

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

Η συνεχής συζυγής μέθοδος για τον έλεγχο ροής με  
δέσμες ρευστού - Εφαρμογή σε τριδιάστατη  
περιστρεφόμενη πτερύγωση συμπιεστή

Διπλωματική Εργασία

Παντελής Γ. Κουλλαπής

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου , Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2013



## Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου (continuous adjoint method) για τον ενεργητικό έλεγχο της ροής (active flow control) ασυμπίεστου ρευστού σε τριδιάστατη περιστρεφόμενη πτερύγωση αξονικού συμπιεστή χωρίς διάκενο (shrouded rotor) έτσι ώστε να έχουμε μείωση των απωλειών σχετικής ολικής πίεσης διαμέσου της πτερύγωσης στη λειτουργία της εκτός του σημείου σχεδιασμού.

Οι συζυγείς μέθοδοι χρησιμοποιούνται για την εύρεση της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης, η οποία εκφράζει τις απώλειες σχετικής ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου του χωρίου ροής ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Οι μεταβλητές σχεδιασμού σε ένα πρόβλημα ενεργητικού ελέγχου της ροής είναι εικονικές ταχύτητες<sup>1</sup> στα στερεά όρια όπως είναι το πτερύγιο (blade), το κέλυφος κεφαλής (shroud) ή/και ποδός (hub). Οι συνεχείς συζυγείς εξισώσεις, οι οριακές συνθήκες και οι παραγώγοι ευαισθησίας προκύπτουν από την παραγωγή της συνάρτησης κόστους επαυξημένης με το ολοκλήρωμα, σε όλο το πεδίο, του γινομένου των εξισώσεων κατάστασης (εξισώσεις Navier Stokes) και των συζυγών μεταβλητών. Στην παρούσα εφαρμογή, κατά την πιο πάνω διαδικασία έγινε η υπόθεση της παγωμένης τυρβώδους συνεκτικότητας, δηλαδή οι εξισώσεις του μοντέλου τύρβης δεν συμμετείχαν στην παραγωγή και η τυρβώδης συνεκτικότητα θεωρήθηκε ανεξάρτητη των μεταβλητών σχεδιασμού. Οι εξισώσεις του συζυγούς προβλήματος διακριτοποιούνται και επιλύονται με τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες και έτσι προσδιορίζεται το πεδίο των συζυγών μεταβλητών. Στη συνέχεια, υπολογίζεται ο χάρτης παραγώγων ευαισθησίας που θα υποδείξει τις καταλληλότερες θέσεις τοποθέτησης δεσμών ρευστού για τη μείωση των απωλειών.

Γενικά, ο ενεργητικός έλεγχος της ροής με τη χρήση δεσμών ρευστού χρησιμοποιείται γιατί είναι ικανός να αυξήσει σημαντικά την άνωση και να μειώσει την οπισθέλκουσα σε αεροτομές, καθώς επίσης και να μειώσει τις απώλειες ολικής πίεσης σε αγωγούς με την αναρρόφηση ή την έγχυση μικρής ποσότητας ρευστού. Αυτό γίνεται γιατί ελέγχεται κατάλληλα η ανάπτυξη του οριακού στρώματος, η οποία παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην αποτροπή ή στην καθυστέρηση της αποκόλλησης της ροής.

Στην εργασία αυτή, μετά την εύρεση των καταλληλότερων, σύμφωνα με το χάρτη παραγώγων ευαισθησίας, θέσεων τοποθέτησης δεσμών ρευστού και του είδους της δέσμης (αναρρόφησης ή έγχυσης ρευστού) με σκοπό την ελαχιστοποίηση των απωλειών σχετικής ολικής πίεσης διαμέσου της περιστρεφόμενης πτερύγωσης, γίνονται διάφορες παραμετρικές διερευνήσεις. Από τα αποτελέσματα της διερεύνησης επιβεβαιώνεται η εύρεση της καταλληλότερης (μεταξύ των εξεταζόμενων) θέσης τοποθέτησης δέσμης όπως προέκυψε από την εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου και εξάγονται συμπεράσματα σχετικά με την παροχή και την κατανομή ταχύτητας της δέσμης.

<sup>1</sup>Οι ταχύτητες αυτές δεν είναι υπαρκτές δεδομένου ότι στο στερεό όριο ισχύει η συνθήκη μη εισχώρησης (συνεκτική ροή), έχουν όμως την έννοια ότι θα υφίστανται εάν και εφόσον στην εκάστοτε θέση επιλεγεί να τοποθετηθεί δέσμη αναρρόφησης ή έγχυσης ρευστού.

Πέρα από την εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για τον ενεργητικό έλεγχο της ροής σε τριδιάστατη περιστρεφόμενη περύγωση αξονικού συμπιεστή, γίνεται και σύγκριση των αποτελεσμάτων του ευθέως προβλήματος όταν σε αυτό χρησιμοποιούνται διαφορετικά μοντέλα τύρβης καθώς και διαφορετικό λογισμικό επίλυσης. Συγκεκριμένα γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ των μοντέλων τύρβης Spalart-Allmaras (μιας διαφορικής εξίσωσης) και k-ε, k-ω SST (δύο διαφορικών εξισώσεων) καθώς και των αποτελεσμάτων του ανοικτού λογισμικού OpenFOAM με το οικείο λογισμικό, το οποίο χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση των εξισώσεων της ροής σε άλλη, παράλληλα εξελισσόμενη, διπλωματική εργασία. Το ανοικτό λογισμικό χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) και κεντροκυβελική διατύπωση πεπερασμένων όγκων για την επίλυση των εξισώσεων Navier - Stokes και τρέχει σε παράλληλους επεξεργαστές (CPUs), ενώ το οικείο λογισμικό χρησιμοποιεί τη μέθοδο της τεχνητής συμπιεστότητας (Artificial Compressibility) με κεντροκομβική διατύπωση πεπερασμένων όγκων και τρέχει σε κάρτες γραφικών (GPUs).

# Abstract

The aim of this diploma thesis is the adaptation and use of continuous adjoint methods for the active flow control of incompressible fluids, in a three dimensional rotating axial compressor cascade (shrouded rotor cascade). The purpose of active flow control is the minimization of relative total pressure losses between the inlet and outlet of the domain in an off-design point operation of the engine.

The adjoint method is used to compute the derivatives of the objective function which, in the application of the current thesis, is expressed by the relative total pressure losses between the inlet and outlet of the domain, with respect to the design variables. The design variables in an active flow control problem are virtual velocities at wall boundaries <sup>2</sup> (in a rotor cascade wall boundaries are the blade, the hub and the shroud). To do so, the objective function, augmented with the integral, across the field, of the product of the state equations (which in this case are the Navier-Stokes equations), is used in order to find the adjoint equations, the corresponding boundary conditions and the sensitivity derivatives. In the present thesis, the usual assumption of frozen turbulence is used. According to this assumption, the turbulence model quantities are not affected by the control variables. The partial differential equations of the adjoint problem are discretized and solved to determine the field of the adjoint variables and, through them, their sensitivity derivatives with respect to the design variables of the problem. Then, the sensitivity derivatives map is produced and indicates the best locations for placement of active flow control devices (steady suction or blowing jets).

Generally, active control of the flow with the use of steady jets is used because it provides significant increase in airfoil lift and reduction in the total pressure losses in channels with the injection or suction of small quantities of fluid. This results to an adequate development of the boundary layer and leads to reduction or even prevention of flow separation.

In the present thesis, after finding the most promising locations for placement and the type (suction or blowing) of jets according to the sensitivity derivatives map, a parametric study is carried out. The results of this parametric study confirm that the continuous adjoint method locates the best, between the examined, position for placement of jets. Also, conclusions according jet's mass flow rate and velocity profile are exported.

Beside the use of continuous adjoint methods for the active flow control in a three dimensional rotating axial compressor cascade, comparisons are carried out between the results of primal problem when different turbulence models and different softwares are used. Specifically, the different turbulence models used here are the one equation Spalart-Allmaras and the two equations  $k - \epsilon$  and  $k - \omega$  *SST*. The

---

<sup>2</sup>Those velocities don't actually exist because of the zero normal velocity at wall boundaries; they only exist if suction or blowing jet is located at each position.

different softwares are the open source OpenFOAM and an in-house developed software. The in-house software is used to numerically solve Navier - Stokes equation in a parrallel evolving diploma thesis. The open source software runs on parallel CPU units, uses the SIMPLE algorithm(Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) to numerically solve Navier - Stokes equation and the cell-centered finite volume formulation, while the in-house software runs on a GPU unit, uses the artificial compressibility method and the vertex-centered finite volume formulation.

## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου, για τη δυνατότητα που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα, την καθοδήγηση και τις συμβουλές του κατά την διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας εργασίας και για τη δυνατότητα χρήσης του τεχνικού εξοπλισμού της Μονάδας παράλληλης υπολογιστικής ρευστοδυναμικής και βελτιστοποίησης.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τους υποψήφιους διδάκτορες Γιάννη Καβαδία και Βαγγέλη Παπουτσή, καθώς και τη Δρ. Βαρβάρα Ασούτη, χωρίς την βοήθεια των οποίων η έγκαιρη ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής θα ήταν αδύνατη. Παράλληλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω και το υπόλοιπο προσωπικό του εργαστηρίου για την προθυμία βοήθειας οποιαδήποτε στιγμή. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους φίλους μου για την στήριξη και τη συμπαράστασή τους κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

# Περιεχόμενα

<b>Περιεχόμενα</b>	<b>viii</b>
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Έλεγχος ροής . . . . .	1
1.1.1 Γενικά . . . . .	1
1.1.2 Έλεγχος ροής στις στροβιλομηχανές . . . . .	5
1.2 Συζυγείς μέθοδοι . . . . .	9
1.3 Δομή της εργασίας . . . . .	12
<b>2 Ευθύ πρόβλημα - Εξισώσεις ροής</b>	<b>15</b>
2.1 Εξισώσεις ροής . . . . .	15
2.2 Αλγόριθμος SIMPLE για την επίλυση των εξισώσεων της ροής . . . . .	16
2.3 Υλοποίηση αλγόριθμου SIMPLE στο OpenFOAM . . . . .	20
2.4 Χρησιμοποιούμενα μοντέλα τύρβης . . . . .	21
2.4.1 Μοντέλο τύρβης Spalart-Allmaras . . . . .	22
2.4.2 Μοντέλο τύρβης k-ε . . . . .	23
2.4.3 Μοντέλο τύρβης k-ω SST . . . . .	25
<b>3 Η συνεχής συζυγής μέθοδος για στρωτές ροές ασυμπίεστου   ρευστού</b>	<b>27</b>
3.1 Διατύπωση των εξισώσεων ροής / εξισώσεων κατάστασης . . . . .	27
3.2 Εισαγωγή στις συνεχείς συζυγείς εξισώσεις . . . . .	28
3.3 Χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις κόστους . . . . .	31
3.3.1 Ελαχιστοποίηση απωλειών σχετικής ολικής πίεσης . . . . .	32



3.4	Διατύπωση συνεχών συζυγών εξισώσεων και οριακών συνθηκών . . . .	34
3.4.1	Συζυγείς συνθήκες στα όρια εισόδου $S_I$ . . . . .	37
3.4.2	Συζυγείς συνθήκες στα όρια εξόδου $S_O$ . . . . .	38
3.4.3	Συζυγείς συνθήκες στα στερεά όρια $S_W$ . . . . .	39
3.4.4	Συζυγείς συνθήκες στα περιοδικά όρια . . . . .	40
3.4.5	Τελική - γενική έκφραση παραγώγων ευαισθησίας . . . . .	41
3.5	Ελαχιστοποίηση απωλειών σχετικής ολικής πίεσης . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Επίλυση του ευθέως προβλήματος - συγκρίσεις</b>	<b>43</b>
4.1	Γεωμετρία της περιστρεφόμενης πτερύγωσης συμπιεστή και υπολογιστικό χωρίο . . . . .	43
4.2	Σύγκριση αποτελεσμάτων με χρήση διαφορετικών μοντέλων τύρβης . .	46
4.3	Σύγκριση αποτελεσμάτων για επίλυση με διαφορετικό λογισμικό . . . .	57
<b>5</b>	<b>Αποτελέσματα εφαρμογής συνεχούς συζυγούς μεθόδου για τον έλεγχο ροής με δέσμες ρευστού</b>	<b>63</b>
5.1	Επίλυση του ευθέως προβλήματος για λειτουργία εκτός σημείου σχεδιασμού . . . . .	64
5.2	Επίλυση του συζυγούς προβλήματος . . . . .	70
5.3	Παραμετρική διερεύνηση της χρήσης ελέγχου ροής . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα</b>	<b>87</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>91</b>



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Έλεγχος ροής

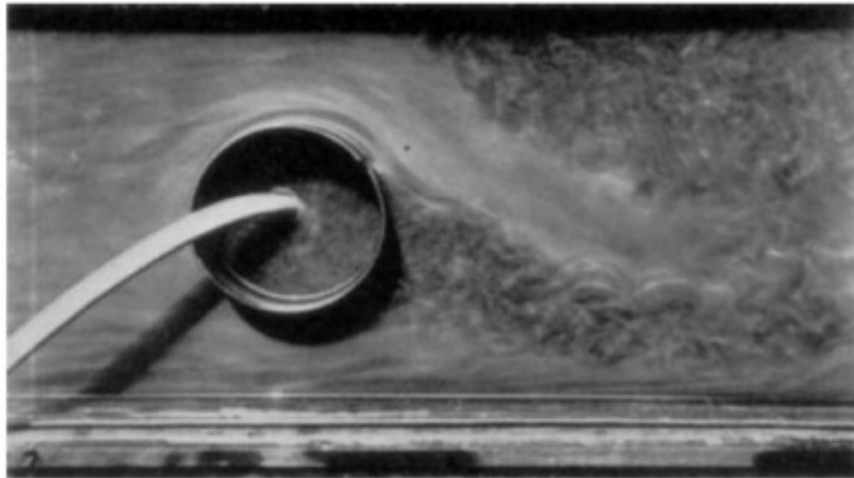
#### 1.1.1 Γενικά

Η ικανότητα να μεταβάλλεται άμεσα η γεωμετρία και έμμεσα το πεδίο ροής με σκοπό να αυξηθεί η απόδοση μιας συνιστώσας ή ενός συστήματος αποτελεί τα τελευταία χρόνια μια περιοχή έρευνας με ολοένα και αυξανόμενο επιστημονικό ενδιαφέρον, εξαιτίας κυρίως της ενεργειακής κρίσης και της προσπάθειας για μείωση των παραγόμενων ρύπων. Σκοπός του ελέγχου της ροής μπορεί να είναι η καθυστέρηση ή η επίσπευση της μετάβασης της ροής από στρωτή σε τυρβώδη, η καταστολή ή ενίσχυση του τυρβώδους χαρακτήρα της ροής και η επίτευξη ή όχι αποκόλλησης της ροής. Τα αποτελέσματα μπορεί να είναι: μείωση της αντίστασης, αύξηση της άνωσης, καλύτερη μεταφορά θερμότητας και αύξηση της ανάμιξης λόγω τυρβώδους πεδίου, μείωση του παραγόμενου από τη ροή θορύβου, κλπ.

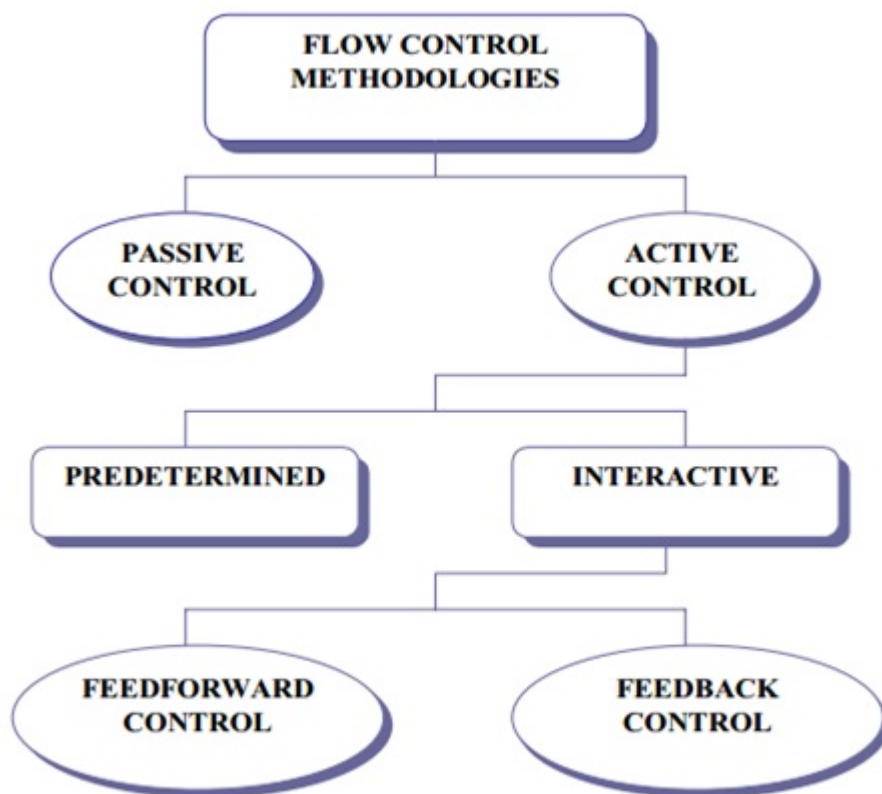
Ο Prandtl ήταν ο πρώτος που απέδειξε, το 1904, ότι με την αναρρόφηση ρευστού, επιτυγχάνεται καθυστέρηση στην αποκόλληση του οριακού στρώματος από την επιφάνεια ενός κυλίνδρου, σχήμα 1.1. Η αναρρόφηση αυτή απομακρύνει τμήμα του ρευστού που βρίσκεται κοντά στο τοίχωμα και τείνει να αποκολληθεί αφού έχει χαμηλή ενέργεια.

Για το λόγο αυτό, οι μέθοδοι του σύγχρονου ελέγχου ροής είναι στενά συνδεδεμένοι με την ιστορία της θεωρίας του οριακού στρώματος και τη θεωρία ευστάθειας της ροής. Ο έλεγχος της ροής ενός ρευστού μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους όπως φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος 1.2.

Ανάλογα με την κατανάλωση ενέργειας, έχουμε δύο κατηγορίες ελέγχου της ροής:



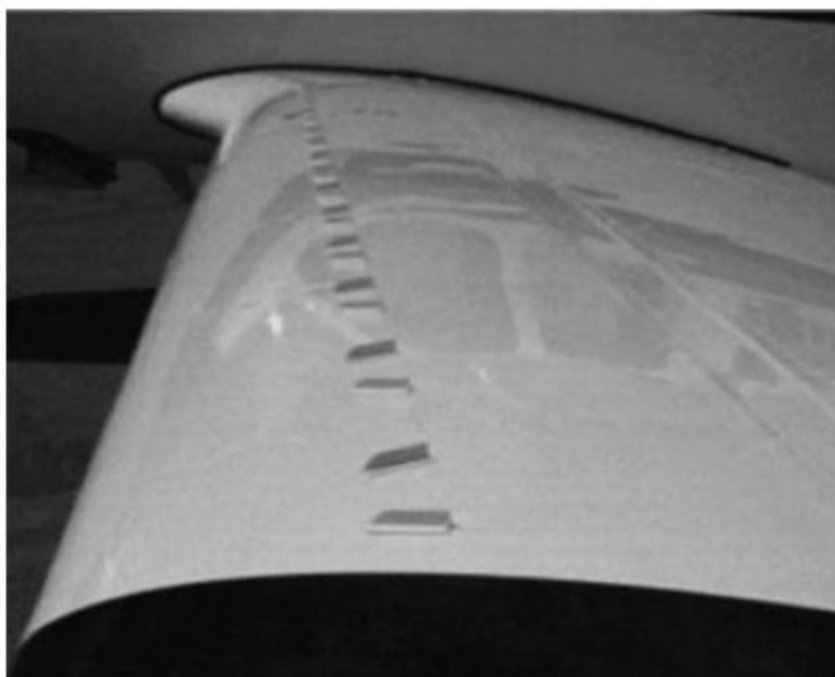
Σχήμα 1.1: Φωτογραφία του Prandtl με απεικόνιση της απορρόφησης ρευστού γύρω από κύλινδρο [1].



Σχήμα 1.2: Ταξινόμηση των μεθόδων ελέγχου ροής.

1) Παθητικός έλεγχος της ροής (Passive Flow Control). Στον παθητικό έλεγ-

χο, δεν υπάρχει κατανάλωση ενέργειας και ο έλεγχος γίνεται με την τοποθέτηση σωμάτων συγκεκριμένης γεωμετρικής μορφής σε μια δεδομένη κατασκευή με στόχο τη βελτίωση των αεροδυναμικών της χαρακτηριστικών. Για παράδειγμα, μπορούν να αναφερθούν οι γεννήτριες στροβιλισμών (Vortex Generators) , σχήμα 1.3 που τοποθετούνται σε διάφορα τμήματα των αεροσκαφών (άτρακτος, πτέρυγες, κάθετο σταθερό) με στόχο να αλλοιώσουν τα χαρακτηριστικά της ροής. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούνται για την πρόσδοση ενέργειας στο τυρβώδες οριακό στρώμα και την καθυστέρηση του φαινομένου αποκόλλησης της ροής, με αποτέλεσμα τη μείωση της ταχύτητας απώλειας στήριξης.



**Σχήμα 1.3:** Γεννήτριες στροβιλισμού στο πτερύγιο του αεροσκάφους *Beech Bonanza* [1].

Η τροποποίηση της γεωμετρίας των αεροδυναμικών επιφανειών μιας κατασκευής μπορεί να είναι μόνιμη, κατά την οποία οι αεροδυναμικές επιφάνειες ενισχύονται με ειδικούς σχηματισμούς κατά τη στιγμή της κατασκευής τους, όπως δηλαδή συμβαίνει στην περίπτωση των γεννητριών στροβιλισμών (Vortex Generators), αλλά και μη-μόνιμη όπως συμβαίνει με τα slats και flaps σε ένα αεροσκάφος που αυξάνουν, όταν χρειάζεται, την άνωση και μειώνουν την ταχύτητα απώλειας στήριξης.

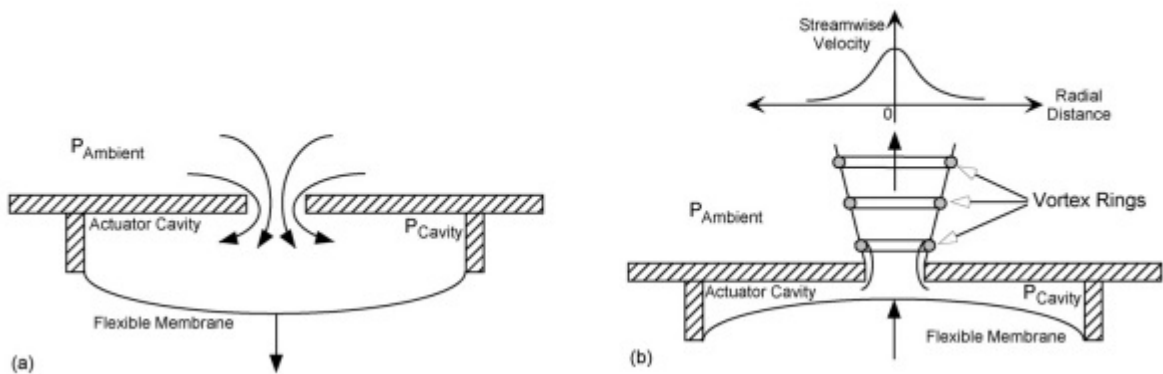
2) **Ενεργητικός έλεγχος της ροής** (Active Flow Control). Ο ενεργητικός έλεγχος περιλαμβάνει τεχνικές ελεγχόμενης αναρρόφησης (Suction) ή έγχυσης (Blowing) ρευστού της κύριας ροής με σκοπό την τροποποίηση της. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ρεύματα ρευστού θα εισέρχονται ή θα εξέρχονται από το πεδίο ροής, από συγκε-

κρυμμένες θέσεις με χρήση ενός επενεργητή. Τα τελευταία χρόνια έχει δοθεί μεγάλη έμφαση στις τεχνικές αυτού του είδους, αφού ο ενεργητικός έλεγχος ροής προσφέρει ορισμένα πλεονεκτήματα σε επιδόσεις σε σχέση με τον παθητικό. Για παράδειγμα, μπορεί να απενεργοποιηθεί όταν δεν χρειάζεται, ή να προσαρμόζεται στις μεταβαλλόμενες συνθήκες λειτουργίας, με το ανάλογο πάντα κόστος όπως το γεγονός ότι είναι συνήθως πιο πολύπλοκος να εφαρμοστεί σε σχέση με τις παθητικές μεθόδους λόγω της χρήσης επενεργητή (πιο σύνθετη κατασκευή). Η ενεργητική μέθοδος ελέγχου μπορεί να έχει πολλές παραλλαγές και να εφαρμοστεί με επιτυχία σε τεράστιο πλήθος εφαρμογών.

Αρχικά διακρίνονται δύο επιμέρους ενεργητικές τεχνικές, η χρονικά μόνιμη και η χρονικά μη-μόνιμη. Στην πρώτη κατηγορία εντάσσονται η ελεγχόμενη συνεχής έγχυση και η ελεγχόμενη συνεχής αναρρόφηση, ενώ στη δεύτερη κατηγορία εντάσσονται οι σύνθετες και οι παλλόμενες δέσμες ρευστού.

Οι δέσμες μόνιμης ροής προϋποθέτουν μια πιο πολύπλοκη κατασκευή, που περιλαμβάνει όλες τις σωληνώσεις από τις οποίες θα διέρχεται το δευτερεύον ρεύμα του ρευστού, την αντλία με την οποία θα διακινείται και, πιθανώς, κάποια δεξαμενή για την αποθήκευσή του, όταν αυτό δεν βρίσκεται σε ελεύθερη μορφή.

Στις σύνθετες και τις παλλόμενες δέσμες η κατασκευαστική διάταξη είναι πολύ απλούστερη. Οι σύνθετες δέσμες βασίζονται στην περιοδική εναλλαγή μεταξύ των φάσεων της αναρρόφησης και της έγχυσης του ρευστού, κατά τρόπο ώστε η παροχή μάζας διαμέσου του ακροφυσίου δέσμης να παραμένει μηδενική ανά περίοδο. Έτσι, δημιουργούνται περιοδικοί παλμοί παροχής αποτελούμενοι από το ρευστό της κύριας ροής, το οποίο αναρροφάται και εκτοξεύεται με μεγάλη ταχύτητα, χάρη στην περιοδική κίνηση ενός διαφράγματος μέσα στο θάλαμο συγκέντρωσης του ρευστού. Οι παλλόμενες δέσμες αποτελούν επίσης πηγές περιοδικών παλμών παροχής, με τη διαφορά ότι η παροχή που εγχέεται ανά περίοδο είναι είτε θετική είτε αρνητική. Στο σχήμα 1.4 φαίνεται ένας μηχανισμός παραγωγής σύνθετης δέσμης ο οποίος αποτελείται από μια κοιλότητα με οπή προσαρμοσμένη στην επιφάνεια του σώματος και μια κινούμενη μεμβράνη-διάφραγμα η οποία διεγείρεται από έναν επενεργητή.



Σχήμα 1.4: Παραγωγή σύνθετης δέσμης [2].

Μια άλλη κατηγοριοποίηση των ενεργητικών μεθόδων ελέγχου της ροής μπορεί να γίνει αναλόγως του αν ο έλεγχος αυτός λαμβάνει υπόψη την κατάσταση της ροής (με χρήση κάποιων αισθητήρων για παράδειγμα ) και μεταβάλλει τα χαρακτηριστικά του οπότε έχουμε την περίπτωση του διαδραστικού (interactive) ενεργητικού ελέγχου ή αν αυτός δεν μεταβάλλεται δηλαδή είναι προκαθορισμένος (predetermined).

### 1.1.2 Έλεγχος ροής στις στροβιλομηχανές

Στις σύγχρονες εφαρμογές των στροβιλομηχανών, όπως για παράδειγμα στους κινητήρες αεροσκαφών, γίνεται μεγάλη προσπάθεια για τη μείωση του βάρους, του όγκου και του κόστους κατασκευής τους. Οι μειώσεις αυτές μπορούν να γίνουν με χρήση λιγότερων βαθμίδων στο τμήμα ενός αξονικού συμπιεστή. Καθώς όμως οι βαθμίδες σε έναν συμπιεστή μειώνονται, ο λόγος πίεσης σε καθεμιά από αυτές αυξάνει και η επιβράδυνση της ροής γίνεται σε μεγαλύτερο βαθμό. Το αποτέλεσμα της μεγαλύτερης φόρτισης μιας βαθμίδας είναι η αποκόλληση της ροής στα πτερύγια και η μείωση της απόδοσης και του λόγου πίεσης.

Επίσης, η λειτουργία μιας στροβιλομηχανής εκτός σημείου σχεδιασμού χαρακτηρίζεται από τη χαμηλή απόδοση του συμπιεστή, που σε μερικές περιπτώσεις συνοδεύεται από την εμφάνιση φαινομένων ασταθούς λειτουργίας σε αυτόν, όπως είναι η περιστροφική αποκόλληση (ανάπτυξη κυψελών αποκολλημένης ροής) και η πάλμωση (συνολικές ταλαντώσεις της ροής διαμέσου του δακτυλιοειδούς αγωγού). Η ασταθής λειτουργία του συμπιεστή μπορεί να οδηγήσει στην καταστροφή του, λόγω του συνδυασμού των κατασκευαστικών ταλαντώσεων που προκαλούνται από την περιοδικότητα των φαινομένων ασταθούς λειτουργίας με τις υψηλές ταχύτητες περιστροφής και τις αυξήσεις της θερμοκρασίας λόγω χαμηλού βαθμού απόδοσης.

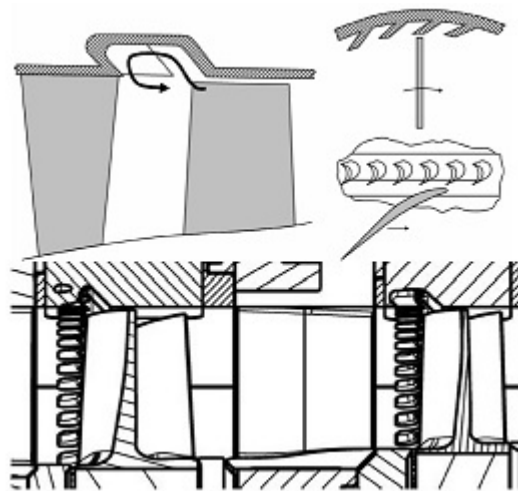
Επομένως, η ομαλή λειτουργία μιας στροβιλομηχανής, όπως ο αεριοστρόβιλος, εξαρτάται κατά κύριο λόγο από το συμπιεστή. Οι μέθοδοι ελέγχου της ροής που χρησιμοποιούνται ή δοκιμάζονται σήμερα για την αύξηση της περιοχής ευσταθούς λειτουργίας ενός αξονικού συμπιεστή είναι οι εξής:

- **Διαμόρφωση κελύφους** (casing treatment), σχήμα 1.5.

Πρόκειται για παιθητική μέθοδο ελέγχου της ροής που αυξάνει το περιθώριο πάλμωσης (surge margin), δηλαδή αυξάνει την περιοχή ασφαλούς λειτουργίας ενός συμπιεστή αλλά συνήθως συνοδεύεται και από πτώση της απόδοσης στο σημείο σχεδιασμού.

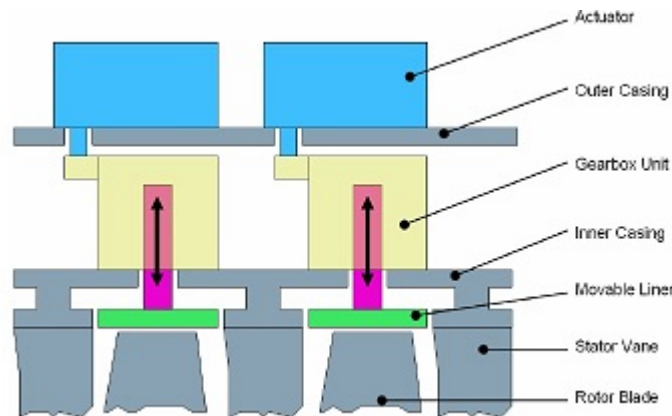
-**Ενεργός έλεγχος διακένου ακροπτερυγίου - κελύφους** (active tip clearance control), σχήμα 1.6.

Το διάκενο μεταξύ του ακροπτερυγίου της περιστρεφόμενης πτερύγωσης και του κελύφους σε έναν συμπιεστή μεταβάλλεται σημαντικά λόγω των μεταβατικών φαινομένων και της χειροτέρευσης της μηχανής. Λόγω του μικρού ύψους των πτερυγίων στις βαθ-



**Σχήμα 1.5:** Διαμόρφωση κελύφους σε αξονικό συμπιεστή που χρησιμοποιήθηκε σε πείραμα. [3].

μίδες υψηλής πίεσης ενός πολυβάθμιου συμπιεστή, οι αλλαγές στα διάκενα μεταβάλλουν σημαντικά (συνήθως αρνητικά) την απόδοση και την ευστάθεια του. Με τον έλεγχο του διακένου επιτυγχάνεται ουσιώδης βελτίωση στην απόδοση.

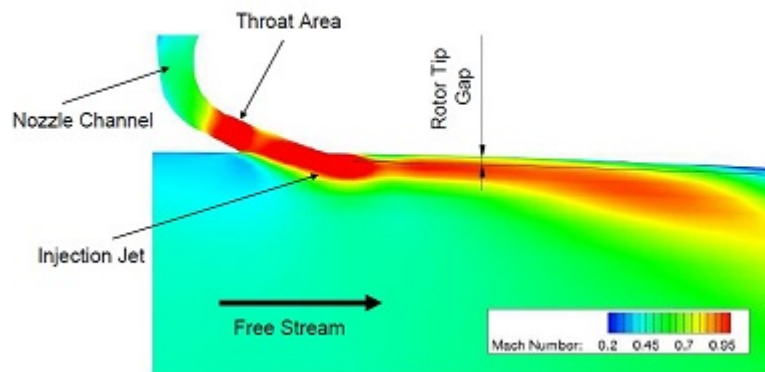


**Σχήμα 1.6:** Διάγραμμα διάταξης για τον ενεργό έλεγχο του διακένου ακροπτερυγίου περιστρεφόμενης πτερύγωσης - κελύφους σε πολυβάθμιο συμπιεστή [4].

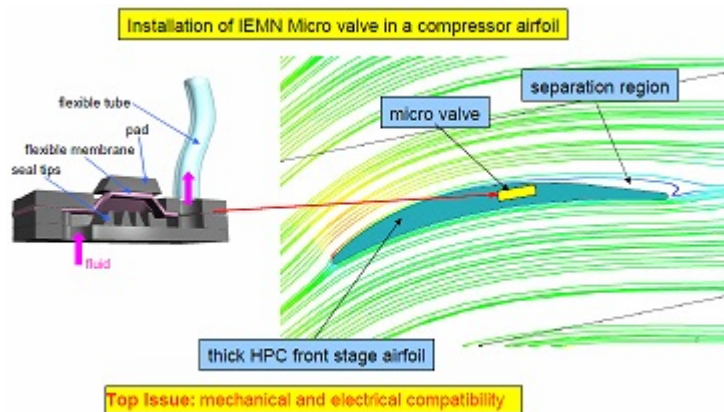
-**Έγχυση ρευστού στο ακροπτερύγιο (tip injection)**, σχήματα 1.7 και 1.8. Στη μέθοδο αυτή, χρησιμοποιείται ενεργητικός έλεγχος της ροής μέσω δεσμών ρευστού τοποθετημένων στο κέλυφος. Επιτυγχάνεται η αύξηση της ευστάθειας ενός πολυβάθμιου συμπιεστή σε συνθήκες μερικού φορτίου καθώς και η αύξηση της απόδοσης και του περιθωρίου πάλμωσης σε χαμηλές ταχύτητες περιστροφής. Το πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής σε σχέση με τη διαμόρφωση κελύφους είναι ότι μπορεί να απενεργοποιηθεί κατά τη λειτουργία στο σημείο σχεδιασμού και έτσι να μην μειώνεται η απόδοση. Η μέθοδος αυτή αναμένεται να χρησιμοποιηθεί σε πραγματικές μηχανές κατά το 2020.



## Active Surge Control by Tip Injection



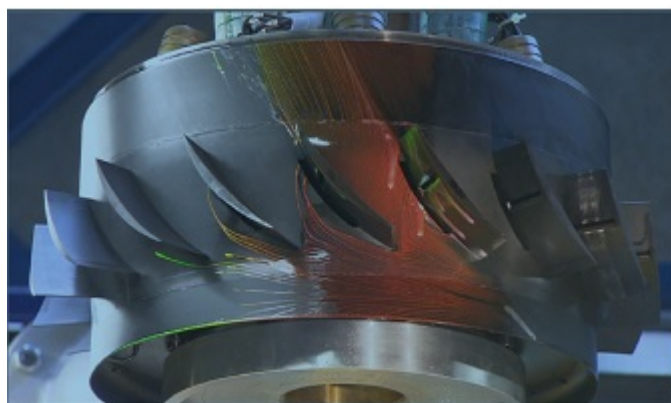
Σχήμα 1.7: Ενεργός έλεγχος της πάλμωσης με έγχυση ρευστού στο ακροπτερύγιο [4].



Σχήμα 1.8: Χρήση μικροβαλβίδων (micro valve) για την αναρρόφηση ή έγχυση ρευστού στο ακροπτερύγιο[5].

-Έγχυση ή αναρρόφηση ρευστού στην πτερύγωση, σχήμα 1.9.

