



# **Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών**

Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

## **Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος για τη Βελτιστοποίηση Τοπολογίας στη Μηχανική των Ρευστών Προγραμματισμός Μετεπεξεργαστών και Εφαρμογές σε Προβλήματα της Αυτοκινητοβιομηχανίας**

Διπλωματική εργασία,

**Κόλιας Α. Ιωάννης**

Επιβλέπων,

Γιαννάκογλου Χ. Κυριάκος, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2012





**National Technical University of Athens**  
**School of Mechanical Engineering**

Fluid's Section  
Thermal Turbomachines Laboratory  
Parallel CFD & Optimization Unit

**The Continuous Adjoint Method in Topology  
Optimization in Fluid Mechanics  
Programming of Post-Processors and Automotive  
Applications**

Diploma thesis,

**Kolias A. Ioannis**

Supervisor,

Giannakoglou X. Kyriakos, NTUA Professor

Athens, October 2012





## Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής & Βελτιστοποίησης

### Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος για τη Βελτιστοποίηση Τοπολογίας στη Μηχανική των Ρευστών Προγραμματισμός Μετεπεξεργαστών και Εφαρμογές σε Προβλήματα της Αυτοκινητοβιομηχανίας

Διπλωματική εργασία,

**Κόλιας Α. Ιωάννης**

Επιβλέπων,

Γιαννάκογλου Χ. Κυριάκος, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2012

## Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με τη χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για τη βελτιστοποίηση τοπολογίας στη μηχανική των ρευστών και, την εφαρμογή της, σε δύο πραγματικά προβλήματα εσωτερικής αεροδυναμικής της αυτοκινητοβιομηχανίας.

Το πεδίο της μεταβλητής του πορώδους εισάγεται μέσω κατάλληλων όρων πηγής στις εξισώσεις της ροής (εδώ στις μέσες κατά Reynolds, μόνιμες κι ασυμπίεστες εξισώσεις Navier-Stokes, όπου η μοντελοποίηση της τύρβης γίνεται με δύο διαφορετικά μοντέλα, το μοντέλο δύο διαφορικών εξισώσεων  $k - \epsilon$  και το μοντέλο μιας διαφορικής εξίσωσης των Spalart-Allmaras), ο προσδιορισμός του οποίου οδηγεί στην εύρεση της βέλτιστης τοπολογίας ροής με στόχο, την ελαχιστοποίηση της υπό εξέταση αντικειμενικής συνάρτησης (εδώ των απωλειών ολικής πίεσης και στις δύο εφαρμογές).

Στόχος της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, είναι η εύρεση της αναλυτικής έκφρασης της παραγώγου ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τη μεταβλητή του πορώδους. Πιο συγκεκριμένα, κατά τη μαθηματική διατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, οι συνεχείς πεδιακές συζυγείς εξισώσεις και οι οριακές τους συνθήκες προκύπτουν μέσω της παραγωγισις (ως προς τη μεταβλητή σχεδιασμού) της αντικειμενικής συνάρτησης, επαυξημένης με το πεδιακό ολοκλήρωμα των εξισώσεων κατάστασης πολλαπλασιασμένων με τις αντίστοιχες συζυγείς μεταβλητές. Στην παρούσα διπλωματική, κατά την παραγωγή της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης ακολουθήθηκε η λογική της «παγωμένης» τυρβώδους συνεκτικότητας, σύμφωνα με την οποία, οι μεταβλητές του μοντέλου τύρβης θεωρούμε ότι δεν επηρεάζονται από τις μεταβολές της μεταβλητής του πορώδους και, συνεπώς, οι αντίστοιχες εξισώσεις του μοντέλου τύρβης δε λαμβάνονται υπόψη κατά την ολοκλήρωση στο χώρο των εξισώσεων της ροής (δηλαδή, ως εξισώσεις κατάστασης λαμβάνονται μόνο οι εξισώσεις Navier-Stokes). Η όλη διαδικασία, οδηγεί στον προσδιορισμό της αναλυτικής έκφρασης του συστήματος των μερικών διαφορικών συζυγών εξισώσεων και των οριακών τους συνθηκών, η διακριτοποίηση και η επίλυση του οποίου οδηγεί στον προσδιορισμό του συζυγούς πεδίου ροής και, τέλος, της τιμής της παραγώγου ευαισθησίας.

Βάσει της τιμής της παραγώγου ευαισθησίας, χρησιμοποιείται η μέθοδος της «απότομης καθόδου», ώστε σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης να προσδιορίζεται το πεδίο του πορώδους που δίνει μικρότερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης συγκριτικά με το αρχικό πρόβλημα, αλλά και κάθε προηγούμενο κύκλο βελτιστοποίησης.

Σημειώνεται, ότι η μαθηματική διατύπωση της συζυγούς μεθόδου, όπως και οι επιλύτες της ροής και των συζυγών εξισώσεων αποτελούν συνεισφορά της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης. Οι κώδικες επίλυσης, έχουν προγραμματιστεί με τη βοήθεια της βιβλιοθήκης υπολογιστικής ρευστομηχανικής ανοιχτού κώδικα, OpenFOAM.

Κύρια συνεισφορά αυτής της διπλωματικής, ήταν ο προγραμματισμός (στο OpenFOAM) ενός μετεπεξεργαστή της βέλτιστης λύσης, στόχος του οποίου είναι αφενός, η οπτικοποίηση του βέλτιστου σχηματιζόμενου καναλιού της ροής κι αφετέρου, η υποβοήθηση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης για την αναζήτηση μιας νέας, καλύτερης λύσης, συγκριτικά μ' αυτή που επιτεύχθηκε κατά την αρχική εφαρμογή του. Τέλος, στο Παρ. Α' της εργασίας, μαζί με τη δεύτερη μελετούμενη εφαρμογή, παρουσιάζεται και μια διαφορετική θεώρηση στην αρχικοποίηση του πεδίου της μεταβλητής του πορώδους, βασισμένη σε ροϊκά και γεωμετρικά κριτήρια.



**National Technical University of Athens**  
**School of Mechanical Engineering**

Fluid's Section  
Thermal Turbomachines Laboratory  
Parallel CFD & Optimization Unit

**The Continuous Adjoint Method in Topology Optimization in Fluid Mechanics**  
**Programming of Post-Processors and Automotive Applications**

Diploma thesis,

**Kolias A. Ioannis**

Supervisor,

Giannakoglou X. Kyriakos, NTUA Professor

Athens, October 2012

## **Abstract**

This diploma thesis focuses on the use of the continuous adjoint method in topology optimization in fluid mechanics and its application in two, realistic, internal aerodynamics automotive problems.

A variable porosity field is introduced through appropriate source terms in the flow equations (in this diploma thesis we are dealing with the Reynolds averaged, steady, incompressible Navier-Stokes equations – RANS –, and the turbulence is being modeled using two different turbulence models, the high-Reynolds  $k - \varepsilon$  model and the low-Reynolds Spalart-Allmaras model), the determination of which leads to the optimal topology configuration in order the considered objective function to be minimized (in both applications the objective function is the total pressure losses between the inlet and outlet of the flow domain).

The continuous adjoint method is used to compute the sensitivity derivatives of the objective function with respect to the porosity variable. To do so, the differentiation of the objective function augmented with the field integrals of the product of the state equations multiplied with the corresponding adjoint variables, is used in order to determine the adjoint field equations and their corresponding boundary conditions. The whole process leads to the adjoint system of partial differential equations, which is discretized and solved in order to compute the adjoint flow field and through it, the derivatives of the augmented objective function. In this study, the «frozen» turbulence assumption is used in the differentiation of the augmented objective function.

Based on these derivatives and the usage of the steepest descent method, it is easy to identify a new porosity variable distribution that will give the lowest value of the objective function in comparison to the original flow case and the previous iterations of the optimization algorithm.

At this point, it is marked that the mathematical development of the continuous adjoint method and the corresponding solvers of the flow equations and the adjoint field equations, are

contributions of the Parallel CFD & Optimization Unit. The open source CFD toolbox, OpenFOAM, was used to program the primal and adjoint flow solvers.

The main contribution of this diploma thesis, was the programming (using OpenFOAM) of post-processors, which aim at the visualization of the optimal flow field and the assistance to the optimization algorithm to seek a new, better solution, in comparison to the solution achieved in its last application. Finally, in App. A', along with the study of the second application, a new approach in variable porosity field initialization, based on flow and geometric criteria, is presented.



## **Ευχαριστίες**

Από το σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου, για τη δυνατότητα που μου έδωσε ν' ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον και πρωτότυπο θέμα, για την καθοδήγησή του καθώς και για την εμπιστοσύνη με την οποία με περιέβαλλε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλα τα μέλη της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής & Βελτιστοποίησης για το ευχάριστο κλίμα συνεργασίας και ιδιαίτερα, τον υποψήφιο διδάκτορα Βαγγέλη Παπουτσή, χωρίς τη βοήθεια και καθοδήγηση του οποίου, η έγκαιρη ολοκλήρωση της παρούσης θα ήταν εξαιρετικά δύσκολη.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη συμπαράσταση, την υπομονή και την βοήθειά της όλα τα χρόνια των σπουδών μου.



*Στην Ιωάννα.*



# Περιεχόμενα

<b>Κεφάλαιο 1</b>	
<b>Περί βελτιστοποίησης</b>	<b>15</b>
1.1. Τι είναι βελτιστοποίηση	15
1.2. Βασική ορολογία	16
1.3. Κατηγορίες μεθόδων βελτιστοποίησης	18
1.3.1. Μια πρώτη κατηγοριοποίηση	18
1.3.2. Μια δεύτερη κατηγοριοποίηση	20
1.4. Η μέθοδος της «απότομης καθόδου»	22
1.4.1. Η μέθοδος της «απότομης καθόδου» για προβλήματα χωρίς περιορισμούς	22
1.5. Υπολογισμός παραγώνων ευαισθησίας – Εισαγωγή στη συζυγή μέθοδο	23
1.5.1. Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών	23
1.5.2. Η μέθοδος των μιγαδικών μεταβλητών	24
1.5.3. Η μέθοδος της αυτόματης διαφορίσης	24
1.5.4. Η μέθοδος της ευθείας διαφορίσης	24
1.5.5. Η συζυγής μέθοδος υπολογισμού	25
1.6. Η βελτιστοποίηση τοπολογίας	26
<b>Κεφάλαιο 2</b>	
<b>Διατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου</b>	<b>29</b>
2.1. Εξισώσεις της ροής	29
2.2. Οριακές συνθήκες	31
2.2.1. Το μοντέλο συναρτήσεων τοίχου	31
2.3. Μερικές χρήσιμες ταυτότητες	34
2.4. Η υπόθεση της «παγωμένης» τυρβώδους συνεκτικότητας	35
2.5. Συνάρτηση κόστους	36
2.5.1. Ελαχιστοποίηση απωλειών ολικής πίεσης	38
2.6. Εισαγωγή των συζυγών μεταβλητών	40
2.7. Διατύπωση της συζυγούς μεθόδου	43
2.7.1. Διατύπωση συνεχών, συζυγών πεδιακών εξισώσεων	50
2.7.2. Συζυγείς συνθήκες στα όρια εισόδου $S_I$	51
2.7.3. Συζυγείς συνθήκες στα όρια εξόδου $S_O$	52
2.7.4. Συζυγείς συνθήκες στα στερεά όρια $S_W$	54
2.8. Τελική – γενική έκφραση της παραγώγου	55

ευαισθησίας	
2.8.1. Φυσική ερμηνεία της παραγωγού ευαισθησίας	55
2.8.2. Διακριτό ισοδύναμο της παραγωγού ευαισθησίας	57
2.9. Ελαχιστοποίηση απωλειών ολικής πίεσης	57
2.10. Γενικός αλγόριθμος βελτιστοποίησης	59
<b>Κεφάλαιο 3</b>	
<b>Εφαρμογή στην εσωτερική αεροδυναμική</b>	<b>61</b>
3.1. Η προς βελτιστοποίηση γεωμετρία	61
3.2. Διακριτοποίηση του χωρίου ροής	63
3.3. Βελτιστοποίηση κι εύρεση του βέλτιστου αγωγού ροής	66
3.3.1. Επίλυση του αρχικού προβλήματος ροής	69
3.3.2. Βέλτιστη τοπολογία ροής – Σχολιασμός αποτελεσμάτων	71
<b>Κεφάλαιο 4</b>	
<b>Μετεπεξεργασία της βέλτιστης λύσης</b>	<b>77</b>
4.1. Βέλτιστη τοπολογία ροής	77
4.2. Δύο βασικοί αλγόριθμοι μετεπεξεργασίας	79
4.2.1. Αλγόριθμος απομόνωσης του βέλτιστου αγωγού ροής	79
4.2.2. Αλγόριθμος «επαναρχικοποίησης» του πεδίου πορώδους	87
4.3. Μια «δεύτερη» βελτιστοποίηση – Σχολιασμός αποτελεσμάτων	87
<b>Ανακεφαλαίωση</b>	<b>95</b>
<b>Παράρτημα Α΄</b>	
<b>Αρχικοποίηση του πεδίου πορώδους βάσει γεωμετρικών και ροϊκών κριτηρίων</b>	<b>99</b>
<b>Παράρτημα Β΄</b>	
<b>Απόδειξη και σχολιασμός της ταυτότητας (2.14)</b>	<b>113</b>
<b>Παράρτημα Γ΄</b>	
<b>Απόδειξη και σχολιασμός της ταυτότητας (2.15)</b>	<b>117</b>
<b>Παράρτημα Δ΄</b>	
<b>Το θεώρημα της απόκλισης (Gauss)</b>	<b>119</b>
<b>Βιβλιογραφικές/Διαδικτυακές αναφορές</b>	<b>123</b>

# 1

## Περί βελτιστοποίησης

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

---

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η εισαγωγή στις μεθόδους βελτιστοποίησης. Αρχικά, χρησιμοποιώντας παραδείγματα από τη μηχανολογία και την καθημερινή ενασχόληση του μηχανολόγου μηχανικού στον τομέα της βιομηχανίας, γίνεται προσπάθεια να αποσαφηνιστούν βασικοί ορισμοί και όροι. • Στη συνέχεια του κεφαλαίου, γίνεται η κατηγοριοποίηση και η περιγραφή των βασικών μεθόδων βελτιστοποίησης που έχουν αναπτυχθεί με τα χρόνια, • παρατίθεται η αναλυτική περιγραφή της αιτιοκρατικής μεθόδου βελτιστοποίησης της απότομης καθόδου και, • πραγματοποιείται η εισαγωγή στη συζυγή μέθοδο για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας που εμφανίζονται στην τελευταία. • Τέλος, επιχειρείται μια σύντομη ιστορική εισαγωγή στη βελτιστοποίηση τοπολογίας (topology optimization), θέμα με το οποίο ασχολείται αποκλειστικά η παρούσα διπλωματική και, τον τρόπο με τον οποίο αυτή από την μηχανική των κατασκευών υιοθετήθηκε στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση.

---

### 1.1. Τι είναι βελτιστοποίηση<sup>[14]</sup>;

Βελτιστοποίηση είναι η διαδικασία μέσω της οποίας κάτι<sup>1</sup> γίνεται καλύτερο. Γενικά, αυτό είναι επιθυμητό για διάφορους πρακτικούς, λειτουργικούς ή και οικονομικούς λόγους. Για παράδειγμα, ένας μηχανικός συλλαμβάνει μια ιδέα σχετικά με την επίλυση ενός προβλήματος. Αυτό δεν είναι αρκετό. Πρέπει να βρει εκείνη τη λύση που θα χαρακτηρίζεται από χαμηλό

---

<sup>1</sup> Μπορεί να είναι ένα προϊόν, μια υπηρεσία ή ακόμα και μια «φυσική διαδικασία».

κόστος και υψηλή λειτουργική αξία. Με άλλα λόγια, πρέπει ν' αναζητήσει τη βέλτιστη λύση, ή, ισοδύναμα, να βελτιστοποιήσει τη λύση του.

Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής (Η/Υ) είναι το ιδανικό εργαλείο στην επίτευξη αυτού του έργου, δεδομένου, ότι μπορεί και εκτελεί αριθμητικούς υπολογισμούς εξαιρετικά γρήγορα, με μεγάλη ακρίβεια και με πολύ υψηλή αξιοπιστία. Είναι, λοιπόν, αρκετό να τροφοδοτήσουμε έναν Η/Υ με μερικά δεδομένα και να πάρουμε τη βέλτιστη λύση; Αυτό το ερώτημα δεν είναι εύκολο να απαντηθεί. Σίγουρα θα πάρουμε κάποια λύση. Ωστόσο, για να πάρουμε τη βέλτιστη λύση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ειδικές μαθηματικές μεθόδους, οι οποίες είναι ευρύτερα γνωστές ως «μέθοδοι βελτιστοποίησης».

Ο όρος «βέλτιστη λύση» υπονοεί την ύπαρξη πολλών λύσεων, οι οποίες, ωστόσο, δεν έχουν την ίδια πρακτική, ή άλλης μορφής, αξία. Ο καθορισμός του κριτηρίου μέσω του οποίου μία λύση χαρακτηρίζεται ως βέλτιστη ή μη-βέλτιστη είναι στενά συνδεδεμένος με το είδος του προς επίλυση προβλήματος, τη μεθοδολογία βελτιστοποίησης καθώς και από τις επιτρεπόμενες ανοχές των αριθμητικών πράξεων. Συνεπώς, η εύρεση της βέλτιστης λύσης σε ένα πρόβλημα, καθορίζεται σε σημαντικό βαθμό από τις γνώσεις και την εμπειρία εκείνου (μηχανικού) που καλείται να επιλύσει το πρόβλημα. Με τον όρο «βέλτιστο σημείο» ή «βέλτιστη λύση» χαρακτηρίζουμε κάποιο ακρότατο, μέγιστο ή ελάχιστο. Εν γένει, υπάρχουν προβλήματα με ένα ακρότατο και προβλήματα με περισσότερα, τα οποία προφανώς εμφανίζουν και μεγαλύτερη δυσκολία στην επίλυσή τους.

Συνοψίζοντας, πολλά από τα προβλήματα σχεδιασμού κι ανάπτυξης που καλείται να αντιμετωπίσει ο μηχανικός, αποτελούν δύσκολα συνδυαστικά προβλήματα βελτιστοποίησης (COP – Combinatorial Optimization problems) ή, δύνανται να μοντελοποιηθούν από συνεχείς συναρτήσεις με μεγάλο πλήθος παραμέτρων, που εμφανίζουν μεγάλο πλήθος τοπικών ακροτάτων. Αυτό συνεπάγεται ότι η επίλυσή τους δεν μπορεί να γίνει εύκολα με αναλυτικές μεθόδους, αλλά απαιτείται η χρήση αριθμητικών μεθόδων και μεθόδων βελτιστοποίησης.

Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης, που αποτελούν αυτό ακριβώς που δηλώνει το όνομά τους, αποσκοπούν στην απλοποίηση της επαναληπτικής διαδικασίας που στοχεύει στην εύρεση βέλτιστης λύσης, βελτιώνοντας σημαντικά την «ποιότητά» της και μειώνοντας τον απαιτούμενο χρόνο για την εύρεσή της.

### 1.2. Βασική ορολογία<sup>[14]</sup>

Ο σχεδιασμός ενός οποιουδήποτε προϊόντος αποτελεί μία ιδιαίτερα σύνθετη διαδικασία, η οποία αποσκοπεί στην κάλυψη κάποιας ανάγκης. Εν γένει, στην αγορά υπάρχουν προϊόντα που εξυπηρετούν τις ίδιες ανάγκες με παρεμφερή τρόπο. Ωστόσο, κάποια απ' αυτά τα προϊόντα ξεχωρίζουν διότι συνδυάζουν με τρόπο αρεστό προς τους πελάτες την τιμή, την κάλυψη των αναγκών και την καινοτομία. Με άλλα λόγια, σε αυτά τα προϊόντα οι σχεδιαστές έχουν καταφέρει να συνδυάσουν με τον καλύτερο εφικτό τρόπο (βέλτιστο τρόπο) ορισμένα επιθυμητά χαρακτηριστικά. Για τις μηχανολογικές κατασκευές, οι οποίες κι αυτές είναι προϊόντα, ισχύουν ακριβώς τα ίδια.

Οι μηχανικοί, όταν σχεδιάζουν μια κατασκευή, πρέπει να απαντήσουν σε δύο πολύ βασικά και δύσκολα ερωτήματα, (α) πώς συμπεριφέρεται η κατασκευή και, (β) είναι η κατασκευή η βέλτιστη; Σχετικά με το πρώτο ερώτημα, οι μηχανικοί πρέπει να αναλύσουν τη σχεδιαζόμενη κατασκευή προκειμένου να εκτιμήσουν ορισμένα κρίσιμα μεγέθη. Για παράδειγμα, σε ένα δικτύωμα που αποτελείται από μεταλλικούς ολόσωμους φορείς και υφίσταται καταπόνηση, θα πρέπει να εκτιμηθούν το τασικό, το παραμορφωσιακό και ίσως το θερμοκρασιακό πεδίο, ενώ,



στην ανάλυση της ροής ρευστού γύρω από μια αεροτομή, θα πρέπει να υπολογιστούν η άνωση, η οπισθέλκουσα, το σημείο μετάβασης της ροής από στρωτή σε τυρβώδη κ.λπ. Σχετικά με το δεύτερο ερώτημα, πρώτα απ' όλα θα πρέπει να ορισθεί η ποσότητα ως προς την οποία ελέγχεται εάν η κατασκευή είναι βέλτιστη ή όχι. Αυτή η ποσότητα συνήθως εκφράζεται ως μία συνάρτηση, η οποία και καλείται αντικειμενική συνάρτηση, ή συνάρτηση κόστους, ή συνάρτηση στόχος ή απλά συναρτησιακό.

Είναι πολύ δελεαστικό να εξισώσει κάποιος την αντικειμενική συνάρτηση με κάποιο οικονομικό μέγεθος, όπως για παράδειγμα το κόστος παραγωγής ή το λειτουργικό κόστος. Ωστόσο, τις περισσότερες φορές μια τέτοια επιλογή δεν είναι κατάλληλη, δεδομένου ότι ο προσδιορισμός ενός οικονομικού μεγέθους είναι εξαιρετικά σύνθετος, ενώ ταυτόχρονα υπάρχει ισχυρή εξάρτηση από ευμετάβλητες παραμέτρους, όπως είναι οι μισθοί, τα επιτόκια, το κόστος των πρώτων υλών και η εμφάνιση νέων τεχνολογιών. Η πλέον συνήθης πρακτική στη μηχανολογική σχεδίαση, είναι η επιλογή μιας τέτοιας ποσότητας, η οποία αφενός μεν από μόνη της να έχει πρακτική μηχανολογική αξία κι αφετέρου, ν' αντανακλά, με αρκετά «αντιπροσωπευτικό» τρόπο, το κόστος του σχεδιαζόμενου προϊόντος. Για παράδειγμα, στην κατασκευαστική βιομηχανία, ως μια τέτοια αντικειμενική συνάρτηση επιλέγεται το βάρος, ή, ισοδύναμα, η μάζα της κατασκευής, στην εσωτερική αεροδυναμική και στη ροή ρευστού διαμέσου ενός αγωγού οι απώλειες ολικής πίεσης, στην εξωτερική αεροδυναμική και στη ροή γύρω από μια αεροτομή η άνωση, η οπισθέλκουσα κ.λπ.

Το δεύτερο στοιχείο που πρέπει να προσδιοριστεί προκειμένου να δοθεί απάντηση σχετικά με το αν μια κατασκευή είναι βέλτιστη ή όχι, είναι εάν το βέλτιστο σημαίνει μέγιστο ή ελάχιστο. Προφανώς, όταν σαν συνάρτηση κόστους θεωρείται η μάζα μιας κατασκευής, τότε στόχος είναι η ελαχιστοποίησή της, ενώ, στην περίπτωση μιας πτερύγωσης, στόχος είναι η μεγιστοποίηση της άνωσης και η ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας, στη ροή σε έναν αγωγό η ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης κ.ο.κ.

Αφού προσδιοριστεί η αντικειμενική συνάρτηση, η προσοχή πρέπει να στραφεί στις μεταβλητές οι οποίες ορίζουν την εν λόγω συνάρτηση και των οποίων ο κατάλληλος συνδυασμός θα δώσει τη βέλτιστη λύση. Αυτές οι μεταβλητές ονομάζονται μεταβλητές σχεδιασμού. Το πλήθος και το είδος τους εξαρτάται από το πρόβλημα. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της ελαχιστοποίησης του βάρους ενός δικτύωματος, ως μεταβλητές σχεδίασης συνήθως επιλέγονται οι διατομές των ράβδων ενώ, στην περίπτωση της αεροτομής, ως μεταβλητές ελέγχου επιλέγονται οι μεταβλητές που παραμετροποιούν τη μορφή της. Επίσης, μία μεταβλητή μπορεί να αντιπροσωπεύει πολλά μέρη μιας κατασκευής, όπως για παράδειγμα συμβαίνει σε συμμετρικά δίκτυωματα όπου οι ράβδοι ομαδοποιούνται. Γενικά, η ομαδοποίηση βοηθά στη μείωση των μεταβλητών σχεδιασμού, κάτι που όχι μόνο επιταχύνει σημαντικά τη διαδικασία βελτιστοποίησης αλλά περιορίζει και τον κίνδυνο εμφάνισης ασταθειών αριθμητικής φύσης.

Η επιλογή της αντικειμενικής συνάρτησης και ο καθορισμός των μεταβλητών σχεδιασμού ορίζουν μερικώς το πρόβλημα της βελτιστοποίησης μιας κατασκευής. Ο πλήρης καθορισμός αυτού του προβλήματος επιτυγχάνεται με την διατύπωση περιορισμών, οι οποίοι επιβάλλονται στις μεταβλητές σχεδιασμού είτε άμεσα είτε έμμεσα.

Η άμεση επιβολή ενός περιορισμού υλοποιείται με την οριοθέτηση του πεδίου ορισμού των μεταβλητών σχεδιασμού, μεταξύ μιας κατώτερης και μιας ανώτερης επιτρεπτής τιμής. Στις μηχανολογικές κατασκευές, αυτού του είδους οι περιορισμοί οφείλονται κυρίως σε πρακτικούς λόγους, κατασκευαστικούς ή εργονομικούς. Για παράδειγμα, οι διαστάσεις ενός καθίσματος επιβατικού αυτοκινήτου πρέπει να είναι τέτοιες, ώστε ένας ενήλικας να κάθεται με άνεση, χωρίς, ωστόσο, να γίνεται σπατάλη χώρου.

Η έμμεση επιβολή ενός περιορισμού επιτυγχάνεται μέσα από την επιθυμητή συμπεριφορά της κατασκευής, όπου για παράδειγμα, δεν πρέπει να εμφανιστεί τάση ή παραμόρφωση

μεγαλύτερη από μια επιτρεπόμενη τιμή αστοχίας, ή, στην περίπτωση της αεροτομής, το πάχος της θα πρέπει να είναι τέτοιο που να μη δημιουργούνται προβλήματα κατασκευαστικής φύσης (αστοχία υλικού), ακόμα κι αν επιτυγχάνει τους στόχους της για μέγιστη άνωση και ελάχιστη οπισθέλκουσα.

Η βασική διαφορά μεταξύ της άμεσης και της έμμεσης επιβολής περιορισμών είναι ότι στην πρώτη περίπτωση ο περιορισμός τίθεται σε επίπεδο μεταβλητής (επίπεδο μονάδας), ενώ στη δεύτερη περίπτωση, τίθεται σε επίπεδο συνδυασμού τιμών όλων των μεταβλητών σχεδιασμού (επίπεδο συνόλου). Γενικά, οι περιορισμοί μπορεί να διατυπωθούν με τη μορφή ισοτήτων ή ανισοτήτων. Στη μηχανολογική σχεδίαση, τις περισσότερες των φορών συναντούμε περιορισμούς ανισοτικής φύσης.

Οι μεταβλητές σχεδιασμού ορίζονται σε έναν χώρο πεπερασμένης διάστασης. Για παράδειγμα, μία αντικειμενική συνάρτηση με τέσσερις (4) μεταβλητές σχεδιασμού ορίζεται στον χώρο  $\mathbb{R}^4$ . Τα όρια του χώρου ορισμού των μεταβλητών σχεδιασμού καθορίζονται από ένα σύνολο (υπερ)επιφανειών οριζόμενων από τους περιορισμούς, άμεσους και έμμεσους. Το εσωτερικό αυτού του χώρου ονομάζεται δυνατή ή επιτρεπόμενη περιοχή (feasible region) και αντιπροσωπεύει τιμές μεταβλητών που ικανοποιούν, ή, ισοδύναμα, δεν παραβιάζουν τους περιορισμούς του προβλήματος. Το συμπληρωματικό αυτού του χώρου καλείται μη-δυνατή ή μη-επιτρεπόμενη περιοχή (infeasible region), όπου προφανώς παρατηρείται παραβίαση ενός τουλάχιστον περιορισμού. Τέλος, ένας ισοτικός περιορισμός καλείται ενεργός όταν ικανοποιείται, ενώ ανενεργός στην αντίθετη περίπτωση. Ένας ανισοτικός περιορισμός καλείται ενεργός όταν ικανοποιείται ισοτικά.

Συνοπτικότερα, για να εφαρμοστεί μια μέθοδος βελτιστοποίησης σε κάποιο πρόβλημα, πρέπει να προηγηθεί η μοντελοποίησή του, ώστε να έχει τρία βασικά στοιχεία: (α) την αντικειμενική συνάρτηση που περιγράφει μαθηματικά αυτό που πρέπει να επιτευχθεί με τη διαδικασία της βελτιστοποίησης, (β) τις παραμέτρους βελτιστοποίησης που περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο το σύστημα προσαρμόζεται για να πετύχει τους στόχους που έχουν τεθεί (αυτοί, συνήθως, ταυτίζονται με τον αριθμό των αγνώστων της αντικειμενικής συνάρτησης και το αποτέλεσμα μιας μεθόδου βελτιστοποίησης, είναι να βρεθεί το διάνυσμα των παραμέτρων αυτών που ικανοποιεί με τον απαιτούμενο τρόπο την αντικειμενική συνάρτηση) και, (γ) τους περιορισμούς που διέπουν τις μεταβλητές του προβλήματος και οδηγούν τη βελτιστοποίηση μέσα από καταστάσεις που πρέπει να ικανοποιούνται.

### 1.3. Κατηγορίες μεθόδων βελτιστοποίησης<sup>[14]</sup>

#### 1.3.1. Μια πρώτη κατηγοριοποίηση

Ένας δυνατός, όχι όμως και ο μοναδικός τρόπος κατηγοριοποίησης των αλγορίθμων βελτιστοποίησης, είναι ο χωρισμός σε έξι (6) ομάδες. Ειδικότερα, έχουμε:

1. *Βελτιστοποίηση μέσω της διαδικασίας δοκιμής-λάθους (trial-error technique) και βελτιστοποίηση μέσω μαθηματικής συνάρτησης μεταφοράς.* Υπάρχουν περιπτώσεις όπου δεν γνωρίζουμε αρκετά για τον τρόπο με τον οποίο οι παράμετροι ενός συστήματος επηρεάζουν την έξοδο του. Σε ένα παράδειγμα από την καθημερινή ζωή, έστω ότι θέλουμε να επιλέξουμε εκείνη τη θέση μιας κεραίας ραδιοφώνου για την οποία έχουμε την καλύτερη λήψη. Αν και αγνοούμε πολλές και κρίσιμες

πληροφορίες, όπως είναι η ακριβής θέση και ισχύς του πομπού, ωστόσο δεν παραιτούμαστε. Μετά από διάφορες τυχαίες δοκιμές, καταλήγουμε σε εκείνη τη θέση με το πλέον ικανοποιητικό αποτέλεσμα. Οι πειραματιστές προτιμούν αυτού του είδους προσέγγιση των προβλημάτων. Άλλωστε, μερικές από τις πλέον σημαντικές ανακαλύψεις έγιναν με αυτόν τον τρόπο (αντιβιοτική δράση της πενικιλίνης). Στον αντίποδα, οι θεωρητικοί προτιμούν εκείνη τη βελτιστοποίηση η οποία στηρίζεται στην αποκάλυψη του συσχετισμού μεταξύ εισόδου-εξόδου και κατόπιν στη μοντελοποίηση αυτού.

2. *Εάν υπάρχει μόνο και μία παράμετρος, τότε η βελτιστοποίηση χαρακτηρίζεται ως μονοδιάστατη.* Ένα πρόβλημα με δύο ή παραπάνω παραμέτρους (μεταβλητές σχεδιασμού) απαιτεί τη χρήση βελτιστοποίησης πολλαπλών διαστάσεων. Όσο ο αριθμός των διαστάσεων αυξάνεται, τόσο αυξάνεται και η δυσκολία επίλυσης του αντίστοιχου προβλήματος. Αρκετές μέθοδοι βελτιστοποίησης πολλαπλών διαστάσεων στηρίζονται στην αναγωγή του προβλήματος σε μία σειρά από μονοδιάστατες βελτιστοποιήσεις.
3. *Δυναμική βελτιστοποίηση σημαίνει ότι η έξοδος είναι «συνάρτηση» του χρόνου, εν αντιθέσει με τη στατική βελτιστοποίηση, στην οποία η έξοδος είναι ανεξάρτητη του χρόνου.* Για παράδειγμα, η μετάβαση από ένα μέρος μίας μεγάλης πόλης σε ένα άλλο είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί ακολουθώντας πολλές, διαφορετικές διαδρομές. Ποια ωστόσο είναι η βέλτιστη διαδρομή; Από άποψη χιλιομετρικής απόστασης, πρόκειται για ένα πρόβλημα στατικής βελτιστοποίησης, η λύση του οποίου βρίσκεται σχετικά εύκολα με τη βοήθεια ενός χάρτη ή του οδομέτρου ενός αυτοκινήτου. Ωστόσο, από την άποψη του απαιτούμενου χρόνου, πρόκειται για ένα δυσεπίλυτο πρόβλημα δυναμικής βελτιστοποίησης. Σε αυτήν την περίπτωση, η πιο κοντινή διαδρομή δεν είναι σίγουρα και η συντομότερη, καθώς, διάφοροι παράγοντες διαδραματίζουν σημαντικότατο ρόλο, όπως είναι η ώρα της μετακίνησης (λ.χ. ώρα αιχμής), ο καιρός (π.χ. βρέχει ή όχι), αστάθμητοι παράγοντες (π.χ. τροχαίο ατύχημα). Η προσθήκη της παραμέτρου του χρόνου προσαυξάνει τη δυσκολία επίλυσης, ωστόσο, προσθέτει και κάποια «γοητεία» στο πρόβλημα.
4. *Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης κατηγοριοποιούνται και με κριτήριο τη συνεχή ή διακριτή φύση των μεταβλητών σχεδιασμού.* Οι διακριτές παράμετροι μπορούν να πάρουν μόνο ορισμένες τιμές ενώ οι συνεχείς μπορούν να λάβουν ένα άπειρο πλήθος τιμών. Σε ένα διακριτό πρόβλημα βελτιστοποίησης, η βέλτιστη λύση είναι ένας από τους πιθανούς συνδυασμούς των διακριτών μεγεθών. Ακριβώς γι αυτόν τον λόγο έχει επικρατήσει και ο όρος συνδυαστική βελτιστοποίηση. Ωστόσο, σημειώνεται ότι, ανάλογα με το πρόβλημα, το πλήθος των δυνατών συνδυασμών μπορεί να είναι μικρό ή απαγορευτικά μεγάλο. Ως παράδειγμα αναφέρεται η σχεδίαση ενός οδοντωτού τροχού. Ο μηχανικός-σχεδιαστής μπορεί να επιλέξει ένα πλήθος οδόντων, π.χ. 7 ή 9 ή 13. Ωστόσο, δεν έχει φυσικό νόημα να σχεδιάσει γρανάζι με 9.3 οδόντες. Από την άλλη πλευρά, η ποσότητα λιπαντικού που θα χρησιμοποιηθεί δεν απαγορεύεται να είναι 1,23953482 lt, άσχετα με το αν για καθαρά πρακτικούς λόγους προτιμάται η στρογγυλοποίηση σε κάποιο δεκαδικό ψηφίο.
5. *Οι παράμετροι έχουν συνήθως όρια ή περιορισμούς.* Βελτιστοποίηση άνευ περιορισμών, όπως άλλωστε δηλώνει και ο όρος, σημαίνει ότι οι παράμετροι μπορούν να λάβουν οποιαδήποτε τιμή. Βελτιστοποίηση με περιορισμούς σημαίνει ότι η βέλτιστη λύση αναζητείται με ταυτόχρονη επιβολή ορισμένων συνθηκών που αφορούν στις μεταβλητές σχεδιασμού. Σε ορισμένες περιπτώσεις αλγορίθμων, προβλήματα με περιορισμούς μπορούν να εκφραστούν μαθηματικά σε προβλήματα χωρίς περιορισμούς. Οι περιορισμοί μπορεί να είναι ισοτικοί ή ανισοτικοί, γραμμικοί ή μη-γραμμικοί. Όταν το πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρακτηρίζεται από γραμμικούς, ισοτικούς ή ανισοτικούς περιορισμούς, τότε χαρακτηρίζεται ως γραμμικό. Σε αντίθετη περίπτωση, χαρακτηρίζεται ως μη-γραμμικό.
6. *Μερικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης αναζητούν την ελαχιστοποίηση (αντίστοιχα τη μεγιστοποίηση) της αντικειμενικής συνάρτησης εκκινώντας από ένα σύνολο*

*αρχικών τιμών, το οποίο διαρκώς διορθώνεται μέχρι το πέρας του αλγορίθμου. Όταν αυτή η διόρθωση υπακούει σε κανόνες των μαθηματικών και της αριθμητικής ανάλυσης, τότε η μέθοδος χαρακτηρίζεται ως ντετερμινιστική ή αιτιοκρατική. Βασικό πλεονέκτημα των αιτιοκρατικών μεθόδων είναι η γρήγορη σύγκλισή τους και η δυνατότητα χειρισμού προβλημάτων πολλών μεταβλητών σχεδιασμού (ακόμα και μερικών εκατομμυρίων). Στον αντίποδα, το βασικό τους μειονέκτημα είναι ο εγκλωβισμός τους σε τοπικά ακρότατα. Από την άλλη μεριά, όταν η εν λόγω διόρθωση επιτυγχάνεται μέσα από διαδικασίες πιθανοτικού λογισμού, τότε χαρακτηρίζονται ως στοχαστικές. Βασικό πλεονέκτημά τους είναι η μικρότερη πιθανότητα εγκλωβισμού τους σε τοπικά ακρότατα, ενώ μειονέκτημά τους, ο πιο αργός ρυθμός σύγκλισης και εξαιτίας αυτού, η αδυναμία αντιμετώπισης προβλημάτων με πολλές μεταβλητές σχεδιασμού (ίσως και πάνω από μερικές δεκάδες).*

### **1.3.2. Μια δεύτερη κατηγοριοποίηση**

Ο βασικότερος διαχωρισμός των μεθόδων βελτιστοποίησης είναι σε δύο κατηγορίες, τις διακριτές και τις συνεχείς. Ο διαχωρισμός αυτός προέρχεται από τη μορφή του πεδίου ορισμού της προς βελτιστοποίηση αντικειμενικής συνάρτησης.

Ένας δεύτερος διαχωρισμός βασίζεται στο αν για τη βελτιστοποίηση χρησιμοποιούνται παράγωγοι της αντικειμενικής συνάρτησης ή όχι, κι αν χρησιμοποιούνται, τότε, τι τάξης είναι. Έτσι, υπάρχουν οι μέθοδοι βελτιστοποίησης μηδενικής, πρώτης, δεύτερης και ανώτερης τάξης. Οι μέθοδοι μηδενικής τάξης δεν χρησιμοποιούν πληροφορίες παραγώγου, η πρώτη τάξης χρησιμοποιούν πληροφορίες πρώτης παραγώγου, η δεύτερης τάξης της δεύτερης παραγώγου κ.ο.κ.

Οι μέθοδοι μηδενικής τάξης διαχωρίζονται σε αιτιοκρατικές και στοχαστικές<sup>2</sup>, ανάλογα με τον τρόπο που επιλέγουν τη νέα πιθανή λύση (διάνυσμα τιμών μεταβλητών σχεδιασμού) του προβλήματος που επιλύουν.

Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι (deterministic methods) στηρίζονται στη βαθμιαία ολίσθηση μιας αρχικής λύσης προς τη βέλτιστη μέσω απλών βηματικών διορθώσεων. Δυστυχώς, κάθε τροποποίηση στη συνάρτηση κόστους ή στη μοντελοποίηση του προβλήματος απαιτεί επαναδιατύπωση του μοντέλου βελτιστοποίησης. Παρότι οι αιτιοκρατικές μέθοδοι είναι ιδιαίτερα γρήγορες, διατρέχουν τον κίνδυνο να μην συγκλίνουν στο ολικό βέλτιστο αλλά να «παγιδευτούν» σε περιοχές τοπικών ακροτάτων, γεγονός που εξαρτάται από την επιλογή αρχικής λύσης.

Οι στοχαστικές μέθοδοι (stochastic methods) από την άλλη, βασίζονται στην συγκροτημένα τυχαία αναζήτηση νέων λύσεων, καλύτερων ως προς την υπάρχουσα, που τελικά οδηγεί στη βέλτιστη. Βασικό χαρακτηριστικό τους είναι ότι δεν εγκλωβίζονται εύκολα σε τοπικά ακρότατα. Ακριβώς λόγω της ικανότητας απεγκλωβισμού τους από τις περιοχές των τοπικών βελτίστων, προτιμούνται για την επίλυση δύσκολων συνδυαστικών προβλημάτων βελτιστοποίησης. Το μοναδικό τους μειονέκτημα είναι ότι, συχνά, έχουν αυξημένο υπολογιστικό κόστος (συγκριτικά με τις αιτιοκρατικές μεθόδους), καθώς, δεν μπορούν να διαχειριστούν μεγάλο πλήθος μεταβλητών σχεδιασμού.

---

<sup>2</sup> Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι κατά κύριο λόγο χρησιμοποιούν πληροφορίες παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης, ενώ οι στοχαστικές, όχι. Συνεπώς, οι μέθοδοι μηδενικής τάξης είναι οι μόνες που μπορούν να διαχωριστούν με αυτόν τον τρόπο, αφού όλες οι άλλες μέθοδοι, δεύτερης και ανώτερης τάξης, που χρησιμοποιούν παραγώγους, είναι αιτιοκρατικές.

Ένας τελευταίος διαχωρισμός των μεθόδων βελτιστοποίησης γίνεται βάσει του αν οι λύσεις που ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης χειρίζεται «ταυτόχρονα» είναι μεμονωμένες ή αποτελούν πληθυσμό. Η πιο γνωστή μέθοδος βελτιστοποίησης που χρησιμοποιεί πληθυσμό λύσεων είναι οι γενετικοί αλγόριθμοι (genetic algorithms). Επίσης, πληθυσμό λύσεων χρησιμοποιούν οι αποικίες μυρμηγκιών (ant system) και οι στρατηγικές εξέλιξης (evolution system). Όταν χρησιμοποιείται ένας πληθυσμός ατόμων, τότε τα άτομα μπορεί να επικοινωνούν μεταξύ τους είτε άμεσα, είτε έμμεσα. Αντίθετα, μεμονωμένες λύσεις εμφανίζονται στην εφαρμογή της μεθόδου της προσομοιούμενης ανόπτωσης, που ανήκει στις στοχαστικές μεθόδους, αλλά και σε όλες τις αιτιοκρατικές.

Οι μέθοδοι που αναφέρθηκαν τελευταίες ανήκουν σε μια ιδιαίτερη (κι ευρύτερη) κατηγορία μεθόδων βελτιστοποίησης που ονομάζονται «εξελικτικές τεχνικές». Οι εξελικτικές τεχνικές μοντελοποιούν κάποιο φαινόμενο, είτε φυσικό (π.χ. η ανόπτωση στα μέταλλα), είτε κοινωνικό (π.χ. η αλληλεπίδραση μεταξύ των ανθρώπων και του πολιτισμού τους ή γενικότερα μεταξύ των ζώντων οργανισμών και του περιβάλλοντός τους), είτε βιολογικό (π.χ. η εξέλιξη των ειδών). Συχνά, παρουσιάζουν παράλληλη δομή, δηλαδή έχουν «πράκτορες» (agents) ή «άτομα» (individuals) που «δραστηριοποιούνται» ταυτόχρονα και δημιουργούν πολλαπλές λύσεις του προβλήματος. Τέλος, οι εξελικτικές τεχνικές είναι αλγόριθμοι προσαρμόσιμοι σε διαφορετικά «περιβάλλοντα» και παρουσιάζουν «στιβαρότητα», με αποτέλεσμα να μπορούν να λειτουργήσουν αγνοώντας το «θόρυβο» αλλά και να αξιοποιηθούν σε διαφορετικά είδη προβλημάτων με ελάχιστες αλλαγές στον καθαυτό κώδικα.

Γενικά σήμερα, ένα μεγάλο μέρος της έρευνας για αποδοτικούς αλγόριθμους εύρεσης βέλτιστων λύσεων κατευθύνεται προς τους ευριστικούς αλγόριθμους και πιο συγκεκριμένα, σε αυτούς που εμπνέονται από φυσικά, κοινωνικά και βιολογικά φαινόμενα, δηλαδή που βασίζονται στις εξελικτικές τεχνικές. Όπως συμβαίνει στους στοχαστικούς αλγόριθμους, έτσι και οι ευριστικοί, έχουν την ιδιότητα να μην εγκλωβίζονται σε τοπικά ακρότατα και μάλιστα, μπορούν να εντοπίσουν την περιοχή της συνολικά βέλτιστης λύσης, συνήθως, μετά από έναν μεγάλο αριθμό εκτιμήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης.

Εν κατακλείδι, μπορούμε κατά κύριο λόγο να χωρίσουμε τους αλγόριθμους βελτιστοποίησης σε δύο μεγάλες υποκατηγορίες, αυτούς που για να προσδιορίσουν τη βέλτιστη λύση ενός προβλήματος χρειάζονται την παράγωγο της αντικειμενικής συνάρτησης (αιτιοκρατικοί αλγόριθμοι – gradient based methods), κι αυτούς που δεν απαιτούν την τιμή της (στοχαστικοί αλγόριθμοι). Τα βασικότερα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των δύο αυτών μεγάλων κατηγοριών αλγορίθμων βελτιστοποίησης, όπως αναφέρθηκαν και στα προηγούμενα, συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα (Πιν. 1.1).

	Χρήση παραγώγου αντικειμενικής συνάρτησης	Απαίτηση επαναδιατύπωσης προβλήματος για νέα αντικειμενική συνάρτηση	Γρήγορη σύγκλιση	Δυνατότητα χειρισμού πολλών μεταβλητών σχεδιασμού	Πιθανότητα εγκλωβισμού της λύσης σε τοπικό ακρότατο
<b>Αιτιοκρατικές Μέθοδοι</b>	✓ (+ ή -)	✓ (-)	✓ (+)	✓ (+)	✓ (-)
<b>Στοχαστικές Μέθοδοι</b>	x (- ή +)	x (+)	x (-)	x (-)	x (+)

**Πιν. 1.1.** Πίνακας συγκριτικών πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων αιτιοκρατικών και στοχαστικών μεθόδων βελτιστοποίησης. Με «+» ή «-» εντός των παρενθέσεων συμβολίζεται το συγκριτικό πλεονέκτημα της μιας μεθόδου έναντι της άλλης. Παρατηρούμε λοιπόν, ότι όπου η μια μέθοδος υπερτερεί η άλλη υστερεί και τούμπαλιν.

