

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ

Βελτιστοποίηση Υπερηχητικού
Επιβατικού Αεροσκάφους με Χρήση
της Μεθόδου Μιγαδικών Μεταβλητών

Διπλωματική Εργασία

Νικόλαου Σ. Καζαζάκη

Επιβλέπων: Κ. Χ. Γιαννάκογλου

Αναπ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2008

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ

Βελτιστοποίηση Υπερηχητικού Επιβατικού Αεροσκάφους με Χρήση της Μεθόδου Μιγαδικών Μεταβλητών

Διπλωματική Εργασία του
Νικόλαου Καζαζάκη

Οκτώβριος 2008

Επιβλέπων: Κ. Γιαννάκογλου, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η βελτιστοποίηση των επιδόσεων ενός μικρού υπερηχητικού επιβατικού αεροσκάφους με αιτιοκρατικές μεθόδους και χρήση Μιγαδικών Μεταβλητών για τον υπολογισμό παραγώγων. Το πρόβλημα αυτό αποτελεί ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης πολλών στόχων με περιορισμούς (*Multiobjective Constrained Optimization*). Οι στόχοι και οι περιορισμοί συμπτύχθηκαν σε μια ενιαία συνάρτηση κόστους έτσι ώστε να είναι δυνατή η βελτιστοποίηση πολλών στόχων με αιτιοκρατικές μεθόδους. Για τη βελτιστοποίηση χρησιμοποιήθηκαν, αντιμετωπίζοντας τα προβλήματα σύγκλισης που αυτές εμφάνισαν, δύο βασιζόμενες στην κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης (*Gradient Based*) μέθοδοι βελτιστοποίησης εφαρμοζόμενες σε δύο διαφορετικά προβλήματα επίλυσης των εξισώσεων του αεροσκάφους, σε τέσσερις εφαρμογές βελτιστοποίησης. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν η μέθοδος Απότομης Καθόδου (*Steepest Descent*) και η Τροποποιημένη Μέθοδος Newton (*Modified Newton Method*).

Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία απαιτούν τον υπολογισμό πρώτων παραγώγων (για τη μέθοδο της Απότομης Καθόδου) και του Εσσιανού μητρώου (για τη μέθοδο Newton). Για τον υπολογισμό των απαιτούμενων παραγώγων, χρησιμοποιείται αρχικά η μέθοδος των *Πεπερασμένων Διαφορών*. Στη συνέχεια, γίνεται εφαρμογή και διερεύνηση μιας νέας μεθόδου αριθμητικού υπολογισμού της παραγώγου μιας συνάρτησης, της μεθόδου των *Μιγαδικών Μεταβλητών*. Ο υπολογισμός παραγώγου με τη μέθοδο αυτή απαιτεί τη μετατροπή της συνάρτησης και κατ' επέκταση, του κώδικα ανάλυσης του προβλήματος σε μιγαδικό. Αυτή η μετατροπή μπορεί να είναι αρκετά σύνθετη και πολύπλοκη, ανάλογα με τις αριθμητικές διαδικασίες που εκτελεί ο αρχικός κώδικας. Για την υλοποίηση του στόχου αυτού προγραμματίστηκαν αρκετές συναρτήσεις σε μιγαδική μορφή (εφόσον για τις περισσότερες η γλώσσα προγραμματισμού δεν υποστηρίζει μιγαδικό όρισμα) ενώ αναπτύχθηκε στο μιγαδικό επίπεδο αριθμητική μέθοδος αντίστοιχη της μεθόδου διχοτόμησης (*bisection*).

National Technical University of Athens

DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING

LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES

Optimization of a Supersonic Civil Aircraft Using the Method of Complex Variables

Diploma Thesis
Nikolaos Kazazakis

October 2008

Advisor: K.C. Giannakoglou, Associate Professor NTUA

The purpose of this diploma thesis is the optimization of the performance of a small supersonic business jet using deterministic methods and, in particular, the complex variables technique to compute sensitivity derivatives. This kind of problem is known as a *Multiobjective Constraint Optimization* problem. To fulfill this objective, the objectives as well as the constraints were merged into a unified objective function in order to deal with the multiobjective problem using deterministic optimization methods. Two *Gradient Descent Methods* were used for two separate performance analysis algorithms, applied into four different optimization cases, while dealing with various convergence problems. Namely, the *Steepest Descent Method* and the *Modified Newton Method* were utilized.

The optimization methods used in this thesis, call for the calculation of first-order derivatives (Steepest Descent) as well as the Hessian Matrix (Modified Newton Method). In order to calculate the desired derivatives we use, as a first approach, the method of *Finite Differences*. Afterwards, we apply a new method of numerical calculation of the function derivatives, the method of *Complex Variables*. The calculation of a derivative using this method demands that the functions (in this case the programming codes) are converted from real to complex. This conversion is not straightforward, depending on the numerical methods that are used in the original programming code. In order to fulfill this objective, several functions were programmed in complex form (since most functions do not natively support a complex argument) while a method respective to the *bisection* method was developed on the complex plane.

Ευχαριστίες

Η πορεία για να έρθει σε πέρας όχι μόνο αυτή η εργασία, αλλά και ολόκληρη η σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών ήταν μακρά και δύσκολη. Κανείς δε μπορεί να πορευθεί σε ένα δρόμο τέτοιο, χωρίς ανθρώπους που τον βοηθούν και τον στηρίζουν.

Κατ' αρχάς, θέλω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τις θυσίες τους όλα αυτά τα χρόνια, από τη περίοδο που βρισκόμουν πίσω από τα σχολικά θρανία, μέχρι τώρα που αφήνω τα πανεπιστημιακά έδρανα. Ευχαριστώ επίσης τη φίλη μου Νιόβη, για την αμέριστη υποστήριξή της όλα αυτά τα χρόνια. Χωρίς εσάς, τίποτα δε θα ήταν δυνατό.

Επιπροσθέτως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Γιαννάκογλου για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του για τη δημιουργία μιας διπλωματικής εργασίας για την οποία μπορώ να είμαι υπερήφανος. Επίσης, ευχαριστώ την υποψήφια διδάκτορα Βαρβάρα Ασούτη που προσέφερε το υπολογιστικό μοντέλο του αεροσκάφους από την εν εξελίξει διδακτορική της διατριβή και φυσικά για τις πολύτιμες συμβουλές της. Θέλω επίσης να ευχαριστήσω όλα τα παιδιά που κάνουν το διδακτορικό τους υπό τον κ. Γιαννάκογλου καθώς όταν χρειαζόμουν μια χείρα βοήθειας, όλοι ήταν πρόθυμοι να την προσφέρουν.

Σύνοψη

Στόχο του παρόντος αποτελεί η βελτιστοποίηση των επιδόσεων ενός «μικρού υπερηχητικού επιβατικού αεροσκάφους» (*Small Business Jet*).

Ο όρος «μικρό υπερηχητικό επιβατικό αεροσκάφος» σημαίνει ένα αεροσκάφος με λίγους επιβάτες, μικρό σε διαστάσεις και βάρος, το οποίο θα έχει τη δυνατότητα να εκτελεί πτήσεις μεγάλης εμβέλειας (υπερατλαντικές πτήσεις) σε υπερηχητική ταχύτητα.

Ο υπολογιστικός αλγόριθμος¹ του αεροσκάφους αποτελείται από ένα σύνολο εμπειρικών σχέσεων που συλλέχτηκαν από τη διεθνή βιβλιογραφία, είναι δηλαδή ένας αλγόριθμος προκαταρκτικού σχεδιασμού. Ως εκ τούτου, στους υπολογισμούς δεν χρησιμοποιείται επιλύτης ροής, ή δομικής ανάλυσης και γενικότερα περίπλοκες εφαρμογές για τους δομικούς, γεωμετρικούς, αεροδυναμικούς και λοιπούς υπολογισμούς του.

Ο αλγόριθμος ανάλυσης επιδόσεων του αεροσκάφους αποτελείται, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, από ένα σύνολο εμπειρικών σχέσεων, ή αλλιώς ένα μη – γραμμικό σύστημα πεπλεγμένων εξισώσεων. Στις εξισώσεις αυτές εμπλέκονται διάφορες μεταβλητές. Από αυτές, επιλέγονται 15 μεταβλητές σχεδιασμού (*design variables*) που θεωρείται ότι καθορίζουν τα βασικά στοιχεία του αεροσκάφους και αποτελούν την είσοδο του συστήματος. Από αυτές, οι 13 επιδρούν στην εμβέλεια του αεροσκάφους ενώ οι υπόλοιπες δύο στο μήκος απογείωσης και στην ταχύτητα προσέγγισης. Η έξοδος είναι οι επιδόσεις του αεροσκάφους, δηλαδή η εμβέλεια και το βάρος του καυσίμου, καθώς και το απαιτούμενο μήκος απογείωσης και η αναπτυσσόμενη ταχύτητα προσέγγισης.

Στα πλαίσια σχεδιασμού του αεροσκάφους, διατυπώθηκαν δύο διαφορετικά προβλήματα σχεδιασμού, σε καθένα εκ των οποίων αντιστοιχεί ένας ξεχωριστός αλγόριθμος ανάλυσης επιδόσεων. Στο πρώτο πρόβλημα, το βάρος του καυσίμου είναι μεταβλητή σχεδιασμού, ως εκ τούτου παραμένει εντός των ορίων που έχουμε θέσει για τη μεταβλητή αυτή. Στο δεύτερο πρόβλημα, το βάρος του καυσίμου αντικαθίσταται ως μεταβλητή σχεδιασμού από τη γωνία πρόσπτωσης σε ευθεία πτήση, καθορίζοντας έτσι έμμεσα την άνωση και το βάρος απογείωσης. Σημειώνεται πως η αντικατάσταση αυτή είναι σημαντική καθώς το βάρος του καυσίμου αποτελεί, όπως θα δούμε αργότερα, στόχο προς ελαχιστοποίηση σε πρόβλημα βελτιστοποίησης πολλών στόχων, ως εκ τούτου, το γεγονός ότι στον δεύτερο αλγόριθμο δεν του επιβάλλεται κάποιος περιορισμός οδηγεί σε διαφορετική αριθμητική συμπεριφορά των δύο αλγόριθμων.

Η βελτιστοποίηση του αεροσκάφους πρόκειται να πραγματοποιηθεί με δύο βασιζόμενες στην κλίση της συνάρτησης στόχου (*Gradient Based*) μεθόδους βελτιστοποίησης, τη Μέθοδο της Απότομης Καθόδου (*Steepest Descent Method*) και την Τροποποιημένη Μέθοδο Newton (*Modified Newton Method*), καθώς και με το λογισμικό EASY του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

¹ Ο αρχικός υπολογιστικός αλγόριθμος αποτελεί μέρος της διδακτορικής διατριβής της υποψήφιας διδάκτορος Βαρβάρας Ασούτη (Βιβλ. αναφορά [1])

Όπως δηλώνει και η ονομασία τους, οι παραπάνω μέθοδοι απαιτούν τη γνώση *παραγώγων* της συνάρτησης προς βελτιστοποίηση (ελαχιστοποίηση). Ο υπολογισμός της πληροφορίας αυτής στην παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται με δύο μεθόδους. Η πρώτη είναι η μέθοδος *Πεπερασμένων Διαφορών*, ενώ η δεύτερη είναι μια νέα μέθοδος αριθμητικού υπολογισμού παραγώγου – η μέθοδος *Μιγαδικών Μεταβλητών (Complex Variables)*.

Για να υπολογιστεί η παράγωγος μιας πραγματικής συνάρτησης (όπως είναι ο αλγόριθμος ανάλυσης επιδόσεων του αεροσκάφους) με τη μέθοδο των Μιγαδικών Μεταβλητών, είναι απαραίτητο η συνάρτηση αυτή να μετατραπεί σε μιγαδική. Αυτό πρακτικά σημαίνει πως για να υπολογισθεί η παράγωγος του μοντέλου του αεροσκάφους για κάποιο σύνολο μεταβλητών σχεδιασμού, είναι απαραίτητο ο κώδικας του μοντέλου να μετατραπεί σε μιγαδικό.

Η μετατροπή μιας περίπλοκης συνάρτησης, όπως ο αλγόριθμος ανάλυσης επιδόσεων μοντέλο ενός αεροσκάφους, σε μιγαδική απαιτεί κάτι παραπάνω από την απλή δήλωση των μεταβλητών από *real* σε *complex*. Για την ακρίβεια, η δυσκολία αυξάνει όταν στον κώδικα περιλαμβάνονται και περίπλοκες αριθμητικές διαδικασίες.

Αν ο αναγνώστης ανατρέξει στο κεφάλαιο της μιγαδικής ανάλυσης που περιέχεται στην παρούσα εργασία θα διαπιστώσει πως στο μιγαδικό επίπεδο οι απλές συναρτήσεις όπως *cos*, *sin*, *atan*, *square root*, λειτουργούν διαφορετικά, ενώ κάποιες ούτε καν ορίζονται, όπως η συναρτήσεις *max* και *min*. Σημειώνεται πως πολλές από τις βασικές συναρτήσεις δεν υποστηρίζονται από τη γλώσσα προγραμματισμού που χρησιμοποιήθηκε (*FORTRAN 90*).

Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται κάποια αριθμητική διαδικασία, πρέπει, λόγω της φτωχής βιβλιογραφίας στο αντικείμενο, η διαδικασία αυτή να κατασκευασθεί εκ νέου έτσι ώστε να δέχεται και να αποδίδει ως αποτέλεσμα ένα μιγαδικό αριθμό. Στην ουσία, όλες οι διαδικασίες περνούν από τον *άξονα* των πραγματικών αριθμών, στο *επίπεδο* των μιγαδικών αριθμών.

Για το σκοπό της εργασίας αυτής προγραμματίστηκαν διάφορες συναρτήσεις στο μιγαδικό επίπεδο ενώ αναπτύχθηκε και μια αριθμητική μέθοδος προς αντικατάσταση της μεθόδου *διχοτόμησης (bisection)* έτσι ώστε να υπολογισθεί ο μιγαδικός αριθμός (γωνία πρόσπτωσης στην πτέρυγα) που ικανοποιεί μια μιγαδική εξίσωση (εξίσωση υπολογισμού συντελεστή άνωσης) της οποίας η μιγαδική λύση (τιμή του συντελεστή άνωσης) είναι γνωστή.

Μετά τη μετατροπή του κώδικα σε μιγαδικό, είναι δυνατός ο υπολογισμός των παραγώγων με τη μέθοδο των Μιγαδικών Μεταβλητών. Παράλληλα με τους υπολογισμούς αυτούς, οι παράγωγοι υπολογίζονται και με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών με σκοπό την επαλήθευση των αποτελεσμάτων.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, εφαρμόζονται δύο μέθοδοι βελτιστοποίησης – η μέθοδος της Απότομης Καθόδου και η Τροποποιημένη Μέθοδος Newton. Η πρώτη απαιτεί τον υπολογισμό πρώτων παραγώγων ενώ η δεύτερη απαιτεί επιπλέον τον υπολογισμό του Εσσιανού μητρώου. Σημειώνεται πως ο τρόπος υπολογισμού του Εσσιανού μητρώου με τη μέθοδο των Μιγαδικών Μεταβλητών δεν υπάρχει στην υπόψη διεθνή βιβλιογραφία και επιχειρήθηκε, με ένα νέο τρόπο, σε αυτή τη διπλωματική εργασία. Οι παράγωγοι για τις

μεθόδους αυτές υπολογίζονται με τη μέθοδο των Μιγαδικών Μεταβλητών και με την μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών.

Το πρόβλημα της βελτιστοποίησης ενός αεροσκάφους αποτελεί ένα πρόβλημα *πολυμεταβλητής βελτιστοποίησης πολλών στόχων με περιορισμούς (multivariable multiobjective constrained optimization)*. Στόχοι είναι η μεγιστοποίηση της *εμβέλειας (Range)* του αεροσκάφους και η ελαχιστοποίηση του όγκου της δεξαμενής καυσίμου (βάρους του καυσίμου), μένοντας εντός των ορίων των μεταβλητών σχεδιασμού. Επίσης, η λύση συνοδεύεται από τρεις περιορισμούς:

- Το μήκος απογείωσης να είναι εντός των αποδεκτών ορίων έτσι ώστε το αεροσκάφος να μπορεί να χρησιμοποιεί όσο το δυνατόν περισσότερο αεροδρόμια και
- Η ταχύτητα προσέγγισης (που υποδηλώνει το απαιτούμενο μήκος αεροδιαδρόμου κατά την προσγείωση) να είναι κάτω από $76m/s$.²
- Οι μεταβλητές σχεδιασμού πρέπει να παραμένουν εντός των ορίων που επιβάλλουν κατασκευαστικοί, δομικοί, αεροδυναμικοί και άλλοι παράγοντες.

Στην ουσία, αναζητούμε τον συνδυασμό των 15 μεταβλητών σχεδιασμού που, μένοντας εντός των αποδεκτών ορίων, αποδίδει τη μεγαλύτερη εμβέλεια του αεροσκάφους και τη μικρότερη δυνατή δεξαμενή καυσίμου χωρίς να παραβιάζονται τα όρια του μήκους απογείωσης και της ταχύτητας προσέγγισης.

Στην εργασία αυτή θα παρουσιασθούν τέσσερις διαφορετικές εφαρμογές βελτιστοποίησης. Μια εφαρμογή ενός στόχου χωρίς περιορισμούς, μια εφαρμογή ενός στόχου με περιορισμούς, μια εφαρμογή δύο στόχων χωρίς περιορισμούς και, τέλος, μια εφαρμογή δύο στόχων με περιορισμούς, που αποτελεί και το πλήρες πρόβλημα βελτιστοποίησης του αεροσκάφους. Πιο αναλυτικά, οι εφαρμογές αυτές συνίστανται σε:

1. Μειστοποίηση της εμβέλειας του αεροσκάφους χωρίς να ληφθούν υπόψη περιορισμοί ισορροπημένου μήκους απογείωσης και ταχύτητας προσέγγισης.
2. Μειστοποίηση της εμβέλειας του αεροσκάφους υπό τους παρακάτω περιορισμούς:
 - Περιορισμός 1: Ισορροπημένο μήκος απογείωσης $BFL < 2500m$
 - Περιορισμός 2: Ταχύτητα προσέγγισης $V_{appr} < 76m/s$
3. Βελτιστοποίηση δύο στόχων:
 - Στόχος 1: Μέγιστη εμβέλεια του αεροσκάφους
 - Στόχος 2: Ελάχιστο αρχικό βάρος καυσίμουχωρίς να ληφθούν υπόψη περιορισμοί ισορροπημένου μήκους απογείωσης και ταχύτητας προσέγγισης.

² Η συνήθης ταχύτητα προσέγγισης για πολιτικά αεροσκάφη είναι περίπου $60m/s$. Η περίπτωση ενός πολιτικού υπερηχητικού αεροσκάφους *μεγάλων αποστάσεων* όμως είναι ιδιαίτερη ως προς το γεγονός ότι η πτέρυγά του είναι σχεδιασμένη έτσι ώστε να αποδίδει καλύτερα σε συνθήκες υπερηχητικής πτήσης. Αυτό σημαίνει πως ο συντελεστής άνωσης σε υποηχητικές συνθήκες είναι μικρότερος από ό, τι συνηθίζεται στα πολιτικά αεροσκάφη, που έχει ως αποτέλεσμα σχετικά μεγάλη ταχύτητα προσέγγισης. Ενδεικτικά παρατίθεται πως στην μόνη άλλη περίπτωση επιβατικού υπερηχητικού αεροσκάφους, το Concorde, η ταχύτητα προσέγγισης ήταν $82.7m/s$ [3]

4. Βελτιστοποίηση δύο στόχων:

- Στόχος 1: Μέγιστη εμβέλεια του αεροσκάφους
- Στόχος 2: Ελάχιστο αρχικό βάρος καυσίμου

υπό τους παρακάτω περιορισμούς:

- Περιορισμός 1: Ισορροπημένο μήκος απογείωσης $BFL < 2500m$
- Περιορισμός 2: Ταχύτητα προσέγγισης $V_{appr} < 76m/s$

Φυσικά, σε όλες τις παραπάνω εφαρμογές, τηρούνται τα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού που έχουν τεθεί.

Όπως είναι γνωστό, μια αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης ελαχιστοποιεί (ή μεγιστοποιεί) την τιμή μιας συνάρτησης, της *συνάρτησης στόχου* (*objective function*). Ως εκ τούτου, οι αιτιοκρατικές μέθοδοι βελτιστοποίησης είναι σχεδιασμένες για να αντιμετωπίζουν προβλήματα ενός στόχου. Πάραυτα, είναι εφικτό να αντιμετωπισθεί ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης πολλών στόχων εάν κατασκευασθεί νέα συνάρτηση στόχου, τέτοια ώστε η ελαχιστοποίησή της να έχει ως αποτέλεσμα την ελαχιστοποίηση των τιμών των επιμέρους στόχων. Στην εργασία αυτή χρησιμοποιήθηκε μια τέτοια μέθοδος ενσωματώνοντας στη συνάρτηση στόχου τον αντίστροφο της εμβέλειας και το βάρος του καυσίμου χρησιμοποιώντας συντελεστές στάθμισης οι οποίοι ρυθμίζουν το βαθμό επιρροής του κάθε στόχου στη συνολική αντικειμενική συνάρτηση, ενώ χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος εξωτερικής ποινής για να κατασκευασθεί η τελική, επαυξημένη συνάρτηση κόστους που ενσωματώνει και το μήκος απογείωσης και την ταχύτητα προσέγγισης.

Εφαρμόζοντας τις μεθόδους βελτιστοποίησης ανέκυψαν διάφορα προβλήματα τα οποία έπρεπε να αντιμετωπισθούν έτσι ώστε οι μέθοδοι να συγκλίνουν και μάλιστα με ικανοποιητική ταχύτητα.

Το πρώτο πρόβλημα αφορά τη μέθοδο Απότομης Καθόδου και είναι γνωστό στη διεθνή βιβλιογραφία ως *Scaling* (*αδιαστατοποίηση*) και έχει ως σύμπτωμα την πολύ αργή σύγκλιση. Το πρόβλημα της αδιαστατοποίησης προκύπτει όταν η συνάρτηση προς βελτιστοποίηση αποτελείται από μεταβλητές με μεγάλη διαφορά στην τάξη μεγέθους (είναι προφανές πως σε μια συνάρτηση όπως το μοντέλο ενός αεροσκάφους κάποια μεγέθη θα είναι π.χ. σε χιλιάδες κιλά ενώ άλλα σε μοίρες) σε σχέση με την τάξη μεγέθους των παραγώγων τους, όπως θα εξηγηθεί στο αντίστοιχο κεφάλαιο. Για να αντιμετωπισθεί το πρόβλημα αυτό προγραμματίστηκε μια υπορουτίνα η οποία προσαρμόζει δυναμικά το μήκος βήματος για κάθε μεταβλητή στην κατάλληλη τάξη μεγέθους.

Το δεύτερο πρόβλημα αφορά τη μέθοδο Newton. Θα δούμε αργότερα πως η απλή μέθοδος Newton παρουσιάζει προβλήματα σύγκλισης όταν εφαρμοσθεί σε σύνθετα προβλήματα ενώ η ύπαρξη περιορισμών κάνει ακόμη πιο δύσκολη τη σύγκλισή της. Τα αίτια της αδυναμίας σύγκλισης της μεθόδου εντοπίστηκαν και αντιμετωπίστηκαν κατάλληλα.

Το πρώτο αίτιο είναι πως μετά τον υπολογισμό του ακριβούς Εσσιανού μητρώου (ανεξαρτήτως του αν υπολογίστηκε με τη μέθοδο Μιγαδικών Μεταβλητών ή με τη μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών) εμφανίζονται σε κάποιες επαναλήψεις αρνητικά ορισμένα Εσσιανά μητρώα το οποίο σημαίνει πως σε αυτή την περίπτωση η κατεύθυνση Newton δεν αποτελεί εγγυημένα κατεύθυνση καθόδου. Για να αντιμετωπισθεί το πρόβλημα αυτό, η

βιβλιογραφία προτείνει την *Τροποποιημένη Μέθοδο Newton* όπου το Εσσιανό μητρώο τροποποιείται με τη *μέθοδο παραγοντοποίησης Cholesky* έτσι ώστε να γίνει επαρκώς θετικά ορισμένο, αλλά όχι πολύ διαφορετικό έτσι ώστε η κατεύθυνση Newton να μείνει κατά το δυνατόν ανέπαφη.

Το δεύτερο αίτιο είναι πως η κατεύθυνση Newton αποτελεί κατεύθυνση καθόδου μόνο εάν κινηθούμε σε σχετικά μικρή απόσταση προς την κατεύθυνση αυτή. Επομένως, προγραμματίστηκε μια διαδικασία ανίχνευσης του βέλτιστου μήκους βήματος για την κατεύθυνση Newton.

Συνοψίζοντας, η εργασία αυτή παρουσιάζει μια νέα μέθοδο η οποία προέρχεται από μια περιοχή των μαθηματικών που ονομάζεται *Μιγαδική Ανάλυση*, χρησιμοποιώντας σύγχρονες μεθόδους βελτιστοποίησης για την αντιμετώπιση ενός πολύ ρεαλιστικού και ενδιαφέροντος προβλήματος: τη βελτιστοποίηση ενός μικρού υπερηχητικού επιβατικού αεροσκάφους.

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1^ο : Το Αεροσκάφος – Ανάλυση Επιδόσεων

1.	Εισαγωγή	17
1.1.	Διατύπωση του Προβλήματος	17
1.2.	Οι μεταβλητές σχεδιασμού	17
1.3.	Αλγόριθμος 1: Δεδομένο Βάρος Καυσίμου.....	20
1.4.	Αλγόριθμος 2: Δεδομένη Γωνία Πρόσπτωσης σε Ευθεία Πτήση.....	23
1.5.	Η μοντελοποίηση σε βάθος	25
1.5.1.	Τυπική Ατμόσφαιρα	25
1.5.2.	Υπολογισμός Γεωμετρικών Μεγεθών του Αεροσκάφους.....	26
1.5.2.1.	Άτρακτος.....	26
1.5.2.2.	Πτέρυγα	28
1.5.2.3.	Κάθετο Ουραίο Πτερύγιο	29
1.5.3.	Υπολογισμός ώσης – Διαστασιολόγηση Κινητήρων και Κελυφών	30
1.5.4.	Υπολογισμός Βάρους.....	30
1.5.5.	Υπολογισμός Αεροδυναμικών μεγεθών.....	32
1.5.5.1.	Συντελεστής άνωσης	32
1.5.5.2.	Συντελεστής οπισθέλκουσας.....	33
1.5.6.	Επιδόσεις	36
1.5.6.1.	Εμβέλεια.....	36
1.5.6.2.	Ταχύτητα προσέγγισης.....	37
1.5.6.3.	Μήκος απογείωσης	38

Κεφάλαιο 2^ο : Στοιχεία Μεθόδων Βελτιστοποίησης

2.	Εισαγωγή	40
2.1.	Μαθηματικό Υπόβαθρο και Ορισμοί.....	41
2.2.	Ανίχνευση κατά Γραμμή	43
2.3.	Μέθοδοι Ανίχνευσης Κατά Γραμμή	44
2.3.1.	Η Μέθοδος της Απότομης Καθόδου	44
2.3.2.	Η Μέθοδος της Καθόδου	44
2.3.3.	Η Μέθοδος Newton.....	45
2.4.	Προβλήματα Σύγκλισης.....	47

2.4.1.	Μέθοδος Απότομης Καθόδου – Το Πρόβλημα της Αδιαστατοποίησης και η Σημασία του Μήκους Βήματος	47
2.4.2.	Δυσκολίες στη Σύγκλιση της Απλής Μεθόδου Newton	51
2.4.3.	Τροποποιημένη Μέθοδος Newton	53
2.4.3.1.	Αλγόριθμος Τροποποιημένης Μεθόδου Newton	54
2.4.3.2.	Τροποποιημένη Μέθοδος Παραγοντοποίησης Cholesky	56
2.4.4.	Ανίχνευση Βέλτιστου Μήκους Βήματος στη Μέθοδο Newton.....	61
2.5.	Ο Ρόλος της Παραγώγου	61
2.6.	Μέθοδοι που Χρησιμοποιούνται Ευρέως για τον Υπολογισμό Παραγώγων	62
2.6.1.	Η Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών.....	62
2.6.2.	Η Συζυγής Μέθοδος	63

Κεφάλαιο 3^ο : Η Μέθοδος Μιγαδικών Μεταβλητών

3.	Εισαγωγή	66
3.1.	Απαραίτητες γνώσεις Μιγαδικής Ανάλυσης.....	66
3.1.1.	Σύντομη Ιστορική Επισκόπηση.....	66
3.1.2.	Μιγαδικοί αριθμοί.....	67
3.1.3.	Ιδιότητες	67
3.1.4.	Πεδίο Μιγαδικών Αριθμών	67
3.1.5.	Το Μιγαδικό Επίπεδο	68
3.1.5.1.	Μέτρο Μιγαδικού Αριθμού.....	68
3.1.5.2.	Πολική μορφή μιγαδικού αριθμού	68
3.1.5.3.	Μετασχηματισμός από την πολική μορφή στην καρτεσιανή μορφή και αντίστροφα.....	68
3.1.6.	Ορισμός της Μιγαδικής Συνάρτησης	69
3.1.7.	Απεικόνιση μιγαδικών συναρτήσεων	69
3.2.	Μιγαδική Παραγωγή.....	70
3.2.1.	Διαφορίσιμη Συνάρτηση	70
3.2.2.	Πρώτη και ανώτερη Παράγωγος.....	70
3.3.	Υπολογισμός Παραγώγων με Χρήση Μιγαδικής Συνάρτησης.....	71
3.3.1.	Ανάπτυγμα Taylor Μιγαδικής συνάρτησης.....	71
3.3.1.1.	Συνάρτηση μιας Μεταβλητής.....	71
3.3.1.2.	Συνάρτηση δύο Μεταβλητών.....	72
3.3.2.	Προσέγγιση Πρώτης παραγώγου	72
3.3.3.	Πλεονεκτήματα στον Υπολογισμό της Παραγώγου	73

3.3.4.	Υπολογισμός του Εσσιανού Μητρώου.....	75
3.3.4.1.	Κύριες Παράγωγοι.....	75
3.3.4.2.	Μικτές Παράγωγοι	77
3.4.	Υπολογισμός Παραγώγου Μέσω Μιγαδικής Συνάρτησης σε Προγραμματιστικό Επίπεδο.....	78
3.4.1.	Δήλωση Μιγαδικής Μεταβλητής	78
3.4.2.	Συνήθεις Συναρτήσεις στο Μιγαδικό επίπεδο.....	80
3.4.2.1.	Η Τετραγωνική Ρίζα.....	80
3.4.2.2.	Η Εκθετική Συνάρτηση.....	80
3.4.2.3.	Η Λογαριθμική συνάρτηση.....	81
3.4.2.4.	Τριγωνομετρικές και υπερβολικές συναρτήσεις	81
3.4.3.	Μιγαδικές Μεταβλητές και Συναρτήσεις στη FORTRAN	83
3.4.4.	Αλγόριθμοι Μεθόδων Ανίχνευσης Κατά Γραμμή με τη Μέθοδο Μιγαδικών Μεταβλητών.....	85
3.4.4.1.	Μέθοδος Απότομης Καθόδου	85
3.4.4.2.	Μέθοδος Newton	87
3.5.	Μέθοδος Διχοτόμησης στον Αλγόριθμο του Αεροσκάφους	89
3.5.1.	Μέθοδος διχοτόμησης σε πραγματική συνάρτηση.....	89
3.5.2.	Μέθοδος διχοτόμησης σε μιγαδική συνάρτηση.....	89
3.5.3.	Η μέθοδος του στόχου	90

Κεφάλαιο 4^ο : Εφαρμογές - Σχεδιασμός Αεροσκάφους

4.	Εισαγωγή.....	92
4.1.	Εφαρμογή Στο Πρόβλημα Βελτιστοποίησης του Αεροσκάφους	93
4.2.	Όρια Μεταβλητών Σχεδιασμού.....	95
4.3.	Σημεία Εκκίνησης Αλγόριθμων	96
4.4.	Εφαρμογή 1: Μεγιστοποίηση της Εμβέλειας του Αεροσκάφους Χωρίς Περιορισμούς.....	97
4.4.1.	Αλγόριθμος 1.....	98
4.4.2.	Παρατηρήσεις Πάνω στον Αλγόριθμο 1	102
4.4.3.	Αλγόριθμος 2.....	102
4.4.4.	Παρατηρήσεις Πάνω στον Αλγόριθμο 2	108
4.4.5.	Γενικές Παρατηρήσεις Πάνω στην Εφαρμογή 1	108
4.4.6.	Συγκεντρωτικός Πίνακας Επιδόσεων για την Εφαρμογή Μεγιστοποίησης Εμβέλειας Χωρίς Περιορισμούς.....	109
4.5.	Εφαρμογή 2 – Μεγιστοποίηση Εμβέλειας με Περιορισμούς	110

4.5.1.	Διατύπωση του Προβλήματος με Περιορισμούς – Μέθοδος Εξωτερικής Ποινής	110
4.5.2.	Αλγόριθμος 1	112
4.5.3.	Αλγόριθμος 2	114
4.5.4.	Παρατηρήσεις Πάνω στην Εφαρμογή 2	116
4.5.5.	Συγκεντρωτικός Πίνακας Επιδόσεων για την Εφαρμογή Μεγιστοποίησης Εμβέλειας με Περιορισμούς	117
4.6.	Εφαρμογή 3 – Βελτιστοποίηση Δύο Στόχων Χωρίς Περιορισμούς	117
4.6.1.	Διατύπωση του Προβλήματος Βελτιστοποίησης Δύο Στόχων	117
4.6.1.1.	Διατύπωση Ενιαίας Συνάρτησης Κόστους	118
4.6.2.	Αλγόριθμος 1	120
4.6.3.	Αλγόριθμος 2	122
4.6.4.	Παρατηρήσεις πάνω στην Εφαρμογή 3	124
4.6.5.	Συγκεντρωτικός Πίνακας Επιδόσεων για την Εφαρμογή Βελτιστοποίησης Δύο Στόχων Χωρίς Περιορισμούς: Μεγιστοποίηση Εμβέλειας – Ελαχιστοποίηση Βάρους Καυσίμου	124
4.7.	Εφαρμογή 4 – Βελτιστοποίηση Δύο Στόχων με Περιορισμούς	125
4.7.1.	Μέθοδοι Απότομης Καθόδου – Αλγόριθμος 1	126
4.7.2.	Μέθοδοι Απότομης Καθόδου – Αλγόριθμος 2	128
4.7.3.	Παρατηρήσεις Πάνω στα Αποτελέσματα των Μεθόδων Απότομης Καθόδου...	130
4.7.4.	Μέθοδοι Newton	130
4.7.5.	Παρατηρήσεις Πάνω στη Μέθοδο Newton	136
4.7.6.	Παρατηρήσεις Πάνω στην Εφαρμογή 4	136
4.7.7.	Συγκεντρωτικός Πίνακας Αποτελεσμάτων – Όλες οι Μέθοδοι	137
4.8.	Παρατηρήσεις – Σύγκριση των Μεθόδων	137
4.8.1.	Βελτιστοποίηση με Εξελικτικούς Αλγορίθμους	139
4.8.1.1.	Μέτωπο Pareto	140
4.8.1.2.	Παρατηρήσεις Πάνω στους Εξελικτικούς Αλγορίθμους	140
4.9.	Σχέδιο του Βέλτιστου Αεροσκάφους	141

Κεφάλαιο 5^ο : Απολογισμός

5.	Απολογισμός	144
6.	Βιβλιογραφικές Αναφορές	147

Κεφάλαιο 1^ο

Το Αεροσκάφος – Ανάλυση Επιδόσεων

1. Εισαγωγή

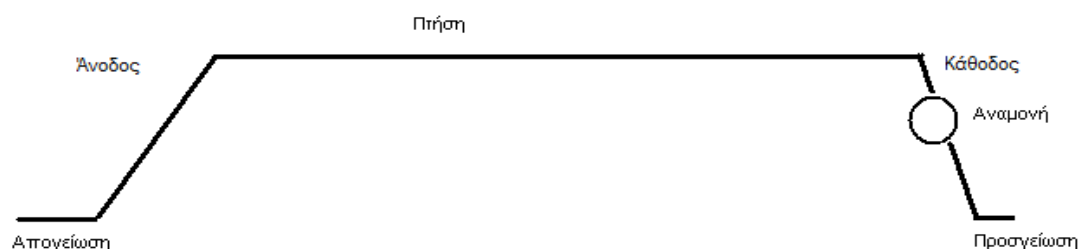
Στόχο του παρόντος αποτελεί η βελτιστοποίηση των επιδόσεων ενός «μικρού υπερηχητικού επιβατικού αεροσκάφους» (*Small Supersonic Business Jet*). Η βελτιστοποίηση θα πραγματοποιηθεί εφαρμόζοντας αιτιοκρατικές (συγκεκριμένα *βασιζόμενες στην κλίση της συνάρτησης κόστους*) μεθόδους, όπου για τον υπολογισμό των παραγώγων χρησιμοποιείται η *Μέθοδος των Μιγαδικών Μεταβλητών*.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιασθούν οι δύο υπολογιστικοί αλγόριθμοι ανάλυσης επιδόσεων του αεροσκάφους και οι εξισώσεις που τους απαρτίζουν.

1.1. Διατύπωση του Προβλήματος

Ο στόχος είναι ο σχεδιασμός ενός μικρού υπερηχητικού αεροσκάφους (*Small Business Jet*) με δυνατότητα μεταφοράς έως 18 επιβατών, το οποίο θα είναι ικανό να εκτελεί υπερατλαντικές πτήσεις. Μικρό αεροσκάφος σημαίνει αεροσκάφος μικρού (σχετικά) μεγέθους αλλά και βάρους. Η επιδίωξη αυτή εισάγει σχεδιαστικές δυσκολίες καθώς ο προφανής τρόπος μείωσης του βάρους είναι η μείωση της ποσότητας των καυσίμων του αεροσκάφους, γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με τον στόχο της μεγάλης εμβέλειας.

Παρακάτω φαίνεται ο φάκελος πτήσης του αεροσκάφους:



Σχ. 1.1 – Αποστολή του αεροσκάφους

Επίσης, επιβάλλονται περιορισμοί σχετικά με το μήκος απογείωσης αλλά και την ταχύτητα προσέγγισης η οποία εμμέσως καθορίζει και το απαιτούμενο μήκος προσγείωσης.

1.2. Οι μεταβλητές σχεδιασμού

Ο αλγόριθμος ανάλυσης επιδόσεων του αεροσκάφους είναι στην ουσία μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών. Τα ορίσματα της συνάρτησης αυτής ονομάζονται **μεταβλητές σχεδιασμού** (*design variables*). Οι μεταβλητές σχεδιασμού μπορούν να είναι οτιδήποτε, από γεωμετρικά ή αεροδυναμικά στοιχεία του αεροσκάφους, μέχρι το βάρος του καυσίμου ή την ταχύτητα πτήσης. Είναι προφανές όμως ότι είναι σημαντική η προσεκτική επιλογή των μεταβλητών έτσι ώστε να πληρούν δύο προϋποθέσεις:

- Να παραμετροποιούν όσο το δυνατόν περισσότερα από κομβικά για τις επιδόσεις μέρη του αεροσκάφους (όπως η πτέρυγα, η άτρακτος, η γωνία πρόσπτωσης)
- Να επηρεάζουν τις επιδόσεις του αεροσκάφους αρκετά ώστε να αξίζει το πρόσθετο υπολογιστικό κόστος της διερεύνησης της μεταβολής της τιμής τους.

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω, το πρόβλημα αναλύθηκε σε επιμέρους στοιχεία για κάθε ένα από τα οποία επιλέγονται ορισμένες μεταβλητές που το παραμετροποιούν:

- Για την ευθεία πτήση (δείκτης cr {cruise}), επιλέγεται η μελέτη της επιρροής του αριθμού Mach (M_{cr} {Mach cruise}) και του υψομέτρου πτήσεως (h_{cr}).
- Για την άτρακτο (δείκτης fus {fuselage}) επιλέγεται η διάμετρος της ατράκτου (D_{fus} {fuselage Diameter}).
- Για την πτέρυγα (δείκτης w {wing}), επιλέγονται η επιφάνειά της σε κάτοψη (S_w), η γωνία οπισθόκλισης στην ακμή προσβολής (Λ_{LE_w} {Leading Edge Sweep Angle}), ο λόγος επιμήκους της πτέρυγας (AR_w {Wing Aspect Ratio}), η εκλέπτυνση (λ_w {Wing Taper Ratio}) και ο λόγος μέγιστου πάχους προς χορδή (t/c {Wing Relative Thickness})
- Για το ουραίο πτερύγιο (δείκτης v {vertical wing}), επιλέγονται η γωνία οπισθόκλισης στην ακμή προσβολής (Λ_{LE_v} {Leading Edge Sweep Angle}), ο λόγος επιμήκους (AR_v {Vertical Wing Aspect Ratio}), η εκλέπτυνση (λ_v {Vertical Wing Taper Ratio}) και ο λόγος μέγιστου πάχους προς χορδή (t/c {Vertical Wing Relative Thickness}).
- Για τον έλεγχο του μήκους απογείωσης και της ταχύτητας προσέγγισης, επιλέγονται ο «απόλυτος» συντελεστής φόρτισης (N_{ult} {Ultimate Load Factor}) και η μέγιστη γωνία πρόσπτωσης α_{max} ({Maximum angle of attack}) αντίστοιχα.

➤ **Αλγόριθμος Επίλυσης του 1^{ου} Προβλήματος (Αλγόριθμος 1)**

Πέραν των προαναφερθέντων, ως επιπλέον μεταβλητή σχεδιασμού για τον πρώτο αλγόριθμο επιλέγεται η ποσότητα του καυσίμου που αντιπροσωπεύεται από το βάρος του (W_{fuel}).

➤ **Αλγόριθμος Επίλυσης του 2^{ου} Προβλήματος (Αλγόριθμος 2)**

Για το δεύτερο αλγόριθμο, αντί του βάρους καυσίμου, επιλέγεται η γωνία πρόσπτωσης κατά την ευθεία πτήση (α).

Συνολικά λοιπόν επιλέγονται 15 μεταβλητές σχεδιασμού, όπου οι 14 είναι κοινές και στους δύο αλγόριθμους. Κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης θα αναζητηθεί ο συνδυασμός των μεταβλητών που έχει ως αποτέλεσμα τη βέλτιστη επίδοση του αεροσκάφους, όπως αυτή διατυπώνεται στη συνάρτηση στόχου.

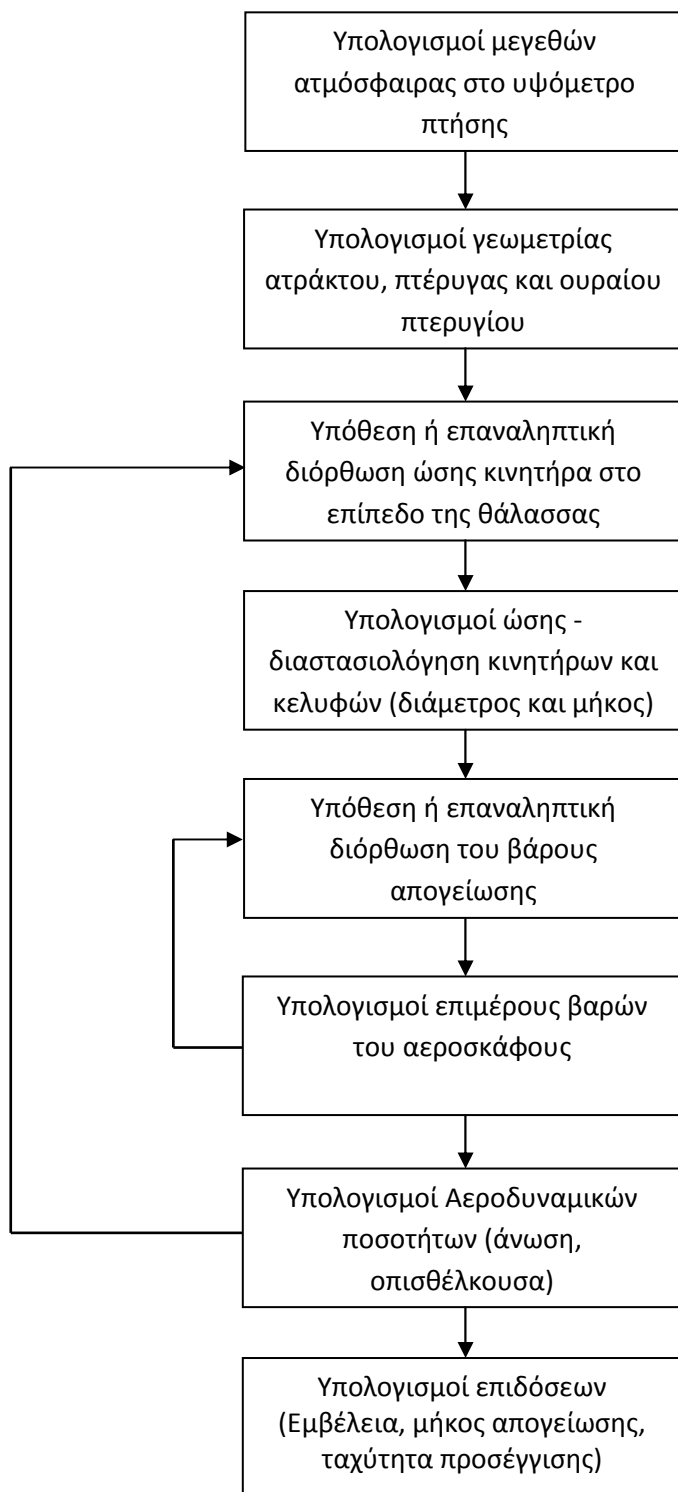
Φυσικά, κάθε μια από τις παραπάνω μεταβλητές έχει ένα ορισμένο εύρος μεταβολής, το οποίο είναι γνωστό από τη διεθνή βιβλιογραφία και μπορεί να οφείλεται σε διάφορα αίτια όπως κατασκευαστικοί περιορισμοί, περιορισμοί αντοχής υλικών, διεθνείς κανονισμοί εναέριας κυκλοφορίας κ.α. Τα όρια μεταβολής των ανωτέρω μεταβλητών παραθέτονται παρακάτω:

<u>Μεταβλητή</u>	<u>Κάτω όριο</u>	<u>Άνω όριο</u>	<u>Μονάδες</u>
M_{cr}	1.3	2	-
h_{cr}	13000	18000	m
D_{fus}	2	2.3	m
S_w	120	220	m ²
Λ_{LE_w}	40	70	(^o)
AR_w	1.0	3.5	-
λ_w	0.05	0.5	-
$(t/c)_w$	0.04	0.06	-
Λ_{LE_v}	45	60	(^o)
AR_v	0.8	2.5	-
λ_v	0.05	0.5	-
$(t/c)_v$	0.06	0.08	-
N_{ult}	0.75	0.9	-
α_{max}	12	16	(^o)
W_{fuel}	20000	30000	kg
α	0.5	5.0	(^o)

Πίνακας 1.1 – Όρια μεταβλητών σχεδιασμού που αφορούν και τους δύο αλγόριθμους

1.3. Αλγόριθμος 1: Δεδομένο Βάρος Καυσίμου

Στο πρώτο πρόβλημα σχεδιασμού, το βάρος του καυσίμου θεωρείται δεδομένο. Η λογική του αλγόριθμου είναι πως γίνεται υπόθεση της ώσης, υπολογίζονται τα βάρη και τα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά κι έπειτα γίνεται διόρθωση της ώσης. Ο λεπτομερής αλγόριθμος ανάλυσης επιδόσεων του αεροσκάφους για το πρώτο πρόβλημα σχεδιασμού, φαίνεται παρακάτω:



Σχ. 1.2 – Αλγόριθμος επίλυσης πρώτου προβλήματος σχεδιασμού

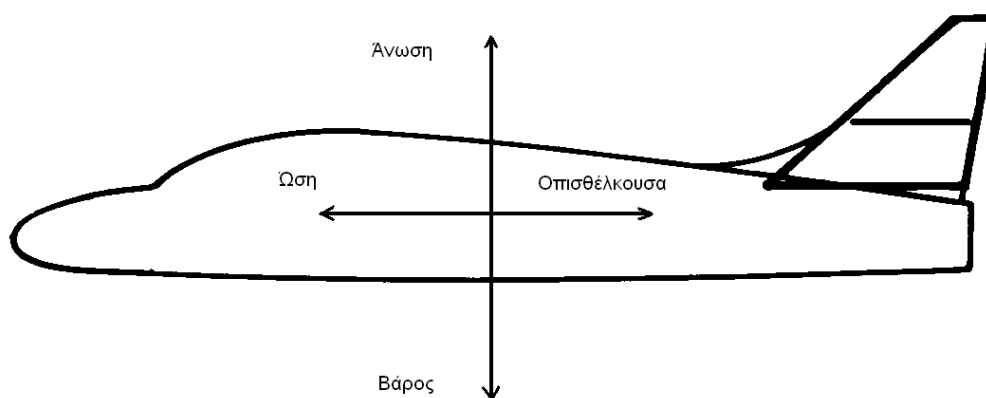
Όπως εικονίζεται και στο παραπάνω σχήμα, αρχικά υπολογίζονται τα χαρακτηριστικά της τυπικής ατμόσφαιρας στο συγκεκριμένο υψόμετρο πτήσεως.

Έπειτα υπολογίζονται τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της ατράκτου (μήκος, διάμετρος άρα και επιφάνεια), της πτέρυγας (εκτεθειμένη επιφάνεια, εύρος {span} και διάφορες γωνίες) και του ουραίου πτερυγίου.

Στη συνέχεια υπολογίζονται η ώση και το συνολικό βάρος του αεροσκάφους μέσω επαναληπτικής διαδικασίας, έως ότου ικανοποιηθούν οι συνθήκες:

- Άνωση = Βάρος
- Ώση = Οπισθέλκουσα

κατά την ευθεία πτήση (cruise).



Σχ. 1.3 – Δυναμική του αεροσκάφους σε ευθεία πτήση

Η ώση αρχικοποιείται στο επίπεδο της θάλασσας και έχοντας βρει την ώση του κινητήρα υπολογίζεται η ώση στο ζητούμενο υψόμετρο κατά την ευθεία πτήση μέσω εμπειρικών σχέσεων.

Αμέσως μετά την υπόθεση της ώσης γίνεται μια δεύτερη υπόθεση, αυτή τη φορά για το συνολικό βάρος απογείωσης (Take-off Weight) του αεροσκάφους. Το συνολικό βάρος είναι το άθροισμα των επιμέρους δομικών στοιχείων του αεροσκάφους (άτρακτος, πτέρυγα, τροχί, καύσιμα, διάφορα λειτουργικά συστήματα κλπ.). Υπενθυμίζεται ότι το βάρος του καυσίμου είναι δεδομένο για κάθε υποψήφια λύση και μέσα στα όρια που ο μηχανικός έχει θέσει.

Αφού εκτιμηθεί μέσω επαναληπτικής διαδικασίας το συνολικό βάρος και εφόσον η γεωμετρία του αεροσκάφους είναι υπολογισμένη, είναι πλέον δυνατό να εκτελεστούν οι αεροδυναμικοί υπολογισμοί για την εύρεση της άνωσης και της οπισθέλκουσας.

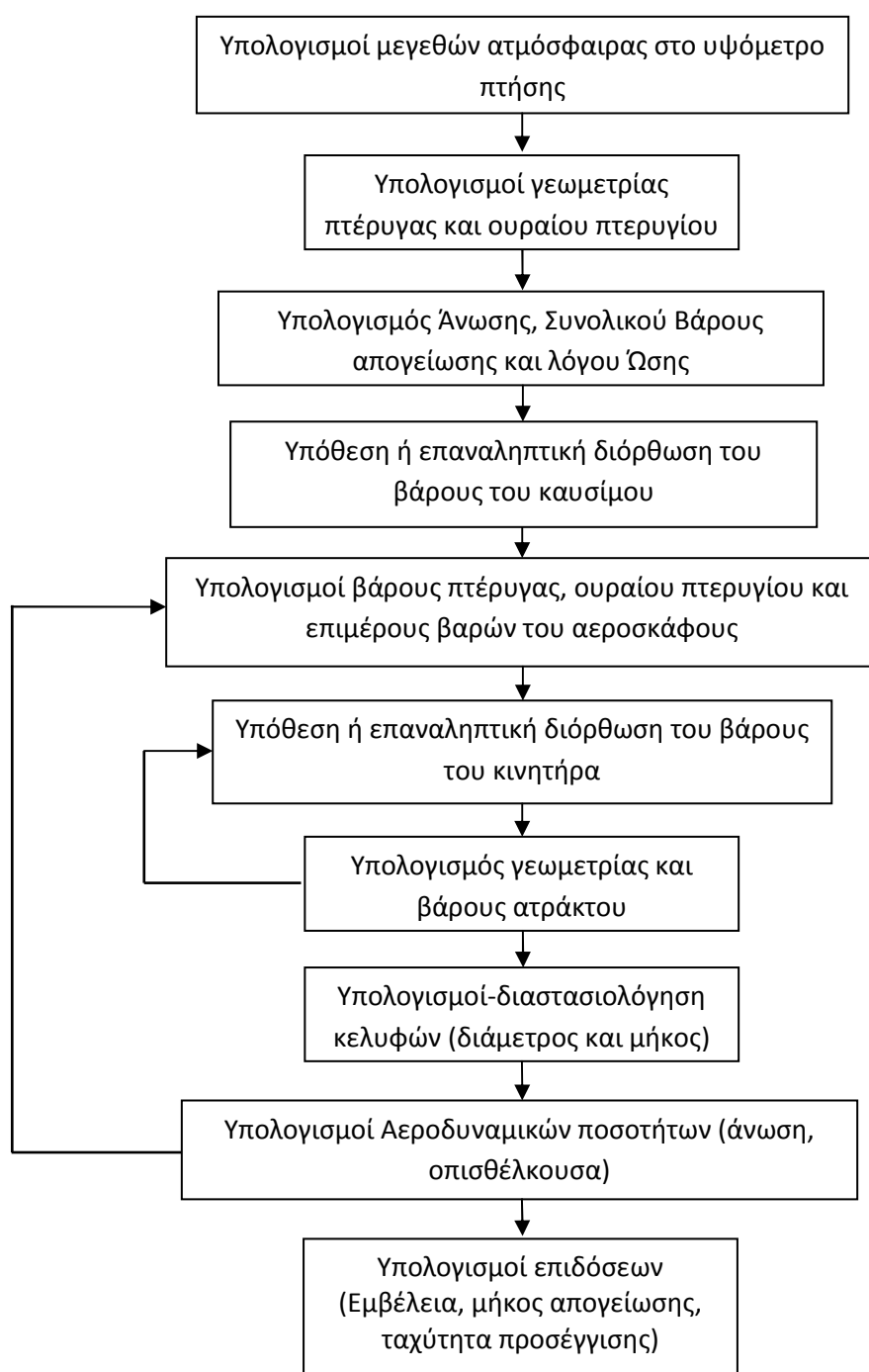
Αρχικά, υπολογίζονται οι συντελεστές κυματικής τριβής (wave drag) και συνεκτικής τριβής (viscous drag). Έπειτα υπολογίζεται ο συνολικός συντελεστής αντίστασης (c_d). Επίσης, εφόσον το βάρος είναι γνωστό, από τη συνθήκη **Βάρος = Άνωση** υπολογίζεται ο συντελεστής άνωσης (c_l) καθώς και η γωνία πρόσπτωσης.

Στο τέλος της επαναληπτικής διαδικασίας είναι γνωστή η ώση, η γεωμετρία, το βάρος καθώς και τα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά του αεροσκάφους, οπότε είναι πλέον εφικτό να υπολογισθούν οι επιδόσεις του, δηλαδή:

- Εμβέλεια
- Μήκος Απογείωσης
- Ταχύτητα Προσέγγισης

1.4. Αλγόριθμος 2: Δεδομένη Γωνία Πρόσπτωσης σε Ευθεία Πτήση

Στο δεύτερο πρόβλημα σχεδιασμού, θεωρείται δεδομένη η γωνία πρόσπτωσης σε ευθεία πτήση. Έχοντας ως δεδομένη τη γωνία πρόσπτωσης, σε συνδυασμό με τα υπόλοιπα γεωμετρικά μεγέθη της πτέρυγας που αποτελούν μεταβλητές σχεδιασμού, μπορεί να υπολογισθεί η άνωση, και μέσω αυτής το βάρος απογείωσης. Ο αλγόριθμος από το σημείο αυτό και μετά στρέφεται γύρω από τον υπολογισμό των άγνωστων βαρών, δηλαδή του βάρους καυσίμου και του βάρους του κινητήρα. Ο λεπτομερής αλγόριθμος ανάλυσης επιδόσεων του αεροσκάφους για το δεύτερο πρόβλημα σχεδιασμού, φαίνεται παρακάτω:



Σχ. 1.4 – Αλγόριθμος επίλυσης δεύτερου προβλήματος σχεδιασμού

Κατ' αρχάς, υπενθυμίζεται ότι στον αλγόριθμο αυτό η μεταβλητή W_{fuel} έχει αντικατασταθεί από τη μεταβλητή α (γωνία πρόσπτωσης κατά την ευθεία πτήση), που πρακτικά βοηθά στον υπολογισμό της άνωσης.

Όπως και πριν, αρχικά υπολογίζονται τα χαρακτηριστικά της τυπικής ατμόσφαιρας στο συγκεκριμένο υψόμετρο πτήσεως.

Έπειτα, υπολογίζεται η γεωμετρία της πτέρυγας και του ουραίου πτερυγίου όπως και πριν.

Υπάρχουν πλέον τα δεδομένα για να υπολογισθεί ο λόγος ώσης $\frac{F}{F_0}$ όπου F_0 η ώση στο επίπεδο της θάλασσας και F η ώση στο υψόμετρο πτήσης.

Επίσης, εφόσον η γωνία πρόσπτωσης είναι γνωστή σημαίνει πως η ζητούμενη άνωση είναι δεδομένη, ως εκ τούτου υπολογίζεται εύκολα η άνωση και εξ αυτής το συνολικό βάρος απογείωσης (TOW).

Στο σημείο αυτό γίνεται υπόθεση του βάρους του καυσίμου και ξεκινά επαναληπτική διαδικασία για τον υπολογισμό του.

