



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Τομέας Ρευστών

Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Επαναδιατύπωση Μεθόδου Βελτιστοποίησης Μη-Δομημένων Πλεγμάτων με Κριτήριο τη Μετρική Σφαιρικότητα

Διπλωματική Εργασία

Δημήτρης Κυριακού

Επιβλέπων : Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Φεβρουάριος 2022

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας, αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω όλους τους ανθρώπους που με βοήθησαν κατά τη διάρκεια της εκπόνησής της.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή, κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε με την ανάθεση ενός απαιτητικού και ιδιαίτερα ενδιαφέροντος θέματος. Τον ευχαριστώ για τη συνεχή του καθοδήγηση καθ' όλη την ενασχόλησή μου με την εργασία, αλλά και για τον χρόνο που αφιέρωνε και τις χρήσιμες παρατηρήσεις του πάνω στο κείμενο της εργασίας. Μέσα από τις κατευθύνσεις που μου έδινε κατανόησα τη μεθοδολογία και τη δομή μίας ερευνητικής εργασίας.

Ευχαριστώ επίσης τη Δρα Βαρβάρα Ασούτη, η οποία ήταν πρόθυμη να με βοηθήσει σε ό,τι αφορά τη χρήση του cluster του εργαστήριου. Την ευχαριστώ για τη συμβολή της στην έγκαιρη ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ακόμη τον υποψήφιο διδάκτορα Παύλο Αλεξιά, με τον οποίο είχα μία επικοινωνητική συνομιλία πάνω σε θέματα της εργασίας μου.

Τέλος, είμαι ευγνώμων στην οικογένεια και τους φίλους μου, οι οποίοι με στηρίζουν με κάθε τρόπο σε ό,τι κάνω.

Επαναδιατύπωση Μεθόδου Βελτιστοποίησης Μη-Δομημένων Πλεγμάτων με Κριτήριο τη Μετρική Σφαιρικότητα

Διπλωματική Εργασία του

Δημήτρη Κυριακού

Επιβλέπων : Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Φεβρουάριος 2022

Περίληψη

Η διπλωματική εργασία αφορά τη βελτιστοποίηση των ποιοτικών χαρακτηριστικών 2D και 3D μη-δομημένων υπολογιστικών πλεγμάτων. Εισάγεται η μετρική της κυκλικότητας (2D) ή σφαιρικότητας (3D) ενός στοιχείου του πλέγματος, η οποία ορίζει την εγγύτητα του σχήματος του στοιχείου στον κύκλο ή τη σφαίρα αντίστοιχα. Επιλέγεται ως μετρική της ποιότητας του στοιχείου, βάσει της οποίας κατασκευάζεται η μετρική ποιότητας του πλέγματος. Βέλτιστη κατάσταση του πλέγματος θεωρείται εκείνη για την οποία η μετρική του πλέγματος λαμβάνει ακρότατη τιμή. Για τη βελτιστοποίηση του πλέγματος χρησιμοποιείται μία επαναληπτική διαδικασία. Η μέθοδος βελτιστοποίησης υποστηρίζει την αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων, με κύρια εφαρμογή σε μη-μόνιμα προβλήματα λόγω σχετικής κίνησης μεταξύ δύο ή περισσότερων σωμάτων, σε προβλήματα αλληλεπίδρασης ρευστού με στερεό σώμα και σε προβλήματα βελτιστοποίησης μορφής. Αποτελούν ενδεικτικές περιπτώσεις στις οποίες απαιτείται η αναπροσαρμογή του εσωτερικού πλέγματος στην εκάστοτε νέα κατάσταση των ορίων του, διατηρώντας την εγκυρότητα και την ποιότητά του και ταυτόχρονα την τοπολογία και τη δομή αποθήκευσής του. Κύριος στόχος της εργασίας είναι η ανάπτυξη και ο προγραμματισμός ενός γρήγορου και εύρωστου αλγορίθμου βελτιστοποίησης, ο οποίος δύναται να αντιμετωπίσει όρια με απαιτητική γεωμετρία για ένα μεγάλο εύρος παραμορφώσεών τους. Ο κώδικας προγραμματίστηκε σε Fortran 77. Το ενδιαφέρον εστιάζεται σε απαιτητικές περιπτώσεις αραιών πλεγμάτων με εφαρμογή στην υπολογιστική ρευστοδυναμική ατρίβων ροών. Στο τέλος γίνεται αναφορά στον χειρισμό πλεγμάτων με πύκνωση κοντά στα στερεά όρια για υψηλής ακρίβειας προσομοιώσεις συνεκτικών ροών.

A New Approach to the Optimization of Unstructured Grids Using the Sphericity Metric

Diploma Thesis by

Dimitrios Kyriakou

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, February 2022

Abstract

The diploma thesis concerns the optimization of the quality of 2D and 3D unstructured computational grids. For this purpose, a scale-invariant geometric quantity is introduced called roundness (2D) or sphericity (3D). It constitutes an element-wise property which defines an element's shape proximity to that of a circle or sphere respectively. It is used as the metric of the element's quality from which the quality metric of the entire grid is derived. The optimal grid is defined as the grid for which the metric obtains its extremum value. For the optimization of the grid a gradient-based iterative process is being deployed. The optimization method supports the numerical solving of P.D.E.s, some fundamental applications being unsteady phenomena due to the relative motion of multiple bodies, fluid – structure interaction problems and shape optimization problems. The abovementioned are common cases where the re-adjustment of the internal grid to its boundaries new position is needed, while preserving the validity and quality of the grid and at the same time its topology and structure. When solving PDEs by a numerical method, elements with high anisotropy can introduce arithmetic errors in the approximation or even be the cause of the scheme's inability to converge, whereas the overlapping between elements is equivalent to the non-validity of the grid. The main purpose of this thesis is the development and programming of a fast and robust optimization algorithm capable of handling boundaries of complex geometry for a wide range of deformations. The code was compiled in Fortran 77. The interest is focused on challenging cases of sparse grids used for inviscid flows in CFD problems. There is, also, mention of the treatment of dense grids near solid boundaries which are used for high precision simulations of viscous flows.

Ακρωνύμια

| | |
|----------|--|
| 2Δ | Διδιάστατο / Δύο Διαστάσεις |
| 3Δ | Τριδιάστατο / Τρεις Διαστάσεις |
| ΜΔΕ | Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις |
| ΜΠΥΡ&Β | Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης |
| PDE | Partial Differential Equations |
| CFD | Computational Fluid Dynamics |
| SD | Steepest Descent |
| P-SD | Preconditioned Steepest Descent |
| BFGS | Broyden – Fletcher – Goldfarb – Shanno |
| L-BFGS | Limited-Memory BFGS |
| P-L-BFGS | Preconditioned L-BFGS |
| RBF | Radial Basis Functions |

Περιεχόμενα

| | |
|--|-----------|
| 1. Εισαγωγή | 1 |
| 1.1 Αναγκαιότητα Παραμόρφωσης Πλεγμάτων | 1 |
| 1.2 Επισκόπηση Μεθόδων Βελτιστοποίησης Πλεγμάτων | 2 |
| 1.3 Στόχος και Δομή της Εργασίας | 3 |
| 2. Πρώτη Θεώρηση της Μεθόδου Βελτιστοποίησης 2Δ Πλεγμάτων | 6 |
| 2.1 Μετρικές Ποιότητας για 2Δ Πλέγματα | 6 |
| 2.2 Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης | 9 |
| 2.3 Μέθοδοι Βελτιστοποίησης | 11 |
| 2.3.1 Μέθοδος της Απότομης Καθόδου | 11 |
| 2.3.2 Μέθοδος L-BFGS | 12 |
| 2.3.3 Προσταθεροποίηση | 13 |
| 2.4 Παραδείγματα Εφαρμογής της Μεθόδου Βελτιστοποίησης 2Δ Πλεγμάτων | 15 |
| 2.4.1 Βελτιστοποίηση Πλέγματος στο Εσωτερικό ενός Τετραγώνου | 16 |
| 2.4.2 Βελτιστοποίηση Πλέγματος δύο Ομόκεντρων Τετραγώνων | 17 |
| 2.5 Ανακεφαλαίωση και Συμπεράσματα | 22 |
| 3. Αναθεώρηση της Μεθόδου Βελτιστοποίησης 2Δ Πλεγμάτων | 24 |
| 3.1 Αναγνώριση των Προβλημάτων της Αρχικής Μεθόδου Βελτιστοποίησης | 24 |
| 3.1.1 Κυκλικότητα Ισοσκελούς Τριγώνου ενός Βαθμού Ελευθερίας | 24 |
| 3.1.2 Κυκλικότητα ενός Τριγώνου δύο Βαθμών Ελευθερίας | 28 |
| 3.1.3 Κυκλικότητα σε Πλέγμα Τριγωνικών Στοιχείων | 30 |
| 3.2 Τροποποιήσεις στην Αρχική Μέθοδο Βελτιστοποίησης | 32 |
| 3.2.1 Πρώτη Τροποποίηση της Αρχικής Μεθόδου Βελτιστοποίησης | 32 |
| 3.2.2 Δεύτερη Τροποποίηση της Αρχικής Μεθόδου Βελτιστοποίησης | 39 |
| 3.3 Αλγόριθμος της Νέας Μεθόδου Βελτιστοποίησης | 45 |
| 3.4 Παραδείγματα Εφαρμογής της Νέας Μεθόδου Βελτιστοποίησης 2Δ Πλεγμάτων | 47 |
| 3.4.1 Βελτιστοποίηση Πλέγματος δύο Ομόκεντρων Τετραγώνων | 48 |
| 3.4.2 Βελτιστοποίηση Πλέγματος γύρω από την Αεροτομή NACA 4415 | 54 |
| 3.4.3 Βελτιστοποίηση Πλέγματος με Εσωτερικό Όριο Σχήματος Πλατανόφυλλου | 67 |
| 3.4.4 Βελτιστοποίηση Πλέγματος γύρω από Αεροτομή Τεσσάρων Στοιχείων | 72 |
| 3.5 Έλεγχος της Καταλληλότητας των Βελτιστοποιημένων Πλεγμάτων για Εφαρμογές CFD | 81 |
| 4. Μέθοδος Βελτιστοποίησης 3Δ Πλεγμάτων | 86 |
| 4.1 Επέκταση της Μεθόδου Βελτιστοποίησης από 2Δ σε 3Δ Πλέγματα | 86 |
| 4.1.1 Μετρικές Ποιότητας για 3Δ Πλέγματα | 86 |
| 4.1.2 Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης | 89 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 4.2 | Τετραδόνια | 92 |
| 4.2.1 | Άλγεβρα Τετραδονίων | 92 |
| 4.2.2 | Στροφή στον 3Δ Χώρο μέσω Τετραδονίων | 94 |
| 4.3 | Παραδείγματα Εφαρμογής της Μεθόδου Βελτιστοποίησης 3Δ Πλεγμάτων | 96 |
| 4.3.1 | Βελτιστοποίηση Πλέγματος γύρω από Κύβο | 96 |
| 4.3.2 | Βελτιστοποίηση Πλέγματος γύρω από Δύο Μορφές Χοίρων | 98 |
| 4.3.3 | Βελτιστοποίηση Πλέγματος για Προσομοίωση Ατριβούς Ροής γύρω από την Πτέρυγα ONERA M6 | 102 |
| 4.4 | Διαχείριση 3Δ Πλέγματος με Πύκνωση στα Όρια | 106 |
| 4.4.1 | Περιγραφή του Προβλήματος | 106 |
| 4.4.2 | Βελτιστοποίηση Πλέγματος για Προσομοίωση Συνεκτικής Ροής γύρω από την Πτέρυγα ONERA M6 | 107 |
| 4.5 | Διαχείριση 3Δ Πλέγματος με Χαμηλής Ποιότητας Επιφανειακό Πλέγμα | 109 |
| 4.5.1 | Περιγραφή του Προβλήματος | 109 |
| 4.5.2 | Βελτιστοποίηση Πλέγματος γύρω από Αεροσκάφος | 110 |
| 5. | Επίλογος | 115 |
| 5.1 | Ανακεφαλαίωση και Συμπεράσματα | 115 |
| 5.2 | Προτάσεις για Μελλοντική Μελέτη | 115 |
| | Παράρτημα | 118 |
| A'.1 | Μέθοδος Newton – Raphson | 118 |
| A'.2 | Μέθοδος Συζυγών Κλίσεων | 120 |
| A'.3 | Άνω Φράγμα για τη Μετατόπιση ενός Κόμβου του Πλέγματος | 122 |
| | Βιβλιογραφία | 125 |

Κεφάλαιο 1 : Εισαγωγή

1.1 Αναγκαιότητα Παραμόρφωσης Πλεγμάτων

Η παραμόρφωση πλεγμάτων στην υπολογιστική ρευστοδυναμική είναι αναγκαία για τη διαχείριση προβλημάτων που περιλαμβάνουν σώματα μεταβαλλόμενης γεωμετρίας. Τυπικά παραδείγματα είναι τα προβλήματα αεροελαστικότητας, όπως η παραμόρφωση μίας πτέρυγας υπό την άσκηση αεροδυναμικών φορτίων, και τα προβλήματα μη-μόνιμων ροών λόγω της σχετικής κίνησης μεταξύ δύο ή περισσότερων σωμάτων. Σε αυτές τις περιπτώσεις η επίλυση του φυσικού προβλήματος για μία χρονική στιγμή υπαγορεύει τη μετατόπιση των οριακών κόμβων του πλέγματος. Για να ακολουθήσει η επίλυση του προβλήματος την επόμενη χρονική στιγμή, είναι αναγκαία η αναπροσαρμογή του πλέγματος στο νέο υπολογιστικό χωρίο. Μία άλλη συνήθης εφαρμογή όπου απαιτείται η αναπροσαρμογή του πλέγματος είναι τα προβλήματα βελτιστοποίησης μορφής ενός σώματος, και συγκεκριμένα τα προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης. Εν προκειμένω, η μετατόπιση των οριακών κόμβων υπαγορεύεται από τις παραγώγους της συνάρτησης κόστους που ελαχιστοποιείται ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Μία μέθοδος μέσω της οποίας υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας της συνάρτησης κόστους είναι η συζυγής μέθοδος (adjoint method) [1]. Πλεονέκτημα της συζυγούς μεθόδου είναι ότι το υπολογιστικό της κόστος είναι ανεξάρτητο του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού.

Η αναπροσαρμογή ενός πλέγματος γίνεται μέσω μίας μεθόδου βελτιστοποίησης της ποιότητάς του. Το νέο πλέγμα πρέπει να διατηρεί την εγκυρότητά του (validity) και την ποιότητά του σε αποδεκτά επίπεδα, ώστε να είναι κατάλληλο για να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση ΜΔΕ. Μετά τη μετατόπιση των οριακών κόμβων, η παραμόρφωση εντοπίζεται εστιασμένη στην περιοχή εγγύς του ορίου. Στόχος είναι η διάδοση της παραμόρφωσης από το όριο του πλέγματος στο εσωτερικό του, ώστε το νέο πλέγμα να εμφανίζει τη μεγαλύτερη δυνατή ομοιομορφία στις ιδιότητές του. Ιδανικό στοιχείο για ένα πλέγμα είναι εκείνο με τον ελάχιστο λόγο επιμήκους. Κατά την αριθμητική επίλυση ΜΔΕ, στοιχεία με σημαντική ανισοτροπία αποτελούν αίτιο σφαλμάτων ή και αδυναμίας σύγκλισης των αριθμητικών σχημάτων, ενώ ενδεχόμενη αλληλοκάλυψη μεταξύ στοιχείων ισοδυναμεί με μη-καταλληλότητα του πλέγματος. Για ένα 2D πλέγμα τριγωνικών στοιχείων, παραδείγματος χάρη, το ιδανικό τρίγωνο είναι το ισόπλευρο. Κατ' αναλογία, τρίγωνα με ιδιαίτερα οξεία γωνία εισάγουν σφάλμα στους υπολογισμούς, ενώ τρίγωνα με αμβλεία γωνία αποτελούν αίτιο της αστάθειας ή ακόμη και απόκλισης της μεθόδου. Ο λόγος για τον οποίο υπεισέρχεται σφάλμα στους υπολογισμούς είναι το γεγονός ότι συνδέονται μεταξύ τους κόμβοι οι οποίοι γεωμετρικά δεν είναι κοντά, με αποτέλεσμα τη μη-ορθή μετάδοση της πληροφορίας. Η μέθοδος βελτιστοποίησης του πλέγματος πρέπει να αποτρέπει την εμφάνιση τέτοιων στοιχείων στο νέο πλέγμα, ώστε η τοπολογία του πλέγματος να μην επηρεάζει την αριθμητική προσέγγιση της λύσης των Μ.Δ.Ε.

Ένας τρόπος διαχείρισης προβλημάτων ΜΔΕ στα οποία το υπολογιστικό χωρίο μεταβάλλεται είναι η δημιουργία νέου πλέγματος σε κάθε χρονικό βήμα ή κύκλο βελτιστοποίησης. Με αυτήν την προσέγγιση εξασφαλίζεται η διατήρηση υψηλής ποιότητας του πλέγματος, όμως το υπολογιστικό της κόστος είναι συνήθως απαγορευτικά υψηλό για προβλήματα βιομηχανικού ενδιαφέροντος. Για τον λόγο αυτό

απαιτείται η χρήση μίας μεθόδου αναπροσαρμογής του υπάρχοντος πλέγματος στη νέα θέση των ορίων. Σε αυτήν την περίπτωση λαμβάνεται υπόψη η πληροφορία της δομής του αρχικού πλέγματος αλλά και η αρχική του κατάσταση, η οποία εν γένει δεν απέχει σημαντικά από τη νέα. Εάν η ποιότητα του αναπροσαρμοσμένου πλέγματος δεν κρίνεται ως αποδεκτή, τότε η γένεση νέου πλέγματος είναι υποχρεωτική.

1.2 Επισκόπηση Μεθόδων Βελτιστοποίησης Πλεγμάτων

Η ανάγκη αποφυγής της κατ' επανάληψη δημιουργίας νέου υπολογιστικού πλέγματος οδήγησε στην ανάπτυξη μίας πληθώρας μεθόδων βελτιστοποίησης πλεγμάτων. Οι μέθοδοι αυτές διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες: τις μεθόδους επίλυσης ΜΔΕ και τις αλγεβρικές μεθόδους.

Η πρώτη κατηγορία συνίσταται στην επίλυση μίας ελλειπτικής ΜΔΕ στο υπολογιστικό χωρίο. Η ΜΔΕ διακριτοποιείται επί των κόμβων του πλέγματος με αποτέλεσμα να προκύπτει ένα αλγεβρικό σύστημα με τάξη ανάλογη του αριθμού των κόμβων αυτών. Για την επίλυσή του απαιτείται συνήθως η χρήση μίας επαναληπτικής διαδικασίας. Ως αρχική κατάσταση της διαδικασίας μπορεί να θεωρηθεί η κατάσταση του πλέγματος μετά από την παραμόρφωση των ορίων του. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται τη μείωση του υπολογιστικού της κόστους σε σύγκριση με την εκ νέου πλεγματοποίηση του χωρίου, διατηρώντας παρ' όλα αυτά σχετικά υψηλό κόστος. Τυπικές περιπτώσεις ΜΔΕ είναι η εξίσωση Laplace [2] και η διαρμονική (Biharmonic) εξίσωση [3]. Στην κατηγορία αυτή κατατάσσονται, επίσης, οι μέθοδοι φυσικών αναλόγων (physical analogy methods) με χαρακτηριστικό παράδειγμα τη μέθοδο των ελατηρίων (spring analogy method) [4] και παραλλαγές της, όπως είναι η μέθοδος των στρεπτικών μη-γραμμικών ελατηρίων (torsion spring method) [5]. Οι μέθοδοι αυτές συνίστανται στην επίλυση της στατικής ισορροπίας ενός συστήματος ελατηρίων που εδράζονται επί των κόμβων του πλέγματος. Κύριο γνώρισμά τους είναι η υψηλή ποιότητα του τελικού πλέγματος ακόμη και για μεγάλες παραμορφώσεις, γεγονός το οποίο δεν επιτυγχάνεται μέσω της επίλυσης της εξίσωσης Laplace. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούνται ευρέως.

Στις αλγεβρικές μεθόδους ανήκουν οι μέθοδοι παρεμβολής και η μέθοδος Delaunay [6]. Ειδοποιός διαφορά σε σύγκριση με τις μεθόδους επίλυσης ΜΔΕ είναι το γεγονός ότι το σύστημα το οποίο επιλύεται έχει διάσταση ανάλογη του αριθμού των οριακών μόνο κόμβων του πλέγματος. Κατά συνέπεια, το υπολογιστικό κόστος που απαιτείται για την αναπροσαρμογή του πλέγματος είναι μικρότερο. Ανάλογη, βέβαια, είναι η μείωση στην ποιότητα του τελικού πλέγματος σε περιπτώσεις μεγάλων παραμορφώσεων των ορίων. Τυπική περίπτωση μεθόδου παρεμβολής είναι η παρεμβολή μέσω των RBF (συναρτήσεων ακτινικής βάσης) [7]. Σε αυτήν τη μέθοδο δεν λαμβάνεται υπόψη η τοπολογία του πλέγματος. Επιλύεται, αρχικά, ένα γραμμικό σύστημα επί των οριακών κόμβων του πλέγματος και στη συνέχεια υπολογίζεται ένα εσωτερικό γινόμενο για κάθε εσωτερικό κόμβο του πλέγματος ώστε να προσδιοριστεί η νέα του θέση. Στην κατηγορία αυτή ανήκει, επίσης, η μέθοδος των βαρών αντίστροφης απόστασης (inverse distance weighting), στην οποία οι κόμβοι κοντά στο παραμορφούμενο όριο είναι πιο άκαμπτοι σε σχέση με εκείνους που βρίσκονται σε μεγαλύτερη απόσταση, διατηρώντας έτσι την ποιότητα του πλέγματος κοντά στο όριο και διευκολύνοντας τη διάδοση της παραμόρφωσης.

Στη διπλωματική εργασία παρουσιάζεται μία μέθοδος βελτιστοποίησης μη-δομημένων πλεγμάτων η οποία συγκαταλέγεται στην πρώτη κατηγορία, δηλαδή στις μεθόδους επίλυσης συστήματος τάξης ανάλογης του αριθμού των κόμβων του πλέγματος. Το σύστημα προκύπτει ως συνθήκη ελαχιστοποίησης για μία συνάρτηση κόστους η οποία αποτελεί κατάλληλη μετρική της ποιότητας του πλέγματος. Διερευνώνται πιο σύνθετες εκφράσεις της συνάρτησης κόστους – σε σχέση π.χ. με τη δυναμική ενέργεια ενός συστήματος ελατηρίων που χρησιμοποιείται στη μέθοδο των ελατηρίων – με σκοπό τον ορισμό πλέγματος υψηλής ποιότητας για μεγάλες παραμορφώσεις των ορίων του.

Επισημαίνεται ότι οι μέθοδοι βελτιστοποίησης πλεγμάτων μπορεί να έχουν μία δεύτερη εκδοχή στην οποία επιτρέπεται η ολίσθηση των οριακών κόμβων επί των ορίων του πλέγματος. Μία τέτοια προσέγγιση συνεπάγεται μεν τη δυνατότητα διατήρησης υψηλής ποιότητας για το πλέγμα στη νέα κατάσταση, όμως δεν είναι γενικής χρήσης. Ο λόγος έγκειται στο γεγονός ότι η ολίσθηση έχει ως αποτέλεσμα την αλλοίωση της γεωμετρίας των ορίων, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο σε όρια για τα οποία οι απαιτήσεις ακρίβειας είναι χαμηλές. Ειδικότερα, δεν αρκεί η διακριτή περιγραφή της γεωμετρίας του ορίου, αλλά πρέπει να είναι γνωστή η αναλυτική εξίσωσή της. Τέτοιο παράδειγμα στις εφαρμογές του μηχανολόγου μηχανικού είναι η κεφαλή (hub) της πτερύγωσης στους συμπιεστές των στροβιλομηχανών. Επιπλέον, η ολίσθηση μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα και την αλλοίωση των χαρακτηριστικών του εσωτερικού πλέγματος, όπως οι τοπικές πυκνώσεις. Στη διπλωματική εργασία επιλέγεται να αποφευχθεί μία τέτοια θεώρηση, ώστε η μέθοδος που αναπτύσσεται να έχει καθολική χρήση.

1.3 Στόχος και Δομή της Εργασίας

Η διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στον προγραμματισμό μεθόδου βελτιστοποίησης 2D και 3D μη-δομημένων υπολογιστικών πλεγμάτων. Πρώτος στόχος είναι ο ορισμός μίας μετρικής ποιότητας του πλέγματος η οποία να είναι κατάλληλη ακόμη και για μεγάλες παραμορφώσεις των ορίων του. Δεύτερος στόχος είναι ο ορισμός μίας αποτελεσματικής διαδικασίας εύρεσης του βέλτιστου πλέγματος ως προς τη συγκεκριμένη μετρική. Ως τρίτος στόχος τίθεται η ανάπτυξη μίας μεθόδου η οποία δεν απαιτεί την πραγματοποίηση των παραμορφώσεων των ορίων του πλέγματος σε επιμέρους βήματα. Αυτό έχει μεγάλη σημασία διότι αφενός μειώνει το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου, αφετέρου την καθιστά αυτοματοποιήσιμη. Η αναγκαιότητα ενδιάμεσων βημάτων είναι χαρακτηριστικό πολλών μεθόδων που υπάρχουν στη βιβλιογραφία (τόσο επίλυσης ΜΔΕ όσο και αλγεβρικών).

Το κύριο μέρος της εργασίας αποτελείται από τρία κεφάλαια. Ακολουθεί μία σύντομη περιγραφή των περιεχόμενων κάθε κεφαλαίου.

Κεφάλαιο 2: Παρουσιάζεται εκτενώς η πρώτη εκδοχή της μεθόδου βελτιστοποίησης 2D πλέγματος η οποία είναι απλή και λογικοφανής. Ορίζεται, αρχικά, η μετρική ποιότητας ενός τριγώνου του πλέγματος από την οποία εξάγονται οι μετρικές ποιότητας για το 2D πλέγμα. Το

βέλτιστο πλέγμα προκύπτει ως κατάσταση ακροτάτου μίας εκ των μετρικών του. Για την εύρεση του βέλτιστου πλέγματος επιλύεται αριθμητικά ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Κεφάλαιο 3: Αναγνωρίζονται και ερμηνεύονται, αρχικά, τα προβλήματα που παρουσιάζει η πρώτη εκδοχή της μεθόδου όσον αφορά τόσο τον ορισμό όσο και τη διαδικασία εύρεσης του βέλτιστου πλέγματος. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται μία αναθεωρημένη εκδοχή της, αντιμετωπίζοντας στοχευμένα αυτά τα προβλήματα. Προτείνονται δύο εναλλακτικοί αλγόριθμοι εκ των οποίων ο πρώτος δίνει τελικό πλέγμα υψηλής ποιότητας για μεγάλες παραμορφώσεις των ορίων του, ενώ ο δεύτερος εμφανίζει αξιοσημείωτη ευστάθεια στη σύγκλισή του. Η νέα μέθοδος βασίζεται στη διαδοχική χρήση των δύο αλγορίθμων.

Κεφάλαιο 4: Η μέθοδος βελτιστοποίησης επεκτείνεται για 3D πλέγμα. Ακολουθεί παρουσίαση της μαθηματικής θεωρίας των τετραδονίων, η οποία χρησιμοποιείται για την περιγραφή των στρωφών που πραγματοποιούν τα όρια του πλέγματος. Τέλος, γίνεται αναφορά στη διαχείριση πλεγμάτων που εμφανίζουν μεγάλη πύκνωση στα όριά τους.

Επισημαίνεται ότι η ανάλυση που ακολουθεί αφορά πλέγματα αποκλειστικά τριγωνικών (2D) ή τετραεδρικών (3D) στοιχείων. Η επιλογή αυτή γίνεται προς διευκόλυνση στην παρουσίαση της μεθόδου, εφόσον απλοποιούνται οι μαθηματικές σχέσεις και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ενιαία χωρίς υποπεριπτώσεις. Ομοίως, ο κώδικας που συντάχθηκε για την υλοποίηση της μεθόδου υπόκειται στον ίδιο περιορισμό. Η μέθοδος βελτιστοποίησης, όμως, γενικεύεται άμεσα για πλέγματα οποιουδήποτε τύπου στοιχείων, εφόσον οι διαφοροποιήσεις που προκύπτουν αφορούν μόνο τους μαθηματικούς τύπους και όχι τη συλλογιστική που ακολουθείται. Τα μη-δομημένα πλέγματα τριγωνικών (2D) ή τετραεδρικών (3D) στοιχείων απαντώνται συχνότερα από κάθε άλλη περίπτωση, συνεπώς είναι η ενδεδειγμένη επιλογή. Ειδική μνεία για πλέγματα με πύκνωση στα όριά τους γίνεται στο κεφάλαιο 4.4, όπου και πάλι εξετάζεται η περίπτωση πλεγμάτων με τετραεδρικά στοιχεία και όχι υβριδικών πλεγμάτων.

Κεφάλαιο 2 : Πρώτη Θεώρηση της Μεθόδου Βελτιστοποίησης 2Δ Πλεγμάτων

Η βελτιστοποίηση της ποιότητας ενός μη-δομημένου πλέγματος, δεδομένης της τοπολογίας και των συντεταγμένων των οριακών του κόμβων, συνίσταται στην εύρεση της βέλτιστης θέσης κάθε εσωτερικού κόμβου. Η βέλτιστη κατάσταση του πλέγματος προκύπτει ως λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης μίας συνάρτησης κόστους, συνεπώς δεν ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο αλλά εξαρτάται από την επιλογή της συνάρτησης αυτής. Η συνάρτηση κόστους προσδιορίζεται βάσει μίας μετρικής της ποιότητας ενός στοιχείου του πλέγματος. Στις δύο διαστάσεις επιλέγεται ως μετρική η ιδιότητα της κυκλικότητας του κάθε στοιχείου. Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης επιλύεται μέσω αριθμητικής μεθόδου. Μια κατάλληλη μέθοδο συνιστά η L-BFGS με προσταθεροποίηση [8], η οποία εμφανίζει ικανοποιητικό ρυθμό σύγκλισης και ταυτόχρονα αποδεκτό αποθηκευτικό κόστος. Για την υλοποίησή της απαιτείται, σε κάθε επανάληψη της βελτιστοποίησης, η εύρεση της κλίσης της συνάρτησης κόστους βάσει της οποίας καθορίζεται η κατεύθυνση της μετατόπισης των κόμβων.

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται, αρχικά, εισαγωγή στην έννοια της κυκλικότητας ενός τριγώνου από την οποία εξάγονται οι μετρικές ποιότητας του πλέγματος και η συνάρτηση κόστους. Στη συνέχεια, διατυπώνεται το πρόβλημα ελαχιστοποίησης και αναλύονται οι βασικές εναλλακτικές μέθοδοι που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυσή του. Τέλος, παρατίθενται ορισμένα αποτελέσματα εφαρμογής της μεθόδου βελτιστοποίησης και ο σχολιασμός τους. Επισημαίνεται ότι η έκφραση της συνάρτησης κόστους, όπως διαμορφώνεται στο κεφάλαιο 2, αποτελεί μία πρώτη θεώρησή της και πρόκειται να τροποποιηθεί στο κεφάλαιο 3 ώστε η λύση του προβλήματος και η διαδικασία προσέγγισής της να παρουσιάζουν καλύτερα χαρακτηριστικά.

2.1 Μετρικές Ποιότητας για 2Δ Πλέγματα

Μελετάται 2Δ μη-δομημένο πλέγμα αποτελούμενο αποκλειστικά από τριγωνικά στοιχεία. Η ισοτροπία ενός στοιχείου του αποδίδεται μέσω της ιδιότητας της κυκλικότητας (roundness), δηλαδή της εγγύτητάς του στο σχήμα του κύκλου. Η κυκλικότητα συμβολίζεται με R και ορίζεται για το τρίγωνο i ως εξής:

$$R_i = \frac{J_i}{S_i^2} \quad (2.1)$$

όπου J_i , S_i το εμβαδό και η περίμετρος του τριγώνου i αντίστοιχα. Ο δείκτης i αναφέρεται στην αρίθμηση που ακολουθείται για τα στοιχεία του πλέγματος. Εν προκειμένω ορίζει το τρίγωνο με κορυφές τους κόμβους $P_{i,1}$, $P_{i,2}$, $P_{i,3}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1.

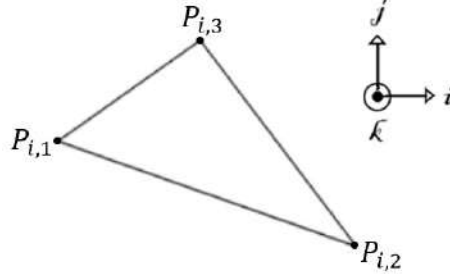
Παρατίθενται οι εκφράσεις του εμβαδού και της περιμέτρου του τριγώνου i :

$$J_i = \frac{1}{2} \overrightarrow{P_{i,1} P_{i,2}} \times \overrightarrow{P_{i,1} P_{i,3}} \cdot \vec{k} \quad (2.2)$$

$$S_i = \|\overrightarrow{P_{i,1} P_{i,2}}\| + \|\overrightarrow{P_{i,2} P_{i,3}}\| + \|\overrightarrow{P_{i,3} P_{i,1}}\| \quad (2.3)$$

$$\overrightarrow{P_{i,m} P_{i,n}} = (x_{i,n} - x_{i,m}, y_{i,n} - y_{i,m}) \quad (2.4)$$

όπου \vec{k} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο του σχήματος 2.1, $\|\cdot\|$ η ευκλείδεια νόρμα στον \mathcal{R}^2 και $m, n \in \{1, 2, 3\}$ οι δείκτες που αναφέρονται στην αρίθμηση των κορυφών του τριγώνου i .



Σχήμα 2.1: Το τρίγωνο i του πλέγματος με κορυφές τους κόμβους $P_{i,1}, P_{i,2}, P_{i,3}$.

Το εμβαδό ορίζεται μέσω του εξωτερικού γινομένου υιοθετώντας τη δεξιόστροφη σύμβαση (i, j, k) και χωρίς τη χρήση απόλυτης τιμής, συνεπώς ενέχει πληροφορία πρόσημου. Το πρόσημο εξαρτάται από την αρίθμηση των κορυφών του τριγώνου. Στην περίπτωση ενός έγκυρου (valid) πλέγματος N τριγώνων ακολουθείται μία αρίθμηση τέτοια ώστε $J_i > 0, \forall 1 \leq i \leq N$. Κατ' αυτόν τον τρόπο, μετά από μία παραμόρφωση των ορίων του πλέγματος, το πρόσημο του εμβαδού λειτουργεί ως κριτήριο αναγνώρισης αντεστραμμένων στοιχείων (inverted elements). Η εμφάνιση στοιχείων για τα οποία ισχύει ότι $J_i < 0$ ισοδυναμεί με τοπική μη-εγκυρότητα του πλέγματος στην παραμορφωμένη κατάσταση.

Η κυκλικότητα ενός τριγώνου είναι αδιάστατο μέγεθος, συνεπώς διατηρείται αναλλοίωτη για τρίγωνα με λόγο ομοιότητας. Λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της $R_{max} = \frac{\sqrt{3}}{36} \sim 0.048$ στην περίπτωση του ισόπλευρου τριγώνου, το οποίο λογίζεται ως το ιδανικό για ένα υπολογιστικό πλέγμα. Ως εκ τούτου, η κυκλικότητα είναι κατάλληλη για να χρησιμοποιηθεί ως μετρική ποιότητας των στοιχείων του πλέγματος.

Βάσει της μετρικής του ενός τριγώνου μπορούν να οριστούν οι μετρικές ποιότητας για το 2Δ πλέγμα. Με r_i συμβολίζεται η κυκλικότητα του τριγώνου i ανηγμένη ως προς τη μέγιστη τιμή της R_{max} :

$$r_i = \frac{R_i}{R_{max}} \quad (2.5)$$

όπου R_i ορίζεται από την εξίσωση (2.1). Το εύρος τιμών που μπορεί να λάβει είναι: $r_i \in [-1, 1]$.

Παρατίθεται η μέση τιμή r_{mean} και η τυπική απόκλιση r_{dev} της ανηγμένης κυκλικότητας των στοιχείων του πλέγματος N τριγώνων:

$$r_{mean} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i \quad (2.6)$$

$$r_{dev} = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sqrt{\sum_{i=1}^N (r_i - r_{mean})^2} \quad (2.7)$$

Ως επιθυμητό χαρακτηριστικό ενός πλέγματος, στη γενική περίπτωση, θεωρείται η κατά το δυνατό μεγαλύτερη τιμή r_{mean} και μικρότερη τιμή r_{dev} . Το εύρος τιμών που λαμβάνουν είναι: $r_{mean} \in [-1,1]$ και $r_{dev} \in [0, \frac{\sqrt{3}}{3}]$. Η τυπική απόκλιση είναι ενδεικτική του βαθμού ομοιογένειας των ιδιοτήτων του πλέγματος, συνεπώς $r_{dev} \sim 0$ ισοδυναμεί με μικρή διακύμανση της κυκλικότητας των στοιχείων του.

Μία παρεμφερής μετρική ποιότητας του πλέγματος είναι το άθροισμα των τετραγώνων της διαφοράς της κυκλικότητας κάθε στοιχείου του από τη μέγιστη δυνατή τιμή της R_{max} :

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (R_i - R_{max})^2 \quad (2.8)$$

όπου $z = (x_1, y_1, \dots, x_M, y_M) \in \mathbb{R}^{2M}$ οι συντεταγμένες των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος και M το πλήθος των κόμβων αυτών. Το εύρος τιμών της συνάρτησης είναι: $f \in [0, 2NR_{max}^2]$.

Η μετρική f διαφέρει από τη μέση τιμή r_{mean} λόγω της εμφάνισης ελαχίστου αντί μεγίστου, αλλά κυρίως λόγω της μειωμένης συνεισφοράς των τριγώνων με μεγάλη κυκλικότητα $R_i \sim R_{max}$ στο συνολικό αποτέλεσμα. Στην περίπτωση, όμως, πλέγματος ενός τριγώνου ($N = 1$) είναι ισοδύναμες μετρικές.

Επισημαίνεται ότι η αναφορά σε έναν κόμβο του πλέγματος μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Στον πρώτο τρόπο χρησιμοποιείται η αρίθμηση που παρέχεται από τη δομή του πλέγματος και ο κόμβος συμβολίζεται ως P_k με τον δείκτη $1 \leq k \leq M$. Στον δεύτερο ο κόμβος χαρακτηρίζεται ως η κορυφή n του τριγώνου i του πλέγματος και υιοθετείται ο συμβολισμός $P_{i,n}$ με $n \in \{1, 2, 3\}$. Το ίδιο ισχύει όσον αφορά τον συμβολισμό που χρησιμοποιείται για τις συντεταγμένες των κόμβων του πλέγματος. Για το όρισμα z της συνάρτησης f ακολουθείται ο πρώτος τρόπος, ενώ για την εξάρτηση της R_i από τη θέση των κόμβων επιλέγεται ο δεύτερος, όπως φαίνεται στην εξίσωση (2.1).

Ορίζονται, τέλος, δύο εναλλακτικές μετρικές ποιότητας του πλέγματος με τις εξής εκφράσεις:

$$\mu_1 = \min \{ r_i, 1 \leq i \leq N \} \quad (2.9)$$

$$\mu_2 = \max \{ r_{dev,k}, 1 \leq k \leq M \} \quad (2.10)$$

όπου r_i ορίζεται από την εξίσωση (2.5) και $r_{dev,k}$ είναι η τυπική απόκλιση της ανηγμένης κυκλικότητας των τριγώνων που περιβάλλουν τον κόμβο P_k . Το σύνολο των τριγώνων αυτών συμβολίζεται με I_k και το πλήθος τους με N_k . Ισχύει ότι:

$$r_{dev,k} = \frac{1}{\sqrt{N_k-1}} \sqrt{\sum_{i \in I_k} \left(r_i - \frac{1}{N_k} \sum_{j \in I_k} r_j \right)^2} \quad (2.11)$$

Το κριτήριο βέλτιστου πλέγματος ως προς τις μετρικές αυτές είναι: $\max \mu_1$ και $\min \mu_2$ αντίστοιχα και το εύρος τιμών τους: $\mu_1 \in [-1,1]$, $\mu_2 \in [0,1]$. Η μετρική μ_2 αποτελεί τη μέγιστη τιμή τυπικής απόκλισης που εμφανίζει τοπικά το πλέγμα. Η μικρή τιμή μ_2 είναι προϋπόθεση ώστε το πλέγμα να χαρακτηρίζεται ως καλής ποιότητας, χωρίς να το εξασφαλίζει όμως υποχρεωτικά, δηλαδή είναι αναγκαία αλλά μη-επαρκής συνθήκη. Η μέτρηση της ποιότητας του πλέγματος μέσω της μ_2 προσομοιάζει με τη μέτρηση που πραγματοποιεί κανείς κατά τον οπτικό έλεγχο του πλέγματος, στον οποίο αξιολογείται πρωτίστως η ποιότητα κάθε τριγώνου σε σύγκριση με τα γειτονικά του τρίγωνα. Η διαπίστωση αυτή αποτελεί μία ένδειξη της καταλληλότητας της μετρικής για αξιολόγηση του πλέγματος.

Οι μετρικές ποιότητας μ_1 , μ_2 αφορούν ακρότατες και όχι μέσες τιμές των ιδιοτήτων των στοιχείων του πλέγματος. Ως εκ τούτου, είναι πιο κατάλληλες για την αξιολόγηση της ποιότητάς του σε σύγκριση με τις μετρικές των εξισώσεων (2.6) ως (2.8). Παρ' όλα αυτά, στη γενική περίπτωση δεν ορίζεται μία διαδικασία σύγκλισης στη βέλτιστη ως προς αυτές κατάσταση, συνεπώς χρησιμοποιούνται αποκλειστικά για την αξιολόγηση και όχι τη βελτιστοποίηση του πλέγματος.

Μεταξύ των παραπάνω μετρικών ποιότητας χρησιμοποιείται ως συνάρτηση κόστους για τη μέθοδο βελτιστοποίησης του πλέγματος η μετρική f , όπως ορίζεται στην εξίσωση (2.8). Οι υπόλοιπες μετρικές ποιότητας χρησιμοποιούνται για την εκ των υστέρων αξιολόγηση του πλέγματος που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους.

2.2 Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης

Στο κεφάλαιο 2.1 έγινε αναφορά σε ορισμένες ενδεικτικές μετρικές ποιότητας για 2D πλέγματα οι οποίες προέρχονται από την ιδιότητα της κυκλικότητας. Μεταξύ αυτών επιλέχθηκε ως συνάρτηση κόστους η μετρική f , όπως ορίζεται στην εξίσωση (2.8). Για να διατυπωθεί το πρόβλημα ελαχιστοποίησης θα χρειαστεί πρώτα να οριστεί η κλίση (gradient) της συνάρτησης κόστους. Παραγωγίζοντας την εξίσωση (2.8) ως προς τις συντεταγμένες των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος προκύπτει ότι:

$$\nabla f(z) = \sum_{i=1}^N (R_i - R_{max}) \nabla R_i \quad (2.12)$$

όπου $\nabla = (\nabla_1, \dots, \nabla_k, \dots, \nabla_M)^T$ με $\nabla_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial y_k} \right)$ και $1 \leq k \leq M$.

Στον όρο i του αθροίσματος εμφανίζεται η κλίση της κυκλικότητας του τριγώνου i του πλέγματος. Εάν ένας κόμβος $P_k \notin \{P_{i,1}, P_{i,2}, P_{i,3}\}$ ισχύει η σχέση: $\nabla_k R_i = 0$, εφόσον η μετατόπισή του επηρεάζει την κυκλικότητα μόνο των τριγώνων που τον περιβάλλουν. Για τη συνιστώσα k της εξίσωσης (2.12) το άθροισμα με δείκτη i από 1 ως N μπορεί να αντικατασταθεί συνεπώς από άθροισμα με $i \in I_k$:

$$\nabla_k f(z) = \sum_{i \in I_k} (R_i - R_{max}) \nabla_k R_i \quad (2.13)$$

όπου I_k είναι το σύνολο των τριγώνων που περιβάλλουν τον κόμβο P_k .

Στην εξίσωση (2.13) ισχύει ότι $\forall i \in I_k \exists n \in \{1, 2, 3\}$ τέτοιο ώστε: $P_k \equiv P_{i,n}$ και $\nabla_k R_i = \left(\frac{\partial R_i}{\partial x_{i,n}}, \frac{\partial R_i}{\partial y_{i,n}} \right)$.

Για τον όρο $\nabla_k R_i$ προκύπτουν οι εξής σχέσεις παραγωγίζοντας την εξίσωση (2.1):

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_{i,n}} = \frac{1}{S_i^2} \frac{\partial J_i}{\partial x_{i,n}} - 2 \frac{J_i}{S_i^3} \frac{\partial S_i}{\partial x_{i,n}}, \quad \frac{\partial R_i}{\partial y_{i,n}} = \frac{1}{S_i^2} \frac{\partial J_i}{\partial y_{i,n}} - 2 \frac{J_i}{S_i^3} \frac{\partial S_i}{\partial y_{i,n}} \quad (2.14)$$

όπου J_i, S_i ορίζονται από τις εξισώσεις (2.2) και (2.3) αντίστοιχα.

Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης του εμβαδού και της περιμέτρου του τριγώνου i δίνονται από τους παρακάτω τύπους αναλόγως αν $n = 1, 2$ ή 3 :

$$\frac{\partial J_i}{\partial x_{i,1}} = -\frac{1}{2} (y_{i,3} - y_{i,2}), \quad \frac{\partial J_i}{\partial y_{i,1}} = \frac{1}{2} (x_{i,3} - x_{i,2}) \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial x_{i,1}} = \frac{x_{i,1} - x_{i,2}}{\|\overrightarrow{P_{i,1} P_{i,2}}\|} + \frac{x_{i,1} - x_{i,3}}{\|\overrightarrow{P_{i,1} P_{i,3}}\|}, \quad \frac{\partial S_i}{\partial y_{i,1}} = \frac{y_{i,1} - y_{i,2}}{\|\overrightarrow{P_{i,1} P_{i,2}}\|} + \frac{y_{i,1} - y_{i,3}}{\|\overrightarrow{P_{i,1} P_{i,3}}\|} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial J_i}{\partial x_{i,2}} = \frac{1}{2} (y_{i,3} - y_{i,1}), \quad \frac{\partial J_i}{\partial y_{i,2}} = -\frac{1}{2} (x_{i,3} - x_{i,1}) \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial x_{i,2}} = \frac{x_{i,2} - x_{i,1}}{\|\overrightarrow{P_{i,2} P_{i,1}}\|} + \frac{x_{i,2} - x_{i,3}}{\|\overrightarrow{P_{i,2} P_{i,3}}\|}, \quad \frac{\partial S_i}{\partial y_{i,2}} = \frac{y_{i,2} - y_{i,1}}{\|\overrightarrow{P_{i,2} P_{i,1}}\|} + \frac{y_{i,2} - y_{i,3}}{\|\overrightarrow{P_{i,2} P_{i,3}}\|} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial J_i}{\partial x_{i,3}} = -\frac{1}{2} (y_{i,2} - y_{i,1}), \quad \frac{\partial J_i}{\partial y_{i,3}} = \frac{1}{2} (x_{i,2} - x_{i,1}) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial x_{i,3}} = \frac{x_{i,3} - x_{i,1}}{\|\overrightarrow{P_{i,3} P_{i,1}}\|} + \frac{x_{i,3} - x_{i,2}}{\|\overrightarrow{P_{i,3} P_{i,2}}\|}, \quad \frac{\partial S_i}{\partial y_{i,3}} = \frac{y_{i,3} - y_{i,1}}{\|\overrightarrow{P_{i,3} P_{i,1}}\|} + \frac{y_{i,3} - y_{i,2}}{\|\overrightarrow{P_{i,3} P_{i,2}}\|} \quad (2.20)$$

όπου $\overrightarrow{P_{i,1} P_{i,2}}, \overrightarrow{P_{i,2} P_{i,3}}, \overrightarrow{P_{i,1} P_{i,3}}$ ορίζονται για το τρίγωνο i από την εξίσωση (2.4).

Στο σημείο αυτό είμαστε, πλέον, σε θέση να διατυπώσουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Η υποψήφια βέλτιστη κατάσταση του πλέγματος ορίζεται ως κατάσταση ελαχίστου για τη συνάρτηση κόστους f . Συμβολίζεται με $z^* \in \mathfrak{R}^{2M}$ και αποτελεί λύση του αλγεβρικού συστήματος:

$$\nabla f(z^*) = 0 \quad (2.21)$$

όπου ∇f ορίζεται από την εξίσωση (2.12).

Ενδέχεται να υπάρχουν περισσότερες από μία λύσεις για το σύστημα, οπότε η z^* χαρακτηρίζεται, στη γενική περίπτωση, ως θέση τοπικού ελαχίστου της f . Το όρισμα της συνάρτησης f είναι οι συντεταγμένες των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος $z = (x_1, y_1, \dots, x_M, y_M) \in \mathfrak{R}^{2M}$. Οι οριακοί κόμβοι παραμένουν στατικοί κατά τη βελτιστοποίηση του πλέγματος και λειτουργούν ως περιορισμός στην ελάχιστη τιμή που δύναται να λάβει η f . Στις συνήθεις εφαρμογές του μηχανικού η διάσταση του χώρου κατάστασης του πλέγματος κυμαίνεται από $M \sim 10^4$ ως 10^8 . Λόγω της μεγάλης διάστασης και της μη-γραμμικότητας του συστήματος (2.21) είναι επιβεβλημένη η προσέγγιση της λύσης του μέσω αριθμητικής μεθόδου.

2.3 Μέθοδοι Βελτιστοποίησης

2.3.1 Μέθοδος της Απότομης Καθόδου

Η μέθοδος της απότομης καθόδου (steepest descent) είναι μία επαναληπτική διαδικασία εύρεσης ενός τοπικού ελαχίστου μίας διαφορίσιμης συνάρτησης. Για να προκύψει η αναδρομική σχέση της μεθόδου ορίζεται, καταρχάς, το παρακάτω δυναμικό σύστημα:

$$\dot{z} = -\nabla f(z) \quad , \quad z(t=0) = z_0 \quad (2.22)$$

όπου ∇f ορίζεται από την εξίσωση (2.12).

Αποδεικνύεται ότι η λύση του δυναμικού συστήματος συνιστά τροχιά $z(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2M}$ επί της οποίας η συνάρτηση f είναι φθίνουσα. Με αρχική κατάσταση z_0 ισχύει, πράγματι, ότι:

$$\dot{z} = -\nabla f(z) \Rightarrow \|\dot{z}\|^2 = -\nabla f(z) \cdot \dot{z} = -(f \circ z)'(t) \Rightarrow f(z) = f(z_0) - \int_{\tau=0}^{\tau=t} \|\dot{z}(\tau)\|^2 dt \leq f(z_0)$$

Η λύση του συστήματος (2.21) αποτελεί κατάσταση ισορροπίας για το δυναμικό σύστημα. Εξασφαλίζεται η σύγκλιση $z(t \rightarrow \infty) \rightarrow z^*$, $\forall z_0$ υπό την προϋπόθεση ότι είναι μοναδική λύση.

Η διακριτοποίηση του δυναμικού συστήματος με τη μέθοδο Euler οδηγεί στη ρητή αναδρομική σχέση:

$$z_{n+1} = z_n - \delta t \nabla f(z_n) \quad , \quad z_{n=0} = z_0 \quad (2.23)$$

όπου n το όρισμα της ακολουθίας και δt το βήμα της διακριτοποίησης.

Η παραπάνω έκφραση συνιστά τη διαδικασία βελτιστοποίησης με τη μέθοδο της απότομης καθόδου. Σε κάθε επανάληψη της μεθόδου η κατεύθυνση ανίχνευσης (search direction) καθορίζεται από το διάνυσμα της κλίσης της συνάρτησης κόστους. Αποδεικνύεται ότι για επαρκώς μικρό βήμα διακριτοποίησης η ακολουθία συγκλίνει ευσταθώς στη βέλτιστη κατάσταση: $\lim z_n = z^*$. Στη διατύπωση αυτή το βήμα ορίζεται ενιαία για κάθε κόμβο του πλέγματος και παραμένει σταθερό σε κάθε επανάληψη της μεθόδου.

Η μέθοδος της απότομης καθόδου χαρακτηρίζεται από πρώτης τάξης ρυθμό σύγκλισης, γεγονός στο οποίο οφείλεται η αργή προσέγγιση της βέλτιστης κατάστασης. Για τον λόγο αυτό είναι προτιμότερη μία μέθοδος με ρυθμό σύγκλισης δεύτερης τάξης, όπως η Newton – Raphson. Στο παράρτημα Α'.1 παρατίθεται η αναλυτική περιγραφή της Newton – Raphson για τη συγκεκριμένη συνάρτηση κόστους f . Προϋπόθεση της βελτιστοποίησης με τη μέθοδο αυτή συνιστά η δυνατότητα αποθήκευσης και αντιστροφής του εσσιανού μητρώου (hessian matrix) $\nabla^2 f$ της συνάρτησης κόστους. Σε κάθε επανάληψη της μεθόδου η κατεύθυνση ανίχνευσης ορίζεται ως εξής: $(\nabla^2 f)^{-1} \nabla f$. Στην προκειμένη περίπτωση προκύπτει ότι το εσσιανό μητρώο είναι αραιό συνεπώς μπορεί να αποφευχθεί η αποθήκευσή του ως αντικειμένου διαστάσεων $2M \times 2M$. Παρ' όλα αυτά, το υπολογιστικό κόστος της αντιστροφής του καθιστά τη μέθοδο Newton – Raphson ακατάλληλη για τη συγκεκριμένη εφαρμογή. Καταλήγουμε στη χρήση μίας μεθόδου quasi – Newton μέσω της οποίας υποκαθίσταται η κατεύθυνση ανίχνευσης της Newton – Raphson από μια προσέγγισή της.

2.3.2 Μέθοδος L-BFGS

Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης BFGS ανήκουν στην οικογένεια μεθόδων quasi – Newton. Στις μεθόδους αυτές χρησιμοποιείται μία προσέγγιση της κατεύθυνσης ανίχνευσης της Newton – Raphson προς αποφυγή της αντιστροφής του εσσιανού μητρώου της συνάρτησης κόστους f , διατηρώντας ταυτόχρονα υψηλό ρυθμό σύγκλισης. Συγκεκριμένα, επιλέγεται η μέθοδος Limited-Memory BFGS (L-BFGS).

Στην πρώτη επανάληψη της βελτιστοποίησης ενός πλέγματος, η κατεύθυνση ανίχνευσης ταυτίζεται με εκείνη της μεθόδου της απότομης καθόδου, όπως ορίζεται στην εξίσωση (2.23). Στη n -οστή επανάληψη πραγματοποιείται μία εσωτερική επαναληπτική διαδικασία για την κατασκευή της προσέγγισης της κατεύθυνσης ανίχνευσης της μεθόδου Newton – Raphson. Ως αρχική εκτίμηση για την κατεύθυνση ανίχνευσης υπολογίζεται η κλίση της συνάρτησης κόστους στην παρούσα κατάσταση. Ακολουθεί η διόρθωσή της βάσει της πληροφορίας της κατάστασης του πλέγματος z_i και της κλίσης ∇f_i από m προηγούμενες επαναλήψεις της βελτιστοποίησης, με $n - m \leq i \leq n - 1$. Επιλέγεται ενδεικτικά η τιμή $m = 10$ αν $n > 10$, αλλιώς ισχύει ότι $m = n - 1$. Η μέθοδος L-BFGS είναι η πλέον ενδεδειγμένη για τη συγκεκριμένη εφαρμογή, εφόσον για την υλοποίησή της απαιτείται η αποθήκευση ενός αντικειμένου διάστασης μόνο $2m \times 2M$ αντί για $2M \times 2M$.

Υιοθετείται ο συμβολισμός για το σύστημα της εξίσωσης (2.21) $g: \mathbb{R}^{2M} \rightarrow \mathbb{R}^{2M}$ με $g = \nabla f \Rightarrow \nabla g = \nabla^2 f$, όπως επίσης και για την προσέγγιση της κατεύθυνσης ανίχνευσης της μεθόδου Newton – Raphson $\mathcal{H} \sim (\nabla^2 f)^{-1} \nabla f$. Με Δz_i συμβολίζεται η διαφορά μεταξύ διαδοχικών καταστάσεων του πλέγματος $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$ και ομοίως ορίζεται $\Delta g_i = g_{i+1} - g_i$.

Παρατίθεται ο αλγόριθμος της μεθόδου L-BFGS για τη n -οστή επανάληψη της βελτιστοποίησης του πλέγματος σε μορφή ψευδοκώδικα:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n &= g_n \\ \text{For } i &= n - 1, n - 2, \dots, n - m \\ \Delta z_i &= z_{i+1} - z_i \\ \Delta g_i &= g_{i+1} - g_i \\ a_i &= \frac{\Delta z_i^T \mathcal{H}_n}{\Delta z_i^T \Delta g_i} \\ \mathcal{H}_n &\rightarrow \mathcal{H}_n - a_i \Delta g_i \\ \mathcal{H}_n &\rightarrow \frac{\Delta g_n^T \Delta z_n}{\Delta g_n^T \Delta g_n} \mathcal{H}_n \\ \text{For } i &= n - m, \dots, n - 2, n - 1 \\ b_i &= \frac{\Delta g_i^T \mathcal{H}_n}{\Delta g_i^T \Delta z_i} \\ \mathcal{H}_n &\rightarrow \mathcal{H}_n + (a_i - b_i) \Delta z_i \\ \mathcal{H}_n &\rightarrow -\mathcal{H}_n \end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό επαναδιατυπώνεται το πρόβλημα που τέθηκε στο τέλος της ενότητας 2.3.1. Στην περίπτωση της βελτιστοποίησης με τη μέθοδο Newton – Raphson η αύξηση στην τάξη του ρυθμού σύγκλισης συνοδεύεται από απαγορευτικά υψηλό υπολογιστικό κόστος. Στη n -οστή επανάληψη της μεθόδου τίθεται προς επίλυση το σύστημα: $\nabla^2 f(z_n) \Delta z_n = -\nabla f(z_n)$, όπου το εσσιανό μητρώο της συνάρτησης f ορίζεται στο παράρτημα Α'.1. Προς αποφυγή της αντιστροφής του εσσιανού μητρώου προτάθηκε στην ενότητα 2.3.2 η μέθοδος L-BFGS, βάσει της οποίας ορίζεται μία προσέγγιση της λύσης του συστήματος: $\mathcal{H} \sim (\nabla^2 f)^{-1} \nabla f$. Εναλλακτικά, η λύση του μπορεί να προσεγγισθεί μέσω αριθμητικής μεθόδου επίλυσης γραμμικών συστημάτων. Μια χαρακτηριστική περίπτωση συνιστά η μέθοδος των συζυγών κλίσεων (conjugate gradient method) [9]. Στο παράρτημα Α'.2 παρατίθεται μία περιγραφή της μεθόδου των συζυγών κλίσεων για τη συγκεκριμένη εφαρμογή.

Στη μέθοδο L-BFGS η προσέγγιση της λύσης του συστήματος βασίζεται στην κατάσταση του πλέγματος ως είχε στις προηγούμενες επαναλήψεις. Η πληροφορία αυτή χρειάζεται να αποθηκευτεί με κόστος ανάλογο του αριθμού των κόμβων M . Στην περίπτωση της μεθόδου των συζυγών κλίσεων αποθηκεύεται το εσσιανό μητρώο, όμως, λόγω της αραιότητάς του, το αποθηκευτικό κόστος είναι και πάλι της ίδιας τάξης. Προκύπτει, επίσης, ότι οι δύο μέθοδοι χαρακτηρίζονται κατά προσέγγιση από ίδιας τάξης ρυθμό σύγκλισης και υπολογιστικό κόστος. Στην περίπτωση της δεύτερης, όμως, προϋπόθεση για τη σύγκλιση της αποτελεί το εσσιανό μητρώο να είναι συμμετρικό και θετικά ορισμένο. Ενώ η πρώτη συνθήκη εξασφαλίζεται, η δεύτερη δεν πληρείται εν γένει. Στο πλαίσιο της εργασίας συντάχθηκε κώδικας σε Fortran 77 που υλοποιεί την κάθε μέθοδο. Έπειτα από δοκιμή του, παρατηρήθηκε ότι η μέθοδος των συζυγών κλίσεων αδυνατεί να συγκλίνει σε αρκετές περιπτώσεις. Ως εκ τούτου, επιλέγεται η μέθοδος L-BFGS για τη διαδικασία βελτιστοποίησης. Χρησιμοποιείται στην πλειονότητα των παραδειγμάτων εφαρμογής που θα παρουσιαστούν στην εργασία, εκτός αν επισημαίνεται ρητά η χρήση άλλης μεθόδου.

2.3.3 Προσταθεροποίηση

Η προσταθεροποίηση (preconditioning) [9] συνιστά τη διαδικασία μετασχηματισμού ενός προβλήματος κατά τρόπο τέτοιο ώστε το νέο σύστημα των εξισώσεων να αποκτήσει μία μορφή πιο κατάλληλη για αριθμητική επίλυση. Σχετίζεται με τη μείωση του δείκτη κατάστασης [10] του αρχικού προβλήματος και συνεπώς με την αύξηση της ευστάθειας της αριθμητικής μεθόδου. Στην περίπτωση ενός γραμμικού συστήματος: $Ax = b$, $\det A \neq 0$ ο προσταθεροποιητής είναι πίνακας και συμβολίζεται με \mathcal{P} . Αποτελεί μία εύκολα αντιστρέψιμη εκδοχή του πίνακα A , διατηρώντας ταυτόχρονα τη βασική του πληροφορία. Μία συνήθης επιλογή είναι \mathcal{P} διαγώνιος πίνακας με τιμές ίδιες με της διαγωνίου του πίνακα A . Το μετασχηματισμένο σύστημα γράφεται ως εξής: $\mathcal{P}^{-1}Ax = \mathcal{P}^{-1}b$, όπου \mathcal{P} τέτοιος ώστε $\mathcal{P}^{-1}A \sim I$.