Παρόλο που παρατηρούμε ότι κάποια μέθοδος πλεονεκτεί έναντι της άλλης σε ορισμένα χαρακτηριστικά και μειονεκτεί σε κάποια άλλα, το ερώτημα ποια από τις δύο μεθόδους είναι η καλύτερη δεν έχει εύκολη ή προφανή απάντηση (κι αυτό πιθανότατα γιατί καμιά δεν είναι καλύτερη της άλλης). Αυτό που μπορεί εύκολα να ειπωθεί είναι ότι, επαφίεται στην κρίση και την εμπειρία του αναλυτή-μηχανικού ποια από τις δύο κατηγορίες μεθόδων τον συμφέρει να χρησιμοποιήσει για να λύσει το πρόβλημά του. Η σύγχρονη τάση είναι η ανάπτυξη υβριδικών σχημάτων βελτιστοποίησης, όπου στοχαστικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται στην αρχή της βελτιστοποίησης για να εντοπίσουν την περιοχή της βέλτιστης λύσης και, στη συνέχεια, δράση αναλαμβάνουν οι αιτιοκρατικές για να επιτύχουν γρήγορη σύγκλιση και εύρεση της βέλτιστης αυτής λύσης.

#### **1.4. Η μέθοδος της «απότομης καθόδου»**

Στην παρούσα διπλωματική για την ελαχιστοποίηση της επιλεγείσας αντικειμενικής συνάρτησης  $F$  και, λόγω της φύσης των μελετούμενων προβλημάτων (εκατομμύρια μεταβλητές σχεδιασμού), έχει επιλεγεί η χρήση αιτιοκρατικών μεθόδων βελτιστοποίησης και, πιο συγκεκριμένα, της μεθόδου της «απότομης καθόδου».

Η μέθοδος της «απότομης καθόδου», αποτελεί μια πρώτης τάξης, αιτιοκρατική μέθοδο βελτιστοποίησης, το μεγαλύτερο πλεονέκτημα της οποίας είναι ότι αποτελεί την απλούστερη μέθοδο «καθόδου», ενώ το βασικό της μειονέκτημα είναι η μικρή ταχύτητα σύγκλισης. Ωστόσο, σε δύσκολες εφαρμογές αεροδυναμικής βελτιστοποίησης και, ιδιαίτερα σε πεδία ροής όπου εμφανίζονται φαινόμενα τύρβης, η μέθοδος της «απότομης καθόδου» αποδεικνύεται πιο ευσταθής (συγκριτικά με άλλες μεθόδους «καθόδου» πρώτης ή μεγαλύτερης τάξης) και οδηγεί γρηγορότερα στην τελική, βέλτιστη λύση.

##### **1.4.1. Η μέθοδος της «απότομης καθόδου» για προβλήματα χωρίς περιορισμούς**

Για προβλήματα ελαχιστοποίησης μιας αντικειμενικής συνάρτησης χωρίς περιορισμούς (οι εφαρμογές που θα αντιμετωπιστούν στην παρούσα διπλωματική είναι τέτοιες), η μέθοδος της απότομης καθόδου διατυπώνεται μαθηματικά ως,

$$\mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{a}^{(n-1)} - \eta^{(n-1)} \left( \frac{\delta F}{\delta \mathbf{a}} \right)^{(n-1)}$$

όπου με  $\mathbf{a}$  συμβολίζουμε το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού (υποθέτουμε ότι  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^M$ ,  $\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_M)^T$ ) και  $n$  τον κύκλο της βελτιστοποίησης. Με  $\delta F / \delta \mathbf{a}$  συμβολίζονται οι πρώτες παράγωγοι ( $M$  το πλήθος για  $M$  μεταβλητές σχεδιασμού) της προς ελαχιστοποίηση αντικειμενικής συνάρτησης, οι οποίες στη συνέχεια, θα αναφέρονται κι ως «παράγωγοι ευαισθησίας».

Το βήμα  $\eta$  της απότομης καθόδου είναι ένας μικρός, θετικός αριθμός, του οποίου η τιμή επιλέγεται ανάλογα με την κάθε περίπτωση (κι απαιτεί αρκετή εμπειρία). Αν επιλεγεί μικρή τιμή, η σύγκλιση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης είναι πιο αργή αλλά και πιο ευσταθής, ενώ, αν επιλεγεί μεγάλη τιμή, συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο. Επίσης, η τιμή του βήματος  $\eta$  μπορεί να είναι σταθερή ανά κύκλο βελτιστοποίησης ή μπορεί να μεταβάλλεται σύμφωνα με κάποιον αλγόριθμο ανίχνευσης κατά γραμμή.

Το ερώτημα που πρέπει να τεθεί στη συνέχεια και για το οποίο δεν έχει γίνει ακόμα λόγος (αλλά ίσως έχει αρχίσει – ή έπρεπε να έχει αρχίσει – να υποψιάζει τον παρατηρητικό αναγνώστη), είναι πώς μπορούν να υπολογιστούν οι παράγωγοι ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης. Απάντηση στο ερώτημα αυτό, θα προσπαθήσουμε να δώσουμε στην παράγραφο που ακολουθεί.

## 1.5. Υπολογισμός παραγώγων ευαισθησίας – Εισαγωγή στη συζυγή μέθοδο

Η ενότητα αυτή εστιάζει στον τρόπο υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας (πρώτης τάξης) μιας αντικειμενικής συνάρτησης. Αρχικά, και πριν προχωρήσουμε παρακάτω, πρέπει να γίνει κατανοητό ότι στα προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, η αντικειμενική συνάρτηση συναρτάται, γενικά, των μεταβλητών της ροής, δηλαδή, του διανύσματος της ταχύτητας του ρευστού, της πίεσης κ.λπ. Συνεπώς, για τον υπολογισμό της τιμής της, θα πρέπει να λυθούν οι εξισώσεις της ροής που διέπουν το συγκεκριμένο πρόβλημα, οι εξισώσεις Euler αν πρόκειται για μη-συνεκτικό ρευστό ή, οι εξισώσεις Navier-Stokes για πραγματικό (συνεκτικό) ρευστό. Στις τελευταίες μπορεί να προστεθούν και οι εξισώσεις του μοντέλου τύρβης αν μιλάμε για τυρβώδη πεδία ροής. Το σύνολο των εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα της ροής ονομάζονται εξισώσεις κατάστασης του προβλήματος και λύνονται αριθμητικά στο διακριτοποιημένο χωρίο ροής με μεθόδους υπολογιστικής ρευστομηχανικής.

### 1.5.1. Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών

Η κλασικότερη μέθοδος υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας ενός συναρτησιακού ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, είναι η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (finite differences method). Σύμφωνα, λ.χ. με τη μέθοδο της πρόσω διαφόρισης, πρώτης τάξης ακρίβειας, η μερική παράγωγος της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς την  $j$ -ιοστή μεταβλητή σχεδιασμού μπορεί να γραφεί ως,

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = \frac{F(a_1, a_2, \dots, a_j + \varepsilon, \dots, a_M) - F(a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_M)}{\varepsilon}$$

όπου  $\varepsilon$  πολύ μικρή, θετική σταθερά, την τιμή της οποίας καθορίζει ο χρήστης. Η τελευταία, όπως είναι προφανές, πρέπει να εφαρμοστεί  $M$  φορές (για τις  $M$  μεταβλητές σχεδιασμού) στην τρέχουσα λύση  $\mathbf{a}^{(n)}$ . Έτσι, το υπολογιστικό κόστος ώστε να βρεθούν (και μάλιστα μόνο με πρώτης τάξης ακρίβεια) οι συνιστώσες της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης στην τρέχουσα λύση είναι  $M$  υπολογισμοί της αντικειμενικής συνάρτησης. Αν σ' αυτούς προσθέσουμε και την αρχική αξιολόγηση ώστε να υπολογιστεί η τιμή της  $F(\mathbf{a}^{(n)})$ , τότε το υπολογιστικό κόστος ανά κύκλο μιας μεθόδου βελτιστοποίησης που βασίζεται στην κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης είναι  $M + 1$  αξιολογήσεις. Τα πράγματα γίνονται ακόμα χειρότερα, αν αναλογιστεί κανείς ότι είναι απαραίτητη η πλήρης σύγκλιση των εξισώσεων της ροής και η προσεκτική επιλογή του βήματος  $\varepsilon$ , ώστε ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας να είναι αξιόπιστος.

Αν χρησιμοποιηθούν οι δεύτερης τάξης ακρίβειας κεντρικές διαφορές, δηλαδή το σχήμα,

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = \frac{F(a_1, a_2, \dots, a_j + \varepsilon, \dots, a_M) - F(a_1, a_2, \dots, a_j - \varepsilon, \dots, a_M)}{2\varepsilon}$$

τότε είναι προφανές, ότι το υπολογιστικό κόστος γίνεται πρακτικά ασύμφορο, αφού απαιτούνται  $2M$  επιλύσεις των εξισώσεων ροής ανά κύκλο βελτιστοποίησης.

### **1.5.2. Η μέθοδος των μιγαδικών μεταβλητών**

Η ανάγκη πλήρους σύγκλισης των εξισώσεων της ροής και η ευαισθησία της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών ως προς την επιλογή του αριθμού  $\varepsilon$ , μπορεί να αποφευχθεί με τη χρήση της μεθόδου των μιγαδικών μεταβλητών (complex variables method), κατά την οποία, οι ζητούμενες παράγωγοι ευαισθησίας μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση,

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = \frac{\text{Im}[F(a_1, a_2, \dots, a_j + j\varepsilon, \dots, a_M)]}{\varepsilon}$$

όπου  $j = \sqrt{-1}$  είναι η φανταστική μονάδα. Λόγω της απουσίας διαφορών στην τελευταία, δεν υπάρχει πλέον ευαισθησία ως προς την επιλογή του βήματος  $\varepsilon$ . Όμως, εξακολουθεί να απαιτείται η επίλυση των εξισώσεων ροής, τόσες φορές, όσες και το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού.

### **1.5.3. Η μέθοδος της αυτόματης διαφορίσης**

Οι παράγωγοι ευαισθησίας του συναρτησιακού, είναι δυνατό να υπολογιστούν και μέσω λογισμικού αυτόματης διαφορίσης (automatic differentiation). Το λογισμικό αυτό δέχεται ως είσοδο τον κώδικα με τον οποίο υπολογίζεται η τιμή του συναρτησιακού  $F$  από τις τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού  $\mathbf{a}$  και, παράγει έναν κώδικα για τον υπολογισμό των παραγώγων  $\delta F / \delta \mathbf{a}$ .

Στη βιβλιογραφία, εμφανίζονται δύο διαφορετικοί αλγόριθμοι αυτόματης διαφορίσης, ο ευθύς (direct), σύμφωνα με τον οποίο εισάγονται νέες μεταβλητές και υπολογίζονται διαδοχικά οι παράγωγοί τους ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές και, ο αντίστροφος (inverse), σύμφωνα με τον οποίο ακολουθείται η αντίστροφη πορεία κατά τον υπολογισμό των παραγώγων.

Τα πιο γνωστά πακέτα λογισμικού αυτόματης διαφορίσης είναι τα ADIFOR (Automatic Differentiation of FORTRAN), DAFOR (Differential Algebraic Extension of FORTRAN) και ADOL-C (Automatic Differentiation of Algorithms written in C/C++).

### **1.5.4. Η μέθοδος της ευθείας διαφορίσης<sup>[8]</sup>**

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης  $\delta F / \delta \mathbf{a}$ , σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, εκτός από την επίλυση του προβλήματος ροής απαιτείται και η επιπλέον επίλυση  $M$  (δηλαδή όσες και οι μεταβλητές



σχεδιασμού) συστημάτων προερχόμενων από τους ρυθμούς μεταβολής των εξισώσεων κατάστασης<sup>3</sup>,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} CE \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} ME \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} EE \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} TM \right\} = \mathbf{0}$$

Οι τελευταίες, διατυπώνονται και λύνονται θεωρώντας ως άγνωστες ποσότητες όχι τις ροϊκές μεταβλητές (πίεση, ταχύτητα κ.λπ.), αλλά τις μεταβολές αυτών ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού ( $\partial p/\partial \mathbf{a}$ ,  $\partial \mathbf{v}/\partial \mathbf{a}$  κ.ο.κ.).

Ας επισημανθεί ότι παρότι η μέθοδος πλεονεκτεί έναντι της μεθόδου των κεντρικών πεπερασμένων διαφορών (α) ως προς το ότι το κόστος της είναι πολύ μικρότερο (περίπου το μισό) και, (β) ως προς το ότι δεν εξαρτάται από τη στοιχειώδη ποσότητα διαφόρισης  $\varepsilon$ , εξακολουθεί να είναι πολύ απαιτητική σε υπολογιστικούς πόρους, ενώ, απαιτεί τον εκ νέου προγραμματισμό σχετικού λογισμικού επίλυσης του παραπάνω συστήματος εξισώσεων. Επιπλέον, πρέπει να τονιστεί, ότι η μέθοδος της ευθείας διαφόρισης (direct differentiation) δεν προϋποθέτει αλλαγή (η οποία έχει επέλθει από την αλλαγή της λύσης  $\mathbf{a}$ ) στη γεωμετρία της προς βελτιστοποίηση μορφής και, συνεπώς, ούτε και του υπολογιστικού πλέγματος (γεγονός το οποίο συνεισφέρει επιπλέον στην περαιτέρω μείωση του υπολογιστικού κόστους έναντι της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών). Ας σημειωθεί ακόμα, ότι η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων γίνεται στο ίδιο χωρίο ροής και άρα, στο ίδιο πλέγμα στο οποίο επιλύθηκαν και οι εξισώσεις της ροής. Το γεγονός αυτό, ότι δηλαδή δεν μεταβάλλεται η γεωμετρία του σώματος, εξηγεί και τη μη-εξάρτηση των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας από την ποσότητα  $\varepsilon$ .

### 1.5.5. Η συζυγής μέθοδος υπολογισμού<sup>9]</sup>

Το πλεονέκτημα της συζυγούς μεθόδου για τον υπολογισμό της τιμής των παραγώγων ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης, έναντι των παραπάνω μεθόδων, είναι το μικρότερο υπολογιστικό κόστος με ταυτόχρονη διατήρηση της ακρίβειας υπολογισμού.

Ο υπολογισμός της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού απαιτεί την επίλυση ενός επιπλέον συστήματος εξισώσεων, εκτός των εξισώσεων της ροής, των λεγόμενων «συζυγών», ή «δυναδικών» εξισώσεων, ανεξάρτητα από το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού. Η πολυπλοκότητα των συζυγών εξισώσεων είναι αντίστοιχη (και ίσως μικρότερη) από αυτή των εξισώσεων της ροής (λ.χ. οι συζυγείς εξισώσεις στις μη-γραμμικές εξισώσεις Euler, είναι γραμμικές) με αποτέλεσμα, σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, το κόστος υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας να είναι περίπου διπλάσιο του κόστους επίλυσης των εξισώσεων της ροής.

Υπάρχουν δύο διαφορετικές συζυγείς τεχνικές, οι οποίες διαφέρουν ως προς τον τρόπο σχηματισμού των συζυγών εξισώσεων. Σύμφωνα με την πρώτη προσέγγιση, η οποία ονομάζεται «συνεχής συζυγής προσέγγιση» (continuous adjoint approach), σχηματίζονται αρχικά οι διαφορικές συζυγείς εξισώσεις<sup>4</sup> από τις αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις ροής και, στη συνέχεια, αυτές διακριτοποιούνται για τη δημιουργία των διακριτών συζυγών εξισώσεων.

<sup>3</sup> Συμβολικά γράφουμε: CE=Continuity Equation (εξίσωση συνέχειας), ME=Momentum Equation (εξίσωση ορμής), EE=Energy Equation (εξίσωση ενέργειας), TM=Turbulence Model (εξισώσεις μοντέλου τύρβης).

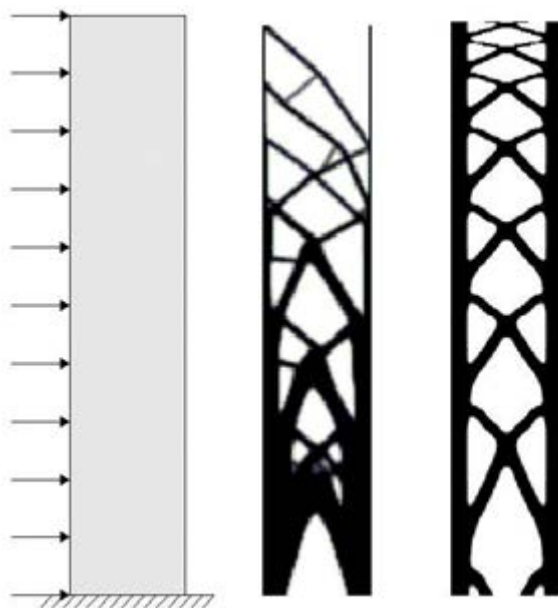
<sup>4</sup> Είναι ένα απ' τα πλεονεκτήματα της συνεχούς έναντι της διακριτής συζυγούς μεθόδου, το ότι δηλαδή γίνεται άμεσα εμφανής η «φυσική» του συζυγούς προβλήματος.

Σύμφωνα με τη δεύτερη προσέγγιση, η οποία καλείται «διακριτή συζυγής μέθοδος» (discrete adjoint approach), οι διακριτές συζυγείς εξισώσεις προκύπτουν απ' ευθείας από τις διακριτοποιημένες εξισώσεις ροής μέσω συζυγούς τέλεσης.

Η ακρίβεια των παραγώγων ευαισθησίας με τη χρήση των δύο μεθόδων είναι θεωρητικά η ίδια. Αυτό στην πράξη ισχύει όταν χρησιμοποιούνται αρκετά πυκνά υπολογιστικά πλέγματα. Όταν το υπολογιστικό πλέγμα είναι σχετικά αραιό, για να είναι η συνεχής συζυγής μέθοδος το ίδιο αποδοτική με τη διακριτή συζυγή μέθοδο, πρέπει η διακριτοποίηση των διαφορικών συζυγών εξισώσεων να γίνεται με ίδιο τρόπο με αυτόν των εξισώσεων κατάστασης. Σε αντίθεση με τη συνεχή συζυγή μέθοδο, η διακριτή μέθοδος, αν και θεωρητικά οδηγεί σε ακριβέστερες παραγώγους ευαισθησίας, απαιτεί αρκετή προεργασία για τον υπολογισμό της Ιακωβιανής ορίζουσας του υπολοίπου των εξισώσεων ροής ως προς τις συντηρητικές μεταβλητές.

### **1.6. Η βελτιστοποίηση τοπολογίας<sup>[11,12]</sup>**

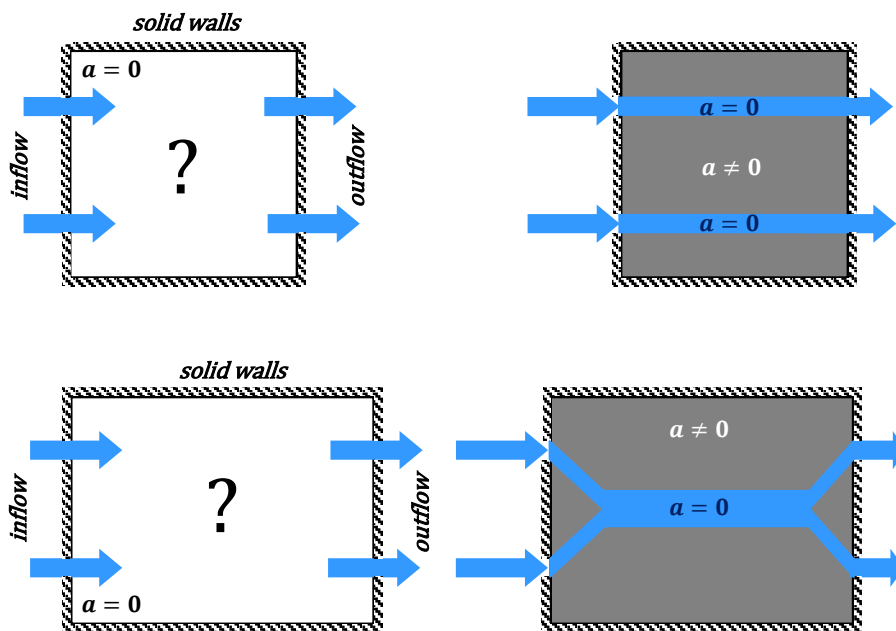
Πάνω από 20 χρόνια πριν, η έννοια της βελτιστοποίησης τοπολογίας εισήχθει στη μηχανική των κατασκευών (structural mechanics) από τους Bendsoe και Kikuchi. Οι τελευταίοι, αρχικά διατύπωσαν και στη συνέχεια έλυσαν αριθμητικά εξισώσεις με κατάλληλους όρους πυκνότητας του υλικού της κατασκευής, με στόχο, τον προσδιορισμό εκείνων των περιοχών της κατασκευής όπου υλικό έπρεπε να προστεθεί (δηλαδή η τοπική πυκνότητα ν' αυξηθεί) έτσι ώστε να προκύψει η μέγιστη δυνατή αντοχή και δυσκαμψία. Κατ' αντιστοιχία με την αύξηση της πυκνότητας σε «επιλεγμένες» περιοχές της κατασκευής, στην πράξη συναντάται αρκετά συχνά και η αντίστροφη λογική υπολογισμού, σύμφωνα με την οποία, η βελτιστοποίηση τοπολογίας «ψάχνει» να εντοπίσει εκείνες τις περιοχές της κατασκευής όπου υλικό μπορεί να αφαιρεθεί (δηλαδή η τοπική πυκνότητα να μειωθεί) έτσι ώστε να μειωθεί στο ελάχιστο η σπατάλη του υλικού κατασκευής, με ταυτόχρονη όμως διατήρηση των κατασκευαστικών απαιτήσεων αντοχής (βλ. Σχ. 1.1).



**Σχ. 1.1.** Βελτιστοποίηση τοπολογίας στη μηχανική των κατασκευών. Αριστερά φαίνεται η αρχική γεωμετρία και η προς μελέτη καταπόνηση, στο μέσο η βέλτιστη κατασκευή χωρίς περιορισμούς και στα δεξιά η βέλτιστη κατασκευή με περιορισμούς. Με μαύρο χρώμα είναι οι περιοχές όπου κατανέμεται η πυκνότητα του υλικού.

Μόλις λίγα χρόνια πριν, η παραπάνω ιδέα υιοθετήθηκε και στη μηχανική των ρευστών με τις πρωτοποριακές εργασίες των Borvall και Peterson (2003), Guest και Prevost (2006), Gersborg-Hansen et al. (2005), οι οποίοι πρώτοι εισήγαγαν – με τη βοήθεια κατάλληλων όρων πηγής – μια μεταβλητή πορώδους (στη συνέχεια θα συμβολίζεται με  $a$ ) στις διέπουσες εξισώσεις της ροής, για την επίλυση προβλημάτων στρωτών ροών και ροών τύπου Stokes στην εσωτερική αεροδυναμική.

Ειδικότερα στη μηχανική των ρευστών, στόχος της βελτιστοποίησης τοπολογίας είναι ο προσδιορισμός εκείνης (δηλαδή της βέλτιστης) της κατανομής της μεταβλητής  $a$  στο υπολογιστικό χωρίο, η οποία θα οδηγήσει στην ελαχιστοποίηση της προς εξέταση αντικειμενικής συνάρτησης. Βάσει των τοπικών τιμών του πορώδους  $a$ , οι περιοχές του χωρίου που αντιστοιχούν σε ροή ρευστού είναι εκείνες με κομβικές τιμές  $a = 0$ , ενώ με  $a \neq 0$  είναι εκείνες που αντιστοιχούν στο «στερεοποιημένο» όριο. Η λογική της βελτιστοποίησης τοπολογίας στη μηχανική των ρευστών οπτικοποιείται στο Σχ. 1.2.



**Σχ. 1.2.**

Βέλτιστες τοπολογίες ροής για την ελαχιστοποίηση (εδώ) των απωλειών ολικής πίεσης. Με το μπλε χρώμα φαίνονται τα σχηματιζόμενα κανάλια ροής ( $a = 0$ ) ενώ με το σκούρο χρώμα απεικονίζεται το «στερεοποιημένο» όριο ( $a \neq 0$ ). Στη μεν πρώτη γεωμετρία, από φυσικής άποψης, η βελτιστοποίηση τοπολογίας τείνει να σχηματίσει δύο διακριτά κανάλια ροής αποφεύγοντας την ανάμειξη (αρχικά) και των διαχωρισμό (τελικά) των ρευμάτων της ροής έτσι ώστε ν' αποτρέψει την αύξηση των απωλειών ολικής πίεσης. Στη δε δεύτερη γεωμετρία (αγωγός μεγαλύτερου μήκους απ' τον πάνω αγωγό), η βελτιστοποίηση τοπολογίας αρχικά αναμειγνύει τα ρεύματα του ρευστού και τελικά τα διαχωρίζει, καθώς οι απώλειες ολικής πίεσης ανάμειξης και διαχωρισμού σ' αυτή την περίπτωση, είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες γραμμικές στην περίπτωση που σχηματίζονταν, όπως στην άνω περίπτωση, δύο διακριτά κανάλια ροής.



# 2

## Διατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

---

Στο παρόν κεφάλαιο, αρχικά λαμβάνει χώρα η διατύπωση των εξισώσεων της ροής και των οριακών τους συνθηκών ενώ, κατάλληλοι όροι πηγής για τη «μοντελοποίηση» του πορώδους, εισάγονται σ' αυτές. • Στη συνέχεια, ύστερα από μια μακροσκελή μαθηματική ανάπτυξη με χρήση του θεωρήματος της απόκλισης και, με την υπόθεση της «παγωμένης» τυρβώδους συνεκτικότητας, παράγονται οι εξισώσεις του συζυγούς ροϊκού προβλήματος και οι αντίστοιχες συζυγείς οριακές τους συνθήκες. • Τέλος, διατυπώνεται η μαθηματική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας του προβλήματος ενώ, έμφαση δίνεται και στη φυσική ερμηνεία της. • Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να τονιστεί ότι η μαθηματική ανάπτυξη που ακολουθεί, έγινε προσπάθεια να κρατηθεί σε «γενικό επίπεδο» ως προς τις συναρτήσεις κόστους που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία, με στόχο την παραγωγή γενικών εκφράσεων. Με τον τρόπο αυτό, ο αναγνώστης μπορεί πολύ εύκολα να προσαρμόσει στις εξισώσεις τις δικές του συναρτήσεις κόστους, με την απλή αντικατάσταση μερικών όρων.

---

### 2.1. Εξισώσεις της ροής

Οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα ροής της παρούσης, αποτελούνται από τις μέσες κατά Reynolds εξισώσεις (Reynolds averaged mean flow equations) Navier-Stokes για ασυμπίεστες ροές, χωρίς μετάδοση θερμότητας και, το μοντέλο τύρβης δύο διαφορικών εξισώσεων  $k - \varepsilon$  υψηλών αριθμών Reynolds (high-Reynolds  $k - \varepsilon$  turbulence model). Οι τελευταίες, διατυπώνονται σε ταυστική μορφή (έτσι ώστε να παραχθούν εύκολα γενικές εκφράσεις τόσο για 2D όσο και για 3D προβλήματα) ως,

$$R^p \triangleq \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.1)$$

$$R_i^v \triangleq v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{\text{eff}}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{av_j}{ST1} = 0 \quad (2.2)$$

$$R^k \triangleq v_j \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( v + \frac{v_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - P_k + \varepsilon + \frac{ak}{ST2} = 0 \quad (2.3)$$

$$R^\varepsilon \triangleq v_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( v + \frac{v_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - c_1 f_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k + c_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{a\varepsilon}{ST3} = 0 \quad (2.4)$$

όπου για 2Δ ροές είναι  $i, j = 1, 2$ , για 3Δ  $i, j = 1, 2, 3$  ενώ, σύμφωνα με τη σύμβαση Einstein<sup>5</sup> επαναλαμβανόμενος δείκτης σημαίνει άθροιση των αντίστοιχων μεγεθών.

Στις εξ. (2.1) – (2.4), με  $v_i$  συμβολίζονται οι συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας,  $k$  είναι η τυρβώδης κινητική ενέργεια,  $\varepsilon$  η καταστροφή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας<sup>6</sup>,  $a$  το πορώδες,  $\nu$  η σταθερή κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού,  $p$  η κινηματική στατική πίεση (δηλαδή η στατική πίεση του ρευστού διαιρεμένη με τη σταθερή πυκνότητα αυτού<sup>7</sup>),

$$P_k \triangleq \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \nu_t \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2 \quad (3) \quad (2.5)$$

η παραγωγή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας και,  $\nu_t$  η τυρβώδης κινηματική συνεκτικότητα, η οποία υπολογίζεται από την αλγεβρική σχέση,

$$\nu_t = f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.6)$$

Τέλος, οι σταθερές που εμφανίζονται στο μοντέλο τύρβης σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, παίρνουν τις τιμές,

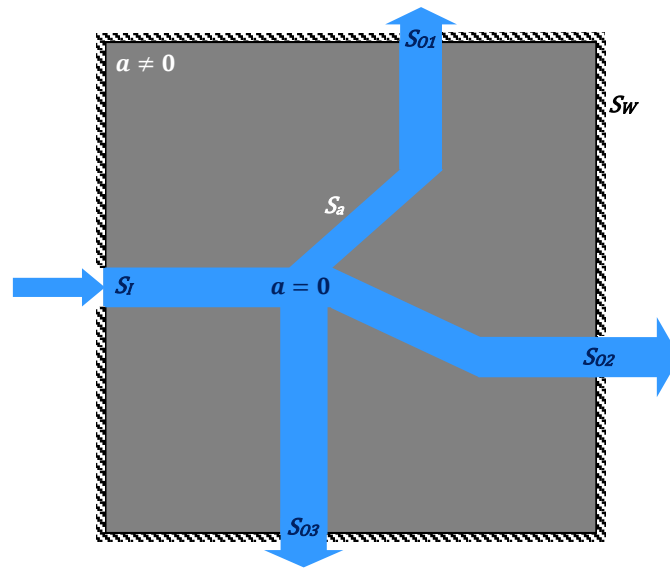
$$\{c_1 = 1.44, \quad c_2 = 1.92, \quad c_\mu = 0.09, \quad f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_\mu = 1, \quad Pr_k = 1.0, \quad Pr_\varepsilon = 1.3\}$$

Οι μέσες εξισώσεις της ροής λύνονται αριθμητικά (μαζί με τις οριακές τους συνθήκες που θα δούμε στην παράγραφο που ακολουθεί) στο διακριτοποιημένο χωρίο ροής με εφαρμογή του αλγορίθμου SIMPLE [1, 2, 16] στο OpenFOAM, ενώ οι εξισώσεις του μοντέλου τύρβης λύνονται απεμπλεγμένες απ' αυτές. Στους υπολογιστικούς κόμβους με μηδενικό πορώδες ( $a = 0$ ), οι όροι πηγής (ST1, ST2, ST3)  $av$ ,  $ak$ ,  $av_i$  «εξαφανίζονται» και οι κόμβοι αυτοί ανήκουν στο σωλήνα ροής, εφόσον οι τοπικές ροϊκές μεταβλητές ικανοποιούν τις «κλασικές» εξισώσεις ροής. Αντίθετα, στους υπολογιστικούς κόμβους όπου  $a \neq 0$  οι ροϊκές μεταβλητές μηδενίζονται, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ροϊκές εξισώσεις (2.1) – (2.4) και, συνεπώς, οι κόμβοι αυτοί ανήκουν στο «στερεοποιημένο» χωρίο ροής το οποίο και «αγκαλιάζει» το σωλήνα ροής (βλ. Σχ. 2.1).

<sup>5</sup> Η σύμβαση θα ακολουθείται και στο υπόλοιπο της εργασίας, εκτός κι αν αναφέρεται διαφορετικά.

<sup>6</sup> Η ποσότητα  $\varepsilon$  για την οποία λύνουμε το μοντέλο τύρβης  $k - \varepsilon$ , περιλαμβάνει μόνο το ισότροπο τμήμα της καταστροφής της τυρβώδους ενέργειας και όχι ολόκληρη την ενεργειακή καταστροφή της τύρβης [1, 3].

<sup>7</sup> Στην συνέχεια της εργασίας και για λόγους συντομίας, θα αναφέρεται ως στατική πίεση, εκτός κι αν επισημαίνεται κάτι διαφορετικό.



**Σχ. 2.1.** Απλοποιημένη σχηματική αναπαράσταση ενός πορώδους ροϊκού χωρίου και των ορίων του ( $S = S_I \cup S_{O1} \cup S_{O2} \cup S_{O3} \cup S_W \cup S_a$ ). Οι αλγόριθμοι τοπολογικής βελτιστοποίησης αναζητούν τη βέλτιστη διανομή του πορώδους  $a$ , με στόχο την ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης που έχει θεωρηθεί. Οι σκούρες περιοχές αποτελούν τμήματα του τελικού, «στερεοποιημένου» ορίου ( $a \neq 0$ ), το οποίο περιβάλλει (σηματοποιούμενο όριο  $S_a$ ) το σχηματιζόμενο κανάλι ροής (με το μπλε χρώμα) όπου  $a = 0$ .

## 2.2. Οριακές συνθήκες

Για τις περιπτώσεις εσωτερικών ροών, οι συνθήκες που «κλείνουν» μαθηματικά το σύστημα των εξισώσεων (2.1) – (2.4) στα όρια του πεδίου ροής είναι οι ακόλουθες: (α) στην είσοδο του πεδίου, Dirichlet *συνθήκη* για κάθε συνιστώσα του διανύσματος της ταχύτητας  $v_i$  και για τις μεταβλητές του μοντέλου τύρβης  $k$  και  $\varepsilon$  και, μηδενική Neumann για τη στατική πίεση, (β) στην έξοδο του πεδίου, μηδενική Neumann συνθήκη για τις μεταβλητές  $v_i$ ,  $k$  και  $\varepsilon$  και, μηδενική Dirichlet για την πίεση.

### 2.2.1. Το μοντέλο συναρτήσεων τοίχου

Στην παρούσα εργασία, η τεχνική των συναρτήσεων τοίχου χρησιμοποιείται για την επιβολή οριακών συνθηκών της ροής πάνω στο «στερεό όριο» [1, 3, 7, 8, 13]. Το σύστημα των εξισώσεων (2.3), (2.4) και (2.6) μπορεί να λυθεί, σε συνδυασμό με τις εξισώσεις που διέπουν τη μέση ροή (Εξ. (2.1) και Εξ. (2.2)), αν εφοδιαστεί με κατάλληλες οριακές συνθήκες. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι οριακές συνθήκες για τις ποσότητες του μοντέλου τύρβης  $k$  και  $\varepsilon$  στα στερεά τοιχώματα του πεδίου ροής και με αυτές θα ασχοληθούμε στην παρούσα παράγραφο.

Το σύστημα των εξισώσεων (2.3), (2.4) και (2.6) ισχύει μέχρι την περιοχή της λογαριθμικής κατανομής της ταχύτητας και για το λόγο αυτό ονομάζεται και μοντέλο τύρβης υψηλών αριθμών Reynolds. Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται το σύστημα των εξισώσεων αυτών, όπως εδώ, υπάρχει αδυναμία μοντελοποίησης της περιοχής πολύ κοντά στο στερεό τοίχωμα,

αφού οι εξισώσεις (2.3), (2.4) και (2.6) είναι ανεπαρκείς για την περιοχή αυτή. Έτσι, η επόμενη σειρά υπολογιστικών κόμβων μετά τους οριακούς κόμβους πρέπει να τοποθετηθεί μέσα στη λογαριθμική περιοχή και να καλυφθεί η απόσταση μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου μοντέλου με ένα τοπικό μοντέλο, που φέρεται με το όνομα «συναρτήσεις τοίχου». Με τη χρήση συναρτήσεων τοίχου, γίνεται οικονομία στον χρησιμοποιούμενο αριθμό κόμβων αφού δεν καλύπτεται με πολύ πυκνό πλέγμα η περιοχή κοντά στο στερεό τοίχωμα. Η τεχνική των συναρτήσεων τοίχου, σημαίνει ουσιαστικά την επιβολή οριακών συνθηκών στο γειτονικό του στερεού ορίου κόμβο, έστω  $P$ , κάτω από φυσικές παραδοχές που πηγάζουν από τη θεωρία των οριακών στρωμάτων.

Κατά τη διακριτοποίηση των εξισώσεων της μέσης ροής και του μοντέλου τύρβης στον όγκο ελέγχου του οριακού κόμβου  $P$ , λαμβάνεται υπόψη ότι το συνεκτικό διάνυσμα υπολογίζεται από την ταχύτητα τριβής  $v_\tau$ , η οποία ορίζεται ως,

$$v_\tau |v_\tau| = (v + v_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i = \tau_w \quad (2.7)$$

όπου  $t_i$ ,  $n_i$  είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος και μοναδιαίου κάθετου διανύσματος στο «στερεό τοίχωμα» αντίστοιχα και,  $\tau_w$  είναι η διατμητική τάση στον τοίχο.

Πιο συγκεκριμένα, η εσωτερική περιοχή του οριακού στρώματος υποδιαιρείται σε δύο υποπεριοχές, (α) τη γραμμική (στρωτό οριακό υπόστρωμα) και (β) τη λογαριθμική. Ανάλογα με την τιμή της αδιάστατης απόστασης  $y^+$  του κόμβου  $P$  από τον τοίχο, δηλαδή, ανάλογα με το αν βρισκόμαστε στη γραμμική ή λογαριθμική περιοχή του οριακού στρώματος, η αδιάστατη ταχύτητα  $v^+$ , δίνεται από τις σχέσεις,

$$v^+ \triangleq \frac{v}{v_\tau} = \begin{cases} y^+, & y^+ < y_c^+ \\ B + \frac{1}{\kappa} \log y^+, & y^+ \geq y_c^+ \end{cases} \quad (2.8)$$

όπου,

$$y^+ = \frac{\Delta v_\tau}{\nu}$$

και οι σταθερές  $\kappa$  και  $B$  παίρνουν τις τιμές,

$$\{\kappa = 0.41, \quad B = 5.5\}$$

ενώ, με  $\nu$ , συμβολίζεται κατά τα γνωστά το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας της ροής πάνω στον «τοίχο». Η τιμή της ποσότητας  $y_c^+$  προκύπτει από την αριθμητική επίλυση (λ.χ. με Newton-Raphson) της μη-γραμμικής εξίσωσης,

$$y_c^+ = B + \frac{1}{\kappa} \log y_c^+$$

Από τη σχέση (2.7) υπολογίζεται η ταχύτητα τριβής  $v_\tau$ . Έχοντας αρχικά υπολογίσει το μέτρο της ταχύτητας  $v$  από την επίλυση των εξισώσεων της μέσης ροής, από την έκφραση (2.8) υπολογίζεται η ταχύτητα τριβής, είτε εκτελώντας μια επαναληπτική διαδικασία λύνοντας τη μη-γραμμική εξίσωση (περιοχή του λογαριθμικού νόμου),



$$\frac{v}{v_\tau} = B + \frac{1}{\kappa} \log\left(\frac{\Delta v_\tau}{\nu}\right)$$

είτε άμεσα από την απλή εξίσωση (γραμμική περιοχή),

$$\frac{v}{v_\tau} = \frac{\Delta v_\tau}{\nu}$$

Σε ότι αφορά τη στατική πίεση, από τη θεωρία του οριακού στρώματος είναι γνωστό ότι η κλίση της κάθετα στο τοίχωμα είναι μηδενική (μηδενική συνθήκη Neumann). Τα προηγούμενα, βεβαίως, αφορούν τις μεταβλητές της μέσης ροής. Αντίστοιχα λοιπόν, θα πρέπει να επιβληθούν οριακές συνθήκες και για τις μεταβλητές του μοντέλου τύρβης.

Στον οριακό κόμβο  $P$ , αν κι εφόσον αυτός τοποθετείται εντός της λογαριθμικής περιοχής, λαμβάνεται ότι ισχύει η θεώρηση της ισορροπίας της τύρβης, δηλαδή, ότι η παραγωγή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας είναι ίση με το ρυθμό καταστροφής της. Από την θεώρηση αυτή και γνωρίζοντας την ταχύτητα τριβής, μπορούν να επιβληθούν οι ακόλουθες συνθήκες Dirichlet για το  $k$  και το  $\varepsilon$ ,

$$k = \frac{v_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}} \quad (2.9)$$

$$\varepsilon = \frac{v_\tau^3}{\kappa \Delta} \quad (2.10)$$

Στην περίπτωση που ο κόμβος  $P$  βρίσκεται στο γραμμικό οριακό υπόστρωμα, τότε η παραδοχή ότι η παραγωγή του  $k$  ισούται με το ρυθμό διάχυσής του δεν ευσταθεί και, επομένως, η επιβολή οριακών συνθηκών για τα μεγέθη της τύρβης πρέπει να γίνει διαφορετικά. Πολύ κοντά στον τοίχο ισχύει ότι,

$$k \propto y^2$$

Από την παραπάνω έκφραση αναλογίας και γνωρίζοντας ότι για  $y^+ = y_c^+$  ισχύει η έκφραση (2.9) και ότι για  $y^+ = 0$  είναι  $k = 0$ , προκύπτει ότι,

$$k = \frac{v_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}} \left(\frac{y^+}{y_c^+}\right)^2 \quad (2.11)$$

Η τελευταία προέκυψε υπό τη θεώρηση ότι η σχέση αναλογίας  $k \propto y^2$  ισχύει εκτός από την περιοχή του στρωτού οριακού υποστρώματος και για  $y^+ = y_c^+$ . Για την οριακή συνθήκη της καταστροφής της τυρβώδους κινητικής ενέργειας  $\varepsilon$ , χρησιμοποιείται η προσέγγιση του μοντέλου μιας εξίσωσης των Norris-Reynolds,

$$\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{l_\varepsilon} \quad (2.12)$$

με την κλίμακα μήκους των Norris και Reynolds  $l_\varepsilon$ , να δίνεται από τη σχέση,

$$l_\varepsilon = \frac{c_l \Delta}{1 + \frac{5.3}{Re_t}} \quad (2.13)$$

όπου οι συντελεστές  $c_l$  και  $Re_t$  που εμφανίζονται σ' αυτή, δίνονται από τις σχέσεις,

$$c_l = \frac{\kappa}{c_\mu^{3/4}}$$

και,

$$Re_t = \frac{\Delta\sqrt{k}}{\nu}$$

αντίστοιχα.

### 2.3. Μερικές χρήσιμες ταυτότητες<sup>[9]</sup>

Αποδεικνύεται ότι η ολική μεταβολή (global variation) μιας οποιασδήποτε ροϊκής ποσότητας, ως προς μια οποιαδήποτε μεταβλητή σχεδιασμού, εκφράζεται ως το άθροισμα της άμεσης ( $\partial$ ) και της πλεγματικής μεταβολής και, δίνεται από τη σχέση,

$$\frac{\delta\Phi}{\delta a} = \frac{\partial\Phi}{\partial a} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta a}, \quad k = 1,2 \quad (3) \quad (2.14)$$

ενώ, για την ολική μεταβολή ενός στοιχειώδη όγκου, ισχύει,

$$\frac{\delta}{\delta a}(d\Omega) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\delta x_k}{\delta a} \right) d\Omega, \quad k = 1,2 \quad (3) \quad (2.15)$$

Στα προβλήματα τοπολογικής βελτιστοποίησης το χωρίο ροής και συνακόλουθα, το αντίστοιχο υπολογιστικό πλέγμα, παραμένουν αμετάβλητα και, συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε ότι,

$$\frac{\delta x_k}{\delta a} = 0$$

Βάσει της προηγούμενης, οι σχέσεις (2.15) και (2.16) διαμορφώνονται τελικά ως,

$$\frac{\delta\Phi}{\delta a} \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial a} \quad (2.14')$$

και,

$$\frac{\delta}{\delta a}(d\Omega) = 0 \quad (2.15')$$

με τη σχέση (2.14') να υπονοεί, ότι τα σύμβολα της ολικής ( $\delta$ ) και της άμεσης ( $\partial$ ) μεταβολής, μπορούν κατά βούληση να εναλλάσσονται.

## 2.4. Η υπόθεση της «παγωμένης» τυρβώδους συνεκτικότητας<sup>[8, 12]</sup>

Όπως είναι γνωστό, στις τυρβώδεις ροές οι εξισώσεις της μέσης ροής μαζί με την εξίσωση, ή τις εξισώσεις, του μοντέλου τύρβης, αποτελούν τις εξισώσεις κατάστασης του προβλήματος. Το γεγονός αυτό υπαγορεύει ότι, στο συζυγές πρόβλημα, κατά αντιστοιχία με τις μεταβολές των μεταβλητών της μέσης ροής, πρέπει να ληφθούν υπόψη και οι ρυθμοί μεταβολής των μεταβλητών του μοντέλου τύρβης. Στη διεθνή βιβλιογραφία η συνηθέστερη αντιμετώπιση, η οποία θα ακολουθηθεί και στην παρούσα, είναι να αμελώνται οι μεταβολές αυτές, υποθέτοντας «παγωμένη» ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, τυρβώδη συνεκτικότητα  $\nu_t$ .

Με την παραπάνω παραδοχή, η μαθηματική διατύπωση των συζυγών εξισώσεων καθίσταται πιο απλή, η τελική έκφραση για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας είναι κι αυτή απλούστερη, ενώ, τέλος, δεν απαιτείται η αριθμητική επίλυση της ή των επιπλέον συζυγών εξισώσεων για το συζυγές του μοντέλου τύρβης. Παρόλα αυτά, εφαρμόζοντας την παραδοχή αυτή, οδηγούμαστε συχνά σε εκτιμήσεις των παραγώγων ευαισθησίας οι οποίες διαφέρουν ελαφρά από την πραγματική τους τιμή<sup>8</sup>.

Για το μοντέλο τύρβης  $k - \varepsilon$  που χρησιμοποιείται σ' αυτή την εργασία, η παραπάνω θεώρηση, μεταφράζεται μαθηματικά ως,

$$\frac{\delta \varepsilon}{\delta \alpha} = \frac{\delta k}{\delta \alpha} = 0$$

ενώ, παραγωγίζοντας την σχέση (2.6), παίρνουμε επίσης ότι,

$$\frac{\delta \nu_t}{\delta \alpha} = f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \left( 2 \frac{\delta k}{\delta \alpha} - \frac{k}{\varepsilon} \frac{\delta \varepsilon}{\delta \alpha} \right) = 0$$

Βάσει της σχέσης (2.14'), οι τελευταίες μπορούν να γραφούν εκτός από την ολική και για την άμεση μεταβολή, ή,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} = \frac{\partial k}{\partial \alpha} = \frac{\partial \nu_t}{\partial \alpha} = 0$$

γεγονός που υποδεικνύει, ότι οι μεταβλητές του μοντέλου τύρβης δεν είναι συναρτήσεις των μεταβλητών σχεδιασμού. Η τελευταία παρατήρηση είναι πολύ χρήσιμη για την εξαγωγή της γενικής έκφρασης της παραγώγου ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης, όπως άλλωστε θα δειχθεί και στην επόμενη παράγραφο.

