

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Βελτιστοποίηση Τοπολογίας στη Ρευστοδυναμική με τη
Συνεχή Συζυγή Μέθοδο και τη Μέθοδο των
Κινουμένων Ασυμπτώτων

Διπλωματική Εργασία

Ζώης Κατηφόρης

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2019

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους συνέβαλλαν στην εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας αλλά και στην περάτωση των προπτυχιακών μου σπουδών γενικότερα.

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για τη στήριξη που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια της φοίτησης μου.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή, Κ. Χ. Γιαννάκογλου για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με αυτό το θέμα αλλά και για την συνεχή καθοδήγηση του.

Στην συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον Δρ. Ε. Παπουτσή-Κιαχαγιά, για την πολύτιμη και ουσιαστική βοήθεια του σε ό,τι χρειάστηκα, κυρίως στο προγραμματιστικό κομμάτι της εργασίας στο περιβάλλον OpenFOAM αλλά και τη διάθεση του να βοηθήσει θυσιάζοντας αρκετό από το χρόνο του ακόμη και όταν αυτός ήταν ελάχιστος. Θέλω επίσης να ευχαριστήσω τον Κώστα Γκαραγκούνη που ήταν αυτός που με εισήγαγε στο περιβάλλον του OpenFOAM.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες στους φίλους μου, για τη στήριξη και τις αναμνήσεις που δημιουργήσαμε μαζί κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών σπουδών μας.

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Βελτιστοποίηση Τοπολογίας στη Ρευστοδυναμική με τη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο και τη Μέθοδο των Κινουμένων Ασυμπτώτων

Διπλωματική Εργασία

Ζώης Κατηφόρης

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2019

Περίληψη

Στον τομέα της ρευστοδυναμικής, η βελτιστοποίηση τοπολογίας χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του βέλτιστου τρόπου με τον οποίο πρέπει να συνδεθούν οι είσοδοι και οι έξοδοι της ροής ενός διακριτοποιημένου χωρίου σχεδιασμού, με κριτήριο την επιλεγείσα συνάρτηση στόχο και, πιθανώς, την ικανοποίηση κάποιων περιορισμών. Η υλοποίηση της γίνεται εισάγοντας στις διέπουσες τη ροή εξισώσεις (εδώ τις μέσες κατά Reynolds, εξισώσεις Navier-Stokes για στρωτές ροές ασυμπίεστων ρευστών), έναν όρο πηγής που εξαρτάται από την τοπική τιμή της μεταβλητής του πορώδους. Τις μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος αποτελούν οι τοπικές τιμές του πορώδους στο χωρίο σχεδιασμού από τις οποίες προκύπτει το τελικό, βέλτιστο πεδίο του πορώδους. Αυτό καθορίζει ποιες περιοχές του χωρίου σχεδιασμού στερεοποιούνται και ποιες αντιστοιχούν στη διαδρομή του ρευστού. Κύριο πρόβλημα μιας τέτοιας βελτιστοποίησης είναι η εμφάνιση των λεγόμενων γκριζών ζωνών, που προκαλούν αβεβαιότητα ως προς την ακριβή θέση του υπολογιζόμενου ορίου του σχεδιαζόμενου αγωγού. Για τη θεραπεία του προβλήματος δοκιμάζεται η εναλλακτική χρήση συναρτήσεων του πορώδους αντί του ίδιου του πορώδους. Τα προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας δοκιμάζονται και με την εισαγωγή περιορισμού ως προς τον όγκο του χωρίου σχεδιασμού που καταλαμβάνει το στερεό, κάτι που βελτιώνει αισθητά την απαλοιφή των γκριζών ζωνών. Για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού του πορώδους, χρησιμοποιείται η συνεχής συζυγής μέθοδος, η διατύπωση της οποίας αλλά και οι επιλύτες της ροής και των αντίστοιχων συζυγών εξισώσεων προέρχονται από την ερευνητική ομάδα της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του ΕΜΠ (ΜΠΥΡΒ/ΕΜΠ) και έχουν προγραμματιστεί στο περιβάλλον του OpenFOAM. Η συνεχής συζυγής μέθοδος αποτελεί ιδανική επιλογή για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας σε προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας, αφού το υπολογιστικό κόστος είναι ανεξάρτητο του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού, που εδώ ισούται με τον αριθμό των υπολογιστικών κυψελών του χωρίου σχεδιασμού. Για τη δοκιμή των συναρτήσεων που εισάγονται, δημιουργείται μια

σταθμισμένη συνάρτηση που περιλαμβάνει τη συνάρτηση στόχο και τις συναρτήσεις των περιορισμών πολλαπλασιασμένες με ένα σταθερό βάρος, υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας μέσω της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, και ύστερα ανανεώνονται οι μεταβλητές σχεδιασμού με τη μέθοδο της απότομης καθόδου.

Επιπλέον, μιας και τα προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας είναι σύνηθες να διέπονται από περιορισμούς, προγραμματίζεται και δοκιμάζεται η μέθοδος των κινουμένων ασυμπτώτων (MMA). Πρόκειται για μια αιτιοκρατική μέθοδο βελτιστοποίησης, στην οποία η συνάρτηση στόχος και οι συναρτήσεις των περιορισμών, προσεγγίζονται από πιο απλές κυρτές συναρτήσεις, και συνεπώς, ενά απλοποιημένο πρόβλημα διαμορφώνεται και λύνεται σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Η MMA χρησιμοποιείται ευρύτατα και επιτυχώς για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης τοπολογίας στη δομική μηχανική, και ένα από τα ζητούμενα είναι να διερευνηθεί αν μπορεί να αποδειχθεί εξίσου καλή μέθοδος και στη βελτιστοποίηση τοπολογίας στη μηχανική των ρευστών.

National Technical University of Athens
School of Mechanical Engineering
Department of Fluid Mechanics
Parallel CFD & Optimization Unit

Topology Optimization in Fluid Dynamics using Continuous Adjoint Method and Method of Moving Asymptotes

Diploma Thesis

Zois Katiforis

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, September 2019

Abstract

Topology optimization in Fluid Dynamics is used for computing the optimal flow passage in a design domain connecting given inlets and outlets, with respect to the selected objective function and, possibly, the satisfaction of some constraints. Topology optimization is implemented by introducing a source-term that depends on the local value of the porosity variable, in the flow equations (this diploma thesis is dealing with the Reynold averaged Navier-Stokes equations – RANS – for laminar flows of incompressible fluids). The design variables of the problem are the nodal porosity values, from which the final, optimal field of porosity is computed. This determines which areas of the design domain are solidified and which are occupied by the fluid flow. Main problem in such an optimization is that gray zones often appear giving rise to uncertainties regarding the precise location of the computed passage boundaries. To solve this problem, alternative functions dependent on the porosity are tested, instead of the porosity itself. Problems of topology optimization are also tested by introducing a constraint on the volume of the design space occupied by the solid. The introduction of this constraint significantly improves the gray zone problem. In order to compute the sensitivity derivatives with respect to the porosity design variables, the continuous adjoint method is used, its mathematical formulation and the corresponding solvers of the flow and the adjoint equations, are provided by the Parallel CFD & Optimization Unit. The open source CFD toolbox, OpenFOAM, was used to program the primal and adjoint flow solvers. The continuous adjoint method is an ideal choice for computing sensitivity derivatives in topology optimization problems, since the computational cost is independent of the number of design variables, which is equal to the number of the cells of the design domain. To test the introduced functions, a weighted function is created, which includes the target and constraint functions multiplied by a constant weight. Also, the sensitivity derivatives are computed by the continuous adjoint method and, then, the design variables are updated using steepest descent.

In addition, since topology optimization problems are usually subjected to constraints, the Method of Moving Asymptotes (MMA) is programmed and tested. The MMA is a deterministic optimization method, in which, the optimization function and the constraint functions are approximated by other, simple convex functions, so an easier sub-problem is

formulated and solved at each optimization cycle. This method is widely and successfully used to solve topology optimization problems in structural mechanics and one of the targets of this thesis is to investigate whether it could be an equally reliable method in topology optimization in fluid dynamics.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
1 Εισαγωγή	1
1.1 Βελτιστοποίηση Τοπολογίας	1
1.2 Μέθοδος των Κινουμένων Ασυμπτώτων	4
2 Βελτιστοποίηση Τοπολογίας	5
2.1 Εξισώσεις Ροής	5
2.1.1 Διαμόρφωση των Εξισώσεων και Εισαγωγή του Πορώδους . . .	5
2.1.2 Επίλυση των Εξισώσεων	8
2.2 Οριακές Συνθήκες	9
2.3 Συνάρτηση Στόχος/Συνάρτηση Περιορισμού	9
2.4 Η Χρησιμοποιούμενη Συνάρτηση Στόχος	10
2.5 Συναρτήσεις Περιορισμών	11
2.6 Χρήσιμες Σχέσεις για την Ανάπτυξη των Συζυγών Εξισώσεων	12
2.7 Διατύπωση των Συζυγών Εξισώσεων	13
2.7.1 Συζυγείς Οριακές Συνθήκες	19
2.7.2 Τελική Έκφραση Παραγώγου Ευαισθησίας	21
3 Εφαρμογές Βελτιστοποίησης Τοπολογίας	23
3.1 Αγωγός Μιας Εισόδου και Δύο Εξόδων	23
3.1.1 Έλεγχος Επίδρασης της Αρχικοποίησης της Συνάρτησης $G(\alpha)$ του Πορώδους	25

3.1.2	Έλεγχος - Δοκιμή των Συναρτήσεων-Φίλτρων που Εξαρτώνται από το Πορώδες	28
3.1.3	Εισαγωγή του Περιορισμού του Όγκου	30
3.2	Αγωγός Δύο Εισόδων και Τριών Εξόδων	31
3.3	Συμπεράσματα-Σχόλια	33
4	Μέθοδος των Κινουμένων Ασυμπτώτων	35
4.1	Διαμόρφωση του προς Βελτιστοποίηση Προβλήματος	35
4.2	Περιγραφή της Βασικής Μεθόδου MMA	37
4.3	Περιγραφή της Μεθόδου GCMMA	40
4.4	Μια Μέθοδος Επίλυσης του Υποπροβλήματος των MMA και GCMMA	46
4.4.1	Διαμόρφωση των Εξισώσεων	46
4.4.2	Χαλαρωμένα Κριτήρια Βέλτιστης Λύσης	48
4.4.3	Η Κατεύθυνση Newton των Χαλαρωμένων Συνθηκών Βέλτιστης Λύσης	49
4.4.4	Αλγόριθμος Επίλυσης του Δυαδικού Προβλήματος	51
4.5	MMA και Συζυγής Μέθοδος στη Βελτιστοποίηση Τοπολογίας	52
4.6	Ένα Απλό Παράδειγμα	53
4.6.1	Διαμόρφωση του Προσεγγιστικού Προβλήματος με τη Μέθοδο MMA	54
4.6.2	Διαμόρφωση του Προσεγγιστικού Προβλήματος με τη Μέθοδο GCMMA	60
5	Εφαρμογές της Μεθόδου MMA	69
5.1	Αγωγός μιας Εισόδου και Δύο Εξόδων	69
5.1.1	Έλεγχος - Δοκιμή των Συναρτήσεων-Φίλτρων που Εξαρτώνται από το Πορώδες	71
5.1.2	Επιβολή του Περιορισμού του Όγκου	73
5.2	Αγωγός Δύο Εισόδων και Τριών Εξόδων	74
5.3	Βελτιστοποίηση Τοπολογίας Αγωγού Σχήματος S	76

5.4 Βελτιστοποίηση Μορφής Ακροφυσίου	79
6 Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα	83
Βιβλιογραφία	85

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

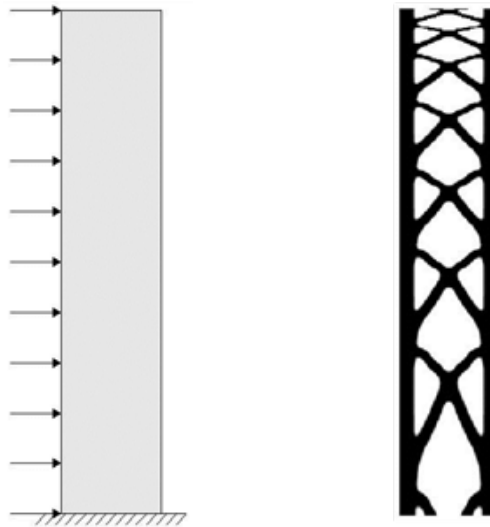
1.1 Βελτιστοποίηση Τοπολογίας

Η έννοια της βελτιστοποίησης τοπολογίας αντλεί τις ρίζες της από τη δομική μηχανική (structural mechanics). Η πρώτη αναφορά στη μέθοδο γίνεται από τους Bendsoe και Kikuchi το 1988[1]. Η κεντρική ιδέα της μεθόδου βασίζεται στη θέσπιση της πυκνότητας του υλικού σε κάθε σημείο του διακριτού χωρίου (κόμβο) ως μεταβλητή σχεδιασμού. Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης στόχου καθορίζοντας ποια σημεία του διακριτού χωρίου πρέπει να καλύπτονται από υλικό και ποια όχι. Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται συνεχείς μέθοδοι ισχύει ότι μεγάλες τιμές της πυκνότητας αντιστοιχούν σε υλικό ενώ μικρές τιμές σε κενό.

Έτσι δίνεται η δυνατότητα για μεγαλύτερη ελευθερία στο σχεδιασμό απ' ότι στη βελτιστοποίηση μορφής. Γι' αυτό και η βελτιστοποίηση τοπολογίας έχει εξαιρετικές δυνατότητες στη φάση του αρχικού σχεδιασμού όπου δεν υπάρχει καλή εικόνα για το σχήμα της κατασκευής που μπορεί να δώσει το επιθυμητό, βέλτιστο αποτέλεσμα.

Στις τρεις δεκαετίες που πέρασαν από την πρώτη αναφορά της μεθόδου, η βελτιστοποίηση τοπολογίας υπήρξε ένα από τα πιο ενεργά ερευνητικά πεδία στη δομική μηχανική και την πολυπαραμετρική βελτιστοποίηση. Αυτή η άνθιση οφείλεται κυρίως στην εξαπλώση της ιδέας της βελτιστοποίησης τοπολογίας από μερικά μικρά κατασκευαστικά προβλήματα δομικής μηχανικής, σε κατασκευαστικά προβλήματα που εμπεριέχουν προβλήματα μεταφοράς θερμότητας, ρευστοδυναμικής, ακουστικής, μηχανικής των υλικών και άλλων κλάδων της μηχανικής.

Σήμερα πια το εύρος των εφαρμογών της μεθόδου είναι μεγάλο. Έτσι η ιδέα υιοθετήθηκε και στη ρευστοδυναμική, η οποία είναι και η περιοχή στην οποία αναφέρεται και η Διπλωματική αυτή Εργασία. Οι πρώτες αναφορές στη βελτιστοποίηση τοπολογίας στη ρευστοδυναμική γίνονται στις εργασίες των Borvall και Peterson (2003),[3], Guest

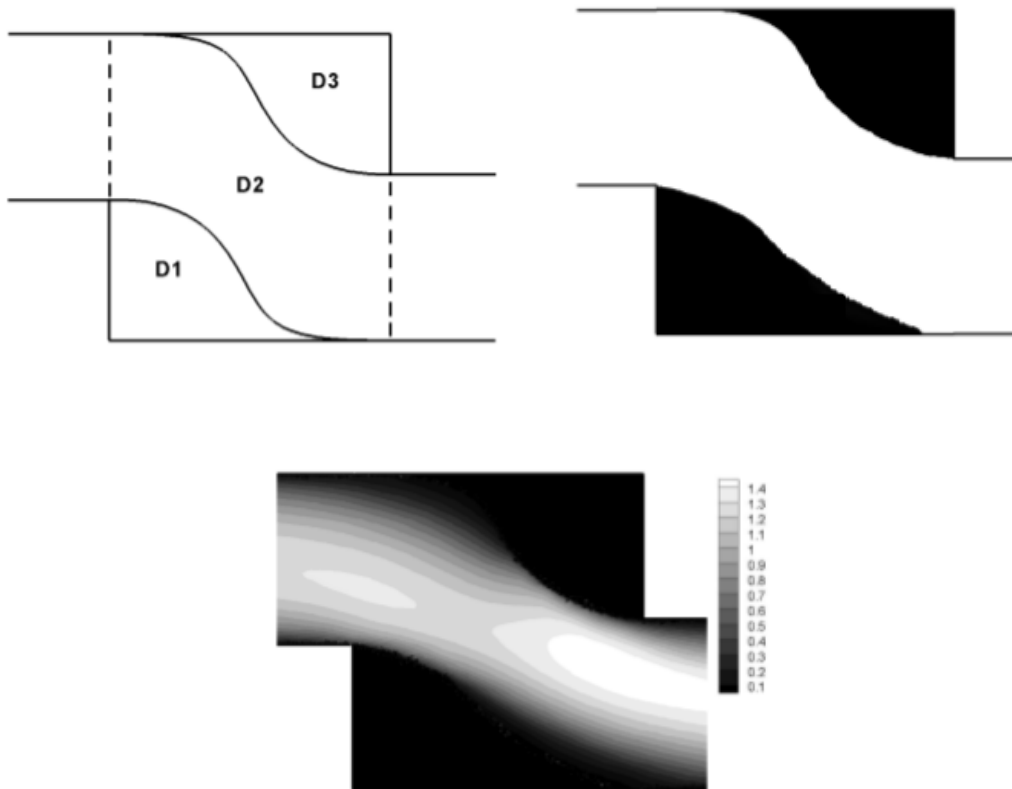


Σχήμα 1.1: Βελτιστοποίηση τοπολογίας στη δομική μηχανική με στόχο την εύρεση της βέλτιστης κατανομής της πυκνότητας του υλικού σε κάθε σημείο του χωρίου, ώστε η κατασκευή να αντέχει σε συγκεκριμένο φορτίο. Αριστερά, φαίνεται το χωρίο σχεδιασμού, ενώ δεξιά, φαίνεται το αποτέλεσμα που προέκυψε από τη βελτιστοποίηση τοπολογίας, όπου το μαύρο χρώμα αντιστοιχεί σε μεγάλες τιμές της πυκνότητας, δηλαδή υλικό, ενώ το άσπρο χρώμα σε μηδενικές τιμές της πυκνότητας, άρα σε κενό. (Από την εργασία [2].)

και Pnevost (2006),[4], οι οποίοι πρώτοι εισήγαγαν ένα πεδίο πορώδους (στη συνέχεια, το πορώδες θα συμβολίζεται με α) στις διέπουσες τη ροή εξισώσεις, για την επίλυση προβλημάτων στρωτών ροών και ροών τύπου Stokes. Η διπλωματική αυτή εργασία θα ασχοληθεί αποκλειστικά με στρωτές ροές. Μια σημαντική διαφορά της μεθόδου ανάμεσα στην εφαρμογή της στη δομική μηχανική και τη μηχανική των ασυμπίεστων ρευστών είναι ότι το πορώδες είναι ένα πεδίο που εισάγεται στις εξισώσεις, αντίθετα στη δομική μηχανική, η υπάρχουσα στις εξισώσεις πυκνότητα του υλικού μετατρέπεται σε μεταβλητή του προβλήματος. Σε περιοχές του υπολογιστικού χωρίου, στις οποίες οι τιμές του πορώδους είναι μεγάλες, δημιουργείται ισχυρή αντίσταση έναντι της ροής, που οδηγεί στο μηδενισμό (ή, πρακτικά, σε πολύ μικρές τιμές) των ταχυτήτων. Αυτές οι περιοχές αντιστοιχούν στο στερεοποιημένο μέρος του υπολογιστικού χωρίου. Αντίθετα, περιοχές όπου οι τιμές του πορώδους είναι πρακτικά μηδενικές, δεν δημιουργείται καμία αντίσταση στη ροή. Συνεπώς, οι περιοχές αυτές αντιστοιχούν σε περιοχές ρέοντος ρευστού.

Στην περίπτωση της ρευστοδυναμικής, τα πλεονεκτήματα της βελτιστοποίησης τοπολογίας έναντι της βελτιστοποίησης μορφής και πιο συγκεκριμένα, η απουσία σχημάτων παραμετροποίησης και η ικανότητα της μεθόδου να καταλήγει σε μη συμβατικά τελικά σχήματα, την κάνουν ιδανική για συγκεκριμένου τύπου προβλήματα. Τέτοια προβλήματα αποτελούν, ο αρχικός σχεδιασμός αγωγών ή συστημάτων αγωγών όπου μόνο οι διατομές εισόδου και εξόδου είναι γνωστές εκ των προτέρων. Ωστόσο, από τη στιγμή που δεν χρησιμοποιούνται σχήματα παραμετροποίησης στη βελτιστοποίηση τοπολογίας,

και συνεπώς τα τοιχώματα των αγωγών ορίζονται από τις διεπιφάνειες του στερεοποιημένου τμήματος και του τμήματος ρέοντος ρευστού του υπολογιστικού χωρίου, είναι απαραίτητη η περαιτέρω επεξεργασία του αποτελέσματος της βελτιστοποίησης τοπολογίας, ώστε να καθοριστούν με ακρίβεια τα στερεά τοιχώματα των αγωγών της τελικής γεωμετρίας.



Σχήμα 1.2: Βελτιστοποίηση τοπολογίας στη ρευστοδυναμική. Αριστερά, φαίνεται το προς επίλυση πρόβλημα. Επανασχεδιασμός Βέλτιστου αγωγού τύπου S , με στόχο την περαιτέρω μείωση των απωλειών πίεσης. Το χωρίο D_2 συμπίπτει με τον αρχικό αγωγό. Τα χωρία D_1 και D_3 περιβάλλουν το D_2 σχηματίζοντας το ολικό χωρίο σχεδιασμού. Δεξιά, φαίνεται το πεδίο του πορώδους που προέκυψε από τη βελτιστοποίηση τοπολογίας, όπου το μαύρο χρώμα αντιστοιχεί σε μεγάλες τιμές του πορώδους, δηλαδή υλικό, ενώ το άσπρο χρώμα σε μηδενικές τιμές του πορώδους. Το υποσύνολο του υπολογιστικού χωρίου που αντιστοιχεί σε μηδενικές τιμές του πορώδους καταλαμβάνεται από ρέον ρευστό. Κάτω, παρουσιάζονται οι αντίστοιχες ισογραμμές της ταχύτητας που προέκυψαν από τη βελτιστοποίηση τοπολογίας. (Από την εργασία [5].)

Όπως αναφέρεται και παραπάνω, στόχος της βελτιστοποίησης τοπολογίας είναι ο υπολογισμός του βέλτιστου πεδίου του πορώδους που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση στόχο. Ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος είναι ίσος με τον αριθμό των

κελιών του υπολογιστικού χωρίου (συνεπώς πολύ μεγάλος). Έτσι, η χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας αποτελεί την τέλεια επιλογή, αφού το υπολογιστικό κόστος της, είναι ανεξάρτητο του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού. Η βελτιστοποίηση τοπολογίας έχει αποτελέσει το βασικό θέμα για αρκετές δημοσιεύσεις της ερευνητικής ομάδας της Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του ΕΜΠ (ΜΠΥΡΒ/ΕΜΠ), [6, 7, 8, 9], οι οποίες αποτελούν και βασική πηγή αυτής της διπλωματικής εργασίας.

1.2 Μέθοδος των Κινουμένων Ασυμπτώτων

Χαρακτηριστικό των προβλημάτων βελτιστοποίησης τοπολογίας αποτελεί η επιβολή περιορισμών. Πιο συγκεκριμένα ο πιο χαρακτηριστικός περιορισμός ο οποίος επιβάλλεται είναι ο περιορισμός του όγκου του υπολογιστικού χωρίου που θα στερεοποιηθεί. Ο περιορισμός αυτός αφορά τόσο προβλήματα δομικής μηχανικής, όσο και ρευστοδυναμικής. Είναι χαρακτηριστικό ότι σε πολλές εργασίες όπως [10, 2] αναφέρεται στη γενική διατύπωση του προβλήματος της βελτιστοποίησης τοπολογίας. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, έχουν χρησιμοποιηθεί πολλές και διαφορετικές μέθοδοι ανανέωσης των μεταβλητών σχεδιασμού, σε προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας. Σε απλά προβλήματα δομικής μηχανικής είχε αρχικά παρατηρηθεί ότι, τόσο απλές αιτιοκρατικές μέθοδοι, όσο και στοχαστικές, λειτουργούσαν ικανοποιητικά. Προφανώς, κάποιες υπερείχαν έναντι άλλων. Για παράδειγμα, είναι γνωστό ότι μέθοδοι τύπου - απότομης καθόδου δεν ήταν αποδοτικές. Ωστόσο, όσο τα προβλήματα γίνονταν πιο περίπλοκα, και μετά την εισροή της βελτιστοποίησης τοπολογίας σε διαφορετικά πεδία της μηχανικής, χρησιμοποιήθηκαν πιο σύνθετες μέθοδοι ανανέωσης των μεταβλητών σχεδιασμού.

Όπως αναφέρεται στην εργασία [10], όταν πρόκειται για την αντιμετώπιση μεγάλης κλίμακας προβλήματα με περιορισμούς, οι διαθέσιμες μέθοδοι που έχουν αποδειχθεί αποτελεσματικές είναι περιορισμένες. Η μέθοδος των κινούμενων ασυμπτώτων MMA, [11] και η παραλλαγή της GCMMA, [12] είναι δημοφιλείς εδώ και αρκετά χρόνια και έχουν αποδειχθεί ιδιαίτερα αξιόπιστες. Πιο προηγμένες μαθηματικά μέθοδοι, όπως η SNOPT, [13], και IPOPT, [14], έχουν χρησιμοποιηθεί και ελεγχθεί, ωστόσο, μέχρι στιγμής, όλα τα αποτελέσματα δείχνουν ότι δεν είναι πιο αποτελεσματικές ούτε πιο αξιόπιστες από τη μέθοδο των κινούμενων ασυμπτώτων.

Η MMA αναφέρεται συχνά στις δημοσιεύσεις ότι αποτελεί μια από τις πιο αποδοτικές μεθόδους σε πολυπαραμετρικά προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας που αφορούν τη δομική μηχανική. Αυτή ήταν η αιτία που κρίθηκε σκόπιμο να αναπτυχθεί σε αυτή τη διπλωματική εργασία η συγκεκριμένη μέθοδος και να δοκιμαστεί σε προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας στον τομέα της ρευστοδυναμικής.

Κεφάλαιο 2

Βελτιστοποίηση Τοπολογίας

Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιαστεί ο τρόπος με τον οποίο διαμορφώνεται και επίλυεται το πρόβλημα της βελτιστοποίησης τοπολογίας σε προβλήματα 2D ασυμπίεστων ρευστών με την εισαγωγή της μεταβλητής του πορώδους. Αρχικά, παρουσιάζονται οι εξισώσεις της ροής Navier-Stokes για στρωτές ροές. Στη συνέχεια, γίνεται εισαγωγή της μεταβλητής του πορώδους στις εξισώσεις αυτές, ώστε να διαμορφωθεί το πρόβλημα της βελτιστοποίησης τοπολογίας. Έπειτα, θα γίνει εισαγωγή συναρτήσεων - φίλτρων (που εξαρτώνται αποκλειστικά και μόνο από την μεταβλητή του πορώδους) στον όρο της εξίσωσης της ορμής που εξαρτάται από το πορώδες, αντί αυτούσιας, της μεταβλητής του πορώδους. Έπειτα, ορίζονται οι οριακές συνθήκες που είναι απαραίτητες για τη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος ώστε να είναι δυνατή η επίλυση του. Παρουσιάζονται επίσης, όλες οι συναρτήσεις στόχοι και οι συναρτήσεις των περιορισμών που θα χρησιμοποιηθούν. Τέλος, αναπτύσσεται η συνεχής συζυγής μέθοδος για το πρόβλημα της βελτιστοποίησης τοπολογίας, με σκοπό την εύρεση των παραγώγων ευαισθησίας.

2.1 Εξισώσεις Ροής

2.1.1 Διαμόρφωση των Εξισώσεων και Εισαγωγή του Πορώδους

Η εισαγωγή του πορώδους στις εξισώσεις Navier-Stokes για το ασυμπίεστο ρευστό γίνεται μέσω της προσθήκης ενός όρου που εξαρτάται από το πεδίο του πορώδους α στην εξίσωση της ορμής 2.2 . Οι εξισώσεις 2.1 και 2.2 αποτελούν τις εξισώσεις

Navier-Stokes για ασυμπίεστες στρωτές ροές,

$$R_p = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.1)$$

$$R_{v_i} = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + G(\alpha) v_i = 0 \quad (2.2)$$

Μέχρι στιγμής, όπως φαίνεται στις εργασίες [15, 5, 16], στην ΜΠΥΡΒ/ΕΜΠ χρησιμοποιούνταν η συνάρτηση $G(a) = a$ με την $G(\alpha)$ να παίρνει τιμές $0 \leq G(\alpha) \leq G_{max}$, όπου G_{max} μια μέγιστη τιμή που επιλέγεται από το χρήστη της μεθόδου. Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο τρόπος που επιλέγεται η τιμή του G_{max} .

Στην εργασία αυτή, με βάση τις εργασίες [2, 10] που αναφέρονται στη βελτιστοποίηση τοπολογίας στη δομική μηχανική και αξιολογούν συναρτήσεις που έχουν προταθεί και χρησιμοποιηθεί, επιλέχθηκαν συναρτήσεις $G(\alpha)$ με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και πεδίο τιμών το $[0, G_{max}]$ αντίστοιχα. Το πορώδες α επιλέγεται να κινείται στο πεδίο $[0, 1]$ για λόγους καλύτερης εποπτείας των αποτελεσμάτων. Με τον τρόπο που έχει προγραμματιστεί η βελτιστοποίηση τοπολογίας σε αυτή τη διπλωματική εργασία, σε οποιαδήποτε φάση της βελτιστοποίησης, το πορώδες α δεν μπορεί να γίνει μικρότερο από το 0 και μεγαλύτερο από 1, χωρίς να χρειάζεται να οριστεί τέτοιος περιορισμός. Επίσης, σκοπός των συναρτήσεων που εισάγονται, είναι να επιβάλουν ποινή στις ενδιάμεσες τιμές του πορώδους ώστε να είναι ξεκάθαρο στο υπολογιστικό χωρίο ποια σημεία αντιστοιχούν σε στερεό και ποια σε ρευστό. Συνεπώς, το τελικό χωρίο είναι επιθυμητό να αποτελείται από σημεία στερεού/ρευστού ή αλλιώς άσπρου/μαύρου χωρίς γκριζες περιοχές.

Οι συναρτήσεις αυτές παρουσιάζονται στη μορφή

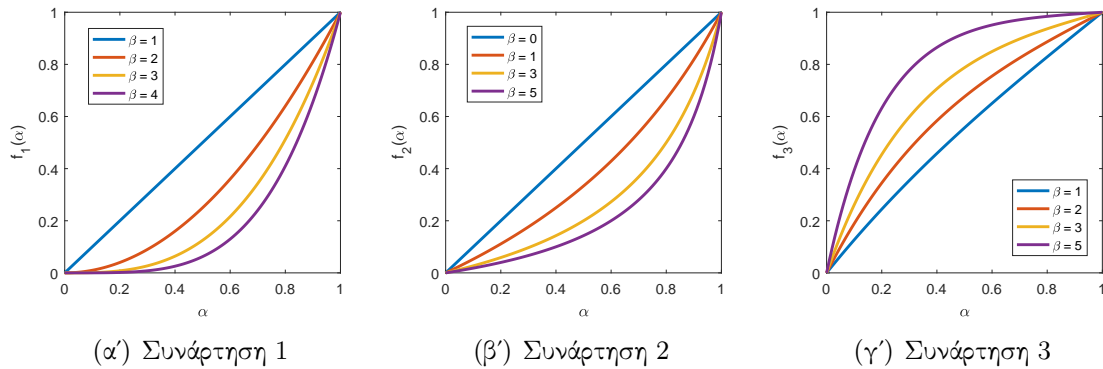
$$G(\alpha) = G_{max} f_n(\alpha) \quad (2.3)$$

όπου $f_n(\alpha)$ συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και πεδίο τιμών το $[0, 1]$ αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις $f_n(\alpha)$ που αναφέρονται στις εργασίες [2, 10] είναι οι εξής

$$f_1(\alpha) = \alpha^\beta \quad (2.4.1)$$

$$f_2(\alpha) = \frac{\alpha}{1 + \beta(1 - \alpha)} \quad (2.4.2)$$

$$f_3(\alpha) = 1 - \frac{\sinh(\beta(1 - \alpha))}{\sinh(\beta)} \quad (2.4.3)$$



Σχήμα 2.1: Γραφήματα των συναρτήσεων συναρτήσεως του όρου β .

Σύμφωνα με τις εργασίες [2, 10], η επιλογή μιας πολύ μικρής ή αντίστοιχα μεγάλης τιμής για το ρυθμιστικό συντελεστή β , οδηγεί είτε σε επιδείνωση του προβλήματος των γκριζων περιοχών, είτε σε σύγκλιση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης σε κάποιο τοπικό ελάχιστο. Γι' αυτό και επιλέγονται μεσαίες τιμές μεταξύ αυτών που παρουσιάζονται στα γραφήματα.

Αναλυτικότερα, η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη συνάρτηση, σε προβλήματα δομικής μηχανικής, είναι η πρώτη συνάρτηση f_1 . Αυτό συμβαίνει διότι αποτελεί μια απλή συνάρτηση (ύψωση σε δύναμη). Ακόμη, αποτέλεσε την πρώτη συνάρτηση φίλτρο που προτάθηκε για τη λύση του προβλήματος των γκριζων περιοχών στο υπολογιστικό χώρο και ήταν ιδιαίτερα αποτελεσματική. Ένα μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι αν σε κάποιο σημείο το πορώδες πάρει την τιμή 0 τότε δεν μπορεί στους επόμενους κύκλους της βελτιστοποίησης να επανεμφανιστεί υλικό σε αυτό το σημείο. Αυτό συμβαίνει διότι όπως αναλύεται στη συνέχεια, η παράγωγος ευαισθησίας οποιασδήποτε συνάρτησης στόχου/αντικειμενικής συνάρτησης εξαρτάται (αποτελεί όρο γινομένου) από την παράγωγο της αντίστοιχης συνάρτησης f_i ως προς το πορώδες. Στην περίπτωση της f_1 , η παράγωγος αυτή είναι $\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} = \beta \alpha^{\beta-1}$ γι' αυτό και η αντίστοιχη παράγωγος ευαισθησίας γίνεται μηδενική.

Η δεύτερη συνάρτηση f_2 που προτάθηκε στην εργασία [17], δημιουργήθηκε με βασικό στόχο να ξεπεράσει αυτό το μειονέκτημα. Ωστόσο, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία αλλά και εφαρμογές της διπλωματικής αυτής εργασίας, δεν παρατηρείται σημαντική βελτίωση στα αποτελέσματα σε σχέση με την f_1 , στο πλαίσιο της μείωσης των γκριζων περιοχών αλλά ούτε και στο τελικό αποτέλεσμα της βελτιστοποίησης.

Ο τρόπος με τον οποίο συμπεριφέρονται οι δύο συναρτήσεις είναι παρόμοιος όπως φαίνεται και από τα γραφήματά τους.

Τέλος, η τρίτη συνάρτηση που προτάθηκε στην εργασία [18], συμπεριφέρεται διαφορετικά από τις άλλες δύο αφού έχει αντίθετη κυρτότητα. Πρόκειται για μια διαφορετική προσέγγιση που δοκιμάστηκε σε κάποιες εφαρμογές που είναι προτιμότερο να αρχικοποιείται το πορώδες σε τιμές κοντά στη μηδενική, ωστόσο παρατηρήθηκε ότι ακόμη

και σε αυτές τις περιπτώσεις οι δύο προαναφερθείσες συναρτήσεις παράγουν καλύτερα αποτελέσματα.

Στις αρχικές εφαρμογές ορίστηκε η μεταβλητή G_{max} ως

$$G_{max} = \frac{\nu}{D_a l^2} \quad (2.5)$$

όπου ν η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού, l ένα χαρακτηριστικό μήκος της ροής (π.χ σε 2Δ προβλήματα το μήκος της διατομής εισόδου) και D_a ο αριθμός του Darcy. Ο αριθμός Darcy ορίζεται στην περίπτωση που έχουμε ροή ρευστού εντός πορώδους υλικού και εκφράζει τη σχέση μεταξύ των συνεκτικών δυνάμεων και των δυνάμεων που ασκούνται μεταξύ ρευστού και πορώδους υλικού. Όταν ο αριθμός αυτός παίρνει μία πολύ μικρή τιμή, όπως για παράδειγμα 10^{-5} , ουσιαστικά το υλικό χάνει την ιδιότητα του πορώδους και γίνεται μη διαπερατό, γι' αυτό και επιλέγεται η τιμή αυτή στην προκειμένη περίπτωση.