Σε κάθε επανάληψη της βελτιστοποίησης ενός πλέγματος με τη μέθοδο Newton – Raphson απαιτείται η επίλυση του γραμμικού συστήματος: $\nabla^2 f(z_n) \Delta z_n = -\nabla f(z_n)$ όπου ∇f είναι η κλίση της συνάρτησης κόστους και $\nabla^2 f$ το εσσιανό μητρώο, το οποίο ορίζεται στο παράρτημα Α'.1. Μία ιδιαιτερότητα των μη-δομημένων πλεγμάτων είναι ακριβώς η μη-γνώση της δομής του εσσιανού μητρώου. Εν τούτοις, υπό τη θεώρησή του ως block πίνακα διαστάσεων $M \times M$ με στοιχεία πίνακες 2×2 , διαπιστώνεται ότι η διαγώνιός του αποτελείται από μη-μηδενικά στοιχεία, ασχέτως της δομής του πλέγματος. Αυτό αποδίδεται στο γεγονός ότι το k -οστό στοιχείο της διαγωνίου του εκφράζει τη συνεισφορά της παρούσας κατάστασης του ίδιου του κόμβου P_k στην τάση μετατόπισής του.

Ορίζεται ο προσαθεροποιητής \mathcal{P} ως block διαγώνιος πίνακας με τιμές ίδιες με του εσσιανού μητρώου:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \nabla_1^2 f & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \nabla_2^2 f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \nabla_M^2 f \end{pmatrix}, \quad \nabla_k^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial y_k} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial y_k} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_k^2} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Για το μη-μηδενικό k -οστό στοιχείο του πίνακα \mathcal{P} ισχύει ο παρακάτω τύπος:

$$\nabla_k^2 f(z) = \sum_{i \in I_k} (R_i - R_{max}) \nabla_k^2 R_i + \nabla_k R_i \nabla_k R_i^T \quad (2.25)$$

όπου $R_i, \nabla_k R_i$ ορίζονται από τις εξισώσεις (2.1), (2.14) αντίστοιχα και I_k είναι το σύνολο των τριγώνων που περιβάλλουν τον κόμβο P_k .

Για τον όρο $\nabla_k^2 R_i$ προκύπτει η εξής σχέση παραγωγίζοντας την εξίσωση (2.14):

$$\nabla_k^2 R_i = \frac{1}{S_i^2} \nabla_k^2 J_i - 2 \frac{J_i}{S_i^3} \nabla_k^2 S_i - 2 \frac{J_i}{S_i^3} (\nabla_k J_i \nabla_\lambda S_i^T + \nabla_k S_i \nabla_\lambda J_i^T) + 6 \frac{J_i}{S_i^4} \nabla_k S_i \nabla_\lambda S_i^T \quad (2.26)$$

όπου J_i, S_i και $\nabla_k J_i, \nabla_k S_i$ ορίζονται από τις εξισώσεις (2.2), (2.3) και (2.15) ως (2.20) αντίστοιχα.

Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης του εμβαδού και της περιμέτρου του τριγώνου i που εμφανίζονται στην εξίσωση (2.27) δίνονται από τους παρακάτω τύπους αναλόγως αν $n = 1, 2$ ή 3 :

$$\frac{\partial^2 J_i}{\partial x_{i,n}^2} = \frac{\partial^2 J_i}{\partial y_{i,n}^2} = \frac{\partial^2 J_i}{\partial x_{i,n} \partial y_{i,n}} = 0, \quad \forall n \in \{1, 2, 3\} \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x_{i,1}^2} = \frac{(y_{i,1} - y_{i,2})^2}{\|\vec{P_{i,1} P_{i,2}}\|^3} + \frac{(y_{i,1} - y_{i,3})^2}{\|\vec{P_{i,1} P_{i,3}}\|^3}, \quad \frac{\partial^2 S_i}{\partial y_{i,1}^2} = \frac{(x_{i,1} - x_{i,2})^2}{\|\vec{P_{i,1} P_{i,2}}\|^3} + \frac{(x_{i,1} - x_{i,3})^2}{\|\vec{P_{i,1} P_{i,3}}\|^3} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x_{i,2}^2} = \frac{(y_{i,2} - y_{i,1})^2}{\|\vec{P_{i,2} P_{i,1}}\|^3} + \frac{(y_{i,2} - y_{i,3})^2}{\|\vec{P_{i,2} P_{i,3}}\|^3}, \quad \frac{\partial^2 S_i}{\partial y_{i,2}^2} = \frac{(x_{i,2} - x_{i,1})^2}{\|\vec{P_{i,2} P_{i,1}}\|^3} + \frac{(x_{i,2} - x_{i,3})^2}{\|\vec{P_{i,2} P_{i,3}}\|^3} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x_{i,3}^2} = \frac{(y_{i,3} - y_{i,1})^2}{\|\vec{P_{i,3} P_{i,1}}\|^3} + \frac{(y_{i,3} - y_{i,2})^2}{\|\vec{P_{i,3} P_{i,2}}\|^3}, \quad \frac{\partial^2 S_i}{\partial y_{i,3}^2} = \frac{(x_{i,3} - x_{i,1})^2}{\|\vec{P_{i,3} P_{i,1}}\|^3} + \frac{(x_{i,3} - x_{i,2})^2}{\|\vec{P_{i,3} P_{i,2}}\|^3} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x_{i,1} \partial y_{i,1}} = -\frac{(x_{i,1} - x_{i,2})(y_{i,1} - y_{i,2})}{\|\vec{P_{i,1} P_{i,2}}\|^3} - \frac{(x_{i,1} - x_{i,3})(y_{i,1} - y_{i,3})}{\|\vec{P_{i,1} P_{i,3}}\|^3} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x_{i,2} \partial y_{i,2}} = -\frac{(x_{i,2} - x_{i,1})(y_{i,2} - y_{i,1})}{\|\vec{P_{i,2} P_{i,1}}\|^3} - \frac{(x_{i,2} - x_{i,3})(y_{i,2} - y_{i,3})}{\|\vec{P_{i,2} P_{i,3}}\|^3} \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x_{i,3} \partial y_{i,3}} = -\frac{(x_{i,3} - x_{i,1})(y_{i,3} - y_{i,1})}{\|\vec{P_{i,3} P_{i,1}}\|^3} - \frac{(x_{i,3} - x_{i,2})(y_{i,3} - y_{i,2})}{\|\vec{P_{i,3} P_{i,2}}\|^3} \quad (2.33)$$

όπου $\vec{P_{i,1} P_{i,2}}, \vec{P_{i,2} P_{i,3}}, \vec{P_{i,1} P_{i,3}}$ ορίζονται για το τρίγωνο i από την εξίσωση (2.4).

Ο πίνακας \mathcal{P} είναι συμμετρικός και αντιστρέψιμος εκ κατασκευής. Δεδομένου ότι \mathcal{P} block διαγώνιος πίνακας ο αντίστροφός του \mathcal{P}^{-1} αποτελεί, ομοίως, block διαγώνιο πίνακα διάστασης $M \times M$, με τα στοιχεία της διαγωνίου του να προκύπτουν μέσω αντιστροφής των υπο-πινάκων 2×2 του \mathcal{P} :

$$\mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} (\nabla_1^2 f)^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\nabla_2^2 f)^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (\nabla_M^2 f)^{-1} \end{pmatrix}, \quad (\nabla_k^2 f)^{-1} = \frac{1}{\det(\nabla_k^2 f)} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y_k^2} & -\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial y_k} \\ -\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial y_k} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Ο πίνακας \mathcal{P}^{-1} αποτελεί τον αντίστροφο του προσαθεροποιητή υπό τη συγκεκριμένη θεώρηση. Στο πλαίσιο της εργασίας χρησιμοποιείται ως μία προσέγγιση του αντιστρόφου του εσσιανού μητρώου.

Η αναδρομική σχέση της μεθόδου της απότομης καθόδου με χρήση προσαθεροποιητή είναι η εξής:

$$z_{n+1} = z_n - \eta \mathcal{P}_n^{-1} \nabla f_n \quad (2.35)$$

όπου η είναι το βήμα της μεθόδου και ∇f ορίζεται από την εξίσωση (2.12).

Σε σύγκριση με τη μέθοδο L-BFGS, η συγκεκριμένη χαρακτηρίζεται από ιδιαίτερα χαμηλό υπολογιστικό κόστος και μη περαιτέρω αποθήκευση πληροφορίας, πέραν της κλίσης ∇f . Παρέχει, βέβαια, μία αναλόγως μικρότερης ακρίβειας προσέγγιση της κατεύθυνσης ανίχνευσης της Newton – Raphson, λόγω του υποβιβασμού του μητρώου τάξης $2M \times 2M$ σε ένα πλήθος M μητρώων τάξης 2×2 .

Όσον αφορά την προσαθεροποίηση στη μέθοδο L-BFGS ορίζεται $\tilde{g} : \mathbb{R}^{2M} \rightarrow \mathbb{R}^{2M}$ με τύπο $\tilde{g} = \mathcal{P}^{-1} \nabla f$ και ακολουθούνται τα βήματα του αλγορίθμου όπως περιγράφονται στην ενότητα 2.3.2 αντικαθιστώντας τη συνάρτηση g με \tilde{g} . Η συνεισφορά στην αύξηση της ταχύτητας σύγκλισης που προέρχεται από την προσαθεροποίηση είναι μικρότερη από εκείνη της μεθόδου L-BFGS, παρ' όλα αυτά δεν είναι αμελητέα και καθίσταται περισσότερο αισθητή καθώς $\|z_n - z^*\| \rightarrow 0$.

2.4 Παραδείγματα Εφαρμογής της Μεθόδου Βελτιστοποίησης 2Δ Πλεγμάτων

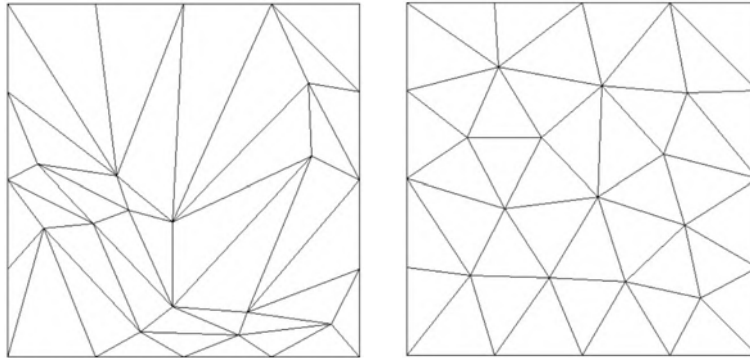
Παρατίθενται ορισμένα παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου βελτιστοποίησης της ποιότητας 2Δ πλεγμάτων. Πρόκειται περί πλεγμάτων λίγων κόμβων με όρια απλής γεωμετρίας ώστε να υπάρχει η δυνατότητα οπτικής εποπτείας και αξιολόγησης της ποιότητάς τους. Όσον αφορά την παραμόρφωση των ορίων αρκούμαστε στην περίπτωση της περιστροφής τους (rigid motion). Οι μετρικές αξιολόγησης των πλεγμάτων ορίζονται αναλυτικά στο κεφάλαιο 2.1. Για να υπάρχει μια αναφορά, υπενθυμίζεται η ιδανική τιμή για κάθε μετρική: $\min f = 0$, $\max r_{mean} = 1$, $\min r_{dev} = 0$, $\max \mu_1 = 1$, $\min \mu_2 = 0$. Στα διαγράμματα σύγκλισης της μεθόδου αναπαρίσταται η νόρμα του συστήματος (2.21), για την οποία ισχύει η σχέση: $\|\nabla f(z^*)\| = 0$. Ως κριτήριο σύγκλισης ορίζεται:

$$\|\nabla f_n\| \leq 10^{-5} \|\nabla f_{n=0}\| \quad (2.36)$$

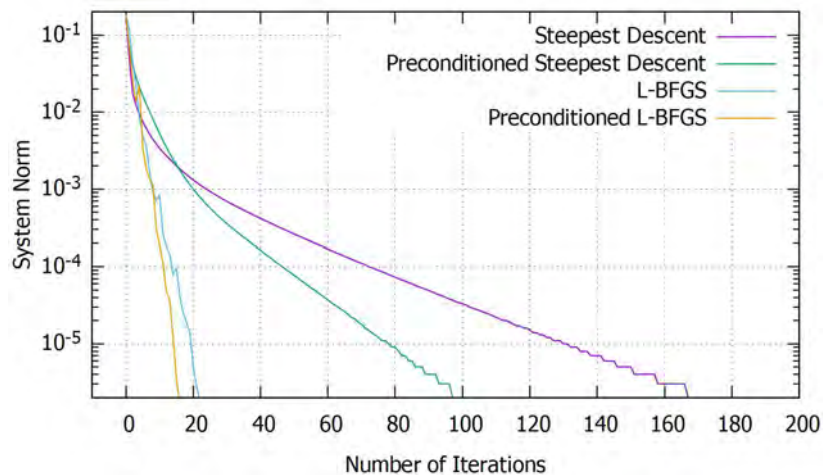
όπου n ο δείκτης που αναφέρεται στον αριθμό της επανάληψης της μεθόδου.

2.4.1 Βελτιστοποίηση Πλέγματος στο Εσωτερικό ενός Τετραγώνου

Στο σχήμα 2.2 αναπαρίσταται μία περίπτωση αποκλειστικά βελτιστοποίησης της ποιότητας ενός πλέγματος χωρίς κίνηση των ορίων του. Το πλέγμα αποτελείται από 29 κόμβους και 40 στοιχεία. Το εξωτερικό όριο έχει σχήμα τετραγώνου, ενώ δεν υφίσταται εσωτερικό όριο.



Σχήμα 2.2: Βελτιστοποίηση της ποιότητας πλέγματος 29 κόμβων, 40 στοιχείων. Αρχικό πλέγμα χαμηλής ποιότητας (αριστερά). Βελτιστοποιημένο πλέγμα (δεξιά).



Σχήμα 2.3: Διάγραμμα σύγκλισης της νόρμας του συστήματος (2.21) για το παράδειγμα του σχήματος 2.2. Ο κατακόρυφος άξονας είναι σε λογαριθμική κλίμακα.

| Μετρικές Πλέγμα | f | r_{mean} | r_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|--------------------|----------|------------|-----------|----------|----------|
| Αρχικό | 0.005698 | 0.826624 | 0.177436 | 0.192116 | 0.318703 |
| Βελτιστοποιημένο | 0.000356 | 0.948718 | 0.034904 | 0.860018 | 0.045121 |

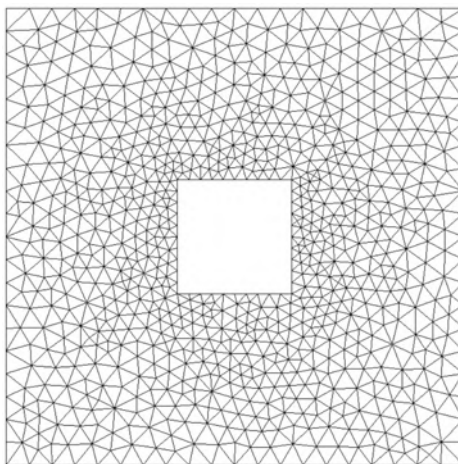
Πίνακας 2.1: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (2.6) ως (2.10) για το παράδειγμα του σχήματος 2.2.

Επαληθεύεται, καταρχάς, οπτικά η τάση της μεθόδου για βελτίωση της ποιότητας ενός πλέγματος. Στον πίνακα 2.1 φαίνεται ότι η συνάρτηση κόστους μειώνεται κατά μία τάξη μεγέθους. Η μέση τιμή της ανηγμένης κυκλικότητας αυξάνεται, η τυπική της απόκλιση μειώνεται, η ελάχιστη τιμή της αυξάνεται σημαντικά και η μέγιστη τιμή της τυπικής της απόκλισης σε τοπικό επίπεδο μειώνεται. Κατά συνέπεια, το τελικό πλέγμα βελτιώνεται ως προς όλες τις μετρικές ποιότητάς του.

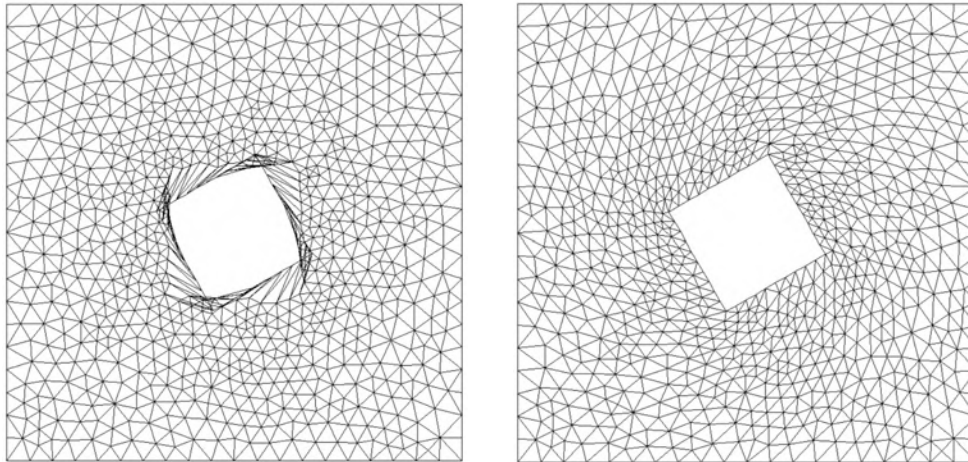
Στο σχήμα 2.3 γίνεται σύγκριση της σύγκλισης της κάθε αριθμητικής μεθόδου. Πρώτον επιβεβαιώνεται ότι η νόρμα του συστήματος (2.21) τείνει στο μηδέν σε κάθε περίπτωση. Καθίσταται, επίσης, φανερό ότι η βελτιστοποίηση μέσω του αλγορίθμου L-BFGS επιτυγχάνεται προσεγγιστικά κατά μία τάξη μεγέθους γρηγορότερα από ότι μέσω της μεθόδου της απότομης καθόδου. Η χρήση προσαθεροποιητή συμβάλλει, ως αναμενόταν, σε μικρότερο βαθμό στην αύξηση της ταχύτητας σύγκλισης. Όσο εγγύτερα βρίσκεται, όμως, το σύστημα στη βέλτιστη κατάσταση η διαφοροποίηση λόγω προσαθεροποίησης είναι αισθητή. Παρατηρείται, μάλιστα, ότι συνεπάγεται μία μείωση του αριθμού των επαναλήψεων περίπου κατά 1/3 ασχέτως της εκάστοτε περίπτωσης παραμόρφωσης.

2.4.2 Βελτιστοποίηση Πλέγματος δύο Ομόκεντρων Τετραγώνων

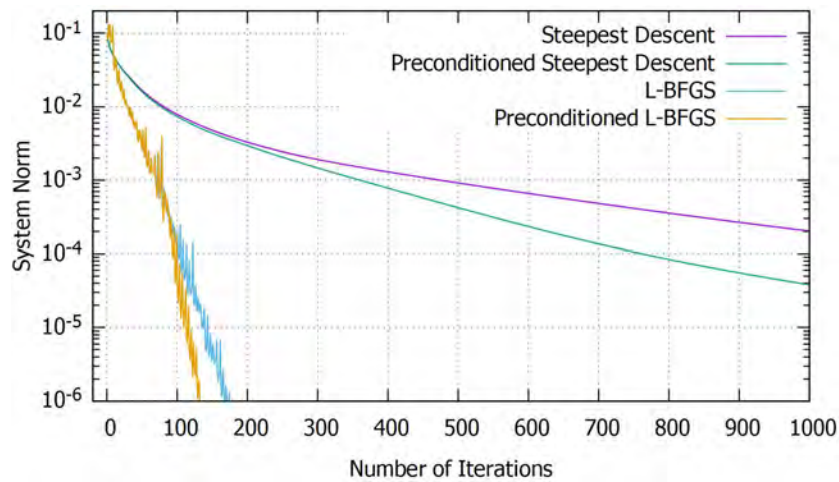
Στα σχήματα 2.4, 2.5 και 2.7 το χωρίο του πλέγματος ορίζεται από ένα εσωτερικό και ένα εξωτερικό όριο σχήματος ομόκεντρων τετραγώνων. Πρόκειται περί αραιού πλέγματος 884 κόμβων και 1648 στοιχείων. Κατά συνέπεια, αποτελεί μία απαιτητική περίπτωση, εφόσον δεν του επιτρέπεται να παραλάβει μεγάλες παραμορφώσεις χωρίς να μειωθεί σημαντικά η ποιότητα των στοιχείων του. Εκτελείται η περιστροφή του εσωτερικού ορίου μονομιάς, χωρίς να παρεμβάλλονται, δηλαδή, ενδιάμεσα βήματα. Δοκιμάζονται ενδεικτικά δύο τιμές για τη γωνία στροφής: $\varphi = 30^\circ$ και $\varphi = 53^\circ$ (αριστερόστροφα). Το εξωτερικό όριο παραμένει στατικό.



Σχήμα 2.4: Απαραμόρφωτο πλέγμα 884 κόμβων, 1648 στοιχείων με εσωτερικό και εξωτερικό όριο σε σχήμα ομόκεντρων τετραγώνων. Η στροφή τελείται περί το κέντρο των τετραγώνων.



Σχήμα 2.5: Στροφή 30° του εσωτερικού ορίου (αριστερά). Βελτιστοποιημένο πλέγμα (δεξιά).



Σχήμα 2.6: Διάγραμμα σύγκλισης της νόρμας του συστήματος (2.21) για το παράδειγμα του σχήματος 2.5. Ο κατακόρυφος άξονας είναι σε λογαριθμική κλίμακα.

| Μετρικές Πλέγμα | f | r_{mean} | r_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|--------------------|----------|------------|-----------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.008879 | 0.966688 | 0.034896 | 0.734732 | 0.095157 |
| Παραμορφωμένο | 0.185247 | 0.921464 | 0.205893 | -0.531411 | 0.618474 |
| Βελτιστοποιημένο | 0.037861 | 0.916939 | 0.055006 | 0.477634 | 0.178713 |

Πίνακας 2.2: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (2.6) ως (2.10) για το παράδειγμα του σχήματος 2.5.

| Αλγόριθμος | SD | P-SD | L-BFGS | P-L-BFGS |
|----------------|-------|-------|--------|----------|
| CPU Time (sec) | 2.841 | 1.968 | 0.437 | 0.325 |

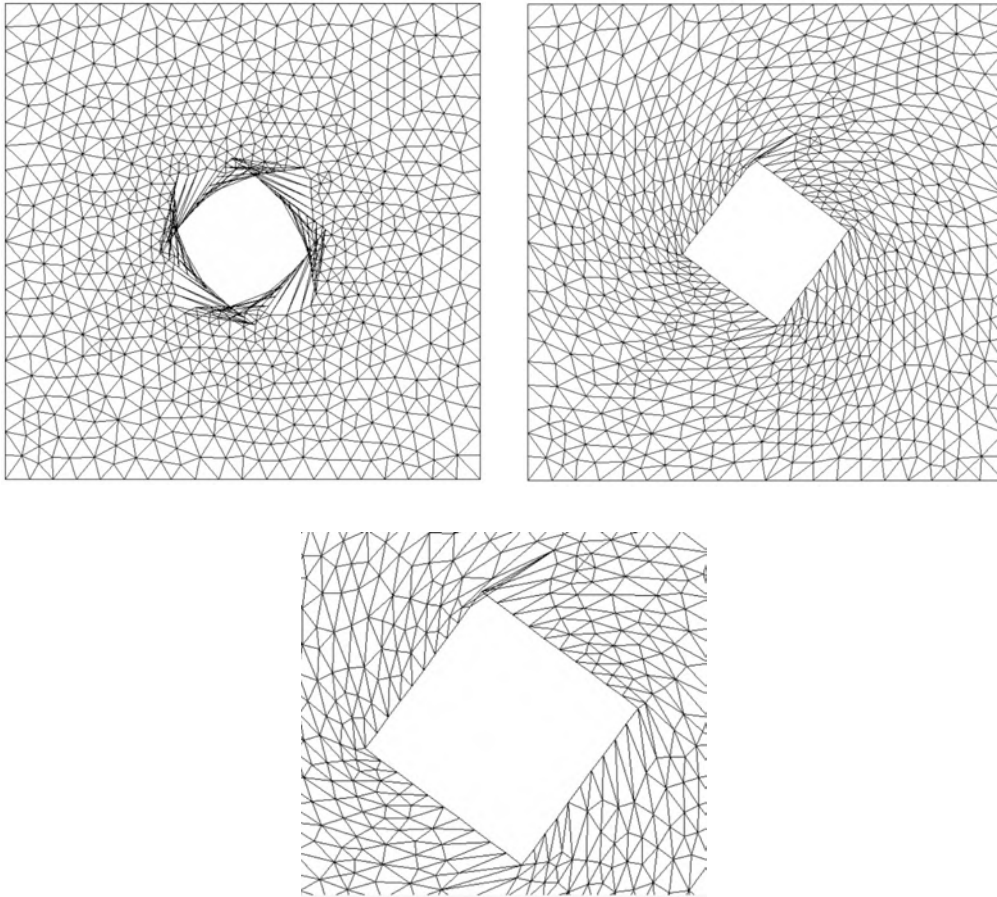
Πίνακας 2.3: Ο υπολογιστικός χρόνος (CPU time) που απαιτείται για τη διεκπεραίωση της διαδικασίας βελτιστοποίησης σε επεξεργαστή Intel Core i7-1165G7 για κάθε αλγόριθμο.

Στο σχήμα 2.4 αναπαρίσταται η παραμορφωμένη κατάσταση του πλέγματος. Στο σχήμα 2.5 φαίνεται στα αριστερά η κατάσταση του πλέγματος αφότου έχει τελεστεί η στροφή 30° του εσωτερικού ορίου. Η παραμόρφωση εμφανίζεται συσσωρευμένη στα τρίγωνα με τουλάχιστον ένα κόμβο επί του κινούμενου ορίου, ενώ τα υπόλοιπα τρίγωνα παραμένουν ως είχαν στο σχήμα 2.4. Για επαρκώς μεγάλη γωνία στροφής ($\varphi > 6^\circ$) απαντώνται τρίγωνα αρνητικού εμβαδού $J < 0$, συνεπώς το πλέγμα παύει να είναι έγκυρο. Στο σχήμα 2.5 φαίνεται στα δεξιά το βελτιστοποιημένο πλέγμα, όπου η παραμόρφωση έχει διαδοθεί στα υπόλοιπα τρίγωνα του με αποτέλεσμα να παρουσιάζει πιο ομοιογενή χαρακτηριστικά.

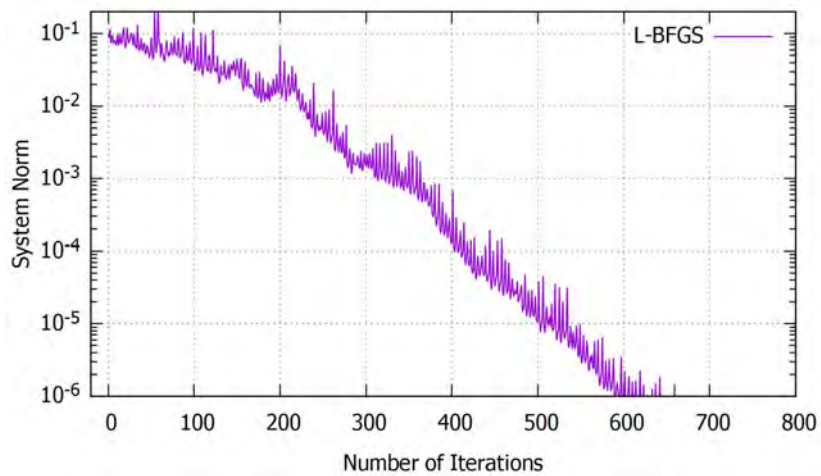
Η μέθοδος βελτιστοποίησης εφαρμόζεται επιτυχώς σε μία περίπτωση στροφής του εσωτερικού ορίου και αναπροσαρμογής του πλέγματος στη νέα του θέση. Στον πίνακα 2.2 παρατηρείται, αρχικά, ότι το πλέγμα προ της στροφής είναι υψηλότερης ποιότητας ως προς κάθε μετρική σε σχέση με το βελτιστοποιημένο πλέγμα μετά τη στροφή, γεγονός το οποίο αναμενόταν. Συγκρίνοντας, ύστερα, την κατάσταση του παραμορφωμένου πλέγματος μετά τη στροφή με εκείνη του βελτιστοποιημένου προκύπτει ότι οι σημαντικότερες μετρικές εμφανίζουν θεμιτή μεταβολή: η μ_1 αυξάνεται σημαντικά και η μ_2 μειώνεται. Ομοίως, η συνάρτηση κόστους f μειώνεται όπως είναι προβλεπόμενο. Παρ' όλα αυτά, η μέση τιμή της ανηγμένης κυκλικότητας εμφανίζει μία μικρή μείωση αντί αύξηση, παρότι είναι οπτικά εμφανής η βελτίωση της ποιότητας του πλέγματος. Για μία μετρική αυτό αποτελεί ένδειξη της μη-καταλληλότητάς της για αξιολόγηση πλεγμάτων σε περιπτώσεις μεγάλων παραμορφώσεων των ορίων.

Στο σχήμα 2.6 φαίνεται ότι η σύγκλιση της νόρμας του συστήματος (2.21) επιτυγχάνεται για όλες τις αριθμητικές μεθόδους. Η σύγκλιση μέσω της μεθόδου L-BFGS πραγματοποιείται προσεγγιστικά μία τάξη μεγέθους γρηγορότερα από ότι μέσω της απότομης καθόδου. Η χρήση προσαθεροποιητή συμβάλλει σε μικρότερο βαθμό στην αύξηση του ρυθμού σύγκλισης. Όσο εγγύτερα βρίσκεται, όμως, το σύστημα στη βέλτιστη κατάσταση η διαφοροποίηση λόγω προσαθεροποίησης γίνεται πιο αισθητή. Παρατηρείται, μάλιστα, ότι συνεπάγεται μία μείωση του αριθμού των επαναλήψεων περίπου κατά $1/3$, ασχέτως της εκάστοτε περίπτωσης παραμόρφωσης. Οι παραπάνω παρατηρήσεις σημειώθηκαν και στο παράδειγμα της ενότητας 2.4.1, συνεπώς το παράδειγμα της ενότητας 2.4.2 λειτουργεί ως μία επαλήθευσή τους.

Ταυτόχρονα, βέβαια, η μέθοδος L-BFGS χαρακτηρίζεται από μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος ανά επανάληψη. Ως εκ τούτου, αντικειμενικό κριτήριο της αποτελεσματικότητας μίας μεθόδου αποτελεί ο υπολογιστικός χρόνος (CPU Time) που απαιτείται για τη σύγκλισή της. Στον πίνακα 2.3 φαίνεται ότι και στην περίπτωση του υπολογιστικού χρόνου ισχύουν ανάλογα αποτελέσματα, συνεπώς η μέθοδος L-BFGS είναι, πράγματι, πιο αποτελεσματικός από τη μέθοδο της απότομης καθόδου.



Σχήμα 2.7: Στροφή 53° του εσωτερικού ορίου (πάνω αριστερά). Βελτιστοποιημένο πλέγμα (πάνω δεξιά). Σε μεγέθυνση το βελτιστοποιημένο πλέγμα γύρω από το εσωτερικό τετράγωνο (κάτω).



Σχήμα 2.8: Διάγραμμα σύγκλισης της νόρμας του συστήματος (2.21) για το παράδειγμα του σχήματος 2.7. Ο κατακόρυφος άξονας είναι σε λογαριθμική κλίμακα.

| Μετρικές Πλέγμα | f | r_{mean} | r_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|--------------------|----------|------------|-----------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.008879 | 0.966688 | 0.034896 | 0.734732 | 0.095157 |
| Παραμορφωμένο | 0.205135 | 0.917819 | 0.216840 | -0.367242 | 0.576719 |
| Βελτιστοποιημένο | 0.123399 | 0.850192 | 0.099524 | -0.161474 | 0.359151 |

Πίνακας 2.4: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (2.6) ως (2.10) για το παράδειγμα του σχήματος 2.7.

Στο σχήμα 2.7 φαίνεται πάνω αριστερά η κατάσταση του πλέγματος αφότου έχει τελεστεί η στροφή 53° του εσωτερικού ορίου. Πάνω δεξιά φαίνεται το αντίστοιχο πλέγμα στη βελτιστοποιημένη κατάσταση. Σε αντίθεση με την περίπτωση στροφής 30° του σχήματος 2.5, η αναπροσαρμογή του πλέγματος στη νέα θέση του εσωτερικού ορίου δεν είναι έγκυρη εφόσον υπάρχουν εναπομείναντα αντεστραμμένα τρίγωνα. Η ύπαρξη μη-αποδεκτών στοιχείων ελέγχεται μέσω του αρνητικού προσήμου της μετρικής μ_1 . Για μεγάλες γωνίες στροφής ($\varphi > 50^\circ$) η μέθοδος εμφανίζει, δηλαδή, αδυναμία στην αντιμετώπιση της αντιστροφής στοιχείων του πλέγματος και στη διαχείριση στοιχείων με μεγάλη λοξότητα (skewness). Η παραμόρφωση δεν διαδίδεται αποτελεσματικά, αλλά παραμένει συγκεντρωμένη στα τρίγωνα εγγύς στο εσωτερικό όριο. Παρ' όλα αυτά, όπως φαίνεται στον πίνακα 2.4, η συνάρτηση κόστους f μειώνεται μετά το πέρασ του αλγορίθμου βελτιστοποίησης.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η παρατήρηση ότι, όσον αφορά την επαναληπτική μέθοδο, επιτυγχάνεται η σύγκλιση της όπως φαίνεται στο σχήμα 2.8. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, στην προκειμένη περίπτωση, το ζήτημα δεν έγκειται στη μέθοδο προσέγγισης της λύσης του συστήματος (2.21) αλλά στον τρόπο με τον οποίο ορίζεται το βέλτιστο πλέγμα, δηλαδή στην ίδια την έκφραση της συνάρτησης κόστους που επιλέχθηκε. Αναφέρεται ότι, για γωνία στροφής μεγαλύτερη από 65° , και η αριθμητική μέθοδος παρουσιάζει αστάθεια και ταλαντώνεται διαρκώς ή αποκλίνει.

Επισημαίνεται, τέλος, ότι η εκτέλεση της στροφής σε μικρότερα διαδοχικά βήματα δεν αλλάζει το τελικό αποτέλεσμα, οπότε το σύστημα συγκλίνει και πάλι στην ίδια μη-έγκυρη κατάσταση. Η διάσπαση εν γένει μίας παραμόρφωσης σε σύνθεση επιμέρους παραμορφώσεων μπορεί να συμβάλλει, σε ορισμένες περιπτώσεις, στην ευστάθεια της μεθόδου, αλλά δεν αφορά την ποιότητα της βέλτιστης κατάστασης του πλέγματος, δηλαδή τη λύση του συστήματος (2.21).

2.5 Ανακεφαλαίωση και Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο 2 αναπτύχθηκε μία πλήρης μέθοδος βελτιστοποίησης 2D μη-δομημένων πλεγμάτων. Η μέθοδος συνίσταται στον ορισμό του βέλτιστου πλέγματος ως λύσης ενός αλγεβρικού συστήματος της μορφής: $\nabla f(z) = 0$ και στη χρήση μίας επαναληπτικής διαδικασίας για τη προσέγγιση της λύσης αυτής. Το βέλτιστο πλέγμα αποτελεί, δηλαδή, κατάσταση ελαχίστου μίας συνάρτησης κόστους f .

Ως δεδομένα της μεθόδου θεωρούνται: η δομή του πλέγματος, ο αριθμός των κόμβων M και οι συντεταγμένες των οριακών κόμβων. Προσδιορίζοντας τις παραπάνω παραμέτρους προκύπτει ένα καλώς τοποθετημένο πρόβλημα βελτιστοποίησης. Η δομή του συστήματος που επιλύεται είναι τυχαία, εφόσον έχει προέλθει από μη-δομημένο πλέγμα, η τάξη του συστήματος ισούται με $2M$ και οι συντεταγμένες των οριακών κόμβων εμφανίζονται στην έκφραση του συστήματος. Κατά συνέπεια, πρόκειται περί μίας οικογένειας συστημάτων. Σκοπός είναι ο κατάλληλος ορισμός της οικογένειας αυτής ώστε, για κάθε επιλογή παραμέτρων, η λύση του συστήματος να ορίζει έγκυρο και καλής ποιότητας πλέγμα. Επιπλέον, πρέπει να οριστεί μία αποτελεσματική μέθοδος επίλυσης της συγκεκριμένης οικογένειας συστημάτων.

Στο κεφάλαιο 2.4 επαληθεύεται ότι η μέθοδος βελτιστοποίησης λειτουργεί, εν γένει, κατά αναμενόμενο τρόπο. Στο παράδειγμα 2.4.2 παρατηρείται, όμως, η αδυναμία της μεθόδου να διαχειριστεί μεγάλες παραμορφώσεις. Το εύρος των παραμορφώσεων (γωνιών στροφής) για τις οποίες η μέθοδος δίνει αποδεκτό αποτέλεσμα δεν κρίνεται ικανοποιητικό. Διαπιστώνεται, επίσης, ότι το ζήτημα δεν έγκειται τόσο στην αριθμητική διαδικασία όσο στον ίδιο τον ορισμό του βέλτιστου πλέγματος. Δεν τίθεται δηλαδή απλώς ένα ζήτημα χρησιμοποίησης μίας άλλης μεθόδου επίλυσης του συστήματος. Βασικό ζητούμενο είναι ο ορισμός μίας μετρικής η οποία είναι κατάλληλη για αξιολόγηση της ποιότητας του πλέγματος για μεγαλύτερο εύρος παραμορφώσεων.

Το κεφάλαιο 3 αφιερώνεται στην παρουσίαση της συλλογιστικής με την οποία προκύπτει η νέα συνάρτηση κόστους και κατ' επέκταση η νέα μέθοδος βελτιστοποίησης, ξεκινώντας από μία συστηματική ανάλυση της κυκλικότητας ενός τριγώνου. Σκοπός είναι να αναγνωριστούν και να ερμηνευτούν τα προβλήματα που εμφανίζει η συνάρτηση κόστους f , αλλά και να προσδιοριστούν οι βασικές παράμετροι που μπορούν να συμβάλλουν στην αντιμετώπισή τους. Με βάση τα αποτελέσματα της ανάλυσης επαναδιατυπώνεται η συνάρτηση κόστους του προβλήματος και προτείνονται δύο εναλλακτικές τροποποιήσεις στην έκφραση του αρχικού συστήματος προς επίλυση. Η νέα μέθοδος βελτιστοποίησης συνίσταται στην αριθμητική επίλυση των δύο συστημάτων διαδοχικά.

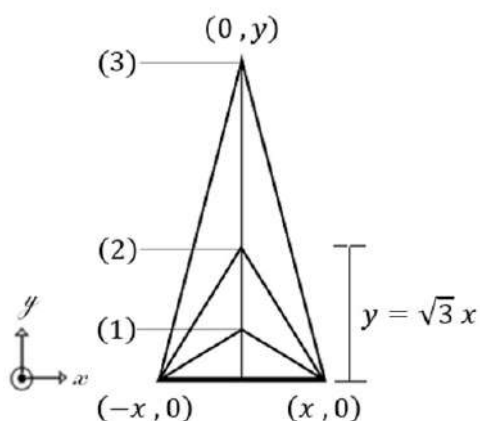
Κεφάλαιο 3 : Αναθεώρηση της Μεθόδου Βελτιστοποίησης 2Δ Πλεγμάτων

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναπτύχθηκε μία πρώτη θεώρηση της μεθόδου βελτιστοποίησης 2Δ μη-δομημένων πλεγμάτων. Η μέθοδος συνίσταται στην ελαχιστοποίηση μίας συνάρτησης κόστους μέσω επαναληπτικής διαδικασίας. Στο τελευταίο παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου του κεφαλαίου 2.4 διαπιστώθηκε ότι το τελικό πλέγμα, ως κατάσταση ελαχίστου της συγκεκριμένης συνάρτησης κόστους, δεν είναι έγκυρο για μεγάλες παραμορφώσεις. Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η επαναδιατύπωση της μεθόδου βελτιστοποίησης ώστε το τελικό πλέγμα να διατηρεί υψηλή ποιότητα για ικανοποιητικό εύρος παραμορφώσεων. Για να γίνει αυτό πρέπει να κατανοηθούν τα αίτια του προβλήματος. Αναγνωρίζονται τα κύρια ζητήματα που εμφανίζει η μετρική κυκλικότητας που χρησιμοποιείται ως βάση της συνάρτησης κόστους. Μελετάται, αρχικά, η κυκλικότητα ενός μεμονωμένου τριγώνου. Στη συνέχεια, επεκτείνονται τα ποιοτικά συμπεράσματα που εξήχθησαν από αυτήν την απλή περίπτωση στη γενική περίπτωση 2Δ πλέγματος, καταλήγοντας στη διατύπωση των αιτιών του προβλήματος. Ακολουθώντας, προτείνονται δύο εναλλακτικές τροποποιήσεις της αρχικής θεώρησης της μεθόδου περιγράφοντας τη συλλογιστική με την οποία προκύπτουν και τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματά τους. Ο τελικός αλγόριθμος ορίζεται ως ένας συνδυασμός των δύο προσεγγίσεων. Τέλος, παρατίθενται αποτελέσματα εφαρμογής της νέας μεθόδου και ο σχολιασμός τους.

3.1 Αναγνώριση των Προβλημάτων της Αρχικής Μεθόδου Βελτιστοποίησης

3.1.1 Κυκλικότητα Ισοσκελούς Τριγώνου ενός Βαθμού Ελευθερίας

Περιοριζόμαστε, αρχικά, στην περίπτωση πλέγματος ενός τριγώνου ($N = 1$) ώστε να εξάγουμε ορισμένα ποιοτικά συμπεράσματα για τη συμπεριφορά της κυκλικότητας. Προς περαιτέρω απλοποίηση της σχέσης που προκύπτει για τη κυκλικότητα συναρτήσει των συντεταγμένων των κόμβων του τριγώνου, γίνεται η υπόθεση ισοσκελούς τριγώνου ενός βαθμού ελευθερίας. Στο σχήμα 3.1 αναπαρίστανται ενδεικτικά τρία ισοσκελή τρίγωνα, όπου $x \in \mathcal{R}^+$ είναι παράμετρος και $y \in \mathcal{R}$ λογίζεται ως η μοναδική μεταβλητή.



Σχήμα 3.1: Ισοσκελή τρίγωνα σταθερής βάσης. Το τρίγωνο (1) είναι αμβλυγώνιο ($y_1 < \sqrt{3}x$), το τρίγωνο (2) ισόπλευρο ($y_2 = \sqrt{3}x$) και το τρίγωνο (3) οξυγώνιο ($y_3 > \sqrt{3}x$).

Η κυκλικότητα ενός τριγώνου ορίζεται, στη γενική περίπτωση, από την εξίσωση (2.1). Για το παράδειγμα του σχήματος 3.1 η κυκλικότητα λαμβάνει την εξής έκφραση ως συνάρτηση μίας μεταβλητής:

$$R(y) = \frac{x y}{4 \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right)^2} \quad (3.1)$$

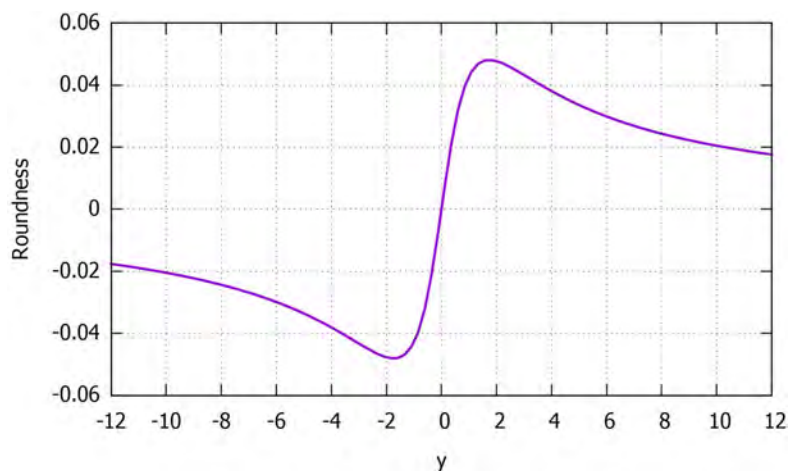
Για τον ορισμό της κυκλικότητας γίνεται χρήση του προσημασμένου εμβαδού J του τριγώνου, όπως ορίζεται από την εξίσωση (2.2). Εν προκειμένω, ισχύει η σχέση: $J = x y$. Επιτυγχάνεται, έτσι, η διάκριση των έγκυρων καταστάσεων του τριγώνου $J > 0$ από τις μη-έγκυρες $J \leq 0$, η οποία είναι απαραίτητη για τη δυνατότητα της μεθόδου βελτιστοποίησης να διαχειρίζεται αντεστραμμένα τρίγωνα που αναμένεται να προκύψουν κατά την παραμόρφωση των ορίων ενός πλέγματος.

Όπως επισημάνθηκε στο κεφάλαιο 2.1, η κυκλικότητα παραμένει αναλλοίωτη υπό μετασχηματισμούς μεταφοράς, στροφής και ομοιότητας. Ως εκ τούτου, αρκεί μία μεταβλητή για να οριστεί η κυκλικότητα στην περίπτωση των ισοσκελών τριγώνων. Αυτό γίνεται εμφανές από την εξίσωση (3.1) διαιρώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή με x^2 , από όπου προκύπτει ότι η μεταβλητή είναι η y/x .

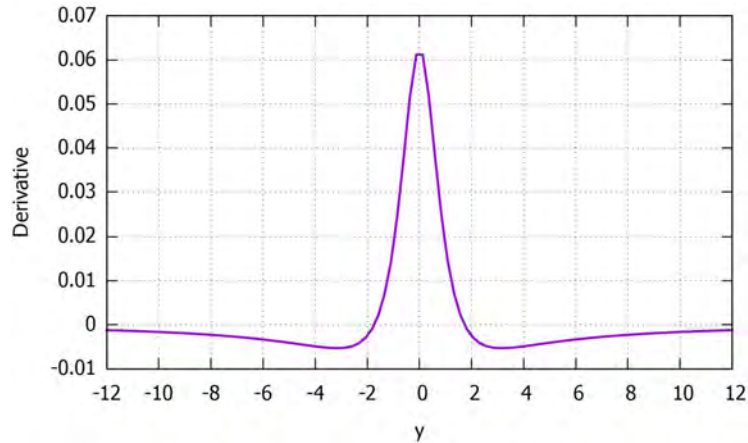
Ακολούθως, ορίζεται η παράγωγος της κυκλικότητας στην περίπτωση ενός βαθμού ελευθερίας του σχήματος 3.1. Παραγωγίζοντας την εξίσωση (3.1) ως προς y προκύπτει ότι:

$$R'(y) = \frac{x (x^2 + y^2) (x^2 - y^2 + x \sqrt{x^2 + y^2})}{4 (x^2 + y^2 + x \sqrt{x^2 + y^2})^3} \quad (3.2)$$

Η επαλήθευση της σχέσης αυτής μπορεί να γίνει μέσω διαστατικής ανάλυσης. Έστω m μονάδα μήκους των x, y . Η κυκλικότητα είναι αδιάστατο μέγεθος συνεπώς η παράγωγός της έχει τάξη: $\frac{m^5}{m^6} \sim m^{-1}$.



Σχήμα 3.2: Γραφική παράσταση της κυκλικότητας για την περίπτωση ισοσκελούς τριγώνου ενός βαθμού ελευθερίας του σχήματος 3.1. Επιλέγεται η τιμή της παραμέτρου $x = 1$.



Σχήμα 3.3: Γραφική παράσταση της παραγώγου της κυκλικότητας για την περίπτωση ισοσκελούς τριγώνου ενός βαθμού ελευθερίας του σχήματος 3.1. Επιλέγεται η τιμή της παραμέτρου $x = 1$.

Επαναδιατυπώνεται η μέθοδος βελτιστοποίησης που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 2 προσαρμοσμένη στην περίπτωση του τριγώνου ενός βαθμού ελευθερίας του σχήματος 3.1. Ορίζεται, αρχικά, η συνάρτηση κόστους f της εξίσωσης (2.8):

$$f(y) = \frac{1}{2}(R(y) - R_{max})^2 \quad (3.3)$$

όπου $R_{max} \sim 0.048$ είναι η μέγιστη τιμή που δύναται να λάβει η κυκλικότητα για ένα τρίγωνο.

Η συνάρτηση f λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της για $R(y) = R_{max}$, δηλαδή στην περίπτωση ισόπλευρου τριγώνου με θετικό εμβαδό όπου ισχύει ότι $y = \sqrt{3}x$.

Κατ' αναλογία με το δυναμικό σύστημα της εξίσωσης (2.22) ορίζεται η δυναμική του κόμβου $(0, y)$ από την παρακάτω διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης:

$$\dot{y} = -f'(y) = -(R(y) - R_{max}) R'(y) \quad , \quad y(t=0) = y_0 \quad (3.4)$$

Όπως αποδείχθηκε στην ενότητα 2.3.1 η συνάρτηση $f \circ y$ είναι φθίνουσα και ισοδύναμα η συνάρτηση $R \circ y$ είναι αύξουσα, ανεξαρτήτως αρχικής συνθήκης y_0 . Η λύση $y(t)$ τείνει προς κάποια κατάσταση ισορροπίας y^* καθώς $t \rightarrow \infty$. Οι δυνατές καταστάσεις ισορροπίας που εμφανίζει η διαφορική εξίσωση προκύπτουν ως ρίζες της εξίσωσης:

$$f'(y^*) = 0 \Rightarrow R(y^*) = R_{max} \quad \text{ή} \quad R'(y^*) = 0 \quad (3.5)$$

Εξ ορισμού ισχύει ότι αν $R(y) = R_{max} \Rightarrow R'(y) = 0$, οπότε αρκεί να μελετηθεί η δεύτερη συνθήκη. Δεδομένου $x > 0$, η εξίσωση (3.4) συνεπάγεται ότι:

$$x^2 - y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow y = \pm \sqrt{3}x \quad (3.6)$$

Για τη διαφορική εξίσωση (3.4) η ρίζα $y^+ = \sqrt{3}x$ είναι κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας, ενώ η ρίζα $y^- = -\sqrt{3}x$ ασταθούς ισορροπίας. Αντίστοιχα, για την κυκλικότητα R η ρίζα y^+ είναι θέση τοπικού

μεγίστου ενώ η y^- τοπικού ελαχίστου. Επίσης, ισχύει ότι $R(y \rightarrow \pm \infty) \rightarrow 0$, συνεπώς τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης R ταυτίζονται με τα ολικά.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι $R'(y \rightarrow \pm \infty) \rightarrow 0$, συνεπώς και σε αυτήν την περίπτωση πρόκειται περί καταστάσεων ισορροπίας κατά έναν οριακό τρόπο. Γενικεύοντας, εάν ισχύει ότι $y \gg x$ τότε η εξίσωση (3.2) απλοποιείται ως εξής:

$$R'(y) \sim -\frac{1}{4} \frac{x}{y^2} \quad (3.7)$$

Παρατηρείται ότι, για $y \neq 0$, ισχύει η σχέση $R'(y) \sim 0$, παρότι συνιστά κατάσταση όπου $R(y) \ll R_{max}$.

Η διαφορική εξίσωση (3.4) δεν έχει μοναδική κατάσταση ισορροπίας. Τίθεται, συνεπώς, το ερώτημα σε ποια κατάσταση συγκλίνει η λύση $y(t)$ καθώς $t \rightarrow \infty$, αναλόγως της αρχικής κατάστασης y_0 . Από το σχήμα 3.2 φαίνεται ότι για αρχική κατάσταση $y_0 \in (-\sqrt{3}x, \infty)$ ισχύει ότι $y(t \rightarrow \infty) \rightarrow y^+$, δηλαδή η τάση αύξησης της κυκλικότητας συνεπάγεται σύγκλιση στη βέλτιστη κατάσταση. Αντίθετα, για αρχική κατάσταση $y_0 \in (-\infty, -\sqrt{3}x)$ ισχύει ότι $y(t \rightarrow \infty) \rightarrow -\infty$, δηλαδή η τάση αύξησης της κυκλικότητας συνεπάγεται απομάκρυνση από τη βέλτιστη κατάσταση και απόκλιση προς το άπειρο. Προφανώς, για αρχική κατάσταση $y_0 = y^+$ ή $y_0 = y^-$ η λύση $y(t)$ είναι σταθερή. Η δυναμική του κόμβου ορίστηκε με σκοπό τη σύγκλιση προς το ισόπλευρο τρίγωνο. Κατά συνέπεια, δεν εμφανίζει θεμιτή συμπεριφορά στο διάστημα αρχικών τιμών $(-\infty, -\sqrt{3}x]$.

Επιπλέον, ακόμη και στο διάστημα τιμών $(-\sqrt{3}x, \infty)$, εάν $y_0 \gg x$ τότε η δυναμική κατορθώνει μεν να επαναφέρει τον κόμβο $(0, y)$ στη βέλτιστη κατάσταση y^+ όμως η σύγκλιση είναι αργή, όπως προκύπτει από την εξίσωση (3.7). Δηλαδή, παρότι η αρχική κατάσταση βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση από τη βέλτιστη, η τάση μεταβολής της είναι δυσανάλογα μικρή. Στην περίπτωση ενός τριγώνου αυτό δεν αποτελεί μείζον ζήτημα. Ανάγεται, όμως, σε καθοριστικής σημασίας ζήτημα στην περίπτωση πλέγματος ($N > 1$) όπου η δυναμική ενός κόμβου καθορίζεται από τη συνεισφορά των τριγώνων που τον περιβάλλουν. Από το σχήμα 3.3 προκύπτει ότι οι τιμές της παραγώγου R' είναι σημαντικά μεγαλύτερες στο διάστημα $(-\sqrt{3}x, \sqrt{3}x)$ από ότι στο $(-\infty, -\sqrt{3}x) \cup (\sqrt{3}x, \infty)$. Συνεπώς, σε ένα τρίγωνο μικρής κυκλικότητας, ο κόμβος $(0, y)$ δεν εμφανίζει υποχρεωτικά μεγαλύτερη τάση μετατόπισης από ότι σε ένα τρίγωνο υψηλής κυκλικότητας. Ενδεικτικά, για τις καταστάσεις: $y = 1.52x$ και $y = 10x$ ισχύει ότι: $|R'(10x)| = |R'(1.52x)| = 0.0012$ και $R(10x) = 0.021 \ll R(1.52x) = 0.044$. Ως εκ τούτου, τρίγωνα με μεγάλη απόκλιση στην κυκλικότητά τους έχουν κοινή κατά μέτρο παράγωγο (και αντίθετου προσήμου), με αποτέλεσμα να ορίζεται εν δυνάμει μία μη-θεμιτή ισορροπία μεταξύ τους.

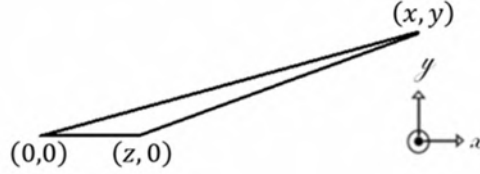
Ήδη, λοιπόν, από την περίπτωση του ισοσκελούς τριγώνου ενός βαθμού ελευθερίας, ανακύπτουν ζητήματα όσον αφορά τη συνάρτηση κόστους της μεθόδου βελτιστοποίησης του κεφαλαίου 2. Τα αίτια της αθέμιτης συμπεριφοράς που εμφανίζει η δυναμική οφείλονται σε εγγενή χαρακτηριστικά της μετρικής της κυκλικότητας και συνοψίζονται στις παρακάτω σχέσεις:

$$y_0 < -\sqrt{3}x \implies y(t \rightarrow \infty) \rightarrow -\infty \quad (3.8)$$

$$y_0 \gg \sqrt{3}x \implies \dot{y}(t=0) \sim 0 \text{ και } R(y_0) \ll R_{max} \quad (3.9)$$

3.1.2 Κυκλικότητα ενός Τριγώνου δύο Βαθμών Ελευθερίας

Μελετάται, στη συνέχεια, η περίπτωση πλέγματος ενός μεμονωμένου τριγώνου με δύο βαθμούς ελευθερίας. Επιλέγονται ως μεταβλητές οι συντεταγμένες (x, y) μίας εκ των κορυφών του όπως φαίνεται στο σχήμα 3.4. Οι κορυφές $(0,0)$, $(z,0)$ είναι στατικές και η τετμημένη $z > 0$ θεωρείται παράμετρος.



Σχήμα 3.4: Τρίγωνο δύο βαθμών ελευθερίας. Η τετμημένη z θεωρείται παράμετρος.

Η κυκλικότητα ενός τριγώνου ορίζεται, στη γενική περίπτωση, από την εξίσωση (2.1). Για το παράδειγμα του σχήματος 3.4 η κυκλικότητα ως συνάρτηση δύο μεταβλητών λαμβάνει την εξής έκφραση:

$$R(x, y) = \frac{z y}{2 \left(z + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-z)^2 + y^2} \right)^2} \quad (3.10)$$

Αντίστοιχα, οι μερικές παράγωγοι της κυκλικότητας ως προς τις μεταβλητές x, y γράφονται ως εξής:

$$\frac{\partial R}{\partial x}(x, y) = \frac{z}{S^3} \left(\frac{z y}{\sqrt{(x-z)^2 + y^2}} - x y \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-z)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{(x-z)^2 + y^2}} \right) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial R}{\partial y}(x, y) = \frac{z}{S^3} \left(\frac{S}{2} - y^2 \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-z)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{(x-z)^2 + y^2}} \right) \quad (3.12)$$

όπου $S = z + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-z)^2 + y^2}$ είναι η περίμετρος του τριγώνου κατά την εξίσωση (2.3).

Κατ' αναλογία με το δυναμικό σύστημα της εξίσωσης (2.22) ορίζεται η δυναμική του κόμβου (x, y) στην περίπτωση τριγώνου δύο βαθμών ελευθερίας του σχήματος 3.4:

$$(\dot{x}, \dot{y}) = -(R(x, y) - R_{max}) \nabla R(x, y) \quad , \quad (x, y)(t=0) = (x_0, y_0) \quad (3.13)$$

όπου $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ και R_{max} είναι η μέγιστη τιμή που δύναται να λάβει η κυκλικότητα για ένα τρίγωνο.

Στην ενότητα 3.1.1 οι καταστάσεις ισορροπίας του συστήματος προέκυψαν ως ρίζες της εξίσωσης (3.5).

Εν προκειμένω, προκύπτουν κατά αντίστοιχο τρόπο οι καταστάσεις αυτές ως: $(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{2}z, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}z \right)$.

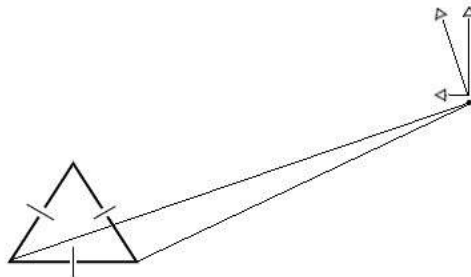
Μεταξύ αυτών, θεμιτή κατάσταση λογίζεται η $y^* = \frac{\sqrt{3}}{2}z$, δηλαδή το ισόπλευρο τρίγωνο θετικού εμβαδού.

Ακολουθεί μία μελέτη της συμπεριφοράς της κυκλικότητας σε οριακές καταστάσεις. Εάν ισχύει η ασυμπτωτική σχέση $z \ll x, y$ τότε οι εξισώσεις (3.11) και (3.12) επαναδιατυπώνονται ως εξής:

$$\nabla R(x, y) \sim -\frac{z}{S^3} \left(\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y^2-x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \quad (3.14)$$

Υπό αυτήν την υπόθεση, το μέτρο της κλίσης της κυκλικότητας ικανοποιεί τη σχέση $\|\nabla R(x, y)\| \sim \frac{1}{8} \frac{z}{x^2+y^2}$ ενώ ισχύει, ταυτόχρονα, η σχέση $R(x, y) \sim \frac{1}{8} \frac{zy}{x^2+y^2}$. Συνιστά, δηλαδή, μία κατάσταση στην οποία η κυκλικότητα απέχει πολύ από τη μέγιστη τιμή της αλλά και η τάση μεταβολής της είναι σχετικά μικρή. Στην περίπτωση όπου $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$ προκύπτει ότι $R(x, y) \rightarrow 0$ και $\|\nabla R(x, y)\| \rightarrow 0$ συνεπώς αποτελεί κατάσταση ισορροπίας για το δυναμικό σύστημα (3.13) κατά έναν οριακό τρόπο. Οι παρατηρήσεις αυτές έγιναν και στην ενότητα 3.1.1 και διατυπώθηκαν στη σχέση (3.7), οπότε λειτουργούν ως μία επαλήθευση και μία ένδειξη ότι συμπεράσματα που αφορούν ένα απλό παράδειγμα επεκτείνονται και σε ένα πιο σύνθετο.

Εάν ισχύει, επίσης, ότι $x \gg y$ τότε η εξίσωση (3.13) μετατρέπεται στην: $\nabla R(x, y) = -\frac{z}{S^3} (2y, -x)$ ενώ εάν ισχύει ότι $y \gg x$ η εξίσωση μετατρέπεται στην: $\nabla R(x, y) = -\frac{z}{S^3} (2x, y)$. Παρατηρείται ότι και στις δύο περιπτώσεις η συνιστώσα της κλίσης κατά y είναι πολύ μεγαλύτερη από εκείνη κατά x , δηλαδή ισχύει ότι $\frac{\partial R}{\partial x} \ll \frac{\partial R}{\partial y}$.



Σχήμα 3.5: Το διάνυσμα της μετατόπισης του ελεύθερου κόμβου του σχήματος 3.4, όπως υπαγορεύεται από τη δυναμική της εξίσωσης (3.13). Ισχύει η ασυμπτωτική σχέση $x \gg y, z$.