Το επόμενο βήμα είναι να υπολογισθούν τα βάρη της πτέρυγας και του ουραίου πτερυγίου. Το βάρος της ατράκτου δεν είναι γνωστό ακόμη καθώς, όπως αναφέρεται σε επόμενη παράγραφο, στο βάρος της ατράκτου συνυπολογίζεται και το βάρος του καυσίμου.

Το βάρος της ατράκτου περιλαμβάνει, όπως προελέχθη, το βάρος του καυσίμου αλλά είναι και συνάρτηση του βάρους του κινητήρα, το οποίο είναι ακόμη άγνωστο. Στο σημείο αυτό λοιπόν ξεκινά ο δεύτερος επαναληπτικός βρόχος στον οποίο γίνεται υπόθεση και διόρθωση του βάρους του κινητήρα.

Αφού γίνει η υπόθεση, υπολογίζεται η γεωμετρία και το βάρος της ατράκτου. Όμως, όπως ανεφέρθη και στον προηγούμενο αλγόριθμο, το συνολικό βάρος απογείωσης του αεροσκάφους είναι το άθροισμα των βαρών των επιμέρους δομικών στοιχείων του (πτέρυγα, άτρακτος κλπ.) και του βάρους των καυσίμων. Έτσι, υπολογίζεται εκ νέου το βάρος του κινητήρα ως η διαφορά του βάρους απογείωσης από τα υπόλοιπα βάρη μέχρι σύγκλισης της διαδικασίας.

Με το βάρος του κινητήρα γνωστό δύνανται πλέον να υπολογισθούν η ώση, οι διαστάσεις και το κέλυφος του κινητήρα.

Ακολουθούν οι αεροδυναμικοί υπολογισμοί κατά τους οποίους βρίσκεται ο συνολικός συντελεστής αντίστασης του αεροσκάφους. Έτσι, υπολογίζεται εκ νέου η ώση, από την καινούργια ώση το νέο βάρος του κινητήρα και το νέο βάρος των καυσίμων είναι η διαφορά του βάρους απογείωσης από τα υπόλοιπα βάρη.

Μετά τη σύγκλιση του βάρους των καυσίμων είναι γνωστά όλα τα απαραίτητα δεδομένα για τον υπολογισμό των επιδόσεων του αεροσκάφους.

1.5. Η μοντελοποίηση σε βάθος

Οι δύο παραπάνω αλγόριθμοι προγραμματίστηκαν σε γλώσσα FORTRAN 90 και οι επιμέρους υπολογισμοί γίνονται καλώντας υπορουτίνες. Οι υπορουτίνες που χρησιμοποιούνται στους δύο αλγόριθμους είναι ακριβώς οι ίδιες, οπότε οι σχέσεις που παρουσιάζονται στη συνέχεια αφορούν τους δύο αλγόριθμους εξίσου.

1.5.1. Τυπική Ατμόσφαιρα

Η μοντελοποίηση της ατμόσφαιρας ξεκινά με την υπόθεση ότι ο αέρας συμπεριφέρεται ως τέλειο αέριο, δηλαδή ισχύει η καταστατική εξίσωση των τέλειων αερίων:

$$p = \rho RT \quad (1.1)$$

όπου p η πίεση, ρ η πυκνότητα, T η θερμοκρασία και R η σταθερά των τέλειων αερίων $R = 287.04 \frac{J}{kg \cdot K}$.

Η γήινη ατμόσφαιρα χωρίζεται σε πέντε ζώνες ανάλογα με το υψόμετρό τους: τροπόσφαιρα, στρατόσφαιρα, μεσόσφαιρα, θερμόσφαιρα και εξώσφαιρα, όπως φαίνεται και στο σχ. 2.5. Τα υπερηχητικά αεροσκάφη ταξιδεύουν σε μεγάλα υψόμετρα για δύο λόγους:

- Διεθνείς κανονισμοί για τη στάθμη του εκπεμπόμενου θορύβου
- Εκτελούν πτήσεις μεγάλων αποστάσεων (οικονομία καυσίμου)

Η γήινη τροπόσφαιρα εκτείνεται έως υψόμετρο 11000 m, όπου η θερμοκρασία είναι γραμμική συνάρτηση του ύψους:

$$T = T_0 - Bz \quad (1.2)$$

όπου $T_0 = 288.15 K$ η απόλυτη θερμοκρασία στο επίπεδο της θάλασσας και $B = -\frac{dT}{dz} = 0.0065 \frac{K}{m}$ είναι ο σταθερός ρυθμός της μεταβολής της θερμοκρασίας με το υψόμετρο. Δεδομένου ότι η μεταβολή της πίεσης με το υψόμετρο δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (1.3)$$

προκύπτει ότι

$$p = p_0 \left(1 - \frac{Bz}{T_0}\right)^{\frac{g}{RB}} = p_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g}{RB}} \quad (1.4)$$

όπου $p_0 = 101325 Pa$ είναι η πίεση στο επίπεδο της θάλασσας και $g = 9.80665 m/s^2$ η επιτάχυνση της βαρύτητας. Ο λόγος της πυκνότητας προς την πυκνότητα στο επίπεδο της θάλασσας είναι:



Σχ. 1.5 – Η γήινη Ατμόσφαιρα

$$\sigma = \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\left(\frac{g}{RB}-1\right)} \quad (1.5)$$

Την τροπόσφαιρα ακολουθεί η στρατόσφαιρα σε υψόμετρο από 11000 m έως 25000 m. Στη στρατόσφαιρα η θερμοκρασία είναι σταθερή και ίση με $T = 216.5 \text{ K}$. Η πίεση εκεί προκύπτει ως:

$$p = p_{11} e^{-\left(\frac{g}{RT}\right)(z-z_{11})} \quad (1.6)$$

όπου p_{11} η πίεση σε υψόμετρο $z_{11} = 11000 \text{ m}$, όπως υπολογίζεται από τη σχέση (2.4).

1.5.2. Υπολογισμός Γεωμετρικών Μεγεθών του Αεροσκάφους

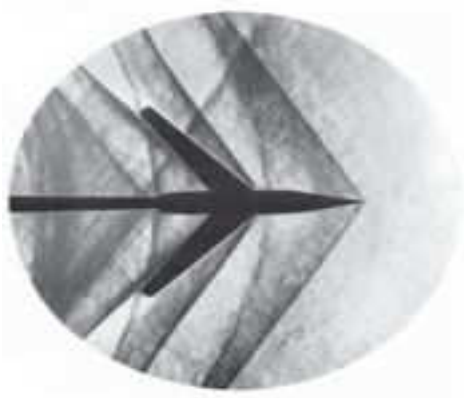
Στα γεωμετρικά μεγέθη του αεροσκάφους συγκαταλέγονται η άτρακτος, η πτέρυγα και το κάθετο ουραίο πτερύγιο.

1.5.2.1. Άτρακτος

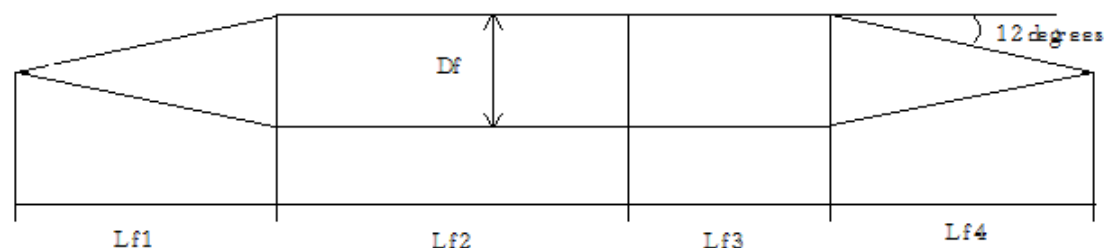
Η διαστασιολόγηση της ατράκτου γίνεται λαμβάνοντας υπόψη τα χαρακτηριστικά άλλων SBJ (Small Business Jet) που παρουσιάζονται στη βιβλιογραφία.

Η άτρακτος χωρίζεται σε τέσσερα τμήματα. Το κυρίως τμήμα (αποτελούμενο από δύο επιμέρους τμήματα) αποφασίζεται πως θα έχει κυκλική διατομή, η τιμή της οποίας αποτελεί και μεταβλητή σχεδιασμού. Το εμπρόσθιο και το οπίσθιο τμήμα αποφασίζεται πως θα έχουν κυκλική μορφή.

Ως γνωστόν, σε συνθήκες υπερηχητικής πτήσης επιδιώκεται ο σχηματισμός προσκολλημένου κύματος κρούσης στο ρύγχος του αεροσκάφους. Ως εκ τούτου, το εμπρόσθιο τμήμα υπολογίζεται έτσι ώστε το αεροσκάφος να βρίσκεται πλήρως μέσα στον κώνο Mach, με τρόπο όμοιο με την εικόνα του διπλανού σχήματος.



Σχ. 1.6 – Προσκολλημένο κύμα κρούσης



Σχ. 1.7 – Τα μέρη της ατράκτου

Το μήκος της ατράκτου λοιπόν, υπολογίζεται τμηματικά, μέσω απλών γεωμετρικών σχέσεων πλην του μήκους (ύψους) του πρόσθιου κωνικού τμήματος το οποίο συναρτάται του αριθμού *Mach* και υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$L_{f_1} = \frac{D_f}{2} / \tan \left[0.3 \arcsin \left(\frac{1}{M_{cr}} \right) \right] \quad (1.7)$$

Το κυλινδρικό τμήμα της ατράκτου χωρίζεται σε δύο τμήματα. Το πρώτο τμήμα αποτελεί το χώρο για τους επιβάτες (καμπίνα, θάλαμος επιβατών) ενώ το δεύτερο τμήμα χρησιμοποιείται για την αποθήκευση του καυσίμου (η μέρος αυτού εάν η μοντελοποίηση προβλέπει την αποθήκευση καυσίμων και στην πτέρυγα όπως συχνά συμβαίνει).

Το δεύτερο τμήμα της ατράκτου αποτελεί, όπως είπαμε, το χώρο επιβατών. Ως εκ τούτου, οι διαστάσεις του υπακούουν στους διεθνείς κανονισμούς και προδιαγραφές άνεσης υπηρεσιών πρώτης θέσης ανά επιβάτη.

Για 18 επιβάτες προβλέπονται δύο σειρές εννέα καθισμάτων πρώτης θέσης (με βήμα 1m) ενώ με βάση τους κανονισμούς για το συγκεκριμένο αριθμό επιβατών, επιβάλλεται η ύπαρξη μιας εξόδου κινδύνου. Στο συνολικό χώρο λαμβάνεται υπόψη η ύπαρξη κουζίνας, χώρου αποθήκευσης αποσκευών και WC.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το ελάχιστο μήκος του δεύτερου μέρους της ατράκτου εκτιμάται πως είναι $L_{f_2} = 15m$.

Το τρίτο τμήμα της ατράκτου αποτελεί το χώρο αποθήκευσης καυσίμων. Εάν υποθεθεί πως το κυλινδρικό αυτό τμήμα περιλαμβάνει όλο το καύσιμο, τότε ο όγκος του πρέπει (κατά προσέγγιση) να ισούται με αυτόν του καυσίμου, οπότε το μήκος δίνεται από τη σχέση:

$$L_{f_3} = \frac{4V_{fuel}}{\pi D_f^2} \quad (1.8)$$

όπου ο όγκος είναι $V_{fuel} = \frac{W_{fuel}}{\rho_{fuel}}$. Το καύσιμο εξαρτάται από τον τύπο του κινητήρα ενώ συνήθεις τιμές της πυκνότητας ρ_{fuel} κυμαίνονται μεταξύ 770 με 820 kg/m^3 . (στην εργασία αυτή θεωρούμε $\rho_{fuel} = 790kg/m^3$).

Για το οπίσθιο κωνικό τμήμα, επιλύεται η εξίσωση του κώνου ως προς το ύψος:

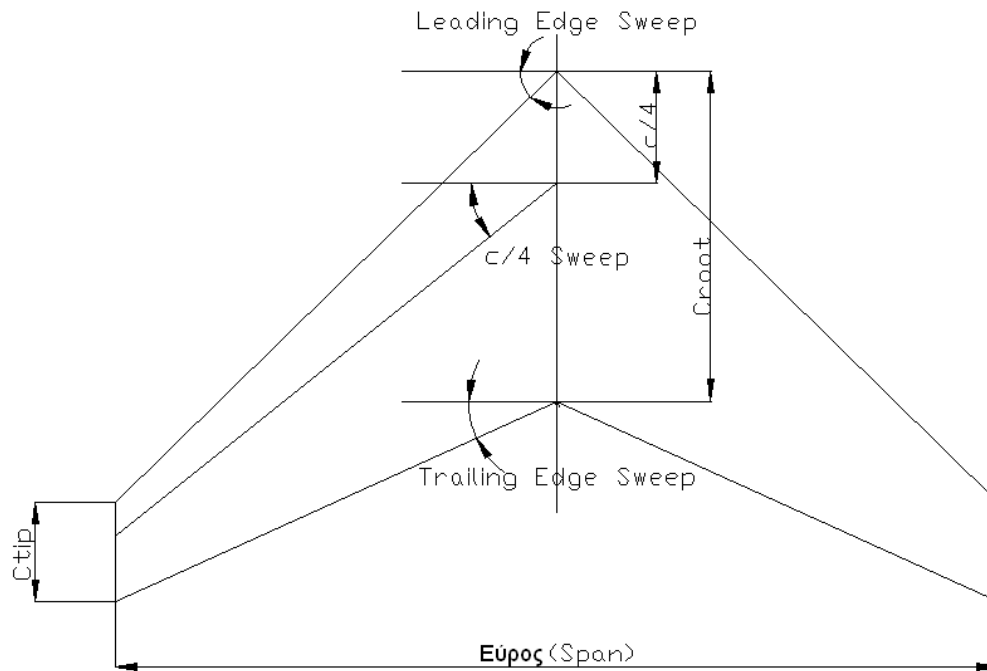
$$L_{f_4} = \frac{D_f}{2} / \tan (12^\circ) \quad (1.9)$$

Τέλος, στους υπολογισμούς θα απαιτηθεί και η συνολική επιφάνεια της ατράκτου η οποία υπολογίζεται από τη σχέση:

$$S_f = \pi D_f \left[L_{f_2} + L_{f_3} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{D_f^2}{4} + L_{f_1}^2} + \sqrt{\frac{D_f^2}{4} + L_{f_4}^2} \right) \right] \quad (1.10)$$

1.5.2.2. Πτέρυγα

Το αεροσκάφος αναμένεται να εκτελεί υπερηχητική πτήση, υπάρχει όμως και η απαίτηση υψηλής άνωσης σε υποηχητικές συνθήκες (απογείωση). Για να εξυπηρετήσει τους σκοπούς αυτούς, επιλέγεται τραπεζοειδής τύπος πτέρυγας. Οι μεταβλητές σχεδιασμού που αφορούν την πτέρυγα (επιφάνεια, γωνία οπισθόκλισης στην ακμή προσβολής, λόγος επιμήκους, εκλέπτυνση και λόγος μέγιστου πάχους προς χορδή) καθορίζουν και τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά, μέσω γεωμετρικών σχέσεων.



Σχ. 1.8 – Γεωμετρία πτέρυγας

Ακολουθούν οι σχέσεις υπολογισμού διαφόρων μεγεθών της πτέρυγας συναρτήσει των μεταβλητών σχεδιασμού.

Η χορδή στη ρίζα (*root chord*) δίνεται από τη σχέση:

$$c_{rw} = \frac{2S_w}{b_w(1 + \lambda_w)} \quad (1.11)$$

όπου $\lambda_w = \frac{c_{tipw}}{c_{rw}}$.

για το εκπέτασμα:

$$b_w = \sqrt{\frac{AR_w}{S_w}} \quad (1.12)$$

Η γωνία οπισθόκλισης στο 25% του μήκους της χορδής, μέγεθος που χρησιμοποιείται κατά τον υπολογισμό του βάρους της πτέρυγας, ορίζεται από τη σχέση:

$$\tan\Lambda_{0.25_w} = \tan\Lambda_{LE_w} - 0.25 \frac{4}{AR_w} \frac{1 - \lambda_w}{1 + \lambda_w} \quad (1.13)$$

Όπως θα δούμε παρακάτω, για να γίνει ο υπολογισμός των αεροδυναμικών τριβών οι εμπειρικές σχέσεις απαιτούν τη «βρεχόμενη επιφάνεια» (*wet surface*) της πτέρυγας, δηλαδή την επιφάνεια που έρχεται σε επαφή με τον αέρα.

$$S_{wet_w} = 2[1 + 0.2 \left(\frac{t}{c}\right)_w] S_{exp_w} \quad (1.14)$$

Η εκτεθειμένη επιφάνεια $S_{exposed}$ είναι το εμβαδόν κάτοψης του τμήματος της πτέρυγας που εξέρχει από την άτρακτο και ισούται με:

$$S_{exp_w} = S_w - \frac{D_f}{2} (2c_{r_w} - \frac{D_f}{2} \tan\Lambda_{LE_w} + \frac{D_f}{2} \tan\Lambda_{TE_w}) \quad (1.15)$$

όπου

$$\tan\Lambda_{TE} = \tan\Lambda_{LE_w} - cr_w^2 \frac{1 - \lambda_w^2}{S_w} \quad (1.16)$$

1.5.2.3. Κάθετο Ουραίο Πτερύγιο

Οι υπολογισμοί για το κάθετο ουραίο πτερύγιο είναι όμοιοι με τους υπολογισμούς της πτέρυγας. Οι μεταβλητές σχεδιασμού εδώ είναι η γωνία οπισθόκλισης στην ακμή προσβολής, η εκλέπτυνσή του, ο λόγος επιμήκους του και ο λόγος του μέγιστου πάχους προς τη χορδή. Τα παραπάνω μεγέθη καθορίζουν απολύτως το σχήμα της κάτοψης της πτέρυγας όπως βλέπουμε στη συνέχεια.

Κατ' αρχάς, θεωρείται πως η επιφάνεια της πλάγιας όψης του ισούται με 10% της κάτοψης της επιφάνειας της πτέρυγας, δηλαδή:

$$S_v = 0.1S_w \quad (1.17)$$

Όμοια με την πτέρυγα, για τη χορδή στη ρίζα του κάθετου πτερυγίου ισχύει:

$$c_{rv} = \frac{2S_v}{b_v(1. d0 + \lambda_v)} \quad (1.18)$$

για το ύψος:

$$b_v = \sqrt{\frac{AR_v}{S_v}} \quad (1.19)$$

και για τη βρεχόμενη επιφάνεια:

$$S_{wet_v} = 2[1 + 0.2 \left(\frac{t}{c}\right)_v] S_{exp_v} \quad (1.20)$$

1.5.3. Υπολογισμός ώσης - Διαστασιολόγηση Κινητήρων και Κελυφών

Ο υπολογισμός της ώσης γίνεται ανάγοντας την ώση στο επίπεδο της θάλασσας. Έπειτα, υποτίθεται μια αρχική τιμή της ώσης (ή στο δεύτερο αλγόριθμο υπολογίζεται συναρτήσει του βάρους του κινητήρα).

Τα σύγχρονα αεροσκάφη χρησιμοποιούν συνήθως κινητήρες τύπου *turbofan*. Για κινητήρα διπλού ρεύματος μικρού λόγου παράκαμψης, η ώση σε ευθεία πτήση υπολογίζεται από την παρακάτω εμπειρική σχέση:

$$\frac{F}{F_0} = 0.6 \frac{P_{cr}}{P_0} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{cr}^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (1.21)$$

Η ειδική κατανάλωση καυσίμου και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κινητήρα υπολογίζονται επίσης από εμπειρικές σχέσεις:

$$SFC = 2.83 \cdot 10^{-5} (0.9 + 0.3M_{cr}) \sqrt{\frac{T_{cr}}{T_0}} \left[\frac{kg}{N \cdot sec} \right] \quad (1.22)$$

$$D_{eng} = c_1 T_0^{k_1} \quad (1.23)$$

$$L_{eng} = c_2 T_0^{k_2} \quad (1.24)$$

όπου c_1, c_2, k_1, k_2 σταθερές.

Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κελύφους του κινητήρα και του αγωγού εισόδου υπολογίζονται συναρτήσεις των γεωμετρικών μεγεθών του κινητήρα:

$$L_{in} = 4D_{eng}, \quad L_{nac} = L_{in} + L_{eng}, \quad D_{nac} = 1.1D_{eng} \quad (1.25)$$

1.5.4. Υπολογισμός Βάρους

Αρχικά πρέπει να σημειωθεί πως στο υπόλοιπο της εργασίας ο όρος βάρος ταυτίζεται με τη μάζα, καθώς αυτή είναι η ορολογία που χρησιμοποιείται στη διεθνή βιβλιογραφία.

Το συνολικό βάρος απογείωσης $\{Takeoff Weight (TOW)\}$ του αεροσκάφους είναι το άθροισμα του βάρους του άδειου από καύσιμα αεροσκάφους $\{Zero fuel Weight (ZFW)\}$ και το βάρος του καυσίμου (W_{fuel}):

$$TOW = ZFW + W_{fuel} \quad (1.26)$$

➤ Βάρος Άδειου από Καύσιμο Αεροσκάφος

Το βάρος του άδειου από καύσιμα αεροσκάφους, είναι το άθροισμα πολλών επιμέρους βαρών. Αυτά είναι τα βάρη των επιμέρους δομικών στοιχείων του αεροσκάφους (πτέρυγα άτρακτος, ουραίο πτερύγιο, τροχοί, κινητήρες) και το βάρος των μη-δομικών στοιχείων του αεροσκάφους $W_{non-structural}$ (όπως είναι οι επιβάτες και τα μέλη του πληρώματος), το οποίο εκτιμάται ως $W_{ns} = 2500 \text{ kg}$. Τέλος, προστίθεται ένα βάρος «all else empty» (W_{ae}),

σκοπός του οποίου είναι να συμπεριλάβει όλα τα υπόλοιπα επιμέρους βάρη. Αυτό εκτιμάται[2] ως το 17% του TOW.

Συνοψίζοντας, το βάρος του άδειου από καύσιμα αεροσκάφους είναι:

$$ZFW = W_{wing} + W_{tail} + W_{fus} + W_{gear} + N_{eng} \cdot W_{prop} + W_{ns} + W_{ae} \quad (1.27)$$

όπου $N_{eng} \cdot W_{prop}$ το συνολικό βάρος του συστήματος ώσης, που περιλαμβάνει τους κινητήρες και τα κελύφη. W_{gear} είναι το βάρος του συστήματος προσγείωσης το οποίο εκτιμάται³ ως:

$$W_{gear} = 0.04 TOW \quad (1.28)$$

Από τα παραπάνω είναι προφανές πως στον πρώτο αλγόριθμο όπου γίνεται επαναληπτικός προσδιορισμός της τιμής του TOW, χρησιμοποιείται η σχέση:

$$TOW = W_{fuel} + W_{wing} + W_{tail} + W_{fus} + W_{gear} + N_{eng} \cdot W_{prop} + W_{ns} + W_{ae} \quad (1.29)$$

Ενώ στον δεύτερο αλγόριθμο όπου γίνεται επαναληπτικός προσδιορισμός των W_{prop} και W_{fuel} , χρησιμοποιούνται οι σχέσεις:

$$W_{prop} = \frac{TOW - W_{fuel} + W_{wing} + W_{tail} + W_{fus} + W_{gear} + W_{ns} + W_{ae}}{N_{eng}} \quad (1.30)$$

$$W_{fuel} = TOW - W_{wing} + W_{tail} + W_{fus} + W_{gear} + N_{eng} \cdot W_{prop} + W_{ns} + W_{ae} \quad (1.31)$$

Τα βάρη του αεροδυναμικού πλαισίου του αεροσκάφους υπολογίζονται χρησιμοποιώντας σχέσεις που βρίσκονται στη βιβλιογραφία[4].

Το βάρος της πτέρυγας δίνεται από τη σχέση:

$$W_w = 20.6S_w + 5.387 \cdot 10^{-6} \frac{N_{ult} b^3 \sqrt{TOW \cdot ZFW} (1 + 2\lambda)}{\left(\frac{t}{c}\right)_w \cos^2 \Lambda_{0.25_w} S_{exp_w} (1 + 2\lambda)} \quad (1.32)$$

με τον «απόλυτο» συντελεστή φόρτισης³ $N_{ult} = 4.5$.

Το βάρος του ουραίου πτερυγίου δίνεται από τη σχέση:

$$W_v = 12.8S_v + 24 \cdot 10^{-5} \frac{N_{ult} b^3 \left(8 + 0.09 \frac{TOW}{S_{exp_w}}\right)}{\left(\frac{t}{c}\right)_v \cos^2 \Lambda_{0.25_v}} \quad (1.33)$$

ενώ το βάρος της ατράκτου:

³ Απόλυτος συντελεστής φόρτισης είναι ο οριακός συντελεστής φόρτισης (αναλογία άνωσης προς το βάρος) πολλαπλασιασμένος με 1.5 για μεγαλύτερη ασφάλεια των δομικών στοιχείων. Ειδικότερα, τα δομικά στοιχεία αρχίζουν να υφίστανται φθορές στον οριακό συντελεστή φόρτισης ενώ αποτυγχάνουν πλήρως στον απόλυτο συντελεστή φόρτισης.

$$W_f = (5.1314 + 0.498I_f)S_f \quad (1.34)$$

όπου

$$I_f = \begin{cases} I_p & \text{αν } I_p > I_b \\ \frac{I_p^2 + I_b^2}{2I_b} & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (1.35)$$

Οι δείκτες πίεσης (I_p - *pressure index*) και κάμψης (I_b - *bending index*) υπολογίζονται από τις σχέσεις[4]:

$$I_p = 10^{-4}(p_{cr} + p_{cab})D_f \quad (1.36)$$

$$I_b = 1.3 \cdot 10^{-4} \frac{W_{I_b} N_{ult} L_f}{D_f^2} D_f \quad (1.37)$$

$$W_{I_b} = ZFW - W_w - N_{we} W_{eng} \quad (1.38)$$

όπου p_{cab} η πίεση στην καμπίνα των επιβατών θεωρείται⁴ ίση με αυτή σε υψόμετρο 2000 m και N_{we} είναι ο αριθμός των κινητήρων που είναι “δεμένοι” στην πτέρυγα. Τέλος, το βάρος κάθε κινητήρα εξαρτάται από την ώση του στο επίπεδο της θάλασσας (F_0), ως:

$$W_{eng} = 3.5 \cdot 10^{-2} F_0^{0.9255} \quad (1.39)$$

1.5.5. Υπολογισμός Αεροδυναμικών μεγεθών

1.5.5.1. Συντελεστής άνωσης

Ο συντελεστής άνωσης δίνεται από την αναλογία του Polhamus, σύμφωνα με την οποία η άνωση υπολογίζεται ως άθροισμα της δυναμικής άνωσης (potential lift) και της άνωσης που σχετίζεται με την ύπαρξη αποκολλημένων στροβίλων στην ακμή προσβολής (vortex lift). Σύμφωνα με αυτήν είναι:

$$c_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_{cr} V_{cr}^2 S_w} = \frac{\pi A R_w}{2} \sin \alpha \cos \alpha \left(\cos \alpha + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \Lambda_{LEw}} - \frac{\sin \alpha}{2 \cos \Lambda_{LEw}} \right) \quad (1.40)$$

όπου α η γωνία προσβολής στην ευθεία πτήση και L η άνωση.

Στον πρώτο αλγόριθμο ο συντελεστής άνωσης υπολογίζεται θέτοντας την άνωση ίση με το βάρος. Γνωρίζοντας την τιμή του συντελεστή άνωσης προσδιορίζεται με τη μέθοδο της διχοτόμησης η τιμή της γωνίας πρόσπτωσης.

Στο δεύτερο αλγόριθμο ο συντελεστής άνωσης προσδιορίζεται μέσω της γωνίας πρόσπτωσης και από αυτόν υπολογίζεται η άνωση (μέσω της οποίας υπολογίζεται το βάρος απογείωσης).

⁴ FAR 25 (section 25.841)

Σημειώνεται ότι η γωνία α δεν υπεισέρχεται σε άλλο σημείο του υπολογισμού.

Ειδικότερα, για τον πρώτο αλγόριθμο, το βάρος κατά της έναρξη της πτήσης (W_{bc}) εξισώνεται με την άνωση (L), δηλαδή:

$$L = gW_{bc} \Rightarrow \frac{1}{2} \rho_{cr} V_{cr}^2 S_w c_L = gW_{bc} \quad (1.41)$$

με $V_{cr} = \sqrt{\gamma R T_{cr}} M_{cr}$ την ταχύτητα πτήσης.

Το βάρος κατά την έναρξη της πτήσης είναι:

$$W_{bc} = TOW - W_{fuel}^{0-2} \approx 0.95 TOW \quad (1.42)$$

αφού γίνεται η προσέγγιση ότι $W_{fuel}^{0-2} \approx 0.05 TOW$ (είναι το βάρος του καυσίμου που απαιτείται για το τμήμα 0 – 2 της αποστολής του αεροσκάφους, δηλαδή την εκκίνηση, την τροχοδρόμηση, την απογείωση και την άνοδο στο υψόμετρο πτήσης).

Γνωρίζοντας το συντελεστή άνωσης, από τη σχέση (1.12) υπολογίζεται η γωνία προσβολής κατά την πτήση. Στην ανάλυση αυτή (με τα δεδομένα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού, (Πίνακας 1) οι προκύπτουσες τιμές για τη γωνία προσβολής είναι 2 - 3°, οπότε η υπόθεση τις εξίσωσης των δυνάμεων βάρους και άνωσης θεωρείται ασφαλής (δηλαδή οι δυνάμεις μπορούν να θεωρηθούν περίπου συνευθειακές και να αμεληθούν τα συνημίτονα κατεύθυνσης, γι' αυτό προηγήθηκε και η παρατήρηση ότι η γωνία α δεν εμπλέκεται σε άλλους υπολογισμούς).

Στον δεύτερο αλγόριθμο οι υπολογισμοί γίνονται αντίστροφα, δηλαδή:

$$W_{bc} = \frac{L}{g} \rightarrow W_{bc} = \frac{1}{2} \frac{\rho_{cr} V_{cr}^2 S_w c_L}{g} \quad (1.43)$$

$$TOW \approx 1.05263 W_{bc} \quad (1.44)$$

1.5.5.2. Συντελεστής οπισθέλκουσας

Ο συντελεστής οπισθέλκουσας του αεροσκάφους σχηματίζεται από το συντελεστή οπισθέλκουσας μηδενικής άνωσης στον οποίο υπερτίθεται η επαγόμενη οπισθέλκουσα λόγω άνωσης, ως:

$$c_D = \frac{D}{\rho_{cr} V_{cr}^2 S_w} = c_{D0} + K c_L^2 \quad (1.45)$$

με D την οπισθέλκουσα και K συντελεστή που εξαρτάται από τον αριθμό *Mach* πτήσης, δηλαδή:

$$K = \begin{cases} \frac{1}{\pi AR_w e} & , \text{για } M_{cr} < 1 \\ \frac{AR_w (M_{cr}^2 - 1)}{4AR_w \sqrt{M_{cr}^2 - 1} - 2} \cos \Lambda_{LEw} & , \text{για } M_{cr} > 1 \end{cases} \quad (1.46)$$

όπου e ο συντελεστής Oswald [2]:

$$e = 4.61 (1 - 0.045AR_w^{0.68}) \cos \Lambda_{LEW}^{0.15} - 3.1, \text{ για } \Lambda_{LEW} > 30^\circ \quad (1.47)$$

Ο συντελεστής οπισθέλκουσας μηδενικής άνωσης, ανάλογα με τις συνθήκες πτήσης, εξαρτάται από την οπισθέλκουσα λόγω κατεβασμένων τροχών ($c_{D_{gear}}$), κυμάτων ($c_{D_{wave}}$) και διατμητικών τάσεων ($c_{D_{visc}}$) ως εξής:

$$c_{D_0} = \begin{cases} c_{D_{visc}} + c_{D_{gear}} & , \text{ για κατεβασμένους τροχούς και } M_{cr} < 1 \\ c_{D_{visc}} + c_{D_{wave}} & , \text{ για } M_{cr} \geq 1 \end{cases} \quad (1.48)$$

όπου ο συντελεστής οπισθέλκουσας λόγω των κατεβασμένων τροχών έχει σταθερή τιμή $c_{D_{gear}} = 0.02$.

Η οπισθέλκουσα λόγω κυμάτων είναι η δύναμη πίεσης από την ύπαρξη κρουστικών κυμάτων, καθορίζεται από την κατανομή όγκου του αεροσκάφους και για ένα αεροσκάφος υπολογίζεται από τη σχέση[2]:

$$c_{D_{wave}} = \frac{9\pi}{2S_w} \left(\frac{A_{max}}{L_f} \right)^2 E_{wd} \left[1 - 0.386(M_{cr} - 1.2)^{0.57} \left(1 - \frac{\pi \Lambda_{LEW}^{0.77}}{100} \right) \right] \quad (1.49)$$

όπου A_{max} το εμβαδόν της μέγιστης τομής του αεροσκάφους και E_{wd} ένας εμπειρικός συντελεστής που λαμβάνει τιμές στο διάστημα 1.8 - 2.2 (εδώ τίθεται $E_{wd} = 2$). Ο συντελεστής οπισθέλκουσας λόγω διατμητικών τάσεων δίνεται από το άθροισμα:

$$c_{D_{visc}} = \sum_i \left(\frac{S_{wet_i}}{S_i} c_{f_i} \right) \quad (1.50)$$

όπου ο συντελεστής τριβής c_{f_i} , για κάθε στοιχείο i (άτρακτο, πτέρυγα, ουραίο πτερύγιο και κέλυφος κινητήρα) είναι υπολογισμένος για τυρβώδη ροή. Ειδικότερα, ο υπολογισμός του συντελεστή τριβής γίνεται από το συντελεστή τριβής για ασυμπίεστες ροές λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη την επίδραση του αριθμού $Mach^5$ σύμφωνα με τη σχέση:

⁵ Η εξάρτηση του συντελεστή τριβής από τον αριθμό Mach είναι μικρή στους χαμηλούς αριθμούς Mach, αλλά γίνεται σημαντική σε υψηλούς αριθμούς Mach. Ο τρόπος υπολογισμού του λόγου $\frac{c_f}{c_f^{inc}}$

παρουσιάστηκε από τους Sommer και Short, ονομάζεται μέθοδος T' και στηρίζεται στο ότι η «αεροδυναμική θέρμανση» (aerodynamic heating) μεταβάλλει τις ιδιότητες του ρευστού. Θεωρώντας πλήρως τυρβώδη ροή, η θερμοκρασία του τοιχώματος υπολογίζεται από τη θερμοκρασία στο υψόμετρο πτήσης ως $\frac{T_w}{T_{cr}} = (1 + 0.178 M_{cr}^2)$. Ο λόγος της φαινόμενης ασυμπίεστης θερμοκρασίας ορίζεται ως:

$r_T = \frac{T'}{T_{cr}} = 1 + 0.035 M_{cr}^2 + 0.45 \left(\frac{T_w}{T_{cr}} - 1 \right)$ και αντίστοιχα, ο λόγος του φαινομένου αριθμού Reynolds

$r_R = \frac{Re'}{Re_{cr}} = \frac{\rho' \mu_{cr}}{\rho_{cr} \mu'} = \frac{T_{cr} \mu_{cr}}{T' \mu'} \mu \varepsilon \frac{\rho'}{\rho_{cr}} = \frac{T_{cr}}{T'}$ θεωρώντας σταθερή πίεση στο οριακό στρώμα, ενώ η συνεκτικότητα υπολογίζεται από τον τύπο του Sutherland. Έτσι ο συντελεστής τριβής για συμπίεστες ροές δίνεται από τη σχέση $c_f = \frac{T_{cr}}{T'} c_f^{inc}$, με c_f^{inc} τον ασυμπίεστο συντελεστή τριβής υπολογισμένος

$$\frac{c_f}{c_f^{inc}} = \frac{r_R^{0.2}}{r_T} \quad (1.51)$$

όπου ο συντελεστής τριβής για ασυμπίεστες ροές ισούται με

$$c_f^{inc} = \frac{0.074}{(Re_i)^{0.2}} \quad (1.52)$$

Ο αριθμός Reynolds $Re_i = Re_i(L_{char})$ της ροής υπολογίζεται από τη σχέση $Re_i = \frac{\rho V L_{char}}{\mu}$, όπου το χαρακτηριστικό μήκος κατά περίπτωση είναι το L_f για την άτρακτο, το L_{nac} για το κέλυφος του κινητήρα και η μέση αεροδυναμική χορδή για την πτέρυγα και το ουραίο πτερύγιο. Η γενική σχέση υπολογισμού της μέσης αεροδυναμικής χορδής είναι:

$$\bar{c}_j = \frac{2c_{r_j}(1 + \lambda_j + \lambda_j^2)}{3(1 + \lambda_j)} \quad (1.53)$$

όπου $j \equiv w$ για την πτέρυγα και $j \equiv v$ για το κάθετο ουραίο πτερύγιο.

Για την ευθεία υπερηχητική πτήση, ο συντελεστής οπισθέλκουσας μηδενικής άνωσης υπολογίζεται από την δεύτερη σχέση της εξίσωσης (1.46) και ο συνολικός συντελεστής οπισθέλκουσας από την (1.43). Στη συνέχεια, η οπισθέλκουσα D εξισώνεται με την συνολική ώση F_{tot} του αεροσκάφους:

$$\frac{1}{2} \rho_{cr} V_{cr}^2 S_w c_D = N_{eng} F \quad (1.54)$$

όπου $N_{eng} = 2$ ή 3 όπως προαναφέρθηκε.

Στον πρώτο αλγόριθμο, από την παραπάνω σχέση υπολογίζεται εκ νέου η ώση για κάθε κινητήρα, άρα και η ώση στο επίπεδο της θάλασσας της οποίας η τιμή διορθώνεται και οι υπολογισμοί βάρους και αεροδυναμικών μεγεθών επαναλαμβάνονται, όπως αναφέρθηκε στην περιγραφή του αλγορίθμου που παρουσιάσθηκαν παραπάνω.

Στον δεύτερο αλγόριθμο, η σχέση αυτή χρησιμοποιείται για να υπολογισθεί το νέο βάρος κινητήρα και να συνεχιστεί η επαναληπτική διαδικασία.

σε αριθμό Reynolds Re' ως $c_f^{inc} = \frac{0.074}{Re'^{0.2}}$. Άρα ο λόγος του συμπίεστου προς τον ασυμπίεστο συντελεστή τριβής είναι $\frac{c_f}{c_f^{inc}} = \frac{r_R^{0.2}}{r_T}$.

1.5.6. Επιδόσεις

Ο σχεδιασμός ενός αεροσκάφους γίνεται πάντα με συγκεκριμένους στόχους. Συνήθεις στόχους αποτελούν η μεγάλη εμβέλεια, η μικρή κατανάλωση καυσίμου, ελαττωμένες ηχητικές εκπομπές και φυσικά μικρά μήκη απογείωσης και προσγείωσης έτσι ώστε το αεροσκάφος να δύναται να χρησιμοποιήσει όσο το δυνατόν περισσότερα αεροδρόμια.

Στα πλαίσια του προκαταρκτικού σχεδιασμού, δεν γίνονται εξεζητημένοι υπολογισμοί όπως είναι η εκτίμηση ηχητικών εκπομπών, δίνεται όμως ιδιαίτερη σημασία έτσι ώστε το αεροσκάφος να πληρεί τους στόχους που έχουν τεθεί. Έχοντας αναφέρει σε προηγούμενη παράγραφο τον τρόπο υπολογισμού του βάρους του καυσίμου, απομένει να υπολογισθούν η εμβέλεια και τα μήκη απογείωσης και προσγείωσης.

1.5.6.1. Εμβέλεια

Η εμβέλεια του αεροσκάφους με κινητήρα τύπου *turbofan* υπολογίζεται από την εξίσωση Breguet ως:

$$R = \frac{V}{gSFC} \frac{c_L}{c_D} \ln \left(\frac{W_{bc}}{W_{ec}} \right) \quad (1.55)$$

όπου το βάρος κατά την έναρξη της πτήσης υπολογίζεται από τη σχέση (1.39) και για τους δύο αλγόριθμους (αλλά σε διαφορετικά σημεία μέσα στο πρόγραμμα).

Το βάρος στο τέλος της πτήσης εκτιμάται ίσο με:

$$W_{ec} \approx TOW - 0.95 W_{fuel} \quad (1.56)$$

➤ Επιθυμητή Εμβέλεια

Το αεροσκάφος που μελετάται προορίζεται για υπερατλαντικές πτήσεις. Εφόσον ο σχεδιασμός που θα γίνει έχει δύο στόχους, μεγάλη εμβέλεια και μικρό βάρος καυσίμου (στόχοι προφανώς αντικρουόμενοι) και εφόσον μετά το πέρας της βελτιστοποίησης του αεροσκάφους θα βρεθεί ένας συνδυασμός λύσεων και όχι πολλοί (μέτωπο Pareto), πρέπει να τεθεί μια τιμή ελάχιστης ικανοποιητικής (ή αλλιώς λειτουργικής) εμβέλειας. Για να γίνει η εκτίμηση αυτή, ανατρέχουμε στον αρχικό στόχο: αεροσκάφος με την ικανότητα να πραγματοποιεί υπερατλαντικές πτήσεις. Λαμβάνοντας υπόψη το παραπάνω εξετάζουμε την απόσταση διάφορων μεγάλων ευρωπαϊκών πόλεων από μια πόλη στην Αμερική, τη Νέα Υόρκη[11]:

Πόλη πρώτη	Πόλη δεύτερη	Απόσταση [km]
Νέα Υόρκη	Παρίσι	5838
Νέα Υόρκη	Λονδίνο	5561
Νέα Υόρκη	Άμστερνταμ	5856
Νέα Υόρκη	Στοκχόλμη	6303
Νέα Υόρκη	Φρανκφούρτη	6197

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα, εκτιμάται πως η ελάχιστη εμβέλεια που πληρεί τις προδιαγραφές σχεδιασμού είναι 6500km.

1.5.6.2. Ταχύτητα προσέγγισης

Το μήκος προσγείωσης σε ένα αεροσκάφος καθορίζεται από την ταχύτητα προσέγγισης. Ορίζεται, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, ως πολλαπλάσιο της ταχύτητας αποκόλλησης⁶ V_{stall} . Για επιβατικά – μεταφορικά αεροσκάφη οι κανονισμοί ασφαλείας⁷ επιβάλλουν να είναι:

$$V_{appr} = 1.3 V_s \quad (1.57)$$

Για τον υπολογισμό της ταχύτητας αποκόλλησης θεωρείται ότι η άνωση ισούται με το βάρος και ο συντελεστής άνωσης έχει την μέγιστη τιμή του για μέγιστη γωνία προσβολής η οποία και αποτελεί παράμετρο σχεδιασμού.

Στη φάση της προσγείωσης το αεροσκάφος ήδη έχει καταναλώσει ένα ποσοστό των καυσίμων του, επομένως ως βάρος στη φάση προσγείωσης θα μπορούσε να ληφθεί ένα ποσοστό του συνολικού βάρους απογείωσης της τάξης του 60%. Πάραυτα, ο όρος «μέγιστο» βάρος χρησιμοποιείται επειδή πρέπει να ληφθεί υπόψη το ενδεχόμενο αναγκαστικής προσγείωσης. Στην περίπτωση αυτή, το αεροσκάφος θα πρέπει να είναι δυνατό να προσγειωθεί σχεδόν αμέσως μετά την απογείωση[2]. Δεδομένου τούτου, το MLW ορίζεται ως:

$$MLW = 0.8 TOW \quad (1.58)$$

Γνωρίζοντας το MLW , υπολογίζεται πλέον η ταχύτητα αποκόλλησης από τη σχέση:

$$V_s = \sqrt{\frac{g \cdot MLW}{\frac{1}{2} \rho_o S_w c_{L_{max}}}} \quad (1.59)$$

➤ Μέγιστη τιμή ταχύτητας προσέγγισης

Μια συνήθης τιμή της ταχύτητας προσέγγισης για επιβατικά αεροσκάφη είναι $V_{appr} = 60m/s$. Στην περίπτωση ενός υπερηχητικού αεροσκάφους όμως, η ταχύτητα προσέγγισης αγγίζει συνήθως (ή και ξεπερνά) τα $80m/s$. Ενδεικτικά αναφέρεται πως στη μόνη περίπτωση πολιτικού υπερηχητικού αεροσκάφους, το Concorde, η ταχύτητα προσέγγισης ήταν $82.7m/s$ [3]. Η διαφορά αυτή οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι η πτέρυγα ενός υπερηχητικού αεροσκάφους μεγάλων αποστάσεων είναι σχεδιασμένη έτσι ώστε να αποδίδει καλύτερα σε υπερηχητικές συνθήκες.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, γίνεται η εκτίμηση πως, σε επίπεδο προκαταρκτικού σχεδιασμού όπου δε λαμβάνονται υπόψη πιθανές σχεδιαστικές λύσεις όπως πτέρυγα μεταβλητής γεωμετρίας ή flaps, η ταχύτητα προσέγγισης δεν πρέπει να υπερβαίνει την τιμή $V_{appr} = 76m/s$.

⁶ Ως ταχύτητα αποκόλλησης σε δεδομένη γωνία προσβολής ορίζεται η ελάχιστη ταχύτητα για την οποία η πτέρυγα δημιουργεί επαρκή άνωση για την πτήση και εξαρτάται από τη φόρτιση πτέρυγας ($\frac{W}{S_w}$) και τον μέγιστο συντελεστή άνωσης $c_{L_{max}}$.

⁷ FAR 23 (section 23.73)

1.5.6.3. Μήκος απογείωσης

Στη βιβλιογραφία εμφανίζονται διάφοροι τρόποι υπολογισμού του μήκους απογείωσης. Στη συγκεκριμένη ανάλυση χρησιμοποιείται η θεωρία του «ισορροπημένου μήκους απογείωσης» *BFL (Balanced Field Length)*, όπως παρουσιάζεται από τον Raymer [2].

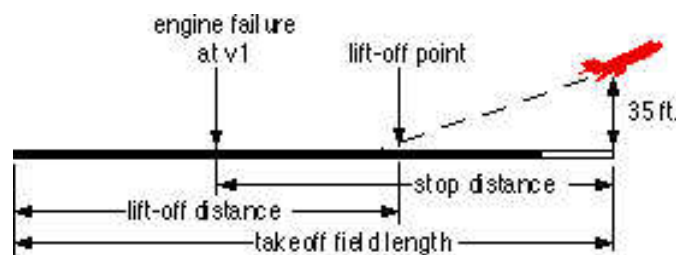
➤ *Balanced Field Length*

Υπάρχουν αρκετά μεγέθη τα οποία αναφέρονται ως «μήκος απογείωσης». Η «τροχοδρόμηση» (*ground roll*) είναι η απόσταση που καλύπτεται έως οι τροχοί του αεροσκάφους χάσουν επαφή με το έδαφος. Η ταχύτητα απογείωσης για μια συνήθη απογείωση είναι 1.2 φορές η ταχύτητα αποκόλλησης.

Η «απόσταση υπερπήδησης εμποδίου» είναι η απόσταση που απαιτείται από τη στιγμή που λύνονται τα φρένα έως ότου το αεροσκάφος έχει φτάσει κάποιο συγκεκριμένο υψόμετρο. Το όριο αυτό για επιβατικά αεροσκάφη είναι 35ft (10.7 m).

Το «ισορροπημένο μήκος απογείωσης» (*BFL*) είναι το μήκος το οποίο απαιτείται για ασφάλεια σε περίπτωση αστοχίας κινητήρα στη χειρότερη στιγμή για την απογείωση ενός πολυκινητήριου αεροσκάφους. Όταν το αεροσκάφος έχει αρχίσει την τροχοδρόμηση, ο πιλότος δε θα αντιμετωπίσει πρόβλημα εάν χρειαστεί να σταματήσει με ασφάλεια, λόγω αστοχίας ενός κινητήρα. Με την αύξηση της ταχύτητας, όλο και μεγαλύτερη απόσταση χρειάζεται για στάση λόγω αστοχίας κινητήρα. Εάν το αεροσκάφος έχει σχεδόν αναπτύξει ταχύτητα απογείωσης και αστοχήσει ένας κινητήρας, ο πιλότος θα ήταν αδύνατο να σταματήσει εγκαίρως και θα έπρεπε αντ' αυτού να συνεχίσει την απογείωση βασιζόμενος στους υπόλοιπους κινητήρες.

Η ταχύτητα στην οποία η απόσταση για στάση μετά από αστοχία κινητήρα ισούται ακριβώς με την απόσταση για να συνεχιστεί η απογείωση βασιζόμενοι στους εναπομείναντες κινητήρες, λέγεται «ταχύτητα απόφασης». Το *BFL* είναι το μήκος που απαιτείται για την απογείωση και υπερπήδηση του ορισμένου εμποδίου όταν ένας κινητήρας αστοχήσει ακριβώς στην ταχύτητα απόφασης. Σημειώνεται πως η αναστροφή ώσης δεν περιλαμβάνεται στους υπολογισμούς του *BFL*.



Σχ. 1.9 – Φάση Απογείωσης

Η σχέση από την οποία υπολογίζεται το *BFL* είναι, σύμφωνα με τον Raymer:

$$BFL = \frac{0.863}{1 + 2.34\gamma} \left(\frac{TOW}{S_w \rho c_{L_{climb}}} + h_{to} \right) \left(\frac{1}{\frac{\bar{F}}{g \cdot TOW} - U} + 2.7 \right) + \frac{\Delta S_{to}}{\sqrt{\sigma}} \quad (1.60)$$

όπου $h_{to} = 10.7m$, $\Delta S_{to} = 200m$, $U = 0.01c_{L_{max}} + 0.02$ για κατεβασμένα flap, $\bar{F} = 0.75N_{eng}F_0$ η μέση ώση κατά την απογείωση και $\Delta\gamma = \gamma_{climb} - \gamma_{min}$, ενώ:

$$\gamma_{climb} = \text{asin}\left(\frac{(N_{eng} - 1)F_0 - D}{g \cdot TOW}\right) \text{ και } \gamma_{min} = \begin{cases} 0.024 \text{ αν } N_{eng} = 2 \\ 0.027 \text{ αν } N_{eng} = 3 \\ 0.030 \text{ αν } N_{eng} = 4 \end{cases} \quad (1.61)$$

είναι οι γωνίες ανόδου και μια ελάχιστη γωνία, αντίστοιχα. Η οπισθέλκουσα (D) και ο συντελεστής άνωσης ($c_{L_{climb}}$) υπολογίζονται με βάση τα μεγέθη της απογείωσης. Ειδικότερα, η ταχύτητα κατά την απογείωση είναι, όπως ανεφέρθη παραπάνω, $V_{to} = 1.2V_{to_s}$.

Η ταχύτητα αποκόλλησης κατά τη απογείωση δίνεται από τη σχέση:

$$V_{to_s} = \sqrt{\frac{g \cdot TOW}{\frac{1}{2}\rho_o S_w c_{L_{max}}}} \quad (1.62)$$

Επιπλέον, για τον υπολογισμό της οπισθέλκουσας χρησιμοποιείται η σχέση $D = \frac{1}{2}\rho_o V_{to}^2 S_w c_D$, όπου ο συντελεστής οπισθέλκουσας υπολογίζεται για υποηχητική ταχύτητα και περιλαμβάνει την οπισθέλκουσα λόγω κατεβασμένων τροχών.

➤ Όριο μήκους απογείωσης

Ο υπολογισμός των επιδόσεων ενός αεροσκάφους αποτελεί μια διαδικασία σχεδιασμού, ως εκ τούτου είναι μεγίστης σημασίας το αεροσκάφος να είναι λειτουργικό. Το μήκος απογείωσης είναι μια παράμετρος η οποία καθορίζει τον αριθμό των αεροδρομίων που μπορεί να χρησιμοποιήσει ένα αεροσκάφος. Προφανώς, δεν υπάρχει κάτω όριο στην παράμετρο αυτή, η εκτίμηση του άνω ορίου όμως απαιτεί γνώση του μήκους των αεροδιαδρόμων μεγάλων αεροδρομίων[5]:

Αεροδρόμιο	Διάδρομος 1	Διάδρομος 2	Διάδρομος 3	Διάδρομος 4
JFK	4442 m	3460 m	3048 m	2560 m
Charles de Gaulle	4215 m	4200 m	2700 m	2700 m
San Francisco International Airport	3618 m	3231 m	2636 m	2286 m
Διεθνής Αερολιμένας Αθηνών (Ελ. Βενιζέλος)	4000 m	3800 m	-	-

Με βάση τα παραπάνω στοιχεία, εκτιμάται πως, σε επίπεδο προκαταρκτικού σχεδιασμού, το ισορροπημένο μήκος απογείωσης δε θα πρέπει να είναι παραπάνω από 2500 m.

Κεφάλαιο 2^ο

Στοιχεία Μεθόδων Βελτιστοποίησης

2. Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκε το πρόβλημα, δηλαδή οι αλγόριθμοι προκαταρκτικής ανάλυσης επιδόσεων του αεροσκάφους (ή αλλιώς οι συναρτήσεις προς βελτιστοποίηση). Στο κεφάλαιο αυτό θα παρατεθεί η απαραίτητη θεωρία που θεμελιώνει τις μεθόδους βελτιστοποίησης που θα εφαρμοσθούν. Η εφαρμογή των μεθόδων καθώς και η ανάλυση και επίλυση των πρακτικών προβλημάτων που τις συνοδεύουν βασίζεται στα θεωρήματα και τους ορισμούς που παρατίθενται στο κεφάλαιο αυτό.

Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης χωρίζονται σε τρεις ευρείες κατηγορίες, τις *αιτιοκρατικές μεθόδους* – όπου ανήκουν και οι μέθοδοι *βασιζόμενες στην κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης (Gradient Based Methods)*, τις *στοχαστικές μεθόδους (Stochastic Methods)* και τη βελτιστοποίηση βασισμένη σε *περιοχές εμπιστοσύνης (Trust Region)*.

Στην παρούσα εργασία γίνεται χρήση μεθόδων ανίχνευσης κατά γραμμή, οι οποίες ανήκουν στις μεθόδους οι οποίες κάνουν χρήση των παραγώγων ($1^{ου}$ ή και $2^{ου}$) της *συνάρτησης κόστους (Cost Function)*, με σκοπό την αναζήτηση του ελαχίστου (ή μεγίστου) της συνάρτησης.

Το πρόβλημα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε είναι η βελτιστοποίηση των επιδόσεων (συγκεκριμένα της εμβέλειας και του βάρους καυσίμου), ενός «μικρού υπερηχητικού επιβατικού αεροσκάφους» όπως αυτό παρουσιάστηκε στο πρώτο κεφάλαιο, μεταβάλλοντας τις μεταβλητές σχεδιασμού εντός των ορίων που επιβάλλουν κάποιοι γεωμετρικοί, κατασκευαστικοί και άλλοι περιορισμοί, με την προϋπόθεση ότι το τελικό αεροσκάφος πληροί ορισμένες προδιαγραφές (μήκος απογείωσης και ταχύτητα προσέγγισης). Για το σκοπό αυτό, θα εφαρμοσθούν οι παρακάτω μέθοδοι:

- Μέθοδος Απότομης καθόδου (Steepest Descent Method).
- Τροποποιημένη Μέθοδος Newton (Modified Newton Method), όπου ο όρος «Τροποποιημένη» υποδηλώνει τροποποίηση του Εσσιανού μητρώου.
- Μέθοδος των εξελικτικών αλγορίθμων (evolutionary algorithms) με το πρόγραμμα E.A.SY που έχει αναπτυχθεί στο Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, για σύγκριση των αποτελεσμάτων.

όπου οι απαιτούμενες παράγωγοι για τις αιτιοκρατικές μεθόδους θα υπολογισθούν με τη Μέθοδο των Μιγαδικών Μεταβλητών και με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών.

2.1. Μαθηματικό Υπόβαθρο και Ορισμοί

Γενικά, το πρόβλημα της βελτιστοποίησης μπορεί να περιγραφεί ως ένα κλασικό μαθηματικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης (ή μεγιστοποίησης το οποίο όμως μπορεί να αναχθεί σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης):

«Για μια δεδομένη συνάρτηση $F(\vec{x})$, να βρεθεί το διάνυσμα \vec{x} το οποίο ελαχιστοποιεί την τιμή της F , $\vec{x} \in \mathbf{R}^N$, $F(\vec{x}): \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ »

Στη βελτιστοποίηση, η F ονομάζεται συνήθως *συνάρτηση κόστους* (cost function) ενώ οι μεταβλητές που συνθέτουν το διάνυσμα \vec{x} ονομάζονται *μεταβλητές σχεδιασμού* (design variables).

Ακολουθεί η παράθεση ορισμένων κομβικών για τη βελτιστοποίηση θεωρημάτων και ορισμών τα οποία διέπουν τόσο προβλήματα ενός στόχου όσο και προβλήματα πολλών στόχων, αρκεί να έχει γίνει συσσωμάτωση όλων των στόχων σε μια αντικειμενική συνάρτηση.

Θεώρημα 2.1 (Θεώρημα του Taylor): Αν η $F: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση και $\vec{p} \in \mathbf{R}^N$, τότε υπάρχει μια ποσότητα $t \in (0,1)$ για την οποία να ισχύει ότι:

$$F(\vec{x} + \vec{p}) = F(\vec{x}) + \nabla F(\vec{x} + t\vec{p})^T \vec{p} \quad (2.1)$$

Αν επιπλέον η F είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε:

$$\nabla F(\vec{x} + \vec{p}) = \nabla F(\vec{x}) + \int_0^1 \nabla^2 F(\vec{x} + t\vec{p}) \vec{p} dt \quad (2.2)$$

και για κάποιο $t \in (0,1)$ ισχύει:

$$F(\vec{x} + \vec{p}) = F(\vec{x}) + \nabla F(\vec{x})^T \vec{p} + \frac{1}{2} \vec{p}^T \nabla^2 F(\vec{x} + t\vec{p}) \vec{p} \quad (2.3)$$

Ακολουθούν οι μαθηματικές διατυπώσεις τριών ορισμών οι οποίοι θα χρησιμοποιηθούν κατά κόρον στο κεφάλαιο αυτό:

Ορισμός 2.1 Το \vec{x}^* αποτελεί **καθολικό ελάχιστο** (global minimizer) της $F(\vec{x})$ αν $F(\vec{x}^*) \leq F(\vec{x}) \forall \vec{x}$.