Η μεταβλητή G_{max} εκφράζει τη μέγιστη τιμή του όρου που πολλαπλασιάζεται με την ταχύτητα και δίνει τον όρο πηγής που προστίθεται στην εξίσωση της ορμής.

Ο παραπάνω ορισμός της μέγιστης τιμής του συντελεστή G_{max} που προτείνεται στην εργασία [19], δίνει υπερβολικά μεγάλες τιμές σε κάποιες περιπτώσεις. Παρατηρείται ότι ο αλγόριθμος συμπεριφέρεται καλύτερα σε τιμές του G_{max} σημαντικά διαφορετικές από αυτή που δίνει η σχέση 2.5, χωρίς να δημιουργείται πρόβλημα με τη διαπερατότητα του υλικού. Και αυτό γιατί παρατηρείται ότι η ταχύτητα μηδενίζεται σε σημεία του χωρίου σχεδιασμού όπου, η συνάρτηση του πορώδους παίρνει τιμές σημαντικά μικρότερες από αυτή που δίνει η ανωτέρω σχέση.

2.1.2 Επίλυση των Εξισώσεων

Οι μέσες εξισώσεις της ροής λύνονται αριθμητικά στο διακριτοποιημένο υπολογιστικό χωρίο μέσω του αλγορίθμου SIMPLE στο περιβάλλον OpenFOAM όπως περιγράφεται αναλυτικά στη διδακτορική διατριβή [15].

Στους υπολογιστικούς κόμβους όπου η συνάρτηση του πορώδους $G(\alpha) = 0$ άρα και $\alpha = 0$, ο όρος πηγής στην εξίσωση της ορμής μηδενίζεται, άρα οι κόμβοι αυτοί ανήκουν στο πεδίο ροής, αφού οι τοπικές μεταβλητές σε αυτά τα σημεία ικανοποιούν τις κλασικές εξισώσεις της ροής χωρίς τον όρο πηγής. Αντίθετα, στους υπολογιστικούς κόμβους όπου η συνάρτηση $G(\alpha)$ παίρνει μεγάλες τιμές, οι ταχύτητες μηδενίζονται ώστε να ικανοποιούνται οι ροϊκές εξισώσεις. Επομένως, οι κόμβοι αυτοί ανήκουν στο στερεοποιημένο τμήμα του χωρίου σχεδιασμού.

2.2 Οριακές Συνθήκες

Πριν την επιβολή των οριακών συνθηκών πρέπει να γίνει ξεκάθαρο ότι οι οριακές συνθήκες σε προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας αφορούν τα όρια του χωρίου σχεδιασμού. Προφανώς δεν ορίζονται οριακές συνθήκες σε μια γεωμετρία που δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή.

Οι οριακές συνθήκες που επιβάλλονται στην περίπτωση εσωτερικών ροών και κλείνουν αριθμητικά το πρόβλημα είναι, στις εισόδους, Dirichlet συνθήκη για κάθε συνιστώσα του διανύσματος της ταχύτητας και μηδενική Neumann για τη στατική πίεση.

Στις εξόδους επιβάλλεται μηδενική Neumann σε όλες τις συνιστώσες της ταχύτητας και μηδενική Dirichlet στην πίεση.

Στα στερεά τοιχώματα επιβάλλεται μηδενική συνθήκη Dirichlet συνθήκη για κάθε συνιστώσα του διανύσματος της ταχύτητας, και μηδενική Neumann για την πίεση. Ως στερεά τοιχώματα θα αναφέρονται τα σταθερά όρια του χωρίου σχεδιασμού, εντός του οποίου επιχειρείται να βρεθεί η βέλτιστη γεωμετρία μέσω της βελτιστοποίησης τοπολογίας.

2.3 Συνάρτηση Στόχος/Συνάρτηση Περιορισμού

Αρχικά θα παρουσιαστεί μια γενική περίπτωση κατά την οποία, η συνάρτηση στόχος ή η συνάρτηση κάποιου περιορισμού αντίστοιχα, αποτελείται από ολοκληρώματα ροϊκών ποσοτήτων στα όρια S και στο εσωτερικό Ω του χωρίου σχεδιασμού, ή/και από ολοκληρώματα που εξαρτώνται από το πορώδες α στα όρια S και στο εσωτερικό Ω του χωρίου σχεδιασμού. Μια τέτοια συνάρτηση γράφεται γενικά στη μορφή

$$F = \int_S F_S dS + \int_{\Omega} F_{\Omega} d\Omega \quad (2.6)$$

όπου με F_S και F_{Ω} συμβολίζονται οι προς ολοκλήρωση ποσότητες στο S και στο Ω αντίστοιχα. Η γεωμετρία του χωρίου σχεδιασμού δεν αλλάζει καθώς προχωρά η βελτιστοποίηση.

Αν το όριο αποτελείται από διάφορα τμήματα, έστω είσοδο S_I , έξοδο S_O και στερεό τοίχωμα S_W , τότε για κάθε τμήμα του ορίου η ποσότητα F_S θα διαχωρίζεται σε F_{S_I} , F_{S_O} , F_{S_W} . Είναι προφανές ότι $F_{S_I} \neq F_{S_O} \neq F_{S_W}$.

Η παράγωγος ευαισθησίας της ανωτέρω συνάρτησης ως προς το πορώδες δίνεται από

την έκφραση,

$$\begin{aligned}\frac{\delta F}{\delta \alpha} &= \frac{\delta}{\delta \alpha} \left(\int_S F_S dS + \int_\Omega F_\Omega d\Omega \right) \\ &= \frac{\delta}{\delta \alpha} \int_S F_S dS + \frac{\delta}{\delta \alpha} \int_\Omega F_\Omega d\Omega\end{aligned}$$

ή

$$\frac{\delta F}{\delta \alpha} = \int_S \frac{\delta F_S}{\delta \alpha} dS + \int_\Omega \frac{\delta F_\Omega}{\delta \alpha} d\Omega$$

Οι ποσότητες F_S και F_Ω μπορεί να αποτελούν συναρτήσεις των ροϊκών μεταβλητών αλλά και των μεταβλητών σχεδιασμού. Επομένως, οι ολικές παράγωγοι αυτών ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού δίνονται από τις σχέσεις

$$\frac{\delta F_S}{\delta \alpha} = \frac{\partial F_S}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_S}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_S}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\delta F_\Omega}{\delta \alpha} = \frac{\partial F_\Omega}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha}$$

Έτσι, αντικαθιστώντας στην παράγωγο ευαισθησίας της συνάρτησης προκύπτει η τελική του έκφραση

$$\frac{\delta F}{\delta \alpha} = \int_S \frac{\partial F_S}{\partial \alpha} dS + \int_S \frac{\partial F_S}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \alpha} dS + \int_S \frac{\partial F_S}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} dS + \int_\Omega \frac{\partial F_\Omega}{\partial \alpha} d\Omega + \int_\Omega \frac{\partial F_\Omega}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \alpha} d\Omega + \int_\Omega \frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} d\Omega \quad (2.7)$$

2.4 Η Χρησιμοποιούμενη Συνάρτηση Στόχος

Η συνάρτηση στόχος που χρησιμοποιείται στις εφαρμογές που παρουσιάζονται στη συνέχεια, εκφράζει την ελαχιστοποίηση των ογκικά ολοκληρωμένων απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ της εξόδου (S_O) και της εισόδου (S_I) του χωρίου.

$$F_1 = - \int_{S_I} \left(p + \frac{1}{2} v^2 \right) v_i n_i dS - \int_{S_O} \left(p + \frac{1}{2} v^2 \right) v_i n_i dS \quad (2.8)$$

Προφανώς, ως στόχος τίθεται η ελαχιστοποίηση της F ώστε να ελαχιστοποιηθούν οι απώλειες ολικής πίεσης. Η άμεση μεταβολή της συνάρτησης στόχου ως προς το

πορώδες είναι μηδενική μιας και η τελευταία δεν συναρτάται του πορώδους.

Οι μεταβολές της συνάρτησης στόχου F_1 ως προς τις τοπικές/κομβικές ροϊκές μεταβλητές p και v_i στην είσοδο και την έξοδο εκφράζονται ως

$$\frac{\partial F_1}{\partial p} = -v_i n_i \quad (2.9.1)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial v_i} = -\frac{1}{2}v^2 n_i - v_i v_{\lambda} n_{\lambda} - p n_i \quad (2.9.2)$$

όπου n_i διάνυσμα με μέτρο ΔS_I .

2.5 Συναρτήσεις Περιορισμών

Στην πλειονότητα των προβλημάτων βελτιστοποίησης τοπολογίας επιβάλλονται περιορισμοί. Στην περίπτωση που έχουμε περισσότερες από μία εξόδους του ρευστού, συχνά καθορίζεται το ποσοστό της παροχής εισόδου (γνωστή ποσότητα) που θα εξέρχεται από κάθε έξοδο. Έστω ότι το χωρίο περιλαμβάνει L εξόδους, τότε ο περιορισμός ισότητας δίνεται από τη σχέση

$$g_1 = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L (\Delta m_l)^2 = 0 \quad (2.10)$$

όπου

$$(\Delta m_l) = \int_{S_{O_l}} v_i n_i dS + r_l \int_{S_I} v_i n_i dS$$

η διαφορά της παροχής που διέρχεται από την εκάστοτε έξοδο σε σχέση με την επιθυμητή και r_l το ποσοστό της παροχής εισόδου που επιδιώκεται να εξέλθει από την έξοδο l στην τελευταία σχέση.

Οι μεταβολές της συνάρτησης του περιορισμού στις εξόδους δίνονται από

$$\frac{\partial g_1}{\partial p} = 0, \quad \text{και} \quad \frac{\partial g_1}{\partial v_i} = (\Delta m_l) n_i \quad (2.11)$$

Είναι προφανές ότι οι άμεσες μεταβολές ως προς το πορώδες είναι μηδενικές.

Ένας επιπλέον περιορισμός που επιβάλλεται συχνά σε προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας, είναι ο περιορισμός του ποσοστού του χωρίου σχεδιασμού επιτρέπεται να

καταλάβει στερεό. Αυτό διατυπώνεται ως ένας περιορισμός ανισο-ισότητας,

$$g_2 = -\frac{\int_{\Omega} \alpha d\Omega}{\Omega_{total}} + \Omega_{target} \leq 0 \quad (2.12)$$

όπου Ω_{total} ο συνολικός όγκος του χωρίου σχεδιασμού και Ω_{target} το ελάχιστο ποσοστό του συνολικού όγκου του χωρίου που είναι επιθυμητό να στερεοποιηθεί. Η μεταβολή του περιορισμού ως προς το πορώδες σε κάθε βαρύκεντρο υπολογιστικής κυψέλης δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial g_2}{\partial \alpha_P} = -\Omega_P$$

όπου Ω_P ο όγκος της κυψέλης.

Ο περιορισμός του όγκου που καταλαμβάνει το πορώδες, αποτελεί έναν από τους πιο συχνά χρησιμοποιούμενους περιορισμούς σε προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας.

2.6 Χρήσιμες Σχέσεις για την Ανάπτυξη των Συζυγών Εξισώσεων

Αρχικά θα παρουσιαστούν κάποιες χρήσιμες για την ανάπτυξη των εξισώσεων σχέσεις που αφορούν το πορώδες. Οι σχέσεις αυτές αναλύονται και αποδεικνύονται στις διδακτορικές διατριβές [20, 21]. Γενικότερα, η ολική μεταβολή μιας οποιασδήποτε ροϊκής ποσότητας, ως προς μια οποιαδήποτε μεταβλητή σχεδιασμού, εκφράζεται ως το άθροισμα της άμεσης (∂) και της μεταβολής λόγω μετακίνησης του κόμβου του πλέγματος. Συγκεκριμένα, η ολική μεταβολή ως προς το πορώδες δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\delta \Phi}{\delta \alpha} = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta \alpha} \quad (2.13)$$

Στα προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας, το υπολογιστικό πλέγμα παραμένει αμετάβλητο και, συνεπώς, ισχύει ότι

$$\frac{\delta x_k}{\delta \alpha} = 0$$

Άρα, τελικά η εξίσωση (2.13) γράφεται

$$\frac{\delta \Phi}{\delta \alpha} = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \quad (2.14)$$

2.7 Διατύπωση των Συζυγών Εξισώσεων

Αφού ορίστηκε η συνάρτηση στόχος και οι εξισώσεις της ροής, είναι δυνατή η μαθηματική διατύπωση του συνεχούς συζυγούς προβλήματος για τη βελτιστοποίηση τοπολογίας, με τις τιμές του πορώδους σε κάθε βαρύκεντρο στοιχείου του πλέγματος που καλύπτει το χωρίο σχεδιασμού, να αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} q R_p d\Omega + \int_{\Omega} u_i R_{v_i} d\Omega + (w_k g_k) \quad (2.15)$$

όπου q , u_i οι συζυγείς μεταβλητές της πίεσης και των συνιστωσών της ταχύτητας. Οι K περιορισμοί εισάγονται στο πρόβλημα της βελτιστοποίησης τοπολογίας μέσω του όρου $w_k g_k$ όπου w_k συντελεστές βαρύτητας. Ο λόγος για τον οποίο ο όρος $w_k g_k$ είναι εντός παρενθέσεως είναι ότι, ανάλογα με τη μέθοδο βελτιστοποίησης που χρησιμοποιείται για την επίλυση του προβλήματος, είτε υπολογίζεται η παράγωγος μιας σταθμισμένης συνάρτησης που περιλαμβάνει την συνάρτηση στόχο και τους περιορισμούς (στην περίπτωση αυτή ο όρος $w_k g_k$ είναι ενεργός), είτε υπολογίζεται η παράγωγος συνάρτησης στόχου αλλά και κάθε περιορισμού ξεχωριστά. Δηλαδή, εκτός από την F_{aug} δημιουργούνται οι αντίστοιχες $g_{k_{aug}}$ και λύνονται τα αντίστοιχα συζυγή προβλήματα, από τα οποία προκύπτουν οι παράγωγοι των συναρτήσεων στόχου και περιορισμών αντίστοιχα.

Στην πρώτη περίπτωση όπου ο όρος $w_k g_k$ είναι ενεργός, δημιουργείται μια σταθμισμένη συνάρτηση που περιλαμβάνει τη συνάρτηση στόχο αλλά και τους περιορισμούς. Ο ορισμός των τιμών των βαρών w_k επηρεάζει σημαντικά την επίλυση του προβλήματος, γι' αυτό και χρειάζεται διερεύνηση για την επιλογή των κατάλληλων τιμών γι' αυτές τις ποσότητες. Οι τιμές των βαρών, επιλέγονται να είναι τέτοιες ώστε να εξασφαλίζεται ότι καθ' όλη τη διάρκεια της βελτιστοποίησης, οι τιμές των όρων που περιλαμβάνουν τους περιορισμούς θα είναι τουλάχιστον μια τάξη μεγέθους μικρότερες από την τιμή της συνάρτησης στόχου. Έτσι ο αλγόριθμος της βελτιστοποίησης πάντοτε θα έχει ως κύριο στόχο την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης στόχου. Ωστόσο, αν οι τιμές των βαρών είναι πολύ μικρές, είναι πιθανό να μην ικανοποιούνται οι περιορισμοί. Γι' αυτό, και η επιλογή των βαρών είναι ιδιαίτερα σημαντική για τη διαδικασία της βελτιστοποίησης.

Σε κάθε φάση της βελτιστοποίησης οι ροϊκές μεταβλητές, ικανοποιούν τις εξισώσεις της ροής, συνεπώς μηδενίζουν το διάνυσμα των υπολοίπων των εξισώσεων ροής \mathbf{R} . Επομένως, ο υπολογισμός της παραγωγού ευαισθησίας $\frac{dF}{d\alpha}$ είναι ταυτόσημος με τον υπολογισμό της παραγωγού ευαισθησίας της επαυξημένης συνάρτησης $\frac{dF_{aug}}{d\alpha}$.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι, από τη στιγμή που η τιμή της παραγωγού ευαισθησίας της επαυξημένης συνάρτησης στόχου $\frac{dF_{aug}}{d\alpha}$, είναι ταυτόσημη με αυτήν της $\frac{dF}{d\alpha}$, είναι δυνατό μέσω της συζυγούς μεθόδου, θέτοντας όπου F τη συνάρτηση κόστους ή, χωριστά, τη συνάρτηση g_k κάθε περιορισμού αντίστοιχα, να υπολογισθεί κάθε παράγωγος ευαισθησίας που είναι αναγκαία για την επίλυση του προβλήματος. Ο υπολογισμός της παραγωγού κάθε συνάρτησης ξεχωριστά αυξάνει το υπολογιστικό

κόστος της μεθόδου.

Ο λόγος για τον οποίο αναφέρονται οι δύο αυτές περιπτώσεις είναι ότι στη διπλωματική αυτή εργασία θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της απότομης καθόδου, για την οποία δημιουργείται μια σταθμισμένη συνάρτηση, και η μέθοδος των κινουμένων ασυμπτώτων, για την οποία υπολογίζονται ξεχωριστά οι παράγωγοι ευαισθησίας, μέσω της συζυγούς μεθόδου για τη συνάρτηση στόχο και κάθε περιορισμό ξεχωριστά.

Στο σημείο αυτό, αναπτύσσεται η παράγωγος της επαυξημένης συνάρτησης.

$$\begin{aligned}\frac{\delta F_{aug}}{\delta \alpha} &= \frac{\delta}{\delta \alpha} \left(F + \int_{\Omega} q R^p d\Omega + \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega + w_k g_k \right) = \\ &= \frac{\delta F}{\delta \alpha} + \frac{\delta}{\delta \alpha} \int_{\Omega} q R^p d\Omega + \frac{\delta}{\delta \alpha} \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega + w_k \frac{\delta g_k}{\delta \alpha} = \\ &= \frac{\delta F}{\delta \alpha} + w_k \frac{\delta g_k}{\delta \alpha} + \int_{\Omega} \frac{\delta}{\delta \alpha} q R^p d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\delta}{\delta \alpha} u_i R_i^v d\Omega\end{aligned}$$

όπου καθ' όλη τη διαδικασία της βελτιστοποίησης, τα χωρικά ολοκληρώματα στα οποία εμφανίζονται τα υπόλοιπα των εξισώσεων της ροής ισούνται με το μηδέν, και η έκφραση της παραγωγού ευαισθησίας γίνεται

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta \alpha} = \frac{\delta F}{\delta \alpha} + w_k \frac{\delta g_k}{\delta \alpha} + \int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta \alpha} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\delta R_i^v}{\delta \alpha} u_i d\Omega$$

και, λόγω της εξίσωσης 2.14, προκύπτει η έκφραση

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta \alpha} = \frac{\delta F}{\delta \alpha} + w_k \frac{\delta g_k}{\delta \alpha} + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial \alpha} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial R_i^v}{\partial \alpha} u_i d\Omega \quad (2.16)$$

Στη σχέση 2.16 εμφανίζονται μόνο οι άμεσες μεταβολές των υπολοίπων των εξισώσεων κατάστασης (εξισώσεις ροής) και όχι οι ολικές. Αυτό επιτρέπει την εναλλαγή της σειράς παραγωγίσιμης ανάμεσα σε χωρικές παραγωγούς και μερικές παραγωγούς ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού.

Από την έκφραση των παραγωγών ευαισθησίας που προκύπτει, πιο απαιτητικοί από πλευράς υπολογιστικού κόστους είναι οι όροι που περιέχουν τις άμεσες μεταβολές των ροικών μεγεθών σε σχέση με τις μεταβλητές σχεδιασμού. Με την εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου επιτυγχάνεται η απαλοιφή των όρων αυτών που οδηγεί και σε σημαντική μείωση του υπολογιστικού κόστους.

Στη συνέχεια, θα υπολογιστούν αναλυτικά οι ποσότητες

$$\frac{\partial R^p}{\partial \alpha} \quad \text{και} \quad \frac{\partial R_i^v}{\partial \alpha}$$

Αρχικά, ο όρος που αφορά την εξίσωση της συνέχειας διαμορφώνεται ως εξής

$$\frac{\partial R^p}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial \alpha} \right) \quad (2.17)$$

και ο όρος που αφορά την εξίσωση της ορμής αντίστοιχα

$$\frac{\partial R_i^v}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + G(\alpha)v_i \right\} \quad (2.18)$$

Στη συνέχεια, αναλύεται κάθε όρος ξεχωριστά.

Όρος Μεταφοράς:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial v_j}{\partial \alpha} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{\partial v_j}{\partial \alpha} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \right) \end{aligned}$$

Όρος Πίεσης:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} \right)$$

Όρος Πηγής:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (G(\alpha)v_i) = \frac{\partial G(\alpha)}{\partial \alpha} v_i + G(\alpha) \frac{\partial v_i}{\partial \alpha}$$

Συνεκτικός Όρος:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \nu}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial \alpha} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Άρα, τελικά, η έκφραση της μερικής παραγώγου του υπολοίπου της εξίσωσης της ορμής

δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i^v}{\partial \alpha} &= \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} \right) - \\ &- \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial \alpha} \right) \right] \right\} + \frac{\partial G(\alpha)}{\partial \alpha} v_i + G(\alpha) \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Στη συνέχεια, πραγματοποιείται ανάλυση των υπόλοιπων όρων της σχέσης 2.16. Και σε αυτήν την περίπτωση, θα αναπτυχθεί κάθε όρος ξεχωριστά. Έτσι:

Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial \alpha} d\Omega$

$$\int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial \alpha} d\Omega = \int_{\Omega} q \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial \alpha} \right) d\Omega = \int_S q \frac{\partial v_j}{\partial \alpha} \eta_j dS - \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha} d\Omega \quad (2.20)$$

Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial \alpha} d\Omega$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial \alpha} d\Omega &= \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial \alpha} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} u_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \right) d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} \right) d\Omega - \\ &- \int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial \alpha} \right) \right] \right\} d\Omega + \int_{\Omega} u_i \left(\frac{\partial G(\alpha)}{\partial \alpha} v_i + G(\alpha) \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (2.21)$$

Όπως και προηγουμένως, αναπτύσσεται κάθε όρος ξεχωριστά.

Όρος Μεταφοράς:

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha} d\Omega = \int_S u_i v_i \eta_j \frac{\partial v_j}{\partial \alpha} dS - \int_{\Omega} v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i \frac{\partial v_j}{\partial \alpha} \right) d\Omega$$

και

$$\int_{\Omega} u_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \right) d\Omega = \int_S u_i v_j \eta_j \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i v_j) \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} d\Omega$$

τα χωρικά ολοκληρώματα των δύο παραπάνω σχέσεων αναλύονται περαιτέρω, ως

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i \frac{\partial v_j}{\partial \alpha} \right) d\Omega &= \int_{\Omega} v_i \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha} + u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \right) \right] d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} v_i \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha} + u_i \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] d\Omega = \int_{\Omega} v_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha} d\Omega \end{aligned}$$

και

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i v_j) \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_j + u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} d\Omega = \int_{\Omega} v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} d\Omega$$

Όρος Πίεσης:

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} \right) d\Omega = \int_S u_i \eta_i \frac{\partial p}{\partial \alpha} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial \alpha} d\Omega$$

Συνεχτικοί όροι:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial \alpha} \right) \right] \right\} d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} u_i \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \right) d\Omega + \int_{\Omega} u_i \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial \alpha} \right) d\Omega = \\ & = \int_S u_i \eta_j \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \right) dS - \int_{\Omega} \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \right) d\Omega + \\ & + \int_S u_i \eta_j \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial \alpha} \right) dS - \int_{\Omega} \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial \alpha} \right) d\Omega = \\ & = \int_S u_i \eta_j \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \right) dS - \int_S \nu \eta_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} dS + \int_{\Omega} \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} d\Omega + \\ & + \int_S u_i \eta_j \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial \alpha} \right) dS - \int_S \nu \eta_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha} dS + \int_{\Omega} \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha} d\Omega \end{aligned}$$

Όρος Πηγής:

$$\int_{\Omega} u_i \left(\frac{\partial G(\alpha)}{\partial \alpha} v_i + G(\alpha) \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \right) d\Omega = \int_{\Omega} u_i v_i \frac{\partial G(\alpha)}{\partial \alpha} d\Omega + \int_{\Omega} u_i G(\alpha) \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} d\Omega$$

Τελικά, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta \alpha} &= \frac{\delta F}{\delta \alpha} + w_k \frac{\delta g_k}{\delta \alpha} + \int_S q \frac{\partial v_j}{\partial \alpha} \eta_j dS - \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha} d\Omega + \\
&+ \int_S u_i v_i \eta_j \frac{\partial v_j}{\partial \alpha} dS + \int_S u_i v_j \eta_j \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} dS - \int_{\Omega} v_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha} d\Omega - \\
&- \int_{\Omega} v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} d\Omega + \int_S u_i \eta_i \frac{\partial p}{\partial \alpha} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial \alpha} d\Omega - \\
&- \int_S u_i \eta_j \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \right) dS + \int_S \nu \eta_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} dS - \int_{\Omega} \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} d\Omega - \\
&- \int_S u_i \eta_j \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial \alpha} \right) dS + \int_S \nu \eta_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha} dS - \\
&- \int_{\Omega} \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha} d\Omega + \int_{\Omega} u_i v_i \frac{\partial G(\alpha)}{\partial \alpha} d\Omega + \int_{\Omega} u_i G(\alpha) \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} d\Omega
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Στη συνέχεια, ομαδοποιούνται κατάλληλα οι όροι

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta \alpha} &= \frac{\delta F}{\delta \alpha} + w_k \frac{\delta g_k}{\delta \alpha} + - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial \alpha} d\Omega + \\
&+ \int_{\Omega} \left\{ - \frac{\partial q}{\partial x_j} - v_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \nu \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right] + G(\alpha) u_i \right\} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} d\Omega + \\
&+ \int_S u_i \eta_i \frac{\partial p}{\partial \alpha} dS + \int_S \left[u_i v_j \eta_j + u_j v_j \eta_i + q \eta_i + \nu \eta_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} dS - \\
&- \int_S \left[u_i \eta_j \nu \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] dS + \int_{\Omega} u_i v_i \frac{\partial G(\alpha)}{\partial \alpha} d\Omega
\end{aligned}$$

Ύστερα, αντικαθιστώντας την έκφραση της γενικής παραγώγου ευαισθησίας της συ-

νάρτησης στόχου και των περιορισμών έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta \alpha} = & \int_{\Omega} \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial \alpha} d\Omega + \int_{\Omega} w_k \frac{\partial g_{k\Omega}}{\partial \alpha} d\Omega + \int_S \frac{\partial F_S}{\partial \alpha} dS + \int_S w_k \frac{\partial g_{kS}}{\partial \alpha} dS - \\
& - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F_{\Omega}}{\partial p} + w_k \frac{\partial g_{k\Omega}}{\partial p} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \frac{\partial p}{\partial \alpha} d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial v_i} + w_k \frac{\partial g_{k\Omega}}{\partial v_i} - \frac{\partial q}{\partial x_j} - v_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \nu \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right] + G(\alpha) u_i \right\} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} d\Omega + \\
& + \int_S \left(\frac{\partial F_S}{\partial p} + w_k \frac{\partial g_{kS}}{\partial p} + u_i \eta_i \right) \frac{\partial p}{\partial \alpha} dS + \\
& + \int_S \left[\frac{\partial F_S}{\partial v_i} + w_k \frac{\partial g_{kS}}{\partial v_i} + u_i v_j \eta_j + u_j v_j \eta_i + q \eta_i + \nu \eta_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} dS - \\
& - \int_S \left[u_i \eta_j \nu \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] dS + \int_{\Omega} u_i v_i \frac{\partial G(\alpha)}{\partial \alpha} d\Omega
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Στην εξίσωση 2.23 που εκφράζει την παράγωγο ευαισθησίας πραγματοποιείται απαλοιφή των ολοκληρωμάτων που περιέχουν τις άμεσες μεταβολές των πρωτευουσών (ροϊκών) μεταβλητών ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Έτσι, προκύπτουν οι συζυγείς εξισώσεις και οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες. Πιο συγκεκριμένα, από την απαλοιφή των χωρικών ολοκληρωμάτων προκύπτουν οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις, ενώ από την απαλοιφή των επιφανειακών ολοκληρωμάτων προκύπτουν οι συζυγείς οριακές συνθήκες.

Άρα, οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις διατυπώνονται ως εξής

$$R^q = \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial p} + w_k \frac{\partial g_{k\Omega}}{\partial p} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{2.24}$$

και

$$R_i^u = \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial v_i} + w_k \frac{\partial g_{k\Omega}}{\partial v_i} - \frac{\partial q}{\partial x_j} - v_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \nu \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right] + G(\alpha) u_i \tag{2.25}$$

2.7.1 Συζυγείς Οριακές Συνθήκες

Συζυγείς Οριακές Συνθήκες Εισόδου S_I Στις εισόδους ισχύει η σχέση $\frac{\partial v_i}{\partial \alpha} = 0$ αφού η ταχύτητα έχει καθορισμένη τιμή στην είσοδο, και έτσι μηδενίζονται οι ποσότητες που εξαρτώνται από αυτή. Για να επιτευχθεί ο μηδενισμός των ποσοτήτων που εξαρτώνται από τη μεταβολή της πίεσης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού $\frac{\partial p}{\partial \alpha}$, επιβάλλεται ο μηδενισμός των ποσοτήτων:

$$\frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} + w_k \frac{\partial g_{kS_I}}{\partial p} + u_i \eta_i = 0$$

και

$$u_i \eta_j \nu \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 0$$

εκ των οποίων προκύπτουν, οι οριακές τιμές για την κάθετη και τις εφαπτομενικές συνιστώσες της ταχύτητας και δίνονται από τις σχέσεις:

$$u_i \eta_i = -\frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} - w_k \frac{\partial g_{kS_I}}{\partial p} \quad \text{και} \quad u_i t_i = 0 \quad (2.26)$$

όπου t_i οι συνιστώσες του μοναδιαίου εφαπτομενικού (στο τοίχωμα) διανύσματος. Για τη συζυγή πίεση εφαρμόζεται μηδενική συνθήκη Neumann στην είσοδο.

Συζυγείς Οριακές Συνθήκες Εξόδου S_O Αντίστοιχα, στην έξοδο, επειδή η οριακή συνθήκη της πίεσης είναι μηδενική Dirichlet, ισχύει $\frac{\partial p}{\partial \alpha} = 0$. Ακόμη λόγω της μηδενικής Neumann συνθήκης για τις συνιστώσες της ταχύτητας, οι όροι $\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = 0$.

$$\frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_i} + w_k \frac{\partial g_{kS_O}}{\partial v_i} + u_i v_j \eta_j + u_j v_j \eta_i + q \eta_i + \nu \eta_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (2.27)$$

Από τις εξισώσεις 2.27 προκύπτει η συζυγής πίεση q και οι συνιστώσες της ταχύτητας εκτός μίας. Για την τελευταία επιβάλλεται μηδενική συνθήκη Neumann.

Συζυγείς Οριακές Συνθήκες στα Στερεά Όρια S_W Δεδομένου ότι στα στερεά τοιχώματα ισχύει $v_i = 0$, οι οριακές συνθήκες που προκύπτουν για τα στερεά τοιχώματα είναι

$$u_i \eta_i = -\frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} - w_k \frac{\partial g_{kS_W}}{\partial p} \quad \text{και} \quad u_i t_i = 0 \quad (2.28)$$

2.7.2 Τελική Έκφραση Παραγώγου Ευαισθησίας

Η τελική έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας μετά την απαλοιφή των όρων μέσω της διαδικασίας που προηγήθηκε, δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta \alpha} = \int_{\Omega} \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial \alpha} d\Omega + \int_S \frac{\partial F_S}{\partial \alpha} dS + \int_{\Omega} w_k \frac{\partial g_{k\Omega}}{\partial \alpha} d\Omega + \int_S w_k \frac{\partial g_{kS}}{\partial \alpha} dS + \int_{\Omega} u_i v_i \frac{\partial G(\alpha)}{\partial \alpha} d\Omega \quad (2.29)$$

Άρα, η γενική έκφραση της παραγώγου σε διακριτοποιημένη μορφή στο εσωτερικό του πεδίου δίνεται από τη σχέση:

$$\left(\frac{\delta F_{aug}}{\delta \alpha} \right)_P = \left(\frac{\partial F_{\Omega}}{\partial \alpha} \right)_P \Omega_P + w_k \left(\frac{\partial g_{k\Omega}}{\partial \alpha} \right)_P \Omega_P + (u_i v_i)_P \left(\frac{\partial G(\alpha)}{\partial \alpha} \right)_P \quad (2.30)$$

όπου, Ω_P ο όγκος της πλεγματικής κυψέλης P του χωρίου. Γενικότερα, ο δείκτης P σε κάθε ποσότητα της παραπάνω έκφρασης, υποδεικνύει την τιμή της, στη συγκεκριμένη πλεγματική κυψέλη του χωρίου σχεδιασμού. Η παραπάνω έκφραση αποτελεί τη γενική έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας. Στην πλειονότητα των περιπτώσεων, η συνάρτηση στόχος αλλά και οι συναρτήσεις των περιορισμών συναρτώνται μόνο των ροϊκών μεγεθών όπως είναι λογικό και έτσι οι άμεσες μεταβολές τους ως προς το πορώδες είναι μηδενικές. Ωστόσο, ο περιορισμός του όγκου του χωρίου σχεδιασμού, που θα καλυφθεί από στερεό, συναρτάται από το πορώδες και για λόγους πληρότητας οι άμεσες μεταβολές συνάρτησης κόστους και περιορισμών ως προς το πορώδες, δεν θεωρούνται μηδενικές στη γενική μορφή.

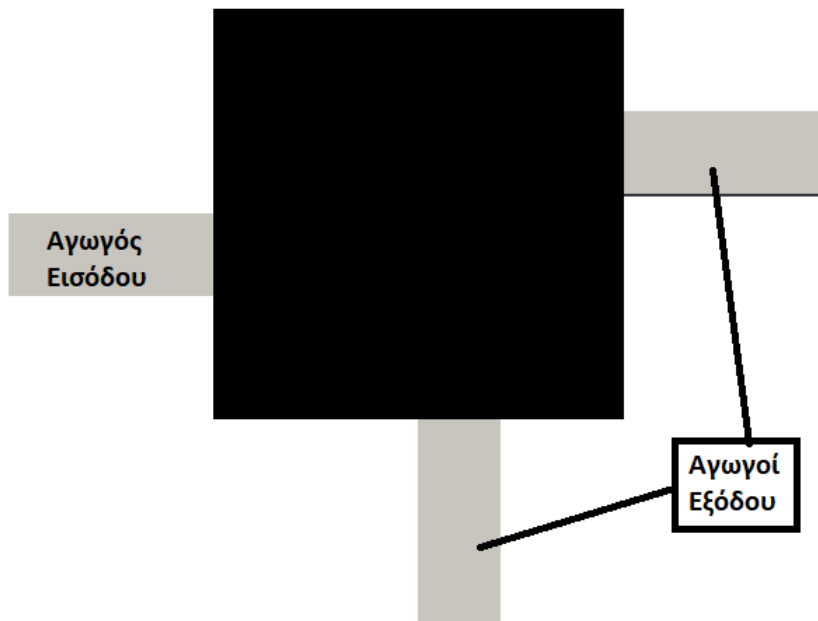
Κεφάλαιο 3

Εφαρμογές Βελτιστοποίησης Τοπολογίας

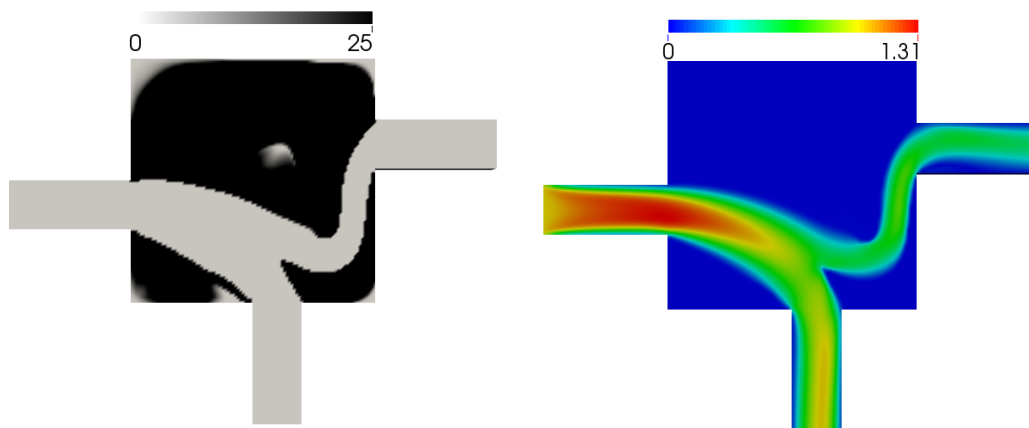
Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιαστούν εφαρμογές βελτιστοποίησης τοπολογίας που αφορούν στρωτές ροές. Στις εφαρμογές αυτές χρησιμοποιούνται περιορισμοί ισότητας για την επίτευξη επιθυμητής παροχής σε κάθε έξοδο, αλλά και περιορισμοί ανισοισότητας που αφορούν τον όγκο που θα καταλαμβάνει το πορώδες στο συνολικό χωρίο. Αρχικά θα γίνει έλεγχος της επίδρασης της αρχικοποίησης της συνάρτησης του πορώδους στην επίλυση του προβλήματος και, στη συνέχεια, δοκιμή των τριών συναρτήσεων που αναφέρονται παραπάνω.