## 2.5. Συνάρτηση κόστους<sup>[8]</sup>

Πριν την παρουσίαση της συνάρτησης κόστους η οποία χρησιμοποιήθηκε σ' αυτή την εργασία, θα παρουσιαστεί σε μια πρώτη φάση η γενική περίπτωση, κατά την οποία, η συνάρτηση κόστους αποτελείται από ολοκληρώματα ροϊκών ποσοτήτων στα όρια  $S$  και στο εσωτερικό  $\Omega$  του πεδίου ροής. Μια τέτοια συνάρτηση κόστους, γράφεται, γενικά, στη μορφή,

---

<sup>8</sup> Μόνο σε πολύ απλές περιπτώσεις και με αλγεβρικά μοντέλα τύρβης η παραδοχή της «παγωμένης» τυρβώδους συνεκτικότητας μπορεί να οδηγήσει σε σχετικά ακριβή υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας.

$$F = \int_S F_s dS + \int_\Omega F_\Omega d\Omega$$

όπου με  $F_s$  και  $F_\Omega$  συμβολίστηκαν οι προς ολοκλήρωση ποσότητες στο  $S$  και στο  $\Omega$  αντίστοιχα.

Αν το όριο αποτελείται από διάφορα τμήματα, έστω είσοδο  $S_I$ , έξοδο  $S_O$  και στερεό τοίχωμα  $S_W$ , δηλαδή,  $S \equiv \partial\Omega = S_I \cup S_O \cup S_W$ , τότε, για κάθε τμήμα του ορίου, προκειμένου να γίνει διαχωρισμός, η ποσότητα  $F_s$  θα γράφεται ως  $F_{S_I}$ ,  $F_{S_O}$ ,  $F_{S_W}$ . Είναι προφανές ότι στη γενική περίπτωση θα ισχύει  $F_{S_I} \neq F_{S_O} \neq F_{S_W}$ . Στην περίπτωση δε, που το όριο  $S$  αποτελείται και από άλλα, διαφορετικά μεταξύ τους τμήματα, θα ισχύουν τα ανάλογα και γι αυτά.

Η παράγωγος ευαισθησίας του παραπάνω γενικευμένου συναρτησιακού, δίνεται από την έκφραση,

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta \alpha} &= \frac{\delta}{\delta \alpha} \left( \int_S F_s dS + \int_\Omega F_\Omega d\Omega \right) = \\ &= \frac{\delta}{\delta \alpha} \int_S F_s dS + \frac{\delta}{\delta \alpha} \int_\Omega F_\Omega d\Omega = \\ &= \int_S \frac{\delta}{\delta \alpha} (F_s dS) + \int_\Omega \frac{\delta}{\delta \alpha} (F_\Omega d\Omega) \end{aligned}$$

ή,

$$\frac{\delta F}{\delta \alpha} = \int_S \frac{\delta F_s}{\delta \alpha} ds + \int_S F_s \frac{\delta}{\delta \alpha} (ds) + \int_\Omega \frac{\delta F_\Omega}{\delta \alpha} d\Omega + \int_\Omega F_\Omega \frac{\delta}{\delta \alpha} (d\Omega)$$

Είναι εύκολο να υποθέσουμε, ότι κατά αντιστοιχία με τη σχέση (2.15'), έτσι και η μεταβολή οποιασδήποτε στοιχειώδους επιφάνειας είναι μηδενική, ήτοι,

$$\frac{\delta}{\delta \alpha} (dS) = 0$$

Με βάση την προηγούμενη και τις σχέσεις (2.14') και (2.15'), η τελευταία ολοκληρωτική σχέση γράφεται ως,

$$\frac{\delta F}{\delta \alpha} = \int_S \frac{\partial F_s}{\partial \alpha} ds + \int_\Omega \frac{\partial F_\Omega}{\partial \alpha} d\Omega$$

Όπως αναφέραμε και στην αρχή της παραγράφου, οι ποσότητες  $F_s$  και  $F_\Omega$  αποτελούν γενικά συνάρτηση των ροικών μεταβλητών (και όχι άμεσα των μεταβλητών σχεδιασμού), ήτοι,

$$F_s = F_s(p, \mathbf{v}, k, \varepsilon)$$

και,

$$F_\Omega = F_\Omega(p, \mathbf{v}, k, \varepsilon)$$

και επομένως, η μερική παράγωγος αυτών ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, δίνεται από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$\frac{\partial F_s}{\partial \alpha} = \frac{\partial F_s}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_s}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_s}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_s}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}$$

και,

$$\frac{\partial F_\Omega}{\partial \alpha} = \frac{\partial F_\Omega}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}$$

ή, λόγω της υπόθεσης της «παγωμένης» τυρβώδους συνεκτικότητας,

$$\frac{\partial F_s}{\partial \alpha} = \frac{\partial F_s}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_s}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \alpha}$$

και,

$$\frac{\partial F_\Omega}{\partial \alpha} = \frac{\partial F_\Omega}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \alpha}$$

με τις τελευταίες να μπορούν να γραφούν και στην πολύ πιο βολική, ταυστική μορφή,

$$\frac{\partial F_s}{\partial \alpha} = \frac{\partial F_s}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_s}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha}, \quad i = 1,2 \quad (3)$$

και,

$$\frac{\partial F_\Omega}{\partial \alpha} = \frac{\partial F_\Omega}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha}, \quad i = 1,2 \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις δύο τελευταίες στην παράγωγο ευαισθησίας του συναρτησιακού, παίρνουμε την τελική, γενική του έκφραση,

$$\frac{\delta F}{\delta \alpha} = \int_S \frac{\partial F_s}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \alpha} dS + \int_S \frac{\partial F_s}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} dS + \int_\Omega \frac{\partial F_\Omega}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \alpha} d\Omega + \int_\Omega \frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} d\Omega \quad (2.16)$$

όπου  $i = 1,2$  (3).

### 2.5.1. Ελαχιστοποίηση απωλειών ολικής πίεσης<sup>81</sup>

Συχνά, σε προβλήματα εσωτερικής αεροδυναμικής, επιδιώκεται ο σχεδιασμός βέλτιστης αεροδυναμικής μορφής ελαχιστοποιώντας τις απώλειες ολικής πίεσης της ροής που διαρρέει τη σχετική γεωμετρία, για συγκεκριμένες συνθήκες ροής. Δηλαδή, επιθυμείται η ελαχιστοποίηση της διαφοράς ολικής πίεσης μεταξύ της εισόδου ( $S_I$ ) και της εξόδου ( $S_O$ ) του χωρίου ροής (για προβλήματα όπου προφανώς δεν υπάρχει συναλλαγή έργου). Ενδεικτικές εφαρμογές είναι η

ελαχιστοποίηση των απωλειών λόγω συνεκτικότητας στην ακίνητη περυγώση μιας στροβιλομηχανής ή, όπως στην περίπτωση αυτής της εργασίας, σε έναν αγωγό.

Οι οριακές συνθήκες που διέπουν το πρόβλημα της ροής, όπως είδαμε άλλωστε και στην αντίστοιχη παράγραφο, είναι για την εισοδο του χωρίου καθορισμένη κατανομή της ταχύτητας και, για την έξοδο, καθορισμένη τιμή στατικής πίεσης (που συνήθως τίθεται ίση με μηδέν, αφού αυτό που στην ουσία ενδιαφέρει είναι η μανομετρική πίεση και όχι η απόλυτη).

Η συνάρτηση κόστους αποτελείται μόνο από συνοριακά ολοκληρώματα και εκφράζεται ως ακολούθως,

$$F = \int_{S_{I,O}} F_{S_{I,O}} dS = \int_{S_I} F_{S_{I,O}} dS + \int_{S_O} F_{S_{I,O}} dS$$

όπου η προς ολοκλήρωση ποσότητα  $F_{S_{I,O}}$  στα όρια εισόδου και εξόδου του χωρίου δίνεται από την έκφραση,

$$F_{S_{I,O}} = -\left(p + \frac{1}{2}v^2\right)v_i n_i, \quad i = 1,2 \quad (2.17)$$

Εδώ, με  $v = \|\mathbf{v}\|$  συμβολίζουμε το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας ενώ με  $n_i$  τις συνιστώσες του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος στην επιφάνεια της εισόδου και της εξόδου. Η παραπάνω ποσότητα εκφράζει την ολική πίεση πολλαπλασιασμένη με την παροχή μάζας (και προκειμένου για ασυμπίεστη ροή την παροχή όγκου) του ρευστού που διέρχεται από στοιχειώδη διατομή της εισόδου ή εξόδου του πεδίου ροής. Το αρνητικό πρόσημο υφίσταται λόγω του ότι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα κατευθύνεται εξ ορισμού προς το εξωτερικό του πεδίου ροής.

Παραγωγίζοντας τη σχέση (2.17) ως προς τις ροϊκές μεταβλητές της πίεσης και της ταχύτητας, παίρνουμε τις ακόλουθες εκφράσεις,

$$\frac{\partial F_{S_{I,O}}}{\partial p} = -v_i n_i, \quad i = 1,2 \quad (3)$$

και,

$$\frac{\partial F_{S_{I,O}}}{\partial v_i} = -\frac{1}{2}v^2 n_i - v_{(n)}v_i - p n_i, \quad i = 1,2 \quad (3)$$

όπου με  $v_{(n)}$  συμβολίζεται η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας, δηλαδή ισχύει ότι,

$$v_{(n)} = v_i n_i$$

Με βάση λοιπόν τις παραπάνω, η παράγωγος ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης, σχέση (2.16), παίρνει την ακόλουθη μορφή (προφανώς εδώ ισχύει ότι  $F_\Omega = 0$ ),

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta \alpha} = & - \int_{S_I} \left[ \left( p + \frac{1}{2}v^2 \right) n_i + v_{(n)}v_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} dS - \int_{S_I} v_i n_i \frac{\partial p}{\partial \alpha} dS + \\ & - \int_{S_O} \left[ \left( p + \frac{1}{2}v^2 \right) n_i + v_{(n)}v_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} dS - \int_{S_O} v_i n_i \frac{\partial p}{\partial \alpha} dS \end{aligned}$$

Όπως προαναφέρθηκε, στην είσοδο του χωρίου ροής επιβάλλεται καθορισμένη κατανομή ταχύτητας (συνθήκη Dirichlet για το  $v_i$ ). Επομένως, αφού η παραπάνω οριακή συνθήκη είναι ανεξάρτητη από τις μεταβολές των μεταβλητών σχεδιασμού, η ολική μεταβολή του διανύσματος της ταχύτητας σε κάθε θέση της εισόδου είναι μηδενική,

$$\frac{\delta v_i}{\delta a} = 0, \quad i = 1,2 \text{ (},3\text{)}$$

και, λόγω της (2.14') θα είναι και,

$$\frac{\partial v_i}{\partial a} = 0, \quad i = 1,2 \text{ (},3\text{)}$$

Αντίστοιχα, στην έξοδο του χωρίου ροής επιβάλλεται συνθήκη Dirichlet για τη στατική πίεση, και επομένως, αφού κι αυτή η οριακή συνθήκη είναι ανεξάρτητη των μεταβολών των μεταβλητών σχεδιασμού, κατ' αντιστοιχία με το διάνυσμα της ταχύτητας στην είσοδο, θα ισχύει:

$$\frac{\delta p}{\delta a} = 0$$

και, λόγω της (2.14'),

$$\frac{\partial p}{\partial a} = 0$$

Οπότε τελικά, η παράγωγος ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης παίρνει την τελική μορφή,

$$\frac{\delta F}{\delta a} = - \int_{S_I} v_i n_i \frac{\partial p}{\partial a} dS - \int_{S_O} \left( \frac{1}{2} v^2 n_i + v_{(n)} v_i \right) \frac{\partial v_i}{\partial a} dS, \quad i = 1,2 \text{ (},3\text{)} \quad (2.18)$$

όπου θέσαμε την πίεση στο ολοκλήρωμα της εξόδου ίση με μηδέν (λόγω της μηδενικής συνθήκης Dirichlet).

## 2.6. Εισαγωγή των συζυγών μεταβλητών<sup>8)</sup>

Στη γενικότητά του, η επίλυση ενός προβλήματος βέλτιστου σχεδιασμού/βελτιστοποίησης μιας αεροδυναμικής/υδροδυναμικής μορφής ως προς ένα προκαθορισμένο κριτήριο, εκφρασμένο μαθηματικά όπως είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους από μια συνάρτηση κόστους<sup>9</sup> της γενικής μορφής,

$$F = F(\mathbf{a}, \mathbf{U}(\mathbf{a}))$$

<sup>9</sup> Στα προβλήματα μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης, η συνάρτηση κόστους (ή αντικειμενική συνάρτηση) ταυτίζεται με τη συνάρτηση στόχο (ή αλλιώς συναρτησιακό) και, συνεπώς, οι δύο όροι είναι εναλλάξιμοι.

υλοποιείται μέσω της ελαχιστοποίησης της συνάρτησης  $F$  στο χώρο λύσεων των μεταβλητών σχεδιασμού  $\mathbf{a}$ . Όπως είναι προφανές, η συνάρτηση κόστους συναρτάται των μεταβλητών ροής  $\mathbf{U}$  και των μεταβλητών σχεδιασμού  $\mathbf{a}$ , οι οποίες καθορίζουν τη γεωμετρία της προς σχεδιασμό μορφής. Η εξάρτηση της συνάρτησης κόστους από τις μεταβλητές σχεδιασμού είναι διττή και διαμορφώνει ένα πρόβλημα ελέγχου αφού, η τιμή της συνάρτησης κόστους εξαρτάται αφενός (α) άμεσα (μέσω της μαθηματικής της έκφρασης) απ' αυτές και (β) από τη ροϊκή λύση  $\mathbf{U}$ , η οποία επίσης αποτελεί συνάρτηση του διάνυσματος  $\mathbf{a}$ . Το  $\mathbf{U}$ , όπως είναι φυσικό, μεταβάλλεται αν μεταβληθούν οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού, αν αλλάξει δηλαδή η «γεωμετρία» της προς σχεδιασμό μορφής και ικανοποιηθούν εκ νέου οι εξισώσεις κατάστασης στο τροποποιημένο χωρίο ροής. Συνεπώς, οι μεταβλητές σχεδιασμού  $\mathbf{a}$  ελέγχουν την τιμή της συνάρτησης κόστους.

Όπως είναι προφανές, στην περίπτωση αυτής της εργασίας, το ροϊκό διάνυσμα  $\mathbf{U}$  έχει τη μορφή,

$$\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{5,6}, \quad \mathbf{U} = (p \quad \mathbf{v} \quad k \quad \varepsilon)^T$$

ως μεταβλητή σχεδιασμού επιλέγεται (όπως σίγουρα έχει προφανεί και από τις προηγούμενες παραγράφους) το πορώδες  $a$ , ή,

$$\mathbf{a} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{a} = [a]^T \equiv a$$

ενώ, ως διάνυσμα εξισώσεων κατάστασης επιλέγεται το διάνυσμα των υπολοίπων των (διακριτοποιημένων) εξισώσεων ροής (2.1) – (2.4),

$$\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{5,6}, \quad \mathbf{R} = (R^p \quad R^v \quad R^k \quad R^\varepsilon)^T$$

Πρέπει στο σημείο αυτό να τονιστεί, ότι η μεταβλητή του πορώδους  $a$  δεν αποτελεί μέρος του ροϊκού διανύσματος, αφού η τιμή της, προκύπτει, όπως θα φανεί και στη συνέχεια, από τη μέθοδο βελτιστοποίησης, και όχι από την επίλυση των εξισώσεων της ροής.

Αφετηρία για τη διατύπωση του συζυγούς προβλήματος, αποτελεί ο ορισμός της επαυξημένης συνάρτησης κόστους (augmented cost function)  $F_{aug}$ . Αυτή δημιουργείται από την πρόσθεση στη συνάρτηση κόστους του χωρικού (στο πεδίο ροής) ολοκληρώματος, των εξισώσεων κατάστασης πολλαπλασιασμένων με πολλαπλασιαστές Lagrange. Οι τελευταίοι αποδεικνύεται ότι ταυτίζονται με τις επονομαζόμενες συζυγείς μεταβλητές (adjoint ή co-state variables). Σύμφωνα λοιπόν με τα ανωτέρω, η επαυξημένη συνάρτηση κόστους ορίζεται «διανυσματικά» ως,

$$F_{aug} \triangleq F + \int_{\Omega} \boldsymbol{\Psi} \cdot \mathbf{R}^T d\Omega$$

Όπως προαναφέρθηκε, στο δεξί μέλος της τελευταίας προστίθεται το ολοκλήρωμα, στο πεδίο ροής  $\Omega$ , των υπολοίπων των εξισώσεων ροής (εξισώσεις κατάστασης), πολλαπλασιασμένων με το διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών,

$$\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{5,6}, \quad \boldsymbol{\Psi} = (q \quad \mathbf{u} \quad 0 \quad 0)^T$$

Με  $q$  και  $\mathbf{u}$  συμβολίζονται, αντιστοίχως, οι συζυγείς ως προς την πίεση και το διάνυσμα της ταχύτητας, μεταβλητές, ενώ, λόγω της υπόθεσης της «παγωμένης» τυρβώδους συνεκτικότητας, οι αντίστοιχες, ως προς τις μεταβλητές του μοντέλου τύρβης, συζυγείς μεταβλητές, είναι



μηδενικές<sup>10</sup>. Με τον ορισμό του διανύσματος  $\Psi$  όπως ανωτέρω και εκτελώντας το εσωτερικό γινόμενο  $\Psi \cdot \mathbf{R}^T$ , η έκφραση της επαυξημένης συνάρτησης κόστους, μπορεί να γραφεί σε ταυστική μορφή και, «χωριστά» για τις εξισώσεις της ορμής και αυτής της συνέχειας ως,

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} qR^p d\Omega + \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.19)$$

Σκοπός της συζυγούς μεθόδου είναι να υπολογιστεί η παράγωγος ευαισθησίας  $\delta F / \delta a$ , η οποία εκφράζει τη μεταβολή της συνάρτησης κόστους  $F$  ως προς την ενδεχόμενη μεταβολή της μεταβλητής σχεδιασμού  $a$ . Στα προβλήματα βελτιστοποίησης, οι παράγωγοι ευαισθησίας επικουρούν μια αιτιοκρατική μέθοδο βελτιστοποίησης για την επίλυση του προβλήματος ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού  $F$ . Στο πρόβλημα που αντιμετωπίζει η εργασία αυτή, δεν υπάρχουν περιορισμοί. Σε αντίθετη περίπτωση, η βέλτιστη λύση που θα προέκυπτε από τη μέθοδο βελτιστοποίησης, θα έπρεπε να πληροί και τους περιορισμούς αυτούς.

Δεδομένου ότι σε κάθε φάση της βελτιστοποίησης επιθυμούμε/απαιτούμε η τρέχουσα ροϊκή λύση  $\mathbf{U}$  να ικανοποιεί τις εξισώσεις της ροής (2.1) - (2.4), το διάνυσμα των υπολοίπων των εξισώσεων κατάστασης  $\mathbf{R}$  είναι μηδέν,

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{0}$$

και επομένως, τα χωρικά ολοκληρώματα στο δεύτερο μέλος της (2.19) είναι κι αυτά μηδέν και, τελικά, αντί της παραγωγού ευαισθησίας της συνάρτησης κόστους  $\delta F / \delta a$ , αρκεί να υπολογίσουμε την παράγωγο της επαυξημένης συνάρτησης κόστους  $\delta F_{aug} / \delta a$ . Στα επόμενα, οι δύο αυτές γραφές των παραγωγών ευαισθησίας θα χρησιμοποιούνται αδιακρίτως.

Ο εν λόγω ρυθμός μεταβολής γράφεται ως,

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta a} &= \frac{\delta}{\delta a} \left( F + \int_{\Omega} qR^p d\Omega + \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega \right) = \\ &= \frac{\delta F}{\delta a} + \frac{\delta}{\delta a} \int_{\Omega} qR^p d\Omega + \frac{\delta}{\delta a} \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega = \\ &= \frac{\delta F}{\delta a} + \int_{\Omega} \frac{\delta}{\delta a} (qR^p d\Omega) + \int_{\Omega} \frac{\delta}{\delta a} (u_i R_i^v d\Omega) \end{aligned}$$

και εκτελώντας τις παραγωγίσεις εντός των ολοκληρωμάτων παίρνουμε,

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta a} &= \frac{\delta F}{\delta a} + \int_{\Omega} \frac{\delta q}{\delta a} R^p d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta a} d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\delta u_i}{\delta a} R_i^v d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\delta R_i^v}{\delta a} d\Omega + \int_{\Omega} (qR^p + u_i R_i^v) \frac{\delta}{\delta a} (d\Omega) \end{aligned}$$

<sup>10</sup> Αν δεν είχαμε κάνει την υπόθεση της «παγωμένης τυρβώδους συνεκτικότητας», τότε, το διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών  $\Psi$  θα είχε τη μορφή,

$$\Psi = (q \quad \mathbf{u} \quad k_a \quad \varepsilon_a)^T$$

όπου με  $k_a$ ,  $\varepsilon_a$  συμβολίζονται οι συζυγείς μεταβλητές ως προς αυτές του μοντέλου τύρβης  $k$  και  $\varepsilon$  αντίστοιχα.

Γενικά, στη διατύπωση της συζυγούς μεθόδου, στόχος μας είναι να «εξαφανίσουμε» οποιαδήποτε ποσότητα εκφράζει ρυθμό μεταβολής ροϊκής μεταβλητής, είτε πρωτεύουσας είτε συζυγούς. Για το λόγο αυτό και, επειδή, όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω, οι εξισώσεις της ροής απαιτούμε να ικανοποιούνται, το πρώτο και το τρίτο χωρικό ολοκλήρωμα «βολικά» εξαφανίζονται, και η έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας απλοποιείται στην,

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta a} = \frac{\delta F}{\delta a} + \int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta a} d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\delta R_i^v}{\delta a} d\Omega + \int_{\Omega} (qR^p + u_i R_i^v) \frac{\delta}{\delta a} (d\Omega)$$

ενώ, λόγω των (2.14') και (2.15'), αυτή τελικά γράφεται ως,

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta a} = \frac{\delta F}{\delta a} + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial a} d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial a} d\Omega, \quad i, j = 1, 2 \quad (3) \quad (2.20)$$

Στη σχέση (2.20) καταφέραμε τελικά να εμφανίζονται μόνο οι άμεσες μεταβολές των εξισώσεων κατάστασης,  $\partial R^p / \partial a$  και  $\partial R_i^v / \partial a$ . Η εμπλοκή των άμεσων μεταβολών  $\partial / \partial a$ , αντί των ολικών  $\delta / \delta a$ , είναι εξαιρετικά βολική, αφού, έχοντας αντικαταστήσει τις αναλυτικές εκφράσεις των εξισώσεων της συνέχειας και της ορμής, επιτρέπεται πλέον η εναλλαγή της σειράς παραγωγίσης στους όρους εκείνους με μικτές παραγώγους των μεταβλητών της ροής  $\mathbf{U}$  ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και τις χωρικές συντεταγμένες. Δηλαδή, ισχύει ότι,

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial a} \right), \quad k = 1, 2 \quad (3)$$

Η τελευταία αποτελεί απόρροια του γεγονότος ότι η άμεση μεταβολή  $\partial / \partial a$  είναι απεμπλεγμένη από οποιαδήποτε χωρική μετατόπιση  $\delta x_k$ .

Στην έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας (2.20), ο υπολογισμός της άμεσης μεταβολής  $\partial \mathbf{U} / \partial a$ <sup>11</sup> για την υπάρχουσα γεωμετρία αποτελεί την πιο απαιτητική, από άποψη υπολογιστικού κόστους, διαδικασία. Ο υπολογισμός απαιτεί είτε (α) τη μέθοδο της ευθείας διαφόρισης, είτε (β) τη χρήση πεπερασμένων διαφορών. Στην τελευταία περίπτωση μάλιστα, πρόκειται ουσιαστικά για μια διαφορετική χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών, όπου υπολογίζονται με πεπερασμένες διαφορές οι ποσότητες  $\partial \mathbf{U} / \partial a$  και, μετά, εισάγονται στην εξίσωση (2.20) αντί για τον απευθείας υπολογισμό της  $\delta F / \delta a$  από την έκφραση της  $F$ , που είναι και η συνήθης τακτική, μιας και πρόκειται για μια λιγότερο πολύπλοκη διαδικασία σε σύγκριση με αυτήν που περιγράφηκε προηγουμένως.

Με την εφαρμογή όμως της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, η οποία θα περιγραφεί στην επόμενη παράγραφο, επιτυγχάνεται η απαλοιφή των όρων  $\partial \mathbf{U} / \partial a$  από την ολοκληρωτική εξίσωση (2.20) όταν δεν είναι εκ των προτέρων γνωστοί και, συνεπώς, είναι εφικτό να υπολογιστεί η ολική μεταβολή  $\delta F_{aug} / \delta a$  χωρίς να απαιτείται η επίλυση της ροής σε κάθε στοιχειωδώς τροποποιημένο κατά  $\delta a$  χωρίο ροής (μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών) ή, η επίλυση των γραμμικοποιημένων εξισώσεων ροής (μέθοδος ευθείας διαφόρισης). Στην απαλοιφή των προαναφερθέντων όρων οφείλεται η δυνατότητα της συζυγούς μεθόδου να υπολογίζει με μειωμένο υπολογιστικό κόστος τις παραγώγους ευαισθησίας, ανεξάρτητα από το πλήθος αυτών.

<sup>11</sup> Προφανώς, λόγω της υπόθεσης της «παγωμένης» τυρβώδους συνεκτικότητας, στις ολοκληρωτικές εξισώσεις θα εμφανίζονται μόνο οι όροι των μεταβολών της ταχύτητας και της πίεσης,  $\partial \mathbf{u} / \partial a$  και  $\partial p / \partial a$  αντίστοιχα.

## 2.7. Διατύπωση της συζυγούς μεθόδου<sup>[8, 11]</sup>

Όπως περιγράψαμε και προηγούμενως, στην έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας της επαυξημένης συνάρτησης, Εξ. (2.20), εμφανίζονται οι άμεσες μεταβολές των υπολοίπων των εξισώσεων της συνέχειας και της ορμής, δηλαδή οι ποσότητες,

$$\frac{\partial R^p}{\partial a}$$

και,

$$\frac{\partial R_i^v}{\partial a}$$

αντίστοιχα. Για τη διατύπωση των συζυγών εξισώσεων, οι εν λόγω ποσότητες πρέπει να αντικατασταθούν με τις αναλυτικές τους εκφράσεις, όπως αυτές υπολογίζονται από τη διαφόριση  $\partial/\partial a$ , των εξισώσεων της ροής (2.1) και (2.2). Επομένως, από τις προαναφερθείσες εξισώσεις και με χρήση του συμπεράσματος της προηγούμενης παραγράφου για την εναλλαγή της σειράς της παραγωγίσης, παίρνουμε διαδοχικά:

- Εξίσωση συνέχειας,  $R^p = 0$

$$\frac{\partial R^p}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right)$$

ή, τελικά,

$$\frac{\partial R^p}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) \quad (2.21)$$

- Εξίσωση ορμής,  $R_i^v = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i^v}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \left\{ v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{\text{eff}}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + av_i \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial a} \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial p_{\text{eff}}}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial a} (av_i) \end{aligned}$$

όπου για κάθε έναν από τους παραπάνω όρους, παίρνουμε κατά σειρά,

- 1 Όρος μεταφοράς

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial v_j}{\partial a} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

ή,

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial v_j}{\partial a} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right)$$

❷ Όρος πίεσης

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial a} \right)$$

❸ Όρος πηγής

$$\frac{\partial}{\partial a} (av_i) = \frac{\partial a}{\partial a} v_i + a \frac{\partial v_i}{\partial a}$$

ή,

$$\frac{\partial}{\partial a} (av_i) = v_i + a \frac{\partial v_i}{\partial a}$$

❹ Συνεκτικός όρος

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial}{\partial a} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial a} (v + v_t) + (v + v_t) \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial v_t}{\partial a} \right) + (v + v_t) \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

όπου για  $\partial v/\partial a = 0$  (σταθερή κινηματική συνεκτικότητα) και  $\partial v_t/\partial a = 0$  (υπόθεση «παγωμένης» τυρβώδους συνεκτικότητας), τελικά προκύπτει,

$$\frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (v + v_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) \right] \right\}$$

Τελικά, αντικαθιστώντας τις παραπάνω ποσότητες, παίρνουμε για την έκφραση της παραγώγου της εξίσωσης της ορμής,

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i^v}{\partial a} = & \frac{\partial v_j}{\partial a} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial a} \right) + v_i + a \frac{\partial v_i}{\partial a} + \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (v + v_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Στη συνέχεια, και με χρήση του θεωρήματος της απόκλισης<sup>12</sup>, αναλύουμε τα ολοκληρώματα της σχέσης (2.20) αφού πρώτα σε αυτά αντικαταστήσουμε τις εκφράσεις (2.21) και (2.22). Επομένως, και για λόγους εποπτείας, παίρνουμε διαδοχικά για κάθε έναν όρο:

• Υπολογισμός του ολοκληρώματος  $\int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial a} d\Omega$

$$\int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial a} d\Omega = \int_{\Omega} q \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) d\Omega = \int_S q \frac{\partial v_j}{\partial a} n_j dS - \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial a} d\Omega \quad (2.23)$$

• Υπολογισμός του ολοκληρώματος  $\int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial a} d\Omega$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial a} d\Omega = & \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial a} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} u_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial a} \right) d\Omega + \\ & \int_{\Omega} u_i \left( v_i + a \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) d\Omega - \int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (v + v_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) \right] \right\} d\Omega \end{aligned}$$

όπου για κάθε ένα από τα παραπάνω ολοκληρώματα, έχουμε,

❶ Όροι μεταφοράς

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial a} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_S u_i v_i n_j \frac{\partial v_j}{\partial a} dS - \int_{\Omega} v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) d\Omega$$

και,

$$\int_{\Omega} u_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) d\Omega = \int_S u_i v_j n_j \frac{\partial v_i}{\partial a} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i v_j) \frac{\partial v_i}{\partial a} d\Omega$$

με τα χωρικά ολοκληρώματα στο δεύτερο μέλος των παραπάνω να μπορούν ν' αναληθούν περισσότερο ως,

<sup>12</sup> Gauss divergence theorem.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) d\Omega &= \int_{\Omega} v_i \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial a} + u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) \right] d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} v_i \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial a} + u_i \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \right] d\Omega = \int_{\Omega} v_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial a} d\Omega \end{aligned}$$

και,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i v_j) \frac{\partial v_i}{\partial a} d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_j + u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v_i}{\partial a} d\Omega = \int_{\Omega} v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial a} d\Omega$$

όπου έγινε χρήση της εξίσωσης της συνέχειας της συνέχειας  $\partial v_j / \partial x_j = 0$ , και, τελικά,

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial a} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_S u_i v_j n_j \frac{\partial v_i}{\partial a} dS - \int_{\Omega} v_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial a} d\Omega \quad (2.24)$$

και,

$$\int_{\Omega} u_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) d\Omega = \int_S u_i v_j n_j \frac{\partial v_i}{\partial a} dS - \int_{\Omega} v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial a} d\Omega \quad (2.25)$$

### 2 Όρος πίεσης

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial a} \right) d\Omega = \int_S u_i n_i \frac{\partial p}{\partial a} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial a} d\Omega \quad (2.26)$$

### 3 Όροι πηγής

$$\int_{\Omega} u_i \left( v_i + a \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) d\Omega = \int_{\Omega} u_i v_i d\Omega + \int_{\Omega} a u_i \frac{\partial v_i}{\partial a} d\Omega \quad (2.27)$$

### 4 Μοριακοί συνεκτικοί όροι

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ v \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) \right] d\Omega &= \int_{\Omega} v u_i \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) d\Omega = \\ &= \int_S v u_i n_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) dS - \int_{\Omega} v \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) d\Omega \end{aligned}$$

ή,

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ v \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) \right] d\Omega = \int_S v u_i n_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) dS +$$

$$- \int_S v \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j \frac{\partial v_i}{\partial a} dS + \int_{\Omega} v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \frac{\partial v_i}{\partial a} d\Omega \quad (2.28)$$

και,

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ v \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) \right] d\Omega = \int_{\Omega} v u_i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) d\Omega =$$

$$= \int_S v u_i n_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) dS - \int_{\Omega} v \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) d\Omega$$

ή,

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ v \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) \right] d\Omega = \int_S v u_i n_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) dS +$$

$$- \int_S v \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_i \frac{\partial v_j}{\partial a} dS + \int_{\Omega} v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial a} d\Omega \quad (2.29)$$

### 5 Τυρβώδεις συνεκτικοί όροι

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ v_t \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) \right] d\Omega = \int_S v_t u_i n_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) dS - \int_{\Omega} v_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) d\Omega$$

ή,

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ v_t \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) \right] d\Omega = \int_S v_t u_i n_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) dS +$$

$$- \int_S v_t n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial a} dS + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( v_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v_i}{\partial a} d\Omega \quad (2.30)$$

και, τέλος, όμοια με πριν,

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ v_t \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) \right] d\Omega = \int_S v_t u_i n_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) dS - \int_{\Omega} v_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) d\Omega$$

ή,

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ v_t \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) \right] d\Omega = \int_S v_t u_i n_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) dS +$$

$$- \int_S v_t n_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial a} dS + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v_j}{\partial a} d\Omega \quad (2.31)$$

Αντικαθιστώντας τώρα της σχέσεις (2.23) – (2.31) στην έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας της επαυξημένης συνάρτησης κόστους (2.20), προκύπτει ότι,

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta F_{aug}}{\delta a} &= \frac{\delta F}{\delta a} + \int_S q \frac{\partial v_j}{\partial a} n_j dS - \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial a} d\Omega + \\
 &+ \int_S u_i v_i n_j \frac{\partial v_j}{\partial a} dS - \int_{\Omega} v_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial a} d\Omega + \int_S u_i v_j n_j \frac{\partial v_i}{\partial a} dS - \int_{\Omega} v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial a} d\Omega + \\
 &+ \int_S u_i n_i \frac{\partial p}{\partial a} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial a} d\Omega + \int_{\Omega} u_i v_i d\Omega + \int_{\Omega} a u_i \frac{\partial v_i}{\partial a} d\Omega + \\
 &- \int_S v u_i n_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) dS + \int_S v \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j \frac{\partial v_i}{\partial a} dS - \int_{\Omega} v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \frac{\partial v_i}{\partial a} d\Omega + \\
 &- \int_S v u_i n_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) dS + \int_S v \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_i \frac{\partial v_j}{\partial a} dS - \int_{\Omega} v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial a} d\Omega + \\
 &- \int_S v_t u_i n_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right) dS + \int_S v_t n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial a} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( v_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v_i}{\partial a} d\Omega + \\
 &- \int_S v_t u_i n_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) dS + \int_S v_t n_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial a} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v_j}{\partial a} d\Omega
 \end{aligned}$$

και, ομοδοπιώντας της κοινούς όρους, προσέχοντας πάντα την εναλλαγή των δεικτών, είναι,

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta F_{aug}}{\delta a} &= \frac{\delta F}{\delta a} - \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial a} d\Omega + \\
 &+ \int_{\Omega} \left\{ -\frac{\partial q}{\partial x_i} - v_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + a u_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} \frac{\partial v_i}{\partial a} d\Omega + \\
 &+ \int_S u_j n_j \frac{\partial p}{\partial a} dS + \int_S \left[ (q + u_j v_j) n_i + u_i v_j n_j + (v + v_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial v_i}{\partial a} dS + \\
 &- \int_S u_i n_j (v + v_t) \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS + \int_{\Omega} u_i v_i d\Omega
 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση (2.16) για τη γενική παράγωγο ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης στην τελευταία, και ομοδοπιώντας και πάλι της κοινούς όρους, παίρνουμε την τελική, γενική έκφραση για την παράγωγο ευαισθησίας της επαυξημένης συνάρτησης,



$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta a} = & \int_{\Omega} \left( \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial p} - \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \frac{\partial p}{\partial a} d\Omega + \int_{\Omega} u_i v_i d\Omega + \\
& - \int_S u_i n_j (v + v_t) \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS + \int_S \left( \frac{\partial F_S}{\partial p} + u_j n_j \right) \frac{\partial p}{\partial a} dS + \\
& + \int_S \left[ \frac{\partial F_S}{\partial v_i} + (q + u_j v_j) n_i + u_i v_j n_j + (v + v_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial v_i}{\partial a} dS + \\
& + \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial v_i} - \frac{\partial q}{\partial x_i} - v_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + a u_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} \frac{\partial v_i}{\partial a} d\Omega
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Από την τελευταία εξίσωση, είναι πλέον αντιληπτό ότι η παράγωγος ευαισθησίας  $\delta F_{aug}/\delta a$  συναρτάται γενικά από τριών ειδών μεταβολές: (α) από τις άμεσες μεταβολές της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις ροϊκές μεταβλητές, (β) από τις χωρικές μεταβολές των πρωτευουσών και συζυγών μεταβλητών και, (γ) από τις άμεσες μεταβολές των πρωτευουσών ροϊκών μεταβλητών ως προς τη μεταβλητή σχεδιασμού,  $\partial p/\partial a$  και  $\partial v/\partial a$ , στο χώρο αλλά και στα όρια του πεδίου ροής. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο υπολογισμός του τελευταίου είδους μεταβολής δεν είναι αποδεκτός, δεδομένου ότι για αυτό απαιτείται η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών ή της ευθείας διαφορίσης και αυτό συνεπάγεται αυξημένο υπολογιστικό κόστος.

Με την απαλοιφή των ολοκληρωμάτων της σχέσης (2.32) που εμπεριέχουν τις μεταβολές τύπου (γ), αυτές δηλαδή που δεν είναι επιθυμητό να υπολογιστούν, επιτυγχάνεται η έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας να συναρτάται μόνο μεταβολών των άλλων ειδών, που είναι ευκολότερα υπολογίσιμες. Η απαλοιφή των ολοκληρωμάτων με τις μεταβολές (γ) επιτυγχάνεται με κατάλληλη επιλογή των συζυγών εξισώσεων και οριακών τους συνθηκών, ώστε να πληρούνται οι συνθήκες μηδενισμού τους (των αντίστοιχων χωρικών και επιφανειακών ολοκληρωμάτων). Το σημείο αυτό εξηγεί γιατί η μέθοδος είναι πιο «οικονομική» σε υπολογιστικούς πόρους, σε σύγκριση με οποιαδήποτε άλλη μέθοδο υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας. Πιο συγκεκριμένα, από την έκφραση (2.32), απαλείφοντας τα χωρικά ολοκληρώματα που εμπεριέχουν τις μεταβολές των ροϊκών μεταβλητών, προκύπτουν οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις, ενώ, αντίστοιχα, απαλείφοντας τα επιφανειακά ολοκληρώματα που εμπεριέχουν τις ίδιες μεταβολές, προκύπτουν οι συζυγείς οριακές τους συνθήκες.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι επειδή στην έκφραση (2.32) χρησιμοποιήθηκε η γενική διατύπωση (2.16) για την παράγωγο ευαισθησίας της συνάρτησης κόστους, οι συζυγείς εξισώσεις (και οι οριακές τους συνθήκες) θα γραφούν σε γενική μορφή. Η τελευταία παρατήρηση σημαίνει ότι θα ισχύουν για κάθε χρησιμοποιούμενη συνάρτηση κόστους, αρκεί κατά περίπτωση να αντικατασταθούν κατάλληλα οι ποσότητες  $F_S$  και  $F_{\Omega}$ .

### 2.7.1. Διατύπωση συνεχών, συζυγών πεδιακών εξισώσεων<sup>8, 11</sup>

Όπως διατυπώθηκε παραπάνω, με την απαλοιφή των χωρικών ολοκληρωμάτων της σχέσης (2.32) που περιέχουν τις μεταβολές  $\partial p/\partial a$  και  $\partial v/\partial a$ , οδηγούμαστε στην έκφραση των ακόλουθων συνεχών, πεδιακών συζυγών εξισώσεων,

$$R^q \triangleq -\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial p} = 0 \tag{2.33}$$

$$R_i^u \triangleq \frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i} - v_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial q}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + a u_i = 0 \quad (2.34)$$

με,  $i, j = 1, 2, (3)$ . Οι τελευταίες είναι ανεξάρτητες της μεταβολής της παραμέτρου σχεδίασης,  $\delta a$ , ενώ, όπως θα διαπιστώσουμε στα επόμενα, το ίδιο θα ισχύει και για τις συζυγείς οριακές συνθήκες. Πριν προχωρήσουμε όμως στην εξαγωγή των τελευταίων, καλό θα ήταν στο σημείο αυτό να κάνουμε μερικές χρήσιμες παρατηρήσεις.

Αρχικά, όπως είχε ήδη διαφανεί από την εισαγωγή των συζυγών μεταβλητών  $\Psi$  (κατά κύριο λόγο) καθώς και, από την συζήτηση περί «παγωμένης» τυρβώδους συνεκτικότητας, βλέπουμε ότι συγκριτικά με το ευθύ σύστημα των εξισώσεων ροής (2.1) – (2.4), το σύστημα εξισώσεων του συζυγούς προβλήματος ροής δεν περιλαμβάνει (συζυγές) μοντέλο τύρβης (στρωτή συζυγής ροή). Με μια ακόμα πιο προσεκτική ματιά, μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι σε σχέση με το ευθύ σύστημα των εξισώσεων συνέχειας και ορμής, Εξ. (2.1) και Εξ. (2.2), που είναι μη-γραμμικό, το αντίστοιχο συζυγές αποτελείται από γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις (μ.δ.ε.). Εν γένει, η επίλυση των συζυγών εξισώσεων έχει υπολογιστικό κόστος ανάλογο με αυτό του προβλήματος της ροής, μιας και πρόκειται για εξισώσεις «αντίστοιχης» μορφής με αυτές των εξισώσεων της ροής. Στη δική μας περίπτωση βέβαια, είναι (σχεδόν) προφανές, ότι το υπολογιστικό κόστος επίλυσης του συζυγούς προβλήματος αναμένεται σημαντικά μικρότερο, όχι μόνο εξαιτίας της γραμμικότητάς του (γρηγορότερη σύγκλιση της επαναληπτικής μεθόδου επίλυσής του), αλλά και λόγω του γεγονότος ότι αποτελείται, συγκριτικά με το ευθύ πρόβλημα, από δύο εξισώσεις λιγότερες. Τέλος, «αίσθηση» προκαλεί η εμφάνιση στη συζυγή εξίσωση ορμής όρου πηγής, αντίστοιχου με εκείνον της Εξ. (2.2)!

Ικανοποιώντας τις συζυγείς εξισώσεις (2.33) και (2.34), προκύπτει τελικά η απλοποιημένη της (2.32) έκφραση,

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta a} = & \int_S \left[ \frac{\partial F_S}{\partial v_i} + (q + u_j v_j) n_i + u_i v_j n_j + (v + v_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial v_i}{\partial a} dS + \\ & - \int_S u_i n_j (v + v_t) \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS + \int_S \left( \frac{\partial F_S}{\partial p} + u_j n_j \right) \frac{\partial p}{\partial a} dS + \int_\Omega u_i v_i d\Omega \end{aligned} \quad (2.35)$$

### 2.7.2. Συζυγείς συνθήκες στα όρια εισόδου $S_I$ [8]

Στα τμήματα εισόδου του ρευστού στο χωρίο, όπως έχουμε αποδείξει, ισχύει ο μηδενισμός της ποσότητας  $\delta \mathbf{v} / \delta a$ , δηλαδή,

$$\left( \frac{\partial v_i}{\partial a} \right)_{S=S_I} = 0, \quad i = 1, 2, (3)$$

Με βάση το γεγονός αυτό, το πρώτο ολοκλήρωμα της (2.35), διατυπωμένο για το  $S_I$  μηδενίζεται. Έτσι, για τον υπολογισμό του  $\delta F_{aug} / \delta a$ , τα επιφανειακά ολοκληρώματα κατά μήκος της εισόδου τα οποία απομένουν είναι τα,

$$- \int_{S_I} \varphi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS + \int_{S_I} \varphi_{2,I} \frac{\partial p}{\partial a} dS$$

όπου,

$$\varphi_{1,ij} \triangleq (v + v_t)u_i n_j, \quad i, j = 1, 2 \quad (3) \quad (2.36)$$

και,

$$\varphi_{2,I} \triangleq \frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} + u_j n_j, \quad i, j = 1, 2 \quad (3) \quad (2.37)$$

Για ν' απαλειφθούν τα ολοκληρώματα αυτά από την έκφραση (2.35), αρκεί να επιβληθούν στην είσοδο του πεδίου ροής οι συνθήκες,

$$\varphi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 0$$

και,

$$\varphi_{2,I} = 0$$

οι οποίες ισοδυναμούν με το να επιβληθεί η κάθετη στο όριο  $S_I$  συνιστώσα της συζυγούς ταχύτητας ίση με,

$$u_{(n)} = -\frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} \quad (2.38)$$

και να μηδενιστεί η εφαπτομενική της συνιστώσα,

$$u_{(t)} = 0 \quad (2.39)$$

Από τη στιγμή που από την παραπάνω διαδικασία δεν προκύπτει οριακή συνθήκη για τη συζυγή πίεση  $q$ , κατά τη διαδικασία της επίλυσης των συζυγών εξισώσεων, υπολογίζουμε την τιμή της μέσω προεκβολής από το εωτερικό του πεδίου (ότι δηλαδή ίσχυε και για τη στατική πίεση στο ευθύ πρόβλημα ροής - μηδενική οριακή συνθήκη Neumann).

### Απόδειξη των οριακών συνθηκών (2.38) και (2.39)

Η οριακή συνθήκη (2.38) προέκυψε πολύ εύκολα από την απαίτηση μηδενισμού του συντελεστή  $\varphi_{2,I}$ .

