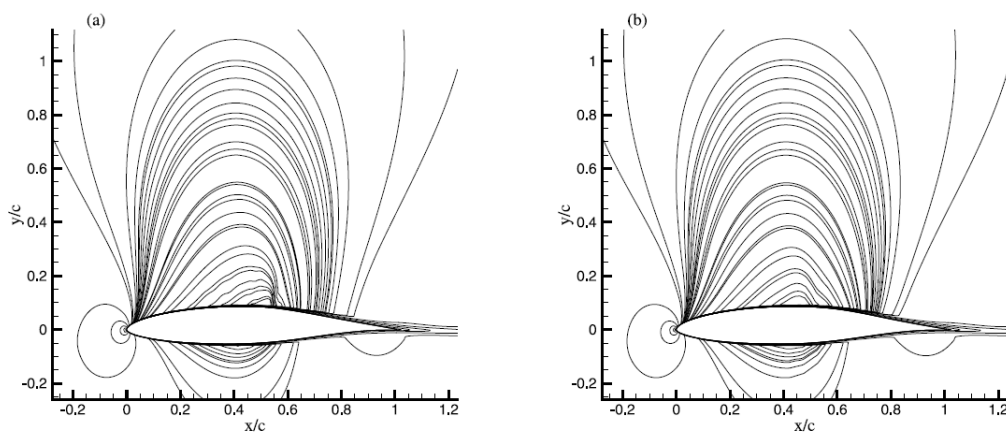
Στη μελέτη [6], διερευνάται η δυνατότητα χρήσης της τεχνικής του παθητικού ελέγχου ροής και συγκεκριμένα των γεννητριών δίνης, προκειμένου να ενισχυθεί η μεταφορά θερμότητας μεταξύ μιας θερμικής πηγής κυβικού σχήματος και του περιβάλλοντος ρευστού. Τυπική εφαρμογή επί της οποίας διεξήχθη αυτή η μελέτη

<sup>1</sup>Αν και στο πλαίσιο αυτής της εργασίας δε θα αναφερθούν άλλες εφαρμογές του (παθητικού ή ενεργητικού) ελέγχου σε προβλήματα μεταφοράς θερμότητας, το πεδίο αυτό έχει αρχίσει να συγκεντρώνει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον, ειδικά στη χρήση ενεργητικού ελέγχου. Για μια εισαγωγική παρουσίαση σε αυτό το θέμα, ο αναγνώστης παραπέμπεται στις βιβλιογραφικές αναφορές [7, 8].

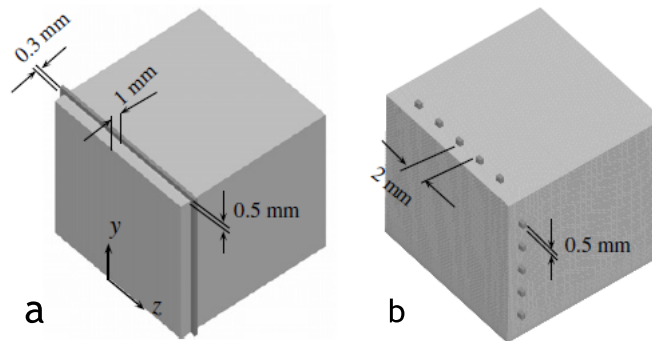




Σχήμα 1.3: (a) Η γεωμετρία της αεροτομής με και χωρίς τη διαμόρφωση, (b) η κατανομή του συντελεστή πίεσης με και χωρίς τη διαμόρφωση [5].



Σχήμα 1.4: Οι γραμμές σταθερού αριθμού Mach στην περίπτωση (a) χωρίς και (b) με τη διαμόρφωση [5].



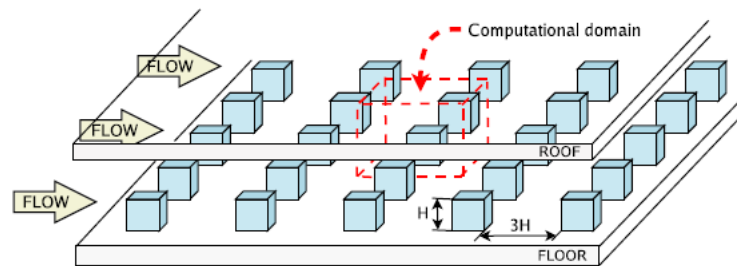
Σχήμα 1.5: Η μορφή των γεννητριών δίνης: Η περίπτωση (a) αντιστοιχεί σε γεννήτρια απλής γεωμετρίας ενώ η περίπτωση (b) σε πιο σύνθετη [6].

είναι τα σύγχρονα ηλεκτρονικά συστήματα και συγκεκριμένα τα ολοκληρωμένα κυκλώματα, τα οποία παράγουν τόσο μεγάλη θερμική ενέργεια ώστε να καθίσταται επιτακτική η ανάγκη της βελτίωσης των ψυκτικών τους μηχανισμών.

Η μελέτη της ροής γύρω από ένα κύβο έχει αποδείξει ότι διαφορετικοί τύποι ασταθειών της ροής οδηγούν στην ανάπτυξη διαφορετικών ροϊκών σχηματισμών. Σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds, η ροή είναι στρωτή παντού γύρω από τον κύβο, ενώ στα όρια των ακμών σημειώνονται ενδεχομένως αποκόλλησεις υπό μορφή περιοχών ανακυκλοφορίας, στις οποίες η ροή παραμένει στρωτή. Επιπλέον, οι περιοχές αυτές παραμένουν στάσιμες. Σε υψηλότερους αριθμούς Reynolds και, ειδικά, στον κρίσιμο, η αστάθεια του στρώματος διάτμησης μεταξύ των περιοχών αποκόλλησης-ανακυκλοφορίας και της εξωτερικής ροής (είναι γνωστή ως αστάθεια ροής Kelvin-Helmholtz) ακολουθείται από τη μετάβαση στην τύρβη, και η τυρβώδης ροή ξεκινά αμέσως μετά την περιοχή αποκόλλησης. Επιπλέον, οι στάσιμες περιοχές ανακυκλοφορίας αποκολλώνται και διαχέονται ως μετακινούμενες δίνες με ένα σταθερό ρυθμό εκπομπής από τις ακμές του κύβου. Το αποτέλεσμα είναι η ροή του ομόρρου του κύβου να μεταβαίνει σε πλήρως τυρβώδη κατάσταση.

Επειδή σε μια τυπική εφαρμογή ηλεκτρονικών δεν συναντάται μόνο ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα, για να γίνει πιο ρεαλιστικό το μοντέλο, στο υπό μελέτη χωρίο ροής προστέθηκαν πολλαπλοί κύβοι. Αυτή η συνύπαρξη έχει ως αποτέλεσμα οι στρόβιλοι που εκπέμπονται από κάθε κύβο να προσκρούουν και να επηρεάζουν το πεδίο ροής των υπολοίπων, δημιουργώντας πολύ σύνθετες αλληλεπιδράσεις. Βασικά στοιχεία που καθορίζουν αυτές τις αλληλεπιδράσεις είναι η απόσταση μεταξύ των κύβων, η κατανομή τους στο χώρο, η απόσταση αποκόλλησης μεταξύ τους και ο αριθμός Reynolds της ροής.

Η βασική ιδέα για την ενίσχυση της μεταφοράς θερμότητας συνίσταται στην τροποποίηση του τυρβώδους οριακού στρώματος που διαμορφώνεται υπό συγκεκριμένες συνθήκες. Αυτή η τροποποίηση περιλαμβάνει τη γένεση μικρών δινών στην επιφάνεια των εδρών των κύβων, με τη βοήθεια των γεννητριών δίνης (*vortex generators*). Οι γεννήτριες δίνης που δοκιμάστηκαν είναι δύο ειδών. Η πρώτη αποτελεί ένα απλό γεωμετρικά σώμα μικρού πάχους και ύψους που περιβάλλει τον κύβο (VG1), ενώ



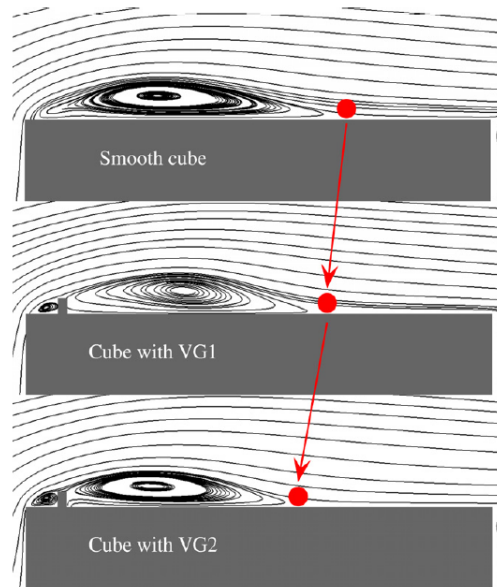
Σχήμα 1.6: Η διάταξη των κύβων που χρησιμοποιήθηκε κατά την υπολογιστική προσομοίωση [6].

η δεύτερη αποτελείται από πολλά μικρά σε μέγεθος σώματα κυβικής μορφής, που εναλλάσσονται μεταξύ τους αφήνοντας κενά διαστήματα (VG2). Οι δύο παραπάνω διαμορφώσεις φαίνονται ξεκάθαρα στο σχήμα 1.5.

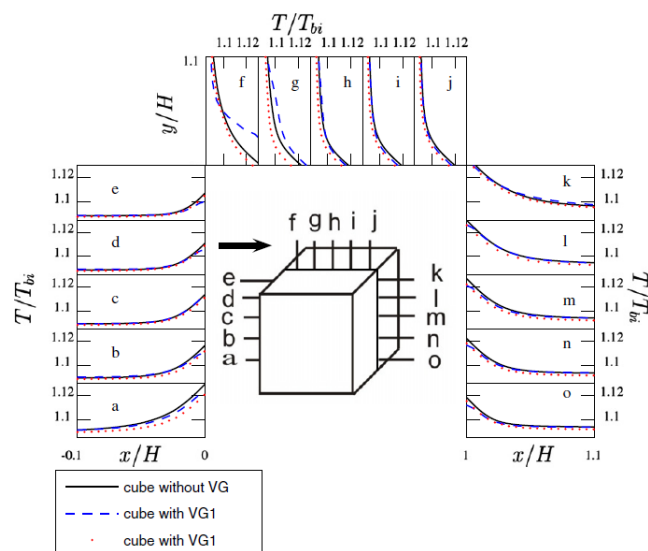
Ο αριθμός Reynolds της ροής, βασισμένος στη μέση ταχύτητα εισόδου του ρευστού και στο ύψος του καναλιού, είναι  $Re = 13000$  και ως μέθοδος επίλυσης των εξισώσεων επιλέχθηκε η τεχνική *LES-Large Eddy Simulation*. Το υπό-μελέτη πεδίο ροής περιλαμβάνει μια διάταξη συμμετρικά κατανομημένων σωμάτων κυβικού σχήματος, τα οποία εδράζονται σε μία επιφάνεια-τοίχωμα ενός διδιάστατου καναλιού. Η διάταξη αποτελείται από  $25 \times 10$  κύβους στην κατεύθυνση της ροής και κάθετα σε αυτήν, αντίστοιχα, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.6. Το μήκος της ακμής του κύβου είναι  $H = 15 \text{ mm}$  και το ύψος του καναλιού ροής είναι  $51 \text{ mm} (= 3.4H)$ . Η απόσταση μεταξύ των κέντρων δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών κύβων σε κάθε κατεύθυνση είναι  $60 \text{ mm} (= 4H)$ .

Στην περίπτωση της μεταφοράς θερμότητας, η αποκόλληση της ροής επηρεάζει τόσο θετικά, όσο και αρνητικά το συντελεστή μετάδοσης θερμότητας. Για παράδειγμα, στα σημεία αποκόλλησης και επανακόλλησης της ροής ενισχύεται η μεταφορά θερμότητας, λόγω της υψηλής τυρβώδους έντασης των στρωμάτων διάτμησης. Αντιθέτως, η ροή που παγιδεύεται στις περιοχές ανακυκλοφορίας θερμαίνεται διαρκώς, μειώνοντας έτσι το συντελεστή μετάδοσης θερμότητας. Προκειμένου να ενισχυθεί η θερμοροή δια μέσου των επιφανειών των κύβων, είναι επιθυμητή η διαμόρφωση πλήρως τυρβωδών οριακών στρωμάτων, τα οποία λόγω των μικρής κλίμακας δινών που εμπεριέχουν, οδηγούν σε υψηλούς ρυθμούς ανάμειξης και άρα συντελεστές συναγωγής. Για το λόγο αυτό τοποθετούνται οι γεννήτριες δίνης που ήδη παρουσιάστηκαν στα σημεία που αναμένονται αποκολλήσεις της ροής. Επίσης, ως επιπλέον όφελος των γεννητριών δίνης αναφέρεται η δημιουργία μεγαλύτερης κλίμακας δινών στον ομόρροου τους, οι οποίες τείνουν να απομακρύνουν από το οριακό στρώμα μεγάλα ποσά θερμότητας, ενώ οι σχηματισμοί αυτών των δινών εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τη μορφή των γεννητριών.

Οι περιοχές ανακυκλοφορίας που περιγράφηκαν, διαπιστώνονται και στο σχήμα 1.7, στο οποίο φαίνεται μια σύγκριση μεταξύ των σημείων επανακόλλησης της ροής στην επιφάνεια του κάθε κύβου, ανάλογα με τη διαμόρφωση γεννητριών δίνης που



Σχήμα 1.7: Χρονικά μέσες γραμμές ροής, προβεβλημένες στο επίπεδο  $x-y$  για  $z/H = 0$ , όπου φαίνονται οι περιοχές αποκόλλησης και ανακυκλοφορίας πάνω από την επιφάνεια των κύβων [6].



Σχήμα 1.8: Χρονικά μέση κατανομή θερμοκρασίας σε διάφορες θέσεις στο επίπεδο  $x-y$  για  $z/H = 0$ , όπου φαίνονται τα θερμοκρασιακά οριακά στρώματα που λαμβάνονται ανάλογα με τη διάταξη των γεννητριών δίνης σε κάθε κύβο [6].

έχει. Είναι προφανές ότι το μήκος της αποκολλημένης ροής είναι μεγαλύτερο για το λείο κύβο χωρίς διαμορφώσεις, και μειώνεται εμφανώς στις δύο άλλες περιπτώσεις. Επίσης, παρά το γεγονός ότι οι περιοχές ανακυκλοφορίας έχουν παρόμοιο σχήμα, η χρονική εξέλιξη αυτών είναι εντελώς διαφορετική. Ο αντίκτυπος όλων των παραπάνω στη διαμόρφωση του συντελεστή μετάδοσης θερμότητας, φαίνεται στο σχήμα 1.8, στο οποίο εντοπίζονται σημειακά υψηλότερες θερμοκρασίες σε περιοχές αποκόλλησης και ανακυκλοφορίας της ροής. Ο συντελεστής μετάδοσης θερμότητας υπολογίζεται με βάση τη σχέση  $h = \frac{q}{T_s - T_{bi}}$ , όπου  $T_s$  είναι η επιφανειακή θερμοκρασία των κύβων,  $T_{bi}$  είναι η μέση θερμοκρασία της ροής στην είσοδο του χωρίου και  $q$  είναι η θερμική ροή. Τα αποτελέσματα της μελέτης είναι αρκετά ενθαρρυντικά και συνοψίζονται στον πίνακα 1.2. Συνολικά, επιτεύχθηκε μια αύξηση του συντελεστή μετάδοσης θερμότητας της τάξης του 13.7% και 16.7% για την περίπτωση που χρησιμοποιούνται οι γεννήτριες VG1 και VG2, αντίστοιχα.

Έδρες κύβου	Κύβος χωρίς VG	Κύβος με VG1	Κύβος με VG2
Προσήνεμη	66	82.8	73.3
Επάνω	50	53	59.8
Υπήνεμη	38.8	44.2	43
Πλευρικές	45	49	54.7
Μέσος όρος	48.9	55.6	57.1

Πίνακας 1.2: Μέσος συντελεστής μετάδοσης θερμότητας σε κάθε πλευρά του κύβου [6].

### 1.1.2 Ενεργητικός έλεγχος

Οι ενεργητικές μέθοδοι ελέγχου της ροής ενός ρευστού, βασίζονται σε μια αρκετά διαφορετική ιδέα από τις παθητικές, ωστόσο έχουν τον ίδιο στόχο, δηλαδή την αλλαγή των χαρακτηριστικών της ροής κατά τρόπο που θα επιφέρει συνολική βελτίωση της απόδοσης μιας εφαρμογής. Έτσι, ενώ όπως φάνηκε ο παθητικός έλεγχος συνίσταται στην 'έξυπνη' παρεμβολή σωμάτων συγκεκριμένης γεωμετρίας στη ροή, ο ενεργητικός έλεγχος εστιάζει στην τροποποίηση της ροής μέσω της εξαναγκασμένης ανάμειξης της με δευτερεύοντα ρεύματα ρευστού. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ρεύματα ρευστού θα εισέρχονται ή θα εξέρχονται από το πεδίο ροής, από συγκεκριμένες θέσεις, οι οποίες καθορίζονται με παραμετρική βελτιστοποίηση. Με βάση τα παραπάνω, διακρίνονται δύο επιμέρους ενεργητικές τεχνικές, η χρονικά μόνιμη και η χρονικά μη-μόνιμη. Στην πρώτη κατηγορία εντάσσεται τόσο η ελεγχόμενη συνεχής έγχυση, όσο και η ελεγχόμενη συνεχής αναρρόφηση, ενώ στη δεύτερη κατηγορία εντάσσονται οι σύνθετες και οι παλλόμενες δέσμες ρευστού.

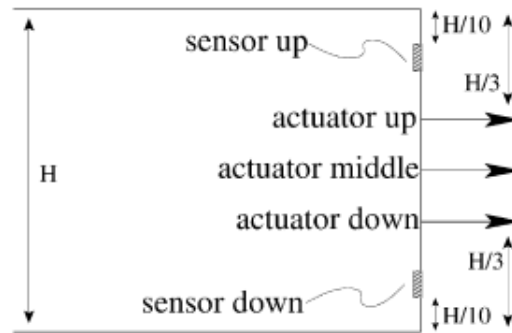
Κατασκευαστικά, κοινός παρονομαστής μεταξύ όλων των μεθόδων ενεργητικού ελέγχου είναι η ύπαρξη μιας (ή περισσότερων) οπής, μέσω της οποίας διέρχεται το δευτερεύον ρεύμα ρευστού και αλληλεπιδρά με την κύρια ροή. Οι δέσμες μόνιμης

ροής προϋποθέτουν μια σαφώς πολυπλοκότερη εγκατάσταση, που περιλαμβάνει όλες τις σωληνώσεις από τις οποίες θα διέρχεται το δευτερεύον ρεύμα του ρευστού, την αντλία με την οποία θα διακινείται και πιθανώς κάποια δεξαμενή για την αποθήκευσή του, όταν αυτό δε βρίσκεται σε ελεύθερη μορφή. Αντιθέτως, στις σύνθετες [9] και τις παλλόμενες δέσμες [10] η διάταξη είναι πολύ απλούστερη. Οι σύνθετες δέσμες βασίζονται στην περιοδική εναλλαγή μεταξύ των φάσεων της αναρρόφησης και της έγχυσης του ρευστού, κατά τρόπο ώστε η παροχή μάζας διαμέσου του ακροφυσίου δέσμης να παραμένει μηδενική ανά περίοδο. Έτσι, δημιουργούνται περιοδικοί παλμοί παροχής αποτελούμενοι από το ρευστό της κύριας ροής, το οποίο αναρροφάται και εκτοξεύεται με μεγάλη ταχύτητα, χάρη στην περιοδική κίνηση ενός διαφράγματος μέσα στο θάλαμο συγκέντρωσης του ρευστού. Οι παλλόμενες δέσμες αποτελούν επίσης πηγές περιοδικών παλμών παροχής, με τη διαφορά ότι η παροχή που εγχέεται ανά περίοδο είναι μη μηδενική.

Στο σημείο αυτό, αξίζει να τονιστεί ότι ο ενεργητικός έλεγχος ροών ανήκει σε μια πολυεπιστημονική ερευνητική περιοχή, αφού συνδυάζει τεχνολογίες αισθητήρων και επενεργητών, φυσική της ροής του ρευστού και αυτόματο έλεγχο, με τελικό στόχο τη μεταβολή των χαρακτηριστικών του πεδίου ροής κατά τον επιθυμητό τρόπο. Το μεγάλο επιστημονικό στοίχημα που ανακύπτει λοιπόν είναι η επίτευξη ελεγχόμενης μεταβολής των χαρακτηριστικών του πεδίου, μέσω ενός μηχανισμού ανατροφοδότησης και συνεχούς προσαρμογής στις (γενικά) χρονικά μεταβαλλόμενες απαιτήσεις κάθε εφαρμογής. Οι μέθοδοι ενεργητικού ελέγχου της ροής που μπορούν να πραγματοποιήσουν έλεγχο σε συνάρτηση με το χρόνο, προς το παρόν παραμένουν ασύμφορες, μιας και ο υπολογιστικός φόρτος και η πολυπλοκότητα που εμπεριέχεται στην επίλυση μη-μόνιμων ροών είναι μεγάλα. Ωστόσο, υπάρχει ερευνητικό ενδιαφέρον προς αυτήν την κατεύθυνση [11], το οποίο αναμένεται να ενταθεί στα επόμενα χρόνια. Παρακάτω, ακολουθεί μια σύντομη αναφορά σε εφαρμογές που χρησιμοποιούν τεχνικές ενεργητικού ελέγχου, κατά τρόπο που αναδεικνύει την τεράστια δυναμική χρήσης τους για την επίλυση σημαντικών τεχνολογικών προβλημάτων.

### Εφαρμογή χρονικά μόνιμων δεσμών στην εξωτερική αεροδυναμική

Στη μελέτη [12], στόχος ήταν ο έλεγχος της ροής γύρω από ένα σώμα τύπου 'Ahmed', δηλαδή μιας τυπικής τριδιάστατης γεωμετρικής μορφής που χρησιμοποιείται ευρέως από τις βιομηχανίες αυτοκινήτων για αεροδυναμικές μελέτες. Ωστόσο, το σώμα που χρησιμοποιήθηκε, το οποίο εδώ για λόγους απλότητας αναφέρεται ως 'Ahmed', είναι ελαφρά τροποποιημένο σε σχέση με την κλασική γεωμετρία, έχοντας οπίσθιο τμήμα τετραγωνικής διατομής, κάθετο στο οριζόντιο επίπεδο (γνωστό στη βιβλιογραφία και ως 'square back Ahmed body'). Σε αυτή τη μελέτη στόχος ήταν η επίτευξη του ελάχιστου συντελεστή αντίστασης  $C_d$  μέσω της υιοθέτησης τριών μόνιμων δεσμών έγχυσης ρευστού, στις θέσεις που φαίνονται στο σχήμα 1.9, όπου με  $H$  συμβολίζεται το συνολικό ύψος του σώματος. Παρά το γεγονός ότι οι υπολογισμοί και τα αποτελέσματα που παρατίθενται παρακάτω έγιναν για το 2Δ σώμα 'Ahmed' με τετραγωνικό οπίσθιο τμήμα, οι ερευνητές ισχυρίζονται ότι τα αποτελέσματα είναι παρόμοια και για την 3Δ περίπτωση, όχι όμως φυσικά και για



Σχήμα 1.9: Οι θέσεις των επενεργητών και των αισθητήρων που χρησιμοποιούνται για τον ενεργητικό έλεγχο στο οπίσθιο τμήμα του σώματος ‘Ahmed’ [12].

το κλασικό 3Δ σώμα.

Οι ταχύτητες των δεσμών επιλέγονται αυθαίρετα να δίνονται από μια έκφραση της μορφής:

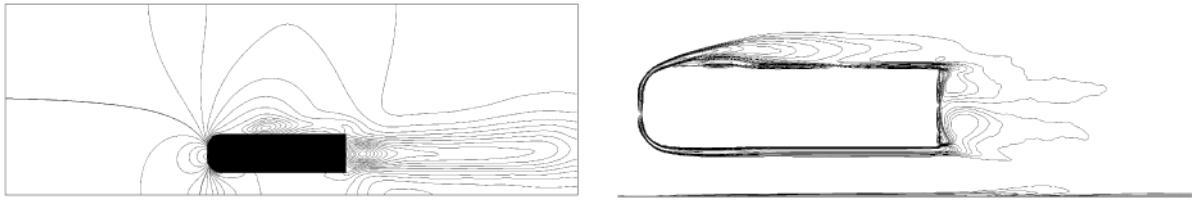
$$U_i = A \cdot U_{inf}$$

όπου το  $A$  λαμβάνει τις τιμές 0.15, 0.30, 0.60 και 0.90 για κάθε μια από τις τέσσερις περιπτώσεις που μελετήθηκαν. Η ελάχιστη τιμή του συντελεστή αντίστασης, επιτυγχάνεται όταν οι πυρήνες των δινών που σχηματίζονται στον ομόρρου του σώματος απομακρυνθούν από την επιφάνεια αυτού. Έτσι, ο στόχος των δεσμών έγχυσης ρευστού είναι ακριβώς αυτός, δηλαδή να μετατοπίσουν τους πυρήνες σχηματισμού δινών κατάντι της ροής. Σε αυτή τη μελέτη, εκτός από τη χρήση δεσμών μόνιμης ροής χρησιμοποιήθηκαν επίσης μη-μόνιμες, παλλόμενες δέσμες και αισθητήρες (βλ. σχήμα 1.9) οι οποίοι προσαρμόζουν την έγχυση του ρευστού στις συνθήκες της ροής, μέσω βρόχου ανάδρασης.

Η ρύθμιση της αποτελεσματικότητας των μόνιμων δεσμών συνίσταται στην βέλτιστη εκλογή της θέσης αλλά και της παροχής μάζας εισόδου/εξόδου για κάθε δέσμη. Κριτήριο για αυτή την εκλογή αποτελεί η επίδραση των δεσμών στο συντελεστή αντίστασης του σώματος. Θεωρώντας ότι θα χρησιμοποιηθεί μία δέσμη στο κέντρο του πίσω τοιχώματος του σώματος ‘Ahmed’, με τη βοήθεια παραμετρικής διερεύνησης για το συντελεστή  $A$  φανερώνεται ότι με αύξησή του, ο συντελεστής αντίστασης,  $C_d$ , βαίνει μειούμενος (βλ. πίνακα 1.3). Ωστόσο, μεταξύ των τιμών  $A = 0.6$  και  $A = 0.9$  η βελτίωση είναι μικρή, για το λόγο αυτό εξετάζεται η αποδοτικότητα της κάθε λύσης, που ορίζεται ως:

$$\xi = \frac{P_{saved} - P_{actuator}}{P_{total}}$$

Πρόκειται για ένα αδιάστατο μέγεθος, που στον αριθμητή περιέχει το κέρδος ισχύος σε σχέση με την περίπτωση χωρίς ενεργητικό έλεγχο ενώ στον παρονομαστή το συνολικό ποσό ισχύος που απαιτείται (λόγω της αεροδυναμικής συμπεριφοράς του σώματος ‘Ahmed’ και της λειτουργίας του επενεργητή συνεχούς δέσμης). Έτσι,



Σχήμα 1.10: Ισογραμμές για το μέσο συντελεστή πίεσης  $C_p$  (αριστερά) και τη στροβιλότητα  $\omega$  (δεξιά), στην περίπτωση διδιάστατης ροής [12].

όπως φαίνεται και στον πίνακα 1.4, η βέλτιστη τιμή του συντελεστή είναι  $A = 0.6$ , η οποία και χρησιμοποιήθηκε στη συνέχεια, αφού τιμές μικρότερες από αυτή δεν επηρεάζουν το συντελεστή αντίστασης  $C_d$ .

Case	$C_{d_{up}}$	Var. $C_{d_{up}}$ (%)	$C_{d_{down}}$	Var. $C_{d_{down}}$ (%)	$C_d$	Var. $C_d$ (%)
0	0.565	-	1.104	-	1.708	-
$J_{middle} (0.15U_\infty)$	0.555	-2	1.103	0	1.695	-1
$J_{middle} (0.30U_\infty)$	0.526	-7	1.038	-6	1.590	-7
$J_{middle} (0.60U_\infty)$	0.473	-16	0.854	-23	1.353	-21
$J_{middle} (0.90U_\infty)$	0.447	-21	0.841	-24	1.314	-23
$J_{down} (0.60U_\infty)$	0.526	-7	1.064	-4	1.616	-5
$J_{up} (0.60U_\infty)$	0.486	-14	0.920	-17	1.445	-15
$J_{two-jets} (0.60U_\infty)$	0.447	-21	0.815	-26	1.301	-24

Πίνακας 1.3: Μέσος συντελεστής αντίστασης για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $A$  [12].

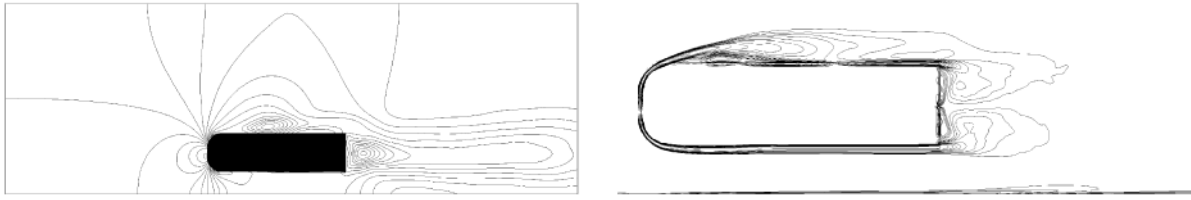
Case	$J_{middle} (0.15U_\infty)$	$J_{middle} (0.3U_\infty)$	$J_{middle} (0.6U_\infty)$	$J_{middle} (0.9U_\infty)$
$\xi$ (%)	2	15	41	31

Πίνακας 1.4: Αποδοτικότητα του ενεργητικού ελέγχου με μόνιμες δέσμες ρευστού [12].

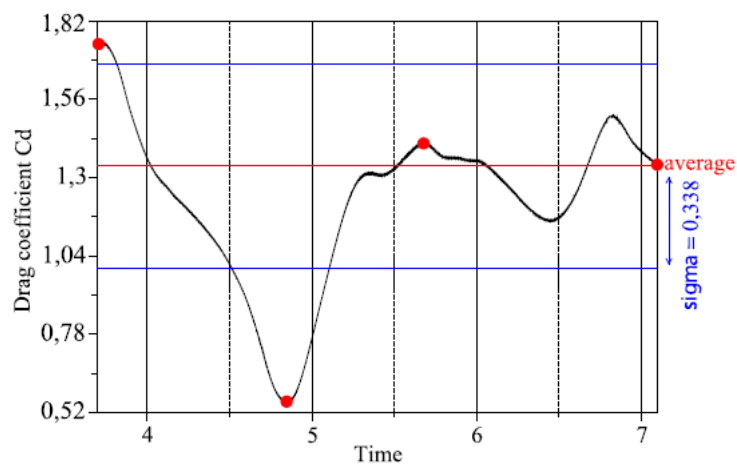
Όπως επίσης φαίνεται από τον πίνακα 1.3, η αποδοτικότερη θέση τοποθέτησης της δέσμης είναι στο μέσο του οπίσθιου τοιχώματος, αφού έτσι η επιτυγχανόμενη μείωση του συντελεστή αντίστασης φτάνει το 21%. Αν επιπλέον χρησιμοποιηθούν 2 ακόμη μόνιμες δέσμες τοποθετημένες σε κατακόρυφη απόσταση  $H/3$  από τις γωνίες του οπίσθιου τμήματος, δεν παρατηρείται περαιτέρω μείωση της αντίστασης.

Στο σχήμα 1.10 φαίνονται οι ισογραμμές για το μέσο συντελεστή πίεσης  $C_p$  και τη στροβιλότητα  $\omega$  για την περίπτωση χωρίς έλεγχο, ενώ στο σχήμα 1.11 φαίνονται τα ίδια ακριβώς μεγέθη στην περίπτωση που χρησιμοποιείται μία μόνιμη δέσμη





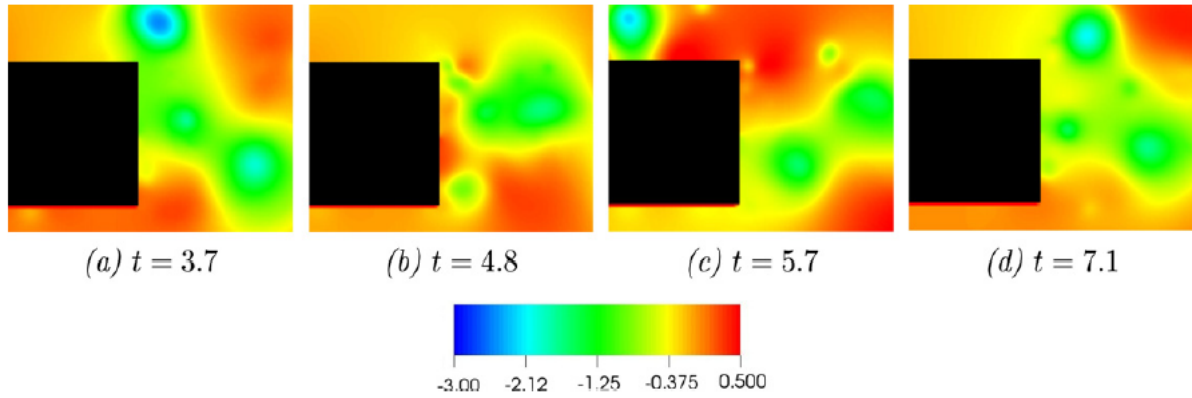
Σχήμα 1.11: Ισογραμμές για το μέσο συντελεστή πίεσης  $C_p$  (αριστερά) και τη στροβιλότητα  $\omega$  (δεξιά), στην περίπτωση διδιάστατης ροής και εφαρμογής ενεργητικού ελέγχου με ταχύτητα  $U_j = 0.6U_\infty$  [12].



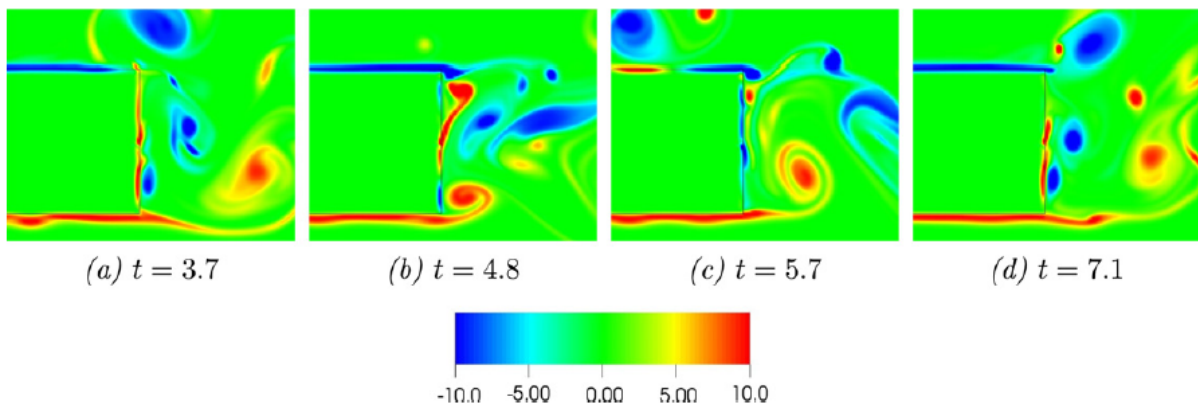
Σχήμα 1.12: Η μεταβολή του συντελεστή αντίστασης  $C_d$  κατά τη διάρκεια ενός κύκλου εκπομπής στροβίλων, στην περίπτωση διδιάστατης ροής και εφαρμογής ενεργητικού ελέγχου με ταχύτητα  $U_j = 0.6U_\infty$  [12].

στο μέσο της οπίσθιας επιφάνειας, με συντελεστή  $A = 0.6$ . Όπως μπορεί να παρατηρηθεί, η ύπαρξη της μόνιμης δέσμης επιφέρει σημαντική ελάττωση των κλίσεων των ισογραμμών του μέσου συντελεστή πίεσης  $C_p$  στον ομόρρο. Παράλληλα, οι ισογραμμές στροβιλότητας είναι πιο αραιές στην περίπτωση αυτή, πίσω από το οπίσθιο τοίχωμα.

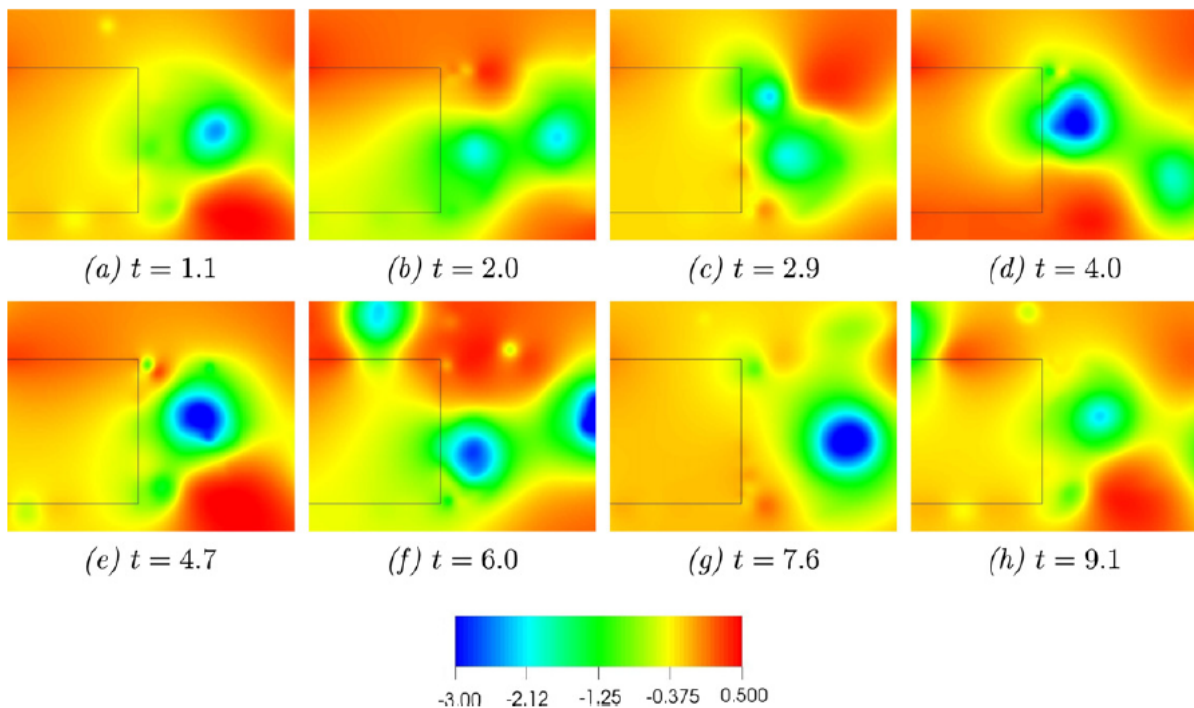
Τέλος, η επίδραση του ελέγχου στο συντελεστή αντίστασης  $C_d$  φαίνεται στο σχήμα 1.12, καθ' όλη τη διάρκεια ενός κύκλου εκπομπής στροβίλων. Επιλέχθηκαν τέσσερις αντιπροσωπευτικές χρονικές στιγμές, οι οποίες αντιστοιχούν στις δύο ακραίες και στη μέση τιμή που λαμβάνει ο  $C_d$ . Όπως είναι φανερό, η χρήση ελέγχου με μόνιμες δέσμες έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση του συντελεστή αντίστασης από την τιμή του 1.7 που είχε στην περίπτωση χωρίς τον έλεγχο ροής σε 1.3 στην περίπτωση με τον έλεγχο της ροής. Οι τιμές αυτές αναφέρονται στη μέση χρονικά τιμή του συντελεστή. Στο σημείο αυτό, αξίζει να παρατεθούν μερικές εικόνες στις οποίες φαίνεται η πλήρης ανάπτυξη και εξέλιξη του πεδίου πίεσης και στροβιλότη-



Σχήμα 1.13: Η εξέλιξη του πεδίου πίεσης κατά τη διάρκεια ενός κύκλου εκπομπής στροβίλων, στην περίπτωση διδιάστατης ροής και εφαρμογής ενεργητικού ελέγχου με ταχύτητα  $U_j = 0.6U_\infty$  [12].



Σχήμα 1.14: Η εξέλιξη του πεδίου στροβιλότητας κατά τη διάρκεια ενός κύκλου εκπομπής στροβίλων, στην περίπτωση διδιάστατης ροής και εφαρμογής ενεργητικού ελέγχου με ταχύτητα  $U_j = 0.6U_\infty$  [12].

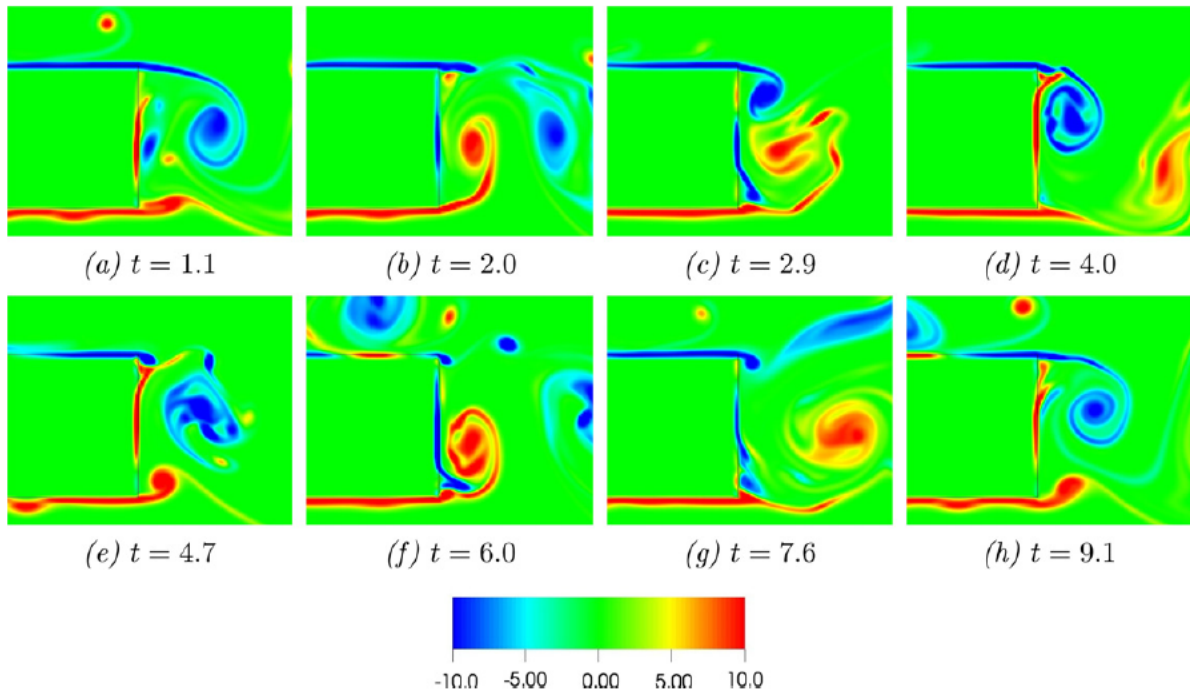


Σχήμα 1.15: Η εξέλιξη του πεδίου πίεσης κατά τη διάρκεια δύο κύκλων εκπομπής στροβίλων (περίπτωση χωρίς έλεγχο) [12].

τας, στην περιοχή του ομόρρου, όταν χρησιμοποιείται έλεγχος μόνιμης δέσμης με ταχύτητα  $U_j = 0.6U_\infty$ . Έτσι, στα σχήματα 1.13 και 1.14 φαίνεται η χρονική εξέλιξη του πεδίου πίεσης και στροβιλότητας αντίστοιχα, ενώ στα σχήματα 1.15 και 1.16 φαίνεται η χρονική εξέλιξη του πεδίου πίεσης και στροβιλότητας αντίστοιχα, για την απλή περίπτωση χωρίς έλεγχο. Όπως παρατηρείται, η εναλλασσόμενη έκλυση μεγάλων σχηματισμών στροβίλων στον ομόρρου του σώματος, για την περίπτωση χωρίς έλεγχο, έχει αντικατασταθεί από μια χαοτική έκλυση μικρότερων δινών, λόγω της δράσης της μόνιμης δέσμης. Το φαινόμενο αυτό είναι εντονότερο στην επάνω επιφάνεια του σώματος, όπου η ροή είναι ασθενέστερη σε σχέση με την κάτω, λόγω της ύπαρξης του οδοστρώματος.



Πρόσφατες μελέτες έχουν στόχο τη βελτίωση των αεροδυναμικών χαρακτηριστικών των αεροτομών, καθώς και τη βελτιστοποίηση κάποιων βασικών τους παραμέτρων, όπως το μήκος επανακόλλησης σε περίπτωση αποκόλλησης της ροής ανάντι. Έχει αποδειχθεί ότι ο έλεγχος της ροής μέσω αναρρόφησης ρευστού είναι πολύ πιο αποδοτικός σε σύγκριση με την έγχυση (η οποία εξετάστηκε στην παραπάνω μελέτη), για δεδομένη ταχύτητα του ρευστού στην οπή. Αν, μάλιστα, ποσοτικοποιηθεί



Σχήμα 1.16: Η εξέλιξη του πεδίου στροβιλότητας κατά τη διάρκεια δύο κύκλων εκπομπής στροβίλων (περίπτωση χωρίς έλεγχο) [12].

αυτός ο συσχετισμός, η αύξηση της άνωσης σε συγκεκριμένη αεροτομή και με ταχύτητα δέσμης ίση με το μισό της ταχύτητας της ελεύθερης ροής, στην περίπτωση της έγχυσης φτάνει το 5% ενώ στην περίπτωση της αναρρόφησης ξεπερνά το 50%.

Σε μια τυπική εφαρμογή εξωτερικής αεροδυναμικής, όπως είναι οι αεροτομές, στόχος είναι η εφαρμογή αναρρόφησης ή/και έγχυσης ρευστού έτσι ώστε να επιτευχθεί μεγαλύτερη άνωση και μικρότερη οπισθέλκουσα για δεδομένες συνθήκες ελεύθερης ροής. Η βελτιστοποίηση γίνεται συνήθως ως προς τις θέσεις που θα τοποθετηθούν οι οπές κατά μήκος της αεροτομής και ως προς το διάλυσμα της ταχύτητας του ρευστού σε κάθε οπή. Επίσης μπορεί να εξετάζεται το ενδεχόμενο ταυτόχρονης χρήσης οπών αναρρόφησης και έγχυσης, για την επίτευξη της επιθυμητής αεροδυναμικής συμπεριφοράς της αεροτομής.

### Εφαρμογή χρονικά μόνιμων δεσμών στην εσωτερική αεροδυναμική [13]

Στην εργασία [13] παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού ενός χάρτη παραγώγων ευαισθησίας κατάλληλης συνάρτησης κόστους, ως προς το μέτρο της υποθετικής ταχύτητας αναρρόφησης/έγχυσης των μόνιμων δεσμών. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται η συνεχής συζυγής μέθοδος ως ένα ‘οικονομικό’ εργαλείο ανάκτησης χρήσιμων πληροφοριών για τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων του προβλήματος. Η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε στην περίπτωση ενός αγωγού σχήματος-S, με στόχο τον έλεγχο της αποκολλημένης ροής που αναπτύσσεται σε αυτόν.

Η αντικειμενική συνάρτηση που τέθηκε, όπως συνηθίζεται σε περιπτώσεις εσωτερικής αεροδυναμικής, αφορά στις απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του αγωγού. Η ροή θεωρήθηκε ασυμπίεστη και χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις RANS, σε συνδυασμό με το μοντέλο τύρβης μιας εξίσωσης των Spalart και Allmaras [14]. Η επίλυση των παραπάνω εξισώσεων έγινε σε δομημένα πλέγματα, με βάση την κεντρο-κυβελική διατύπωση, σύμφωνα με τον αλγόριθμο 'SIMPLE' [15]. Στη συνέχεια, υπολογίστηκαν οι επιθυμητές παράγωγοι ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης, όπως επίσης και η συζυγής εξίσωση που αντιστοιχεί στο μοντέλο τύρβης που χρησιμοποιήθηκε. Μετά την εφαρμογή όλων των παραπάνω στο πρόβλημα εσωτερικής αεροδυναμικής, ενός αγωγού σχήματος-S, προέκυψαν τα αποτελέσματα που συνοψίζονται στον πίνακα 1.5.

	Χωρίς έλεγχο	Περίπτωση 1	Περίπτωση 2	Περίπτωση 3
F	0.01835	0.01662	0.01817	0.01649

Πίνακας 1.5: Απώλειες ολικής πίεσης, όπως αυτές υπολογίστηκαν με εφαρμογή δεσμών συνεχούς αναρρόφησης μόνο στην κάτω επιφάνεια (Περίπτωση 1), μόνο στην επάνω επιφάνεια (Περίπτωση 2), ή και στις δύο επιφάνειες (Περίπτωση 3) του αγωγού [13].

Όπως είναι προφανές, οι απώλειες ολικής πίεσης του αγωγού περιορίζονται αρκετά με τη χρήση του ελέγχου, και συγκεκριμένα ο έλεγχος μέσω δεσμών συνεχούς αναρρόφησης στην κάτω επιφάνεια του αγωγού φαίνεται να είναι ιδιαίτερα αποδοτικός. Τέλος, η μελέτη αυτή υπέδειξε τις θέσεις στις οποίες είναι περισσότερο αποδοτική η τοποθέτηση μόνιμων δεσμών, όπως επίσης και τον τύπο αυτών (έγχυσης ή αναρρόφησης). Ωστόσο, δεν είναι σε θέση να εκτιμήσει τις βέλτιστες ταχύτητες αναρρόφησης ή έγχυσης των δεσμών, οι οποίες και ενδιαφέρουν αρκετά σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης.

### Εφαρμογή σύνθετων δεσμών στη μηχανική των ρευστών [16, 17]

Η μελέτη [16] αποτελεί επέκταση προηγούμενης ερευνητικής εργασίας [18], με χρήση καρτών γραφικών αντί κεντρικών μονάδων επεξεργασίας ως υπολογιστικών εργαλείων. Αυτή η επιλογή οδήγησε σε μεγάλη επιτάχυνση των προλέξεων και κατέστησε δυνατή τη χρήση 'παραδοσιακών' μεθόδων βελτιστοποίησης όπως οι εξελικτικοί αλγόριθμοι, για την εύρεση των βέλτιστων τιμών των παραμέτρων που διέπουν το πρόβλημα. Αντικείμενο της μελέτης είναι ο έλεγχος της ροής γύρω από ένα σώμα τύπου *Glauert-Goldschmied* [19] (βλ. σχήμα 1.17), όταν σε κατάλληλη θέση τοποθετηθεί ένα επενεργητής σύνθετης δέσμης.

Το υπολογιστικό χωρίο που φαίνεται στο σχήμα 1.17 διακριτοποιήθηκε με μη-δομημένο πλέγμα, μέρος του οποίου φαίνεται στο σχήμα 1.18 και συνολικά αποτελείται από 115000 κόμβους και 230000 τριγωνικά στοιχεία. Η ύπαρξη της σύνθετης δέσμης δηλώνεται μέσω κατάλληλων οριακών συνθηκών, οι οποίες τίθενται στη βάση της κοιλότητας που προσαρμόζεται στην οπή, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.18.

Στον πίνακα 1.6 συνοψίζονται οι βασικές παράμετροι που τέθηκαν για την επίλυση του προβλήματος.

Παράμετρος	Σύμβολο	Τιμή
Αριθμός <i>Mach</i>	$M_\infty$	0.1
Αριθμός <i>Reynolds</i>	$Re_c$	$9.36 \times 10^5$
Πίεση	$p_\infty$	101.325 kg/ms <sup>2</sup>
Θερμοκρασία	$T_\infty$	298 K
Συχνότητα Σύνθετης Δέσμης	$f$	138.5 Hz
Μέγιστη Ταχύτητα Ακροφυσίου	$u_{jet,max}$	26.6 m/s
Συντελεστής Παροχής Μάζας	$C_m$	0.111%

Πίνακας 1.6: Χαρακτηριστικά μεγέθη του προβλήματος που επιλύθηκε [16].

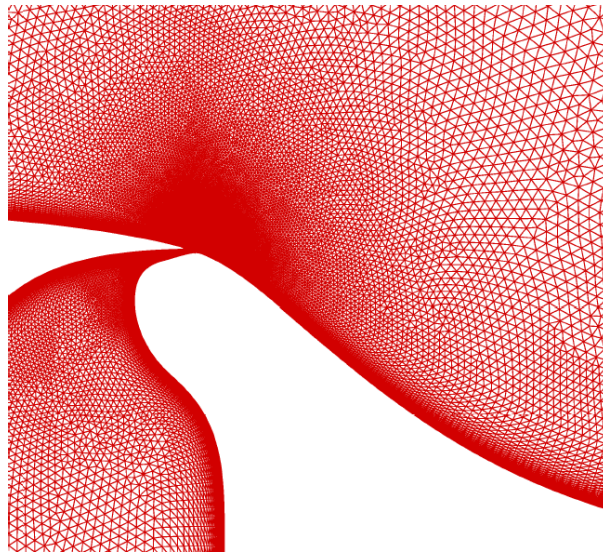
Ο συντελεστής παροχής μάζας καθορίζεται από τη σχέση  $C_m = \frac{\rho h u_{jet,rms}^2}{\frac{1}{2} \rho g_\infty u_\infty^2}$ , στην οποία με  $h$  συμβολίστηκε το πλάτος της οπής της δέσμης. Ακόμη, χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο τύρβης μιας εξίσωσης των Spalart και Allmaras [14]. Στο σχήμα 1.19 φαίνεται το πεδίο του αριθμού Mach σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, όπως προέκυψε από την εκτέλεση του GPU-κώδικα. Το ίδιο πρόβλημα επιλύθηκε και με τον CPU-κώδικα από την δόκτορα Β. Ασούτη, στο πλαίσιο της διατριβής της [17], με τα αποτελέσματα των δύο κωδίκων (CPU και GPU) να ταυτίζονται. Το μεγάλο κέρδος όμως από τη χρήση των GPU's αφορά στην επιτάχυνση της πρόλεξης των αριθμητικών αποτελεσμάτων έως και 43 φορές.

### Βελτιστοποίηση των παραμέτρων των χρονικά μόνιμων δεσμών [16]

Η εργασία αυτή αποτελεί την επέκταση της προηγούμενης, αφού όπως είναι φυσικό, με τη μεγάλη επιτάχυνση της πρόλεξης των αριθμητικών αποτελεσμάτων που επιτεύχθηκε, η βελτιστοποίηση των παραμέτρων της δέσμης κατέστη χρονικά βιώσιμη. Συγκεκριμένα, μελετήθηκε η χρήση δέσμης συνεχούς αναρρόφησης σε μια διαμόρφωση ελαφρώς διαφορετική από το σώμα *Glauert-Goldschmied*, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.20, με στόχο την ελαχιστοποίηση του μήκους της περιοχής αποκόλλησης κατάντι της διαμόρφωσης.



Σχήμα 1.17: Η γεωμετρία της εξεταζόμενης διαμόρφωσης. Εκτός από το προφίλ του σώματος *Glauert-Goldschmied* διακρίνεται και το χωρίο τοποθέτησης της σύνθετης δέσμης [16].



Σχήμα 1.18: Λεπτομέρεια του μη-δομημένου πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε στην περιοχή εκροής της σύνθετης δέσμης [16].