3.1 Αγωγός Μιας Εισόδου και Δύο Εξόδων

Ο σχεδιασμός ενός αγωγού μιας εισόδου από τη μια πλευρά ενός τετραγωνικού χωρίου σχεδιασμού και δυο εξόδων από δύο άλλες πλευρές του χωρίου αυτού, αποτελεί ένα απλό αλλά χαρακτηριστικό πρόβλημα βελτιστοποίησης τοπολογίας. Ο αριθμός Reynolds είναι $Re = 200$.



Σχήμα 3.1: Χωρίο Σχεδιασμού, εντός του οποίου θα εφαρμοστεί η βελτιστοποίηση τοπολογίας. Στους αγωγούς εισόδου και εξόδου, που φαίνονται με γκρι χρώμα στο ανωτέρω σχήμα, δε θα εφαρμοστεί η βελτιστοποίηση τοπολογίας καθώς απαιτείται να είναι διαρκώς ανοιχτοί, συνεπώς η τιμή του πορώδους στα τμήματα αυτά θα είναι μηδενική.



(α') Πεδίο τιμών της συνάρτησης του πορώδους $G(\alpha)$

(β') Πεδίο της ταχύτητας U

Σχήμα 3.2: Βελτιστοποίηση τοπολογίας με στόχο την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης χωρίς την εισαγωγή κάποιου περιορισμού. Στο σχήμα 3.2(α') παρουσιάζεται το πεδίο της συνάρτησης του πορώδους και στο σχήμα 3.2(β') φαίνεται το αντίστοιχο πεδίο της ταχύτητας στο τέλος της βελτιστοποίησης. Η τιμή της συνάρτησης των απωλειών πίεσης είναι $0.014031m^5/s^3$.

3.1.1 Έλεγχος Επίδρασης της Αρχικοποίησης της Συνάρτησης $G(\alpha)$ του Πορώδους

Αρχικά διερευνάται η επίδραση του ορισμού της μέγιστης τιμής G_{max} που μπορεί να πάρει η συνάρτηση $G(\alpha)$. Η τιμή αυτή πρέπει να παίρνει μια σχετικά μεγάλη τιμή ώστε να εξασφαλίζεται ότι οι ποσότητες της ροής μηδενίζονται στα σημεία που το πορώδες έχει μια σχετικά μεγάλη τιμή. Ωστόσο, παρατηρείται ότι αν δοθεί μια πολύ μεγάλη τιμή στον συντελεστή G_{max} και αρχικοποιηθεί η συνάρτηση σε κοντινή σε αυτό τιμή, η πορεία σύγκλισης του αλγορίθμου βελτιστοποίησης γίνεται πολύ αργή.

Παρ' όλο που, ενδεχομένως, ακούγεται πιο ορθολογικό, η αρχικοποίηση του πεδίου του πορώδους να γίνεται στην τιμή 0, ώστε κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης να στερεοποιούνται τα σημεία του χωρίου σχεδιασμού, στα οποία η παράγωγος ευαισθησίας είναι αρνητική, υπολογιστικά παρατηρείται ότι η αρχικοποίηση του πορώδους σε τιμή μεγαλύτερη του μηδενός, δηλαδή αρχικοποίηση σε στερεό, καταλήγει συνήθως σε καλύτερα αποτελέσματα.

Η αρχικοποίηση του πεδίου στην τιμή $\alpha = 0$, που συνεπάγεται ότι και ο όρος πηγής παίρνει αρχικά την τιμή 0, καταλήγει σε πεδία του πορώδους με πολλά κενά (τμήματα του χωρίου σχεδιασμού που μοιάζει να ρέει ρευστό, αλλά στην πραγματικότητα είναι εγκλωβισμένο και ανούσιο) όπως φαίνεται στο σχήμα 3.3.

Επίσης, παρατηρείται ότι όταν το πορώδες αρχικοποιείται στην τιμή $\alpha = 1$, άρα και η συνάρτηση στη μέγιστη τιμή της G_{max} , το πεδίο της συνάρτησης του πορώδους δεν παρουσιάζει κενά μεν, αλλά η σύγκλιση της συνάρτησης στόχου είναι αργή. Ακόμα, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 3.4 με την αρχικοποίηση του πορώδους στην τιμή $\alpha = 1$ η ροή εξέρχεται από τον ένα αγωγό εξόδου μόνο. Βέβαια, αυτό οφείλεται εν μέρει και στη μέθοδο της απότομης καθόδου, η οποία εγκλωβίζεται εύκολα σε τοπικά ελάχιστα. Πιθανότατα η έξοδος του συνόλου της παροχής είναι ένα τέτοιο σημείο, γι' αυτό και η μέθοδος οδηγήθηκε εκεί.

Τέλος, σε συνδυασμό με τα παραπάνω αλλά και μετά από δοκιμές, παρατηρείται ότι ο κώδικας συμπεριφέρεται καλύτερα και προκύπτουν καλύτερα αποτελέσματα όταν η συνάρτηση του πορώδους αρχικοποιείται σε μια μικρή (σχετικά με τη μέγιστη) τιμή, διάφορη του μηδενός, τουλάχιστον στις εφαρμογές που δοκιμάστηκαν.

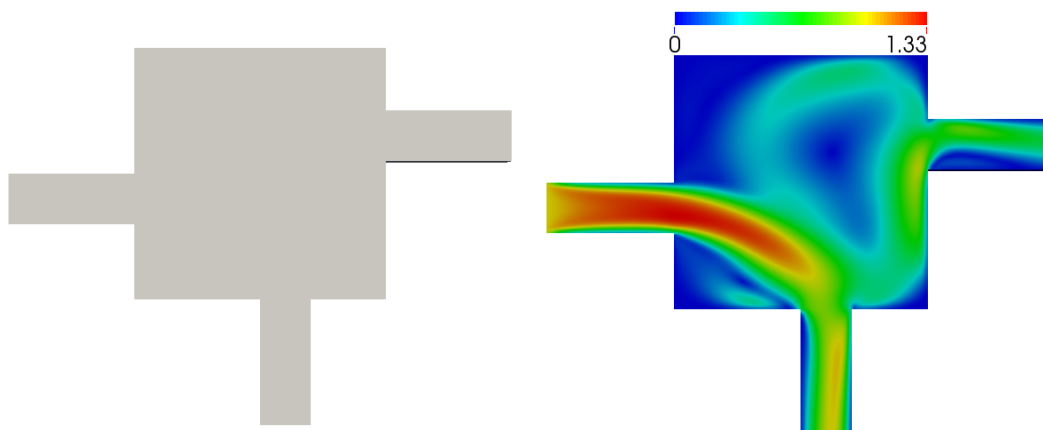
Η συνάρτηση G που χρησιμοποιήθηκε στις εφαρμογές αυτές είναι

$$G = 200 \frac{\alpha}{1 + 3(1 - \alpha)}$$

Πρόκειται για τη συνάρτηση f_2 με $G_{max} = 200$ και $\beta = 3$.

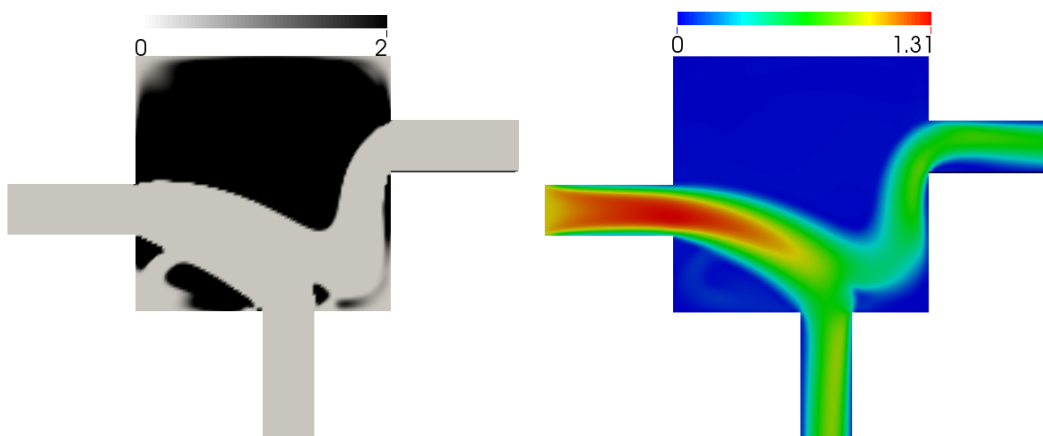
Σε όλα τα σχήματα που ακολουθούν, το μαύρο χρώμα στο πεδίο της συνάρτησης του πορώδους $G(\alpha)$ αντιστοιχεί σε τιμές μεγαλύτερες του 2 ενώ το ανοιχτό γκρι σε μηδενικές τιμές. Η επιλογή της παρουσίας των αποτελεσμάτων με το πεδίο του

πορώδους να παρουσιάζεται με μαύρο χρώμα για τιμές μεγαλύτερες του 2 έγινε με βάση δοκιμές, από τις οποίες εξάγεται το συμπέρασμα ότι από τη συγκεκριμένη τιμή και πάνω, το πεδίο της ροής υπακούει σε αυτό της συνάρτησης του πορώδους, δηλαδή σε υπολογιστικές κυψέλες όπου οι τιμές της συνάρτησης του πορώδους είναι μεγαλύτερες του 2 παρατηρείται ότι το μέτρο της ταχύτητας είναι αμελητέο.



(α') Πεδίο της συνάρτησης του πορώδους G

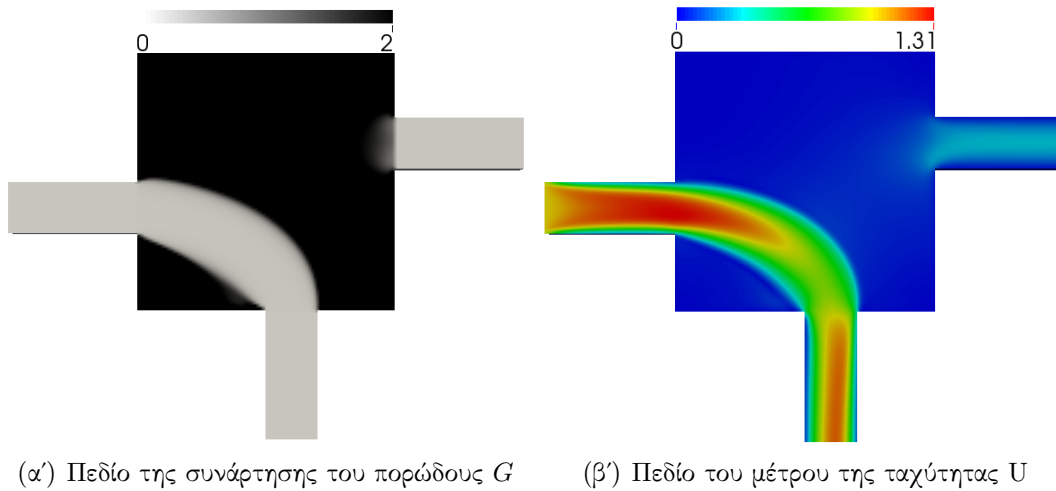
(β') Πεδίο του μέτρου της ταχύτητας U



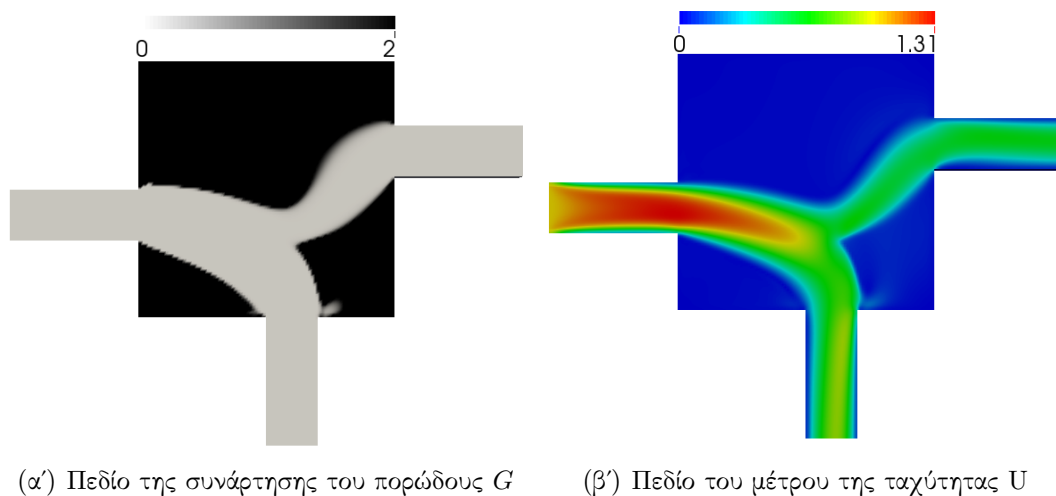
(γ') Πεδίο της συνάρτησης του πορώδους G

(δ') Πεδίο του μέτρου της ταχύτητας U

Σχήμα 3.3: Βελτιστοποίηση τοπολογίας με στόχο την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης. Αποτελέσματα αρχικοποίησης του πορώδους στην τιμή $\alpha = 0$ και συνεπώς της συνάρτησης $G(\alpha) = 0$. Στο σχήμα 3.3(α') παρουσιάζεται το πεδίο της συνάρτησης του πορώδους G στον πρώτο κύκλο της βελτιστοποίησης όπου η συνάρτηση παίρνει την τιμή 0 σε όλο το πεδίο. Στο σχήμα 3.3(β') φαίνεται το αντίστοιχο πεδίο του μέτρου της ταχύτητας στον πρώτο κύκλο της βελτιστοποίησης. Η τιμή της συνάρτησης των απωλειών πίεσης είναι $0.016585m^5/s^3$. Στα σχήματα 3.3(γ') και 3.3(δ') παρουσιάζονται αντίστοιχα τα πεδία της συνάρτησης του πορώδους και του μέτρου της ταχύτητας στο τέλος της βελτιστοποίησης, όπου η τιμή των απωλειών ολικής πίεσης είναι $0.013371m^5/s^3$.



Σχήμα 3.4: Βελτιστοποίηση τοπολογίας με στόχο την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης. Έλεγχος αρχικοποίησης του πορώδους στη μέγιστη τιμή του, $\alpha = 1$, και της συνάρτησης του πορώδους αντίστοιχα, $G = 200$. Στο σχήμα 3.4(α') παρουσιάζεται το πεδίο της συνάρτησης του πορώδους και στο σχήμα 3.4(β') φαίνεται το αντίστοιχο πεδίο της ταχύτητας στο τέλος της βελτιστοποίησης. Οι απώλειες ολικής πίεσης μετά το πέρας της βελτιστοποίησης έχουν την τιμή $0.013670m^5/s^3$.



Σχήμα 3.5: Βελτιστοποίηση τοπολογίας με στόχο την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης. Έλεγχος αρχικοποίησης του πορώδους στη μέση τιμή του πεδίου ορισμού του, $\alpha = 0.5$, και της συνάρτησης $G(\alpha)$ αντίστοιχα στην τιμή $G = 40$. Στο σχήμα 3.5(α') παρουσιάζεται το πεδίο της συνάρτησης του πορώδους και στο σχήμα 3.5(β') φαίνεται το αντίστοιχο πεδίο της ταχύτητας στο τέλος της βελτιστοποίησης. Η τελική τιμή των των απωλειών ολικής πίεσης είναι $0.012958m^5/s^3$.

Συνοψίζοντας, από τις εφαρμογές που παρουσιάζονται παραπάνω αλλά και από εφαρμογές που πραγματοποιήθηκαν στο πλαίσιο αυτής της διπλωματικής εργασίας, γίνεται

κατανοητό ότι η αρχικοποίηση σε μια μέση τιμή του πεδίου ορισμού του πορώδους α υπερέχει έναντι της αρχικοποίησης του στα άκρα του πεδίου ορισμού του. Ακόμη, εξάγεται το συμπέρασμα ότι σε κάθε εφαρμογή θα πρέπει να διερευνάται η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η συνάρτηση του πορώδους G_{max} , ώστε να μη δημιουργεί προβλήματα σύγκλισης (μεγάλη τιμή) αλλά να εξασφαλίζει ότι οι τιμές της ταχύτητας μηδενίζονται σε σημεία του χωρίου σχεδιασμού που η συνάρτηση έχει τιμές μεγαλύτερες του μηδενός (πρακτικά μιας μικρής ποσότητας).

3.1.2 Έλεγχος - Δοκιμή των Συναρτήσεων-Φίλτρων που Εξαρτώνται από το Πορώδες

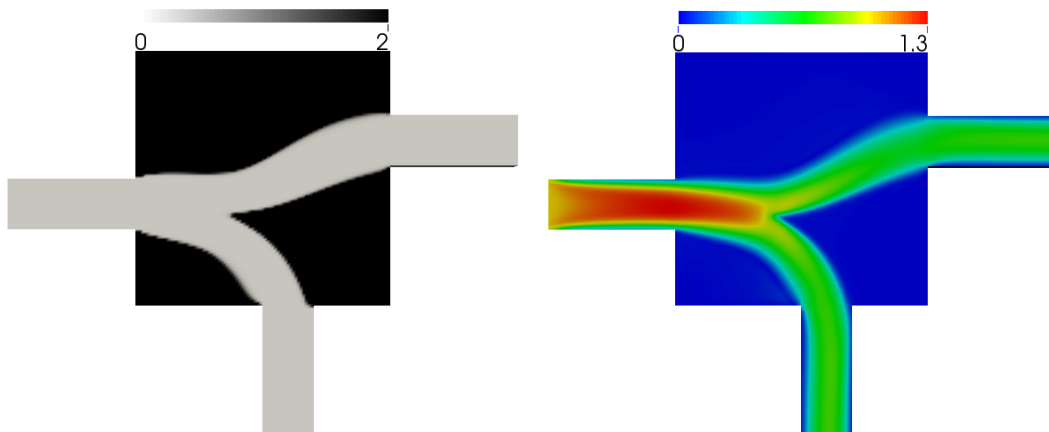
Στη συνέχεια, διερευνάται το πως επιδρούν στο τελικό πεδίο του πορώδους οι τρεις συναρτήσεις που προτείνονται παραπάνω. Οι ακριβείς συναρτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν και ο αντίστοιχος ρυθμιστικός συντελεστής β είναι:

$$f_1(\alpha) = \alpha^3 \quad (\beta = 3) \quad (3.1.1)$$

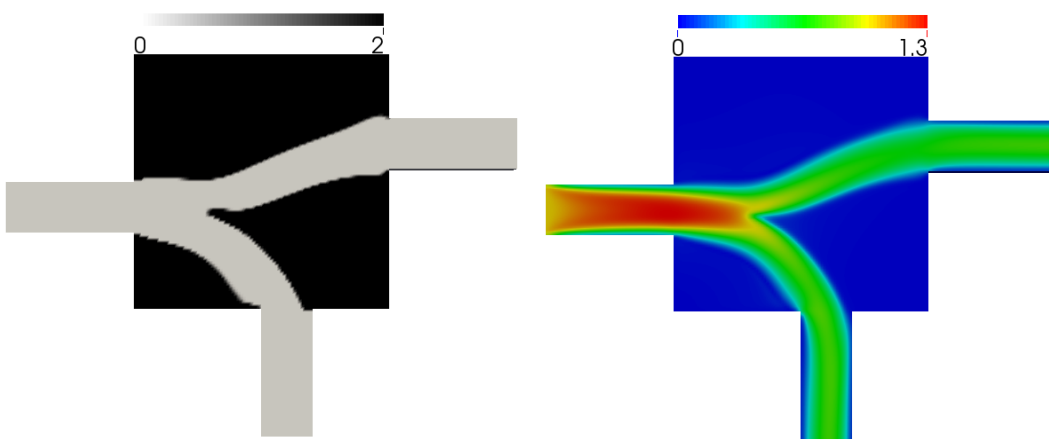
$$f_2(\alpha) = \frac{\alpha}{1 + 3(1 - \alpha)} \quad (\beta = 3) \quad (3.1.2)$$

$$f_3(\alpha) = 1 - \frac{\sinh(2.1(1 - \alpha))}{\sinh(2.1)} \quad (\beta = 2.1) \quad (3.1.3)$$

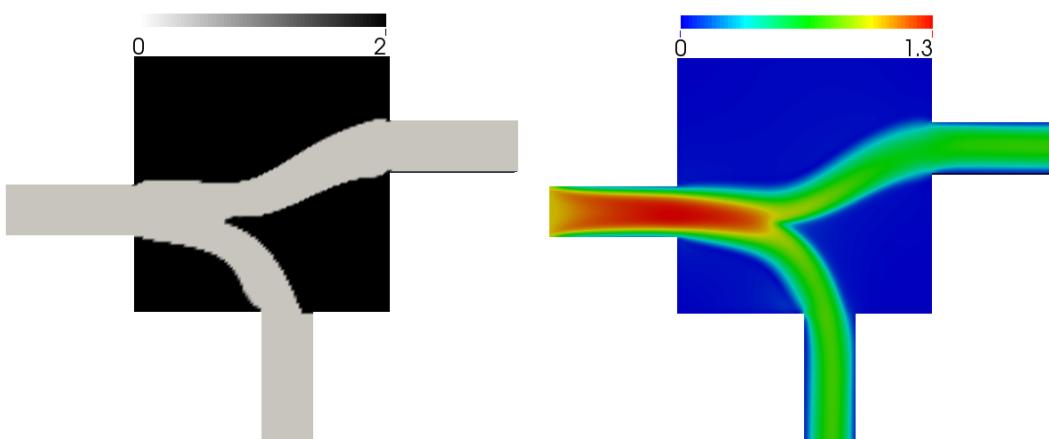
Σε αυτές τις εφαρμογές, στόχος είναι η ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης επιβάλλοντας περιορισμό στο ποσοστό της παροχής που θα εξέρχεται από κάθε έξοδο. Σε όλες τις εφαρμογές που ακολουθούν, έχει τεθεί ως περιορισμός να εξέρχεται το 50 % της παροχής εισόδου από κάθε έξοδο. Η επιβολή του περιορισμού έγινε δημιουργώντας μια σταθμισμένη συνάρτηση όπως περιγράφεται στην ενότητα 2.7 με $w_1 = 0.5$ (το βάρος που αντιστοιχεί στον περιορισμό της παροχής).



(α') Πεδίο τιμών της συνάρτησης του πορώδους $G(\alpha)$. Συνάρτηση f_1 (β') Πεδίο του μέτρου της ταχύτητας U . Συνάρτηση f_1



(γ') Πεδίο τιμών της συνάρτησης του πορώδους $G(\alpha)$. Συνάρτηση f_2 (δ') Πεδίο του μέτρου της ταχύτητας U . Συνάρτηση f_2



(ε') Πεδίο τιμών της συνάρτησης του πορώδους $G(\alpha)$. Συνάρτηση f_3 (ς') Πεδίο του μέτρου της ταχύτητας U . Συνάρτηση f_3

Σχήμα 3.6: Βελτιστοποίηση τοπολογίας με στόχο την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης υπό τον περιορισμό, το 50 % της παροχής εισόδου να εξέρχεται από κάθε έξοδο. Αριστερά, παρουσιάζονται τα πεδία τιμών της συνάρτησης του πορώδους $G(\alpha)$ για κάθε μια από τις τρεις συναρτήσεις-φίλτρα που προτείνονται. Δεξιά φαίνονται τα αντίστοιχα πεδία του μέτρου της ταχύτητας στο τέλος της βελτιστοποίησης.

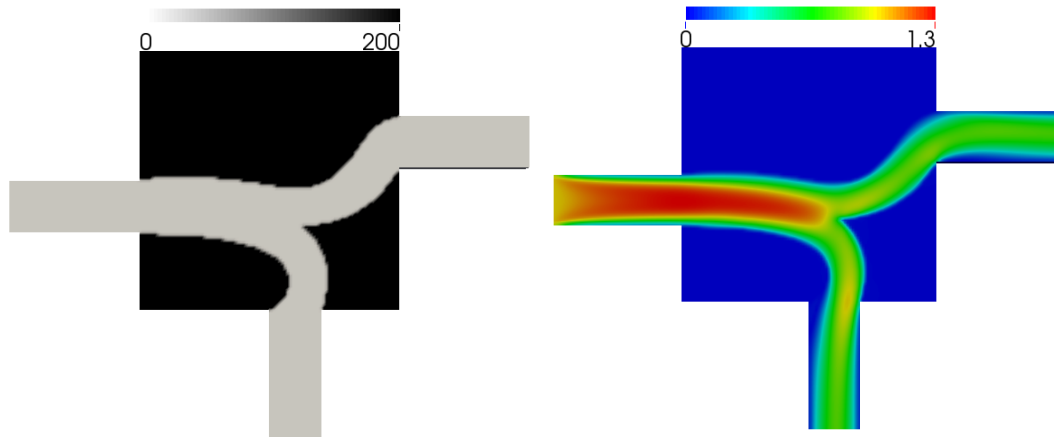
Συνάρτηση	G_{max}	$\alpha_{initial}$	$G_{initial}(\alpha)$	Απώλειες Ολικής Πίεσης	Έξοδος 1	Έξοδος 2
f_1	200	0.5	25	0.01315	0.49439	0.50561
f_2	200	0.364	25	0.01443	0.49656	0.50354
f_3	200	0.065	25	0.01377	0.50169	0.49831

Πίνακας 3.1: Κάθε γραμμή του πίνακα αντιστοιχεί σε καθεμιά από τις τρεις συναρτήσεις. Η πρώτη στην τιμή αρχικοποίησης της συνάρτησης G σε κάθε περίπτωση, η δεύτερη στήλη αντιστοιχεί στην τιμή αρχικοποίησης του α , η τρίτη στήλη στην τιμή των απωλειών ολικής πίεσης που επιτυγχάνεται, η τέταρτη στήλη στο ποσοστό της παροχής εισόδου που εξέρχεται από την Έξοδο 1, στο κάτω μέρος του χωρίου σχεδιασμού, η πέμπτη στήλη στο ποσοστό της παροχής εισόδου που εξέρχεται από την Έξοδο 2, στο δεξί μέρος του χωρίου σχεδιασμού.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα δεν προκύπτει κάποιο ασφαλές συμπέρασμα για το ποια από τις τρεις αυτές συναρτήσεις οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα. Ωστόσο, από το σύνολο των εφαρμογών που πραγματοποιήθηκαν κατά την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας, παρατηρήθηκε ότι η χρήση των συναρτήσεων f_1 και f_2 οδηγεί σε παρόμοια αποτελέσματα, ενώ η f_3 παρατηρήθηκε ότι καταλήγει σε χειρότερα αποτελέσματα. Ακόμη το ζήτημα των γκρίζων περιοχών δεν αντιμετωπίζεται επαρκώς από τη χρήση των συναρτήσεων αυτών. Στα σχήματα όπου παρουσιάζεται το πεδίο τιμών της συνάρτησης του πορώδους $G(\alpha)$ δεν παρατηρούνται γκρίζες περιοχές, όμως όπως φαίνεται και στη λεζάντα η μέγιστη τιμή της $G(\alpha)$ στα σχήματα αυτά είναι 2 και όχι 200 που έχει οριστεί το G_{max} . Συνεπώς, υπάρχουν γκρίζες περιοχές. Η βελτίωση σε σχέση με τη μη χρήση των συναρτήσεων έχει να κάνει με το γεγονός ότι δεν υπάρχουν τμήματα του χωρίου σχεδιασμού που το πορώδες έχει μηδενική τιμή χωρίς να υπάρχει ρέον ρευστό στο τμήμα αυτό.

3.1.3 Εισαγωγή του Περιορισμού του Όγκου

Στην εφαρμογή που ακολουθεί, τίθεται ως στόχος η ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης επιβάλλοντας περιορισμό ισότητας στο ποσοστό της παροχής που εξέρχεται από κάθε έξοδο και ανισοτικό περιορισμό στον όγκο του χωρίου σχεδιασμού που θα καταλαμβάνεται από στερεό. Συγκεκριμένα, επιβάλλεται το 50 % της παροχής εισόδου να εξέρχεται από καθεμιά από τις δύο εξόδους και τουλάχιστον το 50 % του χωρίου σχεδιασμού να καταλαμβάνεται από στερεό. Η συνάρτηση που χρησιμοποιείται είναι η f_1 . Η επιβολή των δύο περιορισμών υλοποιείται δημιουργώντας μια σταθμισμένη συνάρτηση όπως περιγράφεται στην ενότητα 2.7 με $w_1 = 0.5$ (το βάρος που αντιστοιχεί στον περιορισμό της παροχής) και $w_2 = 0.3$ (το βάρος που αντιστοιχεί στον περιορισμό του όγκου).



(α') Πεδίο τιμών της συνάρτησης του πορώδους $G(\alpha)$ (β') Πεδίο του μέτρου της ταχύτητας U

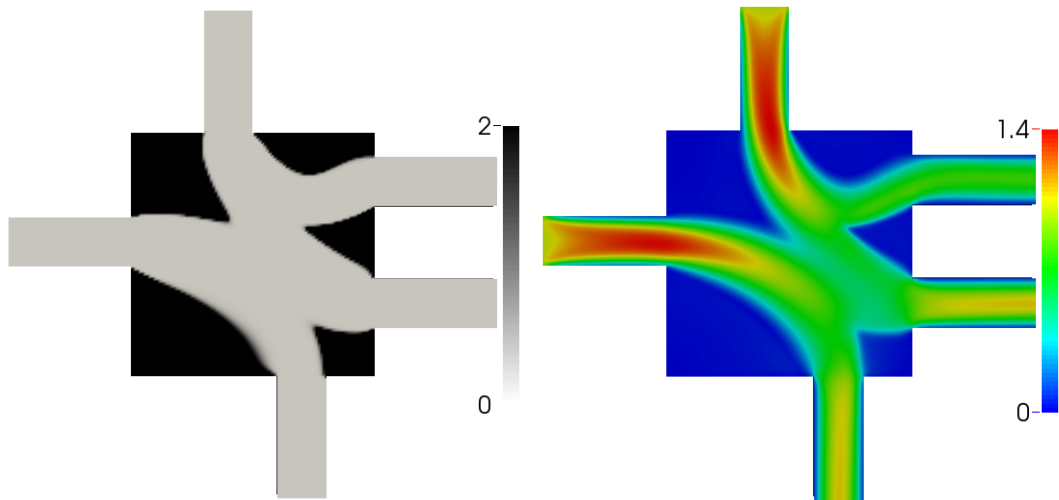
Σχήμα 3.7: Στο σχήμα 3.7(α') παρουσιάζεται το πεδίο τιμών της συνάρτησης του πορώδους όπου το ανοιχτό γκρι χρώμα αντιστοιχεί στην τιμή 0 ενώ το μαύρο χρώμα στη μέγιστη τιμή 200. Στο σχήμα 3.7(β') φαίνεται το αντίστοιχο πεδίο του μέτρου της ταχύτητας στο τέλος της βελτιστοποίησης. Η τιμή της συνάρτησης στόχου μετά το τέλος της βελτιστοποίησης είναι $F = 0.0158154$. Το ποσοστό της παροχής εισόδου που εξέρχεται από την έξοδο 1 είναι 0.502543 ενώ αυτό από την έξοδο 2 είναι 0.497457. Το ποσοστό του όγκου του χωρίου σχεδιασμού που καταλαμβάνεται από στερεό είναι 0.54.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο περιορισμός του όγκου οδήγησε σε ένα τελικό αποτέλεσμα άσπρου/μαύρου ή αλλιώς στερεού/ρευστού, με το πορώδες α να παίρνει τις διακριτές τιμές 0 ή 1 και, συνεπώς, η συνάρτηση $G(\alpha)$ του πορώδους, τις διακριτές τιμές 0 και 200.

Άρα, εξάγεται το συμπέρασμα ότι η εισαγωγή του περιορισμού του όγκου σε συνδυασμό με τη χρήση των συναρτήσεων-φίλτρων f_1 ή f_2 οδηγούν στην εξάλειψη των γκριζών περιοχών.

3.2 Αγωγός Δύο Εισόδων και Τριών Εξόδων

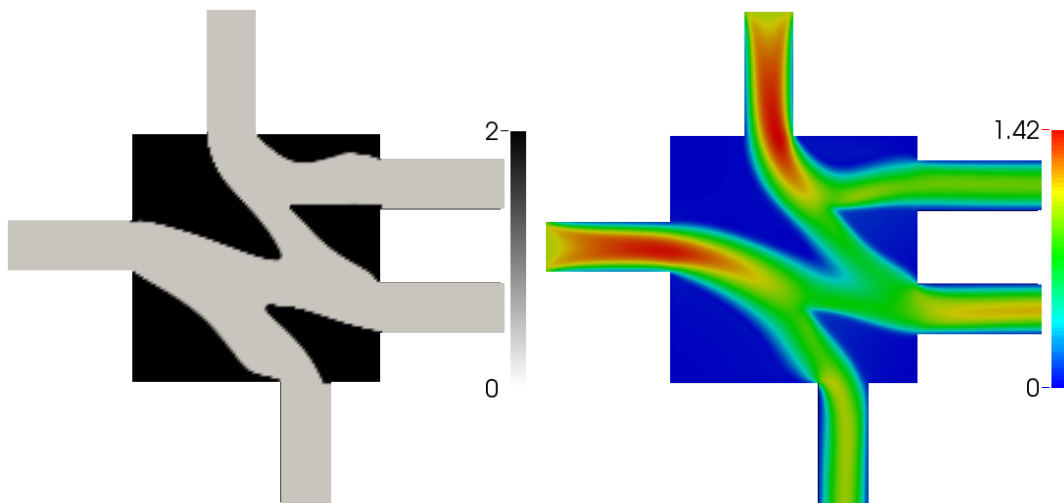
Ακολουθούν τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή της βελτιστοποίησης τοπολογίας για τη διαμόρφωση ενός αγωγού δύο εισόδων και τριών εξόδων. Ο αριθμός Reynolds είναι $Re = 100$. Όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή, η βελτιστοποίηση τοπολογίας δεν εφαρμόζεται στους αγωγούς εισόδου και εξόδου. Στις παρακάτω εφαρμογές πραγματοποιήθηκε βελτιστοποίηση τοπολογίας με στόχο την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης υπό τον περιορισμό το 30 % της συνολικής παροχής εισόδου να εξέρχεται από την κάτω έξοδο, το 40 % της να εξέρχεται από την κάτω δεξιά έξοδο και το υπόλοιπο 30 % από την πάνω δεξιά.



(α') Πεδίο της συνάρτησης του πορώδους G

(β') Πεδίο της ταχύτητας U

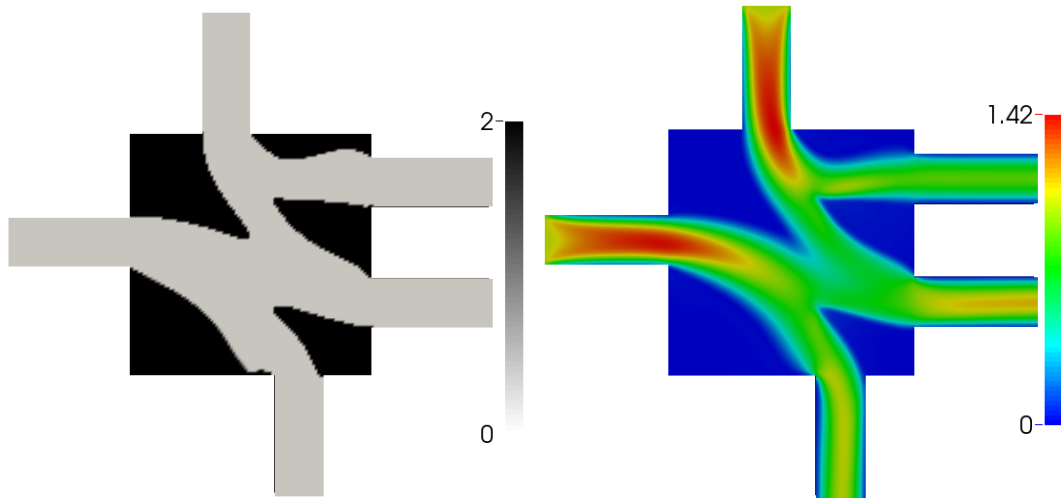
Σχήμα 3.8: Βελτιστοποίηση τοπολογίας με χρήση της συνάρτησης f_1 . Στο σχήμα 3.8(α') παρουσιάζεται το πεδίο της συνάρτησης του πορώδους και στο σχήμα 3.8(β') φαίνεται το αντίστοιχο πεδίο του μέτρου της ταχύτητας στο τέλος της βελτιστοποίησης. Η τιμή της συνάρτησης των απωλειών ολικής πίεσης είναι $F = 0.0402088m^5/s^3$. Τα ποσοστά της συνολικής παροχής που εξέρχονται από κάθε έξοδο είναι, 0.36 από την κάτω έξοδο, 0.37 από την κάτω δεξιά και 0.27 από την πάνω δεξιά έξοδο.