Τα τελευταία χρόνια πολλές ερευνητικές ομάδες ασχολούνται με την υπολογιστική και πειραματική διερεύνηση της χρήσης ελέγχου της ροής με αναρρόφηση ή έγχυση ρευστού σε πτερυγώσεις συμπιεστών για την καθυστέρηση ή την αποτροπή της αποκόλλησης. Στις εργασίες [6] και [7] έγινε σχεδιασμός και δοκιμή μιας βαθμίδας συμπιεστή που επιτυγχάνει λόγο πίεσης 3.4 με περιφερειακή ταχύτητα ακροπτερυγίου  $457.2 \frac{m}{s}$  και παροχή δέσμης αναρρόφησης 3.5% της αναρροφούμενης παροχής. Στην εργασία [8] έγινε σχεδιασμός μιας βαθμίδας συμπιεστή με λόγο πίεσης 1.6 και περιφερειακό αριθμό Mach 0.7 στο ακροπτερύγιο. Η αναρρόφηση ρευστού στην τελευταία εργασία γινόταν από σχισμές στην πλευρά υποπίεσης της περιστρεφόμενης/σταθερής πτερύγωσης, στο τύμπανο (hub) της σταθερής και στο κέλυφος (shroud) της περιστρεφόμενης πτερύγωσης. Στην εργασία [9] χρησιμοποιήθηκαν δέσμες σταθερής έγχυσης ρευστού



**Σχήμα 1.9:** Αναρρόφηση ρευστού στην πτερύγωση [4].

σε βαθμίδα συμπίεστή υπό υψηλή φόρτιση και παρατηρήθηκε βελτίωση της απόδοσης καθώς και δυνατότητα ελέγχου του οριακού στρώματος (και συνεπακόλουθα της αποκόλλησης της ροής). Στην εργασία [10] έγινε διερεύνηση της μόνιμης και μη μόνιμης έγχυσης ρευστού στην πλευρά υποπίεσης της σταθερής πτερύγωσης πολυβάθμιου συμπίεστή. Παρατηρήθηκε ότι η έγχυση ρευστού στην πλευρά υποπίεσης της πτερύγωσης δεν είχε μεγάλη επίπτωση στη μείωση των απωλειών. Στην εργασία [11] έγινε υπολογιστική διερεύνηση της χρήσης ενεργητικού ελέγχου της ροής σε διδιάστατη σταθερή πτερύγωση συμπίεστή με δέσμες μόνιμης και μη μόνιμης (synthetic jet) έγχυσης και αναρρόφησης ρευστού. Οι παραμέτροι της διερεύνησης ήταν η θέση, το μέτρο και η γωνία της δέσμης. Παρατηρήθηκε ότι η βελτίωση της απόδοσης είναι μεγαλύτερη όταν το μέτρο της δέσμης αυξάνει, όταν η αναρρόφηση γίνεται κάθετα ως προς το τοίχωμα, η έγχυση εφαπτομενικά προς αυτό και η μη μόνιμη αναρρόφηση και έγχυση σε γωνίες από  $-40^\circ$  έως  $40^\circ$ . Η βέλτιστη θέση μόνιμης αναρρόφησης βρέθηκε ανάντι του χρονικά μέσου σημείου αποκόλλησης στη θέση  $l = 15.6\%$  της χορδής.

Η δυσκολία εφαρμογής ενεργητικού ελέγχου της ροής σε περιστρεφόμενες πτερυγώσεις στροβιλομηχανών σε πραγματικές εφαρμογές σήμερα έγκειται στο βάρος των μικροβαλβίδων, που λόγω και των υψηλών ταχυτήτων περιστροφής αναπτύσσουν μεγάλες φυγόκεντρες δυνάμεις. Μπορεί όμως να εφαρμοστεί, σχετικά εύκολα, αναρρόφηση χωρίς τη χρήση μικροβαλβίδων (δημιουργία υποπίεσης εντός του πτερυγίου για παράδειγμα και χρήση του αναρροφούμενου αέρα για την ψύξη των πτερυγίων του στροβίλου).

Το γενικό συμπέρασμα από τα πιο πάνω είναι ότι ο ενεργητικός έλεγχος της ροής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αύξηση του εύρους λειτουργίας των συμπίεστών (και κατ'επέκταση των στροβιλομηχανών), δηλαδή επιτρέπει την ασφαλή και αποδοτική λειτουργία σε σημεία εκτός του σημείου σχεδιασμού.

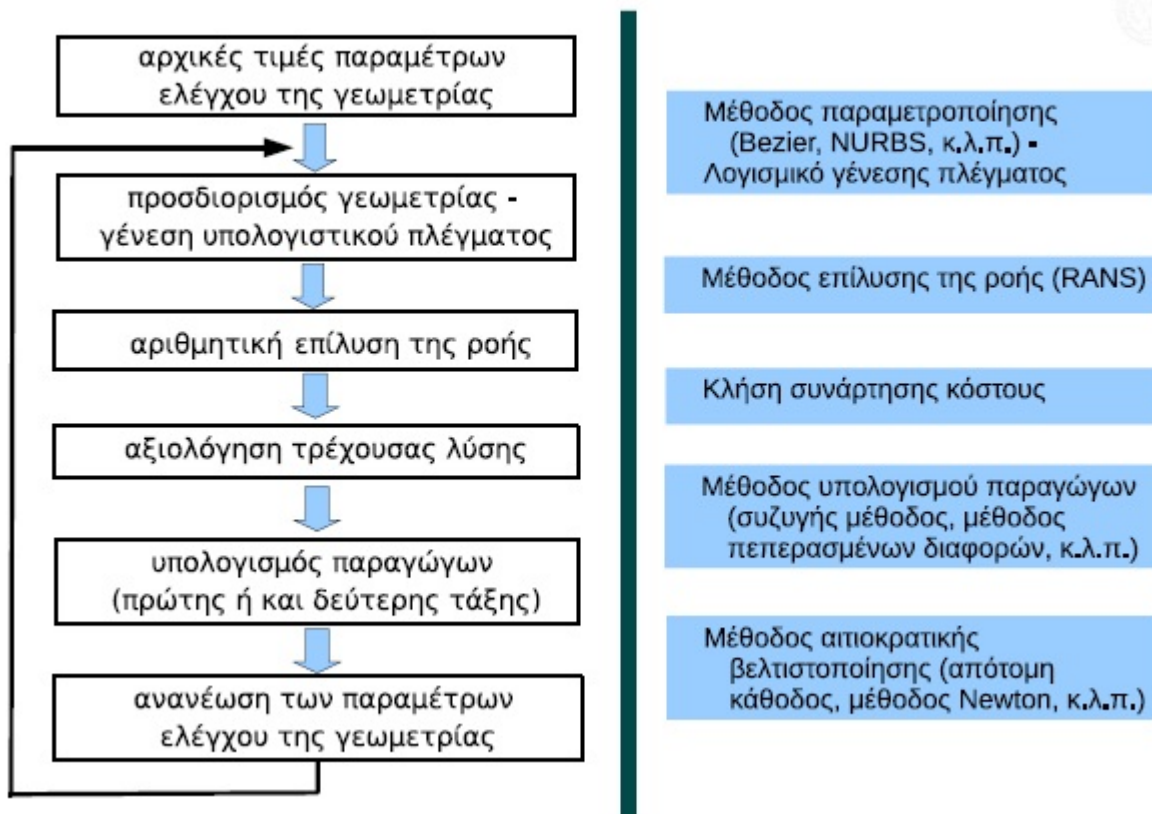
## 1.2 Συζυγείς μεθόδοι

Οι συζυγείς μεθόδοι (adjoint methods) πρωτοξεκίνησαν από τη θεωρία ελέγχου και χρησιμοποιούνται ως μέθοδος βελτιστοποίησης, σε συνδυασμό με τεχνικές ανόδου ή καθόδου, σε φυσικά προβλήματα που περιγράφονται από συστήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων (εξισώσεις κατάστασης). Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελούν οι εξισώσεις Navier Stokes. Συγκεκριμένα, οι συζυγείς μεθόδοι υπολογίζουν τις παραγώγους ευαισθησίας (sensitivity derivatives) της αντικειμενικής συνάρτησης (ή συνάρτησης στόχου) ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και χρησιμοποιούνται σε αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης βασισμένες στην κλίση της συνάρτησης στόχου (gradient based optimization methods).

Ένα παράδειγμα χρήσης των συζυγών μεθόδων στην αεροδυναμική είναι η εύρεση της βέλτιστης θέσης των σημείων ελέγχου της καμπύλης μιας αεροτομής που παραμετροποιείται με πολώνυμα Bezier - Bernstein, όταν η συνάρτηση στόχος είναι η μείωση της οπισθέλκουσας σε προκαθορισμένες συνθήκες ροής. Δηλαδή, με χρήση των συζυγών μεθόδων θα υπολογιστούν οι παράγωγοι ευαισθησίας οι οποίες θα μεταβάλλουν τα σημεία ελέγχου κατά τρόπο ώστε να μειωθεί η οπισθέλκουσα, ενώ αν η όλη διαδικασία ενταχθεί σε μια διαδικασία βελτιστοποίησης όπως φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος 1.10 τότε θα προσδιοριστεί η θέση των σημείων ελέγχου που δίνει καμπύλη αεροτομής με ελάχιστη οπισθέλκουσα (βέλτιστη λύση).

Πέρα όμως από τη διαδικασία βελτιστοποίησης, οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίζονται από τις συζυγείς μεθόδους μπορούν να αξιοποιηθούν σε χάρτες παραγώγων ευαισθησίας (sensitivity maps), δίνοντας στο μηχανικό μια ένδειξη για τις περιοχές που επηρεάζουν σημαντικά την τιμή της συνάρτησης στόχου και υποδεικνύοντας που πρέπει να γίνουν αλλαγές στη γεωμετρία της προς μελέτη μορφής ή αλλαγή των οριακών συνθηκών στα στερεά όρια (για παράδειγμα επιβολή δεσμών ρευστού - jets για τον ενεργητικό έλεγχο της ροής)για καλύτερη απόδοση.

Οι συζυγείς μεθόδοι χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τις συνεχείς (continuous)και τις διακριτές (discrete) μεθόδους. Στη διακριτή μέθοδο, πρώτα γραμμικοποιούνται (αν είναι μη γραμμικές) και διακριτοποιούνται η αντικειμενική συνάρτηση και οι εξισώσεις ροής και, στη συνέχεια, παράγεται η προς επίλυση συζυγής εξίσωση από τις διακριτοποιημένες εξισώσεις της ροής. Η τελευταία προκύπτει σε μητρική γραφή και είναι έτοιμη για αριθμητική επίλυση. Αντίθετα, στη συνεχή συζυγή μέθοδο, η μαθηματική διατύπωση των συζυγών εξισώσεων γίνεται χρησιμοποιώντας τις συνεχείς εξισώσεις της ροής πριν αυτές διακριτοποιηθούν για να λυθούν αριθμητικά. Η συνάρτηση κόστους επαυξάνεται με την προσθήκη σε αυτή των εξισώσεων της ροής πολλαπλασιασμένων με τις συζυγείς μεταβλητές και με χρήση του θεωρήματος της απόκλισης (Green - Gauss), εξάγονται οι συνεχείς συζυγείς εξισώσεις, οι οριακές συνθήκες και η έκφραση για τις παραγώγους ευαισθησίας. Η διακριτοποίηση των συζυγών εξισώσεων γίνεται σε δεύτερο στάδιο προκειμένου να λυθούν αριθμητικά.



**Σχήμα 1.10:** Αιτιοκρατικός αλγόριθμος βελτιστοποίησης για προβλήματα ΥΡΔ. Ο αλγόριθμος επαναλαμβάνεται μέχρι να προσδιοριστεί η βέλτιστη λύση. [12].

Το μεγάλο πλεονέκτημα των συζυγών μεθόδων σε σχέση με τις στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης, είναι ότι το υπολογιστικό κόστος υπολογισμού των παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού είναι ανεξάρτητο του πλήθους αυτών. Ενδεικτικά, για τον υπολογισμό των παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης απαιτούνται δύο επιλύσεις, μια των εξισώσεων κατάστασης και μια των συζυγών τους εξισώσεων. Επίσης, το κόστος για την επίλυση του συζυγούς προβλήματος είναι περίπου ίσο με το κόστος επίλυσης του ευθέος προβλήματος ενώ η αριθμητική επίλυση των συζυγών εξισώσεων μπορεί να βασιστεί στα υπολογιστικά εργαλεία επίλυσης του ευθέος προβλήματος (ίδιοι αλγόριθμοι και λογισμικά επίλυσης), λόγω της παρόμοιας μορφής των μερικών διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος (κεφάλαιο 3).

Από την άλλη, οι συζυγείς μέθοδοι έχουν το μειονέκτημα της ανάγκης επαναδιατύπωσης των εξισώσεων και των οριακών τους συνθηκών, αλλά και μερικού επαναπρογραμματισμού του λογισμικού, όταν η αντικειμενική συνάρτηση αλλάζει. Αυτό δεν συμβαίνει σε στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης, όπως οι εξελικτικοί αλγόριθμοι. Επίσης, η χρήση των συζυγών μεθόδων δεν είναι εφικτή για κάθε στόχο και, ως αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης μπορεί να παγιδευτεί σε τοπικό ακρότατο.

Στη Μονάδα παράλληλης υπολογιστικής ρευστοδυναμικής και βελτιστοποίησης (ΜΠΥΡ&Β) του Εργαστηρίου Θερμικών στροβιλομηχανών, η ανάπτυξη συνεχών συζυγών τεχνικών αποτελεί, την τελευταία δεκαετία περίπου, μια από τις κύριες δραστηριότητες της.

Στις εργασίες [13], [14] και [15] έγινε για πρώτη φορά η ανάπτυξη, θεμελίωση και προγραμματισμός συζυγών τεχνικών για χρήση σε προβλήματα ανάλυσης και σχεδίασης - βελτιστοποίησης στις στροβιλομηχανές και στην εξωτερική αεροδυναμική. Συγκεκριμένα, στην εργασία [13], δίνεται έμφαση στη συνεχή, έναντι της διακριτής, συζυγή μέθοδο ενώ οι συζυγείς διατυπώσεις που αναπτύσσονται αφορούν σε ατριβείς και συνεκτικές (στρωτές και τυρβώδεις) συμπιεστές ροές σε 2Δ και 3Δ αεροδυναμικές μορφές με τη χρήση δομημένων και μη—δομημένων πλεγμάτων. Η διατύπωση αυτή ήταν ακριβής για στρωτές ροές ενώ, για την περίπτωση των τυρβωδών ροών, βασίζονταν στην ευρύτατα χρησιμοποιούμενη παραδοχή ότι οι μεταβλητές του μοντέλου τύρβης ήταν ανεξάρτητες των μεταβλητών ελέγχου. Από αριθμητικής πλευράς, το λογισμικό που αναπτύσσεται βασίζεται στην τεχνική των πεπερασμένων όγκων με ανάντι σχήμα διακριτοποίησης για τους όρους μεταφοράς και τη μέθοδο της χρονοπροέλασης. Το μοντέλο μιας εξίσωσης Spalart - Allmaras χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση της τύρβης. Στην εργασία [15] παρουσιάστηκε για πρώτη φορά αντιμετώπιση νέων συναρτησιακών με τη συνεχή συζυγή μέθοδο που εκφράζουν απώλειες στις στροβιλομηχανές, στη μορφή είτε της αύξησης εντροπίας ή των απωλειών ολικής πίεσης.

Στις εργασίες [12], [16] και [17] γίνεται επέκταση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου ώστε να είναι απόλυτα ακριβής και στις τυρβώδεις ροές. Για να επιτευχθεί αυτό προτείνεται η εισαγωγή των συζυγών εξισώσεων των μοντέλων τύρβης, δηλαδή νέων εξισώσεων συζυγών ως προς αυτές του μοντέλου τύρβης. Το πρωτότυπο στοιχείο της διατριβής [12] είναι ότι, για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία, παρουσιάζεται η ανάπτυξη και χρήση των συνεχών συζυγών εξισώσεων μοντέλου τύρβης (οι λίγες εργασίες που υλοποιούν αντίστοιχες μεθόδους βασίζονται αποκλειστικά στη διακριτή συζυγή μέθοδο). Το χρησιμοποιούμενα μοντέλα τύρβης είναι δύο: το μοντέλο μιας εξίσωσης των Spalart - Allmaras και το μοντέλο δύο εξισώσεων  $k - \epsilon$ . Κατά συνέπεια, δημιουργήθηκαν δύο διαφορετικές συζυγείς διατυπώσεις, μια για το συζυγές μοντέλο Spalart - Allmaras, [16], και μια για το συζυγές μοντέλο  $k_\alpha - \epsilon_\alpha$ . Οι διατυπώσεις αυτές καλύπτουν τόσο την περίπτωση μοντέλων χαμηλών αριθμών Reynolds όσο και μοντέλων υψηλών αριθμών Reynolds. Η πρώτη περίπτωση παρουσιάζεται, ενδεικτικά, για το συζυγές μοντέλο Spalart - Allmaras ενώ η δεύτερη για το μοντέλο  $k_\alpha - \epsilon_\alpha$ . Επίσης, η διατριβή [12] ασχολείται με την ανάπτυξη συζυγών τεχνικών και για προβλήματα ελέγχου (της αποκόλλησης της) ροής. Εδώ, στόχος είναι ο προσδιορισμός των πλέον αποδοτικών θέσεων στις οποίες συμφέρει να εφαρμοστεί ενεργητικός έλεγχος της ροής με δέσμες ρευστού. Η συγκεκριμένη χρήση συνεχών συζυγών τεχνικών παρουσιάζεται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία.

Στην εργασία [18] αντιμετωπίζονται διάφορες ερευνητικές και βιομηχανικές εφαρμογές στη βελτιστοποίηση μορφής, τοπολογίας και εύρωστης σχεδίασης (robust design). Σχετικά με τη βελτιστοποίηση μορφής, παρουσιάζεται για πρώτη φορά στη βιβλιογρα-

φία, η ανάπτυξη και χρήση των συνεχών συζυγών εξισώσεων του μοντέλου τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds  $k - \omega$  SST των Launder - Sharma και του μοντέλου τύρβης υψηλών αριθμών Reynolds Spalart - Allmaras. Επίσης, δίνεται έμφαση στη μείωση του υπολογιστικού κόστους και των απαιτήσεων μνήμης, έτσι ώστε οι μεθόδοι που αναπτύσσονται να είναι άμεσα εφαρμόσιμες στη βιομηχανία. Στη βελτιστοποίηση τοπολογίας γίνεται επέκταση, για πρώτη φορά, της μαθηματικής διατύπωσης για την κάλυψη τριδιάστατων ροών ασυμπίεστου ρευστού και επιπρόσθετα αντιμετωπίζονται συνήθεις βιομηχανικοί περιορισμοί. Για το σκοπό αυτό αναπτύσσονται νέοι αλγόριθμοι επίλυσης του συζυγούς προβλήματος που βοηθούν και επιταχύνουν τη σύγκλιση.

### 1.3 Δομή της εργασίας

Στην παρούσα εργασία αρχικά επιλύεται το ευθύ πρόβλημα της ροής σε τριδιάστατη περιστρεφόμενη πτερύγωση συμπίεστη. Η επίλυση του ευθέως προβλήματος πραγματοποιήθηκε με το πακέτο ανοικτού κώδικα OpenFOAM, ενώ για τη δημιουργία πλέγματος χρησιμοποιήθηκε οικείο λογισμικό. Έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων του ευθέως προβλήματος όταν σε αυτό χρησιμοποιούνται διαφορετικά μοντέλα τύρβης καθώς και διαφορετικό λογισμικό επίλυσης. Συγκεκριμένα, έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ των μοντέλων τύρβης Spalart-Allmaras (μιας διαφορικής εξίσωσης) και  $k-\epsilon$ ,  $k-\omega$  SST (δύο διαφορικών εξισώσεων) καθώς και των αποτελεσμάτων του ανοικτού λογισμικού OpenFOAM με το οικείο λογισμικό, το οποίο χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση των εξισώσεων της ροής σε άλλη, παράλληλα εξελισσόμενη, διπλωματική εργασία [19]. Το ανοιχτό λογισμικό χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) και κεντροκυψελική διατύπωση πεπερασμένων όγκων για την επίλυση των εξισώσεων Navier - Stokes και τρέχει σε παράλληλους επεξεργαστές (CPUs), ενώ το οικείο λογισμικό χρησιμοποιεί τη μέθοδο της τεχνητής συμπίεστικότητας (Artificial Compressibility) με κεντροκομβική διατύπωση πεπερασμένων όγκων και τρέχει σε κάρτες γραφικών (GPUs).

Στη συνέχεια γίνεται χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για τον προσδιορισμό του χάρτη παραγώγων ευαισθησίας σε τριδιάστατη περιστρεφόμενη πτερύγωση συμπίεστη. Ο χάρτης παραγώγων ευαισθησίας χρησιμοποιείται για την εύρεση των θέσεων πάνω στην πτερύγωση, στις οποίες η τοποθέτηση δεσμών ρευστού αναμένεται να μειώσει τις απώλειες σχετικής ολικής πίεσης που παρατηρούνται στην περιστρεφόμενη πτερύγωση ενός συμπίεστη λόγω τριβών. Δηλαδή γίνεται χρήση του χάρτη για να βρεθούν οι θέσεις πάνω στο πτερύγιο που θα δώσουν την μεγαλύτερη μείωση απωλειών, άρα και την καλύτερη αεροδυναμική απόδοση, εάν σε αυτές επιβληθεί ενεργητικός έλεγχος της ροής μέσω δεσμών ρευστού. Μέσω του χάρτη μπορεί να προσδιοριστεί επίσης και αν πρόκειται για αναρρόφηση ή εγχυση ρευστού, ανάλογα με το πρόσημο της παραγώγου. Οι μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος είναι εικονικές ταχύτητες σε κάθε επιφάνεια (face) πάνω σε ολόκληρη την επιφάνεια του πτερυγίου της περιστρεφόμενης πτερύγωσης. Η επίλυση των συζυγών εξισώσεων έγινε με το πακέτο ανοικτού κώδικα

OpenFOAM, του οποίου οι επιλύτες του συνεχούς συζυγούς προβλήματος αναπτύχθηκαν στην ΜΠΥΡ&Β.

- Στο κεφάλαιο 2 αναφέρονται οι εξισώσεις του ευθέος προβλήματος, δηλαδή οι εξισώσεις Navier - Stokes για ασυμπίεστη και τυρβώδη ροή σε περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων και αναλύεται ο τρόπος που αυτές επιλύονται στο λογισμικό OpenFOAM (αλγόριθμος SIMPLE).
- Στο κεφάλαιο 3 αναπτύσσεται η συνεχής συζυγής μέθοδος για ασυμπίεστη ροή με την υπόθεση της παγωμένης τυρβώδους συνεκτικότητας και αναλύεται η διαδικασία για τον υπολογισμό της παραγωγού ευαισθησίας για την ελαχιστοποίηση των απωλειών σχετικής ολικής πίεσης, με μεταβλητές σχεδιασμού τις ταχύτητες εικονικών δεσμών σε κάθε επιφάνεια (face) πάνω σε ολόκληρη την επιφάνεια του πτερυγίου της περιστρεφόμενης πτερύγωσης.
- Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ευθέος προβλήματος. Αρχικά παρουσιάζεται η γεωμετρία της περιστρεφόμενης πτερύγωσης και το υπολογιστικό χωρίο και στη συνέχεια γίνονται οι διάφορες συγκρίσεις όπως αναφέρθηκαν πιο πάνω.
- Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του συζυγούς προβλήματος στην εφαρμογή τριδιάστατης περιστρεφόμενης πτερύγωσης συμπίεστη και γίνεται διερεύνηση της μεταβολής των απωλειών σχετικής ολικής πίεσης όταν υπάρχει ενεργητικός έλεγχος της ροής στις θέσεις που υποδεικνύονται από το χάρτη παραγωγών ευαισθησίας.
- Στο κεφάλαιο 6 γίνεται μια ανακεφαλαίωση και συνοψίζονται τα συμπεράσματα των όσων έγιναν στην εργασία.





## Κεφάλαιο 2

### Ευθύ πρόβλημα - Εξισώσεις ροής

#### 2.1 Εξισώσεις ροής

Η μελέτη της ροής στις θερμικές στροβιλομηχανές αφορά σταθερές και περιστρεφόμενες πτερυγώσεις. Η περιστρεφόμενη πτερυγώση έχει σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από τον άξονα της μηχανής και η περιγραφή των φαινομένων σε αυτή διευκολύνεται σημαντικά όταν γίνεται χρήση ενός συστήματος αναφοράς που είναι ακίνητο ως προς την πτερυγώση. Έτσι, οι περιστρεφόμενες πτερυγώσεις είναι βολικό να μελετούνται ως προς το σχετικό (ή περιστρεφόμενο) σύστημα αναφοράς, το οποίο περιστρέφεται με τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ατράκτου της μηχανής. Οι ποσότητες που αναφέρονται στο σχετικό σύστημα χαρακτηρίζονται ως σχετικές ποσότητες. Η σχετική ταχύτητα συμβολίζεται με  $\vec{W}$  και ορίζεται ως:

$$\vec{W} = \frac{\partial \vec{r}_R}{\partial t} \quad (2.1)$$

όπου  $\vec{r}_R$  η θέση ως προς το σχετικό σύστημα αναφοράς και  $\vec{r}$  η θέση ως προς το απόλυτο σύστημα αναφοράς.

Η σχέση απόλυτης και σχετικής ταχύτητας δίνεται από την εξίσωση:

$$\vec{v} = \vec{W} + \vec{U} \quad (2.2)$$

όπου με  $\vec{U}$  συμβολίζεται η περιφερειακή ταχύτητα λόγω της περιστροφής του σχετικού

συστήματος και ορίζεται ως:

$$\vec{U} = \vec{\omega} \times \vec{r}_R = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.3)$$

όπου  $\vec{\omega}$  η ταχύτητα περιστροφής.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, το πρωτεύον πρόβλημα διέπεται από τις εξισώσεις Navier - Stokes, για μόνιμη, ασυμπίεστη και τυρβώδη ροή. Επειδή η ροή είναι τυρβώδης, χρησιμοποιούνται οι RANS (Reynold's Averaged Navier Stokes) εξισώσεις, δηλαδή οι χρονικά μέσες τιμές των εξισώσεων Navier - Stokes, σχέσεις 2.4 (εξ. διατήρησης της μάζας) και 2.5 (εξ. διατήρησης της ορμής).

$$\nabla \cdot \vec{W} = 0 \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot (\vec{W}\vec{W}) - \nabla \cdot ((\nu + \nu_t)\nabla\vec{W}) + 2\vec{\omega} \times \vec{W} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\nabla p \quad (2.5)$$

όπου  $p$  είναι η στατική πίεση διαιρεμένη με την σταθερή πυκνότητα (κινηματική πίεση),  $\nu$  η σταθερή κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού και  $\nu_t$  η τυρβώδης συνεκτικότητα που υπολογίζεται μέσω του μοντέλου τύρβης.

Στις εξισώσεις 2.4 και 2.5, εισάγονται μια ή δύο ακόμα εξισώσεις (ανάλογα με το μοντέλο τύρβης που χρησιμοποιείται) για την μοντελοποίηση της τύρβης.

## 2.2 Αλγόριθμος SIMPLE για την επίλυση των εξισώσεων της ροής

Ο αλγόριθμος SIMPLE χρησιμοποιείται για την επίλυση των εξισώσεων Navier - Stokes για ασυμπίεστη ροή. Οι μεταβλητές της ροής είναι οι δύο (ή τρεις) συνιστώσες της ταχύτητας και η πίεση. Παρόλο που ο αριθμός των εξισώσεων (συνέχεια και εξισώσεις ορμής) είναι ίσος με τον αριθμό των αγνώστων δεν υπάρχει ρητή εξίσωση για τον υπολογισμό της πίεσης. Επίσης, στις εξισώσεις ορμής υπάρχει και ο μη - γραμμικός όρος της μεταφοράς (convection term). Ο μη - γραμμικός όρος μπορεί να γραμμικοποιηθεί και να ανανεώνεται σε κάθε επανάληψη, έτσι ώστε κατά τη σύγκλιση του μόνιμου (steady) προβλήματος να μην επηρεάζεται η λύση.

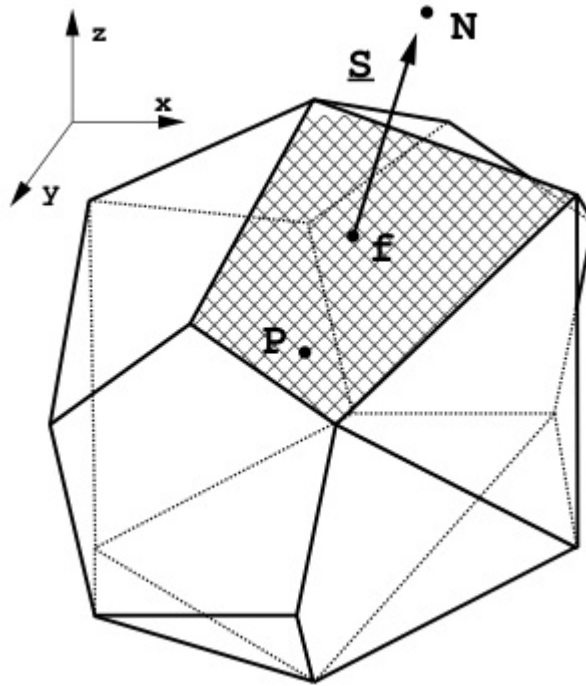
Για να προκύψει η εξίσωση για τον υπολογισμό της πίεσης, χρησιμοποιείται μια μερική διακριτοποίηση της εξίσωσης της ορμής 2.5, η οποία χρησιμοποιώντας κεντροκυβελική

διατύπωση πεπερασμένων όγκων γράφεται:([20],[21]):

$$\alpha_P \vec{W}_P = H(\vec{W}) - \nabla p \quad (2.6)$$

$$H(\vec{W}) = - \sum_N \alpha_N \vec{W}_N \quad (2.7)$$

όπου με  $\vec{W}_P$  συμβολίζεται η ταχύτητα στο κέντρο του υπό εξέταση κελίου (όγκου αναφοράς - σχήμα 2.1) και με  $\vec{W}_N$  η ταχύτητα στα κέντρα των γειτονικών του κελιών. Οι συντελεστές  $\alpha_P$  και  $\alpha_N$  είναι οι βαθμωτοί συντελεστές των ταχυτήτων  $\vec{W}_P$  και  $\vec{W}_N$  που προκύπτουν από τη γραμμικοποίηση (δηλαδή υπολογίζονται συναρτήσει της ταχύτητας) και στη συνέχεια διακριτοποίηση των εξισώσεων της ορμής με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων. Η άθροιση στον όρο  $H(\vec{W})$  πραγματοποιείται στους  $N$  γείτονες του υπό εξέταση πεπερασμένου όγκου.



**Σχήμα 2.1:** Πεπερασμένος όγκος

$P$  - κέντρο κελιού,  $N$  - κέντρο γειτονικών κελιών,  $S_f$  - διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια με μέτρο το εμβαδό της επιφάνειας σε  $m^2$  [20].

Η εξίσωση της συνέχειας 2.4, με χρήση του θεωρήματος Green-Gauss διακριτοποιείται

σύμφωνα με τη σχέση 2.8.

$$\nabla \cdot \vec{W} = \sum_f \vec{S} \cdot \vec{W}_f = 0 \quad (2.8)$$

όπου  $\vec{W}_f$  είναι η ταχύτητα στο κέντρο  $f$  της κοινής επιφάνειας των κελιών  $P$  και  $N$  ενώ με  $\vec{S}$  συμβολίζεται το κάθετο σε αυτή διάνυσμα με μέτρο ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας και φορά από το  $P$  στο  $N$ .

Εάν η εξίσωση 2.6 επιλυθεί ως προς  $\vec{W}_P$  διαιρώντας με το συντελεστή  $\alpha_P$ , προκύπτει η έκφραση της ταχύτητας στο κέντρο του κελιού  $P$ , σχέση 2.9.

$$\vec{W}_P = \frac{H(\vec{W})}{\alpha_P} - \frac{1}{\alpha_P} \nabla p \quad (2.9)$$

Με παρεμβολή της έκφρασης 2.9 στις επιφάνειες των κελιών λαμβάνεται η έκφραση 2.10 για την  $\vec{W}_f$ .

$$\vec{W}_f = \left( \frac{H(\vec{W})}{\alpha_P} \right)_f - \left( \frac{1}{\alpha_P} \right)_f (\nabla p)_f \quad (2.10)$$

Εισάγοντας την εξίσωση 2.10 στη διακριτοποιημένη εξίσωση της συνέχειας 2.8, λαμβάνεται η εξίσωση της πίεσης 2.11 (εξίσωση Poisson).

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\alpha_P} \nabla p \right) = \nabla \cdot \left( \frac{H(\vec{W})}{\alpha_P} \right) \quad (2.11)$$

$$= \sum_f \vec{S} \cdot \left( \frac{H(\vec{W})}{\alpha_P} \right)_f \quad (2.12)$$

Έτσι, τελικά προκύπτει η τελική έκφραση των διακριτοποιημένων εξισώσεων Navier Stokes για ασυμπύεστο ρευστό, 2.13, 2.14, 2.15.

$$\alpha_P \vec{W}_P = H(\vec{W}) - \sum_f \vec{S}(p)_f \quad (2.13)$$

$$\sum_f \vec{S} \cdot \left[ \left( \frac{1}{\alpha_P} \right)_f (\nabla p)_f \right] = \sum_f \vec{S} \cdot \left( \frac{H(\vec{W})}{\alpha_P} \right)_f \quad (2.14)$$

$$F = \vec{S} \cdot \vec{W}_f = \vec{S} \cdot \left[ \left( \frac{H(\vec{W})}{\alpha_P} \right)_f - \left( \frac{1}{\alpha_P} \right)_f (\nabla p)_f \right] \quad (2.15)$$

Η εξίσωση 2.12 αποτελεί τη διακριτοποιημένη εξίσωση της ορμής από την οποία υπολογίζονται οι αρχικές τιμές των συνιστωσών της ταχύτητας σε κάθε επανάληψη (momentum predictor), οι οποίες όμως δεν ικανοποιούν την εξίσωση της συνέχειας. Ο υπολογισμός των ταχυτήτων αυτών γίνεται με το πεδίο πίεσης που υπολογίστηκε στην προηγούμενη επανάληψη. Στην συνέχεια, υπολογίζεται από την εξίσωση της πίεσης 2.13, το νέο πεδίο πίεσης και οι ταχύτητες επαναυπολογίζονται με χρήση της εξίσωσης 2.14, έτσι ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση της συνέχειας (momentum corrector).

Ο αλγόριθμος SIMPLE για την επίλυση των εξισώσεων της ροής ασυμπίεστου ρευστού είναι ο ακόλουθος:

- Αρχικοποίηση των μεταβλητών του πεδίου ροής (τιμές από προηγούμενη επανάληψη ή τυχαία αρχικοποίηση).
- Επίλυση των γραμμικοποιημένων εξισώσεων της ορμής για μια πρώτη εκτίμηση του πεδίου της ταχύτητας. Για την κλίση της πίεσης χρησιμοποιούνται οι τιμές του πεδίου πίεσης που υπολογίστηκε στην προηγούμενη επανάληψη. Συνήθως γίνεται υποχαλάρωση των εξισώσεων της ταχύτητας με το συντελεστή υποχαλάρωσης της ταχύτητας  $\alpha_U$ , για την καλύτερη σύγκλιση του αλγορίθμου.
- Επίλυση της εξίσωσης για την πίεση και υπολογισμός του νέου πεδίου πίεσης. Και πάλι χρησιμοποιείται υποχαλάρωση. Επίσης γίνεται και διόρθωση των ταχυτήτων ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση της συνέχειας.
- Επίλυση των εξισώσεων του μοντέλου τύρβης για την εύρεση της τυρβώδους συνεκτικότητας.
- Έλεγχος των υπολοίπων των εξισώσεων για την ικανοποίηση ή όχι του κριτηρίου σύγκλισης. Επανάληψη των προηγούμενων μέχρι την ικανοποίηση του κριτηρίου σύγκλισης.

## 2.3 Υλοποίηση αλγόριθμου SIMPLE στο Open-FOAM

Η επίλυση των εξισώσεων της ροής στην παρούσα εργασία έγινε στο λογισμικό Open-FOAM (έκδοση 1.6-ext). Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας SimpleSRFFoam που υλοποιεί τον αλγόριθμο SIMPLE στο σχετικό σύστημα (SRF-Single Rotating Frame). Ο κώδικας είναι γραμμένος σε γλώσσα C++ και χρησιμοποιεί την μέθοδο των πεπερασμένων όγκων για τη διακριτοποίηση των εξισώσεων της ροής. Οι τιμές των μεταβλητών της ροής αποθηκεύονται στο κέντρο του εκάστοτε κελιού του πλέγματος (cell-centered και collocated arrangement των μεταβλητών της ροής). Ακολουθεί η περιγραφή του κώδικα [22], [23],[24]:

1. Πραγματοποιείται αρχικοποίηση των μεταβλητών της ροής.
2. Δημιουργείται το αριστερό μέρος της διακριτοποιημένης εξίσωσης της ορμής (UrelEqn - σχέση 2.13), το οποίο δεν περιλαμβάνει την κλίση της πίεσης. Υπολογίζονται δηλαδή οι συντελεστές του αριστερού μέλους της εξίσωσης και σχηματίζονται τα μητρώα του προς επίλυση συστήματος εξισώσεων για τον υπολογισμό των ταχυτήτων, με χρήση των κατάλληλων τελεστών διακριτοποίησης (fvm - implicit). Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στον όρο μεταφοράς, ο δεύτερος στον όρο διάχυσης και ο τρίτος περιλαμβάνει τους όρους Corriollis και κεντρομόλου επιτάχυνσης, που εισάγονται στις εξισώσεις της ροής όταν αυτές αναφέρονται στο σχετικό σύστημα. Τέλος, στην εξίσωση εφαρμόζεται υποχαλάρωση για την καλύτερη σύγκλιση.

```
tmp<fvVectorMatrix> UrelEqn  
( fvm::div(phi, Urel)  
+ turbulence->divDevReff(Urel)  
+ SRF->Su()  
);  
UrelEqn().relax();
```

3. Στο δεξί μέλος της προηγούμενης εξίσωσης, προστίθεται η κλίση της πίεσης χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο ρητό τελεστή (fvc - explicit). Στη συνέχεια αυτή επιλύεται και υπολογίζονται οι ταχύτητες (πρώτη εκτίμηση, δεν ικανοποιούν την εξίσωση της συνέχειας) καθώς και οι συντελεστές  $\alpha_p$ .

```
solve(UrelEqn() == -fvc::grad(p));  
volScalarField AUrel = UrelEqn().A();  
Urel = UrelEqn().H()/AUrel;
```

4. Στη συνέχεια υπολογίζονται τα μέτρα των διανυσμάτων ροής  $\vec{F}$  (flux) στα κέντρα των επιφανειών, παρεμβάλλοντας τις τιμές της ταχύτητας στα κέντρα των κελιών.

```
phi = fvc::interpolate(Urel) & mesh.Sf();
```

5. Επιλύεται η εξίσωση της πίεσης pEqn (σχέση 2.14).

```
fvScalarMatrix pEqn
(
    fvm::laplacian(1.0/AUrel, p) == fvc::div(phi)
);
pEqn.setReference(pRefCell, pRefValue);
pEqn.solve();
```

6. Διορθώνονται τα μέτρα των διανυσμάτων ροής  $\vec{F}$  (flux) με βάση τις τιμές της πίεσης που μόλις υπολογίστηκαν (σχέση 2.15).

```
phi -= pEqn.flux();
```

7. Εφαρμόζεται στη λύση της πίεσης υποχαλάρωση και διορθώνονται οι ταχύτητες με βάση τις νέες πιέσεις ώστε πλέον να ικανοποιούν την εξίσωση της συνέχειας.

```
p.relax();
Urel -= fvc::grad(p)/AUrel;
```

8. Τέλος, λύνονται οι εξισώσεις της τύρβης, ανάλογα με το μοντέλο που έχει επιλεγεί και, στη συνέχεια, υπολογίζεται το πεδίο της τυρβώδους συνεκτικότητας  $\nu_t$ . Υπολογίζεται επίσης και η απόλυτη ταχύτητα  $U_{abs}$  σύμφωνα με την εξίσωση 2.2.

```
turbulence->correct();
Uabs = Urel + SRF->U();
```

9. Όλα τα παραπάνω επαναλαμβάνονται μέχρι τη σύγκλιση των εξισώσεων.