Στο σχήμα 3.5 φαίνεται μία ποιοτική αναπαράσταση του διανύσματος της τάσης μετατόπισης του κόμβου (x, y) επί της κατάστασης $x \gg y, z$. Παρατηρείται ότι η κατεύθυνσή του δεν είναι η αναμενόμενη. Ο ελεύθερος κόμβος δεν κινείται άμεσα προς τη βέλτιστη κατάσταση, δηλαδή προς το ισόπλευρο τρίγωνο εμβαδού $J > 0$. Εάν ισχύει, μάλιστα, ότι $y \rightarrow 0$ η κλίση $\nabla R(x, y) \sim \nabla J = \frac{z}{2} (0, 1)$ δηλαδή η τάση του συστήματος είναι να αυξήσει πρωτίστως το εμβαδό J και τελικά να συγκλίνει στη θεμιτή ισορροπία. Το γεγονός αυτό εκτιμάται ότι συνεισφέρει στη διάδοση της παραμόρφωσης στην περίπτωση ενός πλέγματος $N > 1$ τριγώνων.

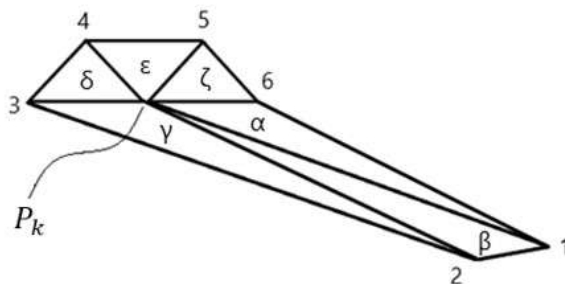
Ως συμπέρασμα προκύπτει ότι, σε ένα τρίγωνο μικρής κυκλικότητας $R \ll R_{max}$, ο κόμβος που βρίσκεται στην πολύ οξεία γωνία εμφανίζει δυσανάλογα μικρή τάση μετατόπισης, όπως ορίζεται βάσει του δυναμικού συστήματος (3.13). Για τη δυναμική του κόμβου επί της οξείας γωνίας ισχύει, κατ' αναλογία με την εξίσωση (3.9), η παρακάτω σχέση:

$$x_0 \gg y_0, z \Rightarrow \|(\dot{x}, \dot{y})(t = 0)\| \sim 0 \text{ και } R(x_0, y_0) \ll R_{max} \quad (3.15)$$

Το γεγονός αυτό θα αποδειχθεί μεγάλης σημασίας στην περίπτωση πλέγματος περισσοτέρων του ενός τριγώνων.

3.1.3 Κυκλικότητα σε Πλέγμα Τριγωνικών Στοιχείων

Στις ενότητες 3.1.1 και 3.1.2 ολοκληρώθηκε η μελέτη της κυκλικότητας για την περίπτωση ενός τριγώνου. Βάσει των παρατηρήσεων που έγιναν ακολουθεί μία ποιοτική περιγραφή της δυναμικής ενός κόμβου P_k στην περίπτωση πλέγματος N τριγώνων. Εστιάζουμε στην περιοχή του εσωτερικού κόμβου P_k η οποία αναπαρίσταται ενδεικτικά στο σχήμα 3.6 (γίνεται υπόθεση ότι περιβάλλεται από έξι τρίγωνα). Οι κόμβοι P_1, P_2 ανήκουν στο παραμορφούμενο όριο ενώ οι κόμβοι P_3 ως P_6 είναι εσωτερικοί και τα τρίγωνα συμβολίζονται με τα γράμματα: α ως ζ .



Σχήμα 3.6: Περιοχή του κόμβου P_k μετά από μετατόπιση των κορυφών P_1 και P_2 του ορίου. Οι κορυφές φέρουν αρίθμηση από 1 ως 6, ενώ ο συμβολισμός των τριγωνων γίνεται μέσω των γραμμάτων α ως ζ .

Όπως διαπιστώνεται από τα σχήματα 2.5 και 2.7 του κεφαλαίου 2.4, συνήθης περίπτωση (common case) παραμόρφωσης των ορίων ενός πλέγματος είναι αυτή του σχήματος 3.6. Είναι η αρχική κατάσταση από την οποία ξεκινά η επαναληπτική διαδικασία βελτιστοποίησης. Λόγω της μετατόπισης των οριακών κόμβων P_1 και P_2 τα τρίγωνα α, β, γ παρουσιάζουν μικρή κυκλικότητα $R_\alpha, R_\beta, R_\gamma \ll R_{max}$ (συνήθως μάλιστα αρνητική $R < 0$). Στην προκειμένη περίπτωση, όμως, η παραμόρφωση που μελετάται εμφανίζει, επίσης, ως χαρακτηριστικό τη μεγάλη αύξηση της περιμέτρου των τριγώνων αυτών σε σχέση με τα υπόλοιπα τρίγωνα της περιοχής του P_k , δηλαδή ισχύει ότι $S_\alpha, S_\beta, S_\gamma \gg S_\delta, S_\epsilon, S_\zeta$. Η διακύμανση της περιμέτρου σε τοπικό επίπεδο στην παραμορφωμένη κατάσταση παρατηρείται συστηματικά και είναι καθοριστικής σημασίας για τη δυναμική του κόμβου P_k .

Η δυναμική του κόμβου P_k του σχήματος 3.6 ορίζεται από το δυναμικό σύστημα της εξίσωσης (2.22):

$$(\dot{x}_k, \dot{y}_k) = -\nabla_k f(z) = -\sum_{i \in I_k} (R_i - R_{max}) \nabla_k R_i \quad (3.16)$$

όπου $\nabla_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial y_k} \right)$, $I_k = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\}$ και R_{max} είναι η μέγιστη τιμή που δύναται να λάβει η κυκλικότητα για ένα τρίγωνο.

Η τάση μετατόπισης του κόμβου P_k προκύπτει ως συνισταμένη της συνεισφοράς όλων των τριγώνων που τον περιβάλλουν.

Η αντιμετώπιση της παραμόρφωσης του τριγώνου β μπορεί να προέλθει μόνο από μετατόπιση του κόμβου P_k , δεδομένου ότι P_1, P_2 είναι στατικοί. Παρατηρείται, όμως, στο σχήμα 3.6 ότι η γωνία $P_1 \widehat{P}_k P_2$ είναι ιδιαίτερα οξεία. Ως εκ τούτου, η συνιστώσα της μετατόπισης του κόμβου P_k που οφείλεται στο τρίγωνο β είναι συγκριτικά μικρή, όπως συμπεράσθηκε στην ενότητα 3.1.2 από την εξίσωση (3.15). Δεν δύναται, ισοδύναμα, να αποτελέσει τον καθοριστικό όρο του αθροίσματος (3.16). Σε αυτό συντείνει το γεγονός ότι, στην προκειμένη περίπτωση, το τρίγωνο β παρουσιάζει σημαντικά μεγαλύτερη περίμετρο S_β σε σχέση με τις $S_\delta, S_\varepsilon, S_\zeta$. Δεδομένου ότι η περίμετρος μετέχει στον παρονομαστή του συστήματος υψωμένη στη τρίτη δύναμη (εξίσωση 3.14), η συνεισφορά του τριγώνου β μειώνεται περαιτέρω. Επισημαίνεται ότι οι συνιστώσες της μετατόπισης του P_k που οφείλονται στα τρίγωνα α και γ κατά προσέγγιση αλληλοαναιρούνται. Κατά συνέπεια, όπως έχει οριστεί το δυναμικό σύστημα στην εξίσωση (3.16), η συμβολή των στοιχείων που θα αναμενόταν να είναι κυρίαρχα δεν κρίνεται επαρκής για να αναπροσαρμόσει το πλέγμα στη νέα κατάσταση του ορίου. Ο κόμβος P_k , όπως φαίνεται στο σχήμα 3.6, προβλέπεται να μετατοπιστεί λίγο, όμως η ισορροπία που θα προκύψει ενδέχεται να μην είναι οπτικά αποδεκτής ποιότητας.

Αποτελεί μία πρόβλεψη και για την αναμενόμενη συμπεριφορά του συστήματος M κόμβων ενός πλέγματος μετά από παραμόρφωση των ορίων του με τέτοια χαρακτηριστικά. Στο παραπάνω ζήτημα αποδίδεται, παραδείγματος χάρη, το αποτέλεσμα της μεθόδου στην περίπτωση του παραδείγματος εφαρμογής της ενότητας 2.4.2. Όπως γίνεται αντιληπτό στο σχήμα 2.7, το πρόβλημα αφορά περιπτώσεις μεγάλης παραμόρφωσης, στην προκειμένη περίπτωση μετά τις 50°.

Συνοψίζοντας, το πρόβλημα έγκειται σε εγγενή χαρακτηριστικά της κυκλικότητας (όπως αναδείχθηκαν στην ενότητα 3.1.1 και 3.1.2), αλλά ανακύπτει λόγω της συγκεκριμένης περίπτωσης παραμόρφωσης που εξετάζεται και της ύπαρξης $N_k > 1$ τριγώνων τα οποία συνδιαμορφώνουν τη μετατόπιση του κόμβου P_k .

3.2 Τροποποιήσεις στην Αρχική Μέθοδο Βελτιστοποίησης

3.2.1 Πρώτη Τροποποίηση της Αρχικής Μεθόδου Βελτιστοποίησης

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάστηκε μία πρώτη εκδοχή της μεθόδου βελτιστοποίησης 2Δ μη-δομημένων πλεγμάτων βάσει της μετρικής κυκλικότητας. Το βέλτιστο πλέγμα προκύπτει ως λύση του αλγεβρικού συστήματος της εξίσωσης (2.21) και αποτελεί κατάσταση ελαχίστου για τη συνάρτηση κόστους (2.8). Για τη σύγκλιση στη λύση του συστήματος ορίζεται το δυναμικό σύστημα (2.22). Η δυναμική ενός κόμβου του πλέγματος ορίζεται ως η συνισταμένη της συνεισφοράς κάθε τριγώνου που τον περιβάλλει.

Στο κεφάλαιο 3.1 συμπεραίνεται ότι η δυναμική, όπως ορίστηκε από την εξίσωση (2.22), σε ορισμένες περιπτώσεις δεν ενισχύει επαρκώς τα τρίγωνα με μικρή κυκλικότητα. Όπως διαπιστώνεται από τις εξισώσεις (3.9) και (3.15), το γεγονός αυτό αφορά τον κόμβο που βρίσκεται στην πολύ οξεία γωνία των τριγώνων. Βάσει της παρατήρησης αυτής ερμηνεύτηκε η αδυναμία της μεθόδου να διαχειριστεί μεγάλη παραμόρφωση των ορίων ενός πλέγματος όπου εμφανίζονται πολλά τρίγωνα με μικρή κυκλικότητα. Ως βασικό συμπέρασμα αναδείχθηκε το γεγονός ότι το βέλτιστο πλέγμα ως προς τη συγκεκριμένη συνάρτηση κόστους δεν είναι έγκυρο για μία τέτοια παραμόρφωση.

Προς αντιμετώπιση του προβλήματος προτείνεται, στην ενότητα αυτή, η πρώτη τροποποίηση της μεθόδου βελτιστοποίησης. Ορίζεται, καταρχάς, μία νέα μετρική ποιότητας 2Δ πλεγμάτων, η οποία συμβολίζει με h και δίνεται από τον εξής τύπο:

$$h(z) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \frac{(R_i - R_{max})^2}{R_i^2} \quad (3.17)$$

όπου R_i ορίζεται από την εξίσωση (2.1), R_{max} είναι η μέγιστη τιμή κυκλικότητας για ένα τρίγωνο και N είναι ο αριθμός των τριγώνων του πλέγματος. Με $z = (x_1, y_1, \dots, x_M, y_M) \in \mathbb{R}^{2M}$ συμβολίζονται οι συντεταγμένες των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος, όπου M είναι ο αριθμός των κόμβων αυτών. Το εύρος τιμών της μετρικής είναι το $[0,2]$ και ιδανική τιμή της είναι η ελάχιστη, δηλαδή $\min h = 0$.

Παρατηρείται ότι η μετρική h ορίζεται μόνο στην περιοχή $R_i > 0$. Καθώς $R_i \rightarrow 0$ η έκφραση αποκλίνει, δηλαδή $R_i = 0$ είναι ιδιόμορφη κατάσταση. Βέβαια, ένα υπολογιστικό πλέγμα ελέγχεται καταρχήν ως προς την εγκυρότητά του και έπειτα αξιολογείται ως προς την ποιότητα του. Συνεπώς, εκ των πραγμάτων, όταν αξιολογείται ένα πλέγμα μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύει: $R_i > 0, \forall 1 \leq i \leq N$.

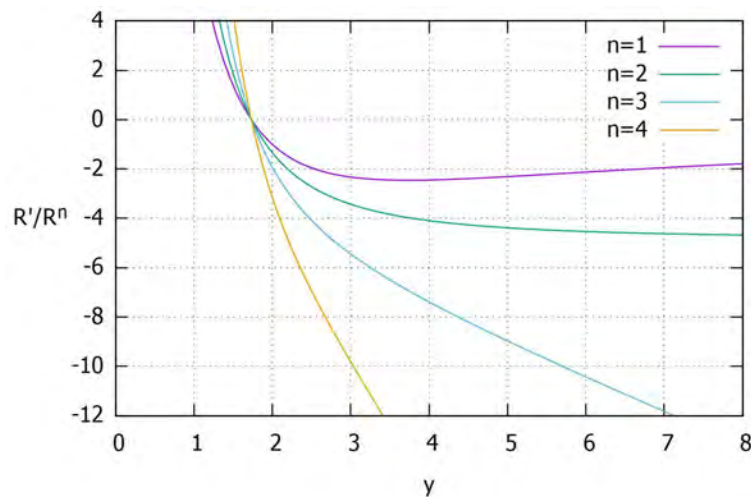
Η μετρική h χρησιμοποιείται ως συνάρτηση κόστους για τη βελτιστοποίηση του πλέγματος. Ορίζεται η κλίση της μετρικής ως προς τις συντεταγμένες των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος:

$$\nabla h(z) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{R_i - R_{max}}{R_i^3} \nabla R_i \quad (3.18)$$

όπου $\nabla = (\nabla_1, \dots, \nabla_k, \dots, \nabla_M)^T$ με $\nabla_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial y_k} \right)$ και ∇R_i είναι η κλίση της κυκλικότητας, η οποία ορίζεται από την εξίσωση (2.14). Υπενθυμίζεται ότι: $\nabla R_i = \frac{1}{S_i^2} \nabla J_i - 2 \frac{J_i}{S_i^3} \nabla S_i$, όπου J_i και S_i είναι το εμβαδό και η περίμετρος του τριγώνου i αντίστοιχα.

Σε σύγκριση με την αντίστοιχη έκφραση της κλίσης της μετρικής f , όπως ορίζεται από την εξίσωση (2.12), η διαφοροποίηση έγκειται μόνο στον συντελεστή R_i^{-3} . Ο συντελεστής αυτός εισάγεται προς περαιτέρω ενίσχυση της συνεισφοράς τριγώνων με μικρή κυκλικότητα έναντι εκείνων με μεγάλη κυκλικότητα. Το άθροισμα καθορίζεται, έτσι, σε μεγαλύτερο βαθμό από τους όρους που προέρχονται από τρίγωνα μικρής κυκλικότητας.

Ακολουθεί μία συνοπτική παρουσίαση της συλλογιστικής με την οποία έγινε η επιλογή της τρίτης δύναμης για τον συντελεστή R_i^{-3} . Μελετάται, δηλαδή, η περίπτωση συντελεστή: R_i^{-n} , $n \geq 0$. Περιοριζόμαστε στο παράδειγμα του ενός ισοσκελούς τριγώνου του σχήματος 3.1 ώστε να είναι δυνατή η γραφική αναπαράσταση των συναρτήσεων. Η εξίσωση (3.18) γράφεται ως $h'(y) = \frac{R(y) - R_{max}}{R(y)^n} R'(y)$, όπου $R(y)$ και $R'(y)$ ορίζονται από τις εξισώσεις (3.1) και (3.2) αντίστοιχα. Για $n = 0$ η ανάλυση έγινε ήδη στην ενότητα 3.1.1. Στο σχήμα 3.3 φαίνεται η γραφική αναπαράσταση της $R'(y)$. Για να γίνει σύγκριση με το σχήμα 3.3, παρατίθεται το σχήμα 3.7 όπου φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $R'(y)/R(y)^n$ για $n = 1$ ως 4 και $y > 0$. Σκοπός είναι η κατανόηση της επίδρασης του συντελεστή R_i^{-n} , $n > 0$ στην κλίση της συνάρτησης κόστους.



Σχήμα 3.7: Γραφική παράσταση της έκφρασης R'/R^n , όπου $n = 1$ ως 4, για το παράδειγμα ισοσκελούς τριγώνου του σχήματος 3.1, με $x = 1$. R και R' είναι η κυκλικότητα και η παράγωγος της κυκλικότητας ως προς y αντίστοιχα. Επισημαίνεται ότι η κάθε καμπύλη αναπαρίσταται υπό κλίμακα (έχει προηγηθεί scaling) ώστε να είναι δυνατό να παρουσιαστούν σε κοινό διάγραμμα. Είναι ένα ποιοτικό σχήμα από το οποίο δεν μπορεί να εξαχθεί ποσοτική πληροφορία για τις τιμές που λαμβάνουν οι καμπύλες.

Στο σχήμα 3.7 παρατηρείται, καταρχάς, ότι ασχέτως του εκθέτη n , οι καμπύλες μηδενίζονται στην τιμή $y = \sqrt{3} x$, για την οποία $R'(y) = 0$. Για $n > 0$ οι καμπύλες αποκλίνουν στο άπειρο καθώς $y \rightarrow 0$ εφόσον $R(y) \rightarrow 0$, σε αντιδιαστολή με το σχήμα 3.3. Στην ενότητα 3.1.1, η βασική παρατήρηση που έγινε όσον αφορά το σχήμα 3.3 είναι ότι σε ένα τρίγωνο μεγάλης κυκλικότητας μπορεί να αποδίδεται ίδια τιμή της παραγώγου R' με ένα τρίγωνο μικρής κυκλικότητας. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι (ακόμη και για έναν βαθμό ελευθερίας) η παράγωγος της κυκλικότητας R' δεν είναι μονότονη συνάρτηση, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.3. Από το σχήμα 3.7 προκύπτει ότι για $n = 1$ η συμπεριφορά είναι ποιοτικά όμοια, δηλαδή καθώς $y \rightarrow \infty : R'(y)/R(y) \rightarrow 0$. Για $n = 2$ η καμπύλη είναι οριακά μονότονη, ενώ για $n = 3$ ή 4 είναι μονότονη. Επιλέγεται $n = 3$ ως ο μικρότερος αποδεκτός εκθέτης, για λόγους ευστάθειας της αριθμητικής μεθόδου που θα χρησιμοποιηθεί. Επισημαίνεται πως η απόδειξη ότι πληρείται η συνθήκη μονοτονίας για το παράδειγμα του σχήματος 3.1 ($N = 1$) αποτελεί μία ένδειξη ότι οι παρέμβασεις που έγιναν στην αρχική συνάρτηση κόστους λειτουργούν θετικά. Γίνεται η υπόθεση ότι το συμπέρασμα αυτό μπορεί να επεκταθεί και στη γενική περίπτωση πλέγματος $N > 1$ τριγώνων.

Κατ' αναλογία με την εξίσωση (2.21), το βέλτιστο πλέγμα $z^* \in \mathcal{R}^{2M}$ ως προς τη συνάρτηση κόστους h προκύπτει ως λύση του αλγεβρικού συστήματος:

$$\nabla h(z^*) = 0 \quad (3.19)$$

Όπως σχολιάστηκε παραπάνω, ο ορισμός του συστήματος (3.19) προϋποθέτει ότι για την κατάσταση z^* ισχύει: $R_i > 0, \forall 1 \leq i \leq N$, δηλαδή το βέλτιστο πλέγμα είναι έγκυρο, ώστε η κλίση της συνάρτησης κόστους να είναι καλώς ορισμένη.

Ακολούθως, χρειάζεται να οριστεί το αντίστοιχο δυναμικό σύστημα της εξίσωσης (2.22). Στόχος είναι η λύση $z(t)$ να συγκλίνει στη βέλτιστη κατάσταση z^* ασχέτως αρχικής κατάστασης z_0 . Η αρχική κατάσταση συνιστά το παραμορφωμένο πλέγμα μετά από την μετατόπιση των οριακών του κόμβων, συνεπώς δεν ορίζει έγκυρο πλέγμα στη γενική περίπτωση. Σε αντίθεση με τη μετρική h , η οποία δεν είναι απαραίτητο να ορίζεται ενιαία για πλέγματα στα οποία $\exists i$ τέτοιο ώστε $R_i \leq 0$, το δυναμικό σύστημα πρέπει να μπορεί να διαχειριστεί αντεστραμμένα τρίγωνα $R_i < 0$, τα οποία αναμένεται να διέλθουν από μία κατάσταση $R_i \sim 0$ προτού μεταβούν σε έγκυρη κατάσταση $R_i > 0$. Ένα δυναμικό σύστημα της μορφής $\dot{z} = -\nabla h(z)$ δεν πληροί αυτή την προϋπόθεση.

Προς επίλυση του ζητήματος που ανακύπτει, εισάγεται ο συντελεστής c_i ο οποίος εξαρτάται από την κυκλικότητα του εκάστοτε τριγώνου, αντικαθιστώντας τον R_i^{-3} :

$$c_i = \begin{cases} R_i^{-3} & , R_i \geq R_{thres} \\ R_{thres}^{-3} & , R_i < R_{thres} \end{cases} \quad (3.20)$$

Ο συντελεστής c_i είναι φραγμένος. Ενδεικτικά, επιλέγεται $R_{thres} = 10^{-3} R_{max}$ ώστε να αποφεύγονται τυχόν αστάθειες για καταστάσεις $R_i \sim 0$ αλλά, ταυτόχρονα, να μην αλλοιώνεται ο αρχικός συντελεστής για το μεγαλύτερο εύρος τιμών $R_i > 0$.

Το δυναμικό σύστημα λαμβάνει την εξής μορφή:

$$\dot{z} = - \sum_{i=1}^N c_i (R_i - R_{max}) \nabla R_i \quad , \quad z(t=0) = z_0 \quad (3.21)$$

Αν για ένα πλέγμα ισχύει ότι: $R_i \geq R_{thres}$, $\forall i$ τότε το δεξί μέλος ταυτίζεται με της εξίσωσης (3.19) και το σύστημα γράφεται ως $\dot{z} \sim - \nabla h(z)$, παραλείποντας τον συντελεστή $1/N$.

Η μετρική της εξίσωσης (3.17) παραμένει ως έχει και χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση των πλεγμάτων, υπό την προϋπόθεση ότι είναι έγκυρα. Για να μπορεί, όμως, η μέθοδος να διαχειρίζεται αντεστραμμένα τρίγωνα, η έκφραση του δυναμικού συστήματος προσαρμόζεται ώστε να ορίζεται και στην περίπτωση $R_i \sim 0$, διατηρώντας την μορφή ∇h εάν $R_i \geq R_{thres}$, $\forall i$.

Στην ενότητα 3.1.1 τονίστηκε ένα ακόμη σημαντικό ζήτημα. Όπως φαίνεται στην εξίσωση (3.8), για ένα τρίγωνο αρνητικού εμβαδού $J_i < 0$ υφίσταται μία περιοχή όπου η τάση αύξησης της κυκλικότητάς του δεν συνεπάγεται σύγκλιση προς την ιδανική κατάσταση αλλά απόκλιση. Στην εξίσωση (3.21) αν $R_i < 0$ τότε ο όρος εντός του αθροίσματος είναι ίδιος με εκείνον της εξίσωσης (3.4) πολλαπλασιασμένος με μία σταθερά R_{thres}^{-3} , συνεπώς το ζήτημα μεταφέρεται και σε αυτήν την περίπτωση. Η ανεπιθύμητη συμπεριφορά αντιμετωπίζεται αποδίδοντας μία δίκλαδη έκφραση στο σύστημα. Το τελικό δυναμικό σύστημα συμβολίζεται με $g: \mathfrak{R}^{2M} \rightarrow \mathfrak{R}^{2M}$ και ορίζεται ως εξής:

$$\dot{z} = g(z) \quad , \quad z(t=0) = z_0 \quad (3.22)$$

Για το ζεύγος των συνιστωσών του δυναμικού συστήματος που αφορούν έναν κόμβο P_k ισχύει ότι:

$$(g_{xk}, g_{yk})(z) = \sum_{i \in I_k} c_i \psi_{i,k} \quad (3.23)$$

όπου I_k είναι το σύνολο των τριγώνων που περιβάλλουν τον P_k και c_i ορίζεται από την εξίσωση (3.20).

Όσον αφορά την συνάρτηση $\psi_{i,k}$ ισχύει η παρακάτω δίκλαδη έκφραση:

$$\psi_{i,k} = \begin{cases} (R_{max} - R_i) \nabla_k R_i & , J_i \geq 0 \\ R_{max} \frac{1}{S_i^2} \nabla_k J_i & , J_i < 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

όπου J_i , S_i και $\nabla_k J_i$, $\nabla_k S_i$ ορίζονται από τις εξισώσεις (2.2), (2.3) και (2.15) ως (2.20) αντίστοιχα.

Ο πρώτος κλάδος: $J_i \geq 0$ της συνάρτησης $\psi_{i,k}$ είναι ίδιος με τον όρο εντός του αθροίσματος στην εξίσωση (2.13). Ο δεύτερος ορίζεται κατά τρόπο τέτοιο ώστε να μην υπάρχει κατάσταση ισορροπίας στο διάστημα τιμών $J_i < 0$ και, ταυτόχρονα, να διατηρείται η συνέχεια της $\psi_{i,k}$ επί της κατάστασης αλλαγής τύπου $J_i = 0$. Ισχύει ότι: $R_i = 0 \rightarrow \nabla_k R_i = \frac{1}{S_i^2} \nabla_k J_i$.

Εάν η λύση $z(t)$ συγκλίνει σε έγκυρο πλέγμα, δηλαδή: $J_i > 0$, $\forall 1 \leq i \leq N$, ο δεύτερος κλάδος της $\psi_{i,k}$ δεν μετέχει σε κανέναν όρο του αθροίσματος, οπότε οι συνιστώσες $(g_{xk}, g_{yk})(z)$ από την εξίσωση (3.23) είναι ισοδύναμες με την $-\nabla_k h(z)$.

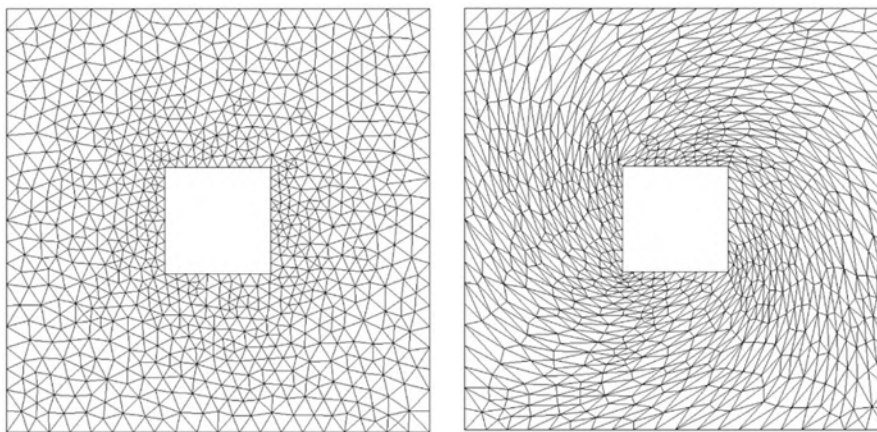
Όπως και στο κεφάλαιο 2, η προσέγγιση της λύσης του συστήματος (3.19) γίνεται μέσω αριθμητικής μεθόδου. Δεδομένου ότι για $J_i < 0$ η εξίσωση (3.23) δεν γράφεται στη μορφή $\nabla\Psi$ για κάποια συνάρτηση $\Psi: \mathfrak{R}^{2M} \rightarrow \mathfrak{R}$, χρησιμοποιείται η μέθοδος του σταθερού σημείου (fixed point method) ως αντίστοιχη της μεθόδου της απότομης καθόδου για ένα τυχαίο σύστημα g , για το οποίο δεν υπάρχει κατ' ανάγκη συνάρτηση δυναμικού (potential function). Η αναδρομική σχέση της μεθόδου του σταθερού σημείου ορίζεται διακριτοποιώντας την (3.22) με βήμα διακριτοποίησης η :

$$z_{n+1} = z_n + \eta g(z_n) , \quad z_{n=0} = z_0 \quad (3.25)$$

Οι υπόλοιπες αριθμητικές μέθοδοι που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 2.3 εφαρμόζονται χωρίς κάποια διαφοροποίηση για το νέο σύστημα.

Ακολουθούν δύο παραδείγματα εφαρμογής της τροποποιημένης μεθόδου βελτιστοποίησης πλεγμάτων που παρουσιάζεται στην ενότητα 3.2.1, με σκοπό τη σύγκρισή της με την αρχική.

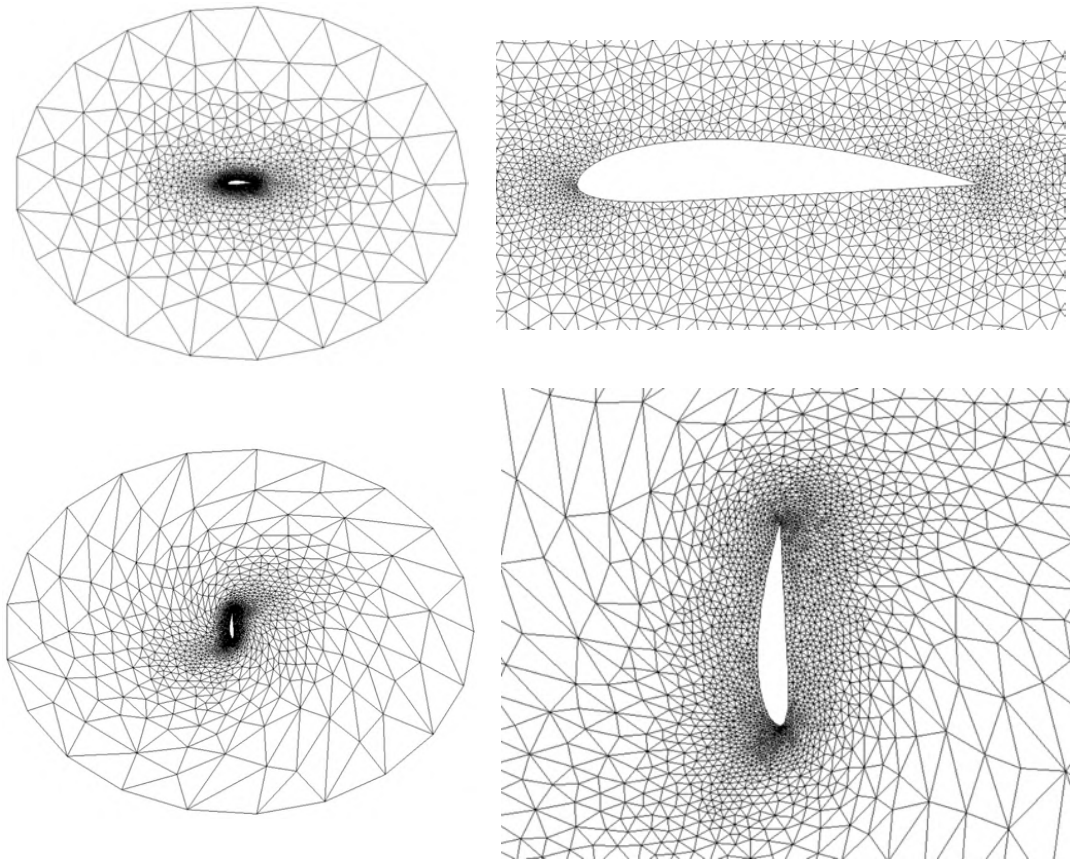
Το πρώτο παράδειγμα πρόκειται περί του πλέγματος που μελετήθηκε και στην ενότητα 2.4.2. Το υπολογιστικό χωρίο ορίζεται από ένα εσωτερικό και ένα εξωτερικό όριο σχήματος ομόκεντρων τετραγώνων. Πρόκειται περί αραιού πλέγματος 884 κόμβων και 1648 στοιχείων. Στην ενότητα 2.4.2 παρατηρήθηκε ότι για γωνία στροφής του εσωτερικού ορίου κατά $\varphi = 53^\circ$, στο τελικό πλέγμα απομένει ένα μη-έγκυρο τρίγωνο. Εν προκειμένω, δοκιμάζεται στροφή $\varphi = 90^\circ$. Η στροφή τελείται σε 18 διαδοχικά βήματα, όπου σε κάθε βήμα το τετράγωνο περιστρέφεται κατά 5° . Χρησιμοποιείται η μέθοδος L-BFGS, όπως περιγράφεται στην ενότητα 2.3.2.



Σχήμα 3.8: Απαραμόρφωτο πλέγμα 884 κόμβων, 1648 στοιχείων με εσωτερικό και εξωτερικό όριο σε σχήμα ομόκεντρων τετραγώνων (αριστερά). Βελτιστοποιημένο πλέγμα μετά από στροφή 90° του εσωτερικού ορίου περί του κέντρου των τετραγώνων (δεξιά).

Το τελικό πλέγμα μετά από στροφή 90° είναι έγκυρο και η παραμόρφωση έχει διαδοθεί επαρκώς. Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα αυτό με τα αποτελέσματα της ενότητας 2.4.2 εξάγεται το συμπέρασμα ότι το βέλτιστο πλέγμα ως προς τη μετρική h διατηρεί υψηλή ποιότητα, σε αντίθεση με το βέλτιστο ως προς τη μετρική f της εξίσωσης (2.8).

Για να επιβεβαιωθεί ο ισχυρισμός ότι το βέλτιστο πλέγμα ως λύση του συστήματος (3.19) είναι υψηλής ποιότητας, δοκιμάζεται η εφαρμογή της μεθόδου και για μία ακόμη περίπτωση πλέγματος. Πρόκειται περί πλέγματος 2641 κόμβων και 5161 στοιχείων γύρω από τη μεμονωμένη αεροτομή NACA 4415. Πραγματοποιείται περιστροφή 90° της αεροτομής περί το αεροδυναμικό της κέντρο, μέσω 30 διαδοχικών στροφών βήματος 3° . Χρησιμοποιείται η μέθοδος L-BFGS.



Σχήμα 3.9: Απαραμόρφωτο πλέγμα γύρω από αεροτομή NACA 4415. Το πλήρες πλέγμα (πάνω αριστερά). Σε μεγέθυνση το πλέγμα γύρω από την αεροτομή (πάνω δεξιά). Βελτιστοποιημένο πλέγμα μετά από στροφή 90° της αεροτομής. Το πλήρες πλέγμα (κάτω αριστερά). Σε μεγέθυνση το πλέγμα γύρω από την αεροτομή (κάτω δεξιά).

Από το σχήμα 3.9 εξάγεται το συμπέρασμα ότι το βέλτιστο πλέγμα ως προς τη μετρική ποιότητας h της εξίσωσης (3.17) είναι πολύ υψηλής ποιότητας ακόμη και για μεγάλη παραμόρφωση των ορίων του. Ισοδύναμα, η συνάρτηση h είναι μία κατάλληλη μετρική ποιότητας πλεγμάτων, απαντώντας έτσι σε ένα βασικό ερώτημα που τέθηκε στο κεφάλαιο 2.5, δηλαδή ποια μετρική μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ένα μεγάλο εύρος παραμορφώσεων. Επαληθεύεται ότι $R_i > R_{thres}$, $\forall 1 \leq i \leq N$ και ως εκ τούτου η λύση z^* στην οποία έχει συγκλίνει το δυναμικό σύστημα (3.22) είναι ίδια με τη λύση του συστήματος (3.19).

Παρ' όλα αυτά, η αριθμητική μέθοδος σύγκλισης στο βέλτιστο πλέγμα ως προς τη μετρική h δεν παρουσιάζει θεμιτά χαρακτηριστικά για περιπτώσεις μεγάλης παραμόρφωσης, όπως αυτής των σχημάτων 3.8, 3.9. Εάν η αρχική κατάσταση του πλέγματος z_0 (κατάσταση αμέσως μετά τη μετατόπιση των οριακών κόμβων) βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση από τη βέλτιστη κατάσταση z^* , προκύπτει ότι η μέθοδος είναι ασταθής και ταλαντώνεται διαρκώς ή συγκλίνει πολύ αργά. Αυτό αποδίδεται (εν μέρει) στο γεγονός ότι, παρά τη χρήση του συντελεστή c_i που είναι φραγμένος, στην περιοχή $R_i \sim 0$ το σύστημα εξακολουθεί να παρουσιάζει αστάθεια. Η αστάθεια γίνεται αισθητή όταν απαντάται μεγάλος αριθμός αντεστραμμένων τριγώνων στην κατάσταση z_0 , τα οποία πρόκειται να διέλθουν από την κατάσταση $R_i \sim 0$ μεταβαίνοντας από την $R_i < 0$ στην $R_i > 0$. Μοναδικός τρόπος εφαρμογής της αριθμητικής διαδικασίας για μεγάλες παραμορφώσεις είναι ο ορισμός ενδιάμεσων βημάτων για τη μετατόπιση των οριακών κόμβων, όπως κι έγινε στην προκειμένη περίπτωση. (Με τον όρο αυτό αναφερόμαστε στον επιμερισμό της συνολικής μετατόπισης σε μικρότερες μετατοπίσεις και την πραγματοποίησή τους διαδοχικά. Ισοδύναμα ορίζονται περισσότεροι του ενός κύκλοι βελτιστοποίησης, αναπροσαρμόζοντας κάθε φορά το εσωτερικό πλέγμα στη διαδοχική κατάσταση του ορίου, προτού φτάσουμε στην τελική).

Τίθεται, όμως, το ζήτημα ότι δεν είναι εκ των προτέρων γνωστό πόσο μικρά πρέπει να είναι τα ενδιάμεσα βήματα ή κι αν ακόμα μπορούν να οριστούν, παραδείγματος χάρη για μία τυχαία μη-γραμμική παραμόρφωση του ορίου. Σε κάθε περίπτωση δεν είναι αυτονόητη η αυτοματοποίηση μίας τέτοιας διαδικασίας και το κόστος των ενδιάμεσων βημάτων είναι μεγαλύτερο από ότι αν η αναπροσαρμογή του πλέγματος πραγματοποιείτο σε έναν κύκλο βελτιστοποίησης.

Εν προκειμένω, μετά από δοκιμές αριθμού βημάτων για τη πραγματοποίηση στροφής 90° του σχήματος 3.9, προέκυψε ότι μία καλή επιλογή είναι τα 30 βήματα, με γωνία στροφής 3° ανά βήμα. Σε κάθε βήμα (πέραν του τελευταίου) εκτελούνται 50 επαναλήψεις της μεθόδου βελτιστοποίησης, ενώ στο τελευταίο εκτελούνται 2000 επαναλήψεις της. Συνολικά, εκτελούνται 3500 επαναλήψεις της μεθόδου και ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται ανέρχεται στα 28.7 δευτερόλεπτα σε επεξεργαστή Intel Core i7.

Επισημαίνεται ότι η παραμόρφωση του ορίου σε διαδοχικά βήματα είναι εγγενές χαρακτηριστικό αρκετών εφαρμογών. Για παράδειγμα σε χρονομεταβαλλόμενα φυσικά προβλήματα η διακριτοποίηση του χρόνου είναι συνήθως επαρκώς πυκνή για να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος βελτιστοποίησης βάσει του συστήματος (3.19). Στην περίπτωση, όμως, μίας πτέρυγας με μεταπτερύγιο (flap) η ανάλυση συνήθως συνίσταται στην τοποθέτησή του σε συγκεκριμένες διακριτές γωνίες, θεωρώντας ότι το σώμα βρίσκεται κάθε φορά σε ισορροπία. Η περίπτωση μελέτης διακριτών καταστάσεων ισορροπίας καθιστά αναγκαίο τον ορισμό ενδιάμεσων βημάτων για να χρησιμοποιηθεί η συγκεκριμένη μέθοδος.

Βασικός στόχος της εργασίας είναι η ευελιξία (versatility) της μεθόδου, δηλαδή η δυνατότητα χειρισμού μεγάλων παραμορφώσεων χωρίς την αναγκαιότητα παρεμβολής ενδιάμεσων βημάτων, ανεξαρτήτως προβλήματος.

Συμπερασματικά, ενώ το βέλτιστο πλέγμα ως λύση του συστήματος (3.19) είναι πολύ υψηλής ποιότητας, η μέθοδος σύγκλισης στη λύση αυτή δεν παρουσιάζει τη θεμιτή συμπεριφορά, εφόσον απαιτείται η χρήση ενδιάμεσων βημάτων για να συγκλίνει.

3.2.2 Δεύτερη Τροποποίηση της Αρχικής Μεθόδου Βελτιστοποίησης

Όπως σχολιάστηκε στο παράδειγμα 2.4.2, η μέθοδος βελτιστοποίησης βάσει της μετρικής f της εξίσωσης (2.8) συγκλίνει μεν, αλλά δεν επιτυγχάνει επαρκώς την ενίσχυση τριγώνων με χαμηλή κυκλικότητα, με αποτέλεσμα να παραμένουν τέτοια τρίγωνα στο τελικό πλέγμα. Στην ενότητα 3.2.1 περιγράφηκε μία δυνατή τροποποίηση της συνάρτησης κόστους f εισάγοντας τον συντελεστή R_i^{-2} . Ως συμπέρασμα προέκυψε ότι το αρχικό πρόβλημα επιλύεται, δηλαδή το βελτιστοποιημένο πλέγμα διατηρεί υψηλή ποιότητα, όμως η διαδικασία προσέγγισής του παρουσιάζει ευαισθησία όσον αφορά την αρχική κατάσταση.

Στο σχήμα 3.6 της ενότητας 3.1.3 συγκεκριμενοποιήθηκε η συνήθης περίπτωση παραμόρφωσης που μας ενδιαφέρει και τα βασικά της χαρακτηριστικά. Διαπιστώθηκε ότι η οξεία παραμόρφωση του ορίου ενός πλέγματος έχει ως επακόλουθο μεγάλη διακύμανση της περιμέτρου S μεταξύ γειτονικών στοιχείων. Βάσει αυτού ερμηνεύτηκαν τυχόν αθέμιτες ισορροπίες για το σύστημα M κόμβων στην περίπτωση πλέγματος $N > 1$ τριγώνων. Έχοντας προσδιορίσει την περίπτωση παραμόρφωσης που μελετάται και το πρόβλημα που ανακύπτει, προτείνεται μία λύση για την αντιμετώπισή του.

Στην ενότητα αυτή προτείνεται μία εναλλακτική τροποποίηση της αρχικής μεθόδου βελτιστοποίησης. Αυτό γίνεται εισάγοντας, αρχικά, τον συντελεστή S_i^2 στην έκφραση του συστήματος (2.21) προς ενίσχυση των τριγώνων μεγάλης περιμέτρου. Το σύστημα προς επίλυση λαμβάνει την εξής μορφή:

$$\sum_{i=1}^N S_i^2 (R_i - R_{max}) \nabla R_i = 0 \quad (3.26)$$

όπου R_i ορίζεται από την εξίσωση (2.1), R_{max} είναι η μέγιστη τιμή κυκλικότητας για ένα τρίγωνο και ∇R_i ορίζεται από την εξίσωση (2.14).

Υπενθυμίζεται ότι: $\nabla R_i = \frac{1}{S_i^2} \nabla J_i - 2 \frac{J_i}{S_i^3} \nabla S_i$ και $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_M}, \frac{\partial}{\partial y_M} \right)^T$.

Ο τετραγωνικός εκθέτης της περιμέτρου προκύπτει από διαστατική ανάλυση. Αναμένεται πως η μετατόπιση ενός κόμβου είναι ίδιας κλίμακας με την παρούσα θέση του, εφόσον προστίθεται σε αυτή. Ισοδύναμα πρέπει να έχει μονάδες μήκους m , το οποίο επαληθεύεται από την έκφραση (2.36). Η ενίσχυση των τριγώνων μεγάλης περιμέτρου είναι καθοριστική μόνο στην περίπτωση τοπικά μεγάλης διακύμανσης της περιμέτρου.

Στην ενότητα 3.1.1 παρατηρήθηκε ότι η συνάρτηση κόστους δεν εμφανίζει μοναδικό ακρότατο, αλλά υφίσταται ακρότατο και για αρνητικές τιμές της σφαιρικότητας. Για να αποφευχθεί το πρόβλημα αυτό, στην ενότητα 3.2.1 υπήρξε κατάλληλη παρέμβαση στο αρχικό σύστημα εισάγοντας μία δίκλαδη έκφραση. Ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική με την εξίσωση (3.24) της ενότητας 3.2.1, υιοθετείται και στην προκειμένη περίπτωση μία ανάλογη δίκλαδη έκφραση αντικαθιστώντας το σύστημα (3.26) με ένα σύστημα της μορφής: $\sum_{i=1}^N \psi_{i,k} = 0, \forall 1 \leq k \leq M$, όπου $\psi_{i,k}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\psi_{i,k} = \begin{cases} S_i^2 (R_{max} - R_i) \nabla_k R_i, & J_i \geq 0 \\ R_{max} \nabla_k J_i, & J_i < 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\text{όπου } \nabla_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial y_k} \right)^T.$$

Για τρίγωνα θετικού εμβαδού, η συνάρτηση $\psi_{i,k}$ ταυτίζεται με τον όρο του αθροίσματος (3.26), ενώ για τρίγωνα αρνητικού εμβαδού η δυναμική καθορίζεται από την κλίση $\nabla_k J_i$, συνεπώς δεν έχει τάση αύξησης της κυκλικότητας αλλά του εμβαδού, πράγμα θεμιτό. Επίσης, δεν υπάρχει άλμα ασυνέχειας μεταξύ των δύο τύπων στην κατάσταση αλλαγής τύπου $J_i = 0$.

Κατ' αναλογία με την εξίσωση (2.22) ορίζεται το δυναμικό σύστημα για τη σύγκλιση στη λύση του συστήματος (3.26). Παρατίθεται η έκφραση για το ζεύγος των συνιστωσών του συστήματος που αφορούν έναν κόμβο P_k :

$$(\dot{x}_k, \dot{y}_k)(t) = \sum_{i \in I_k} \psi_{i,k}, \quad (x_k, y_k)(t=0) = (x_{k,0}, y_{k,0}) \quad (3.28)$$

όπου I_k είναι το σύνολο των τριγώνων που περιβάλλουν τον κόμβο P_k .

Στο παράρτημα Α'.3 ορίζεται ένα άνω φράγμα για το μέτρο της τάσης μεταβολής της θέσης ενός κόμβου $\mathcal{M} = \|(\dot{x}_k, \dot{y}_k)\|$ βάσει της δυναμικής (3.28). Προκύπτει ότι \mathcal{M} είναι καλώς φραγμένο, γεγονός το οποίο συνεισφέρει στην ευστάθεια της δυναμικής, αλλά και της αντίστοιχης αριθμητικής μεθόδου επίλυσης.

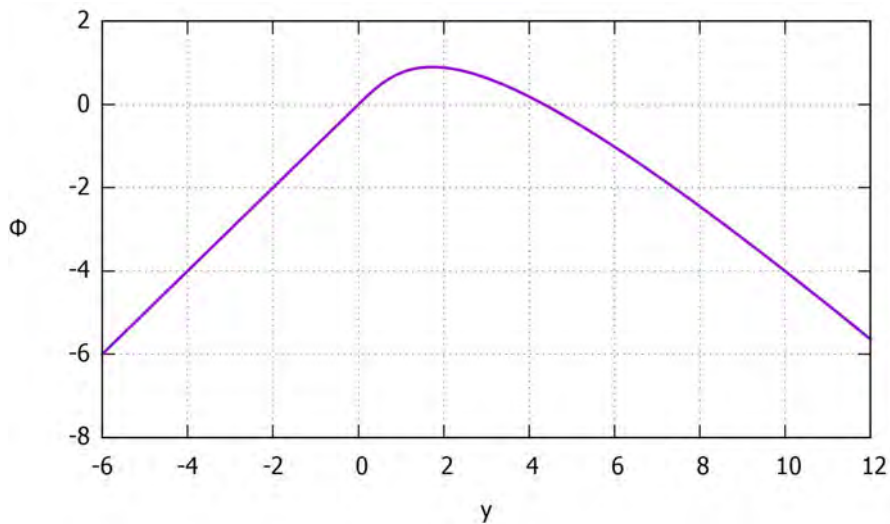
Για να γίνει σύγκριση μεταξύ του νέου συστήματος και του αρχικού, περιοριζόμαστε στην περίπτωση ισοσκελούς τριγώνου ενός βαθμού ελευθερίας (συμβολίζεται με y) που εξετάστηκε στην ενότητα 3.1.1, ώστε να είναι δυνατή η γραφική αναπαράσταση των συναρτήσεων. Στα σχήματα 3.2, 3.3 της ενότητας 3.1.1 αναπαρίστανται η κυκλικότητα και η παράγωγος για το συγκεκριμένο παράδειγμα. Για να υπάρχει μία αναλογία με τα σχήματα αυτά, επιλέγεται να οριστεί η συνάρτηση φ η οποία ταυτίζεται με την εξίσωση (3.27) αμελώντας τον συντελεστή $R_i - R_{max}$. Παρακάτω φαίνεται η έκφραση που λαμβάνει η φ στο παράδειγμα ενός βαθμού ελευθερίας:

$$\varphi(y) = \begin{cases} \frac{(1+y^2)(1+\sqrt{1+y^2})^2(1-y^2+\sqrt{1+y^2})}{(1+y^2+\sqrt{1+y^2})^3} & , y \geq 0 \\ 1 & , y < 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

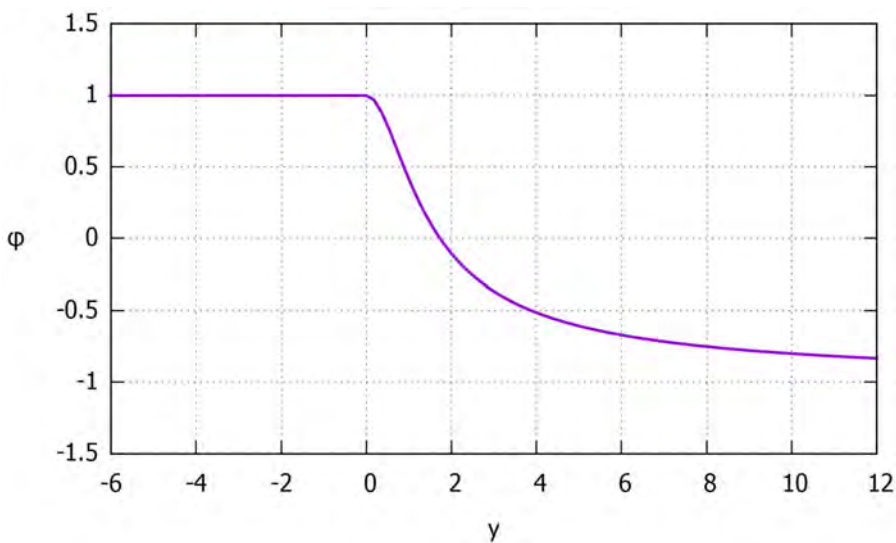
Συνιστά το ανάλογο της παραγώγου της κυκλικότητας της εξίσωσης 3.2, έχοντας πολλαπλασιάσει με την περίμετρο στο τετράγωνο.

Για να γίνει σύγκριση και με την κυκλικότητα της εξίσωσης 3.1, ορίζεται το ολοκλήρωμα της συνάρτησης φ και συμβολίζεται με Φ :

$$\Phi(y) = \begin{cases} 2 \ln(y + \sqrt{1+y^2}) - y & , y \geq 0 \\ -y & , y < 0 \end{cases} \quad (3.30)$$



Σχήμα 3.10: Γραφική παράσταση της συνάρτησης Φ που ορίζεται από την εξίσωση (3.30). Αποτελεί την ανάλογη γραφική παράσταση εκείνης του σχήματος 3.2 της ενότητας 3.1.1. Για την παράμετρο x του ισοσκελούς τριγώνου του σχήματος 3.1 ισχύει ότι $x = 1$.



Σχήμα 3.11: Γραφική παράσταση της συνάρτησης ϕ που ορίζεται από την εξίσωση (3.29). Αποτελεί την ανάλογη γραφική παράσταση εκείνης του σχήματος 3.3 της ενότητας 3.1.1. Για την παράμετρο x του ισοσκελούς τριγώνου του σχήματος 3.1 ισχύει ότι $x = 1$.

Παρατηρείται ότι η γραφική παράσταση του σχήματος 3.10 εμφανίζει καλύτερα χαρακτηριστικά από ό,τι του σχήματος 3.2. Ο λόγος είναι ότι η γραφική παράσταση του σχήματος 3.11 είναι μονότονη και συνεπώς το σχήμα 3.10 έχει μορφή παραβολοειδούς. Εμφανίζει μοναδικό ακρότατο για $y = \sqrt{3}$ και για οποιαδήποτε αρχική κατάσταση y_0 η τάση αύξησης της κυκλικότητας συνεπάγεται σύγκλιση προς τη

θεμιτή κατάσταση του ισόπλευρου τριγώνου θετικού εμβαδού. Αυτό δεν εξασφαλίζει ότι και για πλέγμα $N > 1$ τριγώνων εξακολουθεί να ισχύει η βελτίωση της συμπεριφοράς, όμως αποτελεί μία ένδειξη προς αυτόν τον ισχυρισμό (και ένδειξη ότι, συγκεκριμένα, ο εκθέτης (2) του συντελεστή S_i^2 είναι σωστή επιλογή).

Στην περίπτωση της χρήσης του συντελεστή S_i^2 εισάγονται επιπλέον δύο συντελεστές στην έκφραση του συστήματος, μικρότερης βέβαια σημασίας.

Ορίζεται, αρχικά, ο μετρητής (counter) n_{inv} ως το πλήθος των αντεστραμμένων τριγώνων $J_i < 0$ στην επανάληψη n και η παράμετρος c_n η οποία αρχικοποιείται ως $c_0 = 0$. Ισχύει ότι:

Εάν για έναν αριθμό n_{iter} διαδοχικών επαναλήψεων ο μετρητής n_{inv} δεν μειωθεί και $n_{inv} \neq 0$ τότε: $c_{n+1} = c_n + 1$. Ο αριθμός n_{iter} εξαρτάται από το πλήθος των κόμβων M , ενδεικτικά $n_{iter} \sim 40$.

Εισάγεται συντελεστής p_i για κάθε τρίγωνο του πλέγματος με τύπο:

$$p_i = \begin{cases} c_n (1 - r_i) + 1, & r_i \geq 0 \\ c_n + 1, & r_i < 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

όπου r_i είναι η ανηγμένη κυκλικότητα η οποία ορίζεται από την εξίσωση (2.5).

Ο συντελεστής p_i ενισχύει περαιτέρω τα τρίγωνα με $R \ll R_{max}$ μέσω δυναμικής ανάδρασης (feedback) πληροφορίας για την εξέλιξη του συστήματος. Η αύξηση της παραμέτρου c_n ισοδυναμεί με αναγνώριση ότι το δυναμικό σύστημα αδυνατεί να αναιρέσει την αλληλοκάλυψη μεταξύ στοιχείων του πλέγματος. Η δυνατότητα αντιμετώπισης των αντεστραμμένων στοιχείων είναι αναγκαία εφόσον σχετίζεται με την εγκυρότητα του πλέγματος. Επισημαίνεται ότι μία εξαρχής μεγάλη και σταθερή τιμή για το $c_n = c$ έχει ως ζήτημα: 1. Ενδεχόμενη αστάθεια και αργή σύγκλιση (αν ληφθεί υπερβολικά – αχρείαστα μεγάλη) 2. Την αδυναμία πρόβλεψης της τάξης μεγέθους του c που απαιτείται (πιθανόν να απαιτείτο ακόμη μεγαλύτερη τιμή).

Στη συνέχεια ορίζεται η έννοια της απόστασης d_k ενός κόμβου P_k από το κινούμενο όριο ως ο ελάχιστος αριθμός διαδοχικών κόμβων που συνδέουν τον P_k με το όριο. Ισχύει ότι όλοι οι άμεσα γειτονικοί κόμβοι στον P_k ορίζουν απόσταση $d \in \{d_k - 1, d_k, d_k + 1\}$.

Έστω ένα τρίγωνο i στην περιοχή του P_k με κορυφές: P_k, P_l, P_m . Εισάγεται συντελεστής $q_{i,k}$ με τύπο:

$$q_{i,k} = \begin{cases} 1, & d_k \leq d_l, d_m \\ 1.3, & d_l < d_k \leq d_m \text{ ή } d_m < d_k \leq d_l \\ 1.5, & d_k > d_l, d_m \end{cases} \quad (3.32)$$

Οι τιμές που χρησιμοποιούνται είναι ενδεικτικές. Μετά από δοκιμές φάνηκε ότι λειτουργούν καλά σε όλα τα παραδείγματα πλεγμάτων.

Ο συντελεστής $q_{i,k}$ ενισχύει τη συμβολή των τριγώνων για τα οποία οι κόμβοι P_l, P_m βρίσκονται πιο κοντά στο κινούμενο όριο, σχετικά με τους υπόλοιπους κόμβους που ανήκουν περιοχή του P_k . Αυτό είναι απαραίτητο, διαφορετικά η παραμόρφωση ίσως δεν διαδίδεται σε επιθυμητό βαθμό. Ένας ακόμη λόγος είναι ότι στην αρχική κατάσταση τα τρίγωνα επί του κινούμενου ορίου έχουν υποστεί μεγάλη

παραμόρφωση, ενώ ταυτοχρόνως οι κόμβοι τους επί του ορίου είναι δεσμευμένοι, άρα έχουν λιγότερους βαθμούς ελευθερίας. Επισημαίνεται ότι αυτή η έννοια απόστασης δεν αφορά κάποια γεωμετρική μετρική αλλά μόνο τη δομή του πλέγματος.

Το νέο σύστημα προς επίλυση συμβολίζεται με $\check{g}: \mathfrak{R}^{2M} \rightarrow \mathfrak{R}^{2M}$. Η λύση του συστήματος αποτελεί την βέλτιστη κατάσταση του πλέγματος και συμβολίζεται με $\check{z}^* \in \mathfrak{R}^{2M}$:

$$\check{g}(\check{z}^*) = 0 \quad (3.33)$$

Για το ζεύγος των συνιστωσών του συστήματος που αφορούν έναν κόμβο P_k ισχύει ότι:

$$(\check{g}_{xk}, \check{g}_{yk})(z) = \frac{1}{N_k} \sum_{i \in I_k} p_i q_{i,k} \psi_{i,k} \quad (3.34)$$

όπου N_k και I_k είναι το πλήθος και το σύνολο των τριγώνων που περιβάλλουν τον κόμβο P_k . Η συνάρτηση $\psi_{i,k}$ ορίζεται από την εξίσωση (3.27) και οι συντελεστές p_i και $q_{i,k}$ από τις εξισώσεις (3.31) και (3.32) αντίστοιχα.

Όπως και στην αρχική μέθοδο, ορίζεται δυναμικό σύστημα με σκοπό τη σύγκλιση στη λύση του συστήματος (3.33). Κατ' αναλογία με την εξίσωση (2.22) το δυναμικό σύστημα είναι:

$$\dot{z} = \check{g}(z) \quad , \quad z(t=0) = z_0 \quad (3.35)$$

όπου $\check{g} = (\check{g}_{x1}, \check{g}_{y1}, \dots, \check{g}_{xM}, \check{g}_{yM}) \in \mathfrak{R}^{2M}$ και $z = (x_1, y_1, \dots, x_M, y_M) \in \mathfrak{R}^{2M}$.

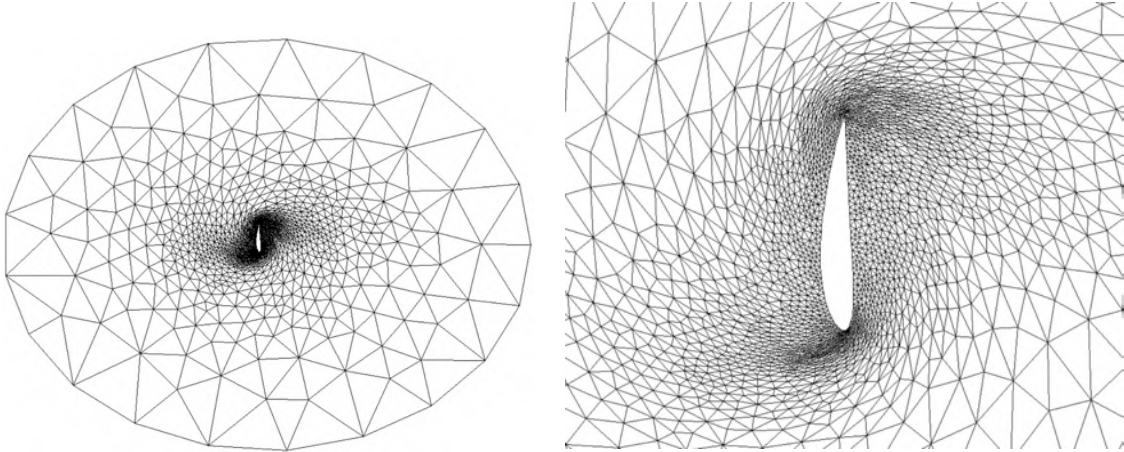
Η προσέγγιση της λύσης του συστήματος (3.33) μπορεί να γίνει μέσω αριθμητικής μεθόδου σταθερού σημείου. Η αναδρομική της σχέση προκύπτει μέσω διακριτοποίησης του δυναμικού συστήματος (3.35):

$$z_{n+1} = z_n + \eta \check{g}(z_n) \quad , \quad z_{n=0} = z_0 \quad (3.36)$$

Οι υπόλοιπες αριθμητικές μέθοδοι που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 2.3 εφαρμόζονται χωρίς κάποια διαφοροποίηση για το νέο σύστημα της εξίσωσης (3.33), με κύρια να παραμένει η μέθοδος L-BFGS.

Στην ενότητα 3.2.1 παρουσιάστηκαν δύο παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου βελτιστοποίησης, βάσει της εναλλακτικής τροποποίησης που προτάθηκε. Το ίδιο γίνεται και εδώ με σκοπό τη σύγκριση των αποτελεσμάτων. Εν προκειμένω, παραλείπεται η αναφορά στο παράδειγμα της στροφής 90° του τετραγώνου, διότι τα αποτελέσματα στις δυο περιπτώσεις δεν εμφανίζουν ορατές διαφορές μεταξύ τους.