Η συνθήκη μηδενισμού της εφαπτομενικής συνιστώσας της συζυγούς ταχύτητας (2.39) αποδεικνύεται παρακάτω. Ισχύει ότι,

$$\begin{aligned} \varphi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) &= (v + v_t)(u_{(n)}n_i + u_{(t)}t_i)n_j \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \\ &= (v + v_t)u_k n_k n_i n_j \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + (v + v_t)u_k t_k t_i n_j \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της τελευταίας, ισούται με μηδέν, αφού, έχουμε διαδοχικά με απλές πράξεις,

$$\begin{aligned} (v + v_t)u_k n_k n_i n_j \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) &= (v + v_t)u_k n_k \frac{\partial}{\partial a} \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j \right) n_i + \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} n_i \right) n_j \right] = \\ &= 2(v + v_t)u_k n_k \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j n_i \right) = 2(v + v_t)u_k n_k \frac{\partial}{\partial a} \left[ n_j \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i n_i) \right] = \\ &= 2(v + v_t)u_k n_k \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_{(n)}}{\partial x_j} n_j \right) = 2(v + v_t)u_k n_k \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_{(n)}}{\partial n} \right) = -2(v + v_t)u_k n_k \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_{(t)}}{\partial t} \right) = 0 \end{aligned}$$

μιας και η κλίση της εφαπτομενικής ταχύτητας κατά την εφαπτομενική κατεύθυνση,  $\partial v_{(t)}/\partial t$ , στην είσοδο του χωρίου, είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής σχεδιασμού  $a$ . Σημειώνεται εδώ, ότι προηγουμένως έγινε χρήση της εξίσωσης της συνέχειας,

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (v_{(n)} n_j + v_{(t)} t_j) = \frac{\partial v_{(n)}}{\partial n} + \frac{\partial v_{(t)}}{\partial t} = 0$$

Επομένως, για να ισχύει ότι,

$$\varphi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = (v + v_t)u_k t_k t_i n_j \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 0$$

αρκεί να μηδενίσουμε την εφαπτομενική συνιστώσα της συζυγούς ταχύτητας,

$$u_{(t)} = u_k t_k = 0, \quad k = 1, 2 \quad (3)$$

### 2.7.3. Συζυγείς συνθήκες στα όρια εξόδου $S_0$ <sup>[8]</sup>

Στα όρια εξόδου του πεδίου ροής, έχουμε αποδείξει ότι ισχύει ο μηδενισμός της ποσότητας  $\partial p/\partial a$ , δηλαδή,

$$\left( \frac{\partial p}{\partial a} \right)_{s=S_0} = 0$$

Επομένως, το τρίτο ολοκλήρωμα της (2.35), διατυπωμένο για την έξοδο του χωρίου ροής, μηδενίζεται. Αυτό συνεπάγεται ότι οι εναπομείναντες όροι των επιφανειακών ολοκληρωμάτων της έκφρασης (2.35) στην έξοδο του πεδίου είναι οι ακόλουθοι,

$$- \int_{S_0} \varphi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right) dS + \int_{S_0} \varphi_{3,o,i} \frac{\partial v_i}{\partial a} dS$$

όπου, η ποσότητα  $\varphi_{1,ij}$  δίνεται κατά τα γνωστά από τη σχέση (2.36) και,

$$\varphi_{3,0,i} \triangleq \frac{\partial F_{S_0}}{\partial v_i} + (q + u_j v_j) n_i + u_i v_j n_j + (v + v_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \quad (2.40)$$

με  $i, j = 1, 2, (3)$ .

Υπολογιστικά πειράματα έχουν δείξει, ότι ο όρος του πρώτου ολοκληρώματος,

$$\varphi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial a} \right)$$

μπορεί να αμεληθεί, ενδεχομένως λόγω του ότι η θέση του ορίου  $S_0$  είναι τέτοια, ώστε εκεί το πεδίο ταχύτητας να διέπεται από ικανοποιητική ομοιομορφία. Συνεπώς, το πρώτο ολοκλήρωμα της παραπάνω έκφρασης, μπορεί να αμεληθεί και, να μη το λάβουμε υπόψη μας στην τελική έκφραση για τον υπολογισμό της παραγώγου ευαισθησίας της επαυξημένης συνάρτησης κόστους.

Προκειμένου να απαλειφθεί το δεύτερο επιφανειακό ολοκλήρωμα, αρκεί να επιβληθεί η συνθήκη μηδενισμού της ποσότητας  $\varphi_{3,0,i}$ , ή,

$$\varphi_{3,0,i} = 0, \quad i, j = 1, 2, (3)$$

Η παραπάνω διανυσματική συνθήκη γράφεται στο οριόδετο σύστημα, αναλυόμενη σε δύο συνιστώσες, μια κατά την κάθετη και μια κατά την εφαπτομενική κατεύθυνση στο όριο. Οι τελευταίες μπορούν να προκύψουν από τον πολλαπλασιασμό της (2.40) με το μοναδιαίο κάθετο και το μοναδιαίο εφαπτομενικό ως προς την επιφάνεια διάνυσμα, αντίστοιχα, και επομένως, να γραφούν ως,

$$q + u_j v_j + u_{\langle n \rangle} v_{\langle n \rangle} + (v + v_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j n_i + \frac{\partial F_{S_0}}{\partial v_i} n_i = 0 \quad (2.41)$$

$$u_{\langle t \rangle} v_{\langle n \rangle} + (v + v_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i + \frac{\partial F_{S_0}}{\partial v_i} t_i = 0 \quad (2.42)$$

με  $i, j = 1, 2, (3)$ , ενώ στο σημείο θα πρέπει να τονιστεί ότι οι δείκτες  $\langle n \rangle$  και  $\langle t \rangle$  δεν ακολουθούν τη σύμβαση του Einstein, δηλαδή, ακόμα κι αν επαναλαμβάνονται, οι αντίστοιχες ποσότητες δεν αθροίζονται<sup>13</sup>.

Από τη δεύτερη συνθήκη έχει απεμπλακεί η συζυγής πίεση  $q$ . Οι δύο παραπάνω εξισώσεις<sup>14</sup>, μαζί με την τρίτη «πληροφορία» (που υπολογίζεται από το εσωτερικό του πεδίου ροής με προεκβολή μιας συνιστώσας της συζυγούς ταχύτητας), αρκούν για να προσδιοριστεί πλήρως η έξοδος του συζυγούς πεδίου ροής σε κάθε κύκλο ενός επαναληπτικού αλγορίθμου. Παρότι οι εξισώσεις (2.41) και (2.42) μπορούν να επιλυθούν ως προς οποιεσδήποτε δύο συζυγείς ποσότητες από τις  $q$ ,  $u_{\langle n \rangle}$  και  $u_{\langle t \rangle}$ , η εξίσωση (2.41) προτιμάται να χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της συζυγούς πίεσης  $q$  με βάση τις τιμές των συζυγών μεταβλητών της προηγούμενης επανάληψης<sup>15</sup> και, η εξίσωση (2.42) για τον προσδιορισμό της εφαπτομενικής συζυγούς ταχύτητας  $u_{\langle t \rangle}$ .

<sup>13</sup> Για την αποφυγή σύγχυσης με άλλους δείκτες που ακολουθούν τη σύμβαση του Einstein, έχουν τοποθετηθεί μέσα σε παρενθέσεις ώστε να ξεχωρίζουν.

<sup>14</sup> Παρατηρούμε ότι πρόκειται για σύστημα δύο εξισώσεων, με τρεις άγνωστες συζυγείς ποσότητες, τις  $q$ ,  $u_{\langle n \rangle}$  και  $u_{\langle t \rangle}$ .

<sup>15</sup> Όπως αντίστοιχα στο πρόβλημα της ροής είχαμε γνωστή πίεση στην έξοδο του πεδίου ροής.

**2.7.4. Συζυγείς συνθήκες στα στερεά όρια  $S_W$ <sup>[8]</sup>**

Έχοντας απαλείψει τις πεδιακές συζυγείς εξισώσεις καθώς και τις οριακές συνθήκες στην είσοδο και στην έξοδο του χωρίου ροής, απομένουν οι όροι της έκφρασης (2.35) στα στερεά όρια του πεδίου ροής που είναι και οι όροι από τους οποίους θα προκύψουν οι συζυγείς συνθήκες στον τοίχο της υπό εξέταση γεωμετρίας. Αυτοί οι όροι ξαναγράφονται εδώ για λόγους ευκολίας.

$$\int_{S_W} \left[ \frac{\partial F_{S_W}}{\partial v_i} + (q + u_j v_j) n_i + u_i v_j n_j + (v + v_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial v_i}{\partial a} dS +$$

$$- \int_{S_W} u_i n_j (v + v_t) \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS + \int_{S_W} \left( \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} + u_j n_j \right) \frac{\partial p}{\partial a} dS$$

Πριν προχωρήσουμε περαιτέρω στην εξαγωγή των συζυγών οριακών συνθηκών στα στερεά όρια, είναι χρήσιμο να τονίσουμε, ότι εφόσον το συζυγές πρόβλημα ροής δεν περιλαμβάνει αντίστοιχο του ευθέως προβλήματος, μοντέλο τύρβης, η αριθμητική του επίλυση είναι δυνατή μέχρι και το πραγματικό στερεό τοίχωμα του χωρίου ροής. Αποδεικνύεται [7], ότι και στην περίπτωση τυρβωδών ροών, ισχύει κανονικά η οριακή συνθήκη μη-ολίσθησης του διανύσματος της ταχύτητας πάνω στον τοίχο,  $\mathbf{v}_W = \mathbf{0}$ .

Βάσει της παραπάνω παρατήρησης, το πρώτο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης εξαφανίζεται, και τελικά, απομένουν οι όροι,

$$- \int_{S_W} \varphi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS + \int_{S_W} \varphi_{2,W} \frac{\partial p}{\partial a} dS$$

όπου η ποσότητα  $\varphi_{1,ij}$  δίνεται από τη σχέση (2.36) και,

$$\varphi_{2,W} \triangleq \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} + u_j n_j, \quad i, j = 1, 2 \quad (3) \quad (2.43)$$

Προκειμένου λοιπόν να απαλειφθούν και τα παραπάνω ολοκληρώματα, αρκεί, όπως έχουμε αποδείξει, να επιβάλουμε το μηδενισμό των ποσοτήτων  $\varphi_{1,ij}$  και  $\varphi_{2,W}$ , ο οποίος οδηγεί με τη σειρά στην παρακάτω οριακή συνθήκη,

$$u_{(n)} = - \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \quad (2.44)$$

και,

$$u_{(t)} = 0 \quad (2.45)$$

Εφόσον ούτε από αυτή τη διαδικασία προέκυψε οριακή συνθήκη για τη συζυγή πίεση  $q$ , αυτή θα υπολογίζεται κατά τα γνωστά πάνω στο στερεό τοίχωμα μέσω προεκβολής από το εσωτερικό του πεδίου ροής.

## 2.8. Τελική – γενική έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας<sup>[11]</sup>

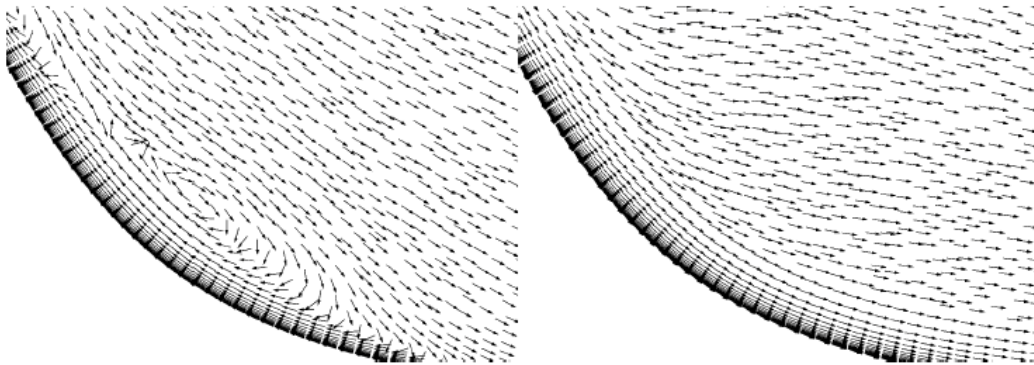
Έχοντας πλέον, με την προηγηθείσα διαδικασία, εξαφανίσει από την έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας της επαυξημένης συνάρτησης κόστους τα χωρικά ολοκληρώματα που αντιστοιχούν στις συζυγείς πεδιακές εξισώσεις καθώς και, τα αντίστοιχα επιφανειακά σε είσοδο, έξοδο και τοίχο του πεδίου ροής, η παράγωγος ευαισθησίας παίρνει την πολύ απλή έκφραση,

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta a} = \int_{\Omega} u_i v_i d\Omega, \quad i = 1,2 (,3) \quad (2.46)$$

Επιλύοντας τις εξισώσεις της ροής και τις συζυγείς εξισώσεις, τα πεδία των ροϊκών και των συζυγών μεταβλητών καθίσταται γνωστά και συνεπώς, η ποσότητα που εμφανίζεται στο δεξί μέλος της σχέσης (2.46) υπολογίζεται εύκολα, καθιστώντας γνωστή την τιμή της παραγώγου ευαισθησίας.

### 2.8.1. Φυσική ερμηνεία της παραγώγου ευαισθησίας<sup>[11]</sup>

Παρατηρώντας προσεκτικά τη σχέση (2.46), καθίσταται προφανές ότι λόγω της σύμβασης του επαναλαμβανόμενου δείκτη, η ποσότητα  $u_i v_i$ ,  $i = 1,2 (,3)$  εντός του χωρικού ολοκληρώματος, αποτελεί στην ουσία ένα εσωτερικό γινόμενο των διανυσματικών ποσοτήτων της συζυγούς ταχύτητας και της ταχύτητας του ευθέως προβλήματος ροής.

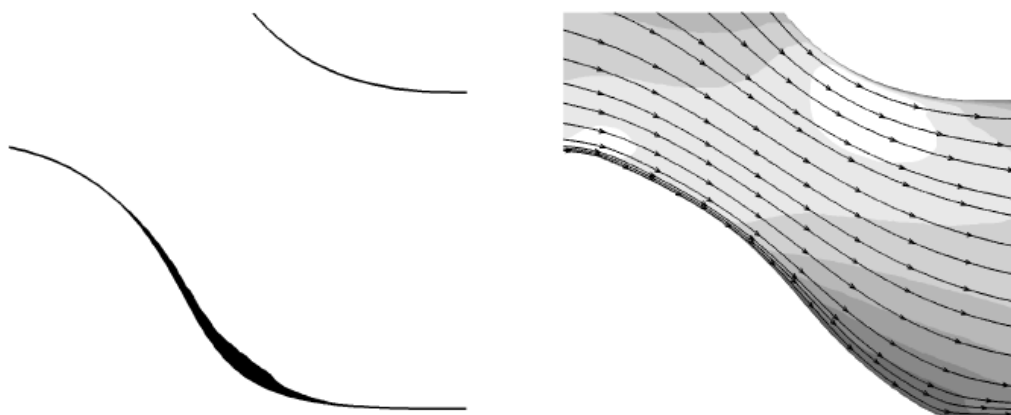


**Σχ. 2.2.<sup>[11]</sup>** Διανύσματα ταχύτητας του ευθέως (αριστερά) και του συζυγούς (δεξιά) προβλήματος ροής, όπου για λόγους οπτικοποίησης τα διανύσματα παριστάνονται με ίσα μέτρα.

Σε περιοχές της ροής λοιπόν, όπου τα τοπικά διανύσματα  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{u}$  σχηματίζουν αμβλείες γωνίες, το εσωτερικό τους γινόμενο παίρνει αρνητική τιμή και, κατά συνέπεια, αφού είναι ο μόνος όρος στην έκφραση (2.46), αρνητική τιμή παίρνει και η παράγωγος ευαισθησίας  $\delta F_{aug}/\delta a$ . Με τον τρόπο αυτό, η τοπική τιμή του πορώδους τείνει να διαφοροποιηθεί από το μηδέν, «στερεοποιώντας» περιοχές της ροής στις οποίες εμφανίζονται μεγάλες ενεργειακές απώλειες.

Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα του Σχ. 2.2, όπου στο αριστερά σχήμα απεικονίζεται το ευθύ πεδίο ροής ενώ στο δεξί, το αντίστοιχο συζυγές. Παρατηρούμε ότι στην περιοχή της ανακλυκλοφορίας (μεγάλες απώλειες ολικής πίεσης), τα διανύσματα της ταχύτητας σχηματίζουν αμβλείες γωνίες. Σαν αποτέλεσμα, που προκύπτει και από την προηγούμενη

φυσική ερμηνεία, είναι ότι η βελτιστοποίηση τοπολογίας προκειμένου να μειώσει τις δημιουργούμενες απώλειες ολικής πίεσης, τείνει να «βουλώσει» την περιοχή της σχηματιζόμενης ανακυκλοφορίας, δίνοντας έτσι το αποτέλεσμα της επόμενης εικόνας.



**Σχ. 2.3.11** Βέλτιστη κατανομή πορώδους. Η τοπολογική βελτιστοποίηση «στερεοποίησε» την περιοχή της ανακυκλοφορίας (μαύρη περιοχή στον αγωγό), οδηγώντας σε μειωμένες απώλειες ολικής πίεσης. Στο δεξιά σχήμα φαίνεται καθαρά η εν λόγω εξαφάνιση της περιοχής της ανακυκλοφορίας.

### 2.8.2. Διακριτό ισοδύναμο της παραγώγου ευαισθησίας<sup>[12]</sup>

Όπως έχει αναφερθεί, η μεταβλητή σχεδιασμού στη βελτιστοποίηση τοπολογίας είναι το πεδίο πορώδους  $a$  και συνεπώς, στο συνεχές πεδίο έκφρασης των εξισώσεων, η  $a$  μπορεί «χονδροειδώς» να θεωρηθεί ως μία και μοναδική μεταβλητή. Άλλωστε, με τον τρόπο αυτό αντιμετωπίστηκε καθ' όλη τη διάρκεια της μαθηματικής ανάλυσης που έλαβε μέρος στο παρόν κεφάλαιο, χωρίς να υπαινιχθούμε κάτι διαφορετικό (εκτός ίσως από το Κεφ. 1). Η διαφορά αντιμετώπισης του πορώδους, έγκειται στο διακριτοποιημένο πεδίο ροής, όπου και δουλεύουμε, λύνοντας αριθμητικά τις εξισώσεις της ροής και του συζυγούς προβλήματος.

Όπως λοιπόν συμβαίνει και με τις υπόλοιπες μεταβλητές του προβλήματος, έτσι και το πορώδες  $a$  θα πρέπει να διακριτοποιηθεί, λαμβάνοντας πλέον (διακριτές) τιμές στους κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος. Κατά συνέπεια, πλέον δεν αναφερόμαστε σε μία και μόνη μεταβλητή σχεδιασμού, αλλά σε μεταβλητές σχεδιασμού όσες και το πλήθος των κόμβων του χρησιμοποιούμενου πλέγματος.

Η παραπάνω παρατήρηση έχει ως προφανή συνέπεια, η παράγωγος ευαισθησίας (2.46), η οποία είναι εκφρασμένη στο συνεχές πεδίο, να εκφραστεί στο διακριτοποιημένο ως,

$$\left( \frac{\delta F_{aug}}{\delta a} \right)_m = \left( \int_{\Omega} u_i v_i d\Omega \right)_m, \quad i = 1, 2 \quad (3) \quad (2.47)$$

όπου με  $m$  συμβολίζουμε τον αύξοντα αριθμό των κόμβων του πλέγματος (αν  $M + 1$  είναι ο συνολικός αριθμός κόμβων του πλέγματος, τότε  $m = 0, 1, \dots, M$ ). Η τελευταία, μπορεί να γραφεί ακόμα πιο απλά για κάθε κόμβο  $m$  κι ως,



$$\left(\frac{\delta F_{aug}}{\delta a}\right)_m = (u_i v_i \Omega_p)_m, \quad i = 1, 2, (3), \quad m = 0, 1, \dots, M \quad (2.48)$$

όπου με  $\Omega_p$  συμβολίζουμε τον στοιχειώδη όγκο της  $m$ -ιστής υπολογιστικής κυψέλης.

## 2.9. Ελαχιστοποίηση απωλειών ολικής πίεσης

Στην παράγραφο αυτή θα επαναδιατυπώσουμε τις γενικές εκφράσεις για τις συνεχείς συζυγείς πεδιακές εξισώσεις και τις οριακές τους συνθήκες και, θα τις «εξειδικεύσουμε» για τη συνάρτηση στόχο που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα και δίνεται από τη σχέση (2.18). Προφανώς, στην περίπτωση της έκφρασης των απωλειών ολικής πίεσης (2.18), ισχύει,

$$F_\Omega = 0$$

$$F_{S_W} = 0$$

$$\frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} = -v_i n_i = -v_{\langle n \rangle}$$

και,

$$\frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_i} = -\left(\frac{1}{2}v^2 n_i + v_{\langle n \rangle} v_i\right)$$

Οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις διατυπώνονται τότε ως,

$$R^q \triangleq \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.33')$$

$$R_i^u \triangleq -v_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial q}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \right] + a u_i = 0 \quad (2.34')$$

ενώ οι συζυγείς οριακές συνθήκες παίρνουν τη μορφή,

### ❶ Συζυγείς συνθήκες στα όρια εισόδου $S_I$

$$u_{\langle n \rangle} = v_{\langle n \rangle} \quad (2.38')$$

$$u_{\langle t \rangle} = 0 \quad (2.39')$$

και,

$$\frac{\partial q}{\partial n} = 0$$

**2** Συζυγείς συνθήκες στα όρια εξόδου  $S_O$

$$q + u_j v_j + u_{(n)} v_{(n)} + (v + v_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j n_i - \frac{1}{2} v^2 - v_{(n)} = 0 \quad (2.41')$$

$$u_{(t)} v_{(n)} + (v + v_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i - v_{(n)} v_{(t)} = 0 \quad (2.42')$$

και,

$$\frac{\partial u_{(n)}}{\partial n} = 0$$

**3** Συζυγείς συνθήκες στα στερεά όρια  $S_W$

$$u_{(n)} = 0 \quad (2.44')$$

$$u_{(t)} = 0 \quad (2.45')$$

και,

$$\frac{\partial q}{\partial n} = 0$$

όπου  $i, j = 1, 2, (3)$ .

Στην τελευταία περίπτωση, παρατηρούμε ότι η συνθήκη μη-ολίσθησης εξακολουθεί να ισχύει και στο συζυγές πεδίο ροής.

**2.10. Γενικός αλγόριθμος βελτιστοποίησης<sup>[11]</sup>**

Ο γενικός αλγόριθμος τοπολογικής βελτιστοποίησης δε διαφέρει από οποιονδήποτε άλλο αλγόριθμο αιτιοκρατικής φύσης. Τα βήματα επομένως του αλγορίθμου, είναι κατά σειρά,

Αλγόριθμος βελτιστοποίησης

- |                |  |
|----------------|--|
| <b>ΒΗΜΑ 1.</b> | Αρχικοποίησε το πεδίο πορώδους $a$ και τον μετρητή των κύκλων βελτιστοποίησης, $n \leftarrow 0$ . Διάβασε έναν μέγιστο αριθμό επαναλήψεων $n_{\max}$ και μια ανοχή για την τιμή της παραγώγου ευαισθησίας $(\delta F_{aug}/\delta a)_{\text{threshold}}$ . |
| <b>ΒΗΜΑ 2.</b> | Λύσε τις εξισώσεις ροής (2.1) – (2.4) και υπολόγισε την τιμή της συνάρτησης κόστους $F$ .  |
| <b>ΒΗΜΑ 3.</b> | Αν $\delta F_{aug}/\delta a \leq (\delta F_{aug}/\delta a)_{\text{threshold}}$ σταμάτησε τη βελτιστοποίηση.  |
| <b>ΒΗΜΑ 4.</b> | Αν $n > n_{\max}$ σταμάτησε τη βελτιστοποίηση.   |

- ΒΗΜΑ 5.** Λύσε τις συζυγείς εξισώσεις ροής (2.33') και (2.34').
- ΒΗΜΑ 6.** Υπολόγισε την τιμή της παραγώγου ευαισθησίας  $\delta F_{aug}/\delta a$  από τη σχέση (2.48) για κάθε υπολογιστικό κόμβο.
- ΒΗΜΑ 7.** Ανανέωσε την τιμή του πορώδους σε κάθε υπολογιστικό κόμβο με τη μέθοδο της απότομης καθόδου,

$$a_m^{(n)} \leftarrow a_m^{(n-1)} - \eta \left( \frac{\delta F_{aug}}{\delta a} \right)_m^{(n-1)}$$

όπου ο συντελεστής  $\eta$  ορίζεται από τον χρήστη και είναι σταθερός.

- ΒΗΜΑ 8.** Αύξησε τον κύκλο βελτιστοποίησης,  $n \leftarrow n + 1$ , και επανέλαβε από το ΒΗΜΑ 2.



# 3

## Εφαρμογή στην εσωτερική αεροδυναμική

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

---

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε η εισαγωγή και η επεξήγηση των όρων πηγής (για τη μοντελοποίηση του πορώδους) στις βασικές εξισώσεις ροής, έλαβε μέρος η μαθηματική διατύπωση της συζυγούς μεθόδου για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας και, τέλος, παρατέθηκε ο γενικός αλγόριθμος τοπολογικής βελτιστοποίησης. • Στο Κεφ. 3, ως φυσική συνέχεια των προηγούμενων, • θα παρουσιαστεί η μορφή της γεωμετρίας (τοπολογίας) προς βελτιστοποίηση της πρώτης εφαρμογής και στη συνέχεια, με εφαρμογή όσων περιγράφησαν στο Κεφ. 2, • θα προχωρήσουμε στο προκείμενο, δηλαδή στη βελτιστοποίησή της και στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν απ' αυτή.

---

### 3.1. Η προς βελτιστοποίηση γεωμετρία

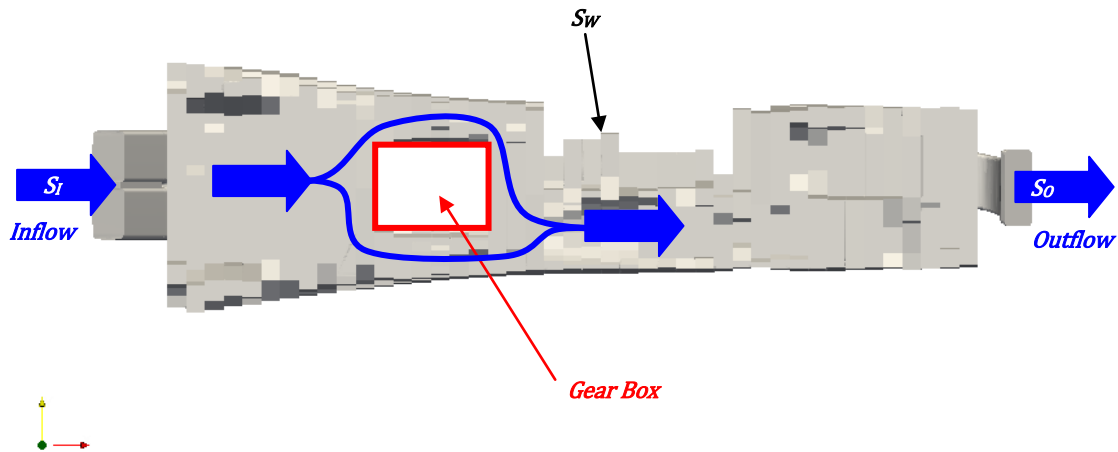
Η τοπολογία<sup>16</sup> που θα μελετηθεί, αφορά στην εσωτερική αεροδυναμική και, πιο συγκεκριμένα, πρόκειται για έναν αγωγό μεταφοράς αέρα (αεραγωγό) στους επιβάτες των πίσω καθισμάτων ενός επιβατικού αυτοκινήτου.

Ο μελετούμενος αγωγός χαρακτηρίζεται από μεταβαλλόμενη κι αρκετά πολύπλοκη γεωμετρία και διατομή. Η απαιτούμενη παροχή αέρα αναρροφάται από μοναδική διατομή εισόδου και, στη συνέχεια, μέσω μοναδικής διατομής εξόδου, μεταφέρεται στα πίσω καθίσματα του οχήματος. Εξαιτίας κατασκευαστικών και λειτουργικών λόγων, ο αεραγωγός χαρακτηρίζεται από

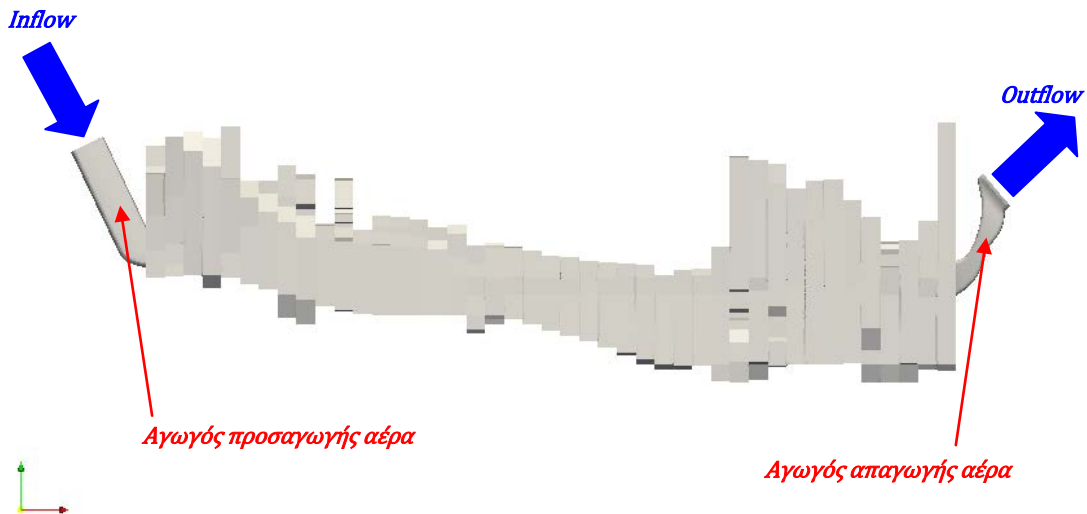
---

<sup>16</sup> Οι όροι «τοπολογία» και «γεωμετρία», για προφανείς λόγους, θα χρησιμοποιούνται εναλλάξιμα, εκτός κι αν διευκρινίζεται διαφορετικά.

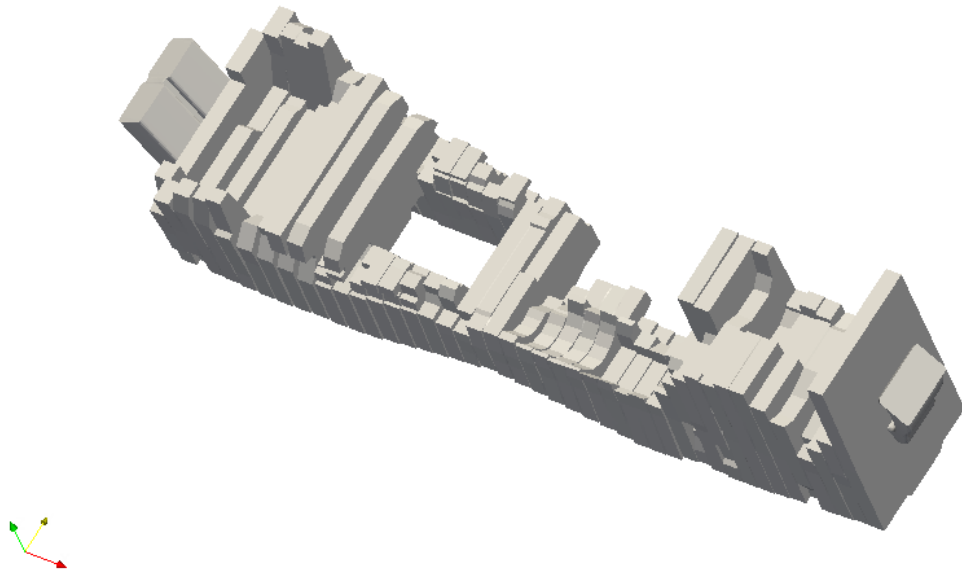
διακλάδωση της ροής λίγο μετά την είσοδό της σ' αυτόν. Πιο συγκεκριμένα, η ροή μέσω δύο διαφορετικών ρευμάτων μεταφέρεται γύρω από το κιβώτιο ταχυτήτων του οχήματος, ώστε λίγο μετά, να επανενωθεί και ενιαία να μεταφερθεί στον αγωγό εξόδου. Η γεωμετρία του αγωγού μαζί με την επισήμανση και τον σχολιασμό των διαφόρων χαρακτηριστικών της φαίνεται στο Σχ. 3.1, Σχ. 3.2 και Σχ. 3.3. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί, ότι για λόγους πληρότητας και βοήθειας για την κατανόηση από τον αναγνώστη της «ιδιάζουσας» μορφολογίας του, παρουσιάζονται η κάτοψη, η πρόσοψη, και μια γενική όψη του αγωγού.



**Σχ. 3.1.** Κάτοψη του αεραγωγού. Επισημαίνονται ο αγωγός εισόδου και εξόδου, καθώς και η διακλάδωση κι επανένωση της ροής πριν και μετά το κιβώτιο ταχυτήτων αντίστοιχα.



**Σχ. 3.2.** Πρόσοψη του αεραγωγού. Φαίνονται οι αγωγοί προσαγωγής και απαγωγής του ρεύματος αέρα.



**Σχ. 3.3.** Μια γενική όψη του αεραγωγού.

Είναι προφανές, μετά και την παράθεση της μορφής του αγωγού, ότι στόχος της βελτιστοποίησης τοπολογίας είναι να βρει εκείνο το «μονοπάτι» της ροής (flow path) διαμέσου της αρχικής γεωμετρίας, που θα ελαχιστοποιήσει την υπό εξέταση αντικειμενική συνάρτηση, εδώ, τις απώλειες ολικής πίεσης. Αυτό το πετυχαίνει η μεταβλητή του πορώδους που εισήχθει στις εξισώσεις της ροής, «ποινικοποιώντας» (penalize) με μεγάλες τιμές του  $\alpha$  περιοχές της τοπολογίας οι οποίες συμβάλουν στην αύξηση των απωλειών ολικής πίεσης και, επομένως, αποκλείοντάς τες από τον βέλτιστο αγωγό ροής έτσι ώστε να επιτευχθεί η μείωση των ενεργειακών απωλειών λόγω συνεκτικότητας.

### 3.2. Διακριτοποίηση του χωρίου ροής

Για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων της ροής και των συζυγών εξισώσεων και, για την εφαρμογή του αλγορίθμου βελτιστοποίησης, απαιτείται αρχικά η διακριτοποίηση του χωρίου ροής. Το τελευταίο, διακριτοποιείται με μη-δομημένο, υβριδικό πλέγμα. Το υπολογιστικό πλέγμα που αποτελεί συνεισφορά του Ευρωπαϊκού ερευνητικού προγράμματος FlowHead στο οποίο η εξεταζόμενη περίπτωση αποτελεί μια test case (η ΜΠΥΡ&Β δεν είχε συμμετοχή στο έργο αυτό), αποτελείται από 5,412,281 κελιά<sup>17</sup>, τα οποία και κατανέμονται ως ακολούθως:

- 1,237,601 εξάεδρα (hexahedra),
- 3,729,300 τετράεδρα (tetrahedra) και,
- 445,380 πολύεδρα (polyhedra).

Λόγω χρήσης του μοντέλου τύρβης υψηλών αριθμών Reynolds  $k - \epsilon$ , οι περιοχές της ροής που βρίσκονται πολύ κοντά στο στερεό τοίχωμα δε διακριτοποιούνται με πολύ πυκνό πλέγμα.

---

<sup>17</sup> Γίνεται πλέον εμφανής η επιλογή αιτιοκρατικής μεθόδου βελτιστοποίησης έναντι κάποιας στοχαστικής. Το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού είναι απαγορευτικά μεγάλο για οποιαδήποτε στοχαστική μέθοδο βελτιστοποίησης.

Συνεπώς, για την «ακριβή» αριθμητική πρόλεξη του οριακού στρώματος, όπως αναλυτικά δείχτηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, γίνεται χρήση του μοντέλου συναρτήσεων τοίχου.

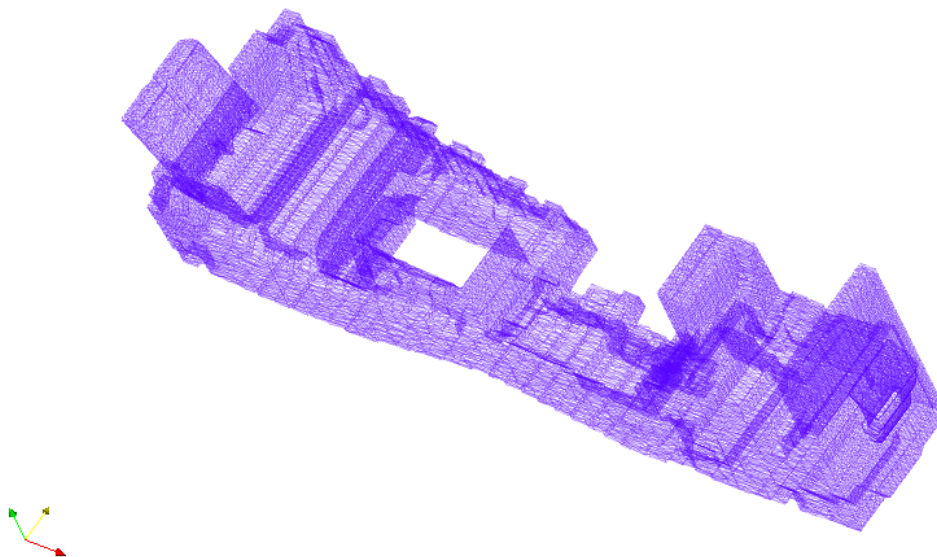
Για την επιβολή και τη διαχείριση των κοινών οριακών συνθηκών, οι οριακές «φάτσες» (boundary faces) του πλέγματος έχουν ομαδοποιηθεί σε πέντε διακριτές οριακές «επιφάνειες» (boundary patches), οι οποίες και έχουν ονομαστεί:

- «inlet» (inlet) για τη διατομή εισόδου του αγωγού,
- «outlet» (outlet) για τη διατομή εξόδου του αγωγού,
- «wall inlet» (wall\_inlet) για το στερεό όριο του αγωγού προσαγωγής,
- «wall outlet» (wall\_outlet) για το στερεό όριο του αγωγού απαγωγής του αέρα και,
- «wall design space» (wall\_designSpace) για το υπόλοιπο στερεό τοίχωμα του αεραγωγού.

Τέλος, τα κελιά του πλέγματος έχουν ομαδοποιηθεί σε τρεις διακριτές ζώνες κελιών (cell zones), τις:

- «inlet volume» (vol\_inlet) που περιλαμβάνει τα 297,104 κελιά του αγωγού προσαγωγής,
- «outlet volume» (vol\_outlet) που περιλαμβάνει τα 133,648 κελιά του αγωγού απαγωγής της ροής και,
- «design space volume» (vol\_designSpace) που περιλαμβάνει τα 4,981,529 κελιά του υπόλοιπου αγωγού.

Η τελευταία ομαδοποίηση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, καθώς, μας βοηθά να θεωρούμε (ορίζουμε) περιοχές κελιών με δεδομένη σταθερή τιμή<sup>18</sup> του πορώδους  $a$ . Εν προκειμένω, επειδή θέλουμε να αποφευχθεί η πιθανότητα η βελτιστοποίηση τοπολογίας να φράξει (στερεοποιήσει) τους αγωγούς προσαγωγής κι απαγωγής, επιβάλλεται στα κελιά των αντίστοιχων ζωνών («vol\_inlet» και «vol\_outlet») μηδενική τιμή του πορώδους,  $a = 0$ .



**Σχ. 3.4.** Το υπολογιστικό πλέγμα διακριτοποίησης του αγωγού.

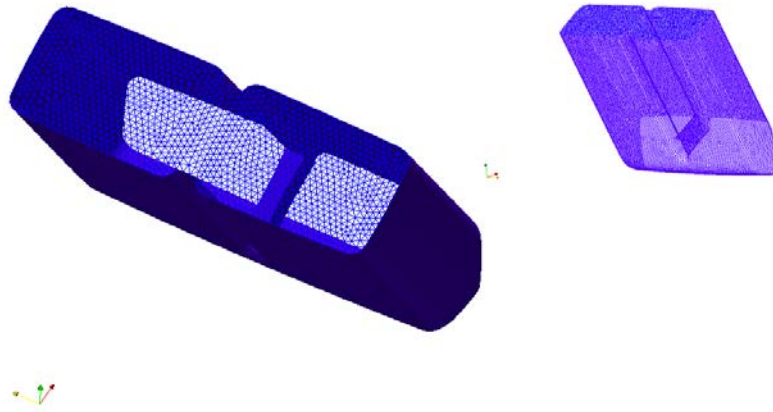
Λόγω της πυκνότητας του πλέγματος, η οπτικοποίησή του είναι αρκετά δύσκολη. Για το λόγο αυτό παρατίθενται παρακάτω (βλ. Σχ. 3.5, Σχ. 3.6, Σχ. 3.7) λεπτομέρειες από διάφορες περιοχές

---

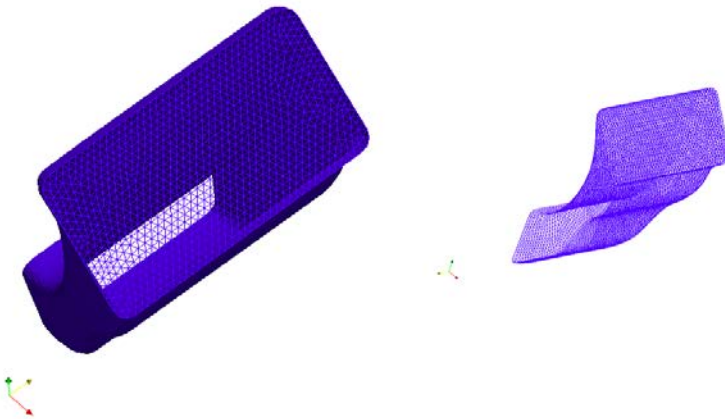
<sup>18</sup> Υπό την έννοια ότι δεν αλλάζει κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης και παραμένει όση την είχαμε εξαρχής ορίσει.



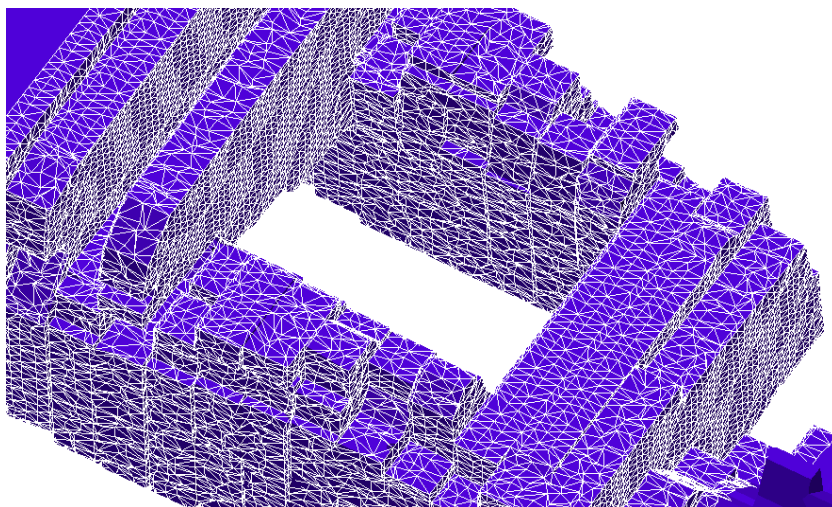
«ενδιαφέροντος», όπως τη διατομή και τον αγωγό εισόδου, τη διατομή και τον αγωγό εξόδου, καθώς και την περιοχή γύρω από το κιβώτιο ταχυτήτων.



**Σχ. 3.5.** Λεπτομέρεια του πλέγματος στον αγωγό εισόδου.



**Σχ. 3.6.** Λεπτομέρεια του πλέγματος στον αγωγό εξόδου.



**Σχ. 3.7.** Λεπτομέρεια του πλέγματος γύρω από το κιβώτιο ταχυτήτων.

Η έκφραση των εξισώσεων ροής (2.1) – (2.4) και των συζυγών εξισώσεων (2.33') – (2.33') σε διακριτή μορφή γίνεται με τα ίδια σχήματα διακριτοποίησης, καθώς, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, παρουσιάζουν παρόμοια μορφή.

Η αριθμητική τους επίλυση, σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, γίνεται με εφαρμογή του αλγορίθμου SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations) και της μεθόδου GAMGS (Geometric-Algebraic Multi Grid Solver) για τη διόρθωση της πίεσης<sup>19</sup>. Σύμφωνα με τη γενική μέθοδο GAMGS, «γενάται» ένα προσωρινό υπολογιστικό πλέγμα, κατά πολύ αραιότερο του αρχικού, στο οποίο και γίνεται η αρχική διόρθωση της πίεσης. Στη συνέχεια, αυτό το αραιό πλέγμα χρησιμοποιείται ως «αρχική λύση» για την τελική διόρθωση της πίεσης στο αρχικό, πυκνότερο υπολογιστικό πλέγμα.

Τέλος, πρέπει να τονιστεί, ότι στη λογική του OpenFOAM οι εξισώσεις διατυπώνονται και λύνονται στο υπολογιστικό πλέγμα με κεντροκυβελική λογική. Σύμφωνα με την τελευταία, για λόγους οικονομίας μνήμης, οι ροϊκές μεταβλητές (και το πορώδες  $a$  και ό,τι άλλο δύναται να υπολογιστεί) αποθηκεύονται στο κέντρο των κελιών και η τιμή τους στον κόμβο ενός κελιού, αν απαιτείται, υπολογίζεται με σχήματα αριθμητικής παρεμβολής βάσει των τιμών τους στα γειτονικά κελιά.

### 3.3. Βελτιστοποίηση κι εύρεση του βέλτιστου αγωγού ροής

Πριν προχωρήσουμε παρακάτω στην ανάλυσή μας και στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων της, κρίνεται σκόπιμο να παρατεθούν στους επόμενους πίνακες οι οριακές (σε κάθε οριακό patch) κι αρχικές συνθήκες (στο εσωτερικό του χωρίου ροής) των ροϊκών μεταβλητών που εμφανίζονται στις εξισώσεις ροής και στις συζυγείς εξισώσεις, καθώς, και της μεταβλητής του πορώδους  $a$ . Επίσης, η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού (θεωρείται σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια της βελτιστοποίησης), είναι ίση με,  $\nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ .

<b>inlet</b>	$v$	$[m/s]$	Dirichlet	$u_{\langle n \rangle} = -3.1709$
	$p$	$[m^2/s^2]$	Neumann	$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$
	$k$	$[m^2/s^2]$	Dirichlet	$k = 0.0377$
	$\varepsilon$	$[m^2/s^3]$	Dirichlet	$\varepsilon = 0.024$
	$u$	$[m/s]$	Dirichlet	$u_{\langle n \rangle} = -3.1709, u_{\langle t \rangle} = 0$
	$q$	$[m^2/s^2]$	Neumann	$\frac{\partial q}{\partial n} = 0$
	$a$	$[1/s]$	-	Υπολογίζεται από τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης

**Πιν. 3.1.** Οριακές συνθήκες εισόδου.

<sup>19</sup> Η σύγκλιση της πίεσης είναι, από πλευράς υπολογιστικού κόστους, η πιο απαιτητική διαδικασία κατά τη φάση της αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων.