## 2.4 Χρησιμοποιούμενα μοντέλα τύρβης

Για την επίλυση του ευθέως προβλήματος, χρησιμοποιήθηκαν τρία μοντέλα τύρβης, τα αποτελέσματα των οποίων συγκρίθηκαν (Κεφ. 4). Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν τα ακόλουθα μοντέλα τύρβης:

1. Spalart-Allmaras πρώτης τάξης [12], [25]

2. k-ε δεύτερης τάξης [26], [27]

3. k-ω SST δεύτερης τάξης [22], [28]

Σε όλα τα μοντέλα τύρβης, οι εξισώσεις τύρβης λύνονται απειμπλεγμένα από τις εξισώσεις της ροής, δηλαδή, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, σε κάθε επανάληψη πρώτα λύνονται οι εξισώσεις της ροής και, στη συνέχεια, οι εξισώσεις της τύρβης.

### 2.4.1 Μοντέλο τύρβης Spalart-Allmaras

Το μοντέλο τύρβης Spalart-Allmaras είναι μοντέλο μιας εξίσωσης, στο οποίο επιλύεται μια εξίσωση μεταφοράς της μεταβλητής  $\tilde{\nu}$ . Αναπτύχθηκε για να χρησιμοποιείται κυρίως σε προβλήματα εξωτερικής αεροδυναμικής. Στις στροβιλομηχανές συνιστάται η χρήση του σε περιπτώσεις που η ροή είναι προσκολλημένη, δηλαδή όταν έχουμε λειτουργία στο σημείο σχεδιασμού. Η μερική διαφορική εξίσωση του μοντέλου τύρβης δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial (v_j \tilde{\nu})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\tilde{\nu}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + \frac{c_{b2}}{\sigma} \left( \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 + \tilde{\nu} P(\tilde{\nu}) - \tilde{\nu} D(\tilde{\nu}) \quad (2.16)$$

όπου  $\tilde{\nu}$  η μεταβλητή του μοντέλου τύρβης.

Μετά την εύρεση της μεταβλητής της τύρβης  $\tilde{\nu}$ , η τυρβώδης συνεκτικότητα υπολογίζεται από την σχέση 2.17:

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{U1} \quad (2.17)$$

Οι όροι παραγωγής  $P(\tilde{\nu})$  και καταστροφής  $D(\tilde{\nu})$  της εξίσωσης 2.16 δίνονται από τις πιο κάτω σχέσεις:

$$P(\tilde{\nu}) = c_{b1} \tilde{Y} \quad (2.18)$$

$$D(\tilde{\nu}) = c_{w1} f_w(\tilde{Y}) \frac{\tilde{\nu}}{d^2} \quad (2.19)$$

όπου:

$$\tilde{Y} = Y f_{U3} + \frac{\tilde{\nu}}{d^2 \kappa^2} f_{U2}, \quad Y = \left| \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \vec{v}_i \right|$$

$$f_{U1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{U1}^3}, \quad f_{U2} = \frac{1}{(1 + \frac{\chi}{c_{U2}})^2}$$



$$f_{U3} = \frac{(1 + \chi f_{U1})}{c_{U2}} \left[ 3 \left( 1 + \frac{\chi}{c_{U2}} \right) + \left( \frac{\chi}{c_{U2}} \right)^2 \right] \left( 1 + \frac{\chi}{c_{U2}} \right)^{-3}$$

$$\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, \quad f_W = g \left( \frac{1 + c_{W3}^6}{g + c_{W3}^6} \right)^{\frac{1}{6}}$$

$$g = r + c_{W2}(r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{Y} \kappa^2 d^2}$$

με :  $Y$  το μέτρο στροβιλότητας και  $d$  την απόσταση του υπόψη κόμβου από το στερεό τοίχωμα.

Οι σταθερές του μοντέλου, όπως χρησιμοποιείται εδώ είναι:

$$c_{b1} = 0.1355, \quad c_{b2} = 0.622, \quad \kappa = 0.4187$$

$$\sigma = \frac{2}{3}, \quad c_{W1} = \frac{c_{b1}}{\kappa} + \frac{(1 + c_{b2})}{\sigma}$$

$$c_{W2} = 0.3, \quad c_{W3} = 2$$

$$c_{U1} = 7.1, \quad c_{U2} = 5$$

Το σύμβολο Levi-civita  $\epsilon_{ijk}$  που χρησιμοποιείται στο μέτρο της στροβιλότητας, ορίζεται ως εξής:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{αν } (i, j, k) \in (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), \\ -1 & \text{αν } (i, j, k) \in (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3), \\ 0 & \text{αν } i = j \text{ ή } j = k \text{ ή } i = k. \end{cases} \quad (2.20)$$

## 2.4.2 Μοντέλο τύρβης k-ε

Το μοντέλο τύρβης k-ε, είναι μοντέλο δύο εξισώσεων, δηλαδή εισάγονται δύο επιπλέον μερικές διαφορικές εξισώσεις για τον υπολογισμό των μεταβλητών της τύρβης. Οι μεταβλητές αυτές είναι η τυρβώδης κινητική ενέργεια k (turbulent kinetic energy), η

οποία εκφράζει την ενέργεια της τύρβης, και η καταστροφή της τυρβώδους ενέργειας  $\epsilon$  (turbulent dissipation), που εκφράζει την κλίμακα της τύρβης. Μετά τον υπολογισμό των μεγεθών αυτών, υπολογίζεται εύκολα και το πεδίο της τυρβώδους συνεκτικότητας  $\mu_t$ . Σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου αυτού με πειραματικά δεδομένα έχει δείξει ότι η ακρίβειά του μειώνεται σε ροές με μεγάλες κλίσεις πίεσης.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο τύρβης k- $\epsilon$  χαμηλών αριθμών Reynolds, που οφείλεται στους Jones και Launder. Αρχικά, λύνεται η εξίσωση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας 2.21 και, στη συνέχεια, η εξίσωση για τη καταστροφή της τυρβώδους ενέργειας 2.22.

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \rho G - \rho \epsilon - 2\mu \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 \quad (2.21)$$

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{Pr_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + c_1 f_1 \frac{\epsilon}{k} G - c_2 f_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{2\mu\mu_t}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_t}{\partial y^2} \right)^2 \quad (2.22)$$

όπου  $v_t$  είναι η εφαπτομενική ταχύτητα ως προς το πλησιέστερο στερεό τοίχωμα. Μετά την εύρεση των k και  $\epsilon$  μπορεί να υπολογιστεί η τυρβώδης συνεκτικότητα  $\mu_t$  μέσω της σχέσης 2.23.

$$\mu_t = c_\mu f_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2.23)$$

Ο όρος παραγωγής της τύρβης  $\rho G$  στις εξισώσεις 2.21 και 2.22 δίνεται από την πιο κάτω σχέση (μοντελοποίηση με χρήση της παραδοχής του Boussinesq):

$$\rho G = -\overline{\rho v_j v_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \mu_t \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \quad (2.24)$$

Οι όροι  $c_\mu, c_1, c_2, Pr_k, Pr_\epsilon$  αποτελούν σταθερές ενώ οι  $f_\mu, f_1, f_2$  και οι τελευταίοι όροι στο δεξί μέλος των 2.21 και 2.22 είναι κατάλληλες συναρτήσεις (damping functions) για την κάλυψη των περιοχών κοντά στο στερεό τοίχωμα (περιοχή χαμηλών αριθμών Reynolds).

$$c_\mu = 0.09, \quad c_1 = 1.44, \quad c_2 = 1.92$$

$$Pr_k = 1, \quad Pr_\epsilon = 1.3$$

$$f_{\mu} = \exp\left[\frac{-2.5}{1 + \frac{Re_t}{50}}\right]$$

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1 - 0.3\exp(-Re_t^2)$$

Ο αριθμός Reynolds της τύρβης ισούται με:  $Re_t = \frac{k^2}{\nu\epsilon}$

### 2.4.3 Μοντέλο τύρβης k- $\omega$ SST

Το μοντέλο τύρβης k- $\omega$  SST είναι μοντέλο δύο εξισώσεων, δηλαδή εισάγονται δύο επιπλέον μερικές διαφορικές εξισώσεις για τον υπολογισμό των μεταβλητών της τύρβης. Οι μεταβλητές αυτές είναι η τυρβώδης κινητική ενέργεια k (turbulent kinetic energy), η οποία εκφράζει την ενέργεια της τύρβης, και ο ρυθμός καταστροφής της τύρβης  $\omega$  (turbulent specific dissipation rate), που εκφράζει την κλίμακα της τύρβης. Μετά τον υπολογισμό των μεγεθών αυτών, υπολογίζεται εύκολα και το πεδίο της τυρβώδους συνεκτικότητας  $\nu_t$ . Η παραλλαγή SST συνδυάζει τα πλεονεκτήματα των μοντέλων τύρβης k- $\omega$  και k- $\epsilon$ , δηλαδή επιτρέπει την απευθείας χρήση του μοντέλου ως ένα Low Reynolds μοντέλο τύρβης (δηλαδή χωρίς την χρήση επιπλέον damping functions) όπως το μοντέλο k- $\omega$ , ενώ σε συνθήκες ελεύθερης ροής έχει τη συμπεριφορά του μοντέλου k- $\epsilon$  αποφεύγοντας έτσι την ευαισθησία που εμφανίζει το μοντέλο k- $\omega$  σε συνθήκες ελεύθερης ροής στην είσοδο.

Αρχικά, λύνεται η εξίσωση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας 2.25 και, στη συνέχεια, η εξίσωση για το ρυθμό καταστροφής της τύρβης 2.26.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + v_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \beta^* k \omega + \frac{\partial \left[ (\nu + \sigma_k \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]}{\partial x_j} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha S^2 - \beta \omega^2 + \frac{\partial \left[ (\nu + \sigma_{\omega} \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right]}{\partial x_j} + 2(1 - F1) \sigma_{\omega^2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \quad (2.26)$$

Μετά την εύρεση των k και  $\omega$  μπορεί να υπολογιστεί η τυρβώδης συνεκτικότητα  $\nu_t$  μέσω της σχέσης 2.27.

$$\nu_t = \frac{\alpha_1 k}{\max(\alpha_1 \omega, SF_2)} \quad (2.27)$$

Οι σταθερές των πιο πάνω εξισώσεων αναφέρονται πιο κάτω:

$$S_{ij} = \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$F_2 = \tanh \left[ \left[ \max \left( \frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right) \right]^2 \right]$$

$$P_k = \min \left( \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, 10\beta^* k \omega \right)$$

$$F_1 = \tanh \left[ \left[ \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right] \right]^4 \right]$$

$$CD_{k\omega} = \max \left( 2\rho\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, 10^{-10} \right)$$

$$\varphi = \varphi_1 F_1 + \varphi_2 (1 - F_1)$$

$$\alpha_1 = \frac{5}{9}, \quad \alpha_2 = 0.44$$

$$\beta_1 = \frac{3}{40}, \quad \beta_2 = 0.0828$$

$$\beta^* = \frac{9}{100}$$

$$\sigma_{k1} = 0.85, \quad \sigma_{k2} = 1$$

$$\sigma_{\omega 1} = 0.5, \quad \sigma_{\omega 2} = 0.856$$

## Κεφάλαιο 3

# Η συνεχής συζυγής μέθοδος για στρωτές ροές ασυμπίεστου ρευστού

### 3.1 Διατύπωση των εξισώσεων ροής / εξισώσεων κατάστασης

Το πρωτεύον πρόβλημα στην παρούσα εργασία διέπεται από τις εξισώσεις 2.4 και 2.5. Για τη διατύπωση του συζυγούς προβλήματος, αυτές προτιμάται να γράφονται σε ταυνοστική αντί σε διανυσματική μορφή:

$$R^p = \frac{\partial W_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.1)$$

$$R_i^W = W_j \frac{\partial W_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial W_i}{\partial x_j} + \frac{\partial W_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\epsilon_{ijk}\omega_j W_k + \epsilon_{imn}\epsilon_{ijk}\omega_n\omega_j x_k = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

όπου:

- $W_i$  οι καρτεσιανές συνιστώσες της σχετικής ταχύτητας.
- $p$  η στατική πίεση διαιρεμένη με την πυκνότητα.
- Διάνυσμα των μεταβλητών της ροής θεωρείται το  $\vec{U} = [p, W_i]^T$
- $\nu$  η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού (σταθερή).
- $u_t$  η τυρβώδης συνεκτικότητα του ρευστού που υπολογίζεται από τις μεταβλητές του μοντέλου τύρβης.
- $\omega$  η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής.
- $x_k$  η θέση οποιουδήποτε σημείου του πεδίου ροής ως προς το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων.
- $\epsilon_{ijk}$  το σύμβολο Levi-civita που ορίζεται στη σχέση 2.20.

Σε προβλήματα εσωτερικών ροών, οι οριακές συνθήκες που πρέπει να επιβληθούν για το κλείσιμο του προβλήματος και την επίλυσή του είναι οι εξής:

- Στην είσοδο, συνθήκη Dirichlet για κάθε συνιστώσα της ταχύτητας και μηδενική Neumann συνθήκη για την πίεση.
- Στην έξοδο, μηδενική Neumann συνθήκη για τις ταχύτητες ενώ για την πίεση μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε συνθήκη μηδενικής Dirichlet είτε συνθήκη ακτινικής ισορροπίας.
- Στα στερεά τοιχώματα συνθήκη μηδενικής Dirichlet για την ταχύτητα (συνθήκες μη ολίσθησης και μη εισχώρησης) και συνθήκη μηδενικής Neumann για την πίεση.

## 3.2 Εισαγωγή στις συνεχείς συζυγείς εξισώσεις

Η εφαρμογή των συνεχών συζυγών εξισώσεων σε μια μέθοδο βελτιστοποίησης, προϋποθέτει την ύπαρξη ενός ή περισσότερων κριτηρίων βελτιστοποίησης. Το κριτήριο αυτό, στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση, εκφράζεται μαθηματικά από την συνάρτηση κόστους  $F = F(\vec{U}(\vec{b}), \vec{b})$ , η οποία αποτελεί συνάρτηση των μεταβλητών της ροής  $\vec{U}$  και των μεταβλητών σχεδιασμού  $\vec{b}$ , οι οποίες καθορίζουν είτε την γεωμετρία της αεροδυναμικής μορφής (βελτιστοποίηση μορφής) είτε τις οριακές συνθήκες (βελτιστοποίηση με ενεργητικό έλεγχο της ροής με δέσμες ρευστού) πάνω σε αυτή. Επομένως, η συνάρτηση κόστους αποτελεί μια σύνθετη συνάρτηση που εξαρτάται αφενός από τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\vec{b}$  και αφετέρου από την λύση του πεδίου ροής  $\vec{U}$ , η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από το διάνυσμα των μεταβλητών  $\vec{b}$ . Δηλαδή το  $\vec{U}$  μεταβάλλεται με την ικανοποίηση των εξισώσεων της ροής όταν μεταβληθεί η γεωμετρία της αεροδυναμικής μορφής. Τελικά, οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι αυτές που ελέγχουν την τιμή της συνάρτησης κόστους  $F$ .

Στην ειδική περίπτωση των προβλημάτων ελέγχου ροής, όπου οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι οι ταχύτητες πάνω στο στερεό τοίχωμα του σώματος, η γεωμετρία του πεδίου δεν μεταβάλλεται. Η μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης εξαρτάται πλέον

με έμμεσο τρόπο από το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού, σχέση 3.3.

$$F = F(\vec{U}(\vec{b})) \quad (3.3)$$

Αφετηρία για τη διατύπωση του συζυγούς προβλήματος αποτελεί ο ορισμός της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης  $F_{aug}$ , σχέση 3.4, η οποία δημιουργείται με την πρόσθεση στην αντικειμενική συνάρτηση του χωρικού ολοκληρώματος των εξισώσεων της ροής πολλαπλασιασμένων με το διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών (adjoint variables)  $\Psi = [q, u_i]^T$ .

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} \Psi_l R_l^U d\Omega \quad (3.4)$$

όπου  $R_1^U = R^p$  και  $R_{i+1}^U = R_i^W$  για  $i = 1, 2(, 3)$ .

Στο διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών  $\Psi = [q, u_i]^T$ , με  $q$  συμβολίζεται η συζυγής πίεση και με  $u_i$  οι συνιστώσες της συζυγούς ταχύτητας. Όταν οι εξισώσεις ροής ικανοποιούνται, ισχύει  $F = F_{aug}$  αφού  $R_l^U = 0$ ,  $l = 1, 2, 3(, 4)$ .

Αναπτύσσοντας την εξίσωση 3.4, λαμβάνουμε τη σχέση 3.5.

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} u_i R_i^W d\Omega + \int_{\Omega} q R^p d\Omega \quad (3.5)$$

Σκοπός της συζυγούς μεθόδου είναι ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας  $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ , οι οποίες εκφράζουν την μεταβολή της συνάρτησης κόστους  $F$  ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού  $b_m$ , όπου  $m$  ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού. Επειδή τα ολοκληρώματα στο δεξί μέλος της εξίσωσης 3.5 είναι εξ ορισμού μηδενικά, αντί της παραγώγου ευαισθησίας  $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ , μπορεί να υπολογιστεί η παράγωγος της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης  $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m}$ . Ο ρυθμός μεταβολής της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης δίνεται από τη σχέση 3.6.

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = \frac{\delta F}{\delta b_m} + \int_{\Omega} u_i \frac{\delta R_i^W}{\delta b_m} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta b_m} d\Omega + \int_{\Omega} (u_i R_i^W + q R^p) \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m} \quad (3.6)$$

Σύμφωνα με τη σχέση 3.6, ο ρυθμός μεταβολής της αντικειμενικής συνάρτησης είναι

συνάρτηση των ρυθμών μεταβολής των ποσοτήτων της ροής,  $\frac{\delta p}{\delta b_m}$  και  $\frac{\delta W_i}{\delta b_m}$ , και του ρυθμού μεταβολής των στοιχειωδών όγκων του χωρίου ροής,  $\frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m}$ . Επειδή στον έλεγχο ροής δεν έχουμε μεταβολή του χωρίου ροής, ο τελευταίος όρος της εξίσωσης 3.6 είναι μηδέν και έτσι η 3.6 απλοποιείται σύμφωνα με την σχέση 3.7.

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = \frac{\delta F}{\delta b_m} + \int_{\Omega} u_i \frac{\delta R_i^W}{\delta b_m} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta b_m} d\Omega \quad (3.7)$$

Για ένα οποιοδήποτε μέγεθος της ροής  $\Phi$  ισχύουν οι σχέσεις 3.8 και 3.9.

$$\Phi = \Phi(b_m) \quad (3.8)$$

$$\frac{\delta \Phi}{\delta b_m} = \frac{\partial \Phi}{\partial b_m} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \quad (3.9)$$

Στον έλεγχο ροής, ο τελευταίος όρος της 3.9 είναι μηδενικός, αφού η γεωμετρία του χωρίου ροής (άρα και το υπολογιστικό πλέγμα) δεν αλλάζει ( $\frac{\delta x_k}{\delta b_m} = 0$ ), και έτσι αυτή απλοποιείται στη σχέση 3.10.

$$\frac{\delta \Phi}{\delta b_m} = \frac{\partial \Phi}{\partial b_m} \quad (3.10)$$

Έτσι η εξίσωση 3.7 μπορεί να γραφτεί σύμφωνα με τη σχέση 3.11.

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = \frac{\delta F}{\delta b_m} + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^W}{\partial b_m} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_m} d\Omega \quad (3.11)$$

Στην έκφραση 3.11, εμφανίζονται μόνο οι άμεσες μεταβολές των εξισώσεων της ροής,  $\frac{\partial R_i^U}{\partial b_m}$ . Το γεγονός αυτό είναι ιδιαίτερα βολικό, αφού αντικαθιστώντας τις αναλυτικές εκφράσεις των εξισώσεων  $R_i^U$ , επιτρέπεται η εναλλαγή της σειράς παραγωγίσιμης στους όρους εκείνους με μικτές παραγώγους των μεταβλητών της ροής ( $\Phi = U_i$ ) ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και τις χωρικές συντεταγμένες, σχέση 3.12.

$$\frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial b_m} \right) \quad (3.12)$$



### 3.3 Χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις κόστους

Στη γενική περίπτωση, η συνάρτηση κόστους αποτελείται από ολοκληρώματα ροϊκών ποσοτήτων στα όρια  $S$  αλλά και στο εσωτερικό του πεδίου ροής  $\Omega$ , και γράφεται σύμφωνα με τη σχέση 3.13.

$$F = \int_S F_S dS + \int_{\Omega} F_{\Omega} d\Omega \quad (3.13)$$

όπου με  $F_S$  και  $F_{\Omega}$  συμβολίζονται οι προς ολοκλήρωση ποσότητες στο  $S$  και στο  $\Omega$  αντίστοιχα. Επίσης, το όριο  $S$  μπορεί να αποτελείται από διάφορα τμήματα, έστω είσοδο  $S_I$ , έξοδο  $S_O$  και στερεά τοιχώματα  $S_W$ , και οι αντίστοιχες συναρτήσεις κόστους θα είναι οι  $F_{S_I}$ ,  $F_{S_O}$ , και  $F_{S_W}$ .

Η παράγωγος ευαισθησίας της γενικευμένης συνάρτησης κόστους 3.13 δίνεται από τη σχέση 3.14 (διαδικασία αντίστοιχη με αυτήν της προηγούμενης ενότητας). Επίσης, ισχύει η σχέση 3.15 (ταυτότητα) [12],

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_m} = & \int_S \frac{\partial F_S}{\partial b_m} dS + \int_S \frac{\partial F_S}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_S F_S \frac{\delta(dS)}{\delta b_m} \\ & + \int_{\Omega} \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial b_m} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} d\Omega + \int_{\Omega} F_{\Omega} \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) d\Omega \quad (3.15)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την τελευταία εξίσωση και εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης, το τελευταίο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της 3.14 γράφεται όπως στη σχέση 3.16.

$$\int_{\Omega} F_{\Omega} \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m} = \int_S F_{\Omega} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS - \int_{\Omega} \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} d\Omega \quad (3.16)$$

Επομένως, η 3.14 γράφεται όπως στη σχέση 3.17.

$$\frac{\delta F}{\delta b_m} = \int_S \frac{\partial F_S}{\partial b_m} dS + \int_S \left( \frac{\partial F_S}{\partial x_k} + F_{\Omega} n_k \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_S F_S \frac{\delta(dS)}{\delta b_m} + \int_{\Omega} \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial b_m} d\Omega \quad (3.17)$$

Οι άμεσες μεταβολές  $\frac{\partial F_S}{\partial b_m}$  και  $\frac{\partial F_{\Omega}}{\partial b_m}$  δίνονται από τις σχέσεις 3.18 και 3.19.

$$\frac{\partial F_S}{\partial b_m} = \frac{\partial F_S}{\partial W_i} \frac{\partial W_i}{\partial b_m} + \frac{\partial F_S}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial b_m} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial F_{\Omega}}{\partial b_m} = \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial W_i} \frac{\partial W_i}{\partial b_m} + \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial b_m} \quad (3.19)$$

Με την αντικατάσταση της μεταβολής της συνάρτησης κόστους, εξίσωση 3.17, στην εξίσωση 3.11, καθίσταται δυνατός ο μετασχηματισμός της έκφρασης του  $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m}$  με στόχο την ομαδοποίηση των όρων και την παραγωγή των συζυγών εξισώσεων, των οριακών τους συνθηκών και των παραγώγων ευαισθησίας, όπως θα δούμε και στη συνέχεια.

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η συνάρτηση στόχος της μείωσης των απωλειών σχετικής ολικής πίεσης, η οποία χρησιμοποιείται στην εφαρμογή που μελετάται στην εργασία αυτή.

### 3.3.1 Ελαχιστοποίηση απωλειών σχετικής ολικής πίεσης

Στην εργασία αυτή, επιδιώκεται η εύρεση του χάρτη παραγώγων ευαισθησίας που θα υποδείξει τις καταλληλότερες θέσεις για την εφαρμογή ενεργητικού ελέγχου της ροής με δέσμες ρευστού σε κινούμενη πτερύγωση συμπιεστή, με απώτερο σκοπό την μείωση των απωλειών σχετικής ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου  $S_I$  και εξόδου  $S_O$  του αγωγού. Η συνάρτηση κόστους αποτελείται μόνο από συνοριακά ολοκληρώματα, είναι δηλαδή της μορφής της σχέσης 3.20.

$$F = \int_{S_{I,O}} F_{S_{I,O}} dS \quad (3.20)$$

όπου η προς ολοκλήρωση ποσότητα στα όρια εισόδου και εξόδου δίνεται από τη σχέση 3.21.

$$F_{S_{I,O}} = - \left( p + \frac{1}{2} W^2 - \frac{1}{2} U^2 \right) W_i n_i \quad (3.21)$$

όπου

-  $W = |\vec{W}|$  το μέτρο του διανύσματος της σχετικής ταχύτητας.

-  $U$  το μέτρο της περιφερειακής ταχύτητας που δίνεται από τη σχέση 2.3.

-  $n_i$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που κατευθύνεται προς το εξωτερικό του πεδίου ροής.

Η ποσότητα της σχέσης 3.21 εκφράζει τη σχετική ολική πίεση πολλαπλασιασμένη με την παροχή όγκου του ασυμπίεστου ρευστού που διέρχεται από τη στοιχειώδη διατομή της εισόδου ή της εξόδου του χωρίου. Η παροχή όγκου πολλαπλασιάζεται στη συνάρτηση κόστους έτσι ώστε τα μεγέθη που προκύπτουν να είναι αντίστοιχα της ισχύος. Το αρνητικό πρόσημο υφίσταται λόγω της φοράς του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος  $n_i$ , που κατευθύνεται προς το εξωτερικό του πεδίου ροής. Οι μεταβολές των  $F_{S_{I,O}}$  ως προς τις ποσότητες της ροής δίνονται στη σχέση 3.22.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{S_{I,O}}}{\partial W_i} &= -\frac{1}{2}W^2 n_i + \frac{1}{2}U^2 n_i - W_{\langle n \rangle} W_i - p n_i \\ \frac{\partial F_{S_{I,O}}}{\partial p} &= -W_i n_i\end{aligned}\quad (3.22)$$

όπου

-  $W_{\langle n \rangle} = W_i n_i$  η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας

Με βάση τις σχέσεις 3.18 και 3.19 και επειδή  $F_\Omega = 0$ , η σχέση 3.17 για τη συνάρτηση κόστους της παρούσας εφαρμογής δίνεται από τη σχέση 3.23. Στη σχέση αυτή ελήφθη υπόψη ότι η γεωμετρία και η θέση των κόμβων στην είσοδο και στην έξοδο του χωρίου δεν μεταβάλλονται, δηλαδή  $\frac{\delta x_k}{\delta b_m} = 0$  και  $\frac{\delta(dS)}{\delta b_m} = 0$ .

$$\begin{aligned}\frac{\delta F}{\delta b_m} &= - \int_{S_I} \left[ \left( p + \frac{1}{2}W^2 - \frac{1}{2}U^2 \right) n_i + W_{\langle n \rangle} W_i \right] \frac{\partial W_i}{\partial b_m} dS - \int_{S_I} W_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_m} dS \\ &\quad - \int_{S_O} \left[ \left( p + \frac{1}{2}W^2 - \frac{1}{2}U^2 \right) n_i + W_{\langle n \rangle} W_i \right] \frac{\partial W_i}{\partial b_m} dS - \int_{S_O} W_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_m} dS\end{aligned}\quad (3.23)$$

Αν στην εξίσωση 3.23 χρησιμοποιηθούν οι συνθήκες  $\frac{\partial W_i}{\partial b_m} = 0$  και  $\frac{\partial p}{\partial b_m} = 0$  που ισχύουν στην είσοδο και την έξοδο του πεδίου ροής αντιστοίχως, αυτή απλοποιείται στην 3.24.

$$\frac{\delta F}{\delta b_m} = - \int_{S_I} W_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_{S_O} \left[ \left( p + \frac{1}{2}W^2 - \frac{1}{2}U^2 \right) n_i + W_{\langle n \rangle} W_i \right] \frac{\partial W_i}{\partial b_m} dS\quad (3.24)$$

### 3.4 Διατύπωση συνεχών συζυγών εξισώσεων και οριακών συνθηκών

Στη μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης κόστους, εξίσωση 3.11, εμφανίζονται οι μερικές παραγώγοι των υπολοίπων των εξισώσεων της ροής, δηλαδή οι ποσότητες  $\frac{\partial R_i^W}{\partial b_m}$  και  $\frac{\partial R^p}{\partial b_m}$ . Για τη διατύπωση των συζυγών εξισώσεων, οι παραπάνω ποσότητες πρέπει να αντικατασταθούν με τις αναλυτικές τους εκφράσεις, όπως αυτές υπολογίζονται από τη διαφορίση  $\frac{\partial()}{\partial b_m}$  των εξισώσεων της ροής, 3.1 και 3.2. Έτσι προκύπτουν οι παρακάτω αναλυτικές εκφράσεις.

$$\frac{\partial R^p}{\partial b_m} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial W_j}{\partial b_m} \right) \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i^W}{\partial b_m} &= \frac{\partial W_j}{\partial b_m} \frac{\partial W_i}{\partial x_j} + W_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial W_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial b_m} \right) \\ &\quad - (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial W_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial W_j}{\partial b_m} \right) \right] \\ &\quad + 2\epsilon_{ijk} \omega_j \frac{\partial W_k}{\partial b_m} + \frac{\partial(\epsilon_{imn} \epsilon_{ijk} \omega_n \omega_n x_k)}{\partial b_m} \\ &\quad , i = 1, 2, (3) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ο τελευταίος όρος της εξίσωσης 3.26 ισούται με μηδέν, αφού η γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  και η θέση  $x_k$  δεν μεταβάλλονται. Ακολουθεί η ανάπτυξη των ολοκληρωμάτων της εξίσωσης 3.11, με την βοήθεια της τελευταίας σχέσης και του θεωρήματος Green-Gauss.

$$\int_{\Omega} q \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial W_j}{\partial b_m} \right) d\Omega = \int_S q \frac{\partial W_j}{\partial b_m} n_j dS - \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial W_j}{\partial b_m} d\Omega \quad (3.27)$$

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial W_j}{\partial b_m} \frac{\partial W_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_S u_i W_i n_j \frac{\partial W_j}{\partial b_m} dS - \int_{\Omega} W_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \frac{\partial W_j}{\partial b_m} \right) d\Omega \quad (3.28)$$

$$\int_{\Omega} u_i W_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial W_i}{\partial b_m} \right) d\Omega = \int_S u_i W_j n_j \frac{\partial W_i}{\partial b_m} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i W_j) \frac{\partial W_i}{\partial b_m} d\Omega \quad (3.29)$$

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial b_m} \right) d\Omega = \int_S u_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial b_m} d\Omega \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} (\nu + \nu_t) u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial W_i}{\partial b_m} \right) \right] d\Omega &= - \int_S (\nu + \nu_t) u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial W_i}{\partial b_m} \right) n_j dS \\ &+ \int_{\Omega} (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial W_i}{\partial b_m} \right) d\Omega \\ &= - \int_S (\nu + \nu_t) u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial W_i}{\partial b_m} \right) n_j dS \\ &+ \int_S (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial W_i}{\partial b_m} n_j dS \\ &- \int_{\Omega} (\nu + \nu_t) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \frac{\partial W_i}{\partial b_m} d\Omega \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} (\nu + \nu_t) u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial W_j}{\partial b_m} \right) \right] d\Omega &= - \int_S (\nu + \nu_t) u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial W_j}{\partial b_m} \right) n_j dS \\ &+ \int_S (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial W_j}{\partial b_m} n_i dS \\ &- \int_{\Omega} (\nu + \nu_t) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial W_j}{\partial b_m} d\Omega \end{aligned} \quad (3.32)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις 3.17 και 3.27 - 3.32 στην 3.11 προκύπτει η σχέση 3.33 για το ρυθμό μεταβολής της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης  $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \int_S \left[ u_j W_j n_i + u_i W_j n_j + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_S}{\partial W_i} \right] \frac{\partial W_i}{\partial b_m} dS \\ &+ \int_{\Omega} \left[ - W_j \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right. \\ &+ \left. \frac{\partial q}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial W_i} + 2u_i \epsilon_{ijk} \omega_j \right] \frac{\partial W_i}{\partial b_m} d\Omega \\ &+ \int_S \left( u_j n_j + \frac{\partial F_S}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial b_m} dS + \int_{\Omega} \left( - \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial b_m} d\Omega \\ &- \int_S (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial W_i}{\partial x_j} + \frac{\partial W_j}{\partial x_i} \right) n_j u_i dS \end{aligned} \quad (3.33)$$

Από την τελευταία σχέση φαίνεται ότι η παράγωγος ευαισθησίας της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης  $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m}$  έχει εκφραστεί συναρτήσει μόνο των άμεσων μεταβολών των ροϊκών μεταβλητών  $\frac{\partial W_i}{\partial b_m}$  και  $\frac{\partial p}{\partial b_m}$  στο εσωτερικό αλλά και στα όρια του πεδίου ροής. Οι συντελεστές με τους οποίους πολλαπλασιάζονται οι άμεσες μεταβολές των ροϊκών ποσοτήτων, εξαρτώνται μόνο από τις μεταβλητές του πεδίου ροής και το συζυγές του πεδίο, το οποίο μπορεί να υπολογιστεί. Ο υπολογισμός των άμεσων μεταβολών των ροϊκών ποσοτήτων δεν είναι επιθυμητός, λόγω του υψηλού υπολογιστικού κόστους που απαιτούν. Οι συζυγείς εξισώσεις και οι οριακές τους συνθήκες θα προκύψουν από την απαλοιφή των ολοκληρωμάτων της σχέσης 3.33 που περιέχουν τις άμεσες μεταβολές των ροϊκών μεταβλητών  $\frac{\partial W_i}{\partial b_m}$  και  $\frac{\partial p}{\partial b_m}$ .

Συγκεκριμένα, απαλείφοντας τα χωρικά ολοκληρώματα της σχέσης 3.33, προκύπτουν οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις, σε γενική μορφή, λόγω της χρήσης στην 3.33 της γενικής έκφρασης 3.17 που χρησιμοποιήθηκε για τη μεταβολή της συνάρτησης κόστους  $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ . Αυτό σημαίνει ότι θα ισχύουν για κάθε συνάρτηση κόστους της μορφής 3.13, αρκεί να αντικατασταθούν κατάλληλα οι ποσότητες  $\frac{\partial F_S}{\partial b_m}$  και  $\frac{\partial F_\Omega}{\partial b_m}$ . Έτσι, παίρνουμε τις συζυγείς πεδιακές εξισώσεις των σχέσεων 3.34 και 3.35.

$$R^q = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial p} = 0 \quad (3.34)$$

$$R_i^u = -W_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial W_i} + 2u_i \epsilon_{ijk} \omega_j = 0 \quad , i = 1, 2, (3) \quad (3.35)$$

Η εξίσωση 3.34 αποτελεί τη συζυγή εξίσωση της συνέχειας και η 3.35, τη συζυγή εξίσωση της ορμής. Οι εξισώσεις αυτές διακριτοποιούνται και λύνονται αριθμητικά προς εύρεση του πεδίου των συζυγών μεταβλητών  $\Psi = [q, u_i]^T$ . Αξίζει να επισημανθεί η παρόμοια μορφή των συζυγών εξισώσεων με τις εξισώσεις του πεδίου ροής Navier Stokes (οι συζυγείς εξισώσεις είναι όμως γραμμικές). Το γεγονός αυτό επιτρέπει τη χρήση των ίδιων υπολογιστικών εργαλείων (ίδιοι κώδικες) για την επίλυση του συζυγούς προβλήματος, δεν χρειάζεται δηλαδή ο επαναπρογραμματισμός νέου λογισμικού. Επίσης, το υπολογιστικό κόστος της επίλυσης των συζυγών εξισώσεων είναι παρόμοιο με το κόστος επίλυσης των εξισώσεων του ευθέως προβλήματος και ανεξάρτητο του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού  $\vec{b}_m$ , αφού οι συζυγείς εξισώσεις είναι ανεξάρτητες των άμεσων μεταβολών των μεταβλητών της ροής.