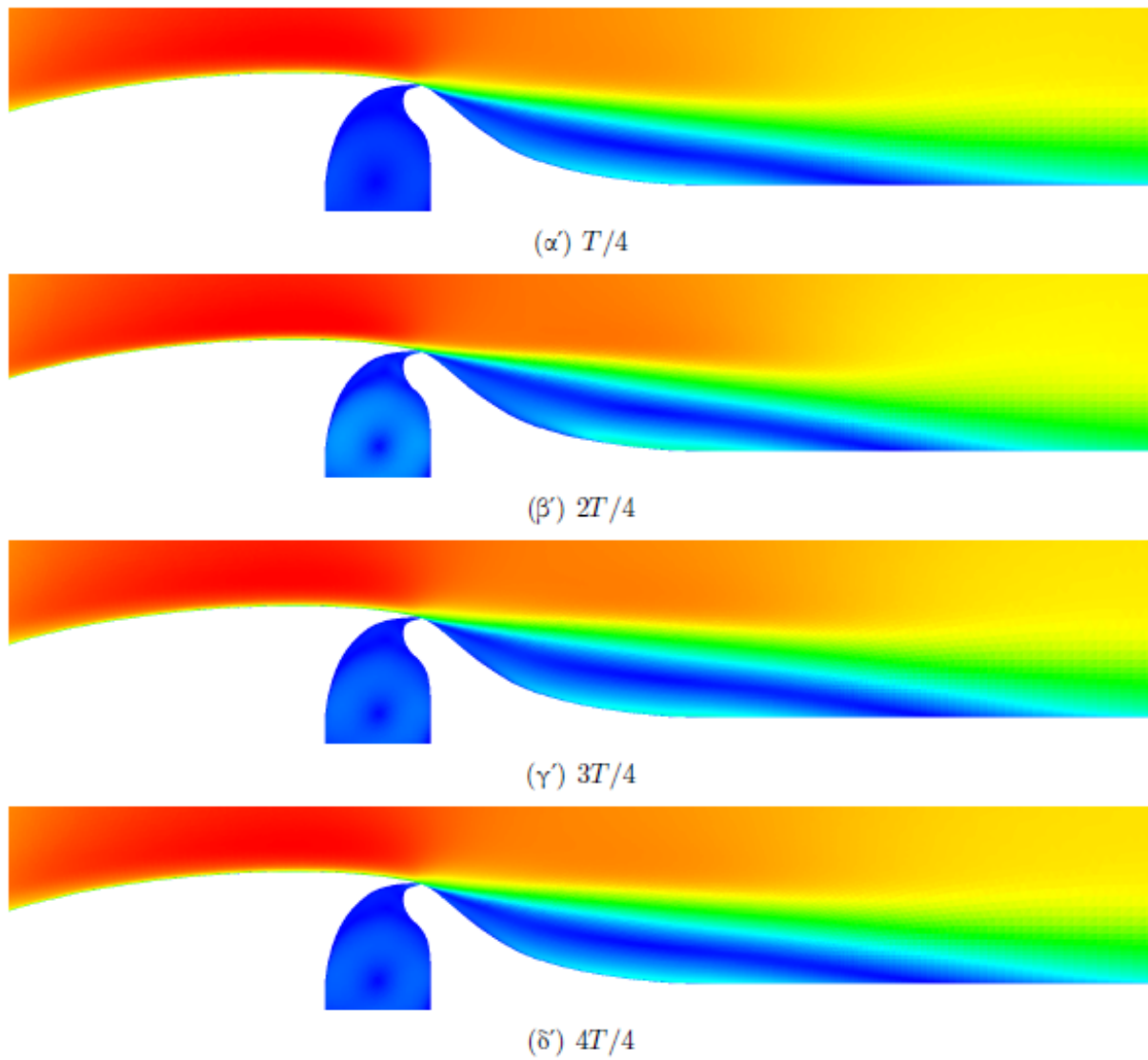
Αρχικά έγινε η παραμετρική διερεύνηση του παραπάνω προβλήματος, με χρήση CPU's [18], έτσι ώστε να μελετηθεί η επίδραση της θέσης της οπής και του μεγέθους της παροχής αναρρόφησης στη μείωση της ζώνης αποκόλλησης. Στη συνέχεια, για τις καλύτερες τιμές των παραπάνω παραμέτρων μελετήθηκε η επίδραση της κλίσης της δέσμης αναρρόφησης και του ανοίγματος της οπής, από όπου φάνηκε πως η μέγιστη μείωση του μήκους της ζώνης αποκόλλησης επιτυγχάνεται όσο πλησιέστερα τοποθετηθεί η δέσμη στο σημείο αποκόλλησης. Ακόμη, φάνηκε πως όσο μεγαλύτερη είναι η παροχή αναρρόφησης ρευστού, τόσο περισσότερο μειώνεται η έκταση της ζώνης αποκόλλησης.

Η βελτιστοποίηση έγινε με χρήση του λογισμικού εξελικτικών αλγορίθμων *EASY* [20], ενώ ως εργαλεία αξιολόγησης των υποψήφιων λύσεων χρησιμοποιήθηκαν κάρτες γραφικών τύπου GTX 285. Ως μεταβλητές σχεδιασμού τέθηκαν οι παράμετροι της δέσμης συνεχούς αναρρόφησης ρευστού, δηλαδή:

1. Η θέση της οπής πάνω στο τοίχωμα της διαμόρφωσης.
2. Η κλίση της δέσμης ως προς την κάθετη στο στερεό τοίχωμα, στη θέση της οπής.
3. Το άνοιγμα της οπής.

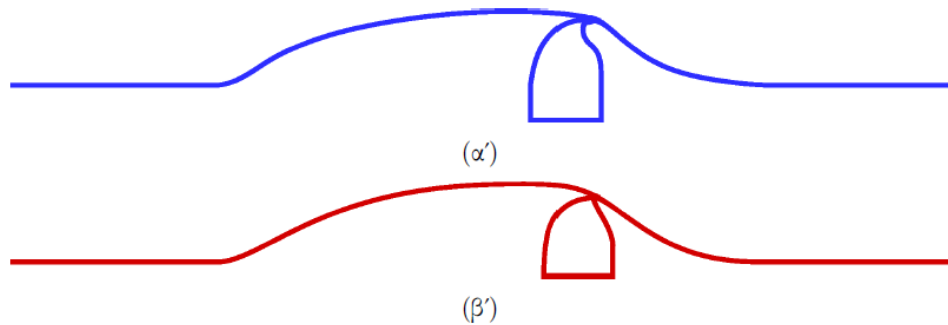
Στον πίνακα 1.7 συνοψίζονται όλα τα χαρακτηριστικά μεγέθη που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης, με τις τιμές για την πρώτη και την τρίτη μεταβλητή σχεδιασμού να ανάγονται ως προς τη χορδή της διαμόρφωσης.

Σύμφωνα με την παραμετρική ανάλυση που προηγήθηκε της βελτιστοποίησης, είχε φανερωθεί ότι η θέση αποκόλλησης του οριακού στρώματος είναι περίπου στο 65%



Σχήμα 1.19: Υπολογισθέν πεδίο του αριθμού Mach σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.  $T$  είναι η περίοδος της δέσμης. [16].





Σχήμα 1.20: Γεωμετρία της διαμόρφωσης: (α') το σώμα Glauert-Goldschmied, και (β') το σώμα που χρησιμοποιήθηκε για τη βελτιστοποίηση των παραμέτρων δέσμης συνεχούς αναρρόφησης ρευστού με στόχο την ελαχιστοποίηση της ζώνης αποκόλλησης. [16].

Παράμετρος	Σύμβολο	Τιμή
Αριθμός <i>Mach</i>	$M_\infty$	0.3
Αριθμός <i>Reynolds</i>	$Re_c$	$6.35 \times 10^6$
Παροχή αναρρόφησης/παροχή του αέρα εισόδου		$5.48 \times 10^{-4}$
Θέση της οπής		60%-70%
Κλίση της δέσμης		-70° έως 70°
Άνοιγμα της οπής		0.15%-0.25%
Γονείς EA	$\mu$	10
Απόγονοι EA	$\lambda$	15

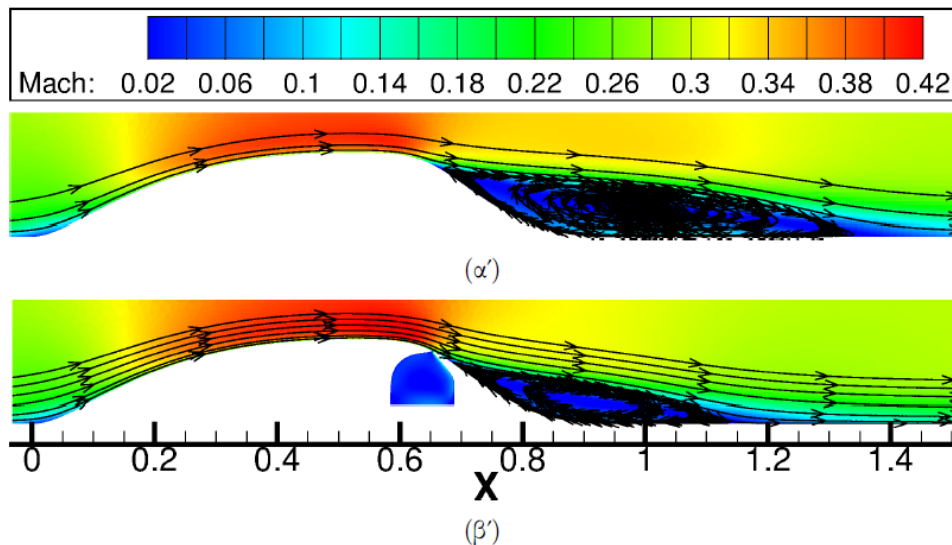
Πίνακας 1.7: Χαρακτηριστικά μεγέθη του προβλήματος βελτιστοποίησης που επιλύθηκε [16].

της χορδής της διαμόρφωσης, επομένως μετά τα παραπάνω γίνεται κατανοητή η επιλογή των συγκεκριμένων ορίων για το εύρος της πρώτης μεταβλητής σχεδιασμού. Οι βέλτιστες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού που υπολογίσθηκαν, συνοψίζονται στον πίνακα 1.8.

Με βάση τα παραπάνω, επιβεβαιώνεται ότι η βέλτιστη θέση της δέσμης είναι πολύ κοντά στο σημείο αποκόλλησης του οριακού στρώματος. Ακόμη, η βέλτιστη λύση επιτυγχάνει περίπου 34% μείωση του μήκους της ζώνης αποκόλλησης. Τέλος, στο σχήμα 1.21 φαίνονται οι γραμμές ροής και το πεδίο του αριθμού *Mach* για την περίπτωση χωρίς έλεγχο ροής και τη βέλτιστη λύση με έλεγχο μέσω δέσμης συνεχούς αναρρόφησης.

Μεταβλητή Σχεδιασμού	Βέλτιστη Τιμή
Θέση της οπής	0.6521
Κλίση της δέσμης	-19.22°
Άνοιγμα της οπής	0.00234

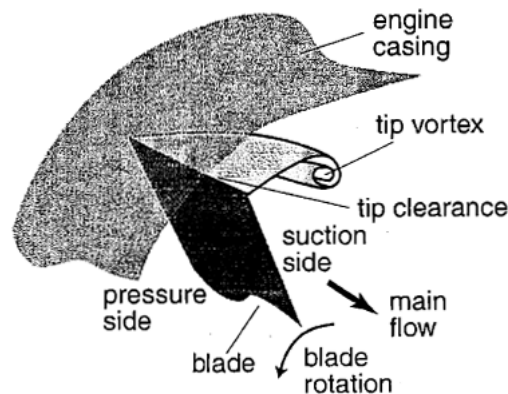
Πίνακας 1.8: Βέλτιστες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού [16].



Σχήμα 1.21: Γραμμές ροής και υπολογισθέν πεδίο του αριθμού Mach πάνω από τη διαμόρφωση, (α') χωρίς έλεγχο, και (β') με έλεγχο, σύμφωνα με τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων που υπολογίστηκαν από τον ΕΑ [16].

### Εφαρμογή σύνθετων δεσμών στις στροβιλομηχανές [21]

Σε έναν πολυβάθμιο αξονικό συμπιεστή, η σχετική κίνηση που προκύπτει από την περιστροφή του τυμπάνου του συμπιεστή σε σχέση με το ακίνητο πλαίσιο που τον περιβάλλει, μπορεί να επηρεάσει τη λειτουργική απόδοση όλης της μηχανής. Συγκεκριμένα, πρέπει να τηρείται ένα πεπερασμένο ακτινικό διάκενο (finite spacing) μεταξύ του ελεύθερου άκρου του πτερυγίου και του περιβλήματος της μηχανής, το οποίο ανάλογα με το μέγεθός του ενδέχεται να έχει αρνητική επίπτωση στην απόδοση του συμπιεστή. Η διαφορική πίεση που επικρατεί μεταξύ των δύο πλευρών του πτερυγίου (πλευράς υπερπίεσης και πλευράς υποπίεσης) προκαλεί το σχηματισμό δινών στα ακροπτερύγια οι οποίες λόγω της ύπαρξης του ακτινικού διακένου οδηγούν τη ροή διαμέσου του, από την πλευρά υπερπίεσης στην πλευρά υποπίεσης. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να είναι πολύ έντονο, όταν το ακτινικό διάκενο το επιτρέπει, και σχηματικά φαίνεται στο σχήμα 1.22. Αυτή η ροή διαρροής μέσα από το ακτινικό διάκενο (*tip leakage flow*) υπερισχύει της αερο-θερμοδυναμικής συμπεριφοράς της ροής στην περιοχή του ακροπτερυγίου και μειώνει την ικανότητα

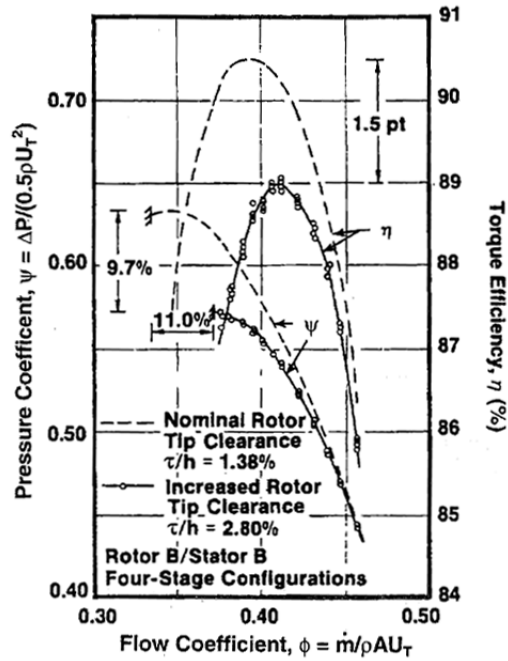


Σχήμα 1.22: Σχηματική απεικόνιση της ροής διαρροής εκ του ακροπτερυγίου [21].

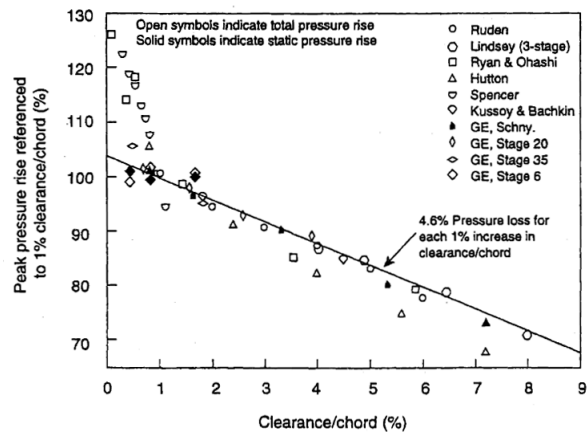
αύξησης πίεσης της βαθμίδας, όπως επίσης και τη γενικότερη αποδοτικότητα και ευστάθεια λειτουργίας του συμπιεστή. Σύμφωνα με μετρήσεις [22] που έγιναν για έναν χαμηλής ταχύτητας τετραβάθμιο αξονικό συμπιεστή, αν το ακτινικό διάκενο αυξηθεί από την βασική τιμή του 1.38% σε 2.8% του ύψους της ακτίνας, η μέγιστη διαφορά (κέρδος) πίεσης της βαθμίδας μειώνεται κατά 9.7%, ο συντελεστής πάλμωσης μειώνεται κατά 11% και ο μέγιστος βαθμός απόδοσης κατά 1.5 εκατοστιαία μονάδα. Όλα αυτά τα αποτελέσματα συνοψίζονται στο σχήμα 1.23. Σε μια διαφορετική μελέτη [23] προτάθηκε η χρήση του λόγου του ακτινικού διακένου προς το μήκος της χορδής (αδιάστατη παράμετρος) για να μπορέσει να συσχετιστεί η επίδραση του διακένου με το μέγιστο κέρδος πίεσης ενός αξονικού ανεμιστήρα ή συμπιεστή. Έτσι, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.24 για κάθε 1% αύξηση αυτής της παραμέτρου, το κέρδος πίεσης μειώνεται κατά 4.6%. Μάλιστα, σε πολυβάθμιους συμπιεστές υπάρχει η επιπλέον επίδραση της μετακίνησης της γραμμής πάλμωσης σε υψηλότερες παροχές. Όλες αυτές οι επιδράσεις επηρεάζουν τη συνολική λειτουργία του συμπιεστή [24].

Στην πράξη, παρόλο που όλα αυτά είναι γνωστά, οι συμπιεστές κατασκευάζονται και λειτουργούν με ακτινικά διάκενα αρκετά μεγαλύτερα από αυτά που είναι αεροδυναμικώς αποδεκτά, κυρίως λόγω της μεταβολής των διακένων κατά τη λειτουργία της μηχανής και των ορίων που υπάρχουν στις κατασκευαστικές ανοχές. Συνεπώς, έχουν αναζητηθεί νέες μέθοδοι που θα ανακουφίσουν τις αυστηρές απαιτήσεις για πολύ μικρά διάκενα και παράλληλα θα διαχειριστούν αποδοτικά τη ροή διαρροής ώστε να μειωθεί η ποινή που δημιουργείται στην απόδοση του συμπιεστή. Μια από αυτές τις πολλά υποσχόμενες μεθόδους είναι ο ενεργητικός έλεγχος της ροής με χρήση μη-μόνιμων, σύνθετων δεσμών ρευστού (*Synthetic Jets*)

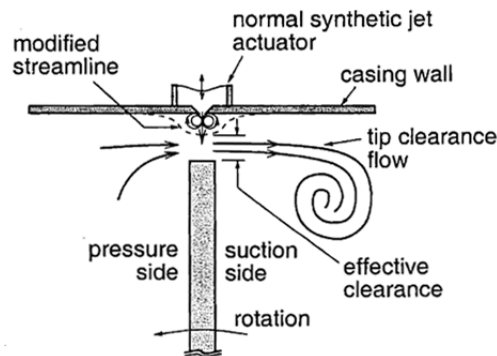
Με βάση τη σημερινή εμπειρία, έχουν αναπτυχθεί τρεις μέθοδοι με τις οποίες μπορεί να ελεγχθεί η ροή διαρροής. Η πρώτη εξ αυτών στοχεύει στη μείωση της παροχής που ξεφεύγει μέσα από το σχηματιζόμενο διάκενο, η δεύτερη αφορά στην ενίσχυση της ανάμειξης μεταξύ της δίνης που εκπέμπεται από το άκρο του πτερυγίου και της επερχόμενης ροής και η τρίτη εμπλέκει την έγχυση ορμής μέσω



Σχήμα 1.23: Επίδραση του αυξημένου ακτινικού διακένου στις επιδόσεις ενός πολυβάθμιου συμπιεστή [22].



Σχήμα 1.24: Η επίδραση της αύξησης του ακτινικού διακένου στη λειτουργία της βαθμίδας (υπό όρους αύξησης πίεσης) [23].

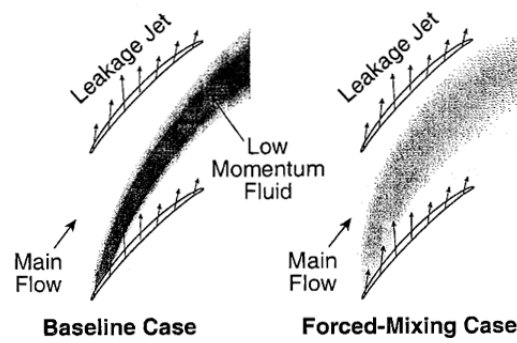


Σχήμα 1.25: Σχηματική αναπαράσταση της μείωσης της παροχής διαρροής από το μειωμένο ‘ενεργό’ ακτινικό διάκενο [21].

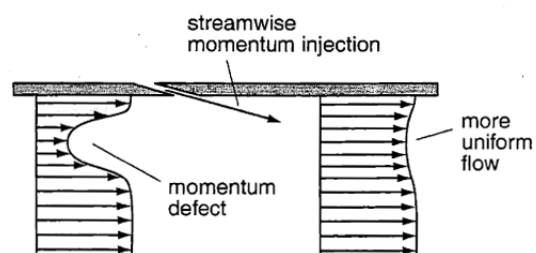
ρευμάτων ρευστού. Για να επιτευχθούν οι παραπάνω τεχνικές ελέγχου της ροής, χρησιμοποιούνται τρεις διαφορετικοί επενεργητές, τοποθετημένοι στο ακίνητο περιβλήμα της μηχανής. Τα **NSJ** (*Normal Synthetic Jets*, εκπομπή μη-μόνιμης δέσμης ρευστού κάθετα στην κύρια ροή, με μέση -χρονικά- τιμή παροχής μηδέν), τα **DSJ** (*Directed Synthetic Jets*, όπου η έγχυση της μη-μόνιμης δέσμης γίνεται σχεδόν εφαπτομενικά στην κύρια ροή), και τα **SDJ** (*Steady Directed Jets*, δηλαδή **DSJ** αλλά με σταθερή παροχή και άρα έγχυση επιπλέον ρευστού στο σύστημα). Έτσι λοιπόν, οι τρεις μέθοδοι που ήδη αναφέρθηκαν εφαρμόζονται ως εξής:

- Η μείωση της παροχής που ξεφεύγει μέσα από το ακτινικό διάκενο μπορεί να επιτευχθεί με τροποποίηση των γραμμών ροής, εισάγοντας ένα **NSJ** στο στερεό όριο, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.25. Το αποτέλεσμα είναι η μετατόπιση των γραμμών ροής προς τα κάτω, μειώνοντας έτσι το ‘ενεργό’ διάκενο και άρα την παροχή δια μέσου του, η οποία είναι αποτέλεσμα της δεδομένης διαφοράς πίεσης μεταξύ των πλευρών του πτερυγίου.
- Η βελτίωση της ανάμειξης αφορά στην ενίσχυση της εξασθενημένης κατανομής ταχυτήτων που επικρατεί στην περιοχή του ομόρρου του πτερυγίου, ώστε να είναι πιο ομοιόμορφη, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.26. Στόχος είναι η εκμετάλλευση μιας δυναμικής ενίσχυσης του ρευστού που μπορεί να συμβεί με την ανάμειξη, ώστε να ενταθεί η μεταφορά ορμής από τη ροή υψηλής ενέργειας στην ‘ασθενή’ ροή που κυριαρχεί κοντά στο στερεό όριο (ενεργοποίηση του οριακού στρώματος).
- Η έγχυση ορμής στο σύστημα γίνεται για να προσδοθεί ενέργεια στην επιβραδυνόμενη ροή κοντά στο στερεό όριο, με τη βοήθεια του **SDJ**, το οποίο συνεχώς εγχέει ρευστό (και άρα ορμή) εκεί που είναι απαραίτητο. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 1.27.

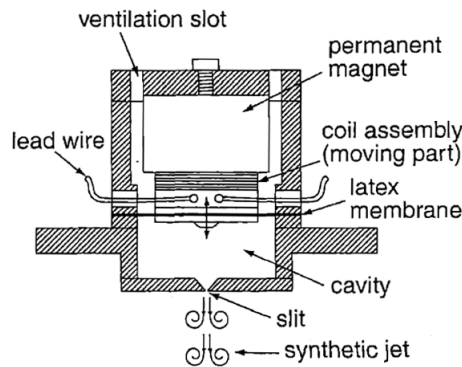
Στο σχήμα 1.28 φαίνεται ένας τυπικός επενεργητής σύνθετης δέσμης, ο οποίος χρησιμοποιείται στις πτερυγώσεις ως **NSJ**. Αποτελείται από μια λεπτή μεμβράνη, από



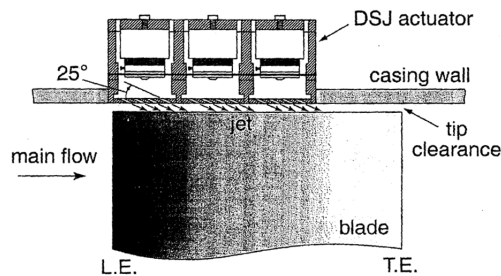
Σχήμα 1.26: Σχηματική αναπαράσταση της ενίσχυσης της ανάμειξης [21].



Σχήμα 1.27: Σχηματική αναπαράσταση της έγχυσης ορμής κατά την κατεύθυνση της ροής [21].



Σχήμα 1.28: Σχηματική αναπαράσταση ενός επενεργητή σύνθετης δέσμης, και συγκεκριμένα του επενεργητή NSJ [21].



Σχήμα 1.29: Σχηματική αναπαράσταση της διάταξης τριών επενεργητών τύπου DSJ, τοποθετημένων στο περίβλημα της μηχανής [21].

μια κοιλότητα στην οποία εισέρχεται το εργαζόμενο μέσο και από μια μικρή σχισμή για την περίπτωση του NSJ ή από οπές σε συγκεκριμένη γωνία, στην περίπτωση του DSJ. Στις πειραματικές διατάξεις που χρησιμοποιήθηκαν για τη μελέτη όλων των παραπάνω, τοποθετήθηκαν τρεις τέτοιοι επενεργητές εν σειρά σε κάθε βαθμίδα, όπως φαίνεται από την πλευρική όψη του σχήματος 1.29. Επίσης, η πίσω πλευρά της μεμβράνης ήταν ανοιχτή στον ατμοσφαιρικό αέρα, μιας και η διαφορά της στατικής πίεσης στην αεροδυναμική σήραγγα από την ατμοσφαιρική είναι μικρότερη από 1%, επομένως δεν υπήρχε ανάγκη για δημιουργία τεχνητού κενού στην πίσω πλευρά της μεμβράνης.

### Εφαρμογή παλλόμενων δεσμών στην εξωτερική αεροδυναμική

Η μέθοδος ελέγχου ροής ρευστού μέσω (χρονικά μη-μόνιμων) παλλόμενων δεσμών (*Pulsating Jets*) είναι μια ενεργητική μέθοδος η οποία μοιάζει πολύ με τη μέθοδο των μη-μόνιμων σύνθετων δεσμών. Και οι δύο μέθοδοι έχουν μια χρονικά μεταβαλλόμενη παροχή κατά έναν περιοδικό τρόπο, η διαφορά τους όμως έγκειται

στο ότι οι παλλόμενες δέσμες έχουν μη-μηδενική μέση τιμή παροχής στο χρόνο. Οι παλλόμενες δέσμες έχουν χρησιμοποιηθεί πολύ αποδοτικά για έλεγχο αποκολλημένων ροών, καθώς επίσης έχει αποδειχθεί πως η έγχυση χρονικά μεταβαλλόμενης παροχής ρευστού είναι πιο αποτελεσματική από τη μόνιμη έγχυση των *Steady Jets*, στον έλεγχο αποκόλλησης οριακού στρώματος, στη βελτίωση της δυναμικής συμπεριφοράς αεροτομής αλλά και σε εφαρμογές μετάδοσης θερμότητας, όπως αυτή που παρουσιάστηκε νωρίτερα για τις παθητικές μεθόδους.

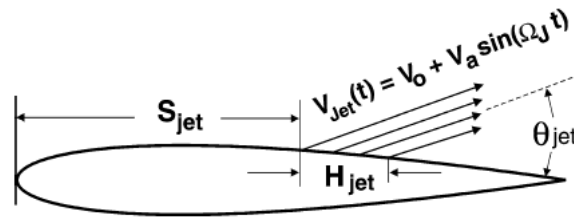
Το πλεονέκτημα των παλλόμενων δεσμών, όπως και των σύνθετων δεσμών, είναι η συμπαγής κατασκευή τους, οι μικρές διαστάσεις τους, η απλότητα της λειτουργίας τους και οι ελάχιστες ενεργειακές τους απαιτήσεις. Για αυτόν το λόγο, μπορούν εύκολα να χρησιμοποιηθούν και ως δευτερεύοντα όργανα ελέγχου της ροής, δηλαδή συνεπικουρώντας τα παθητικά συστήματα ελέγχου που ήδη υπάρχουν σε μια εφαρμογή. Για παράδειγμα, μπορούν να τοποθετηθούν στα πτερύγια μεταβλητής γωνίας ενός αεροσκάφους (*Trailing Edge Flaps*) μεταβάλλοντας την επερχόμενη ροή κατά τρόπο που να ευνοεί τη λειτουργία τους. Από την άλλη, μπορούν να αντικαταστήσουν πλήρως τις πιο πρωτόγονες μορφές παθητικού ελέγχου, όπως είναι οι γεννήτριες δίνης, ενώ μια πολύ εντυπωσιακή τους εφαρμογή η οποία και εξετάζεται στο πλαίσιο αυτής της εργασίας, αφορά στην απόσβεση των επικίνδυνων ταλαντώσεων που μπορεί να εμφανιστούν στις πτέρυγες ενός αεροσκάφους κατά τη διάρκεια ελιγμών.

Ένας λίγο διαφορετικός τομέας εφαρμογής των παλλόμενων δεσμών είναι αυτός της μετάδοσης θερμότητας. Όπως δηλαδή και οι σύνθετες δέσμες, έτσι κι αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ενισχύσουν τη μεταφορά θερμότητας μεταξύ στερεού και ρευστού, προσφέροντας μεγαλύτερη απόδοση σε σχέση με τις μόνιμες δέσμες. Έχει δε αποδειχθεί [25] ότι η χρήση μη-μόνιμων δεσμών επηρεάζει θετικά (σχεδόν διπλασιάζει) το ρυθμό μεταφοράς θερμότητας και, άρα, καθιστά πλεονεκτικότερη τη χρήση τους έναντι των μόνιμων δεσμών.

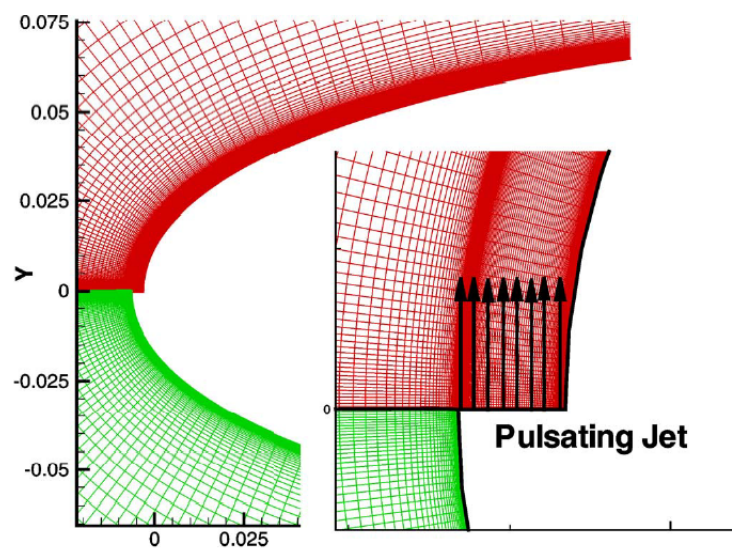
Στην εργασία [3], εφαρμόζονται ενεργητικές μέθοδοι ελέγχου ροής σε μια τυπική αεροτομή και, συγκεκριμένα, η τεχνική με τις μη-μόνιμες παλλόμενες δέσμες, με στόχο την ελάττωση των συνεπειών της αποκολλημένης ροής. Συγκεκριμένα, επιτυγχάνεται ο αποδοτικός έλεγχος του οριακού στρώματος ασυμπίεστης ροής ρευστού γύρω από ακίνητη αεροτομή, με την εισαγωγή οριακής συνθήκης ύπαρξης δέσμης ρευστού σε μια συγκεκριμένη απόσταση από την ακμή πρόσπτωσης ( $S_{jet}$ ), όπως φαίνεται στο σχήμα 1.30.

Το μέτρο της ταχύτητας της δέσμης δεν είναι σταθερό, αλλά μεταβάλλεται με ημιτονοειδή τρόπο, έτσι ώστε να δημιουργεί περιοδικά μεταβαλλόμενη παροχή με μέση τιμή διάφορη του μηδενός (αν η μέση τιμή ήταν μηδέν τότε θα επρόκειτο για σύνθετη δέσμη). Η γωνία εκροής είναι σχεδόν εφαπτομενική στη διεύθυνση που ορίζει η γωνία  $\theta_{jet}$  ενώ πρέπει δε να σημειωθεί ότι στην περίπτωση που η παλλόμενη δέσμη τοποθετηθεί ακριβώς στην ακμή πρόσπτωσης ( $S_{jet} = 0$ ), η γεωμετρία της αεροτομής (η οποία μάλιστα αντιστοιχεί σε μια NACA 0015) τροποποιείται ελαφρά ώστε να συμπεριλάβει την απαραίτητη οπή για την εκροή της δέσμης. Σε αυτήν την περίπτωση, το διάνυσμα ταχύτητας της δέσμης είναι κάθετο στην επιφάνεια της αεροτομής και το πλέγμα που χρησιμοποιείται υπόκειται σε τοπική πύκνωση στην





Σχήμα 1.30: Σχηματική αναπαράσταση της γεωμετρίας της αεροτομής για έλεγχο με μη-μόνιμη παλλόμενη δέσμη στην πλευρά υποπίεσης σε απόσταση  $S_{jet}$  από την ακμή πρόσπτωσης [3].

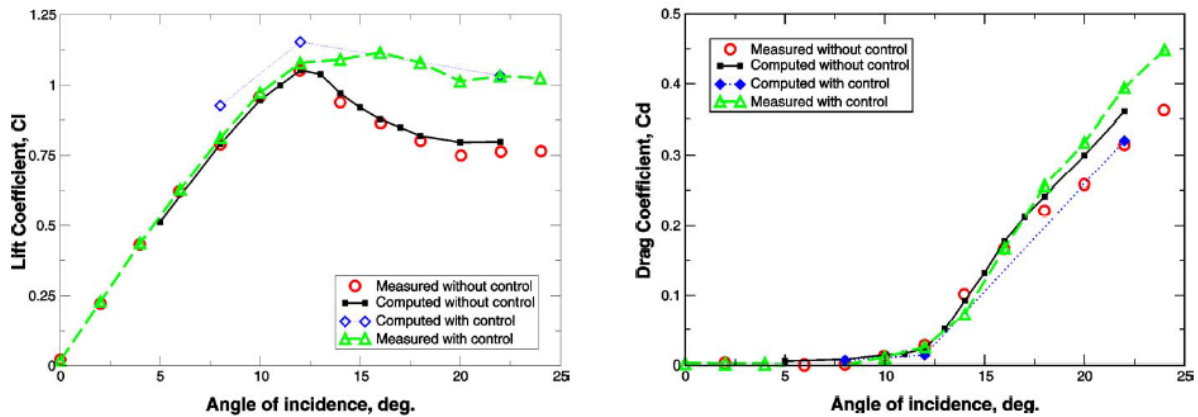


Σχήμα 1.31: Το πλέγμα και η γεωμετρία της τροποποιημένης αεροτομής TAU-0015 στην ακμή πρόσπτωσης για έλεγχο με μη-μόνιμη παλλόμενη δέσμη [3].

περιοχή της δέσμης, δεδομένης της μεγάλης πολυπλοκότητας της ροής. Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε (στην περιοχή της ακμής πρόσπτωσης) φαίνεται στο σχήμα 1.31, όπου στη λεπτομέρεια διακρίνεται επακριβώς η τροποποίηση που έγινε για να συμπεριληφθεί η δέσμη. Η τροποποιημένη αεροτομή είναι η TAU-0015 (Tel-Aviv University airfoil).

Η επίλυση της ροής έγινε με χρήση των μη-μόνιμων εξισώσεων RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) για πλήρως τυρβώδη, ασυμπίεστη ροή σε συνδυασμό με το μοντέλο τύρβης μιας εξίσωσης των Spalart και Allmaras [14]. Ενδεικτικά αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα, 1.32 όπου παρατηρείται μια αρκετά μεγάλη αύξηση του συντελεστή άνωσης στις υψηλές γωνίες πρόσπτωσης, σε σχέση με την περίπτωση χωρίς έλεγχο ροής.





Σχήμα 1.32: Σύγκριση των υπολογισμένων αεροδυναμικών συντελεστών με και χωρίς έλεγχο ροής με πειραματικές μετρήσεις.  $Re_c = 1.2 \times 10^6$  [3].

## 1.2 Παρουσίαση και δομή της εργασίας

### 1.2.1 Σκοπός της εργασίας

Η παρούσα εργασία εστιάζει στη διερεύνηση των δυνατοτήτων εφαρμογής τεχνικών ενεργητικού ελέγχου, για την αντιμετώπιση της ασταθούς αεροελαστικής απόκρισης αεροτομής δύο βαθμών ελευθερίας.

Στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετές εργασίες που έχουν ως αντικείμενο την εφαρμογή ενεργητικού ελέγχου σε αεροελαστικά προβλήματα, ωστόσο οι περισσότερες εξ' αυτών περιορίζονται στη χρήση απλουστευμένων αεροδυναμικών μοντέλων για τον υπολογισμό των αεροδυναμικών φορτίων. Ο βασικός λόγος για τον οποίο οι ερευνητές καταφεύγουν σε αυτή τη λύση, είναι η μείωση του υπολογιστικού κόστους, ωστόσο η υιοθέτηση μοντέλων όπως η θεωρία λεπτών αεροτομών για την προσομοίωση μη-γραμμικών αεροελαστικών φαινομένων, όπως ο πτερυγισμός, μπορούν να οδηγήσουν σε αποτελέσματα αρκετά μακριά από την πραγματικότητα.

Για το λόγο αυτό, σε αυτή την εργασία επιλέχθηκε να γίνει χρήση των εξισώσεων ατριοβούς ροής (Euler), οι οποίες περιγράφουν επαρκώς τις ροές που αναπτύσσονται στις υψηλές ταχύτητες, όπου η αεροελαστική συμπεριφορά των αεροδυναμικών σωμάτων αποκτά ενδιαφέρον.

Η μελέτη επικεντρώνεται στην επέκταση του προϋπάρχοντος CPU-κώδικα επίλυσης μόνιμων και μη-μόνιμων αεροδυναμικών ροών, για την επίλυση αεροελαστικών εφαρμογών αεροτομής δύο βαθμών ελευθερίας. Έτσι, σκοπός είναι, εκτός από την αναφορά στον τρόπο με τον οποίο έχει δομηθεί ο προϋπάρχων CPU-επιλύτης, η πλήρης κάλυψη των τροποποιήσεων και επεκτάσεων που έγιναν σε αυτόν για την προσθήκη της δυνατότητας αεροελαστικής ανάλυσης αεροτομών.

Στη συνέχεια, το λογισμικό που παρήχθη τροποποιείται έτσι ώστε να συμπεριλάβει τη βασική δομή ελέγχου που θα χρησιμοποιηθεί, δηλαδή τις δέσμες (jets)

ρευστού, για τον υπολογισμό της ελεγχόμενης αεροελαστικής απόκρισης αεροτομής δύο βαθμών ελευθερίας. Η εργασία αυτή, δεν στοχεύει στην εύρεση των βέλτιστων τιμών των παραμέτρων που καθορίζουν τα χαρακτηριστικά των δεσμών, ούτε και στη διατύπωση του πλέον αποδοτικού νόμου ελέγχου που πρέπει να περιγράφει τη λειτουργία των δεσμών, έτσι ώστε η απόσβεση των αεροελαστικών ασταθειών να είναι ταχεία. Τέτοιες επιδιώξεις συνιστούν σίγουρα εξαιρετικά ενδιαφέροντα μέτωπα για έρευνα, ωστόσο απέχουν αρκετά από το διερευνητικό χαρακτήρα αυτής της εργασίας.

Σκοπός τελικά είναι η διερεύνηση και η διατύπωση συμπερασμάτων, για το αν είναι εφικτή η εφαρμογή τεχνικών ενεργητικού ελέγχου ροής στην καταστολή των αεροδυναμικά επαγόμενων ταλαντώσεων, σε διδιάστατες τομές πτερύγων (αεροτομές).

### 1.2.2 Δομή της εργασίας

Το περιεχόμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας αναπτύσσεται πάνω σε δύο άξονες:

- Αφενός επιχειρείται η πλήρης θεωρητική κάλυψη του τρόπου με τον οποίο δομείται αλλά και λειτουργεί το λογισμικό που αναπτύχθηκε-επεκτάθηκε.
- Αφετέρου, το πρωτότυπο έργο της διπλωματικής εργασίας συνοψίζεται στη διερεύνηση της επίδρασης μεθόδων ενεργητικού ελέγχου, σε περιπτώσεις ασταθούς αεροελαστικής συμπεριφοράς.

Τα δύο αυτά θέματα, κατανέμονται στα επόμενα κεφάλαια ως εξής:

**Κεφάλαιο 2:** Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι μη-μόνιμες εξισώσεις ατρίβους ροής για συμπιεστό ρευστό (εξισώσεις Euler). Αρχικά επιχειρείται η μαθηματική περιγραφή των εξισώσεων, στη συνέχεια παρουσιάζεται η διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου αλλά και των εξισώσεων, ενώ τέλος επιχειρείται το κλείσιμο του προβλήματος με την υιοθέτηση κατάλληλων οριακών συνθηκών.

**Κεφάλαιο 3:** Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια πρώτη εισαγωγή στο επιστημονικό πεδίο της αεροελαστικότητας, καθώς και στα συναφή προβλήματα για τα οποία υπάρχει ερευνητικό ενδιαφέρον. Στη συνέχεια, αναλύονται οι ενέργειες που έγιναν για την επέκταση του προϋπάρχοντος λογισμικού, για την αντιμετώπιση αεροελαστικών προβλημάτων, καθώς επίσης παρατίθεται και το σχετικό μαθηματικό υπόβαθρο. Ακολούθως, παρουσιάζονται οι ελαστικές εξισώσεις ισορροπίας για απαραμόρφωτη αεροτομή δύο βαθμών ελευθερίας και η μέθοδος που ακολουθήθηκε για την ολοκλήρωσή τους. Τέλος, γίνεται η σύζευξη του αεροδυναμικού και του ελαστικού προβλήματος, με την παρουσίαση ενός αναλυτικού αλγορίθμου επίλυσης αεροελαστικών προβλημάτων.

**Κεφάλαιο 4:** Στο κεφάλαιο αυτό συγκεντρώνονται και παρουσιάζονται χαρακτηριστικές εφαρμογές που επιλύθηκαν με το λογισμικό που επεκτάθηκε. Αρχικά αναφέρεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε για την πιστοποίηση του λογισμικού και στη συνέχεια επισυνάπτονται οι προλέξεις αεροελαστικής απόκρισης που υπολογίστηκαν, για συγκεκριμένες εφαρμογές. Επιπλέον, παρατίθενται αποτελέσματα που παρήχθησαν με χρήση αντίστοιχου GPU-κώδικα και συγκρίνονται με τα προηγούμενα. Έτσι, γίνονται παράλληλα κάποιες διαπιστώσεις σχετικά με την ποιότητα των αποτελεσμάτων και το εμπλεκόμενο υπολογιστικό κόστος.

**Κεφάλαιο 5:** Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά παρατίθενται βασικά στοιχεία από την επιστήμη του αυτομάτου ελέγχου, τα οποία αποτελούν σημαντικό υπόβαθρο για όσα θα ακολουθήσουν. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η προσέγγιση που υιοθετήθηκε σε αυτή την εργασία, με παράλληλη αναφορά στις απαραίτητες τροποποιήσεις που έγιναν στο λογισμικό, για την εισαγωγή των δυνατοτήτων ενεργητικού ελέγχου ροής. Τέλος, αναφέρονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή των παραπάνω, σε περιπτώσεις ασταθούς αεροελαστικής συμπεριφοράς.

**Κεφάλαιο 6:** Στο κεφάλαιο αυτό συνοψίζονται τα βασικά σημεία της εργασίας και διατυπώνονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν. Ακόμη, δίδονται γενικές κατευθύνσεις για τη συνέχιση της εργασίας στο μέλλον.

---

## Κεφάλαιο 2

# Οι εξισώσεις Euler και η διακριτοποίηση αυτών

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν οι εξισώσεις ροής για μη-συνεκτικές ροές, που είναι γνωστές με τον όρο 'εξισώσεις Euler'. Λόγω του υψηλού υπολογιστικού κόστους που διέπει την επίλυση μη-μόνιμων ροών, κι ακόμη περισσότερο των αεροελαστικών προβλημάτων, καθίσταται περισσότερο από αναγκαία η χρήση των εξισώσεων Euler αντί των ακριβέστερων (αλλά και 'ακριβότερων') εξισώσεων Navier-Stokes. Επιπλέον, επειδή οι ταχύτητες ροής για τις οποίες εμφανίζεται ενδιαφέρουσα αεροελαστική συμπεριφορά των αεροδυναμικών κατασκευών είναι υψηλές ( $>M0.7$ ), τα συνεκτικά φαινόμενα μπορούν να αμεληθούν χωρίς να επηρεάσουν σημαντικά τα αποτελέσματα. Έτσι, μια τέτοια επιλογή είναι αρκετά χρήσιμη και λογική. Στη συνέχεια, ακολουθεί μια σύντομη περιγραφή της δομής αυτού του κεφαλαίου.

Πρώτα θα διατυπωθούν οι εξισώσεις Euler με χρήση συντηρητικών μεταβλητών και, στη συνέχεια, θα γίνει σύντομη αναφορά στο σχετικό πρόβλημα ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων, όπως επίσης και στη διαδικασία αδιαστατοποίησής τους. Έπειτα, εξετάζεται η διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου και των εξισώσεων ροής, ενώ επίσης αναφέρεται ο τρόπος υπολογισμού των διανυσμάτων ροής. Ακόμη, ξεχωριστά αναλύεται η διαδικασία επιβολής των οριακών συνθηκών και η διακριτοποίηση αυτών, ενώ επιπρόσθετα παρουσιάζεται η μέθοδος αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων ροής (τεχνική της χρονο-προέλασης). Τέλος, παρουσιάζεται η επέκταση της μεθόδου για την επίλυση χρονικά μη-μόνιμων προβλημάτων αεροδυναμικής.

### 2.1 Διατύπωση των εξισώσεων

Οι μη-μόνιμες εξισώσεις ροής για μη-συνεκτικές (Euler) ροές συμπιεστού ρευστού, σε συντηρητική διανυσματική μορφή, γράφονται ως:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

---

με  $i = 1, 2$  για  $2\Delta$  και  $i = 1, 2, 3$  για  $3\Delta$  ροές. Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας θα εξεταστούν μόνο  $2\Delta$  προβλήματα, οπότε εδώ υπονοείται ότι ο δείκτης  $i$  λαμβάνει μόνο τις τιμές  $i = 1, 2$ . Στην εξίσωση 2.1, η μεταβολή  $\partial\vec{U}/\partial\tau$  έχει εισαχθεί για να καλύψει τις χρονικά μη-μόνιμες ροές, αφού εκφράζει τη μεταβολή των συντηρητικών μεταβλητών  $\vec{U}$  ως προς τον πραγματικό χρόνο  $\tau$ . Στην περίπτωση χρονικά μόνιμων ροών, ο όρος αυτός παραλείπεται και οι εξισώσεις ξαναγράφονται ως:

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{f}_i^{inv}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

Όπως θα εξηγηθεί σε επόμενη ενότητα, οι εξισώσεις θα επιλυθούν με την τεχνική της χρονο-προέλασης ώστε να ληφθούν υπόψη οι ιδιότητες των υπερβολικών εξισώσεων στο χωρο-χρόνο. Για το λόγο αυτό, προστέθηκε ο ψευδο-χρονικός όρος  $\partial\vec{U}/\partial t$  ο οποίος χρησιμοποιείται για τη σύγκλιση των εξισώσεων σε κάθε πραγματικό χρονικό βήμα ( $t$ : ψευδο-χρόνος). Επίσης,  $x_i = (x_1, x_2)$  είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες για  $2\Delta$  προβλήματα,  $\vec{U}$  είναι το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών και  $\vec{f}_i^{inv}$  είναι το διάνυσμα των ατριβών όρων, κατά τη διεύθυνση  $x_i$ . Τα διανύσματα  $\vec{U}$  και  $\vec{f}_i^{inv}$  δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho\vec{u} \\ E_t \end{bmatrix}, \quad \vec{f}_i^{inv} = \begin{bmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i \vec{u} + \vec{\delta}_i p \\ (E_t + p) u_i \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Με  $\rho$  συμβολίστηκε η πυκνότητα, με  $\vec{u} = [u_1, u_2]^T$  για  $2\Delta$  ροές συμβολίζονται οι καρτεσιανές συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας  $\vec{u}$ , με  $E_t = \rho E = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho|\vec{u}|^2$  συμβολίζεται η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου και με  $p$  η στατική πίεση. Ακόμη,  $\vec{\delta}_i = [\delta_{i1}, \delta_{i2}]^T$  είναι το σύμβολο του Kronecker, ενώ οπουδήποτε εμφανίζονται διπλά επαναλαμβανόμενοι δείκτες θα υπονοείται άθροιση, σύμφωνα με τη σύμβαση του Einstein, εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά.

## 2.2 Η παραδοχή του τελείου αερίου

Στη ροή συμπιεστού ρευστού, οι εξισώσεις της ορμής είναι συνδεδεμένες με την εξίσωση της ενέργειας διά μέσου της πυκνότητας του αερίου. Για τον υπολογισμό της πυκνότητας χρησιμοποιείται η παραδοχή του τελείου αερίου, η οποία και παρουσιάζεται στη συνέχεια. Ως τέλειο αέριο, ορίζεται το αέριο του οποίου η θερμοδυναμική συμπεριφορά μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση:

$$p = \rho R_g T \quad (2.4)$$

δηλαδή την καταστατική εξίσωση ιδανικών αερίων, όπου με  $R_g$  συμβολίζεται η σταθερά του εν λόγω αερίου. Η σταθερά αυτή, μπορεί να υπολογιστεί βάσει των ειδικών θερμοχωρητικότητων υπό σταθερή πίεση ( $c_p$ ) και όγκο ( $c_v$ ) του αερίου, ως:

$$R_g = c_p - c_v \quad (2.5)$$

Όπως είναι γνωστό από τη θερμοδυναμική, με τον όρο *θερμοχωρητικότητα* ορίζεται το ποσό θερμότητας που απορροφά ή εκλύει ένα σώμα, όταν η θερμοκρασία του μεταβληθεί κατά 1°C. Η ειδική θερμοχωρητικότητα εκφράζει αυτό το ποσό θερμότητας ανηγμένο στη μονάδα μάζας, ενώ οι χαρακτηρισμοί ‘υπό σταθερό όγκο’ ή ‘υπό σταθερή πίεση’ χαρακτηρίζουν τις συνθήκες υπό τις οποίες πραγματοποιείται η μεταβολή. Μαθηματικά, τα μεγέθη αυτά ορίζονται ως:

$$c_p = \left( \frac{\partial q}{\partial T} \right)_p, \quad c_v = \left( \frac{\partial q}{\partial T} \right)_v \quad (2.6)$$

Μάλιστα, με χρήση του Α’ θερμοδυναμικού αξιώματος, η σχέση 2.6 μπορεί να ξαναγραφεί ως:

$$c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p, \quad c_v = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_v \quad (2.7)$$

όπου με  $h$  συμβολίστηκε η ενθαλπία ανά μονάδα μάζας και με  $e$  η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας. Τα δύο αυτά μεγέθη συνδέονται μεταξύ τους μέσω της ακόλουθης σχέσης:

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad (2.8)$$

Για τον υπολογισμό των ειδικών θερμοχωρητικότητων είναι απαραίτητη η γνώση δύο οποιωνδήποτε θερμοδυναμικών μεγεθών, το ένα από τα οποία συνήθως είναι η θερμοκρασία. Στα τέλεια αέρια δε, χρειάζεται η γνώση μόνο της θερμοκρασίας, αφού η εσωτερική ενέργεια είναι συνάρτηση αυτής ( $e = e(T)$ ) και με βάση τις σχέσεις 2.4, 2.8 αποδεικνύεται ότι το ίδιο ισχύει για την ενθαλπία ( $h = h(T)$ ). Άρα, από τη σχέση 2.7 είναι προφανές ότι οι ειδικές θερμοχωρητικότητες συναρτώνται μόνο της θερμοκρασίας. Ωστόσο, επειδή αυτή η εξάρτηση είναι μικρή, μπορεί πρακτικά να αμεληθεί και να χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες σχέσεις:

$$e = c_v T, \quad h = c_p T \quad (2.9)$$

Τέλος, ορίζεται ο εκθέτης ισεντροπικής μεταβολής ως ο λόγος των δύο θερμοχωρητικότητων:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.10)$$

Θεωρώντας ότι η θερμοδυναμική συμπεριφορά του ατμοσφαιρικού αέρα ακολουθεί τη θεώρηση τελείου αερίου, οι θερμοδυναμικές σταθερές που τον χαρακτηρίζουν συνοψίζονται στον πίνακα 2.1.

Τέλος, δύο ακόμα χρήσιμες σχέσεις που προκύπτουν με βάση τα προηγούμενα συνοψίζονται παρακάτω:

$$E_t = \rho E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 + u_2^2) \quad (2.11)$$

$$h_t = \frac{E_t + p}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2) \quad (2.12)$$

Σταθερά	Τιμή	Μονάδες στο SI
$R_g$	287.04	$\text{m}^2\text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$
$c_p$	1004.64	$\text{m}^2\text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$
$c_v$	717.6	$\text{m}^2\text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$
$\gamma$	1.4	—

Πίνακας 2.1: Οι θερμοδυναμικές ιδιότητες του ατμοσφαιρικού αέρα, θεωρούμενου ως τέλειο αέριο.

### 2.3 Πρόβλημα Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων

Ένα βασικό βήμα για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ροής, είναι η εύρεση των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων της ορίζουσας  $A = A_i n_i$ , όπως ορίζεται στη συνέχεια. Η γνώση των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων σε υπερβολικά προβλήματα στο χωρο-χρόνο, είναι απαραίτητη για την επιλογή κατάλληλων σχημάτων διακριτοποίησης των αριθμητικών ροών που θα είναι συμβατά με τη φυσική της ροής. Το γενικό μητρώο  $A$  χρησιμοποιείται για να συνδέσει τα κατά κατεύθυνση Ιακωβιανά μητρώα  $A_i$  (π.χ. για ένα  $2\Delta$  πρόβλημα, τα  $A_1 = \frac{\partial \vec{f}_1^{inv}}{\partial \vec{U}}$ ,  $A_2 = \frac{\partial \vec{f}_2^{inv}}{\partial \vec{U}}$ ) μέσω των συνιστωσών  $n_i = (n_1, n_2)$  ενός μοναδιαίου διανύσματος  $\vec{n}$ , κάθετου σε κάθε ένα τμήμα της περιβάλλουσας ενός όγκου αναφοράς, το οποίο διασχίζει η ατρίβης ροή.

Οι εξισώσεις της σχέσης 2.2, με την εισαγωγή των Ιακωβιανών μητρώων  $A_i$  μπορούν να γραφούν ως:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A_i \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.13)$$

όπου  $A_i = \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial \vec{U}}$  είναι τα Ιακωβιανά μητρώα των ατρίβων ροών για τις συντηρητικές μεταβλητές.

Ένας εναλλακτικός τρόπος γραφής των εξισώσεων Euler (σχέση 2.13), είναι με χρήση των μη-συντηρητικών μεταβλητών. Αυτή η διατύπωση, έχει παρατηρηθεί ότι οδηγεί στον υπολογισμό απλούστερων Ιακωβιανών μητρώων, που όμως έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα με αυτά που προκύπτουν από τη συντηρητική γραφή των εξισώσεων. Με χρήση των μη-συντηρητικών μεταβλητών  $\vec{V} = [\rho \ u_i \ p]^T$ , η ‘αντίστοιχη’ της δεύτερης εξίσωσης της 2.13 ξαναγράφεται ως:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \tilde{A}_i \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.14)$$

όπου  $\tilde{A}_i$  τα Ιακωβιανά μητρώα για τις μη-συντηρητικές μεταβλητές. Η σχέση που συνδέει τα μητρώα  $\tilde{A}_i$  με τα αντίστοιχα των συντηρητικών μεταβλητών  $A_i$ , είναι:

$$\tilde{A}_i = M^{-1} A_i M \quad (2.15)$$



με  $M = \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{V}}$  το μητρώο μετασχηματισμού από τις συντηρητικές στις μη-συντηρητικές μεταβλητές. Τα μητρώα  $M$  και  $M^{-1}$  για 2Δ ροές, είναι [26]:

$$M = \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{V}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & \rho & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & \rho & 0 \\ \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 & \rho u_1 & \rho u_2 & \frac{1}{\gamma-1} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$M^{-1} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u_1}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{u_2}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{1}{2} (\gamma-1) |\vec{u}|^2 & -(\gamma-1) u_1 & -(\gamma-1) u_2 & -(\gamma-1) \end{bmatrix}$$

Επειδή όπως φαίνεται από τη σχέση 2.15 τα μητρώα  $A$  και  $\tilde{A}$  έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, αρκεί να υπολογιστούν για το μητρώο  $\tilde{A}$  των μη-συντηρητικών μεταβλητών, όπου ο υπολογισμός είναι πιο εύκολος. Έτσι, με βάση τη σχέση:

$$\det \left| \lambda_i I - \tilde{A} \right| \quad (2.17)$$

υπολογίζονται οι ιδιοτιμές του μητρώου  $\tilde{A}$ , οι οποίες είναι οι:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \vec{u} \cdot \vec{n} \\ \lambda_{3,4} &= \vec{u} \cdot \vec{n} \pm c |\vec{n}| \end{aligned} \quad (2.18)$$

με  $c$  την ταχύτητα του ήχου. Με χρήση δύο επιπλέον σχέσεων μπορούν να υπολογιστούν τα ιδιοδιανύσματα της ορίζουσας των μη-συντηρητικών μεταβλητών, ωστόσο για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφική αναφορά [17]. Μια πιο αναλυτική προσέγγιση, καλύπτεται πλήρως από βιβλία Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής για το συμπιεστό ρευστό (π.χ. [26]).