Αναφερόμενοι στον παραπάνω Πιν. 3.1, οι οριακές συνθήκες για τη συζυγή ταχύτητα και τη συζυγή πίεση είναι όπως προέκυψαν από την ανάλυση του Κεφ. 2, ενώ, η ταχύτητα εισόδου είναι αρνητική, λόγω της σύμβασης ότι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα κατευθύνεται στα εξωτερικά του πεδίου ροής και άρα, είναι αντίρροπο της εισερχόμενης στο πεδίο ταχύτητας του ρευστού.

outlet	$v$	$[m/s]$	Neumann	$\frac{\partial v}{\partial n} = 0$
	$p$	$[m^2/s^2]$	Dirichlet	$p = 0$
	$k$	$[m^2/s^2]$	Neumann	$\frac{\partial k}{\partial n} = 0$
	$\varepsilon$	$[m^2/s^3]$	Neumann	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0$
	$u$	$[m/s]$	«Robin»	Από τη σχέση (2.42') με, $\frac{\partial u_{(n)}}{\partial n} = 0$
	$q$	$[m^2/s^2]$	«Dirichlet»	Από τη σχέση (2.41')
	$a$	$[1/s]$	-	Υπολογίζεται από τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης

**Πιν. 3.2.** Οριακές συνθήκες εξόδου.

Οι συζυγείς οριακές συνθήκες για τη συζυγή πίεση και ταχύτητα αντίστοιχα στην έξοδο του πεδίου ροής, υπενθυμίζουμε ότι προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (2.41') και (2.42'), θεωρώντας γνωστή με προεκβολή από το εσωτερικό του πεδίου ροής, την κάθετη στην έξοδο συνιστώσα του διανύσματος της ταχύτητας  $u_{(n)}$ .

wall_inlet/outlet/designSpace	$v$	$[m/s]$	Dirichlet	$v = 0$ (συνθήκη μη-ολίσθησης)
	$p$	$[m^2/s^2]$	Neumann	$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$
	$k$	$[m^2/s^2]$	Neumann	$\frac{\partial k}{\partial n} = 0$
	$\varepsilon$	$[m^2/s^3]$	Neumann	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0$
	$u$	$[m/s]$	Dirichlet	$u = 0$ (συνθήκη μη-ολίσθησης)
	$q$	$[m^2/s^2]$	Neumann	$\frac{\partial q}{\partial n} = 0$
	$a$	$[1/s]$	-	Υπολογίζεται από τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης

**Πιν. 3.3.** Οριακές συνθήκες στα στερεά όρια του αγωγού.

Η τιμή του πορώδους  $a$ , σε ολόκληρο το χωρίο (άρα και στα όρια αυτού), υπολογίζεται από τον αλγόριθμο της βελτιστοποίησης. Παρ' όλα αυτά, όπως αναφέρθηκε και προηγούμεως, στα κελιά που ανήκουν στις ζώνες  $vol\_inlet$  και  $vol\_outlet$  (άρα και στις «φάτσες» αυτών των κελιών που αποτελούν τα όρια  $wall\_inlet$  και  $wall\_outlet$  αντίστοιχα) θεωρείται σταθερή, μηδενική τιμή του  $a$ .

Επίσης, πρέπει να προσεχθεί ότι, οι οριακές συνθήκες για τις μεταβλητές του μοντέλου τύρβης πάνω στα πραγματικά στερεά όρια, δεν αναιρούν τη χρήση του μοντέλου των συναρτήσεων τοίχου. Οι φυσικές αυτές οριακές συνθήκες, χρησιμοποιούνται για τη μεταφορά από το «εσωτερικό» του πεδίου ροής, μέσω προεκβολής, των τιμών των  $k$  και  $\varepsilon$ , πάνω στο πραγματικό τοίχωμα.

Τέλος, η αρχικοποίηση του πεδίου ροής, δίνεται στον επόμενο πίνακα,

<b>initial_conditions</b>	$\mathbf{v}$	$[m/s]$	Dirichlet	$\mathbf{v} = \mathbf{0}$
	$p$	$[m^2/s^2]$	Dirichlet	$p = 0$
	$k$	$[m^2/s^2]$	Dirichlet	$k = 0.037$
	$\varepsilon$	$[m^2/s^3]$	Dirichlet	$\varepsilon = 0.024$
	$\mathbf{u}$	$[m/s]$	Dirichlet	$\mathbf{u} = \mathbf{0}$
	$q$	$[m^2/s^2]$	Dirichlet	$q = 0$
	$a$	$[1/s]$	Dirichlet	$a = 0$

**Πιν. 3.4.** Αρχικές συνθήκες στο εσωτερικό του αγωγού.

όπου πρέπει να τονιστεί, ότι ο όρος «αρχικές συνθήκες» δεν υπονοεί την επίλυση του μη-μόνιμου (unsteady) προβλήματος ροής και την επίτευξη της μόνιμης (steady) λύσης ασυμπτωτικά στο χρόνο, κάτι που άλλωστε φαίνεται και από τις εξισώσεις τόσο του ευθέως όσο και του συζυγούς προβλήματος. Η αρχικοποίηση του πεδίου γίνεται έτσι ώστε, ο επαναληπτικός αλγόριθμος επίλυσης των μερικών διαφορικών εξισώσεων να έχει μια αρχική λύση για να μπορέσει να εκκινήσει<sup>20</sup>.

Ένα άλλο ενδιαφέρον στοιχείο που εμφανίζεται στον Πιν. 3.4, είναι η τιμή αρχικοποίησης της μεταβλητής του πορώδους  $a$ . Στη βιβλιογραφία συναντώνται δύο εναλλακτικές τεχνικές αρχικοποίησης, όπου, σύμφωνα με την πρώτη, το αρχικό χωρίο ροής θεωρείται τελείως «ανοιχτό» ( $a = 0$ ), ενώ, σύμφωνα με τη δεύτερη, θεωρείται τελείως «βουλωμένο» ( $a \neq 0$ ). Στη μεν πρώτη περίπτωση, ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης τείνει να «στερεοποιήσει» τμήματα του χωρίου αποτρέποντας τη ροή του ρευστού δια μέσου τους, στη δε δεύτερη, προσπαθεί να «ξεβουλώσει» τμήματα του χωρίου δημιουργώντας με τον τρόπο αυτό κανάλι ροής για το ρευστό. Τα προηγούμενα βέβαια, με στόχο την τελική ικανοποίηση του θεωρούμενου κριτηρίου βελτιστοποίησης.

Γενικά, δεν υπάρχει κάποιο μαθηματικό (ή τουλάχιστον εμπειρικό) κριτήριο που να μας προσδιορίζει ποια από τις δύο μεθόδους αρχικοποίησης του πορώδους οδηγεί γρηγορότερα και,

<sup>20</sup> Τουλάχιστον στην επίλυση του αρχικού προβλήματος, αφού σε κάθε επόμενο κύκλο βελτιστοποίησης, ο αλγόριθμος είναι «ρυθμισμένος», για γρηγορότερη σύγκλιση, να θεωρεί ως αρχική λύση του πεδίου αυτή που προέκυψε από τον τελευταίο κύκλο κ.ο.κ.

πιο «σίγουρα», στη βέλτιστη λύση. Η εμπειρία έχει δείξει, ότι σε περιπτώσεις που η μία μέθοδος «λειτουργεί», ή άλλη υπάρχει περίπτωση να αποτυγχάνει και το αντίστροφο.

Σ' αυτή την εφαρμογή, δοκιμάστηκαν και οι δύο μέθοδοι αρχικοποίησης, με τα αποτελέσματα, μετά από μερικούς, αρχικούς, δοκιμαστικούς κύκλους βελτιστοποίησης στην περίπτωση του αρχικά «βουλωμένου» αγωγού, να δείχνουν απόκλιση της αριθμητικής μεθόδου επίλυσης των συζυγών εξισώσεων. Για το λόγο αυτό, προτιμήθηκε η «τεχνοτροπία» του αρχικά, τελείως «ανοιχτού» αγωγού, εξού και η τιμή  $a = 0$  παντού στο εσωτερικό του αρχικού πεδίου ροής.

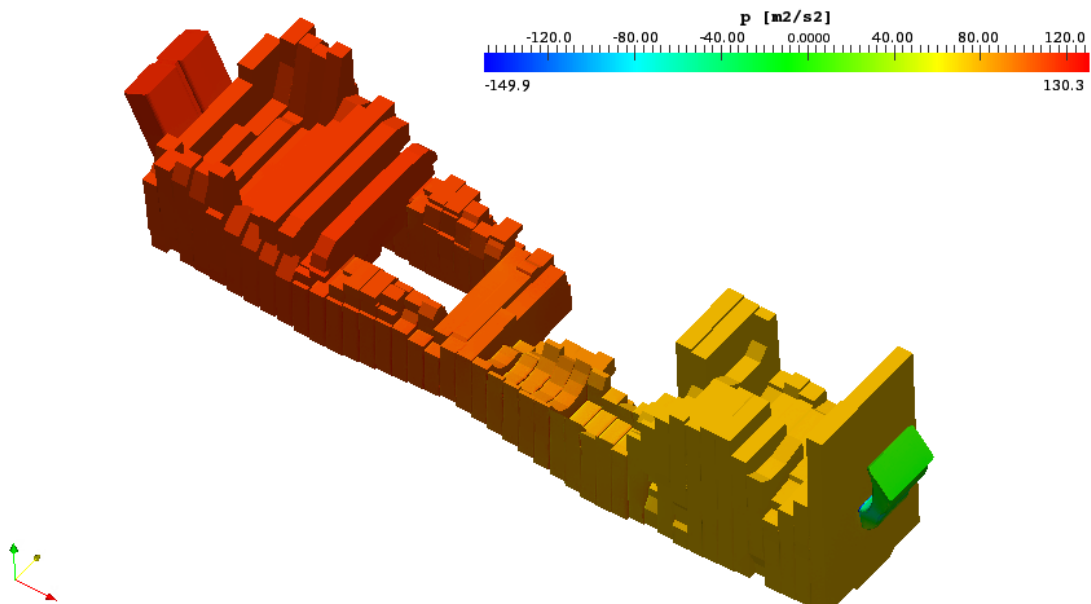
### 3.3.1. Επίλυση του αρχικού προβλήματος ροής

Βάσει των παραπάνω οριακών κι αρχικών συνθηκών, επιλύεται αρχικά το σύστημα των εξισώσεων της ροής (2.1) – (2.4). Παρατηρούμε ότι, λόγω της αρχικοποίησης  $a = 0$  παντού στο αρχικό πεδίο, οι όροι πηγής στις εξισώσεις της ορμής και σ' αυτές του μοντέλου τύρβης, «εξαφανίζονται», και, κατά συνέπεια, σ' αυτή τη φάση, λύνονται οι «κλασικές» εξισώσεις της ροής.

Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (απώλειες ολικής πίεσης) που προέκυψε για τον αρχικό αγωγό, είναι ίσες με,

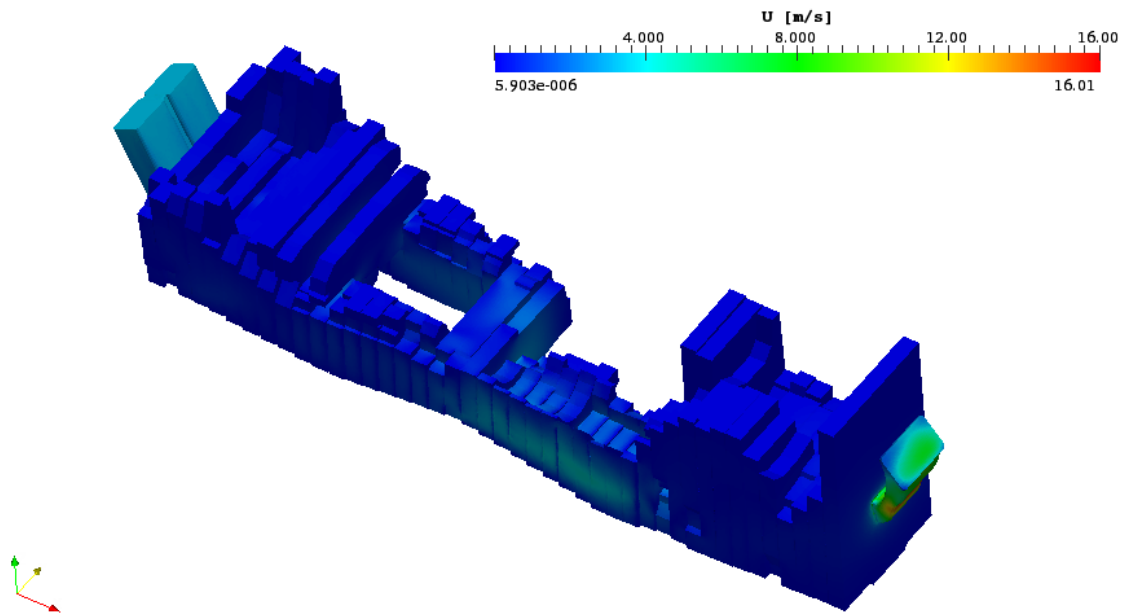
$$\delta p_t^{\text{initial}} = 1.45385 \frac{m^5}{s^3}$$

Στα σχήματα που ακολουθούν, φαίνονται τα πεδία της στατικής πίεσης, του μέτρου της ταχύτητας, καθώς και οι γραμμές ροής του αρχικού ροϊκού πεδίου.

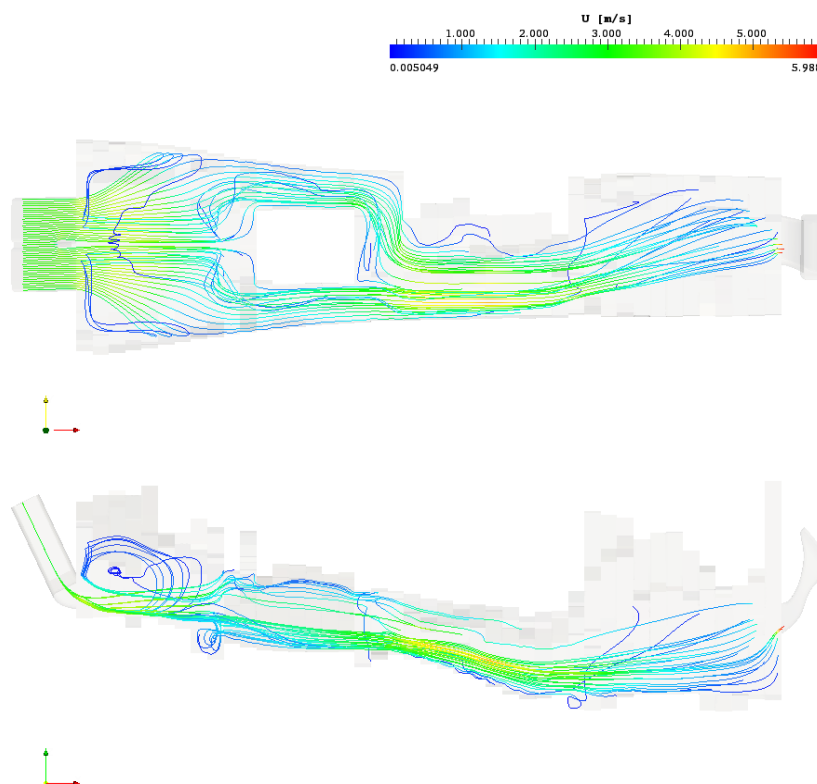


**Σχ. 3.8.** Κατανομή στατικής πίεσης κατά μήκος του αγωγού.

### Κεφάλαιο 3 Εφαρμογή στην εσωτερική αεροδυναμική

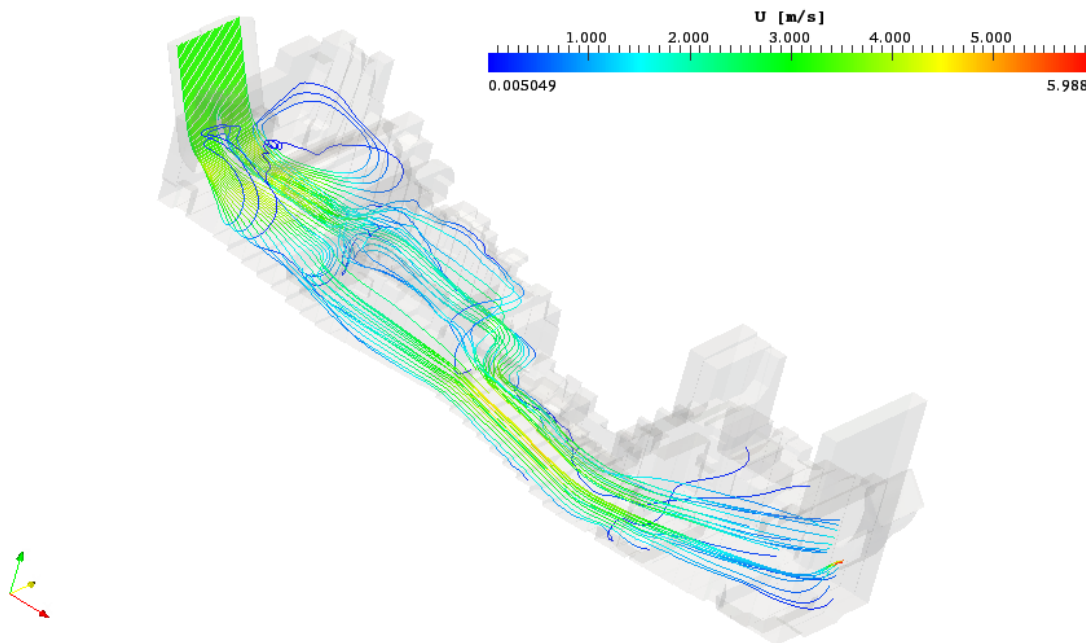


**Σχ. 3.9.** Κατανομή του μέτρου της ταχύτητας κατά μήκος του αγωγού.



**Σχ. 3.10.** Γραμμές ροής διαστασιολογημένες με το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας. Φαίνεται η κάτοψη και η πρόσοψη του αγωγού.

Βάσει των σχημάτων 3.8, 3.9, 3.10 και 3.11, είναι προφανές ότι έχουμε να αντιμετωπίσουμε ένα αρκετά σύνθετο ροϊκό πεδίο, στο οποίο εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι υπάρχουν συχνές κι πολύ απότομες εναλλαγές στην κατεύθυνση της ροής, παράγοντας ο οποίος συντελεί στη δημιουργία μεγάλων απωλειών ολικής πίεσης.



**Σχ. 3.11.** Γραμμές ροής (μέτρο της ταχύτητας). Γενική άποψη του αγωγού.

### 3.3.2. Βέλτιστη τοπολογία ροής – Σχολιασμός αποτελεσμάτων

Έχοντας δώσει όλα τα τεχνικά χαρακτηριστικά του πλέγματος, των μεθόδων διακριτοποίησης και επίλυσης των εξισώσεων ροής και των συζυγών εξισώσεων, καθώς και λοιπές χρήσιμες λεπτομέρειες/πληροφορίες για τη βελτιστοποίηση, είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε στην τελική φάση και στην εφαρμογή του αλγορίθμου για την εύρεση της βέλτιστης τοπολογίας ροής.

Υπενθυμίζεται, ότι ένας κύκλος βελτιστοποίησης συνίσταται από τα ακόλουθα, πέντε (5) βασικά βήματα,

- |  |                |   |
|--|----------------|---|
|  | <b>ΒΗΜΑ 1.</b> | Επίλυση του προβλήματος της ροής.                                   |
|  | <b>ΒΗΜΑ 2.</b> | Υπολογισμός των απωλειών ολικής πίεσης.                             |
|  | <b>ΒΗΜΑ 3.</b> | Επίλυση του συζυγούς προβλήματος.                                   |
|  | <b>ΒΗΜΑ 4.</b> | Υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας.                              |
|  | <b>ΒΗΜΑ 5.</b> | Ανανέωση με τη μέθοδο της απότομης καθόδου του πεδίου του πορώδους. |

Είναι προφανές ότι από τα παραπάνω βήματα, πιο ακριβές σε υπολογιστικό κόστος είναι οι δύο αριθμητικές επιλύσεις, του ροϊκού και, του συζυγούς προβλήματος. Είναι εύκολο να καταλάβει κάποιος, ότι η διαδικασία αριθμητικής επίλυσης και «απόλυτης» σύγκλισης των εξισώσεων, καθίσταται ακόμα πιο δυσχερής και χρονοβόρα εξαιτίας της πολυπλοκότητας του

πεδίου ροής και της πυκνότητας του υπολογιστικού πλέγματος. Για όλους τους παραπάνω λόγους, στην παρούσα, υιοθετήθηκε η λογική της μεθόδου «one-shot» επίλυσης των εξισώσεων.

Σύμφωνα με την τελευταία, σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης πραγματοποιείται «μερική» μόνο σύγκλιση των εξισώσεων της ροής και των συζυγών εξισώσεων (επιβάλλοντας στον αλγόριθμο επίλυσης έναν μικρό, επιτρεπτό αριθμό επαναλήψεων<sup>21</sup> κάθε φορά), υπολογίζονται προσεγγιστικά οι παράγωγοι ευαισθησίας και ανανεώνεται το δάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού. Σε αντιστάθμισμα, για την εύρεση της βέλτιστης λύσης, «επιβάλλονται» αρκετοί κύκλοι βελτιστοποίησης και μικρή τιμή για τον συντελεστή της μεθόδου της απότομης καθόδου,  $\eta$ , ενώ, η βελτιστοποίηση θεωρούμε ότι έχει τελειώσει όταν παρατηρηθεί σύγκλιση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης.

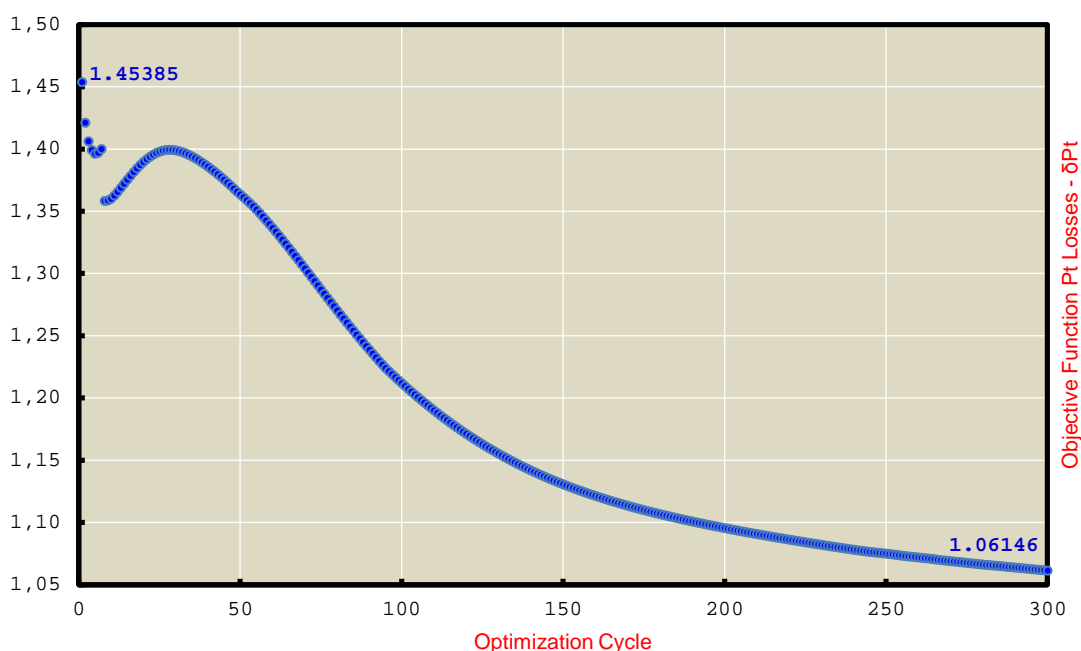
Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης, η τιμή για τις απώλειες ολικής πίεσης που πήραμε στο τέλος της διαδικασίας προέκυψε ίση με,

$$\delta p_t^{300} = 1.06146 \frac{m^5}{s^3}$$

δηλαδή, επιτεύχθηκε βελτίωση κατά,

$$\frac{\delta p_t^{\text{initial}} - \delta p_t^{300}}{\delta p_t^{\text{initial}}} \times 100\% \cong 26.99\%$$

ενώ, η ιστορία της βελτιστοποίησης παρουσιάζεται στο επόμενο διάγραμμα (Σχ. 3.12).

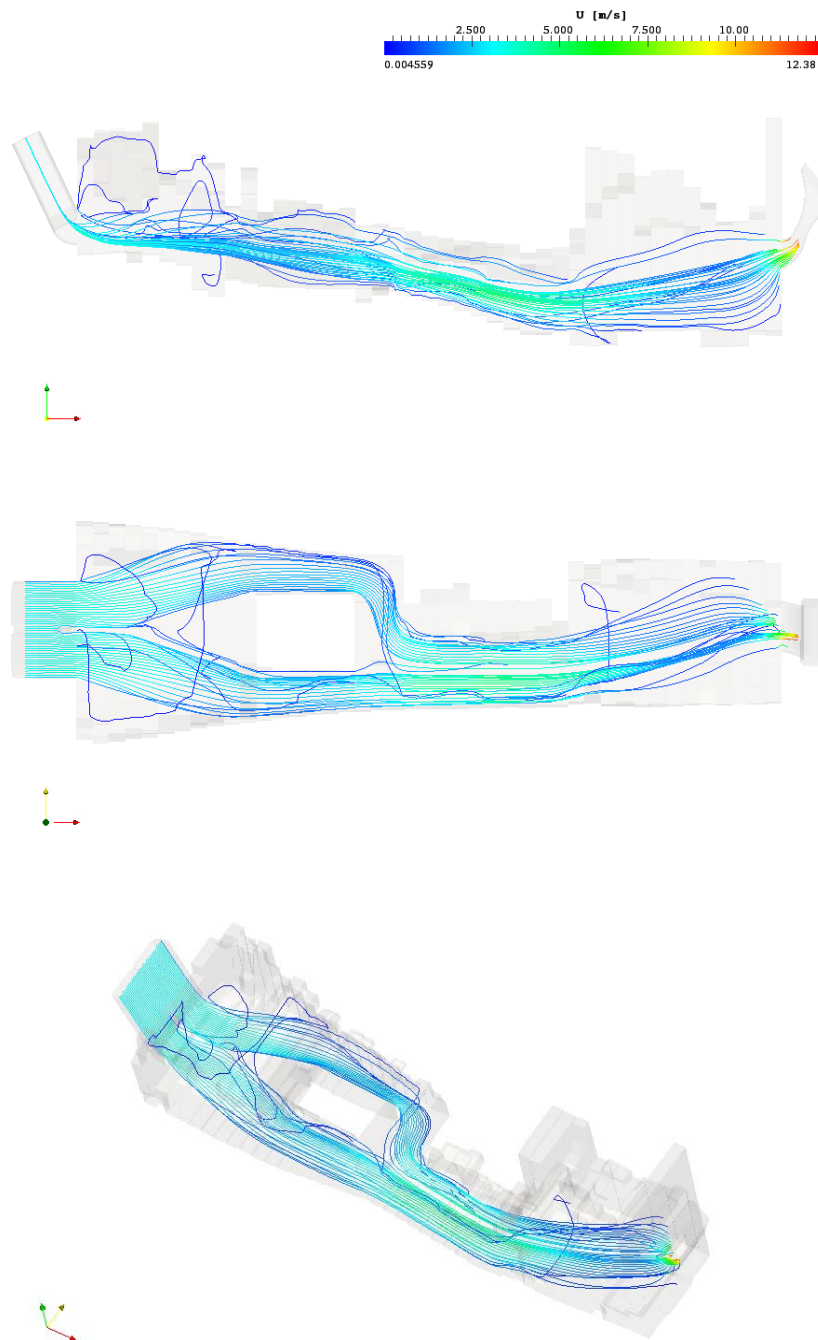


**Σχ. 3.12.** Ιστορία σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης. Απαιτήθηκαν 600 «ισοδύναμες» επιλύσεις της ροής και του συζυγούς προβλήματος. Η αργή σύγκλιση οφείλεται στη λογική της «one-shot» επίλυσης και στη μικρή τιμή του συντελεστή  $\eta$  που χρησιμοποιήθηκε στη μέθοδο της «απότομης καθόδου».

<sup>21</sup> Καλό θα ήταν στο σημείο αυτό ο αναγνώστης να αποσαφηνίσει τις έννοιες «κύκλος» και «επανάληψη». Σαν «κύκλος» νοείται η επίλυση ενός ευθέως και ενός συζυγούς προβλήματος ροής, ενώ ως «επανάληψη» η «εσωτερική» διαδικασία αριθμητικής επίλυσης των επιμέρους εξισώσεων.



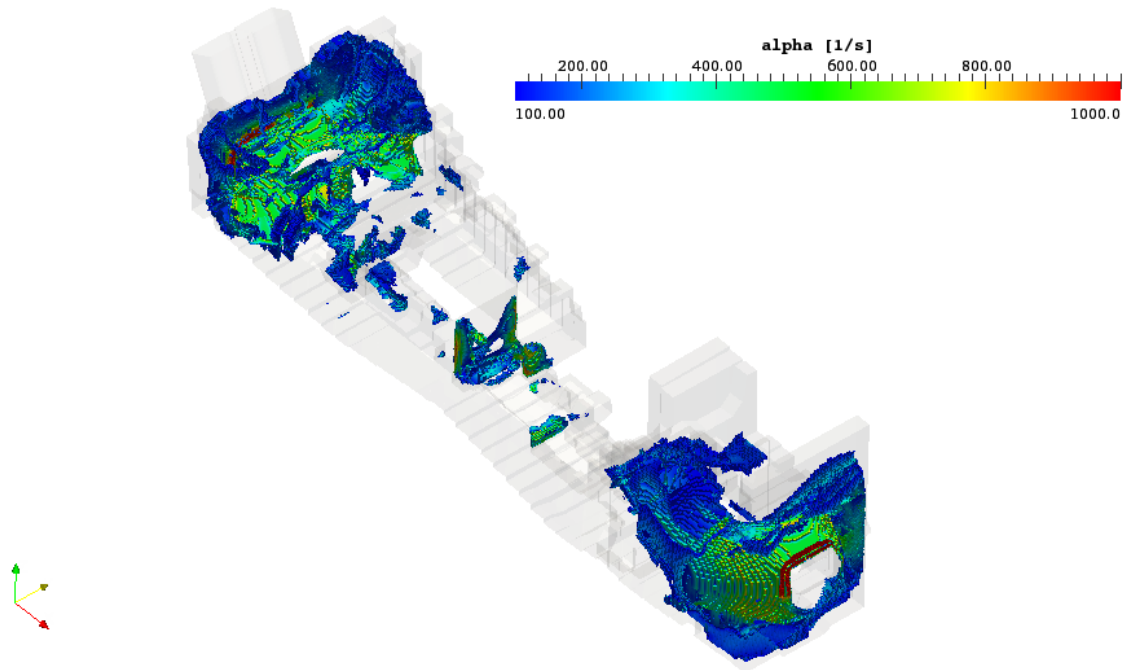
Οι γραμμές ροής στον τελικό αγωγό φαίνονται στο Σχ. 3.13, όπου παρατηρείται ότι συγκριτικά με τον αρχικό, «μη-βέλτιστο» αγωγό, οι απότομες αλλαγές στην κατεύθυνση της ροής έχουν εμφανώς εξομαλυνθεί.



**Σχ. 3.13.** Γραμμές ροής (μέτρο της ταχύτητας) στον βέλτιστο αγωγό. Κατά σειρά έχουμε, πρόσοψη, κάτοψη και γενική όψη.

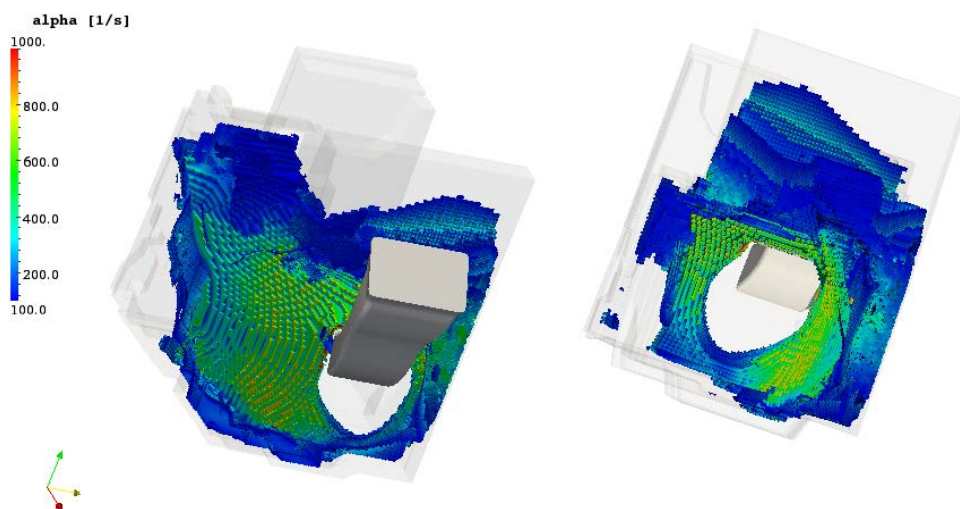
Η βέλτιστη κατανομή του πορώδους φαίνεται στα σχήματα 3.14 και 3.15, όπου για λόγους σύγκρισης και σχολιασμού, έχουν παρατεθεί δύο διαφορετικές οριακές περιπτώσεις, μία, στην οποία παρουσιάζονται περιοχές «ρευστού» με  $0 \leq a \leq 1$  και, μία άλλη, όπου παρουσιάζονται περιοχές «στερεού» με  $a$  στο διάστημα  $100 \leq a \leq 1000$ .

### Κεφάλαιο 3 Εφαρμογή στην εσωτερική αεροδυναμική



**Σχ. 3.14.** Κατανομή πορώδους,  $100 \leq a \leq 1000$ . Γενική άποψη του αγωγού

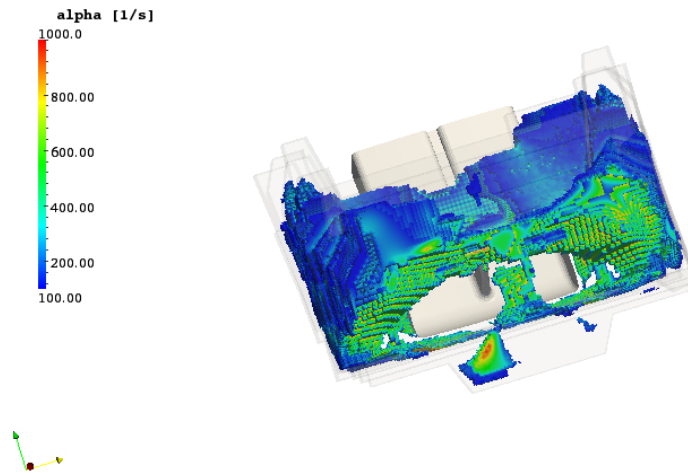
Από το Σχ. 3.14, φαίνεται ότι η βελτιστοποίηση τοπολογίας τείνει να «στερεοποιήσει» περιμετρικά τις περιοχές που βρίσκονται αμέσως μετά τον αγωγό προσαγωγής και πριν τον αγωγό απαγωγής του αέρα. Επίσης, είναι εμφανές ότι προσπαθεί να εξομαλύνει τις απότομες γωνίες αμέσως μετά το κιβώτιο ταχυτήτων ώστε να επιτύχει όσο το δυνατόν πιο ομαλή επανένωση των ρευμάτων αέρα (μείωση απωλειών ολικής πίεσης).



**Σχ. 3.15.** Λεπτομέρεια προ του αγωγού εξόδου της ροής.

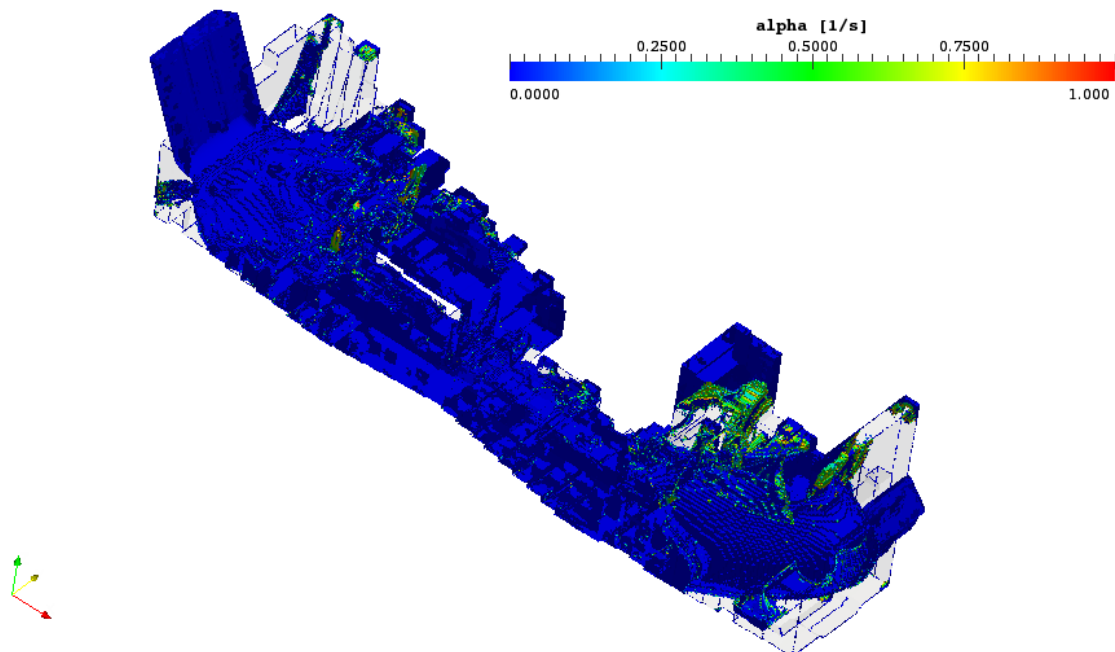
Στο Σχ. 3.15 φαίνεται λεπτομέρεια του σχηματιζόμενου «αγωγού» για την κατεύθυνση της ροής προς τον αγωγό εξόδου. Από φυσικής άποψης, η βελτιστοποίηση τοπολογίας προσπαθεί να επιτύχει όσο το δυνατόν πιο ομαλή οδήγηση και είσοδο της ροής από τον αγωγό της μεγαλύτερης διαμέτρου στον αγωγό εξόδου που χαρακτηρίζεται από μικρότερη διάμετρο,

προσπαθώντας, ταυτόχρονα, να αποτρέψει και την «κρούση» με το κάθετο στερεό τοίχωμα, παράγοντες, που συμβάλλουν στη δημιουργία απωλειών ολικής πίεσης.



**Σχ. 3.16.** Λεπτομέρεια μετά τον αγωγό εισόδου της ροής.

Όμοια, στο Σχ. 3.16 φαίνεται λεπτομέρεια του σχηματιζόμενου καναλιού αμέσως μετά τον αγωγό εισόδου. Και σ' αυτή την περίπτωση φαίνεται καθαρά η προσπάθεια για ομαλή οδήγηση της ροής από τον αγωγό εισόδου (μικρότερης διαμέτρου) προς τον κύριο αγωγό, μεγαλύτερης διαμέτρου (αύξηση απωλειών ολικής πίεσης). Επίσης, παρατηρείται η δημιουργία «τοιχώματος» στο μέσο του αγωγού, που ερμηνεύεται ως προσπάθεια για ομαλό διαχωρισμό των ρευμάτων αέρα προ του κιβωτίου ταχυτήτων.



**Σχ. 3.17.** Κατανομή πορώδους,  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Γενική άποψη του αγωγού.

Στο Σχ. 3.17, φαίνεται η μορφή του βέλτιστου καναλιού ροής. Η επιλογή απεικόνισης μιας κατανομής του πορώδους ( $0 \leq a \leq 1$ ) και όχι της «ακριβούς» τιμής,  $a = 0$ , έχει να κάνει με τη μέθοδο επίλυσης των εξισώσεων. Είναι προφανές, ότι σε περίπτωση που υπήρχει η δυνατότητα να λυθούν αναλυτικά (και άρα «ακριβώς») οι εξισώσεις της ροής με τους όρους πηγής, τότε, θα ήταν αρκετό να απεικονίσουμε μόνο τις περιοχές με  $a = 0$ . Επειδή όμως η επίλυση γίνεται αριθμητικά, και επομένως, υπεισέρχεται η έννοια της ακρίβειας των αριθμητικών υπολογισμών, είναι λογικό να δουλεύουμε με όρια τιμών και όχι με «ακριβείς» τιμές.

Το Σχ. 3.17 επιβεβαιώνει αυτό που περιμέναμε, δηλαδή, το σχηματισμό ενός κεντρικού αγωγού ροής, όπου φαίνεται καλύτερα η στρογγύλευση για την ομαλή οδήγηση της ροής αμέσως μετά τον αγωγό προσαγωγής και πριν τον αγωγό απαγωγής του αέρα.

# 4

## Μετεπεξεργασία της βέλτιστης λύσης

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

---

Στο τέλος του Κεφ. 3 παρουσιάστηκαν τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης και η σχηματιζόμενη, βέλτιστη τοπολογία ροής. • Στόχος του τρέχοντος κεφαλαίου είναι η ανάπτυξη και ο σχολιασμός μιας σειράς αλγορίθμων (οι οποίοι μετατράπηκαν σε κώδικα με τη βοήθεια του OpenFOAM) με στόχο, • αφενός τη μετεπεξεργασία (post-processing) της βέλτιστης αυτής λύσης κι αφετέρου, • την υποβοήθηση της εκ νέου αναζήτησης του αλγορίθμου βελτιστοποίησης για την εύρεση του «ολικά» βέλτιστου αγωγού ροής. • Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται και σχολιάζονται καθ' όλη τη διάρκεια ανάπτυξης του τρέχοντος κεφαλαίου, παρουσιάζουν εξαιρετικό ενδιαφέρον από πρακτική άποψη.

---

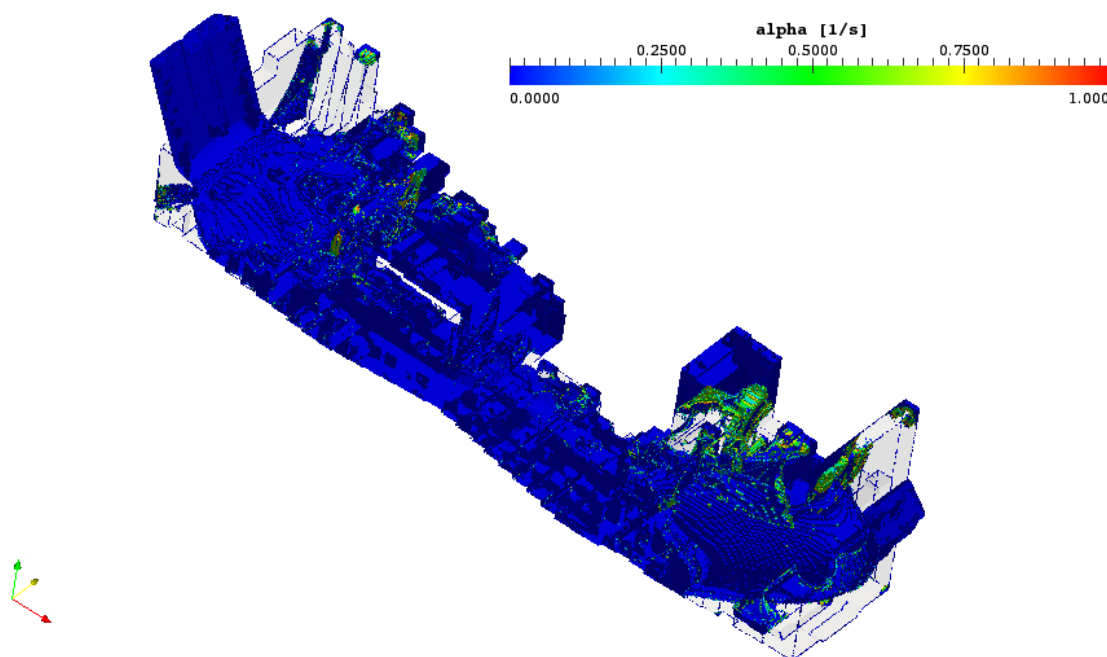
### 4.1. Βέλτιστη τοπολογία ροής

Στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου παρουσιάστηκε το βέλτιστο κανάλι ροής για πορώδες  $0 \leq a \leq 1$ . Το Σχ. 3.17 παρουσιάζεται ξανά εδώ για λόγους πληρότητας και επιπλέον σχολιασμού. Παρατηρώντας το προσεκτικότερα, βλέπουμε, ότι εκτός από τον κεντρικό αγωγό οδήγησης της ροής από την είσοδο στην έξοδο, εμφανίζονται περιοχές (ομάδες) κελιών ή και μεμονωμένα κελιά, με  $0 \leq a \leq 1$ , τα οποία και είναι κοινή λογική, ότι μόνο κατ' ευφημισμό αποτελούν μέρος του (βέλτιστου) αγωγού ροής, αφού, διαμέσου τους, δε μπορεί στην πραγματικότητα να περνάει ροή ρευστού<sup>22</sup>.

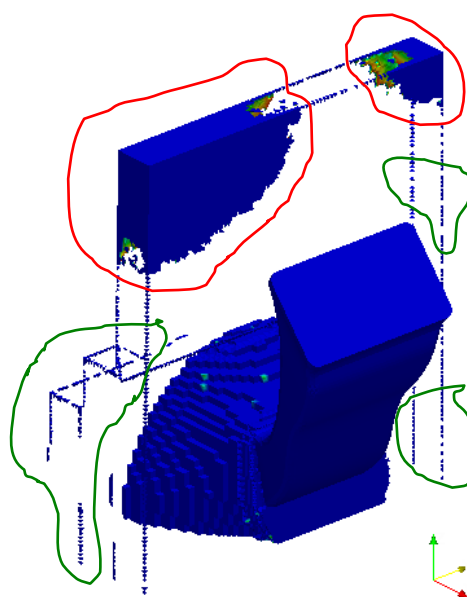
---

<sup>22</sup> Αριθμητικά εμφανίζεται «κάποια» ροή.

#### Κεφάλαιο 4. Μετεπεξεργασία της βέλτιστης λύσης



**Σχ. 4.1.** Κατανομή πορώδους,  $0 \leq a \leq 1$ . Γενική άποψη του αγωγού.



**Σχ. 4.2.** Λεπτομέρεια ομάδας κελιών (εντός των κόκκινων περιοχών) με  $0 \leq a \leq 1$ , τα οποία, ενώ αριθμητικά παρουσιάζουν «κάποια» ροή, δεν δύνανται να αποτελούν μέρος του αγωγού ροής στην πραγματικότητα. Εντός της πράσινης επισήμανσης φαίνεται και σειρά μεμονωμένων κελιών τα οποία επίσης δεν μπορούν στην πραγματικότητα να εμφανίζουν ροή ρευστού.

Στο Σχ. 4.2 παρουσιάζεται λεπτομέρεια του βέλτιστου αγωγού ροής, κοντά στον αγωγό εξόδου, όπου κελιά με τιμές πορώδους  $0 \leq a \leq 1$  σχηματίζουν περιοχές όπου στην πραγματικότητα, είναι προφανές ότι δε μπορεί να εισέρχεται και να εξέρχεται ροή ρευστού. Στην ίδια εικόνα φαίνονται επίσης και μεμονωμένα κελιά τα οποία, από «φυσική άποψη», δεν θα έπρεπε να αποτελούν μέρος της βέλτιστης τοπολογίας.

## 4.2. Δύο βασικοί αλγόριθμοι μετεπεξεργασίας

Όλη η προηγηθείσα ανάλυση μας ωθεί στη διαδικασία σκέψης και υλοποίησης ενός αλγορίθμου, ο οποίος θα καταφέρει να απομονώσει τον βέλτιστο αγωγό ροής (υπό την έννοια του αγωγού στον οποίο μπορεί και στην πραγματικότητα να υπάρχει ροή), από τέτοιες ομάδες κελιών. Ένας τέτοιος αλγόριθμος αναπτύχθηκε για τις ανάγκες της παρούσας διπλωματικής και παρουσιάζεται παρακάτω, μαζί με το σχολιασμό των αποτελεσμάτων της εφαρμογής του.