Με την ικανοποίηση των συζυγών εξισώσεων 3.34 και 3.35, η 3.33 απλοποιείται στην 3.36, από την οποία θα προκύψουν οι οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος

και οι παράγωγοι ευαισθησίας.

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \int_S \left[ u_j W_j n_i + u_i W_j n_j + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_S}{\partial W_i} \right] \frac{\partial W_i}{\partial b_m} dS \\
&+ \int_S \left( u_j n_j + \frac{\partial F_S}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial b_m} dS \\
&- \int_S (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial W_i}{\partial x_j} + \frac{\partial W_j}{\partial x_i} \right) n_j u_i dS
\end{aligned} \tag{3.36}$$

### 3.4.1 Συζυγείς συνθήκες στα όρια εισόδου $S_I$

Στην είσοδο του χωρίου ροής ισχύει, όπως προαναφέρθηκε  $\frac{\partial W_i}{\partial b_m} = 0$  (μη μηδενική συνθήκη Dirichlet ταχύτητας). Επομένως, το πρώτο ολοκλήρωμα στην εξίσωση 3.36 απαλείφεται στην είσοδο, σχέση 3.37.

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \int_{S_I} \left( u_j n_j + \frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_{S_I} (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial W_i}{\partial x_j} + \frac{\partial W_j}{\partial x_i} \right) n_j u_i dS \\
&= \int_{S_I} \phi_2 \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_{S_I} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial W_i}{\partial x_j} + \frac{\partial W_j}{\partial x_i} \right) dS
\end{aligned} \tag{3.37}$$

όπου

$$\phi_{1,ij} = (\nu + \nu_t) u_i n_j, \quad \phi_2 = u_j n_j + \frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} \tag{3.38}$$

Οι οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος στην είσοδο, προκύπτουν από την απαλοιφή των ολοκληρωμάτων στη σχέση 3.37, δηλαδή πρέπει να ισχύουν οι συνθήκες 3.39 και 3.40.

$$\phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial W_i}{\partial x_j} + \frac{\partial W_j}{\partial x_i} \right) = 0 \tag{3.39}$$

$$\phi_2 = 0 \tag{3.40}$$

Οι παραπάνω συνθήκες ισοδυναμούν με την επιβολή της κάθετης στο όριο  $S_I$  συνι-

στώσας της συζυγούς ταχύτητας ίσης με

$$u_{\langle n \rangle} = u_i n_i = -\frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} \quad (3.41)$$

και μηδενισμού της εφαπτομενικής της συνιστώσας

$$\vec{u}_{\langle t \rangle} = \vec{u} - u_{\langle n \rangle} \vec{n} = 0 \quad (3.42)$$

Για τη συζυγή πίεση  $q$  στην είσοδο, ισχύει η μηδενική Neumann συνθήκη, όπως δηλαδή και για τη στατική πίεση στο πρωτεύον πρόβλημα.

### 3.4.2 Συζυγείς συνθήκες στα όρια εξόδου $S_O$

Στην έξοδο του χωρίου ροής ισχύει, όπως προαναφέρθηκε  $\frac{\partial p}{\partial b_m} = 0$  (μηδενική συνθήκη Dirichlet πίεσης). Επομένως, το δεύτερο ολοκλήρωμα στην εξίσωση 3.36 απαλείφεται στην έξοδο, σχέση 3.43.

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \int_{S_O} \left[ u_j W_j n_i + u_i W_j n_j + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial W_i} \right] \frac{\partial W_i}{\partial b_m} dS \\ &\quad - \int_{S_O} (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial W_i}{\partial x_j} + \frac{\partial W_j}{\partial x_i} \right) n_j u_i dS \\ &= \int_{S_O} \phi_{3,i} \frac{\partial W_i}{\partial b_m} dS - \int_{S_O} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial W_i}{\partial b_m} \right) dS \end{aligned} \quad (3.43)$$

όπου το  $\phi_{1,ij}$  δίνεται από την εξίσωση 3.38 και

$$\phi_{3,i} = u_j W_j n_i + u_i W_j n_j + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial W_i} \quad (3.44)$$

Υπολογιστικά πειράματα έχουν δείξει ότι ο δεύτερος όρος της εξίσωσης 3.43 μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος, ενδεχομένως λόγω του ότι η θέση του ορίου  $S_O$  είναι τέτοια ώστε εκεί το πεδίο της ταχύτητας να διέπεται από ικανοποιητική ομοιογένεια. Επομένως, ο όρος  $\phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial W_i}{\partial b_m} \right)$  μπορεί να αμεληθεί.

Από την απαλοιφή του πρώτου όρου της 3.43, θα προκύψουν οι οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος στην έξοδο  $S_O$  του χωρίου. Εκεί, πρέπει να ισχύει  $\phi_{3,i} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Η διανυσματική συνθήκη  $\phi_{3,i} = 0$ , γράφεται στο οριόδετο σύστημα, αναλυόμενη σε δύο συνιστώσες, μια κατά την κάθετη και μια κατά την εφαπτομενική



στο τοίχωμα. Αυτές προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό της εξίσωσης 3.44 με το μοναδιαίο κάθετο και μοναδιαίο εφαπτομενικό ως προς την επιφάνεια διάνυσμα αντίστοιχα, και γράφονται ως

$$q = u_j W_j + u_{\langle n \rangle} W_{\langle n \rangle} + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j n_i + \frac{\partial F_{S_0}}{\partial W_{\langle n \rangle}} \quad (3.45)$$

$$0 = u_{\langle t \rangle} W_{\langle n \rangle} + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i + \frac{\partial F_{S_0}}{\partial W_{\langle t \rangle}} \quad (3.46)$$

Από τη δεύτερη συνθήκη, εξίσωση 3.46 έχει απεμπλακεί η συζυγής πίεση  $q$ . Οι δύο παραπάνω εξισώσεις, μαζί με την τρίτη πληροφορία (που υπολογίζεται από το εσωτερικό του πεδίου με προεκβολή μιας συνιστώσας του διανύσματος της συζυγούς ταχύτητας), αρκούν για να προσδιοριστεί πλήρως η έξοδος του συζυγούς πεδίου ροής σε κάθε κύκλο του επαναληπτικού αλγορίθμου. Η εξίσωση 3.45 χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της συζυγούς πίεσης  $q$  με βάση τις τιμές των συζυγών μεταβλητών της προηγούμενης επανάληψης και η εξίσωση 3.46 για τον υπολογισμό της εφαπτομενικής συνιστώσας της συζυγούς ταχύτητας  $\vec{u}_{\langle t \rangle}$ .

Στις περιπτώσεις που η έξοδος του χωρίου ροής και, συνεπώς, και το τοπικό πλέγμα δεν έχει καθόλου (όπως και στην εφαρμογή της παρούσας εργασίας) ή έχει μικρή καμπυλότητα, η οποία μπορεί να αμεληθεί, οι εξισώσεις 3.45 και 3.46 απλοποιούνται σύμφωνα με τις σχέσεις 3.47 και 3.48.

$$q = u_j W_j + u_{\langle n \rangle} W_{\langle n \rangle} + 2(\nu + \nu_t) \frac{\partial u_{\langle n \rangle}}{\partial n} + \frac{\partial F_{S_0}}{\partial W_{\langle n \rangle}} \quad (3.47)$$

$$0 = u_{\langle t \rangle} W_{\langle n \rangle} + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_{\langle t \rangle}}{\partial n} + \frac{\partial u_{\langle n \rangle}}{\partial t} \right) + \frac{\partial F_{S_0}}{\partial W_{\langle t \rangle}} \quad (3.48)$$

Στην 3.48, ο όρος  $\frac{\partial u_{\langle n \rangle}}{\partial t}$  μπορεί να αμεληθεί αφού υπάρχει ομοιομορφία καθ' ύψος στην έξοδο του πεδίου (συχνή θεώρηση αν η έξοδος βρίσκεται αρκετά μακριά από τα πτερύγια). Στην περίπτωση αυτή, από την εξίσωση 3.48, προκύπτει ότι η εφαπτομενική συζυγής ταχύτητα είναι ανεξάρτητη της συζυγούς πίεσης στην έξοδο του πεδίου ροής.

### 3.4.3 Συζυγείς συνθήκες στα στερεά όρια $S_W$

Στα στερεά όρια  $S_W$ , αρχικά ισχύει η συνθήκη μη - ολίσθησης, δηλαδή  $W_i = 0$  (πριν την εισαγωγή δεσμών ρευστού στην επιφάνεια της πτερύγωσης). Επειδή στον έλεγχο ροής οι ταχύτητες πάνω στα στερεά όρια αποτελούν μεταβλητές σχεδιασμού, ισχύει  $\frac{\delta W_i}{\delta b_m} = \frac{\partial W_i}{\partial b_m} \neq 0$  (εξίσωση 3.10), σε αντίθεση με την περίπτωση βελτιστοποίησης μορφής

όπου ισχύει  $\frac{\delta W_i}{\delta b_m} = 0$ . Η εξίσωση 3.36 διατυπωμένη στα στερεά όρια  $S_W$  γράφεται σύμφωνα με τη σχέση 3.49.

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \int_{S_W} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial W_i}{\partial b_m} dS \\
&\quad + \int_{S_W} \left( u_j n_j + \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial b_m} dS \\
&\quad - \int_{S_W} (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial W_i}{\partial x_j} + \frac{\partial W_j}{\partial x_i} \right) n_j u_i dS \\
&= \int_{S_W} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_{S_W}}{\partial W_i} \right] \frac{\partial W_i}{\partial b_m} dS \\
&\quad + \int_{S_W} \phi_2 \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_{S_W} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial W_i}{\partial x_j} + \frac{\partial W_j}{\partial x_i} \right) dS \quad (3.49)
\end{aligned}$$

όπου  $\phi_{1,ij} = (\nu + \nu_t) u_i n_j$  και  $\phi_2 = u_j n_j + \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p}$ .

Για να μηδενιστούν τα δύο τελευταία ολοκληρώματα της σχέσης 3.49 επιβάλλονται οι εξής οριακές συνθήκες για την κάθετη και την εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας αντίστοιχα:

$$u_{\langle n \rangle} = - \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \quad (3.50)$$

$$u_{\langle t \rangle} = 0 \quad (3.51)$$

#### 3.4.4 Συζυγείς συνθήκες στα περιοδικά όρια

Για την περίπτωση ροών σε πτερυγώσεις στροβιλομηχανών, όπως στην εφαρμογή της παρούσας εργασίας, στα περιοδικά όρια επιβάλλεται η ισότητα των μεγεθών της ροής ( $p$  και  $W_i$ ) μεταξύ των δύο αντίστοιχων περιοδικών πλεγματικών επιφανειών. Οι ίδιες ακριβώς συνθήκες επιβάλλονται και στο συζυγές πρόβλημα. Έτσι, όλοι οι όροι της εξίσωσης 3.36 μηδενίζονται στα περιοδικά όρια αφού μεταξύ δύο περιοδικών επιφανειών τα κάθετα διανύσματα είναι παράλληλα με ίσο μέτρο και αντίθετη φορά.

### 3.4.5 Τελική - γενική έκφραση παραγώγων ευαισθησίας

Μετά την απαλοιφή των συζυγών εξισώσεων και των οριακών τους συνθηκών, η εξίσωση 3.36 λαμβάνει την πιο κάτω μορφή:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = \int_{S_W} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \right] \frac{\partial W_i}{\partial b_m} dS \quad (3.52)$$

Η σχέση 3.52 δίνει τις ζητούμενες παραγώγους ευαισθησίας στα στερεά τοιχώματα.

Η επίλυση των συζυγών εξισώσεων, με χρήση των οριακών συνθηκών που υπολογίστηκαν, δίνει το ζητούμενο πεδίο των συζυγών μεταβλητών. Έτσι, αφού και το ροϊκό πεδίο είναι γνωστό από την επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος, μπορούν να υπολογιστούν οι παράγωγοι ευαισθησίας.

## 3.5 Ελαχιστοποίηση απωλειών σχετικής ολικής πίεσης

Στην περίπτωση που η προς ελαχιστοποίηση αντικειμενική συνάρτηση δίνεται από τη σχέση 3.21, οι εξισώσεις του συζυγούς προβλήματος, οι οριακές συνθήκες και οι παράγωγοι ευαισθησίας ως προς τις ταχύτητες στα στερεά όρια δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις.

**Συζυγείς εξισώσεις**

$$R^q = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.53)$$

$$R_i^u = -W_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} + 2u_i \epsilon_{ijk} \omega_j = 0 \quad , i = 1, 2, 3 \quad (3.54)$$

**Οριακές συνθήκες στην είσοδο**

$$u_{<n>} = u_i n_i = W_i n_i \quad (3.55)$$

$$\vec{u}_{<t>} = \vec{u} - u_{<n>} \vec{n} = 0 \quad (3.56)$$

Οριακές συνθήκες στην έξοδο

$$q = u_j W_j + u_{<n>} W_{<n>} + (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_{<n>}}{\partial x_j} n_j - \frac{1}{2} W^2 - \frac{1}{2} U^2 - W_{<n>}^2 - p \quad (3.57)$$

$$0 = u_{<t>} W_{<n>} + (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_{<t>}}{\partial x_j} n_j - W_{<n>} W_{<t>} \quad (3.58)$$

Οριακές συνθήκες στα στερεά όρια

$$u_{<n>} = 0 \quad (3.59)$$

$$u_{<t>} = 0 \quad (3.60)$$

Παράγωγοι ευαισθησίας ως προς τις ταχύτητες στα στερεά όρια

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = \int_{S_W} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial W_i}{\partial b_m} dS \quad (3.61)$$

Η σχέση 3.61 είναι η έκφραση για τον προσδιορισμό των παραγώγων ευαισθησίας ως προς τις ταχύτητες των δεσμών αναρρόφησης ή έγχυσης. Ο όρος  $\frac{\partial W_i}{\partial b_m} = \frac{\delta W_i}{\delta b_m}$ , είναι ίσος με  $[1, 1, (,1)]$  όταν αναφερόμαστε στην επιφάνεια (ή κόμβο)  $m$  του στερεού ορίου. Σε όλες τις υπόλοιπες επιφάνειες ισούται με μηδέν. Επομένως στην έκφραση 3.61, το ολοκλήρωμα απαλείφεται μιας και αποτελείται από μια και μόνο μη - μηδενική ολοκληρωτέα ποσότητα, αυτήν της επιφάνειας (ή κόμβου)  $m$ . Έτσι η 3.61 μπορεί να γραφτεί

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m^l} = \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\delta W_i}{\delta b_m} |S_m| \quad (3.62)$$

Με  $|S_m|$  συμβολίζεται το στοιχειώδες εμβαδόν της επιφάνειας  $m$  του στερεού ορίου. Ο δείκτης  $l$  αντιστοιχεί στην  $l$  συνιστώσα της ταχύτητας:  $\vec{W}_m = \vec{b}_m$  ή  $W_m^l = b_m^l$ ,  $l = 1, 2(, 3)$

## Κεφάλαιο 4

# Επίλυση του ευθέος προβλήματος - συγκρίσεις

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για το ευθύ πρόβλημα και γίνονται διάφορες χρήσιμες συγκρίσεις με τελικό στόχο την πιστοποίηση των δύο λογισμικών, όπως αυτά αναφέρθηκαν στο τέλος του κεφαλαίου 1. Επίσης, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ τριών διαφορετικών μοντέλων τύρβης. Τα αποτελέσματα που συγκρίνονται είναι οι κατανομές των πιέσεων σε μια τομή πάνω στο πτερύγιο της περιστρεφόμενης πτερύγωσης του συμπιεστή, οι κατανομές πιέσεων και οι κατανομές των γωνιών  $\beta$  της ροής συναρτήσει της ακτίνας στην έξοδο του χωρίου ροής.

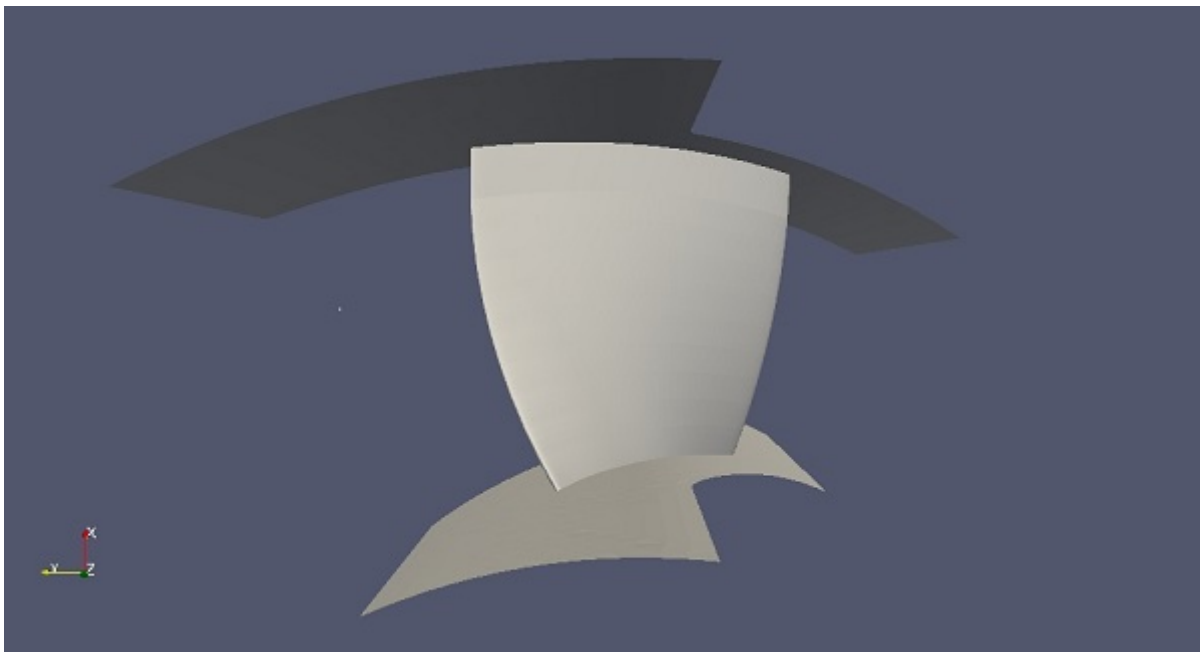
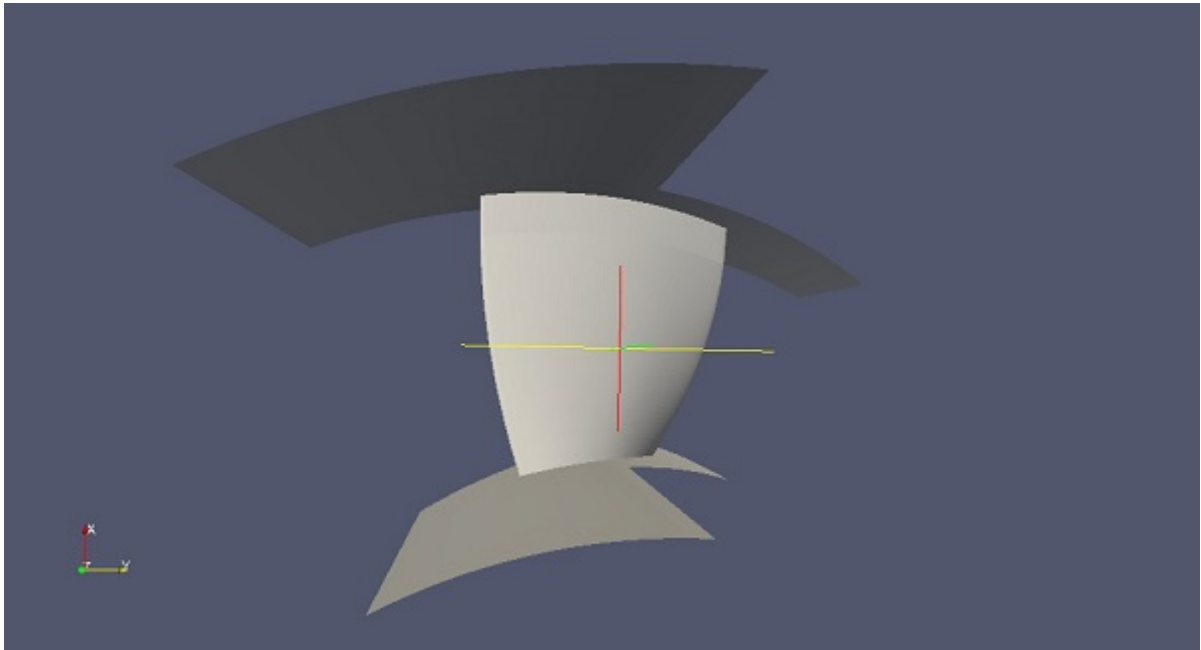
### 4.1 Γεωμετρία της περιστρεφόμενης πτερύγωσης συμπιεστή και υπολογιστικό χωρίο

Πριν την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της επίλυσης του ευθέος προβλήματος, πρέπει να αναφερθούν μερικά στοιχεία για την γεωμετρία της περιστρεφόμενης πτερύγωσης. Η τριδιάστατη πτερύγωση δεν έχει διάκενο μεταξύ ακροπτερυγίου και κελύφους, δηλαδή το πτερύγιο ενώνεται με το κέλυφος (shrouded rotor). Στα σχήματα 4.1 και 4.2 φαίνεται η γεωμετρία της πτερύγωσης από διάφορες όψεις.

Τα γεωμετρικά στοιχεία της πτερύγωσης είναι:

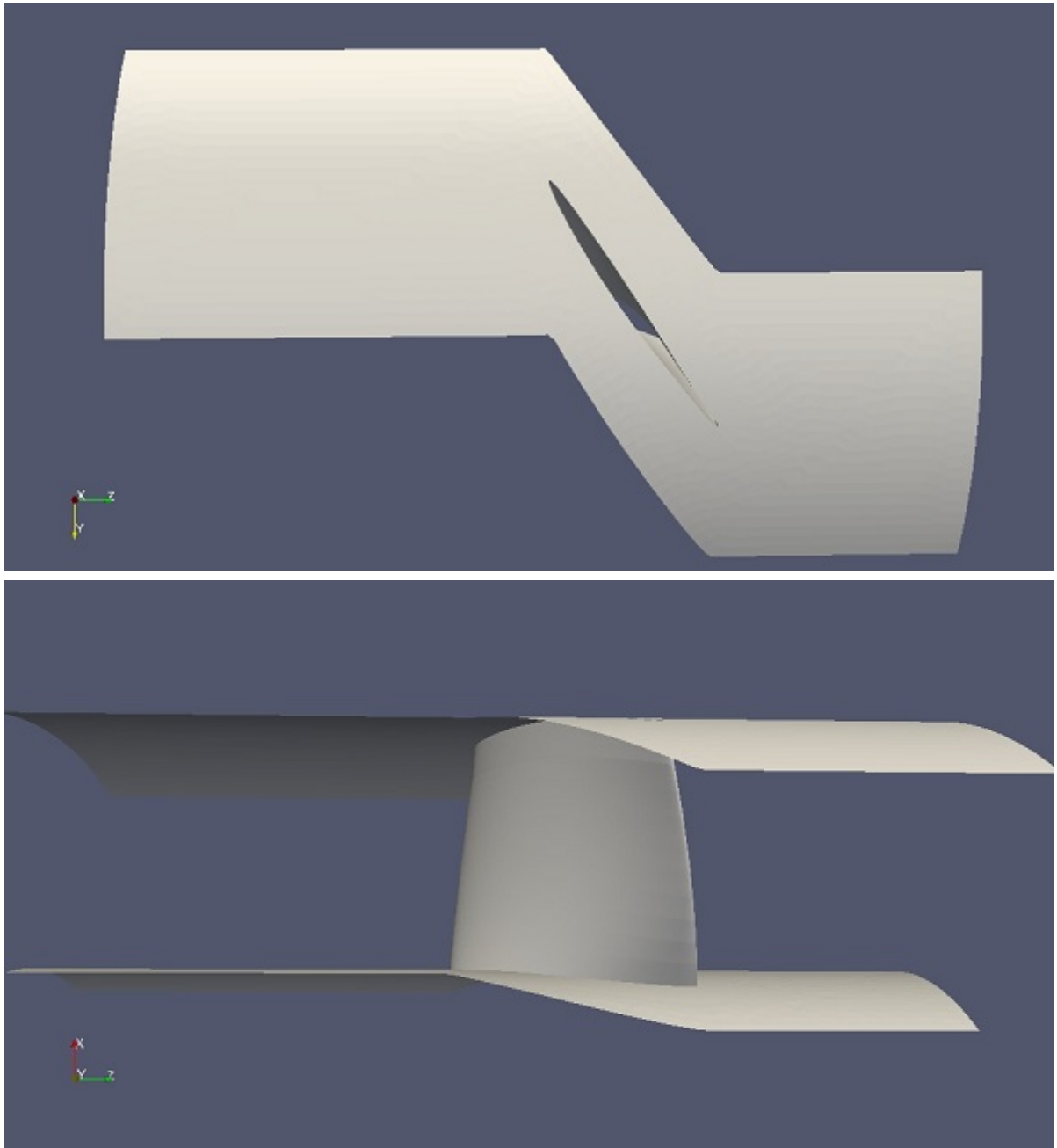
Αριθμός πτερυγίων πτερύγωσης: 12

Μήκος χωρίου ροής κατά την αξονική κατεύθυνση: 0.34 m



**Σχήμα 4.1:** Γεωμετρία της περιστρεφόμενης περύγωσης συμπίεστη.  
 Πάνω: όψη από είσοδο, Κάτω: όψη από έξοδο.

$R_H = 0.133m$	(ακτίνα ποδός ή ατράχτου Hub)
$R_S = 0.2245m$	(ακτίνα κελύφους Shroud)
$R_M = 0.18m$	(μέση ακτίνα - mid span)
$\beta'_{1H} = 49.1^\circ$	(γωνία μετάλλου πτερυγίου στην ακτίνα ποδός)
$\beta'_{1S} = 62.5^\circ$	(γωνία μετάλλου ακροπτερυγίου)



**Σχήμα 4.2:** Γεωμετρία της περιστρεφόμενης πτερύγωσης συμπιεστή.  
Πάνω: όψη από κέλυφος (*shroud*), Κάτω: όψη από περιοδικό όριο.

Όσον αφορά τη διακριτοποίηση του χωρίου ροής, δηλαδή το υπολογιστικό πλέγμα που χρησιμοποιείται για την επίλυση των εξισώσεων της ροής, αυτό κατασκευάστηκε χρησιμοποιώντας πλεγματοποιητή που αναπτύχθηκε στην ΜΠΥΡ&Β. Λόγω της διαφορετικής δομής των δεδομένων που περιγράφουν το πλέγμα του οικείου πλεγματοποιητή με το ανοικτό λογισμικό OpenFOAM που χρησιμοποιείται για την επίλυση των εξισώσεων της ροής, χρησιμοποιείται οικείος κώδικας μετατροπής των δεδομένων. Έτσι καθίστα-

ται δυνατή η διαχείριση του πλέγματος από το ανοικτό λογισμικό. Ο πλεγματοποιητής αυτός, αρχικά κατασκευάζει διδιάστατο μη δομημένο υβριδικό (αποτελούμενο από τριγωνικά και τετραγωνικά στοιχεία) πλέγμα σε σταθερή ακτίνα, δηλαδή στο διδιάστατο χώρο  $(\theta, z)$ . Έχοντας κατασκευάσει επιφανειακά πλέγματα σε διάφορες θέσεις κατά την ακτίνα, γίνεται πολυωνυμική παρεμβολή των σημείων των διδιάστατων πλεγμάτων. Τα σημεία αυτά ενώνονται με τρόπο ώστε να σχηματίσουν το τριδιάστατο μη δομημένο και υβριδικό πλέγμα (δηλαδή αποτελείται από τετραγωνικές πυραμίδες, τετραεδρικά και εξαεδρικά κελιά). Τα εξαεδρικά κελιά βρίσκονται στις θέσεις κοντά στα στερεά όρια (περύγιο, άτρακτος και κέλυφος). Αποτελείται από 744210 κελιά και φαίνεται στο σχήμα 4.3.

## 4.2 Σύγκριση αποτελεσμάτων με χρήση διαφορετικών μοντέλων τύρβης

Οι οριακές συνθήκες του ευθέος προβλήματος φαίνονται στον πίνακα 5.1. Η επίλυση του έγινε χρησιμοποιώντας τρία διαφορετικά μοντέλα τύρβης για χαμηλούς αριθμούς Reynolds - Low Re(Spalart Allmaras -SA, k -  $\epsilon$ , k -  $\omega$  SST), μεταξύ των οποίων έγιναν διάφορες συγκρίσεις.

**Πίνακας 4.1:** Οριακές συνθήκες ευθέος προβλήματος για λειτουργία στο σημείο σχεδιασμού.

Όριο	$W(\frac{m}{s})$	$p(\frac{m^2}{s^2})$	$k(\frac{m^2}{s^2})$	$\omega(s^{-1})$	$\epsilon(\frac{m^2}{s^3})$	$\tilde{\nu}$
Είσοδος	$W_{in}$	zero Neumann	0.315	126.16	3.58	$4.5 \cdot 10^{-6}$
Έξοδος	zero Neumann	fixed mean value	zero Neumann	zero Neumann	zero Neumann	zero Neumann
Στερεά όρια	(0 0 0)	zero Neumann	$1 \cdot 10^{-11}$	501760	$1 \cdot 10^{-6}$	0
Περιοδικά όρια	cyclicGgi	cyclicGgi	cyclicGgi	cyclicGgi	cyclicGgi	cyclicGgi

Στην είσοδο καθορίζεται η απόλυτη ταχύτητα και μέσω της σχέσης 2.2 υπολογίζεται η σχετική ταχύτητα εισόδου  $W_{in}$ . Συγκεκριμένα έχουμε:

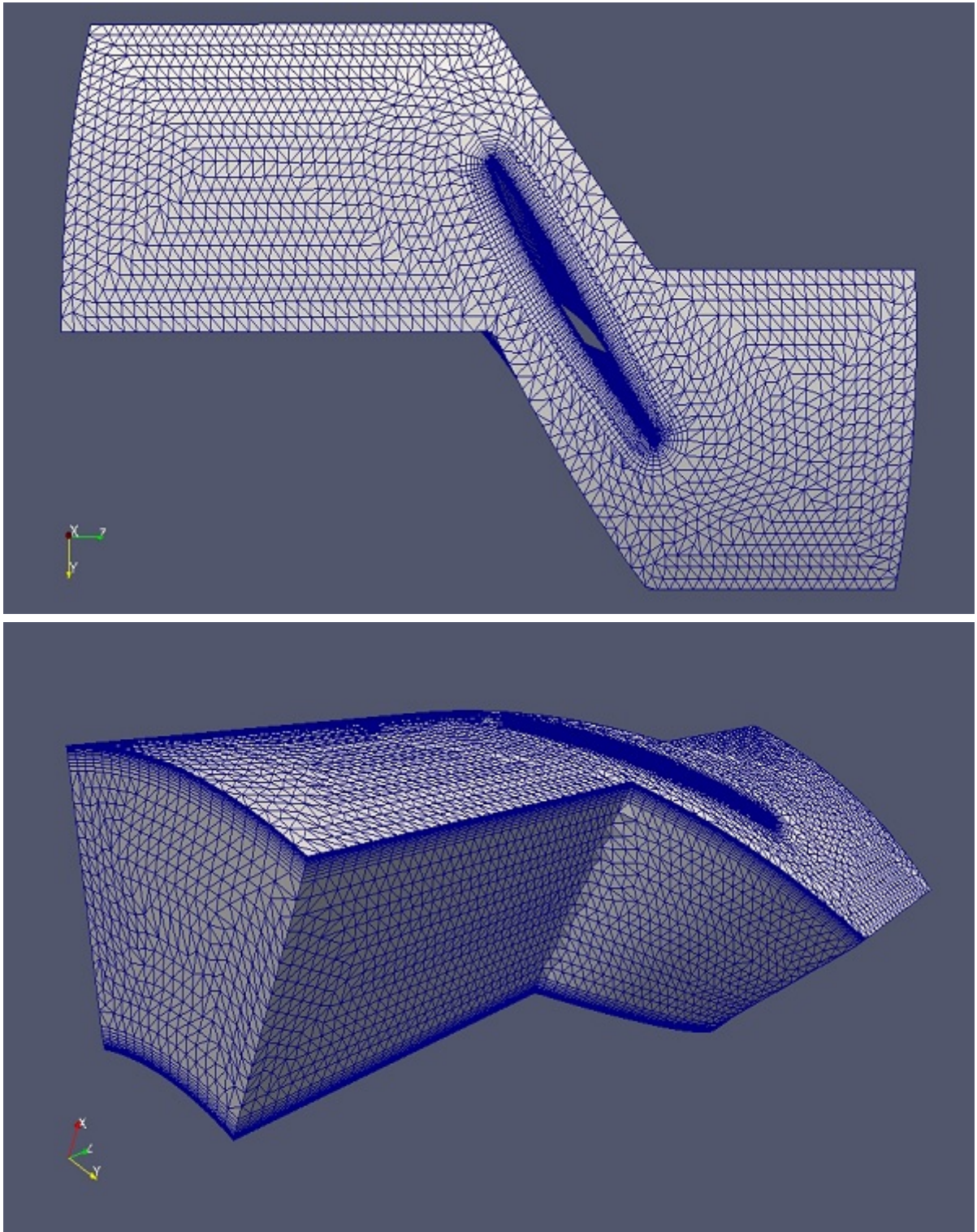
$$v_a = 15 \frac{m}{s}$$

$$v_\theta = 0 \frac{m}{s} \quad (\text{είσοδος χωρίς συστροφή}).$$

$$v_r = 0 \frac{m}{s}$$

$$N = 1300 \text{ RPM}$$





**Σχήμα 4.3:** Υπολογιστικό πλέγμα περιστρεφόμενης περύγωσης συμπίεστη.  
Πάνω: όψη από κέλυφος (*shroud*), Κάτω: όψη από περιοδικό όριο.

Η λειτουργία στις πιο πάνω συνθήκες εισόδου της ταχύτητας αντιστοιχεί στην πιο αποδοτική λειτουργία της περιστρεφόμενης πτερύγωσης, δηλαδή έχουμε λειτουργία στο σημείο σχεδίασμού (design point). Στο σημείο αυτό, οι γωνίες εισόδου της σχετικής ροής στο πτερύγιο  $\beta_1$ , σχήμα ;; είναι περίπου ίσες με τις γωνίες μετάλλου  $\beta_1'$  στην ακμή πρόσπτωσης του πτερυγίου καθ' όλο το ύψος του.

Για τις οριακές συνθήκες της πίεσης, η οριακή συνθήκη fixed mean value χρησιμοποιείται αντί της συνθήκης μηδενικής Dirichlet που χρησιμοποιείται συνήθως στην έξοδο ενός χωρίου ροής. Αυτό γίνεται γιατί εάν έχουμε μηδενική πίεση στην έξοδο, προκαλείται μια διαταραχή στο πεδίο ταχυτήτων της ροής κοντά στην έξοδο, η οποία δεν συνάδει με την φυσική της. Αυτό αποδεικνύεται σύμφωνα με τα πιο κάτω:

Θεωρώντας ότι είμαστε αρκετά κατάντι από την πτερύγωση και η ομοιομορφία της ροής έχει αποκατασταθεί σε μεγάλο βαθμό, τα συνεχτικά φαινόμενα στις περιοχές μακριά από τα στερεά όρια μπορούν να θεωρηθούν αμελητέα. Έτσι, αντί των εξισώσεων Navier Stokes μπορούν να χρησιμοποιηθούν, μακριά από τα κελύφη, οι εξισώσεις Euler, οι οποίες διατυπωμένες στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων  $(r, \theta, z)$  γράφονται:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (4.1)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + v_r \frac{v_\theta}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (4.2)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.3)$$

Κοντά στην έξοδο, η ροή είναι περίπου ομοιόμορφη κατά την αξονική και την περιφερειακή διεύθυνση ενώ η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας είναι πολύ μικρή, δηλαδή για τα μεγέθη της ροής ισχύει:

$$\frac{\partial()}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial()}{\partial \theta} = 0$$

$$v_r \ll$$

Έτσι, οι εξισώσεις 4.9-4.11 απλοποιούνται και απομένει μόνο:

$$\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (4.4)$$

Από την 4.12, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που θέσουμε  $p = 0$  στην έξοδο, μηδενίζεται η περιφερειακή συνιστώσα της απόλυτης ταχύτητας και έτσι επηρεάζεται η

φυσική της ροής στην περιοχή κοντά στην έξοδο.

Η οριακή συνθήκη fixed mean value, έχει το πλεονέκτημα να προκαλεί πολύ μικρότερη διαταραχή της ροής στην έξοδο σε σχέση με την οριακή συνθήκη μηδενικής Dirichlet. Αυτό γίνεται γιατί η πίεση στην έξοδο, λαμβάνεται με προεκβολή (extrapolation) από το εσωτερικό του πεδίου ροής και στη συνέχεια σε αυτήν προστίθενται μια μέση τιμή (mean value) που καθορίζει ο χρήστης (0 στην προκειμένη περίπτωση) και η μέση τιμή της πίεσης των γειτονικών κελιών της εξόδου (που επίσης έχει τιμή κοντά στο μηδέν).

Όσον αφορά τις οριακές συνθήκες των μοντέλων τύρβης αυτές προκύπτουν σύμφωνα με τα παρακάτω:

#### • Μοντέλο τύρβης $k - \omega$ SST

Είσοδος

$$k = \frac{3}{2}(v_{in}I)^2$$

$$\omega = \frac{\sqrt{k}}{l}$$

Στερεά όρια

Η τυρβώδης κινητική ενέργεια  $k$  λαμβάνει μια πολύ μικρή, σχεδόν μηδενική, τιμή πάνω στον τοίχο ( $1 \cdot 10^{-11}$ ).

$$\omega = \frac{6\nu}{\beta y^2}$$

όπου

- $v_{in}$  η απόλυτη ταχύτητα εισόδου της ροής στην περύγωση.
- $I$  η ένταση της τύρβης (turbulence intensity) στην είσοδο, που εδώ λαμβάνεται ίση με 3%.
- $l$  το χαρακτηριστικό μήκος της τύρβης που εδώ λαμβάνεται ίσο με  $5\%(R_S - R_H)$ .
- $\nu = 1.568 \cdot 10^{-5}$  η κινηματική συνεκτικότητα του αερα.
- $\beta = \frac{3}{40}$  σταθερά.
- $y = 0.5 \cdot 10^{-4}$  η απόσταση του κέντρου του γειτονικού στο στερεό όριο κελιού.

