



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

---

Προσαρμοστική Παραμόρφωση 2Δ/3Δ Δομημένων και  
Μη-Δομημένων Πλεγμάτων με το Πρότυπο Κίνησης του  
Απαραμόρφωτου Σώματος

---

Διπλωματική Εργασία

Αθανάσιος Κοντός

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2018



## Ευχαριστίες

Αποτελεί πάγια πρακτική η ολοκλήρωση των σπουδών κάθε φοιτητή να επισφραγίζεται με την εκπόνηση διπλωματικής εργασίας. Η διπλωματική εργασία αναδεικνύει τελικά το απόσταγμα της γνώσης, της επιστημονικής μας κατάρτισης και της προσωπικής ίσως εμπάθυνας σε αντικείμενα που εξωτερικεύουν την ξεχωριστή εμπειρία των χρόνων σπουδών μας. Για την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας συνέβαλαν πρόσωπα για τα οποία θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου για την πολύτιμη αρωγή τους.

Αρχικά, οφείλω να απευθύνω τις θερμότερες μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας, κ. Κυριάκο Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητή του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ, για τη δυνατότητα που μου έδωσε να αναλάβω και να ασχοληθώ με ένα τόσο σύγχρονο και εξαιρετικά ενδιαφέρον θέμα, για την εμπιστοσύνη και για τη μέγιστη συμβολή του στην εκπόνηση αυτή της διπλωματικής, με τη συνεχή καθοδήγηση, τις υποδείξεις, τις πολύτιμες γνώσεις και τις εμπειρίες που μου μετέφερε καθ'όλη τη διάρκεια αυτής της συνεργασίας.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη Δρ. Βαρβάρα Ασούτη, η οποία αφιερώνοντας πολύτιμο χρόνο από τις δικές της ασχολίες, έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην έγκαιρη και αποτελεσματική εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας. Ακόμη, θέλω να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα Θανάση Λιατσικούρα, για τις εύστοχες παρατηρήσεις και τη βοήθειά του, όποτε τη χρειάστηκα.

Επίσης, αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω όλα τα μέλη της ΜΠΥΡ&Β, για τη συνεισφορά τους στη διπλωματική μου εργασία, όπως επίσης και όλα τα παιδιά του γραφείου στο κτήριο Ο, συμφοιτητές και μη, τόσο για τη βοήθεια και τις συμβουλές που μου παρείχαν όσο και για την καθημερινή παρέα.

Τέλος, το μεγαλύτερο ευχαριστώ το οφείλω στους γονείς μου, Γιάννη και Δέσποινα καθώς χωρίς την ψυχική, ηθική και υλική υποστήριξη, την εμπιστοσύνη και αδιαπραγμάτευτη αγάπη τους, τίποτα από όλα αυτά δε θα ήταν εφικτό, και φυσικά στα αδέρφια μου, Παναγιώτα, Γιώργο και Ιάσωνα, για την καθημερινή συντροφιά, τη συνεχή συμπαράσταση τους και το χάρισμα που έχουν να με κάνουν πάντα να γελάω. Τους ευχαριστώ που είναι δίπλα μου, τόσο στις επιτυχίες όσο και στις αποτυχίες, δίνοντάς μου την ελπίδα και τη δύναμη να συνεχίσω να προσπαθώ για το καλύτερο!



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ  
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ &  
ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

**Προσαρμοστική Παραμόρφωση 2Δ/3Δ Δομημένων και  
Μη-Δομημένων Πλεγμάτων με το Πρότυπο Κίνησης του  
Απαραμόρφωτου Σώματος**

Διπλωματική Εργασία  
του

**Αθανασίου Κοντού**

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2018

**Περίληψη**

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται έντονο ενδιαφέρον στον επιστημονικό κλάδο της Αεροδυναμικής Βελτιστοποίησης. Τα προβλήματα βελτιστοποίησης αποτελούν μια κατηγορία προβλημάτων του τομέα της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (Computational Fluid Dynamics, CFD), με μετακινούμενα όρια. Η ανάγκη ύπαρξης μεθόδων προσαρμοστικής παραμόρφωσης των υπολογιστικών πλεγμάτων, δηλαδή μετακίνησης των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος σύμφωνα με τη μετακίνηση του ορίου, έχει αυξηθεί, λόγω του μεγάλου ανταγωνισμού της σύγχρονης εποχής. Για το λόγο αυτό, έχουν αναπτυχθεί πολλές μέθοδοι προσαρμοστικής παραμόρφωσης. Στη διπλωματική εργασία, αναπτύσσεται, προγραμματίζεται και δοκιμάζεται μια νέα μέθοδος προσαρμοστικής παραμόρφωσης, η οποία καλείται **Τεχνική Κίνησης Απαραμόρφωτου Σώματος (ΚΑΣ)** (Rigid Body Motion, RBM). Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί το πρότυπο κίνησης του απαραμόρφωτου σώματος, όπως αυτό συναντάται στον κλάδο της μηχανικής.

Η μέθοδος, που αποτελεί αντικείμενο της διπλωματικής αυτής εργασίας, προγραμματίστηκε σύμφωνα με τη μαθηματική διατύπωση που περιγράφεται αναλυτικά στην

εργασία. Αξιοσημείωτο είναι ότι η χρήση της μεθόδου δεν εξαρτάται από το είδος του πλέγματος (δομημένο ή μη-δομημένο), ωστόσο γίνονται ξεχωριστές αναφορές στον τρόπο χειρισμού του κάθε είδους πλέγματος. Επιπροσθέτως, αυτή η νέα μέθοδος προσαρμοστικής παραμόρφωσης πλεγμάτων εξασφαλίζει αρκετά υψηλή ποιότητα στα προσαρμοσμένα πλέγματα. Το γεγονός αυτό αποδεικνύεται από την εφαρμογή της μεθόδου σε μια πληθώρα αεροδυναμικών εφαρμογών, όπως 2Δ πλέγματα πτερυγώσεων στροβιλομηχανών και μεμονωμένων αεροτομών καθώς και σε (3Δ) πτέρυγες και αεροσκάφη. Ακόμη, εξετάζονται μερικές πολύ ενδιαφέρουσες μη-μηχανολογικές περιπτώσεις

Τέλος, έχοντας επιδείξει την αποτελεσματικότητα της μεθόδου από τις προηγούμενες εφαρμογές, πραγματοποιείται αριθμητική επίλυση της ροής (εξισώσεις Euler) σε προσαρμοσμένα πλέγματα που υπολογίστηκαν με χρήση της τεχνικής ΚΑΣ, συγκεκριμένα γύρω από την πτέρυγα ONERA M6, προκειμένου να διαπιστωθεί ότι τα προσαρμοσμένα πλέγματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε εφαρμογές CFD.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS  
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING  
FLUIDS DEPARTMENT  
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES  
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

## Deformation of 2D/3D Structured and Unstructured Meshes using Rigid Body Motion

Diploma Thesis  
by

**Athanasios Kontos**

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

**Athens, September 2018**

### Abstract

Over the last years, there has been an increasing interest in the development of aerodynamic optimization methods. Optimization issues are part of a category of problems in the field of Computational Fluid Dynamics (CFD), which are characterized by the presence of moving boundaries. The need for development of mesh adaptation methods (internal node's displacement with respect to the boundary displacement) has been raised due to the fact that, nowadays, there is high competition – resulting in many mesh deformation methods being developed. This diploma thesis is focused on a new mesh deformation method called **Rigid Body Motion (RBM) Technique**. This method is based on the rigid body motion model, as described in the field of mechanics.

In this diploma thesis, this method was programmed according to the mathematical analysis that is presented below. The use of this method does not depend on the mesh type (structured or unstructured). Nonetheless, particular instructions are given on how to work with each mesh type. A great advantage of this method is that the deformed meshes are of high quality, as shown in the results of some aerodynamic applications - such as 2D structured meshes in the blade passage of a turbine, a 2D unstructured mesh around an airfoil and 3D unstructured meshes a-

round wings and aircrafts. Some non-engineering appealing cases are also examined.

Lastly, after the effectiveness of this method is proven based on the aforementioned applications, the 3D Euler equations are solved on the deformed mesh that was produced using the RBM method around the ONERA M6 wing. The purpose of these computations is to show that RBM method produces meshes that can be used in CFD applications.



# Ακρωνύμια

ΕΜΠ Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΕΘΣ Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

ΜΠΥΡ&Β Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής  
Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

---

ΥΡΔ Υπολογιστική Ρευστοδυναμική

2Δ Διδιάστατο

3Δ Τριδιάστατο

ΜΔΕ Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

ΚΑΣ Κίνηση Απαραμόρφωτου Σώματος

---

CFD Computational Fluid Dynamics

NTUA National Technical University of Athens

RBM Rigid Body Motion

---



# Περιεχόμενα

## Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1	Η Βελτιστοποίηση στην Αεροδυναμική . . . . .	1
1.2	Ανάγκη για Προσαρμοστική Παραμόρφωση Πλέγματος . . . . .	3
1.3	Άλλες Μέθοδοι Παραμόρφωσης Πλέγματος . . . . .	4
1.4	Η Τεχνική Κίνησης του Απαραμόρφωτου Σώματος (ΚΑΣ) . . . . .	6
1.5	Δομή της Εργασίας . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Η Τεχνική ΚΑΣ σε 2Δ Πλέγματα</b>	<b>9</b>
2.1	Μαθηματική Διατύπωση για 2Δ Πλέγματα . . . . .	9
2.2	Περιγραφή του Αλγορίθμου . . . . .	14
2.3	Μετρικές Ποιότητας 2Δ Πλέγματος . . . . .	15
2.3.1	Πλέγμα Τριγωνικών Στοιχείων . . . . .	16
2.3.2	Πλέγμα Τετραπλευρικών Στοιχείων . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Εφαρμογές της Τεχνικής ΚΑΣ σε 2Δ Πλέγματα</b>	<b>21</b>
3.1	Εφαρμογή σε Πλέγμα Τριγωνικών Στοιχείων . . . . .	21
3.2	Εφαρμογή σε 2Δ Πτερύγωση Στροβίλου . . . . .	23
3.3	Εφαρμογή σε 2Δ Πτερύγωση Συμπιεστή . . . . .	25
3.4	Εφαρμογή σε Μεμονωμένη Αεροτομή . . . . .	29
3.5	Εφαρμογή σε Υπεραντωτική Διάταξη Τριών Στοιχείων . . . . .	32
3.5.1	Στροφή Slat . . . . .	32
3.5.2	Στροφή Flap . . . . .	35

3.5.3	Ταυτόχρονη Στροφή Slat και Flap . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Η Τεχνική ΚΑΣ σε 3Δ Πλέγματα</b>	<b>39</b>
4.1	Μαθηματική Διατύπωση για 3Δ Πλέγματα . . . . .	39
4.2	Περιγραφή του Αλγορίθμου . . . . .	45
4.3	Μετρικές Ποιότητας του Πλέγματος . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Εφαρμογές της Τεχνικής ΚΑΣ σε 3Δ Πλέγματα</b>	<b>49</b>
5.1	Εφαρμογή σε Απλές Γεωμετρίες . . . . .	49
5.1.1	Εφαρμογή σε Κύβο . . . . .	49
5.1.2	Εφαρμογή σε Διαμάντι . . . . .	51
5.2	Εφαρμογή στην Πτέρυγα ONERA M6 . . . . .	54
5.2.1	Κάμψη της Πτέρυγας . . . . .	54
5.2.2	Κάμψη και Στρέψη της Πτέρυγας . . . . .	57
5.3	Εφαρμογή σε Αεροσκάφος . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Παράδειγμα Επίλυσης της Ροής σε 3Δ Πλέγμα Τετραεδρικών Στοιχείων</b>	<b>63</b>
6.1	Λογισμικό Επίλυσης της Ροής . . . . .	63
6.2	Επίλυση της Ροής γύρω από την Πτέρυγα ONERA M6 . . . . .	64
<b>7</b>	<b>Ανακεφαλαίωση, Συμπεράσματα &amp; Προτάσεις</b>	<b>67</b>
7.1	Ανακεφαλαίωση . . . . .	67
7.2	Συμπεράσματα . . . . .	68
7.3	Προτάσεις για Μελλοντική Μελέτη . . . . .	69
<b>A'</b>	<b>Άλλες μη-Αεροδυναμικές Εφαρμογές</b>	<b>71</b>
A'.1	2Δ Πλέγμα γύρω από το Περίγραμμα Φύλλου Πλατάνου . . . . .	71
A'.2	3Δ Πλέγμα γύρω από δύο Φιγούρες Ζώων . . . . .	72
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>79</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Η Βελτιστοποίηση στην Αεροδυναμική

Παλαιότερα, η ανάλυση της αεροδυναμικής συμπεριφοράς και, κατ' επέκταση, οι διαδικασίες σχεδιασμού και βελτιστοποίησης αεροδυναμικών σωμάτων βασιζόταν αποκλειστικά στη χρήση πειραματικών μεθόδων. Αργότερα, η ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών, επέτρεψε τη δημιουργία μεθόδων με τη χρήση των οποίων κατέστη εφικτή η αριθμητική επίλυση πεδίων ροής. Με το πέρασμα του χρόνου, οι μέθοδοι αεροδυναμικής ανάλυσης βελτιώθηκαν και 'τελειοποιήθηκαν', ενώ άρχισαν να διαφαίνονται οι πρώτες μέθοδοι για το σχεδιασμό και βελτιστοποίηση της μορφής πτερυγίων ή πτερύγων. Τα τελευταία χρόνια, παρατηρείται έντονο ενδιαφέρον στην ανάπτυξη μεθόδων βελτιστοποίησης, με τη χρήση των οποίων επιδιώκεται βελτιωμένη απόδοση διαφόρων αεροδυναμικών σωμάτων (πτερύγια στροβιλομηχανών, πτέρυγες αεροσκαφών, μορφή αυτοκινήτων κλπ) σε ένα εύρος λειτουργίας. Το σύνολο των μεθόδων αυτών αποτελεί μία περιοχή επιστημονικής έρευνας υπό τον τίτλο **Βελτιστοποίηση - Σχεδιασμός Αεροδυναμικών Μορφών** (Aerodynamic Shape Optimization), στην ευρύτερη περιοχή της οποίας τοποθετείται και η διπλωματική αυτή εργασία.

Με τον όρο *βελτιστοποίηση*, [32], στα μαθηματικά και κατ' επέκταση στην αεροδυναμική, αποκαλείται η διαδικασία αναζήτησης της καταλληλότερης ή 'βέλτιστης' λύσης ενός προβλήματος. Στις περισσότερες περιπτώσεις των προβλημάτων ρευστοδυναμικής, αν όχι σε όλες, το πρόβλημα βελτιστοποίησης διατυπώνεται ως πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης μιας μεταβλητής.

Ως μέθοδος βελτιστοποίησης [32] ορίζεται το εργαλείο που ανιχνεύει το χώρο των υποψήφιας λύσεων και οδηγεί στον εντοπισμό της βέλτιστης υποψήφιας λύσης. Οι υποψήφιας λύσεις έχουν συνήθως πολλαπλά άπειρο πλήθος και, για το λόγο αυτό, η ταχύτητα της μεθόδου βελτιστοποίησης είναι σημαντικός παράγοντας. Κατά την ανίχνευση του χώρου των υποψήφιας λύσεων απαιτείται υποστήριξη από ένα δεύτερο υπολογιστικό εργαλείο, αυτό που αξιολογεί και βαθμολογεί κάθε υποψήφιας λύση, ως προς τους στόχους που έχουν τεθεί. Στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση μορφής, τα εργαλεία αξιολόγησης είναι κώδικες Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (λογισμικό CFD), δηλαδή επιλύτες πεδίων ροής με αριθμητικές μεθόδους.

Βασική διάκριση των διαφόρων μεθόδων βελτιστοποίησης είναι σε [32]:

- Αιτιοκρατικές
- Στοχαστικές

Μια αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης, χρησιμοποιεί τη γενικευμένη έννοια της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης, τιμές της οποίας καλείται να υπολογίσει ή να προσεγγίσει. Από την πλευρά των αιτιοκρατικών μεθόδων, υπάρχει η συζυγής μέθοδος βελτιστοποίησης, η οποία βασίζεται στον υπολογισμό της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης. Οι συζυγείς μέθοδοι βελτιστοποίησης (adjoint methods) είναι μαθηματικά εργαλεία υπολογισμού της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, εξασφαλίζοντας ταυτόχρονα την ικανοποίηση των βασικών εξισώσεων του προβλήματος (λ.χ. των εξισώσεων Navier - Stokes), [1], [10], [16], [23].

Χαρακτηριστικό των στοχαστικών μεθόδων βελτιστοποίησης είναι ότι χρησιμοποιούν στοιχεία τυχαίας αναζήτησης της βέλτιστης λύσης. Από την πλευρά των στοχαστικών μεθόδων οι εξελικτικοί αλγόριθμοι (evolutionary algorithms) επιλύουν διάφορα προβλήματα με χρήση αντίστοιχης με τη φύση διαδικασίας προσαρμογής στο περιβάλλον. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούν μηχανισμούς εξέλιξης προερχόμενους από τη φύση και βασίζονται στις αρχές εξέλιξης των ειδών όπως αυτές διατυπώθηκαν αρχικά από το Δαρβίνο. Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι χειρίζονται πληθυσμούς υποψήφιας λύσεων. Κατά την εξέλιξη, που είναι η βασική διαδικασία αναζήτησης της βέλτιστης λύσης, ένας πληθυσμός  $\mu$  υποψήφιας λύσεων εξελίσσεται στον πληθυσμό των  $\lambda$  απογόνων. Αυτοί οι απόγονοι είναι νέες λύσεις, που προκύπτουν από τους  $\mu$  γονείς, έχοντας ενδεχομένως καλύτερα χαρακτηριστικά. Από τους  $\lambda$  απογόνους, με κριτήριο την καταλληλότητα τους, επιλέγονται οι  $\mu$  γονείς της επόμενης γενιάς. Αυτό συνεχίζεται, γενιά με γενιά, μέχρι την ικανοποίηση κάποιου κριτηρίου σύγκλισης. Τέτοια κριτήρια υπάρχουν αρκετά και ένας εξελικτικός αλγόριθμος μπορεί να έχει σε ισχύ περισσότερα του ενός από αυτά. Μεταξύ αυτών είναι: (α) το να μη βελτιώνεται περαιτέρω η λύση

για έναν αριθμό διαδοχικών αξιολογήσεων ή γενεών, (β) το να έχει ομογενοποιηθεί ο πληθυσμός ή/και (γ) η ανάλυση του υπολογιστικού χρόνου που επέτρεπε ο χρήστης. Ένα πολύ χρήσιμο λογισμικό βελτιστοποίησης με χρήση εξελικτικών αλγορίθμων, είναι ο EASY (Evolutionary Algorithms SYstem) της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ, ο οποίος χρησιμοποιεί μεταπρότυπα προκειμένου να μειωθεί το υπολογιστικό κόστος, [8], [32].

## 1.2 Ανάγκη για Προσαρμοστική Παραμόρφωση Πλέγματος

Αντικείμενο μιας ευρείας περιοχής της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης είναι η εύρεση βέλτιστων μορφών ως προς έναν ή περισσότερους στόχους [20]. Για την εύρεση της βέλτιστης λύσης πρέπει πρώτα να αξιολογηθούν οι υποψήφιας λύσεις με τη χρήση ενός επιλύτη της ροής (λ.χ. η ανάλυση μιας υποψήφιας αεροτομής γίνεται με λογισμικό όπως είναι οι κώδικες επίλυσης των εξισώσεων Navier - Stokes, [22]). Επομένως, επειδή τα προβλήματα αυτά λύνονται με τη χρήση Ηλεκτρονικού Υπολογιστή, χρήζουν χωρικής διακριτοποίησης - απαιτείται δηλαδή η γένεση κατάλληλου υπολογιστικού πλέγματος [20], [29]. Ωστόσο, η διαδικασία της βελτιστοποίησης δεν πραγματοποιείται σε ένα βήμα αλλά είναι επαναληπτική, γεγονός που σημαίνει ότι σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, όποια μέθοδος και αν χρησιμοποιείται, τροποποιείται η γεωμετρία της προς βελτιστοποίηση μορφής. Ως εκ τούτου, πρέπει το πλέγμα να προσαρμοστεί στη νέα αυτή γεωμετρία ώστε να υποστηρίξει τον επιλύτη στο νέο κύκλο βελτιστοποίησης.

Με τον όρο **προσαρμοστική παραμόρφωση πλέγματος**, [13], [28], εννοείται η διαδικασία (μέθοδος και λογισμικό) μετατόπισης των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος σε συμφωνία με τις γνωστές μετατοπίσεις των κόμβων που βρίσκονται στο περίγραμμα του. Οι μέθοδοι προσαρμοστικής παραμόρφωσης υπολογιστικών πλεγμάτων είναι ένα απαραίτητο εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης, καθώς η επαναπλεγματοποίηση έχει αυξημένο κόστος, το οποίο μπορεί να χαρακτηριστεί και ως απαγορευτικό για σύνθετες εφαρμογές με μεγάλα 3D πλέγματα, κάτι που συμβαίνει στις περισσότερες βιομηχανικές εφαρμογές. Η τεχνική Κίνησης Απαραμόρφωτου Σώματος (Rigid Body Motion, RBM), που αποτελεί αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο μετατόπισης των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος αρκεί να είναι γνωστές οι μετατοπίσεις των οριακών κόμβων της προς βελτιστοποίηση μορφής. Με αυτόν τον τρόπο, επιταχύνεται η διαδικασία βελτιστοποίησης.

### 1.3 Άλλες Μέθοδοι Παραμόρφωσης Πλέγματος

Η ανάγκη αποφυγής της επαναπλεγματοποίησης οδήγησε στην ανάπτυξη πολλών μεθόδων προσαρμοστικής παραμόρφωσης πλεγμάτων. Η επιλογή της μεθόδου, εξαρτάται από τις ανάγκες του χρήστη, καθώς μερικές εξασφαλίζουν καλύτερη ποιότητα πλέγματος έναντι άλλων μεθόδων, αλλά με μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος ή το ανάποδο. Γενικότερα, η αύξηση της ποιότητας του προσαρμοζόμενου υπολογιστικού πλέγματος συνεπάγεται και μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος.

Οι διάφορες μέθοδοι προσαρμοστικής παραμόρφωσης πλέγματος κατατάσσονται στις εξής κατηγορίες:

- Μέθοδοι Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, ΜΔΕ (Partial Differential Equations - PDE methods)
- Μέθοδοι Φυσικών Ανάλογων (Physical Analogies)
- Αλγεβρικές Μέθοδοι (Algebraic Methods)
- Μέθοδοι Ελεύθερης Παραμόρφωσης Μορφής (Free Form Deformation, FFD)

Οι μέθοδοι που ανήκουν στην πρώτη κατηγορία υπολογίζουν τη μετακίνηση του πλέγματος μέσω της αριθμητικής επίλυσης ΜΔΕ με κατάλληλες οριακές συνθήκες. Η εφαρμογή των μεθόδων αυτών είναι σχετικά απλή, όμως έχουν περιορισμένη ευελιξία παραμόρφωσης και, συχνά, απαιτούν την εκτέλεση πολλών μικρότερων βημάτων, προτού φτάσουν στο τελικό, παραμορφωμένο πλέγμα. Για το λόγο αυτό, οι μέθοδοι ΜΔΕ χρησιμοποιούνται κυρίως σε προβλήματα τα οποία περιλαμβάνουν μικρές παραμορφώσεις. Αξίζει να σημειωθεί ότι η πιο συνηθισμένη εξίσωση που επιλύεται από τις μεθόδους που ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία, είναι η εξίσωση Laplace [4].

Η πλειονότητα των μεθόδων παραμόρφωσης πλέγματος που έχουν αναπτυχθεί, εμπίπτουν στη δεύτερη κατηγορία, τις μεθόδους φυσικών ανάλογων. Οι τρεις πιο διαδεδομένες και αξιόπιστες τεχνικές φυσικών ανάλογων, είναι η μέθοδος γραμμικών ελατηρίων, η μέθοδος των στρεπτικών ελατηρίων και η ελαστική μέθοδος. Στη μέθοδο γραμμικών ελατηρίων (spring analogy method) [3], ολόκληρο το υπολογιστικό χωρίο μοντελοποιείται ως ένα σύστημα αποτελούμενο από γραμμικά ελατήρια, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους στους κόμβους του πλέγματος. Η παραμόρφωση του πλέγματος καθορίζεται από την επίλυση των εξισώσεων στατικής ισορροπίας του συνολικού συστήματος, καθώς οι οριακοί κόμβοι μετακινούνται σύμφωνα με την παραμόρφωση της γεωμετρίας. Αν και η μέθοδος των γραμμικών ελατηρίων εφαρμόζεται εύκολα, σε



μεγάλες μετατοπίσεις και πυκνά πλέγματα εμφανίζει προβλήματα στιβαρότητας, οδηγώντας στην εμφάνιση ανεστραμμένων πλεγματοκελιών στο πλέγμα.

Η μέθοδος στρεπτικών ελατηρίων, [7], [28], δέχεται ως είσοδο τις μετακινήσεις των οριακών κόμβων (boundary nodes), επεξεργάζεται τις δυνάμεις που ασκούνται από νοητά ελατήρια στους κόμβους και, τελικά, υπολογίζει τις μετατοπίσεις των εσωτερικών κόμβων (internal nodes) του πλέγματος. Μέσω αυτής της διαδικασίας, επιτυγχάνεται η προσαρμογή του πλέγματος προς τη θέση του μετατοπισμένου ορίου (contour) του.

Στη μέθοδο ελαστικού αναλόγου (elastic analogy method) [18], ολόκληρο το υπολογιστικό χωρίο μοντελοποιείται ως ένα ελαστικό στερεό και η παραμόρφωση του πλέγματος καθορίζεται από τους κλασικούς νόμους της ελαστικής θεωρίας των στερεών. Η ελαστική μέθοδος εμφανίζει σημαντική ευελιξία, σε σχέση με τη μέθοδο των ελατηρίων, αλλά συνοδεύεται από μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος. Το μεγάλο υπολογιστικό κόστος, είναι γενικό χαρακτηριστικό των φυσικών αναλόγων.

Μια ακόμη μέθοδος που ανήκει στην κατηγορία των φυσικών αναλόγων, είναι και η μέθοδος που αποτελεί αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας, η **τεχνική Κίνησης του Απαραμόρφωτου Σώματος (Rigid Body Motion, RBM)**. Ο τρόπος λειτουργίας της μεθόδου παρουσιάζεται αναλυτικά στα επόμενα κεφάλαια.

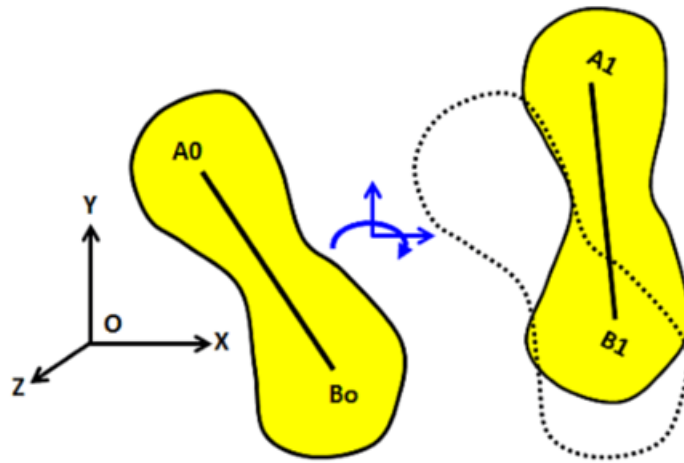
Η τρίτη κατηγορία μεθόδων παραμόρφωσης πλέγματος είναι οι αλγεβρικές μέθοδοι (algebraic methods). Οι μέθοδοι αυτές καθορίζουν τη μετατόπιση κάθε πλεγματοκελίου μέσω αλγεβρικών σχέσεων που εξαρτώνται από αυτήν των οριακών κόμβων του πλέγματος και τη σχετική θέση κάθε προς - μετατόπιση κόμβου. Γενικά, οι αλγεβρικές τεχνικές μετακίνησης πλέγματος δεν λαμβάνουν υπόψη την τοπολογία του πλέγματος, δηλαδή τον τρόπο σύνδεσης των πλεγματοκελιών, και για το λόγο αυτό μπορούν εύκολα και αξιόπιστα να εφαρμοστούν σε κάθε τύπο πλέγματος. Όλα τα παραπάνω, σε συνδυασμό με τη μεγάλη ταχύτητα με την οποία μετακινούν το πλέγμα, έχουν ως αποτέλεσμα τη σημαντική ανάπτυξη των αλγεβρικών μεθόδων τα τελευταία χρόνια. Παραδείγματα αλγεβρικών μεθόδων αποτελούν η μέθοδος παρεμβολής με χρήση συναρτήσεων ακτινικής βάσης (Radial Basis Functions - RBF), [20], καθώς και η μέθοδος παραμόρφωσης πλεγμάτων με παραμετροποίηση γράφων Delaunay (Delaunay graph mapping method), [5], [14], [21]. Η μέθοδος RBF μπορεί να εφαρμοστεί πολύ εύκολα ενώ παράγει πλέγματα καλής ποιότητας, που διατηρούν ικανοποιητικά την ορθογωνικότητα των κελιών κοντά στα όρια. Όμως, η άμεση εφαρμογή της μεθόδου αυτής σε μεγάλα 3D προβλήματα, έχει υψηλό υπολογιστικό κόστος. Η μέθοδος παραμόρφωσης πλέγματος με παραμετροποίηση γράφων Delaunay είναι άλλη

μια αλγεβρική μέθοδος προσαρμοστικής μετατόπισης πλεγμάτων. Η παραμόρφωση του υπολογιστικού πλέγματος σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή απαιτεί τη δημιουργία ενός αραιού πλέγματος (γράφου) τριγωνικών ( $2\Delta$ ) ή τετραεδρικών ( $3\Delta$ ) στοιχείων, το οποίο περιλαμβάνει στο εσωτερικό του τους προς μετακίνηση πλεγματούς κόμβους. Κάθε αλλαγή της γεωμετρίας του προβλήματος συνοδεύεται από την αντίστοιχη μετατόπιση των κορυφών του γράφου, επομένως και από την αντίστοιχη παραμόρφωση του. Η μέθοδος αυτή είναι αρκετά αξιόπιστη και παράγει πλέγματα πολύ καλής ποιότητας, ωστόσο, χαρακτηρίζεται και αυτή από μεγάλο υπολογιστικό κόστος.