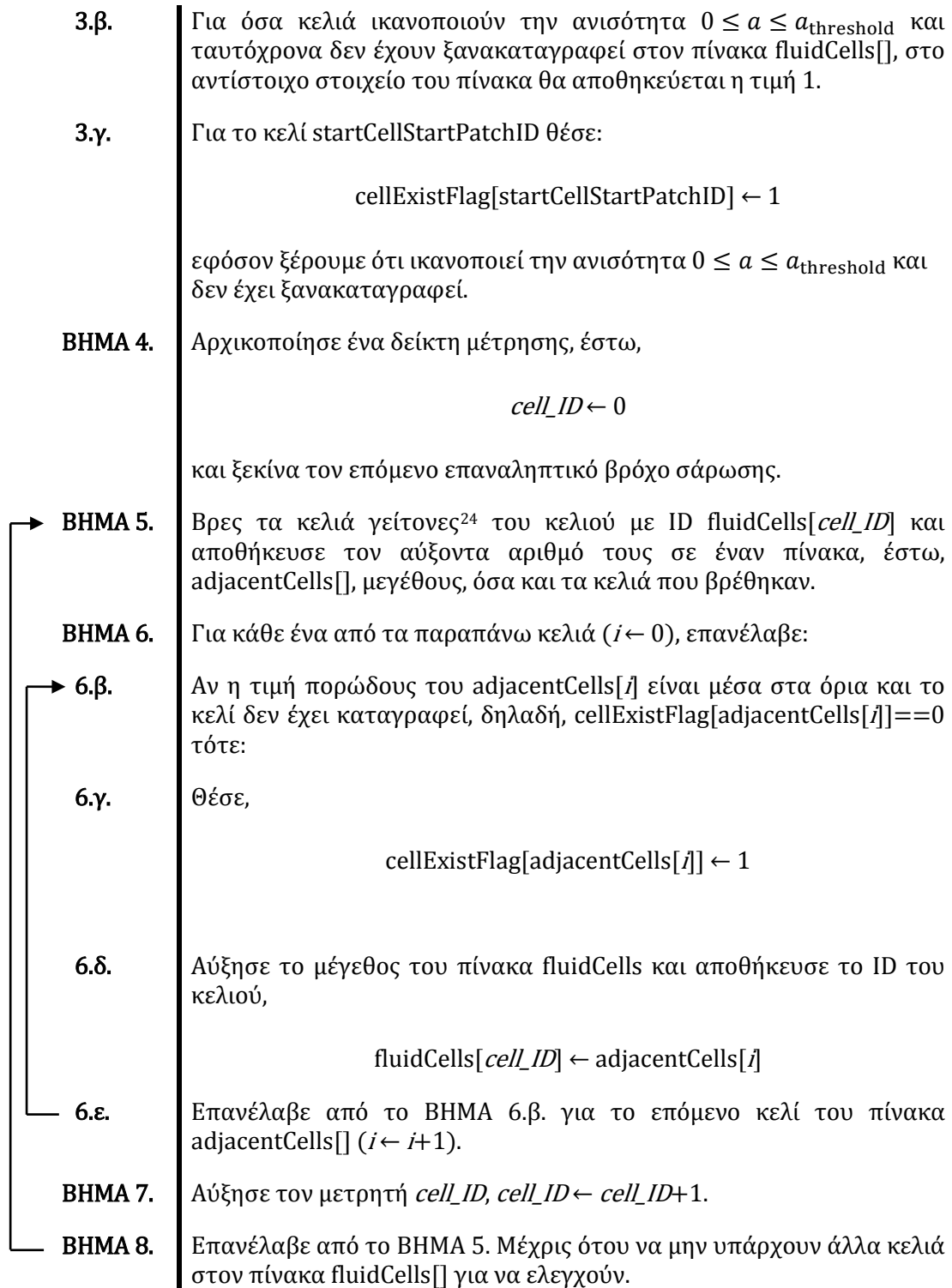
### 4.2.1. Αλγόριθμος απομόνωσης του βέλτιστου αγωγού ροής

Ο αλγόριθμος που δημιουργήθηκε συνίσταται από τα ακόλουθα βήματα, ενώ, ο τρόπος λειτουργίας του παρουσιάζεται και σχολιάζεται αμέσως μετά.

Αλγόριθμος απομόνωσης του βέλτιστου αγωγού ροής

- ΒΗΜΑ 1.** Διάβασε το όνομα της οριακής επιφάνειας (patch) απ' όπου θ' αρχίσει η αναζήτηση<sup>23</sup>, έστω, `startPatchName`. Αν δεν ορίζεται, θεώρησε εξ ορισμού ότι αυτή είναι η είσοδος, `startPatchName` ← «inlet».
- 1.β.** Βρες τον αύξοντα αριθμό (ID) που αντιστοιχεί στην οριακή επιφάνεια `startPatchName`, έστω, `startPatchID`.
- 1.γ.** Βρες τον αύξοντα αριθμό (ID) της «φάτσας» (face) που αποτελεί την εναρκτήρια «φάτσα» του `startPatchID`, έστω, `startFaceStartPatchID`.
- 1.δ.** Βρες τον αύξοντα αριθμό (ID) του κελιού στο οποίο ανήκει η «φάτσα» `startFaceStartPatchID`, έστω `startCellStartPatchID`.
- 1.ε.** Διάβασε ένα όριο για το πορώδες βάσει του οποίου θα γίνει η αναζήτηση των κελιών που αποτελούν το κανάλι της ροής, έστω,  $a_{\text{threshold}}$ .
- ΒΗΜΑ 2.** Δημιούργησε έναν κενό πίνακα (μηδενικού μεγέθους αρχικά) όπου θ' αποθηκεύονται οι αύξοντες αριθμοί (IDs) των κελιών που ικανοποιούν την ανισότητα  $0 \leq a \leq a_{\text{threshold}}$  και ανήκουν στο (βέλτιστο) κανάλι της ροής. Έστω, το όνομα αυτού, `fluidCells[]`.
- 2.β.** Για το κελί `startCellStartPatchID` θέσε:
- $$\text{fluidCells}[0] \leftarrow \text{startCellStartPatchID}$$
- και αύξησε το μέγεθος του πίνακα κατά 1.
- ΒΗΜΑ 3.** Δημιούργησε έναν πίνακα μεγέθους όσο και ο αριθμός των κελιών του πλέγματος (εδώ 5,412,281), έστω, `cellExistFlag[]` και αρχικοποίησέ τον με την τιμή 0.

<sup>23</sup> Προφανώς, εφόσον προσπαθούμε να απομονώσουμε τον βέλτιστο αγωγό ροής, η οριακή επιφάνεια απ' όπου θ' αρχίσει η αναζήτηση συνετό θα ήταν να έχει γνωστή τιμή πορώδους  $a = 0$ .

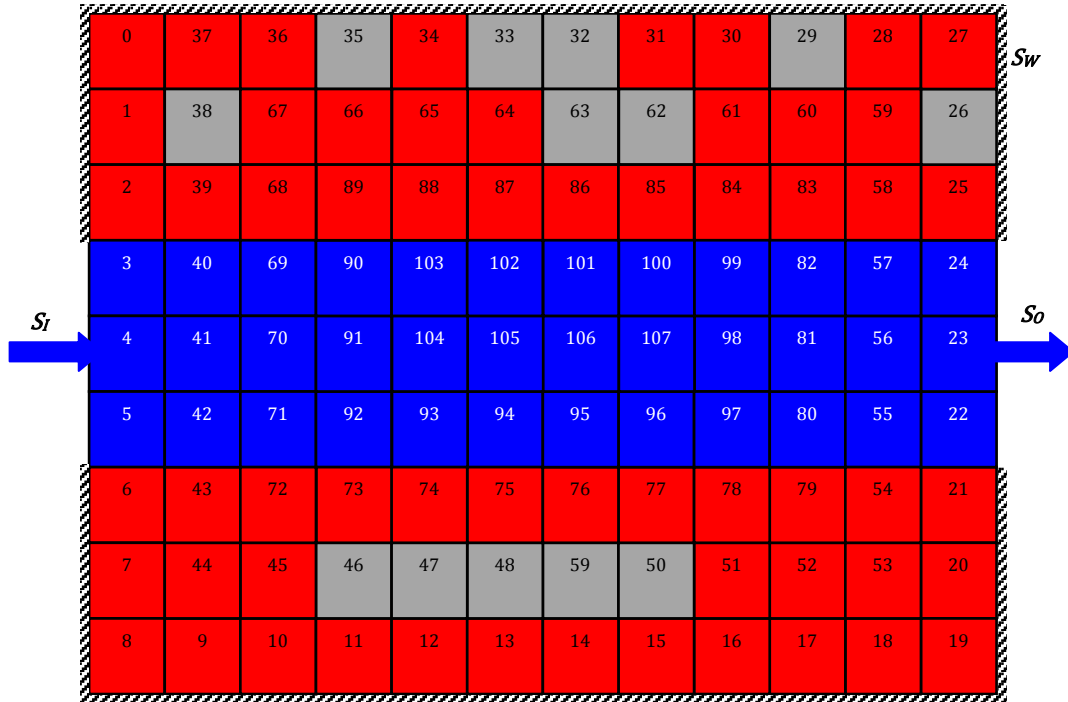


Έστω το παρακάτω απλοποιημένο, για λόγους επίδειξης (χωρίς δηλαδή να έχει κάποια φυσική ερμηνεία) λειτουργίας του αλγορίθμου, παράδειγμα. Το αρχικό πεδίο ροής θεωρούμε ότι αποτελείται από μία επιφάνεια εισόδου ( $S_I$ ), μία εξόδου ( $S_O$ ) και στερεά όρια ( $S_W$ ). Το πλέγμα για λόγους ευκολίας (το παράδειγμα εύκολα γενικεύεται και σε μη-δομημένο ή υβριδικό) θεωρείται δομημένο και η αρίθμηση των κελιών του γίνεται με «τυχαίο» τρόπο. Με το μπλε χρώμα είναι τα κελιά που ανήκουν στο (βέλτιστο) κανάλι ροής ( $0 \leq a \leq a_{\text{threshold}}$ ), με το κόκκινο τα κελιά που ανήκουν στο θεωρούμενο ως «στερεοποιημένο» όριο ( $a > a_{\text{threshold}}$ ) και,

<sup>24</sup> Στο OpenFOAM γειτονικά θεωρούνται τα κελιά με κοινές «φάτσες».



με γκρι, τα κελιά που ναί μεν έχουν τιμή πορώδους  $0 \leq a \leq a_{\text{threshold}}$ , αλλά στην πραγματικότητα δε δύναται ροή να εισέρχεται και να εξέρχεται διαμέσου τους (απομονωμένα κελιά και απομονωμένες ομάδες κελιών). Επίσης, θεωρούμε ότι τα κελιά των οριακών επιφανειών εισόδου/εξόδου (#3, #4, #5, #22, #23 και #24), για τους γνωστούς λόγους, έχουν τιμή πορώδους  $a = 0$ .



**Σχ. 4.3.** Παράδειγμα ροής για την πρακτική εφαρμογή του αλγορίθμου

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο, αρχικά δημιουργούνται οι πίνακες,

- `fluidCells[]`, μηδενικού μεγέθους<sup>25</sup> και,
- `cellExistFlag[]` μεγέθους όσο και το μέγεθος του υπόψιν πλέγματος, ο οποίος και αρχικοποιείται με την τιμή 0, δηλαδή, `cellExistFlag[0 ≤ i ≤ 107] ← 0`.

Η αναζήτηση του βέλτιστου καναλιού ροής θ' αρχίσει από την οριακή επιφάνεια της εισόδου ( $S_I$ ), όπου κελί έναρξης (`startCellStartPatchID`) θεωρείται το #4. Επομένως, σύμφωνα με τον αλγόριθμο θα είναι,

$$\text{fluidCells}[0] \leftarrow 4$$

και,

$$\text{cellExistFlag}[\text{fluidCells}[0]=4] \leftarrow 1$$

Έστω  $\text{cell\_ID} \leftarrow 0$  ο μετρητής των στοιχείων του πίνακα `fluidCells[]`. Ακολουθεί η σάρωση του πεδίου, σύμφωνα με τον ακόλουθο επαναληπτικό βρόχο.

<sup>25</sup> Προφανώς η μνήμη του θα δεσμεύεται δυναμικά. Στο OpenFOAM αυτό γίνεται αυτόματα με κατάλληλη συνάρτηση.

① *Επανάληψη 1<sup>η</sup>*

**ΒΗΜΑ 5.** Βρες τα γειτονικά κελιά του  $\text{fluidCells}[\text{cell\_ID}=0]=4$  και αποθήκευσέ τα σε έναν πίνακα  $\text{adjacentCells}[]$ . Οπότε, θα είναι,

$$\begin{aligned}\text{adjacentCells}[0] &\leftarrow 3 \\ \text{adjacentCells}[1] &\leftarrow 5 \\ \text{adjacentCells}[2] &\leftarrow 41\end{aligned}$$

**ΒΗΜΑ 6.** Για κάθε ένα από τα παραπάνω κελιά, εκτέλεσε τον παρακάτω επαναληπτικό βρόχο.

**ΒΗΜΑ 6.β.** Επειδή,

$$\text{cellExistFlag}[\text{adjacentCells}[0]=3]=0 \text{ και } \alpha[\text{adjacentCells}[0]=3] \leq a_{\text{threshold}}$$

**ΒΗΜΑ 6.γ.** Θέσε,

$$\text{cellExistFlag}[\text{adjacentCells}[0]=3] \leftarrow 1$$

**ΒΗΜΑ 6.δ.** Αποθήκευσε την τιμή του κελιού στον πίνακα  $\text{fluidCells}[]$  κι αύξησε το μέγεθός του,

$$\text{fluidCells}[1] \leftarrow 3$$

**ΒΗΜΑ 6.ε.** Επανάλαβε τα προηγούμενα βήματα και για τα κελιά,

$$\text{adjacentCells}[1]=5, \text{adjacentCells}[2]=41$$

Στο τέλος της πρώτης επανάληψης ο πίνακας  $\text{fluidCells}[]$  θα περιέχει τέσσερα (4) στοιχεία, δηλαδή τον αύξοντα αριθμό των κελιών,

$$\begin{aligned}\text{fluidCells}[0] &= 4 \\ \text{fluidCells}[1] &= 3 \\ \text{fluidCells}[2] &= 5 \\ \text{fluidCells}[3] &= 41\end{aligned}$$

ενώ, ο πίνακας  $\text{cellExistFlag}[]$  θα έχει διαμορφωθεί ως,

$$\begin{aligned}\text{cellExistFlag}[3] &= 1 \\ \text{cellExistFlag}[4] &= 1 \\ \text{cellExistFlag}[5] &= 1 \\ \text{cellExistFlag}[41] &= 1\end{aligned}$$

με τα υπόλοιπα στοιχεία του να είναι μηδενικά.

**ΒΗΜΑ 7.** Αύξησε τον μετρητή  $\text{cell\_ID}$ ,

$$\text{cell\_ID} \leftarrow \text{cell\_ID} + 1$$

ο οποίος πλέον έχει την τιμή 1. Επανάλαβε από το ΒΗΜΑ 5 εφόσον ο πίνακας fluidCells έχει ακόμα κελιά που δεν έχουν ελεγχθεί.

## 2) Επανάληψη 2<sup>η</sup>

**ΒΗΜΑ 5.** Βρες τα γειτονικά κελιά του fluidCells[cell\_ID=1]=3 και αποθήκευσέ τα στον πίνακα adjacentCells[]. Οπότε, θα είναι τώρα,

$$\begin{aligned} \text{adjacentCells}[0] &\leftarrow 2 \\ \text{adjacentCells}[1] &\leftarrow 4 \\ \text{adjacentCells}[2] &\leftarrow 40 \end{aligned}$$

**ΒΗΜΑ 6.** Για κάθε ένα από τα παραπάνω κελιά, εκτέλεσε τον παρακάτω επαναληπτικό βρόχο.

**ΒΗΜΑ 6.β.** Επειδή,

$$\text{cellExistFlag}[\text{adjacentCells}[0]=2]=0 \text{ και } \alpha[\text{adjacentCells}[0]=2] > \alpha_{\text{threshold}}$$

συνέχισε με το επόμενο στοιχείο του πίνακα adjacentCells[].

**ΒΗΜΑ 6.β.** Επειδή,

$$\alpha[\text{adjacentCells}[1]=4] \leq \alpha_{\text{threshold}} \text{ και } \text{cellExistFlag}[\text{adjacentCells}[1]=4] \neq 0$$

συνέχισε με το επόμενο στοιχείο του πίνακα adjacentCells[].

**ΒΗΜΑ 6.β.** Επειδή,

$$\text{cellExistFlag}[\text{adjacentCells}[2]=40]=0 \text{ και } \alpha[\text{adjacentCells}[2]=40] \leq \alpha_{\text{threshold}}$$

**ΒΗΜΑ 6.γ.** Θέσε,

$$\text{cellExistFlag}[\text{adjacentCells}[2]=40] \leftarrow 1$$

**ΒΗΜΑ 6.δ.** Αποθήκευσε την τιμή του κελιού στον πίνακα fluidCells[] κι αύξησε το μέγεθός του,

$$\text{fluidCells}[4] \leftarrow 40$$

Στο τέλος της δεύτερης επανάληψης ο πίνακας fluidCells[] θα περιέχει πέντε (5) στοιχεία, δηλαδή τον αύξοντα αριθμό των κελιών,

$$\begin{aligned} \text{fluidCells}[0] &= 4 \\ \text{fluidCells}[1] &= 3 \\ \text{fluidCells}[2] &= 5 \\ \text{fluidCells}[3] &= 41 \\ \text{fluidCells}[4] &= 40 \end{aligned}$$

ενώ, ο πίνακας cellExistFlag[] θα έχει διαμορφωθεί ως,

#### Κεφάλαιο 4. Μετεπεξεργασία της βέλτιστης λύσης

```
cellExistFlag[3]=1  
cellExistFlag[4]=1  
cellExistFlag[5]=1  
cellExistFlag[40]=1  
cellExistFlag[41]=1
```

με τα υπόλοιπα στοιχεία του να είναι μηδενικά.

**BHMA 7.** Αύξησε τον μετρητή `cell_ID`,

```
cell_ID ← cell_ID + 1
```

ο οποίος πλέον έχει την τιμή 2. Επανάλαβε από το BHMA 5 εφόσον ο πίνακας `fluidCells` έχει ακόμα κελιά που δεν έχουν ελεγχθεί (στη συνέχεια θα ελεγχθεί το κελί με αύξοντα αριθμό `fluidCells[2]`, δηλαδή, το #5).

Δύο επαναλήψεις θεωρούνται ότι είναι αρκετές για να καταλάβει ο αναγνώστης τον τρόπο λειτουργίας του αλγορίθμου. Βάσει, λοιπόν, του παραπάνω τρόπου σάρωσης, περιοχές «ρευστού» που βρίσκονται αποκλεισμένες ανάμεσα σε «στερεοποιημένες» περιοχές της τοπολογίας και, συνίστανται από μεμονωμένα κελιά και ομάδες κελιών με  $0 \leq a \leq a_{\text{threshold}}$ , δεν πρόκειται ποτέ να καταγραφούν στον πίνακα `fluidCells[]`.

Για παράδειγμα, στη δεύτερη επανάληψη, το κελί με αύξοντα αριθμό #2 δεν αποθηκεύτηκε ποτέ στον πίνακα `fluidCells[]`. Επομένως, σε κάποια επόμενη επανάληψη, εφόσον δεν υπάρχει καταγεγραμμένο δε θα ελεγχθεί και για τα γειτονικά του κελιά και, κατά συνέπεια, ο αλγόριθμος δε θα φτάσει ποτέ να καταγράψει τα κελιά με αύξοντα αριθμό #38, #33, #35, #46, #47, #48 κ.λπ. Επαφίεται λοιπόν στην «όρεξη» του αναγνώστη να κάνει όλες τις απαιτούμενες επαναλήψεις (ή, τουλάχιστον μερικές ακόμα), για ν' αποδειχθεί του λόγου τ' αληθές. Τελικά, με το τέλος της σάρωσης, θα έχει καταγραφεί το βέλτιστο μονοπάτι της ροής το οποίο και αποτελείται μόνο από τα μπλε κελιά.

Ένα άλλο κομμάτι του αλγορίθμου που χρήζει εξήγησης, αφορά στο BHMA. 1. Είναι λογικό, ότι ο χρήστης του κώδικα θα μπορούσε να αρχικοποιήσει τον πίνακα `fluidCells[]` με έναν οποιοδήποτε αύξοντα αριθμό κελιού γνώριζε και, για το οποίο ήξερε επίσης ότι ανήκει στο βέλτιστο κανάλι της ροής. Το λογισμικό OpenFOAM όμως, μέσω συναρτήσεων που διαθέτει για τη δημιουργία και τον χειρισμό του υπολογιστικού πλέγματος, μπορεί να κάνει όλη αυτή τη διαδικασία γρήγορα και κυρίως αυτόματα. Συνεπώς, το μόνο που απαιτείται από τον χρήστη είναι η επιλογή και η καταγραφή του ονόματος του patch έναρξης της σάρωσης. Η συνετή επιλογή της επιφάνειας εισόδου ως τέτοιο, έχει να κάνει με το γεγονός ότι τα κελιά που την αποτελούν έχουν τιμή πορώδους  $a = 0$  και σίγουρα θα ανήκουν στη βέλτιστη τοπολογία ροής.

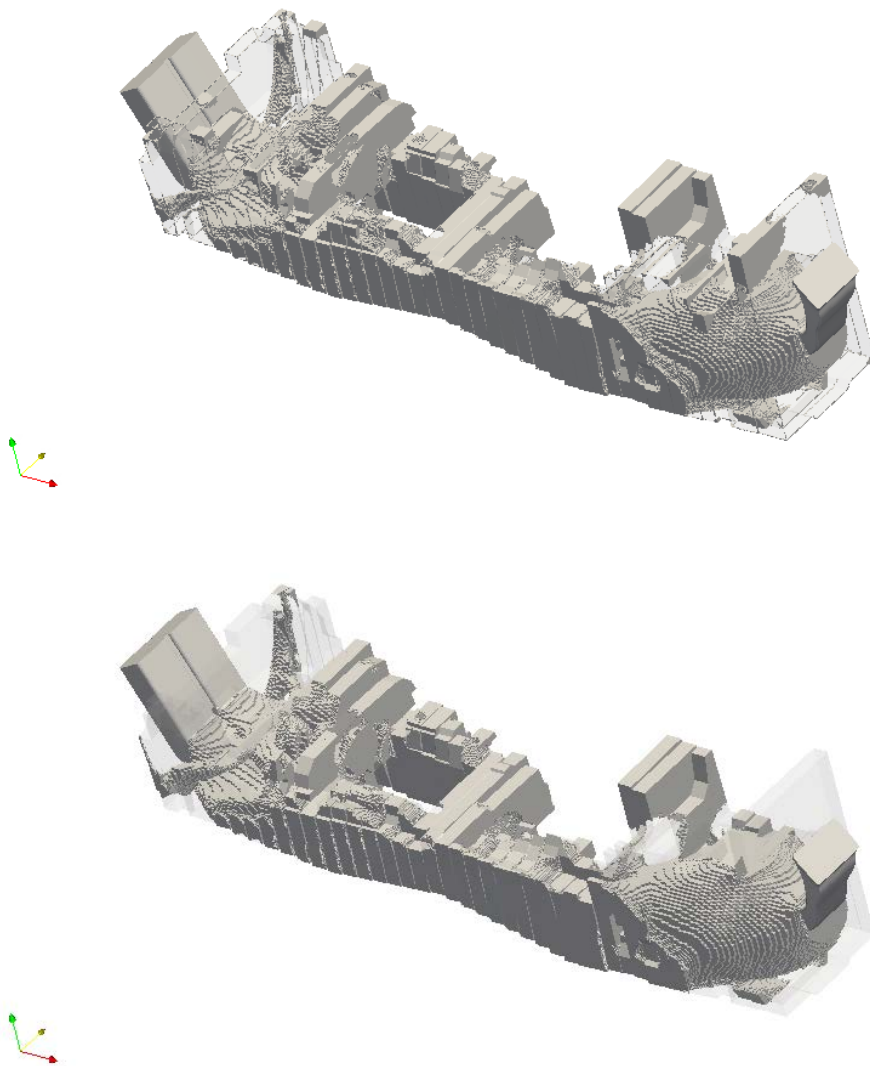
Για την καταγραφή της τιμής  $a_{\text{threshold}}$  και του ονόματος του patch έναρξης από τον χρήστη, δημιουργήθηκε στο αρχείο `system/fvSolution` του OpenFOAM, η ενότητα `SearchThresholdCells`, με την παρακάτω δομή.

```
SearchThresholdCells  
{  
    startPatchName      userDefinedName;  
    alphaThreshold      userDefinedValue;  
}
```

Ο κώδικας που φτιάχτηκε με αφετηρία τον αλγόριθμο, εφαρμόστηκε στη βέλτιστη λύση (Σχ. 4.1) για το παρακάτω αρχείο δεδομένων,

```
SearchThresholdCells
{
  startPatchName      inlet;
  alphaThreshold      1.0;
}
```

και τα αποτελέσματα που πάρθηκαν φαίνονται στο Σχ. 4.4, όπου, για λόγους σύγκρισης, παραθέτουμε και την αρχική κατανομή του πορώδους  $0 \leq a \leq 1$ .



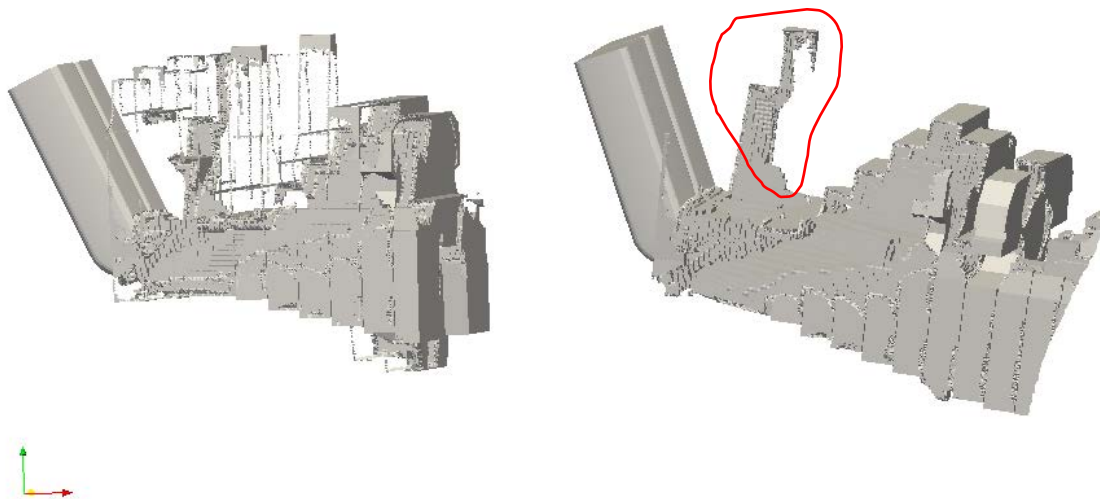
**Σχ. 4.4.** Στο πάνω σχήμα φαίνεται το «αρχικό» βέλτιστο κανάλι της ροής. Στο κάτω, απεικονίζεται το βέλτιστο κανάλι της ροής, απαλλαγμένο από μεμονωμένα κελιά και ομάδες κελιών που δεν συμμετέχουν στην πραγματική ροή.

#### Κεφάλαιο 4. Μετεπεξεργασία της βέλτιστης λύσης

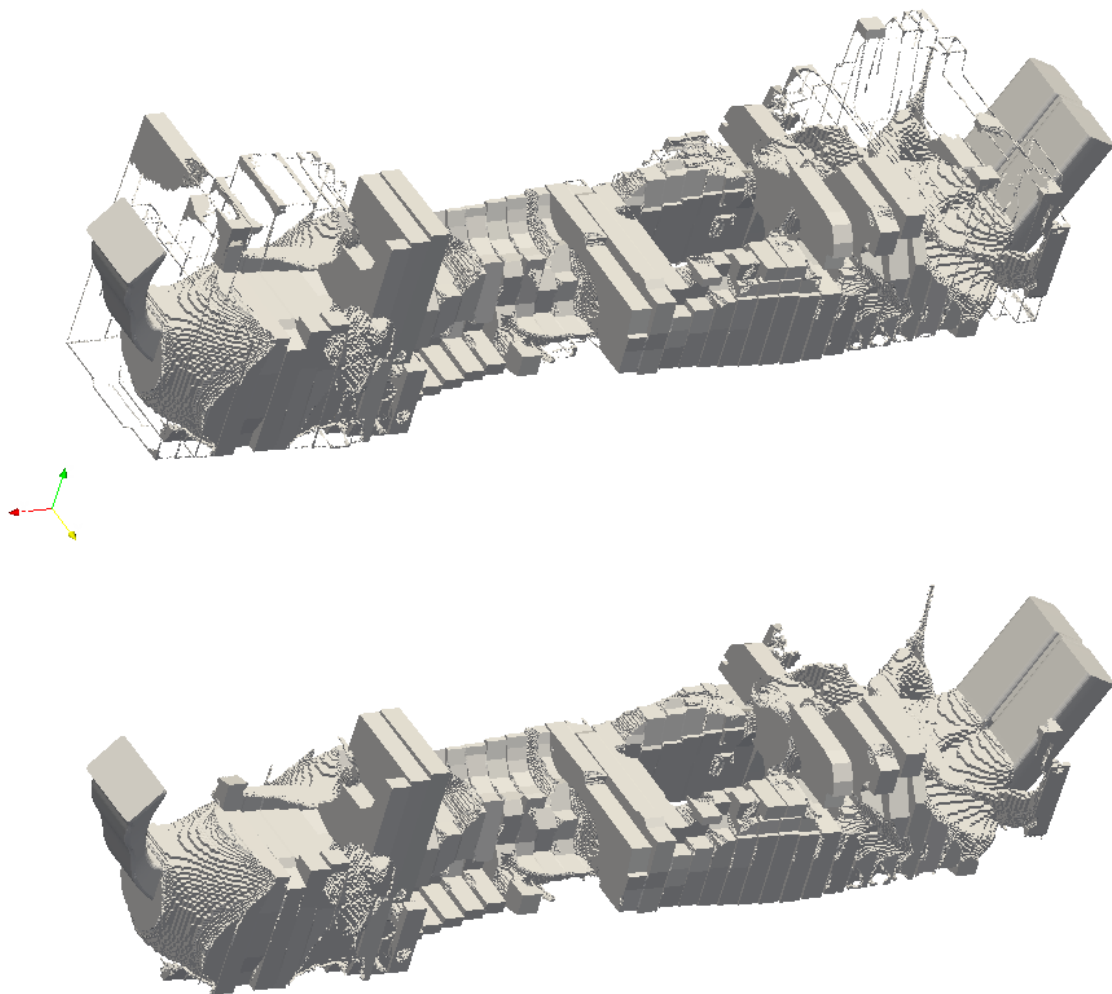
Τα κελιά που απομόνωσε ο κώδικας και αποτελούν το «πραγματικό» κανάλι της ροής ανέρχονται σε 3,175,554 (ποσοστό περίπου 59% των κελιών του αρχικού πλέγματος). Λεπτομέρειες από διάφορα σημεία του αγωγού φαίνονται στα σχήματα 4.5, 4.6 και 4.7.



**Σχ. 4.5.** Λεπτομέρεια του αεραγωγού κοντά στον αγωγό εξόδου πριν (αριστερά) και μετά (δεξιά) την εφαρμογή του κώδικα απομόνωσης του βέλτιστου καναλιού ροής. Φαίνεται καθαρά η διαφορά μετά το «σκούπισμα» των περιττών κελιών αν και, περιοχές που θα έπρεπε επίσης να έχουν εξαφανιστεί, παραμένουν (π.χ. εντός της κόκκινης επισήμανσης).



**Σχ. 4.6.** Λεπτομέρεια του αεραγωγού κοντά στον αγωγό εισόδου πριν (αριστερά) και μετά (δεξιά) την εφαρμογή του κώδικα. Παρόλο που παρατηρείται εμφανής βελτίωση, βλέπουμε ότι μερικές περιοχές που θα έπρεπε να έχουν εξαλειφθεί, παραμένουν ακόμα στο βέλτιστο κανάλι της ροής (π.χ. εντός της κόκκινης επισήμανσης).



**Σχ. 4.7.** Μια γενική όψη του αγωγού πριν (πάνω) και μετά (κάτω) την εφαρμογή του κώδικα.

#### **4.2.2. Αλγόριθμος «επαναρχικοποίησης» του πεδίου πορώδους**

Μετά την απομόνωση των κελιών που αποτελούν το «πραγματικά βέλτιστο» κανάλι της ροής, κατασκευάζεται αλγόριθμος (και κώδικας) σκοπός του οποίου είναι η «εκ νέου αρχικοποίηση» (reset) του πεδίου του πορώδους  $a$ . Τα κελιά που ανήκουν στον πίνακα `fluidCells[]` θα πάρουν την τιμή  $a = 0$ , ενώ, όλα τα υπόλοιπα κελιά του πλέγματος θα πάρουν τη μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή του  $a$ , όπου για το πρόβλημά μας, ορίζεται σε  $a_{\max} = 1000$ .

#### **4.3. Μια «δεύτερη» βελτιστοποίηση – Σχολιασμός αποτελεσμάτων**

Στο σημείο αυτό, προχωράμε σε εκ νέου εφαρμογή του αλγορίθμου βελτιστοποίησης, θεωρώντας ως αρχική λύση αυτή που προέκυψε στο τέλος της προηγούμενης βελτιστοποίησης με το ανανεωμένο όμως, πεδίο του πορώδους.

#### Κεφάλαιο 4. Μετεπεξεργασία της βέλτιστης λύσης

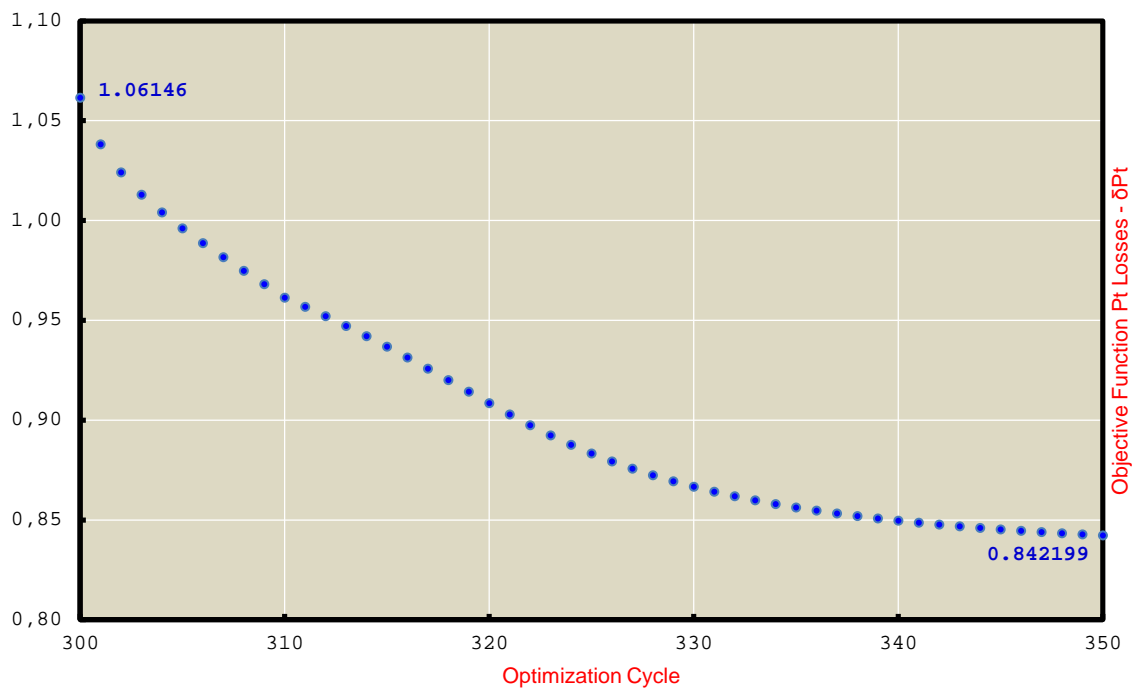
Στο τέλος του αλγορίθμου, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης προέκυψε ίση με,

$$\delta p_t^{350} = 0.842199 \frac{m^5}{s^3}$$

δηλαδή, επιτεύχθηκε εκ νέου μείωση των απωλειών ολικής πίεσης κατά περίπου,

$$\frac{\delta p_t^{300} - \delta p_t^{350}}{\delta p_t^{300}} \times 100\% \cong 20.66\%$$

με την ιστορία της βελτιστοποίησης να φαίνεται στο Σχ. 4.8.



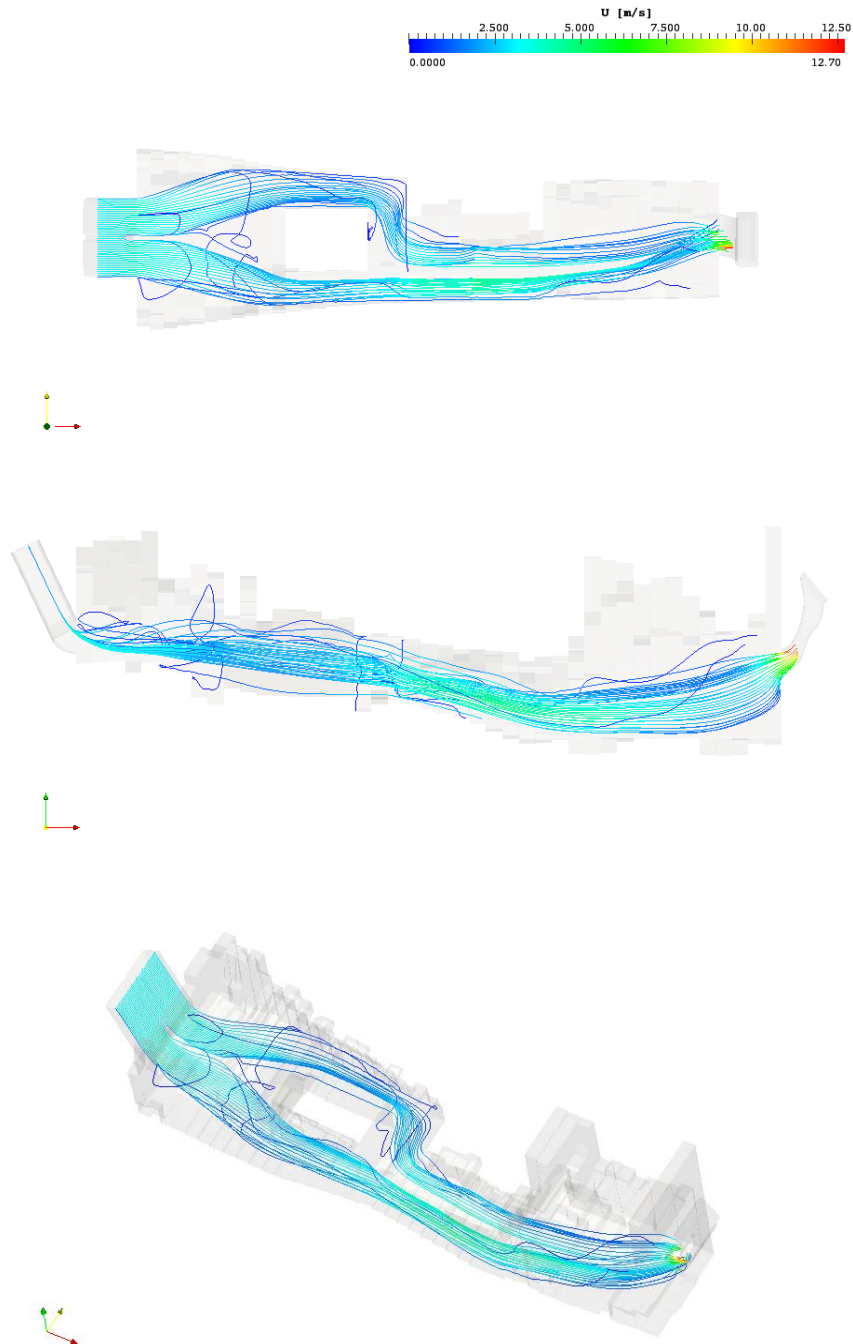
**Σχ. 4.8.** Ιστορία σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης. Απαιτήθηκαν 100 «ισοδύναμες» επιλύσεις της ροής και του συζυγούς προβλήματος. Η αργή σύγκλιση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης, οφείλεται στη μικρή τιμή του συντελεστή  $\eta$  της μεθόδου της «απότομης καθόδου» και στη λογική της «one-shot» επίλυσης που περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Είναι εμφανές, ότι το τέλος της προηγούμενης βελτιστοποίησης βρήκε τον αλγόριθμο να έχει παγιδευτεί σε τοπικό ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης. Στόχος των αλγορίθμων που περιγράφησαν στην προηγούμενη παράγραφο, εκτός από την οπτικοποίηση του βέλτιστου καναλιού της ροής απαλλαγμένο από τα «περιττά» κελιά, ήταν να δοθεί «ώθηση» στον αλγόριθμο βελτιστοποίησης ώστε ν' αναζητήσει το ολικό ελάχιστο (ή τουλάχιστον ένα καλύτερο τοπικό ελάχιστο) της υπό εξέταση αντικειμενικής συνάρτησης, όπως και συνέβη. Η ολική μείωση των απωλειών ολικής πίεσης, ανέρχεται τώρα πια σε,

$$\frac{\delta p_t^{\text{initial}} - \delta p_t^{350}}{\delta p_t^{\text{initial}}} \times 100\% \cong 42.07\%$$

ενώ, το πεδίο ροής διαμορφώνεται πλέον όπως φαίνεται στο Σχ. 4.9.

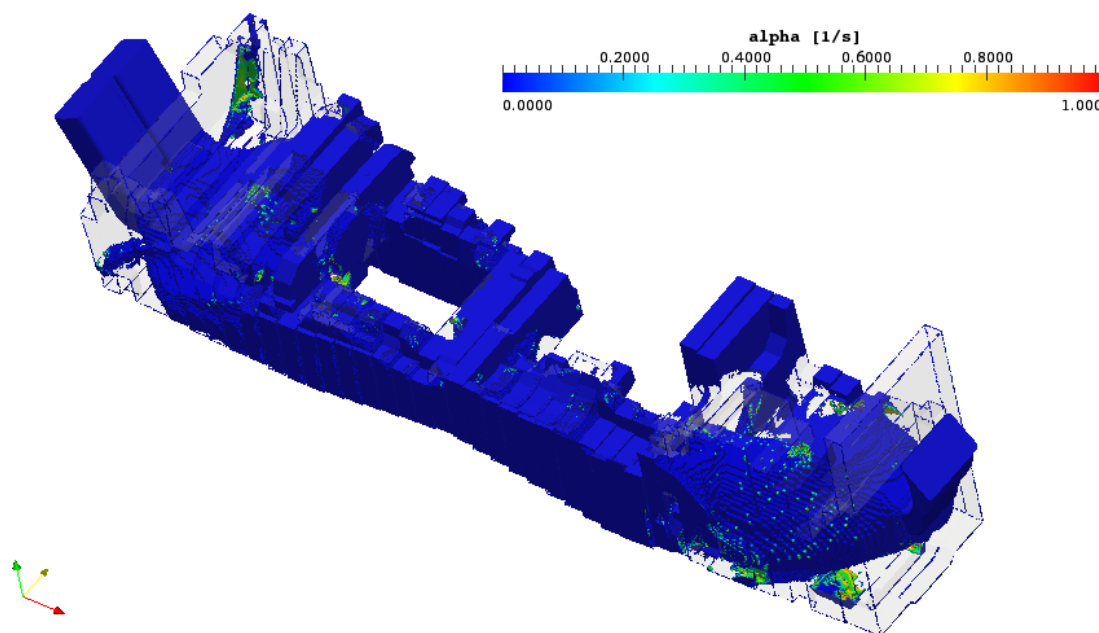




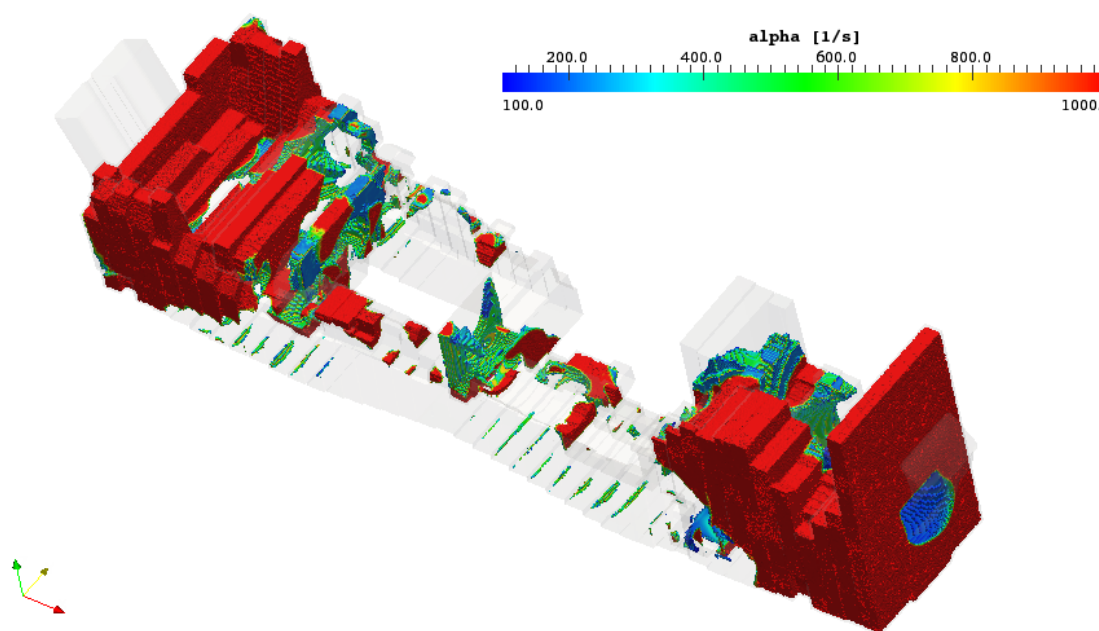
**Σχ. 4.9.** Γραμμές ροής (μέτρο της ταχύτητας) στο νέο βέλτιστο αγωγό. Κατά σειρά έχουμε, πρόσψη, κάτοψη και γενική όψη.

Παρατηρούμε την επιπλέον ομαλοποίηση των γραμμών ροής συγκριτικά με την τελευταία φορά. Εμφανής επίσης είναι και η διαφορά που παρουσιάζει η οδήγηση της ροής προς τον αγωγό εξόδου. Παρατηρώντας προσεκτικότερα το σχήμα όπου ο αγωγός παρουσιάζεται σε πρόσψη και, σε αντιπαραβολή με την αντίστοιχη πρόσψη του Σχ. 3.13 του προηγούμενου κεφαλαίου, φαίνεται ότι η προσπάθεια για αποφυγή κρούσης της ροής με το κάθετο στερεό τοίχωμα, που επιτυγχάνεται με «ενισχυμένη» στερεοποίηση της αντίστοιχης περιοχής, έχει βελτιωθεί εντυπωσιακά. Το πεδίο του πορώδους, για  $0 \leq a \leq 1$  και  $100 \leq a \leq 1000$  δείχνεται στα σχήματα 4.10 και 4.11.