#### • Μοντέλο τύρβης $k - \epsilon$

Είσοδος

$$k = \frac{3}{2}(v_{in}I)^2$$

$$\epsilon = C_{\mu} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l}$$

#### Στερεά όρια

Η τυρβώδης κινητική ενέργεια  $k$  λαμβάνει μια πολύ μικρή, σχεδόν μηδενική, τιμή πάνω στον τοίχο ( $1 \cdot 10^{-11}$ ).

Ο ρυθμός καταστροφής της τυρβώδους κινητικής ενέργειας  $\epsilon$  λαμβάνει επίσης μια μικρή τιμή στο στερεό όριο ( $1 \cdot 10^{-6}$ ).

όπου

$$- C_{\mu} = 0.09.$$

#### • Μοντέλο τύρβης Spalart Allmaras

#### Είσοδος

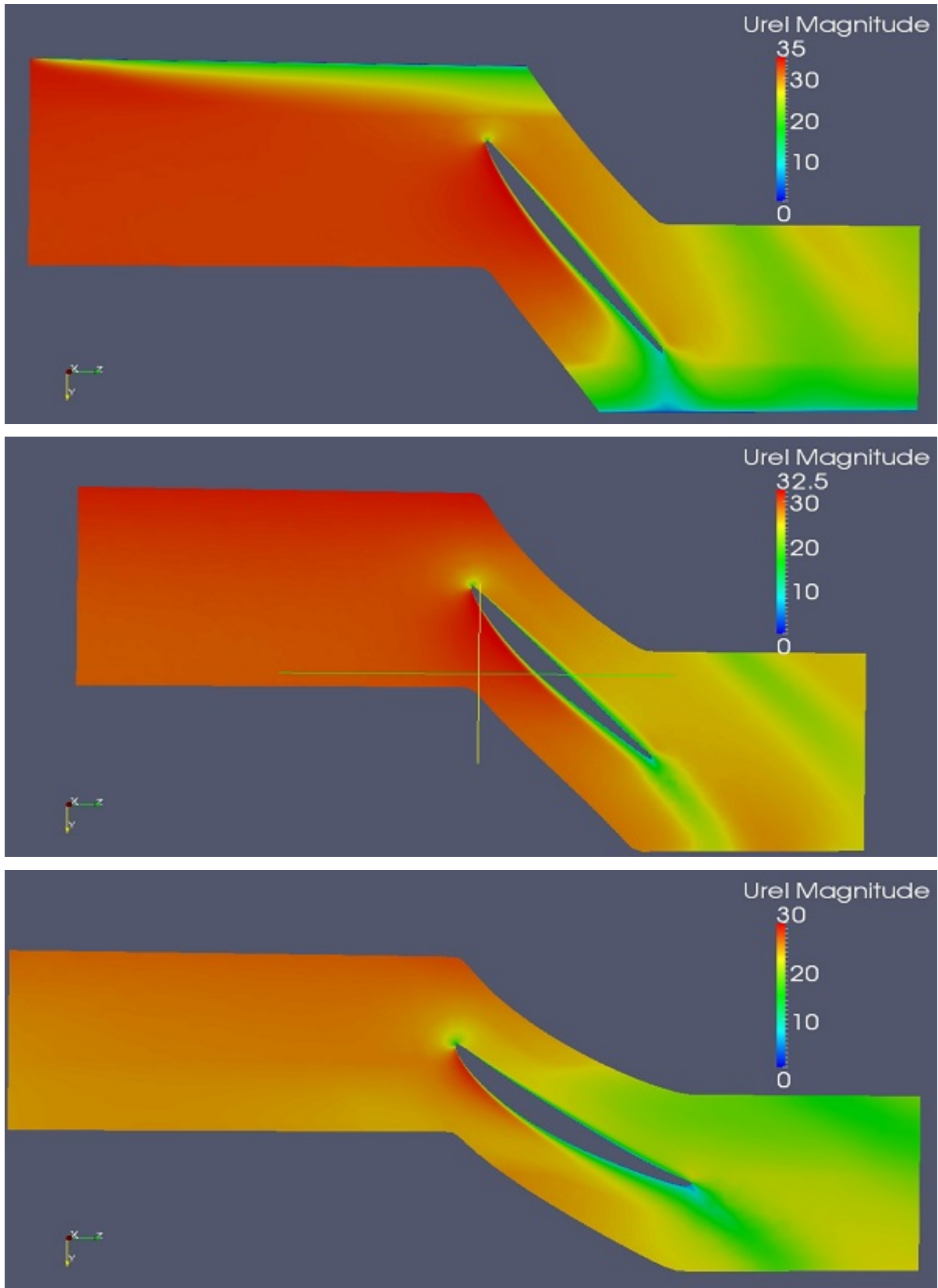
$$\tilde{\nu} = 0.3\nu_t$$

#### Στερεά όρια

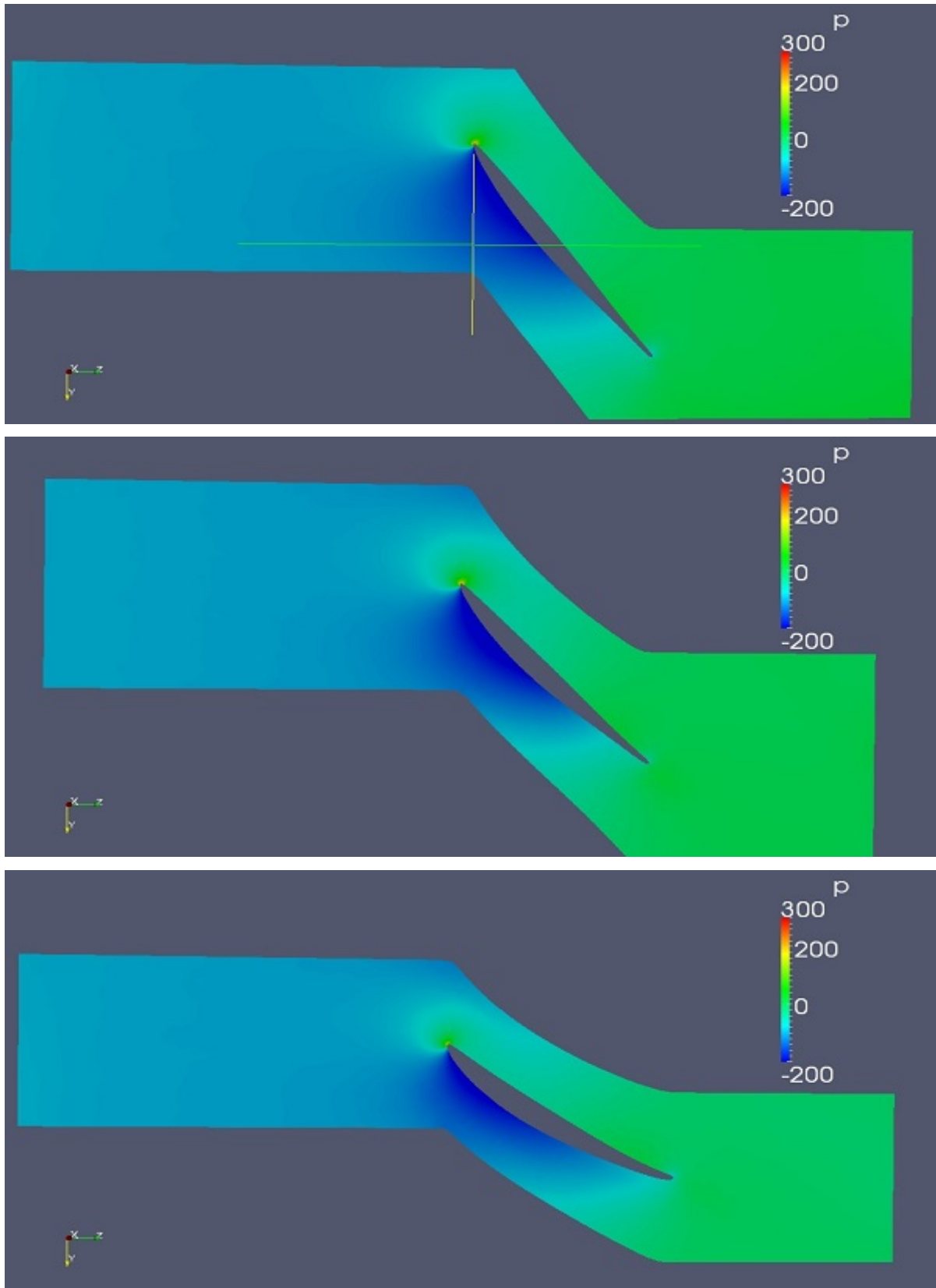
$$\tilde{\nu} = 0$$

Μετά και την διατύπωση των οριακών συνθηκών, επιλύονται οι εξισώσεις κατάσταση και έτσι προκύπτει το πεδίο ροής. Η επίλυση του προβλήματος ροής έγινε στο λογισμικό ανοικτού κώδικα OpenFOAM με τον αλγόριθμο SIMPLE που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 2 σε οκτώ παράλληλους επεξεργαστές (CPUs). Οι χρόνοι σύγκλισης της λύσης ήταν διαφορετικοί ανάλογα με το μοντέλο τύρβης που χρησιμοποιήθηκε. Για το μοντέλο τύρβης  $k - \omega SST$  ο χρόνος σύγκλισης ήταν περίπου μια ώρα, για το  $k - \epsilon$  περίπου δυόμιση ώρες και τέλος για το μοντέλο τύρβης SA περίπου πέντε ώρες.

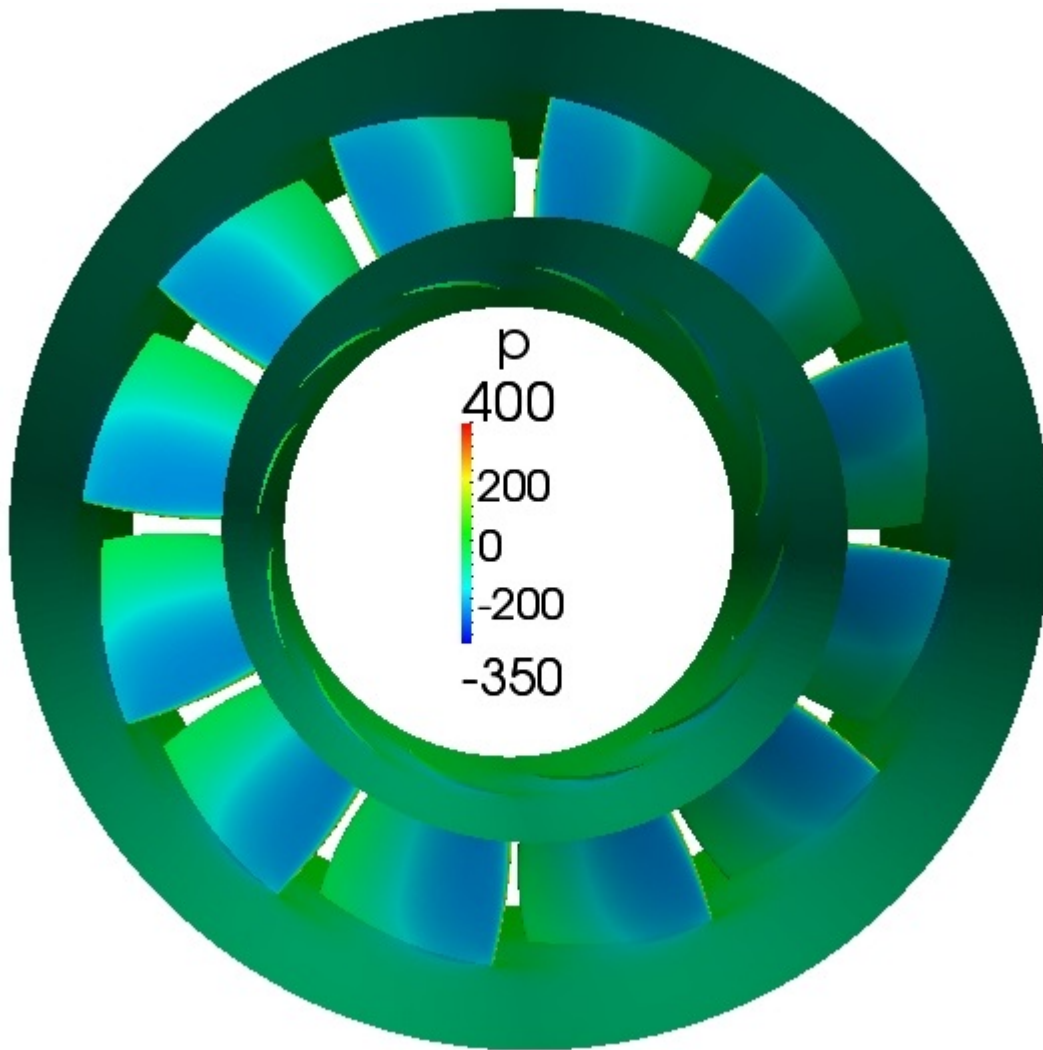
Στο σχήμα 4.4 φαίνεται το πεδίο του μέτρου της σχετικής ταχύτητας σε τρεις τομές στην ακτινική διεύθυνση και στο σχήμα 4.5 το πεδίο της στατικής πίεσης στις αντίστοιχες θέσεις, για την επίλυση με χρήση του μοντέλου τύρβης  $k - \omega SST$ . Επίσης, στο σχήμα 4.6 φαίνεται η κατανομή της πίεσης στα στερεά όρια σε ολόκληρη την περύγωση.



**Σχήμα 4.4:** Πεδίο μέτρου σχετικής ταχύτητας σε τρεις τομές κατά την ακτινική διεύθυνση για επίλυση με το μοντέλο τύρβης  $k - \omega$  SST. Πάνω: τομή κοντά στο κέλυφος. Μέση: τομή στη μέση ακτίνα. Κάτω: τομή κοντά στην άτρακτο. 51



**Σχήμα 4.5:** Πεδίο στατικής πίεσης σε τρεις τομές κατά την ακτινική διεύθυνση για επίλυση με το μοντέλο τύρβης  $k - \omega SST$ . Πάνω: τομή κοντά στο κέλυφος. Μέση: τομή στη μέση ακτίνα. Κάτω: τομή κοντά στην άτρακτο. 52

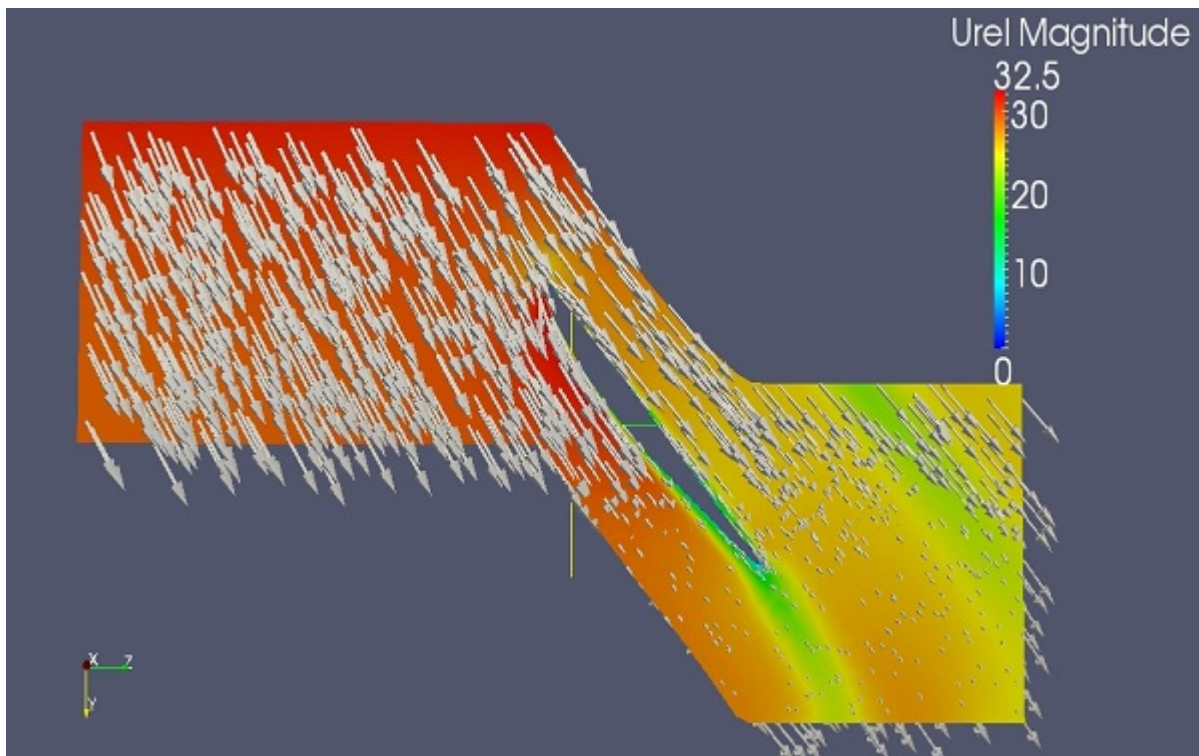


**Σχήμα 4.6:** Πεδίο κινηματικής στατικής πίεσης στα στερεά όρια σε ολόκληρη την περιστρεφόμενη περύγωση συμπίεστη που περιλαμβάνει 12 περύγια, για επίλυση με το μοντέλο τύρβης  $k - \omega$  SST.

Όσον αφορά στο πεδίο της σχετικής ταχύτητας, είναι εμφανής η μείωση του μέτρου της στην έξοδο σε σχέση με την είσοδο. Από το πεδίο της στατικής πίεσης, παρατηρούμε, όπως αναμένεται σε έναν συμπίεστη, αύξηση της πίεσης στην έξοδο της περύγωσης. Μπορούμε επίσης να διακρίνουμε τις ζώνες υποπίεσης (κάτω) και υπερπίεσης (πάνω) του περυσίου.

Στο σχήμα 4.7 απεικονίζεται το διάνυσμα της ταχύτητας σε μια τομή στη μέση ακτίνα. Παρατηρούμε ότι η γωνία  $\beta$  της ροής στο σημείο πρόσπτωσης του περυσίου είναι όντως πολύ κοντά στην γωνία μετάλλου ενώ το μέτρο της γωνίας  $\beta$  μειώνεται στην κατάντι του περυσίου.

Στο σχήμα 4.8 απεικονίζονται οι κατανομές της πίεσης κατά την αδιάστατη χορδή στις πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης του περυσίου για την επίλυση με τα τρία



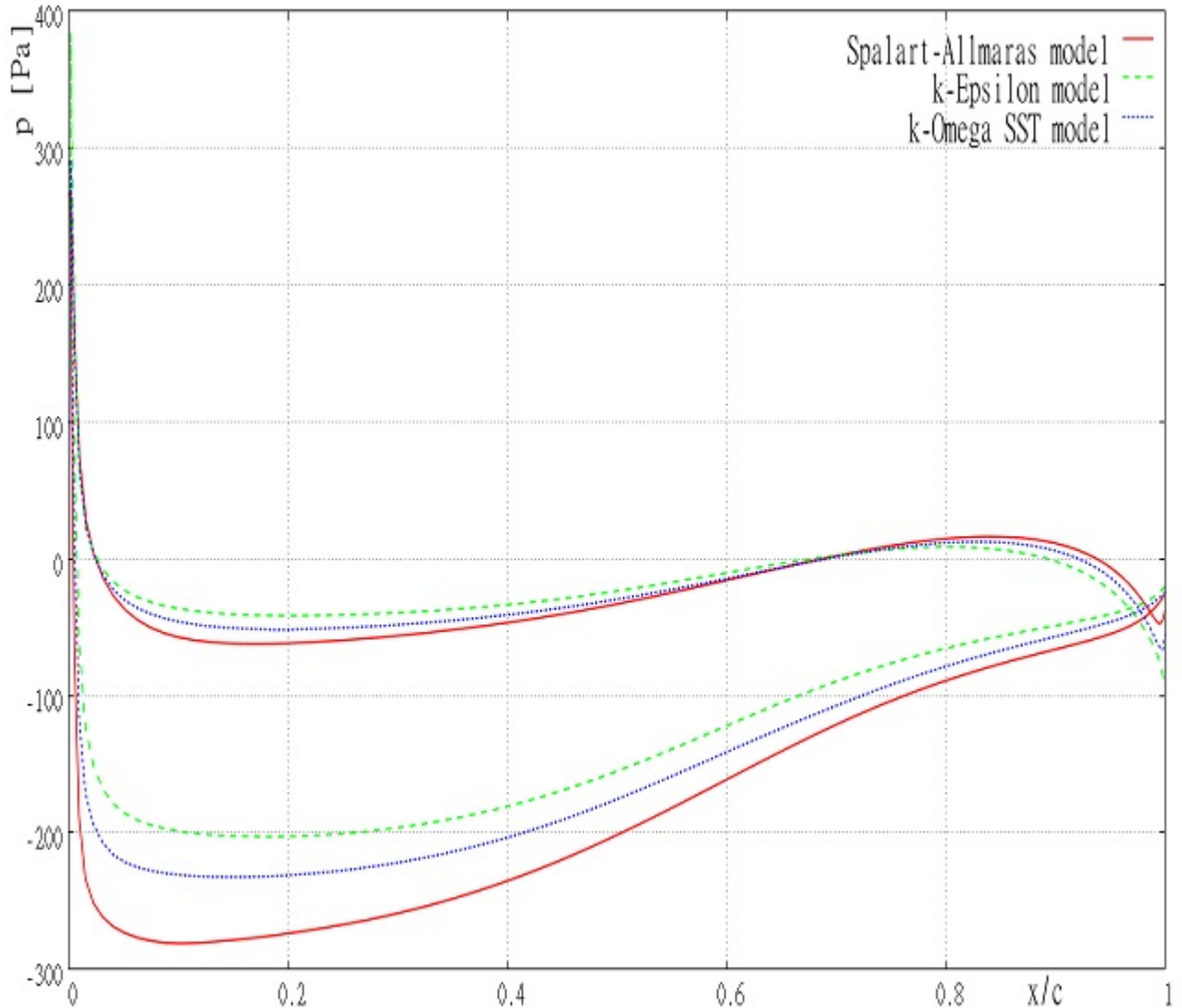
**Σχήμα 4.7:** Πεδίο σχετικής ταχύτητας σε τομή στην μέση ακτίνα, για επίλυση με το μοντέλο τύρβης  $k - \omega SST$ .

διαφορετικά μοντέλα τύρβης που αναφέρθηκαν. Παρατηρούμε ότι, ενώ οι διαφορές πιέσεων μεταξύ των πλευρών υπερπίεσης και υποπίεσης είναι ελαφρώς μικρότερες, στην πλευρά υποπίεσης του πτερυγίου έχουμε μεγαλύτερες διαφορές στις πιέσεις απ'ότι στην πλευρά υπερπίεσης, ειδικά μεταξύ των μοντέλων Spalart Allmaras και  $k - \epsilon$ .

Στο σχήμα 4.9 απεικονίζονται οι κατανομές της πίεσης κατά την αδιάστατη χορδή στις πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης του πτερυγίου για την επίλυση με το μοντέλο τύρβης  $k - \omega SST$  όταν χρησιμοποιούνται διαφορετικά σχήματα διακριτοποίησης του όρου μεταφοράς (convection term) της εξίσωσης της ορμής. Στη μια περίπτωση χρησιμοποιείται σχήμα ανάντι (upwind) πρώτης τάξης και στη δεύτερη σχήμα ανάντι δεύτερης τάξης (linear upwind). Και πάλι οι μεγαλύτερες διαφορές στις πιέσεις παρατηρούνται στην πλευρά υποπίεσης κοντά στο σημείο πρόσπτωσης ενώ στο υπόλοιπο μέρος του πτερυγίου οι διαφορές είναι μικρές.

Εκτός από τις συγκρίσεις για τις κατανομές πίεσης σε μια τομή του πτερυγίου, έγιναν και συγκρίσεις της κατανομής της πίεσης και της γωνίας  $\beta$  της σχετικής ροής κατά μήκος της ακτίνας στην έξοδο του χωρίου ροής. Συγκεκριμένα, οι διακριτοποιημένες επιφάνειες (faces) του ορίου της εξόδου, ομαδοποιήθηκαν με βάση την ακτίνα του κέντρου τους. Στη συνέχεια, για κάθε ομάδα υπολογίστηκαν η κατά μάζα μέσες τιμές (mass averaged) της πίεσης και της γωνίας  $\beta$ . Έτσι προέκυψαν οι κατανομές  $p(r)$  και  $\beta(r)$ . Ο υπολογισμός των κατά μάζα μέσων τιμών της πίεσης και της γωνίας  $\beta$  έγινε





**Σχήμα 4.8:** Κατανομές πίεσης κατά την αδιάστατη χορδή στις πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης του πτερυγίου για επίλυση με χρήση διαφορετικών μοντέλων τύρβης:

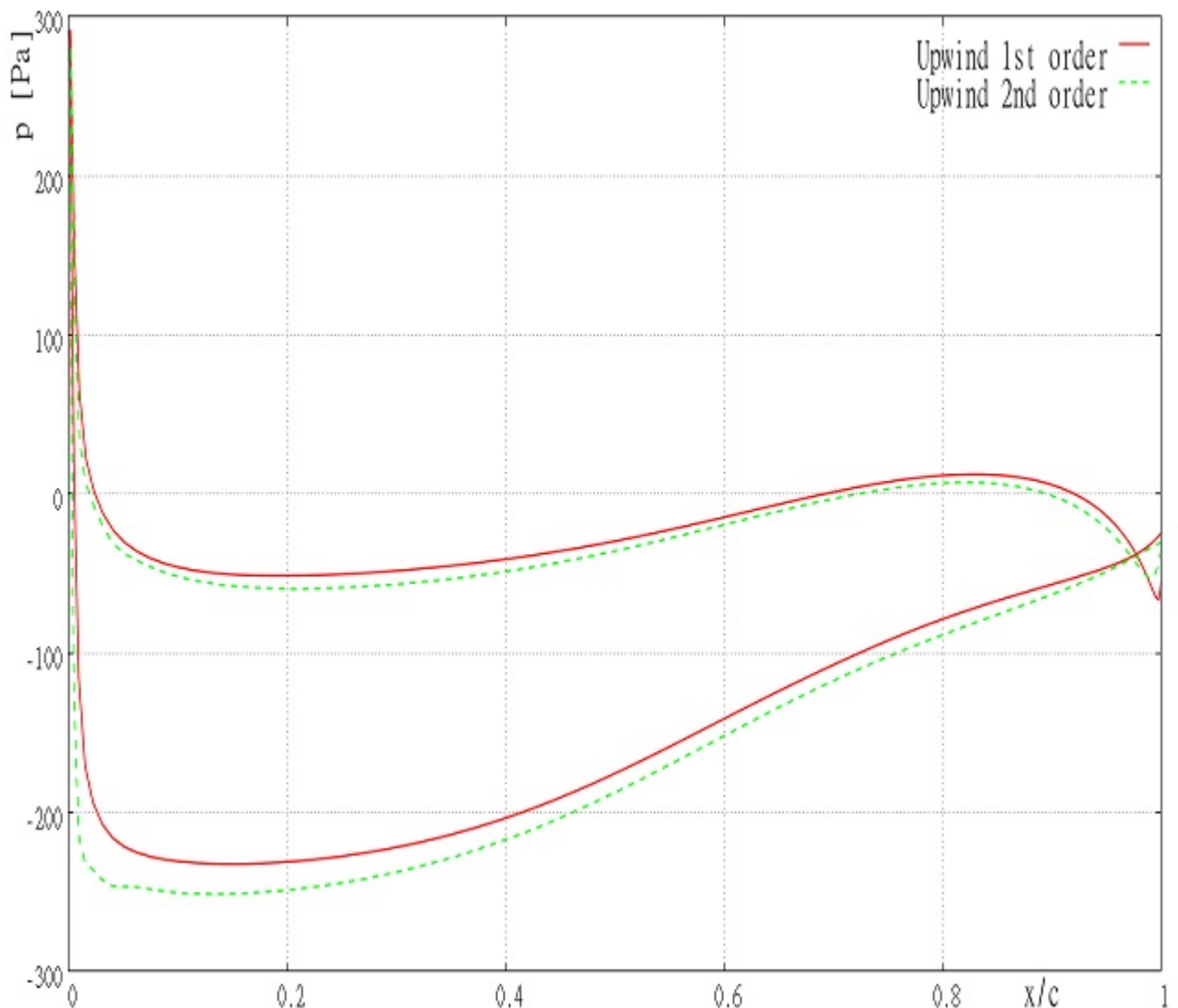
1. Spalart-Allmaras (κόκκινη συνεχής γραμμή).
2.  $k - \epsilon$  (πράσινη διακεκομμένη γραμμή).
3.  $k - \omega$  SST (μπλε κουκκίδες).

σύμφωνα με τις πιο κάτω σχέσεις:

$$p(r) = \frac{\sum_f p W_a S}{\sum_f W_a S}$$

$$\beta(r) = \arctan \frac{W_u(r)}{W_a(r)}$$

όπου τα μεγέθη  $W_u(r)$  και  $W_a(r)$  προκύπτουν από μαζικά μέσες τιμές (mass - averaging)



**Σχήμα 4.9:** Κατανομές πίεσης κατά την αδιάστατη χορδή στις πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης του πτερυγίου για την επίλυση με το μοντέλο τύρβης  $k - \omega$  SST και χρήση διαφορετικών σχημάτων διακριτοποίησης του όρου μεταφοράς της εξίσωσης της ορμής:  
 1. Σχήμα ανάντι (upwind) πρώτης τάξης (κόκκινη συνεχής γραμμή).  
 2. Σχήμα ανάντι δεύτερης τάξης (linear upwind) (πράσινη διακεκομμένη γραμμή).

$$W_u(r) = \frac{\sum_f W_u W_a S}{\sum_f W_a S}$$

$$W_a(r) = \frac{\sum_f W_a W_a S}{\sum_f W_a S}$$

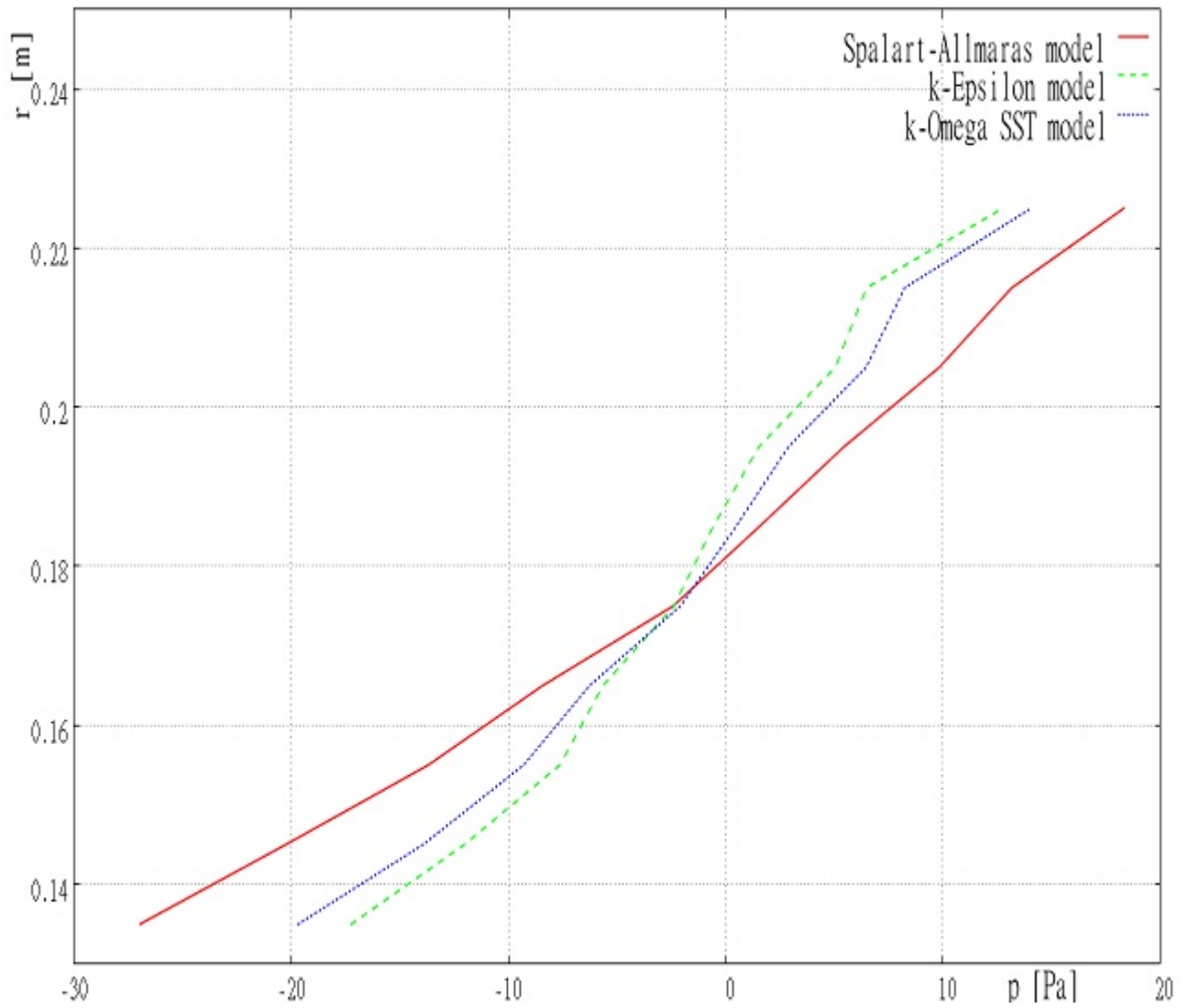
Ο δείκτης  $f$  στα πιο πάνω αθροίσματα υπονοεί άθροισμα των διαφόρων μεγεθών σε όλες τις διακριτοποιημένες επιφάνειες κάθε ομάδας.

Στα σχήματα 4.10 και 4.11 παρουσιάζονται οι κατανομές  $p(r)$  και  $\beta(r)$  στο όριο της έξοδου για επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος με διαφορετικά μοντέλα τύρβης. Από τα σχήματα αυτά παρατηρούμε ότι οι κατανομές της πίεσης με χρήση των μοντέλων τύρβης  $k - \omega SST$  και  $k - \epsilon$  έχουν παρόμοια μορφή και είναι αρκετά κοντά, ενώ το μοντέλο τύρβης Spalart - Allmaras δίνει κατανομή πίεσης πιο απομακρυσμένη από τα άλλα δύο μοντέλα. Όσον αφορά τη γωνία  $\beta$ , τα μοντέλα  $k - \omega SST$  και Spalart Allmaras δίνουν κατανομές που είναι πολύ κοντά, ακόμα και κοντά στα στερεά όρια (κέλυφος και άτρακτος). Οι τιμές της γωνίας  $\beta$  που δίνει το μοντέλο  $k - \epsilon$  παρουσιάζουν μεγαλύτερες διαφορές από τα άλλα δύο μοντέλα τύρβης όσο κινούμαστε προς τη μικρότερη ακτίνα.

### 4.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων για επίλυση με διαφορετικό λογισμικό

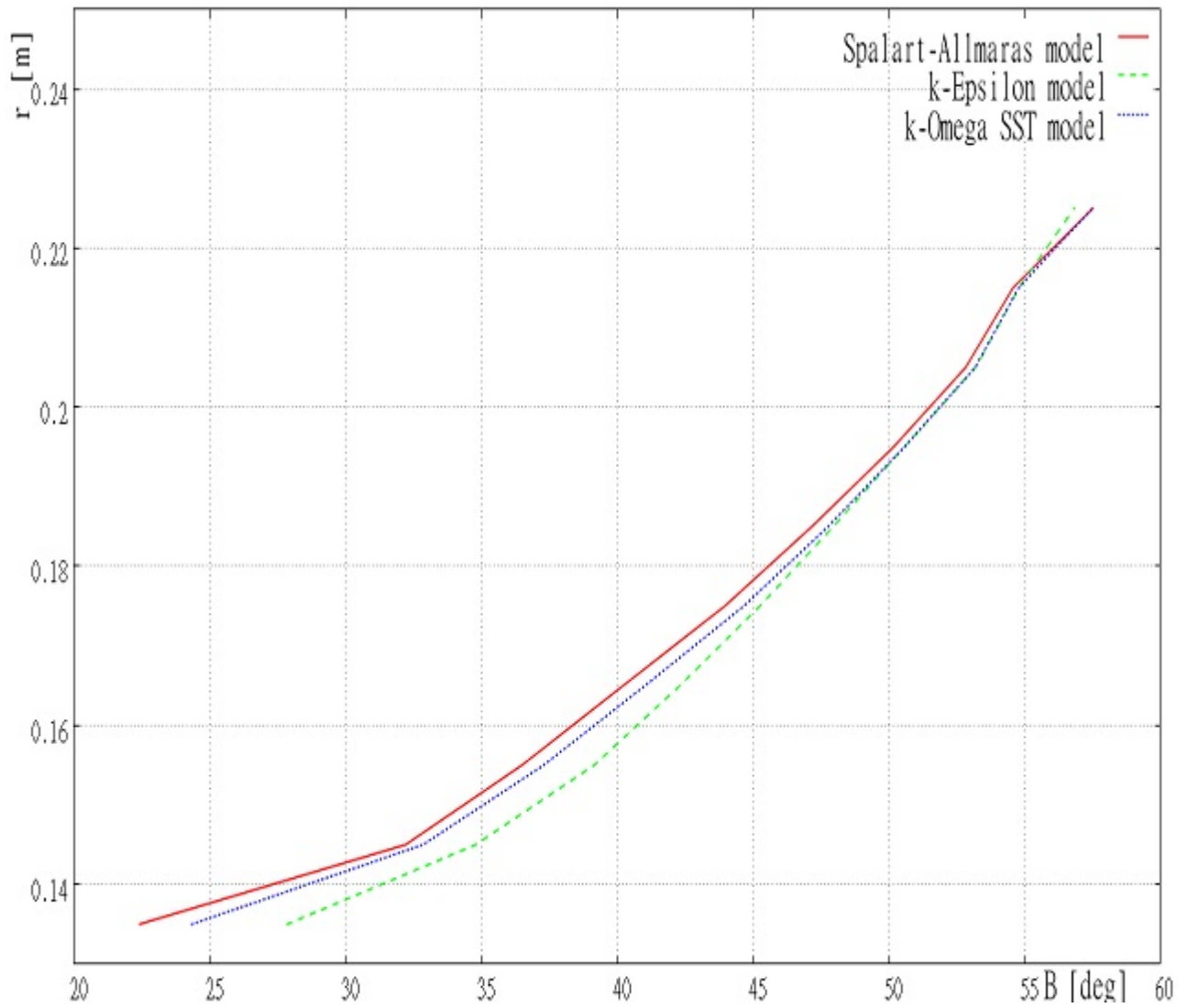
Στην ενότητα αυτή γίνεται η σύγκριση των αποτελεσμάτων της επίλυσης του προβλήματος της ροής του ανοικτού λογισμικού OpenFOAM με το οικείο λογισμικό. Το οικείο λογισμικό χρησιμοποιεί τη μέθοδο της τεχνητής συμπίεστότητας και τρέχει σε κάρτες γραφικών (GPUs). Η χρήση κάρτων γραφικών επιταχύνει την επίλυση των εξισώσεων της ροής μέχρι και 100 φορές, ανάλογα με το πλέγμα, την εφαρμογή κτλ. Στην τριδιάστατη περιστρεφόμενη πτερύγωση συμπίεστη που μελετήθηκε στην εργασία αυτή, η επίλυση του προβλήματος ροής με το οικείο λογισμικό σε κάρτες γραφικών ήταν περίπου 8 φορές πιο γρήγορη από την επίλυση σε παράλληλους επεξεργαστές με το ανοικτό λογισμικό. Εκτός από τον αλγόριθμο επίλυσης και τους διαφορετικούς επιλύτες, μια άλλη διαφορά μεταξύ των δύο μεθόδων επίλυσης του προβλήματος ροής, έγκειται στον τρόπο αποθήκευσης των μεταβλητών στο υπολογιστικό πλέγμα. Το οικείο λογισμικό χρησιμοποιεί την κεντροκομβική διατύπωση (vertex - centered) , δηλαδή εφαρμόζει την μέθοδο διακριτοποίησης των πεπερασμένων όγκων και αποθηκεύει τις μεταβλητές της ροής σε κάθε κόμβο. Από την άλλη, το ανοικτό λογισμικό χρησιμοποιεί την κεντροκυψελική διατύπωση (cell - centered) δηλαδή η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων εφαρμόζεται σε κάθε κελί και οι μεταβλητές της ροής αποθηκεύονται στο κέντρο του.