Στο σχήμα 3.12 φαίνεται το αποτέλεσμα της εφαρμογής της αριθμητικής μεθόδου επίλυσης του συστήματος (3.33) στην περίπτωση πλέγματος γύρω από την αεροτομή NACA 4415. Η στροφή 90° της αεροτομής πραγματοποιείται απευθείας από την απαραμόρφωτη κατάσταση του σχήματος 3.9, σε αντίθεση με το αντίστοιχο παράδειγμα της ενότητας 3.2.1. Χρησιμοποιείται η μέθοδος L-BFGS.



Σχήμα 3.12: Βελτιστοποιημένο πλέγμα μετά από στροφή 90° της αεροτομής NACA 4415. Το πλήρες πλέγμα (αριστερά). Σε μεγέθυνση το πλέγμα γύρω από την αεροτομή (δεξιά).

Το τελικό πλέγμα είναι έγκυρο και αποδεκτής ποιότητας. Η μέθοδος παρουσιάζει σημαντική ευστάθεια ως προς την αρχική κατάσταση z_0 του συστήματος και συνεπώς δεν απαιτείται ο ορισμός ενδιάμεσων βημάτων. Επιτυγχάνεται σύγκλιση σε κατάσταση ικανοποιητικής ποιότητας z^* – καλύτερης σε σχέση με το βέλτιστο πλέγμα ως προς τη μετρική f της εξίσωσης (2.8) – για ένα μεγάλο εύρος παραμορφώσεων των ορίων. Η ανεξαρτησία της σύγκλισης από την αρχική κατάσταση είναι σημαντικό χαρακτηριστικό της ευρωστίας της μεθόδου και δεν αναμένεται, εν γένει, για ένα μη-γραμμικό σύστημα.

Για τη σύγκλιση της αριθμητικής μεθόδου προσέγγισης της λύσης z^* του συστήματος (3.33) απαιτούνται 850 επαναλήψεις. Ο υπολογιστικός χρόνος ανέρχεται στα 6.7 δευτερόλεπτα σε επεξεργαστή Intel Core i7, δηλαδή παρατηρείται μία μείωσή του στο 1/4 του αντίστοιχου χρόνου στο παράδειγμα του σχήματος 3.9. Βέβαια, η ποιότητα του πλέγματος φαίνεται ότι είναι πιο χαμηλή σε σύγκριση με το σχήμα 3.9. Η παραμόρφωση παραμένει συσσωρευμένη κοντά στην περιστραμμένη αεροτομή.

Στην περίπτωση εξεζητημένα μεγάλης παραμόρφωσης η μέθοδος παρουσιάζει, λοιπόν, μειωμένη δυνατότητα διάδοσης της παραμόρφωσης. Το μειονέκτημα αυτό έγκειται στο γεγονός ότι η ενίσχυση των τριγώνων μεγάλης περιμέτρου αφορά δύο κατηγορίες: α) παραμορφωμένα τρίγωνα με τουλάχιστον έναν κόμβο επί του κινούμενου ορίου, β) μη-παραμορφωμένα τρίγωνα τα οποία βρίσκονται μακριά από το κινούμενο όριο, στην περιοχή όπου το πλέγμα είναι αραιό.

Συμπερασματικά, η μέθοδος που παρουσιάστηκε στην ενότητα 3.2.2 συγκλίνει ακόμη και όταν η αρχική κατάσταση του πλέγματος απέχει πολύ από τη βέλτιστη. Η λύση z^* του συστήματος (3.19) είναι, όμως, προτιμότερη από τη z^* .

Καθοριστικής σημασίας είναι η παρατήρηση ότι, για ένα μεγάλο εύρος παραμορφώσεων, η αριθμητική μέθοδος επίλυσης του συστήματος (3.19), όπως παρουσιάστηκε στην ενότητα 3.2.1, είναι συγκλίνουσα στη βέλτιστη κατάσταση z^* αν ξεκινήσει από αρχική κατάσταση z_0 . Δηλαδή, $\|z^* - z^*\| \ll \|z^* - z_0\|$ και

μάλιστα z^* και \check{z}^* είναι επαρκώς κοντά ώστε η επαναληπτική διαδικασία να συγκλίνει. Κατά συνέπεια, η διαδοχική χρήση της αριθμητικής μεθόδου επίλυσης του συστήματος (3.33) και έπειτα της αριθμητικής μεθόδου επίλυσης του συστήματος (3.19) ορίζει συγκλίνουσα διαδικασία στη λύση z^* του (3.19) (βελτιστοποιημένο πλέγμα του σχήματος 3.9), χωρίς τη χρήση ενδιάμεσων βημάτων.

Για το παράδειγμα της αεροτομής NACA 4415, ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται στην περίπτωση διαδοχικής χρήσης των δύο αριθμητικών μεθόδων είναι 11.2 δευτερόλεπτα και πραγματοποιούνται 550 επαναλήψεις του αλγορίθμου επίλυσης του συστήματος (3.33) και 950 επαναλήψεις του αλγορίθμου επίλυσης του συστήματος (3.19). Το κόστος είναι μειωμένο σε σχέση με αυτό της ενότητας 3.2.1, οπότε η προσέγγιση αυτή ενδείκνυται για μεγάλες παραμορφώσεις των ορίων.

3.3 Αλγόριθμος της Νέας Μεθόδου Βελτιστοποίησης

Στο τέλος του κεφαλαίου 3.2 διατυπώνεται το βασικό συμπέρασμα της εργασίας. Η αριθμητική επίλυση του συστήματος (3.19) δεν συγκλίνει εκκινώντας από αρχική κατάσταση z_0 (κατάσταση μετά την παραμόρφωση των ορίων), όμως συγκλίνει με αρχική κατάσταση τη λύση \check{z}^* του συστήματος (3.33). Κατά συνέπεια, η αριθμητική επίλυση πρώτα του συστήματος (3.33) και διαδοχικά του συστήματος (3.19) είναι μία συγκλίνουσα διαδικασία και ταυτόχρονα το τελικό πλέγμα που προκύπτει διατηρεί υψηλή ποιότητα, ακόμη και για μεγάλες παραμορφώσεις των ορίων του.

Παρατίθεται η περιγραφή των βημάτων του αλγορίθμου που προγραμματίστηκε για την υλοποίηση της μεθόδου βελτιστοποίησης, όπως αυτή ορίζεται στο κεφάλαιο 3.2. Τα βήματα 1 ως 4 αποτελούν τα δεδομένα του αλγορίθμου και την προεργασία που χρειάζεται να γίνει προτού εκκινήσει ο κυρίως αλγόριθμος, δηλαδή η επαναληπτική μέθοδος βελτιστοποίησης του πλέγματος.

1. Εισαγωγή των αρχείων του πλέγματος στην απαραμόρφωτη κατάσταση.
Δεδομένα: α) αρχείο των συντεταγμένων των κόμβων του πλέγματος, β) αρχείο των κορυφών των τριγώνων του πλέγματος. Βάσει των (α), (β) εξάγεται η πληροφορία της δομής του πλέγματος δηλαδή των συνδέσεων μεταξύ των κόμβων του.
2. Έλεγχος της εγκυρότητας του δοθέντος πλέγματος, δηλαδή της μη-ύπαρξης αλληλοκάλυψης μεταξύ στοιχείων του. Αν το πλέγμα δεν κριθεί ως έγκυρο, ο αλγόριθμος περατώνεται. Αν κριθεί ως έγκυρο, ακολουθεί ο κατάλληλος ορισμός της τριάδας $(P_{i,1}, P_{i,2}, P_{i,3})$ των κορυφών κάθε τριγώνου του πλέγματος, ώστε το εμβαδό όλων των τριγώνων να είναι θετικό βάσει της κοινής σύμβασης που επιλέχθηκε στην εξίσωση (2.2).
3. Υπολογισμός της απόστασης d_k κάθε εσωτερικού κόμβου του πλέγματος από το κινούμενο όριο, η οποία χρησιμοποιείται για τον ορισμό του συντελεστή $q_{i,k}$ της εξίσωσης (3.32).
4. Καθορισμός και πραγματοποίηση της μετατόπισης των οριακών κόμβων του πλέγματος. Οι κόμβοι τοποθετούνται απευθείας από την αρχική στην τελική τους θέση. Ορίζεται, έτσι, η παραμορφωμένη κατάσταση του πλέγματος z_0 , η οποία αποτελεί την αρχική κατάσταση της επαναληπτικής διαδικασίας του βήματος 6.
5. Αρχικοποίηση της παραμέτρου που δηλώνει το σύστημα το οποίο επιλύεται: $j = 1$.

6. Επανάληψη: $n = 0, n + +$
- 6.1 Υπολογισμός των μετρικών ποιότητας του πλέγματος για την παρούσα κατάσταση z_n βάσει των εξισώσεων (2.6), (2.7), (2.9), (2.10) και (3.17), όπως επίσης και του πλήθους των αντεστραμμένων τριγώνων n_{inv} το οποίο χρησιμοποιείται για τον ορισμό του συντελεστή p_i της εξίσωσης (3.31).
- 6.2 Αν $j = 1$: Υπολογισμός της συνάρτησης $\check{g}(z_n)$, όπως ορίζεται από την εξίσωση (3.33), και της νόρμας $\|\check{g}(z_n)\|$.
 Αν $j = 2$: Υπολογισμός της συνάρτησης $g(z_n)$, όπως ορίζεται από την εξίσωση (3.19), και της νόρμας $\|g(z_n)\|$.
- 6.3 Αν $j = 1$: Έλεγχος του κριτηρίου αλλαγής συστήματος προς επίλυση: $\|\check{g}_n\| < 10^{-2} \|\check{g}_{n=0}\|$ και $n_{inv} = 0$. Εάν πληρούνται οι δύο συνθήκες τότε: $j = 1 \rightarrow j = 2$ και ορίζεται $n_c = n$.
 Αν $j = 2$: Έλεγχος του κριτηρίου σύγκλισης της επαναληπτικής διαδικασίας του βήματος 6: $\|g_n\| < 10^{-2} \|g_{n=n_c}\|$. Εάν πληρείται η συνθήκη \rightarrow μετάβαση στο βήμα 7.
- 6.4 Αν $j = 1$: Ανανέωση των συντεταγμένων των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος βάσει της αριθμητικής μεθόδου L-BFGS \rightarrow προκύπτει η νέα κατάσταση z_{n+1} .
 Αν $j = 2$: Ανανέωση των συντεταγμένων των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος βάσει της αριθμητικής μεθόδου P-SD \rightarrow προκύπτει η νέα κατάσταση z_{n+1} .
- 6.5 Επιστροφή στο βήμα 6.
7. Τέλος του αλγορίθμου της μεθόδου βελτιστοποίησης 2Δ πλεγμάτων.

Η επαναληπτική διαδικασία εκκινεί με αρχική κατάσταση z_0 το πλέγμα μετά από την τοποθέτηση των οριακών του κόμβων στις νέες τους θέσεις. Αρχικά, χρησιμοποιείται η μέθοδος L-BFGS για την αριθμητική επίλυση του συστήματος (3.33). Η σύγκλιση της επαναληπτικής διαδικασίας κρίνεται ως ικανοποιητική. Επισημαίνεται ότι δεν γίνεται χρήση προσταθεροποιητή. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στην αρχική κατάσταση z_0 υπάρχουν αντεστραμμένα τρίγωνα, δηλαδή δεν είναι κατάσταση έγκυρου πλέγματος. Ο προσταθεροποιητής είναι ένας πίνακας με στοιχεία της μορφής: $\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial y_k}\right) \{\check{g}_k\}$. Από τον δεύτερο κλάδο ($J_i < 0$) της εξίσωσης (3.27) φαίνεται ότι οι όροι αυτοί είναι ίσοι με μηδέν και συνεπώς ο προσταθεροποιητής δεν είναι αντιστρέψιμος.

Ακολουθεί η αριθμητική επίλυση του συστήματος (3.19), ξεκινώντας με αρχική κατάσταση την προσέγγιση της λύσης \check{z}^* του συστήματος (3.33) που προέκυψε από την προηγούμενη διαδικασία. Σε ορισμένα παραδείγματα εφαρμογής παρατηρείται ότι η χρήση της μεθόδου L-BFGS για την επίλυση του συστήματος (3.19) εμφανίζει πολύ αργή σύγκλιση ή ακόμη και αποκλίνει. Για τον λόγο αυτό, επιλέγεται η μέθοδος του απότομης καθόδου με προσταθεροποίηση. Η βελτιστοποίηση ενός πλέγματος βάσει της μετρικής h προϋποθέτει την εγκυρότητα του πλέγματος (εξασφαλίζεται στο βήμα 6.3). Η συνθήκη της εγκυρότητας του πλέγματος έγκειται στο γεγονός ότι η συνάρτηση h απειρίζεται αν για ένα στοιχείο του πλέγματος ισχύει ότι: $J = 0$, όπως προκύπτει από την εξίσωση (3.17). Κατά συνέπεια, και ο προσταθεροποιητής είναι καλώς ορισμένος. Ο προσταθεροποιητής για τη συνάρτηση κόστους h ορίζεται από την εξίσωση (2.24), ακριβώς όπως και για τη συνάρτηση f , αντικαθιστώντας όπου f την h .

Αναφέρεται ότι η εγκυρότητα του πλέγματος (στο βήμα 6.3) στη συνθήκη αλλαγής $j = 1 \rightarrow j = 2$ είναι υποχρεωτική στην πλειονότητα των περιπτώσεων, όχι όμως πάντα.

Τέλος, επισημαίνεται ότι σε όλα τα παραδείγματα εφαρμογής του κεφαλαίου 3.4 χρησιμοποιείται ο ίδιος αλγόριθμος χωρίς να τροποποιούνται κατάλληλα τυχόν παράμετροι που μετέχουν στις εκφράσεις των συστημάτων που επιλύονται. Αυτό συμβάλλει στην αυτοματοποίηση της μεθόδου βελτιστοποίησης και στη μη-ανάγκη εξωτερικής ρύθμισής της σε κάθε τρέξιμο.

3.4 Παραδείγματα Εφαρμογής της Νέας Μεθόδου Βελτιστοποίησης 2Δ Πλεγμάτων

Παρατίθενται ορισμένα παραδείγματα εφαρμογής της νέας μεθόδου βελτιστοποίησης της ποιότητας 2Δ πλεγμάτων. Πρόκειται αρχικά περί πλεγμάτων λίγων κόμβων με όρια απλής γεωμετρίας, αλλά σταδιακά και πιο σύνθετων περιπτώσεων που αφορούν εφαρμογές του μηχανικού. Επίσης, διευρύνεται ο τύπος της παραμόρφωσης των ορίων σε σχέση με το κεφάλαιο 2.4, όπου η μελέτη περιορίστηκε αποκλειστικά στην περιστροφή τους. Εξετάζονται κυρίως ακραίες παραμορφώσεις με σκοπό τον προσδιορισμό του εύρους των δυνατοτήτων της μεθόδου σε κάθε παράδειγμα, δηλαδή των περιπτώσεων για τις οποίες αυτή συγκλίνει σε έγκυρο και αποδεκτής ποιότητας πλέγμα. Ελέγχεται, έτσι, η δυνατότητα της νέας μεθόδου να διαχειρίζεται μεγάλες παραμορφώσεις των ορίων σε αντίθεση με την αρχική, η οποία, όπως διαπιστώθηκε στο κεφάλαιο 2.4, δεν έφερε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Επισημαίνεται ότι, σε όσα παραδείγματα παρατίθεται μόνο μία περίπτωση (ένα σχήμα) βελτιστοποιημένου πλέγματος, πρόκειται περί του βέλτιστου ως λύσης του συστήματος (3.19). Εάν υπάρχουν δύο σχήματα θα αναφέρεται ρητά ποιο εξ αυτών αφορά το σύστημα (3.19) και ποιο το σύστημα (3.33).

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται περιγράφεται αναλυτικά στο κεφάλαιο 3.3. Η διαδικασία ξεκινά με τη μετατόπιση των οριακών κόμβων του πλέγματος από την αρχική τους θέση απευθείας στην τελική, χωρίς, δηλαδή, να παρεμβάλλονται ενδιάμεσα βήματα. Οι οριακοί κόμβοι παραμένουν στατικοί καθ' όλη τη διαδικασία της βελτιστοποίησης και ορίζουν το νέο χωρίο του πλέγματος. Εφαρμόζεται, πρώτα, αλγόριθμος L-BFGS προς εύρεση της λύσης του συστήματος (3.33), έχοντας ως αρχική κατάσταση το παραμορφωμένο πλέγμα. Αφότου συγκλίνει σε μια αποδεκτή προσέγγιση της λύσης του (αρκεί να αποτελεί έγκυρο πλέγμα) ακολουθεί η μέθοδος της απότομης καθόδου με προσταθεροποίηση για την επίλυση του συστήματος (3.19). Στα διαγράμματα σύγκλισης αναπαρίσταται η μεταβολή της νόρμας του συστήματος (3.33) και διαδοχικά του συστήματος (3.19), για την οποία ισχύει η σχέση: $\|g(z^*)\| = \|\check{g}(\check{z}^*)\| = 0$. Ως κριτήριο σύγκλισης του αλγορίθμου ορίζεται:

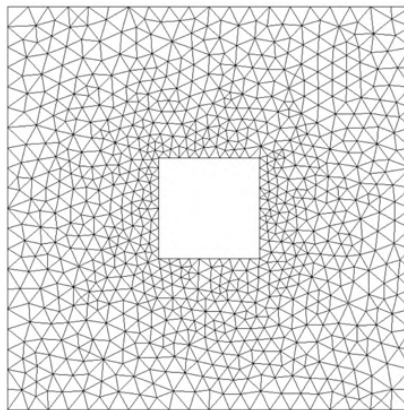
$$\|g_n\| \leq 10^{-2} \|g_{n=0}\| \quad (3.37)$$

όπου n ο δείκτης που αναφέρεται στον αριθμό της επανάληψης του αλγορίθμου και $\|g\|$ είναι η νόρμα του εκάστοτε συστήματος που επιλύεται.

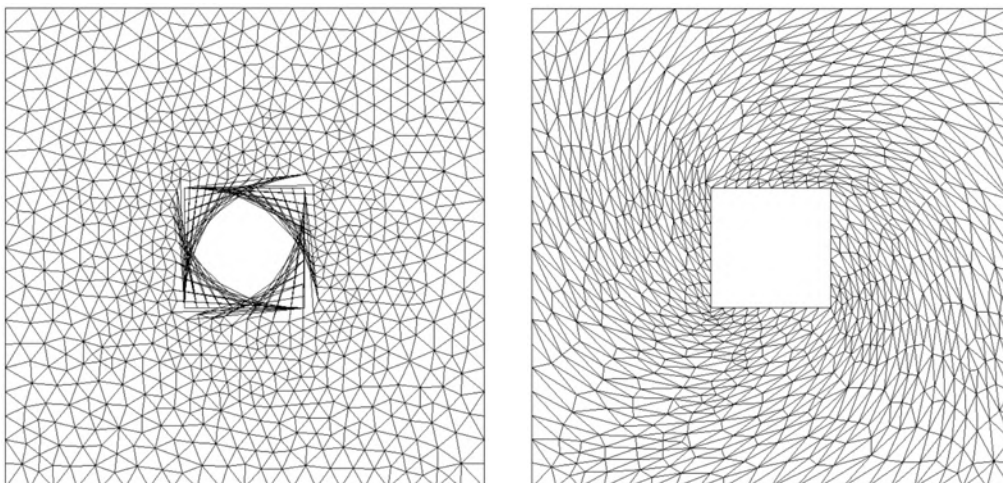
Οι μετρικές ποιότητας των πλεγμάτων ορίζονται αναλυτικά στο κεφάλαιο 2.1 από τις εξισώσεις (2.6), (2.7), (2.9), (2.10) και (3.17). Για να υπάρχει μια αναφορά, υπενθυμίζεται η ιδανική τιμή για κάθε μετρική: $\min h = 0$, $\max r_{mean} = 1$, $\min r_{dev} = 0$, $\max \mu_1 = 1$, $\min \mu_2 = 0$. Η ποιότητα ενός πλέγματος αποδίδεται καταρχήν μέσω της ελάχιστης τιμής της ανηγμένης κυκλικότητας μ_1 και της μέγιστης τιμής τυπικής απόκλισης σε τοπικό επίπεδο μ_2 . Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η παραδοχή ότι ένα πλέγμα είναι αποδεκτής ποιότητας αν πληροί τις προϋποθέσεις: $\mu_1 > 0.3$ και $\mu_2 < 0.2$.

3.4.1 Βελτιστοποίηση Πλέγματος δύο Ομόκεντρων Τετραγώνων

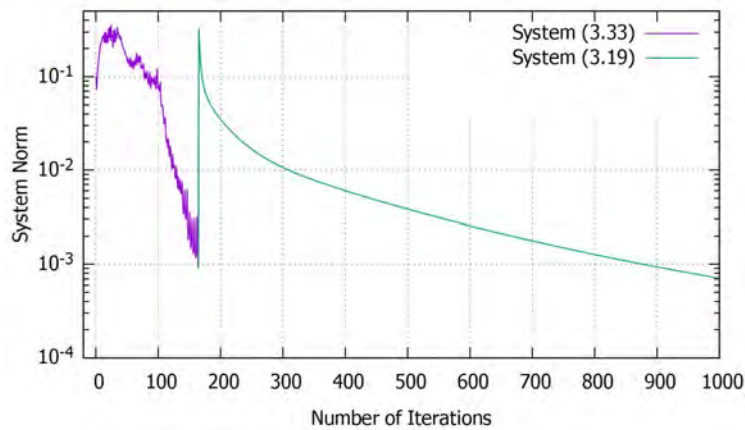
Γίνεται εφαρμογή της νέας μεθόδου βελτιστοποίησης στην παραμόρφωση μη-δομημένου πλέγματος μεταξύ δύο ομόκεντρων τετραγώνων. Πρόκειται περί αραιού πλέγματος 884 κόμβων και 1648 στοιχείων. Ως αποτέλεσμα, δεν δύναται να παραλάβει μεγάλες παραμορφώσεις χωρίς να μειωθεί σημαντικά η ποιότητα των στοιχείων του, γεγονός το οποίο το καθιστά μία απαιτητική περίπτωση. Το εξωτερικό όριο παραμένει στατικό, ενώ το εσωτερικό υφίσταται παραμόρφωση. Δοκιμάζεται, αρχικά, η περιστροφή του εσωτερικού ορίου περί το κοινό κέντρο με συντεταγμένες $(0,0)$ για τις εξής τιμές γωνιών στροφής: $\varphi = 90^\circ$, $\varphi = 130^\circ$ και $\varphi = 180^\circ$ (αριστερόστροφα). Στόχο αποτελεί ο προσδιορισμός του εύρους γωνιών στροφής για τις οποίες η μέθοδος συγκλίνει σε έγκυρο και αποδεκτής ποιότητας πλέγμα. Η περιστροφή του εσωτερικού ορίου πραγματοποιείται μονομιάς χωρίς, δηλαδή, να παρεμβάλλονται ενδιάμεσα βήματα. Δοκιμάζεται, ακολούθως, η μετατόπιση του εσωτερικού ορίου κατά $x = 0.85$ και $y = 0.85$. Αναφέρεται ότι το μήκος της πλευράς του εξωτερικού τετραγώνου είναι ίσο με 4, ενώ του εσωτερικού είναι ίσο με 1.



Σχήμα 3.13: Απαραμόρφωτο πλέγμα 884 κόμβων, 1648 στοιχείων με εσωτερικό και εξωτερικό όριο σε σχήμα ομόκεντρων τετραγώνων.



Σχήμα 3.14: Στροφή 90° του εσωτερικού ορίου περί το κέντρο των τετραγώνων (αριστερά). Βελτιστοποιημένο πλέγμα (δεξιά).

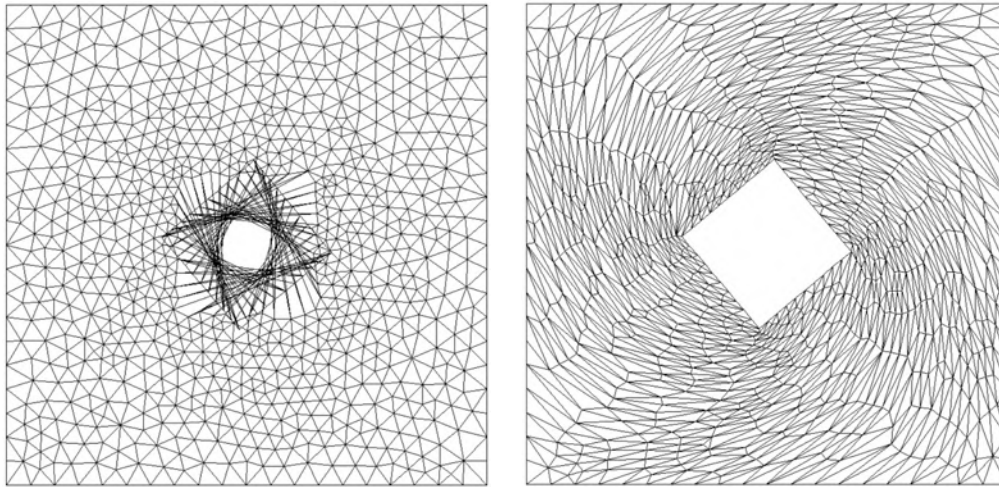


Σχήμα 3.15: Διάγραμμα σύγκλισης της νόρμας αρχικά του συστήματος (3.33) (μέθοδος L-BFGS) και ύστερα του συστήματος (3.19) (μέθοδος απότομης καθόδου με προσταθεροποίηση) για το παράδειγμα του σχήματος 3.14. Ο κατακόρυφος άξονας είναι σε λογαριθμική κλίμακα.

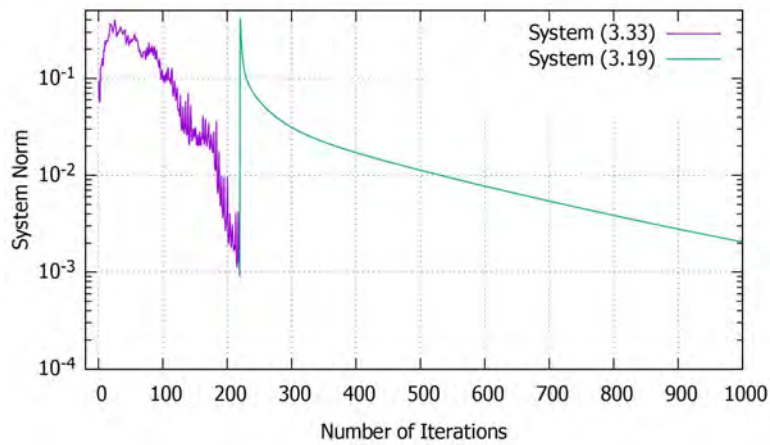
| Πλέγμα \ Μετρικές | h | r_{mean} | r_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|---------------------------------|----------|------------|-----------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.001484 | 0.966688 | 0.034896 | 0.734732 | 0.095157 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.916553 | 0.220453 | -0.260660 | 0.528715 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.33) | 0.240036 | 0.640498 | 0.124304 | 0.348931 | 0.220449 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.19) | 0.192678 | 0.637171 | 0.108120 | 0.397853 | 0.208062 |

Πίνακας 3.1: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (3.17), (2.6), (2.7), (2.9) και (2.10) για το παράδειγμα του σχήματος 3.14.

Το τελικό πλέγμα είναι έγκυρο και αποδεκτής ποιότητας. Το βέλτιστο πλέγμα ως λύση του συστήματος (3.33) δεν παρουσιάζει οπτικά εμφανείς διαφορές σε σύγκριση με εκείνο ως λύση του συστήματος (3.19), για τον λόγο αυτό επιλέγεται να παρουσιαστεί μόνο το δεύτερο. Στον πίνακα 3.1 φαίνεται ότι το βελτιστοποιημένο πλέγμα είναι καλύτερης ποιότητας ως προς όλες τις μετρικές σε σύγκριση με το παραμορφωμένο. Εξαιρεση αποτελεί η μετρική της μέσης τιμής της ανηγμένης κυκλικότητας, η οποία παρουσιάζει μία σημαντική μείωση αντί αύξηση. Όσον αφορά, επίσης, τη συνάρτηση κόστους f του κεφαλαίου 2 που ορίζεται από την εξίσωση 2.8, αναφέρεται ενδεικτικά ότι στο απαραμόρφωτο πλέγμα: $f = 0.008879$, στο πλέγμα μετά τη στροφή: $f = 0.211963$, ενώ στο βελτιστοποιημένο πλέγμα ως προς το σύστημα (3.19): $f = 0.546792$. Παρατηρείται ότι δεν εμφανίζει την αναμενόμενη μεταβολή, δηλαδή αυξάνεται αντί να μειωθεί. Έρχεται σε αντίθεση με τις βασικές μετρικές οι οποίες δηλώνουν αύξηση της ποιότητας του πλέγματος. Ισοδύναμα, προκύπτει ότι το πλέγμα για το οποίο η r_{mean} ή f λαμβάνει την ακρότατη τιμή της δεν είναι έγκυρο, οπότε η απόκλιση του πλέγματος του σχήματος 3.14 από αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αξιολόγηση του πλέγματος ως χαμηλής ποιότητας.



Σχήμα 3.16: Στροφή 130° του εσωτερικού ορίου περί το κέντρο των τετραγώνων (αριστερά). Βελτιστοποιημένο πλέγμα (δεξιά).

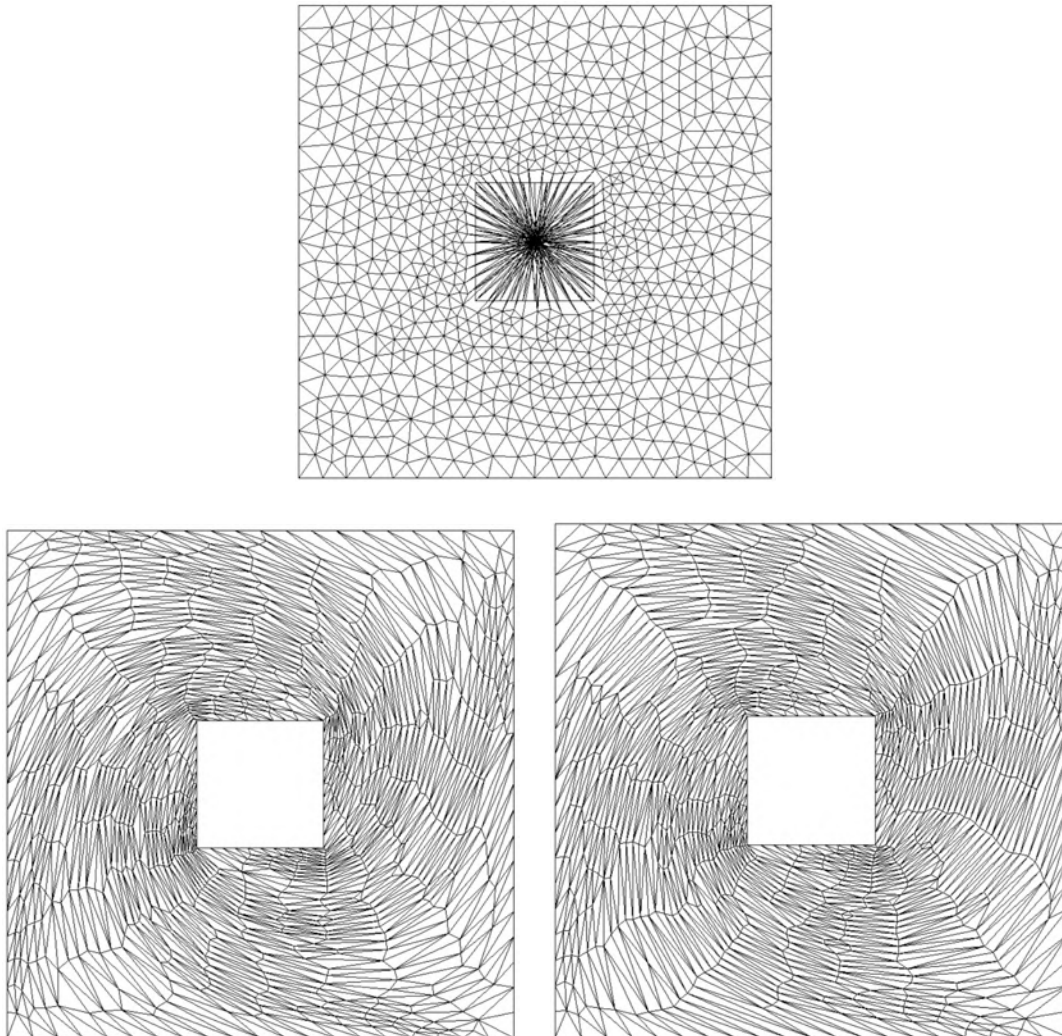


Σχήμα 3.17: Διάγραμμα σύγκλισης της νόρμας αρχικά του συστήματος (3.33) και ύστερα του (3.19) για το παράδειγμα του σχήματος 3.16. Ο κατακόρυφος άξονας είναι σε λογαριθμική κλίμακα.

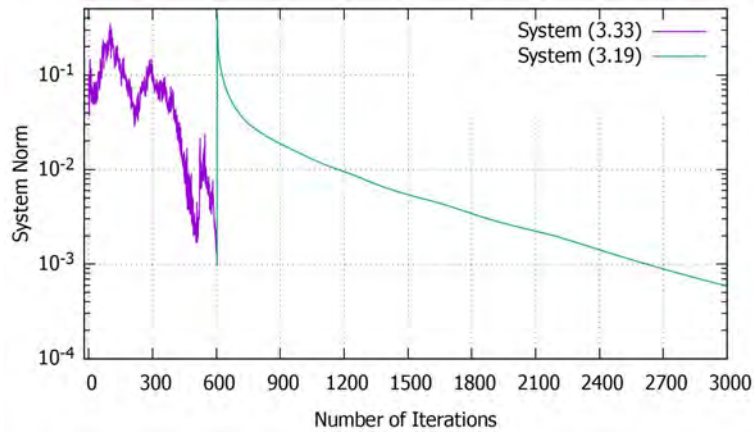
| Πλέγμα \ Μετρικές | h | r_{mean} | r_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|---------------------------------|----------|------------|-----------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.001484 | 0.966688 | 0.034896 | 0.734732 | 0.095157 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.916205 | 0.261463 | -0.232245 | 0.513098 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.33) | 0.924304 | 0.474451 | 0.133101 | 0.193737 | 0.264652 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.19) | 0.758405 | 0.472925 | 0.124438 | 0.268527 | 0.251878 |

Πίνακας 3.2: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (3.17), (2.6), (2.7), (2.9) και (2.10) για το παράδειγμα του σχήματος 3.16.

Το βελτιστοποιημένο πλέγμα είναι έγκυρο, όμως η ποιότητά του είναι οριακά μη αποδεκτή βάσει του κριτηρίου που τέθηκε στην εισαγωγή του κεφαλαίου για τις μετρικές μ_1, μ_2 . Ομοίως με την περίπτωση γωνίας στροφής 90° τα βέλτιστα πλέγματα, ως λύση του συστήματος (3.33) και (3.19) αντίστοιχα, δεν παρουσιάζουν οπτικά εμφανή διαφορά, οπότε και παραλείπεται η παρουσίαση και των δύο. Παρ' όλα αυτά υφίσταται μία διαφοροποίηση μεταξύ των δύο όσον αφορά τις τιμές των μετρικών ποιότητας, η οποία αποτυπώνεται στον πίνακα 3.2.



Σχήμα 3.18: Στροφή 180° του εσωτερικού ορίου περί το κέντρο των τετραγώνων (πάνω).
Βέλτιστο πλέγμα ως λύση του συστήματος (3.33) (κάτω αριστερά).
Βέλτιστο πλέγμα ως λύση του συστήματος (3.19) (κάτω δεξιά).



Σχήμα 3.19: Διάγραμμα σύγκλισης της νόρμας αρχικά του συστήματος (3.33) (μέθοδος L-BFGS) και ύστερα του συστήματος (3.19) (μέθοδος απότομης καθόδου με προσταθεροποίηση) για το παράδειγμα του σχήματος 3.18. Ο κατακόρυφος άξονας είναι σε λογαριθμική κλίμακα.

| Πλέγμα \ Μετρικές | h | r_{mean} | r_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|---------------------------------|----------|------------|-----------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.001484 | 0.966688 | 0.034896 | 0.734732 | 0.095157 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.916104 | 0.221790 | -0.221071 | 0.511950 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.33) | 3.348451 | 0.331183 | 0.123019 | 0.118882 | 0.290908 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.19) | 2.942173 | 0.334395 | 0.124268 | 0.146097 | 0.271679 |

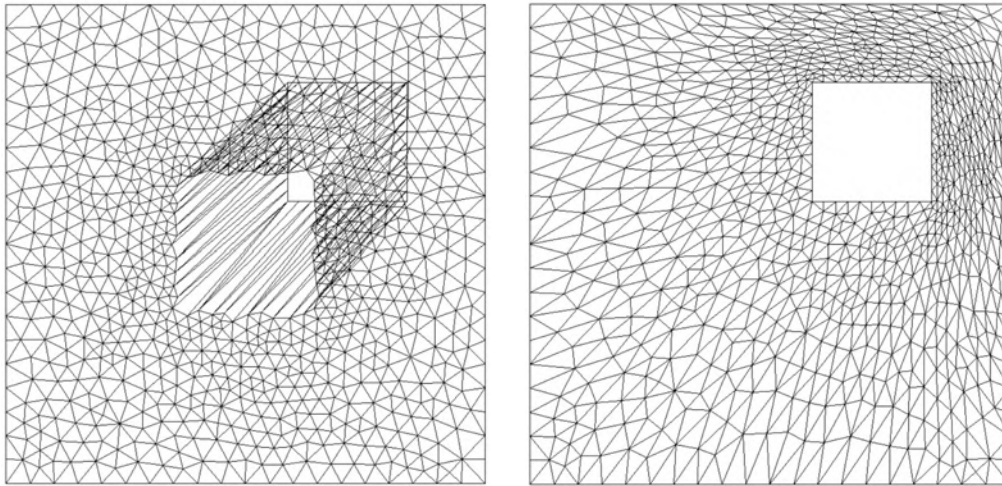
Πίνακας 3.3: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (3.17), (2.6), (2.7), (2.9) και (2.10) για το παράδειγμα του σχήματος 3.18.

Όπως αναφέρθηκε στην περιγραφή του παραδείγματος 3.4.1, η δυσκολία στην συγκεκριμένη περίπτωση έγκειται στην αραιότητα του πλέγματος, η οποία καθορίζει την αντοχή του να παραλάβει παραμόρφωση. Όπως φαίνεται στην περίπτωση των 180° , η ποιότητα των τριγώνων είναι πολύ χαμηλή, παρ' όλα αυτά η παραμόρφωση έχει κατανεμηθεί κατά το δυνατόν ομοιόμορφα. Το πλέγμα είναι έγκυρο, όμως η ποιότητά του δεν λογίζεται ως αποδεκτή εφόσον: $\mu_1 < 0.3$ και $\mu_2 > 0.2$.

Επισημαίνεται ότι, στην περίπτωση στροφής του εσωτερικού ορίου, η γωνία μπορεί να λάβει τιμές μεταξύ: $\varphi \in (-180^\circ, 180^\circ]$. Σε αυτό το διάστημα τιμών εμπεριέχονται, δηλαδή, όλες οι πιθανές καταστάσεις, με οριακή κατάσταση την $\varphi = 180^\circ$. Το γεγονός ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει σε έγκυρο πλέγμα για όλες τις γωνίες συνεπάγεται τη δυνατότητά του να διαχειριστεί το βασικό πρόβλημα της πραγματοποίησης μίας πλήρους περιστροφής του τετραγώνου.

Στο διάγραμμα σύγκλισης του σχήματος (3.19) παρατηρείται μία μεγαλύτερη αστάθεια στη σύγκλιση της μεθόδου L-BFGS κατά την επίλυση του συστήματος (3.33). Το γεγονός αυτό οφείλεται στη συμμετρία

που παρουσιάζει η γεωμετρία για στροφή 180° και συνεπώς στην ταύτιση των καταστάσεων: -180° και 180° . Το πλέγμα θα μπορούσε θεωρητικά να κινηθεί προς οποιαδήποτε από τις δύο κατευθύνσεις (δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα). Ως εκ τούτου, σε αντίθεση με τις προηγούμενες περιπτώσεις γωνιών στροφής, η κατεύθυνση του βελτιστοποιημένου πλέγματος δεν ακολουθεί την κατεύθυνση στροφής (αριστερόστροφη) αλλά είναι δεξιόστροφη, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.18 (κάτω δεξιά).



Σχήμα 3.20: Μετατόπιση του εσωτερικού ορίου κατά $x = 0.85$ και $y = 0.85$ (αριστερά). Βελτιστοποιημένο πλέγμα (δεξιά).

| Πλέγμα \ Μετρικές | h | r_{mean} | r_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|---------------------------------|----------|------------|-----------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.001484 | 0.966688 | 0.034896 | 0.734732 | 0.095157 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.915649 | 0.222354 | -0.242545 | 0.570630 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.33) | 0.230972 | 0.773830 | 0.136051 | 0.394080 | 0.186086 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.19) | 0.204138 | 0.770121 | 0.111613 | 0.414512 | 0.154948 |

Πίνακας 3.4: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (3.17), (2.6), (2.7), (2.9) και (2.10) για το παράδειγμα του σχήματος 3.20.

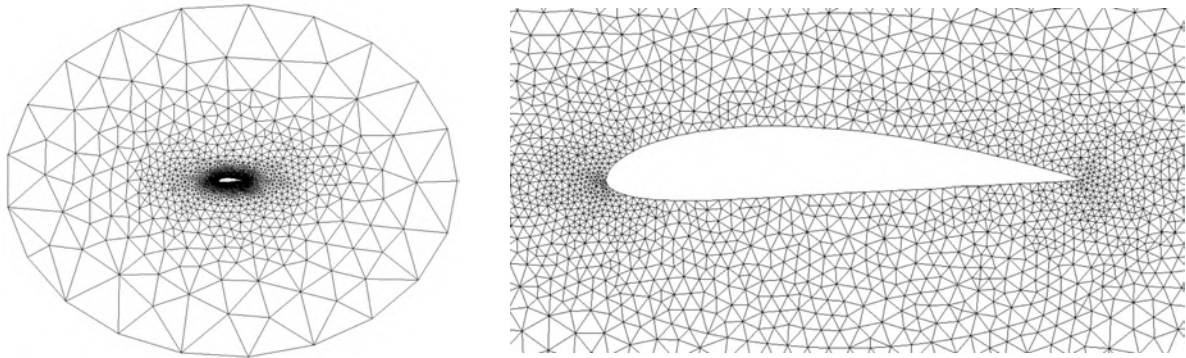
Συμπερασματικά, η μέθοδος εφαρμόζεται επιτυχώς σε περιπτώσεις μεγάλων παραμορφώσεων των ορίων. Σε όλα τα παραδείγματα παραμόρφωσης της ενότητας 3.4.1 η μέθοδος συγκλίνει παράγοντας έγκυρο πλέγμα. Καθώς η γωνία στροφής αυξάνεται ($\varphi > 130$), το πλέγμα παύει να είναι αποδεκτής ποιότητας, παρ' όλα αυτά οπτικά φαίνεται να είναι το καλύτερο δυνατό δεδομένης της παραμόρφωσης. Για παράδειγμα, στην περίπτωση γωνίας στροφής 180° η ελάχιστη τιμή της ανηγμένης κυκλικότητας μειώθηκε από 0.73 σε 0.14.

Από τους πίνακες τιμών των μετρικών ποιότητας προκύπτει ότι, για το συγκεκριμένο παράδειγμα, δεν υφίσταται σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ του πλέγματος ως λύσης του συστήματος (3.33) ή (3.19). Αυτό οφείλεται, κυρίως, στο γεγονός ότι στο απαραμόρφωτο πλέγμα δεν εμφανίζονται πολλές διαφορετικές κλίμακες στα στοιχεία του, δηλαδή η πυκνωση προς το εσωτερικό όριο είναι μικρή. Συγκρίνοντας την κατάσταση του παραμορφωμένου πλέγματος μετά τη στροφή με εκείνη του βελτιστοποιημένου (είτε (3.33) είτε (3.19)), συμπεραίνεται ότι οι σημαντικότερες μετρικές εμφανίζουν θεμιτή μεταβολή: η μ_1 αυξάνεται σημαντικά και η μ_2 μειώνεται. Ομοίως, η τυπική απόκλιση r_{dev} της ανηγμένης κυκλικότητας μειώνεται όπως είναι θεμιτό. Όσον αφορά, όμως, τη μέση τιμή r_{mean} η μεταβολή της δεν είναι η αναμενόμενη. Επαληθεύεται, συνεπώς, η διαπίστωση που έγινε στο κεφάλαιο 2.4 ότι η μέση τιμή της κυκλικότητας δεν μπορεί να λογιστεί ως κατάλληλη μετρική ποιότητας για μεγάλες παραμορφώσεις του πλέγματος. Η βέλτιστη κατάσταση του πλέγματος ως προς τη μετρική αυτή θα έδινε, μάλιστα, ένα μη-έγκυρο πλέγμα. Η μεγάλη απόκλιση μεταξύ του βέλτιστου πλέγματος ως λύσης του συστήματος (3.19) και του βέλτιστου πλέγματος ως προς τη μετρική r_{mean} αποδίδεται μέσω της μείωσης της τιμής της.

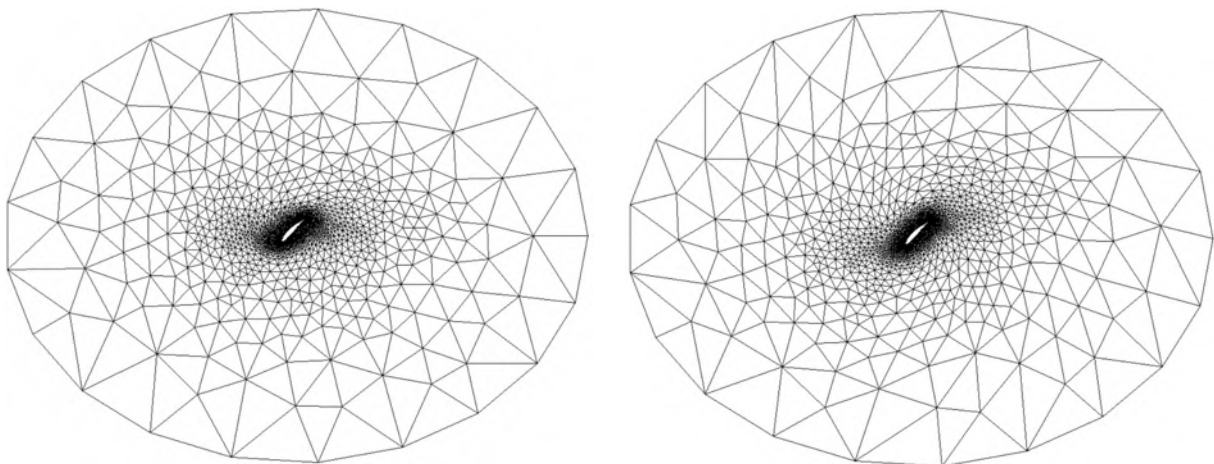
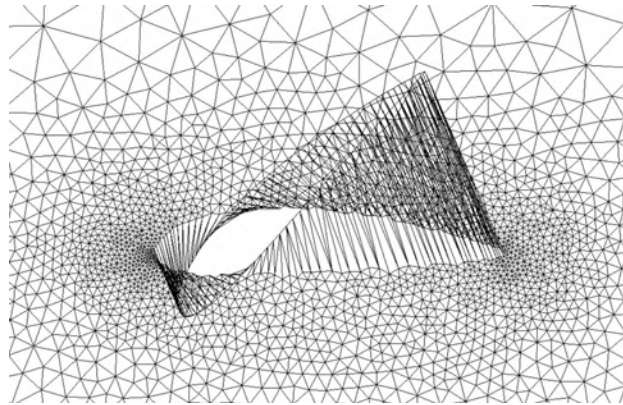
Στα διαγράμματα σύγκλισης φαίνεται η νόρμα του εκάστοτε συστήματος που επιλύεται, η οποία σε όλες τις περιπτώσεις τείνει στο μηδέν. Η μέθοδος L-BFGS ($\mu\beta$), που χρησιμοποιείται για την επίλυση του συστήματος (3.33), συγκλίνει γρηγορότερα από ό,τι η μέθοδος της απότομης καθόδου (πράσινο), που χρησιμοποιείται για την επίλυση του συστήματος (3.19), παρότι η αρχική κατάσταση της πρώτης (παραμορφωμένο πλέγμα) βρίσκεται σε πολύ μεγαλύτερη απόσταση από τη λύση \check{z}^* σε σχέση με την αρχική κατάσταση της δεύτερης (προσέγγιση της \check{z}^*) από τη λύση z^* . Το γεγονός αυτό οφείλεται στον αυξημένο ρυθμό σύγκλισης της μεθόδου L-BFGS, η οποία δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του συστήματος (3.19), όπως σχολιάστηκε στο κεφάλαιο 3.3. Παρατηρείται, επίσης, στα διαγράμματα σύγκλισης ότι η μέθοδος L-BFGS εμφανίζει μεγαλύτερη ταλάντωση σε σχέση με τη μέθοδο της απότομης καθόδου που συγκλίνει πιο αργά και μονότονα.

3.4.2 Βελτιστοποίηση Πλέγματος γύρω από την Αεροτομή NACA 4415

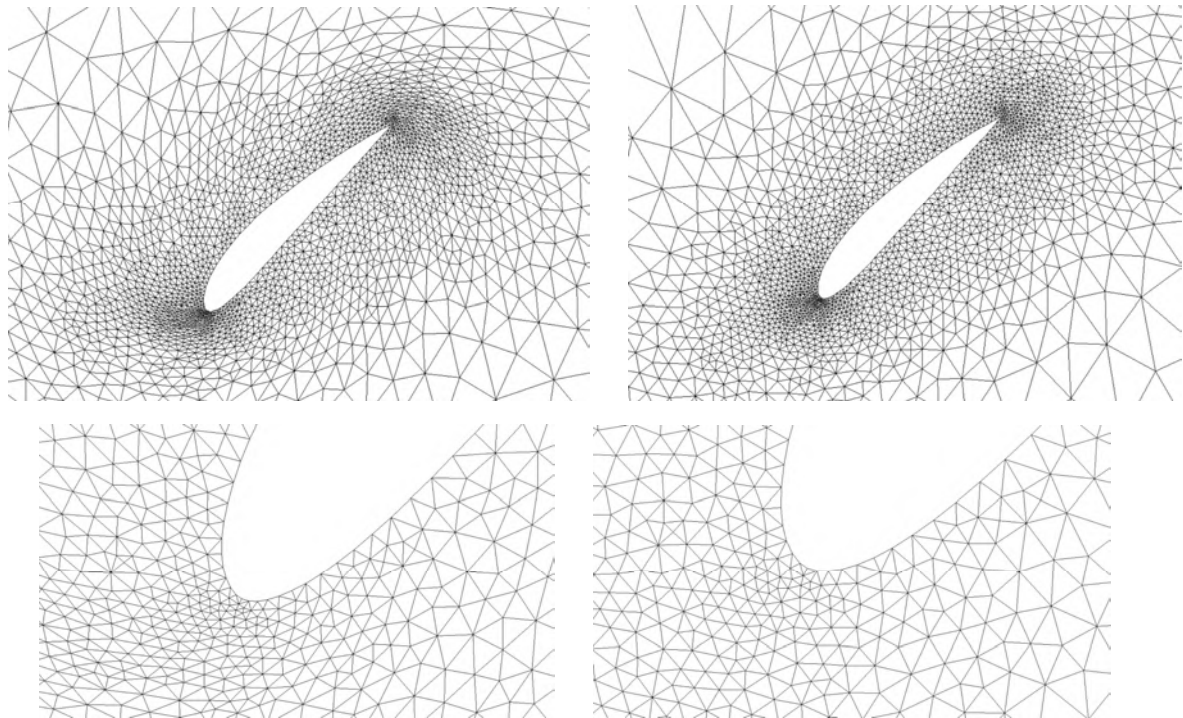
Στην ενότητα 3.4.2 γίνεται εφαρμογή της νέας μεθόδου βελτιστοποίησης στην παραμόρφωση μη-δομημένου πλέγματος 2641 κόμβων και 5161 στοιχείων γύρω από την αεροτομή NACA 4415. Η χορδή της αεροτομής έχει μήκος $l = 1$ και το αεροδυναμικό της κέντρο έχει συντεταγμένες $(0.25, 0)$. Το εξωτερικό όριο παραμένει στατικό. Αρχικά, δοκιμάζεται η περιστροφή της αεροτομής περί το αεροδυναμικό κέντρο για τις εξής γωνίες στροφής: $\varphi = 45^\circ$, $\varphi = 90^\circ$ και $\varphi = 180^\circ$ (αριστερόστροφα). Ακολουθεί μία περίπτωση στροφής περί το σημείο $(-1, -1)$ και, τέλος, μία περίπτωση μη-γραμμικής παραμόρφωσης της αεροτομής. Δοκιμάζονται ακραίες περιπτώσεις μετατόπισης των ορίων του πλέγματος (χωρίς αναγκαστικά να έχουν φυσική σημασία) με στόχο τον προσδιορισμό των ορίων των δυνατοτήτων της μεθόδου. Οι οριακοί κόμβοι μετακινούνται απευθείας στην τελική τους θέση, χωρίς να παρεμβάλλονται ενδιάμεσα βήματα, και παραμένουν στατικοί καθ' όλη τη βελτιστοποίηση.



Σχήμα 3.21: Απαραμόρφωτο πλέγμα 2641 κόμβων, 5161 στοιχείων γύρω από αεροτομή NACA 4415. Το πλήρες πλέγμα (αριστερά). Σε μεγέθυνση το πλέγμα γύρω από την αεροτομή (δεξιά).



Σχήμα 3.22: Στροφή 45° της αεροτομής NACA 4415 περί το αεροδυναμικό της κέντρο (πάνω). Βέλτιστο πλέγμα ως λύση του συστήματος (3.33) (κάτω αριστερά). Βέλτιστο πλέγμα ως λύση του συστήματος (3.19) (κάτω δεξιά).

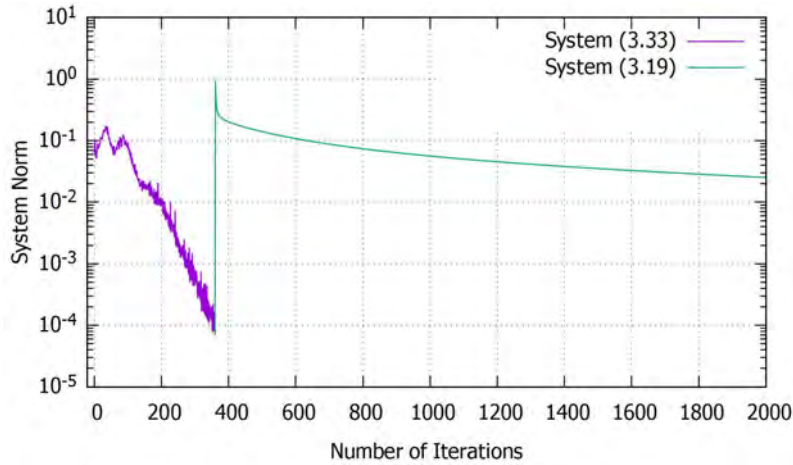


Σχήμα 3.23: Σε μεγέθυνση το βελτιστοποιημένο πλέγμα γύρω από την αεροτομή NACA 4415 (πάνω). Εστίαση στην ακμή προσβολής της αεροτομής (κάτω). Λύση του συστήματος (3.33) (αριστερά). Λύση του συστήματος (3.19) (δεξιά).

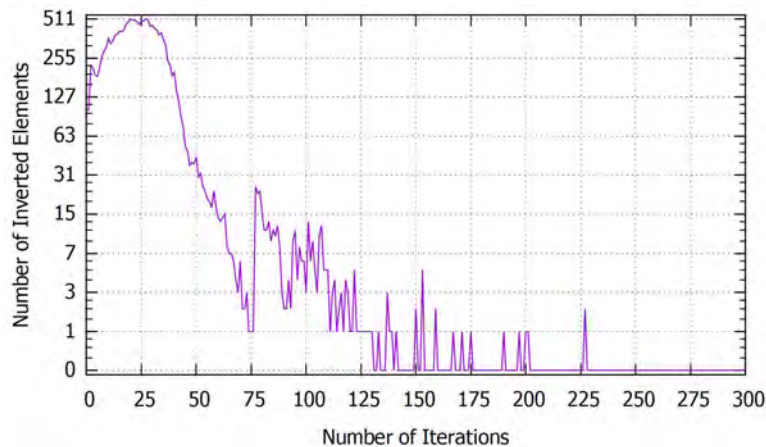
| Πλέγμα \ Μετρικές | h | r_{mean} | r_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|---------------------------------|----------|------------|-----------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.002118 | 0.961967 | 0.040725 | 0.641882 | 0.130348 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.922524 | 0.201337 | -0.777986 | 0.561009 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.33) | 0.009100 | 0.906183 | 0.062541 | 0.578731 | 0.160631 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.19) | 0.002504 | 0.952763 | 0.032809 | 0.768434 | 0.079567 |

Πίνακας 3.5: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (3.17), (2.6), (2.7), (2.9) και (2.10) για το παράδειγμα του σχήματος 3.22.

Στα σχήματα 3.22 και 3.23 φαίνεται στα αριστερά το βέλτιστο πλέγμα ως λύση του συστήματος (3.33), ενώ στα δεξιά το βέλτιστο πλέγμα ως προς τη μετρική ποιότητας h . Βάσει του πίνακα 3.5, το δεύτερο πλέγμα είναι καλύτερο ως προς όλες τις μετρικές σε σύγκριση με το πρώτο. Βέβαια, η διαφοροποίηση είναι μεν οπτικά αισθητή αλλά όχι σημαντική, δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις το πλέγμα είναι καλής ποιότητας. Μάλιστα, παρατηρείται ότι για γωνίες στροφής έως και 45° το βελτιστοποιημένο πλέγμα (3.19) είναι καλύτερο ως προς όλες τις μετρικές (πέραν της μέσης τιμής) σε σύγκριση ακόμη και με το δοθέν απαραμόρφωτο πλέγμα.

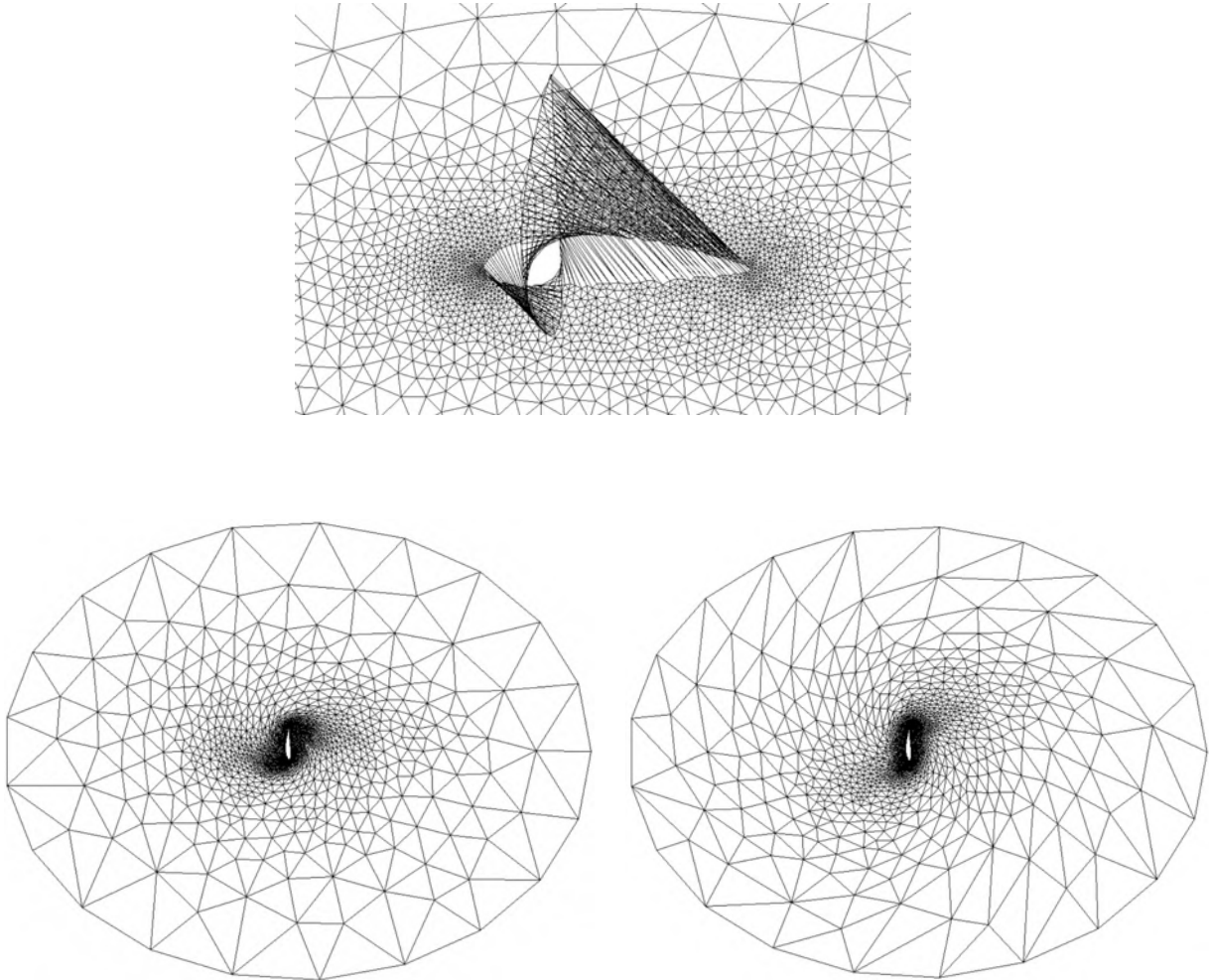


Σχήμα 3.24: Διάγραμμα σύγκλισης της νόρμας αρχικά του συστήματος (3.33) (μέθοδος L-BFGS) και ύστερα του συστήματος (3.19) (μέθοδος απότομης καθόδου με προσταθεροποίηση) για το παράδειγμα του σχήματος 3.22. Ο κατακόρυφος άξονας είναι σε λογαριθμική κλίμακα.