#### Κεφάλαιο 4. Μετεπεξεργασία της βέλτιστης λύσης



**Σχ. 4.10.** Κατανομή πορώδους,  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Γενική άποψη του αγωγού.



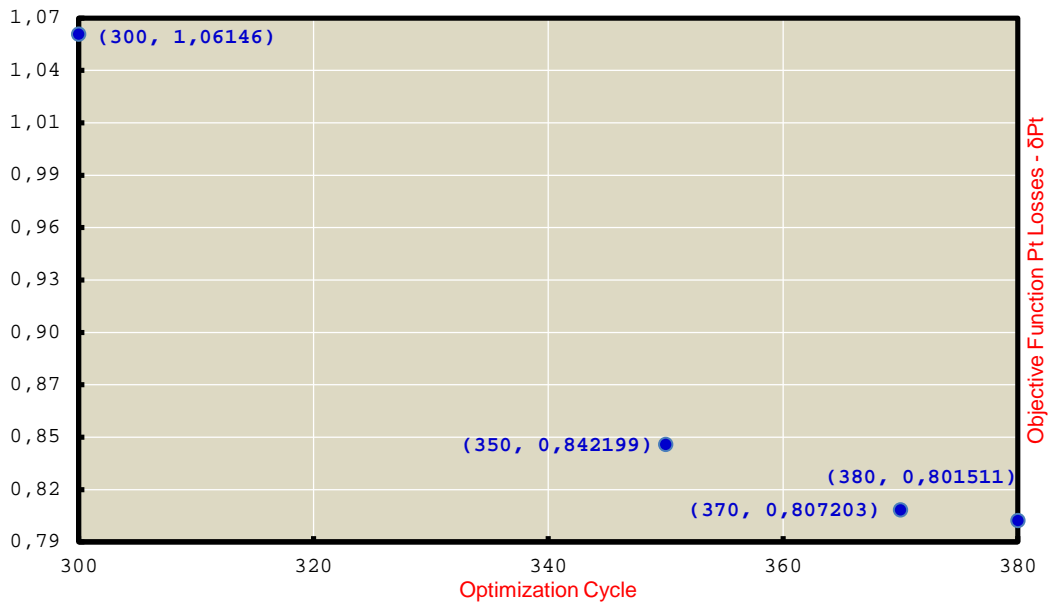
**Σχ. 4.11.** Κατανομή πορώδους,  $100 \leq \alpha \leq 1000$  (γενική άποψη του αγωγού). Παρατηρούμε την ενισχυμένη «στερεοποίηση» που συμβαίνει στο κάθετο τοίχωμα που περιβάλλει τον αγωγό εξόδου της ροής (έντονο κόκκινο χρώμα – για σύγκριση βλ. Σχ. 3.14).

Με εκ νέου, διαδοχική εφαρμογή των αλγορίθμων μετεπεξεργασίας και βελτιστοποίησης, παίρνουμε τα διαγράμματα της ιστορίας σύγκλισης, Σχ. 4.12 και Σχ. 4.13, που φαίνονται στην επόμενη σελίδα. Απ' αυτά, μπορούμε να παρατηρήσουμε τη σύγκλιση της αντικειμενικής συνάρτησης σε συνδυασμό με την ταυτόχρονη σύγκλιση του αριθμού των κελιών που αποτελούν το «πραγματικό» κανάλι της ροής. Στο τέλος της βελτιστοποίησης, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης παίρνει την τιμή,

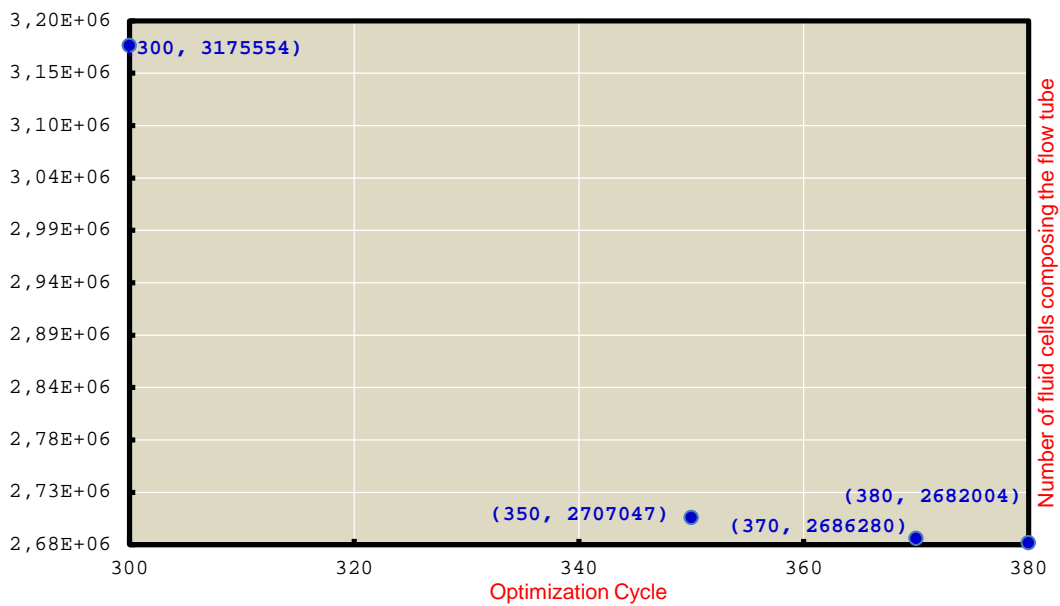
$$\delta p_t^{380} = 0.801511 \frac{m^5}{s^3}$$

δηλαδή, προκύπτει συνολική βελτίωση των απωλειών ολικής πίεσης του αγωγού κατά περίπου,

$$\frac{\delta p_t^{\text{initial}} - \delta p_t^{380}}{\delta p_t^{\text{initial}}} \times 100\% \cong 44.87\%$$



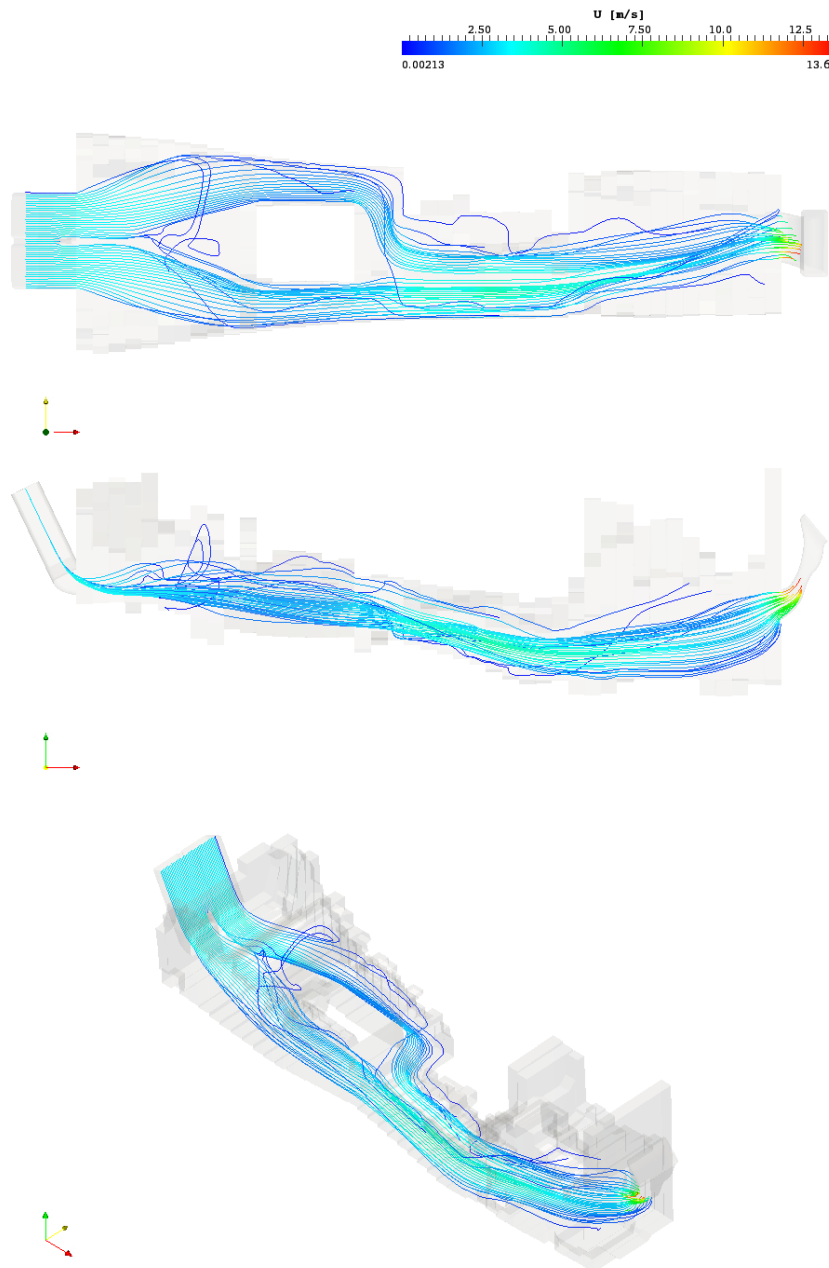
**Σχ. 4.12.** Ιστορία σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης με διαδοχική εφαρμογή των αλγορίθμων μετεπεξεργασίας και βελτιστοποίησης (διαδοχικά στο τέλος των κύκλων 300, 350, 370 και 380). Παρατηρείται ότι απαιτούνται όλο και λιγότεροι κύκλοι βελτιστοποίησης για τη σύγκλιση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης.



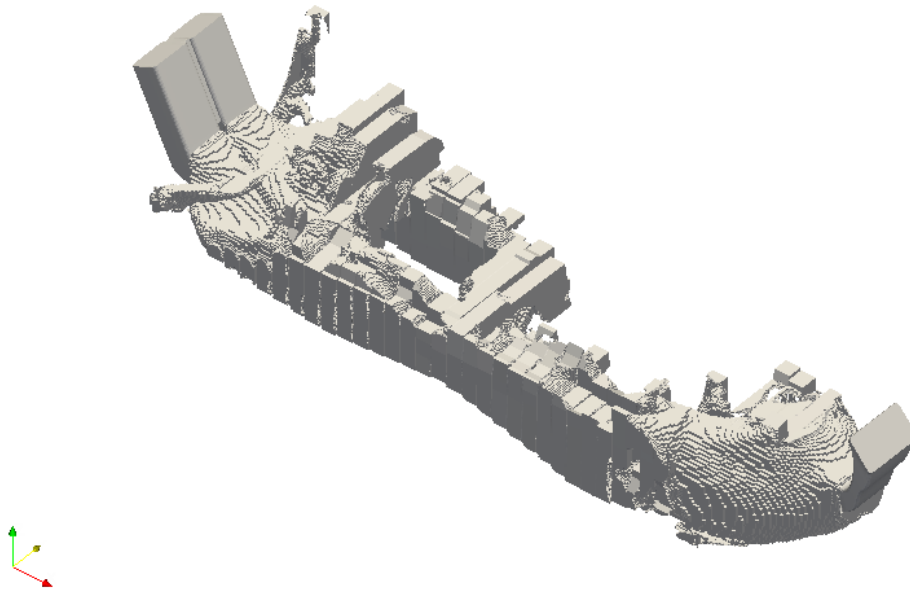
**Σχ. 4.13.** Ιστορία σύγκλισης του αριθμού των κελιών (fluidCells[]) που αποτελούν το βέλτιστο σωλήνα ροής (για  $0 \leq a \leq 1$ ), ύστερα από διαδοχική εφαρμογή των αλγορίθμων μετεπεξεργασίας και βελτιστοποίησης.

#### Κεφάλαιο 4. Μετεπεξεργασία της βέλτιστης λύσης

Το πεδίο ροής στον μετά και τον τελευταίο κύκλο βελτιστοποίησης (380), διαμορφώνεται όπως παρουσιάζεται στο Σχ. 4.14, ενώ, το βέλτιστο κανάλι της ροής, φαίνεται στο Σχ. 4.15 και, αποτελείται από 2,682,004 κελιά (για  $0 \leq a \leq 1$ ). Ως προς το τελευταίο, παρατηρούμε ότι ανάμεσα στις δύο τελευταίες εφαρμογές της μετεπεξεργασίας (Σχ. 4.13) – κύκλοι 370 και 380 –, η διαφορά στον αριθμό των κελιών του πίνακα `fluidCells[]`, είναι μόλις 4276 κελιά. Δηλαδή, τα συνολικά κελιά που απομόνωσε ο αλγόριθμος μετεπεξεργασίας στο τέλος του 380<sup>ου</sup> κύκλου βελτιστοποίησης, ήταν μόλις 0.16% λιγότερα απ' αυτά στο τέλος του 370<sup>ου</sup> κύκλου. Το τελευταίο έρχεται σε συμφωνία με τη σύγκλιση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης, η οποία παρουσιάζει διαφορά μόλις 0.71% μεταξύ των κύκλων 370 και 380 του αλγορίθμου βελτιστοποίησης.



**Σχ. 4.14.** Γραμμές ροής (μέτρο της ταχύτητας) στον βέλτιστο αγωγό (κύκλος βελτιστοποίησης 380). Κατά σειρά έχουμε, πρόσοψη, κάτοψη και γενική όψη.



**Σχ. 4.15.** Βέλτιστος αγωγός ροής στο τέλος του τελευταίου κύκλου βελτιστοποίησης, για  $0 \leq a \leq 1$ .

Στο τελευταίο σχήμα, εκτός απ' την οπτικοποίηση του σχηματιζόμενου, βέλτιστου αγωγού ροής, φαίνεται επίσης και η εξάλειψη μεγάλων ομάδων κελιών που έχει πλέον επιτευχθεί, με χαρακτηριστικότερο παράδειγμα τα σημειωμένα κελιά του Σχ. 4.5.

## **Κεφάλαιο 4.** Μετεπεξεργασία της βέλτιστης λύσης

## Ανακεφαλαίωση

Η παρούσα διπλωματική ασχολήθηκε με τη συνεχή συζυγή μέθοδο στη βελτιστοποίηση τοπολογίας στη μηχανική των ρευστών και, την εφαρμογή της σε δύο ρεαλιστικά προβλήματα εσωτερικής αεροδυναμικής προερχόμενα από τον χώρο της αυτοκινητοβιομηχανίας. Κύρια συνεισφορά αυτής της εργασίας, ήταν η ανάπτυξη κώδικα μετεπεξεργασίας (post-processors) για την επεξεργασία της βέλτιστης τοπολογίας ροής, η οποία, και στις δύο εφαρμογές, «αναζητήθηκε» με κριτήριο τη μείωση των απωλειών ολικής πίεσης. Στο Παρ. Α' που ακολουθεί, τέλος, παρουσιάζεται και ένας διαφορετικός τρόπος αρχικοποίησης του πεδίου της μεταβλητής του πορώδους, όπου βάσει ενός ροϊκού και ενός γεωμετρικού κριτηρίου, άλλες περιοχές της αρχικής τοπολογίας «στερεοποιήθηκαν» κι άλλες παρέμειναν περιοχές ροής ρευστού.

Στο Κεφ. 1 έγινε μια γρήγορη εισαγωγή στις μεθόδους βελτιστοποίησης και στη βασική ορολογία τους, στις βασικές αρχές και ιδιότητές τους καθώς και μια σύντομη κατηγοριοποίησή τους. Τα παραδείγματα για την περιγραφή των μεθόδων έγινε προσπάθεια να προέρχονται από το χώρο δραστηριοποίησης του μηχανολόγου μηχανικού και τη βιομηχανία. Παρουσιάστηκε επίσης σύντομα η μαθηματική έκφραση και τα χαρακτηριστικά της (αιτιοκρατικής) μεθόδου πρώτης ( $1^{ης}$ ) τάξης της «απότομης καθόδου» ενώ, στη συνέχεια, για τον υπολογισμό της τιμής της παραγώγου ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού (η τελευταία χρειάζεται στη μέθοδο της «απότομης καθόδου» για την ανανέωση σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης του διανύσματος των μεταβλητών σχεδιασμού και, την «κύλησή» του προς το βέλτιστο διάνυσμα σχεδιασμού), έγινε μια περιληπτική εισαγωγή σε διάφορες απαντώμενες τέτοιες μεθόδους και κύρια, στη συζυγή μέθοδο υπολογισμού, βασικό θέμα με το οποίο ασχολείται επίσης η εργασία αυτή. Τέλος, στην τελευταία παράγραφο του κεφαλαίου έγινε μια σύντομη ιστορική αναδρομή στη βελτιστοποίηση τοπολογίας και πως αυτή, από τη μηχανική των κατασκευών υιοθετήθηκε (σχετικά πρόσφατα) στη μηχανική των ρευστών και στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση.

Στο Κεφ. 2 έλαβε μέρος η μαθηματική διατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου. Αρχικά, οι εξισώσεις που διέπουν τη ροή (μέσες κατά Reynolds εξισώσεις Navier-Stokes με χρήση του μοντέλου τύρβης δύο εξισώσεων  $k - \epsilon$ ), εμπλουτίστηκαν με κατάλληλους όρους πηγής για τη μοντελοποίηση του πορώδους, όπου, περιοχές με  $a = 0$  (οι όροι πηγής απαλείφονται κι έτσι λύνονται οι «κλασικές» εξισώσεις ροής) θεωρείται ότι ανήκουν στο σχηματιζόμενο κανάλι ροής ρευστού (εφόσον οι ροϊκές μεταβλητές ικανοποιούν τις «κλασικές» εξισώσεις ροής) ενώ, περιοχές με  $a \neq 0$  θεωρείται ότι ανήκουν στα σχηματιζόμενα «στερεοποιημένα» όρια του χωρίου (εφόσον για να ικανοποιηθούν οι εξισώσεις ροής θα πρέπει να μηδενιστούν οι τοπικές ροϊκές μεταβλητές). Στη συνέχεια, ύστερα από μια μακροσκελή μαθηματική ανάπτυξη, χρησιμοποιώντας την υπόθεση της παγωμένης τυρβώδους συνεκτικότητας και του θεωρήματος της απόκλισης (Gauss), καταλήξαμε στην έκφραση των συνεχών συζυγών

πεδιακών εξισώσεων, των οριακών τους συνθηκών καθώς και, στην έκφραση για τον υπολογισμό της παραγωγού ευαισθησίας. Η τελευταία, όπως άλλωστε εξηγήθηκε, έχει σπουδαία φυσική σημασία, καθώς συσχετίζει το πεδίο ροής με το συζυγές πεδίο μέσω της τοπικά σχηματιζόμενης γωνίας των δύο διανυσμάτων της ταχύτητας (του ορθού και του συζυγούς). Έτσι, περιοχές στις οποίες τα δύο διανύσματα σχηματίζουν αμβλείες γωνίες (π.χ. περιοχές με ανακυκλοφορία) τείνουν να στερεοποιηθούν από τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης, οδηγώντας με τον τρόπο αυτό στη μείωση της τιμής της μελετούμενης αντικειμενικής συνάρτησης (και για τις δύο εφαρμογές, οι απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου του πεδίου ροής).

Στο Κεφ. 3 έγινε εφαρμογή του αλγορίθμου βελτιστοποίησης τοπολογίας στον αγωγό των σχημάτων 3.1, 3.2 και 3.3 (πρώτη εφαρμογή της αυτοκινητοβιομηχανίας). Τονίζεται ξανά στο σημείο αυτό, ότι το υπολογιστικό πλέγμα, για την εν λόγω περίπτωση (test case), αποτέλεσε συνεισφορά του Ευρωπαϊκού ερευνητικού προγράμματος FlowHead. Στο διάγραμμα του Σχ. 3.12, παρουσιάστηκε η ιστορία σύγκλισης της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης, όπου παρατηρήθηκε, ότι χρειάστηκαν περί τις 600 ισοδύναμες επιλύσεις (300 κύκλοι βελτιστοποίησης) του προβλήματος ροής και του συζυγούς προβλήματος, με τον αργό ρυθμό σύγκλισης να οφείλεται στην επιλογή μικρής τιμής για το συντελεστή  $\eta$  της μεθόδου της «απότομης καθόδου». Τελικά, η συνολική βελτίωση στις απώλειες ολικής πίεσης ανήλθε περίπου στο 27%.

Στο Κεφ. 4 έγινε η περιγραφή των βασικών αλγορίθμων μετεπεξεργασίας. Με βάση τη βέλτιστη λύση (και συνακόλουθα τη βέλτιστη κατανομή του πορώδους) που παρουσιάστηκε στο τέλος του Κεφ. 3, αναπτύχθηκε (αρχικά) αλγόριθμος για την «απομόνωση» του βέλτιστου καναλιού της ροής. Ως τέτοιο λογίζεται το σύνολο των υπολογιστικών κελιών για τα οποία ισχύει  $a < a_{\text{threshold}}$ , όπου  $a_{\text{threshold}}$  μια μικρή θετική ποσότητα, οριζόμενη από το χρήστη – στις εφαρμογές της παρούσας,  $a_{\text{threshold}} = 1$ . Ο αλγόριθμος, είχε ως στόχο εκτός από την οπτικοποίηση του βέλτιστου αγωγού ροής απαλλαγμένο από ομάδες κελιών και μεμονωμένα κελιά τα οποία δε δύνανται να συμμετέχουν σ' αυτόν (υπό την έννοια ότι στην πραγματικότητα δεν μπορούν να παρουσιάζουν ροή ρευστού – βλ. Σχ. 4.2), την επαναρχικοποίηση (σε μια δεύτερη φάση) του πεδίου πορώδους για την εκ νέου εφαρμογή του αλγορίθμου βελτιστοποίησης και την αναζήτηση μιας νέας, καλύτερης από την τελευταία, λύσης. Το τελευταίο επιτυγχάνεται θέτοντας σε όσα κελιά συμμετέχουν στο βέλτιστο αγωγό ροής τιμή πορώδους  $a = 0$  και σε όλα τ' άλλα μια πολύ μεγάλη τιμή για το  $a$  (στην πρώτη εφαρμογή τέθηκε  $a = 1000$ ). Με διαδοχική εφαρμογή των αλγορίθμων μετεπεξεργασίας και βελτιστοποίησης, πάρθηκαν τα διαγράμματα σύγκλισης των σχημάτων 4.12 και 4.13. Τα τελευταία, παρουσιάζουν τη σύγκλιση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης (Σχ. 4.12) με την ταυτόχρονη σύγκλιση του αριθμού των κελιών που ανήκουν στο βέλτιστο κανάλι της ροής και απομονώθηκαν από τον αλγόριθμο μετεπεξεργασίας (Σχ. 4.13). Τελικά, η μορφή του βέλτιστου καναλιού της ροής απεικονίζεται απαλλαγμένο από τα περιττά κελιά στο Σχ. 4.15, με τη συνολική βελτίωση στις απώλειες ολικής πίεσης να ανέρχεται πλέον (ύστερα από ακόμα 80 κύκλους βελτιστοποίησης – όπου ενδιάμεσα εφαρμόστηκε ο αλγόριθμος μετεπεξεργασίας) σε περίπου 45%! Η περαιτέρω βελτίωση των απωλειών ολικής πίεσης καταδεικνύει τη χρησιμότητα της αναπτυχθείσας μεθόδου, η οποία, κατασκευάστηκε κύρια για να βοηθήσει τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης να «ξεκολλήσει» από το τοπικό ελάχιστο που τυχόν είχε κολλήσει και ν' αναζητήσει, τουλάχιστον, ένα καλύτερο ως προς το προηγούμενο τοπικό ελάχιστο, όπως και τελικά συνέβη.

Τέλος, στο Παρ. Α' που ακολουθεί, παρουσιάζεται η βελτιστοποίηση τοπολογίας στη δεύτερη και τελευταία εφαρμογή της αυτοκινητοβιομηχανίας, Σχ. Α.1. Με βάση την τοπολογία αυτή, αναπτύχθηκε επίσης αλγόριθμος για την αρχικοποίηση του πορώδους, βασισμένου στο συνδυασμό ενός ροϊκού κι ενός γεωμετρικού κριτηρίου. Η αρχική επίλυση του προβλήματος ροής (και του συζυγούς προβλήματος) κατέδειξε ιδιαιτερότητες ως προς τη σύγκλιση του κώδικα επίλυσης, πιθανά λόγω του πολύπλοκου ροϊκού πεδίου και την ύπαρξη περιοχών



μεγάλης στροβιλότητας και ανακυκλοφορίας. Στόχος λοιπόν, ήταν η αρχικοποίηση της μεταβλητής  $a$  κατά τέτοιο τρόπο, ώστε περιοχές της τοπολογίας με υψηλή ανακυκλοφορία να «στερεοποιηθούν» (δίνοντας στο πορώδες μεγάλες τιμές) έτσι ώστε να επιτευχθεί σύγκλιση των επιτυτών της ροής.

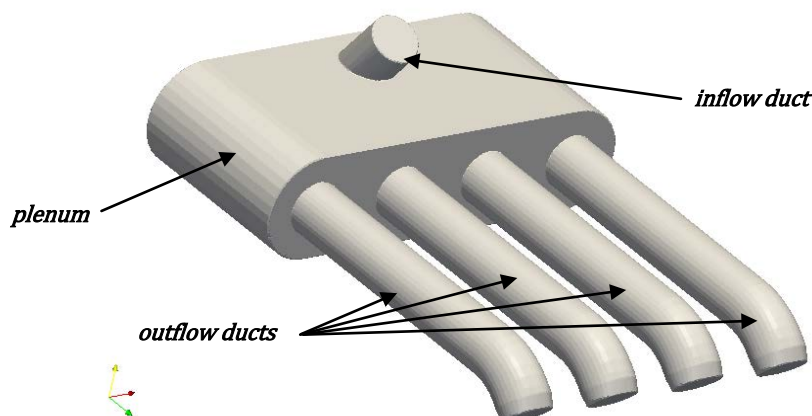


## Παράρτημα Α'

### Αρχικοποίηση του πεδίου πορώδους βάσει γεωμετρικών και ροϊκών κριτηρίων

Στο Κεφ. 3 περιγράφηκε εκτενώς ο τρόπος με τον οποίο, γενικά, αρχικοποιείται το πεδίο της μεταβλητής του πορώδους  $a$ . Όπως λοιπόν είδαμε υπάρχουν, εν γένει, δύο διαφορετικοί, δυνατοί τρόποι αρχικοποίησης, ένας κατά τον οποίο η αρχική τοπολογία της ροής θεωρείται τελείως «ανοιχτή» ( $a = 0$ ) και ένας δεύτερος, σύμφωνα με τον οποίο η αρχική τοπολογία θεωρείται τελείως «κλειστή» ( $a \neq 0$ ). Σε αντίθεση με τους προαναφερθέντες τρόπους βελτιστοποίησης, στο παρόν παράρτημα θα παρουσιαστεί ένας διαφορετικός τρόπος αρχικοποίησης της μεταβλητής  $a$ , βασισμένος σε γεωμετρικά και ροϊκά κριτήρια, σύμφωνα με τον οποίο άλλες περιοχές της αρχικής τοπολογίας θα θεωρηθούν τελείως «βουλωμένες» ( $a \neq 0$ ) κι άλλες τελείως «ανοιχτές» ( $a = 0$ ). Προφανώς, το τελευταίο θα γίνει με βάση την ικανοποίηση (ή όχι) των επιλεχθέντων κριτηρίων.

#### A.1. Η τοπολογία της ροής



**Σχ. A.1.** Γενική όψη του αγωγού ροής. Διακρίνονται το σώμα «plenum», ο αγωγός εισόδου και οι τέσσερις αγωγοί εισαγωγής (αγωγοί εξόδου) του αέρα καύσης στον τετρακύλινδρο κινητήρα.

Η τοπολογία (βλ. Σχ. Α.1) της δεύτερης εφαρμογής που θα μελετηθεί για την ανάπτυξη και την εφαρμογή της μεθόδου, αφορά σ' έναν αγωγό μεταφοράς αέρα καύσης σε έναν τετρακύλινδρο εμβολοφόρο κινητήρα εσωτερικής καύσης (εμβολοφόρος ΜΕΚ). Γεωμετρικά, ο αγωγός αποτελείται από ένα κεντρικό σώμα με μορφή «κουτιού», ονόματι «plenum», έναν αγωγό προσαγωγής του αέρα σ' αυτό και, τέσσερις αυλούς εισαγωγής του αέρα καύσης σε κάθε έναν από τους τέσσερις κυλίνδρους του κινητήρα. Οι τελευταίοι είναι τοποθετημένοι σε σειρά και, για την ανάλυσή μας, θα θεωρούνται ως αγωγοί εξόδου της τοπολογίας.

## A.2. Εξισώσεις της ροής

Οι εξισώσεις που διέπουν τη ροή γι αυτό το πρόβλημα, αποτελούνται από τις μέσες εξισώσεις Navier-Stokes που συναντήσαμε και στο Κεφ. 2, Εξ. (2.1) και Εξ. (2.2.), με τη μόνη διαφορά, ότι η μοντελοποίηση της τύρβης γίνεται με το μοντέλο μιας διαφορικής εξίσωσης, χαμηλών αριθμών Reynolds των Spalart-Allmaras (low-Reynolds Spalart-Allmaras turbulence model). Το τελευταίο, διατυπώνεται σε τανυστική μορφή ως,

$$R\tilde{v} \triangleq \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{v}v_j) - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right] - \frac{c_{b2}}{\sigma} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right)^2 - \tilde{v}[P(\tilde{v}) - D(\tilde{v})] + \frac{a\tilde{v}}{ST} = 0 \quad (A.1)$$

όπου,  $j = 1,2,3$ , ενώ, παρατηρούμε και την εισαγωγή αντίστοιχου όρου πηγής (ST), όπως στις εξισώσεις της ορμής και τις εξισώσεις του μοντέλου τύρβης  $k - \varepsilon$  που χρησιμοποιήθηκε στο κεφάλαιο 2.

Στην εξ. (A.1), με  $\tilde{v}$  συμβολίζεται η μεταβλητή του μοντέλου τύρβης, οι όροι πηγής  $P(\tilde{v})$  και καταστροφής  $D(\tilde{v})$  δίνονται από τις εκφράσεις,

$$P(\tilde{v}) = c_{b1}\tilde{Y} \quad (A.2)$$

$$D(\tilde{v}) = c_{w1}f_w(\tilde{Y})\frac{\tilde{v}}{\Delta^2} \quad (A.3)$$

όπου,  $\Delta$  η απόσταση του υπόψη υπολογιστικού κόμβου από το στερεό όριο,

$$\tilde{Y} = Yf_{v3} + \frac{\tilde{v}}{\kappa^2\Delta^2}f_{v2} \quad (A.4)$$

με,

$$Y = \left| e_{i,j,k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \mathbf{i}_i \right|, \quad i, j, k = 1,2,3 \quad (A.5)$$

το μέτρο της στροβιλότητας και κατά σειρά,

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} \quad (A.6)$$

$$f_{v2} = \frac{1}{(1 + \chi/c_{v2})^3} \quad (A.7)$$

$$f_{v3} = \frac{1 + \chi f_{v1}}{c_{v2}} \left[ 3 \left( 1 + \frac{\chi}{c_{v2}} \right) + \left( \frac{\chi}{c_{v2}} \right)^2 \right] \left( 1 + \frac{\chi}{c_{v2}} \right)^{-3} \quad (\text{A.8})$$

$$\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \quad (\text{A.9})$$

$$f_w = g \left( \frac{1 + c_{w3}^6}{g + c_{w3}^6} \right)^{1/6} \quad (\text{A.10})$$

$$g = r + c_{w2}(r^6 - r) \quad (\text{A.11})$$

$$r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{Y}\kappa^2\Delta^2} \quad (\text{A.12})$$

$$c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma} \quad (\text{A.13})$$

με τον συντελεστή τυρβώδους κινηματικής συνεκτικότητας να υπολογίζεται τελικά από την αλγεβρική σχέση,

$$\nu_t = f_{v1}\tilde{\nu} \quad (\text{A.14})$$

Τέλος, οι σταθερές που εμφανίζονται στις παραπάνω σχέσεις, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία παίρνουν τις τιμές,

$$\left\{ c_{b1} = 0.1355, \quad c_{b2} = 0.622, \quad \kappa = 0.4187, \quad \sigma = \frac{2}{3}, \quad c_{w2} = 0.3, \quad c_{w3} = 2, \quad c_{v1} = 7.1, \quad c_{v2} = 5 \right\}$$

ενώ το σύμβολο των Levi-Civita  $e_{i,j,k}$  που εμφανίζεται στο μέτρο της στροβιλότητας, εξ. (A.5), ορίζεται ως,

$$e_{i,j,k} \triangleq \begin{cases} +1, & (i,j,k) \in (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \\ -1, & (i,j,k) \in (1,3,2), (3,2,1), (2,1,3) \\ 0, & i = j, j = k, k = i \end{cases}$$

Για την περίπτωση εσωτερικών ροών (όπως η εφαρμογή του παρόντος), οι οριακές συνθήκες για τη μεταβλητή του μοντέλου τύρβης  $\tilde{\nu}$  είναι: (α) στην είσοδο του πεδίου ροής σταθερή συνθήκη Dirichlet, (β) στην έξοδο μηδενική συνθήκη Neumann και, (γ) στα στερεά όρια μηδενική συνθήκη Dirichlet (οι μέσες εξισώσεις ροής μαζί με την εξίσωση του μοντέλου τύρβης λύνονται πλέον μέχρι και τους κόμβους του πραγματικού στερεού ορίου).

### A.3. Διατύπωση της συζυγούς μεθόδου

#### A.3.1. Διατύπωση συνεχών, συζυγών πεδιακών εξισώσεων και συζυγών οριακών συνθηκών

Για ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης που εμφανίζονται στον αγωγό και, κάνοντας την υπόθεση της «παγωμένης» τυρβώδους συνεκτικότητας, οι συνεχείς συζυγείς πεδιακές

εξισώσεις και οι οριακές τους συνθήκες για το υπόψη ροϊκό πρόβλημα, είναι ίδιες με αυτές που υπολογίστηκαν στο Κεφ. 2. Για λόγους πληρότητας τις παραθέτουμε ξανά στο σημείο αυτό.

**1** Συνεχείς συζυγείς πεδιακές εξισώσεις

$$R^q \triangleq \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.33')$$

$$R_i^u \triangleq -v_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial q}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + a u_i = 0 \quad (2.34')$$

**2** Συζυγείς συνθήκες στα όρια εισόδου  $S_I$

$$u_{\langle n \rangle} = v_{\langle n \rangle} \quad (2.38')$$

$$u_{\langle t \rangle} = 0 \quad (2.39')$$

και,

$$\frac{\partial q}{\partial n} = 0$$

**3** Συζυγείς συνθήκες στα όρια εξόδου  $S_O$

$$q + u_j v_j + u_{\langle n \rangle} v_{\langle n \rangle} + (v + v_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j n_i - \frac{1}{2} v^2 - v_{\langle n \rangle} = 0 \quad (2.41')$$

$$u_{\langle t \rangle} v_{\langle n \rangle} + (v + v_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i - v_{\langle n \rangle} v_{\langle t \rangle} = 0 \quad (2.42')$$

και,

$$\frac{\partial u_{\langle n \rangle}}{\partial n} = 0$$

**4** Συζυγείς συνθήκες στα στερεά όρια  $S_W$

$$u_{\langle n \rangle} = 0 \quad (2.44')$$

$$u_{\langle t \rangle} = 0 \quad (2.45')$$

και,

$$\frac{\partial q}{\partial n} = 0$$

όπου  $i, j = 1, 2, 3$ .

Παρατηρούμε ότι τόσο με τη χρήση του μοντέλου τύρβης υψηλών αριθμών Reynolds  $k - \varepsilon$ , όσο και με αυτό των Spalart-Allmaras, οι συζυγείς εξισώσεις ροής και οι αντίστοιχες οριακές

τους συνθήκες, για την υπόψη αντικειμενική συνάρτηση (απώλειες ολικής πίεσης), παραμένουν, όπως ήδη αναφέρθηκε, αμετάβλητες. Αυτό οφείλεται στην υπόθεση της «παγωμένης» τυρβώδους συνεκτικότητας, όπου όπως είδαμε κατά την ανάπτυξη του Κεφ. 2, οι εξισώσεις κατάστασης που αντιστοιχούν στο μοντέλο τύρβης δε λαμβάνονται υπόψη στον ορισμό της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης, όπου η χωρική ολοκλήρωση γίνεται μόνο για τα υπόλοιπα των διακριτοποιημένων εξισώσεων της συνέχειας και της ορμής,  $R^p$  και  $R_i^v$  (πολλαπλασιασμένα φυσικά με τις αντίστοιχες συζυγείς μεταβλητές/πολλαπλασιαστές Lagrange).

### A.3.2. Έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας

Λόγω των παραπάνω παρατηρήσεων, ή έκφραση για τις παραγώγους ευαισθησίας παραμένει επίσης ίδια με αυτή που εξάγαμε στο κεφάλαιο 2, ήτοι,

$$\frac{\delta F}{\delta a} = \int_{\Omega} u_i v_i d\Omega, \quad i = 1,2,3 \quad (2.46)$$

και σε διακριτή μορφή,

$$\left(\frac{\delta F}{\delta a}\right)_m = (u_i v_i \Omega_p)_m, \quad i = 1,2,3, \quad m = 0,1, \dots M \quad (2.48)$$

όπου  $\Omega_p$  είναι ο στοιχειώδης όγκος της  $m$ -ιστής υπολογιστικής κυψέλης.

### A.4. Διακριτοποίηση του χωρίου ροής

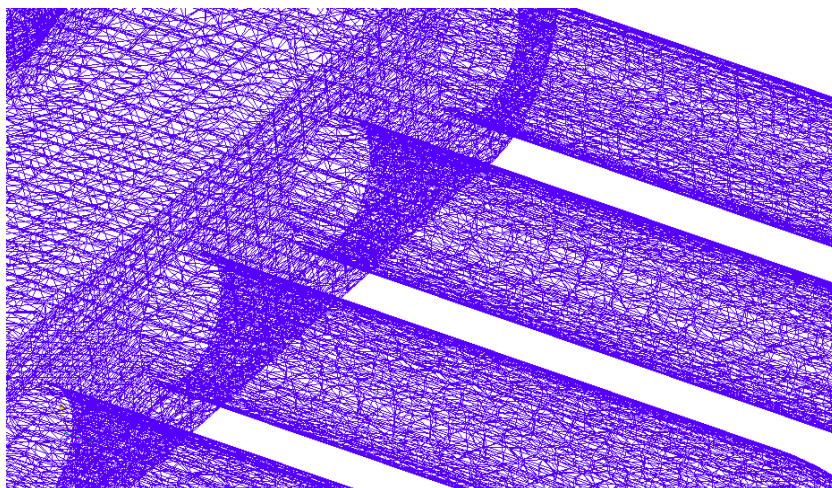
Για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων της ροής και των συζυγών εξισώσεων, το χωρίο της ροής διακριτοποιείται με μη-δομημένο, υβριδικό πλέγμα. Πιο συγκεκριμένα, το υπολογιστικό πλέγμα αποτελείται από 3,141,468 κελιά, τα οποία κατανέμονται ως ακολούθως:

- 2,821,440 εξαέδρα (hexahedra),
- 90,749 πρίσματα (prisms),
- 229,219 πολύεδρα (polyhedra) και,
- 60 τετραεδρικές «σφήνες» (tet-wedges).

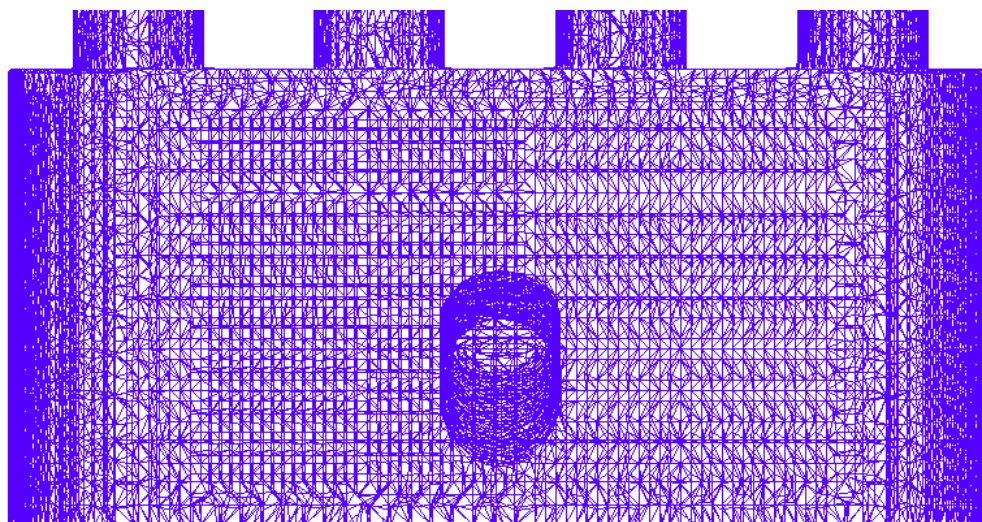
Για την επιβολή και τη διαχείριση των κοινών οριακών συνθηκών, οι οριακές «φάτσες» του πλέγματος έχουν ομαδοποιηθεί σε τρεις (3) διακριτές οριακές «επιφάνειες» (boundary patches), οι οποίες και έχουν ονομαστεί:

- «plenum body» (plenum\_soma) για τα στερεά τοιχώματα που αποτελούν το σώμα plenum και τους αγωγούς εισόδου και εξόδου της ροής,
- «inlet» (inlet) για τη διατομή εισόδου του αγωγού και,
- «outlet» (outlet) για τις διατομές εξόδου του αγωγού.

Λεπτομέρειες του υπολογιστικού πλέγματος φαίνονται στα σχήματα A.2 και A.3 που ακολουθούν στην επόμενη σελίδα.



**Σχ. Α.2.** Λεπτομέρεια του πλέγματος στην είσοδο των αγωγών εξόδου.



**Σχ. Α.3.** Λεπτομέρεια του πλέγματος στο σώμα plenum και τον αγωγό εισόδου.

### **A.5. Επίλυση του αρχικού προβλήματος ροής**

Στους πίνακες A.1, A.2 και A.3, που ακολουθούν, παρουσιάζονται οι οριακές συνθήκες για τη μεταβλητή του μοντέλου τύρβης  $\tilde{\nu}$  σε κάθε μία από τις τρεις οριακές επιφάνειες, καθώς και η ταχύτητα του αέρα στην είσοδο του χωρίου ροής. Η θεωρούμενη κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού, θεωρείται σταθερή και, έχει την τιμή,  $\nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ .

$v$	$[\text{m}/\text{s}]$	Dirichlet	$v_{\langle n \rangle} = -64.9305$
$\tilde{\nu}$	$[\text{m}^2/\text{s}]$	Dirichlet	$\tilde{\nu} = 0.0001$

**Πιν. Α.1.** Οριακές συνθήκες εισόδου



Όπως έχει ξανατονιστεί, η ταχύτητα εισόδου είναι αρνητική εξαιτίας της σύμβασης ότι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα κατευθύνεται προς το εξωτερικό του πεδίου ροής (επομένως είναι αντίρροπο προς το διάνυσμα της εισερχόμενης στο χωρίο ροής ταχύτητας, εξού και το αρνητικό πρόσημο που προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο των δύο).

$\tilde{v}$	$[m^2/s]$	Dirichlet	$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} = 0$
-------------	-----------	-----------	---

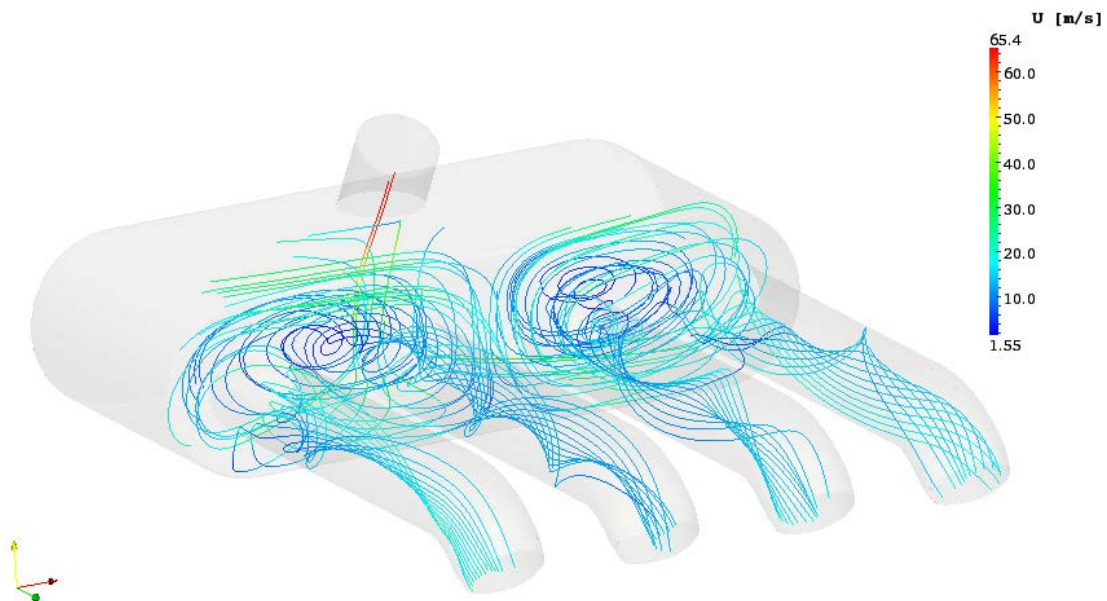
**Πιν. A.2.** Οριακές συνθήκες εξόδου για τη μεταβλητή του μοντέλου τύρβης.

$\tilde{v}$	$[m^2/s]$	Dirichlet	$\tilde{v} = 0$
-------------	-----------	-----------	-----------------

**Πιν. A.3.** Οριακή συνθήκη στα στερεά τοιχώματα για τη μεταβλητή του μοντέλου τύρβης.

Προφανώς, οι οριακές συνθήκες για την πίεση και για τις συζυγείς ροϊκές μεταβλητές δε διαφοροποιούνται συγκριτικά με αυτές που παρατέθηκαν στον Πιν. 3.1, Πιν. 3.2 και Πιν. 3.3 του Κεφ. 3 και γι αυτό, παραλείφθηκε η εκ νέου καταγραφή τους.

Η λύση του συστήματος των εξισώσεων (2.1), (2.2) και (A.1) μαζί με τις οριακές τους συνθήκες, για κατανομή της μεταβλητής του πορώδους  $a = 0$  παντού στο εσωτερικό του πεδίου ροής (επομένως οι όροι πηγής από τις εξισώσεις της ροής μηδενίζονται και, τελικά, λύνονται οι «κλασικές» εξισώσεις ροής), δίνει το αποτέλεσμα που φαίνεται στο Σχ. A.4, όπου παρατηρείται η δημιουργία δύο μεγάλων συμμετρικών στροβίλων αμέσως μετά την είσοδο της ροής στο σώμα plenum, καθώς και η δημιουργούμενη συστροφή της ροής καθώς αυτή διαρρέει τους αγωγούς εξόδου και κατευθύνεται προς τους κυλίνδρους του κινήτηρα.