Στα σχήματα 4.12 και 4.13 παρουσιάζονται οι κατανομές  $p(r)$  και  $\beta(r)$ , όπως αυτές ορίστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, στο όριο της έξοδου για επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος με τα δύο διαφορετικά λογισμικά. Σημειώνεται ότι το υπολογιστικό πλέγμα και οι οριακές συνθήκες για την ταχύτητα και την πίεση ήταν οι ίδιες, ενώ τα αποτελέσματα πλησιάζουν περισσότερο όταν το οικείο λογισμικό χρησιμοποιεί το μοντέλο τύρβης  $k - \omega SST$  και το ανοικτό λογισμικό το μοντέλο Spalart Allmaras. Παρατηρούμε ότι, τόσο οι πιέσεις όσο και οι γωνίες της σχετικής ροής στην έξοδο, είναι πολύ κοντά για την επίλυση με τα δύο διαφορετικά λογισμικά, εκτός από τις περιοχές κοντά στα στερεά όρια, δηλαδή στα οριακά στρώματα κελύφους.



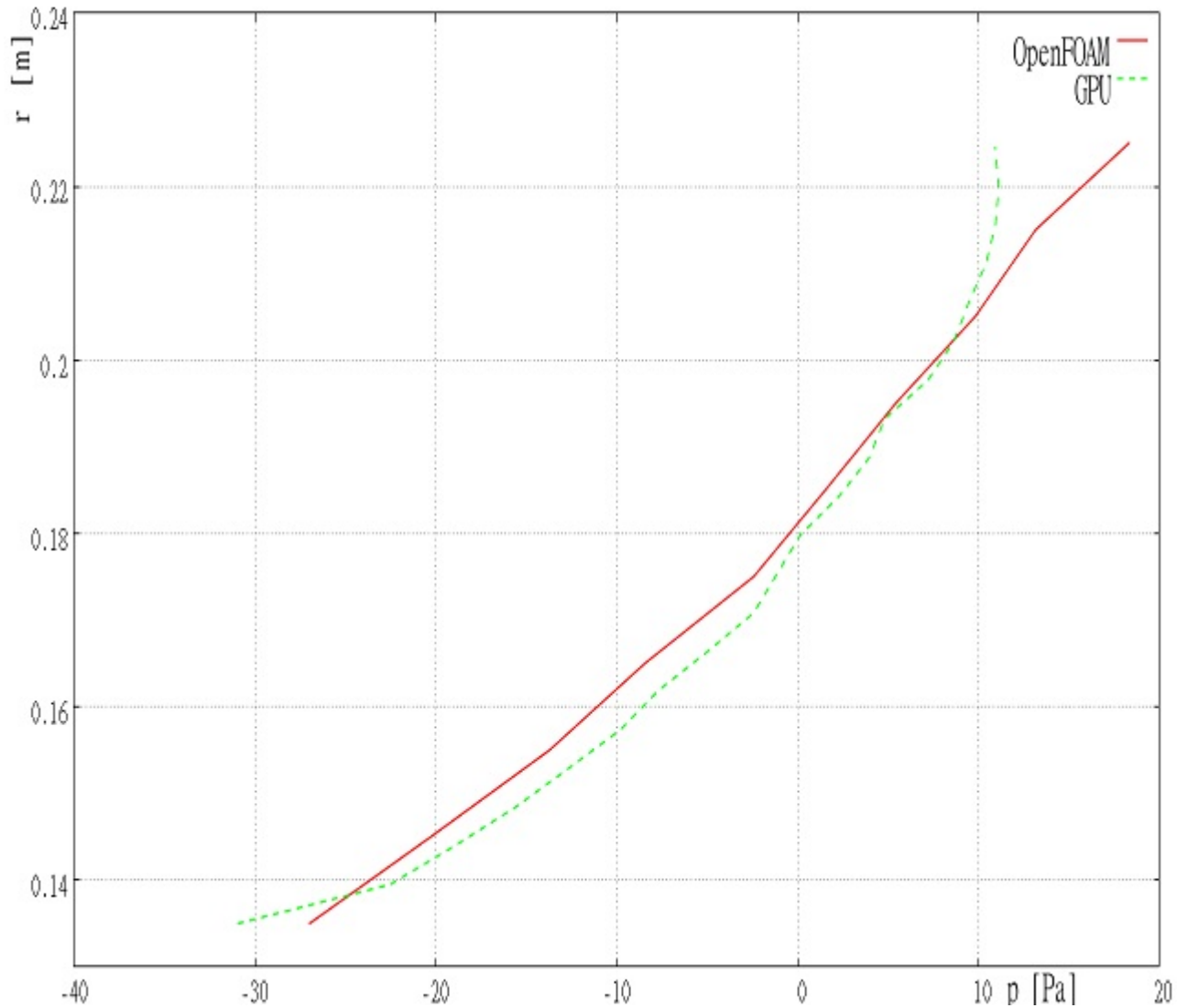
**Σχήμα 4.10:** Κατανομή της πίεσης κατά την ακτίνα στο όριο εξόδου για επίλυση με διαφορετικά μοντέλα τύρβης:

1. Spalart-Allmaras (κόκκινη συνεχής γραμμή).
2.  $k - \epsilon$  (πράσινη διακεκομμένη γραμμή).
3.  $k - \omega$  SST (μπλε κουκκίδες).



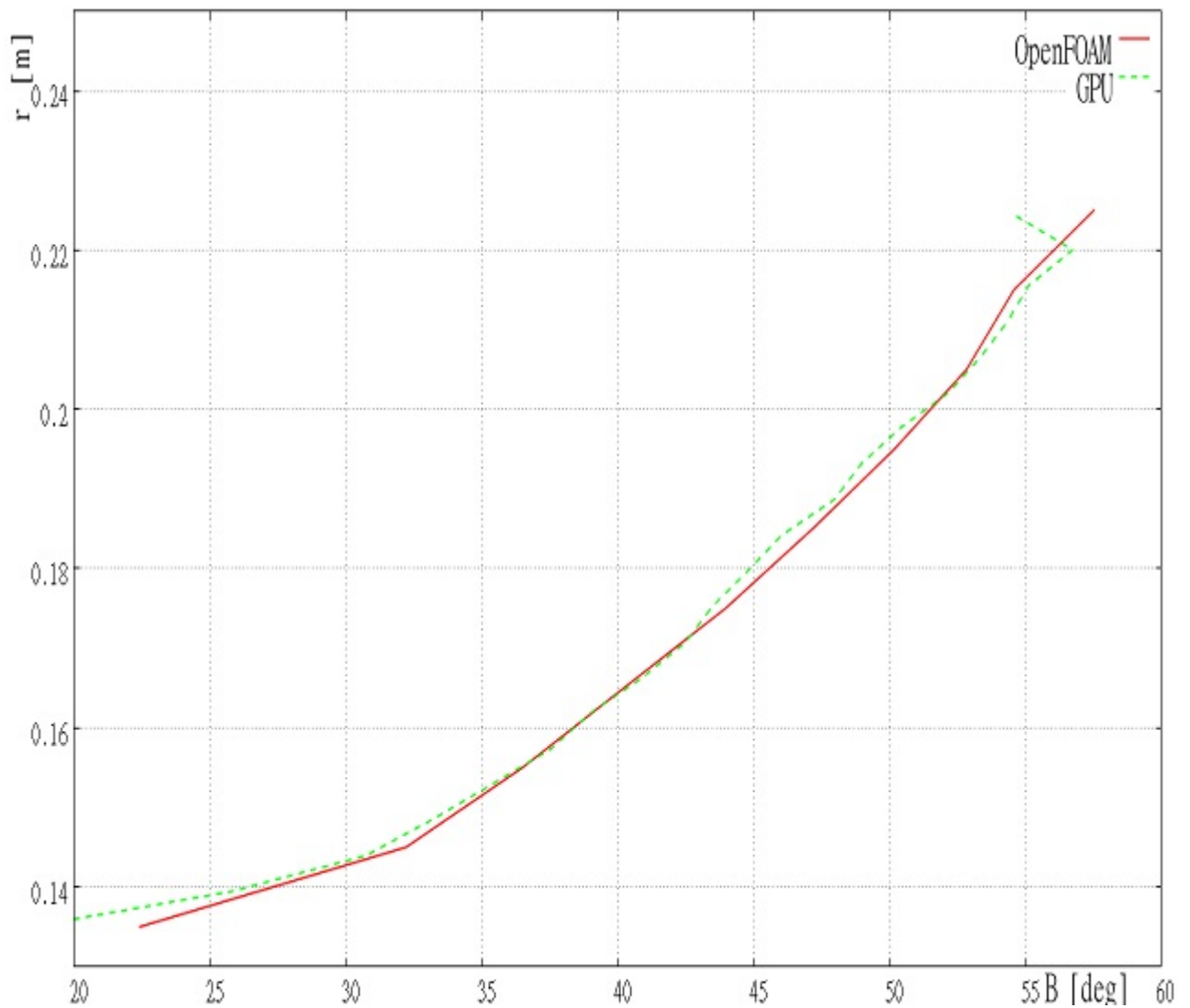
**Σχήμα 4.11:** Κατανομή της γωνίας  $\beta$  της σχετικής ροής κατά την ακτίνα στο όριο εξόδου για επίλυση με διαφορετικά μοντέλα τύρβης:

1. Spalart-Allmaras (κόκκινη συνεχής γραμμή).
2.  $k - \epsilon$  (πράσινη διακεκομμένη γραμμή).
3.  $k - \omega$  SST (μπλε κουκκίδες).



**Σχήμα 4.12:** Κατανομή της πίεσης κατά την ακτίνα στο όριο εξόδου για επίλυση με διαφορετικό λογισμικό:

1. Επίλυση με το ανοικτό λογισμικό *OpenFOAM* και το μοντέλο τύρβης *Spalart-Allmaras* (κόκκινη συνεχής γραμμή).
2. Επίλυση με το οικείο λογισμικό και το μοντέλο τύρβης  $k - \omega$  *SST* (πράσινη διακεκομμένη γραμμή).



**Σχήμα 4.13:** Κατανομή της γωνίας  $\beta$  της σχετικής ροής κατά την ακτίνα στο όριο εξόδου για επίλυση με διαφορετικό λογισμικό:

1. Επίλυση με το ανοικτό λογισμικό OpenFOAM και το μοντέλο τύρβης Spalart-Allmaras (κόκκινη συνεχής γραμμή).
2. Επίλυση με το οικείο λογισμικό και το μοντέλο τύρβης  $k - \omega$  SST (πράσινη διακεκομμένη γραμμή).





## Κεφάλαιο 5

# Αποτελέσματα εφαρμογής συνεχούς συζυγούς μεθόδου για τον έλεγχο ροής με δέσμες ρευστού

Μετά την επίλυση του ευθέως προβλήματος στο σημείο σχεδιασμού της περιστρεφόμενης πτερύγωσης του συμπιεστή στο προηγούμενο κεφάλαιο, ακολουθεί η επίλυση του ευθέως προβλήματος σε σημείο λειτουργίας διαφορετικό του σημείου λειτουργίας βέλτιστης απόδοσης (off design point). Για την αλλαγή αυτή μειώνεται η αξονική ταχύτητα εισόδου της ροής και έτσι αυξάνονται οι γωνίες εισόδου  $\beta$  της σχετικής ροής στο πτερύγιο. Η αλλαγή στο σημείο λειτουργίας γίνεται για να εφαρμοστεί η συνεχής συζυγής μέθοδος στο πρόβλημα ελέγχου της ροής και να βελτιωθεί η απόδοση σε συνθήκες λειτουργίας εκτός του σημείου σχεδιασμού. Δηλαδή, η εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου στο σημείο σχεδιασμού για τον έλεγχο της ροής δεν θα είχε ιδιαίτερο νόημα αφού ήδη το πτερύγιο λειτουργεί με τη βέλτιστη απόδοση.

Επομένως, μετά την επίλυση του ευθέως προβλήματος για λειτουργία σε σημείο διαφορετικό του σημείου σχεδιασμού, ακολουθεί η επίλυση του συζυγούς προβλήματος, όπως αυτό παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 3. Μετά και την επίλυση του συζυγούς προβλήματος, μπορεί να βρεθεί ο χάρτης παραγωγών ευαισθησίας ως προς τις ταχύτητες στην επιφάνεια του πτερυγίου και μέσω αυτού να εντοπιστούν οι περιοχές στις οποίες η τοποθέτηση δεσμών συνεχούς έγχυσης ή αναρρόφησης ρευστού θα μειώσει τις απώλειες σχετικής ολικής πίεσης. Στο κεφάλαιο αυτό, πέραν των αποτελεσμάτων της επίλυσης του συζυγούς προβλήματος, γίνεται μια παραμετρική διερεύνηση και σύγκρι-

ση της μεταβολής των απωλειών σχετικής ολικής πίεσης όταν τοποθετούνται δέσμες ρευστού τόσο στις θέσεις που υποδεικνύονται από το χάρτη παραγώγων ευαισθησίας, όσο και σε άλλες θέσεις που επιλέχθηκαν τυχαία. Έτσι θα δούμε αν όντως η συζυγής μέθοδος υποδεικνύει τις καταλληλότερες θέσεις για τοποθέτηση των δεσμών ρευστού. Διερευνάται επίσης η επίδραση του μέτρου και της κατανομής της ταχύτητας της δέσμης σε διάφορες θέσεις.

Σημειώνεται ότι για τη σύγκλιση της αριθμητικής λύσης του συζυγούς προβλήματος απαιτήθηκε η προέκταση του πλέγματος στην είσοδο και στην έξοδο και η εφαρμογή οριακής συνθήκης ολίσθησης για την ταχύτητα και τη συζυγή ταχύτητα (slip) στα νέα τμήματα του πλέγματος στα τοιχώματα (hub και shroud). Η εφαρμογή αυτής της οριακής συνθήκης έγινε δηλαδή κατά την επίλυση τόσο του ευθέος όσο και του συζυγούς προβλήματος. Η προέκταση του πλέγματος έγινε χρησιμοποιώντας το εργαλείο γένεσης πλέγματος του λογισμικού OpenFOAM extrudeMesh, με το οποίο προστέθηκαν εξαεδρικά στοιχεία στην είσοδο και στην έξοδο του αρχικού πλέγματος.

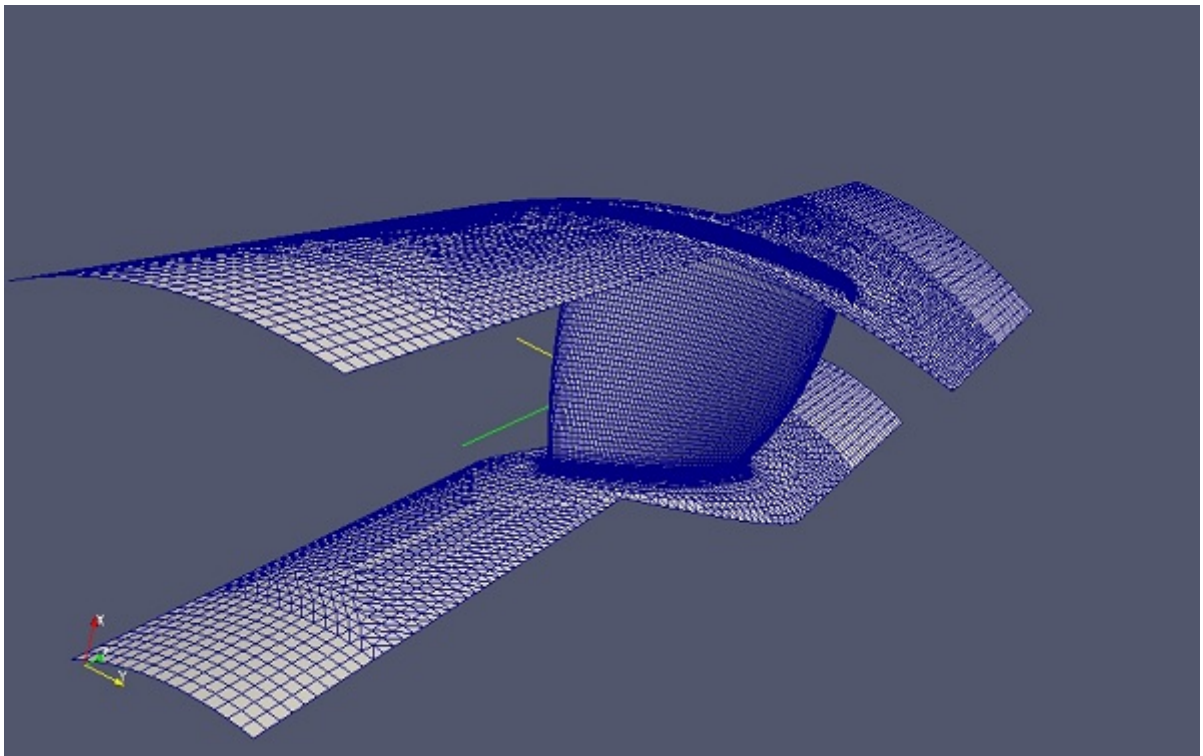
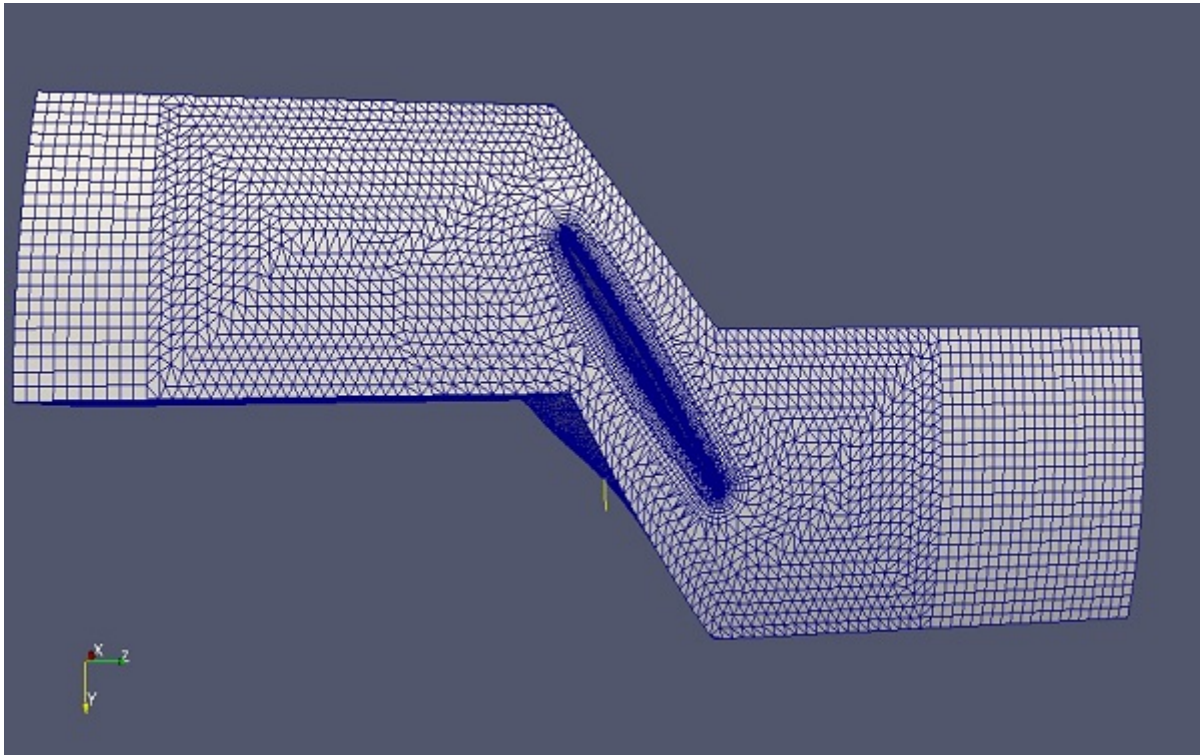
## 5.1 Επίλυση του ευθέος προβλήματος για λειτουργία εκτός σημείου σχεδιασμού

Το νέο πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε φαίνεται στο σχήμα 5.1. Αποτελείται από 866787 εξαεδρικά και τετραεδρικά κελιά. Τα νέα τμήματα του πλέγματος αποτελούνται μόνο από εξαεδρικά κελιά. Η γεωμετρία του χωρίου, ροής, πλην των προεκτάσεων στην είσοδο και στην έξοδο, παραμένει η ίδια με αυτήν που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στα νέα τμήματα του πλέγματος στην είσοδο και στην έξοδο, τα στερεά όρια θα αναφέρονται ως στερεά όρια εισόδου - εξόδου, για να γίνει διαχωρισμός τους από τα στερεά όρια στο ενδιάμεσο τμήμα του χωρίου ροής λόγω των διαφορετικών οριακών συνθηκών που επιβάλλονται σε αυτά.

Στον πίνακα 5.1 αναφέρονται οι οριακές συνθήκες του ευθέος προβλήματος για λειτουργία της περιστρεφόμενης περύγωσης εκτός σημείου σχεδιασμού. Για την επίλυση του χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο τύρβης  $k - \omega$  SST για χαμηλούς αριθμούς Reynolds (Low Re) (μέσο  $y^+ = 0.8$ ).

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου, για τη λειτουργία σε σημείο εκτός του σημείου σχεδιασμού, μειώνεται η αξονική ταχύτητα στην είσοδο, ενώ η ταχύτητα περιστροφής διατηρείται σε σχέση με την λειτουργία στο ονομαστικό σημείο. Στην είσοδο καθορίζεται η απόλυτη ταχύτητα και μέσω της σχέσης 2.2 υπολογίζεται η σχετική ταχύτητα εισόδου  $W_{in}$ . Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\begin{aligned} v_a &= 12 \frac{m}{s} \\ v_\theta &= 0 \frac{m}{s} \quad (\text{είσοδος χωρίς συστρόφη}). \\ v_r &= 0 \frac{m}{s} \end{aligned}$$



**Σχήμα 5.1:** Τροποποιημένο πλέγμα (προέκταση του πλέγματος στην είσοδο και στην έξοδο σε σχέση με το πλέγμα που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 4).

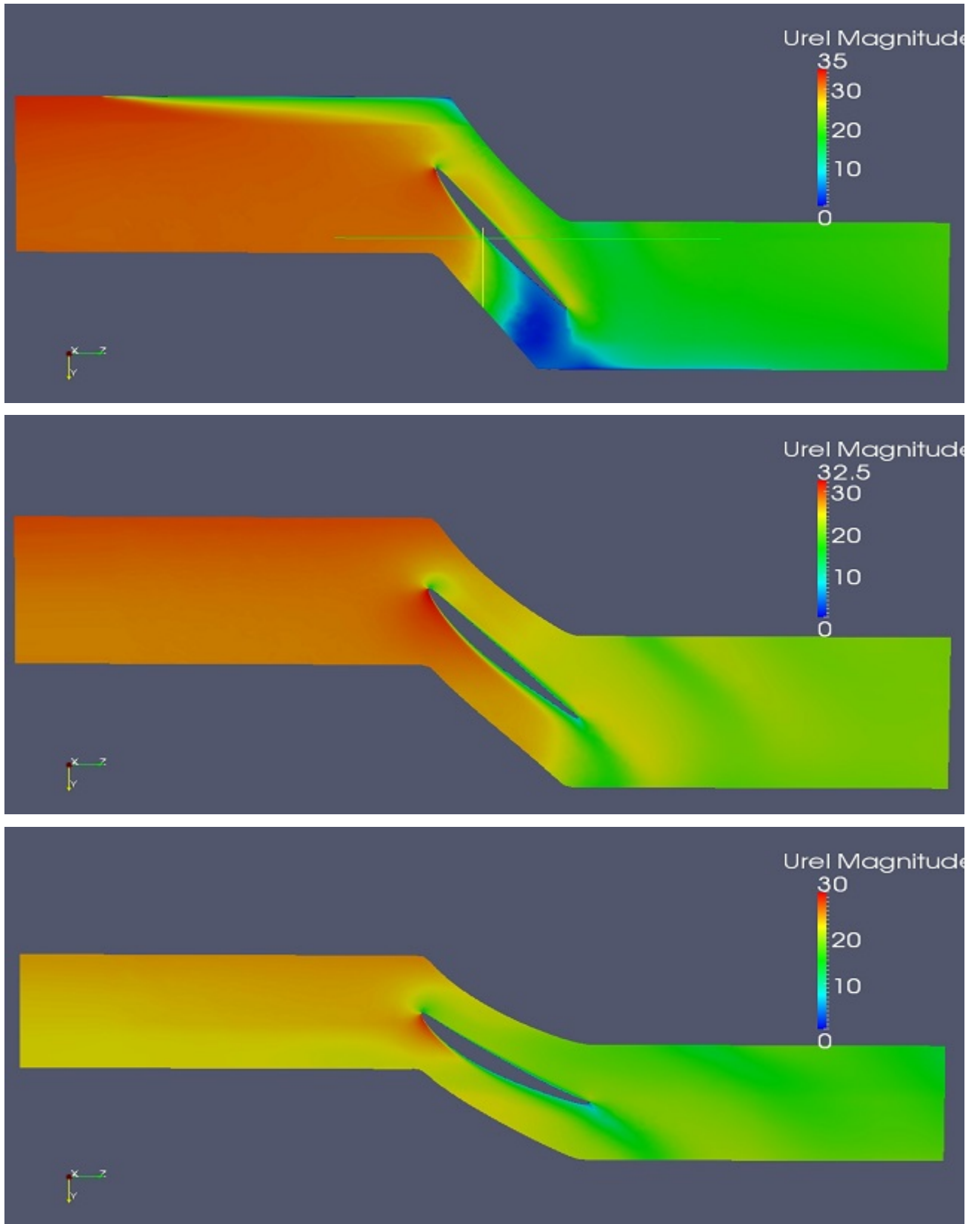
**Πίνακας 5.1:** Οριακές συνθήκες ευθείας προβλήματος για λειτουργία εκτός σημείου σχεδιασμού.

Όριο	$\mathbf{W}(\frac{m}{s})$	$\mathbf{p}(\frac{m^2}{s^2})$	$\mathbf{k}(\frac{m^2}{s^2})$	$\boldsymbol{\omega}(s^{-1})$
<b>Είσοδος</b>	$W_{in}$	zero Neumann	0.1944	98.53
<b>Έξοδος</b>	zero Neumann	0	zero Neumann	zero Neumann
<b>Στερεά όρια</b>	(0 0 0)	zero Neumann	$1 \cdot 10^{-11}$	501760
<b>Στερεά όρια εισόδου-εξόδου</b>	slip	zero Neumann	slip	slip
<b>Περιοδικά όρια</b>	cyclicGgi	cyclicGgi	cyclicGgi	cyclicGgi

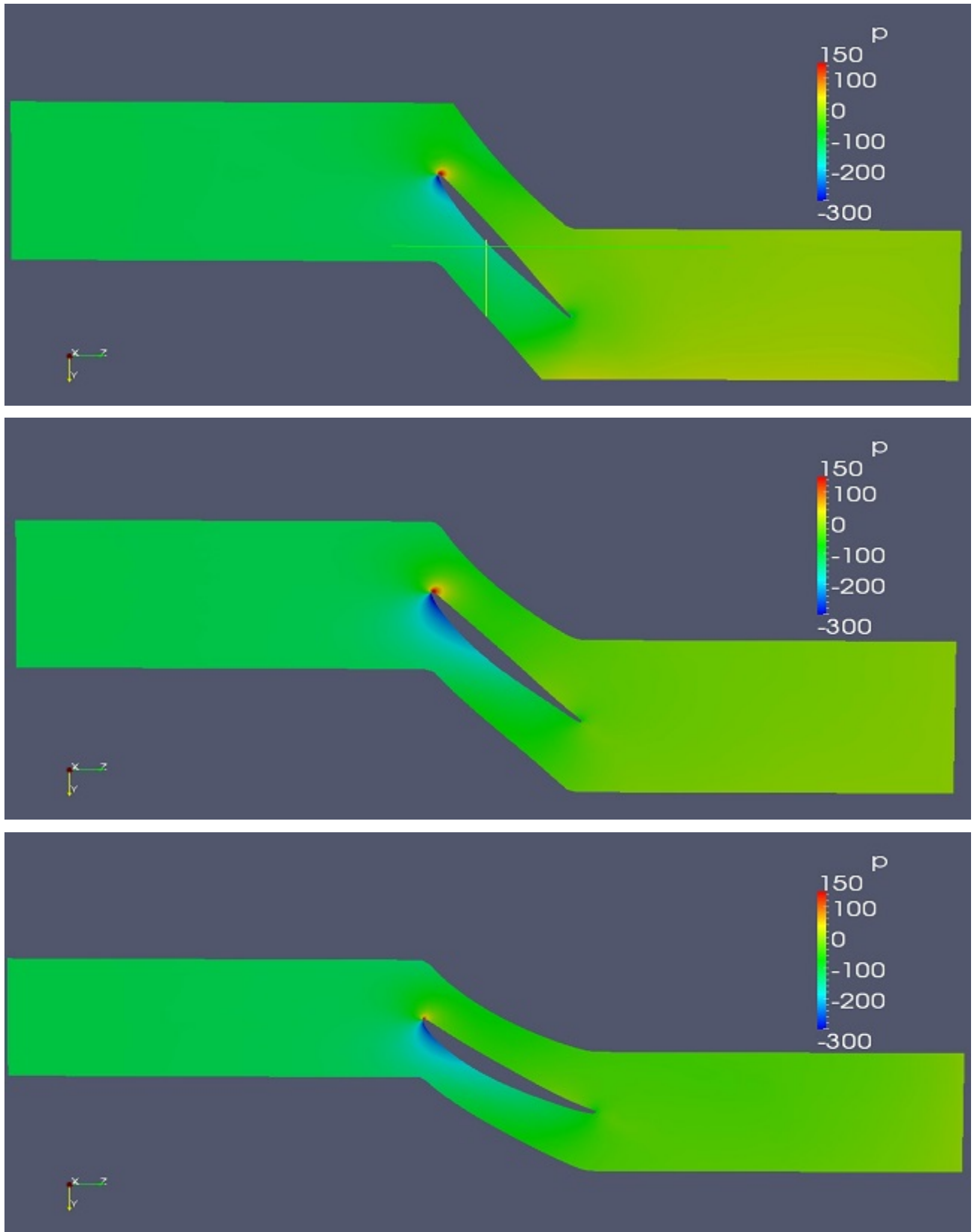
N =1300 RPM

Όσον αφορά την οριακή συνθήκη της πίεσης στην έξοδο, αυτή λαμβάνεται ίση με 0 για να προκύψουν οι εξισώσεις του συζυγούς προβλήματος σύμφωνα με τα όσα αναπτύχθηκαν στο κεφάλαιο 3. Η χρήση μηδενικής Dirichlet συνθήκης αντί της συνθήκης fixed mean value που χρησιμοποιήθηκε στην επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος στο κεφάλαιο 4 δεν μεταβάλλει σημαντικά το πεδίο ροής, αφού από τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 4 προκύπτει ότι η πίεση στην έξοδο λαμβάνει τιμές σχετικά κοντά στο μηδέν [-25 - 25] ενώ η περιφερειακή συνιστώσα της ταχύτητας στην έξοδο του πεδίου ροής δεν μεταβάλλεται σημαντικά για χρήση των δύο διαφορετικών οριακών συνθηκών.

Μετά και τη διατύπωση των οριακών συνθηκών, επιλύονται οι εξισώσεις κατάστασης και έτσι προκύπτει το πεδίο ροής. Στο σχήμα 5.2 φαίνεται το πεδίο του μέτρου της σχετικής ταχύτητας σε τρεις τομές στην ακτινική διεύθυνση και στο σχήμα 5.3 το πεδίο της κινηματικής στατικής πίεσης στις αντίστοιχες θέσεις.



**Σχήμα 5.2:** Πεδίο μέτρου σχετικής ταχύτητας σε τρεις τομές κατά την ακτινική διεύθυνση (μοντέλο τύρβης  $k - \omega$  SST). Πάνω: τομή κοντά στο κέλυφος. Μέση: τομή στη μέση ακτίνα. Κάτω: τομή κοντά στην άτρακτο.

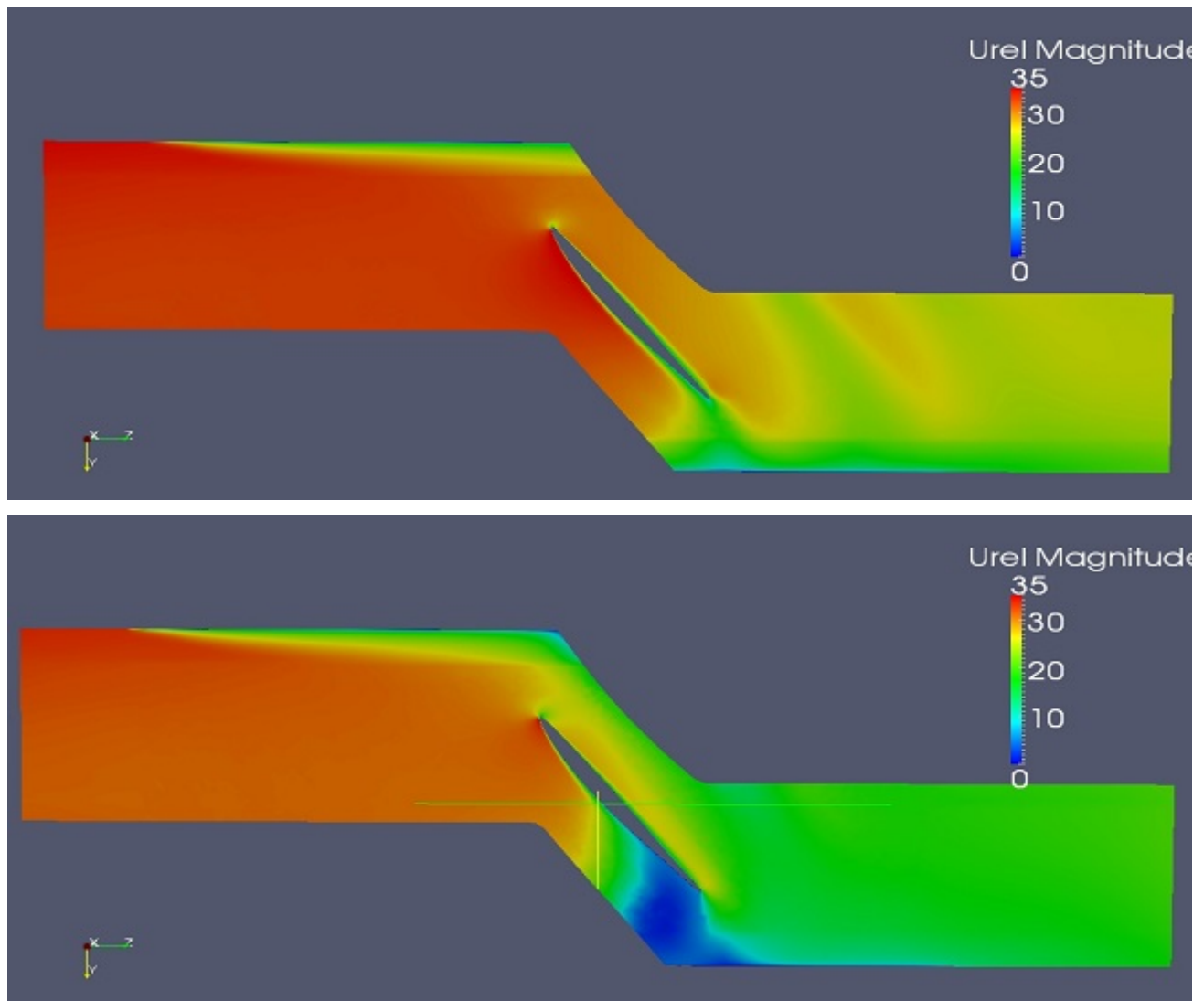


**Σχήμα 5.3:** Πεδίο στατικής πίεσης σε τρεις τομές κατά την ακτινική διεύθυνση (μοντέλο τύρβης  $k - \omega SST$ ).

Πάνω: τομή κοντά στο κέλυφος. Μέση: τομή στη μέση ακτίνα. Κάτω: τομή κοντά στην άτρακτο.