Η τελευταία κατηγορία μεθόδων παραμόρφωσης πλέγματος, είναι μια ιδέα που έχει αναπτυχθεί τελευταία και προέρχεται από το χώρο των κινουμένων σχεδίων και των ψηφιακών χαρακτήρων. Η ελεύθερη παραμόρφωση μορφής, είναι μια γεωμετρική τεχνική η οποία χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση μικρών παραμορφώσεων στερεών σωμάτων. Στη συγκεκριμένη τεχνική, η τροποποίηση μιας γεωμετρίας δεν πραγματοποιείται με αλλαγή των γεωμετρικών παραμέτρων της, αλλά με παραμόρφωση του χώρου μέσα στον οποίο βρίσκεται το αεροδυναμικό σώμα, μέσω της παραμόρφωσης ενός πλέγματος ελέγχου. Επομένως, για να τροποποιηθεί η γεωμετρία ενός σώματος, αρκεί ο χρήστης ή η μέθοδος βελτιστοποίησης να μετατοπίσει τα σημεία ελέγχου του πλέγματος ελέγχου και, ταυτόχρονα, θα μετατοπιστούν όλα του σημεία του αεροδυναμικού σώματος. Χαρακτηριστικό παράδειγμα μεθόδου που εμπίπτει στην εν λόγω κατηγορία, είναι η προσαρμοστική παραμόρφωση πλέγματος με χρήση Αρμονικών Συντεταγμένων (Harmonic Coordinates) [17], [25], [33].

## 1.4 Η Τεχνική Κίνησης του Απαραμόρφωτου Σώματος (ΚΑΣ)

Στη μηχανική, ως απαραμόρφωτο σώμα ορίζεται το στερεό για το οποίο ισχύει η συνθήκη ότι η απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε εσωτερικών σημείων παραμένει σταθερή, καθώς το σώμα κινείται στο χώρο (σχήμα 1.1). Παρόλο που, σε πολλά προβλήματα, τα μελετούμενα σώματα αντιμετωπίζονται ως απολύτως στερεά, η προσέγγιση αυτή δεν ανταποκρίνεται, σε καμία περίπτωση, στην πραγματικότητα, καθώς δεν λαμβάνονται υπόψη σημαντικοί παράγοντες που επηρεάζουν ένα στερεό κατά την κίνησή του (π.χ. τάσεις, δονήσεις, μεταβλητές ιδιότητες υλικού κτλ.). Η παραπάνω θεωρία, μπορεί να συνδεθεί με την προσαρμοστική παραμόρφωση των υπολογιστικών πλεγμάτων με την εξής λογική. Γύρω από κάθε εσωτερικό κόμβο  $2\Delta$  δομημένου πλέγματος, υπάρχουν



**Σχήμα 1.1:** Κίνηση απαραμόρφωτου σώματος στο χώρο. Κύριο χαρακτηριστικό είναι ότι η απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε εσωτερικών σημείων παραμένει σταθερή ( $A_0B_0 = A_1B_1$ ).

8 (ή 26 για τα 3Δ προβλήματα) κόμβοι, οι οποίοι ονομάζονται 'γείτονες' του εσωτερικού κόμβου. Η κυψέλη που σχηματίζεται, θεωρείται ως ένα απολύτως στερεό σώμα, που είναι επιθυμητό να έχει τις ιδιότητες που περιγράφηκαν προηγουμένως. Επομένως, μπορεί να γίνει εύκολα κατανοητό ότι αυτό που προσπαθεί να πετύχει η μέθοδος ΚΑΣ είναι η μετακίνηση των κυψελών του πλέγματος χωρίς να μεταβάλλεται η αρχική τους μορφή. Η επίτευξη αυτού του στόχου για ολόκληρο το πλέγμα αποτελεί ένα ιδεατό σενάριο και, επειδή αυτό δεν είναι πραγματοποιήσιμο (λόγω της ανεξέλεγκτης κίνησης των ορίων), εκ των πραγμάτων επιδιώκεται όσο το δυνατόν μικρότερη απόκλιση από αυτό.

Η μέθοδος που παρουσιάζεται και υλοποιείται στη διπλωματική αυτή εργασία, με βάση την κατηγοριοποίηση που έχει προηγηθεί, εμπίπτει στην κατηγορία των μεθόδων Φυσικών Ανάλογων, καθώς η κυψέλη γύρω από κάθε εσωτερικό κόμβο του πλέγματος, μοντελοποιείται ως ένα απολύτως στερεό σώμα. Η νέα θέση των εσωτερικών κόμβων υπολογίζεται ως συνάρτηση της μετατόπισης των οριακών κόμβων του πλέγματος. Το τελικό πλέγμα έχει ποιότητα που δε διαφέρει σε μεγάλο βαθμό από την ποιότητα του αρχικού πλέγματος, ενώ προκύπτει αρκετά γρήγορα, παρά το γεγονός ότι η μέθοδος είναι επαναληπτική. Τα δύο αυτά στοιχεία, την καθιστούν αυτόματα ως μία αξιόπιστη προσαρμοστική μέθοδο παραμόρφωσης πλέγματος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης.

Στα επόμενα κεφάλαια περιγράφεται λεπτομερώς η τεχνική κίνησης απαραμόρφωτου σώματος, για 2Δ και 3Δ προβλήματα.

## 1.5 Δομή της Εργασίας

Η διπλωματική αυτή εργασία επικεντρώνεται στην υλοποίηση, προγραμματισμό και δοκιμή της τεχνικής ΚΑΣ σε δομημένα και μη-δομημένα, 2Δ και 3Δ, υπολογιστικά πλέγματα, με σκοπό να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα για την αποτελεσματικότητα της. Ο προγραμματισμός της μεθόδου έγινε σε γλώσσα Fortran, ενώ το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση των πλεγμάτων ήταν το Paraview.

- **Κεφάλαιο 2**

Παρουσιάζεται η μαθηματική διατύπωση της τεχνικής ΚΑΣ στις δύο διαστάσεις, γίνεται μια απλή περιγραφή του αλγορίθμου και ορίζονται οι μετρικές ποιότητας των 2Δ πλεγμάτων.

- **Κεφάλαιο 3**

Πραγματοποιείται εφαρμογή της μεθόδου σε μια πληθώρα 2Δ δομημένων και μη-δομημένων πλεγμάτων και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της.

- **Κεφάλαιο 4**

Παρουσιάζεται η μαθηματική διατύπωση της μεθόδου στις τρεις διαστάσεις, δίνονται τα βασικά βήματα του αλγορίθμου και ορίζεται η αντίστοιχη μετρική ποιότητας για τα 3Δ πλέγματα.

- **Κεφάλαιο 5**

Γίνεται εφαρμογή της τεχνικής ΚΑΣ σε διάφορα 3Δ πλέγματα και αναλύονται τα τελικά αποτελέσματα.

- **Κεφάλαιο 6**

Πραγματοποιείται επίλυση της ροής σε προσαρμοσμένα 3Δ μη-δομημένα πλέγματα γύρω από την πτέρυγα ONERA M6, τα οποία έχουν προκύψει από την εφαρμογή διαφόρων ειδών παραμορφώσεων πάνω σε αυτή.

- **Κεφάλαιο 7**

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται η σύνοψη και τα συμπεράσματα της διπλωματικής εργασίας και γίνονται μερικές προτάσεις για τη συνέχιση της στο μέλλον.

- **Παράρτημα**

Στο παράρτημα γίνεται εφαρμογή της μεθόδου σε δύο πολύ ενδιαφέρουσες μη-μηχανολογικές εφαρμογές.

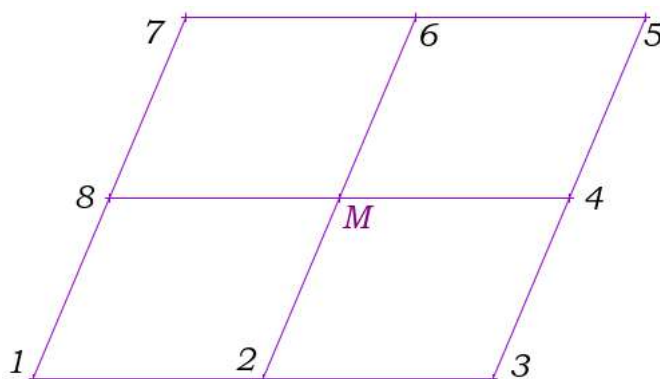
## Κεφάλαιο 2

### Η Τεχνική ΚΑΣ σε 2Δ

### Πλέγματα

#### 2.1 Μαθηματική Διατύπωση για 2Δ Πλέγματα

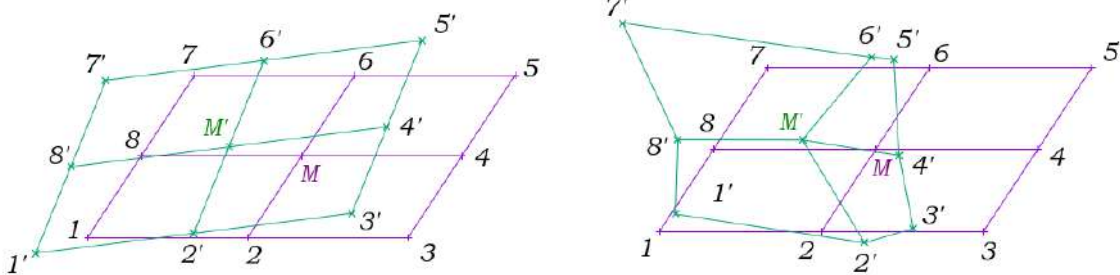
Προκειμένου να επεξηγηθεί καλύτερα η μέθοδος της μετακίνησης που προγραμματίζεται στη διπλωματική εργασία, θεωρείται ένα  $3 \times 3$  τμήμα ενός τυχαίου 2Δ δομημένου πλέγματος (stencil), όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1. Στο σχήμα 2.1 διακρίνονται ο ε-



**Σχήμα 2.1:** Τμήμα 2Δ Τυχαίου Δομημένου Υπολογιστικού Πλέγματος. Διακρίνονται ο κεντρικός κόμβος  $M$  καθώς και οι 8 γειτονικοί του κόμβοι.

σωτερικός κόμβος, ο οποίος ονομάζεται  $M$ , και οι 8 γείτονές του. Η μετατόπιση του κόμβου  $M$ , υπολογίζεται ανάλογα με τη μετατόπιση των γειτόνων του. Το ζητούμενο είναι, αν είναι γνωστές οι μετακινήσεις των 8 γειτόνων του  $M$ , να υπολογισθεί η

μετακίνηση του κόμβου  $M$  με τέτοιο τρόπο ώστε να διέπεται από τις ιδιότητες του α-παραμόρφωτου σώματος. Ουσιαστικά, η τεχνική η οποία χρησιμοποιείται, εξασφαλίζει τη μεταφορά όλου του stencil κατά  $(\Delta x, \Delta y)$ , καθώς και τη στροφή του κατά γωνία  $\theta$  γύρω από το σημείο  $M$ , διατηρώντας παράλληλα την αρχική του μορφή. Στο σχήμα 2.2α', έχει σχεδιαστεί η ιδανική περίπτωση τυχαίας στροφής και μεταφοράς ενός  $3 \times 3$  πλέγματος, ενώ αυτό συμπεριφέρεται ως απολύτως στερεό, ενώ στο σχήμα 2.2β', φαίνεται το προσαρμοσμένο πλέγμα σε περίπτωση που εφαρμοστεί μια ακραία και μεγάλη παραμόρφωση σε αυτό. Χρησιμοποιούνται οι ακόλουθοι συμβολισμοί:



(α') Ιδανική στροφή και μετατόπιση ενός  $3 \times 3$  υπολογιστικού πλέγματος

(β') Τυχαία μετατόπιση  $3 \times 3$  υπολογιστικού πλέγματος

**Σχήμα 2.2:** Ιδανική μετατόπιση και στροφή (σχήμα 2.2α') και τυχαία μετατόπιση (2.2β') ενός  $3 \times 3$  πλέγματος.

$(x_i, y_i), (x_M, y_M)$ : Αρχικές Θέσεις Κόμβων

$(x'_i, y'_i), (x'_M, y'_M)$ : Τελικές Θέσεις Κόμβων

Η ιδανική νέα θέση του κόμβου δίνεται από την εξίσωση (η οποία συνδυάζει μεταφορά κατά  $\Delta x$  και  $\Delta y$  και περιστροφή κατά γωνία  $\theta$ ):

$$\begin{bmatrix} x''_L \\ y''_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, έχει γίνει αναγωγή των μεταβλητών που καθορίζουν τη θέση των κόμβων στο τοπικό (local) σύστημα συντεταγμένων. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} x_L &= x_i - x_M \\ y_L &= y_i - y_M \end{aligned} \quad (2.2)$$

Χρησιμοποιούνται οι συμβολισμοί:

$(x_L, y_L)$ : Αρχικές θέσεις κόμβων στο τοπικό σύστημα  
 $(x'_L, y'_L)$ : Θέσεις κόμβων μετά την επιβολή της αρχικής παραμόρφωσης  
 $(x''_L, y''_L)$ : Τελικές θέσεις κόμβων του προσαρμοσμένου πλέγματος

Η συνάρτηση η οποία ζητείται να ελαχιστοποιηθεί, είναι:

$$I = \sum_{i \in \Gamma(M)} \frac{1}{2} \left\{ \left[ x_i \cos \theta + y_i \sin \theta + \Delta x - x'_L \right]^2 + \left[ -x_i \sin \theta + y_i \cos \theta + \Delta y - y'_L \right]^2 \right\} \quad (2.3)$$

Προκειμένου να υπολογιστούν τα  $\Delta x$  και  $\Delta y$ , απαιτείται ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων της συνάρτησης  $I$  ως προς  $\Delta x$  και  $\Delta y$ :

$$\frac{\partial I}{\partial \Delta x} = \sum_{i \in \Gamma(M)} \left( x_i \cos \theta + y_i \sin \theta + \Delta x_M - x'_L \right) = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \Delta y} = \sum_{i \in \Gamma(M)} \left( -x_i \sin \theta + y_i \cos \theta + \Delta y_M - y'_L \right) = 0 \quad (2.5)$$

Οι εξισώσεις 2.4 και 2.5, επιλύονται ως προς  $\Delta x_M$  και  $\Delta y_M$ , οπότε:

$$\Delta x_M = \frac{1}{n} \sum_{i \in \Gamma(M)} \left( x'_L - x_i \cos \theta - y_i \sin \theta \right) \quad (2.6)$$

$$\Delta y_M = \frac{1}{n} \sum_{i \in \Gamma(M)} \left( y'_L + x_i \sin \theta - y_i \cos \theta \right) \quad (2.7)$$

Επιπροσθέτως, η παράγωγος της προς ελαχιστοποίηση συνάρτησης  $I$  ως προς τη γωνία  $\theta$  κατά την οποία περιστρέφεται το stencil είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \theta} = & \sum_{i \in \Gamma(M)} \left[ \left( x_i \cos \theta + y_i \sin \theta + \Delta x - x'_L \right) \left( -x_i \sin \theta + y_i \cos \theta \right) \right] + \\ & \sum_{i \in \Gamma(M)} \left[ \left( -x_i \sin \theta + y_i \cos \theta + \Delta y - y'_L \right) \left( -x_i \cos \theta - y_i \sin \theta \right) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Αναπτύσσοντας την εξίσωση 2.8, προκύπτει μια σχέση της μορφής:

$$A \sin \theta + B \cos \theta = 0 \quad (2.9)$$

όπου:

$$A = \sum_{i \in \Gamma(M)} \left( -x_i \Delta x + x'_L x_i - y_i \Delta y + y'_L y_i \right) \quad (2.10)$$

$$B = \sum_{i \in \Gamma(M)} \left( y_i \Delta x - x'_L y_i - x_i \Delta y + y'_L x_i \right) \quad (2.11)$$

Η εξίσωση 4.2 μπορεί να επιλυθεί με μια επαναληπτική μέθοδο. Επιλέγεται η μέθοδος Newton - Raphson, [30], και η επίλυση γίνεται ως εξής:

$$F = A \sin \theta + B \cos \theta = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = A \cos \theta - B \sin \theta \quad (2.13)$$

Η γωνία  $\theta$  προσδιορίζεται ως:

$$\theta^{new} = \theta^{old} - \frac{A \sin \theta + B \cos \theta}{A \cos \theta - B \sin \theta} \quad (2.14)$$

Η τελική διόρθωση των συντεταγμένων του κόμβου  $M$  γίνεται λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι το  $M$  είναι ο άξονας της στροφής. Συνεπώς:

$$x'_M = x_M + \Delta x_M \quad (2.15)$$

$$y'_M = y_M + \Delta y_M \quad (2.16)$$

Με την τεχνική που μόλις παρουσιάστηκε, παρέχεται η δυνατότητα να υπολογίζεται η μετατόπιση (κατά τους άξονες  $x$ ,  $y$ ) και η στροφή (γύρω από αυτούς) του κεντρικού κόμβου ενός  $3 \times 3$  δομημένου πλέγματος, με δεδομένο ότι είναι γνωστές οι μετατοπίσεις των 8 γειτόνων του. Είναι προφανές, όμως, ότι η μέθοδος θα κληθεί να διαχειριστεί κατά πολύ μεγαλύτερα και πυκνότερα πλέγματα, εφόσον αυτά θα είναι π.χ. πλέγματα γύρω από αεροδυναμικά σώματα και θα απαιτείται να γίνει επίλυση της ροής σε αυτά. Για το λόγο αυτό, κρίνεται απαραίτητο να δειχθεί ο τρόπος με τον οποίον λειτουργεί η μέθοδος σε μεγάλα πλέγματα.

Ένα πλέγμα γύρω από ένα αεροδυναμικό σώμα (αεροτομές, πτέρυγες, αεροσκάφη), χαρακτηρίζεται από τους εξωτερικούς κόμβους (οι οποίοι καθορίζουν τα όρια του χωρίου στο οποίο γίνεται η επίλυση της ροής), από τους κόμβους τοιχώματος ή οριακούς κόμβους (οι οποίοι είναι οι κόμβοι πάνω στο τοίχωμα του αεροδυναμικού σώματος) και από τους εσωτερικούς κόμβους. Στην περίπτωση που το αεροδυναμικό σώμα είναι περυγώση στροβιλομηχανής, τότε οι εξωτερικοί κόμβοι είναι, ουσιαστικά η είσοδος



και η έξοδος του πεδίου και τα περιοδικά όρια.

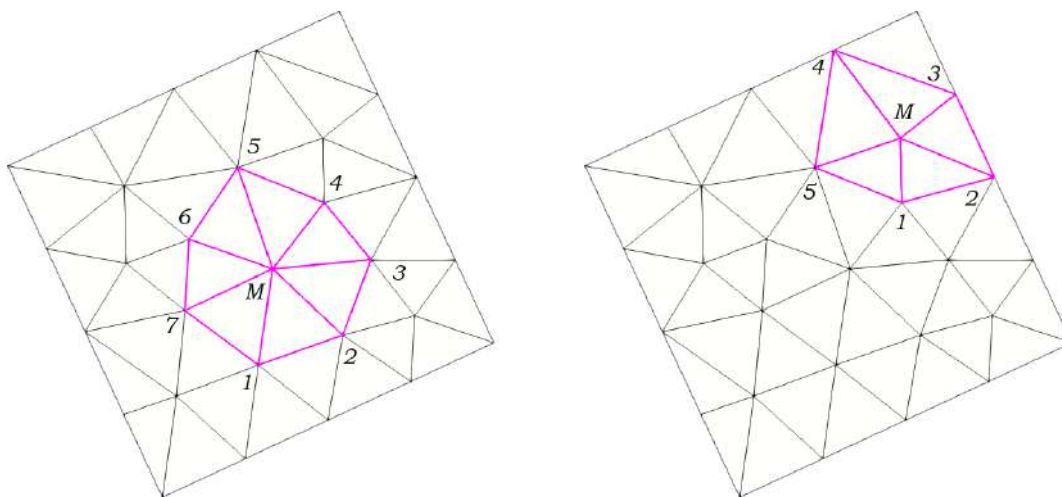
Μπορεί να γίνει εύκολα κατανοητό, ότι η θέση των εξωτερικών κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος δεν επιτρέπεται να αλλάξει, καθώς το χωρίο μέσα στο οποίο θα γίνει η επίλυση της ροής είναι καθορισμένο από τη γένεση του πλέγματος. Επιπροσθέτως, οι κόμβοι του τοιχώματος, αλλάζουν μόνον εφόσον ο χρήστης ή μια μέθοδος βελτιστοποίησης μορφής το αποφασίσει, γεγονός άλλωστε που οδήγησε στην ανάπτυξη της πληθώρας των μεθόδων προσαρμοστικής παραμόρφωσης πλεγμάτων που προαναφέρθηκαν. Συνεπώς, η εκάστοτε μέθοδος υπολογίζει τη μετακίνηση των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος.

Με την τεχνική ΚΑΣ, για να γίνει ο υπολογισμός της μετακίνησης του κάθε κόμβου, απομονώνεται, σε κάθε επανάληψη, ο κάθε ένας ξεχωριστά και υπολογίζεται η μετατόπιση του, συναρτήσει της μετακίνησης των γειτόνων του (λογική Jacobi). Είναι αυτονόητο ότι σαρώνονται μόνο οι εσωτερικοί κόμβοι ενώ είναι επιθυμητό η σάρωση να ξεκινάει από τους κόμβους οι οποίοι είναι πολύ κοντά στους κόμβους του τοιχώματος και σταδιακά η αρχική μετατόπιση των οριακών κόμβων διαδίδεται προς το εξωτερικό όριο.

Ο τρόπος λειτουργίας της μεθόδου, παρουσιάζει την ιδιότητα, ότι οι κόμβοι που βρίσκονται κοντά στο όριο του αεροδυναμικού σώματος, δέχονται μεγαλύτερη μετακίνηση, σε σχέση με τους κόμβους που είναι τοποθετημένοι στο εξωτερικό όριο. Επίσης, το γεγονός ότι κοντά στο τοίχωμα το πλέγμα είναι πυκνότερο σε σύγκριση με το εξωτερικό όριο, μια έντονη μετατόπιση του τοιχώματος μπορεί να προκαλέσει ανεστραμμένα κελιά, γεγονός που είναι εντελώς ανεπιθύμητο στα προβλήματα CFD. Για να αντιμετωπιστεί το μειονέκτημα αυτό, θα μπορούσε, μελλοντικά, να τοποθετηθούν όρια στη μετατόπιση των κοντινών στο τοίχωμα κόμβων, ώστε να διαδοθεί αποτελεσματικότερα η αρχική μετατόπιση του τοιχώματος, στους εξωτερικούς κόμβους. Μια τέτοια τροποποίηση θα ήταν ιδιαίτερα σημαντική βελτίωση στην ήδη αποτελεσματική τεχνική ΚΑΣ.

Ένα μεγάλο πλεονέκτημα της τεχνικής ΚΑΣ, είναι ότι η συνδεσιμότητα (connectivity) των κόμβων, δεν παίζει κανένα ρόλο στην επίλυση και στον προσδιορισμό των νέων θέσεων των κόμβων. Χρησιμοποιείται, δηλαδή, η ίδια μαθηματική διατύπωση που χρησιμοποιήθηκε και για τα δομημένα πλέγματα, με τη μόνη διαφορά ότι έχει αλλάξει η μορφή της κυψέλης η οποία μετακινείται. Αυτό σημαίνει ότι πλέον οι γείτονες του κάθε εσωτερικού κόμβου του πλέγματος διαφέρουν ως προς το πλήθος τους. Στο σχήμα 2.3 φαίνεται ένα μη-δομημένο πλέγμα που αποτελείται από τριγωνικά στοιχεία, για το οποίο έχουν απομονωθεί δύο διαφορετικοί εσωτερικοί κόμβοι οι οποίοι παρουσιάζουν

διαφορετικό αριθμό γειτόνων. Στο σχήμα 2.3α' ο κεντρικός κόμβος έχει 7 γειτονικούς, ενώ στο σχήμα 2.3β', ο κεντρικός έχει 5. Έτσι, ο αλγόριθμος που χειρίζεται



(α') Ο κεντρικός κόμβος  $M$  διαθέτει 7 γειτονικούς κόμβους.

(β') Ο κεντρικός κόμβος  $M$  διαθέτει 5 γειτονικούς κόμβους.

**Σχήμα 2.3:** Εσωτερικοί κόμβοι  $2\Delta$  μη-δομημένου πλέγματος με διαφορετικό αριθμό γειτόνων.

μη-δομημένα πλέγματα οφείλει να έχει την ικανότητα να αναγνωρίζει τη μορφή των στοιχείων (τριγωνικά, τετραπλευρικά κλπ) από τα οποία αποτελείται το πλέγμα και να προσδιορίζει τον αριθμό των γειτόνων κάθε εσωτερικού κόμβου του μη-δομημένου πλέγματος. Σημειώνεται ότι ο αριθμός αυτός μπορεί να είναι διαφορετικός για κάθε εσωτερικό κόμβο του πλέγματος.

## 2.2 Περιγραφή του Αλγορίθμου

Συνοπτικά, η μέθοδος προσαρμοστικής μετατόπισης πλέγματος με την τεχνική της κίνησης του απαραμόρφωτου σώματος, περιλαμβάνει τα εξής βήματα:

- Βήμα 1** Αποθήκευση των θέσεων των κόμβων του αρχικού πλέγματος, αναγνώριση των οριακών κόμβων και μεταβολή της αρχικής τους θέσης, σύμφωνα με τη δεδομένη μετατόπισή τους η οποία προκύπτει από τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης.
- Βήμα 2** Σάρωση όλων των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος και απομόνωση ενός-ενός από αυτούς με τους γείτονές του ξεχωριστά.

**Βήμα 3** Επαναληπτική επίλυση των εξισώσεων που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 2.1, προκειμένου να γίνει υπολογισμός της νέας θέσης του τρέχοντος εσωτερικού κόμβου, ανάλογα με τη θέση των γειτονικών του κόμβων.

**Βήμα 4** Υπολογισμός της Ιακωβιανής ορίζουσας για κάθε κελί (cell) του πλέγματος, ώστε να γίνει έλεγχος της εγκυρότητας του νέου προσαρμοσμένου πλέγματος.

**Βήμα 5** Υπολογισμός της μετρικής ποιότητας του μετατοπισμένου πλέγματος, ώστε να γίνει σύγκριση με το αρχικό.

Η μετατόπιση των οριακών κόμβων οφείλεται, συνήθως, στη μεταβολή της γεωμετρίας του σώματος για το οποίο έχει δημιουργηθεί το πλέγμα. Με βάση τη μετατόπιση αυτή, υπολογίζονται οι νέες θέσεις των κόμβων του προσαρμοσμένου πλέγματος.

Η διαδικασία υπολογισμού του προσαρμοζόμενου πλέγματος είναι επαναληπτική, ωστόσο η μέθοδος εξασφαλίζει γρήγορη σύγκλιση, ακόμα και για πυκνά μη-δομημένα πλέγματα.

Τα στοιχεία που παρουσιάστηκαν ως τώρα, αφορούν 2Δ πλέγματα. Η αναγωγή της μεθόδου στα 3Δ πλέγματα, περιγράφεται λεπτομερώς σε επόμενο κεφάλαιο. Στο πλαίσιο της διπλωματικής αυτής εργασίας προγραμματίστηκε και δοκιμάστηκε η μέθοδος τόσο σε 2Δ προβλήματα, όσο και σε 3Δ. Σημειώνεται, ότι η αρχική μετατόπιση ταυτίζεται με την αλλαγή της θέσης των οριακών κόμβων του πλέγματος, η οποία συνήθως οφείλεται στη διαδικασία αεροδυναμικής βελτιστοποίησης του εκάστοτε μελετούμενου σώματος.

## 2.3 Μετρικές Ποιότητας 2Δ Πλέγματος

Αναμφίβολα, η σύνδεση της ποιότητας του πλέγματος με το αποτέλεσμα ενός επιλύτη είναι πολύ σημαντικός παράγοντας. Ένα πλέγμα υψηλής ποιότητας, μπορεί να οδηγήσει σε γρηγορότερη σύγκλιση του επιλύτη, ενώ, αντίθετα, ένα χαμηλής ποιότητας πλέγμα, λ.χ. δεν υπάρχει η απαραίτητη πύκνωση στα οριακά στρώματα ή κοντά σε ένα κρουστικό κύμα, μπορεί να δώσει λάθος αποτελέσματα. Στη διπλωματική αυτή εργασία μελετάται μια μέθοδος προσαρμοστικής παραμόρφωσης του πλέγματος με σκοπό την αποφυγή της επαναπλεγματοποίησης μέσα λ.χ. σε έναν αλγόριθμο βελτιστοποίησης. Με αυτό τον τρόπο εξοικονομείται χρόνος, αλλά είναι αναγκαίο να ελεγχθεί και η ποιότητα του πλέγματος που προκύπτει, γιατί αν αυτό είναι χαμηλής ποιότητας, η όλη διαδικασία είναι πρακτικά άχρηστη και το πλέγμα είναι ακατάλληλο για χρήση σε εφαρμογές CFD (δείτε ενδεικτική πιστοποίηση στο κεφάλαιο 6).

Για τη μέτρηση της ποιότητας του πλέγματος ορίζονται συνήθως μετρικές, οι οποίες ποσοτικοποιούν την ποιότητα, ώστε να γίνει εφικτή η σύγκριση με τη μέγιστη ποιότητα που θεωρητικά μπορεί να έχει ένα πλέγμα. Για παράδειγμα, εάν ένα πλέγμα αποτελείται από τριγωνικά στοιχεία, τότε βέλτιστο θεωρείται αυτό που αποτελείται από ισόπλευρα τρίγωνα.

### 2.3.1 Πλέγμα Τριγωνικών Στοιχείων

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, το ιδανικό στοιχείο για ένα πλέγμα τριγωνικών στοιχείων, αποτελεί το ισόπλευρο τρίγωνο. Το ζήτημα της μέτρησης ποιότητας πλέγματος τριγωνικών, αλλά και τετραπλευρικών στοιχείων, έχει αναλυθεί και στο παρελθόν, σε προηγούμενες δημοσιεύσεις. Σύμφωνα με αυτές, μια μετρική μορφής (shape metric) είναι μία συνεχής συνάρτηση, η οποία υπολογίζει την ποιότητα του τριγωνικού ή τετραπλευρικού στοιχείου και παραμένει αναλλοίωτη κατά τη μεταφορά, τον καθρεπτισμό, την περιστροφή και ομοιόμορφη συμπίεση. Επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί η **μετρική μέσης αναλογίας** (mean-ratio), αφού η αλγεβρική της μορφή, διευκολύνει αρκετά τη διαχείρισή της. Σημειώνεται ότι πολλά από τα στοιχεία που πρόκειται να παρουσιαστούν βρίσκονται στη σχετική βιβλιογραφία [6], [11],[15], [19].

Το πρώτο βήμα για τον καθορισμό της ποιότητας ( $q_e$ ) ενός τριγωνικού στοιχείου, είναι ο ορισμός της φοράς με την οποία γίνεται η αρίθμηση των κόμβων του στοιχείου. Επιλέγεται η ανθρωπολογιακή φορά, γεγονός που εξασφαλίζει το θετικό πρόσημο της ιακωβιανής ορίζουσας για τα αποδεκτά τρίγωνα. Κάθε τριγωνικό στοιχείο αποτελείται από 3 κόμβους. Ας είναι οι συντεταγμένες των τριών κόμβων  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_j, y_j)$ ,  $(x_k, y_k)$ . Η *Ιακωβιανή* (Jacobian) ορίζουσα υπολογίζεται για κάθε κορυφή του τριγωνικού στοιχείου. Για τον κόμβο  $i$  εκφράζεται ως:

$$A_i = \begin{bmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Σημειώνεται ότι το ιακωβιανό μητρώο δεν είναι ανεξάρτητο του κόμβου στον οποίο υπολογίζεται. Ωστόσο, η ορίζουσα του πίνακα  $A_n$ ,  $n = i, j, k$  ισούται με το διπλάσιο του εμβαδού του τριγωνικού στοιχείου, και είναι το ίδιο, ανεξαρτήτως του πιο από τα τρία Ιακωβιανά μητρώα χρησιμοποιείται.