(α') Πεδίο της συνάρτησης του πορώδους G

(β') Πεδίο της ταχύτητας U

Σχήμα 3.9: Βελτιστοποίηση τοπολογίας με χρήση της συνάρτησης f_2 . Στο σχήμα 3.8(α') παρουσιάζεται το πεδίο της συνάρτησης του πορώδους και στο σχήμα 3.8(β') φαίνεται το αντίστοιχο πεδίο του μέτρου της ταχύτητας στο τέλος της βελτιστοποίησης. Η τιμή των απωλειών ολικής πίεσης είναι $F = 0.04521714m^5/s^3$. Τα ποσοστά της συνολικής παροχής που εξέρχονται από κάθε έξοδο είναι, 0.32 από την κάτω έξοδο, 0.38 από την κάτω δεξιά και 0.30 από την πάνω δεξιά έξοδο.



(α') Πεδίο της συνάρτησης του πορώδους G

(β') Πεδίο της ταχύτητας U

Σχήμα 3.10: Βελτιστοποίηση τοπολογίας με χρήση της συνάρτησης f_3 . Στο σχήμα 3.8(α') παρουσιάζεται το πεδίο της συνάρτησης του πορώδους και στο σχήμα 3.8(β') φαίνεται το αντίστοιχο πεδίο του μέτρου της ταχύτητας στο τέλος της βελτιστοποίησης. Η τιμή των απωλειών ολικής πίεσης είναι $F = 0.0443102 m^5/s^3$. Τα ποσοστά της συνολικής παροχής που εξέρχονται από κάθε έξοδο είναι, 0.35 από την κάτω έξοδο, 0.38 από την κάτω δεξιά και 0.27 από την πάνω δεξιά έξοδο.

Συνάρτηση	G_{max}	$\alpha_{initial}$	$G_{initial}(\alpha)$	Απώλειες	Έξοδος 1	Έξοδος 2	Έξοδος 3
f_1	200	0.5	25	0.0402088	0.36	0.37	0.27
f_2	200	0.364	25	0.04521714	0.32	0.38	0.30
f_3	200	0.065	25	0.0443102	0.35	0.38	0.27

Στην περίπτωση αυτή, η βελτιστοποίηση τοπολογίας με χρήση των τριών συναρτήσεων καταλήγει, σε παρόμοια αποτελέσματα. Η χρήση της συνάρτησης f_2 παρ' όλο που καταλήγει σε χειρότερη τιμή της συνάρτησης στόχου, ικανοποιεί με καλύτερο τρόπο τον περιορισμό.

3.3 Συμπεράσματα-Σχόλια

Ένα από τα πρώτα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προηγούμενες μελέτες αφορά την αρχικοποίηση του πορώδους. Η αρχικοποίηση του α προτείνεται να είναι διαφορετική του 0. Ειδικότερα, παρατηρήθηκε ότι η αρχικοποίηση $\alpha = 0$ εντείνει το πρόβλημα των γκριζών περιοχών αλλά και τα τελικά αποτελέσματα της βελτιστοποίησης είναι χειρότερα συγκριτικά με αυτά που προκύπτουν από αρχικοποίηση του πορώδους σε άλλες τιμές. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις προηγούμενες εφαρμογές, η αρχικοποίηση του πορώδους σε τιμές μεταξύ 0.3 και 0.5 φαίνεται

να είναι η ιδανική επιλογή. Ωστόσο, στις εφαρμογές που πραγματοποιήθηκαν με χρήση της μεθόδου των κινουμένων ασυμπτώτων, παρατηρήθηκε ότι, η αρχικοποίηση σε τιμές πιο κοντά στη μέγιστη τιμή $\alpha = 1$ οδηγεί σε ποιοτικότερα αποτελέσματα.

Ακόμη, η χρήση των συναρτήσεων f_1 και f_2 παρατηρείται ότι καταλήγει σε κοντινά αποτελέσματα. Ωστόσο, είναι προτιμότερο να επιλέγεται η f_2 έναντι της f_1 , λόγω της ιδιαιτερότητας της μαθηματικής έκφρασης της f_1 που αναλύεται παραπάνω και αφορά το μηδενισμό της κλίσης της όταν $\alpha = 0$. Στην πλειονότητα των περιπτώσεων, η συνάρτηση f_3 , παράγαγε χειρότερα αποτελέσματα από τις δύο άλλες συναρτήσεις γι' αυτό και δεν προτείνεται η επιλογή της, με βάση τις εφαρμογές που εξετάστηκαν.

Ένα ακόμη συμπέρασμα που προέκυψε και αφορά τις γκριζες περιοχές είναι ότι, οι γκριζες περιοχές δεν εξαλείφονται με τη χρήση των συναρτήσεων-φίλτρων. Ωστόσο, παρατηρείται σημαντική βελτίωση στο πρόβλημα των τμημάτων του χωρίου σχεδιασμού που το πορώδες έχει την τιμή 0, χωρίς στο συγκεκριμένο τμήμα να υπάρχει ρέον ρευστό. Τέτοιες περιοχές δεν παρατηρούνται στο τελικό, βέλτιστο πεδίο της συνάρτησης του πορώδους, με χρήση των συναρτήσεων f_1 και f_2 .

Τέλος, σημαντική βελτίωση στο πρόβλημα των γκριζων περιοχών φαίνεται να επιτυγχάνεται με χρήση του περιορισμού του όγκου. Η διαπίστωση αυτή είναι αναμενόμενη και απόλυτα λογική. Η χρήση του περιορισμού του όγκου, μπορεί να είναι απόρροια μιας φυσικής αναγκαιότητας, αλλά μπορεί να γίνει χρήση του αποκλειστικά για την εξάλειψη των γκριζων περιοχών. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να γίνει προσεκτική επιλογή του ποσοστού του υπολογιστικού χωρίου που ζητείται να καταλαμβάνει στερεό.

Κεφάλαιο 4

Μέθοδος των Κινουμένων Ασυμπτώτων

Στο κεφάλαιο αυτό θα διατυπωθεί η μέθοδος των Κινουμένων Ασυμπτώτων (Method of Moving Asymptotes) η οποία αποτελεί αιτιοκρατική μέθοδο βελτιστοποίησης που χρησιμοποιείται κυρίως για την επίλυση προβλημάτων με περιορισμούς. Αρχικά παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο πρέπει να διαμορφωθεί το πρόβλημα ώστε να είναι δυνατή η επίλυση του από τη μέθοδο. Ύστερα, αναλύεται η αρχική μέθοδος που δημοσιεύθηκε από τον K. Svanberg το 1987, [11], αλλά και η βελτιωμένη που δημοσιεύθηκε από τον ίδιο το 2007, [12], για τη διαμόρφωση ενός προσεγγιστικού, σε σχέση με το αρχικό πρόβλημα. Τέλος, παρουσιάζεται ένας ολοκληρωμένος τρόπος επίλυσης του προσεγγιστικού αυτού προβλήματος και ένα απλό παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου.

4.1 Διαμόρφωση του προς Βελτιστοποίηση Προβλήματος

Ένα κλασικό πρόβλημα μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς γράφεται στη γενική του μορφή ως:

$$\begin{array}{ll} \text{ελαχιστοποίηση της:} & f_0(x) \\ \text{υπό τους περιορισμούς:} & f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ \text{και} & x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max} \quad j = 1, \dots, n \end{array} \quad (4.1)$$

όπου $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ είναι το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού, $f_0(x)$ είναι η συνάρτηση στόχος και $f_i(x)$, οι m περιορισμοί. Τα x_j^{min} και x_j^{max} αποτελούν τα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού. Στην περίπτωση που οι μεταβλητές σχεδιασμού ενός προβλήματος δεν περιορίζονται από κάποια φυσικά όρια, είναι αναγκαίος ο ορισμός κάποιων τεχνητών ορίων για την επίλυση του προβλήματος με τη μέθοδο των κινουμένων ασυμπτωτών όπως θα φανεί στη συνέχεια.

Για την επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος βελτιστοποίησης με τη μέθοδο των κινουμένων ασυμπτωτών, αυτό πρέπει να διαμορφωθεί ως εξής :

$$\begin{array}{ll}
 \text{ελαχιστοποίηση της:} & f_0(x) + a_0 z + \sum_{i=1}^m (c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2) \\
 \text{υπό τους περιορισμούς:} & f_i(x) - a_i z - y_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (4.2) \\
 & x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max} \quad j = 1, \dots, n \\
 & z \geq 0, \quad y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m
 \end{array}$$

όπου f_0, f_1, \dots, f_m συνεχείς και παραγωγίσιμες συναρτήσεις ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{x} . Ακόμη, a_0, a_i, c_i, d_i πραγματικοί θετικοί αριθμοί που ορίζονται στην αρχή της επίλυσης του προβλήματος και παραμένουν σταθεροί κατά την επίλυση του. Στο πρόβλημα 4.2, οι φυσικές μεταβλητές σχεδιασμού ('φυσικές' υπό την έννοια ότι πρόκειται για τις μεταβλητές σχεδιασμού του πραγματικού προβλήματος που επιλύεται) είναι οι \mathbf{x} , ενώ οι y_1, \dots, y_m και z αποτελούν τεχνητές μεταβλητές που εισάγονται στο πρόβλημα βελτιστοποίησης για να διευκολυνθεί η επίλυση του. Οι μεταβλητές y_i εισάγονται στις εξισώσεις των περιορισμών f_i . Κάθε y_i αντιστοιχεί στη συνάρτηση περιορισμού f_i . Εύκολα παρατηρείται ότι, ο όρος που προστίθεται στη συνάρτηση στόχο f_0 και εξαρτάται από το σύνολο των μεταβλητών \mathbf{y} είναι πάντοτε θετικός. Αυτός ο όρος εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση στόχος επηρεάζεται από την ικανοποίηση των περιορισμών. Πιο συγκεκριμένα, αν κάποιος από τα y_i είναι διάφορο του μηδενός (κάτι που υποδεικνύει ότι δεν ικανοποιείται ο αντίστοιχος πραγματικός περιορισμός, αφού σε αυτήν την περίπτωση ισχύει $f_i(x) - a_i z - y_i \leq 0$), στη συνάρτηση στόχο προστίθεται η ποσότητα $\sum_{i=1}^m (c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2)$. Γι' αυτόν το λόγο το c_i επιλέγεται να έχει μια μεγάλη τιμή, ώστε η ποινή που επιβάλλεται στη συνάρτηση στόχο όταν κάποιος περιορισμός δεν ικανοποιείται να είναι αντίστοιχα μεγάλη. Επίσης, η προσθήκη των μεταβλητών y_i εξασφαλίζει ότι σε κάθε περίπτωση το πρόβλημα είναι επιλύσιμο, ακόμη και στην περίπτωση που το πραγματικό πρόβλημα 4.1 δεν είναι επιλύσιμο, δηλαδή δεν υπάρχει πιθανό διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού που να ικανοποιεί τους περιορισμούς, τότε το y_i του περιορισμού που είναι αδύνατο να ικανοποιηθεί καταλήγει σε τιμή διαφορετική του μηδενός. Έτσι, δεν ικανοποιείται ο πραγματικός περιορισμός αλλά ο περιορισμός $f_i \leq y_i$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το y_i θα πάρει τη μικρότερη δυνατή τιμή ώστε να γίνει το πρόβλημα επιλύσιμο, αυτός είναι ένας ακόμη λόγος που το c_i πρέπει να έχει

μια μεγάλη τιμή. Άρα μετά το πέρας της βελτιστοποίησης, αν κάποιο από τα y_i είναι διάφορο του μηδενός, σημαίνει ότι ο αντίστοιχος περιορισμός f_i δεν ικανοποιείται. Οι τιμές των υπόλοιπων συντελεστών επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε το πρόβλημα 4.2 να είναι αντίστοιχο του προβλήματος 4.1. Έτσι, ο συντελεστής d_i παίρνει την τιμή $d_i = 1$ και οι συντελεστές a ορίζονται ως, $a_0 = 1$ και $a_i = 0$ για κάθε i . Συνεπώς, οι όροι $a_i z$ που προστίθενται στις συναρτήσεις των περιορισμών είναι πάντοτε μηδενικοί. Ο όρος $a_0 z$ πρέπει να είναι ίσος με το 0 στο τέλος της βελτιστοποίησης ώστε η λύση που προκύπτει να είναι βέλτιστη, συνεπώς πρέπει $z = 0$.

4.2 Περιγραφή της Βασικής Μεθόδου MMA

Η μέθοδος των κινουμένων ασυμπτώτων αποτελεί έναν τρόπο επίλυσης προβλημάτων της μορφής (4.2). Αυτό επιτυγχάνεται όπως περιγράφεται στη συνέχεια. Αρχικά, επιλέγεται ένα σημείο εκκίνησης $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{y}^{(0)}, z^{(0)}$ και ξεκινά το βήμα $k = 0$. Σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, και με δεδομένο το σημείο $\mathbf{x}^{(k)}$, υπολογίζονται οι τιμές των $f_i(x^{(k)})$ αλλά και οι παράγωγοι $\nabla f_i(x^{(k)})$ για $i = 0, 1, \dots, m$. Στη συνέχεια, δημιουργείται ένα προσεγγιστικό πρόβλημα αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις f_i με προσεγγιστικές συναρτήσεις $\tilde{f}_i^{(k)}$ που εξαρτώνται από τις τιμές των συναρτήσεων και των παραγώγων που υπολογίστηκαν προηγουμένως, αλλά και από τις τιμές των ασυμπτώτων U_j και L_j που υπολογίζονται σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, με βάση πληροφορίες από τους προηγούμενους κύκλους.

Τέλος, λύνεται το νέο, απλοποιημένο, προσεγγιστικό πρόβλημα βελτιστοποίησης, η λύση του οποίου είναι το αρχικό σημείο $\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{y}^{(0)}, z^{(0)}$ του νέου κύκλου βελτιστοποίησης. Το προσεγγιστικό πρόβλημα, λύνεται με μία αιτιοκρατική μέθοδο βελτιστοποίησης. Ένας τρόπος επίλυσης του παρουσιάζεται στη συνέχεια. Το υποπρόβλημα που επιλύεται έχει τη μορφή 4.2.

Οι προσεγγιστικές συναρτήσεις στόχου και περιορισμών $\tilde{f}_i^{(k)}(x)$ ορίζονται ως

$$\tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right) + r_i^{(k)} \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (4.3)$$

όπου

$$p_{ij}^{(k)} = (U_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2 \left(1.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^+ + 0.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^- + \frac{10^{-11}}{x_j^{max} - x_j^{min}} \right) \quad (4.4)$$

$$q_{ij}^{(k)} = (x_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2 \left(0.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^+ + 1.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^- + \frac{10^{-11}}{x_j^{max} - x_j^{min}} \right) \quad (4.5)$$

$$r_i^{(k)} = f_i(x^{(k)}) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j^{(k)}} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j^{(k)} - L_j^{(k)}} \right) \quad (4.6)$$

$$\text{και } \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^{(k)}) \right)^+ = \max \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^{(k)}), 0 \right),$$

$$\text{ενώ } \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^{(k)}) \right)^- = \max \left(-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^{(k)}), 0 \right).$$

Οι παραπάνω ορισμοί προέκυψαν από τις απαιτήσεις που τέθηκαν ώστε $f_i(\mathbf{x}^{(k)}) = \tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)})$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) = \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)})$ και η προσεγγιστική συνάρτηση να απειρίζεται στα σημεία $U_j^{(k)}$ και $L_j^{(k)}$ για κάθε j .

Οι τελευταίες απαιτήσεις δικαιολογούν και την ονομασία της μεθόδου.

Τα όρια $\alpha_j^{(k)}$ και $\beta_j^{(k)}$ κάθε μεταβλητής ορίζονται με σκοπό την αποφυγή πιθανής διαίρεσης με το 0, (αυτό θα συνέβαινε σε περίπτωση που κάποια μεταβλητή σχεδιασμού έπαιρνε την τιμή κάποιας από τις δύο ασύμπτωτες L_j, U_j , εξασφαλίζουν ακόμη, ότι οι μεταβλητές σχεδιασμού δεν θα πάρουν τιμές εκτός των φυσικών ορίων που τέθηκαν κατά τον ορισμό του προβλήματος, όπως επίσης ότι δεν θα συμβεί κάποια υπερβολική μεταβολή στην τιμή μιας μεταβλητής σε έναν κύκλο βελτιστοποίησης. Έτσι, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\alpha_j^{(k)} = \max \left\{ x_j^{min}, \quad L_j^{(k)} + 0.1(x_j^{(k)} - L_j^{(k)}), \quad x_j^{(k)} - 0.5(x_j^{max} - x_j^{min}) \right\} \quad (4.7)$$

$$\beta_j^{(k)} = \min \left\{ x_j^{max}, \quad U_j^{(k)} - 0.1(U_j^{(k)} - x_j^{(k)}), \quad x_j^{(k)} + 0.5(x_j^{max} - x_j^{min}) \right\} \quad (4.8)$$

που σημαίνει ότι ο περιορισμός $\alpha_j^{(k)} \leq x_j \leq \beta_j^{(k)}$ είναι ισοδύναμος με τους ακόλουθους τρεις περιορισμούς:

$$x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max} \quad (4.9)$$

$$-0.9(x_j^{(k)} - L_j^{(k)}) \leq x_j - x_j^{(k)} \leq 0.9(U_j^{(k)} - x_j^{(k)}) \quad (4.10)$$

$$-0.5(x_j^{max} - x_j^{min}) \leq x_j - x_j^{(k)} \leq 0.5(x_j^{max} - x_j^{min}) \quad (4.11)$$

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο ανανεώνονται οι τιμές των άνω ($U_j^{(k)}$) και κάτω ($L_j^{(k)}$) ασυμπτώτων. Για την ανανέωση τους, απαιτείται η αποθήκευση των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού των δύο προηγούμενων κύκλων βελτιστοποίησης.

Για τους δύο πρώτους κύκλους, όπου $k = 1$ και $k = 2$, ισχύει

$$\begin{aligned} L_j^{(k)} &= x_j^{(k)} - 0.5(x_j^{max} - x_j^{min}) \\ U_j^{(k)} &= x_j^{(k)} + 0.5(x_j^{max} - x_j^{min}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Για τους επόμενους κύκλους, όπου $k \geq 3$, ισχύει

$$\begin{aligned} L_j^{(k)} &= x_j^{(k)} - \gamma_j^{(k)}(x_j^{(k-1)} - L_j^{(k-1)}) \\ U_j^{(k)} &= x_j^{(k)} + \gamma_j^{(k)}(U_j^{(k-1)} - x_j^{(k-1)}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

όπου

$$\gamma_j^{(k)} = \begin{cases} 0.7 & \text{αν } (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}) < 0, \\ 1.2 & \text{αν } (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}) > 0, \\ 1 & \text{αν } (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}) = 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

Με το συγκεκριμένο τρόπο ανανέωσης των μεταβλητών εξασφαλίζεται ότι, όταν η κατεύθυνση ανανέωσης των μεταβλητών σχεδιασμού παραμένει η ίδια για δύο συνεχόμενους κύκλους βελτιστοποίησης, οι διαφορές $x_j^{(k)} - L_j^{(k)}$ και $U_j^{(k)} - x_j^{(k)}$ θα είναι μεγαλύτερες σε σχέση με αυτές της προηγούμενης επανάληψης $x_j^{(k-1)} - L_j^{(k-1)}$ και $U_j^{(k-1)} - x_j^{(k-1)}$. Σε αντίθετη περίπτωση θα είναι μικρότερες, ενώ στην περίπτωση που η τιμή κάποιας μεταβλητής παρέμεινε ίδια μετά από έναν από τους δυο προηγούμενους κύκλους βελτιστοποίησης οι παραπάνω διαφορές παραμένουν αμετάβλητες. Το πόσο μεγαλύτερες και μικρότερες θα είναι οι διαφορές μπορεί να επιλεγεί ανάλογα με το πόσο συντηρητική θέλουμε να είναι η μέθοδος.

Οι τιμές 1.2 και 0.7 που αναφέρονται παραπάνω επιλέχθηκαν στη δημοσίευση [12] στην οποία αναφέρεται ότι ο συγκεκριμένος τρόπος ανανέωσης συμπεριφέρεται καλά σε μεγάλο πλήθος προβλημάτων. Ωστόσο, αναφέρεται ακόμη ότι ο τρόπος με τον οποίο ανανεώνονται οι τιμές των ασυμπτώτων μπορεί να βελτιώσει σημαντικά αλλά και

να κάνει χειρότερη τη συμπεριφορά της μεθόδου.

4.3 Περιγραφή της Μεθόδου GCMMA

Η συγκεκριμένη έκδοση της μεθόδου (GCMMA-the globally convergent version of MMA) υλοποιείται με δύο βρόχους, έναν εξωτερικό και έναν εσωτερικό. Ο δείκτης k θα αναφέρεται στον εξωτερικό βρόχο ενώ ο δείκτης v στον εσωτερικό αντίστοιχα. Θεωρώντας ως δεδομένο σημείο $x^{(k)}$, περιγράφεται αναλυτικά πως η μέθοδος προχωρά από τον κύκλο βελτιστοποίησης k στον $k + 1$.

Δεδομένου του σημείου $x^{(k)}$ δημιουργείται και λύνεται ένα προσεγγιστικό πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα, κάθε συνάρτηση $f_i(x)$ προσεγγίζεται από μια κυρτή συνάρτηση $\tilde{f}_i^{(k,0)}(x)$. Η θέση της βέλτιστης λύσης του προσεγγιστικού προβλήματος που δημιουργήθηκε προκύπτει από την επίλυση του προσεγγιστικού προβλήματος και είναι το σημείο $\hat{x}^{(k,0)}$.

Αν $\tilde{f}_i^{(k,0)}(\hat{x}^{(k,0)}) \geq f_i(\hat{x}^{(k,0)})$ για κάθε $i = 0, 1, 2, \dots, m$ το σημείο εκκίνησης του νέου κύκλου βελτιστοποίησης είναι $x^{(k+1)} = \hat{x}^{(k,0)}$ και η k εξωτερική επανάληψη έχει ολοκληρωθεί χωρίς να χρειαστούν εσωτερικές επαναλήψεις.

Σε αντίθετη περίπτωση, ακολουθεί η πρώτη εσωτερική επανάληψη που σημαίνει ότι δημιουργείται και λύνεται ένα νέο προσεγγιστικό πρόβλημα, με νέες προσεγγιστικές συναρτήσεις $\tilde{f}_i^{(k,1)}(x)$ οι οποίες είναι πιο "συντηρητικές" (υπό την έννοια ότι τείνοντας να ικανοποιήσουν την παραπάνω συνθήκη μειώνουν τις πιθανότητες εύρεσης ενός καλύτερου σημείου σε κάποια μακρινή απόσταση) για τις συναρτήσεις εκείνες που δεν ικανοποιούσαν την παραπάνω ανισο-ισότητα. Έτσι εξασφαλίζεται, όπως αναλύεται στη συνέχεια, ότι $\tilde{f}_i^{(k,1)}(x) > \tilde{f}_i^{(k,0)}(x)$ για κάθε x εκτός από το σημείο $x = x^{(k)}$ όπου ισχύει $\tilde{f}_i^{(k,1)}(x^{(k)}) = \tilde{f}_i^{(k,0)}(x^{(k)})$.

Η βέλτιστη λύση του νέου προσεγγιστικού προβλήματος είναι στη θέση $\hat{x}^{(k,1)}$. Αν $\tilde{f}_i^{(k,1)}(\hat{x}^{(k,1)}) \geq f_i(\hat{x}^{(k,1)})$ για κάθε $i = 0, 1, 2, \dots, m$ το σημείο εκκίνησης του νέου κύκλου βελτιστοποίησης είναι $x^{(k+1)} = \hat{x}^{(k,1)}$ και η k εξωτερική επανάληψη έχει ολοκληρωθεί (με μία εσωτερική επανάληψη).

Διαφορετικά, ακολουθεί η επόμενη εσωτερική επανάληψη. Οι εσωτερικές επαναλήψεις συνεχίζονται έως ότου εξασφαλιστεί ότι $\tilde{f}_i^{(k,v)}(\hat{x}^{(k,v)}) \geq f_i(\hat{x}^{(k,v)})$ για $i = 0, 1, 2, \dots, m$. Η συνθήκη ικανοποιείται πάντα μετά από πεπερασμένο (συνήθως μικρό) αριθμό εσωτερικών επαναλήψεων. Ο μικρός αριθμός εσωτερικών επαναλήψεων εξασφαλίζεται πό τον τρόπο με τον οποίο ανανεώνονται οι προσεγγιστικές συναρτήσεις στον εσωτερικό βρόχο.

Στη συνέχεια, η λύση που προέκυψε αποτελεί το αρχικό σημείο της επόμενης εξωτερικής επανάληψης $x^{(k+1)} = \hat{x}^{(k,v)}$.

Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι οι παράγωγοι $\nabla f_i(x^{(k)})$ υπολογίζονται μία φορά για κάθε

εξωτερική επανάληψη και δεν χρειάζεται να υπολογιστούν στον εσωτερικό βρόχο αφού το σημείο $x^{(k)}$ δεν ανανεώνεται σε αυτόν. Αντίθετα, το προσεγγιστικό πρόβλημα λύνεται σε κάθε εσωτερική επανάληψη. Το υπολογιστικό κόστος της επίλυσης του υποπροβλήματος (που θα παρουσιαστεί στην επόμενη ενότητα) ωστόσο, είναι αμελητέο σε σχέση με τον υπολογισμό των παραγώγων των συναρτήσεων στόχων και των συναρτήσεων των περιορισμών για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης τοπολογίας.

Οι προσεγγιστικές συναρτήσεις $\tilde{f}_i^{(k,v)}(x)$ ορίζονται ως

$$\tilde{f}_i^{(k,v)}(x) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k,v)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k,v)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right) + r_i^{(k,v)} \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (4.15)$$

όπου

$$p_{ij}^{(k,v)} = (U_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2 \left(1.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^{(k)}) \right)^+ + 0.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^{(k)}) \right)^- + \frac{\rho_i^{(k,v)}}{x_j^{max} - x_j^{min}} \right) \quad (4.16)$$

$$q_{ij}^{(k,v)} = (x_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2 \left(0.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^{(k)}) \right)^+ + 1.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^{(k)}) \right)^- + \frac{\rho_i^{(k,v)}}{x_j^{max} - x_j^{min}} \right) \quad (4.17)$$

$$r_i^{(k,v)} = f_i(x^{(k)}) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k,v)}}{U_j^{(k)} - x_j^{(k)}} + \frac{q_{ij}^{(k,v)}}{x_j^{(k)} - L_j^{(k)}} \right) \quad (4.18)$$

Τα α_j και β_j , όπως και οι τιμές των ασυμπτωτών L_i και U_j ανανεώνονται όπως φαίνεται στις εξισώσεις (4.7 - 4.14), σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης και δεν επηρεάζονται από τις εσωτερικές επαναλήψεις. Οι παράμετροι $\rho_i^{(k,v)}$ που εμφανίζονται στις εξισώσεις 4.16 και 4.17 είναι αυτές που μεταβάλλονται στον εσωτερικό βρόχο και οδηγούν στην αλλαγή των προσεγγιστικών εξισώσεων $\tilde{f}_i^{(k,v)}(x)$. Οι $\rho_i^{(k,v)}$ είναι πάντοτε θετικοί αριθμοί και ανανεώνονται όπως παρουσιάζεται παρακάτω. Η αρχική τιμή των παραμέτρων $\rho_i^{(k,v)}$ για μια δεδομένη εξωτερική επανάληψη k και $v = 0$ ορίζεται ως

$$\rho_i^{(k,0)} = \frac{0.1}{n} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^{(k)}) \right| (x_j^{max} - x_j^{min}), \quad \text{για } i = 0, 1, \dots, m. \quad (4.19)$$

Κάθε νέα εσωτερική επανάληψη για την ανανέωση του $\rho_i^{(k,v)}$ βασίζεται στη λύση $\hat{x}^{(k,v)}$ του προηγούμενου προσεγγιστικού προβλήματος. Η $\tilde{f}_i^{(k,v)}(x)$ γράφεται στη μορφή

$$\tilde{f}_i^{(k,v)}(x) = h_i^{(k)}(x) + \rho_i^{(k,v)} d_i^{(k)}(x) \quad (4.20)$$

όπου $h_i^{(k)}(x)$ και $d_i^{(k)}(x)$ δεν εξαρτώνται από το $\rho_i^{(k,v)}$. Μετά από υπολογισμούς προκύπτει

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i^{(k,v)}(x) &= \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{p_{ij}^{(k,v)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k,v)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right\} + r_i^{(k,v)} = f_i^{(k,v)}(x) \\ &+ \sum_{j=1}^n \left\{ 1.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^{(k)}) \right)^+ \frac{(U_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2}{U_j^{(k)} - x_j} + 0.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^{(k)}) \right)^- \frac{(U_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2}{U_j^{(k)} - x_j} + \right. \\ &+ \frac{\rho_i^{(k,v)}}{x_j^{max} - x_j^{min}} \frac{(U_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2}{U_j^{(k)} - x_j} + 0.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^{(k)}) \right)^+ \frac{(x_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2}{x_j - L_j^{(k)}} + \\ &+ 1.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^{(k)}) \right)^- \frac{(x_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2}{x_j - L_j^{(k)}} + \frac{\rho_i^{(k,v)}}{x_j^{max} - x_j^{min}} \frac{(x_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2}{x_j - L_j^{(k)}} \\ &- 1.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^{(k)}) \right)^+ (U_j^{(k)} - x_j^{(k)}) - 0.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^{(k)}) \right)^- (U_j^{(k)} - x_j^{(k)}) \\ &- \frac{\rho_i^{(k,v)}}{x_j^{max} - x_j^{min}} (U_j^{(k)} - x_j^{(k)}) - 0.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^{(k)}) \right)^+ (x_j^{(k)} - L_j^{(k)}) + \\ &\left. - 1.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^{(k)}) \right)^- (x_j^{(k)} - L_j^{(k)}) - \frac{\rho_i^{(k,v)}}{x_j^{max} - x_j^{min}} (x_j^{(k)} - L_j^{(k)}) \right\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Άρα

$$\begin{aligned}
h_i^{(k)}(x) &= f_i^{(k,v)}(x) + \sum_{j=1}^n \left\{ 1.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^{(k)}) \right)^+ \frac{(U_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2}{U_j^{(k)} - x_j} + \right. \\
&+ 0.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^{(k)}) \right)^- \frac{(U_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2}{U_j^{(k)} - x_j} + 0.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^{(k)}) \right)^+ \frac{(x_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2}{x_j - L_j^{(k)}} + \\
&+ 1.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^{(k)}) \right)^- \frac{(x_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2}{x_j - L_j^{(k)}} - 1.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^{(k)}) \right)^+ (U_j^{(k)} - x_j^{(k)}) \\
&- 0.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^{(k)}) \right)^- (U_j^{(k)} - x_j^{(k)}) - 0.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^{(k)}) \right)^+ (x_j^{(k)} - L_j^{(k)}) \\
&\left. - 1.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^{(k)}) \right)^- (x_j^{(k)} - L_j^{(k)}) \right\}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

και

$$\begin{aligned}
d_i^{(k)} &= \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{x_j^{max} - x_j^{min}} \frac{(U_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{1}{x_j^{max} - x_j^{min}} \frac{(x_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2}{x_j - L_j^{(k)}} + \right. \\
&- \frac{1}{x_j^{max} - x_j^{min}} (U_j^{(k)} - x_j^{(k)}) - \left. \frac{1}{x_j^{max} - x_j^{min}} (x_j^{(k)} - L_j^{(k)}) \right\} = \\
&= \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{U_j^{(k)} - x_j^{(k)}}{x_j^{max} - x_j^{min}} \frac{x_j - x_j^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} - \frac{x_j^{(k)} - L_j^{(k)}}{x_j^{max} - x_j^{min}} \frac{x_j - x_j^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right\} = \\
&= \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{x_j - x_j^{(k)}}{x_j^{max} - x_j^{min}} \left[\frac{(U_j^{(k)} - x_j^{(k)})(x_j - L_j^{(k)}) - (x_j^{(k)} - L_j^{(k)})(U_j^{(k)} - x_j)}{(U_j^{(k)} - x_j)(x_j - L_j^{(k)})} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

και, τελικά,

$$d_i^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{(U_j^{(k)} - L_j^{(k)})(x_j - x_j^{(k)})^2}{(U_j^{(k)} - x_j)(x_j - L_j^{(k)})(x_j^{max} - x_j^{min})} \tag{4.24}$$

και, στη συνέχεια, ορίζεται

$$\delta_i^{(k,v)} = \frac{f_i(\hat{x}^{(k,v)}) - \tilde{f}_i^{(k,v)}(\hat{x}^{(k,v)})}{d_i^{(k)}(\hat{x}^{(k,v)})} \tag{4.25}$$

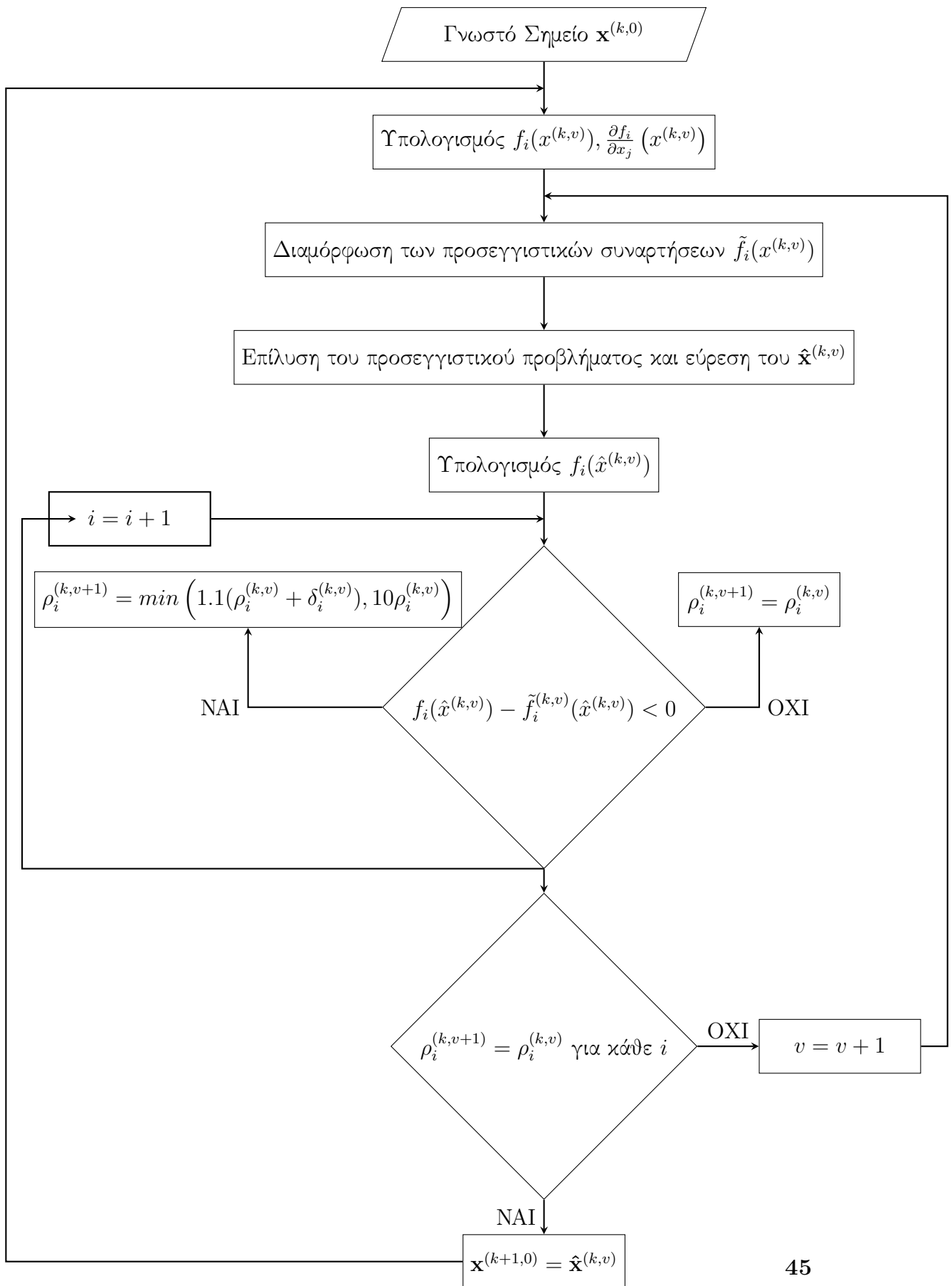
Από τις εξισώσεις 4.20 και 4.25 προκύπτει $f_i(\hat{x}^{(k,v)}) = h_i^{(k)}(\hat{x}^{(k,v)}) + (\delta_i^{(k,v)} + \rho_i^{(k,v)})d_i^{(k)}(\hat{x}^{(k,v)})$ που σημαίνει ότι οι τιμές $\delta_i^{(k,v)} + \rho_i^{(k,v)}$ αποτελούν τις τιμές των παραμέτρων $\rho_i^{(k,v)}$ που εξασφαλίζουν ότι οι τιμές των προσεγγιστικών συναρτήσεων ταυτίζονται με τις πραγ-

ματικές τιμές των συναρτήσεων στο βέλτιστο σημείο που προέκυψε από την προηγούμενη εσωτερική επανάληψη. Η ανανέωση των παραμέτρων $\rho_i^{(k,v)}$ γίνεται όπως φαίνεται παρακάτω

$$\begin{aligned} \rho_i^{(k,v+1)} &= \min \left(1.1(\rho_i^{(k,v)} + \delta_i^{(k,v)}), 10\rho_i^{(k,v)} \right) & \text{αν } \delta_i^{(k,v)} > 0 \\ \rho_i^{(k,v+1)} &= \rho_i^{(k,v)}, & \text{αν } \delta_i^{(k,v)} \leq 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Οι εσωτερικές επαναλήψεις συνεχίζονται έως ότου $\delta_i^{(k,v)} \leq 0$ για κάθε $i = 0, 1, \dots, m$

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι, αν η παράμετρος ρ ανανεώνονταν απευθείας με την τιμή $\rho_i^{(k,v+1)} = 1.1(\rho_i^{(k,v)} + \delta_i^{(k,v)})$, θα εξασφαλιζόνταν ότι σε κάθε περίπτωση θα χρειαζόταν το πολύ μια εσωτερική επανάληψη, ωστόσο αυτό θα έκανε τη μέθοδο πολύ 'συντηρητική'.



