



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

Μοντελοποίηση και Βελτιστοποίηση Διαφραγματικής  
Μικρο-Αντλίας με χρήση Υπολογιστικής  
Ρευστοδυναμικής

Διπλωματική Εργασία

Μαρίνα Κοντού

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2018



# Ευχαριστίες

Με το πέρας της διπλωματικής εργασίας θέλω να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που με βοήθησαν κατά την διάρκεια εκπόνησής της.

Αρχικά, ευχαριστώ τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Κ. Χ. Γιαννάκογλου για την ανάθεση του θέματος και τη διαρκή καθοδήγησή του, αλλά και για τις συμβουλές που μου έδωσε συνολικά κατά τη διάρκεια της φοίτησής μου.

Ακόμα, ευχαριστώ τον Δρ. Ξενοφώντα Τρομπούκη για την υποστήριξη και τη βοήθεια που μου παρείχε. Ήταν εκεί κάθε φορά που τον χρειαζόμουν και καθόλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Επίσης, ευχαριστώ τους υποψήφιους διδάκτορες Κωνσταντίνο Τσιάκα, Δημήτρη Καψούλη και Κωνσταντίνο Σαμούχο για τη βοήθεια που ο καθένας μου προσέφερε, αλλά και τη Δρ. Βαρβάρα Ασούτη για τις συμβουλές της.

Ευχαριστώ τους ανθρώπους που ήταν δίπλα μου στα χρόνια της φοίτησής μου και στο χρόνο ενασχόλησής μου με την εργασία. Ευχαριστώ τους φίλους και συμφοιτητές μου που πάντοτε φωτίζουν σε κάτι καινούριο.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου, τον αδερφό μου και τους γονείς μου, που είναι κοντά μου και με στηρίζουν.





Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

## Μοντελοποίηση και Βελτιστοποίηση Διαφραγματικής Μικρο-Αντλίας με χρήση Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής

Διπλωματική Εργασία

Μαρίνα Κοντού

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ  
Αθήνα, 2018

### Περίληψη

Η διπλωματική αυτή εργασία πραγματεύεται τη μελέτη 2Δ διαφραγματικής μικρο-αντλίας χωρίς βαλβίδες και τεχνητά μέρη αλλά με σύστημα διπλών αποκλινόντων αγωγών (διαχυτών) εκατέρωθεν χώρου με περιοδικά κινούμενο διάφραγμα. Για την πλεγματοποίηση της διάταξης χρησιμοποιείται οριόδετο, μη-δομημένο πλέγμα βασιζόμενο στην τεχνική του προελαύνοντος μετώπου, ενώ η παραμόρφωση αυτού πραγματοποιείται με οικείο λογισμικό που εφαρμόζει τη μέθοδο του ελαστικού μέσου. Το υπάρχον λογισμικό εξελίσσεται ώστε, υπό προϋποθέσεις που ισχύουν στην εργασία αυτή, η παραμόρφωση να επιτυγχάνεται με χαμηλότερο υπολογιστικό κόστος. Επιλύονται οι 2Δ εξισώσεις Navier Stokes ασυμπίεστης και χρονικά μη-μόνιμης ροής, προσταθεροποιημένες με τη μέθοδο της τεχνητής συμπίεστικότητας, με οικείο επιλύτη που εκτελείται σε επεξεργαστές καρτών γραφικών και, ταυτόχρονα, εξετάζεται η επίδραση της προσταθεροποίησης στο πεδίο ροής. Το ροϊκό πεδίο που προκύπτει από την επίλυση της χρονικά μόνιμης ροής με οριόδετο, μη-δομημένο πλέγμα συγκρίνεται με εκείνο ετέρου οικείου επιλύτη που χρησιμοποιεί μη-οριόδετο πλέγμα και υιοθετεί τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών, Cut-Cell.

Εξετάζεται η μορφή των αγωγών που χρησιμοποιούνται στη διάταξη, η οποία αντικαθιστά με τον καλύτερο τρόπο τις βαλβίδες ελέγχου μίας συνήθους διαφραγματικής αντλίας, ενώ παράλληλα προτείνεται, προγραμματίζεται και δοκιμάζεται μία νέα μέθοδος για την κίνηση του διαφράγματος, Πραγματοποιείται βελτιστοποίηση της διάταξης με χρήση εξελικτικών αλγορίθμων και διατυπώνονται οι μαθηματικές εξισώσεις για τη βελτιστοποίηση με τη συνεχή συζυγή μέθοδο για χρονικά μη-μόνιμη ροή.





**National Technical University of Athens**  
**School of Mechanical Engineering**  
**Fluids Section**  
**Parallel CFD & Optimization Unit**

## **CFD-based Modeling and Optimization of a Diaphragmatic Micro-Pump**

Diploma Thesis

**Marina Kontou**

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA  
Athens, 2018

### **Abstract**

This diploma thesis is dealing with the study of a 2D valveless, diffuser-based diaphragmatic micro-pump. The advancing front method is used to generate the starting body-fitted unstructured grid with triangular elements. An existing in-house software that applies the elastic medium model is used for mesh morphing. The existed software is improved in order to reduce its computational cost. The preconditioned, with the pseudo-compressibility method, 2D Navier Stokes equations for incompressible and unsteady flows are solved, while the influence of the preconditioning to the computed flow field is tested. The stationary flow field, as emerged from an in-house GPU-enabled CFD solver using body-fitted, unstructured grid is correlated to the flow field computed by another in-house solver using the immersed boundary method, and more specifically, the Cut-Cell method.

The type of ducts this pump carries is also examined for the improvement of its operation. A new method for the diaphragm periodic motion is proposed and its main characteristics are analyzed. The pump is optimized using evolutionary algorithms ( the software EA.S.Y. ) and the mathematical formulation of the continuous unsteady adjoint method is performed.





## Ακρωνύμια

EMΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΜΠΥΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής Βελτιστοποίησης
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
<hr/>	
CFD	Computational Fluid Dynamics
NTUA	National Technical University of Athens
PCopt	Parallel CFD & Optimization unit
<hr/>	
ΜΔΕ	Μερική Διαφορική Εξίσωση
ΟΜΔΠ	Οριόδετο Μη-Δομημένο Πλέγμα
TM	Τεμνόμενες Κυψέλες
<hr/>	
GPUs	Graphics Processing Units
AFM	Advancing Front Method
IMB	Immersed Boundary Method
EA	Evolutionary Algorithms
EASY	Evolutionary Algorithms System
MAEA	Metamodel Assisted Evolutionary Algorithms
FI	Field Integrals
SI	Surface Integrals
E-SI	Enhanced Surface Integrals



# Περιεχόμενα

## Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1	Βελτιστοποίηση . . . . .	1
1.2	Γενικές Πληροφορίες περί Αντλιών . . . . .	3
1.2.1	Κατηγοριοποίηση Αντλιών . . . . .	3
1.2.2	Διαφραγματικές Αντλίες . . . . .	4
1.3	Στόχος και Δομή της Εργασίας . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Γένεση Πλέγματος και Εξισώσεις Ροής</b>	<b>9</b>
2.1	Γένεση και Παραμόρφωση Πλέγματος . . . . .	9
2.1.1	Γένεση Πλέγματος . . . . .	9
2.1.2	Παραμόρφωση Πλέγματος . . . . .	12
2.2	Εξισώσεις Ροής . . . . .	18
2.2.1	Εισαγωγή του Όρου της Τεχνητής Συμπιεστότητας . . . . .	19
2.2.2	Ιδιοδιανυσματική Ανάλυση . . . . .	20
2.2.3	Διακριτοποίηση των Εξισώσεων . . . . .	21
2.2.4	Οριακές Συνθήκες . . . . .	23
2.3	Διερεύνηση του Όρου Τεχνητής Συμπιεστότητας . . . . .	24
2.4	Σύγκριση Αποτελεσμάτων δύο Οικείων Λογισμικών για Χρονικά Μόνιμη Ροή . . . . .	26
2.4.1	Γένεση και Παραμόρφωση Πλέγματος με τη Μέθοδο των Τεμνόμενων Κυψελών . . . . .	27
2.4.2	Σύγκριση Ροϊκού Πεδίου μεταξύ των δύο Λογισμικών . . . . .	28

<b>3 Μοντελοποίηση της Μορφής της Διάταξης και της Κίνησης του Διαφράγματος</b>	<b>35</b>
3.1 Διερεύνηση Μορφής της Διάταξης ως προς τη Διακινούμενη Παροχή .	35
3.2 Μελέτη της Κίνησης της Μεμβράνης . . . . .	42
<b>4 Βελτιστοποίηση της Διαφραγματικής Αντλίας με χρήση Εξελικτικών Αλγορίθμων</b>	<b>53</b>
4.1 Περί Εξελικτικών Αλγορίθμων . . . . .	54
4.2 Καθορισμός Στόχων , Περιορισμών και Μεταβλητών Σχεδιασμού . . . .	56
4.3 Αποτελέσματα της βελτιστοποίησης . . . . .	58
<b>5 Μαθηματική Διατύπωση των Εξισώσεων Για το Χρονικά Μη-Μόνιμο Συζυγές Πρόβλημα</b>	<b>69</b>
5.1 Το Ευθύ Πρόβλημα . . . . .	70
5.2 Το Συζυγές Πρόβλημα . . . . .	71
5.2.1 Συζυγείς Πεδιακές Εξισώσεις . . . . .	83
5.2.2 Συζυγείς Οριακές Συνθήκες . . . . .	83
5.2.3 Παράγωγοι Ευαισθησίας . . . . .	84
5.3 Προσταθεροποίηση της Συζυγούς Πεδιακής Εξίσωσης με τη Μέθοδο της Τεχνητής Συμπιεστότητας . . . . .	85
<b>6 Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα</b>	<b>87</b>
6.1 Ανακεφαλαίωση . . . . .	87
6.2 Συμπεράσματα . . . . .	88
6.3 Προτάσεις για Περαιτέρω Μελέτη . . . . .	90
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>91</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Βελτιστοποίηση

Σε προβλήματα μηχανικής των ρευστών ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη του ροϊκού πεδίου όπως αυτό δημιουργείται από τη σχετική κίνηση του ρευστού και ενός στερεού σώματος. Εξίσου κρίσιμο μέρος αποτελεί η βελτιστοποίηση παραμέτρων του εξεταζόμενου προβλήματος έτσι ώστε η ροή που αναπτύσσεται να ικανοποιεί σε μέγιστο βαθμό συγκεκριμένες απαιτήσεις. Κατά τη διαδικασία αυτή, εφαρμόζονται μέθοδοι βελτιστοποίησης. Η απαίτηση ή οι απαιτήσεις που πρέπει να ικανοποιηθούν μεταφράζονται σε ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση μίας ή περισσότερων συναρτήσεων που ονομάζονται συναρτήσεις-στόχου (objective functions) του προβλήματος βελτιστοποίησης. Οι παράμετροι οι οποίοι πρέπει να μεταβληθούν με σκοπό την ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση της συνάρτησης-στόχου αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού (design variables), [1].

Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης χωρίζονται σε στοχαστικές και αιτιοκρατικές, [1]. Οι στοχαστικές μέθοδοι βελτιστοποίησης βασίζονται στην αναζήτηση της βέλτιστης λύσης με συστηματικά τυχαίο τρόπο. Παρουσιάζουν το πλεονέκτημα της εύκολης προσαρμογής σε συναφή προβλήματα, αλλά και της σύγκλισης στο ολικό ακρότατο ανεξάρτητα από την αρχικοποίηση, αρκεί η βελτιστοποίηση να πραγματοποιηθεί για επαρκή αριθμό γενεών. Όμως είναι πιο αργές στην εύρεση της βέλτιστης λύσης συγκριτικά με τις αιτιοκρατικές μεθόδους.

Στις στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης ανήκουν οι εξελικτικοί αλγόριθμοι (Evolutionary Algorithms, EA). Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι χειρίζονται πληθυσμούς υποψηφίων λύσεων και όχι μια μεμονωμένη λύση σε κάθε επανάληψη. Ο τρόπος λειτουργίας ενός EA είναι ανάλογος της αρχής εξέλιξης των ειδών, όπως αυτή διατυπώθηκε από

τον Δαρβίνο. Το άτομα (υποψήφιας λύσεις) τα οποία είναι πιο καλά προσαρμοσμένα στο περιβάλλον τους (δίνουν καλύτερη λύση), έχουν περισσότερες πιθανότητες να αναπαραχθούν και οι απόγονοι (νέες υποψήφιας λύσεις) να είναι ακόμα καλύτερα προσαρμοσμένοι (να αποτελούν δηλαδή ακόμα καλύτερη λύση) [1], [2].

Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι αξιοποιούν την έννοια της παραγώγου της συνάρτησης-στόχου προκειμένου να εντοπίσουν τη βέλτιστη λύση, τη λύση δηλαδή που την ελαχιστοποιεί ή τη μεγιστοποιεί. Οι παράγωγοι της συνάρτησης-στόχου ονομάζονται παράγωγοι ευαισθησίας (sensitivity derivatives). Πλεονέκτημα των αιτιοκρατικών μεθόδων αποτελεί η γρήγορη σύγκλιση στη βέλτιστη λύση, με κίνδυνο όμως -που εξαρτάται από το σημείο εκκίνησης- αυτή να είναι τοπικό και όχι ολικό βέλτιστο. Ως μειονέκτημα αναφέρεται η ανάγκη επένδυσης χρόνου για την ανάπτυξη της μεθόδου υπολογισμού ή προσέγγισης της κλίσης, χρόνος που πρέπει να επενδύεται κάθε φορά που αλλάζει η συνάρτηση-στόχος.

Στις αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης ιδιαίτερη σημασία αποτελεί η - με ακρίβεια - εύρεση των παραγώγων ευαισθησίας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Οι κύριοι τρόποι εύρεσης των παραγώγων ευαισθησίας είναι:

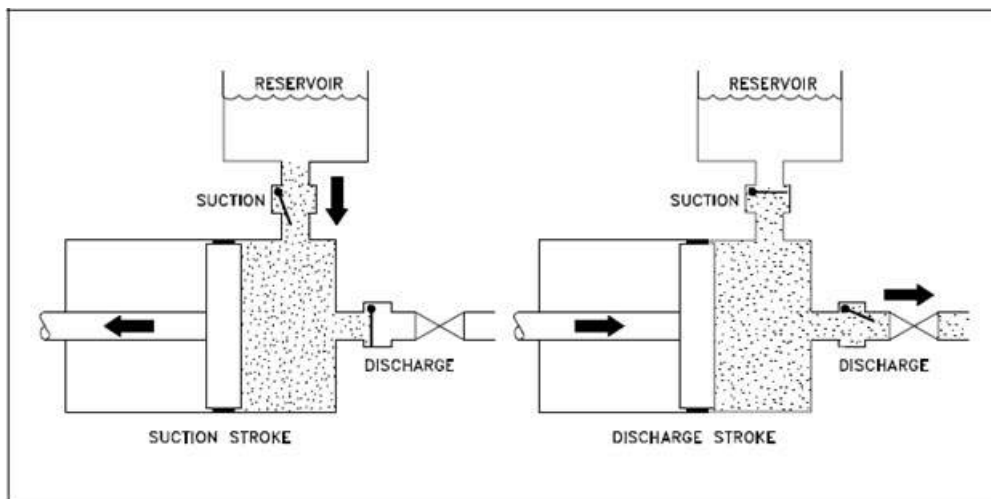
- Πεπερασμένες Διαφορές - Finite Differences, [1]
- Μέθοδος Μιγαδικών Μεταβλητών - Complex Variable Method, [1]
- Αυτόματη ή Αλγοριθμική Διαφόριση - Automatic or Algorithmic Differentiation, [1], [3]
- Μέθοδος Ευθείας Διαφόρισης - Direct Differentiation, [1]
- Συζυγής Μέθοδος - Adjoint Variable Method, [1], [4]

Το σημαντικότερο πλεονέκτημα της συζυγούς μεθόδου συγκριτικά με τις υπόλοιπες μεθόδους που αναφέρθηκαν, είναι ότι το κόστος υπολογισμού των παραγώγων της συνάρτησης-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού είναι ανεξάρτητο του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού. Η συζυγής μέθοδος μπορεί να είναι διακριτή ή συνεχής. Στη διακριτή συζυγή μέθοδο, η γραμμικοποίηση και η διακριτοποίηση της συνάρτησης-στόχου και των εξισώσεων ροής προηγείται της δημιουργίας της προς επίλυση συζυγούς εξίσωσης. Αντίθετα, στη συνεχή συζυγή μέθοδο, η δημιουργία της συζυγούς εξίσωσης στη μορφή ΜΔΕ προηγείται της διακριτοποίησης.

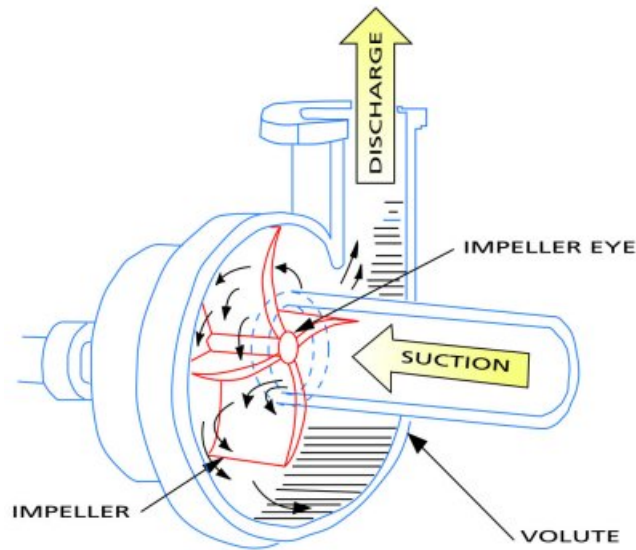
## 1.2 Γενικές Πληροφορίες περί Αντλιών

### 1.2.1 Κατηγοριοποίηση Αντλιών

Οι αντλίες είναι μηχανές οι οποίες προσδίδουν σε ένα ρευστό (υγρό ή αέριο) μηχανικό έργο με σκοπό την ανύψωση, τη μεταφορά ή τη συμπίεσή του. Οι αντλίες κατηγοριοποιούνται σύμφωνα με την αρχή λειτουργίας τους σε αντλίες θετικής μετατόπισης και σε στροβιλομηχανές. Στις αντλίες θετικής μετατόπισης, σχήμα 1.1, η εκτόπιση του ρευστού επιτυγχάνεται μέσω της κίνησης ενός στερεού σώματος π.χ. ενός εμβόλου. Η αρχή λειτουργίας των στροβιλομηχανών βασίζεται στην πρόσδοση και στη μετατροπή της κινητικής ενέργειας του ρευστού σε στατική πίεση. Στο σχήμα 1.2 παρουσιάζεται η αρχή λειτουργίας μιας στροβιλομηχανής ακτινικής ροής.



**Σχήμα 1.1:** Αρχή λειτουργίας αντλίας θετικής μετατόπισης. Κατά τη φάση της αναρρόφησης, η κίνηση του εμβόλου προκαλεί αύξηση του διαθέσιμου όγκου και συνδυάζεται με ανοικτή βαλβίδα εισαγωγής και κλειστή βαλβίδα εξαγωγής. Κατά τη φάση της εκκένωσης, η κίνηση του εμβόλου προκαλεί μείωση του διαθέσιμου όγκου και συνδυάζεται με κλειστή βαλβίδα εισαγωγής και ανοικτή βαλβίδα εξαγωγής, [5].



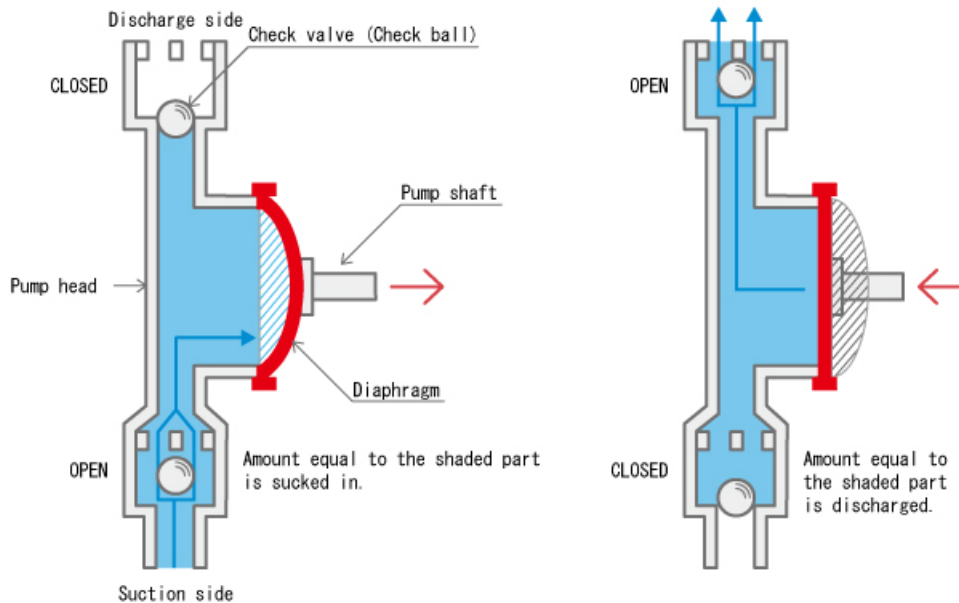
**Σχήμα 1.2:** Αρχή λειτουργίας στροβιλομηχανής ακτινικής ροής. Η κινητική ενέργεια στο ρευστό προσδίδεται μέσω φυγόκεντρων δυνάμεων λόγω της περιστροφικής κίνησης της πτερωτής, [5].

### 1.2.2 Διαφραγματικές Αντλίες

Στις αντλίες θετικής μετατόπισης εντάσσονται και οι διαφραγματικές αντλίες ή αντλίες μεμβράνης. Στις διαφραγματικές αντλίες, το έμβολο κινεί/παραμορφώνει τη μεμβράνη μεταβάλλοντας το διαθέσιμο όγκο. Η κίνηση της μεμβράνης σε συνδυασμό με την κίνηση μηχανικών εξαρτημάτων (π.χ. βαλβίδων) δημιουργεί την κίνηση του ρευστού. Όπως φαίνεται στο αριστερό γράφημα του σχήματος 1.3, η θετική μετατόπιση της μεμβράνης και το άνοιγμα της κάτω βαλβίδας -στην πλευρά αναρρόφησης- έχει ως αποτέλεσμα την εισαγωγή ποσότητας ρευστού, ικανής να εξισορροπήσει τη μεταβολή του όγκου που προκλήθηκε από την κίνηση του διαφράγματος. Κατά τη διαδικασία αυτή, η άνω βαλβίδα παραμένει κλειστή. Στο δεξί γράφημα του σχήματος 1.3, το έμβολο κινεί τη μεμβράνη προς την αντίθετη κατεύθυνση μειώνοντας με αυτό τον τρόπο το διαθέσιμο όγκο της αντλίας. Η κάτω βαλβίδα είναι πλέον κλειστή, ενώ η βαλβίδα στην πλευρά εκκένωσης είναι ανοιχτή. Ως αποτέλεσμα, ποσότητα ρευστού, τέτοια ώστε να εξισορροπηθεί η μεταβολή του όγκου της αντλίας, εξέρχεται από αυτή. Παρατηρείται ότι η κίνηση του ρευστού, στην περίπτωση που περιγράφηκε, δεν είναι συνεχής αλλά διακοπτόμενη και ορίζεται διακριτά από δυο ξεχωριστές φάσεις, τη φάση αναρρόφησης -κατά την οποία ρευστό εισέρχεται στην αντλία- και τη φάση εκκένωσης -κατά την οποία ρευστό εξέρχεται από την αντλία.

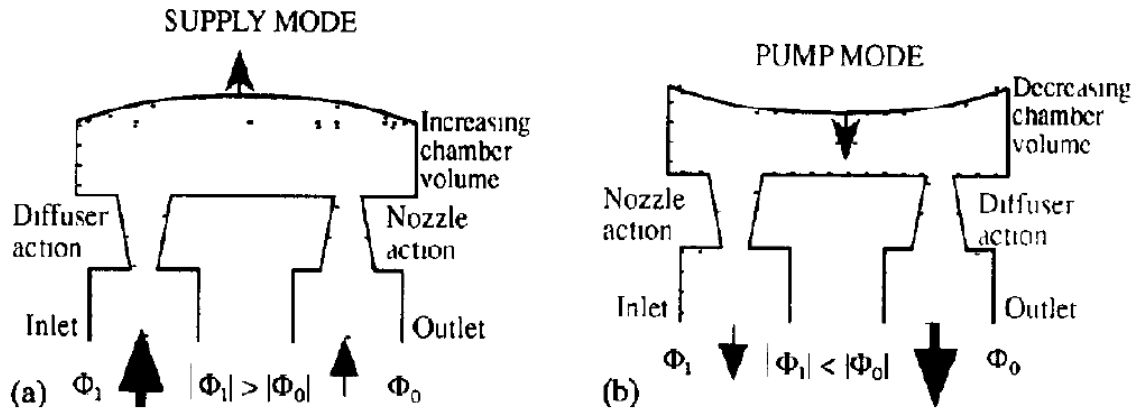
Οι διαφραγματικές αντλίες στις οποίες χρησιμοποιούνται κινούμενα μέρη, όπως βαλβίδες, παρουσιάζουν υψηλή πτώση ολικής πίεσης, ενώ ταυτόχρονα τίθεται το ζήτημα της μηχανικής κόπωσης και φθοράς των εξαρτημάτων αυτών, επιπρόσθετο της φθοράς





**Σχήμα 1.3:** Αρχή λειτουργίας διαφραγματικής αντλίας με κινούμενα μέρη. Η κίνηση του διαφράγματος αυξάνει ή μειώνει το διαθέσιμο όγκο. Η μεταβολή του όγκου εξισορροπείται από ρευστό το οποίο εισέρχεται ή εξέρχεται από το σύστημα λόγω του ανοίγματος ή κλεισίματος των βαλβίδων ελέγχου, [6].

του κυρίου μέρους της αντλίας, [7]. Τα ανωτέρω ζητήματα οδήγησαν στην ανάπτυξη διαφραγματικών μικρο-αντλιών χωρίς βαλβίδες και άλλα τεχνητά μέρη (valveless micro pumps). Οι αντλίες αυτές χρησιμοποιούνται κυρίως στην ψύξη ηλεκτρονικών μικρο-συσκευών και στην έγχυση φαρμάκων (ένεση ινσουλίνης, χημειοθεραπεία). Στις αντλίες αυτές οι βαλβίδες αντικαθίστανται από ένα σύστημα διαχύτη / ακροφυσίου, ενώ η κίνηση της μεμβράνης επιτυγχάνεται με την επιβολή διαφοράς δυναμικού. Η αρχή λειτουργίας της αντλίας παρουσιάζεται στο σχήμα 1.4, [7]. Κατά τη φάση της αναρρόφησης, σχήμα 1.4.a, φάση κατά την οποία η μεμβράνη έχει ανοδική πορεία και ο διαθέσιμος όγκος της αντλίας αυξάνει, ρευστό εισέρχεται σε αυτή. Μεγαλύτερη ποσότητα ρευστού εισέρχεται από την είσοδο όπου το σύστημα διαχύτη/ακροφυσίου λειτουργεί ως διαχύτης και μικρότερη ποσότητα εισέρχεται από την έξοδο όπου το σύστημα διαχύτη/ακροφυσίου λειτουργεί ως ακροφύσιο. Κατά τη φάση της εκκένωσης, σχήμα 1.4.b, φάση κατά την οποία η μεμβράνη έχει καθοδική πορεία και ο διαθέσιμος όγκος της αντλίας μειώνεται, η λειτουργία της αντλίας αντιστρέφεται. Στην περίπτωση αυτή, η ποσότητα ρευστού που εξέρχεται από την έξοδο, δράση διαχύτη, είναι μεγαλύτερη από την ποσότητα ρευστού που εξέρχεται από την είσοδο, δράση ακροφυσίου. Η κύρια κατεύθυνση της ροής, από την είσοδο στην έξοδο, είναι τέτοια καθώς το σύστημα διαχύτη/ακροφυσίου είναι έτσι σχεδιασμένο ώστε οι απώλειες ολικής πίεσης κατά μήκος του διαχύτη είναι μικρότερες από τις απώλειες κατά μήκος του ακροφυσίου.



**Σχήμα 1.4:** Αρχή λειτουργίας διαφραγματικής αντλίας χωρίς βαλβίδες και τεχνητά μέρη. Η κίνηση του διαφράγματος προκαλεί μεταβολή του διαθέσιμου όγκου. Το σύστημα διαχύτη/ακροφυσίου καθοδηγεί το ρευστό κατά την πλήρωση και την εκκένωση της διάταξης, [7].

Μια αρχική ενασχόληση με τις αντλίες αυτές πραγματοποιήθηκε το 1993, [7], όπου κατασκευάστηκαν και ελέγχθηκαν πειραματικά δύο μικρο-αντλίες χωρίς βαλβίδες αλλά με σύστημα διαχύτη/ακροφυσίου. Το πρώτο μοντέλο αποτελείτο από διαχύτες μικρής και μεγάλης διαμέτρου  $d = 0.23mm$  και  $D = 0.6mm$  αντίστοιχα, συνολικής γωνίας ανοίγματος  $\theta = 5.3^\circ$  και μήκους  $L = 4mm$ . Το δεύτερο μοντέλο περιελάμβανε διαχύτες μικρής και μεγάλης διαμέτρου  $d = 0.53mm$  και  $D = 1.1mm$  αντίστοιχα, συνολικής γωνίας ανοίγματος  $\theta = 10.7^\circ$  και συνολικού μήκους  $L = 3mm$ . Η κίνηση του διαφράγματος πραγματοποιήθηκε με επιβολή δυναμικού. Αν και οι αντλίες κατασκευάστηκαν για διακίνηση νερού, δοκιμάστηκαν και για διακίνηση αέρα με εξίσου ικανοποιητικά αποτελέσματα. Τονίστηκε ότι η αντλία αυτή, πέραν της απλότητας κατασκευής της και του μειωμένου κόστους λόγω απουσίας μηχανικών μερών, μπορεί να λειτουργήσει τόσο με υγρό όσο και με αέριο μέσο, αλλά και με υγρό μέσο το οποίο περιέχει στερεά σώματα. Αξίζει να σημειωθεί ότι αν ένα υγρό μέσο που περιέχει στερεά σώματα διακινηθεί μέσω αντλίας που έχει βαλβίδες, τότε υπάρχει ο κίνδυνος φθοράς των βαλβίδων από τα στερεά σώματα.

Το 1996, [8], δόθηκε έμφαση στη μελέτη της επίδρασης της μορφής του διαχύτη στην κατεύθυνση της ροής. Εξετάστηκαν διαχύτες μήκους  $L = 1.45 - 3.95mm$  κωνικής διατομής  $A = 30\mu m \times 100\mu m$ . Οι διαχύτες αυτοί κατασκευάστηκαν, δοκιμάστηκαν και τα αποτελέσματα που προέκυψαν συγκρίθηκαν με τα αναλυτικά. Τα αναλυτικά αποτελέσματα βασίστηκαν σε μαθηματικές σχέσεις που εκφράζουν τις απώλειες πίεσης που αναπτύσσονται κατά μήκος ενός διαχύτη συναρτήσει του λόγου των διατομών του και του συντελεστή απωλειών πίεσης. Ορίστηκε ο βαθμός απόδοσης του συστήματος διαχύτη/ακροφυσίου ως ο λόγος των απωλειών πίεσης όταν η ροή έχει την αντίστροφη κατεύθυνση (λειτουργεί ως ακροφύσιο) προς τις απώλειες πίεσης όταν η ροή έχει την ορθή κατεύθυνση (λειτουργεί ως διαχύτης). Εξετάστηκαν 5 διαχύτες τόσο στην ορθή όσο και στην αντίθετη κατεύθυνση της ροής. Τόσο τα πειραματικά όσο και τα αναλυτι-

κά αποτελέσματα οδήγησαν σε βαθμό απόδοσης του συστήματος διαχύτη/ακροφυσίου μεγαλύτερο της μονάδας, γεγονός που απέδειξε πως οι απώλειες πίεσης είναι λιγότερες όταν το σύστημα λειτουργεί ως διαχύτης. Ταυτόχρονα, διαπιστώθηκε ότι το μήκος του διαχύτη δεν επιδρά στο βαθμό απόδοσής του, ενώ αύξηση της γωνίας ανοίγματος οδηγεί σε αύξηση του βαθμού απόδοσης.

Το 2011, [9], το μοντέλο SIMULINK χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση μιας μικρο-αντλίας χωρίς βαλβίδες. Η κίνηση του κυκλικού διαφράγματος της αντλίας θεωρήθηκε ότι προκαλείται από επιβολή δυναμικού. Η αντλία αυτή βελτιστοποιήθηκε με μεταβλητές σχεδιασμού το επιβαλλόμενο δυναμικό, τη διάμετρο και το πάχος του διαφράγματος. Μελετήθηκαν τρεις περιπτώσεις ανάλογα με το υλικό κατασκευής του διαφράγματος, αλουμίνιο, χαλκός και πυρίτιο. Το μέτρο ελαστικότητας του αλουμινίου είναι το ελάχιστο μεταξύ των τριών υλικών και συνεπώς υπέστη τη μέγιστη μετατόπιση για συγκεκριμένο δυναμικό. Ταυτόχρονα, η αύξηση του επιβαλλόμενου δυναμικού οδήγησε σε αυξανόμενη ροή. Στην πράξη, συνεχής αύξηση του δυναμικού δεν είναι επιτρεπτή καθώς μπορεί να αλλοιώσει τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού και για το λόγο αυτό προτάθηκε το αλουμίνιο ως το βέλτιστο υλικό. Διαπιστώθηκε πως η αύξηση του πάχους της μεμβράνης μείωσε τη μεταβολή του όγκου του διαφράγματος και για τα τρία υλικά ενώ μικρή αύξηση της διαμέτρου αυτού οδήγησε σε δραματική αύξηση της διακινούμενης παροχής.

### 1.3 Στόχος και Δομή της Εργασίας

Στόχος της διπλωματικής εργασίας αποτελεί η μελέτη και η βελτιστοποίηση διαφραγματικής αντλίας χωρίς βαλβίδες και τεχνητά μέρη αλλά με σύστημα διαχύτη/ακροφυσίου.

Η δομή της διπλωματικής εργασίας είναι η ακόλουθη:

- **Κεφάλαιο 2:** Παρουσιάζεται ο τρόπος γένεσης και παραμόρφωσης πλέγματος, ενώ παράλληλα αναφέρονται αλλαγές που πραγματοποιήθηκαν σε υπάρχον λογισμικό παραμόρφωσης πλέγματος για την επιτάχυνσή του. Η γένεση πλέγματος πραγματοποιείται με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου, μέθοδος οριόδετων, μη-δομημένων πλεγμάτων, ενώ η παραμόρφωση βασίζεται στη θεωρία του ελαστικού μέσου. Παρουσιάζονται οι εξισώσεις ασυμπίεστης και χρονικά μη-μόνιμης ροής προσταθεροποιημένες με τη μέθοδο της τεχνητής συμπίεστότητας. Το ροϊκό πεδίο που έχει προκύψει για τη χρονικά μόνιμη ροή συγκρίνεται με αντίστοιχο, έτερου οικείου επιλύτη, ο οποίος εφαρμόζει μη-οριόδετα πλέγματα και αναπτύσσει τη μέθοδο των τεμνόμενων κυψελών, Cut-Cell για τη γένεση του πλέγματος. Στόχος της σύγκρισης αποτελεί η αύξηση της αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων και ο έλεγχος των λογισμικών επίλυσης.

- **Κεφάλαιο 3:** Ελέγχεται και επαληθεύεται η θέση της διεθνούς βιβλιογραφίας για το πλέον κατάλληλο σχήμα του συστήματος αγωγών που μπορεί να αντικαταστήσει τις βαλβίδες μιας διαφραγματικής αντλίας. Προτείνεται και αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο πραγματοποιείται η κίνηση του διαφράγματος και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επίλυσης της ροής για το χρονικά μη-μόνιμο πρόβλημα.
- **Κεφάλαιο 4:** Πραγματοποιείται δικριτηριακή βελτιστοποίηση της διαφραγματικής αντλίας με χρήση εξελικτικών αλγορίθμων και πιο συγκεκριμένα με το λογισμικό E.A.SY. Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα αυτής.
- **Κεφάλαιο 5:** Αναπτύσσονται οι εξισώσεις της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για το περιοδικό, χρονικά μη-μόνιμο πρόβλημα. Παρουσιάζονται οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις, οι οριακές συνθήκες καθώς και οι παράγωγοι ευαισθησίας του συζυγούς προβλήματος.
- **Κεφάλαιο 6:** Ανακεφαλαίωση / Συμπεράσματα

## Κεφάλαιο 2

# Γένεση Πλέγματος και Εξισώσεις Ροής

Στο κεφάλαιο αυτό αναφέρεται ο τρόπος γένεσης οριόδετου, μη-δομημένου πλέγματος καθώς και η μέθοδος παραμόρφωσης αυτού. Παρουσιάζονται αλλαγές που πραγματοποιήθηκαν σε οικείο λογισμικό παραμόρφωσης πλέγματος με σκοπό την επιτάχυνσή του. Παρουσιάζονται οι προσταθεροποιημένες με τη μέθοδο της τεχνητής συμπίεστος εξισώσεις ροής που διέπουν το πρόβλημα και γίνεται διερεύνηση όρων με σημαντική επίδραση στον επιλύτη ροής. Συγκρίνονται τα πεδία ροής που προκύπτουν από δύο διαφορετικούς ροϊκούς επιλύτες.