## 2.4 Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων

Αφού διατυπωθούν οι (συνήθεις ή μερικές) διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το υπό μελέτη φαινόμενο, και πριν ξεκινήσει η αριθμητική επίλυση αυτών, συνήθως ακολουθεί η πρακτική της αδιαστατοποίησης των εξισώσεων. Η διαδικασία αυτή αφορά στις ανεξάρτητες και τις εξαρτημένες μεταβλητές του προβλήματος, ή και σε άλλες φυσικές παραμέτρους που εμφανίζονται στις διαφορικές εξισώσεις. Το πλεονέκτημα που προκύπτει είναι ότι έτσι προκύπτουν νέες αδιάστατες παράμετροι οι οποίες επηρεάζουν το φυσικό φαινόμενο που περιγράφουν οι διαφορικές εξισώσεις, απλοποιώντας την εφαρμογή των οριακών συνθηκών. Έτσι, τα αποτελέσματα μπορούν να έχουν μια γενικότερη ισχύ για μια ομάδα εφαρμογών που διέπονται από όμοιους συνδυασμούς αδιάστατων παραμέτρων. Τυπικό παράδειγμα

αδιαστατοποίησης εξισώσεων αποτελούν οι εξισώσεις Navier-Stokes, στις οποίες η αδιαστατοποίηση οδηγεί στην εμφάνιση των αριθμών Reynolds, Eckert και Prandtl.

Στην περίπτωση των εξισώσεων Euler, παρότι δεν προκύπτει κάποια χρήσιμη αδιάστατη ποσότητα, η αδιαστατοποίηση γίνεται επιλέγοντας τα κατάλληλα μεγέθη αναφοράς (reference). Έτσι προκύπτουν οι ακόλουθες αδιάστατες ποσότητες:

$$\check{x}_i = \frac{x_i}{L_{ref}}, \quad \check{u}_i = \frac{u_i}{U_{ref}}, \quad \check{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{ref}} \quad (2.19)$$

όπου με  $L_{ref}$ ,  $U_{ref}$  και  $\rho_{ref}$  συμβολίζονται το μήκος αδιαστατοποίησης, η ταχύτητα αδιαστατοποίησης και η πυκνότητα αδιαστατοποίησης, ενώ με το σύμβολο  $\check{\phantom{x}}$  συμβολίζονται οι αδιάστατες ποσότητες. Επίσης επιλέγεται:

$$\check{R}_g = \gamma - 1 \quad (2.20)$$

ή αλλιώς

$$(R_g)_{ref} = c_v \quad (2.21)$$

Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας, τα μεγέθη αναφοράς που επιλέγονται με βάση τη συγκεκριμένη εφαρμογή είναι το μήκος της χορδής της αεροτομής  $c$ , η ταχύτητα της επ' άπειρο ροής  $U_\infty$  και η πυκνότητα της επ' άπειρο ροής  $\rho_\infty$ . Φυσικά, για κάθε εφαρμογή, πρέπει να επιλέγονται κατάλληλα μεγέθη αναφοράς τα οποία να έχουν φυσική σημασία για τη συγκεκριμένη εφαρμογή. Τα υπόλοιπα μεγέθη αναφοράς θα προκύψουν μέσω σχέσεων συμβατότητας που πρέπει να ισχύουν μεταξύ των αρχικών εξισώσεων και αυτών που θα σχηματιστούν μετά την αντικατάσταση των αδιάστατων μεγεθών που ήδη ορίστηκαν. Έτσι προκύπτουν τα ακόλουθα:

### Αδιαστατοποίηση πίεσης

Με πράξεις προκύπτει:

$$p_t = p + \frac{1}{2} \rho |\vec{u}|^2 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_t - p)} \Rightarrow |\check{\vec{u}}| = \frac{1}{U_{ref}} \sqrt{\frac{2 p_{ref}}{\check{\rho} \rho_{ref}} (\check{p}_t - \check{p})} \quad (2.22)$$

Επειδή όμως πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις συμβατότητας μεταξύ των διαστατών και των αδιάστατων εξισώσεων, θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$|\check{\vec{u}}| = \sqrt{\frac{2}{\check{\rho}} (\check{p}_t - \check{p})} \quad (2.23)$$

Η παραπάνω απαίτηση συνεπάγεται δηλαδή ότι:

$$U_{ref} = \sqrt{\frac{p_{ref}}{\rho_{ref}}} \Rightarrow p_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^2 \quad (2.24)$$

**Αδιαστατοποίηση θερμοκρασίας**

Με πράξεις προκύπτει:

$$p = \rho R_g T \Rightarrow \check{p} = \left( \frac{\rho_{ref} (R_g)_{ref} T_{ref}}{p_{ref}} \right) \check{\rho} \check{R}_g \check{T} \quad (2.25)$$

Επειδή όμως πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις συμβατότητας μεταξύ των διαστατών και των αδιάστατων εξισώσεων, θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\check{p} = \check{\rho} \check{R}_g \check{T} \quad (2.26)$$

Η παραπάνω απαίτηση συνεπάγεται δηλαδή ότι:

$$\frac{\rho_{ref} (R_g)_{ref} T_{ref}}{p_{ref}} = 1 \Rightarrow T_{ref} = \frac{U_{ref}^2}{c_v} \quad (2.27)$$

**Αδιαστατοποίηση ειδικών θερμοχωρητικοτήτων**

Με πράξεις προκύπτει:

$$T_t = T + \frac{1}{2c_p} |\vec{u}|^2 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{2c_p (T_t - T)} \Rightarrow \quad (2.28)$$

$$|\check{u}| = \sqrt{\left( \frac{(c_p)_{ref} T_{ref}}{U_{ref}^2} \right) 2\check{c}_p (\check{T}_t - \check{T})}$$

Επειδή όμως πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις συμβατότητας μεταξύ των διαστατών και των αδιάστατων εξισώσεων, θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$|\check{u}| = \sqrt{2\check{c}_p (\check{T}_t - \check{T})} \quad (2.29)$$

Η παραπάνω απαίτηση συνεπάγεται ότι:

$$\frac{(c_p)_{ref} T_{ref}}{U_{ref}^2} = 1 \Rightarrow (c_p)_{ref} = \frac{U_{ref}^2}{T_{ref}} \Rightarrow (c_p)_{ref} = c_v \quad (2.30)$$

και

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \Rightarrow \gamma = \left( \frac{(c_p)_{ref}}{(c_v)_{ref}} \right) \frac{\check{c}_p}{\check{c}_v} \Rightarrow (c_v)_{ref} = c_v \quad (2.31)$$

**Αδιαστατοποίηση εσωτερικής ενέργειας**

Από τη σχέση 2.9 προκύπτει:

$$e = c_v T \Rightarrow \check{e} = \left( \frac{(c_v)_{ref} T_{ref}}{e_{ref}^2} \right) \check{c}_v \check{T} \quad (2.32)$$

Άρα η απαιτούμενη εξάρτηση μεταξύ των μεγεθών αναφοράς προκύπτει ως:

$$e_{ref} = U_{ref}^2 \quad (2.33)$$

**Αδιαστατοποίηση ενθαλπίας**

Από τη σχέση 2.9 προκύπτει:

$$h = c_p T \Rightarrow \check{h} = \left( \frac{(c_p)_{ref} T_{ref}}{h_{ref}} \right) \check{c}_p \check{T} \quad (2.34)$$

Άρα η απαιτούμενη εξάρτηση μεταξύ των μεγεθών αναφοράς προκύπτει ως:

$$h_{ref} = U_{ref}^2 \quad (2.35)$$

**Αδιαστατοποίηση ολικής ενέργειας**

Με πράξεις προκύπτει:

$$E_t = \rho E = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho |\vec{u}|^2 \Rightarrow \check{E}_t = \frac{1}{(E_t)_{ref}} \left[ (p_{ref}) \frac{\check{p}}{\gamma-1} + \frac{1}{2} (\rho_{ref} U_{ref}^2) \check{\rho} |\check{u}|^2 \right] \Rightarrow \quad (2.36)$$

$$\check{E}_t = \frac{\rho_{ref} U_{ref}^2}{(E_t)_{ref}} \left( \frac{\check{p}}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \check{\rho} |\check{u}|^2 \right)$$

Άρα η απαιτούμενη εξάρτηση μεταξύ των μεγεθών αναφοράς προκύπτει ως:

$$(E_t)_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^2 \quad (2.37)$$

Συνοψίζοντας, όλες οι αδιαστατοποιήσεις πλην των τριών βασικών μεγεθών (βλ. σχέση 2.19 ) φαίνονται παρακάτω:

$$\check{p} = \frac{p}{\rho_{ref} U_{ref}^2}, \quad \check{T} = \frac{T}{U_{ref}^2 / c_v}, \quad \check{e} = \frac{e}{U_{ref}^2}, \quad \check{h} = \frac{h}{U_{ref}^2}, \quad \check{E} = \frac{E}{\rho_{ref} U_{ref}^2} \quad (2.38)$$

και ακόμη:

$$\check{c}_p = \gamma, \quad \check{c}_v = 1 \quad (2.39)$$

**Διατύπωση αδιάστατων εξισώσεων****Εξίσωση συνέχειας**

Η εξίσωση της συνέχειας περιέχεται στην πρώτη γραμμή των εξισώσεων 2.2. Για λόγους συνέπειας, η διατύπωση της αδιάστατης εξίσωσης συνέχειας θα γίνει μέσω των διανυσμάτων που ορίστηκαν στη σχέση 2.3. Έτσι προκύπτει:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial (f_i^{inv})_1}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{(U_1)_{ref}}{t_{ref}} \frac{\partial \check{U}_1}{\partial \check{t}} + \frac{((f_i^{inv})_1)_{ref}}{L_{ref}} \frac{\partial (\check{f}_i^{inv})_1}{\partial \check{x}_i} = 0 \quad (2.40)$$

Όμως ισχύουν:

$$\begin{aligned} U_1 = \rho &\Rightarrow (U_1)_{ref} = \rho_{ref} \\ (f_1^{inv})_1 = \rho u_1 &\Rightarrow ((f_1^{inv})_1)_{ref} = \rho_{ref} U_{ref} \\ (f_2^{inv})_1 = \rho u_2 &\Rightarrow ((f_2^{inv})_1)_{ref} = \rho_{ref} U_{ref} \end{aligned}$$

Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση 2.40 γίνεται:

$$\frac{L_{ref}}{U_{ref}t_{ref}} \frac{\partial \check{U}_1}{\partial \check{t}} + \frac{\partial \left( \check{f}_i^{inv} \right)_1}{\partial \check{x}_i} = 0 \quad (2.41)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις 2.2 και 2.41, είναι προφανές ότι προκειμένου να έχουν την ίδια μορφή, το χρονικό μέγεθος αναφοράς πρέπει να λάβει μια συγκεκριμένη τιμή. Έτσι προκύπτει:

$$t_{ref} = \frac{L_{ref}}{U_{ref}}, \quad \check{t} = \frac{t}{L_{ref}/U_{ref}} \quad (2.42)$$

### Εξίσωση ορμής

Η διανυσματική εξίσωση της ορμής περιέχεται στη δεύτερη γραμμή των εξισώσεων 2.2 και αποτελείται από δύο επιμέρους εξισώσεις, μία για κάθε κατεύθυνση. Για λόγους συνέπειας, η διατύπωση των αδιάστατων εξισώσεων ορμής θα γίνει μέσω των διανυσμάτων που ορίστηκαν στη σχέση 2.3. Έτσι, για την εξίσωση ορμής κατά- $x_1$  προκύπτει:

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial (f_i^{inv})_2}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{(U_2)_{ref}}{t_{ref}} \frac{\partial \check{U}_2}{\partial \check{t}} + \frac{((f_i^{inv})_2)_{ref}}{L_{ref}} \frac{\partial \left( \check{f}_i^{inv} \right)_2}{\partial \check{x}_i} = 0 \quad (2.43)$$

Όμως ισχύουν:

$$\begin{aligned} U_2 &= \rho u_1 \Rightarrow (U_2)_{ref} = \rho_{ref} U_{ref} \\ (f_1^{inv})_2 &= \rho u_1^2 + p \Rightarrow ((f_1^{inv})_2)_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^2 \\ (f_2^{inv})_2 &= \rho u_1 u_2 \Rightarrow ((f_2^{inv})_2)_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^2 \end{aligned}$$

Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση 2.43 γίνεται:

$$\frac{\partial \check{U}_2}{\partial \check{t}} + \frac{\partial \left( \check{f}_i^{inv} \right)_2}{\partial \check{x}_i} = 0 \quad (2.44)$$

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει η εξίσωση ορμής κατά- $x_2$  ως:

$$\frac{\partial \check{U}_3}{\partial \check{t}} + \frac{\partial \left( \check{f}_i^{inv} \right)_3}{\partial \check{x}_i} = 0 \quad (2.45)$$

### Εξίσωση ενέργειας

Η εξίσωση της ενέργειας περιέχεται στην τέταρτη γραμμή των εξισώσεων 2.2. Για λόγους συνέπειας, η διατύπωση της αδιάστατης εξίσωσης ενέργειας θα γίνει μέσω των διανυσμάτων που ορίστηκαν στη σχέση 2.3. Έτσι προκύπτει:

$$\frac{\partial U_4}{\partial t} + \frac{\partial (f_i^{inv})_4}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{(U_4)_{ref}}{t_{ref}} \frac{\partial \check{U}_4}{\partial \check{t}} + \frac{((f_i^{inv})_4)_{ref}}{L_{ref}} \frac{\partial \left( \check{f}_i^{inv} \right)_4}{\partial \check{x}_i} = 0 \quad (2.46)$$

Όμως ισχύουν:

$$\begin{aligned} U_4 = E_t &\Rightarrow (U_4)_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^2 \\ (f_1^{inv})_4 = (E_t + p) u_1 &\Rightarrow ((f_1^{inv})_4)_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^3 \\ (f_2^{inv})_4 = (E_t + p) u_2 &\Rightarrow ((f_2^{inv})_4)_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^3 \end{aligned}$$

Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση 2.46 γίνεται:

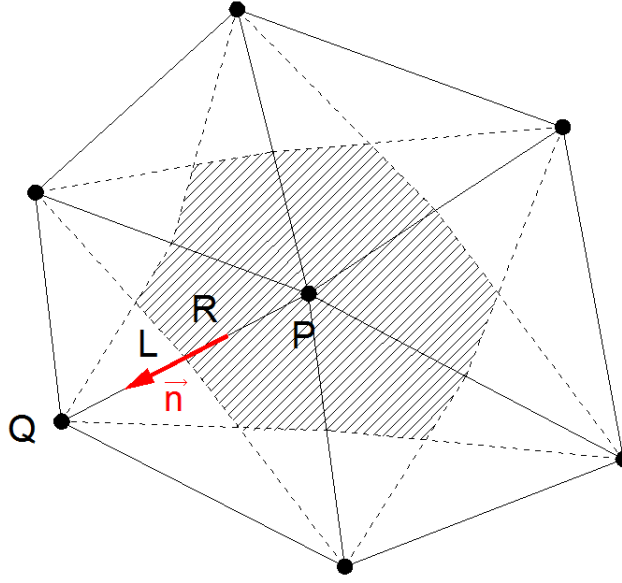
$$\frac{\partial \check{U}_4}{\partial \check{t}} + \frac{\partial \left( \check{f}_i^{inv} \right)_4}{\partial \check{x}_i} = 0 \quad (2.47)$$

Σε αυτό το σημείο ολοκληρώνεται η μαθηματική επεξεργασία και διατύπωση των (αδιάστατων) εξισώσεων ροής. Το κέρδος της διαδικασίας αδιαστατοποίησης, όπως παρατηρήθηκε, είναι ότι η εισαγωγή τριών βασικών μεγεθών αναφοράς ( $L_{ref}$ ,  $U_{ref}$ ,  $\rho_{ref}$ ) καθιστά εφικτή την επίλυση των εξισώσεων για μια οικογένεια προβλημάτων και όχι μόνο για μια απλή μεμονωμένη εφαρμογή. Παράλληλα, το τελικό σύστημα των εξισώσεων δεν διαφέρει σε τίποτα από το αρχικό. Στη συνέχεια, θα ακολουθήσει η διαδικασία διακριτοποίησης των μαθηματικών εξισώσεων, που είναι απαραίτητη προκειμένου να γίνει εφικτή η επίλυσή τους από έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή. Οποιαδήποτε αναφορά στις εξισώσεις, εφεξής, θα αναφέρεται στις αδιάστατες εξισώσεις, από τις οποίες για λόγους απλότητας θα παραλείπεται το αντίστοιχο σύμβολο σε κάθε μέγεθος.

## 2.5 Διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου

Οι περιπτώσεις που μελετώνται σε αυτή την εργασία, αφορούν μια τυπική αεροτομή τοποθετημένη παράλληλα σε ρεύμα ρευστού. Ο επιλύτης της ροής αποτελεί τμήμα λογισμικού που έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο της ερευνητικής δραστηριότητας του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ. Η διακριτοποίηση του χωρίου ροής γίνεται με τη βοήθεια λογισμικού του εργαστηρίου, κι έτσι δημιουργείται ένα μη δομημένο πλέγμα που αποτελείται από τριγωνικά στοιχεία. Η διακριτοποίηση των εξισώσεων της ροής γίνεται βάσει της κεντροκομβικής διατύπωσης (**vertex centered formulation**) της τεχνικής των πεπερασμένων όγκων, κατά την οποία η ολοκλήρωση των εξισώσεων 2.2 γίνεται σε όγκους ελέγχου που σχηματίζονται γύρω από τους κόμβους του πλέγματος. Έτσι, για την επίλυση του προβλήματος αρκεί να επιλυθεί ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων με αγνώστους 4 ροϊκά μεγέθη ανά κόμβο.

Ο όγκος ελέγχου ( $\Omega_P$ ) γύρω από έναν τυχαίο κόμβο  $P$  ενός μη δομημένου υπολογιστικού πλέγματος, αποτελούμενου από τριγωνικά στοιχεία, φαίνεται στο σχήμα 2.1. Όπως είναι προφανές, τον ορισμό των όγκων ελέγχου υπαγορεύει η κεντροκομβική διατύπωση. Έτσι, οι όγκοι ελέγχου γύρω από κάθε κόμβο του πλέγματος  $P$ , ορίζονται ενώνοντας με τεθλασμένη γραμμή τα βαρύκεντρα των γύρω στοιχείων και τα μέσα των ακμών που συντρέχουν στον κόμβο  $P$ . Επίσης, με έντονο/κόκκινο χρώμα ορίζεται το κάθετο διάνυσμα στη διεπιφάνεια των όγκων ελέγχου,  $\vec{n}$ , που



Σχήμα 2.1: Όγκος ελέγχου σε μη δομημένα πλέγματα τριγωνικών στοιχείων.

σχηματίζονται γύρω από τους γειτονικούς κόμβους  $P$  και  $Q$ . Το μέτρο του διανύσματος  $\vec{n}$  είναι ίσο με το εμβαδό της διεπιφάνειας αυτής, ενώ με  $L$  και  $R$  ορίζονται οι θέσεις εκατέρωθεν του μέσου της ακμής  $PQ$ .

## 2.6 Διακριτοποίηση των εξισώσεων

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η διακριτοποίηση των εξισώσεων με την κεντροκομβική διατύπωση της τεχνικής των πεπερασμένων όγκων, όπως ήδη αναφέρθηκε. Έτσι, ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις 2.2 στον όγκο ελέγχου  $\Omega_P^{\kappa+1}$  που σχηματίζεται γύρω από τον κόμβο  $P$  του σχήματος 2.1, τη χρονική στιγμή  $t^{\kappa+1}$  ( $\Omega_P^{\kappa+1} \doteq \Omega_P(t^{\kappa+1})$ ), προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$\iiint_{\Omega_P^{\kappa+1}} \left[ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_i} \right] d\Omega = 0 \Rightarrow \iiint_{\Omega_P^{\kappa+1}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega + \iint_{\partial \Omega_P^{\kappa+1}} \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_i} d\Omega = 0 \quad (2.48)$$

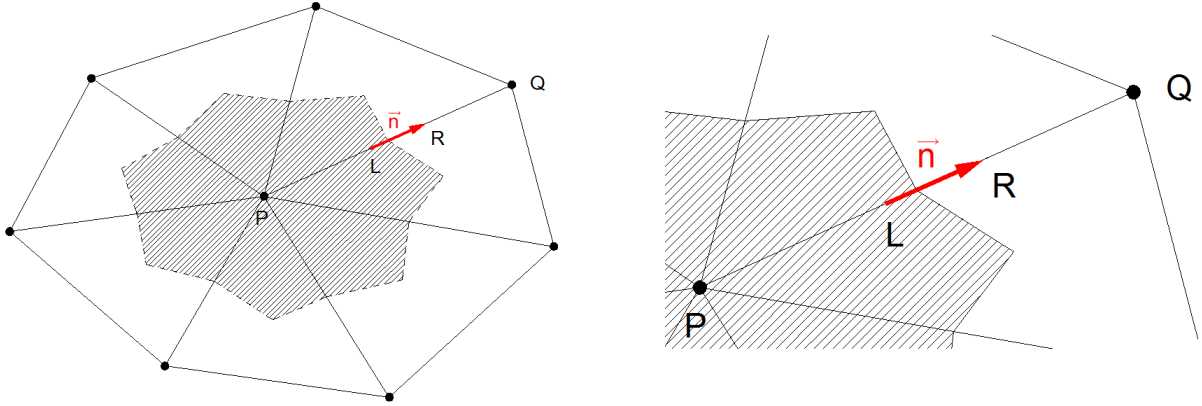
Στη συνέχεια, με εφαρμογή του θεωρήματος Green-Gauß<sup>1</sup> στο δεύτερο χωρικό ολοκλήρωμα, η εξίσωση 2.48 ξαναγράφεται ως:

$$\iiint_{\Omega_P^{\kappa+1}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega + \iint_{\partial \Omega_P^{\kappa+1}} \vec{f}_i^{inv} \hat{n}_i d\partial\Omega = 0 \quad (2.49)$$

Η εξίσωση 2.49 γράφεται σε διακριτή μορφή, ως:

$$\frac{\Omega_P}{\Delta t_P} \Delta \vec{U}_P + \sum_{Q \in \text{nei}(P)} \left[ \vec{\Phi}_{PQ}^{inv} \right] \Delta \partial\Omega = 0 \quad (2.50)$$

<sup>1</sup>Για περισσότερες πληροφορίες βλ. Παράρτημα Α'1.



Σχήμα 2.2: Όγκος ελέγχου γύρω από τον κόμβο  $P$ .

όπου με  $\Omega_P$  συμβολίστηκε το εμβαδόν της υπολογιστικής κυψέλης γύρω από τον κόμβο  $P$ , με  $nei(P)$  συμβολίζονται οι κόμβοι που συνορεύουν με τον  $P$  και  $\vec{\Phi}_{PQ}$  είναι το αριθμητικό διάνυσμα ατριβούς ροής ανά μονάδα μήκους, το οποίο διασχίζει την κάθε ακμή που συνδέει τον κόμβο  $P$  με τους γειτονικούς του.

Στο σημείο αυτό, να σημειωθεί ότι ο όγκος ελέγχου  $\Omega_P$  θεωρήθηκε πως παραμένει αμετάβλητος στο χρόνο ( $\Omega_P^{k+1} \doteq \Omega_P^k \doteq \Omega_P$ ). Στο επόμενο κεφάλαιο, στην ενότητα 3.3, θα αναλυθεί η περίπτωση στην οποία ο όγκος ελέγχου μεταβάλλεται στο χρόνο, καθώς τότε προκύπτουν επιπλέον συνεισφορές στις διακριτοποιημένες εξισώσεις.

### 2.6.1 Υπολογισμός των διανυσμάτων ροής

Το διάνυσμα ατριβούς ροής  $\vec{\Phi}_{PQ}$  υπολογίζεται με χρήση του μονοδιάστατου επιλύτη *Riemann* κατά *Roe*. Σύμφωνα με αυτόν, η σχέση υπολογισμού του είναι η ακόλουθη:

$$\vec{\Phi}_{PQ} = \frac{1}{2} \left[ A_P \vec{V}_{PQ}^L + A_Q \vec{V}_{PQ}^R \right] - \frac{1}{2} \left| \tilde{A}_{PQ} \right| \left( \vec{V}_{PQ}^R - \vec{V}_{PQ}^L \right) \quad (2.51)$$

Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το σχήμα διάσπασης ροών (Flux Vector Splitting, FVS [27]) που εκφράζεται με βάση τη σχέση:

$$\vec{\Phi}_{PQ} = A_{PQ}^- \vec{V}_{PQ}^R + A_{PQ}^+ \vec{V}_{PQ}^L \quad (2.52)$$

Στις εξισώσεις 2.51 και 2.52, με  $\vec{V}$  συμβολίστηκε το διάνυσμα των μη-συντηρητικών μεταβλητών  $\vec{V} = [\rho \ u_i \ p]^T$ . Ακόμη, οι ροϊκές ποσότητες  $\vec{V}_{PQ}^L, \vec{V}_{PQ}^R$  υπολογίζονται από την προεκβολή των ροϊκών μεταβλητών στους κόμβους  $P$  και  $Q$  αντίστοιχα, στο μέσο της ακμής που συνδέει τους δύο γειτονικούς κόμβους (βλ. σχήμα 2.2). Είναι,



δηλαδή:

$$\begin{aligned}\vec{V}_{PQ}^L &= \vec{V}_P + \frac{1}{2} \left( \overrightarrow{PQ} \right) \cdot \nabla \vec{V}_P \\ \vec{V}_{PQ}^R &= \vec{V}_Q + \frac{1}{2} \left( \overrightarrow{PQ} \right) \cdot \nabla \vec{V}_Q\end{aligned}\quad (2.53)$$

Τα μητρώα  $A^+$ ,  $A^-$ ,  $\tilde{A}$  αποτελούν τα Ιακωβιανά μητρώα υπολογισμένα σύμφωνα με τις θετικές ή τις αρνητικές ιδιοτιμές, ή με βάση τις κατά Roe σταθμισμένες μέσες τιμές των ροϊκών μεταβλητών στους κόμβους  $P$  και  $Q$ , αντίστοιχα.

Στο σημείο αυτό να σημειωθεί ότι ο υπολογισμός των ροϊκών ποσοτήτων  $\vec{V}_{PQ}^L$ ,  $\vec{V}_{PQ}^R$  βάσει της σχέσης 2.53 είναι αρκετά ακριβής, ωστόσο ενδέχεται να οδηγήσει σε υποεκτίμηση ή υπερεκτίμηση των τιμών τους. Για το λόγο αυτό, συνηθίζεται να χρησιμοποιούνται κάποιες επιπλέον συναρτήσεις περιορισμού (limiters), οι οποίες εξομαλύνουν αυτά τα σφάλματα. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με το θέμα των συναρτήσεων περιορισμού, ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφική αναφορά [28]. Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια πρώτης τάξης, δηλαδή τα  $\vec{V}_{PQ}^L, \vec{V}_{PQ}^R$  να λαμβάνουν τις τιμές των  $\vec{V}_P$  και  $\vec{V}_Q$ , αντιστοίχως (βλ. σχήμα 2.2).

### 2.6.2 Διακριτοποίηση του ψευδο-χρονικού όρου

Στις εξισώσεις 2.2, οι οποίες επαναλαμβάνονται για λόγους πληρότητας παρακάτω, εμφανίζεται ο χρονικός όρος  $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$ .

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial f_i^{inv}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.54)$$

Ο όρος αυτός, όπως έχει ήδη αναφερθεί, χρησιμοποιείται για τη σύγκλιση των εξισώσεων σε κάθε πραγματικό χρονικό βήμα και είναι απαραίτητος για την εφαρμογή της τεχνικής της ‘χρονο-προέλασης’. Για το λόγο αυτό, αναφέρεται και ως ‘ψευδο-χρονικός’ όρος.

Η διακριτοποίηση του ψευδο-χρονικού όρου γίνεται με το σχήμα πρώτης τάξης, ανάντι διαφόρισης του Euler:

$$\left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right)_P \Omega_P \simeq \frac{\Omega_P}{\Delta t_P} \Delta \vec{U}_P \quad (2.55)$$

όπου  $\Delta \vec{U}_P = \left( \vec{U}_P \right)^{n+1} - \left( \vec{U}_P \right)^n$  με  $n$  το τρέχον και  $n+1$  το επόμενο ψευδο-χρονικό βήμα. Προκειμένου να επιτευχθεί ταχύτερη σύγκλιση, εφαρμόζεται η τεχνική του τοπικού χρονικού βήματος [29], για τον υπολογισμό του οποίου χρησιμοποιείται η διατύπωση ‘κατά ακμή’. Έτσι, το ψευδο-χρονικό βήμα  $\Delta t_P$  που απαιτείται στη σχέση 2.55, για κάθε κόμβο ξεχωριστά υπολογίζεται ως:

$$\Delta t_P = \frac{CFL \Omega_P}{T_1^{inv} + T_2^{inv}} \quad (2.56)$$

όπου  $\Omega_P$  το εμβαδό του όγκου ελέγχου του κόμβου  $P$ , για τον οποίο υπολογίζεται το ψευδο-χρονικό βήμα και  $CFL$  ο αριθμός *Courant-Friedrichs-Lewy*. Ο αριθμός αυτός καθορίζει τη σύγκλιση κάθε πραγματικού χρονικού βήματος και τη διατήρηση της ευστάθειας του σχήματος επίλυσης<sup>2</sup>. Επιπλέον, για το διάνυσμα της ατρίβους ροής ισχύει:

$$T_i^{inv} = (|u_i| + c) \Omega_{P_i} \quad (2.57)$$

όπου  $\Omega_{P_i}$  είναι οι προβολές του όγκου ελέγχου του κόμβου  $P$  κατά την κατεύθυνση  $i$ , με  $i = 1, 2$  για το  $2\Delta$  πρόβλημα. Επίσης, ο όρος  $|u_i| + c$  αντιστοιχεί στη μέγιστη ταχύτητα διάδοσης της πληροφορίας ανά κατεύθυνση.

## 2.7 Επιβολή οριακών συνθηκών και η διακριτοποίηση αυτών

Η διακριτοποιημένη εξίσωση 2.50 στην οποία κατέληξε η μελέτη που προηγήθηκε, αφορά στην περίπτωση που ο κόμβος  $P$  είναι ένας (τυχαίος) εσωτερικός κόμβος του υπολογιστικού χωρίου. Στην περίπτωση που ο κόμβος  $P$  βρίσκεται επί του ορίου του χωρίου, τότε πρέπει επίσης να υπολογιστεί το διάνυσμα ροής που εξέρχεται από την κυψέλη στην οποία ανήκει ο κόμβος, προς το εξωτερικό του υπολογιστικού χωρίου. Η εξίσωση 2.50 ξαναγράφεται ως:

$$\frac{\Omega_P}{\Delta t_P} \Delta \vec{U}_P + \sum_{Q \in nei(P)} \left[ \vec{\Phi}_{PQ}^{inv} \right] \Delta \partial\Omega + \vec{\Phi}_{\partial\Omega}^{inv} = 0 \quad (2.58)$$

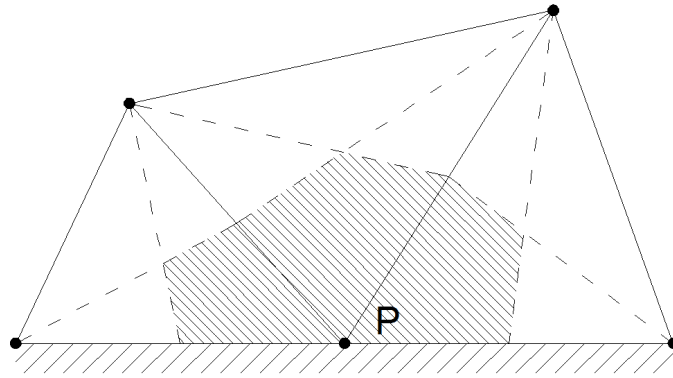
όπου με  $\partial\Omega$  συμβολίστηκε το όριο του υπολογιστικού χωρίου. Ο τρόπος υπολογισμού του διανύσματος  $\vec{\Phi}_{\partial\Omega}^{inv}$ , εξαρτάται από το είδος του ορίου στο οποίο ανήκει ο κόμβος  $P$ . Το είδος του ορίου εξαρτάται από την προς επίλυση εφαρμογή, και συνήθως μπορεί να είναι:

- Στερεό τοίχωμα
- Είσοδος/Εξοδος
- Όριο με συνθήκη συμμετρίας
- Περιοδικό όριο

Επειδή στο πλαίσιο αυτής της εργασίας εξετάζεται μόνο η περίπτωση της μεμονωμένης αεροτομής, στη συνέχεια θα αναλυθούν μόνο οι περιπτώσεις που το όριο είναι στερεό τοίχωμα και είσοδος/έξοδος.

---

<sup>2</sup>Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τον αριθμό  $CFL$  ο αναγνώστης καλείται να ανατρέξει στη βιβλιογραφική παραπομπή [30]



Σχήμα 2.3: Όγκος ελέγχου γύρω από τον κόμβο  $P$  του στερεού τοίχωματος.

### Στερεό τοίχωμα

Όπως είναι γνωστό από τη Μηχανική των Ρευστών, στις ατριβείς ροές επιβάλλεται ο μηδενισμός της κάθετης στο τοίχωμα ταχύτητας. Η συνθήκη αυτή, είναι γνωστή και ως ‘συνθήκη μη-εισχώρησης’ και μαθηματικά εκφράζεται από τη σχέση  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ . Το διάνυσμα ροής  $\vec{\Phi}_{wall}^{inv}$  στον οριακό κόμβο  $P$  (βλ. σχήμα 2.3) υπολογίζεται με βάση τη σχέση:

$$\vec{\Phi}_{wall}^{inv} = \begin{bmatrix} \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) \\ \rho u_1 (\vec{u} \cdot \vec{n}) + p n_1 \\ \rho u_2 (\vec{u} \cdot \vec{n}) + p n_2 \\ (E_t + p) (\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

η οποία, λόγω της συνθήκης μη-εισχώρησης καταλήγει στην απλή έκφραση:

$$\vec{\Phi}_{wall}^{inv} = \begin{bmatrix} 0 \\ p n_1 \\ p n_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

### Είσοδος/Έξοδος

Για τον καθορισμό του διανύσματος ροής  $\vec{\Phi}_{I/O}^{inv}$  ενός κόμβου  $P$  που βρίσκεται στην είσοδο (δείκτης  $I$ ) ή την έξοδο (δείκτης  $O$ ) του υπολογιστικού χωρίου, πρέπει να ληφθεί υπόψη η φυσική του προβλήματος, όπως αυτή εκφράζεται μέσω των Ιακωβιανών μητρών. Στην ενότητα 2.3 όπου παρουσιάστηκε η σχετική ανάλυση, υπολογίστηκαν οι ιδιοτιμές του μητρώου  $\hat{A}$  και βρέθηκαν να είναι:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \vec{u} \cdot \vec{n} \\ \lambda_{3,4} &= \vec{u} \cdot \vec{n} \pm c |\vec{n}| \end{aligned} \quad (2.61)$$

Όπως μπορεί να παρατηρηθεί, οι τρεις πρώτες ιδιοτιμές ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) είναι πάντα θετικές, ενώ η τέταρτη ( $\lambda_4$ ), στην περίπτωση που η ροή είναι υποηχητική λαμβάνει

αρνητικές τιμές. Αντίθετα, στην υπερηχητική ροή λαμβάνει θετικές τιμές. Αυτή η συμπεριφορά των ιδιοτιμών υποδεικνύει τους διαφορετικούς τρόπους μετάδοσης της πληροφορίας που εκφράζεται από κάθε μία εκ των τεσσάρων μεταβλητών ροής, στο χώρο. Έτσι, στην υποηχητική ροή οι τρεις πρώτες μεταβλητές ροής διαδίδονται κατά την κατεύθυνση της ροής, ενώ η τέταρτη εκτελεί την αντίστροφη διαδρομή, από τα κατάντι στα ανάντι. Σε υπερηχητικές συνθήκες, και οι τέσσερις μεταβλητές ροής μεταφέρονται στα κατάντι.

Ως αποτέλεσμα της παραπάνω συμπεριφοράς, οι οριακές συνθήκες που απαιτούνται ώστε να κλείσει το πρόβλημα εξαρτώνται από την ταχύτητα της ροής. Στην περίπτωση υποηχητικής ροής, πρέπει να οριστούν τρία μεγέθη στην είσοδο και ένα στην έξοδο, ώστε το πρόβλημα να είναι επιλύσιμο. Αντίθετα, σε υπερηχητική ροή, το σύνολο των τεσσάρων οριακών συνθηκών πρέπει να τεθεί στην είσοδο του χωρίου.

Το επόμενο βήμα συνίσταται στην επιλογή των κατάλληλων μεγεθών, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν ως οριακές συνθήκες με τον τρόπο που περιγράφηκε. Η επιλογή αυτή σαφώς εξαρτάται από τη συγκεκριμένη εφαρμογή που επιλύεται, και συγκεκριμένα για την περίπτωση της μεμονωμένης αεροτομής απαιτούνται:

$\rho_\infty$  : η πυκνότητα της επ' άπειρο ροής

$|\vec{U}_\infty|$  : το μέτρο της ταχύτητας της επ' άπειρο ροής

$\alpha_1$  : η γωνία μεταξύ του διανύσματος της ταχύτητας της επ' άπειρο ροής ( $\vec{U}_\infty$ ) και της χορδής ( $c$ ) της αεροτομής

$M_\infty$  : ο αριθμός Mach της επ' άπειρο ροής ( $M_\infty = \frac{U_\infty}{\sqrt{\gamma RT_\infty}}$ )

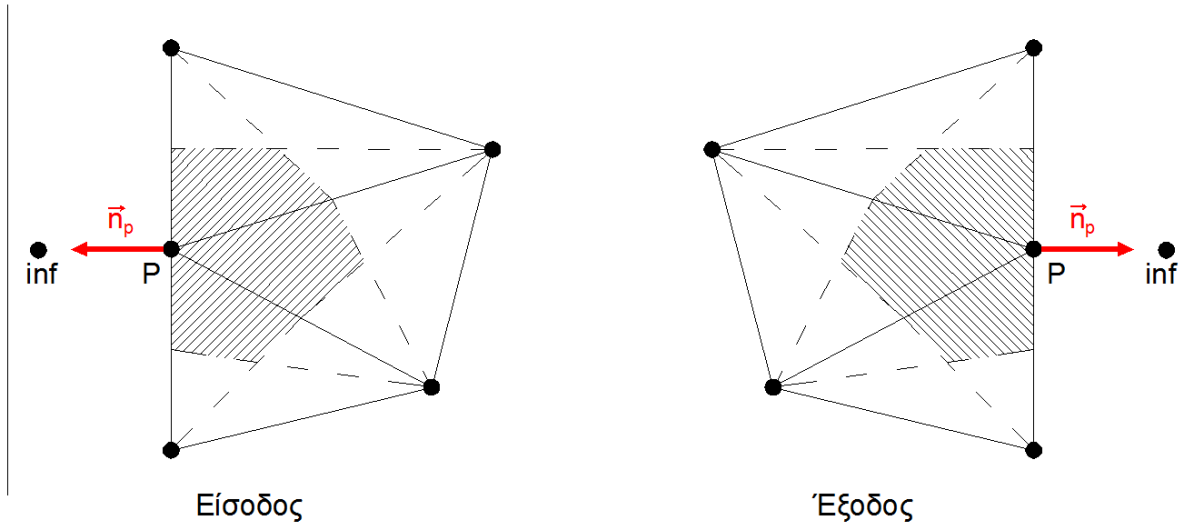
Για σύγκριση, θα αναφερθεί ότι σε μια εφαρμογή εσωτερικής αεροδυναμικής (π.χ. ακροφύσιο, αγωγός) τα αντίστοιχα μεγέθη είναι η ολική πίεση ( $p_t$ ) και η ολική θερμοκρασία ( $T_t$ ) στην είσοδο της ροής, η γωνία μεταξύ της ροής στην είσοδο του χωρίου και της αξονικής διεύθυνσης και η στατική πίεση στην έξοδο/είσοδο του χωρίου, για υποηχητική/υπερηχητική ροή αντίστοιχα. Εναλλακτικά, μπορεί αντί της στατικής πίεσης να δοθεί ο αριθμός Mach της ισεντροπικής ροής, και μέσω αυτού να υπολογίζεται η στατική πίεση.

Στο σημείο αυτό, να τονιστεί ότι οι οριακές συνθήκες που επιβάλλονται στην περίπτωση της μεμονωμένης αεροτομής, πρέπει να είναι συμβατές με την αδιαστατοποίηση που έχει επιλεγεί. Έτσι, για παράδειγμα, η πυκνότητα  $\rho_\infty$  και η ταχύτητα  $|\vec{U}_\infty|$ , με βάση τα όσα αναφέρθηκαν στην ενότητα 2.4, θα λάβουν τις τιμές:

$$\check{\rho} = \frac{\rho_{I/O}}{\rho_{ref}} = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty} = 1, \quad \check{u}_i = \frac{(u_i)_{I/O}}{U_{ref}} = \frac{U_\infty}{U_\infty} = 1 \quad (2.62)$$

Το διάνυσμα ροής  $\vec{\Phi}_{I/O}^{inv}$  υπολογίζεται σύμφωνα με το σχήμα διάσπασης ροών (Flux Vector Splitting, [27]), ως:

$$\vec{\Phi}_{I/O}^{inv} = A_P^+ \vec{U}_P + A_P^- \vec{U}_{inf} \quad (2.63)$$



Σχήμα 2.4: Κυψέλες ελέγχου κόμβων εισόδου-εξόδου.

όπου οι δείκτες  $P$  και  $inf$  δηλώνουν έναν κόμβο επί του ορίου και έναν εικονικό κόμβο, εξωτερικά του υπολογιστικού χωρίου, αντίστοιχα (βλ. σχήμα 2.4). Το διάλυμα των συντηρητικών μεταβλητών σε αυτόν τον εικονικό κόμβο, υπολογίζεται με βάση τα μεγέθη που αναφέρθηκαν νωρίτερα, ανάλογα και με τις τιμές των ιδιοτιμών του μητρώου  $A$ . Έτσι, οι οριακές συνθήκες επιβάλλονται έμμεσα στο προς επίλυση σύστημα. Για τον εικονικό κόμβο  $inf$ , προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned}
 \rho_{inf} &= \rho_{\infty} \\
 (\rho u_1)_{inf} &= \rho_{\infty} \left| \vec{U}_{\infty} \right| \cos \alpha_{\infty} \\
 (\rho u_2)_{inf} &= \rho_{\infty} \left| \vec{U}_{\infty} \right| \sin \alpha_{\infty} \\
 (E_t)_{inf} &= \frac{p_{inf}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho_{\infty} \left| \vec{U}_{\infty} \right|^2
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Με την πίεση  $p_{inf}$  να υπολογίζεται από τις σχέσεις:

$$\left. \begin{aligned}
 M_{\infty} &= \frac{|\vec{u}_{\infty}|}{c} = \frac{|\vec{u}_{\infty}|}{\sqrt{\gamma(\gamma-1)T_{\infty}}} \\
 \frac{p_{inf}}{\rho_{\infty}} &= (\gamma - 1) T_{\infty}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$M_{\infty} = \left| \vec{U}_{\infty} \right| \sqrt{\frac{\rho_{\infty}}{p_{inf}}} \Rightarrow p_{inf} = \rho_{\infty} \left( \frac{|\vec{u}_{\infty}|}{M_{\infty}} \right)^2 \tag{2.65}$$

## 2.8 Μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης στον ψευδο-χρόνο

Στο σημείο αυτό έχουν διατυπωθεί πλήρως οι διακριτοποιημένες εξισώσεις ροής, οι οποίες επαναλαμβάνονται εδώ για λόγους πληρότητας:

$$\frac{\Omega_P}{\Delta t_P} \Delta \vec{U}_P + \sum_{Q \in \text{nei}(P)} \left[ \vec{\Phi}_{PQ}^{inv} \right] \Delta \partial \Omega = 0 \quad (2.66)$$

Το επόμενο και τελευταίο βήμα είναι η επίλυσή τους. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιείται η δέλτα διατύπωση ως προς τις συντηρητικές μεταβλητές και υπολογίζεται η διόρθωση  $\Delta \vec{U}_P$  ανά ψευδο-χρονικό βήμα, για τον κόμβο  $P$ . Το διάνυσμα της ατριβούς ροής αναλύεται ως εξής:

$$\sum_{Q \in \text{nei}(P)} \left[ \vec{\Phi}_{PQ}^{inv} \right]^{(n+1)} \Delta \partial \Omega \simeq \sum_{Q \in \text{nei}(P)} \left[ \left( \vec{\Phi}_{PQ}^{inv} \right)^{(n)} + \frac{\partial \left( \vec{\Phi}_{PQ}^{inv} \right)}{\partial \vec{U}} \Big|^{(n)} \cdot \Delta \vec{U}^{(n+1)} \right] \Delta \partial \Omega \quad (2.67)$$

Ας υποθεθεί τώρα ότι  $\vec{R}$  είναι το υπόλοιπο των εξισώσεων ροής, το οποίο υπολογίζεται από το διάνυσμα ατριβούς ροής ως:

$$\vec{R} = \sum_{Q \in \text{nei}(P)} \left[ \vec{\Phi}_{PQ}^{inv} \right] \Delta \partial \Omega \quad (2.68)$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω στη σχέση 2.67, προκύπτει ότι:

$$\vec{R}^{(n+1)} = \vec{R}^{(n)} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \Big|^{(n)} \cdot \Delta \vec{U}^{(n+1)} \quad (2.69)$$

Έτσι, αντικαθιστώντας στη σχέση 2.66, για τη διόρθωση  $\Delta \vec{U}_P$  προκύπτει η σχέση:

$$\frac{\Omega_P}{\Delta t_P} \Delta \vec{U}_P = -\vec{R}_P^{(n+1)} \quad (2.70)$$

Αν επιπλέον χρησιμοποιηθεί το σημειακά πεπλεγμένο σχήμα (μέθοδος *Jacobi*, σχέση 2.69), σύμφωνα με το οποίο το υπόλοιπο των εξισώσεων στο ψευδο-χρονικό βήμα  $n+1$  γράφεται συναρτήσει του υπολοίπου στο προηγούμενο βήμα  $n$  και της διόρθωσης  $\Delta \vec{U}^{(n+1)} (= \vec{U}^{(n+1)} - \vec{U}^{(n)})$ , τότε προκύπτει η σχέση υπολογισμού της νέας διόρθωσης  $\Delta \vec{U}_P^{(n+1)}$  ως:

$$\left( \frac{\Omega_P}{\Delta t_P} \mathcal{I}_P + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \Big|_P \right)^{(n)} \Delta \vec{U}_P^{(n+1)} = -\vec{R}_P^{(n)} \quad (2.71)$$

όπου το  $\mathcal{I}_P$  προκύπτει από το μοναδιαίο μητρώο  $\mathcal{I}$ , του οποίου έχουν μηδενισθεί όλα τα διαγώνια στοιχεία πλην αυτού που αντιστοιχεί στον κόμβο  $P$ . Ο όρος  $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \Big|_P$

εμπλέκει μόνο τους κόμβους που είναι άμεσα γειτνιαζόντες με τον κόμβο  $P$ , κατά τρόπο συμβατό με τη χωρική διακριτοποίηση. Με βάση τα παραπάνω, το αριστερό μέλος της εξίσωσης 2.71 διακρίνεται σε διαγώνιους ( $D_P$ ) και μη-διαγώνιους ( $Z_Q$ ) όρους, και ξαναγράφεται στη μορφή:

$$D_P^{(n)} \Delta \vec{U}_P^{(n+1)} + \sum_{Q \in \text{nei}(P)} Z_Q^{(n)} \Delta \vec{U}_Q^{(n+1)} = -\vec{R}_P^{(n)} \quad (2.72)$$

όπου οι  $D_P$  προέρχονται από συνεισφορές του προς επίλυση κόμβου  $P$ , ενώ οι  $Z_Q$  ποσοτικοποιούν τις συνεισφορές των γειτόνων  $Q$  του  $P$ . Η εξίσωση 2.72 επιλύεται ως προς τη διόρθωση  $\Delta \vec{U}_P^{(n+1)}$ , όπως θα αναλυθεί στην ενότητα 2.8.1, ως:

$$\Delta \vec{U}_P^{(n+1),(j+1)} = - \left( D_P^{(n)} \right)^{-1} \left( \vec{R}_P^{(n)} + \sum_{Q \in \text{nei}(P)} Z_Q^{(n)} \Delta \vec{U}_Q^{(n+1),(j)} \right) \quad (2.73)$$

με  $j = 1, 2, 3, \dots, j_{max}$

Έτσι, μετά τον υπολογισμό της νέας διόρθωσης  $\Delta \vec{U}_P^{(n+1)}$ , οι τιμές των τεσσάρων ροϊκών μεγεθών ανά κόμβο μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση:

$$\vec{U}_P^{(n+1)} = \vec{U}_P^{(n)} + \Delta \vec{U}_P^{(n+1)} \quad (2.74)$$

### 2.8.1 Ο επαναληπτικός αλγόριθμος Jacobi

Η εξίσωση 2.72 αποτελεί το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων Euler της ροής εκφρασμένο στον κόμβο  $P$ , για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, σε διακριτή αλγεβρική μορφή. Αν αυτό το σύστημα εξισώσεων γραφεί για κάθε κόμβο του υπολογιστικού χωρίου, τότε θα προκύψουν  $N_s$  τετράδες εξισώσεων, όπου  $N_s$  το σύνολο των κόμβων του χωρίου. Αυτές οι εξισώσεις συνιστούν ένα γενικευμένο σύστημα εξισώσεων, το οποίο απαιτεί ως λύση  $N_s$  τετράδες των συντηρητικών μεταβλητών  $\vec{U}$ . Επομένως, το όλο πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων της μορφής:

$$[\mathbf{A}]_{4N_s \times 4N_s} \cdot [\Delta \mathbf{U}]_{4N_s} = [\mathbf{C}]_{4N_s}$$

Ο προφανής τρόπος επίλυσης του γραμμικού συστήματος είναι με αντιστροφή του μητρώου  $[\mathbf{A}]$  έτσι ώστε οι ζητούμενες διορθώσεις να υπολογιστούν με απλό πολλαπλασιασμό μητρώων. Ωστόσο, στην πράξη αυτό δε συνηθίζεται, για δύο λόγους:

- Οι διαστάσεις του μητρώου  $[\mathbf{A}]$  είναι υπερβολικά μεγάλες. Πιθανή αντιστροφή του θα απαιτούσε πάρα πολλές θέσεις μνήμης και το υπολογιστικό κόστος θα ήταν απαγορευτικό. Ενδεικτικά, το υπολογιστικό χωρίο για μια απλή εφαρμογή μεμονωμένης αεροτομής, όπως αυτές που θα επιλυθούν στη συνέχεια, αποτελείται από  $N_s = 25000$  κόμβους. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το μητρώο  $[\mathbf{A}]$  θα περιλαμβάνει  $1 \cdot 10^{10}$  στοιχεία (!).

- Το μητρώο  $[A]$  είναι αραιό. Αυτό είναι εύκολο να τεκμηριωθεί, δεδομένου ότι κάθε κόμβος  $P$  επηρεάζεται μόνο από ένα μικρό υποσύνολο των συνολικών κόμβων του χωρίου, δηλαδή από τους άμεσα γειτνιάζοντες. Έτσι, στο παράδειγμα που αναφέρθηκε, η πλειοψηφία των  $1 \cdot 10^{10}$  στοιχείων είναι μηδενικά. Αυτός είναι άλλωστε και ο λόγος που δεν αποθηκεύεται ολόκληρο το μητρώο, αλλά μόνο τα μη-μηδενικά στοιχεία αυτού.

Μετά από τα παραπάνω, είναι προφανές ότι ο πλέον ενδεδειγμένος τρόπος επίλυσης του γραμμικού συστήματος εξισώσεων είναι με επαναληπτική διαδικασία *Jacobi*. Ο αλγόριθμος του σχήματος έχει ως εξής:

1. Αρχή
2.  $j = 0$
3. Τίθεται  $\Delta \vec{U}^{(n+1),(j)} = 0$
4.  $j = j + 1$
5. Επιλύεται η εξίσωση 2.73 για  $\forall$  κόμβο και υπολογίζονται οι διορθώσεις  $\Delta \vec{U}^{(n+1),(j+1)}$
6. Αναεώνονται οι τιμές των διορθώσεων  $\Delta \vec{U}^{(n+1),(j)} = \Delta \vec{U}^{(n+1),(j+1)}$
7. Ελέγχεται αν  $j \leq j_{max}$  : Αν ισχύει, τότε γίνεται επιστροφή στο βήμα 4
8. Τέλος

Το όριο  $j_{max}$  καθορίζει πόσες φορές θα εκτελεστεί η επαναληπτική διαδικασία για τον υπολογισμό των διορθώσεων  $\Delta \vec{U}_P^{(n+1)}$ . Σε μια τυπική εφαρμογή, λαμβάνει τιμές από  $j_{max} = 10$  έως  $j_{max} = 20$  και ορίζεται από το χρήστη. Δεν χρησιμοποιείται κάποιο κριτήριο σύγκλισης, αφού η πρακτική αυτή κρίνεται επαρκής.

Τέλος, για να συνεχιστεί η επίλυση του προβλήματος στο επόμενο ψευδοχρονικό βήμα, γίνεται ανανέωση των τιμών των συντηρητικών μεταβλητών, με βάση τη σχέση 2.74.

## 2.9 Χρονικά μη-μόνιμες εξισώσεις ροής

Όλη η ανάλυση που προηγήθηκε, είχε ως αφετηρία τις χρονικά μόνιμες εξισώσεις Euler, όπως αυτές εκφράστηκαν από τη σχέση 2.2. Σε περίπτωση που είναι επιθυμητή η επίλυση χρονικά μη-μόνιμων προβλημάτων ροής, όπως είναι τα αεροελαστικά φαινόμενα που θα επιλυθούν σε επόμενο κεφάλαιο, είναι απαραίτητη η διατήρηση του πραγματικού χρονικού όρου  $\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau}$  στις εξισώσεις. Έτσι, οι εξισώσεις



ροής ξαναγράφονται ως:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.75)$$

με  $i = 1, 2$  για 2Δ ροές. Για την ολοκλήρωση του όρου  $\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau}$  στον όγκο ελέγχου  $\Omega_P$ , πρέπει να εφαρμοστεί το θεώρημα του Leibniz<sup>3</sup>, οπότε προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$\iiint_{\Omega_P} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} d\Omega = \frac{\partial}{\partial \tau} \iiint_{\Omega_P} \vec{U} d\Omega - \iint_{\partial\Omega} (\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}) \vec{U} d(\partial\Omega) \quad (2.76)$$

Επειδή όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 2.6, ο όγκος ελέγχου  $\Omega_P$  παραμένει αμετάβλητος στο χρόνο, οι ταχύτητες  $\vec{u}_{grid}$  είναι μηδενικές, επομένως η επιπλέον συνεισφορά που οφείλεται στην εφαρμογή του θεωρήματος του Leibniz μπορεί να παραλειφθεί. Τότε, ο υπολογισμός της μεταβολής των συντηρητικών μεταβλητών  $\vec{U}$  ως προς τον πραγματικό χρόνο  $\tau$ , γίνεται μέσω ενός αριθμητικού σχήματος πίσω διαφόρισης στο χρόνο, δεύτερης τάξης ακρίβειας, ως:

$$\left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} \right)^{\kappa+1} \simeq \frac{3\vec{U}^{\kappa+1} - 4\vec{U}^{\kappa} + \vec{U}^{\kappa-1}}{2\Delta\tau} \quad (2.77)$$

Σε αυτή τη σχέση, με  $\Delta\tau$  συμβολίστηκε το πραγματικό χρονικό βήμα, το οποίο λαμβάνει τιμή που ορίζεται έμμεσα από το χρήστη. Επιπλέον,  $\kappa+1$  είναι η τρέχουσα (προς επίλυση) χρονική στιγμή, ενώ  $\kappa$  και  $\kappa-1$  είναι οι δύο προηγούμενες.