Το διάγραμμα ροής της προηγούμενης σελίδας παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο η μέθοδος GCMMA προχωρά από το βήμα k στο $k+1$. Ο τρόπος με τον οποίο επιλύεται το προσεγγιστικό πρόβλημα παρουσιάζεται στην επόμενη ενότητα.

4.4 Μια Μέθοδος Επίλυσης του Υποπροβλήματος των MMA και GCMMA

Οι δείκτες των εσωτερικών και εξωτερικών επαναλήψεων καταργούνται στη συνέχεια για λόγους απλότητας. Είτε επιλύεται το υποπρόβλημα που έχει δημιουργηθεί μέσω της MMA, είτε αυτό που δημιουργήθηκε μέσω της GCMMA, η διαδικασία είναι η ίδια.

4.4.1 Διαμόρφωση των Εξισώσεων

Το υποπρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής

$$\begin{aligned} \text{Ελαχιστοποίηση της} \quad & g_0(x) + a_0z + \sum_{i=1}^m \left(c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2 \right) \\ \text{υπό τους περιορισμούς} \quad & g_i(x) - a_i z - y_i \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & \alpha_j \leq x_j \leq \beta_j \quad j = 1, \dots, n \\ & z \geq 0, y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.27)$$

όπου

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}}{U_j - x_j} + \frac{q_{ij}}{x_j - L_j} \right), \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (4.28)$$

και $L_j \leq \alpha_j \leq x_j \leq \beta_j \leq U_j$ για κάθε j .

Η Lagrangian συνάρτηση που αντιστοιχεί στο παραπάνω πρόβλημα είναι

$$\begin{aligned} L = & g_0(x) + a_0z + \sum_{i=1}^m \left(c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2 \right) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) - a_i z - y_i - b_i) \\ & + \sum_{j=1}^n (\xi_j (\alpha_j - x_j) + \eta_j (x_j - \beta_j)) - \sum_{i=1}^m \mu_i y_i - \zeta z \end{aligned} \quad (4.29)$$

όπου $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)^T$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)^T$, $(\mu_1, \dots, \mu_m)^T$ και ζ μη αρνητικοί πολλαπλασιαστές Lagrange των περιορισμών της εξίσωσης (4.27).

Ορίζοντας τις παρακάτω ποσότητες

$$\psi(x, \lambda) = g_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_j(\lambda)}{U_j - x_j} + \frac{q_j(\lambda)}{x_j - L_j} \right) \quad (4.30)$$

όπου

$$p_j(\lambda) = p_{0j} + \sum_i^m \lambda_i p_{ij} \quad \text{και} \quad q_j(\lambda) = q_{0j} + \sum_i^m \lambda_i q_{ij} \quad (4.31)$$

η συνάρτηση (4.29) παίρνει την παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned} L = \psi(x, \lambda) + (a_0 - \zeta)z + \sum_{j=1}^n (\xi_j(\alpha_j - x_j) + \eta_j(x_j - \beta_j)) \\ - \sum_{i=1}^m \left(c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2 - \lambda_i a_i z - \lambda_i y_i - \lambda_i b_i - \mu_i y_i \right), \end{aligned} \quad (4.32)$$

και οι KKT συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται για να υπάρχει βέλτιστη λύση γίνονται

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \xi_j + \eta_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad \left(\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \right) \quad (4.33.1)$$

$$c_i + d_i y_i - \lambda_i - \mu_i = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad \left(\frac{\partial L}{\partial y_i} = 0 \right) \quad (4.33.2)$$

$$a_0 - \zeta - \lambda^T a = 0, \quad \left(\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \right) \quad (4.33.3)$$

$$g_i(x) - a_i z - y_i - b_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{primal feasibility}) \quad (4.33.4)$$

$$\lambda_i (g_i(x) - a_i z - y_i - b_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{complementary slackness}) \quad (4.33.5)$$

$$\xi_j (\alpha_j - x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{complementary slackness}) \quad (4.33.6)$$

$$\eta_j (x_j - \beta_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{complementary slackness}) \quad (4.33.7)$$

$$-\mu_i y_i = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{complementary slackness}) \quad (4.33.8)$$

$$-\zeta z = 0, \quad (\text{complementary slackness}) \quad (4.33.9)$$

$$\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{primal feasibility}) \quad (4.33.10)$$

$$\xi_j \geq 0 \text{ και } \eta_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{dual feasibility}) \quad (4.33.11)$$

$$\zeta \geq 0 \text{ και } \mu_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{dual feasibility}) \quad (4.33.12)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{dual feasibility}) \quad (4.33.13)$$

όπου

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \frac{p_j(\lambda)}{(U_j - x_j)^2} - \frac{q_j(\lambda)}{(x_j - L_j)^2} \quad (4.34)$$

Οι συνθήκες βέλτιστης λύσης χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες. Πρώτη κατηγορία είναι η primal feasibility που αναφέρεται σε συνθήκες που εξασφαλίζουν ότι το εκάστοτε σημείο ανήκει στον υποχώρο των δυνατών λύσεων του προβλήματος. Δεύτερη κατηγορία αποτελούν οι complementary slackness συνθήκες. Για τις ανωτέρω ισχύει ότι, αν οποιοσδήποτε συντελεστής Lagrange πάρει τιμή μεγαλύτερη από το 0, τότε ο αντίστοιχος περιορισμός οδηγείται στην ισότητα. Τρίτη κατηγορία είναι οι dual feasibility συνθήκες οι οποίες εξασφαλίζουν ότι όλοι οι πολλαπλασιαστές Lagrange έχουν θετική τιμή.

4.4.2 Χαλαρωμένα Κριτήρια Βέλτιστης Λύσης

Τα μηδενικά στο δεξί μέρος των complementary slackness συνθηκών αντικαθίστανται από μια αρνητική μικρή τιμή ($-\epsilon$), μιας παραμέτρου $\epsilon > 0$. Ακόμη, εισάγονται μεταβλητές χαλάρωσης s_i για τους περιορισμούς.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \xi_j + \eta_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.35.1)$$

$$c_i + d_i y_i - \lambda_i - \mu_i = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.35.2)$$

$$a_0 - \zeta - \lambda^T a = 0, \quad (4.35.3)$$

$$g_i(x) - a_i z - y_i + s_i - b_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.35.4)$$

$$\xi_j(\alpha_j - x_j) - \epsilon = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.35.5)$$

$$\eta_j(x_j - \beta_j) - \epsilon = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.35.6)$$

$$-\mu_i y_i - \epsilon = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.35.7)$$

$$-\zeta z - \epsilon = 0, \quad (4.35.8)$$

$$-\lambda_i s_i - \epsilon = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.35.9)$$

$$\xi_j > 0 \text{ και } x_j - \alpha_j > 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.35.10)$$

$$\eta_j > 0 \text{ και } \beta_j - x_j > 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.35.11)$$

$$y_i > 0 \text{ και } \mu_i > 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.35.12)$$

$$\zeta > 0 \text{ και } z > 0, \quad (4.35.13)$$

$$s_i > 0 \text{ και } \lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.35.14)$$

Για κάθε τιμή $\epsilon > 0$ υπάρχει μοναδική λύση $(x, y, z, \lambda, \xi, \eta, \mu, \zeta, s)$ που ικανοποιεί τις ανωτέρω συνθήκες.

4.4.3 Η Κατεύθυνση Newton των Χαλαρωμένων Συνθηκών Βέλτιστης Λύσης

Έστω ένα γνωστό σημείο $(x, y, z, \lambda, \xi, \eta, \mu, \zeta, s)$ το οποίο ικανοποιεί τις εξισώσεις 4.35, τότε ξεκινώντας από αυτό το σημείο εφαρμόζεται η μέθοδος Newton στο σύστημα των εξισώσεων αυτών. Εδώ πρέπει να διευκρινιστεί ότι, η απαίτηση να ξεκινά η μέθοδος από σημείο το οποίο ικανοποιεί τις συνθήκες KKT, είναι ο λόγος για τον οποίο εισήχθη ο συντελεστής ϵ αλλά και οι μεταβλητές s_i στα κριτήρια αυτά. Αρχικοποιώντας αυτές τις ποσότητες σε σχετικά μεγάλες τιμές οι συνθήκες ικανοποιούνται και στην πορεία της βελτιστοποίησης ελαττώνονται, ώστε να ικανοποιούνται οι πραγματικές KKT συνθήκες.

Τότε, διαμορφώνεται και λύνεται το παρακάτω σύστημα γραμμικών εξισώσεων ως προς $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta \lambda, \Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \mu, \Delta \zeta, \Delta s)$.

$$\begin{pmatrix} \Psi & & G^T & \langle -e \rangle & \langle e \rangle \\ & \langle d \rangle & \langle -e \rangle & & \langle e \rangle \\ & & -a^T & & -1 \\ G & \langle -e \rangle & -a & & \langle e \rangle \\ \langle \xi \rangle & & & \langle x - \alpha \rangle & \\ \langle -\eta \rangle & & & \langle x - \alpha \rangle & \\ & \langle \mu \rangle & & \langle y \rangle & \\ & & \zeta & & z \\ & & & \langle s \rangle & \langle \lambda \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta \lambda \\ \Delta \xi \\ \Delta \eta \\ \Delta \mu \\ \Delta \zeta \\ \Delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta_x \\ -\delta_y \\ -\delta_z \\ -\delta_\lambda \\ -\delta_\xi \\ -\delta_\eta \\ -\delta_\mu \\ -\delta_\zeta \\ -\delta_s \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

όπου $\delta_x, \delta_y, \dots$ τα αριστερά μέλη των εξισώσεων (4.35.1)-(4.35.9),

ενώ το Ψ είναι διαγώνιο μητρώο $n \times n$ για το οποίο ισχύει

$$(\Psi)_{jj} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j^2} = \frac{2p_j(\lambda)}{(U_j - x_j)^3} - \frac{2q_j(\lambda)}{(x_j - L_j)^3} \quad (4.37)$$

G μητρώο $m \times n$ για το οποίο ισχύει,

$$(G)_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{p_{ij}}{(U_j - x_j)^2} - \frac{q_{ij}}{(x_j - L_j)^2} \quad (4.38)$$

$\langle d \rangle$ διαγώνιο μητρώο με τις τιμές $d = (d_1, \dots, d_m)$ στη διαγώνιο $\langle x - \alpha \rangle$ διαγώνιο μητρώο

με τις τιμές του $x - \alpha$ στη διαγώνιο κ.ο.κ. , και e μοναδιαίο διάνυσμα με την αντίστοιχη διάσταση σε κάθε περίπτωση ώστε $\langle e \rangle$ μοναδιαίο μητρώο.

Από το σύστημα 4.36 προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις από τις οποίες προκύπτουν οι μεταβολές των ξ, η, μ, ζ, s που ελαχιστοποιούν τις αντίστοιχες ποσότητες,

$$\begin{aligned}\Delta\xi &= -\langle x - \alpha \rangle^{-1} \langle \xi \rangle \Delta x - \xi + \epsilon \langle x - \alpha \rangle^{-1} e, \\ \Delta\eta &= \langle \beta - x \rangle^{-1} \langle \eta \rangle \Delta x - \eta + \epsilon \langle \beta - x \rangle^{-1} e, \\ \Delta\mu &= -\langle y \rangle^{-1} \langle \mu \rangle \Delta y - \mu + \epsilon \langle y \rangle^{-1} e, \\ \Delta\zeta &= -\langle \zeta/z \rangle \Delta z - \zeta + \epsilon/z, \\ \Delta s &= -\langle \alpha \rangle^{-1} \langle s \rangle \Delta \lambda - s + \epsilon \langle \alpha \rangle^{-1} e.\end{aligned}\tag{4.39}$$

Οι σχέσεις 4.39 εξαρτώνται από τα $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta \lambda$, οπότε υπολογίζοντας αυτές τις ποσότητες, με απλή αντικατάσταση προκύπτουν οι μεταβολές 4.39.

Συνεπώς, το σύστημα 4.36 απλοποιείται στο παρακάτω,

$$\begin{pmatrix} D_x & & G^T \\ & D_y & \langle -e \rangle \\ & & \zeta/z & -a^T \\ G & & & -D_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{\delta}_x \\ -\tilde{\delta}_y \\ -\tilde{\delta}_z \\ -\tilde{\delta}_\lambda \end{pmatrix}\tag{4.40}$$

όπου

$$D_x = \Psi + \langle x - \alpha \rangle^{-1} \langle \xi \rangle + \langle \beta - x \rangle^{-1}, \quad (\text{Διαγώνιος Πίνακας})\tag{4.41.1}$$

$$D_y = \langle d \rangle + \langle y \rangle^{-1} \langle \mu \rangle, \quad (\text{Διαγώνιος Πίνακας})\tag{4.41.2}$$

$$D_\lambda = \langle \lambda \rangle^{-1} \langle s \rangle, \quad (\text{Διαγώνιος Πίνακας})\tag{4.41.3}$$

$$\tilde{\delta}_x = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \epsilon \langle x - \alpha \rangle^{-1} e + \epsilon \langle \beta - x \rangle^{-1} e,\tag{4.41.4}$$

$$\tilde{\delta}_y = c + \langle d \rangle y - \lambda - \epsilon \langle y \rangle^{-1} e,\tag{4.41.5}$$

$$\tilde{\delta}_z = a_0 - \lambda^T a - \epsilon/z,\tag{4.41.6}$$

$$\tilde{\delta}_\lambda = g(x) - az - y - b + \epsilon \langle \lambda \rangle^{-1} e.\tag{4.41.7}$$

όπου $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ διάνυσμα διάστασης n , τα στοιχεία του οποίου είναι $\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \frac{p_j(\lambda)}{(U_j - x_j)^2} - \frac{q_j(\lambda)}{(x_j - L_j)^2}$

Επομένως, το Δy ελαχιστοποιείται μέσω της σχέσης

$$\Delta y = D_y^{-1} \Delta \lambda - D_y^{-1} \tilde{\delta}_y\tag{4.42}$$

Στη συνέχεια, το σύστημα απλοποιείται περαιτέρω στο ακόλουθο σύστημα

$$\begin{pmatrix} D_x & & G^T \\ & \zeta/z & -a^T \\ G & -a & -D_{\lambda y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta z \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{\delta}_x \\ -\tilde{\delta}_z \\ -\tilde{\delta}_{\lambda y} \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

όπου

$$D_{\lambda y} = D_\lambda + D_y^{-1}, \quad (\text{Διαγώνιος Πίνακας}) \quad (4.44.1)$$

$$\tilde{\delta}_{\lambda y} = \tilde{\delta}_\lambda + D_y^{-1}\tilde{\delta}_y \quad (4.44.2)$$

Στο σύστημα (4.46) επιλέγεται να ελαχιστοποιηθεί η παρακάτω ποσότητα,

$$\Delta x = -D_x^{-1}G^T\Delta\lambda - D_x^{-1}\tilde{\delta}_x \quad (4.45)$$

και, τελικά, προκύπτει το εξής γραμμικό σύστημα διάστασης $(m+1) \times (m+1)$

$$\begin{pmatrix} D_{\lambda y} + GD_x^{-1}G^T & a \\ a^T & -\zeta/z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\lambda \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{\delta}_{\lambda y} - GD_x^{-1}\tilde{\delta}_x \\ -\tilde{\delta}_z \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

Επιλύοντας το σύστημα 4.46 προκύπτουν τα $\Delta\lambda, \Delta z$. Από τις γραμμικές εξισώσεις 4.45, 4.4.3, 4.39 προκύπτουν οι αντίστοιχες μεταβολές συναρτήσεων των $\Delta\lambda, \Delta z$.

4.4.4 Αλγόριθμος Επίλυσης του Δυαδικού Προβλήματος

Αρχικά επιλέγεται μια αρχική τιμή $\epsilon^{(1)}$ και ένα αρχικό σημείο

$w^{(1)} = (x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}, \lambda^{(1)}, \xi^{(1)}, \eta^{(1)}, \mu^{(1)}, \zeta^{(1)}, s^{(1)})$. Μια προτεινόμενη, απλή επιλογή για την αρχικοποίηση των ποσοτήτων αυτών είναι η εξής, $\epsilon^{(1)} = 1, x_j^{(1)} = \frac{1}{2}(\alpha_j + \beta_j), y_i^{(1)} = 1, z^{(1)} = 1, \zeta^{(1)} = 1, \lambda_i^{(1)} = 1, s_i^{(1)} = 1, \xi_j^{(1)} = \max\{1, 1/(x_j^{(1)} - \alpha_j)\}, \eta_j^{(1)} = \max\{1, 1/(\beta_j - x_j^{(1)})\}, \mu_i^{(1)} = \max\{1, c_i\}$.

Ένας κύκλος βελτιστοποίησης που οδηγεί από το σημείο $w^{(k)}$ στο $w^{(k+1)}$ αποτελείται από τα βήματα

Βήμα 1: Με δεδομένα $\epsilon^{(k)}$ και $w^{(k)}$ υπολογίζονται οι μεταβολές $\Delta w^{(k)}$ όπως περιγράφεται στην παράγραφο 4.4.3.

Βήμα 2: Υπολογίζεται το βήμα $t^{(k)}$ το οποίο επιλέγεται να είναι το μέγιστο δυνατό που ικανοποιεί τους περιορισμούς, $t \leq 1$, $x_j + t\Delta x_j - a_j \geq 0.01(x_j - a_j)$ για όλα τα j , $\beta_j - (x_j + t\Delta x_j) \geq 0.01(\beta_j - x_j)$ για όλα τα j , $(y, z, \lambda, \xi, \eta, \mu, \zeta, s) + t(\Delta y, \Delta z, \Delta \lambda, \Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \mu, \Delta \zeta, \Delta s) \geq 0.01(y, z, \lambda, \xi, \eta, \mu, \zeta, s)$. Εξασφαλίζεται έτσι ότι καμία από τις παραπάνω ποσότητες στα αριστερά μέλη των ανισώσεων αυτών δεν θα γίνει αρνητική.

Βήμα 3: Ανανεώνονται οι μεταβλητές μέσω της σχέσης $w^{(k+1)} = w^{(k)} + t^{(k)}\Delta w^{(k)}$.

Βήμα 4: Αν $\|\delta(w^{(k+1)})\| < 0.9\epsilon^{(k)}$, τότε $\epsilon^{(k+1)} = 0.1\epsilon^{(k)}$. Σε αντίθετη περίπτωση $\epsilon^{(k+1)} = \epsilon^{(k)}$ και η διαδικασία επαναλαμβάνεται από το **Βήμα 1**.

Ο αλγόριθμος τερματίζεται όταν το ϵ πάρει μια πολύ μικρή τιμή. Στον αλγόριθμο που προγραμματίστηκε σε αυτήν τη διπλωματική εργασία ο αλγόριθμος τερματίζεται όταν $\epsilon = 10^{-15}$.

4.5 MMA και Συζυγής Μέθοδος στη Βελτιστοποίηση Τοπολογίας

Όπως γίνεται εύκολα κατανοητό από την ανάπτυξη της μεθόδου, σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης είναι αναγκαίος ο υπολογισμός των παραγώγων ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού (στη συγκεκριμένη περίπτωση, ως προς το πορώδες), της συνάρτησης στόχου αλλά και όλων των περιορισμών που τίθενται σε κάθε περίπτωση, μεμονωμένα.

Αυτό δεν συμβαίνει στην περίπτωση όπου χρησιμοποιείται η μέθοδος της απότομης καθόδου, όπου πρώτα διαμορφώνεται η σταθμισμένη συνάρτηση στόχος που περιλαμβάνει και τις συναρτήσεις των περιορισμών, και στη συνέχεια λύνεται το συζυγές πρόβλημα για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, με αποτέλεσμα να λύνεται μια φορά το ευθύ και μια το συζυγές πρόβλημα σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης.

Από την άλλη μεριά, για τη μέθοδο των κινουμένων ασυμπτώτων χρειάζεται να επιλυθούν τόσα συζυγή προβλήματα, όσα και το άθροισμα των συναρτήσεων των περιορισμών και της συνάρτησης στόχου.

4.6 Ένα Απλό Παράδειγμα

Στο παράδειγμα που ακολουθεί θα παρουσιαστεί αναλυτικά πως δημιουργούνται οι προσεγγιστικές συναρτήσεις που αντικαθιστούν τις πραγματικές στην επίλυση του υπο-προβλήματος. Οι προσεγγιστικές συναρτήσεις υπολογίζονται και με τη μέθοδο MMA και με τη μέθοδο GCMMA. Το πρόβλημα που επιλύεται είναι

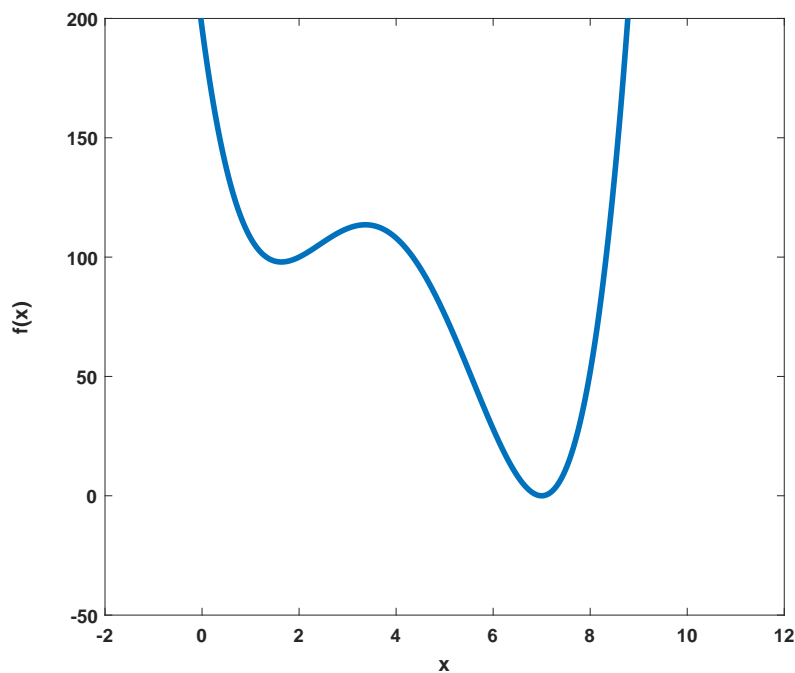
Ελαχιστοποίηση της:

$$f_0 = ((x - 1)^2 + 3)(x - 7)^2$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} f_1 &= x^2 - 9 \leq 0 \\ 0 &\leq x \leq 8 \end{aligned}$$

Η μορφή της προς ελαχιστοποίηση συνάρτησης παρουσιάζεται στο σχήμα 5.12



Σχήμα 4.1: Συνάρτηση f_0

Στα σχήματα που ακολουθούν, με μπλε παρουσιάζονται οι πραγματικές εξισώσεις f_i και με πορτοκαλί οι προσεγγιστικές \tilde{f}_i , ενώ με κόκκινο αστερίσκο θα παριστάνεται η τρέχουσα λύση της βελτιστοποίησης. Η αναλυτική λύση του προβλήματος είναι $x = 1.6340$.

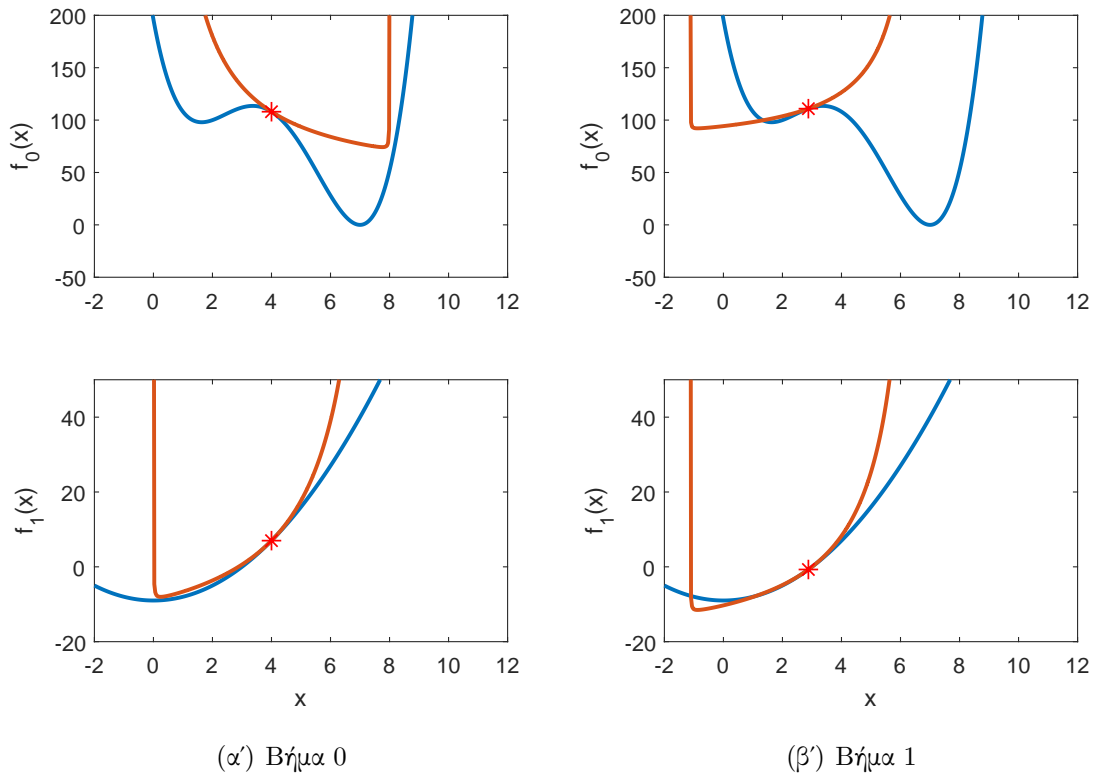
4.6.1 Διαμόρφωση του Προσεγγιστικού Προβλήματος με τη Μέθοδο MMA

Βήμα 0

Επιλέγεται ένα αρχικό σημείο $x^{(0)} = 4$. Υπολογίζεται η τιμή της $f_0(4) = 108$ και της $f_1(4) = 7$ και των παραγώγων τους $\frac{\partial f_0}{\partial x}(4) = -18$ και $\frac{\partial f_1}{\partial x}(4) = 8$ αντίστοιχα. Οι τιμές των ασυμπτώτων $L^{(0)} = 0$ και $U^{(0)} = 8$ από τις εξισώσεις 4.12 και οι τιμές των ορίων του x , $\alpha^{(0)} = 0.4$ και $\beta^{(0)} = 7.6$ από τις εξισώσεις 4.7 και 4.8. Από τις εξισώσεις 4.4 και 4.5 υπολογίζονται τα $p_0^{(0)} = 0.29$, $q_0^{(0)} = 288.29$ και $p_1^{(0)} = 128.13$, $q_1^{(0)} = 0.13$. Έτσι μέσω της εξίσωσης 4.3 υπολογίζονται οι προσεγγιστικές συναρτήσεις $\tilde{f}_0^{(0)} = \frac{0.29}{8-x} + \frac{288.29}{x} + 21,456$ και $\tilde{f}_1^{(0)} = \frac{128.13}{8-x} + \frac{0.13}{x} + 31,460$. Στη συνέχεια, μέσω της μεθόδου που περιγράφεται στην ενότητα 4.4 επιλύεται το προσεγγιστικό πρόβλημα, η λύση του οποίου, $\hat{x}^{(0)} = 2.88$, αποτελεί το αρχικό σημείο του επόμενου βήματος.

Βήμα 1

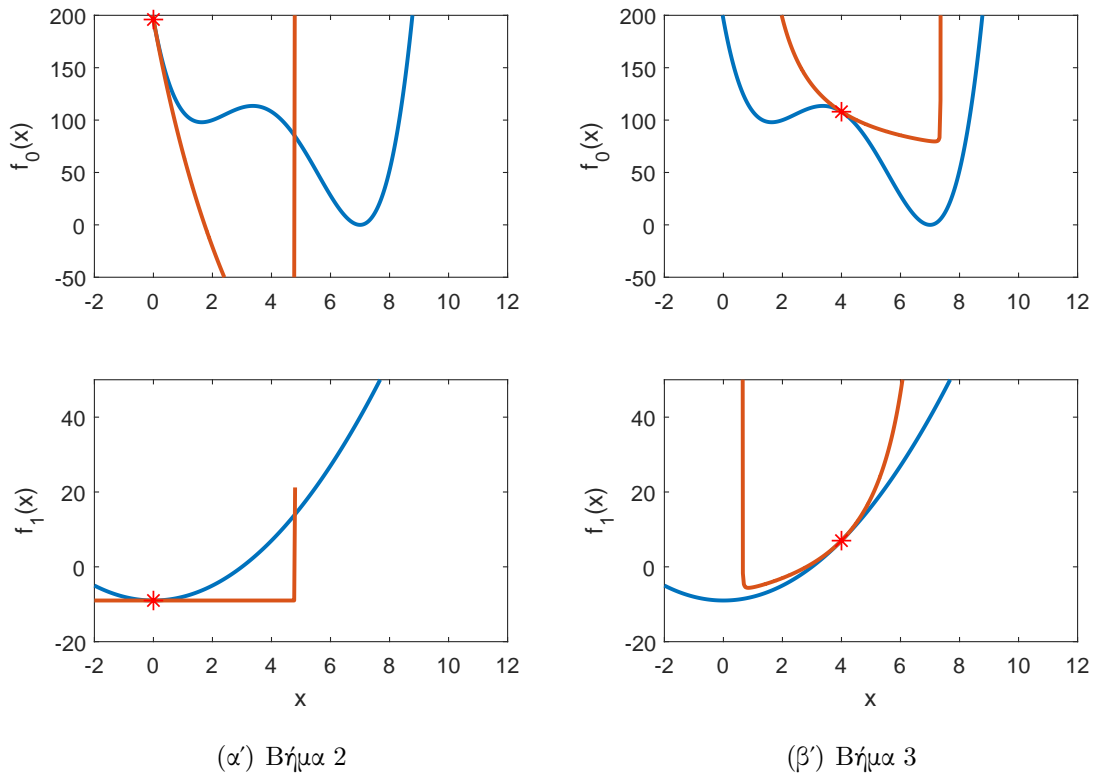
Το αρχικό σημείο που προέκυψε από τον προηγούμενο κύκλο είναι το $x^{(1)} = 2.88$. Υπολογίζεται η τιμή της $f_0(2.88) = 110.90$ και της $f_1(2.88) = -0.71$ και των παραγώγων τους $\frac{\partial f_0}{\partial x}(2.88) = 9.99$ και $\frac{\partial f_1}{\partial x}(2.88) = 5.76$ αντίστοιχα. Οι τιμές των ασυμπτώτων $L^{(1)} = -1.12$ και $U^{(1)} = 6.88$ από τις εξισώσεις 4.12 και οι τιμές των ορίων του x , $\alpha^{(1)} = 0$ και $\beta^{(1)} = 6.48$ από τις εξισώσεις 4.7 και 4.8. Από τις εξισώσεις 4.4 και 4.5 υπολογίζονται τα $p_0^{(1)} = 160.11$, $q_0^{(1)} = 0.16$ και $p_1^{(1)} = 92.21$, $q_1^{(1)} = 0.092$. Έτσι μέσω της εξίσωσης 4.3 υπολογίζονται οι προσεγγιστικές συναρτήσεις $\tilde{f}_0^{(1)}$ και $\tilde{f}_1^{(1)}$. Στη συνέχεια, μέσω της μεθόδου που περιγράφεται στην ενότητα 4.4 επιλύεται το προσεγγιστικό πρόβλημα, η λύση του οποίου, $\hat{x}^{(1)} = 3 \cdot 10^{-8}$, αποτελεί το αρχικό σημείο του επόμενου βήματος.



Σχήμα 4.2: Βήμα 0 και Βήμα 1.

Βήμα 2 Εκτελώντας τα ίδια βήματα με πριν, με αρχικό σημείο το $x^{(2)} = 3 \cdot 10^{-8}$, προκύπτουν οι παρακάτω τιμές: $f_0(3 \cdot 10^{-8}) = 196$, $f_1(3 \cdot 10^{-8}) = -9$, $\frac{\partial f_0}{\partial x}(3 \cdot 10^{-8}) = -154$ και $\frac{\partial f_1}{\partial x}(3 \cdot 10^{-8}) = 6 \cdot 10^{-8}$. Οι τιμές των ασυμπτώτων $L^{(2)} = -4.8$ και $U^{(2)} = 4.8$ και οι τιμές των ορίων του x , $\alpha^{(2)} = 0$ και $\beta^{(2)} = 4$. Τα $p_0^{(2)} = 3.55$, $q_0^{(2)} = 3550$ και $p_1^{(2)} = 3 \cdot 10^{-5}$, $q_1^{(2)} = 2.88 \cdot 10^{-5}$. Τέλος, επιλύεται το προσεγγιστικό πρόβλημα και προκύπτει το νέο σημείο, $\hat{x}^{(2)} = 4$.

Βήμα 3 Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, με αρχικό σημείο το $x^{(3)} = 4$ και υπολογίζοντας τα παρακάτω μεγέθη: $f_0(4) = 108$, $f_1(4) = 7$, $\frac{\partial f_0}{\partial x}(4) = -18$ και $\frac{\partial f_1}{\partial x}(4) = 8$, $L^{(3)} = 0.64$ και $U^{(3)} = 7.36$, $\alpha^{(3)} = 0.98$ και $\beta^{(3)} = 7.02$, $p_0^{(3)} = 0.20$, $q_0^{(3)} = 203.41$ και $p_1^{(3)} = 90.41$, $q_1^{(3)} = 0.09$, προκύπτει από την επίλυση του υποπροβλήματος το νέο σημείο $\hat{x}^{(3)} = 2.82$.