Έστω  $W$  το ιακωβιανό μητρώο για το ιδανικό στοιχείο. Συνήθως, ως ιδανικό τρι-

γωνικό στοιχείο επιλέγεται είτε ένα ισοσκελές τρίγωνο είτε ένα ισόπλευρο. Για το ισόπλευρο τρίγωνο ισχύει:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Στη διπλωματική αυτή εργασία, ως ιδανικό στοιχείο, επιλέγεται το ισόπλευρο τρίγωνο, ωστόσο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και οποιοδήποτε άλλο τρίγωνο, αρκεί  $\det(W) > 0$ .

Έστω ένα τριγωνικό στοιχείο με ιακωβιανό μητρώο  $A_i$ , όπως αυτό ορίστηκε στην εξίσωση 2.17 και ένα ιδανικό τριγωνικό στοιχείο με ιακωβιανό μητρώο  $W$ . Η ποσότητα  $A_i W^{-1}$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας, όταν το τυχαίο και το ιδανικό τριγωνικό στοιχείο έχουν ίδιο σχήμα και μέγεθος. Εάν το τυχαίο και το ιδανικό στοιχείο έχουν το ίδιο σχήμα, αλλά διαφορετικά μεγέθη, τότε το γινόμενο  $A_i W^{-1}$  είναι ένα θετικό πολλαπλάσιο του μοναδιαίου πίνακα, το οποίο δηλώνει την κλίμακα του τυχαίου στοιχείου. Ο πίνακας  $A_i W^{-1}$  ορίζεται ως:

$$S_i = A_i W^{-1} = \begin{bmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i \end{bmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Ο υπολογισμός του πίνακα 2.19 είναι απαραίτητος, προκειμένου να βρεθεί η μετρική μέσης αναλογίας του κόμβου  $i$ , η οποία ορίζεται ως:

$$\mu_i = \mu(S_i) = \frac{\det(S_i)}{2\|S_i\|_F^2} \quad (2.20)$$

Στην εξίσωση 2.20, με  $\det(S_i)$  συμβολίζεται η ορίζουσα του πίνακα  $S_i$ , η οποία αν είναι αρνητική, σημαίνει ότι αυτό το τρίγωνο είναι ανεστραμμένο, ενώ ο όρος  $\|S_i\|_F^2$  είναι η νόρμα κατά *Frobenius* και ισούται με την τετραγωνική ρίζα ίχνους γινομένου πινάκων ως:

$$\|S_i\|_F^2 = \sqrt{\text{tr}(S_i^T S_i)} \quad (2.21)$$

όπου το ίχνος ενός πίνακα ισούται με το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του.

Πρέπει να σημειωθεί πως όταν το στοιχείο του οποίου υπολογίζεται η ποιότητα και το ιδανικό στοιχείο, έχουν το ίδιο σχήμα αλλά με μια κλίμακα  $\sigma > 0$ , τότε ο παρο-

νομαστής της σχέσης 2.20, ισούται με  $2\sigma^2$ . Για το λόγο αυτό, η τελική ποσότητα πολλαπλασιάζεται με έναν όρο σχετικό με το εμβαδό του στοιχείου ( $\frac{1}{2}|\det(A_iW^{-1})|$ ), οπότε το τελικό αποτέλεσμα θα είναι αδιάστατο.

Έτσι, ορίζεται ως ποιότητα του τριγωνικού στοιχείου ( $q_e$ ) το διπλάσιο της μέσης τιμής των μετρικών μέσης αναλογίας κάθε κόμβου, όπως φαίνεται στη σχέση 2.22.

$$q_e = 2\bar{\mu} \quad \text{με} \quad \bar{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^3 \mu_i}{3} \quad (2.22)$$

Ο λόγος που λαμβάνεται το διπλάσιο της μέσης τιμής των μετρικών μέσης αναλογίας κάθε κόμβου για τον υπολογισμό της ποιότητας του τριγωνικού στοιχείου, είναι για απλοποίηση του παρονομαστή της σχέσης 2.20, ώστε όταν ένα στοιχείο ταυτίζεται με το ιδανικό, η ποιότητα του να παίρνει την τιμή 1.

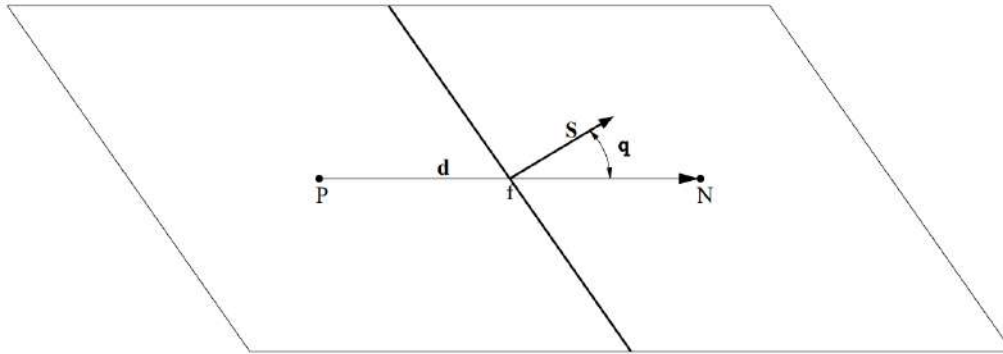
Με τη διαδικασία που μόλις παρουσιάστηκε, υπολογίζεται η ποιότητα ενός τριγωνικού στοιχείου του πλέγματος. Για την αξιολόγηση της ποιότητας ολόκληρου του πλέγματος, όμως, πρέπει να υπολογιστεί η ποιότητα κάθε τριγωνικού στοιχείου από το οποίο αποτελείται. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αυτών καθορίζουν την ποιότητα του προσαρμοσμένου πλέγματος. Χρήσιμο είναι, επίσης, να είναι γνωστές η μέγιστη και ελάχιστη τιμή που συναντάται σε κάθε πλέγμα.

### 2.3.2 Πλέγμα Τετραπλευρικών Στοιχείων

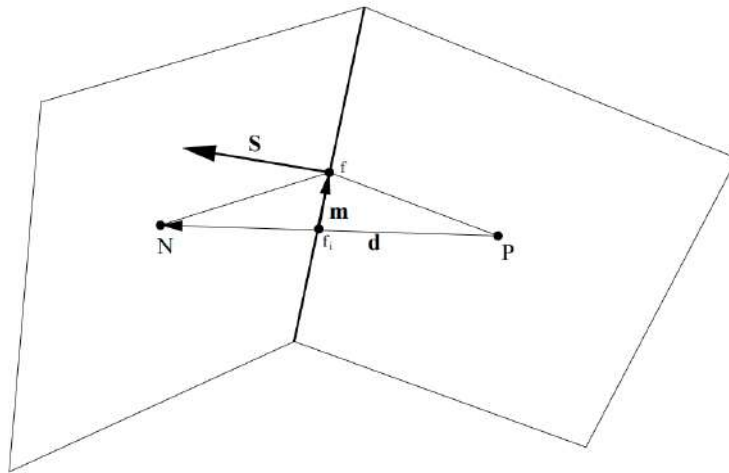
Για την αξιολόγηση πλεγμάτων αποτελούμενα από τετραπλευρικά στοιχεία, συναντάται μια πληθώρα μετρικών στη βιβλιογραφία ([9], [11], [12]), ανάλογα με την εφαρμογή για την οποία έχει αναπτυχθεί το υπολογιστικό πλέγμα. Στις CFD εφαρμογές, ευρύτερη χρήση συναντούν οι μετρικές της *μη-ορθογωνικότητας* (non-orthogonality)  $\mathbf{q}$  και της *στρεβλότητας* (skewness)  $\mathbf{s}$ . Οι μετρικές αυτές, ορίζονται παρακάτω.

**Ορισμός 1** *Μη-Ορθογωνικότητα (Non-Orthogonality)  $\mathbf{q}$* : ορίζεται ως η γωνία (σε μοίρες) μεταξύ της ευθείας που ενώνει τα κέντρα δύο γειτονικών κελιών και της κάθετης στην κοινή πλευρά των κελιών ευθείας (σχήμα 2.4). Η ιδανική τιμή είναι  $0^\circ$ .

**Ορισμός 2** *Στρεβλότητα (Skewness)  $\mathbf{s}$* : ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ της τομής της ευθείας που ενώνει τα κέντρα δύο γειτονικών κελιών με την κοινή πλευρά τους και του κέντρου της πλευράς αυτής, αδιαστατοποιημένη με την απόσταση μεταξύ των κέντρων και των δύο κελιών (σχήμα 2.5). Η ιδανική τιμή είναι 0.



**Σχήμα 2.4:** Η μη-ορθογωνικότητα  $q$  της πλευράς μεταξύ δύο κελιών ορίζεται ως η γωνία του ευθύγραμμου τμήματος  $PN$  που ενώνει τα κέντρα των δύο κελιών με το κάθετο στη μεταξύ τους πλευρά διάνυσμα  $\vec{S}$ .



**Σχήμα 2.5:** Η στρεβλότητα  $s$  της πλευράς μεταξύ δύο κελιών ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ της τομής  $f_i$  του ευθύγραμμου τμήματος  $PN$  που ενώνει τα κέντρα των δύο κελιών και του κέντρου  $f$  της κοινής τους πλευράς, η οποία συμβολίζεται με  $m$ , αδιαστατοποιημένη με την απόσταση  $d$ .

Οι παραπάνω μετρικές υπολογίζονται για κάθε κελί του πλέγματος, οπότε, η ποιότητα του συνολικού πλέγματος συνήθως περιγράφεται από τη μέση τιμή ( $\bar{q}$ ,  $\bar{s}$ ), την τυπική απόκλιση ( $\sigma_q$ ,  $\sigma_s$ ) και τη μέγιστη τιμή ( $q_{max}$ ,  $s_{max}$ ) των παραπάνω μετρικών.





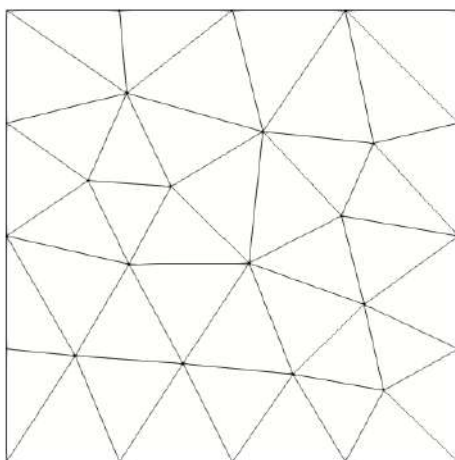
## Κεφάλαιο 3

# Εφαρμογές της Τεχνικής ΚΑΣ σε 2Δ Πλέγματα

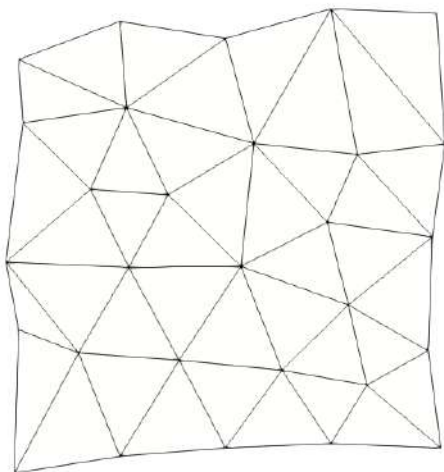
### 3.1 Εφαρμογή σε Πλέγμα Τριγωνικών Στοιχει- ών

Οι πρώτες εφαρμογές παραμόρφωσης πλέγματος με την τεχνική ΚΑΣ, έγιναν σε ένα αραιό 2Δ μη-δομημένο πλέγμα, σχήμα 3.1, το οποίο αποτελούνταν από 29 κόμβους και 40 τριγωνικά στοιχεία. Είναι προφανές, ότι προτού γίνει χρήση του κώδικα σε πιο σύνθετες εφαρμογές, έπρεπε να διασφαλιστεί η αποτελεσματικότητα της μεθόδου σε απλά και αραιά πλέγματα. Στο πλέγμα του σχήματος 3.1, έγιναν δύο δοκιμές. Η πρώτη ήταν η στρέβλωση του τετραγώνου, επιτρέποντας σε όλους τους κόμβους να μετακινηθούν, ενώ κατά τη δεύτερη, έγινε το ίδιο πείραμα, όμως τούτη τη φορά, οι τέσσερις γωνιακοί κόμβοι παρέμεναν σταθεροί και δεν είχαν τη δυνατότητα να μετακινηθούν. Η ικανότητα του λογισμικού να μετακινεί μόνο τους εσωτερικούς κόμβους ενός πλέγματος, διατηρώντας σταθερή τη θέση κάποιων άλλων, είναι ιδιαίτερα σημαντική στις εφαρμογές CFD, καθώς στις περισσότερες των περιπτώσεων, εάν όχι σε όλες, δεν επιτρέπεται η κίνηση των κόμβων που ανήκουν στο εξωτερικό όριο του πεδίου, κάτι που θα φανεί και στις επόμενες ενότητες.

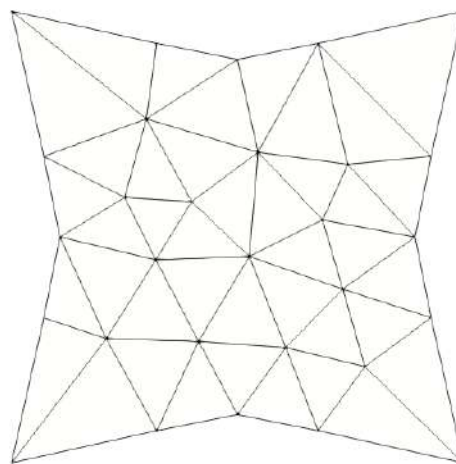
Στα σχήματα 3.2 και 3.3, έχουν σχεδιαστεί τα 2 προκύπτοντα πλέγματα, μετά τη στρέβλωση που εφαρμόστηκε. Παρατηρώντας τα σχήματα 3.1-3.3, μπορεί κανείς να



**Σχήμα 3.1:** 2Δ μη-δομημένο πλέγμα. Αποτελείται από 29 κόμβους και 40 τριγωνικά στοιχεία.



**Σχήμα 3.2:** 2Δ πλέγμα τριγωνικών στοιχείων. Στρέβλωση αρχικού πλέγματος με μετατόπιση όλων των κόμβων του.



**Σχήμα 3.3:** 2Δ πλέγμα τριγωνικών στοιχείων. Στρέβλωση αρχικού πλέγματος, με διατήρηση της θέσης των τεσσάρων γωνιακών κόμβων σταθερή.

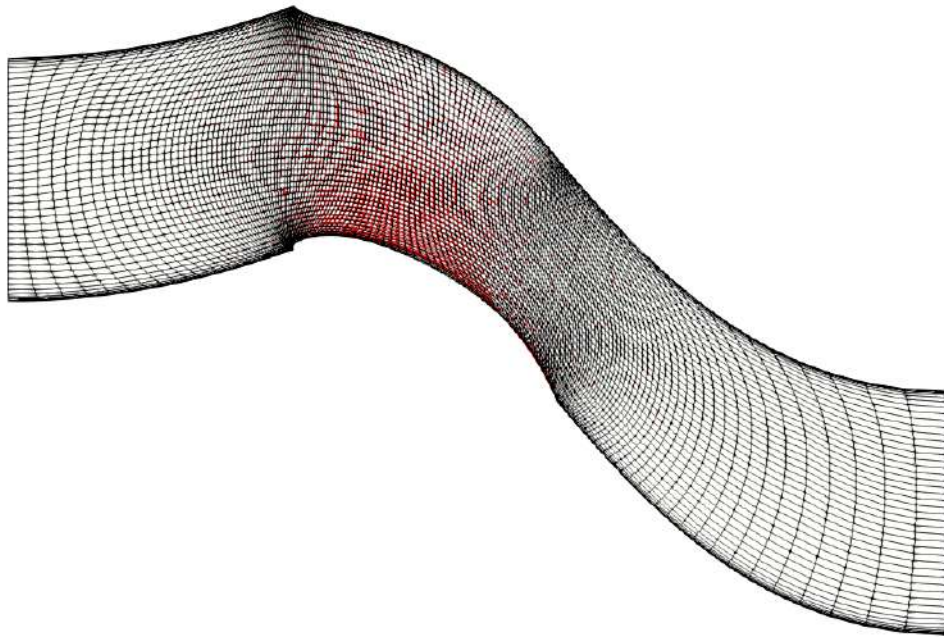
διαπιστώσει ότι παρά τη μεταβολή της θέσης των κόμβων του πλέγματος, η μορφή των

τριγωνικών στοιχείων παραμένει σχεδόν αμετάβλητη, γεγονός που πιστοποιείται από τον υπολογισμό της μέσης τιμής της μετρικής ποιότητας πλέγματος που ορίστηκε στην ενότητα 2.3.1. Η αρχική τιμή είναι 0.9386, η οποία για το πλέγμα του σχήματος 3.2 γίνεται 0.9291, ενώ για το σχήμα 3.3 υπολογίζεται 0.9267. Όπως, άλλωστε προαναφέρθηκε στις προηγούμενες ενότητες, η τεχνική ΚΑΣ επιδιώκει τη μετακίνηση της κάθε κυψέλης ενός πλέγματος με το πρότυπο της κίνησης του απαραμόρφωτου σώματος, που σημαίνει ότι στο τελικό πλέγμα θα έχει αλλάξει μόνο η θέση των κόμβων του πλέγματος αλλά όχι και η μορφή των κελιών που το απαρτίζουν. Οι δοκιμές στο πλέγμα του σχήματος 3.1, αποδεικνύουν ότι η μέθοδος έχει μοντελοποιηθεί και προγραμματιστεί σωστά, αφού, παρά την παραμόρφωση του πλέγματος, τα τριγωνικά στοιχεία διατηρούν σε μεγάλο βαθμό τη μορφή τους. Φυσικά, κάτι τέτοιο είναι αδύνατον να ισχύσει στον ίδιο βαθμό σε μεγαλύτερα και πυκνότερα υπολογιστικά πλέγματα, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι η μέθοδος δεν είναι εξίσου αποτελεσματική.

## 3.2 Εφαρμογή σε 2Δ Πτερύγωση Στροβίλου

Η πρώτη δοκιμή της μεθόδου σε αεροδυναμική εφαρμογή έγινε σε ένα 2Δ δομημένο πλέγμα διάστασης  $151 \times 45$  κόμβων. Πρόκειται για ένα πλέγμα τύπου H, [31], μέσα σε μια 2Δ πτερύγωση στροβίλου, το οποίο θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως αραιό, γεγονός που το καθιστούσε κατάλληλο για τις πρώτες δοκιμές του κώδικα που δημιουργήθηκε. Σημειώνεται ότι τα πλέγματα τύπου H, αποτελούνται από δυο περιοδικά τμήματα γύρω από την πτερύγωση, οπότε για λόγους εξοικονόμησης υπολογιστικού κόστους, στα προβλήματα CFD παραμορφώνεται μόνο το ένα τμήμα και το δεύτερο προκύπτει με βάση το πρώτο και βάσει της υπάρχουσας συμμετρίας. Επιπροσθέτως, η πτερύγωση ενός στροβίλου αποτελείται από ένα σύνολο πτερυγίων, τα οποία είναι όμοια μεταξύ τους και για το λόγο αυτό, η μελέτη περιορίζεται στο ένα πτερύγιο, με σκοπό να χρησιμοποιηθούν τα αποτελέσματα για όλα τα πτερύγια της πτερύγωσης.

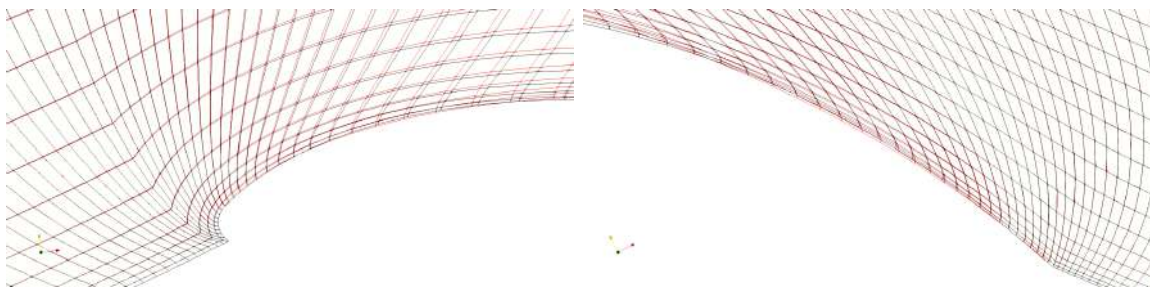
Το νέο, προσαρμοσμένο πλέγμα προσδιορίστηκε άμεσα και γρήγορα, αποδίδοντας πολύ καλή ποιότητα πλέγματος και αποφεύγοντας τη δημιουργία ανεστραμμένων κελιών, γεγονός ιδιαίτερα σημαντικό στις εφαρμογές CFD. Στο σχήμα 3.4, φαίνονται το αρχικό και το τελικό πλέγμα στην πτερύγωση. Από το σχήμα 3.4 είναι εύκολο να παρατηρηθεί ότι οι πιο έντονες μεταβολές εντοπίζονται στην περιοχή γύρω από τους οριακούς κόμβους του πλέγματος, οι οποίοι είναι οι κόμβοι γύρω από το πτερύγιο. Η τροποποίηση του σχήματος του πτερυγίου και, κατά συνέπεια, η μετατόπιση των οριακών κόμβων του πλέγματος, προκύπτουν από μια αυθαίρετη μίμηση των όσων συμβαίνουν σε μια



**Σχήμα 3.4:** 2Δ πλέγμα γύρω από πτερύγωση στροβίλου. Αρχικό (κόκκινη γραμμή) και μετατοπισμένο πλέγμα (μαύρη γραμμή). Πιο έντονη παραμόρφωση παρατηρείται γύρω από τους οριακούς κόμβους του πλέγματος (περιοχή που βρίσκεται το πτερύγιο)

διαδικασία βελτιστοποίησης, σε υπερθετικό βαθμό.

Στα σχήματα 3.5α', 3.5β', έχει γίνει εστίαση στις ακμές προσβολής (leading edge) και εκφυγής (trailing edge) του πλέγματος. Στις περιοχές αυτές το πλέγμα είναι πυκνότερο, επομένως, είναι απαραίτητο οι πλεγματικές γραμμές να διατηρούν την πυκνότητά τους στα σημεία αυτά. Στην εφαρμογή αυτή, ενδιαφέρον προκαλεί η αξιολόγηση της



(α') Εστίαση στην ακμή προσβολής της πτερύγωσης

(β') Εστίαση στην ακμή εκφυγής της πτερύγωσης

**Σχήμα 3.5:** 2Δ πλέγμα γύρω από πτερύγωση στροβίλου. Εστίαση στις ακμές προσβολής και εκφυγής της πτερύγωσης ώστε να διακριθούν καλύτερα οι διαφορές του προσαρμοσμένου (μαύρη γραμμή) και του αρχικού (κόκκινη γραμμή) πλέγματος.

ποιότητας του προκύπτοντος πλέγματος καθώς και η αποφυγή δημιουργίας ανεστραμ-

Πτερύγωση Στροβίλου	Μέση Τιμή	Μέγιστη Τιμή	
	$\bar{q}$	$q_{max}$	$s_{max}$
Αρχικό Πλέγμα	34.63	73.00	0.816
Προσαρμοσμένο Πλέγμα	34.62	73.00	1.57

**Πίνακας 3.1:** 2Δ πλέγμα γύρω από πτερύγωση στροβίλου. Συγκριτικός πίνακας για την ποιότητα του αρχικού και του τελικού πλέγματος.

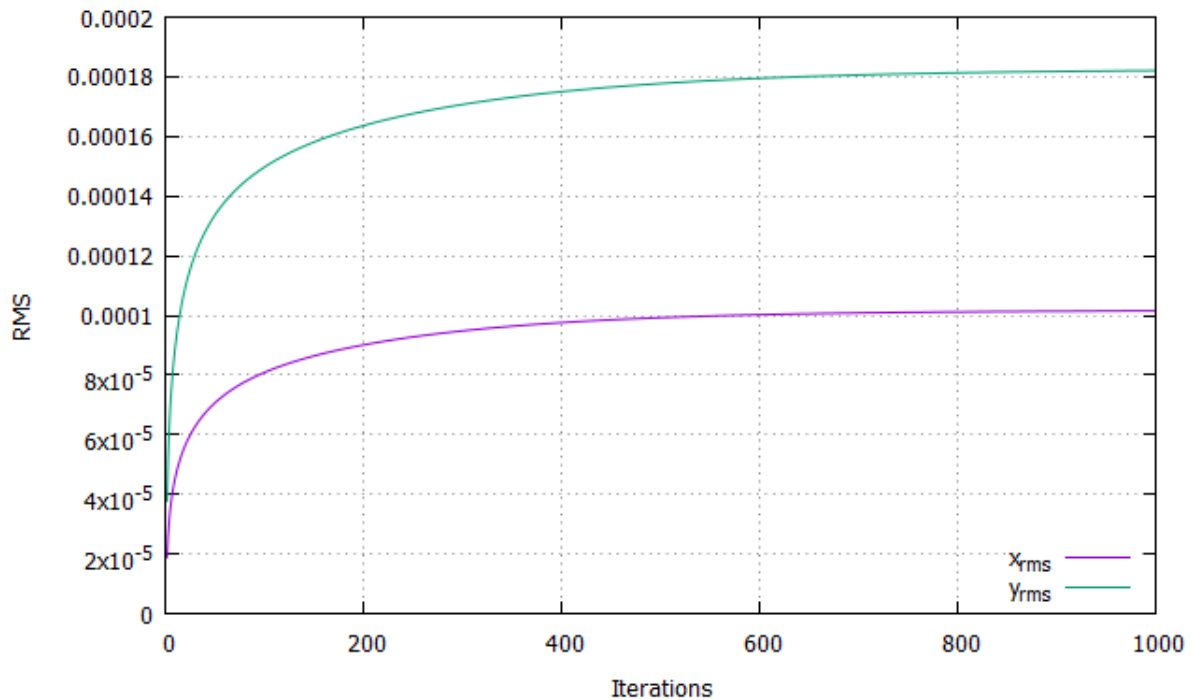
μένων κελιών. Σημαντικό είναι το γεγονός ότι με τη χρήση της τεχνικής ΚΑΣ, το προσαρμοσμένο πλέγμα δεν έχει εμφανίσει κανένα ανεστραμμένο στοιχείο, κάτι που επιβεβαιώνεται από τον υπολογισμό της ιακωβιανής ορίζουσας σε κάθε κόμβο του πλέγματος, η οποία διατηρεί σταθερό το πρόσημο της και κυμαίνεται σε ένα εύρος τιμών ( $7.948 \cdot 10^{-7} \div 3.004 \cdot 10^{-3}$ ), με μέση τιμή  $3.562 \cdot 10^{-4}$  και τυπική απόκλιση  $1.694 \cdot 10^{-7}$ .

Στον πίνακα 3.1, είναι καταχωρημένες οι μέγιστες τιμές της μη-ορθογωνικότητας και της στρεβλότητας, καθώς και η μέση τιμή της μη-ορθογωνικότητας, τόσο για το αρχικό πλέγμα, όσο και για το προσαρμοσμένο πλέγμα. Παρατηρείται ότι το προσαρμοσμένο πλέγμα διατηρεί τη μέση τιμή της μη-ορθογωνικότητας στο ίδιο επίπεδο με το αρχικό πλέγμα, ενώ το ίδιο συμβαίνει και για τη μέγιστη τιμή της μη-ορθογωνικότητας. Η μέγιστη τιμή της στρεβλότητας παρουσιάζει μεγαλύτερη αύξηση από τις άλλες μετρικές, ωστόσο εξακολουθεί να είναι άκρως ικανοποιητική. Ένα ιδιαίτερα σημαντικό στοιχείο που χαρακτηρίζει τη χρησιμότητα μιας μεθόδου προσαρμοστικής παραμόρφωσης πλεγμάτων, είναι ο χρόνος που απαιτείται μέχρι να συγκλίνει η μέθοδος. Προηγουμένως αναφέρθηκε ότι η τεχνική ΚΑΣ υπολογίζει τα προσαρμοσμένα πλέγματα άμεσα και αξιόπιστα, κάτι που αποδεικνύεται σε όλες τις εφαρμογές.

Στην εφαρμογή αυτή, απαιτήθηκαν 14 sec για να συγκλίνει ο κώδικας, με το τρέξιμο να γίνεται σε ένα μόνο επεξεργαστή (τύπου Intel CORE i7) ενός προσωπικού υπολογιστή. Στο διάγραμμα του σχήματος 3.6, φαίνεται η σύγκλιση σε σχέση με τον αριθμό των επαναλήψεων.

### 3.3 Εφαρμογή σε 2Δ Πτερύγωση Συμπιεστή

Σε αναλογία με την πρώτη δοκιμή, ακολούθησε μια δεύτερη εφαρμογή της μεθόδου, η οποία έγινε για ένα πλέγμα γύρω από το πτερύγιο ενός συμπιεστή. Το πλέγμα αυτό είναι αρκετά πιο πυκνό από το προηγούμενο ( $170 \times 101$  κόμβους), οπότε απαιτούνται περισσότερες επαναλήψεις και ένα μεγαλύτερο χρονικό διάστημα για να προκύψει το

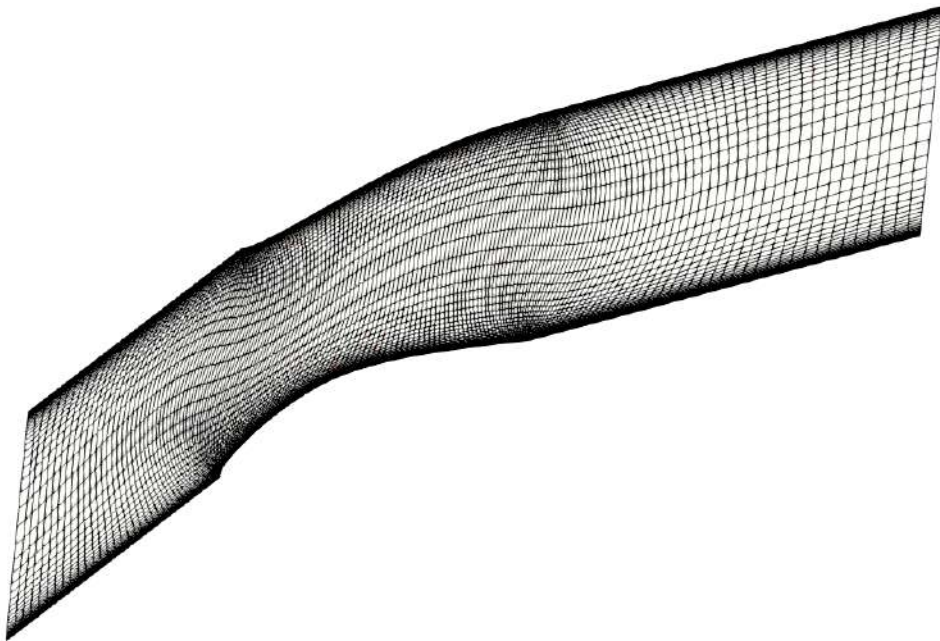


**Σχήμα 3.6:** 2Δ πλέγμα γύρω από περύγωση στροβίλου. Διάγραμμα σύγκλισης του τρεξίματος προσδιορισμού του προσαρμοσμένου πλέγματος.