Ορισμός 2.2 Το \vec{x}^* αποτελεί **τοπικό ελάχιστο** (local minimizer) της $F(\vec{x})$ όταν $F(\vec{x}^*) \leq F(\vec{x}) \forall \vec{x}$ στη γειτονιά του \vec{x}^* .

Ορισμός 2.3 Το \vec{x}^* αποτελεί **αυστηρό τοπικό ελάχιστο** (strict local minimizer) της $F(\vec{x})$ όταν $F(\vec{x}^*) < F(\vec{x}) \forall \vec{x}$ στη γειτονιά του \vec{x}^* .

Θεώρημα 2.2 (Αναγκαία συνθήκη πρώτης τάξης για το ελάχιστο): Αναγκαία συνθήκη ώστε το διάνυσμα $\vec{x}^* \in \mathbf{R}^N$ να αποτελεί **τοπικό ελάχιστο** της συνεχώς διαφορίσιμης συνάρτησης F στη γειτονιά του \vec{x}^* είναι να ισχύει $\nabla F(\vec{x}^*) = 0$.

Απόδειξη: Αν $\nabla F(\vec{x}^*) \neq 0$, ορίζουμε το \vec{p} ως προς $\vec{p} = -\nabla F(\vec{x}^*)$, οπότε προφανώς $\vec{p}^T \nabla F(\vec{x}^*) < 0$. Όμως, επειδή η F είναι συνεχής στη γειτονιά του \vec{x}^* , θα υπάρξει μια θετική τιμή $T > 0$ τέτοια ώστε:

$$\vec{p}^T \nabla F(\vec{x}^* + \hat{t}\vec{p}) < 0 \quad , \forall \hat{t} \in [0, T]$$

Τότε όμως από το θεώρημα 3.1 και για κάποιο $t \in [0, \hat{t}]$, θα ισχύει ότι:

$$F(\vec{x}^* + \hat{t}\vec{p}) = F(\vec{x}^*) + \hat{t}\vec{p}^T \nabla F(\vec{x}^* + t\vec{p})$$

Με δεδομένο το αρνητικό πρόσημο της τελευταίας ποσότητας, για κάθε $\hat{t} \in (0, T]$ θα ισχύει ότι $F(\vec{x}^* + \hat{t}\vec{p}) < F(\vec{x}^*)$. Άρα, υπάρχει κατεύθυνση κατά την οποία απομακρυνόμενοι από το \vec{x}^* , η τιμή της F ελαττώνεται, οπότε το \vec{x}^* αποκλείεται να αποτελεί τοπικό ελάχιστο της F . ■

Ορισμός 2.4 Σημεία στο χώρο των λύσεων στα οποία $\nabla F(\vec{x}) = 0$ ονομάζονται **στάσιμα σημεία** (*stationary points*).

Μόλις δείξαμε ότι για να είναι το \vec{x}^* τοπικό ελάχιστο πρέπει να είναι στάσιμο σημείο της F . Το αντίστροφο δεν ισχύει κατ' ανάγκη.

Υπενθυμίζονται οι επόμενοι δύο ορισμοί:

Ορισμός 2.5 Ένα μητρώο B ονομάζεται **θετικά ορισμένο** (*positive definite*) αν:

$$\vec{p}^T B \vec{p} > 0 \quad , \forall \vec{p}$$

Ορισμός 2.6 Ένα μητρώο B ονομάζεται **θετικά ημι-ορισμένο** (*positive semidefinite*) αν:

$$\vec{p}^T B \vec{p} \geq 0 \quad , \forall \vec{p}$$

Θεώρημα 2.3 (Αναγκαίες συνθήκες δεύτερης τάξης για το ελάχιστο) Αναγκαίες συνθήκες ώστε στο διάνυσμα $\vec{x}^* \in \mathbf{R}^N$ να αποτελεί τοπικό ελάχιστο της F , για την οποία η $\nabla^2 F$ είναι συνεχής στη γειτονιά του \vec{x}^* , είναι να ισχύει $\nabla F(\vec{x}^*) = 0$ και συγχρόνως το $\nabla^2 F(\vec{x}^*)$ να είναι θετικά ημι-ορισμένο μητρώο.

Απόδειξη: Γνωρίζουμε από το θεώρημα 2.2 ότι $\nabla F(\vec{x}^*) = 0$. Υποθέτοντας όμως ότι το $\nabla^2 F(\vec{x}^*)$ δεν είναι θετικά ημι-ορισμένο μητρώο, μπορούμε να επιλέξουμε ένα διάνυσμα \vec{p} τέτοιο ώστε $\vec{p}^T \nabla^2 F(\vec{x}^*) \vec{p} < 0$. Επειδή η $\nabla^2 F$ είναι συνεχής στη γειτονιά του \vec{x}^* , θα υπάρξει μια θετική τιμή $t > 0$ τέτοια ώστε $\vec{p}^T \nabla^2 F(\vec{x}^* + t\vec{p}) \vec{p} < 0 \quad , \forall t \in [0, T]$.

Με ανάπτυγμα κατά Taylor, έχουμε ότι για όλα τα $\hat{t} \in (0, T)$ υπάρχει $t \in (0, \hat{t})$ ώστε:

$$F(\vec{x}^* + \hat{t}\vec{p}) = F(\vec{x}^*) + \hat{t}\vec{p}^T \nabla F(\vec{x}^*) + \frac{1}{2} \hat{t}^2 \vec{p}^T \nabla^2 F(\vec{x}^* + t\vec{p}) \vec{p} < F(\vec{x}^*)$$

Άρα, βρέθηκε κατεύθυνση κατά την οποία, απομακρυνόμενοι από το \vec{x}^* , η τιμή της F ελαττώνεται, οπότε το \vec{x}^* αποκλείεται να αποτελεί τοπικό ελάχιστο της F . ■

Θεώρημα 2.4 (Ικανές συνθήκες δεύτερης τάξης για το ελάχιστο) Αν το $\nabla F(\vec{x})$ είναι συνεχές στη γειτονιά του σημείου \vec{x}^* , ισχύει $\nabla F(\vec{x}^*) = 0$ και συγχρόνως το $\nabla^2 F(\vec{x}^*)$ είναι θετικά ορισμένο, τότε το \vec{x}^* είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο της $F(\vec{x})$.

Απόδειξη: Αφού το Εσσιανό μητρώο είναι συνεχές και θετικά ορισμένο στο \vec{x}^* , επιλέγουμε μια ακτίνα r ώστε το $\nabla^2 F(\vec{x})$ να παραμένει θετικά ορισμένο για κάθε \vec{x} στην ανοικτή σφαίρα $D = \{\vec{z} : \|\vec{z} - \vec{x}^*\| < r\}$. Για το μη μηδενικό διάνυσμα \vec{p} , για το οποίο $\|\vec{p}\| < r$, έχουμε $\vec{x}^* + \vec{p} \in D$ και συνεπώς:

$$F(\vec{x}^* + \vec{p}) = F(\vec{x}^*) + \vec{p}^T \nabla F(\vec{x}^*) + \frac{1}{2} \vec{p}^T \nabla^2 F(\vec{z}) \vec{p} = F(\vec{x}^*) + \frac{1}{2} \vec{p}^T \nabla^2 F(\vec{z}) \vec{p}$$

όπου $\vec{z} = \vec{x}^* + t\vec{p}$ για κάποιο $t \in (0,1)$. Αφού $\vec{z} \in D$, έχουμε ότι $\vec{p}^T \nabla^2 F(\vec{z}) \vec{p} > 0$ και συνεπώς $F(\vec{x}^* + \vec{p}) > F(\vec{x}^*)$. ■

Πρέπει να γίνει τονιστεί ότι οι ικανές συνθήκες δεύτερης τάξης για το ελάχιστο που παρουσιάσθηκαν ε το θεώρημα 2.4 είναι ισχυρότερες από τις αναγκαίες συνθήκες που μας απασχόλησαν προηγουμένως: το θεώρημα 2.4 οδηγεί σε αυστηρά τοπικό ελάχιστο και όχι απλά σε τοπικό ελάχιστο.

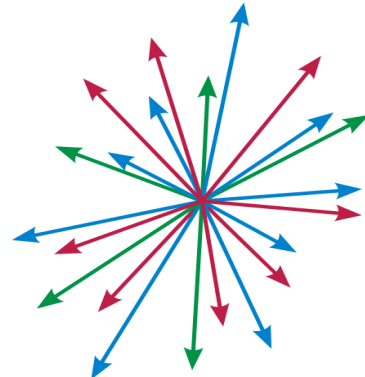
Οι ικανές συνθήκες δεύτερης τάξης δεν είναι και αναγκαίες, δηλαδή ένα διάνυσμα \vec{x}^* μπορεί να είναι αυστηρό τοπικό ακρότατο χωρίς να χρειάζεται να ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες. Απλό παράδειγμα είναι η $F(x) = x^4$ όπου το $x^* = 0$ είναι αυστηρά τοπικό ελάχιστο αλλά σε αυτό το Εσσιανό μητρώο (η δεύτερη παράγωγός της, δηλαδή) μηδενίζεται και άρα δεν είναι θετικά ορισμένο.

2.2. Ανίχνευση κατά Γραμμή

Η αρχή της επαναληπτικής ανίχνευσης του ελαχίστου μιας συνάρτησης F στον πολυδιάστατο χώρο λύσεων που ορίζεται από ένα διάνυσμα \vec{x} , είναι να δημιουργηθεί η επόμενη προσέγγιση της λύσης \vec{x}^{n+1} , χρησιμοποιώντας την τρέχουσα λύση \vec{x}^n και μια κατεύθυνση ανίχνευσης \vec{p}^n , σύμφωνα με το σχήμα:

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \eta \vec{p}^n \quad (2.4)$$

όπου η η μια βαθμωτή ποσότητα που συμβολίζει το βήμα της ανίχνευσης κατά την κατεύθυνση \vec{p}^n . Το βήμα μπορεί να είναι το ίδιο ή, ιδίως αν οι μεταβλητές σχεδιασμού έχουν διαφορετική τάξη μεγέθους μεταξύ τους, διαφορετικό για κάθε μεταβλητή. Μπορεί επίσης να παραμένει σταθερό καθ' όλη τη διάρκεια της βελτιστοποίησης ή να μεταβάλλεται.



Σχήμα 2.1 – Διανυσματικός χώρος

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις, είναι σκόπιμο να γράψουμε την παραπάνω σχέση ως:

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \eta^n \vec{p}^n \quad (2.5)$$

που σημαίνει ότι ρυθμίζουμε ξεχωριστά το βαθμό επιρροής της μεταβολής κάθε μεταβλητής σχεδιασμού στην τιμή της συνάρτησης κόστους. Ο λόγος που αυτό είναι απαραίτητο καθώς και ο τρόπος επιλογής μήκους βήματος θα συζητηθούν σε επόμενη παράγραφο.

Επίσης, αποδεικνύεται πως ανάλογα με το πρόσημο του η^n , μπορεί να έχουμε κατεύθυνση *ανόδου* ή *καθόδου*.

2.3. Μέθοδοι Ανίχνευσης Κατά Γραμμή

2.3.1. Η Μέθοδος της Απότομης Καθόδου

Από το ανάπτυγμα *Taylor*, αποκόπτοντας τον όρο 2^{ns} τάξης, προκύπτει:

$$F(\vec{x}^{n+1}) = F(\vec{x}^n + \eta^n \vec{p}^n) = F(\vec{x}^n) + \eta^n \vec{p}^{nT} \nabla F(\vec{x}^n) + O(\eta^2) \quad (2.6)$$

Παρατηρούμε πως το πρόσημο του 2^{ou} όρου στο δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης είναι αρνητικό για $\eta^n > 0$, γεγονός που σημαίνει πως εάν επιλεγεί ως κατεύθυνση ανίχνευσης:

$$\vec{p}^n = -\nabla F(\vec{x}^n) \quad (2.7)$$

είναι βέβαιο πως νέα η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα είναι *μικρότερη* από την προηγούμενη, για κατάλληλες τιμές του η . Φυσικά, η $\vec{p}^n = \nabla F(\vec{x}^n)$ ομοίως αποδεικνύεται πως είναι κατεύθυνση *ανόδου*.

2.3.2. Η Μέθοδος της Καθόδου

Η μέθοδος της (απλής) καθόδου αποτελεί γενίκευση της προηγούμενης μεθόδου. Με αφετηρία το ανάπτυγμα *Taylor* της σχέσης (2.6), το γινόμενο $\vec{p}^{nT} \nabla F(\vec{x}^n)$ γράφεται:

$$\vec{p}^{nT} \nabla F(\vec{x}^n) = \|\vec{p}^n\| \|\nabla F(\vec{x}^n)\| \cos\theta^n$$

Επιλέγοντας ως \vec{p}^n μια κατεύθυνση για την οποία $\cos\theta^n < 0$ (και όχι κατ' ανάγκη $\cos\theta^n = 1$ όπως στη μέθοδο της απότομης καθόδου) μπορούν να δημιουργηθούν παραλλαγές της μεθόδου της καθόδου που όλες εξασφαλίζουν ότι $F(\vec{x}^{n+1}) < F(\vec{x}^n)$, με την προϋπόθεση ότι το η^n θα επιλεγεί κατάλληλα. Γενικά, η μέθοδος της απότομης καθόδου υπερτερεί της μεθόδου απλής καθόδου, πλην ορισμένων περιπτώσεων που για λόγους σύγκλισης (ή βελτίωσης του ρυθμού σύγκλισης) της αριθμητικής μεθόδου, απαιτείται υποχαλάρωση.

2.3.3. Η Μέθοδος Newton

Η μέθοδος Newton αποτελεί ένα πολύ σημαντικό αντιπρόσωπο της κατηγορίας των μεθόδων ανίχνευσης κατά γραμμή. Για τη θεμελίωσή της αρκεί να γραφεί το ανάπτυγμα Taylor (προς το παρόν θα θεωρηθεί πως $\eta^n = \eta = 1$:

$$F(\vec{x}^{n+1}) = F(\vec{x}^n + \eta^n \vec{p}^n) = F(\vec{x}^n) + \vec{p}^{nT} \nabla F(\vec{x}^n) + \frac{1}{2} \vec{p}^{nT} \nabla^2 F(\vec{x}^n) \vec{p}^n + O(\eta^3) \quad (2.8)$$

Εάν απαιτηθεί να ικανοποιείται η συνθήκη $\nabla F(\vec{x}^n + \eta^n \vec{p}^n) = 0$, όπου πιθανότατα εμφανίζεται ακρότατο, προκύπτει:

$$\nabla F(\vec{x}^n) + \nabla^2 F(\vec{x}^n) \vec{p}^n = 0 \quad (2.9)$$

Εάν η παραπάνω επιλυθεί ως προς \vec{p}^n , ορίζεται η κατεύθυνση ανίχνευσης Newton ως:

$$\vec{p}^n = -(\nabla^2 F(\vec{x}^n))^{-1} \nabla F(\vec{x}^n) \quad (2.10)$$

η οποία αποδεικνύεται πως είναι κατεύθυνση καθόδου αν το $\nabla^2 F(\vec{x}^n)$ θεωρηθεί θετικά ορισμένο, εφόσον $\vec{p}^{nT} \nabla F(\vec{x}^n) = \vec{p}^{nT} (\nabla^2 F(\vec{x}^n) \vec{p}^n) = -\vec{p}^{nT} \nabla^2 F(\vec{x}^n) \vec{p}^n < 0$ αφού το μητρώο Hess $\nabla^2 F(\vec{x}^n)$ είναι θετικά ορισμένο.

Φυσικά, εάν θεωρηθεί η $\vec{p}^n = (\nabla^2 F(\vec{x}^n))^{-1} \nabla F(\vec{x}^n)$, προκύπτει ομοίως πως είναι **κατεύθυνση ανόδου**.

Θεώρημα 2.5 (Τετραγωνικός ρυθμός σύγκλισης) Υποθέτουμε πως η f είναι δύο φορές διαφορίσιμη και πως το Εσσιανό μητρώο $\nabla^2 F(x)$ είναι συνεχές κατά Lipschitz⁸ σε μια γειτονιά μιας λύσης x^* στην οποία ικανοποιούνται οι ικανές συνθήκες (Θεώρημα 2.4). Θεωρούμε την επανάληψη $x_{k+1} = x_k + p_k$, όπου p_k δίνεται από τη σχέση (3.11). Τότε:

1. εάν το σημείο έναρξης x_0 είναι αρκετά κοντά στη λύση x^* , η ακολουθία επαναλήψεων συγκλίνει στο x^* .
2. ο ρυθμός σύγκλισης της $\{x_k\}$ είναι τετραγωνικός
3. Η ακολουθία της νόρμας του gradient $\{|\nabla f_k|\}$ συγκλίνει τετραγωνικά στο μηδέν.

Απόδειξη: Από τον ορισμό της κατεύθυνσης Newton και την ευνοϊκότερη συνθήκη $\nabla f_* = 0$, έχουμε:

$$x_k + p_k^N - x^* = x_k - x^* - \nabla^2 f_k^{-1} \nabla f_k = \nabla^2 f_k^{-1} [\nabla^2 f_k (x_k - x^*) - (\nabla f_k - \nabla f_*)] \quad (2.11)$$

⁸Μια πραγματική συνάρτηση $f : D \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ λέγεται συνεχής κατά Lipschitz ή λέγεται πως ικανοποιεί μια κατά Lipschitz συνθήκη εάν υπάρχει μια σταθερά $K \geq 0$ τέτοια ώστε για όλα τα x_1, x_2 στο D :

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$$

Το μικρότερο από αυτά τα K λέγεται η σταθερά Lipschitz (Lipschitz constant) της συνάρτησης f .

Η ανισότητα ικανοποιείται οριακά εάν $x_1 = x_2$. Διαφορετικά, για $x_1 \neq x_2$ μπορεί μια συνάρτηση να ορισθεί Lipschitz αν και μόνο αν:

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq K$$

αν και μόνο αν οι κλίσεις όλων των τεμνουσών ευθειών είναι φραγμένες.

Η συνάρτηση λέγεται τοπικά συνεχής κατά Lipschitz αν $\forall x \in D$ υπάρχει μια γειτονιά $U(x)$ έτσι ώστε η f περιορισμένη στο U να είναι συνεχής κατά Lipschitz.

Εφόσον

$$\nabla f_k - \nabla f_* = \int_0^1 \nabla^2 f(x_k + t(x^* - x_k))(x_k - x^*) dt,$$

έχουμε

$$\begin{aligned} & \|\nabla^2 f(x_k)(x_k - x^*) - (\nabla f_k - \nabla f_*)\| \\ &= \left\| \int_0^1 [\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x_k + t(x^* - x_k))] (x_k - x^*) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|\nabla^2 f(x_k + t(x^* - x_k))\| \|x_k - x^*\| dt \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 \int_0^1 L dt = \frac{1}{2} L \|x_k - x^*\|^2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

όπου L η σταθερά Lipschitz για $\nabla^2 F(x)$ για x κοντά στο x^* . Εφόσον το $\nabla^2 F(x^*)$ είναι μη μοναδιαίο και εφόσον $\nabla^2 f_k \rightarrow \nabla^2 f(x^*)$, έχουμε ότι $\|\nabla^2 f_k^{-1}\| \leq 2\|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\|$ για όλα τα k επαρκώς μεγάλα. Αντικαθιστώντας την (3.12) στην (3.13) προκύπτει:

$$\|x_k + p_k^N - x^*\| \leq L \|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\| \|x_k - x^*\|^2 = \tilde{L} \|x_k - x^*\|^2, \quad (2.13)$$

όπου $\tilde{L} = L \|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\|$. Κάνοντας χρήση αυτής της ανισότητας επάγουμε ότι εάν το σημείο έναρξης είναι επαρκώς κοντά στο x^* , τότε η ακολουθία συγκλίνει στο x^* και ο ρυθμός σύγκλισης είναι τετραγωνικός.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $x_{k+1} - x_k = p_k^N$ και $\nabla f_k + \nabla^2 f(x_k) p_k^N = 0$, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \|\nabla f(x_{k+1})\| &= \|\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f_k - \nabla^2 f(x_k) p_k^N\| \\ &= \left\| \int_0^1 \nabla^2 f(x_k + t p_k^N)(x_{k+1} - x_k) dt - \nabla^2 f(x_k) p_k^N \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|\nabla^2 f(x_k + t p_k^N) - \nabla^2 f(x_k)\| \|p_k^N\| dt \\ &\leq \frac{1}{2} L \|p_k^N\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} L \|\nabla^2 f(x_k)^{-1}\|^2 \|\nabla f_k\|^2 \\ &\leq 2L \|\nabla^2 f(x_k)^{-1}\|^2 \|\nabla f_k\|^2, \end{aligned}$$

αποδεικνύοντας ότι οι νόρμες του gradient συγκλίνουν τετραγωνικά στο μηδέν. ■

Επομένως, όταν η κατεύθυνση ανίχνευσης δίνεται από τη μέθοδο Newton, κάτω από ορισμένες συνθήκες και αν το βήμα είναι αρκετά μικρό, προκύπτει τοπικά τετραγωνικός ρυθμός σύγκλισης. Αποδεικνύεται[10] πως, στη θεωρία, το βήμα της κατεύθυνσης Newton είναι $\eta_k = 1$.

Προφανής διαφορά της μεθόδου σε σχέση με τις προηγούμενες είναι πως απαιτεί τον υπολογισμό του Εσσιανού μητρώου της συνάρτησης κόστους, διαδικασία υπολογιστικά απαιτητική σε σχέση με την αντίστοιχη για τον υπολογισμό πρώτων παραγώγων. Λόγω του

αυξημένου υπολογιστικού κόστους, προτιμάται μιας μεθόδου καθόδου μόνο εάν πρόκειται να προκαλέσει σημαντικά ταχύτερη σύγκλιση.

2.4. Προβλήματα Σύγκλισης

2.4.1. Μέθοδος Απότομης Καθόδου - Το Πρόβλημα της Αδιαστατοποίησης και η Σημασία του Μήκους Βήματος

Η απόδοση ενός αλγορίθμου μπορεί να εξαρτάται σε μείζονα βαθμό από τη διατύπωση του προβλήματος. Ένα σημαντικό σημείο στη διατύπωση του προβλήματος είναι η αδιαστατοποίηση (*scaling*).

Δίνεται για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = 10^6 x_1^2 + x_2^2$. Είναι φανερό πως η συνάρτηση αυτή είναι εξαιρετικά ευαίσθητη σε μικρές αλλαγές του x_1 , αλλά πρακτικά αναισθητη σε αλλαγές του x_2 , εκτός και αν το x_1 είναι αρκετές τάξεις μεγέθους μικρότερο του x_2 .

Η βιβλιογραφία[10] προτείνει την αδιαστατοποίηση της εξίσωσης εισάγοντας δυο νέες μεταβλητές z_1, z_2 που ορίζονται ως:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Έπειτα ορίζουμε και επιλύουμε το πρόβλημα της βελτιστοποίησης ως προς τη νέα μεταβλητή z , η οποία θα κυμαίνεται από 0 – 1. Αυτή μέθοδος ονομάζεται *διαγώνια αδιαστατοποίηση (diagonal scaling)*.

Στο πρόβλημα της βελτιστοποίησης του υπερηχητικού αεροσκάφους ανέκυψε το πρόβλημα του *scaling*, όπου αντιμετωπίστηκε λίγο διαφορετικά. Ας εξετάσουμε μια εφαρμογή όπου θα έχουμε την ευκαιρία να συζητήσουμε τη σημασία της επιλογής του μήκους βήματος και την επιρροή του στην αδιαστατοποίηση.

Εφαρμογή – Ελαχιστοποίηση χωρίς Περιορισμούς

Θεωρείται η προηγούμενη συνάρτηση: $f(x) = 10^6 x_1^2 + x_2^2$. Αναζητείται το ελάχιστο της συνάρτησης ($f(0,0) = 0$) εφαρμόζοντας τη μέθοδο της απότομης καθόδου.

Υποτίθεται μια αρχική τιμή ίδιας τάξης μεγέθους των μεταβλητών σχεδιασμού, έστω $x_1 = 0.5, x_2 = 0.75$

Ως γνωστόν, η σχέση της απότομης καθόδου είναι :

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n - \eta \nabla F(\vec{x}^n)$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση στο πρόβλημα προκύπτει για τις δύο μεταβλητές για $\eta = 1$:

➤ 1^η Επανάληψη

$$\begin{cases} x_1^{n+1} = x_1^n - \eta \nabla F(x_1^n) = 0.5 - 1 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0.5 = -999999.5 \\ x_2^{n+1} = x_2^n - \eta \nabla F(x_2^n) = 0.75 - 1 \cdot 2 \cdot 0.75 = -0.75 \end{cases}$$

➤ 2^η Επανάληψη

$$\begin{cases} x_1^{n+1} = x_1^n - \eta \nabla F(x_1^n) = -999999.5 - 1 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot (-999999.5) = 1.999998 \cdot 10^{12} \\ x_2^{n+1} = x_2^n - \eta \nabla F(x_2^n) = -0.75 - 1 \cdot 2 \cdot (-0.75) = 0.75 \end{cases}$$

Είναι εμφανές πως όσο συνεχίζεται αυτή η διαδικασία, ο αλγόριθμος θα αποκλίνει, εφόσον η τιμή που προστίθεται στο \vec{x}_1^n είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτό, ενώ το \vec{x}_2^n θα ταλαντώνεται μεταξύ των τιμών -0.75, 0.75.

Έστω λοιπόν $\eta = 1 \cdot 10^{-8}$:

➤ 1^η Επανάληψη

$$\begin{cases} x_1^{n+1} = x_1^n - \eta \nabla F(x_1^n) = 0.5 - 1 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0.5 = 0.49 \\ x_2^{n+1} = x_2^n - \eta \nabla F(x_2^n) = 0.75 - 1 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 0.75 = 0.749999985 \end{cases}$$

➤ 2^η Επανάληψη

$$\begin{cases} x_1^{n+1} = x_1^n - \eta \nabla F(x_1^n) = 0.49 - 1 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0.49 = 0.4802 \\ x_2^{n+1} = x_2^n - \eta \nabla F(x_2^n) = 0.749999985 - 1 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 0.749999985 = 0.749999997 \end{cases}$$

Με το βήμα αυτό ο αλγόριθμος δεν αποκλίνει πλέον, αλλά συγκλίνει απαγορευτικά αργά. Το πρόβλημα του scaling αρχίζει και γίνεται εμφανές στο σημείο αυτό καθώς ενώ η μεταβλητή x_1 θα χρειαστεί γύρω στις 50 επαναλήψεις για να συγκλίνει στο 0, η τιμή x_2 θα χρειαστεί κάποια εκατομμύρια!

Έστω τώρα $\eta = 1 \cdot 10^{-7}$:

➤ 1^η Επανάληψη

$$\begin{cases} x_1^{n+1} = x_1^n - \eta \nabla F(x_1^n) = 0.5 - 1 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0.5 = 0.4 \\ x_2^{n+1} = x_2^n - \eta \nabla F(x_2^n) = 0.75 - 1 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 0.75 = 0.749999985 \end{cases}$$

➤ 2^η Επανάληψη

$$\begin{cases} x_1^{n+1} = x_1^n - \eta \nabla F(x_1^n) = 0.4 - 1 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0.4 = 0.32 \\ x_2^{n+1} = x_2^n - \eta \nabla F(x_2^n) = 0.749999985 - 1 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 0.749999985 = 0.749999997 \end{cases}$$

Βλέπουμε τώρα πως η μεταβλητή x_1 θα συγκλίνει σε μικρό αριθμό επαναλήψεων, ενώ η σύγκλιση της μεταβλητής x_2 ούτε καν επηρεάστηκε.

Θεωρούμε λοιπόν το διάνυσμα $\eta^n = \begin{cases} 1 \cdot 10^{-7} \\ 1 \cdot 10^{-1} \end{cases}$

➤ 1^η Επανάληψη

$$\begin{cases} x_1^{n+1} = x_1^n - \eta \nabla F(x_1^n) = 0.5 - 1 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0.5 = 0.4 \\ x_2^{n+1} = x_2^n - \eta \nabla F(x_2^n) = 0.75 - 1 \cdot 10^{-1} \cdot 2 \cdot 0.75 = 0.6 \end{cases}$$

➤ 2^η Επανάληψη

$$\begin{cases} x_1^{n+1} = x_1^n - \eta \nabla F(x_1^n) = 0.4 - 1 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0.4 = 0.32 \\ x_2^{n+1} = x_2^n - \eta \nabla F(x_2^n) = 0.6 - 1 \cdot 10^{-1} \cdot 2 \cdot 0.6 = 0.48 \end{cases}$$

➤ 3^η Επανάληψη

$$\begin{cases} x_1^{n+1} = x_1^n - \eta \nabla F(x_1^n) = 0.32 - 1 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0.32 = 0.256 \\ x_2^{n+1} = x_2^n - \eta \nabla F(x_2^n) = 0.48 - 1 \cdot 10^{-1} \cdot 2 \cdot 0.48 = 0.384 \end{cases}$$

Έτσι, επιλέγοντας διαφορετικό μήκος βήματος για κάθε μεταβλητή, λαμβάνοντας υπόψιν τη διαφορά της τάξης μεγέθους της με την τάξη μεγέθους της παραγώγου της, επιτυγχάνεται σύγκλιση σε μικρό αριθμό επαναλήψεων.

Είναι σημαντικό στο σημείο αυτό να τονιστεί πως το πρόβλημα δεν δημιουργείται απλώς από τη διαφορά στην τάξη μεγέθους των μεταβλητών, καθώς εάν η συνάρτηση $f(x) = 10^6 x_1^2 + x_2^2$ είχε αρχικές τιμές $x_1 = 0.0000005$, $x_2 = 0.75$ ο ρυθμός σύγκλισης θα ήταν ικανοποιητικός μόνο αν χρησιμοποιούνταν το ίδιο μήκος βήματος ($\eta = 1 \cdot 10^{-1}$) και για τις δύο μεταβλητές.

Το πρόβλημα λοιπόν δημιουργείται από τη διαφορά της τάξης μεγέθους των μεταβλητών με την τάξη μεγέθους των παραγώγων τους, και συγκεκριμένα αν η διαφορά αυτή διαφέρει μεταξύ των μεταβλητών.

Στο εν λόγω παράδειγμα, αν θεωρηθούν οι λόγοι της τάξης μεγέθους της μεταβλητής με την τάξη μεγέθους της παραγώγου προκύπτει:

Μεταβλητή	Τιμή Μεταβλητής	Τιμή Παραγώγου	Τάξη Μεγέθους Μεταβλητής	Τάξη Μεγέθους Παραγώγου	$\frac{\text{Τάξη Μεγέθους Παραγώγου}}{\text{Τάξη Μεγέθους Μεταβλητής}}$
x_1	0.5	10^6	10^0	10^6	10^6
x_2	0.75	1.5	10^0	10^0	1

Πίνακας 2.1 – Σύγκριση Τάξεων Μεγέθους

Στο σημείο αυτό ας θυμηθούμε τη σχέση της απότομης καθόδου:

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n - \eta^n \nabla F(\vec{x}^n)$$

διαιρώντας με $\vec{x}^n \neq 0$:

$$\frac{\vec{x}^{n+1}}{\vec{x}^n} = 1 - \eta^n \frac{\nabla F(\vec{x}^n)}{\vec{x}^n} \quad (2.14)$$

Από την παραπάνω εξίσωση είναι φανερό πως εάν η ποσότητα $\eta^n \frac{\nabla F(\vec{x}^n)}{\vec{x}^n}$ είναι πολύ μεγάλη, ο αλγόριθμος θα αποκλίνει, εφόσον η νέα τιμή θα είναι συνεχώς πολύ μεγαλύτερη (κατ' απόλυτη τιμή) της προηγούμενης. Είδαμε την περίπτωση αυτή και στην πράξη στην πρώτη υπόθεση της εφαρμογής.

Εάν η ποσότητα αυτή είναι πολύ μικρή, τότε $\frac{\bar{x}^{n+1}}{\bar{x}^n} \approx 1$, δηλαδή η νέα τιμή θα είναι σχεδόν ίδια με την προηγούμενη, γεγονός που οδηγεί σε πολύ αργή σύγκλιση του αλγορίθμου.

Η τεχνική που εφαρμόστηκε για να αντιμετωπισθεί αυτό το πρόβλημα κάνει χρήση της εμπλοκής της ποσότητας η^n στην εξίσωση (2.14). Είναι φανερό πως το μήκος βήματος είναι στην ουσία ένας ρυθμιστικός παράγων ο οποίος καθορίζει το ποσοστό της σχετικής μεταβολής της τιμής της μεταβλητής σχεδιασμού \bar{x}^{n+1} . Αντικαθιστώντας τα δεδομένα του πίνακα 2.1 στην εξίσωση (3.15) για $\eta = 1$:

$$\begin{cases} \frac{[x_1^{n+1}]}{[x_1^n]} = 1 - \eta^1 \frac{[\nabla F(x_1^n)]}{[x_1^n]} = 1 - 10^6 = -999999 \\ \frac{[x_2^{n+1}]}{[x_2^n]} = 1 - \eta^2 \frac{[\nabla F(x_2^n)]}{[x_2^n]} = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

Εάν όμως τεθεί η απαίτηση ότι το η πρέπει να είναι τέτοιο ώστε π.χ. $1 - \eta_i \frac{[\nabla F(x_i^n)]}{[x_i^n]} = [10^{-1}]$ (σημειώνεται πως $[10^{-1}]$ σημαίνει τάξη μεγέθους 10^{-1}), δηλαδή η μεταβολή της τιμής της μεταβλητής σχεδιασμού να είναι μία τάξη μεγέθους κάτω από την τιμή της, προκύπτει:

$$\begin{cases} [\eta^1] = 10^{-7} \\ [\eta^2] = 10^{-1} \end{cases}$$

οι οποίες, όπως είδαμε και νωρίτερα, είναι πολύ καλές τιμές μήκους βήματος που οδηγούν σε γρήγορη σύγκλιση.

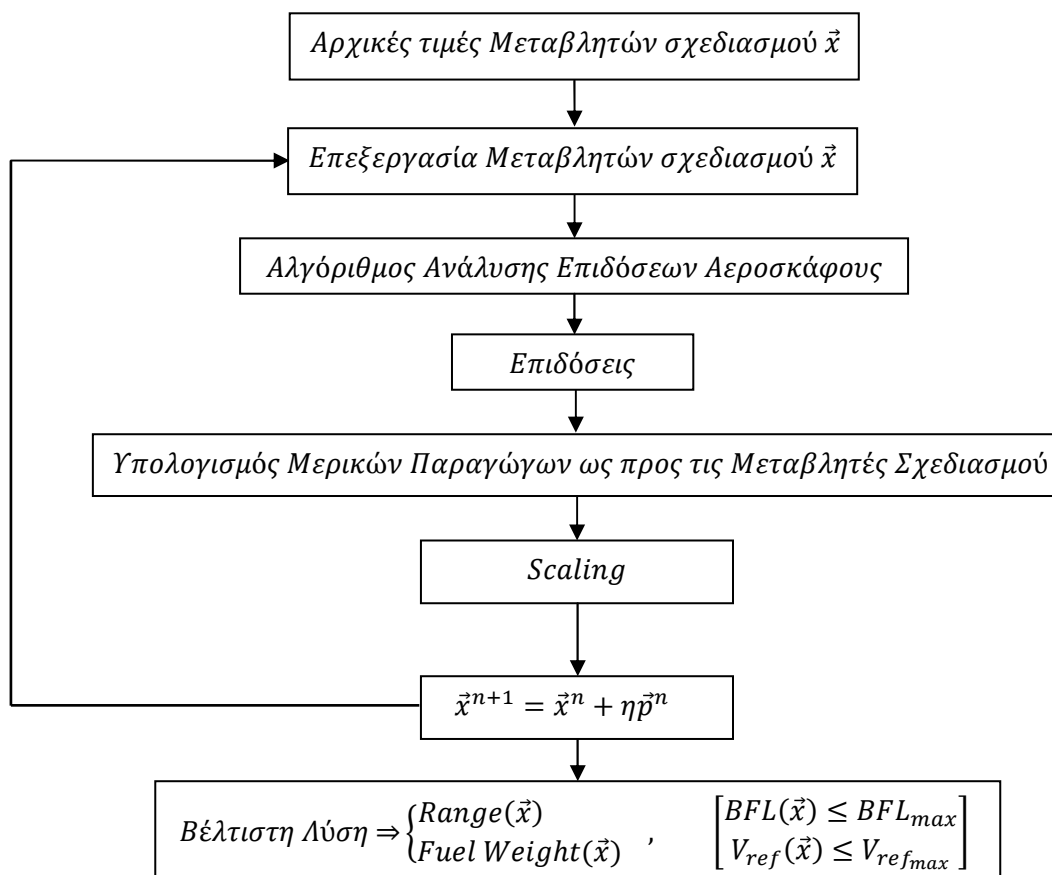
➤ Προγραμματιστική Αντιμετώπιση του Προβλήματος της Αδιαστατοποίησης

Τρέχοντας τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης για το μοντέλο του αεροσκάφους ανέκυψε, όπως προαναφέρθηκε, το πρόβλημα του scaling. Το τρόπο που αντιμετωπίστηκε είναι προγραμματίζοντας μια υπορουτίνα η οποία εκτελεί σε κάθε επανάληψη τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω – ρυθμίζει το μήκος βήματος για κάθε μεταβλητή σχεδιασμού έτσι ώστε να ισχύει:

$$\eta_i \frac{[\nabla F(x_i^n)]}{[x_i^n]} = 10^{-2}$$

δηλαδή ρυθμίζει *δυναμικά* το μήκος βήματος για κάθε μεταβλητή σε κάθε επανάληψη (σε αντίθεση με μια *στατική* ρύθμιση όπου θα επιλεγόταν ένα σταθερό μήκος βήματος για κάθε μεταβλητή εξ' αρχής. Στην περίπτωση αυτή, εάν οι τάξεις μεγέθους αλλάζουν σημαντικά στην πορεία, ο ρυθμός σύγκλισης του αλγορίθμου ενδέχεται να μειωθεί σημαντικά.)

Εντέλει, ο γενικός αλγόριθμος της βελτιστοποίησης με τη μέθοδο Απότομης Καθόδου παίρνει τη μορφή:

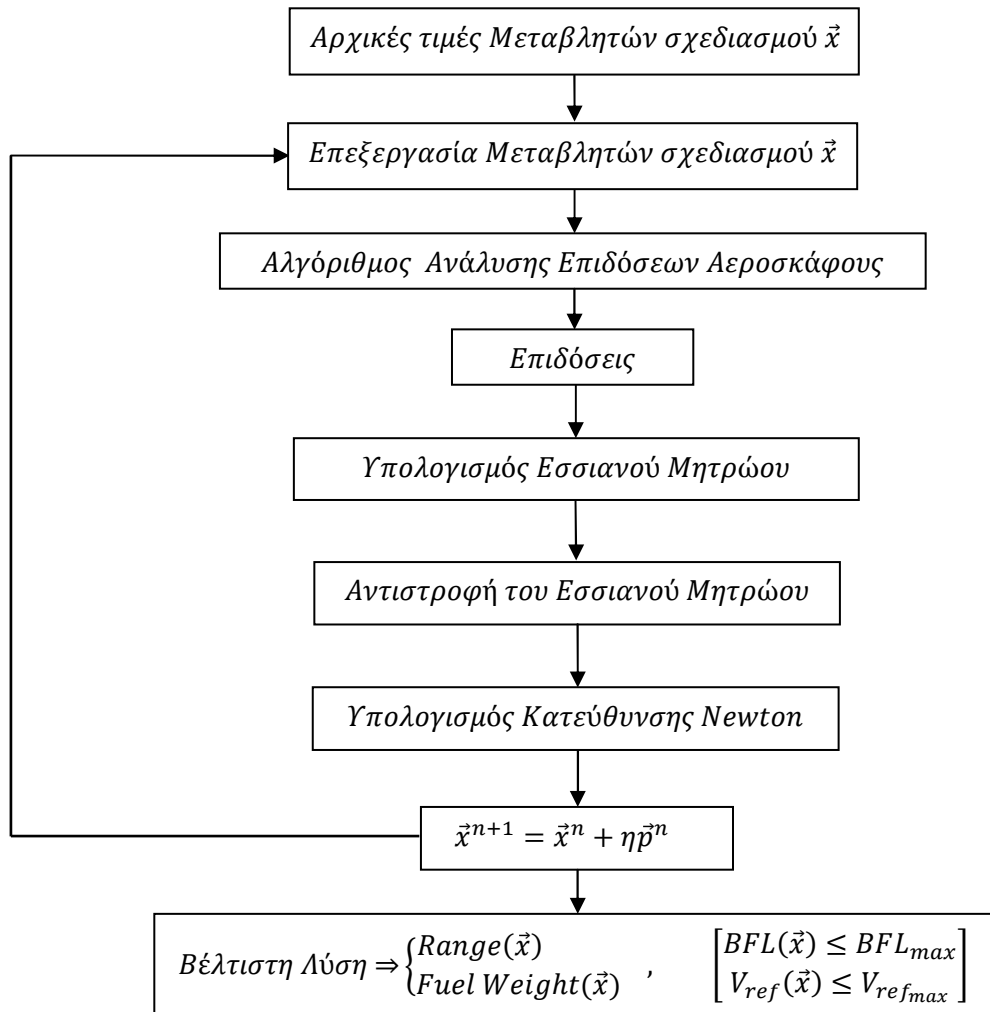


Σχήμα 2.2 – Γενική μορφή αλγορίθμου βελτιστοποίησης με τη μέθοδο Απότομης Καθόδου

2.4.2. Δυσκολίες στη Σύγκλιση της Απλής Μεθόδου Newton

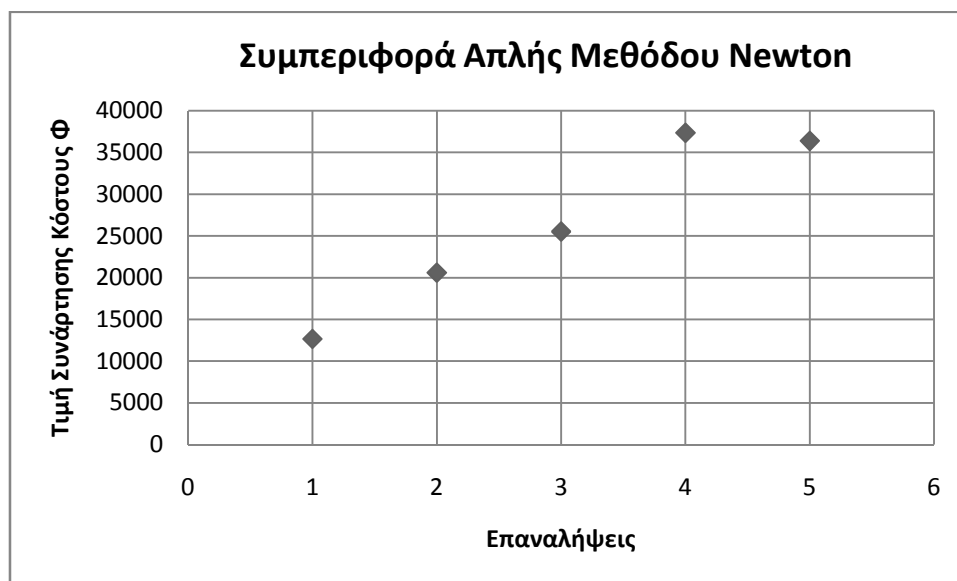
Η επιτυχημένη εφαρμογή της μεθόδου Newton σε ένα περίπλοκο πρόβλημα είναι μια εξαιρετικά δύσκολη διαδικασία. Αυτό συμβαίνει επειδή η μέθοδος Newton μπορεί να εμφανίσει σοβαρά προβλήματα σύγκλισης, ειδικά σε προβλήματα με περιορισμούς. Υπάρχουν γενικά δύο λόγοι για τους οποίους μπορεί η μέθοδος Newton να παρουσιάζει λανθασμένη συμπεριφορά: το μητρώο να μην είναι θετικά ορισμένο ή σχεδόν μοναδιαίο και το μήκος βήματος να μην είναι επαρκώς μικρό.

Θεωρητικά, η μέθοδος Newton χρησιμοποιεί ενιαίο μήκος βήματος $\eta = 1$. Εάν προγραμματισθεί για τη βελτιστοποίηση του αεροσκάφους με τη μέθοδο Newton ένας απλός αλγόριθμος όπως ο παρακάτω (το Εσσιανό μητρώο υπολογίστηκε με τη μέθοδο Μιγαδικών Μεταβλητών):



Σχήμα 2.3 – Γενική μορφή αλγορίθμου βελτιστοποίησης μεθόδου Newton

έχει την ακόλουθη συμπεριφορά:



Σχήμα 2.4 – Συμπεριφορά Μεθόδου Newton χωρίς τροποποιήσεις

και τερματίζει με μαθηματικό σφάλμα.

Καλούμαστε λοιπόν στο σημείο αυτό να εντοπίσουμε το αίτιο του προβλήματος. Παρατηρούμε κατ' αρχάς πως η συνάρτηση κόστους δεν ακολουθεί πορεία καθοδική. Όμως, με βάση την απόδειξη της παραγράφου 2.3.3, ακολουθώντας την κατεύθυνση Newton, η τιμή της συνάρτησης κόστους πρέπει να μειώνεται. Το γεγονός ότι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης εντέλει αυξάνεται σημαίνει πως παραβιάζεται κάποιος ή κάποιοι από τους όρους υπό τους οποίους η κατεύθυνση Newton αποτελεί κατεύθυνση καθόδου.

Ας θυμηθούμε την κατεύθυνση Newton:

$$\vec{p}^n = -(\nabla^2 F(\vec{x}^n))^{-1} \nabla F(\vec{x}^n) \quad (2.15)$$

Σύμφωνα με την απόδειξη της παραγράφου 2.3.3, εάν το Εσσιανό μητρώο είναι θετικά ορισμένο, τότε η κατεύθυνση (2.15) είναι κατεύθυνση καθόδου.

Εξετάζεται λοιπόν το Εσσιανό μητρώο χρησιμοποιώντας τον ορισμό του θετικά ορισμένου μητρώου:

Ορισμός 2.5 Ένα μητρώο B ονομάζεται **θετικά ορισμένο** (positive definite) αν:

$$\vec{p}^T B \vec{p} > 0, \forall \vec{p}$$

Αυτό σημαίνει πως πολλαπλασιάζοντας το μητρώο με ένα διάνυσμα και το ανάστροφό του προκύπτει ένας πραγματικός αριθμός. Εάν αυτός είναι θετικός, το μητρώο είναι θετικά ορισμένο. Ελέγχοντας το Εσσιανό μητρώο σε κάθε επανάληψη, προκύπτει πως σε ορισμένες επαναλήψεις το μητρώο είναι αρνητικά ορισμένο, δηλαδή ο αριθμός που προκύπτει από το γινόμενο των διανυσμάτων είναι αρνητικός.

2.4.3. Τροποποιημένη Μέθοδος Newton

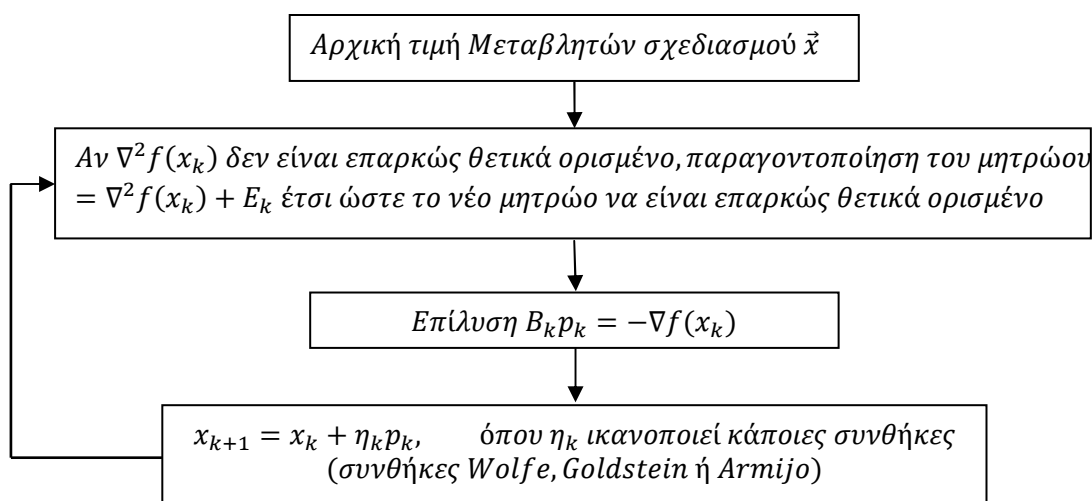
Σε περίπτωση που το Εσσιανό μητρώο δεν είναι επαρκώς θετικά ορισμένο (sufficiently positive definite)⁹, υπάρχουν δύο στρατηγικές που ακολουθούνται συνήθως.

Η πρώτη είναι να επιλυθεί η (2.15) χρησιμοποιώντας μέθοδο *Conjugate Gradient*[10], τερματίζοντας όταν ανιχνευθεί αρνητική καμπυλότητα. Υπάρχουν τόσο μέθοδοι ανίχνευσης κατά γραμμή όσο και ανίχνευσης ανά περιοχές εμπιστοσύνης για την υλοποίηση αυτής της στρατηγικής, οι οποίες καλούνται *Newton – CG (Conjugate Gradient) Methods*.

Η δεύτερη προσέγγιση περιλαμβάνει την τροποποίηση του Εσσιανού μητρώου πριν ή κατά τη διάρκεια της επίλυσης του συστήματος (2.15) έτσι ώστε να γίνει επαρκώς θετικά ορισμένο. Αυτή η μέθοδος καλείται *Τροποποιημένη Μέθοδος Newton (Modified Newton Method)*.

⁹ Υπάρχουν περιπτώσεις όπου το Εσσιανό μητρώο δεν είναι αρνητικά ορισμένο, ή σχεδόν μοναδιαίο, αλλά δεν είναι επαρκώς θετικά ορισμένο. Στην εργασία αυτή εμφανίζονται τέτοιας μορφής μητρώα. Στην περίπτωση αυτή, το μητρώο τροποποιείται έτσι ώστε να είναι επαρκώς θετικά ορισμένο μέσω της Τροποποιημένης Μεθόδου Newton.

2.4.3.1. Αλγόριθμος Τροποποιημένης Μεθόδου Newton



Σχήμα 2.5 – Αλγόριθμος Τροποποιημένης Μεθόδου Newton

Η γενική ιδέα της μεθόδου είναι πως εάν το Εσσιανό μητρώο δεν είναι θετικά ορισμένο, ή είναι σχεδόν μοναδιαίο, μπορεί να τροποποιηθεί το μητρώο πριν, ή κατά τη διάρκεια του υπολογισμού των νέων τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού. Το τροποποιημένο Εσσιανό μητρώο αποκτάται προσθέτοντας είτε ένα θετικό διαγώνιο μητρώο ή ένα πλήρες μητρώο, στο πραγματικό Εσσιανό μητρώο.

Η λογική είναι πως προσθέτουμε ένα μητρώο E_k στο Εσσιανό μητρώο, τέτοιο ώστε το νέο μητρώο B_k να είναι θετικά ορισμένο:

$$B_k = \nabla^2 f(x_k) + E_k \quad (2.16)$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιείται το νέο μητρώο B_k για να υπολογισθεί η κατεύθυνση Newton η οποία, αφού το B_k είναι εξ' ορισμού θετικά ορισμένο, θα είναι κατεύθυνση καθόδου.

Η επιλογή της Εσσιανής τροποποίησης E_k είναι κρίσιμη στην αποτελεσματικότητα της μεθόδου. Κάποιες προσεγγίσεις δεν υπολογίζουν ρητά την E_k , αλλά εισάγουν έξτρα βήματα και ελέγχους σε συνήθεις διαδικασίες παραγοντοποίησης (*factorization*), τροποποιώντας αυτές τις διαδικασίες «επί τόπου» έτσι ώστε οι υπολογισμένοι παράγοντες είναι στην πραγματικότητα οι παράγοντες ενός θετικά ορισμένου μητρώου.

Παρακάτω περιγράφονται οι στρατηγικές που βασίζονται στην τροποποίηση μιας παραγοντοποίησης Cholesky και στην τροποποίηση μιας συμμετρικής αόριστης παραγοντοποίησης του Εσσιανού μητρώου.

➤ Φραγμένη τροποποιημένη παραγοντοποίηση

Είναι δυνατόν να εξασφαλισθούν ικανοποιητικές συνθήκες σύγκλισης για τη μέθοδο, εφόσον η στρατηγική για την επιλογή της E_k ικανοποιεί την ιδιότητα της φραγμένης τροποποιημένης παραγοντοποίησης (*bounded modified factorization property*). Η ιδιότητα

αυτή είναι ότι η ακολουθία μητρών $\{B_k\}$ έχουν φραγμένο αριθμό κατάστασης¹⁰ οποτεδήποτε η ακολουθία Εσσιανών μητρών $\{\nabla^2 f(x_k)\}$ είναι φραγμένη, δηλαδή:

$$\text{cond}(B_k) = \|B_k\| \|B_k^{-1}\| \leq C, \quad \text{για κάποιο } C > 0 \text{ και όλα τα } k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

Εάν αυτή η ιδιότητα ισχύει, η σύγκλιση της τροποποιημένης μεθόδου Newton αποδεικνύεται πως ακολουθεί τους κανόνες της απλής μεθόδου Newton που παρουσιάστηκε σε προηγούμενη παράγραφο.

Θεώρημα 2.6 Έστω συνάρτηση f δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε ένα ανοιχτό χωρίο D και το σημείο x_0 έναρξης του αλγορίθμου της τροποποιημένης μεθόδου Newton είναι τέτοιο ώστε το χωρίο $L = \{x \in D: f(x) \leq f(x_0)\}$ να είναι κλειστό. Τότε, εάν ισχύει η συνθήκη της φραγμένης τροποποιημένης παραγοντοποίησης, έχουμε πως:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla f(x_k) = 0$$

Απόδειξη: Η ανίχνευση κατά γραμμή εξασφαλίζει πως όλες οι επαναλήψεις x_k παραμένουν στο χωρίο D . Αφού το $\nabla^2 f(x)$ θεωρείται συνεχές στο D και το D είναι κλειστό, προκύπτει πως η ακολουθία των Εσσιανών $\{\nabla^2 f(x_k)\}$ είναι φραγμένη, άρα η (3.18) ισχύει. Εφόσον η μέθοδος χρησιμοποιεί μέθοδο ανίχνευσης κατά γραμμή για την οποία ισχύει το θεώρημα Zoutendijk¹¹ ■

Ας εξετάσουμε τώρα το ρυθμό σύγκλισης του παραπάνω αλγορίθμου. Υποθέτουμε πως η ακολουθία των επαναλήψεων x_k συγκλίνει σε ένα σημείο x^* όπου $\nabla^2 f(x^*)$ είναι επαρκώς θετικά ορισμένο (με την έννοια ότι οι τεχνικές τροποποίησης που θα περιγραφούν παρακάτω επιστρέφουν την τροποποίηση $E_k = 0$ για επαρκώς μεγάλα k). Αποδεικνύεται[10] πως για επαρκώς μεγάλα k , $\alpha_k = 1$ οπότε ο αλγόριθμος της τροποποιημένης μεθόδου Newton εκφυλίζεται σε μια απλή μέθοδο Newton και ο ρυθμός σύγκλισης είναι τετραγωνικός.

¹⁰ Στην αριθμητική ανάλυση, ο αριθμός κατάστασης που σχετίζεται με ένα πρόβλημα είναι ένα μέτρο της ευπάθειάς του στους αριθμητικούς υπολογισμούς, δηλαδή πόσο καλά τοποθετημένο* είναι το πρόβλημα. Ένα πρόβλημα με μικρό αριθμό κατάστασης λέγεται πως είναι *well-conditioned*, ενώ ένα πρόβλημα με υψηλό αριθμό κατάστασης λέγεται πως είναι *ill-conditioned*.

* Ο ορισμός του καλά τοποθετημένου προβλήματος (well posed problem) δόθηκε από τον Hadamard ο οποίος πίστευε πως τα μαθηματικά μοντέλα φυσικών φαινομένων θα πρέπει να έχουν τις εξής ιδιότητες:

1. Να υπάρχει λύση
2. Η λύση να είναι μοναδική
3. Η λύση εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα, σε μια λογική τοπολογία

Παραδείγματα αρχέτυπων τέτοιων προβλημάτων περιλαμβάνουν τα Dirichlet problem for Laplace's equation και την εξίσωση μεταφοράς θερμότητας με ορισμένες αρχικές συνθήκες.

¹¹ Θεώρημα που αποδεικνύει πως υπό κάποιες, όχι πολύ αυστηρές, προϋποθέσεις:

$$\cos^2 \theta_k \|\nabla f_k\|^2 \rightarrow 0$$

Το αποτέλεσμα αυτό χρησιμοποιείται σε πολλούς υπολογισμούς και αποδείξεις που αφορούν τη σύγκλιση μιας μεθόδου.

Για προβλήματα όπου ∇f^* είναι σχεδόν μοναδιαίο, δεν υπάρχει καμιά εγγύηση πως η τροποποίηση E_k εντέλει θα εξαφανισθεί, και ο ρυθμός σύγκλισης μπορεί να είναι απλά γραμμικός.

2.4.3.2. Τροποποιημένη Μέθοδος Παραγοντοποίησης Cholesky

Αφού περιγράφηκε ο αλγόριθμος της τροποποιημένης μεθόδου Newton, απομένει να παρατεθεί η μέθοδος τροποποίησης του Εσσιανού μητρώου.

Εντούτοις, η ιδέα τροποποίησης του Εσσιανού μητρώου εισάγει τον κίνδυνο το μητρώο να τροποποιηθεί τόσο πολύ ώστε η κατεύθυνση Newton να εκφυλισθεί σε κατεύθυνση Απότομης Καθόδου. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν διάφορες μέθοδοι σύμφωνα με τις οποίες το Εσσιανό μητρώο μπορεί να τροποποιηθεί ακριβώς όσο χρειάζεται για να γίνει επαρκώς θετικά ορισμένο και όχι παραπάνω, αλλοιώνοντας έτσι όσο το δυνατόν λιγότερο την κατεύθυνση Newton.