Η διακριτοποίηση του πραγματικού χρονικού όρου είναι απλή και φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_P}{\Delta\tau} \Delta \vec{U}_P &= \frac{3\vec{U}_P^{(\kappa+1),(n+1)} - 4\vec{U}_P^{(\kappa),(n+1)} + \vec{U}_P^{(\kappa-1),(n+1)}}{2\Delta\tau} \Omega_P = \\ &= \left( \frac{3}{2\Delta\tau} \Omega_P \right) \Delta \vec{U}_P^{(\kappa+1),(n+1)} + \\ &+ \frac{3\vec{U}_P^{(\kappa+1),(n)} - 4\vec{U}_P^{(\kappa),(n+1)} + \vec{U}_P^{(\kappa-1),(n+1)}}{2\Delta\tau} \Omega_P \end{aligned} \quad (2.78)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ότι<sup>4</sup>:

$$U_P^{(\kappa+1),(n+1)} = U_P^{(\kappa+1),(n)} + \Delta U_P^{(\kappa+1),(n+1)} \quad (2.79)$$

Οι όροι που προκύπτουν, αντιμετωπίζονται ως όροι πηγής στα ήδη υπάρχοντα μητρώα.

<sup>3</sup>Για περισσότερες πληροφορίες βλ. Παράρτημα Α.2

<sup>4</sup>βλ. και σχέση 2.74



## Κεφάλαιο 3

# Αεροελαστικότητα, ελαστικές εξισώσεις και σύζευξη με την αεροδυναμική

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν στοιχεία από την επιστημονική περιοχή της αεροελαστικότητας και τα συναφή προβλήματα. Επίσης, θα γίνει επέκταση των όσων παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, για την αριθμητική προσομοίωση προβλημάτων αεροελαστικής απόκρισης αεροτομής. Στην ουσία, θα αναφερθούν οι πρόσθετες συνεισφορές που προκύπτουν στις εξισώσεις Euler όταν το υπολογιστικό χωρίο μετακινείται στο χώρο, οι οποίες και χρησιμοποιήθηκαν για την επέκταση του υπάρχοντος λογισμικού αεροδυναμικής ανάλυσης. Ακόμη, θα γίνει σύζευξη του ελαστικού με το αεροδυναμικό πρόβλημα, καθώς είναι απαραίτητη για τον προγραμματισμό ενός επιλύτη αεροελαστικών προβλημάτων. Θα διατυπωθούν οι ελαστικές εξισώσεις ισορροπίας για απαραμόρφωτες αεροτομές, θα παρουσιαστεί η αδιαστατοποίησή τους καθώς και η σχετική ανάλυση του τρόπου αριθμητικής ολοκλήρωσης των ελαστικών εξισώσεων στο πεδίο του χρόνου. Τέλος, θα παρατεθεί και θα σχολιαστεί ένας αλγόριθμος επίλυσης αεροελαστικών προβλημάτων.

### 3.1 Αεροελαστικότητα

Αεροελαστικότητα είναι ο κλάδος της επιστήμης που μελετά την αμοιβαία αλληλεπίδραση αδρανειακών, ελαστικών και αεροδυναμικών δυνάμεων, που ασκούνται σε μια αεροδυναμική κατασκευή [31, 32]. Πολλοί επιστήμονες ορίζουν την αεροελαστικότητα ως το τρίπτυχο των περιοχών της δυναμικής, της μηχανικής στερεών σωμάτων και της μη-μόνιμης αεροδυναμικής, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1. Συνδυασμοί των τριών βασικών περιοχών που φαίνονται στο σχήμα αυτό ορίζουν αρκετά άλλα επιστημονικά πεδία, όπως είναι η δυναμική πτήσης (συνδυασμός αεροδυναμικής και δυναμικής), η στατική αεροελαστικότητα (συνδυασμός της χρονικά μόνιμης αεροδυναμικής και της μηχανικής στερεών σωμάτων) και οι δομικές ταλαντώσεις (συνδυασμός της δυναμικής και της μηχανικής στερεών σωμάτων). Από τα παρα-

---



Σχήμα 3.1: Οι επιστημονικές περιοχές που συνθέτουν το πεδίο της αεροελαστικότητας.

πάνω, είναι πολύ σημαντική η εξάρτηση του πεδίου της δυναμικής πτήσης από την αεροελαστικότητα.

Το πεδίο αυτό εμπεριέχει στοιχεία ελέγχου και ευστάθειας, αφού μελετά την αεροδυναμική συμπεριφορά των αεροδυναμικών κατασκευών και έχει ως στόχο την ανάπτυξη κατάλληλων δομών ελέγχου για τη διατήρηση της ευσταθούς λειτουργίας τους. Η αεροελαστική συμπεριφορά των δομικών στοιχείων των αεροδυναμικών κατασκευών από την άλλη, θέτει σε κίνδυνο αυτήν την ευστάθεια. Για παράδειγμα, όπως έχει αναφερθεί, στόχος αυτής της εργασίας είναι ο έλεγχος της αεροελαστικής συμπεριφοράς μιας αεροτομής, η οποία περιορίζεται στην κίνησή της από ένα γραμμικό και ένα στρεπτικό ελατήριο. Συγκεκριμένα, όπως θα αναλυθεί σε επόμενο κεφάλαιο, το ζητούμενο είναι η έγκαιρη απόσβεση των αεροδυναμικά επαγόμενων ταλαντώσεων, μέσω μιας απλής μορφής ελέγχου που στηρίζεται στην ανατροφοδότηση συγκεκριμένων μεταβλητών. Επομένως, γίνεται κατανοητό ότι η μελέτη αεροελαστικών φαινομένων συνήθως γίνεται σε συνδυασμό με την έρευνα για αποδοτικά συστήματα ελέγχου, με στόχο την αύξηση της περιοχής ευσταθούς λειτουργίας των υπάρχουσών αεροδυναμικών κατασκευών. Στις επόμενες ενότητες, θα γίνει μια σύντομη αναφορά στα πιο συνήθη αεροελαστικά φαινόμενα.

### 3.1.1 Το φαινόμενο του Πτερυγισμού (Flutter)

Το φαινόμενο αυτό αποτελεί μια ιδιαίτερη μορφή αεροδυναμικής αστάθειας και οφείλεται σε αυτοδιεγερόμενη ταλάντωση. Κατά τον πτερυγισμό, η πτέρυγα ταλαντώνεται με συνεχώς αυξανόμενο πλάτος ταλάντωσης, έως ότου καταρρεύσει. Η πρώτη περίπτωση εμφάνισης αυτού του φαινομένου σε αεροσκάφος και, μάλιστα, με καταστροφικά αποτελέσματα, καταγράφηκε το 1916 και έκτοτε η αποφυγή του αποτελεί έναν από τους κυρίαρχους σκοπούς των σχεδιαστών. Μάλιστα, πολλές

από τις τεχνικές που προτάθηκαν στη μελέτη [33] χρησιμοποιούνται ακόμη και σήμερα.

Το φαινόμενο του πτερυγισμού διακρίνεται σε δύο είδη. Το πρώτο εμφανίζεται σε μικρές γωνίες πρόσπτωσης, στις οποίες η ταλάντωση οφείλεται στην ταυτόχρονη κίνηση με τουλάχιστον δύο βαθμούς ελευθερίας, και είναι γνωστό με την ονομασία **κλασικός πτερυγισμός (Classical Flutter)**. Το δεύτερο εμφανίζεται στις υψηλές γωνίες πρόσπτωσης, όπου η ροή αποκολλάται, είτε μερικά, είτε ολοκληρωτικά. Η ταλάντωση τότε οφείλεται στην **αεροδυναμική υστέρηση** και καλείται **πτερυγισμός σε κατάσταση απώλειας στήριξης (Stall Flutter)**. Στον κλασικό πτερυγισμό, η ροή παραμένει προσκολλημένη συνεχώς στο στερεό όριο της αεροτομής ενώ ο βασικός μηχανισμός ενεργειακής σύζευξης μεταξύ του ρεύματος ροής και της αεροτομής είναι η διαφορά φάσης μεταξύ της προκαλούμενης παραμόρφωσης και της μεταβολής των αεροδυναμικών φορτίων. Ο κλασικός πτερυγισμός θεωρείται ως ένα γραμμικό φαινόμενο, σε αντίθεση με τον πτερυγισμό σε κατάσταση απώλειας στήριξης, ο οποίος οφείλεται στη μη-γραμμική μεταβολή των αεροδυναμικών φορτίων λόγω κίνησης/παραμόρφωσης της αεροτομής/πτέρυγας.

Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας θα μελετηθεί το φαινόμενο του κλασικού πτερυγισμού. Τα αεροδυναμικά φορτία (άνωση, ροπή) που αναπτύσσονται σε μια αεροτομή, όταν αυτή τοποθετηθεί σε ρεύμα ρευστού, τείνουν να την εκτρέψουν από τη θέση ισορροπίας της, μετακινώντας τη σε μια νέα θέση. Λόγω αυτής της μετακίνησης, η αναπτυσσόμενη ροή γύρω από την αεροτομή αποκτά ένα μη-μόνιμο χαρακτήρα, με αποτέλεσμα τα αεροδυναμικά φορτία να λαμβάνουν νέες τιμές. Έτσι, η αεροτομή συνεχίζει να μετακινείται και τα αεροδυναμικά φορτία να αποκτούν συνεχώς μεταβαλλόμενες τιμές. Το φαινόμενο του πτερυγισμού μπορεί να χαρακτηριστεί ως ευσταθές, όταν μέσα σε εύλογο χρονικό διάστημα η ταλαντωτική συμπεριφορά αποσβένεται επαρκώς, χωρίς εξωτερική δράση. Αντιθέτως, στην περίπτωση που η ταλαντωτική συμπεριφορά συνεχώς ενισχύεται, η πτέρυγα τελικά καταρρέει και το φαινόμενο χαρακτηρίζεται ως ασταθές. Η οριακή κατάσταση κατά την οποία η πτέρυγα ταλαντώνεται με σταθερό πλάτος, ονομάζεται **κρίσιμη**. Το αν μια συγκεκριμένη εφαρμογή, κατά την εμφάνιση του φαινομένου, θα έχει ευσταθή, κρίσιμη ή ασταθή συμπεριφορά, καθορίζεται τόσο από τα χαρακτηριστικά της ροής όσο και από τα δομικά χαρακτηριστικά της κατασκευής.

### 3.1.2 Το φαινόμενο LCO

Το φαινόμενο LCO (**Limit Cycle Oscillations**) είναι συνήθης περίπτωση αεροελαστικής απόκρισης και είναι άμεσα συνδεδεμένο με τον πτερυγισμό, εμφανίζεται δε σε συνθήκες διηχητικής ροής. Παρουσιάζεται όταν το υπό μελέτη σύστημα εισέλθει σε μια μόνιμη περιοδική ταλαντωτική φάση, κατά την οποία η συναλλαγή ενέργειας ρευστού-στερεού σταθεροποιείται, ενώ ουσιαστικά συμβαίνει λόγω της καθαρά μη-γραμμικής συμπεριφοράς του αεροελαστικού συστήματος. Το τελικό πλάτος της ταλάντωσης είναι πάντα μεγαλύτερο από αυτό που χαρακτηρίζει το φαινόμενο του κρίσιμου πτερυγισμού και ο χρόνος που απαιτείται μέχρι τη δημιουργία αυτής της μόνιμης κατάστασης είναι πολλαπλάσιος της ταλαντωτικής περιόδου.

Παρά το γεγονός ότι το πλάτος της ταλάντωσης κατά το φαινόμενο αυτό έχει ένα άνω όριο, η κατασκευή της πτέρυγας καταπονείται λόγω της συνεχώς μεταβαλλόμενης φόρτισης. Τα δομικά στοιχεία αυτής σχεδιάζονται έτσι ώστε να αντέχουν σε συγκεκριμένο αριθμό κύκλων φόρτισης. Επομένως η εμφάνιση του φαινομένου LCO επιταχύνει τη φθορά τους και αυξάνει ταχύτητα την μηχανική κόπωση των υλικών, μειώνοντας τη διάρκεια ζωής τους. Ακόμη, είναι εξίσου πιθανό η πτέρυγα να καταρρεύσει αρκετά πριν εισέλθει στη φάση της μόνιμης ταλαντωτικής συμπεριφοράς. Ο λόγος που η κατασκευή μπορεί να οδηγηθεί σε LCO, είναι η ύπαρξη ασυνεχειών (κυμάτων κρούσης) στο πεδίο της ροής, ή ασυνεχειών στα δομικά στοιχεία της κατασκευής. Επίσης, όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, το φαινόμενο του ασταθούς πτερυγισμού μπορεί να οδηγήσει στο φαινόμενο LCO, αφού η συνεχής ενίσχυση των αυτοδιεγειρόμενων ταλαντώσεων μπορεί -βάσει συνθηκών- να εξαλειφθεί, με τη διατήρηση μιας μόνιμης περιοδικής δομικής ταλάντωσης. Έτσι, η αεροελαστική απόκριση μιας πτέρυγας μπορεί συνολικά να χαρακτηριστεί ως ευσταθής, κρίσιμα ευσταθής, ασταθής ή να οδηγεί σε LCO. Περισσότερες πληροφορίες για το φαινόμενο LCO και τα προβλήματα που επιφέρει, υπάρχουν στην εργασία [34].

Από την κλασική σκοπιά, το φαινόμενο LCO παρουσιάστηκε ως ανεπιθύμητο στις αεροδιαστημικές εφαρμογές. Ωστόσο, υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες η μη γραμμικότητα τέτοιων αεροελαστικών συστημάτων μπορεί να αξιοποιηθεί, προσφέροντας αρκετά οφέλη. Για παράδειγμα, μια ερευνητική ομάδα [35] απέδειξε ότι ο συνδυασμός στρεπτικών και γραμμικών ταλαντώσεων ενός μη-αεροδυναμικού σώματος μπορεί να δημιουργήσει την απαραίτητη πρόωση για την κίνηση του σώματος μέσα σε ακίνητο πεδίο ρευστού. Έτσι, είναι προφανές ότι με τον κατάλληλο έλεγχο των μη-γραμμικών αεροελαστικών φαινομένων υπάρχει η δυνατότητα μεγάλης εξέλιξης στο σχεδιασμό εφαρμογών *Micro Air Vehicles*, των οποίων η λειτουργία μιμείται τον τρόπο πτήσης των εντόμων.

Υπάρχουν αρκετά ακόμη φαινόμενα, εκτός των δύο που αναλύθηκαν σε αυτές τις ενότητες, όπως είναι το φαινόμενο της απόκλισης (**Divergence**) ή στατικό αεροελαστικό φαινόμενο και αυτό της εκπομπής στροβίλων (**Vortex Shedding**). Στο πλαίσιο της εργασίας αυτής ωστόσο, όπως υπογραμμίστηκε και πριν, θα εξεταστεί μόνο η αντιμετώπιση του κλασικού πτερυγισμού (**Classical Flutter**). Στην επόμενη ενότητα αναλύεται ο βασικός στόχος της αεροελαστικής ανάλυσης αεροτομών/πτερυγών.

### 3.1.3 Περιοχή ευσταθούς λειτουργίας αεροτομής

Η λειτουργία μιας αεροδυναμικής κατασκευής, όπως η πτέρυγα, διασφαλίζεται για ένα συγκεκριμένο εύρος συνθηκών. Πιο συγκεκριμένα, η περιοχή ευσταθούς λειτουργίας πτέρυγας προσδιορίζει ένα σύνολο τιμών παραμέτρων οι οποίες επηρεάζουν τα λειτουργικά χαρακτηριστικά της, όπου η πτέρυγα αυτή έχει ευσταθή συμπεριφορά. Πηγή ενδιαφέροντος αποτελεί συνήθως ο προσδιορισμός του ορίου αυτής της περιοχής, το οποίο αποτελεί την κρίσιμη καμπύλη της πτέρυγας και δίνεται σε διάγραμμα της ανηγμένης ταχύτητας της επ' άπειρο ροής, συναρτήσει του αριθμού Mach της ροής. Στο σχήμα 3.2 φαίνεται μια τυπική μορφή κρίσιμης καμπύλης, η οποία προέκυψε από την αεροελαστική ανάλυση μιας πτέρυγας [36]. Στον

οριζόντιο άξονα απεικονίζεται ο αριθμός Mach της επ' άπειρο ροής ενώ στον κατακόρυφο ο δείκτης ταχύτητας (**Speed Index**), ο οποίος εκφράζει τα δομικά-ελαστικά χαρακτηριστικά της πτέρυγας. Ο δείκτης ταχύτητας δίνεται από τη σχέση:

$$U^* = \frac{U_\infty}{b \omega_\alpha \sqrt{\mu}} \quad (3.1)$$

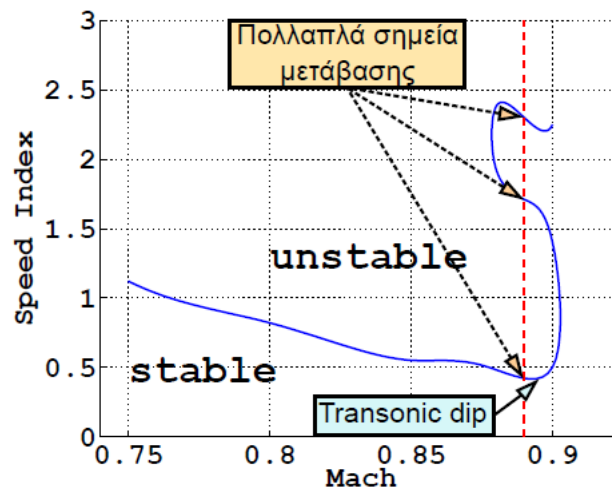
όπου  $U_\infty$  η ταχύτητα της επ' άπειρο ροής,  $b$  ένα μήκος αναφοράς (συνήθως το μισό του μήκους της μέσης χορδής της πτέρυγας),  $\omega_\alpha$  μια φυσική συχνότητα της υπό μελέτη κατασκευής και  $\mu$  ο λόγος των πυκνοτήτων του υλικού κατασκευής της αεροτομής προς την πυκνότητα του ρευστού της επ' άπειρο ροής ( $\rho_\infty$ ).

Με βάση την κρίσιμη καμπύλη, η περιοχή λειτουργίας της πτέρυγας χωρίζεται σε αρκετές υποπεριοχές, στις οποίες η αεροελαστική απόκριση της κατασκευής χαρακτηρίζεται ως ευσταθής ή ασταθής. Συγκεκριμένα, η περιοχή που βρίσκεται κάτω από την κρίσιμη καμπύλη αποτελεί την περιοχή ευσταθούς λειτουργίας, ενώ αντιθέτως, λειτουργία εντός της περιοχής που βρίσκεται πάνω από την καμπύλη χαρακτηρίζεται ως ασταθής. Για ένα συνδυασμό ανηγμένης ταχύτητας ροής-αριθμού Mach επί της κρίσιμης καμπύλης, η λειτουργία της πτέρυγας αντιστοιχεί σε ταλάντωση με σταθερό πλάτος (κρίσιμος πτερυγισμός).

Όπως φαίνεται από το σχήμα 3.2, η κρίσιμη ανηγμένη ταχύτητα ροής μειώνεται, αυξανόμενου του αριθμού Mach, λαμβάνοντας την ελάχιστη τιμή της στο κάτω όριο της διηχητικής περιοχής (**Transonic Dip**). Στη συνέχεια, η κρίσιμη ανηγμένη ταχύτητα ροής αυξάνεται, και μάλιστα με πολύ μεγάλη κλίση εντός της υπερηχητικής ζώνης, δημιουργώντας -υπό προϋποθέσεις- πολλαπλά σημεία μετάβασης από την ευσταθή στην ασταθή κατάσταση (και αντίστροφα), για διάφορους συνδυασμούς δείκτη ταχύτητας και αριθμού Mach. Τέλος, να σημειωθεί ότι ο αριθμός των σημείων μετάβασης που θα εμφανιστούν σε μια εφαρμογή, εξαρτάται από τις ασυνέχειες τόσο της ροής (κύματα κρούσης), όσο και των δομικών στοιχείων της κατασκευής.

## 3.2 Μεταβαλλόμενο χωρίο και διαχείριση πλέγματος

Η επίλυση αεροελαστικών προβλημάτων είναι άμεσα συνδεδεμένη με την ανάγκη επαναδιακριτοποίησης του υπολογιστικού χωρίου, λόγω της διαρκούς γεωμετρικής παραμόρφωσης της αεροδυναμικής κατασκευής. Ο απλούστερος τρόπος αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος είναι η συνεχής επαναγένεση του υπολογιστικού πλέγματος, σε κάθε μεταβολή της γεωμετρίας της κατασκευής, ωστόσο αυτή η πρακτική συνοδεύεται από ιδιαίτερα αυξημένο υπολογιστικό κόστος. Έτσι, η χρήση της σε αεροελαστικά προβλήματα συνήθως αποφεύγεται. Για το λόγο αυτό, η λύση που προκρίνεται είναι η προσαρμογή του πλέγματος στις νέες οριακές συνθήκες, δηλαδή στη νέα γεωμετρία της βρεχόμενης επιφάνειας, η οποία είναι αρκετά πιο 'οικονομική' σε σχέση με την ανακατασκευή του. Παρακάτω θα αναφερθούν επιγραμματικά οι βασικοί τρόποι προσαρμογής του πλέγματος που συναντώνται στη βιβλιογραφία και, στη συνέχεια, περιγράφεται η πρακτική που ακολουθήθηκε στο πλαίσιο αυτής της εργασίας.



Σχήμα 3.2: Τυπική μορφή κρίσιμης καμπύλης για ελαστική πτέρυγα [36].

Στη βιβλιογραφία, οι μέθοδοι παραμόρφωσης-προσαρμογής ενός υπολογιστικού πλέγματος διακρίνονται στις ακόλουθες κατηγορίες:

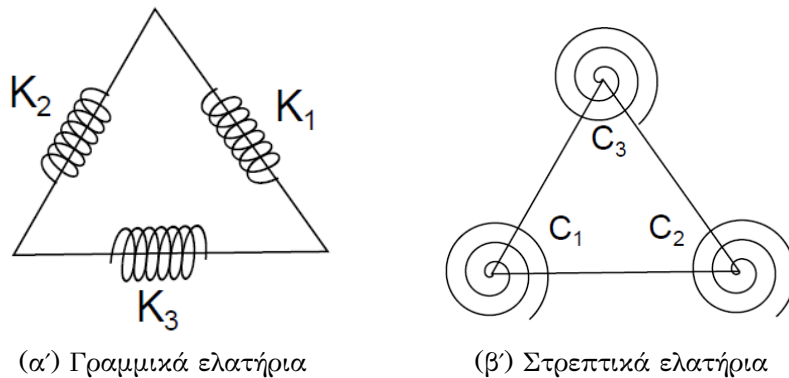
- (α') Ο όγκος που καταλαμβάνει το υπολογιστικό πλέγμα αντιμετωπίζεται ως ένα ελαστικό στερεό σώμα, [37, 38, 39]. Το σχήμα του υπολογιστικού χωρίου προσδιορίζεται για κάθε χρονική στιγμή από την αριθμητική επίλυση των ελαστικών εξισώσεων, διακριτοποιημένων στο ίδιο το υπολογιστικό πλέγμα. Οι ελαστικές εξισώσεις εκφράζουν την ισορροπία των ασκούμενων δυνάμεων και ροπών σε κάθε στοιχειώδες τμήμα του όγκου, προσδιορίζοντας έτσι το σχήμα του φανταστικού παραμορφωμένου στερεού σώματος, δηλαδή το σχήμα του προσαρμοσμένου στις νέες οριακές συνθήκες υπολογιστικού πλέγματος.
- (β') Το πλέγμα αντιμετωπίζεται ως ένα σύστημα ελατηρίων, [40, 41, 42]. Τα ελατήρια (στρεπτικά ή γραμμικά) τοποθετούνται νοητά επί των ακμών (βλ. σχήμα 3.3(α')) ή επί των κόμβων (βλ. σχήμα 3.3(β')) του υπολογιστικού πλέγματος, περιορίζοντας έτσι την παραμόρφωση των στοιχείων αυτής της 'εικονικής' κατασκευής. Η παραμόρφωση της αεροδυναμικής κατασκευής επιφέρει μετακινήσεις στους οριακούς κόμβους του πλέγματος κι έτσι επηρεάζεται η θέση των εσωτερικών κόμβων. Η παραμόρφωση του υπολογιστικού πλέγματος, δηλαδή των στοιχείων της 'εικονικής' κατασκευής, υπολογίζεται με επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας δυνάμεων και ροπών, στους κόμβους του πλέγματος.
- (γ') Η μετακίνηση των κόμβων του πλέγματος υπολογίζεται μέσω μιας απλής αλγεβρικής συνάρτησης, η οποία συνδέει τη μετακίνηση κάθε κόμβου του πλέγματος με τις μετακινήσεις των αντίστοιχων οριακών, [43]. Η συνάρτηση αυτή μπορεί λ.χ. να είναι της μορφής:

$$\vec{u}_i = f_i \vec{u}_i^{wall} \quad (3.2)$$



όπου με  $\vec{u}_i = [\delta x_i \ \delta y_i \ \delta z_i]^T$  συμβολίζεται η μετακίνηση του κόμβου  $i$  του πλέγματος και υπολογίζεται ως το ποσοστό  $f_i$  της μετακίνησης  $\vec{u}_i^{wall}$  του πλησιέστερου στον  $i$ , κόμβου της στερεής επιφάνειας. Το ποσοστό  $f_i$  δεν είναι το ίδιο για όλους τους κόμβους του χωρίου αλλά μεταβάλλεται από κόμβο σε κόμβο.

- (δ') Η μετακίνηση των κόμβων της βρεχόμενης επιφάνειας προεκβάλλεται στους υπόλοιπους κόμβους του πλέγματος, χρησιμοποιώντας συναρτήσεις ακτινικής βάσης (Radial Basis Functions, RBF), [44, 45].
- (ε') Επιλύεται ένα κλασικό πρόβλημα βελτιστοποίησης, με στόχο την ελαχιστοποίηση μιας αντικειμενικής συνάρτησης η οποία εκφράζει την ποιότητα του υπολογιστικού πλέγματος. Τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης είναι οι θέσεις των κόμβων για το προσαρμοσμένο πλέγμα στην παραμορφωμένη κατασκευή, [46, 47].



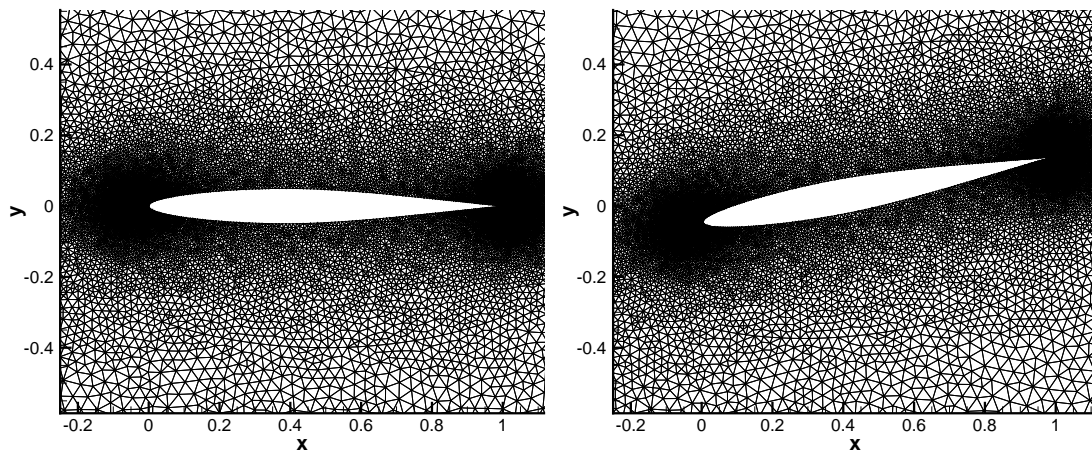
Σχήμα 3.3: Προσαρμογή του υπολογιστικού πλέγματος στην παραμορφωμένη αεροδυναμική κατασκευή με χρήση (α') γραμμικών ελατηρίων προσδεδωμένων σε κάθε ακμή και (β') στρεπτικών ελατηρίων προσδεδωμένων στους κόμβους.

Όπως είναι αναμενόμενο, λόγω της απλότητας της σχέσης 3.2, οι μέθοδοι που στηρίζονται σε αυτή για τον υπολογισμό του προσαρμοσμένου πλέγματος είναι ταχύτερες, ωστόσο το τελικό πλέγμα έχει σχετικά χαμηλή ποιότητα. Παρόλα αυτά, σε εφαρμογές με μικρές παραμορφώσεις ή μετακινήσεις της αεροδυναμικής κατασκευής (κυρίως 2Δ εφαρμογές), η χρήση αυτής της μεθόδου παράγει αρκετά καλά αποτελέσματα, εξασφαλίζοντας τη διατήρηση της ποιότητας του πλέγματος. Σε εφαρμογές, όμως, με μεγάλες ή σύνθετες παραμορφώσεις/μετακινήσεις (π.χ. σε 3Δ προβλήματα) επιβάλλεται η χρήση μεθόδων υψηλότερης ακρίβειας. Σε αυτές τις περιπτώσεις, συνηθίζεται να χρησιμοποιούνται μέθοδοι της τρίτης κατηγορίας μόνο για την αρχικοποίηση της επαναληπτικής επίλυσης, η οποία απαιτείται από μεθόδους όπως η πρώτη και η δεύτερη. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με αυτή την πρακτική, ο αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία [36].

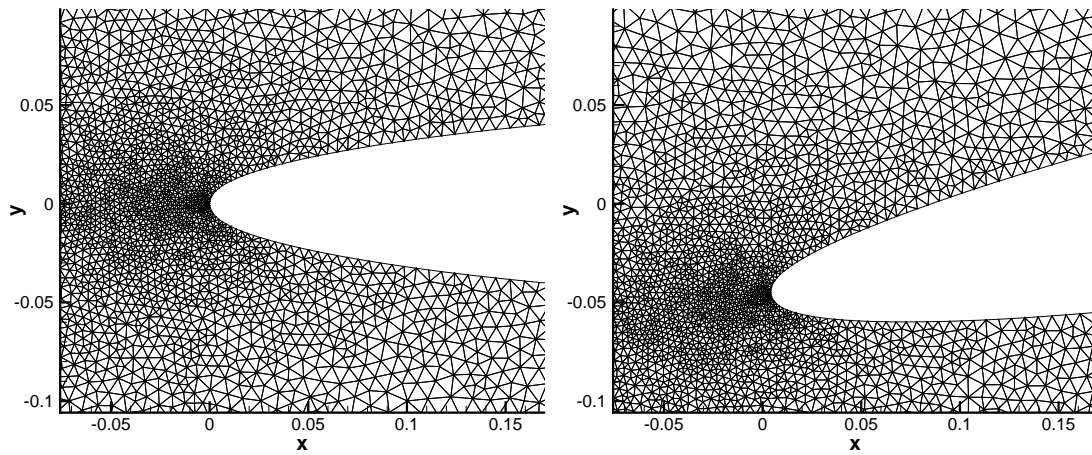
Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί μια εντελώς διαφορετική προσέγγιση στο θέμα της προσαρμογής του πλέγματος γύρω από την παραμορφωμένη αεροδυναμική κατασκευή. Οι εφαρμογές που μελετήθηκαν και οι οποίες παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 4, είναι αποκλειστικά 2Δ εφαρμογές μεμονωμένων *απαραμόρφωτων* (αλλά μετακινούμενων) αεροτομών με δύο βαθμούς ελευθερίας. Επομένως, παρότι θα μπορούσε πράγματι να χρησιμοποιηθεί λ.χ. κάποια μέθοδος από αυτές που ανήκουν στη δεύτερη κατηγορία για την προσαρμογή του πλέγματος, το γεγονός ότι η αεροτομή είναι *απαραμόρφωτη* καθιστά μη-αναγκαία την προσαρμογή του κοντά στο στερεό όριο. Έτσι, μια απλή μετακίνηση του συνόλου του πλέγματος σύμφωνα με τους δύο βαθμούς ελευθερίας της αεροτομής, θεωρήθηκε επαρκής. Η χρήση αυτής της μεθόδου, βέβαια, απαιτεί τον υπολογισμό των ταχυτήτων μετακίνησης των κόμβων του πλέγματος και την τροποποίηση των διακριτοποιημένων εξισώσεων ροής που διατυπώθηκαν στο κεφάλαιο 2, όπως θα φανεί και στην ενότητα 3.3. Εναλλακτικά, το πλέγμα θα μπορούσε να διατηρηθεί ακίνητο και οι εξισώσεις της ροής να εκφραστούν ως προς τους σχετικούς άξονες της αεροτομής, οπότε σε αυτήν την περίπτωση οι ταχύτητες μετακίνησης των κόμβων είναι μηδενικές. Προκύπτουν όμως επιπλέον επιδράσεις στις εξισώσεις της ενέργειας και της ισοροπίας των ροπών λόγω της κεντρομόλου δύναμης, της δύναμης Coriolis και της χρονικής μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του σχετικού ως προς το απόλυτο σύστημα. Για μια αναλυτική παρουσίαση του τρόπου γραφής των εξισώσεων της ροής στο σχετικό σύστημα αξόνων, ο αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία [36].

Ως παράδειγμα για τον τρόπο με τον οποίο προσαρμόζεται το πλέγμα στη νέα θέση της αεροτομής, θα αναφερθεί η περίπτωση μεμονωμένης *απαραμόρφωτης* αεροτομής με ένα γωνιακό βαθμό ελευθερίας. Η αεροτομή είναι η NACA 64A010 και αρχικά βρίσκεται υπό γωνία  $0^\circ$  σε σχέση με το επερχόμενο ρεύμα ροής ενώ, στη συνέχεια, περιστρέφεται γύρω από το  $1/4$  της χορδής της υπό γωνία  $15^\circ$  και το πλέγμα την ακολουθεί. Το παραπάνω φαίνεται στο σχήμα 3.4 στο οποίο διακρίνεται η αρχική (αριστερά) και η τελική (δεξιά) κατάσταση, με τις λεπτομέρειες των σχημάτων 3.4(β') και 3.4(γ') να αντιστοιχούν στην ακμή πρόσπτωσης και την ακμή εκφυγής, αντίστοιχα. Στην επόμενη ενότητα, θα ποσοτικοποιηθούν οι επιδράσεις στις εξισώσεις ροής που οφείλονται στη μετακίνηση του πλέγματος με αυτή τη μέθοδο και θα επαναδιατυπωθούν οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες. Να σημειωθεί τέλος ότι το πλέγμα που φαίνεται στο σχήμα 3.4, είναι κατάλληλο για την επίλυση ατριβών ροών και μόνο.

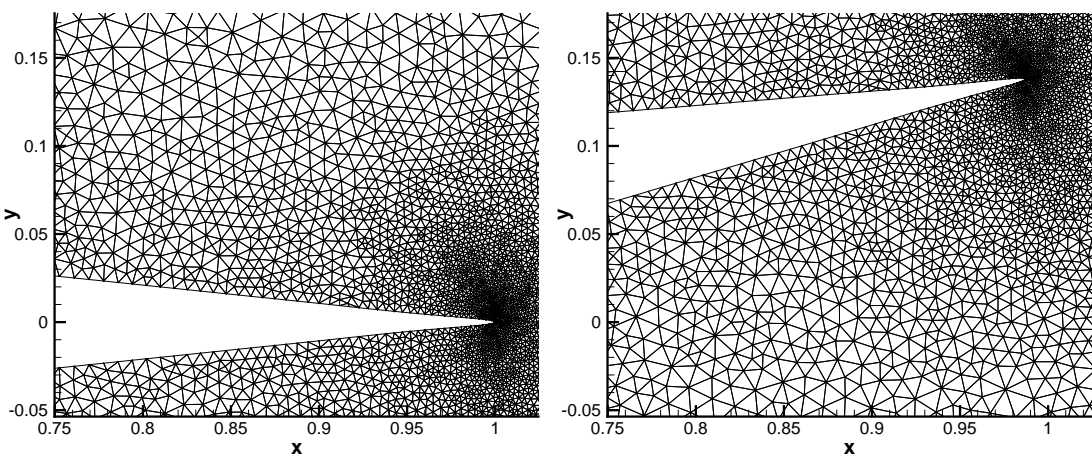
Σχήμα 3.4: (επόμενη σελίδα): Περιστροφή της *απαραμόρφωτης* αεροτομής τύπου NACA 64A010 περί το  $1/4$  της χορδής της κατά  $15^\circ$ . Στην αριστερή στήλη φαίνεται το μη-δομημένο πλέγμα όταν η αεροτομή βρίσκεται στην αρχική κατάσταση ενώ η δεξιά στήλη αντιστοιχεί στην περίπτωση μετά την περιστροφή της αεροτομής. Στα σχήματα (α'), (β') και (γ') φαίνεται το υπολογιστικό χωρίο γύρω από την αεροτομή, γύρω από την ακμή πρόσπτωσης και γύρω από την ακμή εκφυγής, αντίστοιχα. Το πλέγμα παραμένει *απαραμόρφωτο* πριν και μετά τη μετακίνηση, με μόνη διαφορά την περιστροφή του κατά τη γωνία στροφής της αεροτομής.



( $\alpha'$ )



( $\beta'$ )



( $\gamma'$ )

### 3.3 Οι εξισώσεις ροής για μεταβαλλόμενο χωρίο

Στην ενότητα 2.9 παρουσιάστηκε η χρονική διακριτοποίηση του πραγματικού χρονικού όρου  $\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau}$ , ο οποίος εισάγεται στις εξισώσεις Euler για την επίλυση χρονικά μη-μόνιμων προβλημάτων. Στην περίπτωση κατά την οποία μελετάται η αεροελαστική απόκριση μιας αεροτομής στο πεδίο του χρόνου, το πλέγμα πρέπει σε κάθε χρονική στιγμή να ακολουθεί την κίνηση της αεροτομής. Επομένως, οι στοιχειώδεις όγκοι ελέγχου  $\Omega_P$  δεν θα παραμένουν αμετάβλητοι στο χρόνο, επηρεάζοντας τόσο τον πραγματικό χρονικό όρο, όσο και τις επιβαλλόμενες οριακές συνθήκες.

#### 3.3.1 Διακριτοποίηση του πραγματικού χρονικού όρου

Αν συμβολισθεί με  $\Omega_P^{\kappa+1} (\doteq \Omega_P(\tau^{\kappa+1}))$  ο κάθε όγκος ελέγχου τη νέα χρονική στιγμή  $\tau^{\kappa+1}$ , τότε η ολοκλήρωση του πραγματικού χρονικού όρου  $\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau}$  στον όγκο ελέγχου  $\Omega_P^{\kappa+1}$ , βάσει του θεωρήματος του Leibniz<sup>1</sup> ξαναγράφεται ως:

$$\iiint_{\Omega_P^{\kappa+1}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} d\Omega = \frac{\partial}{\partial \tau} \iiint_{\Omega_P^{\kappa+1}} \vec{U} d\Omega - \iint_{\partial \Omega_P^{\kappa+1}} (\vec{u}_{grid}^{\kappa+1} \cdot \vec{n}^{\kappa+1}) \vec{U} d(\partial \Omega) \quad (3.3)$$

Η σχέση αυτή αποτελεί επαναδιατύπωση της εξίσωσης 2.76, για χρονικά μεταβαλλόμενους όγκους,  $\Omega = \Omega(\tau)$ , ενώ με  $\vec{u}_{grid}^{\kappa+1}$  συμβολίζεται η ταχύτητα παραμόρφωσης του ορίου του όγκου ολοκλήρωσης, τη χρονική στιγμή  $\tau^{\kappa+1}$  και με  $\vec{n}^{\kappa+1}$  το κάθετο στο όριο, μοναδιαίο διάνυσμα με φορά προς το εξωτερικό του όγκου ολοκλήρωσης. Κατά τον υπολογισμό των ταχυτήτων  $\vec{u}_{grid}^{\kappa+1}$  πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και να ικανοποιείται ο περιορισμός:

$$\iint_{\partial \Omega_P} (\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}) d(\partial \Omega) = \frac{d\Omega_P}{d\tau} \quad (3.4)$$

ο οποίος αποτελεί μια έκφραση του χωρικού νόμου διατήρησης (Space Conservation Law, [48]). Ο νόμος αυτός εκφράζει την ισορροπία που πρέπει να τηρείται μεταξύ του ρυθμού μεταβολής του όγκου ενός όγκου ελέγχου,  $\frac{d\Omega_P}{d\tau}$ , και της ταχύτητας παραμόρφωσης του ορίου του ίδιου όγκου ελέγχου. Επειδή στις 2Δ εφαρμογές που θα μελετηθούν η αεροτομή (άρα και το πλέγμα) μετατοπίζεται χωρίς να παραμορφώνεται, ο ρυθμός μεταβολής κάθε όγκου ελέγχου  $\frac{d\Omega_P}{d\tau}$  είναι μηδενικός, οπότε ο περιορισμός 3.4 ξαναγράφεται ως:

$$\iint_{\partial \Omega_P} (\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}) d(\partial \Omega) = 0 \quad (3.5)$$

Η διακριτοποίηση του πρώτου όρου του δεξιού μέλους της εξίσωσης 3.3, δηλαδή του όρου  $\frac{\partial}{\partial \tau} \iiint_{\Omega_P^{\kappa+1}} \vec{U} d\Omega$  γίνεται μέσω ενός αριθμητικού σχήματος πίσω διαφορίσης

<sup>1</sup>Για περισσότερες πληροφορίες βλ. Παράρτημα Α'.2

στο χρόνο, δεύτερης τάξης ακρίβειας, όπως ακριβώς δηλαδή έγινε και στην ενότητα 2.9. Έτσι, η εξίσωση 3.3 γράφεται σε διακριτή μορφή ως:

$$\iiint_{\Omega_P^{\kappa+1}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} d\Omega \simeq \frac{1}{2\Delta\tau} \left( 3\vec{U}_P^{\kappa+1}\Omega_P^{\kappa+1} - 4\vec{U}_P^{\kappa}\Omega_P^{\kappa} + \vec{U}_P^{\kappa-1}\Omega_P^{\kappa-1} \right) - \sum_{Q \in nei(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^{grid} \Big|_{\kappa+1} \quad (3.6)$$

Με  $\vec{U}_P^{\kappa+1}$  συμβολίστηκαν οι τιμές των συντηρητικών μεταβλητών της ροής στον κόμβο  $P$  ενώ  $\Omega_P^{\kappa+1}$  είναι ο όγκος ελέγχου γύρω από τον ίδιο κόμβο, τη χρονική στιγμή  $\tau^{\kappa+1}$ . Όμοια, οι ποσότητες  $\vec{U}_P^{\kappa}$ ,  $\Omega_P^{\kappa}$  και  $\vec{U}_P^{\kappa-1}$ ,  $\Omega_P^{\kappa-1}$  αναφέρονται στις χρονικές στιγμές  $\tau^{\kappa}$  και  $\tau^{\kappa-1}$ , αντίστοιχα.  $\vec{\Phi}_{PQ}^{grid}$  είναι το αριθμητικό διάνυσμα της ροής, το οποίο οφείλεται στη μετακίνηση του πλέγματος. Το διάνυσμα αυτό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\vec{\Phi}_{PQ}^{grid} = (\vec{u}_{grid}^{\kappa+1} \cdot \vec{n}_{PQ}^{\kappa+1}) \vec{U}_{PQ}^{\kappa+1} \quad (3.7)$$

όπου  $\vec{n}_{PQ}$  είναι το κάθετο διάνυσμα στη διεπιφάνεια των γειτονικών όγκων ελέγχου  $\Omega_P$ ,  $\Omega_Q$  και  $\vec{U}_{PQ}$  είναι το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών ροής εκφρασμένο στο μέσο της ακμής  $\overline{PQ}$ .<sup>2</sup>

Η απλούστερη προσέγγιση για το διάνυσμα  $\vec{U}_{PQ}$  είναι να θεωρηθεί ως το ημιάθροισμα των μεταβλητών ροής  $\vec{U}_P$ ,  $\vec{U}_Q$  στους κόμβους  $P$ ,  $Q$ , αντίστοιχα, δηλαδή:

$$\vec{U}_{PQ}^{\kappa+1} = \frac{\vec{U}_P^{\kappa+1} + \vec{U}_Q^{\kappa+1}}{2} \quad (3.8)$$

Μια έκφραση αυξημένης ακρίβειας υπολογισμού του διανύσματος  $\vec{U}_{PQ}^{\kappa+1}$  θα περιλάμβανε την παρεμβολή των  $\vec{U}_P^{\kappa+1}$  και  $\vec{U}_Q^{\kappa+1}$  στο μέσο της ακμής  $\overline{PQ}$ , βάσει της σχέσης 2.53.

Η ταχύτητα παραμόρφωσης του πλέγματος  $\vec{u}_{grid}$  υπολογίζεται αριθμητικά στους κόμβους του πλέγματος, μέσω σχήματος πίσω διαφόρισης δεύτερης τάξης ακρίβειας. Εναλλακτικά, στην περίπτωση που η αεροτομή ταλαντώνεται με ένα στρεπτικό βαθμό ελευθερίας και μόνο, η ταχύτητα για κάθε κόμβο δίνεται από την αναλυτική σχέση:

$$\vec{u}_{grid} = \vec{R} \times \vec{\omega} \quad (3.9)$$

Οι ταχύτητες  $\vec{u}_{grid}$  που προκύπτουν με χρήση της σχέσης 3.9, είναι απόλυτης ακρίβειας, αντίθετα με τις προσεγγίσεις που προκύπτουν βάσει του σχήματος πεπερασμένων διαφορών, ωστόσο η τελική πρόλεξη για το πεδίο ροής έχει πρακτικά την ίδια ακρίβεια και με τις δύο μεθόδους, γι' αυτό και δεν προτιμάται η αναλυτική προσέγγιση.

Τα εσωτερικά γινόμενα  $\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}_{PQ}$ , τα οποία εμφανίζονται στη σχέση 3.7, υπολογίζονται αναλυτικά ως εξής (βλ. και σχήμα 3.5):

<sup>2</sup>Υπενθυμίζεται ότι χρησιμοποιούνται σχήματα πεπερασμένων όγκων με κεντροκομβική αποθήκευση των μεταβλητών ροής.

- Πρώτα υπολογίζεται το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}_{PQ}|_1$ , με βάση το κάθετο διάνυσμα  $\vec{n}_1$ , που αντιστοιχεί στο πρώτο από τα δύο τμήματα που σχηματίζουν τη διεπιφάνεια των όγκων  $\Omega_P, \Omega_Q$ . Έτσι, προκύπτει:

$$\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}_{PQ}|_1 = ugn_1 = \frac{1}{2} (\vec{u}_{grid}^{BC} + \vec{u}_{grid}^M) \cdot \vec{n}_1 \quad (3.10)$$

όπου με  $\vec{u}_{grid}^{BC}$  συμβολίστηκε το διάνυσμα ταχύτητας του βαρύκεντρου του τριγωνικού στοιχείου 1 και με  $\vec{u}_{grid}^M$  το διάνυσμα ταχύτητας στο μέσο της ακμής  $\overline{PQ}$ . Το διάνυσμα  $\vec{u}_{grid}^{BC}$  υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\vec{u}_{grid}^{BC} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \vec{u}_{grid}^i \quad (3.11)$$

με  $i$  τους κόμβους που ανήκουν στο τριγωνικό στοιχείο 1, ενώ το διάνυσμα  $\vec{u}_{grid}^M$  υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\vec{u}_{grid}^M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \vec{u}_{grid}^i \quad (3.12)$$

με  $i = 1$  να αντιστοιχεί στον κόμβο  $P$  και  $i = 2$  στον κόμβο  $Q$ .

- Στη συνέχεια, υπολογίζεται το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}_{PQ}|_2$ , με βάση το κάθετο διάνυσμα  $\vec{n}_2$ , που αντιστοιχεί στο δεύτερο από τα δύο τμήματα που σχηματίζουν τη διεπιφάνεια των όγκων  $\Omega_P, \Omega_Q$ . Έτσι, προκύπτει:

$$\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}_{PQ}|_2 = ugn_2 = \frac{1}{2} (\vec{u}_{grid}^{BC} + \vec{u}_{grid}^M) \cdot \vec{n}_2 \quad (3.13)$$

όπου με  $\vec{u}_{grid}^{BC}$  συμβολίστηκε το διάνυσμα ταχύτητας του βαρύκεντρου του τριγωνικού στοιχείου 2 και με  $\vec{u}_{grid}^M$  το διάνυσμα ταχύτητας στο μέσο της ακμής  $\overline{PQ}$ . Το διάνυσμα  $\vec{u}_{grid}^{BC}$  υπολογίζεται από τη σχέση 3.11, με  $i$  τους κόμβους που ανήκουν στο τριγωνικό στοιχείο 2.

- Τέλος, αθροίζονται τα βαθμωτά μεγέθη  $ugn_1$  και  $ugn_2$  με συνεισφορά 50% έκαστο. Προκύπτει δηλαδή ότι:

$$\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}_{PQ} = \frac{1}{2} (ugn_1 + ugn_2) \quad (3.14)$$

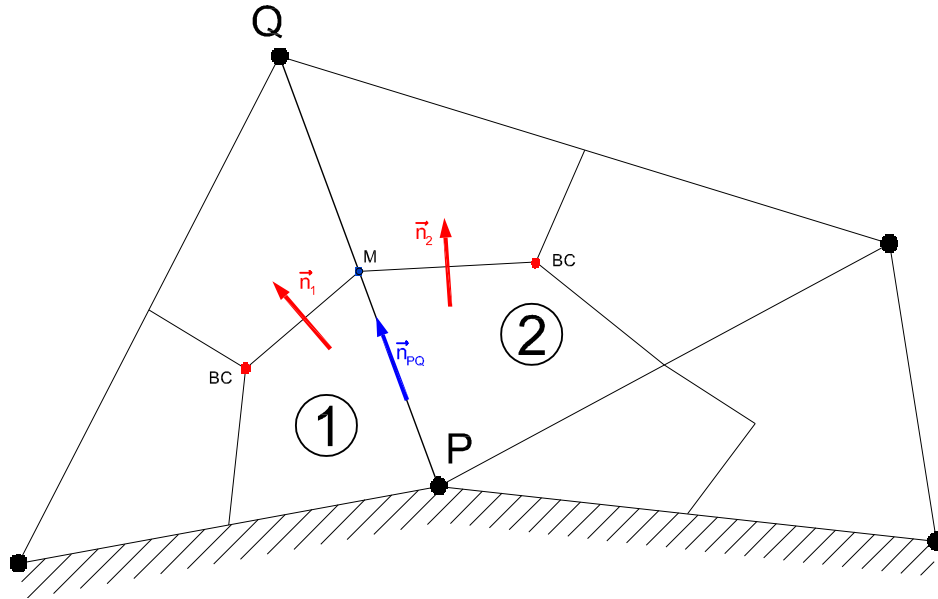
Για την παραπάνω ανάλυση, θεωρήθηκε ότι τα τριγωνικά στοιχεία του πλέγματος είναι τύπου  $P^1$ .

Στο σημείο αυτό, να τονιστεί ότι επειδή το πλέγμα δεν παραμορφώνεται, ο όγκος κάθε κυψέλης ελέγχου δε μεταβάλλεται με το χρόνο, επομένως ισχύει ότι:

$$\Omega_P^{\kappa+1} = \Omega_P^\kappa = \Omega_P^{\kappa-1} = \Omega_P \quad (3.15)$$

Με βάση τη σχέση 3.15, η σχέση 3.6 μπορεί να ξαναγραφεί απλούστερα ως:

$$\iiint_{\Omega_P^{\kappa+1}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} d\Omega \simeq \frac{\Omega_P}{2\Delta\tau} \left( 3\vec{U}_P^{\kappa+1} - 4\vec{U}_P^\kappa + \vec{U}_P^{\kappa-1} \right) - \sum_{Q \in nei(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^{grid} \Big|_{\kappa+1} \quad (3.16)$$



Σχήμα 3.5: Υπολογισμός του εσωτερικού γινομένου  $\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}_{PQ}$  για τον κόμβο  $P$ .

### 3.3.2 Επαναδιατύπωση των οριακών συνθηκών

Οι οριακές συνθήκες που επιβάλλονται καθορίζονται από το είδος των οριακών κόμβων του προβλήματος. Στο πρόβλημα της μεμονωμένης αεροτομής εκτεθειμένης σε ρεύμα ρευστού, όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 2.7, οι οριακοί κόμβοι μπορεί να είναι είτε στερεό τοίχωμα, είτε είσοδος/έξοδος.

#### Στερεό τοίχωμα

Το διάνυσμα της ατριβούς ροής  $\vec{\Phi}_{PQ}^{inv}$ , λόγω της μετακίνησης του πλέγματος, γράφεται ως άθροισμα των συνεισφορών της ροής και του πλέγματος, ως:

$$\vec{\Phi}_{PQ}^{inv} = \vec{\Phi}_{PQ}^{flow} - \vec{\Phi}_{PQ}^{grid} = \begin{bmatrix} \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) \\ \rho u_1 (\vec{u} \cdot \vec{n}) + pn_1 \\ \rho u_2 (\vec{u} \cdot \vec{n}) + pn_2 \\ (E_t + p) (\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho (\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}) \\ \rho u_1 (\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}) \\ \rho u_2 (\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}) \\ E_t (\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Η εξίσωση 3.17 ξαναγράφεται ως:

$$\vec{\Phi}_{PQ}^{inv} = \begin{bmatrix} \rho (\vec{u} - \vec{u}_{grid}) \cdot \vec{n} \\ \rho u_1 (\vec{u} - \vec{u}_{grid}) \cdot \vec{n} + pn_1 \\ \rho u_2 (\vec{u} - \vec{u}_{grid}) \cdot \vec{n} + pn_2 \\ p (\vec{u} \cdot \vec{n}) + E_t (\vec{u} - \vec{u}_{grid}) \cdot \vec{n} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Επειδή η ροή έχει υποτεθεί ατριβής, σε όλους τους κόμβους επί του στερεού τοιχώματος θα ισχύει η 'συνθήκη μη-εισχώρησης', η οποία διατυπώνεται ως:

$$(\vec{u} - \vec{u}_{grid}) \cdot \vec{n} = 0 \quad (3.19)$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη 3.19 στην εξίσωση 3.18, προκύπτει:

$$\vec{\Phi}_{wall}^{inv} = \begin{bmatrix} 0 \\ pn_1 \\ pn_2 \\ p(\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Επίσης, για το Ιακωβιανό μητρώο  $\frac{\partial \vec{\Phi}_{wall}^{inv}}{\partial \vec{U}}$  θα ισχύει ότι:

$$\frac{\partial \vec{\Phi}_{wall}^{inv}}{\partial \vec{U}} = \frac{\partial \vec{\Phi}_{wall}^{inv}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \quad (3.21)$$

Για τα επιμέρους μητρώα της σχέσης 3.21, όμως, ισχύει ότι:

$$\frac{\partial \vec{\Phi}_{wall}^{inv}}{\partial p} = \begin{bmatrix} 0 \\ n_1 \\ n_2 \\ \vec{u}_{grid} \cdot \vec{n} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} = (\gamma - 1) \cdot \begin{bmatrix} \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} & -u_1 & -u_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Άρα τελικά, με βάση τις σχέσεις 3.21 και 3.22 προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \vec{\Phi}_{wall}^{inv}}{\partial \vec{U}} = (\gamma - 1) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} n_1 & -u_1 n_1 & -u_2 n_1 & n_1 \\ \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} n_2 & -u_1 n_2 & -u_2 n_2 & n_2 \\ \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} (\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}) & -u_1 (\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}) & -u_2 (\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}) & (\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, με το σύμβολο  $\vec{u}_{grid}$  νοούνται οι ταχύτητες των κόμβων του πλέγματος που βρίσκονται επί του στερεού τοιχώματος.