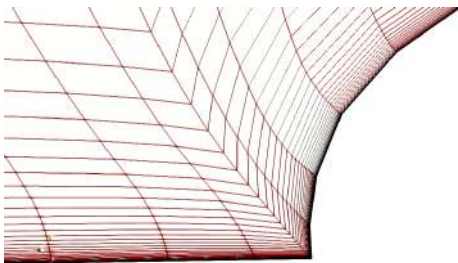
τελικό πλέγμα. Ωστόσο, η μικρή αύξηση του υπολογιστικού κόστους τοποθετείται σε λογικά πλαίσια και δεν καθιστά απαγορευτική τη χρήση της τεχνικής ΚΑΣ για τη συγκεκριμένη, αλλά και αντιστοίχων αυτής, εφαρμογές.

Στο σχήμα 3.7, έχουν σχεδιαστεί το αρχικό, όπως επίσης και το προσαρμοσμένο πλέγμα, όπως αυτό υπολογίστηκε. Ωστόσο, το πλέγμα γύρω από την αεροτομή του πτερυγίου είναι αρκετά πυκνό, ενώ ταυτόχρονα η αρχική μετατόπιση που εφαρμόστηκε στους οριακούς κόμβους είναι μικρή. Το γεγονός αυτό, καθιστά πολύ δύσκολη τη διάκριση των δύο πλεγμάτων στο σχήμα 3.7. Για το λόγο αυτό, μεγενθύνεται το σχήμα 3.7, οπότε το αποτέλεσμα διακρίνεται πιο αποτελεσματικά στα σχήματα 3.8. Στα σχήματα 3.8α', 3.8β', διακρίνονται το αρχικό και το προσαρμοσμένο πλέγμα γύρω από την περιοχή της ακμής προσβολής και της ακμής εκφυγής του πτερυγίου. Στην περιοχή αυτή, είναι επιθυμητό το νέο πλέγμα να έχει την ίδια, καλή ποιότητα με το αρχικό πλέγμα, καθώς είναι πολύ βασική για την επίλυση της ροής γύρω από το πτερύγιο.

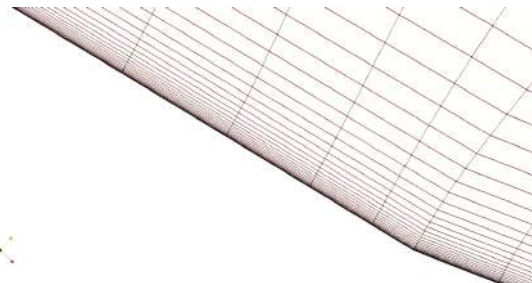
Αντίστοιχα με τον 3.1, σχηματίζεται και ο πίνακας 3.2. Παρατηρείται ότι η μέση τιμή της μη-ορθογωνικότητας και η μέγιστη τιμή της στρεβλότητας παρουσιάζουν αμελητέα μεταβολή. Εκεί που εντοπίζεται μεγάλη διαφορά είναι στη μέγιστη τιμή της μη-ορθογωνικότητας, η οποία παρουσιάζει σημαντική αύξηση. Ωστόσο, εφόσον η μέση



**Σχήμα 3.7:** 2Δ πλέγμα γύρω από πτερύγωση συμπίεστη. Αρχικό και τελικό πλέγμα γύρω από την αεροτομή του πτερυγίου του συμπίεστη. Το γεγονός ότι το πλέγμα είναι πολύ πυκνό, δεν επιτρέπει να φανούν και τα δύο, δεδομένης της μικρής παραμόρφωσης που εφαρμόστηκε.



(α') Εστίαση στην ακμή προσβολής της πτερύγωσης



(β') Εστίαση στην ακμή εκφυγής της πτερύγωσης

**Σχήμα 3.8:** 2Δ πλέγμα γύρω από πτερύγωση συμπίεστη. Εστίαση στις ακμές προσβολής και εκφυγής, ώστε να διακριθούν καλύτερα οι διαφορές του προσαρμοσμένου (μαύρη γραμμή) και του αρχικού (κόκκινη γραμμή) πλέγματος.

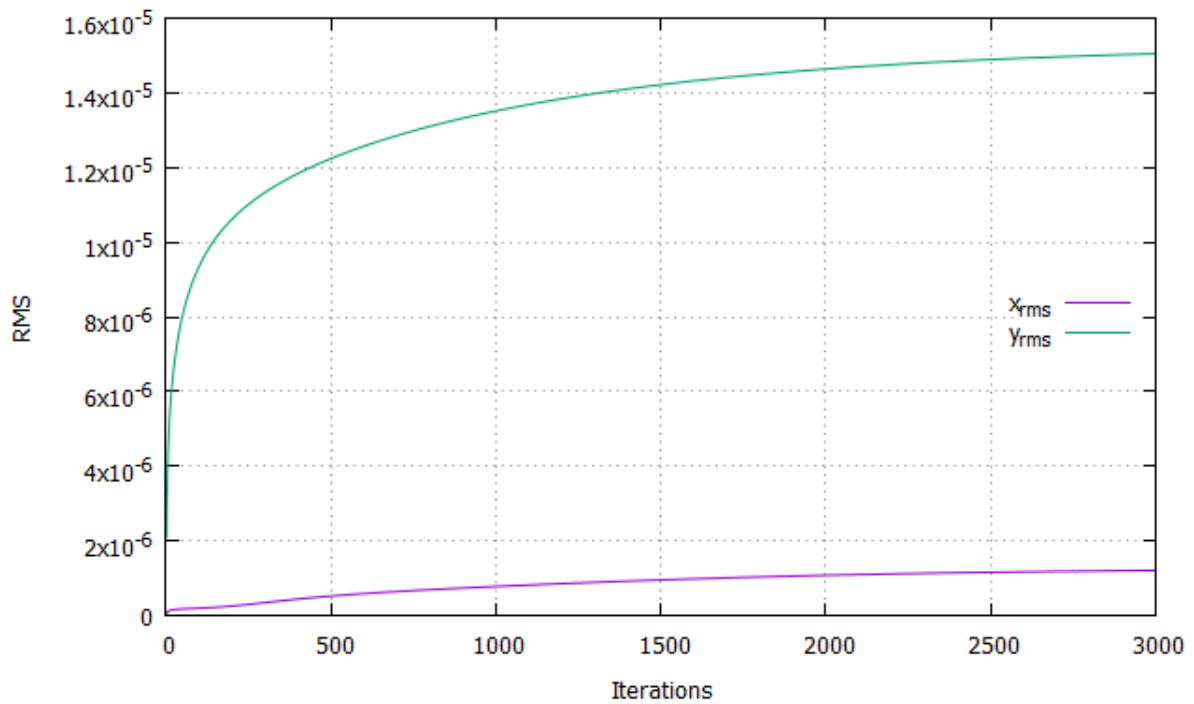
τιμή της μετρικής δεν μεταβάλλεται σημαντικά, σημαίνει ότι ο αριθμός των κελιών των οποίων η μη-ορθογωνικότητα πλησιάζει τη μέγιστη, είναι πολύ μικρός, κάτι που σημαίνει ότι συνολικά το προσαρμοσμένο πλέγμα μπορεί να θεωρηθεί ιδιαίτερα αξιόπιστο. Επιπλέον, όπως και στην εφαρμογή 3.2, το προσαρμοσμένο πλέγμα δεν εμφανίζει κανένα ανεστραμμένο κελί. Αυτό διαπιστώνεται αφού το πρόσημο της ιακωβιανής ορίζουσας διατηρείται σταθερό σε κάθε κελί του πλέγματος. Το εύρος τιμών της ιακωβιανής ο-

Πτερύγωση Συμπιεστή	Μέση Τιμή	Μέγιστη Τιμή	
	$\bar{q}$	$q_{max}$	$s_{max}$
Αρχικό Πλέγμα	24.63	63.95	2.80
Προσαρμοσμένο Πλέγμα	24.88	77.11	2.81

**Πίνακας 3.2:** 2Δ πλέγμα γύρω από πτερύγωση συμπιεστή. Σύγκριση της αρχικής με την τελική ποιότητα πλέγματος

ρίζουσας του τελικού πλέγματος ( $3.816 \cdot 10^{-11} \div 1.011 \cdot 10^{-5}$ ), με μέση τιμή  $4.807 \cdot 10^{-7}$  και τυπική απόκλιση  $1.055 \cdot 10^{-12}$ .

Τέλος, όπως και στην εφαρμογή της πτερύγωσης του στροβίλου, σχεδιάζεται το διάγραμμα σύγκλισης, αντίστοιχα με το 3.6. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 3.9. Στην περίπτω-



**Σχήμα 3.9:** 2Δ πλέγμα γύρω από πτερύγωση συμπιεστή. Διάγραμμα σύγκλισης του τρεξίματος προσδιορισμού του προσαρμοσμένου πλέγματος.

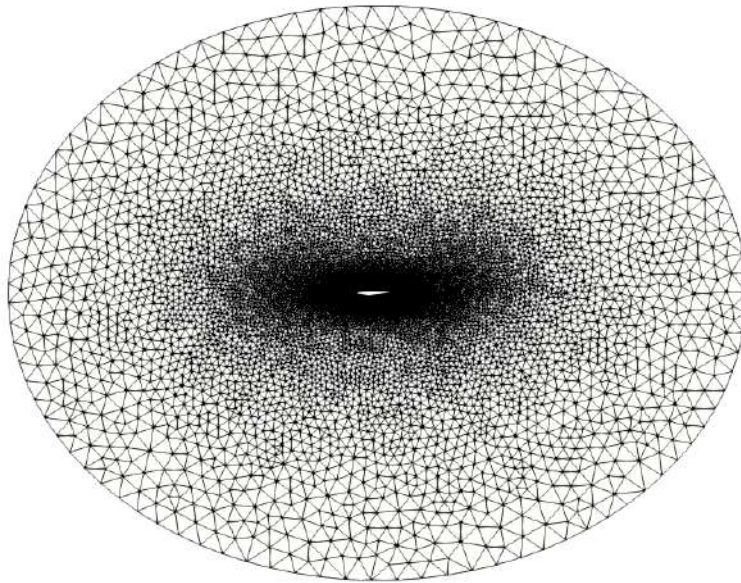
ση αυτή, απαιτήθηκαν 50 sec για να συγκλίνει ο κώδικας, με το τρέξιμο να γίνεται στον ίδιο επεξεργαστή. Η αύξηση του απαιτούμενου χρόνου οφείλεται στο ότι το πλέγμα της πτερύγωσης συμπιεστή, είναι σαφώς πυκνότερο από αυτό της πτερύγωσης στροβίλου.



### 3.4 Εφαρμογή σε Μεμονωμένη Αεροτομή

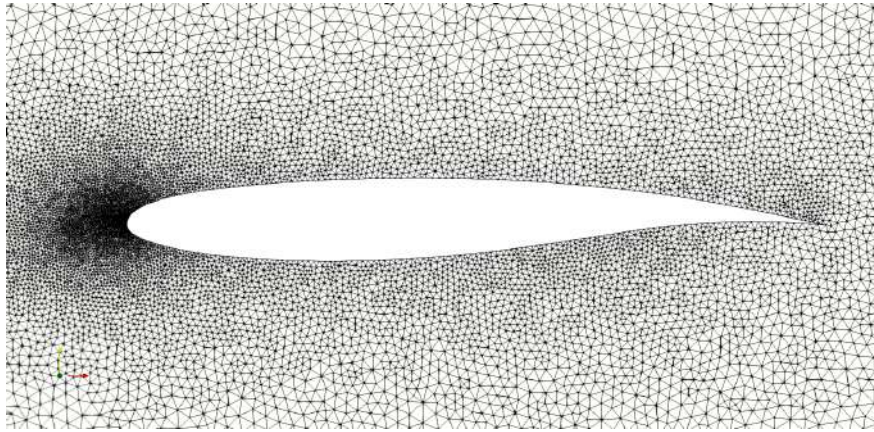
Σε συνέχεια της επίδειξης της αποτελεσματικότητας της μεθόδου προσαρμοστικής παραμόρφωσης πλέγματος με την τεχνική ΚΑΣ στις 2Δ, δοκιμάζεται η παραμόρφωση ενός μη-δομημένου πλέγματος γύρω από μια αεροτομή, στην περίπτωση που η αεροτομή στρέφεται γύρω από το σημείο  $\left(\frac{c}{4}, 0\right)$ , δηλαδή γύρω από το αεροδυναμικό κέντρο της. Σημειώνεται ότι η αεροτομή η οποία μελετάται, έχει τη γεωμετρία της αεροτομής Korn.

Το αρχικό μη-δομημένο πλέγμα γύρω από την αεροτομή φαίνεται στα σχήματα 3.10, 3.11. Πρόκειται για ένα πλέγμα που αποτελείται από 19483 κόμβους και 38575 κελιά (τριγωνικά στοιχεία).



**Σχήμα 3.10:** Μεμονωμένη Αεροτομή Korn. Το υπολογιστικό χωρίο γύρω από την αεροτομή.

Η στροφή της αεροτομής επιλέγεται να γίνει γύρω από το σημείο  $\left(\frac{c}{4}, 0\right)$ . Για να πραγματοποιηθεί η στροφή, αρχικά αναγνωρίζονται οι οριακοί κόμβοι του πλέγματος. Ως οριακοί κόμβοι θεωρούνται αυτοί που βρίσκονται πάνω στο τοίχωμα της αεροτομής. Έπειτα, εφαρμόζεται σε αυτούς μια στροφή γύρω από το αεροδυναμικό κέντρο της αεροτομής, δεδομένης γωνίας, η οποία καθορίζεται από το χρήστη. Η νέα θέση των



**Σχήμα 3.11:** Μεμονωμένη Αεροτομή Korn. Εστίαση στην περιοχή της αεροτομής.

οριακών κόμβων υπολογίζεται από τις εξισώσεις 3.1, 3.2:

$$x^{new} = x^{old} \cos \alpha - y^{old} \sin \alpha \quad (3.1)$$

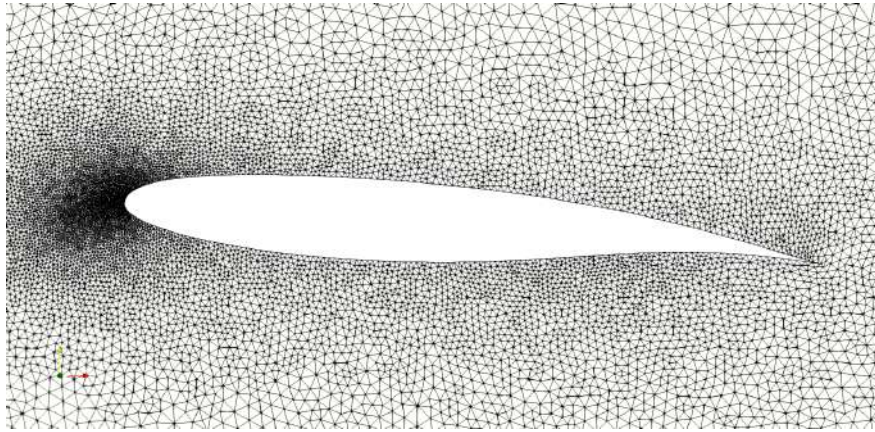
$$y^{new} = x^{old} \sin \alpha + y^{old} \cos \alpha \quad (3.2)$$

όπου  $x^{old}$ ,  $y^{old}$  είναι οι αρχικές θέσεις των οριακών κόμβων,  $x^{new}$ ,  $y^{new}$  οι τελικές τους θέσεις μετά τη στροφή της αεροτομής και  $\alpha$  η γωνία στροφής.

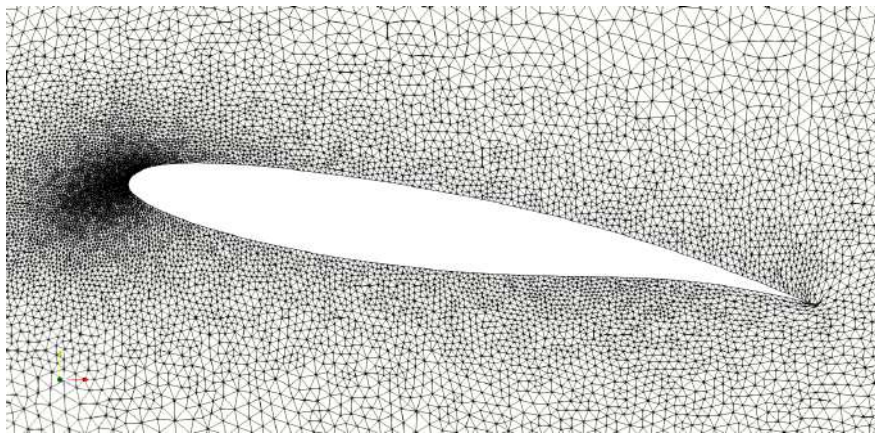
Κρίθηκε χρήσιμο να γίνουν δοκιμές με δύο γωνίες στροφής της αεροτομής, ώστε να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα για την παραμόρφωση του πλέγματος κατά τη διαδικασία αυτή. Οι γωνίες στροφής που εφαρμόστηκαν είναι  $5^\circ$  και  $10^\circ$ . Σημειώνεται ότι στα περισσότερα προβλήματα στροφής (pitching airfoil) της αεροτομής γύρω από το σημείο  $\left(\frac{c}{4}, 0\right)$ , η τιμή της γωνίας στροφής κυμαίνεται μεταξύ των τιμών  $(3 \div 5)^\circ$ .

Στα σχήματα 3.12 και 3.13 είναι σχεδιασμένα τα προσαρμοσμένα πλέγματα γύρω από την αεροτομή, όταν αυτή στρέφεται κατά τις γωνίες που έχουν προαναφερθεί. Η πιο έντονη μετατόπιση των κόμβων παρατηρείται κοντά στην ακμή εκφυγής της αεροτομής.

Στον πίνακα 3.3 παρουσιάζονται οι τιμές της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της ποιότητας του πλέγματος,  $\bar{q}_e$  και  $\sigma_{q_e}$ , όπως επίσης και η μέγιστη και ελάχιστη τιμή αυτής που συναντάται,  $q_{max}$  και  $q_{min}$ , για τις δύο γωνίες για τις οποίες εφαρμόστηκε η στροφή της αεροτομής. Παρατηρώντας τον πίνακα 3.3, διαπιστώνεται ότι η μέση τιμή της ποιότητας του πλέγματος διατηρείται περίπου σταθερή σε υψηλές τιμές, γεγονός που αποδεικνύει ότι τα νέα πλέγματα που παράγονται με την τεχνική ΚΑΣ, είναι εξίσου καλής ποιότητας με το αρχικό, χωρίς την εμφάνιση ανεστραμμένων κελιών. Πρόκειται



**Σχήμα 3.12:** Μεμονωμένη Αεροτομή Korn. Το πλέγμα κοντά στην αεροτομή για στροφή  $5^\circ$  γύρω από το αεροδυναμικό κέντρο της. Παρατηρείται ότι η δυσμενέστερη παραμόρφωση των κόμβων εντοπίζεται κοντά στην ακμή εκφυγής.



**Σχήμα 3.13:** Μεμονωμένη Αεροτομή Korn. Το πλέγμα κοντά στην αεροτομή για στροφή  $10^\circ$  γύρω από το αεροδυναμικό κέντρο της.

για ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα, καθώς πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι τα υπολογιστικά πλέγματα χρησιμοποιούνται για την επίλυση της ροής, οπότε η διατήρηση της ποιότητας τους πριν και μετά την παραμόρφωση είναι πολύ σημαντικός παράγοντας για την επιλογή και τη χρήση της μεθόδου σε προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης. Τέλος, ο χρόνος που απαιτήθηκε για τον προσδιορισμό των νέων πλεγμάτων ήταν 50 sec.

$\alpha$ (μοίρες)	Αρχικό	5°	10°
$\bar{q}$	0.95831	0.95545	0.95217
$\sigma_{\bar{q}}$	$4.3046 \cdot 10^{-2}$	$4.5789 \cdot 10^{-2}$	$4.7942 \cdot 10^{-2}$
$q_{e,min}$	0.51574	0.52342	0.18377
$q_{e,max}$	0.99999	0.99999	0.99998

**Πίνακας 3.3:** Μεμονωμένη Αεροτομή Korn. Οι τιμές της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης, της μέγιστης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος μετά την εφαρμογή των 4 γωνιών στροφής, μαζί με τις τιμές αυτές για το αρχικό πλέγμα.

## 3.5 Εφαρμογή σε Υπεραντωτική Διάταξη Τριών Στοιχείων

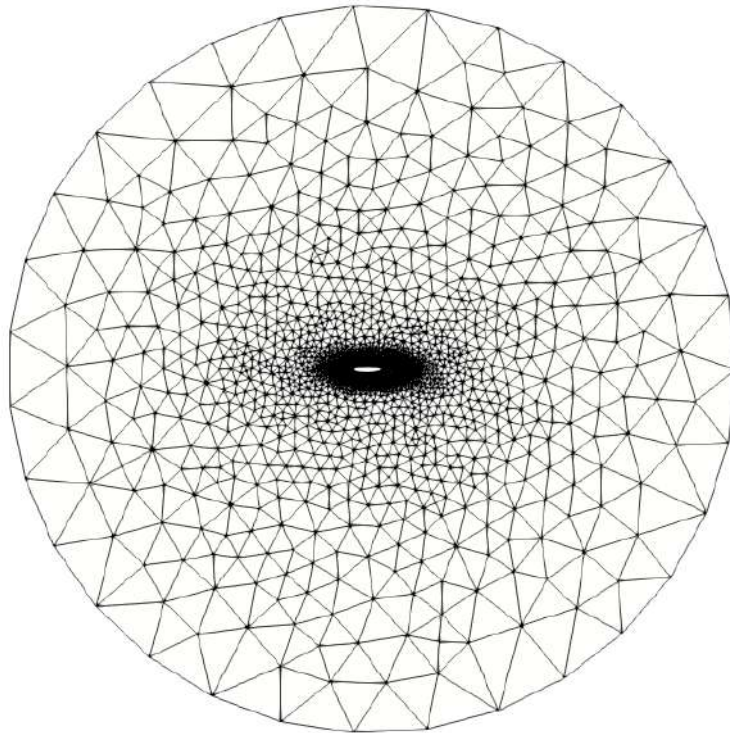
Μια ακόμη εφαρμογή της τεχνικής ΚΑΣ γίνεται στο 2Δ πλέγμα τριγωνικών στοιχείων (σχήμα 3.14), γύρω από μια υπεραντωτική διάταξη τριών στοιχείων. Η διάταξη αυτή, αποτελείται από τρία μέρη, το εμπρόσθιο πτερύγιο (slat), το οπίσθιο πτερύγιο (flap) και την κυρίως αεροτομή (main-body). Τα slat και flap έχουν τη δυνατότητα να εκτελέσουν στροφή, είτε με θετική είτε με αρνητική γωνία, ανάλογα με την εκάστοτε ανάγκη. Επίσης, δεν είναι απαραίτητο να εφαρμοστεί ταυτόχρονη στροφή στα δύο πτερύγια. Για τους λόγους αυτούς, η παραμόρφωση του πλέγματος θα εξεταστεί στις εξής τρεις περιπτώσεις:

- Στροφή slat
- Στροφή flap
- Ταυτόχρονη στροφή slat και flap

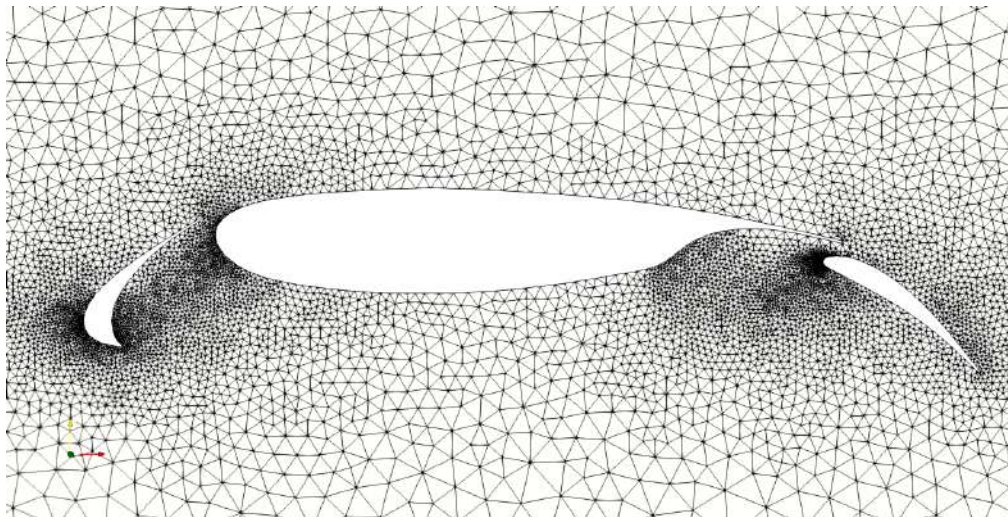
Το πλέγμα γύρω από την υπεραντωτική διάταξη τριών στοιχείων αποτελείται από 8049 κόμβους και 15699 τριγωνικά στοιχεία. Το χωρίο γύρω από την αεροτομή φαίνεται στο σχήμα 3.14, ενώ στο σχήμα 3.15 έχει αποτυπωθεί μια εστίαση στην περιοχή της αεροτομής, ώστε να φανούν τα τρία στοιχεία από τα οποία απαρτίζεται.

### 3.5.1 Στροφή Slat

Η στροφή του slat γίνεται για γωνίες  $\pm 5^\circ$ , γύρω από την ακμή εκφυγής του. Στα σχήματα 3.16α', 3.16β', 3.17α' και 3.17β' φαίνεται το προσαρμοσμένο πλέγμα γύρω από την υπεραντωτική διάταξη και γύρω από το slat. Σημειώνεται ότι ο χρόνος που απαιτήθηκε για να συγκλίνει ο κώδικας και να προσδιοριστούν τα τελικά πλέγματα ήταν



**Σχήμα 3.14:** Υπεραντωτική διάταξη τριών στοιχείων. Υπολογιστικό χωρίο και μη-δομημένο πλέγμα γύρω από τη διάταξη. Αποτελείται από 8049 κόμβους και 15699 τριγωνικά στοιχεία.

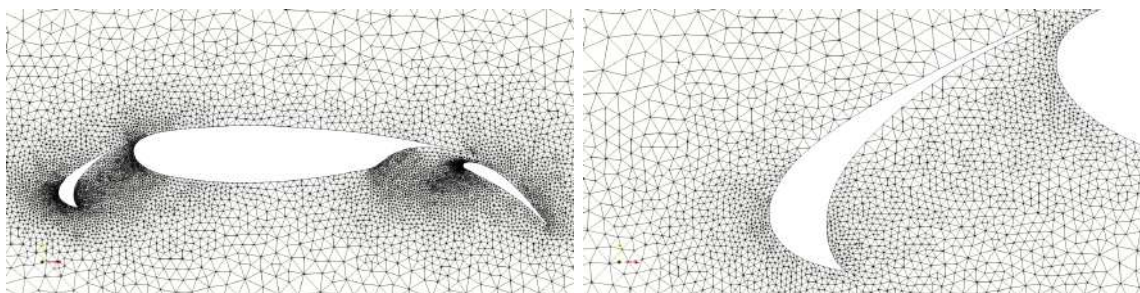


**Σχήμα 3.15:** Υπεραντωτική διάταξη τριών στοιχείων. Εστίαση στην περιοχή της διάταξης. Διακρίνονται τα 3 στοιχεία που την απαρτίζουν (αριστερά *slat*, κέντρο *main-body*, δεξιά *flap*).

20 sec, γεγονός που αποδεικνύει εκ νέου το μικρό υπολογιστικό κόστος της μεθόδου.

Μετρική Ποιότητας	Αρχικό	Στροφή Slat 5°	Στροφή Slat -5°
$\bar{q}$	0.955313	0.954225	0.954055
$\sigma_q$	$4.71524 \cdot 10^{-2}$	$4.81859 \cdot 10^{-2}$	$4.85376 \cdot 10^{-2}$
$q_{max}$	0.999999	0.999997	0.999999
$q_{min}$	0.442599	0.440500	0.426955

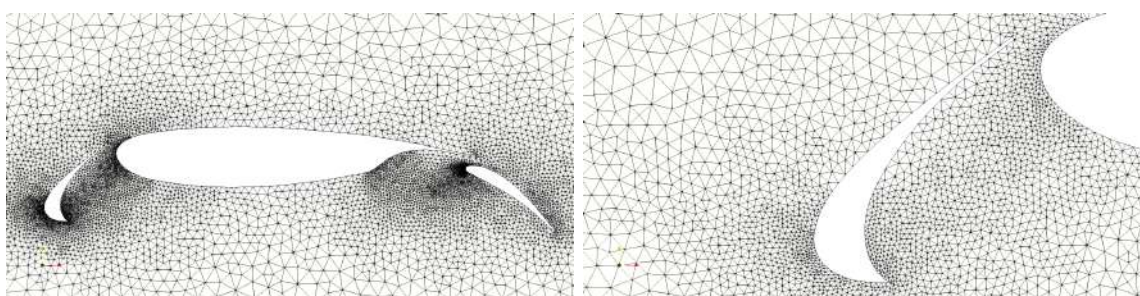
**Πίνακας 3.4:** Ποιότητα πλέγματος όταν εφαρμόζεται στροφή στο slat.



(α') Το πλέγμα γύρω από τη διάταξη όταν το slat έχει στραφεί κατά +5°.

(β') Εστίαση στην περιοχή του slat.

**Σχήμα 3.16:** Υπεραντωτική διάταξη τριών στοιχείων. Στροφή του slat κατά +5° γύρω από την ακμή εκφυγής του.



(α') Το πλέγμα γύρω από τη διάταξη όταν το slat έχει στραφεί κατά -5°.

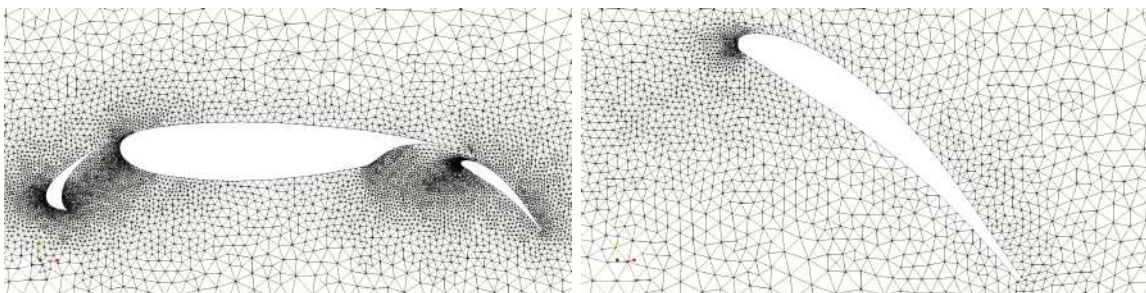
(β') Εστίαση στην περιοχή του slat.