### 2.1 Γένεση και Παραμόρφωση Πλέγματος

#### 2.1.1 Γένεση Πλέγματος

Η γένεση πλέγματος (grid generation) αποτελεί το πρώτο στάδιο προκειμένου να επιλυθεί το πρόβλημα ροής. Χρησιμοποιείται διδιάστατο, μη-δομημένο πλέγμα, αποτελούμενο από τριγωνικά στοιχεία, το οποίο δημιουργείται με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου (Advancing Front Method, AFM), [10]. Η τεχνική αυτή, εκκινεί από ένα διακριτοποιημένο περίγραμμα μιας γεωμετρίας, και με κατάλληλες τεχνικές τοποθέτησης και σύνδεσης των κόμβων του πλέγματος, καταλήγει στη δημιουργία ενός μη-δομημένου πλέγματος. Μέσω της AFM, δίνεται η δυνατότητα τοπικής πυκνώσης του πλέγματος,

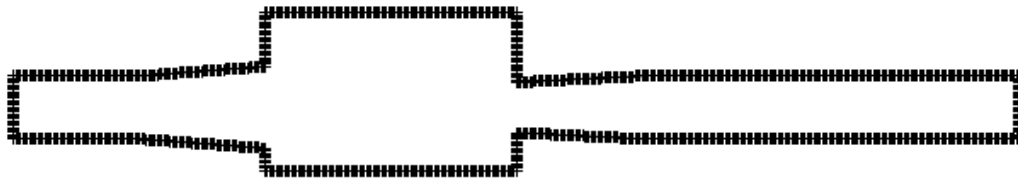
ανάλογα με την επιθυμητή ακρίβεια.

Το προελαύνον μέτωπο αποτελείται από σύνολο ακμών οι οποίες δεν τέμνονται, αλλά -δύο διαδοχικές από αυτές- έχουν ως κοινό σημείο την ενδιάμεση κορυφή τους. Οι ακμές αυτές περιβάλλουν το χωρίο στο οποίο θα κατασκευαστεί το πλέγμα ενώ η προσθήκη ενός τριγωνικού στοιχείου στο υπάρχον πλέγμα συνεπάγεται τη μετατόπισή του. Πιο συγκεκριμένα, ένα τριγωνικό στοιχείο που προστίθεται στο πλέγμα, είναι πάντα σε επαφή με το μέτωπο. Καθώς το μέτωπο περιλαμβάνει μόνο το χωρίο στο οποίο πρόκειται να δημιουργηθεί πλέγμα, η προσθήκη ενός τριγώνου επεκτείνει το μέτωπο, έτσι ώστε να περιβάλλει μόνο το εναπομείναν τμήμα του χωρίου στο οποίο δεν έχει γίνει η πλεγματοποίηση.

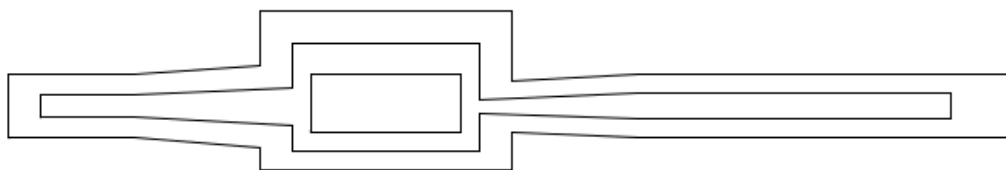
Η τεχνική του προελαύνοντος μετώπου χρησιμοποιήθηκε για τη γένεση του πλέγματος. Η γεωμετρία της προς πλεγματοποίηση διάταξης παρουσιάζεται στο σχήμα 2.1. Η είσοδος της ροής πραγματοποιείται από την αριστερή πλευρά της διάταξης, η έξοδος από τη δεξιά, ενώ το άνω τμήμα του ορθογώνιου χωρίου είναι ελαστική μεμβράνη με δυνατότητα κίνησης. Το περίγραμμα της διάταξης διακριτοποιείται με πλήθος σημείων ανάλογα με την επιθυμητή ακρίβεια, σχήμα 2.2, ενώ παράλληλα δημιουργούνται δυο πρόσθετες ενδιάμεσες γραμμές, σχήμα 2.3, όμοιες με την αρχική οι οποίες καθορίζουν τη βαθμιαία αραίωση του πλέγματος από το εξωτερικό προς το εσωτερικό του χωρίου, σχήμα 2.4. Εκκινώντας από τη διακριτοποίηση αυτή, το πλέγμα που δημιουργείται, με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου, παρουσιάζεται στο σχήμα 2.5, με εμφανή την πύκνωσή του κοντά στο στερεό τοίχωμα και την αραίωσή του μακριά από αυτό.



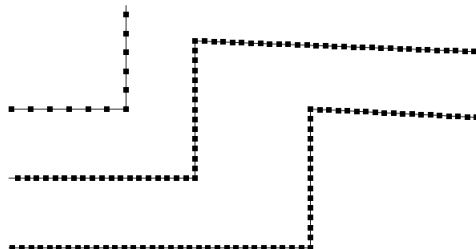
**Σχήμα 2.1:** Περίγραμμα γεωμετρίας της διαφραγματικής αντλίας. Στα αριστερά είναι η είσοδος της διάταξης και στα δεξιά η έξοδος της. Το άνω τμήμα του ορθογώνιου χωρίου είναι ελαστική μεμβράνη.



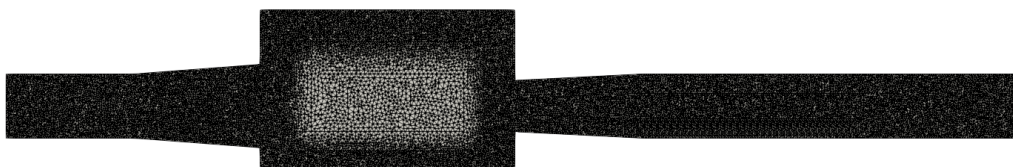
**Σχήμα 2.2:** Διακριτοποίηση περιγράμματος γεωμετρίας της διαφραγματικής αντλίας για πλεγματοποίηση με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου.



**Σχήμα 2.3:** Εξωτερική και δύο ενδιάμεσες γραμμές για τον καθορισμό της πύκνωσης του πλέγματος, σύμφωνα με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου.



**Σχήμα 2.4:** Εστίαση στη διακριτοποίηση της εξωτερικής γεωμετρίας και των ενδιάμεσων γραμμών, με σκοπό τη βαθμιαία αραίωση του πλέγματος.



**Σχήμα 2.5:** Μη-δομημένο πλέγμα αποτελούμενο από περίπου 15000 τριγωνικά στοιχεία, όπως προέκυψε με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου.

## 2.1.2 Παραμόρφωση Πλέγματος

Το περίγραμμα της γεωμετρίας που περιγράφεται μεταβάλλεται χρονικά, επομένως είναι απαραίτητη η δημιουργία πλεγμάτων για κάθε χρονική στιγμή. Τα νέα πλέγματα κάθε χρονικής στιγμής δεν προκύπτουν με εκ νέου γένεση πλέγματος / επαναπλεγματοποίηση (remeshing), αλλά με παραμόρφωση ήδη υπάρχοντος. Η εκ νέου γένεση πλέγματος για όλες τις χρονικές στιγμές μιας χρονικά μη-μόνιμη ροής ή / και για όλους του κύκλους μιας διαδικασίας βελτιστοποίησης συνοδεύεται από υψηλό υπολογιστικό κόστος ενώ παράλληλα μεταβάλλεται ο συνολικός αριθμός των κόμβων και η συνδεσμολογία / τοπολογία αυτών. Οι λόγοι αυτοί καθιστούν αναγκαία την παραμόρφωση του πλέγματος.

Οι μέθοδοι παραμόρφωσης πλέγματος χωρίζονται σε μεθόδους βασισμένες σε ΜΔΕ (Partial Differential Methods - PDE) [11], [12], μεθόδους φυσικών αναλόγων (physical analogy techniques) και σε αλγεβρικές μεθόδους (algebraic methods) [13] αλλά και σε συνδυασμούς τους. Οι μέθοδοι των ΜΔΕ εφαρμόζονται εύκολα, έχοντας όμως μικρή ευελιξία. Για το λόγο αυτό επιλέγονται συνήθως για μικρές παραμορφώσεις. Η μέθοδος των φυσικών αναλόγων παρέχει τη δυνατότητα προσαρμογής σε σημαντικές παραμορφώσεις, έχοντας όμως -συγκριτικά- υψηλότερο κόστος, ενώ οι αλγεβρικές μέθοδοι εκτελούν με μικρό υπολογιστικό κόστος την προσαρμογή του πλέγματος σε απλές περιπτώσεις. Καθώς οι γεωμετρίες στις οποίες καλείται να προσαρμοσθεί το αρχικό πλέγμα δεν είναι εκ των προτέρων γνωστές και είναι πιθανό οι παραμορφώσεις που θα προκύψουν να είναι σημαντικές, επιλέγεται η παραμόρφωση να γίνει με μεθόδους φυσικών αναλόγων.

Στις μεθόδους φυσικών αναλόγων ανήκουν η μέθοδος των ελατηρίων και η ελαστική μέθοδος. Στη μέθοδο των ελατηρίων [14], το πλέγμα θεωρείται σύστημα γραμμικών ελατηρίων, τα οποία συνδέουν τους κόμβους του πλέγματος. Μετακινώντας τους κόμβους της εξωτερικής γεωμετρίας, οι εσωτερικοί κόμβοι μετατοπίζονται κατάλληλα ώστε να εξασφαλίζεται η ισορροπία των δυνάμεων και των ροπών που ασκούνται σε αυτούς από τα ελατήρια.

Στη μέθοδο του ελαστικού μέσου, [15] το υπάρχον πλέγμα θεωρείται ελαστικό μέσο, ενώ η εξίσωση του ελαστικού μέσου μεταφράζεται σε ισορροπία των τάσεων που αναπτύσσονται σε αυτό. Σε ένα πλέγμα το οποίο έχει προκύψει από μία διαδικασία πλεγματοποίησης (λ.χ. AFM), ικανοποιείται η εξίσωση του ελαστικού μέσου. Όταν το πλέγμα αυτό κληθεί να προσαρμοσθεί σε μια νέα γεωμετρία, η οποία αντιστοιχεί σε μια νέα χρονική στιγμή, τότε, για να εξασφαλιστεί η ισορροπία των τάσεων σε κάθε στοιχειώδη όγκο του υπολογιστικού χωρίου, πρέπει οι συντεταγμένες των κόμβων του πλέγματος να μετατοπιστούν κατάλληλα. Η κατάλληλη αυτή μετατόπιση οδηγεί στην ικανοποίηση της εξίσωσης του ελαστικού μέσου και στην παραμορφωμένη γεωμετρία. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε για την παραμόρφωση του πλέγματος στην εργασία αυτή.



Η εξίσωση του ελαστικού μέσου είναι (2.1)

$$\frac{\partial \tau_{km}}{\partial x_m} = 0 \quad (2.1)$$

Οι τάσεις  $\tau_{km}$  που αναπτύσσονται περιγράφονται από την εξίσωση (2.2)

$$\tau_{km} = \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right) + \lambda \delta_k^m \frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell} \quad (2.2)$$

όπου  $\mu, \lambda$  ποσότητες που εξαρτώνται από το μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο του Young  $E$  και το λόγο Poisson  $\nu$ , χαρακτηριστικά δηλαδή του ελαστικού μέσου. Πιο συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1+2\nu)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Το μέτρο του  $E$  ορίζεται για κάθε στοιχειώδη όγκο του υπολογιστικού χωρίου  $i$ , και εξαρτάται από το εμβαδόν  $\Omega^i$  αυτού σύμφωνα με τη σχέση

$$E^i = \frac{1}{\Omega^i} \quad (2.4)$$

Ο λόγος Poisson  $\nu$  -στη φύση- λαμβάνει τιμές μεταξύ 0-0.5. Για λόγους ευστάθειας σε ισχυρές παραμορφώσεις ο λόγος Poisson μπορεί να λαμβάνει τιμές ανώτερες της μονάδας, [16] και πιο συγκεκριμένα τίθεται  $\nu = 100$ .

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (2.1) στο υπολογιστικό χωρίο  $\Omega$  προκύπτει

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \tau_{km}}{\partial x_m} d\Omega = 0 \Rightarrow \int_{\partial\Omega} \tau_{km} n_m dS = 0 \quad (2.5)$$

Διακριτοποιώντας την εξίσωση (2.5) προκύπτει

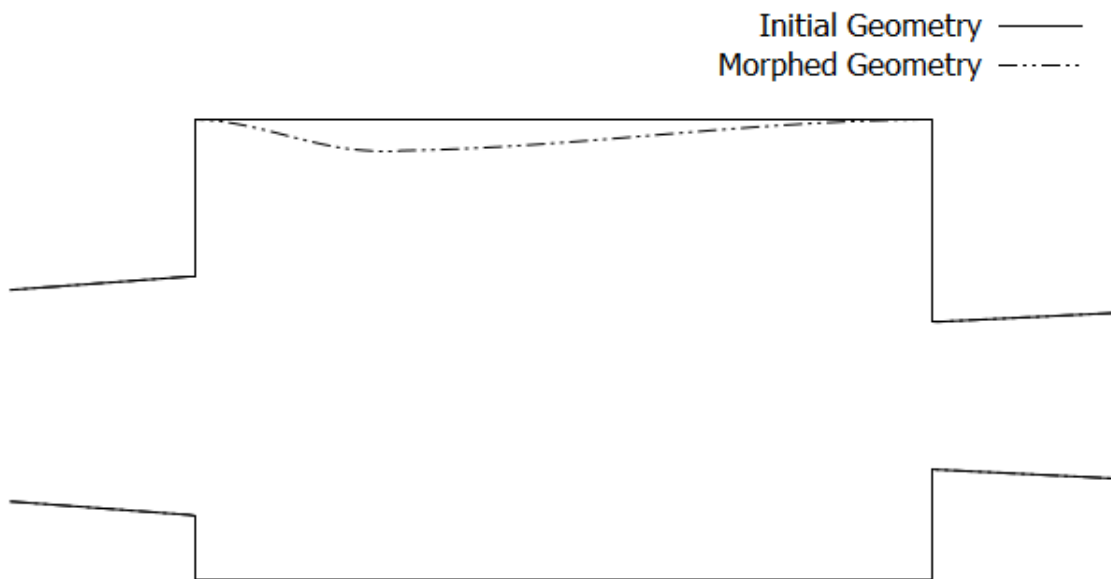
$$R_k = \sum \tau_{km} n_m = 0 \quad (2.6)$$

και γραμμικοποιώντας την εξίσωση (2.6), η προς επίλυση εξίσωση γίνεται

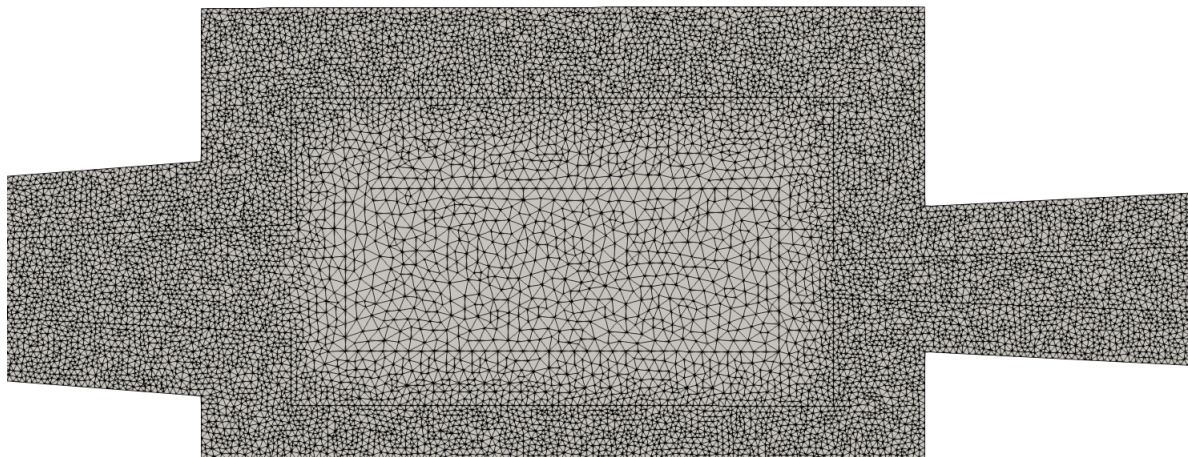
$$\frac{\partial R_k}{\partial u_m} \Delta u_m = -R_k \quad (2.7)$$

Το αριστερό μέλος  $\frac{\partial R_k}{\partial u_m}$  της εξίσωσης (2.7) εξαρτάται αποκλειστικά από το προς παραμόρφωση πλέγμα και όχι από τη νέα γεωμετρία.

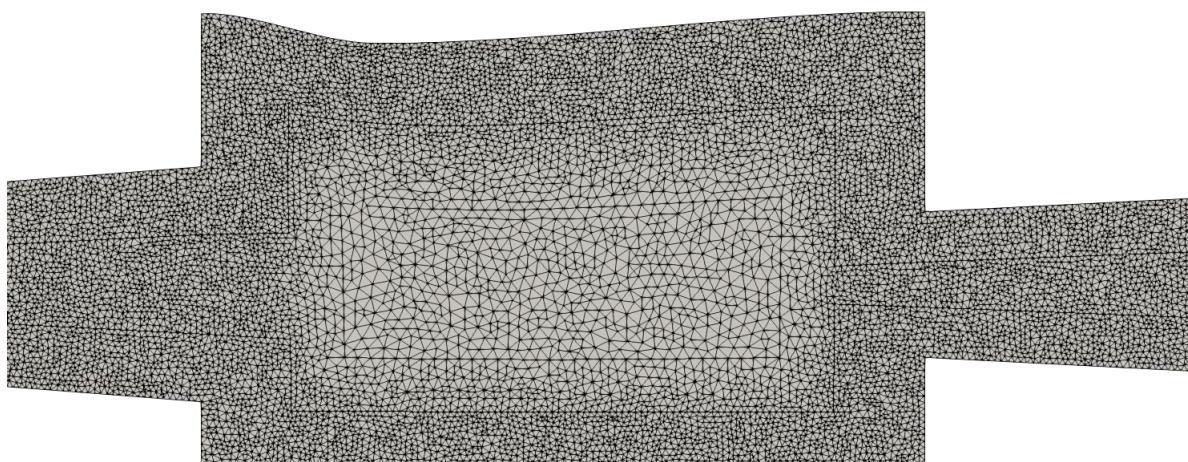
Στο σχήμα 2.6 η αρχική γεωμετρία -συνεχής γραμμή- προσαρμόζεται στη νέα γεωμετρία -διακεκομμένη γραμμή. Το αρχικό και το παραμορφωμένο πλέγμα παρουσιάζονται στα σχήματα 2.7 και 2.8 αντίστοιχα. Στα σχήματα 2.9 και 2.10 δίνεται έμφαση στο αρχικό και παραμορφωμένο πλέγμα για την περιοχή όπου πραγματοποιείται η μέγιστη παραμόρφωση, τονίζοντας την ιδιαίτερα σημαντική μετακίνηση των κόμβων στην περιοχή αυτή.



**Σχήμα 2.6:** Αρχική και παραμορφωμένη γεωμετρία, συνεχής και διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα.

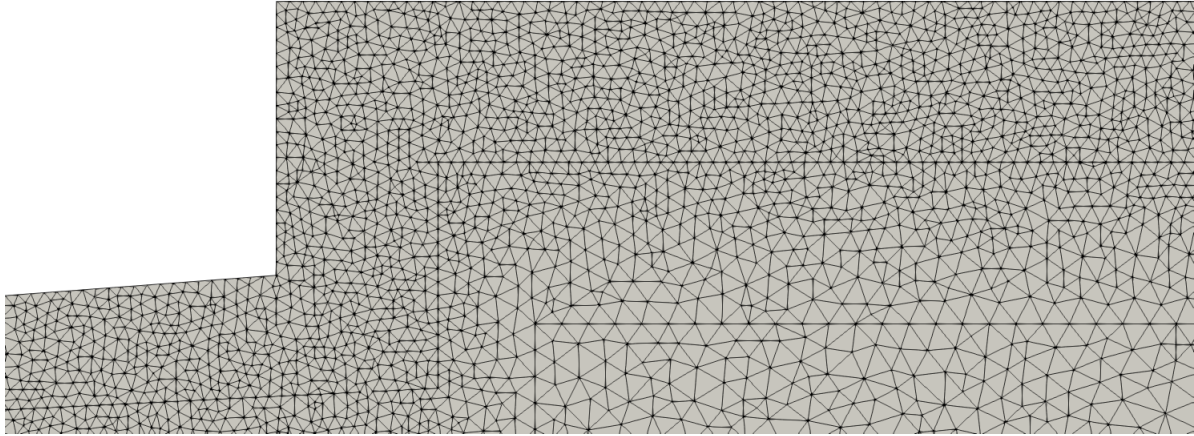


**Σχήμα 2.7:** Πλέγμα γεωμετρίας προς παραμόρφωση.

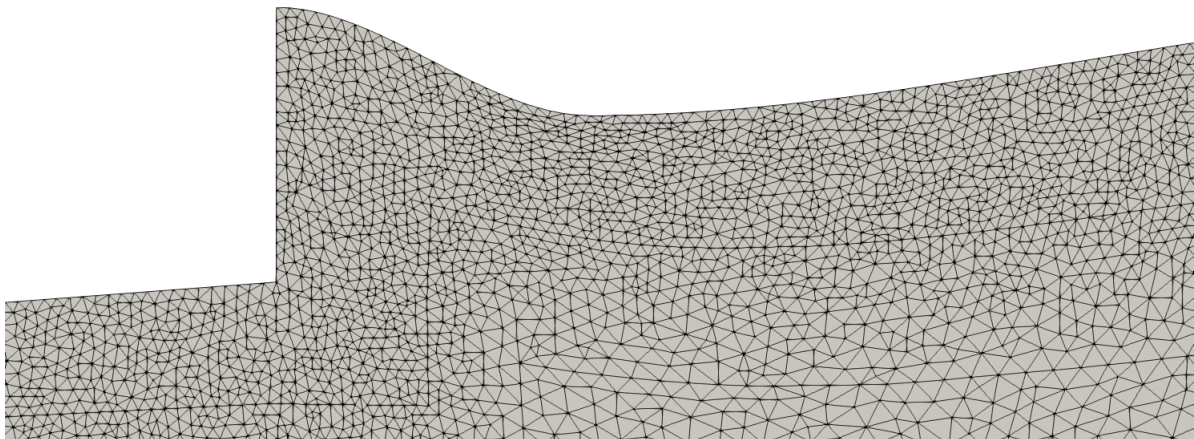


**Σχήμα 2.8:** Πλέγμα ενδιάμεσης γεωμετρίας παραμορφωμένο με τη μέθοδο του ελαστικού μέσου. Οι κόμβοι που μετακινούνται σημαντικά είναι αυτοί που βρίσκονται πιο κοντά στο κινούμενο όριο.

Στη ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ έχει αναπτυχθεί λογισμικό το οποίο παραμορφώνει ένα αρχικό πλέγμα όταν τα όρια του υπολογιστικού χωρίου μεταβάλλονται, βασιζόμενο στη μέθοδο του ελαστικού μέσου. Το λογισμικό αυτό εκτελείται σειριακά σε μονάδα κεντρικής επεξεργασίας CPU. Όπως αναφέρθηκε, στην εξίσωση του ελαστικού μέσου



**Σχήμα 2.9:** Πλέγμα γεωμετρίας προς παραμόρφωση, έμφαση στην περιοχή που θα συντελεστεί η μέγιστη παραμόρφωση.



**Σχήμα 2.10:** Παραμορφωμένο πλέγμα, έμφαση στην περιοχή μέγιστης παραμόρφωσης.

υπάρχουν όροι ( $\frac{\partial R_k}{\partial u_m}$ ) που εξαρτώνται μόνο από το προς παραμόρφωση πλέγμα. Οι όροι αυτοί υπολογίζονται εκ νέου για κάθε χρονική στιγμή ανάλογα με το αρχικό / προς παραμόρφωση πλέγμα που καλείται να μορφοποιηθεί. Σε μια χρονικά μεταβαλλόμενη γεωμετρία το πλέγμα για την χρονική στιγμή  $t = i$  μπορεί να προκύψει είτε παραμορφώνοντας το πλέγμα της προηγούμενης χρονικής στιγμής  $t = i - 1$ , είτε παρα-

μορφώνοντας το πλέγμα της πρώτης χρονικής στιγμής  $t = 0$ . Στην πρώτη περίπτωση, οι όροι που εξαρτώνται από το προς παραμόρφωση πλέγμα υπολογίζονται για κάθε χρονική στιγμή, όμως καθώς η μεταβολή της γεωμετρίας είναι μικρή, η προσαρμογή του πλέγματος πραγματοποιείται γρήγορα. Αντίθετα, στη δεύτερη περίπτωση, ο υπολογισμός των όρων που αφορούν το προς παραμόρφωση πλέγμα αρκεί να υπολογιστεί μόνο μία φορά, με το μειονέκτημα η παραμόρφωση στη νέα γεωμετρία να είναι περισσότερο χρονοβόρα. Στην εργασία αυτή επιλέγεται η δεύτερη μέθοδος στην οποία το προς παραμόρφωση πλέγμα είναι το ίδιο για κάθε χρονική στιγμή της κίνησης.

Επιπρόσθετα, το κινούμενο μέρος της εξεταζόμενης διάταξης είναι το διάφραγμα, δηλαδή το άνω τμήμα του ορθογώνιου χωρίου. Το υπόλοιπο εξωτερικό περίγραμμα παραμένει αμετάβλητο. Η παραμόρφωση, επομένως του πλέγματος προκαλείται από την κίνηση του διαφράγματος και για το λόγο αυτό αναμένεται οι κόμβοι που θα μετακινηθούν σημαντικά να βρίσκονται στην περιοχή κοντά στο κινούμενο διάφραγμα. Πράγματι, όπως φαίνεται και στα σχήματα 2.7-2.10 οι κόμβοι που έχουν μετακινηθεί σημαντικά είναι εκείνοι που βρίσκονται κοντά στη μεταβαλλόμενη εξωτερική γεωμετρία. Για τους υπόλοιπους κόμβους, η μετακίνηση είναι -συγκριτικά με τους προαναφερθέντες κόμβους- ελάχιστη. Για το λόγο αυτό επιλέγεται να μην παραμορφωθεί όλο το πλέγμα, δηλαδή να μην επιλυθούν οι εξισώσεις του ελαστικού μέσου σε κάθε στοιχειώδη όγκο του πλέγματος, αλλά μόνο στο τμήμα που βρίσκεται κάτω από το κινούμενο διάφραγμα.

Ο χρόνος που απαιτείται για να υπολογισθούν οι σταθεροί όροι της εξίσωσης του ελαστικού μέσου ανά χιλιάδα κόμβων είναι  $27.9ms/1000\ nodes$  σε ένα επεξεργαστή καρτών γραφικών της NVidia GTX580. Ο χρόνος αυτός εξοικονομείται για κάθε χρονική στιγμή παραμόρφωσης πλέγματος πλην της αρχικής. Στο παρόν προς παραμόρφωση πλέγμα των -περίπου- συνολικά 15000 κόμβων, ο χρόνος αυτός αντιστοιχεί σε 0.4180s. Ο χρόνος ανά χιλιάδα κόμβων που απαιτείται για την εκτέλεση μιας επανάληψης παραμόρφωσης του πλέγματος, όταν οι εξισώσεις επιλύονται σε όλο το χωρίο, είναι  $20.1ms/1000\ nodes$ . Οι κόμβοι που βρίσκονται κάτω από το κινούμενο διάφραγμα και επιλέγονται προς παραμόρφωση αποτελούν το 40.88% του υπολογιστικού χωρίου, επομένως ο απαιτούμενος χρόνος ανά επανάληψη είναι 59.12% χαμηλότερος. Στο πλέγμα που εξετάζεται, η εκτέλεση μιας επανάληψης παραμόρφωσης σε όλο το χωρίο των 15000 κόμβων αντιστοιχεί σε 0.3020s, ενώ η ίδια επανάληψη για τους κόμβους που βρίσκονται κάτω από το κινούμενο διάφραγμα αντιστοιχεί σε 0.1785s. Το όφελος της αλλαγής αυτής στο λογισμικό παραμόρφωσης γίνεται περισσότερο κατανοητό αν ο χρόνος που εξοικονομείται ανά επανάληψη υπολογισθεί για το σύνολο των επαναλήψεων που απαιτείται να γίνουν για κάθε χρονική στιγμή κάθε υποψήφιας λύση ενός ΕΑ.

## 2.2 Εξισώσεις Ροής

Η ροή που μελετάται διέπεται από τις εξισώσεις Navier Stokes, οι οποίες για χρονικά μη-μόνιμα προβλήματα ροής ασυμπίεστου ρευστού παρουσιάζονται στην ταυστική τους μορφή ως εξής:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial (u_m u_k)}{\partial x_m} + \frac{\partial p}{\partial x_k} - \frac{\partial \tau_{km}}{\partial x_m} = 0 \quad (2.8)$$

Στην εξίσωση (2.2), ο όρος  $u_m$  ( $m = 1, 2$ ) είναι ο όρος της ταχύτητας του ρευστού,  $p$  είναι η κινηματική πίεση του ρευστού (σε ασυμπίεστη ροή η πυκνότητα παραμένει σταθερή και η στατική πίεση αντικαθίσταται από την κινηματική πίεση  $\frac{p}{\rho}$ ) και  $\tau_{km}$  είναι οι τάσεις λόγω συνεκτικότητας.

Ορίζεται το διάνυσμα  $\vec{U}$  των ροϊκών μεγεθών

$$\vec{U} = [ p \quad u_1 \quad u_2 ]^T \quad (2.9)$$

Ορίζεται ακόμα η ποσότητα  $V$  ως

$$V = [ 0 \quad u_1 \quad u_2 ]^T \quad (2.10)$$

Ορίζεται επίσης το διάνυσμα της ροής  $f_{nk}$ , το οποίο αποτελείται από τον όρο των μη-συνεκτικών  $f_{nk}^{inv}$  και των συνεκτικών ροών  $f_{nk}^{vis}$

$$f_{nk}^{inv} = \begin{bmatrix} u_k \\ u_1 u_k + p \delta_k^1 \\ u_2 u_k + p \delta_k^2 \end{bmatrix}, \quad f_{nk}^{vis} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{1k} \\ \tau_{2k} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Ο ταυστής των τάσεων είναι:

$$\tau_{km} = \nu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right) \quad (2.12)$$

Έτσι η εξίσωση λαμβάνει την ακόλουθη μορφή

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} + \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_k} - \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial x_k} = 0 \quad (2.13)$$

### 2.2.1 Εισαγωγή του Όρου της Τεχνητής Συμπιεστότητας

Το σύνολο των εξισώσεων (2.2), που αναφέρονται σε ασυμπίεστη ροή, δεν αποτελεί πρόβλημα υπερβολικού τύπου. Αντίθετα, το σύνολο των εξισώσεων Navier Stokes για συμπίεστη ροή αποτελεί πρόβλημα υπερβολικού τύπου στο χωρο-χρόνο για την αριθμητική επίλυση του οποίου έχουν αναπτυχθεί αποδοτικές τεχνικές. Προκειμένου οι τεχνικές αυτές να μπορέσουν να εφαρμοσθούν και σε ασυμπίεστες ροές εισάγεται ένας όρος τεχνητής συμπιεστότητας (Chorin [17], Turkel [18]) στην εξίσωση της συνέχειας ο οποίος συνδέει την πίεση και την πυκνότητα

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{1}{\beta^2} \quad (2.14)$$

Ο όρος της τεχνητής συμπιεστότητας επιβάλλεται στον ψευδο-χρόνο  $\tau$  και η εξίσωση (2.2) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή στην οποία  $\tau$  είναι ο ψευδο-χρόνος και  $t$  ο πραγματικός χρόνος

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} + \Gamma_{nm}^{-1} \frac{\partial U_m}{\partial \tau} + \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_k} - \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial x_k} = 0$$

με  $\Gamma_{nm}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  (2.15)

## 2.2.2 Ιδιοδιανυσματική Ανάλυση

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (2.15) με το μητρώο  $\Gamma_{nm}$  προκύπτει

$$\Gamma_{nm} \frac{\partial V_n}{\partial t} + \frac{\partial U_m}{\partial \tau} + \Gamma_{nm} \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_k} - \Gamma_{nm} \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial x_k} = 0 \quad (2.16)$$

Ορίζεται η ροή (Flux)  $\Phi = f_{nm} n_m$  και το ιακωβιανό μητρώο  $A$  ως:

$$A = \frac{\partial \Phi_n}{\partial U_m} \quad (2.17)$$

Ορίζεται επίσης το προσταθεροποιημένο μητρώο (που περιλαμβάνει τον όρο της τεχνικής συμπίεσότητας)  $A_\Gamma = \Gamma_{nm} A_{nm}$ .

Το μητρώο  $A_\Gamma$  εκφράζεται ως

$$A_\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & \beta^2 n_1 & \beta^2 n_2 \\ n_1 & u_m n_m + u_1 n_1 & u_1 n_2 \\ n_2 & u_2 n_1 & u_m n_m + u_2 n_2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Οι ιδιοτιμές [19] του μητρώου, οι οποίες υπολογίζονται από τη σχέση  $|\lambda_k I - A_\Gamma| = 0$  είναι

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u_m n_m + c \\ \lambda_2 &= u_m n_m \\ \lambda_3 &= u_m n_m - c \end{aligned} \quad (2.19)$$

όπου  $c = \sqrt{(u_m n_m)^2 + \beta^2}$ . Έτσι ορίζεται το διαγώνιο μητρώο  $\Lambda$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Η εύρεση των ιδιοτιμών επιτρέπει τη διαγωνοποίηση του μητρώου  $A_\Gamma = P \Lambda P^{-1}$ . Τα μητρώα  $P, P^{-1}$  εκφράζονται συναρτήσει των ιδιοδιανυσμάτων  $l$  ως:



$$P = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} & 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} \\ l_{21} & \frac{n_2}{\beta^2 + (u_m n_m)^2} & l_{23} \\ l_{31} & \frac{n_1}{(u_m n_m)^2 - \beta^2} & l_{33} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_2 n_1 & \lambda_2 n_2 \\ u_2 n_1 - u_1 n_2 & \beta^2 n_2 + u_m n_m u_2 & -\beta^2 n_1 + u_m n_m u_1 \\ 1 & \lambda_3 n_1 & \lambda_3 n_2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

όπου

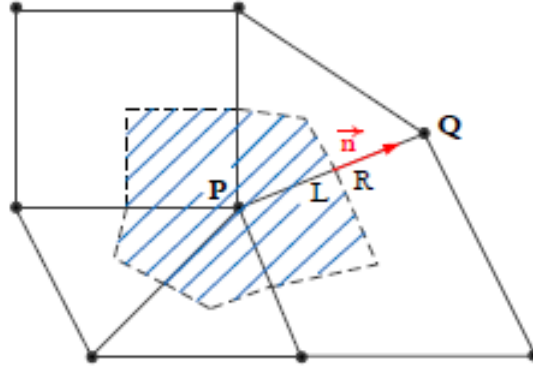
$$\begin{aligned} l_{21} &= \frac{(u_1 n_2 - u_2 n_1) \lambda_3 n_2 - u_m n_m u_1 - \beta^2 n_1}{(\lambda_3 - \lambda_2) (\beta^2 + (u_m n_m)^2)} \\ l_{23} &= \frac{(u_2 n_1 - u_1 n_2) \lambda_2 n_2 + u_m n_m u_1 + \beta^2 n_1}{(\lambda_3 - \lambda_2) (\beta^2 + (u_m n_m)^2)} \\ l_{31} &= \frac{(u_2 n_1 - u_1 n_2) \lambda_3 n_1 - u_m n_m u_2 - \beta^2 n_2}{(\lambda_3 - \lambda_2) (\beta^2 + (u_m n_m)^2)} \\ l_{33} &= \frac{(u_1 n_2 - u_2 n_1) \lambda_2 n_1 + u_m n_m u_2 + \beta^2 n_2}{(\lambda_3 - \lambda_2) (\beta^2 + (u_m n_m)^2)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

### 2.2.3 Διακριτοποίηση των Εξισώσεων

Η επίλυση των εξισώσεων ροής γίνεται με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων σε κεντροκομβική διατύπωση (Vertex-Centered Finite-Volume) [20] χρησιμοποιώντας πολυβηματική μέθοδο Runge Kutta με ομαλοποίηση του υπολοίπου (Multi-stage Runge Kutta with Residual Smoothing) [21], [22]. Ορίζεται στοιχειώδης όγκος  $\Omega_P$  ο οποίος περιλαμβάνει τον κόμβο  $P$ , σχήμα 2.11.

Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις (2.16) σε ένα στοιχειώδη όγκο  $\Omega_P$ , τα όρια του οποίου κινούνται, προκύπτει

$$\Gamma_{nm} \int_{\Omega_P} \frac{\partial V_n}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_P} \frac{\partial U_m}{\partial \tau} d\Omega + \Gamma_{nm} \int_{\Omega_P} \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_k} d\Omega - \Gamma_{nm} \int_{\Omega_P} \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial x_k} d\Omega \quad (2.24)$$



**Σχήμα 2.11:** Στοιχειώδης όγκος  $\Omega_P$  γύρω από κόμβο  $P$ .  $Q$  είναι γειτονικός κόμβος του  $P$  και  $\vec{n}$  το κάθετο διάνυσμα, [23].