### Είσοδος/Έξοδος

Για την είσοδο και την έξοδο (δείκτες  $I/O$ ) του πεδίου ροής εφαρμόζεται η εξίσωση 2.63, μαζί με τη σχετική διαδικασία που παρουσιάζεται στην αντίστοιχη ενότητα. Η μόνη διαφορά είναι ότι στο διάνυσμα  $\vec{\Phi}_{I/O}^{inv}$  της ατρίβους ροής πρέπει να προστεθεί το διάνυσμα της ροής του πλέγματος  $\vec{\Phi}_{I/O}^{grid}$ , το οποίο δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\vec{\Phi}_{I/O}^{grid} = \begin{bmatrix} \rho(\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}) \\ \rho u_1 (\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}) \\ \rho u_2 (\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}) \\ E_t (\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

## 3.4 Ελαστικές εξισώσεις ισορροπίας απαραμόρφωτης αεροτομής

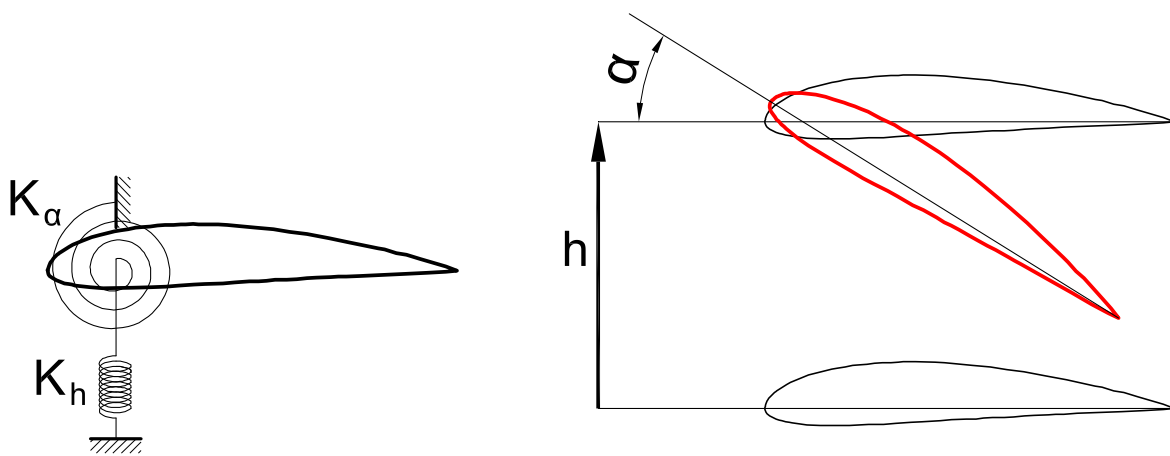
Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν οι ελαστικές εξισώσεις ισορροπίας απαραμόρφωτης αεροτομής, ενώ στις επόμενες ενότητες ακολουθεί η αδιαστατοποίηση



αυτών και η περιγραφή της μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε για την αριθμητική τους ολοκλήρωση.

### 3.4.1 Εξισώσεις κίνησης

Θεωρείται απαραμόρφωτη αεροτομή που δύναται να περιστρέφεται γύρω από τον ελαστικό της άξονα<sup>3</sup> και να μετακινείται κατά την κατακόρυφη κατεύθυνση. Οι δύο αυτοί βαθμοί ελευθερίας της αεροτομής περιορίζονται από (γραμμικά ή στρεπτικά) ελατήρια, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.6.



Σχήμα 3.6: Οι δύο βαθμοί ελευθερίας της αεροτομής.

Οι ελαστικές εξισώσεις μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$M\ddot{\vec{q}} + K\dot{\vec{q}} = \vec{Q} \quad (3.25)$$

όπου  $\vec{q} = [h \ \alpha]^T$  είναι το διάνυσμα των γενικευμένων μετατοπίσεων, με  $h$  και  $\alpha$  να αποτελούν την κατακόρυφη και την περιστροφική, γύρω από τον ελαστικό άξονα, μετατόπιση της αεροτομής. Αντίστοιχα,  $\vec{Q} = [F_y \ M_{ea}]^T$  είναι το διάνυσμα των γενικευμένων δυνάμεων που ασκούνται στην αεροτομή, με  $F_y$  και  $M_{ea}$  να αποτελούν την αεροδυναμική δύναμη και τη ροπή γύρω από τον ελαστικό άξονα που ασκείται στην αεροτομή. Τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας ( $M$  και  $K$  αντίστοιχα) υπολογίζονται από τις εκφράσεις:

$$M = \begin{bmatrix} m & S_{\alpha,x} \\ S_{\alpha,x} & I_{e\alpha} \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_\alpha \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

<sup>3</sup> Στην περίπτωση απαραμόρφωτης αεροτομής (τομή πτέρυγας που δύναται να παραμορφώνεται με βάση μόνο μια καθαρή καμπτική και μία καθαρή περιστροφική ιδιομορφή), ο ελαστικός άξονας ή το ελαστικό κέντρο της αεροτομής είναι το σημείο γύρω από το οποίο δύναται να περιστρέφεται αυτή.

Όλες οι παράμετροι που εμφανίζονται στις εξισώσεις 3.26, καθώς και όσες είναι απαραίτητες για την επίλυση κλασικών αεροελαστικών προβλημάτων (κεφάλαιο 4), θα αναφερθούν στην επόμενη ενότητα.

### 3.4.2 Αδιάστατες παράμετροι

Στη βιβλιογραφία [49, 50], τα δομικά χαρακτηριστικά μιας αεροτομής συνήθως εκφράζονται μέσω αδιάστατων παραμέτρων. Οι αδιάστατες παράμετροι που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια αυτής της εργασίας συνοψίζονται σε αυτή την ενότητα.

#### Δείκτης ασυμμετρίας (Static unbalance, $X_\alpha$ )

Η στατική ροπή (static moment)  $S_{\alpha,x}$  αδιαστατοποιείται με βάση τη μάζα ανά μονάδα βάθους της αεροτομής,  $m$ , και τη χορδή της,  $c$ . Έτσι, η παράμετρος  $X_\alpha$  εκφράζει την οριζόντια απόσταση μεταξύ του κέντρου μάζας της αεροτομής (CG) και του ελαστικού άξονα (ea). Ισχύει δηλαδή ότι:

$$X_\alpha = \frac{S_{\alpha,x}}{mc} = x_{CG} - x_{ea} \quad (3.27)$$

όπου με  $x_{CG}$  και  $x_{ea}$  συμβολίστηκαν οι αδιάστατες αποστάσεις του κέντρου μάζας και του ελαστικού άξονα από την ακμή πρόσπτωσης, αντίστοιχα. Επειδή επιπλέον ισχύει ότι  $c = 1$ , η σχέση 3.27 ξαναγράφεται ως:

$$S_{\alpha,x} = mX_\alpha \quad (3.28)$$

Στις εφαρμογές που θα ακολουθήσουν, η στατική ροπή  $S_{\alpha,x}$  θα υπολογίζεται βάσει της σχέσης 3.28, με τις τιμές των μεγεθών  $m$  και  $X_\alpha$  να καθορίζονται από την εκάστοτε εφαρμογή. Με την ίδια διαδικασία υπολογίζεται και ο δείκτης ασυμμετρίας  $Y_\alpha$ , ώστε τελικά το διάνυσμα  $[X_\alpha \ Y_\alpha]^T$  εκφράζει τη σχετική θέση του κέντρου μάζας της αεροτομής ως προς τον ελαστικό άξονα. Επειδή, σε όλες τις εφαρμογές που θα εξεταστούν, το κέντρο μάζας της αεροτομής βρίσκεται επί της χορδής αυτής, η τεταγμένη  $Y_\alpha$  είναι μηδενική.

#### Ακτίνα περιστροφής (Radius of gyration, $r_\alpha$ )

Η πολική ροπή αδράνειας της αεροτομής γύρω από τον ελαστικό άξονα (που ταυτίζεται με το κέντρο περιστροφής), συμβολίζεται με  $I_{e\alpha}$  και αδιαστατοποιείται με βάση τη μάζα ανά μονάδα βάθους της αεροτομής,  $m$ , και τη χορδή της,  $c$ , ως:

$$r_\alpha = \sqrt{\frac{I_{e\alpha}}{mc^2}} \quad (3.29)$$

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη ότι  $c = 1$ , η πολική ροπή αδράνειας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$I_{e\alpha} = mr_\alpha^2 \quad (3.30)$$

Η ακτίνα περιστροφής,  $r_\alpha$ , είναι καθαρά λογιστικό μέγεθος.

**Λόγος πυκνοτήτων (Section density ratio,  $\mu$ )**

Το μέγεθος αυτό αποτελεί τον αδιάστατο λόγο μεταξύ της πυκνότητας του υλικού κατασκευής της αεροτομής και του περιβάλλοντος ρευστού και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mu = \frac{m}{\pi \rho_{\infty} b^2} \quad (3.31)$$

όπου  $b = c/2$ , δηλαδή το μισό της χορδής της αεροτομής. Ο (αδιάστατος) λόγος πυκνοτήτων,  $\mu$ , εξαρτάται από την εκάστοτε εφαρμογή.

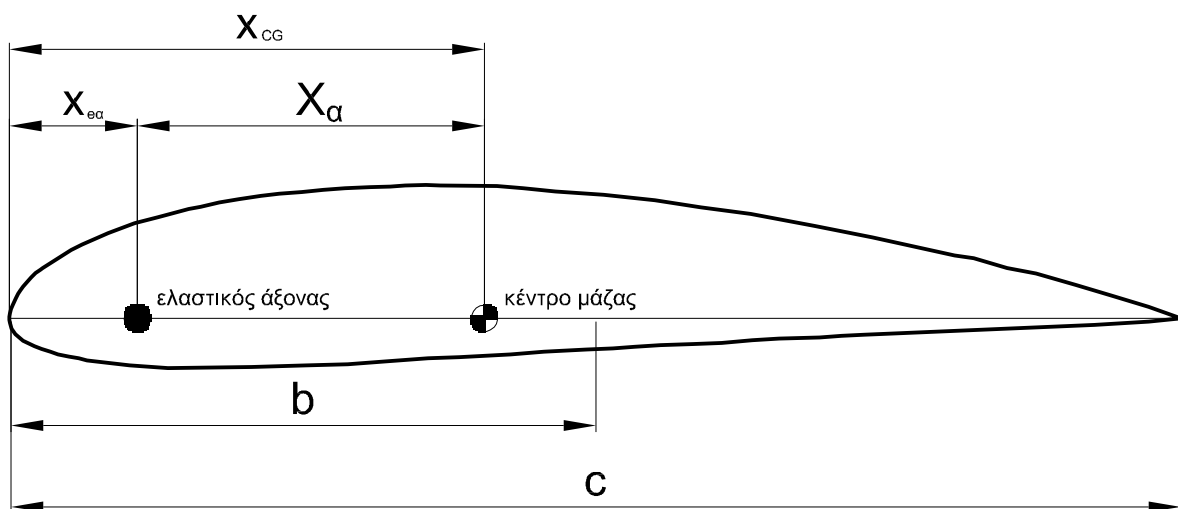
**Λόγος φυσικών συχνοτήτων  $\omega_h/\omega_{\alpha}$** 

Με  $\omega_h$  και  $\omega_{\alpha}$  συμβολίζονται οι φυσικές συχνότητες για κάθε έναν εκ των δύο βαθμών ελευθερίας της αεροτομής. Η φυσική συχνότητα  $\omega_{\alpha}$ , αφορά τη συχνότητα ελεύθερης ταλάντωσης της αεροτομής μόνο με το στρεπτικό βαθμό ελευθερίας, ενώ το αντίστοιχο ισχύει και για την  $\omega_h$ . Οι φυσικές συχνότητες καθορίζονται με βάση τις σταθερές των δύο ελατηρίων ( $K_{\alpha}$  και  $K_h$ ), τη μάζα της αεροτομής,  $m$ , και την πολική ροπή αδράνειας της αεροτομής, γύρω από τον ελαστικό άξονα,  $I_{e\alpha}$ . Ισχύει δηλαδή:

$$\omega_h = \sqrt{K_h/m} \quad \omega_{\alpha} = \sqrt{K_{\alpha}/I_{e\alpha}} \quad (3.32)$$

Ο λόγος των φυσικών συχνοτήτων των δύο βαθμών ελευθερίας της αεροτομής,  $\omega_h/\omega_{\alpha}$ , καθορίζει τη μεταξύ τους σύζευξη και για το λόγο αυτό αποτελεί βασικό μέγεθος στις αεροελαστικές εφαρμογές που θα αναλυθούν στο κεφάλαιο 4.

Τα αδιάστατα γεωμετρικά μεγέθη που αναφέρθηκαν προηγουμένως φαίνονται στο σχήμα 3.7.



Σχήμα 3.7: Βασικές γεωμετρικές αποστάσεις. Οι θέσεις του ελαστικού άξονα και του κέντρου μάζας είναι γνωστές.

### 3.5 Αδιαστατοποίηση των ελαστικών εξισώσεων

Στην ενότητα 2.4 παρουσιάστηκε μία μέθοδος αδιαστατοποίησης των εξισώσεων ροής, βάσει της οποίας η κλίμακα αδιαστατοποίησης του χρόνου, της δύναμης και της ροπής αντίστοιχα είναι:

$$\tau_{ref} = \frac{L_{ref}}{U_{ref}} \quad F_{ref} = \rho_{ref} L_{ref} U_{ref}^2 \quad M_{ref} = \rho_{ref} L_{ref}^2 U_{ref}^2$$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην ενότητα 2.4, τα μεγέθη αναφοράς (reference) που εμφανίζονται παραπάνω, επιλέγονται με βάση τη συγκεκριμένη εφαρμογή. Έτσι, επιλέχθηκε ως μήκος αδιαστατοποίησης το μήκος της χορδής της αεροτομής ( $L_{ref} = c$ ), ταχύτητα αναφοράς το μέτρο της επ' άπειρον ταχύτητας της ροής ( $U_{ref} = U_\infty$ ) και πυκνότητα αναφοράς η πυκνότητα του ρευστού μακριά από την αεροτομή ( $\rho_{ref} = \rho_\infty$ ). Δηλαδή:

$$\tau_{ref} = \frac{c}{U_\infty} \quad F_{ref} = \rho_\infty c U_\infty^2 \quad M_{ref} = \rho_\infty c^2 U_\infty^2$$

Στη συνέχεια αυτής της ενότητας, οι ποσότητες με δείκτη  $ref$  αναφέρονται στα μεγέθη αναφοράς των αντίστοιχων ελαστικών ή αεροδυναμικών ποσοτήτων. Επίσης, οι αδιάστατες ποσότητες σημαίνονται με το σύμβολο  $\check{\phantom{x}}$ .

Από την εξίσωση ισορροπίας κατά την κατακόρυφη κατεύθυνση (πρώτη συνιστώσα του συστήματος 3.25) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} m\ddot{h} + S_{\alpha,x}\ddot{\alpha} + K_h h &= F_y \Rightarrow \\ \Rightarrow \left( \frac{m_{ref} L_{ref}}{F_{ref} \tau_{ref}^2} \right) \check{m} \check{\ddot{h}} + \left( \frac{S_{ref}}{F_{ref} \tau_{ref}^2} \right) \check{S}_{\alpha,x} \check{\ddot{\alpha}} + \left( \frac{K_{h,ref} L_{ref}}{F_{ref}} \right) \check{K}_h \check{h} &= \check{F}_y \end{aligned}$$

Για λόγους συμβατότητας μεταξύ της αδιάστατης και της διαστατής έκφρασης της εξίσωσης ισορροπίας κατά την κατακόρυφη κατεύθυνση, πρέπει οι όροι εντός των παρενθέσεων να είναι ίσοι με τη μονάδα. Έτσι προκύπτουν:

$$m_{ref} = \frac{F_{ref} \tau_{ref}^2}{L_{ref}} = \rho_\infty c^2$$

$$S_{ref} = F_{ref} \tau_{ref}^2 = \rho_\infty c^3$$

$$K_{h,ref} = \frac{F_{ref}}{L_{ref}} = \rho_\infty U_\infty^2$$

Από την εξίσωση ισορροπίας κατά την περιστροφική κατεύθυνση γύρω από τον ελαστικό άξονα (δεύτερη συνιστώσα του συστήματος 3.25) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} S_{\alpha,x}\ddot{h} + I_\alpha\ddot{\alpha} + K_\alpha\alpha &= M_{ea} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left( \frac{S_{ref} L_{ref}}{M_{ref} \tau_{ref}^2} \right) \check{S}_{\alpha,x} \check{\ddot{h}} + \left( \frac{I_{ref}}{M_{ref} \tau_{ref}^2} \right) \check{I}_\alpha \check{\ddot{\alpha}} + \left( \frac{K_{\alpha,ref}}{M_{ref}} \right) \check{K}_\alpha \check{\alpha} &= \check{M}_{ea} \end{aligned}$$

Για λόγους συμβατότητας μεταξύ της αδιάστατης και της διαστατής έκφρασης της εξίσωσης ισορροπίας κατά την περιστροφική κατεύθυνση γύρω από τον ελαστικό άξονα, πρέπει οι όροι εντός των παρενθέσεων να είναι ίσοι με τη μονάδα. Έτσι προκύπτουν:

$$I_{ref} = M_{ref} \tau_{ref}^2 = \rho_{\infty} c^4$$

$$K_{\alpha,ref} = M_{ref} = \rho_{\infty} c^2 U_{\infty}^2$$

Με βάση τα παραπάνω, παρατηρείται ότι οι ελαστικές ποσότητες της αεροτομής αδιαστατοποιούνται με τις βασικές ποσότητες της ροής. Από εδώ και στο εξής, παρότι όλα τα μεγέθη που θα χρησιμοποιούνται θα είναι αδιάστατα, παραλείπεται ο συμβολισμός τους για λόγους απλότητας.

### 3.6 Αριθμητική ολοκλήρωση των ελαστικών εξισώσεων

Για να γίνει εφικτή η αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων 3.25, είναι απαραίτητο να γραφούν ως ένα σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων, καθεμιά από τις οποίες θα είναι πρωτοβάθμια. Για το λόγο αυτό, εισάγεται το διάνυσμα  $\vec{\xi} = [q \ \dot{q}]^T$  και οι εξισώσεις 3.25 γράφονται ως:

$$A\vec{\xi} + B\dot{\vec{\xi}} = \vec{C} \quad (3.33)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -I_{2 \times 2} \\ K & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{Q} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

με  $I_{2 \times 2}$  το μοναδιαίο μητρώο.

Ο υπολογισμός των τιμών του διανύσματος γενικευμένων μετατοπίσεων  $\vec{q} = [h \ \alpha]^T$  μπορεί να γίνει με δύο μεθόδους:

**Αριθμητική ολοκλήρωση** των εξισώσεων 3.33 με χρήση της μεθόδου Runge-Kutta.

Αυτός είναι και ο προφανής τρόπος, δεδομένου ότι οι εξισώσεις 3.33 συνιστούν ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.

**Προσέγγιση** της χρονικής παραγώγου  $\dot{\vec{\xi}}$  με χρήση μιας έκφρασης πεπερασμένων διαφορών. Σε αυτήν την περίπτωση, το διαφορικό σύστημα 3.33 μετατρέπεται σε μια αλγεβρική εξίσωση, διακριτοποιημένη επί των κόμβων του υπολογιστικού χωρίου. Για την επίλυση αυτής, χρησιμοποιείται η δέλτα διατύπωση ως προς τις μεταβλητές  $\vec{\xi}$  και υπολογίζεται επαναληπτικά η διόρθωση  $\delta\vec{\xi}$ . Να σημειωθεί ότι η επίλυση των ελαστικών εξισώσεων πρέπει να γίνεται παράλληλα με την επίλυση των εξισώσεων ροής, γι' αυτό πρέπει να υπάρχει σωστός συγχρονισμός μεταξύ των δύο επιλυτών. Για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία [36].

Για την αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων 3.33 με τη μέθοδο Runge-Kutta, το σύστημα ξαναγράφεται στη μορφή:

$$\vec{\xi} = A^{-1} [\vec{C} - B\vec{\xi}]$$

ή

$$\vec{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & I_{2 \times 2} \\ -M^{-1}K & 0 \end{bmatrix} \vec{\xi} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}\vec{Q} \end{bmatrix} = \vec{G}(\tau, \vec{Q}, \vec{\xi}) \quad (3.35)$$

Η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης 3.35 απαιτεί τη σύζευξή με τον επιλύτη της ροής, έτσι ώστε τα αεροδυναμικά φορτία που προκύπτουν ως αποτέλεσμα των μεταβολών των τιμών των γενικευμένων μετατοπίσεων  $\vec{q} = [h \ \alpha]^T$  να ανατροφοδοτούνται στον ελαστικό επιλύτη. Κατά τον ίδιο τρόπο, ο επιλύτης της ροής θα επιλύει σε κάθε χρονική στιγμή το πεδίο, με την αεροτομή να έχει μετατοπιστεί κατά  $h$  και  $\alpha$ , όπως αυτά προέκυψαν από την επίλυση των ελαστικών εξισώσεων. Στη συνέχεια, θα παρατεθεί ο σχετικός αλγόριθμος επίλυσης αεροελαστικών προβλημάτων, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Runge-Kutta σε συνδυασμό με τον επιλύτη των εξισώσεων Euler, που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2.

### 3.7 Αλγόριθμος επίλυσης αεροελαστικών προβλημάτων

Σε αυτή την ενότητα, θα περιγραφεί συνοπτικά ένας αλγόριθμος επίλυσης αεροελαστικών προβλημάτων, βάσει των μεθόδων που αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες ενότητες. Συγκεκριμένα, περιγράφονται οι ενέργειες που πρέπει να εκτελεστούν για την υλοποίηση ενός πραγματικού χρονικού βήματος ( $\kappa \rightarrow \kappa + 1$ ). Ο γενικός αλγόριθμος επίλυσης αεροελαστικών προβλημάτων φαίνεται παρακάτω.

1. Αρχή
2. Έναρξη των  $\kappa$  επαναλήψεων πραγματικού χρόνου (ο αριθμός τους καθορίζεται έμμεσα από το χρήστη)
3. Καθορισμός της νέας πραγματικής χρονικής στιγμής  $\tau^{\kappa+1} = \tau^{\kappa} + \Delta\tau$
4. Έναρξη των  $j$  επαναλήψεων Runge-Kutta,  $j = 1, 2, 3, 4$
5. Καθορισμός της χρονικής στιγμής  $t_j$  για το  $j$ -βήμα
6. Ανανέωση της θέσης της αεροτομής, βάσει του διανύσματος  $\vec{\xi}_j$
7. Προσαρμογή του πλέγματος στη νέα θέση της αεροτομής
8. Ανανέωση των γεωμετρικών στοιχείων του προβλήματος
9. Έναρξη των  $n$  ψευδο-χρονικών επαναλήψεων,  $n = 1, 2, 3, \dots$  μέχρι το μηδενισμό του ψευδο-χρονικού όρου
10. Επίλυση των εξισώσεων Euler για τη χρονική στιγμή  $t_j$  και υπολογισμός των αεροδυναμικών φορτίων  $\vec{Q}_j$
11. Τέλος ψευδο-χρονικών επαναλήψεων
12. Εξαγωγή αποτελεσμάτων για την πραγματική χρονική στιγμή  $\tau^{\kappa+1}$ , εφόσον  $\tau^{\kappa+1} = t_1$
13. Υπολογισμός συντελεστή  $\vec{K}_j$
14. Τέλος επαναλήψεων Runge-Kutta
15. Προετοιμασία επόμενου πραγματικού χρονικού βήματος
16. Τέλος επαναλήψεων πραγματικού χρόνου
17. Τέλος

Καθένα από τα τέσσερα βήματα της Runge-Kutta απαιτεί την επίλυση των εξισώσεων Euler σε αντίστοιχα χρονικά βήματα, με διαφορετικές οριακές συνθήκες (ταχύτητα μετατόπισης της αεροτομής). Για την επίλυση αυτή πραγματοποιείται κάθε φορά το αναγκαίο πλήθος ψευδοχρονικών βημάτων.<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Στην περίπτωση που οι σταθερές των ελατηρίων εξαρτώνται από την επιμήκυνση/βράχυνση αυτών (δηλαδή  $K = K(\xi)$ ), η εξάρτηση αυτή πρέπει να προστεθεί σε κάθε βήμα της Runge-Kutta. Δηλαδή, πρέπει να υπολογίζονται οι σταθερές των ελατηρίων μετά τον καθορισμό της θέσης ( $\vec{q}$ ) της αεροτομής.

Ο αλγόριθμος που παρατέθηκε είναι γενικός. Παρακάτω, ακολουθεί ένας πιο αναλυτικός αλγόριθμος, που εστιάζει στον τρόπο επίλυσης των ελαστικών εξισώσεων με τη μέθοδο Runge-Kutta, δηλαδή στον επαναληπτικό βρόχο που ξεκινάει στο βήμα 4 του προηγούμενου διαγράμματος.

### 1<sup>ο</sup> Runge-Kutta βήμα

- Χρονική στιγμή:  $t_1 \leftarrow \tau^k$
- Θέση αεροτομής και οριακές συνθήκες:  $\vec{\xi}_1 \leftarrow \vec{\xi}^k$
- Μετατόπιση της αεροτομής στη νέα θέση
- Προσαρμογή του πλέγματος στη νέα θέση της αεροτομής
- Ανανέωση των γεωμετρικών στοιχείων του προβλήματος
- Εύρεση του πεδίου ροής και των αεροδυναμικών φορτίων  $\vec{Q}_1$  τη χρονική στιγμή  $t_1$  γύρω από την αεροτομή επιλύοντας τις μη-μόνιμες εξισώσεις Euler για το χρονικό βήμα  $\tau^{k-1} \rightarrow \tau^k$
- Υπολογισμός συντελεστή  $\vec{K}_1 \leftarrow \Delta\tau \cdot \ddot{\mathcal{G}}(t_1, \vec{Q}_1, \vec{\xi}_1)$

### 2<sup>ο</sup> Runge-Kutta βήμα

- Χρονική στιγμή:  $t_2 \leftarrow \tau^{k+1/2} = \tau^k + \frac{1}{2}\Delta\tau$
- Θέση αεροτομής και οριακές συνθήκες:  $\vec{\xi}_2 \leftarrow \vec{\xi}^k + \frac{1}{2}\vec{K}_1$
- Μετατόπιση της αεροτομής στη νέα θέση
- Προσαρμογή του πλέγματος στη νέα θέση της αεροτομής
- Ανανέωση των γεωμετρικών στοιχείων του προβλήματος
- Εύρεση του πεδίου ροής και των αεροδυναμικών φορτίων  $\vec{Q}_2$  τη χρονική στιγμή  $t_2$  γύρω από την αεροτομή επιλύοντας τις μη-μόνιμες εξισώσεις Euler για το χρονικό βήμα  $\tau^k \rightarrow \tau^{k+1/2}$
- Υπολογισμός συντελεστή  $\vec{K}_2 \leftarrow \Delta\tau \cdot \ddot{\mathcal{G}}(t_2, \vec{Q}_2, \vec{\xi}_2)$

### 3<sup>ο</sup> Runge-Kutta βήμα

- Χρονική στιγμή:  $t_3 \leftarrow \tau^{k+1/2} = \tau^k + \frac{1}{2}\Delta\tau$
- Θέση αεροτομής και οριακές συνθήκες:  $\vec{\xi}_3 \leftarrow \vec{\xi}^k + \frac{1}{2}\vec{K}_2$
- Μετατόπιση της αεροτομής στη νέα θέση
- Προσαρμογή του πλέγματος στη νέα θέση της αεροτομής
- Ανανέωση των γεωμετρικών στοιχείων του προβλήματος
- Εύρεση του πεδίου ροής και των αεροδυναμικών φορτίων  $\vec{Q}_3$  τη χρονική στιγμή  $t_3$  γύρω από την αεροτομή επιλύοντας τις μη-μόνιμες εξισώσεις Euler για το χρονικό βήμα  $\tau^k \rightarrow \tau^{k+1/2}$
- Υπολογισμός συντελεστή  $\vec{K}_3 \leftarrow \Delta\tau \cdot \ddot{\mathcal{G}}(t_3, \vec{Q}_3, \vec{\xi}_3)$

### 4<sup>ο</sup> Runge-Kutta βήμα

- Χρονική στιγμή:  $t_4 \leftarrow \tau^{k+1} = \tau^k + \Delta\tau$
- Θέση αεροτομής και οριακές συνθήκες:  $\vec{\xi}_4 \leftarrow \vec{\xi}^k + \vec{K}_3$
- Μετατόπιση της αεροτομής στη νέα θέση
- Προσαρμογή του πλέγματος στη νέα θέση της αεροτομής



- Ανανέωση των γεωμετρικών στοιχείων του προβλήματος
- Εύρεση του πεδίου ροής και των αεροδυναμικών φορτίων  $\vec{Q}_4$  τη χρονική στιγμή  $t_4$  γύρω από την αεροτομή επιλύοντας τις μη-μόνιμες εξισώσεις Euler για το χρονικό βήμα  $\tau^\kappa \rightarrow \tau^{\kappa+1}$
- Υπολογισμός συντελεστή  $\vec{K}_4 \leftarrow \Delta\tau \cdot \ddot{\mathcal{G}}(t_4, \vec{Q}_4, \vec{\xi}_4)$

**Υπολογισμός του διανύσματος  $\vec{\xi}^{\kappa+1}$**

- $\tau^{\kappa+1} = \tau^\kappa + \Delta\tau$
  - $\vec{\xi}^{\kappa+1} = \vec{\xi}^\kappa + \frac{1}{6} (\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4)$
-



## Κεφάλαιο 4

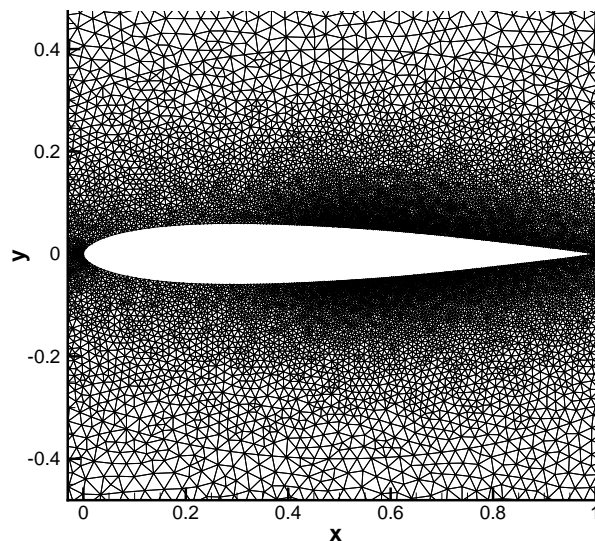
# Αριθμητική επίλυση αεροελαστικών προβλημάτων

Στο κεφάλαιο αυτό παρατίθενται κάποια παραδείγματα που επιλύθηκαν, κατά τη διαδικασία αξιολόγησης του λογισμικού που αναπτύχθηκε. Όλες οι εφαρμογές αφορούν σε μεμονωμένες αεροτομές, στις οποίες το διαμορφούμενο πεδίο ροής γύρω από την αεροτομή επηρεάζεται μόνο από την παρουσία της ίδιας. Η αεροτομή θεωρήθηκε ως στερεό σώμα το οποίο έχει τη δυνατότητα να μετακινείται χωρίς να λαμβάνει παραμορφώσεις, δεχόμενο αεροδυναμικές δυνάμεις και ροπές από το ρεύμα ρευστού στο οποίο είναι εκτεθειμένο. Η κίνηση της αεροτομής περιορίζεται από ένα γραμμικό και ένα στρεπτικό ελατήριο, προσδεδεμένα επ' αυτής.

Στόχος είναι η χρήση των νέων δυνατοτήτων του προϋπάρχοντος λογισμικού το οποίο επεκτάθηκε, για την αριθμητική προσομοίωση της αεροελαστικής απόκρισης διαφόρων αεροτομών και εν τέλει τον προσδιορισμό της περιοχής ευσταθούς λειτουργίας τους. Έτσι, στη συνέχεια (βλ. Κεφάλαιο 5), με βάση αυτά τα δεδομένα θα ακολουθήσει η μελέτη που εστιάζει σε τρόπους διεύρυνσης της περιοχής ευσταθούς λειτουργίας κάθε αεροτομής, με χρήση ενεργητικών μεθόδων ελέγχου ροής. Η δομή του κεφαλαίου έχει ως εξής:

Πρώτα παρουσιάζεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε για την αξιολόγηση των νέων δυνατοτήτων του λογισμικού και τον έλεγχο της ποιότητας των αποτελεσμάτων που υπολογίζει. Στη συνέχεια, διατυπώνονται και επιλύονται κάποια ενδεικτικά προβλήματα αεροελαστικότητας, στα οποία είναι φανερό η ανάγκη χρήσης κάποιας μορφής ελέγχου της ταλαντούμενης αεροτομής, προκειμένου να αποφευχθούν τα αρνητικά φαινόμενα που συνοψίστηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο. Τέλος, γίνεται μια σύγκριση των αποτελεσμάτων που παρήχθησαν με χρήση του CPU-κώδικα, με τα αντίστοιχα που προκύπτουν από τον GPU-κώδικα που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο διδακτορικής διατριβής [36], καθώς επίσης και στο αυξημένο υπολογιστικό κόστος που συνεπάγεται η πρώτη έναντι της δεύτερης μεθόδου. Μάλιστα, επειδή το υπολογιστικό κόστος που συνεπάγεται η χρήση του CPU-κώδικα είναι τεράστιο, αποφασίστηκε να μη γίνει ανάλυση-υπολογισμός της περιοχής ευσταθούς λειτουργίας για μια συγκεκριμένη αεροτομή.

---



Σχήμα 4.1: Η αεροτομή NACA0012 και το μη-δομημένο πλέγμα που κατασκευάστηκε γύρω από αυτή.

#### 4.1 Εξαναγκασμένη περιοδική ταλάντωση αεροτομής - Πιστοποίηση λογισμικού

Σε αυτήν την ενότητα, θα παρουσιαστεί η διαδικασία αξιολόγησης των νέων δυνατοτήτων του λογισμικού, η οποία είναι αναγκαία προκειμένου να διασφαλιστεί η υψηλή ποιότητα των προλέξεων που θα ακολουθήσουν στις επόμενες ενότητες. Έτσι, επιλέχθηκε η συμμετρική αεροτομή NACA0012 (βλ. σχήμα 4.1) και τοποθετήθηκε παράλληλα σε ρεύμα ρευστού, το οποίο σχηματίζει γωνία  $0.016^\circ$  σε σχέση με την οριζόντια διεύθυνση. Η αεροτομή τέθηκε σε εξαναγκασμένη ημιτονοειδή περιστροφική κίνηση πλάτους  $2.51^\circ$ , με άξονα περιστροφής τοποθετημένο στο  $1/4$  της χορδής της. Η ανηγμένη συχνότητα  $k = \frac{\omega c}{2U_\infty}$  της ταλάντωσης είναι ίση με 0.0814 και ο αριθμός Mach της επ' άπειρο ροής είναι 0.755. Στον ορισμό της ανηγμένης συχνότητας,  $\omega$  είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της αεροτομής. Τα χαρακτηριστικά της κίνησης της αεροτομής και οι συνθήκες της επ' άπειρο ροής συνοψίζονται στον πίνακα 4.1. Στη συνέχεια της ενότητας, ως γωνία πρόσπτωσης ορίζεται η σχετική γωνία της επ' άπειρο ροής  $\alpha(t)$  ως προς τη στιγμιαία θέση της αεροτομής.

Τα αποτελέσματα που θα προκύψουν από την επίλυση του παραπάνω προβλήματος, θα συγκριθούν με πειραματικά δεδομένα που προέκυψαν για τις ίδιες ακριβώς συνθήκες, καθώς επίσης και με αποτελέσματα που υπολογίστηκαν από τον αντίστοιχο GPU-κώδικα που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της διδακτορικής διατριβής [36]. Σύμφωνα με τις πειραματικές μετρήσεις, η ροή καθ' όλη τη διάρκεια της ταλάντωσης παραμένει προσκολλημένη επί της αεροτομής, ενώ κύμα κρούσης σχηματίζεται τόσο στην πλευρά της υποπίεσης, όσο και σε αυτήν της υπερπίεσης, σε διαφορετικές φάσεις της ταλάντωσης.

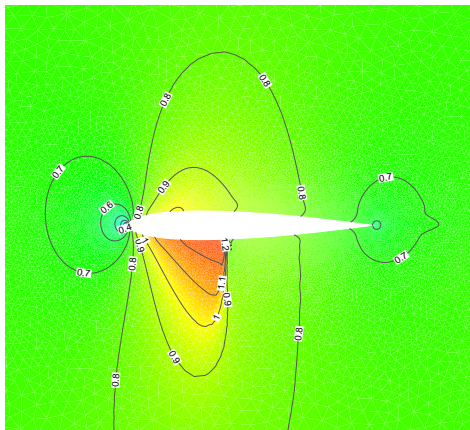
Αν και στοιχεία σχετικά με το υπολογιστικό κόστος θα δοθούν στην ενότητα 4.3,

Αεροτομή	NACA0012
Σχετική γωνία της επ' άπειρο ροής ως προς τη στιγμιαία θέση της αεροτομής	$\alpha(t) = \alpha_m + \alpha_0 \sin(\omega t)$
Γωνία της επ' άπειρο ροής	$\alpha_m = 0.016^\circ$
Πλάτος ταλάντωσης	$\alpha_0 = 2.51^\circ$
Ανηγμένη συχνότητα	$k = \frac{\omega c}{2U_\infty} = 0.0814$
Άξονας περιστροφής	0.25c
Αριθμός <i>Mach</i> της επ' άπειρο ροής	$M_\infty = 0.755$

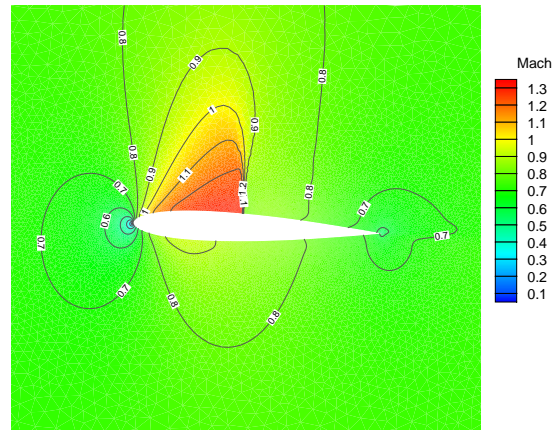
Πίνακας 4.1: Χαρακτηριστικά μεγέθη για την εξαναγκασμένη περιοδική ταλάντωση της αεροτομής.

θα αναφερθεί ότι η επίλυση του προβλήματος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης αεροτομής σε έναν επεξεργαστή (σειριακή εκτέλεση), διαρκεί περίπου 10 ώρες, ωστόσο αυτός ο αριθμός εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την επιθυμητή ακρίβεια της λύσης (ή αλλιώς, σε πόσες προς επίλυση χρονικές στιγμές θα χωριστεί η κάθε πραγματική περίοδος) και από το συνολικό αριθμό των κόμβων και των τριγωνικών στοιχείων του πλέγματος. Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε κατασκευάστηκε με την τεχνική του προελαύνοντος μετώπου και αποτελείται από περίπου 24000 κόμβους και 48000 τριγωνικά στοιχεία.

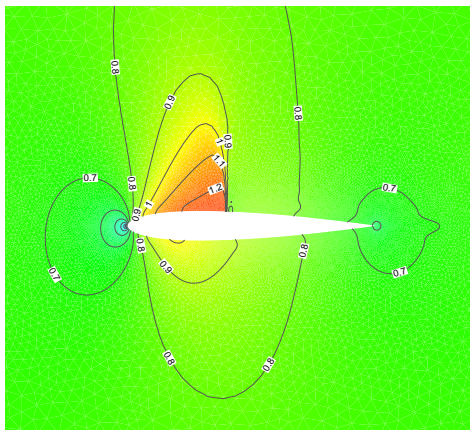
Στο σχήμα 4.2 παρατίθενται τα αποτελέσματα για τα υπολογισθέντα πεδία του αριθμού *Mach* γύρω από την αεροτομή, στις τέσσερις σημαντικότερες φάσεις της ταλάντωσης της. Αυτές είναι (α) η 'μέση' θέση με αυξανόμενη γωνία πρόσπτωσης (σχήμα 4.2(α')), (β) η θέση της μέγιστης θετικής γωνίας πρόσπτωσης (σχήμα 4.2(β')), (γ) η 'μέση' θέση με μειούμενη γωνία πρόσπτωσης (σχήμα 4.2(γ')) και (δ) η θέση της μέγιστης αρνητικής γωνίας πρόσπτωσης (σχήμα 4.2(δ')). Ακόμη, έχουν παρατεθεί τα αποτελέσματα για δύο τυχαίες χρονικές στιγμές, όπως αυτά φαίνονται στα σχήματα 4.2(ε') και 4.2(ς').



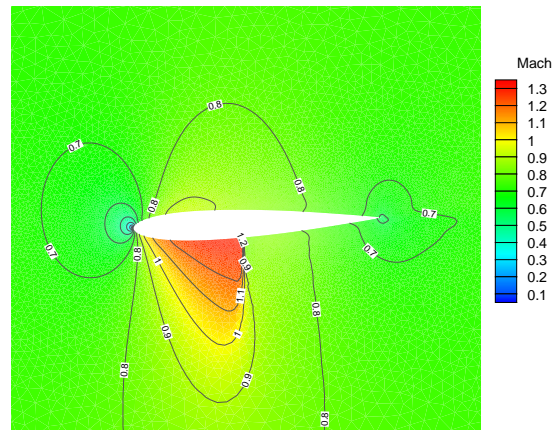
(α) Γωνία πρόσπτωσης ( $\alpha = 0.016^\circ$ ), στη φάση που η γωνία πρόσπτωσης αυξάνεται.



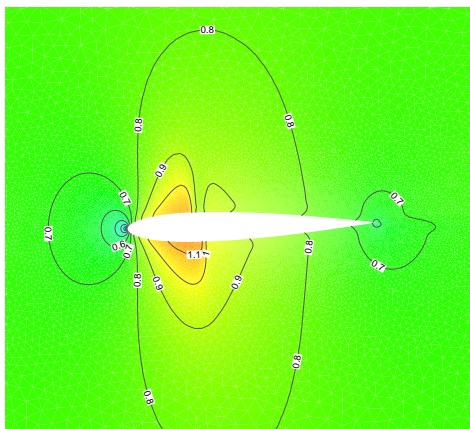
(β) Μέγιστη θετική γωνία πρόσπτωσης ( $\alpha = 0.016^\circ + 2.51^\circ$ ).



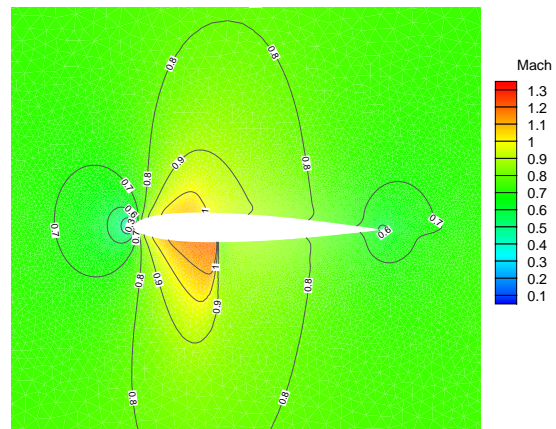
(γ) Γωνία πρόσπτωσης ( $\alpha = 0.016^\circ$ ), στη φάση που η γωνία πρόσπτωσης μειώνεται.



(δ) Μέγιστη αρνητική γωνία πρόσπτωσης ( $\alpha = 0.016^\circ - 2.51^\circ$ ).



(ε) Γωνία πρόσπτωσης  $\alpha = 0.79^\circ$ , στη φάση που η γωνία πρόσπτωσης αυξάνεται.

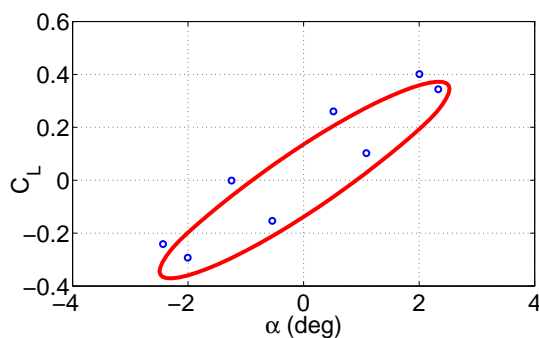


(ς) Γωνία πρόσπτωσης  $\alpha = -0.15^\circ$ , στη φάση που η γωνία πρόσπτωσης μειώνεται.

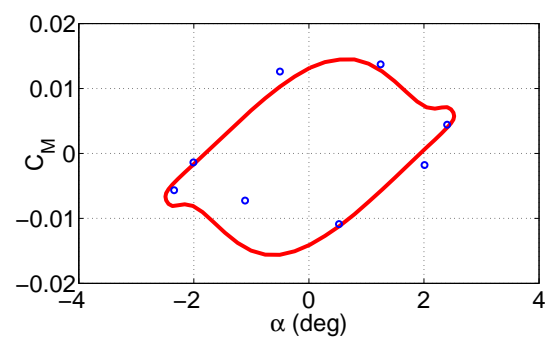
Σχήμα 4.2: Περιοδική κίνηση πρόνευσης αεροτομής NACA0012 ως προς το  $1/4$  της χορδής με  $k = 0.0814$  και  $\alpha_m = 0.016^\circ$ ,  $\alpha_0 = 2.51^\circ$ ,  $M_\infty = 0.755$ . Υπολογισθέντα πεδία του αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή σε έξι διαφορετικές φάσεις της κίνησης.

Στη συνέχεια, στο σχήμα 4.3 παρατίθενται οι τιμές που υπολογίστηκαν για το συντελεστή άνωσης και ροπής, κατά τη διάρκεια ενός κύκλου του φαινομένου. Στο ίδιο σχήμα φαίνονται και οι σχετικές πειραματικές μετρήσεις, που έγιναν υπό τις ίδιες συνθήκες [51]. Πιο αναλυτικά, στο σχήμα 4.3(α') φαίνεται η πρόλεξη του λογισμικού για το συντελεστή άνωσης, ο οποίος λαμβάνει τιμές πολύ κοντά σε αυτές που έχουν μετρηθεί πειραματικά. Παράλληλα, στο σχήμα 4.3(β') φαίνεται η πρόλεξη για το συντελεστή ροπής, ο οποίος είναι σε αρκετά καλή συμφωνία με τις πειραματικές μετρήσεις. Υπενθυμίζεται ότι οι συντελεστές άνωσης ( $C_L$ ) και ροπής ( $C_M$ ), ανά μονάδα βάρους, δίνονται από τις σχέσεις:

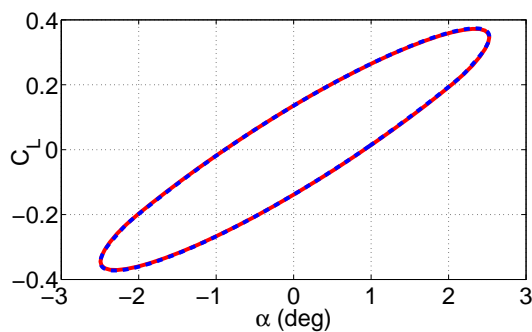
$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c}, \quad C_M = \frac{M_{ea}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c^2} \quad (4.1)$$



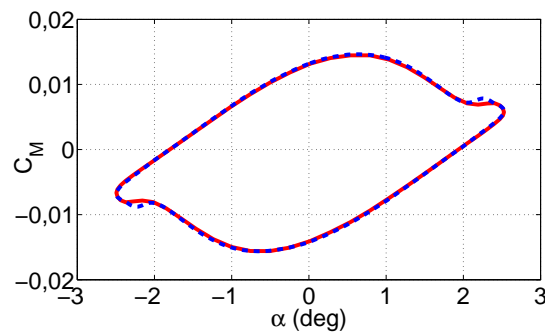
(α') Συντελεστής άνωσης



(β') Συντελεστής ροπής



(γ') Σύγκριση αποτελεσμάτων CPU και GPU κώδικα για το  $C_L$



(δ') Σύγκριση αποτελεσμάτων CPU και GPU κώδικα για το  $C_M$

Σχήμα 4.3: Μεταβολή (α') του συντελεστή άνωσης και (β') του συντελεστή ροπής συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης, όπως προέκυψαν από την αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων Euler (κόκκινη συνεχής γραμμή) και από πειραματικές μετρήσεις (μπλε σημεία) [51]. Επίσης στα σχήματα (γ') και (δ') φαίνονται οι προλέξεις για το συντελεστή άνωσης και το συντελεστή ροπής, αντίστοιχα, υπολογισμένες με τον CPU (κόκκινη συνεχής γραμμή) και τον GPU [36] (μπλε διακεκομμένη γραμμή) επιλύτη.

Ακολούθως, θα συγκριθούν οι τιμές των συντελεστών άνωσης και ροπής σε σχέση με αυτές που υπολογίζονται με χρήση του GPU κώδικα που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της διδακτορικής διατριβής [36], για τις ίδιες συνθήκες ροής. Τα αποτελέσματα παρατίθενται στα σχήματα 4.3(γ') και 4.3(δ'), στα οποία φαίνεται αντίστοιχα ο συντελεστής άνωσης και ο συντελεστής ροπής. Με βάση αυτά τα σχήματα, παρατηρείται μια μικρή διαφορά μεταξύ των προλέξεων των δύο λογισμικών (παρότι βασίζονται στο ίδιο σχήμα διακριτοποίησης και στο ίδιο αριθμητικό σχήμα επίλυσης των διακριτοποιημένων εξισώσεων), κυρίως για το συντελεστή ροπής. Αυτή η απόκλιση οφείλεται στο γεγονός ότι χρησιμοποιούνται διαφορετικές μέθοδοι για την προσαρμογή του πλέγματος, στον CPU και στον GPU επιλύτη. Για λόγους πληρότητας, αναφέρεται ότι στον GPU επιλύτη χρησιμοποιείται η τεχνική (β') που αναφέρθηκε στην ενότητα 3.2.

Συνοψίζοντας, ο CPU κώδικας που αναπτύχθηκε κρίνεται πολύ αξιόπιστος για τα δεδομένα των εφαρμογών που θα μελετηθούν, κατόπιν της σύγκρισης των προλέξεων του τόσο με τις πειραματικές μετρήσεις όσο και με τις προλέξεις του επαρκώς αξιολογημένου GPU επιλύτη. Έτσι, στην επόμενη ενότητα θα γίνει ανάλυση αεροελαστικών προβλημάτων με χρήση του CPU κώδικα και θα αναγνωριστούν μερικές τυπικές μορφές αεροελαστικής απόκρισης.

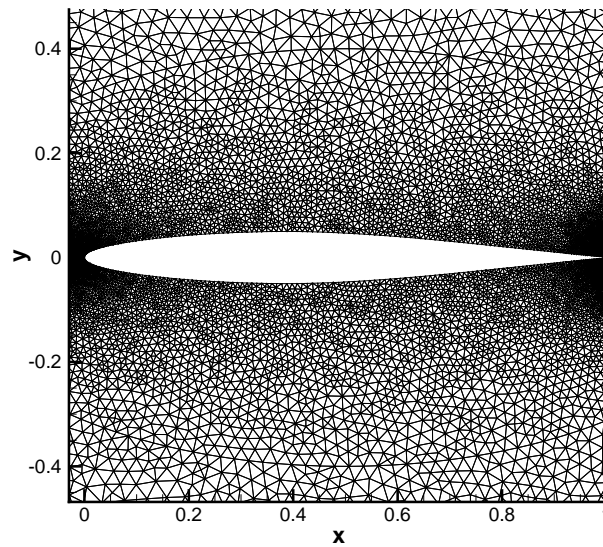
## 4.2 Αεροελαστική ανάλυση αεροτομής δύο βαθμών ελευθερίας

Η αεροτομή που επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί για τις εφαρμογές που θα ακολουθήσουν, είναι η συμμετρική αεροτομή NACA 64A010, η οποία φαίνεται στο σχήμα 4.4, μαζί με το πλέγμα που κατασκευάστηκε γύρω από αυτή. Λόγω της συμμετρίας της αεροτομής, το πλέγμα κατασκευάστηκε υποθέτοντας την ίδια κατανομή κόμβων επί των δύο πλευρών της, χωρίς όμως αυτό να συνεπάγεται και τη συμμετρία του πλέγματος. Ακόμη, η αεροτομή τοποθετήθηκε παράλληλα σε ρεύμα ρευστού το οποίο σχηματίζει μηδενική γωνία σε σχέση με την οριζόντια διεύθυνση. Μελετήθηκαν τρεις περιπτώσεις αεροελαστικής απόκρισης, από τις οποίες η πρώτη μπορεί να χαρακτηριστεί ως ευσταθής, η δεύτερη ως ασταθής, ενώ η τρίτη αποτελεί μια παραμετρική διερεύνηση της προηγούμενης, στην οποία δοκιμάζονται διαφορετικές τιμές για το δείκτη ταχύτητας  $U^*$ , ο οποίος ορίστηκε στη σχέση 3.1. Οι τιμές των παραμέτρων για το ελαστικό μοντέλο συνοψίζονται στον πίνακα 4.2 και ισχύουν για όλες τις υπόλοιπες εφαρμογές αυτού του κεφαλαίου.

### 4.2.1 Περίπτωση 1: Ευσταθής απόκριση

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκε η τυπική μορφή κρίσιμης καμπύλης ελαστικής πτέρυγας (σχήμα 3.2), η οποία αποτελεί ένα χάρτη αναφοράς για την αεροελαστική συμπεριφορά της, όταν υπόκειται σε διαφορετικές συνθήκες ροής. Η περίπτωση που θα μελετηθεί σε αυτή την ενότητα, αντλήθηκε από αυτή την καμπύλη, με τις παραμέτρους της να αντιστοιχούν στην οριακά ευσταθή κατάσταση





Σχήμα 4.4: Η αεροτομή NACA 64A010 και το μη-δομημένο πλέγμα που κατασκευάστηκε γύρω από αυτή.

Αεροτομή	NACA 64A010
Θέση ελαστικού άξονα	$x_{ea} = -0.5$
Κέντρο μάζας της αεροτομής	$X_\alpha = 0.9$
Λόγος φυσικών συχνοτήτων	$\frac{\omega_h}{\omega_\alpha} = 1$
Ακτίνα περιστροφής	$r_\alpha^2 = 3.48$
Λόγος πυκνοτήτων	$\mu = \frac{m}{\pi \rho_\infty b^2} = 60$

Πίνακας 4.2: Χαρακτηριστικά μεγέθη του ελαστικού μοντέλου που χρησιμοποιήθηκε.

που (βάσει του σχήματος 3.2) αντιστοιχεί στο σημείο  $(M_\infty, U^*) = (0.89, 0.5)$ . Στον πίνακα 4.3 συνοψίζονται οι τιμές των βασικών παραμέτρων του προβλήματος. Η

Γωνία της επ' άπειρο ροής	$\alpha_\infty = 0^\circ$
Αριθμός <i>Mach</i> της επ' άπειρο ροής	$M_\infty = 0.89$
Δείκτης ταχύτητας	$U^* = 0.5$

Πίνακας 4.3: Χαρακτηριστικά μεγέθη για την ευσταθή ταλάντωση της αεροτομής.

αεροελαστική απόκριση της αεροτομής φαίνεται στο σχήμα 4.5. Όπως παρατηρείται, το σύστημα αυτό έχει αρκετά μικρή δομική απόσβεση, ωστόσο η ενέργεια που προσδίδεται στην κατασκευή από την εξωτερική ροή καταστρέφεται επαρκώς, οδηγώντας το, μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, στην ηρεμία.

### 4.2.2 Περίπτωση 2: Ασταθής απόκριση

Η εφαρμογή που θα παρουσιαστεί εδώ, χαρακτηρίζεται από την ασταθή αεροελαστική της συμπεριφορά. Επιπλέον, μπορεί να χαρακτηριστεί και ως κατάσταση LCO, αφού ισχύουν όσα αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο για το φαινόμενο LCO. Συγκεκριμένα, το πλάτος της ταλάντωσης βαίνει αυξανόμενο, μέχρις ότου σταθεροποιηθεί σε μια αρκετά μεγάλη τιμή, πολύ μεγαλύτερη από το πλάτος του κρίσιμου πτερυγισμού. Αυτό θα διαπιστωθεί και στη συνέχεια, όταν θα γίνει παραμετρική ανάλυση της επίδρασης του δείκτη ταχύτητας  $U^*$  στην απόκριση της αεροτομής. Στον πίνακα 4.4 συνοψίζονται όλα τα στοιχεία σχετικά με τις τιμές που λαμβάνουν οι παράμετροι του προβλήματος.