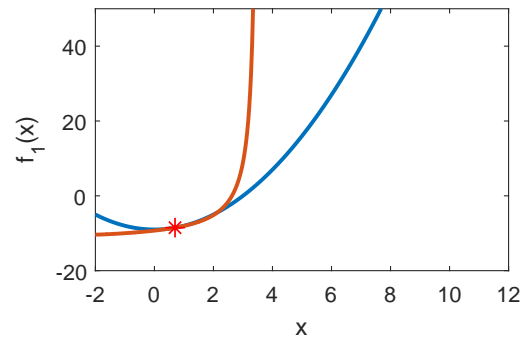
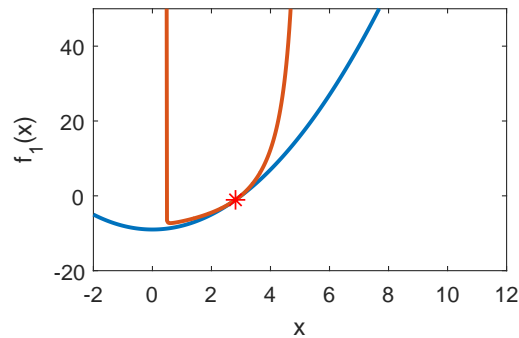
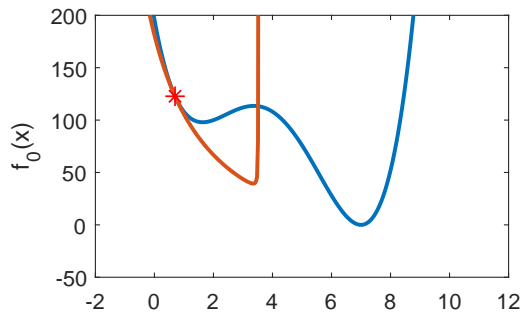
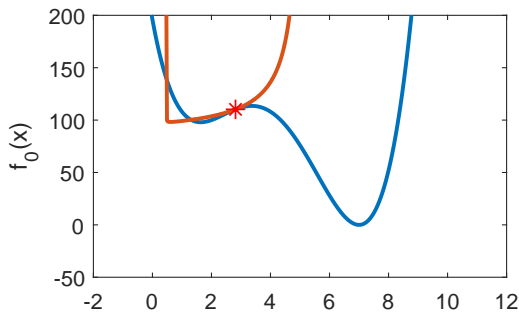
Σχήμα 4.3: Βήμα 2 και Βήμα 3.

Βήμα 4

Έχοντας ως αρχικό σημείο το $x^{(4)} = 2.82$, του προηγούμενου κύκλου, υπολογίζονται οι τιμές $f_0(2.82) = 110.24$ και $f_1(2.82) = -1.07$ καθώς και οι τιμές των παραγώγων του, $\frac{\partial f_0}{\partial x}(2.82) = 10.89$ και $\frac{\partial f_1}{\partial x}(2.82) = 5.63$ αντίστοιχα. Οι τιμές των ασυμπτώτων $L^{(4)} = 0.46$ και $U^{(4)} = 5.17$ και οι τιμές των ορίων του x , $\alpha^{(4)} = 0.70$ και $\beta^{(4)} = 4.93$. Επίσης υπολογίζονται και τα $p_0^{(4)} = 60.31$, $q_0^{(4)} = 0.06$ και $p_1^{(4)} = 31.18$, $q_1^{(4)} = 0.03$ και οι προσεγγιστικές συναρτήσεις $\tilde{f}_0^{(4)}$ και $\tilde{f}_1^{(4)}$. Τέλος, μετά την επίλυση του προσεγγιστικού προβλήματος προκύπτει το αρχικό σημείο, $\hat{x}^{(4)} = 0.70$, του βήματος 5.

Βήμα 5

Με αφετηρία το $x^{(5)} = 0.70$, του βήματος που προηγήθηκε υπολογίζονται τα ακόλουθα μεγέθη: $f_0(0.70) = 122.74$ και $f_1(0.70) = -8.51$, $\frac{\partial f_0}{\partial x}(0.70) = -62.91$ και $\frac{\partial f_1}{\partial x}(0.70) = 1.40$, $L^{(5)} = -2.12$ και $U^{(5)} = 3.52$, τα όρια του x , $\alpha^{(5)} = 0$ και $\beta^{(5)} = 3.24$, $p_0^{(5)} = 0.50$, $q_0^{(5)} = 501.67$ και $p_1^{(5)} = 11.14$, $q_1^{(5)} = 0.01$. Αμέσως μετά υπολογίζονται οι προσεγγιστικές συναρτήσεις $\tilde{f}_0^{(5)}$ και $\tilde{f}_1^{(5)}$ και τελικά το αρχικό σημείο του επόμενου βήματος, $\hat{x}^{(5)} = 2.63$.



(α') Βήμα 4

(β') Βήμα 5

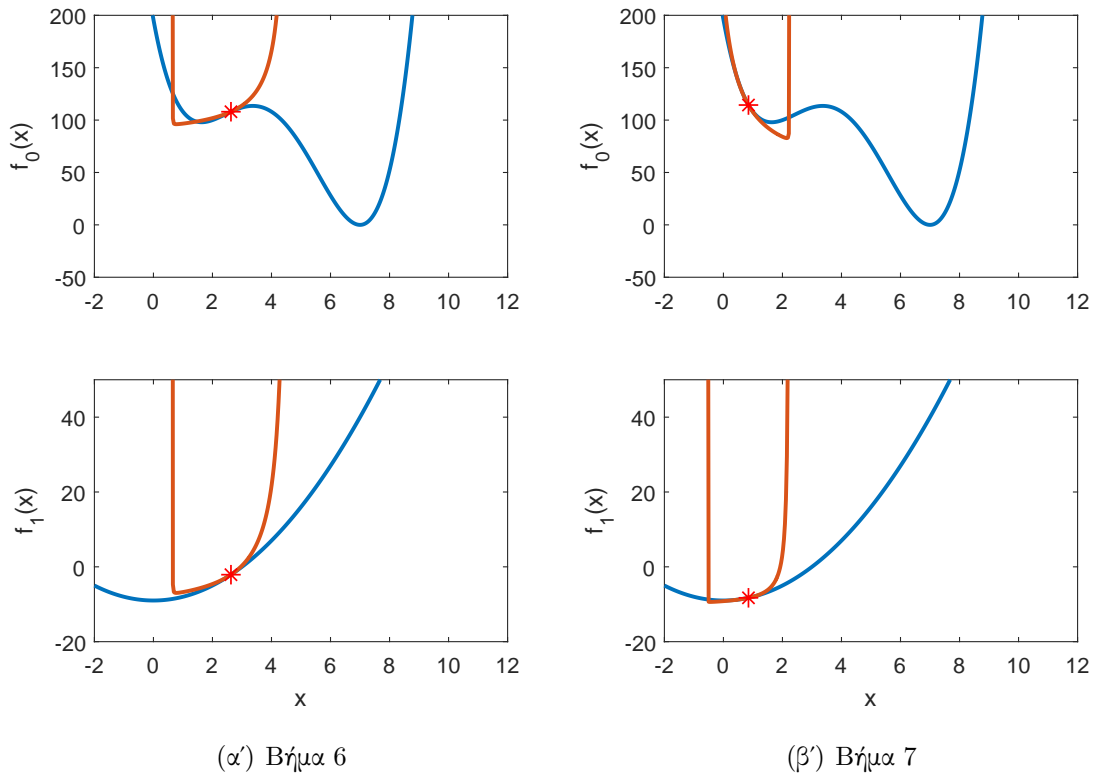
Σχήμα 4.4: Βήμα 4 και Βήμα 5.

Βήμα 6

Με αρχικό σημείο το $x^{(6)} = 2.63$, που προέκυψε από τον προηγούμενο κύκλο, υπολογίζονται οι τιμές των $f_0(2.63) = 107.99$ και $f_1(2.63) = -2.1$, $\frac{\partial f_0}{\partial x}(2.63) = 12.84$ και $\frac{\partial f_1}{\partial x}(2.63) = 5.25$, $L^{(6)} = 0.65$ και $U^{(6)} = 4.60$ καθώς και οι τιμές των ορίων του x , $\alpha^{(6)} = 0.85$ και $\beta^{(6)} = 4.41$. Υπολογίζονται ακόμα τα $p_0^{(6)} = 50.16$, $q_0^{(6)} = 0.05$ και $p_1^{(6)} = 20.53$, $q_1^{(6)} = 0.02$ καθώς και οι τιμές των $\tilde{f}_0^{(6)}$ και $\tilde{f}_1^{(6)}$. Έτσι, με την επίλυση του προσεγγιστικού προβλήματος προκύπτει η αρχική τιμή, $\hat{x}^{(6)} = 0.85$, του βήματος 7.

Βήμα 7

Το αρχικό σημείο που προέκυψε από τον προηγούμενο κύκλο είναι το $x^{(7)} = 0.85$. Σύμφωνα με αυτό υπολογίζονται οι ποσότητες $f_0(0.85) = 114.38$ και $f_1(0.85) = -8.28$, $\frac{\partial f_0}{\partial x}(0.85) = -48.63$ και $\frac{\partial f_1}{\partial x}(0.85) = 1.70$, $L^{(7)} = -0.53$ και $U^{(7)} = 2.23$, τα όρια $\alpha^{(7)} = 0$ και $\beta^{(7)} = 2.09$, του x , $p_0^{(7)} = 0.09$, $q_0^{(7)} = 93.11$ και $p_1^{(7)} = 3.25$, $q_1^{(7)} = 0.0032$. Έπειτα υπολογίζονται οι προσεγγιστικές συναρτήσεις $\tilde{f}_0^{(7)}$ και $\tilde{f}_1^{(7)}$ και τέλος το αρχικό σημείο του επόμενου βήματος, $\hat{x}^{(7)} = 1.93$.



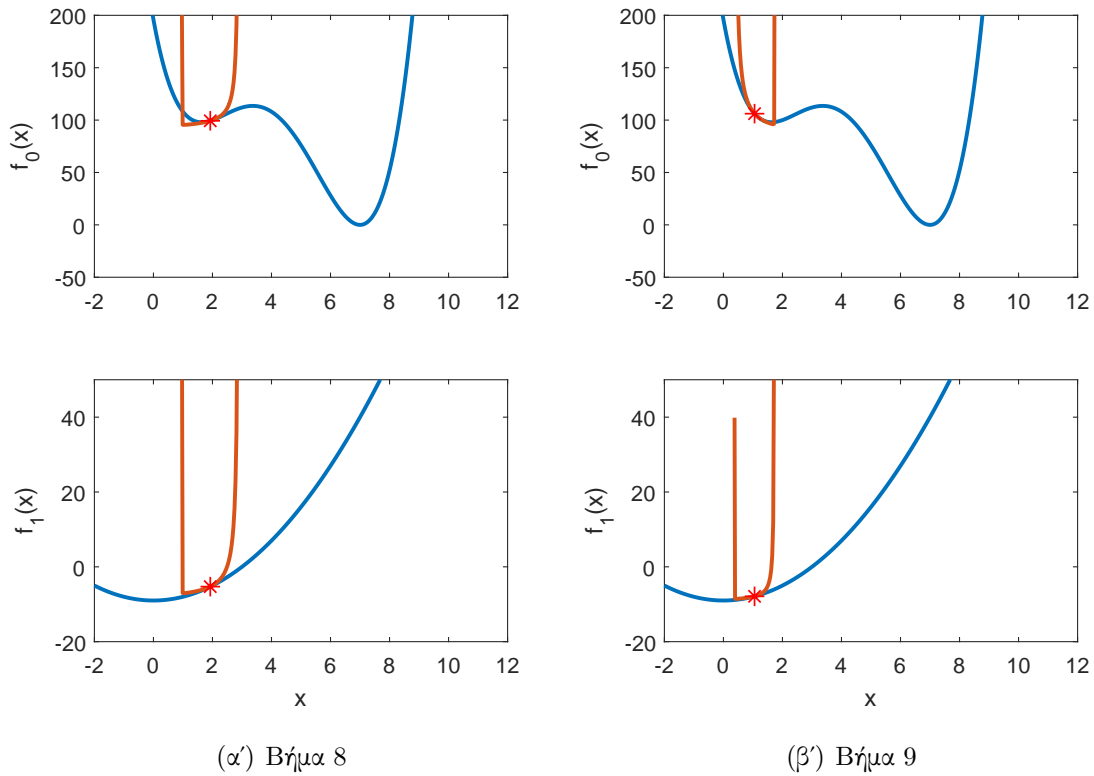
Σχήμα 4.5: Βήμα 6 και Βήμα 7.

Βήμα 8

Με αρχικό σημείο το $x^{(8)} = 1.93$ πραγματοποιείται ο υπολογισμός της τιμής της $f_0(1.93) = 99.31$ και της $f_1(1.93) = -5.29$ αλλά και των παραγώγων τους $\frac{\partial f_0}{\partial x}(1.93) = -8.54$ και $\frac{\partial f_1}{\partial x}(1.93) = 3.85$ αντίστοιχα. Οι τιμές των ασυμπτώτων $L^{(8)} = 0.96$ και $U^{(8)} = 2.89$ και οι τιμές των ορίων του x , $\alpha^{(8)} = 1.05$ και $\beta^{(8)} = 2.80$ καθώς και τα $p_0^{(8)} = 8.01$, $q_0^{(8)} = 0.01$ και $p_1^{(8)} = 3.61$, $q_1^{(8)} = 0.0036$ και οι $\tilde{f}_0^{(8)}$ και $\tilde{f}_1^{(8)}$. Ακολούθως επιλύεται το προσεγγιστικό πρόβλημα, η λύση του οποίου $\hat{x}^{(8)} = 1.05$ αποτελεί το αρχικό σημείο του επόμενου βήματος.

Βήμα 9

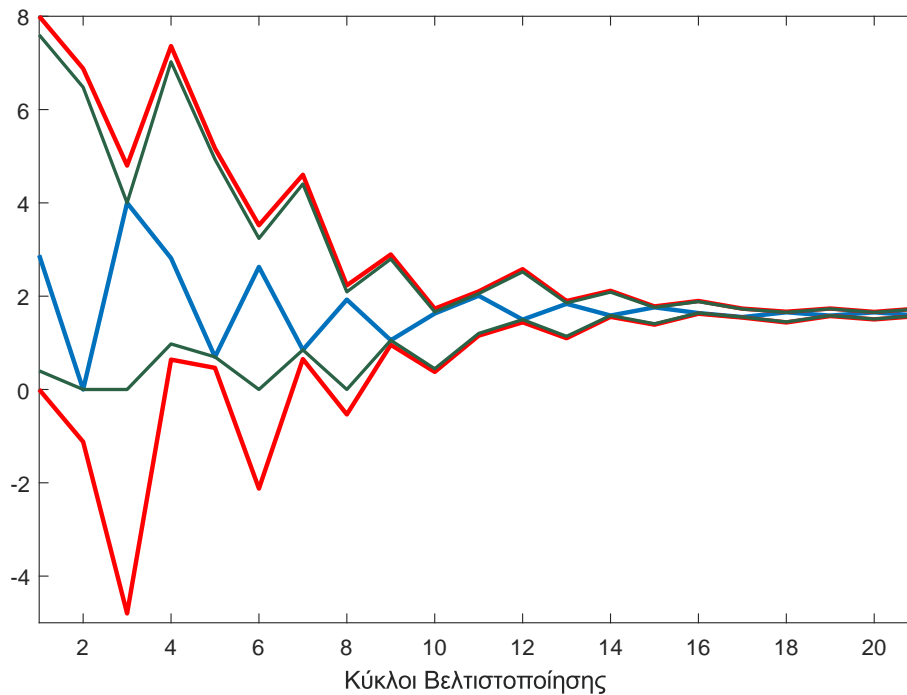
Στο συγκεκριμένο βήμα, με αρχικό σημείο το $x^{(9)} = 1.05$ υπολογίζεται η τιμή της $f_0(1.05) = 106.14$ και της $f_1(1.05) = -7.89$ αλλά και των παραγώγων τους $\frac{\partial f_0}{\partial x}(1.05) = -31.84$ και $\frac{\partial f_1}{\partial x}(1.05) = 2.11$ αντίστοιχα. Ακολουθεί ο υπολογισμός των ποσοτήτων $L^{(9)} = 0.38$ και $U^{(9)} = 1.73$, των ορίων του x , $\alpha^{(9)} = 0.45$ και $\beta^{(9)} = 1.66$, $p_0^{(9)} = 0.015$, $q_0^{(9)} = 14.63$ και $p_1^{(9)} = 0.97$, $q_1^{(9)} = 9.7 \cdot 10^{-4}$ καθώς και $\tilde{f}_0^{(9)}$ και $\tilde{f}_1^{(9)}$. Τέλος, μέσω της επίλυσης του προσεγγιστικού προβλήματος προκύπτει $\hat{x}^{(9)} = 1.63$, το οποίο αποτελεί το αρχικό σημείο του επόμενου βήματος.



Σχήμα 4.6: Βήμα 8 και Βήμα 9.

Βήμα	x	f_0	f_1	L	U	α	β	\hat{x}
0	4	108	7	0	8	0.4	7.6	2.88
1	2.88	110.90	-0.71	-1.12	6.88	0	6.48	$3 \cdot 10^{-8}$
2	$3 \cdot 10^{-8}$	196	-9	-4.8	4.8	0	4	4
3	4	108	7	0.64	7.36	0.98	7.02	2.82
4	2.82	110.24	-1.07	0.46	5.17	0.70	4.93	0.70
5	0.70	122.74	-8.51	-2.12	3.52	0	3.24	2.63
6	2.63	107.99	-2.1	0.65	4.60	0.85	4.41	0.85
7	0.85	114.38	-8.28	-0.53	2.23	0	2.09	1.93
8	1.93	99.31	-5.29	0.96	2.89	1.05	2.80	1.05
9	1.05	106.14	-7.89	0.38	1.73	0.45	1.66	1.63

Πίνακας 4.1: Πινακοποιημένη παρουσίαση των αποτελεσμάτων κάθε βήματος της περίπτωσης που αναλύθηκε εκτενώς στην ενότητα 4.6.1.



Σχήμα 4.7: Διάγραμμα σύγκλισης. Με μπλε χρώμα παρουσιάζεται η τιμή του x , με κόκκινο οι τιμές των ασυμπτωτών L και U , και με πράσινο τα όρια α και β , καθώς προχωρά η μέθοδος.

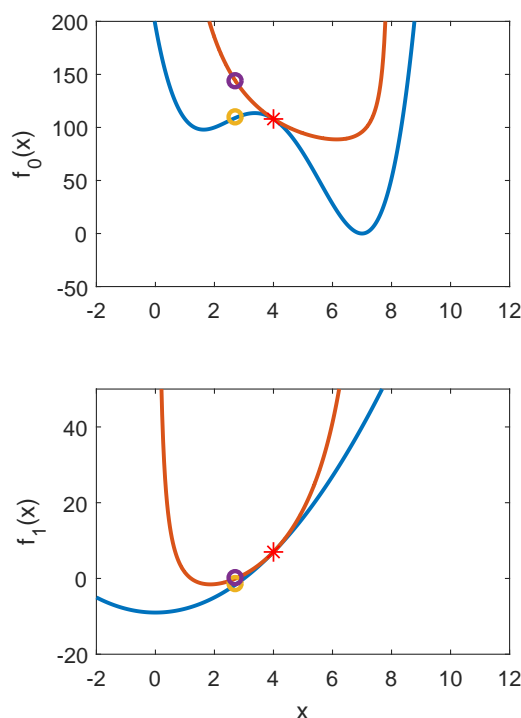
Όπως φαίνεται από το σχήμα 4.7 η μέθοδος συγκλίνει περίπου στους 20 κύκλους. Επίσης από το σχήμα αυτό εξάγονται κάποια χρήσιμα συμπεράσματα. Για παράδειγμα, παρατηρείται ότι οι ασύμπτωτες L και U μπορούν να ξεφύγουν από τα όρια x^{max} και x^{min} της μεταβλητής σχεδιασμού, ενώ τα όρια α και β όχι. Επίσης παρατηρείται ότι ο μηχανισμός που οδηγεί τη μέθοδο στη σύγκλιση είναι το κλείσιμο της ψαλίδας μεταξύ άνω και κάτω ασύμπτωτης, κάτι που παρατηρείται και από τα προηγούμενα σχήματα, στα οποία παρουσιάζονται αναλυτικά τα πρώτα βήματα της μεθόδου.

4.6.2 Διαμόρφωση του Προσεγγιστικού Προβλήματος με τη Μέθοδο GCMMA

Βήμα 0

Επιλέγεται ένα αρχικό σημείο $x^{(0,0)} = 4$. Υπολογίζεται η τιμή της $f_0(4) = 108$ και της $f_1(4) = 7$ και των παραγώγων τους $\frac{\partial f_0}{\partial x}(4) = -18$ και $\frac{\partial f_1}{\partial x}(4) = 8$ αντίστοιχα. Οι τιμές των ασυμπτωτών $L^{(0)} = 0$ και $U^{(0)} = 8$ από τις εξισώσεις 4.12 και οι τιμές των ορίων του x , $\alpha^{(0)} = 0.4$ και $\beta^{(0)} = 7.6$ από τις εξισώσεις 4.7 και 4.8. Ύστερα, υπολογίζονται οι αρχικές τιμές των παραμέτρων $\rho_0^{(0,0)} = 14.4$ και $\rho_1^{(0,0)} = 6.4$ από την

εξίσωση 4.19 και ξεκινά το βήμα 0 της εσωτερικής επανάληψης. Από τις εξισώσεις 4.16 και 4.17 υπολογίζονται τα $p_0^{(0,0)} = 29.09$, $q_0^{(0,0)} = 317.09$ και $p_1^{(0,0)} = 140.93$, $q_1^{(0,0)} = 12.93$. Έτσι μέσω της εξίσωσης 4.15 υπολογίζονται οι προσεγγιστικές συναρτήσεις $\tilde{f}_0^{(0,0)}$ και $\tilde{f}_1^{(0,0)}$. Στη συνέχεια, επιλύεται το προσεγγιστικό πρόβλημα όπως περιγράφεται στην ενότητα 4.4. Από την επίλυση του προβλήματος προκύπτει το νέο σημείο $\hat{x}^{(0,0)} = 2.73$. Στο σημείο αυτό, ελέγχεται το πρόσημο της παραμέτρου $\delta_i^{(k,v)}$, που προκύπτει από την εξίσωση 4.25 και καθορίζεται από τη διαφορά της τιμής της πραγματικής συνάρτησης με αυτήν της προσεγγιστικής συνάρτησης, στο σημείο $\hat{x}^{(k,v)}$ (αφού $d_i^{(k)}(x) > 0$ εξ ορισμού σε κάθε περίπτωση). Στα σχήματα που φαίνονται στη συνέχεια, η τιμή της πραγματικής συνάρτησης στο σημείο $\hat{x}^{(k,v)}$ θα παρουσιάζεται με κίτρινο κύκλο, ενώ αυτή της προσεγγιστικής συνάρτησης με μωβ κύκλο. Αν αυτή η διαφορά είναι θετική για οποιαδήποτε από τις συναρτήσεις f_i , τότε η μέθοδος προχωρά στο επόμενο εσωτερικό βήμα $v = v + 1$ αναεώνοντας τις παραμέτρους ρ_i σύμφωνα με τη σχέση 4.26. Όταν η παράμετρος $\delta_i^{(k,v)}$ γίνει αρνητική για κάθε i , ο εσωτερικός βρόχος τερματίζεται και ξεκινά το επόμενο εξωτερικό βήμα της μεθόδου $k + 1$. Όπως είναι προφανές και από το σχήμα 4.8 οι παράμετροι $\delta_0^{(0,0)}$ και $\delta_1^{(0,0)}$ είναι αρνητικές και έτσι ο εσωτερικός βρόχος τερματίζεται και ορίζεται $x^{(1,0)} = \hat{x}^{(0,0)} = 2.73$.

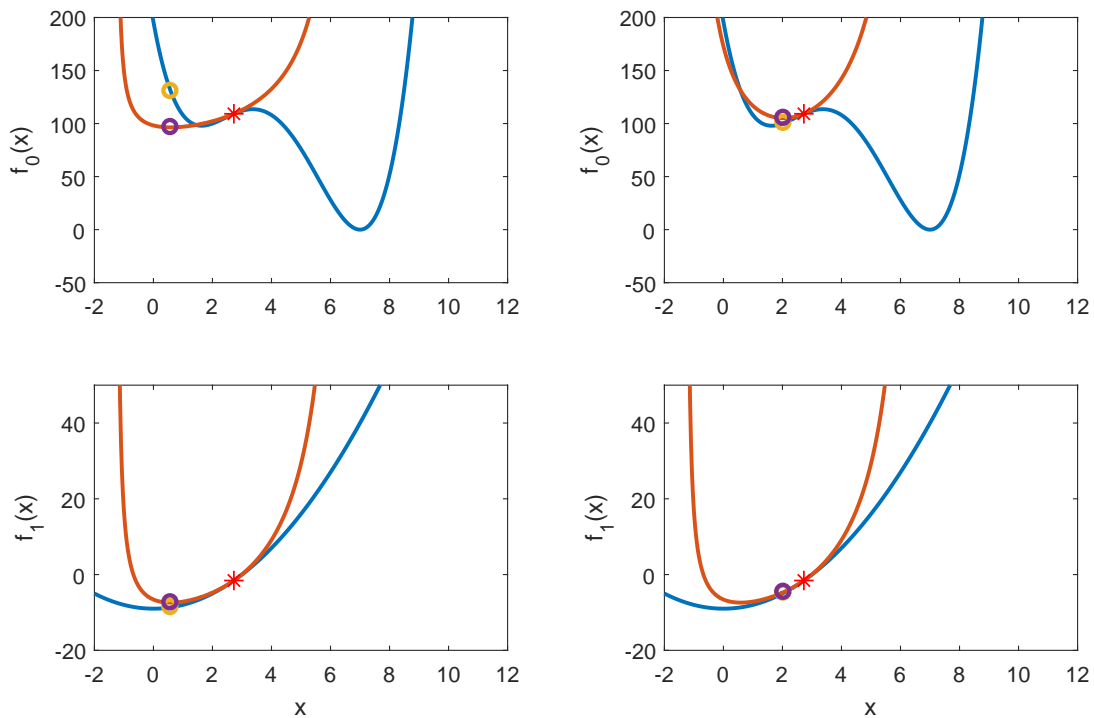


Σχήμα 4.8: Εξωτερικό Βήμα 0 - Εσωτερικό Βήμα 0.

Βήμα 1

Το αρχικό σημείο προέκυψε από το προηγούμενο βήμα $x^{(1,0)} = 2.73$. Υπολογίζεται η τιμή της $f_0(2.73) = 109.22$ και της $f_1(2.73) = -1.57$ και των παραγώγων τους $\frac{\partial f_0}{\partial x}(2.73) = 11.95$ και $\frac{\partial f_1}{\partial x}(2.73) = 5.45$

Οι τιμές των ασυμπτώτων $L^{(1)} = -1.27$ και $U^{(1)} = 6.73$ από τις εξισώσεις 4.12 και οι τιμές των ορίων του x , $\alpha^{(1)} = 0$ και $\beta^{(1)} = 6.33$ από τις εξισώσεις 4.7 και 4.8. Έστερα, υπολογίζεται η αρχική τιμή των παραμέτρων, $\rho_0^{(1,0)} = 9.56$ και $\rho_1^{(1,0)} = 4.36$ από την εξίσωση 4.19 και ξεκινά το βήμα 0 της εσωτερικής επανάληψης. Από τις εξισώσεις 4.16 και 4.17 υπολογίζονται τα $p_0^{(1,0)} = 201.48$, $q_0^{(1,0)} = 19.31$ και $p_1^{(1,0)} = 96.05$, $q_1^{(1,0)} = 8.81$. Έτσι μέσω της εξίσωσης 4.15 υπολογίζονται οι προσεγγιστικές συναρτήσεις $\tilde{f}_0^{(1,0)}$ και $\tilde{f}_1^{(1,0)}$. Στη συνέχεια, επιλύεται το προσεγγιστικό πρόβλημα όπως περιγράφεται στην ενότητα 4.4. Από την επίλυση του προβλήματος προκύπτει το νέο σημείο $\hat{x}^{(1,0)} = 0.59$. Όπως είναι προφανές από το σχήμα 4.9(α') ισχύει, $\delta_0^{(1,0)} > 0$, ενώ $\delta_1^{(1,0)} < 0$. Άρα ο εσωτερικός βρόχος προχωρά στο βήμα 1 με $\rho_0^{(1,1)} = 95.58$ και $\rho_1^{(1,1)} = \rho_1^{(1,0)} = 4.36$ που προέκυψαν από την εξίσωση 4.26. Από τις εξισώσεις 4.16 και 4.17 υπολογίζονται τα $p_0^{(1,1)} = 382.53$, $q_0^{(1,1)} = 191.36$ και $p_1^{(1,1)} = 96.05$, $q_1^{(1,1)} = 8.81$. Έτσι μέσω της εξίσωσης 4.15 υπολογίζονται οι προσεγγιστικές συναρτήσεις $\tilde{f}_0^{(1,1)}$ και $\tilde{f}_1^{(1,1)}$. Στη συνέχεια, επιλύεται το προσεγγιστικό πρόβλημα όπως περιγράφεται στην ενότητα 4.4. Από την επίλυση του προβλήματος προκύπτει το νέο σημείο $\hat{x}^{(1,1)} = 2.04$. Τέλος υπολογίζονται οι τιμές των παραμέτρων $\delta_i^{(1,1)}$ για τις οποίες προκύπτει ότι $\delta_i^{(1,1)} < 0$ για κάθε i . Άρα ο αλγόριθμος προχωρά στο επόμενο εξωτερικό βήμα με $x^{(2,0)} = \hat{x}^{(1,1)} = 2.04$.



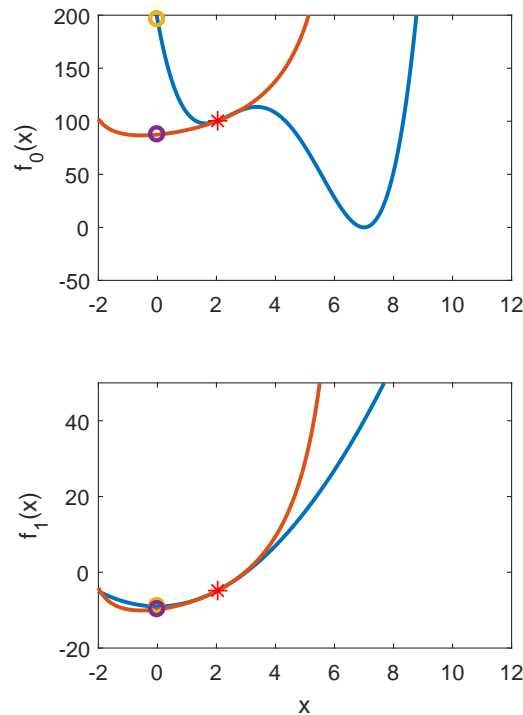
(α') Εξωτερικό Βήμα 1 - Εσωτερικό Βήμα 0

(β') Εξωτερικό Βήμα 1 - Εσωτερικό Βήμα 1

Σχήμα 4.9: Εξωτερικό Βήμα 1.

Βήμα 2

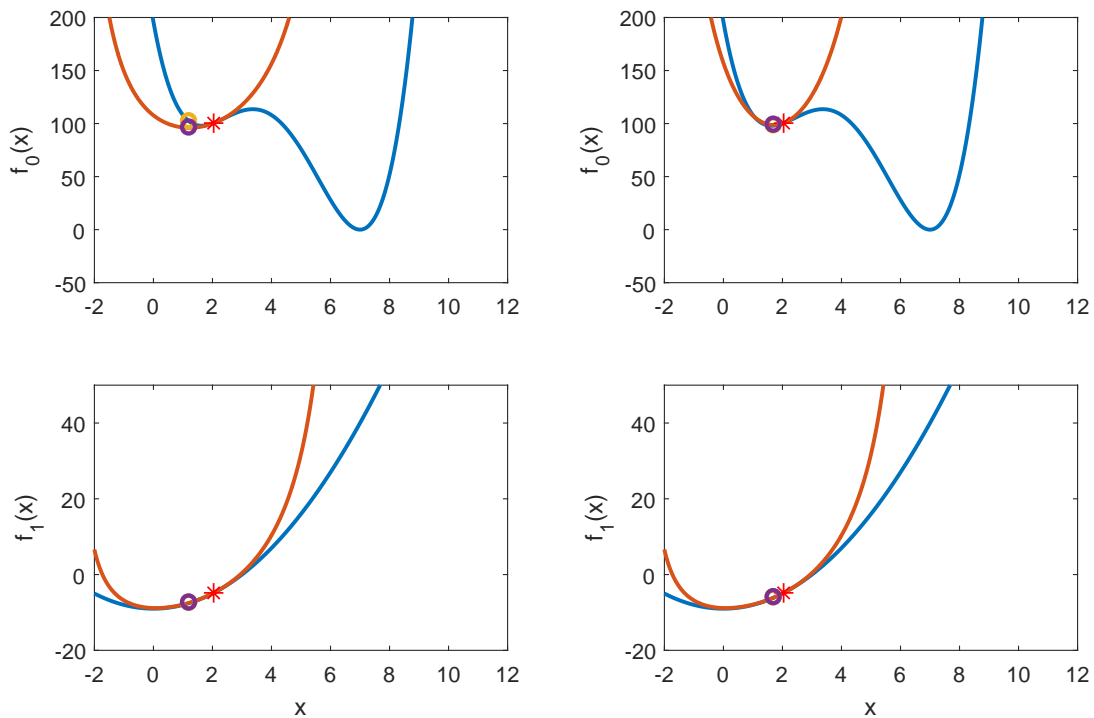
Το αρχικό σημείο προέκυψε από το προηγούμενο βήμα $x^{(2,0)} = 2.04$. Υπολογίζεται η τιμή της $f_0(2.04) = 100.41$ και της $f_1(2.04) = -4.84$ και των παραγώγων τους $\frac{\partial f_0}{\partial x}(2.04) = 10.69$ και $\frac{\partial f_1}{\partial x}(2.04) = 4.08$, οι τιμές των ασυμπτώτων $L^{(2)} = -2.76$ και $U^{(2)} = 6.84$ από τις εξισώσεις 4.12 και οι τιμές των ορίων του x , $\alpha^{(2)} = 0$ και $\beta^{(2)} = 6.04$ από τις εξισώσεις 4.7 και 4.8. Ύστερα, υπολογίζεται η αρχική τιμή των παραμέτρων, $\rho_0^{(2,0)} = 8.55$ και $\rho_1^{(2,0)} = 3.26$ από την εξίσωση 4.19 και ξεκινά το βήμα 0 της εσωτερικής επανάληψης. Από τις εξισώσεις 4.16 και 4.17 υπολογίζονται τα $p_0^{(2,0)} = 271.08$, $q_0^{(2,0)} = 24.87$ και $p_1^{(2,0)} = 103.51$, $q_1^{(2,0)} = 9.50$. Έτσι μέσω της εξίσωσης 4.15 υπολογίζονται οι προσεγγιστικές συναρτήσεις $\tilde{f}_0^{(2,0)}$ και $\tilde{f}_1^{(2,0)}$. Στη συνέχεια, επιλύεται το προσεγγιστικό πρόβλημα όπως περιγράφεται στην ενότητα 4.4. Από την επίλυση του προβλήματος προκύπτει το νέο σημείο $\hat{x}^{(2,0)} = 3 \cdot 10^{-11}$. Όπως είναι προφανές από το σχήμα 4.10, ισχύει $\delta_0^{(2,0)} > 0$, και $\delta_1^{(2,0)} > 0$.



Σχήμα 4.10: Εξωτερικό Βήμα 2 - Εσωτερικό Βήμα 0.

Άρα ο εσωτερικός βρόχος προχωρά στο βήμα 1 με $\rho_0^{(2,1)} = 85.49$ και $\rho_1^{(2,1)} = 6.95$ που προέκυψαν από την εξίσωση 4.26. Από τις εξισώσεις 4.16 και 4.17 υπολογίζονται τα $p_0^{(2,1)} = 492.66$, $q_0^{(2,1)} = 246.46$ και $p_1^{(2,1)} = 114.11$, $q_1^{(2,1)} = 20.09$. Έτσι μέσω της εξίσωσης 4.15 υπολογίζονται οι προσεγγιστικές συναρτήσεις $\tilde{f}_0^{(2,1)}$ και $\tilde{f}_1^{(2,1)}$. Στη συνέχεια, επιλύεται το προσεγγιστικό πρόβλημα όπως περιγράφεται στην ενότητα 4.4. Από την επίλυση του προβλήματος προκύπτει το νέο σημείο $\hat{x}^{(2,1)} = 1.22$. Τέλος υπολογίζονται οι τιμές των παραμέτρων $\delta_i^{(2,1)}$ για τις οποίες προκύπτει ότι $\delta_0^{(2,1)} > 0$ και $\delta_1^{(2,1)} < 0$.

Άρα ο εσωτερικός βρόχος προχωρά στο βήμα 1 με $\rho_0^{(2,2)} = 271.95$ και $\rho_1^{(2,2)} = 6.95$ που προέκυψαν από την εξίσωση 4.26. Από τις εξισώσεις 4.16 και 4.17 υπολογίζονται τα $p_0^{(2,2)} = 1029.70$, $q_0^{(2,2)} = 783.48$ και $p_1^{(2,2)} = 114.11$, $q_1^{(2,2)} = 20.09$. Έτσι μέσω της εξίσωσης 4.15 υπολογίζονται οι προσεγγιστικές συναρτήσεις $\tilde{f}_0^{(2,2)}$ και $\tilde{f}_1^{(2,2)}$. Στη συνέχεια, επιλύεται το προσεγγιστικό πρόβλημα όπως περιγράφεται στην ενότητα 4.4. Από την επίλυση του προβλήματος προκύπτει το νέο σημείο $\hat{x}^{(2,2)} = 1.71$. Τέλος υπολογίζονται οι τιμές των παραμέτρων $\delta_i^{(2,2)}$ για τις οποίες προκύπτει ότι $\delta_i^{(2,2)} > 0$ για κάθε i . Άρα ο αλγόριθμος προχωρά στο επόμενο εξωτερικό βήμα με $x^{(3,0)} = \hat{x}^{(2,2)} = 1.71$.