### Διακριτοποίηση Χρονικού Όρου

Για τον χρονικό όρο τη χρονική στιγμή  $i$  ισχύει ότι:

$$\int_{\Omega_P^i} \frac{\partial V_n}{\partial t} d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_P^i} V_n d\Omega - \int_{\partial\Omega_P} u_m^{grid,i} n_m^i V_n d(\partial\Omega) \quad (2.25)$$

όπου  $u_m^{grid,i}$  η ταχύτητα παραμόρφωσης του ορίου του χωρίου τη χρονική στιγμή  $t = i$ . Χρησιμοποιώντας πίσω-παραγωγή ακρίβειας  $2^{η}$  τάξης στο χρόνο, ο πρώτος όρος διακριτοποιείται ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_P^i} V_n d\Omega = \frac{1}{2\Delta t} (3V_n^i \Omega_P^i - 4V_n^{i-1} \Omega_P^{i-1} + V_n^{i-2} \Omega_P^{i-2}) \quad (2.26)$$

Για το δεύτερο όρο ισχύει, [24], ότι:

$$\int_{\partial\Omega_P} u_m^{grid,i} n_m^i V_n d(\partial\Omega) = \left( \frac{\partial\Omega_P}{\partial t} \right)^i = \sum u_m^{grid,i} n_m^i V_n \Delta S \quad (2.27)$$

Τελικά, η διακριτοποίηση του χρονικού όρου είναι

$$\int_{\Omega_P^i} \frac{\partial V_n}{\partial t} d\Omega = \frac{1}{2\Delta t} (3V_n^i \Omega_P^i - 4V_n^{i-1} \Omega_P^{i-1} + V_n^{i-2} \Omega_P^{i-2}) - \sum u_m^{grid,i} n_m^i V_n \Delta S \quad (2.28)$$

## Διακριτοποίηση Ψευδο-Χρονικού Όρου

Για τον ψευδο-χρονικό όρο σε μια ψευδο-χρονική στιγμή  $\tau = j$  ισχύει ότι

$$\int_{\Omega_P^j} \frac{\partial U_m}{\partial \tau} d\Omega = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\Omega_P^j} U_m d\Omega = \frac{\Omega_P^j}{\Delta \tau_P} (U_m^j - U_m^{j-1}) \quad (2.29)$$

## Διακριτοποίηση Διανυσμάτων Ατριβούς Ροής

Η ιδιοδιανυσματική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε επιτρέπει να χρησιμοποιηθεί το ανάντι σχήμα του Roe (Upwind Roe Scheme), [25], για τη διατύπωση των διανυσμάτων της ατριβούς ροής. Έτσι, το διάνυσμα της ατριβούς ροής  $\Phi$  στη διεπιφάνεια δύο γειτονικών πεπερασμένων όγκων ( $\Omega_P, \Omega_Q$ ) ορίζεται ως:

$$\Phi_n^{PQ} = \frac{1}{2} (\Phi_n^P + \Phi_n^Q) - \frac{1}{2} |A_\Gamma| (U_n^Q - U_n^P) \quad (2.30)$$

όπου  $\Phi_n^P, \Phi_n^Q$  η ροή στους κόμβους  $P, Q$  αντίστοιχα,  $U_n^Q, U_n^P$  οι ροϊκές μεταβλητές στους κόμβους  $P, Q$  αντίστοιχα.

### 2.2.4 Οριακές Συνθήκες

Το σύνολο των εξισώσεων (2.15) συνοδεύονται από τις ακόλουθες οριακές συνθήκες:

#### Οριακές Συνθήκες Εισόδου:

Στις οριακές συνθήκες εισόδου είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός δυο ποσοτήτων (για ένα διδιάστατο σύστημα ροής), ενώ μια ποσότητα προεκβάλλεται από το χωρίο επίλυσης. Οι ποσότητες που καθορίζονται ως οριακές συνθήκες Dirichlet είναι η γωνία εισόδου της ροής και η στατική πίεση. Η ροή θεωρείται ότι εισέρχεται αξονικά, επομένως η γωνία εισόδου λαμβάνει μηδενική τιμή. Η ποσότητα η οποία προεκβάλλεται από το εσωτερικό του χωρίου επίλυσης είναι το μέτρο της ταχύτητας.

#### Οριακές Συνθήκες Εξόδου:

Στις οριακές συνθήκες εξόδου είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός μίας ποσότητας,

ενώ δύο ποσότητες προεχβάλλονται από το χωρίο επίλυσης. Η ποσότητα η οποία επιβάλλεται είναι η τιμή της στατικής πίεσης. Από το χωρίο επίλυσης προεχβάλλεται το διάνυσμα της ταχύτητας, δηλαδή το μέτρο και η γωνία.

#### Οριακές Συνθήκες Στερεού Τοιχώματος:

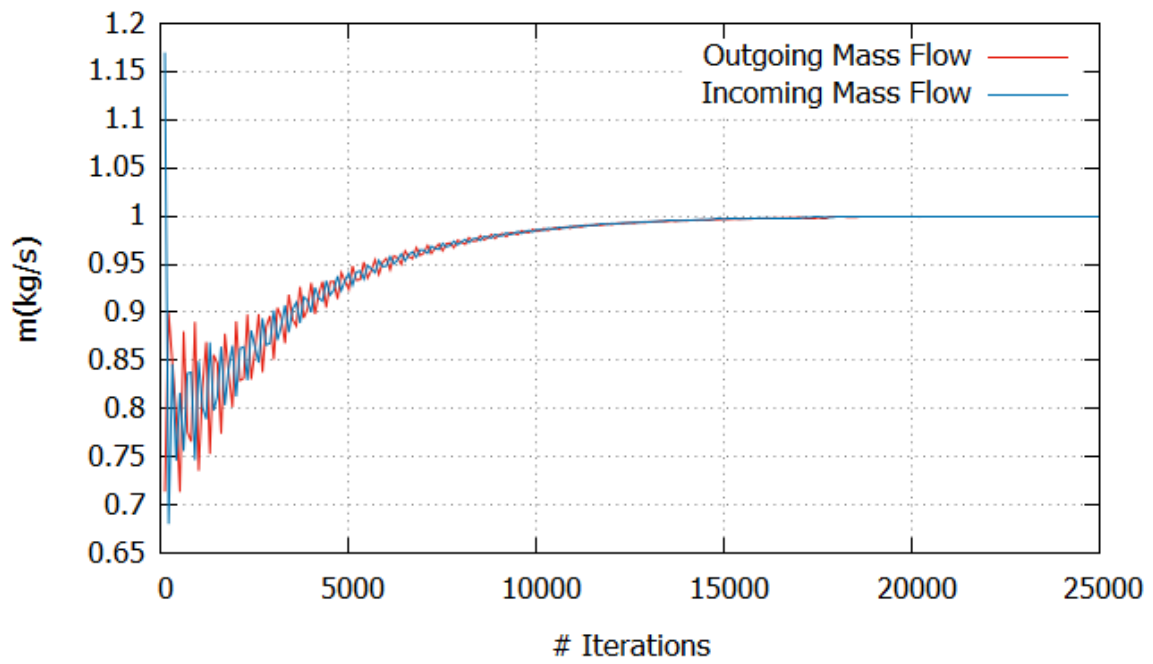
Επιβάλλεται συνθήκη μη ολίσθησης, οπότε η απόλυτη ταχύτητα του ρευστού ισούται με την ταχύτητα κίνησης του τοιχώματος.

## 2.3 Διερεύνηση του Όρου Τεχνητής Συμπίεσ- στότητας

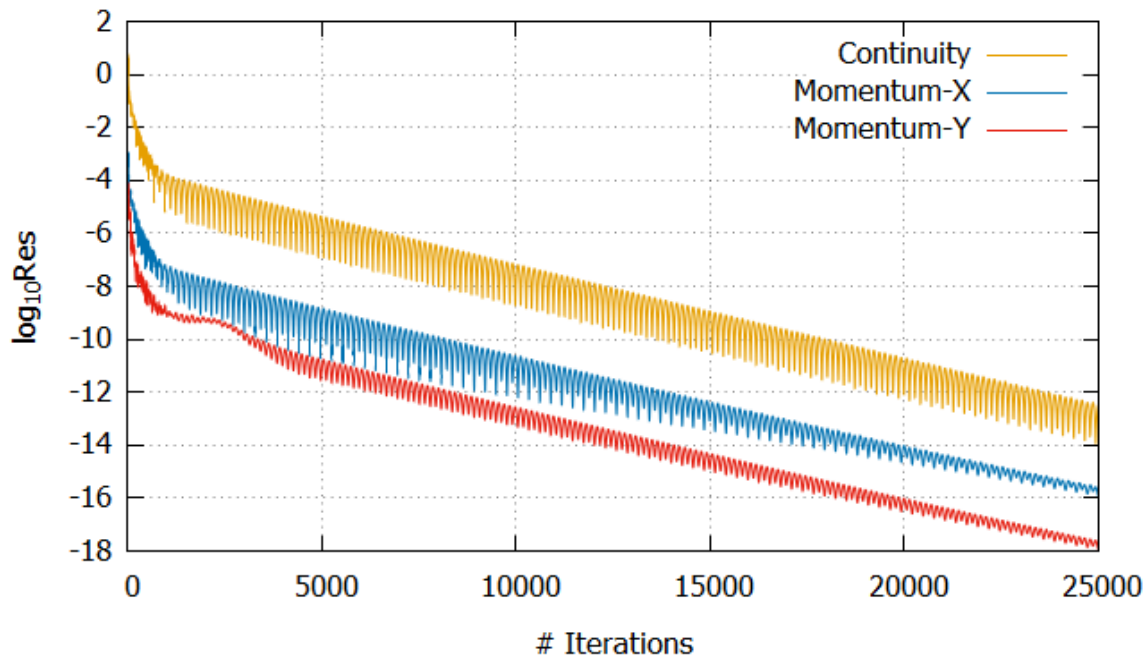
Η εισαγωγή του όρου της τεχνητής συμπίεστούτητας  $\beta$  -η οποία εισάγεται από το χρήστη στο λογισμικό, εξίσωση (2.15), προϋποθέτει η τελική λύση του προβλήματος να είναι ανεξάρτητη αυτής. Για το λόγο αυτό, έγινε διερεύνηση των τιμών εκείνων που ο όρος της τεχνητής συμπίεστούτητας μπορεί να λάβει. Η μελέτη έγινε σε γεωμετρία μοναδιαίας διατομής εισόδου - εξόδου, σχήμα 2.5 και για τη χρονικά μόνιμη ροή. Η ροή που μελετάται είναι στρωτή με αριθμό Reynolds  $Re = \frac{ud}{\nu} = 1300$ . Πέρα από τη σύγκλιση του προβλήματος, κριτήριο αποτέλεσε και η ακρίβεια με την οποία ικανοποιείται το ισοζύγιο μάζας στην είσοδο και στην έξοδο της διάταξης.

Γίνεται επίλυση του πεδίου ροής με διάφορες τιμές του  $\beta$  προκειμένου να βρεθεί η κατάλληλη για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Θέτοντας  $\beta = 3, 5, 10, 20$  το πρόβλημα αδυνατεί να συγκλίνει, ενώ για τιμές από  $\beta = 40$  και άνω υπάρχει σύγκλιση. Υψηλές τιμές της τεχνητής συμπίεστούτητας, μπορούν να οδηγήσουν στη σύγκλιση του προβλήματος, με κίνδυνο όμως τη φυσική του αλλοίωση. Για το λόγο αυτό επιλέγεται η ελάχιστη δυνατή τιμή της τεχνητής συμπίεστούτητας η οποία οδηγεί σε σύγκλιση.

Στο σχήμα 2.12 παρουσιάζεται η παροχή μάζας στην είσοδο και στην έξοδο της διάταξης, αδιαστατοποιημένη με την τελική τιμή της παροχής μάζας της διατομής εισόδου, συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων για τη χρονικά μόνιμη ροή και για  $\beta = 40$ . Οι δυο παροχές συγκλίνουν στην ίδια τιμή με σφάλμα 0.02%, ενώ τα σφάλμα αυτό λαμβάνει τιμές κάτω του 1% από τις 10.000 επαναλήψεις και έπειτα. Στο σχήμα 2.13 παρουσιάζεται διάγραμμα σύγκλισης των εξισώσεων συνέχειας και ορμής κατά την x και y κατεύθυνση. Παρατηρείται η ταλαντωτική συμπεριφορά των υπολοίπων των εξισώσεων η οποία όμως δεν επηρεάζει την τιμή της παροχή μάζας και γενικότερα το πεδίο ροής.



**Σχήμα 2.12:** Διάγραμμα σύγκλισης της παροχής μάζας στην είσοδο και στην έξοδο της αντλίας συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων για τη χρονικά μόνιμη ροή και για  $\beta = 40$ . Η παροχή μάζας αδιαστατοποιείται με την τελική τιμή σύγκλισης.



Σχήμα 2.13: Διάγραμμα σύγκλισης των εξισώσεων συνέχειας, ορμής κατά την  $x$  και  $y$  κατεύθυνση για τη χρονικά μόνιμη ροή και για  $\beta = 40$ .

## 2.4 Σύγκριση Αποτελεσμάτων δύο Οικείων Λογισμικών για Χρονικά Μόνιμη Ροή

Για να θεωρηθούν τα αποτελέσματα που προκύπτουν κατά τη μελέτη ενός προβλήματος, στην προκειμένη περίπτωση ενός προβλήματος εσωτερικής ρευστοδυναμικής, αξιόπιστα πρέπει να είναι κατά το δυνατόν ανεξάρτητα του λογισμικού επίλυσης που χρησιμοποιείται. Με άλλα λόγια, η αξιοπιστία ενός λογισμικού επίλυσης αυξάνει όταν τα αποτελέσματα στα οποία καταλήγει συνάδουν με τα αποτελέσματα στα οποία καταλήγει ένα διαφορετικό λογισμικό. Για το λόγο αυτό, συγκρίνεται το λογισμικό επίλυσης που έχει χρησιμοποιηθεί στη διπλωματική εργασία, με ένα λογισμικό διαφορετικής φύσεως που έχει αναπτυχθεί στη ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ. Υπενθυμίζεται ότι το χρησιμοποιηθέν λογισμικό χρησιμοποιεί οριόδετα, μη-δομημένα πλέγματα, στις εξισώσεις ροής εφαρμόζεται η μέθοδος της τεχνητής συμπίεστος και η επίλυση των εξισώσεων ροής γίνεται με κεντροκομβική διατύπωση πεπερασμένων όγκων. Το οικείο λογισμικό επίσης εφαρμόζει τη μέθοδο της τεχνητής συμπίεστος, αλλά και πεπερασμένους όγκους για την ολοκλήρωση των εξισώσεων ροής. Ωστόσο, το πλέγμα που χρησιμοποιεί είναι μη-οριόδετο και βασίζεται στη μέθοδο των τεμνόμενων κυψελών, Cut-Cell, οδηγώντας σε διαφορετικό ορισμό των πεπερασμένων όγκων.

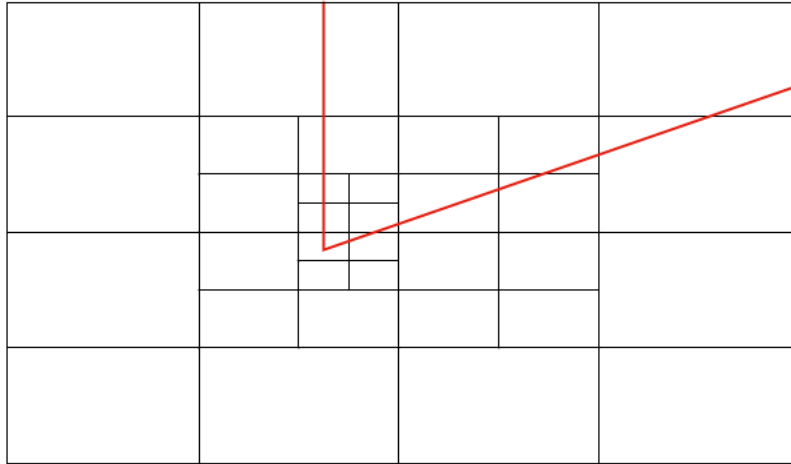
## 2.4.1 Γένεση και Παραμόρφωση Πλέγματος με τη Μέθοδο των Τεμνόμενων Κυψελών

Η διαφορά των λογισμικών επίλυσης έγκειται στον τρόπο γένεσης και παραμόρφωσης πλέγματος που εφαρμόζεται. Ο επιλύτης που χρησιμοποιήθηκε στη διπλωματική εργασία χρησιμοποιεί οριόδετα, μη-δομημένα πλέγματα, (ΟΜΔΠ). Το πλέγμα παραμένει διαρκώς προσαρμοσμένο στα στερεά όρια, ακόμα και σε όσα εξ αυτών κινούνται, και δεν επεκτείνεται πέραν αυτού ενώ ο συνολικός αριθμός των κόμβων παραμένει σταθερός κατά τη διάρκεια της κίνησης.

Η μέθοδος των τεμνόμενων κυψελών (TM) - Cut-Cell, [26], ανήκει στις μεθόδους μη-οριόδετων πλεγμάτων (Immersed Boundary Methods - IMB), [27]. Στις μεθόδους μη-οριόδετων πλεγμάτων, το πλέγμα δεν εφάπτεται στο στερεό σώμα αλλά, για παράδειγμα, σε πρόβλημα εσωτερικής ρευστοδυναμικής, επεκτείνεται και εκτός αυτού.

Η διαδικασία γένεσης πλέγματος για μια γεωμετρία εκκινεί καθορίζοντας τις συνολικές διαστάσεις ενός ορθογώνιου χωρίου στο οποίο θα αναπτυχθεί το πλέγμα. Επιπλέον, ορίζεται το ελάχιστο ( $\Omega_{min}$ ) και το μέγιστο ( $\Omega_{max}$ ) εμβαδόν των κυψελών που θα δημιουργηθούν. Αρχικά, το υπολογιστικό χωρίο χωρίζεται με καρτεσιανό πλέγμα σε κυψέλες μεγίστου εμβαδού  $\Omega_{max}$ . Οι κυψέλες οι οποίες τέμνονται από το στερεό όριο διασπώνται σε νέες κυψέλες αρκεί το εμβαδόν αυτών να γίνει μην γίνει μικρότερο του κατώτατου ορίου  $\Omega_{min}$ . Το εμβαδόν των κυψελών μειώνεται βαθμιαία από τις κυψέλες ελάχιστου μέχρι τις κυψέλες μεγίστου εμβαδού, για να αποφευχθεί η γειτονική συνύπαρξη δύο κυψελών που διαφέρουν σημαντικά ως προς το εμβαδόν. Περαιτέρω τομή μιας υπάρχουσας κυψέλης είναι απαραίτητη εφόσον το όριο ενός στερεού εισέρχεται και εξέρχεται από την ίδια ακμή. Σε περιπτώσεις με 'πολύ' οξείες γωνίες το φαινόμενο αυτό είναι ιδιαίτερα συχνό. Επιπλέον, μια ακμή μπορεί να τμηθεί από ένα και μόνο συνεχές όριο. Επομένως, αν η ακμή μιας κυψέλης τέμνεται από δυο διαφορετικά στερεά όρια τότε η κυψέλη αυτή πρέπει να διασπαστεί. Με τις διαδοχικές τομές, το σχήμα μιας κυψέλης μπορεί να γίνει τριγωνικό, τραπεζοειδές ή πενταγωνικό. Πλέγμα που προκύπτει με τη μέθοδο των τεμνόμενων κυψελών και πληροί τα ανωτέρω κριτήρια παρουσιάζεται στο σχήμα 2.14.

Όταν υπάρχει κίνηση του στερεού ορίου, συνήθης μέθοδος είναι η πύκνωση του πλέγματος κοντά στο στερεό τοίχωμα, έτσι ώστε σε κάθε χρονική στιγμή της κίνησης η πύκνωση του πλέγματος να είναι επαρκής. Με τον τρόπο αυτό όμως, το πλέγμα που δημιουργείται είναι πιθανό να είναι πυκνότερο από ό,τι απαιτείται, δυσχεραίνοντας τη διαδικασία επίλυσης. Ο χρησιμοποιηθείς επιλύτης, [28] εφαρμόζει μια διαφορετική μέθοδο για κινούμενα όρια αποφεύγοντας τα ανωτέρω προβλήματα. Μεταξύ δύο χρονικών στιγμών κίνησης ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία. Οι κυψέλες οι οποίες έχουν εμβαδόν μικρότερο από το μέγιστο  $\Omega_{max}$  συγχωνεύονται με τις γειτονικές τους. Η νέα γεωμετρία τοποθετείται στο πλέγμα αυτό και εκκινεί η διαδικασία πύκνωσης κο-



**Σχήμα 2.14:** Πλέγμα που προκύπτει με τη μέθοδο των τεμνόμενων κυψελών γύρω από οξεία γωνία. Σταδιακή μείωση του εμβαδού των κυψελών, για τη μη γειτνίαση κυψελών σημαντικής εμβαδικής διαφοράς. Το στερεό όριο τέμνει το πολύ μία φορά την ακμή κάθε κυψέλης.

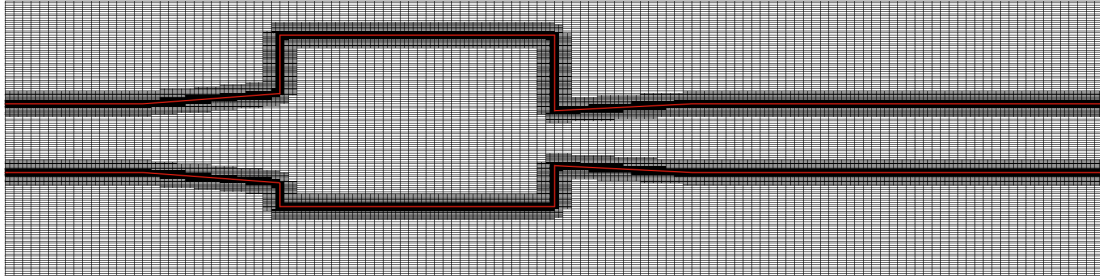
ντά στο στερεό όριο. Με τον τρόπο αυτό δεν απαιτείται πλήρης επαναπλεγματοποίηση ενώ, ταυτόχρονα, για κάθε χρονική στιγμή, η πυκνωση πραγματοποιείται εκεί που είναι απαραίτητο και είναι ανεξάρτητη της θέσης του στερεού σώματος κατά τις προηγούμενες χρονικές στιγμές.

## 2.4.2 Σύγκριση Ροϊκού Πεδίου μεταξύ των δύο Λογισμικών

Η μελέτη γίνεται για τη διάταξη του σχήματος 2.1 και για χρονικά μόνιμη ροή. Στην είσοδο της διάταξης επιβάλλεται οριακή συνθήκη σταθερής ολικής πίεσης  $p_t = 1.001bar$  και αξονική είσοδος της ταχύτητας. Στην έξοδο της διάταξης επιβάλλεται σταθερή στατική πίεση  $p = 1bar$ . Η επιβολή των οριακών συνθηκών είναι ίδια και στους δύο ροϊκούς επιλύτες.

Στο σχήμα 2.15 παρουσιάζεται το πλέγμα που δημιουργείται με τη μέθοδο των τεμνόμενων κυψελών (Cut-Cell) για τη γεωμετρία της διάταξης. Το πλέγμα είναι πυκνό κοντά στα στερεά όρια της διάταξης, και γίνεται πιο αραιό προς το κέντρο αυτής.





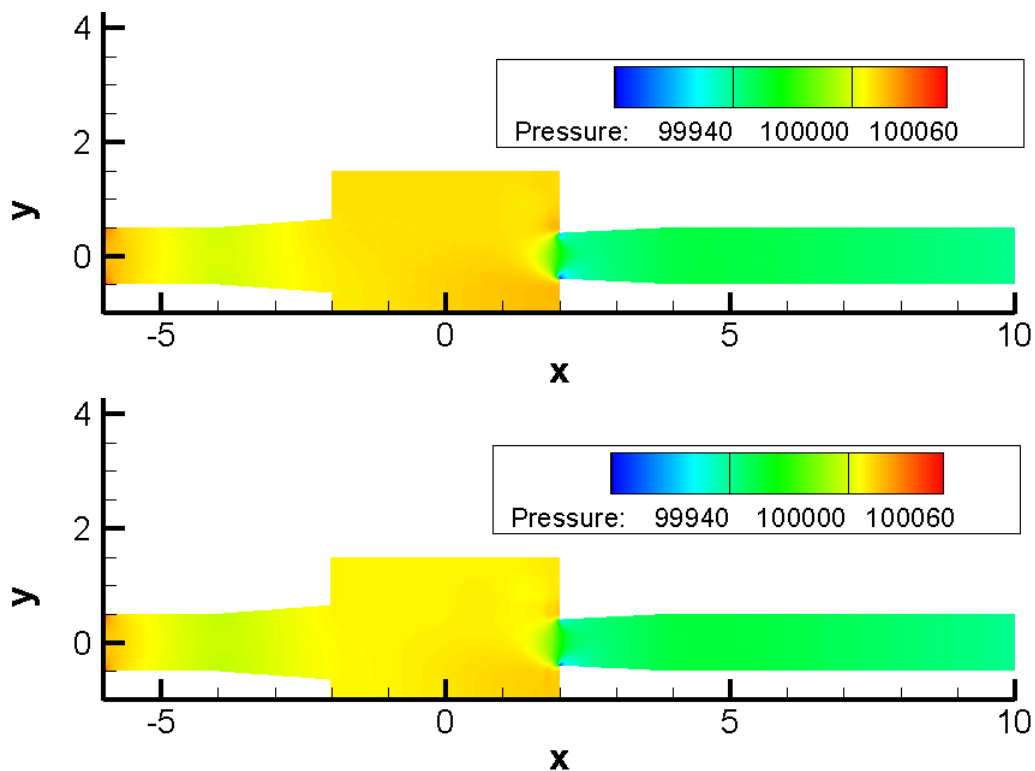
**Σχήμα 2.15:** Πλέγμα που προκύπτει με τη μέθοδο των τεμνόμενων κυψελών (μαύρο) για τη γεωμετρία της διάταξης (κόκκινο). Το καρτεσιανό πλέγμα είναι πιο πυκνό κοντά στο στερεό όριο και βαθμιαία γίνεται πιο αραιό προς το κέντρο της διάταξης.

Στο σχήμα 2.16 παρουσιάζεται το πεδίο πιέσεων όπως προέκυψε από την επίλυση της ροής με ΟΜΔΠ (άνω) και με τη μέθοδο των ΤΤ (κάτω). Οι ακραίες τιμές των δύο πεδίων είναι ίδιες. Η κατανομή των πιέσεων είναι οπτικά ίδια και δεν είναι δυνατός ο εντοπισμός κάποιας σημαντικής διαφοράς.

Στο σχήμα 2.17 παρουσιάζεται το πεδίο του μέτρου της ταχύτητας κατά την επίλυση της ροής με ΟΜΔΠ (άνω) και με τη μέθοδο των ΤΤ (κάτω). Η κατανομή του μέτρου της ταχύτητας παρουσιάζει σημαντικές ομοιότητες μεταξύ των δύο οικείων λογισμικών. Οι κυριότερες διαφορές εντοπίζονται στην αυξημένη ταχύτητα που παρουσιάζεται με τη μέθοδο των ΟΜΔΠ στην είσοδο του πρώτου διαχύτη, συγκριτικά με την αντίστοιχη ταχύτητα που αναπτύσσεται με τη μέθοδο των ΤΤ. Στο άνω τμήμα του ορθογώνιου χωρίου, η μέθοδος των ΤΤ παρουσιάζει ισχυρότερη ανακυκλοφορία της ροής ενώ στο κάτω τμήμα, η μέθοδος των ΟΜΔΠ εμφανίζει χαμηλές ταχύτητες για μεγαλύτερο διάστημα.

Η κατανομή της πίεσης όπως αναπτύσσεται καθ' ύψος σε διάφορα θέσεις της διάταξης παρουσιάζεται, με μαύρο χρώμα για τη μέθοδο των οριόδετων πλεγμάτων και με κόκκινο για τη μέθοδο των τεμνόμενων κυψελών, στο σχήμα 3.7. Η κατανομή της πίεσης έχει την ίδια μορφή για τα δύο οικεία λογισμικά, ενώ η απόκλιση στον υπολογισμό της είναι κάτω από 0.003%, καθιστώντας αυτές πρακτικά ίδιες. Μάλιστα, στην έξοδο της διάταξης -εκεί δηλαδή που επιβάλλεται σταθερή στατική πίεση, η απόκλιση είναι περίπου  $1.5 \cdot 10^{-4}\%$ .

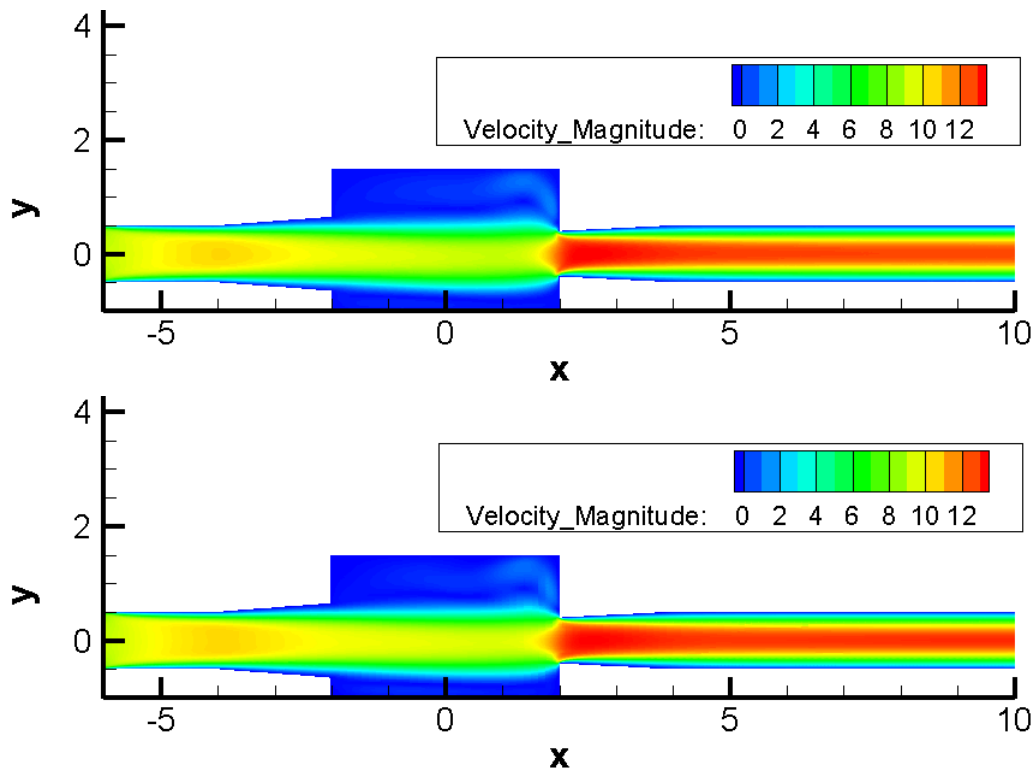
Η κατανομή του μέτρου της ταχύτητας όπως αναπτύσσεται καθ' ύψος σε διάφορα θέσεις



**Σχήμα 2.16:** Πεδίο πίεσης για τη χρονικά μόνιμη κατάσταση με μη-δομημένο, οριόδετο πλέγμα (άνω) και με τη μέθοδο των τεμνόμενων κυψελών, (Cut-Cell) (κάτω).

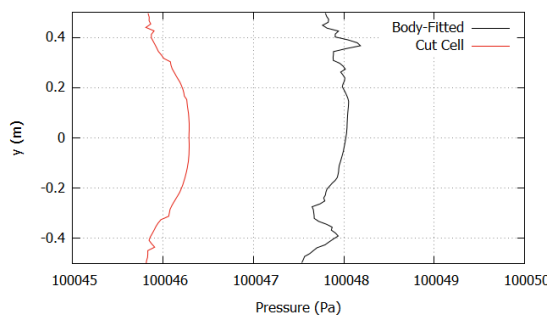
της διάταξης παρουσιάζεται, με μαύρο χρώμα για τη μέθοδο των οριόδετων πλεγμάτων και με κόκκινο για τη μέθοδο των τεμνόμενων κυψελών, στο σχήμα 2.19 . Σε όλες τις εξεταζόμενες θέσεις, το μέτρο της ταχύτητας είναι ίδιο κοντά στα όρια του στερεού τοιχώματος, ενώ απομακρυνόμενοι από αυτά, η μέθοδος των τεμνόμενων κυψελών οδηγεί σε ταχύτητες υψηλότερου μέτρου. Η μέγιστη ποσοστιαία διαφορά του μέτρου της ταχύτητας μεταξύ των δύο επιλυτών εμφανίζεται στην έξοδο της διάταξης (σχήμα 2.19(ζ')) και είναι μικρότερη του 5%.

Τέλος, η παροχή μάζας που προκύπτει με τη μέθοδο των τεμνόμενων κυψελών είναι 4.02% περισσότερη συγκριτικά με την παροχή μάζας που προκύπτει με τη μέθοδο των οριόδετων, μη-δομημένων πλεγμάτων. Οι οριακές συνθήκες που επιβάλλονται δεν καθορίζουν ταχύτητες, για να καθοριστεί με τον τρόπο αυτό και η παροχή. Επομένως, η διαφορετική παροχή που προκύπτει οφείλεται στη διαφορετική απώλεια ολικής πίεσης που υπολογίζεται από τους δύο επιλύτες.

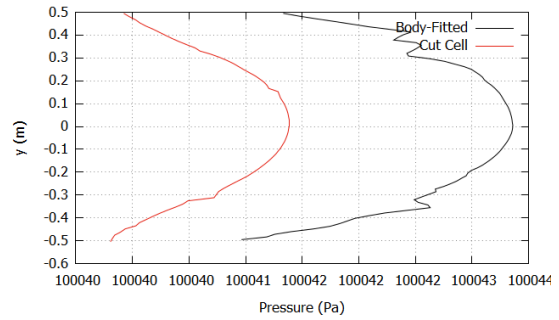


**Σχήμα 2.17:** Πεδίο μέτρου ταχύτητας για τη χρονικά μόνιμη κατάσταση με μη-δομημένο, οριόδετο πλέγμα (άνω) και με τη μέθοδο των τεμνόμενων κυψελών, (*Cut-Cell*) (κάτω).

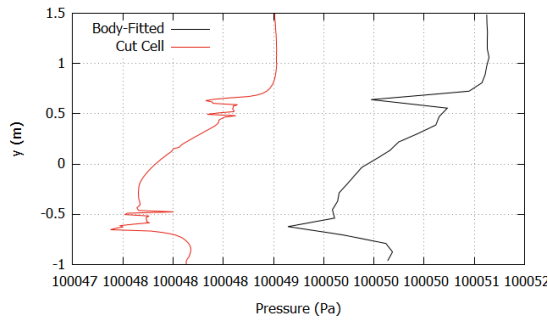
Συνοψίζοντας, οι επιλύτες ροής που εξετάστηκαν εφαρμόζουν δύο διαφορετικές μεθόδους γένεσης πλέγματος, χρησιμοποιώντας μη-δομημένο, οριόδετο πλέγμα και πλέγμα που προκύπτει με τη μέθοδο των τεμνόμενων κυψελών. Το ροϊκό πεδίο (πεδίο πιέσεων και ταχυτήτων) που προκύπτει από τους δύο επιλύτες, αν και παρουσιάζει κάποιες διαφορές, στο μεγαλύτερο μέρος είναι όμοιο. Στο σύνολο, οι δύο οικείοι επιλύτες καταλήγουν πρακτικά σε ίδια πεδία ροής, γεγονός που καθιστά τα αποτελέσματα αυτών αξιόπιστα.