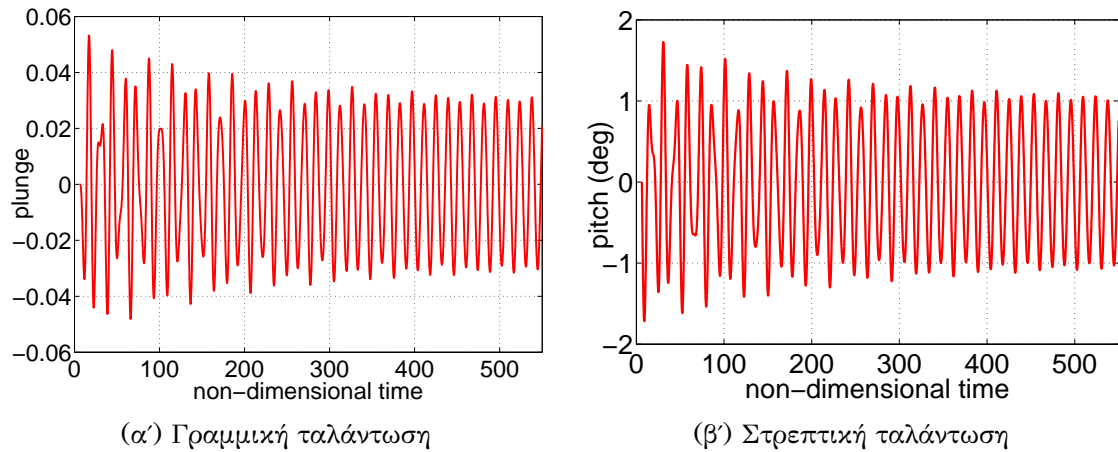
Γωνία της επ' άπειρο ροής	$\alpha_\infty = 0^\circ$
Αριθμός Mach της επ' άπειρο ροής	$M_\infty = 0.75$
Δείκτης ταχύτητας	$U^* = 1.0$

Πίνακας 4.4: Χαρακτηριστικά μεγέθη για την ασταθή ταλάντωση της αεροτομής.

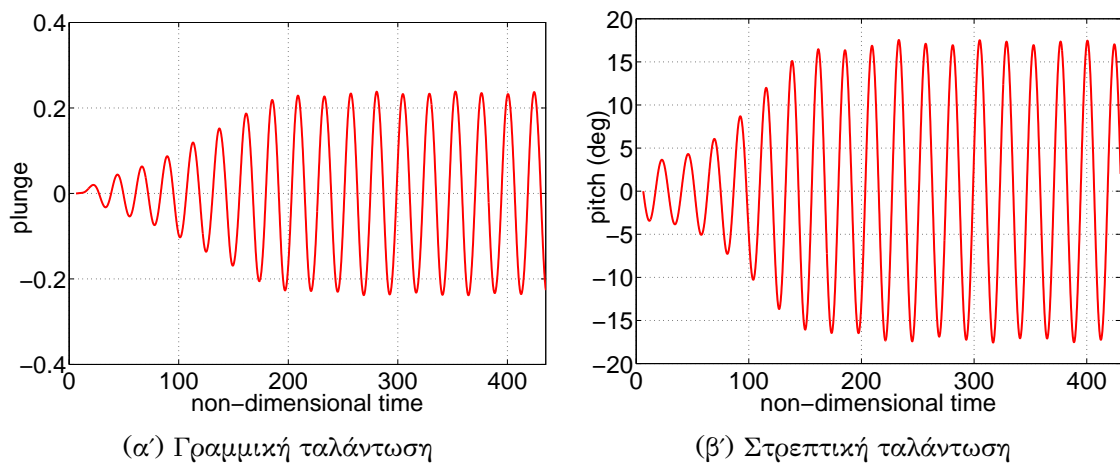
Η αεροελαστική απόκριση της αεροτομής φαίνεται στο σχήμα 4.6. Όπως παρατηρείται, το σύστημα αυτό οδηγεί σε συνεχή αύξηση του πλάτους ταλάντωσης της αεροτομής, μέχρι το σημείο στο οποίο σταθεροποιείται. Έτσι, ενώ αρχικά η προσφερόμενη ενέργεια από την εξωτερική ροή υπερέβαινε αυτή που η κατασκευή ήταν σε θέση να καταστρέψει, μετά από λίγες περιόδους παρατηρείται μια εξισορρόπηση μεταξύ των δύο αυτών μηχανισμών. Αυτός είναι και ο λόγος που το πλάτος της ταλάντωσης διατηρείται σταθερό κατά το φαινόμενο LCO.

### 4.2.3 Περίπτωση 3: Παραμετρική διερεύνηση

Έχουν ήδη παρουσιαστεί δύο τυπικές περιπτώσεις αεροελαστικής συμπεριφοράς αεροτομής, δύο βαθμών ελευθερίας. Είναι λοιπόν σκόπιμο να γίνει μια παραμετρική διερεύνηση σχετικά με τον τρόπο κατά τον οποίο ο δείκτης ταχύτητας (βλ. σχέση 3.1) επηρεάζει την απόκριση της αεροτομής, όταν οι συνθήκες της εξωτερικής ροής παραμένουν αμετάβλητες. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο δείκτης ταχύτητας  $U^*$  εκφράζει τα δομικά-ελαστικά χαρακτηριστικά της αεροτομής, δηλαδή την απόκρισή της για σταθερές συνθήκες εξωτερικής ροής. Με βάση την κρίσιμη καμπύλη του σχήματος 3.2, παρατηρείται ότι αυξάνοντας την ανηγμένη ταχύτητα ροής (δείκτης ταχύτητας  $U^*$ ) και διατηρώντας παράλληλα σταθερό τον αριθμό Mach, η αεροτομή εισέρχεται στην περιοχή ασταθούς λειτουργίας. Πρακτικά, αύξηση της ανηγμένης ταχύτητας ροής με σταθερό αριθμό Mach, συνεπάγεται ελάττωση της ποσότητας αδιαστατοποίησης της ταχύτητας της επ' άπειρο ροής ( $b\omega_\alpha\sqrt{\mu}$ ). Επειδή για μια συγκεκριμένη εφαρμογή ο λόγος πυκνοτήτων υλικού κατασκευής της αεροτομής προς ρευστού είναι σταθερός ( $\mu = 60$ ), ελάττωση του όρου  $b\omega_\alpha\sqrt{\mu}$  συνεπάγεται μείωση της φυσικής συχνότητας  $\omega_\alpha$  της αεροτομής. Η σταθερά ελατηρίου ( $K_\alpha$ ) συνδέεται με τη φυσική συχνότητα  $\omega_\alpha$  μέσω της σχέσης:  $K_\alpha = I_{e\alpha}\omega_\alpha^2$ . Συνεπώς, η μείωση του



Σχήμα 4.5: Ευσταθής αεροελαστική απόκριση της αεροτομής NACA 64A010: (α') η γραμμική ταλαντωτική κίνηση, (β') η στρεπτική ταλαντωτική κίνηση. Οι αρχικές συνθήκες των υπολογισμών είναι:  $\dot{\alpha} = -1$ ,  $\dot{h} = 0$ .



Σχήμα 4.6: Ασταθής αεροελαστική απόκριση της αεροτομής NACA 64A010: (α') η γραμμική ταλαντωτική κίνηση, (β') η στρεπτική ταλαντωτική κίνηση. Οι αρχικές συνθήκες των υπολογισμών είναι:  $\dot{\alpha} = -1$ ,  $\dot{h} = 0$ .

$\omega_\alpha$  συνεπάγεται τη μείωση του  $K_\alpha$  αλλά και του  $K_h$ , μιας και οι δύο φυσικές συχνότητες συνδέονται, στην παρούσα εφαρμογή  $\frac{\omega_h}{\omega_\alpha} = 1$ , και ισχύει  $K_h = m\omega_h^2$ . Τελικά αύξηση του δείκτη ταχύτητας για σταθερό αριθμό Mach οδηγεί σε μείωση των σταθερών δυσκαμψίας της αεροτομής, καθιστώντας την κατασκευή πιο ‘εύκαμπτη’ και επιρρεπή στην αεροδυναμική φόρτιση.

Το συμπέρασμα αυτό επαληθεύεται από τις εφαρμογές που παρατίθενται παρακάτω, στις οποίες επιχειρήθηκε η αύξηση του δείκτη ταχύτητας διαδοχικά, όπως φαίνεται στον πίνακα 4.5.

<b>Εφαρμογή 1</b>	
Γωνία της επ’ άπειρο ροής	$\alpha_\infty = 0^\circ$
Αριθμός Mach της επ’ άπειρο ροής	$M_\infty = 0.75$
Δείκτης ταχύτητας	$U^* = 0.80$
<b>Εφαρμογή 2</b>	
Γωνία της επ’ άπειρο ροής	$\alpha_\infty = 0^\circ$
Αριθμός Mach της επ’ άπειρο ροής	$M_\infty = 0.75$
Δείκτης ταχύτητας	$U^* = 0.90$
<b>Εφαρμογή 3</b>	
Γωνία της επ’ άπειρο ροής	$\alpha_\infty = 0^\circ$
Αριθμός Mach της επ’ άπειρο ροής	$M_\infty = 0.75$
Δείκτης ταχύτητας	$U^* = 0.95$

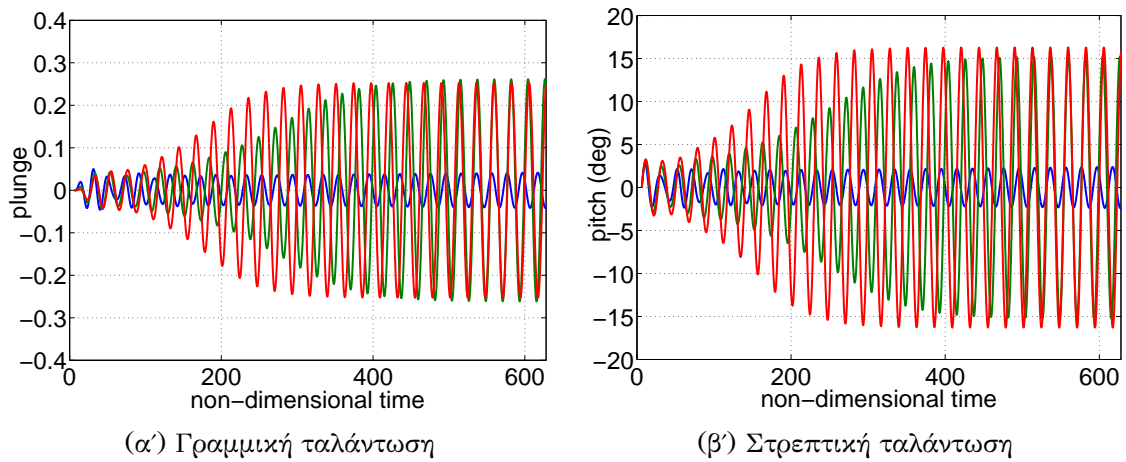
Πίνακας 4.5: Χαρακτηριστικά μεγέθη για κάθε μια εφαρμογή.

Η αεροελαστική απόκριση της αεροτομής για τις τρεις αυτές εφαρμογές, φαίνεται στο σχήμα 4.7. Όπως παρατηρείται, η εφαρμογή 1, για την οποία ισχύει ότι  $U^* = 0.80$ , αποτελεί περίπτωση ουδέτερης ευστάθειας, καθώς το πλάτος της ταλάντωσης παραμένει σταθερό με το χρόνο. Αύξηση του δείκτη ταχύτητας σε  $U^* = 0.90$  (εφαρμογή 2), οδηγεί σε μείωση των σταθερών δυσκαμψίας των ελατηρίων, όπως αποτυπώνεται και από την καμπύλη απόκρισης, η οποία χαρακτηρίζεται ως ασταθής. Τέλος, περαιτέρω αύξηση του δείκτη ταχύτητας σε  $U^* = 0.95$  (εφαρμογή 3), εντείνει την ασταθή συμπεριφορά της αεροτομής. Στην περίπτωση που τεθεί  $U^* = 1.0$ , η απόκριση της αεροτομής μεταβαίνει σε LCO, όπως περιγράφηκε στην ενότητα 4.2.2.

### 4.3 Σύγκριση ποιότητας αποτελεσμάτων CPU-GPU και υπολογιστικό κόστος

Στόχος αυτής της ενότητας είναι η σύγκριση της ποιότητας των αποτελεσμάτων που παρήχθησαν με το CPU-κώδικα, με αντίστοιχα αποτελέσματα του GPU-κώδικα. Παράλληλα, θα γίνει αναφορά στο υπολογιστικό κόστος που εμπλέκεται στους υπολογισμούς για κάθε μία μέθοδο και θα αναφερθούν τα σχετικά συμπεράσματα.

### 4.3 Σύγκριση ποιότητας αποτελεσμάτων CPU-GPU & υπολογιστικό κόστος 89



Σχήμα 4.7: Παραμετρική διερεύνηση της επίδρασης του δείκτη ταχύτητας στην απόκριση της αεροτομής NACA 64A010: (α) η γραμμική ταλαντωτική κίνηση, (β) η στρεπτική ταλαντωτική κίνηση. Με σκούρο/μπλε χρώμα σχεδιάστηκε η απόκριση που αντιστοιχεί στην εφαρμογή 1, με ανοικτό/πράσινο χρώμα σχεδιάστηκε η απόκριση που αντιστοιχεί στην εφαρμογή 2 και με έντονο/κόκκινο χρώμα η απόκριση για την εφαρμογή 3. Οι αρχικές συνθήκες των υπολογισμών είναι:  $\dot{\alpha} = +1$ ,  $\dot{h} = 0$ .

#### Αεροτομή NACA 4415

Ο πρώτος έλεγχος της ποιότητας των αποτελεσμάτων που δίνουν οι δύο κώδικες θα γίνει για την αεροτομή NACA 4415, με το υπολογιστικό χωρίο να είναι αρκετά αραιό και να αποτελείται από 2641 κόμβους και 5161 τριγωνικά στοιχεία. Όλα τα χαρακτηριστικά του ελαστικού μοντέλου έχουν ήδη σημειωθεί στον πίνακα 4.2, ενώ οι βασικές παράμετροι του προβλήματος συνοψίζονται στον πίνακα 4.6.

Αεροτομή	<b>NACA 4415</b>
Γωνία της επ' άπειρο ροής	$\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$
Αριθμός <i>Mach</i> της επ' άπειρο ροής	$M_{\infty} = 0.89$
Δείκτης ταχύτητας	$U^* = 0.5$

Πίνακας 4.6: Χαρακτηριστικά μεγέθη του αεροελαστικού προβλήματος.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο επιλυτών φαίνεται στο σχήμα 4.8, όπου επαληθεύεται ότι τα αποτελέσματα των δύο επιλυτών είναι παρόμοια. Στην ενότητα 4.1 παρουσιάστηκε η διαδικασία πιστοποίησης του CPU-κώδικα, κατά την οποία διαπιστώθηκε μια μικρή απόκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων των CPU και GPU κωδίκων. Η απόκλιση αυτή αποδόθηκε σε συγκεκριμένους παράγοντες, επομένως είναι αναμενόμενο ότι και στις αεροελαστικές εφαρμογές, οι δύο κώδικες θα παράγουν ελαφρώς διαφορετικά αποτελέσματα.

### Αεροτομή NACA 64A010

Ο έλεγχος της ποιότητας των αποτελεσμάτων μεταξύ των δύο κωδίκων, θα γίνει και για την περίπτωση της αεροτομής NACA 64A010, έτσι ώστε να εξασφαλιστεί ότι η συμφωνία τους είναι καθολική και δεν εξαρτάται από την αεροτομή, το πλέγμα ή τις συνθήκες ροής. Ακόμη, ο δεύτερος αυτός έλεγχος έχει και μια επιπλέον αξία, αφού αφορά στην ασταθή αεροελαστική απόκριση που υπολογίστηκε στην ενότητα 4.2.2. Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε είναι αρκετά πυκνότερο και αποτελείται από 24533 κόμβους και 48665 τριγωνικά στοιχεία, ενώ οι βασικές παράμετροι του προβλήματος συνοψίζονται στον πίνακα 4.7.

Αεροτομή	NACA 64A010
Γωνία της επ' άπειρο ροής	$\alpha_\infty = 0^\circ$
Αριθμός <i>Mach</i> της επ' άπειρο ροής	$M_\infty = 0.75$
Δείκτης ταχύτητας	$U^* = 1.0$

Πίνακας 4.7: Χαρακτηριστικά μεγέθη του αεροελαστικού προβλήματος.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο επιλυτών φαίνεται στο σχήμα 4.9. Από το σχήμα αυτό, επιβεβαιώνεται η καλή συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων του CPU και του GPU κώδικα. Οι αποκλίσεις που παρατηρούνται, κυρίως για τη γραμμική ταλάντωση, είναι αναμενόμενες και οφείλονται στις διαφορετικές τιμές που υπολογίζονται για τα αεροδυναμικά φορτία, μεταξύ των δύο κωδίκων.

### Υπολογιστικό κόστος και συμπεράσματα

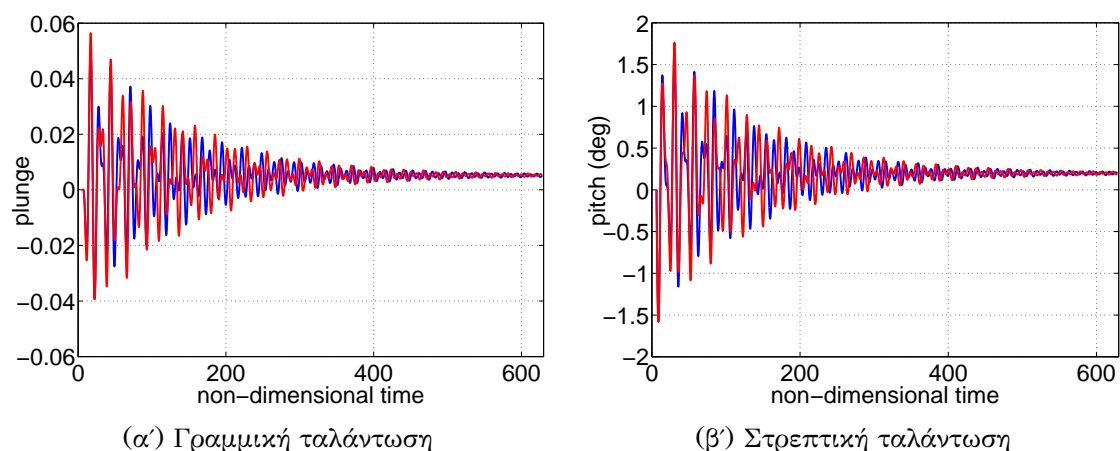
Στο σημείο αυτό, θα αναφερθούν στοιχεία σχετικά με το υπολογιστικό κόστος που διέπει τις παραπάνω αναλύσεις. Είναι γεγονός ότι η επίλυση προβλημάτων αεροδυναμικής σε επεξεργαστές καρτών γραφικών, αυξάνει κατά πολύ την ταχύτητα των υπολογισμών, μειώνοντας το συνολικό χρόνο εκτέλεσης. Στην εργασία [36], αναφέρεται χαρακτηριστικά ότι η επιτάχυνση από τη χρήση μιας GPU αντί ενός πυρήνα μιας σύγχρονης CPU, φτάνει έως και 40x. Στον πίνακα 4.8 συνοψίζονται στοιχεία σχετικά με το υπολογιστικό κόστος που διέπει μια ανάλυση όπως αυτή που παρουσιάστηκε στην ενότητα 4.2.2.

Αεροτομή	NACA 64A010
Πλέγμα	24533 κόμβοι/48665 στοιχεία
Χρόνος CPU (ώρες)	~137
Χρόνος GPU (ώρες)	~6
Επιτάχυνση	~23x

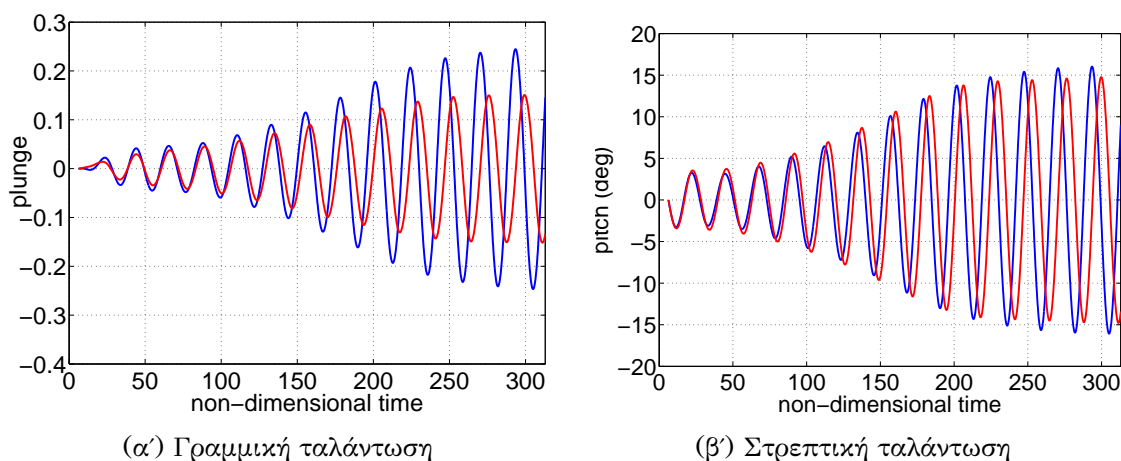
Πίνακας 4.8: Υπολογιστικό κόστος επίλυσης αεροελαστικών προβλημάτων σε CPU και GPU.

Όπως φαίνεται από τον πίνακα αυτό, η χρήση των CPUs για την επίλυση αντίστοιχων προβλημάτων είναι ασύμφορη, καθώς το υπολογιστικό κόστος που τη συ-

### 4.3 Σύγκριση ποιότητας αποτελεσμάτων CPU-GPU & υπολογιστικό κόστος 91



Σχήμα 4.8: Ευσταθής αεροελαστική απόκριση της αεροτομής NACA 4415: (α') η γραμμική ταλαντωτική κίνηση, (β') η στρεπτική ταλαντωτική κίνηση. Με σκούρο/μπλε χρώμα σχεδιάστηκε η πρόλεξη του CPU-κώδικα, ενώ με έντονο/κόκκινο χρώμα σχεδιάστηκε η πρόλεξη του GPU-κώδικα. Οι αρχικές συνθήκες των υπολογισμών είναι:  $\dot{\alpha} = -1$ ,  $\dot{h} = 0$ .



Σχήμα 4.9: Ευσταθής αεροελαστική απόκριση της αεροτομής NACA 64A010: (α') η γραμμική ταλαντωτική κίνηση, (β') η στρεπτική ταλαντωτική κίνηση. Με σκούρο/μπλε χρώμα σχεδιάστηκε η πρόλεξη του CPU-κώδικα, ενώ με έντονο/κόκκινο χρώμα σχεδιάστηκε η πρόλεξη του GPU-κώδικα. Οι αρχικές συνθήκες των υπολογισμών είναι:  $\dot{\alpha} = -1$ ,  $\dot{h} = 0$ .

νοδεύει είναι απαγορευτικό<sup>1</sup>. Για το λόγο αυτό, για τις αερο-σερβο-ελαστικές εφαρμογές που θα αναλυθούν στο επόμενο κεφάλαιο, αποφασίστηκε να χρησιμοποιηθεί ο GPU κώδικας, ο οποίος προϋπήρχε. Έγιναν δε μικρές τροποποιήσεις σε αυτόν, οι οποίες υπαγορεύονται από την χρήση δεσμών ρευστού επί της αεροτομής, όπως θα αναφερθεί και στη σχετική ενότητα.

---

<sup>1</sup>Ωστόσο, πρέπει επίσης να υπολογιστεί και να ληφθεί υπόψη ο χρόνος που απαιτείται ώστε να προγραμματιστεί ένας GPU επιλύτης.

---



# Κεφάλαιο 5

## Έλεγχος ροής

Στο κεφάλαιο αυτό συνοψίζεται το πρωτότυπο έργο της εργασίας, δηλαδή η χρήση μεθόδων ενεργητικού ελέγχου ροής για την απόσβεση των αυτοδιεγειρόμενων ταλαντώσεων αεροτομής, δύο βαθμών ελευθερίας. Αρχικά, γίνεται μια εισαγωγική αναφορά σε ελεγκτές, η οποία συνοδεύεται από εφαρμογές που προέρχονται από το πεδίο της αεροδυναμικής/αεροελαστικότητας. Στη συνέχεια, διατυπώνεται το πρόβλημα επιλογής/καθορισμού των παραμέτρων ενός ελεγκτή ως ένα τυπικό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Τέλος, παρουσιάζεται αναλυτικά ο τρόπος με τον οποίο ενσωματώθηκε μια απλή δομή ελέγχου στο χρησιμοποιούμενο λογισμικό και παρατίθενται τα προβλήματα που επιλύθηκαν.

### 5.1 Ελεγκτές και εφαρμογές [52]

#### 5.1.1 Γενικά

Στην επιστήμη του αυτομάτου ελέγχου, ως ελεγκτής ορίζεται μια συσκευή (ολοκληρωμένο κύκλωμα ή υπολογιστής) που παρακολουθεί και δύναται να μεταβάλλει τις συνθήκες λειτουργίας ενός δυναμικού συστήματος. Το σύστημα ενδέχεται να έχει μία είσοδο και μία έξοδο ώστε να απαιτεί μόνο έναν ελεγκτή για τη λειτουργία του, ή πολλαπλές ανεξάρτητες εισόδους και εξόδους, οπότε για τον έλεγχό του απαιτούνται ελεγκτές περισσότεροι του ενός. Για παράδειγμα, το σύστημα που φαίνεται στο σχήμα 5.1 αποτελείται από μία είσοδο και μία έξοδο.



Σχήμα 5.1: Δομικό διάγραμμα συστήματος ανοικτού βρόχου, με  $F$  τη συνάρτηση μεταφοράς της εγκατάστασης.

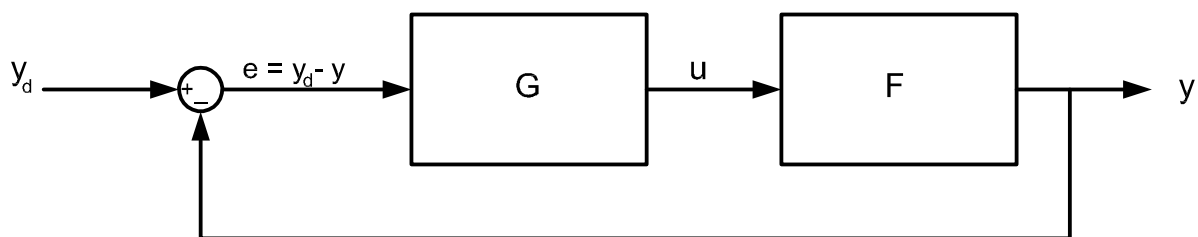
---

Η δυναμική συμπεριφορά της εγκατάστασης εκφράζεται μέσω της συνάρτησης μεταφοράς  $F$ , η οποία συσχετίζει τη μεταβλητή εισόδου,  $u$ , με τη μεταβλητή εξόδου,  $y$ . Κατ' αυτόν τον τρόπο, η μεταβλητή εξόδου,  $y$ , λαμβάνει συνεχώς τιμές που καθορίζονται με βάση το νόμο:

$$y = F(u) \quad (5.1)$$

Το παραπάνω σύστημα είναι ένα σύστημα ανοικτού βρόχου, υπό την έννοια ότι η μεταβλητή εισόδου στο σύστημα καθορίζεται ανεξάρτητα από τη μεταβλητή εξόδου. Το σύστημα δεν λαμβάνει πληροφορίες σχετικές με τη συμπεριφορά της υπό-έλεγχου εγκατάστασης, επομένως δεν είναι σε θέση να ελαχιστοποιήσει την απόκλιση μεταξύ της επιθυμητής και της πραγματικής της απόκρισης, αλλά ούτε και να εξαλείψει τυχόν διαταραχές κατά τη μόνιμη λειτουργία. Προϋπόθεση για τη χρήση συστημάτων ανοικτού βρόχου, είναι η πλήρης γνώση της συμπεριφοράς της εγκατάστασης, αλλά και η υπόθεση ότι δεν προκύπτουν διαταραχές κατά τη λειτουργία της.

Στην περίπτωση που η μεταβλητή εισόδου καθορίζεται με βάση την πραγματική απόκριση του συστήματος, δηλαδή υπάρχει ανάδραση της μεταβλητής (ή των μεταβλητών) εξόδου στην είσοδο, τότε το σύστημα χαρακτηρίζεται ως σύστημα κλειστού βρόχου. Ένα τέτοιο σύστημα φαίνεται στο σχήμα 5.2, όπου εκτός από την υπό-έλεγχου εγκατάσταση, υπάρχει ο ελεγκτής, ο οποίος καθορίζει την τιμή της μεταβλητής εισόδου,  $u$ . Ο τρόπος με τον οποίο καθορίζεται η τιμή της μεταβλητής  $u$  εξαρτάται από τον τύπο του ελεγκτή, επηρεάζεται δε από τη διαφορά μεταξύ της επιθυμητής ( $y_d$ ) και της πραγματικής ( $y$ ) απόκρισης της εγκατάστασης. Τελικός στόχος του ελεγκτή είναι να επαναφέρει το σύστημα στο επιθυμητό σημείο λειτουργίας,  $y_d$ .<sup>1</sup>



Σχήμα 5.2: Δομικό διάγραμμα συστήματος κλειστού βρόχου, με  $F$  τη συνάρτηση μεταφοράς της εγκατάστασης και  $G$  αυτήν του ελεγκτή.

Ο έλεγχος κλειστού βρόχου μπορεί να επιτευχθεί με δύο τρόπους:

<sup>1</sup>Με  $u$  συμβολίστηκε η μεταβλητή εισόδου και με  $y$  η μεταβλητή εξόδου. Η μεταβλητή εισόδου καθορίζει την επίδραση του εξωτερικού περιβάλλοντος επί του συστήματος και ονομάζεται μεταβλητή ρύθμισης ή ελέγχου, εφ' όσον καθορίζεται από το χειριστή (σχήμα 5.1) ή από κάποιο νόμο ελέγχου, μέσω ενός ελεγκτή (σχήμα 5.2). Σε αντίθετη περίπτωση, ονομάζεται διαταραχή, με την τιμή της να καθορίζεται από τυχαίους παράγοντες. Η μεταβλητή εξόδου αποτελεί το μέτρο της επίδρασης του συστήματος στο περιβάλλον και, συνήθως, χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση της συμπεριφοράς του συστήματος.

- Με ρύθμιση ανάδρασης (feedback): σε αυτή την περίπτωση η μεταβλητή εισόδου στον ελεγκτή είναι της ίδιας φύσης με τη μεταβλητή εξόδου, δηλαδή η μεταβλητή εξόδου ανατροφοδοτείται στην είσοδο του συστήματος (σχήμα 5.2). Καθ' αυτό τον τρόπο, ο ελεγκτής επιδρά στο σύστημα μόνο όταν η απόκριση του τελευταίου διαφοροποιηθεί από την επιθυμητή, επομένως ο έλεγχος μέσω βρόχου ανάδρασης επιτρέπει κατά διαστήματα τη λειτουργία της εγκατάστασης εκτός των επιθυμητών ορίων. Από την άλλη, δεν είναι απαραίτητη η γνώση των διαταραχών που θα επηρεάσουν το σύστημα, αλλά ούτε και του τρόπου με τον οποίο θα το επηρεάσουν.
- Με ρύθμιση πρόδρασης (feed-forward): αυτή η μέθοδος αντιμετωπίζει αποτελεσματικά τη χρονική υστέρηση που παρατηρείται κατά τον έλεγχο μέσω βρόχου ανάδρασης. Συγκεκριμένα, οι διαταραχές που ενδέχεται να προκαλέσουν μεταβολή του σημείου λειτουργίας του συστήματος, αντιμετωπίζονται πριν να επιδράσουν στο ίδιο το σύστημα. Αυτό απαιτεί την ακριβή πρόβλεψη της επίδρασης που πρόκειται να έχουν οι διαταραχές στη συμπεριφορά του συστήματος, καθώς επίσης και την πλήρη γνώση όλων των διαταραχών που θα επηρεάσουν το σύστημα.

Στην πράξη, προκειμένου να συνδυαστούν τα οφέλη κάθε τρόπου από τους παραπάνω, μπορούν να γίνουν συνδυασμοί μεταξύ αυτών. Ωστόσο, στο πλαίσιο αυτής της εργασίας, θα εφαρμοστεί έλεγχος μέσω βρόχου ανάδρασης και μόνο. Στην επόμενη ενότητα θα αναφερθούν οι τύποι ελεγκτών που χρησιμοποιούνται συνηθέστερα.

### 5.1.2 Τύποι κλασικών ελεγκτών

Όπως αναφέρθηκε ήδη, ο ελεγκτής είναι το στοιχείο που ρυθμίζει την τιμή της μεταβλητής (ή των μεταβλητών) εισόδου σε ένα δυναμικό σύστημα. Αυτό γίνεται βάσει ενός νόμου ελέγχου, ο οποίος καθορίζεται από τον τύπο του ελεγκτή, προσδίδοντας στον τελευταίο κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, τα οποία τον καθιστούν κατάλληλο ή ακατάλληλο για μία συγκεκριμένη εφαρμογή. Οι κλασικοί τύποι ελεγκτών παρουσιάζονται στη συνέχεια της ενότητας.

#### Αναλογικός Ελεγκτής (P)

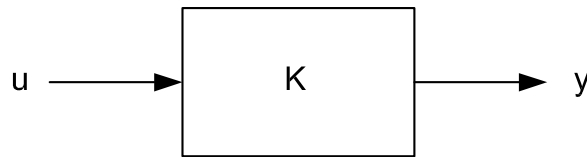
Σε αυτό τον τύπο ελεγκτή, η δράση ελέγχου,  $u(t)$ , είναι ανάλογη της απόκλισης μεταξύ της επιθυμητής,  $y_d(t)$ , και της πραγματικής,  $y(t)$ , απόκρισης. Ο νόμος ελέγχου έχει δηλαδή τη μορφή:

$$u(t) = K e(t), \quad e(t) = y_d(t) - y(t) \quad (5.2)$$

Έτσι, η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή είναι:

$$G(s) = K = \text{constant} \quad (5.3)$$

Ο αναλογικός ελεγκτής είναι ένας κατευθυντής με προσαρμοζόμενο κέρδος  $K$ . Αύξηση του κέρδους οδηγεί σε μείωση της ευαισθησίας του ελεγκτή ως προς τις διαταραχές αλλά παράλληλα ελαττώνει το βαθμό ευστάθειας του συστήματος. Για το λόγο αυτό, το κέρδος μπορεί να λαμβάνει τιμές από ένα αυστηρά καθορισμένο εύρος. Σημαντικοί περιορισμοί που συνοδεύουν τη χρήση του αναλογικού ελεγκτή, είναι η αδυναμία αυθαίρετης τοποθέτησης των πόλων του συστήματος επί του γεωμετρικού τόπου των ριζών του, ενώ επίσης, μη-διαθέτοντας ελεύθερο ολοκληρωτή στη συνάρτηση μεταφοράς του, ο ελεγκτής αδυνατεί να μηδενίσει το σφάλμα μόνιμης κατάστασης του συστήματος. Ο αναλογικός ελεγκτής αναφέρεται και ως



Σχήμα 5.3: Δομικό διάγραμμα ελεγκτή αναλογικού τύπου.

ελεγκτής μηδενικής τάξης ή απλά ως κέρδος.

### Ολοκληρωτικός Ελεγκτής (I)

Σε αυτό τον τύπο ελεγκτή, η δράση ελέγχου,  $u(t)$ , καθορίζεται συνυπολογίζοντας τις επιδόσεις του συστήματος στις προγενέστερες χρονικές στιγμές. Έτσι, η ύπαρξη ενός ελεύθερου ολοκληρωτή στη συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή οδηγεί το σφάλμα μόνιμης κατάστασης στο μηδέν, καθώς η ολοκλήρωση που επιτελεί ο ελεγκτής και η ακόλουθη δράση του σήματος  $u(t)$  στην έξοδο  $y(t)$  συνεχίζεται μέχρι η τιμή της εξόδου να φθάσει πολύ κοντά στην τιμή αναφοράς  $y_d(t)$ . Από την άλλη, ο ελεύθερος ολοκληρωτής αυξάνει την τάξη του συστήματος, μειώνοντας έτσι το βαθμό ευστάθειάς του. Το γεγονός αυτό έχει αρνητικό αντίκτυπο στη μεταβατική απόκριση του συστήματος, το οποίο πλέον εμφανίζει αυξημένους χρόνους ανύψωσης και ποσοστιαία υπερακόντιση. Για το λόγο αυτό, δεν πρέπει να χρησιμοποιούνται ολοκληρωτικοί κατευθυντές παρά μόνο στην περίπτωση που είναι απαραίτητο. Ο νόμος ελέγχου έχει τη μορφή:

$$u(t) = K \int_0^t e(t) dt, \quad e(t) = y_d(t) - y(t) \quad (5.4)$$

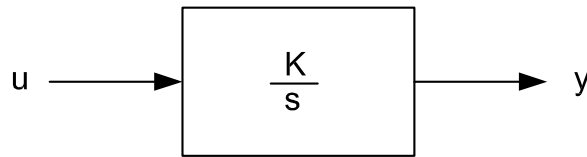
Έτσι, η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή είναι:

$$G(s) = \frac{K}{s} \quad (5.5)$$

όπου  $K$  το προσαρμοζόμενο κέρδος.

Συνήθως ο ολοκληρωτικός ελεγκτής συνδυάζεται με έναν αναλογικό, οπότε προκύπτει ο αναλογικός-ολοκληρωτικός ελεγκτής (PI) με νόμο ελέγχου:

$$u(t) = K e(t) + \frac{K}{T_i} \int_0^t e(t) dt, \quad e(t) = y_d(t) - y(t) \quad (5.6)$$



Σχήμα 5.4: Δομικό διάγραμμα ελεγκτή ολοκληρωτικού τύπου.

Έτσι, η συνάρτηση μεταφοράς του νέου ελεγκτή είναι:

$$G(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (5.7)$$

όπου  $K$  το αναλογικό κέρδος και  $T_i$  η σταθερά ολοκλήρωσης, οι οποίες μπορούν να προσαρμόζονται στις επιθυμητές τιμές.

### Διαφορικός Ελεγκτής (D)

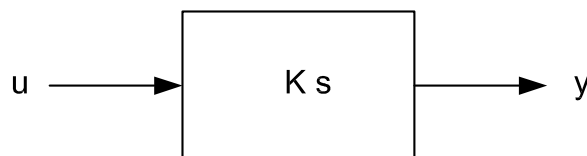
Σε αυτό τον τύπο ελεγκτή, η δράση ελέγχου,  $u(t)$ , καθορίζεται με βάση την τιμή της παραγώγου του σήματος σφάλματος. Με τον τρόπο αυτό, λαμβάνεται υπόψη η μελλοντική τάση του συστήματος και το σήμα ελέγχου υπολογίζεται έτσι ώστε να αντισταθμιστούν τα σφάλματα που θα προκύψουν. Ωστόσο, απαιτείται προσοχή καθώς στην περίπτωση εμφάνισης ακόμα και του πλέον υψίσυχνου θορύβου, οι παράγωγοι που υπολογίζονται είναι πολύ μεγάλες. Αυτή η συμπεριφορά οδηγεί σε ενίσχυση του θορύβου, πράγμα που είναι ανεπιθύμητο. Επίσης, στην περίπτωση που το σφάλμα σταθεροποιηθεί σε μη-μηδενική τιμή, τότε το σήμα ελέγχου μηδενίζεται, απενεργοποιώντας το ελεγχόμενο σύστημα. Ο νόμος ελέγχου που περιγράφει έναν τέτοιο ελεγκτή, είναι:

$$u(t) = K T_d \frac{d[e(t)]}{dt}, \quad e(t) = y_d(t) - y(t) \quad (5.8)$$

Έτσι, η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή είναι:

$$G(s) = K s \quad (5.9)$$

όπου  $K$  το προσαρμοζόμενο κέρδος.



Σχήμα 5.5: Δομικό διάγραμμα ελεγκτή διαφορικού τύπου.

Ο διαφορικός ελεγκτής συνήθως χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με άλλους ελεγκτές, προκειμένου να αυξηθεί η απόσβεση του συστήματος και να προσδοθούν σε

αυτό χαρακτηριστικά ‘προβλεπτικού ελέγχου’. Ένας συνήθης συνδυασμός, είναι ο αναλογικός-διαφορικός ελεγκτής (PD), ο οποίος περιγράφεται από το νόμο ελέγχου:

$$u(t) = K e(t) + K T_d \frac{d[e(t)]}{dt}, \quad e(t) = y_d(t) - y(t) \quad (5.10)$$

Έτσι, η συνάρτηση μεταφοράς του νέου ελεγκτή είναι:

$$G(s) = K (1 + T_d s) \quad (5.11)$$

όπου  $K$  το αναλογικό κέρδος και  $T_d$  ο χρόνος διαφόρισης, τα οποία μπορούν να προσαρμόζονται στις επιθυμητές τιμές.

### Αναλογικός-Διαφορικός-Ολοκληρωτικός Ελεγκτής (PID)

Ο ελεγκτής PID, ή ελεγκτής τριών όρων, αποτελεί το συνδυασμό των τριών βασικών ελεγκτών που προαναφέρθηκαν, δηλαδή του αναλογικού (P), του ολοκληρωτικού (I) και του διαφορικού (D). Ο νόμος ελέγχου βάσει του οποίου καθορίζεται το σήμα ελέγχου, είναι:

$$u(t) = K e(t) + \frac{K}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K T_d \frac{d[e(t)]}{dt}, \quad e(t) = y_d(t) - y(t) \quad (5.12)$$

Έτσι, η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή είναι:

$$G(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (5.13)$$

όπου  $K$  το αναλογικό κέρδος,  $T_i$  η σταθερά ολοκλήρωσης και  $T_d$  ο χρόνος διαφόρισης, μεγέθη που μπορούν να προσαρμόζονται καταλλήλως.

Ο ελεγκτής PID είναι ίσως ο δημοφιλέστερος μεταξύ των υπολοίπων, μιας που συνδυάζει όλα τους τα πλεονεκτήματα, ενώ παράλληλα με τη σωστή ρύθμιση των παραμέτρων  $K$ ,  $T_i$  και  $T_d$ , μπορεί να βελτιστοποιηθεί η απόδοση του συστήματος. Η διαδικασία προσδιορισμού των παραπάνω παραμέτρων είναι γνωστή ως ‘ρύθμιση ελεγκτή’ (controller tuning), γίνεται δε είτε με εμπειρικές μεθόδους είτε αναλυτικά. Από τις εμπειρικές μεθόδους, η πλέον γνωστή είναι η μέθοδος των Ziegler–Nichols, ωστόσο στις περισσότερες βιομηχανικές εφαρμογές σήμερα η ρύθμιση γίνεται με χρήση εξειδικευμένου λογισμικού βελτιστοποίησης. Στην επόμενη ενότητα θα διατυπωθεί το γενικό πρόβλημα ρύθμισης ενός ελεγκτή, ως ένα κλασικό πρόβλημα βελτιστοποίησης.

### 5.1.3 Ο έλεγχος ως πρόβλημα βελτιστοποίησης

Έστω ότι στο σύστημα ανοικτού βρόχου που φαίνεται στο σχήμα 5.1 είναι επιθυμητή η εύρεση της τιμής του σήματος ελέγχου  $u$ , το οποίο θα οδηγήσει τη μεταβλητή εξόδου  $y$ , στην τιμή  $y_d$ . Το πρόβλημα αυτό είναι αρκετά δύσκολο και προκειμένου να λυθεί, απαιτεί λεπτομερή γνώση της συνάρτησης μεταφοράς της εγκατάστασης,

$F$ . Ένας προφανής τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος, είναι ο υπολογισμός του  $y$  μέσω μιας διαδικασίας δοκιμής-λάθους, για διάφορες τιμές του  $u$ , ωστόσο σε περιπτώσεις που υπάρχει θόρυβος δεν είναι αποτελεσματικός.

Για το λόγο αυτό, υιοθετήθηκε ο έλεγχος κλειστού βρόχου, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.2, κατά τον οποίο ο βρόγχος ανάδρασης ανατροφοδοτεί συνεχώς την τρέχουσα κατάσταση του συστήματος,  $y$ , στην είσοδο, και η διόρθωση  $(y - y_d)$  καθορίζει το σήμα ελέγχου που απαιτείται. Στόχος είναι ο μηδενισμός της διαφοράς  $(y - y_d)$  και αυτό ακριβώς καλείται να επιτύχει ο ελεγκτής.

Με τον τρόπο αυτό, η διαδικασία επιλογής της κατάλληλης τιμής του  $u$  που θα οδηγήσει το  $y$  στο  $y_d$ , μετατίθεται από το σχεδιαστή του συστήματος στον ελεγκτή. Έτσι, ο υπολογισμός των ιδιοτήτων του κατάλληλου ελεγκτή μπορεί να γίνει αν το αρχικό πρόβλημα ελέγχου γραφεί ως ένα ισοδύναμο πρόβλημα βελτιστοποίησης [53]:

Αντικειμενική συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση: $I = (y - y_d)^2$ Υπό τον περιορισμό: $y = F(u)$
--

Προφανώς, στην περίπτωση που η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποιηθεί, θα ισχύει:

$$\frac{\partial I}{\partial u} = 2(y - y_d) \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \quad (5.14)$$

Αν το πρόβλημα βελτιστοποίησης που διατυπώθηκε επιλυθεί με τον επαναληπτικό αλγόριθμο του Newton, τότε η νέα τιμή του  $u$  προκύπτει βάσει της τρέχουσας τιμής του  $y$ , ως:

$$u_{n+1} = u_n - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}(y - y_d) \quad (5.15)$$

όπου με  $\mathbf{H}$  συμβολίστηκε το εσσιανό μητρώο της συνάρτησης μεταφοράς και με  $\mathbf{G} = \nabla F(\mathbf{u})$  η κλίση της. Εάν η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή επιλεγεί με αυτόν τον τρόπο, τότε το σύστημα θα λειτουργεί επιλέγοντας την τιμή του  $u$  για την οποία ελαχιστοποιείται η ποσότητα  $I$ .

#### 5.1.4 Εφαρμογή στην αεροδυναμική/αεροελαστικότητα

Σε αυτή την ενότητα, θα αναφερθεί μια περίπτωση υλοποίησης του ελέγχου σε αεροελαστικές εφαρμογές, μέσω της οποίας καταδεικνύεται η σημασία όλων όσων παρατέθηκαν παραπάνω. Στη μελέτη [11], οι ερευνητές εξετάζουν τη χρήση σύνθετων δεσμών για την τροποποίηση του πεδίου ροής γύρω από μια αεροτομή, έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί η υπερακόντιση στην άνωση, που προκαλείται λόγω επίδρασης ξαφνικής ριπής ανέμου. Στόχος της εργασίας, είναι η εύρεση των βέλτιστων τιμών των παραμέτρων που καθορίζουν τη θέση και το άνοιγμα της οπής για κάθε δέσμη αλλά και το κέρδος, το μηδενιστή και τον πόλο του ελεγκτή που θα χρησιμοποιηθεί.

Για τον υπολογισμό των αεροδυναμικών φορτίων χρησιμοποιήθηκε ένα σχετικά απλό μοντέλο που βασίζεται στη θεωρία του Theodorsen (η οποία υπολογίζει την κατανομή πίεσης γύρω από μία αεροτομή). Επίσης, η αεροτομή έχει δύο βαθμούς

ελευθερίας που περιορίζονται με ελατήρια, έναν γραμμικό κατά την κατακόρυφη διεύθυνση και έναν στρεπτικό. Όπως έχει αποδειχθεί σε άλλη μελέτη [54], η χρήση μίας σύνθετης δέσμης κρίνεται αρκετή για την αύξηση της ταχύτητας στην οποία συμβαίνει το φαινόμενο του πτερυγισμού. Έτσι, στη μελέτη [11] χρησιμοποιήθηκε μια κατανομή από σύνθετες δέσμες, για τη διερεύνηση της επίδρασής τους στη δυσχερή αεροδυναμική φόρτιση της αεροτομής, η οποία οφείλεται σε μια ξαφνική ριπή ανέμου. Στο σημείο αυτό, θα διατυπωθεί μόνο το πρόβλημα θεμελίωσης του νόμου ελέγχου που θα εφαρμόζει ο ελεγκτής.

Για τον υπολογισμό της απόκρισης της άνωσης,  $L$ , λόγω επίδρασης της ριπής ανέμου,  $w$ , απαιτούνται οι συναρτήσεις μεταφοράς κλειστού βρόχου από την είσοδο ( $w$ ) σε κάθε έναν εκ των δύο βαθμών ελευθερίας ( $\alpha$  και  $h$ ). Τότε η άνωση εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$L = (L_\alpha G_{w\alpha,cl} + L_h G_{wh,cl} + L_w) w \quad (5.16)$$

Υπολογίζοντας τις συναρτήσεις μεταφοράς ανοικτού βρόχου από τις εισόδους ( $w$  και  $v_{jet}$ ) στη γωνία  $\alpha$ , οι οποίες συμβολίζονται με  $G_{w\alpha,ol}$  και  $G_{v_{jet}\alpha,ol}$  αντίστοιχα, η γωνία  $\alpha$  μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\alpha = G_{w\alpha,ol} w + G_{v_{jet}\alpha,ol} v_{jet} \quad (5.17)$$

Η γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$  όμως, χρησιμοποιείται ως μεταβλητή ελέγχου, δηλαδή με βάση την τιμή της καθορίζεται η δράση ανάδρασης στην είσοδο του συστήματος. Επειδή ως μηχανισμός ελέγχου χρησιμοποιούνται σύνθετες δέσμες, η γωνία  $\alpha$  καθορίζει την ταχύτητα εκροής των δεσμών,  $v_{jet}$ , μέσω της συνάρτησης μεταφοράς  $G$ . Επειδή μάλιστα θα χρησιμοποιηθεί αρνητικό κέρδος ελεγκτή, η ταχύτητα των δεσμών καθορίζεται με βάση τη σχέση:

$$v_{jet} = -G\alpha \quad (5.18)$$

Το επόμενο βήμα είναι ο καθορισμός του τύπου του ελεγκτή που θα χρησιμοποιηθεί. Επιλέχθηκε ένας απλός ελεγκτής προήγησης-καθυστερήσης, με συνάρτηση μεταφοράς:

$$G = K \frac{s+z}{s+p} \quad (5.19)$$

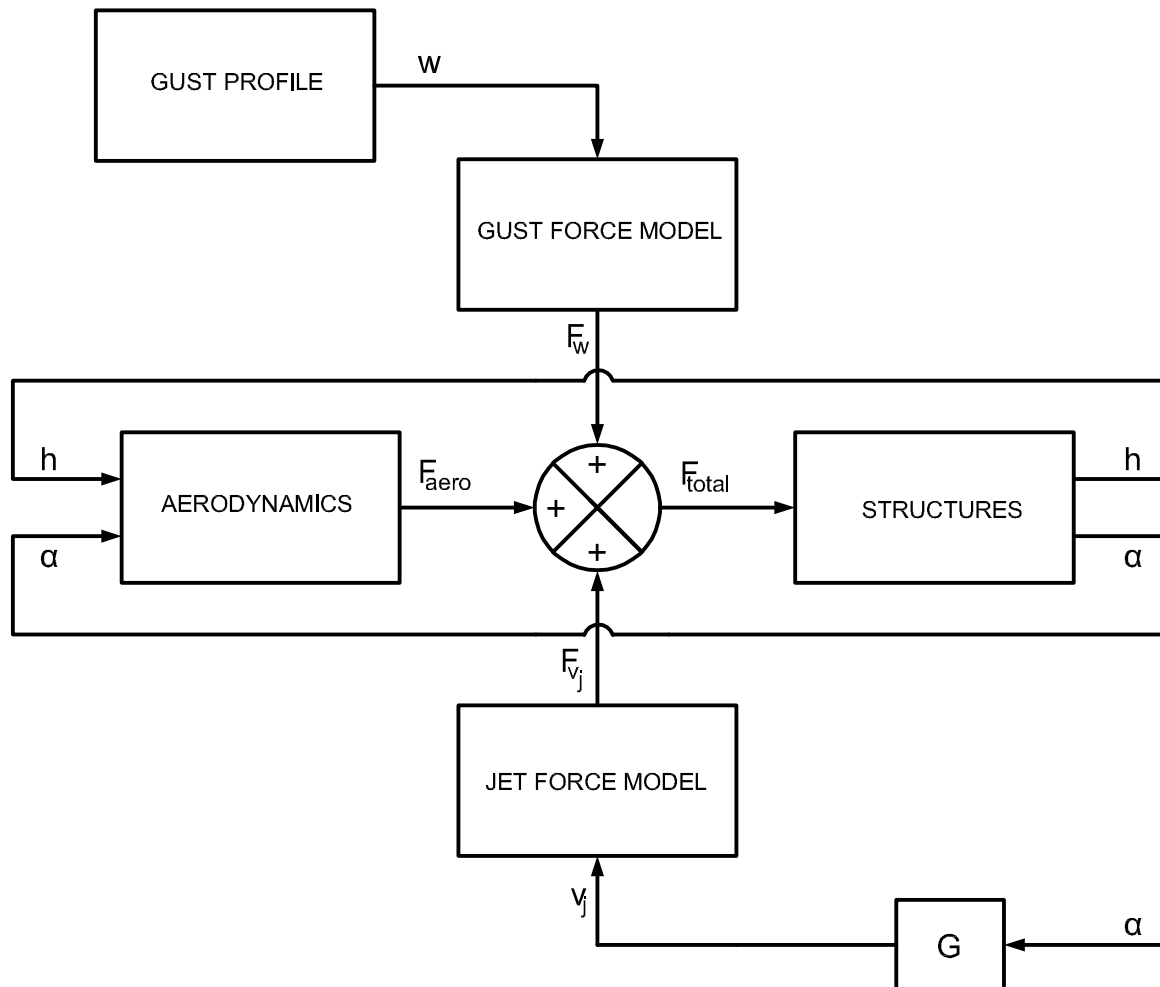
όπου  $K$ ,  $z$  και  $p$  είναι το κέρδος, ο μηδενιστής και ο πόλος του ελεγκτή, αντίστοιχα.

Τελικά, αντικαθιστώντας τις εξισώσεις 5.18, 5.19 στην εξίσωση 5.17, προκύπτει:

$$G_{w\alpha,cl} = \frac{G_{w\alpha,ol}}{1 + G_{v_{jet}\alpha,ol}G} \quad (5.20)$$

Με την ίδια διαδικασία υπολογίζεται και η συνάρτηση μεταφοράς  $G_{wh,cl}$ . Στο σχήμα 5.6 φαίνεται το δομικό διάγραμμα του συστήματος, στο οποίο φαίνεται σχηματικά ο τρόπος υλοποίησης του ελέγχου. Στη συνέχεια της μελέτης πραγματοποιήθηκε βελτιστοποίηση των παραμέτρων των δεσμών και του ελεγκτή, ωστόσο εδώ δεν θα αναφερθούν περισσότερα.





Σχήμα 5.6: Δομικό διάγραμμα του πλήρους συστήματος ελέγχου.

## 5.2 Υλοποίηση του ελέγχου

Σε αυτή την ενότητα, θα παρουσιαστεί ο τρόπος με τον οποίο ενσωματώθηκε μία απλή δομή ελέγχου στον προϋπάρχων GPU κώδικα. Αναλυτικότερα, αρχικά θα αναφερθούν οι δύο λύσεις που εξετάστηκαν ως προς τον τρόπο μοντελοποίησης των δεσμών και θα αιτιολογηθεί η τελική επιλογή που έγινε. Παράλληλα, θα παρατεθούν οι αλλαγές που επιβλήθηκαν στις οριακές συνθήκες προκειμένου να συμπεριληφθεί σε αυτές η επίδραση από τις δέσμες. Τέλος, θα αναφερθεί ο (απλός) νόμος ελέγχου που υιοθετήθηκε, βάσει του οποίου καθορίζονται οι τιμές των μεταβλητών ελέγχου.

### 5.2.1 Το νέο υπολογιστικό χωρίο και η διακριτοποίηση αυτού

Στην ενότητα 2.5, παρουσιάστηκε ο τρόπος με τον οποίο επιλέχθηκε να διακριτοποιηθεί το υπολογιστικό χωρίο γύρω από την αεροτομή. Ο γενέτης πλέγματος έχει αναπτυχθεί στο παρελθόν, στα πλαίσια της ερευνητικής δραστηριότητας της ΜΠΥΡ&B/ΕΘΣ, ενώ το πλέγμα που προκύπτει είναι μη-δομημένο και γενικά χαρακτηρίζεται ως υβριδικό, αφού αποτελείται τόσο από τριγωνικά όσο και από τετραεδρικά στοιχεία. Στα προηγούμενα κεφάλαια, η επίλυση των CPU και GPU κωδίκων έγινε χρησιμοποιώντας πλέγμα αποτελούμενο μόνο από τριγωνικά στοιχεία, σε αντίθεση με την πρακτική που θα ακολουθηθεί σε αυτό και θα αιτιολογηθεί στη συνέχεια.