Από αυτές, επελέγη η τροποποιημένη μέθοδος παραγοντοποίησης Cholesky λόγω των πολύ καλών αποτελεσμάτων της. Στις γραμμές που ακολουθούν παρουσιάζονται περιληπτικά δύο ακόμη (προβληματικές) μέθοδοι/ιδέες τροποποίησης μητρώου οι οποίες βοηθούν ώστε να γίνει αντιληπτό το πρόβλημα και η λογική αντιμετώπισής του.

➤ Τροποποίηση Ιδιοτιμών

Αποδεικνύεται πως εάν κάποιες από τις ιδιοτιμές ενός μητρώου είναι αρνητικές, το μητρώο θα είναι θετικά ορισμένο. Είναι εύλογο λοιπόν πως εάν αντικαταστήσουμε τις αρνητικές ιδιοτιμές του Εσσιανού μητρώου με μια πολύ μικρή θετική ποσότητα δ , θα προκύψει ένα θετικά ορισμένο μητρώο που θα μοιάζει στο Εσσιανό.

Το πρόβλημα με την παραπάνω προσέγγιση είναι πως η κατεύθυνση που προκύπτει είναι αρκετά διαφορετική από την κατεύθυνση Newton, γεγονός που οδηγεί στη διατύπωση της παρακάτω μεθόδου.

➤ Πρόσθεση διαγώνιου μητρώου

Η πιο απλή ιδέα είναι να βρεθεί ένα βαθμωτό μέγεθος $\tau > 0$ έτσι ώστε $\nabla^2 f(x_k) + \tau I$ να είναι επαρκώς θετικά ορισμένο. Το μέγεθος του τ μπορεί να εκτιμηθεί, όμως η μέθοδος παρουσιάζει δύο μειονεκτήματα. Το πρώτο είναι πως η τιμή του τ μπορεί να είναι αχρείαστα μεγάλη και η υπολογιστική υλοποίηση της μεθόδου μπορεί να γίνει αρκετά ακριβή. Για τους λόγους αυτούς, η μέθοδος αυτή δεν παρουσιάζεται αναλυτικά.

➤ Τροποποιημένη Μέθοδος Παραγοντοποίησης Cholesky

Μια δημοφιλής μέθοδος για την τροποποίηση ενός Εσσιανού μητρώου το οποίο δεν είναι θετικά ορισμένο είναι να εκτελεσθεί μια παραγοντοποίηση Cholesky του $\nabla^2 f(x_k)$, αυξάνοντας όπου χρειάζεται τα διαγώνια στοιχεία που απαντώνται κατά τη διάρκεια της παραγοντοποίησης για να εξασφαλισθεί πως είναι επαρκώς θετικά. Αυτή η τροποποιημένη Cholesky προσέγγιση είναι σχεδιασμένη για να επιτύχει δύο στόχους:

- Εγγυάται πως οι τροποποιημένοι παράγοντες Cholesky υπάρχουν και είναι φραγμένοι σε σχέση με τη νόρμα του Εσσιανού μητρώου και
- Δεν τροποποιεί το Εσσιανό μητρώο εάν είναι επαρκώς θετικά ορισμένο

Θα αρχίσουμε την περιγραφή της μεθόδου παραθέτοντας σύντομα την παραγοντοποίηση Cholesky.

Κάθε συμμετρικό και θετικά ορισμένο μητρώο A μπορεί να γραφεί ως:

$$A = LDL^T, \quad (2.18)$$

όπου L είναι ένα κάτω τριγωνικό μητρώο με μοναδιαία διαγώνια στοιχεία και D είναι ένα διαγώνιο μητρώο με θετικά στοιχεία στη διαγώνιο. Εξισώνοντας τα στοιχεία στην (2.18), στήλη με στήλη, είναι εύκολο να βρεθούν οι σχέσεις για τον υπολογισμό των L και D .

Εφαρμογή

Έστω ένα μητρώο 3×3 . Η εξίσωση $A = LDL^T$ δίνεται από:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ 0 & 1 & l_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(οι δείκτες υπονοούν πως το A είναι συμμετρικό) Εξισώνοντας τα στοιχεία στην πρώτη στήλη, έχουμε:

$$a_{11} = d_1,$$

$$a_{21} = d_1 l_{21} \rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{d_1},$$

$$a_{31} = d_1 l_{31} \rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{d_1}.$$

Συνεχίζοντας με τις απόμενες δύο στήλες, προκύπτει:

$$a_{22} = d_1 l_{21}^2 + d_2 \rightarrow d_2 = a_{22} - d_1 l_{21}^2,$$

$$a_{32} = d_1 l_{31} l_{21} + d_2 l_{32} \rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - d_1 l_{31} l_{21}}{d_2},$$

$$a_{33} = d_1 l_{31}^2 + d_2 l_{32}^2 + d_3 \rightarrow d_3 = a_{33} - d_1 l_{31}^2 - d_2 l_{32}^2$$

Η παραπάνω διαδικασία γενικεύεται στον παρακάτω αλγόριθμο:

Αλγόριθμος Παραγοντοποίησης Cholesky

```

for     $j = 1, 2, \dots, n$ 
     $c_{jj} \leftarrow a_{jj} - \sum_{s=1}^{j-1} d_s l_{js}^2$ 
     $d_j \leftarrow c_{jj}$ 
    for     $i = j + 1, \dots, n$ 
         $c_{ij} \leftarrow a_{ij} - \sum_{s=1}^{j-1} d_s l_{is} l_{js}$ 
         $l_{ij} \leftarrow \frac{c_{ij}}{d_j}$ 
    end
end
    
```

Μπορεί να αποδειχθεί¹² πως τα διαγώνια στοιχεία d_{jj} είναι όλα θετικά όταν το A είναι θετικά ορισμένο. Οι βαθμωτές ποσότητες c_{ij} εισήχθησαν για να διευκολύνουν την περιγραφή της τροποποιημένης παραγοντοποίησης που θα ακολουθήσει. Πρέπει να σημειωθεί πως ο παραπάνω αλγόριθμος διαφέρει λίγο από την συνήθη μορφή της παραγοντοποίησης Cholesky, η οποία παράγει ένα κάτω τριγωνικό μητρώο M τέτοιο ώστε:

$$A = MM^T \quad (2.19)$$

Για την ακρίβεια, είναι δυνατό να δειχθεί πως $M = LD^{\frac{1}{2}}$ για να συσχετισθεί το M με τους παράγοντες L και D .

Εάν το A είναι αόριστο, η παραγοντοποίηση $A = LDL^T$ μπορεί να μην υπάρχει. Ακόμη και αν υπάρχει, ο προηγούμενος αλγόριθμος είναι αριθμητικά ασταθής όταν εφαρμόζεται σε τέτοια μητρώα, με την έννοια ότι τα στοιχεία των L και D μπορεί να γίνουν *αυθαιρέτως μεγάλα*. Είναι ευνόητο επομένως πως μια μέθοδος όπου θα υπολογίζεται η LDL^T παραγοντοποίηση και μετά θα τροποποιείται η διαγώνιος για να εξαναγκασθούν τα στοιχεία της να είναι θετικά, μπορεί να καταρρεύσει, ή μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα ένα μητρώο το οποίο θα είναι δραστικά διαφορετικό από το A .

Αντ' αυτού, θα τροποποιήσουμε το μητρώο A στην πορεία της παραγοντοποίησης με τρόπο τέτοιο ώστε όλα τα στοιχεία στο D να είναι επαρκώς θετικά και έτσι ώστε τα στοιχεία των D και L να μην είναι πολύ μεγάλα. Για να ελεγχθεί η ποιότητα της τροποποίησης, επιλέγουμε δύο παραμέτρους δ και β και απαιτούμε πως κατά τη διάρκεια του υπολογισμού των j στηλών των L και D στον προηγούμενο αλγόριθμο (δηλαδή για κάθε j στον εξωτερικό βρόχο του αλγορίθμου) θα ικανοποιούνται τα παρακάτω όρια:

$$d_j \geq \delta, \quad |m_{ij}| \leq \beta, \quad i = j + 1, \dots, n \quad (2.20)$$

Για να ικανοποιηθούν τα παραπάνω όρια απλώς χρειάζεται να αλλάξουμε ένα βήμα στον προηγούμενο αλγόριθμο: η σχέση υπολογισμού του διαγωνίου στοιχείου d_j αντικαθίσταται από:

¹² Golub and Van Loan - [115, Section 4.2.3]

$$d_j = \max\left(|c_{jj}|, \left(\frac{\theta_j}{\beta}\right)^2, \delta\right), \quad \mu\epsilon \theta_j = \max_{j < i \leq n} |c_{ij}| \quad (2.21)$$

Για να επαληθεύσουμε πως η (3.21) ισχύει, δεδομένου ότι $c_{ij} = l_{ij}d_j$:

$$|m_{ij}| = |l_{ij}\sqrt{d_j}| = \frac{|c_{ij}|}{\sqrt{d_j}} \leq \frac{|c_{ij}|\beta}{\theta_j} \leq \beta, \quad \forall i > j$$

Σημειώνεται πως το θ_j μπορεί να υπολογισθεί πριν το d_j αφού τα στοιχεία c_{ij} στο δεύτερο βρόχο του αλγορίθμου δεν εμπλέκουν το d_j . Για την ακρίβεια, αυτός είναι ο λόγος που εισάγονται οι ποσότητες c_{ij} στον αλγόριθμο. Η παρατήρηση αυτή υποδεικνύει επίσης πως οι υπολογισμοί θα πρέπει να αναδιαταχθούν έτσι ώστε τα c_{ij} να υπολογίζονται πριν το διαγώνιο στοιχείο d_j . Εφαρμόζουμε τη διαδικασία αυτή στον αλγόριθμο που ακολουθεί. Γίνεται προσπάθεια να μειωθεί το μέγεθος της τροποποίησης και εισάγονται συμμετρικές εναλλαγές γραμμών και στηλών, έτσι ώστε στο j βήμα της παραγοντοποίησης, οι j γραμμή και στήλη είναι εκείνες που περιέχουν το μεγαλύτερο διαγώνιο στοιχείο. Σημειώνεται επίσης πως ο υπολογισμός των στοιχείων c_{jj} μπορεί να γίνει περιοδικά αφού υπολογισθεί κάθε στήλη της παραγοντοποίησης.

Αλγόριθμος Τροποποιημένης Μεθόδου Cholesky (*Modified Cholesky*)

```

given   $\delta > 0, \beta > 0$ 
for     $k = 1, 2, \dots, n$ 
          $c_{kk} = a_{kk}$       (αρχικοποίηση των διαγώνιων στοιχείων)
end
Εύρεση δείκτη  $q$  τέτοιου ώστε  $|c_{qq}| \geq |c_{ii}|, i = j, \dots, n$ ;
Εναλλαγή γραμμής και στήλης  $j$  και  $q$ ;
for     $j = 1, 2, \dots, n$    (υπολογισμός της  $j$  στήλης του  $L$ )
         for     $s = 1, 2, \dots, j - 1$ 
              $l_{js} \leftarrow c_{js}/d_s$ 
         end
         for     $i = j + 1, \dots, n$ 
              $c_{ij} \leftarrow a_{ij} - \sum_{s=1}^{j-1} l_{js}c_{is}$ 
         end
          $\theta_j \leftarrow 0$ 
         if      $j \leq n$ 
              $\theta_j \leftarrow \max_{j < i \leq n} |c_{ij}|$ 
         end
          $d_j \leftarrow \max\left\{|c_{jj}|, \left(\frac{\theta_j}{\beta}\right)^2, \delta\right\}$ 
         if      $j < n$ 
             for     $i = j + 1, \dots, n$ 
                  $c_{ii} \leftarrow c_{ii} - \frac{c_{ij}^2}{d_j}$ 
             end
         end
end

```

Ο αλγόριθμος απαιτεί περίπου $\frac{n^3}{6}$ αριθμητικές πράξεις, οι οποίες είναι περίπου οι ίδιες με τη συνήθη παραγοντοποίηση Cholesky. Εντούτοις, οι εναλλαγές γραμμών και στηλών απαιτούν μετακίνηση δεδομένων στον υπολογιστή και το κόστος της διαδικασίας αυτής μπορεί να είναι σημαντικό σε μεγάλα προβλήματα. Δεν απαιτείται επιπλέον μνήμη πέρα από την μνήμη που απαιτείται για την αποθήκευση του A . Οι τριγωνικοί παράγοντες L και D , καθώς και τα ενδιάμεσα βαθμωτά μεγέθη c_{ij} μπορούν να γραφούν πάνω από στα στοιχεία του A .

Μετά την περιγραφή του αλγορίθμου, απομένει η επιλογή των παραμέτρων δ και β . Η σταθερά δ συνήθως επιλέγεται να είναι κοντά στην ακρίβεια του υπολογιστή \mathbf{u} . Μια τυπική επιλογή είναι:

$$\delta = \mathbf{u} \max(\gamma(A) + \xi(A), 1), \quad (2.22)$$

όπου $\gamma(A)$ και $\xi(A)$ είναι το μεγαλύτερο (κατ' απόλυτη τιμή) στοιχείο της διαγωνίου και εκτός της διαγωνίου του μητρώου A αντίστοιχα:

$$\gamma = \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|, \quad \xi = \max_{i \neq j} |a_{ij}| \quad (2.23)$$

Οι Gill, Murray και Wright[10] προτείνουν την ακόλουθη επιλογή β :

$$\beta = \max\left(\gamma(A), \frac{\xi(A)}{\sqrt{n^2 - 1}}, \mathbf{u}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.24)$$

σκοπός της οποίας είναι η ελαχιστοποίηση της νόρμας της τροποποίησης $\|E\|_{\infty}$.

Εφαρμογή

Έστω το μητρώο

$$A = \begin{bmatrix} 4.0 & 2.0 & 1.0 \\ 2.0 & 6.0 & 3.0 \\ 1.0 & 3.0 & -0.004 \end{bmatrix},$$

του οποίου οι ιδιοτιμές είναι, με ακρίβεια τριών ψηφίων, $-1.25, 2.87, 8.38$. Ο παραπάνω αλγόριθμος δίνει τον παρακάτω παράγοντα Cholesky M και διαγώνια τροποποίηση E :

$$M = \begin{bmatrix} 0.8165 & 1.8257 & 0 \\ 2.4495 & 0 & 0 \\ 1.2247 & -1.2 \times 10^{-16} & 1.2264 \end{bmatrix}, \quad E = \text{diag}(0, 0, 3.008)$$

Το τροποποιημένο μητρώο είναι:

$$A' = MM^T = \begin{bmatrix} 4.00 & 2.00 & 1.00 \\ 2.00 & 6.00 & 3.00 \\ 1.00 & 3.00 & 3.004 \end{bmatrix},$$

του οποίου οι ιδιοτιμές είναι 1.13, 3.00, 8.87, και του οποίου ο αριθμός κατάστασης είναι 7.8, ο οποίος δηλώνει μέτρια ποιότητα.

2.4.4. Ανίχνευση Βέλτιστου Μήκους Βήματος στη Μέθοδο Newton

Μετά την εφαρμογή της τροποποιημένης μεθόδου Cholesky, ο αλγόριθμος παρουσιάζει βελτιωμένη συμπεριφορά, ακόμα όμως δεν συγκλίνει. Παρατηρούμε πως εγκλωβίζεται σε τοπικά ακρότατα ενώ κάποιες φορές μια επανάληψη οδηγεί σε πολύ μεγαλύτερη τιμή. Ανατρέχοντας στη θεωρία, διαπιστώνουμε πως στην εφαρμογή της μεθόδου Newton παίζει σημαντικό ρόλο η επιλογή του μήκους βήματος.

Εάν το μήκος βήματος είναι πολύ μεγάλο, ή πολύ μικρό, μπορεί να μην επιτευχθεί η επιθυμητή μεταβολή στη συνάρτηση κόστους. Επιπλέον, υπάρχει κίνδυνος εγκλωβισμού σε ακρότατο. Υπάρχει εκτενής βιβλιογραφία[10] πάνω στο θέμα της επιλογής μήκους βήματος και προτείνονται διάφορες μαθηματικές σχέσεις, όπως οι συνθήκες *Wolfe*, *Armijio* και *Goldstein*.

Στο πρόβλημα που μας απασχολεί, το πρόβλημα της επιλογής μήκους βήματος αντιμετωπίστηκε χωρίς χρειασθεί να εφαρμοσθεί κάποια από τις παραπάνω συνθήκες.

Η γενική ιδέα είναι πως η σχέση $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \vec{a}_k \vec{p}_k$ είναι στην ουσία μια συνάρτηση του α_k . Έτσι, μετά τον υπολογισμό της κατεύθυνσης Newton, βρίσκουμε την νέα f τιμή της για κάθε διάφορες τιμές του μήκους βήματος. Έπειτα, επιλέγεται το σύνολο των μεταβλητών σχεδιασμού που δίνει τη μεγαλύτερη βελτίωση της τιμής της f ως το επόμενο \vec{x}_{k+1} . Φυσικά, λαμβάνεται μέριμνα έτσι ώστε οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού να παραμένουν συνεχώς εντός ορίων.

Σημειώνεται πως χρησιμοποιήθηκε και μια διαδικασία όμοια του scaling που εφαρμόστηκε στη μέθοδο Απότομης Καθόδου για να βοηθηθεί η επιλογή του σωστού διανύσματος \vec{a}_k .

Μετά από τις ενέργειες αυτές, η Τροποποιημένη Μέθοδος Newton συγκλίνει και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο αντίστοιχο κεφάλαιο.

2.5. Ο Ρόλος της Παραγώγου

Παρατηρούμε στην σχέση 2.5 πως αν ληφθεί μια τυχαία τιμή \vec{x}^1 των μεταβλητών σχεδιασμού και γίνει η επιλογή βήματος ανίχνευσης (η), ο μόνος άγνωστος για τον υπολογισμό της νέας προσέγγισης βέλτιστης λύσης (\vec{x}^{n+1}) είναι η κατεύθυνση ανίχνευσης \vec{p}^n .

Αν τώρα θεωρηθεί το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης F στην τιμή της επόμενης προσέγγισης, προκύπτει:

$$F(\vec{x}^{n+1}) = F(\vec{x}^n + \eta^n \vec{p}^n) = F(\vec{x}^n) + \eta^n \vec{p}^{nT} \nabla F(\vec{x}^n) + \frac{\eta^{n2}}{2} \vec{p}^{nT} \nabla^2 F(\vec{x}^n) \vec{p}^n + O(\eta^3) \quad (2.25)$$

Έχουν προταθεί διάφοροι ορισμοί της κατεύθυνσης αναζήτησης της βέλτιστης λύσης, οι οποίοι χρησιμοποιούν την 1^η ή και τη 2^η παράγωγο (Εσσιανό μητρώο) της συνάρτησης F . Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στους υπολογισμούς της εργασίας αυτής απαιτούν φυσικά τον υπολογισμό παραγώγων και περιγράφονται αναλυτικά στην αντίστοιχη παράγραφο.

2.6. Μέθοδοι που Χρησιμοποιούνται Ευρέως για τον Υπολογισμό Παραγώγων

Ο υπολογισμός παραγώγων αποτελεί ένα από τα πιο «ακριβά» (υπολογιστικά) τμήματα μιας διαδικασίας βελτιστοποίησης με αιτιοκρατική μέθοδο. Ο λόγος είναι πως ο υπολογισμός τους απαιτεί (συνήθως) την πολλαπλή κλήση της συνάρτησης κόστους. Για το λόγο αυτό, ο υπολογισμός παραγώγων αποτελεί ένα ξεχωριστό κλάδο της επιστήμης της βελτιστοποίησης. Ακολουθεί μια σύντομη παρουσίαση δύο ευρέως χρησιμοποιούμενων μεθόδων υπολογισμού παραγώγων.

2.6.1. Η Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών

Θεωρούμε ένα ανάπτυγμα Taylor:

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + \frac{\varepsilon}{1!} f_x(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f_{xx}(x) + \dots, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Η επίλυση του παραπάνω αναπτύγματος ως προς $f'(x)$, αποκόπτοντας τον όρο δεύτερης τάξης, έχει ως αποτέλεσμα:

$$f'(x) = \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \quad (2.26)$$

Με παρόμοιο τρόπο προκύπτουν και άλλες εκφράσεις, τόσο για τον υπολογισμό πρώτων, όσο και δεύτερων παραγώγων, καθεμία από τις οποίες έχει άλλη ακρίβεια, αριθμό κλήσεων της συνάρτησης κόστους και συσσώρευση σφάλματος.

Παρακάτω, παρατίθενται δύο εκφράσεις οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν σε αυτή την εργασία:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{f(x + \varepsilon) - f(x - \varepsilon)}{2\varepsilon} \quad (2.27)$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) = \frac{f(x + \varepsilon) - 2f(x) + f(x - \varepsilon)}{\varepsilon^2} \quad (2.28)$$

$$\frac{d^2f}{dxdy} = \frac{f(x + \varepsilon, y + \varepsilon) - f(x - \varepsilon, y + \varepsilon) - f(x + \varepsilon, y - \varepsilon) + f(x - \varepsilon, y - \varepsilon)}{4\varepsilon^2} \quad (2.29)$$

2.6.2. Η Συζυγής Μέθοδος

Η παρουσίαση της μεθόδου αρχίζει με τη διατύπωση των συζυγών εξισώσεων, ή του *δυναμικού προβλήματος*, όπως αυτό συχνά ονομάζεται.

Για καλύτερη παρουσίαση της μεθόδου, θα θεωρηθεί ένα πρόβλημα αεροδυναμικής και συγκεκριμένα, η βελτιστοποίηση της μορφής μιας αεροτομής. Έστω μια συνάρτηση κόστους, $F = F(\vec{U}, \vec{b})$, όπου \vec{b} είναι το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού και \vec{U} το διάνυσμα των μεταβλητών ροής.

Κάθε μεταβολή $\delta\vec{b}$ στο διάνυσμα \vec{b} , προκαλεί μεταβολή δF της τιμής της συνάρτησης κόστους ίση με:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} \quad (2.30)$$

Η επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης, εύρεσης δηλαδή του ακρότατου της συνάρτησης κόστους F , ισοδυναμεί με εύρεση εκείνου του διανύσματος \vec{b} για το οποίο $\delta F = \vec{0}$, τη γνωστή αναγκαία συνθήκη ύπαρξης ακροτάτου (αν δεν επιβάλλονται περιορισμοί και ο χώρος ανίχνευσης το περιλαμβάνει).

Στην εξίσωση (2.30) αναγνωρίζουμε τις δύο συμμετοχές στη μεταβολή τιμής της συνάρτησης κόστους. Ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος εκφράζει τη μεταβολή που οφείλεται στην αλλαγή του ροϊκού πεδίου που προκάλεσε η αλλαγή γεωμετρίας της αεροτομής. Ο δεύτερος όρος εκφράζει την απευθείας επίδραση της αλλαγής της γεωμετρίας στην τιμή της συνάρτησης κόστους.

Οι εξισώσεις που διέπουν το πεδίο ροής (εξισώσεις Euler ή Navier – Stokes, γράφονται στη μορφή:

$$\vec{R} = \vec{R}(\vec{U}, \vec{b}) = 0 \quad (2.31)$$

με το \vec{R} να αντιστοιχεί σε διάνυσμα στήλης με κ συνιστώσες. Γραμμικοποιώντας την (2.31) (για δεδομένη αεροτομή, άρα για δεδομένες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού \vec{b}) στη μορφή:

$$\vec{R}(\vec{U}) + \left[\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right]^T \delta \vec{U} = 0 \quad (2.32)$$

προκύπτει η διακριτοποιημένη μορφή της εξίσωσης της ροής η οποία πρέπει να επιλυθεί:

$$\left[\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right]^T \delta \vec{U} = -\vec{R}(\vec{U}) \quad (2.33)$$

Το μητρώο συντελεστών $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$ είναι συνάρτηση του \vec{U} .

Κάθε μεταβολή της γεωμετρίας της αεροτομής μεταβάλλει το πεδίο ροής γύρω της αλλά, αφού συνεχίζουν να ικανοποιούνται οι εξισώσεις ροής:

$$\delta \vec{R} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} = 0 \quad (2.34)$$

και αντίστοιχα για το μητρώο $\begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \end{bmatrix}$.

Το διάνυσμα της μεταβολής $\delta \vec{R}$, διάστασης κ , πολλαπλασιάζεται με ένα διάνυσμα γραμμής $\vec{\psi}^T$, ίσης διάστασης, και η βαθμωτή ποσότητα που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό αφαιρείται από τη μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης (εξ. (2.30)). Το αν θα γίνει πρόσθεση ή αφαίρεση είναι αδιάφορο, αρκεί οι υπόλοιπες ενέργειες να είναι συμβατές. Η αφαίρεση (ή πρόσθεση) αυτή δεν αλλοιώνει το στόχο μας ο οποίος είναι η εύρεση του διανύσματος \vec{b} που μηδενίζει την κλίση δF (αναγκαία συνθήκη για ακρότατο της συνάρτησης κόστους), αφού η μεταβολή $\delta \vec{R}$ είναι μηδενική.

Δημιουργείται έτσι η λεγόμενη *επαυξημένη συνάρτηση κόστους (augmented objective function)* F_{aug} , της οποίας η μεταβολή είναι:

$$\delta F_{aug} = \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} - \vec{\psi}^T \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} \right) \quad (2.35)$$

ή

$$\delta F_{aug} = \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{U}} - \vec{\psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right) \delta \vec{U} + \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{b}} - \vec{\psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \right) \delta \vec{b} \quad (2.36)$$

Η κεντρική ιδέα της συζυγούς μεθόδου είναι να επιλεγεί το διάνυσμα $\vec{\psi}$ έτσι ώστε να μηδενισθεί ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της (2.36), να είναι δηλαδή:

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{U}} - \vec{\psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} = 0 \quad (2.37)$$

Με την απαίτηση αυτή, η μεταβολή της συνάρτησης κόστους συναρτάται μόνο της μεταβολής του διανύσματος των μεταβλητών σχεδιασμού $\delta \vec{b}$ και όχι των επαγόμενων μεταβολών $\delta \vec{U}$ του πεδίου ροής.

Το πεδίο των $\vec{\psi}$, το οποίο ονομάζεται πλέον των *συζυγών μεταβλητών, (adjoint variables)* προκύπτει από τη λύση της *συζυγούς εξίσωσης (adjoint equation)*:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \end{bmatrix}^T \vec{\psi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \end{bmatrix}^T \quad (2.38)$$

Σημειώνεται πως η παραπάνω εξίσωση είναι γραμμική ως προς $\vec{\psi}$.

Τέλος, από την εξίσωση (2.17) απομένει η ευθεία συσχέτιση της μεταβολής της τιμής της συνάρτησης κόστους με τη μεταβολή της γεωμετρίας του ορίου $\delta \vec{b}$. Είναι, δηλαδή

$$\delta F_{aug} = \vec{G}^T \delta \vec{b} \quad (2.39)$$

με

$$\vec{G}^T = \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} - \vec{\Psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \quad (2.40)$$

Οι παραπάνω είναι πλέον εύκολο να ενταχθούν σε μια διαδικασία σχεδιασμού βέλτιστης αεροδυναμικής μορφής η οποία βασίζεται στην κλίση της συνάρτησης στόχου. Η επίλυση του συστήματος (2.30) υπολογίζει το πεδίο των συζυγών μεταβλητών $\vec{\Psi}$, το οποίο στη συνέχεια χρησιμοποιείται στις παραπάνω σχέσεις ώστε να υπολογισθεί η παράγωγος της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές ελέγχου της μορφής της γεωμετρίας. Οι συζυγείς μεταβλητές $\vec{\Psi}$ ονομάζονται συχνά και *δυναμικές μεταβλητές (dual variables)*.

Η συζυγής μέθοδος διακρίνεται στη *διακριτή (discrete)* και στη *συνεχή (continuous)* συζυγή μέθοδο, αλλά πιο λεπτομερής αναφορά ξεφεύγει από το σκοπό του παρόντος[12][13][14]. Σημαντικό είναι πως αφού διατυπωθούν οι συζυγείς εξισώσεις, η παράγωγος υπολογίζεται με το κόστος υπολογισμού μιας συνάρτησης κόστους γεγονός που την καθιστά τον υπολογισμό της παραγώγου απίστευτα γρήγορο. Από τα προηγούμενα, διαφαίνεται και το μειονέκτημα της μεθόδου – σε μεγάλα και πολύπλοκα προβλήματα, ο χρόνος που απαιτείται για τη διατύπωση των συζυγών εξισώσεων μπορεί να είναι πολύ μεγάλος.

Κεφάλαιο 3^ο

Η Μέθοδος Μιγαδικών Μεταβλητών

3. Εισαγωγή

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο πως για να υλοποιηθεί η διαδικασία της βελτιστοποίησης απαιτείται ο υπολογισμός της παραγώγου της συνάρτησης και πως ένα μεγάλο μέρος της επιστήμης της βελτιστοποίησης στρέφεται γύρω από τον υπολογισμό της παραγώγου, καθώς αποτελεί ένα από τα πιο «ακριβά» (υπολογιστικά) τμήματα μιας διαδικασίας βελτιστοποίησης με αιτιοκρατική μέθοδο. Παρουσιάστηκαν ακόμη μερικές από τις πιο δημοφιλείς σύγχρονες μεθόδους υπολογισμού παραγώγων.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιασθεί μια νέα μέθοδος υπολογισμού των παραγώγων μιας συνάρτησης που ονομάζεται μέθοδος των Μιγαδικών Μεταβλητών[15], αρχίζοντας από τις απαραίτητες γνώσεις μιγαδικής ανάλυσης που απαιτούνται για την κατανόηση και υλοποίηση της μεθόδου και συνεχίζοντας με την εφαρμογή της σε υπολογιστικά προβλήματα, παρουσιάζοντας τα πλεονεκτήματα αλλά και τα μειονεκτήματα της μεθόδου.

3.1. Απαραίτητες γνώσεις Μιγαδικής Ανάλυσης

3.1.1. Σύντομη Ιστορική Επισκόπηση

Η Μιγαδική Ανάλυση (Complex Analysis), γνωστή και ως Θεωρία Συναρτήσεων Μιγαδικών Μεταβλητών, είναι ένας κλάδος των μαθηματικών που ερευνά τις συναρτήσεις με μιγαδικό όρισμα. Βρίσκει εφαρμογή σε μεγάλο εύρος επιστημών όπως η θεωρία αριθμών, η φυσική, τα εφαρμοσμένα μαθηματικά, ο αυτόματος έλεγχος, η ρομποτική κ.α. Οι ρίζες της Μιγαδικής Ανάλυσης φτάνουν στον 19^ο αιώνα και σε ορισμένες περιπτώσεις ακόμα νωρίτερα. Αποτελεί ένα κλασικό πεδίο των μαθηματικών με το οποίο έχει ασχοληθεί μια πλειάδα μεγάλων μαθηματικών, όπως οι Euler, Gauss, Riemann, Cauchy, Weierstrass και πολλοί άλλοι κατά τη διάρκεια του 20^{ου} αιώνα.

Οι μιγαδικοί αριθμοί ανακαλύφθηκαν από τον Ιταλό μαθηματικό Girolamo Cardano[6], ο οποίος τους αποκάλεσε «φανταστικούς», στην προσπάθειά του να βρει λύσεις σε κυβικές εξισώσεις. Η λύση μιας κυβικής εξίσωσης μπορεί να απαιτεί ενδιάμεσους υπολογισμούς που εισάγουν τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών, ακόμα και όταν οι τελικές λύσεις είναι πραγματικοί αριθμοί μια κατάσταση γνωστή ως «casus irreducibilis». Αυτό εντέλει οδήγησε στο θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας από τον Gauss[8], το οποίο δείχνει πως με μιγαδικούς αριθμούς είναι πάντα δυνατό να βρεθούν λύσεις σε πολυωνυμικές εξισώσεις πρώτου βαθμού ή υψηλότερου.

Οι κανόνες για την πρόσθεση, αφαίρεση πολλαπλασιασμό και διαίρεση μιγαδικών αριθμών εισήχθησαν για πρώτη φορά από τον Ιταλό μαθηματικό Rafael Bombelli[7]. Μια επέκταση της ιδέας ήρθε αργότερα από τον Ιρλανδό μαθηματικό William Rowan Hamilton[8].

3.1.2. Μιγαδικοί αριθμοί

Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι μια επέκταση του πεδίου των πραγματικών αριθμών που προκύπτει με την προσθήκη μιας φανταστικής μονάδας, i , η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη $i^2 = -1$.

Κάθε μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή $a + bi$ όπου a, b πραγματικοί αριθμοί που καλούνται το *πραγματικό μέρος* και το *φανταστικό μέρος* του αριθμού αντίστοιχα.

Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι πεδίο (*field*), ως εκ τούτου έχουν πρόσθεση, αφαίρεση πολλαπλασιασμό και διαίρεση.

3.1.3. Ιδιότητες

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, οι μιγαδικοί αριθμοί προστίθενται, αφαιρούνται, πολλαπλασιάζονται και διαιρούνται εφαρμόζοντας την αντιμεταθετική, την προσεταιριστική και την επιμεριστική ιδιότητα της άλγεβρας, μαζί με την εξίσωση $i^2 = -1$:

- Πρόσθεση: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- Αφαίρεση: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
- Πολλαπλασιασμός: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$
- Διαίρεση: $\frac{(a+bi)}{(c+di)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$

όπου $c, d \neq 0$.

Σημειώνεται ότι δυο μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι εάν και μόνο αν τα πραγματικά μέρη τους **και** τα φανταστικά μέρη τους είναι ίσα αντιστοίχως.

Είναι επίσης δυνατό ένας μιγαδικός αριθμός να παρασταθεί στη μορφή (a,b) σε αντιστοιχία με ένα διάνυσμα. Στην περίπτωση αυτή οι πράξεις αναπαριστώνται ως εξής:

- Πρόσθεση: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- Πολλαπλασιασμός: $(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad)$ κλπ.

3.1.4. Πεδίο Μιγαδικών Αριθμών

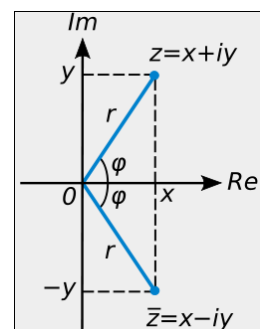
Ένα πεδίο είναι μια αλγεβρική δομή με πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση, οι οποίες ικανοποιούν συγκεκριμένους αλγεβρικούς νόμους. Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι ένα πεδίο, γνωστό ως το Πεδίο των Μιγαδικών Αριθμών και συμβολίζεται ως \mathbb{C} . Συγκεκριμένα, αυτό σημαίνει πως οι μιγαδικοί αριθμοί έχουν:

- Μια μηδενική ταυτότητα πρόσθεσης, $0+0i$
- Μια μοναδιαία ταυτότητα πολλαπλασιασμού, $1+0i$
- Τον αντίθετο προσθετέο κάθε μιγαδικού αριθμού. Ο αντίθετος προσθετέος του αριθμού $a+bi$ είναι ο $-a-bi$.
- Έναν αντίστροφο αριθμό κάθε μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού. Ο αντίστροφος του $a+bi$ είναι ο $\frac{a}{a^2+b^2} + \left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)i$

Σημειώνεται πως το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι υποσύνολο του \mathbb{C} .

3.1.5. Το Μιγαδικό Επίπεδο

Ένας μιγαδικός αριθμός z μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σημείο ή διάνυσμα θέσης σε ένα δισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων, το οποίο καλείται και Μιγαδικό Επίπεδο (Complex Plane), όπου ο z μπορεί να παρασταθεί με καρτεσιανές συντεταγμένες, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



3.1.5.1. Μέτρο Μιγαδικού Αριθμού

Η απόλυτη τιμή ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$ ορίζεται ως $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ και έχει τρεις σημαντικές ιδιότητες:

- $|z| \geq 0$, όπου $|z| = 0$ αν και μόνο αν $z = 0$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z και w . Από τα παραπάνω υπονοείται πως $|1| = 1$ και $|z/w| = |z| / |w|$.

3.1.5.2. Πολική μορφή μιγαδικού αριθμού

Εναλλακτικά στην καρτεσιανή παράσταση $z = x + yi$, ο μιγαδικός αριθμός z μπορεί να παρασταθεί με πολικές συντεταγμένες. Οι πολικές συντεταγμένες είναι το μέτρο $r = |z| \geq 0$ και η γωνία (argument) $\varphi = \arg(z)$. Για $r = 0$ οποιαδήποτε τιμή της φ παριστά τον ίδιο αριθμό.

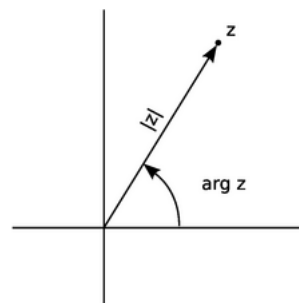
3.1.5.3. Μετασχηματισμός από την πολική μορφή στην καρτεσιανή μορφή και αντίστροφα.

Ισχύουν οι σχέσεις που γνωρίζουμε από την αναλυτική γεωμετρία:

- $x = r \cos \varphi$
- $y = r \sin \varphi$

Η αντίστροφη διαδικασία υπαγορεύεται από τις σχέσεις:

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\varphi = \arg(z) = \text{atan2}(x, y)$



Το αποτέλεσμα για τη γωνία φ έχει εύρος $(-\pi, +\pi]$ και είναι αρνητικό για αρνητικές τιμές του y . Αν είναι επιθυμητές τιμές στο διάστημα $[0, 2\pi)$, προστίθενται 2π στο αρνητικό αποτέλεσμα.

Πολλές φορές συναντούμε την πολική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού στη μορφή:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ή χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Euler:

$$z = re^{i\varphi}$$

η οποία καλείται και *εκθετική μορφή*.

3.1.6. Ορισμός της Μιγαδικής Συνάρτησης

Μια μιγαδική συνάρτηση είναι μια συνάρτηση όπου η ανεξάρτητη **και** η εξαρτημένη μεταβλητή είναι μιγαδικοί αριθμοί. Πιο συγκεκριμένα, μια μιγαδική συνάρτηση είναι μια συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού (domain) Ω είναι ένα υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου και της οποίας το πεδίο τιμών (range) είναι επίσης ένα υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου.

Για οποιαδήποτε μιγαδική συνάρτηση, τόσο η ανεξάρτητη όσο και η εξαρτημένη μεταβλητή μπορούν να χωρισθούν σε πραγματικό και φανταστικό μέρος:

- $z = x + yi$
- $w = f(z) = u(z) + iv(z)$

όπου $x, y \in \mathbb{R}$ και $u(z), iv(z)$ πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών:

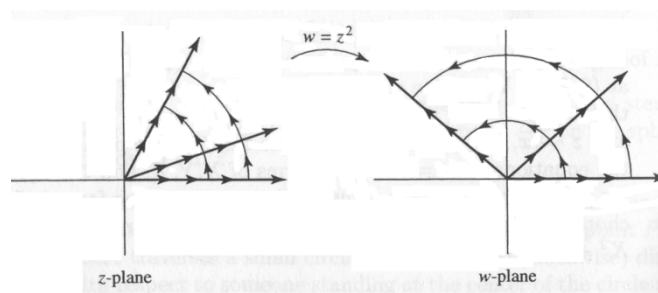
- $u(z) = u(x, y)$
- $v(z) = v(x, y)$

3.1.7. Απεικόνιση μιγαδικών συναρτήσεων[9]

Οι πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής απεικονίζονται σχεδιάζοντας ένα διάγραμμα στον \mathbb{R}^2 . Το γράφημα μιας μιγαδικής συνάρτησης όμως απαιτεί τέσσερις πραγματικές διαστάσεις. Έτσι, για να αποφύγουμε την απεικόνιση στον \mathbb{R}^4 , έχουν αναπτυχθεί τεχνικές οι οποίες επιτρέπουν την απεικόνιση και κατανόηση της λειτουργίας μιας μιγαδικής συνάρτησης. Μια τεχνική είναι να σχεδιαστεί το γράφημα της απόλυτης τιμής της $|f(z)|$ ως επιφάνεια στον \mathbb{R}^3 .

Μια άλλη τεχνική, η οποία θα παρουσιαστεί παρακάτω επιτρέπει καλή εποπτεία της συμπεριφοράς μιας συνάρτησης $w = f(z)$.

Δημιουργούμε δύο επίπεδα, ένα z -επίπεδο και ένα w -επίπεδο. Έπειτα, θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)$ ως μια αντιστοιχία από το z -επίπεδο, στο w -επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για τη συνάρτηση $w = z^2$.



3.2. Μιγαδική Παραγωγή

3.2.1. Διαφορίσιμη Συνάρτηση

Όπως και στην πραγματική ανάλυση, μια «λεία» μιγαδική συνάρτηση $w = f(z)$ μπορεί να έχει μια παράγωγο σε ένα συγκεκριμένο σημείο του πεδίου ορισμού της Ω . Για την ακρίβεια, ο ορισμός για την παράγωγο:

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

είναι ανάλογος του ορισμού της πραγματικής παραγώγου με μία πολύ σημαντική διαφορά. Στην πραγματική ανάλυση, το όριο μπορεί να προσεγγισθεί κατά μήκος μια γραμμής αριθμών. Στην μιγαδική ανάλυση, το όριο μπορεί να προσεγγισθεί από οποιαδήποτε κατεύθυνση στο δισδιάστατο μιγαδικό επίπεδο.

Εάν το όριο υπάρχει για κάθε σημείο z στο Ω , τότε η $f(z)$ είναι **διαφορίσιμη** στο Ω . Αποδεικνύεται πως κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $f(z)$ είναι **αναλυτική**¹³. Αυτό είναι ένα πολύ πιο ισχυρό αποτέλεσμα από αυτό του ανάλογου πραγματικού θεωρήματος. Στον πραγματικό λογισμό, μπορεί να κατασκευασθεί μια συνάρτηση $f(x)$ η οποία έχει πρώτη παράγωγο παντού, αλλά για την οποία η δεύτερη παράγωγος δεν υπάρχει σε ένα ή περισσότερα σημεία στο πεδίο ορισμού. Στο μιγαδικό επίπεδο όμως, αν μια συνάρτηση είναι διαφορίσιμη σε μια **γειτονιά**, πρέπει επίσης να είναι απείρως διαφορίσιμη στην γειτονιά αυτή.

3.2.2. Πρώτη και ανώτερη Παράγωγος

Έστω η συνάρτηση $w = f(z)$. Κάθε τιμή w της $f(z)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός, οπότε μπορεί να γραφεί στη μορφή $w = u + iv$. Όμως, αν $z = x + iy$, τότε

$$z = z(x, y) \Rightarrow w = w(x, y) \Rightarrow \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}, \quad u, v \in \mathbb{R}$$

Εφαρμόζοντας τους νόμους του διανυσματικού λογισμού, υπολογίζονται οι μερικές παράγωγοι των $u(x, y)$, $v(x, y)$ στις οποίες αναλύεται η $f(z)$, οπότε η πρώτη παράγωγος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη της παραπάνω σχέσης προκύπτουν οι **εξισώσεις Cauchy-Riemann**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

¹³ Αναλυτική (analytic) συνάρτηση στα μαθηματικά λέγεται μια συνάρτηση η οποία δίδεται τοπικά από μια συγκλίνουσα δυναμοσειρά.

Διαφορίζοντας το παραπάνω σύστημα δύο μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτα ως προς x και έπειτα ως προς y , είναι εύκολο να δειχθεί πως:

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$$

ή αλλιώς ότι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος μιας διαφορίσιμης συνάρτησης είναι **αρμονικές συναρτήσεις**¹⁴ αφού ικανοποιούν την εξίσωση Laplace.

Προφανώς, για να υπολογισθεί μια παράγωγος ανώτερης τάξης, υπολογίζονται οι κύριες μερικές παράγωγοι των u, v .

3.3. Υπολογισμός Παραγώγων με Χρήση Μιγαδικής Συνάρτησης

3.3.1. Ανάπτυγμα Taylor Μιγαδικής συνάρτησης

3.3.1.1. Συνάρτηση μιας Μεταβλητής

Στην πραγματική ανάλυση, το ανάπτυγμα Taylor μιας πραγματικής συνάρτησης f μιας πραγματικής μεταβλητής x , έχει ως εξής:

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + \frac{\varepsilon}{1!} f_x(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f_{xx}(x) + \dots \quad (3.1)$$

Κατ' αναλογία του αναπτύγματος Taylor για μια πραγματική συνάρτηση, αποδεικνύεται πως για μια μιγαδική συνάρτηση $w = f(z(x, y))$, αν το φανταστικό μέρος $y \rightarrow 0$:

$$f(z) = f(x + iy) = f(x, y) + \frac{iy}{1!} f_x(x, y) - \frac{y^2}{2!} f_{xx}(x, y) + \dots \quad (3.2)$$

οπότε για σταθερό $y = \varepsilon \rightarrow 0$, προκύπτει:

$$f(z) = f(x + i\varepsilon) = f(x) + \frac{i\varepsilon}{1!} f_x(x) - \frac{\varepsilon^2}{2!} f_{xx}(x) + \dots \quad (3.3)$$

¹⁴ Αρμονική συνάρτηση στα μαθηματικά είναι μια συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη και ικανοποιεί την εξίσωση Laplace. Για περισσότερες πληροφορίες πάνω στις ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων βλ. Theodore W. Gamelin – Complex Analysis.

3.3.1.2. Συνάρτηση δύο Μεταβλητών

Στην πραγματική ανάλυση, το ανάπτυγμα Taylor για συνάρτηση δύο μεταβλητών είναι:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y}{1!} + \frac{\Delta x^2 f_{xx}(x, y) + 2\Delta x \Delta y f_{xy}(x, y) + \Delta y^2 f_{yy}(x, y)}{2!} + \dots \quad (3.4)$$

Αντίστοιχα, το ανάπτυγμα Taylor για μια συνάρτηση δύο μιγαδικών μεταβλητών των οποίων το φανταστικό μέρος, ε , τείνει στο μηδέν δίνεται από τη σχέση:

$$f(x + i\varepsilon, y + i\varepsilon) = f(x, y) + \frac{i\varepsilon}{1!} [f_x(x, y) + f_y(x, y)] - \frac{\varepsilon^2}{2!} [f_{xx}(x, y) + 2f_{xy}(x, y) + f_{yy}(x, y)] \quad (3.5)$$

Το ανάπτυγμα Taylor για συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών κατασκευάζεται με όμοιο τρόπο.

3.3.2. Προσέγγιση Πρώτης παραγώγου

Έστω μια **πραγματική συνάρτηση**, $y = f(x)$. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor (3.1) προκύπτει μια σχέση πεπερασμένων διαφορών:

$$f'(x) = \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

μέσω της οποίας προσεγγίζεται η πραγματική τιμή της πρώτης παραγώγου.

Θεωρώντας τώρα το ανάπτυγμα Taylor (3) για μια **μιγαδική συνάρτηση** $f(z) = f(x+i\varepsilon)$, όπου $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$f(x + i\varepsilon) = f(x) + \frac{i\varepsilon}{1!} f_x(x) - \frac{\varepsilon^2}{2!} f_{xx}(x) + \dots$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι μια **μιγαδική εξίσωση**, δηλαδή οι όροι εκατέρωθεν της εξίσωσης είναι μιγαδικοί αριθμοί. Έτσι, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ότι δυο μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι εάν και μόνο αν τα πραγματικά μέρη τους και τα φανταστικά μέρη τους είναι ίσα αντιστοίχως, εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη εκατέρωθεν της εξίσωσης προκύπτει:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[f(x + i\varepsilon)] = \operatorname{Re} \left[f(x) + \frac{i\varepsilon}{1!} f_x(x) - \frac{\varepsilon^2}{2!} f_{xx}(x) \right] = f(x) - \frac{\varepsilon^2}{2!} f_{xx}(x) \\ \operatorname{Im}[f(x + i\varepsilon)] = \operatorname{Im} \left[f(x) + \frac{i\varepsilon}{1!} f_x(x) - \frac{\varepsilon^2}{2!} f_{xx}(x) \right] = \frac{\varepsilon}{1!} f_x(x) \end{cases}$$

και επιλύοντας τη δεύτερη εξίσωση ως προς $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{\operatorname{Im}[f(x + i\varepsilon)]}{\varepsilon} \quad (3.6)$$

Προκύπτει λοιπόν πως αντικαθιστώντας το όρισμα μιας πραγματικής συνάρτησης από x σε $x + i\varepsilon$, είναι δυνατόν εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση να υπολογισθεί η τιμή της πρώτης παραγώγου της πραγματικής συνάρτησης $f(x)$.

Παρατίθεται μια εφαρμογή για καλύτερη κατανόηση:

Εφαρμογή

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$:

$$\begin{aligned} f(x + i\varepsilon) &= (x + i\varepsilon)^4 \\ &= (x^2 - \varepsilon^2 + 2ix\varepsilon)(x^2 - \varepsilon^2 + 2ix\varepsilon) = (x^2 - \varepsilon^2)^2 - 4x^2\varepsilon^2 + 4ix\varepsilon(x^2 - \varepsilon^2) \\ &= x^4 + \varepsilon^4 - 2x^2\varepsilon^2 - 4x^2\varepsilon^2 + 4ix\varepsilon(x^2 - \varepsilon^2) \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την (3.6):

$$\begin{aligned} \text{Im}[f(x + i\varepsilon)] &= \text{Im}[x^4 + \varepsilon^4 - 2x^2\varepsilon^2 - 4x^2\varepsilon^2 + 4ix\varepsilon(x^2 - \varepsilon^2)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{Im}[f(x + i\varepsilon)] = 4x\varepsilon(x^2 - \varepsilon^2) \end{aligned}$$

οπότε:

$$f'(x) = \frac{\text{Im}[f(x + i\varepsilon)]}{\varepsilon} = \frac{4x\varepsilon(x^2 - \varepsilon^2)}{\varepsilon} = 4x(x^2 - \varepsilon^2)$$

και αν ληφθεί υπόψη πως $\varepsilon \rightarrow 0$, τότε ε^2 είναι ακόμα μικρότερο, που σημαίνει πως με εξαιρετική ακρίβεια:

$$f'(x) = 4x(x^2) = 4x^3$$

που είναι και η αναλυτική λύση.

3.3.3. Πλεονεκτήματα στον Υπολογισμό της Παραγώγου

Προφανώς ο αναλυτικός υπολογισμός τη μέθοδο αυτή είναι αρκετά περίπλοκος σε σχέση με τους υπολογισμούς της πραγματικής ανάλυσης. Αν αναλογισθεί κανείς την πολυπλοκότητα των εκφράσεων τριγωνομετρικών και εκθετικών εκφράσεων που παρατέθηκαν νωρίτερα, είναι εμφανές ότι απαιτείται μεγάλος όγκος πράξεων ακόμα και για πολύ απλές συναρτήσεις. Για το λόγο αυτό, η χρήση της μεθόδου αυτής περιορίζεται συνήθως σε εφαρμογές με χρήση υπολογιστή.

Έστω μια άλλη συνάρτηση, η $f(x, y) = x^2 + 3y^4 - 4xy$. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών και τη μέθοδο Μιγαδικών Μεταβλητών για τον υπολογισμό της πρώτης παραγώγου στο $(x, y) = (1, 2)$, προκύπτει για διάφορες τιμές του ϵ (υπολογισμοί διπλής ακρίβειας):

➤ Μιγαδική συνάρτηση

ϵ	$\partial F/\partial x$	$\partial F/\partial y$
10^{-30}	-6.0000000000000000	92.0000000000000000
10^{-20}	-6.0000000000000000	92.0000000000000000
10^{-15}	-6.0000000000000000	92.999999999999986
10^{-10}	-6.0000000000000000	92.0000000000000000
10^{-5}	-6.0000000000000000	92.99999997600000

➤ Πεπερασμένες διαφορές

ϵ	$\partial F/\partial x$	$\partial F/\partial y$
10^{-30}	0.0000000000000000	0.0000000000000000
10^{-20}	0.0000000000000000	0.0000000000000000
10^{-15}	-7.105427357601001	92.370555648813010
10^{-10}	-5.999964969305438	92.000007612114132
10^{-5}	-6.000000000128124	92.000000003267232

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα είναι εμφανές ότι η μέθοδος των Μιγαδικών Μεταβλητών είναι πολύ λιγότερο ευαίσθητη στην επιλογή του ϵ , σε σχέση με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών και δίνει πολύ καλή ακρίβεια (πιθανότατα λόγω της απουσίας πράξης αφαίρεσης από τη σχέση (3.6)). Χαρακτηριστικά, στη διεθνή βιβλιογραφία αναφέρεται[15] πως η προσέγγιση της παραγώγου με τη μέθοδο αυτή γίνεται σε «near analytic precision».

Το άλλο πολύ ελκυστικό χαρακτηριστικό της μεθόδου φαίνεται παρατηρώντας τη σχέση $f'(x) = \frac{Im[f(x+i\epsilon)]}{\epsilon}$. Ο προγραμματισμός της σχέσης αυτής σε Η/Υ σημαίνει πως **απαιτείται μια μόνο κλήση της συνάρτησης f για τον υπολογισμό της πρώτης παραγώγου με εξαιρετική ακρίβεια**, σε αντίθεση με άλλες μεθόδους όπως οι πεπερασμένες διαφορές που μπορεί να απαιτούν δυο, τρεις ή και περισσότερες κλήσεις της f για να επιτευχθεί όμοια ακρίβεια.

3.3.4. Υπολογισμός του Εσσιανού Μητρώου

Ως γνωστόν, το Εσσιανό μητρώο μιας πραγματικής συνάρτησης $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι:

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

εάν υπάρχουν όλες οι δεύτερες παράγωγοι. Το μητρώο είναι συμμετρικό, που σημαίνει πως $\frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_n} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_m}$. Οι παράγωγοι στη διαγώνιο ονομάζονται **κύριες παράγωγοι**, ενώ οι υπόλοιπες ονομάζονται **μικτές παράγωγοι**.

Είναι εμφανές ότι για να υπολογισθεί το Εσσιανό μητρώο με τη μέθοδο των Μιγαδικών Μεταβλητών θα πρέπει να βρεθούν εκφράσεις αντίστοιχες της (3.6), τόσο για τις κύριες όσο και για τις μικτές παραγώγους.

3.3.4.1. Κύριες Παράγωγοι

Το εργαλείο είναι και πάλι το ανάπτυγμα Taylor. Σύμφωνα με τη σχέση (3.1):

$$f(z) = f(x + i\varepsilon) = f(x) + \frac{i\varepsilon}{1!} f_x(x) - \frac{\varepsilon^2}{2!} f_{xx}(x) + \dots$$

και όπως και πριν θεωρούμε:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[f(x + i\varepsilon)] = \operatorname{Re} \left[f(x) + \frac{i\varepsilon}{1!} f_x(x) - \frac{\varepsilon^2}{2!} f_{xx}(x) \right] = f(x) - \frac{\varepsilon^2}{2!} f_{xx}(x) \\ \operatorname{Im}[f(x + i\varepsilon)] = \operatorname{Im} \left[f(x) + \frac{i\varepsilon}{1!} f_x(x) - \frac{\varepsilon^2}{2!} f_{xx}(x) \right] = \frac{\varepsilon}{1!} f_x(x) \end{cases}$$

Γίνεται χρήση της πρώτης εξίσωσης. Επιλύοντας ως προς τη δεύτερη παράγωγο προκύπτει:

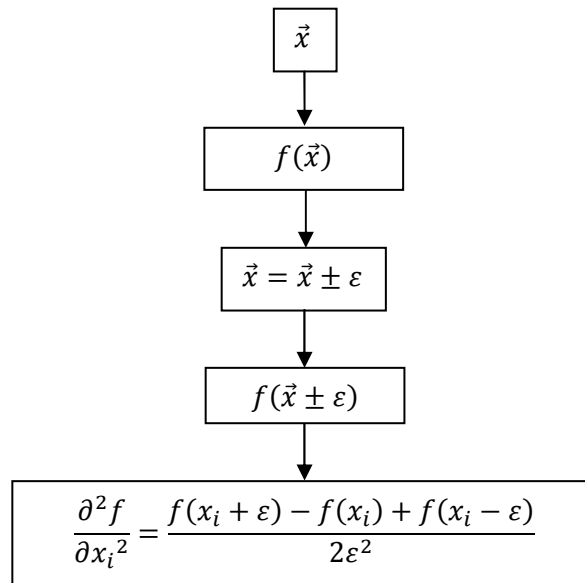
$$f_{xx}(x) = \frac{2}{\varepsilon^2} \{f(x) - \operatorname{Re}[f(x + i\varepsilon)]\} \quad (3.8)$$

Τα πλεονεκτήματα της ακρίβειας και της μη-ευαισθησίας στην τιμή του ε διατηρούνται και σε αυτή την έκφραση, αν και όχι τόσο έντονα όσο στην έκφραση πρώτων παραγώγων λόγω της παρουσίας πράξης αφαίρεσης στη σχέση (3.8), συν ένα ακόμη το οποίο γίνεται εμφανές μέσα από το παρακάτω παράδειγμα:

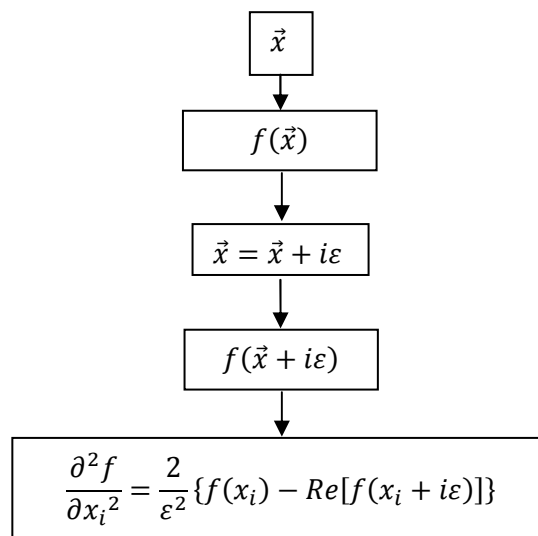
Ένας κλασικός υπολογιστικός αλγόριθμος ο οποίος αφορά στον υπολογισμό της δεύτερης παραγώγου μιας συνάρτησης με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών με ακρίβεια δεύτερης τάξης έχει ως εξής:

➤ Αλγόριθμος πεπερασμένων διαφορών

Έστω η συνάρτηση $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\vec{x})$:



➤ Αλγόριθμος Μιγαδικών Μεταβλητών



Είναι αξιοσημείωτο πως ενώ **με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών απαιτούνται 2N κλήσεις της f** (όπου N ο αριθμός των ορισμάτων της f) ανά μικτή παράγωγο, ενώ με τη μέθοδο των Μιγαδικών Μεταβλητών **απαιτούνται μόνο N**. Επίσης, αν εξετάσουμε προσεκτικά τις σχέσεις (3.6) και (3.8) παρατηρούμε πως απαιτούν ακριβώς τα ίδια δεδομένα, γεγονός που σημαίνει πως ο υπολογισμός των 2^{ων} κύριων παραγώγων με τη μέθοδο αυτή, σε ένα πρόβλημα που απαιτεί και τον υπολογισμό πρώτων παραγώγων ή το αντίστροφο (όπως η μέθοδος Newton), είναι «δωρεάν», δηλαδή απαιτεί μηδενικό πρόσθετο υπολογιστικό κόστος!