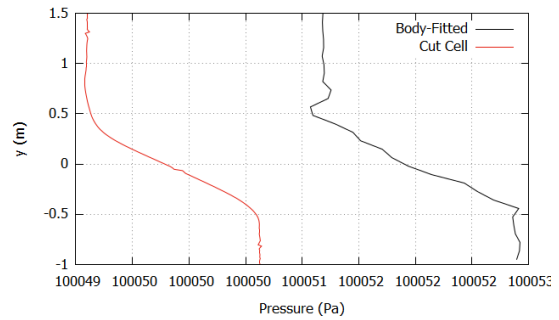
( $\alpha'$ )  $x=-6$



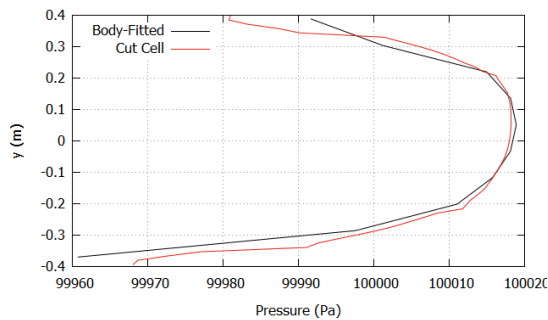
( $\beta'$ )  $x=-4$



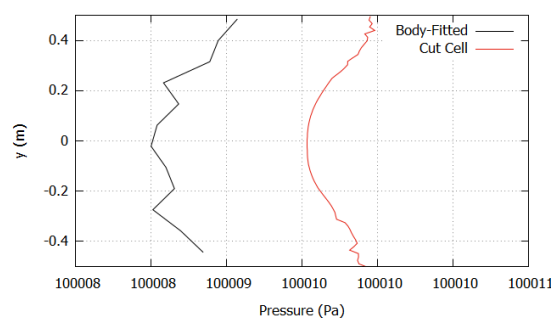
( $\gamma'$ )  $x=-2$



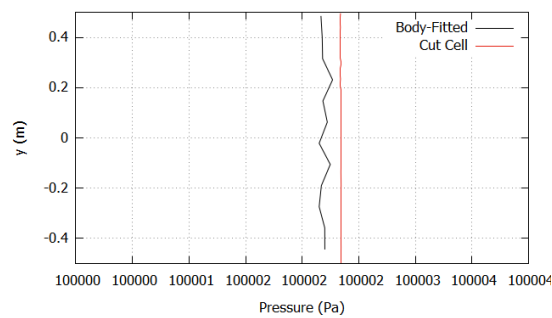
( $\delta'$ )  $x=0$



( $\epsilon'$ )  $x=2$

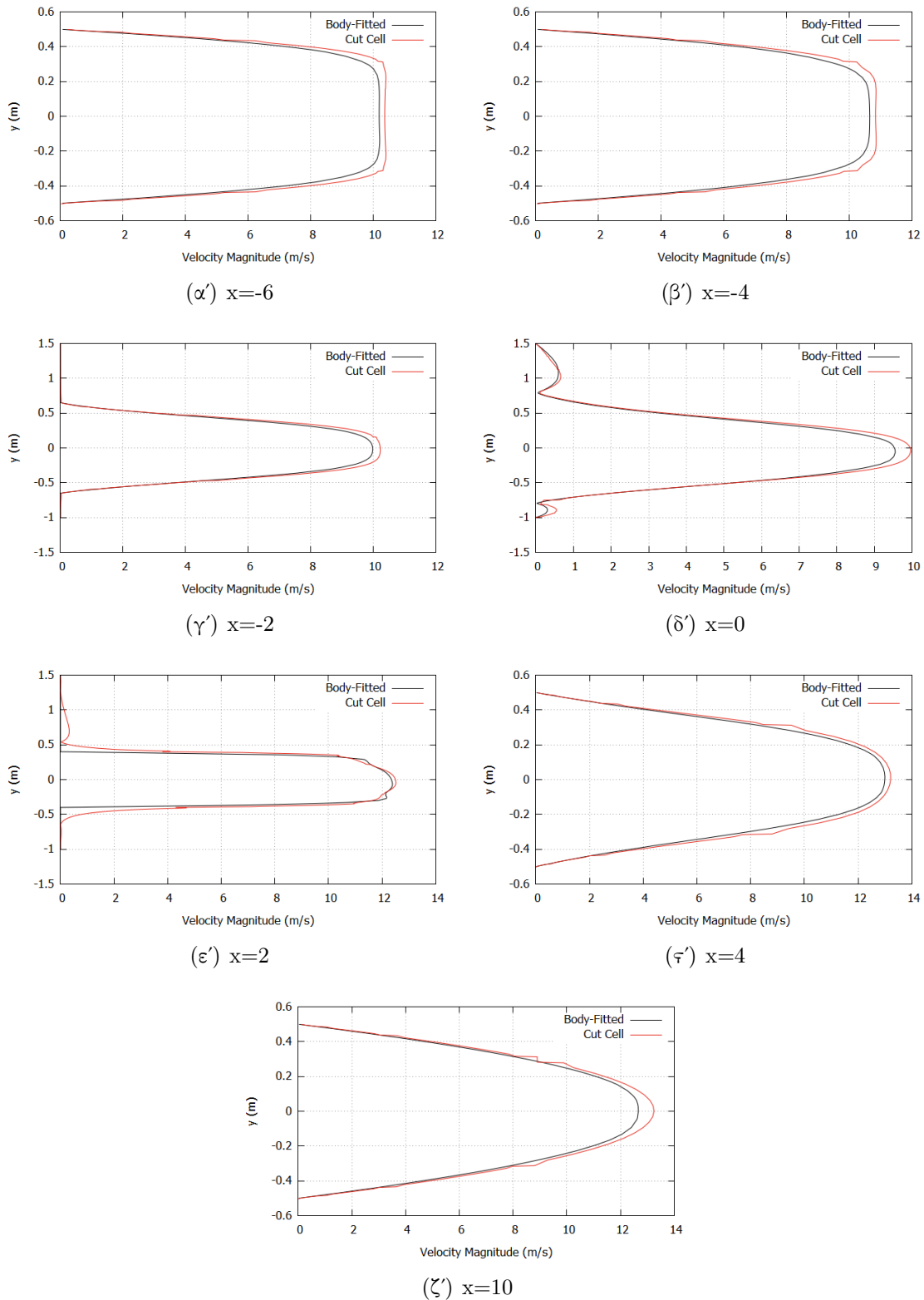


( $\varpi'$ )  $x=4$



( $\zeta'$ )  $x=10$

**Σχήμα 2.18:** Κατανομή της πίεσης σε διάφορες θέσεις της διαφραγματικής αντλίας για επίλυση με οριόδετο, μη-δομημένο πλέγμα (μαύρο) και με τη μέθοδο των τεμνόμενων κυψελών (κόκκινο). Τονίζεται η απειροστά μικρή διαφορά τιμών στον οριζόντιο άξονα που είναι παραπλανητική ως προς τις αποκλίσεις.



**Σχήμα 2.19:** Κατανομή του μέτρου της ταχύτητας σε διάφορες θέσεις της διαφραγματικής αντλίας για επίλυση με οριόδετο, μη-δομημένο πλέγμα (μαύρο) και με τη μέθοδο των τεμνόμενων κυψελών (κόκκινο).



## Κεφάλαιο 3

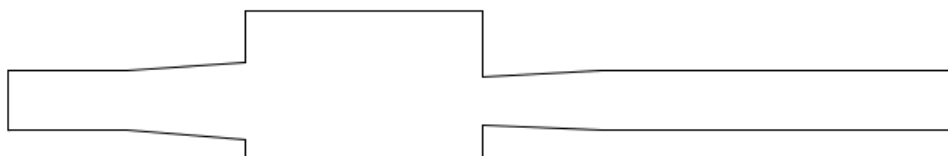
# Μοντελοποίηση της Μορφής της Διάταξης και της Κίνησης του Διαφράγματος

Η κύρια διαφορά της αντλίας που εξετάζεται με τις υπόλοιπες διαφραγματικές αντλίες είναι η απουσία βαλβίδων ή άλλων τεχνητών μερών που ελέγχουν τη ροή. Οι βαλβίδες αντικαθίστανται από σύστημα διπλών αποκλινόντων αγωγών, οι οποίοι θεωρείται ότι εκτελούν το έργο των βαλβίδων χωρίς να περιλαμβάνουν τα αρνητικά σημεία αυτών. Το σύστημα των αγωγών διαδραματίζει, επομένως, σημαντικό ρόλο και για το λόγο αυτό μελετάται η μορφή αυτών. Εξίσου σημαντική παράμετρος σε μια διαφραγματική αντλία αποτελεί η κίνηση που εκτελεί το διάφραγμα. Προτείνεται και αναλύεται, λοιπόν, μία μέθοδος με την οποία πραγματοποιείται η κίνηση του διαφράγματος.

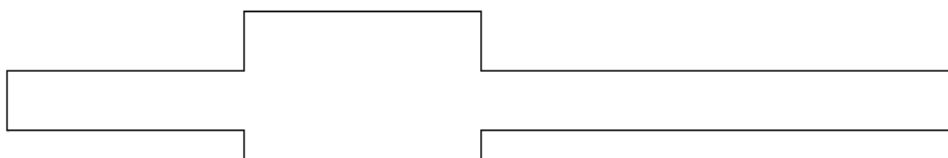
### 3.1 Διερεύνηση Μορφής της Διάταξης ως προς τη Διακινούμενη Παροχή

Σύμφωνα με τη διεθνή βιβλιογραφία [7],[8],[9], μια διάταξη με σύστημα διπλών αποκλινόντων αγωγών είναι η πλέον κατάλληλη για μια διαφραγματική αντλία χωρίς βαλβίδες και τεχνητά μέρη. Προκειμένου να επαληθευθεί η θέση αυτή μελετήθηκαν τρεις διατάξεις, ίδιας διατομής εισόδου και εξόδου και ίδιων μέγιστων διαστάσεων - συνολικό μήκος και ύψος. Η πρώτη, σχήμα 3.1, αποτελείται από σύστημα δύο αποκλινόντων

αγωγών (διαχυτών) μισής γωνίας ανοίγματος  $4.3^\circ$ , η δεύτερη, σχήμα 3.2, αποτελείται από δυο αγωγούς σταθερής διατομής και η τρίτη, σχήμα 3.3, αποτελείται από σύστημα δύο συγκλινόντων αγωγών (ακροφυσίων) μισής γωνίας κλεισίματος  $4.3^\circ$ .



**Σχήμα 3.1:** Διάταξη με σύστημα δυο διαχυτών, γεωμετρία μοναδιαίας διατομής εισόδου και εξόδου και μισής γωνίας ανοίγματος  $4.3^\circ$ .



**Σχήμα 3.2:** Διάταξη με σύστημα δυο αγωγών σταθερής διατομής, γεωμετρία μοναδιαίας διατομής εισόδου και εξόδου.

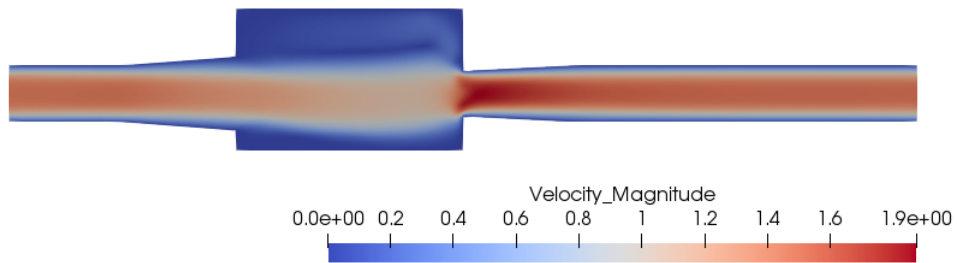


**Σχήμα 3.3:** Διάταξη με σύστημα δυο ακροφυσίων, γεωμετρία μοναδιαίας διατομής εισόδου και εξόδου και μισής γωνίας κλεισίματος  $4.3^\circ$ .

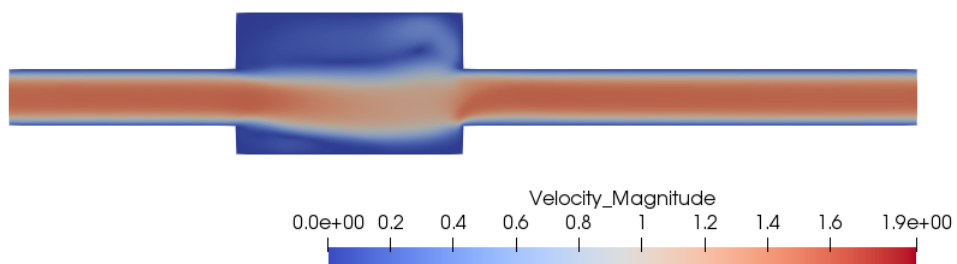


Επιλύεται το χρονικά μόνιμο πρόβλημα για τις διατάξεις των σχημάτων 3.1, 3.2 και 3.3. Στην είσοδο και των τριών διατάξεων επιβάλλεται συνθήκη Dirichlet για τη στατική πίεση και αξονική κατεύθυνση της ταχύτητας και στην έξοδο των τριών διατάξεων συνθήκη Dirichlet για τη στατική πίεση. Θεωρώντας χαρακτηριστικό μήκος  $l_{ref}$  τη διατομή εισόδου των εξεταζόμενων διατάξεων (ίδια και για τις τρεις διατάξεις) και ταχύτητα αναφοράς,  $u_{ref}$ , την τετραγωνική ρίζα της διαφοράς πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου  $u_{ref} = \sqrt{\Delta p}$  (επίσης ίδια και για τις τρεις διατάξεις), ο αριθμός *Reynolds* της ροής είναι ίσος με  $Re = 1300$ . Στόχος αποτελεί η εύρεση της γεωμετρίας εκείνης που διακινεί τη μέγιστη παροχή.

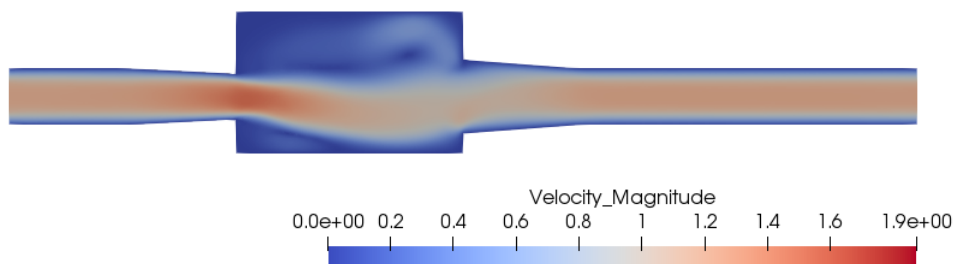
Το πεδίο του μέτρου της ταχύτητας για τις τρεις διατάξεις παρουσιάζεται στο σχήμα 3.4. Συγκρίνοντας τις τρεις διατάξεις, διαπιστώνονται σημαντικές διαφορές ανάμεσα στα τρία πεδία. Εκκινώντας από το σύστημα των συγκλινόντων αγωγών, σχήμα 3.4(γ'), παρατηρείται πως εμφανίζει τόσο τις χαμηλότερες ταχύτητες όσο και την μεγαλύτερη ανακυκλοφορία, συγκριτικά με τις άλλες διατάξεις. Το πεδίο του συστήματος των αποκλινόντων αγωγών, σχήμα 3.4(α'), και του συστήματος των αγωγών σταθερής διατομής, σχήμα 3.4(β'), αν και παρουσιάζουν ισχυρή συνάφεια στο μέτρο της ταχύτητας στην έξοδο της διάταξης, ωστόσο εντοπίζονται διαφορές στον τρόπο με τον οποίο αυτή έχει αναπτυχθεί κατά μήκος του ορθογώνιου χωρίου.



(α) Σύστημα αποκλινόντων αγωγών



(β') Σύστημα αγωγών σταθερής διατομής



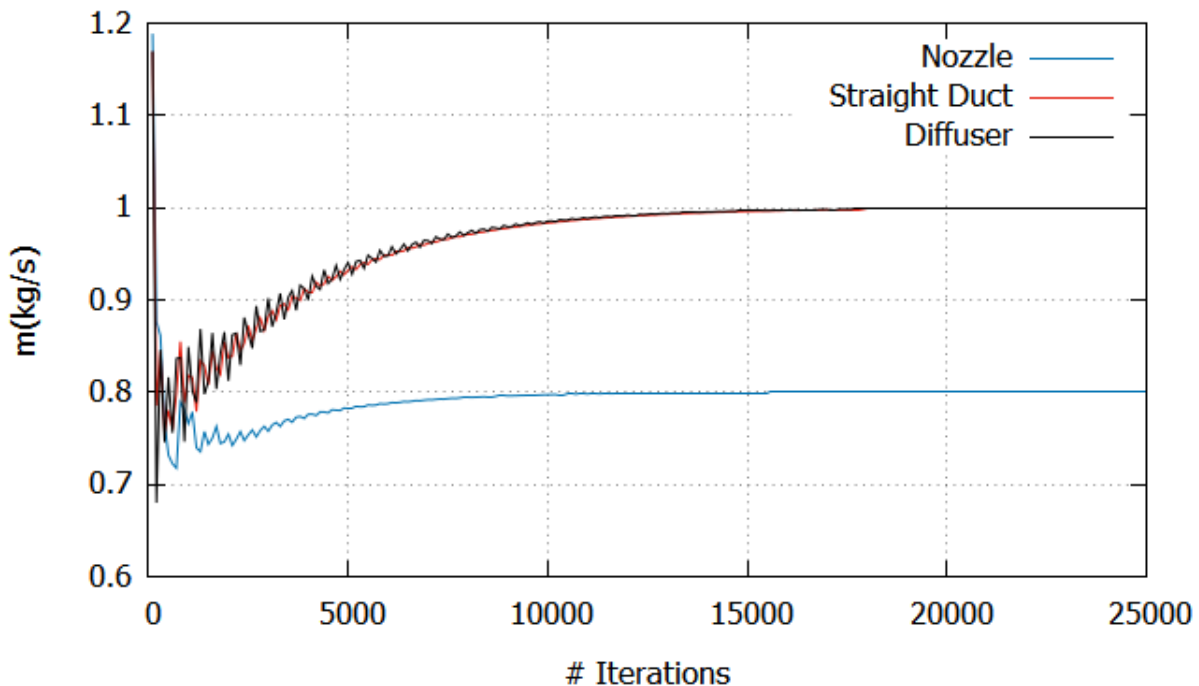
(γ') Σύστημα συγκλινόντων αγωγών

**Σχήμα 3.4:** Πεδίο του μέτρου της ταχύτητας για τις τρεις εξεταζόμενες διατάξεις στο χρονικά μόνιμο πρόβλημα.

Στον πίνακα 3.1 παρουσιάζονται οι απώλειες ολικής πίεσης και η διακινούμενη παροχή μάζας των τριών διατάξεων αδιαστατοποιημένες με τις αντίστοιχες τιμές του συστήματος των αποκλινόντων αγωγών. Το σύστημα των αποκλινόντων αγωγών παρουσιάζει τις μικρότερες απώλειες ολικής πίεσης, ενώ ακολουθεί το σύστημα των αγωγών σταθερής διατομής (με 1.24% περισσότερες απώλειες) και το σύστημα των συγκλινόντων αγωγών (με 57.69% περισσότερες απώλειες). Η παροχή μάζας του συστήματος των αποκλινόντων και των αγωγών σταθερής διατομής είναι πρακτικά ίδια, καθώς η διαφορά τους είναι μόλις 0.01%. Συγκριτικά με το σύστημα των συγκλινόντων αγωγών η διαφορά είναι σημαντικότερη, καθώς διακινείται περίπου 20% περισσότερη παροχή από το σύστημα των αγωγών σταθερής διατομής και των αποκλινόντων αγωγών. Στο σχήμα 3.5 παρουσιάζεται η διακινούμενη παροχή μάζας των τριών διατάξεων αδιαστατοποιημένες με τις αντίστοιχες τιμές του συστήματος των αποκλινόντων αγωγών.

	Diffuser	Straight Duct	Nozzle
$\Delta p_t \left( \frac{Pa}{Pa_{diff}} \right)$	1.0000	1.0124	1.5769
$\dot{m} \left( \frac{kg/s}{kg/s_{diff}} \right)$	1.0000	0.9999	0.7999

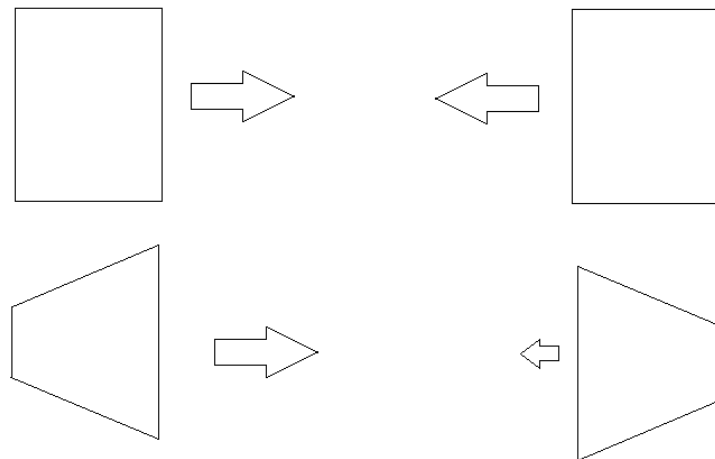
**Πίνακας 3.1:** Απώλειες ολικής πίεσης και παροχή μάζας στην έξοδο των τριών διατάξεων αδιαστατοποιημένη με τις απώλειες ολικής πίεσης και την παροχή μάζας της διάταξης των αποκλινόντων αγωγών αντίστοιχα.



**Σχήμα 3.5:** Παροχή μάζας των τριών διατάξεων αδιαστατοποιημένη με την παροχή μάζας της διάταξης του συστήματος των αποκλιόντων αγωγών. Με μπλε γραμμή παρουσιάζεται η παροχή μάζας του συστήματος των συγκλιόντων αγωγών, με κόκκινη των αγωγών σταθερής διατομής και με μαύρη των αποκλιόντων αγωγών.

Η ανωτέρω μελέτη για τις απώλειες ολικής πίεσης και τη διακινούμενη παροχή μάζας αφορά ακίνητη γεωμετρία με σταθερά όρια. Όμως, η λειτουργία της διαφραγματικής αντλίας βασίζεται στην κίνηση του διαφράγματος και είναι απαραίτητο να εξεταστεί η συμπεριφορά των διατάξεων σε κινούμενα όρια.

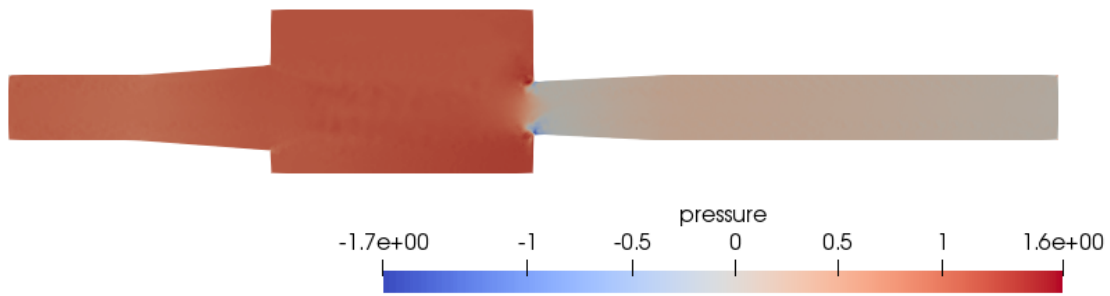
Είναι πιθανό η κίνηση του διαφράγματος να προκαλέσει κάποια χρονική αντιστροφή της κατεύθυνσης της ροής. Τέτοιο φαινόμενο, μπορεί να προκληθεί από μια απότομη μεταβολή του όγκου της διάταξης. Σε περίπτωση που η κατεύθυνση της ροής αντιστραφεί, σχήμα 3.6, η παροχή που θα διακινήθει από τον αγωγό σταθερής διατομής θα είναι ίδια και για τις δυο κατευθύνσεις της ροής. Η συμπεριφορά αυτή δεν παρατηρείται και στη διάταξη με τους διαχύτες. Όταν η ροή έχει την ορθή της κατεύθυνση (αυτή δηλαδή για την οποία σχεδιάστηκε η διάταξη), ο διαχύτης διακινεί παροχή μεγαλύτερη από όταν η κατεύθυνση της ροής αντιστραφεί. Όταν η κατεύθυνση της ροής αντιστραφεί, ο διαχύτης λειτουργεί πλέον ως ακροφύσιο και επομένως η παροχή που διακινεί θα είναι σαφώς μικρότερη. Επομένως, το σύστημα των αποκλιόντων αγωγών εξασφαλίζει πως η ποσότητα ρευστού που θα διακινήθει στην αντίθετη κατεύθυνση θα είναι η ελάχιστη και συνεπώς η διακινούμενη παροχή στην ορθή κατεύθυνση θα είναι η μέγιστη.



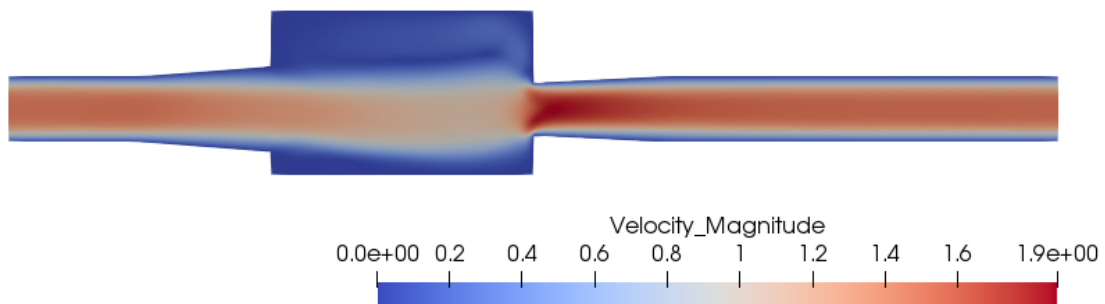
**Σχήμα 3.6:** Ποιοτική παράσταση της παροχής μάζας που διακινείται από αγωγό σταθερής διατομής και από αποκλίνοντα αγωγό σε ορθή και αντεστραμμένη κατεύθυνση της ροής.

Συμπερασματικά, το σύστημα των αποκλινόντων αγωγών και των αγωγών σταθερής διατομής διακινούν την ίδια παροχή μάζας με παρόμοιες απώλειες πίεσης σε ακίνητη γεωμετρία. Όμως, αναφορικά με τη συμπεριφορά σε κινούμενα όρια και σε περίπτωση αντιστροφής της κατεύθυνσης της ροής, το σύστημα των αποκλινόντων αγωγών διακινεί μικρότερη ποσότητα μάζας στην αντίθετη κατεύθυνση και συνεπώς μεγαλύτερη στην ορθή. Καθώς η υπό εξέταση διαφραγματική αντλία διαφέρει από τις συνήθεις διαφραγματικές αντλίες στο γεγονός ότι απουσιάζουν οι βαλβίδες οι οποίες ελέγχουν την κατεύθυνση της ροής, κρίνεται σημαντικότερη η επιλογή της διάταξης εκείνης που σε περίπτωση αντιστροφής της ροής ελαχιστοποιεί τη μάζα που διέρχεται προς την αντίθετη κατεύθυνση. Για το λόγο αυτό, επιλέγεται ως πλέον κατάλληλη διάταξη, η διάταξη με το σύστημα αποκλινόντων αγωγών/διαχύτων, γεγονός που προτείνεται και από τη διεθνή βιβλιογραφία.

Στα σχήματα 3.7(α'), 3.7(β') παρουσιάζεται η κατανομή της πίεσης και του μέτρου της ταχύτητας για τη διάταξη με τους αποκλίνοντες αγωγούς. Επισημαίνεται η διαίρεση της διάταξης σε δυο πεδία πιέσεων, υψηλής και χαμηλής, πριν και μετά την είσοδο της ροής στο δεύτερο διαχύτη. Στο πεδίο ταχυτήτων παρουσιάζεται σημαντική αύξηση του μέτρου της ταχύτητας κατά τη μεταφορά του ρευστού από το ορθογώνιο χωρίο στην είσοδο του δεύτερου διαχύτη.



(α') Κατανομή Πίεσης



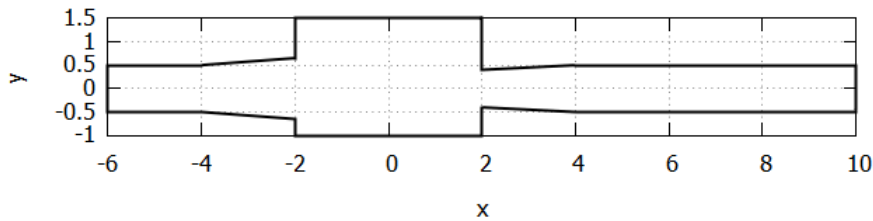
(β') Κατανομή Μέτρου Ταχύτητας

**Σχήμα 3.7:** Κατανομή του πεδίου της πίεσης (άνω) και του μέτρου της ταχύτητας (κάτω) στη διάταξη αποκλινόντων αγωγών για χρονικά μόνιμη ροή.

## 3.2 Μελέτη της Κίνησης της Μεμβράνης

Η κίνηση της μεμβράνης επιδρά σημαντικά στο ροϊκό πεδίο, επιταχύνοντας ή επιβραδύνοντας τη ροή και μεταβάλλοντας την κατεύθυνσή της. Ως αποτέλεσμα, η κίνηση επιδρά και στην παροχή μάζας η οποία διακινείται από τη διάταξη, με στόχο φυσικά την αύξησή της. Για το λόγο αυτό, η μοντελοποίηση της κίνησης έχει ιδιαίτερη σημασία έτσι ώστε όχι μόνο να συνεισφέρει θετικά στη λειτουργία της διάταξης (για παράδειγμα διακινώντας μεγαλύτερη παροχή) αλλά ταυτόχρονα να είναι πρακτικά υλοποιήσιμη.

Στη μελέτη αυτή προτείνεται ένας νέος τρόπος κίνησης του διαφράγματος. Πιο συγκεκριμένα, προτείνεται η κίνηση της μεμβράνης να προκαλείται από σύνολο εμβόλων σε διάταξη σταυρού, τα οποία εκτελώντας περιστροφική και μεταφορική κίνηση έρχονται σε επαφή με τη μεμβράνη και την παραμορφώνουν. Στο σχήμα 3.8 παρουσιάζεται η διάταξη που θα μελετηθεί. Το κινούμενο διάφραγμα βρίσκεται στο άνω όριο του ορθογώνιου χωρίου,  $x \in [-2, 2]$ ,  $y = 1.5$ .



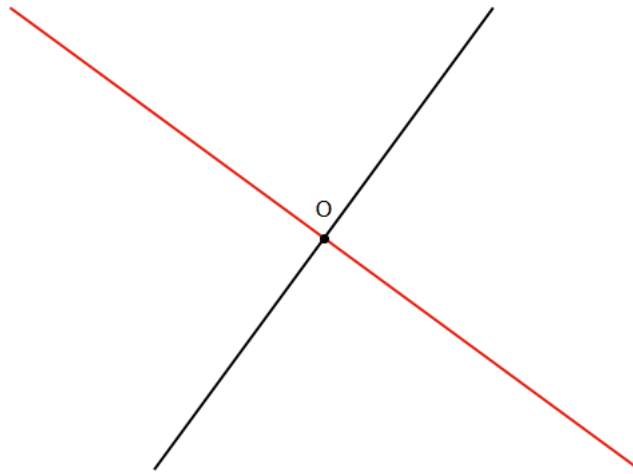
**Σχήμα 3.8:** Διαστάσεις της διαφραγματικής αντλίας. Το κινούμενο διάφραγμα βρίσκεται στο άνω όριο του ορθογώνιου χωρίου.

Περιστροφική κίνηση:

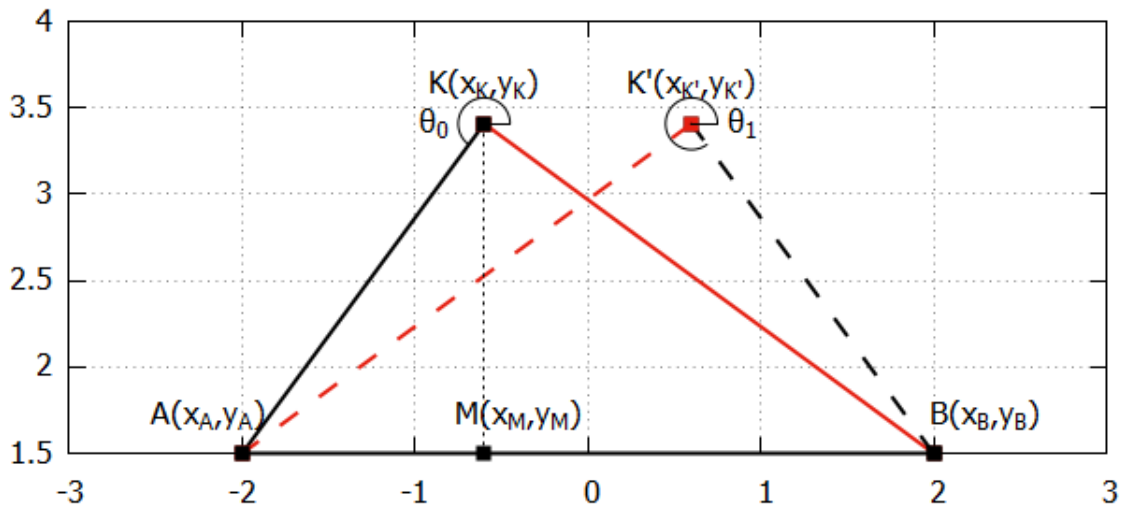
Τέσσερα έμβολα τοποθετημένα σε σχήμα ορθογώνιου σταυρού και ανά δυο ίσα περιστρέφονται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  περί το κέντρο του σταυρού  $O$ , σχήμα 3.9. Κάθε χρονική στιγμή μόνο ένα έμβολο έρχεται σε επαφή με τη μεμβράνη και την παραμορφώνει. Καθώς τα έμβολα είναι ανά δύο ίσα, η συχνότητα της περιστροφής είναι υποδιπλάσια της συχνότητας του ροϊκού φαινομένου. Επομένως, μισή περιστροφή της διάταξης του σταυρού αντιστοιχεί σε μια περίοδο αναφορικά με τη ροή και η συχνότητα της ροής είναι  $f = \omega/\pi$ .

Μεταφορική κίνηση:

Έστω  $A(x_A, y_A)$  και  $B(x_B, y_B)$  τα άκρα της μεμβράνης, σχήμα 3.10, και  $\lambda$  αδιάστατη ποσότητα που εκφράζει το ποσοστό μήκους της μεμβράνης ( $AB$ ) στο οποίο βρίσκεται σημείο  $M(x_M, y_M) = (x_A + \lambda(AB), y_A)$ . Στο σχήμα 3.10 η τιμή  $\lambda$  λαμβάνει την τιμή  $\lambda = 0.35$ . Κατακόρυφα στο σημείο  $M$  και επί ημικυκλίου διαμέτρου  $AB$  βρίσκεται σημείο  $K$ . Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AKB$  το ύψος ( $KM$ ) ορίζεται ως  $(KM)^2 = (AM)(MB)$ , άρα το σημείο  $K$  ορίζεται ως  $(x_K, y_K) = (x_M, y_M + \sqrt{(AM)(MB)})$ . Όταν το κέντρο περιστροφής  $O$  ταυτίζεται με το σημείο  $K$ , τότε το ένα άκρο της διάταξης του σταυρού,  $\Pi_1$ , βρίσκεται στο σημείο  $A$  και το άλλο άκρο,  $\Pi_2$ , στο σημείο  $B$ . Το μήκος των εμβόλων είναι  $\Pi_1 = \Pi_3 = (AK)$  και  $\Pi_2 = \Pi_4 = (KB)$ . Ορίζεται σημείο  $K'$  συμμετρικό του  $K$  ως προς το κέντρο της μεμβράνης με  $(x_{K'}, y_{K'}) = (-x_K, y_K)$ . Το κέντρο περιστροφής  $O$  εκτελεί μεταφορική κίνηση μεταξύ των σημείων  $K$  και  $K'$ . Η συμμετρία αυτών των σημείων εξασφαλίζει πως τη χρονική στιγμή κατά την οποία το κέντρο περιστροφής  $O$  βρίσκεται στο σημείο  $K'$ , το άκρο  $\Pi_1$  βρίσκεται στο σημείο  $B$  και το άκρο  $\Pi_4$  στο σημείο  $A$ , σχήμα 3.11. Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζεται ότι κάθε χρονική στιγμή το πολύ ένα έμβολο έρχεται σε επαφή με τη μεμβράνη. Έτσι, η μεμβράνη είτε παραμορφώνεται μόνο από ένα έμβολο, είτε δεν έρχεται σε επαφή με κάποιο από αυτά και δεν παραμορφώνεται.



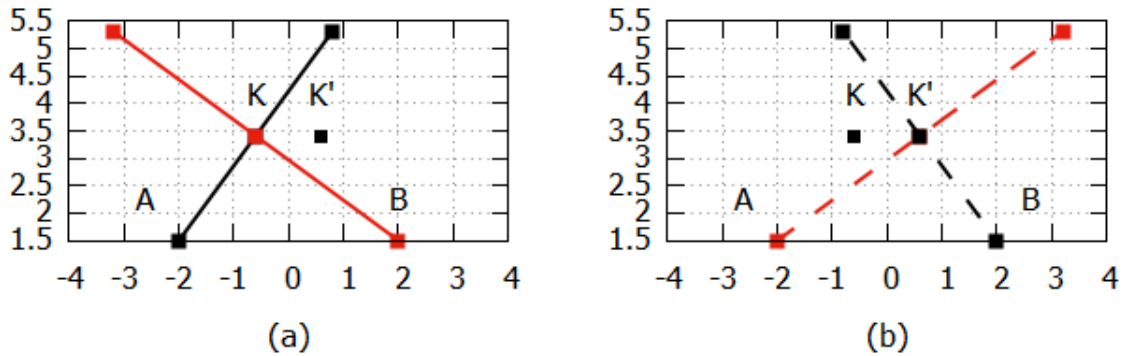
**Σχήμα 3.9:** Έμβολα σε διάταξη ορθογώνιου σταυρού με κέντρο περιστροφής το σημείο  $O$ . Τα άκρα του σταυρού είναι ανά δύο ίσα.



**Σχήμα 3.10:** Κύρια σημεία της μεταφορικής κίνησης του εμβόλου. Η μεμβράνη βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από τα σημεία  $A$  και  $B$ .