Προφανώς το μεγάλο πλεονέκτημα των μη-δομημένων πλεγμάτων είναι η πολύ καλή προσαρμογή τους σε χωρία αρκετά σύνθετης γεωμετρίας και η ευκολότερη τοπική πύκνωση σε περιοχές ιδιαίτερου ενδιαφέροντος. Από την άλλη, το σημαντικότερο μειονέκτημά τους είναι η δυσκολία υπολογισμού της απόστασης των γειτονικών κόμβων στο τοίχωμα, από τους κόμβους του τοιχώματος, ωστόσο σε ατριβείς ροές αυτό δεν έχει καμία σημασία. Στη συνέχεια απαριθμούνται τα βασικά βήματα που ακολουθεί ο γενέτης πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε:

1. Δημιουργία δομημένου πλέγματος, σε μικρή απόσταση γύρω από την αεροτομή.
2. Εκλέπτυνση (Refinement) του δομημένου πλέγματος.
3. Αφαίρεση της περιοχής γύρω από την οπή της δέσμης.
4. Πύκνωση της περιοχής γύρω από την οπή της δέσμης.
5. Κατασκευή ορίου και πλέγματος της κοιλότητας της δέσμης.
6. Δημιουργία μη-δομημένου πλέγματος στο υπόλοιπο υπολογιστικό χωρίο.

Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τη διαδικασία γένεσης πλέγματος δε θα αναφερθούν εδώ, αφού ξεφεύγουν από το πλαίσιο της εργασίας, ωστόσο ο αναγνώστης μπορεί να τις αναζητήσει στις βιβλιογραφικές παραπομπές [55, 56].

Ο λόγος για τον οποίο σε μια εφαρμογή επιλέγεται η χρήση δομημένου πλέγματος μεγάλης πυκνότητας κοντά στο στερεό όριο της αεροτομής, είναι η επίτευξη μεγαλύτερης ακρίβειας προλέξεων στη συνεκτική ζώνη. Ωστόσο, στο πλαίσιο της εργασίας αυτής όπου η ροή θεωρείται ατριβής, δεν είναι απαραίτητη η κατασκευή υβριδικού πλέγματος. Παρ' όλα αυτά, επειδή ο γενέτης πλέγματος χρησιμοποιήθηκε χωρίς αλλαγές σε προγραμματιστικό επίπεδο, όντας ρυθμισμένος να κατασκευάζει πλέγμα για συνεκτικές ροές, διατηρήθηκε ο υβριδικός του χαρακτήρας στις εφαρμογές αυτού του κεφαλαίου.

Η αεροτομή επί της οποίας θα εφαρμοστεί ο έλεγχος ροής, είναι η ίδια με αυτή που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση των αεροελαστικών προβλημάτων του προηγούμενου κεφαλαίου, δηλαδή η NACA 64A010. Για την ακρίβεια, είναι μια πολύ

κοντινή προσέγγιση αυτής, η οποία κατασκευάστηκε μέσω πολυωνύμων *Bezier*, με 15 σημεία ελέγχου για κάθε μια εκ των δύο πλευρών της (**pressure side** και **suction side**). Τα σημεία ελέγχου που χρησιμοποιήθηκαν φαίνονται στον πίνακα 5.1. Όπως φάνηκε ήδη από το προηγούμενο κεφάλαιο, η αεροτομή είναι συμμετρική ως προς τη χορδή της, επομένως το ίδιο ισχύει και για τα σημεία ελέγχου των καμπυλών *Bezier*.

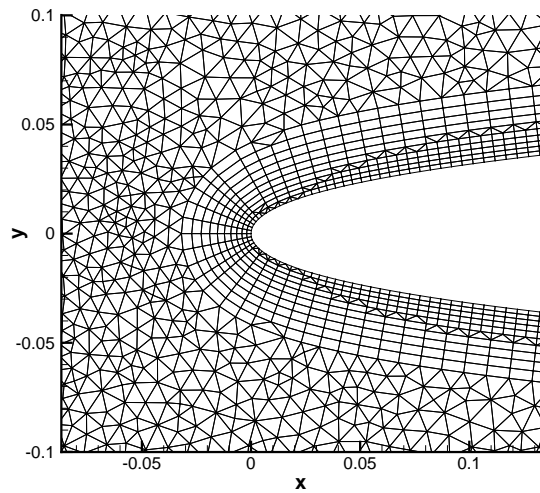
Σημείο Ελέγχου	Πλευρά Υπερίεσης		Πλευρά Υποπίεσης	
	X	Y	X	Y
1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	-0.00050	-0.02025	-0.00050	0.02025
3	0.06875	-0.03800	0.06875	0.03800
4	0.17025	-0.03600	0.17025	0.03600
5	0.34175	-0.06875	0.34175	0.06875
6	0.44175	-0.06525	0.44175	0.06525
7	0.52325	-0.04200	0.52325	0.04200
8	0.60800	-0.03825	0.60800	0.03825
9	0.69525	-0.04425	0.69525	0.04425
10	0.80450	-0.01075	0.80450	0.01075
11	0.87250	-0.01525	0.87250	0.01525
12	0.94225	-0.00975	0.94225	0.00975
13	0.95300	-0.00025	0.95300	0.00025
14	0.99825	-0.00350	0.99825	0.00350
15	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000

Πίνακας 5.1: Σημεία ελέγχου των καμπυλών *Bezier* που χρησιμοποιήθηκαν για την προσέγγιση του περιγράμματος της αεροτομής NACA 64A010.

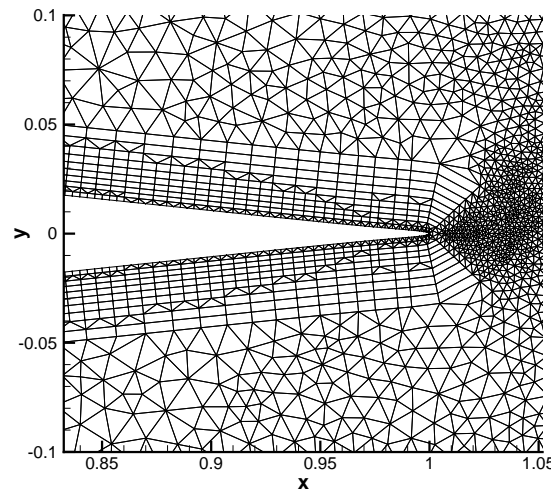
Έτσι, το υβριδικό πλέγμα που κατασκευάστηκε, έχει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα 5.7. Στο πλέγμα αυτό δεν έχουν ενσωματωθεί οι απαραίτητες διαμορφώσεις, οι οποίες θα υποστηρίξουν την εγκατάσταση των δεσμών. Πρώτα πρέπει να επιλεγεί και να αιτιολογηθεί ο τρόπος με τον οποίο θα μοντελοποιηθούν οι δέσμες και στη συνέχεια θα παρατεθεί ένα κατάλληλα διαμορφωμένο πλέγμα, το οποίο ενσωματώνει υποδοχές για την εγκατάσταση δεσμών ρευστού.

Οι επιλογές που υπάρχουν για τη μοντελοποίηση των δεσμών είναι δύο:

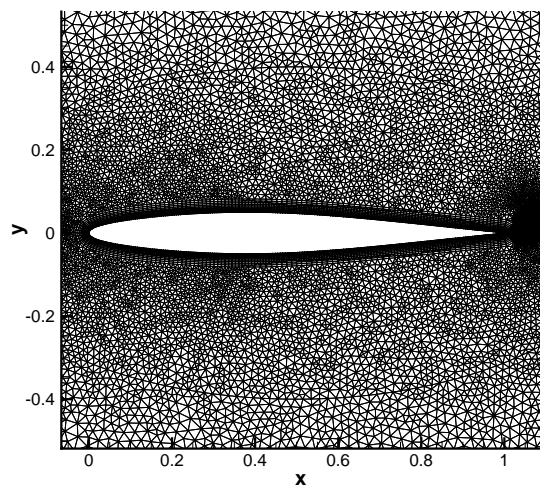
- Με κατασκευή κοιλότητας κωδωνοειδούς γεωμετρίας, της οποίας το επάνω μέρος εφάπτεται στο στερεό όριο της αεροτομής, το οποίο αφαιρείται και αποτελεί πλέον οπή (σχήμα 5.8). Έτσι, οι οριακές συνθήκες επιβάλλονται στη βάση της κοιλότητας και η είσοδος ή η έξοδος της ροής από την οπή καθορίζεται έμμεσα, κατόπιν επίλυσης του αναπτυσσόμενου πεδίου.
- Με απευθείας επιβολή των οριακών συνθηκών στην οπή που δημιουργείται στο τοίχωμα της αεροτομής, χωρίς τη χρήση κοιλότητας (σχήμα 5.9).



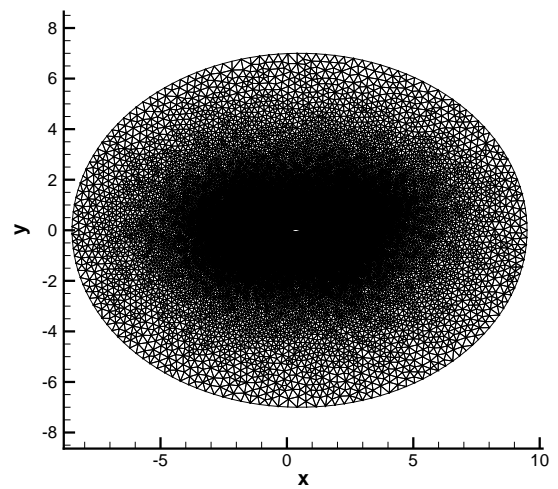
(α') Το πλέγμα γύρω από την ακμή πρόσπτωσης



(β') Το πλέγμα γύρω από την ακμή εκφυγής

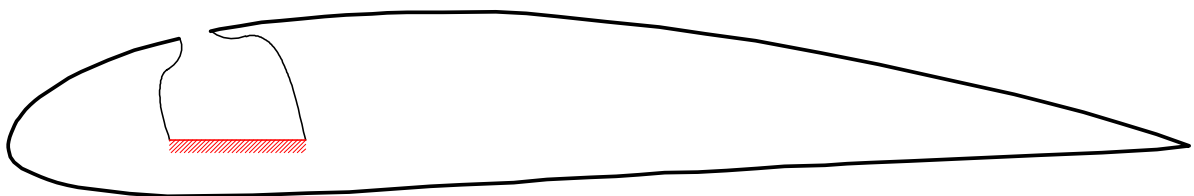


(γ') Το πλέγμα γύρω από όλη την αεροτομή



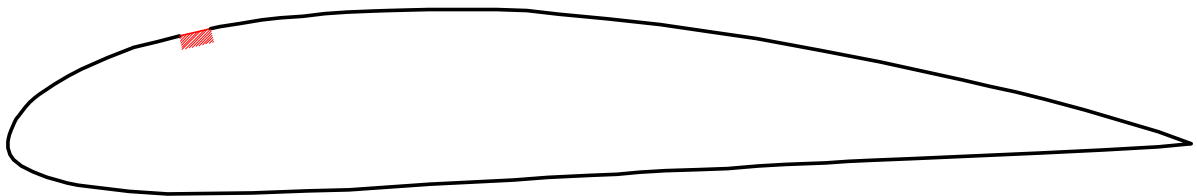
(δ') Το πλήρες διακριτοποιημένο υπολογιστικό χωρίο

Σχήμα 5.7: Το υβριδικό πλέγμα που κατασκευάστηκε γύρω από την αεροτομή NACA 64A010.



Σχήμα 5.8: Χωροταξική τοποθέτηση της κοιλότητας ως προς την αεροτομή.

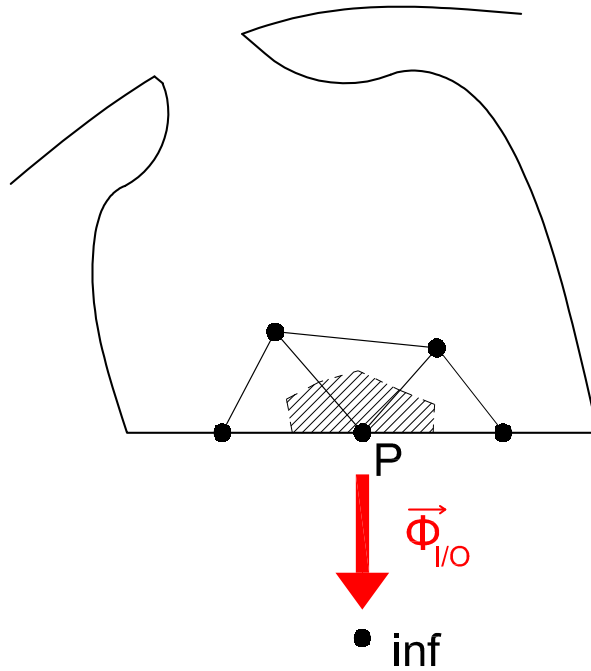
Η πρώτη μέθοδος αποδίδει καλύτερα τη φυσική σημασία του φαινομένου, καθώς σε περίπτωση που οι οριακές συνθήκες μεταβάλλονται με το χρόνο, εισάγει μια ‘τεχνητή’ αδράνεια στο σύστημα, αυξάνοντας το χρόνο που απαιτείται μέχρι η νέα πληροφορία να επιδράσει στην εξωτερική ροή. Από την άλλη, σε ατριβείς ροές δεν είναι δυνατή η χρήση κοιλότητας καθώς ο κώδικας αδυνατεί να προβλέψει τα σύνθετα ροϊκά φαινόμενα που επικρατούν στην περιοχή της (ανακυκλοφορίες, αποκολλήσεις, εκπομπές στροβίλων). Για το λόγο αυτό, εδώ επιλέχθηκε να υλοποιηθεί η δεύτερη μέθοδος, δηλαδή οι οριακές συνθήκες να επιβληθούν απευθείας στην οπή επί του στερεού ορίου της αεροτομής. Σε αυτήν την περίπτωση, κατά την κατασκευή του πλέγματος, όπως αυτή συνοψίστηκε σε 6 βήματα, νωρίτερα, παραλείπεται το βήμα 5, αφού σχετίζεται μόνο με την κατασκευή πλέγματος στο εσωτερικό της κοιλότητας.



Σχήμα 5.9: Η οπή επί του στερεού ορίου της αεροτομής, στην οποία καθορίζονται οι οριακές συνθήκες (σημειώνεται με έντονο/κόκκινο χρώμα).

### 5.2.2 Επαναδιατύπωση των οριακών συνθηκών στην περιοχή τοποθέτησης των δεσμών

Όπως είναι φυσικό, η τοποθέτηση των δεσμών σε συγκεκριμένες θέσεις πάνω στο τοίχωμα της αεροτομής, απαιτεί την επαναδιατύπωση των οριακών συνθηκών τοπικά, έτσι ώστε να προσδιοριστούν τα νέα ροϊκά μεγέθη που οφείλονται στην αλληλεπίδραση της δέσμης με την κύρια ροή. Στην ενότητα αυτή και μόνο, θα θεωρηθεί ότι ακολουθείται η πρώτη μέθοδος, δηλαδή θα χρησιμοποιηθεί μια κοιλότητα, στον πυθμένα της οποίας καθορίζονται οι οριακές συνθήκες και στη συνέχεια η πληροφορία διαδίδεται έως την οπή. Αυτό γίνεται μόνο για πρακτικούς λόγους (είναι πιο παραστατικό για τον αναγνώστη), αφού οι διατυπώσεις που θα προκύψουν έχουν γενική ισχύ, ώστε εφαρμόζονται αυτούσιες και στην περίπτωση μη-χρήσης κοιλότητας. Η μαθηματική διατύπωση που ακολουθεί έχει στόχο τον προσδιορισμό των επιπρόσθετων συνεισφορών στις εξισώσεις ροής, λόγω της ύπαρξης της δέσμης στον οριακό κόμβο  $P$ , ο οποίος βρίσκεται στον πυθμένα της κοιλότητας, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.10. Θα παρουσιαστούν δύο διαφορετικές διατυπώσεις, η πρώτη από τις οποίες βασίζεται στην έμμεση επιβολή των οριακών συνθηκών μέσω ενός εικονικού κόμβου, ενώ η δεύτερη αφορά την απευθείας επιβολή των οριακών συνθηκών στο αριθμητικό διάνυσμα ροής του οριακού κόμβου.



Σχήμα 5.10: Σχηματική απεικόνιση της κοιλότητας που χρησιμοποιείται για τον καθορισμό των οριακών συνθηκών της δέσμης. Στον πυθμένα της κοιλότητας φαίνεται ο οριακός κόμβος  $P$ , καθώς και ο εικονικός κόμβος  $inf$ .

#### Έμμεση επιβολή των οριακών συνθηκών μέσω ενός εικονικού κόμβου

Όπως αναφέρθηκε ήδη στην ενότητα 2.7, ο υπολογισμός του διανύσματος ροής  $\vec{\Phi}_{I/O}^{inv}$  γίνεται βάσει του σχήματος διάσπασης ροών, η μαθηματική έκφραση του οποίου συνοψίζεται στη σχέση 2.63, η οποία επαναλαμβάνεται εδώ για λόγους πληρότητας:

$$\vec{\Phi}_{I/O}^{inv} = A_P^+ \vec{U}_P + A_P^- \vec{U}_{inf} \quad (5.21)$$

Υπενθυμίζεται ότι με  $\vec{U}$  συμβολίστηκαν οι συντηρητικές μεταβλητές ενώ με  $\vec{V}$  σημαίνονται οι μη-συντηρητικές μεταβλητές, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια. Παραγωγίζοντας<sup>2</sup> τη σχέση 5.21 ως προς το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών για τον κόμβο  $P$ ,  $\vec{U}_P$ , προκύπτει:

$$\frac{\partial \vec{\Phi}_{I/O}^{inv}}{\partial \vec{U}_P} = A_P^+ + A_P^- \frac{\partial \vec{U}_{inf}}{\partial \vec{U}_P} \quad (5.22)$$

Από τη σχέση 5.22 είναι προφανές ότι δεν προκύπτουν συνεισφορές για τους γειτονικούς κόμβους  $Q$  του  $P$ , αλλά μόνο για τον κόμβο  $P$ . Τα Ιακωβιανά μητρώα  $A_P^+$  και  $A_P^-$  έχουν ήδη υπολογιστεί, οπότε απομένει ο προσδιορισμός του νέου μητρώου

<sup>2</sup>Θεωρήθηκε ότι η εξάρτηση των μητρώων  $A_P^+$  και  $A_P^-$  ως προς το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών,  $\vec{U}_P$ , είναι αμελητέα.

$\frac{\partial \vec{U}_{inf}}{\partial \vec{U}_P}$ . Για τα διανύσματα των συντηρητικών και μη-συντηρητικών μεταβλητών, όπως είναι γνωστό, ισχύει:

$$\vec{U}_{inf} = \begin{bmatrix} \rho_{inf} \\ (\rho \vec{u})_{inf} \\ (E_t)_{inf} \end{bmatrix}, \quad \vec{V}_{inf} = \begin{bmatrix} \rho_{inf} \\ \vec{u}_{inf} \\ p_{inf} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

όπου

$$\vec{u}_{inf} = \frac{1}{\rho_{inf}} (\rho \vec{u})_{inf}, \quad (E_t)_{inf} = \frac{p_{inf}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho_{inf} \vec{u}_{inf}^2 \quad (5.24)$$

Για τον υπολογισμό του μητρώου  $\frac{\partial \vec{U}_{inf}}{\partial \vec{U}_P}$  θα χρησιμοποιηθεί ο κανόνας της αλυσίδας, προκειμένου να απλουστευθούν οι πράξεις, δηλαδή:

$$\frac{\partial \vec{U}_{inf}}{\partial \vec{U}_P} = \frac{\partial \vec{U}_{inf}}{\partial \vec{V}_P} \frac{\partial \vec{V}_P}{\partial \vec{U}_P} \quad (5.25)$$

Μετά από πράξεις<sup>3</sup>, τα δύο επιμέρους μητρώα υπολογίζονται ως:

$$\frac{\partial \vec{U}_{inf}}{\partial \vec{V}_P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\vec{u}_{inf}^2}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma-1} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial \vec{V}_P}{\partial \vec{U}_P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1/\rho & 1/\rho & 0 & 0 \\ -u_2 & 0 & 1/\rho & 0 \\ (\gamma-1)\vec{u}^2 & -(\gamma-1)u_1 & -(\gamma-1)u_2 & \gamma-1 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Έτσι, συνδυάζοντας τις σχέσεις 5.25, 5.26 και 5.27 προκύπτει το μητρώο  $\frac{\partial \vec{U}_{inf}}{\partial \vec{U}_P}$  ως:

$$\frac{\partial \vec{U}_{inf}}{\partial \vec{U}_P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\vec{u}_{inf}^2}{2} + \vec{u}^2 & -u_1 & -u_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Επομένως, στο σημείο αυτό, από τις σχέσεις 5.22 και 5.28 μπορεί να υπολογιστεί η επίδραση  $\frac{\partial \Phi_{I/O}^{inv}}{\partial \vec{U}_P}$  στον οριακό κόμβο P, λόγω της ύπαρξης της δέσμης.

### Επιβολή των οριακών συνθηκών απευθείας στον οριακό κόμβο

Σε αυτή την προσέγγιση, οι οριακές συνθήκες επιβάλλονται άμεσα σε κάθε οριακό κόμβο στον οποίο θα τοποθετηθεί δέσμη ρευστού. Σχηματίζεται έτσι ένα επιπλέον

<sup>3</sup>Κατά τις παραγωγίσεις, η ποσότητα  $(\rho \vec{u})_{inf}$  θεωρήθηκε σταθερή και ανεξάρτητη από οποιοδήποτε μέγεθος, καθώς επιβάλλεται ως οριακή συνθήκη από το χρήστη για να δηλώσει την παρουσία της δέσμης στον κόμβο P.

αριθμητικό διάνυσμα ροής  $\vec{\Phi}_{jet}^{inv}$ , το οποίο αθροίζεται στο διάνυσμα της ατρίβους ροής  $\vec{\Phi}_{PQ}^{inv}$  και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\vec{\Phi}_{jet}^{inv} = \begin{bmatrix} \dot{m} \\ \dot{m}u_1 \\ \dot{m}u_2 \\ \frac{\dot{m}}{\rho} E_t \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

όπου  $\dot{m}$  είναι η καθαρή παροχή μάζας που εισέρχεται ή εξέρχεται από τα τμήματα του οριακού κόμβου που βρίσκονται επί της αεροτομής.

Σε κάθε κόμβο καθορίζεται η παροχή ανά μονάδα μήκους,  $\dot{m}_P$ , η οποία ολοκληρώνεται στο όριο της οπής που αντιστοιχεί στον κόμβο  $P$ , δίνοντας την καθαρή παροχή  $\dot{m}$ . Οι ταχύτητες  $u_1, u_2$  και η ολική ενέργεια  $E_t$  υπολογίζονται ως:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{jet} \cdot \hat{n}_x \\ u_2 &= v_{jet} \cdot \hat{n}_y \\ E_t &= \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho \vec{u}_{jet}^2 \end{aligned} \quad (5.30)$$

με  $u_{jet} = v_{jet} = \dot{m}_P$  και  $\hat{n}_x, \hat{n}_y$  οι συνιστώσες του διανύσματος που είναι κάθετο στην οπή, με φορά προς το εξωτερικό του υπολογιστικού χωρίου (σχήμα 5.10). Στην εργασία αυτή επιλέχθηκε η χρήση αυτής της διατύπωσης, έναντι της πρώτης, ο δε τρόπος με τον οποίο υπολογίζεται η επιβαλλόμενη παροχή ανά μονάδα μήκους σε κάθε κόμβο,  $\dot{m}_P = \dot{m}/b$ , περιγράφεται στην επόμενη ενότητα.

### 5.2.3 Ο νόμος ελέγχου

Όπως φάνηκε από την προηγούμενη ενότητα, είναι αναγκαίος ο καθορισμός των τιμών της παροχής  $\dot{m}_P$  για κάθε κόμβο στον οποίο είναι επιθυμητή η τοποθέτηση δέσμης ρευστού. Ο τρόπος με τον οποίο καθορίζεται αυτό το μέγεθος, περιγράφεται από το νόμο ελέγχου που χρησιμοποιείται. Σε αυτή τη διπλωματική εργασία, επιλέχθηκε η χρήση ενός απλού αναλογικού νόμου ελέγχου, ο οποίος βασίζεται στην ανατροφοδότηση των τιμών των μεταβλητών  $\alpha$  και  $\dot{\alpha}$ , όπως φαίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\dot{m}_P = \dot{m}/b = G_\alpha |\alpha| + G_{\dot{\alpha}} |\dot{\alpha}| + \bar{m} \quad (5.31)$$

όπου  $G_\alpha$  και  $G_{\dot{\alpha}}$  είναι τα κέρδη των βρόγχων ανάδρασης του συστήματος. Ακόμη, υπάρχει η δυνατότητα καθορισμού μιας σταθερής παροχής ελέγχου ανά κόμβο, που συμβολίζεται με  $\bar{m}$ .

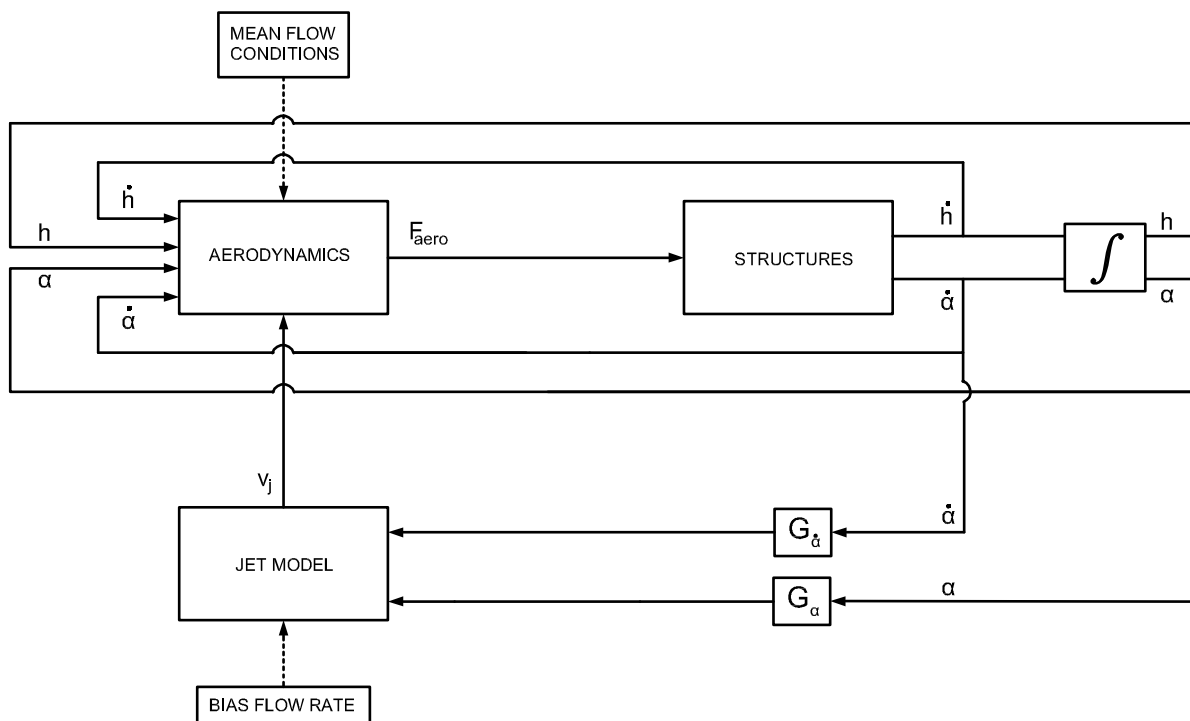
Από τη σχέση 5.31 είναι προφανές ότι οι τιμές των  $G_\alpha$  και  $G_{\dot{\alpha}}$  καθορίζουν το πρόσημο της δράσης ελέγχου  $\dot{m}_P$  που θα παραχθεί. Αν μάλιστα ληφθεί υπόψη η σχέση 5.30, μπορεί να διατυπωθεί το ακόλουθο συμπέρασμα:

- Αν  $\dot{m}_P > 0$ , τότε οι δέσμες λειτουργούν επιτελώντας αναρρόφηση.



- Αν  $\dot{m}_P < 0$ , τότε οι δέσμες λειτουργούν επιτελώντας έγχυση.

Στο σχήμα 5.11 φαίνεται το ‘ισοδύναμο’ δομικό διάγραμμα του συστήματος. Το διάγραμμα αυτό είναι αντίστοιχο του σχήματος 5.6 και χαρακτηρίζεται ως ‘ισοδύναμο’ επειδή στο πλαίσιο της εργασίας το πρόβλημα ελέγχου αντιμετωπίζεται πολύ απλοϊκά, χωρίς τη χρήση των θεωριών της επιστήμης του αυτομάτου ελέγχου. Έτσι, το διάγραμμα του σχήματος 5.11 αποτελεί ένα εποπτικό εργαλείο και μόνο. Η μονάδα που φέρεται υπό τον όρο *Aerodynamics* αντιπροσωπεύει το τμήμα του κώδικα που παραμορφώνει το πλέγμα, επιλύει τη ροή σε κάθε πραγματικό χρονικό βήμα και υπολογίζει τα αντίστοιχα αεροδυναμικά φορτία. Παρομοίως, υπό τον όρο *Structures* φέρεται το τμήμα του κώδικα που επιλύει τις ελαστικές εξισώσεις και υπολογίζει τις μετατοπίσεις της αεροτομής κατά τους 2 βαθμούς ελευθερίας της. Τέλος, ως *Jet Model* συμβολίζεται το τμήμα που περιέχει το νόμο ελέγχου που παρουσιάστηκε σε αυτή την ενότητα, βάσει του οποίου υπολογίζεται η παροχή μάζας εισόδου/εξόδου για κάθε δέσμη σε κάθε πραγματική χρονική στιγμή. Τα τμήματα που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή αντιπροσωπεύουν τις σταθερές συνθήκες του προβλήματος, όπως είναι οι συνθήκες της εξωτερικής ροής (αριθμός Mach και γωνία της επ’ άπειρο ροής) και η μέση παροχή,  $\bar{m}$ , που επιβάλλεται επιπλέον σε κάθε κόμβο. Όπως παρατηρείται, το τμήμα *Jet Model* προσομοιώνει τη λειτουργία του αναλογικού ελεγκτή ενός κλασικού συστήματος ελέγχου κλειστού βρόχου με ανάδραση (σχήμα 5.2).



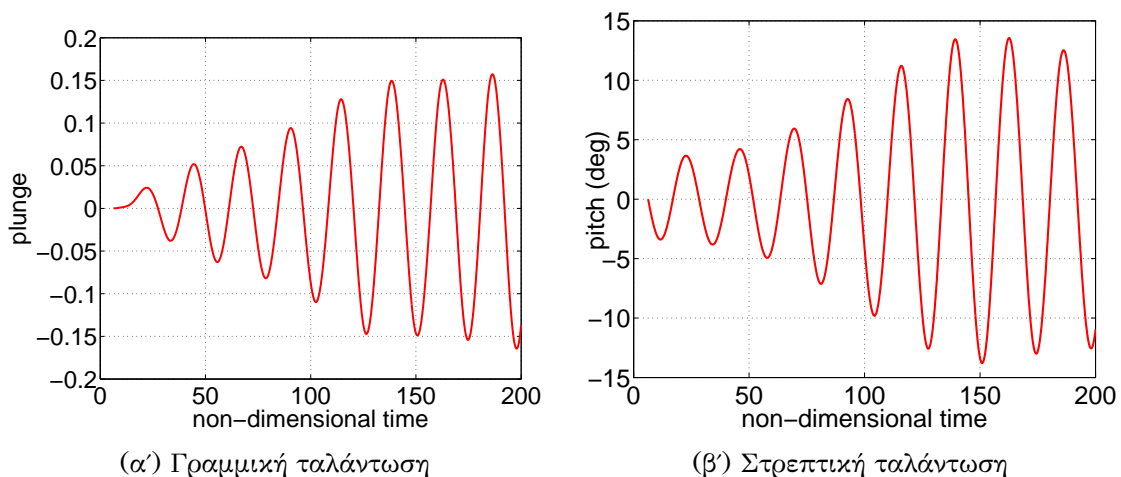
Σχήμα 5.11: Δομικό διάγραμμα του πλήρους συστήματος ελέγχου.

### 5.3 Έλεγχος ροής σε ασταθείς αεροελαστικές εφαρμογές

Σε αυτή την ενότητα συνοψίζονται χαρακτηριστικά αποτελέσματα, τα οποία έχουν στόχο να αναδείξουν τη θετική επίδραση που φαίνεται να έχει η εφαρμογή του ενεργητικού ελέγχου σε ασταθείς αεροελαστικές εφαρμογές. Συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο 4 παρατέθηκαν εφαρμογές των οποίων η αεροελαστική απόκριση χαρακτηρίστηκε ως ‘οριακά ευσταθής’ και ‘ασταθής’, ενώ είναι προφανές ότι η ασταθής αεροελαστική απόκριση μιας αεροδυναμικής κατασκευής είναι μη-αποδεκτή. Για όλες τις εφαρμογές που θα ακολουθήσουν, ως βάση αναφοράς θα χρησιμοποιηθεί η ασταθής αεροελαστική απόκριση της αεροτομής NACA 64A010 που προκύπτει για τις τιμές των παραμέτρων που φαίνονται στον πίνακα 5.2. Η μη-ελεγχόμενη ασταθής αεροελαστική απόκριση της αεροτομής φαίνεται στο σχήμα 5.12. Οι εφαρμογές που θα παρατεθούν στη συνέχεια, χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία περιλαμβάνονται εφαρμογές στις οποίες η τοποθέτηση των δεσμών ήταν καθαρά συμμετρική ως προς τη χορδή, ενώ στη δεύτερη κατηγορία η τοποθέτηση των δεσμών έγινε κυρίως στη μία πλευρά της αεροτομής.

Αεροτομή	NACA 64A010
Γωνία της επ’ άπειρο ροής	$\alpha_\infty = 0^\circ$
Αριθμός $Mach$ της επ’ άπειρο ροής	$M_\infty = 0.80$
Δείκτης ταχύτητας	$U^* = 1.0$

Πίνακας 5.2: Χαρακτηριστικά μεγέθη του προς έλεγχο αεροελαστικού προβλήματος.



Σχήμα 5.12: Μη-ελεγχόμενη ασταθής αεροελαστική απόκριση της αεροτομής NACA 64A010: (α') η γραμμική ταλαντωτική κίνηση, (β') η στρεπτική ταλαντωτική κίνηση. Οι αρχικές συνθήκες των υπολογισμών είναι:  $\dot{\alpha} = -1$ ,  $\dot{h} = 0$ .

### 5.3.1 Περίπτωση 1: Συμμετρική τοποθέτηση των δεσμών ως προς τη χορδή της αεροτομής

Σε αυτήν την περίπτωση, μελετήθηκε η χρήση της ίδιας κατανομής δεσμών στην πλευρά υπερπίεσης και στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής. Πιο συγκεκριμένα, επιλύθηκε πλήθος προβλημάτων και αξιολογήθηκαν αρκετές διαφορετικές (συμμετρικές ως προς τη χορδή της αεροτομής) διατάξεις μη-μόνιμων δεσμών, ωστόσο δεν διαπιστώθηκε, σε καμία περίπτωση, ευεργετική επίδραση των δεσμών για τον έλεγχο των αποκλινοσών ταλαντώσεων. Η ίδια διερεύνηση έγινε και για τις τιμές των κερδών του βρόχου ανάδρασης που χρησιμοποιήθηκαν, τα αποτελέσματα όμως δεν ήταν ενθαρρυντικά, υποδεικνύοντας έτσι την ανάγκη χρήσης μεθόδων βελτιστοποίησης. Για τους λόγους αυτούς, δε θα γίνει διεξοδική αναφορά σε εφαρμογές αυτής της κατηγορίας, αντίθετα θα παρατεθεί ένα μόνο παράδειγμα για την υποστήριξη των όσων αναφέρθηκαν παραπάνω.

Χρησιμοποιήθηκαν έξι δέσμες σε κάθε πλευρά, οι οποίες τοποθετήθηκαν στις θέσεις  $x_{jet} = 0.10/0.15/0.20/0.80/0.85/0.90$  της χορδής, θεωρώντας ότι η αρίθμηση ξεκινάει από την ακμή πρόσπτωσης ( $x = 0$ ) και καταλήγει στην ακμή εκφυγής ( $x = 1$ ). Οι παράμετροι που εμπλέκονται στο χρησιμοποιούμενο νόμο ελέγχου ισούνται με  $G_\alpha = 0.01$ ,  $G_{\dot{\alpha}} = 0.001$  και  $\bar{m} = 0$ . Η ελεγχόμενη αεροελαστική απόκριση που προέκυψε, σε σύγκριση με την αρχική (χωρίς έλεγχο), φαίνεται στο σχήμα 5.13. Από το σχήμα αυτό φαίνεται ότι η επίδραση του ελέγχου στην αρχή μοιάζει θετική, ωστόσο μέσα σε λίγες περιόδους αντιστρέφεται, ενισχύοντας την αεροελαστική αστάθεια που εγγενώς δημιουργείται. Η ίδια συμπεριφορά παρατηρήθηκε και για άλλες συμμετρικές ως προς τη χορδή της αεροτομής διατάξεις των δεσμών.

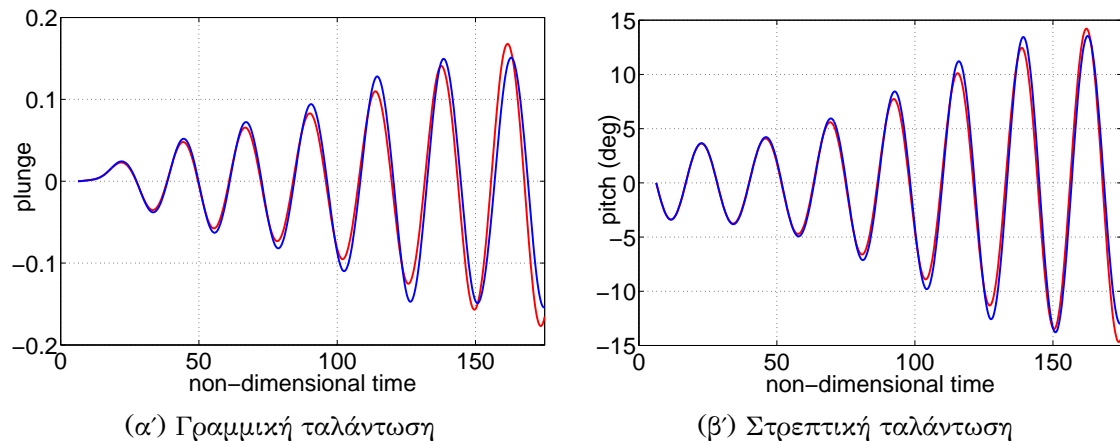
Στο σημείο αυτό τονίζεται ότι όλες οι δέσμες είναι μεταβαλλόμενες στο χρόνο, με την παροχή μάζας (άρα και την ταχύτητα, μιας και το πλάτος της οπής κάθε δέσμης είναι προαποφασισμένο) να μεταβάλλεται με βάση το σύστημα ελέγχου, παρακολουθώντας τις στιγμιαίες τιμές των μεγεθών της περιστροφικής κίνησης (λ.χ. την απομάκρυνση από την οριζόντια θέση της αεροτομής).

### 5.3.2 Περίπτωση 2: Ασύμμετρη τοποθέτηση των δεσμών ως προς τη χορδή της αεροτομής

Στις δοκιμές που θα ακολουθήσουν θεωρήθηκε κατανομή των χρησιμοποιούμενων δεσμών ρευστού μόνο στην πλευρά υπερπίεσης της αεροτομής, ενώ στην πλευρά υποπίεσης υποτέθηκε μόνο μία δέσμη. Στον πίνακα 5.3 συνοψίζονται όλα τα στοιχεία σχετικά με το πλήθος και τις θέσεις τοποθέτησης των δεσμών που χρησιμοποιήθηκαν στις εφαρμογές που θα αναφερθούν.

#### Εφαρμογή 1

Επιλέχθηκε η χρήση συνολικά τριών δεσμών, εκ των οποίων οι δύο τοποθετήθηκαν στην πλευρά υπερπίεσης, ενώ η άλλη στην πλευρά υποπίεσης. Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του αεροελαστικού προβλήματος με χρήση δεσμών,



Σχήμα 5.13: Ελεγχόμενη και μη-ελεγχόμενη ασταθής αεροελαστική απόκριση της αεροτομής NACA 64A010: (α') η γραμμική ταλαντωτική κίνηση, (β') η στρεπτική ταλαντωτική κίνηση. Με σκούρο/μπλε χρώμα σχεδιάστηκε η πρόλεξη της μη-ελεγχόμενης ταλάντωσης, ενώ με έντονο/κόκκινο χρώμα σχεδιάστηκε η πρόλεξη της ελεγχόμενης ταλάντωσης (Περίπτωση 1). Οι αρχικές συνθήκες των υπολογισμών είναι:  $\dot{\alpha} = -1$ ,  $\dot{h} = 0$ .

Εφαρμογή	1	2	3
Suction Side	0.50	0.10	0.05
Pressure Side	0.40/0.60	0.10/0.15/0.20/0.80/0.85/0.90	0.05 έως 0.95 ανά 0.05

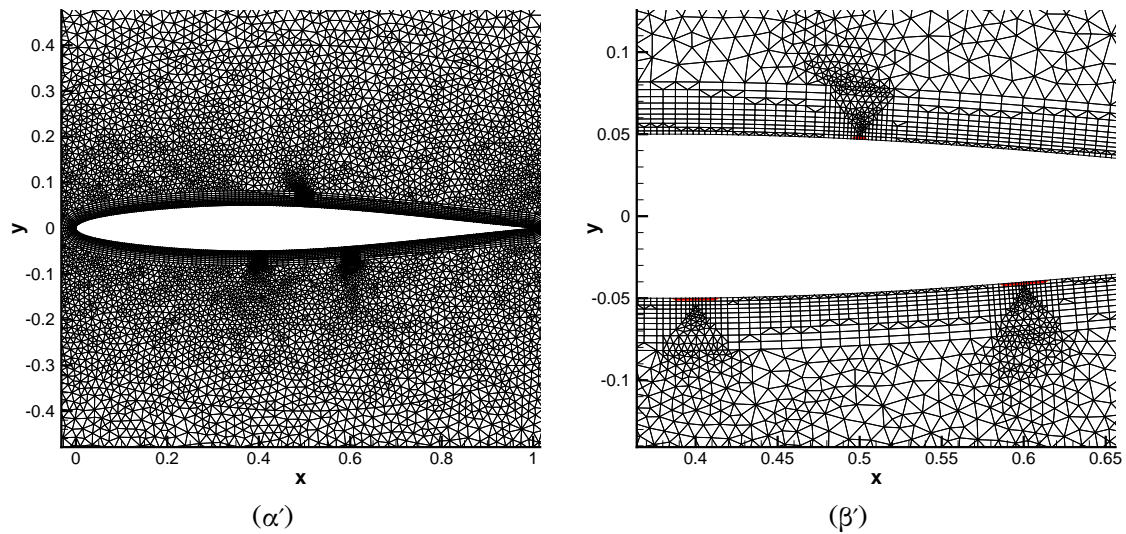
Πίνακας 5.3: Θέσεις τοποθέτησης των δεσμών που χρησιμοποιήθηκαν (Περίπτωση 2). Το πλάτος κάθε δέσμης που τοποθετείται στην πλευρά υπερπίεσης είναι σταθερό και ίσο με το 3% της χορδής, ενώ για τη δέσμη στην πλευρά υποπίεσης είναι ίσο με το 1% της χορδής.

διαφοροποιείται από αυτό που παρουσιάστηκε στο σχήμα 5.7, αφού απαιτεί την κατάλληλη πύκνωσή του στις περιοχές που θα τοποθετηθούν οι δέσμες (σχήμα 5.14). Όπως φαίνεται από το σχήμα 5.14(β'), η δέσμη που τοποθετήθηκε στην πλευρά υποπίεσης έχει αρκετά μικρότερο πλάτος οπής σε σχέση με τις δέσμες στην πλευρά υπερπίεσης. Ακόμη, τα κέρδη κλειστού βρόχου που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτή την εφαρμογή αναφέρονται στον πίνακα 5.4.

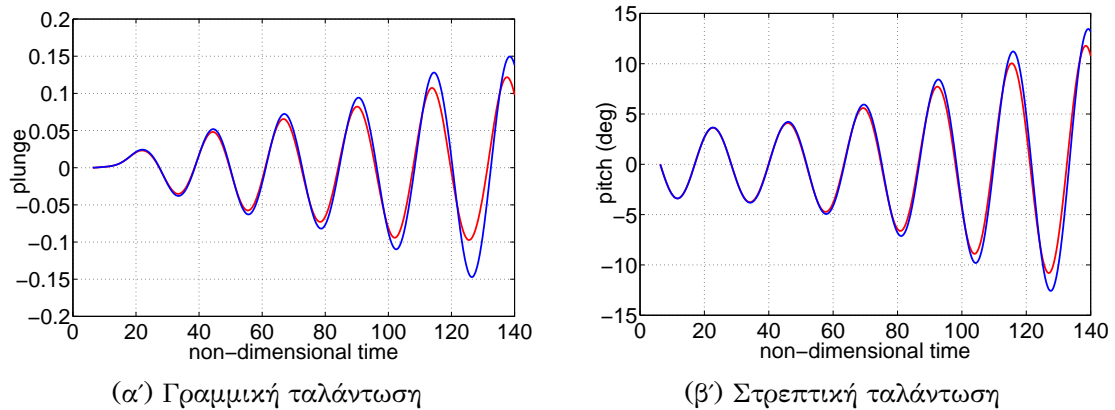
$\bar{m} = 0$
$G_{\alpha} = 0.01$
$G_{\alpha} = 0.001$

Πίνακας 5.4: Κέρδη κλειστού βρόχου (Εφαρμογή 1).

Στο σχήμα 5.16 φαίνεται η επίδραση των τριών δεσμών ρευστού στο διαμορφούμενο πεδίο του αριθμού *Mach* γύρω από την αεροτομή. Επίσης, στο σχήμα 5.15 φαίνεται η ελεγχόμενη αεροελαστική απόκριση που προέκυψε, σε σύγκριση με αυτή

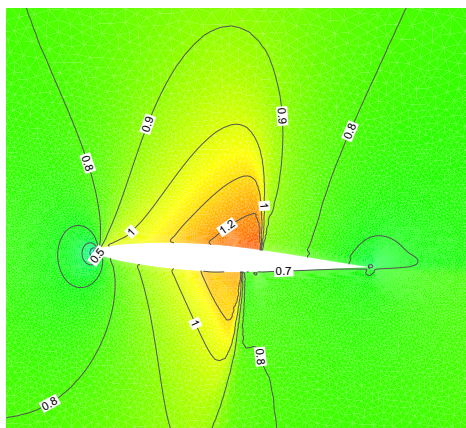


Σχήμα 5.14: Το υβριδικό πλέγμα που κατασκευάστηκε γύρω από την αεροτομή NACA 64A010, προσαρμοσμένο κατάλληλα γύρω από τις θέσεις τοποθέτησης των δεσμών (εφαρμογή 1): (α') το πλέγμα γύρω από όλη την αεροτομή, (β') το πλέγμα γύρω από την περιοχή τοποθέτησης των δεσμών, οι οποίες διακρίνονται με έντονο/κόκκινο χρώμα. Το πλάτος των οπών των δεσμών έχει σχεδιαστεί με ακρίβεια.

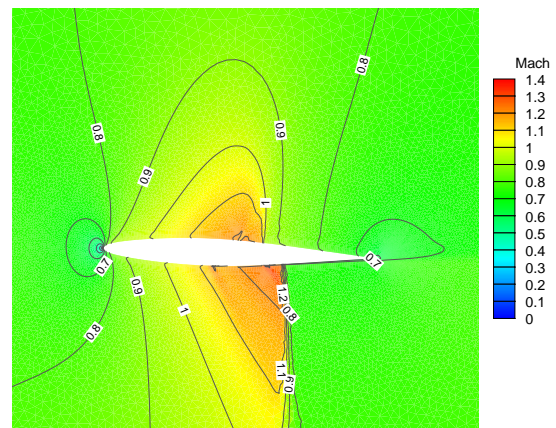


Σχήμα 5.15: Ελεγχόμενη και μη-ελεγχόμενη ασταθής αεροελαστική απόκριση της αεροτομής NACA 64A010: (α') η γραμμική ταλαντωτική κίνηση, (β') η στρεπτική ταλαντωτική κίνηση. Με σκούρο/μπλε χρώμα σχεδιάστηκε η πρόλεξη της μη-ελεγχόμενης ταλάντωσης, ενώ με έντονο/κόκκινο χρώμα σχεδιάστηκε η πρόλεξη της ελεγχόμενης ταλάντωσης (εφαρμογή 1). Οι αρχικές συνθήκες των υπολογισμών είναι:  $\dot{\alpha} = -1$ ,  $h = 0$ .

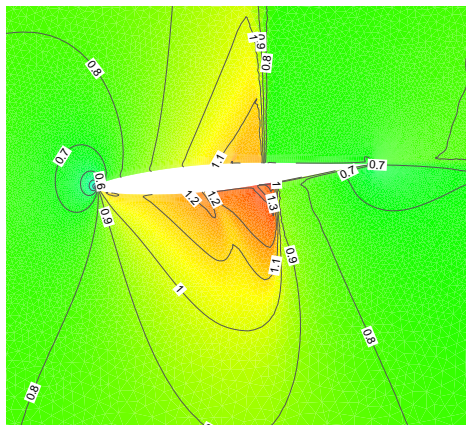
που αντιστοιχεί στην μη-ελεγχόμενη εφαρμογή και παρουσιάστηκε στο σχήμα 5.12. Όπως παρατηρείται, η επίδραση των δεσμών στο διαμορφούμενο πεδίο ροής οδηγεί στον περιορισμό του πλάτους της αποκλίνουσας ταλάντωσης, σε σχέση με τη μη-ελεγχόμενη περίπτωση, ιδίως για το γραμμικό βαθμό ελευθερίας. Στην επόμενη εφαρμογή δοκιμάστηκε η χρήση περισσότερων δεσμών ρευστού στην πλευρά υπερπίεσης.



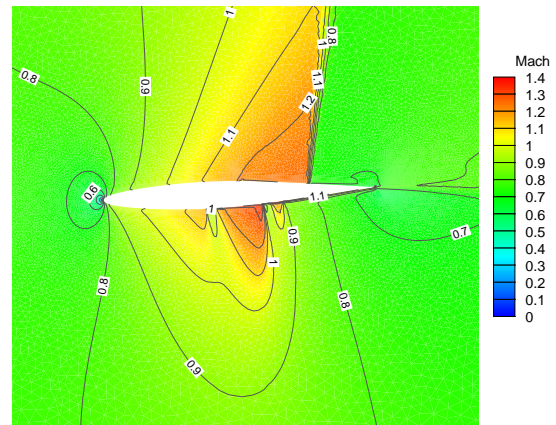
(α')  $\text{plunge} = -0.068$ ,  $\text{pitch} = -3.33^\circ$ , στη φάση απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας.



(β')  $\text{plunge} = -0.065$ ,  $\text{pitch} = -2.19^\circ$ , στη φάση απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας.



(γ')  $\text{plunge} = 0.087$ ,  $\text{pitch} = 4.90^\circ$ , στη φάση απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας.



(δ')  $\text{plunge} = 0.059$ ,  $\text{pitch} = 2.78^\circ$ , στη φάση απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας.

Σχήμα 5.16: Ελεγχόμενη αεροελαστική απόκριση αεροτομής NACA 64A010, δύο βαθμών ελευθερίας, με χρήση τριών μη-μόνιμων δεσμών ρευστού. Υπολογισθέντα πεδία του αριθμού *Mach* γύρω από την αεροτομή σε τέσσερις διαφορετικές φάσεις της κίνησης.

### Εφαρμογή 2

Όπως φάνηκε στην εφαρμογή 1, οι δέσμες που χρησιμοποιήθηκαν δεν θέτουν υπό πλήρη έλεγχο την αποκλίνουσα αεροελαστική ταλάντωση, ωστόσο η επίδρασή τους χαρακτηρίζεται ως θετική. Έτσι, είναι λογικό να ακολουθήσει μια δοκιμή χρήσης περισσότερων δεσμών ρευστού (βλ. πίνακα 5.3). Τα κέρδη κλειστού βρόχου που χρησιμοποιήθηκαν είναι ίδια με αυτά της εφαρμογής 1 (βλ. πίνακα 5.4), τα οποία επιλέχθηκαν μεταξύ άλλων έπειτα από αρκετές δοκιμές.

Η ελεγχόμενη αεροελαστική απόκριση της αεροτομής σε σχέση τόσο με τη μη-ελεγχόμενη, όσο και με την ελεγχόμενη απόκριση που αντιστοιχεί στην εφαρμογή 1, φαίνεται στο σχήμα 5.17. Όπως παρατηρείται, η αύξηση του πλήθους των δεσμών στην πλευρά υπερπίεσης οδήγησε σε ακόμα μεγαλύτερο περιορισμό του πλάτους της αποκλίνουσας ταλάντωσης, σε σχέση με την εφαρμογή 1. Για το λόγο αυτό, στην ακόλουθη εφαρμογή (εφαρμογή 3) χρησιμοποιήθηκαν ακόμα περισσότερες δέσμες ρευστού στην πλευρά υπερπίεσης. Να σημειωθεί, επίσης, ότι δοκιμάστηκε η αύξηση του πλήθους και των δεσμών που βρίσκονται στην πλευρά υποπίεσης, ωστόσο αυτό επέφερε τα αντίθετα από τα επιθυμητά αποτελέσματα.

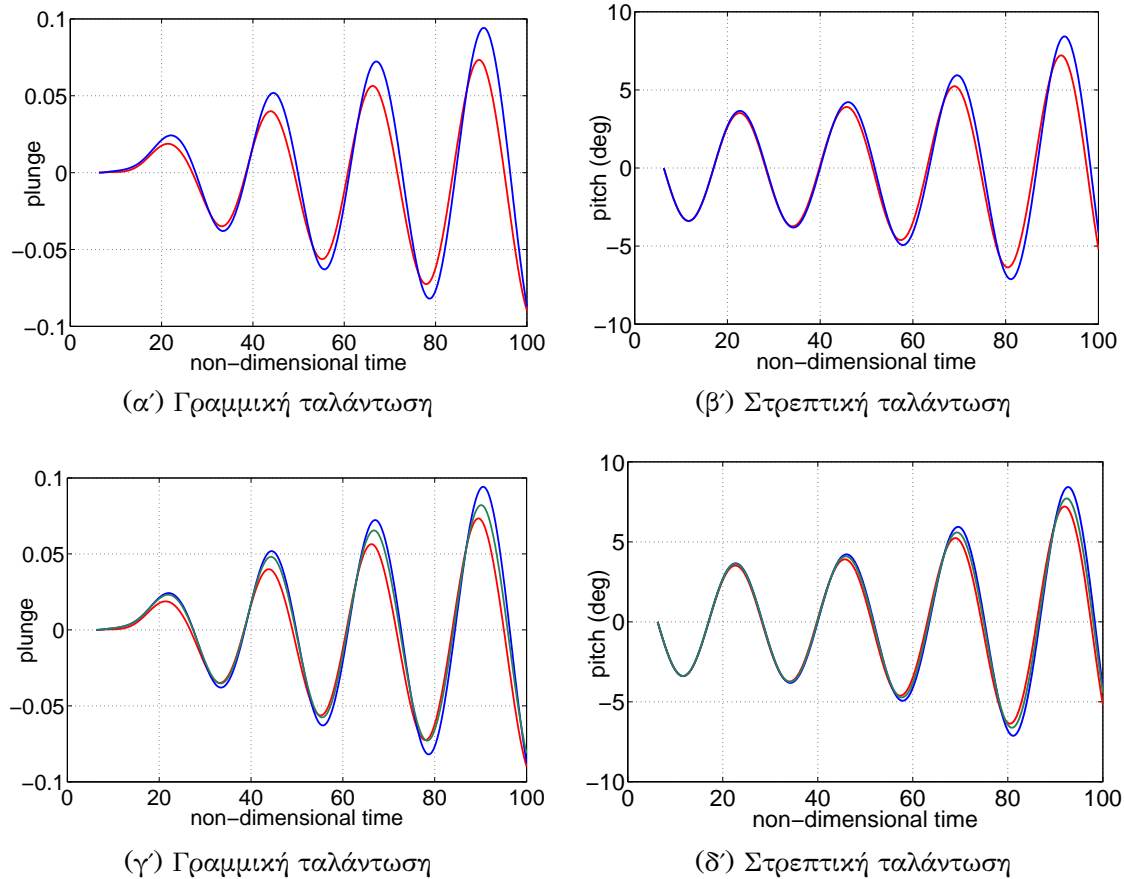
### Εφαρμογή 3

Με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις, φαίνεται πως η τοποθέτηση κατά το δυνατόν περισσότερων δεσμών στην πλευρά υπερπίεσης, τείνει να περιορίσει το πλάτος της αποκλίνουσας ταλάντωσης της αεροτομής. Έτσι, σε αυτή την εφαρμογή επιβάλλεται το μέγιστο πλήθος δεσμών στην πλευρά υπερπίεσης που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σύμφωνα με τους περιορισμούς του γενέτη πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε, ώστε να διαπιστωθούν τα όρια του υπό μελέτη μηχανισμού ελέγχου. Το πλέγμα της αεροτομής φαίνεται στο σχήμα 5.18, στο οποίο διακρίνονται με έντονο/κόκκινο χρώμα οι θέσεις τοποθέτησης των δεσμών. Τα κέρδη κλειστού βρόχου που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτή την περίπτωση φαίνονται στον πίνακα 5.5.