3.3.4.2. Μικτές Παράγωγοι

Σύμφωνα με τη σχέση (3.5):

$$f(x_1 + i\varepsilon, x_2 + i\varepsilon) = f + \frac{i\varepsilon}{1!} [f_{x_1} + f_{x_2}] - \frac{\varepsilon^2}{2!} [f_{x_1x_1} + 2f_{x_1x_2} + f_{x_2x_2}]$$

Ομοίως με πριν, εξισώνονται τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη της παραπάνω εξίσωσης:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[f(x_1 + i\varepsilon, x_2 + i\varepsilon)] = \operatorname{Re} \left[f + \frac{i\varepsilon}{1!} [f_{x_1} + f_{x_2}] - \frac{\varepsilon^2}{2!} [f_{x_1x_1} + 2f_{x_1x_2} + f_{x_2x_2}] \right] = \\ \quad = f - \frac{\varepsilon^2}{2!} [f_{x_1x_1} + 2f_{x_1x_2} + f_{x_2x_2}] \\ \operatorname{Im}[f(x_1 + i\varepsilon, x_2 + i\varepsilon)] = \operatorname{Im} \left[f + \frac{i\varepsilon}{1!} [f_{x_1} + f_{x_2}] - \frac{\varepsilon^2}{2!} [f_{x_1x_1} + 2f_{x_1x_2} + f_{x_2x_2}] \right] = \\ \quad = \frac{\varepsilon}{1!} [f_{x_1} + f_{x_2}] \end{cases}$$

Εάν επιλυθεί η πρώτη εξίσωση ως προς τη μερική παράγωγο $f_{x_1x_2}$:

$$f_{x_1x_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2!}{\varepsilon^2} \{f - \operatorname{Re}[f(x_1 + i\varepsilon, x_2 + i\varepsilon)]\} - f_{x_1x_1} - f_{x_2x_2} \right) \quad (3.9)$$

Έχοντας βρει τις εκφράσεις για τις μικτές και τις κύριες παραγώγους, είναι πλέον απλός ο υπολογισμός του Εσσιανού μητρώου.

Εφαρμογή

Για να επαληθευτεί η αξιοπιστία των παραπάνω σχέσεων, θεωρείται η συνάρτηση $f(x, y, z) = x^2y^2z^3$ στο σημείο $(x, y, z) = (3, 2, 1)$. Η συνάρτηση είναι συνεχής και δυο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} , επομένως το Εσσιανό μητρώο υπάρχει. Υπολογίζοντας αναλυτικά το Εσσιανό μητρώο της $f(3, 2, 1)$ προκύπτει:

$$H(f(3,2,1)) = \begin{bmatrix} 8 & 24 & 72 \\ 24 & 18 & 108 \\ 72 & 108 & 216 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζοντας αριθμητικά το μητρώο με τη μέθοδο των Μιγαδικών Μεταβλητών για $\varepsilon = 10^{-5}$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-3}$ αντίστοιχα (υπολογισμοί διπλής ακρίβειας):

$$H(f(3,2,1)) = \begin{bmatrix} 8.000000661922966 & 24.000001985768897 & 72.000005957306698 \\ 24.000001985768897 & 18.000037016463462 & 108.000008935960054 \\ 72.000005957306698 & 108.000008935960054 & 216.000017871920107 \end{bmatrix}$$

$$H(f(3,2,1)) = \begin{bmatrix} 8.000000661922968 & 23.999999854140697 & 71.999998851879354 \\ 23.999999854140697 & 17.999998647155735 & 107.999998988361767 \\ 71.999998851879354 & 107.999998988361767 & 216.000000818894478 \end{bmatrix}$$

$$H(f(3,2,1)) = \begin{bmatrix} 7.999999994012796 & 23.999999008594841 & 71.999963999758165 \\ 23.999999008594841 & 17.99999997186933 & 107.999937000613500 \\ 71.999963999758165 & 107.999937000613500 & 215.99999994664904 \end{bmatrix}$$

3.4. Υπολογισμός Παραγώγου Μέσω Μιγαδικής Συνάρτησης σε Προγραμματιστικό Επίπεδο

Ας θυμηθούμε αρχικά τον υπολογισμό παραγώγων μέσω Μιγαδικών Μεταβλητών που παρατέθηκε πρωτύτερα (σχέση 3.6):

$$f'(x) = \frac{\text{Im}[f(x + i\varepsilon)]}{\varepsilon}$$

σε σύγκριση με ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών:

$$f'(x) = \frac{f(x + \varepsilon) - f(x - \varepsilon)}{2\varepsilon} \quad (3.10)$$

Γνωρίζουμε φυσικά πως για να υπολογισθεί αριθμητικά η παράγωγος μιας συνάρτησης μέσω σχέσεων πεπερασμένων διαφορών οι μεταβλητές σχεδιασμού να πάρουν τη μορφή $x + \varepsilon$, $x - \varepsilon$ και να υπολογισθούν οι τιμές της συνάρτησης f με τα ορίσματα αυτά.

Εξετάζοντας τη σχέση (3.6) γίνεται εμφανές πως, για να υπολογισθεί η παράγωγος της πραγματικής συνάρτησης f μέσω Μιγαδικών Μεταβλητών, **πρέπει τόσο οι μεταβλητές σχεδιασμού όσο και όλες οι εξισώσεις να γραφτούν σε μιγαδική μορφή** έτσι ώστε εντέλει να προκύψει ο μιγαδικός αριθμός $f(x + i\varepsilon)$ από το φανταστικό μέρος του οποίου υπολογίζεται η παράγωγος.

Η διαδικασία αυτή είναι εύκολη σε απλές σχέσεις, όταν όμως πρέπει να εφαρμοσθεί σε ένα πολύπλοκο μοντέλο όπως το μοντέλο ενός αεροσκάφους όπου οι πραγματικές συναρτήσεις αντικαθίστανται από μιγαδικές ενώ οι διάφορες αριθμητικές μέθοδοι πρέπει να μεταφερθούν από τον άξονα των πραγματικών αριθμών (1 διάσταση), στο επίπεδο των μιγαδικών αριθμών (2 διαστάσεις), ανακύπτουν δυσκολίες οι οποίες θα συζητηθούν στη συνέχεια.

3.4.1. Δήλωση Μιγαδικής Μεταβλητής

Η γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN δέχεται μιγαδικές μεταβλητές οι οποίες δηλώνονται με τη σύνταξη *double complex*. Μια μιγαδική μεταβλητή στη μορφή αυτή παρίσταται στη FORTRAN με τη διανυσματική γραφή που αναφέρθηκε στο 1^ο κεφάλαιο, δηλαδή:

$$z = a + ib \rightarrow (a, b), \quad a, b \in \mathfrak{R}$$

Η FORTRAN χειρίζεται τις βασικές πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση) αυτόματα. Έτσι, η σύνταξη:

```
program complex_numbers
implicit double complex (a - h, o - z)
z1 = (1.d0,6.d0)
z2 = (1.d0,7.d0)
z3 = z1 + z2
print *, z3
end
```

Θα αποδώσει το σωστό αποτέλεσμα δηλαδή $z_3 = (2,13)$. Ομοίως και οι υπόλοιπες βασικές πράξεις.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση όπου πρέπει να κατασκευασθεί το όρισμα της συνάρτησης του μοντέλου, δηλαδή ο μιγαδικός αριθμός $x = x + i\varepsilon$. Θα περιμέναμε πως η παρακάτω σύνταξη θα γίνει δεκτή:

```

program complex_numbers
implicit double complex (a - h, o - z)
real * 8 epsilon

epsilon = 1.d - 5

z1 = (1.d0, epsilon)
z2 = (1.d0, epsilon)
z3 = z1 + z2

print *, z3

end

```

Παραδόξως, η FORTRAN επιστρέφει δύο όμοια errors:

“Error: A symbol must be a defined parameter in this context. [EPSILON]”

Ο λόγος είναι πως η διανυσματική μορφή του μιγαδικού αριθμού γίνεται αποδεκτή μόνο με ορίσματα πραγματικούς αριθμούς. Οτιδήποτε άλλο, συμπεριλαμβανομένων και των *πραγματικών* παραμέτρων (όπως το *epsilon*), δεν γίνεται αποδεκτό.

Ευτυχώς, υπάρχει τρόπος να δηλωθεί ο μιγαδικός αριθμός $x = x + i\varepsilon$ με την παρακάτω σύνταξη:

```

program complex_numbers
implicit double complex (a - h, o - z)
real * 8 epsilon, x1, x2

epsilon = 1.d - 5
x1 = 3.d0
x2 = 5.d0

z1 = x1 * (1.d0, 0.d0) + epsilon * (0.d0, 1.d0)
z2 = x2 * (1.d0, 0.d0) + epsilon * (0.d0, 1.d0)
z3 = z1 + z2

print *, z3

end

```

Το αποτέλεσμα είναι έτσι το αναμενόμενο, $z_3 = (8, 2 \cdot 10^{-5})$

3.4.2. Συνήθεις Συναρτήσεις στο Μιγαδικό Επίπεδο

Η υποστήριξη μιγαδικών ορισμάτων σε συναρτήσεις από τις διάφορες γλώσσες προγραμματισμού είναι περιορισμένη (για παράδειγμα στη FORTRAN). Για το λόγο αυτό, αλλά και επειδή για την πλήρη κατανόηση των αριθμητικών διαδικασιών ο χρήστης είναι απαραίτητο να γνωρίζει ακριβώς ποιες πράξεις εκτελούνται, κρίνεται σκόπιμο να γίνει περιγραφή της συμπεριφοράς συνήθων συναρτήσεων όπως οι τριγωνομετρικές, οι εκθετική κλπ. στο μιγαδικό επίπεδο.

3.4.2.1. Η Τετραγωνική Ρίζα

Για κάθε μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό z υπάρχουν δύο ακριβώς μιγαδικοί αριθμοί w έτσι ώστε $w^2 = z$. Για παράδειγμα, οι τετραγωνικές ρίζες του i είναι:

- $\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ και
- $-\sqrt{i} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$

Ο συνήθης ορισμός της \sqrt{z} δίνεται χρησιμοποιώντας την εκθετική μορφή $z = re^{i\varphi}$:

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{\frac{i\varphi}{2}}$$

Με τον παραπάνω ορισμό, η συνάρτηση της τετραγωνικής ρίζας είναι **ολομορφική**¹⁵ παντού εκτός των μη θετικών πραγματικών αριθμών, όπου δεν είναι καν συνεχής.

Σημειώνεται πως λόγω της ασυνεχούς φύσεως της συνάρτησης στο μιγαδικό πεδίο, ο νόμος $\sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}$ γενικά **δεν** ισχύει.

3.4.2.2. Η Εκθετική Συνάρτηση

Η επέκταση του ορισμού της εκθετικής συνάρτησης στο πεδίο των μιγαδικών αριθμών γίνεται ορίζοντας:

$$e^z = e^x \cos y + i e^y \sin y, z = x + iy \in \mathbb{C}$$

Εφόσον $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, ισχύει:

$$e^z = e^x e^{iy}$$

Η ζητούμενη ταυτότητα επομένως είναι απλώς μια πολική απεικόνιση του e^z :

- $|e^z| = e^x$
- $\arg(e^z) = y$

¹⁵ Ολομορφική συνάρτηση: Μιγαδική συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{C} με τιμές στο \mathbb{C} οι οποίες είναι μιγαδικά διαφορίσιμες σε κάθε σημείο. Η συνθήκη αυτή είναι πολύ ισχυρότερη από αυτήν της πραγματικής διαφορισιμότητας και υπονοεί άπειρη διαφορισιμότητα.

3.4.2.3. Η Λογαριθμική συνάρτηση

Για $z \neq 0$ ορίζεται η $\ln z$ ως η συνάρτηση:

$$\begin{aligned} \ln z &= \ln|z| + i \arg z = \\ &= \ln|z| + i \operatorname{Arg} z + 2\pi i m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Σημειώνεται πως $\operatorname{Arg} z$ του $\arg z$ είναι για την τιμή της θ στο διάστημα $(-\pi, \pi]$

Ορίζεται η **κύρια τιμή** του $\ln z$ ως:

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}|z| + i \operatorname{Arg} z, \quad z \neq 0.$$

Οι τιμές της $\log z$ είναι ακριβώς οι μιγαδικοί αριθμοί w έτσι ώστε $e^w = z$. Έτσι, η $\operatorname{Log} z$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της e^w με τιμές στο $-\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi$. Από τη στιγμή που είναι γνωστή η κύρια τιμή του λογαρίθμου, βρίσκονται και οι υπόλοιπες μέσω της σχέσης:

$$\ln z = \operatorname{Ln}|z| + 2\pi i m$$

Για να υπολογιστεί ο δεκαδικός ή άλλος λογάριθμος, είναι αρκετή μια απλή αλλαγή βάσης στην παραπάνω σχέση.

Σημειώνεται πως στη διεθνή βιβλιογραφία ο φυσικός λογάριθμος συχνά συμβολίζεται ως \log και ο δεκαδικός ως \log_{10} .

3.4.2.4. Τριγωνομετρικές και υπερβολικές συναρτήσεις

Εάν επιλυθούν οι εξισώσεις:

$$\begin{aligned} - e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ - e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}$$

ως προς $\cos\theta$ και $\sin\theta$ αντιστοίχως, προκύπτει

$$\begin{aligned} - \cos\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ - \sin\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$

Μπορεί λοιπόν να επεκταθεί ο ορισμός του $\sin z$ και $\cos z$ στο πεδίο των μιγαδικών αριθμών ως:

$$\begin{aligned} - \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ - \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \end{aligned}$$

Ο παραπάνω ορισμός ταυτίζεται με το συνήθη όταν ο z είναι πραγματικός. Προφανώς, η $\cos z$ είναι άρτια συνάρτηση, ενώ η $\sin z$ περιττή.

Ως συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής, οι $\sin z$ και $\cos z$ είναι περιοδικές, με περίοδο 2π :

- $\cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad z \in \mathbb{C}$
- $\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad z \in \mathbb{C}$

Μετά από μια σειρά πράξεων, μπορεί κανείς να επιβεβαιώσει πως η ιδιότητα για το συνημίτονο και ημίτονο αθροίσματος αριθμών ισχύει ακόμα:

- $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$
- $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

Αν στην παραπάνω σχέση του συνημιτόνου αντικατασταθεί ο w με $-z$, προκύπτει η γνωστή ταυτότητα:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad z \in \mathbb{C}$$

Για την ακρίβεια, οποιαδήποτε ταυτότητα η οποία ισχύει για αναλυτικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής, όπως $\cos x$ και $\sin x$, ισχύει και όταν οι συναρτήσεις επεκταθούν ως συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής.

Προφανώς, η σχέση για την εφαπτομένη είναι:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

Ομοίως, προκύπτουν οι σχέσεις για τις $\cosh z$ και $\sinh z$:

- $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$
- $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

οι οποίες είναι περιοδικές, με περίοδο $2\pi i$. Προφανώς, η $\cosh z$ είναι άρτια και η $\sinh z$ περιττή συνάρτηση.

Οι υπερβολικές συναρτήσεις και οι τριγωνομετρικές επιδεικνύουν μια κοντινή συγγένεια. Η μία προκύπτει από την άλλη αν περιστραφεί το πεδίο ορισμού κατά $\pi/2$:

- $\cosh(iz) = \cos z, \quad \cos(iz) = \cosh z$
- $\sinh(iz) = i \sin z, \quad \sin(iz) = i \sinh z$

Τέλος, οι σχέσεις για τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι:

- $\sin^{-1} z = -i \ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$
- $\cos^{-1} z = -i \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$
- $\tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$

3.4.3. Μιγαδικές Μεταβλητές και Συναρτήσεις στη FORTRAN

Είναι αναμενόμενο πως οι συνήθεις συναρτήσεις που υποστηρίζει η FORTRAN όπως οι $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\tan^{-1} x$, $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\ln x$ κλπ. θα δέχονται τόσο πραγματικό, όσο και μιγαδικό όρισμα.

Δυστυχώς, αυτό ισχύει για ορισμένες, όχι για όλες τις συναρτήσεις. Οι συναρτήσεις στις οποίες υποστηρίζεται μιγαδικό όρισμα είναι οι:

Συνάρτηση	Πραγματική Σύνταξη	Μιγαδική Σύνταξη
$\cos x$	<i>d</i> cos <i>x</i>	<i>cd</i> cos <i>x</i>
$\sin x$	<i>d</i> sin <i>x</i>	<i>cd</i> sin <i>x</i>
$\ln x$	<i>d</i> log <i>x</i>	<i>cd</i> log <i>x</i>
$\exp x$	<i>d</i> exp <i>x</i>	<i>cd</i> exp <i>x</i>
$ x $	<i>d</i> abs <i>x</i>	<i>cd</i> abs <i>x</i>
\sqrt{x}	<i>d</i> sqr <i>x</i>	<i>cd</i> sqr <i>x</i>

όπου παρατέθηκαν οι εκφράσεις διπλής ακρίβειας τόσο για τις πραγματικές συναρτήσεις όσο και για τις μιγαδικές¹⁶.

Οι συναρτήσεις που δεν περιλαμβάνονται στις παραπάνω πρέπει, αν ορίζονται στο πεδίο των μιγαδικών αριθμών, να δημιουργηθούν από το χρήστη ως υπορουτίνες (ή functions στην περίπτωση της $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$). Για τη διευκόλυνση του αναγνώστη παρατίθενται ορισμένες υπορουτίνες βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

- Τοξοεφαπτομένη Μιγαδικού Αριθμού

Προγραμματίζεται η σχέση $\tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$:

```
! *****
subroutine complex_atan(z, arctan)
! *****
implicit double complex (a - h, o - z)
! This subroutine calculates the arctangent of a complex number
! z = x + iy. The output is in rads.
```

```
! Calculate the Product z * i
timagz = -imag(z)
trealz = real(z)
zi      = timagz * (1.d0,0.d0) + trealz * (0.d0,1.d0)
! Calculate the product arctan1 * i
tinlog = (1 + zi)/(1 - zi)
colog  = cdlog(tinlog)
```

¹⁶ Σημειώνεται πως ενώ ένας πραγματικός αριθμός διπλής ακρίβειας καταλαμβάνει 8 bytes μνήμης στον υπολογιστή, ένας μιγαδικός αριθμός διπλής ακρίβειας καταλαμβάνει 8 bytes μνήμης για το φανταστικό και 8 bytes μνήμης για το πραγματικό μέρος, δηλαδή συνολικά 16 bytes. Το αποτέλεσμα του γεγονότος αυτού (και φυσικά πως οι πράξεις των μιγαδικών αριθμών απαιτούν περισσότερους υπολογισμούς από τις αντίστοιχες των πραγματικών) είναι, όπως ήτο αναμενόμενο, μια μιγαδική συνάρτηση να χρειάζεται περισσότερο χρόνο και μνήμη για να υπολογισθεί, σε σχέση με την αντίστοιχη πραγματική.

```

arctan1    = (-.5d0) * colog
realatan1  = -imag(arctan1)
timagatan1 = real(arctan1)
arctan    = realatan1 * (1.d0,0.d0) + timagatan1 * (0.d0,1.d0)
return
end

```

- Τοξομήτινο Μιγαδικού Αριθμού

Προγραμματίζεται η σχέση $\sin^{-1}z = -i \ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$:

```

! *****
subroutine complex_asin(z, arcsin)
! *****
implicit double complex (a - h, o - z)
! This subroutine calculates the arcsinus of a complex number
! z = x + iy. The output is in rads.

! Calculate the Product z * i
realzi  = -imag(z)
timagzi = real(z)
zi      = realzi * (1.d0,0.d0) + timagzi * (0.d0,1.d0)
! Calculate the product arcsin1 * i
tinlog  = (zi + cdsqrt(1 - z * z))
colog   = cdlog(tinlog)
arcsin1 = (-1.d0) * colog
realasin1 = -imag(arcsin1)
timagasin1 = real(arcsin1)
arcsin  = realasin1 * (1.d0,0.d0) + timagasin1 * (0.d0,1.d0)
return
end

```

- Τοξοσνημήτινο Μιγαδικού Αριθμού:

Προγραμματίζεται η σχέση $\cos^{-1}z = -i \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$

```

! *****
subroutine complex_acos(z, arccos)
! *****
implicit double complex (a - h, o - z)
! This subroutine calculates the arccosinus of a complex number
! z = x + iy. The output is in rads.

! Calculate the product arcsin1 * i
tinlog  = (z + cdsqrt(z * z - 1.d0))
colog   = cdlog(tinlog)
arccos1 = (-1.d0) * colog
realacos1 = -imag(arccos1)
timagacos1 = real(arccos1)
arccos  = realacos1 * (1.d0,0.d0) + timagacos1 * (0.d0,1.d0)
return
end

```

- Συναρτήσεις Μεγίστου και Ελαχίστου

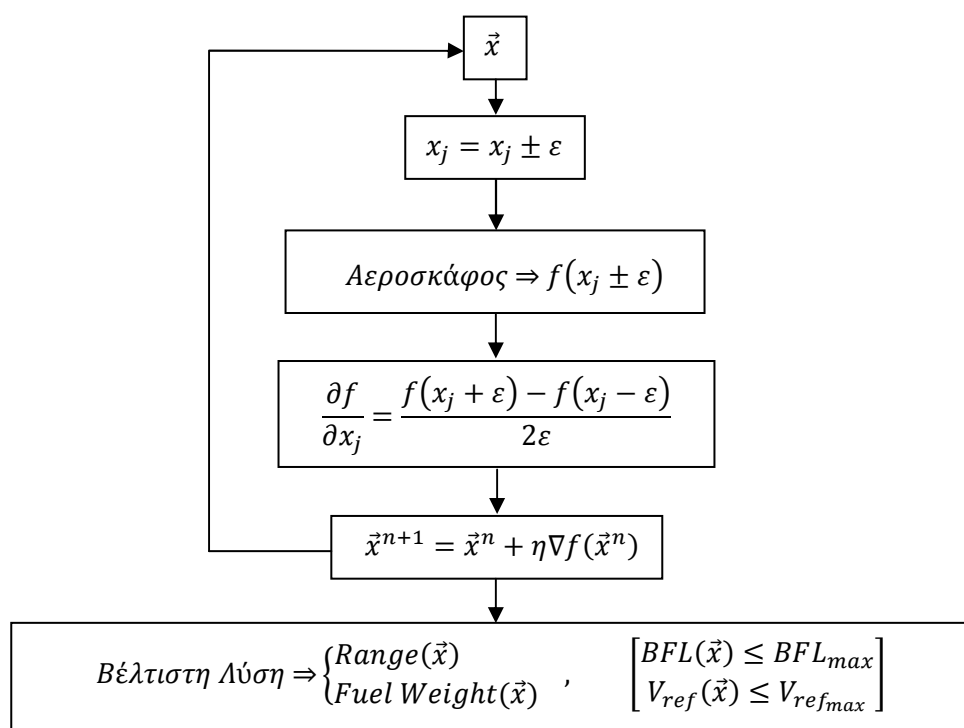
Όπως είναι προφανές, δεν υπάρχει τρόπος να συγκριθούν δυο μιγαδικοί αριθμοί παρά μόνο εάν συγκριθούν τα μέτρα τους. Οι εξισώσεις του μοντέλου ενός αεροσκάφους όμως, απαιτούν συχνά την μέγιστη ή την ελάχιστη από δύο τιμές. Εφόσον τα φανταστικά μέρη λόγω του $\varepsilon \rightarrow 0$ είναι γενικά πολύ μικρά μπορούν φυσικά να συγκριθούν τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών, σε περίπτωση όμως που κάποιος αριθμός είναι αρνητικός, θα χαθεί το αρνητικό πρόσημο κατά τον υπολογισμό του μέτρου. Έτσι, όποτε χρειάστηκε να γίνει κάποια επιλογή, επελέγη ο αριθμός με το μεγαλύτερο (ή μικρότερο) *πραγματικό μέρος*.

3.4.4. Αλγόριθμοι Μεθόδων Ανίχνευσης Κατά Γραμμή με τη Μέθοδο Μιγαδικών Μεταβλητών

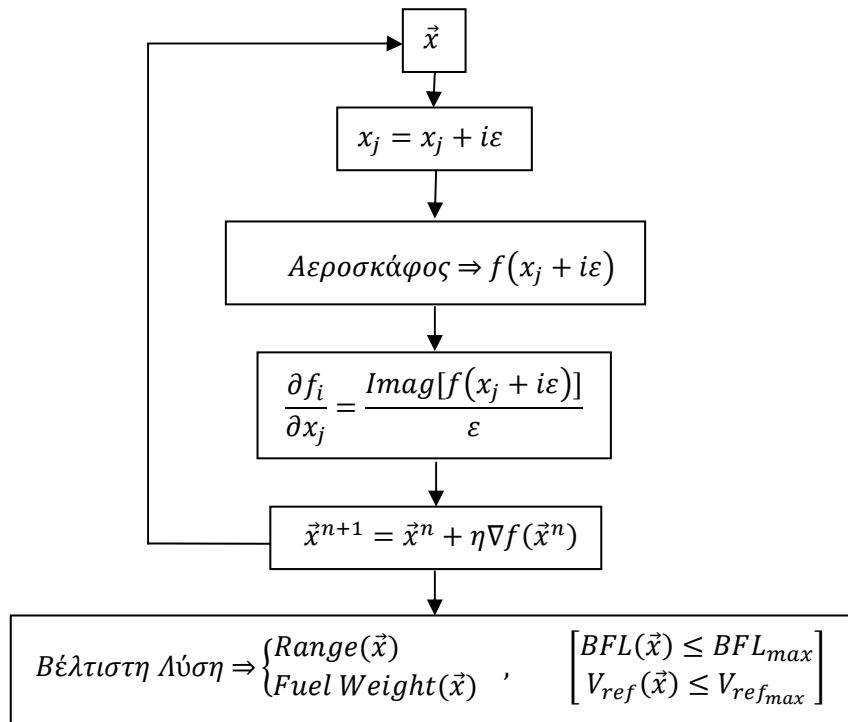
Ακολουθούν οι αλγόριθμοι προγραμματισμού των μεθόδων Απότομης Καθόδου και Newton, με υπολογισμό των πρώτων παραγώγων και του Εσσιανού μητρώου αντίστοιχα, για το πρόβλημα βελτιστοποίησης του αεροσκάφους με περιορισμούς, μέσω της μεθόδου Μιγαδικών Μεταβλητών. Παρατίθενται επίσης οι αντίστοιχοι αλγόριθμοι Πεπερασμένων Διαφορών για σύγκριση.

3.4.4.1. Μέθοδος Απότομης Καθόδου

3.4.4.1.1. Αλγόριθμος Πεπερασμένων Διαφορών



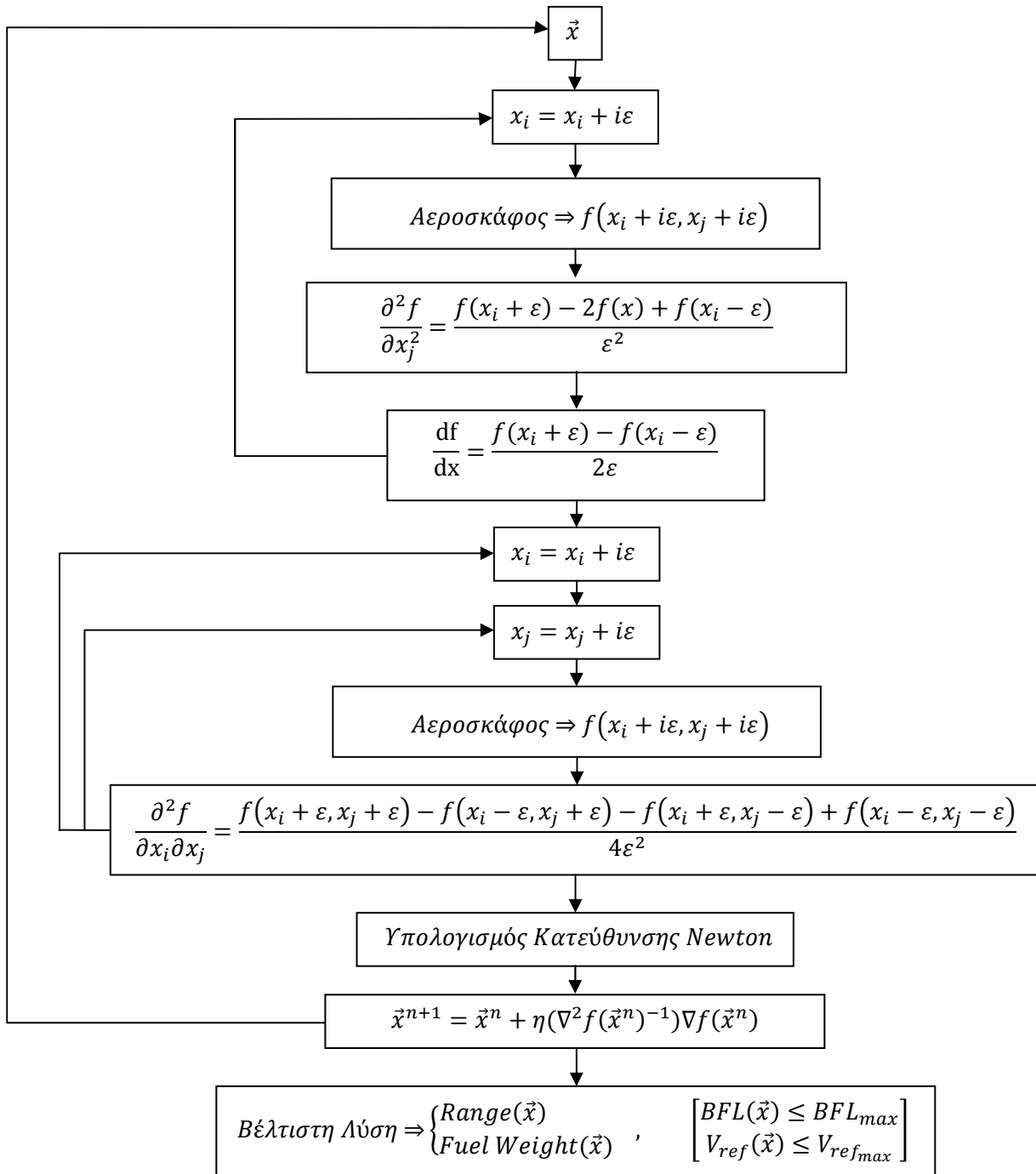
3.4.4.1.2. Αλγόριθμος Μιγαδικών Μεταβλητών



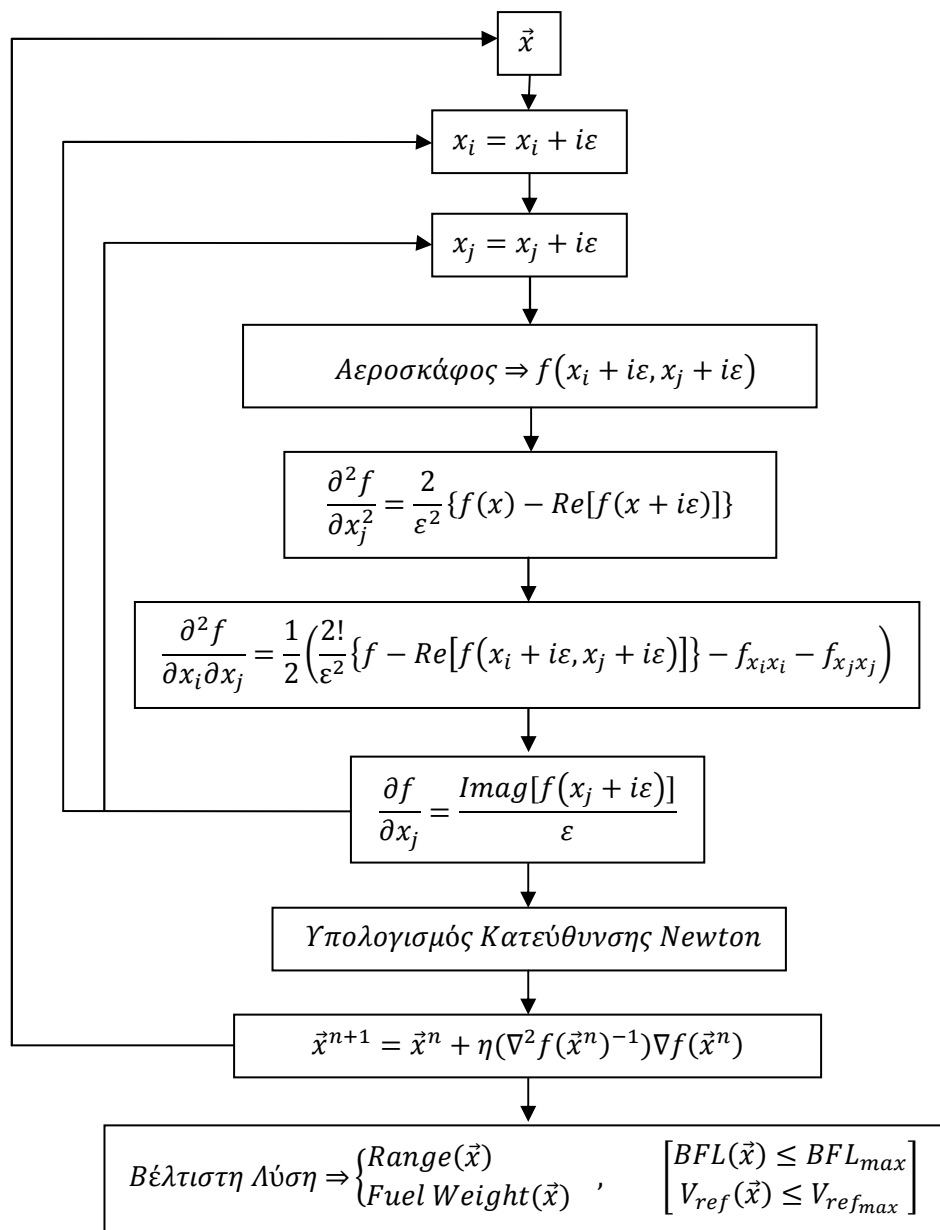
Αξιοσημείωτο είναι πως κάνοντας χρήση της μεθόδου Μιγαδικών Μεταβλητών απαιτούνται οι μισές κλήσεις της F σε σχέση με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

3.4.4.2. Μέθοδος Newton

3.4.4.2.1. Αλγόριθμος Πεπερασμένων Διαφορών



3.4.4.2.2. Αλγόριθμος Μιγαδικών Μεταβλητών



Αν και η προγραμματιστική υλοποίηση δεν ακολουθεί ακριβώς αυτά τα μοτίβα, είναι εύκολο σε αυτά να παρατηρήσουμε πως με τη μέθοδο Μιγαδικών Μεταβλητών ο πρώτος βρόχος της Μεθόδου Πεπερασμένων Διαφορών δε χρειάζεται καν.

Επίσης είναι πολύ ενδιαφέρον το γεγονός πως, σε αυτούς τους απλούς αλγόριθμους οι συνολικές κλήσεις της συνάρτησης F στην πρώτη περίπτωση είναι $2 \cdot N + 1 + 4 \cdot \frac{N^2 - 1}{2}$, ενώ με τη μέθοδο Μιγαδικών Μεταβλητών είναι λιγότερες από $\frac{1}{4}$ της μεθόδου Πεπερασμένων Διαφορών, δηλαδή $N + 1 + \frac{N^2 - 1}{2}$, αφού οι κύριες δεύτερες παράγωγοι και οι πρώτες παράγωγοι υπολογίζονται με τις ίδιες ακριβώς συναρτήσεις που υπολογίζονται και οι μικτές παράγωγοι, καθιστώντας τον υπολογισμό τους σε αυτή την περίπτωση, «δωρεάν»!

3.5. Μέθοδος Διχοτόμησης στον Αλγόριθμο του Αεροσκάφους

Ο αλγόριθμος ανάλυσης επιδόσεων του αεροσκάφους που παρουσιάστηκε στο 1^ο Κεφάλαιο, χρησιμοποιεί τη μέθοδο της διχοτόμησης για να υπολογισθεί η τιμή της γωνίας πρόσπτωσης (α), η οποία ικανοποιεί την εξίσωση υπολογισμού του συντελεστή άνωσης (c_L) για κάποια γνωστή τιμή του c_L . Εάν η α είναι μιγαδικός αριθμός, τότε εφαρμόζοντας τη γνωστή μέθοδο της διχοτόμησης χάνεται το φανταστικό μέρος, το οποίο φέρει και την πληροφορία για τον υπολογισμό της παραγωγού. Για να μη χαθεί η πληροφορία αυτή, χρειάστηκε να αναπτυχθεί μέθοδος αντίστοιχη της μεθόδου της διχοτόμησης, με την οποία υπολογίζεται ο μιγαδικός αριθμός που ικανοποιεί μια μιγαδική εξίσωση.

Η εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων σε μια μιγαδική συνάρτηση είναι πολύπλοκη σε σχέση με μια πραγματική συνάρτηση, δεδομένου ότι, όπως έχει ήδη γίνει φανερό, η λύση που ικανοποιεί μια μιγαδική εξίσωση έχει με τη σειρά της πραγματικό και φανταστικό μέρος, τα οποία πρέπει να υπολογισθούν συγχρόνως. Στην ουσία, ενώ στην πρώτη περίπτωση ο αλγόριθμος αναζητά μια λύση στον άξονα των πραγματικών αριθμών, στη δεύτερη αναζητά μια λύση στο μιγαδικό επίπεδο.

3.5.1. Μέθοδος διχοτόμησης σε πραγματική συνάρτηση

Η μέθοδος της διχοτόμησης για μια πραγματική συνάρτηση ακολουθεί τον παρακάτω αλγόριθμο:

- 1 Έλεγχος του προσήμου της συνάρτησης στο μέσο του αρχικού εύρους τιμών $[a, b]$: $x_1 = (a + b)/2$
- 2 Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
 - Αν $[\text{sign } f(x_1)] = \text{sign}[f(a)]$, τότε $x_1 < x_2 < b$
 - Αν $[\text{sign } f(x_1)] \neq \text{sign}[f(a)]$, τότε $a < x_1 < x_2$
- 3 Η διαδικασία συνεχίζεται στο νέο διάστημα μέχρι ικανοποίησης του κριτηρίου σύγκλισης.

3.5.2. Μέθοδος διχοτόμησης σε μιγαδική συνάρτηση

Έστω η μιγαδική συνάρτηση:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad , \quad z = x + iy$$

όπου $u(x, y)$, $v(x, y)$ το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συνάρτησης αντίστοιχα:

$$\begin{cases} u(x, y) = \text{Re}(f) \\ v(x, y) = \text{Im}(f) \end{cases}$$

Αν για κάποια τιμή του z η $f(z)$ έχει την τιμή w (δηλαδή $w = f(z)$), τότε ορίζεται η συνάρτηση

$$\Phi = f(z) - w = 0$$

Ο στόχος λοιπόν είναι να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός z που ικανοποιεί τη συνάρτηση Φ .

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$u(x, y) + iv(x, y) - w = 0$$

και αν εξισωθούν τα πραγματικά και φανταστικά μέρη εκατέρωθεν της εξίσωσης:

$$\begin{cases} u(x, y) - Re(w) = 0 \\ v(x, y) - Im(w) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Re(\Phi) = Re[f(z)] - Re(w) = 0 \\ Im(\Phi) = Im[f(z)] - Im(w) = 0 \end{cases}$$

Όμως, τα $Re(w)$, $Im(w)$ είναι γνωστά εφόσον ο αριθμός w είναι γνωστός εκ των προτέρων (η τιμή της $f(z)$).

Επομένως, το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση του παραπάνω συστήματος δύο εξισώσεων και την εύρεση των δύο αγνώστων x, y .

Δυστυχώς, σε ένα πολύπλοκο πρόβλημα η αναλυτική έκφραση του συστήματος είναι πολύ δύσκολο ή και αδύνατο να υπολογισθεί και φυσικά χρονοβόρο. Για να αντιμετωπισθεί αυτό το πρόβλημα, θεωρείται το παραπάνω σύστημα ως ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης με δύο στόχους:

$$\begin{cases} Re(\Phi) = 0 \\ Im(\Phi) = 0 \end{cases}$$

3.5.3. Η μέθοδος του στόχου[16]

Σύμφωνα με τη μέθοδο του στόχου, η εύρεση της ρίζας ενός συστήματος βρίσκεται με το μηδενισμό του «μέτρου» της συνάρτησης. Για παράδειγμα η ρίζα του συστήματος:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

ικανοποιεί την εξίσωση:

$$f^2 + g^2 = 0$$

Συνεπώς επιδιώκεται ο μηδενισμός (ή ελαχιστοποίηση) της συνάρτησης $f^2 + g^2$.

Συνεπώς, εφαρμόζοντας τη μέθοδο του στόχου στο πρόβλημά μας προκύπτει:

$$Re(\Phi)^2 + Im(\Phi)^2 = [u(x, y) - Re(w)]^2 + [v(x, y) - Im(w)]^2 = 0$$

Εφόσον είναι γνωστό το πεδίο μεταβολής των x, y μπορεί να χωρισθεί σε N υποδιαστήματα (στις δύο διευθύνσεις) και να ανιχνευθούν οι περιοχές εμφάνισης ελαχίστου (μηδέν) της συνάρτησης $Re(\Phi)^2 + Im(\Phi)^2$. Έπειτα, υποδιαιρώντας τις περιοχές αυτές σε N νέα υποδιαστήματα ακολουθείται επαναληπτική διαδικασία που τερματίζεται όταν εντοπισθούν οι ρίζες x και y με την επιθυμητή ακρίβεια.

Στην ουσία, δημιουργούμε ένα πλέγμα στο μιγαδικό επίπεδο όπου βρίσκουμε την τιμή της $Re(\Phi)^2 + Im(\Phi)^2$ σε κάθε κόμβο. Όταν ολοκληρωθεί αυτή η διαδικασία δημιουργούμε ένα νέο πλέγμα γύρω από τον κόμβο με την ελάχιστη τιμή, μέχρις ότου συγκλίνει ο αλγόριθμος.

Ακολουθεί υπολογιστική εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου.

Εφαρμογή

Έστω η μιγαδική συνάρτηση $w = f(z) = z^2$. Εφόσον η μέθοδος αναπτύχθηκε έχοντας κατά νου ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, αρκεί ο εντοπισμός της θετικής ρίζας.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω μέθοδο στη συνάρτηση αυτή για $w = (4,2)$, προκύπτει:

$$\begin{cases} x = 2.05817106204825 \\ y = 0.485868396886578 \end{cases}$$

Εκτελούμε τώρα τις πράξεις:

$$\begin{aligned} z^2 &= (2.05817106204825 + i0.485868396886578)^2 \\ &= 2.05817106204825^2 + 2i2.05817106204825 * 0.485868396886578 \\ &\quad - 0.485868396886578^2 \\ &= 4.000000000000000 + i2.000000000000000 \end{aligned}$$

που είναι και η αρχική τιμή w .

Κεφάλαιο 4^ο

Εφαρμογές – Σχεδιασμός Αεροσκάφους

4. Εισαγωγή

Έως το σημείο αυτό έχει παρουσιασθεί ο αλγόριθμος προκαταρκτικής ανάλυσης επιδόσεων του αεροσκάφους, έχει παρατεθεί το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο για τη βελτιστοποίηση και έχει παρουσιασθεί αναλυτικά η μέθοδος των Μιγαδικών Μεταβλητών για τον υπολογισμό παραγώγων. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τη μελέτη τεσσάρων διαφορετικών εφαρμογών βελτιστοποίησης, όπου καθεμία αντιστοιχίζεται σε κάθε ένα από τους δύο αλγόριθμους ανάλυσης επιδόσεων του αεροσκάφους. Οι εφαρμογές αυτές συνίστανται σε:

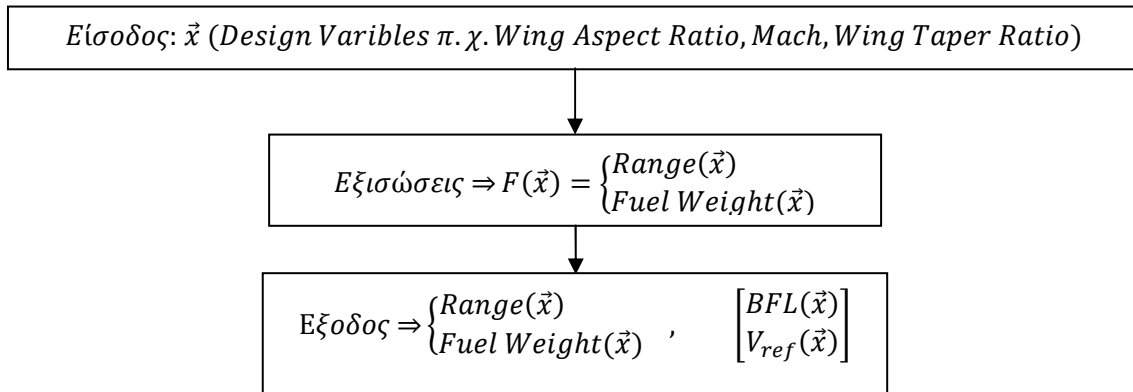
1. Μεγιστοποίηση της εμβέλειας του αεροσκάφους χωρίς να ληφθούν υπόψη περιορισμοί ισορροπημένου μήκους απογείωσης και ταχύτητας προσέγγισης.
2. Μεγιστοποίηση της εμβέλειας του αεροσκάφους υπό τους παρακάτω περιορισμούς:
 - Περιορισμός 1: Ισορροπημένο μήκος απογείωσης $BFL < 2500m$
 - Περιορισμός 2: Ταχύτητα προσέγγισης $V_{appr} < 76m/s$
3. Βελτιστοποίηση δύο στόχων:
 - Στόχος 1: Μέγιστη εμβέλεια του αεροσκάφους
 - Στόχος 2: Ελάχιστο αρχικό βάρος καυσίμουχωρίς να ληφθούν υπόψη περιορισμοί ισορροπημένου μήκους απογείωσης και ταχύτητας προσέγγισης.
4. Βελτιστοποίηση δύο στόχων:
 - Στόχος 1: Μέγιστη εμβέλεια του αεροσκάφους
 - Στόχος 2: Ελάχιστο αρχικό βάρος καυσίμουυπό τους παρακάτω περιορισμούς:
 - Περιορισμός 1: Ισορροπημένο μήκος απογείωσης $BFL < 2500m$
 - Περιορισμός 2: Ταχύτητα προσέγγισης $V_{appr} < 76m/s$

Φυσικά, σε όλες τις εφαρμογές που ακολουθούν τηρούνται τα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού (Πίνακας 1.1). Για να επιλυθούν οι τέσσερις αυτές εφαρμογές βελτιστοποίησης (δηλαδή να βρεθούν οι βέλτιστες λύσεις) εφαρμόζονται και για τους δύο αλγόριθμους ανάλυσης επιδόσεων οι μέθοδοι Απότομης Καθόδου και Newton έχοντας επιλύσει τα προβλήματα σύγκλισής τους όπως περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2. Οι πρώτες παράγωγοι καθώς και τα Εσσιανά μητρώα υπολογίζονται σε κάθε περίπτωση με τη μέθοδο των Μιγαδικών Μεταβλητών αλλά και με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών.

Τέλος, χρησιμοποιείται το λογισμικό βελτιστοποίησης με εξελικτικούς αλγορίθμους EASY, το οποίο έχει αναπτυχθεί στο Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, με σκοπό τη σύγκριση των αποτελεσμάτων των αιτιοκρατικών μεθόδων με ένα λογισμικό στοχαστικής βελτιστοποίησης υψηλής ποιότητας.

4.1. Εφαρμογή Στο Πρόβλημα Βελτιστοποίησης του Αεροσκάφους

Οι αλγόριθμοι ανάλυσης επιδόσεων του αεροσκάφους είναι στην ουσία συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, έστω $F(\vec{x})$, (όπου \vec{x} οι μεταβλητές σχεδιασμού) όπου για ένα δεδομένο σύνολο μεταβλητών σχεδιασμού υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης F , όπως περιγράφεται στον παρακάτω αλγόριθμο:

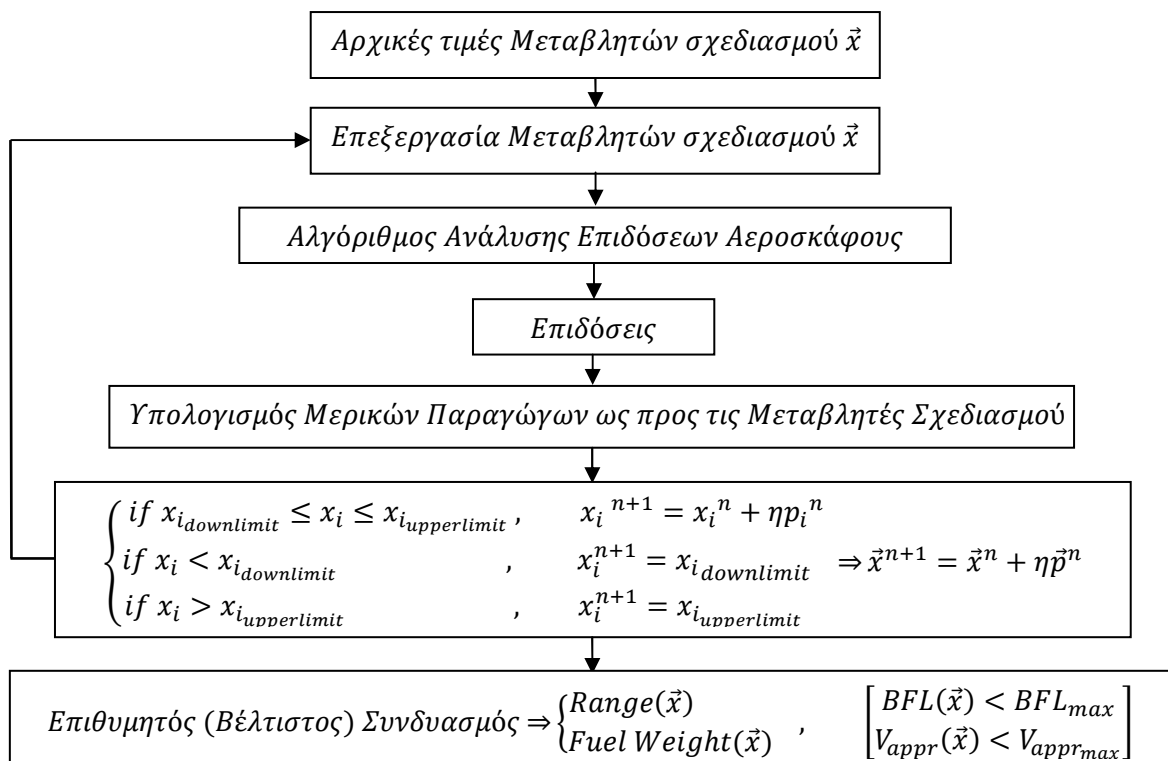


Σχήμα 4.1 – Αλγόριθμος Ανάλυσης Επιδόσεων Αεροσκάφους

Εάν ο αλγόριθμος ανάλυσης επιδόσεων του αεροσκάφους θεωρηθεί ως «μαύρο κουτί» το οποίο για συγκεκριμένες τιμές βγάζει κάποια αποτελέσματα, τότε η γενική λογική του προγραμματισμού των μεθόδων θα είναι η εξής:

Βελτιστοποίηση δύο στόχων: Μεγάλη εμβέλεια – Μικρό βάρος καυσίμου

με δύο περιορισμούς: Ισορροπημένο μήκος απογείωσης $BFL < 2500m$
Ταχύτητα προσέγγισης $V_{appr} < 76m/s$



Σχήμα 4.2 – Γενική μορφή αλγορίθμου Βελτιστοποίησης

Όπως αναφέρθηκε πρωτύτερα, έχουν κατασκευασθεί δύο αλγόριθμοι για την ανάλυση επιδόσεων του αεροσκάφους, όπου ο καθένας αποτελεί στην ουσία τη διατύπωση ενός διαφορετικού προβλήματος. Σε κάθε αλγόριθμο θα εφαρμοσθούν μέθοδοι Απότομης Καθόδου και Τροποποιημένης Μεθόδου Newton για διάφορα προβλήματα βελτιστοποίησης, ενώ κάθε μια από αυτές εφαρμόζεται δυο φορές ανά περίπτωση, αφού οι παράγωγοι υπολογίζονται με την μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών καθώς και με τη μέθοδο Μιγαδικών Μεταβλητών, σύμφωνα με το παρακάτω διάγραμμα:

Πρόβλημα 1	Αλγόριθμος 1	Μέθοδος Απότομης Καθόδου	{ Πεπερασμένες Διαφορές Μιγαδικές Μεταβλητές
		Τροποποιημένη Μέθοδος Newton	{ Πεπερασμένες Διαφορές Μιγαδικές Μεταβλητές
Αλγόριθμος 2	Αλγόριθμος 2	Μέθοδος Απότομης Καθόδου	{ Πεπερασμένες Διαφορές Μιγαδικές Μεταβλητές
		Τροποποιημένη Μέθοδος Newton	{ Πεπερασμένες Διαφορές Μιγαδικές Μεταβλητές
Πρόβλημα 2	Αλγόριθμος 1	Μέθοδος Απότομης Καθόδου	{ Πεπερασμένες Διαφορές Μιγαδικές Μεταβλητές
		Αλγόριθμος 2	{ Πεπερασμένες Διαφορές Μιγαδικές Μεταβλητές
Αλγόριθμος 2	Αλγόριθμος 2	Μέθοδος Απότομης Καθόδου	{ Πεπερασμένες Διαφορές Μιγαδικές Μεταβλητές
		Αλγόριθμος 1	{ Πεπερασμένες Διαφορές Μιγαδικές Μεταβλητές
Πρόβλημα 3	Αλγόριθμος 1	Μέθοδος Απότομης Καθόδου	{ Πεπερασμένες Διαφορές Μιγαδικές Μεταβλητές
		Αλγόριθμος 2	{ Πεπερασμένες Διαφορές Μιγαδικές Μεταβλητές
Αλγόριθμος 2	Αλγόριθμος 2	Μέθοδος Απότομης Καθόδου	{ Πεπερασμένες Διαφορές Μιγαδικές Μεταβλητές
		Αλγόριθμος 1	{ Πεπερασμένες Διαφορές Μιγαδικές Μεταβλητές
Πρόβλημα 4	Αλγόριθμος 1	Μέθοδος Απότομης Καθόδου	{ Πεπερασμένες Διαφορές Μιγαδικές Μεταβλητές
		Τροποποιημένη Μέθοδος Newton	{ Πεπερασμένες Διαφορές Μιγαδικές Μεταβλητές
Αλγόριθμος 2	Αλγόριθμος 2	Μέθοδος Απότομης Καθόδου	{ Πεπερασμένες Διαφορές Μιγαδικές Μεταβλητές
		Τροποποιημένη Μέθοδος Newton	{ Πεπερασμένες Διαφορές Μιγαδικές Μεταβλητές

Στις παραγράφους που ακολουθούν θα αναφερόμαστε στην Τροποποιημένη Μέθοδο Newton απλά ως Μέθοδο Newton. Επίσης, θα αναφερόμαστε στους αλγόριθμους ανάλυσης επιδόσεων για τα προβλήματα σχεδιασμού 1 και 2, απλά ως αλγόριθμους 1 και 2 αντίστοιχα.

4.2. Όρια Μεταβλητών Σχεδιασμού

Στο σημείο αυτό, κρίνεται σκόπιμο να παρατεθεί εκ νέου ο πίνακας με τα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού.

<u>Μεταβλητή Σχεδιασμού</u>	<u>Όρια Μεταβλητών Σχεδιασμού</u>	
	<u>Κάτω Όριο</u>	<u>Άνω Όριο</u>
<u>Συνθήκες Πτήσης</u>		
Υψόμετρο Πτήσης [m]	13000	18000
Αριθμός Mach	1.3	2.0
<u>Καύσιμο Γωνία Πρόσπτωσης και Άτρακτος</u>		
Βάρος Καυσίμου [kg]	20000	30000
Γωνία Πρόσπτωσης σε Ευθεία Πτήση (°)	0.5	5.0
Διάμετρος Ατράκτου [m]	2.0	2.3
<u>Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα</u>		
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας [m ²]	120	220
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας (°)	40	70
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας	1.0	3.5
Εκλέπτυνση Πτέρυγας	0.05	0.5
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή	0.04	0.06
<u>Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο</u>		
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου (°)	45	60
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου	0.8	2.5
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου	0.05	0.5
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου	0.06	0.08
<u>Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς</u>		
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας (°)	12	16
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης	0.75	0.9

Πίνακας 4.1 – Όρια μεταβλητών σχεδιασμού και για τα δύο προβλήματα σχεδιασμού

4.3. Σημεία Εκκίνησης Αλγόριθμων

Παρατίθενται παρακάτω δύο ενδεικτικοί πίνακες με τις τιμές εκκίνησης των περισσότερων εκ των αλγόριθμων που θα ακολουθήσουν. Σε περιπτώσεις το σημείο εκκίνησης είναι διαφορετικό για λόγους σύγκλισης, αλλά κρίνεται άσκοπο να παρατεθούν τα σύνολα μεταβλητών για κάθε περίπτωση ξεχωριστά.