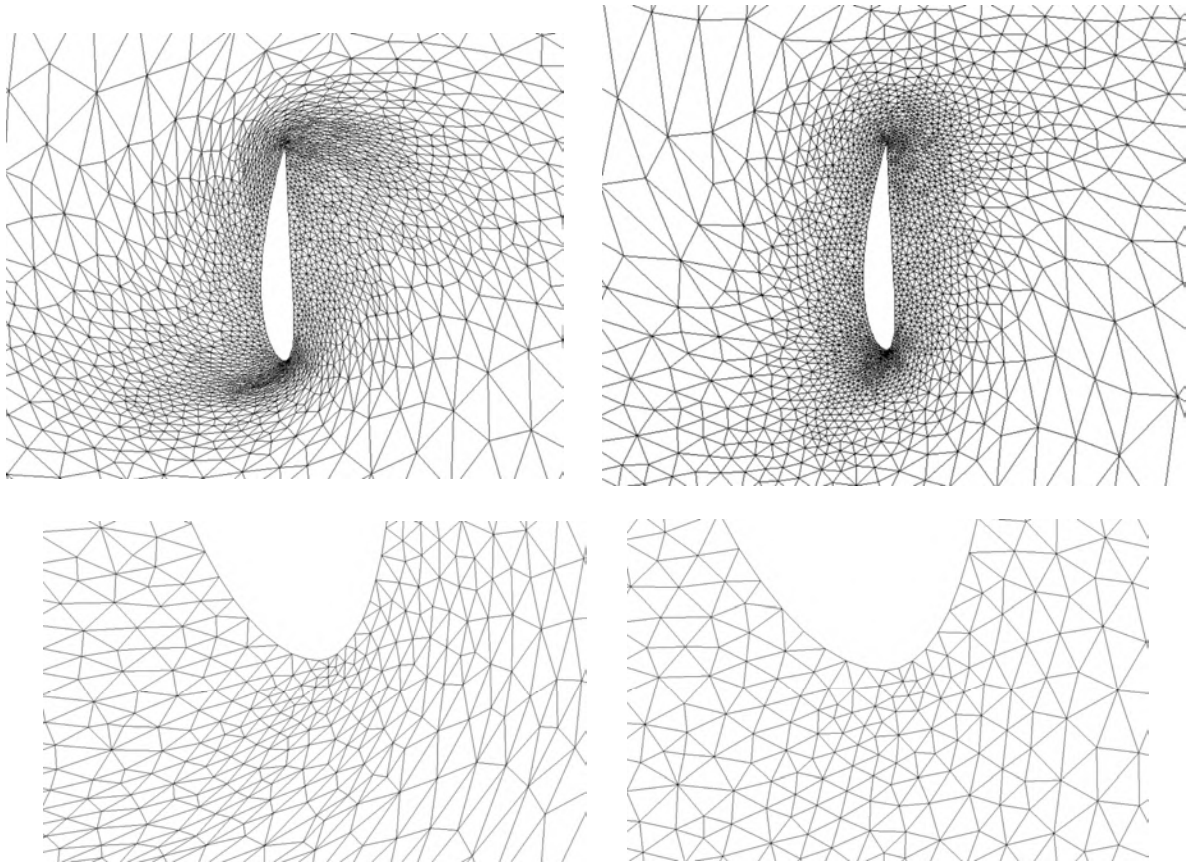


Σχήμα 3.25: Ο αριθμός των αντεστραμμένων στοιχείων συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων της αριθμητικής μεθόδου για το παράδειγμα του σχήματος 3.22. Η κλίμακα του άξονα y δίνεται από τη συνάρτηση $y = \ln_2(a + 1)$, όπου a είναι ο αριθμός των αντεστραμμένων στοιχείων.

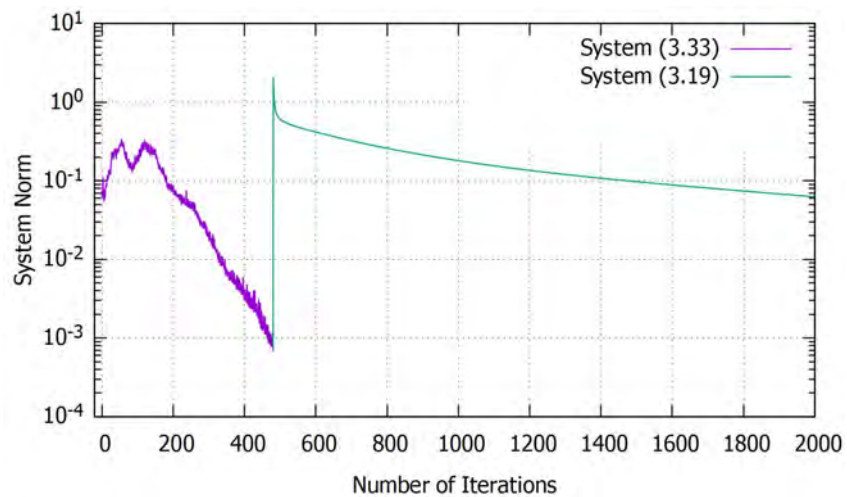
Παρατηρείται ότι ο αριθμός των αντεστραμμένων στοιχείων του πλέγματος παρουσιάζει μία αρχική αύξηση (η οποία φτάνει και σε πενταπλασιασμό της τιμής (104) που είχε αμέσως μετά την πραγματοποίηση της στροφής της αεροτομής) ως την επανάληψη $n = 32$. Στη συνέχεια, μειώνεται γρήγορα και μετά από 45 επαναλήψεις βρίσκεται σταθερά κάτω από την τιμή 104. Ταλαντώνεται κοντά στο μηδέν έως την επανάληψη $n = 210$ και παραμένει μηδέν για όλες τις επαναλήψεις της μεθόδου L-BFGS αν $n > 227$, αλλά και της μεθόδου της απότομης καθόδου με προσταθεροποίηση που ακολουθεί $n > 361$.



Σχήμα 3.26: Στροφή 90° της αεροτομής NACA 4415 περί το αεροδυναμικό της κέντρο (πάνω).
Βέλτιστο πλέγμα ως λύση του συστήματος (3.33) (κάτω αριστερά).
Βέλτιστο πλέγμα ως λύση του συστήματος (3.19) (κάτω δεξιά).



Σχήμα 3.27: Σε μεγέθυνση το βελτιστοποιημένο πλέγμα γύρω από την αεροτομή NACA 4415 (πάνω). Εστίαση στην ακμή προσβολής της αεροτομής (κάτω). Λύση του συστήματος (3.33) (αριστερά). Λύση του συστήματος (3.19) (δεξιά).



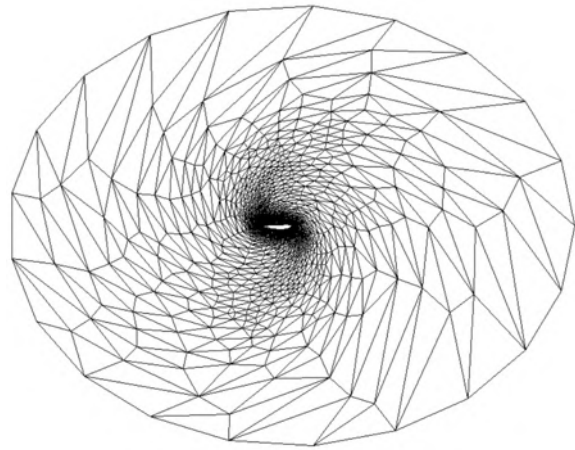
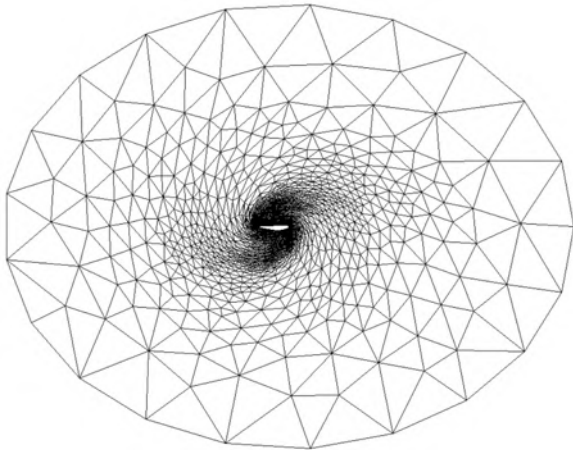
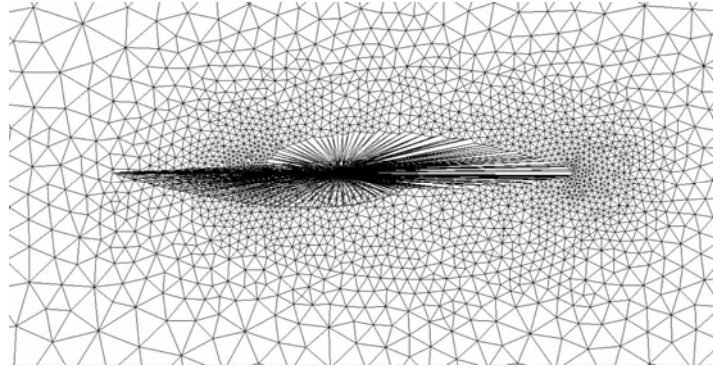
Σχήμα 3.28: Διάγραμμα σύγκλισης της νόρμας αρχικά του συστήματος (3.33) (μέθοδος L-BFGS) και ύστερα του συστήματος (3.19) (μέθοδος απότομης καθόδου με προσαθεροποίηση) για το παράδειγμα του σχήματος 3.26. Ο κατακόρυφος άξονας είναι σε λογαριθμική κλίμακα.

| Μετρικές Πλέγμα | h | r_{mean} | r_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|------------------------------------|----------|------------|-----------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.002118 | 0.961967 | 0.040725 | 0.641882 | 0.130348 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.922349 | 0.198785 | -0.575418 | 0.630642 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.33) | 0.065801 | 0.806165 | 0.125713 | 0.429606 | 0.228855 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.19) | 0.006272 | 0.922782 | 0.053394 | 0.625249 | 0.129328 |

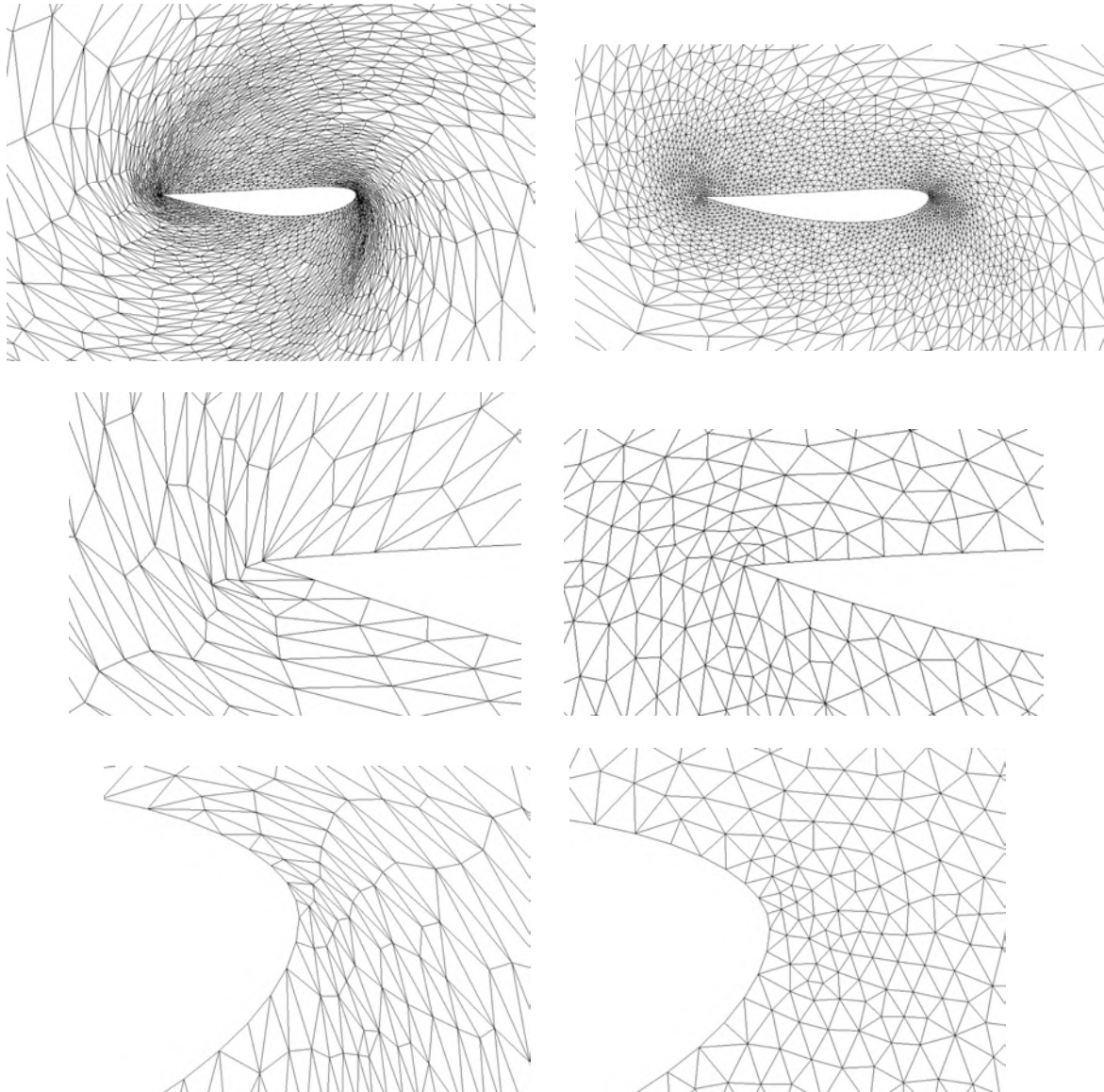
Πίνακας 3.6: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (3.17), (2.6), (2.7), (2.9) και (2.10) για το παράδειγμα του σχήματος 3.26.

Σε αντίθεση με το παράδειγμα 3.4.1, είναι εμφανής η διαφοροποίηση μεταξύ του αποτελέσματος στο τέλος της μεθόδου L-BFGS (μωβ) και στο τέλος της μεθόδου P-SD (πράσινο). Αριστερά στο σχήμα 3.27 παρατηρείται ότι η παραμόρφωση δεν έχει διαδοθεί αποτελεσματικά στο εσωτερικό του πλέγματος, αλλά παραμένει κοντά στο περιστραμμένο εσωτερικό όριο. Αντίθετα, δεξιά στο ίδιο σχήμα είναι εμφανής η επιτυχής διάδοση της παραμόρφωσης ως το εξωτερικό όριο του πλέγματος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το πλέγμα είναι μεν αραιό, αλλά υπάρχει και μία γρήγορη και σημαντική αλλαγή της κλίμακας των στοιχείων του καθώς απομακρυνόμαστε από το εσωτερικό όριο και κατευθυνόμαστε προς το εξωτερικό. Ως εκ τούτου, υπάρχει μία μεγάλη διακύμανση – σταδιακή βέβαια – στην περίμετρο των στοιχείων, η οποία, όπως αναδείχθηκε στο κεφάλαιο 3.2, συνεπάγεται χαμηλής ποιότητας τελικό πλέγμα ως λύση του συστήματος (3.33). Το ζήτημα, βέβαια, ανακύπτει μόνο σε περιπτώσεις μεγάλης γωνίας στροφής αφού, όπως φαίνεται στο παράδειγμα στροφής 45°, το πλέγμα είναι αποδεκτής ποιότητας και στις δύο περιπτώσεις.

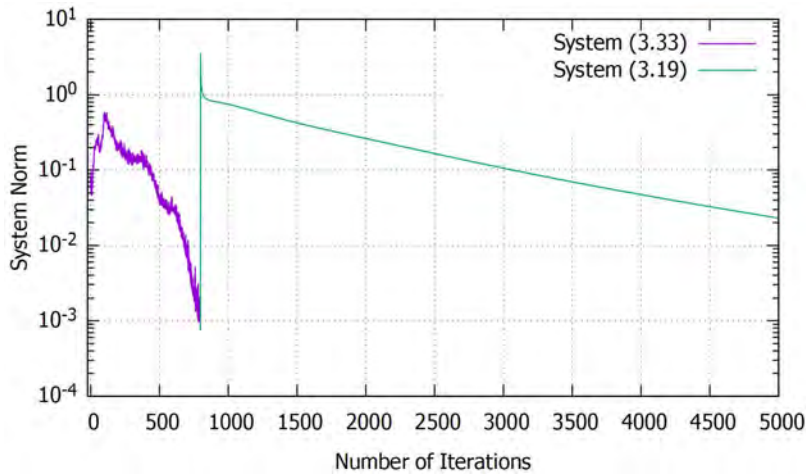
Από τον πίνακα 3.6 επαληθεύεται ότι το βέλτιστο πλέγμα ως λύση του συστήματος (3.19) είναι σαφώς καλύτερης ποιότητας από ό,τι ως προς το σύστημα (3.33). Η ελάχιστη τιμή της κυκλικότητας στην κατάσταση αυτή είναι περίπου ίση με εκείνη του απαραμόρφωτου πλέγματος, δηλαδή ισχύει ότι: $\mu_1 = 0.625249 \sim 0.641882$, ενώ είναι σημαντικά μεγαλύτερη από ό,τι στο βέλτιστο πλέγμα ως λύση του συστήματος (3.33). Ομοίως και η τυπική απόκλιση της ανηγμένης κυκλικότητας μειώνεται, όπως αναμένεται. Παρατηρείται και πάλι ότι, ενώ όλες οι μετρικές καταδεικνύουν ότι το βελτιστοποιημένο πλέγμα έχει περίπου εξίσου καλή ποιότητα με το απαραμόρφωτο, η μέση τιμή της ανηγμένης κυκλικότητας έχει μειωθεί.



Σχήμα 3.29: Στροφή 180° της αεροτομής NACA 4415 περί το αεροδυναμικό της κέντρο (πάνω).
Βέλτιστο πλέγμα ως λύση του συστήματος (3.33) (κάτω αριστερά).
Βέλτιστο πλέγμα ως λύση του συστήματος (3.19) (κάτω δεξιά).



Σχήμα 3.30: Σε μεγέθυνση το πλέγμα γύρω από την αεροτομή NACA 4415 (πάνω).
 Εστίαση στην ακμή εκφυγής (κέντρο). Εστίαση στην ακμή προσβολής (κάτω).
 Λύση του συστήματος (3.33) (αριστερά). Λύση του συστήματος (3.19) (δεξιά).



Σχήμα 3.31: Διάγραμμα σύγκλισης της νόρμας αρχικά του συστήματος (3.33) (μέθοδος L-BFGS) και ύστερα του συστήματος (3.19) (μέθοδος απότομης καθόδου με προσταθεροποίηση) για το παράδειγμα του σχήματος 3.29. Ο κατακόρυφος άξονας είναι σε λογαριθμική κλίμακα.

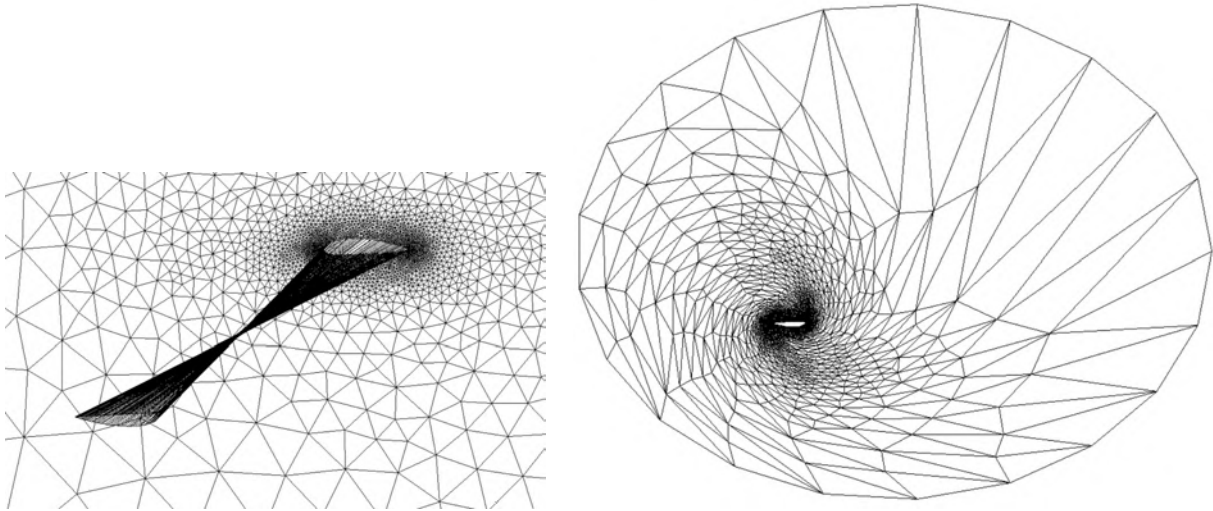
| Μετρικές Πλέγμα | h | r_{mean} | r_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|------------------------------------|----------|------------|-----------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.002118 | 0.961967 | 0.040725 | 0.641882 | 0.130348 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.922312 | 0.198128 | -0.514624 | 0.544602 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.33) | 0.442024 | 0.604879 | 0.176113 | 0.236825 | 0.287685 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.19) | 0.047485 | 0.857146 | 0.119667 | 0.344007 | 0.190508 |

Πίνακας 3.7: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (3.17), (2.6), (2.7), (2.9) και (2.10) για το παράδειγμα του σχήματος 3.29.

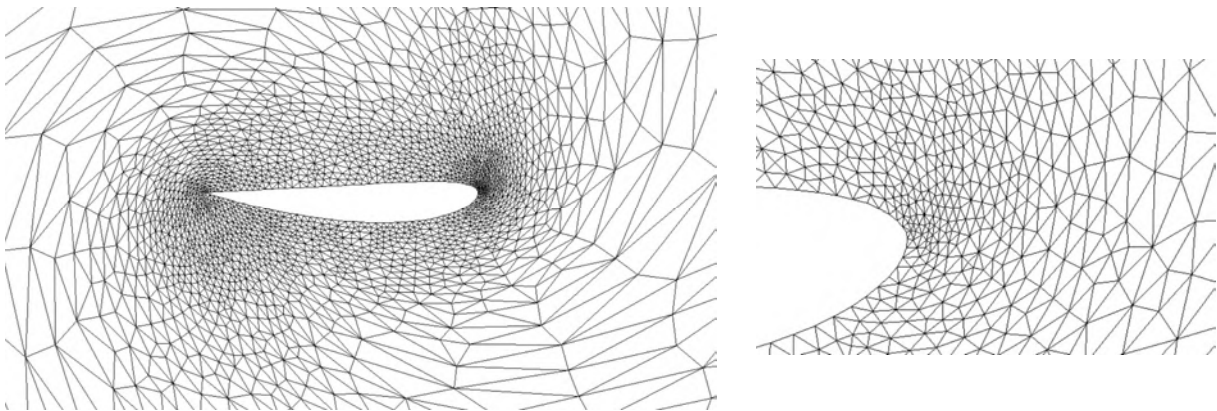
Στον πίνακα 3.7 παρατηρείται μία εμφανής βελτίωση της ποιότητας του πλέγματος ως προς όλες τις μετρικές, συγκρίνοντας το βελτιστοποιημένο πλέγμα (σύστημα 3.19) με το παραμορφωμένο. Επιπλέον, το βέλτιστο πλέγμα ως λύση του συστήματος (3.19) είναι έγκυρο και αποδεκτής ποιότητας, ενώ ως λύση του συστήματος (3.33) είναι έγκυρο αλλά μη-αποδεκτής ποιότητας. Είναι εμφανής η διαφορά των δύο πλεγμάτων στα σχήματα 3.29 και 3.30. Στα αριστερά η παραμόρφωση εντοπίζεται στους κόμβους κοντά στο εσωτερικό όριο, ενώ στα δεξιά φαίνεται να έχει διαδοθεί έως και το εξωτερικό όριο.

Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.31, και οι δύο αλγόριθμοι συγκλίνουν. Παρατηρείται και πάλι ότι η μέθοδος L-BFGS, που χρησιμοποιείται για την επίλυση του συστήματος (3.33), συγκλίνει πιο γρήγορα από ό,τι η μέθοδος της απότομης καθόδου με προσταθεροποίηση που χρησιμοποιείται για την επίλυση του συστήματος (3.19).

Στα επόμενα παραδείγματα που παρατίθενται στο κεφάλαιο 3.4 παραλείπεται το διάγραμμα της σύγκλισης της νόρμας των συστημάτων (3.33) και (3.19), διότι η συμπεριφορά της είναι σε κάθε περίπτωση παραπλήσια.



Σχήμα 3.32: Στροφή 180° της αεροτομής NACA 4415 περί το σημείο $(-1, -1)$ (αριστερά).
Βελτιστοποιημένο πλέγμα βάσει του συστήματος (3.19) (δεξιά).



Σχήμα 3.33: Σε μεγέθυνση το πλέγμα γύρω από την αεροτομή NACA 4415 (αριστερά).
Εστίαση στην ακμή προσβολής (δεξιά).

| Μετρικές Πλέγμα | h | r_{mean} | r_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|------------------------------------|----------|------------|-----------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.002118 | 0.961967 | 0.040725 | 0.641882 | 0.130348 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.922236 | 0.197102 | -0.719715 | 0.583017 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.33) | 0.683787 | 0.554239 | 0.178968 | 0.183162 | 0.305768 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.19) | 0.068632 | 0.805441 | 0.129823 | 0.301419 | 0.221496 |

Πίνακας 3.8: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (3.17), (2.6), (2.7), (2.9) και (2.10) για το παράδειγμα του σχήματος 3.32.

Στο σχήμα 3.33 φαίνεται ότι το πλέγμα κοντά στην αεροτομή είναι καλής ποιότητας και η παραμόρφωση έχει κατανεμηθεί ομοιόμορφα προς το εξωτερικό όριό του.

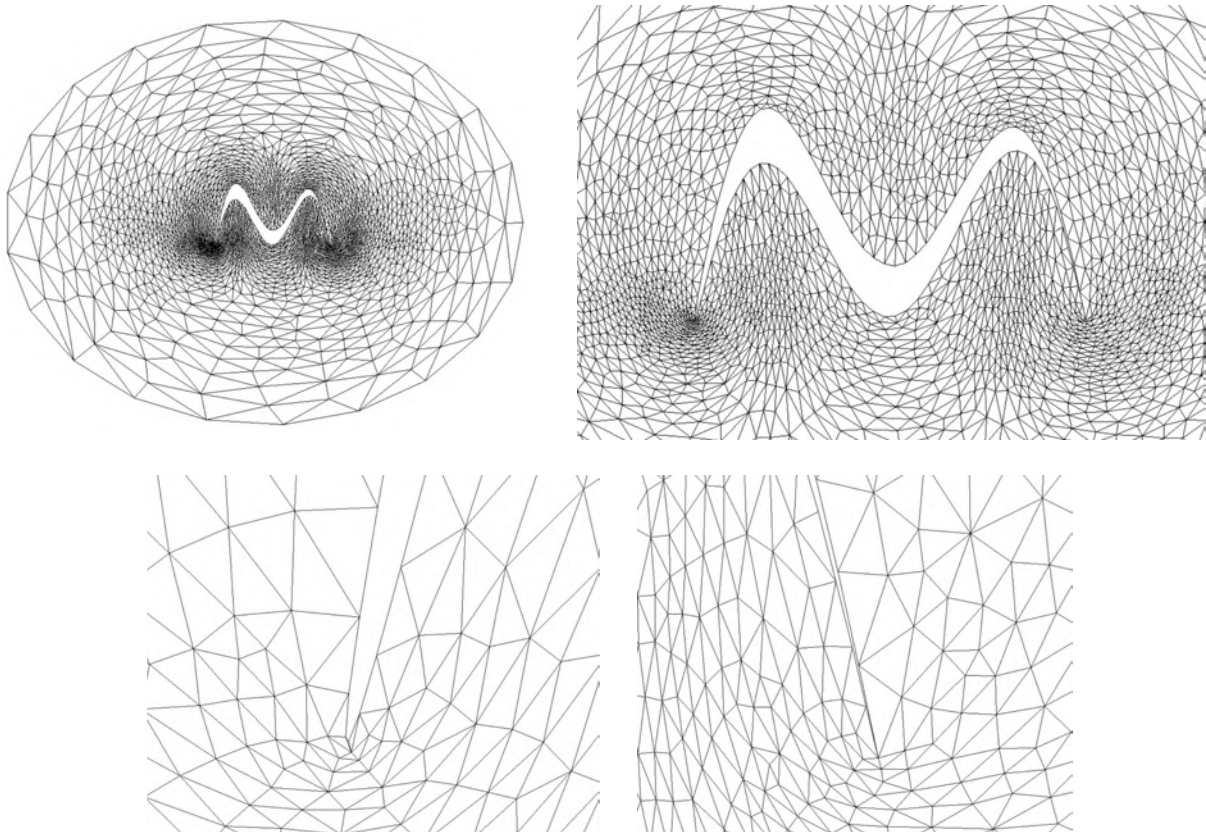
Στην πλειονότητα των παραδειγμάτων που ακολουθούν παραλείπεται, πλέον, το σχήμα που αναπαριστά την παραμορφωμένη κατάσταση του πλέγματος μετά τη μετατόπιση των ορίων. Η μετατόπιση τελείται με τον ίδιο τρόπο σε κάθε περίπτωση, δηλαδή κινούνται αποκλειστικά οι οριακοί κόμβοι από την αρχική τους θέση απευθείας στην τελική (επιθυμητή).

Παρατίθεται, τέλος, ένα παράδειγμα παραμόρφωσης της αεροτομής σε εξεζητημένο βαθμό. Είναι η πρώτη δοκιμή μετατόπισης των οριακών κόμβων που δεν συγκαταλέγεται στις κινήσεις στερεού σώματος (rigid body motion).

Στην αρχική γεωμετρία του σχήματος 3.21 ορίζεται μη-γραμμική απεικόνιση που περιγράφεται από την εξής έκφραση:

$$x \rightarrow 4x, \quad y \rightarrow 4y + 18x(1-x) - 280x^3(1-x)^3 \quad (3.38)$$

Μέσω της παραπάνω απεικόνισης εισάγεται οξεία καμπυλότητα στο σχήμα του εσωτερικού ορίου, το οποίο, επίσης, μεγεθύνεται με αποτέλεσμα περίπου να τετραπλασιαστεί σε μέγεθος. Η μεγέθυνση είναι ένας ακόμη παράγοντας που εν γένει δυσκολεύει τη σύγκλιση μίας μεθόδου, διότι η παραμορφωμένη κατάσταση απέχει πολύ από τη βέλτιστη.



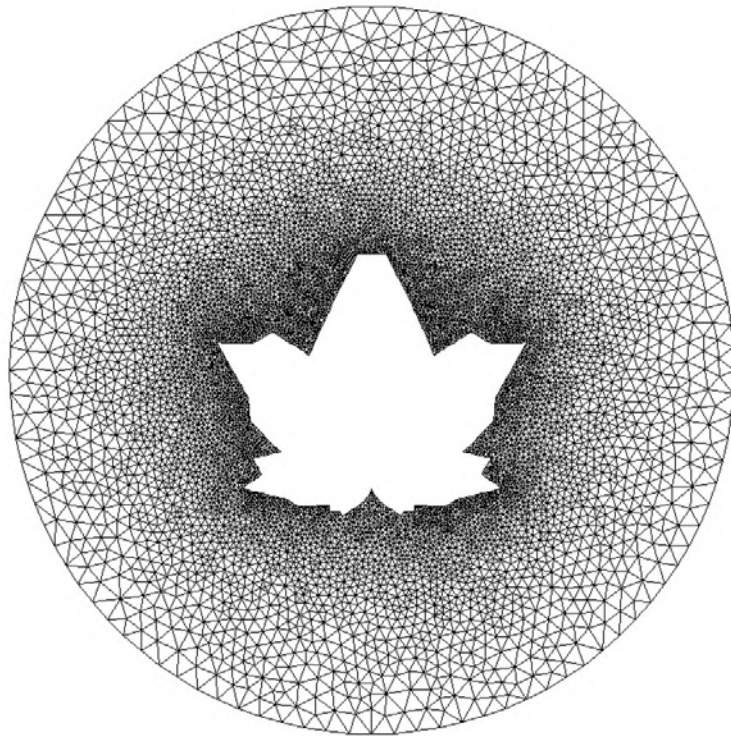
Σχήμα 3.34: Βελτιστοποιημένο πλέγμα μετά από παραμόρφωση τη αεροτομής NACA 4415 όπως υποδεικνύεται από την απεικόνιση 3.38. Το πλήρες πλέγμα (πάνω αριστερά). Σε μεγέθυνση το πλέγμα γύρω από το εσωτερικό όριο (πάνω δεξιά). Εστίαση στην ακμή προσβολής (κάτω αριστερά). Εστίαση στην ακμή εκφυγής (κάτω δεξιά).

| Πλέγμα \ Μετρικές | h | r_{mean} | r_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|---------------------------------|----------|------------|-----------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.002118 | 0.961967 | 0.040725 | 0.641882 | 0.130348 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.923029 | 0.207603 | -0.980116 | 0.823855 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.33) | 0.284001 | 0.801218 | 0.147134 | 0.096519 | 0.342257 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.19) | 0.089112 | 0.816165 | 0.118417 | 0.317587 | 0.213970 |

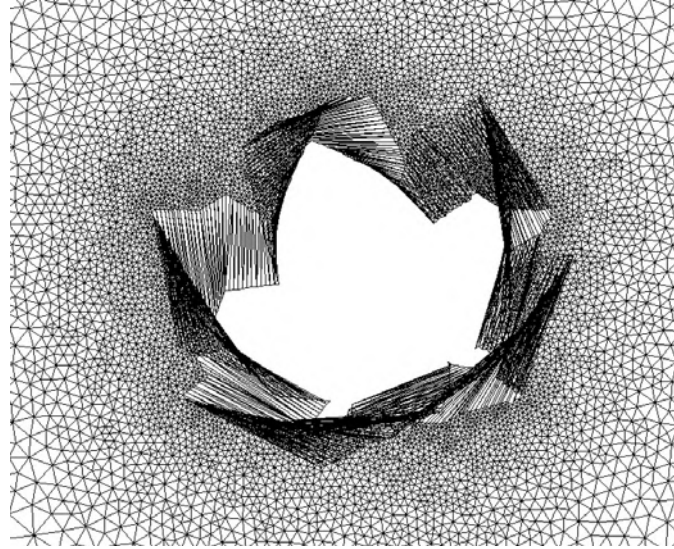
Πίνακας 3.9: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (3.17), (2.6), (2.7), (2.9) και (2.10) για το παράδειγμα του σχήματος 3.34.

3.4.3 Βελτιστοποίηση Πλέγματος με Εσωτερικό Όριο Σχήματος Πλατανόφυλλου

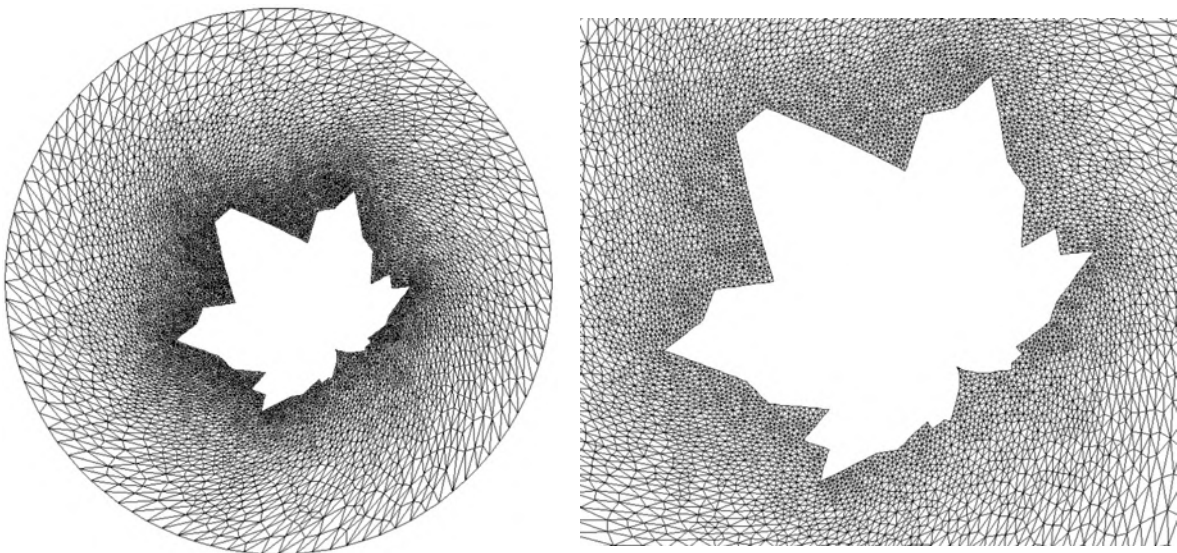
Στην ενότητα 3.4.3 γίνεται εφαρμογή της νέας μεθόδου βελτιστοποίησης στην παραμόρφωση μη-δομημένου πλέγματος γύρω από ένα πλατανόφυλλο. Το πλέγμα αποτελείται από 7547 κόμβους και 14657 στοιχεία. Είναι ιδιαίτερα απαιτητική περίπτωση πλέγματος αφενός λόγω της αραιότητάς του, αφετέρου (και κυρίως) λόγω της εγγύτητας μεταξύ του εσωτερικού και εξωτερικού ορίου του. Σε αντίθεση με το παράδειγμα της αεροτομής NACA 4415 της ενότητας 3.4.2, στο οποίο η αεροτομή απείχε προσεγγιστικά πέντε χορδές από το εξωτερικό όριο, εν προκειμένω η αντίστοιχη απόσταση είναι σημαντικά μικρότερη, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει περιθώριο βελτίωσης της ποιότητας. Σημαντικό ρόλο παίζει επίσης η πολυπλοκότητα και μη-κυρτότητα του εσωτερικού ορίου, η οποία συνεπάγεται την αντιστροφή μεγάλου αριθμού τριγώνων μετά από τη στροφή του. Δοκιμάζονται τρεις περιπτώσεις γωνιών στροφής του εσωτερικού ορίου: $\varphi = 40^\circ$, $\varphi = 80^\circ$ και $\varphi = 120^\circ$ περί το κέντρο του πλατανόφυλλου με συντεταγμένες (0,0). Η περιστροφή πραγματοποιείται απευθείας, χωρίς την παρεμβολή ενδιάμεσων βημάτων.



Σχήμα 3.35: Απαραμόρφωτο πλέγμα 7547 κόμβων, 14657 στοιχείων με εσωτερικό όριο σε σχήμα πλατανόφυλλου.



Σχήμα 3.36: Στροφή 40° του εσωτερικού ορίου αριστερόστροφα.

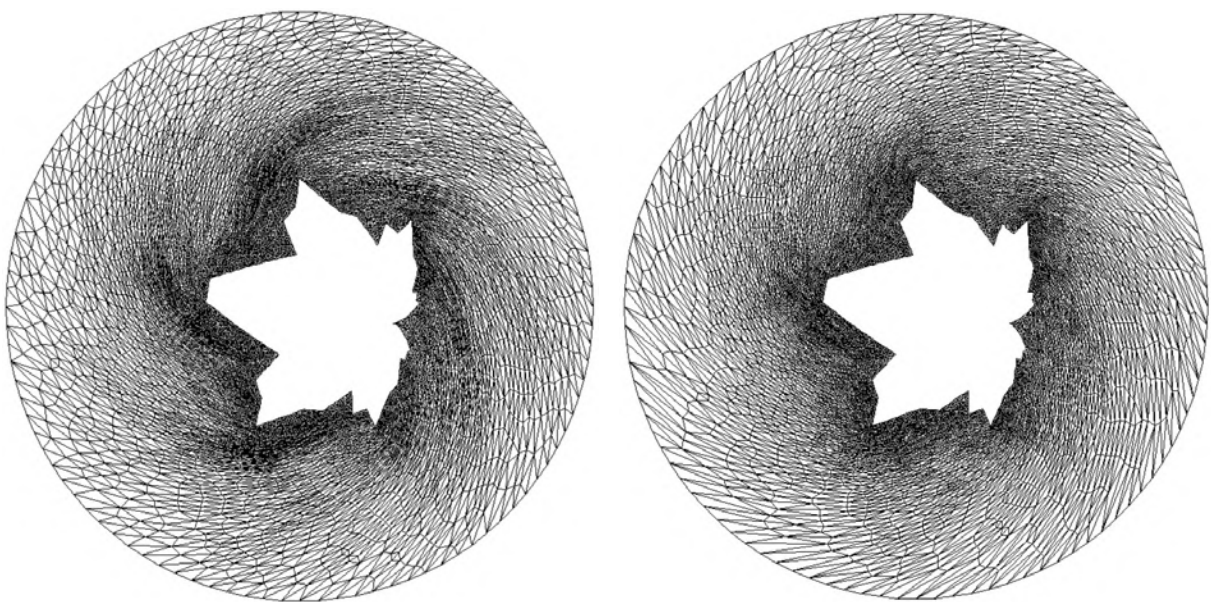


Σχήμα 3.37: Βελτιστοποιημένο πλέγμα (ως λύση του συστήματος 3.19) μετά από στροφή 40° του εσωτερικού ορίου αντιωρολογιακά. Το πλήρες πλέγμα (αριστερά). Σε μεγέθυνση το πλέγμα γύρω από το πλατανόφυλλο (δεξιά).

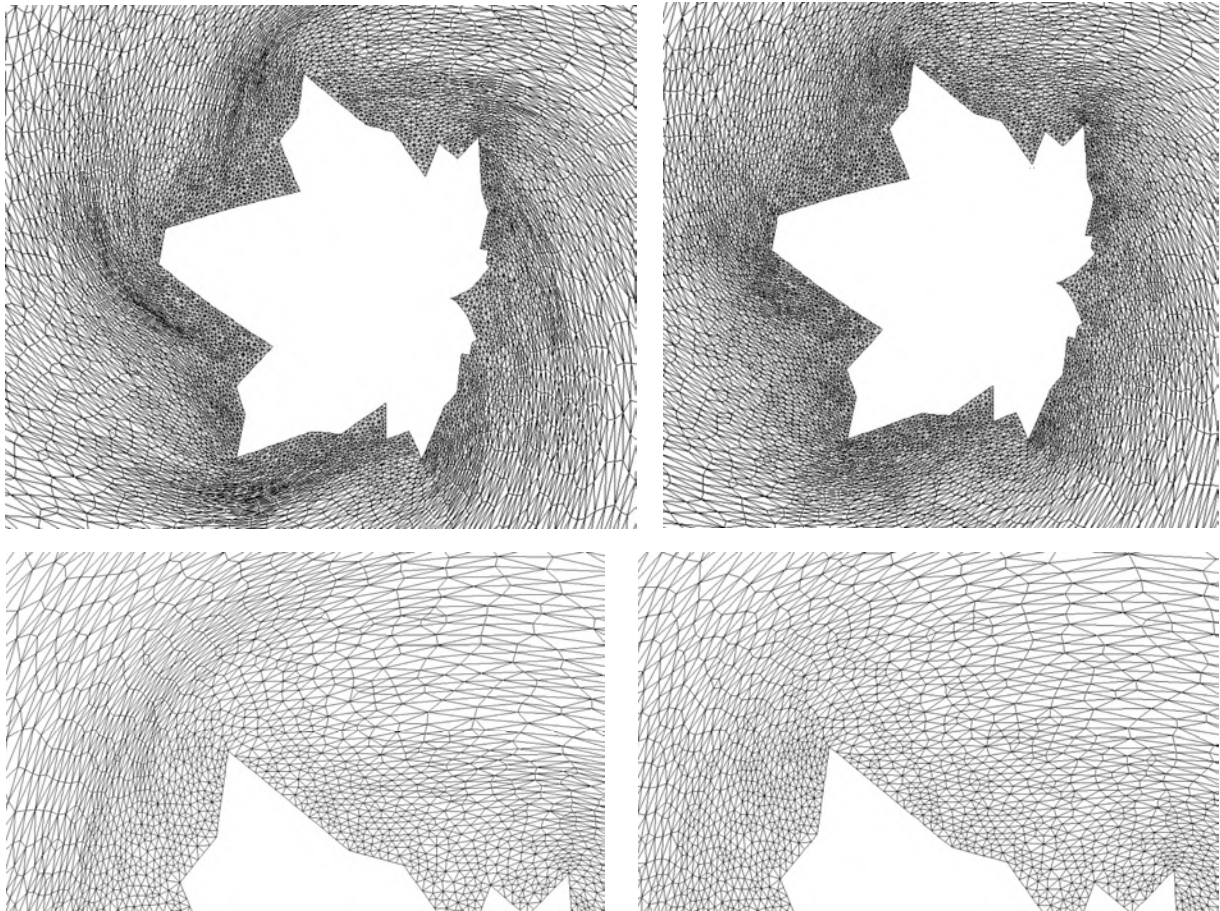
| Μετρικές Πλέγμα | h | r_{mean} | r_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|------------------------------------|----------|------------|-----------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.007525 | 0.968017 | 0.034276 | 0.441048 | 0.235711 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.922399 | 0.211186 | -0.216907 | 0.578003 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.33) | 0.037616 | 0.846515 | 0.111080 | 0.387654 | 0.245062 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.19) | 0.025712 | 0.866895 | 0.096796 | 0.445635 | 0.215550 |

Πίνακας 3.10: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (3.17), (2.6), (2.7), (2.9) και (2.10) για το παράδειγμα του σχήματος 3.37.

Όπως και στην περίπτωση στροφής 45° της αεροτομής NACA 4415 του παραδείγματος 3.4.2, για γωνία στροφής 40° η διαφοροποίηση μεταξύ της ποιότητας του βέλτιστου πλέγματος ως λύση του συστήματος (3.33) ή (3.19) δεν είναι πολύ σημαντική. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει από τον πίνακα τιμών των μετρικών 3.10 και οφείλεται αφενός στο γεγονός ότι το πλέγμα δεν εμφανίζει στοιχεία με σημαντικά διαφορεική κλίμακα και αφετέρου στην σχετικά μικρή γωνία στροφής.



Σχήμα 3.38: Βελτιστοποιημένο πλέγμα μετά από στροφή 80° του εσωτερικού ορίου. Λύση του συστήματος (3.33) (αριστερά). Λύση του συστήματος (3.19) (δεξιά).

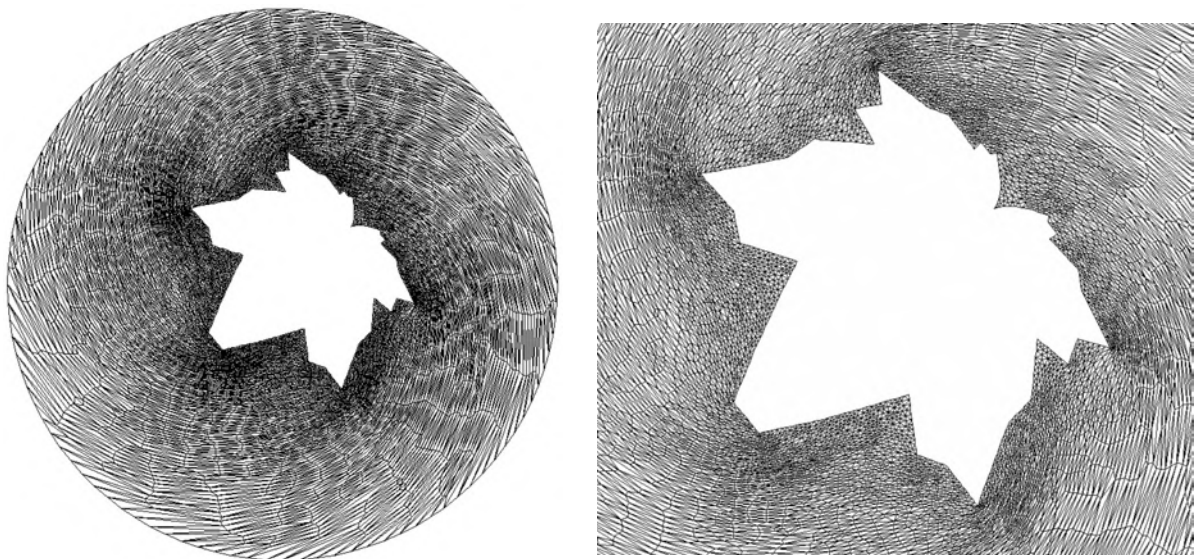


Σχήμα 3.39: Σε μεγέθυνση το πλέγμα γύρω από το πλατανόφυλλο (πάνω).
Εστίαση στην άνω κορυφή του πλατανόφυλλου (κάτω).
Λύση του συστήματος (3.33) (αριστερά). Λύση του συστήματος (3.19) (δεξιά).

| Πλέγμα \ Μετρικές | h | r_{mean} | r_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|------------------------------------|----------|------------|-----------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.007525 | 0.968017 | 0.034276 | 0.441048 | 0.235711 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.922367 | 0.210946 | -0.110652 | 0.532191 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.33) | 0.431821 | 0.657762 | 0.209624 | 0.183862 | 0.292743 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.19) | 0.296789 | 0.699365 | 0.187225 | 0.257383 | 0.243618 |

Πίνακας 3.11: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (3.17), (2.6), (2.7), (2.9) και (2.10) για το παράδειγμα του σχήματος 3.38.

Η ποιότητα του πλέγματος ως λύσης του συστήματος (3.19) είναι οριακά αποδεκτή βάσει των τιμών των μετρικών ποιότητας του πίνακα 3.11. Παρ' όλα αυτά, το πλέγμα είναι όσο το δυνατό καλύτερο, διότι αφενός είναι ομοιόμορφο, εφόσον η τιμή της μετρικής μ_2 στο βελτιστοποιημένο πλέγμα (σύστημα 3.19) είναι περίπου ίδια με του αρχικού πλέγματος, αφετέρου τα στοιχεία κοντά στο πλατανόφυλλο είναι καλής ποιότητας, όπως φαίνονται στο σχήμα 3.39 (κάτω). Κατά συνέπεια, η παραμόρφωση έχει διαδοθεί αποτελεσματικά. Η διαφορά μεταξύ του βέλτιστου πλέγματος ως λύσης του συστήματος (3.33) και (3.19) είναι μεγαλύτερη σε σύγκριση με τη γωνία στροφής 40° . Στα σχήματα (στα αριστερά) παρατηρείται μη-ομοιομορφία στην κατανομή της παραμόρφωσης, η οποία συσσωρεύεται σε κάποια απόσταση από το πλατανόφυλλο. Το γεγονός αυτό οφείλεται στη χρήση του συντελεστή S_i που εισάγεται στην εξίσωση (3.26) προς ενίσχυση των τριγώνων που βρίσκονται κοντά στο εσωτερικό όριο.



Σχήμα 3.40: Βελτιστοποιημένο πλέγμα (σύστημα 3.19) μετά από στροφή 120° του εσωτερικού ορίου αντιωρολογιακά. Το πλήρες πλέγμα (αριστερά). Σε μεγέθυνση το πλέγμα γύρω από το πλατανόφυλλο (δεξιά).

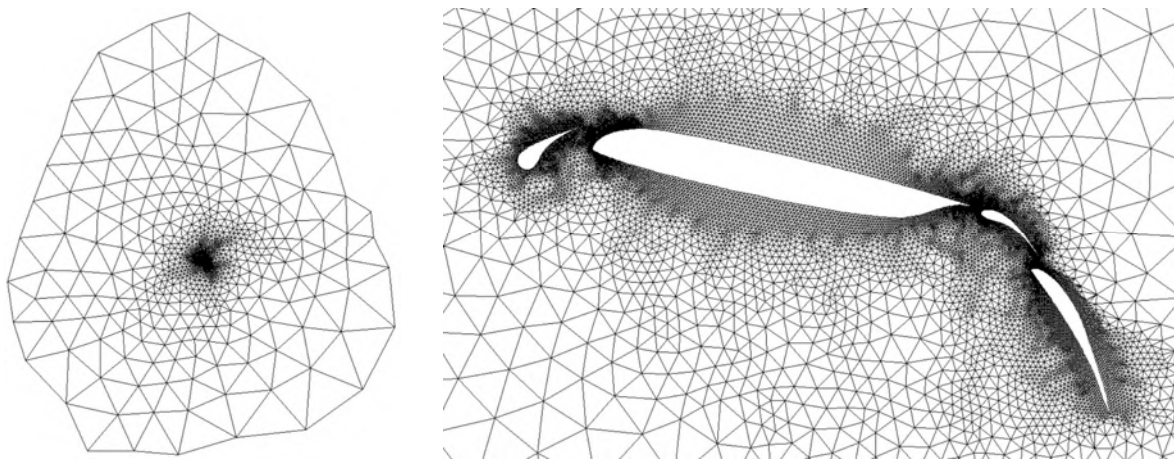
| Πλέγμα \ Μετρικές | h | r_{mean} | r_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|---------------------------------|----------|------------|-----------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.007525 | 0.968017 | 0.034276 | 0.441048 | 0.235711 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.922362 | 0.210900 | -0.073907 | 0.513513 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.33) | 3.590204 | 0.460368 | 0.197064 | 0.003257 | 0.288623 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.19) | 1.259349 | 0.573218 | 0.236743 | 0.102191 | 0.306422 |

Πίνακας 3.12: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (3.17), (2.6), (2.7), (2.9) και (2.10) για το παράδειγμα του σχήματος 3.40.

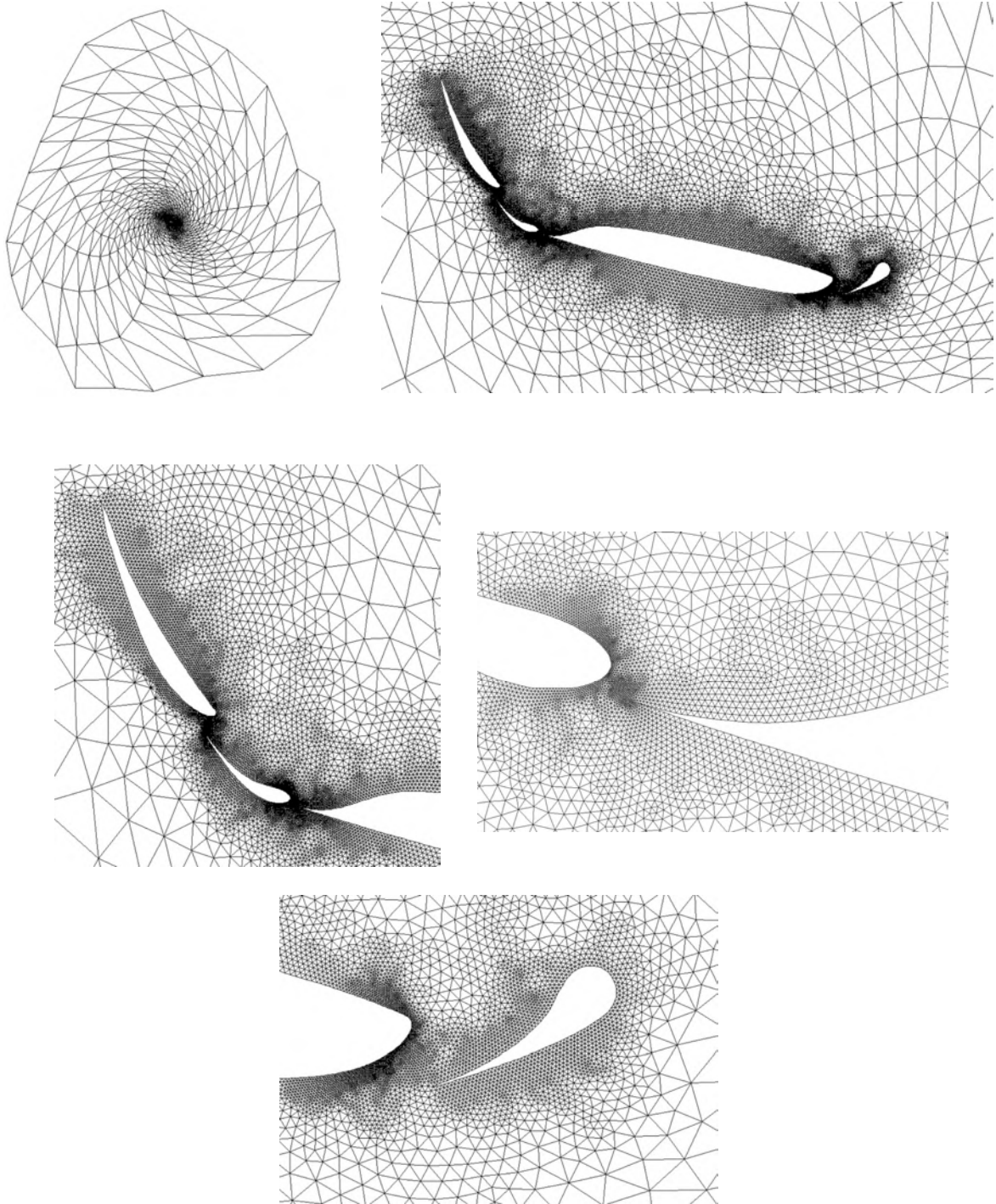
Από τον πίνακα τιμών των μετρικών συμπερένεται ότι για γωνία στροφής ως 60° διατηρείται αποδεκτή ποιότητα στο τελικό πλέγμα. Βάσει του σχήματος 3.39 όμως, και περιοριζόμενοι στην περιοχή κοντά στο φύλλο, ακόμη και στις 80° η ποιότητα κρίνεται οπτικά ικανοποιητική. Ως και τις 150° ο αλγόριθμος συγκλίνει σε έγκυρο πλέγμα χαμηλής ποιότητας, ενώ μετά τις 150° αδυνατεί να συγκλίνει.

3.4.4 Βελτιστοποίηση Πλέγματος γύρω από Αεροτομή Τεσσάρων Στοιχείων

Στην ενότητα 3.4.4 γίνεται εφαρμογή της νέας μεθόδου βελτιστοποίησης στην παραμόρφωση μη-δομημένου πλέγματος γύρω από αεροτομή τεσσάρων στοιχείων. Το πλέγμα αποτελείται από 15606 κόμβους και 30269 στοιχεία. Πρόκειται περί μίας περίπτωσης πλέγματος στο οποίο ορίζονται περισσότερα του ενός διακριτά εσωτερικά όρια: η κύρια αεροτομή, τα δύο flap και το slat. Η χορδή της κύριας αεροτομής έχει μήκος 0.77 και το αεροδυναμικό της κέντρο έχει συντεταγμένες $(0.25, -0.05)$. Το κέντρο του συστήματος αξόνων $(0, 0)$ τοποθετείται κατά προσέγγιση στην ακμή προσβολής της κύριας αεροτομής. Είναι ιδιαίτερα απαιτητική περίπτωση πλέγματος, λόγω της εγγύτητας και της παρεμβολής λίγων κόμβων μεταξύ των τμημάτων της αεροτομής. Ως εκ τούτου, η ανεξάρτητη κίνησή τους προβλέπεται να επιφέρει σημαντική μείωση της ποιότητας του πλέγματος στις περιοχές αυτές. Στην απαραμόρφωτη κατάσταση τα μεταπτερύγια βρίσκονται σε εκτεταμένη θέση. Αρχικά, παρατίθεται μία περίπτωση ενιαίας στροφής του συστήματος των αεροτομών περί το αεροδυναμικό κέντρο. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα το ενδιαφέρον εστιάζεται, βέβαια, σε περιπτώσεις σχετικής κίνησης μεταξύ των τμημάτων. Παρουσιάζεται μία περίπτωση μετατόπισης των flaps προς τα κάτω (μηχανισμός παραγωγής πρόσθετης άνωσης κατά την απογείωση) και προς τα άνω (μηχανισμός παραγωγής πρόσθετης οπισθέλκουσας κατά την προσγείωση). Επιλέγονται εξεζητημένα μεγάλες μετατοπίσεις των flaps. Ακολούθως, παρουσιάζονται δύο περιπτώσεις σύμπτυξης της διάταξης. Οι μετατοπίσεις των ορίων πραγματοποιούνται απευθείας, χωρίς την παρεμβολή ενδιάμεσων βημάτων.



Σχήμα 3.41: Απαραμόρφωτο πλέγμα 15606 κόμβων, 30269 στοιχείων γύρω από αεροτομή τεσσάρων στοιχείων. Το πλήρες πλέγμα (αριστερά). Σε μεγέθυνση το πλέγμα γύρω από την αεροτομή (δεξιά). Διακρίνονται από αριστερά προς τα δεξιά: το slat, η κύρια αεροτομή, το πρώτο μεταπτερύγιο (flap) και το δεύτερο μεταπτερύγιο.



Σχήμα 3.42: Βελτιστοποιημένο πλέγμα μετά από στροφή 180° των τεσσάρων στοιχείων της αεροτομής περί το αεροδυναμικό της κέντρο. Το πλήρες πλέγμα (πάνω αριστερά).
 Σε μεγέθυνση το πλέγμα γύρω από την αεροτομή (πάνω δεξιά).
 Σε μεγέθυνση το πλέγμα γύρω από τα δύο μεταπτερύγια (κέντρο αριστερά).
 Εστίαση στο πλέγμα μεταξύ της κύριας αεροτομής και του πρώτου μεταπτερυγίου (κέντρο δεξιά).
 Εστίαση στο πλέγμα μεταξύ της κύριας αεροτομής και του slat (κάτω).