Παρατηρώντας το πεδίο της ταχύτητας βλέπουμε ότι η ροή αποκολλάται κοντά στο κέλυφος και σε θέση κοντά στα  $\frac{3}{4}$  της χορδής. Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι όσο η ακτίνα αυξάνει, αυξάνει και το μέτρο της περιφερειακής ταχύτητας  $U$  στην είσοδο της πτερύγωσης και συνεπακόλουθα η γωνία  $\beta$  της σχετικής ροής ως προς την χορδή του πτερυγίου (αυτό συμβαίνει όταν η περιφερειακή συνιστώσα της απόλυτης ταχύτητας  $v_\theta$  είναι πολύ μικρή σε σχέση με την αξονική συνιστώσα  $v_a$ , όπως στην παρούσα εφαρμογή). Η μεγάλη γωνία  $\beta$  συνεπάγεται μεγάλη γωνία πρόσπτωσης στο πτερύγιο και άρα αποκόλληση της ροής. Η συστροφή του πτερυγίου μπορεί να λειτουργεί θετικά στην αποφυγή της αποκόλλησης στο σημείο σχεδιασμού, αλλά για τη λειτουργία στο σημείο που μελετάται η αποκόλληση είναι αναπόφευκτη. Στο σχήμα 5.4, παρουσιάζονται τα πεδία σχετικής ταχύτητας σε τομές κοντά στο κέλυφος για λειτουργία στο σημείο σχεδιασμού και στο σημείο που μελετάται στο κεφάλαιο αυτό. Παρατηρούμε ότι η περιοχή ανακυκλοφορίας της ροής στην πλευρά υποπίεσης είναι σημαντικά μεγαλύτερη στη δεύτερη περίπτωση.

Όσον αφορά το πεδίο της στατικής πίεσης, παρατηρείται η ζώνη υποπίεσης στην πλευρά υποπίεσης, το σημείο ανακοπής στην ακμή πρόσπτωσης και η αύξηση της πίεσης μεταξύ εξόδου και εισόδου της περιστρεφόμενης πτερύγωσης.



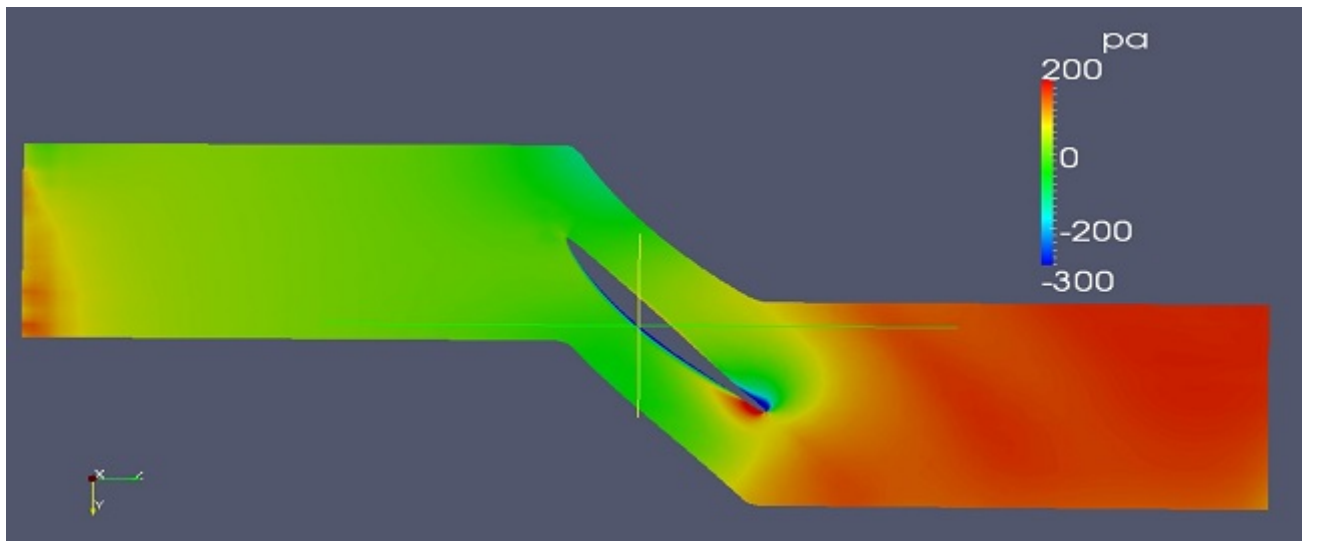
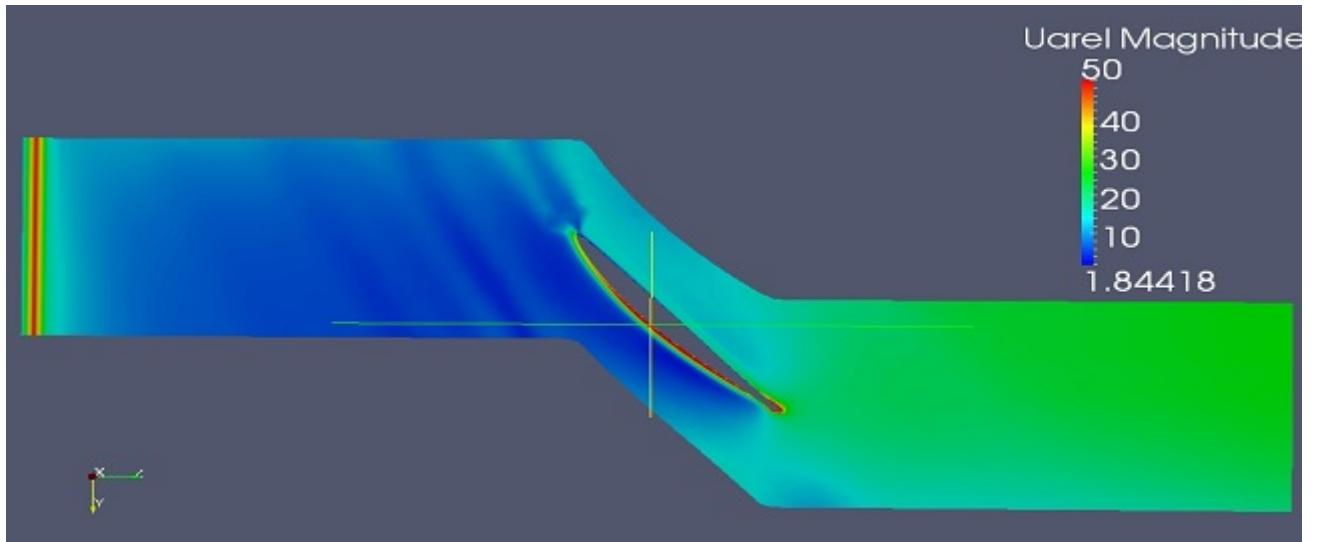
**Σχήμα 5.4:** Πεδίο μέτρου σχετικής ταχύτητας σε τομές κοντά στο κέλυφος - μοντέλο τύρβης  $k - \omega$  SST.

Πάνω: Λειτουργία στο σημείο σχεδιασμού. Κάτω: Λειτουργία εκτός σημείου σχεδιασμού.

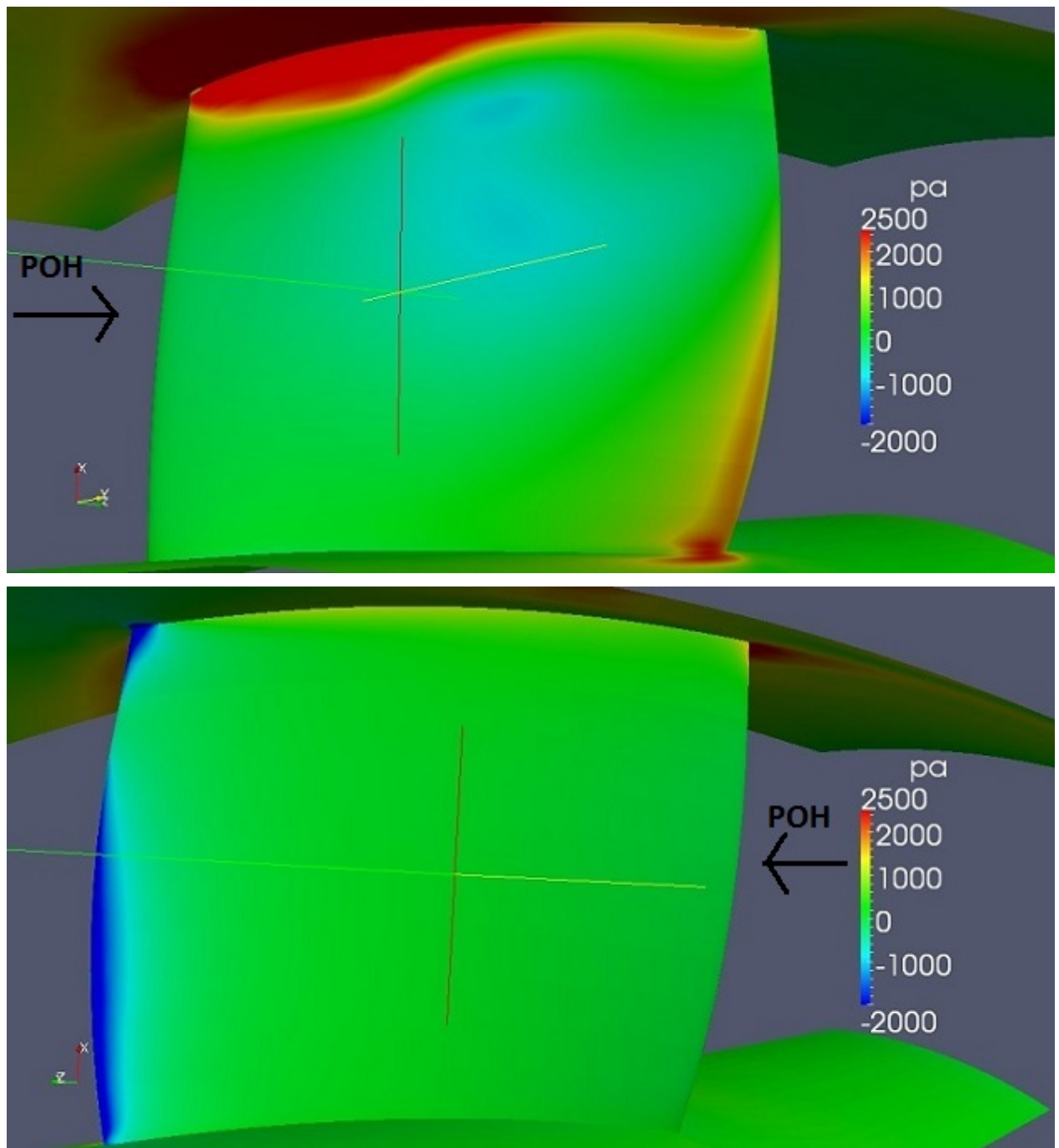
## 5.2 Επίλυση του συζυγούς προβλήματος

Μετά την εύρεση των ροϊκών ποσοτήτων του πρωτεύοντος προβλήματος για λειτουργία σε σημείο διαφορετικό του σημείου σχεδιασμού, μπορεί πλέον να λυθεί το συζυγές πρόβλημα για την εύρεση των συζυγών μεταβλητών. Στο σχήμα 5.5 παρουσιάζονται τα πεδία του μέτρου της συζυγούς ταχύτητας και της συζυγούς πίεσης ενώ στο σχήμα 5.6 φαίνεται το πεδίο της συζυγούς πίεσης στις πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης πάνω στο πτερύγιο.





**Σχήμα 5.5:** Πάνω: Πεδίο μέτρου συζυγούς ταχύτητας σε τομή στη μέση ακτίνα.  
Κάτω: Πεδίο συζυγούς πίεσης σε τομή στη μέση ακτίνα.

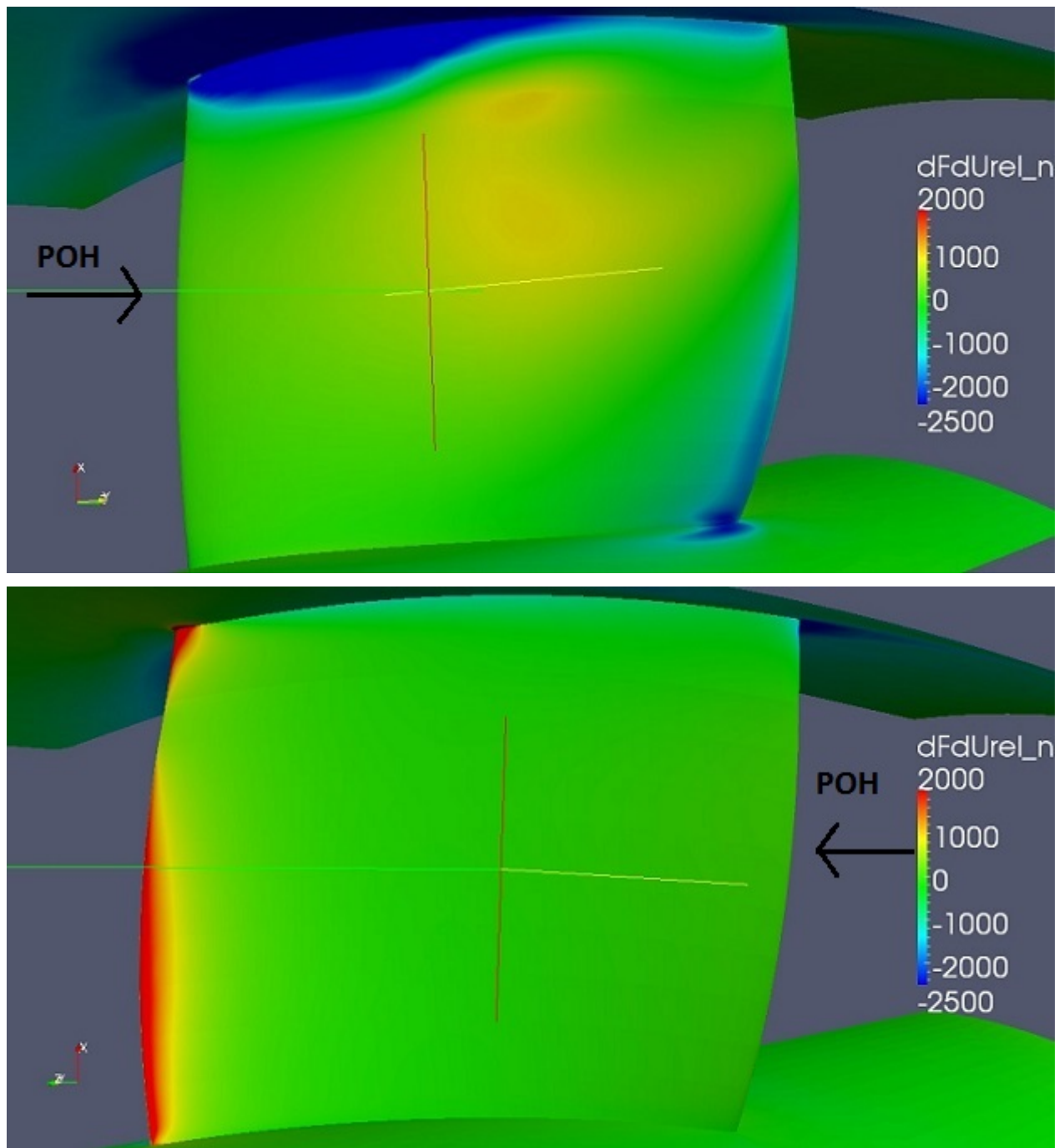


**Σχήμα 5.6:** Πεδίο συζυγούς πίεσης στην επιφάνεια του πτερυγίου.  
 Πάνω: Πλευρά υποπίεσης. Κάτω: Πλευρά υπερπίεσης.

Με γνωστά τα μεγέθη του συζυγούς πεδίου, μπορούν να βρεθούν οι παραγώγοι ευαισθησίας ως προς τις ταχύτητες σε κάθε διακριτοποιημένη επιφάνεια πάνω στο πτερύγιο, σύμφωνα με τη σχέση 3.62. Στο σχήμα 5.7 παρουσιάζεται ο χάρτης παραγώγων ευαισθησίας στις πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης πάνω στο πτερύγιο, ο οποίος προκύπτει

από τη σχέση 3.62 αδιαστατοποιημένη με το στοιχειώδες εμβαδόν  $|S_m|$  της επιφάνειας  $m$  του στερεού ορίου και πολλαπλασιασμένη με το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε κάθε διακριτοποιημένη επιφάνεια  $m$ , δηλαδή:

$$\frac{1}{|S_m|} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b'_m} n_l = \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\delta W_i}{\delta b_m} n_l \quad (5.1)$$



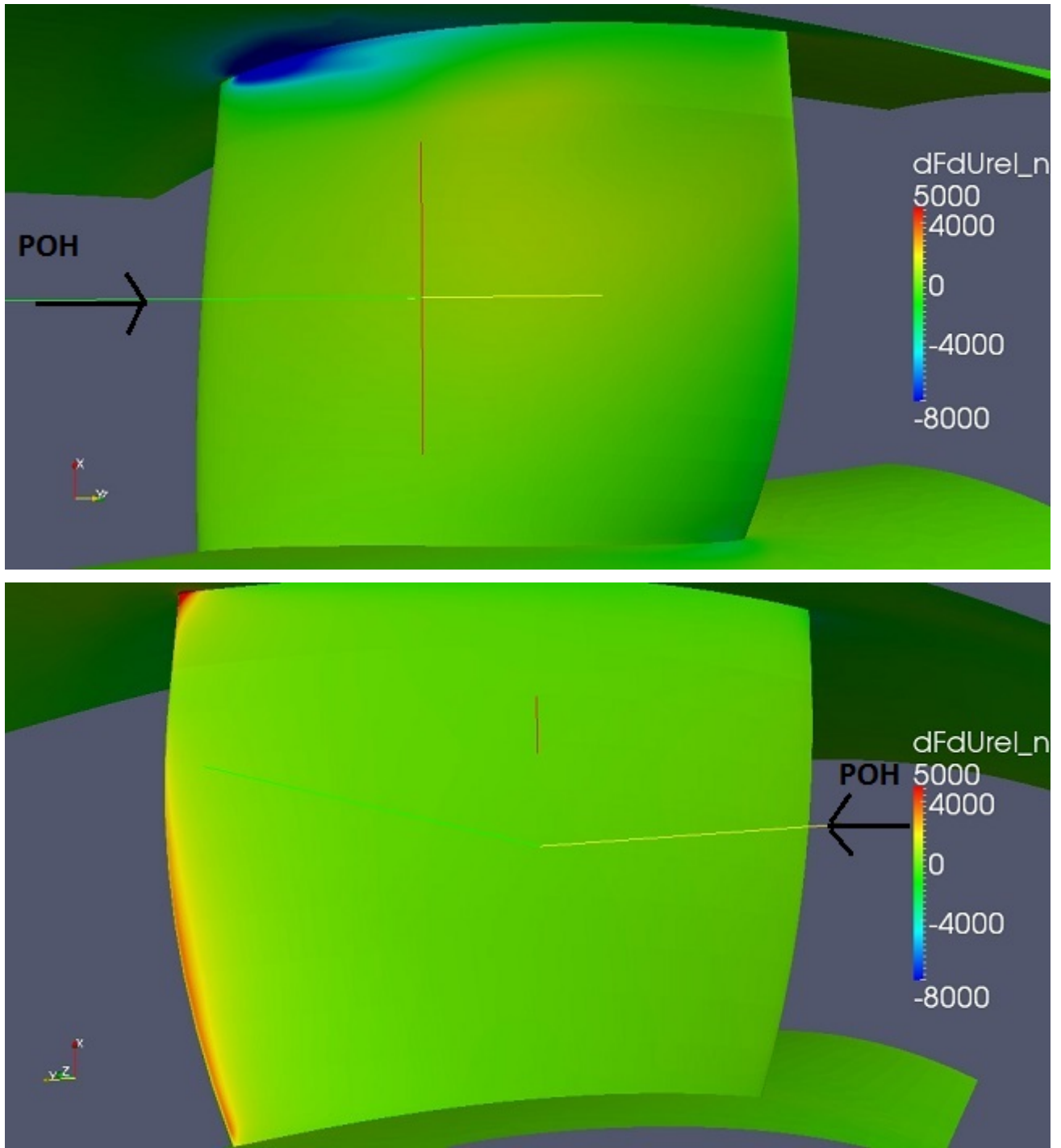
**Σχήμα 5.7:** Χάρτης παραγώγων ευαισθησίας στην επιφάνεια του περυγίου.  
 Πάνω: Πλευρά υποπίεσης. Κάτω: Πλευρά υπερπίεσης.

Η αδιαστατοποίηση της σχέσης 3.62 με το στοιχειώδες εμβαδόν  $|S_m|$  της επιφάνειας  $m$  του στερεού ορίου γίνεται πρωτίστως για να προκύψει ο χάρτης παραγώγων ως προς την παροχή όγκου (ή μάζας) σε κάθε επιφάνεια αντί για τον αντίστοιχο χάρτη ως προς τις ταχύτητες και κατά δεύτερο λόγο για την ομοιομορφία του χάρτη παραγώγων

(λόγω του διαφορετικού εμβαδού  $|S_m|$  της κάθε επιφάνειας όγκου ελέγχου πάνω στο πτερύγιο). Ο πολλαπλασιασμός με το κάθετο διάνυσμα γίνεται έτσι ώστε, ανάλογα με το πρόσημο των παραγώγων της σχέσης 5.1, να καθοριστεί η κατεύθυνση των ταχυτήτων της δέσμης (αναρρόφηση ή έγχυση ρευστού).

Αξίζει να παρατηρήσουμε την ομοιότητα των σχημάτων 5.6 και 5.7. Η ομοιότητα αυτή δείχνει ότι ο χάρτης παραγώγων ευαισθησίας που προκύπτει από τη σχέση 5.1, οφείλεται κατά κύριο λόγο στις τιμές της συζυγούς πίεσης πάνω στο πτερύγιο. Η επίδραση δηλαδή του πρώτου όρου στο δεξιό μέλος της 5.1 είναι αμελητέα (όρος συζυγών τάσεων).

Όσον αφορά τις περιοχές στο πτερύγιο που παρουσιάζουν υψηλές τιμές παραγώγων ευαισθησίας, αυτές εντοπίζονται στην μεν πλευρά υποπίεσης κοντά στο κέλυφος πριν την θέση αποκόλλησης της ροής, και κοντά στην άτρακτο στην ακμή εκφυγής του πτερυγίου, στη δε πλευρά υπερπίεσης στην ακμή εκφυγή κοντά στο κέλυφος και σε μια περιοχή που εκτείνεται ακτινικά από την άτρακτο μέχρι τη μέση ακτίνα περίπου. Το πρόσημο των παραγώγων, υποδεικνύει δέσμες αναρρόφησης στην πλευρά υποπίεσης και δέσμες έγχυσης στην πλευρά υπερπίεσης. Οι περιοχές με τις μεγαλύτερες τιμές παραγώγων παρουσιάζονται στο σχήμα 5.8 (χρησιμοποιώντας διαφορετική κλίμακα από αυτήν στο σχήμα 5.7 ώστε να είναι εμφανής). Από το σχήμα αυτό φαίνεται ότι η θέση τοποθέτησης δέσμης ρευστού που θα δώσει την μεγαλύτερη μείωση απωλειών σχετικής ολικής πίεσης διαμέσου της περιστρεφόμενης πτερύγωσης βρίσκεται στην πλευρά υποπίεσης, κοντά στο κέλυφος και πριν την θέση αποκόλλησης που εντοπίστηκε και σχολιάστηκε προηγουμένως.

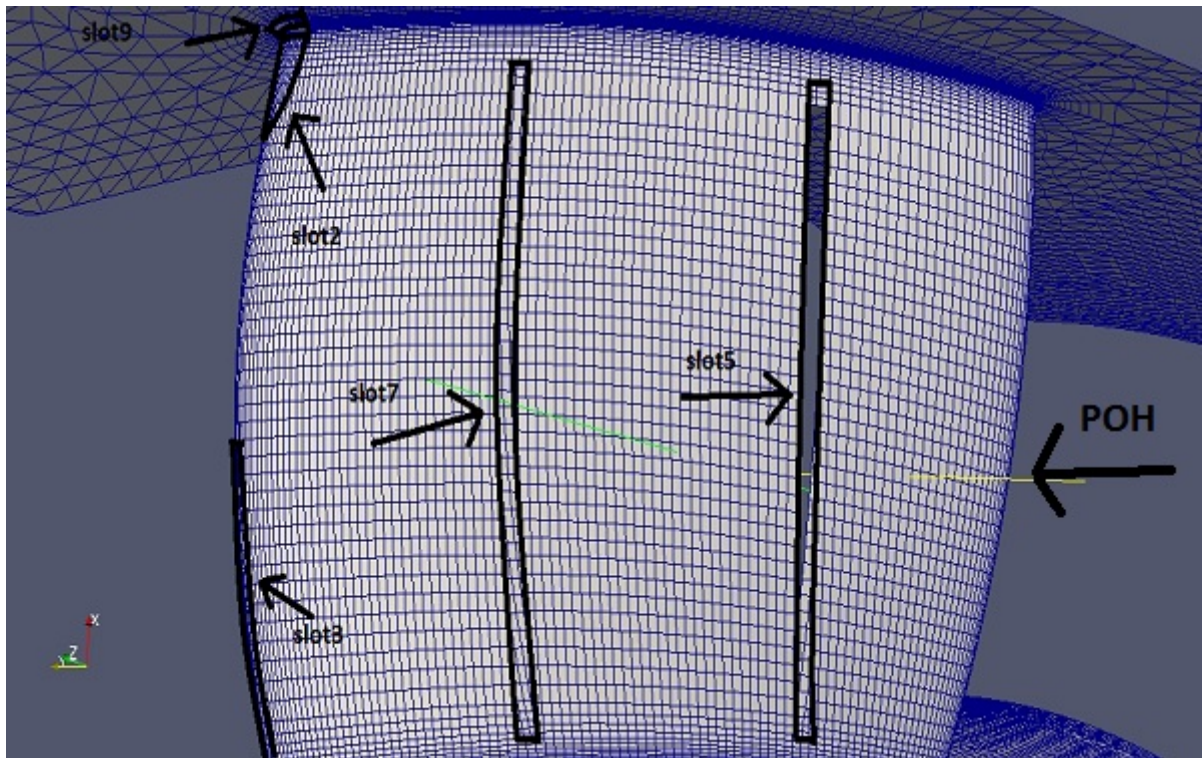
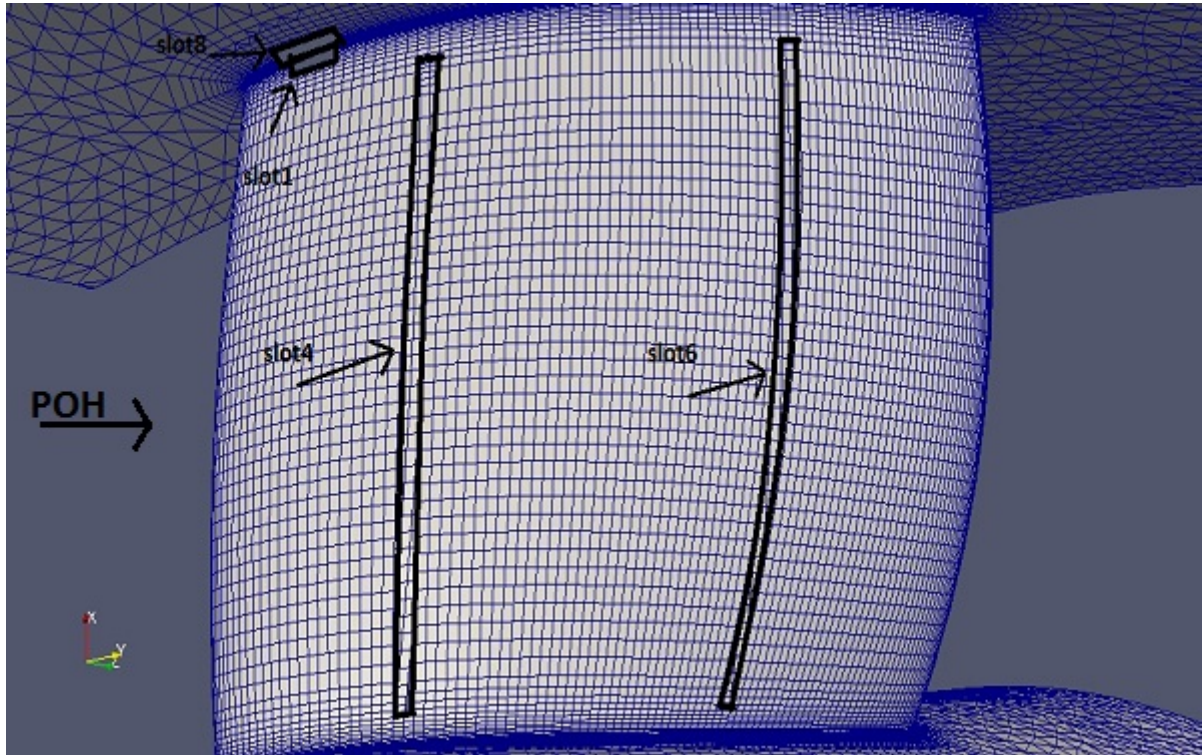


Σχήμα 5.8: Χάρτης παραγών ευαισθησίας στην επιφάνεια του πτερυγίου.  
 Πάνω: Πλευρά υποπίεσης. Κάτω: Πλευρά υπερπίεσης.

### 5.3 Παραμετρική διερεύνηση της χρήσης ελέγχου ροής

Αφού υπολογίστηκε ο χάρτης παραγώγων ευαισθησίας ως προς την παροχή όγκου στην επιφάνεια του πτερυγίου, στην παράγραφο αυτή γίνεται μια παραμετρική διερεύνηση και σύγκριση της μεταβολής των απωλειών σχετικής ολικής πίεσης όταν τοποθετούνται δέσμες ρευστού τόσο στις θέσεις που υποδεικνύονται από το χάρτη παραγώγων ευαισθησίας, όσο και σε άλλες θέσεις που επιλέχθηκαν τυχαία. Έτσι θα δούμε αν όντως η συζυγής μέθοδος υποδεικνύει τις καταλληλότερες θέσεις για τοποθέτηση δεσμών ρευστού. Διερευνάται επίσης η επίδραση του μέτρου και της κατανομής της ταχύτητας καθώς και του εμβαδού της επιφάνειας της δέσμης σε διάφορες θέσεις.

Στο σχήμα 5.9 φαίνονται οι θέσεις που τοποθετούνται δέσμες ρευστού πάνω στο πτερύγιο που, στη συνέχεια, θα αναφέρονται ως slots. Φαίνεται επίσης και η αρίθμηση των slots. Τα slots 1 και 2, είναι στις θέσεις που υποδεικνύονται από τον χάρτη παραγώγων του σχήματος 5.8 (θέσεις με τις μεγαλύτερες τιμές παραγώγων), ενώ το slot 3 βρίσκεται σε θέση με μικρότερη τιμή των παραγώγων ευαισθησίας. Τα slots 4, 5, 6 και 7 βρίσκονται σε θέσεις που δεν υποδεικνύονται από τον χάρτη παραγώγων και θα χρησιμοποιηθούν για τη σύγκριση της μεταβολής των απωλειών σχετικής ολικής πίεσης όταν τοποθετούνται δέσμες ρευστού τόσο στις θέσεις που υποδεικνύονται από το χάρτη παραγώγων ευαισθησίας, όσο και σε άλλες θέσεις. Τέλος, τα slots 8 και 9 τοποθετούνται στο κέλυφος, κοντά στα slots 1 και 2, σε θέσεις με μεγάλες τιμές των παραγώγων ευαισθησίας. Η τοποθέτηση δεσμών ρευστού αναρρόφησης ή έγχυσης στην πλευρά υπερπίεσης του πτερυγίου, αναμένεται να μην παίζει ιδιαίτερο ρόλο στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, αφού στην πλευρά αυτή, η ροή είναι προσκολλημένη. Σημειώνεται ότι, σε όλες τις παραμετρικές διερευνήσεις που έγιναν στο κεφάλαιο αυτό, στις επιλύσεις της ροής χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο τύρβης  $k - \omega SST$ .



Σχήμα 5.9: Θέσεις τοποθέτησης δεσμών ρευστού (slots).  
 Πάνω: Πλευρά υποπίεσης. Κάτω: Πλευρά υπερπίεσης.



Στον πίνακα 5.2 φαίνονται τα αποτελέσματα της παραμετρικής διερεύνησης. Στην δεύτερη στήλη αναγράφεται το εμβαδόν της επιφάνειας του (slots, ενώ στην τρίτη η ταχύτητα της δέσμης. Θετική ταχύτητα δείχνει αναρρόφηση ρευστού και αρνητική έγχυση (το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε κάθε στοιχειώδη επιφάνεια του πτερυγίου έχει φορά προς το εξωτερικό του πεδίου ροής). Στη τέταρτη στήλη αναφέρεται ο λόγος της παροχής μάζας της δέσμης προς την παροχή μάζας εισόδου στην πτερύγωση, στη πέμπτη στήλη η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης 3.20 και στην έκτη η σχετική μεταβολή της όταν χρησιμοποιούνται δέσμες ρευστού για τον έλεγχο της ροής. Πλην της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης για τον έλεγχο της μείωσης των απωλειών σχετικής ολικής πίεσης διαμέσου της πτερύγωσης, χρησιμοποιείται και η κατά μάζα μέση τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης  $\bar{F}$  που ορίζεται από τη σχέση 5.2.

$$\bar{F} = \frac{-\int_{S_I} \left(p + \frac{1}{2}W^2 - \frac{1}{2}U^2\right) W_i n_i dS}{-\int_{S_I} W_i n_i dS} + \frac{-\int_{S_O} \left(p + \frac{1}{2}W^2 - \frac{1}{2}U^2\right) W_i n_i dS}{-\int_{S_O} W_i n_i dS} \quad (5.2)$$

Ο λόγος που γίνεται έλεγχος και με τη χρήση της μαζικής μέσης τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης  $\bar{F}$  είναι ότι σε περίπτωση που η εγχυόμενη παροχή μάζας ρευστού της δέσμης είναι μεγάλη, η αντικειμενική συνάρτηση θα μειώνεται σε κάποιο βαθμό λόγω της μεγαλύτερης παροχής εξόδου και όχι απαραίτητα λόγω της μείωσης των απωλειών σχετικής ολικής πίεσης. Αντίστοιχα, αν έχουμε αναρρόφηση ρευστού, η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να μη μειώνεται παρόλο που οι απώλειες σχετικής ολικής πίεσης μειώνονται λόγω της μικρότερης παροχής στην έξοδο απ' ότι στην είσοδο.

Από τα αποτελέσματα της παραμετρικής διερεύνησης συμπεραίνουμε ότι η τοποθέτηση δεσμών αναρρόφησης ρευστού στα slots 1 και 8, μειώνουν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και της μαζικής μέσης τιμής αυτής. Η μείωση αυτή είναι μεγαλύτερη όσο το μέτρο της ταχύτητας δέσμης  $U_{jet}$  αυξάνει (άρα και η αναρροφούμενη παροχή μάζας ρευστού). Οι θέσεις των slots 1 και 8 είναι οι πλέον ενδεδειγμένες για την τοποθέτηση δεσμών ρευστού σύμφωνα με το χάρτη παραγωγών ευαισθησίας, δηλαδή στις θέσεις αυτές οι παραγώγοι ευαισθησίας λαμβάνουν τις μέγιστες τιμές τους (κατά απόλυτη τιμή). Η τοποθέτηση δεσμών έγχυσης ρευστού στις θέσεις των slots 2, 3 και 9, που βρίσκονται στην πλευρά υπερπίεσης του πτερυγίου, δεν μειώνει αλλά αυξάνει ελαφρώς την αντικειμενική συνάρτηση, παρόλο που οι τιμές των παραγωγών ευαισθησίας στις θέσεις αυτές έχουν μεγάλες τιμές. Αυτό αναμένεται αφού, όπως προαναφέρθηκε, η τοποθέτηση δεσμών ρευστού στην πλευρά υπερπίεσης, όπου η ροή είναι προσκολλημένη, δεν μεταβάλλει σημαντικά τις απώλειες διαμέσου της πτερύγωσης. Στις θέσεις που επιλέχθηκαν τυχαία για τη σύγκριση της μεταβολής των απωλειών σχετικής ολικής πίεσης όταν τοποθετούνται δέσμες ρευστού μεταξύ των θέσεων που υποδεικνύονται από το χάρτη παραγωγών ευαισθησίας και των τυχαία επιλεγμένων θέσεων, δηλαδή στις θέσεις των slots 4, 5, 6 και 7, οι μειώσεις στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που παρατηρήθηκαν σε ορισμένες από τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν ήταν σημαντι-

**Πίνακας 5.2:** Αποτελέσματα παραμετρικής διερεύνησης για τοποθέτηση δεσμών ρευστού σε διάφορες θέσεις.

slot	$S_{slot}(m^2)$	$U_{jet}(\frac{m}{s})$	$\frac{\dot{m}_{slot}}{\dot{m}_{in}}\%$	$F$	$\frac{\Delta F}{F_0}\%$	$\bar{F}$	$\frac{\Delta \bar{F}}{F_0}\%$
no jets	-	-	-	9.59	-	88.67	-
slot1	1.7 E-5	+6	0.09426	9.39	-2.09	86.9	-2.0
		+12	0.1886	9.16	<b>-4.48</b>	84.91	<b>-4.24</b>
slot2	4.41 E-5	-12	0.4889	10.09	+5.21	92.58	+4.41
		+12	0.4889	9.7	+1.98	90.97	+2.59
slot3	2.88 E-5	-12	0.3193	10.11	+5.42	92.98	+4.86
		+12	0.3193	9.53	-0.626	88.51	-0.18
slot4	2.95 E-4	-3	0.818	10.14	+5.74	92.65	+4.49
		+3	0.818	9.49	-1.04	88.79	+0.135
slot5	2.69 E-4	-3	0.747	10	+4.28	91.42	+3.10
		+3	0.747	9.68	+0.94	90.47	+2.03
slot6	2.14 E-4	-3	0.5946	9.99	+4.17	91.53	+3.23
		+3	0.5946	9.60	+0.104	89.53	+0.97
slot7	2.32 E-4	-3	0.642	10.0	+4.28	91.59	+3.29
		+3	0.642	9.63	+0.417	89.84	+1.32
slot8	4.31 E-5	+6	0.23915	9.09	-5.21	84.33	-4.89
		+12	0.4783	8.69	<b>-9.38</b>	80.99	<b>-8.66</b>
slot9	5.52 E-6	-12	0.0612	9.8	+2.19	90.45	+2.01
		+12	0.0612	9.76	+1.77	90.24	+1.77

κά μικρότερες από τις αντίστοιχες μειώσεις όταν η τοποθέτηση των δεσμών γίνονταν σύμφωνα με το χάρτη παραγωγών ενώ οι παροχές στις θέσεις ήταν μεγαλύτερες.