(α') Εξωτερικό Βήμα 2 - Εσωτερικό Βήμα 1

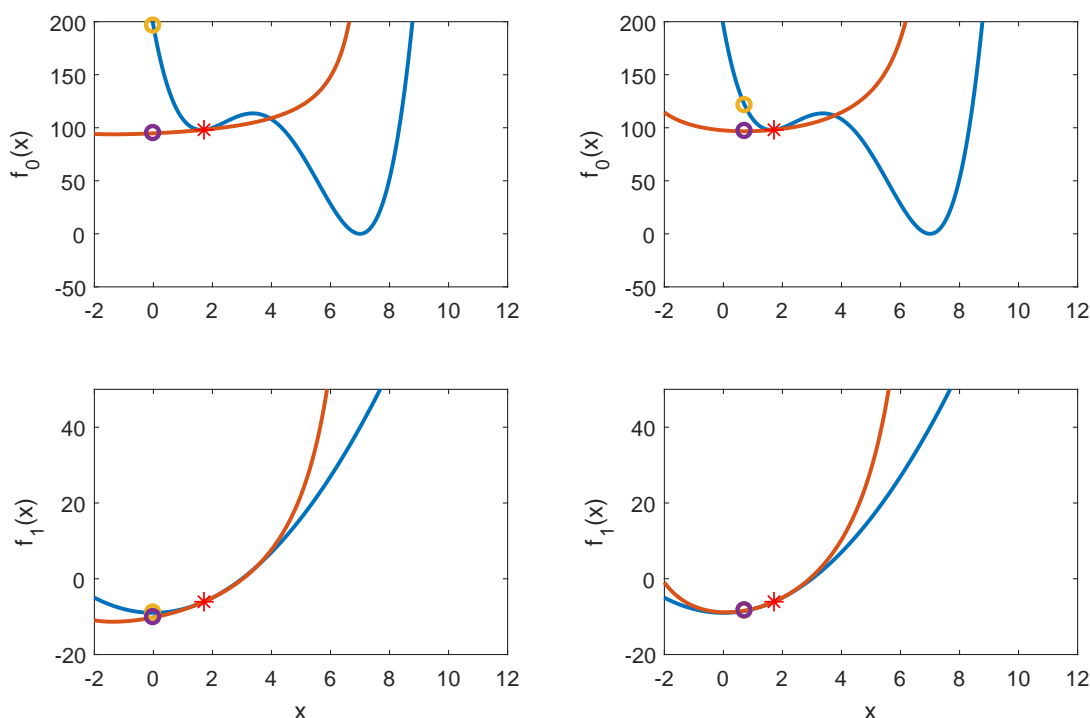
(β') Εξωτερικό Βήμα 2 - Εσωτερικό Βήμα 2

Σχήμα 4.11: Εξωτερικό Βήμα 2.

Βήμα 3

Το αρχικό σημείο προέκυψε από το προηγούμενο βήμα $x^{(3,0)} = 1.71$. Υπολογίζεται η τιμή της $f_0(1.71) = 98.07$ και της $f_1(1.71) = -6.07$ και των παραγώγων τους $\frac{\partial f_0}{\partial x}(1.71) = 2.76$ και $\frac{\partial f_1}{\partial x}(1.71) = 3.43$, οι τιμές των ασυμπτωτών $L^{(3)} = -4.04$ και $U^{(3)} = 7.47$ από τις εξισώσεις 4.12 και οι τιμές των ορίων του x , $\alpha^{(3)} = 0$ και $\beta^{(3)} = 5.71$ από τις εξισώσεις 4.7 και 4.8. Έπειτα, υπολογίζεται η αρχική τιμή των παραμέτρων, $\rho_0^{(3,0)} = 2.21$ και $\rho_1^{(3,0)} = 2.74$ από την εξίσωση 4.19 και ξεκινά το βήμα 0 της εσωτερικής επανάληψης. Από τις εξισώσεις 4.16 και 4.17 υπολογίζονται τα $p_0^{(3,0)} = 100.74$, $q_0^{(3,0)} = 9.24$ και $p_1^{(3,0)} = 125.13$, $q_1^{(3,0)} = 11.48$. Έτσι μέσω της εξίσωσης 4.15 υπολογίζονται οι προσεγγιστικές συναρτήσεις $\tilde{f}_0^{(3,0)}$ και $\tilde{f}_1^{(3,0)}$. Στη συνέχεια, επιλύεται το προσεγγιστικό πρόβλημα όπως περιγράφεται στην ενότητα 4.4. Από την επίλυση του προβλήματος προκύπτει το νέο σημείο $\hat{x}^{(3,0)} = 8 \cdot 10^{-11}$. Όπως είναι προφανές από το σχήμα 4.12(α') ισχύει, $\delta_0^{(3,0)} > 0$, και $\delta_1^{(3,0)} > 0$. Άρα ο εσωτερικός βρόχος προχωρά στο βήμα 1 με $\rho_0^{(3,1)} = 22.46$ και $\rho_1^{(3,1)} = 12.48$ που προέκυψαν από την εξίσωση 4.26. Από τις εξισώσεις 4.16 και 4.17 υπολογίζονται τα $p_0^{(3,1)} = 183.09$, $q_0^{(3,1)} = 91.59$ και $p_1^{(3,1)} = 165.54$, $q_1^{(3,1)} = 51.88$. Έτσι μέσω της εξίσωσης 4.15 υπολογίζονται οι προσεγγιστικές συναρτήσεις $\tilde{f}_0^{(3,1)}$ και $\tilde{f}_1^{(3,1)}$. Στη συνέχεια, επιλύεται

το προσεγγιστικό πρόβλημα όπως περιγράφεται στην ενότητα 4.4. Από την επίλυση του προβλήματος προκύπτει το νέο σημείο $\hat{x}^{(3,1)} = 0.72$. Ύστερα, υπολογίζονται οι τιμές των παραμέτρων $\delta_i^{(3,1)}$ για τις οποίες προκύπτει ότι $\delta_0^{(3,1)} > 0$ και $\delta_1^{(3,1)} < 0$.



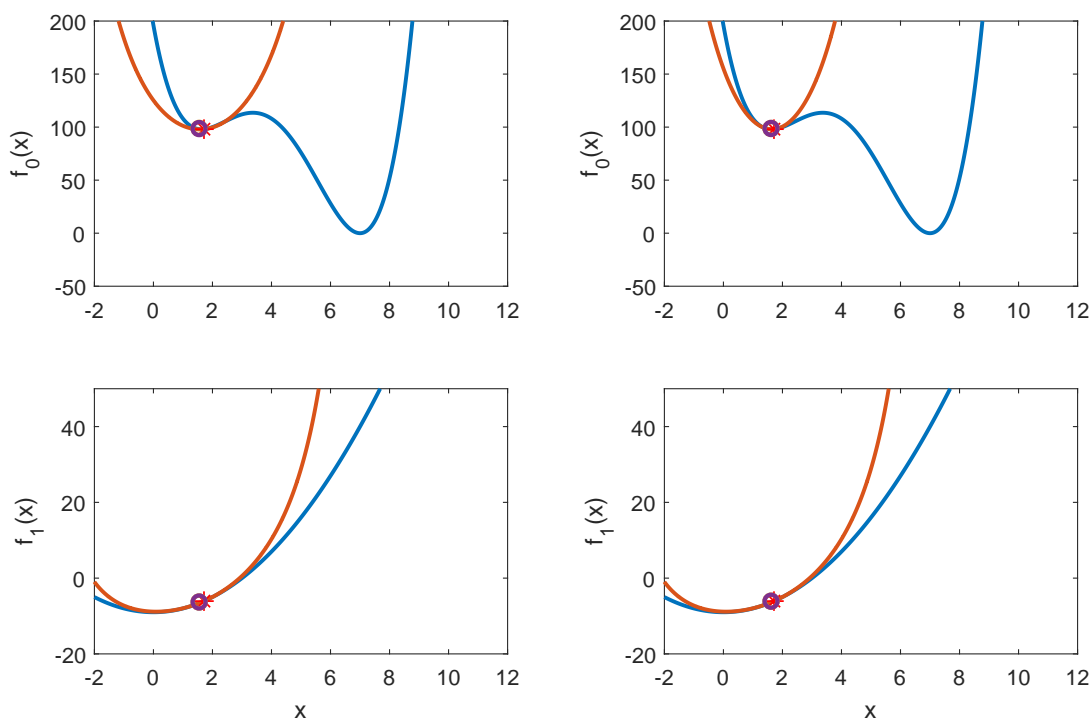
(α') Εξωτερικό Βήμα 3 - Εσωτερικό Βήμα 0

(β') Εξωτερικό Βήμα 3 - Εσωτερικό Βήμα 1

Σχήμα 4.12: Εξωτερικό Βήμα 3.

Άρα, ο εσωτερικός βρόχος προχωρά στο βήμα 2 με $\rho_0^{(3,2)} = 220.63$ και $\rho_1^{(3,2)} = 12.48$ που προέκυψαν από την εξίσωση 4.26. Από τις εξισώσεις 4.16 και 4.17 υπολογίζονται τα $p_0^{(3,2)} = 1006.60$, $q_0^{(3,2)} = 915.10$ και $p_1^{(3,2)} = 165.54$, $q_1^{(3,2)} = 51.88$. Έτσι μέσω της εξίσωσης 4.15 υπολογίζονται οι προσεγγιστικές συναρτήσεις $\tilde{f}_0^{(3,2)}$ και $\tilde{f}_1^{(3,2)}$. Στη συνέχεια, επιλύεται το προσεγγιστικό πρόβλημα όπως περιγράφεται στην ενότητα 4.4. Από την επίλυση του προβλήματος προκύπτει το νέο σημείο $\hat{x}^{(3,2)} = 1.58$. Ύστερα, υπολογίζονται οι τιμές των παραμέτρων $\delta_i^{(3,2)}$ για τις οποίες προκύπτει ότι $\delta_0^{(3,2)} > 0$ και $\delta_1^{(3,2)} < 0$. Άρα ο εσωτερικός βρόχος προχωρά στο βήμα 3 με $\rho_0^{(3,3)} = 435.45$ και $\rho_1^{(3,3)} = 12.48$ που προέκυψαν από την εξίσωση 4.26. Από τις εξισώσεις 4.16 και 4.17 υπολογίζονται τα $p_0^{(3,3)} = 1897.50$, $q_0^{(3,3)} = 1806.21$ και $p_1^{(3,3)} = 165.54$, $q_1^{(3,3)} = 51.88$. Έτσι μέσω της εξίσωσης 4.15 υπολογίζονται οι προσεγγιστικές συναρτήσεις $\tilde{f}_0^{(3,3)}$ και $\tilde{f}_1^{(3,3)}$. Στη συνέχεια, επιλύεται το προσεγγιστικό πρόβλημα όπως περιγράφεται στην ενότητα 4.4. Από την επίλυση του προβλήματος προκύπτει το νέο σημείο $\hat{x}^{(3,3)} = 1.64$. Τέλος, υπολογίζονται οι τιμές των παραμέτρων $\delta_i^{(3,3)}$ για τις οποίες προκύπτει ότι

$\delta_i^{(3,3)} > 0$ για κάθε i . Άρα ο αλγόριθμος προχωρά στο επόμενο εξωτερικό βήμα με $x^{(4,0)} = \hat{x}^{(3,3)} = 1.64$.



(α') Εξωτερικό Βήμα 3 - Εσωτερικό Βήμα 2

(β') Εξωτερικό Βήμα 3 - Εσωτερικό Βήμα 3

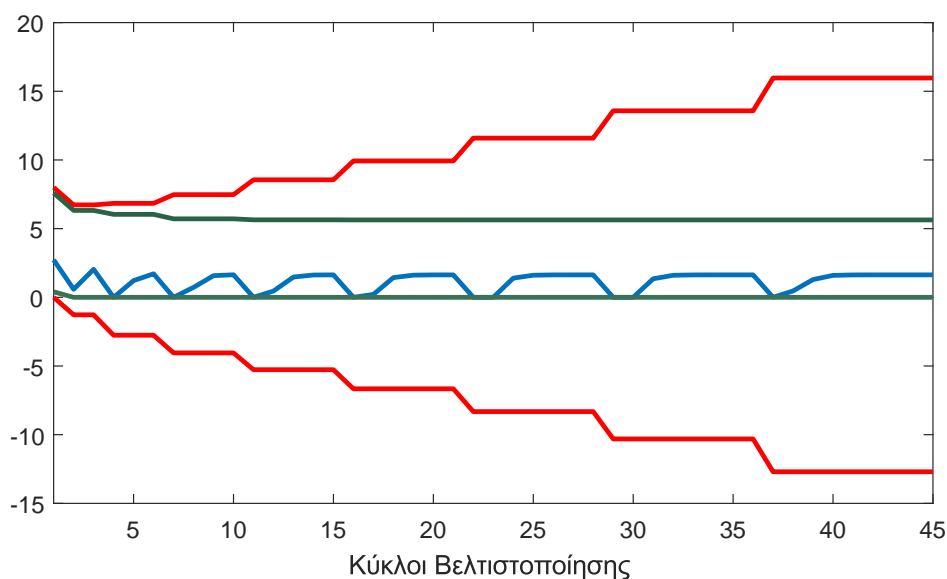
Σχήμα 4.13: Εξωτερικό Βήμα 3.

Η μέθοδος συγκλίνει στη βέλτιστη λύση όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.13.

Εξωτερικό Βήμα	Εσωτερικό Βήμα	x	f_0	f_1	L	U	α	β	\hat{x}
0	0	4	108	7	0	8	0.4	7.6	2.73
1	0	2.73	109	-1.57	-1.27	6.73	0	6.33	0.59
1	1	2.73	109	-1.57	-1.27	6.73	0	6.33	2.04
2	0	2.04	100.42	-4.84	-2.76	6.84	0	6.04	$3.9 \cdot 10^{-11}$
2	1	2.04	100.42	-4.84	-2.76	6.84	0	6.04	1.22
2	2	2.04	100.42	-4.84	-2.76	6.84	0	6.04	1.71
3	0	1.71	98.07	-6.07	-4.05	7.47	0	5.71	$8 \cdot 10^{-11}$
3	1	1.71	98.07	-6.07	-4.05	7.47	0	5.71	0.73
3	2	1.71	98.07	-6.07	-4.05	7.47	0	5.71	1.58
3	3	1.71	98.07	-6.07	-4.05	7.47	0	5.71	1.64

Πίνακας 4.2: Πινακοποιημένη παρουσίαση των αποτελεσμάτων κάθε βήματος της περίπτωσης που αναλύθηκε εκτενώς στην ενότητα 4.6.2.

Η μέθοδος συγκλίνει στη βέλτιστη λύση όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.13.



Σχήμα 4.14: Διάγραμμα σύγκλισης. Με μπλε χρώμα παρουσιάζεται η τιμή του x , με κόκκινο οι τιμές των ασυμπτώτων L και U , και με πράσινο τα όρια α και β , καθώς προχωρά η μέθοδος.

Στο σχήμα 4.14 παρουσιάζεται το διάγραμμα σύγκλισης του αλγορίθμου, όπου περιλαμβάνονται και τα εσωτερικά βήματα. Τα εξωτερικά βήματα της μεθόδου που παρουσιάζονται στο συγκεκριμένο διάγραμμα είναι 9 ενώ η μέθοδος έχει ήδη συγκλίνει στη βέλτιστη λύση 1.6340 από το έκτο βήμα της μεθόδου. Τα σημεία στα οποία ξεκινά ένα νέο εξωτερικό βήμα διακρίνονται στο διάγραμμα, παρατηρώντας τα σημεία όπου αλλάζουν οι τιμές των ασυμπτώτων L και U . Ακόμη από το διάγραμμα 4.14 γίνεται κατανοητό, το πόσο διαφορετικά αξιοποιούνται οι ασύμπτωτες στη μέθοδο GCMMA σε σχέση με την MMA. Στην GCMMA, καθώς ο αλγόριθμος συγκλίνει, οι ασύμπτωτες ανοίγουν, δίνοντας τη δυνατότητα στη μέθοδο να αναζητήσει ένα πιθανώς καλύτερο σημείο σε μεγαλύτερο χώρο.

Κεφάλαιο 5

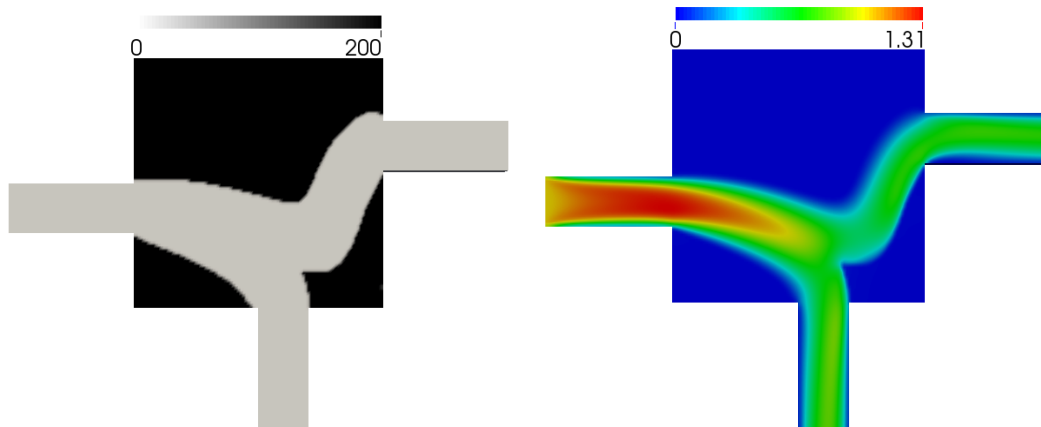
Εφαρμογές της Μεθόδου MMA

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν διάφορες εφαρμογές, με χρήση της μεθόδου MMA, χωρίς αυτό να σημαίνει προτίμηση της MMA έναντι της GCMMA. Γίνεται σύγκριση αποτελεσμάτων με αυτά που προέκυψαν από τη χρήση της μεθόδου της απότομης καθόδου και σχολιάζονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτές τις εφαρμογές.

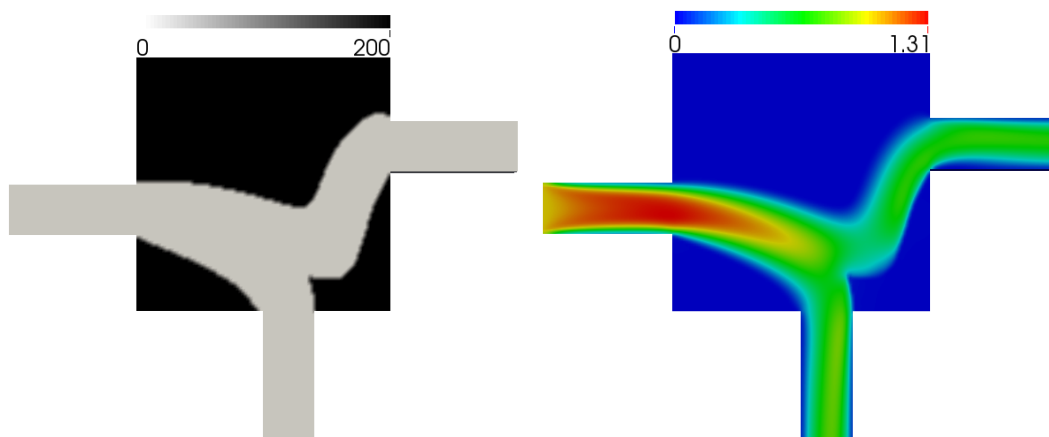
5.1 Αγωγή μιας Εισόδου και Δύο Εξόδων

Η ενότητα αυτή αφορά το ίδιο παράδειγμα που παρουσιάστηκε και στην ενότητα 3.1. Ο αριθμός Reynolds που χαρακτηρίζει τη ροή είναι ο ίδιος $Re = 200$. Στις εφαρμογές που ακολουθούν χρησιμοποιείται η συνάρτηση f_2 . Τα συμπεράσματα του κεφαλαίου 3, για τη τιμή του συντελεστή G_{max} ισχύουν και στην περίπτωση χρήσης της MMA. Ωστόσο, η μέθοδος των κινουμένων ασυμπτώτων παρατηρείται ότι δεν είναι τόσο ευαίσθητη στην αρχικοποίηση της συνάρτησης του πορώδους.

Στις εφαρμογές που ακολουθούν έχει τεθεί ως στόχος η ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης με περιορισμό, να εξέρχεται το 50 % της ροής από κάθε έξοδο.



Σχήμα 5.1: Βελτιστοποίηση τοπολογίας αγωγού μιας εισόδου και δύο εξόδων με περιορισμό, να εξέρχεται το 50 % της ροής από κάθε έξοδο. Αρχικοποίηση του πορώδους στην τιμή $\alpha = 0$ και της συνάρτησης $G = 0$. Αριστερά, παρουσιάζεται το πεδίο της συνάρτησης του πορώδους και δεξιά, φαίνεται το αντίστοιχο πεδίο της ταχύτητας στο τέλος της βελτιστοποίησης. Η τιμή της συνάρτησης στόχου των απωλειών ολικής πίεσης είναι $0.0118704m^5/s^3$. Το ποσοστό της εισερχόμενης ροής που εξέρχεται από την έξοδο 1 είναι 0.529 και από την έξοδο 2 είναι 0.471.



Σχήμα 5.2: Βελτιστοποίηση τοπολογίας αγωγού μιας εισόδου και δύο εξόδων με περιορισμό, να εξέρχεται το 50 % της ροής από κάθε έξοδο. Αρχικοποίηση του πορώδους στην τιμή $\alpha = 1$ και της συνάρτησης $G = 200$. Αριστερά, παρουσιάζεται το πεδίο της συνάρτησης του πορώδους και δεξιά, φαίνεται το αντίστοιχο πεδίο της ταχύτητας στο τέλος της βελτιστοποίησης. Η τιμή της συνάρτησης στόχου των απωλειών ολικής πίεσης είναι $0.0118681m^5/s^3$. Το ποσοστό της εισερχόμενης ροής που εξέρχεται από την έξοδο 1 είναι 0.529 και από την έξοδο 2 είναι 0.471.

Όπως παρατηρείται από τα σχήματα 5.1 και 5.2, η MMA συγκλίνει σχεδόν στο ίδιο αποτέλεσμα παρ' όλο που στη μία περίπτωση αρχικοποιήθηκε στην ελάχιστη τιμή το

πορώδες, ενώ στην άλλη περίπτωση στη μέγιστη. Στις εφαρμογές αυτές χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση f_2 αφού με χρήση της συνάρτησης f_1 δε θα μπορούσε να γίνει αρχικοποίηση του πορώδους στην τιμή 0.

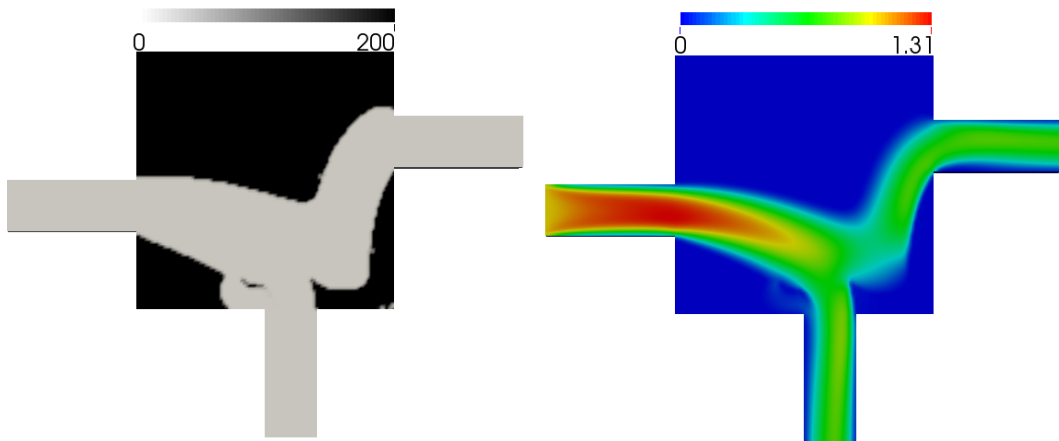
Ακόμη, ένα σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από την παραπάνω εφαρμογή αλλά και από άλλες εφαρμογές που έγιναν κατά την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας, είναι ότι με χρήση της MMA προκύπτουν καλύτερα αποτελέσματα με κριτήριο τη συνάρτηση στόχο συγκριτικά με αυτά που προκύπτουν με χρήση της μεθόδου της απότομης καθόδου και μάλιστα σε λιγότερους κύκλους βελτιστοποίησης.

5.1.1 Έλεγχος - Δοκιμή των Συναρτήσεων-Φίλτρων που Εξαρτώνται από το Πορώδες

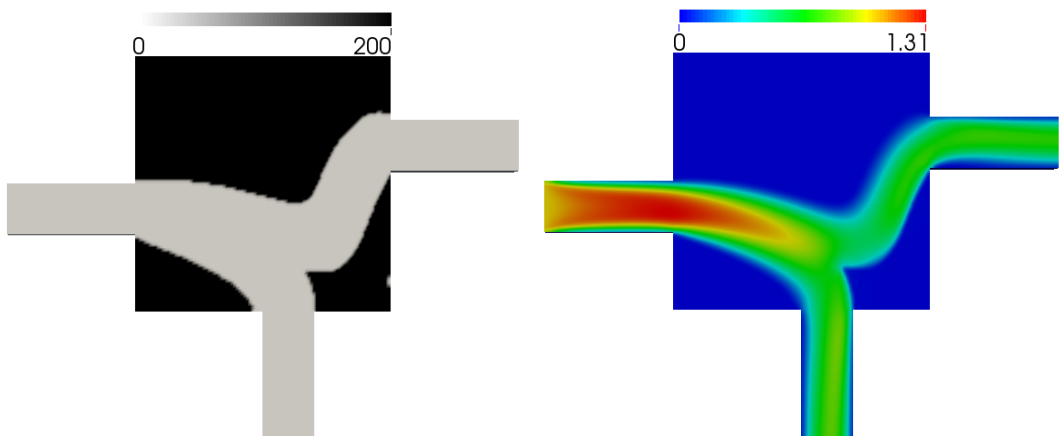
Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν ακριβώς οι ίδιες εφαρμογές που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 3.1.2 όπου είχε πραγματοποιηθεί έλεγχος των συναρτήσεων - φίλτρων με στόχο την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης επιβάλλοντας όμως περιορισμό στο ποσοστό της παροχής που θα εξέρχεται από κάθε έξοδο. Σε όλες τις εφαρμογές, είχε τεθεί ως περιορισμός να εξέρχεται το 50 % της παροχής εισόδου από κάθε έξοδο. Η επιβολή του περιορισμού πραγματοποιείται δημιουργώντας μια σταθμισμένη συνάρτηση όπως περιγράφεται στην ενότητα 2.7 του κεφαλαίου 2, με $w_1 = 0.5$ (το βάρος που αντιστοιχεί στον περιορισμό της παροχής) και η ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού με τη μέθοδο της απότομης καθόδου. Στην ενότητα αυτή χρησιμοποιείται η μέθοδος των κινουμένων ασυμπτώτων MMA.

Συνάρτηση	G_{max}	$\alpha_{initial}$	$G_{initial}(\alpha)$	Απώλειες Ολικής Πίεσης	Έξοδος 1	Έξοδος 2
f_1	200	0.5	25	0.01236	0.50077	0.49923
f_2	200	0.364	25	0.01253	0.50512	0.49488
f_3	200	0.065	25	0.01189	0.52850	0.47150

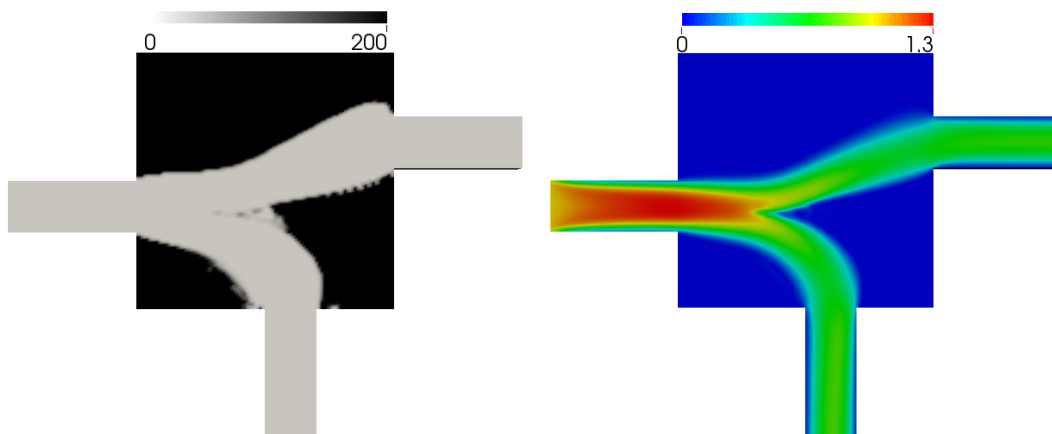
Πίνακας 5.1: Κάθε γραμμή του πίνακα αντιστοιχεί σε καθεμιά από τις τρεις συναρτήσεις. Η πρώτη στήλη αντιστοιχεί στην τιμή αρχικοποίησης της συνάρτησης G σε κάθε περίπτωση, η δεύτερη στήλη αντιστοιχεί στην τιμή αρχικοποίησης του α , η τρίτη στήλη στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης των απωλειών ολικής πίεσης, η τέταρτη στήλη στο ποσοστό της παροχής εισόδου που εξέρχεται από την Έξοδο 1, στο κάτω μέρος του χωρίου σχεδιασμού, η πέμπτη στήλη στο ποσοστό της παροχής εισόδου που εξέρχεται από την έξοδο 2, στο δεξί μέρος του χωρίου σχεδιασμού.



Σχήμα 5.3: Βελτιστοποίηση τοπολογίας με στόχο την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης υπό τον περιορισμό, το 50 % της παροχής εισόδου να εξέρχεται από κάθε έξοδο. Συνάρτηση f_1 . Αριστερά, παρουσιάζεται το πεδίο τιμών της συνάρτησης του πορώδους $G(\alpha)$ και δεξιά φαίνεται το αντίστοιχο πεδίο του μέτρου της ταχύτητας στο τέλος της βελτιστοποίησης.



Σχήμα 5.4: Βελτιστοποίηση τοπολογίας με στόχο την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης υπό τον περιορισμό, το 50 % της παροχής εισόδου να εξέρχεται από κάθε έξοδο. Συνάρτηση f_2 . Αριστερά παρουσιάζεται το πεδίο τιμών της συνάρτησης του πορώδους $G(\alpha)$ και δεξιά φαίνεται το αντίστοιχο πεδίο του μέτρου της ταχύτητας στο τέλος της βελτιστοποίησης.

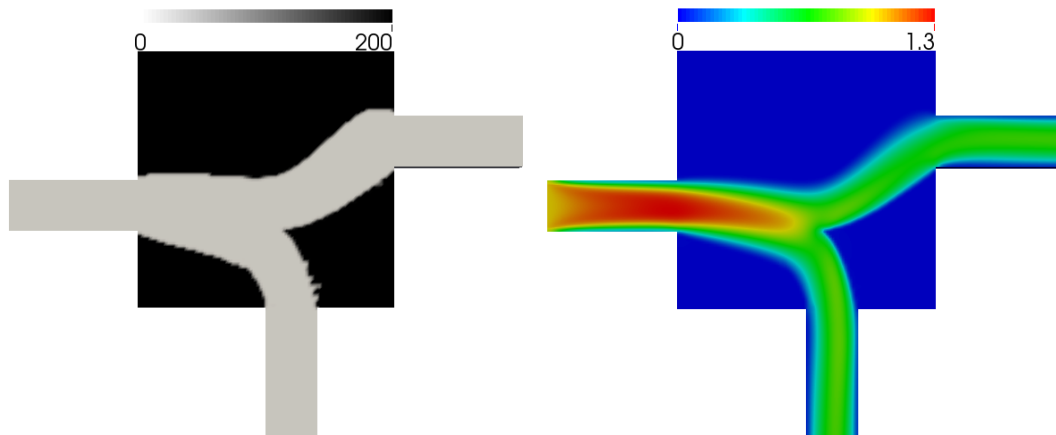


Σχήμα 5.5: Βελτιστοποίηση τοπολογίας με στόχο την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης υπό τον περιορισμό, το 50 % της παροχής εισόδου να εξέρχεται από κάθε έξοδο. Συνάρτηση f_3 . Αριστερά παρουσιάζεται το πεδίο τιμών της συνάρτησης του πορώδους $G(\alpha)$ και δεξιά φαίνεται το αντίστοιχο πεδίο του μέτρου της ταχύτητας στο τέλος της βελτιστοποίησης.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα εξάγεται το συμπέρασμα ότι η χρήση των συναρτήσεων f_1 και f_2 οδηγεί σε αποτελέσματα όπου ο περιορισμός ικανοποιείται σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό σχετικά με τη χρήση της τρίτης συνάρτησης, όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος των κινουμένων ασυμπτώτων. Συγκριτικά με τα αποτελέσματα που προέκυψαν στην ενότητα 3.1.2, παρατηρείται ότι η μέθοδος των κινουμένων ασυμπτώτων καταλήγει σε καλύτερες τιμές της συνάρτησης στόχου ενώ ο περιορισμός ικανοποιείται και στις δύο περιπτώσεις.

5.1.2 Επιβολή του Περιορισμού του Όγκου

Στις επόμενες εφαρμογές θα γίνει χρήση και των δύο περιορισμών. Πιο συγκεκριμένα, στα προβλήματα που ακολουθούν στόχος της βελτιστοποίησης είναι η ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης, επιβάλλοντας περιορισμό στο ποσοστό της παροχής που εξέρχεται από κάθε έξοδο και στον όγκο του χωρίου σχεδιασμού που θα καταλαμβάνεται από στερεό. Συγκεκριμένα, επιβάλλεται το 50 % της παροχής εισόδου να εξέρχεται από καθεμιά από τις δύο εξόδους και τουλάχιστον το 50 % του χωρίου σχεδιασμού να καταλαμβάνεται από στερεό. Η συνάρτηση που χρησιμοποιήθηκε είναι η f_1 .

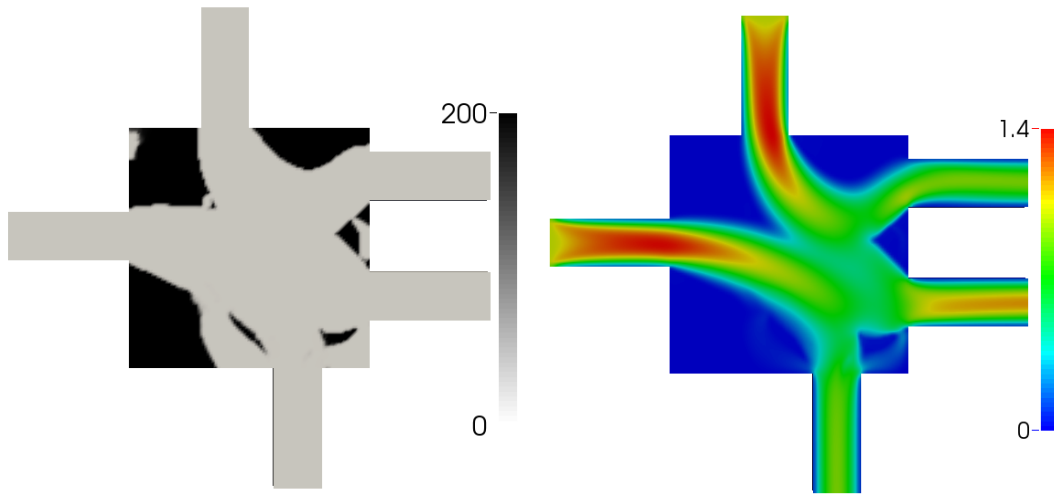


Σχήμα 5.6: Βελτιστοποίηση τοπολογίας αγωγού μιας εισόδου και δύο εξόδων με δύο περιορισμούς. Αρχικοποίηση του πορώδους στην τιμή $\alpha = 1$ και της συνάρτησης $G = 200$. Αριστερά, παρουσιάζεται το πεδίο της συνάρτησης του πορώδους και δεξιά, φαίνεται το αντίστοιχο πεδίο της ταχύτητας στο τέλος της βελτιστοποίησης. Η τιμή της συνάρτησης στόχου των απωλειών ολικής πίεσης είναι $0.0121651\text{m}^5/\text{s}^3$. Το ποσοστό της ροής που εξέρχεται από την έξοδο 1 είναι 0.500542 και από την έξοδο 2 είναι 0.499. Το ποσοστό του χωρίου σχεδιασμού που καταλαμβάνει στερεό είναι 0.501.