Η κίνηση που εκτελεί το κέντρο περιστροφής  $O$  ανάμεσα στα σημεία  $K$  και  $K'$  περιγράφεται από μια καμπύλη Bezier, η οποία θα αποκαλείται κάτω καμπύλη Bezier. Ορίζονται οι συντεταγμένες ενός σημείου  $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ . Η κάτω καμπύλη Bezier εκκινεί και τερματίζει στα σημεία  $K$  και  $K'$ , ενώ διέρχεται από το σημείο  $\Gamma$  το οποίο



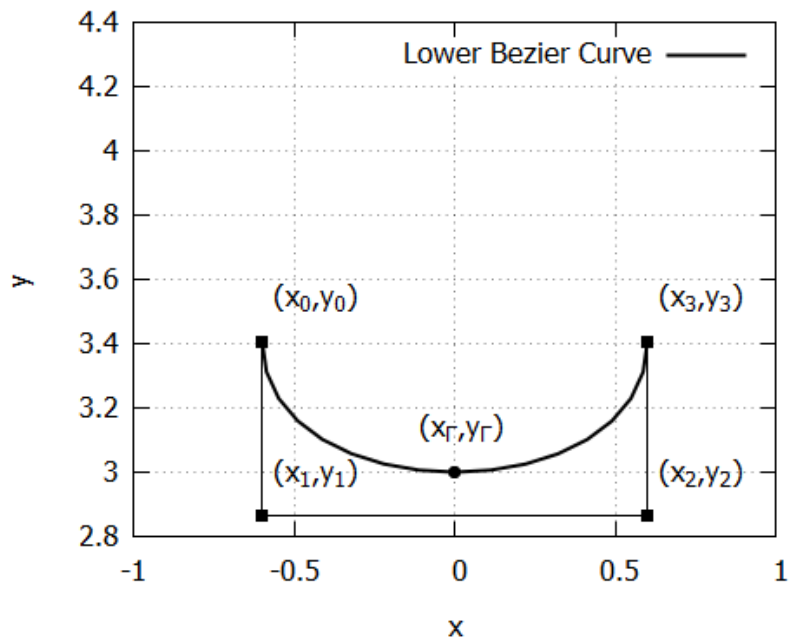


**Σχήμα 3.11:** Θέση των εμβόλων όταν το κέντρο περιστροφής ταυίζεται με τα σημεία  $K$  (a) και  $K'$  (b).

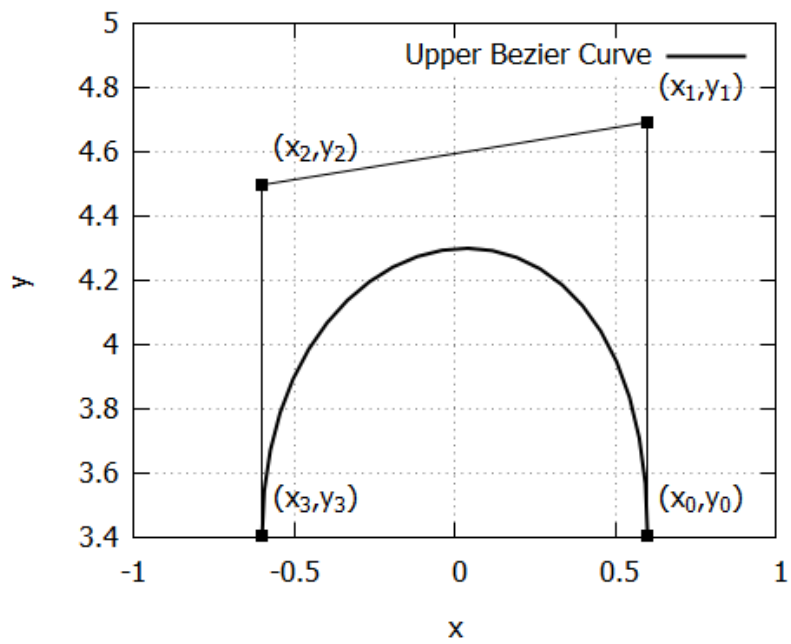
αποτελεί ακρότατο της καμπύλης. Απαιτείται ο προσδιορισμός τεσσάρων σημείων ελέγχου. Δυο σημεία ελέγχου είναι τα σημεία  $K$  και  $K'$ , οπότε  $(x_0, y_0) = (x_K, y_K)$  και  $(x_3, y_3) = (x'_{K'}, y'_{K'})$ . Θεωρείται ότι η καμπύλη έχει κατακόρυφη κλίση στην αρχή και το πέρας της, οπότε οι τετμημένες των σημείων ελέγχου 1 και 2 θα είναι ίδιες με εκείνες των σημείων 0 και 3. Επιβάλλοντας η καμπύλη να περνά από το σημείο  $\Gamma$  και να έχει μηδενική κλίση σε αυτό, προσδιορίζονται πλήρως τα σημεία 1 και 2. Τα σημεία ελέγχου και η κάτω καμπύλη Bezier παρουσιάζονται στο σχήμα 3.12(α'), για  $\Gamma(3, 0)$ . Το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να μετακινηθεί το κέντρο περιστροφής  $O$  από το σημείο  $K$  στο σημείο  $K'$  εξαρτάται από τη μεταβολή της γωνίας που σχηματίζει το άκρο  $\Pi_1$  με το οριζόντιο επίπεδο όταν το κέντρο περιστροφής βρίσκεται στα σημεία  $K$  και  $K'$ , σχήμα 3.10, 3.11 και  $\theta_1$  η γωνία άκρου  $\Pi_1$  όταν το κέντρο περιστροφής  $O$  βρίσκεται στο σημείο  $K'$ , σχήμα 3.10, 3.11, τότε η μεταβολή της γωνίας του είναι  $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_0$ . Καθώς η περιστροφική κίνηση γίνεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ , ο χρόνος που απαιτείται για να ολοκληρωθεί η κίνηση και να βρεθεί το κέντρο  $O$  στο  $K'$  είναι  $\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega}$ . Θεωρώντας πως τη χρονική στιγμή  $t = 0$  το κέντρο  $O$  βρίσκεται στο σημείο  $K$ , τότε η χρονική στιγμή κατά την οποία το κέντρο  $O$  βρίσκεται στο σημείο  $K'$  είναι  $t_{K'} = \frac{\Delta\theta}{\omega}$ .

Η μεταφορική κίνηση γίνεται με ταχύτητα σταθερού μέτρου. Η ταχύτητα αυτή προσδιορίζεται από το μήκος της κάτω καμπύλης Bezier ( $L_{down}$ ) και το χρόνο που απαιτείται

για να μεταβεί το κέντρο περιστροφής  $O$  στο σημείο  $K'$ ,  $(t_{K'})$ . Τη χρονική στιγμή  $t_{K'}$ , το άκρο  $\Pi_1$  βρίσκεται στο σημείο  $B$  και το άκρο  $\Pi_4$  στο σημείο  $A$ . Ο χρόνος που απαιτείται για να βρεθεί το άκρο  $\Pi_4$  στο σημείο  $B$ , και κατ' επέκταση το κέντρο περιστροφής  $O$  στο σημείο  $K$ , είναι  $t_K = T - t_{K'}$ . Προκειμένου να διατηρηθεί σταθερή η γραμμική ταχύτητα θα πρέπει το μήκος της άνω καμπύλης Bezier να είναι  $L_{up} = L_{down} \frac{t_K}{t_{K'}}$ . Η κλίση της άνω καμπύλης Bezier στα σημεία  $K$  και  $K'$  είναι κατακόρυφη, έτσι ώστε να υπάρχει συνέχεια πρώτης παραγώγου στα σημεία στα οποία εκκινούν και τερματίζουν οι δυο διαφορετικές καμπύλες. Τα σημεία  $K'$  και  $K$  αποτελούν σημεία ελέγχου της άνω καμπύλης Bezier με  $(x_0, y_0) = (x_{K'}, y_{K'})$  και  $(x_3, y_3) = (x_K, y_K)$ . Οι τετμημένες των σημείων ελέγχου 1 και 2 είναι  $x_1 = x_0$  και  $x_2 = x_3$ . Ορίζεται η πέμπτη ποσότητα  $y_2$ , η οποία δηλώνει την τεταγμένη του τρίτου σημείου ελέγχου. Για να οριστεί η καμπύλη Bezier απαιτείται ο προσδιορισμός της τεταγμένης του δεύτερου σημείου ελέγχου  $y_1$ . Η τεταγμένη αυτή πρέπει να είναι τέτοια ώστε το μήκος της καμπύλης Bezier που σχηματίζεται να είναι  $L_{up}$  για να διατηρείται σταθερή η γραμμική ταχύτητα μεταφοράς. Στο σχήμα 3.12(β') παρουσιάζονται τα σημεία ελέγχου της η άνω καμπύλη Bezier και η καμπύλη για  $y_2 = 4.5$ . Η ολική καμπύλη Bezier, η οποία αποτελείται από το άνω και το κάτω τμήμα, παρουσιάζεται στο σχήμα 3.13, όπου τονίζεται η συνέχεια της πρώτης παραγώγου στα σημεία στα οποία οι δυο καμπύλες ενώνονται.

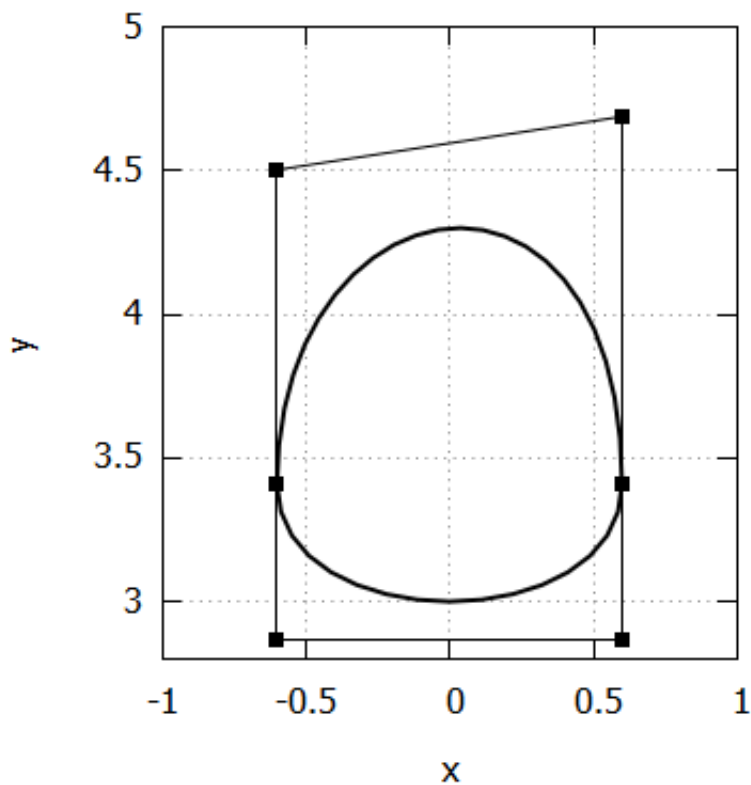


(α) Κάτω Καμπύλη



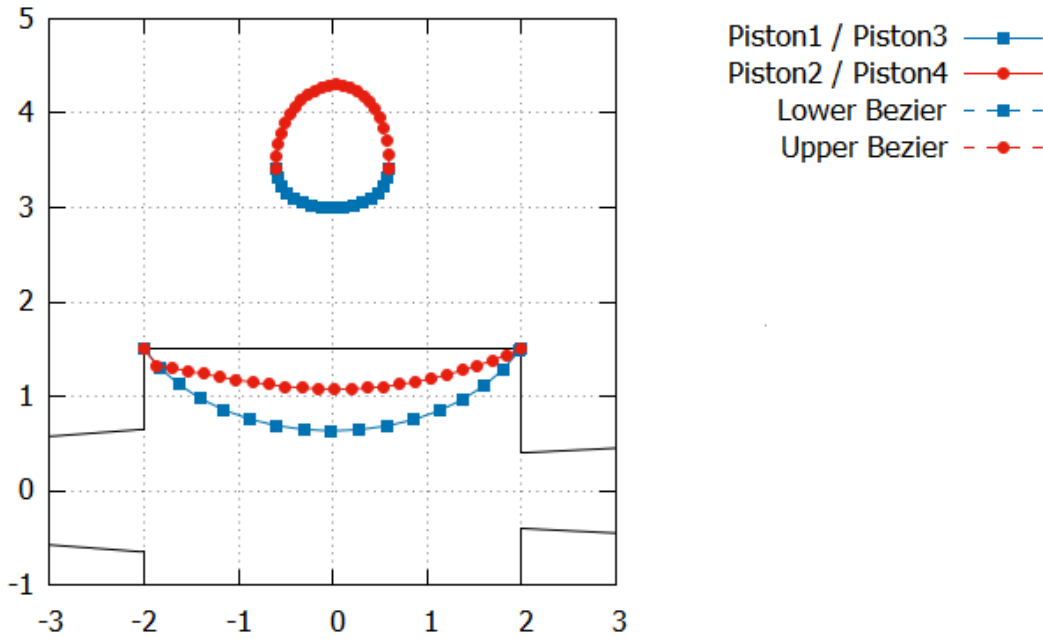
(β) Άνω Καμπύλη

Σχήμα 3.12: Καμπύλη Bezier και τα σημεία ελέγχου.



**Σχήμα 3.13:** Ολική καμπύλη Bezier ως σύνθεση της κάτω και άνω καμπύλης και τα σημεία ελέγχου. Διατήρηση της κλίσης στα σημεία επαφής των επιμέρους καμπυλών. Η κίνηση του σταυρού πάνω στην καμπύλη γίνεται ανθρωπολογικά.

Στο σχήμα 3.14 παρουσιάζεται η θέση του εμβόλου για 40 χρονικές στιγμές μιας περιόδου. Με μπλε γραμμή είναι η θέση του άκρου 1 / 3 και με κόκκινη η θέση του άκρου 2 / 4. Όπως φαίνεται, η χρονική διάρκεια της βύθισης των εμβόλων δεν είναι ίδια και εξαρτάται από τη γωνία που σχηματίζει το έμβολο την πρώτη χρονική στιγμή. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η μεμβράνη παραμορφώνεται χρονικά σε ποσοστό 40% από τα έμβολα 1 και 3 και 60% από τα έμβολα 2 και 4.



**Σχήμα 3.14:** Θέση των εμβόλων 1 - 3 (μπλε καμπύλη) και 2 - 4 (κόκκινη καμπύλη) σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου.

Όταν ένα έμβολο έρχεται σε επαφή με την μεμβράνη, τότε είναι γνωστή η θέση τριών σημείων της μεμβράνης, των δυο άκρων και του σημείου επαφής. Στο σημείο επαφής, η μεμβράνη υφίσταται τη μέγιστη παραμόρφωση, καθώς το σημείο αυτό έχει τη μέγιστη μετατόπιση ως προς την αρχική θέση και ως εκ τούτου μηδενική κλίση. Επιβάλλεται μηδενική κλίση και στα άκρα της μεμβράνης. Επομένως, για τον καθορισμό της θέσης κάθε σημείου της μεμβράνης αρκεί να παρεμβληθεί πολυώνυμο μεταξύ των τριών σημείων το οποίο θα ικανοποιεί και την κλίση στα σημεία αυτά. Γίνεται χρήση των τμηματικών συνεχών πολυωνύμων Hermite [29]. Τα πολυώνυμα Hermite ορίζονται ως (3.1).

$$\begin{aligned} H_0(u) &= 2u^3 - 3u^2 + 1 & H_1(u) &= -2u^3 + 3u^2 \\ \bar{H}_0(u) &= u^3 - 2u^2 + u & \bar{H}_1(u) &= u^3 - u^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

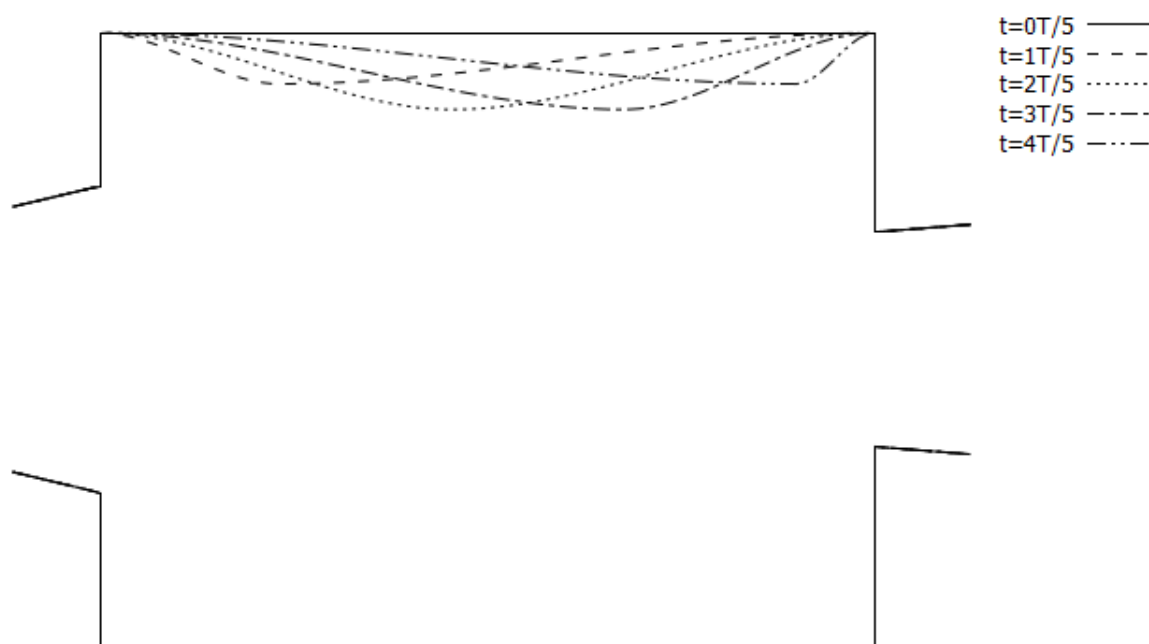
όπου  $u$  αδιάστατη παράμετρος που αντιστοιχεί για  $u = 0$  στο σημείο  $x_i$  και για  $u = 1$  στο σημείο  $x_{i+1}$ .

Εφαρμόζεται, επομένως, κυβική παρεμβολή κατά Hermite μεταξύ των σημείων  $(x_i, y_i)$  και  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  όπως ορίζεται στις σχέσεις

$$\begin{aligned} x &= x_i + u(x_{i+1} - x_i) \\ y &= y_i H_0(u) + y_{i+1} H_1(u) + \dot{y}_i \bar{H}_0(u) + \dot{y}_{i+1} \bar{H}_1(u) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Τα πολυώνυμα Hermite εφαρμόζονται δυο φορές, μεταξύ του ενός άκρου της μεμ-

βράνης (αρχή) και του σημείου με τη μέγιστη μετατόπιση και μεταξύ του σημείου με τη μέγιστη μετατόπιση και του άλλου άκρου της μεμβράνης (τέλος). Η επιβολή της κλίσης στο ενδιάμεσο σημείο εξασφαλίζει τη συνέχεια της πρώτης παραγωγώου. Στο σχήμα 3.15 παρουσιάζονται 5 χρονικά στιγμιότυπα της κίνησης της μεμβράνης.



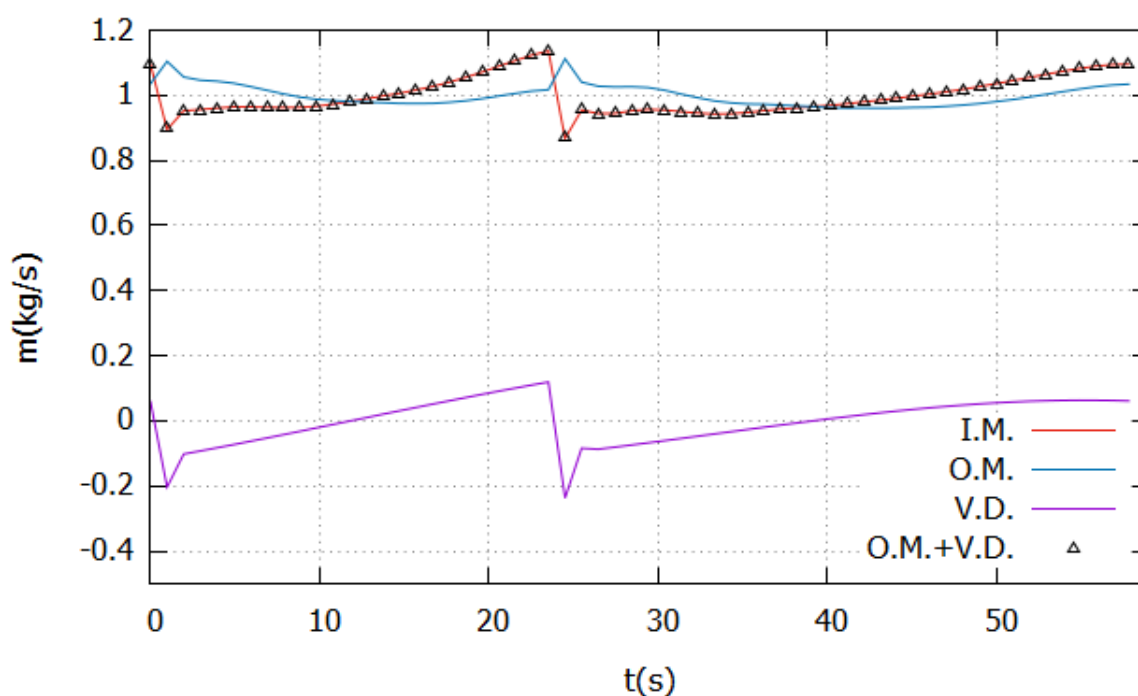
**Σχήμα 3.15:** Χρονικά στιγμιότυπα κίνησης της μεμβράνης.

Η κίνηση που περιγράφηκε απαιτεί τον προσδιορισμό 5 ποσοτήτων, μία αφορά την ταχύτητα της κίνησης και οι υπόλοιπες τέσσερις αφορούν τη γεωμετρία της. Επιλέχθηκε συχνότητα κίνησης 0.017Hz, που αντιστοιχεί σε περίοδο  $T = 60s$ . Η τιμή αυτή είναι τέτοια ώστε αφενός το φαινόμενο να μην είναι ιδιαίτερα υψίσυχο, οδηγώντας σε αντιστροφή της κατεύθυνσης της ροής, αφετέρου να μην είναι και ιδιαίτερα χαμηλόσυχο, μειώνοντας την επίδραση της κίνησης στη ροή. Θεωρώντας τις τιμές των υπόλοιπων ποσοτήτων όπως έχουν προσδιορισθεί, παρουσιάζεται στο σχήμα 3.16 το ισοζύγιο μάζας της διάταξης σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου στην οποία έχει αποκατασταθεί η περιοδικότητα της ροής. Στόχος είναι να εξετασθεί η φύση της κίνησης αλλά και να επαληθευθεί το ισοζύγιο μάζας.

Αναφορικά με τη μεταβολή της μάζας που προκαλείται από την κίνηση του διαφράγματος (μωβ καμπύλη) παρατηρούνται δυο απότομες μειώσεις. Η συμπεριφορά αυτή εμφανίζεται τις δυο χρονικές στιγμές που το άκρο του εμβόλου έρχεται πρώτη φορά σε επαφή με το διάφραγμα και το παραμορφώνει. Στις υπόλοιπες χρονικές στιγμές, η μεταβολή λόγω της κίνησης δεν είναι τόσο έντονη. Τις δυο χρονικές στιγμές στις

οποίες τα δύο έμβολα έρχονται πρώτη φορά σε επαφή με τη μεμβράνη, η κίνηση είναι κυρίως κατακόρυφη. Τις υπόλοιπες χρονικές στιγμές υπάρχει σημαντική κίνηση και στην οριζόντια κατεύθυνση, η οποία όμως δε συνεισφέρει σημαντικά στη μεταβολή του όγκου της αντλίας. Αξίζει να αναφερθεί ότι το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται ανεξάρτητα από την περίοδο και τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά της κίνησης. Η παροχή στην είσοδο της διάταξης (κόκκινη καμπύλη) επηρεάζεται σημαντικότερα από τη συμπεριφορά αυτή συγκριτικά με την παροχή στην έξοδο (μπλε καμπύλη). Επομένως η διατομή εισόδου φαίνεται να είναι πιο ευαίσθητη στην κίνηση του διαφράγματος.

Για να ικανοποιείται το ισοζύγιο μάζας πρέπει η παροχή που εισέρχεται στη διάταξη να ισούται με την παροχή που εξέρχεται από τη διάταξη και την παροχή που προκαλείται λόγω της κίνησης (μαύρα σημεία). Πράγματι, το ισοζύγιο επαληθεύεται με απόκλιση  $10^{-1}\%$  τις χρονικές στιγμές πρώτης βύθισης του εμβόλου και  $10^{-2}\%$  τις υπόλοιπες χρονικές στιγμές. Τα ποσοστά αυτά είναι ιδιαίτερα ικανοποιητικά ακόμα και τις χρονικές στιγμές που λαμβάνουν χώρα οι δυο απότομες μεταβολές.



**Σχήμα 3.16:** Ισοζύγιο για την παροχή μάζας στην είσοδο (Incoming Mass - κόκκινη γραμμή), στην έξοδο (Outgoing Mass - μπλε γραμμή) και τη μεταβολή της μάζας λόγω κίνησης του διαφράγματος (Volume Difference - μωβ γραμμή) της διάταξης. Η παροχή εξόδου και η μεταβολή της μάζας λόγω κίνησης του διαφράγματος (μαύρα τρίγωνα) ισούνται με την παροχή εισόδου. Οι τιμές των παροχών είναι αδιαστατοποιημένες με την τιμή στη χρονικά μόνιμη κατάσταση.





## Κεφάλαιο 4

# Βελτιστοποίηση της Διαφραγματικής Αντλίας με χρήση Εξελικτικών Αλγορίθμων

Κομβικό σημείο στη λειτουργία της αντλίας αποτελεί ο τρόπος με τον οποίο πραγματοποιείται η κίνηση του διαφράγματος. Η κίνηση αυτή λαμβάνει χώρα με σκοπό τη βελτίωση της λειτουργίας της αντλίας, με τη διακίνηση, για παράδειγμα, μεγαλύτερης παροχής. Ωστόσο, η κίνηση είναι δυνατόν να προκαλέσει επιπρόσθετα ζητήματα στη λειτουργία της αντλίας, ζητήματα τα οποία δεν εμφανίζονται σε περίπτωση μη κίνησης. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η αλλαγή της κατεύθυνσης της ροής, η οποία όχι μόνο καθιστά τη λειτουργία της αντλίας μη προβλέψιμη, αλλά ταυτόχρονα δυσχεραίνει και την επίτευξη του σκοπού για τον οποίο κινείται το διάφραγμα, την αύξηση δηλαδή της παροχής. Για τους ανωτέρω λόγους, η βελτιστοποίηση της κίνησης του διαφράγματος κρίνεται απαραίτητη. Στο κεφάλαιο αυτό πραγματοποιείται βελτιστοποίηση της διαφραγματικής αντλίας με χρήση εξελικτικών αλγορίθμων. Περιγράφεται η αρχή λειτουργίας των ΕΑ καθώς και μια μέθοδος επιτάχυνσής τους. Διατυπώνεται το προς βελτιστοποίηση πρόβλημα και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης με ΕΑ. Η βελτιστοποίηση πραγματοποιείται με τον επιλύτη ροής που χειρίζεται οριόδετα, μη-δομημένα πλέγματα.

## 4.1 Περί Εξελικτικών Αλγορίθμων

Ένας εξελικτικός αλγόριθμος, [30], [31] αξιολογεί πληθυσμούς λύσεων. Ένας πληθυσμός  $\mu$  υποψηφίων λύσεων/γονέων εξελίσσεται σε ένα πληθυσμό  $\lambda$  νέων υποψηφίων λύσεων/απογόνων. Από του  $\lambda$  απογόνους θα επιλεγούν οι  $\mu$  γονείς της επόμενης γενιάς με κριτήριο την καταλληλότητά τους. Κατά τη διαδικασία αυτή τα άτομα τα οποία αποτελούν καλύτερες λύσεις διασταυρώνονται μεταξύ τους με στόχο να προκύψει μια ακόμα καλύτερη λύση. Σε κάθε γενιά  $g$  του ΕΑ υπάρχουν τρία πληθυσμιακά σύνολα: το σύνολο των γονέων  $S^{g,\mu}$ , το σύνολο των απογόνων  $S^{g,\lambda}$  και το σύνολο των επίλεκτων (elite)  $S^{g,e}$ . Το σύνολο των επίλεκτων ατόμων  $S^{g,e}$  περιλαμβάνει τις βέλτιστες λύσεις που έχουν προκύψει μέχρι εκείνη τη γενιά  $g$ .

Έστω πρόβλημα βελτιστοποίησης  $M$  στόχων με περιορισμούς:

$$\min \vec{f}(\vec{x}) = \min \left[ \vec{f}_1(\vec{x}), \dots, \vec{f}_M(\vec{x}) \right] \quad (4.1)$$

$$\vec{c} \leq \vec{c}_{thres}$$

Παρουσιάζεται η διαδικασία που ακολουθείται από ένα ΕΑ για πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση (Multi-Objective Optimization - MOO):

1. Επιλέγεται το μέγεθος των πληθυσμών  $S^{g,\mu}$  και  $S^{g,\lambda}$ , προσδιορίζονται δηλαδή οι παράμετροι  $\mu$  και  $\lambda$ . Καθώς πρόκειται για τη μηδενική γενιά τίθεται  $g = 0$  και επιλέγονται τυχαία τα μέλη του αρχικού πληθυσμού  $S^{0,\mu}$ . Πέραν της τυχαίας αρχικοποίησης μπορεί να δοθεί από το χρήστη μέρος του πληθυσμού  $S^{0,\mu}$ .
2. Τα άτομα του συνόλου  $S^{g,\lambda}$  αξιολογούνται κάνοντας χρήση του λογισμικού αξιολόγησης και λαμβάνουν τιμή στο διάνυσμα των συναρτήσεων-στόχων. Σε περίπτωση που η λύση αυτή δεν πληροί το κριτήριο του περιορισμού, τότε στην τιμή αυτής προστίθεται μια ποινή εκθετικά ανάλογη του βαθμού μη-ικανοποίησης του περιορισμού. Η ποινή αυτή είναι:

$$p = \exp \left( a_k \frac{c_k(x) - c_k^{thres}}{d_k^* - c_k^{thres}} \right) \quad (4.2)$$

όπου  $c_k(x)$  η τιμή του περιορισμού,  $c_k^{thres}$  το ανώτατο επιτρεπτό όριο και  $d_k^*$  τιμή πέραν της οποίας η ποινή λαμβάνει τιμή που τείνει στο άπειρο αποκλείοντας ουσιαστικά την τρέχουσα λύση από τη διαδικασία της εξέλιξης.

3. Το σύνολο των επίλεκτων  $S^{g,e}$  ανανεώνεται με όσα άτομα του πληθυσμού  $S^{g,\lambda}$  αποτελούν λύσεις που μπορεί να ανήκουν στις επίλεκτες. Είναι δυνατό κατά την εισαγωγή νέων μελών να διαγραφούν υπάρχοντα μέλη της ομάδας των επίλεκτων αν τα πρώτα λαμβάνουν καλύτερη τιμή στο διάνυσμα των συναρτήσεων-στόχων.

4. Από το σύνολο των επίλεκτων  $S^{g,e}$  επιλέγονται με τυχαίο τρόπο άτομα τα οποία αντικαθιστούν άτομα του συνόλου  $S^{g,\lambda}$ . Τα άτομα τα οποία αντικαθίστανται είναι συνήθως αυτά που αποτελούν χειρότερες λύσεις. Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζεται ότι η νέα γενιά θα δώσει καλύτερες ή τουλάχιστον το ίδιο καλές λύσεις με την τρέχουσα και σε καμία περίπτωση χειρότερες.
5. Επιλέγεται το σύνολο των γονέων της επόμενης γενιάς  $S^{g+1,\mu}$ , από τον υπάρχοντα πληθυσμό γονέων  $S^{g,\mu}$  και το σύνολο των απογόνων  $S^{g,\lambda}$ .
6. Εφαρμόζεται η διαδικασία της αναπαραγωγής κατά την οποία δυο ή περισσότεροι γονείς από το σύνολο  $S^{g+1,\mu}$  διασταυρώνονται προκειμένου να δημιουργήσουν τους  $\lambda$  απογόνους της γενιάς  $S^{g+1,\lambda}$ .
7. Πραγματοποιείται έλεγχος του κριτηρίου σύγκλισης. Αν έχει γίνει ο μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων ή αν για ένα ορισμένο πλήθος διαδοχικών γενεών δεν υπάρχει βελτίωση των λύσεων τότε ο αλγόριθμος τερματίζει. Διαφορετικά επαναλαμβάνονται τα βήματα 2 με 6.

Για να γίνει η αξιολόγηση μιας υποψήφιας λύσης είναι απαραίτητο να επιλυθούν οι εξισώσεις Navier Stokes, (2.15). Η ανωτέρω επίλυση είναι ιδιαίτερα χρονοβόρα και συνοδεύεται από υψηλό υπολογιστικό κόστος. Επιπλέον, καθώς οι ΕΑ χειρίζονται σύνολο λύσεων και η αποτελεσματικότητά τους βασίζεται στην αξιολόγηση μεγάλου πλήθους αυτών, το κόστος της διαδικασίας της βελτιστοποίησης διαφαίνεται απαγορευτικό. Ένας τρόπος μείωσης του υπολογιστικού χρόνου αποτελεί η μείωση του αριθμού των λύσεων που αξιολογούνται με τον ανωτέρω τρόπο. Τα μεταπρότυπα (metamodels), λαμβάνοντας πληροφορία από τις προηγούμενες αξιολογήσεις, προσεγγίζουν ταχύτερα την τιμή των συναρτήσεων-στόχων χωρίς να γίνεται χρήση του λογισμικού αξιολόγησης. Αν η λύση που προκύπτει από την αξιολόγηση με τη χρήση μεταπρότυπων είναι μια εξαιρετικά καλή λύση, τότε αυτή αξιολογείται επακριβώς και με το λογισμικό αξιολόγησης. Με τον τρόπο αυτό δημιουργούνται οι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι Υποβοηθούμενοι με Μεταπρότυπα (Metamodel Assisted Evolutionary Algorithms - MAEA) [32], [2], [33].

Πληροφορία από άτομα τα οποία έχουν αξιολογηθεί επακριβώς με το λογισμικό αξιολόγησης αποθηκεύεται σε μια βάση δεδομένων (Database - DB). Κατάλληλα επιλεγμένο υποσύνολο της βάσης δεδομένων που ονομάζεται δείγμα εκπαίδευσης (training patterns) χρησιμοποιείται προκειμένου να εκπαιδεύσει ένα μεταπρότυπο.

Στη ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ έχει αναπτυχθεί το λογισμικό βελτιστοποίησης E.A.SY. (Evolutionary Algorithm SYstem) βασισμένο στη θεωρία των εξελικτικών αλγορίθμων το οποίο, μεταξύ άλλων, περιλαμβάνει και μεταπρότυπα. Το λογισμικό αυτό χρησιμοποιήθηκε στη διπλωματική αυτή εργασία.

## 4.2 Καθορισμός Στόχων , Περιορισμών και Μεταβλητών Σχεδιασμού

Η βελτιστοποίηση που πραγματοποιείται είναι δικριτηριακή. Πρώτος στόχος είναι η μεγιστοποίηση της παροχής μάζας  $\dot{m}$  η οποία διακινείται από την έξοδο σε διάστημα μιας περιόδου  $T$ , εξίσωση (4.3). Στην εξίσωση (4.3)  $S_{out}$  είναι η διατομή εξόδου,  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού (σταθερή καθώς η ροή είναι ασυμπίεστη),  $u_m$  το διάνυσμα της ταχύτητας και  $n_m$  το κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα.

$$\max \frac{1}{T} \int_T \int_{S_{out}} \rho u_m n_m dS_{out} dt \quad (4.3)$$

Δεύτερος στόχος είναι η ελαχιστοποίηση της διακύμανσης της παροχής στο διάστημα μιας περιόδου. Αν  $nt$  το πλήθος των χρονικών στιγμών που επιλύεται η ροή,  $\dot{m}(t)$  η παροχή σε μια χρονική στιγμή  $t$  και  $\bar{\dot{m}}$  η μέση τιμή της παροχής στο διάστημα μιας περιόδου τότε η διακύμανση υπολογίζεται από τη σχέση (4.4)

$$\min \sqrt{\frac{\sum_{t=0}^{t=nt} (\dot{m}(t) - \bar{\dot{m}})^2}{nt}} \quad (4.4)$$

Έτσι, οι συναρτήσεις-στόχοι είναι:

$$\begin{aligned} \max F_1 &= \frac{1}{T} \int_T \int_{S_{out}} \rho u_m n_m dS_{out} dt \\ \min F_2 &= \min \sqrt{\frac{\sum_{t=0}^{t=nt} (\dot{m}(t) - \bar{\dot{m}})^2}{nt}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ως περιορισμός της βελτιστοποίησης τίθεται να μην αντιστρέφεται η κατεύθυνση της ροής στην είσοδο και στην έξοδο της διάταξης καθόλη τη διάρκεια της περιόδου. Αν  $nt$  το πλήθος των χρονικών στιγμών στο οποίο διακριτοποιείται μια περίοδος,  $n_{in}$  το πλήθος των κόμβων της διατομής εισόδου και  $n_{out}$  το πλήθος των κόμβων της διατομής εξόδου τότε

$$c_1 = nt (n_{in} + n_{out}) - \sum_{nt} \sum_{n_{in}+n_{out}} \frac{u_m n_m}{\sqrt{(u_m n_m)^2 + \epsilon}} \leq 0 \quad (4.6)$$

όπου  $\epsilon$  μια ελάχιστη τιμή σε περίπτωση που η ταχύτητα σε κάποιο κόμβο είναι μηδενική.

Στην έκφραση του περιορισμού ο δεύτερος όρος  $\sum_{nt} \sum_{n_{in}+n_{out}} \frac{u_m n_m}{\sqrt{(u_m n_m)^2 + \epsilon}}$  αθροίζει είτε 1, σε περίπτωση που η ροή έχει ορθή κατεύθυνση, είτε -1 σε περίπτωση που η ροή έχει αντιστραφεί. Το σύνολο των προς άθροιση όρων είναι  $nt (n_{in} + n_{out})$ . Επομένως, ο περιορισμός λαμβάνει μηδενική τιμή όταν η κατεύθυνση της ροής διατηρείται για όλους τους κόμβους της διατομής εισόδου και εξόδου και για όλη την περίοδο. Προφανώς ο περιορισμός δεν μπορεί να λάβει αρνητικές τιμές. Το σύμβολο της ανισο-ισότητας δεν έχει φυσική σημασία και χρησιμοποιείται για τη διατήρηση της συμβατότητας με την οποία εκφράζονται οι περιορισμοί σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με ΕΑ.