**Σχ. A.4.** Γραμμές ροής (μέτρο της ταχύτητας) του αρχικού αγωγού για  $a = 0$ .

Ακόμα, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (απώλειες ολικής πίεσης) για τον αρχικό αγωγό, προέκυψε ίση με,

$$\delta p_t^{\text{initial}} = 149.846 \frac{m^5}{s^3}$$

#### **A.6. Μια «διαφορετική» προσέγγιση στην αρχικοποίηση του πεδίου πορώδους**

Λόγω της πολυπλοκότητας του αρχικού πεδίου ροής και τη δημιουργία περιοχών ανακυκλοφορίας και μεγάλων στροβιλισμών, οι εξισώσεις της ροής δεν ήταν δυνατόν να συγκλίνουν «βαθιά», ενώ, οι αντίστοιχες συζυγείς εξισώσεις, εμφανίζουν ακόμα περισσότερες ιδιαιτερότητες στη σύγκλισή τους. Για το λόγο αυτό, με βάση το αρχικό ροϊκό πεδίο που παρουσιάστηκε στο Σχ. Α.4, αναπτύχθηκε αλγόριθμος (βάσει του οποίου στη συνέχεια γράφτηκε κώδικας στο OpenFOAM) στόχος του οποίου είναι η αρχικοποίηση του πεδίου της μεταβλητής του πορώδους  $a$  κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να επιτευχθεί σύγκλιση των εξισώσεων του αρχικού προβλήματος ροής και των συζυγών εξισώσεων.

Από τις παραπάνω παρατηρήσεις, είναι προφανές ότι για να επιτευχθεί σύγκλιση των εξισώσεων, θα θέλαμε να «στερεοποιηθούν» περιοχές του (αρχικού) αγωγού όπου η ροή παρουσιάζει ανακυκλοφορία και υψηλή στροβιλότητα. Για το λόγο αυτό, βάσει του αρχικού ροϊκού πεδίου (βλ. Σχ. Α.4), υπολογίστηκε (σε πρώτη φάση) το διάνυσμα της στροβιλότητας της ταχύτητας, το οποίο και δίνεται από τη διανυσματική σχέση<sup>26</sup>,

$$\zeta = \nabla \times \mathbf{v}$$

Με βάση το ροϊκό κριτήριο αρχικοποίησης της μεταβλητής  $a$ , όσες περιοχές της ροής παρουσιάζουν μέτρο στροβιλότητας μεγαλύτερο από ένα ποσοστό της μέγιστης τιμής του, παίρνουν τη μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή για το  $a$ , που στο πρόβλημά μας ορίζεται σε  $a_{\max} = 1000$ .

Βάσει ενός δεύτερου, γεωμετρικού αυτή τη φορά, κριτηρίου αρχικοποίησης, υπολογίζουμε αρχικά την απόσταση κάθε κελιού του πλέγματος από το κοντινότερο στερεό όριο<sup>27</sup>. Τελικά, όσα κελιά βρίσκονται σε απόσταση μικρότερη από μια τιμή οριζόμενη από τον χρήστη, παίρνουν επίσης την τιμή  $a_{\max} = 1000$ .

Όλα τα υπόλοιπα κελιά του πλέγματος, που δεν ικανοποιούν κανένα από τα δύο κριτήρια, παίρνουν τιμή πορώδους  $a = 0$ . Ο αλγόριθμος υπολογισμού κι αρχικοποίησης της μεταβλητής  $a$  σύμφωνα με τα κριτήρια που περιγράφηκαν μόλις παραπάνω, φαίνεται στο επόμενο σχεδιάγραμμα.

Αλγόριθμος αρχικοποίησης του πεδίου πορώδους

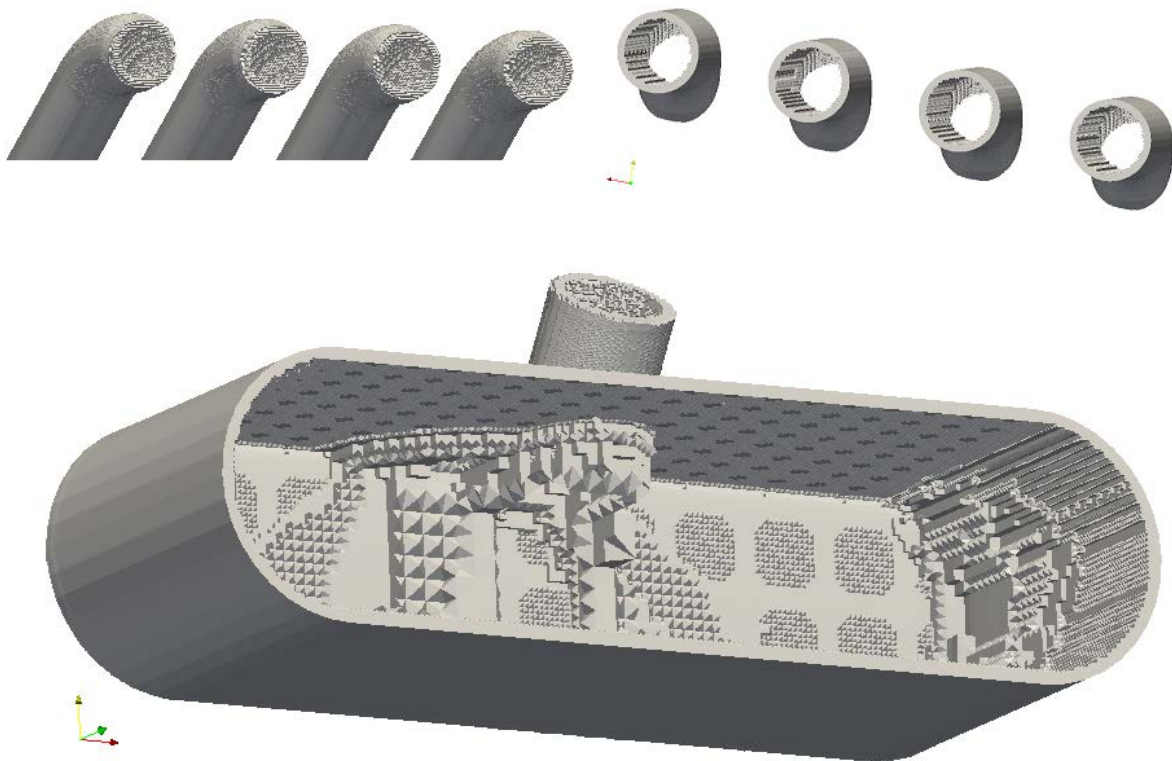
- |                |  |
|----------------|--|
| <b>ΒΗΜΑ 1.</b> | Διάβασε το πεδίο ταχύτητας του αρχικού προβλήματος ροής $\mathbf{v}$ .             |
| <b>ΒΗΜΑ 2.</b> | Υπολόγισε το πεδίο στροβιλότητας από τη σχέση $\zeta = \nabla \times \mathbf{v}$ . |

<sup>26</sup> Στο OpenFOAM ο υπολογισμός επιτυγχάνεται με τη χρήση μιας απλής, σχετικής, συνάρτησης.

<sup>27</sup> Κι αυτός ο υπολογισμός επιτυγχάνεται με τη βοήθεια μιας απλής συνάρτησης που διαθέτει το OpenFOAM για το χειρισμό του υπολογιστικού πλέγματος.

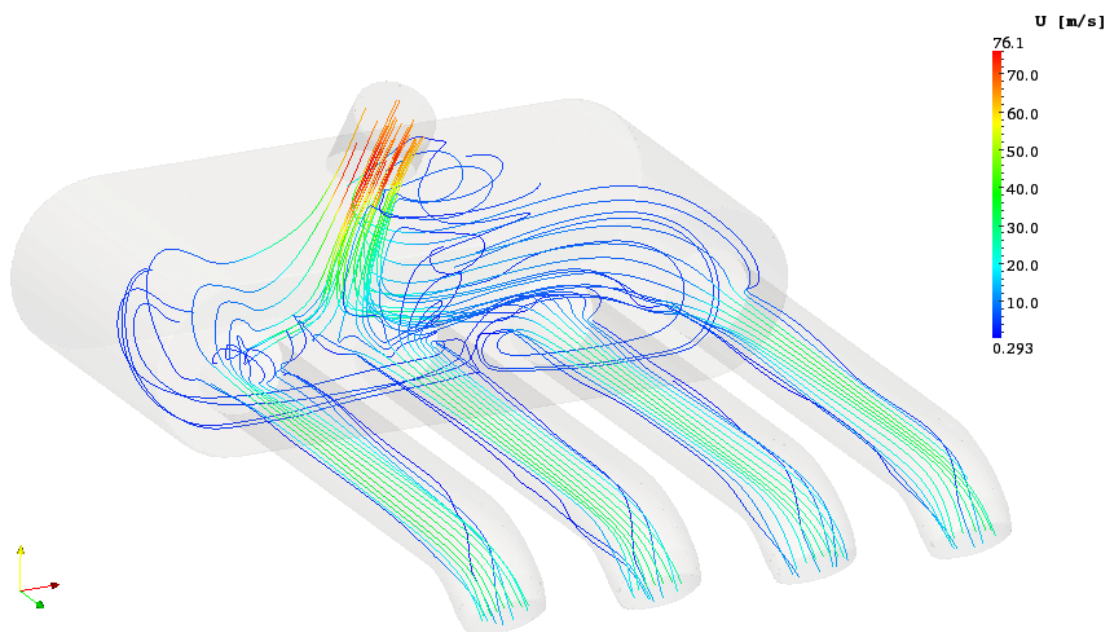
- ΒΗΜΑ 3.** Υπολόγισε την κατανομή του μέτρου της στροβιλότητας  $\|\zeta\|$  και στη συνέχεια την μέγιστη τιμή του μέτρου,  $\max\|\zeta\|$ .
- ΒΗΜΑ 4.** Υπολόγισε την απόσταση κάθε κελιού από το κοντινότερο στερεό όριο, έστω,  $y$ .
- ΒΗΜΑ 5.** Διάβασε από τον χρήστη ένα ποσοστό επί της μέγιστης τιμής του μέτρου της στροβιλότητας, έστω,  $\|\zeta\|_{\text{threshold}}\%$  και, μια «απόλυτη» τιμή απόστασης, έστω,  $y_{\text{threshold}}$ .
- ΒΗΜΑ 6.** Για όλα τα κελιά του πλέγματος επανέλαβε:
- 6.β. Αν  $\|\zeta\| \geq \|\zeta\|_{\text{threshold}}\% \times \max\|\zeta\|$  ή  $y \leq y_{\text{threshold}}$  θέσε:  $a \leftarrow a_{\text{max}}$
- 6.γ. Αλλιώς, θέσε:  $a \leftarrow 0$

Το αποτέλεσμα της εφαρμογής του αλγορίθμου αρχικοποίησης για  $\|\zeta\|_{\text{threshold}}\% = 0.1\%$  και  $y_{\text{threshold}} = 0.005\text{ m}$  στο αρχικό πεδίο ροής, φαίνεται στο Σχ. Α.5, όπου και φαίνεται ξεκάθαρα η «στερεοποίηση» του πεδίου ροής κοντά στα στερεά τοιχώματα. Η τελευταία, αποτελεί φυσική συνέπεια τόσο του γεωμετρικού κριτηρίου αρχικοποίησης, όσο και του ροϊκού, αφού, η ανάπτυξη του οριακού στρώματος που συμβαίνει κοντά στα στερεά όρια, χαρακτηρίζεται από υψηλή στροβιλότητα.



**Σχ. Α.5.** «Στερεοποιημένες» περιοχές ( $a_{\text{max}} = 1000$ ) του αγωγού ροής. Ενδεικτικά παραθέτουμε εικόνες από τους αγωγούς εξόδου της ροής (πάνω) και από το σώμα plenum (κάτω). Ειδικά στην περίπτωση των αγωγών εξόδου, παρατηρείται ξεκάθαρα η ελαχιστοποίηση της ενεργού διατομής τους, ενώ, στο σώμα plenum, αποτυπώνεται με πιο ανάγλυφο τρόπο η στερεοποίηση περιοχών που παρουσιάζουν υψηλή στροβιλότητα.

Με την αρχικοποίηση του πεδίου πορώδους ως άνω, επιλύθηκαν εκ νέου οι εξισώσεις της ροής (προφανώς σ' αυτή την περίπτωση, σε άλλες περιοχές της τοπολογίας οι όροι πηγής θα μηδενίζονται ενώ σε άλλες, όχι), με το αποτέλεσμα να φαίνεται στο Σχ. Α.6.



**Σχ. Α.6.** Γραμμές ροής (μέτρο της ταχύτητας) του «αρχικοποιημένου» αγωγού.

Από το Σχ. Α.6 φαίνεται ότι οι δύο μεγάλοι συμμετρικοί στρόβιλοι έχουν εξαφανιστεί, ενώ και η συστροφή της ροής στους αγωγούς εξόδου έχει επίσης μειωθεί σημαντικά. Γενικά, συγκριτικά με το ροϊκό πεδίο του Σχ. Α.4, παρατηρείται σημαντική «εξομάλυνση» της ροής. Αυτό οφείλεται στο γεγονός, ότι με τη «στερεοποίηση» της γεωμετρίας όπως παραπάνω, ο ενεργός όγκος της τοπολογίας μειώθηκε, με συνέπεια, η ροή να μην «προλαβαίνει» να αναπτυχθεί στο βαθμό του Σχ. Α.4.

Σ' αυτή την περίπτωση οι εξισώσεις της ροής συνέκλιναν «βαθιά», ενώ η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης προέκυψε ίση με,

$$\delta p_t^{\text{initialized}} = 238.273 \frac{m^5}{s^3}$$

δηλαδή, πρόεκυψε κατά περίπου,

$$\frac{\delta p_t^{\text{initialized}} - \delta p_t^{\text{initial}}}{\delta p_t^{\text{initial}}} \times 100\% \cong 59.01\%$$

χειροτέρευση συγκριτικά με τον τελείως ανοιχτό αγωγό. Θα περίμενε κάποιος, ότι εφόσον οι περιοχές ανακυκλοφορίας και υψηλής στροβιλότητας μειώθηκαν σημαντικά (συνέπεια της αρχικοποίησης του πορώδους που έγινε), ο «νέος» αγωγός θα ήταν, από πλευράς απωλειών ολικής πίεσης, καλύτερος συγκριτικά με τον αρχικό ( $a = 0$ ). Στην πράξη, επειδή η αρχικοποίηση του πορώδους δεν έγινε με κάποιο κριτήριο (εν προκειμένω) μείωσης των απωλειών ολικής πίεσης, είναι αρκετά πιθανό να στερεοποιήθηκαν και περιοχές της τοπολογίας, οι οποίες διαμόρφωσαν το τελικό πεδίο ροής έτσι ώστε να επέλθει (τελικά) αύξηση των απωλειών.

Λόγου χάρι, μπορεί να αναφερθεί ότι η ενεργός διατομή των αγωγών εξόδου μειώθηκε σημαντικά (βλ. Σχ. Α.5), με συνέπεια την αύξηση των «τοπικών» απωλειών ολικής πίεσης, αφού, ως γνωστόν, για ασυμπίεστη ροή σε αγωγούς κυκλικής διατομής, οι γραμμικές απώλειες ολικής πίεσης είναι αντιστρόφως ανάλογες της πέμπτης (5<sup>ης</sup>) δύναμης της διαμέτρου (και άρα, όσο μειώνεται η διάμετρος, τόσο αυξάνονται οι απώλειες για σταθερή παροχή).

### A.7. Βέλτιστη τοπολογία ροής – Σχολιασμός αποτελεσμάτων

Στη συνέχεια, έχοντας ως αρχική κατανομή πορώδους αυτή της προηγούμενης ενότητας κι ως αρχική λύση του ροϊκού πεδίου αυτή του Σχ. Α.6, προχωράμε στην εφαρμογή του αλγορίθμου βελτιστοποίησης για την εύρεση της βέλτιστης τοπολογίας ροής και την μείωση των απωλειών ολικής πίεσης.

Η επίλυση των εξισώσεων της ροής και των συζυγών εξισώσεων σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, έγινε με εφαρμογή του αλγορίθμου SIMPLE και της μεθόδου GAMGS για τη διόρθωση της πίεσης, ενώ, λόγω της πυκνότητας του πλέγματος, ακολουθήθηκε κι σ' αυτή την εφαρμογή η λογική της «one-shot» επίλυσης των εξισώσεων.

Στο τέλος της βελτιστοποίησης, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης προέκυψε ίση με,

$$\delta p_t^{\text{optimum}} = 125.251 \frac{m^5}{s^3}$$

δηλαδή, επιτεύχθηκε βελτίωση ίση με,

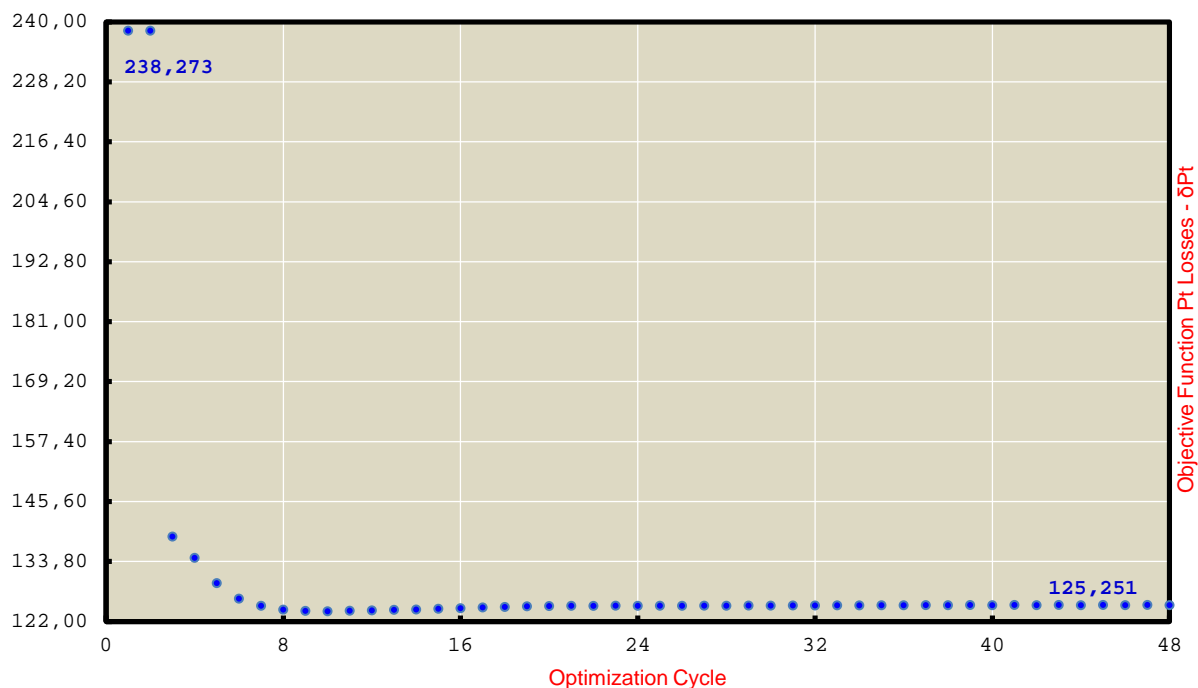
$$\frac{\delta p_t^{\text{initialized}} - \delta p_t^{\text{optimum}}}{\delta p_t^{\text{initialized}}} \times 100\% \cong 47.43\%$$

σε σχέση με τον «αρχικοποιημένο» αγωγό και,

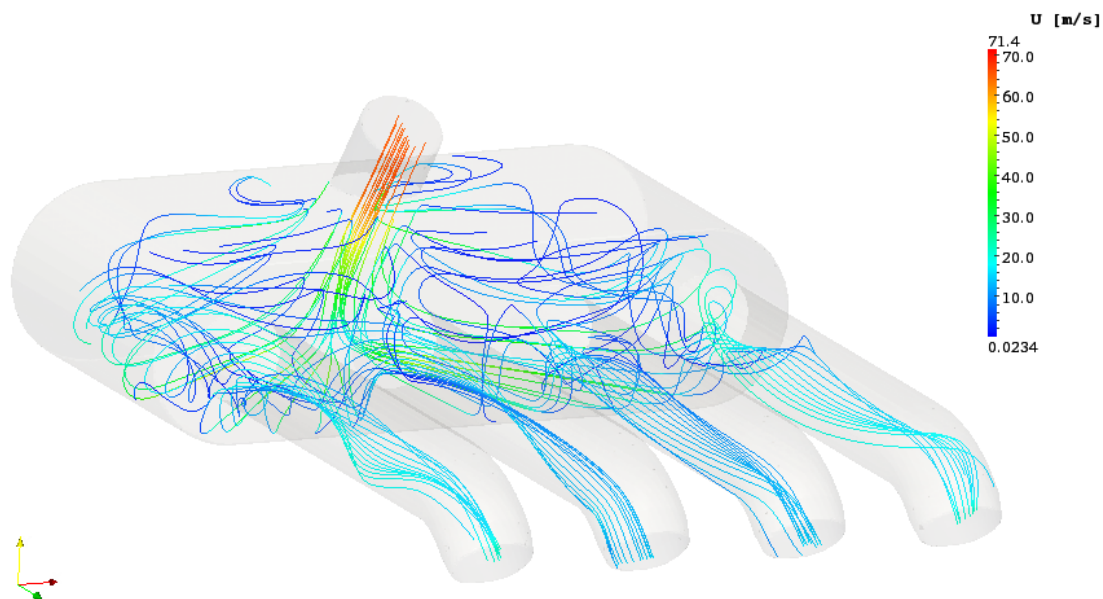
$$\frac{\delta p_t^{\text{initial}} - \delta p_t^{\text{optimal}}}{\delta p_t^{\text{initial}}} \times 100\% \cong 16.41\%$$

συγκριτικά με τον αρχικό, τελείως «ανοιχτό» αγωγό. Η ιστορία της σύγκλισης φαίνεται στο διάγραμμα που ακολουθεί (βλ. Σχ. Α.7), ενώ, στο Σχ. Α.8 παρουσιάζονται οι γραμμές ροής του βέλτιστου πεδίου ροής.

## Παράρτημα Α' Αρχικοποίηση του πεδίου πορώδους βάσει γεωμετρικών και ροϊκών κριτηρίων



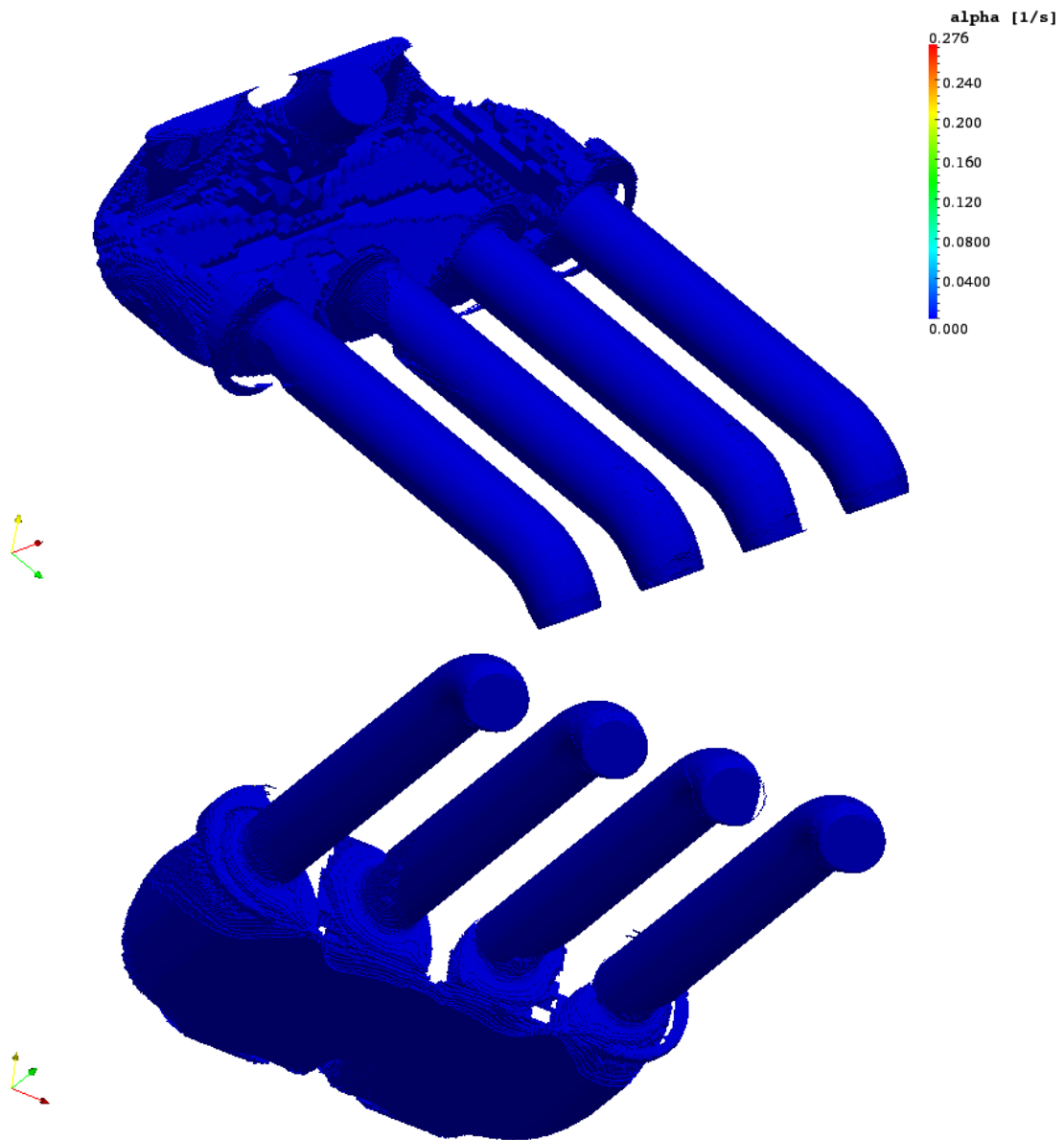
**Σχ. Α.7.** Ιστορία σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης. Απαιτήθηκαν 98 «ισοδύναμες» επιλύσεις της ροής και του συζυγούς προβλήματος. Η σύγκλιση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης είναι αρκετά αργή, αλλά αυτό οφείλεται στη μικρή τιμή του συντελεστή  $\eta$  που χρησιμοποιήθηκε στη μέθοδο της «απότομης καθόδου» καθώς και στη λογική της «one-shot» επίλυσης των εξισώσεων σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης.



**Σχ. Α.8.** Γραμμές ροής (μέτρο της ταχύτητας) στον βέλτιστο αγωγό.

Από το Σχ. Α.8, άξιο σχολιασμού είναι η εκ νέου εμφάνιση συστροφής της ροής στους αγωγούς εξόδου, συγκριτικά με το αρχικοποιημένο πεδίο ροής που παρουσιάζεται στο Σχ. Α.6. Προφανώς, η βελτιστοποίηση τοπολογίας, «έσκαψε» τα τοιχώματα των αγωγών εξόδου που ο αλγόριθμος αρχικοποίησης είχε «στερεοποιήσει», με αποτέλεσμα την «επιστροφή» της

συστροφής της ροής (βλ. Σχ. Α.4). Την τελευταία παρατήρηση επιβαιώνει και το Σχ. Α.9, στο οποίο παρουσιάζεται ο βέλτιστος αγωγός ροής ( $0 \leq a \leq 1$ ).



**Σχ. Α.9.** Κατανομή πορώδους,  $0 \leq a \leq 1$ . Γενική άποψη του αγωγού

Από το τελευταίο σχήμα φαίνεται επίσης, ότι η βελτιστοποίηση τοπολογίας τείνει να στερεοποιήσει (κυρίως) τις περιοχές εντός του σώματος plenum και, να κρατήσει τους αγωγούς εισόδου κι εξόδου της ροής ως είχαν στον αρχικό, τελείως ανοιχτό αγωγό.





## Παράρτημα Β'

### Απόδειξη και σχολιασμός της ταυτότητας (2.14)<sup>[8, 9]</sup>

Αποδεικνύεται, ότι για ένα οποιοδήποτε ροϊκό μέγεθος  $\Phi$  που εξαρτάται από τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\mathbf{a}$  (υποθέτουμε ότι  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^M$ ,  $\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_M)^T$ ) και τις χωρικές συντεταγμένες του πλέγματος, οι οποίες με τη σειρά τους θεωρούμε ότι εξαρτώνται από το  $\mathbf{a}$ , δηλαδή,  $\Phi = \Phi(\mathbf{a}, \mathbf{x}(\mathbf{a}))$ , η ολική του μεταβολή ως προς  $\mathbf{a}$  δίνεται από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$\frac{\delta\Phi}{\delta a_m} = \frac{\partial\Phi}{\partial a_m} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta a_m}, \quad k = 1, 2, (3), \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Η παραπάνω σχέση, λόγω έλλειψης μετρικών δομημένου τύπου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί αδιακρίτως τόσο σε δομημένα, όσο και σε μη-δομημένα ή και υβριδικά πλέγματα.

Όπως προαναφέραμε, με  $\Phi$  συμβολίζεται οποιαδήποτε ποσότητα της ροής, όπως λ.χ. οι ροϊκές μεταβλητές (ταχύτητες, πίεση, μεταβλητές του μοντέλου τύρβης αν αυτές υπάρχουν κ.λπ.), αλλά και τα υπόλοιπα των εξισώσεων ροής  $R$ . Δεδομένου ότι σε κάθε φάση της βελτιστοποίησης απαιτούμε οι εξισώσεις της ροής να ικανοποιούνται, μπορούμε εύκολα να εξάγουμε τη σχέση,

$$\frac{\delta R}{\delta a_m} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

κι επιπλέον, επειδή,

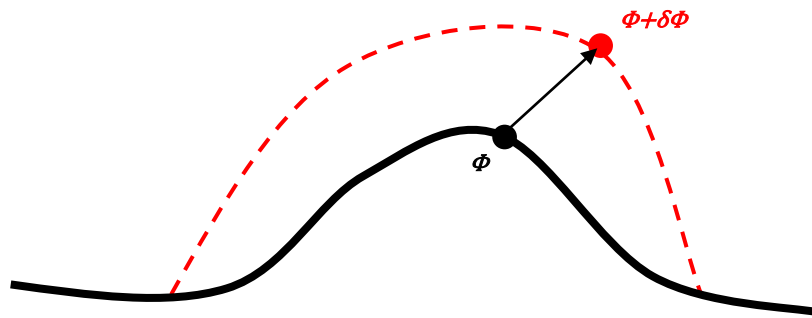
$$\frac{\partial R}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, 2, (3)$$

τότε στο εσωτερικό του χωρίου ροής ισχύει και,

$$\frac{\partial R}{\partial a_m} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Η τελευταία αποδεικνύεται από την ταυτότητα (2.14) για  $\delta R/\delta a_m = 0$  και  $\partial R/\partial x_k = 0$ . Από την Εξ. (2.14), προκύπτει ακόμα ότι ο ρυθμός μεταβολής  $\delta\Phi/\delta a_m$  ορίζεται εύκολα στο

διακριτοποιημένο χωρίο ροής, στο οποίο και επιλύονται οι συνεχείς συζυγείς εξισώσεις. Για κάθε κόμβο του πλέγματος, ο όρος  $\partial\Phi/\partial a_m$  εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της κομβικής τιμής της ποσότητας  $\Phi$  λόγω μεταβολής της τιμής της μεταβλητής σχεδιασμού (λόγω λ.χ. τροποποίησης της μορφής του χωρίου ροής) ως εάν η θέση του κόμβου να μην επηρεάζεται από τη μεταβολή της  $a_m$ . Ο «μεταφορικός» όρος  $(\partial\Phi/\partial x_k)(\delta x_k/\delta a_m)$  ποσοτικοποιεί τον επιπλέον ρυθμό μεταβολής της κομβικής τιμής του  $\Phi$  λόγω της μετατόπισης του αντίστοιχου κόμβου. Ο όρος αυτός εμπλέκει τη χωρική παράγωγο του  $\Phi$  και το ρυθμό μεταβολής  $\delta x_k/\delta a_m$  της θέσης του κόμβου. Η τιμή της χωρικής παραγώγου  $\partial\Phi/\partial x_k$  υπολογίζεται στο πεδίο ροής προτού μεταβληθεί η γεωμετρία. Αντίθετα, ο όρος  $\delta x_k/\delta a_m$  υπολογίζονται λαμβάνοντας υπόψη αφενός τη συνάρτηση παραμετροποίησης του ορίου, μέσω του  $a_m$ , αφετέρου δε τη διαδικασία γένεσης του υπολογιστικού πλέγματος. Η σύνθεση των δύο αυτών ρυθμών μεταβολής, δίνει τον ολικό ρυθμό μεταβολής  $\delta\Phi/\delta a_m$ .



**Σχ. Β.1.** Η μετατόπιση από την αρχική γεωμετρία της προς σχεδιασμό μορφής (συνεχής μαύρη γραμμή) στη νέα (διακεκομμένη κόκκινη γραμμή) συνεπάγεται την ολική μεταβολή της ποσότητας  $\Phi$  (η τελευταία εξαρτάται από τα μεγέθη της ροής) κατά  $\delta\Phi = \partial\Phi + (\partial\Phi/\partial x_k)\delta x_k$ . Η μεταβολή  $\partial\Phi$  οφείλεται στη συνολική αλλαγή της γεωμετρίας που επιφέρει αλλαγή στη ροϊκή λύση παντού στο πεδίο ροής και όχι στη μετατόπιση του εν λόγω κόμβου. Αντίθετα, η μεταβολή  $(\partial\Phi/\partial x_k)\delta x_k$  αντιπροσωπεύει τη συνεισφορά, στην ολική μεταβολή, της μετατόπισης του κόμβου αυτού καθ'αυτού, θεωρώντας ότι το πεδίο ροής παραμένει αμετάβλητο.

Το να οριστεί η ίδια σχέση, Εξ. (2.14), στο συνεχές πεδίο ροής (αντί του διακριτού όπου λ.χ. υφίσταται η έννοια του κόμβου του πλέγματος) φαίνεται, εκ πρώτης όψευς, να στερείται ερείσματος. Εν τούτοις, η ανάγκη ενός «ισοδύναμου» ορισμού για το συνεχές πεδίο είναι απαραίτητη, δεδομένου, ότι κατά τη μαθηματική ανάπτυξη της συζυγούς μεθόδου το πεδίο ροής δεν έχει διακριτοποιηθεί ακόμα και, συνεπώς, δεν είναι δόκιμο να χρησιμοποιούνται όροι διακριτοποίησης.

Στο συνεχές πεδίο, η απουσία πλέγματος, άρα και της έννοιας των κόμβων, υποκαθίσταται από μια «νοητή» συνάρτηση που διέπει τη «μετατόπιση» ενός σημείου του χώρου ως αποτέλεσμα της μεταβολής  $\delta a_m$  της τιμής κάποιας από τις μεταβλητές σχεδιασμού. Επειδή κατάληξη είναι ο προγραμματισμός των διακριτοποιημένων μερικών διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν (δηλαδή των συζυγών εξισώσεων), με χρήση υπολογιστικού πλέγματος, η «νοητή» αυτή συνάρτηση αποτελεί ουσιαστικά το «συνεχές ισοδύναμο» της υπολογιστικής μεθόδου χωρικής διακριτοποίησης (γένεσης πλέγματος). Υπό αυτή την έννοια, ο ολικός ρυθμός μεταβολής  $\delta\Phi/\delta a_m$  συνίσταται από το ρυθμό μεταβολής  $\partial\Phi/\partial x_k$  (που επιφέρει η μεταβολή  $\delta a_m$  σε ένα σημείο του χώρου, αν αυτό θεωρηθεί σταθερό) και το ρυθμό μεταβολής  $(\partial\Phi/\partial x_k)(\delta x_k/\delta a_m)$  που λαμβάνει υπόψη την επιφερόμενη μετακίνηση κόμβων πλέγματος στο διακριτοποιημένο πρόβλημα.

Ως συμπέρασμα, η προαναφερθείσα «νοητή» συνάρτηση είναι ένα απαραίτητο (για τη μαθηματική θεμελίωση της συζυγούς μεθόδου) «εργαλείο», όπου όμως, δεν έχει κανένα πρακτικό/ουσιαστικό νόημα να λάβει συγκεκριμένη μορφή.



## Παράρτημα Γ'

### Απόδειξη και σχολιασμός της ταυτότητας (2.15)<sup>[9]</sup>

Αρχικά, πρέπει να τονιστεί ότι η απόδειξη που θα ακολουθήσει παρουσιάζεται με τη βοήθεια σχέσεων που ισχύουν μόνο για δομημένα πλέγματα. Ωστόσο, το αποτέλεσμα που θα προκύψει είναι γενικό και μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε μη-δομημένα ή και υβριδικά πλέγματα, καθώς, όπως έχουμε ήδη δει, δε συναρτάται μετρικών δομημένου τύπου.

Ο στοιχειώδης όγκος  $d\Omega$  οποιουδήποτε πλεγματοκού κόμβου εκφράζεται συναρτήσει της τοπικής Ιακωβιανής  $J$  και του στοιχειώδους όγκου στο μετασχηματισμένο χωρίο, από τη σχέση,

$$d\Omega = Jd\Omega_\xi \quad (\Gamma.1)$$

Η μεταβολή  $\delta J$  της Ιακωβιανής, αποδεικνύεται [9] ότι δίνεται από τη σχέση,

$$\delta J = \frac{\partial(\delta x_k)}{\partial x_k} J, \quad k = 1, 2, (3) \quad (\Gamma.2)$$

και έτσι, η μεταβολή του  $d\Omega$  είναι ίση με, σχέσεις (Γ.1) και (Γ.2),

$$\delta(d\Omega) = \delta J d\Omega_\xi = \frac{\partial(\delta x_k)}{\partial x_k} J d\Omega_\xi$$

ώστε τελικά και λόγω της (Γ.1),

$$\delta(d\Omega) = \frac{\partial(\delta x_k)}{\partial x_k} d\Omega$$

ή,

$$\frac{\delta}{\delta a_m}(d\Omega) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\delta x_k}{\delta a_m} \right) d\Omega, \quad k = 1, 2, (3), \quad m = 1, 2, \dots, M$$



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ'

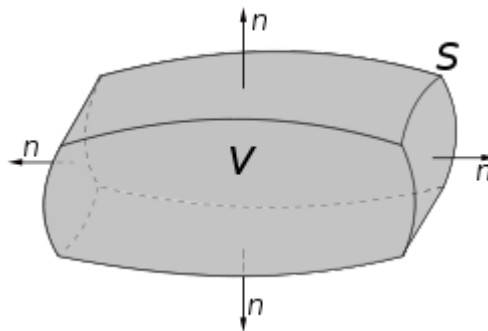
### Το θεώρημα της απόκλισης (Gauss)<sup>[18, 22]</sup>

#### Δ.1. Γενικά για το θεώρημα της απόκλισης

Το θεώρημα της απόκλισης, γνωστό και ως θεώρημα του Gauss (ή θεώρημα Gauss-Ostrogradsky), συνδέει το τριπλό ολοκλήρωμα σε ένα χωρίο του  $\mathbb{R}^3$  με ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα στο σύνορο του χωρίου. Με την έννοια αυτή, γενικεύει στο χώρο το ολοκληρωτικό θεώρημα του Green.

Στη φυσική και στη μηχανική, το θεώρημα της απόκλισης, συνήθως, χρησιμοποιείται στις τρεις διαστάσεις του χώρου, ωστόσο, μπορεί εύκολα να γενικευθεί σε οποιοδήποτε αριθμό διαστάσεων. Στη μονοδιάστατη μάλιστα ανάλυση, η διατύπωσή του συμπίπτει με το θεμελιώδες θεώρημα της μαθηματικής ανάλυσης.

#### Δ.2. Μαθηματική έκφραση του θεωρήματος της απόκλισης



**Σχ. Δ.1.** Μια περιοχή του χώρου  $V$  που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια  $S$ . Με  $n$  συμβολίζεται το μοναδιαίο, κάθετο στην επιφάνεια  $S$  διάνυσμα, το οποίο εξ ορισμού κατευθύνεται προς τα εξωτερικά του πεδίου.

### Θεώρημα του Gauss

Έστω  $V$  ένα  $xyz$  –απλό χωρίο του  $\mathbb{R}^3$  με σύνορο  $S \equiv \partial V$  μια κλειστή και κατά τμήματα λεία επιφάνεια, προσανατολισμένη, με θετική όψη την εξωτερική. Αν  $\mathbf{F}$  είναι ένα  $C^1$  –τάξης διανυσματικό πεδίο ορισμένο στο σύνολο  $V$ , τότε ισχύει,

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

Το θεώρημα μπορεί πολύ εύκολα να γραφεί και σε τανυστική μορφή ως,

$$\iiint_V \frac{\partial F_j}{\partial x_j} dV = \iint_{\partial V} F_j n_j dS$$

ή, σε γενικότερη μορφή,

$$\iiint_V \frac{\partial F_{i,j,k}}{\partial x_j} dV = \iint_{\partial V} F_{i,j,k} n_j dS$$

όπου επαναλαμβανόμενος δείκτης σημαίνει άθροιση της αντίστοιχης ποσότητας.

### Δ.3. Το θεώρημα της απόκλισης στη μηχανική των ρευστών

Θεωρούμε ότι το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}$  είναι το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα,

$$\iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

είναι ο όγκος του ρευστού που ρέει από το εσωτερικό προς το εξωτερικό της κλειστής επιφάνειας  $\partial V$ , ανά μονάδα χρόνου. Επομένως, από το θεώρημα της απόκλισης, παρατηρούμε ότι ο αριθμός  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  είναι ο όγκος του ρευστού, ανά μονάδα όγκου και ανά μονάδα χρόνου που ρέει προς το εξωτερικό οποιασδήποτε κλειστής επιφάνειας.

Έστω  $\mathbf{P}$  ένα εσωτερικό σημείο του χώρου  $V$ . Αν  $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{P}) > 0$ , τότε υπάρχει μια περιοχή του σημείου  $\mathbf{P}$  όπου σύμφωνα με το θεώρημα του Gauss, η ροή προς το εξωτερικό οποιασδήποτε κλειστής επιφάνειας στην περιοχή αυτή, είναι θετική. Επομένως ο όγκος του ρευστού που ρέει προς το εξωτερικό οποιασδήποτε τέτοιας επιφάνειας είναι μεγαλύτερος από τον όγκο του ρευστού που ρέει προς το εσωτερικό της. Ένα τέτοιο σημείο  $\mathbf{P}$ , για προφανείς λόγους, ονομάζεται θετική σημειακή πηγή ή πηγή. Αν  $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{P}) < 0$ , η ροή προς το εξωτερικό μιας τέτοιας επιφάνειας είναι αρνητική. Επομένως, περισσότερος όγκος του ρευστού ρέει προς το εσωτερικό παρά προς το εξωτερικό της. Στην περίπτωση αυτή το σημείο  $\mathbf{P}$  ονομάζεται αρνητική σημειακή πηγή ή καταβόθρα.

Έστω ένα  $C^1$  –τάξης διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}$  με  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$  σε κάθε σημείο του χωρίου  $V$ . Τότε, από του θεώρημα του Gauss έπεται και ότι,

$$\iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$$



για κάθε κλειστή επιφάνεια  $S$ . Επομένως, σύμφωνα με την προηγούμενη ερμηνεία όσος όγκος ρευστού εισέρχεται σε οποιοδήποτε χωρίο της ροής, τόσος και εξέρχεται από αυτό. Αν η ροή του ρευστού χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα αυτή ( $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ ), τότε λέγεται μη-συμπιεστή ροή.

Σε μια γενικότερη διατύπωση, το θεώρημα της απόκλισης δηλώνει ότι, για να υπολογίσουμε την καθαρή ροή διαμέσου μιας κλειστής επιφάνειας του χώρου, αρκεί να προσθέσουμε όλες τις πηγές και να αφαιρέσουμε το άθροισμα όλων των καταβοθρών εντός του όγκου που ορίζει η κλειστή επιφάνεια. Κατά συνέπεια, το θεώρημα του Gauss είναι ένα θεώρημα διατήρησης.

## Παράρτημα Δ' Το θεώρημα της απόκλισης

## Βιβλιογραφικές/Διαδικτυακές αναφορές

- [1] *Υπολογιστική Ρευστομηχανική*, Γ. Μπεργελές, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2006.
- [2] *Computational Fluid Dynamics, The basics with applications*, J. D. Anderson, Jr, McGraw Hill, 1995.
- [3] *Συνεκτικές Ροές στις Στροβιλομηχανές*, Κ. Χ. Γιαννάκογλου, Πανεπιστημιακές Παραδόσεις, Αθήνα 2004.
- [4] *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*, Κ. Χ. Γιαννάκογλου, Αθήνα 2004.
- [5] *Βιομηχανική Ρευστομηχανική*, Δ. Σ. Μαθιουλάκης, Ι. Σ. Αναγνωστόπουλος, Δ. Γ. Τουζόπουλος, Σημειώσεις, Αθήνα 2006.
- [6] *Μηχανική των Ρευστών*, Σ. Τσαγγάρης, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2005.
- [7] *Μηχανική Ρευστών II*, Δ. Μαθιουλάκης, Σημειώσεις, Αθήνα 2006.
- [8] *Συζυγείς Μέθοδοι για το Σχεδιασμό Μορφών με Βέλτιστη Αεροδυναμική Συμπεριφορά σε Στρωτές και Τυρβώδεις Ροές*, Α. Σ. Ζυμάρης, Διδακτορική Διατριβή, ΕΜΠ, Αθήνα 2010.
- [9] *Συζυγείς (Adjoint) Διατυπώσεις για την Ανάλυση - Σχεδίαση Πτερυγώσεων Στροβιλομηχανών και τη Βέλτιστη Προσαρμογή Πλέγματος με A Posteriori Εκτίμηση Σφάλματος*, Δ. Ι. Παπαδημητρίου, Διδακτορική Διατριβή, ΕΜΠ, Αθήνα 2007.
- [10] *Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows*, H. Jasak, Doctoral Thesis, Imperial College, 1996.
- [11] *Constrained Topology Optimization for Laminar and Turbulent Flows, Including Heat Transfer*, E. M. Papoutsis-Kiachagias, E. A. Kontoleonos, A. S. Zymaris, D. I. Papadimitriou, K. C. Giannakoglou, EUROGEN 2011, Evolutionary and Deterministic Methods for Design, Optimization and Control, Capua, Italy, September 2011.
- [12] *A Continuous Adjoint Formulation for the Computation of Topological and Surface Sensitivities of Ducted Flows*, C. Othmer, 2006.
- [13] *Adjoint Wall Functions: A New Concept for Use in Aerodynamic Shape Optimization*, A. S. Zymaris, D. I. Papadimitriou, K. C. Giannakoglou, C. Othmer, Journal of Computational Physics 229 (2010), p. 5228 – 5245.
- [14] *Ανάλυση Μηχανολογικών Κατασκευών - II*, Χ. Προβατίδης, Πρόχειρες Σημειώσεις, Αθήνα 2004.
- [15] *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς*, Κ. Χ. Γιαννάκογλου, Ι. Αναγνωστόπουλος, Γ. Μπεργελές, Αθήνα 2004.

## Βιβλιογραφικές/Διαδικτυακές αναφορές

- [16] *Numerical Computation of Internal and External Flows, The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*, C. Hirsch, John Wiley & Sons, 2007.
- [17] *Η Γλώσσα C++ σε Βάθος*, Ν. Μ. Χατζηγιαννάκης, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2008.
- [18] *Ανάλυση II - Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών*, Ν. Καδιανάκης, Σ. Καρανάσιος, Α. Φελλούρης, Εκδόσεις ΕΜΠ, Αθήνα 2007.
- [19] *Programming: Principles and Practice Using C++*, Bjarne Stroustrup, 2008.
- [20] *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, D. Anderson, J. Tannehil, R. Pletcher, Hemisphere Publish Corp., 1984
- [21] <http://www.openfoam.org/>
- [22] <http://www.cplusplus.com/doc/tutorial/>
- [23] [http://en.wikipedia.org/wiki/Divergence\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Divergence_theorem)