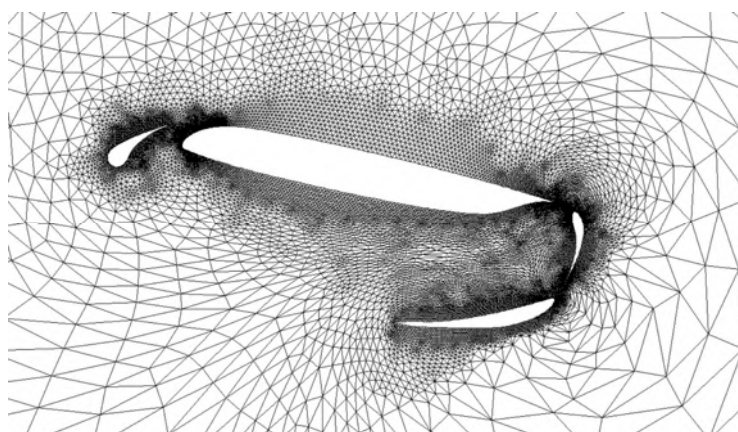
| Μετρικές Πλέγμα | h | r_{mean} | r_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|------------------------------------|----------|------------|-----------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.002526 | 0.982389 | 0.033844 | 0.428934 | 0.295884 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.921181 | 0.238006 | -0.225481 | 0.501677 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.33) | 0.435483 | 0.773825 | 0.215013 | 0.034315 | 0.194334 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.19) | 0.003172 | 0.977691 | 0.052205 | 0.471907 | 0.104518 |

Πίνακας 3.13: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (3.17), (2.6), (2.7), (2.9) και (2.10) για το παράδειγμα του σχήματος 3.42.

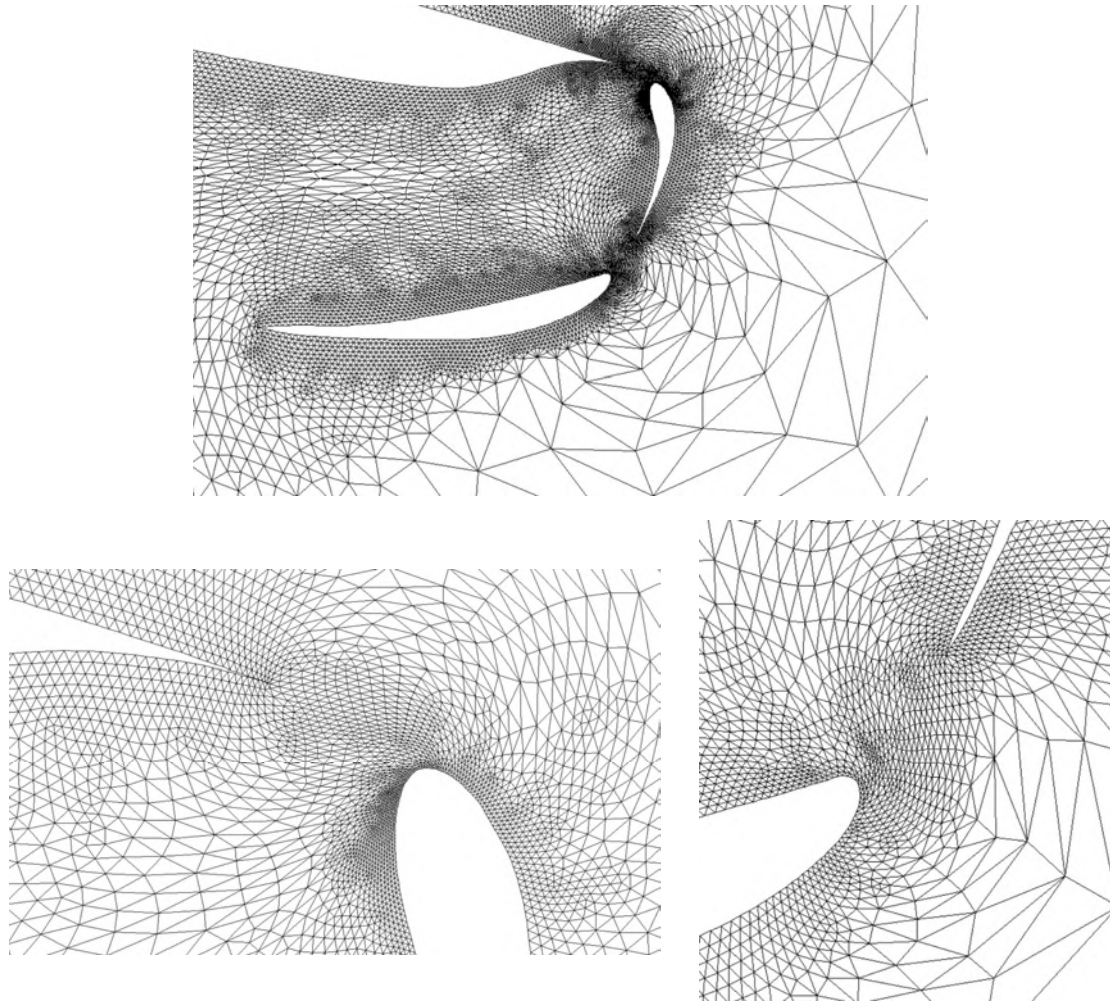
Το τελικό πλέγμα ως λύση του συστήματος (3.19) είναι αποδεκτής ποιότητας. Μάλιστα, από τον πίνακα 3.13, εξάγεται το συμπέρασμα ότι είναι υψηλότερης ποιότητας από το αρχικό απαραμόρφωτο πλέγμα ως προς τις σημαντικότερες μετρικές μ_1 , μ_2 .

Παρακάτω παρατίθενται ορισμένα παραδείγματα ανεξάρτητης μετατόπισης των μεταπτερυγίων της αεροτομής. Επιλέγονται περιπτώσεις ακραίας μετατόπισης, δεδομένου ότι η μέθοδος έχει δείξει στα προηγούμενα παραδείγματα ότι είναι ικανή να τις χειριστεί.

Αρχικά, δοκιμάζεται η μετατόπιση των δύο μεταπτερυγίων προς τα κάτω. Το πρώτο flap περιστρέφεται -60° περί το σημείο $(0.8174, -0.161)$ και μετατοπίζεται κατά $(x = 0.02, y = -0.005)$. Το δεύτερο flap περιστρέφεται -110° περί το σημείο $(0.921, -0.276)$ και μετατοπίζεται κατά $(-0.124, -0.07)$. Η κύρια αεροτομή και το slat παραμένουν στατικά.



Σχήμα 3.43: Βελτιστοποιημένο πλέγμα μετά από μετατόπιση των δύο μεταπτερυγίων προς τα κάτω.

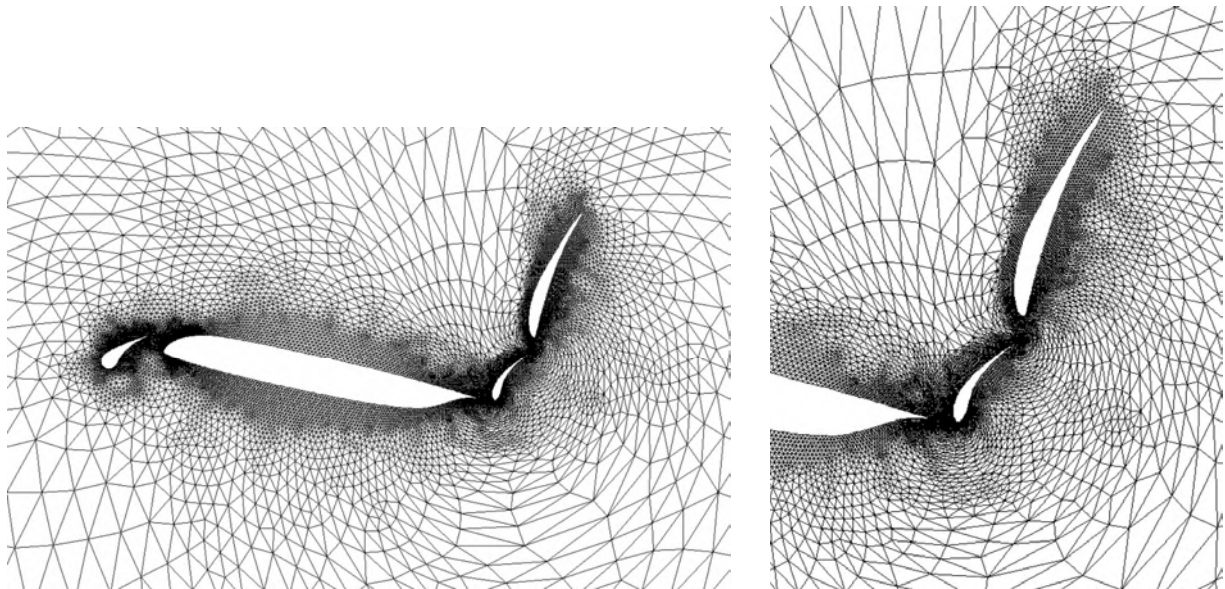


Σχήμα 3.44: Σε μεγέθυνση το πλέγμα του σχήματος 3.43 (πάνω). Εστίαση στην περιοχή μεταξύ της κύριας αεροτομής και του πρώτου μεταπτερυγίου (κάτω αριστερά). Εστίαση στην περιοχή μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου μεταπτερυγίου (κάτω δεξιά).

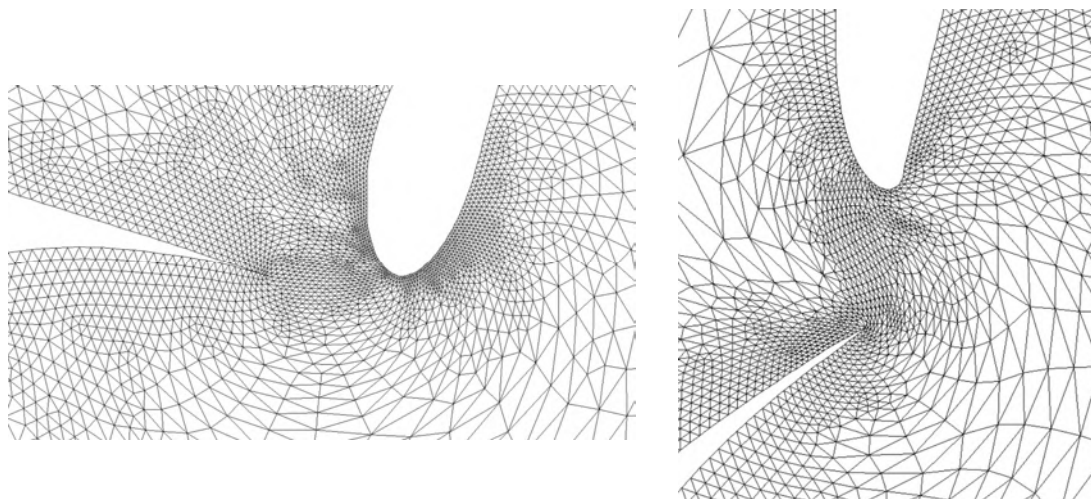
| Μετρικές Πλέγμα | h | r_{mean} | r_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|------------------------------------|----------|------------|-----------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.002526 | 0.982389 | 0.033844 | 0.428934 | 0.295884 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.956444 | 0.160183 | -0.188496 | 0.498307 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.33) | 0.120423 | 0.876552 | 0.160608 | 0.132071 | 0.184511 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.19) | 0.014917 | 0.924581 | 0.094424 | 0.316136 | 0.137289 |

Πίνακας 3.14: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (3.17), (2.6), (2.7), (2.9) και (2.10) για το παράδειγμα του σχήματος 3.43.

Στη συνέχεια, δοκιμάζεται η μετατόπιση των δύο μεταπτερυγίων προς τα πάνω. Το πρώτο flap περιστρέφεται 90° περί το σημείο $(0.8174, -0.161)$ και μετατοπίζεται κατά $(x = 0.02, y = 0.01)$. Το δεύτερο flap περιστρέφεται 130° περί το σημείο $(0.921, -0.276)$ και μετατοπίζεται κατά $(0.012, 0.28)$. Η κύρια αεροτομή και το slat παραμένουν στατικά.



Σχήμα 3.45: Βελτιστοποιημένο πλέγμα μετά από μετατόπιση των δύο μεταπτερυγίων προς τα πάνω (αριστερά). Σε μεγέθυνση το πλέγμα γύρω από τα δύο μεταπτερύγια (δεξιά).



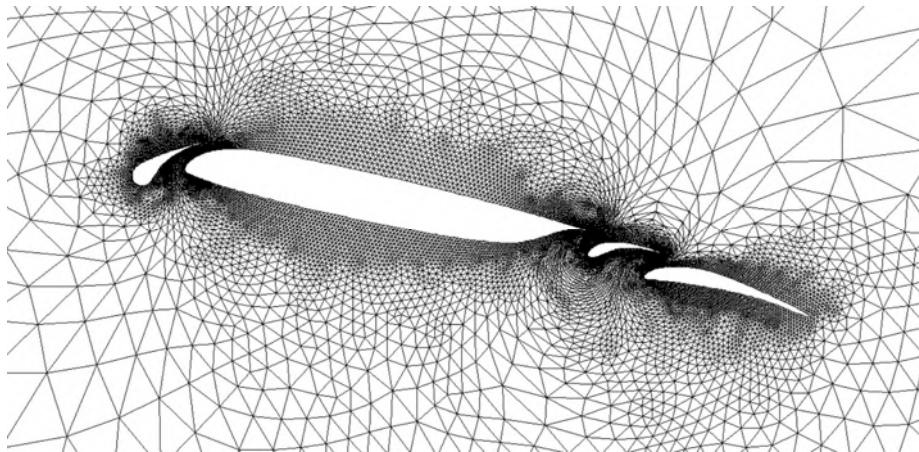
Σχήμα 3.46: Εστίαση στο πλέγμα μεταξύ της κύριας αεροτομής και του πρώτου μεταπτερυγίου (αριστερά). Εστίαση στο πλέγμα μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου μεταπτερυγίου (δεξιά).

| Μετρικές Πλέγμα | h | r_{mean} | r_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|------------------------------------|----------|------------|-----------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.002526 | 0.982389 | 0.033844 | 0.428934 | 0.295884 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.956435 | 0.160092 | -0.124086 | 0.540111 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.33) | 0.110079 | 0.854887 | 0.174169 | 0.190260 | 0.180979 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.19) | 0.008849 | 0.941322 | 0.079655 | 0.460627 | 0.162355 |

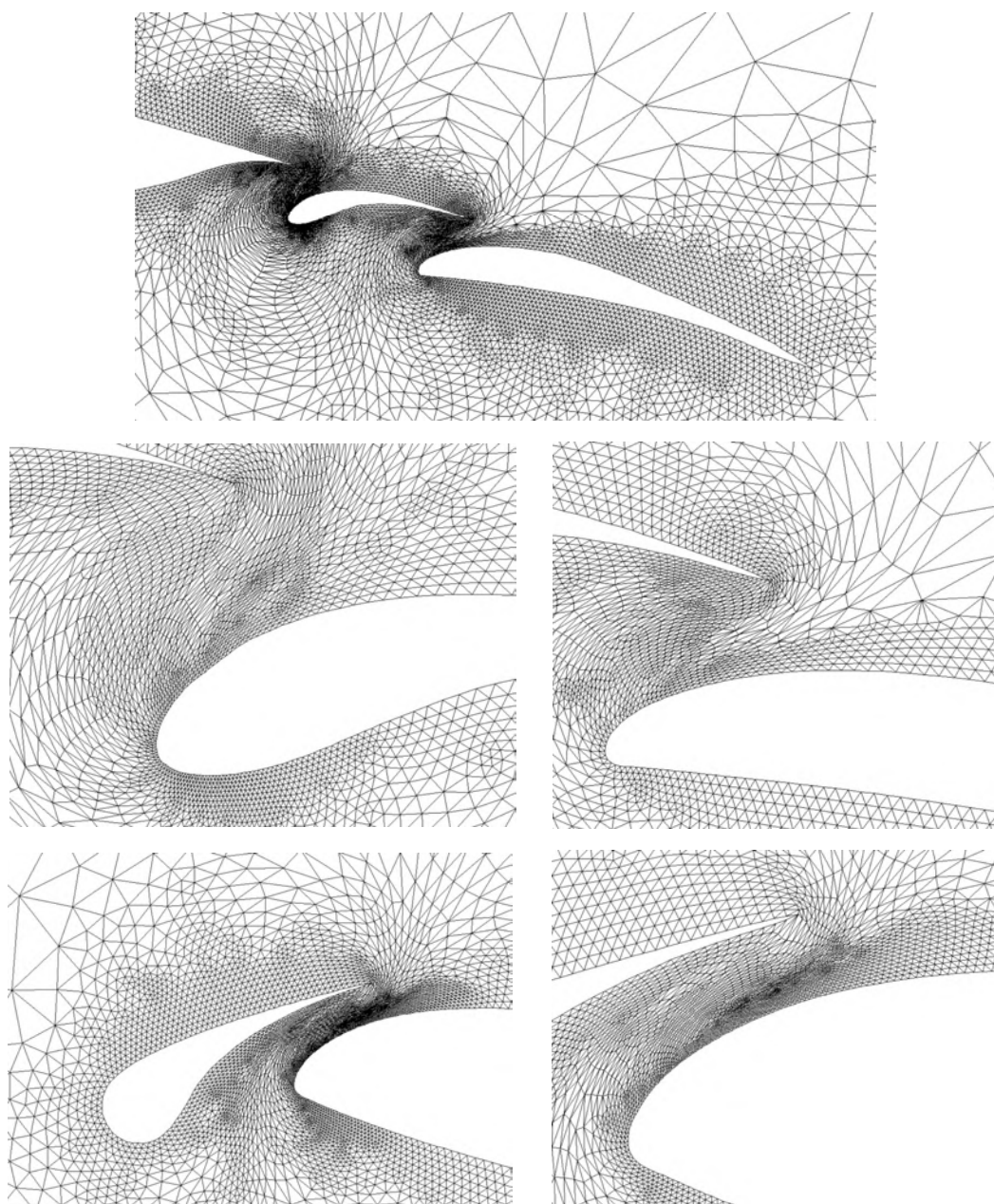
Πίνακας 3.15: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (3.17), (2.6), (2.7), (2.9) και (2.10) για το παράδειγμα του σχήματος 3.45.

Ακολουθούν δύο περιπτώσεις σύμπτυξης της διάταξης της αεροτομής.

Στην πρώτη: Το slat περιστρέφεται -3° γύρω από το σημείο $(-0.085, -0.062)$ και μετατοπίζεται κατά $(x = 0.052, y = 0.012)$. Το πρώτο flap περιστρέφεται 38° περί το σημείο $(0.8174, -0.161)$ και μετατοπίζεται κατά $(x = -0.018, y = -0.034)$. Το δεύτερο flap περιστρέφεται 48° περί το σημείο $(0.921, -0.276)$ και μετατοπίζεται κατά $(x = -0.015, y = 0.04)$. Η κύρια αεροτομή παραμένει στατική.



Σχήμα 3.47: Βελτιστοποιημένο πλέγμα μετά από σύμπτυξη των δύο flap και του slat.



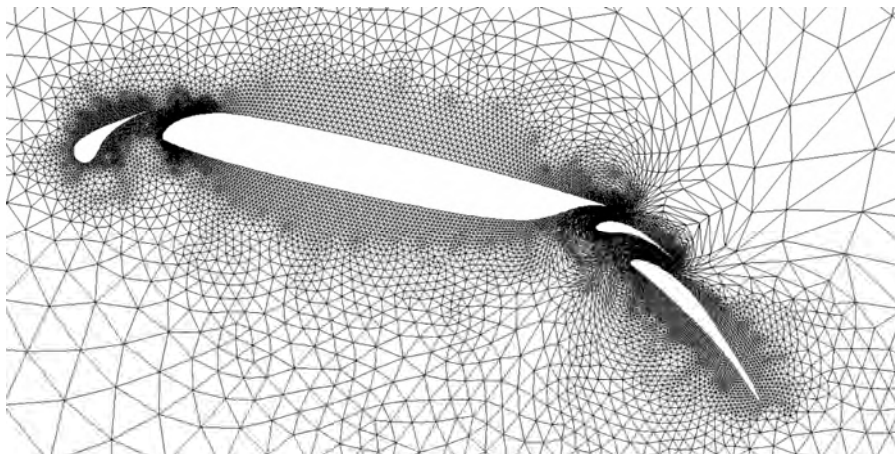
Σχήμα 3.48: Σε μεγέθυνση το πλέγμα γύρω από τα δύο μεταπτερύγια (πάνω). Εστίαση στο πλέγμα μεταξύ της κύριας αεροτομής και του πρώτου μεταπτερυγίου (κέντρο αριστερά). Εστίαση στο πλέγμα μεταξύ πρώτου και δεύτερου μεταπτερυγίου (κέντρο δεξιά). Σε μεγέθυνση το πλέγμα γύρω από το slat (κάτω αριστερά). Εστίαση στο πλέγμα μεταξύ της κύριας αεροτομής και του slat (κάτω δεξιά)

| Μετρικές Πλέγμα | h | r_{mean} | r_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|------------------------------------|----------|------------|-----------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.002526 | 0.982389 | 0.033844 | 0.428934 | 0.295884 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.922362 | 0.210900 | -0.240979 | 0.513513 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.33) | 5.604653 | 0.774314 | 0.215265 | 0.014606 | 0.264620 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.19) | 0.086847 | 0.863230 | 0.155791 | 0.291804 | 0.207252 |

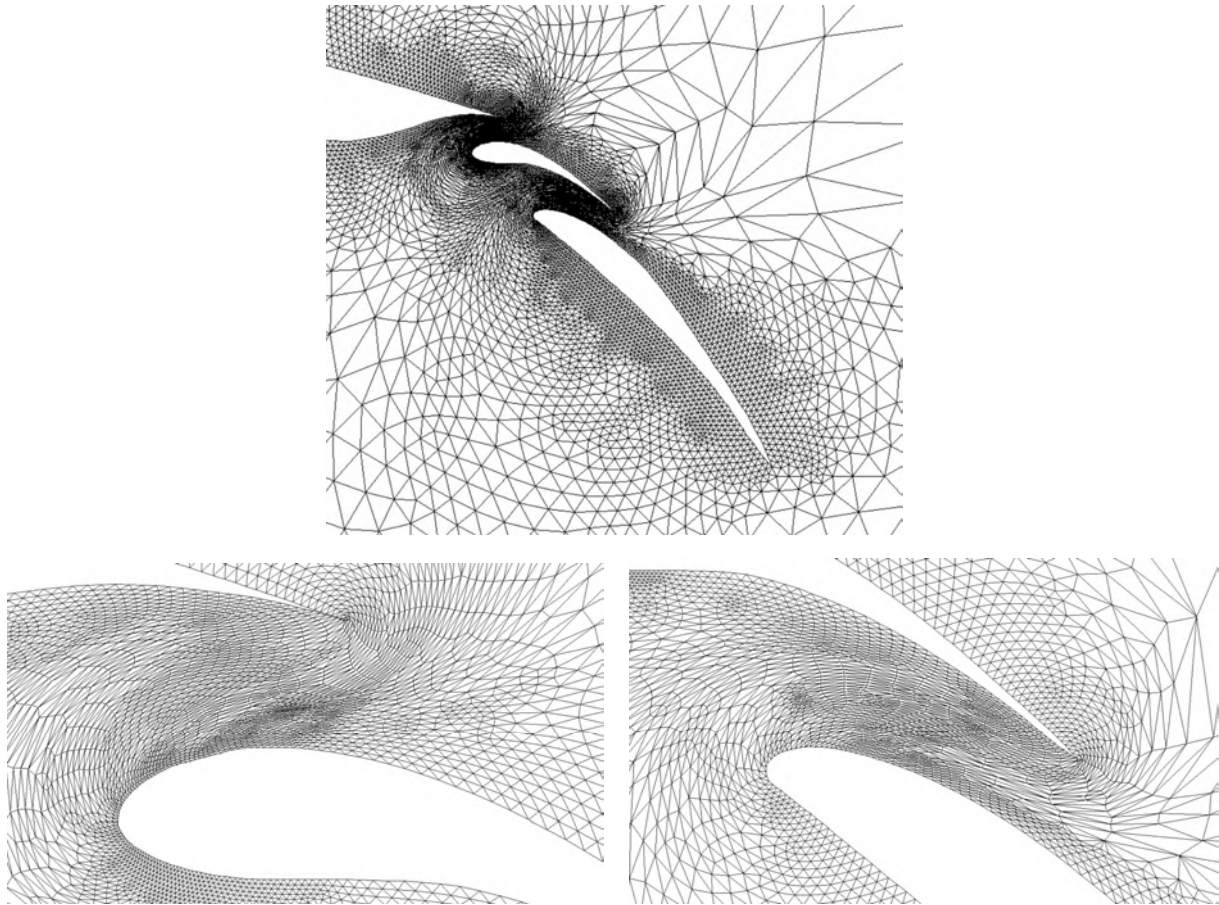
Πίνακας 3.16: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (3.17), (2.6), (2.7), (2.9) και (2.10) για το παράδειγμα του σχήματος 3.47.

Είναι η πιο δυσμενής περίπτωση για τη μέθοδο βελτιστοποίησης. Λόγω της γεωμετρικής εγγύτητας των διαδοχικών στοιχείων της αεροτομής, αλλά και της παρεμβολής λίγων κόμβων μεταξύ τους, δεν υφίσταται μεγάλο περιθώριο για περαιτέρω σύμπτυξη του συστήματος. Παρ' όλα αυτά το πλέγμα είναι έγκυρο και οριακά αποδεκτής ποιότητας.

Δοκιμάζεται μία δεύτερη περίπτωση σύμπτυξης των μεταπτερυγίων. Αυτή τη φορά αντί για «ευθυγράμμιση» όλων των στοιχείων της αεροτομής (όπου κυρίως πραγματοποιείται στροφή τους), λαμβάνει χώρα μία μεγαλύτερη σύμπτυξη των δύο μεταπτερυγίων, διατηρώντας όμως την καμπυλότητα της αεροτομής (κυρίως γραμμική μεταφορά αντί περιστροφής). Το πρώτο flap περιστρέφεται 12° περί το σημείο $(0.8174, -0.161)$ και μετατοπίζεται κατά $(x = -0.042, y = -0.022)$. Το δεύτερο flap περιστρέφεται 16° περί το σημείο $(0.921, -0.276)$ και μετατοπίζεται κατά $(x = -0.086, y = 0.036)$. Η κύρια αεροτομή και το slat παραμένουν στατικά.



Σχήμα 3.49: Βελτιστοποιημένο πλέγμα μετά από σύμπτυξη των δύο flap.



Σχήμα 3.50: Σε μεγέθυνση το πλέγμα γύρω από τα δύο μεταπτερύγια (πάνω).
 Εστίαση στο πλέγμα μεταξύ της κύριας αεροτομής και του πρώτου μεταπτερυγίου (κάτω αριστερά).
 Εστίαση στο πλέγμα μεταξύ πρώτου και δεύτερου μεταπτερυγίου (κάτω δεξιά).

| Πλέγμα \ Μετρικές | h | r_{mean} | r_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|------------------------------------|----------|------------|-----------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.002526 | 0.982389 | 0.033844 | 0.428934 | 0.295884 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.956522 | 0.159727 | -0.160980 | 0.584301 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.33) | 4.049392 | 0.849506 | 0.260293 | 0.008431 | 0.310264 |
| Βελτιστοποιημένο (Σύστημα 3.19) | 0.057389 | 0.866823 | 0.199985 | 0.161947 | 0.232754 |

Πίνακας 3.17: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (3.17), (2.6), (2.7), (2.9) και (2.10) για το παράδειγμα του σχήματος 3.49.

Ως συμπέρασμα προκύπτει ότι η μέθοδος μπορεί να αντιμετωπίσει την στροφή 180° της αεροτομής τεσσάρων στοιχείων, άρα και την πραγματοποίηση μίας πλήρους περιστροφής της. Το γεγονός αυτό οφείλεται στη μεγαλύτερη, σε σχέση με τα προηγούμενα παραδείγματα, πυκνότητα του πλέγματος, αλλά κυρίως στην ύπαρξη μεγάλης απόστασης μεταξύ εσωτερικών ορίων και εξωτερικού ορίου. Το ενδιαφέρον, βέβαια, δεν είναι στην κίνηση της αεροτομής ως συσσωματώματος, αλλά στη σχετική κίνηση μεταξύ των στοιχείων της αεροτομής. Η περίπτωση αυτή αφορά όρια σε κοντινή απόσταση το ένα με το άλλο και συνεπώς είναι απαιτητική. Παρατηρείται ότι για κίνηση των flap είτε προς τα κάτω είτε προς τα πάνω (μηχανισμός παραγωγής πρόσθετης άνωσης ή αντίστασης αντίστοιχα) το τελικό πλέγμα διατηρεί υψηλή ποιότητα, ακόμη και για εξεζητημένα μεγάλες μετατοπίσεις. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στο αρχικό πλέγμα τα μεταπτερύγια βρίσκονται ήδη σε εκτεταμένη θέση. Όσον αφορά τη σύμπτυξη, βέβαια, πρόκειται για την πιο δυσμενή περίπτωση από όσες δοκιμάστηκαν. Όχι μόνο έρχονται κοντά δύο όρια του πλέγματος μεταξύ των οποίων παρεμβάλλονται λίγοι κόμβοι, αλλά λαμβάνει χώρα και σχετική περιστροφή μεταξύ τους, με αποτέλεσμα το πλέγμα να υφίσταται οξεία παραμόρφωση διατμητικού χαρακτήρα. Στην πρώτη περίπτωση το πλέγμα είναι οριακά αποδεκτό, ενώ στη δεύτερη δεν είναι αποδεκτό κατά το κριτήριο που ορίστηκε στην εισαγωγή του κεφαλαίου 3.4. Παρ' όλα αυτά, οπτικά μοιάζει να είναι το βέλτιστο δυνατό αποτέλεσμα.

Εν κατακλείδι, η νέα μέθοδος βελτιστοποίησης της ποιότητας πλεγμάτων μπορεί να αντιμετωπίσει ένα μεγάλο εύρος γεωμετριών και παραμορφώσεων των ορίων των πλεγμάτων, δίνοντας τελικό πλέγμα κατά το δυνατό βέλτιστο. Εξάγεται το συμπέρασμα ότι η συνάρτηση h είναι κατάλληλη για να χρησιμοποιηθεί ως μετρική της ποιότητας ενός πλέγματος, ενώ οι συναρτήσεις r_{mean} , f δεν αποτελούν κατάλληλες μετρικές του πλέγματος για μεγάλες παραμορφώσεις.

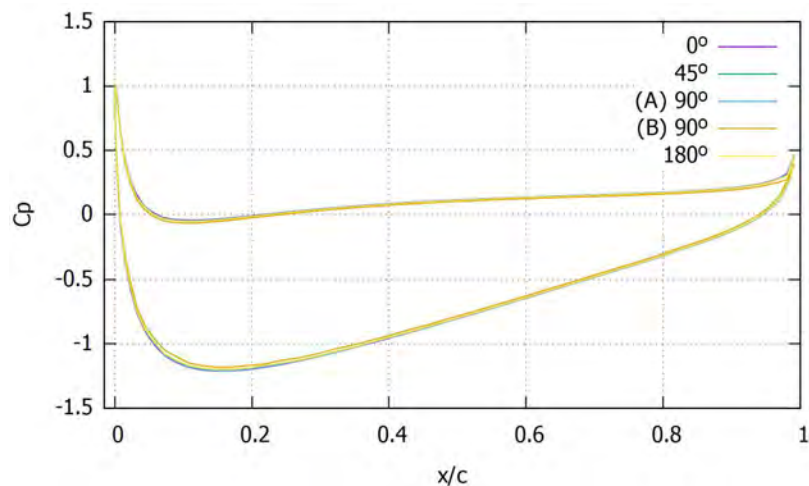
3.5 Έλεγχος της Καταλληλότητας των Βελτιστοποιημένων Πλεγμάτων για Εφαρμογές CFD

Η μέθοδος βελτιστοποίησης πλεγμάτων βρίσκει κύρια εφαρμογή στην αριθμητική επίλυση ΜΔΕ. Για τον λόγο αυτό, κρίνεται απαραίτητο να διερευνηθεί η καταλληλότητα των βελτιστοποιημένων πλεγμάτων μέσω της συγκεκριμένης μεθόδου για μία εφαρμογή CFD. Επιλέγεται η επίλυση των εξισώσεων Euler που διέπουν τη 2Δ ατριβή ροή γύρω από τη μεμονωμένη αεροτομή NACA 4415 του παραδείγματος 3.4.2. Για την αριθμητική επίλυση χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό PUMA που αναπτύχθηκε στη ΜΠΥΡ&Β [11] του ΕΜΠ. Ως οριακή συνθήκη του προβλήματος επιβάλλεται η συνθήκη μη-εισχώρησης στο στερεό όριο: $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, όπου \vec{u} είναι η ταχύτητα του ρευστού και \vec{n} το κάθετο διάνυσμα στο όριο. Χαρακτηριστικά της αδιατάρακτης ροής είναι το μέτρο της ταχύτητας: $\|\vec{u}_\infty\| = 100 \text{ m/s}$ και η γωνία πρόσπτωσης: $\theta = 2^\circ$. Το ρευστό μέσο θεωρείται αέρας πυκνότητας $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$ και η χορδή της αεροτομής έχει μήκος $c = 1 \text{ m}$. Η επίλυση της ροής γίνεται με στόχο την εύρεση της κατανομής του συντελεστή πίεσης C_p της αεροτομής.

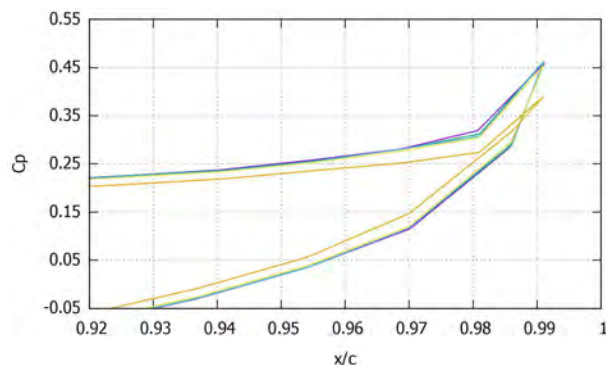
Αρχικά, επιλύεται η ροή γύρω από την αεροτομή NACA 4415 χρησιμοποιώντας το απαραμόρφωτο πλέγμα του σχήματος 3.21. Στη συνέχεια, η αεροτομή στρέφεται κατά γωνία $\varphi = 45^\circ$ και ακολουθεί η βελτιστοποίηση του πλέγματος, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.22. Τέλος, περιστρέφεται ολόκληρο το πλέγμα κατά γωνία $-\varphi$, με αποτέλεσμα η αεροτομή να επανέρχεται στην αρχική της θέση. Επιλύεται εκ

νέου η ροή γύρω από την αεροτομή χρησιμοποιώντας το βελτιστοποιημένο πλέγμα. Η ίδια διαδικασία ακολουθείται για τις γωνίες στροφής $\varphi = 90^\circ$ και $\varphi = 180^\circ$. Για την περίπτωση $\varphi = 90^\circ$ δοκιμάζονται δύο εκδοχές του πλέγματος, οι οποίες αναπαρίστανται μαζί στο σχήμα 3.26. Στην πρώτη (A), το πλέγμα είναι βέλτιστο ως προς τη συνάρτηση κόστους h της εξίσωσης (3.17), ενώ στη δεύτερη ορίζεται ως λύση του συστήματος (3.33). Όπως φαίνεται από το σχήμα 3.26, η εκδοχή (A) του πλέγματος εμφανίζει υψηλότερη ποιότητα σε σχέση με την (B) και αυτό αναμένεται να αποτυπωθεί στα αποτελέσματα της προσομοίωσης.

Επιλύεται, δηλαδή, το ίδιο φυσικό πρόβλημα, αλλάζοντας κάθε φορά μόνο τη διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου. Κατά συνέπεια, μπορεί να γίνει σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων για τον έλεγχο της καταλληλότητας των πλεγμάτων για τη συγκριμένη εφαρμογή. Συγκρίνεται η κατανομή του συντελεστή πίεσης που αντιστοιχεί σε κάθε πλέγμα, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.51. Ως αναφορά για τη σύγκριση χρησιμοποιείται η κατανομή C_p που προκύπτει βάσει του απαραμόρφωτου πλέγματος, για το οποίο γίνεται η παραδοχή ότι είναι κατάλληλο για την εφαρμογή.



Σχήμα 3.51: Διάγραμμα του συντελεστή πίεσης C_p συναρτήσει της χορδής της αεροτομής. Το κάτω τμήμα της κατανομής C_p αντιστοιχεί στην πλευρά υποπίεσης ενώ το άνω στην πλευρά υπερπίεσης. Για την αριθμητική επίλυση της ροής χρησιμοποιείται το βελτιστοποιημένο πλέγμα μετά από στροφή της αεροτομής κατά 0° , 45° , 90° και 180° . Για την περίπτωση των 90° αναπαρίστανται ο συντελεστής C_p χρήσει του πλέγματος τόσο του σχήματος 3.26 (δεξιά) (A) όσο και του σχήματος 3.26 (αριστερά) (B).



Σχήμα 3.52: Εστίαση στο διάγραμμα του συντελεστή C_p κοντά στην ακμή εκφυγής.

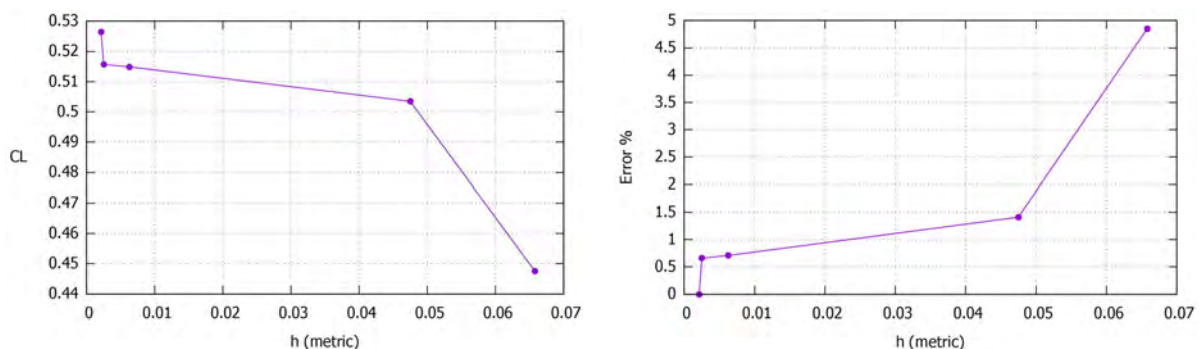
Στο σχήμα 3.51 παρατηρείται ότι υπάρχει μικρή απόκλιση μεταξύ των κατανομών C_p για όλα τα πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν. Καθώς η γωνία στροφής μεγαλώνει $\varphi: 0^\circ \rightarrow 45^\circ \rightarrow 90^\circ$ (A) $\rightarrow 180^\circ$, η ποιότητα του πλέγματος μειώνεται με αποτέλεσμα η απόκλιση να αυξάνεται. Αυτή η τάση αφορά το βέλτιστο πλέγμα ως προς τη συνάρτηση κόστους h . Όσον αφορά την περίπτωση της γωνίας 90° (B) (όπου το πλέγμα προκύπτει ως λύση του συστήματος (3.33)) παρατηρείται ότι εμφανίζει τη μεγαλύτερη απόκλιση, ακόμη και σε σχέση με τη γωνία 180° . Ιδίως στις περιοχές όπου απαιτείται υψηλή ακρίβεια, όπως η ακμή εκφυγής, η διαφοροποίηση είναι σημαντική, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.52. Αυτό είναι αναμενόμενο, δεδομένου ότι το βέλτιστο πλέγμα ως λύση του συστήματος (3.33) δεν διατηρεί υψηλή ποιότητα για μεγάλες παραμορφώσεις, όπως σχολιάστηκε στην ενότητα 3.2.2. Αυτός είναι, άλλωστε, και ο λόγος για τον οποίο στη μέθοδο βελτιστοποίησης επιλύεται διαδοχικά το σύστημα (3.19). Το γενικό συμπέρασμα είναι ότι τα πλέγματα είναι αποδεκτής ποιότητας, εφόσον η λύση δεν εξαρτάται σημαντικά από αυτά.

Για να είναι ευκολότερη η σύγκριση των αποτελεσμάτων υπολογίζεται ο συντελεστής άνωσης C_L της αεροτομής. Αποτελεί βαθμωτό μέγεθος και προκύπτει από κατάλληλη ολοκλήρωση της κατανομής του συντελεστή πίεσης. Ορίζεται το σφάλμα του C_L που αντιστοιχεί στο βελτιστοποιημένο πλέγμα για γωνία στροφής φ ως προς το C_L που αντιστοιχεί στο απαραμόρφωτο πλέγμα:

$$Error(\varphi) = \frac{C_L(0) - C_L(\varphi)}{C_L(0)} 100\% \quad (3.39)$$

| φ | 0° | 45° | 90° (A) | 180° | 90° (B) |
|------------|-----------|------------|----------------|-------------|----------------|
| h | 0.00212 | 0.00251 | 0.00627 | 0.04749 | 0.06581 |
| C_L | 0.52643 | 0.51574 | 0.51492 | 0.50349 | 0.44751 |
| $Error \%$ | 0 | 0.65973 | 0.70891 | 1.41045 | 4.85235 |

Πίνακας 3.18: Οι τιμές της συνάρτησης κόστους h , του συντελεστή άνωσης C_L και του σφάλματος επί τοις εκατό $Error \%$ αναλόγως της γωνίας στροφής της αεροτομής NACA 4415.



Σχήμα 3.53: Γραφική αναπαράσταση του συντελεστή άνωσης C_L συναρτήσει της μετρικής h της εξίσωσης (3.17) (αριστερά). Το αντίστοιχο διάγραμμα για το σφάλμα του συντελεστή C_L όπως ορίζεται από την εξίσωση (3.39) (δεξιά).

Στο σχήμα 3.53 παρατηρείται ότι το σφάλμα του συντελεστή άνωσης μεγαλώνει, όπως αναμένεται, συναρτήσει της μετρικής h . Το βελτιστοποιημένο πλέγμα για γωνία στροφής της αεροτομής έως και 90° δίνει σφάλμα μικρότερο του 1%. Το μεγαλύτερο σφάλμα εμφανίζεται στην περίπτωση 90° (B), όπου ανέρχεται κατά προσέγγιση στο 5% του C_L που προκύπτει χρησιμοποιώντας το απαραμόρφωτο πλέγμα. Επιπλέον, ο συντελεστής άνωσης φθίνει καθώς η ποιότητα του πλέγματος μειώνεται. Συνεπώς, η μείωση της ποιότητας του πλέγματος οδηγεί, εν προκειμένω, σε υποεκτίμηση του συντελεστή C_L .

Η καταλληλότητα των βελτιστοποιημένων πλεγμάτων για προβλήματα CFD καθορίζεται αναλόγως της εφαρμογής. Ως γενικό συμπέρασμα, ένα σφάλμα στους υπολογισμούς μικρότερο του 1% κρίνεται ως αποδεκτό για ένα πρόβλημα CFD. Σε ορισμένες εφαρμογές, ακόμη και ένα σφάλμα 5% μπορεί να μην είναι απαγορευτικό. Σε ένα παράδειγμα, όμως, βελτιστοποίησης μορφής μίας αεροτομής με μετρική ποιότητας τον συντελεστή C_L , όπου η αύξηση του C_L αναμένεται να είναι της τάξης του 1% με 5%, ένα ενδεχόμενο σφάλμα 5% δεν είναι αποδεκτό.

Συμπερασματικά, στο κεφάλαιο αυτό γίνεται ο έλεγχος της καταλληλότητας των βελτιστοποιημένων πλεγμάτων για την επίλυση μίας ατρίβους ροής. Ως κριτήριο χρησιμοποιείται το σφάλμα του συντελεστή άνωσης C_L . Επιλέχθηκε ένα πρόβλημα μόνιμης ροής ώστε το απαραμόρφωτο πλέγμα να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αναφορά για τη σύγκριση. Το ενδιαφέρον, όμως, εστιάζεται σε μη-μόνιμα προβλήματα. Ο στόχος είναι η δυνατότητα πρόβλεψης της καταλληλότητας ενός πλέγματος εκ των προτέρων, χωρίς δηλαδή γνώση του αποτελέσματος αλλά και χωρίς να διατίθεται κάποιο πλέγμα αναφοράς όπως εδώ. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της συστηματικής συσχέτισης του σφάλματος του C_L με τη μετρική ποιότητας του πλέγματος h , ώστε η τελευταία να μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως μετρική της καταλληλότητας του πλέγματος για μία συγκεκριμένη εφαρμογή CFD.

Κεφάλαιο 4 : Μέθοδος Βελτιστοποίησης 3Δ Πλεγμάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται, αρχικά, η επέκταση της μεθόδου βελτιστοποίησης 2Δ μη-δομημένων πλεγμάτων – που παρουσιάστηκε λεπτομερώς στα κεφάλαια 2 και 3 – στην περίπτωση 3Δ πλεγμάτων. Ορίζεται η μετρική της σφαιρικότητας ενός τετραέδρου από την οποία εξάγονται οι μετρικές ποιότητας για τα 3Δ πλέγματα. Το βέλτιστο πλέγμα προκύπτει ως κατάσταση ελαχίστου μίας συνάρτησης κόστους. Για την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους χρησιμοποιείται επαναληπτική διαδικασία. Σε μία περίπτωση παραμόρφωσης των ορίων του πλέγματος, βασικό ζητούμενο, πέρα από τη διατήρηση της εγκυρότητας και της ποιότητάς του, είναι η πραγματοποίηση της παραμόρφωσης μονομίας, χωρίς να παρεμβάλλονται ενδιάμεσα βήματα. Για τον σκοπό αυτό ακολουθείται η ίδια συλλογιστική με εκείνη του κεφαλαίου 3.2 καταλήγοντας στη διαδοχική χρήση δύο αλγορίθμων βελτιστοποίησης. Μία συνήθης περίπτωση παραμόρφωσης που εξετάζεται είναι αυτή που προκύπτει μετά από στροφή των ορίων του πλέγματος. Για την περιγραφή μίας στροφής στον 3Δ χώρο επιλέγεται ο φορμαλισμός των τετραδονίων. Γίνεται παρουσίαση της μαθηματικής τους θεωρίας και του τρόπου με τον οποίο χρησιμοποιούνται στη μέθοδο βελτιστοποίησης. Τέλος, παρατίθενται αποτελέσματα εφαρμογής της μεθόδου βελτιστοποίησης 3Δ πλεγμάτων κάνοντας ειδική μνεία στη διαχείριση πλεγμάτων με πύκνωση κοντά στα όριά τους.

4.1 Επέκταση της Μεθόδου Βελτιστοποίησης από 2Δ σε 3Δ Πλέγματα

4.1.1 Μετρικές Ποιότητας για 3Δ Πλέγματα

Μελετάται 3Δ μη-δομημένο πλέγμα αποτελούμενο αποκλειστικά από τετραεδρικά στοιχεία. Η ισοτροπία ενός στοιχείου του αποδίδεται μέσω της ιδιότητας της σφαιρικότητας (sphericity), δηλαδή της εγγύτητάς του στο σχήμα της σφαίρας. Η σφαιρικότητα για ένα 3Δ στοιχείο αποτελεί την άμεση επέκταση της κυκλικότητας ενός 2Δ στοιχείου. Συμβολίζεται με Sph_i και ορίζεται για το τετράεδρο i ως εξής:

$$Sph_i = \frac{J_i}{S_i^{3/2}} \quad (4.1)$$

όπου J_i , S_i ο όγκος και το εμβαδό της επιφάνειας του τετραέδρου i αντίστοιχα. Ο δείκτης i αναφέρεται στην αρίθμηση που ακολουθείται για τα στοιχεία του πλέγματος. Εν προκειμένω ορίζει το τετράεδρο με κορυφές τους κόμβους $P_{i,1}$, $P_{i,2}$, $P_{i,3}$, $P_{i,4}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1.

Παρατίθενται οι εκφράσεις του όγκου και του εμβαδού του τετραέδρου i :

$$J_i = \frac{1}{6} \overrightarrow{P_{i,1} P_{i,2}} \times \overrightarrow{P_{i,1} P_{i,3}} \cdot \overrightarrow{P_{i,1} P_{i,4}} \quad (4.2)$$

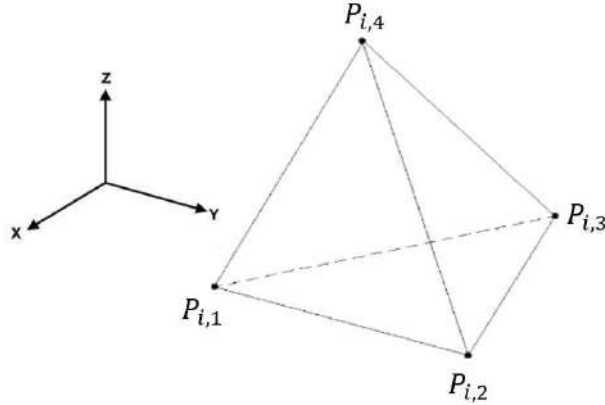
$$S_i = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{P_{i,1} P_{i,2}} \times \overrightarrow{P_{i,1} P_{i,3}}\| + \|\overrightarrow{P_{i,1} P_{i,2}} \times \overrightarrow{P_{i,1} P_{i,4}}\| + \|\overrightarrow{P_{i,1} P_{i,3}} \times \overrightarrow{P_{i,1} P_{i,4}}\| + \|\overrightarrow{P_{i,2} P_{i,3}} \times \overrightarrow{P_{i,2} P_{i,4}}\|) \quad (4.3)$$

$$\overrightarrow{P_{i,m} P_{i,n}} = (x_{i,n} - x_{i,m}, y_{i,n} - y_{i,m}, z_{i,n} - z_{i,m}) \quad (4.4)$$

όπου $\|\cdot\|$ είναι η ευκλείδεια νόρμα στον \mathfrak{R}^3 και $m, n \in \{1, 2, 3, 4\}$ είναι οι δείκτες που αναφέρονται στην αρίθμηση των κορυφών του τετραέδρου i .

Το εξωτερικό γινόμενο δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_{i,l}P_{i,m}} \times \overrightarrow{P_{i,l}P_{i,n}} = & \left((y_{i,m} - y_{i,l})(z_{i,n} - z_{i,l}) - (y_{i,n} - y_{i,l})(z_{i,m} - z_{i,l}), (x_{i,n} - x_{i,l})(z_{i,m} - z_{i,l}) \right. \\ & \left. - (x_{i,m} - x_{i,l})(z_{i,n} - z_{i,l}), (x_{i,m} - x_{i,l})(y_{i,n} - y_{i,l}) - (x_{i,n} - x_{i,l})(y_{i,m} - y_{i,l}) \right) \quad (4.5) \end{aligned}$$



Σχήμα 4.1: Το τετράεδρο i του πλέγματος με κορυφές τους κόμβους $P_{i,1}, P_{i,2}, P_{i,3}, P_{i,4}$.

Ο όγκος, όπως ορίζεται από την εξίσωση (4.2), και κατ' επέκταση η σφαιρικότητα δύνανται να λάβουν και αρνητικές τιμές. Το πρόσημο εξαρτάται από την αρίθμηση των κορυφών του τετραέδρου i . Στην περίπτωση έγκυρου πλέγματος N τετραέδρων ακολουθείται αρίθμηση τέτοια ώστε $J_i > 0, \forall 1 \leq i \leq N$. Κατ' αυτόν τον τρόπο, μετά από μία παραμόρφωση των ορίων του πλέγματος, το πρόσημο του όγκου λειτουργεί ως κριτήριο αναγνώρισης αντεστραμμένων στοιχείων. Η εμφάνιση στοιχείων για τα οποία ισχύει ότι $J_i < 0$ ισοδυναμεί με τοπική μη-εγκυρότητα του πλέγματος στην παραμορφωμένη κατάσταση.

Η σφαιρικότητα ενός τετραέδρου είναι αδιάστατο μέγεθος, κατά συνέπεια διατηρείται αναλλοίωτη για τετράεδρα με λόγο ομοιότητας. Λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της $Sph_{max} = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{36} \sim 0.052$ στην περίπτωση του κανονικού τετραέδρου, το οποίο λογίζεται ως ιδανικό για ένα υπολογιστικό πλέγμα. Ως εκ τούτου, η σφαιρικότητα είναι κατάλληλη για να χρησιμοποιηθεί ως μετρική ποιότητας των στοιχείων του πλέγματος.

Βάσει της μετρικής του ενός τετραέδρου μπορούν να οριστούν οι μετρικές ποιότητας για το 3D πλέγμα. Με σ_i συμβολίζεται η σφαιρικότητα του τετραέδρου i ανηγμένη ως προς τη μέγιστη τιμή της:

$$\sigma_i = \frac{Sph_i}{Sph_{max}} \quad (4.6)$$

όπου Sph_i ορίζεται από την εξίσωση (4.1). Το εύρος τιμών που μπορεί να λάβει είναι: $\sigma_i \in [-1,1]$.

Παρατίθεται η μέση τιμή σ_{mean} και η τυπική απόκλιση σ_{dev} της ανηγμένης κυκλικότητας των στοιχείων του πλέγματος N τριγώνων.

$$\sigma_{mean} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad (4.7)$$

$$\sigma_{dev} = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sqrt{\sum_{i=1}^N (\sigma_i - \sigma_{mean})^2} \quad (4.8)$$

Ως επιθυμητό χαρακτηριστικό ενός πλέγματος θεωρείται η κατά το δυνατό μεγαλύτερη τιμή σ_{mean} και μικρότερη τιμή σ_{dev} . Το εύρος τιμών που λαμβάνουν είναι: $\sigma_{mean} \in [-1,1]$ και $\sigma_{dev} \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$. Ανάλογες μετρικές για 2D πλέγματα ορίζονται από τις εξισώσεις (2.6) και (2.7).

Ορίζεται η μετρική h για 3D πλέγματα, κατ' αντιστοιχία με την εξίσωση (3.17):

$$h(z) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \frac{(Sph_i - Sph_{max})^2}{Sph_i^2} \quad (4.9)$$

όπου $z = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_M, y_M, z_M) \in \mathbb{R}^{2M}$ οι συντεταγμένες των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος και M το πλήθος των κόμβων αυτών. Το εύρος τιμών της συνάρτησης h είναι $[0, 2]$.

Επισημαίνεται ότι, όπως και στις δύο διαστάσεις, για την αναφορά σε έναν κόμβο χρησιμοποιούνται δύο εναλλακτικοί συμβολισμοί: P_k με $1 \leq k \leq M$ και $P_{i,n}$ με $1 \leq i \leq N$ και $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Στον πρώτο συμβολισμό χρησιμοποιείται η αρίθμηση των κόμβων που παρέχεται από τη δομή του πλέγματος, ενώ στον δεύτερο ο κόμβος ορίζεται ως η n -οστή κορυφή του τετραέδρου i .

Ορίζονται, τέλος, δύο εναλλακτικές μετρικές ποιότητας του πλέγματος, κατ' αναλογία με τις εξισώσεις (2.9) και (2.10):

$$\mu_1 = \min \{ \sigma_i, 1 \leq i \leq N \} \quad (4.10)$$

$$\mu_2 = \max \{ \sigma_{dev,k}, 1 \leq k \leq M \} \quad (4.11)$$

όπου σ_i ορίζεται από την εξίσωση (4.6) και $\sigma_{dev,k}$ είναι η τυπική απόκλιση της ανηγμένης κυκλικότητας των τετραέδρων που περιβάλλουν τον κόμβο P_k . Το σύνολο των τετραέδρων αυτών συμβολίζεται με I_k και το πλήθος τους με N_k .

$$\sigma_{dev,k} = \frac{1}{\sqrt{N_k-1}} \sqrt{\sum_{i \in I_k} \left(\sigma_i - \frac{1}{N_k} \sum_{j \in I_k} \sigma_j \right)^2} \quad (4.12)$$

Το κριτήριο βέλτιστου πλέγματος ως προς τις μετρικές αυτές είναι: $\max \mu_1$ και $\min \mu_2$ αντίστοιχα και το εύρος τιμών τους: $\mu_1 \in [-1,1]$, $\mu_2 \in [0,1]$.

Οι μετρικές ποιότητας μ_1 , μ_2 αφορούν ακρότατες και όχι μέσες τιμές των ιδιοτήτων των στοιχείων του πλέγματος. Ως εκ τούτου, είναι πιο κατάλληλες για την αξιολόγηση της ποιότητάς του σε σύγκριση με τις μετρικές των εξισώσεων (4.7) ως (4.9). Παρ' όλα αυτά, στη γενική περίπτωση δεν ορίζεται μία διαδικασία σύγκλισης στη βέλτιστη ως προς αυτές κατάσταση, συνεπώς χρησιμοποιούνται αποκλειστικά για την αξιολόγηση και όχι τη βελτιστοποίηση του πλέγματος.

Μεταξύ των παραπάνω μετρικών ποιότητας χρησιμοποιείται ως συνάρτηση κόστους για τη μέθοδο βελτιστοποίησης του 3D πλέγματος η μετρική h , όπως ορίζεται στην εξίσωση (4.9). Οι υπόλοιπες μετρικές ποιότητας χρησιμοποιούνται για την εκ των υστέρων αξιολόγηση του πλέγματος που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους. Προκύπτει ότι η συνάρτηση h εξακολουθεί και στις τρεις διαστάσεις να αποτελεί μία κατάλληλη μετρική της ποιότητας του πλέγματος ακόμη και για μεγάλες παραμορφώσεις των ορίων του.

4.1.2 Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης

Δεδομένης της δομής του 3D πλέγματος και της θέσης των οριακών του κόμβων, το βέλτιστο πλέγμα ορίζεται ως κατάσταση ελαχίστου της συνάρτησης κόστους h . Συμβολίζεται με $z^* \in \mathfrak{R}^{2M}$ και αποτελεί λύση του αλγεβρικού συστήματος:

$$\nabla h(z^*) = 0 \quad (4.13)$$

όπου $\nabla = (\nabla_1, \dots, \nabla_k, \dots, \nabla_M)^T$ με $\nabla_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial y_k}, \frac{\partial}{\partial z_k} \right)$ και $1 \leq k \leq M$.

Η κλίση της συνάρτησης κόστους ορίζεται ως εξής:

$$\nabla h(z) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{Sph_i - Sph_{max}}{Sph_i^3} \nabla Sph_i \quad (4.14)$$

Στον όρο i του αθροίσματος εμφανίζεται η κλίση της σφαιρικότητας του τετραέδρου i του πλέγματος. Εάν ένας κόμβος $P_k \notin \{P_{i,1}, P_{i,2}, P_{i,3}, P_{i,4}\}$ ισχύει η σχέση: $\nabla_k Sph_i = 0$, εφόσον η μετατόπισή του επηρεάζει τη σφαιρικότητα μόνο των τετραέδρων που τον περιβάλλουν. Για τη συνιστώσα k της κλίσης ∇h το άθροισμα με δείκτη i από 1 ως N μπορεί να αντικατασταθεί συνεπώς από άθροισμα με $i \in I_k$:

$$\nabla_k h(z) = \frac{1}{N} \sum_{i \in I_k} \frac{Sph_i - Sph_{max}}{Sph_i^3} \nabla_k Sph_i \quad (4.15)$$

όπου I_k είναι το σύνολο των τριγώνων που περιβάλλουν τον κόμβο P_k .

Ισχύει ότι $\forall i \in I_k \exists n \in \{1, 2, 3, 4\}$ ώστε: $P_k \equiv P_{i,n}$ και $\nabla_k Sph_i = \left(\frac{\partial Sph_i}{\partial x_{i,n}}, \frac{\partial Sph_i}{\partial y_{i,n}}, \frac{\partial Sph_i}{\partial z_{i,n}} \right)$.

Για τον όρο $\nabla_k S p h_i$ προκύπτει η εξής σχέση παραγωγίζοντας την εξίσωση (4.1):

$$\nabla_k S p h_i = \frac{1}{S_i^{3/2}} \nabla_k J_i - \frac{3}{2} \frac{J_i}{S_i^{5/2}} \nabla_k S_i \quad (4.16)$$

όπου J_i, S_i ορίζονται από τις εξισώσεις (4.2) και (4.3) αντίστοιχα.

Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης του όγκου και του εμβαδού του τετραέδρου i δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$\begin{aligned} \nabla_k J_i &= -\frac{1}{6} \overrightarrow{P_{i,2} P_{i,3}} \times \overrightarrow{P_{i,2} P_{i,4}}, \quad (n = 1) \\ \nabla_k J_i &= \frac{1}{6} \overrightarrow{P_{i,1} P_{i,3}} \times \overrightarrow{P_{i,1} P_{i,4}}, \quad (n = 2) \\ \nabla_k J_i &= -\frac{1}{6} \overrightarrow{P_{i,1} P_{i,2}} \times \overrightarrow{P_{i,1} P_{i,4}}, \quad (n = 3) \\ \nabla_k J_i &= \frac{1}{6} \overrightarrow{P_{i,1} P_{i,2}} \times \overrightarrow{P_{i,1} P_{i,3}}, \quad (n = 4) \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \nabla_k S_i &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{\delta}_{2,3} A_{2,3} + \overrightarrow{\delta}_{2,4} A_{2,4} + \overrightarrow{\delta}_{3,4} A_{3,4}), \quad (n = 1) \\ \nabla_k S_i &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{\delta}_{1,3} A_{1,3} + \overrightarrow{\delta}_{1,4} A_{1,4} + \overrightarrow{\delta}_{3,4} A_{3,4}), \quad (n = 2) \\ \nabla_k S_i &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{\delta}_{1,2} A_{1,2} + \overrightarrow{\delta}_{1,4} A_{1,4} + \overrightarrow{\delta}_{2,4} A_{2,4}), \quad (n = 3) \\ \nabla_k S_i &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{\delta}_{1,2} A_{1,2} + \overrightarrow{\delta}_{1,3} A_{1,3} + \overrightarrow{\delta}_{2,3} A_{2,3}), \quad (n = 4) \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$A_{s,q} = \begin{pmatrix} 0 & z_{i,q} - z_{i,s} & y_{i,s} - y_{i,q} \\ z_{i,q} - z_{i,s} & 0 & x_{i,s} - x_{i,q} \\ y_{i,q} - y_{i,s} & x_{i,s} - x_{i,q} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

$$\overrightarrow{\delta}_{s,q} = \frac{\overrightarrow{P_{i,n} P_{i,s}} \times \overrightarrow{P_{i,n} P_{i,q}}}{\| \overrightarrow{P_{i,n} P_{i,s}} \times \overrightarrow{P_{i,n} P_{i,q}} \|} \quad (4.20)$$

όπου $\overrightarrow{P_{i,s} P_{i,q}}, \overrightarrow{P_{i,n} P_{i,s}} \times \overrightarrow{P_{i,n} P_{i,q}}$ ορίζονται για το τετραέδρου i από τις εξισώσεις (4.4) και (4.5) αντίστοιχα.