Αναζητείται, ουσιαστικά το σύνολο των λύσεων της κίνησης του διαφράγματος που διακινεί, συνολικά, τη μέγιστη παροχή μάζας ανά περίοδο κίνησης με την ελάχιστη διακύμανση, εξασφαλίζοντας ταυτόχρονα τη διατήρηση της κατεύθυνσης της ροής σε όλη την περίοδο του φαινομένου.

Ορίζεται το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού  $\vec{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5] = [f \ \lambda \ x_\Gamma \ y_\Gamma \ y_2]$ . Η πρώτη μεταβλητή σχεδιασμού  $f$  είναι η συχνότητα του ροϊκού φαινομένου, η οποία είναι διπλάσια της συχνότητας περιστροφής του σταυρού. Οι υπόλοιπες 4 μεταβλητές σχεδιασμού καθορίζουν το πώς θα πραγματοποιηθεί η κίνηση της διάταξης του σταυρού και έχουν περιγραφεί αναλυτικά στην παράγραφο 3.2.

Για τη συχνότητα του ροϊκού φαινομένου τα όρια είναι  $f \in [0.01, 0.2]$ . Από δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν πριν τη διαδικασία της βελτιστοποίησης παρατηρήθηκε ότι για τιμές της συχνότητας μεγαλύτερες του άνω ορίου, η ροή στην είσοδο και στην έξοδο της διάταξης αντιστρέφεται ολικώς ή μερικώς.

Η μεταβλητή  $\lambda$  καθορίζει τη θέση από την οποία εκκινεί ο σταυρός τη μεταφορική του κίνηση συναρτήσει του μήκους της μεμβράνης. Η θέση αυτή είναι στο πρώτο μισό τμήμα της διάταξης,  $\lambda < 0.5$ , ενώ επιπλέον επιλέγεται η εκκίνηση να μη γίνει στην αρχή ή ακριβώς στη μέση της μεμβράνης. Για το λόγο αυτό τα όρια της μεταβλητής  $\lambda$  είναι  $\lambda \in [0.05, 0.45]$ .

Το σημείο  $\Gamma$  καθορίζει τη θέση που η κάτω καμπύλη Bezier παρουσιάζει ακρότατο. Το σημείο αυτό πρέπει να είναι δεξιότερα του σημείου εκκίνησης και πιο χαμηλά από αυτό. Έτσι τα όρια των μεταβλητών  $x_\Gamma, y_\Gamma$  είναι  $x_\Gamma \in [-0.85, 0.85]$ ,  $y_\Gamma \in [2.5, 3.5]$ . Υπάρχει περίπτωση ο συνδυασμός των μεταβλητών  $\lambda$  και  $x_\Gamma, y_\Gamma$  να είναι τέτοιος που το σημείο  $\Gamma$  να είναι είτε πιο αριστερά από το σημείο εκκίνησης είτε πιο ψηλά. Η λύση αυτή δεν είναι αποδεκτή. Αν τα όρια των μεταβλητών  $\lambda$  και  $x_\Gamma, y_\Gamma$  ορίζονταν με τρόπο τέτοιο ώστε κάθε πιθανός συνδυασμός να οδηγούσε σε αποδεκτή κίνηση, τότε θα ήταν ιδιαίτερα στενού εύρους με μικρή συνεισφορά στη διαδικασία της βελτιστοποίησης.

Τέλος, η μεταβλητή  $y_2$ , η οποία είναι η τεταγμένη του τρίτου σημείο ελέγχου της

άνω καμπύλης Bezier, απαιτείται να είναι μεγαλύτερης τιμής από την τεταγμένη του σημείου εκκίνησης της μεταφοράς του σταυρού και, επομένως, τα σχεδιαστικά της όρια είναι  $y_2 \in [3.5, 7.0]$ .

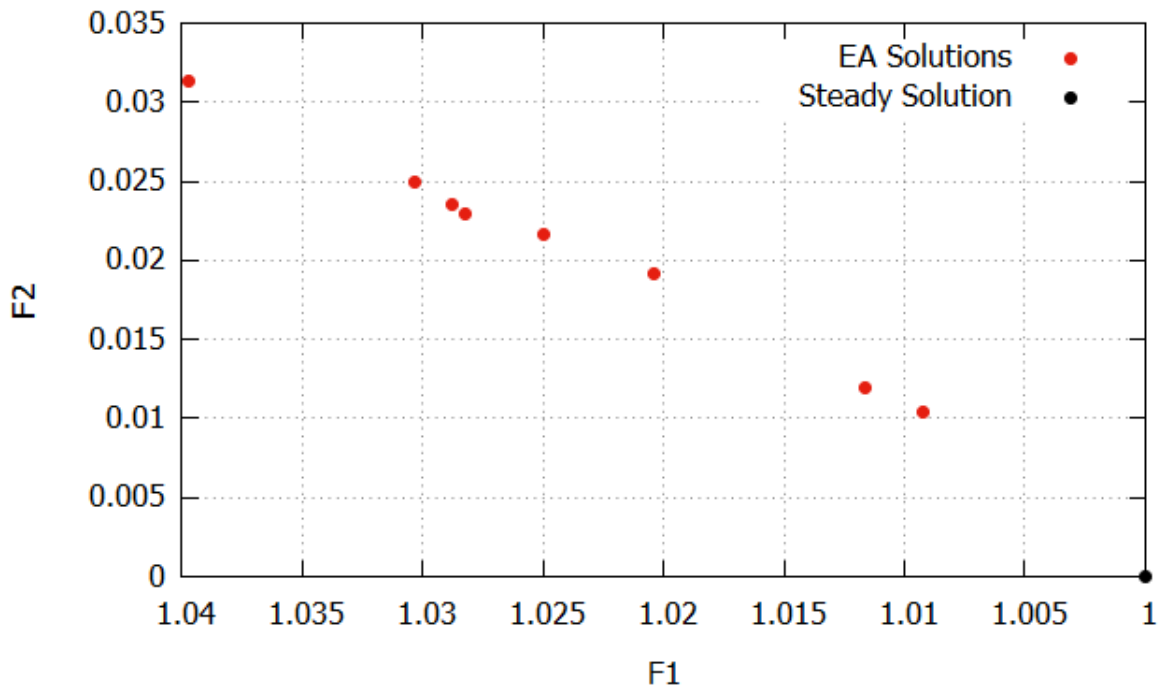
### 4.3 Αποτελέσματα της βελτιστοποίησης

Η βελτιστοποίηση της διαφραγματικής αντλίας πραγματοποιήθηκε με το λογισμικό *E.A.SY.* ενώ χρησιμοποιήθηκαν και μεταπρότυπα. Επιλέχθηκε πληθυσμός  $(\mu, \lambda) = (5, 10)$ . Τα μεταπρότυπα που εφαρμόστηκαν ανήκουν στην κατηγορία των Τεχνητών Νευρωνικών Δικτύων (Artificial Neural Networks - ANN) και, πιο συγκεκριμένα, είναι τα Δίκτυα Νευρωνικής Ακτινικής Βάσης με Συντελεστές Σημαντικότητας Σημασίας (Radial Basis Function with Importance Factors - RBF-IFs) [34] με δύο ακριβείς αξιολογήσεις ανά γενιά.

Τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης με το λογισμικό *E.A.SY.*, παρουσιάζονται μέσω του διαγράμματος Pareto, [35], στο σχήμα 4.1. Αξιολογήθηκαν συνολικά 215 υποψήφιος λύσεις. Το μέτωπο Pareto περιλαμβάνει 8 άτομα που προέκυψαν από τη βελτιστοποίηση με το λογισμικό *E.A.SY.* (κόκκινο) και ένα άτομο (μαύρο) που προστέθηκε μεταγενέστερα. Το άτομο αυτό αποτελεί τη λύση της χρονικά μόνιμης κατάστασης, όταν δηλαδή ο σταυρός είναι ακίνητος και το διάφραγμα δεν υφίσταται καμία παραμόρφωση. Καθώς οι μεταβλητές σχεδιασμού αφορούν την κίνηση του σταυρού και κατ'επέκταση του διαφράγματος, η λύση αυτή είναι ανεξάρτητη των μεταβλητών σχεδιασμού και εξαρτάται αποκλειστικά από την αρχική γεωμετρία. Η λύση αυτή είναι η βέλτιστη ως προς τη δεύτερη συνάρτηση-στόχο καθώς η διακύμανση της ροής λαμβάνει προφανώς μηδενική τιμή.

Στον οριζόντιο άξονα παρουσιάζεται η τιμή της πρώτης συνάρτησης-στόχου δηλαδή η διακινούμενη παροχή ανά περίοδο κίνησης αδιαστατοποιημένη με την τιμή στη χρονικά μόνιμη κατάσταση. Στον κατακόρυφο άξονα παρουσιάζεται η τιμή της δεύτερης συνάρτησης-στόχου, δηλαδή η διακύμανση της παροχής.

Στον πίνακα 4.1 παρουσιάζεται η τιμή των συναρτήσεων-στόχων  $F_1$  και  $F_2$  των ατόμων που απαρτίζουν το μέτωπο Pareto στις στήλες 1 και 2 αντίστοιχα. Όπως και στο σχήμα 4.1 η συνάρτηση-στόχος  $F_1$  αδιαστατοποιείται με την τιμή της χρονικά μόνιμης κατάστασης, όταν δεν υπάρχει καμία κίνηση του σταυρού. Στις στήλες 3-7 αναγράφεται η τιμή των μεταβλητών σχεδιασμού για την κάθε λύση και στην τελευταία στήλη η τιμή του περιορισμού. Η τελευταία γραμμή του πίνακα περιέχει τη λύση της χρονικά μόνιμης κατάστασης η οποία όπως έχει ειπωθεί είναι ανεξάρτητη των μεταβλητών σχεδιασμού.



**Σχήμα 4.1:** Μέτωπο Pareto αποτελούμενο από λύσεις του EA (κόκκινα σημεία) και τη χρονικά μόνιμη λύση (μαύρο σημείο). Η τιμή της συνάρτησης-στόχου  $F_1$  αδιαστατοποιείται με την τιμή στη μόνιμη κατάσταση.

$F_1$	$F_2$	f	$\lambda$	$x_\Gamma$	$y_\Gamma$	$y_{cp}$	c
1.0397	0.0313	0.0113	0.2224	0.1088	2.7933	6.0318	0
1.0303	0.0249	0.0113	0.1994	-0.1354	2.7933	6.0318	0
1.0288	0.0235	0.0113	0.1994	-0.1354	2.7004	4.1637	0
1.0283	0.0229	0.0113	0.1994	0.1088	2.7004	4.1637	0
1.0250	0.0216	0.0113	0.1755	0.1587	2.7004	4.1740	0
1.0204	0.0191	0.0113	0.2224	0.1088	2.7004	4.1637	0
1.0116	0.0119	0.0113	0.1274	0.0540	2.5469	6.2473	0
1.0093	0.0104	0.0115	0.1243	-0.0540	2.5577	6.2952	0
1	0	-	-	-	-	-	0

**Πίνακας 4.1:** Τιμές των συναρτήσεων-στόχων (στήλη 1,2), των μεταβλητών σχεδιασμού (στήλη 3,7) και του περιορισμού (στήλη 8) για τα άτομα του μετώπου Pareto.

Πρώτος στόχος της βελτιστοποίησης,  $max F_1$ , αποτελεί η εύρεση της κίνησης του διαφράγματος που μεγιστοποιεί τη διακινούμενη παροχή ανά περίοδο κίνησης. Για να έχει ισχύ η διαδικασία της βελτιστοποίησης, αναμένεται η τιμή των επίλεκτων λύσεων αναμένεται να είναι καλύτερη από εκείνη της χρονικά μόνιμης κατάστασης. Οι επίλεκτες λύσεις, σχήμα 4.1, διακινούν από 0.93% έως 3.97% περισσότερη παροχή ανά περίοδο

δο από τη χρονικά μόνιμη κατάσταση στο ίδιο χρονικό διάστημα. Δεύτερος στόχος,  $min F_2$ , αποτελεί η ελαχιστοποίηση της διακύμανσης της παροχής. Καθώς στη χρονικά μόνιμη κατάσταση η διακύμανση είναι μηδενική, κάθε λύση που προκύπτει από τον ΕΑ θα είναι χειρότερη λύση ως προς τον στόχο αυτό. Η διακύμανση των επίλεκτων λύσεων κυμαίνεται από 1.04% έως 3.13%. Στις επίλεκτες λύσεις αύξηση της διακινούμενης παροχής συνοδεύεται από αύξηση της διακύμανσής της.

Η πρώτη μεταβλητή σχεδιασμού  $f$  έχει όρια  $f \in [0.01, 0.2]$ . Και στις 8 κυρίαρχες λύσεις η συχνότητα λαμβάνει τιμές πολύ κοντά στο κάτω όριο, ενώ στις 7 από αυτές η τιμή της συχνότητας είναι ίδια. Η συχνότητα της κίνησης διαδραματίζει τον σημαντικότερο ίσως ρόλο στη διατήρηση της κατεύθυνσης της ροής. Η κίνηση του εμβόλου είναι τέτοια που προκαλεί σημαντική μεταβολή του όγκου της διάταξης τη στιγμή βύθισής του, ενώ παράλληλα η μεταβολή αυτή εμφανίζεται σε κάθε πιθανό διάλυσμα μεταβλητών σχεδιασμού. Επομένως, η πιθανότητα η ροή να αλλάξει κατεύθυνση είναι αυξημένη τις ανωτέρω χρονικές στιγμές. Μεταβάλλοντας τη συχνότητα της κίνησης μπορεί να μεταβληθεί η χρονική μεταβολή του όγκου της διάταξης και να εξισορροπηθεί η σημαντική μεταβολή του όγκου. Σε ένα υψίσυχο φαινόμενο, η μεταβολή του όγκου θα ήταν περισσότερο αισθητή αυξάνοντας τη συνολική διακινούμενη παροχή αλλά και αυξάνοντας τις πιθανότητες αλλαγής κατεύθυνσης της ροής σε σημαντικές ογκικές μεταβολές. Αντίθετη συμπεριφορά θα παρατηρείτο σε ένα χαμηλόσυχο φαινόμενο. Επιπλέον, ο περιορισμός είναι ιδιαίτερα αυστηρός καθώς αποκλείει κάθε λύση που εμφανίζει για κάποια χρονική στιγμή μιας περιόδου έστω και ένα σημείο με αρνητική ταχύτητα. Όλα τα παραπάνω φαίνεται να ικανοποιούνται στο μικρό εύρος του πεδίου της συχνότητας των επίλεκτων λύσεων. Πιθανώς, ένας πιο ελαστικός περιορισμός να οδηγούσε σε λύσεις μεγαλύτερου εύρους αναφορικά με τη συχνότητα.

Η δεύτερη μεταβλητή σχεδιασμού  $\lambda$  έχει όρια  $\lambda \in [0.05, 0.45]$ . Η τιμή που λαμβάνει στις επίλεκτες λύσεις βρίσκεται κάτω από το μέσο των ορίων. Όσο μικρότερη τιμή λαμβάνει η μεταβλητή  $\lambda$  τόσο περισσότερο αυξάνεται η συμβολή του πρώτου άκρου αναφορικά με το χρόνο. Όπως θα φανεί, το πρώτο άκρο είναι αυτό που επιδρά ποιοτικά περισσότερο στην κίνηση. Επομένως, οι λύσεις που τείνουν να αυξήσουν και τη χρονική επίδραση του πρώτου άκρου θεωρούνται οι πλέον κατάλληλες.

Η τρίτη και η τέταρτη μεταβλητή σχεδιασμού  $x_\Gamma$ ,  $y_\Gamma$  αφορούν το σημείο στο οποίο η κάτω καμπύλη Bezier παρουσιάζει ακρότατο. Τα όρια των μεταβλητών είναι  $x_\Gamma \in [-0.85, 0.85]$  και  $y_\Gamma \in [2.5, 3.5]$ . Αναφορικά με την τετμημένη του σημείου  $\Gamma$ , λαμβάνει τιμές πλησίον του κέντρου του διαφράγματος προκαλώντας με τον τρόπο αυτό συμμετρία στην ανοδική και καθοδική πορεία του ενός άκρου του σταυρού. Η τεταγμένη του σημείου  $\Gamma$  λαμβάνει τιμές κοντά στο κάτω όριο. Το όριο αυτό έχει τη φυσική σημασία πως το σημείο  $\Gamma$  πρέπει να είναι σε χαμηλότερο ύψος από το σημείο εκκίνησης της κίνησης. Όσο χαμηλότερα βρίσκεται το σημείο  $\Gamma$  τόσο μεγαλύτερη παραμόρφωση υφίσταται το διάφραγμα.

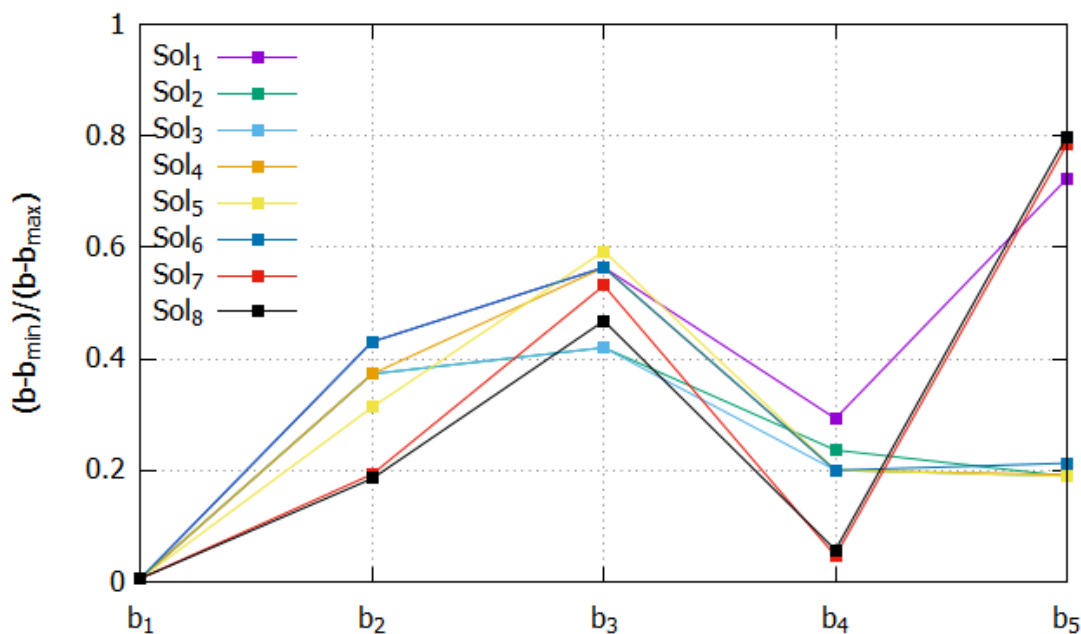
Η πέμπτη μεταβλητή σχεδιασμού  $y_2$  έχει όρια  $y_2 \in [3.5, 7.0]$ . Οι τιμές που λαμβάνει



είναι περίπου στη μέση του σχεδιαστικού τους χωρίου. Αξίζει να σημειωθεί πως η μεταβλητή αυτή μπορεί να δημιουργήσει μια άνω καμπύλη Bezier τέτοια ώστε τα άκρα του σταυρού να μην έρχονται διαρκώς σε επαφή με το διάφραγμα.

Τέλος, ο περιορισμός που έχει τεθεί, η διατήρηση δηλαδή της κατεύθυνσης της ροής στη διατομή εισόδου και εξόδου σε κάθε χρονική στιγμή, ικανοποιείται πλήρως για κάθε άτομο του μετώπου Pareto λαμβάνοντας μηδενική τιμή. Το γεγονός της πλήρους ικανοποίησης του περιορισμού είναι ιδιαίτερα σημαντικό καθώς υποδηλώνει πως το σύστημα διαχύτη/ακροφυσίου μπορεί να αντικαταστήσει αποτελεσματικά τις βαλβίδες ελέγχου που υπάρχουν σε μια συνήθη μικρο-αντλία για τον έλεγχο της ροής. Έτσι τα προβλήματα που επιφέρει η ύπαρξη των βαλβίδων ελέγχου, όπως η υψηλή πτώση πίεσης και η μηχανική αντοχή τους, σε συνδυασμό με τη διακοπτόμενη, μη-συνεχή ροή που προκαλούν, μπορούν να απαλειφθούν με την εισαγωγή του προτεινόμενου συστήματος. Η ροή που δημιουργείται είναι συνεχής και η διακύμανση αυτής χαμηλή.

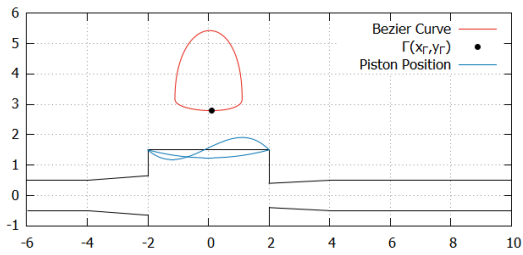
Στο σχήμα 4.2 παρουσιάζεται το διάγραμμα παράλληλων συντεταγμένων των μεταβλητών σχεδιασμού. Στο διάγραμμα αυτό απεικονίζονται οι τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές σχεδιασμού σε κάθε άτομο του μετώπου Pareto. Καθώς οι ακραίες τιμές  $b_{min}$ ,  $b_{max}$  των μεταβλητών διαφέρουν σημαντικά, για λόγους καλύτερης εποπτείας παρουσιάζονται οι τιμές ως αδιάστατη τιμή του εύρους.



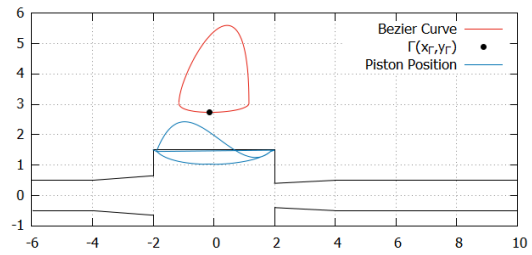
Σχήμα 4.2: Διάγραμμα παράλληλων συντεταγμένων των ατόμων του μετώπου Pareto.

Στα σχήματα 4.3 παρουσιάζεται η κίνηση του εμβόλου για κάθε λύση του μετώπου Pareto. Τα άτομα του μετώπου Pareto αριθμούνται με αύξουσα σειρά από εκείνο με τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης-στόχου  $F_1$ , αυτό δηλαδή που βρίσκεται στη δεξιά πλευρά του μετώπου. Σε όλες τις περιπτώσεις των ατόμων που απαρτίζουν το μέτωπο Pareto, η κάτω καμπύλη Bezier είναι αρκετά πεπλατυσμένη, γεγονός που γίνεται πιο έντονο στην περίπτωση 5, σχήμα 4.3(ε'). Η κίνηση του εμβόλου που παραμορφώνει το διάφραγμα αποτελείται από δυο συνιστώσες, τη μεταφορική κίνηση στην καμπύλη Bezier και την περιστροφική. Δημιουργώντας την κάτω καμπύλη Bezier χωρίς σημαντική καμπυλότητα, η μεταβολή του όγκου της διάταξης εξαρτάται πρωτίστως από την περιστροφική κίνηση ενώ η μεταφορική κίνηση, η οποία έχει κύρια συνιστώσα την οριζόντια μετατόπιση, ουσιαστικά καθοδηγεί τη ροή.

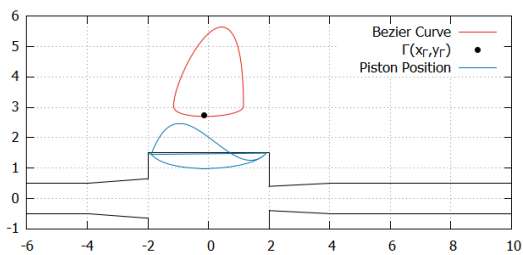
Η άνω καμπύλη Bezier είναι κατασκευασμένη με τρόπο τέτοιο ώστε το έμβολο να μην έρχεται σε επαφή με το διάφραγμα καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης. Μάλιστα στις περιπτώσεις 7 και 8, σχήμα 4.3(ζ') και 4.3(η') αντίστοιχα, το έμβολο δεν έρχεται καθόλου σε επαφή με τη μεμβράνη. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις, το έμβολο παραμορφώνει το διάφραγμα στην αρχή ή/και στο τέλος της κίνησης στην άνω καμπύλη. Το γεγονός αυτό μπορεί να εξηγηθεί αν θεωρηθεί πως η παραμόρφωση που προκαλείται από την κίνηση του διαφράγματος λόγω της μεταφοράς του σταυρού στην κάτω καμπύλη Bezier επιταχύνει τη ροή και αυξάνει τη διακινούμενη παροχή, ενώ η μεταφορά στην άνω καμπύλη Bezier δεν παραμορφώνει το διάφραγμα δίνοντας τη δυνατότητα στη ροή να ομαλοποιηθεί πριν επιταχυνθεί ξανά. Καθώς η ομαλοποίηση αυτή γίνεται αφού έχει προηγηθεί η επιτάχυνση, η παροχή που διακινείται εξακολουθεί να είναι μεγαλύτερη της χρονικά μόνιμης κατάστασης.



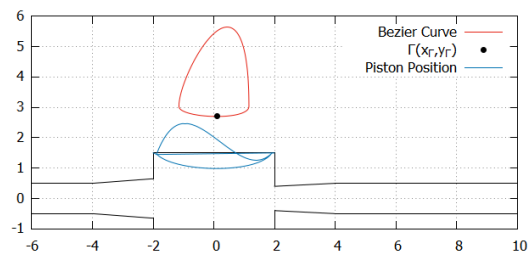
(α') Άτομο 1



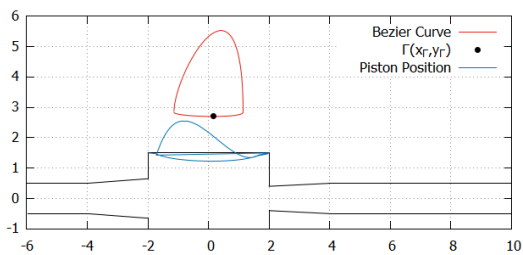
(β') Άτομο 2



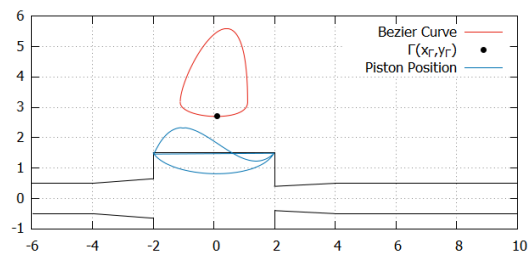
(γ') Άτομο 3



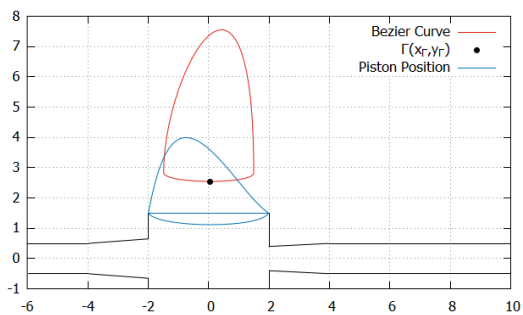
(δ') Άτομο 4



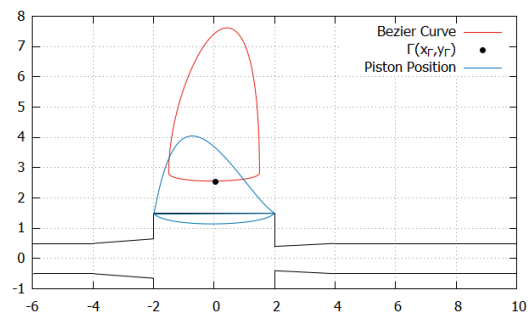
(ε') Άτομο 5



(ς') Άτομο 6



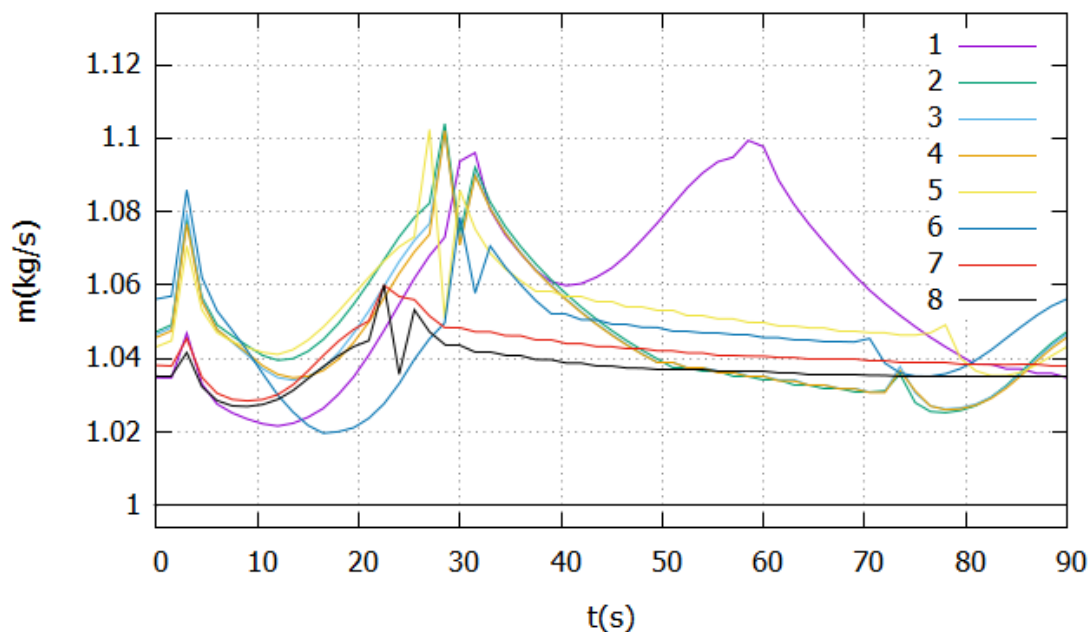
(ζ') Άτομο 7



(η') Άτομο 8

**Σχήμα 4.3:** Κίνηση και θέση του εμβόλου για τα άτομα του μετώπου Pareto. Με μαύρο χρώμα είναι το περίγραμμα της διάταξης, με κόκκινο χρώμα είναι η καμπύλη Bezier πάνω στην οποία κινείται το κέντρο περιστροφής του σταυρού, με μπλε χρώμα είναι η θέση του ενεργού άκρου του εμβόλου. Το μαύρο σημείο υποδηλώνει τη θέση στην οποία η κάτω καμπύλη Bezier παρουσιάζει ακρότατο.

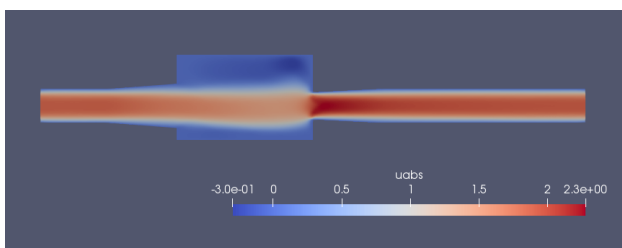
Στο διάγραμμα 4.4 παρουσιάζεται η παροχή στην έξοδο της διάταξης κάθε λύσης του μετώπου Pareto. Η τιμή της παροχής είναι αδιαστατοποιημένη με τη διακινούμενη παροχή στη χρονικά μόνιμη κατάσταση. Σημειώνεται ότι η πρώτη συνάρτηση-στόχος αφορά τη μεγιστοποίηση της διακινούμενης παροχής ανά περίοδο κίνησης. Το διάγραμμα 4.4 παρουσιάζει την τιμή που λαμβάνει η παροχή σε διάστημα μιας περιόδου. Η παραμόρφωση του διαφράγματος από το έμβολο επιδρά στην παροχή εξόδου της διάταξης σε τρία μέρη. Το πρώτο μέρος, συνοδεύεται από απότομη αύξηση της παροχής που οφείλεται στην πρώτη βύθιση του εμβόλου. Το δεύτερο και τρίτο μέρος περιλαμβάνει αρχική μείωση και, έπειτα, αύξηση της παροχής. Η είσοδος του δεύτερου άκρου επιφέρει τα ίδια αποτελέσματα σε μικρότερο βέβαια βαθμό καθώς επιδρά για λιγότερο χρόνο. Τις χρονικές στιγμές όπου δεν υπάρχει παραμόρφωση της μεμβράνης, η παροχή μάζας φθίνει ακολουθώντας μια ευθεία γραμμή. Αξίζει να σημειωθεί πως η ελάχιστη τιμή της διακινούμενης παροχής εμφανίζεται τη χρονική στιγμή στην οποία το ένα ή το άλλο άκρο του εμβόλου βρίσκονται στο κατώτατο σημείο της κίνησης τους και όχι σε κάποια χρονική στιγμή όπου το διάφραγμα είναι ακίνητο.



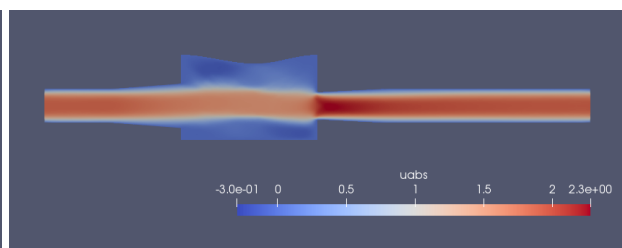
**Σχήμα 4.4:** Συγκριτικό διάγραμμα παροχής μάζας στην έξοδο της διάταξης για τα άτομα που ανήκουν στο μέτωπο Pareto. Η παροχή είναι αδιαστατοποιημένη με την παροχή στη χρονικά μόνιμη κατάσταση, οριζόντια μαύρη καμπύλη.

Στα σχήματα 4.5 έως 4.20 παρουσιάζεται η κατανομή του μέτρου της αξονικής συνιστώσας της ταχύτητας για δυο χρονικές στιγμές, μηδενικής και μέγιστης παραμόρφωσης, για κάθε λύση του μετώπου Pareto. Καθώς κατά τη διάρκεια της κίνησης του σταυρού υπάρχουν περισσότερες από μία χρονικές στιγμές στις οποίες το έμβολο δεν έρχεται σε επαφή με τη μεμβράνη, επιλέγεται να απεικονισθεί η πρώτη χρονική στιγμή της περιόδου, χρονική στιγμή πριν την είσοδο του πρώτου εμβόλου. Για τη λύση στη χρονική μόνιμη κατάσταση, στην οποία δεν πραγματοποιείται καμία κίνηση του σταυρού παρουσιάζεται μια κατανομή, σχήμα 4.21.

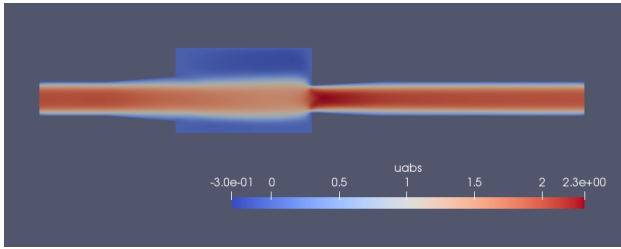
Συγκρίνοντας το εύρος του πεδίου της ταχύτητας για τα άτομα του μετώπου όπου υπάρχει κίνηση του διαφράγματος και για τη χρονικά μόνιμη κατάσταση, παρατηρείται πως η κίνηση της μεμβράνης οδηγεί σε μεγαλύτερο εύρος στο πεδίο της ταχύτητας, τόσο στο ανώτατο όσο και στο κατώτατο όριο. Μάλιστα, σε όλες τις περιπτώσεις που υπάρχει κίνηση το εύρος αυτό είναι ίδιο. Σε όλες τις λύσεις μηδενικής παραμόρφωσης η κύρια ροή εξελίσσεται σε μια ευθεία γραμμή μεταξύ εισόδου και εξόδου, ενώ εμφανής είναι και η διάχυση που παρουσιάζεται πριν την είσοδο της ροής στο δεύτερο διαχύτη. Η διάχυση που δημιουργείται είναι εμφανώς πιο έντονη για τη χρονικά μόνιμη λύση, σχήμα 4.21, ενώ αναφορικά με τις υπόλοιπες λύσεις που περιλαμβάνουν κίνηση η διάχυση είναι εντονότερη στις λύσεις 1, 7 και 8, σχήμα 4.5, 4.17 και 4.19. Στις λύσεις αυτές, η άνω καμπύλη Bezier έχει κατασκευαστεί με τρόπο τέτοιο ώστε το έμβολο να μην έρχεται σε επαφή με το διάφραγμα προς το τέλος της κίνησης του στην άνω καμπύλη Bezier και, επομένως, να μην υπάρχει εξωτερική επίδραση στη ροή. Η διάχυση στο σημείο εισόδου της ροής στο δεύτερο διαχύτη συνοδεύεται και από έντονη ανακυκλοφορία της ροής στο άνω τμήμα της διάταξης. Στις περιπτώσεις της μέγιστης μετατόπισης παρατηρείται πως η ροή ακολουθεί την κίνηση του διαφράγματος, αποκλίνοντας από την προηγούμενη ευθεία πορεία της. Εντονότερο είναι το φαινόμενο στο άτομο 6 του μετώπου, σχήμα 4.16, όπου πραγματοποιείται και η μέγιστη παραμόρφωση.