**Σχήμα 3.17:** Υπεραντωτική διάταξη τριών στοιχείων. Στροφή του slat κατά -5° γύρω από την ακμή εκφυγής του.

Στον πίνακα 3.4, φαίνονται οι τιμές της ποιότητας των προσαρμοσμένων πλεγμάτων, όταν εφαρμόζεται στροφή στο slat, σε σύγκριση με τις τιμές του αρχικού πλέγματος. Παρατηρείται ότι η ποιότητα των προσαρμοσμένων πλεγμάτων, μειώνεται ελάχιστα σε σχέση με το αρχικό πλέγμα.

### 3.5.2 Στροφή Flap

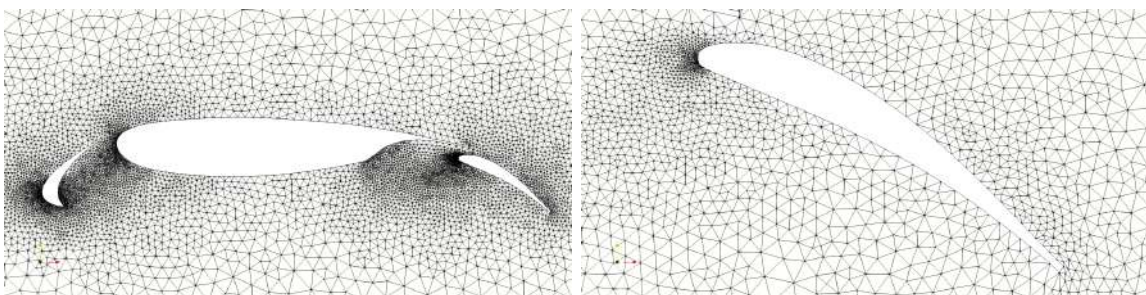
Η στροφή του flap γίνεται για τις ίδιες γωνίες που εφαρμόστηκαν στο slat ( $\pm 5^\circ$ ), όμως, αυτή τη φορά, το σημείο γύρω από το οποίο στρέφεται είναι η ακμή προσβολής. Ο απαιτούμενος χρόνος προσδιορισμού των προσαρμοσμένων πλεγμάτων παραμένει 20 sec. Στα σχήματα 3.18 και 3.19, έχουν αποτυπωθεί τα νέα πλέγματα, μετά την επιβολή της παραμόρφωσης.



(α') Το πλέγμα γύρω από τη διάταξη.

(β') Εστίαση στην περιοχή του flap.

**Σχήμα 3.18:** Υπεραντωτική διάταξη τριών στοιχείων. Στροφή του flap κατά  $+5^\circ$  γύρω από την ακμή προσβολής.



(α') Το πλέγμα γύρω από τη διάταξη.

(β') Εστίαση στην περιοχή του flap.

**Σχήμα 3.19:** Υπεραντωτική διάταξη τριών στοιχείων. Στροφή του flap κατά  $-5^\circ$  γύρω από την ακμή προσβολής.

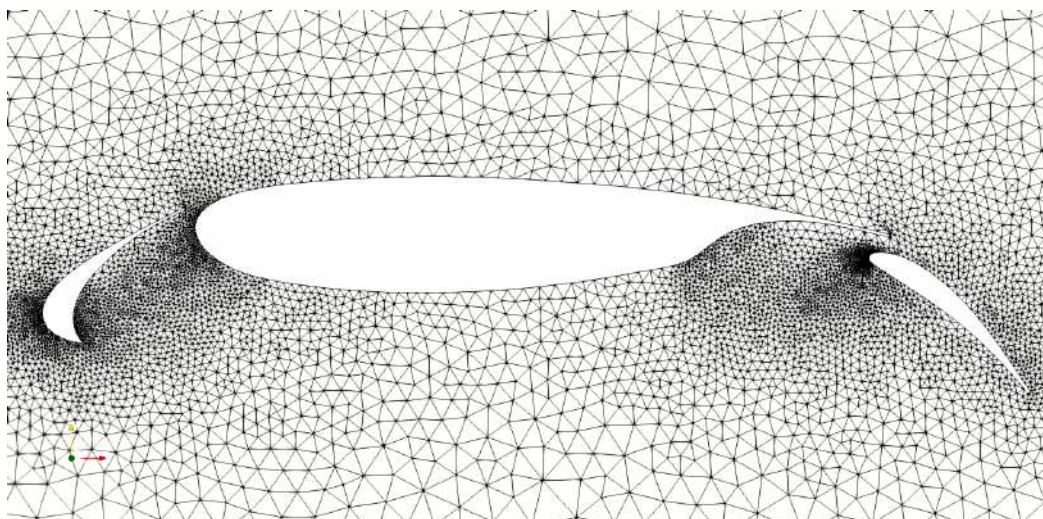
Αντίστοιχα με τον πίνακα 3.4, σχηματίζεται ο πίνακας 3.5, ώστε να γίνει σύγκριση της ποιότητας των προσαρμοσμένων πλεγμάτων με το αρχικό, στην περίπτωση που εφαρμόζεται γωνία στροφής στο flap. Όπως και στην προηγούμενη δοκιμή, έτσι και τώρα, η ποιότητα διατηρείται σε υψηλά επίπεδα.

Μετρική Ποιότητας	Αρχικό	Στροφή Flap 5°	Στροφή Flap -5°
$\bar{q}$	0.955313	0.954703	0.954415
$\sigma_q$	$4.71524 \cdot 10^{-2}$	$4.78280 \cdot 10^{-2}$	$4.82575 \cdot 10^{-2}$
$q_{max}$	0.999999	0.999998	0.999999
$q_{min}$	0.442599	0.447714	0.385434

**Πίνακας 3.5:** Υπεραντωτική διάταξη τριών στοιχείων. Ποιότητα πλέγματος όταν εφαρμόζεται στροφή στο flap.

### 3.5.3 Ταυτόχρονη Στροφή Slat και Flap

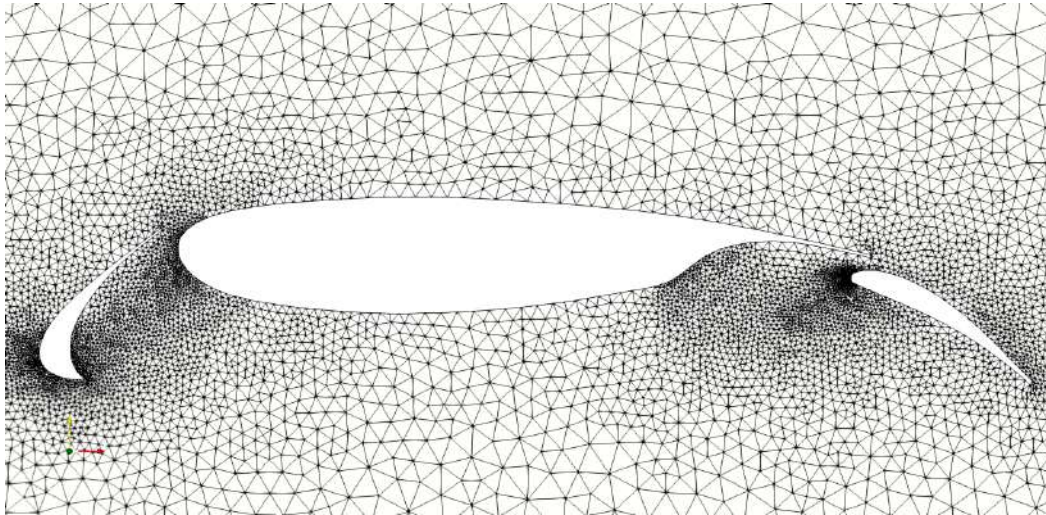
Στην ενότητα αυτή εξετάζεται ταυτόχρονη στροφή των πτερυγίων slat και flap. Η πρώτη συνδυασμένη παραμόρφωση αφορά τη στροφή του slat και του flap κατά +5°. Η δεύτερη παραμόρφωση περιλαμβάνει στροφή των δύο πτερυγίων κατά -5°. Σημειώνεται ότι το σημείο γύρω από το οποίο στρέφεται το κάθε πτερύγιο, παραμένει ίδιο με την περίπτωση της ξεχωριστής στροφής των slat και flap. Ο χρόνος που απαιτήθηκε ώστε να συγκλίνει ο κώδικας και να προκύψουν τα προσαρμοσμένα πλέγματα ήταν 24 sec. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα σχήματα 3.20 και 3.21.



**Σχήμα 3.20:** Υπεραντωτική διάταξη τριών στοιχείων. Το πλέγμα γύρω από τη διάταξη όταν επιβάλλεται ταυτόχρονη στροφή γωνίας +5° στα πτερύγια slat και flap.

Τέλος, δημιουργείται ο συγκριτικός πίνακας 3.6 για την ποιότητα των πλεγμάτων, όπως και στις δύο προηγούμενες εφαρμογές. Παρατηρείται και σε αυτήν τη δοκιμή, ότι η ποιότητα του πλέγματος παρουσιάζει σχεδόν αμελητέα μεταβολή.





**Σχήμα 3.21:** Υπεραντωτική διάταξη τριών στοιχείων. Το πλέγμα γύρω από τη διάταξη όταν επιβάλλεται ταυτόχρονη στροφή γωνίας  $-5^\circ$  στα πτερύγια *slat* και *flap*.

Μετρική Ποιότητας	Αρχικό	Στροφή $5^\circ$	Στροφή $-5^\circ$
$\bar{q}$	0.955313	0.953613	0.953154
$\sigma_q$	$4.71524 \cdot 10^{-2}$	$4.88455 \cdot 10^{-2}$	$4.96003 \cdot 10^{-2}$
$q_{max}$	0.999999	0.999998	0.999999
$q_{min}$	0.442599	0.469326	0.387322

**Πίνακας 3.6:** Υπεραντωτική διάταξη τριών στοιχείων. Συγκριτικός πίνακας ποιότητας πλέγματος με εφαρμογή ταυτόχρονης στροφής στα *slat* και *flap*.



## Κεφάλαιο 4

# Η Τεχνική ΚΑΣ σε 3Δ

## Πλέγματα

### 4.1 Μαθηματική Διατύπωση για 3Δ Πλέγματα

Η μαθηματική διατύπωση της μεθόδου για 3Δ πλέγματα είναι λίγο πιο πολύπλοκη από την αντίστοιχη για τα 2Δ πλέγματα. Ωστόσο, η λογική που ακολουθείται, είναι παρόμοια με εκείνη που ακολουθήθηκε στην ενότητα 2.1, ενώ χρησιμοποιούνται και οι ίδιοι συμβολισμοί.

Στον 3Δ χώρο, θεωρείται ότι ο κάθε κόμβος του πλέγματος μετακινείται κατά κατά τους τρεις άξονες (x, y, z) κατά  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  και περιστρέφεται γύρω από αυτούς κατά γωνίες  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Οι τρεις αυτοί άξονες περνούν κάθε φορά από το σημείο  $M$ , του οποίου η μετατόπιση υπολογίζεται. Έτσι, η νέα θέση των κόμβων του πλέγματος, δίνεται από τη μητρική εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} x_L'' \\ y_L'' \\ z_L'' \end{bmatrix} = R_w R_v R_u \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Αυτή, περισσότερο απλοποιημένη, γράφεται και ως:

$$\vec{r}_i'' = R\vec{r}_i + \vec{\delta}_k \quad (4.2)$$

Για το μητρώο  $R$  ισχύει:

$$R = R_w R_v R_u \quad (4.3)$$

$$R^T = R_u^T R_v^T R_w^T \quad (4.4)$$

$$R^T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Όπου τα στοιχεία του μητρώου  $R$  ορίζονται ως:

$$r_{11} = \cos v \cos w$$

$$r_{12} = -\cos u \sin w + \cos w \sin u \sin v$$

$$r_{13} = \sin u \sin w + \cos u \cos w \sin v$$

$$r_{21} = \cos v \sin w$$

$$r_{22} = \cos u \cos w + \sin u \sin v \sin w$$

$$r_{23} = -\cos w \sin u + \sin v \sin w \cos u$$

$$r_{31} = -\sin v$$

$$r_{32} = \cos v \sin u$$

$$r_{33} = \cos u \cos v$$

Τα επιμέρους μητρώα στροφών που εμφανίζονται στην εξίσωση 4.1, παρουσιάζονται ακολούθως. Σημειώνεται ότι με  $u$  συμβολίζεται η γωνία στροφής γύρω από τον άξονα  $x$ , με  $v$  η γωνία στροφής γύρω από τον  $y$  και με  $w$  η γωνία στροφής γύρω από τον άξονα  $z$ . Είναι:

$$R_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u & -\sin u \\ 0 & \sin u & \cos u \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$R_v = \begin{bmatrix} \cos v & 0 & \sin v \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin v & 0 & \cos v \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$R_w = \begin{bmatrix} \cos w & -\sin w & 0 \\ \sin w & \cos w & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Σε αντιστοιχία με την περίπτωση των  $2\Delta$  πλεγμάτων, η συνάρτηση η οποία απαιτείται να ελαχιστοποιηθεί, είναι η:

$$I_k = \frac{1}{2} \sum_i \left( R\vec{r}_i + \vec{\delta} - \vec{r}'_i \right)^T \left( R\vec{r}_i + \vec{\delta} - \vec{r}'_i \right) \quad (4.9)$$

Για την ελαχιστοποίηση, χρειάζεται να υπολογιστούν οι παράγωγοι της συνάρτησης ως προς τις ποσότητες  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  και  $u, v, z$  και να τεθούν ίσες με μηδέν. Πιο συγκεκριμένα:

$$\frac{\partial I}{\partial \vec{\delta}} = \sum_i \left[ \vec{\delta}^T + \vec{r}_i^T R^T - \vec{r}'_i{}^T \right] = n\vec{\delta}^T + \sum_i \left[ \vec{r}_i^T R^T - \vec{r}'_i{}^T \right] = 0 \quad (4.10)$$

Συνεπώς, θα είναι:

$$\vec{\delta}^T = \frac{1}{n} \sum_i \left[ \vec{r}'_i{}^T - \vec{r}_i^T R^T \right] \quad (4.11)$$

Από την εξίσωση 4.11, προκύπτουν οι εξισώσεις από τις οποίες υπολογίζεται η μετακίνηση του κάθε κόμβου του πλέγματος ως προς τους τρεις άξονες  $(x, y, z)$ :

$$\Delta x = \frac{1}{n} \sum_i \left\{ x'_L - r_{11}x_i - r_{12}y_i - r_{13}z_i \right\} \quad (4.12)$$

$$\Delta y = \frac{1}{n} \sum_i \left\{ y'_L - r_{21}x_i - r_{22}y_i - r_{23}z_i \right\} \quad (4.13)$$

$$\Delta z = \frac{1}{n} \sum_i \left\{ z'_L - r_{31}x_i - r_{32}y_i - r_{33}z_i \right\} \quad (4.14)$$

Με παρόμοιο τρόπο προσδιορίζονται και οι τιμές των γωνιών στροφής των κόμβων γύρω από τους τρεις άξονες του συστήματος συντεταγμένων. Δηλαδή, είναι:

$$\frac{\partial I}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sum_i \vec{r}_i^T R^T \left( \vec{\delta} - \vec{r}'_i \right) \right] = \sum_i \vec{r}_i^T \left[ \frac{\partial R}{\partial \theta} \right]^T \left( \vec{\delta} - \vec{r}'_i \right) = 0 \quad (4.15)$$

Με βάση την εξίσωση 4.15, παράγεται μια εξίσωση παρόμοια της 2.13, για τις γωνίες  $u, v, w$ , αντικαθιστώντας όπου  $\theta$  μία εκ των τριών. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται συνοπτικά οι σχέσεις οι οποίες λαμβάνονται από την ανάπτυξη της σχέσης 4.15:

$$\frac{\partial I}{\partial u} = \sum_i \vec{t}_i^T \left( \frac{\partial R_u^T}{\partial u} \vec{q}_i \right) = 0 \quad (4.16)$$

όπου:

- $\vec{t}_i^T = \vec{r}_i^T$
- $\vec{q}_i = R_u^T R_w^T (\vec{\delta} - \vec{r}_i')$

$$\frac{\partial I}{\partial v} = \sum_i \vec{t}_i^T \left( \frac{\partial R_w^T}{\partial v} \vec{q}_i \right) = 0 \quad (4.17)$$

όπου:

- $\vec{t}_i^T = \vec{r}_i^T R_u^T$
- $\vec{q}_i = R_w^T (\vec{\delta} - \vec{r}_i')$

$$\frac{\partial I}{\partial w} = \sum_i \vec{t}_i^T \left( \frac{\partial R_w^T}{\partial w} \vec{q}_i \right) = 0 \quad (4.18)$$

όπου:

- $\vec{t}_i^T = \vec{r}_i^T R_u^T R_v^T$
- $\vec{q}_i = (\vec{\delta} - \vec{r}_i')$

Αναπτύσσοντας τα μητρώα και επιλύοντας τις εξισώσεις 4.16 - 4.18, προκύπτουν οι εξής τρεις σχέσεις για τα  $u, v, w$ :

$$A_u \sin u + B_u \cos u = 0 \quad (4.19)$$

$$A_v \sin v + B_v \cos v = 0 \quad (4.20)$$

$$A_w \sin w + B_w \cos w = 0 \quad (4.21)$$

όπου:

$$A_u = -t_3 q_3 - t_2 q_2$$

$$B_u = t_2 q_3 - t_3 q_2$$

$$A_v = -t_1 q_1 - t_3 q_3$$

$$B_v = t_3 q_1 - t_1 q_3$$

$$A_w = -t_1 q_1 - t_2 q_2$$

$$B_w = t_1 q_2 - t_2 q_1$$

Σημειώνεται ότι οι όροι  $t_i$  και  $q_i$ , συμβολίζουν τις τιμές των διανυσμάτων  $\vec{t}_i$  και  $\vec{q}_i$  που εμφανίζονται στις εξισώσεις 4.16 - 4.18. Για λόγους πληρότητας, παρουσιάζονται τα

διανύσματα αυτά, για κάθε γωνία εκ των  $u, v, w$ .

Για τη γωνία  $u$  είναι:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Delta x - x'_L) \cos v \cos w - (\Delta y - y'_L) \cos v \sin w + (\Delta z - z'_L) \sin v \\ (\Delta x - x'_L) \sin w + (\Delta y - y'_L) \cos w \\ -(\Delta x - x'_L) \sin v \cos w + (\Delta y - y'_L) \sin v \sin w + (\Delta z - z'_L) \cos v \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Για τη γωνία  $v$  είναι:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \cos u - z_i \sin u \\ y_i \sin u + z_i \cos u \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Delta x - x'_L) \cos w - (\Delta y - y'_L) \sin w \\ (\Delta x - x'_L) \sin w + (\Delta y - y'_L) \cos w \\ (\Delta z - z'_L) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Τέλος, για τη γωνία  $w$  είναι:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \cos v + y_i \sin u \sin v + z_i \cos u \sin v \\ y_i \cos u - z_i \sin u \\ -x_i \sin v + y_i \cos v \sin u + z_i \cos u \cos v \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Delta x - x'_L) \\ (\Delta y - y'_L) \\ (\Delta z - z'_L) \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Παρατηρείται πως οι εξισώσεις 4.19-4.21, έχουν την ίδια μορφή με την εξίσωση 2.13, όπως ήταν αναμενόμενο εφόσον η μαθηματική προσέγγιση που ακολουθήθηκε ήταν η

αναγωγή της μεθόδου στις 3Δ. Οι εξισώσεις αυτές επιλύονται με τη μέθοδο Newton-Raphson, [30], όπως ακριβώς παρουσιάστηκε και στην επίλυση της εξίσωσης 2.13. Για λόγους πληρότητας, διατυπώνονται οι εξισώσεις της μεθόδου Newton-Raphson, με χρήση των οποίων, προκύπτει η τελική λύση για τις γωνίες  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

Δημιουργούνται οι συναρτήσεις:

$$F_u = A_u \sin u + B_u \cos u \quad (4.28)$$

$$F_v = A_v \sin v + B_v \cos v \quad (4.29)$$

$$F_w = A_w \sin w + B_w \cos w \quad (4.30)$$

Υπολογίζονται οι πρώτες παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών (η παραγωγή γίνεται ως προς τις γωνίες  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ):

$$\frac{d(F_u)}{du} = A_u \cos u - B_u \sin u \quad (4.31)$$

$$\frac{d(F_v)}{dv} = A_v \cos v - B_v \sin v \quad (4.32)$$

$$\frac{d(F_w)}{dw} = A_w \cos w - B_w \sin w \quad (4.33)$$

Τελικά, υπολογίζονται οι ανανεωμένες τιμές των γωνιών στροφής  $u$ ,  $v$ ,  $w$ :

$$u^{new} = u^{old} - \frac{F_u}{F_u'} \quad (4.34)$$

$$v^{new} = v^{old} - \frac{F_v}{F_v'} \quad (4.35)$$

$$w^{new} = w^{old} - \frac{F_w}{F_w'} \quad (4.36)$$

Συνοψίζοντας, διατυπώθηκαν οι μαθηματικές εξισώσεις που διέπουν την κίνηση ενός κόμβου στο χώρο, οποιουδήποτε πλέγματος, όταν δίνεται μια αρχική μετατόπιση των οριακών κόμβων, η οποία συνήθως αποτελεί αποτέλεσμα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης. Με βάση το μαθηματικό μοντέλο αυτό, προγραμματίστηκε το λογισμικό το οποίο χρησιμοποιήθηκε στην διπλωματική αυτή εργασία, ώστε να γίνουν τα κατάλληλα πειράματα και να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα για την τεχνική ΚΑΣ.



## 4.2 Περιγραφή του Αλγορίθμου

Ο αλγόριθμος επίλυσης με την τεχνική ΚΑΣ για τα 3Δ πλέγματα, δε διαφέρει σε μεγάλο βαθμό από τον αντίστοιχο για τα 2Δ. Συνοπτικά, περιγράφεται από τα ακόλουθα (επαναλαμβανόμενα μέχρι σύγκλισης) βήματα:

- Βήμα 1** Αποθήκευση των θέσεων των κόμβων του αρχικού πλέγματος, αναγνώριση των οριακών κόμβων και μεταβολή της αρχικής τους θέσης, σύμφωνα με τη δεδομένη μετατόπισή τους η οποία προκύπτει από τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης.
- Βήμα 2** Αναγνώριση του είδους των κελιών από τα οποία αποτελείται το πλέγμα (τετράεδρα, εξάεδρα, πρίσματα κλπ), προκειμένου να απομονώνεται ο σωστός αριθμός γειτόνων του κάθε κόμβου.
- Βήμα 3** Επαναληπτική επίλυση των εξισώσεων που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 4.1, προκειμένου να υπολογιστεί η νέα θέση του τρέχοντος εσωτερικού κόμβου, ανάλογα με τη θέση των γειτονικών του κόμβων.
- Βήμα 4** Υπολογισμός της Ιακωβιανής ορίζουσας για κάθε κελί (cell) του πλέγματος, ώστε να γίνει έλεγχος της εγκυρότητας του νέου, προσαρμοσμένου πλέγματος.
- Βήμα 5** Υπολογισμός της μετρικής ποιότητας του μετατοπισμένου πλέγματος ώστε να γίνει σύγκριση με το αρχικό.

Η λογική της επίλυσης, είναι η ίδια με την αντίστοιχη για τα 2Δ πλέγματα. Σαρώνονται όλοι οι εσωτερικοί κόμβοι του πλέγματος και υπολογίζεται η μετατόπιση του κάθε κόμβου επαναληπτικά, με βάση τη δεδομένη αρχική παραμόρφωση. Το προσαρμοσμένο πλέγμα προσδιορίζεται γρήγορα και αξιόπιστα, ακόμη και για πυκνά 3Δ πλέγματα.

## 4.3 Μετρικές Ποιότητας του Πλέγματος

Τα μη-δομημένα 3Δ πλέγματα, μπορούν να αποτελούνται από διάφορα είδη στοιχείων, όπως τετράεδρα, εξάεδρα, πυραμίδες, σφηνοειδούς σχήματος κ.α. Το στοιχείο που εφαρμόζεται συχνότερα στα 3Δ πλέγματα είναι το τετράεδρο και για το λόγο αυτό, θα παρουσιαστεί ο υπολογισμός της μετρικής ποιότητας για ένα πλέγμα τετραεδρικών στοιχείων. Πολλά από τα στοιχεία που ακολουθούν βρίσκονται στο άρθρο [12].

Το τετραεδρικό στοιχείο  $T_{ijkl}$  αποτελείται από 4 κόμβους, έστω τους  $(x_k, y_k, z_k)$ , με  $k = 0, 1, 2, 3$ . Έπειτα, σχηματίζονται 4 Ιακωβιανοί πίνακες,  $A_k$ , (Jacobian Matrices),

ένας για κάθε κόμβο του τετραέδρου.

$$(-1)^k \begin{bmatrix} x_{k+1} - x_k & x_{k+2} - x_k & x_{k+3} - x_k \\ y_{k+1} - y_k & y_{k+2} - y_k & y_{k+3} - y_k \\ z_{k+1} - z_k & z_{k+2} - z_k & z_{k+3} - z_k \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Η ορίζουσα του πίνακα  $A_k$  δίνει 6 φορές τον όγκο του τετραέδρου και είναι η ίδια, ανεξάρτητα από τον κόμβο του τετραέδρου για τον οποίο υπολογίζεται. Έτσι, ας είναι  $\alpha = \det(A_k)$ . Προκύπτουν τέσσερις, επιπλέον, πίνακες (μετρικοί ταυιστές), σχηματίζοντας το γινόμενο  $A_k^T A_k$ .

Από το γινόμενο αυτό, προκύπτει ο συμμετρικός πίνακας  $S_i$ :

$$S_i = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

όπου τα στοιχεία της διαγωνίου  $S_{diag}$  εκφράζουν το τετράγωνο των μηκών των ακμών που συνδέουν την κορυφή  $i$  με τις κορυφές  $j, l, k$  του  $T_{ijkl}$  αντίστοιχα. Τα μη-διαγώνια στοιχεία  $S_{off-diag}$  του πίνακα  $S_i$  εκφράζουν το γινόμενο του μήκους των πλευρών επί το συνημίτονο των αντίστοιχων γωνιών που σχηματίζουν.

Το χωρίο των μετρικών του τετραέδρου, είναι το σύνολο των τετραέδρων που αποδίδουν θετική, πεπερασμένη τιμή για τον όγκο τους. Ένα τετραέδρο είναι εκφυλισμένο, εάν η τιμή του όγκου του είναι μηδενική. Τα τετραεδρικά στοιχεία με αρνητικό όγκο είναι μη-έγκυρα και απορρίπτονται από το πεδίο των μετρικών.

Κάθε τετραέδρο έχει δύο μετρικές που παρουσιάζουν ενδιαφέρον, τις μετρικές για το μέγεθος και το σχήμα του. Συχνότερη εφαρμογή συναντά η μετρική σχήματος, η οποία εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$F_{shape} = \frac{3(\alpha\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}}{\frac{3}{2}(S_{11} + S_{12} + S_{13}) - (S_{12} + S_{23} + S_{13})} \quad (4.39)$$

Με βάση τις τιμές της συνάρτησης αυτής, γίνεται η αξιολόγηση της ποιότητας των προσαρμοσμένων πλεγμάτων τετραεδρικών στοιχείων, που υπολογίζονται στις 3Δ εφαρμογές της διπλωματικής εργασίας.

Διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις για τις τιμές της  $F_{shape}$ :

- $F_{shape} = 1$  αν και μόνο αν το τετραεδρικό στοιχείο είναι ισόπλευρο (ιδανικό τετράεδρο),
- $F_{shape} = 0$  αν και μόνο αν το τετραεδρικό στοιχείο είναι εκφυλισμένο,
- $F_{shape} < 0$  που σημαίνει ότι το τετραεδρικό στοιχείο είναι ανεστραμμένο, δηλαδή δεν είναι έγκυρο και δε συμπεριλαμβάνεται στη μετρική.

Όπως σημειώθηκε και στην ενότητα 2.3.1, η ποιότητα του πλέγματος χαρακτηρίζεται από τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση, τη μέγιστη και την ελάχιστη ποσότητα των τιμών της μετρικής για κάθε στοιχείο του πλέγματος. Αυτό σημαίνει ότι ο παραπάνω υπολογισμός πρέπει να γίνεται για κάθε τετραεδρικό στοιχείο του νέου πλέγματος, προκειμένου να αξιολογηθεί η ποιότητα του.

Τέλος, η μετρική αυτή αποτελεί και μια σαφή ένδειξη για την εγκυρότητα του νέου πλέγματος. Σε περίπτωση που η συνάρτηση  $F_{shape}$  πάρει αρνητική τιμή για ένα ή περισσότερα τετραεδρικά στοιχεία, τότε ο χρήστης ενημερώνεται ότι στο νέο πλέγμα έχουν εμφανιστεί ανεστραμμένα στοιχεία, κάτι που σημαίνει ότι αυτό δεν είναι έγκυρο.



# Κεφάλαιο 5

## Εφαρμογές της Τεχνικής ΚΑΣ σε 3Δ Πλέγματα

### 5.1 Εφαρμογή σε Απλές Γεωμετρίες

#### 5.1.1 Εφαρμογή σε Κύβο

Αρχικά, επιλέγεται ένα απλό πλέγμα τετραεδρικών στοιχείων, το οποίο έχει τη μορφή ενός κύβου (σχήμα 5.1). Το πλέγμα αυτό αποτελείται από 2281 κόμβους και 10038 τετράεδρα. Η παραμόρφωση που επιλέγεται να εφαρμοστεί στον κύβο του σχήματος 5.1, είναι μια απλή κάμψη (bending). Για να εφαρμοστεί η εν λόγω παραμόρφωση γίνεται χρήση των παρακάτω εξισώσεων:

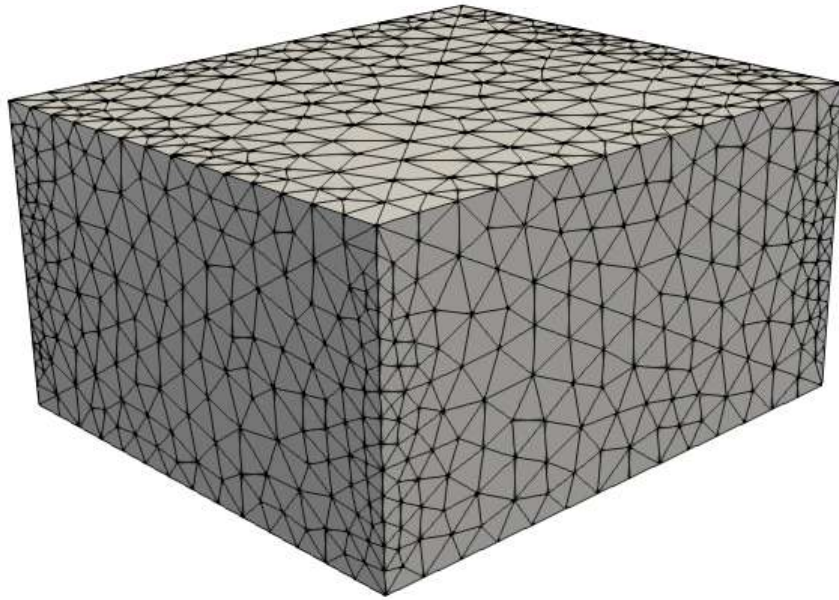
$$x^{new} = x^{old} \quad (5.1)$$

$$y^{new} = y^{old} + a(x^{old})^2 \quad (5.2)$$

$$z^{new} = z^{old} \quad (5.3)$$

Στην εξίσωση 5.3, εμφανίζεται ο όρος  $a$ , ο οποίος καλείται συντελεστής κάμψης (bending coefficient). Η τιμή του συντελεστή  $a$  καθορίζει το μέγεθος της κάμψης δηλαδή, καθώς η τιμή του αυξάνεται, παρατηρείται και πιο έντονη κάμψη στον κύβο.