<u>Μεταβλητή Σχεδιασμού</u>	<u>Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού</u>
<u>Συνθήκες Πτήσης</u>	
Υψόμετρο Πτήσης [m]	17000
Αριθμός Mach	1.8
<u>Καύσιμο Γωνία Πρόσπτωσης και Άτρακτος</u>	
Βάρος Καυσίμου [kg] (Αλγόριθμος 1)	22000
Γωνία Πρόσπτωσης σε Ευθεία Πτήση (°) (Αλγόριθμος 2)	3.2
Διάμετρος Ατράκτου [m]	2.0
<u>Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα</u>	
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας	200.0
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας	55.0
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας	3.5
Εκλέπτυνση Πτέρυγας	0.05
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή	0.04
<u>Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο</u>	
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου	45.0
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου	1.3
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου	0.25
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου	0.06
<u>Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς</u>	
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας	14.9
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης	0.8

Πίνακας 4.2 – Συνήθεις τιμές εκκίνησης αλγόριθμων βελτιστοποίησης και για τα δύο προβλήματα σχεδιασμού

4.4. Εφαρμογή 1: Μειστοποίηση της Εμβέλειας του Αεροσκάφους Χωρίς Περιορισμούς

Η μελέτη της απλής αυτής εφαρμογής εξυπηρετεί δύο στόχους. Πρώτον, αναλαμβάνοντας ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, είναι απαραίτητο σε πρώτη φάση να μελετηθεί η συμπεριφορά της συνάρτησης κόστους. Δεν είναι απίθανο η επίλυση μιας τέτοιας απλής εφαρμογής να αποδώσει καλά αποτελέσματα εντός των περιορισμών δίνοντας, αν όχι τη βέλτιστη λύση, ένα καλό σημείο για την έναρξη της διαδικασίας σε επόμενες, πιο σύνθετες μεθόδους. Δεύτερον, είναι μια πολύ καλή ευκαιρία να προγραμματιστεί και να παρουσιαστεί η μέθοδος Μιγαδικών Μεταβλητών για όλες τις μεθόδους και για τους δύο αλγόριθμους ανάλυσης επιδόσεων του αεροσκάφους σε μια απλή εφαρμογή ενός στόχου χωρίς περιορισμούς (τα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού βέβαια τηρούνται σε κάθε περίπτωση).

Όπως περιγράφηκε παραπάνω, η διατύπωση του προβλήματος είναι:

$$\max (Range(\vec{x})) \quad (1.1)$$

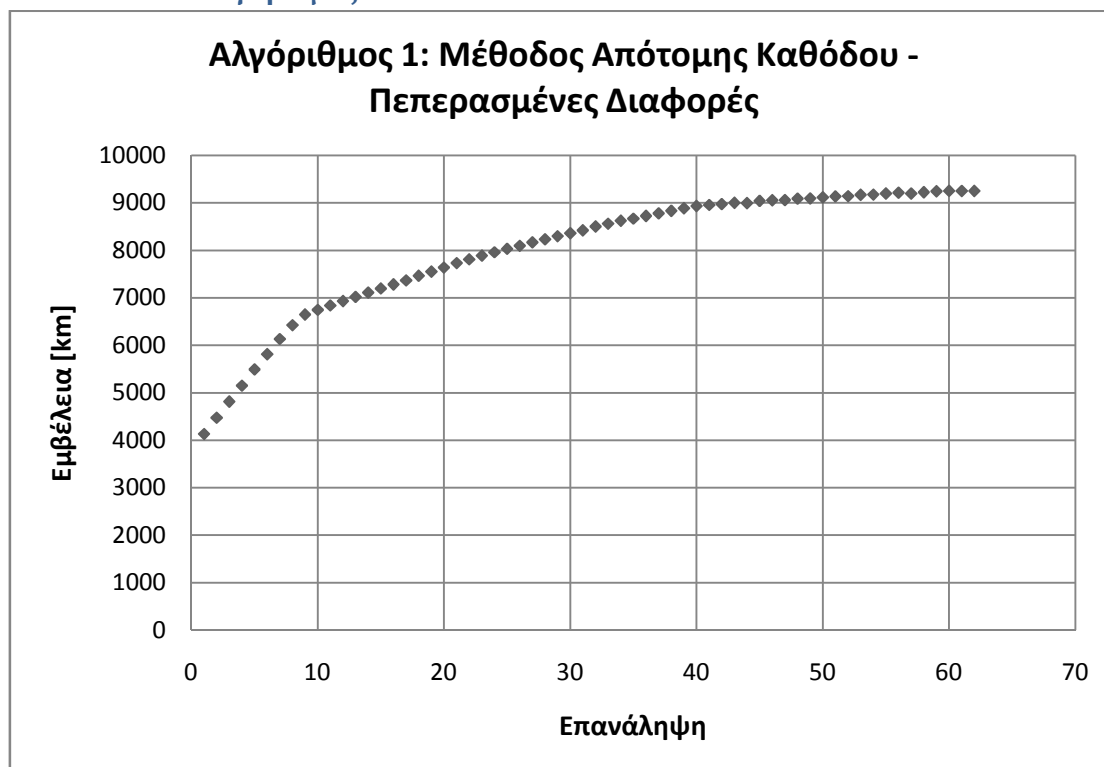
και αντιμετωπίζεται ως πρόβλημα ανόδου. Αυτό σημαίνει πως χρησιμοποιείται η σχέση:

$$x^{n+1} = x^n + \eta^n p^n, \quad \eta^n > 0 \quad (1.2)$$

Ακολουθούν τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης.

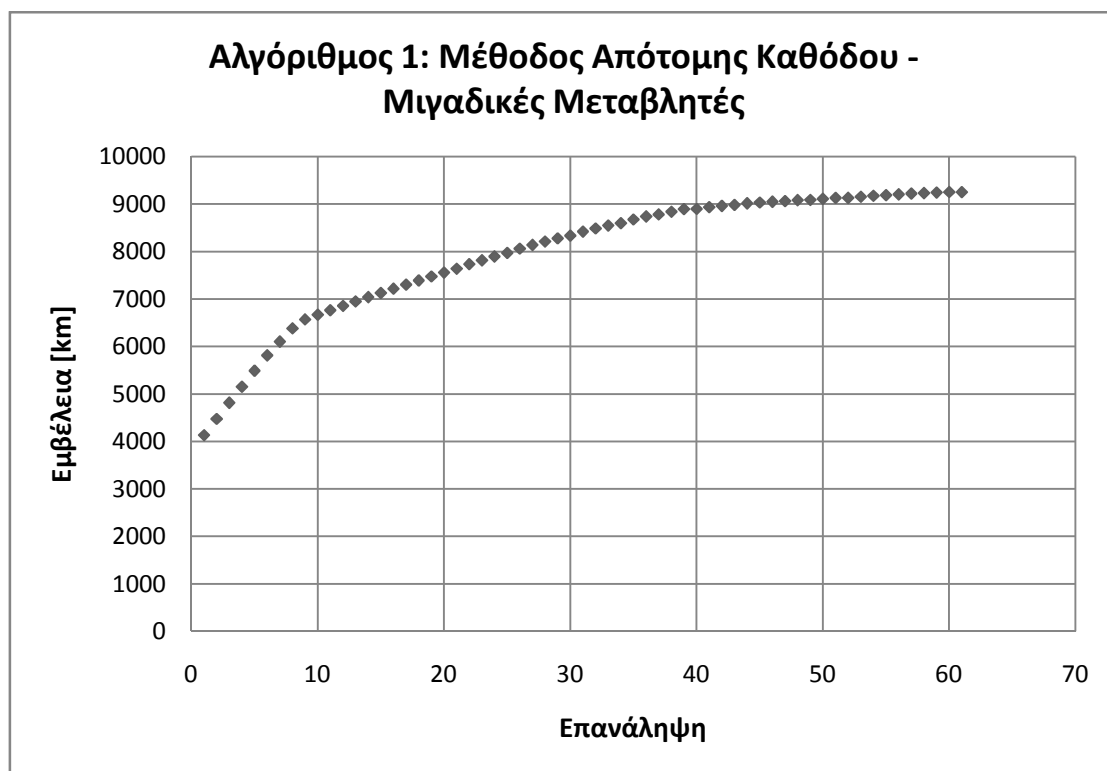
Σημειώνεται πως σε αυτή την πρώτη φάση της ανάλυσης, το κάτω όριο της ταχύτητας σε συνθήκες ευθείας πτήσης θεωρήθηκε $Mach = 1.5$

4.4.1. Αλγόριθμος 1



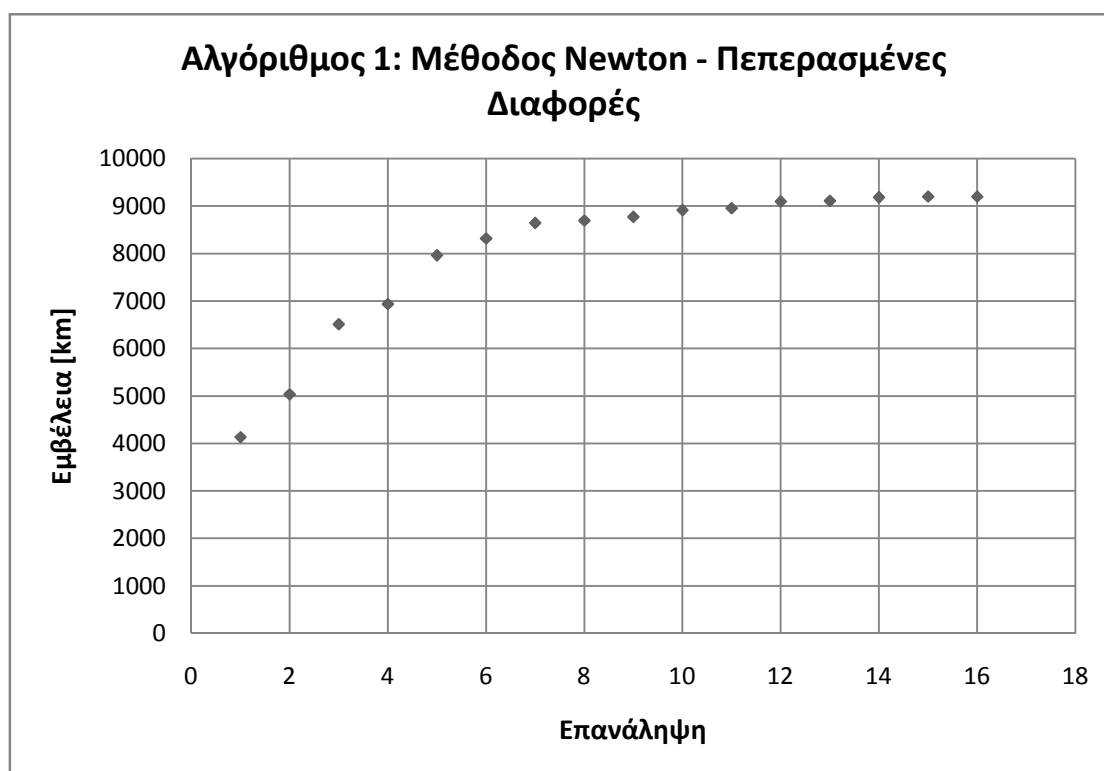
Διάγραμμα 4.1 - Αλγόριθμος 1: Μέθοδος Απότομης Καθόδου - Πεπερασμένες Διαφορές

Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	9253	30000	8082	130.2
Μεταβλητή Σχεδιασμού			Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού	
Συνθήκες Πτήσης				
Υψόμετρο Πτήσης [m]			14023	
Αριθμός Mach			1.54	
Καύσιμο και Άτρακτος (Αλγόριθμος 1)				
Βάρος Καυσίμου [kg]			30000	
Διάμετρος Ατράκτου [m]			2.0	
Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας [m ²]			120.0	
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας (°)			70.0	
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας			1.35	
Εκλέπτυνση Πτέρυγας			0.05	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή			0.04	
Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου (°)			58.6	
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου			1.31	
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου			0.46	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου			0.06	
Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας (°)			14.9 (Αρχική Τιμή)	
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης			0.8 (Αρχική Τιμή)	



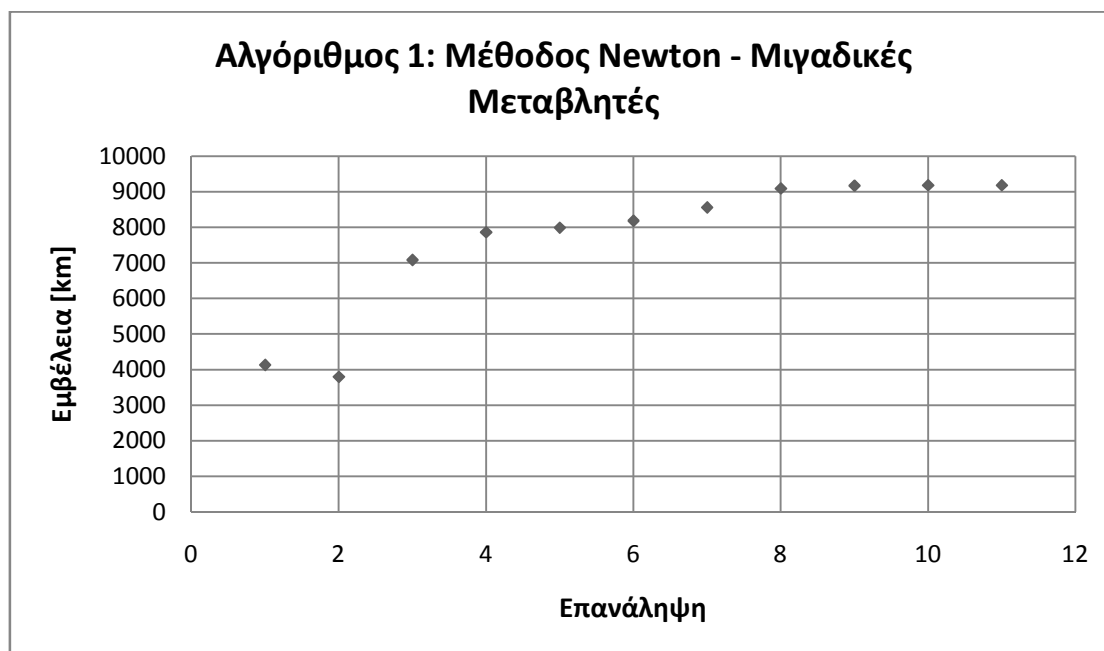
Διάγραμμα 4.2 - Αλγόριθμος 1: Μέθοδος Απότομης Καθόδου – Μιγαδικές Μεταβλητές

Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	9252	30000	8082	130.2
<u>Μεταβλητή Σχεδιασμού</u>			<u>Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού</u>	
<u>Συνθήκες Πτήσης</u>				
Υψόμετρο Πτήσης [m]			14032	
Αριθμός Mach			1.51	
<u>Καύσιμο και Άτρακτος (Αλγόριθμος 1)</u>				
Βάρος Καυσίμου [kg]			30000	
Διάμετρος Ατράκτου [m]			2.0	
<u>Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα</u>				
Όνομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας [m ²]			120.0	
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας (°)			70.0	
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας			1.32	
Εκλέπτυνση Πτέρυγας			0.05	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή			0.04	
<u>Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερύγιο</u>				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου (°)			58.17159	
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου			1.39	
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου			0.46	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου			0.06	
<u>Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς</u>				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας (°)			14.9 (Αρχική Τιμή)	
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης			0.8 (Αρχική Τιμή)	



Διάγραμμα 4.3 - Αλγόριθμος 1: Μέθοδος Newton - Πεπερασμένες Διαφορές

Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	9204	29867	7742	124.5
<u>Μεταβλητή Σχεδιασμού</u>			<u>Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού</u>	
<u>Συνθήκες Πτήσης</u>				
Υψόμετρο Πτήσης [m]			13809	
Αριθμός Mach			1.501	
<u>Καύσιμο και Άτρακτος (Αλγόριθμος 1)</u>				
Βάρος Καυσίμου [kg]			29867	
Διάμετρος Ατράκτου [m]			2.0	
<u>Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα</u>				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας			120.0	
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας			70.0	
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας			1.49	
Εκλέπτυνση Πτέρυγας			0.052	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή			0.04	
<u>Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο</u>				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου			58.8	
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου			1.38	
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου			0.5	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου			0.06	
<u>Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς</u>				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας			14.9 (Αρχική Τιμή)	
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης			0.8 (Αρχική Τιμή)	



Διάγραμμα 4.4 - Αλγόριθμος 1: Μέθοδος Newton – Μιγαδικές Μεταβλητές

Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	9187	29875	7956	125.4
<u>Μεταβλητή Σχεδιασμού</u>			<u>Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού</u>	
<u>Συνθήκες Πτήσης</u>				
Υψόμετρο Πτήσης [m]	13683			
Αριθμός Mach	1.5			
<u>Καύσιμο και Άτρακτος (Αλγόριθμος 1)</u>				
Βάρος Καυσίμου [kg]	29875			
Διάμετρος Ατράκτου [m]	2.0			
<u>Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα</u>				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας	120.1			
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας	70.0			
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας	1.47			
Εκλέπτυνση Πτέρυγας	0.05			
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή	0.04			
<u>Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο</u>				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου	60.0			
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου	1.62			
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου	0.49			
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου	0.06			
<u>Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς</u>				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας	14.9 (Αρχική Τιμή)			
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης	0.80 (Αρχική Τιμή)			

4.4.2. Παρατηρήσεις Πάνω στον Αλγόριθμο 1

Τα αεροσκάφη που προκύπτουν από τις παραπάνω τέσσερις μεθόδους είναι, όπως φαίνεται από τα χαρακτηριστικά τους, αρκετά όμοια.

Παρατηρούμε πως τα μεγέθη ισορροπημένου μήκους απογείωσης και ταχύτητας προσέγγισης υπερβαίνουν τα αποδεκτά όρια κατά πολύ.

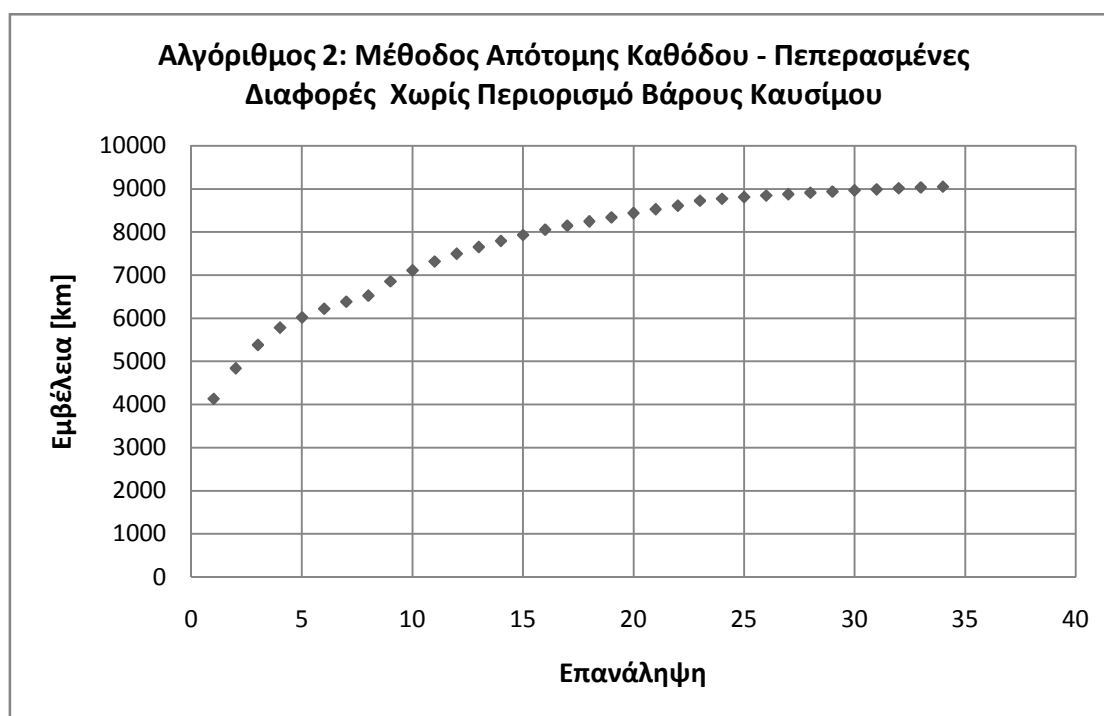
Επίσης, το βάρος του καυσίμου αγγίζει το άνω όριο.

Το συμπέρασμα από τη μελέτη της συμπεριφοράς του αλγορίθμου 1 στο πρόβλημα μεγιστοποίησης της εμβέλειας επιβεβαιώνει το αναμενόμενο, δηλαδή πως όσο μεγαλώνει η εμβέλεια του αεροσκάφους αυξάνεται το βάρος του απαιτούμενου καυσίμου και τα απαιτούμενα μήκη απογείωσης και προσγείωσης.

4.4.3. Αλγόριθμος 2

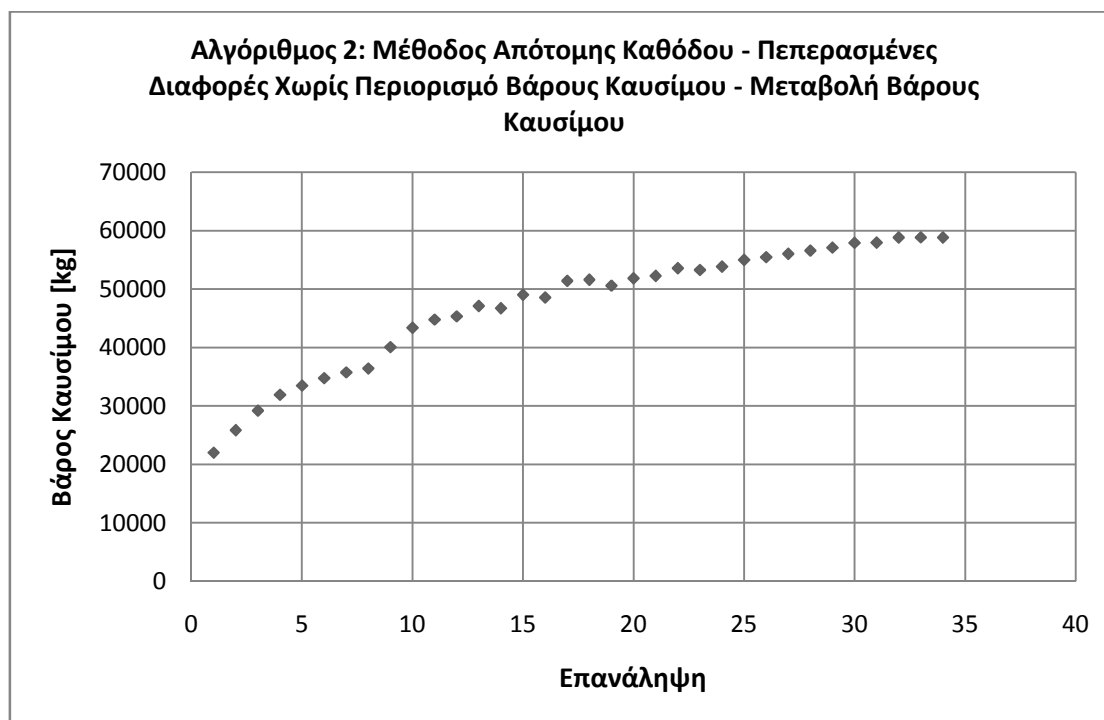
Λόγω της δομής του αλγορίθμου 2, δε μπορεί να επιβληθεί άνω ή κάτω όριο στο βάρος του καυσίμου, όπως και στον αλγόριθμο 1 δε μπορεί να επιβληθεί άνω ή κάτω όριο στη γωνία πρόσπτωσης. Διαπιστώνεται πως ενώ ο αλγόριθμος 1 δεν παρουσιάζει προβλήματα λόγω της αδυναμίας αυτής, ο αλγόριθμος 2, στο συγκεκριμένο πρόβλημα, τερματίζει με σφάλμα. Αυτό συμβαίνει επειδή αναζητώντας τη μέγιστη εμβέλεια χωρίς την επιβολή κάποιων άλλων συνθηκών, το βάρος καυσίμου αυξάνεται ανεξέλεγκτα έως ότου, αρκετά νωρίς στη διαδικασία, φτάσει τιμές της τάξης των 60 τόνων και τερματίζει με σφάλμα.

Μια εφαρμογή της μεθόδου Απότομης Καθόδου χωρίς κάποιο έλεγχο του βάρους καυσίμου στον αλγόριθμο 2 φαίνεται παρακάτω:



Διάγραμμα 4.5 - Αλγόριθμος 2: Μέθοδος Απότομης Καθόδου - Πεπερασμένες Διαφορές Χωρίς Περιορισμό Βάρους Καυσίμου

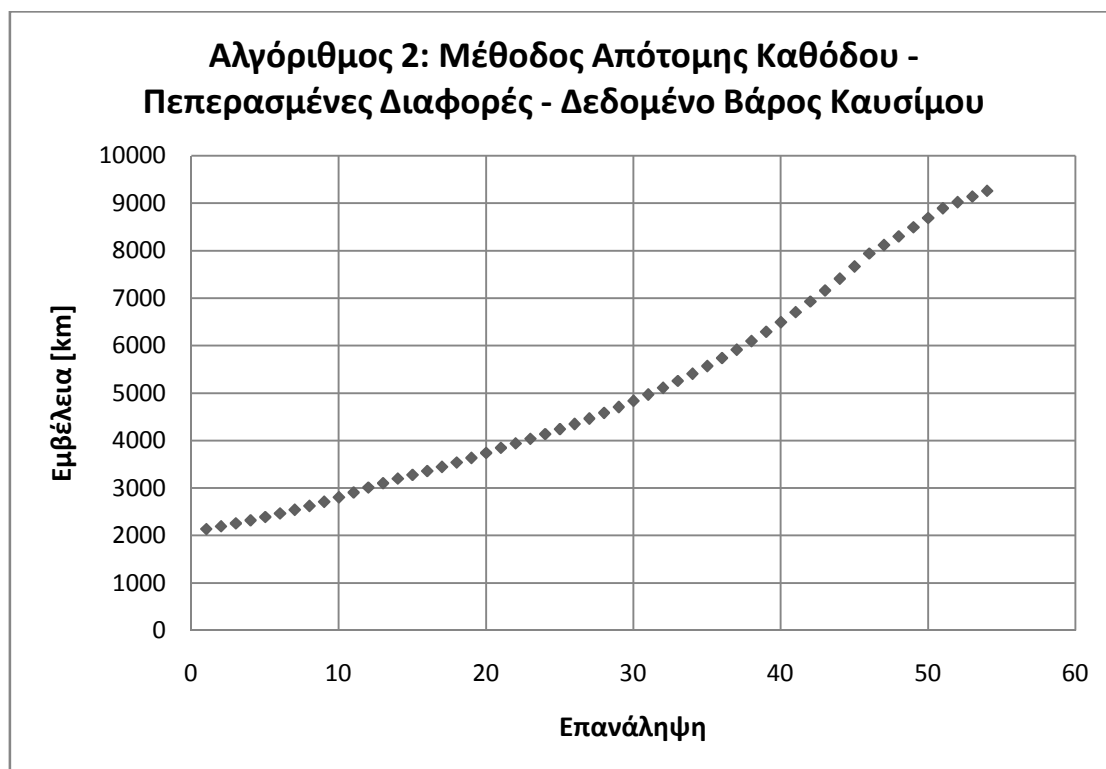
όπου φαίνεται ο πρόωρος τερματισμός της μεθόδου, ενώ στο παρακάτω διάγραμμα εικονίζεται η ανεξέλεγκτη αύξηση του βάρους καυσίμου σε τιμή περίπου 60 τόνων, που είναι και ο λόγος του πρόωρου τερματισμού της μεθόδου.



Διάγραμμα 4.6 - Αλγόριθμος 2: Μέθοδος Απότομης Καθόδου - Πεπερασμένες Διαφορές Χωρίς Περιορισμό Βάρους Καυσίμου - Μεταβολή Βάρους Καυσίμου

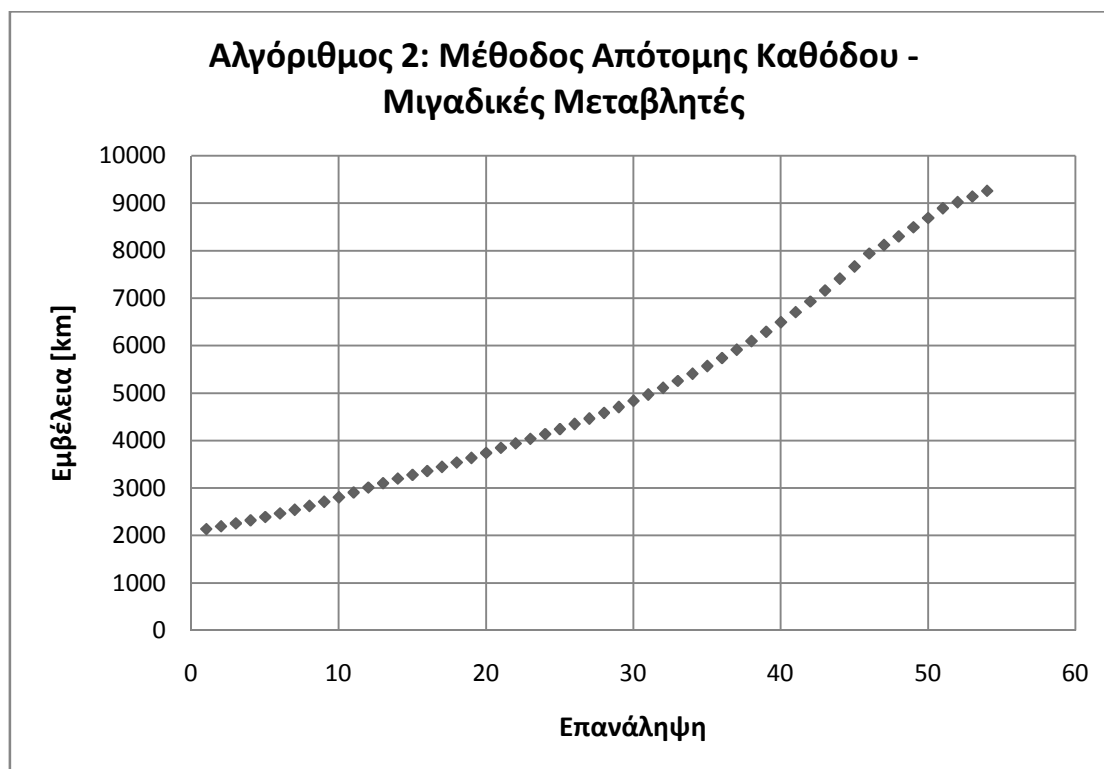
Λόγω όσων περιγράφηκαν παραπάνω, για τις ανάγκες του συγκεκριμένου προβλήματος βελτιστοποίησης ενός στόχου χωρίς περιορισμούς, προγραμματίζεται μια παραλλαγή του αλγόριθμου 2 όπου το βάρος του καυσίμου θεωρείται δεδομένο και ίσο με $W_{fuel} = 30tn$ ¹⁷. Έτσι, ο αλγόριθμος 2 περιέχει τώρα μόνο ένα επαναληπτικό βρόχο, το βρόχο υπολογισμού του βάρους του κινητήρα. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν με όλες τις μεθόδους βελτιστοποίησης για αυτό τον τροποποιημένο αλγόριθμο παρουσιάζονται παρακάτω.

¹⁷ Το βάρος του καυσίμου επιλέγεται ίσο με 30 τόνους και όχι κάποια άλλη τιμή επειδή παρατηρήθηκε πως η μέγιστη εμβέλεια στον αλγόριθμο 1 προκύπτει πολύ κοντά στο άνω όριο του βάρους καυσίμου (30tn).



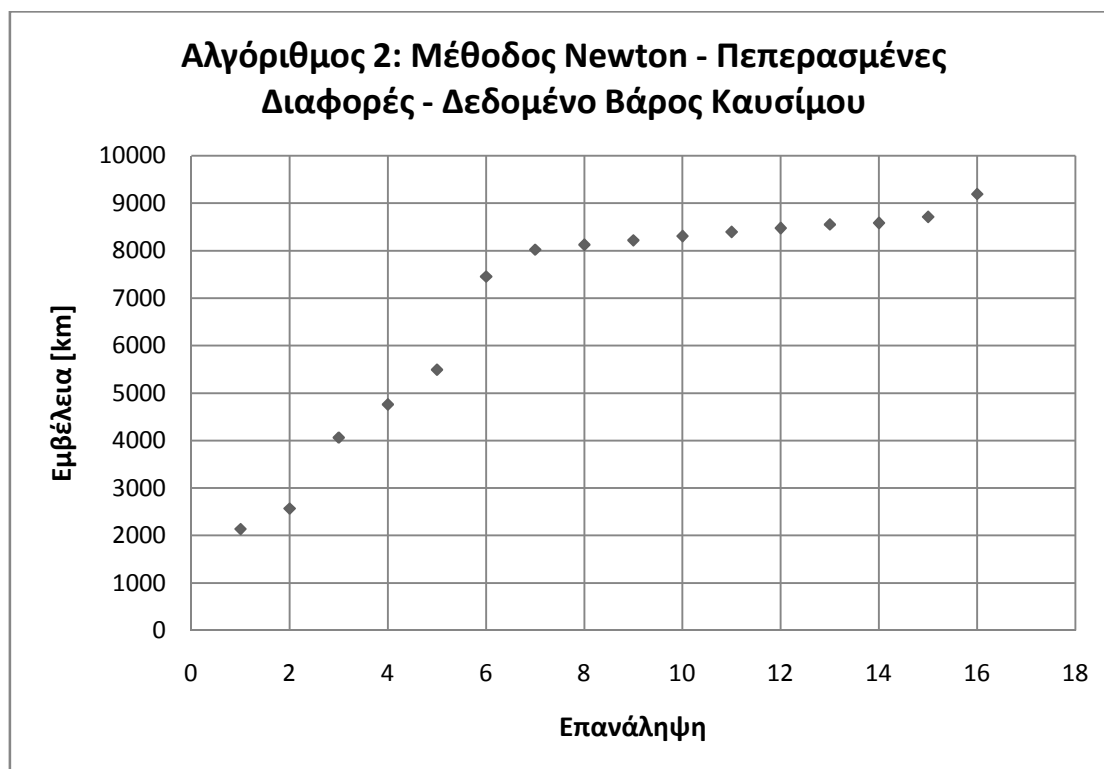
Διάγραμμα 4.7 - Αλγόριθμος 2: Μέθοδος Απότομης Καθόδου - Πεπερασμένες Διαφορές – Δεδομένο Βάρους Καυσίμου

Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	9264	30000	6152	99.4
<u>Μεταβλητή Σχεδιασμού</u>			<u>Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού</u>	
<u>Συνθήκες Πτήσης</u>				
Υψόμετρο Πτήσης [m]			17997	
Αριθμός Mach			1.72	
<u>Γωνία Πρόσπτωσης και Άτρακτος (Αλγόριθμος 2)</u>				
Γωνία Πρόσπτωσης σε Ευθεία Πτήση (°)			4.5	
Διάμετρος Ατράκτου [m]			2.0	
<u>Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα</u>				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας			191.3	
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας			65.3	
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας			1.52	
Εκλέπτυνση Πτέρυγας			0.06	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή			0.04	
<u>Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο</u>				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου			51.9	
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου			1.41	
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου			0.26	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου			0.06	
<u>Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς</u>				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας			14.9 (Αρχική Τιμή)	
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης			0.80 (Αρχική Τιμή)	



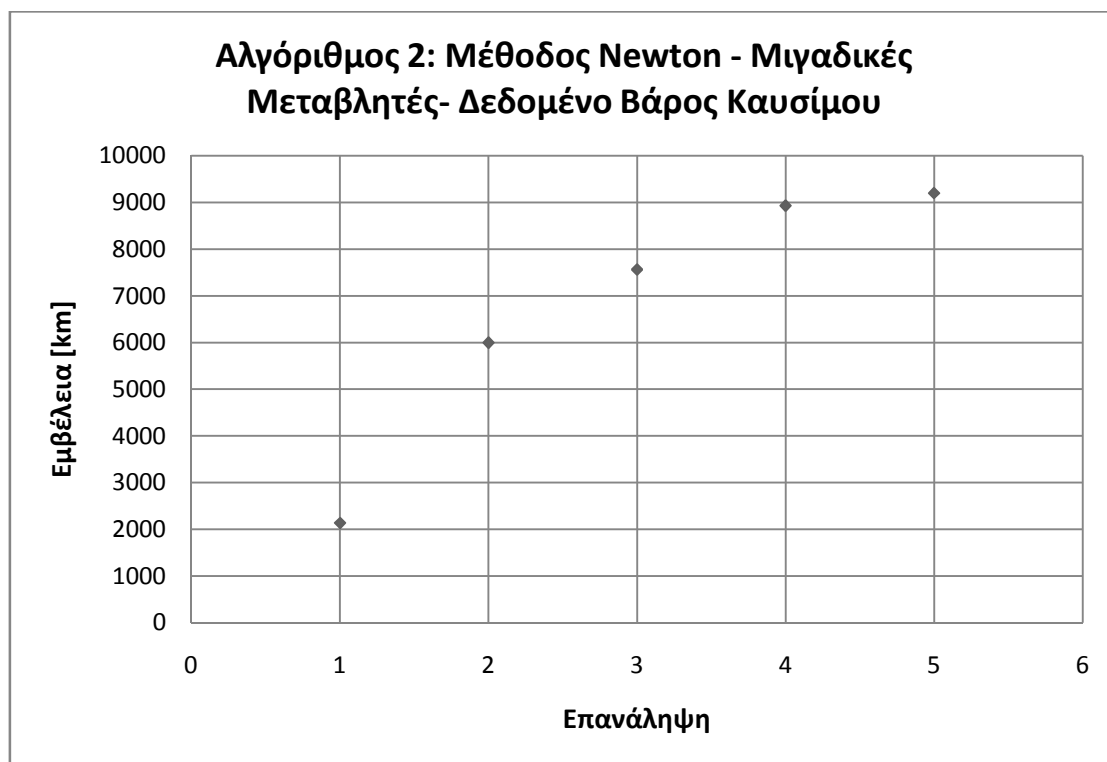
Διάγραμμα 4.8 - Αλγόριθμος 2: Μέθοδος Απότομης Καθόδου – Μιγαδικές Μεταβλητές – Δεδομένο Βάρους Καυσίμου

Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρους Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	9264	30000	6152	99.4
<u>Μεταβλητή Σχεδιασμού</u>			<u>Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού</u>	
<u>Συνθήκες Πτήσης</u>				
Υψόμετρο Πτήσης [m]			17997	
Αριθμός Mach			1.72	
<u>Γωνία Πρόσπτωσης και Άτρακτος (Αλγόριθμος 2)</u>				
Γωνία Πρόσπτωσης σε Ευθεία Πτήση (°)			4.5	
Διάμετρος Ατράκτου [m]			2.0	
<u>Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα</u>				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας			191.3	
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας			65.3	
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας			1.52	
Εκλέπτυνση Πτέρυγας			0.06	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή			0.04	
<u>Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο</u>				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου			51.9	
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου			1.41	
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου			0.26	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου			0.06	
<u>Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς</u>				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας			14.9 (Αρχική Τιμή)	
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης			0.80 (Αρχική Τιμή)	



Διάγραμμα 4.9 - Αλγόριθμος 2: Μέθοδος Newton –Πεπερασμένες Διαφορές – Δεδομένο Βάρους Καυσίμου

Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	9195	30000	5447	97.5
<u>Μεταβλητή Σχεδιασμού</u>			<u>Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού</u>	
<u>Συνθήκες Πτήσης</u>				
Υψόμετρο Πτήσης [m]			17997	
Αριθμός Mach			1.7	
<u>Γωνία Πρόσπτωσης και Άτρακτος (Αλγόριθμος 2)</u>				
Γωνία Πρόσπτωσης σε Ευθεία Πτήση (°)			4.57	
Διάμετρος Ατράκτου [m]			2.0	
<u>Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα</u>				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας			197.6	
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας			70.0	
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας			1.56	
Εκλέπτυνση Πτέρυγας			0.05	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή			0.0413	
<u>Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο</u>				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου			50.13	
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου			1.23	
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου			0.25	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου			0.0651	
<u>Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς</u>				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας			14.9 (Αρχική Τιμή)	
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης			0.80 (Αρχική Τιμή)	



Διάγραμμα 4.10 - Αλγόριθμος 2: Μέθοδος Newton –Μιγαδικές Μεταβλητές – Δεδομένο Βάρους Καυσίμου

Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	9201	30000	5815	91.7
Μεταβλητή Σχεδιασμού			Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού	
Συνθήκες Πτήσης				
Υψόμετρο Πτήσης [m]			17997	
Αριθμός Mach			1.52	
Γωνία Πρόσπτωσης και Άτρακτος (Αλγόριθμος 2)				
Γωνία Πρόσπτωσης σε Ευθεία Πτήση (°)			4.99	
Διάμετρος Ατράκτου [m]			2.1	
Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας			214.8	
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας			70.0	
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας			1.58	
Εκλέπτυνση Πτέρυγας			0.05	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή			0.04	
Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου			45.1	
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου			1.24	
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου			0.25	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου			0.06	
Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας			14.9 (Αρχική Τιμή)	
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης			0.80 (Αρχική Τιμή)	

4.4.4. Παρατηρήσεις Πάνω στον Αλγόριθμο 2

Παρατηρούμε πως, όπως και στον πρώτο αλγόριθμο, τα αεροσκάφη που προκύπτουν έχουν όμοια κατασκευαστικά χαρακτηριστικά και πολύ μεγάλη εμβέλεια, αλλά είναι πολύ μακριά από τις προδιαγραφές.

Είναι ενδιαφέρον πως, ενώ οι μέγιστες εμβέλειες είναι περίπου ίδιες για όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν, τα αεροσκάφη που προέκυψαν από τον κάθε αλγόριθμο είναι πολύ διαφορετικά. Αν αναλογιστούμε πως οι δύο αλγόριθμοι για ίδια¹⁸ δεδομένα επιστρέφουν τα ίδια αποτελέσματα συμπεραίνουμε πως κάνοντας χρήση του αλγόριθμου 2 εντοπίστηκε ένα διαφορετικό ακρότατο.

4.4.5. Γενικές Παρατηρήσεις Πάνω στην Εφαρμογή 1

Η εφαρμογή μεγιστοποίησης της εμβέλειας χωρίς περιορισμούς είναι η πιο απλή από όσες παρουσιάζονται. Η παρουσίασή της, όπως αναφέρθηκε αρχικά, εξυπηρετεί τρεις σκοπούς:

- τη μελέτη της συμπεριφοράς των αλγορίθμων
- τη μελέτη της συμπεριφοράς των δύο μεθόδων βελτιστοποίησης
- την παρουσίαση της μεθόδου Μιγαδικών Μεταβλητών

Όσον αφορά τον πρώτο σκοπό, είδαμε πως οι αλγόριθμοι συμπεριφέρονται όπως είναι αναμενόμενο και πως τα αεροσκάφη που προκύπτουν δεν είναι λειτουργικά. Πάραυτα, τα αποτελέσματα αυτά θα μπορούσαν να αποτελέσουν οδηγό σε περίπτωση που επιχειρηθεί κάποια αλλαγή εμπειρικής σχέσης με σκοπό την καλύτερη συμπεριφορά των αλγορίθμων ως προς τους περιορισμούς.

Όσον αφορά τις μεθόδους βελτιστοποίησης, βλέπουμε πως η (Τροποποιημένη) μέθοδος Newton συγκλίνει σε πολύ λιγότερες επαναλήψεις σε σχέση με τη μέθοδο Απότομης Καθόδου, αν και ο αριθμός επαναλήψεων στις οποίες επιτυγχάνεται σύγκλιση της μεθόδου παρουσιάζει διακύμανση μεταξύ των εφαρμογών.

Όσον αφορά τη μέθοδο Μιγαδικών Μεταβλητών, παρατηρούμε πως στις μεθόδους Απότομης Καθόδου οι παράγωγοι υπολογισμένες με τη μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών, που υπολογίζονται με διπλές κλήσεις της συνάρτησης κόστους, είναι σχεδόν ίδιες με τις αντίστοιχες παραγώγους υπολογισμένες με τη μέθοδο Μιγαδικών Μεταβλητών. Αυτό είναι εμφανές καθώς οι καμπύλες και τα τελικά αποτελέσματα σχεδόν ταυτίζονται. Ιδιαίτερα στην περίπτωση του αλγόριθμου 2, ταυτίζονται απολύτως (ο λόγος στην περίπτωση αυτή είναι πως λόγω της έλλειψης δεύτερου επαναληπτικού βρόχου, το αριθμητικό σφάλμα στους υπολογισμούς πεπερασμένων διαφορών είναι ελάχιστο, άρα συγκρίσιμο της μεθόδου Μιγαδικών Μεταβλητών). Με άλλα λόγια, επιτυγχάνεται ίδιας τάξης ακρίβεια με λιγότερες κλήσεις της συνάρτησης κόστους (αν και συνολικά η μέθοδος Μιγαδικών

¹⁸ Στον πρώτο αλγόριθμο για ένα δεδομένο σύνολο μεταβλητών και βάρος καυσίμου αντιστοιχούν συγκεκριμένες επιδόσεις αλλά και συγκεκριμένη γωνία πρόσπτωσης. Αν η είσοδος του δεύτερου αλγόριθμου είναι το ίδιο σύνολο μεταβλητών και το βάρος καυσίμου αντικατασταθεί με αυτή την τιμή γωνίας πρόσπτωσης, προκύπτουν ακριβώς οι ίδιες επιδόσεις καθώς και το βάρος καυσίμου που ήταν δεδομένο στον πρώτο αλγόριθμο. Φυσικά, λόγω της διαφορετικής κατασκευής τους, οι δύο αλγόριθμοι συνήθως παρουσιάζουν διαφορετική αριθμητική συμπεριφορά.

Μεταβλητών απαιτεί περισσότερο χρόνο λόγω των αυξημένων πράξεων). Η μέθοδος Newton είναι εκ φύσεως εξαιρετικά ευαίσθητη ακόμη και σε μικρή διακύμανση των τιμών, οπότε παρατηρείται διαφορετική συμπεριφορά, με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατό να συγκριθεί η ακρίβεια υπολογισμού των Εσσιανών μητρώων βάσει αυτών των αποτελεσμάτων. Σημειώνεται πως τα αναλυτικά υπολογισμένα Εσσιανά μητρώα τροποποιούνται από τον αλγόριθμο Cholesky, οπότε τυχόν μικρές διαφορές μεταξύ των μητρώων αμβλύνονται μετά της διαδικασία της παραγοντοποίησης. Επιπροσθέτως, λόγω της διαδικασίας επιλογής μήκους βήματος, ακόμη και ελάχιστη διαφορά μπορεί να οδηγήσει σε επιλογή διαφορετικού μήκους βήματος ανά περίπτωση, γεγονός που όντως συμβαίνει και δικαιολογεί τη διαφορετική συμπεριφορά μεταξύ των μεθόδων Newton. Πάραυτα, οι αλγόριθμοι συγκλίνουν σε πολύ κοντινές λύσεις.

4.4.6. Συγκεντρωτικός Πίνακας Επιδόσεων για την Εφαρμογή Μεγιστοποίησης Εμβέλειας Χωρίς Περιορισμούς

Μέθοδος/Επίδοση	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα Προσέγγισης [m/s]
<u>Αλγόριθμος 1</u>				
<i>M. Απότομης Καθόδου – Πεπερασμένες Διαφορές</i>	9253	30000	8082	130.2
<i>M. Απότομης Καθόδου – Μιγαδικές Μεταβλητές</i>	9252	30000	8082	130.2
<i>M. Newton Πεπερασμένες Διαφορές</i>	9204	29867	7742	124.5
<i>M. Newton Μιγαδικές Μεταβλητές</i>	9187	29875	7956	125.4
<u>Αλγόριθμος 2 με δεδομένο βάρος καυσίμου</u>				
<i>M. Απότομης Καθόδου – Πεπερασμένες Διαφορές</i>	9264	30000	6152	99.4
<i>M. Απότομης Καθόδου – Μιγαδικές Μεταβλητές</i>	9264	30000	6152	99.4
<i>M. Newton Πεπερασμένες Διαφορές</i>	9195	30000	5447	97.5
<i>M. Newton Μιγαδικές Μεταβλητές</i>	9201	30000	5815	91.7

Πίνακας 4. 3 – Επιδόσεις Βέλτιστων Αεροσκαφών για το Πρόβλημα 1

4.5. Εφαρμογή 2 – Μεγιστοποίηση Εμβέλειας με Περιορισμούς

Είδαμε παραπάνω πως η απλή εφαρμογή μεγιστοποίησης της εμβέλειας δεν αποφέρει αποδεκτά αποτελέσματα. Τα «βέλτιστα» αεροσκάφη δεν πληρούν τις προδιαγραφές ισορροπημένου μήκους απογείωσης και ταχύτητας προσέγγισης, ενώ καταναλώνουν τη μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα καυσίμου.

Το επόμενο λογικό βήμα είναι να μελετηθεί η ίδια εφαρμογή μεγιστοποίησης της εμβέλειας λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς:

- Περιορισμός 1: Ισορροπημένο μήκος απογείωσης $BFL < 2500m$
- Περιορισμός 2: Ταχύτητα προσέγγισης $V_{appr} < 76m/s$

ή αλλιώς:

$$\min(F(\vec{x})) = \min\left(\frac{1}{Range(\vec{x})}\right), \quad \begin{cases} c_1 = BFL - 2500m < 0 \\ c_2 = V_{appr} - 76m/s < 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Ως εκ τούτου, στο τέλος αυτής της ενότητας αυτής αναμένεται να προκύψουν αεροσκάφη που θα πληρούν τις προδιαγραφές. Η μόνη ελεύθερη παράμετρος σε αυτή τη φάση είναι το βάρος του καυσίμου (συνεχίζουμε φυσικά να λαμβάνουμε υπόψη τα όρια που της επιβάλλονται ως μεταβλητή σχεδιασμού). Για την ακρίβεια, ο στόχος μελέτης αυτού του προβλήματος είναι να εξεταστεί εάν η συμπεριφορά των αλγορίθμων ανάλυσης επιδόσεων είναι τέτοια ώστε η μέγιστη δυνατή εμβέλεια εντός των περιορισμών να συνοδεύεται από μικρό βάρος καυσίμου. Επειδή ο στόχος μελέτης της εφαρμογής αυτής αφορά περισσότερο τη μελέτη της συμπεριφοράς της συνάρτησης παρά τη βελτιστοποίηση του αεροσκάφους, δε χρησιμοποιούμε τις δύσκολες στη σύγκλιση μεθόδους Newton.

4.5.1. Διατύπωση του Προβλήματος με Περιορισμούς – Μέθοδος Εξωτερικής Ποινής

Η συνάρτηση κόστους υπόκειται, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, σε δύο είδη περιορισμών:

- περιορισμούς στις μεταβλητές σχεδιασμού και
- περιορισμούς που είναι συνάρτηση των μεταβλητών σχεδιασμού

Είναι δυνατόν να εξασφαλισθεί πως οι μεταβλητές σχεδιασμού δε θα αποκλίνουν των επιβαλλόμενων ορίων προγραμματίζοντας στον αλγόριθμο ανίχνευσης κατά γραμμή έναν υποθετικό βρόχο όπου μετά τον υπολογισμό της νέας τιμής x^{n+1} , εάν αυτή είναι εκτός ορίων να παίρνει την τιμή του πλησιέστερου ορίου (άνω ή κάτω). Με τον τρόπο αυτό η νέα τιμή της συνάρτησης κόστους για την επανάληψη αυτή υπολογίζεται θεωρώντας στην ουσία τη μεταβλητή αυτή σταθερή. Εάν στην επόμενη επανάληψη η τιμή της μερικής παραγώγου της μεταβλητής αυτής είναι τέτοια που να δίνει νέα τιμή εντός των αποδεκτών ορίων, η μεταβλητή είναι πλέον ελεύθερη να πάρει την τιμή αυτή.

Η δεύτερη κατηγορία περιορισμών απαιτεί διαφορετική αντιμετώπιση. Κατ' αρχάς, ελέγχεται εάν η σύγκλιση της συνάρτησης κόστους συνοδεύεται η όχι από υπέρβαση των δύο αυτών περιορισμών και διαπιστώνεται πως αυτό συμβαίνει. Είναι λοιπόν απαραίτητο να ληφθούν οι περιορισμοί αυτοί υπόψη κατά τη διάρκεια των υπολογισμών.

Ένας τρόπος για να γίνει αυτό είναι να θεωρηθεί μια νέα συνάρτηση κόστους:

$$\Phi(\vec{x}) = F(\vec{x}) + P(\vec{x}) \quad (1.4)$$

όπου:

$$P(\vec{x}) = w_{p1} \cdot \max(c_1, 0) + w_{p2} \cdot \max(c_2, 0) \quad (1.5)$$

Η συνάρτηση $P(\vec{x})$ ονομάζεται *συνάρτηση ποινής*, ενώ οι συντελεστές w_{p1} και w_{p2} ονομάζονται *συντελεστές ποινής*.

Η παραπάνω μέθοδος ονομάζεται *μέθοδος εξωτερικής ποινής*, δηλαδή η συνάρτηση ποινής αποκτά μη-μηδενική τιμή και άρα τιμωρεί/επαυξάνει την συνάρτηση κόστους μόνο όταν δεν ικανοποιείται κάποιος περιορισμός.

Όπως βλέπουμε στην πράξη, μια τέτοια μέθοδος συνοδεύεται από ταλαντώσεις κοντά στη βέλτιστη λύση. Αυτό είναι προφανές καθώς μια τιμή της επαυξημένης συνάρτησης κόστους Φ μπορεί πρακτικά να προκύψει από άπειρους γραμμικούς συνδυασμούς των $\frac{1}{Range}, c_1, c_2$.

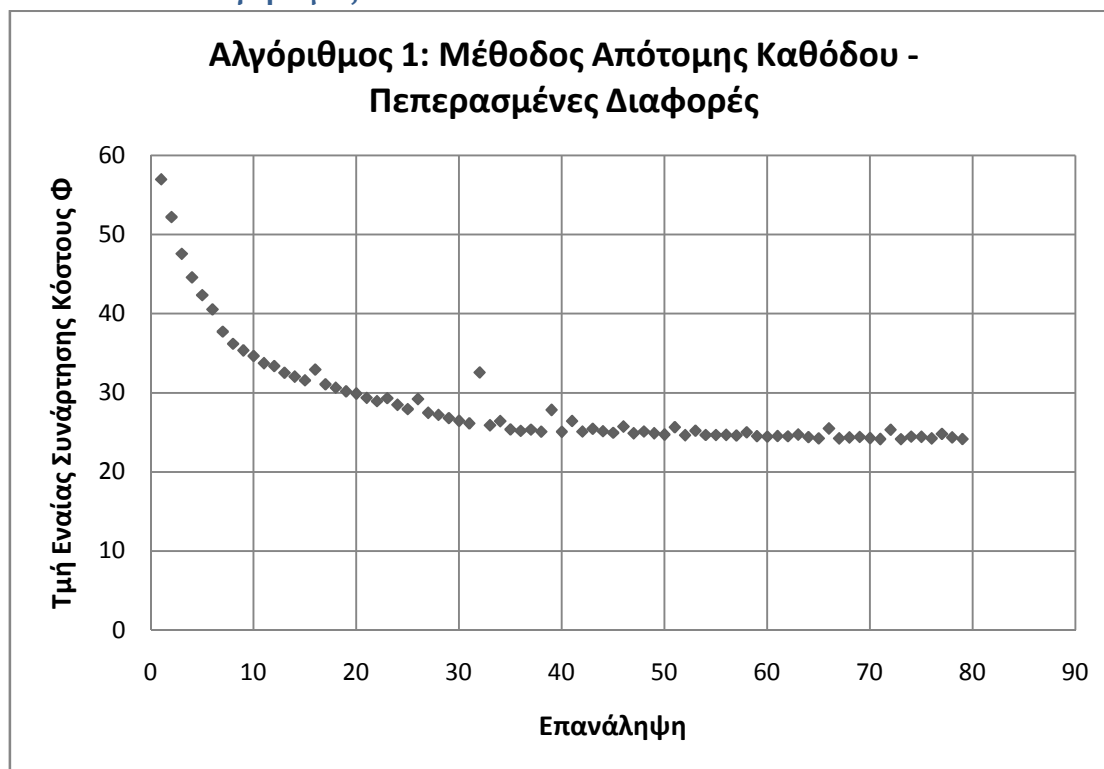
Για το λόγο αυτό, ένα απλό κριτήριο σύγκλισης της μορφής $|\Phi^{n+1} - \Phi^n| < \varepsilon$ δεν αρκεί, καθώς για μικρά ε η σύγκλιση είναι δύσκολη (αφού μπορεί σε μια επανάληψη $\max(c, 0) = 0$ ενώ στην επόμενη $\max(c, 0) \neq 0$), ενώ για μεγάλα ε μπορεί να σημειωθεί πρόωρη σύγκλιση.

Έτσι, η σύγκλιση του αλγορίθμου δεν επιτυγχάνεται απλώς με τη συνθήκη $|\Phi^{n+1} - \Phi^n| < \varepsilon$, αλλά με τη συνθήκη:

$$|\Phi^{n+1} - \Phi^n| < \varepsilon, \begin{cases} Range > 6500 \\ BFL < 2500 \\ V_{appr} < 76 \end{cases} \quad (1.1)$$

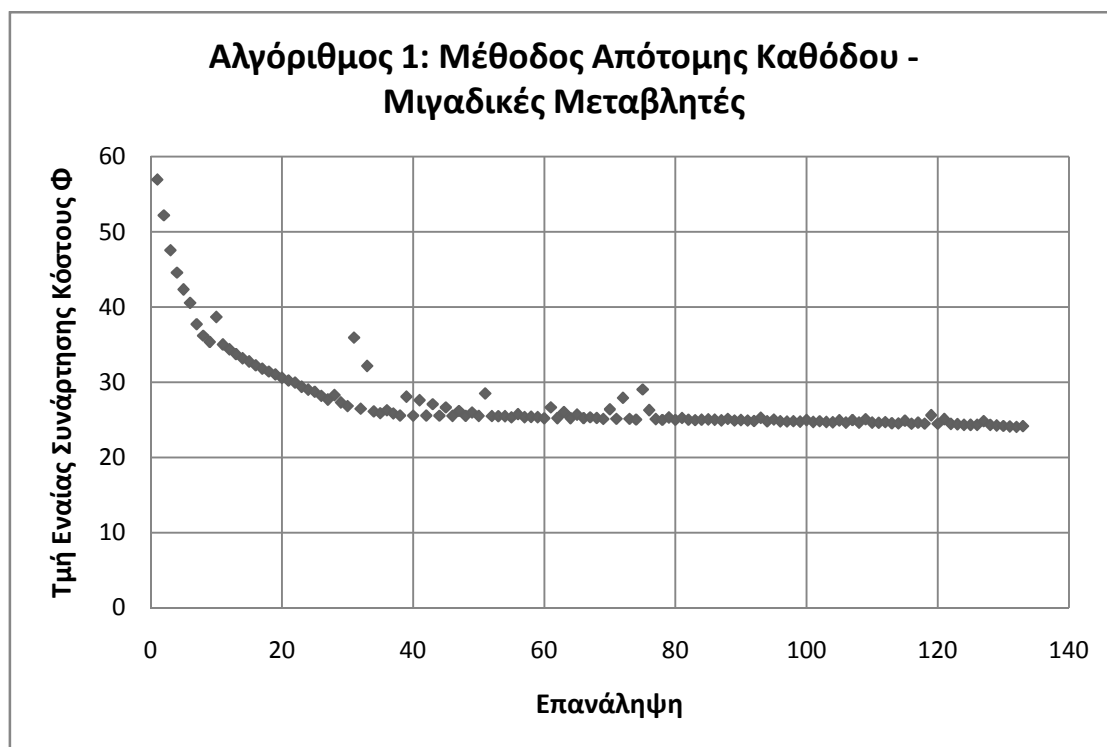
όπου ε ένα σχετικά χαλαρό κριτήριο σύγκλισης, έχοντας δώσει κατάλληλες τιμές στους συντελεστές ποινής της συνάρτησης Φ .