Επομένως, η τοποθέτηση δεσμών ρευστού στις υποδεικνυόμενες από το χάρτη παραγωγών ευαίσθησιες θέσεις, δίνει τη μεγαλύτερη μείωση απωλειών σχετικής ολικής πίεσης διαμέσου της περιστρεφόμενης πτερυγώσης. Ωστόσο, σε κάποιες περιπτώσεις, όπως η τοποθέτηση δεσμών ρευστού στις θέσεις των slots 2, 3 και 9, ενώ σύμφωνα με το χάρτη παραγωγών θα είχαμε μείωση της αντικειμενικής συνάρτησης αυτό δεν έγινε. Οι μεγάλες τιμές των παραγωγών στις θέσεις αυτές, μπορεί να οφείλονται στην υπόθεση της παγωμένης τυρβώδους συνεκτικότητας που έγινε κατά την εξαγωγή των σχέσεων της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, ενώ η ροή είναι τυρβώδης.

Μέσω της παραμετρικής διερεύνησης βρέθηκαν οι θέσεις τοποθέτησης δεσμών ρευστού που δίνουν τη μεγαλύτερη μείωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης (slots 1 και 8). Οι παροχές μάζας ρευστού στις θέσεις αυτές ήταν πολύ μικρές σε σχέση με την παροχή εισόδου (περίπου 0.19% για το slot 1 και 0.48% για το slot 8). Μπορούμε

επομένως να διερευνήσουμε την μεταβολή στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (και της μαζικής μέσης τιμής της) όταν η παροχή αναρρόφησης της δέσμης αυξάνει. Αυτό μπορεί να γίνει είτε αυξάνοντας την ταχύτητα είτε αυξάνοντας το εμβαδόν της επιφάνειάς της δέσμης. Επειδή οι ταχύτητες δέσμης ήταν ίσες με την αξονική ταχύτητα εισόδου στην παραμετρική διερεύνηση που προηγήθηκε, δηλαδή είχαν μεγάλες τιμές, προτιμάται η αύξηση του εμβαδού της επιφάνειας της δέσμης για την αύξηση της αναρροφούμενης παροχής. Επίσης μπορεί να διερευνηθεί η μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης όταν είναι ενεργοποιημένα και τα δύο slots αναρρόφησης.

Στον πίνακα 5.3 φαίνονται τα αποτελέσματα της μεταβολής της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης όταν μεταβάλλεται το εμβαδόν της επιφάνειας της δέσμης και όταν είναι ενεργοποιημένα και τα δύο slots.

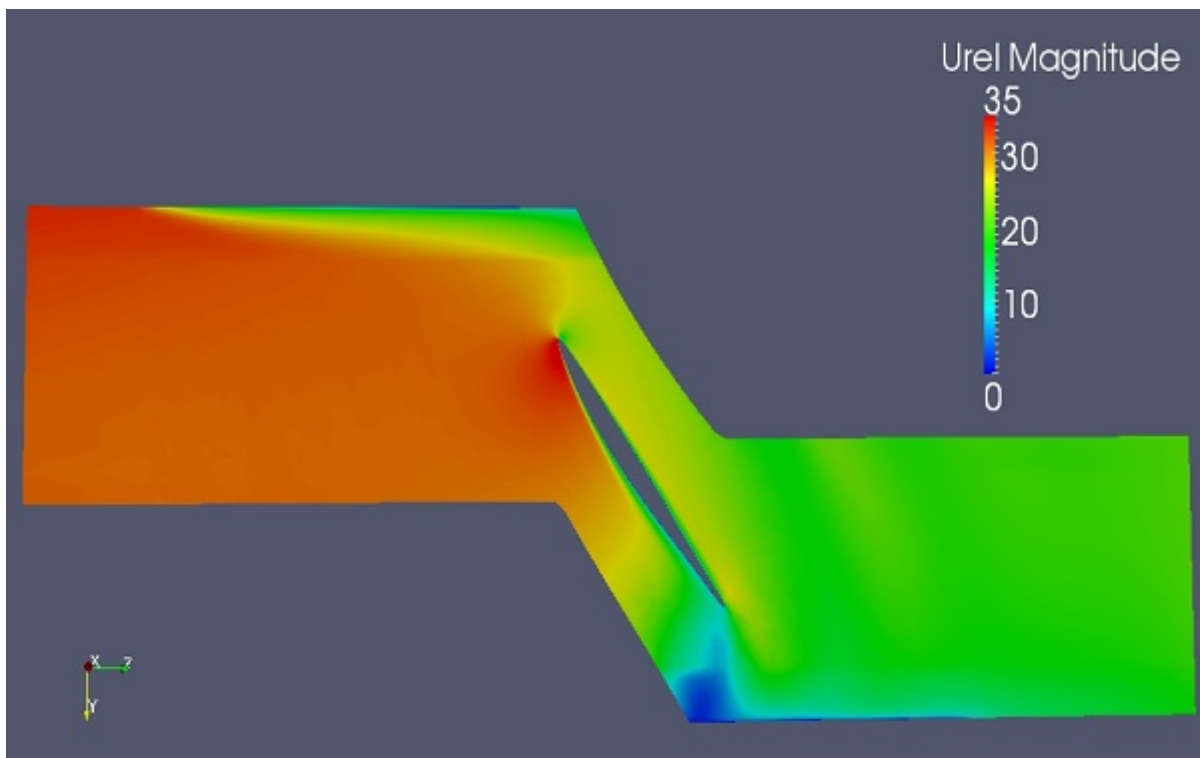
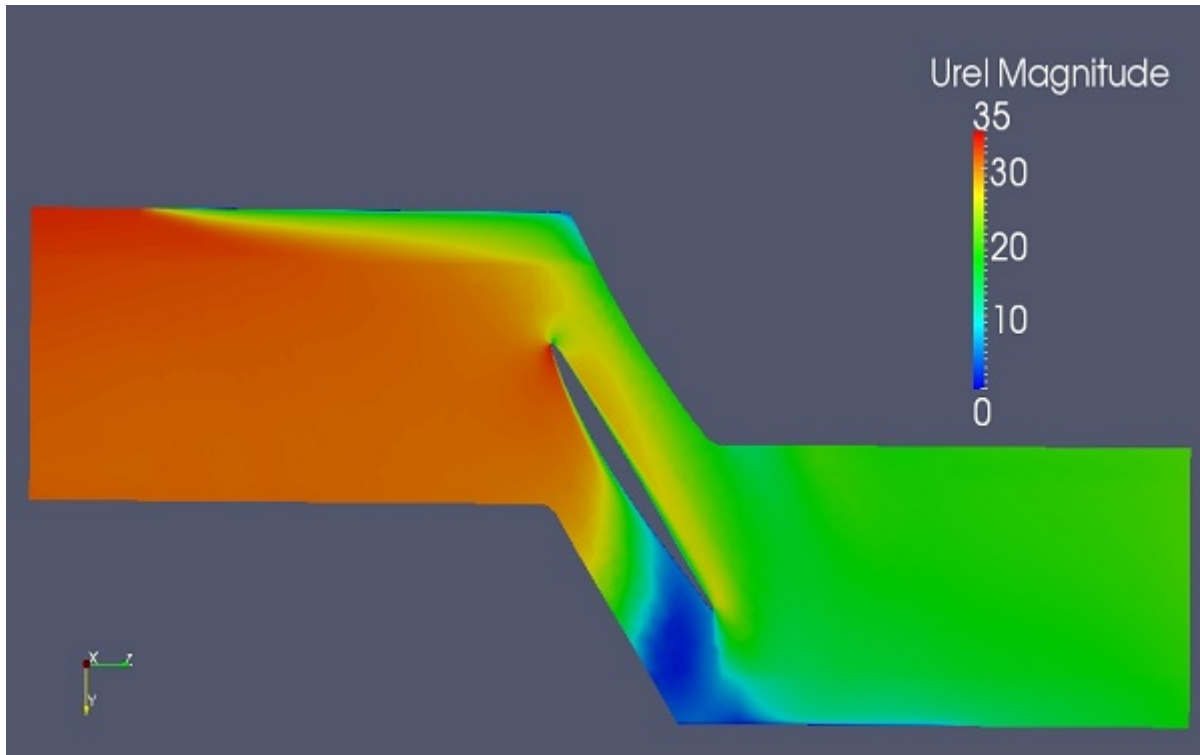
**Πίνακας 5.3:** Αποτελέσματα παραμετρικής διερεύνησης για μεταβλητό εμβαδόν επιφάνειας δέσμης και ενεργοποίηση και των δύο slots.

slot	$U_{jet}(\frac{m}{s})$	$S_{slot}(m^2)$	$\frac{\dot{m}_{slot}}{\dot{m}_{in}}\%$	$F$	$\frac{\Delta F}{F_0}\%$	$\bar{F}$	$\frac{\Delta \bar{F}}{F_0}\%$
no jets	-	-	-	9.59	-	88.67	-
slot1	12	1.7 E-5	0.1886	9.16	-4.48	84.91	-4.24
		8.86 E-5	0.9824	8.12	-15.33	76.57	-13.65
slot8	12	4.31 E-5	0.4783	8.69	-9.38	80.99	-8.66
		1.37 E-4	1.52	7.56	-21.17	72.26	-18.51
slot1 + slot8	12	6.01 E-5	0.6669	8.42	-12.2	78.81	-11.12
		2.26 E-4	2.501	7.2	<b>-24.92</b>	70.55	<b>-20.44</b>

Τα αποτελέσματα του πίνακα 5.3 δείχνουν ότι η αύξηση της αναρροφούμενης παροχής μάζας ρευστού στα slots, προκαλεί μεγαλύτερη μείωση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και κατ' επέκταση και των απωλειών σχετικής ολικής πίεσης διαμέσου της πτερυγώσης. Επίσης, η ενεργοποίηση και των δύο slots έχει ακόμα πιο ευεργετικά αποτελέσματα στη μείωση των απωλειών και με τον τρόπο αυτό, για τις υφιστάμενες θέσεις τοποθέτησης δεσμών ρευστού, έχουμε την καλύτερη λύση, δηλαδή τη μεγαλύτερη μείωση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ( $-24.92\%$ ). Οι παροχές μάζας ρευστού στα slots είναι αρκετά μικρές και έτσι η μείωση της απόδοσης λόγω των απωλειών μάζας για τον έλεγχο ροής σε μια εγκατάσταση αεριοστροβίλου αναμένεται να είναι μικρότερη από το κέρδος σε απόδοση λόγω των μικρότερων απωλειών σχετικής ολικής πίεσης διαμέσου των κινούμενων πτερυγώσεων (εάν ο έλεγχος ροής χρησιμοποιείται σε όλες τις πτερυγώσεις). Επομένως, αναμένεται η αύξηση της συνολικής απόδοσης. Πέραν αυτού, ο αναρροφούμενος αέρας για τον έλεγχο της ροής μπορεί να επαναχρησιμοποιηθεί για ψύξη σε άλλο τμήμα μιας αεριοστροβιλικής μονάδας ή και να επανεγχυθεί στη ροή εντός της μηχανής για αύξηση της παροχής μάζας εργαζόμενου μέσου, άρα και συναλλασσόμενου έργου, στον στρόβιλο.

Στο σχήματα 5.10 και 5.11 φαίνεται η μείωση του μεγέθους της περιοχής ανακυκλοφορίας και συνεπακόλουθα η μείωση της αποκόλλησης της ροής όταν υπάρχει μέγιστη

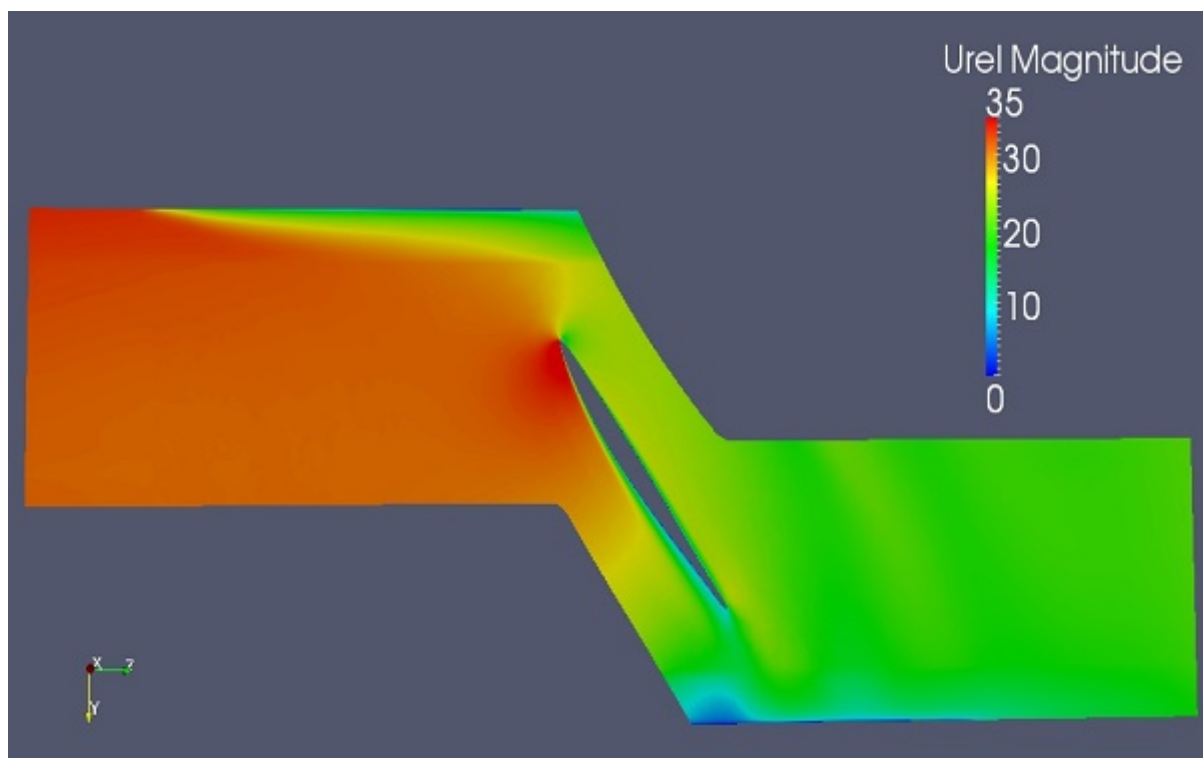
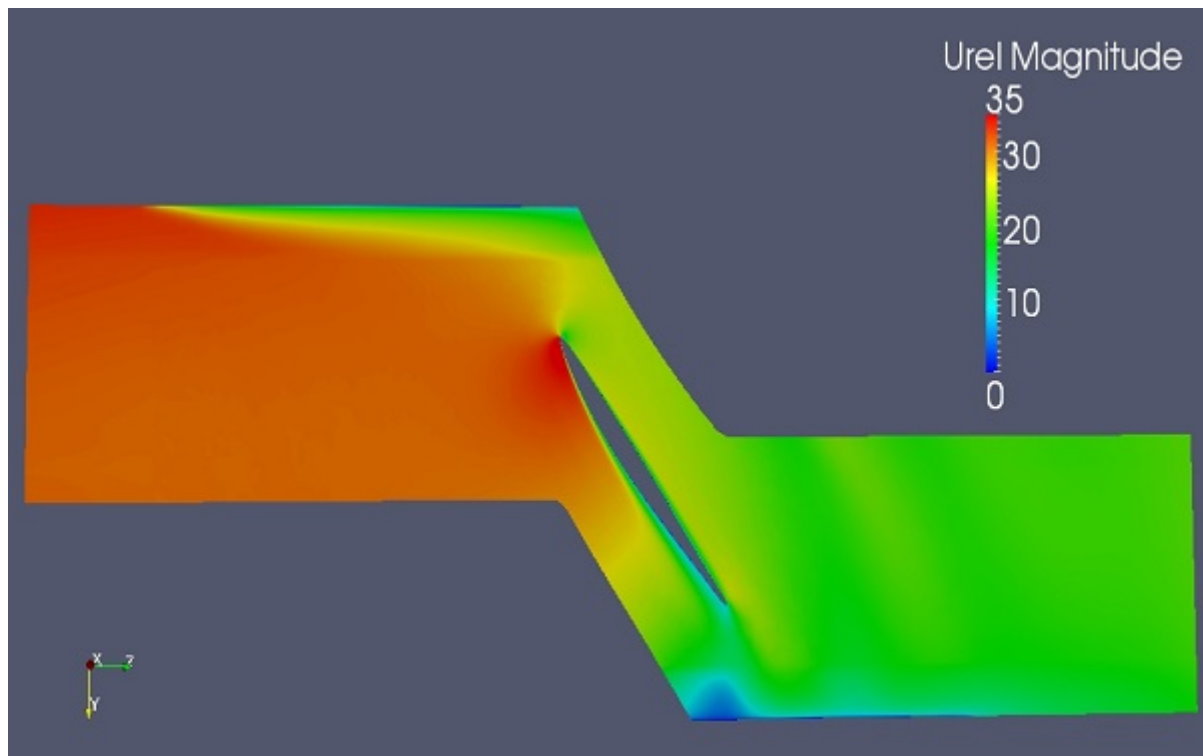
αναρρόφηση ρευστού στις θέσεις των slots 1 και 8.



**Σχήμα 5.10:** Πεδίο μέτρου σχετικής ταχύτητας σε τομές κοντά στο κέλυφος.

Πάνω: Λειτουργία χωρίς έλεγχο ροής.

Κάτω: Ενεργοποιημένο μόνο το slot 1 ( $\frac{\dot{m}_{slot}}{\dot{m}_{in}} = 0.9824\%$ ).

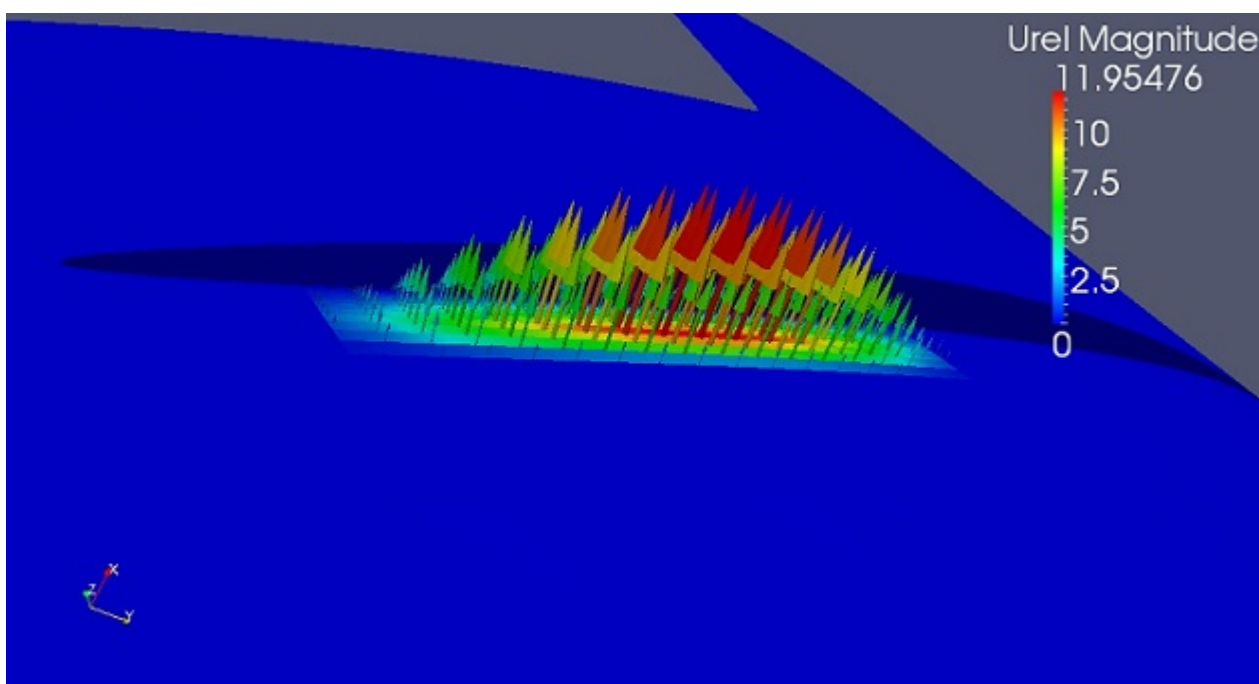


**Σχήμα 5.11:** Πεδίο μέτρου σχετικής ταχύτητας σε τομές κοντά στο κέλυφος.

Πάνω: Ενεργοποιημένο μόνο το slot 8 ( $\frac{\dot{m}_{slot}}{\dot{m}_{in}} = 1.52\%$ ).

Κάτω: Ενεργοποιημένα και τα δύο slots ( $\frac{\dot{m}_{slot}}{\dot{m}_{in}} = 2.501\%$ ).

Στις μέχρι τώρα παραμετρικές διερευνήσεις που έγιναν, η κατανομή ταχύτητας της δέσμης ήταν ομοιόμορφη, δηλαδή το μέτρο της ταχύτητας ήταν σταθερό κατά την έκταση του slot. Σε μια πραγματική εφαρμογή όμως, αυτό δεν είναι δυνατό λόγω των συνεκτικών φαινομένων. Η κατανομή της ταχύτητας μέσα σε αγωγούς όπως τα slots που χρησιμοποιήθηκαν μέχρι τώρα, έχει μορφή παραβολοειδούς, δηλαδή το μέτρο της ταχύτητας μηδενίζεται στα στερεά όρια και έχει μέγιστη τιμή στο κέντρο του slot. Στο σχήμα 5.12 φαίνεται μια κατανομή ταχύτητας παραβολοειδούς μορφής στο slot 8 (δέσμη αναρρόφησης ρευστού), ενώ στον πίνακα 5.4 φαίνονται τα αποτελέσματα της μεταβολής της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης, όταν η κατανομή της ταχύτητας των slots έχει μορφή παραβολοειδούς. Με  $U_{max}$  συμβολίζεται η ταχύτητα στο κέντρο του slot (δηλαδή η μέγιστη ταχύτητα στο slots).



**Σχήμα 5.12:** Κατανομή ταχύτητας παραβολοειδούς μορφής στο slot 8 (δέσμη αναρρόφησης ρευστού).

**Πίνακας 5.4:** Αποτελέσματα παραμετρικής διερεύνησης για κατανομή ταχύτητας δέσμης παραβολοειδούς μορφής.

slot	$U_{max}(\frac{m}{s})$	$S_{slot}(m^2)$	$\frac{\dot{m}_{slot}}{\dot{m}_{in}}\%$	$\mathbf{F}$	$\frac{\Delta\mathbf{F}}{\mathbf{F}_0}\%$	$\bar{\mathbf{F}}$	$\frac{\Delta\bar{\mathbf{F}}}{\bar{\mathbf{F}}_0}\%$
no jets	-	-	-	9.59	-	88.67	-
slot1	12	8.86 E-5	0.3481	8.89	-7.3	82.62	-6.82
slot8	12	1.37 E-4	0.5554	8.32	-13.24	77.67	-12.41
slot1 + slot8	12	2.26 E-4	0.904	7.94	<b>-17.2</b>	74.76	<b>-15.69</b>

Από τα αποτελέσματα του πίνακα 5.4, συμπεραίνεται ότι και στην περίπτωση που η κατανομή ταχύτητας στην δέσμη έχει μορφή παραβολοειδούς επιτυγχάνεται μείωση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Η μείωση αυτή αυξάνει όσο η παροχή μάζας ρευστού της δέσμης αυξάνει, δηλαδή η μεγαλύτερη μείωση επιτυγχάνεται όταν ενεργοποιούνται και τα δύο slots.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι η χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, μέσω της εύρεσης του χάρτη παραγώγων ευαισθησίας υπέδειξε τις καταλληλότερες θέσεις τοποθέτησης δεσμών ρευστού για την ελαχιστοποίηση των απωλειών σχετικής ολικής πίεσης διαμέσου της περιστρεφόμενης πτερύγωσης μιας βαθμίδας συμπιεστή. Αυτό προέκυψε από τα αποτελέσματα της παραμετρικής διερεύνησης που παρουσιάστηκαν στον πίνακα 5.2. Η καλύτερη λύση που βρέθηκε μειώνει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης κατά 25% περίπου, με αναρρόφηση μόλις 2.5% της παροχής εισόδου. Το αποτέλεσμα αυτό κρίνεται ιδιαίτερα ενθαρρυντικό.



## Κεφάλαιο 6

### Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα

Η παρούσα διπλωματική εργασία είχε ως σκοπό την εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για τον ενεργητικό έλεγχο της ροής ασυμπίεστου ρευστού σε τριδιάστατη περιστρεφόμενη πτερύγωση αξονικού συμπιεστή χωρίς ακτινικό διάκενο έτσι ώστε να έχουμε μείωση των απωλειών σχετικής ολικής πίεσης διαμέσου της πτερύγωσης για λειτουργία της εκτός του σημείου σχεδιασμού. Η συνεχής συζυγής μέθοδος αναπτύχθηκε και εφαρμόστηκε με την υπόθεση της παγωμένης τυρβώδους συνεκτικότητας. Τα αποτελέσματα της παραμετρικής διερεύνησης ως προς τη θέση τοποθέτησης της δέσμης έδειξαν ότι η συνεχής συζυγής μέθοδος εντοπίζει την καλύτερη, μεταξύ των εξεταζόμενων, θέση. Ταυτόχρονα όμως, υποδεικνύονται και άλλες θέσεις, με μικρότερο, κατά απόλυτη τιμή, μέτρο των παραγώγων ευαισθησίας στις οποίες όμως η τοποθέτηση δεσμών ρευστού δεν μειώνει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Η χρήση ενεργητικού ελέγχου της ροής με δέσμες ρευστού στις υποδεικνυόμενες από τη συνεχή συζυγή μέθοδο θέσεις μειώνει έως και 25% την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, με αναρρόφηση ρευστού μόλις 2.5% της παροχής μάζας στην είσοδο. Η μείωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη όσο η παροχή δέσμης αυξάνει. Σε μια πραγματική εφαρμογή, όπου η κατανομή ταχύτητας της δέσμης έχει μορφή παραβολοειδούς και η μέγιστη τιμή της ταχύτητας της δέσμης περιορίζεται από τις απώλειες (μεγάλη ταχύτητα στον αγωγό αναρρόφησης σημαίνει μεγάλες απώλειες και άρα σπατάλη ενέργειας), η παροχή μάζας αναρρόφησης ρευστού στην δέσμη είναι περιορισμένη (περίπου 0.9% της παροχής εισόδου) αλλά και πάλι μπορεί να επιτευχθεί μείωση κατά 17% της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης.

Όσον αφορά τις συγκρίσεις που έγιναν στο κεφάλαιο 4 των αποτελεσμάτων της επίλυσης του ευθέως προβλήματος με τρία διαφορετικά μοντέλα τύρβης και με δύο διαφορετικά λογισμικά, συνάγονται τα εξής αποτελέσματα:

Η επίλυση με διαφορετικό μοντέλο τύρβης δίνει κατανομή πίεσης στο πτερύγιο που έχει παρόμοια μορφή, ενώ οι μεγαλύτερες διαφορές παρουσιάζονται στην πλευρά υποπίεσης

κοντά στο σημείο πρόσπτωσης. Οι κατανομές της πίεσης και της γωνίας  $\beta$  της σχετικής ροής στην έξοδο του χωρίου ροής έχουν παρόμοια μορφή και παρουσιάζουν, στις περιπτώσεις που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 4, τιμές πολύ κοντινές μεταξύ τους.

Η επίλυση με διαφορετικό λογισμικό, όταν το υπολογιστικό πλέγμα και οι οριακές συνθήκες ήταν οι ίδιες, δίνει κατανομές πιέσεων και γωνιών  $\beta$  της σχετικής ροής στην έξοδο που είναι πολύ κοντά για την επίλυση με τα δύο διαφορετικά λογισμικά, εκτός από τις περιοχές κοντά στα στερεά όρια, δηλαδή στα οριακά στρώματα κελύφους. Αυτό επιβεβαιώνει την σύγκλιση της λύσης με τα δύο λογισμικά.

Η προσωπική συμβολή στην παρούσα διπλωματική εργασία ήταν:

- Προγραμματισμός σε γλώσσα Fortran ή C++ (περιβάλλον OpenFOAM) υπολογιστικών εργαλείων μετεπεξεργασίας (post - processing) των αποτελεσμάτων της επίλυσης του ευθέως προβλήματος. Συγκεκριμένα, προγραμματίστηκε σε γλώσσα Fortran κώδικας για την εξαγωγή καμπύλων κατανομής πίεσης κατά την αδιάστατη χορδή σε μια τομή του πτερυγίου της περιστρεφόμενης πτερύγωσης (σχήματα 4.8 και 4.9) και σε γλώσσα C++ κώδικας για την εύρεση των κατανομών πίεσης και γωνίας σχετικής ροής  $\beta$  συναρτήσει της ακτίνας στην έξοδο του χωρίου ροής (σχήματα 4.10, 4.11, 4.12 και 4.13). Επίσης, προγραμματίστηκε, σε γλώσσα C++, κώδικας για τον υπολογισμό της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης  $F$ , της μαζικής μέσης τιμής της  $\bar{F}$ , του εμβαδού επιφάνειας της δέσμης  $S_{slot}$  και του λόγου  $\frac{m_{slot}}{\dot{m}_{in}}$ , όταν τοποθετούνται δέσμες ρευστού στην πτερύγωση.

- Διαχείριση του πλέγματος με εργαλεία του λογισμικού OpenFOAM. Με αυτά έγινε προέκταση του πλέγματος για το λόγο που αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο και αλλαγή των ορίων του πλέγματος ώστε να τοποθετηθούν στα στερεά όρια δέσμες ρευστού.

- Προγραμματισμός, σε γλώσσα C++, κώδικα για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας.

- Έγινε αριθμητική επίλυση των εξισώσεων του ευθέως και του συζυγούς προβλήματος στο ανοικτό λογισμικό OpenFOAM, δηλαδή καθορισμός των οριακών συνθηκών, των σχημάτων διακριτοποίησης και των παραμέτρων του αλγορίθμου επίλυσης (πχ. συντελεστές χαλάρωσης). Σημειώνεται ότι ο επιλύτης του συζυγούς προβλήματος αποτελεί συνεισφορά της ΜΠΥΡ&Β.

Ως μελλοντική εξέλιξη της παρούσας διπλωματικής προτείνεται η εύρεση των παραγώγων ευαισθησίας χωρίς την παραδοχή της παγωμένης τυρβώδους συνεκτικότητας, δηλαδή να γίνει παραγωγή και των εξισώσεων του μοντέλου τύρβης. Επίσης, μπορεί να προγραμματιστεί ένας πλήρης αλγόριθμος βελτιστοποίησης που θα εντοπίζει τις θέσεις τοποθέτησης και το μέτρο των δεσμών ρευστού ώστε να επιτυγχάνεται η βέλτιστη λύση, δηλαδή οι ελάχιστες απώλειες σχετικής ολικής πίεσης. Ταυτόχρονα μπορούν να εισαχθούν περιορισμοί όσον αφορά την παροχή και το μέτρο της ταχύτη-

τας σε κάθε δέσμη. Τέλος μπορεί να εφαρμοστεί η συνεχής συζυγής μέθοδος για τον ενεργητικό έλεγχο της ροής σε μια περιστρεφόμενη περύγωση συμπιεστή που έχει διάκενο μεταξύ ακροπτερυγίου και κελύφους.



## Βιβλιογραφία

- [1] Δημητρακόπουλος, Γ.: *Η συνεχής συζυγής μέθοδος για το βέλτιστο έλεγχο ροής με δέσμες ρευστού - Εφαρμογές εσωτερικής και εξωτερικής αεροδυναμικής*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2012.
- [2] Ρήγας, Γ.: *Προσομοίωση και χαμηλού κόστους βελτιστοποίηση του ενεργητικού ελέγχου ροής ρευστού γύρω από αεροτομή, σε κάρτες γραφικών*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2010.
- [3] T. Kroeckel, P. Jeschke, S.J. Hiller: *Experimental investigation of advanced multistage casing treatments in a 2.5 stage high pressure compressor test rig*,. ISABE-2011-1208, 2011.
- [4] *Newac technologies: Highly innovative technologies for future aero engines*. [http://www.newac.eu/uploads/media/NEWAC\\_Technologies.pdf](http://www.newac.eu/uploads/media/NEWAC_Technologies.pdf).
- [5] *Flow control in turbomachinery using micro jets*. [http://www.mtu-seasonsgreetings.de/en/technologies/engineering\\_news/others/Hiller\\_Flowcontrol\\_of\\_turbomachinery.pdf](http://www.mtu-seasonsgreetings.de/en/technologies/engineering_news/others/Hiller_Flowcontrol_of_turbomachinery.pdf).
- [6] Merchant, A., Kerrebrock J. L. Adamczyk J. J. and Brqunscheidel, E.: *Aerodynamic design and analysis of a high pressure ratio aspirated compressor stage*. ASME Paper No. 2000-GT-619, 2000.
- [7] Merchant, A. A., Drela M. Kerrebrock J. L. Adamczyk J. J. and Celestina, M.: *Experimental investigation of a high pressure ratio aspirated fan stage*. ASME Paper No. GT2004-53679, 2004.
- [8] Schuler, B. J., Kerrebrock J. L. Merchant A. A. and Drela, M.: *Design, analysis, fabrication and test of an aspirated fan stage*. ASME Paper No. 2000-GT-618, 2000.
- [9] Sturm, W., Scheugenpflug H. and Fottner, L.: *Performance improvements of compressor cascades by controlling the profile and sidewall boundary layers*. ASME J. Turbomach., 114, pp. 477–486, 1992.
- [10] Culley, D. E., Bright M. M. Prahst P. S. and Strazisar, A. J.: *Active flow separation control of a stator vane using embedded injection in a multistage compressor experiment*,. ASME J. Turbomach., 126, pp. 24–34., 2004.

- [11] Xinqian Zheng, Yangjun Zhang, Weidong Xing Junyue Zhang: *Separation control of axial compressor cascade by fluidic-based excitations*. Journal of Turbomachinery, OCTOBER 2011, Vol. 133 / 041016-7, 2011.
- [12] Ζυμάρης, Α.: *Συζυγείς μέθοδοι για το σχεδιασμό μορφών με βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά σε στρωτές και τυρβώδεις ροές*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2010.
- [13] Παπαδημητρίου, Δ.: *Συζυγείς (Adjoint) διατυπώσεις για την ανάλυση-σχεδίαση πτερυγώσεων στροβιλομηχανών και τη βέλτιστη προσαρμογή πλέγματος με a posteriori εκτίμηση σφάλματος*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2007.
- [14] D. I. Papadimitriou, K. C. Giannakoglou: *A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals for inviscid and viscous flows*. Computers and Fluids, Vol. 36, pp. 325 - 341, 2007.
- [15] D. I. Papadimitriou, K. C. Giannakoglou: *Total pressure losses minimization in turbomachinery cascades, using a new continuous adjoint formulation*. Journal of Power and Energy (Special Issue on Turbomachinery), Vol. 221, pp. 865 - 872, 2007.
- [16] A. S. Zymaris, D. I. Papadimitriou, K. C. Giannakoglou: *Continuous adjoint approach to the spalart allmaras turbulence model, for incompressible flows*. Computers and Fluids, Vol.38, pp. 1528 - 1538, 2009.
- [17] A. S. Zymaris, D. I. Papadimitriou, K. C. Giannakoglou: *Adjoint wall functions: A new concept for use in aerodynamic shape optimization*. Journal of Computational Physics Vol. 229(13), pp. 5228 - 5245, July, 2010.
- [18] Παπουτσής-Κιαχαγιάς, Ε.: *Συζυγείς μέθοδοι χαμηλού υπολογιστικού κόστους για τυρβώδεις ροές, στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, σε εξέλιξη.
- [19] Κουγιουμτζιάν, Γ.: *Βελτιστοποίηση μορφής πτερυγίου ρότορα συμπίεστη με χρήση εξελικτικών αλγορίθμων*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2013.
- [20] H. Jasak: *Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows*. PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Imperial college, London, 1998.
- [21] J. H. Ferziger, M. Peric: *Computational Methods for fluid dynamics*. Springer, 2002.
- [22] Καρούζας, Γ.: *Αυτοματοποιημένη μέθοδος βελτιστοποίησης πτερυγώσεων στροβιλομηχανών με χρήση συζυγών μεθόδων και διαχείριση περιορισμών*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2013.
- [23] *Openfoam v1.6 user's guide*. <http://www.openfoam.com>.

- [24] *Openfoam v1.6 programmer's guide*. <http://www.openfoam.com>.
- [25] *Spalart-allmaras model*. [http://www.cfd-online.com/Wiki/Spalart-Allmaras\\_model](http://www.cfd-online.com/Wiki/Spalart-Allmaras_model).
- [26] Γιαννάκογλου, Κ. Χ.: *Συνεκτικές ροές στις στροβιλομηχανές*. Εργαστήριο Θερμικών στροβιλομηχανών ΕΜΠ, 2004.
- [27] *Low-re k-epsilon models*. [http://www.cfd-online.com/Wiki/Low-Re\\_k-epsilon\\_models](http://www.cfd-online.com/Wiki/Low-Re_k-epsilon_models).
- [28] *Sst k-omega model*. [http://www.cfd-online.com/Wiki/SST\\_k-omega\\_model](http://www.cfd-online.com/Wiki/SST_k-omega_model).