Στο πλέγμα του σχήματος 5.1 εφαρμόζονται διαφορετικές τιμές του συντελεστή

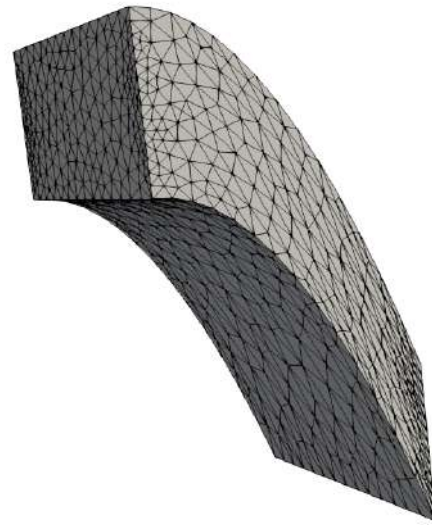


**Σχήμα 5.1:** 3D πλέγμα τετραεδρικών στοιχείων σε σχήμα κύβου. Αποτελείται από 2281 κόμβους και 10038 τετράεδρα.

κάμψης. Στα σχήματα 5.2, παρουσιάζεται η τελική μορφή του κύβου, μετά την εφαρμογή της κάμψης σε αυτό, για τις διάφορες τιμές του συντελεστή  $\alpha$ . Είναι εμφανές ότι καθώς αυξάνεται βηματικά η τιμή αυτή, παρατηρείται δυσμενέστερη κάμψη για τον κύβο, γεγονός που καθιστά δυσκολότερη την παραμόρφωση του πλέγματος. Ωστόσο, η τεχνική ΚΑΣ εξασφαλίζει την ομαλή μετατόπιση των κόμβων και την απουσία ανεστραμμένων κελιών στο τελικό πλέγμα, ακόμα και στην ακραία περίπτωση που ο συντελεστής κάμψης παίρνει την τιμή 0.2. Η επίπτωση που είχε η παραμόρφωση του κύβου στην ποιότητα του πλέγματος φαίνεται στον πίνακα 5.1. Από τον πίνακα 5.1 παρατηρείται ότι μόνο στην περίπτωση που ο συντελεστής κάμψης έχει την τιμή 0.05, η μέση τιμή της ποιότητας του πλέγματος διατηρείται σε υψηλά επίπεδα. Όταν αυξάνεται η τιμή του, το μέγεθος της παραμόρφωσης αυξάνει κατά πολύ και η στρέβλωση του κύβου γίνεται πολύ έντονη. Επομένως, είναι αναμενόμενο να μειωθεί σε σημαντικό βαθμό η ποιότητα του προσαρμοσμένου πλέγματος.



(α')  $\alpha = 0.05$



(β')  $\alpha = 0.10$



(γ')  $\alpha = 0.15$



(δ')  $\alpha = 0.20$

**Σχήμα 5.2:** 3D πλέγμα τετραεδρικών στοιχείων σε σχήμα κύβου. Το προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την εφαρμογή κάμψης στο πλέγμα για τέσσερις τιμές του συντελεστή  $\alpha$

### 5.1.2 Εφαρμογή σε Διαμάντι

Σε συνέχεια των εφαρμογών σε απλά πλέγματα τετραεδρικών στοιχείων, επιλέγεται μια διαφορετική γεωμετρία για παραμόρφωση. Πρόκειται για ένα πλέγμα με τη μορφή ενός διαμαντιού, σχήμα 5.3, το οποίο αποτελείται από 3474 κόμβους και 17049 τετράεδρα. Το πλέγμα αυτό είναι πυκνότερο από το προηγούμενο, ωστόσο, όπως θα φανεί από τις

<i>Cube</i>	Αρχικό	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.15$	$\alpha = 0.20$
$F_{shape}$	0.853444	0.732715	0.555830	0.428841	0.345862
$\sigma_F$	0.00546066	0.0149958	0.0515252	0.0702574	0.0743275
$F_{max}$	0.995825	0.995162	0.990727	0.985914	0.981693
$F_{min}$	0.585875	0.152556	0.114526	0.0925433	0.0512765
Χρόνος Σύγκλισης	-	2sec	6sec	16sec	25sec

**Πίνακας 5.1:** 3Δ πλέγμα τετραεδρικών στοιχείων σε σχήμα κύβου. Ποιότητα αρχικού και προσαρμοσμένων πλεγμάτων και απαιτούμενος χρόνος τρεξίματος ώστε να συγκλίνει ο κώδικας και να προκύψει το προσαρμοσμένο πλέγμα σε κάθε περίπτωση.

παραμορφώσεις που εφαρμόζονται, η τεχνική ΚΑΣ, επιφέρει αξιόπιστα αποτελέσματα και σε αυτήν την εφαρμογή. Στο διαμάντι του σχήματος 5.3, εφαρμόζονται ορισμένες



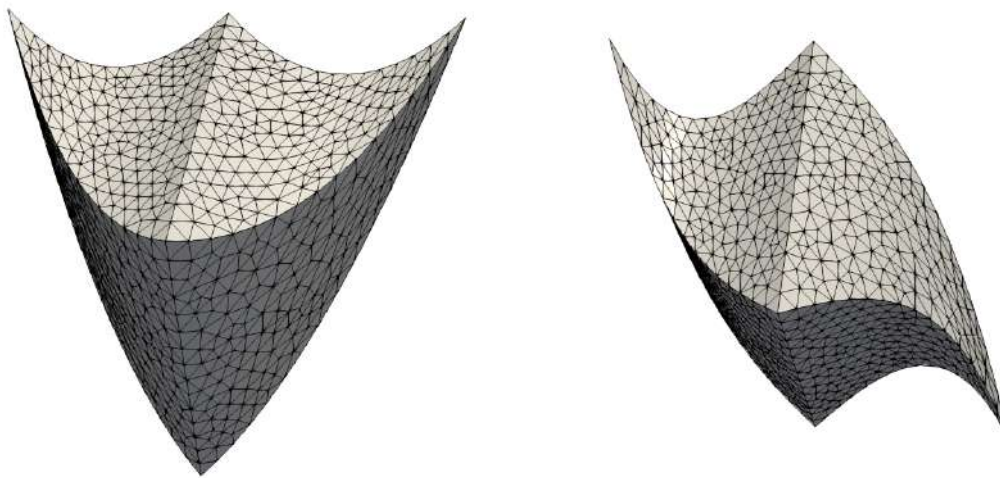
**Σχήμα 5.3:** 3Δ πλέγμα τετραεδρικών στοιχείων με τη μορφή διαμαντιού. Αποτελείται από 3474 κόμβους και 17049 τετράεδρα.

δυσμενείς παραμορφώσεις, ώστε να γίνει έλεγχος για τον αν η τεχνική ΚΑΣ μπορεί να ανταπεξέλθει. Οι δύο εξισώσεις που εφαρμόστηκαν για την επιβολή της αρχικής παραμόρφωσης είναι:

$$\begin{aligned}
 y^{new} &= y^{old} + \beta(x^{old})^2 \\
 y^{new} &= y^{old} + \beta(x^{old})^3
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

Από τα σχήματα 5.4, παρατηρείται ότι σε όλες τις παραμορφώσεις που εφαρμόστηκαν, δεν προέκυψε κανένα ανεστραμμένο τετράεδρο στο τελικό πλέγμα, παρά το γεγονός ότι οι δοκιμές που επιλέχθηκαν ήταν ιδιαίτερα απαιτητικές. Η ποιότητα των προσαρ-





(α') Παραμόρφωση του διαμαντιού με εξίσωση παραβολικής μορφής. Το τελικό πλέγμα δεν εμφανίζει ανεστραμμένα τετράεδρα.

(β') Παραμόρφωση του διαμαντιού με εξίσωση τρίτου βαθμού. Όπως και στην περίπτωση της παραβολικής εξίσωσης, το τελικό πλέγμα διατηρεί την εγκυρότητα του.

**Σχήμα 5.4:** 3Δ πλέγμα τετραεδρικών στοιχείων με τη μορφή διαμαντιού. Αποτελέσματα εφαρμογής παραμόρφωσης με εξισώσεις δευτέρου και τρίτου βαθμού (5.4).

<i>Diamond</i>	Αρχικό	Παραμόρφωση 1	Παραμόρφωση 2
$F_{shape}$	0.8538260	0.7864500	0.8101650
$\sigma_F$	0.0081943	0.0149958	0.0148117
$F_{max}$	0.9989190	0.9965450	0.9962060
$F_{min}$	0.0907532	0.0233354	0.1697350

**Πίνακας 5.2:** 3Δ πλέγμα τετραεδρικών στοιχείων με τη μορφή διαμαντιού. Πίνακας ποιότητας αρχικού και προσαρμοσμένων πλεγμάτων.

μοσμένων πλεγμάτων, φαίνεται στον πίνακα 5.2. Παρατηρείται ότι και για τα δύο είδη παραμόρφωσης που εφαρμόστηκαν, η ποιότητα των προσαρμοσμένων πλεγμάτων διατηρείται στο ίδιο επίπεδο με το αρχικό πλέγμα. Επίσης, σημειώνεται ότι και σε αυτήν την εφαρμογή, το υπολογιστικό κόστος ήταν μικρό. Χρειάστηκαν 30 sec ώστε να προσδιοριστεί το νέο πλέγμα και στις δύο περιπτώσεις παραμόρφωσης.

Από την εφαρμογή της τεχνικής ΚΑΣ στις προηγούμενες γεωμετρίες, παρατηρείται ότι το τελικό πλέγμα προσδιορίζεται ταχύτατα, γεγονός που ήταν αναμενόμενο λόγω του μικρού μεγέθους των πλεγμάτων που παραμορφώθηκαν. Οι συγκεκριμένες δοκιμές έγιναν προκειμένου να ελεγχθεί ότι ο αλγόριθμος έχει προγραμματιστεί σωστά. Τα αποτελέσματα των δύο εφαρμογών πιστοποίησαν την ομαλή λειτουργία του αλγορίθμου,

οπότε οι δοκιμές που ακολουθούν, αφορούν μεγάλα και πυκνά 3Δ πλέγματα γύρω από αεροδυναμικά σώματα.

## 5.2 Εφαρμογή στην Πτέρυγα ONERA M6

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζεται η εφαρμογή της τεχνικής ΚΑΣ σε ένα 3Δ πλέγμα γύρω από την πτέρυγα ONERA M6. Η πτέρυγα αυτή χρησιμοποιείται πολύ συχνά στις εφαρμογές CFD λόγω της απλής γεωμετρίας και της συμμετρικής αεροτομής που διαθέτει.

Στο σχήμα 5.5, φαίνεται το υπολογιστικό χωρίο γύρω από την πτέρυγα, το οποίο αποτελείται από 72791 κόμβους και 341797 τετράεδρα. Πρόκειται για ένα σαφώς μεγαλύτερο και πυκνότερο πλέγμα Euler, σε σύγκριση με τις προηγούμενες 3Δ εφαρμογές που παρουσιάστηκαν, κάτι που είναι αναμενόμενο, εφόσον το πλέγμα γύρω από την πτέρυγα χρησιμοποιείται για την επίλυση της ροής γύρω από αυτήν. Επίσης, στο σχήμα 5.6, έχει γίνει εστίαση στην περιοχή της πτέρυγας, περιοχή στην οποία θα εφαρμοστούν και οι αρχικές παραμορφώσεις. Τέλος, στο σχήμα 5.7, είναι ευδιάκριτο το υπολογιστικό πλέγμα γύρω από την πτέρυγα.

### 5.2.1 Κάμψη της Πτέρυγας

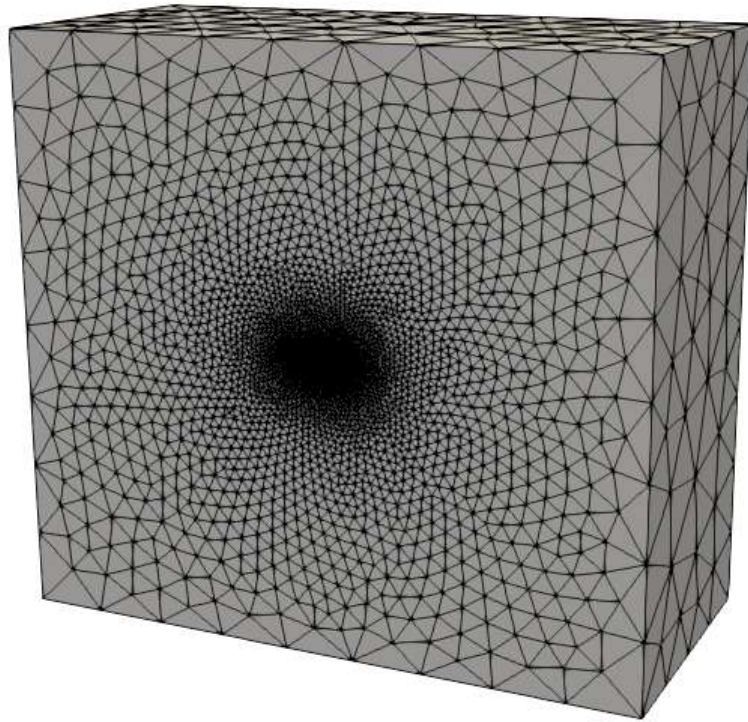
Η πρώτη δοκιμή στο υπολογιστικό πλέγμα που περιγράφηκε προηγουμένως είναι η απλή κάμψη της πτέρυγας κατά το εκπέτασμα αυτής. Για να πραγματοποιηθεί η δοκιμή αυτή, γίνεται χρήση των παρακάτω εξισώσεων:

$$x^{new} = x^{old} \quad (5.5)$$

$$y^{new} = y^{old} + \alpha(z^{old})^2 \quad (5.6)$$

$$z^{new} = z^{old} \quad (5.7)$$

όπου  $x^{old}$ ,  $y^{old}$ ,  $z^{old}$  είναι οι αρχικές θέσεις των κόμβων του πλέγματος γύρω από την πτέρυγα, ενώ με  $x^{new}$ ,  $y^{new}$ ,  $z^{new}$  συμβολίζονται οι αντίστοιχες νέες θέσεις, μετά την κάμψη. Επιπλέον, όπως είχε σημειωθεί και στην εφαρμογή 5.1.1, η τιμή του συντελεστή κάμψης (bending coefficient)  $\alpha$  καθορίζει το μέγεθος της κάμψης. Στην πτέρυγα ONERA M6, εφαρμόστηκαν 8 τιμές του  $\alpha$  από 0.05 έως 0.40, με βήμα 0.05. Στα σχήματα 5.8, που ακολουθούν, έχουν αποτυπωθεί τα αποτελέσματα που είχε η εφαρμογή κάμψης

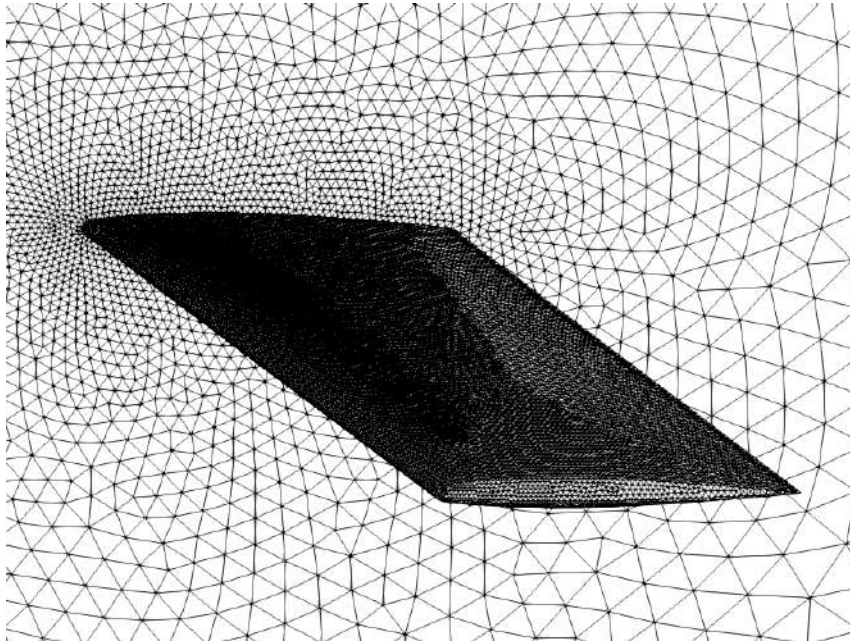


**Σχήμα 5.5:** 3D πλέγμα γύρω από την πτέρυγα ONERA M6. Το υπολογιστικό χωρίο γύρω από την πτέρυγα.

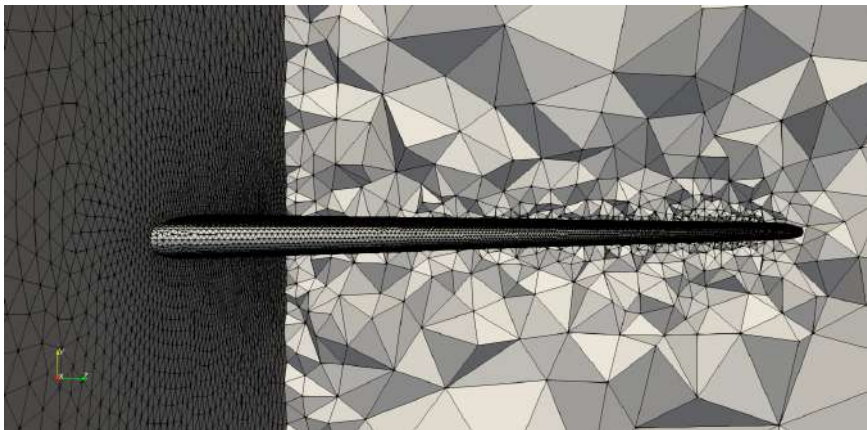
στο πλέγμα γύρω από την πτέρυγα. Η δοκιμή αυτή μπορεί να χαρακτηριστεί ως επιτυχημένη για την τεχνική ΚΑΣ, αφού ακόμα και στην ακραία περίπτωση που η τιμή του συντελεστή κάμψης γίνεται 0.40, το αποτέλεσμα είναι ένα πλέγμα χωρίς ανεστραμμένα τετράεδρα και ποιότητας αντίστοιχης με το αρχικό, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 5.9, στο οποίο φαίνεται η μέση τιμή της μετρικής 4.39 του πλέγματος για κάθε τιμή του συντελεστή κάμψης.

Όπως έχει αναφερθεί και σε προηγούμενες ενότητες, η ποιότητα του προσαρμοσμένου πλέγματος είναι ένας ιδιαίτερα σημαντικός παράγοντας για την αξιολόγηση μιας μεθόδου παραμόρφωσης πλέγματος. Από το διάγραμμα 5.9, διακρίνεται εύκολα ότι η μεταβολή της μέσης τιμής της ποιότητας του προσαρμοσμένου πλέγματος, παρουσιάζει πολύ μικρή μείωση καθώς το μέγεθος της παραμόρφωσης αυξάνεται.

Σε ό,τι αφορά τη σύγκλιση του κώδικα για τον προσδιορισμό των τελικών πλεγμάτων,

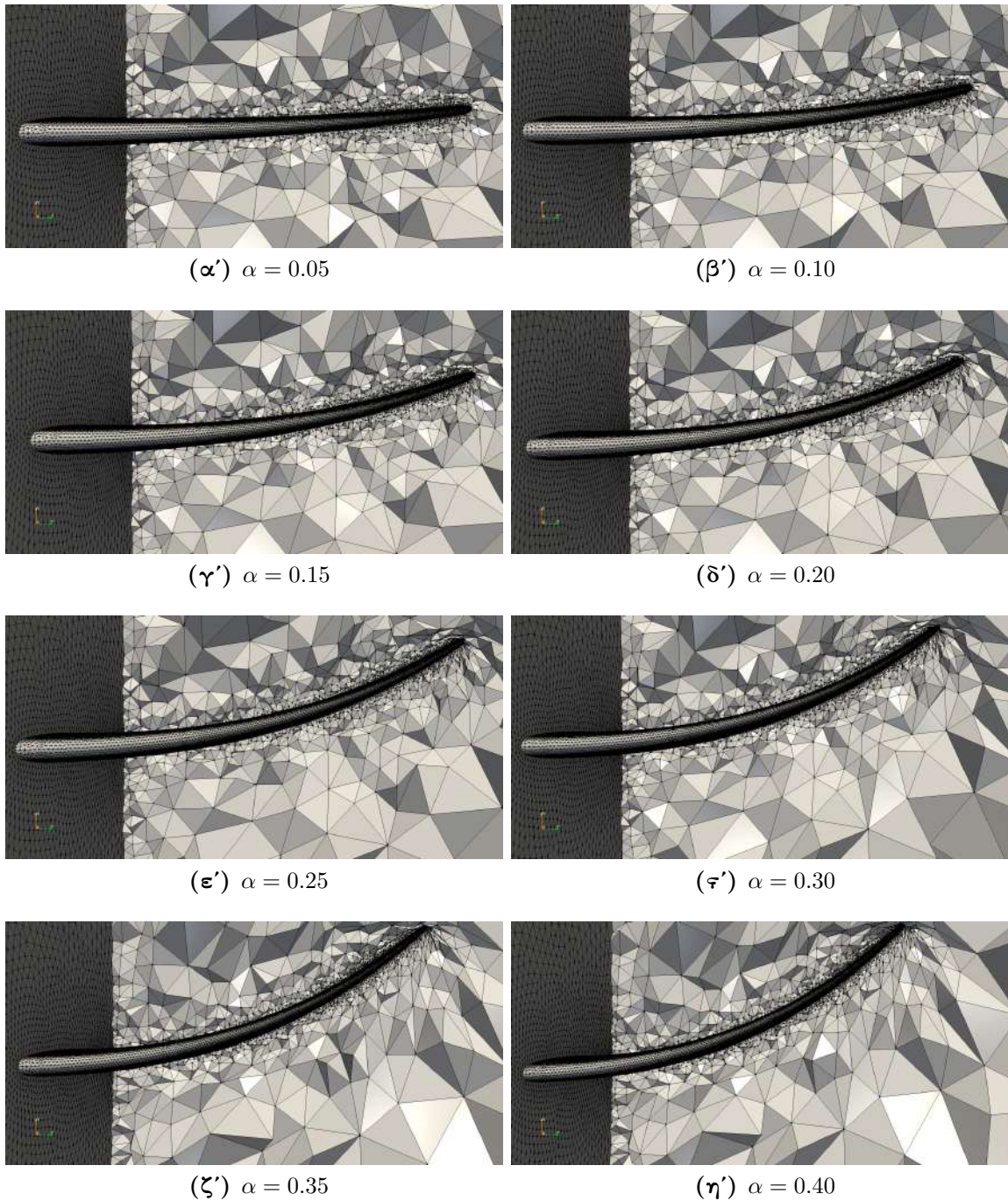


**Σχήμα 5.6:** 3D πλέγμα γύρω από την πτέρυγα ONERA M6. Εστίαση του υπολογιστικού χωρίου στην περιοχή της πτέρυγας. Διακρίνεται το υπολογιστικό πλέγμα πάνω σε αυτή.



**Σχήμα 5.7:** 3D πλέγμα γύρω από την πτέρυγα ONERA M6. Εστίαση του υπολογιστικού χωρίου στην περιοχή της πτέρυγας. Γίνεται ευδιάκριτο το υπολογιστικό πλέγμα γύρω από αυτήν.

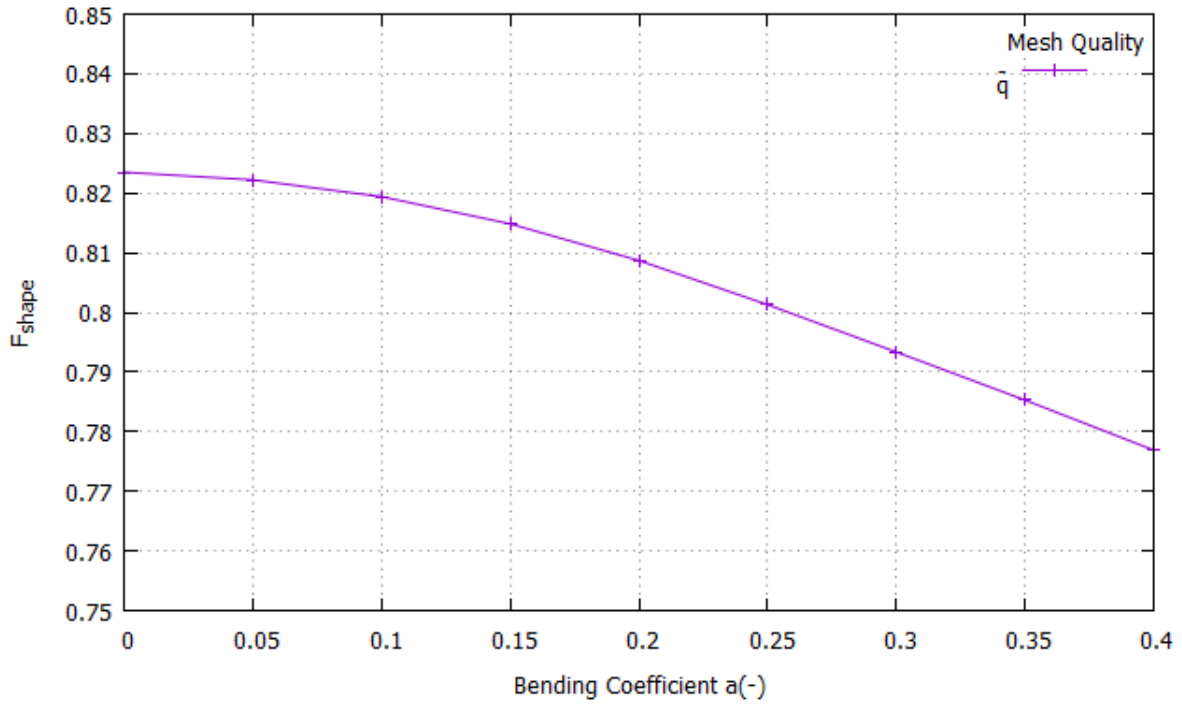
αυτή επιτυγχάνεται μετά από ένα διάστημα 3-10 min, ανάλογα με το μέγεθος της παραμόρφωσης που εφαρμόζεται. Είναι προφανές ότι η μέθοδος συγχλίνει πολύ γρήγορα, ακόμη και όταν αυξάνεται η διάσταση του πλέγματος.



**Σχήμα 5.8:** Κάμψη της πτέρυγας ONERA M6. Το προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την εφαρμογή κάμψης στην πτέρυγα ONERA M6 για 8 διαφορετικές τιμές του συντελεστή κάμψης  $\alpha$ .

### 5.2.2 Κάμψη και Στρέψη της Πτέρυγας

Ως μια πιο δύσκολη περίπτωση παραμόρφωσης της πτέρυγας, επιλέγεται και πάλι η κάμψη κατά το εκπέτασμα της, όμως τούτη τη φορά, εφαρμόζεται παράλληλα και στρέψη



**Σχήμα 5.9:** Κάμψη της πτέρυγας ONERA M6. Η μέση τιμή  $\bar{q}$  της μετρικής σχήματος  $F_{shape}$  του πλέγματος, με την αύξηση του συντελεστή κάμψης  $\alpha$ .

στην πτέρυγα γύρω από τον ίδιο άξονα (άξονας  $z$ ). Οι εξισώσεις για τον υπολογισμό των νέων θέσεων των σημείων του ελεγχόμενου ορίου (σημεία της πτέρυγας) είναι οι εξής:

$$x^{new} = (x^{old} - x_r) \cos \phi - (y^{old} - y_r) \sin \phi + x_r \quad (5.8)$$

$$y^{new} = (y^{old} - y_r) \cos \phi - (x^{old} - x_r) \sin \phi + y_r + \alpha(z^{old})^2 \quad (5.9)$$

$$z^{new} = z^{old} \quad (5.10)$$

με:

$$x_r = 5.25 + 0.45z^{old} \quad (5.11)$$

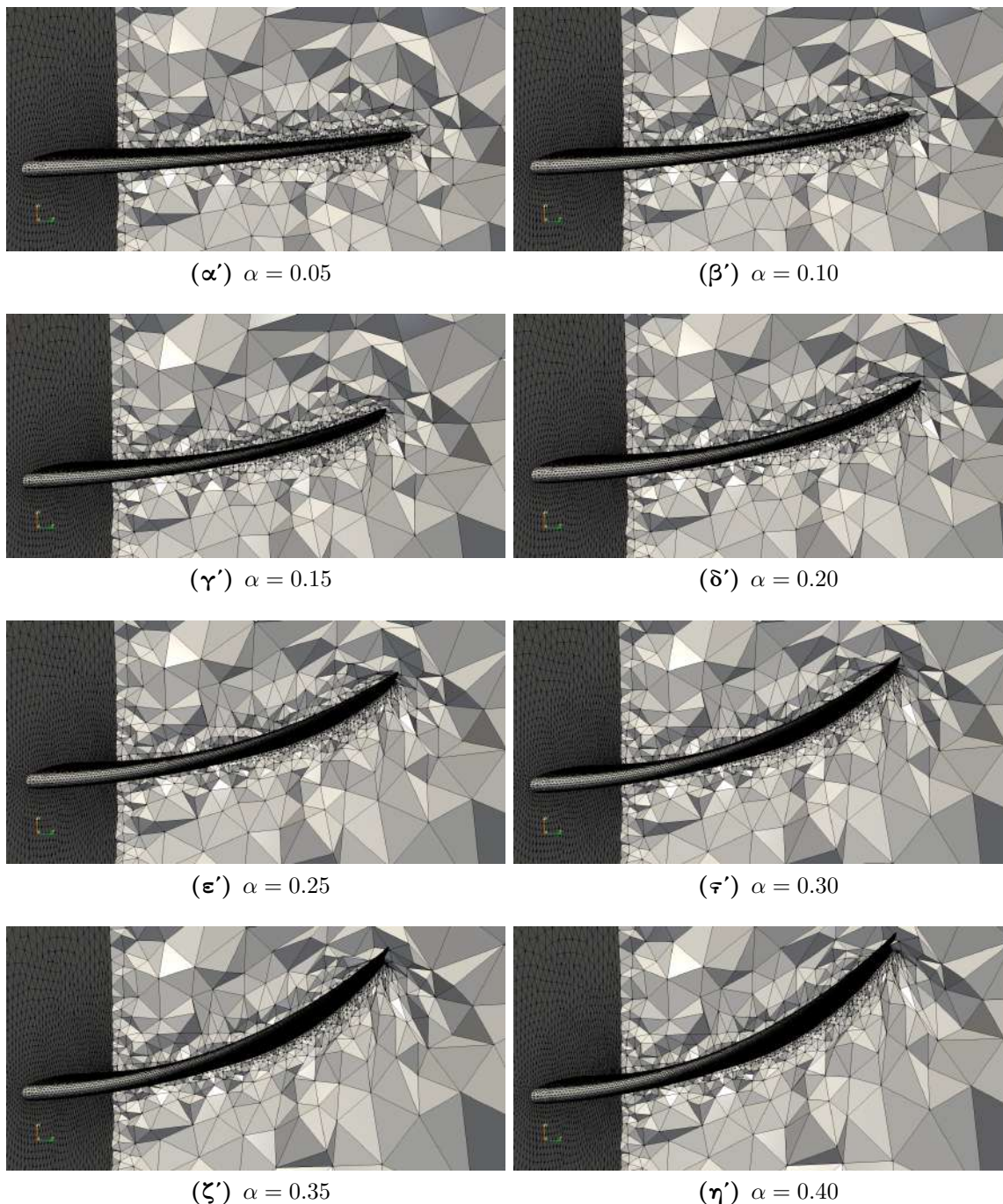
$$y_r = 5.0 \quad (5.12)$$

$$\phi = \alpha(z^{old})^2 \quad (5.13)$$

Όπως και στην εφαρμογή 5.2.1, γίνονται δοκιμές στην πτέρυγα για διαφορετικές τιμές του συντελεστή  $\alpha$ . Οι τιμές του  $\alpha$  κυμαίνονται από 0.05 έως 0.40, με βήμα 0.05.