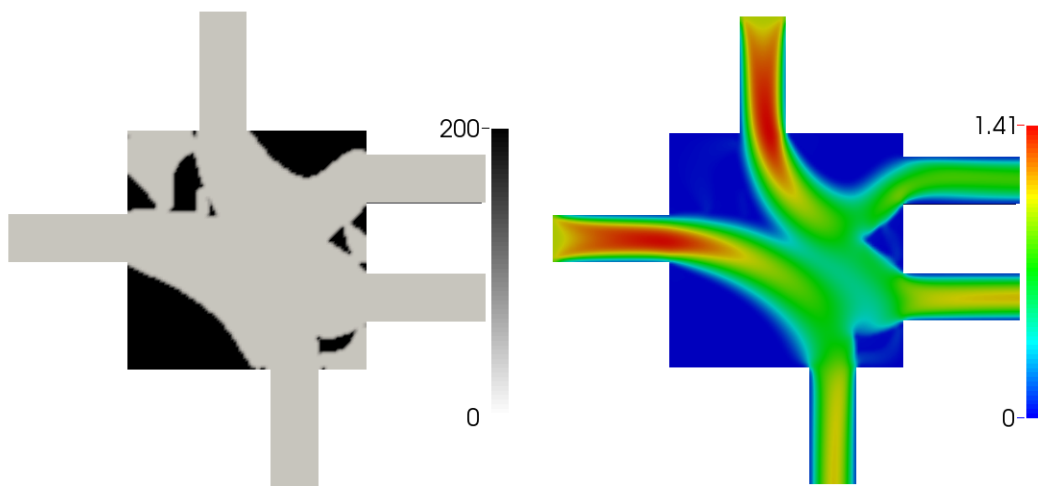
Η επιβολή του περιορισμού του όγκου σε προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας, πέρα από τη φυσική σημασία που έχει η κάλυψη συγκεκριμένου ποσοστού του χωρίου από υλικό, βοηθά σημαντικά στην εξάλειψη των γκριζών περιοχών και επιπλέον, όπως φάνηκε από αρκετές εφαρμογές που πραγματοποιήθηκαν κατά την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας, και στην καλύτερη ικανοποίηση του περιορισμού της παροχής. Το συγκεκριμένο συμπέρασμα δεν μπορεί να γενικευτεί, καθώς δεν έχει ερευνηθεί σε πληθώρα περιπτώσεων, ωστόσο το γεγονός ότι σε πολλές εργασίες που αφορούν τη δομική μηχανική, ο περιορισμός του όγκου αναφέρεται ως αναγκαίος για την εφαρμογή της βελτιστοποίησης τοπολογίας, πιθανώς δεν είναι τυχαίο.

5.2 Αγωγός Δύο Εισόδων και Τριών Εξόδων

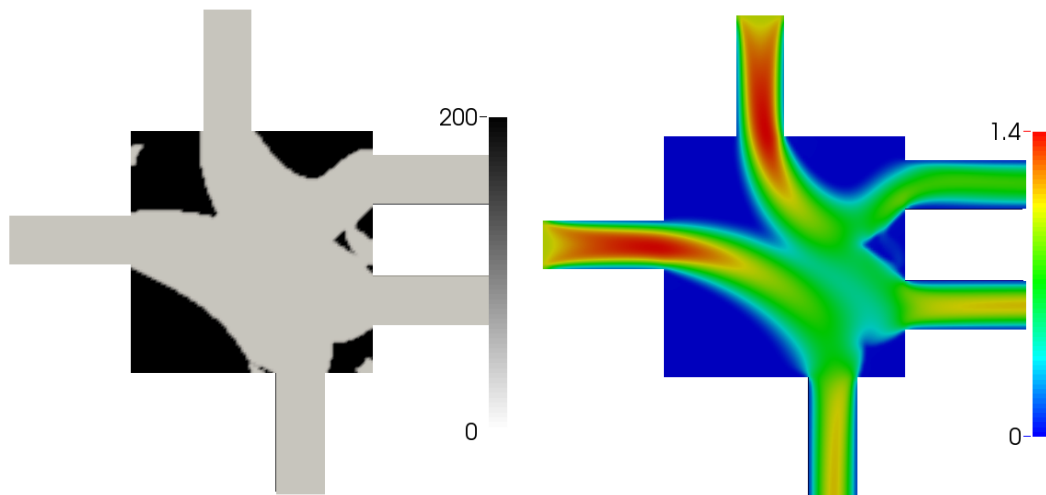
Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν τα αντίστοιχα αποτελέσματα με αυτά της ενότητας 3.2 που προκύπτουν από την εφαρμογή της βελτιστοποίησης τοπολογίας για τη διαμόρφωση ενός αγωγού δύο εισόδων και τριών εξόδων με χρήση της μεθόδου των κινουμένων ασυμπτώτων. Ο αριθμός Reynolds είναι ο ίδιος, $Re = 100$. Όπως και στην ενότητα 3.2 στόχος της βελτιστοποίησης τοπολογίας είναι η ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης υπό τον περιορισμό, το 30 % της συνολικής παροχής εισόδου να εξέρχεται από την κάτω έξοδο, το 40 % της συνολικής παροχής εισόδου να εξέρχεται από την κάτω δεξιά έξοδο και το υπόλοιπο 30 % από την πάνω δεξιά.



Σχήμα 5.7: Βελτιστοποίηση τοπολογίας αγωγού δύο εισόδων και τριών εξόδων με περιορισμό και χρήση της συνάρτησης f_1 . Αριστερά παρουσιάζεται το πεδίο της συνάρτησης του πορώδους και δεξιά φαίνεται το αντίστοιχο πεδίο του μέτρου της ταχύτητας στο τέλος της βελτιστοποίησης. Η τιμή της συνάρτησης των απωλειών ολικής πίεσης είναι $F = 0.04257m^5/s^3$. Τα ποσοστά της συνολικής παροχής που εξέρχονται από κάθε έξοδο είναι, 0.3029 από την κάτω έξοδο, 0.3960 από την κάτω δεξιά και 0.3011 από την πάνω δεξιά έξοδο.



Σχήμα 5.8: Βελτιστοποίηση τοπολογίας αγωγού δύο εισόδων και τριών εξόδων με περιορισμό και χρήση της συνάρτησης f_2 . Αριστερά παρουσιάζεται το πεδίο της συνάρτησης του πορώδους και δεξιά φαίνεται το αντίστοιχο πεδίο του μέτρου της ταχύτητας στο τέλος της βελτιστοποίησης. Η τιμή της συνάρτησης των απωλειών ολικής πίεσης είναι $F = 0.03965m^5/s^3$. Τα ποσοστά της συνολικής παροχής που εξέρχονται από κάθε έξοδο είναι, 0.3521 από την κάτω έξοδο, 0.3734 από την κάτω δεξιά και 0.2745 από την πάνω δεξιά έξοδο.



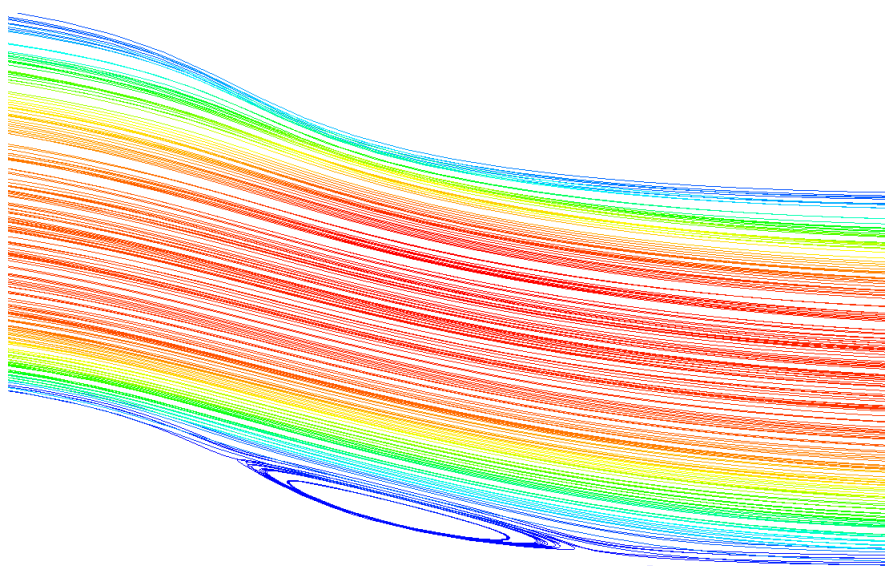
Σχήμα 5.9: Βελτιστοποίηση τοπολογίας αγωγού δύο εισόδων και τριών εξόδων με περιορισμό και χρήση της συνάρτησης f_3 . Αριστερά παρουσιάζεται το πεδίο της συνάρτησης του πορώδους και δεξιά φαίνεται το αντίστοιχο πεδίο του μέτρου της ταχύτητας στο τέλος της βελτιστοποίησης. Η τιμή της συνάρτησης των απωλειών ολικής πίεσης είναι $F = 0.04039m^5/s^3$. Τα ποσοστά της συνολικής παροχής που εξέρχονται από κάθε έξοδο είναι, 0.3671 από την κάτω έξοδο, 0.33679 από την κάτω δεξιά και 0.2650 από την πάνω δεξιά έξοδο.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν με χρήση της μεθόδου MMA είναι πολύ διαφορετικά από αυτά που προέκυψαν όταν δημιουργήθηκε μια σταθμισμένη συνάρτηση και η ανανέωση των μεταβλητών του πορώδους έγινε με τη μέθοδο της απότομης καθόδου. Πιο συγκεκριμένα, στις εφαρμογές που παρουσιάζονται παραπάνω παρατηρείται ότι η χρήση της συνάρτησης f_1 οδηγεί σε σημαντικά καλύτερη ικανοποίηση του περιορισμού του όγκου, ενώ η χρήση των άλλων δύο συναρτήσεων, οδηγεί σε καλύτερη τιμή της συνάρτησης στόχου, χωρίς ωστόσο ο περιορισμός της παροχής να ικανοποιείται σε μεγαλύτερο βαθμό απ' ότι στις αντίστοιχες εφαρμογές του κεφαλαίου 3.2. Η συνάρτηση f_3 δε φαίνεται να υπερέχει σε κάτι έναντι των άλλων δύο, όπως ακριβώς είχε διαπιστωθεί και στο κεφάλαιο 3.

5.3 Βελτιστοποίηση Τοπολογίας Αγωγού Σχήματος S

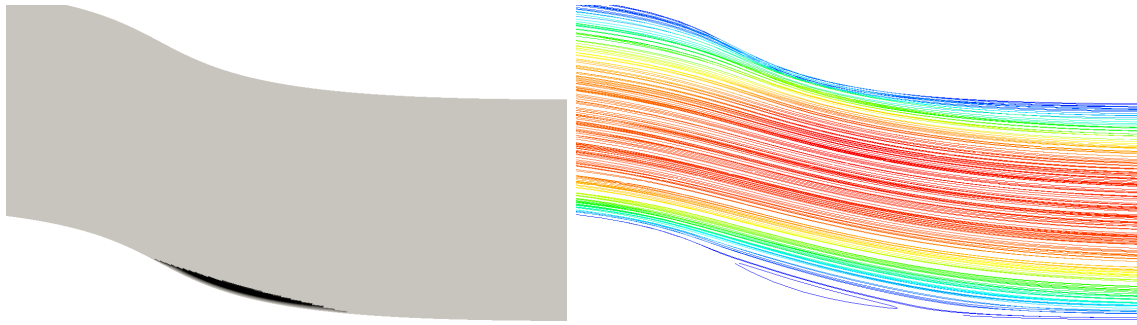
Στην εφαρμογή αυτή πραγματοποιείται βελτιστοποίηση τοπολογίας μέσα σε υπάρχοντα αγωγό τύπου S, με στόχο την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης χωρίς κάποιο περιορισμό. Ο αριθμός Reynolds που χαρακτηρίζει τη ροή είναι $Re = 1000$. Όπως φαίνεται από το σχήμα 5.11, η συνάρτηση του πορώδους λαμβάνει μη-μηδενικές τιμές, στη βέλτιστη λύση, στην περιοχή στην οποία δημιουργείται ανακυκλοφορία. Η

τιμή της συνάρτησης στόχου, πριν τη βελτιστοποίηση τοπολογίας στο συγκεκριμένο αγωγό είναι, $F = 7.17632 \cdot 10^{-7} m^5/s^3$. Η συνάρτηση που χρησιμοποιείται είναι η f_2 .



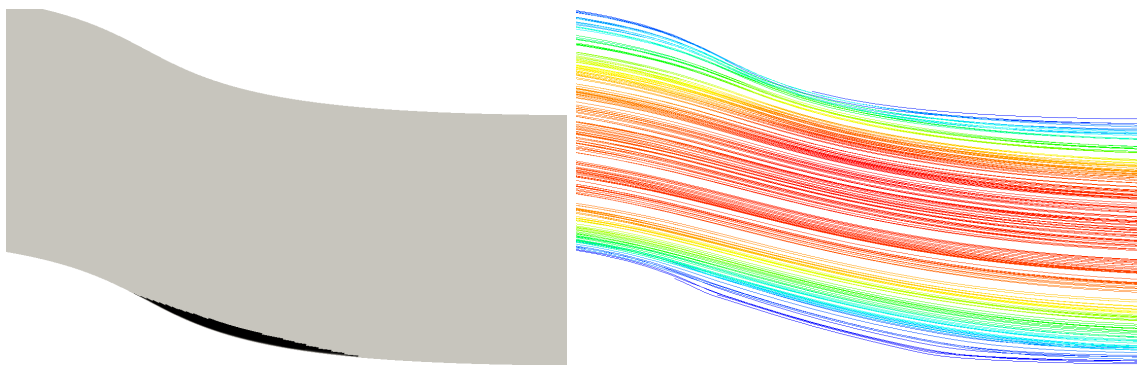
Σχήμα 5.10: Βελτιστοποίηση τοπολογίας αγωγού σχήματος S . Γραμμές ροής, πριν από την έναρξη της βελτιστοποίησης τοπολογίας. Στο σχήμα αυτό παρατηρείται η ανακυκλοφορία που δημιουργείται στο κάτω μέρος του αγωγού και αυξάνει τις απώλειες ολικής πίεσης.

Αρχικά θα γίνει βελτιστοποίηση τοπολογίας στον παραπάνω αγωγό με χρήση της μεθόδου της απότομης καθόδου και της MMA, και αρχικοποίηση του πορώδους α στην τιμή 0 (παντού ρευστό) σε όλο το υπολογιστικό χωρίο. Η μέθοδος της απότομης καθόδου συγκλίνει στην τιμή $F = 7.17107 \cdot 10^{-7} m^5/s^3$. Η MMA συγκλίνει στην τιμή $F = 7.17092 \cdot 10^{-7} m^5/s^3$. Η πολύ μικρή αυτή διαφορά οφείλεται στο ότι η μέθοδος της απότομης καθόδου μπορεί εύκολα να εγκλωβιστεί σε τοπικό ελάχιστο. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.11, εξακολουθεί να υπάρχει ανακυκλοφορία μετά το πέρας της βελτιστοποίησης με τη μέθοδο της απότομης καθόδου, σε αντίθεση με το αποτέλεσμα που προκύπτει από τη μέθοδο των κινουμένων ασυμπτώτων όπου δεν υπάρχει ανακυκλοφορία.



(α') Μέθοδος της Απότομης Καθόδου

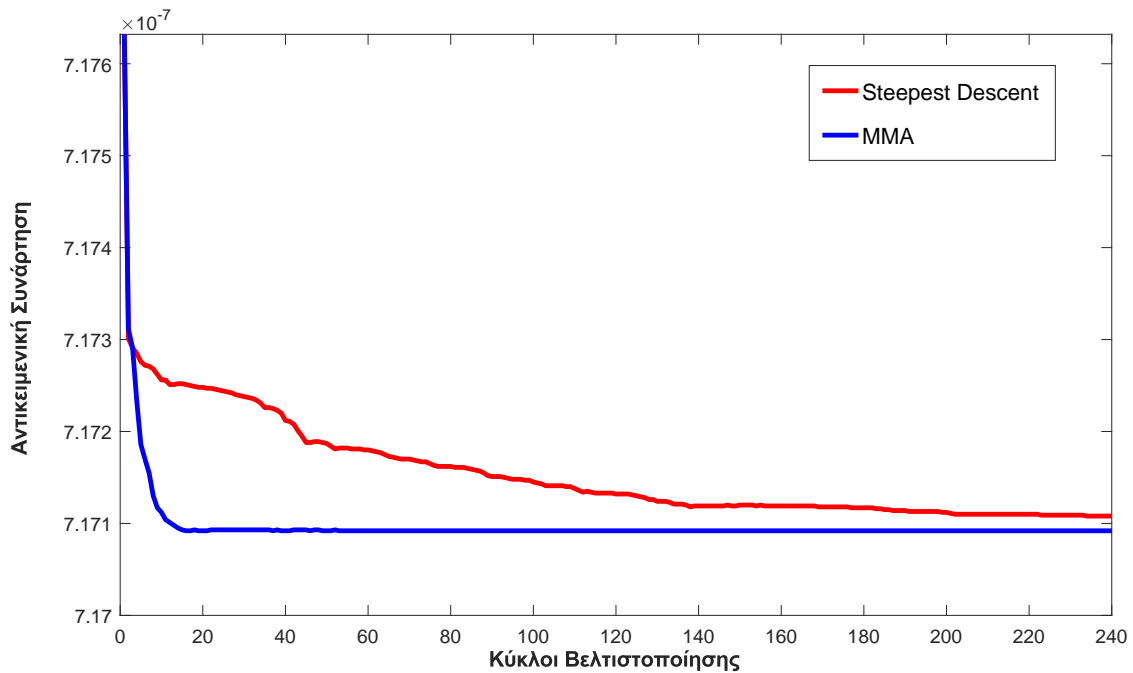
(β') Μέθοδος της Απότομης Καθόδου



(γ') Μέθοδος των Κινουμένων Ασυμπτώτων

(δ') Μέθοδος των Κινουμένων Ασυμπτώτων

Σχήμα 5.11: Βελτιστοποίηση τοπολογίας αγωγού σχήματος S . Αριστερά, παρουσιάζονται τα πεδία της συνάρτησης του πορώδους $G(\alpha)$ μετά το τέλος της βελτιστοποίησης. Η συνάρτηση του πορώδους παίρνει τιμές από 0 (γκρι χρώμα) μέχρι και 10 (μαύρο χρώμα). Δεξιά, παρουσιάζονται οι αντίστοιχες γραμμές ροής μετά το πέρας της βελτιστοποίησης. Πάνω, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν με χρήση της μεθόδου της απότομης καθόδου όπου η τιμή της συνάρτησης στόχου είναι $F = 7.17107 \cdot 10^{-7} m^5/s^3$. Ενώ, κάτω παρουσιάζονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα με χρήση της μεθόδου των κινουμένων ασυμπτώτων όπου η τιμή της συνάρτησης στόχου είναι $F = 7.17092 \cdot 10^{-7} m^5/s^3$ στο τέλος της βελτιστοποίησης.

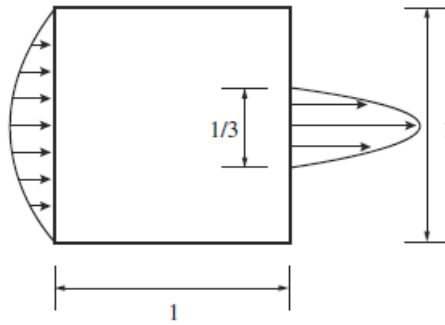


Σχήμα 5.12: Βελτιστοποίηση τοπολογίας αγωγού σχήματος S . Πορεία σύγκλισης της συνάρτησης στόχου των απωλειών ολικής πίεσης, με χρήση της μεθόδου της απότομης καθόδου και της MMA. Η μέθοδος της απότομης καθόδου συγκλίνει μετά τους 230 κύκλους, ενώ η MMA συγκλίνει στους 19 κύκλους.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση που το πρόβλημα βελτιστοποίησης δεν υπόκειται σε κάποιο περιορισμό, το υπολογιστικό κόστος των δύο μεθόδων είναι το ίδιο. Σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης επιλύεται μία φορά το πρωτεύον πρόβλημα και μία το αντίστοιχο συζυγές. Αν και η ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού με χρήση της MMA, θεωρητικά, είναι υπολογιστικά ακριβότερη από την ανανέωση των μεταβλητών που γίνεται με χρήση της μεθόδου της απότομης καθόδου, πρακτικά, το κόστος της ανανέωσης των μεταβλητών σχεδιασμού με οποιαδήποτε από τις δύο μεθόδους είναι αμελητέο σε σύγκριση με την επίλυση πρωτεύοντος και συζυγούς προβλήματος σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης.

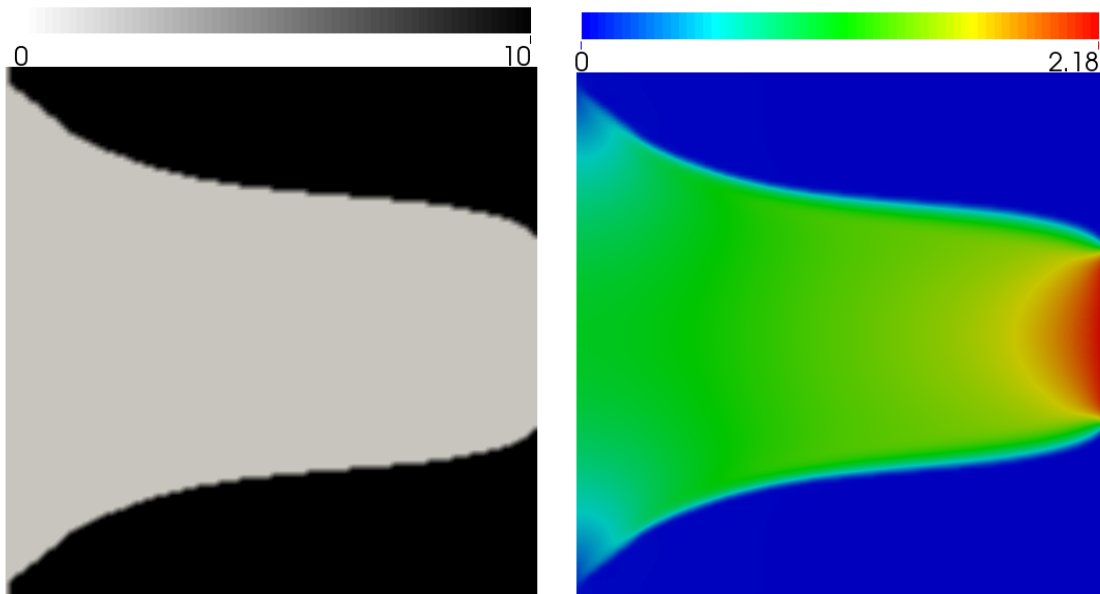
5.4 Βελτιστοποίηση Μορφής Ακροφυσίου

Η επόμενη εφαρμογή αφορά τη βελτιστοποίηση μορφής ενός ακροφυσίου. Η διατομή εισόδου του ακροφυσίου είναι τρεις φορές μεγαλύτερη από αυτή της εξόδου του. Ο αριθμός Reynolds που χαρακτηρίζει τη ροή είναι $Re = 167$. Η κατανομή της ταχύτητας στην είσοδο του ακροφυσίου είναι παραβολική με μέγιστη τιμή $1m/s$ στο κέντρο της διατομής και μηδενική τιμή στα άκρα, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.15. Η συνάρτηση που χρησιμοποιείται σε αυτήν την περίπτωση είναι η f_1 .

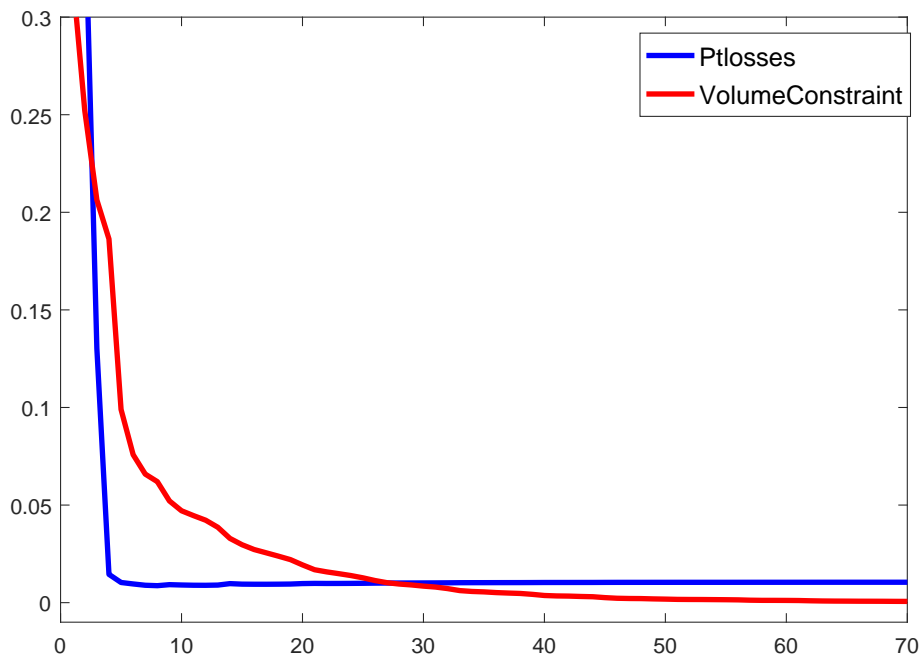


Σχήμα 5.13: Βελτιστοποίηση Ακροφυσίου.

Ως στόχος τέθηκε η ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης με περιορισμό, ο όγκος που καταλαμβάνει το στερεό να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 42 % του συνολικού όγκου του χωρίου σχεδιασμού.



Σχήμα 5.14: Βελτιστοποίηση Μορφής Ακροφυσίου με περιορισμό όγκου. Αριστερά, παρουσιάζεται το πεδίο της συνάρτησης του πορώδους $G(\alpha)$ μετά το τέλος της βελτιστοποίησης με χρήση της μεθόδου MMA. Η συνάρτηση του πορώδους παίρνει τιμές από 0 (γκρι χρώμα) μέχρι και 50 (μαύρο χρώμα). Δεξιά, παρουσιάζεται το αντίστοιχο πεδίο της ταχύτητας. Η τιμή της συνάρτησης στόχου στο τέλος της βελτιστοποίησης έχει την τιμή $F = 0.010476$. Ο όγκος που καταλαμβάνεται από στερεό στο τέλος της βελτιστοποίησης αντιστοιχεί στο 41.592 % του χωρίου σχεδιασμού.



Σχήμα 5.15: Βελτιστοποίηση Μορφής Ακροφυσίου με περιορισμό όγκου. Διάγραμμα σύγκλισης με χρήση της μεθόδου MMA. Με μπλε παριστάνεται η συνάρτηση στόχος και με κόκκινο χρώμα ο περιορισμός.

Στην παραπάνω εφαρμογή το υπολογιστικό κόστος ανέρχεται σε μία επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος και δύο επιλύσεις συζυγών προβλημάτων σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Η μία επίλυση συζυγούς προβλήματος αφορά την εύρεση της παραγώγου της συνάρτησης στόχου και η δεύτερη αυτής του περιορισμού του όγκου.

Κεφάλαιο 6

Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα

Στην αρχή της εργασίας αυτής πραγματοποιήθηκε η εισαγωγή συναρτήσεων φίλτρων $G(\alpha)$ που εξαρτώνται από το πορώδες, στις εξισώσεις της ροής, αντί αυτούσιας της μεταβλητής του α . Επιπλέον, ορίστηκε το $[0, 1]$ πεδίο ορισμού της μεταβλητής του πορώδους για λόγους καλύτερης εποπτείας των αποτελεσμάτων της βελτιστοποίησης τοπολογίας.

Βασικός σκοπός της εισαγωγής των συναρτήσεων αυτών ήταν ο περιορισμός του προβλήματος των γκριζων περιοχών που συχνά εμφανίζονται στο βέλτιστο χωρίο σχεδιασμού. Το συμπέρασμα που εξάγεται από τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι ότι οι τρεις συναρτήσεις - φίλτρα που δοκιμάστηκαν, βοηθούν μεν στη βελτίωση του προβλήματος των γκριζων περιοχών αλλά δεν εξαλείφουν το πρόβλημα. Από τις τρεις αυτές συναρτήσεις, αυτή που προτείνεται με βάση τις εφαρμογές που παρουσιάζονται στην εργασία αυτή, είναι η f_2 , η οποία συμπεριφέρεται με παρόμοιο τρόπο με την f_1 , ωστόσο προτιμάται η f_2 λόγω της μαθηματικής της έκφρασης όπως αναφέρεται στο κεφάλαιο 2.

Ακόμη, έγινε διερεύνηση σχετικά με τον επιρροή της αρχικοποίησης του πορώδους στο τελικό αποτέλεσμα τις βελτιστοποίησης. Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι η αρχικοποίηση σε μεσαίες τιμές του πεδίου ορισμού του πορώδους είναι η ιδανική επιλογή, ιδιαίτερα όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος της απότομης καθόδου. Όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος των κινουμένων ασυμπτώτων, το αποτέλεσμα δεν είναι τόσο ευαίσθητο στην αρχικοποίηση του πορώδους. Παρ' όλα αυτά και για τις δύο μεθόδους ισχύει ότι είναι πάντοτε προτιμότερο να μην γίνεται αρχικοποίηση του πορώδους στην τιμή 0 και σε κοντινές σε αυτή τιμές.

Ένα επιπλέον συμπέρασμα, αφορά τον περιορισμό του όγκου του υπολογιστικού χωρίου που καταλαμβάνεται από στερεό. Ο περιορισμός του όγκου φαίνεται να είναι ιδιαίτερα 'χρήσιμος' σε προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας. Πέρα από τη φυσική αναγκαιότητα για κάλυψη ενός συγκεκριμένου ποσοστού του υπολογιστικού χωρίου

από στερεό, η επιβολή του περιορισμού του όγκου εξαλείφει τις γκριζες περιοχές. Ωστόσο, όταν ο περιορισμός του όγκου δεν εισάγεται για να ικανοποιήσει ένα φυσικό περιορισμό, πρέπει να γίνεται προσεκτική επιλογή του ποσοστού που θα επιλεγεί να καταλαμβάνει στερεό. Μια επιλογή, είναι να πραγματοποιείται η βελτιστοποίηση χωρίς τη χρήση του περιορισμού και αν από το αποτέλεσμα προκύψει η ανάγκη χρήσης του περιορισμού του όγκου (πρόβλημα γκριζων περιοχών), να πραγματοποιηθεί ξανά η βελτιστοποίηση, αυτή τη φορά με τον περιορισμό του όγκου. Έτσι, θα υπάρχει μια πρώτη εικόνα για το ποσοστό του όγκου που είναι θεμιτό να καταλαμβάνει στερεό. Το συμπέρασμα αυτό αφορά και τις δυο μεθόδους βελτιστοποίησης που παρουσιάζονται στην εργασία αυτή.

Στη συνέχεια, το σημαντικότερο συμπέρασμα που προέκυψε από τις εφαρμογές που πραγματοποιήθηκαν με χρήση της μεθόδου των κινουμένων ασυμπτώτων είναι ότι μπορεί να είναι μια αξιόπιστη μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης τοπολογίας στη ρευστοδυναμική, όπως είναι σε αντίστοιχα προβλήματα στη δομική μηχανική. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν με χρήση της MMA είναι καλύτερα από αυτά με χρήση μιας σταθμισμένης συνάρτησης στόχου που περιλαμβάνει τους περιορισμούς και η ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού γίνεται με τη μέθοδο της απότομης καθόδου. Επιπλέον, η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης με περιορισμούς αλλά και χωρίς περιορισμούς όπως και παρουσιάστηκε.

Θεωρητικά, αναπτύχθηκαν δύο παραλλαγές της μεθόδου, όμως σε ρευστοδυναμικά προβλήματα δοκιμάστηκε μόνο η MMA και όχι η GCMMA. Η χρήση της GCMMA αξίζει να δοκιμαστεί σε μελλοντικές εργασίες, σύμφωνα με τα αποτελέσματα που προέκυψαν σε αυτήν τη διπλωματική εργασία.

Βιβλιογραφία

- [1] Bendsoe, M. and Kikuchi, N.: *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*. Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 71:197–224, 1988.
- [2] Deaton, J. and Grandhi, R.: *A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000*. Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [3] Borvall, T. and Peterson, J.: *Topology optimization of fluids in stokes flow*. International Journal of Numerical Methods in Fluids, 41:77–107, 2003.
- [4] Guest, J. and Prevost, J.: *Topology optimization of creeping fluid flows using a darcy-stokes finite element*. International Journal of Numerical Methods in Fluids, 66:461–484, 2006.
- [5] Κοντολέοντος, Ε.: *Ανάλυση και βελτιστοποίηση σύνθετων ρευστομηχανικών διατάξεων με χρήση υπολογιστικής ρευστοδυναμικής και εξελικτικών αλγορίθμων*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2012.
- [6] Papoutsis-Kiachagias, E.M. and Giannakoglou, K.C.: *Continuous adjoint methods for turbulent flows, applied to shape and topology optimization: industrial applications*. Archives of Computational Methods in Engineering, 23(2):255–299, 2016.
- [7] Kontoleonos, E.A., Papoutsis-Kiachagias, E.M., Zymaris, A.S., Papadimitriou, D.I., and Giannakoglou, K.C.: *Adjoint-based constrained topology optimization for viscous flows, including heat transfer*. Engineering Optimization, 45(8):941–946, 2013.
- [8] Papoutsis-Kiachagias, E.M., Kontoleonos, E.A., Zymaris, A.S., Papadimitriou, D.I., and Giannakoglou, K.C.: *Constrained topology optimization for laminar and turbulent flows, including heat transfer*. EUROGEN 2011, International Conference on Evolutionary and Deterministic Methods for Design, Optimization and Control with Applications to Industrial and Societal Problems, Capua, Italy, September, 2011.

- [9] Papadimitriou, D.I., Papoutsis-Kiachagias, E.M., and Giannakoglou, K.C.: *Topology optimization in fluid dynamics using adjoint-based truncated newton*. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012), Vienna, Austria, September 10-14, 2012.
- [10] Sigmund, O. and Maute, K.: *Topology optimization approaches - a comparative review*. Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [11] Svanberg, K.: *The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24:359–373, 1987.
- [12] Svanberg, K. and Werme, M.: *Topology optimization by a neighbourhood search method based on efficient sensitivity calculations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 67(12):1670–1699, 2006.
- [13] Gill, P., Murray, W., and Saunders, MA: *Snopt: an sqp algorithm for large-scale constrained optimization*. SIAM Rev, 47(1):99–131, 2005.
- [14] Klarbring, A., Tortstentfelt, B., and Saunders, MA: *On the implementation of an interior point filter line-search algorithm for large-scale non linear programming*. Math Program, 106(1):25–57, 2006.
- [15] Παπουτσή-Κιαχαγιάς, Ε.: *Συζυγείς μέθοδοι χαμηλού υπολογιστικού κόστους για τυρβώδεις ροές, στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2013.
- [16] Κόλιας, Ι.: *Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος για τη Βελτιστοποίηση Τοπολότητας στη Μηχανική των Ρευστών. Προγραμματισμός Μετεπεξεργαστών και Εφαρμογές σε Προβλήματα της Αυτοκινητοβιομηχανίας*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2012.
- [17] Sigmund, O.: *Design of multiphysics actuators using topology optimization - part i: one material structures*. Comput Methods Appl Mech Eng, 190(49-50):6577–6604, 2001.
- [18] Zhuo, M. and Rosvany, G.: *The coc algorithm, part ii: topological, geometry and generalized shape optimization*. Comput Methods Appl Mech Eng, 89(1-3):309–336, 1991.
- [19] Okkels, L. Olesen F. and Bruus, H.: *A high-level programming-language implementation of topology optimization applied to steady-state navier-stokes flow*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 65:975–1001, 2006.
- [20] Παπαδημητρίου, Δ.: *Συζυγείς (Adjoint) διατυπώσεις για την ανάλυση-σχεδίαση περυγώσεων στροβιλομηχανών και τη βέλτιστη προσαρμογή πλέγματος με a posteriori εκτίμηση σφάλματος*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2007.

- [21] Ζυμάρης, Α.: Συζυγείς μέθοδοι για το σχεδιασμό μορφών με βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά σε στρωτές και τυρβώδεις ροές. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2010.