4.5.2. Αλγόριθμος 1



Διάγραμμα 4.11 - Αλγόριθμος 1: Μέθοδος Απότομης Καθόδου - Πεπερασμένες Διαφορές

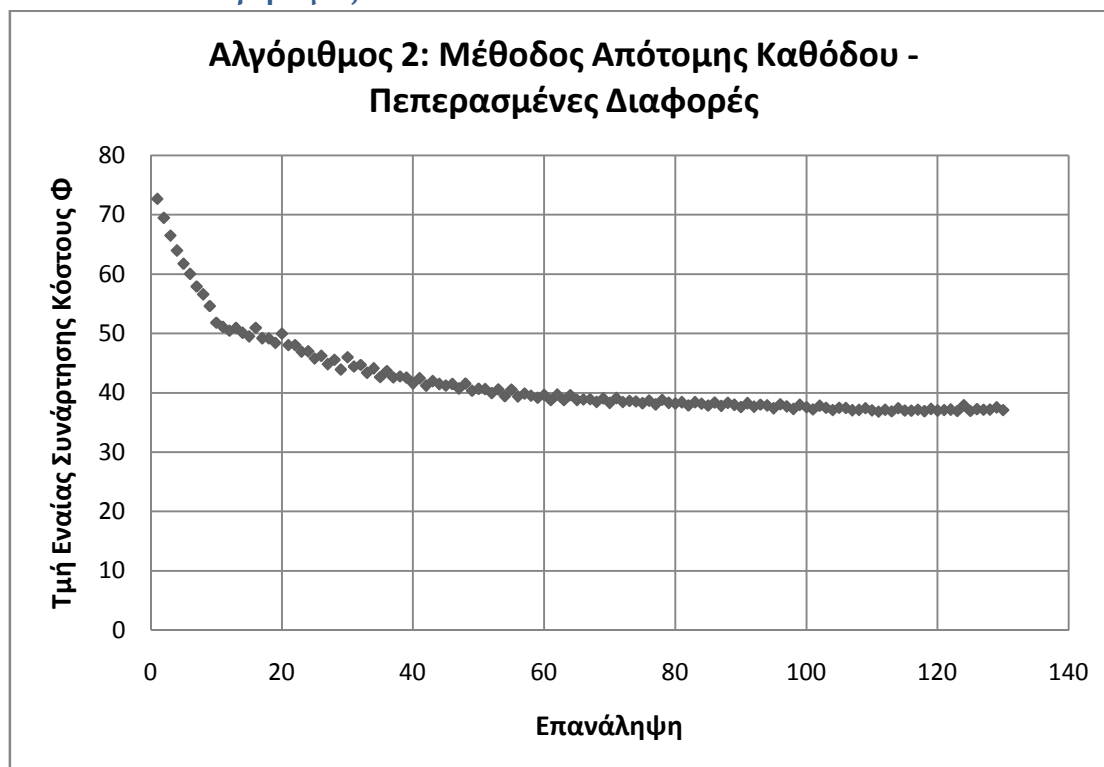
Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	6616	25978	2480	75.98
Μεταβλητή Σχεδιασμού			Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού	
Συνθήκες Πτήσης				
Υψόμετρο Πτήσης [m]			14238	
Αριθμός Mach			1.3	
Καύσιμο και Άτρακτος (Αλγόριθμος 1)				
Βάρος Καυσίμου [kg]			25978	
Διάμετρος Ατράκτου [m]			2.0	
Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας			141.5	
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας			60.1	
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας			3.02	
Εκλέπτυνση Πτέρυγας			0.05	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή			0.041	
Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου			57.1	
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου			1.4	
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου			0.35	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου			0.06	
Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας			16.0	
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης			0.75	



Διάγραμμα 4.12 - Αλγόριθμος 1: Μέθοδος Απότομης Καθόδου – Μιγαδικές Μεταβλητές

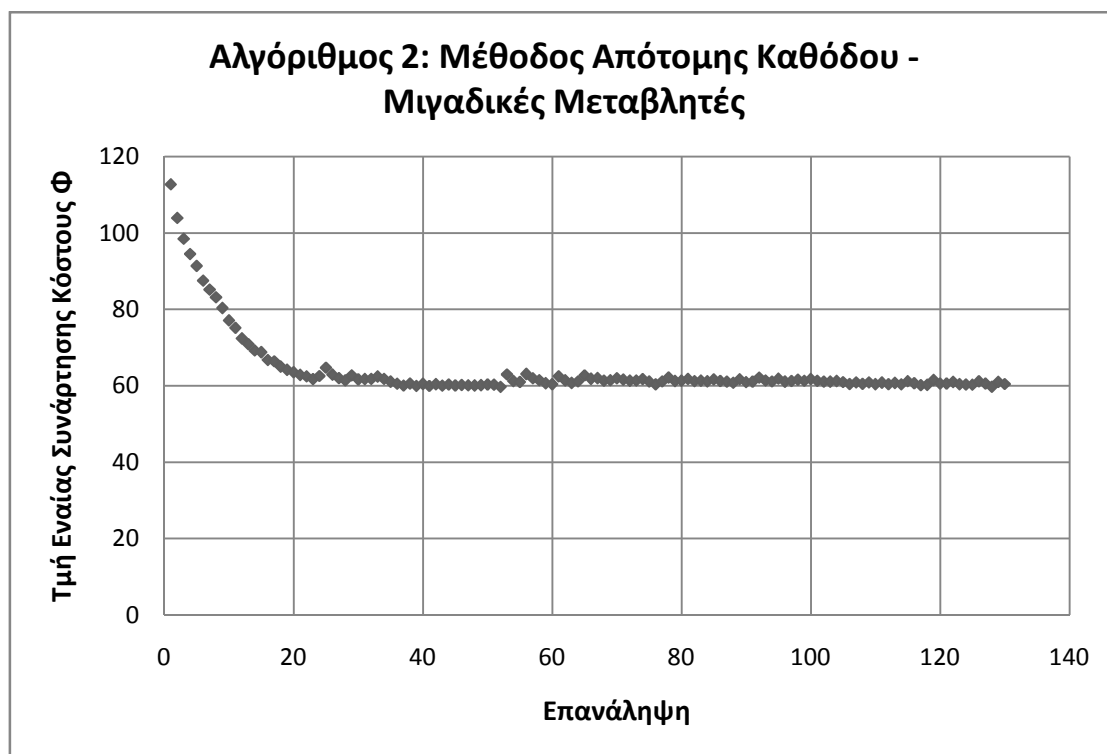
Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	6619	26211	2455	75.96
<u>Μεταβλητή Σχεδιασμού</u>			<u>Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού</u>	
<u>Συνθήκες Πτήσης</u>				
Υψόμετρο Πτήσης [m]				14465
Αριθμός Mach				1.3
<u>Καύσιμο και Άτρακτος (Αλγόριθμος 1)</u>				
Βάρος Καυσίμου [kg]				26211
Διάμετρος Ατράκτου [m]				2.0
<u>Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα</u>				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας				144.1
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας				60.97
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας				3.03
Εκλέπτυνση Πτέρυγας				0.05
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή				0.042
<u>Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο</u>				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου				56.9
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου				1.46
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου				0.37
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου				0.06
<u>Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς</u>				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας				15.87
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης				0.75

4.5.3. Αλγόριθμος 2



Διάγραμμα 4.13 - Αλγόριθμος 2: Μέθοδος Απότομης Καθόδου - Πεπερασμένες Διαφορές

Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	6631	23140	2476	75.55
Μεταβλητή Σχεδιασμού			Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού	
Συνθήκες Πτήσης				
Υψόμετρο Πτήσης [m]				14622
Αριθμός Mach				1.33
Γωνία Πρόσπτωσης και Άτρακτος (Αλγόριθμος 2)				
Γωνία Πρόσπτωσης σε Ευθεία Πτήση (°)				2.99
Διάμετρος Ατράκτου [m]				2.0
Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας				120.0
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας				63.95
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας				3.22
Εκλέπτυνση Πτέρυγας				0.05
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή				0.049
Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου				60.0
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου				1.32
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου				0.41
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου				0.06
Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας				16.0
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης				0.75



Διάγραμμα 4.14 - Αλγόριθμος 2: Μέθοδος Απότομης Καθόδου – Μιγαδικές Μεταβλητές

Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	6613	29585	2476	75.55
<u>Μεταβλητή Σχεδιασμού</u>			<u>Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού</u>	
<u>Συνθήκες Πτήσης</u>				
Υψόμετρο Πτήσης [m]				14103
Αριθμός Mach				1.4
<u>Γωνία Πρόσπτωσης και Άτρακτος (Αλγόριθμος 2)</u>				
Γωνία Πρόσπτωσης σε Ευθεία Πτήση (°)				2.45
Διάμετρος Ατράκτου [m]				2.0
<u>Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα</u>				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας				134.3
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας				61.66
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας				3.66
Εκλέπτυνση Πτέρυγας				0.05
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή				0.0564
<u>Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο</u>				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου				60.0
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου				1.204
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου				0.5
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου				0.06
<u>Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς</u>				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας				15.98
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης				0.75

4.5.4. Παρατηρήσεις Πάνω στην Εφαρμογή 2

Με τη μελέτη της εφαρμογής αυτής μας δίνεται η ευκαιρία να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της μεθόδου εξωτερικής ποινής σε μια εφαρμογή βελτιστοποίησης ενός στόχου, πριν προχωρήσουμε στην εφαρμογή της στο, πιο πολύπλοκο, πρόβλημα δύο στόχων. Τα σημεία στα διαγράμματα τα οποία αποκλίνουν από την κύρια καμπύλη είναι σημεία όπου ένας ή και οι δύο περιορισμοί πήραν πολύ μεγάλες τιμές, δηλαδή οι τιμές ισορροπημένου μήκους απογείωσης ή/και ταχύτητας προσέγγισης ξεπέρασαν τις τιμές $2500m$ και $76m/s$ αρκετά. Η βαρύτητα φυσικά του γεγονότος αυτού ρυθμίζεται από τους συντελεστές ποινής.

Ο δεύτερος αλγόριθμος γενικά παρουσιάζει καλύτερη αριθμητική συμπεριφορά από τον πρώτο όπως φαίνεται και από τα διαγράμματα (στο δεύτερο αλγόριθμο υπάρχουν αισθητά λιγότερα σημεία εκτός καμπύλης και αυτά δεν είναι τόσο απομακρυσμένα όσο στα διαγράμματα του πρώτου αλγόριθμου).

Είναι αξιοσημείωτο πως χρειάστηκε να διατυπωθεί διαφορετική συνάρτηση Φ σε κάθε περίπτωση έτσι ώστε να επιτευχθεί καλή σύγκλιση, ως εκ τούτου τα παραπάνω διαγράμματα παρατίθενται κυρίως για να παρασταθεί η σύγκλιση των μεθόδων. Αυτό συμβαίνει λόγω της απρόβλεπτης συμπεριφοράς μιας συνάρτησης της μορφής $\Phi(\vec{x}) = f(\vec{x}) + w_{p1} \cdot \max(c_1, 0) + w_{p2} \cdot \max(c_2, 0)$, όπου οι τιμές των συναρτήσεων \max γενικά μπορεί να παρουσιάζουν μεγάλη διακύμανση μεταξύ διαδοχικών επαναλήψεων καθιστώντας την πορεία κάθε μεθόδου προς τη βέλτιστη λύση αρκετά διαφορετική. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο σε αυτό το πρόβλημα δεν προκύπτουν ιδιαίτερα συμπεράσματα για τη μέθοδο Μιγαδικών Μεταβλητών σε σύγκριση με τη μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών, πέραν του ότι η σύγκλιση με τη μέθοδο αυτή είναι εξίσου καλή και στις δύο περιπτώσεις.

Τα αεροσκάφη που προκύπτουν από τις παραπάνω βελτιστοποιήσεις παρατηρούμε πως έχουν αρκετά διαφορετικά χαρακτηριστικά. Πέραν του ότι είναι όλα εντός των περιορισμών (στο πρόβλημα αυτό βεβαίως το γεγονός αυτό αποτελεί κριτήριο σύγκλισης) και έχουν την ίδια περίπου εμβέλεια, οι τελικές τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού διαφέρουν αρκετά μεταξύ των αεροσκαφών. Αυτό γίνεται προφανές παρατηρώντας τα βάρη καυσίμου που προκύπτουν καθώς, αεροσκάφη με όμοιες επιδόσεις έχουν έως και έξι τόνους διαφορά στο απαιτούμενο καύσιμο. Οι διαφορές αυτές οφείλονται κυρίως στους διαφορετικούς συνδυασμούς συντελεστών ποινής.

4.5.5. Συγκεντρωτικός Πίνακας Επιδόσεων για την Εφαρμογή Μεγιστοποίησης Εμβέλειας με Περιορισμούς

Μέθοδος/Επίδοση	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα Προσέγγισης [m/s]
Αλγόριθμος 1				
Μ. Απότομης Καθόδου – Πεπερασμένες Διαφορές	6616	25978	2480	75.98
Μ. Απότομης Καθόδου – Μιγαδικές Μεταβλητές	6619	26211	2455	75.96
Αλγόριθμος 2				
Μ. Απότομης Καθόδου – Πεπερασμένες Διαφορές	6631	23140	2476	75.55
Μ. Απότομης Καθόδου – Μιγαδικές Μεταβλητές	6613	29585	2476	75.55

Πίνακας 4. 4 – Επιδόσεις Βέλτιστων Αεροσκαφών για το Πρόβλημα 2

4.6. Εφαρμογή 3 – Βελτιστοποίηση Δύο Στόχων Χωρίς Περιορισμούς

Στις δύο προηγούμενες εφαρμογές είδαμε πως η μεγιστοποίηση της εμβέλειας χωρίς περιορισμούς αποδίδει μη αποδεκτά αποτελέσματα, ενώ η μεγιστοποίηση της εμβέλειας με περιορισμούς ενώ αποδίδει αεροσκάφη εντός των προδιαγραφών, αυτά καταναλώνουν μεγάλη ποσότητα καυσίμου. Έχουν λοιπόν εξετασθεί μία εφαρμογή βελτιστοποίησης ενός στόχου και μία εφαρμογή βελτιστοποίησης ενός στόχου με περιορισμούς. Πριν τη διατύπωση του πιο σύνθετου προβλήματος δύο στόχων με δύο περιορισμούς που θα παρουσιαστεί στο τέλος αυτού του κεφαλαίου, κρίνεται σκόπιμο να μελετηθεί η συμπεριφορά των αλγορίθμων σε μια εφαρμογή βελτιστοποίησης δύο στόχων, χωρίς περιορισμούς:

- Στόχος 1: Μέγιστη Εμβέλεια
- Στόχος 2: Ελάχιστο Βάρος Καυσίμου

όπου ο σκοπός της μελέτης είναι για μια ακόμη φορά η μελέτη της συμπεριφοράς των αλγορίθμων ανάλυσης επιδόσεων και φυσικά η πιθανότητα να προκύψει συνδυασμός υψηλής εμβέλειας και μικρής ποσότητας καυσίμου εντός των περιορισμών. Όπως και πριν, χρησιμοποιούνται μόνο μέθοδοι Απότομης Καθόδου.

4.6.1. Διατύπωση του Προβλήματος Βελτιστοποίησης Δύο Στόχων

Αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 1 του παρόντος, πως στόχος της εργασίας αυτής είναι ο σχεδιασμός ενός μικρού υπερηχητικού επιβατικού αεροσκάφους μεγάλης εμβέλειας με μικρό βάρος καυσίμου. Με άλλα λόγια, αντιμετωπίζουμε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης πολλών στόχων (*Multiobjective Optimization Problem*), που γενικά διατυπώνεται ως εξής:

$$\min \vec{f}(\vec{x}), \quad \begin{cases} a_1 \leq x_1 \leq b_1 \\ a_2 \leq x_2 \leq b_2 \\ \vdots \\ a_n \leq x_n \leq b_n \end{cases}, \quad a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{R}$$

Οι (αντικρουόμενοι) στόχοι στη φάση του προκαταρκτικού σχεδιασμού (διάνυσμα \vec{f}) είναι:

- Μεγάλη εμβέλεια
- Μικρή δεξαμενή καυσίμου (που αντιπροσωπεύεται από το βάρος καυσίμου)

Όμως, όπως έχει γίνει προφανές από τη θεωρία βελτιστοποίησης που παρουσιάστηκε στο 2^ο κεφάλαιο, οι μέθοδοι ανίχνευσης κατά γραμμή κάνουν χρήση της παραγώγου μιας συνάρτησης. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, υπάρχουν δύο συναρτήσεις, οι:

- $Range(\vec{x})$
- $W_{fuel}(\vec{x})$

Για να υπολογισθεί ο βέλτιστος συνδυασμός των δύο αυτών αντικρουόμενων στόχων, χρησιμοποιείται η τεχνική της συσσωμάτωσης των δύο αυτών στόχων σε μία ενιαία συνάρτηση κόστους.

4.6.1.1. Διατύπωση Ενιαίας Συνάρτησης Κόστους

Για να διατυπωθεί η νέα, ενιαία συνάρτηση, θα γίνει χρήση μιας παραλλαγής της μεθόδου του στόχου η οποία αναφέρθηκε στην παράγραφο 3.5.3.

Η αρχή της μεθόδου είναι πως εάν υπάρχουν δύο συναρτήσεις προς ελαχιστοποίηση, έστω $f(\vec{x})$ και $g(\vec{x})$ τότε το διάνυσμα \vec{x} που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση:

$$\Phi(\vec{x}) = \alpha \cdot f(\vec{x}) + b \cdot g(\vec{x}) , \quad \alpha, b \in \mathbb{R} \quad (1.6)$$

ελαχιστοποιεί και τις f, g .

Το αληθές της μεθόδου είναι προφανές, καθώς το ελάχιστο μιας συνάρτησης που είναι γραμμικός συνδυασμός δύο θετικών αριθμών, είναι το 0 (αφού η εμβέλεια και το βάρος του καυσίμου (f, g) είναι εξ' ορισμού θετικά μεγέθη γι' αυτό και παραλείπονται τα τετράγωνα που χρησιμοποιούνται στη μέθοδο του στόχου).

Οι συντελεστές a, b , ονομάζονται *συντελεστές στάθμισης*. Επιλέγοντας τους κατάλληλους συντελεστές a, b , μπορεί να ρυθμιστεί η επιρροή κάθε επιμέρους συνάρτησης στην τελική τιμή της $\Phi(\vec{x})$. Εάν γίνει προσπάθεια να χρησιμοποιηθεί η 4.6 στην βελτιστοποίηση του αεροσκάφους χωρίς συντελεστές στάθμισης, με $f(\vec{x}) = Range(\vec{x})$ και $g(\vec{x}) = W_{fuel}(\vec{x})$, διαπιστώνουμε δύο αδυναμίες:

- Θεωρείται ως δεδομένο πως και οι δύο συναρτήσεις είναι συναρτήσεις προς ελαχιστοποίηση
- Θεωρείται ως δεδομένο πως οι f, g έχουν την ίδια τάξη μεγέθους, οπότε θα συγκλίνουν με τον ίδιο ρυθμό προς την ελάχιστη τιμή τους. Επιπλέον, εάν υπάρχουν περιορισμοί τότε ακόμη και αν οι f, g έχουν την ίδια τάξη μεγέθους, μπορεί να μην καταστεί δυνατός ο εντοπισμός της βέλτιστης λύσης, τουλάχιστον όχι με ικανοποιητικό ρυθμό σύγκλισης

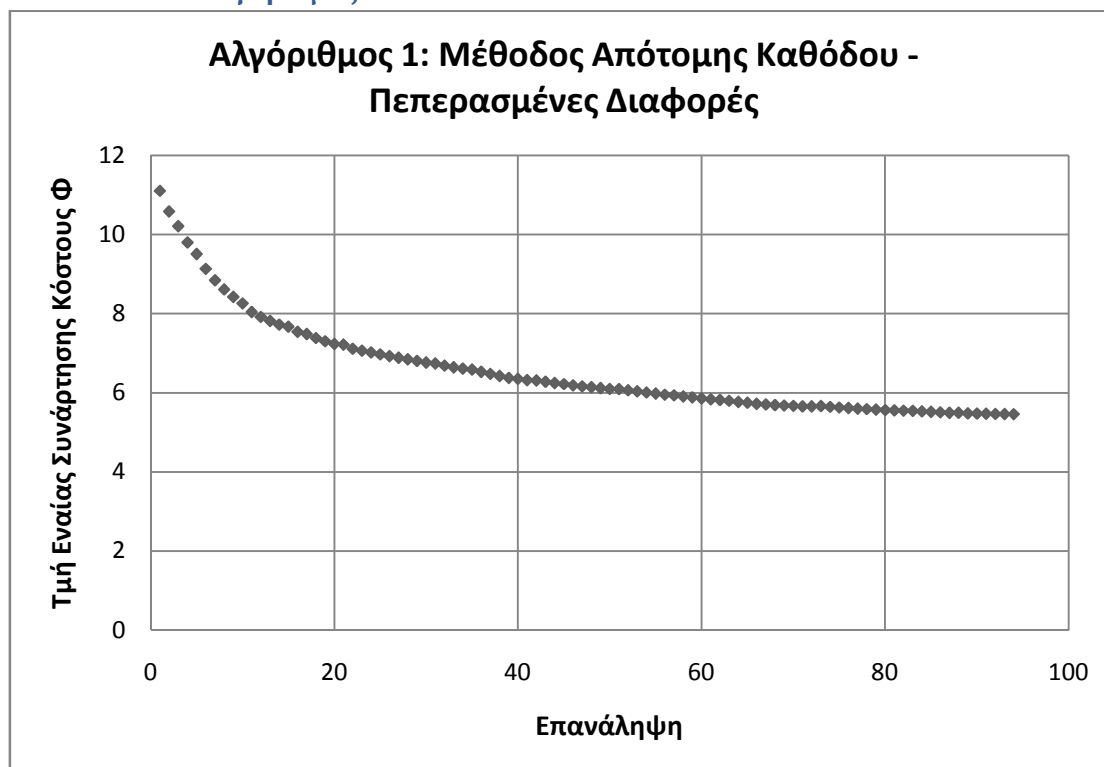
Η πρώτη αδυναμία μπορεί να παρακαμφθεί εάν θεωρηθεί, αντί για $f(\vec{x}) = Range(\vec{x})$, $f(\vec{x}) = \frac{1}{Range(\vec{x})}$, όπως άλλωστε εφαρμόστηκε ήδη στο πρόβλημα 2. Η τιμή της

συνάρτησης αυτής μειώνεται με την αύξηση της τιμής της εμβέλειας του αεροσκάφους, αποτελεί επομένως μια συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση.

Η δεύτερη αδυναμία αντιμετωπίζεται με τη διατύπωση μιας ενιαίας *συνάρτησης κόστους με συντελεστές στάθμισης (4.6)*. Οι συντελεστές a, b , ρυθμίζουν την επιρροή κάθε επιμέρους συνάρτησης στην τελική τιμή της $\Phi(\vec{x})$ δίνοντας στις f, g , εάν είναι απαραίτητο, την ίδια τάξη μεγέθους. Γενικά, με κατάλληλη επιλογή των f, g , μπορεί η συνάρτηση $\Phi(\vec{x})$ να ρυθμιστεί έτσι ώστε να παρουσιάζει την επιθυμητή συμπεριφορά.

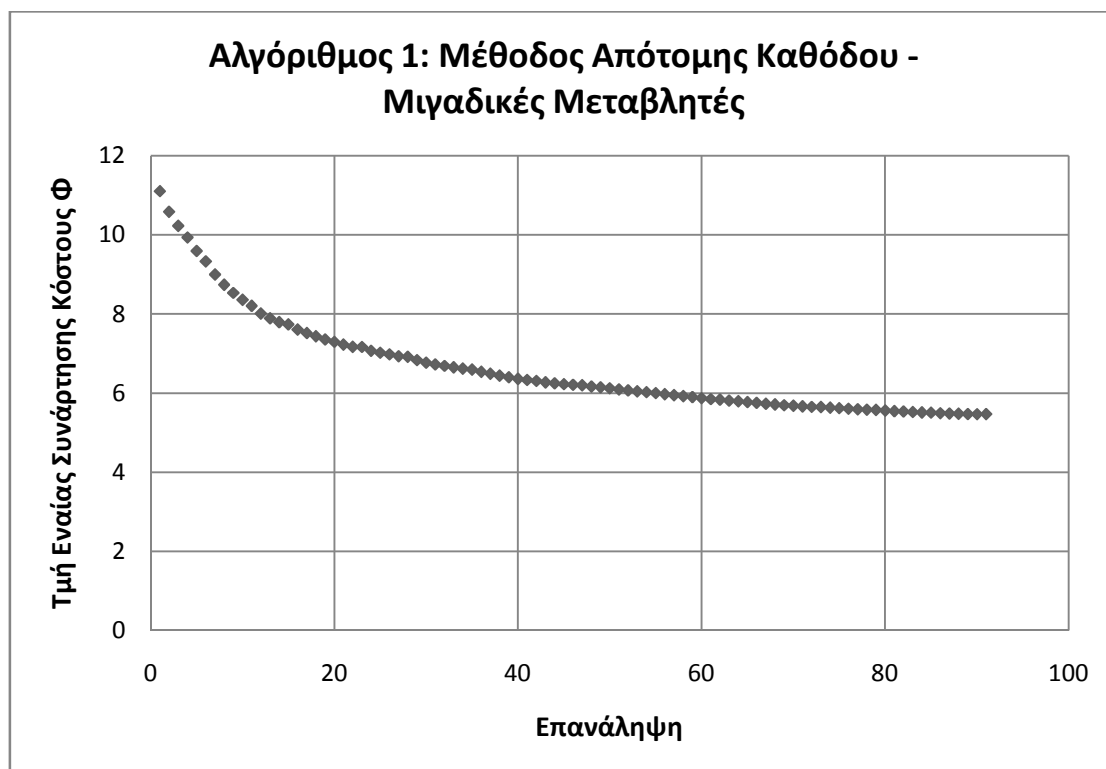
Προφανώς, σε μια εφαρμογή δύο στόχων αντιστοιχεί ένα μέτωπο βέλτιστων λύσεων στις δύο διαστάσεις, ή αλλιώς ένα μέτωπο Pareto[12]. Σε μια αιτιοκρατική μέθοδο, με κατάλληλη ρύθμιση των συντελεστών στάθμισης έχουμε ως αποτέλεσμα μια από τις λύσεις του μετώπου. Στην περίπτωση αυτή επελέγη συνδυασμός τέτοιος ώστε να αποδίδει την καλύτερη δυνατή εμβέλεια για μικρό βάρος καυσίμου.

4.6.2. Αλγόριθμος 1



Διάγραμμα 4.15 - Αλγόριθμος 1: Μέθοδος Απότομης Καθόδου – Πεπερασμένες Διαφορές – Σύγκλιση Ενιαίας Συνάρτησης Κόστους Φ

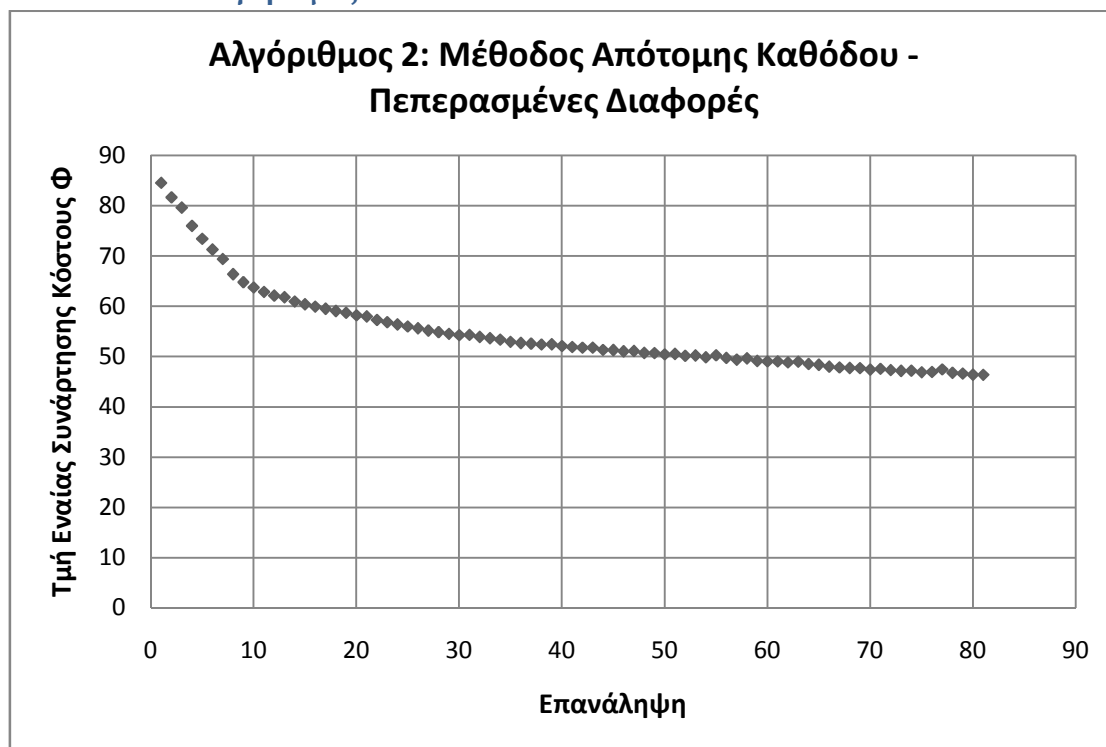
Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	7406	20890	3692	96.4
Μεταβλητή Σχεδιασμού			Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού	
Συνθήκες Πτήσης				
Υψόμετρο Πτήσης [m]				15303
Αριθμός Mach				1.33
Καύσιμο και Άτρακτος (Αλγόριθμος 1)				
Βάρος Καυσίμου [kg]				20890
Διάμετρος Ατράκτου [m]				2.0
Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας				120.0
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας				70.0
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας				1.88
Εκλέπτυνση Πτέρυγας				0.05
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή				0.042
Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου				60.0
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου				1.54
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου				0.38
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου				0.06
Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας				14.9 (Αρχική Τιμή)
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης				0.8 (Αρχική Τιμή)



Διάγραμμα 4.16 - Αλγόριθμος 1: Μέθοδος Απότομης Καθόδου – Μιγαδικές Μεταβλητές – Σύγκλιση Ενιαίας Συνάρτησης Κόστους Φ

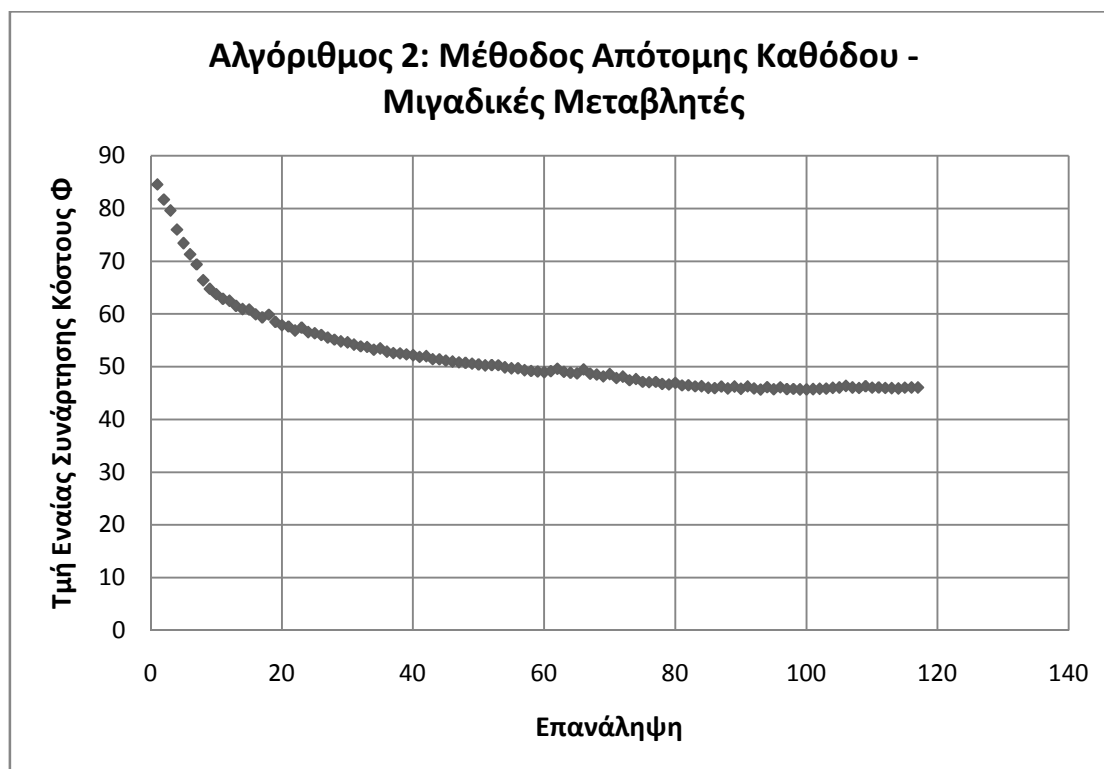
Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	7416	21009	3806	95.0
<u>Μεταβλητή Σχεδιασμού</u>				<u>Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού</u>
<u>Συνθήκες Πτήσης</u>				
Υψόμετρο Πτήσης [m]				15035
Αριθμός Mach				1.3
<u>Καύσιμο και Άτρακτος (Αλγόριθμος 1)</u>				
Βάρος Καυσίμου [kg]				21009
Διάμετρος Ατράκτου [m]				2.0
<u>Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα</u>				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας				120.0
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας				70.0
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας				1.91
Εκλέπτυνση Πτέρυγας				0.05
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή				0.04
<u>Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο</u>				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου				60.0
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου				1.54
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου				0.37
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου				0.06
<u>Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς</u>				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας				14.9 (Αρχική Τιμή)
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης				0.8 (Αρχική Τιμή)

4.6.3. Αλγόριθμος 2



Διάγραμμα 4.17 - Αλγόριθμος 2: Μέθοδος Απότομης Καθόδου – Πεπερασμένες Διαφορές – Σύγκλιση Ενιαίας Συνάρτησης Κόστους Φ

Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	7342	21291	3828	93.9
<u>Μεταβλητή Σχεδιασμού</u>			<u>Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού</u>	
<u>Συνθήκες Πτήσης</u>				
Υψόμετρο Πτήσης [m]			14703	
Αριθμός Mach			1.32	
<u>Γωνία Πρόσπτωσης και Άτρακτος (Αλγόριθμος 2)</u>				
Γωνία Πρόσπτωσης σε Ευθεία Πτήση (°)			4.18	
Διάμετρος Ατράκτου [m]			2.0	
<u>Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα</u>				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας			120.0	
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας			70.0	
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας			2.08	
Εκλέπτυνση Πτέρυγας			0.05	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή			0.04	
<u>Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο</u>				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου			60.0	
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου			1.57	
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου			0.42	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου			0.06	
<u>Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς</u>				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας			14.9 (Αρχική Τιμή)	
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης			0.8 (Αρχική Τιμή)	



Διάγραμμα 4.18 - Αλγόριθμος 2: Μέθοδος Απότομης Καθόδου – Μιγαδικές Μεταβλητές – Σύγκλιση Ενιαίας Συνάρτησης Κόστους Φ

Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	7275	20675	4701	108.3
<u>Μεταβλητή Σχεδιασμού</u>				<u>Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού</u>
<u>Συνθήκες Πτήσης</u>				
Υψόμετρο Πτήσης [m]				14396
Αριθμός Mach				1.32
<u>Γωνία Πρόσπτωσης και Άτρακτος (Αλγόριθμος 2)</u>				
Γωνία Πρόσπτωσης σε Ευθεία Πτήση (°)				4.36
Διάμετρος Ατράκτου [m]				2.0
<u>Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα</u>				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας				120.0
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας				70.0
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας				1.75
Εκλέπτυνση Πτέρυγας				0.05
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή				0.04
<u>Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο</u>				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου				60.0
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου				1.59
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου				0.46
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου				0.06
<u>Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς</u>				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας				14.9 (Αρχική Τιμή)
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης				0.8 (Αρχική Τιμή)

4.6.4. Παρατηρήσεις πάνω στην Εφαρμογή 3

Οι λύσεις που προκύπτουν από τις τέσσερις βελτιστοποιήσεις που έγιναν δε διαφέρουν πολύ. Τα αεροσκάφη έχουν περίπου την ίδια εμβέλεια (7400km), απαιτούν βάρος καυσίμου γύρω στους 21 τόνους και υπερβαίνουν τους περιορισμούς περίπου το ίδιο. Γενικά, παρότι και στην εφαρμογή αυτή χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικές συναρτήσεις κόστους μεταξύ των δύο αλγορίθμων, όμοια με το πρόβλημα 2, βλέπουμε πως, σε αντίθεση με το πρόβλημα 2, οι μέθοδοι προσεγγίζουν το ίδιο ακρότατο. Το γεγονός αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία καθώς στον αλγόριθμο 2 το βάρος καυσίμου είναι πρακτικά ανεξέλεγκτο πέραν του συντελεστή στάθμισης. Πάραυτα, λόγω της κατάλληλης επιλογής των συντελεστών στάθμισης, οι δύο αλγόριθμοι δίνουν όμοια αποτελέσματα.

Στον αλγόριθμο 1 η μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών γενικά συμβαδίζει με τη μέθοδο Μιγαδικών Μεταβλητών, ενώ στον αλγόριθμο 2 παρατηρείται μια διαφορά στο ρυθμό σύγκλισης, λόγω της επιλογής διαφορετικού μήκους βήματος και συντελεστών στάθμισης λόγω εγκλωβισμού της συνάρτησης που χρησιμοποιήθηκε με τη μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών σε τοπικό ακρότατο.

Έχοντας μελετήσει την εφαρμογή βελτιστοποίησης δύο στόχων χωρίς περιορισμούς βλέπουμε πως είναι δυνατή η επίτευξη καλής εμβέλειας με μικρό βάρος καυσίμου, με κόστος την υπέρβαση των περιορισμών. Παρατηρούμε επίσης πως οι περιορισμοί, παρότι παραβιάζονται αρκετά, δεν ξεπερνούν τις επιθυμητές τιμές τόσο πολύ που να υποδηλώνεται πως θα είναι αδύνατη η επίτευξη μεγάλης εμβέλειας με μικρό βάρος καυσίμου εντός των περιορισμών.

4.6.5. Συγκεντρωτικός Πίνακας Επιδόσεων για την Εφαρμογή Βελτιστοποίησης Δύο Στόχων Χωρίς Περιορισμούς: Μεγιστοποίηση Εμβέλειας – Ελαχιστοποίηση Βάρους Καυσίμου

Επίδοση / Μέθοδος	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα Προσέγγισης [m/s]
<u>Αλγόριθμος 1</u>				
Μ. Απότομης Καθόδου – Πεπερασμένες Διαφορές	7406	20890	3692	96.4
Μ. Απότομης Καθόδου – Μιγαδικές Μεταβλητές	7416	21009	3806	95.0
<u>Αλγόριθμος 2</u>				
Μ. Απότομης Καθόδου – Πεπερασμένες Διαφορές	7342	21291	3828	93.9
Μ. Απότομης Καθόδου – Μιγαδικές Μεταβλητές	7275	20675	4701	108.3

Πίνακας 4. 5 – Επιδόσεις Βέλτιστων Αεροσκαφών για το Πρόβλημα 3

4.7. Εφαρμογή 4 – Βελτιστοποίηση Δύο Στόχων με Περιορισμούς

Η εφαρμογή αυτή αποτελεί τη βασική εφαρμογή βελτιστοποίησης αυτής της εργασίας. Έχοντας μελετήσει τις τρεις εφαρμογές που προηγήθηκαν, και την αδυναμία τους να δώσουν μια λύση η οποία να πληρεί όλες τις προδιαγραφές, αναμένουμε από τις λύσεις της εφαρμογής αυτής αεροσκάφη τα οποία θα πληρούν τον επιθυμητό (βέλτιστο) συνδυασμό δύο στόχων, υπακούοντας, εκτός των περιορισμών των μεταβλητών σχεδιασμού, σε δύο ακόμη περιορισμούς:

- Στόχος 1: Μέγιστη εμβέλεια του αεροσκάφους
- Στόχος 2: Ελάχιστο αρχικό βάρος καυσίμου
- Περιορισμός 1: Ισορροπημένο μήκος απογείωσης $BFL < 2500m$
- Περιορισμός 2: Ταχύτητα προσέγγισης $V_{appr} < 76m/s$

Η παραπάνω εφαρμογή αποτελεί ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης πολλών στόχων με περιορισμούς (*Multiobjective Constrained Optimization Problem*):

$$\min \vec{f}(\vec{x}), \quad \begin{cases} a_1 \leq x_1 \leq b_1 \\ a_2 \leq x_2 \leq b_2 \\ \vdots \\ a_n \leq x_n \leq b_n \end{cases}, \quad a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{R}, \quad \begin{cases} c_1 < 0 \\ c_2 < 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

όπου:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{cases} Range(\vec{x}) \\ W_{fuel}(\vec{x}) \end{cases}, \quad \begin{cases} c_1 = BFL - 2500 \\ c_2 = V_{appr} - 76 \end{cases} \quad (1.8)$$

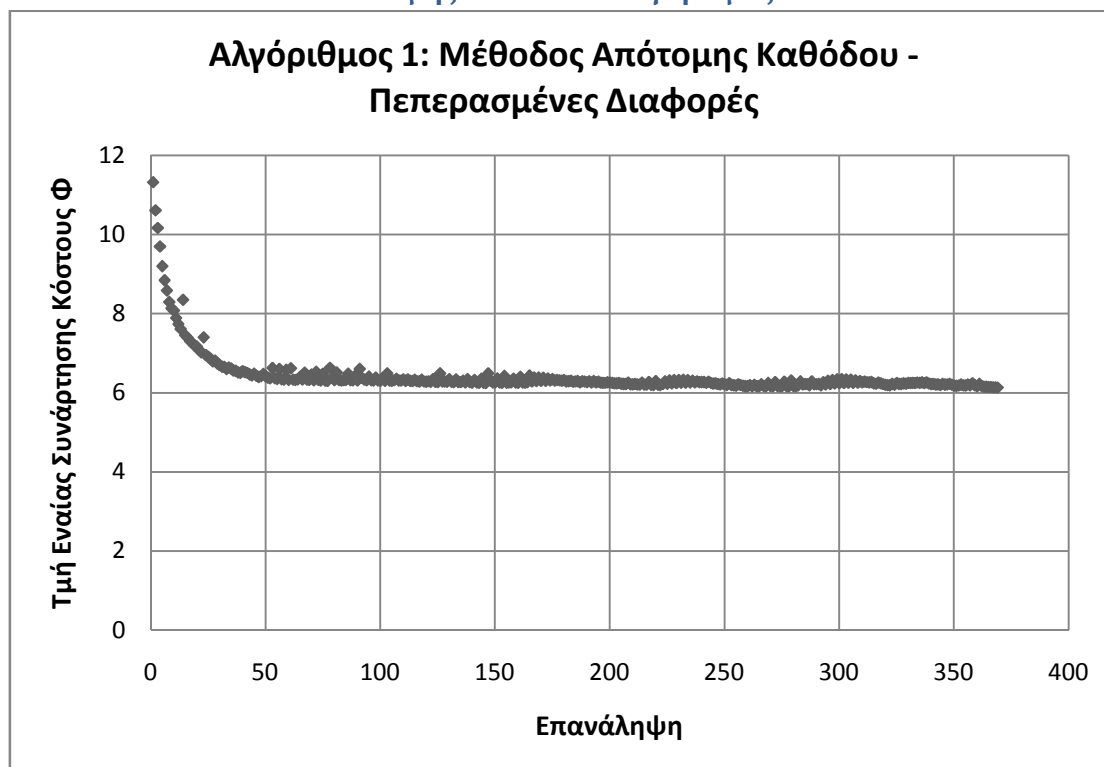
Για την διατύπωση του προβλήματος θα γίνει συνδυασμός των μεθόδων που μελετήσαμε στις δύο προηγούμενες εφαρμογές. Σκοπός μας είναι η διαμόρφωση μιας ενιαίας συνάρτησης κόστους δύο στόχων με συντελεστές στάθμισης για τους δύο στόχους και μιας συνάρτησης ποινής για τους περιορισμούς. Η ενιαία αυτή (επαυξημένη) συνάρτηση διατυπώνεται ως εξής:

$$\Phi(\vec{x}) = a \cdot \frac{1}{Range(\vec{x})} + b \cdot W_{fuel}(\vec{x}) + w_{p1} \cdot \max(c_1, 0) + w_{p2} \cdot \max(c_2, 0) \quad (1.9)$$

και αποτελεί τη συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση της εφαρμογής αυτής.

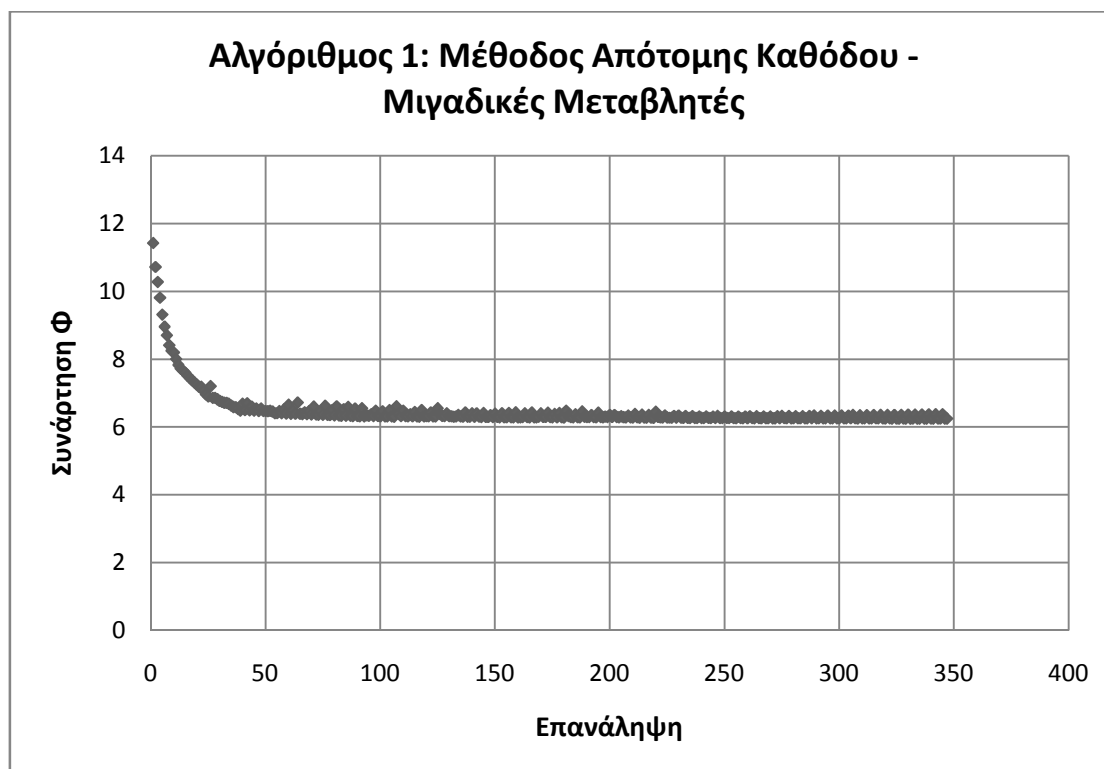
Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν χρησιμοποιώντας συναρτήσεις αυτού του τύπου σε μεθόδους Απότομης Καθόδου. Οι μέθοδοι Newton στο πρόβλημα αυτό χρίζουν ιδιαίτερης προσοχής και παρουσιάζονται χωριστά.

4.7.1. Μέθοδοι Απότομης Καθόδου - Αλγόριθμος 1



Διάγραμμα 4.19 - Αλγόριθμος 1: Μέθοδος Απότομης Καθόδου – Πεπερασμένες Διαφορές – Σύγκλιση Ενιαίας Συνάρτησης Κόστους Φ

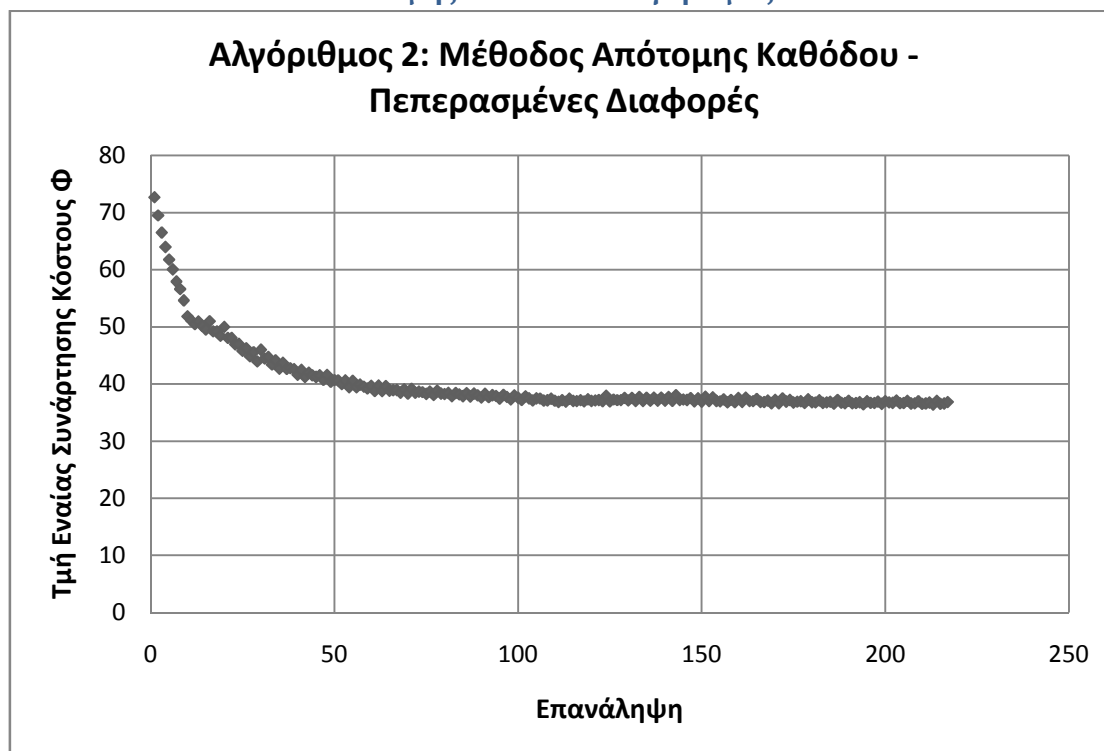
Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	6608	21402	2495	75.97
Μεταβλητή Σχεδιασμού			Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού	
Συνθήκες Πτήσης				
Υψόμετρο Πτήσης [m]			14814	
Αριθμός Mach			1.3	
Καύσιμο και Άτρακτος (Αλγόριθμος 1)				
Βάρος Καυσίμου [kg]			21402	
Διάμετρος Ατράκτου [m]			2.0	
Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας			120.0	
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας			64.57	
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας			2.96	
Εκλέπτυνση Πτέρυγας			0.05	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή			0.0454	
Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου			59.9	
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου			1.40	
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου			0.5	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου			0.06	
Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας			16.0	
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης			0.75	



Διάγραμμα 4.20 - Αλγόριθμος 1: Μέθοδος Απότομης Καθόδου – Μιγαδικές Μεταβλητές – Σύγκλιση Ενιαίας Συνάρτησης Κόστους Φ

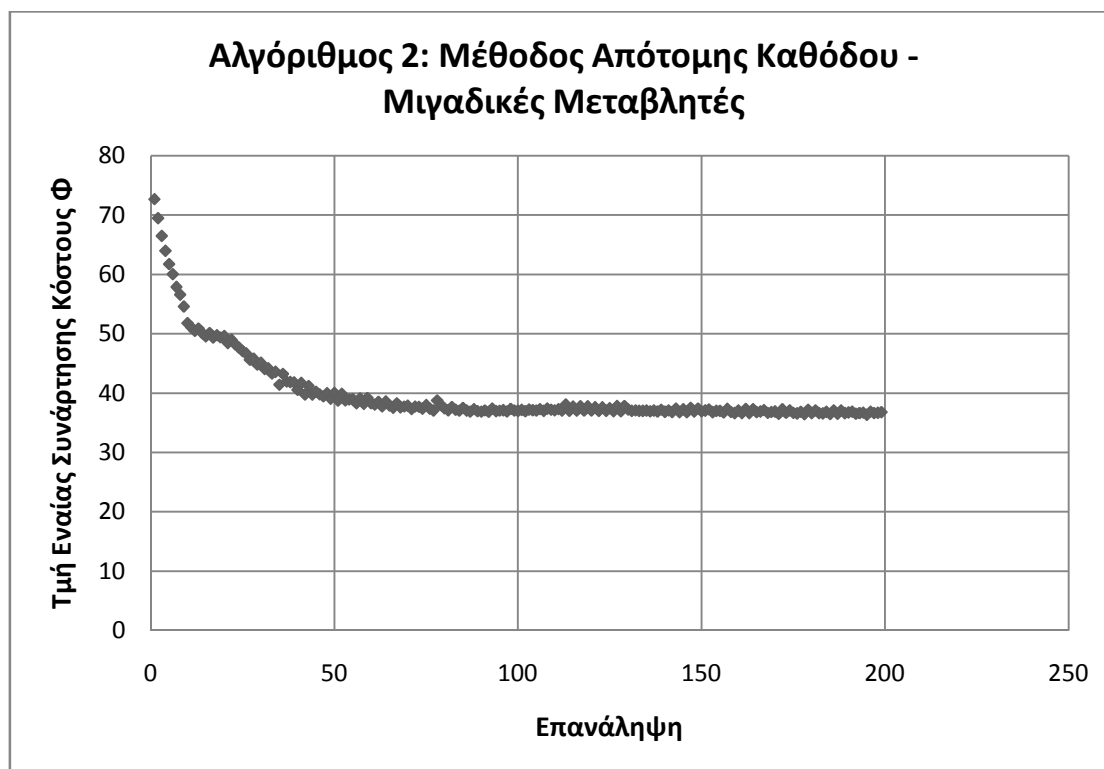
Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	6591	21368	2489	75.99
<u>Μεταβλητή Σχεδιασμού</u>			<u>Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού</u>	
<u>Συνθήκες Πτήσης</u>				
Υψόμετρο Πτήσης [m]				14729
Αριθμός Mach				1.3
<u>Καύσιμο και Άτρακτος (Αλγόριθμος 1)</u>				
Βάρος Καυσίμου [kg]				21368
Διάμετρος Ατράκτου [m]				2.0
<u>Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα</u>				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας				120.187
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας				64.09
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας				2.95
Εκλέπτυνση Πτέρυγας				0.05
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή				0.044
<u>Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο</u>				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου				60.0
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου				1.27
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου				0.50
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου				0.06
<u>Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς</u>				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας				16.0
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης				0.75

4.7.2. Μέθοδοι Απότομης Καθόδου - Αλγόριθμος 2



Διάγραμμα 4.21 - Αλγόριθμος 2: Μέθοδος Απότομης Καθόδου – Πεπερασμένες Διαφορές – Σύγκλιση Ενιαίας Συνάρτησης Κόστους Φ

Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	6610	21894	2433	74.64
<u>Μεταβλητή Σχεδιασμού</u>			<u>Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού</u>	
<u>Συνθήκες Πτήσης</u>				
Υψόμετρο Πτήσης [m]			15104	
Αριθμός Mach			1.3	
<u>Γωνία Πρόσπτωσης και Άτρακτος (Αλγόριθμος 2)</u>				
Γωνία Πρόσπτωσης σε Ευθεία Πτήση (°)			3.35	
Διάμετρος Ατράκτου [m]			2.0	
<u>Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα</u>				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας			120.0	
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας			67.94	
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας			3.1	
Εκλέπτυνση Πτέρυγας			0.05	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή			0.04	
<u>Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο</u>				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου			60.0	
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου			1.32	
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου			0.44	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου			0.06	
<u>Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς</u>				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας			16.0	
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης			0.75	



Διάγραμμα 4.22 - Αλγόριθμος 2: Μέθοδος Απότομης Καθόδου – Μιγαδικές Μεταβλητές – Σύγκλιση Ενιαίας Συνάρτησης Κόστους Φ

Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	6612	21973	2423	75.0
<u>Μεταβλητή Σχεδιασμού</u>			<u>Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού</u>	
<u>Συνθήκες Πτήσης</u>				
Υψόμετρο Πτήσης [m]				15255
Αριθμός Mach				1.31
<u>Γωνία Πρόσπτωσης και Άτρακτος (Αλγόριθμος 2)</u>				
Γωνία Πρόσπτωσης σε Ευθεία Πτήση (°)				3.41
Διάμετρος Ατράκτου [m]				2.0
<u>Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα</u>				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας				120.0
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας				68.03
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας				3.1
Εκλέπτυνση Πτέρυγας				0.05
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή				0.06
<u>Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο</u>				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου				60.0
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου				1.31
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου				0.44
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου				0.06
<u>Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς</u>				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας				15.97
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης				0.75

4.7.3. Παρατηρήσεις Πάνω στα Αποτελέσματα των Μεθόδων Απότομης Καθόδου

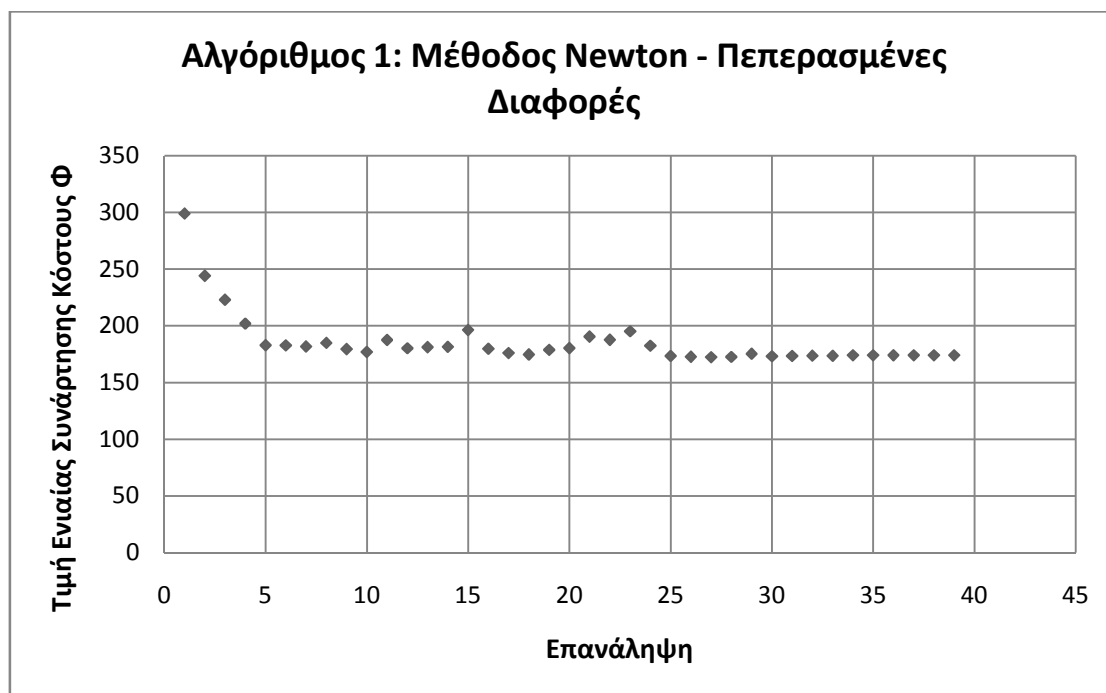
Τα αεροσκάφη που προκύπτουν ως βέλτιστες λύσεις των παραπάνω μεθόδων έχουν αρκετά όμοια χαρακτηριστικά. Οι επιδόσεις τους είναι πολύ καλές, εντός των προδιαγραφών, με εμβέλεια που ξεπερνά αρκετά τον ελάχιστο στόχο των $6500km$ και μικρό βάρος καυσίμου, γύρω στους 22 τόνους.