Έχοντας ορίσει το βέλτιστο πλέγμα ως λύση ενός αλγεβρικού συστήματος, ακολουθεί η παρουσίαση της διαδικασίας προσέγγισής του. Κατ' αναλογία με την εξίσωση (3.22), ορίζεται το δυναμικό σύστημα:

$$\dot{z} = g(z), \quad z(t = 0) = z_0 \quad (4.21)$$

Για το ζεύγος των συνιστωσών του συστήματος που αφορούν έναν κόμβο P_k ισχύει ότι:

$$(g_{xk}, g_{yk})(z) = \sum_{i \in I_k} c_i \psi_{i,k} \quad (4.22)$$

όπου I_k είναι το σύνολο των τριγώνων που περιβάλλουν τον κόμβο P_k .

Ο συντελεστής c_i δίνεται από τη σχέση:

$$c_i = \begin{cases} Sph_i^{-3} , & Sph_i \geq Sph_{thres} \\ Sph_{thres}^{-3} , & Sph_i < Sph_{thres} \end{cases} \quad (4.23)$$

Όσον αφορά τη συνάρτηση $\psi_{i,k}$ ισχύει η παρακάτω δίκλαδη έκφραση:

$$\psi_{i,k} = \begin{cases} \left(Sph_{max} - \frac{J_i}{S_i^2} \right) \nabla_k Sph_i , & J_i \geq 0 \\ Sph_{max} \frac{1}{S_i^2} \nabla_k J_i , & J_i < 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

όπου $J_i, S_i, \nabla_k Sph_i, \nabla_k J_i, \nabla_k S_i$ ορίζονται από τις εξισώσεις (4.2), (4.3), (4.16), (4.17), (4.18) αντίστοιχα.

Αν για ένα πλέγμα $Sph_i \geq Sph_{thres}, \forall i$, τότε το δεξί μέλος δίνεται από την εξίσωση (4.14) οπότε το σύστημα γράφεται στη μορφή: $\dot{z} = -N \nabla h(z)$.

Το βέλτιστο πλέγμα ως λύση του συστήματος (4.13) διατηρεί υψηλή ποιότητα ακόμη και για μεγάλες παραμορφώσεις των ορίων του πλέγματος. Όπως παρατηρείται όμως και στο κεφάλαιο 3, η αριθμητική επίλυση του συστήματος (4.13) με τις μεθόδους που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 2.3 δεν είναι συγκλίνουσα αν η αρχική κατάσταση z_0 απέχει πολύ από τη βέλτιστη z^* . Για τον λόγο αυτό ορίζεται εναλλακτικό σύστημα προς επίλυση, κατ' αναλογία με την εξίσωση (3.33). Το σύστημα αυτό συμβολίζεται με $\check{g}: \mathfrak{R}^{2M} \rightarrow \mathfrak{R}^{2M}$ και η λύση του με $\check{z}^* \in \mathfrak{R}^{2M}$:

$$\check{g}(\check{z}^*) = 0 \quad (4.25)$$

Για το ζεύγος των συνιστωσών του συστήματος που αφορούν έναν κόμβο P_k ισχύει ότι:

$$(\check{g}_{xk}, \check{g}_{yk})(z) = \sum_{i \in I_k} p_i q_{i,k} \psi_{i,k} \quad (4.26)$$

όπου I_k είναι το σύνολο των τριγώνων που περιβάλλουν τον κόμβο P_k . Οι συντελεστές $p_i, q_{i,k}$ ορίζονται από τις εξισώσεις (3.31), (3.32) αντίστοιχα.

Η συνάρτηση $\psi_{i,k}$ ορίζεται από την παρακάτω δίκλαδη έκφραση:

$$\psi_{i,k} = \begin{cases} S_i (Sph_{max} - Sph_i) \nabla_k Sph_i , & J_i \geq 0 \\ Sph_{max} \frac{1}{S_i^{1/2}} \nabla_k J_i , & J_i < 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

Στις τρεις διαστάσεις ο συντελεστής S_i δεν έχει τετραγωνικό εκθέτη S_i^2 , όπως στις δύο διαστάσεις. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, υποθέτοντας μία μονάδα μήκους m , το εμβαδό της επιφάνειας ενός τετραέδρου S_i έχει μονάδες m^2 , ενώ η κλίση της σφαιρικότητας $\nabla_k Sph_i$ έχει μονάδες m^{-1} , οπότε αρκεί ο πολλαπλασιασμός με S_i ώστε να προκύψει έκφραση θεμιτών διαστάσεων $\sim m$.

Στην κατάσταση αλλαγής τύπου: $J_i = 0$ διασφαλίζεται η συνέχεια της $\psi_{i,k}$. Από την εξίσωση (4.16) προκύπτει ότι: $\nabla_k Sph_i = \frac{1}{S_i^{3/2}} \nabla_k J_i$ και ταυτόχρονα $Sph_i = 0$.

Ορίζεται το ανάλογο δυναμικό σύστημα της εξίσωσης (3.35):

$$\dot{z} = \check{g}(z) \quad , \quad z(t = 0) = z_0 \quad (4.28)$$

Η αριθμητική επίλυση του συστήματος (4.25) γίνεται μέσω διακριτοποίησης του δυναμικού συστήματος (4.28). Ενδεικτικά, επιλέγοντας το σχήμα του Euler προκύπτει η αναδρομική σχέση της μεθόδου του σταθερού σημείου:

$$z_{n+1} = z_n + \eta \check{g}(z_n) \quad (4.29)$$

Οι υπόλοιπες αριθμητικές μέθοδοι που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 2.3 εφαρμόζονται χωρίς κάποια διαφοροποίηση για το νέο σύστημα της σχέσης (4.28), με κύρια να παραμένει η L-BFGS (ενότητα 2.3.2).

Όπως παρατηρήθηκε στο κεφάλαιο 3.2, οι αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης του συστήματος (4.25) είναι συνήθως συγκλίνουσες, ασχέτως αρχικής κατάστασης z_0 . Ταυτόχρονα, η λύση \check{z}^* του συστήματος (4.25) προκύπτει ότι βρίσκεται επαρκώς κοντά στη λύση z^* του συστήματος (4.13), ώστε η αριθμητική επίλυση του συστήματος (4.13) να είναι, επίσης, συγκλίνουσα με αρχική κατάσταση την \check{z}^* .

Η μέθοδος βελτιστοποίησης 3Δ πλεγμάτων είναι όμοια με εκείνη που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 3 για 2Δ πλέγματα. Ο αλγόριθμος περιγράφεται αναλυτικά στο κεφάλαιο 3.3. Ορίζεται επαναληπτική διαδικασία η οποία, με αρχική κατάσταση z_0 (το πλέγμα μετά την παραμόρφωση των ορίων του), συγκλίνει στη λύση \check{z}^* του συστήματος (4.25). Χρησιμοποιείται η μέθοδος L-BFGS. Ακολουθεί μέθοδος απότομης καθόδου με προσταθεροποίηση η οποία, με αρχική κατάσταση την προσέγγιση της λύσης \check{z}^* , συγκλίνει στη λύση z^* του συστήματος (4.13). Επιλέγεται η διαδοχική χρήση των δύο αλγορίθμων, επιτυγχάνοντας, έτσι, τη σύγκλιση στη βέλτιστη κατάσταση z^* χωρίς τη διαμεσολάβηση ενδιάμεσων βημάτων. Η αποφυγή πραγματοποίησης των παραμορφώσεων σε μικρά διαδοχικά βήματα είναι βασικός στόχος της εργασίας.

4.2 Τετραδόνια

4.2.1 Άλγεβρα Τετραδονίων

Τα τετραδόνια (quaternions) [12] αποτελούν μία μη-αντιμεταθετική επέκταση των μιγαδικών αριθμών. Ορίζουν έναν τετραδιάστατο διανυσματικό χώρο, ανάλογο του R^4 , εφοδιασμένο με μία αλγεβρική δομή. Ως βάση του διανυσματικού χώρου θεωρείται η ορθοκανονική $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ όπου ισχύει ότι:

$$1 = (1,0,0,0) \quad , \quad \mathbf{i} = (0,1,0,0) \quad , \quad \mathbf{j} = (0,0,1,0) \quad , \quad \mathbf{k} = (0,0,0,1) \quad (4.30)$$

Ως προς τη συγκεκριμένη βάση, ένα στοιχείο q του χώρου αναπαρίσταται ως εξής:

$$q = q_0 + q_i \mathbf{i} + q_j \mathbf{j} + q_k \mathbf{k} \quad (4.31)$$

όπου $q_0 \in \mathfrak{R}$ είναι το πραγματικό μέρος και $(q_i, q_j, q_k) \in \mathfrak{R}^3$ το φανταστικό μέρος του τετραδονίου.

Τα βασικά τετραδόνια $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1 \quad (4.32)$$

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i} \quad (4.34)$$

$$\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \quad (4.35)$$

Δεδομένου ότι πρόκειται περί γραμμικού χώρου, η πράξη της πρόσθεσης δύο στοιχείων q, p και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ενός στοιχείου q με έναν πραγματικό αριθμό λ ορίζονται ως εξής:

$$q + p = (q_o + p_o) + (q_i + p_i)\mathbf{i} + (q_j + p_j)\mathbf{j} + (q_k + p_k)\mathbf{k} \quad (4.36)$$

$$\lambda q = \lambda q_o + (\lambda q_i)\mathbf{i} + (\lambda q_j)\mathbf{j} + (\lambda q_k)\mathbf{k} \quad (4.37)$$

όπου $p = p_o + p_i\mathbf{i} + p_j\mathbf{j} + p_k\mathbf{k}$ και $\lambda \in \mathfrak{R}$.

Ορίζεται, επίσης, ο πολλαπλασιασμός δύο τετραδονίων q, p κατά Hamilton:

$$\begin{aligned} q p &= q_o p_o - q_i p_i - q_j p_j - q_k p_k \\ &+ (q_o p_i + q_i p_o + q_j p_k - q_k p_j)\mathbf{i} \\ &+ (q_o p_j + q_j p_o + q_k p_i - q_i p_k)\mathbf{j} \\ &+ (q_o p_k + q_k p_o + q_i p_j - q_j p_i)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Όπως αναφέρθηκε, τα τετραδόνια αποτελούν μη-αντιμεταθετική άλγεβρα, κατά συνέπεια επάγονται οι παρακάτω οι ιδιότητες:

Επιμεριστικότητα: $(q + p) r = q r + p r$

Προσεταιριστικότητα: $(q p) r = q (p r)$

Μη-αντιμεταθετικότητα: $q p \neq p q$

Ουδέτερο στοιχείο πρόσθεσης: $q = 0$

Ουδέτερο στοιχείο πολλαπλασιασμού: $q = 1$

Συζυγές στοιχείο: $q^* = q_o - q_i\mathbf{i} - q_j\mathbf{j} - q_k\mathbf{k}$

Νόρμα: $\|q\| = \sqrt{q q^*} = \sqrt{q_o^2 + q_i^2 + q_j^2 + q_k^2}$

Αντίστροφο στοιχείο: $q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2}$

4.2.2 Στροφή στον 3D Χώρο μέσω Τετραδονίων

Στις τρεις διαστάσεις οι απεικονίσεις στροφής εμφανίζουν μεγαλύτερη πολυπλοκότητα από ό,τι στις δύο διαστάσεις. Δύο συνήθεις τρόποι αναπαράστασης μίας στροφής στις τρεις διαστάσεις είναι τα μητρώα στροφής και οι γωνίες Euler. Ένα μητρώο στροφής έχει διαστάσεις 3×3 και συμβολίζεται με R . Χαρακτηριστικές ιδιότητες ενός μητρώου στροφής είναι οι εξής: $R^T = R^{-1}$ και $\det R = 1$. Βάσει των σχέσεων αυτών αποδεικνύεται ότι κάθε μητρώο στροφής έχει μοναδική πραγματική ιδιοτιμή $\lambda = 1$, δηλαδή υπάρχει μοναδική διεύθυνση στον \mathbb{R}^3 , η οποία παραμένει αναλλοίωτη υπό τη δράση του μητρώου. Άμεσο επακόλουθο είναι ότι μία ακολουθία διαδοχικών στροφών είναι ισοδύναμη με μία μοναδική στροφή κατά γωνία θ γύρω από έναν άξονα διερχόμενο από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων (θεώρημα άξονα – γωνίας του Euler). Όσον αφορά τις γωνίες Euler, πρόκειται περί τριών γωνιών οι οποίες αρκούν για την περιγραφή μίας στροφής στον \mathbb{R}^3 . Κάθε στροφή μπορεί να οριστεί ως σύνθεση τριών επιμέρους στροφών περί των κύριων αξόνων του συστήματος συντεταγμένων. Η τελική στροφή εξαρτάται από τη σειρά με την οποία τελούνται οι διαδοχικές στροφές, συνεπώς οι τελευταίες δεν αντιμετατίθενται.

Η αναπαράσταση μίας στροφής στον \mathbb{R}^3 μπορεί, εναλλακτικά, να γίνει μέσω του φορμαλισμού των τετραδονίων. Είναι μία πιο συμπυκνωμένη περιγραφή από τα μητρώα στροφής, εφόσον απαιτεί μόνο την αποθήκευση του απαραίτητου αριθμού τριών αντί εννιά παραμέτρων και είναι υπολογιστικά πιο ευσταθής. Σε σύγκριση με τις γωνίες Euler είναι πιο εύκολη η δόμησή της, ενώ, επίσης, προκύπτει άμεσα η συσχέτιση με τον άξονα και τη γωνία στροφής.

Για μία στροφή περί τον άξονα (α, β, γ) κατά μία γωνία θ ορίζεται το τετραδόνιο q για το οποίο ισχύουν:

$$q_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (q_i, q_j, q_k) = (\alpha, \beta, \gamma) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (4.39)$$

Το τετραδόνιο q φέρει την πληροφορία του άξονα και της γωνίας στροφής. Για την περιγραφή μίας στροφής, όμως, απαιτείται μόνο η πληροφορία της διεύθυνσης του διανύσματος (α, β, γ) , συνεπώς από τις τρεις παραμέτρους μόνο οι δύο είναι ανεξάρτητες. Για να υπάρχει μονοσήμαντη αντιστοίχιση μεταξύ στροφής και τετραδονίου γίνεται συνήθως η υπόθεση μοναδιαίου διανύσματος $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, από όπου προκύπτει ότι και το τετραδόνιο έχει μέτρο $\|q\| = 1$.

Ένα σημείο του τριδιάστατου χώρου μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω ενός τετραδονίου μηδενικού πραγματικού μέρους $p = (0, \vec{p})$ με $\vec{p} = (p_i, p_j, p_k)$. Η στροφή κατά γωνία θ του σημείου \vec{p} περί τον άξονα (α, β, γ) ορίζεται από το φανταστικό μέρος της γραμμικής απεικόνισης:

$$p \mapsto q p q^{-1} \quad (4.40)$$

Αναφέρεται ότι το τετραδόνιο $q p q^{-1}$ έχει, επίσης, μηδενικό πραγματικό μέρος.

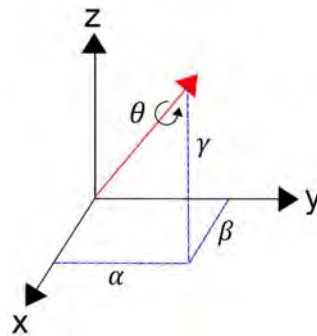
Γνωρίζοντας τον άξονα και τη γωνία στροφής στη μορφή ενός τετραδονίου q μπορεί να κατασκευαστεί το αντίστοιχο μητρώο στροφής ως εξής:

$$R = I + \frac{2}{\|q\|^2} \begin{pmatrix} -q_j^2 - q_k^2 & q_i q_j + q_o q_k & q_i q_k - q_o q_j \\ q_i q_j - q_o q_k & -q_i^2 - q_k^2 & q_j q_k + q_o q_i \\ q_i q_k + q_o q_j & q_j q_k - q_o q_i & -q_i^2 - q_j^2 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Ισοδύναμα με την εξίσωση (4.40), η στροφή πραγματοποιείται μέσω της απεικόνισης: $p \mapsto (0, R \overline{p})$.

Γνωρίζοντας, εκ του αντιστρόφου, το μητρώο στροφής, η πληροφορία του άξονα και της γωνίας στροφής μπορεί να ανακτηθεί βάσει των παρακάτω σχέσεων:

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} R_{23} - R_{32} \\ R_{31} - R_{13} \\ R_{12} - R_{21} \end{pmatrix}, \quad \cos \theta = \frac{\text{trace}(R) - 1}{2} \quad (4.42)$$



Σχήμα 4.2: Αναπαράσταση του άξονα και της γωνίας στροφής στο σύστημα συντεταγμένων του τριδιάστατου ευκλείδειου χώρου.

Στα παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου βελτιστοποίησης που ακολουθούν, η στροφή των ορίων των πλεγμάτων πραγματοποιείται μέσω της απεικόνισης (4.40). Αρχικά, κατασκευάζεται το τετραδόνιο q , το οποίο φέρει την πληροφορία της γωνίας και του άξονα περί τον οποίο τελείται η στροφή. Στη συνέχεια, ορίζεται για κάθε κόμβο επί των περιστρεφόμενων ορίων το αντίστοιχο τετραδόνιο p . Η νέα θέση των οριακών κόμβων προκύπτει εκτελώντας το γινόμενο qpq^{-1} , όπως υπαγορεύεται από την εξίσωση (4.38). Ακολουθεί η επαναληπτική διαδικασία αναπροσαρμογής του εσωτερικού πλέγματος κατά την οποία οι οριακοί κόμβοι παραμένουν στατικοί. Η χρήση των τετραδονίων, συνεπώς, αφορά την παραμόρφωση των ορίων των πλεγμάτων και όχι τη διαδικασία βελτιστοποίησης της ποιότητάς τους.

4.3 Παραδείγματα Εφαρμογής της Μεθόδου Βελτιστοποίησης 3D Πλεγμάτων

Παρατίθενται ορισμένα παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου βελτιστοποίησης της ποιότητας 3D πλεγμάτων. Πρόκειται αρχικά περί πλεγμάτων λίγων κόμβων με όρια απλής γεωμετρίας, αλλά σταδιακά και πιο σύνθετων περιπτώσεων που αφορούν εφαρμογές του μηχανικού. Εξετάζονται κυρίως ακραίες παραμορφώσεις με σκοπό τον προσδιορισμό του εύρους των δυνατοτήτων της μεθόδου σε κάθε παράδειγμα.

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται περιγράφεται αναλυτικά στο κεφάλαιο 3.3. Η διαδικασία ξεκινά με τη μετατόπιση των οριακών κόμβων του πλέγματος από την αρχική τους θέση απευθείας στην τελική χωρίς, δηλαδή, να παρεμβάλλονται ενδιάμεσα βήματα. Οι οριακοί κόμβοι παραμένουν στατικοί καθ' όλη τη βελτιστοποίηση και ορίζουν το νέο χωρίο του πλέγματος. Εφαρμόζεται, πρώτα, η μέθοδος L-BFGS προς εύρεση της λύσης του συστήματος (4.25) έχοντας ως αρχική κατάσταση z_0 το παραμορφωμένο πλέγμα. Αφότου συγκλίνει σε μια αποδεκτή προσέγγιση της λύσης του \check{z}^* (αρκεί να αποτελεί έγκυρο πλέγμα), ακολουθεί η μέθοδος της απότομης καθόδου με προσταθεροποίηση για την επίλυση του συστήματος (4.13). Στα διαγράμματα σύγκλισης αναπαριστάται η μεταβολή της νόρμας του συστήματος (4.25) και διαδοχικά του συστήματος (4.13), για την οποία ισχύει η σχέση: $\|g(z^*)\| = \|\check{g}(\check{z}^*)\| = 0$. Ως κριτήριο σύγκλισης του αλγορίθμου ορίζεται:

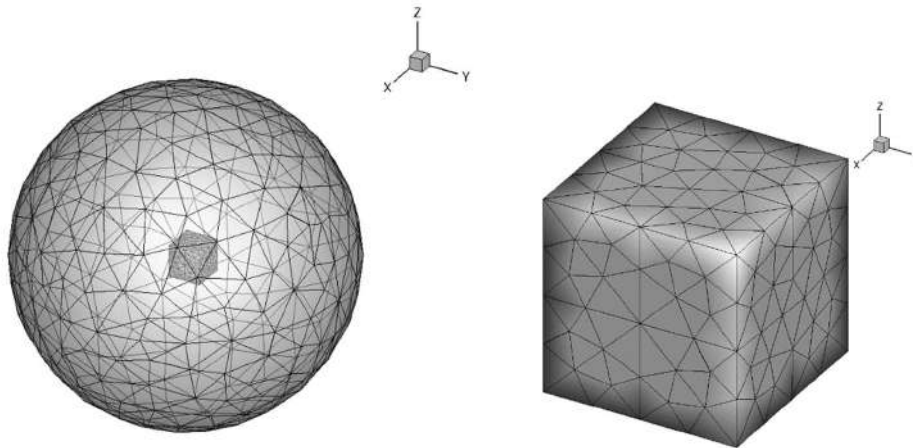
$$\|g_n\| \leq 10^{-2} \|g_{n=0}\| \quad (4.43)$$

όπου n ο δείκτης που αναφέρεται στον αριθμό της επανάληψης του αλγορίθμου και $\|g\|$ είναι η νόρμα του εκάστοτε συστήματος που επιλύεται.

Οι μετρικές ποιότητας των πλεγμάτων ορίζονται αναλυτικά στο κεφάλαιο 4.1 από τις εξισώσεις (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) και (4.11). Για να υπάρχει μια αναφορά, υπενθυμίζεται η ιδανική τιμή για κάθε μετρική: $\min h = 0$, $\max \sigma_{mean} = 1$, $\min \sigma_{dev} = 0$, $\max \mu_1 = 1$, $\min \mu_2 = 0$. Η ποιότητα ενός πλέγματος αποδίδεται, καταρχήν, μέσω της ελάχιστης τιμής της ανηγμένης σφαιρικότητας μ_1 και της μέγιστης τιμής της τυπικής της απόκλισης σε τοπικό επίπεδο μ_2 . Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η παραδοχή ότι ένα πλέγμα είναι αποδεκτής ποιότητας αν πληροί τις προϋποθέσεις: $\mu_1 > 0.3$ και $\mu_2 < 0.2$.

4.3.1 Βελτιστοποίηση Πλέγματος γύρω από Κύβο

Γίνεται εφαρμογή της μεθόδου βελτιστοποίησης στην παραμόρφωση μη-δομημένου πλέγματος γύρω από έναν κύβο. Πρόκειται περί αραιού πλέγματος 2026 κόμβων και 10608 στοιχείων. Ως αποτέλεσμα, δεν δύναται να παραλάβει μεγάλες παραμορφώσεις χωρίς να μειωθεί σημαντικά η ποιότητα των στοιχείων του, γεγονός το οποίο το καθιστά μία απαιτητική περίπτωση. Δοκιμάζεται η περιστροφή του κύβου περί τον άξονα z για δύο τιμές γωνίας στροφής: $\varphi = 130^\circ$, $\varphi = 180^\circ$ (αριστερόστροφα). Στόχο αποτελεί ο προσδιορισμός του εύρους γωνιών στροφής για τις οποίες η μέθοδος συγκλίνει σε έγκυρο και αποδεκτής ποιότητας πλέγμα. Η περιστροφή του πραγματοποιείται μονομιάς, χωρίς, δηλαδή, να παρεμβάλλονται ενδιάμεσα βήματα. Το εξωτερικό όριο παραμένει στατικό.



Σχήμα 4.3: Απαραμόρφωτο πλέγμα 2026 κόμβων, 10608 στοιχείων γύρω από έναν κύβο. Το πλήρες πλέγμα (αριστερά). Το επιφανειακό πλέγμα του κύβου (δεξιά).

| Μετρικές Πλέγμα | h | σ_{mean} | σ_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|---------------------------------|----------|-----------------|----------------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.014786 | 0.882535 | 0.069861 | 0.596603 | 0.119327 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.787962 | 0.304994 | -0.897570 | 0.641963 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.25) | 0.090431 | 0.780611 | 0.117792 | 0.306228 | 0.172383 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.13) | 0.069362 | 0.759846 | 0.107640 | 0.345845 | 0.166251 |

Πίνακας 4.1: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) και (4.11) για την περίπτωση στροφής 130° του κύβου περί τον άξονα z .

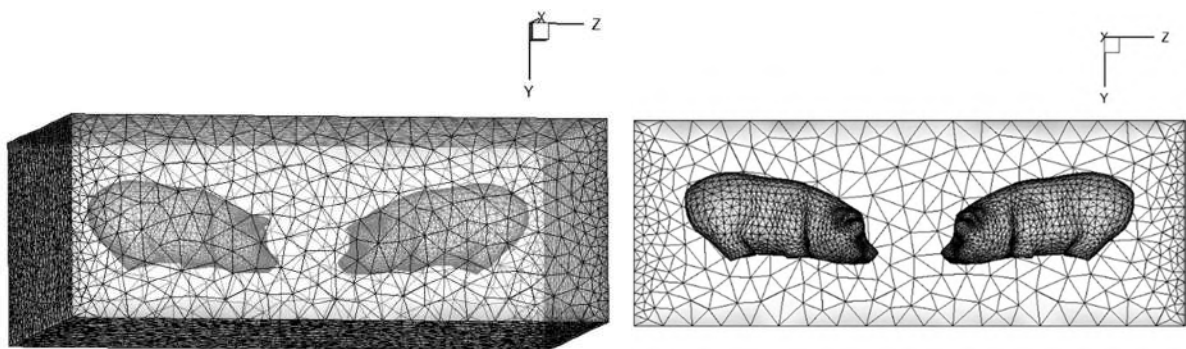
| Μετρικές Πλέγμα | h | σ_{mean} | σ_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|---------------------------------|----------|-----------------|----------------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.014786 | 0.882535 | 0.069861 | 0.596603 | 0.119327 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.786575 | 0.308251 | -0.885890 | 0.673522 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.25) | 0.214863 | 0.706397 | 0.144505 | 0.248661 | 0.195428 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.13) | 0.161139 | 0.682591 | 0.131896 | 0.278343 | 0.177335 |

Πίνακας 4.2: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) και (4.11) για την περίπτωση στροφής 180° του κύβου περί τον άξονα z .

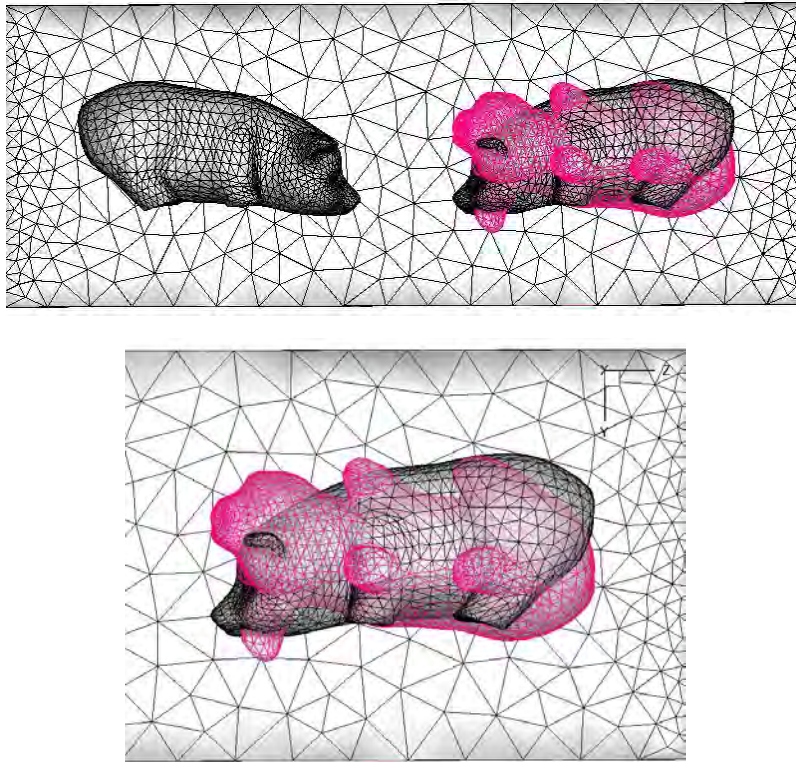
Από τους πίνακες 4.1 και 4.2 προκύπτει ότι το τελικό πλέγμα είναι έγκυρο για οποιαδήποτε τιμή γωνίας στροφής του κύβου περί τον άξονα z , εφόσον η μετρική μ_1 είναι θετική. Για γωνία $\varphi = 130^\circ$ το πλέγμα λογίζεται ως αποδεκτής ποιότητας δεδομένου ότι: $\mu_1 = 0.345845 > 0.3$ και $\mu_2 = 0.166251 < 0.2$, ενώ για γωνία $\varphi = 180^\circ$ παύουν πλέον να πληρούνται οι προϋποθέσεις αυτές. Καθοριστικές μετρικές αξιολόγησης του πλέγματος θεωρούνται οι h, μ_1, μ_2 . Συγκρίνοντας τις τιμές τους στο παραμορφωμένο πλέγμα με εκείνες στο βελτιστοποιημένο βάσει του συστήματος (4.13), προκύπτει ότι εμφανίζουν θεμιτή τάση μεταβολής. Η συνάρτηση κόστους h μειώνεται, η ελάχιστη τιμή της ανηγμένης σφαιρικότητας μ_1 αυξάνεται σημαντικά και η μέγιστη τιμή της τυπικής της απόκλισης σε τοπικό επίπεδο μ_2 μειώνεται. Όπως και στα παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου βελτιστοποίησης 2D πλεγμάτων, παρατηρείται ότι η μέση τιμή της ανηγμένης σφαιρικότητας δεν αυξάνεται, αλλά παρουσιάζει μία μη-αμελητέα μείωση. Προκύπτει ως συμπέρασμα ότι δεν αποτελεί κατάλληλη μετρική ποιότητας του πλέγματος για τόσο μεγάλες γωνίες στροφής.

4.3.2 Βελτιστοποίηση Πλέγματος γύρω από Δύο Μορφές Χοίρων

Γίνεται εφαρμογή της μεθόδου βελτιστοποίησης στην παραμόρφωση μη-δομημένου πλέγματος γύρω από δύο μορφές χοίρων σε κοντινή απόσταση. Πρόκειται περί πλέγματος 21663 κόμβων και 111323 στοιχείων. Το εξωτερικό όριο και το ένα εκ των δύο σωμάτων παραμένουν στατικά, ενώ το δεύτερο σώμα μετατοπίζεται. Δοκιμάζεται, αρχικά, η περιστροφή του περί τον άξονα z για δύο τιμές γωνίας στροφής: $\varphi = 120^\circ, \varphi = 180^\circ$. Στόχο αποτελεί ο προσδιορισμός του εύρους γωνιών στροφής για τις οποίες η μέθοδος συγκλίνει σε έγκυρο και αποδεκτής ποιότητας πλέγμα. Δοκιμάζεται, ακολούθως, η μετατόπιση του σώματος κατά $z = -3$. Αναφέρεται ότι το μήκος της ακμής του εξωτερικού παραλληλεπιπέδου κατά τον άξονα z είναι ίσο με 20 και η αρχική απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων είναι ίση με 3.5. Οι μετατοπίσεις του σώματος πραγματοποιούνται μονομιάς, χωρίς την παρεμβολή ενδιάμεσων βημάτων. Πρόκειται για απαιτητική περίπτωση πλέγματος, λόγω της εγγύτητας μεταξύ των δύο σωμάτων.



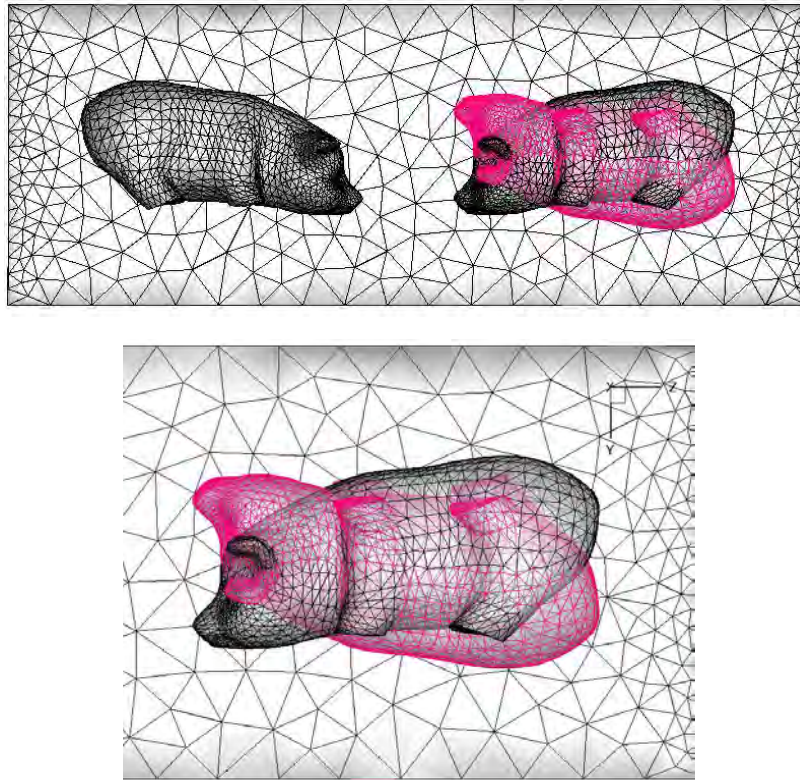
Σχήμα 4.4: Απαραμόρφωτο πλέγμα 21663 κόμβων, 111323 στοιχείων γύρω από δύο χοίρους. Το 3D πλέγμα (αριστερά). Προβολή του επιφανειακού πλέγματος στο επίπεδο yz (δεξιά).



Σχήμα 4.5: Στροφή 120° ενός εκ των δύο χοίρων περί τον άξονα z . Προβολή στο επίπεδο yz (πάνω). Σε μεγέθυνση το περιστραμμένο σώμα (κάτω). Το μαύρο επιφανειακό πλέγμα αντιστοιχεί στην αρχική του θέση, ενώ το κόκκινο στην τελική θέση.

| Μετρικές Πλέγμα | h | σ_{mean} | σ_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|------------------------------------|----------|-----------------|----------------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.019054 | 0.874879 | 0.077909 | 0.319588 | 0.225167 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.783648 | 0.293834 | -0.974969 | 0.658960 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.25) | 1.288494 | 0.772801 | 0.200684 | 0.083765 | 0.298301 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.13) | 0.118696 | 0.803739 | 0.150839 | 0.182482 | 0.231759 |

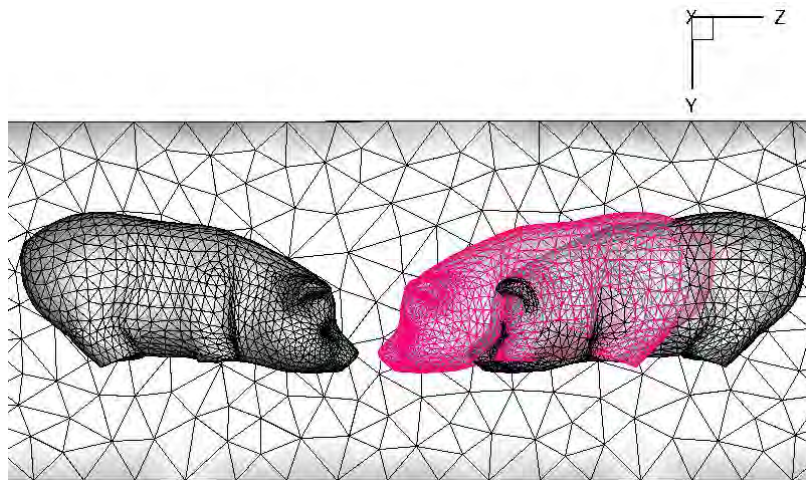
Πίνακας 4.3: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) και (4.11) για το παράδειγμα του σχήματος 4.5.



Σχήμα 4.6: Στροφή 180° ενός εκ των δύο χοίρων περί τον άξονα z . Προβολή στο επίπεδο yz (πάνω). Σε μεγέθυνση το περιστραμμένο σώμα (κάτω). Το μαύρο επιφανειακό πλέγμα αντιστοιχεί στην αρχική του θέση, ενώ το κόκκινο στην τελική θέση.

| Μετρικές Πλέγμα | h | σ_{mean} | σ_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|------------------------------------|----------|-----------------|----------------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.019054 | 0.874879 | 0.077909 | 0.319588 | 0.225167 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.787962 | 0.294219 | -0.984288 | 0.691838 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.25) | 2.930771 | 0.721940 | 0.210058 | 0.007483 | 0.332551 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.13) | 0.306347 | 0.744878 | 0.189686 | 0.148613 | 0.236783 |

Πίνακας 4.4: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) και (4.11) για το παράδειγμα του σχήματος 4.6.



Σχήμα 4.7: Μετατόπιση ενός εκ των δύο χοίρων κατά $z = -3$.

| Μετρικές Πλέγμα | h | σ_{mean} | σ_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|------------------------------------|----------|-----------------|----------------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.019054 | 0.874879 | 0.077909 | 0.319588 | 0.225167 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.780684 | 0.299052 | -0.613726 | 0.660908 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.25) | 0.698248 | 0.796012 | 0.173012 | 0.109273 | 0.332551 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.13) | 0.027016 | 0.861951 | 0.087634 | 0.269588 | 0.247812 |

Πίνακας 4.5: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) και (4.11) για το παράδειγμα του σχήματος 4.7.

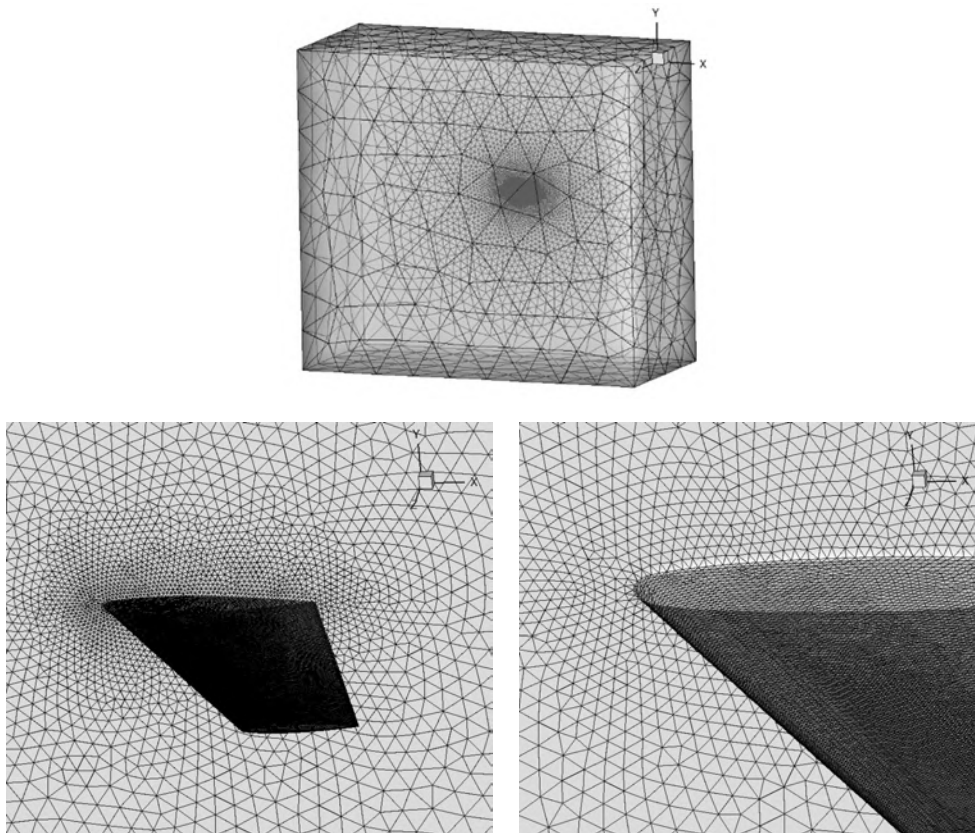
Παρατηρείται ότι σε όλες τις περιπτώσεις προκύπτει έγκυρο τελικό πλέγμα. Η ποιότητα βάσει των κριτηρίων που τέθηκαν δεν είναι, όμως, αποδεκτή εφόσον $\mu_1 < 0.3$. Για να πληρούνται οι προϋποθέσεις αποδεκτής ποιότητας του πλέγματος η στροφή πρέπει να περιοριστεί στο διάστημα $\varphi = [-80^\circ, 80^\circ]$.

| Πλέγμα | Σχήμα 4.5 | Σχήμα 4.6 | Σχήμα 4.7 |
|----------------|-----------|-----------|-----------|
| CPU Time (min) | 4.82 | 6.37 | 4.11 |

Πίνακας 4.6: Ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται σε επεξεργαστή CPU Intel Core i7 για τη βελτιστοποίηση του πλέγματος γύρω από δύο μορφές χοίρων.

4.3.3 Βελτιστοποίηση Πλέγματος για Προσομοίωση Ατριβούς Ροής γύρω από την Πτέρυγα ONERA M6

Γίνεται εφαρμογή της μεθόδου βελτιστοποίησης στην παραμόρφωση μη-δομημένου πλέγματος γύρω από την πτέρυγα ONERA M6. Πρόκειται περί πλέγματος 72791 κόμβων και 341797 στοιχείων, το οποίο προορίζεται για ατριβείς ροές. Αναφέρεται ότι από τους 72791 κόμβους οι 42156 είναι εσωτερικοί (άρα μετέχουν στη διαδικασία βελτιστοποίησης), ενώ οι 30635 είναι οριακοί και παραμένουν στατικοί. Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.11, ο άξονας y του συστήματος συντεταγμένων είναι κάθετος στο εκπέτασμα της πτέρυγας. Δοκιμάζονται τρεις περιπτώσεις μη-γραμμικής παραμόρφωσης της πτέρυγας, η οποίες πραγματοποιούνται μονομιάς, χωρίς να παρεμβάλλονται ενδιάμεσα βήματα. Το εξωτερικό όριο παραμένει στατικό.

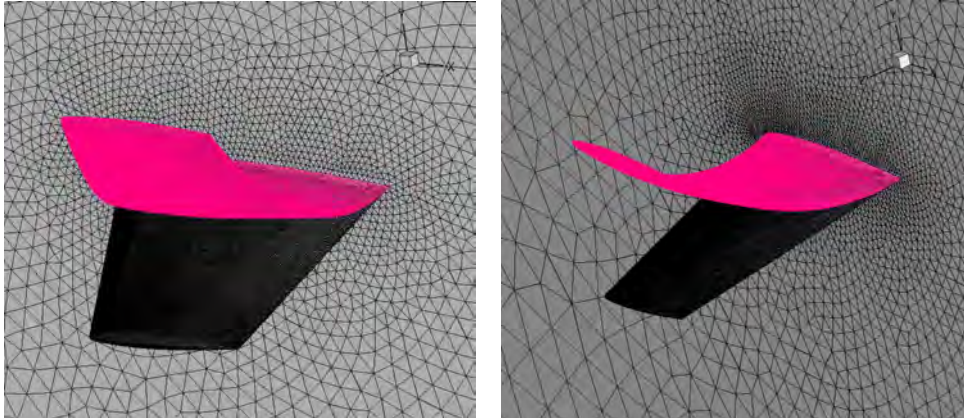


Σχήμα 4.8: Απαραμόρφωτο πλέγμα 72791 κόμβων, 341797 στοιχείων γύρω από πτέρυγα ONERA M6. Το πλήρες πλέγμα (πάνω). Σε μεγέθυνση το επιφανειακό πλέγμα της πτέρυγας (κάτω). Το πλέγμα είναι αραιό κοντά στην πτέρυγα.

Αρχικά, η πτέρυγα κάμπτεται βάσει της απεικόνισης:

$$(x, y, z) \mapsto (x, y + a z^2, z) \quad (4.44)$$

Επιλέγεται η τιμή $a = 0.4$ για τον συντελεστή της παραβολικής απεικόνισης.



Σχήμα 4.9: Κάμψη της πτέρυγας βάσει της εξίσωσης (4.44). Το μαύρο επιφανειακό πλέγμα αντιστοιχεί στην αρχική κατάσταση της πτέρυγας, ενώ το κόκκινο στην παραμορφωμένη.

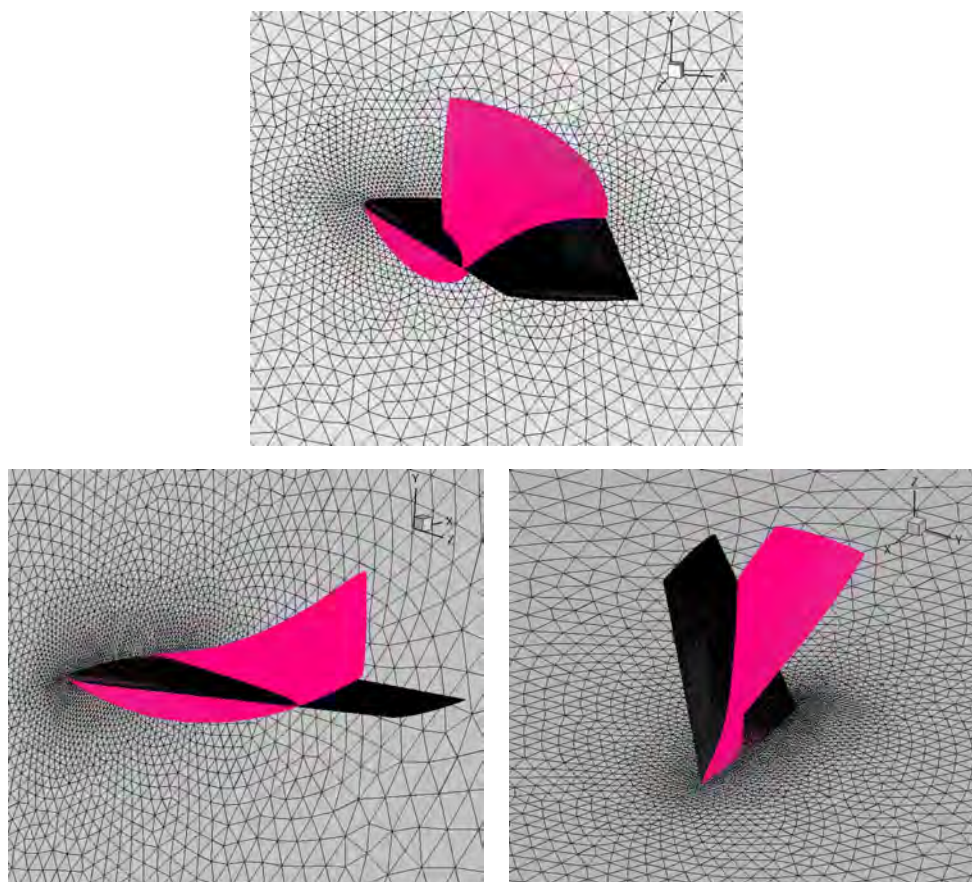
| Μετρικές Πλέγμα | h | σ_{mean} | σ_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|------------------------------------|----------|-----------------|----------------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.022517 | 0.874286 | 0.085433 | 0.425331 | 0.215557 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.840298 | 0.280981 | -0.959630 | 0.488293 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.25) | 0.650829 | 0.861855 | 0.115096 | 0.195104 | 0.220116 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.13) | 0.028174 | 0.889820 | 0.062025 | 0.419128 | 0.168170 |

Πίνακας 4.7: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) και (4.11) για το παράδειγμα του σχήματος 4.9.

Στη συνέχεια, δοκιμάζεται μία περίπτωση στρέψης της πτέρυγας βάσει της απεικόνισης:

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \mapsto & \left(5.5 + (x - 5.5) \cos\left(\frac{\pi}{2}b\right) - (y - 5) \sin\left(\frac{\pi}{2}b\right), \right. \\
 & \left. 5 + (x - 5.5) \sin\left(\frac{\pi}{2}b\right) + (y - 5) \cos\left(\frac{\pi}{2}b\right), z \right) \quad (4.45)
 \end{aligned}$$

Επιλέγεται η τιμή $b = 0.83$.

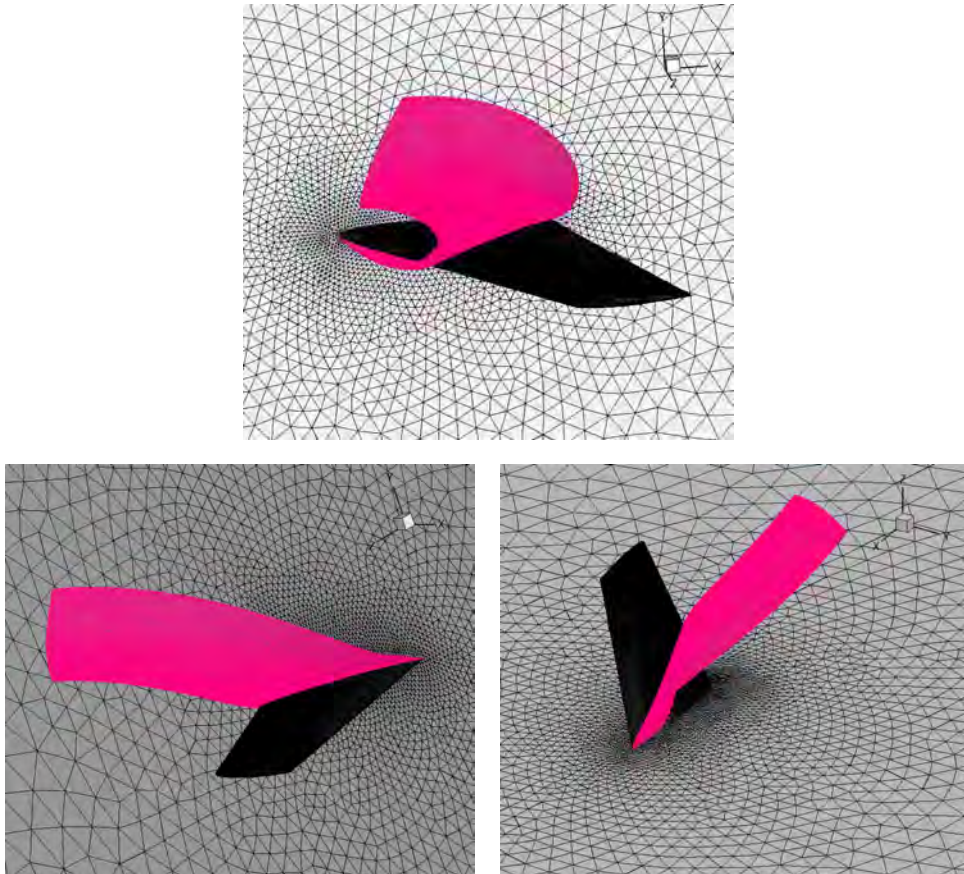


Σχήμα 4.10: Στρέψη της πτέρυγας βάσει της εξίσωσης (4.45). Το μαύρο επιφανειακό πλέγμα αντιστοιχεί στην αρχική κατάσταση της πτέρυγας, ενώ το κόκκινο στην παραμορφωμένη.

| Μετρικές Πλέγμα | h | σ_{mean} | σ_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|------------------------------------|----------|-----------------|----------------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.022517 | 0.874286 | 0.085433 | 0.425331 | 0.215557 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.852652 | 0.303215 | -0.905361 | 0.451394 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.25) | 0.632901 | 0.866504 | 0.140921 | 0.149024 | 0.238925 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.13) | 0.027983 | 0.894213 | 0.081486 | 0.390782 | 0.180017 |

Πίνακας 4.8: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) και (4.11) για το παράδειγμα του σχήματος 4.10.

Τέλος, μελετάται η περίπτωση συνδυασμένης παραμόρφωσης, δηλαδή καμπτικής και στρεπτικής ταυτόχρονα. Ο τύπος της απεικόνισης δίνεται από την πρόσθεση της (4.44) και (4.45).



Σχήμα 4.11: Παραμόρφωση της πτέρυγας σε κάμψη και στρέψη ταυτόχρονα. Το μαύρο επιφανειακό πλέγμα αντιστοιχεί στην αρχική κατάσταση της πτέρυγας, ενώ το κόκκινο στην παραμορφωμένη.

| Μετρικές Πλέγμα | h | σ_{mean} | σ_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|------------------------------------|----------|-----------------|----------------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.022517 | 0.874286 | 0.085433 | 0.425331 | 0.215557 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.531109 | 0.470500 | -0.996913 | 0.901054 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.25) | 0.730829 | 0.826197 | 0.171096 | 0.100194 | 0.265641 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.13) | 0.034281 | 0.866200 | 0.098045 | 0.212473 | 0.192852 |

Πίνακας 4.9: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) και (4.11) για το παράδειγμα του σχήματος 4.11.

| Πλέγμα | Σχήμα 4.9 | Σχήμα 4.10 | Σχήμα 4.11 |
|----------------|-----------|------------|------------|
| CPU Time (min) | 10.26 | 13.06 | 17.49 |

Πίνακας 4.10: Ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται σε επεξεργαστή CPU Intel Core i7 για τη βελτιστοποίηση του πλέγματος γύρω από την πτέρυγα ONERA M6.

4.4 Διαχείριση 3D Πλέγματος με Πύκνωση στα Όρια

4.4.1 Περιγραφή του Προβλήματος

Σε εφαρμογές CFD συνεκτικών ροών η διαχείριση του οριακού στρώματος είναι πρωτεύον ζήτημα. Τα ροϊκά μεγέθη κοντά στο στερεό όριο εμφανίζουν μεγάλη τάση μεταβολής καθιστώντας τον υπολογισμό τους απαιτητικό. Για τον λόγο αυτό επιλέγονται πλέγματα στα οποία τα στοιχεία κοντά στο όριο έχουν εξεζητημένα μεγάλο λόγο επιμήκους. Η πύκνωση που παρουσιάζει το πλέγμα κοντά στο όριο δεν επιβάλλεται από το ίδιο το όριο, δηλαδή η διακριτοποίηση του ορίου δεν είναι αναλόγως πυκνή. Ως εκ τούτου, η εφαρμογή της μεθόδου βελτιστοποίησης (που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 4.1) σε ένα τέτοιο πλέγμα θα είχε ως αποτέλεσμα την αναίρεση της πύκνωσης αυτής. Συνεπώς, είναι αναγκαίο να ληφθεί υπόψη στη διαδικασία.

Επιλέγεται ο διαχωρισμός του υπολογιστικού χωρίου σε δύο περιοχές: την περιοχή πύκνωσης γύρω από το παραμορφούμενο στερεό όριο και την αραιή περιοχή. Η διαχείριση του πλέγματος στις δύο περιοχές είναι ανεξάρτητη. Προηγείται η διαχείριση των κόμβων εντός της περιοχής πύκνωσης. Οι κόμβοι αυτοί δεν μετέχουν στη βελτιστοποίηση. Κάνοντας, προς το παρόν, την παραδοχή ότι το όριο εκτελεί κίνηση απολύτως στερεού σώματος, η περιοχή πύκνωσης ακολουθεί την κίνηση του ορίου σαν ενιαίο στερεό σώμα. Δηλαδή, όπως και οι οριακοί κόμβοι, οι κόμβοι της περιοχής αυτής τοποθετούνται απευθείας στη νέα τους θέση χωρίς τη διαμεσολάβηση επαναληπτικής διαδικασίας. Στη συνέχεια, ακολουθεί η βελτιστοποίηση του υπόλοιπου πλέγματος μέσω της μεθόδου που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 4.1. Μια τέτοια προσέγγιση είναι εφικτή εφόσον η περιοχή πύκνωσης είναι χωρικά μικρής κλίμακας σε σχέση με την αραιή περιοχή, παρότι μεγάλος αριθμός κόμβων ανήκουν στην πρώτη. Δεν θα μπορούσε, προφανώς, να εφαρμοστεί και στην αραιή περιοχή. Επίσης, προϋπόθεση είναι να μην πλησιάζουν δύο στερεά όρια του πλέγματος σε απόσταση ανάλογη της κλίμακας της περιοχής πύκνωσης. Αποφεύγοντας τη χρήση επαναληπτικής διαδικασίας, το υπολογιστικό κόστος της θεώρησης αυτής είναι πολύ χαμηλό σε σχέση με τη βελτιστοποίηση, ενώ ταυτόχρονα επιτυγχάνεται η διατήρηση της ποιότητας των στοιχείων στην περιοχή πύκνωσης, το οποίο είναι βασικό ζητούμενο εφόσον δεν είναι θεμιτό να παραλάβουν μεγάλη παραμόρφωση.

Αναφέρεται ότι στη γενική περίπτωση όπου το όριο δεν εκτελεί κίνηση απολύτως στερεού σώματος, μπορεί να οριστεί και πάλι μη-επαναληπτικός αλγόριθμος κατάλληλης τοποθέτησης των κόμβων της περιοχής πύκνωσης του πλέγματος. Ο αλγόριθμος αυτός δεν προγραμματίστηκε στο πλαίσιο της εργασίας.

Για την επίδειξη της εφαρμογής μίας της διαδικασίας που περιγράφηκε, παρουσιάζεται η περίπτωση της πτέρυγας ONERA M6, αυτή τη φορά με πλέγμα το οποίο εμφανίζει πύκνωση κοντά στην πτέρυγα.

4.4.2 Βελτιστοποίηση Πλέγματος για Προσομοίωση Συνεκτικής Ροής γύρω από την Πτέρυγα ONERA M6

Γίνεται εφαρμογή της μεθόδου βελτιστοποίησης στην παραμόρφωση μη-δομημένου πλέγματος γύρω από την πτέρυγα ONERA M6. Πρόκειται περί πλέγματος 113945 κόμβων και 663552 στοιχείων. Από τους 113945 κόμβους, οι 107415 είναι εσωτερικοί ενώ οι 6530 είναι οριακοί. Το συγκεκριμένο πλέγμα προορίζεται για συνεκτικές ροές, δηλαδή υπάρχει μία περιοχή γύρω από την πτέρυγα στην οποία το πλέγμα είναι ιδιαίτερα πυκνό. Η περιοχή πύκνωσης αποτελείται από τετραεδρικά στοιχεία. Παρ' όλα αυτά, όλο το πλέγμα ομοιάζει οπτικά με δομημένο, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.12. Το εξωτερικό όριο έχει σχήμα ημισφαιρίου. Η πτέρυγα εδράζεται επί του επιπέδου συμμετρίας $y = 0$. Ο άξονας z του συστήματος συντεταγμένων είναι κάθετος στο εκπέτασμα της πτέρυγας. Το εκπέτασμα της πτέρυγας έχει μήκος 1.35, ενώ η διάμετρος του εξωτερικού ορίου ισούται με 100.

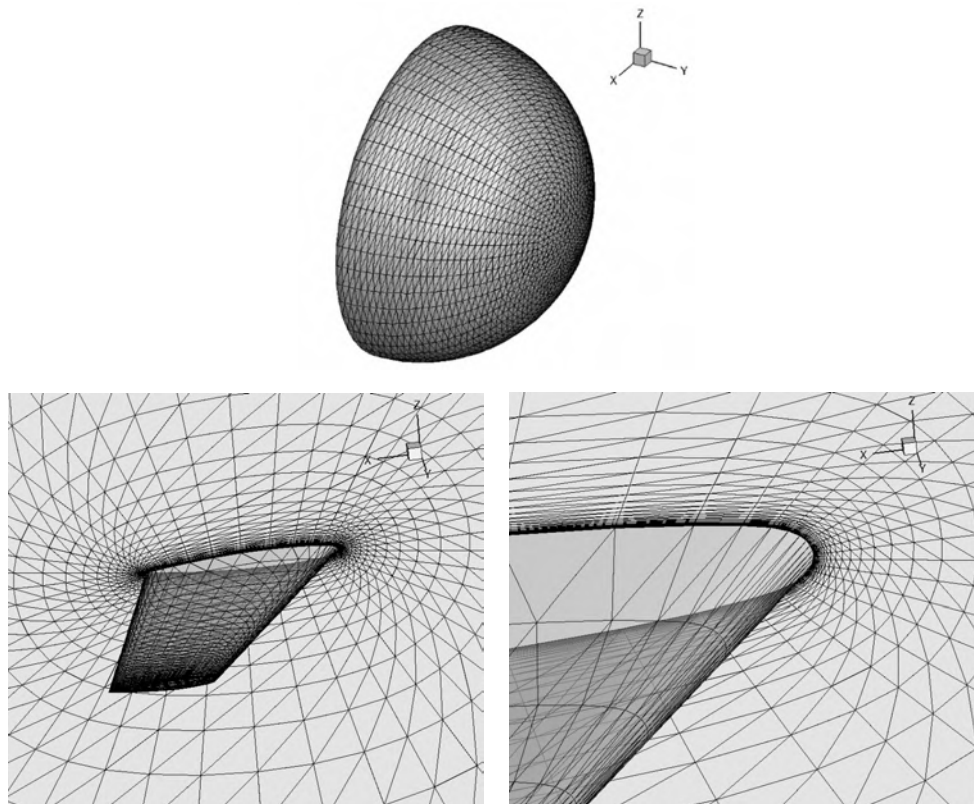
Κοντά στην πτέρυγα τα στοιχεία του πλέγματος έχουν πολύ χαμηλή σφαιρικότητα εξ επιλογής, ακόμη και στο απαραμόρφωτο πλέγμα, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.12. Χρησιμοποιείται η προσέγγιση που περιγράφηκε στην ενότητα 4.4.1. Ορίζονται δύο περιοχές του πλέγματος: η περιοχή πύκνωσης και η αραιή περιοχή. Από τους 107415 εσωτερικούς κόμβους μόνο οι 39215 ανήκουν στη δεύτερη και είναι ελεύθεροι να μετατοπισθούν κατά τη διαδικασία βελτιστοποίησης του πλέγματος. Οι υπόλοιποι 68200 ανήκουν στην περιοχή πύκνωσης, η οποία παραμορφώνεται ενιαία μαζί με την πτέρυγα.