Στο σχήμα 5.19 συγκρίνεται η ελεγχόμενη αεροελαστική απόκριση που προκύπτει σε σχέση με τη μη-ελεγχόμενη. Όπως παρατηρείται, σε αντίθεση με τις προηγούμενες εφαρμογές, η λειτουργία των δεσμών οδηγεί σε περιορισμό του πλάτους ταλάντωσης ήδη από την πρώτη περίοδο, γεγονός που είναι αρκετά ενθαρρυντικό και υποδεικνύει ότι η χρήση περισσότερων δεσμών είναι πιο αποτελεσματική. Επίσης, ένα άμεσο συμπέρασμα που προκύπτει, είναι ότι η χρήση όλο και περισσότερων δεσμών καθιστά το πρόβλημα της εύρεσης των κατάλληλων τιμών για τα κέρδη κλειστού βρόχου πιο απαιτητικό.

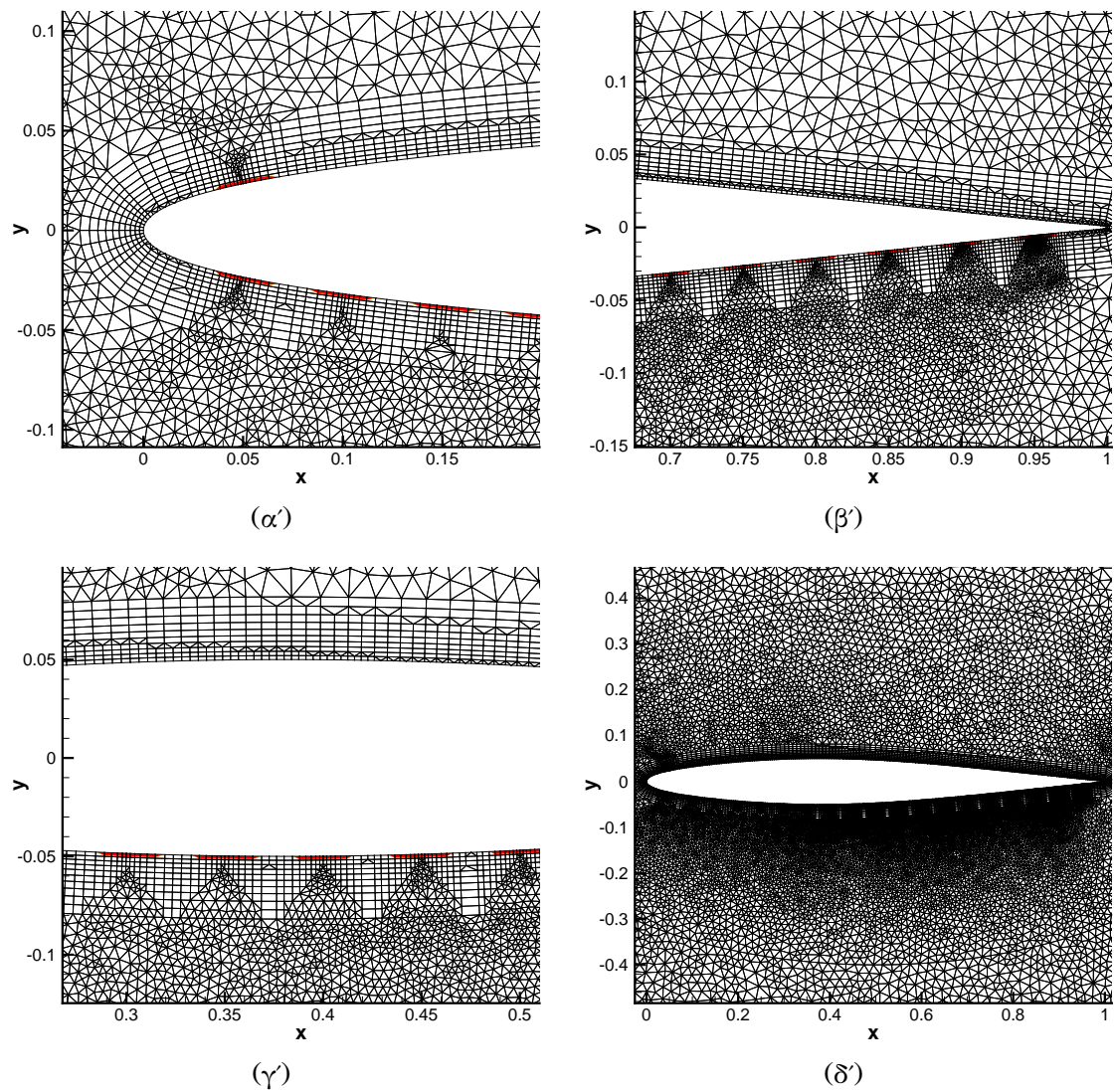
$\bar{m} = -0.01$
$G_{\alpha} = -0.01$
$G_{\alpha} = -0.001$

Πίνακας 5.5: Κέρδη κλειστού βρόχου (Εφαρμογή 3).

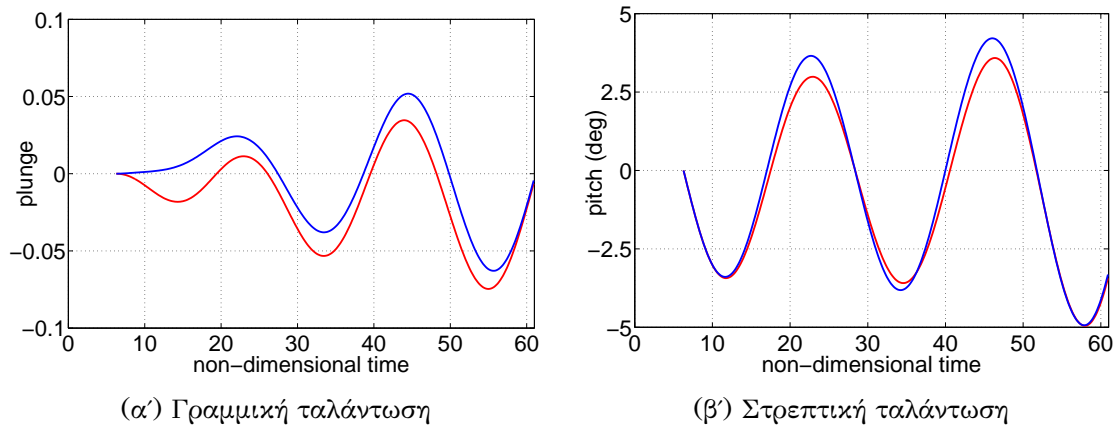


Σχήμα 5.17: Ελεγχόμενη και μη-ελεγχόμενη ασταθής αεροελαστική απόκριση της αεροτομής NACA 64A010: (α') η γραμμική ταλαντωτική κίνηση (εφαρμογή 2: έντονο/κόκκινο χρώμα, μη-ελεγχόμενη: σκούρο/μπλε χρώμα), (β') η στρεπτική ταλαντωτική κίνηση (εφαρμογή 2: έντονο/κόκκινο χρώμα, μη-ελεγχόμενη: σκούρο/μπλε χρώμα), (γ') η γραμμική ταλαντωτική κίνηση (εφαρμογή 1: ανοιχτό/πράσινο χρώμα, εφαρμογή 2: έντονο/κόκκινο χρώμα, μη-ελεγχόμενη: σκούρο/μπλε χρώμα), (δ') η στρεπτική ταλαντωτική κίνηση (εφαρμογή 1: ανοιχτό/πράσινο χρώμα, εφαρμογή 2: έντονο/κόκκινο χρώμα, μη-ελεγχόμενη: σκούρο/μπλε χρώμα). Οι αρχικές συνθήκες των υπολογισμών είναι:  $\dot{\alpha} = -1$ ,  $h = 0$ .





Σχήμα 5.18: Το υβριδικό πλέγμα που κατασκευάστηκε γύρω από την αεροτομή NACA 64A010, προσαρμοσμένο κατάλληλα γύρω από τις θέσεις τοποθέτησης των δεσμών (εφαρμογή 3): λεπτομέρεια του πλέγματος γύρω από (α') την ακμή πρόσπτωσης, (β') την ακμή εκφυγής, (γ') την περιοχή τοποθέτησης των δεσμών, οι οποίες διακρίνονται με έντονο/κόκκινο χρώμα, (δ') όλη την αεροτομή.



Σχήμα 5.19: Ελεγχόμενη και μη-ελεγχόμενη ασταθής αεροελαστική απόκριση της αεροτομής NACA 64A010: (α') η γραμμική ταλαντωτική κίνηση, (β') η στρεπτική ταλαντωτική κίνηση. Με σκούρο/μπλε χρώμα σχεδιάστηκε η πρόλεξη της μη-ελεγχόμενης ταλάντωσης, ενώ με έντονο/κόκκινο χρώμα σχεδιάστηκε η πρόλεξη της ελεγχόμενης ταλάντωσης (εφαρμογή 3). Οι αρχικές συνθήκες των υπολογισμών είναι:  $\dot{\alpha} = -1$ ,  $h = 0$ .

### 5.3.3 Επίλογος

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάστηκε μια σειρά προβλημάτων ελέγχου ασταθών αεροελαστικών εφαρμογών μέσω ενεργητικών μεθόδων. Στόχος ήταν η παραμετρική μελέτη της επίδρασης αυτών των μεθόδων ελέγχου στην απόσβεση της ασταθούς αεροελαστικής απόκρισης και όχι ο υπολογισμός του βέλτιστου ελέγχου, που απαιτεί μεταξύ άλλων και έναν πιο εξηζητημένο νόμο ελέγχου. Από την παραμετρική αυτή διερεύνηση, φάνηκε ότι οι μέθοδοι ενεργητικού ελέγχου μπορούν να συνδράμουν στη βελτίωση της αεροελαστικής συμπεριφοράς αεροτομής.

## Κεφάλαιο 6

# Ανακεφαλαίωση-Συζήτηση-Συμπεράσματα

Η διπλωματική αυτή εργασία είχε διττό στόχο. Πρώτος στόχος ήταν ο προγραμματισμός ενός κώδικα υπολογιστικής ρευστοδυναμικής για εφαρμογές αεροελαστικότητας, με έμφαση στο τμήμα του λογισμικού που διαχειρίζεται την κίνηση του στερεού σώματος (δηλαδή εδώ μιας αεροτομής). Δεύτερος στόχος ήταν η δημιουργία της απαραίτητης υποδομής (σε μεθόδους αλλά κυρίως σε λογισμικό), προκειμένου να εφαρμοστούν τεχνικές ενεργητικού ελέγχου ροής (χρήση δεσμών ρευστού, jets), με σκοπό την απόσβεση των αεροδυναμικά επαγόμενων ταλαντώσεων σε τομές πτερύγων (αεροτομές). Η συνεισφορά της διπλωματικής εργασίας στο δεύτερο στόχο ήταν κυρίως διερευνητική-προπαρασκευαστική, υπό την έννοια ότι σκόπευε να δημιουργήσει το σύνολο του απαιτούμενου λογισμικού για την αεροελαστική ανάλυση μιας αεροτομής με χρήση ελέγχου ροής. Η χρήση δεσμών ρευστού ωστόσο εμπεριέχει αρκετές ιδιαιτερότητες, για την αντιμετώπιση των οποίων πρέπει να εφαρμοστούν μέθοδοι βελτιστοποίησης. Η χρήση μεθόδων βελτιστοποίησης εξαρχής ξέφευγε από το πλαίσιο αυτής της εργασίας, ωστόσο κρίνεται απαραίτητη για τη μελλοντική εξέλιξή της. Τελικά, στόχος ήταν η προετοιμασία όλων των απαραίτητων εργαλείων που θα απαιτηθούν σε μια επόμενη εργασία, η οποία θα έχει ως κύριο αντικείμενο τη βελτιστοποίηση των βασικών παραμέτρων του προβλήματος ελέγχου, με χρήση λ.χ. μιας στοχαστικής μεθόδου [20].

Βασικό τμήμα και συνεισφορά της διπλωματικής εργασίας, είναι η επέκταση του λογισμικού αεροδυναμικής ανάλυσης που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της ερευνητικής δραστηριότητας της ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ στο παρελθόν, με τον προγραμματισμό ενός επιλύτη αεροελαστικών προβλημάτων. Πιο συγκεκριμένα, οι επεκτάσεις που έγιναν συνοφίζονται ακολούθως:

- Μετακίνηση του μη-δομημένου πλέγματος που χρησιμοποιείται για τη διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου, ανάλογα με τη μετακίνηση της αεροτομής. Τα στοιχεία του πλέγματος δεν παραμορφώνονται, αλλά ακολουθούν την κίνηση της αεροτομής ως ένα 'στερεό σώμα' προσδεδεμένο σε αυτή.
  - Υπολογισμός των ταχυτήτων μετακίνησης των κόμβων του πλέγματος, καθώς
-

και των αριθμητικών διανυσμάτων ροής που οφείλονται στη μετακίνηση των κόμβων του πλέγματος.

- Υπολογισμός των αριθμητικών διανυσμάτων ροής των οριακών κόμβων που οφείλονται στη μετακίνηση του πλέγματος και ανανέωση των οριακών συνθηκών.
- Προγραμματισμός επιλύτη των ελαστικών εξισώσεων ισορροπίας για απαράμορφωτη αεροτομή, με ένα στρεπτικό και ένα γραμμικό βαθμό ελευθερίας.
- Σύζευξη του αεροδυναμικού με το ελαστικό πρόβλημα με χρήση της μεθόδου Runge-Kutta 4ης τάξης, αντί της τεχνικής Dual Time Stepping.

Παράλληλα με τον προγραμματισμό του λογισμικού, παρέχεται πλήρης θεωρητική κάλυψη του αντικειμένου και των όσων αναφέρθηκαν επιγραμματικά παραπάνω, με αυστηρά μαθηματικό τρόπο.

Στη συνέχεια, ο αεροελαστικός επιλύτης που προγραμματίστηκε αξιολογήθηκε βάσει πειραματικών μετρήσεων [51], για την περίπτωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης μιας αεροτομής τύπου NACA 0012. Επίσης, η απόδοσή του συγκρίθηκε με την απόδοση ενός επαρκώς αξιολογημένου GPU-επιλύτη που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της ερευνητικής δραστηριότητας της ΜΠΥΡ&B/EΘΣ [36]. Μετά τη διαδικασία πιστοποίησης του λογισμικού, η οποία κρίθηκε επιτυχημένη, ακολούθησε η αριθμητική προσομοίωση της αεροελαστικής απόκρισης της αεροτομής NACA 64A010, για διάφορες συνθήκες ροής. Από τη διαδικασία αυτή, αναδείχθηκε το μείζον (σε αεροελαστικές εφαρμογές) ζήτημα του αυξημένου υπολογιστικού κόστους που συνεπάγεται η χρήση του CPU-αεροελαστικού επιλύτη.

Η τελευταία διαπίστωση, οδήγησε στη χρήση του αντίστοιχου GPU-κώδικα του εργαστηρίου για την εφαρμογή των τεχνικών ενεργητικού ελέγχου ροής σε αεροελαστικά προβλήματα, προκειμένου να εξοικονομηθούν υπολογιστικοί πόροι. Οι τροποποιήσεις που έγιναν στον GPU-αεροελαστικό επιλύτη αφορούν στον τρόπο επιβολής των οριακών συνθηκών στους κόμβους όπου θα τοποθετηθούν δέσμες ρευστού, καθώς και στην εφαρμογή ενός απλού αναλογικού νόμου ελέγχου, ο οποίος καθορίζει τη λειτουργία των δεσμών. Με χρήση του επιλύτη αυτού, προσομοιώνεται η απόκριση της αεροτομής τύπου NACA 64A010 για συγκεκριμένες συνθήκες εξωτερικής ροής, δοκιμάζοντας παράλληλα διαφορετικές διατάξεις για τις δέσμες και τα κέρδη των χρησιμοποιούμενων κατευθυντών. Παρατηρήθηκε ότι συγκεκριμένες διατάξεις δεσμών επιδρούν ευεργετικά στον περιορισμό των αεροελαστικών ταλαντώσεων, χωρίς ωστόσο να επιτυγχάνουν την πλήρη απόσβεσή τους.

Βάσει των ανωτέρω, αποδεικνύεται ότι ο έλεγχος της ασταθούς αεροελαστικής απόκρισης μιας αεροτομής είναι ένα πολυδιάστατο πρόβλημα, που συνδυάζει στοιχεία από δύο διαφορετικές επιστημονικές περιοχές.

- Αφενός απαιτείται η χρήση ενός πολύ αποδοτικού ελεγκτή, ο οποίος θα υλοποιεί ένα σύνθετο νόμο ελέγχου, ικανό να προβλέψει τη συμπεριφορά της αεροτομής στις επόμενες χρονικές στιγμές και να υπολογίσει τη μελλοντικά

απαιτούμενη δράση ελέγχου. Αυτός ο τρόπος ελέγχου είναι γνωστός ως ‘ρύθμιση πρόδρασης’, ενώ για την υλοποίησή του απαιτείται αρκετά εκτεταμένη έρευνα σε θέματα της επιστήμης του αυτομάτου ελέγχου. Ενδεικτικά στοιχεία για την εφαρμογή αυτού του τρόπου ελέγχου σε εφαρμογές αεροδυναμικής μπορούν να αναζητηθούν στη βιβλιογραφία [57]. Είναι κατανοητό ότι η υιοθέτηση και χρήση ενός απλοϊκού αναλογικού νόμου ελέγχου, όπως αυτός που παρουσιάστηκε στην ενότητα 5.2.3, ο οποίος βασίζεται στη ρύθμιση μέσω ‘ανάδρασης’, δεν επιφέρει τα επιθυμητά αποτελέσματα.

- Αφετέρου επιβάλλεται η χρήση μεθόδων βελτιστοποίησης για τον προσδιορισμό των τιμών των βασικών παραμέτρων που επηρεάζουν το πρόβλημα. Όπως φάνηκε από τις εφαρμογές που παρατέθηκαν στην ενότητα 5.3, η χρήση ‘λογικών’ τιμών για τις θέσεις στις οποίες θα πρέπει να τοποθετηθούν οι δέσμες ή η αυθαίρετη επιλογή των κερδών των αναλογικών κατευθυντών που χρησιμοποιούνται, οδηγεί μεν στη βελτίωση της αεροελαστικής απόκρισης της αεροτομής αλλά όχι στον πλήρη έλεγχό της. Είναι λοιπόν κατανοητό ότι απαιτείται συστηματική έρευνα με χρήση μεθόδων βελτιστοποίησης, για τον ακριβή καθορισμό των τιμών των παραμέτρων που ρυθμίζουν μια αποδοτική εφαρμογή του ενεργητικού ελέγχου ροής.

Τελικά, σε αυτή τη μελέτη αποδεικνύεται ότι η χρήση ενεργητικών τεχνικών ελέγχου ροής για την καταστολή των ασταθών αεροελαστικών ταλαντώσεων αεροτομής, μοιάζει εφικτή. Ωστόσο, αναγκαία προϋπόθεση για την επίτευξη αυτού του στόχου, αποτελεί η χρήση μεθόδων βελτιστοποίησης, για τον προσδιορισμό των κατάλληλων τιμών των βασικών παραμέτρων του προβλήματος. Έτσι, αυτή η διπλωματική εργασία προσφέρει όλα τα απαραίτητα εργαλεία (θεωρητική θεμελίωση του προβλήματος και κατάλληλο λογισμικό ανάλυσης) για την περαιτέρω επεξεργασία του θέματος, κατά τις ακόλουθες κατευθύνσεις:

1. Εύρεση ενός αποτελεσματικού νόμου ελέγχου και χρήση κατάλληλων κατευθυντών για την υλοποίησή του.
2. Βελτιστοποίηση των παραμέτρων που εμπλέκονται στη διαδικασία του ενεργητικού ελέγχου ροής.
3. Αύξηση των βαθμών ελευθερίας του 2Δ προβλήματος.
4. Επέκταση του λογισμικού για την προσομοίωση 3Δ εφαρμογών (π.χ. πτέρυγες).



# Παράρτημα Α΄

## Θεμελιώδη θεωρήματα από τα Μαθηματικά

### Α΄.1 Το θεώρημα Green-Gauß

Το θεώρημα αυτό είναι επίσης γνωστό ως θεώρημα του *Gauß* και στη διεθνή βιβλιογραφία φέρεται υπό τον όρο *Divergence Theorem* (θεώρημα της Απόκλισης). Αποτελεί ένα από τα θεμελιώδη θεωρήματα στα οποία βασίζεται η επιστήμη της μηχανικής των ρευστών και πρόκειται για μια υποπερίπτωση του θεωρήματος του *Stokes*.

Με απλά λόγια, εκφράζει την ισορροπία που πρέπει να ισχύει μεταξύ της ροής του ρευστού διαμέσου των ορίων ενός όγκου ελέγχου και της δράσης των πηγών και καταβοθρών που δραστηριοποιούνται μέσα στον όγκο αυτό. Μαθηματικά συνοψίζεται στην ακόλουθη έκφραση:

$$\iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{F}) d\Omega = \iint_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) d(\partial\Omega) \quad (\text{Α΄.1})$$

ή αλλιώς:

$$\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial \vec{F}_i}{\partial x_i} \right) d\Omega = \iint_{\partial\Omega} (\vec{F}_i \cdot \mathbf{n}_i) d(\partial\Omega) \quad (\text{Α΄.2})$$

Στο αριστερό μέλος των παραπάνω σχέσεων βρίσκεται το ογκικό ολοκλήρωμα στον όγκο  $\Omega$  της απόκλισης ενός οποιουδήποτε διανυσματικού πεδίου  $\vec{F}$ , για παράδειγμα

του διανύσματος των συντηρητικών μεταβλητών ενός πεδίου ροής,  $\vec{F} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}$

Στο δεξιό μέλος βρίσκεται το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου επί το κάθετο -στην επιφάνεια- (μοναδιαίο) διάνυσμα με φορά προς τα έξω, στο όριο του όγκου  $\partial\Omega$ .

---

Το μεγάλο πλεονέκτημα που διέπει τη χρήση αυτού του θεωρήματος είναι η δυνατότητα αποφυγής υπολογισμού των διανυσματικών ποσοτήτων στο εσωτερικό του πεδίου, και ο χειρισμός του μόνο με βάση τις υπολογισθείσες τιμές επί των ορίων.

## Α.2 Το θεώρημα του Leibniz

Το θεώρημα αυτό είναι επίσης γνωστό με τον όρο *Reynolds' Transport Theorem* ή αλλιώς *Leibniz-Reynolds' Transport Theorem* και αποτελεί στην ουσία μια γενίκευση του ολοκληρωτικού θεωρήματος του Leibniz που φέρεται υπό τον όρο *Leibniz integral rule*.

Στην εργασία αυτή εφαρμόστηκε κατά τη διακριτοποίηση του χρονικού όρου, ώστε να προκύψουν οι επιπλέον συνεισφορές που οφείλονται στην κίνηση του πλέγματος (το οποίο ακολουθεί την κίνηση της αεροτομής). Μαθηματικά συνοψίζεται στην ακόλουθη έκφραση:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} \mathbf{F} d\Omega = \iiint_{\Omega(t)} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} d\Omega + \iint_{\partial\Omega(t)} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{F} d(\partial\Omega) \quad (\text{A'.3})$$

Στο αριστερό μέλος της εξίσωσης υπάρχει το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}$  το οποίο ολοκληρώνεται στον όγκο του υπολογιστικού χωρίου  $\Omega(t)$ . Προφανώς το ολοκλήρωμα αυτό εξαρτάται μόνο από το χρόνο, γι' αυτό χρησιμοποιείται το σύμβολο της ολικής παραγωγής.

Στο δεξιό μέλος, ο πρώτος όρος αφορά στην εξάρτηση του πεδίου από το χρόνο ενώ ο δεύτερος περιλαμβάνει το εσωτερικό γινόμενο των ταχυτήτων μετακίνησης του χωρίου με τα αντίστοιχα κάθετα διανύσματα. Να σημειωθεί ότι οι ταχύτητες μετακίνησης του χωρίου δεν πρέπει να συγχέονται με τις ταχύτητες του ρευστού στις διάφορες θέσεις του χωρίου. Αν θεωρήσουμε ως  $\vec{U}$  το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών του πεδίου ροής, τότε η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί ως:

$$\iiint_{\Omega(t)} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} \vec{U} d\Omega - \iint_{\partial\Omega(t)} (\vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}) \vec{U} d(\partial\Omega) \quad (\text{A'.4})$$

Η μορφή αυτή είναι και η συχνότερα χρησιμοποιούμενη, αφού αναλύει τον πραγματικό χρονικό όρο που εμφανίζεται στις εξισώσεις Euler<sup>1</sup> σε δύο επιμέρους όρους, ώστε να ληφθεί υπόψη η μετακίνηση του πλέγματος, η οποία αντικατοπτρίζεται στις ταχύτητες  $\vec{u}_{grid}$ .

<sup>1</sup>βλ. ενότητα 2.9



## Παράρτημα Β΄

# Πρωτότυπη εφαρμογή του παθητικού ελέγχου ροής

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρατεθεί μια ακόμη εφαρμογή του παθητικού ελέγχου ροής ρευστού, που ξεφεύγει αρκετά από το πλαίσιο της εργασίας, ωστόσο είναι ενδεικτική του εύρους στο οποίο μπορούν να εφαρμοστούν τεχνικές ελέγχου ροής ρευστών. Πρόκειται για μια εφαρμογή από τον τομέα της βιορευστομηχανικής και βιοϊατρικής τεχνολογίας, στην οποία οι αιτίες που καθιστούν αναγκαίο τον έλεγχο της ροής βασίζονται στο μη-νευτώνειο χαρακτήρα των βιολογικών υγρών και, εν προκειμένω, του αίματος. Ακόμη, πρόκειται για μια πειραματική μελέτη, σε αντίθεση με αυτές που αναφέρθηκαν στην εισαγωγή της εργασίας, που ήταν καθαρά υπολογιστικές.

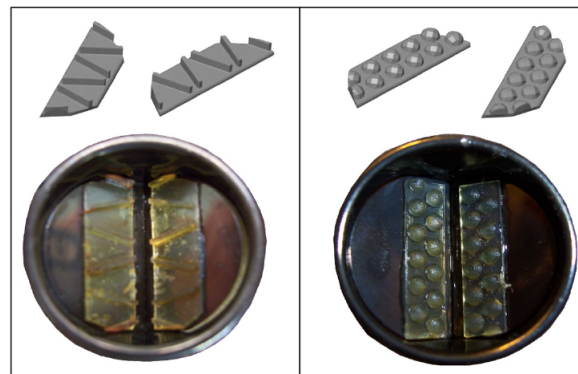
### Εφαρμογή στη βιορευστομηχανική και βιοϊατρική τεχνολογία

Η μελέτη [58], εστιάζει στη χρήση παθητικών μεθόδων ελέγχου ροής για τον περιορισμό της δέσμης διαρροής που σχηματίζεται κατά το κλείσιμο των φύλλων μιας τεχνητής καρδιακής βαλβίδας. Όπως είναι γνωστό, η εξασφάλιση της ροής προς μια μόνο κατεύθυνση εντός της ανθρώπινης καρδιάς επιτυγχάνεται με τη λειτουργία τεσσάρων βαλβίδων αντεπιστροφής, δύο κολποκοιλιακών και δύο μηνοειδών ή αρτηριοκοιλιακών που λειτουργούν ως βαλβίδες εξόδου από τις κοιλίες προς τους αντίστοιχους κυκλοφορικούς κλάδους. Ωστόσο, κάτω από ορισμένες συνθήκες, οι βαλβίδες αυτές ενδέχεται να παρουσιάσουν προβλήματα κατά τη λειτουργία τους και όπως έχει παρατηρηθεί αυτό συμβαίνει συχνότερα στις βαλβίδες της αριστερής καρδιάς. Η δυσλειτουργία μιας βαλβίδας, από παθολογοανατομική άποψη, μπορεί να εκφραστεί ως στένωση, ανεπάρκεια (δηλαδή μη-ελεγχόμενη οπισθοροή του αίματος) ή ενδοκαρδίτιδα (βακτηριακή μόλυνση της βαλβίδας). Για το λόγο αυτό, έχουν αναπτυχθεί τεχνητές βαλβίδες, που με τη βοήθεια της σύγχρονης ιατρικής μπορούν να αντικαταστήσουν τις προβληματικές και να αυξηθεί έτσι το προσδόκιμο ζωής του ασθενή. Οι τεχνητές αυτές βαλβίδες είναι είτε μηχανικές, είτε βιολογικές ή βιομοσχεύματα, με κάθε μία κατηγορία να συνοδεύεται από τα δικά της πλεονεκτήματα.

---



Σχήμα Β'.1: Η τεχνητή μηχανική βαλβίδα *St. Jude Medical Standard*.



Σχήμα Β'.2: Προοπτική απεικόνιση των δύο τύπων γεννητριών δίνης που χρησιμοποιήθηκαν (ορθογωνικές και ημισφαιρικές), κατασκευασμένες με την τεχνική της στερεολιθογραφίας [58].

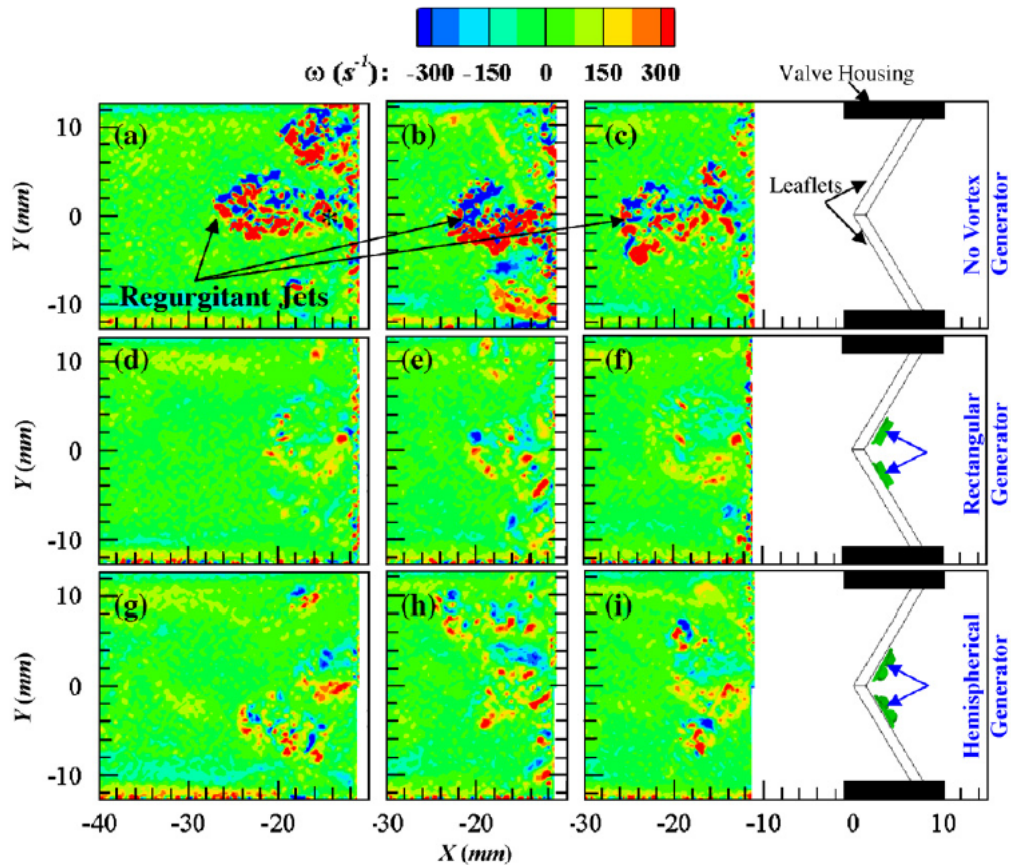
Το σημαντικότερο πρόβλημα των μηχανικών βαλβίδων είναι η πρόκληση θρομβογεννητικών και θρομβοεμβολικών επεισοδίων. Σε αυτή τη μελέτη, αναλύεται ο μηχανισμός που προκαλεί τέτοια φαινόμενα, ο οποίος συνίσταται στο σχηματισμό μιας ισχυρής δέσμης διαρροής κατά τη φάση του κλεισίματος των φύλλων της βαλβίδας. Το αίμα αποτελεί μη-νευτώνειο ρευστό, όντας στην ουσία ένα γαλάκτωμα σωματιδίων σε υδατικό διάλυμα μεταβλητής σύστασης (πλάσμα). Το πλάσμα χρησιμεύει ως φορέας μεταφοράς των έμμορφων στοιχείων του αίματος, τα σημαντικότερα εκ των οποίων είναι τα ερυθρά και λευκά αιμοσφαίρια και τα αιμοπετάλια. Έτσι, ο σχηματισμός μιας ισχυρής δέσμης διαρροής στην οποία επικρατούν υψηλές τυρβώδεις τάσεις, οδηγεί στον τραυματισμό αυτών των σωματιδίων και προκαλεί την ενεργοποίηση των αιμοπεταλίων, με αποτέλεσμα τον κίνδυνο σχηματισμού θρόμβου. Είναι λοιπόν απαραίτητη η τροποποίηση της ροής σε μικροκλίμακα ώστε να αποφευχθούν τέτοιες επιδράσεις, χωρίς παράλληλα να χρειαστεί να μεταβληθεί ο σχεδιασμός της βαλβίδας για τις μεγαλύτερες κλίμακες ροής. Η μελέτη αυτή

στηρίχθηκε στα αποτελέσματα αρκετών άλλων μελετών, τα οποία διαμορφώνονται πάνω σε δύο άξονες. Ο πρώτος, αφορά το ότι οι διατμητικές τάσεις που επικρατούν σε μια δέσμη διαρροής από μια μηχανική βαλβίδα επιφέρουν τραυματισμό των ερυθροκυττάρων όταν ξεπερνούν τα 10 Pa και ενεργοποιούν τα αιμοπετάλια του πλάσματος. Παράλληλα, τάσεις Reynolds μεγαλύτερες από 800 Pa οδηγούν στην έναρξη της αιμόλυσης, δηλαδή της καταστροφής των ερυθρών αιμοσφαιρίων και τη διάχυση της αιμοσφαιρίνης στο περιβάλλον μέσο (πρόκληση αναιμίας). Ο δεύτερος άξονας συνίσταται στην απλή λογική ότι εφόσον οι διατμητικές τάσεις είναι αυτές που ευθύνονται για την καταστροφή, μπορούν να μειωθούν δραστικά εφόσον επηρεαστεί το αίτιο που τις προκαλεί, δηλαδή η δύναμη αντίστασης. Έτσι, προτείνεται ο παθητικός έλεγχος της ροής ο οποίος αποδεδειγμένα μειώνει τις διατμητικές δυνάμεις αντίστασης.

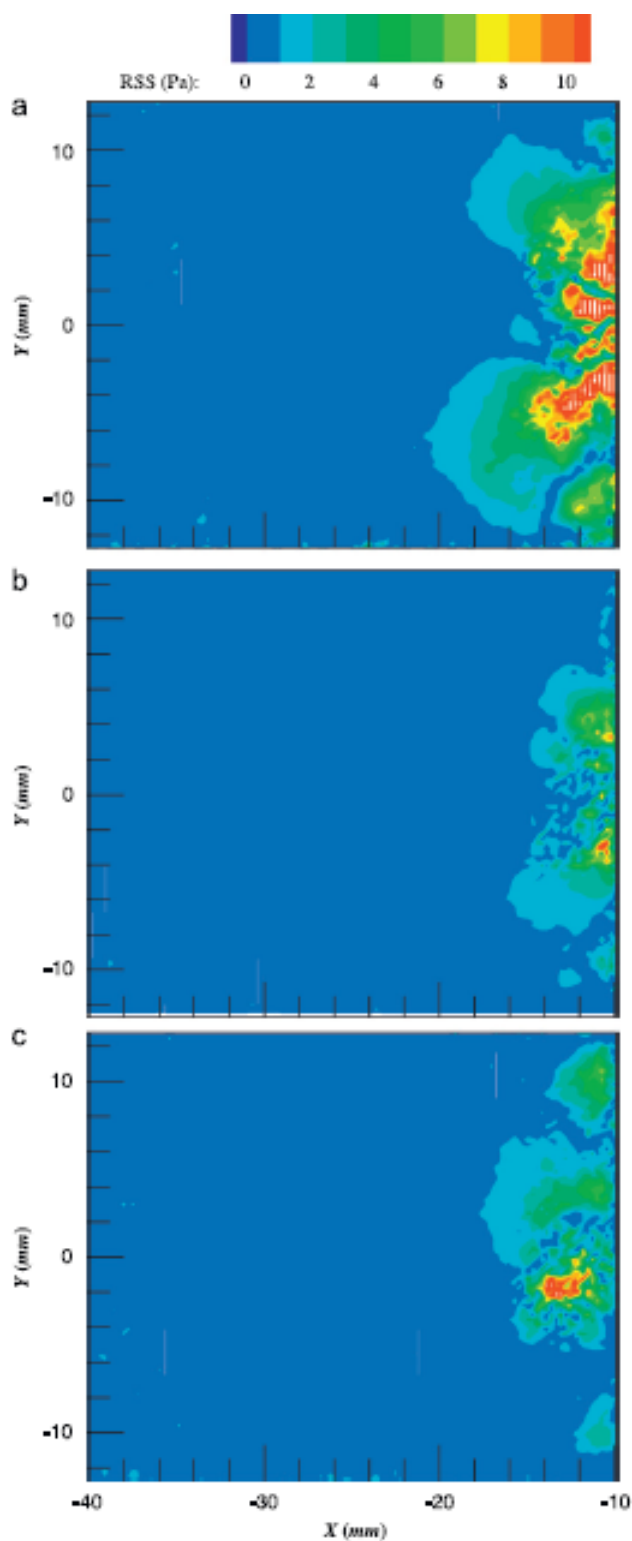
Η βαλβίδα που επιλέχθηκε είναι γνωστή ως *St. Jude Medical Standard valve*, αποτελείται από δύο φύλλα, και έχει ονομαστική διάμετρο 25 mm, ενώ οι γεννήτριες δίνης που χρησιμοποιήθηκαν τοποθετήθηκαν στις κατάντι επιφάνειες των φύλλων της βαλβίδας. Στο σχήμα Β'.1 φαίνεται η μορφή της βαλβίδας χωρίς την προσθήκη των γεννητριών δίνης, ενώ στο σχήμα Β'.2 φαίνονται οι γεννήτριες δίνης που επιλέχθηκαν να χρησιμοποιηθούν, καθώς και η τοποθέτησή τους επί των φύλλων της βαλβίδας. Οι ορθογωνικές γεννήτριες έχουν ύψος 1 mm και σχηματίζουν γωνία  $\pm 15^\circ$  σε σχέση με την κύρια ροή, ενώ οι ημισφαιρικές έχουν διάμετρο 1 mm και απέχουν μεταξύ τους κατά 0.5 mm. Στη συνέχεια, επικολλήθηκαν με σιλικόνη πάνω στις κατάντι επιφάνειες των φύλλων της βαλβίδας, η οποία τοποθετήθηκε σε έναν εξομοιωτή αριστερής καρδιάς. Η μέτρηση των ταχυτήτων της ροής έγινε μέσω της μεθόδου PIV (Particle Image Velocimetry), για συνθήκες τόσο μόνιμης όσο και παλλόμενης ροής.

Στο σχήμα Β'.3 φαίνονται τα αποτελέσματα του πειράματος για την περίπτωση της παλλόμενης ροής. Ως μέτρο του μεγέθους της σχηματιζόμενης δέσμης χρησιμοποιείται η στροβιλότητα, η κατανομή της οποίας-στην περίπτωση που δεν χρησιμοποιήθηκαν γεννήτριες δίνης-φανερώνει την ύπαρξη μιας ισχυρής στιγμιαίας δέσμης η οποία διαφεύγει από τη γραμμή επαφής των φύλλων της βαλβίδας (*b-datum line*). Το πεδίο στροβιλότητας που δημιουργείται σε αυτή την περίπτωση φανερώνει τόσο ένα ισχυρό πεδίο διάτμησης όσο και στροβιλισμού, τα οποία σε συνδυασμό δημιουργούν αυτή τη δέσμη διαρροής. Αντίθετα, στην περίπτωση βαλβίδας με ορθογωνικές γεννήτριες δίνης στα κατάντι της ροής παρουσιάζεται η διάχυση των δομών υψηλής στροβιλότητας στο χώρο, και η δημιουργία δομών πολύ μικρότερης έντασης. Στην περίπτωση χρήσης ημισφαιρικών γεννητριών η διάχυση αυτή είναι ασθενέστερη.

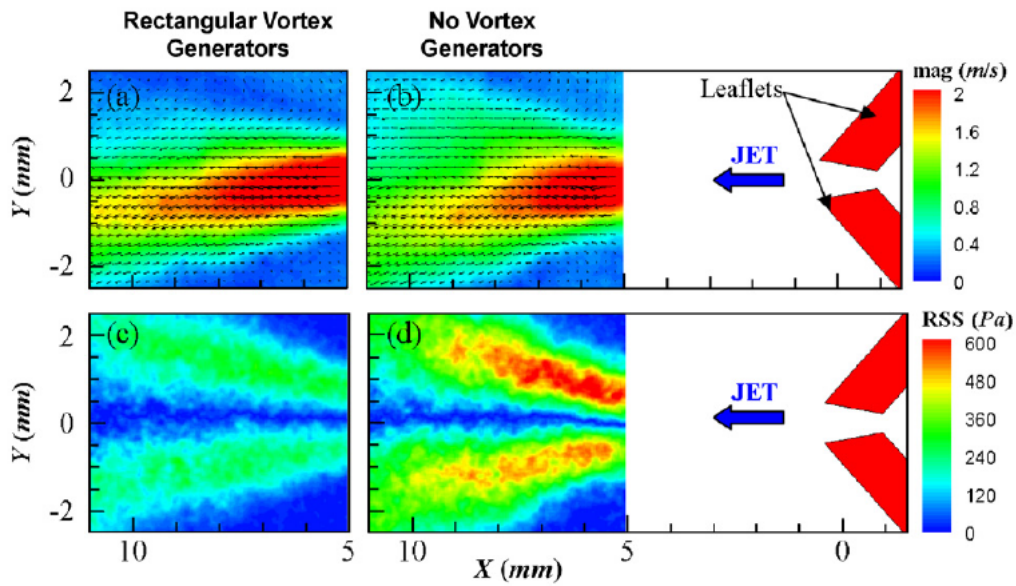
Στο σχήμα Β'.4, το οποίο αντιστοιχεί πάλι σε παλλόμενη ροή, παρουσιάζεται η χρονικά-μέση κατανομή των μη-μόνιμων τάσεων Reynolds. Στην απλή περίπτωση επικρατούν τυρβώδεις τάσεις της τάξης των 20 Pa ενώ χρήση γεννητριών δίνης οδηγεί σε δραστική μείωση τόσο της συγκέντρωσης αυτών, όσο και της έντασής τους. Τέλος, στο σχήμα Β'.5 φαίνονται τα αποτελέσματα υπό συνθήκες μόνιμης ροής και συγκεκριμένα η χρονικά-μέση ταχύτητα και οι τάσεις Reynolds για την περίπτωση χωρίς και με ορθογωνικές γεννήτριες δίνης. Όπως μπορεί να διαπιστωθεί, η μέση ταχύτητα ροής της δέσμης διαρροής είναι μεγαλύτερη για τη δεύτερη περίπτωση.



Σχήμα Β'3: Τρία στιγμιότυπα του στιγμιαίου πεδίου στροβιλότητας στα ανάντι της βαλβίδας, κατά τη στιγμή του κλεισίματός της. Στα σχήματα (a-c) φαίνονται τα στιγμιότυπα της απλής περίπτωσης, στα (d-f) με ορθογωνικές και στα (g-i) με ημισφαιρικές γεννήτριες δίνης [58].



Σχήμα Β'.4: Επίδραση των γεννητριών δίνης στις τάσεις Reynolds για τη μη-μόνιμη δέσμη διαρροής υπό συνθήκες παλλόμενης ροής. Στο σχήμα (a) φαίνεται η απλή περίπτωση, στο σχήμα (b) η περίπτωση ορθογωνικών ενώ στο σχήμα (c) η περίπτωση ημισφαιρικών γεννητριών δίνης [58].



Σχήμα Β'.5: Ισογραμμές της μέσης ταχύτητας (a-b) και των τάσεων Reynolds (c-d) για τη μόνιμη δέσμη διαρροής, για την περίπτωση χωρίς (δεξιά) και με (αριστερά) ορθογωνικές γεννήτριες δίνης [58].

ωστόσο οι τάσεις παραμένουν υποδιπλάσιας έντασης σε σχέση με την πρώτη (στην οποία κυμαίνονται μεταξύ 600-700 Pa).

Μετά από τα παραπάνω, είναι ξεκάθαρο ότι η εφαρμογή ορθογωνικών γεννητριών δίνης στην κατάντι επιφάνεια των φύλλων της τεχνητής μηχανικής μιτροειδούς βαλβίδας *St. Jude Medical Standard*, οδηγεί σε αξιοσημείωτη βελτίωση της αιμοδυναμικής σε μικρή κλίμακα κατά τη φάση κλεισίματος της βαλβίδας, η οποία εκτίθεται είτε σε μόνιμες είτε σε παλλόμενες συνθήκες ροής.

# Βιβλιογραφία

- [1] J. Lin, G. Selby, F. Howard: *Exploratory study vortex-generating devices for turbulent flow separation control*, 29th Aerospace Sciences Meeting, 1991.
  - [2] E. Stanewsky: *Adaptive wing and flow control technology*, Progress in Aerospace Sciences, Volume 37, 2001.
  - [3] J. Ekaterinaris: *Prediction of active flow control performance on airfoils and wings*, Aerospace Science and Technology, Volume 8, 2004.
  - [4] S. Collis, R. Joslin, A. Seifert, V. Theofilis: *Issues in active flow control: theory, control, simulation and experiment*, Progress in Aerospace Sciences, Volume 40, 2004.
  - [5] B. Yagiz, K. Osama, Y. Pehlivanoglu: *Drag minimization using active and passive flow control techniques*, Aerospace Science and Technology, Volume 17, Issue 1, March 2012.
  - [6] H. Hemida, F. Spehr, S. Krajnović: *Local heat transfer enhancement around a matrix of wall-mounted cubes using passive flow control: Large-eddy simulations*, International Journal of Heat and Fluid Flow, Volume 29, 2008.
  - [7] Α. Πούλος: *Ενίσχυση της μεταφοράς θερμότητας από τοιχώματα με χρήση δεσμών συνεχούς έγχυσης ρευστού - Υπολογιστική ανάλυση και παραμετρικές διερευνήσεις*, Διπλωματική εργασία, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2011.
  - [8] Μ. Λογοθέτης: *Βελτίωση της θερμικής απόδοσης τυπικού εναλλάκτη θερμότητας με χρήση ενεργητικών μεθόδων ελέγχου ροής και υπολογιστικής ρευστοδυναμικής*, Υπολογιστικό θέμα, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2011.
  - [9] B. Smith, A. Glezer: *The formation and evolution of synthetic jets*, Physics of Fluids, Volume 10, 1998.
  - [10] L. Azevedo, B. Webb, M. Queiroz: *Pulsed air jet impingement heat transfer*, Experimental Thermal and Fluid Science, Volume 8, 1994.
-

- [11] R. De Breuker, M. Abdalla, P. Marzocca: *Aeroelastic control and load alleviation using optimally distributed synthetic jet actuators*, 48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference 15th , 23 - 26 April 2007, Honolulu, Hawaii.
- [12] C. Bruneau, E. Creusé et al.: *Coupling active and passive techniques to control the flow past the square back Ahmed body*, Computers & Fluids, Volume 39, 2010.
- [13] A. Zymaris, D. Papadimitriou, K. Giannakoglou, C. Othmer: *Optimal Location of Suction or Blowing Jets Using the Continuous Adjoint Approach*, ECCOMAS CFD 2010, 5th European Conference on CFD, Lisbon, Portugal, June 14-17, 2010.
- [14] P. Spalart, S. Allmaras, *A one-equation turbulence model for aerodynamic flows*, La Recherche Aéronautique, 1994.
- [15] L. Caretto, A. Gisman, S. Patankar and D. Spalding: *Two calculation procedures for steady, three-dimensional flows with recirculation*, Proc. 3rd Int. Conf. Numerical Methods in Fluid Dynamics, Paris, 1972.
- [16] X. Trompoukis, V. Asouti, I. Kampolis, K. Giannakoglou: *CUDA implementation of Vertex-Centered, Finite Volume CFD methods on Unstructured Grids with Flow Control Applications*, GPU Computing Gems, Volume 2, 2011.
- [17] Β. Ασούτη: *Μέθοδοι αεροδυναμικής ανάλυσης και σχεδιασμού για ροές υψηλών και χαμηλών ταχυτήτων, σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον, Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2009.*
- [18] X. Trompoukis, V. Asouti, T. Zervogiannis, K. Giannakoglou: *CFD Analysis and Parametric Study-Optimization of Suction-Blowing Flow Control Techniques*, 6th GRACM International Congress on Computational Mechanics, Thessaloniki, 2008.
- [19] A. Seifert, L. Pack: *Active flow separation control on wall-mounted hump at high Reynolds numbers*, AIAA Journal, Volume 8, 2002.
- [20] *The EASY (Evolutionary Algorithms SYstem) software*, <http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/research/easy.html>.
- [21] J. Bae: *Active control of tip clearance flow in axial compressors*, Phd Thesis, June 2001, Massachusetts Institute of Technology, Ma, USA.
- [22] D. Wisler: *Loss reduction in axial-flow compressors through low-speed model testing*, ASME J. Eng. Gas Turbines and Power, Volume 107, 1985.
- [23] Smith, L. H., Jr., *The effect of tip clearance on the peak pressure rise of axial-flow fans and compressors*, ASME Symposium on Stall, 1958.
- [24] Cumpsty, N. A., *Compressor aerodynamics*, Longman Group, 1989.
-



- [25] R. Eibeck, J. Keller et. al: *Pulse combustion: Impinging jet heat transfer enhancement*, Combustion Science and Technology, Volume 94, 1993.
- [26] C. Hirsch: *Numerical computation of internal and external flows, Vol2, Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*, John Wiley & Sons Publication, 1992.
- [27] B. van Leer: *Flux vector splitting for the Euler equations*, Lecture notes in Physics, 1982.
- [28] Ν. Λαμπρόπουλος: *Τεχνικές πολυπλέγματος σε μη-δομημένα πλέγματα για την αριθμητική επίλυση πεδίων ροής στις στροβιλομηχανές, σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον, Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2005.*
- [29] T. Pulliam, J. Steget: *Recent improvements in efficiency, accuracy and convergence for implicit approximate factorization algorithms*, AIAA-85-03060, 1985.
- [30] R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy: *Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik*, Mathematische Annalen, 1928.
- [31] R. Bisplinghoff, H. Ashley, R. Halfman: *Aeroelasticity*, Addison-Wesley, 1995.
- [32] Σ. Βουτσινάς: *Μη-μόνιμη αεροδυναμική, Αεροελαστικότητα, Αεροακουστική*, Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 2007.
- [33] R. Frazer, W. Duncan: *Flutter of Aeroplane Wings*, Nature, Volume 129, 1932.
- [34] P. Beran, D. Lucia: *A reduced order cyclic method for computation of limit cycles*, Nonlinear Dynamics, Volume 39, 2005.
- [35] J. Elston, H. Blackburn, J. Sheridan: *Bluff-body propulsion produced by combined rotary and translational oscillation*, Physics of Fluids, January 1999.
- [36] Ξ. Τρομπούκης: *Αριθμητική επίλυση προβλημάτων αεροδυναμικής-αεροελαστικότητας σε επεξεργαστές καρτών γραφικών, Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2012.*
- [37] D. Lynch: *Unified approach to simulation on deforming elements with application to phase change problems*, Journal of Computational Physics, Volume 47, 1982.
- [38] D. Lynch, K. O'Neil: *Elastic grid deformation for moving boundary problems in two space dimensions*, Finite Elements in Water Resources, Volume 2, Mississippi University, Oxford, May 1980.
- [39] K. Stein, T. Tezduyar, R. Benney: *Mesh moving techniques for fluid-structure interactions with large displacements*, Journal of Applied Mechanics, Volume 70, 2003.
-

- [40] C. Farhat, C. Degand, B. Koobus, M. Lesoinne: *Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 163, 1998.
- [41] J. Batina: *Unsteady Euler algorithm with unstructured dynamic mesh for complex-aircraft aerodynamic analysis*, AIAA Journal, Volume 29, 1991.
- [42] C. Degand, C. Farhat: *A three-dimensional torsional spring analogy method for unstructured dynamic meshes*, Computers & Structures, Volume 80, February 2002.
- [43] Y. Zhao, A. Forhad: *A general method for simulation of fluid flows with moving and compliant boundaries on unstructured grids*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 192, September 2003.
- [44] A. de Boer, M. van der Schoot, H. Bijl: *Mesh deformation based on radial basis function interpolation*, Computers and Structures, Volume 85, June 2007.
- [45] T. Rendall, C. Allen: *Unified fluid-structure interpolation and mesh motion using radial basis functions*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 74, June 2008.
- [46] H. Braess, P. Wriggers: *Arbitrary lagrangian eulerian finite element analysis of free surface flow*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 190, 2000.
- [47] L. Diachin, P. Knupp, T. Munson, S. Shontz: *A comparison of two optimization methods for mesh quality improvement*, Engineering with Computers, Volume 22, August 2006.
- [48] I. Demirdzić, M. Peric: *Space Conservation Law in Finite Volume Calculations of Fluid Flow*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Volume 8, 1988.
- [49] R. Bisplinghoff, H. Ashley, and R. Halfman: *Aeroelasticity*, Dover Publications, Inc, 1996.
- [50] T. Theodorsen and I. Garrick: *Mechanism of flutter, theoretical and experimental investigation of flutter problem (report no. 685)*, Technical report, National Advisory Committee for Aeronautics (United States Advisory Committee for Aeronautics), 1940.
- [51] R. Landon: *Naca0012 oscillating and transient pitching, compendium of unsteady aerodynamic measurements, data set 3*, Technical report, August 1982.
- [52] R. Dorf, R. Bishop: *Modern Control Systems*, Prentice Hall, 2011.
- [53] K. Palaniappan: *Algorithms for automatic feedback control of aerodynamic flows*, Phd Thesis, June 2007, Stanford University, Ca, USA.
-

- 
- [54] R. De Breuker, M. Abdalla et. al: *Flutter Suppression using Synthetic Jet Actuators: The Typical Section*, Proceedings of the Seventeenth International Conference on Adaptive Structures and Technologies, 2006.
- [55] Ξ. Τρομπούκης: *Υπολογιστική ανάλυση και παραμετρική διερεύνηση της τεχνικής συνεχούς αναρρόφησης για τον έλεγχο οριακών στρωμάτων*, Διπλωματική εργασία, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2007.
- [56] Γ. Ρήγας: *Προσομοίωση και χαμηλού κόστους βελτιστοποίηση του ενεργητικού ελέγχου ροής ρευστού γύρω από αεροτομή, σε κάρτες γραφικών*, Διπλωματική εργασία, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2010.
- [57] J. Zeng, B. Moulin et. al: *Adaptive Feedforward Control for Gust Load Alleviation*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 33, no. 3, 2010.
- [58] Lakshmi Dasi, David Murphy, Ari Glezer, Ajit Yoganathan: *Passive flow control of bileaflet mechanical heart valve leakage flow*, Journal of Biomechanics, Volume 41, January 2008.
-