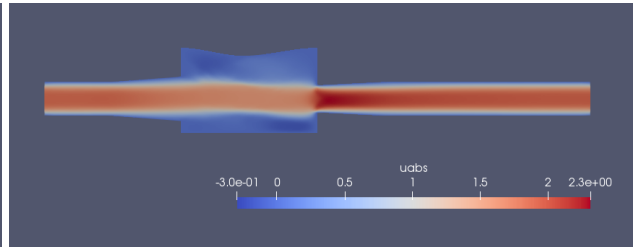
**Σχήμα 4.5:** Αξονική συνιστώσα της ταχύτητας για μηδενική παραμόρφωση του διαφράγματος για χρονικά μη-μόνιμη ροή. Άτομο 1 του μετώπου Pareto.



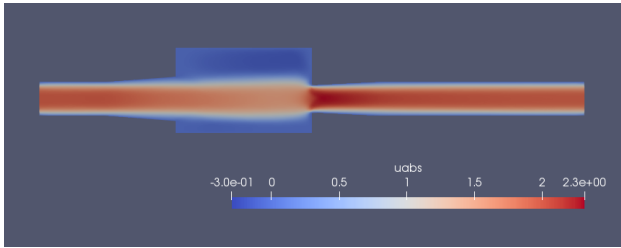
**Σχήμα 4.6:** Αξονική συνιστώσα της ταχύτητας για μέγιστη παραμόρφωση του διαφράγματος για χρονικά μη-μόνιμη ροή. Άτομο 1 του μετώπου Pareto.



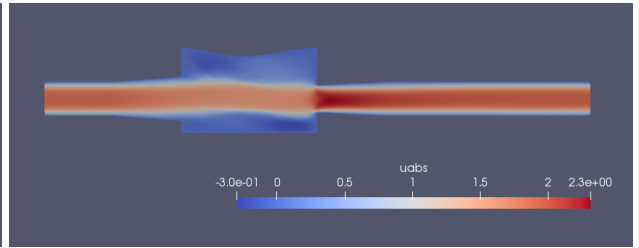
**Σχήμα 4.7:** Αξονική συνιστώσα της ταχύτητας για μηδενική παραμόρφωση του διαφράγματος για χρονικά μη-μόνιμη ροή. Άτομο 2 του μετώπου Pareto.



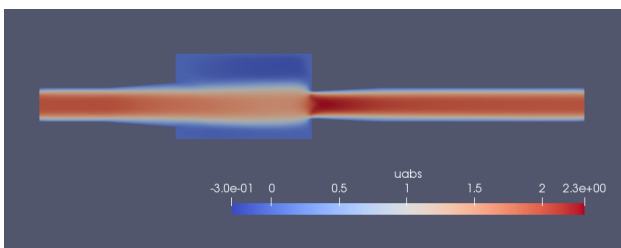
**Σχήμα 4.8:** Αξονική συνιστώσα της ταχύτητας για μέγιστη παραμόρφωση του διαφράγματος για χρονικά μη-μόνιμη ροή. Άτομο 2 του μετώπου Pareto.



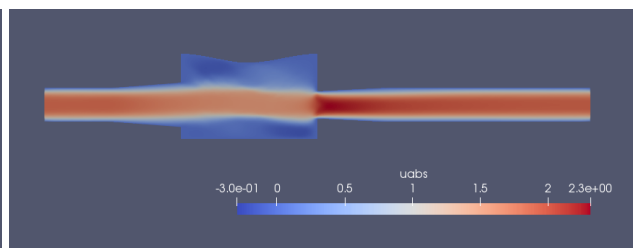
**Σχήμα 4.9:** Αξονική συνιστώσα της ταχύτητας για μηδενική παραμόρφωση του διαφράγματος για χρονικά μη-μόνιμη ροή. Άτομο 3 του μετώπου Pareto.



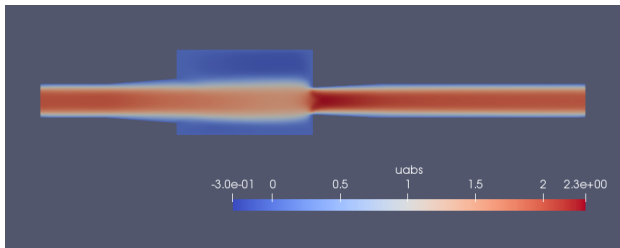
**Σχήμα 4.10:** Αξονική συνιστώσα της ταχύτητας για μέγιστη παραμόρφωση του διαφράγματος για χρονικά μη-μόνιμη ροή. Άτομο 3 του μετώπου Pareto.



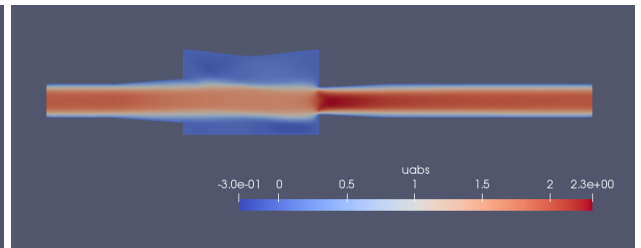
**Σχήμα 4.11:** Αξονική συνιστώσα της ταχύτητας για μηδενική παραμόρφωση του διαφράγματος για χρονικά μη-μόνιμη ροή. Άτομο 4 του μετώπου Pareto.



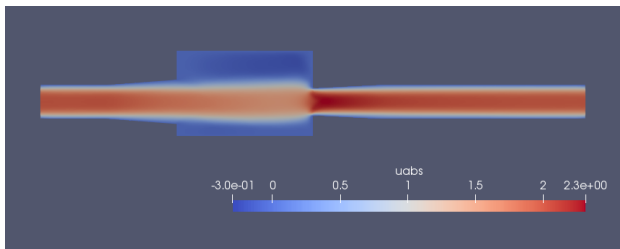
**Σχήμα 4.12:** Αξονική συνιστώσα της ταχύτητας για μέγιστη παραμόρφωση του διαφράγματος για χρονικά μη-μόνιμη ροή. Άτομο 4 του μετώπου Pareto.



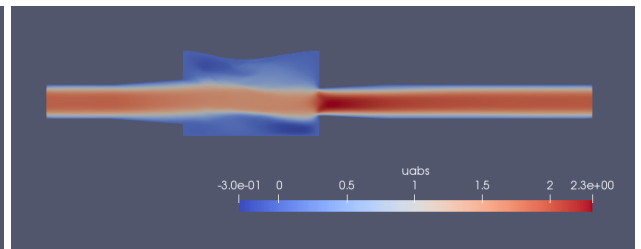
**Σχήμα 4.13:** Αξονική συνιστώσα της ταχύτητας για μηδενική παραμόρφωση του διαφράγματος για χρονικά μη-μόνιμη ροή. Άτομο 5 του μετώπου Pareto.



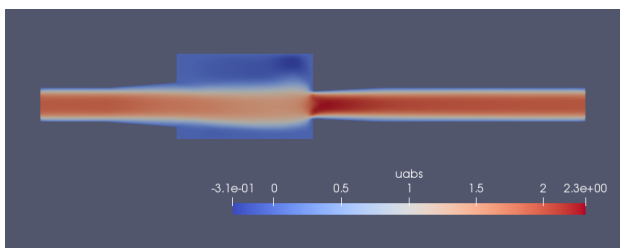
**Σχήμα 4.14:** Αξονική συνιστώσα της ταχύτητας για μέγιστη παραμόρφωση του διαφράγματος για χρονικά μη-μόνιμη ροή. Άτομο 5 του μετώπου Pareto.



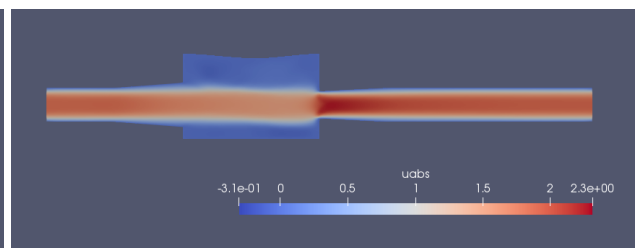
**Σχήμα 4.15:** Αξονική συνιστώσα της ταχύτητας για μηδενική παραμόρφωση του διαφράγματος για χρονικά μη-μόνιμη ροή. Άτομο 6 του μετώπου Pareto.



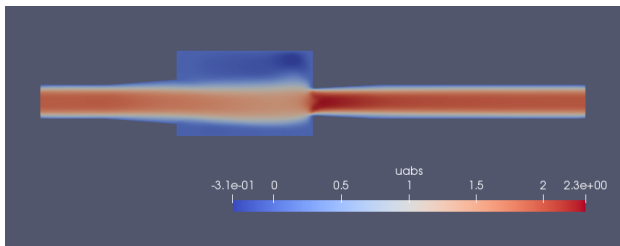
**Σχήμα 4.16:** Αξονική συνιστώσα της ταχύτητας για μέγιστη παραμόρφωση του διαφράγματος για χρονικά μη-μόνιμη ροή. Άτομο 6 του μετώπου Pareto.



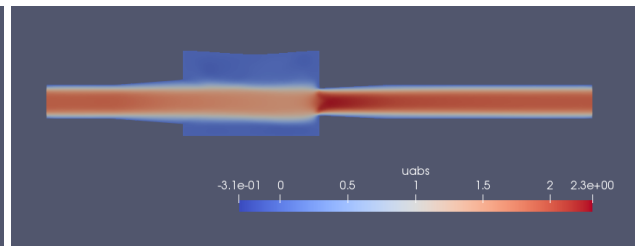
**Σχήμα 4.17:** Αξονική συνιστώσα της ταχύτητας για μηδενική παραμόρφωση του διαφράγματος για χρονικά μη-μόνιμη ροή. Άτομο 7 του μετώπου Pareto.



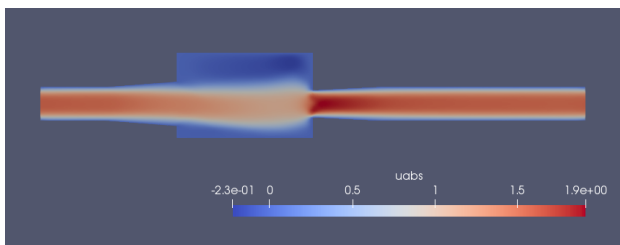
**Σχήμα 4.18:** Αξονική συνιστώσα της ταχύτητας για μέγιστη παραμόρφωση του διαφράγματος για χρονικά μη-μόνιμη ροή. Άτομο 7 του μετώπου Pareto.



**Σχήμα 4.19:** Αξονική συνιστώσα της ταχύτητας για μηδενική παραμόρφωση του διαφράγματος για χρονικά μη-μόνιμη ροή. Άτομο 8 του μετώπου Pareto.



**Σχήμα 4.20:** Αξονική συνιστώσα της ταχύτητας για μέγιστη παραμόρφωση ου διαφράγματος για χρονικά μη-μόνιμη ροή. Άτομο 8 του μετώπου Pareto.



**Σχήμα 4.21:** Αξονική συνιστώσα της ταχύτητας για τη χρονικά μόνιμη κατάσταση. Άτομο 9 του μετώπου Pareto.



## Κεφάλαιο 5

# Μαθηματική Διατύπωση των Εξισώσεων Για το Χρονικά Μη-Μόνιμο Συζυγές Πρόβλημα

Στο κεφάλαιο αυτό δομείται το μαθηματικό υπόβαθρο βελτιστοποίησης της διαφραγματικής αντλίας με χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου σε χρονικά περιοδικό, μη-μόνιμο πρόβλημα ροής, [36]. Η ανάλυση που γίνεται αφορά την προετοιμασία των μαθηματικών εκφράσεων που αποτελούν το συζυγές πρόβλημα. Η βελτιστοποίηση με τη συζυγή μέθοδο, αν και δεν αποτελεί τμήμα της εργασίας αυτής, μπορεί να βασιστεί στις αναπτυχθείσες εκφράσεις. Παρουσιάζεται, για λόγους πληρότητας, το ευθύ πρόβλημα (εξισώσεις Navier Stokes), η συνάρτηση-στόχος, οι μεταβλητές σχεδιασμού και η μαθηματική ανάπτυξη της συνεχούς συζυγούς μεθόδου.

Η συνεχής συζυγής μέθοδος περιλαμβάνει διατυπώσεις ανάλογα με την έκφραση υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας. Η **Συζυγής Διατύπωση Χωρικών Ολοκληρωμάτων (Field Integrals - FI Adjoint)**, [37], αποτελεί την πρώτη διατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου. Στη διατύπωση αυτή, οι παράγωγοι ευαισθησίας περιλαμβάνουν χωρικά ολοκληρώματα της μεταβολής των συντεταγμένων του πλέγματος ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Στη διατύπωση αυτή, οι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογίζονται με βάση χωρικά ολοκληρώματα που περιέχουν τόσο τη μεταβολή των συντεταγμένων του πλέγματος (grid sensitivities), όσο και τις χωρικές παραγώγους αυτής. Η διατύπωση αυτή οδηγεί σε ακριβή υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, συνοδεύεται όμως από υψηλό υπολογιστικό κόστος ειδικά σε εφαρμογές με τυρβώδη ροή όπου συνήθως είναι η χρήση αρκετά πυκνών υπολογιστικών πλεγμάτων.

Η Συζυγής Διατύπωση Επιφανειακών Ολοκληρωμάτων (Surface Integrals - SI Adjoint), [38], αποτελεί τη δεύτερη διατύπωση της συζυγούς μεθόδου. Στη διατύπωση αυτή, οι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογίζονται από επιφανειακά ολοκληρώματα στα όρια του υπολογιστικού χωρίου. Η διατύπωση αυτή αν και έχει σημαντικά χαμηλότερο υπολογιστικό κόστος, ωστόσο μπορεί να οδηγήσει σε μη-ακριβή υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας.

Ο συνδυασμός των πλεονεκτημάτων των δύο μεθόδων, του ακριβούς υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας (FI) και του χαμηλού υπολογιστικού κόστους (SI) λαμβάνουν χώρα στην Ενισχυμένη Διατύπωση Επιφανειακών Ολοκληρωμάτων (Enhanced Surface Integrals - E-SI), [39].

## 5.1 Το Ευθύ Πρόβλημα

Οι εξισώσεις χρονικά μη-μόνιμης 2Δ ροής ασυμπέστου ρευστού που διέπουν το ευθύ πρόβλημα είναι:

$$R_n = \frac{\partial V_n}{\partial t} + \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_k} - \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial x_k} = 0, \quad n = 1, 3 \quad (5.1)$$

όπου :

$$\vec{V} = [ 0 \quad u_1 \quad u_2 ]^T \quad (5.2)$$

$$f_{nk}^{inv} = \begin{bmatrix} u_k \\ u_1 u_k + p \delta_k^1 \\ u_2 u_k + p \delta_k^2 \end{bmatrix}, \quad f_{nk}^{vis} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{1k} \\ \tau_{2k} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\tau_{km} = \nu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right) \quad (5.4)$$

Υπενθυμίζεται πως το διάνυσμα  $\vec{U}$  των ροϊκών μεγεθών εκφράζεται ως

$$\vec{U} = [ p \quad u_1 \quad u_2 ]^T \quad (5.5)$$

Οι οριακές συνθήκες του πρωτεύοντος προβλήματος είναι:

- Οριακές συνθήκες εισόδου: επιβάλλεται σταθερή στατική πίεση και αξονική εισόδος της ταχύτητας,  $p^I = ct$ ,  $u_2^I = 0 = ct$ .
- Οριακή συνθήκη εξόδου: επιβάλλεται σταθερή στατική πίεση,  $p^O = ct$ .
- Οριακή συνθήκη στερεού τοιχώματος: επιβάλλεται συνθήκη μη ολίσθησης,  $u_m(t) = u_m^W(t)$ , όπου  $u_m^W$  η ταχύτητα κίνησης του στερεού τοιχώματος. Στην περίπτωση ακίνητου στερεού ορίου η ταχύτητα κίνησης είναι μηδενική ( $u_m^W = 0$ ) ενώ στην περίπτωση κινούμενου στερεού τοιχώματος, που πρακτικά είναι το κινούμενο διάφραγμα, η ταχύτητα κίνησης ισούται με την ταχύτητα παραμόρφωσης του διαφράγματος.

Σημειώνεται πως το πρωτεύον πρόβλημα δεν είναι προσταθεροποιημένο με την τεχνική της ψευδοσυμπίεστικότητας. Η ανάπτυξη της συζυγούς μεθόδου θα βασιστεί στο μη-προσταθεροποιημένο πρόβλημα, ενώ θα επιβληθεί προσταθεροποίηση του συζυγούς προβλήματος εκ των υστέρων.

## 5.2 Το Συζυγές Πρόβλημα

Έστω  $F$  η συνάρτηση-στόχος και  $\vec{b}$  το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού. Οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι  $\vec{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4] = [\lambda \ x_\Gamma \ y_\Gamma \ y_2]$ . Οι μεταβλητές αυτές καθορίζουν την κίνηση του σταυρού και ως αποτέλεσμα την κίνηση του διαφράγματος. Χάριν απλότητας, η συχνότητα δεν περιλαμβάνεται στις μεταβλητές σχεδιασμού, σκόπιμα, σε αντίθεση με τη βελτιστοποίηση με EA που πραγματοποιήθηκε στο κεφάλαιο 4. Η βελτιστοποίηση με τη συζυγή μέθοδο για χρονικά μη-μόνιμο πρόβλημα με άγνωστη την περίοδο αυτού μπορεί να αποτελέσει μέρος μελλοντικής εργασίας.

Ορίζεται το διάνυσμα των μεταβλητών του συζυγούς προβλήματος  $\vec{\Psi}$ , κατά αντιστοιχία με του πρωτεύοντος

$$\vec{\Psi} = [ \Psi_1 \ \Psi_2 \ \Psi_3 ] \quad (5.6)$$

όπου  $\Psi_1$  η συζυγής πίεση,  $\Psi_2, \Psi_3$  οι συζυγείς ταχύτητες.

Ορίζεται η επαυξημένη συνάρτηση-στόχος  $F_{aug}$

$$F_{aug} = F + \int_{\alpha}^{\alpha+T} \int_{\Omega} \Psi_n R_n d\Omega dt \quad (5.7)$$

όπου  $T$  είναι η σταθερή περίοδος του φαινομένου,  $\alpha$  είναι μια χρονική στιγμή κατά την οποία έχει σίγουρα επέλθει η περιοδικότητα της ροής και  $\Omega$  το υπολογιστικό χωρίο. Καθώς το υπόλοιπο των εξισώσεων  $R_n$  ισούται με το μηδέν, η επαυξημένη συνάρτηση-στόχος ταυτίζεται με την  $F$ .

Για λόγους συντομίας το ολοκλήρωμα

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} () dt$$

θα συμβολίζεται πλέον ως

$$\int_T () dt$$

Η ολική παράγωγος  $\delta$  της  $F_{aug}$  ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού  $b_i$  είναι:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i} = \frac{\delta F}{\delta b_i} + \frac{\delta}{\delta b_i} \left[ \int_T \int_{\Omega} \Psi_n R_n d\Omega dt \right] \quad (5.8)$$

Σημειώνεται ότι αφού η περίοδος του ροϊκού φαινομένου  $T$  είναι ανεξάρτητη των μεταβλητών σχεδιασμού  $b_i$ , τα άκρα του χρονικού ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητα αυτών. Έτσι, η ολική παράγωγος, χρησιμοποιώντας την έκφραση του Leibniz καθώς τα άκρα της χωρικής ολοκλήρωσης εξαρτώνται από τις μεταβλητές σχεδιασμού, είναι

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i} &= \frac{\delta F}{\delta b_i} + \int_T \frac{\delta}{\delta b_i} \left[ \int_{\Omega} \Psi_n R_n d\Omega \right] dt \\ &= \frac{\delta F}{\delta b_i} + \int_T \int_{\Omega} \Psi_n \frac{\partial R_n}{\partial b_i} d\Omega dt + \int_T \int_S \Psi_n R_n n_{\ell} \frac{\delta x_{\ell}}{\delta b_i} dS dt \end{aligned} \quad (5.9)$$

Για ένα ροϊκό μέγεθος  $\Phi = \Phi(\vec{b}, \vec{x}(\vec{b}))$ , η ολική παράγωγος  $\delta$  ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού εκφράζεται ως, [40]

$$\frac{\delta\Phi}{\delta b_i} = \frac{\partial\Phi}{\partial b_i} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial b_i} \quad (5.10)$$

Γίνεται επεξεργασία του χωρικού ολοκληρώματος. Ισχύει ότι

$$\int_T \int_\Omega \Psi_n \frac{\partial R_n}{\partial b_i} d\Omega dt = \int_T \int_\Omega \Psi_n \frac{\partial}{\partial b_i} \left[ \frac{\partial V_n}{\partial t} + \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_k} - \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial x_k} \right] d\Omega dt \quad (5.11)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.10), το ολοκλήρωμα με τις χρονικές παραγώγους τις εξίσωσης (5.11) εκφράζεται ως

$$\begin{aligned} \int_T \int_\Omega \Psi_n \frac{\partial}{\partial b_i} \left( \frac{\partial V_n}{\partial t} \right) d\Omega dt &= \int_T \int_\Omega \Psi_n \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V_n}{\partial b_i} \right) d\Omega dt \\ &= \int_T \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} \left[ \Psi_n \frac{\partial V_n}{\partial b_i} \right] d\Omega dt - \int_T \int_\Omega \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} \frac{\partial V_n}{\partial b_i} d\Omega dt \\ &= \int_T \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_\Omega \Psi_n \frac{\partial V_n}{\partial b_i} d\Omega \right] dt - \int_T \int_S \Psi_n \frac{\partial V_n}{\partial b_i} \frac{\delta x_\ell}{\delta t} n_\ell dS dt \\ &\quad - \int_T \int_\Omega \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} \frac{\partial V_n}{\partial b_i} d\Omega dt \end{aligned} \quad (5.12)$$

Στην έκφραση (5.12) ο όρος

$$\int_T \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_\Omega \Psi_n \frac{\partial V_n}{\partial b_i} d\Omega \right] dt$$

μηδενίζεται λόγω περιοδικότητας. Η τιμή που λαμβάνει η ποσότητα εντός του χρονικού ολοκληρώματος είναι ίδια για  $t = \alpha$  και για  $t = \alpha + T$ .

Επομένως, το ολοκλήρωμα με τις χρονικές παραγώγους των ροϊκών μεταβλητών στην εξίσωση (5.11) εκφράζεται ως

$$\int_T \int_\Omega \Psi_n \frac{\partial}{\partial b_i} \left( \frac{\partial V_n}{\partial t} \right) d\Omega dt = - \int_T \int_S \Psi_n \frac{\partial V_n}{\partial b_i} \frac{\delta x_\ell}{\delta t} n_\ell dS dt - \int_T \int_\Omega \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} \frac{\partial V_n}{\partial b_i} d\Omega dt \quad (5.13)$$

Το ολοκλήρωμα που περιλαμβάνει τους μη-συνεχτικούς όρους της εξίσωσης (5.11), χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Leibniz γράφεται ως

$$\begin{aligned}
\int_T \int_\Omega \Psi_n \frac{\partial}{\partial b_i} \left( \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_k} \right) d\Omega dt &= \int_T \int_\Omega \Psi_n \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial b_i} \right) d\Omega dt \\
&= \int_T \int_S \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial b_i} n_k dS dt - \int_T \int_\Omega \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial b_i} d\Omega dt \\
&= \int_T \int_S \Psi_n \frac{\delta f_{nk}^{inv}}{\delta b_i} n_k dS dt - \int_T \int_S \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_\ell} \frac{\delta x_\ell}{\delta b_i} n_k dS dt \\
&\quad - \int_T \int_\Omega \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial b_i} d\Omega dt \\
&= \int_T \int_S \Psi_n \frac{\delta}{\delta b_i} (f_{nk}^{inv} n_k dS) dt - \int_T \int_S \Psi_n f_{nk}^{inv} \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt \\
&\quad - \int_T \int_S \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_\ell} \frac{\delta x_\ell}{\delta b_i} n_k dS dt - \int_T \int_\Omega \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial b_i} d\Omega dt
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα που περιλαμβάνει την ολική παράγωγο των μη-συνεχτικών όρων αναλύεται περαιτέρω ως ( ο δείκτης  $m$ , όταν επαναλαμβάνεται, αθροίζει σε  $m = 1, 2$  για  $2\Delta$  προβλήματα)

$$\begin{aligned}
\int_T \int_S \Psi_n \frac{\delta}{\delta b_i} (f_{nk}^{inv} n_k dS) dt &= \int_T \int_S \Psi_1 \frac{\delta}{\delta b_i} (u_k n_k dS) dt \\
&\quad + \int_T \int_S \Psi_{m+1} \frac{\delta}{\delta b_i} [(u_m u_k + p \delta_k^m) n_k dS] dt \\
&= \int_T \int_S \Psi_1 n_k \frac{\delta u_k}{\delta b_i} dS dt + \int_T \int_S \Psi_1 u_k \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt \\
&\quad + \int_T \int_S \Psi_{m+1} n_k \frac{\delta (u_m u_k + p \delta_k^m)}{\delta b_i} dS dt \\
&\quad + \int_T \int_S \Psi_{m+1} (u_m u_k + p \delta_k^m) \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt \\
&= \int_T \int_S \left[ \Psi_1 n_k \frac{\delta u_k}{\delta b_i} + \Psi_{m+1} n_k u_m \frac{\delta u_k}{\delta b_i} + \Psi_{m+1} n_k u_k \frac{\delta u_m}{\delta b_i} \right. \\
&\quad \left. + \Psi_{m+1} n_k \delta_k^m \frac{\delta p}{\delta b_i} \right] dS dt \\
&\quad + \int_T \int_S [\Psi_1 u_k + \Psi_{m+1} (u_m u_k + p \delta_k^m)] \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt \tag{5.15}
\end{aligned}$$

και, με εναλλαγή των δεικτών  $k$  και  $m$ ,

$$\begin{aligned} \int_T \int_S \Psi_n \frac{\delta}{\delta b_i} (f_{nk}^{inv} n_k dS) dt &= \int_T \int_S \left[ \frac{\delta u_m}{\delta b_i} [\Psi_1 n_m + \Psi_{k+1} n_m u_k + \Psi_{m+1} n_k u_k] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta p}{\delta b_i} (\Psi_{m+1} n_k \delta_k^m) \right] dS dt \\ &+ \int_T \int_S [\Psi_1 u_k + \Psi_{m+1} (u_m u_k + p \delta_k^m)] \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt \quad (5.16) \end{aligned}$$

Τελικά, το ολοκλήρωμα της παραγώγου των μη-συνεκτικών όρων της εξίσωσης (5.11) εκφράζεται ως

$$\begin{aligned} \int_T \int_\Omega \Psi_n \frac{\partial}{\partial b_i} \left( \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_k} \right) d\Omega dt &= \int_T \int_S \left[ \frac{\delta u_m}{\delta b_i} [\Psi_1 n_m + \Psi_{k+1} n_m u_k + \Psi_{m+1} n_k u_k] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta p}{\delta b_i} (\Psi_{m+1} n_k \delta_k^m) \right] dS dt \\ &+ \int_T \int_S [\Psi_1 u_k + \Psi_{m+1} (u_m u_k + p \delta_k^m)] \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt \\ &- \int_T \int_S \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_\ell} \frac{\delta x_\ell}{\delta b_i} n_k dS dt - \int_T \int_\Omega \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial b_i} d\Omega dt \quad (5.17) \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα που περιλαμβάνει τους συνεκτικούς όρους της εξίσωσης (5.11)

$$\begin{aligned}
\int_T \int_\Omega \Psi_n \frac{\partial}{\partial b_i} \left( \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial x_k} \right) d\Omega dt &= \int_T \int_\Omega \Psi_n \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial b_i} \right) d\Omega dt \\
&= \int_T \int_S \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial b_i} n_k dS dt - \int_T \int_\Omega \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial b_i} d\Omega dt \\
&= \int_T \int_S \Psi_n \frac{\delta f_{nk}^{vis}}{\delta b_i} n_k dS dt - \int_T \int_S \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial x_\ell} \frac{\delta x_\ell}{\delta b_i} n_k dS dt \\
&\quad - \int_T \int_\Omega \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial b_i} d\Omega dt \\
&= \int_T \int_S \Psi_n \frac{\delta}{\delta b_i} (f_{nk}^{vis} n_k dS) dt - \int_T \int_S \Psi_n f_{nk}^{vis} \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt \\
&\quad - \int_T \int_S \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial x_\ell} \frac{\delta x_\ell}{\delta b_i} n_k dS dt - \int_T \int_\Omega \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial b_i} d\Omega dt
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Ο όρος που περιλαμβάνει την ολική παράγωγο των συνεκτικών όρων αναλύεται περαιτέρω ως

$$\begin{aligned}
\int_T \int_S \Psi_n \frac{\delta}{\delta b_i} (f_{nk}^{vis} n_k dS) dt &= \int_T \int_S \Psi_{m+1} \frac{\delta}{\delta b_i} (\tau_{mk} n_k dS) dt \\
&= \int_T \int_S \Psi_{m+1} n_k \frac{\delta \tau_{mk}}{\delta b_i} dS dt + \int_T \int_S \Psi_{m+1} \tau_{mk} \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Τελικά, ο όρος των συνεκτικών ροών εκφράζεται ως

$$\begin{aligned}
\int_T \int_\Omega \Psi_n \frac{\partial}{\partial b_i} \left( \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial x_k} \right) d\Omega dt &= \int_T \int_S \Psi_{m+1} n_k \frac{\delta \tau_{mk}}{\delta b_i} dS dt + \int_T \int_S (\Psi_{m+1} \tau_{mk} - \Psi_n f_{nk}^{vis}) \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt \\
&\quad - \int_T \int_S \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial x_\ell} \frac{\delta x_\ell}{\delta b_i} n_k dS dt + \int_T \int_\Omega \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial b_i} d\Omega dt
\end{aligned} \tag{5.20}$$



Με την ανάλυση αυτή, η έκφραση της ολικής παραγώγου της  $F_{aug}$  είναι η ακόλουθη

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i} &= \frac{\delta F}{\delta b_i} - \int_T \int_\Omega \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} \frac{\partial V_n}{\partial b_i} d\Omega dt - \int_T \int_\Omega \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial b_i} d\Omega dt + \int_T \int_\Omega \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial b_i} d\Omega dt \\
&+ \int_T \int_S \left[ \frac{\delta u_m}{\delta b_i} [\Psi_1 n_m + \Psi_{k+1} n_m u_k + \Psi_{m+1} n_k u_k] + \frac{\delta p}{\delta b_i} (\Psi_{m+1} n_k \delta_k^m) - \frac{\delta \tau_{mk}}{\delta b_i} \Psi_{m+1} n_k \right] dS dt \\
&+ \int_T \int_S \left[ \Psi_1 u_k + \Psi_{m+1} (u_m u_k + p \delta_k^m) - \Psi_{m+1} \tau_{mk} - \Psi_n f_{nk}^{inv} + \Psi_n f_{nk}^{vis} \right] \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt \\
&+ \int_T \int_S \left[ \Psi_n R_n n_\ell - \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_\ell} n_k + \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial x_\ell} n_k \right] \frac{\delta x_\ell}{\delta b_i} dS dt \\
&- \int_T \int_S \Psi_n \frac{\partial V_n}{\partial b_i} \frac{\delta x_\ell}{\delta t} n_\ell dS dt \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Γίνεται επεξεργασία των δύο πρώτων χωρικών ολοκληρωμάτων, του χρονικού όρου και του όρου των μη-συνεχτικών ροών. Έτσι,

$$\begin{aligned}
\int_T \int_\Omega \left[ -\frac{\partial \Psi_n}{\partial t} \frac{\partial V_n}{\partial b_i} - \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial b_i} \right] d\Omega dt &= \int_T \int_\Omega \left[ -\frac{\partial \Psi_n}{\partial t} \frac{\partial V_n}{\partial U_m} \frac{\partial U_m}{\partial b_i} - \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial U_m} \frac{\partial U_m}{\partial b_i} \right] d\Omega dt \\
&= \int_T \int_\Omega \frac{\partial U_m}{\partial b_i} \left[ -B_{nm} \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} - A_{nmk}^{inv} \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \right] d\Omega dt \tag{5.22}
\end{aligned}$$

όπου

$$B_{nm} = \frac{\partial V_n}{\partial U_m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{nmk}^{inv} = \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial U_m} \tag{5.23}$$

Το χωρικό ολοκλήρωμα των συνεκτικών όρων αναλύεται ως

$$\begin{aligned}
\int_T \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial b_i} d\Omega dt &= \int_T \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_{m+1}}{\partial x_k} \frac{\partial \tau_{km}}{\partial b_i} d\Omega dt \\
&= \int_T \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_{m+1}}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial b_i} \left( \nu \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right) \right) d\Omega dt \\
&= \int_T \int_S \frac{\partial \Psi_{m+1}}{\partial x_k} \nu \frac{\partial u_m}{\partial b_i} n_k dS dt - \int_T \int_{\Omega} \nu \frac{\partial^2 \Psi_{m+1}}{\partial x_k^2} \frac{\partial u_m}{\partial b_i} d\Omega dt \\
&\quad + \int_T \int_S \frac{\partial \Psi_{m+1}}{\partial x_k} \nu \frac{\partial u_k}{\partial b_i} n_m dS dt - \int_T \int_{\Omega} \nu \frac{\partial^2 \Psi_{m+1}}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial u_k}{\partial b_i} d\Omega dt
\end{aligned} \tag{5.24}$$

και, με εναλλαγή των δεικτών  $k$  και  $m$ ,

$$\begin{aligned}
\int_T \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial b_i} d\Omega dt &= \int_T \int_S \frac{\partial u_m}{\partial b_i} \nu \left( \frac{\partial \Psi_{m+1}}{\partial x_k} + \frac{\partial \Psi_{k+1}}{\partial x_m} \right) n_k dS dt \\
&\quad - \int_T \int_{\Omega} \frac{\partial u_m}{\partial b_i} \nu \left( \frac{\partial^2 \Psi_{m+1}}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{k+1}}{\partial x_k \partial x_m} \right) d\Omega dt
\end{aligned}$$

Ορίζονται οι συζυγείς τάσεις  $\tau_{km}^{adj}$  ως

$$\tau_{km}^{adj} = \nu \left( \frac{\partial \Psi_{m+1}}{\partial x_k} + \frac{\partial \Psi_{k+1}}{\partial x_m} \right) \tag{5.25}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\int_T \int_\Omega \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial b_i} d\Omega dt &= \int_T \int_S \tau_{km}^{adj} \frac{\partial u_m}{\partial b_i} n_k dS dt - \int_T \int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial b_i} \frac{\partial \tau_{km}^{adj}}{\partial x_k} d\Omega dt \\
&= \int_T \int_S \frac{\delta u_m}{\delta b_i} \tau_{km}^{adj} n_k dS dt - \int_T \int_S \tau_{km}^{adj} \frac{\partial u_m}{\partial x_\ell} n_k \frac{\delta x_\ell}{\delta b_i} dS dt \\
&\quad - \int_T \int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial b_i} \frac{\partial \tau_{km}^{adj}}{\partial x_k} d\Omega dt \\
&= \int_T \int_S \frac{\delta u_m}{\delta b_i} \tau_{km}^{adj} n_k dS dt - \int_T \int_S \tau_{km}^{adj} \frac{\partial u_m}{\partial x_\ell} n_k \frac{\delta x_\ell}{\delta b_i} dS dt \\
&\quad - \int_T \int_\Omega \frac{\partial u_k}{\partial U_m} \frac{\partial U_m}{\partial b_i} \frac{\partial \tau_{mk}^{adj}}{\partial x_m} d\Omega dt \\
&= \int_T \int_S \frac{\delta u_m}{\delta b_i} \tau_{km}^{adj} n_k dS dt - \int_T \int_S \tau_{km}^{adj} \frac{\partial u_m}{\partial x_\ell} n_k \frac{\delta x_\ell}{\delta b_i} dS dt \\
&\quad - \int_T \int_\Omega \Lambda_{km} \frac{\partial U_m}{\partial b_i} \frac{\partial \tau_{mk}^{adj}}{\partial x_m} d\Omega dt \tag{5.26}
\end{aligned}$$

όπου

$$\Lambda_{km} = \frac{\partial u_k}{\partial U_m} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

Στο σημείο αυτό ορίζεται η συνάρτηση-στόχος. Εδώ θεωρείται ότι η συνάρτηση-στόχος εκφράζεται στη διατομή της εξόδου του πεδίου ροής και είναι της μορφής

$$F = \int_T \int_{S_o} F_m n_m dS dt \tag{5.28}$$

όπου  $F_m$  ποσότητα η οποία εξαρτάται αποκλειστικά από τις ροϊκές μεταβλητές. Για παράδειγμα αν  $F_m = u_m$  τότε η συνάρτηση καταλληλότητας περιγράφει την παροχή που εξέρχεται λόγω φοράς του  $\vec{n}$  (αλγεβρικά) σε διάστημα μιας περιόδου από τη διάταξη. Για την επικείμενη ανάλυση θεωρείται ότι  $F_m = u_m$ .