Παρατηρούμε πως απαιτούνται σημαντικά περισσότερες επαναλήψεις έως ότου συγκλίνουν οι μέθοδοι, σε σχέση με τις μεθόδους Απότομης Καθόδου στα προηγούμενα τρία προβλήματα. Αυτό συμβαίνει λόγω της αυξημένης πολυπλοκότητας της εφαρμογής, αφού στην ουσία πρέπει να εκπληρωθούν πέντε προϋποθέσεις για να συγκλίνει ο αλγόριθμος – ικανοποίηση κριτηρίου σύγκλισης ($|\Phi^{n+1} - \Phi^n| < E$), υψηλή εμβέλεια, χαμηλό βάρος καυσίμου, ισορροπημένο μήκος απογείωσης κάτω των $2500m$ και ταχύτητα προσέγγισης κάτω των $76m/s$.

Λόγω της ύπαρξης των συναρτήσεων \max στη συνάρτηση κόστους αλλά και επειδή δεν είναι επιθυμητή η υπερβολική μείωση του μήκους βήματος λόγω κινδύνου εγκλωβισμού σε τοπικά ακρότατα, παρατηρούνται ταλαντώσεις της τιμής συνάρτησης Φ στη γειτονιά της βέλτιστης λύσης, δίνοντας σε κάθε επανάληψη διαφορετικούς συνδυασμούς εμβέλειας, βάρους καυσίμου, ισορροπημένου μήκους απογείωσης και ταχύτητας προσέγγισης. Οι περιορισμοί γενικά δεν αφήνονται να πάρουν υψηλές τιμές όπως φαίνεται και από τη μικρή απόκλιση των σημείων από τις καμπύλες, γεγονός που οδηγεί, όσο προχωρά η διαδικασία, σε καλύτερες τιμές εμβέλειας και βάρους καυσίμου εντός των περιορισμών. Η μορφή της συνάρτησης κόστους είναι τέτοια, ώστε ενώ ο στόχος υψηλής εμβέλειας επιτυγχάνεται γρήγορα, για να μειωθεί αρκετά το βάρος καυσίμου απαιτούνται αρκετές επαναλήψεις, όπως φαίνεται και στα διαγράμματα σύγκλισης.

4.7.4. Μέθοδοι Newton

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2, η μέθοδος Newton παρουσιάζει μεγάλες δυσκολίες σύγκλισης. Για το λόγο αυτό στην εργασία αυτή χρησιμοποιείται η Τροποποιημένη Μέθοδος Newton σε συνδυασμό με κάποιες άλλες τεχνικές για να επιτευχθεί σύγκλιση. Εφαρμόζοντας την Τροποποιημένη Μέθοδο Newton σε συναρτήσεις κόστους της μορφής (4.9), προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:



Διάγραμμα 4.23 – Εγκλωβισμός της μεθόδου Newton σε τοπικό ακρότατο

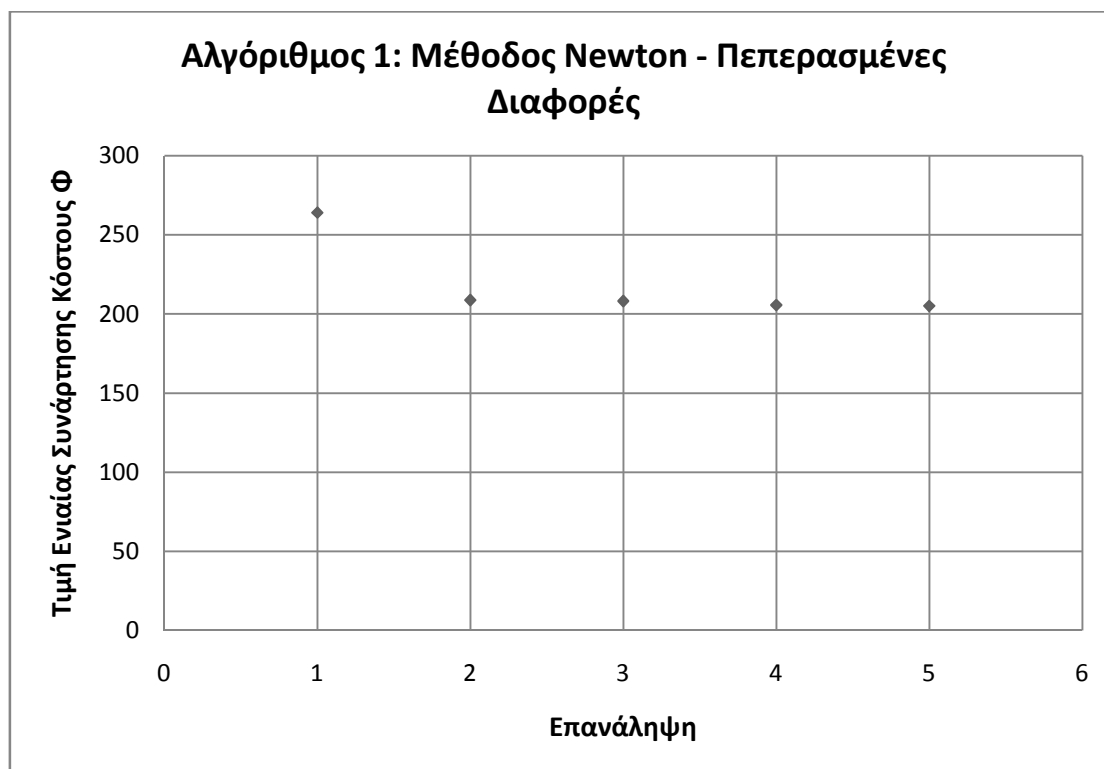
Για διαφορετικούς συνδυασμούς συντελεστών στάθμισης και ποινής μπορεί να επιτευχθεί λίγο καλύτερος ρυθμός σύγκλισης, αλλά σε καμία περίπτωση δεν κατέστη δυνατό να συγκλίνει η μέθοδος σε αποδεκτές τιμές. Στην εφαρμογή που εικονίζεται παραπάνω, η εμπέλεια ποτέ δεν υπερέβη τα 5900km ενώ το βάρος του καυσίμου σε καμία επανάληψη δεν έπεσε κάτω των 26 τόνων, ενώ οι περιορισμοί παραβιάζονται συνεχώς. Η συμπεριφορά αυτή παρατηρήθηκε για όλες τις συναρτήσεις κόστους που δοκιμάστηκαν.

Ο λόγος που η μέθοδος Newton δε συγκλίνει στη βέλτιστη λύση είναι επειδή εγκλωβίζεται σε τοπικά ακρότατα πριν εισέλθει στη γειτονιά της βέλτιστης λύσης. Είναι εντυπωσιακό το γεγονός ότι ανεξαρτήτως (κατά τα φαινόμενα) συνάρτησης κόστους (δηλαδή πορείας προς τη βέλτιστη λύση αφού αλλάζει η συνάρτηση κόστους και οι τιμές των παραγώγων), η μέθοδος εγκλωβίζεται συνεχώς σε τοπικά ακρότατα.

Η λύση στο πρόβλημα αυτό είναι να εκκινηθεί η διαδικασία από ένα διαφορετικό σημείο, κατά προτίμηση στη γειτονιά της βέλτιστης λύσης. Για το λόγο αυτό, επιλέγεται ως σημείο εκκίνησης της μεθόδου το σημείο της 50^{ης} επανάληψης της μεθόδου Απότομης Καθόδου Πεπερασμένων Διαφορών, το οποίο δίνει της εξής επιδόσεις σε σχέση με το αρχικό:

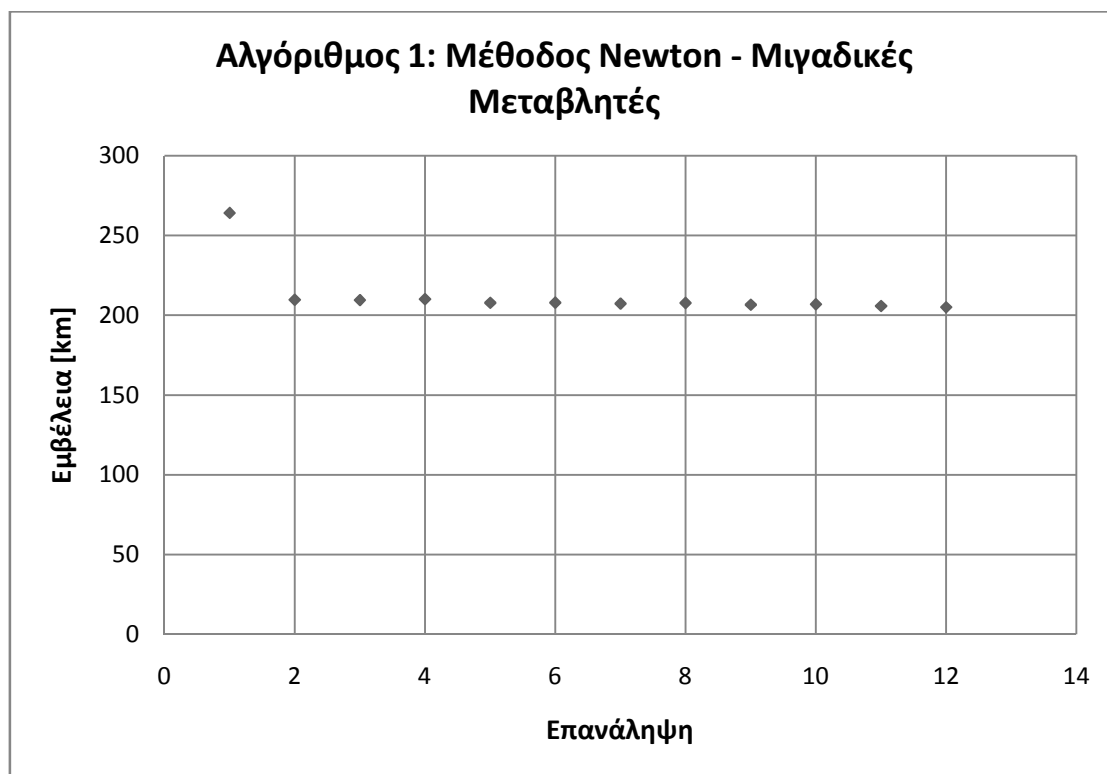
	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
Επιδόσεις στο Αρχικό Σημείο Εκκίνησης	3368	22000	1206	72.6
Επιδόσεις στο Νέο Σημείο Εκκίνησης	5796	21500	2228	79.79

Ξεκινώντας από το σημείο αυτό η μέθοδος Newton συγκλίνει σε λίγες επαναλήψεις και προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:



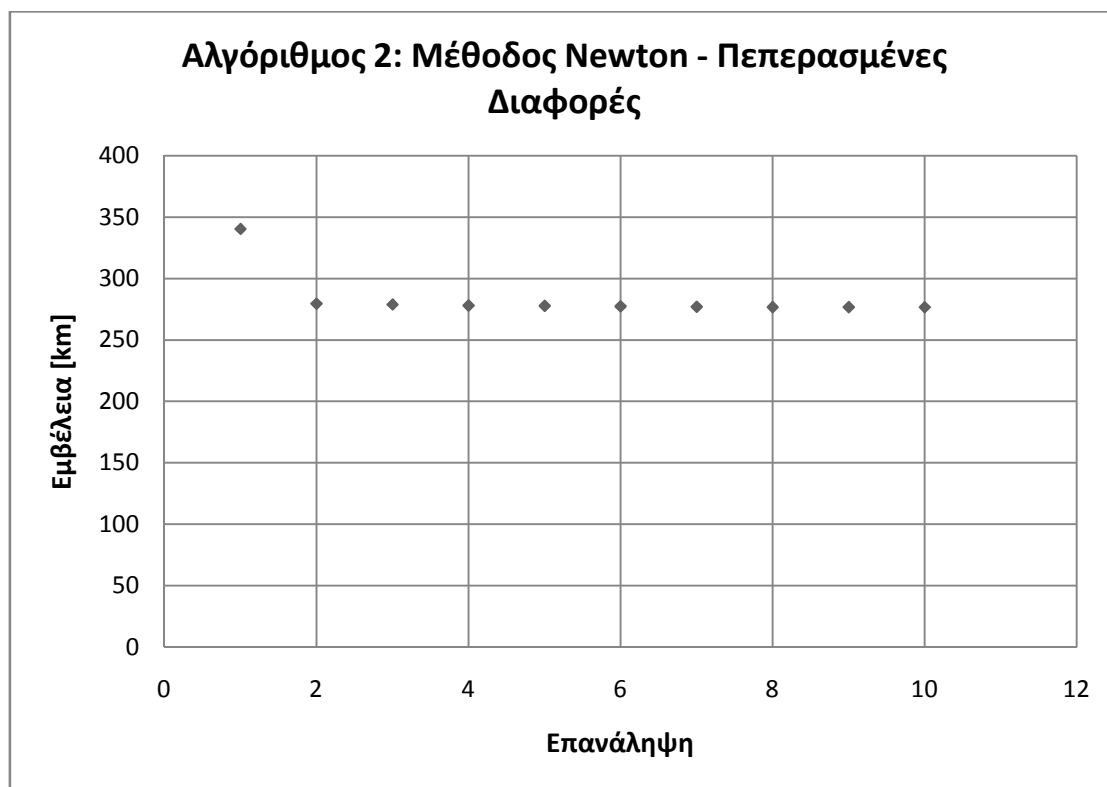
Διάγραμμα 4.24 - Αλγόριθμος 1: Μέθοδος Newton – Πεπερασμένες Διαφορές – Σύγκλιση Ενιαίας Συνάρτησης Κόστους Φ

Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	6611	21546	2448	75.67
<u>Μεταβλητή Σχεδιασμού</u>				<u>Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού</u>
<u>Συνθήκες Πτήσης</u>				
Υψόμετρο Πτήσης [m]				15102
Αριθμός Mach				1.3
<u>Καύσιμο και Άτρακτος (Αλγόριθμος 1)</u>				
Βάρος Καυσίμου [kg]				21546
Διάμετρος Ατράκτου [m]				2.0
<u>Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα</u>				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας				120.8
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας				67.81
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας				2.99
Εκλέπτυνση Πτέρυγας				0.050
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή				0.0574
<u>Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο</u>				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου				59.84
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου				1.36
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου				0.50
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου				0.06
<u>Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς</u>				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας				16.0
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης				0.76



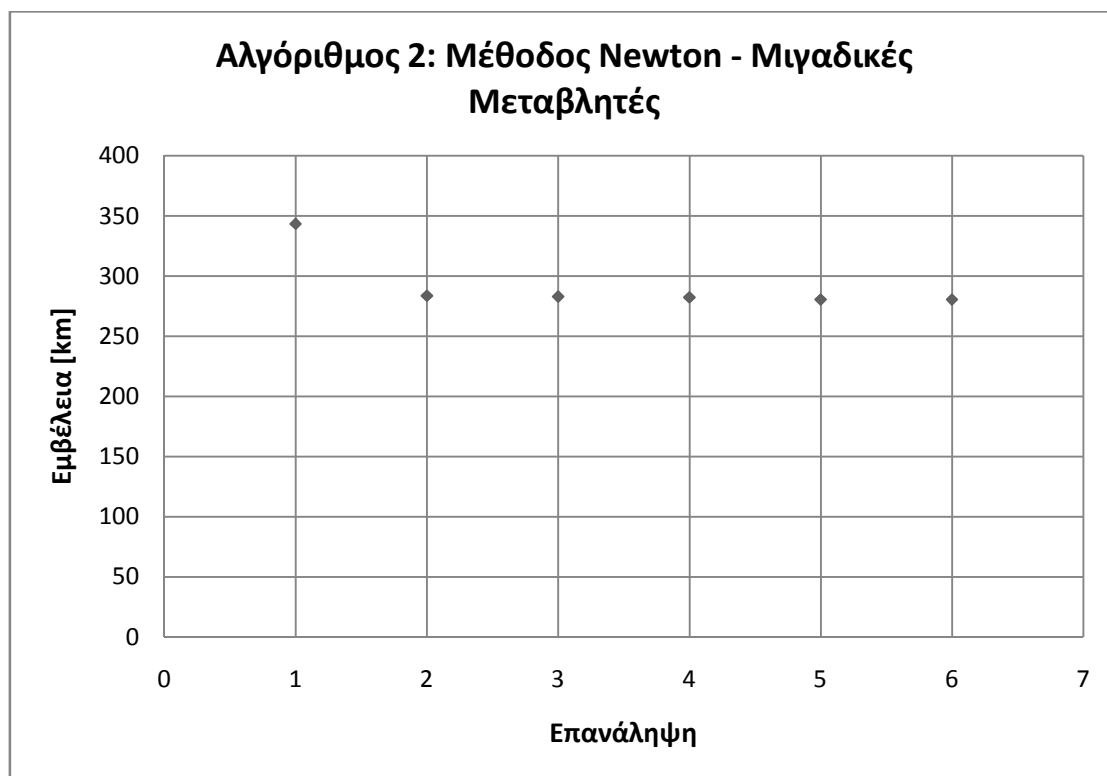
Διάγραμμα 4.26 - Αλγόριθμος 1: Μέθοδος Newton – Μιγαδικές Μεταβλητές – Σύγκλιση Ενιαίας Συνάρτησης Κόστους Φ

Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	6625	21645	2498	75.28
Μεταβλητή Σχεδιασμού			Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού	
Συνθήκες Πτήσης				
Υψόμετρο Πτήσης [m]			14789	
Αριθμός Mach			1.3	
Καύσιμο και Άτρακτος (Αλγόριθμος 1)				
Βάρος Καυσίμου [kg]			21645	
Διάμετρος Ατράκτου [m]			2.0	
Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας			120.0	
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας			66,48	
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας			3.016	
Εκλέπτυνση Πτέρυγας			0.0506	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή			0.0526	
Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου			60.0	
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου			1.32	
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου			0.50	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου			0.06	
Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας			16.0	
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης			0.75	



Διάγραμμα 4.27 - Αλγόριθμος 2: Μέθοδος Newton –Πεπερασμένες Διαφορές – Σύγκλιση Ενιαίας Συνάρτησης Κόστους Φ

Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	6611	21656	2455	75.53
<u>Μεταβλητή Σχεδιασμού</u>			<u>Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού</u>	
<u>Συνθήκες Πτήσης</u>				
Υψόμετρο Πτήσης [m]	15305			
Αριθμός Mach	1.30			
<u>Γωνία Πρόσπτωσης και Άτρακτος (Αλγόριθμος 2)</u>				
Γωνία Πρόσπτωσης σε Ευθεία Πτήση (°)	3.51			
Διάμετρος Ατράκτου [m]	2.0			
<u>Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα</u>				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας	120.7			
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας	68.6			
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας	3.0			
Εκλέπτυνση Πτέρυγας	0.05			
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή	0.06			
<u>Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο</u>				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου	59.1			
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου	1.28			
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου	0.43			
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου	0.06			
<u>Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς</u>				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας	15.8			
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης	0.75			



Διάγραμμα 4.28 - Αλγόριθμος 2: Μέθοδος Newton – Μιγαδικές Μεταβλητές – Σύγκλιση Ενιαίας Συνάρτησης Κόστους Φ

Χαρακτηριστικά Βέλτιστου Αεροσκάφους	Εμβέλεια [km]	Βάρος Καυσίμου [kg]	Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]	Ταχύτητα προσέγγισης [m/s]
	6631	21714	2481	75.99
Μεταβλητή Σχεδιασμού			Τιμή Μεταβλητής Σχεδιασμού	
Συνθήκες Πτήσης				
Υψόμετρο Πτήσης [m]			15119	
Αριθμός Mach			1.30	
Γωνία Πρόσπτωσης και Άτρακτος (Αλγόριθμος 2)				
Γωνία Πρόσπτωσης σε Ευθεία Πτήση (°)			3.41	
Διάμετρος Ατράκτου [m]			2.0	
Μεγέθη που Αφορούν την Πτέρυγα				
Ονομαστική Επιφάνεια Πτέρυγας			120.0	
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής της Πτέρυγας			67.96	
Λόγος Επιμήκους Πτέρυγας			3.0	
Εκλέπτυνση Πτέρυγας			0.05	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή			0.059	
Μεγέθη που Αφορούν το Ουραίο Πτερυγίο				
Γωνία Οπισθόκλισης στην ακμή Προσβολής του ουραίου Πτερυγίου			59.88	
Λόγος Επιμήκους του Ουραίου Πτερυγίου			1.32	
Εκλέπτυνση Ουραίου Πτερυγίου			0.43	
Λόγος Μέγιστου Πάχους προς Χορδή Ουραίου Πτερυγίου			0.06	
Μεγέθη που Αφορούν τους Περιορισμούς				
Μέγιστη Γωνία Πρόσπτωσης Πτέρυγας			15.73	
Απόλυτος Συντελεστής Φόρτισης			0.75	

4.7.5. Παρατηρήσεις Πάνω στη Μέθοδο Newton

Κι εδώ, παρατηρούμε πως οι λύσεις των δύο αλγόριθμων δε διαφέρουν κατά πολύ. Ο δεύτερος αλγόριθμος αποδίδει ελαφρά μεγαλύτερο βάρος καυσίμου, συνοδευόμενο όμως στη μια περίπτωση από καλύτερη εμβέλεια και στην άλλη από μικρότερες τιμές στους περιορισμούς, λύση που ευνοεί μια πιο συντηρητική προσέγγιση σχεδιασμού.

Βλέπουμε πως ξεκινώντας τη διαδικασία από ένα σημείο πιο κοντά στη γειτονιά της βέλτιστης λύσης παρατηρείται γρήγορη σύγκλιση και μάλιστα σε λύση παρόμοια της λύσης της μεθόδου Απότομης Καθόδου.

Αναλογιζόμενοι το υπολογιστικό κόστος, δεδομένου ότι η μέθοδος Απότομης Καθόδου χρειάστηκε περισσότερες από 350 επαναλήψεις για να συγκλίνει στην τιμή που συγκλίνει η μέθοδος Newton σε μόλις 5 – 12 επαναλήψεις, διαφαίνεται πως ένας συνδυασμός των δύο μεθόδων μπορεί να είναι πολύ αποτελεσματικός (αναζήτηση μιας γειτονιάς της βέλτιστης λύσης με τη μέθοδο Απότομης Καθόδου και γρήγορη σύγκλιση στη βέλτιστη λύση με τη μέθοδο Newton).

Η μέθοδος Μιγαδικών Μεταβλητών έχει γενικά όμοια συμπεριφορά με τη μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών. Τυχόν διαφορές που προκύπτουν μεταξύ των μεθόδων έχουν σχολιαστεί στη μέθοδο της Απότομης Καθόδου. Εδώ απλά υπενθυμίζεται πως στις μεθόδους Newton χρησιμοποιείται η παραγοντοποίηση Cholesky και η επιλογή βέλτιστου μήκους βήματος, ως εκ τούτου ακόμα και πολύ μικρές διαφορές στις παραγώγους μπορεί να οδηγήσουν σε διαφορετική πορεία λύσης (ή ακόμα και σε διαφορετική λύση).

4.7.6. Παρατηρήσεις Πάνω στην Εφαρμογή 4

Όπως ήταν αναμενόμενο, τα αεροσκάφη που προέκυψαν είναι πολύ καλές λύσεις, αφού πληρούν τις προδιαγραφές σχεδιασμού, έχουν μεγάλη εμβέλεια και μικρό βάρος καυσίμου.

Οι λύσεις που βρίσκουν οι μέθοδοι είναι όμοιες μεταξύ τους, γεγονός που σημαίνει πως όλες οι μέθοδοι βρήκαν λύση στην ίδια γειτονιά.

Γενικά, η εφαρμογή αυτή είναι η πιο δύσκολη από τις 4, όπως φαίνεται τόσο από τις πολλές επαναλήψεις που απαιτούνται για τη σύγκλιση της μεθόδου Απότομης Καθόδου όσο και από την αδυναμία σύγκλισης της μεθόδου Newton όταν ξεκινά μακριά από τη βέλτιστη λύση.

4.7.7. Συγκεντρωτικός Πίνακας Αποτελεσμάτων - Όλες οι Μέθοδοι

<u>Μέθοδος Απότομης Καθόδου</u>	<i>Εμβέλεια [km]</i>	<i>Βάρος Καυσίμου [kg]</i>	<i>Ισορροπημένο Μήκος Απογείωσης [m]</i>	<i>Ταχύτητα Προσέγγισης [m/s]</i>
<i>Αλγ.1 Πεπερασμένες Διαφορές</i>	6608	21402	2495	75.97
<i>Αλγ. 1 Μιγαδικές Μεταβλητές</i>	6591	21368	2489	75.99
<i>Αλγ.2 Πεπερασμένες Διαφορές</i>	6610	21894	2433	74.64
<i>Αλγ. 2 Μιγαδικές Μεταβλητές</i>	6612	21973	2423	75.0
<u>Τροποποιημένη Μέθοδος Newton</u>				
<i>Αλγ.1 Πεπερασμένες Διαφορές</i>	6611	21546	2448	75.67
<i>Αλγ. 1 Μιγαδικές Μεταβλητές</i>	6625	21645	2498	75.28
<i>Αλγ.2 Πεπερασμένες Διαφορές</i>	6611	21656	2455	75.53
<i>Αλγ. 2 Μιγαδικές Μεταβλητές</i>	6631	21714	2481	75.99

Πίνακας 4.6 – Αποτελέσματα όλων των μεθόδων βελτιστοποίησης για την Εφαρμογή 4

4.8. Παρατηρήσεις - Σύγκριση των Μεθόδων

Επισημαίνεται κατ' αρχάς πως λόγω της φύσεως του δεύτερου αλγόριθμου (επαναληπτικός υπολογισμός του βάρους του καυσίμου) δεν είναι δυνατό να εισαχθούν άνω ή κάτω όρια στην τιμή του. Παρατηρούμε όμως πως οι μέθοδοι βελτιστοποίησης προσεγγίζουν επιτυχώς το ακρότατο, χωρίς η βέλτιστη λύση να υπερβαίνει το άνω ή κάτω όριο του βάρους καυσίμου. Γενικά, παρατηρούμε πως οι λύσεις είναι στην ίδια γειτονιά λύσεων.

Παρατηρώντας τον πίνακα 4.6 βλέπουμε πως κάποιες μέθοδοι δίνουν χειρότερα αποτελέσματα από κάποιες άλλες. Οι τρεις λύσεις που κυριαρχούνται από τις υπόλοιπες όμως, είναι αποτελέσματα του προβλήματος σχεδιασμού 2 (αλγόριθμου 2). Αυτό είναι φυσιολογικό καθώς ο αλγόριθμος 2 παρουσιάζει διαφορετική αριθμητική συμπεριφορά και δίνει λίγο χειρότερες λύσεις σε σχέση με τον αλγόριθμο 1, από άποψης εμβέλειας και βάρους καυσίμου. Στον αντίποδα, αν εξεταστούν οι τιμές των περιορισμών των τριών αυτών τιμών, βλέπουμε πως είναι αισθητά χαμηλότεροι σε σχέση με τις υπόλοιπες πέντε λύσεις, ειδικά η τιμή της ταχύτητας προσέγγισης. Έτσι, οι λύσεις αυτές, παρότι χειρότερες σε τιμές εμβέλειας και βάρους καυσίμου θα μπορούσαν να αποτελέσουν λύσεις για πιο συντηρητικές επιλογές σχεδιασμού.

Εξετάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα είναι εμφανής η διαφορά των μεθόδων βελτιστοποίησης ως προς το ρυθμό σύγκλισης. Οι μέθοδοι Newton συγκλίνουν σε 6 – 9 φορές λιγότερες επαναλήψεις σε σχέση με τις αντίστοιχες μεθόδους καθόδου έχοντας ξεκινήσει από το ίδιο σημείο. Σε περίπτωση που μια μέθοδος Newton ξεκινήσει κοντά στη βέλτιστη λύση, αναμένεται πολύ ταχεία (τετραγωνική) σύγκλιση.

Οι μέθοδοι υπολογισμού παραγώγων συνοδεύονται με τη σειρά τους από συγκεκριμένα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Η χρήση της μεθόδου Μιγαδικών Μεταβλητών φαίνεται να αποφέρει κάποια οφέλη, καθώς η καλή ακρίβεια των παραγώγων έχει ως αποτέλεσμα καθώς οι τρεις από τις τέσσερις συνολικά εφαρμογές της μεθόδου δίνουν κυριαρχούσες λύσεις, ενώ η μία λύση που υστερεί ανήκει στον αλγόριθμο 2 που, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, έχει διαφορετική αριθμητική συμπεριφορά.

Ως μειονέκτημα της μεθόδου θα μπορούσε να αναφερθεί πως ενώ απαιτούνται λιγότερες κλήσεις της συνάρτησης κόστους για τον υπολογισμό των παραγώγων σε σχέση με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών, ο αυξημένος όγκος πράξεων που εκτελείται κάνει τη μέθοδο των Μιγαδικών Μεταβλητών έως και 2.5 φορές πιο αργή σε χρόνο υπολογισμού. Βέβαια, η ακρίβεια υπολογισμού παραγώγων είναι καλύτερη από αυτή των σχέσεων Πεπερασμένων Διαφορών που εφαρμόστηκαν.

Σε περίπτωση που επιθυμείται η ίδια τάξη ακρίβειας με τη μέθοδο Μιγαδικών Μεταβλητών, είναι πιθανό ο απαιτούμενος χρόνος να εξισωθεί καθώς θα απαιτούνται περισσότερες κλήσεις της συνάρτησης κόστους με τη μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών. Εκτός αυτού, σε μεγάλα προβλήματα όπου με άλλες αριθμητικές μεθόδους μπορεί να υπάρχει έντονη μετάδοση σφάλματος και μεγάλη ευαισθησία στην τιμή του ϵ , η μέθοδος των Μιγαδικών Μεταβλητών θα μπορούσε να δώσει τη λύση καθώς η «αναισθησία» της μεθόδου στην τιμή του ϵ μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλο κέρδος υπολογιστικού χρόνου αφού απαιτούνται λιγότερες δοκιμές. Επίσης, σε υπολογιστικά συστήματα παράλληλης επεξεργασίας, ο αυξημένος όγκος πράξεων θα έχει μικρότερο αντίκτυπο από ότι σε ένα απλό υπολογιστή ενός επεξεργαστή όπως αυτός που χρησιμοποιήθηκε για τους υπολογισμούς αυτής της εργασίας, γεγονός που καθιστά τη μέθοδο βιώσιμη.

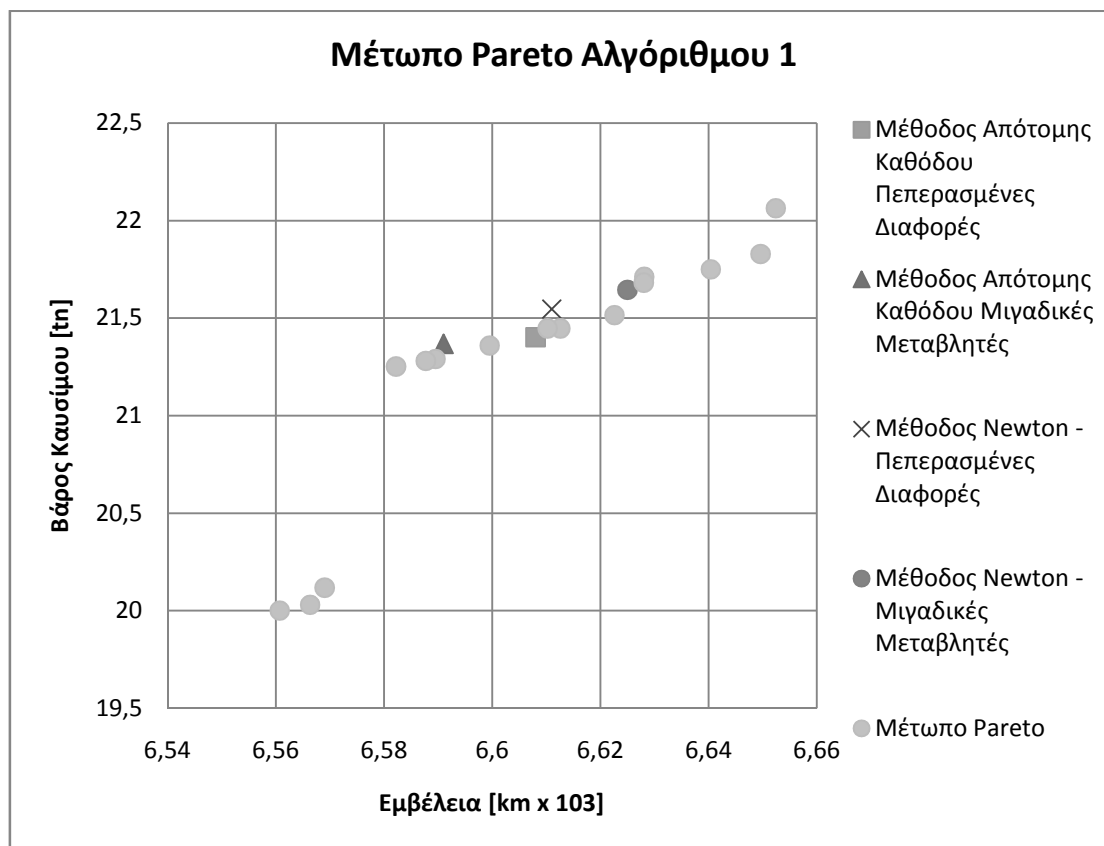
Όσον αφορά τα αεροσκάφη που προκύπτουν από τις βελτιστοποιήσεις, βλέπουμε πως σχεδόν καμία λύση του προβλήματος 4 δεν υστερεί των άλλων καθώς όλες προτείνουν το σχεδιασμό ενός αεροσκάφους με διαφορετικά χαρακτηριστικά, δηλαδή καμία δεν είναι αμιγώς ανώτερη της άλλης, αν ληφθούν υπόψη και οι λίγο χαμηλότερες τιμές περιορισμών που προκύπτουν σε αρκετές περιπτώσεις. Μπορούμε λοιπόν να πούμε πως κάθε ένα από αυτά τα αεροσκάφη ανταποκρίνεται σε διαφορετικές σχεδιαστικές προδιαγραφές. Η τελευταία αυτή πρόταση είναι σημαντική καθώς οι προδιαγραφές τίθενται βάση του εκτιμώμενου τεχνολογικού επιπέδου. Εάν για παράδειγμα υπήρχε υπόψη τεχνολογική λύση που να επιτρέπει την εύκολη προσγείωση του αεροσκάφους με ταχύτητα προσέγγισης $80m/s$, προκύπτει εμβέλεια αρκετά μεγαλύτερη των $7000km$. Ομοίως, ένας κινητήρας πιο χαμηλής κατανάλωσης από το εκτιμώμενο μπορεί να οδηγήσει σε αεροσκάφος ιδίων επιδόσεων αλλά με μικρότερο βάρος, ή καλύτερες τιμές των περιορισμών. Τεχνολογικές λύσεις όπως πτέρυγα μεταβλητής γεωμετρίας μπορούν να επιφέρουν καλύτερη συμπεριφορά του αεροσκάφους σε υποηχητικές συνθήκες, γεγονός που βελτιώνει τις τιμές των περιορισμών για τις ίδιες τιμές εμβέλειας και βάρους καυσίμου, επιτρέποντας στην ουσία την αύξησή τους. Στο ίδιο μήκος κύματος, μια λιγότερο συντηρητική εκτίμηση του ισορροπημένου μήκους απογείωσης οδηγεί σε πολύ καλές τιμές εμβέλειας και βάρους καυσίμου. Ένας συνδυασμός δε των παραπάνω μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα ένα αεροσκάφος που πλησιάζει ή και υπερβαίνει τα $8000km$ εμβέλειας, συνδυάζοντας μικρό βάρος καυσίμου.

Εντέλει, γίνεται φανερό πως ο σχεδιαστής ενός αεροσκάφους επιλέγει τις προδιαγραφές βάσει των στοιχείων και των τεχνολογικών λύσεων που έχει στη διάθεσή του, αλλά και βάσει της αποστολής για την οποία προορίζεται το αεροσκάφος. Στην παρούσα εργασία, ο στόχος σχεδιασμού ενός μικρού υπερηχητικού επιβατικού αεροσκάφους το οποίο μπορεί να εκτελέσει υπερατλαντικές πτήσεις (με δυνατότητα απογείωσης από μια πληθώρα ευρωπαϊκών πόλεων) με μικρό βάρος καυσίμου (σταθερά κάτω από 22tn), το οποίο πληρεί συγκεκριμένους λειτουργικούς περιορισμούς, δεδομένου του τεχνολογικού επιπέδου που δίνεται από τη διεθνή βιβλιογραφία μέσω εμπειρικών σχέσεων (αλλά και περιορισμών), έχει επιτευχθεί. Φυσικά, σε περίπτωση που ένα τέτοιο αεροσκάφος προχωρήσει στο επίπεδο της κατασκευής, είναι βέβαιο πως θα ενσωματώνει πολλές τεχνολογικές καινοτομίες λόγω των οποίων θα έχει ακόμη καλύτερες επιδόσεις από αυτές που εκτιμώνται σε αυτή τη διπλωματική εργασία.

4.8.1. Βελτιστοποίηση με Εξελικτικούς Αλγορίθμους

Στα πλαίσια της αναζήτησης της βέλτιστης λύσης έγινε και ένα τρέξιμο του λογισμικού εξελικτικών αλγορίθμων EASY που έχει αναπτυχθεί στο Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου με σκοπό τη σύγκριση των αποτελεσμάτων των αιτιοκρατικών μεθόδων με τα αποτελέσματα ενός έτοιμου λογισμικού βελτιστοποίησης υψηλής ποιότητας. Τα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού είναι τα ίδια με αυτά των αλγορίθμων βελτιστοποίησης δύο στόχων με περιορισμούς όπως και οι τιμές των περιορισμών ισορροπημένου μήκους απογείωσης και ταχύτητας προσέγγισης. Στο διάγραμμα που ακολουθεί φαίνεται το μέτωπο Pareto για τον αλγόριθμο 1 και οι λύσεις των αιτιοκρατικών μεθόδων οι οποίες, όπως ήταν αναμενόμενο, είναι «πάνω» στο μέτωπο.

4.8.1.1. Μέτωπο Pareto



Διάγραμμα 4.29 – Βέλτιστες Λύσεις για τον Αλγόριθμο 1, Εξελικτικοί Αλγόριθμοι και Αιτιοκρατικές Μέθοδοι

4.8.1.2. Παρατηρήσεις Πάνω στους Εξελικτικούς Αλγόριθμους

Παρατηρούμε πως οι λύσεις των αιτιοκρατικών μεθόδων βρίσκονται πάνω στο μέτωπο Pareto.

Παρατηρούμε επίσης, πως το πρόβλημα που εξετάζουμε είναι τέτοιο ώστε το μέτωπο που προκύπτει έχει πολύ μικρό εύρος, μόλις $100km$ για την εμβέλεια και δύο τόνους για το βάρος του καυσίμου. Σημειώνουμε πως για την εύρεση του μετώπου δεν εφαρμόστηκε περιορισμός στην εμβέλεια, οπότε το μέτωπο που βλέπουμε απεικονίζει τη συμπεριφορά του φυσικού προβλήματος, εντός των ορίων των μεταβλητών σχεδιασμού και των υπόλοιπων περιορισμών που έχουν τεθεί. Εκτός από το μικρό εύρος, παρατηρούμε πως το βάρος καυσίμου είναι γενικά πολύ χαμηλό (κάτω από 22 τόνους), ενώ η εμβέλεια δεν υπερβαίνει τα $6700km$.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, κάνοντας χρήση των συντελεστών στάθμισης στην ουσία ορίζουμε προς ποια λύση του μετώπου θα κατευθυνθεί η αιτιοκρατική μέθοδος. Λόγω του μικρού εύρους του μετώπου παρατηρείται μια διασπορά, η οποία οφείλεται εν μέρει και στη χρήση διαφορετικών συντελεστών στάθμισης σε κάποιες περιπτώσεις. Η αλλαγή ήταν αναγκαία καθώς, ακόμη και μεταξύ μεθόδων Μιγαδικών Μεταβλητών και Πεπερασμένων Διαφορών όπου οι παράγωγοι είναι σχεδόν ίδιες, οι μικρές διαφορές των τιμών των παραγώγων μπορεί να οδηγήσουν τελικά τον αλγόριθμο σε άλλη κατεύθυνση. Αυτό έχει σημασία σε περίπτωση που κάποιος αλγόριθμος εγκλωβιστεί σε τοπικό ακρότατο. Λόγω

των μικρών αυτών διαφορών, μπορεί ο άλλος αλγόριθμος να μην εγκλωβιστεί στο ακρότατο αυτό, ως εκ τούτου για να υπάρχει σύγκλιση στη βέλτιστη λύση και για τους δύο αλγόριθμους πολλές φορές είναι απαραίτητη η αλλαγή, εκτός των συντελεστών ποινής, και των συντελεστών στάθμισης. Στην προκειμένη περίπτωση, λόγω του μικρού εύρους του μετώπου, η χρήση διαφορετικών συντελεστών στάθμισης μεταξύ των μεθόδων δεν προκαλεί πρακτικά μεγάλη διασπορά στις τελικές λύσεις, όπως είναι εμφανές και στο παραπάνω διάγραμμα.

Οι μέθοδοι όπου χρησιμοποιούνται Μιγαδικές Μεταβλητές βλέπουμε πως συμπεριφέρονται το ίδιο, αν όχι και καλύτερα από τις αντίστοιχες μεθόδους Πεπερασμένων Διαφορών, πιθανότατα λόγω της καλύτερης ακρίβειας στον υπολογισμό παραγώγων.

Τέλος, αξίζει να γίνει μια αναφορά στο κέρδος που υπάρχει χρησιμοποιώντας μια αιτιοκρατική μέθοδο – ο χρόνος σύγκλισης της πιο αργής αιτιοκρατικής μεθόδου δεν υπερβαίνει τα 3,5 λεπτά, ενώ σε περίπτωση που συνδυασθεί μια μέθοδος απότομης καθόδου με μια μέθοδο Newton, είδαμε πως η σύγκλιση μπορεί να είναι ταχύτερη. Αντίθετα, ο εξελικτικός αλγόριθμος έτρεχε περίπου 35 λεπτά στον ίδιο υπολογιστή έως ότου συγκλίνει. Η διαφορά στις απαιτήσεις υπολογιστικού χρόνου είναι εμφανής. Πάραυτα, υπάρχει πάντα ο κίνδυνος εγκλωβισμού σε κάποιο τοπικό ακρότατο όπως βλέπουμε και στην περίπτωση της μεθόδου Newton με τη μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών η οποία παρουσιάζει μια μικρή απόκλιση από το μέτωπο Pareto.

4.9. Σχέδιο του Βέλτιστου Αεροσκάφους

Ακολουθεί το σχέδιο του, διαστασιολογημένου πλέον, βέλτιστου αεροσκάφους. Τα σχέδια που ακολουθούν εικονίζουν το αεροσκάφος που υπολογίστηκε με τη μέθοδο Newton με χρήση Μιγαδικών Συναρτήσεων. Στο πρώτο σχέδιο βλέπουμε τις βασικές διαστάσεις του αεροσκάφους (οι αποστάσεις σε m και οι γωνίες σε $^{\circ}$), ενώ στο δεύτερο βλέπουμε το ίδιο σχέδιο, μεγεθυμένο, χωρίς διαστάσεις.

Κεφάλαιο 5^ο

Απολογισμός

5. Απολογισμός

Αυτή η διπλωματική εργασία ξεκίνησε με δύο βασικούς στόχους – τη βελτιστοποίηση των επιδόσεων ενός υπερηχητικού επιβατικού αεροσκάφους και τη μελέτη της μεθόδου Μιγαδικών Μεταβλητών για τον υπολογισμό παραγώγων.

Έχοντας τον πρώτο στόχο κατά νου, δημιουργήσαμε ένα νέο αλγόριθμο ανάλυσης επιδόσεων του αεροσκάφους, διατυπώνοντας στην ουσία ένα δεύτερο, νέο πρόβλημα.

Το επόμενο βήμα ήταν να μετατραπούν οι προγραμματιστικοί κώδικες των δύο αλγορίθμων από πραγματικοί σε μιγαδικοί. Η διαδικασία αυτή απαίτησε μελέτη μιγαδικής ανάλυσης αλλά και προγραμματισμού, καθώς οι συναρτήσεις που δεν υποστηρίζουν μιγαδικό όρισμα στη γλώσσα *FORTRAN 90* έπρεπε να προγραμματιστούν ως υπορουτίνες έτσι ώστε να καλούνται από τον αλγόριθμο κάθε φορά που αυτό είναι αναγκαία η χρήση μιας εξ αυτών των συναρτήσεων.

Αφού έγιναν οι απαραίτητες αλλαγές στον κώδικα και προγραμματίστηκαν οι απαραίτητες συναρτήσεις (αλλά και συγκρίθηκαν οι υπάρχουσες με παραδείγματα λυμένα στο χέρι για να εξακριβωθεί τι φανταστικό μέρος επιστρέφουν, καθώς πολλές από αυτές έχουν θεωρητικά άπειρες λύσεις), φτάσαμε στο εμπόδιο της μεθόδου διχοτόμησης. Η μέθοδος αυτή έχει ως είσοδο ένα πραγματικό αριθμό και επιστρέφει ένα πραγματικό αριθμό. Σε περίπτωση που απλά δίνουμε ως είσοδο το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού που φτάνει στη μέθοδο αυτή μετά τη μιγαδική μετατροπή, η έξοδος θα ήταν ένας πραγματικός αριθμός. Αυτό σημαίνει πως θα χανόταν το φανταστικό μέρος του αριθμού το οποίο και φέρει την πληροφορία υπολογισμού των παραγώγων.

Για να αντιμετωπισθεί αυτό το πρόβλημα, αναπτύχθηκε μια μέθοδος η οποία βρίσκει το μιγαδικό αριθμό που ικανοποιεί μια μιγαδική εξίσωση, κατ' αντιστοιχία της μεθόδου διχοτόμησης. Αυτό επιτυγχάνεται, αφού η μέθοδος θεμελιωθεί μαθηματικά, κατασκευάζοντας μια συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση με τη μέθοδο του στόχου και το μιγαδικό επίπεδο σαρώνεται για την ελάχιστη τιμή της. Όταν αυτή βρεθεί, το πλέγμα φτιάχνεται εκ νέου γύρω από τον κόμβο όπου εντοπίστηκε η ελάχιστη λύση, μέχρι σύγκλισης της μεθόδου.

Αφού έγιναν όλα τα απαραίτητα βήματα για την μετατροπή του κώδικα των δύο αλγορίθμων σε μιγαδικό, είναι πλέον δυνατός ο υπολογισμός πρώτων παραγώγων χρησιμοποιώντας μια από τις σχέσεις που προτείνει η διεθνής βιβλιογραφία. Δε σταματήσαμε όμως εδώ. Η υπόψη διεθνής βιβλιογραφία δεν προτείνει κάποιες σχέσεις υπολογισμού του Εσσιανού μητρώου, οπότε ξεκίνησε μια προσπάθεια ανεύρεσης τέτοιων σχέσεων. Η προσπάθεια ήταν επιτυχής και οι σχέσεις που διατυπώθηκαν παρατίθενται σε αυτή τη διπλωματική εργασία.

Έχοντας πλέον τα μέσα υπολογισμού πρώτων και δεύτερων παραγώγων, μπορεί να αρχίσει η εφαρμογή μεθόδων που κάνουν χρήση της πληροφορίας αυτής. Οι μέθοδοι αυτές είναι η μέθοδος Απότομης Καθόδου και η μέθοδος Newton.

Αρχικά, διατυπώνεται τα παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης:

- Μεγιστοποίηση της εμβέλειας του αεροσκάφους χωρίς περιορισμούς (φυσικά εντός ορίων των μεταβλητών σχεδιασμού)

Το πρόβλημα αυτό αρχικά επιχειρείται να επιλυθεί με τη μέθοδο Απότομης Καθόδου. Οι πρώτες παράγωγοι υπολογίζονται με τη μέθοδο Μιγαδικών Μεταβλητών και επαληθεύονται με τη μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών. Έπειτα, με την εφαρμογή της μεθόδου βελτιστοποίησης παρατηρείται η αδυναμία ταχείας σύγκλισης της μεθόδου. Το αίτιο εντοπίζεται στη διαφορά, μεταξύ των μεταβλητών, της τάξης μεγέθους τους και της τάξη μεγέθους της παραγώγου τους. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται προγραμματίζοντας μια υπορουτίνα η οποία κανονικοποιεί αυτόματα σε κάθε επανάληψη τις παραγώγους, λαμβάνοντας υπόψη τις διαφορετικές τάξεις μεγέθους.

Οι μέθοδοι Απότομης Καθόδου και των δύο αλγόριθμων ανάλυσης επιδόσεων, χρησιμοποιώντας Μιγαδικές Μεταβλητές και Πεπερασμένες Διαφορές συγκλίνουν πλέον ικανοποιητικά.

Το επόμενο βήμα είναι ο προγραμματισμός της μεθόδου Newton, έτσι ώστε να γίνει χρήση του μιγαδικά υπολογισμένου Εσσιανού μητρώου. Παρατηρείται πως η μέθοδος Newton παρουσιάζει έντονα προβλήματα σύγκλισης. Τα αίτια εντοπίζονται σε δύο προβλήματα:

- Εμφάνιση αρνητικά ορισμένων ή μη-επαρκώς θετικά ορισμένων Εσσιανών μητρώων
- Ταλάντωση της μεθόδου λόγω επιλογής σταθερού μήκους βήματος

Το πρώτο πρόβλημα αντιμετωπίζεται χρησιμοποιώντας την Τροποποιημένη Μέθοδο Newton, η οποία κάνει χρήση της παραγοντοποίησης Cholesky και κάποιων εμπειρικών σχέσεων έτσι ώστε να τροποποιήσει το μητρώο ακριβώς όσο χρειάζεται ώστε να είναι μεν επαρκώς θετικά ορισμένο, να αλλοιωθεί δε όσο γίνεται λιγότερο η πληροφορία της κατεύθυνσης Newton.

Το δεύτερο πρόβλημα αντιμετωπίζεται προγραμματίζοντας έναν αλγόριθμο εκτίμησης της επόμενης τιμής της συνάρτησης κόστους για διάφορα μήκη βήματος, επιλέγοντας στο τέλος κάθε επανάληψης το μέγιστο (αφού αντιμετωπίζουμε πρόβλημα μεγιστοποίησης). Με τις ενέργειες αυτές, όλες οι μέθοδοι Newton συγκλίνουν.

Έχοντας τα πρώτα αποτελέσματα βελτιστοποίησης διαπιστώνουμε πως, ενώ το αεροσκάφος έχει πολύ καλή εμβέλεια, το βάρος του καυσίμου είναι στο άνω όριο ενώ οι τιμές ισορροπημένου μήκους απογείωσης και ταχύτητας προσέγγισης που προκύπτουν είναι απαγορευτικές για τη χρήση των υπάρχοντων αεροδρομίων. Για το λόγο αυτό, αποφασίζεται να μελετηθούν τρία ακόμη προβλήματα βελτιστοποίησης:

- Μειστοποίηση της εμβέλειας με περιορισμούς (Ισορροπημένο μήκος απογείωσης < 2500m και ταχύτητα προσέγγισης < 76m/s)
- Βελτιστοποίηση δύο στόχων χωρίς περιορισμούς (μειστοποίηση της εμβέλειας και ελαχιστοποίηση του βάρους καυσίμου)
- Βελτιστοποίηση δύο στόχων με περιορισμούς (Ισορροπημένο μήκος απογείωσης < 2500m και ταχύτητα προσέγγισης < 76m/s)

Για να καταστεί δυνατό να γίνει βελτιστοποίηση δύο στόχων, αλλά και να ληφθούν οι περιορισμοί, κάνοντας χρήση αιτιοκρατικών μεθόδων, χρησιμοποιούνται τεχνικές κατασκευής ενιαίας συνάρτησης κόστους με συντελεστές στάθμισης (για το πρόβλημα πολλών στόχων) και επαυξημένης συνάρτησης κόστους με προσθήκη συνάρτησης ποινής (για το πρόβλημα με περιορισμούς). Εντέλει, για το τελευταίο πρόβλημα γίνεται συνδυασμός των ανωτέρω σε μία, ενιαία, συνάρτηση κόστους.

Ενώ τα τρία πρώτα προβλήματα χρησιμοποιούνται κυρίως για μελέτη της συμπεριφοράς των αλγορίθμων ανάλυσης επιδόσεων, το τέταρτο πρόβλημα αποσκοπεί στον υπολογισμό του «βέλτιστου» αεροσκάφους.

Πράγματι, οι λύσεις που προκύπτουν είναι εντός των προδιαγραφών, οπότε θεωρούμε πως ο στόχος της βελτιστοποίησης των επιδόσεων των αεροσκαφών που περιγράφονται από τους δύο αλγορίθμους ανάλυσης επιδόσεων έχει επιτευχθεί.

Τέλος, γίνεται χρήση του λογισμικού εξελικτικών αλγορίθμων EASY, με σκοπό τη σύγκριση των αποτελεσμάτων των αιτιοκρατικών μεθόδων με ένα λογισμικό στοχαστικής βελτιστοποίησης. Όπως ήταν αναμενόμενο, οι λύσεις των αιτιοκρατικών μεθόδων είναι «πάνω» στο μέτωπο Pareto.

6. Βιβλιογραφικές Αναφορές

[1]: Βαρβάρα Ασούτη, Ανάλυση και Σχεδίαση Πτερυγώσεων και Πτερύγων σε Πολυεπεξεργαστικό Περιβάλλον, Διδακτορική Διατριβή υπό εξέλιξη, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών.

[2]: D. Raymer, Aircraft Design – A Conceptual Approach 3rd edition, AIAA, 1992

[3]: www.concordesst.com

[4]: www.aoe.vt.edu/~mason/Mason/ACinfoTOC.html

[5]: www.worldaerodata.com

[6]: Nahin, Paul J., *An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$* (hardcover ed.), Princeton University Press, 1998

[7]: H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, R. Remmert, *Numbers* (hardcover ed.), Springer, 1991

[8]: Calvin C. Clawson, *Ο Ταξιδευτής των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Κέδρος, 1994

[9]: Theodore W. Gamelin, *Complex Analysis*, Springer, 2001

[10]: Jorge Nocedal, Steven J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer, 1999

[11]: www.mapsofworld.com/utilities/world-airdistance-locator.htm

[12]: Κ. Χ. Γιαννάκογλου, Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική, Εκδόσεις ΕΜΠ, 2006

[13]: Δ. Ι. Παπαδημητρίου, Κ. Χ. Γιαννάκογλου, A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals, for inviscid and viscous flows, *Computers & Fluids*, Volume 36, Issue 2, February 2007, Pages 325-341

[14]: Δ. Ι. Παπαδημητρίου, Κ. Χ. Γιαννάκογλου, Computation of the Hessian matrix in aerodynamic inverse design using continuous adjoint formulations, *Computers & Fluids*, Volume 37, Issue 8, September 2008, Pages 1029-1039

[15]: William Squire, George Trap, (Paper) Using Complex Variables to Estimate Derivatives of Real Functions, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998

[16]: Κ. Χ. Γιαννάκογλου, Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς, Εκδόσεις ΕΜΠ, 2003