Δοκιμάζεται μία περίπτωση κάμψης πτέρυγας βάσει της απεικόνισης:

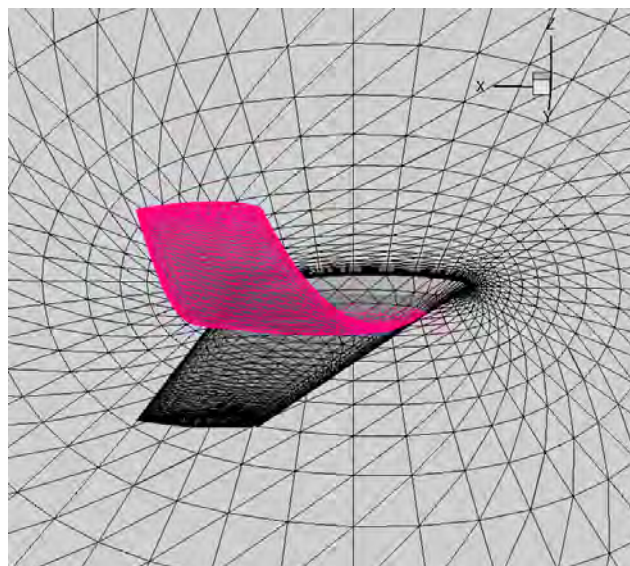
$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z + a y^2) \quad (4.46)$$

Επιλέγεται η τιμή $a = 0.75$ για τον συντελεστή της παραβολικής απεικόνισης.

Η απεικόνιση αφορά τους οριακούς κόμβους και τους κόμβους της περιοχής πύκνωσης. Δεν αποτελεί μια περίπτωση κίνησης απολύτως στερεού σώματος, οπότε πρέπει να ελεγχθεί αν εξασφαλίζεται η εγκυρότητα των τετραέδρων που βρίσκονται στην περιοχή πύκνωσης. Σε αντίθετη περίπτωση θα προέκυπτε μη-αποδεκτό πλέγμα, εφόσον οι κόμβοι αυτοί παραμένουν στατικοί κατά τη βελτιστοποίηση. Η ελάχιστη τιμή της ανηγμένης σφαιρικότητας που απαντάται σε ολόκληρο το απαραμόρφωτο πλέγμα ισούται με $4.24 \cdot 10^{-5}$. Μετά από την παραμόρφωση της πτέρυγας και της περιοχής πύκνωσης βάσει της εξίσωσης (4.46), προκύπτει ότι η αντίστοιχη τιμή είναι $3.93 \cdot 10^{-5}$. Συνεπώς, το πλέγμα στην περιοχή πύκνωσης διατηρεί τόσο την εγκυρότητα όσο και την ποιότητά του μέσω της απεικόνισης αυτής.



Σχήμα 4.12: Απαραμόρφωτο πλέγμα 113945 κόμβων, 663552 στοιχείων γύρω από την πτέρυγα ONERA M6. Το πλήρες πλέγμα (πάνω). Σε μεγέθυνση το επιφανειακό πλέγμα της πτέρυγας (κάτω). Το πλέγμα είναι πολύ πυκνό κοντά στην πτέρυγα.



Σχήμα 4.13: Επιφανειακό πλέγμα της πτέρυγας ONERA M6 μετά από την κάμψη της η οποία ακολουθεί τον τύπο (4.46). Το μαύρο πλέγμα αντιστοιχεί στην αρχική θέση, ενώ το κόκκινο στην τελική θέση.

| Μετρικές Πλέγμα | h | σ_{mean} | σ_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|------------------------------------|----------|-----------------|----------------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.288859 | 0.430332 | 0.291774 | 0.326744 | 0.269149 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.393024 | 0.484885 | -0.977205 | 0.875390 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.25) | 0.541696 | 0.360879 | 0.299628 | 0.259843 | 0.352306 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.13) | 0.323596 | 0.357196 | 0.298853 | 0.280956 | 0.301564 |

Πίνακας 4.11: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) και (4.11) για το παράδειγμα του σχήματος 4.13.

Ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται για την αναπροσαρμογή του πλέγματος στην παραμορφωμένη κατάσταση είναι 13.72 λεπτά σε επεξεργαστή Intel Core i7.

4.5 Διαχείριση 3D Πλέγματος με Χαμηλής Ποιότητας Επιφανειακό Πλέγμα

4.5.1 Περιγραφή του Προβλήματος

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζεται η επίδραση της ποιότητας του επιφανειακού πλέγματος στη μέθοδο βελτιστοποίησης 3D πλεγμάτων. Σε ορισμένες εφαρμογές της υπολογιστικής μηχανικής γίνεται επιλογή επιφανειακού πλέγματος χαμηλής ποιότητας για τα όρια του 3D πλέγματος (η ποιότητα των 2D οριακών στοιχείων ορίζεται βάσει της κυκλικότητάς τους). Αυτό συμβαίνει όταν υπάρχει ανάγκη για μεγαλύτερη ακρίβεια των υπολογισμών στη μία μόνο από τις δύο κατευθύνσεις του επιφανειακού ορίου. Για να αποφευχθεί το υψηλό υπολογιστικό κόστος που θα συνεπαγόταν η πύκνωση του επιφανειακού πλέγματος και στις δύο κατευθύνσεις, χρησιμοποιούνται 2D οριακά στοιχεία με μεγάλη ανισοτροπία. Μία τυπική περίπτωση είναι τα στοιχεία δοκών (beam elements) με τα οποία μοντελοποιούνται ενίοτε οι πτέρυγες των αεροσκαφών. Στο σχήμα 4.14 της ενότητας 4.5.2 φαίνεται ένα τέτοιο παράδειγμα επιφανειακού πλέγματος στην κάτοψη μίας πτέρυγας αεροσκάφους. Με αφορμή το σχήμα 4.14 αναδεικνύονται τα ιδιαίτερα γνωρίσματα μίας τέτοιας διακριτοποίησης και τα ζητήματα που προκύπτουν όσον αφορά τη μέθοδο βελτιστοποίησης.

Το πρώτο γνώρισμα που παρατηρείται είναι ότι τα τρίγωνα στην πτέρυγα του αεροσκάφους εμφανίζουν μικρή κυκλικότητα σε σχέση με τα τρίγωνα στην άτρακτο. Έπεται ότι και τα τετράεδρα του 3D πλέγματος που εδράζονται επί της πτέρυγας δεν μπορούν να αποκτήσουν μεγάλη σφαιρικότητα, δηλαδή το σχήμα τους απέχει πολύ από το κανονικό τετράεδρο. Δεδομένου ότι οι οριακοί κόμβοι παραμένουν στατικοί, το γνώρισμα αυτό δεν πρόκειται να αλλάξει κατά τη βελτιστοποίηση του πλέγματος και συντείνει στην αστάθεια της μεθόδου βελτιστοποίησης. Για την ισορροπία ενός κόμβου του πλέγματος αρκεί απλώς η συνισταμένη της συνεισφοράς όλων των τετραέδρων που τον περιβάλλουν στη μετατόπισή του να ισούται με μηδέν. Για την ευστάθεια της ισορροπίας, όμως, πρέπει κάθε τετράεδρο ξεχωριστά να έχει μεγάλη σφαιρικότητα. Συνεπώς, η αστάθεια της μεθόδου οφείλεται στη δέσμευση της σφαιρικότητας των στοιχείων κοντά στο όριο.

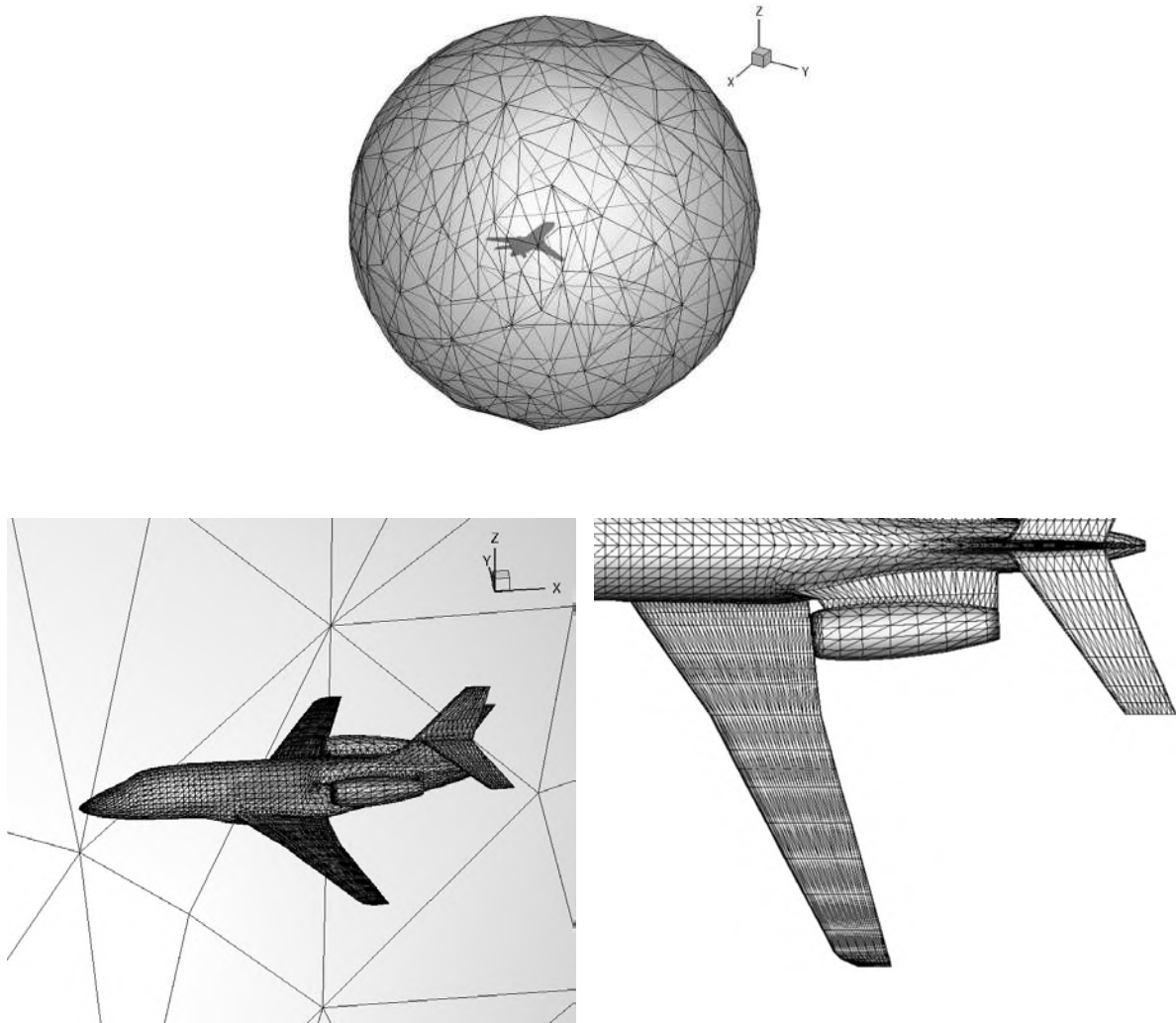
Για τη διαχείριση ενός τέτοιου πλέγματος χρησιμοποιείται μία αντίστοιχη προσέγγιση με αυτήν που παρουσιάστηκε για την περιοχή πύκνωσης στο κεφάλαιο 4.4. Εν προκειμένω, ορίζεται μία περιοχή γύρω από τις πτέρυγες και οι κόμβοι που βρίσκονται σε αυτήν ακολουθούν την κίνηση του αεροσκάφους. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα αν το αεροσκάφος εκτελεί κίνηση απολύτως στερεού σώματος, για αυτό και θα μελετηθεί μόνο αυτή η περίπτωση. Οι συγκεκριμένοι κόμβοι, ύστερα, παραμένουν στατικοί κατά τη βελτιστοποίηση. Ως προϋπόθεση για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί μία τέτοια προσέγγιση, ένα στοιχείο στην περιοχή αυτή πρέπει να είναι εξαρχής το επιθυμητό στο δοθέν πλέγμα, ώστε να μπορεί να δικαιολογηθεί η μη-μετοχή του στη βελτιστοποίηση. Η επισήμανση αυτή γίνεται διότι εν γένει κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο, δηλαδή ο αλγόριθμος μπορεί να χειριστεί ένα δοθέν πλέγμα κακής ποιότητας αρκεί να είναι έγκυρο.

Αναφέρεται ότι η χαμηλή ποιότητα της διακριτοποίησης των ορίων απαντάται συνήθως σε 3D πλέγματα, εφόσον τα όρια των 2D πλεγμάτων δεν εμφανίζουν μεγάλη πολυπλοκότητα.

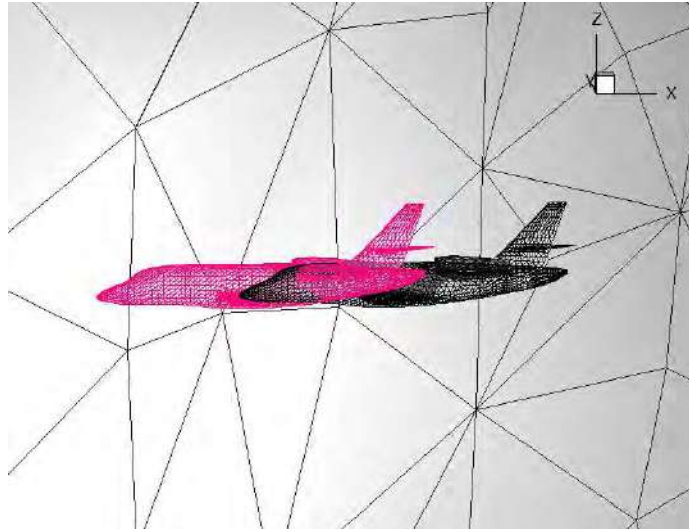
4.5.2 Βελτιστοποίηση Πλέγματος γύρω από Αεροσκάφος

Γίνεται εφαρμογή της μεθόδου βελτιστοποίησης στην παραμόρφωση μη-δομημένου πλέγματος γύρω από ένα πλήρες μοντέλο αεροσκάφους. Πρόκειται περί πλέγματος 87965 κόμβων και 511888 στοιχείων, το οποίο προορίζεται για προσομοίωση ατρίβους ροής γύρω από το αεροσκάφος. Το αεροσκάφος αποτελείται από την κύρια άτρακτο, τις πτέρυγες, το ουραίο πτερύγιο και τους κινητήρες επί της ατράκτου. Δοκιμάζεται η μετατόπιση του αεροσκάφους κατά $x=-8.2$. Για να υπάρχει μία αναφορά, επισημαίνεται ότι το μήκος του αεροσκάφους είναι ίσο με 20, ενώ η διάμετρος του εξωτερικού ορίου του πλέγματος ισούται με 100. Στη συνέχεια, δοκιμάζεται η στροφή -60° του αεροσκάφους (δεξιόστροφα) περί άξονα παράλληλου στον άξονα z και διερχόμενου από το σημείο $(8.2,0,0)$. Οι μετατοπίσεις του αεροσκάφους πραγματοποιούνται μονομιάς, χωρίς να παρεμβάλλονται ενδιάμεσα βήματα. Το εξωτερικό όριο παραμένει στατικό.

Όπως περιγράφηκε στην ενότητα 4.5.1, η διακριτοποίηση των πτερύγων του αεροσκάφους (σχήμα 4.14) απαιτεί ειδική μεταχείριση. Τα 3D στοιχεία που εδράζονται επί της πτέρυγας έχουν μικρή σφαιρικότητα, με ελάχιστη τιμή ανηγμένης σφαιρικότητας: 0.0486. Για τον λόγο αυτό, ορίζεται μία περιοχή γύρω από την πτέρυγα η οποία μετακινείται μαζί με το αεροσκάφος και δεν μετέχει στη βελτιστοποίηση. Από τους 87965 κόμβους, οι 81861 είναι εσωτερικοί και οι 6104 είναι οριακοί. Από τους 81861 εσωτερικούς κόμβους, μόνο οι 36213 μετέχουν στη βελτιστοποίηση, ενώ οι υπόλοιποι 45648 παραμένουν στατικοί.



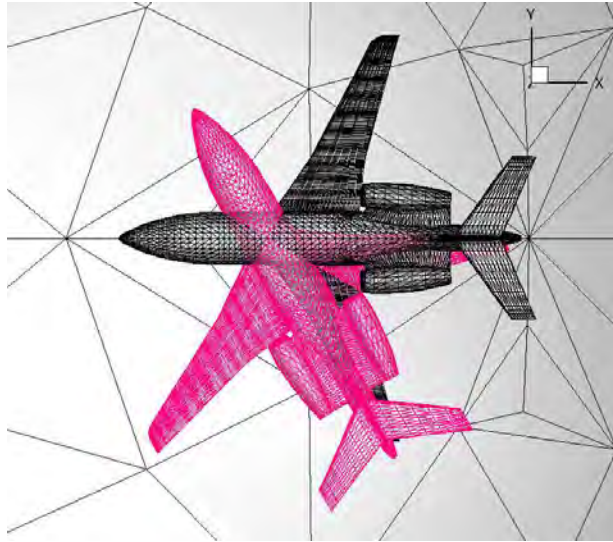
Σχήμα 4.14: Απαραμόρφωτο πλέγμα 87965 κόμβων, 511888 στοιχείων γύρω από αεροσκάφος.
Το 3D πλέγμα (πάνω). Το επιφανειακό πλέγμα του αεροσκάφους (κάτω αριστερά).
Η κάτοψη του επιφανειακού πλέγματος (κάτω δεξιά).



Σχήμα 4.15: Επιφανειακό πλέγμα του αεροσκάφους μετά από μετατόπισή του κατά $x = -8.2$. Το μαύρο πλέγμα αντιστοιχεί στην αρχική θέση, ενώ το κόκκινο στην τελική θέση.

| Μετρικές Πλέγμα | h | σ_{mean} | σ_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|------------------------------------|----------|-----------------|----------------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.276713 | 0.623332 | 0.174472 | 0.363716 | 0.221738 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.590788 | 0.220173 | -0.789880 | 0.593824 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.13) | 0.541696 | 0.628021 | 0.175854 | 0.240958 | 0.241738 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.25) | 0.209395 | 0.640806 | 0.173202 | 0.310861 | 0.201738 |

Πίνακας 4.12: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) και (4.11) για το παράδειγμα του σχήματος 4.15.



Σχήμα 4.16: Επιφανειακό πλέγμα του αεροσκάφους μετά από στροφή -60° περί τον άξονα z . Το μαύρο πλέγμα αντιστοιχεί στην αρχική θέση, ενώ το κόκκινο στην τελική θέση.

| Πλέγμα \ Μετρικές | h | σ_{mean} | σ_{dev} | μ_1 | μ_2 |
|---------------------------------|----------|-----------------|----------------|-----------|----------|
| Αρχικό | 0.276713 | 0.623332 | 0.174472 | 0.363716 | 0.221738 |
| Παραμορφωμένο | – | 0.591645 | 0.221750 | -0.959630 | 0.654019 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.13) | 0.681829 | 0.638960 | 0.174961 | 0.113654 | 0.291738 |
| Βελτιστοποιημένο Σύστημα (4.25) | 0.290364 | 0.638719 | 0.172188 | 0.213654 | 0.271738 |

Πίνακας 4.13: Οι τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος όπως ορίζονται από τις εξισώσεις (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) και (4.11) για το παράδειγμα του σχήματος 4.16.

Αναφέρεται ότι η μέγιστη στροφή περί τον άξονα z που μπορεί να πραγματοποιηθεί διατηρώντας την εγκυρότητα του πλέγματος είναι οι 85° . Στους πίνακες 4.12 και 4.13, οι μετρικές του πλέγματος αφορούν μόνο τα στοιχεία των οποίων οι κορυφές μετέχουν στη βελτιστοποίηση. Παραδείγματος χάρη, αν υπολογιζόταν η ελάχιστη τιμή της ανηγμένης σφαιρικότητας σε όλο το πλέγμα θα προέκυπτε ίδια με αυτή του απαραμόρφωτου πλέγματος, δηλαδή 0.0486.

| Πλέγμα | Σχήμα 4.15 | Σχήμα 4.16 |
|----------------|------------|------------|
| CPU Time (min) | 11.82 | 15.34 |

Πίνακας 4.14: Ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται σε επεξεργαστή CPU Intel Core i7 για τη βελτιστοποίηση του πλέγματος γύρω από το αεροσκάφος.

Κεφάλαιο 5 : Επίλογος

5.1 Ανακεφαλαίωση και Συμπεράσματα

Στη διπλωματική εργασία έγινε εκτενής ανάλυση μίας μεθόδου βελτιστοποίησης 2D και 3D πλεγμάτων. Αρχικά, ορίστηκε μία μετρική ποιότητας πλεγμάτων η οποία είναι κατάλληλη για την αξιολόγησή τους ακόμη και σε μεγάλες παραμορφώσεις των ορίων τους. Ακολούθως, ορίστηκε επαναληπτική διαδικασία προσέγγισης του βέλτιστου πλέγματος ως προς τη συγκεκριμένη μετρική. Η σύγκλιση της διαδικασίας επιτυγχάνεται γρήγορα σε όλα τα παραδείγματα εφαρμογής της, ενώ επίσης δεν απαιτείται η πραγματοποίηση της παραμόρφωσης σε μικρά διαδοχικά βήματα. Τέλος, μελετήθηκαν δύο ειδικές περιπτώσεις πλεγμάτων που χρειάζονται προσοχή, οι οποίες είναι τα πλέγματα με πύκνωση κοντά στα στερεά όρια και τα πλέγματα με κακής ποιότητας διακριτοποίηση των ορίων τους.

Στη διπλωματική εργασία συντάχθηκαν δύο κώδικες σε Fortran 77, ένας για 2D πλέγματα και ένας για 3D πλέγματα. Η μέθοδος βελτιστοποίησης δοκιμάστηκε σε πληθώρα περιπτώσεων πλεγμάτων και παραμορφώσεων των ορίων τους. Τα αποτελέσματα επαληθεύουν ότι η μέθοδος είναι αξιόπιστη και ικανή να χειριστεί ακραίες παραμορφώσεις δίνοντας πλέγμα ικανοποιητικής ποιότητας. Επιπλέον, επαληθεύτηκε η καταλληλότητα των βελτιστοποιημένων πλεγμάτων βάσει της συγκεκριμένης μεθόδου για χρήση σε εφαρμογές CFD.

5.2 Προτάσεις για Μελλοντική Μελέτη

Εν κατακλείδι, αναφέρονται ορισμένα θέματα για περαιτέρω μελέτη και ανάπτυξη του λογισμικού σχετικά με τη μέθοδο βελτιστοποίησης πλεγμάτων που παρουσιάστηκε στη διπλωματική εργασία:

1. Ανάπτυξη υπορουτίνας για την αποτελεσματική διαχείριση της περιοχής κοντά στα στερεά όρια όπου το πλέγμα εμφανίζει μεγάλη πύκνωση, για 2D και 3D πλέγματα. Στο κεφάλαιο 4.4 η μελέτη περιορίστηκε στην περίπτωση παραμόρφωσης η οποία υπακούει σε γνωστό αναλυτικό τύπο, όπως είναι για παράδειγμα η κίνηση απολύτως στερεού σώματος. Εδώ προτείνεται η διεύρυνση της μελέτης όσον αφορά την περίπτωση μιας γενικής παραμόρφωσης των ορίων. Όπως σχολιάστηκε στο κεφάλαιο 4.4, η διαχείριση της περιοχής πύκνωσης του πλέγματος μπορεί να γίνει ξεχωριστά από το υπόλοιπο πλέγμα. Δεν είναι απαραίτητη η χρήση επαναληπτικής μεθόδου βελτιστοποίησης, αλλά αρκεί ένας αλγόριθμος κατάλληλης τοποθέτησης των κόμβων. Μία τέτοια προσέγγιση έχει χαμηλό υπολογιστικό κόστος και εξασφαλίζει τη διατήρηση της ποιότητας του πλέγματος στην περιοχή αυτή, το οποίο είναι βασικό ζητούμενο.
2. Ανάπτυξη υπορουτίνας για τη διαχείριση επιφανειακών πλεγμάτων χαμηλής ποιότητας. Στο κεφάλαιο 4.5 παρουσιάστηκε μία προσέγγιση ανάλογη με αυτή που χρησιμοποιείται για τη διαχείριση μεγάλης πύκνωσης κοντά στα όρια. Επιλέγεται μία περιοχή γύρω από τα όρια και οι κόμβοι που ανήκουν σε αυτή δεν μετέχουν στη διαδικασία βελτιστοποίησης. Είναι κατάλληλη προσέγγιση για την περίπτωση της μεγάλης πύκνωσης, όμως για την περίπτωση επιφανειακών

πλεγμάτων χαμηλής ποιότητας ίσως δεν είναι η προτιμότερη. Προτείνεται ο προγραμματισμός υπορουτίνας η οποία θα λαμβάνει ως είσοδο τα ποιοτικά χαρακτηριστικά των επιφανειακών στοιχείων του πλέγματος και θα τροποποιεί κατάλληλα την έκφραση της δυναμικής των κόμβων που συνδέονται με το όριο.

3. Επέκταση του κώδικα για την περίπτωση υβριδικών πλεγμάτων ή, γενικότερα, πλεγμάτων που δεν αποτελούνται αποκλειστικά από τριγωνικά (ή τετραεδρικά) στοιχεία αλλά από πολυγωνικά (ή πολυεδρικά) στοιχεία. Η διαφοροποίηση στην περίπτωση αυτή έγκειται μόνο στον τύπο της κυκλικότητας (ή σφαιρικότητας) των στοιχείων. Ο ορισμός της συνάρτησης κόστους και άρα του προβλήματος ελαχιστοποίησης που επιλύεται δεν αλλάζει, όπως επίσης και η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείται.
4. Ενδιαφέρον παρουσιάζει, επίσης, η ανάπτυξη μεθόδου βελτιστοποίησης στοχευμένα για μία συγκεκριμένη υποπερίπτωση γεωμετριών ή παραμορφώσεων των πλεγμάτων. Ο περιορισμός της μελέτης σε μία οικογένεια συνήθων παραμορφώσεων, όπως είναι για παράδειγμα οι κινήσεις στερεού σώματος, θα μπορούσε να οδηγήσει στην ανάπτυξη μίας εξειδικευμένης μεθόδου μεγάλης αποτελεσματικότητας και πολύ χαμηλού υπολογιστικού κόστους. Αυτό οφείλεται στο ότι κανείς θα μπορεί να λάβει υπόψη, εν προκειμένω, τη μη-αλλοίωση της γεωμετρίας στην κατασκευή του αλγορίθμου. Για τον ίδιο λόγο, βέβαια, θα είναι μία μέθοδος περιορισμένης χρήσης. Η σκέψη αυτή αναπτύχθηκε ως έναν βαθμό κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας, αλλά δεν συμπεριλήφθηκε στο τελικό κείμενο. Θα μπορούσε να διερευνηθεί περαιτέρω η αξία μίας τέτοιας μεθόδου.

Παράρτημα

Α'.1 Μέθοδος Newton – Raphson

Η μέθοδος Newton – Raphson είναι μία αριθμητική διαδικασία επίλυσης μη-γραμμικών συστημάτων με ρυθμό σύγκλισης δεύτερης τάξης. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή το σύστημα που επιλύεται αφορά την κλίση της συνάρτησης κόστους ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης. Για τον ορισμό της μεθόδου απαιτείται η εύρεση του αντιστρόφου του μητρώου των δευτέρων παραγώγων (hessian matrix) της συνάρτησης κόστους f . Όσον αφορά το εσσιανό μητρώο της f προκύπτει η παρακάτω έκφραση παραγωγίζοντας την εξίσωση (2.12) ως προς τις συντεταγμένες των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος:

$$\nabla^2 f(z) = \sum_{i=1}^N (R_i - R_{max}) \nabla^2 R_i + \nabla R_i \nabla R_i^T \quad (A'.1)$$

$$\text{όπου } \nabla^2 = \begin{pmatrix} \nabla_{1,1}^2 & \cdots & \nabla_{1,M}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \nabla_{M,1}^2 & \cdots & \nabla_{M,M}^2 \end{pmatrix} \text{ με } \nabla_{k,\lambda}^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_k \partial x_\lambda} & \frac{\partial}{\partial x_k \partial y_\lambda} \\ \frac{\partial}{\partial y_k \partial x_\lambda} & \frac{\partial}{\partial y_k \partial y_\lambda} \end{pmatrix} \text{ και } 1 \leq k, \lambda \leq M.$$

Στον όρο i του αθροίσματος εμφανίζεται το εσσιανό μητρώο της κυκλικότητας του τριγώνου i του πλέγματος. Κατ' αναλογία με την εξίσωση (2.12) εάν ένας από τους κόμβους P_k ή $P_\lambda \notin \{P_{i,1}, P_{i,2}, P_{i,3}\}$ ισχύει η σχέση: $\nabla_{k,\lambda}^2 R_i = 0$. Για τη συνιστώσα k, λ του εσσιανού το άθροισμα με δείκτη i από 1 ως N μπορεί να αντικατασταθεί συνεπώς από άθροισμα με $i \in I_k \cap I_\lambda$:

$$\nabla_{k,\lambda}^2 f(z) = \sum_{i \in I_k \cap I_\lambda} (R_i - R_{max}) \nabla_{k,\lambda}^2 R_i + \nabla_k R_i \nabla_\lambda R_i^T \quad (A'.2)$$

όπου I_k, I_λ είναι το σύνολο των τριγώνων που περιβάλλουν τον κόμβο P_k, P_λ αντίστοιχα.

$$\text{ισχύει ότι } \forall i \in I_k \cap I_\lambda \exists m, n \in \{1, 2, 3\} \text{ ώστε: } P_k \equiv P_{i,m}, P_\lambda \equiv P_{i,n}, \nabla_{k,\lambda}^2 R_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_i}{\partial x_{i,m} \partial x_{i,n}} & \frac{\partial R_i}{\partial x_{i,m} \partial y_{i,n}} \\ \frac{\partial R_i}{\partial y_{i,m} \partial x_{i,n}} & \frac{\partial R_i}{\partial y_{i,m} \partial y_{i,n}} \end{pmatrix}.$$

Για τον όρο $\nabla_{k,\lambda}^2 R_i$ προκύπτουν οι εξής σχέσεις παραγωγίζοντας την εξίσωση (2.14):

$$\nabla_{k,\lambda}^2 R_i = \frac{1}{S_i^2} \nabla_{k,\lambda}^2 J_i - 2 \frac{J_i}{S_i^3} \nabla_{k,\lambda}^2 S_i - 2 \frac{J_i}{S_i^3} (\nabla_k J_i \nabla_\lambda S_i^T + \nabla_k S_i \nabla_\lambda J_i^T) + 6 \frac{J_i}{S_i^4} \nabla_k S_i \nabla_\lambda S_i^T \quad (A'.3)$$

όπου J_i, S_i και $\nabla_k J_i, \nabla_k S_i, \nabla_\lambda J_i, \nabla_\lambda S_i$ ορίζονται στις εξισώσεις (2.2), (2.3) και (2.15) ως (2.20) αντίστοιχα.

Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης του εμβαδού και της περιμέτρου του τριγώνου i δίνονται από τους παρακάτω τύπους αναλόγως αν $m, n = 1, 2$ ή 3 :

$$\frac{\partial^2 J_i}{\partial x_{i,m} \partial x_{i,n}} = \frac{\partial^2 J_i}{\partial y_{i,m} \partial y_{i,n}} = \frac{\partial^2 J_i}{\partial x_{i,n} \partial y_{i,n}} = 0, \quad \forall m, n \in \{1, 2, 3\} \quad (A'.4)$$

$$\frac{\partial^2 J_i}{\partial x_{i,1} \partial y_{i,2}} = \frac{\partial^2 J_i}{\partial x_{i,2} \partial y_{i,3}} = \frac{\partial^2 J_i}{\partial x_{i,3} \partial y_{i,1}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 J_i}{\partial x_{i,2} \partial y_{i,1}} = \frac{\partial^2 J_i}{\partial x_{i,3} \partial y_{i,2}} = \frac{\partial^2 J_i}{\partial x_{i,1} \partial y_{i,3}} = -\frac{1}{2} \quad (A'.5)$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x_{i,1}^2} = \frac{(y_{i,1} - y_{i,2})^2}{\|\vec{P}_{i,1} P_{i,2}\|^3} + \frac{(y_{i,1} - y_{i,3})^2}{\|\vec{P}_{i,1} P_{i,3}\|^3}, \quad \frac{\partial^2 S_i}{\partial y_{i,1}^2} = \frac{(x_{i,1} - x_{i,2})^2}{\|\vec{P}_{i,1} P_{i,2}\|^3} + \frac{(x_{i,1} - x_{i,3})^2}{\|\vec{P}_{i,1} P_{i,3}\|^3} \quad (A'.6)$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x_{i,2}^2} = \frac{(y_{i,2} - y_{i,1})^2}{\|\vec{P}_{i,2} P_{i,1}\|^3} + \frac{(y_{i,2} - y_{i,3})^2}{\|\vec{P}_{i,2} P_{i,3}\|^3}, \quad \frac{\partial^2 S_i}{\partial y_{i,2}^2} = \frac{(x_{i,2} - x_{i,1})^2}{\|\vec{P}_{i,2} P_{i,1}\|^3} + \frac{(x_{i,2} - x_{i,3})^2}{\|\vec{P}_{i,2} P_{i,3}\|^3} \quad (A'.7)$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x_{i,3}^2} = \frac{(y_{i,3} - y_{i,1})^2}{\|\vec{P}_{i,3} P_{i,1}\|^3} + \frac{(y_{i,3} - y_{i,2})^2}{\|\vec{P}_{i,3} P_{i,2}\|^3}, \quad \frac{\partial^2 S_i}{\partial y_{i,3}^2} = \frac{(x_{i,3} - x_{i,1})^2}{\|\vec{P}_{i,3} P_{i,1}\|^3} + \frac{(x_{i,3} - x_{i,2})^2}{\|\vec{P}_{i,3} P_{i,2}\|^3} \quad (A'.8)$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x_{i,1} \partial y_{i,1}} = -\frac{(x_{i,1} - x_{i,2})(y_{i,1} - y_{i,2})}{\|\vec{P}_{i,1} P_{i,2}\|^3} - \frac{(x_{i,1} - x_{i,3})(y_{i,1} - y_{i,3})}{\|\vec{P}_{i,1} P_{i,3}\|^3} \quad (A'.9)$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x_{i,2} \partial y_{i,2}} = -\frac{(x_{i,2} - x_{i,1})(y_{i,2} - y_{i,1})}{\|\vec{P}_{i,2} P_{i,1}\|^3} - \frac{(x_{i,2} - x_{i,3})(y_{i,2} - y_{i,3})}{\|\vec{P}_{i,2} P_{i,3}\|^3} \quad (A'.10)$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x_{i,3} \partial y_{i,3}} = -\frac{(x_{i,3} - x_{i,1})(y_{i,3} - y_{i,1})}{\|\vec{P}_{i,3} P_{i,1}\|^3} - \frac{(x_{i,3} - x_{i,2})(y_{i,3} - y_{i,2})}{\|\vec{P}_{i,3} P_{i,2}\|^3} \quad (A'.11)$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x_{i,1} \partial x_{i,2}} = -\frac{(y_{i,1} - y_{i,2})^2}{\|\vec{P}_{i,1} P_{i,2}\|^3}, \quad \frac{\partial^2 S_i}{\partial y_{i,1} \partial y_{i,2}} = -\frac{(x_{i,1} - x_{i,2})^2}{\|\vec{P}_{i,1} P_{i,2}\|^3} \quad (A'.12)$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x_{i,1} \partial x_{i,3}} = -\frac{(y_{i,1} - y_{i,3})^2}{\|\vec{P}_{i,1} P_{i,3}\|^3}, \quad \frac{\partial^2 S_i}{\partial y_{i,1} \partial y_{i,3}} = -\frac{(x_{i,1} - x_{i,3})^2}{\|\vec{P}_{i,1} P_{i,3}\|^3} \quad (A'.13)$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x_{i,2} \partial x_{i,3}} = -\frac{(y_{i,2} - y_{i,3})^2}{\|\vec{P}_{i,2} P_{i,3}\|^3}, \quad \frac{\partial^2 S_i}{\partial y_{i,2} \partial y_{i,3}} = -\frac{(x_{i,2} - x_{i,3})^2}{\|\vec{P}_{i,2} P_{i,3}\|^3} \quad (A'.14)$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x_{i,1} \partial y_{i,2}} = \frac{\partial^2 S_i}{\partial x_{i,2} \partial y_{i,1}} = \frac{(x_{i,1} - x_{i,2})(y_{i,1} - y_{i,2})}{\|\vec{P}_{i,1} P_{i,2}\|^3} \quad (A'.15)$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x_{i,1} \partial y_{i,3}} = \frac{\partial^2 S_i}{\partial x_{i,3} \partial y_{i,1}} = \frac{(x_{i,1} - x_{i,3})(y_{i,1} - y_{i,3})}{\|\vec{P}_{i,1} P_{i,3}\|^3} \quad (A'.16)$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x_{i,2} \partial y_{i,3}} = \frac{\partial^2 S_i}{\partial x_{i,3} \partial y_{i,2}} = \frac{(x_{i,2} - x_{i,3})(y_{i,2} - y_{i,3})}{\|\vec{P}_{i,2} P_{i,3}\|^3} \quad (A'.17)$$

όπου $\vec{P}_{i,1} P_{i,2}, \vec{P}_{i,2} P_{i,3}, \vec{P}_{i,1} P_{i,3}$ ορίζονται για το τρίγωνο i από την εξίσωση (2.4).

Στην εξίσωση (A.1) το εσσιανό μητρώο έχει διαστάσεις $2M \times 2M$ και είναι συμμετρικό. Επιπλέον, εμφανίζει τις εξής ιδιότητες: είναι αραιό (sparse), δηλαδή το πλήθος των μη-μηδενικών στοιχείων του είναι της τάξης $\sim M \ll M^2$ και τυχαίο (random), άρα δεν εμφανίζει κάποια συγκεκριμένη δομή εφόσον έχει προέλθει από μη-δομημένο πλέγμα.

Επικαλούμενοι τη συμμετρία και την αραιότητα του είναι δυνατό να αποφευχθεί η αποθήκευσή του ως αντικειμένου διαστάσεων $2M \times 2M$. Βάσει της συμμετρίας αρκεί η πληροφορία μόνο του ενός εκ των δύο τριγωνικών τμημάτων του μητρώου. Λόγω της αραιότητας τα μη-μηδενικά στοιχεία του μητρώου είναι της τάξης $\sim 2Mc$ όπου $c \ll M$. Κατά την κατασκευή του πλέγματος υφίσταται περιορισμός στον αριθμό των άμεσα γειτονικών κόμβων με τους οποίους μπορεί να συνδέεται ένας κόμβος P_k , δηλαδή ισχύει: $N_k \leq c, \forall 1 \leq k \leq M$ με c ανεξάρτητο του M , ενδεικτικά στις δύο διαστάσεις $c < 15$, ενώ στις τρεις διαστάσεις $c < 200$. Γνωρίζοντας την πληροφορία των συνδέσεων (connectivity) μεταξύ των κόμβων του μη-δομημένου πλέγματος, καθίσταται εφικτή η αντιστοίχιση της αποθηκευμένης πληροφορίας με τους κατάλληλους όρους του μητρώου.

Η αναδρομική σχέση στη μέθοδο Newton – Raphson ορίζεται ως εξής:

$$z_{n+1} = z_n - (\nabla^2 f(z_n))^{-1} \nabla f(z_n) \quad (A'.18)$$

όπου ∇f και $\nabla^2 f$ ορίζονται από τις εξισώσεις (2.12) και (A'.1) αντίστοιχα.

A'.2 Μέθοδος των Συζυγών Κλίσεων

Στη n -οστή επανάληψη της βελτιστοποίησης ενός πλέγματος βάσει της μεθόδου Newton – Raphson επιλύεται το σύστημα: $\nabla^2 f(z_n) \Delta z_n = -\nabla f(z_n)$, όπου f είναι η συνάρτηση κόστους του προβλήματος. Η λύση του μπορεί να προσεγγισθεί μέσω αριθμητικής μεθόδου επίλυσης γραμμικών συστημάτων. Μία χαρακτηριστική περίπτωση συνιστά η μέθοδος των συζυγών κλίσεων (conjugate gradient), βάσει της οποίας ορίζεται εσωτερική επαναληπτική διαδικασία w_k τέτοια ώστε: $\lim w_k = \Delta z_n$.

Ακολουθεί η περιγραφή της μεθόδου των συζυγών κλίσεων στη γενική περίπτωση ενός γραμμικού συστήματος: $Ax = b$ με $A : M \times M$. Για μη-ιδιόμορφο μητρώο η λύση του συστήματος είναι μοναδική και αποτελεί θέση ελαχίστου για την τετραγωνική μορφή φ :

$$\varphi(x) = x^T A x - b^T x \quad (A'.19)$$

$$\nabla \varphi(x) = 0 \Rightarrow Ax - b = 0 \quad (A'.20)$$

Για την ευστάθεια της μεθόδου ο πίνακας A απαιτείται να είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος (positive-definite) δηλαδή να ισχύουν οι ιδιότητες: $A^T = A$, $x^T A x > 0 \forall x \neq 0$. Εν προκειμένω, επαληθεύεται εύκολα η πρώτη ιδιότητα λόγω της ύπαρξης f τέτοιας ώστε $A = \nabla^2 f$, όπου η συνάρτηση f ορίζεται από την εξίσωση (2.8) και το εσσιανό της μητρώο από την εξίσωση (A'.1).

Ορίζεται η κατεύθυνση ανίχνευσης και το υπόλοιπο για την κ -οστή επανάληψη της μεθόδου ως εξής:

$$p_\kappa = r_\kappa - \sum_{i < \kappa} \frac{p_i^T A r_\kappa}{p_i^T A r_i} p_i \quad (A'.21)$$

$$r_\kappa = b - A w_\kappa \quad (A'.22)$$

Προκύπτει ότι $\{r_i\}$ είναι κάθετα ανά ζεύγη μεταξύ τους και $\{p_i\}$ είναι κάθετα ανά ζεύγη ως προς τον πίνακα A , δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις: $r_i^T r_j = p_i^T A p_j = \delta_j^i$, όπου δ_j^i το δέλτα του Kronecker. Βάσει των ιδιοτήτων αυτών αντιμετωπίζεται το ζήτημα της αναγκαιότητας αποθήκευσης $\{r_i, p_i, \text{ με } i < \kappa\}$ για τον υπολογισμό του p_κ .

Ορίζεται το βήμα της μεθόδου a_κ και η νέα κατάσταση: $w_{\kappa+1} = w_\kappa + a_\kappa p_\kappa$. Η επιλογή του βήματος γίνεται ώστε να επιτυγχάνεται η μέγιστη μείωση της φ κατά την κατεύθυνση p_κ διασφαλίζοντας την ευστάθεια στη σύγκλιση της μεθόδου (πληρούνται, δηλαδή, οι συνθηκες Wolf).

$$\psi(a_\kappa) = \varphi(w_\kappa + a_\kappa p_\kappa) \quad (A'.23)$$

$$\psi'(a_\kappa) = 0 \Rightarrow p_\kappa^T \nabla \varphi(w_\kappa + a_\kappa p_\kappa) = 0 \Rightarrow a_\kappa = \frac{p_\kappa^T r_\kappa}{p_\kappa^T A p_\kappa} \quad (A'.24)$$

Ως κριτήριο σύγκλισης της μεθόδου ορίζεται: $\|r_\kappa\| < 0.01 \|r_{\kappa=0}\| \Rightarrow \|A w_\kappa - b\| < 0.01 \|b\|$.

Παρατίθεται ο αλγόριθμος της μεθόδου των συζυγών κλίσεων σε μορφή ψευδοκώδικα:

$$w_0 = 0$$

$$r_0 = p_0 = b$$

$$\text{For } \kappa = 0, m - 1$$

$$a_\kappa = \frac{r_\kappa^T r_\kappa}{p_\kappa^T A p_\kappa}$$

$$w_{\kappa+1} = w_\kappa + a_\kappa p_\kappa$$

$$r_{\kappa+1} = r_\kappa - a_\kappa A p_\kappa$$

$$\beta_\kappa = \frac{r_{\kappa+1}^T r_{\kappa+1}}{r_\kappa^T r_\kappa}$$

$$p_{\kappa+1} = r_\kappa + \beta_\kappa p_\kappa$$

$$w_m \sim A^{-1} b$$

Α'.3 Άνω Φράγμα της Μετατόπισης ενός Κόμβου του Πλέγματος

Αναπτύσσεται μία διαδικασία προσδιορισμού ενός άνω φράγματος για το μέτρο της μετατόπισης ενός κόμβου P_k σε 2Δ πλέγμα. Η δυναμική του κόμβου ακολουθεί τη θεώρηση που γίνεται στην ενότητα 3.2.2. Το μέτρο της μετατόπισης συμβολίζεται με \mathcal{M} και προκύπτει από τη σχέση:

$$\mathcal{M} = \|(\dot{x}_k, \dot{y}_k)\| \quad (A'.25)$$

όπου (\dot{x}_k, \dot{y}_k) ορίζεται από την εξίσωση (3.28).

Μελετάται η απλή περίπτωση πλέγματος ενός μόνο τριγώνου, με κορυφές τους κόμβους P_1, P_2, P_3 και επιλέγεται αυθαίρετα να οριστεί το μέτρο της μετατόπισης \mathcal{M} για τον κόμβο $P_{k=2}$.

Υιοθετούνται, αρχικά, οι παρακάτω συμβολισμοί:

$$\Delta x_{i,j} = x_j - x_i, \quad \Delta y_{i,j} = y_j - y_i \quad (A'.26)$$

$$\|\cdot\|_{i,j} = \|(\Delta x_{i,j}, \Delta y_{i,j})\| \quad (A'.27)$$

όπου $i, j \in \{1,2,3\}$ και x_i, y_i οι συντεταγμένες του κόμβου i .

Η εκφράσεις του εμβαδού και της περιμέτρου του τριγώνου, όπως ορίζονται στις εξισώσεις (2.2) και (2.3) αντίστοιχα, επαναδιατυπώνονται βάσει των συμβολισμών (A'.26) και (A'.27) ως εξής:

$$J = \frac{1}{2} (\Delta x_{1,2} \Delta y_{1,3} - \Delta x_{1,3} \Delta y_{1,2}) \quad (A'.28)$$

$$S = \|\cdot\|_{1,2} + \|\cdot\|_{1,3} + \|\cdot\|_{2,3} \quad (A'.29)$$

Για το μέτρο της μετατόπισης \mathcal{M} του κόμβου P_2 ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} S^2 \mathcal{M}^2 &= \Delta y_{1,3}^2 S^2 - 4 \Delta y_{1,3} S J \left(\frac{\Delta x_{1,2}}{\|\cdot\|_{1,2}} - \frac{\Delta x_{2,3}}{\|\cdot\|_{2,3}} \right) + 4 J^2 \left(\frac{\Delta x_{1,2}}{\|\cdot\|_{1,2}} - \frac{\Delta x_{2,3}}{\|\cdot\|_{2,3}} \right)^2 + \\ &+ \Delta x_{1,3}^2 S^2 + 4 \Delta x_{1,3} S J \left(\frac{\Delta y_{1,2}}{\|\cdot\|_{1,2}} - \frac{\Delta y_{2,3}}{\|\cdot\|_{2,3}} \right) + 4 J^2 \left(\frac{\Delta y_{1,2}}{\|\cdot\|_{1,2}} - \frac{\Delta y_{2,3}}{\|\cdot\|_{2,3}} \right)^2 \Rightarrow \\ S^2 \mathcal{M}^2 &= \|\cdot\|_{1,3}^2 S^2 - 4 S J^2 \left(\frac{1}{\|\cdot\|_{1,2}} + \frac{1}{\|\cdot\|_{2,3}} \right) + 8 J^2 \left(1 - \frac{\Delta x_{1,2} \Delta x_{2,3} + \Delta y_{1,2} \Delta y_{2,3}}{\|\cdot\|_{1,2} \|\cdot\|_{2,3}} \right) \end{aligned} \quad (A'.30)$$

Η εξίσωση (A'.30) μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως εξής:

$$S^2 \mathcal{M}^2 = \|\cdot\|_{1,3}^2 S^2 + 8 J^2 - 4 \Phi J^2 \quad (A'.31)$$

$$\Phi = 2 \frac{\Delta x_{1,2} \Delta x_{2,3} + \Delta y_{1,2} \Delta y_{2,3}}{\|\cdot\|_{1,2} \|\cdot\|_{2,3}} + S \left(\frac{1}{\|\cdot\|_{1,2}} + \frac{1}{\|\cdot\|_{2,3}} \right) \quad (A'.32)$$

Αποδεικνύεται μέσω συνεπαγωγών ότι $\Phi \geq 0$:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{1,2} \|\cdot\|_{2,3} \Phi &= 2 (\Delta x_{1,2} \Delta x_{2,3} + \Delta y_{1,2} \Delta y_{2,3}) + S (\|\cdot\|_{1,2} + \|\cdot\|_{2,3}) \geq 0 \Rightarrow \\ 2 (\Delta x_{1,2} \Delta x_{2,3} + \Delta y_{1,2} \Delta y_{2,3}) + \|\cdot\|_{1,2}^2 + \|\cdot\|_{2,3}^2 + 2 \|\cdot\|_{1,2} \|\cdot\|_{2,3} + \|\cdot\|_{1,3} (\|\cdot\|_{1,2} + \|\cdot\|_{2,3}) &\geq 0 \Rightarrow \\ (\Delta x_{1,2} + \Delta x_{2,3})^2 + (\Delta y_{1,2} + \Delta y_{2,3})^2 + 2 \|\cdot\|_{1,2} \|\cdot\|_{2,3} + \|\cdot\|_{1,3} (\|\cdot\|_{1,2} + \|\cdot\|_{2,3}) &\geq 0, \text{ το οποίο ισχύει.} \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, η εξίσωση (Α'.30) συνεπάγεται ότι:

$$\begin{aligned} S^2 M^2 &\leq \|\cdot\|_{1,3}^2 S^2 + 8 J^2 \Rightarrow \\ \mathcal{M} &\leq \frac{1}{S} \sqrt{\|\cdot\|_{1,3}^2 S^2 + 8 J^2} \leq \sqrt{\|\cdot\|_{1,3}^2 + 8 S^2 R^2} \leq S \sqrt{\frac{1}{4} + 8 R^2} \leq \frac{S}{6} \sqrt{9 + 8 \sqrt{3}} \quad (\text{Α'.33}) \end{aligned}$$

όπου R είναι η κυκλικότητα του τριγώνου, η οποία ορίζεται από την εξίσωση (2.1).

Η ανισότητα (Α'.33) γράφεται ως: $\mathcal{M} \leq 0.797 S$ και αποτελεί φράγμα για το μέτρο της μετατόπισης του κόμβου. Για να προκύψει η ανισότητα έγινε η παραδοχή της ισχύος ταυτόχρονα δύο οριακών αλλά και αντικρουόμενων σχέσεων: $R = R_{max}$ και $\|\cdot\|_{1,3} = \frac{S}{2} \Rightarrow J = 0$, κατά συνέπεια το φράγμα λογίζεται ως αρκετά «ελαστικό».

Συμπερασματικά, το μέτρο της μετατόπισης ενός κόμβου είναι της ίδιας τάξης με την περίμετρο του τριγώνου στο οποίο ο κόμβος ανήκει ($\mathcal{M} \sim S$). Το γεγονός αυτό συνιστά ένδειξη της ευστάθειας της επαναληπτικής μεθόδου της ενότητας 3.2.2 και προβλέπεται ότι συμβάλλει στη δυνατότητα της μεθόδου να χειριστεί μεγάλες παραμορφώσεις χωρίς χρήση ενδιάμεσων βημάτων.

Βιβλιογραφία

- [1] Anderson, W., Venkatakrishnan, V., «Aerodynamic Design Optimization on Unstructured Grids with a Continuous Adjoint Formulation», *Computers & Fluids* 28: 443-480, 1999.
- [2] Liseikin, V.D., *A Computational Differential Geometry Approach to Grid Generation*, Springer, 2013.
- [3] Helenbrook, B.T., «Mesh Deformation Using the Biharmonic Operator», *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 56 (7): 1007-1021, 2003.
- [4] Blom, F.J., «Considerations on the spring analogy», *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 32 (6): 647-668, 2000.
- [5] Farhat, C., Degand, C., Koobus, B., Lesoinne, M., «Torsional Springs for Two-Dimensional Dynamic Unstructured Fluid meshes», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 163: 231-245, 1998.
- [6] Liu, X., Qin, N., Xia, H., «Fast Dynamic Grid Deformation Based on Delaunay Graph Mapping», *Journal of Computational Physics* 211: 405-423, 2006.
- [7] Boer, A. de, Schoot, M.S. van der, Bijl, H., «Mesh Deformation Based on Radial Basis Function Interpolation», *Computers and Structures* 85: 784-795, 2007.
- [8] Sterck De, H., Howse J.M. A., «Nonlinearly Preconditioned L-BFGS as an Acceleration Mechanism for Alternating Least Squares, with Application to Tensor Decomposition», *arXiv:1803.08849* [math.NA], Cornell University, 27.6.2018.
- [9] Burden, R. L., Douglas Faires, J., Burden, A. M., *Numerical Analysis*, Cengage Learning, 2015.
- [10] Bottega Diniz, F., «Condition number and matrices», *arXiv:1703.04547* [math.GM], Cornell University, 16.3.2017.
- [11] Tsopeles, I., *Integration of the GPU-Enabled CFD Solver PUMA into the Workflow of a Turbomachinery Industry. Testing and Validation*, Diploma Thesis, National Technical University of Athens, School of Mechanical Engineering, Department of Fluid Mechanics, Laboratory of Thermal Turbomachinery, September 2018.
- [12] Jiangtao, H., Zhenghong, G., Chao, W., «A New Grid Deformation Technology with High Quality and Robustness based on Quaternion», *Chinese Journal of Aeronautics* 27 (5): 1078-1085, 2014.
- [13] Alexias, P.P., De Villiers, Eu., «Sphericity: Mesh Optimisation for Arbitrary Element Topology», στο M. Papadarakakis, V. Papadopoulos, G. Stefanou, V. Plevris (επιμ.), *VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*: 3797-3811, VII Συνέδριο ECCOMAS, Κρήτη, 5-10 Ιουνίου 2016.
- [14] Τσολοβίκος, Α., «Προσαρμογή υπολογιστικών πλεγμάτων με χρήση γράφων Delaunay - Εφαρμογές στη βελτιστοποίηση με χρήση της συζυγούς μεθόδου», πτυχιακή εργασία ΕΜΠ, Φεβρουάριος 2018.

- [15] Giles, M.B., Pierce, N.A., «An Introduction to the Adjoint Approach to Design», *Flow, Turbulence and Combustion* 65: 393-415, 2001.
- [16] Kavvadias, I.S., Papoutsis-Kiachagias, E.M., Giannakoglou, K.C., On the Proper Treatment of Grid Sensitivities in Continuous Adjoint Methods for Shape Optimization, *Journal of Computational Physics* 301: 1-18, 2015.
- [17] Zymaris, A., Papadimitriou, D., Giannakoglou, K., Othmer, C., «Continuous adjoint approach to the Spalart- Allmaras turbulence model for incompressible flows», *Computers & Fluids* 38 (8):1528-1538, 2009.
- [18] Papadimitriou, D.I., Giannakoglou, K.C., «A Continuous Adjoint Method with Objective Function Derivatives Based on Boundary Integrals for Inviscid and Viscous Flows», *Computers & Fluids* 36 (2): 325-341, 2007.
- [19] Amirante, D., Hills, N.J., Barnes, C.J., «A Moving Mesh Algorithm for Aero-thermomechanical Modelling in Turbomachinery», *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 70 (9): 1118-1138, 2012.
- [20] Carry, A., Sturlerz De, E., Gugercin, S., «Preconditioning Parametrized Linear Systems», *arXiv:1601.05883v6 [math.NA]*, Cornell University, 17.12.2020.
- [21] Cao, H.-P., Li, D.-H., «Partitioned quasi-Newton Methods for Sparse Nonlinear Equations», *Computational Optimization and Applications* 66: 481-505, 2017.
- [22] Abgrall, R., Beaugendre, H., Dobrzynski, C., «An Immersed Boundary Method Using Unstructured Anisotropic Mesh Adaptation Combined with Level-Sets and Penalization Techniques», *Journal of Computational Physics* 257: 83-101, 2014.
- [23] Aulisa, Eu., Manservigi, S., Scardovelli, R., Zaleski, S., «A Geometrical Area-Preserving Volume-of-Fluid Advection Method», *Journal of Computational Physics* 192 (1): 355-364, 2003.
- [24] Batina, J.T., «Unsteady Euler Algorithms with Unstructured Dynamic Mesh for Complex-aircraft Aerodynamic Analysis», *AIAA Journal* 29 (3): 327-333, 1991.
- [25] Benson, D., «Volume of Fluid Interface Reconstruction Methods for Multimaterial Problems», *Applied Mechanics Reviews* 52: 151-165, 2002.
- [26] Berger, M., Olinger, J., «Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Partial Differential Equations», *Journal of Computational Physics* 53: 484-512, 1984.
- [27] Bogaers, A.E.J., Kok, S., Malan, A.G., «Highly Efficient Optimization Mesh Movement Method Based on Proper Orthogonal Decomposition», *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 86 (8): 935-952.
- [28] Design Optimization», *Engineering with Computers* 30 (2): 161-174, 2014.
- [29] Edelsbrunner, H., *Algorithms in Combinatorial Geometry*, Springer-Verlag, 1987.

- [30] Gibou, F., Fedkiw, R., Osher S., «A Review of Level-Set Methods and Some Recent Applications», *Journal of Computational Physics* 353 (C): 82-109, 2018.
- [31] Graham, R.L., «An Efficient Algorithm for Determining the Convex Hull of a Finite Planar Set», *Information Processing Letters* 1: 132-133, 1972.
- [32] Green, P.J., Sibson, R., «Computing Dirichlet Tessellations in the Plane», *Computer Journal* 21 (2): 168-173, 1978.
- [33] Guibas, L., Stol, J.: «Primitives for the Manipulation of General Subdivisions and the Computation of Voronoi Diagrams», *ACM Transactions on Graphics* 4 (2): 74-123, 1985.
- [34] Guittet, A., Lepilliez, M., Tanguy, S., Gibou, F., «Solving Elliptic Problems with Discontinuities on Irregular Domains – The Voronoi Interface Method», *Journal of Computational Physics* 298: 747-765, 2015.
- [35] Guittet, A., Poignard, C., Gibou, F., «A Voronoi Interface Approach to Cell Aggregate Electropermeabilization», *Journal of Computational Physics* 332: 143-159, 2017.
- [36] Huang, W., Ren, Y., Russell, R.D., «Moving Mesh Methods Based on Moving Mesh Partial Differential Equations», *Journal of Computational Physics* 113: 279-290, 1994.
- [37] Karpouzas, G.K., Papoutsis-Kiachagias, E.M., Schumacher, T., Villiers, E., Giannakoglou, K.C., Othmer, C., «Adjoint Optimization for Vehicle External Aerodynamics», *International Journal of Automotive Engineering* 7 (1): 1-7, 2016.
- [38] Lawson, C.L., «Generation of a Triangular Grid with Applications to Contour Plotting», California Institute of Technology, Jet Propulsion Laboratory, *Technical Memorandum* 299, 1972.
- [39] Min, Ch., Gibou, F., «Geometric Integration over Irregular Domains with Application to Level-Set Methods», *Journal of Computational Physics* 226: 1432-1443, 2007.
- [40] Morgan, N.R., Waltz, J.I., «3d Level Set Methods for Evolving Fronts on Tetrahedral Meshes with Adaptive Mesh Refinement», *Journal of Computational Physics* 336: 492-512, 2017.
- [41] Nocedal, J., «Updating Quasi-Newton Matrices with Limited Storage», *Mathematics of Computation* 35 (151): 773-782, 1980.
- [42] Papac, J., Helgadottir, A., Ratsch, Ch., Gibou, F., «A Level Set Approach for Diffusion and Stefan-Type Problems with Robin Boundary Conditions on Quadtree/Octree Adaptive Cartesian Grids», *Journal of Computational Physics* 233: 241-261, 2013.
- [43] Preparata, F., Shamos, M., *Computational Geometry – An Introduction*, Springer-Verlag, 1985.
- [44] Provatas, N., Goldenfeld, N., Dantzig, J., «Efficient Computation of Dendritic Microstructures Using Adaptive Mesh Refinement», *Physical Review Letters* 80: 3308-3311, 1998.
- [45] Provatas, N., Goldenfeld, N., Dantzig J., «Adaptive Mesh Refinement Computation of Solidification Microstructure using Dynamic Data Structures», *Journal of Computational Physics* 148: 265-290, 1999.

- [46] Russo, G., Smereka, P., «A Remark on Computing Distance Functions», *Journal of Computational Physics* 163: 51-67, 2000.
- [47] Stuck, A., Rung, T., «Filtered Gradients for Adjoint-based Shape Optimisation», στο *20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Χονολουλού, Χαβάη, 27-30 Ιουνίου 2011.
- [48] Sussman, M., Smereka, P., Osher S., «A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow», *Journal of Computational Physics* 114 (1): 146-159, 1994.
- [49] Tryggvason, G., Bunner, B., Esmaeeli, A., Juric, D., Al-Rawahi, N., Tauber, W., Han, J., Nas, S., Jan Y.-J., «A Front-Tracking Method for the Computations of Multiphase Flow», *Journal of Computational Physics* 169: 708-759, 2001.
- [50] Wang, Y., Qin, N., Zhao, N., «Delaunay Graph and Radial Basis Function for Fast Quality Mesh Deformation», *Journal of Computational Physics* 294 (C): 149-172, 2015.
- [51] Wang, Y., Qin, N., Zhao, N., «Delaunay Graph Based Inverse Distance Weighting for Fast Dynamic Meshing», *Communications in Computational Physics* 21 (5): 1282-1309, 2017.
- [52] Watson, D.F., «Computing the n-dimensional Delaunay Tessellation with Application to Voronoi Polytopes», *The Computer Journal* 24 (2): 167-172, 1981.
- [53] Weiser, A., *Local-Mesh, Local-Order, Adaptive Finite Element Methods with a Posteriori Error Estimators for Elliptic Partial Differential Equations*, PhD thesis, Yale University, June 1981.
- [54] Witteveen, J.A.S., Bijl, H., «Explicit Mesh Deformation Using Inverse Distance Weighting interpolation», στο *19th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, San Antonio, Texas, AIAA-2009-3996, 2009.
- [55] Wolfe, Ph., «Convergence Conditions for Ascent Methods II», *SIAM Review* 13 (2): 185-188, Απρίλιος 1971.