Καθώς το σχήμα της διατομής εξόδου δεν επηρεάζεται από τις μεταβλητές σχεδιασμού, η ολική παράγωγος της συνάρτησης  $F$  ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού εκφράζεται ως

$$\frac{\delta F}{\delta b_i} = \int_T \int_{S_O} \frac{\delta u_m}{\delta b_i} n_m dS dt \quad (5.29)$$

Έτσι η έκφραση της ολικής παραγώγου της επαυξημένης συνάρτησης  $F_{aug}$  ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού είναι

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i} = & \int_T \int_{S_O} \frac{\delta u_m}{\delta b_i} n_m dS dt + \int_T \int_{\Omega} \frac{\partial U_m}{\partial b_i} \left[ -\frac{\partial \Psi_n}{\partial t} B_{nm} - \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} A_{nmk}^{inv} - \Delta_{km} \frac{\partial \tau_{mk}^{adj}}{\partial x_m} \right] d\Omega dt \\ & + \int_T \int_S \left[ \frac{\delta u_m}{\delta b_i} \left( \Psi_1 n_m + \Psi_{k+1} n_m u_k + \Psi_{m+1} n_k u_k + \tau_{km}^{adj} n_k \right) + \frac{\delta p}{\delta b_i} \left( \Psi_{m+1} n_k \delta_k^m \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\delta \tau_{mk}}{\delta b_i} \Psi_{m+1} n_k \right] dS dt \\ & + \int_T \int_S \left[ \Psi_1 u_k + \Psi_{m+1} (u_m u_k + p \delta_k^m) - \Psi_{m+1} \tau_{mk} - \Psi_n f_{nk}^{inv} + \Psi_n f_{nk}^{vis} \right] \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt \\ & + \int_T \int_S \left[ \Psi_n R_n n_\ell - \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_\ell} n_k + \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial x_\ell} n_k - \tau_{km}^{adj} \frac{\partial u_m}{\partial x_\ell} n_k \right] \frac{\delta x_\ell}{\delta b_i} dS dt \\ & - \int_T \int_S \Psi_n \frac{\partial V_n}{\partial b_i} \frac{\delta x_\ell}{\delta t} n_\ell dS dt \end{aligned} \quad (5.30)$$

Το όριο  $S$  χωρίζεται σε είσοδο, έξοδο και στερεό τοίχωμα, δηλαδή  $S = S_I \cup S_O \cup S_W$ .

Στην είσοδο της διάταξης έχει τεθεί  $p = p^I = ct$  και  $u_2 = 0$ , επομένως  $\frac{\delta p^I}{\delta b_i} = 0$  και  $\frac{\delta u_2^I}{\delta b_i} = 0$ . Στην έξοδο της διάταξης έχει τεθεί  $p = p^O = ct$  επομένως  $\frac{\delta p^O}{\delta b_i} = 0$ . Θεωρείται ακόμα πως η μεταβολή των συνεκτικών τάσεων στην είσοδο,  $\frac{\delta \tau_{mk}}{\delta b_i}$ , και στην έξοδο της διάταξης είναι αμελητέα.

Έτσι, για το πρώτο επιφανειακό ολοκλήρωμα της εξίσωσης (5.30) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
& \int_T \int_{S_{I,O,W}} \left[ \frac{\delta u_m}{\delta b_i} \left( \Psi_1 n_m + \Psi_{k+1} n_m u_k + \Psi_{m+1} n_k u_k + \tau_{km}^{adj} n_k \right) + \frac{\delta p}{\delta b_i} (\Psi_{m+1} n_k \delta_k^m) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{\delta \tau_{mk}}{\delta b_i} \Psi_{m+1} n_k \right] dS dt \\
&= \int_T \int_{S_W} \left[ \frac{\delta u_m}{\delta b_i} \left( \Psi_1 n_m + \Psi_{k+1} n_m u_k + \Psi_{m+1} n_k u_k + \tau_{km}^{adj} n_k \right) + \frac{\delta p}{\delta b_i} (\Psi_{m+1} n_k \delta_k^m) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{\delta \tau_{mk}}{\delta b_i} \Psi_{m+1} n_k \right] dS dt \\
&+ \int_T \int_{S_I} \frac{\delta u_1}{\delta b_i} \left( \Psi_1 n_1 + \Psi_{k+1} n_1 u_k + \Psi_2 n_k u_k + \tau_{km}^{adj} n_k \right) dS dt \\
&+ \int_T \int_{S_O} \frac{\delta u_m}{\delta b_i} \left( \Psi_1 n_m + \Psi_{k+1} n_m u_k + \Psi_{m+1} n_k u_k + \tau_{km}^{adj} n_k \right) dS dt \tag{5.31}
\end{aligned}$$

Η διατομή εισόδου και εξόδου της είναι ανεξάρτητη των μεταβλητών σχεδιασμού, επομένως  $\frac{\delta(n_k dS)}{\delta b_i}^{in,out} = 0$ . Έτσι, το δεύτερο επιφανειακό ολοκλήρωμα της εξίσωσης (5.30) εκφράζεται ως

$$\begin{aligned}
& \int_T \int_{S_{I,O,W}} \left[ \Psi_1 u_k + \Psi_{m+1} (u_m u_k + p \delta_k^m) - \Psi_{m+1} \tau_{mk} - \Psi_n f_{nk}^{inv} + \Psi_n f_{nk}^{vis} \right] \frac{\delta(n_k dS)}{\delta b_i} dt = \\
& \int_T \int_{S_W} \left[ \Psi_1 u_k + \Psi_{m+1} (u_m u_k + p \delta_k^m) - \Psi_{m+1} \tau_{mk} - \Psi_n f_{nk}^{inv} + \Psi_n f_{nk}^{vis} \right] \frac{\delta(n_k dS)}{\delta b_i} dt \tag{5.32}
\end{aligned}$$

Όμοια  $\frac{\delta x_\ell}{\delta b_i} = 0$  στην είσοδο και στην έξοδο. Έτσι το τρίτο επιφανειακό ολοκλήρωμα της εξίσωσης (5.30) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}
& \int_T \int_{S_{I,O,W}} \left[ \Psi_n R_n n_\ell - \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_\ell} n_k + \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial x_\ell} n_k - \tau_{km}^{adj} \frac{\partial u_m}{\partial x_\ell} \right] \frac{\delta x_\ell}{\delta b_i} dS dt = \\
& \int_T \int_{S_W} \left[ \Psi_n R_n n_\ell - \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_\ell} n_k + \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial x_\ell} n_k - \tau_{km}^{adj} \frac{\partial u_m}{\partial x_\ell} n_k \right] \frac{\delta x_\ell}{\delta b_i} dS dt \tag{5.33}
\end{aligned}$$

Καθώς μόνο οι συντεταγμένες των κόμβων του πλέγματος του στερεού τοιχώματος μεταβάλλονται χρονικά, το τελευταίο επιφανειακό ολοκλήρωμα της εξίσωσης (5.30) γίνεται

$$- \int_T \int_S \Psi_n \frac{\partial V_n}{\partial b_i} \frac{\delta x_\ell}{\delta t} n_\ell dS dt = - \int_T \int_{S_W} \Psi_n \frac{\partial V_n}{\partial b_i} \frac{\delta x_\ell}{\delta t} n_\ell dS_W dt \quad (5.34)$$

Τελικά, η έκφραση της ολικής παραγώγου της  $F_{aug}$  είναι

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i} &= \int_T \int_{S_O} \frac{\delta u_m}{\delta b_i} n_m dS dt + \int_T \int_\Omega \frac{\partial U_m}{\partial b_i} \left[ -B_{nm} \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} - A_{nmk}^{inv} \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} - \Delta_{mk} \frac{\partial \tau_{km}^{adj}}{\partial x_k} \right] d\Omega dt \\ &+ \int_T \int_{S_W} \left[ \frac{\delta u_m}{\delta b_i} \left( \Psi_1 n_m + \Psi_{k+1} n_m u_k + \Psi_{m+1} n_k u_k + \tau_{km}^{adj} n_k \right) + \frac{\delta p}{\delta b_i} \left( \Psi_{m+1} n_k \delta_k^m \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta \tau_{mk}}{\delta b_i} \Psi_{m+1} n_k \right] dS dt \\ &+ \int_T \int_{S_I} \frac{\delta u_1}{\delta b_i} \left( \Psi_1 n_1 + \Psi_{k+1} n_1 u_k + \Psi_2 n_k u_k + \tau_{km}^{adj} n_k \right) dS dt \\ &+ \int_T \int_{S_O} \frac{\delta u_m}{\delta b_i} \left( \Psi_1 n_m + \Psi_{k+1} n_m u_k + \Psi_{m+1} n_k u_k + \tau_{km}^{adj} n_k \right) dS dt \\ &+ \int_T \int_{S_W} \left[ \Psi_1 u_k + \Psi_{m+1} (u_m u_k + p \delta_k^m) - \Psi_{m+1} \tau_{mk} - \Psi_n f_{nk}^{inv} + \Psi_n f_{nk}^{vis} \right] \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt \\ &+ \int_T \int_{S_W} \left[ \Psi_n R_n n_\ell - \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_\ell} n_k + \Psi_n \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial x_\ell} n_k - \tau_{km}^{adj} \frac{\partial u_m}{\partial x_\ell} n_k \right] \frac{\delta x_\ell}{\delta b_i} dS dt \\ &- \int_T \int_{S_W} \Psi_n \frac{\partial V_n}{\partial b_i} \frac{\delta x_\ell}{\delta t} n_\ell dS dt \quad (5.35) \end{aligned}$$

### 5.2.1 Συζυγείς Πεδιακές Εξισώσεις

Η έκφραση της ολικής παραγώγου της  $F$  είναι ανεξάρτητη της παραγώγου των ροϊκών μεταβλητών στο υπολογιστικό χωρίο  $\Omega$ . Επομένως επιβάλλεται

$$\int_T \int_{\Omega} \frac{\partial U_m}{\partial b_i} \left[ -B_{nm} \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} - A_{nmk}^{inv} \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} - \Lambda_{mk} \frac{\partial \tau_{km}^{adj}}{\partial x_k} \right] d\Omega dt = 0 \quad (5.36)$$

Προκύπτει έτσι η **Συζυγής Πεδιακή Εξίσωση, Field Adjoint Equation (FA-E)**

$$-B_{nm} \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} - A_{nmk}^{inv} \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} - \Lambda_{mk} \frac{\partial \tau_{km}^{adj}}{\partial x_k} = 0 \quad (5.37)$$

### 5.2.2 Συζυγείς Οριακές Συνθήκες

Η έκφραση της ολικής παραγώγου της  $F$  καθίσταται, επίσης, ανεξάρτητη της παραγώγου των ροϊκών μεταβλητών στο όριο  $S$ .

Στην είσοδο επιβάλλεται

$$\int_T \int_{S_I} \frac{\delta u_1}{\delta b_i} \left( \Psi_1 n_1 + \Psi_{k+1} n_1 u_k + \Psi_2 n_k u_k + \tau_{km}^{adj} n_k \right) dS_I dt = 0$$

Στην έξοδο επιβάλλεται

$$\int_T \int_{S_O} \frac{\delta u_m}{\delta b_i} \left( \Psi_1 n_m + \Psi_{k+1} n_m u_k + \Psi_{m+1} n_k u_k + \tau_{km}^{adj} n_k \right) dS_O dt = 0$$

Για το στερεό τοίχωμα, ο όρος που περιλαμβάνει τις παραγώγους των ροϊκών μεταβλητών στο όριο  $S_W$  είναι

$$\int_T \int_{S_W} \left[ \frac{\delta u_m}{\delta b_i} \left( \Psi_1 n_m + \Psi_{k+1} n_m u_k + \Psi_{m+1} n_k u_k + \tau_{km}^{adj} n_k \right) + \frac{\delta p}{\delta b_i} \left( \Psi_{m+1} n_k \delta_k^m \right) - \frac{\delta \tau_{mk}}{\delta b_i} \Psi_{m+1} n_k \right] dS dt$$

Με την επιβολή της συνθήκης μη-ολίσθησης η ταχύτητα  $u_m$  μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της ταχύτητας παραμόρφωσης του ορίου. Έτσι ισχύει ότι

$$\int_T \int_{S_W} \left[ \frac{\delta p}{\delta b_i} (\Psi_{m+1} n_k \delta_k^m) - \frac{\delta \tau_{mk}}{\delta b_i} \Psi_{m+1} n_k \right] dS dt = 0$$

Έτσι οι Συζυγείς Οριακές Συνθήκες, Adjoint Boundary Conditions, (A-BC) είναι

$$\begin{aligned} \text{Είσοδος} & : \Psi_1 n_1 + \Psi_{k+1} n_1 u_k + \Psi_2 n_k u_k + \tau_{k1}^{adj} n_k = 0 \\ \text{Έξοδος} & : n_m + \Psi_1 n_m + \Psi_{k+1} n_m u_k + \Psi_{m+1} n_k u_k + \tau_{km}^{adj} n_k = 0, \quad m = 1, 2 \\ \text{Στερέο Τοίχωμα} & : \Psi_{m+1} = 0, \quad m = 1, 2 \end{aligned} \quad (5.38)$$

### 5.2.3 Παράγωγοι Ευαισθησίας

Μετά την επίλυση των συζυγών εξισώσεων, εξίσωση (5.37), με τις συζυγείς οριακές συνθήκες, εξισώσεις (5.38), οι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογίζονται ως

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_i} &= \int_T \int_{S_W} \frac{\delta u_m^{grid}}{\delta b_i} \left[ \Psi_1 n_m + \Psi_{k+1} n_m u_k + \Psi_{m+1} n_k u_k + \tau_{km}^{adj} n_k \right] dS dt \\ &+ \int_T \int_{S_W} \left[ \Psi_1 u_k + \Psi_{m+1} (u_m u_k + p \delta_k^m) - \Psi_n f_{nk}^{inv} + \Psi_n f_{nk}^{vis} \right] \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt \\ &+ \int_T \int_{S_W} \left[ \Psi_n \frac{\partial V_n}{\partial t} n_\ell + \Psi_n \left( \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_k} n_\ell - \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_\ell} n_k \right) - \Psi_n \left( \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial x_k} n_\ell - \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial x_\ell} n_k \right) \right. \\ &\quad \left. - \tau_{km}^{adj} \frac{\partial u_m}{\partial x_\ell} n_k \right] \frac{\delta x_\ell}{\delta b_i} dS dt \\ &- \int_T \int_{S_W} \Psi_n \frac{\partial V_n}{\partial b_i} \frac{\delta x_\ell}{\delta t} n_\ell dS dt \end{aligned} \quad (5.39)$$



Καθώς, όμως, από τη διατύπωση των οριακών συνθηκών στο στερεό όριο έχει τεθεί  $\Psi_2 = \Psi_3 = 0$ , προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_i} &= \int_T \int_{S_W} \frac{\delta u_m^W}{\delta b_i} \Psi_1 n_m dS dt \\ &+ \int_T \int_{S_W} [\Psi_1 u_k + \Psi_1 (f_{1k}^{vis} - f_{1k}^{inv})] \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt \\ &+ \int_T \int_{S_W} \left[ \Psi_1 \left( \frac{\partial f_{1k}^{inv}}{\partial x_k} - \frac{\partial f_{1k}^{vis}}{\partial x_k} \right) n_\ell + \Psi_1 \left( \frac{\partial f_{1k}^{vis}}{\partial x_\ell} - \frac{\partial f_{1k}^{inv}}{\partial x_\ell} \right) n_k \right] \frac{\delta x_\ell}{\delta b_i} dS dt \end{aligned} \quad (5.40)$$

Άρα η τελική έκφραση των Παραγώγων Ευαισθησίας, Sensitivity Derivatives, (SD) είναι

$$\frac{\delta F}{\delta b_i} = \int_T \int_{S_W} \frac{\delta u_m^W}{\delta b_i} \Psi_1 n_m dS dt - \int_T \int_{S_W} \Psi_1 \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell} n_k \frac{\delta x_\ell}{\delta b_i} dS dt \quad (5.41)$$

### 5.3 Προσταθεροποίηση της Συζυγούς Πεδιακής Εξίσωσης με τη Μέθοδο της Τεχνητής Συμπίεστικότητας

Οι πεδιακές εξισώσεις του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος είναι μεταξύ τους όμοιες και μάλιστα οι ιδιοτιμές του συζυγούς προβλήματος είναι αντίθετες με τις ιδιοτιμές του ευθέος, [41]. Για το λόγο αυτό, επιτρέπεται η εισαγωγή του όρου της τεχνητής συμπίεστικότητας στο συζυγές πρόβλημα με τρόπο όμοιο με τον οποίο εισήχθη στο ευθύ. Έτσι, και το συζυγές πρόβλημα μετατρέπεται σε πρόβλημα υπερβολικού τύπου. Οι πεδιακές εξισώσεις, μετά την εισαγωγή του όρου της τεχνητής συμπίεστικότητας, γράφονται και για το συζυγές πρόβλημα ως εξής:

$$-B_{nm} \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} + \Gamma_{nm}^{-1} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \tau} - A_{nmk}^{inv} \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} - \Lambda_{mk} \frac{\partial \tau_{km}^{adj}}{\partial x_k} = 0 \quad (5.42)$$



# Κεφάλαιο 6

## Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα

### 6.1 Ανακεφαλαίωση

Ολοκληρώνοντας τη διπλωματική αυτή εργασία είναι σημαντικό να γίνει σύντομη αναδρομή των θεμάτων που πραγματεύτηκε και των συμπερασμάτων που προέκυψαν. Στόχος της εργασίας ήταν η μελέτη και η βελτιστοποίηση διαφραγματικής μικροαντλίας χωρίς βαλβίδες ή άλλα τεχνητά μέρη, αλλά μόνο με σύστημα διπλών αποκλινόντων αγωγών (διαχυτών) και κύρια χρήση τη διακίνηση φαρμάκων, όπως για παράδειγμα τη χορήγηση ινσουλίνης ή τη χρήση σε διαδικασία χημειοθεραπείας.

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάστηκε ο τρόπος γένεσης και παραμόρφωσης πλέγματος, καθώς και οι εξισώσεις ροής. Η γένεση του οριόδετου, μη-δομημένου πλέγματος, πλέγματος αφετηρία στην παραμόρφωτη γεωμετρία, πραγματοποιήθηκε με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου που δίνει τη δυνατότητα πύκνωσης και αραιώσης του πλέγματος σε συγκεκριμένες περιοχές της διάταξης. Η παραμόρφωση του πλέγματος, κατά την κίνηση της μεμβράνης, έγινε σύμφωνα με τη μέθοδο του ελαστικού μέσου. Η μέθοδος αυτή εξασφαλίζει καλής ποιότητας πλέγμα, ακόμα και σε σημαντικές παραμορφώσεις. Το υπάρχον λογισμικό παραμόρφωσης πλέγματος επιταχύνθηκε για τις ανάγκες της εργασίας αυτής. Αρχικά, επιλέγοντας το προς παραμόρφωση πλέγμα να είναι το ίδιο για κάθε χρονική στιγμή - νέα γεωμετρία, οι όροι οι οποίοι εξαρτώνται αποκλειστικά από το προς παραμόρφωση πλέγμα υπολογίζονται μία φορά και όχι για κάθε χρονική στιγμή. Επιπλέον, καθώς η παραμόρφωση της εξωτερικής γεωμετρίας αφορά ένα μικρό τμήμα της διάταξης, το κινούμενο διάφραγμα, το λογισμικό τροποποιήθηκε ώστε οι κόμβοι του πλέγματος οι οποίοι μετακινούνται να είναι μόνο εκείνοι που βρίσκονται κοντά στο κινούμενο διάφραγμα. Οι αλλαγές αυτές μείωσαν το υπολογιστικό κόστος της παραμόρφωσης του πλέγματος περίπου κατά 60%. Έπειτα, παρουσιάστηκαν οι προσταθεροποιημένες με τη μέθοδο της τεχνητής συμπίεστικότητας εξισώσεις ασυμπίεστης και

χρονικά μη-μόνιμης ροής και πραγματοποιήθηκε διερεύνηση της επίδρασης του όρου της τεχνητής συμπίεστικότητας ( $\beta$ ) στο ροϊκό πεδίο. Τέλος, έγινε σύγκριση των πεδίων ροής που προκύπτουν από δύο οικεία (In-house) λογισμικά. Το πρώτο λογισμικό, το οποίο εφαρμόζεται στο σύνολο της εργασίας, χρησιμοποιεί οριόδετα, μη-δομημένα πλέγματα, ενώ το δεύτερο, το οποίο χρησιμοποιήθηκε μόνο για τη σύγκριση, κάνει χρήση μη-οριόδετων πλεγμάτων (IMB) και πιο συγκεκριμένα αναπτύσσει τη μέθοδο των τεμνόμενων κυψελών, Cut-Cell. Τα πεδία ροής που προέκυψαν, παρουσιάζουν σημαντική ομοιότητα, καθιστώντας με τον τρόπο αυτό τους δύο οικείους επιλύτες, καθώς και τα αποτελέσματα αυτών, αξιόπιστα.

Στο κεφάλαιο 3 μελετήθηκε η μορφή του συστήματος των αγωγών που χρησιμοποιήθηκαν στη διαφραγματική αντλία και προτάθηκε ο τρόπος με τον οποίο πραγματοποιείται η παραμόρφωση του διαφράγματος. Η μελέτη της μορφής του συστήματος των αγωγών έγινε για τη χρονικά μόνιμη ροή και αφορούσε σύστημα αποκλινόντων αγωγών, σύστημα αγωγών σταθερής διατομής και σύστημα συγκλινόντων αγωγών. Η κίνηση του διαφράγματος προτάθηκε να προκαλείται από σύνολο εμβόλων σε διάταξη ορθογώνιου σταυρού, η οποία εκτελεί περιστροφική και μεταφορική κίνηση. Παρουσιάστηκαν τα βασικά χαρακτηριστικά που καθορίζουν την κίνηση.

Στο κεφάλαιο 4 πραγματοποιήθηκε δικριτηριακή βελτιστοποίηση της διαφραγματικής αντλίας με σκοπό τη μεγιστοποίηση της διακινούμενης παροχής ανά περίοδο κίνησης και την ελαχιστοποίηση της διακύμανσης της ροής. Ως περιορισμός τέθηκε η διατήρηση της κατεύθυνσης της ροής για κάθε σημείο της διατομής εισόδου και εξόδου, και για όλη τη διάρκεια μίας περιόδου. Η βελτιστοποίηση έγινε με το λογισμικό E.A.SY., το οποίο βασίζεται στη θεωρία των EA. Χρησιμοποιήθηκαν μεταπρότυπα (MAEA) τα οποία επιτάχυναν σημαντικά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης. Παρουσιάστηκαν και αναλύθηκαν τα αποτελέσματα αυτής.

Στο κεφάλαιο 5 αναπτύχθηκαν οι μαθηματικές εξισώσεις για τη βελτιστοποίηση με τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Διατυπώθηκαν οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις, οι συζυγείς οριακές συνθήκες και οι παράγωγοι ευαισθησίας του συζυγούς προβλήματος. Πραγματοποιήθηκε προσταθεροποίηση των συζυγών εξισώσεων.

## 6.2 Συμπεράσματα

Από τη μελέτη και τη βελτιστοποίηση της διαφραγματικής αντλίας προέκυψαν ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις, σημαντικές για την καλύτερη κατανόησή της. Αρχικά, από τη διερεύνηση της μορφής του συστήματος των αγωγών, προέκυψε πως η χρήση διπλών αποκλινόντων αγωγών είναι η πλέον κατάλληλη, συγκριτικά με τις υπόλοιπες εξετα-

ζόμενες διατάξεις, ως προς τις απώλειες πίεσης και τη διακινούμενη παροχή μάζας. Επιπλέον, καθώς στη διαφραγματική αντλία που μελετάται απουσιάζουν βαλβίδες ή άλλα μέρη που ελέγχουν τη ροή υπάρχει η πιθανότητα η κατεύθυνση της ροής να αντιστραφεί. Σε μια τέτοια, μη-επιθυμητή περίπτωση, το σύστημα των αποκλινόντων αγωγών θα επιτρέψει να διέλθει προς την αντίθετη κατεύθυνση μικρότερη παροχή συγκριτικά με τις υπόλοιπες διατάξεις. Το γεγονός αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικά καθώς αντικαθιστά με τον καλύτερο τρόπο τις βαλβίδες ελέγχου.

Κατά την ανάπτυξη του μηχανισμού κίνησης της μεμβράνης παρατηρήθηκε πως η πρώτη χρονική στιγμή κατά την οποία ένα έμβολο έρχεται σε επαφή με τη μεμβράνη και την παραμορφώνει, συνοδεύεται από σημαντική μεταβολή του όγκου της διάταξης. Η σημαντική αυτή μεταβολή οφείλεται στην κύρια συνιστώσα της κίνησης του εμβόλου η οποία, τη χρονική στιγμή της πρώτης εισόδου, είναι κυρίως κατακόρυφη. Ως αποτέλεσμα, αυτές οι χρονικές στιγμές είναι πιο επιρρεπείς σε αντιστροφή της κατεύθυνσης της ροής. Επιπλέον, παρατηρήθηκε πως η επιρροή της κίνησης είναι περισσότερο αισθητή στην παροχή εισόδου από ότι στην παροχή εξόδου της διάταξης. Έτσι, η διατομή της εισόδου είναι αυτή που θα εμφανίσει πρώτη αντιστροφή της ροής σε περίπτωση σημαντικής μεταβολής του όγκου.

Κατά τη βελτιστοποίηση της κίνησης του διαφράγματος οι λύσεις που προέκυψαν διακινούν από 0.93% έως 3.97% περισσότερη παροχή ανά περίοδο κίνησης συγκριτικά με τη χρονικά μόνιμη ροή, με διακύμανση που κυμαίνεται από 1.04% έως 3.13%. Φαίνεται, επομένως, πως κατάλληλη κίνηση του διαφράγματος επιφέρει αύξηση της διακινούμενης παροχής. Κομβικός παράγοντας για τις βέλτιστες λύσεις που προέκυψαν αποτελεί ο περιορισμός που τέθηκε, η διατήρηση της κατεύθυνσης της ροής για κάθε σημείο της παροχής εισόδου και εξόδου και για όλο το διάστημα μίας περιόδου. Ο περιορισμός αυτός είναι ιδιαίτερα αυστηρός και αποκλείει μία λύση η οποία σε μία μόνο χρονική στιγμή εμφανίζει ένα μόνο σημείο στο οποίο έχει αντιστραφεί η ροή. Έτσι, οι μη-κυριαρχούμενες λύσεις του μετώπου Pareto, πληρώνοντας τον περιορισμό, δεν εμφανίζουν αντιστροφή της ροής και μπορούν να αντικαταστήσουν πλήρως τις βαλβίδες ελέγχου που υπάρχουν σε μία συνήθη διαφραγματική αντλία. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο περιορισμός επηρέασε σε μεγάλο βαθμό τις τιμές που έλαβαν οι μεταβλητές σχεδιασμού, και ιδιαίτερα η συχνότητα της κίνησης, η οποία όπως φάνηκε διαδραματίζει το σημαντικότερο ρόλο για τη διατήρηση της κατεύθυνσης της ροής.

### 6.3 Προτάσεις για Περαιτέρω Μελέτη

Η μελέτη που πραγματοποιήθηκε αποτελεί μία πρώτη προσέγγιση της ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ για την ανάπτυξη μίας διαφραγματικής αντλίας με σύστημα αποκλινόντων αγωγών, τα αποτελέσματα της οποίας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για περαιτέρω μελέτη.

- Στην εργασία αυτή προτάθηκε το σύστημα των αποκλινόντων αγωγών ως το πλέον κατάλληλο για εφαρμογή στη διαφραγματική αντλία. Ιδιαίτερα ενδιαφέρονσα και χρήσιμη είναι η μελέτη της μορφής των αγωγών, όπως για παράδειγμα το μήκος τους, ο λόγος των διατομών εισόδου και εξόδου αλλά και η γωνία ανοίγματος. Η εύρεση της κατάλληλης μορφής μπορεί να γίνει είτε με βελτιστοποίηση για τη χρονικά μόνιμη ροή είτε σε συνδυασμό με την κίνηση του διαφράγματος. Η τελευταία βελτιστοποίηση είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα καθώς συνδυάζει ταυτόχρονα και τη μορφή των αγωγών και την κίνηση του διαφράγματος.
- Καθώς η διατομή εισόδου παρουσιάζει σημαντικά μεγαλύτερη ευαισθησία ως προς την αντιστροφή της ροής, απαραίτητη είναι η μείωση της ευαισθησίας αυτής. Η εύρεση και η μοντελοποίηση των παραμέτρων που οδηγούν στο φαινόμενο αυτό μπορεί να μειώσει τις πιθανότητες αντιστροφής της ροής στην είσοδο της διάταξης.
- Προτείνεται βελτιστοποίηση της διαφραγματικής αντλίας με τις αναπτυχθείσες μαθηματικές εξισώσεις της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, αφού προγραμματισθεί το σχετικό λογισμικό.
- Προτείνεται ανάπτυξη της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για τη χρονικά μη-μόνιμη ροή με άγνωστη, όμως, την περίοδο αυτής, προγραμματισμός του σχετικού λογισμικού και βελτιστοποίηση της διάταξης.
- Για την πλήρη κατανόηση της λειτουργίας της αντλίας είναι απαραίτητο να γίνει μελέτη και για 3Δ ροή, τόσο για την ανάλυση που έχει ήδη πραγματοποιηθεί στην εργασία όσο και για τις περαιτέρω προτάσεις.

## Βιβλιογραφία

- [1] Γιαννάκογλου, Κ.Χ.: *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2006.
- [2] Giannakoglou K.C., Papadimitriou D.I. and Kampolis, I.C.: *Aerodynamic Shape Design using Evolutionary Algorithms and New Gradient-Assisted Metamodels*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195(44-47):6312–6329, 2006.
- [3] Green L.L., Newman P.A. and Haigler., K.J.: *Sensitivity Derivatives for Advanced CFD Algorithm and Viscous Modeling Parameters via Automatic Differentiation*. Journal of Computational Physics, 125(2):131–324, 1996.
- [4] Papadimitriou, D.I and Giannakoglou, K.C.: *A Continuous Adjoint Method with Objective Function Derivatives based on Boundary Integrals for Inviscid and Viscous Flows*. Computers & Fluids, 36(2):324–341, 2007.
- [5] *Online Dynamic Enterprise Solutions for Industry Excellence*. <https://www.myodesie.com/wiki/index/returnEntry/id/2960>.
- [6] *Tacmina*. <https://www.tacmina.com/learn/basics/01.html>.
- [7] Stemme, E. and Stemme, G.: *A Valveless Diffuser/Nozzle based Fluid Pump*. Sensors and Actuators A, (39):159–167, 1993.
- [8] Olsson A., Stemme G. and Stemme, E.: *Diffuser-element Design Investigation for Valve-less Pumps*. Journal of Computational Physics A, (57):137–1436, 1996.
- [9] Ramaswamy N., Karanth N., Kulkarni S.M. and Desai, V.: *Modeling of Micropump Performance and Optimizations of Diaphragm Geometry*. International Symposium on Devices MEMS, Intelligent Systems & Communication, India, 2011.
- [10] Λιακόπουλος, Π.: *Γένεση μη-δομημένων πλεγμάτων και διαχείρισή τους σε μεθόδους ανάλυσης και βελτιστοποίησης συνιστωσών στροβιλομηχανών και εφαρμογές, αξιοποιώντας τεχνολογίες πλέγματος (Grid computing)*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2008.

- [11] Gonzalez-Castro, G. and Ugail, H.: *Shape Morphing of Complex Geometries Using Partial Differential Equations*. Journal of Multimedia, 2(6), 2007.
- [12] Anderson W.K., Karman S.L. and Burdyslaw, C.: *Geometry Parameterization Method for Multidisciplinary Applications*. AIAA Journal, 47(6):1568–1578, 2009.
- [13] Qin N., Liu X. and Xia, H.: *An Efficient Moving Grid Algorithm for Large Deformation*. Modern Physics Letters B, 19(28-29):1499–1502, 2005.
- [14] Degand, C. and Farhat, C.: *A Three-Dimensional Torsional Spring Analogy Method for Unstructured Dynamic Meshes*. Computers & Structures, 80(3-4):305–316, 2002.
- [15] Stein K., Tezduyar T. and Benney, R.: *Mesh Moving Techniques for Fluid-Structure Interactions with Large Displacements*. Journal of Applied Mechanics, 70:56–63, 2003.
- [16] Dwight, R.P.: *Robust Mesh Deformation using the Linear Elasticity Equations*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.
- [17] Chorin, A.: *A numerical method for solving incompressible viscous flow problems*. Journal of Computational Physics, 2(1):12–26, 1967.
- [18] Turkel, E.: *Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations*. Journal of Computational Physics, 72:277–298, 1987.
- [19] Κοντολέοντος, Ε.: *Ανάλυση και βελτιστοποίηση σύνθετων ρευστομηχανικών διατάξεων με χρήση υπολογιστικής ρευστοδυναμικής και εξελικτικών αλγορίθμων*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2012.
- [20] Asouti V.G., Trompoukis X.S., Kampolis I.C. and Giannakoglou, K.C.: *Unsteady CFD Computations using Vertex-Centered Finite Volumes for Unstructured Grids on Graphics Processing Units*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 67(2):232–246, 2011.
- [21] Haelterman R., Vierendeels J. and Van-Heule, D.: *Optimization of the Runge-Kutta iteration with residual smoothing*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 234(1):253–271, 2010.
- [22] Τσιόκας, Κ.: *Ανάπτυξη μεθόδων βελτιστοποίησης με χρήση επεξεργαστών καρτών γραφικών και εφαρμογή στις στροβιλομηχανές*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, σε εξέλιξη.
- [23] Τρομπούκης, Ξ.: *Αριθμητική επίλυση προβλημάτων αεροδυναμικής-αεροελαστικότητας σε επεξεργαστές καρτών γραφικών*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2012.



- [24] Κατσανούλης, Σ.: *Προγραμματισμός Λογισμικού για την επίλυση Μη-Μόνιμων Πεδίων Ροής με Κινούμενα Στερεά Όρια με τη Μέθοδο των Τερνόμενων Κυψελών (Cut-Cell)*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2015.
- [25] Roe, P.: *Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Scheme*. Journal of Computational Physics, 43(2):357–372, 1981.
- [26] Samouchos K.D., Katsanoulis S.G. and Giannakoglou K.C.: *Unsteady Adjoint to the Cut-Cell Method using Mesh Adaptation on GPUs*. ECCOMAS Congress 2016, VII European Congress on Computational Methods Applied Science and Engineering, Crete Island, Greece, June 5-10, 2016.
- [27] Mittal, R. and Iaccarino, G.: *Immersed Boundary Methods*. Annual Review of Fluid Mechanics, 37(1):239–261, 2005.
- [28] Σαμούχος, Κ.: *Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος σε Μη-οριόδετα Πλέγματα για Βελτιστοποίηση Στροβιλομηχανών*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, σε εξέλιξη.
- [29] Γιαννάκογλου Κ.Χ., Αναγνωστόπουλος Ι., Μπεργελές Γ.: *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς*. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2003.
- [30] Karpolis, I.C. and Giannakoglou, K.C: *Distributed Evolutionary Algorithms with Hierarchical Evaluation*. Engineering Optimization, 41(11):1037–1049, 2009.
- [31] Georgopoulou, C.A. and Giannakoglou, K.C: *Metamodel-Assisted Evolutionary Algorithms for the Unit Commitment Problem with Probabilistic Outages*. Applied Energy, 87(5):1782–1792, 2010.
- [32] Καψούλης, Δ.: *Σχεδιασμός Πειραμάτων και Εξωτερικά Μεταπρότυπα για την Υποβοήθηση της Διαδικασίας Βελτιστοποίησης με Εξελικτικούς Αλγορίθμους*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2014.
- [33] Karakasis, M. and K.C., Giannakoglou: *On the Use of Metamodel-Assisted Multi-Objective Evolutionary Algorithms*. Engineering Optimization, 38(8):641–957, 2007.
- [34] Giannakoglou K.C., Giotis A.P. and Karakasis, M.K.: *Low-cost Genetic Optimization based on Inexact Pre-Evaluations and the Sensitivity Analysis of Design Parameters*. Inverse Problems in Engineering, 9(4):389–412, 2001.
- [35] Bokrantz, R. and Fredriksson, A.: *Necessary and Sufficient Conditions for Pareto Efficiency in Robust Multiobjective Optimization*. European Journal of Operational Research, 262:682–692, 2017.
- [36] Kapellos C., Kavvadias I., Papoutsis Kiachagias E. and Giannakoglou, K.: *On the use of the Unsteady Continuous Adjoint Method for the Optimization of Jet-Based Flow Control Systems*. EUROGEN, 2015.

- [37] Jameson, A. and Kim, S.: *Reduction of the Adjoint Gradient Formula in the Continuous Limit*. 41th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada:AIAA Paper 2003-0040, 2003.
- [38] Papoutsis-Kiachagias, E.M. and Giannakoglou, K.C.: *Continuous Adjoint Methods for Turbulent Flows, applied to Shape and Topology Optimization: Industrial Applications*. Archives of Computational Methods in Engineering, 23:255-299, 2016.
- [39] Kavvadias I.S., Papoutsis Kiachagias E.M. and Giannakoglou, K.C.: *On the Proper Treatment of Grid Sensitivities in Continuous Adjoint Methods for Shape Optimization*. Journal of Computational Physics, 301:1523-1542, 2015.
- [40] Παπαδημητρίου, Δ.: *Συζυγείς (Adjoint) διατυπώσεις για την ανάλυση-σχεδίαση περυγώσεων στροβιλομηχανών και τη βέλτιστη προσαρμογή πλέγματος με a posteriori εκτίμηση σφάλματος*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2007.
- [41] Βρυώνης, Π.Γ.: *Μέθοδος των Τεμνόμενων Κυψελών για 2Δ Χρονικά Μόνιμες και Μη-Μόνιμες Ροές. Προγραμματισμός και Διερεύνηση Προσταθεροποιητή Χαμηλών Αριθμών Mach για τον Ευθύ και το Συζυγή Επιλύτη*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2018.