Παρατηρώντας τα σχήματα 5.10, στα οποία φαίνεται η μορφή της πτέρυγας ONERA

M6 μετά την εφαρμογή της κάμψης και στρέψης σε αυτή, γίνεται εμφανές ότι η τεχνική ΚΑΣ ανταπεξήλθε και στη συγκεκριμένη, πιο πολύπλοκη, εφαρμογή. Τα αποτελέσμα-

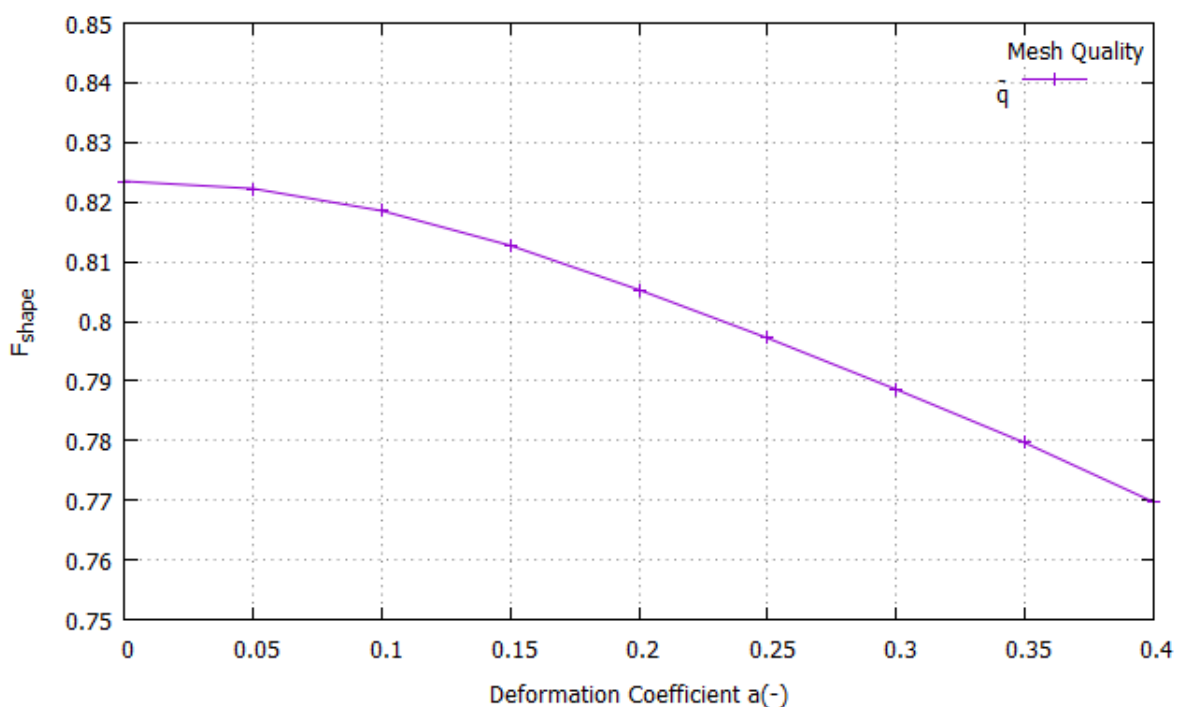


**Σχήμα 5.10:** Κάμψη και στρέψη της πτέρυγας ONERA M6. Το προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την εφαρμογή της παραμόρφωσης στην πτέρυγα για 8 διαφορετικές τιμές του συντελεστή παραμόρφωσης  $\alpha$ .

τα της δοκιμής που επιλέχθηκε να εφαρμοστεί στην πτέρυγα είναι και σε αυτήν την

περίπτωση άκρως ικανοποιητικά. Παρά το μεγάλο μέγεθος και την ιδιαιτερότητα της παραμόρφωσης, η τεχνική ΚΑΣ, απέδωσε πλέγματα χωρίς ανεστραμμένα κελιά και με ποιότητα πολύ λίγο μικρότερη από την αρχική, ενώ η μέθοδος συνέκλινε σε 4-11 min, ανάλογα με το μέγεθος της παραμόρφωσης.

Το διάγραμμα για την ποιότητα του προσαρμοσμένου πλέγματος (αντίστοιχα με το σχήμα 5.9), φαίνεται στο σχήμα 5.11.



**Σχήμα 5.11:** Κάμψη και στρέψη της πτέρυγας ONERA M6. Η μέση τιμή  $\bar{q}$  της μετρικής σχήματος  $F_{shape}$  του πλέγματος, με την αύξηση του συντελεστή παραμόρφωσης  $\alpha$ .

### 5.3 Εφαρμογή σε Αεροσκάφος

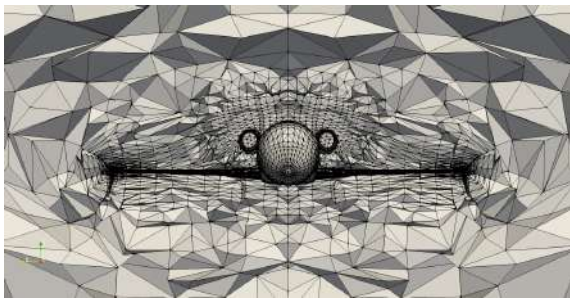
Η εφαρμογή που παρουσιάζεται στην ενότητα αυτή, είναι η παραμόρφωση του πλέγματος γύρω από ένα μικρό αεροσκάφος της πολιτικής αεροπορίας (σχήμα 5.12). Στην εφαρμογή αυτή, θα εξεταστεί η παραμόρφωση του πλέγματος όταν το αεροσκάφος εκτελεί μια μικρή περιστροφή, γύρω από τον διαμήκη άξονα. Το 3D πλέγμα γύρω από το αεροσκάφος έχει σχήμα σφαίρας και αποτελείται, από 87965 κόμβους και 511888 τετραεδρικά στοιχεία.



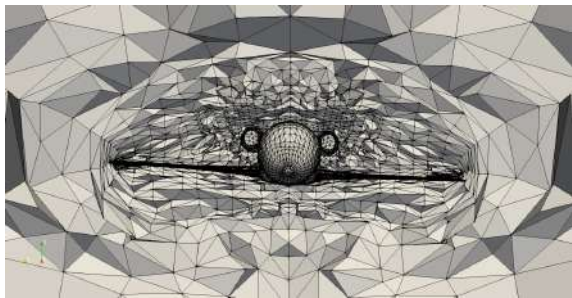


**Σχήμα 5.12:** 3D πλέγμα γύρω από ολόκληρο επιβατικό αεροσκάφος. Το υπολογιστικό χωρίο γύρω από το αεροσκάφος.

Η κίνηση που εκτελεί το αεροσκάφος είναι η κλίση ή διατοιχισμός (roll). Κατά την κίνηση αυτή το αεροσκάφος περιστρέφεται γύρω από τον διαμήκη άξονα του. Ο διαμήκης άξονας είναι ο άξονας που διατρέχει την άτρακτο του αεροσκάφους από την κεφαλή ως το ουραίο τμήμα. Κατά την κλίση, το αεροσκάφος κλίνει τις πτέρυγες προς τη μία ή την άλλη πλευρά. Στο σχήμα 5.13, διακρίνονται το αρχικό και το παραμορφωμένο πλέγμα γύρω από το αεροσκάφος, όταν έχει εφαρμοστεί γωνία κλίσης  $3^\circ$  σε αυτό. Η εφαρμογή αυτή ήταν η πιο ακριβή από άποψη υπολογιστικού κόστους, κάτι που είναι απολύτως φυσιολογικό λόγω της μεγάλης διάστασης του πλέγματος. Για να προσδιοριστεί το τελικό πλέγμα απαιτήθηκαν 25 min. Ωστόσο, επειδή και σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιήθηκε ο ίδιος επεξεργαστής με τις υπόλοιπες εφαρμογές, το απαιτούμενο κόστος μπορεί να χαρακτηριστεί ως μικρό, δεδομένου ότι η επίλυση προβλημάτων που χρησιμοποιούν πλέγματα ανάλογης διάστασης, γίνεται με χρήση παράλληλης επεξεργασίας σε περισσότερους από έναν επεξεργαστές.



(α') Αρχικό πλέγμα γύρω από το αεροσκάφος.



(β') Παραμορφωμένο πλέγμα μετά το roll του αεροσκάφους.

**Σχήμα 5.13:** 3Δ πλέγμα γύρω από ολόκληρο επιβατικό αεροσκάφος. Προκύπτουν πλέγματα για εφαρμογή κλίσης (roll) 3° στο αεροσκάφος.

## Κεφάλαιο 6

# Παράδειγμα Επίλυσης της Ροής σε 3Δ Πλέγμα Τετραεδρικών Στοιχείων

### 6.1 Λογισμικό Επίλυσης της Ροής

Η επίλυση της ροής πραγματοποιείται με τον κώδικα PUMA ο οποίος έχει αναπτυχθεί από τη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης (ΜΠΥΡ&Β) ([2], [22], [24], [26], [27]). Ο κώδικας αυτός επιλύει αριθμητικά τις εξισώσεις Favre ή Reynolds Averaged Navier-Stokes σε εσωτερικό ή εξωτερικό υπολογιστικό πεδίο, για 2Δ ή 3Δ, συμπιεστές ή ασυμπίεστες ροές. Για την επίλυση της χρονικά μη-μόνιμης ροής χρησιμοποιείται η τεχνική του διπλού χρονικού βήματος (dual time-stepping), ενώ για μόνιμη χρησιμοποιείται η τεχνική της χρονοπροέλασης (time-marching). Η διακριτοποίηση των εξισώσεων γίνεται με το σχήμα πεπερασμένων όγκων και την κεντροκομβική διατύπωση, χρησιμοποιώντας ανάντι σχήματα δεύτερης τάξης με χρήση περιοριστών για τους όρους μεταφοράς. Επιπλέον, πραγματοποιείται δυναμική προσαρμογή του πλέγματος στην υπό εξέλιξη λύση ή στις τεθείσες απαιτήσεις ακρίβειας της πρόλεξης (με έλεγχο του υπολοίπου των εξισώσεων ροής), με διάφορα a priori ή a posteriori κριτήρια. Ακόμα ο κώδικας υποστηρίζει πλέγματα που παραμορφώνονται ακολουθώντας την κίνηση/παραμόρφωση του στερεού ορίου. Στον κώδικα υπάρχει η δυνατότητα παράλληλης επεξεργασίας με τη χρήση πρωτοκόλλων PVM και MPI σε

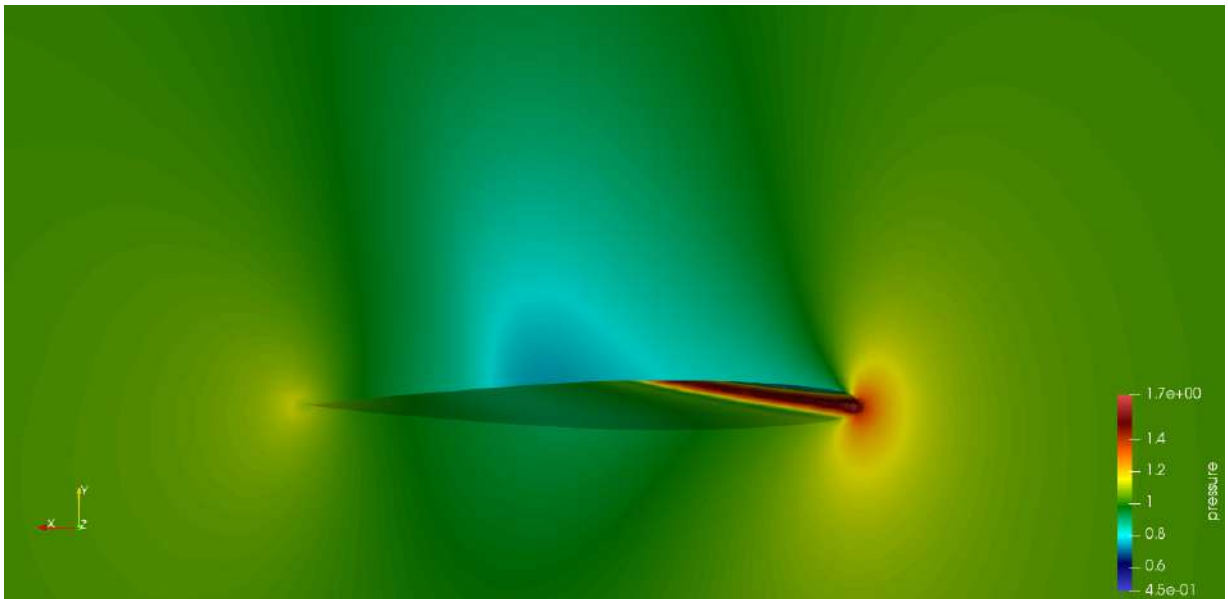
συνδυασμό με τη δυνατότητα παράλληλης εκτέλεσης σε κάρτες γραφικών (GPUs).

## 6.2 Επίλυση της Ροής γύρω από την Πτέρυγα ONERA M6

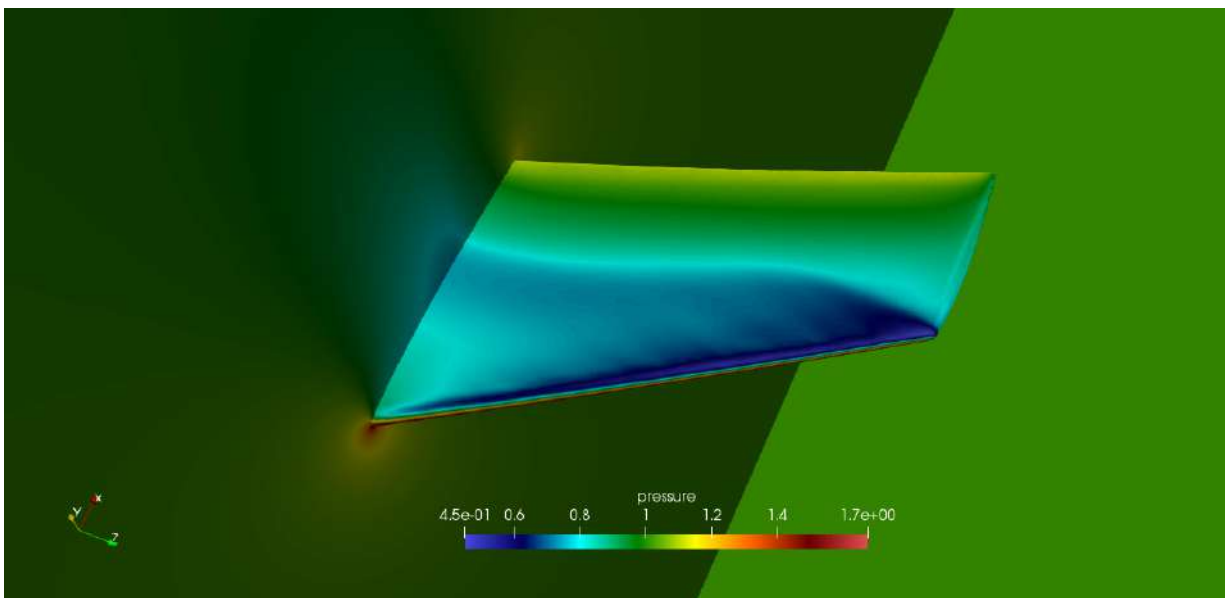
Στην ενότητα 5.2 του κεφαλαίου 5, εφαρμόστηκαν δύο είδη παραμορφώσεων στην πτέρυγα ONERA M6 και προσδιορίστηκε το προσαρμοσμένο πλέγμα γύρω από αυτήν, βάσει της παραμόρφωσης που επιβλήθηκε. Μερικά από τα προσαρμοσμένα πλέγματα που υπολογίστηκαν σε εκείνη την ενότητα, χρησιμοποιούνται στην τρέχουσα ενότητα, ώστε να γίνει επίλυση της ροής γύρω από την πτέρυγα, με χρήση του λογισμικού που περιγράφηκε προηγουμένως.

Υπενθυμίζεται, ότι τα είδη παραμόρφωσης που επιβλήθηκαν στην πτέρυγα, ήταν η απλή κάμψη κατά το εκπέτασμα αυτής, ενώ η δεύτερη ήταν κάμψη και ταυτόχρονη στρέψη γύρω από τον ίδιο άξονα (άξονας  $z$ ). Το μέγεθος των δύο αυτών παραμορφώσεων, εξαρτάται από την τιμή ενός συντελεστή  $\alpha$ , ο οποίος στην πρώτη περίπτωση ονομάστηκε συντελεστής κάμψης ενώ στη δεύτερη συντελεστής παραμόρφωσης. Στην πτέρυγα έγιναν δοκιμές για 8 τιμές του συντελεστή αυτού, σε κάθε περίπτωση παραμόρφωσης. Ωστόσο, καθώς η τιμή του  $\alpha$  αυξάνεται, η παραμόρφωση γίνεται όλο και πιο έντονη και, σταδιακά, ξεφεύγει από το μέγεθος της παραμόρφωσης που είναι πιθανό να προκύψει στην πραγματικότητα. Για το λόγο αυτό, η επίλυση της ροής γίνεται για τις μικρότερες παραμορφώσεις, με σκοπό να πιστοποιηθεί η χρησιμότητα της τεχνικής ΚΑΣ στις CFD εφαρμογές.

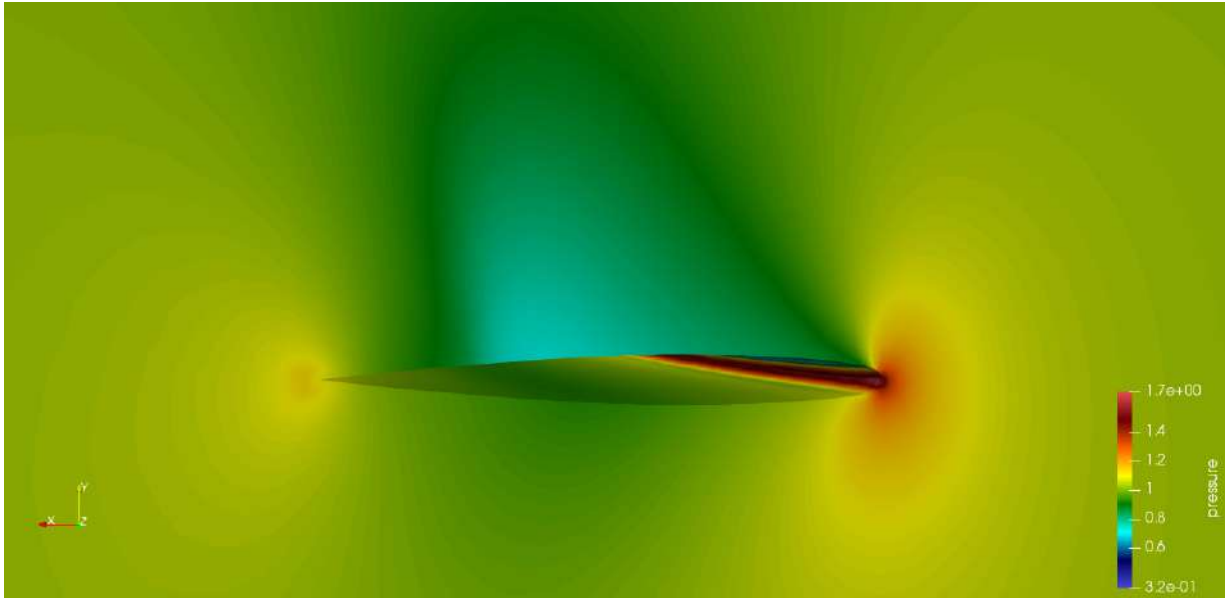
Για την περίπτωση της απλής κάμψης, ακολουθούν (σχήμα 6.1) τα αποτελέσματα της επίλυσης της ροής στο πλέγμα γύρω από την πτέρυγα, όταν ο συντελεστής κάμψης είναι  $\alpha = 0.05$ . Στο σχήμα 6.2, φαίνεται η κατανομή της πίεσης πάνω στην επιφάνεια της πτέρυγας. Στη συνέχεια, έγινε επίλυση της ροής γύρω από την πτέρυγα, όταν αυτή υπόκειται σε κάμψη κατά το εκπέτασμα της και ταυτόχρονη στρέψη γύρω από τον ίδιο άξονα. Στο σχήμα 6.3 φαίνεται η κατανομή της πίεσης στο προσαρμοσμένο πλέγμα που υπολογίστηκε με την τεχνική ΚΑΣ.



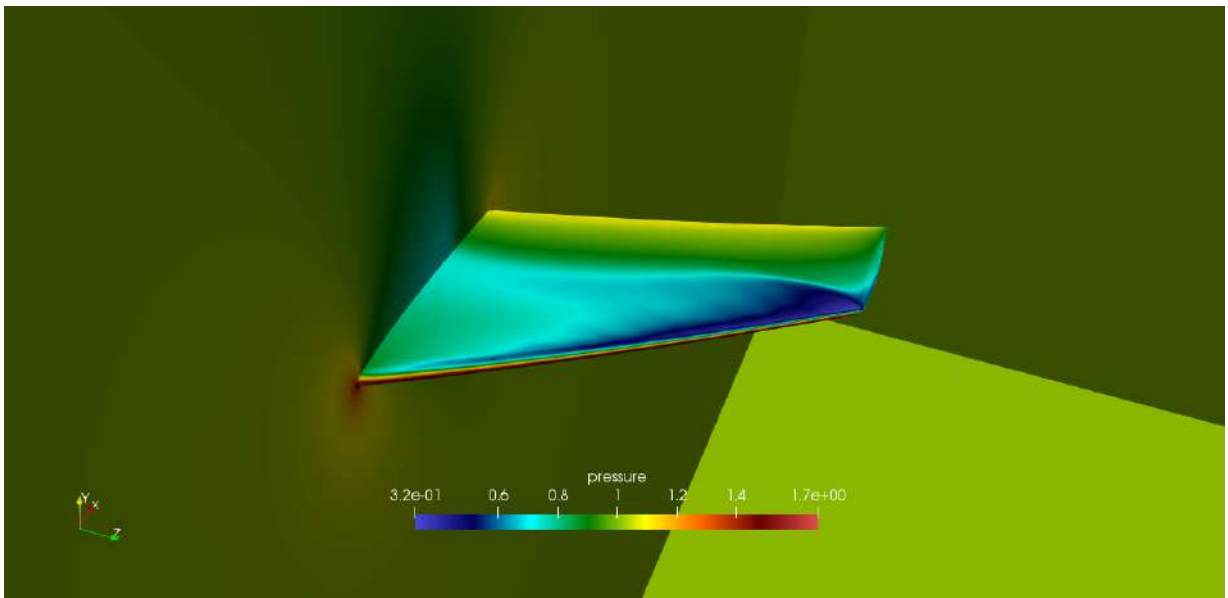
**Σχήμα 6.1:** Αριθμητική επίλυση της ροής γύρω από την πτέρυγα ONERA M6. Κατανομή πίεσης στο προσαρμοσμένο πλέγμα γύρω από την πτέρυγα όταν εφαρμόζεται απλή κάμψη σε αυτή.



**Σχήμα 6.2:** Αριθμητική επίλυση της ροής γύρω από την πτέρυγα ONERA M6. Κατανομή πίεσης στην επιφάνεια της πτέρυγας όταν εφαρμόζεται απλή κάμψη σε αυτή.



**Σχήμα 6.3:** Αριθμητική επίλυση της ροής γύρω από την πτέρυγα ONERA M6. Κατανομή πίεσης στο προσαρμοσμένο πλέγμα γύρω από την πτέρυγα όταν εφαρμόζεται κάμψη και στρέψη σε αυτή.



**Σχήμα 6.4:** Αριθμητική επίλυση της ροής γύρω από την πτέρυγα ONERA M6. Κατανομή πίεσης στην επιφάνεια της πτέρυγας όταν εφαρμόζεται κάμψη και στρέψη σε αυτή.

# Κεφάλαιο 7

## Ανακεφαλαίωση, Συμπεράσματα & Προτάσεις

### 7.1 Ανακεφαλαίωση

Στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας αναπτύχθηκε και θεμελιώθηκε μαθηματικά μια νέα μέθοδος προσαρμοστικής παραμόρφωσης υπολογιστικών πλεγμάτων. Η μέθοδος αυτή εμπνεύστηκε από το πρότυπο κίνησης του απολύτως στερεού σώματος, όπως αυτό ορίζεται από τη μηχανική. Επιπλέον, προγραμματίστηκε λογισμικό σε γλώσσα Fortran, ικανό να διαχειρίζεται κάθε είδους πλέγμα (2Δ και 3Δ, δομημένα και μη-δομημένα). Το λογισμικό αυτό δοκιμάστηκε σε πληθώρα εφαρμογών, προκειμένου να αξιολογηθεί η ευρωστία της μεθόδου. Οι πρώτες εφαρμογές αφορούσαν συνήθη γεωμετρικά σχήματα (τετράγωνο, κύβος, διαμάντι), τα οποία είχαν μοντελοποιηθεί με αραιά πλέγματα και εξετάστηκε η παραμόρφωσή τους, ώστε να πιστοποιηθεί ότι το λογισμικό που δημιουργήθηκε, είναι ικανό να διαχειριστεί πυκνότερα και μεγαλύτερα πλέγματα. Στη συνέχεια, έγιναν δοκιμές σε σώματα αεροδυναμικών εφαρμογών, όπως για παράδειγμα, η στροφή της αεροτομής Korn γύρω από το αεροδυναμικό κέντρο της, η στροφή των πτερυγίων slat και flap μιας υπεραντωτικής διάταξης τριών στοιχείων, η κάμψη της πτέρυγας ONERA M6 και η κλίση ενός μικρού επιβατικού αεροσκάφους.

Τέλος, σε όλες τις εφαρμογές εξετάστηκε η ποιότητα των προσαρμοσμένων πλεγμάτων, με βάση τον υπολογισμό των μετρικών ποιότητας, όπως αυτές ορίστηκαν για τα 2Δ και 3Δ πλέγματα στις ενότητες 2.3.1, 2.3.2 και 4.3. Η τιμή της ποιότητας των

τελικών πλεγμάτων ήταν αντίστοιχη της αρχικής, γεγονός που αποδεικνύει ότι η τεχνική ΚΑΣ, παράγει πλέγματα τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε εφαρμογές CFD. Έτσι, επιλέχθηκε να γίνει επίλυση της ροής σε δύο προσαρμοσμένα πλέγματα που υπολογίστηκαν με την τεχνική ΚΑΣ γύρω από την πτέρυγα ONERA M6 και παρουσιάστηκαν τα σχετικά αποτελέσματα. Η επίλυση αυτή, αποτέλεσε μια επιβεβαίωση του παραπάνω ισχυρισμού.

## 7.2 Συμπεράσματα

Από την εφαρμογή της μεθόδου σε διάφορα υπολογιστικά πλέγματα, προκύπτει το συμπέρασμα ότι το μεγάλο πλεονέκτημα της προσαρμοστικής παραμόρφωσης πλεγμάτων με το πρότυπο κίνησης του απαραμόρφωτου σώματος, είναι ότι η ποιότητα των προσαρμοσμένων πλεγμάτων διατηρείται σε υψηλά επίπεδα και είναι ισάξια με αυτήν του αρχικού πλέγματος. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην απαίτηση που τέθηκε για την ανάπτυξη της μεθόδου, αφού αντιμετωπίζοντας το πλέγμα ως ένα στερεό σώμα, επιδιώκεται και επιτυγχάνεται η κατά το δυνατόν μικρότερη απόκλιση από την αρχική του μορφή.

Ακόμη, η συγκεκριμένη μέθοδος χαρακτηρίζεται από μικρό υπολογιστικό κόστος, ακόμα και για μεγάλα και πυκνά πλέγματα, παρά το γεγονός ότι είναι επαναληπτική. Χαρακτηριστικό είναι ότι για τα τρεξίματα του λογισμικού χρησιμοποιήθηκε ένας απλός επεξεργαστής (Intel CORE i7) ενός προσωπικού υπολογιστή. Η μέση τιμή του χρόνου που απαιτείται ώστε να συγκλίνει ο κώδικας και να προσδιοριστούν τα προσαρμοσμένα πλέγματα είναι της τάξεως των  $0.3624 \frac{sec}{1000 \text{ κόμβους}}$  για τα 2Δ πλέγματα, ενώ για τα 3Δ είναι  $3.6313 \frac{sec}{1000 \text{ κόμβους}}$ .

Συνοψίζοντας, η τεχνική ΚΑΣ είναι μια αξιόπιστη και αποτελεσματική μέθοδος προσαρμοστικής παραμόρφωσης πλεγμάτων. Η μέθοδος είναι ικανή να διαχειριστεί κάθε είδους πλέγμα, αποδίδοντας άκρως ικανοποιητικά αποτελέσματα, οπότε μπορεί να αποτελέσει χρήσιμο εργαλείο στην επίλυση προβλημάτων CFD με μετακινούμενα όρια.



### 7.3 Προτάσεις για Μελλοντική Μελέτη

Η μέθοδος που αποτέλεσε αντικείμενο της διπλωματικής αυτής εργασίας, αποδείχθηκε ότι είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική. Ωστόσο, υπάρχουν περιθώρια συνέχισης και βελτίωσης της.

Αρχικά, σε όλες τις εφαρμογές παρατηρήθηκε πιο έντονη μετατόπιση στους κόμβους που βρίσκονται κοντά στο όριο και, σχεδόν αμελητέα σε αυτούς που βρίσκονται μακριά. Επειδή οι πιο σημαντικές πληροφορίες για τη ροή αποθηκεύονται στους κόμβους που δέχονται τη μεγαλύτερη παραμόρφωση, θα μπορούσε να εισαχθεί στον κώδικα μια συνθήκη η οποία θα περιορίζει την μετατόπιση αυτών των κόμβων. Η εισαγωγή μιας τέτοιας συνθήκης, θα είχε ως αποτέλεσμα την καλύτερη διατήρηση της μορφής του αρχικού πλέγματος κοντά στο όριο, κάτι που θα αποτελούσε μια σημαντική βελτίωση στον τρόπο λειτουργίας της μεθόδου.

Επιπροσθέτως, στην εργασία αυτή, τα πλέγματα που δοκιμάστηκαν αποτελούνταν από ένα μόνο είδος στοιχείων. Δηλαδή, τα 2Δ πλέγματα αποτελούνταν αποκλειστικά από τριγωνικά ή τετραπλευρικά στοιχεία, ενώ τα 3Δ, από τετραεδρικά. Σε πιο σύνθετες βιομηχανικές εφαρμογές, χρησιμοποιούνται υβριδικά υπολογιστικά πλέγματα, δηλαδή πλέγματα που αποτελούνται από ένα συνδυασμό κελιών. Για παράδειγμα, ένα 2Δ πλέγμα μπορεί να αποτελείται από έναν συνδυασμό τριγωνικών και τετραπλευρικών στοιχείων, ενώ ένα 3Δ από τετραεδρικά, εξαεδρικά και πρίσματα. Η διαχείριση υβριδικών πλεγμάτων δεν εξετάστηκε στο πλαίσιο αυτής της εργασίας, ωστόσο είναι κάτι που αφήνεται ως μελλοντική μελέτη.

Τέλος, στα προσαρμοσμένα πλέγματα που υπολογίστηκαν με την τεχνική ΚΑΣ, έγινε επίλυση της ροής, ώστε να πιστοποιηθεί ότι τα παραμορφωμένα πλέγματα είναι αξιόπιστα για τέτοιου είδους εφαρμογές. Η χρήση της μεθόδου στην επίλυση προβλημάτων αεροδυναμικής βελτιστοποίησης με τη συζυγή μέθοδο είτε με άλλες μεθόδους βελτιστοποίησης όπως οι εξελικτικοί αλγόριθμοι, θα αποτελούσε μια ενδιαφέρουσα συνέχιση της εργασίας στο μέλλον.



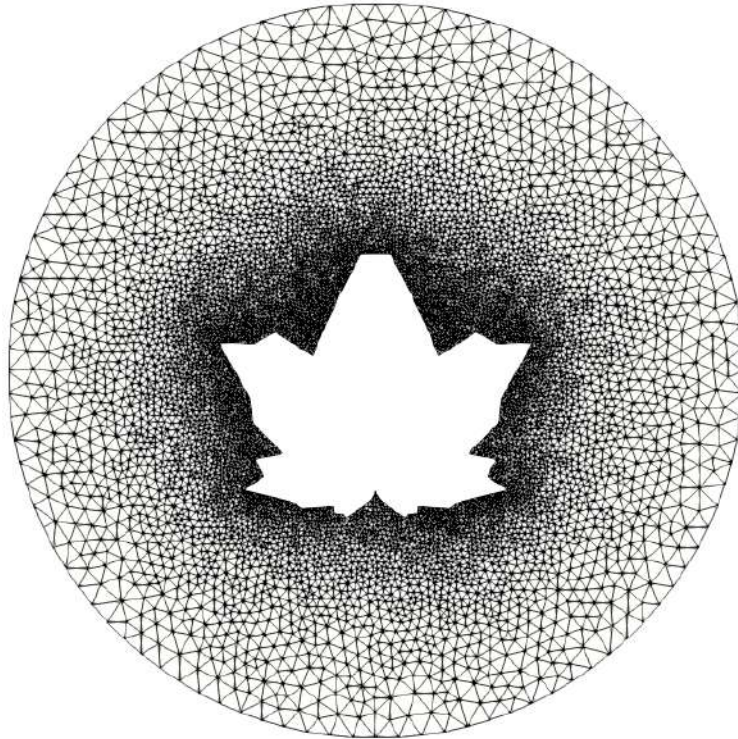
# Παράρτημα Α΄

## Άλλες μη-Αεροδυναμικές Εφαρμογές

### Α΄.1 2Δ Πλέγμα γύρω από το Περίγραμμα Φύλλου Πλατάνου

Στη διπλωματική εργασία παρουσιάστηκαν αρκετές εφαρμογές παραμόρφωσης πλέγματος, οι οποίες αφορούσαν, κυρίως, το πεδίο της αεροδυναμικής. Ωστόσο, η μέθοδος που προγραμματίστηκε και δοκιμάστηκε, μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες περιπτώσεις.

Αρχικά, εξετάζεται η παραμόρφωση ενός 2Δ πλέγματος γύρω από το περίγραμμα ενός φύλλου πλατάνου (σχήμα Α΄.1). Το πλέγμα αυτό αποτελείται από 7457 κόμβους και 14557 τριγωνικά στοιχεία. Η παραμόρφωση που εφαρμόζεται στο πλέγμα είναι η στροφή του περιγράμματος του φύλλου γύρω από το σημείο (0, 0). Στο σχήμα Α΄.2, φαίνεται το πλέγμα όταν εφαρμόζεται στροφή 5° κατά την ανθρωπολογική φορά, ενώ στο σχήμα Α΄.3 έχει εφαρμοστεί στροφή γωνίας 10° με την ίδια φορά. Τέλος, στον πίνακα Α΄.1 έχουν καταχωρηθεί οι μετρικές ποιότητας για το αρχικό και τα παραμορφωμένα πλέγματα.



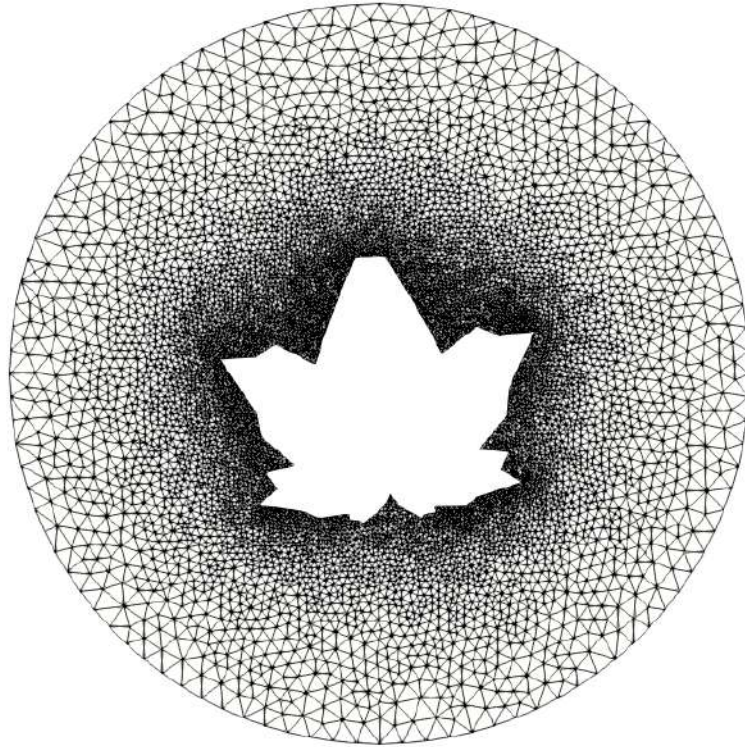
**Σχήμα Α'.1:** 2Δ πλέγμα γύρω από το περίγραμμα ενός φύλλου πλατάνου. Αποτελείται από 7457 κόμβους και 14557 τριγωνικά στοιχεία.

<i>Leaf</i>	Αρχικό	Στροφή 5°	Στροφή 10°
$\bar{q}$	0.958540	0.953392	0.936870
$\sigma_q$	$4.68299 \cdot 10^{-2}$	$4.77113 \cdot 10^{-2}$	$6.40106 \cdot 10^{-2}$
$q_{max}$	0.999999	0.999993	0.9999989
$q_{min}$	0.359179	0.359179	0.202596

**Πίνακας Α'.1:** 2Δ πλέγμα γύρω από το περίγραμμα ενός φύλλου πλατάνου. Συγκριτικός πίνακας μετρικών ποιότητας αρχικού και προσαρμοσμένων πλεγμάτων.

## Α'.2 3Δ Πλέγμα γύρω από δύο Φιγούρες Ζώων

Η εφαρμογή που ακολουθεί αφορά ένα υπολογιστικό πλέγμα γύρω από δύο φιγούρες ζώων (γουρούνια). Το πλέγμα είναι 3Δ, αποτελείται από 21663 κόμβους και 111323 τετραεδρικά στοιχεία. Το πρόβλημα που καλείται να αντιμετωπίσει η μέθοδος ΚΑΣ, είναι η μετακίνηση των δύο στερεών σωμάτων. Στο σχήμα Α'.4, φαίνεται το χωρίο γύρω από τα δύο στερεά σώματα. Το πλέγμα γύρω από τα δύο στερεά σώματα, φαίνεται στο σχήμα Α'.5. Η πρώτη κίνηση που επιλέγεται να εκτελέσουν τα δύο σώματα, είναι η μείωση της μεταξύ τους απόστασης. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να επιβληθεί κατάλληλη



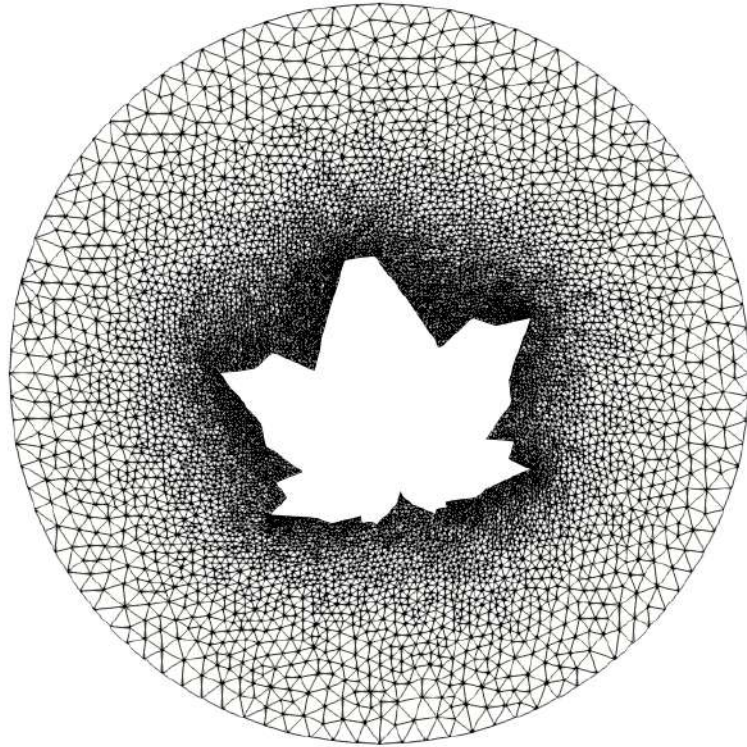
**Σχήμα Α'.2:** 2D πλέγμα γύρω από το περίγραμμα ενός φύλλου πλατάνου. Στροφή περιγράμματος φύλλου κατά 5°.

<i>2 Pigs</i>	Αρχικό	Μείωση Απόστασης	Αύξηση Απόστασης
$\bar{F}$	0.828357	0.806763	0.796232
$\sigma_F$	0.00759938	0.010653	0.0112917
$F_{max}$	0.999439	0.997255	0.997468
$F_{min}$	0.151249	0.112742	0.105562

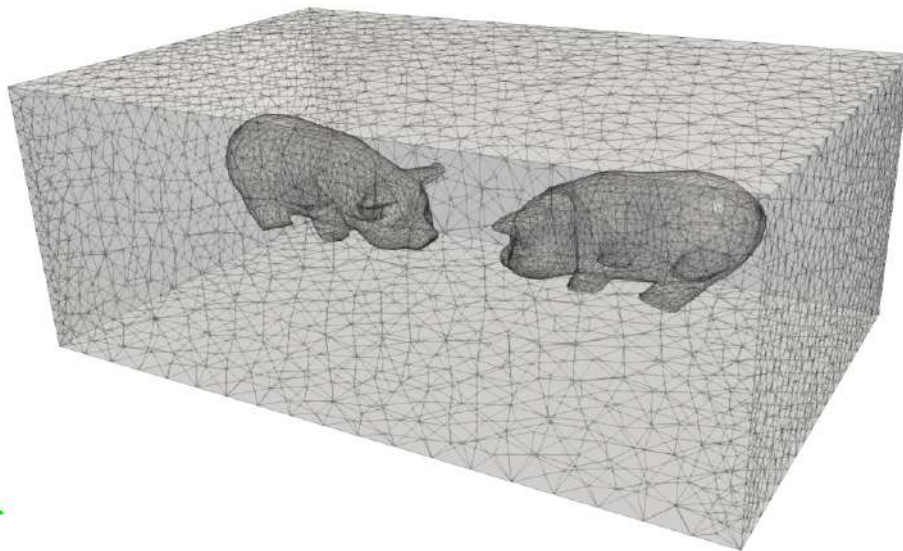
**Πίνακας Α'.2:** 3D πλέγμα γύρω από δύο φιγούρες ζώων. Συγκριτικός πίνακας ποιότητας αρχικού και προσαρμοσμένων πλεγμάτων.

μετακίνηση στους οριακούς κόμβους (οι οποίοι στην περίπτωση αυτή σχηματίζουν τα ζώα), γεγονός που θα επιφέρει παραμόρφωση του πλέγματος. Το αποτέλεσμα αυτής της κίνησης φαίνεται στο σχήμα Α'.6, ενώ στο σχήμα Α'.7 αποτυπώνεται η παραμόρφωση του πλέγματος. Εν συνεχεία, εφαρμόζεται στα δύο σώματα η αντίστροφη πορεία, με αποτέλεσμα η απόστασή τους να αυξηθεί. Η κίνηση τους έχει αποτυπωθεί στο σχήμα Α'.8, ενώ το αποτέλεσμα της κίνησης αυτής στο πλέγμα φαίνεται στο σχήμα Α'.9. Τέλος, στον πίνακα Α'.2 είναι καταχωρημένες οι τιμές της μετρικής ποιότητας για το αρχικό και τα προσαρμοσμένα πλέγματα.

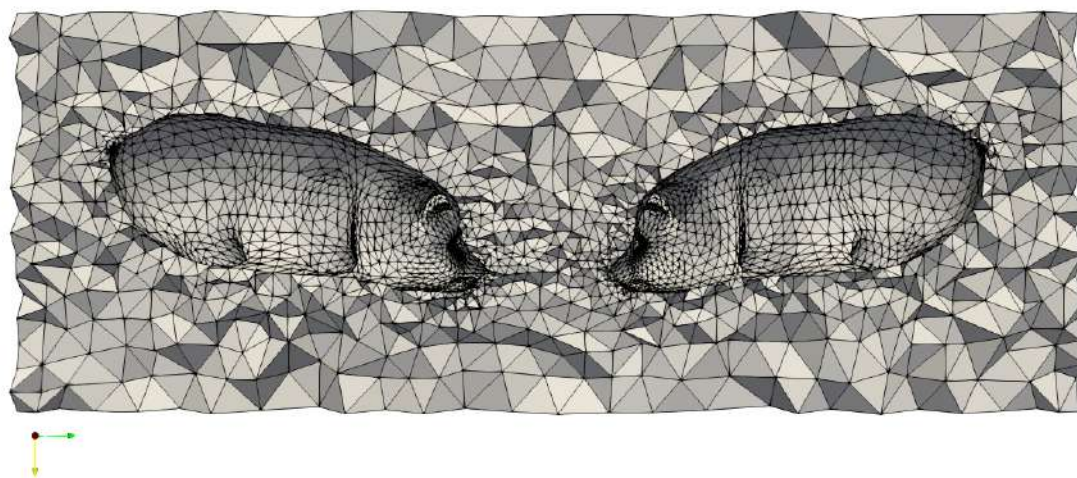
Η ανάπτυξη της τεχνικής ΚΑΣ στη διπλωματική εργασία, έγινε με σκοπό αυτή η μέθοδος να αποτελέσει χρήσιμο εργαλείο στην επίλυση προβλημάτων CFD μεταβλητής γεω-



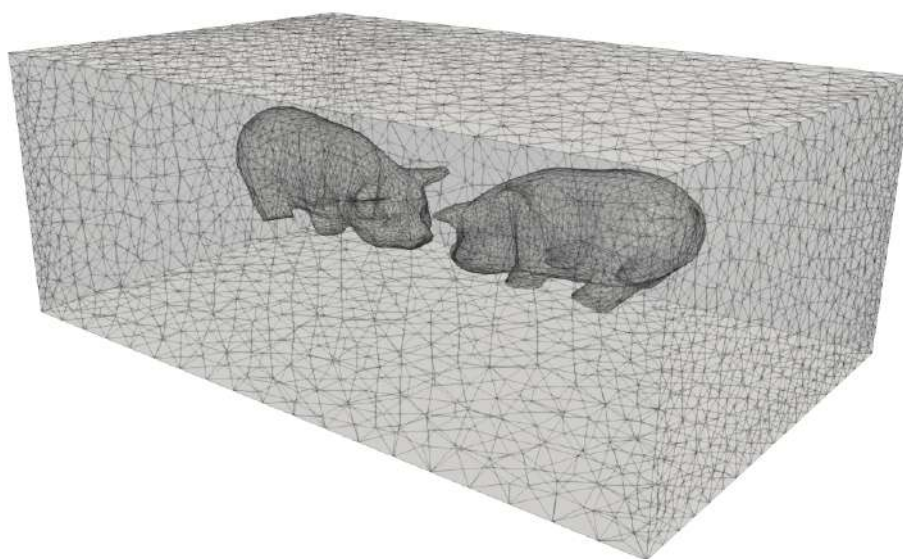
*Σχήμα Α'.3: 2Δ πλέγμα γύρω από το περίγραμμα ενός φύλλου πλατάνου. Στροφή περιγράμματος φύλλου κατά  $10^\circ$ .*



*Σχήμα Α'.4: 3Δ πλέγμα γύρω από δύο φιγούρες ζώων. Το υπολογιστικό χωρίο γύρω από τα δύο σώματα.*

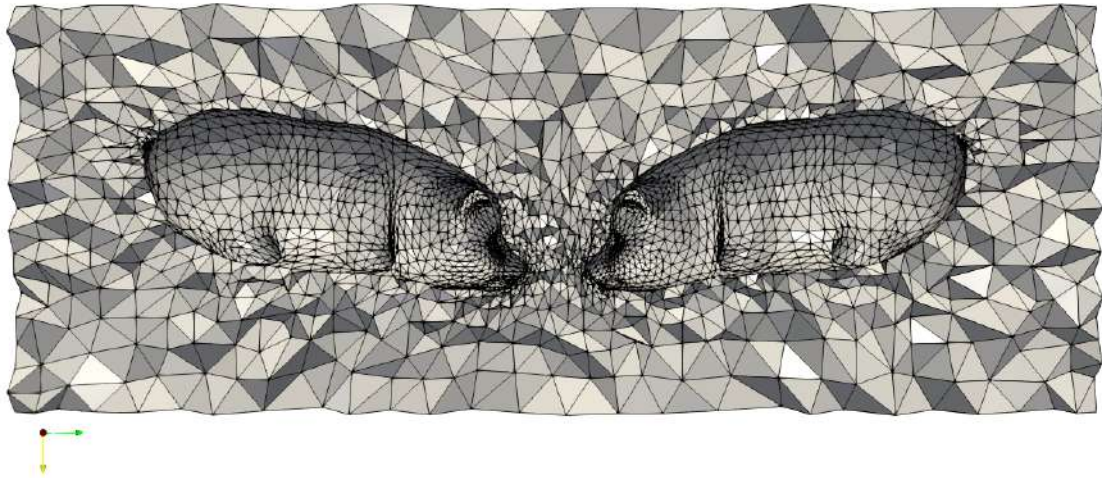


**Σχήμα Α'.5:** 3D πλέγμα γύρω από δύο φηγούρες ζώων.

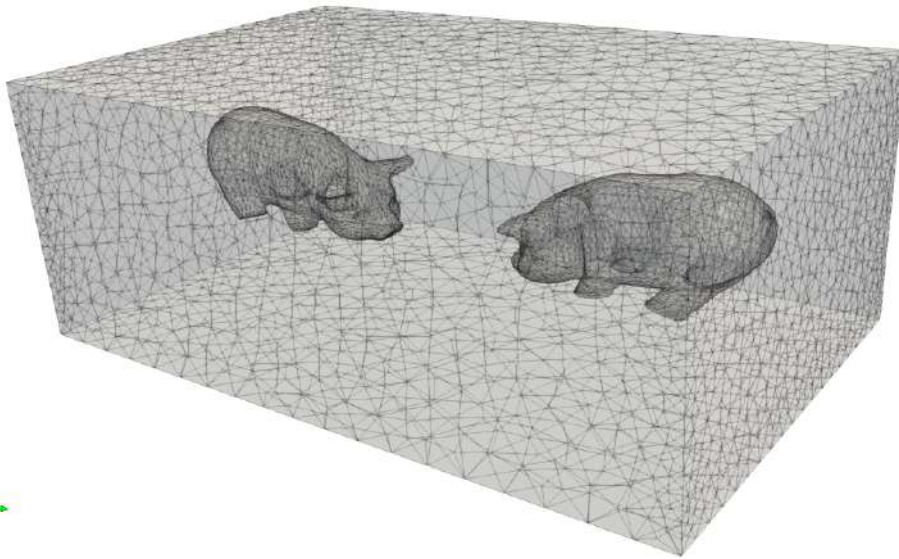


**Σχήμα Α'.6:** 3D πλέγμα γύρω από δύο φηγούρες ζώων. Η απόσταση των δύο στερεών σωμάτων έχει μειωθεί.

μετρίας, όπως, για παράδειγμα, προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης. Ωστόσο, οι παραπάνω εφαρμογές αποδεικνύουν ότι η χρήση της μεθόδου δεν περιορίζεται σε αεροδυναμικές εφαρμογές, αλλά μπορεί να επεκταθεί και σε άλλους κλάδους, εφόσον μπορεί να διαχειρίζεται πλέγματα γύρω από πολύπλοκες γεωμετρίες με αποτελεσματικό τρόπο.



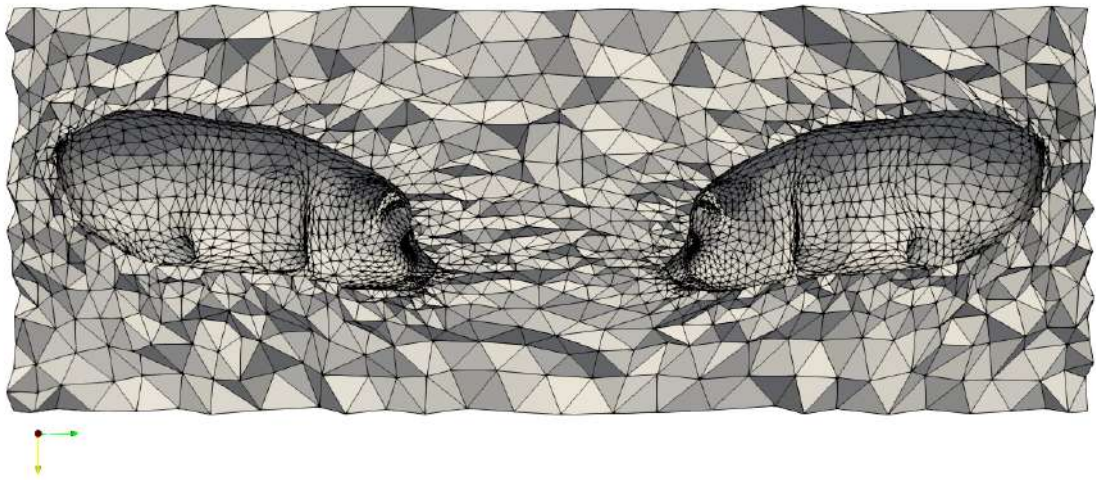
**Σχήμα Α'.7:** 3Δ πλέγμα γύρω από δύο φιγούρες ζώων. Το πλέγμα γύρω από τα δύο στερεά σώματα όταν η απόσταση αυτών έχει μειωθεί.



**Σχήμα Α'.8:** 3Δ πλέγμα γύρω από δύο φιγούρες ζώων. Η απόσταση των δύο στερεών σωμάτων έχει αυξηθεί.

\*





*Σχήμα Α'.9: 3D πλέγμα γύρω από δύο φιγούρες ζώων. Το παραμορφωμένο πλέγμα όταν τα δύο στερεά σώματα απομακρύνονται.*



# Βιβλιογραφία

- [1] Asouti, V. G., Zymaris, A. S., Papadimitriou, D. I., and Giannakoglou, K. C. Continuous and discrete adjoint approaches for aerodynamic shape optimization with low mach number preconditioning. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 57(10):1485–1504, 2008.
- [2] Asouti, V., Trompoukis, X., Kampolis, I. and Giannakoglou, K. Unsteady CFD computations using vertex-centered finite volumes for unstructured grids on Graphics Processing Units. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 67(2):232–246, 2011.
- [3] Blorn, F.J. Considerations on the spring analogy. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 32(6):647–668, 2000.
- [4] Burg C. Analytic Study of 2D and 3D grid motion using modified laplacian. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 52(2):163–197, 2006.
- [5] Devillers, O. Improved incremental randomized Delaunay triangulation. *RR-3298, INRIA*, 1997.
- [6] Dompierre J., Labbe P., Guibault F. and Camerero R. Proposal of bench-marks for 3d unstructured tetrahedral mesh optimization. *In Proceedings of the 7th international meshing roundtable, deadborn, MI*, 1998.
- [7] Farhat, C., Degand, C., Koobus, B., and Lesoinne, M. Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 163:231–245, 1998.
- [8] Giannakoglou K. C., Papadimitriou D. I. and Kampolis I. C. Aerodynamic shape design using evolutionary algorithms and new gradient-assited metamodels. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(44-47):6312–6329, 2006.
- [9] Juretic F. *Error Analysis in Finite Volume CFD*. PhD Thesis. Department of Mechanical Engineering, Imperial College London, London, 2004.

- [10] Kavvadias, I. S., Papoutsis-Kiachagas, E. M., and Giannakoglou, K. C. On the proper treatment of grid sensitivities in continuous adjoint methods for shape optimization. *Journal of Computational Physics*, 301:1–18, 2015.
- [11] Knupp P. M. Algebraic Mesh Quality Metrics. *SIAM J. Sci. Comput.*, 23:193–218, 2001.
- [12] Knupp P. M. Algebraic mesh quality metrics for unstructured initial meshes. *Finite Elements in Analysis and Design*, 39:217–241, 2003.
- [13] Masud A., Bhanabhagvanwala M., Khurram A. An adaptive mesh rezoning scheme for moving boundary flows and fluid-structure interaction. *Computers and Fluids*, 36(1):77–91, 31/01-2007.
- [14] Merriam, M. L. An efficient advancing-front algorithm for Delaunay triangulation. *AIAA*, παγες 91–0792, 1991.
- [15] Munson, T. Mesh shape-quality optimization using the inverse mean-ratio metric. *Mathematical Programming*, 110:561–590, 2004.
- [16] Papoutsis-Kiachagias, E. M., Papadimitriou, D. I. and Giannakoglou, K. C. Robust design in aerodynamics using third-order sensitivity analysis based on discrete adjoint. Application to quasi-1D flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 69:699, 2012.
- [17] Pushkar J., Mayer M., DeRose T., Green B., Sanocki T. Harmonic Coordinates for Character Articulation. *Pixar Animation Studios*, 2006.
- [18] Stein K., Tezduyar T. and Benney R. Mesh moving techniques for fluid-structure interactions with large displacements. *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME*, 70(1):58–63, 2003.
- [19] Liatsikouras A. G., Pierrot G., Fougeron G. and Eleftheriou G. S. Finite transformation rigid motion mesh morpher. In *EUROGEN 2017, International Conference on Evolutionary and Deterministic Methods for Design Optimization and Control with Applications to Industrial and Societal Problems, Madrid, Spain, September 13-15, 2017*.
- [20] Λιατσικούρας Α. Προγραμματισμός Μεθόδου Παραμόρφωσης Πλέγματος με Συναρτησίες Ακτινικής Βάσης και Προσταθεροποιητή για χρήση στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2015.

- [21] Τσολοβίκος Α. *Προσαρμογή Υπολογιστικών Πλεγμάτων με Χρήση Γράφων Delaunay-Εφαρμογές στη Βελτιστοποίηση με Χρήση της Συζυγούς Μεθόδου*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2018.
- [22] Κουμπογιάννης Δ. *Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes με χρήση μη-δομημένων πλεγμάτων σε περιβάλλον παράλληλης επεξεργασίας*. Διδακτορική Διατριβή. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1998.
- [23] Παπαδημητρίου Δ. *Συζυγείς (Adjoint) Διατυπώσεις για την Ανάλυση - Σχεδίαση Πτερυγώσεων Στροβιλομηχανών και τη Βέλτιστη Προσαρμογή Πλέγματος με A Posteriori Εκτίμηση Σφάλματος*. Διδακτορική Διατριβή. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2007.
- [24] Πάππου Θ. *Ανάπτυξη αριθμητικής μεθοδολογίας τεχνητής συμπίεστότητας για τον υπολογισμό μη μόνιμων ροών σε κινούμενα όρια*. Διδακτορική Διατριβή. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 1998.
- [25] Μαυρονικόλα Μ. *Παραμετροποίηση Μορφών και Προσαρμογή Υπολογιστικών Πλεγμάτων με χρήση Αρμονικών Συντεταγμένων. Εφαρμογή στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Μορφής 2Δ Πτερυγώσεων και Αγωγών*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2017.
- [26] Λαμπρόπουλος Ν. *Τεχνικές πολυπλέγματος σε μη-δομημένα πλέγματα για την αριθμητική επίλυση πεδίων ροής στις στροβιλομηχανές, σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον*. Διδακτορική Διατριβή. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2007.
- [27] Τρομπούκης Ξ. *Αριθμητική επίλυση προβλημάτων αεροδυναμικής-αεροελαστικότητας σε επεξεργαστές καρτών γραφικών*. Διδακτορική Διατριβή. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2012.
- [28] Αποστόλου Π. *Μετακίνηση-Προσαρμογή 2Δ και 3Δ Μη-Δομημένων Πλεγμάτων με την Τεχνική των Στρεπτικών Ελατηρίων*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2015.
- [29] Λιακόπουλος Π. *Γένεση μη-δομημένων πλεγμάτων και διαχείρισή τους σε μεθόδους ανάλυσης και βελτιστοποίησης συνιστωσών στροβιλομηχανών και εφαρμογές, αξιοποιώντας τεχνολογίες πλέγματος (Grid computing)*. Διδακτορική Διατριβή. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2007.
- [30] Γιαννάκογλου Κ. Χ. *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς*. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2003.

- [31] Γιαννάκογλου Κ. Χ. *Συνεκτικές Ροές στις Στροβιλομηχανές*. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2004.
- [32] Γιαννάκογλου Κ. Χ. *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2006.
- [33] Ζέρβας Χ. *Παραμετροποίηση Μορφών και Προσαρμοστική Παραμόρφωση 3Δ Υπολογιστικών Πλεγμάτων με χρήση Αρμονικών Συντεταγμένων. Εφαρμογή στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2018.